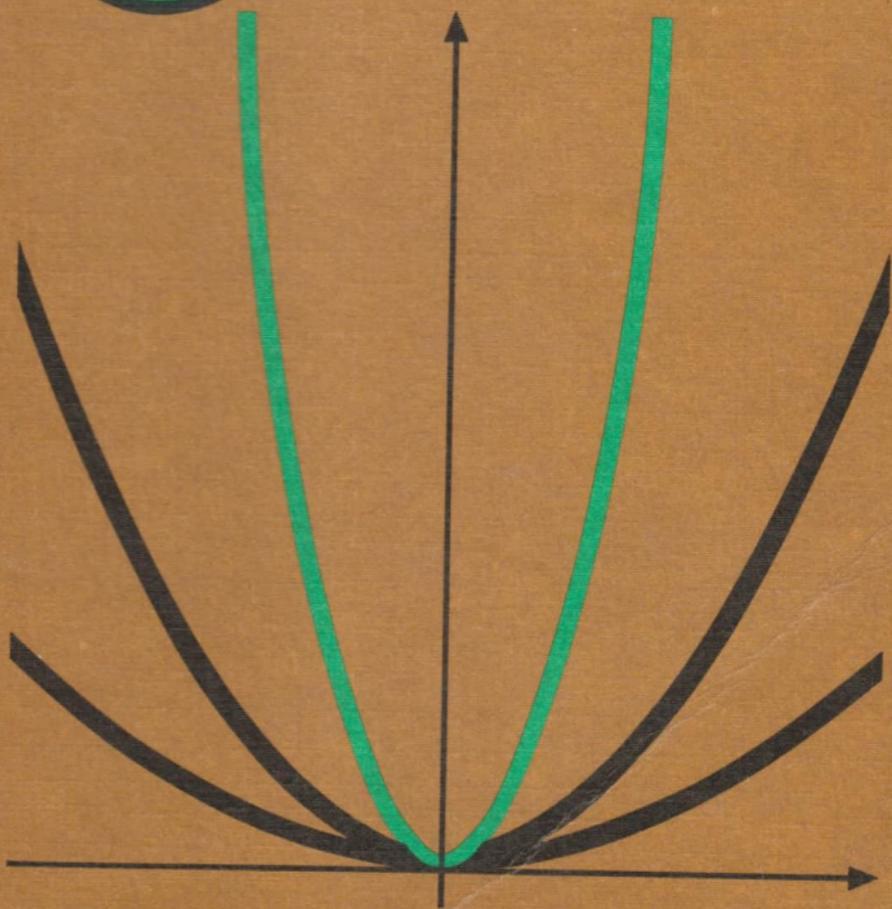
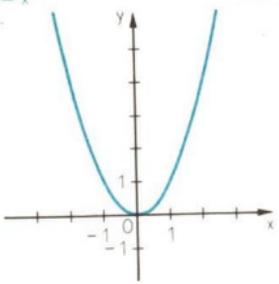
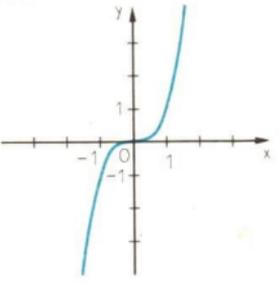
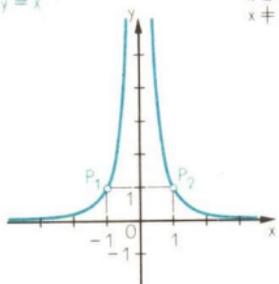
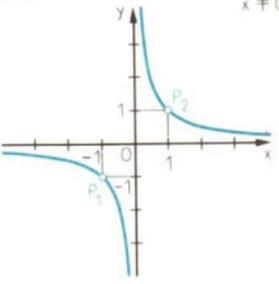
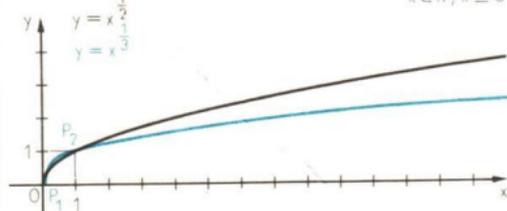


# Mathematik

9



# Potenzfunktionen

<p><math>y = x^2</math> <math>x \in \mathbb{R}</math></p>  <p>monoton fallend für <math>x \leq 0</math> monoton wachsend für <math>x \geq 0</math></p>	<p>Die Graphen sind <b>Parabeln</b> durch den Koordinatenursprung.</p>	<p><math>y = x^3</math> <math>x \in \mathbb{R}</math></p>  <p>monoton wachsend</p>
<p>Die Graphen verlaufen im <b>I. und II. Quadranten</b>, sind <b>axialsymmetrisch</b> zur y-Achse, gehen durch <math>P_1(-1;1)</math> und <math>P_2(1;1)</math>.</p>	<p><math>y = x^n</math></p>	<p>Die Graphen verlaufen im <b>I. und III. Quadranten</b>, sind <b>zentralsymmetrisch</b> zum Koordinatenursprung, gehen durch <math>P_1(-1;-1)</math> und <math>P_2(1;1)</math>.</p>
<p><math>y = x^{-2}</math> <math>x \in \mathbb{R}</math> <math>x \neq 0</math></p>  <p>monoton wachsend für <math>x &lt; 0</math> monoton fallend für <math>x &gt; 0</math></p>	<p>Die Graphen sind <b>Hyperbeln</b>. Sie gehen nicht durch den Koordinatenursprung.</p>	<p><math>y = x^{-1}</math> <math>x \in \mathbb{R}</math> <math>x \neq 0</math></p>  <p>monoton fallend für <math>x &lt; 0</math> monoton fallend für <math>x &gt; 0</math></p>
<p><math>y = x^{\frac{1}{2}}</math> <math>y = x^{\frac{1}{3}}</math> <math>x \in \mathbb{R}, x \geq 0</math></p>  <p>monoton wachsend</p>	<p>Die Graphen sind <b>Teile von Parabeln</b>. Sie verlaufen im <b>I. Quadranten</b> und gehen beide durch die Punkte <math>P_1(0;0)</math> und <math>P_2(1;1)</math>.</p>	

# Mathematik

Lehrbuch für Klasse 9

---

Volk und Wissen  
Volkseigener Verlag Berlin  
1987



**Autorenkollektiv:** Prof. Dr. habil. Hans Bock (Kollektivleiter), Dr. sc. Peter Borneleit, Dr. sc. Peter Göthner, Dr. Claus Peter Helmholz, Dr. Gerlinde Wußing

**Gutachter und Berater:** Dr. sc. Günter Fanghänel, Doz. Dr. Reinhard Hofmann, Prof. Dr. Werner Jungk, Wilfried Lehmann, Dr. Horst Lemke, Brunhilde Lingslebe, Eberhard Reimer, Gisela Scheffler, Dr. sc. Siegfried Schneider, Klaus-Dieter Tschiche, Peter Weißenburger

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Schulbuch bestätigt.

## Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Die Kapitel A bis D des Lehrbuchs entsprechen den vier Stoffgebieten, die nach dem Lehrplan in der 9. Klasse zu behandeln sind. Jedes Kapitel gliedert sich in Abschnitte und weiter in Lerneinheiten (abgekürzt: LE).

Eine Titelzeile über jeder Seite gibt Auskunft, zu welchem Kapitel, welchem Abschnitt und welcher Lerneinheit diese Seite gehört.

Durch Marken am linken Rand des Textes werden hervorgehoben:

Beispiele ■; Aufträge ●; Definitionen ►; Sätze ▷.

Verweise auf Abbildungen oder Textabschnitte beginnen mit einem schräggestellten Pfeil; z. B. (↗ Beispiel C 6, S. ...) „Vergleiche mit dem Beispiel 6 des Kapitels C auf Seite ...“.

Ein senkrechter Pfeil neben einer Aufgabennummer (z. B. 2. ↑) bedeutet, daß weiter oben ein Aufgabentext zu beachten ist, der für mehrere Aufgaben gilt. Ein „(L)“ neben der Aufgabe deutet an, daß die errechnete Lösung mit einem Hinweis im Anhang verglichen werden kann. Aufgaben mit erhöhten Anforderungen sind durch einen Stern gekennzeichnet (z. B. 8.\*).



ISBN 3-06-000905-8

© Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1987

1. Auflage · Ausgabe 1987

Lizenz-Nr. 203/1000/87 (E 000905-1)

LSV 0681

Redaktion: Annemarie Mai

Zeichnungen: Jutta Wolff, Rita Schüler

Illustrationen: Harri Förster

Einband: Manfred Behrendt

Typographische Gestaltung: Karl-Heinz Bergmann

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden

Schrift: 9/10 Maxima

Redaktionsschluß: 28. August 1986

Bestell-Nr. 731 314 3

Schulpreis DDR: 2,70

# Inhalt

## A Arbeiten mit Variablen

1	Zur Wiederholung	5
2	Struktur von Termen	10
3	Termwertberechnungen mit Hilfe des Taschenrechners	13
4	Algorithmen	18
5	Beschreiben von Sachverhalten mit Hilfe von Variablen	22
6	Nutzen von Variablen beim Beweisen	23
7	Wiederholung des Umformens von Termen	26
8	Die binomischen Formeln	30
9	Addition und Subtraktion von Quotienten	34
10	Multiplikation und Division von Quotienten	37
11	Weitere Beispiele für Termwertberechnungen mit Hilfe des Taschenrechners	40
12	Zur Wiederholung	45
13	Potenzen mit natürlichen Exponenten $n$ ( $n \geq 1$ )	46
14	Wurzeln	49
15	Erweiterung des Potenzbegriffes	51
16	Verallgemeinerung der Potenzgesetze	54
17	Darstellung von Zahlen mit Hilfe von abgetrennten Zehnerpotenzen	58
18	Das Dezimalsystem und andere Positionssysteme	62
19	Der Logarithmus	63

## B Ungleichungen und Gleichungssysteme

1	Zur Wiederholung	66
2	Äquivalente Gleichungen – äquivalente Ungleichungen	69
3	Umformungsregeln für Ungleichungen	71
4	Lösen linearer Ungleichungen mit einer Variablen	76
5	Anwendungen	81
6	Zur Wiederholung	85
7	Lineare Gleichungen mit zwei Variablen	86
8	Systeme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen	89
9	Rechnerisches Lösen linearer Gleichungssysteme	95
10	Lösen von Sachaufgaben mit Hilfe von Gleichungssystemen	100
	Komplexe Übungen	105

## C Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen; Potenzfunktionen

1	Zur Wiederholung	109
2	Der Begriff „quadratische Funktion“	110
3	Quadratische Funktionen mit Gleichungen $y = x^2$ und $y = x^2 + q$	114
4	Quadratische Funktionen mit Gleichungen $y = x^2 + px + q$	117
5	Existenz von Nullstellen quadratischer Funktionen	125
6	Zur Wiederholung	129
7	Der Begriff „quadratische Gleichung“	130
8	Die Gleichungen $x^2 = r$	132
9	Die Gleichungen $x^2 + px + q = 0$	134
10	Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen	136
11	Zusammenhänge zwischen $p$ und $q$ und den Lösungen	141
12	Lösen von Gleichungen, die auf eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ zurückgeführt werden können	143
13	Lösen quadratischer Gleichungen, die Fallunterscheidungen erfordern	146
14	Sach- und Anwendungsaufgaben	148
15	Zur Wiederholung	152
16	Die Funktion $y = x^3$ ( $x \in \mathbb{R}$ ); der Begriff „Potenzfunktion“	153
17	Die Potenzfunktionen $y = x^{-1}$ und $y = x^{-2}$ ( $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ )	157
18	Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$ ( $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ )	160
19	Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^2$ und $y = a \cdot x^{-1}$	163
	Komplexe Übungen	166

## D Körperdarstellung und Körperberechnung

1	Geometrische Körper	172
2	Volumen und Oberflächeninhalte	176
3	Schrägbilder und Zweitafelbilder	178
4	Darstellung von Zylinder, Kegel und Kugel	182
5	Bestimmung von Strecken und Flächen an Körpern	184
6	Volumenberechnung bei zusammengesetzten Körpern	187
7	Berechnung und Darstellung von Pyramiden- und Kegelstümpfen	190
8	Berechnung und Darstellung weiterer Körper	195
9	Gegenseitige Abhängigkeit von Volumen, Oberflächeninhalt und anderen Bestimmungsstücken an Körpern	198

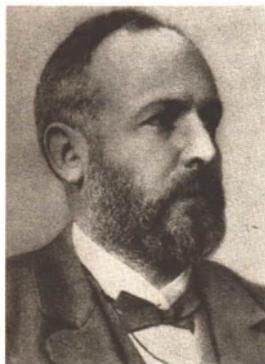
## L Ausgewählte Lösungen

## R Register

# A Arbeiten mit Variablen

## Gebrauch von Variablen; Termwertberechnungen

Die Menschen begannen erst vor etwa 400 Jahren, eine mathematische Zeichensprache in größerem Umfang zu verwenden. Die Zeichen „+“ und „-“ traten erstmals gedruckt 1489 in einem Buch des böhmischen Rechenmeisters JOHANN WIDMANN auf. Das heute gebräuchliche Gleichheitszeichen „=“ empfahl der Engländer ROBERT RECORDE, der 1558 starb. Eine bedeutende Erleichterung für das Rechnen brachte die Nutzung von Buchstaben für Variable und die Einführung von Klammern durch FRANÇOIS VIETA (1540 bis 1603). Erst im 20. Jahrhundert begann man, verstärkt auch Begriffe und Symbole der Mengenlehre zur Beschreibung mathematischer Zusammenhänge zu nutzen.



GEORG CANTOR (1845–1918);  
Mathematiker in Halle;  
Begründer der Mengenlehre

### 1 Zur Wiederholung

- 1 a) Erläutern Sie die Bedeutung von  $x \in M$  und  $y \in K$ !  
b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$$475 \in \mathbb{Z}; \quad 2 \in \mathbb{Q}_+; \quad 7 \in \mathbb{N}; \quad 16,5 \notin \mathbb{Q}; \quad -22,5 \in \mathbb{R}; \quad -22,5 \in \mathbb{Z}; \quad \frac{2}{3} \in \mathbb{N}; \quad \frac{9}{4} \in \mathbb{R};$$

$$2\pi \notin \mathbb{Q}; \quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}_+; \quad 10^{10} \in \mathbb{N}; \quad 0,01 \notin \mathbb{Q}_+; \quad -3 \in \mathbb{R}; \quad -\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}; \quad 15 \notin \mathbb{R}$$

- 2 Es soll  $T$  die Menge aller reellen Zahlen  $x$  sein, welche die Eigenschaft besitzen:  $x$  kann durch den Taschenrechner SR 1 angezeigt werden. Durch diese Angabe ist  $T$  eindeutig festgelegt.

a) Untersuchen Sie, für welche der folgenden Zahlen  $z$  gilt:  $z \in T!$

$$4,371; \quad -0,0098; \quad 10000; \quad 25 \cdot 10^5; \quad \frac{1}{3}; \quad -3,8 \cdot 10^3; \quad 37,4185389; \quad \sqrt{2};$$

$$0,0000001; \quad \pi$$

b) Geben Sie Zahlen  $x \in T$  und  $y \in T$  so an, daß gilt  $x + y \in T$  oder  $x \cdot y \in T!$  (L)

c) Überlegen Sie, ob eine irrationale Zahl Element von  $T$  sein kann!

Es ist nicht immer möglich, eine Menge durch „Auflisten“ aller ihrer Elemente zu beschreiben. Auch die Menge  $T$  aller Taschenrechnerzahlen ( $\nearrow$  Auftrag A 2) kann kaum dadurch angegeben werden, daß man alle ihre Elemente – etwa beginnend mit der größten Zahl  $99999 \cdot 10^{99}$  – hintereinander aufschreibt und in Mengenklammern einschließt, obwohl  $T$  nur endlich viele Elemente enthält.

*Wir wissen:* Mengen können *beschrieben* werden durch

- Angabe jedes einzelnen Elementes, z. B.  $M = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$ ;
- Angabe einer Eigenschaft, welche genau die Objekte besitzen, die Elemente der Menge sind, z. B.,  $M$  ist die Menge aller natürlichen Zahlen  $x$  mit der Eigenschaft:  $x$  ist Teiler von 24.

- 3 Die folgenden Mengen sind auf unterschiedliche Weise angegeben. Welche der Mengen sind gleich?

$$M_1 = \{2; -4\}, \quad M_2 = \{-2; -1; 0; 1; 2\}, \quad M_3 = \emptyset,$$

$$M_4 = \{[0; 2]; [1; 1]; [2; 0]\}$$

$M_5$  ist die Menge aller ganzen Zahlen, die Lösung von  $x^2 < 5$  sind,

$M_6$  ist die Menge aller rationalen Zahlen, die Lösung von  $|x + 1| = 3$  sind,

$M_7$  ist die Menge aller reellen Zahlen, die Lösung von  $x^2 + 9 = 0$  sind,

$M_8$  ist die Menge aller geordneten Paare natürlicher Zahlen, welche Lösung von  $x + y = 2$  sind.

Die Menge  $C$  aller derjenigen Elemente, die sowohl zu einer Menge  $A$  als auch zu einer Menge  $B$  gehören, ist durch  $A$  und  $B$  eindeutig bestimmt:

$x \in C$  genau dann, wenn gilt

$x \in A$  und  $x \in B$  ( $\nearrow$  Bild A 1).

Beispiele:

- Die Menge aller Punkte, die sowohl auf der Geraden  $g_1$  als auch auf der Geraden  $g_2$  liegen, ist die Menge  $S$  ( $\nearrow$  Bild A 2).
  - Die Menge aller geordneten Paare natürlicher Zahlen, die sowohl die Gleichung  $x + y = 4$  als auch die Gleichung  $2x + y = 5$  erfüllen, ist die Menge  $\{(1; 3)\}$ .
  - Die Menge aller ganzen Zahlen, die größer sind als  $-2$  und gleichzeitig kleiner sind als  $+5$ , ist die Menge  $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ .
- 4 Geben Sie die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen an, die sowohl zur Lösungsmenge  $L_1$  der Ungleichung  $2x < 10$  als auch zur Lösungsmenge  $L_2$  der Ungleichung  $x - 1 \geq 2$  gehören!

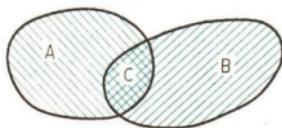


Bild A 1

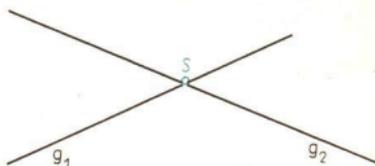
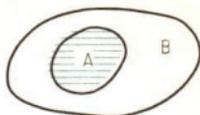


Bild A 2

*Wir wissen:* Ist jedes Element einer Menge  $A$  auch Element einer Menge  $B$ , so ist  $A$  Teilmenge von  $B$  (Bild A 3). Man schreibt  $A \subset B$ .

Bild A 3



$$A \subset B$$

- 5 Nutzen Sie die folgenden Mengen, um fünf Beispiele anzugeben, bei denen eine Menge Teilmenge einer anderen ist:  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ; die Menge  $B$  aller natürlichen geraden Zahlen; die Menge  $N$  aller natürlichen Zahlen; die Menge  $C$  aller durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen; die Menge  $D$  aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 100 sind!

Die Menge  $U$  aller ungeraden Zahlen kann mit Hilfe des Terms  $2n + 1$  beschrieben werden. Dabei ist die Variable  $n$  ein Zeichen, welches für ein beliebiges Element von  $N$ , dem Variablengrundbereich des Terms  $2n + 1$ , steht.

Terme bestehen aus Zeichen, dazu gehören u. a.:

Zeichen für Zahlen, z. B. 2; 4; 3,71;  $6\bar{6}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{1}{7}$ ;

Zeichen für Operationen: +; -;  $\cdot$ ; :;

Vorzeichen: +; -;

Variable, z. B.  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ;  $x$ ;  $y$ ;  $z$ ;  $t$ ;  $A$ ;  $B$ ;  $f_1$ ;  $g_2$ ;  $R_9$ ;

Klammern, z. B. { }; [ ].

Terme entstehen durch Hintereinanderschreiben solcher Zeichen. Natürlich ist nicht jede so entstehende Zeichenreihe ein Term, z. B. ist sicher weder  $-)$   $a$  noch  $++7$  ein Term.<sup>1)</sup>

Jede Variable ist ein Term und jedes Zahlzeichen ist ein Term. Weitere Terme erhält man z. B., wenn man zwischen zwei Terme ein Operationszeichen oder vor einen Term ein Vorzeichen setzt, Terme in Betragsstriche einschließt (z. B.  $|2x + 1|$ ) oder unter ein Wurzelzeichen schreibt. Bei Anwendungen treten auch Terme auf, die Größen enthalten.

- 6 Nutzen Sie die Terme  $a$ ;  $x$ ;  $17,5$ ;  $(-\pi)$  und  $y + 5$ , um nach der angegebenen Vorschrift weitere Terme zu bilden! Achten Sie auf sinnvolles Setzen von Klammern! (L)

Für jede Variable, die in einem Term auftritt, wird ein Variablengrundbereich festgelegt. Er ist i. allg. eine Menge von Zahlen oder auch eine Menge von Größen.

- 7 Die Menge der gebrochenen Zahlen ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen:  $Q_+ \subset Q$ . Geben Sie mindestens sechs weitere Teilmengenbeziehungen zwischen Zahlenbereichen an! Nennen Sie dabei jeweils eine Zahl, die im umfassenderen Bereich, nicht aber im Teilbereich liegt!
- 8  $R$  ist der umfassendste Zahlenbereich, der von Ihnen als Grundbereich für Variable in einem Term gewählt werden kann. Geben Sie für jede der in den folgenden Termen auftretenden Variablen die Menge derjenigen reellen Zahlen an, die nicht zum jeweiligen Variablengrundbereich gehören können! Begründen Sie Ihre Auffassung!

<sup>1)</sup> Auch wenn man Wörter der deutschen Sprache durch Hintereinanderschreiben von Buchstaben – den Zeichen unseres Alphabets – aufschreibt, erhält man entweder sinnvolle Wörter der deutschen Sprache, z. B. „heiter“ oder „lustig“, oder Ausdrücke, die für uns keine Bedeutung haben, z. B. „etoli“ oder „prrst“.

$$\frac{1}{5+t} ; \frac{2}{1-a} + \frac{1}{1+a} ; \sqrt{4-u^2} ; \frac{1}{\sqrt{x-5}}$$

Setzt man für jede Variable eines Terms ein Element des Grundbereiches ein, so kann der zugehörige Wert des Terms berechnet werden.

- 9 Setzen Sie in jedem der Terme  $n^2$ ;  $\frac{1}{n^2}$ ;  $\frac{1}{n^3}$ ;  $n^3$  für die Variable  $n$  die reellen Zahlen  $2$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $0,1$ ;  $-1$  bzw.  $-4$  ein, und berechnen Sie im Kopf die zugehörigen Termwerte!
- 10 Geben Sie zu jedem der folgenden Terme für die Variablen  $a$ ,  $b$  bzw.  $c$  reelle Zahlen so an, daß der Wert des Terms gleich  $0$  wird! Suchen sie nach verschiedenen Möglichkeiten!

$$n \cdot b \cdot 17 \cdot c^2; (a-b) \cdot 1000; (a+b+c) \cdot \frac{1}{a \cdot b \cdot c}; |a| + |b| - 1$$

### Aufgaben

1. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, indem Sie ein Kreuz genau dann eintragen, wenn die jeweilige Zahl Element des entsprechenden Zahlenbereiches ist!

	N	Z	Q <sub>+</sub>	Q	R
-3					
1000					
$\frac{3}{17}$					
-0,1					
$-\frac{1}{\pi}$					
$0,1\bar{7}$					
$\sqrt{3}$					
0,315					
$-\sqrt{7}$					
$25^{25}$					

2. Welche der Zahlen 336; 476; 588; 806; 980 ist Element der Menge aller durch 28 teilbaren natürlichen Zahlen? Nutzen Sie die Konstantenautomatik des Taschenrechners! (Der SR 1 speichert den Befehl: „Durch 28 dividieren!“)

3. Entscheiden Sie, ob die richtige Symbolik gewählt wurde!
- a)  $\{3\} \subset \{3; 4; 5\}$     b)  $\{4\} \in \{3; 4; 5\}$     c)  $\{6\} \in \{3; 4; 5\}$   
 d)  $\{5\} \subset \{3; 4; 5\}$     e)  $\{3; 5\} \subset \{3; 4; 5\}$     f)  $\{2m\} \subset \{4m; 6m; 8m\}$
4. Beschreiben Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen durch Angabe ihrer Elemente! (L)
- a)  $4x < 10$  ( $x \in \mathbb{N}$ )    b)  $x + 1 < 5$  ( $x \in \mathbb{N}$ )    c)  $|2x - 1| < 4$  ( $x \in \mathbb{Z}$ )
5. Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft!
- a)  $M_1 = \{0; 3; 6; 9; 12; \dots\}$     b)  $M_2 = \{1; 6; 11; 16; 21; 26; \dots\}$   
 c)  $M_3 = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; \dots\}$     d)  $M_4 = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \dots\right\}$  (L)
6. Die Menge  $C$  besteht aus genau den Elementen, die in  $A$  und  $B$  liegen. Beschreiben Sie  $C$  durch Angabe ihrer Elemente!
- a)  $A = \{0; 3; 6; 9; 12; 15\}$      $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$   
 b)  $A$  ist die Menge aller durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen.     $B$  ist die Menge aller gebrochenen Zahlen, welche die Ungleichung  $0 < z < 30$  erfüllen.  
 c)  $A$  ist die Menge aller reellen Zahlen, welche die Gleichung  $x^2 - 81 = 0$  erfüllen.     $B$  ist die Lösungsmenge der Gleichung  $(y - 9)(y + 9) = 0$  ( $y \in \mathbb{R}$ ).
7. Beantworten Sie folgende Fragen! Begründen sie Ihre Auffassung!
- a) Gibt es eine reelle Zahl  $a$ , so daß gleichzeitig  $a > 0$  und  $\frac{1}{a} < 0$  gilt?  
 b) Welcher der folgenden Terme kann einen negativen Wert annehmen, wenn der Variablengrundbereich von  $a$  die Menge  $R$  ist? (L)  
 $-a$ ;  $-a^2$ ;  $(-a)^2$ ;  $10000 + a$ ;  $a^2 + 1$   
 c) Der Variablengrundbereich für  $a$  und  $b$  sei  $R$ . Kann die Summe  $a + b$  kleiner als die Differenz  $a - b$  werden?
8. Setzen Sie für  $a$  und  $b$  reelle Zahlen so ein, daß das Produkt  $3(a - 5) \cdot 2ab$
- a) den Wert 0,    b) den Wert 3,    c) den Wert  $-5$ ,    d) den Wert 150 annimmt!
9. Für welche reellen Zahlen ist der folgende Term nicht definiert?
- a)  $\frac{3x - 4}{4 - 6x}$     b)  $\frac{2}{a} + \frac{18}{6 - a}$     c)  $\frac{1}{m + 9} - \frac{1}{m}$     d)  $\frac{18}{y(y^2 - 9)}$
- 10.\* Welche rationale Zahl muß man für die Variable in dem folgenden Term einsetzen, damit dessen Wert möglichst klein wird?
- a)  $(4 - x)^2$     b)  $(5 + y)^2$     c)  $(11v - 17)^2$     d)  $\left(\frac{u}{u - 1}\right)^2$
11. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (L)
- a) Es gibt mindestens eine natürliche Zahl  $x$  mit  $7 < x < 9$ .  
 b) Es gibt mindestens eine rationale Zahl  $y$  mit  $7 < y < 9$ .  
 c) Es gibt mindestens eine natürliche Zahl  $z$  mit  $2z + 1 = 0$ .  
 d) Es gibt mindestens drei natürliche Zahlen  $n$  mit  $n^2 < 4n$ .  
 e) Es gibt genau eine Primzahl  $p$  mit  $82 < p < 90$ .  
 f) Es gibt höchstens eine rationale Zahl  $x$  mit  $x \cdot 0 = 17$ .  
 g) Es gibt genau ein Rechteck mit dem Flächeninhalt von  $12 \text{ cm}^2$ .  
 h) Es gibt genau ein Quadrat mit dem Umfang von  $12 \text{ cm}$ .

## 2 Struktur von Termen

Terme können die Struktur einer *Summe*, einer *Differenz*, eines *Produktes*, eines *Quotienten* bzw. einer *Potenz* haben.

- 11  $(2a - b) + d^3$  ist eine Summe. Geben Sie die Struktur der Terme  $2a - b + d^3$ ,  $(2a - b + d)^3$ ,  $2 \cdot (a - b + d^3)$  und  $2a - (b + d)^3$  an! Überlegen Sie sich bei jedem Term, welche Rechenoperation *zuletzt* ausgeführt werden muß! (L)
- 12 Geben Sie je ein Beispiel an für
  - eine Summe, bei der ein Summand ein Produkt ist;
  - ein Produkt, bei dem ein Faktor eine Summe ist;
  - eine Differenz, bei welcher der Minuend ein Quotient ist;
  - einen Quotienten, bei dem der Dividend eine Differenz ist;
  - eine Potenz, deren Basis eine Summe ist;
  - eine Potenz, deren Exponent ein Produkt ist;
  - eine Summe, deren beide Summanden Differenzen sind!

Jede Differenz kann als Summe geschrieben werden: Für alle reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt  $a - b = a + (-b)$ . Man kann deshalb auch Differenzen als *Summen* auffassen.

Jeder Quotient kann als Produkt geschrieben werden: Für alle reellen Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $b \neq 0$  gilt  $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ . Man kann deshalb auch Quotienten als *Produkte* auffassen.

Addieren und Subtrahieren bezeichnet man als *Rechenoperationen erster Stufe*.  
Multiplizieren und Dividieren bezeichnet man als *Rechenoperationen zweiter Stufe*.  
Potenzieren und Wurzelziehen bezeichnet man als *Rechenoperationen dritter Stufe*.

*Wir wissen:* Treten in einem Term keine Klammern und nur Rechenoperationen erster Stufe oder nur Rechenoperationen zweiter Stufe auf, so rechnet man einfach „von links nach rechts“. Taschenrechner sind so konstruiert, daß bei solchen Aufgaben wie  $5 - 3 + 1$  oder  $24 : 4 \cdot 3$  keine Fehler auftreten, wenn Sie Zahlzeichen und Operationszeichen in der gegebenen Reihenfolge eingeben und die Rechnung durch Drücken der Taste = abschließen.

*Wir wissen außerdem:* Durch das *Setzen von Klammern* kennzeichnet man, welche Operationen zuerst ausgeführt werden sollen. Beim Arbeiten mit dem Taschenrechner SR 1 ist es zweckmäßig, zuerst die in Klammern stehenden Terme zu berechnen; z. B. kann man zur Berechnung von  $5 - (3 + 1)$  bzw.  $24 : (4 \cdot 3)$  den Ablaufplan

3  $\oplus$  1  $\ominus$   $\otimes$   $\oplus$  5  $\ominus$  bzw. 4  $\otimes$  3  $\ominus$   $\otimes$  24  $\ominus$   
benutzen.<sup>1)</sup>

Nutzt man statt des Divisionszeichens „:“ einen Bruchstrich, so kann man häufig auf das Setzen von Klammern verzichten:

$$4 : (5 \cdot 9) = \frac{4}{5 \cdot 9}; \quad (u - v) : (u + v) = \frac{u - v}{u + v}; \quad (a : b) : (c : d) = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

<sup>1)</sup> Manche Taschenrechner besitzen Tasten, mit deren Hilfe man Klammern setzen kann. Dann ist es möglich, zur Berechnung der Termwerte z. B. von  $5 - (3 + 1)$  oder  $24 : (4 \cdot 3)$  Zahlzeichen, Operationszeichen und Klammern in der gegebenen Reihenfolge einzutasten.

- 13 Stellen Sie Ablaufpläne zur Ermittlung der Werte folgender Terme auf! Berechnen Sie danach die Werte mit dem Taschenrechner SR 1! Überprüfen Sie die erhaltenen Ergebnisse „im Kopf“!
- a)  $5 + 15 - 3 + 8$  und  $5 + 15 - (3 + 8)$   
 b)  $16 - (3 + 8) - 5$  und  $16 - (3 + 8 - 5)$   
 c)  $2 \cdot 72 : 8$  und  $72 : (2 \cdot 8)$   
 d)  $\frac{12}{2 \cdot 3}$  und  $\frac{12 \cdot 3}{2}$  und  $\frac{12}{2} \cdot 3$

Eine Operation höherer Stufe hat beim Rechnen stets den *Vorrang* vor einer Operation niedriger Stufe:

Multiplizieren bzw. Dividieren geht vor Addieren bzw. Subtrahieren;  
 Potenzieren bzw. Wurzelziehen geht vor Multiplizieren bzw. Dividieren;  
 Potenzieren bzw. Wurzelziehen geht vor Addieren bzw. Subtrahieren.

- 1 Es soll der Wert des Terms  $9^2 - \sqrt{16} : 4 + 2^3 \cdot 3$  berechnet werden.

Wir überlegen und rechnen:

erst potenzieren und ziehen der Wurzel, dann multiplizieren und dividieren, dann addieren und subtrahieren.

$$9^2 - \sqrt{16} : 4 + 2^3 \cdot 3 = 81 - 4 : 4 + 8 \cdot 3 = 81 - 1 + 24 = \underline{\underline{104}}$$

Der Schulrechner SR 1 berücksichtigt den Vorrang der Rechenoperationen höherer Stufe; er besitzt eine *Vorrangautomatik*. Treten in einem Term keine Klammern und keine Brüche auf, so kann mit dem SR 1 „von links nach rechts“ gerechnet werden.

- 14 Berechnen Sie den Wert des im Beispiel A 1 angegebenen Terms mit Hilfe Ihres Taschenrechners!

Wenn Sie einen Rechner benutzen, der keine Vorrangautomatik besitzt, so müssen Sie zunächst alle Rechenoperationen dritter bzw. zweiter Stufe ausführen, die Ergebnisse notieren (oder in den Speicher des Rechners eingeben) und dann die Rechenoperationen zweiter bzw. erster Stufe ausführen. Oft ist es jedoch nützlich, zunächst nach Rechenvorteilen zu suchen. So wird man z. B. bei der Berechnung von  $3,74 + 2,91 \cdot 5,86$  das Kommutativgesetz der Addition nutzen und nach folgendem Ablaufplan arbeiten:  $2,91 \cdot 5,86 \oplus 3,74 \oplus$

Die Reihenfolge beim Lösen einer Aufgabe mit dem Taschenrechner (und damit der Ablaufplan) hängt ab von

- der Struktur des Terms,
- dem Typ des Rechners,
- der Möglichkeit, Rechenvorteile nutzen zu können.

## Aufgaben

*Hinweis:* Alle auftretenden Nenner sollen verschieden von Null sein.

1. Geben Sie die Struktur jedes der folgenden Terme an!
- a)  $a + (b - c)$       b)  $(a + ba) - b$       c)  $(a - ba) + b^3$   
 d)  $(a + b) \cdot (a - b)$       e)  $(x + y) \cdot z + (z + y) : u$       f)  $(a - b^3) : (cd)$   
 g)  $(a - b) : (e \cdot d)$       h)  $u - \sqrt{s + t}$       i)  $(a - (b + c))^2$
2. Setzen Sie, falls möglich, in den Termen  $5x + y - z : 2$ ,  $x \cdot y - 7 : z$  und  $u : v + s \cdot t - 4$  Klammern so, daß der jeweilige Term die Struktur a) eines Produktes, b) eines Quotienten, c) einer Summe, d) einer Differenz erhält!

3. Geben Sie die folgenden Quotienten in Bruchdarstellung an!
- a)  $(a-b) : c$     b)  $(a : b) : c$     c)  $a : (b+6)$     d)  $(a+b) : (c-d^2)$   
 e)  $(a \cdot b) : c$     f)  $1 : (ab)$     g)  $(2 : a) : \sqrt{5}$     h)  $(m : n) : (r : s)$
4. Schreiben Sie die in Bruchdarstellung gegebenen Terme unter Nutzung des Zeichens „:“ als Quotienten!

a)  $\frac{1}{a+b}$     b)  $\frac{2a-b}{3b-5}$     c)  $\frac{xy}{uv}$     d)  $\frac{1+\frac{1}{a}}{b}$     e)  $\frac{\frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a+b}}$

5. Gegeben sind die Terme  $a \cdot b$  und  $c - d$ . Bilden Sie mit ihrer Hilfe  
 a) eine Summe,    b) eine Differenz,    c) ein Produkt,    d) einen Quotienten!  
 Achten Sie auf das Setzen notwendiger Klammern!
6. Berechnen Sie die Werte der folgenden Terme sowohl mit als auch ohne Nutzung Ihres Taschenrechners!

a)  $3^2 + 2 \cdot 1,5 - \sqrt{9} : 1,5$     b)  $\frac{15}{3} + \frac{1}{3} \cdot 9 - \sqrt{16} : 4$   
 c)  $6 \cdot 4 - 4^2 \cdot 3 + 2 : \sqrt{4}$     d)  $\frac{\sqrt{4}}{2} + 5 - 1 \cdot 0,7$

7. Geben Sie zu jedem der folgenden Ablaufpläne zur Berechnung von Termwerten mit dem SR 1 den zugehörigen Term an! Berechnen Sie die Termwerte mit dem Taschenrechner! Überschlagen Sie die Ergebnisse!

a)  $17 \boxed{+} 49 \boxed{+} 7 \boxed{=}$     b)  $4 \boxed{\times} 7,2 \boxed{+} 2,8 \boxed{\times} 1,8 \boxed{=}$   
 c)  $2,9 \boxed{+} 7,3 \boxed{=}$   $\sqrt{\quad}$     d)  $2,9 \boxed{+} 7,3 \boxed{\sqrt{\quad}} \boxed{=}$   
 e)  $2,5 \boxed{-} 4,6 \boxed{\times^2} \boxed{+} 1,9 \boxed{=}$     f)  $2,5 \boxed{-} 4,6 \boxed{=}$   $\boxed{+}$   $1,9 \boxed{=}$   $\boxed{\times^2}$

8. Zur Berechnung von Werten des Terms  $\frac{a+\sqrt{b}}{c \cdot d}$  mit dem Schulrechner SR 1 werden folgende Ablaufpläne angeboten:

a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{\sqrt{\quad}}$   $\boxed{+}$  c  $\boxed{\times}$  d  $\boxed{=}$  ; a  $\boxed{+}$   $\sqrt{\quad}$  b  $\boxed{=}$   $\boxed{+}$  c  $\boxed{+}$  d  $\boxed{=}$  ;  
 a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{\sqrt{\quad}}$   $\boxed{=}$   $\boxed{+}$  c  $\boxed{+}$  d  $\boxed{=}$  ; a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{\sqrt{\quad}}$   $\boxed{=}$   $\boxed{+}$  c  $\boxed{\times}$  d  $\boxed{=}$  .

Suchen Sie den zu dem Term gehörenden Plan heraus! Begründen Sie!

9. Ordnen Sie jedem der folgenden Terme den zugehörigen Ablaufplan für den Taschenrechner SR 1 zu!

$(a+b)^2$ ;  $a+b^2$ ;  $\frac{a \cdot b}{a+b}$ ;  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ;  $\sqrt{a+b}$ ;  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ;  $\frac{a+b}{a-b}$

a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{+}$  b  $\boxed{+}$  a  $\boxed{=}$  ; a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{=}$   $\sqrt{\quad}$  ; a  $\sqrt{\quad}$   $\boxed{+}$  b  $\sqrt{\quad}$   $\boxed{=}$  ;  
 a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{\times^2}$   $\boxed{=}$  ; a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{=}$   $\boxed{\times^2}$  ; a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{=}$   $\sqrt{\quad}$   $\boxed{\times}$  a  $\boxed{\times}$  b  $\boxed{=}$  ;  
 a  $\boxed{+}$  b  $\boxed{=}$   $\boxed{\times^2}$  a  $\boxed{-}$  b  $\boxed{=}$   $\sqrt{\quad}$   $\boxed{\times}$   $\boxed{MR}$   $\boxed{=}$

10. Untersuchen Sie, ob für beliebige natürliche Zahlen  $a, b, c, d$  gilt:

a)  $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$     und     $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ;  
 b)  $a \cdot b = b \cdot a$     und     $a^b = b^a$ ;  
 c)  $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$  ( $b \neq 0, b \neq -c$ )    und     $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$  ( $b \neq 0, c \neq 0$ )!

### 3 Termwertberechnungen mit Hilfe des Taschenrechners

Beim Rechnen mit dem Schulrechner SR 1 lernten Sie bisher die folgenden Tasten kennen:

**Tasten zum Eingeben von Zahlen:** Durch Drücken der Zifferntasten  $0, 1, 2, 3, \dots, 9$  und der Kommataste  $,$  können wir eine Zahl mit maximal 8 Ziffern eingeben. Durch Drücken der Taste  $\pi$  wird ein Näherungswert der irrationalen Zahl  $\pi$  mit 7 Stellen nach dem Komma angezeigt.

**Funktionstasten:** Die Tasten  $x^2, \sqrt{\quad}, 1/x, +/_-$  bezeichnet man als Funktionstasten.<sup>1)</sup> Nach dem Eingeben einer Zahl  $a$  gibt das Drücken einer Funktionstaste dem Rechner

1. die *Information*, daß die Zahl  $a$  vollständig eingegeben wurde,
2. die *Anweisung*, dieser Zahl ihren Funktionswert bez. der jeweiligen Funktion zuzuordnen.

Die Taste  $=$  braucht dabei *nicht* gedrückt zu werden.

- 15 Ordnen Sie jeder der Zahlen 19; 0,3; 1011; 0; -1; -0,16 einen Funktionswert zu, indem Sie nach dem Eingeben der Zahl die Taste  $x^2$  drücken!  
Führen Sie den gleichen Auftrag auch bezüglich der Tasten  $+/_-$ ;  $1/x$  und  $\sqrt{\quad}$  aus! Begründen Sie den vorliegenden Sachverhalt, falls der Rechner „E“ anzeigt!

**Operationstasten:**  $+, -, \times, \div$  sind Operationstasten. Mit ihrer Hilfe wird, zusammen mit der Taste  $=$ , einem *geordneten Paar*  $(a; b)$  von Zahlen eindeutig eine Zahl  $c$  zugeordnet. Nach Eingeben einer Zahl  $a$  gibt das Drücken einer Operationstaste dem Rechner

1. die *Information*, daß  $a$  vollständig eingetastet wurde,
  2. die *Anweisung*, die Zahl  $a$  mit einer noch einzugebenden Zahl  $b$  zu „verknüpfen“.
- Ist das Eingeben der Ziffernfolge für  $b$  beendet, teilt das Drücken der Taste  $=$  dem Rechner mit, daß die vorgesehene Operation auszuführen ist.<sup>2)</sup>

Die Taste  $y^x$  ist ebenfalls eine Operationstaste, die Sie bereits bei der Berechnung von dritten Potenzen und dritten Wurzeln genutzt haben.

- 16 Erläutern Sie die Bedeutung der folgenden Tasten anhand selbstgewählter Beispiele!  
**CE-C ;  $x \rightarrow M$  ; M+ ; MR**

Wir wiederholen, was Sie über die Anwendung des Taschenrechners gelernt haben.

- 17 a) Für die Berechnung der Summe  $(-1,79) + (+3,45)$  mit dem SR 1 benutzt Schüler A den Ablaufplan  
 $3,45 \boxed{=} 1,79 \boxed{=}$   
und Schüler B den Ablaufplan  
 $1,79 \boxed{+/-} \boxed{+} 3,45 \boxed{=}$ .

<sup>1)</sup> Wenn Sie in den SR 1 nur eine Zahl eingegeben haben, wirkt auch die Taste  $\%$  als Funktionstaste. Sie gibt dem Rechner den Befehl: Ermittle den hundertsten Teil der eingegebenen Zahl! – Auch die Tasten  $\ln, \lg, \sin, \cos$  und  $\tan$  sind Funktionstasten; ihre Bedeutung lernen Sie noch kennen.

<sup>2)</sup> Die gleiche Information erhält der Rechner, wenn eine weitere Operationstaste gedrückt wird.

- b) Für die Berechnung des Produktes  $(+ 2,43) \cdot (- 5,78)$  mit dem SR 1 benutzt der Schüler A den Ablaufplan

$$2,43 \text{ [x] } 5,78 \text{ [x] } [=]$$

und der Schüler B den Ablaufplan

$$2,43 \text{ [x] } 5,78 \text{ [=] } [x]$$

Führen Sie die Rechnungen aus, und vergleichen Sie die Ergebnisse! Erläutern Sie die Vorgehensweisen der Schüler A und B!

Bei der Berechnung von Werten solcher Terme wie  $a + b \cdot c$ ;  $a - b : c$ ;  $a + b^2$ ;  $c - \sqrt{d}$  erspart Ihnen die *Vorrangautomatik* des Schulrechners SR 1, die vorgegebene Reihenfolge bei der Ausführung der Operationen abändern zu müssen.

- 18 Berechnen Sie die Werte der in der Tabelle enthaltenen vier Terme, indem Sie für  $a$ ,  $b$  und  $c$  die jeweils angegebenen Zahlen einsetzen! Kontrollieren Sie durch Überschlag! (L)

$a$	$b$	$c$	$a - b : c$	$a - b \cdot c^2$	$a - b^3 : c$	$a + \sqrt{b} - a \cdot c$
1,47	2,22	-4,7				
-6,79	2,15	2,2				

Bei manchen Termen muß man die Reihenfolge der Ausführung von Operationen auch bei der Berechnung von Termwerten mit dem SR 1 selbst bestimmen.

- 19 Zu berechnen ist  $2,79 \cdot (6,34 - 2,91)$ .  
Es können zwei verschiedene Lösungswege gewählt werden:

1. Der Term wird umgeformt in  $(6,34 - 2,91) \cdot 2,79$ .

Ablaufplan:

$$6,34 \text{ [-] } 2,91 \text{ [=] } [x] \text{ } 2,79 \text{ [=]}$$

2. Der Term wird umgeformt in  $2,79 \cdot 6,34 - 2,79 \cdot 2,91$ .

Ablaufplan:

$$2,79 \text{ [x] } 6,34 \text{ [-] } 2,79 \text{ [x] } 2,91 \text{ [=]}$$

Führen Sie die Rechnungen aus! Vergleichen Sie den Rechenaufwand!

Bei der Berechnung von Termwerten solcher Terme wie  $a \cdot (b + c)$ ;  $\frac{a \cdot b}{c + d}$ ;  $a(b + c)^2$ ;

$\frac{a - b}{c \cdot d}$  mit dem SR 1 ist es zweckmäßig, zuerst die Summe einzugeben und diese Rechnung durch Drücken der Taste = abzuschließen.

- 20 Stellen Sie Ablaufpläne für die Berechnung von

a)  $\frac{7,5 + 3,3}{6,1 \cdot 4,2}$  und b)  $\frac{2,7 \cdot (-3,5)}{5,6 - 3,3}$

auf, und berechnen Sie die Termwerte! Kontrollieren Sie die Ergebnisse durch Überschlag!

- 21 Gerold löst im Kopf:  $(4 + 3) \cdot (2 + 8) = 70$ .

Er überprüft mit dem Taschenrechner:

$$4 \text{ [+]} 3 \text{ [x] } 2 \text{ [+]} 8 \text{ [=] } [18.]$$

Da sich die Ergebnisse unterscheiden, wählt er noch einen anderen Ablaufplan:

$$4 \text{ [+]} 3 \text{ [=] } [x] \text{ } 2 \text{ [+]} 8 \text{ [=] } [22.]$$

Welches Ergebnis ist richtig? Wie würden Sie den Wert des Terms mit dem Taschenrechner ermitteln?

Will man Werte der Terme  $(a + b) \cdot (c + d)$  oder  $\frac{a + b}{c + d}$  oder  $(a + b)^2 + \sqrt{c + d}$  berechnen, müssen *Zwischenergebnisse* festgehalten werden. Sie wissen, daß dies ein Taschenrechner mit einem *Speicher*, wie der SR 1 ihn besitzt, kann. Diese Rechner ersparen Ihnen das Notieren von Zwischenergebnissen.

- 22 a) Mit welcher Taste des Schulrechners SR 1 kann man eine Zahl in den Speicher eingeben?
- b) Welche Taste müssen Sie drücken, um die gespeicherte Zahl zurückzurufen?
- c) Was geschieht mit dem Speicherinhalt, wenn die gespeicherte Zahl zurückgerufen wird?
- d) Wie kann der Speicherinhalt gelöscht werden?

- 2 Es soll  $\frac{1,72 + 3,11}{2,08 - 2,99}$  berechnet und das Ergebnis durch Überschlag kontrolliert werden:

2,08 [=] 2,99 [=]  $\times$  M 1,72 [=] + 3,11 [=] [=] + MR [=] [=] [-5.3076923]

Überschlag:  $\frac{1,72 + 3,11}{2,08 - 2,99} \approx \frac{5}{-1} = -5$

- 23 a) Stellen Sie je einen Ablaufplan für die Berechnung von Werten der Terme  $\frac{a + b}{c + d}$  und  $(a + b)^2 - \sqrt{c + d}$  auf!
- b) Prüfen Sie Ihre Ablaufpläne, indem Sie solche Zahlen für die Variablen  $a, b, c$  bzw.  $d$  einsetzen, die die Berechnung der Termwerte auch „im Kopf“ ermöglichen!

## Aufgaben

1. Berechnen Sie mit Ihrem Taschenrechner! Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Überschlag! (L)
  - a)  $4,3 + 7,3 \cdot 5,1 - 7,6 : 3,9$     b)  $0,73 + 2,2^2 - \sqrt{26,1}$
  - c)  $(4,1 + 3,8)^2 + 2,4 : 1,25 + 2,7 \cdot (-3,5)$
2. Füllen Sie die Tabelle aus! Rechnen Sie spaltenweise! Nutzen Sie die Konstantenautomatik Ihres Taschenrechners!

$a$	$a + 1,64$	$a - 17,3$	$a : 2,75$	$a \% \text{ von } 720$
2,5				
0,55				
490,5				
22,8				

3. Nutzen Sie bei der Berechnung nach Möglichkeit den Speicher Ihres Rechners! Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse durch Überschlag!
  - a)  $(26,9 - 17,3)^2 + (21,4 + 3,9)^2$     b)  $\sqrt{598 - 189} - \sqrt{320 + 82}$     c)  $\frac{4,32 - 7,19}{2,81 + 6,11}$
  - d)  $(3,41 + 7,42 - 2,01) \cdot (4,51 - 6,21 - 1,18)$

4. Berechnen Sie die Werte der folgenden Terme mit dem SR 1 für

$$a \in \{0,1; 22,756; \frac{1}{3}; -10000; 0,000001\}:$$

a)  $345,5 + a$    b)  $345,5 - a$    c)  $345,5 \cdot a$    d)  $345,5 : a$    e)  $a^2!$

Entscheiden Sie in jedem Fall, ob Ihr Taschenrechner ein genaues Ergebnis oder nur einen Näherungswert liefert!

5. Berechnen Sie die folgenden Terme mit dem Taschenrechner SR 1! Nutzen Sie gegebenenfalls auch die Taste **M+**! Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Über-schlag!

a)  $(17,9 - 13,7)^2 + \sqrt{144 - 118}$    b)  $\frac{74,93 - 8,21}{22,5 \cdot 4,5}$

c)  $(4,3 + 7,8)^2 + \sqrt{204 - 6} - \left(\frac{7,3}{2,5}\right)^2$

6. a) Berechnen Sie  $\frac{2,73 + 6,789 + 3,15 \cdot 6,789}{6,789}$ ! Stellen Sie einen Ablaufplan ohne Nutzung des Speichers auf!

b) Stellen Sie einen Ablaufplan auf, in dem die mehrfach auftretende Konstante 6,789 gespeichert und zurückgerufen wird, wenn sie in der Rechnung benötigt wird! Vergleichen Sie die Ablaufpläne hinsichtlich möglicher Fehlerquellen!

7. a) Für reelle Zahlen  $x$  mit kleinem absoluten Betrag kann  $(1+x)^3$  angenähert werden durch den Term  $1+3x$ . Ergänzen Sie die folgende Tabelle! Nutzen Sie Ihren Taschenrechner! Zur Berechnung der Differenz in der letzten Spalte ist es zweckmäßig, den Wert des Terms  $(1+x)^3$  im Speicher aufzubewahren. Begründen Sie, warum in der letzten Spalte die Zahlen immer kleiner werden!

$x$	$(1+x)^3$	$1+3x$	$ (1+3x) - (1+x)^3 $
0,5	1,331	1,3	0,031
0,1			
-0,05			
0,02			
0,001			

- b) Der Term  $\sqrt{1+x}$  kann für  $x$  mit kleinem absoluten Betrag durch  $1 + \frac{x}{2}$  angenähert werden. Überprüfen Sie dies anhand einer Tabelle wie in Aufgabe 7a)! Bestimmen Sie im Kopf einen Näherungswert von  $\sqrt{1,088}$ ! Ermitteln Sie  $\sqrt{1,088}$  mit dem SR 1!

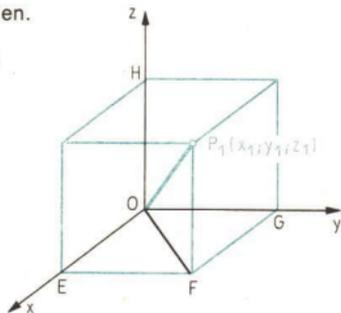
- 8.\* Geben Sie Ablaufpläne zur Berechnung der Terme

$$1 + \frac{1}{2}; \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}; \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}; \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$
 an!

Berechnen Sie diese Terme! Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit  $\sqrt{2}$ !

- 9.\* Der Flächeninhalt  $A$  eines Dreiecks mit den Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  kann durch  $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  berechnet werden, wobei  $s = \frac{a+b+c}{2}$  gilt.
- Berechnen Sie mit Hilfe Ihres Taschenrechners den Flächeninhalt des Dreiecks mit  $a = 3,7$  cm,  $b = 4,8$  cm und  $c = 2,9$  cm!
  - Stellen Sie einen Ablaufplan zur Ermittlung von Werten des Terms  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  auf! Nutzen Sie den Speicher des Taschenrechners SR 1! Gehen Sie dabei davon aus, daß Ihnen die Werte für  $a$ ;  $b$ ;  $c$  und  $s$  zur Verfügung stehen! (L)
- 10.\* Der Abstand  $d$  zweier Punkte  $P_1(x_1; y_1)$  und  $P_2(x_2; y_2)$  in einer Ebene kann mit Hilfe der Formel  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  berechnet werden.
- Die drei Eckpunkte eines Dreiecks sind  $A(1,9; 2,7)$ ,  $B(-2,3; 2,4)$  und  $C(-0,5; -1,1)$ . Berechnen Sie mit Ihrem Taschenrechner die Seitenlängen des Dreiecks  $ABC$ ! (L)
  - Welche Bedingungen müssen die Koordinaten der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  erfüllen, damit der Abstand  $d = 0$  wird?
  - Begründen Sie, warum  $d \geq 0$  gilt, unabhängig davon, welche Werte die Koordinaten  $x_1$ ;  $x_2$ ;  $y_1$  und  $y_2$  annehmen!
  - Stellen Sie einen Ablaufplan für die Berechnung des Abstands zweier Punkte auf!
- 11.\* Im Raum müssen jedem Punkt drei Koordinaten zugeordnet werden ( $\rightarrow$  Bild A 4). Der Abstand  $d$  eines Punktes  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  vom Koordinatenursprung kann mit Hilfe der Formel  $d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$  berechnet werden.

Bild A 4



- Stellen Sie einen Ablaufplan für die Berechnung des Abstands des Punktes  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  vom Koordinatenursprung mit dem SR 1 auf!
  - Berechnen Sie den Abstand der Punkte  $P_1(3; 3; 4)$ ;  $P_2(5,9; 7,1; 3,8)$ ;  $P_3(0; 0; 4)$ ;  $P_4(-3; 7; 5)$  und  $P_5(-1,3; 7,9; -5,4)$  vom Koordinatenursprung auf zwei Stellen nach dem Komma genau!
  - Leiten Sie die Formel  $d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$  her!
- 12.\*
- Geben Sie an, bei welchen Termen die Berechnung mit dem SR 1 nur einen Näherungswert liefert!  
 $67851 \cdot 345$ ;  $2 : 7$ ;  $3^9$ ;  $189457 \cdot 889$ ;  $2 \cdot \sqrt{2}$ ;  
 $\frac{\pi}{2} + 1$ ;  $9 \cdot 10^{20} - 3$ ;  $2^{25}$ ;  $\frac{1}{3} + 3$ ;  $\frac{1}{20000}$
  - Berechnen Sie  $(6 : 7) \cdot 7 - 6$  mit und ohne Taschenrechner SR 1! Erläutern Sie, warum die Ergebnisse voneinander abweichen!

## 4 Algorithmen

Zu gegebenen  $a$  und  $b$  ( $a; b \in \mathbb{R}; a \neq -b$ ) sollen Werte des Terms  $\frac{a \cdot b}{a + b}$  berechnet werden. Wir könnten knapp formulieren: Dividiere das Produkt durch die Summe! Diese Anweisung ist ungenau und läßt Fragen offen: Welches Produkt? Welche Summe? Welche Zahl ist der gesuchte Termwert? Wir wollen versuchen, ein *Verfahren* zur Ermittlung solcher Termwerte unmißverständlich zu beschreiben.

### Erste Möglichkeit:

1. Lies die Zahl für  $a$  und die Zahl für  $b$ !
2. Berechne das Produkt  $p = a \cdot b$ !
3. Berechne die Summe  $s = a + b$ !
4. Berechne den Quotienten  $q = \frac{p}{s}$ !
5. Notiere  $q$  als Termwert!

Übersichtlicher wird das Verfahren durch das *Diagramm* im Bild A 5 beschrieben.

- 24 Ermitteln Sie nach diesem Verfahren den Termwert von  $\frac{a \cdot b}{a + b}$  für  $a = 2$  und  $b = -3$  im Kopf!

### Zweite Möglichkeit:

1. Lies die Zahl für  $a$  und die Zahl für  $b$ !
2. Berechne die Summe  $s = a + b$ !
3. Berechne den Quotienten  $q = \frac{s}{a}$ !
4. Berechne den Quotienten  $t = \frac{q}{b}$ !
5. Bilde den reziproken Wert  $r$  von  $t$ !
6. Notiere  $r$  als Termwert!

Will man Werte von  $\frac{a \cdot b}{a + b}$  mit dem Schulrechner SR 1 ermitteln, so kann dieses Verfahren auch durch einen Ablaufplan beschrieben werden:

$$a \text{ (+) } b \text{ (=) (+) } a \text{ (+) } b \text{ (=) } \frac{1}{x}$$

Drückt man der Reihe nach die durch den Ablaufplan festgelegten Tasten, so steht nach dem Drücken der letzten Taste in der Anzeige der gesuchte Termwert. Wendet man dieses Verfahren an, so muß bei der Wahl von Eingabewerten zusätzlich  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  vorausgesetzt werden.

- 25 Ermitteln Sie nach diesem Verfahren den Wert des Terms  $\frac{a \cdot b}{a + b}$  für  $a = 4$  und  $b = 1,5$ !

Jedes der oben angegebenen Verfahren nennt man einen **Algorithmus**.

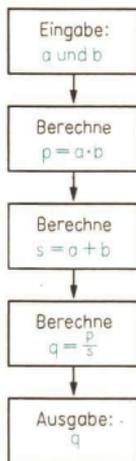


Bild A 5

Ein **Algorithmus** besitzt folgende Merkmale:

- (1) Er besteht aus (endlich vielen) *Schritten*. Jeder dieser Schritte enthält eine unmißverständliche *Anweisung*.
- (2) Es gibt einen eindeutig bestimmten Schritt, der *als erster* auszuführen ist. Nach jedem Schritt steht fest, ob der Algorithmus *beendet* ist bzw. welcher Schritt *als nächster* auszuführen ist.
- (3) Er ist *für beliebige Werte* eines Grundbereiches ausführbar.

*Man erkennt:*

- Durch einen Algorithmus werden vorgegebenen *Eingabedaten* eindeutig bestimmte *Ausgabedaten* zugeordnet.
- Zu einer Aufgabenstellung können oft *voneinander verschiedene Algorithmen* gefunden werden.  
Es wurden z. B. zur Ermittlung von Werten des Terms  $\frac{a \cdot b}{a + b}$  zwei Möglichkeiten angegeben; eine dritte wird in Aufg. 3 (→ S. 21) genutzt.
- Algorithmen können auf *unterschiedliche Weise dargestellt* werden, z. B. durch eine Folge von Befehlssätzen, ein Diagramm, einen Ablaufplan.

Die Darstellung eines Algorithmus muß den Fähigkeiten desjenigen angepaßt werden, der ihn ausführen soll. Ein Taschenrechner kann einen Algorithmus nur ausführen, wenn er in Form einer entsprechenden Tastenfolge eingegeben wird. Soll die Ausführung eines Algorithmus einem Computer übertragen werden, so muß der Algorithmus in einer dem Computer verständlichen Sprache beschrieben sein. Dafür gibt es spezielle Programmiersprachen. Es kann deshalb die Funktion von Rechenanlagen und die Arbeit von Robotern an einer Taktstraße durch einen Algorithmus gesteuert werden.

Sie haben im Mathematikunterricht schon häufig Algorithmen kennengelernt, z. B.:

- das Verfahren zur schriftlichen Addition mehrstelliger natürlicher Zahlen,
- das Verfahren zur Division zweier gebrochener Zahlen in Bruchschreibweise,
- das Verfahren zur Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke,
- die Vorgehensweise beim Lösen einer Gleichung  $ax = b$  ( $a \neq 0$ ),
- die Vorgehensweise beim Abarbeiten eines Ablaufplanes zur Termwertberechnung.

Auch im täglichen Leben begegnen Ihnen mitunter Algorithmen. Denken Sie an Anleitungen, die in Form einer Schrittfolge gegeben sind, z. B.

- zum Führen eines Ferngesprächs in einer Telefonzelle im Selbstwählverkehr,
- zum Erwerb einer Fahrkarte mit Hilfe eines Automaten,
- bei der ersten Benutzung einer Maschine nach einer Bedienungsanleitung,
- beim Zusammensetzen eines Schrankes nach einer Montageanleitung,
- beim Überqueren einer durch eine Ampelanlage geregelten Kreuzung,
- beim Kochen eines bestimmten Gerichtes nach einem Rezept.

Um mit Hilfe eines Algorithmus den Rest zu bestimmen, den  $a$  bei Division durch  $b$  läßt ( $a; b \in \mathbb{N}; b \neq 0$ ), wählen wir einen Algorithmus mit elementaren Schritten, der auch von einem sehr einfachen Computer ausgeführt werden könnte:

1. Lies die Zahl  $a$  und die Zahl  $b$ !
2. Vergleiche  $a$  mit  $b$ !  
Wenn  $a < b$ , so nimm  $a$  als Lösung und beende das Verfahren!  
Wenn  $a \geq b$ , so bilde die Differenz  $a - b$ !
3. Vergleiche diese Differenz mit  $b$ !  
Wenn die Differenz kleiner als  $b$  ist, so nimm sie als Lösung!

Wenn die Differenz größer oder gleich  $b$  ist, so subtrahiere von ihr die Zahl  $b$ ! Du erhältst eine neue Differenz.

4. Führe den Schritt 3 so oft aus, bis die Differenz kleiner als  $b$  ist! Beende dann die Berechnung!

Wir stellen den angegebenen Algorithmus durch ein Diagramm dar (→ Bild A 6).

- 26 Nutzen Sie sowohl den in Worten angegebenen Algorithmus als auch das Diagramm (→ Bild A 6), um den Rest bei der Division von 9 durch 4, 29 durch 6; 147 durch 42; 66 durch 71 zu bestimmen!

Bei dem oben angegebenen Algorithmus fällt auf:

- Mitunter wird eine *bedingte Anweisung* gegeben. Die weitere Schrittfolge hängt davon ab, ob eine gegebene Bedingung erfüllt ist oder nicht (→ 2. und 3. Schritt). Im Diagramm erkennt man deutlich, daß nach einer bedingten Anweisung im Algorithmus eine *Verzweigung* auftritt.
- Es kann vorkommen, daß *Anweisungen mehrfach ausgeführt* werden müssen. Im Algorithmus tritt dann eine *Schleife* auf. Eine Schleife wird verlassen entweder nach einer *festgelegten Anzahl* von Durchläufen oder nach *Erfüllung einer vorgegebenen Bedingung*.

Vor allem durch die Möglichkeit der Einarbeitung von Schleifen in Algorithmen können moderne Rechenanlagen effektiv genutzt werden.

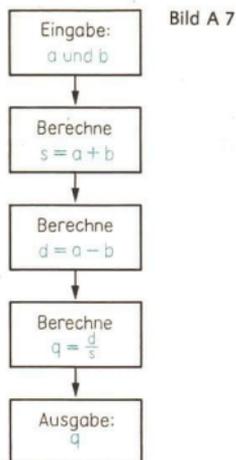
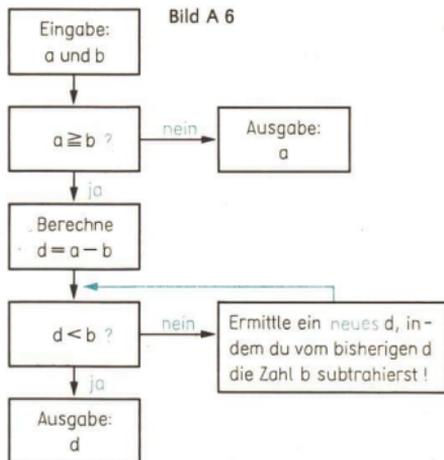
## Aufgaben

1. Durch das Diagramm im Bild A 7 wird ein Algorithmus zur Ermittlung von Werten eines Terms beschrieben. Wählen Sie unter den folgenden Termen den zum Diagramm gehörenden aus! (Alle auftretenden Nenner sollen von Null verschieden sein.)

$$\frac{a+b}{a-b}; a+b : (a-b);$$

$$a - \frac{b}{a} + b;$$

$$\frac{a-b}{a+b}; \frac{a}{a-b} + b$$

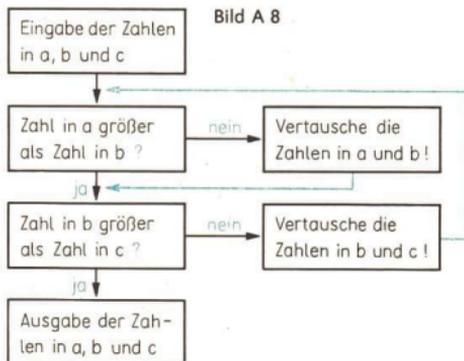


2. Suchen Sie sich eine Betriebs- oder Bedienungsanleitung für ein Haushaltgerät aus. Stellen Sie den dadurch festgelegten Algorithmus durch ein Diagramm oder durch eine Folge von Anweisungen dar!

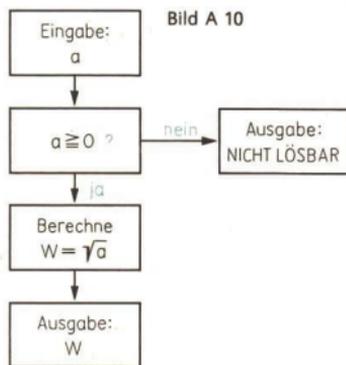
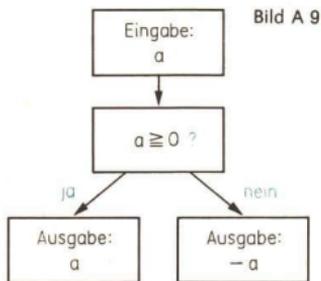
3. Stellen Sie einen Algorithmus zur Berechnung von Werten des Terms  $\frac{a \cdot b}{a + b}$  mit Hilfe des SR 1 in Form eines Ablaufplanes dar! Nutzen Sie dabei den Speicher des SR 1! Geben Sie den Algorithmus auch in Worten an! (L)

4. Eine Variable kann man sich als „Kasten“ vorstellen, in welchem eine Zahl aufbewahrt werden kann.

Mit Hilfe des im Bild A 8 dargestellten Algorithmus kann ein Computer drei Zahlen, die paarweise voneinander verschieden sind, ordnen. Wählen Sie drei Zahlen! Arbeiten Sie den Algorithmus ab!



5. Geben Sie einen Algorithmus für das Errichten der Mittelsenkrechten einer Strecke  $\overline{AB}$  an!
6. a) Untersuchen Sie, was der im Bild A 9 dargestellte Algorithmus leistet! (L)  
b) Untersuchen Sie, was der im Bild A 10 dargestellte Algorithmus leistet!



7. Welcher der folgenden Prozesse kann nach einem Algorithmus ausgeführt werden? Begründen Sie Ihre Auffassung!
- a) Lösen einer Gleichung  $ax + b = 0$   
b) Ordnen der Namen von Personen, die einen Fernsprechanruf besitzen, nach dem Alphabet  
c) Tippen der fünf „richtigen“ Zahlen im Zahlenlotto mit genau einem Spielschein

- d) Konstruieren einer Winkelhalbierenden
- e) Zubereiten einer Nudelsuppe für vier Personen
- f) Würfeln einer „6“ mit höchstens 20 Versuchen
- g) Stellen der zum Leipziger Hauptbahnhof gehörenden Signalanlagen für den Fahrverkehr an einem Wochentag
- h) Steuerung der Flugbahn einer Flugabwehrrakete
- i) Leiten einer Diskussion im FDJ-Studienjahr
- k) Starten eines Kraftfahrzeuges
- l) Suchen eines Wortes im Wörterbuch



## 5 Beschreiben von Sachverhalten mit Hilfe von Variablen

Mit Hilfe von Termen lassen sich Objekte oder Zusammenhänge aus den verschiedensten Gebieten beschreiben. Beispielsweise kann der Term  $\frac{a}{b}$  bezeichnen

- den Inhalt der Grundfläche eines Prismas, wenn  $a$  das Volumen und  $b$  die Länge seiner Höhe beschreibt,
- die Länge der Höhe in einem Parallelogramm, wenn  $a$  dessen Flächeninhalt und  $b$  die Länge seiner Grundlinie bezeichnet,
- die Dichte eines Körpers, wenn  $a$  seine Masse und  $b$  sein Volumen ist,
- die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Körpers, wenn  $a$  die Länge des zurückgelegten Weges und  $b$  die Dauer der dazu benötigten Zeit ist,
- die Durchschnittsleistung, falls  $a$  die Arbeit und  $b$  die zu ihrer Verrichtung benötigte Zeitdauer ist,
- die Bevölkerungsdichte, falls  $a$  die Anzahl der in einem Gebiet lebenden Menschen und  $b$  der Flächeninhalt des Gebietes ist,
- die relative Atommasse, wenn  $a$  die absolute Masse des Atoms eines Elementes und  $b$  der zwölfte Teil der Masse eines Kohlenstoffatoms ist,
- den Wirkungsgrad einer Anlage, wenn  $a$  die genutzte Energie und  $b$  die der Anlage zugeführte Energie ist.

- 27 Beschreiben Sie die durch den oben genannten Quotienten dargestellten Sachverhalte, indem Sie die „üblichen“ Variablen für die entsprechenden Größen benutzen! Geben Sie jeweils Variablengrundbereiche an!
- 28 Nennen Sie weitere Zusammenhänge, die durch den Term  $\frac{a}{b}$  und solche, die durch den Term  $a \cdot \frac{b}{c}$  beschrieben werden können! Nutzen Sie dabei „Physik in Übersichten“, „Chemie in Übersichten“ sowie Ihr Tafelwerk!

Auch Gesetze für das Rechnen in Zahlenbereichen werden meist mit Hilfe von Variablen beschrieben.

- 29 Formulieren Sie mit Variablen:
  - a) das Kommutativgesetz der Addition natürlicher Zahlen,
  - b) das Assoziativgesetz der Multiplikation rationaler Zahlen,
  - c) das Distributivgesetz für reelle Zahlen! (L)

## Aufgaben

- Beschreiben Sie mit Hilfe von Variablen
  - Eine natürliche Zahl, die durch 4 geteilt den Rest 1 läßt,
  - das Quadrat der Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen,
  - das Produkt der Quadrate zweier beliebiger ungerader Zahlen, (L)
  - die Differenz zweier zweistelliger natürlicher Zahlen! (L)
- Beschreiben Sie die durch die folgenden Terme charakterisierten Objekte mit Worten!
  - $5n + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ )      b)  $10a + b$  ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$ )
  - $(2n + 1)^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ )      d)  $3n \cdot 5m$  ( $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ )
- Beschreiben Sie durch einen Term
  - Die Summe zweier rationaler Zahlen wird mit ihrer Differenz multipliziert.
  - Das Quadrat der Summe zweier reeller Zahlen wird durch die Differenz ihrer Quadrate dividiert.
  - Eine dreistellige natürliche Zahl wird durch ihre Quersumme dividiert.
- Das Produkt zweier positiver reeller Zahlen läßt sich geometrisch als Zahlenwert des Flächeninhalts eines Rechtecks deuten. Jeder der folgenden Terme soll einen solchen Zahlenwert angeben. Welche Zahlenwerte könnten die Seitenlängen dieser Rechtecke besitzen?
  - $a \cdot b$  (L)      b)  $2 \cdot a \cdot b$       c)  $\frac{a \cdot b}{2}$       d)  $a^2$       e)  $(a + b)^2$
- Gegeben ist die natürliche Zahl  $n$  ( $n \neq 0$ ).
  - Schreiben Sie den Vorgänger und den Nachfolger von  $n$  auf!
  - In einem speziellen Fall sei das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger von  $n$  die Zahl 483. Berechnen Sie  $n$ !
  - Geben Sie die Menge aller natürlichen Zahlen zwischen 300 und 400 an, die sich ebenfalls als Produkt aus Vorgänger und Nachfolger einer natürlichen Zahl darstellen lassen!
- Beim Lösen von Ungleichungen nutzt man häufig die Beziehung:  
Für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:
  - Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ .
  - Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .
  - Machen Sie sich mit diesem Gesetz vertraut, indem Sie für  $a, b$  und  $c$  spezielle reelle Zahlen wählen! Denken Sie daran, daß für  $a, b$  und  $c$  auch negative Zahlen eingesetzt werden können!
  - Formulieren Sie das Gesetz für den Fall, daß  $a > b$  gilt! (L)

## 6 Nutzen von Variablen beim Beweisen

- 3
- Zu beweisen ist: Wenn die kleinste von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ungerade ist, so ist deren Summe durch 6 teilbar.
  - Es ist zu zeigen: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist nicht immer durch 6 teilbar.

Lösung zu a):

- Voraussetzung: (1) Eine Summe besteht aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.  
 (2) Der kleinste Summand ist ungerade.

Behauptung: Die Summe ist durch 6 teilbar.

Beweis:

1. Zahl	2. Zahl	3. Zahl
$2n-1$	$2n$	$2n+1$
$(n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$		

$$S = (2n - 1) + 2n + (2n + 1)$$

$$S = 6n$$

$$6|S$$

(Einführen einer Variablen;  
 Beschreiben der drei Zahlen)  
 (Bilden der Summe S)  
 (Zusammenfassen)  
 (Anwenden der Teilerdefinition)

Lösung zu b)

Es genügt die Angabe eines Beispiels: 2; 3 und 4 sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, doch ihre Summe 9 ist nicht durch 6 teilbar.

- 30 a) Beweisen Sie: Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste gerade ist, dann ist das Produkt dieser Zahlen durch 4 teilbar!  
 b) Zeigen Sie, daß das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nicht immer durch 4 teilbar ist!
- 4 Zu beweisen ist: Die Summe von vier beliebigen ungeraden Zahlen ist stets gerade.

Lösung:

Voraussetzung: Eine Summe besteht aus vier ungeraden Zahlen.

Behauptung: Die Summe dieser vier Zahlen ist gerade.

Beweis:

1. Zahl	2. Zahl	3. Zahl	4. Zahl
$2n-1$	$2m+1$	$2p+1$	$2r+1$
$(n; m; p; r \in \mathbb{N})$			

$$S = (2n + 1) + (2m + 1) + (2p + 1) + (2r + 1)$$

$$S = 2n + 2m + 2p + 2r + 4$$

$$S = 2(n + m + p + r + 2)$$

$$S \text{ ist gerade, da } (n + m + p + r + 2) \in \mathbb{N}$$

(Einführen von vier Variablen;  
 Beschreiben der vier Zahlen)  
 (Bilden der Summe)  
 (Zusammenfassen)  
 (Ausklammern)  
 (Das Doppelte einer natürlichen Zahl ist eine gerade Zahl.)

- 31 Beweisen Sie: Das Produkt dreier beliebiger gerader Zahlen ist stets durch 8 teilbar!
- 32 Vermindert man das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl um 1, so ist diese Differenz stets durch 4 teilbar.
- a) Wählen Sie eine ungerade Zahl aus, und zeigen Sie, daß die Aussage für diese Zahl gültig ist!
- b) Beweisen Sie, daß die Aussage für *jede* ungerade natürliche Zahl gültig ist! (L)

## Aufgaben

1. a) Beweisen Sie, daß folgende Aussagen wahr sind!  
 (1) Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar.  
 (2) Wenn die kleinste von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gerade ist, dann ist deren Summe durch 10 teilbar.  
 b) Beweisen Sie, daß folgende Aussage falsch ist!  
 Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 10 teilbar.
2. Beweisen Sie!  
 Für beliebige natürliche Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt:  
 Wenn  $a|b$  und  $b|c$ , so ist auch  $a$  ein Teiler von  $c$ . (L)
3. a) Beweisen Sie!  
 Die Summe der Quadrate zweier gerader Zahlen ist durch 4 teilbar.  
 b) Untersuchen Sie, ob die Summe der Quadrate von drei geraden Zahlen stets durch 8 teilbar ist!  
 c) Beweisen Sie!  
 Das Quadrat der Summe zweier ungerader Zahlen ist ein Vielfaches von 4.
4. Beweisen Sie!  
 Wenn die kleinste von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 2 teilbar ist, so ist das Produkt dieser Zahlen ein Vielfaches von 24.
5.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  sind vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.  
 a) Man beweise:  $a + d = b + c$ !    b) Man beweise:  $a \cdot d < b \cdot c$ !
6. Es ist gegeben:  $2^2 - 1 = 1 \cdot 3$   
 $3^2 - 1 = 2 \cdot 4$   
 $4^2 - 1 = 3 \cdot 5$   
 $5^2 - 1 = 4 \cdot 6$   
 a) Überprüfen Sie, ob diese Gleichungen wahre Aussagen sind!  
 b) Setzen Sie die Folge dieser Gleichungen um drei weitere fort!  
 c) Formulieren Sie den erkannten Zusammenhang mit Variablen!  
 d) Überprüfen Sie, ob die in c) formulierte Gleichung für beliebige natürliche Zahlen eine wahre Aussage ist!
7. Die folgenden vier Aussagen sind falsch. Beweisen Sie dies durch Angabe von je einem Gegenbeispiel!  
 Für alle natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:  
 (1) Wenn  $a|b$ , so  $a < b$ .    (2) Wenn  $a < b$ , so  $a|b$ .  
 (3)  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$     (4)  $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
8. Gegeben sind drei wahre Aussagen:  
 (1) Es gibt rationale Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .  
 (2) Für alle ganzen Zahlen  $a$ ,  $b$  gilt:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .  
 (3) Für alle rationalen Zahlen  $a$ ,  $b$  gilt:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .  
 a) Beweisen Sie (1)!  
 b) Beweisen Sie (2)! Warum genügt die Angabe spezieller Zahlen für  $a$  und  $b$  hier nicht?  
 c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Auffassung! (L)

- Wenn man (3) bewiesen hat, so ist auch (1) bewiesen.
- Wenn man (1) bewiesen hat, so ist auch (3) bewiesen.
- Wenn man (3) bewiesen hat, so ist auch (2) bewiesen.
- Wenn man (2) bewiesen hat, so ist auch (1) bewiesen.
- Wenn man (2) bewiesen hat, so ist auch (3) bewiesen.

- 9.\* Die folgende Aussage ist wahr: Eine natürliche Zahl  $a$  und ihr Nachfolger besitzen außer der Zahl 1 keine gemeinsamen Teiler.
- a) Untersuchen Sie Beispiele!
  - b) Formulieren Sie eine Gegenannahme!
  - c) Zeigen Sie, daß die Gegenannahme zu einem Widerspruch führt!
- 10.\* Wir wählen  $\circ$  als ein Symbol, für das man ein Operationszeichen einsetzen kann, und schreiben:
- $$(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)!$$
- Untersuchen Sie, für welche der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation bzw. Division eine wahre Aussage entsteht, wenn  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  beliebige von Null verschiedene rationale Zahlen sind! (L)

## Umformen von Termen

### 7 Wiederholung des Umformens von Termen

- 33 Vereinfachen Sie den Term  $3a - a(b - 2) - 2ab!$   
Berechnen Sie im Kopf die Werte des Ausgangsterms und die des umgeformten Terms für die in der folgenden Tabelle angegebenen Paare reeller Zahlen!

$a$	$b$	$3a - a(b - 2) - 2ab$	umgeformter Term
1	2		
2	-1		
-3	5		

Sie wissen bereits, daß sich viele Terme durch Umformen vereinfachen lassen. Einen Term umformen bedeutet, einen Term zu gewinnen, dessen Wert stets gleich dem Wert des Ausgangsterms ist, wenn man für die in beiden Termen auftretenden Variablen Zahlen aus den Grundbereichen der Variablen einsetzt.<sup>1)</sup>

Wir wollen vereinbaren, daß im folgenden – falls nichts anderes angegeben wird –  $R$  der Grundbereich für die in Termen auftretenden Variablen ist.

Beim Umformen von Termen wenden wir Gesetze an, die für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten.

- 34 a) Schreiben Sie den Term  $6t + (-3s) + (-7s) + (-3t)$  so auf, daß keine Klammern auftreten!

<sup>1)</sup> Man sagt auch treffend: Der Ausgangsterm ist „werteverlaufsgleich“ zum umgeformten Term.

- b) Schreiben Sie den Term  $5u - 7v + 3w - 19$  so auf, daß nur das Operationszeichen  $+$  auftritt!
- c) Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich! (L)  
 $5a + (-2b) - (-4a) + 3b$  ;  $2y + (-3z) - (-4y) + (-9z) - y$  ;  
 $16r + 22s - 8rs + 15r - 2s + 12rs$

Will man z. B. den Term  $3a - (5b - 6c) + (5a + 7c) - (-4b + 3c)$  vereinfachen, sind zunächst die Klammern „aufzulösen“.

Steht vor der Klammer „(“ das Zeichen $+$ , so darf das Klammernpaar „( )“ weggelassen werden. Alle Zeichen in der Klammer bleiben unverändert.	$3a + (5b - 6c)$ $= 3a + 5b - 6c$
Steht vor der Klammer „(“ das Zeichen $-$ , so darf das Klammernpaar „( )“ weggelassen werden, wenn in der Klammer jedes der Zeichen $+$ durch $-$ und jedes der Zeichen $-$ durch $+$ ersetzt wird.	$3a - (-5b + 6c)$ $= 3a + 5b - 6c$

- 35 Vereinfachen Sie so weit wie möglich! (L)  
 a)  $3a - (5b - 6c) + (5a + 7c) - (-4b + 3c)$   
 b)  $(4ab - c) - (ab + 2c) + (a + 2c) - (-b - c) - (a + b)$

Will man z. B. die Terme  $2uv^2$  und  $4u^3v$  multiplizieren, so bildet man das Produkt der als Faktoren vor den Variablen stehenden Zahlen und nutzt für das Produkt aus den Variablen die Potenzschreibweise:

$$2uv^2 \cdot 4u^3v = 2 \cdot 4 \cdot u \cdot u^3 \cdot v^2 \cdot v = 8u^4v^3$$

- 36 Vereinfachen Sie die folgenden Terme!  
 a)  $a \cdot 2a \cdot b \cdot 3ab$     b)  $(-4s^2) \cdot (-2st) \cdot (0,1st^2u) \cdot s^3t^3 \cdot (-3)u$   
 c)  $(-8a^3b^2c) \cdot (-2ab^2) \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right)$  (L)

Bei der *Division von Produkten* ist es häufig zweckmäßig, für Quotienten die Bruchdarstellung zu wählen. Oft kann man dann einen solchen Bruch durch Kürzen vereinfachen.

- 37 Vereinfachen Sie die folgenden Quotienten!  
 a)  $64x : 8xy$  ( $x \neq 0$ ;  $y \neq 0$ )  
 b)  $(-24a^2bc) : (-32abc^2)$  ( $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ;  $c \neq 0$ )

Sie haben bereits kennengelernt, wie man Terme durch *Ausmultiplizieren* bzw. *Ausklammern* umformen kann:

<b>Ausmultiplizieren</b> (Umformen eines Produktes in eine Summe) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$2s(4rs + r^2) = 8rs^2 + 2r^2s$
<b>Ausklammern</b> (Umformen einer Summe in ein Produkt)	$6a + 15ax = 2 \cdot 3 \cdot a + 3 \cdot 5 \cdot a \cdot x$ $= 3a(2 + 5x)$

- 38 a) Formen Sie die folgenden Terme in Summen um!  
 $(-2a) \cdot (3b + 5a^2)$ ;  $(3m - 2n + 7) \cdot (-7mn)$ ;  $x(y - z) - (x - z)y$  (L)  
 b) Formen Sie die folgenden Terme in Produkte um!  
 $3a + 5ra$ ;  $18x^2yz^2 - 21xyz^3$ ;  $8s^2 - 4rs + 12r^3s$  (L)

Die *Division einer Summe durch einen Term* kann man durch die Multiplikation der Summe mit dem Reziproken des Terms ersetzen:

$$(a + b + c) : d = (a + b + c) \cdot \frac{1}{d} = a \cdot \frac{1}{d} + b \cdot \frac{1}{d} + c \cdot \frac{1}{d}$$

$$= \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = a : d + b : d + c : d \quad (\text{für } d \neq 0).$$

Man *dividiert* also eine Summe durch einen Term, indem man jeden Summanden durch den Term dividiert.

● 39 Dividieren Sie!

$$(32ab + 9b^2) : 4b \quad (b \neq 0); \quad (3rs + 12r + 15r^2) : 3r \quad (r \neq 0);$$

$$(63x^2 - 81xy + 27xy^2) : (-9xy) \quad (x \neq 0; y \neq 0) \quad (L)$$

Summen werden multipliziert, indem man *jeden* Summanden der ersten Summe mit *jedem* Summanden der zweiten Summe multipliziert und die erhaltenen Glieder addiert:

$$\begin{array}{c} \overbrace{(a+b)} \cdot \underbrace{(c+d)} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ ac + ad + bc + bd \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2s+r) \cdot (3s-1) &= 6s^2 - 2s + 3rs - r \\ (y-x) \cdot (3y-2xy+x) &= \\ 3y^2 - 2xy^2 + yx - 3xy + 2x^2y - x^2 &= \\ = 3y^2 - 2xy^2 - 2xy + 2x^2y - x^2 & \end{aligned}$$

● 40 Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um, und fassen Sie die Summanden so weit wie möglich zusammen!

a)  $(a+b)(2a-b)$

b)  $(x-y)(x+y)$

c)  $(2t+s)(4t-3st+6s)$

d)  $(2r^2-s)(8r+5s^4)$

### Aufgaben

1. Vereinfachen Sie die folgenden Terme!

a)  $3a + (4b - 2c) + 2c - a$

b)  $(16r - 21s) - (15r - 12s)$

c)  $15 - (3x - 19y) - (3 - 4x - 2y)$

d)  $\frac{2}{3}r + \left(-\frac{2}{3}r + \frac{a}{2}\right) - \left(\frac{r}{3} + \frac{3}{2}a\right) \quad (L)$

e)  $(2f - g) - (3f + 4g)$

f)  $5r^2 - 7s - (4r + 3s^2) + (7r + 11s) \quad (L)$

2. Ein Schüler formt um:  $4a - 2b + 3ab = (4 - 2 + 3) \cdot ab = 5ab$ .

Er argumentiert: Für  $a = 1$  und  $b = 1$  erhält man  $5 = 5$ .

Für  $a = 0$  und  $b = 0$  erhält man  $0 = 0$ .

Für  $a = 3$  und  $b = 1,5$  erhält man  $22,5 = 22,5$ .

Was meinen Sie zu diesen Überlegungen? Wie würden Sie umformen?

3. Gegeben sind die Summen

$$S_1 = 3p - 4q + 5r; \quad S_2 = -2p + 3q - 4r - 1;$$

$$S_3 = \frac{1}{3}p - \frac{1}{4}q + \frac{3}{3}; \quad S_4 = p + 2r.$$

Bilden Sie die folgenden Terme und fassen Sie so weit wie möglich zusammen!

a)  $S_1 + S_2$

b)  $S_1 - S_2$

c)  $S_2 - S_1$

d)  $S_1 + S_2 + S_3$

e)  $S_1 - S_2 - S_3$

f)  $S_1 - S_2 + S_4$

g)  $S_4 + S_4$

h)  $S_1 + S_4$

4. Gegeben sind folgende Produkte:  $P_1 = 10,81xy$ ;  $P_2 = -49,25x^2y$ ;  $P_3 = \pi xyz$ ;  
 $P_4 = 1,88xy^3z$  ( $x \neq 0$ ;  $y \neq 0$ ;  $z \neq 0$ )



11. Berechnen Sie die Werte der folgenden Terme für  $s = 0,8$  und  $v = -1,2$  möglichst zweckmäßig!
- a)  $(6s - 3v) + (2v - 5s)$       b)  $0,1s \cdot 10v - 2,5s \cdot \frac{2}{5}v$  (L)
- c)  $(s - v)(s + v) - v^2$       d)  $s - 2(v + 0,5s) - v$
- e)  $3(s + v) - 4(s - v) + 2(s - 3v)$  (L)      f)  $2s - (s - (-v)) + v$
12. Formen Sie die folgenden Gleichungen nach der jeweils hinter der Gleichung stehenden Variablen um! Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse!
- a)  $A = \frac{abc}{4r}$ ;  $r$  ( $r \neq 0, A \neq 0$ )      b)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ;  $a$  ( $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, b \neq c$ )
- c)  $\frac{1}{a} - \frac{1}{5a} = b$ ;  $a$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ )      d)  $A = \frac{(a+c)h}{2}$ ;  $a$  ( $h \neq 0$ ) (L)
- e)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcd$ ;  $d$  ( $b \neq 0, c \neq 0$ )      f)  $V = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$ ;  $r$  ( $h \neq 0$ )
- 13.\* Vereinfachen Sie die folgenden Terme!
- a)  $(2a - 4b) \cdot 3c + 4a^2bc : 0,5ab$  ( $a \neq 0; b \neq 0$ )
- b)  $\left(\frac{2}{3}u - \frac{5}{4}v + \frac{1}{2}w\right) \left(-\frac{3}{4}v\right) + \left(-\frac{u^2v}{2u}\right) + 30v^2w : 15w$  ( $u \neq 0; w \neq 0$ )
- c)  $\frac{3}{4} - \left\{ \frac{1}{6} - \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{5} \right] + \frac{13}{15} \right\}$  (L)
- d)  $[(-a^2b) : (5a^2b^2)] \cdot 7ab - 14a^3b^2 : [(-3ab) \cdot 7a^2b]$  ( $a \neq 0; b \neq 0$ )

## 8 Die binomischen Formeln

- 41 Formen Sie die folgenden Produkte reeller Zahlen in Summen um, und fassen Sie zusammen!
- (1)  $(a + b)(a + b)$  ;  $(x + y)(x + y)$  ;  $(m + n)(m + n)$   
 (2)  $(a + b)(a - b)$  ;  $(x + y)(x - y)$  ;  $(m - n)(m + n)$

Summen, welche aus zwei Gliedern bestehen, heißen **Binome** (Beispiele:  $m + n$ ;  $2x - y$ ;  $r^2 + 4t$ ;  $u^2 - v^2$ ).

Für beliebige reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:

$$(1) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

(1) und (2) heißen **binomische Formeln**.

- 5 Es soll jeweils in eine Summe umgeformt werden:

a)  $(3s + 2t)^2$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (3s + 2t)^2 & = & (3s)^2 & + & 2 \cdot 3s \cdot 2t & + & (2t)^2 \\ & & = & 9s^2 & + & 12st & + & 4t^2 \end{array}$$

b)  $(6x - y)(6x - y)$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (6x - y)(6x - y) & = & (6x)^2 & - & (y)^2 \\ & & = & 36x^2 & - & y^2 \end{array}$$

- 6 Das Produkt  $(k-3)(k-3)$  soll in eine Summe umgeformt werden. Wir schreiben  $(k-3)(k-3)$  als Quadrat einer Summe und wenden die binomische Formel (1) an:  
 $(k-3)^2 = (k+(-3))^2 = k^2 + 2k(-3) + (-3)^2 = k^2 - 6k + 9.$
- 42 Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um! Benutzen Sie dabei die binomischen Formeln!  
 $(k+1)(k+1)$ ;  $(k+1)(k-1)$ ;  $(k+(-1))^2$ ;  
 $((-a)+b)^2$ ;  $(2a+(-0,5b))^2$ ;  $(s-t)^2$ ;  $(a+7)^2$ ;  
 $(m-7)^2$ ;  $(p-9)(p+9)$ ;  $(0,1x+0,3y)(0,1x-0,3y)$ ;  
 $(uv-17)(uv+17)$ ;  $(a-b)(b+a)$
- 43 Deuten Sie die binomische Formel (1) geometrisch! Fasen Sie dabei  $(a+b)^2$ ;  $a^2$ ;  $b^2$  und  $a \cdot b$  als Zahlenwerte der Flächeninhalte von Rechtecken auf! Verwenden Sie dazu das Bild A 11!

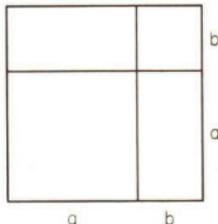


Bild A 11

Die binomischen Formeln können auch für das Umformen von Summen in Produkte genutzt werden. Dazu lesen wir sie „von rechts nach links“.

- 7 a) Es ist zu prüfen, ob sich die Summe  $m^2 + 20mp + 100p^2$  in ein Produkt umformen läßt. Man erkennt, daß zwei der Summanden Quadrate sind, nämlich  $m^2$  und  $(10p)^2$ . Nun ist zu untersuchen, ob der Summand  $20mp$  das doppelte Produkt von  $m$  und  $10p$  ist.  
 Es gilt:  $2 \cdot m \cdot 10p = 20mp$ .  
 Also ergibt sich:  $m^2 + 20mp + 100p^2 = \underline{(m + 10p)^2}$ .
- b) Es ist zu prüfen, ob der Term  $16x^2 - 24xy + 9y^2$  in ein Produkt umgeformt werden kann.  
 Die beiden quadratischen Glieder sind  $(4x)^2$  und  $(3y)^2$ . Das doppelte Produkt von  $4x$  und  $3y$  ist  $24xy$ . Es ergibt sich:  $16x^2 - 24xy + 9y^2 = \underline{(4x - 3y)^2}$
- 8 Zu überprüfen ist, ob der Term  $16 - 16a + a^2$  in ein Produkt umgeformt werden kann.  
 Es treten zwei quadratische Glieder auf, nämlich  $4^2$  und  $a^2$ . Das doppelte Produkt von  $4$  und  $a$  ist  $8a$ . Es stimmt *nicht* mit  $16a$  überein. Eine Umformung von  $16 - 16a + a^2$  in ein Produkt aus zwei gleichen Differenzen ist also nicht möglich.

Terme, die sich in die Form  $(a+b)^2$  oder  $(a-b)^2$  bringen lassen, heißen *vollständige Quadrate*.

Relativ leicht erkennt man Terme, die unter der Verwendung der binomischen Formel (2) in ein Produkt umgeformt werden können: Der Term muß eine Differenz aus zwei Quadraten sein.

- 9 Der Term  $4r^2 - 9t^2$  soll in ein Produkt umgeformt werden. Wegen  $4r^2 = (2r)^2$  und  $9t^2 = (3t)^2$  gilt nach (2):  
 $4r^2 - 9t^2 = \underline{(2r + 3t)(2r - 3t)}$
- 44 a) Unter den folgenden acht Summen sind genau drei vollständige Quadrate. Geben Sie diese an!  
 Suchen Sie zunächst diejenigen Fälle heraus, bei denen sofort zu erkennen ist, daß *kein* vollständiges Quadrat vorliegen kann!

- (1)  $9x^2 + 6ax + a^2$       (2)  $4y^2 - 8y$       (3)  $2 + a^2 - 8ab$   
 (4)  $x^2 + 8x + 8$       (5)  $a^2 + 2ab - b^2$       (6)  $p^2 + 2pq + q^2$

b) Formen Sie die vollständigen Quadrate in Produkte um! (L)

Häufig ist es zweckmäßig, Terme, die *keine* vollständigen Quadrate sind, zu einer Summe zu *ergänzen*, die ein vollständiges Quadrat *enthält*.

Wir wollen versuchen, den *kleinstmöglichen Wert* des Terms  $x^2 + 6x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) zu ermitteln. Welche reelle Zahl muß man in diesem Fall für  $x$  einsetzen? Durch Probieren würde man z. B. erhalten:

$x$	6	3	2	1	0	-1	-2	-5	-7	-10
$x^2 + 6x$	72	27	16	7	0	-5	-8	-5	7	40

Durch das Einsetzen spezieller Zahlen wird man ein solches Problem kaum lösen. Wir wählen einen anderen Weg: Der Term  $x^2 + 6x$  wird zunächst zu einem *vollständigen Quadrat* ergänzt:

$$x^2 + 6x + 3^2 = (x + 3)^2$$

Allerdings ist der Term  $(x + 3)^2$  stets um 9 größer als  $x^2 + 6x$ , welche Zahl man auch für  $x$  einsetzt. Es gilt jedoch:

$$x^2 + 6x = x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 = (x + 3)^2 - 9 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Unser Problem ist nun leicht lösbar:

Das Quadrat einer reellen Zahl ist stets nicht negativ. Also ist 0 der kleinstmögliche Wert für  $(x + 3)^2$ ; man erhält ihn für  $x = -3$ . Somit ist der kleinstmögliche Wert für  $(x + 3)^2 - 9$  und damit auch für den Term  $x^2 + 6x$  die reelle Zahl  $-9$ .

Der Summand  $3^2$  heißt *quadratische Ergänzung* des Terms  $x^2 + 6x$ .

Will man den Term  $a^2 + 2ab$  in einen Term umformen, der ein *vollständiges Quadrat* enthält, so ist die *quadratische Ergänzung* zu *addieren* und gleichzeitig zu *subtrahieren*.

10 Folgende Terme sollen in einen Term umgeformt werden, welcher ein vollständiges Quadrat enthält.

a)  $r^2 + 10r$

Wir gehen aus von  $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$ ,

ordnen zu  $r^2 + 2 \cdot r \cdot 5$

und formen um  $r^2 + 2 \cdot r \cdot 5 + 5^2 - 5^2 = (r + 5)^2 - 5^2$ .

Also gilt  $r^2 + 10r = \underline{(r + 5)^2 - 25}$ .

b)  $x^2 - 8x + 7$

Wir gehen aus von  $a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$ ,

ordnen zu  $x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 7$

und formen um  $x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 7$

$$= (x - 4)^2 - 4^2 + 7.$$

Also gilt  $x^2 - 8x + 7 = \underline{(x - 4)^2 - 9}$ .

45 Formen Sie  $x^2 + px + q$  in einen Term um, der ein vollständiges Quadrat enthält! (L)

## Aufgaben

1. Formen Sie in Summen um!  
 a)  $(7 + b)^2$       b)  $(3z + t)^2$       c)  $(s - 5r)^2$       d)  $(15a + 20c)^2$   
 e)  $(1,3r - 0,2f)^2$       f)  $\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{7}\right)^2$  (L)      g)  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$       h)  $(3t^2 - 5r^2)^2$  (L).
2. Formen Sie die folgenden Produkte in Summen um!  
 a)  $(f - g)(f + g)$       b)  $(2k + p)(2k - p)$   
 c)  $(1,1a + 1,2)(1,1a - 1,2)$       d)  $(0,08s + t)(-0,08s + t)$   
 e)  $(a^2 + d)(a^2 - d)$  (L)      f)  $\left(\frac{r}{5} - \frac{s}{7}\right)\left(\frac{r}{5} + \frac{s}{7}\right)$  (L)
3. Formen Sie in ein Produkt um!  
 a)  $d^2 - r^2$       b)  $b^2 - a^2$       c)  $4m^2 - 25n^2$   
 d)  $R_1^2 - R_2^2$       e)  $-x^2 + y^2$       f)  $0,01u^2 - 9v^2$   
 g)  $3s^2 - 36t^2$  (L)      h)  $\frac{4}{9}a^2 - 1,44b^2$  (L)
4. Formen Sie, falls möglich, in Produkte um! Begründen Sie anderenfalls, warum der jeweilige Term kein vollständiges Quadrat ist!  
 a)  $s^2 + 2st + t^2$       b)  $x^2 + 4x + 4$       c)  $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$   
 d)  $s^2 - s + \frac{1}{4}$       e)  $a^2 + ab + b^2$       f)  $x^2 + 2xy$   
 g)  $4a^2 + 4ab + b^2$       h)  $m^2 - 2mn - n^2$       i)  $u^2 - 20u + 100$   
 k)  $x^2 - 2x^2y^2 + y^2$       l)  $u^2 + v^2$       m)  $4s^2 - 6st + 9t^2$   
 n)  $p^2 - 2qp + 4q^2$       o)  $f^2 + 2fg + g^2$
5.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  wird für alle reellen Zahlen zu einer wahren Aussage  
 $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  wird nur für gewisse Paare reeller Zahlen zur wahren Aussage.  
 a) Geben Sie solche Paare an!  
 b) Nennen Sie Zahlenpaare, für welche die genannte Gleichung falsch wird!
6. Rechnen Sie möglichst vorteilhaft im Kopf!  
 a)  $97^2$  (L)      b)  $52^2$       c)  $104 \cdot 96$  (L)      d)  $98 \cdot 102$
7. Das Bild A 12 veranschaulicht die Beziehung  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . Erläutern Sie den Zusammenhang!

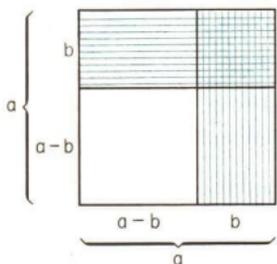


Bild A 12

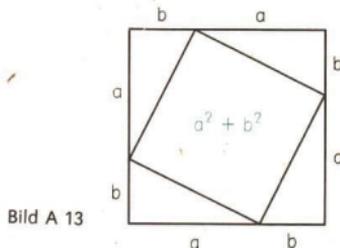


Bild A 13

8. Das Bild A 13 veranschaulicht die Beziehung  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .  
 a) Welchen Flächeninhalt besitzt das Quadrat mit den Seitenlängen  $a + b$ ?

- b) Weisen Sie nach, daß das kleine Quadrat den Flächeninhalt  $a^2 + b^2$  hat!
- c) Ermitteln Sie den Flächeninhalt jedes der vier kongruenten Dreiecke!
- d) Bestätigen Sie, daß der Flächeninhalt der fünf Teilfiguren gleich dem Flächeninhalt des großen Quadrates ist!
- e) In welchem Verhältnis stehen die beiden Quadratflächen, wenn  $a = b$  ist? (L)
9. a) Die Formeln (1)  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  und (2)  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  sind Spezialfälle der Gleichung  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ . Wählen Sie die Variablen so, daß diese Gleichung in (1) bzw. (2) übergeht!
- b) Zeigen Sie, daß gilt:  $(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ !
- c) Zeigen Sie, daß gilt:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  und  $(-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ !
10. Formen Sie in einen Term um, der ein vollständiges Quadrat enthält!
- a)  $s^2 + 8s$       b)  $s^2 + 8s + 5$       c)  $m^2 + 2mn$       d)  $m^2 + 10mn$   
 e)  $x^2 + 20x$       f)  $x^2 + 20x + 12$       g)  $x^2 - 6x + 9$       h)  $x^2 - 6x - 100$
11. Formen Sie die folgenden Terme in eine Summe der Form  $(y + c)^2 + d$  um!
- a)  $y^2 + 2y + 3$  (L)      b)  $y^2 + 4y + 3$       c)  $y^2 - 2y + 3$   
 d)  $y^2 - 4y + 3$       e)  $y^2 + 2y - 3$       f)  $y^2 - 4y - 3$
12. Welches sind die kleinstmöglichen Werte, welche die folgenden Terme jeweils annehmen können?
- a)  $s^2 - 4s$       b)  $t^2 + t$       c)  $u^2 + 2u + 100$  (L)      d)  $r^2 - 6r - 30$
13. Zeigen Sie, daß gilt
- a)  $(m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn$ ;      b)  $(m + n)^2 + (m - n)^2 = 2(m^2 + n^2)$ !
- 14.\* a) Berechnen Sie:  $(a + b)^3$  und  $(x + y)^3$ !  
 b) Erläutern Sie die erkannte Gesetzmäßigkeit mit Worten!  
 c) Nutzen Sie die Resultate von a), um  $(u + v)^3$  in eine Summe umzuformen, ohne die Klammern auszumultiplizieren!  
 d) Was ändert sich bei den in c) erhaltenen Ergebnissen, wenn in den dritten Potenzen das Zeichen + durch das Zeichen - ersetzt wird?
15. Die Länge einer Quadratseite wird gemessen. Die ermittelte Größe  $a$  ist ein Näherungswert mit dem absoluten Fehler  $\Delta a$ . Geben Sie Wertschranken für den Flächeninhalt des Quadrates an!

## 9 Addition und Subtraktion von Quotienten

- 46 Für beliebige ganze Zahlen  $a, b, c, d$  mit  $b \neq 0$  und  $d \neq 0$  gilt:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ . Formulieren Sie eine entsprechende Aussage für die Subtraktion!
- 47 Berechnen Sie die Summen bzw. Differenzen! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!
- $$\frac{3}{7} + \frac{8}{7}; \quad \frac{6}{5} - \frac{3}{5}; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{8}; \quad \frac{4}{10} + \frac{5}{12} - \frac{2}{15}$$

Häufig lassen sich Summen oder Differenzen, deren Glieder aus Quotienten bestehen, durch Umformen vereinfachen. Es ist dabei zweckmäßig, für die Quotienten die Bruchdarstellung zu wählen. Man kann sich dann an der Vorgehensweise bei der Addition bzw. der Subtraktion von Brüchen orientieren.

- 11 Die folgenden Summen sollen vereinfacht werden:

$$(4 : 12) + (1 : 5); (ax : x^2y) + (b^2 : bx) \quad (x \neq 0, y \neq 0, b \neq 0).$$

Wir wählen für die auftretenden Quotienten die Bruchschreibweise.

$$\frac{4}{12} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{ax}{x^2y} + \frac{b^2}{bx} = \frac{a}{xy} + \frac{b}{x} = \frac{a}{xy} + \frac{by}{xy} = \frac{a+by}{xy} \quad (x \neq 0; y \neq 0)$$

Wir üben zunächst das *Kürzen* und *Erweitern* von Termen in Bruchdarstellung.

Beim <i>Kürzen</i> eines Bruches werden Zähler und Nenner durch den gleichen von Null verschiedenen Faktor dividiert. Dadurch wird der Bruch i. allg. vereinfacht.	$\frac{8ab^2c}{12a^2b} = \frac{2bc}{3a} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$ Kürzungsfaktor: $4ab$
Beim <i>Erweitern</i> eines Bruches werden Zähler und Nenner mit dem gleichen (von Null verschiedenen) Faktor multipliziert.	$\frac{0,2x}{3,5y} = \frac{2xz}{35yz} \quad (y \neq 0, z \neq 0)$ Erweiterungsfaktor: $10z$

- 48 Vereinfachen Sie die folgenden Terme durch Kürzen!

a)  $\frac{4xy^2z}{16x^2yz} \quad (x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0)$     b)  $\frac{3stu + 12stuv}{9stuv} \quad (s \neq 0; t \neq 0; u \neq 0; v \neq 0) \quad (L)$

c)  $\frac{(m-n)^2}{m^2-n^2} \quad (|m| \neq |n|)$

- 49 Ergänzen Sie die folgende Tabelle!

Ausgangsbruch	Erweiterungsfaktor	Erweiterter Bruch
$\frac{a+1}{b} \quad (b \neq 0)$	$a \quad (a \neq 0)$	$\frac{100x^2y}{68xz}$
$\frac{25xy}{17z} \quad (z \neq 0)$		
$\frac{12m+n}{5mn} \quad (m \neq 0; n \neq 0)$	$t-1 \quad (t \neq 1)$	

Terme in Bruchdarstellung können durch Erweitern *gleichnamig* gemacht werden:

Ausgangsterme	$\frac{2r}{9ab}; \frac{5}{12b^2} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$	$\frac{t}{6(s+t)}; \frac{3}{4(s-t)} \quad (s \neq t; s \neq -t)$
- Ermitteln eines gemeinsamen Nenners	k. g. V. von 9 und 12 ist 36. Gemeinsames Vielfaches von $ab$ und $b^2$ ist $a \cdot b^2$ . Gemeinsamer Nenner: $36 \cdot ab^2$	k. g. V. von 6 und 4 ist 12. Gemeinsames Vielfaches von $s+t$ und $s-t$ ist $(s+t) \cdot (s-t)$ . Gemeinsamer Nenner: $12 \cdot (s+t) \cdot (s-t)$
- Erweitern der gegebenen Terme	$\frac{8br}{36ab^2}; \frac{15a}{36ab^2}$	$\frac{2t(s-t)}{12(s+t)(s-t)}; \frac{9(s+t)}{12(s+t)(s-t)}$

- 50 Machen Sie die folgenden Terme durch Erweitern gleichnamig!

a)  $\frac{1}{2a}$  und  $\frac{1}{6b}$  ( $a \neq 0; b \neq 0$ )

b)  $\frac{1}{24rs^2t}$  und  $\frac{7}{36r^2st^3}$  ( $r \neq 0; s \neq 0; t \neq 0$ )

c)  $\frac{x}{x+y}$  und  $\frac{4y}{x-y}$  ( $|x| \neq |y|$ )

d)  $\frac{a}{6(a+b)(a-b)}$  und  $\frac{b}{10(a+b)^2}$  ( $|a| \neq |b|$ ) (L)

Beim **Addieren** bzw. **Subtrahieren** von Termen in Bruchdarstellung gehen wir wie beim Rechnen mit gebrochenen Zahlen vor:

- Ermitteln eines gemeinsamen Nenners;
- Gleichnamigmachen der Brüche;
- Addieren bzw. Subtrahieren der Zähler der gleichnamigen Brüche und Beibehalten des gemeinsamen Nenners.

$$\frac{3}{8ab^2} + \frac{5}{6abc} \quad (a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0)$$

$$\begin{aligned} & \frac{24ab^2c}{9c} + \frac{20b}{24ab^2c} \\ & \frac{24ab^2c}{9c} + \frac{20b}{24ab^2c} \\ & = \frac{9c + 20b}{24ab^2c} \end{aligned}$$

■ 12 a)  $\frac{2r}{3u^2v} - \left( \frac{5s}{12uv^2} - \frac{3}{8uvw} \right)$  ( $u \neq 0; v \neq 0; w \neq 0$ )

Gemeinsamer Nenner:  $24u^2v^2w$

Gleichnamigmachen und Subtrahieren:

$$\begin{aligned} \frac{2r}{3u^2v} - \left( \frac{5s}{12uv^2} - \frac{3}{8uvw} \right) &= \frac{16rvw}{24u^2v^2w} - \left( \frac{10suw}{24u^2v^2w} - \frac{9uv}{24u^2v^2w} \right) \\ &= \frac{16rvw - 10suw + 9uv}{24u^2v^2w} \end{aligned}$$

b)  $\frac{1}{m^2 + 2mn + n^2} + \frac{1}{m^2 - n^2}$  ( $m + n \neq 0; |m| \neq |n|$ )

$$m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2 \quad m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$$

Gemeinsamer Nenner:  $(m + n)^2(m - n)$

Gleichnamigmachen und Addieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2 + 2mn + n^2} + \frac{1}{m^2 - n^2} &= \frac{m - n}{(m + n)^2(m - n)} + \frac{m + n}{(m + n)^2(m - n)} \\ &= \frac{(m - n) + (m + n)}{(m + n)^2(m - n)} = \frac{2m}{(m + n)^2(m - n)} \end{aligned}$$

## Aufgaben

*Hinweis:* Es wird vorausgesetzt, daß alle auftretenden Nenner von Null verschieden sind.

1. Vereinfachen Sie durch Kürzen!

a)  $\frac{4ab}{16bc}$

b)  $\frac{0,3rs^2t}{0,6rst^2}$

c)  $\frac{144(u+v) \cdot w}{96(u+v) \cdot z}$

d)  $\frac{-33a^3b}{-99ab^3}$

e)  $\frac{-(a-b)}{b-a}$  (L)

f)  $\frac{16(m-n)}{20(m^2-n^2)}$  (L)

2. Berechnen Sie!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \text{ und } \frac{1}{a} + \frac{3}{a} & \text{b) } \frac{7}{9} + \frac{5}{9} \text{ und } \frac{7}{x} + \frac{5}{x} \\ \text{c) } \frac{9}{11} - \frac{2}{11} \text{ und } \frac{9s}{t} - \frac{2s}{t} & \text{d) } \frac{9}{8} - \frac{1}{8} \text{ und } \frac{u+1}{u} - \frac{1}{u} \end{array}$$

3. Erweitern Sie die folgenden Brüche so, daß sich der jeweils nachstehende Term als Nenner ergibt!

$$\text{a) } \frac{15ab}{14bc}; 70bc \quad \text{b) } \frac{a+b}{17r}; 85rst \quad \text{c) } \frac{rm}{15n}; 60m^2n^2$$

Berechnen Sie die folgenden Terme!

$$\begin{array}{llll} 4. \uparrow \text{ a) } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} & \text{b) } \frac{3}{a} + \frac{5}{b} & \text{c) } \frac{m}{n} + \frac{n}{m} & \text{d) } \frac{1}{15x} + \frac{1}{xy} \\ \text{e) } \frac{c}{2} - \frac{2}{c} \text{ (L)} & \text{f) } \frac{1}{15a^2} - \frac{1}{20ab} & \text{g) } \frac{15a}{14bc} + \frac{7a}{112bd} & \text{h) } \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \\ \text{i) } \frac{1}{12y} - \frac{y}{30xz} \text{ (L)} & \text{k) } \frac{a}{b^2} + b^2 \text{ (L)} & \text{l) } \frac{a}{b^2} - a & \\ \text{m) } \frac{a}{b^2} + 1 & \text{n) } \frac{a}{b^2} + \frac{b^2}{a} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5. \uparrow \text{ a) } \frac{c-3}{20c} - \frac{c-4}{20c} + \frac{c-5}{20c} & \text{b) } \frac{c-3}{20c} - \frac{c-4}{25c} + \frac{c-5}{50c} \\ \text{c) } \frac{9}{m+n} + \frac{5}{m} & \text{d) } \frac{9}{m} - \frac{5}{m \cdot n} \\ \text{e) } \frac{2u}{5} - \frac{u+v}{3} + \frac{u-v}{v} & \text{f) } \frac{2u}{2v} - \frac{u+v}{3v} + \frac{u-v}{u} \text{ (L)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 6. \uparrow \text{ a) } \frac{1}{u+v} + \frac{1}{u-v} - \frac{1}{u^2-v^2} & \text{b) } \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} + \frac{xy}{ab} \\ \text{c) } \frac{7y}{x^2+xy} - \frac{5x}{xy+y^2} + \frac{3}{xy} & \text{d) } \frac{2u}{4v+5} - \frac{5u-1}{10v} - \frac{v-1}{8} \end{array}$$

7. Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungen für beliebige von Null verschiedene reelle Zahlen wahre Aussagen sind!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{p^2+p}{p} - p = 1 & \text{b) } \frac{a-bc}{b} + c = \frac{a}{b} \\ \text{c) } \frac{x}{y} - \frac{xy+y^2z}{y^2} = -z & \text{d) } s \left( 1 - \frac{1}{s} \right) + 1 = s \end{array}$$

## 10 Multiplikation und Division von Quotienten

• 51 Für beliebige ganze Zahlen  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ;  $d$  ( $b \neq 0$ ;  $d \neq 0$ ) gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Formulieren Sie eine entsprechende Aussage für die Division ganzer Zahlen!

• 52 Berechnen Sie  $\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{9}$  und  $\frac{4}{5} : \frac{8}{9}$  sowie  $\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{8}$  und  $\frac{4}{15} : \frac{5}{8}$ !

- 53  $\frac{a}{b}$  ist das Reziproke von  $\frac{b}{a}$  ( $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ). Bilden Sie das Reziproke von  $\frac{s}{t}$ ;  $\frac{7}{9}$ ;  $\frac{1}{f}$ ; 2;  
 $c$ ;  $\frac{1}{1}$ ;  $\frac{a-b}{a+b}$ !

- 13 Der Quotient  $\frac{4a}{15b}$  ( $b \neq 0$ ) soll mit dem Quotienten  $\frac{5b}{8c}$  ( $c \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ) multipliziert bzw. durch ihn dividiert werden.

Wir verwenden dieselben Regeln, die beim Multiplizieren bzw. beim Dividieren rationaler Zahlen verwendet werden (→ Aufträge A 51 und A 52):

$$\frac{4a}{15b} \cdot \frac{5b}{8c} = \frac{4a \cdot 5b}{15b \cdot 8c} = \frac{a}{6c} \quad \frac{4a}{15b} : \frac{5b}{8c} = \frac{4a \cdot 8c}{15b \cdot 5b} = \frac{32ac}{75b^2}$$

Es ist zweckmäßig, beim Multiplizieren und Dividieren von Quotienten die Bruchdarstellung zu nutzen.

*Quotienten* werden *multipliziert*, indem man

- die Zähler der Brüche multipliziert,
- die Nenner der Brüche multipliziert,
- den entstehenden Quotienten nach Möglichkeit durch Kürzen vereinfacht.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{3y^2} \cdot \frac{6xy}{5z} & \quad (y \neq 0; z \neq 0) \\ &= \frac{2x \cdot 6xy}{3y^2 \cdot 5z} = \frac{4x^2}{5yz} \end{aligned}$$

*Quotienten* werden *dividiert*, indem man den Dividenten mit dem Reziproken des Divisors multipliziert.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{3y^2} : \frac{6xy}{5z} & \quad (x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0) \\ &= \frac{2x}{3y^2} \cdot \frac{5z}{6xy} = \frac{2x \cdot 5z}{3y^2 \cdot 6xy} \\ &= \frac{5z}{9y^3} \end{aligned}$$

- 54 Berechnen Sie die folgenden Produkte und Quotienten! Geben Sie Bedingungen dafür an, daß die auftretenden Nenner nicht Null werden können!

a)  $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{6xy}{z}$       b)  $\frac{n^3}{5m} \cdot \frac{15mn}{2}$       c)  $\frac{-8p}{9rst} \cdot (-18rs^2p)$   
 d)  $\frac{2x}{3y} : \frac{6xy}{z}$  (L)      e)  $\frac{n^3}{5m} : \frac{15mn}{2}$       f)  $\frac{-8p}{9rst} : (-18rs^2p)$  (L)

- 14 Die folgenden Terme sind durch Umformen zu vereinfachen:

a)  $\frac{u+v}{u-v} \cdot \frac{2}{u^2-v^2}$  ( $|u| \neq |v|$ )  

$$\frac{(u+v) \cdot u}{(u-v) \cdot (u^2-v^2)} = \frac{(u+v) \cdot u}{(u-v) \cdot (u-v) \cdot (u+v)} = \frac{u}{(u-v)^2}$$

b)  $\frac{(m-n)^2}{m+n} : \frac{m^2-n^2}{-m-n}$  ( $|m| \neq |n|$ )  

$$\frac{(m-n)^2}{m+n} : \frac{m^2-n^2}{-m-n} = \frac{(m-n)^2 \cdot (m+n) \cdot (-1)}{(m+n) \cdot (m+n) \cdot (m-n)} = \frac{n-m}{m+n}$$

c)  $[a : (b^2 + bc)] : [ad : (b + c)]$  ( $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ;  $c \neq 0$ ;  $b \neq -c$ )

Wir schreiben den Quotienten als „Doppelbruch“:

$$\frac{\frac{a}{b^2 + bc}}{\frac{ad}{b + c}}$$

Der Zähler des Doppelbruches wird mit dem Reziproken seines Nenners multipliziert:

$$\frac{a \cdot (b + c)}{(b^2 + bc) \cdot ad} = \frac{a \cdot (b + c)}{b \cdot (b + c) \cdot ad} = \frac{1}{\underline{\underline{bd}}}$$

## Aufgaben

Berechnen Sie die Terme! Alle auftretenden Nenner seien von Null verschieden.

1. ↑ a)  $\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{7}$  und  $\frac{4}{a} \cdot \frac{6}{b}$     b)  $\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14}$  und  $\frac{a}{4b} \cdot \frac{2b}{a}$   
 c)  $\frac{7}{3} : \frac{4}{5}$  und  $\frac{7}{a} : \frac{4}{b}$     d)  $\frac{7}{15} : \frac{21}{5}$  und  $\frac{7}{3a} : \frac{21b}{6a}$
2. ↑ a)  $\frac{r^2s}{uv^2} \cdot \frac{u^2v}{rs^2}$     b)  $\frac{15m}{-18} \cdot \frac{-3n}{5m}$     c)  $\frac{-13m^3}{14n^2} \cdot \frac{18mn^2p}{39m^2n}$  (L)  
 d)  $\frac{a^2}{x} \cdot \frac{y}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}$     e)  $\frac{1}{a+b} \cdot \frac{1}{a-b}$     f)  $\frac{1}{x+y} \cdot (x+y)$   
 g)  $\frac{3x-2}{10y+4} \cdot \frac{4y}{6x-4}$  (L)    h)  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$
3. ↑ a)  $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$     b)  $\frac{a}{5} : \frac{a^2x}{25}$     c)  $\frac{1}{3a} : \frac{1}{5a}$   
 d)  $\frac{ax}{b^2y^2} : \frac{a^2x^2}{by}$     e)  $\frac{1,2p^2}{3,6q^2} : \frac{-6p^2}{10,5q^2}$     f)  $\frac{-36m^2p}{1,3d} : \frac{0,18m}{-52df}$  (L)  
 g)  $\frac{2r}{-7s} : \left(-\frac{6rs}{21}\right)$  (L)    h)  $(-65ab) : \frac{13a^2}{-50b}$     i)  $\left(-\frac{27}{8}a\right) : \left(-\frac{16}{3}b\right)$   
 k)  $\frac{4ax}{b} : (-2ax^2)$
4. Vereinfachen Sie die Doppelbrüche!
- a)  $\frac{\frac{a}{2b}}{\frac{a}{2c}}$     b)  $\frac{\frac{21m^2}{20rs}}{\frac{35m}{16r^2s}}$     c)  $\frac{\frac{4xy^2}{a-b}}{\frac{16x^2y}{a^2-b^2}}$     d)  $\frac{\frac{27rs}{t}}{\frac{9rs^2}{-2t}}$  (L)
5. Berechnen Sie!
- a)  $\frac{5m^2n+7n}{3m-2n} \cdot \frac{4n^2-9m^2}{15n^2m+10n^3}$     b)  $\frac{u-v}{12u} : \frac{v-u}{24v}$   
 c)  $\frac{3(1-2a)}{c(b-1)} : \frac{4(2a-1)}{(1-b)c}$  (L)
- 6.\* Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungen für alle reellen Zahlen aus den Variablengrundbereichen von  $a$ ,  $b$  bzw.  $k$  wahre Aussagen sind!
- a)  $\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}$     b)  $\frac{1}{k} = \frac{1}{(k-1) + (k+1)}$

7.\* Vereinfachen Sie!

a)  $1 - \frac{a}{1 - \frac{1}{1+a}}$

b)  $3x + \frac{56}{7 + \frac{21x}{8-3x}}$

## 11 Weitere Beispiele für Termwertberechnungen mit Hilfe des Taschenrechners

Um den Wert eines Terms mit Hilfe eines Taschenrechners zu ermitteln, kann man verschiedenartige Ablaufpläne verwenden. Man wird einen Plan wählen, bei welchem der Rechenaufwand möglichst gering ist. Mitunter ist es zweckmäßig, einen Term erst umzuformen, ehe man Termwerte berechnet.

- 55 Stellen Sie Ablaufpläne für die folgenden Terme auf! Berechnen Sie nach diesen Plänen die Werte der Terme für die angegebenen Zahlen! Vergleichen Sie den Rechenaufwand!

a)  $\frac{p^2}{4}$  und  $\left(\frac{p}{2}\right)^2$  für  $p = 0,1$ ;  $p = 7,24$ ;  $p = -6,89$

b)  $(a+b)(a-b)$  und  $a^2 - b^2$  für  $a = 3,74$ ;  $b = 2,91$  und  $a = 0,495$ ;  $b = -0,582$

c)  $x^2 + 2xy + y^2$  und  $(x+y)^2$  für  $x = 4,27$ ;  $y = 2,59$  und  $x = 0,431$ ;  $y = -0,684$

- 56 Führen Sie für jeden der beiden Terme  $(4,3 + 7,9 - 3,6) \cdot 2,8$  und  $(4,79 + 9,34) \cdot (5,83 - 4,98)$  folgende Aufträge aus!

- a) Stellen Sie einen Ablaufplan auf, und berechnen Sie den Wert des Terms mit dem SR 1!  
 b) Formen Sie den Term durch Ausmultiplizieren in eine Summe um! Stellen Sie einen Ablaufplan für die Berechnung der Summe mit dem SR 1 auf, und berechnen Sie den Termwert erneut!  
 c) Vergleichen Sie den Rechenaufwand in a) und b)!

Wir vergleichen den Aufwand für die Berechnung von Werten bei den Termen

$$(a+b+c) \cdot d \text{ und } a \cdot d + b \cdot d + c \cdot d$$

und den Termen

$$(a+b)(c+d) \text{ und } ac + ad + bc + bd:$$

Term	Ablaufplan für den SR 1
$(a+b+c) \cdot d$	a $\oplus$ b $\oplus$ c $=$ $\otimes$ d $=$
$a \cdot d + b \cdot d + c \cdot d$	a $\otimes$ d $+$ b $\otimes$ d $+$ c $\otimes$ d $=$
$(a+b) \cdot (c+d)$	a $\oplus$ b $=$ $\otimes$ c $+$ d $=$ $\otimes$ MR $=$
$a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$	a $\otimes$ c $+$ a $\otimes$ d $+$ b $\otimes$ c $+$ b $\otimes$ d $=$

- 57 Setzen Sie für die Variablen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  selbstgewählte Zahlen ein, und berechnen Sie die Werte der Terme nach den angegebenen Ablaufplänen!

Da der SR 1 eine Vorrangautomatik und einen Speicher besitzt, ist der Rechenaufwand nahezu gleich. Ein Umformen der Produkte in Summen bringt kaum Vorteil.



Ablaufplan	Term
a) $a \oplus b \otimes c \ominus d \equiv$ $a \oplus b \sqrt{\quad} \equiv$ Es tritt $=$ im Inneren der Ablaufpläne nicht auf.	$a + bc - d$ $a + \sqrt{b}$ Es müssen keine Klammern gesetzt werden.
b) $a \oplus b \equiv \otimes c \equiv$ $a \ominus b \equiv \oplus c \equiv$ Berechnung der Summe (bzw. der Differenz) ist durch $=$ abgeschlossen. $a \oplus b \equiv \sqrt{\quad}$ Berechnung der Summe wird durch $=$ abgeschlossen.	$(a + b)c$ $(a - b) : c$ oder $\frac{a - b}{c}$ Die Summe (bzw. Differenz) ist in Klammern einzuschließen. $\sqrt{a + b}$ Die Summe ist unter das Wurzelzeichen zu schreiben.
c) $a \oplus b \equiv \otimes \ominus s \ominus t \equiv \sqrt{\quad} \otimes \text{MR} \equiv$ In dem Ablaufplan sind zwei Teilablaufpläne erkennbar: $a \oplus b \equiv$ und $s \ominus t \equiv \sqrt{\quad}$ Das Zeichen $\otimes$ vor <b>MR</b> gibt an, daß ein Produkt zu berechnen ist.	$(a + b) \cdot \sqrt{s - t}$ Jedem Teilablaufplan entspricht ein Teilterm. Die beiden Teilterme sind zu multiplizieren.

- 60 Geben Sie zu den folgenden Ablaufplänen für den SR 1 jeweils einen Term an, für den man Werte mit Hilfe eines solchen Ablaufplanes berechnen kann!

a)  $a \ominus b \otimes \oplus c \equiv$

b)  $a \otimes b \oplus 100 \oplus c \equiv \otimes a \equiv$

c)  $1 \oplus 1 \oplus a \oplus 1 \oplus a \otimes \oplus 1 \oplus a \sqrt{\quad} 3 \equiv (L)$

d)  $a \ominus b \equiv \sqrt{\quad} \otimes \ominus c \oplus d \equiv \sqrt{\quad} \otimes \text{MR} \equiv (L)$

Setzen Sie für die auftretenden Variablen geeignete Zahlen ein, und prüfen Sie Ihre Ergebnisse!

Die Ablaufpläne  $a \oplus b \equiv$  und  $b \oplus a \equiv$  sind gleichwertig: Welche Zahl man auch für  $a$  und  $b$  in jedem der Ablaufpläne einsetzt, der Rechner liefert stets den gleichen Wert.

- 61 Untersuchen Sie, welche der folgenden Ablaufpläne gleichwertig sind, wenn Sie mit dem SR 1 rechnen! (L)

(1)  $a \oplus b \equiv \otimes c \equiv$  (2)  $a \oplus b \otimes c \equiv$  (3)  $b \otimes c \oplus a \equiv$

(4)  $a \otimes c \oplus b \otimes c \equiv$  (5)  $a \otimes c \oplus b \equiv \otimes c \equiv$  (6)  $a \otimes c \otimes \oplus b \otimes c \equiv$

## Aufgaben

1. Wer ist schneller?

Wettkampf: „Kopf gegen Rechner“

$$12 \cdot 12; 0,1 \cdot 70; \frac{1}{3} \text{ von } 30; 10^4; \sqrt{9}; 2,02^2; 1 + 3 + 5 + 7; \frac{2^3}{0,25}; \sqrt{0,0004};$$

$$3,3 \cdot 100; 3 + 6^2; (3 + 6)^2; 10 \% \text{ von } 34; 2 \% \text{ von } 200; \sqrt{4 + 5}; 7,8 \cdot 8,2; 7,8 + 8,2$$

2. Es soll mit dem Taschenrechner der Flächeninhalt eines Kreisringes berechnet werden, der entsteht, wenn man aus einem Kreis mit dem Radius  $r_1$  einen dazu konzentrischen Kreis mit dem Radius  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ) herausausschneidet (Bild A 14). Man erhält den Flächeninhalt des Kreisringes  $A_R$ , wenn man vom Flächeninhalt  $A_1$  des größeren Kreises den Flächeninhalt  $A_2$  des kleineren Kreises subtrahiert:

$$A_R = \pi r_1^2 - \pi r_2^2.$$

- a) Stellen Sie einen Ablaufplan zur Berechnung von Werten des Terms  $\pi r_1^2 - \pi r_2^2$  mit dem SR 1 auf!  
 b) Untersuchen Sie, ob man Ablaufpläne finden kann, die weniger Rechenaufwand erfordern, wenn man den Term umformt!

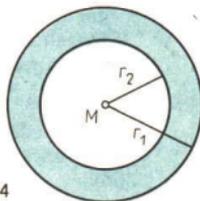


Bild A 14

3. Zur Berechnung von Termwerten mit dem SR 1 werden unterschiedliche Ablaufpläne angegeben. Überprüfen Sie, welche der Ablaufpläne Fehler enthalten!

Term	Ablaufplan
a) $(a + b) \cdot c$	(1) a <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> x <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> = (2) a <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> = <input type="checkbox"/> x <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> =
b) $\sqrt{a - b}$	(1) a <input type="checkbox"/> - <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> √ <input type="checkbox"/> = (2) a <input type="checkbox"/> - <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> = <input type="checkbox"/> √ <input type="checkbox"/> =
c) $\frac{a}{s + t}$	(1) a <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> s <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> t <input type="checkbox"/> = (2) s <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> t <input type="checkbox"/> = <input type="checkbox"/> 1/x <input type="checkbox"/> x <input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> = (3) a <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> s <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> t <input type="checkbox"/> =
d) $\frac{x + y}{x - y}$	(1) x <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> y <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> x <input type="checkbox"/> - <input type="checkbox"/> y <input type="checkbox"/> = (2) x <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> y <input type="checkbox"/> = <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> x <input type="checkbox"/> - <input type="checkbox"/> y <input type="checkbox"/> = (3) x <input type="checkbox"/> + <input type="checkbox"/> y <input type="checkbox"/> = <input type="checkbox"/> x <input type="checkbox"/> - <input type="checkbox"/> y <input type="checkbox"/> = <input type="checkbox"/> 1/x <input type="checkbox"/> x <input type="checkbox"/> MR <input type="checkbox"/> =

4. Mit Hilfe der Formel  $A_0 = 2\pi r(r + h)$  kann man den Oberflächeninhalt eines Kreiszylinders berechnen. Stellen Sie einen Ablaufplan zur Berechnung von Werten des Terms  $2\pi r(r + h)$  mit dem Schulrechner SR 1 auf! Untersuchen Sie, ob man Ablaufpläne finden kann, die weniger Rechenaufwand erfordern, wenn man den Term umformt!

5. Es sollen mit dem Schulrechner SR 1 möglichst zweckmäßig Werte des Terms  $\frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$  berechnet werden.

a) Geben Sie mindestens drei verschiedene Ablaufpläne an! Formen Sie den Term vorher geeignet um!

b) Mit der Formel  $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$  können Summen wie z. B.

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 + 39 + 43 + 47 + 51 + 55$$

berechnet werden. Im Beispiel ist das Anfangsglied  $a = 3$ , die Differenz  $d$  zweier benachbarter Glieder stets gleich 4 und die Anzahl  $n$  der Glieder gleich 14. Berechnen Sie diese Summe mit dem SR 1!

c)\* Angenommen, Sie besitzen einen Rechner, der über keine Vorrangautomatik verfügt, jedoch Tasten hat, mit deren Hilfe Klammern gesetzt werden können, der im übrigen aber wie der SR 1 arbeitet.

Stellen Sie einen Ablaufplan für diesen Rechner zur Berechnung von Werten des gegebenen Terms auf!

6. Nach HERON<sup>1)</sup> kann man die Quadratwurzel aus einer Zahl  $a$  schrittweise immer genauer berechnen. Man beginnt mit einem geschätzten Wert  $x_1$  für  $\sqrt{a}$ . Im ersten Schritt berechnet man mit Hilfe von  $x_1$  einen Wert  $x_2$  mit größerer Genauigkeit durch

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{a}{x_1} \right).$$

Es liegt  $x_2$  als arithmetisches

Mittel von  $x_1$  und  $\frac{a}{x_1}$  zwischen

diesen beiden Zahlen.

Im  $n$ -ten Schritt ergibt sich

aus  $x_n$  ein „besseres“

Näherungswert  $x_{n+1}$  durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Das Ausführen jedes dieser

Schritte bedeutet das Durchlaufen

einer Schleife.

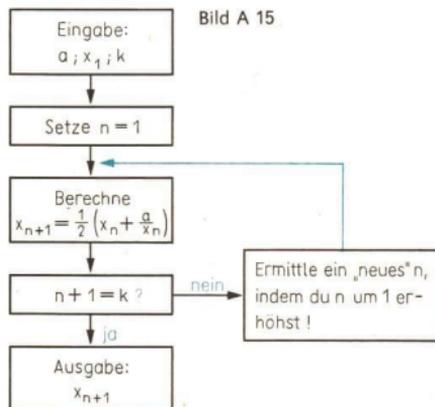
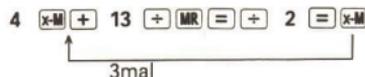
Man kann den Algorithmus abbrechen entweder

- nach einer vorgegebenen Anzahl von  $k$  Schritten (↗ Bild A 15)

oder

- wenn der Näherungswert eine vorgegebene Genauigkeit erreicht hat.

- a) Berechnen Sie einen Näherungswert für  $\sqrt{13}$  nach diesem Verfahren! Beginnen Sie mit dem Wert  $x_1 = 4$ ! Brechen Sie den Algorithmus nach drei Schritten ab! Arbeiten Sie mit dem Schulrechner SR 1 nach folgendem Ablaufplan!



<sup>1)</sup> HERON von Alexandria, um 75 u. Z., griechischer Mathematiker und Techniker

- b) Überprüfen Sie, um wieviel sich  $x_4^2$  von 13 unterscheidet!
- c) Berechnen Sie  $\sqrt{1000}$  nach diesem Verfahren!  
Wählen Sie selbst einen geeigneten Anfangswert  $x_1$ ! Brechen Sie das Verfahren ab, wenn sich das Quadrat des Näherungswertes um weniger als 0,001 von 1000 unterscheidet! (L)

## Rechnen mit Potenzen

### 12 Zur Wiederholung

- Schreiben Sie als Potenzen!  
 $3 \cdot 3 \cdot 3$ ;  $(-5) \cdot (-5)$ ; 19;  $1,7 \cdot 1,7 \cdot 1,7 \cdot 1,7$ ;  $c \cdot c \cdot c$ ;  $d$ ;  $(a-b)(a-b)$ ;  
 $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$ ;  $(2x+7)(2x+7)$
- Schreiben Sie die folgenden Terme als Produkte!  
 $2,5^4$ ;  $0,5^3$ ;  $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ ;  $(-x)^3$ ;  $(a+1)^2$
- Was versteht man unter  $a^n$  ( $a \in \mathbb{R}$ ;  $n \geq 1$ )?  
Erläutern Sie die Begriffe *Basis* und *Exponent* einer Potenz an selbstgewählten Beispielen!
- Potenzieren Sie  $-2$ ;  $-1$ ;  $0$ ;  $1$ ;  $2$  mit  $4$ !
- Mit welchem Exponenten muß  $-3$  potenziert werden, damit man als Potenz  $-27$ ;  $9$ ;  $81$ ;  $-3$  erhält?
- Nennen Sie die beiden Basen, deren vierte Potenz jeweils 16 beträgt!
- Gut überlegen! Geben Sie als Potenz an: (L)  
a) die Hälfte von  $2^4$ ,  
b) die Hälfte von  $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ ,  
c) das Doppelte von  $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ !
- Zerlegen Sie die Zahl 24 in Primfaktoren!
- Begründen Sie, daß die Quadrate zueinander entgegengesetzter Zahlen stets gleich sind!
- Quadrieren Sie die Terme  $5x+2$ ;  $2x-1$ ;  $1-x$ !
- Zwei voneinander verschiedene Terme haben als Quadrat den Term  $a^2 - 2ab + b^2$ .  
Wie heißen die beiden Terme? (L)
- Welchen Wert hat der Term  $a^3$ , wenn  $a^2 = 31,36$  und  $a > 0$  ist?
- Welchen Wert hat der Term  $a^2$ , wenn  $a^3 = \frac{1}{8}$  ist? (L)

## 13 Potenzen mit natürlichen Exponenten $n$ ( $n \geq 1$ )

- 16 Es ist mit dem Taschenrechner zu ermitteln: a) die fünfte Potenz von 9,2; b) die fünfte Potenz von  $-9,2$ ; c) die sechste Potenz von  $-9,2$ .

### 1. Möglichkeit:

Man führt die Multiplikation wiederholt aus. Hat der Taschenrechner wie der Schulrechner eine Konstantenautomatik für die Multiplikation, so kann man in folgender Weise rechnen:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
a) $9,2^5$	9,2 $\times$ $=$ $=$ $=$ $=$ $=$	65908.152
b) $(-9,2)^5$	9,2 $\frac{1}{x}$ $\times$ $=$ $=$ $=$ $=$ $=$	-65908.152
c) $(-9,2)^6$	9,2 $\frac{1}{x}$ $\times$ $=$ $=$ $=$ $=$ $=$ $=$	606355.

### 2. Möglichkeit:

Mit Hilfe der Taste  $y^x$  des Schulrechners kann man eine positive Zahl potenzieren:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
a) $9,2^5$	9,2 $y^x$ 5 $=$	65908.1

Um eine negative Zahl zu potenzieren, gibt man deren absoluten Betrag ein und ermittelt mit Hilfe der Taste  $y^x$  den absoluten Betrag der Potenz. Die Potenz ist positiv oder negativ, je nachdem, ob ihr Exponent eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
b) $(-9,2)^5$	9,2 $y^x$ 5 $=$ $\frac{1}{x}$	-65908.1
c) $(-9,2)^6$	9,2 $y^x$ 6 $=$	606355.

Beim Rechnen mit Potenzen hat man die *Struktur der Terme* zu beachten:

<p>■ 17 <math>(3 \cdot 4)^3</math> ist eine <b>dritte Potenz</b>.</p> <p>Ihre Basis ist ein Produkt. Es ist <math>(3 \cdot 4)^3 = 1728</math>.</p>	<p><math>3 \cdot 4^3</math> ist keine Potenz, sondern ein <b>Produkt</b>.</p> <p>Einer seiner Faktoren ist eine Potenz. Es ist <math>3 \cdot 4^3 = 192</math>.</p>
<p><math>(-3)^2</math> bezeichnet das <b>Quadrat von <math>-3</math></b>.</p> <p>Es ist <math>(-3)^2 = 9</math>.</p>	<p><math>-3^2</math> bezeichnet die <b>zum Quadrat von 3 entgegengesetzte Zahl</b>.</p> <p>Es ist <math>-3^2 = -9</math>.</p>

- 18 Es ist  $3 \cdot 2^5$  zu berechnen.

Beim Lösen im Kopf würde man zuerst 2 mit 5 potenzieren, weil das *Potenzieren* als *Rechenoperation dritter Stufe* den Vorrang vor der Multiplikation hat.

Bei Verwendung des *Schulrechners* kann man wegen seiner Vorrangautomatik die Aufgabe entsprechend ihrer schriftlichen Darstellung eingeben:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$3 \cdot 2^5$	3 $\times$ 2 $y^x$ 5 $=$	96.

Für alle reellen Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ist  $ac + bc = (a + b)c$  (Distributivgesetz). Ist  $a = 6$ ,  $b = 4$  und  $c = 2^5$ , gilt also:

$$6 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^5 = (6 + 4) \cdot 2^5 = 10 \cdot 2^5.$$

Man kann *Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten* addieren bzw. subtrahieren:

$$\blacksquare 19 \quad x^7 + 6x^7 + x^7 - 3x^7 = (1 + 6 + 1 - 3)x^7 = 5x^7$$

• 62 Versuchen Sie, zu folgenden Termumformungen jeweils eine Regel zu formulieren, mit deren Hilfe man den Term umformen kann, ohne erst die Potenzen in Faktoren zu zerlegen! (Beachten Sie dabei die Bedingungen, denen jeweils die Potenzen genügen müssen!)

$$a) \quad 2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{3+5} = 2^8$$

$$b) \quad a^4 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{4+3} = a^7$$

$$c) \quad 2^3 \cdot 1,5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5) \\ = (2 \cdot 1,5) \cdot (2 \cdot 1,5) \cdot (2 \cdot 1,5) = (2 \cdot 1,5)^3 = 3^3$$

$$d) \quad a^4 \cdot b^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) \\ = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^4$$

$$e) \quad \frac{42^5}{7^5} = \frac{42 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 42}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{42}{7} \cdot \frac{42}{7} \cdot \frac{42}{7} \cdot \frac{42}{7} \cdot \frac{42}{7} = \left(\frac{42}{7}\right)^5 = 6^5$$

$$f) \quad \frac{102x^8}{42x^5} = \frac{102}{42} \cdot \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{17}{7} \cdot x^{8-5} = \frac{17}{7} \cdot x^3$$

$$g) \quad \frac{15c^3}{5c^2} = \frac{15}{5} \cdot \frac{c \cdot c \cdot c}{c \cdot c} = 3c^{3-2} = 3c$$

$$h) \quad (a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$$

▷ 1

Potenzgesetz: Für alle reellen Zahlen $a$ , $b$ und alle natürlichen Zahlen $m$ , $n$ ( $m \geq 1$ ; $n \geq 1$ ) gilt:		
	gleiche Basen	gleiche Exponenten
Multiplikation	(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	(2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division	(3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ( $a \neq 0$ ; $m > n$ )	(4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ ( $b \neq 0$ )
Potenzieren	(5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$	

(Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir.)

■ 20

	gleiche Basen	gleiche Exponenten
Multiplikation	(1) $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$	(2) $4^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot 5)^3$
Division	(3) $\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4}$	(4) $\frac{3^4}{5^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$
Potenzieren	(5) $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = (5^2)^3$	

- 63 Erläutern Sie, warum im Satz A 1 bei (3) die Einschränkung  $m > n$  nötig ist!

Auf der Grundlage der Potenzgesetze lassen sich Rechenanweisungen formulieren, zum Beispiel bezüglich (2):

*Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem Exponenten potenziert. Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden seiner Faktoren mit dem gegebenen Exponenten potenziert.*

- 64 Formulieren Sie weitere Rechenanweisungen auf der Grundlage der Potenzgesetze!

### Aufgaben

- Bezeichnen die folgenden Terme für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  positive oder negative Zahlen? Begründen Sie Ihre Entscheidung!  
 a)  $(-1)^{2n}$     b)  $(-2)^{2n-1}$     c)  $-(-1)^{2n}$     d)  $-(-1)^{2n-1}$
- Berechnen Sie!  
 a)  $2,41^5$     b)  $0,713^3$     c)  $10,5^4$     d)  $(-5,1)^3$     e)  $(-1,15)^4$
- Geben Sie jeweils einen Ablaufplan für den Taschenrechner an, und berechnen Sie die folgenden Summen bzw. Produkte!  
 a)  $2^4 + 3^3 - 4^2 + 5^2$     b)  $2^6 \cdot 4^3 \cdot 2^4$     c)  $3 \cdot 2^5 - 5 \cdot 3^2 + 2,4^2$   
 d)  $(2,5 - 1,62)^4 \cdot 2,31^3$     e)  $4 \cdot 3^4 + (2,1 \cdot 1,2)^2$     f)  $(-2)^3 \cdot (-3)^2$   
 g)  $3^4 - (-4)^3 + (-3)^4 + 4^3$     h)  $3 \cdot 4^3 + 5 \cdot (-2)^3 - 2,6^2$

*Hinweis zu den Aufgaben 4 bis 15:* Alle Basen seien reelle Zahlen. Alle Divisoren bzw. alle Nenner von Brüchen seien von Null verschieden.

Berechnen bzw. vereinfachen Sie weitgehend!

- ↑ a)  $4^3 \cdot 4^5$     b)  $(-2)^3 \cdot (-2)^4$     c)  $3^4 \cdot 4^3$   
 d)  $a^2 \cdot a^4$     e)  $x^3 \cdot x^6$     f)  $\frac{5}{3}b^3 \cdot \frac{4}{7}b^2$   
 g)  $(-x)^4 \cdot x^3$     h)  $(-x)^3 \cdot x^4$     i)  $\frac{1}{2}a^2b^4c^3 \cdot \frac{3}{4}a^3b^4$
- ↑ a)  $m^3 \cdot m^5$     b)  $y^6 \cdot y^4$     c)  $\left(\frac{6}{7}v^3\right) \cdot \left(\frac{1}{8}v^5\right)$   
 d)  $(-x^3) \cdot x^4$     e)  $7,24a^3b^2 \cdot 82,3a^2b^2$
- ↑ a)  $(x-1)^3 \cdot (x-1)^2$     b)  $a^4 : a^2$     c)  $5^{18} : 5^{14}$   
 d)  $(1,2x^4) : (3,6x^2)$  (L)    e)  $(-x)^5 : x^2$     f)  $(-x^5) : x^2$   
 g)  $(-x)^7 : (-x)^3$  (L)    h)  $x^5 : (-x)^2$

7. ↑ a)  $(a-b)^4 c^5 (a-b)^2 c^7$     b)  $(1,8m^5) : (5,4m^2)$     c)  $b^{27} : b^{13}$

8. Vereinfachen Sie weitgehend!

*Hinweis:* Alle Exponenten seien von Null verschiedene natürliche Zahlen.

a)  $a^{2m} \cdot a^m$  ( $m \geq 1$ )    b)  $x^m : x^2$  ( $m \geq 3$ )    c)  $5^{7k+1} : 5^{2k}$  ( $k \geq 1$ ) (L)

Fassen Sie zu einer Potenz zusammen!

9. ↑ a)  $x^2 y^2 z^2$     b)  $a^4 b^4 (c+d)^4$     c)  $m^2 \cdot \frac{k^2}{l^2}$     d)  $\frac{(a-b)^5}{(a+b)^5} \cdot (a-1)^5$

10. ↑ a)  $a^3 b^3 c^3$     b)  $\frac{m^5}{n^5}$     c)  $\frac{(r-s)^4}{(k+s)^4}$     d)  $(x-y)^3 (x+y)^3$

11. Berechnen bzw. vereinfachen Sie weitgehend!

a)  $(m^2)^4$     b)  $(0,3m^3 m^2)^3$     c)  $\left(\frac{5x^3}{6y^2}\right)^3$

d)  $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^2$     e)  $\left(\frac{4a^2}{7b^3}\right)^2$

12. Lösen Sie die folgenden Gleichungen! ( $m, n \in \mathbb{N}$ ;  $m \geq 1$ ;  $n \geq 1$ )

a)  $3^7 = 3^2 \cdot 3^m$     b)  $a^n \cdot a^4 = a^{10}$     c)  $2^{n+m} = 16$     d)  $3^{2n} = 9^4$

Fassen Sie zu einer Potenz zusammen, und vereinfachen Sie die Basis!

13. ↑ a)  $\frac{17^3}{34^3} \cdot \frac{23^3}{69^3}$     b)  $\left(\frac{a^6}{2b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^5}{a^3}\right)^3$     c)  $\frac{(2p^4 q^7)^5}{(3p^2 q^2)^5}$

14. ↑ a)  $\frac{15^2}{22^2} \cdot \frac{11^2}{5^2}$     b)  $\left(\frac{4b^4}{a}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{8b}\right)^4$     c)  $\frac{(30^4 p^5)^3}{(60^2 p^2)^3}$

15. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

a) Für alle natürlichen Zahlen  $a, b, m, n$  ( $m \geq 1$ ;  $n \geq 1$ ) gilt:

$$(a^m)^n \cdot (b^m)^n = (a \cdot b)^{m \cdot n}. \quad (\text{L})$$

b) Es gibt natürliche Zahlen  $a, b, n$  ( $n \geq 1$ ), für die gilt:

$$a^n + b^n = (a+b)^n.$$

c) Für alle natürlichen Zahlen  $a, b, n$  ( $n \geq 1$ ) gilt:

$$a^n + b^n = (a+b)^n.$$

d) Für alle natürlichen Zahlen  $a, b, m, n$  ( $m \geq 1$ ;  $n \geq 1$ ) gilt:

$$a^m \cdot b^n = a^n \cdot b^m.$$

e) Es gibt natürliche Zahlen  $a, m, n$  ( $m \geq 1$ ;  $n \geq 1$ ), für die gilt:

$$a^m \cdot a^n \neq a^{m+n}.$$

## 14 Wurzeln

• 65 Für welche nichtnegativen reellen Zahlen  $x$  ist

a)  $x^2 = 36$ ;    b)  $x^3 = 27$ ;    c)  $x^4 = 16$ ;    d)  $x^5 = 100000$ ?

Im Bereich der nichtnegativen reellen Zahlen ist das Quadratwurzelziehen die Umkehrung des Potenzierens mit dem Exponenten 2 (Quadrieren) und das Kubikwurzelziehen die Umkehrung des Potenzierens mit dem Exponenten 3. Auch für das Potenzieren mit

anderen Exponenten gibt es Umkehrungen in diesem Bereich, wenn man den Wurzelbegriff entsprechend erweitert. Hierzu *erinnern wir uns* zunächst an die *Definition der Quadratwurzel*:

Es sei  $b$  eine nichtnegative reelle Zahl. Unter  $\sqrt{b}$  versteht man diejenige nichtnegative reelle Zahl  $a$ , für die  $a^2 = b$  gilt.

$\sqrt{36} = 6$ , denn  $36 \geq 0$ ,  
 $6^2 = 36$  und  $6 \geq 0$

- 66 a) Geben Sie die Definition der dritten Wurzel an!  
b) Bestimmen Sie  $\sqrt[3]{8}$ ;  $\sqrt[3]{125}$  und  $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ !

Man definiert entsprechend den Begriff der  $n$ -ten Wurzel:

► 2

**DEFINITION:** Es sei  $b$  eine nichtnegative reelle Zahl. Unter  $\sqrt[n]{b}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ;  $n \geq 2$ ) versteht man diejenige<sup>1)</sup> nichtnegative reelle Zahl  $a$ , für die  $a^n = b$  gilt.

Die Zahl  $b$  unter dem Wurzelzeichen heißt *Radikand*, die Zahl  $n$  in der Definition nennt man *Wurzelexponent*.

- 67 Bestimmen Sie  $\sqrt[6]{64}$ ;  $\sqrt[9]{0}$ ;  $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ , und begründen Sie jeweils das Ergebnis!

Die Wurzel aus einer Zahl ist oft ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch, das heißt, eine *irrationale Zahl*. Man kann eine solche Zahl, z. B.  $\sqrt[4]{3}$ , auf beliebig viele Stellen genau angeben, also einen *rationalen Näherungswert* für sie bestimmen, indem man sie durch systematisches Probieren (Potenzieren der jeweils ausgewählten Zahlen) immer weiter „einschachtet“:

$$\begin{aligned} 1 &< \sqrt[4]{3} < 2 \\ 1,3 &< \sqrt[4]{3} < 1,4 \\ 1,31 &< \sqrt[4]{3} < 1,32 \\ 1,316 &< \sqrt[4]{3} < 1,317 \\ 1,3160 &< \sqrt[4]{3} < 1,3161 \\ 1,31607 &< \sqrt[4]{3} < 1,31608 \end{aligned}$$

- 68 Bestimmen Sie  $\sqrt[3]{4^3}$ ;  $\sqrt[4]{2^4}$ ;  $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$ ! Was stellen Sie fest?

Für nichtnegative reelle Zahlen  $a$  ergibt sich aus der Definition der  $n$ -ten Wurzel:  $\sqrt[n]{a^n} = a$  ( $n \in \mathbb{N}$ ;  $n \geq 2$ ). Im Bereich der nichtnegativen reellen Zahlen ist das *Wurzelziehen* (Radizieren) demnach eine *Umkehrung des Potenzierens*.

## Aufgaben

1. Bestimmen Sie im Kopf  $\sqrt{81}$ ;  $\sqrt{\frac{1}{36}}$ ;  $\sqrt{\frac{4}{25}}$ ;  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ ;  $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ !

<sup>1)</sup> Im Bereich der reellen Zahlen gibt es zu jeder nichtnegativen Zahl  $b$  und für jedes  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ;  $n \geq 2$ ) genau eine nichtnegative Zahl  $a$ , für die gilt:  $a^n = b$ .

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Tafelwerkes zunächst die Quadratwurzeln und dann die Kubikwurzeln folgender Zahlen!  
 a) 12,3    b) 7850    c) 0,342    d) 1,25    e) 0,00167
3. Radizieren Sie!  
 a)  $\sqrt{(-7)^2}$     b)  $\sqrt[5]{3,2^5}$     c)  $\sqrt[4]{a^8}$  ( $a \in \mathbb{R}$ )    d)  $-\sqrt{5^2}$     e)  $\sqrt[4]{4^2}$  (L)
4. Unter welchen Einschränkungen für die Variablen sind jeweils die folgenden Wurzeln definiert?  
 a)  $\sqrt{b}$     b)  $\sqrt[3]{-a}$     c)  $\sqrt[m]{\frac{1}{x}}$     d)  $\sqrt[3]{1-a}$     e)  $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$  (L)

## 15 Erweiterung des Potenzbegriffes

Bisher war das Potenzieren auf natürliche Exponenten  $n$  mit  $n \geq 1$  eingeschränkt. Mit der Ausdehnung des Potenzbegriffs auf rationale Exponenten wird das Potenzieren mit *beliebigen* rationalen Exponenten ausführbar.

Bestrebungen, sich von Einschränkungen der Ausführbarkeit freizumachen, haben wir schon früher bei anderen Rechenoperationen kennengelernt: So wurden im Bereich der natürlichen Zahlen unlösbare Divisions- bzw. Subtraktionsaufgaben lösbar gemacht durch Einführung der gebrochenen bzw. der rationalen Zahlen. Dabei wurde jeweils gewährleistet, daß die vorher benutzten Gesetze für diese Rechenoperationen auch auf den erweiterten Zahlenbereich zutreffen.

Um den Potenzbegriff auf Potenzen mit rationalen Exponenten zu erweitern, muß man geeignet festlegen, was die neu hinzukommenden Potenzen, z. B.  $5^0$ ;  $3^{-4}$ ;  $16^{\frac{1}{4}}$ ;  $27^{-\frac{1}{3}}$ , bedeuten sollen. Dabei ist zu beachten, daß die bisher benutzten Potenzgesetze auch auf die neuen Potenzen zutreffen sollen.

Im Einklang mit dem Potenzgesetz für das Dividieren von Potenzen mit gleichen Basen sollte für  $5^0$  z. B. gelten  $\frac{5^4}{5^4} = 5^0$ . Andererseits wissen wir, daß  $\frac{5^4}{5^4} = 1$  ist. Es liegt deshalb nahe,  $5^0 = 1$  festzulegen.

Ebenso sollte für  $3^{-4}$  z. B. gelten  $\frac{3^2}{3^6} = 3^{-4}$ , und da  $\frac{3^2}{3^6} = \frac{3^2}{3^2 \cdot 3^4} = \frac{1}{3^4}$  ist, legt man fest:

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

- 69 Treffen Sie Festlegungen für  $7^0$ ;  $(-4)^0$ ;  $11^{-5}$ ;  $(-2)^{-2}$ ! Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Durch die folgende Definition wird der Potenzbegriff zunächst auf *Potenzen mit ganzzahligen Exponenten* erweitert:

► 3

**DEFINITION:**

$$a^0 = 1 \quad (a \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \in \mathbb{R}; a \neq 0; n \in \mathbb{N}; n \geq 1)$$

- 70 Formen Sie die folgenden Terme so um, daß keine Potenzen mit negativen Exponenten auftreten!

a)  $10^{-3}$    b)  $5^{-1}$    c)  $(-3)^{-2}$    d)  $\frac{1}{2^{-2}}$    e)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

- 71 Schreiben Sie als Potenzen mit möglichst kleiner natürlicher Basis und negativem Exponenten!

a)  $\frac{1}{25}$    b)  $\frac{1}{64}$    c)  $\frac{1}{10000}$    d)  $\frac{1}{3}$    e)  $\frac{1}{144}$    f)  $\frac{1}{900}$

Wir wollen nun den Potenzbegriff auf *Potenzen mit rationalen Exponenten* ausdehnen und dabei  $a^{\frac{m}{n}}$  ( $m, n \in \mathbb{Z}; n \geq 2$ ) so definieren, daß es sich zweckmäßig in die bisher benutzten Potenzgesetze einordnet.

Im Einklang mit dem Potenzgesetz für das Potenzieren von Potenzen sollte für  $3^{\frac{1}{2}}$  z. B. gelten  $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^1$ . Andererseits wissen wir, daß  $(\sqrt{3})^2 = 3$  ist. Es liegt nahe,  $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$  festzulegen.<sup>1)</sup>

- 72 Treffen Sie Festlegungen für  $7^{\frac{1}{2}}$  und  $0,5^{\frac{1}{2}}$ , desgleichen für  $4^{\frac{1}{3}}$  und  $2^{\frac{1}{5}}$ ! Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Es empfiehlt sich die folgende Festlegung:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \in \mathbb{R}; a \geq 0; n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$$

Für  $a^{\frac{m}{n}}$  ( $m, n \in \mathbb{Z}; n \geq 2$ ) sollte gelten  $(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$  (im Einklang mit dem Potenzgesetz für das Potenzieren von Potenzen). Deshalb definiert man:

► 4

**DEFINITION:**

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \in \mathbb{R}; a > 0; m, n \in \mathbb{Z}; n \geq 2)^{2)}$$

- 73 Berechnen Sie im Kopf:  $16^{\frac{1}{2}}$ ;  $25^{\frac{1}{2}}$ ;  $25^{-\frac{1}{2}}$ ;  $8^{\frac{1}{3}}$ ;  $8^{\frac{2}{3}}$ ! (L)

In Kenntnis der Definition A 4 können wir mit Hilfe der Taste  $y^x$  des Schulrechners SR 1 Wurzeln berechnen. Dabei empfiehlt sich die Einbeziehung der Reziproktaste,  $1/x$

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$\sqrt[3]{23}$	23 $y^x$ 7 $\sqrt{x}$ $\frac{1}{x}$ $=$	1.56507

- 74 Begründen Sie den Ablaufplan im Beispiel A 21!

<sup>1)</sup> Es gilt auch  $(-\sqrt{3})^2 = 3$ , so daß man für eine Festsetzung von  $3^{\frac{1}{2}}$  eigentlich die Wahl hat zwischen  $\sqrt{3}$  und  $-\sqrt{3}$ . Wie bei der Definition der Wurzel wählt man die positive der beiden Zahlen, also  $\sqrt{3}$ .

<sup>2)</sup> Die Schreibweise  $a^{\frac{m}{n}}$  ist gerechtfertigt, weil sich der Wert dieses Terms beim Erweitern oder Kürzen des Bruches  $\frac{m}{n}$  nicht ändert, also  $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot c}{n \cdot c}}$  ( $c \in \mathbb{N}; c > 0$ ) gilt.

**Aufgaben**

1. Berechnen Sie folgende Potenzen!

a)  $5^0$       b)  $(-6)^0$       c)  $(-b)^0$  ( $b \in \mathbb{R}; b \neq 0$ )

d)  $\frac{(-3)^3}{(-3)^3}$       e)  $2^3 \cdot 5^0$       f)  $(-5)^3 \cdot (-5)^1$

Formen Sie die folgenden Terme so um, daß keine Potenzen mit negativen Exponenten auftreten!

2. ↑ a)  $5^{-6}$       b)  $x^{-4}$       c)  $15^{-c}$  ( $c \in \mathbb{N}$ )      d)  $\frac{1}{6^{-2}}$       e)  $\frac{1}{x^{-k}}$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

f)  $\frac{1}{(-10)^{-3}}$       g)  $a^4 \cdot b^{-3}$       h)  $\frac{m^{-3}}{n^{-6}}$       i)  $\frac{1}{x^{-8}y^{-2}}$       k)  $\frac{2^{-6}}{16^{-4}}$

3. ↑ a)  $4^{-3}$       b)  $(-b)^{-2}$       c)  $\frac{a^3}{a^{-3}}$       d)  $a^{-5}$       e)  $(5^{-1})^3$       f)  $\frac{1}{2^{-3}}$       g)  $x^{-4} \cdot y^{-4}$

4. Schreiben Sie als Potenzen mit möglichst kleiner natürlicher Basis und negativem Exponenten!

a)  $\frac{1}{5}$       b)  $\frac{1}{8}$       c)  $\frac{1}{1000}$       d)  $\frac{1}{81}$       e)  $\frac{1}{1024}$       f)  $\frac{1}{1000000}$

5. Arbeiten Sie die folgenden beiden Ablaufpläne ab! Begründen Sie, warum Sie bei beiden zum gleichen Ergebnis gelangen!

*Hinweis:* Überlegen Sie, welche Terme diesen Ablaufplänen entsprechen!

a)  $0,4 \cdot \boxed{y^x} \cdot 3 \stackrel{=}{=} \boxed{\frac{1}{5}x}$       b)  $0,4 \cdot \boxed{y^x} \cdot 3 \stackrel{=}{=} \boxed{\frac{1}{5}x}$

6. Gilt die folgende Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort! „Sind zwei Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gleich, so stimmen sie in Basis und Exponent überein.“ (L)

7. Für welche Größen verwendet man die folgenden Einheiten? Schreiben Sie die Einheiten als Produkte mit zum Teil negativen Exponenten!

a)  $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  (L)      b)  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$       c)  $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$       d)  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

e)  $1 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$       f)  $1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$       g)  $1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$       h)  $1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

8. Formen Sie zunächst die folgenden Terme so um, daß keine Potenzen mit negativen Exponenten auftreten, und wenden Sie dann die bekannten Potenzgesetze an!

a)  $(5^2)^{-3}$  (L)      b)  $(3^{-2})^2$       c)  $\left(\frac{4}{5}a^{-3}\right)^{-2}$       d)  $(n^{-4} \cdot v^{-2})^3$       e)  $\frac{(a-b)^{-2}}{(a^2-b^2)^{-1}}$

9. Schreiben Sie die folgenden Wurzeln als Potenzen!

a)  $\sqrt[3]{5}$       b)  $\sqrt{10}$       c)  $\sqrt[3]{4^2}$       d)  $\sqrt{11^{-3}}$

e)  $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{8}\right)^2}$       f)  $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$       g)  $\sqrt[3]{7}$       h)  $\sqrt{8}$

i)  $\sqrt[3]{6^2}$       k)  $\sqrt{32^{-3}}$       l)  $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^4}$       m)  $\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}$

10. Berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners!  
 a)  $\sqrt[5]{18}$     b)  $\sqrt[4]{36}$     c)  $\sqrt[6]{0,125}$     d)  $\sqrt[4]{0,022}$     e)  $\sqrt[5]{618}$
11. Schreiben Sie die folgenden Potenzen als Wurzeln!  
 $5^{\frac{1}{2}}$ ;  $6^{\frac{2}{3}}$ ;  $13^{-\frac{1}{2}}$ ;  $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$ ;  $\left(\frac{2}{9}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ;  $7^{\frac{1}{2}}$ ;  $21^{-\frac{1}{3}}$ ;  $\left(\frac{5}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$

## 16 Verallgemeinerung der Potenzgesetze

Die Erweiterung des Potenzbegriffes auf Potenzen mit ganzzahligen bzw. rationalen Exponenten erscheint erst dann voll gerechtfertigt, wenn bewiesen ist, daß sich der Gültigkeitsbereich der Potenzgesetze auf diese Potenzen ausdehnen läßt. Die Beweise führt man für die neu eingeführten Potenzen, indem man auf deren Definition zurückgeht.

- 75 Beweisen Sie:  $a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$  ( $a, b \in R$ ;  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ) (L)

Soweit die Gültigkeit der Potenzgesetze bereits gesichert ist, darf man sich innerhalb eines *Beweises* auf sie stützen. Zum Beispiel kann man das für natürliche Exponenten  $n$  geltende Gesetz  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$  ( $a, b \in R$ ;  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ) nutzen, um zu beweisen, daß es sich auf *negative Exponenten* ausdehnen läßt:

*Voraussetzung:*  $a, b \in R$ ;  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ;  $m \in N$ ;  $m > 0$

*Behauptung:*  $a^{-m} \cdot b^{-m} = (a \cdot b)^{-m}$

*Beweis:* 
$$\begin{aligned} a^{-m} \cdot b^{-m} &= \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} \quad (\text{nach Definition}) \\ &= \frac{1}{a^m \cdot b^m} \\ &= \frac{1}{(a \cdot b)^m} \quad (\text{Potenzgesetz, } m \in N) \\ &= (a \cdot b)^{-m} \quad (\text{nach Definition}) \\ &\text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

- 76 Prüfen Sie, ohne den Taschenrechner zu verwenden, ob  $3^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{5}} = (3 \cdot 7)^{\frac{2}{5}}$  ist!

*Hinweis:* Nutzen Sie die entsprechende Definition, und potenzieren Sie dann beide Seiten der Gleichung mit 5!

Im folgenden *Beweis* bauen wir darauf auf, daß das Gesetz  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$  ( $a, b \in R$ ;  $a > 0$ ;  $b > 0$ ) für ganzzahlige Exponenten gilt, und weisen seine Gültigkeit für *rationale Exponenten* nach:

*Voraussetzung:*  $a, b \in R$ ;  $a > 0$ ;  $b > 0$ ;  $p, q \in Z$ ;  $q \geq 2$

*Behauptung:*  $a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}$

*Beweis:* 
$$\begin{aligned} (\sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p})^q &= (\sqrt[q]{a^p})^q \cdot (\sqrt[q]{b^p})^q \quad (\text{Potenzgesetz, } q \in Z) \\ &= a^p \cdot b^p \quad (\text{nach Definition}) \\ &= (a \cdot b)^p \quad (\text{Potenzgesetz, } p \in Z) \end{aligned}$$

Daraus folgt:  $\sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p}$  (Ziehen der  $q$ -ten Wurzel)

Also gilt:  $a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}$  (nach Definition)  
w. z. b. w.

Wir wollen auf weitere Beweise hier nicht eingehen und die folgende *Verallgemeinerung der Potenzgesetze* als gültig betrachten:

▷ 5

**SATZ:** Für alle positiven reellen Zahlen  $a, b$  und alle rationalen Zahlen  $m, n$  gilt:

	gleiche Basen	gleiche Exponenten
Multiplikation	(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	(2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division	(3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	(4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren	(5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$	

● 77 Fassen Sie zu einer Potenz zusammen!

- a)  $u^{-5} \cdot u^{-3}$     b)  $z^m \cdot z^{-n}$     c)  $(x^{-2})^3 \cdot x^{-1}$   
 d)  $\frac{a^{-2n}}{a^{-3n}}$     e)  $x^{-2} : y^{-2}$     f)  $u^3 : v^{-3}$

Nach Definition A 4 (→ Seite 52) können Wurzeln als spezielle Potenzen aufgefasst werden. Damit können auch beim Rechnen mit Wurzeln solche Möglichkeiten des Umformens genutzt werden, wie wir sie für Potenzen kennen.

**Addition und Subtraktion von Wurzeln mit gleichen Radikanden und gleichen Wurzel-exponenten**

- 22 a)  $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 8\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = (2+8)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3} = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$   
 b)  $3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x^2} = (3+4-5)\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x^2} = 2\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x^2}$

**Multiplikation und Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten oder mit gleichen Radikanden**

- 23 a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$   
 b)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$   
 c)  $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

Beim Lösen zahlreicher Aufgaben ist es zweckmäßig, Spezialfälle der Potenzgesetze (→ Satz A 5) in der Wurzelschreibweise zu formulieren. Man spricht dann von **Wurzelgesetzen**. Die Wurzelgesetze sind also für uns keine neuen Gesetze. Die Gesetze (2) und (4) des Satzes A 5 lauten für  $n = \frac{1}{k}$  in Wurzelschreibweise:

$$(2a) \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{a \cdot b} \quad (a > 0; b > 0; k \in \mathbb{N}; k \geq 2)$$

$$(4a) \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} = \sqrt[k]{\frac{a}{b}} \quad (a > 0; b > 0; k \in \mathbb{N}; k \geq 2)$$

### Radizieren und Potenzieren

Für das Radizieren und Potenzieren von Wurzeln gilt:

$$(5a) \sqrt[p]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[p \cdot k]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[p]{a}} \quad (a > 0)$$

$$(5b) (\sqrt[k]{a})^q = \sqrt[k]{a^q} \quad (a > 0)$$

$$\blacksquare 24 \text{ a) } \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{2} \quad \text{b) } \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[15]{a^2} \quad \text{c) } \sqrt[4]{25} = \sqrt{\sqrt{25}} = \sqrt{5}$$

$$\text{d) } (\sqrt[4]{3^6})^2 = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 \quad \text{e) } \sqrt[4]{64} = \sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \sqrt{2}$$

Die Berechnung von Näherungswerten für die Zahl  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (z. B.  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,414}$ ) ohne Taschenrechner läßt sich vereinfachen, wenn man den Bruch  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  mit  $\sqrt{2}$  erweitert:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad \frac{1}{2} \cdot 1,414 = 0,707$$

Durch das Erweitern hat man einen Bruch erhalten, dessen Nenner rational ist.

$\blacksquare 25$  Der Bruch  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  soll mit einem geeigneten Faktor erweitert werden, so daß im Nenner keine irrationale Zahl auftritt.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{6}$$

### Aufgaben

Vereinfachen Sie folgende Quotienten!

$$1. \uparrow \text{ a) } x^3 : x^3 \quad \text{b) } a^{m+1} : a^m \quad \text{c) } 3x^{m+2} : 3x^{m+1}$$

$$\text{d) } 0,21x^3y^6 : (7x^2y^2) \quad \text{e) } \frac{27a^2}{20b^3} : \frac{9a^4}{12b^4}$$

$$2. \uparrow \text{ a) } (-4)^{10} : (-4^{12}) \quad (\text{L}) \quad \text{b) } (1,4q^{12}) : (3,5q^{20})$$

$$\text{c) } (a^{m-1} \cdot b^{-n}) : (a^m \cdot b^{2n}c^1) \quad (\text{L}) \quad \text{d) } \frac{x^{-2a-4}}{x^{-2a+4}}$$

Schreiben Sie die folgenden Terme in möglichst einfache Formen um!

*Hinweis:* Alle Exponenten seien ganze Zahlen.

$$3. \uparrow \text{ a) } a^{k+1} \cdot b^{k+1} \cdot c^{-k} \cdot a^{-k} \cdot c^{k-1} \quad \text{b) } (2x + 3x^{-1}) (3x^{-2} - 2x^{-1})$$

$$4. \uparrow \text{ a) } (-5)^3 : (-5)^6 \quad \text{b) } a^5 : a^9 \quad \text{c) } \left(\frac{1}{2}p^{12}\right) : \left(\frac{3}{2}p^{14}\right)$$

$$\text{d) } (q^{2n-1} \cdot r^{3n}) : (q^{2n+1} \cdot r^{-3n}) \quad \text{e) } \frac{2^a \cdot 2^5 \cdot 2^{c-a}}{2^{2a-3}}$$

5. ↑ a)  $(3^2)^{-2}$     b)  $\left(\frac{x^2}{10}\right)^{-1}$     c)  $(a^{-5})^2$     d)  $(r^{-4}s^3t)^{-3}$     e)  $\frac{(a^2 - b^2)^{-2}}{(a + b)^{-2}}$

6. Ermitteln Sie den elektrischen Widerstand einer zweiadrigen Kupferfreileitung mit einem Querschnitt von  $12 \text{ mm}^2$  und einer Länge von  $150 \text{ m}$  ( $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ ;  $\rho_{\text{Cu}} = 0,0155 \Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ )!

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen ( $n \in \mathbb{Q}$ )! (L)  
 a)  $3^3 = 3^6 \cdot 3^n$     b)  $a^{10} \cdot a^n = a^5$     c)  $5^{7+n} = 125$     d)  $3^{3 \cdot n} = 27$

Wenden Sie auf die folgenden Produkte bzw. Quotienten die entsprechenden Potenzgesetze an, und vereinfachen Sie weitgehend!

8. ↑ a)  $9^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}$     b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$     c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

d)  $n^{\frac{3}{2}} \cdot n^{\frac{4}{2}} \cdot n^{\frac{5}{2}}$  ( $n > 0$ )    e)  $6^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$     f)  $7^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{3}{5}}$

g)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$     h)  $a^{-\frac{4}{7}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{14}}$  ( $a > 0$ )

9. ↑ a)  $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$     b)  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (-2)^{\frac{2}{3}}$     c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} : \left(\frac{17}{15}\right)^{\frac{2}{5}}$

d)  $6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$     e)  $\left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{24}{9}\right)$     f)  $5^{\frac{1}{4}} : 10^{\frac{1}{4}}$

10. ↑ a)  $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$     b)  $\left(9^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{4}{5}}$     c)  $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$  ( $x > 0$ )

d)  $\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$     e)  $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{4}}$     f)  $(n^4)^{\frac{3}{4}}$  ( $n > 0$ )

11. Fassen Sie die folgenden Summen zusammen!

a)  $5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$     b)  $7\sqrt[3]{9} + 4\sqrt[3]{9} - 6\sqrt[3]{9}$     c)  $8\sqrt{2} - a\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

12. Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Produkte und Quotienten!

a)  $\sqrt{16} \cdot \sqrt{10}$     b)  $\sqrt[3]{17} \cdot \sqrt[3]{3}$     c)  $\sqrt[4]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2} \cdot \sqrt[8]{u^2}$  ( $u > 0$ )

d)  $\sqrt[3]{a^4x^2} \cdot \sqrt[3]{a^2x^4}$     e)  $\sqrt{18} : \sqrt{2}$     f)  $\sqrt[3]{40} : \sqrt[3]{8}$

g)  $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$     h)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}$     i)  $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x}$  ( $x > 0$ )

k)  $\sqrt[3]{b^5} : \sqrt[3]{b^2}$  ( $b > 0$ )    l)  $\sqrt{40} : \sqrt{10}$     m)  $\sqrt{\frac{15}{24}} \cdot \sqrt{\frac{9}{25}}$

13. Vereinfachen Sie die folgenden Wurzeln! Benutzen Sie dabei die Gesetze

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  bzw.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ !

a)  $\sqrt[4]{160000}$     b)  $\sqrt[3]{0,00004}$     c)  $\sqrt[3]{81x^3}$  ( $x > 0$ )    d)  $\sqrt[3]{162}$

e)  $\sqrt{\frac{a^2x}{b^2y}}$     f)  $\sqrt{\frac{1}{490000}}$     g)  $\sqrt{225a^3b^2}$     h)  $\sqrt[3]{\frac{16b^4c^2}{27c^3d}}$

14.\* Vereinfachen Sie die folgenden Summen bzw. Produkte! (L)

a)  $2\sqrt{8} - 2\sqrt{2}$     b)  $\sqrt{18} - \sqrt{72}$     c)  $(2 + 3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$     d)  $(16 - \sqrt{2})(2\sqrt{2} - 3)$

15. Schreiben Sie die folgenden Terme in möglichst einfache Formen um!
- a)  $(\sqrt{5})^2$    b)  $\sqrt{3^2}$    c)  $(\sqrt[3]{3})^6$    d)  $(\sqrt[3]{a^7 b^6})^{10}$   
 e)  $\sqrt[3]{4^6}$    f)  $\sqrt[6]{(-3)^{12}}$    g)  $(\sqrt[4]{25})^2$
16. Radizieren Sie!
- a)  $\sqrt{\sqrt{6}}$    b)  $\sqrt[4]{\sqrt{9}}$    c)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$    d)  $\sqrt{\sqrt{81}}$   
 e)  $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$    f)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{64}}$
17. Erweitern Sie die folgenden Brüche jeweils mit einem geeigneten Faktor, so daß in den Nennern keine irrationalen Zahlen mehr auftreten!
- a)  $\frac{1}{\sqrt{6}}$    b)  $\frac{1}{\sqrt{32}}$    c)  $\frac{3}{\sqrt{6}}$    d)  $\frac{5}{\sqrt{2}}$    e)  $\frac{2}{2\sqrt{8}}$    f)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

## 17 Darstellung von Zahlen mit Hilfe von abgetrennten Zehnerpotenzen

- 78 Berechnen Sie mit dem Taschenrechner!
- a)  $4 : 7$    b)  $3 : 57$    c)  $456000 : 0,0002$    d)  $\sqrt{10} - \pi$   
 e)  $0,0123^2$    f)  $0,0123 \cdot 0,00456$    g)  $456789 \cdot 987$

*Wir wissen:* Bei Anzeigen des Schulrechners, wie sie beim Lösen des Auftrags A 78 auftreten, gelangt man zur üblichen Schreibweise, indem man das Komma um so viele Stellen nach rechts bzw. links verschiebt, wie die letzten beiden Ziffern der Anzeige angeben.

Das entspricht aber dem Multiplizieren der in der Anzeige vorn stehenden Zahl mit einer Potenz von 10:

Die Anzeige

- a) 5.7142 – 01 entspricht  $5,7142 \cdot 10^{-1} = 0,57142$ ;  
 b) 5.2631 – 02 entspricht  $5,2631 \cdot 10^{-2} = 0,052631$ ;  
 c) 2.28    09 entspricht  $2,28 \cdot 10^9 = 2280000000$ .

Der Schulrechner nutzt hier folgenden Sachverhalt:

Jede reelle Zahl  $a \neq 0$  kann in der Form  
 $a = a_0 \cdot 10^p$  ( $a_0 \in \mathbb{R}$ ;  $1 \leq |a_0| < 10$ ;  $p \in \mathbb{Z}$ ) dargestellt werden.

- 79 Schreiben Sie die Ergebnisse der Aufgaben d) bis g) im Auftrag A 78 ebenfalls ausführlich sowie mit Hilfe von abgetrennten Zehnerpotenzen auf!

Damit erweitert sich die Anwendungsmöglichkeit des Schulrechners beträchtlich. Ohne diese Schreibweise könnten aufgrund der 8stelligen Anzeige nur Zahlen  $a$  mit  $0,0000001 \leq |a| \leq 99999999$  (oder  $a = 0$ ) dargestellt werden. Dann wären beispielsweise die Aufgaben c) und g) des Auftrages A 78 mit dem Taschenrechner nicht lösbar.

Wenn der Schulrechner SR 1 die Schreibweise mit abgetrennten Zehnerpotenzen benutzt, so zeigt er nur fünf zuverlässige Ziffern an, obwohl er intern weiterhin mit neun Stellen rechnet. Mit einem kleinen Trick können wir aber dem Taschenrechner evtl. noch genauere Näherungswerte (mit bis zu acht zuverlässigen Ziffern) entnehmen:

- 26 Bei der Berechnung von  $4 : 7$  tasten wir im Anschluß an die Anzeige des Ergebnisses  $\boxed{\times} 10$ , lesen ab und dividieren im Kopf durch 10. Wir erhalten 0,57142857.
- 80 Versuchen Sie, auch in den übrigen Aufgaben des Auftrages A 78 genauere Näherungswerte für die Ergebnisse zu erhalten!

Die bisherigen Überlegungen betreffen die Anzeige von *Ergebnissen* mit abgetrennten Zehnerpotenzen bei dem Schulrechner SR 1. Man kann aber auch Zahlen in dieser Darstellung in den Schulrechner SR 1 eingeben. Dies ist mit der Taste **EEX** möglich.

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$1,2345 \cdot 10^7$	1,2345 <b>EEX</b> 7	1.2345 07
$0,3456 \cdot 10^{-12}$	0,3456 <b>EEX</b> $\frac{1}{x}$ 12 oder 0,3456 <b>EEX</b> 12 $\frac{1}{x}$	0.3456 -12  0.3456 -12
$10^3$	<b>EEX</b> 3	1. 03
$123,45678 \cdot 10^{45}$	123,45678 <b>EEX</b> 45	123.45 45 <sup>1)</sup>

Gibt man nach dem Drücken der Taste **EEX** drei oder mehr Ziffern ein, so verschwinden die ersten wieder aus dem Rechner. Dies kann man zur Korrektur von falsch eingegebenen Exponenten nutzen:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$1,27 \cdot 10^{28}$	1,27 <b>EEX</b> 38 (Fehler) 2 8	1.27 38 1.27 82 1.27 28

Die Zahlendarstellung mit Hilfe von abgetrennten Zehnerpotenzen erhöht den Anwendungsbereich des Schulrechners SR 1.

- 81 Ermitteln Sie a) die größte, b) die kleinste, c) die kleinste positive, d) die größte negative Zahl, mit der Ihr Taschenrechner arbeitet! (L)
- 82 Geben Sie folgende Tastenfolgen in den Taschenrechner ein! In einigen Fällen zeigt der Rechner „E“ an. Begründen Sie!
  - a) 3 **EEX** 99  $\div$  8 **EEX** 99  $=$
  - b) **EEX** 99  $\div$  **EEX** 98  $=$
  - c) 5 **EEX** 99  $\times$  2  $=$
  - d) 2,4 **EEX** 49  $\times^2$
  - e) 4,1 **EEX** 50  $\times^2$
  - f) 7 **EEX** 99  $\frac{1}{x}$
  - g) 1,48  $\frac{1}{x}$  **EEX** 97  $\frac{1}{x}$   $\frac{1}{x}$
  - h) **EEX** 97  $\frac{1}{x}$   $\div$  500  $=$
- 83 Ermitteln Sie die größte und die kleinste positive (negative) Zahl, für die die Tasten  $1/x$ ,  $\sqrt{\quad}$  bzw.  $x^2$  Werte liefern!

<sup>1)</sup> Bei auszuführenden Rechnungen arbeitet der Schulrechner trotzdem mit allen acht Stellen.

Unabhängig von der Arbeit mit dem Taschenrechner benutzt man die Darstellung von Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen häufig, wenn Zahlen mit sehr großem oder sehr kleinem Betrag auftreten. Dies ist z. B. in der Astronomie und in der Atomphysik der Fall.

Masse der Erde:	$5,979 \cdot 10^{24}$ kg
Volumen der Erde:	$1,083 \cdot 10^{12}$ km <sup>3</sup>
Masse eines Wasserstoffatoms:	$1,6733 \cdot 10^{-27}$ kg

- 84 Entnehmen Sie dem Tafelwerk weitere Beispiele für die Schreibweise mit abgetrennten Zehnerpotenzen!

Auch beim Umwandeln der Einheiten bei Größenangaben ist das Arbeiten mit abgetrennten Zehnerpotenzen oft vorteilhaft.

- 29 Aus  $1 \text{ mm}^3$  Gold läßt sich durch Hämmern Blattgold von  $1 \text{ dm}^2$  Flächeninhalt herstellen. Es ist aus diesen Angaben die Dicke  $d$  des Blattgoldes zu ermitteln.

Gegeben:	$V = 1 \text{ mm}^3$	Gesucht: $d$
	$A = 1 \text{ dm}^2$	
Lösung:	$V = A \cdot d$	Nebenrechnung:
	$d = \frac{V}{A}$	$1 \text{ dm} = 100 \text{ mm} = 10^2 \text{ mm}$
	$d = \frac{1 \text{ mm}^3}{10^4 \text{ mm}^2}$	$1 \text{ dm}^2 = (10^2 \text{ mm})^2 = 10^4 \text{ mm}^2$
	<u><math>d = 10^{-4} \text{ mm}</math></u>	

Die Dicke dieses Blattgoldes beträgt  $10^{-4}$  mm.

Probe: Eine Blattgoldfolie von  $1 \text{ dm}^2$  mit der gleichmäßigen Dicke  $10^{-4}$  mm hat ein Volumen von  $1 \text{ mm}^3$ , denn  
 $1 \text{ dm}^2 \cdot 10^{-4} \text{ mm} = (10^2 \text{ mm})^2 \cdot 10^{-4} \text{ mm} = 10^4 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^3 = 1 \text{ mm}^3$ .

Die Darstellung von Zahlen mit Hilfe abgetrennter Zehnerpotenzen erlaubt es, die Genauigkeit von Näherungswerten auch dann eindeutig anzugeben bzw. zu erkennen, wenn es sich um natürliche Zahlen handelt, deren Zifferndarstellung mit Nullen endet.

- 85 Überlegen Sie, wie in der nachstehenden Tabelle die leeren Felder ausgefüllt werden müßten!

	Näherungswert	Anzahl der zuverlässigen Ziffern	Bedingungen für den genauen Wert $x$
a)	0,6	1	$0,55 \leq x \leq 0,65$
b)	3,8	2	
c)	0,803		$0,0065 \leq x \leq 0,0075$
d)			$2,45 \leq x \leq 2,55$
e)	2,5	3	
f)	2,50	1	$350 \leq x \leq 450$
g)	400	3	$395 \leq x \leq 405$
h)	400		
i)	400		

Man legt fest:

In der Darstellung  $a_0 \cdot 10^p$  ( $1 \leq |a_0| < 10$ ;  $p \in \mathbb{Z}$ ) sind alle Ziffern von  $a_0$  zuverlässig.

- 30 In den Beispielen des Auftrages A 85 schreibt man  
 g)  $4 \cdot 10^2$ , h)  $4,0 \cdot 10^2$ , i)  $4,00 \cdot 10^2$ .
- 86 Ergänzen Sie die Tabelle im Auftrag A 85 für folgende Näherungswerte!  
 k)  $7,4 \cdot 10^3$  l)  $7,400 \cdot 10^3$  m)  $8,0 \cdot 10^{-4}$  n)  $2 \cdot 10^1$

## Aufgaben

- Schreiben Sie die folgenden Größenangaben mit abgetrennten Zehnerpotenzen!
  - In 22,4 l Sauerstoff unter Normalbedingungen ( $0^\circ\text{C}$ , 101,3 kPa) befinden sich 6024000000000000000000000000 Moleküle.
  - Ein Molekül Wasser ( $\text{H}_2\text{O}$ ) hat eine Masse von 0,00000000000000000000000002988 g.
  - Die elektrische Elementarladung beträgt 0,0000000000000000000000001602 C.
  - Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 149500000000 m.
- Drücken Sie die folgenden Größenangaben mit Hilfe der genormten Vorsätze aus! (→ Tafelwerk S. 38)
  - $10^6$  t
  - $10^3$  t
  - $10^{-1}$  t
  - $10^{-3}$  A
  - $10^3$  m
  - $10^{-3}$  g
  - $10^2$  Pa
- Schreiben Sie ohne abgetrennte Zehnerpotenzen!
  - $7 \cdot 10^5$
  - $5 \cdot 10^{-3}$
  - $9,834 \cdot 10^7$
  - $6 \cdot 10^4$
  - $8,42 \cdot 10^1$
  - $4,6 \cdot 10^{-2}$
  - $3,43 \cdot 10^{-4}$
  - $6,42 \cdot 10^7$
  - $8,3 \cdot 10^{-5}$
  - $3,2 \cdot 10^6$
- Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form  $a_0 \cdot 10^p$  mit  $a_0 \in \mathbb{R}$ ;  $1 \leq |a_0| < 10$ ;  $p \in \mathbb{Z}$ !
  - 2421
  - 35040000
  - 0,238
  - 0,000048
  - 400
  - 23,41
  - 0,00005
  - 0,001
  - 0,0205
  - 34165
- Geben Sie die folgenden Einheiten als Vielfache der Grundeinheiten an! Verwenden Sie Zehnerpotenzen!
  - Nanofarad
  - Mikrofarad
  - Kilometer
  - Dezimeter
  - Zentimeter
  - Millimeter
  - Mikrometer
  - Nanometer
  - Gigawatt
  - Megawatt
  - Kilowatt
  - Megavolt
  - Millivolt
  - Kilotonne
  - Megatonne

Wo werden diese Einheiten angewendet?
- Welche Masse hat die Luft in Ihrem Klassenzimmer?  
 ( $\rho_{\text{Luft}} = 0,001293 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ )
- Berechnen Sie die mittlere Dichte (in  $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ) folgender Himmelskörper! Entnehmen Sie jeweils Masse und Volumen dem Tafelwerk (→ S. 53f.!)
  - Sonne
  - Mond
  - Erde
- Für grobe Überschlagsrechnungen rundet man den vor der Zehnerpotenz stehenden Faktor auf Hundertstel, Zehntel oder Ganze, z. B.  
 $7937000 \approx 7,94 \cdot 10^6 \approx 7,9 \cdot 10^6 \approx 8 \cdot 10^6$ .  
 Runden Sie entsprechend: 42760000; 538000000; 9378000000; 35790; 897000!
- Schreiben Sie Gleichungen für die Umwandlung der Längen-, Flächen- und Rauminhaltsmaße in niedrigere bzw. höhere Einheiten auf! Verwenden Sie dabei Zehnerpotenzen!

## 18 Das Dezimalsystem und andere Positionssysteme

Zahlen werden üblicherweise durch Ziffern im **Dezimalsystem** (auch **dekadisches Positionssystem** genannt) dargestellt.

Wir erinnern uns:

$$125 \text{ bedeutet } 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

$$3,47 \text{ bedeutet } 3 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100} = 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}.$$

$$0,501 \text{ bedeutet } 5 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} = 0 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}.$$

Die Zahlen werden also als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen geschrieben. Die **Basis** des Dezimalsystems ist die Zahl **10**.

Der Zahlenwert, den eine Ziffer darstellt, hängt in einem **Positionssystem** von der Stellung (der Position) dieser Ziffer in der geschriebenen Zahl ab.

Für spezielle Zwecke benutzt man mitunter auch Positionssysteme mit einer natürlichen Zahl  $n \neq 10$  als Basis. Elektronische Rechenanlagen arbeiten auf der Grundlage des **Dualsystems**, auch wenn die Ein- und Ausgabe meist im Dezimalsystem erfolgt. Die Basis ist die Zahl 2. Jede Zahl wird in diesem System als Summe von Potenzen von 2 dargestellt. Um Verwechslungen mit dem Dezimalsystem auszuschließen, schreibt man statt der Ziffern 0 und 1 meist die Zeichen 0 und L.

$$\begin{aligned} \blacksquare 31 \quad \text{LOLLO} &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 &&= 22 \\ \text{LL,L} &= &&1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 3,625 \\ \text{0,LL} &= &&0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 0,75 \end{aligned}$$

Das Dualsystem wird in Rechenanlagen bevorzugt, weil nur zwei Ziffern durch deutlich voneinander verschiedene Zustände elektrischer oder elektronischer Bauelemente darzustellen sind. Die beiden Zustände können sein:

Strom fließt – Strom fließt nicht;

positive Spannung liegt an – negative Spannung liegt an;

Speicherzelle magnetisiert – Speicherzelle entgegengesetzt magnetisiert.

- 87 a) Begründen Sie, warum man im Dualsystem mit zwei Ziffern auskommt!
- b) Welche natürlichen Zahlen sind nicht als Basis eines Positionssystems geeignet?

Man kann in diesem Zahlensystem auch *rechnen*, was jedoch einige Übung verlangt, da wir das Dezimalsystem gewöhnt sind. Es genügt, die folgenden Grundaufgaben der Addition bzw. Multiplikation zu beherrschen:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0 & 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 + L = L & 0 \cdot L = 0 \\ L + 0 = L & L \cdot 0 = 0 \\ L + L = LO & L \cdot L = L \end{array}$$

Schriftliche Additionen bzw. Multiplikationen werden dann wie folgt ausgeführt:

$$\begin{array}{r} \text{LOL} \\ + \text{LLL} \\ \hline \text{LOLOO} \\ \hline \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{LO,L} \cdot \text{LO,L} \\ \text{LOL} \\ \text{000} \\ \text{LOL} \\ \hline \text{LLOO,L} \end{array}$$

- 88 Überprüfen Sie die Richtigkeit dieser Rechnungen! Übertragen Sie dazu die Zahlen in das Dezimalsystem! (Rechnen Sie wie gewohnt!)

## Aufgaben

- Folgende Summen sind mit Hilfe von Ziffern im Dezimalsystem zu schreiben!
  - $5 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$
  - $7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-3} + 10^{-5}$
  - $4 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^7 + 10^6$
  - $9 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^{-5}$
  - $3 \cdot 10^{-6} + 10^{-7} + 8 \cdot 10^{-8}$
  - $2 \cdot 10^0 + 10^{-9}$
- Geben Sie die folgenden Dualzahlen als Dezimalzahlen an!
  - LOLOL
  - LLL00
  - LL,LL
  - L0,0L
  - LOOLOOL
  - LLL,LL
- Lösen Sie die folgenden Aufgaben zunächst im Dualsystem und danach im Dezimalsystem! (L)
  - LLOLL + LOLOL
  - LOLLOL + LLL + LOLOL
  - LOLLLL + LLLLL
  - LLOL · LLOL
  - LOLLOL · LOOLO
  - LOLOLOL · LLLL
- Zählen Sie im Dualsystem
  - von 0 bis 20 in Einersprüngen vorwärts,
  - von 16 bis 2 in Einersprüngen rückwärts,
  - von 0 bis 16 in Zweiersprüngen vorwärts,
  - von 10 bis 50 in Zehnersprüngen vorwärts!

## 19 Der Logarithmus

Wie wir wissen, hat die Addition reeller Zahlen genau eine Umkehrung, die Subtraktion: Für beliebige reelle Zahlen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gilt: Wenn  $x + y = z$ , so ist  $z - x = y$  und  $z - y = x$ . Auch die Multiplikation reeller Zahlen hat genau eine Umkehrung, die Division: Für beliebige reelle Zahlen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  gilt: Wenn  $x \cdot y = z$ , so ist  $z : x = y$  und  $z : y = x$ . Für das Potenzieren nichtnegativer reeller Zahlen  $x$  mit einer natürlichen Zahl  $n$  ( $n > 0$ ) ist das Radizieren mit  $n$  eine Umkehrung: Für beliebige nichtnegative reelle Zahlen  $y$ ,  $z$  und natürliche Zahlen  $x$  ( $x > 0$ ) gilt: Wenn  $y^x = z$ , so ist  $\sqrt[x]{z} = y$ . Das Radizieren hilft aber nicht weiter, wenn in der Gleichung  $y^x = z$  der *Exponent* der Potenz zu bestimmen ist.

- 89 Übertragen Sie die folgende Tabelle in Ihr Heft! Setzen Sie die angegebenen Werte für  $z$  nacheinander in die Gleichung  $10^x = z$  ein, und bestimmen Sie jeweils den Exponenten  $x$ !

$z$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	$\sqrt[3]{10}$	$\sqrt{10}$	10	100	1000
$x$									

Die im Auftrag A 89 auszuführende Operation bezeichnet man als **Logarithmieren** mit der Basis 10.

Über ihre Ausführbarkeit sei ohne Beweis mitgeteilt: Man kann in der Gleichung  $10^x = z$  für  $x$  oder für  $z$  auch *unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche* (d. h. irrationale Zahlen) zulassen, wofür der Potenzbegriff zu erweitern ist auf Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten. Dann hat die Gleichung  $10^x = z$  für jede positive reelle Zahl  $z$  *genau eine reelle Lösung*  $x$ . Gleiches gilt für jede Gleichung  $y^x = z$  ( $y > 0$ ;  $y \neq 1$ ).

Das eindeutig bestimmbare Resultat des Logarithmierens einer positiven Zahl  $z$  bei einer gewählten positiven Basis  $y$  ( $y \neq 1$ ) nennt man den **Logarithmus von  $z$  zur Basis  $y$**  und schreibt:  $\log_y z$ .

► 6 **DEFINITION:**  $\log_y z$  ( $y > 0; y \neq 1; z > 0$ ) ist diejenige reelle Zahl  $x$ , für die  $y^x = z$  gilt.

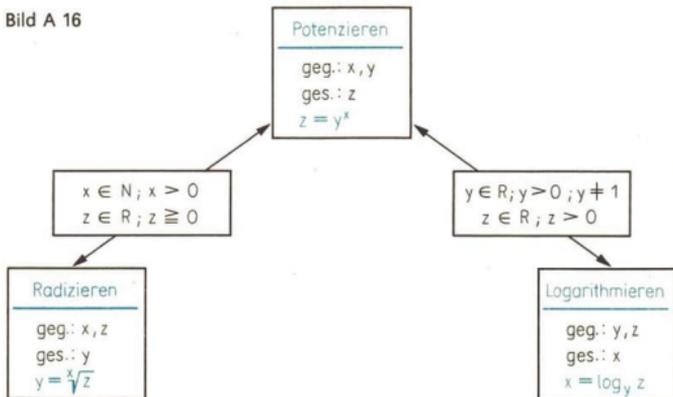
Im Falle der Basis 10 schreibt man üblicherweise anstelle von „ $\log_{10} z$ “ kürzer „ $\lg z$ “. Es ist also beispielsweise  $\lg 100 = 2$ , denn  $10 > 0; 10 \neq 1; 100 > 0$ , und  $10^2 = 100$ .

32 Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$\lg 3$	3 $\lg$	4.7712 -01

Der Schulrechner liefert für  $\lg 3$  als Näherungswert 0,47712.

Das Logarithmieren ist – neben dem Radizieren – eine weitere Umkehrung des Potenzierens. Das Potenzieren hat also zwei Umkehroperationen (↗ Bild A 16).

Bild A 16



## Zusammenfassung

Definitionen	
$a^0 = 1$ ( $a \in \mathbb{R}; a \neq 0$ )	$4^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ( $a \in \mathbb{R}; a \neq 0; n \in \mathbb{N}; n \geq 1$ )	$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ( $a \in \mathbb{R}; a > 0; m, n \in \mathbb{Z}; n \geq 2$ )	$8^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{8^3} = \sqrt[2]{512} = \sqrt[2]{64 \cdot 8} = 8 \sqrt{2} = 4 \sqrt{2}$

Definitionen		
	$\sqrt[n]{b}$ ( $b \in \mathbb{R}; b \geq 0; n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ ) nennt man diejenige nichtnegative reelle Zahl $a$ , für die $a^n = b$ gilt.	$\sqrt[5]{32} = 2$ , denn $32 \geq 0$ , $2^5 = 32$ und $2 \geq 0$
	$\log_a b$ ( $a \in \mathbb{R}; a > 0; a \neq 1; b > 0$ ) nennt man diejenige reelle Zahl $n$ , für die $a^n = b$ gilt.	$\log_2 32 = 5$ , denn $2 > 0$ , $2 \neq 1$ , $32 > 0$ und $2^5 = 32$
Potenzgesetze		
Für alle positiven reellen Zahlen $a, b$ und alle rationalen Zahlen $m, n$ gilt:		
gleiche Basen	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^{-2} \cdot 5^4 = 5^{-2+4} = 5^2$
	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{(-4)^5}{(-4)^2} = (-4)^{5-2} = (-4)^3$
	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^{-\frac{1}{2} \cdot 4} = 2^{-2}$
gleiche Exponenten	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \cdot (-4)^3 = (-8)^3$
	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{(-4)^3}{8^3} = \left(\frac{-4}{8}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$
<i>Darstellung von Zahlen mit abgetrennten Zehnerpotenzen</i>		
Jede reelle Zahl $a \neq 0$ kann in der Form $a = a_0 \cdot 10^p$ ( $a_0 \in \mathbb{R}; 1 \leq  a_0  < 10; p \in \mathbb{Z}$ ) dargestellt werden. Dabei sollen alle Ziffern von $a_0$ zuverlässig sein.		$a = 7,400 \cdot 10^3$ bedeutet $7399,5 \leq a \leq 7400,5$

# B Ungleichungen und Gleichungssysteme

## Lineare Ungleichungen

Tim behauptet: In jedem beliebigen Dreieck ist die Hälfte des Umfanges immer noch größer als die größte der Dreieckseiten. Hat Tim recht?

In einem *gleichseitigen* Dreieck, in dem jede Seite  $a$  Einheiten lang ist, ist Tims Aussage sicher wahr, denn für jede positive reelle Zahl  $a$  gilt:  $\frac{1}{2}(a + a + a) > a$ .

Wir nehmen an, in einem *beliebigen* Dreieck sei die Länge der größten Seite  $c$  Einheiten.

Dann müßte gezeigt werden:  $\frac{1}{2}(a + b + c) > c$ . Nun wissen wir außerdem, daß in jedem Dreieck die Summe zweier Seitenlängen größer ist als die Länge der dritten Seite. Also gilt außerdem  $a + b > c$ . Um die Behauptung von Tim beweisen oder widerlegen zu können, wollen wir lernen, mit Ungleichungen umzugehen.

## 1 Zur Wiederholung

- 1 Ordnen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen anhand der Übersicht auf der nächsten Seite oben!

$$x^2 = 7; \quad a + b > c; \quad 4x + 3 = 7x + 5; \quad \pi < 3,14;$$

$$3 < -10000; \quad (x - 1)(x + 1) = 0; \quad A = \frac{(a + c) \cdot h}{2};$$

$$y > x + 2; \quad (1 + n)^2 > n^2;$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}; \quad 127^0 - 1 = 0; \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 < \left(\frac{3+1}{2}\right)^3; \quad \frac{2}{5} + \frac{5}{2} = 1;$$

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad |x| > 4; \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 1; \quad \frac{2}{3} < \frac{3}{4}; \quad (-3) : \left(-\frac{1}{3}\right) = 1;$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad 4(z - 3) + 6 > 2z + 1$$

Sie haben bereits solche Schreibweisen wie  $x \leq 5$  und  $2 < x < 9$  kennengelernt.

$x \leq 5$  bedeutet:  $x < 5$  oder  $x = 5$ .

$2 < x < 9$  bedeutet:  $2 < x$  und auch  $x < 9$ .

Auch solche Ausdrücke bezeichnet man als Ungleichungen.

	Ohne Variablen		Mit genau einer Variablen	Mit mehr als einer Variablen
	wahre Aussagen	falsche Aussagen		
Gleichungen				
Ungleichungen				

- 2 Stellen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen als Punktmenge auf je einer Zahlengeraden dar!
- a)  $x < 5$  ( $x \in \mathbb{N}$ )      b)  $x \leq 5$  ( $x \in \mathbb{N}$ )      c)  $2 < x < 9$  ( $x \in \mathbb{N}$ )  
 d)  $2 \leq x \leq 9$  ( $x \in \mathbb{N}$ )

*Wir wissen:* Wenn man in einer Gleichung oder einer Ungleichung für die auftretenden Variablen Elemente des jeweiligen Grundbereiches einsetzt, entsteht eine *wahre* oder eine *falsche Aussage*.

- 3 Setzen Sie in den folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen für die Variablen die angegebenen Zahlen ein! Entscheiden Sie, ob eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht!

$$u^2 - 9 = 0 \quad (u = 3; u = 9; u = -3)$$

$$|z - 1| < 4 \quad (z = 5,01; z = 4,99; z = -99)$$

$$a + b = 16 \quad (a = 2 \text{ und } b = -18; a = 7,01 \text{ und } b = 8,9; a = 8 \text{ und } b = 8)$$

$$0 > s + 2t \quad (s = 1 \text{ und } t = 1; s = 1 \text{ und } t = -1; s = -1 \text{ und } t = 1)$$

- 4 a) Gegeben ist eine Gleichung mit der Variablen  $x$  und eine Zahl  $x_0$  aus dem Variablengrundbereich dieser Gleichung. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen den gleichen Sachverhalt ausdrücken! Begründen Sie Ihre Meinung!
- (1) Die Zahl  $x_0$  erfüllt die Gleichung.
  - (2) Die Zahl  $x_0$  gehört zur Lösungsmenge der Gleichung.
  - (3) Die Lösungsmenge der Gleichung ist  $\{x_0\}$ .
  - (4) Setzt man in die Gleichung für  $x$  die Zahl  $x_0$  ein, so entsteht eine *wahre Aussage*.
  - (5)  $x_0$  ist Lösung der Gleichung. (L)
- b) Denken Sie sich in dem obigen Aufgabentext das Wort „Gleichung“ durch das Wort „Ungleichung“ ersetzt! Entscheiden Sie erneut!

Wie bei Gleichungen hängt auch bei Ungleichungen die Lösungsmenge vom jeweiligen Grundbereich ab. So hat z. B. die Ungleichung  $2x < 5$  bezüglich  $\mathbb{N}$  die Lösungsmenge  $L = \{0; 1; 2\}$  ( $\rightarrow$  Bild B 1). Bezüglich  $\mathbb{R}$  besteht die Lösungsmenge von  $2x < 5$  aus allen reellen Zahlen, die kleiner als 2,5 sind ( $\rightarrow$  Bild B 2).



Bild B 1



Bild B 2

- 5 a) Lösen Sie die Gleichungen und Ungleichungen, und ergänzen Sie die Tabellen!

Gleichungen	Lösungsmenge bez. des Variablengrundbereiches				
	N	Z	$Q_+$	Q	R
$4x + 1 = -9$		$L = \emptyset$		$L = \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$	
$y^2 = 2$					
$ y  = 3$	$L = \{3\}$			$L = \{3; -3\}$	
$2a = a + a$			$L = Q_+$		

Ungleichungen	Lösungsmenge bez. des Variablengrundbereiches		
	N	Z	R
$x + 1 < 4$			
$ x  < 3$			Menge aller reellen Zahlen, die zwischen $-3$ und $3$ liegen
$2x < x$		$L = \{-1; -2; -3; \dots\}$	

- b) Veranschaulichen Sie von jeder der in der zweiten Tabelle genannten Ungleichungen die Lösungsmenge bez. N; Z und R als Punktmenge auf einer Zahlengeraden!

Viele Ungleichungen kann man bereits „durch Überlegen“ lösen.

- 6 Geben Sie alle natürlichen Zahlen an, welche die folgende Ungleichung erfüllen! Veranschaulichen Sie die Lösungsmengen auf dem Zahlenstrahl!
- a)  $2y < 9$       b)  $-x > -5$       c)  $\frac{1}{z} > \frac{1}{4}$  (L)
- d)  $3 < 2u < 10$       e)  $2v - 1 \leq 9$       f)  $2,0001w > w + w$  (L)

### Aufgaben

- Untersuchen Sie, welche der Zahlen  $2; \frac{1}{2}; 7; -7; 0$  die Gleichung  $x(x+7) = 0$  und welche die Ungleichung  $2x + 1 > -1$  erfüllen!
- Welche der natürlichen Zahlen  $1; 2; \dots; 10$  überführen die Ungleichung  $3x < x + 9$  in eine wahre Aussage?
- Geben Sie drei natürliche Zahlen an, welche die Ungleichung  $4 < 2x + 1 < 10$  erfüllen, und drei natürliche Zahlen, welche diese Ungleichung nicht erfüllen!
- Geben Sie eine gebrochene Zahl an, die größer ist als  $3$  und zur Lösungsmenge von  $4x - 1 < 12$  gehört!

5. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen, welche Lösung der Ungleichung  $4,3x < 17$  sind!
6.  $L_1$  ist die Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 - 16 = 0$ ,  $L_2$  ist die Lösungsmenge der Ungleichung  $x - 4 < 0$ . Entscheiden Sie, welche der folgenden Zahlen Element von  $L_1$  und welche Element von  $L_2$  sind: 0; -3; -4; -1000;  $\pi$ ;  $2^3$ ;  $\sqrt{2}$ ; 4; 3,99; 16;  $2^{-3}$ !
7. Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen!
- |                         |                   |                    |                     |
|-------------------------|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $ a  \leq 5$         | mit $a \in Z$     | b) $\sqrt{z} < 10$ | mit $z \in N$ (L)   |
| c) $x^2 < 8$            | mit $x \in Z$ (L) | d) $w^4 < -2$      | mit $w \in R$       |
| e) $-u < u$             | mit $u \in Z$     | f) $y^2 < y$       | mit $y \in Q_+$ (L) |
| g) $\frac{1}{z} \geq 1$ | mit $z \in Q$ (L) | h) $2^t < 0$       | mit $t \in N$ (L)   |
| i) $ x - 1  \leq 0$     | mit $x \in R$     |                    |                     |
8. Geben Sie eine Ungleichung an, zu deren Lösungsmenge sowohl die Zahl 100 als auch die Zahl -100 gehört!
9. Beschreiben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung  $3 < z < 9$  mit  $z \in R$  durch Worte! Benutzen Sie dabei die Formulierung „... sowohl ... als auch“! (L)
10. Geben Sie drei reelle Zahlen an, welche die Ungleichung  $x^2 > x$  erfüllen, und drei reelle Zahlen, welche die Ungleichung  $x > x^2$  erfüllen!
11. Geben Sie drei ganze Zahlen, welche Lösung der Ungleichung  $x + x < x \cdot x$  sind!
- 12.\* Geben Sie drei geordnete Paare reeller Zahlen an, die zur Lösungsmenge der Ungleichung  $-x > y$  gehören!
- 13.\* Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung  $x + y < 3$  mit  $x \in N$  und  $y \in N$ ! (L)
- 14.\* Geben Sie zehn Lösungen der Gleichung  $y = x + 1$  ( $x, y \in R$ ) an, und veranschaulichen Sie diese Lösungen durch Punkte in einem Koordinatensystem! Beschreiben Sie nun die Lage von Punkten, die Lösungen der Ungleichung  $y > x + 1$  entsprechen!

## 2 Äquivalente Gleichungen – äquivalente Ungleichungen

Wir wiederholen zunächst, was wir über *äquivalente Gleichungen* wissen.

- 7 Gegeben sind die Gleichungen  $4x + 3 = 7$ ;  $2x + 100 = 102$ ;  $\frac{x}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ;  $\frac{2}{x} - 1 = 1$  mit  $R$  als Grundbereich für die Variable  $x$ . Lösen Sie die Gleichungen! Vergleichen Sie die Lösungsmengen!

Gleichungen, die bezüglich eines gemeinsamen Grundbereichs die gleiche Lösungsmenge besitzen, heißen *einander äquivalent*.

- 8 a) Die Gleichungen  $x^2 - 16 = 0$ ;  $x + 1 = 9 - x$ ;  $8 - 2x = 0$  und  $|x| = 4$  haben  $R$  als Variablengrundbereich. Untersuchen Sie, welche der Gleichungen einander äquivalent sind!

- b) Untersuchen Sie, in welchem der folgenden Fälle eine zu  $3x = 6$  ( $x \in R$ ) äquivalente Gleichung entsteht! Begründen Sie Ihre Auffassung!
- Auf beiden Seiten der Gleichung wird 6 subtrahiert.
  - Die beiden Seiten der Gleichung werden miteinander vertauscht.
  - Beide Seiten der Gleichung werden durch 3 dividiert.
  - Beide Seiten der Gleichung werden mit 0 multipliziert.

Auch für *Ungleichungen* legen wir fest:

Ungleichungen heißen bezüglich eines Grundbereichs *einander äquivalent* genau dann, wenn sie in diesem Bereich die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Wir untersuchen, ob die beiden Ungleichungen  $x + 1 > 0$  und  $x + 2 > 1$  mit  $x \in R$  einander äquivalent sind: Alle reellen Zahlen, welche die Ungleichung  $x + 1 > 0$  erfüllen, müssen größer als  $-1$  sein. Genau diese reellen Zahlen bilden jedoch auch die Lösungsmenge von  $x + 2 > 1$ . Beide Ungleichungen besitzen also bezüglich ihres gemeinsamen Grundbereiches die gleiche Lösungsmenge. Die Ungleichungen  $x + 1 > 0$  und  $x + 2 > 1$  sind bezüglich  $R$  äquivalent.

- 9 Die Ungleichungen  $2x < 6$ ;  $x - 2 < 0$  und  $x + 1 < 4$  sollen  $N$  als gemeinsamen Variablengrundbereich besitzen. Untersuchen Sie, ob die Ungleichungen einander äquivalent sind!
- 10 Gegeben ist die Ungleichung  $3x < 15$  mit  $x \in N$ . Ermitteln Sie die Lösungsmenge! Geben Sie zwei Ungleichungen an, die zu  $3x < 15$  äquivalent sind, und zwei Ungleichungen, die nicht zu  $3x < 15$  äquivalent sind!

## Aufgaben

1. Die Ungleichung  $x < 2$  besitzt bezüglich  $N$  als Variablengrundbereich die Lösungsmenge  $L = [0; 1]$ . Untersuchen Sie, ob die Ungleichung  $x + 3 < 2 + 3$  bezüglich  $N$  zu  $x < 2$  äquivalent ist!
2. Die Ungleichungen  $x + 1 > 0$  und  $2x > 1$  ( $x \in R$ ) sind nicht äquivalent. Warum nicht? (L)
3. Geben Sie zu jeder der Ungleichungen  $4y > 2$  ( $y \in R$ ) und  $z + 1 > 5$  ( $z \in R$ ) eine äquivalente Ungleichung an!
4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von  $x < 5$  mit  $x \in N$ ! Addieren Sie auf beiden Seiten dieser Ungleichung die Zahl 2! Ist die entstandene Ungleichung zu  $x < 5$  äquivalent? Begründen Sie Ihre Auffassung!
5. Entscheiden Sie, ob die jeweils nebeneinanderstehenden Ungleichungen einander äquivalent sind!
  - a)  $x > 3$  ( $x \in Q$ ) und  $a > 3$  ( $a \in Q$ )
  - b)  $n < 10$  ( $n \in N$ ) und  $n \leq 10$  ( $n \in N$ )
  - c)  $x > 5$  ( $x \in R$ ) und  $x < 5$  ( $x \in R$ )
6. Eine Ungleichung mit dem Variablengrundbereich  $N$  besitzt die Lösungsmenge  $L = \{2; 3; 4; 5; 6 \dots\}$ . Geben Sie eine Ungleichung an, die zu dieser Ungleichung äquivalent ist!
7. Wählen Sie einen Variablengrundbereich, für den die jeweils nebeneinanderstehenden Ungleichungen äquivalent sind, und einen solchen, für den sie nicht äquivalent sind!

$$\text{a) } x > \frac{1}{2} \text{ und } x > \frac{3}{4} \quad \text{b) } a > -2 \text{ und } a \geq 0 \quad \text{c) } z \leq \sqrt{2} \text{ und } z < \sqrt{2} \quad (\text{L})$$

- 8.\* a) Es wird behauptet: Wenn eine Gleichung äquivalent einer zweiten und diese äquivalent einer dritten ist, so ist die erste Gleichung auch äquivalent der dritten Gleichung.  
Ist diese Behauptung richtig? Begründen Sie Ihre Auffassung!
- b) Denken Sie sich in dem Text der Aufgabe 8a) das Wort Gleichung durch das Wort Ungleichung ersetzt! Durchdenken Sie den Sachverhalt erneut!

### 3 Umformungsregeln für Ungleichungen

- 11 Vereinfachen Sie schrittweise die Gleichung  $2(x + \frac{1}{2} - 2x) = 20 + x - 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), und geben Sie die Lösungsmenge an! Wiederholen Sie dabei Umformungsregeln für Gleichungen!

*Wir wissen:* Formt man eine Gleichung mit Hilfe der Umformungsregeln für Gleichungen um, so bleibt die Lösungsmenge erhalten. Man spricht deshalb von äquivalenten Umformungen.

Häufig werden beim Lösen einer Gleichung beide Seiten mit einem Term, der eine Variable enthält, multipliziert oder durch einen solchen Term dividiert. Auch das ist eine äquivalente Umformung, wenn man beachtet, daß der Term nicht den Wert Null annimmt, falls man Zahlen aus den Grundbereichen für die Variablen einsetzt.

- 1 Die Gleichung  $\frac{x+3}{x-3} = 2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $x \neq 3$ ) soll gelöst werden.

$\frac{x+3}{x-3} = 2 \quad   \cdot (x-3)$	Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem Term $(x-3)$ , wobei $x \neq 3$ vorausgesetzt wird
$x+3 = 2(x-3)$	Umformen des Terms auf der rechten Seite der Gleichung
$x+3 = 2x-6 \quad   +6$	Addition von 6 auf beiden Seiten der Gleichung
$x+9 = 2x \quad   -x$	Subtraktion von $x$ auf beiden Seiten der Gleichung
$9 = x$	Vertauschen der beiden Seiten der Gleichung
$x = 9$	

Die Lösungsmenge der letzten Gleichung ist  $L = \{9\}$ . Da nur äquivalente Umformungen vorgenommen wurden, ist  $\{9\}$  auch Lösungsmenge der Ausgangsgleichung. Die Probe bestätigt dies:  $\frac{9+3}{9-3} = 2$ ;  $9 \in \mathbb{R}$  und  $9 \neq 3$  (wahr).

Die Lösungsmenge einer Gleichung kann man also ermitteln, indem man Umformungsregeln nutzt: Die gegebene Gleichung wird schrittweise in eine ihr äquivalente Gleichung umgeformt, bei welcher man die Lösungsmenge unmittelbar ablesen kann. Für das Lösen

von *Ungleichungen* kennen wir eine systematische Vorgehensweise noch nicht. Die Lösungsmengen haben wir in einfachen Fällen bisher stets „durch Überlegen“ gefunden. Wir stellen uns deshalb das Ziel, auch *Umformungsregeln für Ungleichungen* zu finden, bei deren Anwendung die Lösungsmenge erhalten bleibt. Auf einen Beweis dieser Aussagen werden wir verzichten.

- 12 Eine Ungleichung wurde wie folgt umgeformt:

$$2x + x + 6 < 5x - 2 \cdot 4$$

$$3x + 6 < 5x - 8$$

$$3x < 5x - 14$$

$$-2x < -14$$

$$x < 7$$

Setzen Sie in  $x < 7$  und in die Ausgangsungleichung für  $x$  die Zahl 0 ein! Überprüfen Sie die einzelnen Umformungsschritte!

Ein bedenkenloses Übertragen der Regeln für das Umformen von Gleichungen auf das Rechnen mit Ungleichungen ist nicht möglich (↗ Auftrag 12).

- 13 a) Stellen Sie Paare einander äquivalenter Ungleichungen zusammen! ( $x \in \mathbb{R}$ )  
 $x < 5$ ;  $x > 5$ ;  $5 < x$ ;  $5 > x$ ;  $x > -3$ ;  $-3 > x$ ;  $-3 < x$ ;  $x < -3$   
 b) Welche der folgenden Ungleichungen besitzen die gleiche Lösungsmenge? ( $y \in \mathbb{R}$ )  
 $2y < 8$ ;  $8 < 2y$ ;  $8 > 2y$ ;  $2y > 8$   
 c) Setzen Sie die richtige der Beziehungen  $a > b$  oder  $b > a$  oder  $b < a$  ein!  
 Für alle reellen Zahlen  $a$ ;  $b$  gilt:  
 Wenn  $a < b$ , so ...

▷ 1

Vertauscht man in einer *Ungleichung* die auf ihren beiden Seiten stehenden Terme und ersetzt gleichzeitig das Zeichen  $<$  durch das Zeichen  $>$  bzw. das Zeichen  $>$  durch das Zeichen  $<$ , so geht die Ungleichung in eine ihr äquivalente Ungleichung über.

- 14 a) Addieren Sie bei jeder der Ungleichungen  $4 < 7$ ;  $-2 < 3$  und  $-8 < -5$  auf beiden Seiten die reelle Zahl 10; die reelle Zahl 2; die reelle Zahl 0 bzw. die reelle Zahl  $-4$ ! Was stellen Sie fest?  
 b) Für alle  $a$ ;  $b$ ;  $c \in \mathbb{R}$  gilt: Wenn  $a < b$ , so  $a + c < b + c$ . Formulieren Sie diese Aussage mit Worten! Veranschaulichen Sie den Sachverhalt auf der Zahlengeraden, indem Sie für  $a$ ,  $b$  und  $c$  spezielle Zahlen wählen! Formulieren Sie eine entsprechende Aussage für den Fall  $a > b$ !
- 15 Beschreiben Sie jeweils, durch welche Umformung die zweite Ungleichung aus der ersten hervorgegangen ist!  
 Untersuchen Sie, ob die beiden Ungleichungen einander äquivalent sind!  
 a)  $x - 1 < 3$  und  $x < 4$  ( $x \in \mathbb{R}$ )  
 b)  $n + n < n + 3$  und  $n < 3$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  
 c)  $-2z + 1 > -3z + 7$  und  $z > 6$  ( $z \in \mathbb{Z}$ )

Wie bei Gleichungen darf man auch bei Ungleichungen *auf beiden Seiten* dieselbe reelle Zahl oder auch dasselbe Vielfache auftretender Variablen addieren oder subtrahieren; die Lösungsmenge ändert sich dadurch nicht.

▷ 2

**Addiert oder subtrahiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung die gleiche Zahl oder das gleiche Vielfache auftretender Variablen, so geht die Ungleichung in eine ihr äquivalente Ungleichung über.**

- 16 Welche der folgenden Ungleichungen besitzen die gleiche Lösungsmenge? Nutzen Sie Regel B 2!

$$x > 1; \quad 4x > 8; \quad -x > 1 - 2x; \quad 4x + 1 > 9; \quad x + 1 > 2; \quad x + 2 > 10 - 3x$$

Wir wollen untersuchen, wie sich eine Ungleichung verhält, wenn man die auf beiden Seiten stehenden Terme mit der gleichen Zahl multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert.

- 17 Die Ungleichung  $2 < 3$  ist eine wahre Aussage. Günter multipliziert beide Seiten dieser Ungleichung mit  $0,1$ ;  $1000$ ;  $-3$  bzw.  $-100$  und erhält  $0,2 < 0,3$ ;  $2000 < 3000$ ;  $-6 < -9$  bzw.  $-200 < -300$ . Einige dieser Ungleichungen sind wahre, andere falsche Aussagen.

Überprüfen Sie dies! Was stellen Sie fest?

- 18 Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

(1) Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $a \cdot c < b \cdot c$ .

(2) Wenn  $a < b$  und  $c < 0$ , so  $a \cdot c > b \cdot c$ .

a) Verdeutlichen Sie sich diese Aussage, indem Sie für  $a, b$  und  $c$  spezielle Zahlen wählen! Formulieren Sie diese Aussage mit Worten!

b) Formulieren Sie eine entsprechende Aussage für den Fall  $a > b$ !

Will man beim Lösen einer Ungleichung beide Seiten mit der gleichen Zahl  $c$  multiplizieren bzw. durch die gleiche Zahl dividieren, so muß man die beiden Fälle  $c > 0$  und  $c < 0$  unterscheiden. Die Division eines Terms durch  $c$  ( $c \neq 0$ ) kann durch die Multiplikation des Terms mit  $\frac{1}{c}$  ersetzt werden. Die für die Multiplikation einer Ungleichung mit einer Zahl erkannten Zusammenhänge können deshalb auf die Division beider Seiten einer Ungleichung durch eine Zahl übertragen werden.

- 19 Setzen Sie das richtige Relationszeichen ein!

Für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

(1) Wenn  $a > b$  und  $c > 0$ , so  $a : c \square b : c$ .

(2) Wenn  $a > b$  und  $c < 0$ , so  $a : c \square b : c$ .

▷ 3

**Eine Ungleichung geht in eine äquivalente Ungleichung über, wenn man beide Seiten der Ungleichung mit der gleichen positiven Zahl  $c$  multipliziert bzw. durch die gleiche positive Zahl  $c$  dividiert oder beide Seiten der Ungleichung mit der gleichen negativen Zahl  $c$  multipliziert bzw. durch die gleiche negative Zahl  $c$  dividiert und gleichzeitig das Zeichen  $<$  durch das Zeichen  $>$  bzw. das Zeichen  $>$  durch das Zeichen  $<$  ersetzt.**

- 20 Welche der folgenden Ungleichungen sind einander äquivalent? Begründen Sie Ihre Auffassung! Nutzen Sie Regel B 3!

$$-4x > 16 \quad -x > 4 \quad -\frac{1}{4}x > 16 \quad \frac{1}{4}x < -16$$

$$x > -4 \quad -x < 4 \quad -\frac{1}{4}x < 16 \quad \frac{1}{4}x > -16$$

Wie bei Gleichungen ändert sich auch bei Ungleichungen die Lösungsmenge nicht, wenn man auf (wenigstens) einer Seite einen *Term umformt*.

- 21 Die Ungleichungen  $\frac{6(x+0,5)}{2} < 2x+1-x$  und  $3x+1,5 < x+1$  besitzen die gleiche Lösungsmenge. Begründen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung!
- 22 Vergleichen Sie die Umformungsregeln für Ungleichungen mit denen für Gleichungen! Stellen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede heraus, indem Sie die folgende Übersicht vervollständigen:

Die Lösungsmenge bleibt erhalten, wenn man bei einer	
Gleichung	Ungleichung
	beide Seiten vertauscht und gleichzeitig das Ungleichheitszeichen „umkehrt“,
auf beiden Seiten die gleiche reelle Zahl oder das gleiche Vielfache der Variablen addiert oder subtrahiert,	
beide Seiten mit der gleichen von 0 verschiedenen Zahl multipliziert oder durch die gleiche von 0 verschiedene Zahl dividiert,	
	auf einer Seite Terme umformt.

- 23 Die Ungleichung  $3x+4 > 5x$  ( $x \in \mathbb{N}$ ) wird durch Umformen gelöst. Begründen Sie die Richtigkeit jedes Schrittes!

$$\begin{aligned}
 3x+4 &> 5x \\
 3x &> 5x-4 \\
 3x-5x &> -4 \\
 -2x &> -4 \\
 x &< 2 \\
 L &= \{0;1\}
 \end{aligned}$$

## Aufgaben

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen! Führen Sie die Probe durch!
  - a)  $\frac{8}{x+1} = 4$  ( $x \neq -1$ )    b)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = 3$  ( $x \neq 0$ )    (L)
  - c)  $\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{x+1}$  ( $x \neq 1; x \neq -1$ )
  - d)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{2x+2}$  ( $x \neq 0; x \neq -1$ )    (L)
  - e)  $\frac{x-2}{x-3} = \frac{x+6}{x+4}$  ( $x \neq 3; x \neq -4$ )
2. Führen Sie bei jeder der folgenden Ungleichungen den jeweils angegebenen Umformungsschritt aus!
  - a)  $2x < 24$      $|\cdot 2$     b)  $x-17 > 8$      $|\cdot 17$     c)  $\frac{x}{7} < 7$      $|\cdot 7$

3. d)  $2x > x + 1 \quad | -x$     e)  $-23x < 5 \quad | :(-23)$     f)  $x + 23 < 5 \quad | -23$   
 g)  $16 > -4x \quad | :(-4)$     h)  $-1,3 > 2x \quad | \text{Seiten der Ungleichung vertauschen}$

Formulieren Sie mit Worten diejenigen Regeln, die jeweils beim Umformen der folgenden Ungleichungen genutzt wurden!

- a)  $2x < 162$     b)  $5 < x + 1$     c)  $22 + x < 17$   
 $x < 81$      $x + 1 > 5$      $x < -5$   
 d)  $-4x < 20$     e)  $2x < x + 22$     f)  $2(x + 1) < 2x + 5 - x$   
 $x > -5$      $x < 22$      $2x + 2 < x + 5$   
 g)  $14 > 0,25x$     h)  $\frac{x-1}{-3} < 0,5$   
 $56 > x$      $x - 1 > -1,5$

4. Untersuchen Sie, welche Umformungsregeln für Ungleichungen jeweils angewandt wurden!

Ausgangsungleichung	Umgeformte Ungleichung
$14 + 2x > x$	$x < 14 + 2x$
$2y + 3 < 5y - 7$	$10 < 3y$
$-4x < 7$	$x > -\frac{7}{4}$
$2(z - 3) < z + 1$	$2z - 6 < z + 1$
$2 - 0,1u < 3$	$u > -10$
$\frac{5-v}{3} > 2(v+1)$	$5 - v > 6v + 6$

5. Klaus formt eine Ungleichung wie folgt um:

$$\begin{aligned} -4x + 1 &> x + 5 \\ -4x &> x + 4 \\ -5x &> 4 \\ x &< -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, ob Klaus richtig gerechnet hat! Begründen Sie die Vorgehensweise von Klaus, indem Sie für jeden Umformungsschritt die genutzte Regel angeben!

6. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Auffassung!

Für alle reellen Zahlen gilt:

- (1) Wenn  $a > b$ , so auch  $a + 5 > b + 5$ .  
 (2) Wenn  $a > b$ , so auch  $a + c > b$ .  
 (3) Wenn  $3a > 21$ , so  $a > 7$ .  
 (4) Wenn  $4a > 2b$ , so auch  $-4a > -2b$ .

- 7.\* Lösen Sie die Ungleichung  $\frac{1}{x} > 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ ), indem Sie beide Seiten mit  $x$  multiplizieren!
- 8.\* Ordnen Sie  $a$ ,  $a^2$  und  $a^3$  der Größe nach für folgende Fälle! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!
- a)  $a > 1$     b)  $1 > a > 0$     c)  $0 > a > -1$  (L)    d)  $-1 > a$  (L)

## 4 Lösen linearer Ungleichungen mit einer Variablen

Ungleichungen heißen *linear*, wenn die in ihnen auftretenden Variablen nur durch Rechenoperationen erster Stufe miteinander verknüpft sind; z. B.  $2x + 1 > 0$ ;  $4y - 1 > 2y + 3$ ;  $\frac{6z - 7}{2} < 4(z + 1)$ .

Für eine lineare Ungleichung mit einer Variablen ist der umfassendste Grundbereich die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen. Im folgenden soll, falls nichts anderes angegeben wird, stets dieser Grundbereich gewählt werden.

Jede lineare Ungleichung mit einer Variablen kann in  $ax + b > 0$  oder  $ax + b < 0$  umgeformt werden.

- 24 Bringen Sie die folgenden Ungleichungen durch äquivalentes Umformen auf die Form  $ax + b < 0$  oder auf die Form  $ax + b > 0$ !
- a)  $1 < 3x + 7$     b)  $-x - 12 < 2x - 3$  (L)    c)  $5(x - 1) < 2x + 3$

Wir lernen, lineare Ungleichungen durch Anwenden der Umformungsregeln zu lösen, wobei wir uns an Schritten beim Lösen von Gleichungen (z. B. Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken, Zusammenfassen, Ordnen, Auflösen nach einer Variablen) orientieren.

- 2 Gelöst werden soll  $3 - 5x + 12 < 0$ .  
 Durch Umformen erhält man:  $-5x + 15 < 0 \quad | -15$   
 $-5x < -15 \quad | : (-5)$   
 $x > 3$

Die Lösungsmenge  $L$  besteht aus allen reellen Zahlen, die größer als 3 sind.

- 3 Die Lösungsmenge der Ungleichung  $4x - 6 < 2$  soll ermittelt und auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden.  
 Durch Umformen erhält man:  $4x - 6 < 2 \quad | +6$   
 $4x < 8 \quad | : 4$   
 $x < 2$

Die Lösungsmenge  $L$  besteht aus allen reellen Zahlen, die kleiner als 2 sind.

Die Zahl 2 gehört nicht zu  $L$ , wohl aber jede kleinere Zahl, auch, wenn sie sich noch so wenig von 2 unterscheidet.

$L$  läßt sich auf der Zahlengeraden als Menge aller Punkte eines Strahles mit Ausnahme seines Anfangspunktes veranschaulichen (↗ Bild B 3).

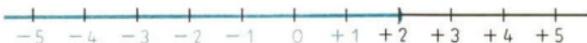


Bild B 3

Jede lineare Ungleichung  $ax + b < 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), in der  $a$  und  $b$  fest vorgegebene reelle Zahlen mit  $a \neq 0$  sind, kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{array}{l} ax + b < 0 \quad | -b \\ ax < -b \quad | :a \\ \left. \begin{array}{l} \text{für } a > 0 \\ \downarrow \end{array} \right\} x < -\frac{b}{a} \\ \left. \begin{array}{l} \text{für } a < 0 \\ \downarrow \end{array} \right\} x > -\frac{b}{a} \end{array}$$

In jedem der beiden Fälle ist  $-\frac{b}{a}$  eine durch

$a$  und  $b$  bestimmte reelle Zahl. Also ist die Lösungsmenge  $L$  einer linearen Ungleichung die Menge aller reellen Zahlen, die entweder größer oder kleiner als eine bestimmte reelle Zahl sind. In jedem dieser Fälle läßt sich  $L$

durch die Menge aller Punkte eines Strahles mit Ausnahme seines Anfangspunktes auf der Zahlengeraden veranschaulichen (→ Bild B 4). Dem Anfangspunkt des Strahls wird die Lösung der Gleichung  $ax + b = 0$  zugeordnet.

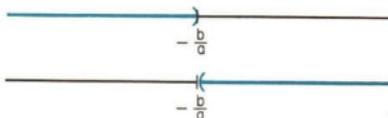


Bild B 4

Wie bei Gleichungen kann man auch bei linearen Ungleichungen durch eine *Probe* überprüfen, ob man beim Ermitteln der Lösungsmenge Fehler gemacht hat:

Besteht die Lösungsmenge nur aus *wenigen Elementen*, so kann durch Einsetzen jedes einzelnen Elementes in die Ausgangsungleichung überprüft werden, ob es tatsächlich zur Lösungsmenge gehört.

Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung  $ax + b < 0$  mit  $\mathbb{R}$  als Grundbereich besteht jedoch stets aus *unendlich vielen Zahlen*, so daß eine Probe „durch Einsetzen“ nicht möglich ist.

Wir wählen folgenden Weg:

*Wir wissen*, daß sich die Lösungsmenge einer solchen Ungleichung stets als „Strahl“ (ohne Anfangspunkt) darstellen läßt. Es genügt deshalb zu überprüfen:

- (1) Wurde der Anfangspunkt  $P_0$  des Strahls richtig ermittelt?
- (2) Wurde der richtige der beiden in  $P_0$  beginnenden Strahlen gewählt?

Um (1) zu überprüfen, setzen wir die dem Punkt  $P_0$  zugeordnete Zahl in die Gleichung  $ax + b = 0$  ein.

Um (2) zu überprüfen, setzen wir eine beliebig aus der Lösungsmenge ausgewählte Zahl in die Ungleichung  $ax + b < 0$  ein.

■ 4 Es ist zu überprüfen, ob die Lösungsmenge der Ungleichung  $4x - 6 < 2$  die Menge  $L$  aller reellen Zahlen ist, die kleiner als 2 sind (→ Beispiel B 3).

Die ermittelte Lösungsmenge besteht aus allen reellen Zahlen, die kleiner sind als 2.

- (1) Es wird 2 in die Gleichung  $4x - 6 = 2$  eingesetzt:

$$4 \cdot 2 - 6 = 2 \quad (\text{wahr}).$$

- (2) Es wird ein beliebiges Element aus  $L$ , etwa 1, in die Ungleichung  $4x - 6 < 2$  eingesetzt:

$$4 \cdot 1 - 6 < 2 \quad (\text{wahr}).$$

Die Lösungsmenge wurde richtig ermittelt.

- 25 Lösen Sie die Ungleichung  $2x + 4 > 3x + 7$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), und überprüfen Sie das Ergebnis!

- 5 Zu lösen ist die Ungleichung  $x - 4 < 3 + x$ .

$$\begin{array}{l} \text{Durch Umformen erhält man: } x - 4 < x + 3 \quad | +4 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x < x + 7 \quad | -x \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x - x < 7 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \cdot x < 7 \end{array}$$

Die letzte Ungleichung ist für jede reelle Zahl  $x$  eine wahre Aussage. Die Lösungsmenge von  $x - 4 < 3 + x$  ist die Menge  $R$  aller reellen Zahlen.

- 26 Lösen Sie die Ungleichung  $x - 4 > \frac{1}{2}(2x - 3)$  (L)

- 6 Zu ermitteln ist die Menge aller positiven reellen Zahlen, welche die Ungleichung  $2x - 3 > 4(x - 2)$  erfüllen.

$$\begin{array}{l} \text{Durch Umformen erhält man: } 2x - 3 > 4(x - 2) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2x - 3 > 4x - 8 \quad | -4x + 3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -2x > -5 \quad | :(-2) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x < \frac{5}{2} \end{array}$$



Bild B 5

Wegen des eingeschränkten Grundbereiches gehören nur diejenigen reellen Zahlen zur Lösungsmenge  $L$ , die *sowohl* die Ungleichung  $x > 0$  *als auch* die Ungleichung  $x < \frac{5}{2}$  erfüllen.  $L$  besteht aus allen reellen Zahlen, die zwischen 0 und  $\frac{5}{2}$  liegen (→ Bild B 5).

- 27 Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen zwischen 0 und 1, welche die Ungleichung  $8x - 12 < -8$  erfüllen!

Wie bei Gleichungen können auch bei Ungleichungen zusätzliche Variablen auftreten, die für beliebig vorgegebene reelle Zahlen stehen.

- 7 Der Grundbereich für  $x$  in  $3 + bx > x + 4$  ist  $R$ . Die Lösungsmenge ist in Abhängigkeit von  $b$  zu bestimmen.

Durch Umformen erhält man:

$$\begin{array}{l} 3 + bx > x + 4 \quad | -3 \\ \qquad \qquad bx > x + 1 \quad | -x \\ \qquad \qquad \qquad bx - x > 1 \\ \qquad \qquad \qquad (b - 1)x > 1 \quad | : (b - 1) \\ \begin{array}{|l} \text{falls } b - 1 > 0 \\ \text{falls } b - 1 < 0 \end{array} \\ \begin{array}{|l} x > \frac{1}{b - 1} \\ x < \frac{1}{b - 1} \end{array} \end{array}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich

die Menge aller reellen Zahlen, die größer sind als  $\frac{1}{b - 1}$ , falls  $b > 1$ ,

die Menge aller reellen Zahlen, die kleiner sind als  $\frac{1}{b - 1}$ , falls  $b < 1$ ,

die leere Menge, falls  $b = 1$

- 28 Lösen Sie die Ungleichung  $3 + ax < x + 4$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) in Abhängigkeit von der reellen Zahl  $a$ !

Fallunterscheidungen sind beim Lösen von Ungleichungen häufig erforderlich. Beim Erarbeiten von Programmen für das Lösen solcher Ungleichungen mit einem Computer muß man deshalb beachten, daß ein *verzweigter Algorithmus* zu beschreiben ist.

Wir lösen noch einige *nichtlineare* Ungleichungen:

- 8 Zu lösen ist die Ungleichung  $|x - 1| + 3 < 5$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).  
Durch Umformen erhält man:

$$\begin{array}{l}
 |x - 1| + 3 < 5 \quad | -3 \\
 |x - 1| < 2 \\
 \begin{array}{l} \text{falls } x - 1 \geq 0 \\ \hline x - 1 < 2 \quad | +1 \\ x < 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{falls } x - 1 < 0 \\ \hline -(x - 1) < 2 \\ x - 1 > -2 \\ x > -1 \end{array}
 \end{array}$$

Aus der Bedingung  $x - 1 \geq 0$  und aus  $x < 3$  ergibt sich für diesen Fall: Die Lösungsmenge  $L_1$  besteht aus allen reellen Zahlen, die größer oder gleich 1 und kleiner als 3 sind.

Unter Berücksichtigung der Bedingung  $x - 1 < 0$  und aus  $x > -1$  ergibt sich für diesen Fall: Die Lösungsmenge  $L_2$  besteht aus allen reellen Zahlen, die größer als  $-1$  und kleiner als 1 sind.

Eine reelle Zahl  $x$  erfüllt genau dann die Ausgangsgleichung, wenn sie in  $L_1$  oder  $L_2$  liegt [ $\rightarrow$  Bild B 6 (a) und (b)].

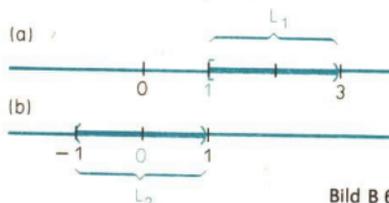


Bild B 6

Zwei Fälle muß man unterscheiden, wenn man beide Seiten einer Ungleichung mit einem Term, der eine Variable enthält, multipliziert bzw. durch einen solchen Term dividiert:

- 9 Die Lösungsmenge der Ungleichung  $\frac{3}{x-1} < 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$ ) soll bestimmt werden.

$$\begin{array}{l}
 \frac{3}{x-1} < 1 \quad | \cdot (x-1) \\
 \begin{array}{l} \text{1. Fall} \\ x - 1 > 0, \text{ also} \\ x > 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{2. Fall} \\ x - 1 < 0, \text{ also} \\ x < 1 \end{array} \\
 \begin{array}{l} \downarrow \\ 3 < x - 1 \quad | +1 \\ 4 < x \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ 3 > x - 1 \quad | +1 \\ 4 > x \end{array}
 \end{array}$$

Die Lösungsmenge  $L_1$  besteht aus allen reellen Zahlen, die größer als 4 sind.

Da im 2. Fall nur reelle Zahlen  $x < 1$  berücksichtigt werden, ergibt sich: Die Lösungsmenge  $L_2$  besteht aus allen reellen Zahlen, die kleiner als 1 sind.

Die Lösungsmenge  $L$  von  $\frac{3}{x-1} < 1$  enthält genau diejenigen reellen Zahlen, die in  $L_1$  oder in  $L_2$  liegen ( $\rightarrow$  Bild B 7):

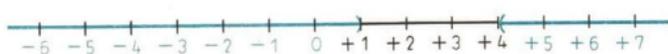


Bild B 7

### Aufgaben

Lösen Sie die Ungleichungen in den Aufgaben 1 bis 3 mit  $R$  als Variablengrundbereich! Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösungen! Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge jeweils auf einer Zahlengeraden!

1.1 a)  $5x - 10 > 0$     b)  $y + 0,5 > 0$     c)  $-2z + 8 < 0$     d)  $-\frac{u}{6} + 0,3 < 0$

e)  $0,2x - 3 < 0$     f)  $-3y - 3 < 0$     g)  $-5z + 35 > 0$     h)  $\frac{1}{4}u + 0,5 < 0$

2.1 a)  $12x - 3 < 0$  (L)    b)  $-8x + 40 < 0$  (L)    c)  $0,5u + 1 > 0,5$  (L)

d)  $144v - 288 < 0$     e)  $-\frac{1}{3}y + 2 > 0$     f)  $-\frac{2}{5}z - 2 > 2$

g)  $1 + \frac{x}{5} > \frac{x}{3} - 1$     h)  $1 - \frac{x}{5} > \frac{x-1}{3}$  (L)    i)  $\frac{3-x}{5} < \frac{5-x}{-3}$  (L)

k)  $2 - \frac{z}{10} > 2(7-z)$  (L)    l)  $5 - \frac{3u}{7} < 3 - \frac{5}{3}u$     m)  $\frac{k+1}{3} + \frac{1}{2} < \frac{k-1}{2} - \frac{1}{3}$

3.1 a)  $3x + 7 < 13 + 2x$     b)  $7y - 6 > \frac{8y}{2}$     c)  $3(x-3) < 5 - 2(-x+1)$

d)  $1 - \frac{u}{3} < 4$     e)  $5 - \frac{v}{2} > \frac{v-1}{2}$     f)  $2x - 5 < 2(3+x)$  (L)

g)  $3,5x + 4 - 2x < 1,5(x+1)$     h)  $\frac{2-w}{10} > 2(w-2)$     i)  $2(x-3) + x > 3(x+3)$  (L)

4. Berechnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen mit  $R$  als Grundbereich! Schränken Sie den Grundbereich auf  $Q$  und dann auf  $N$  ein, und geben Sie an, wie sich die Lösungsmengen ändern!

a)  $\frac{3}{2}x < 2(1-x)$     b)  $2x + \sqrt{5} \geq 3x$  (L)    c)  $\frac{1}{2}(2-x) > 1$

5. Berechnen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen! Nutzen Sie dabei Ihren Taschenrechner! Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma!

a)  $-3,47x + 19,33 < 16,41x - 22,56$     b)  $2,14^2x + \sqrt{15,26} < x - \frac{1}{0,47}$

c)  $\sqrt{\frac{3}{5}} - x > \frac{1}{\sqrt{3}} + x$     d)  $-4,18x + \sqrt{15,2} < x + 2,06^2$  (L)

6. a) Geben Sie alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $5 < n < 20$  an, welche die Ungleichung  $n + 3 > \frac{5n + 36}{6}$  erfüllen! (L)

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von  $\frac{x-3}{4x-7} > \frac{2}{13}$  mit  $x \in R$  und  $x < \frac{7}{4}$ !

7. Geben Sie jeweils die Menge derjenigen reellen Zahlen an, die sowohl die eine als auch die andere der gegebenen Ungleichungen erfüllen! Veranschaulichen Sie diese Mengen auf der Zahlengeraden!
- a)  $x > -2$  und  $x \leq 3$     b)  $x < 1$  und  $x \leq -3$  (L)
- c)  $4x - 1 > 0$  und  $2 < x + \frac{5}{4}$     d)  $x - 1 > 0$  und  $2x + 4 < 0$
- 8.\* Unter welchen Bedingungen für  $a$  und  $b$  sind die Lösungen der Ungleichung  $a + ax < b$  ( $a; b \in \mathbb{N}; a \neq 0$ ) natürliche Zahlen?
- 9.\* Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen in Abhängigkeit von  $a, b$  und  $c$  ( $x \in \mathbb{R}$ )!
- a)  $2x + a > 3x + b$     b)  $ax + c > -2bx$  ( $a \neq -2b$ )    c)  $ax - 1 < b + 2$
- 10.\* Lösen Sie folgende Ungleichungen!
- a)  $\frac{2x}{x+3} < 1$  ( $x \in \mathbb{R}; x \neq -3$ )    b)  $\frac{x}{x+1} < 0$  ( $x \in \mathbb{R}; x \neq -1$ )
- c)  $\frac{x+1}{x-1} > 0,5$  ( $x \in \mathbb{R}; x \neq 1$ )

## Zusammenfassung

Beim Lösen einer linearen Ungleichung mit  $\mathbb{R}$  als Grundbereich für die Variable  $x$  geht man wie folgt vor:

- Die Ungleichung wird nach  $ax$  oder nach  $\frac{x}{a}$  aufgelöst. Dabei orientiert man sich an den bekannten Umformungsschritten für das Lösen von Gleichungen.
- – Ist  $a > 0$ , so werden beide Seiten der Ungleichung durch  $a$  dividiert bzw. mit  $a$  multipliziert. Die Lösungsmenge kann abgelesen werden.
- – Ist  $a < 0$ , so werden beide Seiten der Ungleichung durch  $a$  dividiert bzw. mit  $a$  multipliziert. Dabei muß das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden. Die Lösungsmenge kann abgelesen werden.
- – Ist  $a = 0$ , so enthält die Lösungsmenge entweder alle reellen Zahlen oder keine einzige reelle Zahl.
- Die ermittelte Lösungsmenge wird überprüft.

Beim Lösen mancher Ungleichungen sind zusätzliche Fallunterscheidungen erforderlich (↗ Beispiele B 7; B 8 und B 9).

## 5 Anwendungen

Es gibt viele geometrische Fragestellungen, bei deren Untersuchung Ungleichungen benötigt werden.

- 10 Tim hatte behauptet: In jedem Dreieck ist die Hälfte des Umfangs immer noch größer als die größte Dreiecksseite (↗ S. 66). Tim hat recht. Er kann seine Behauptung wie folgt beweisen: Die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks seien  $a, b$  und  $c$ . Die Summe zweier Seitenlängen ist stets größer als die Länge der dritten, es gilt  $a + b > c$  auch, wenn  $c$  die größte der drei Seitenlängen ist.

Tim geht von dieser Ungleichung aus:

$$\begin{array}{r} a + b > c \quad | + c \\ a + b + c > 2c \quad | : 2 \\ \hline \frac{a + b + c}{2} > c \end{array}$$

Damit hat Tim seine Behauptung bewiesen.

- 29 In jedem rechtwinkligen Dreieck, welches nicht gleichschenkelig ist, ist die Länge der auf der Hypotenuse errichteten Höhe kleiner als die halbe Hypotenusenlänge. Untersuchen Sie, ob diese Aussage wahr ist!

Die Menge aller reellen Zahlen, die zwischen zwei Zahlen liegen, heißt **Intervall reeller Zahlen**. Mit Hilfe von Ungleichungen kann man Intervalle beschreiben.

Wird ein Intervall durch die beiden Zahlen  $a$  und  $b$  (mit  $a < b$ ) begrenzt, so können folgende *Fälle* auftreten:

$a < x < b$	Weder $a$ noch $b$ gehören zum Intervall.	
$a \leq x \leq b$	Sowohl $a$ als auch $b$ gehören zum Intervall.	
$a < x \leq b$	$a$ gehört nicht zum Intervall, wohl aber $b$ .	
$a \leq x < b$	$a$ gehört zum Intervall, $b$ dagegen nicht.	

Im weiteren Sinne bezeichnet man auch Mengen der folgenden Art als Intervalle: Die Menge aller reellen Zahlen  $x$ , die kleiner (bzw. größer) als  $b$  sind;  $x < b$  (bzw.  $x > b$ ).

Häufig deuten solche Wörter wie „höchstens“, „mindestens“, „größer als“, „nicht kleiner als“, „mindestens so groß wie“, ... in Aufgabenstellungen darauf hin, daß beim Lösen Ungleichungen benötigt werden.

- 11 Bei der Internationalen Friedensfahrt 1983 fuhr der Fahrer P mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  dem  $10 \text{ km}$  entfernten Etappenziel Prag entgegen. Das Hauptfeld H lag zu diesem Zeitpunkt  $1,5 \text{ km}$  gegenüber P zurück. Wie schnell hätten die Fahrer des Hauptfeldes mindestens fahren müssen, um sich die Chance zu erhalten, P noch vor dem Ziel einzuholen?

*Erfassen des Sachverhaltes:* Gefragt ist nach der Mindestgeschwindigkeit des Hauptfeldes. Das Problem führt auf eine Ungleichung. Da mit Durchschnittsgeschwindigkeiten gerechnet wird, muß die Formel  $v = \frac{s}{t}$  genutzt werden. Der vorliegende Sachverhalt wird durch Bild B 12 veranschaulicht.



*Aufstellen der Ungleichung:* Die Geschwindigkeit  $v_H$  des Hauptfeldes muß so gewählt werden, daß seine Fahrzeit  $t_H$  bis zum Ziel geringer ist als die Fahrzeit  $t_P$  des Fahrers P:  $t_H < t_P$ .

Wir setzen  $v_H = x \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$ .

Aus  $t_H < t_P$  ergibt sich  $\frac{11,5 \text{ km}}{v_H} < \frac{10 \text{ km}}{40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$  bzw.  $\frac{11,5}{x} < \frac{10}{40}$ .

$$\begin{array}{l} \text{Lösen der Ungleichung:} \\ \frac{11,5}{x} < \frac{10}{40} \quad \left| \cdot x \quad (x > 0) \right. \\ 11,5 < \frac{1}{4} x \quad \left| \cdot 4 \right. \\ 46 < x \end{array}$$

**Probe am Sachverhalt:** Der Fahrer P benötigt bei  $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  für die 10 km lange Strecke bis zum Ziel  $\frac{1}{4}$  Stunde. Aus  $46 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} < \frac{11,5 \text{ km}}{t_H}$  ergibt sich:  $t_H < 0,25$  Stunden.

**Antwortsatz:** Wenn das Hauptfeld mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit fährt, die größer als  $46 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  ist, wird der Fahrer P noch vor dem Ziel eingeholt.

Das Umformen von Ungleichungen wird auch beim Beweisen mathematischer Aussagen gebraucht.

- 12 Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:

Wenn  $a < b$ , so  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ !

**Durchdenken des Sachverhaltes:** Wir bilden zunächst Beispiele: Es ist  $2 < 5$ , jedoch  $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ . Es ist  $0,1 < 0,2$ , jedoch  $\frac{1}{0,1} > \frac{1}{0,2}$ , denn  $\frac{1}{0,1} = 10$  und  $\frac{1}{0,2} = 5$ . Diese Beispiele unterstützen unsere Vermutung, daß die genannte Aussage wahr ist.

**Voraussetzung:**  $a < b$  und  $a > 0$  und  $b > 0$

**Behauptung:**  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

**Beweis:**  $a < b \quad \left| \cdot \frac{1}{a \cdot b} \right.$

(wenn  $a > 0$  und  $b > 0$ , so  $a \cdot b > 0$  und auch  $\frac{1}{a \cdot b} > 0$ )

$$\frac{a}{a \cdot b} < \frac{b}{a \cdot b}$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

## Aufgaben

1. In einem Dreieck beträgt die Differenz der Länge der größten Seite zu den beiden anderen 2 cm bzw. 3 cm. Der Umfang soll größer als 20 cm und kleiner als 30 cm sein. Welche ganzzahligen Seitenlängen kommen unter diesen Bedingungen in Betracht?
2. Die folgenden Ungleichungen beschreiben Intervalle reeller Zahlen. Stellen Sie diese auf der Zahlengeraden dar!

$$x > 5 \quad x \leq -2 \quad -3 < x \leq +5 \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$$

3. In Bild B 13 werden drei Intervalle auf Zahlengeraden veranschaulicht. Beschreiben Sie jedes dieser Intervalle durch eine Ungleichung!

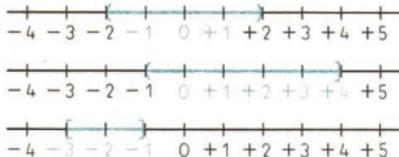


Bild B 13

4. Von den beiden reellen Zahlen  $u$  und  $v$  ist bekannt:  
 $13,41 < u < 13,94$  und  $7,18 < v < 8,02$ .  
 Geben Sie ein Intervall an, in welchem  $u + v$ ,  $u - v$ ,  $u \cdot v$  bzw.  $u : v$  liegt!  
 Nutzen Sie Ihren Taschenrechner!
5. Dieter und Peter fahren auf ihren Rennrädern. Dieter fährt eine Strecke von  $650 \text{ m} \pm 20 \text{ m}$  in  $62 \text{ s} \pm 1 \text{ s}$ . Peter fährt eine Strecke von  $425 \text{ m} \pm 10 \text{ m}$  in  $38 \text{ s} \pm 1 \text{ s}$ . Wer von beiden fährt die größere Durchschnittsgeschwindigkeit? Nutzen Sie Ihren Taschenrechner! (L)
6. In einem unverzweigten Stromkreis befinden sich drei Widerstände.  $R_1$  und  $R_2$  stehen im Verhältnis  $2 : 5$ , und es ist  $R_2 = 22 \Omega$ . Die Arbeitsweise der Schaltung läßt einen Gesamtwiderstand  $R_0$  zwischen  $40 \Omega$  und  $50 \Omega$  zu. Aus welchem Bereich darf der Widerstand  $R_3$  gewählt werden?
7. Beweisen Sie: Das Quadrat einer beliebigen reellen Zahl ist stets eine nichtnegative reelle Zahl!  
 (Anleitung: Diskutieren Sie die Fälle  $a > 0$ ,  $a = 0$ ,  $a < 0$ !)
8. Überprüfen Sie, ob für beliebige negative reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gilt: Aus  $a < b$  folgt  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ! ( $\rightarrow$  Beispiel B 12)
9. Untersuchen Sie, ob für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt: Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , so gilt auch  $a < c$ . (Nutzen Sie: „ $x < y$ “ ist gleichbedeutend mit „es gibt eine positive Zahl  $z$ , so daß  $x + z = y$  gilt“!)
- 10.\* Zeigen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ;  $d$  gilt: Aus  $a < b$  und  $c < d$  folgt  $a \cdot c < b \cdot d$ !
- 11.\* Beweisen Sie: Für beliebige reelle Zahlen  $a, b, c$  und  $d$  gilt: Wenn  $a < b$  und  $c < d$ , so  $a + c < b + d$ ! (L)

## Systeme linearer Gleichungen

Im Winter besteht bei Kraftfahrzeugen die Gefahr des Gefrierens von Kühlwasser. Aus diesem Grunde wird Wasser mit einem Frostschutzmittel gemischt; seine Dichte beträgt  $1,135 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Ein Frostschutz bis  $-10^\circ \text{C}$  ist bei einem Gemisch mit einer Dichte von  $1,027 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  gewährleistet. Wieviel Anteile des Frostschutzmittels müssen dabei in 1 l Gemisch enthalten sein?

Bei der Herstellung des Kühlwassers werden destilliertes Wasser und Frostschutzmittel gemischt. Dabei müssen zwei Bedingungen berücksichtigt werden:

- (I) Die Volumenanteile der beiden Flüssigkeiten sollen zusammen  $1000 \text{ cm}^3$  ergeben.  
 (II) Die Mischung muß so erfolgen, daß das Kühlwasser eine Dichte von  $1,027 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  besitzt.

Jede der beiden Bedingungen kann durch eine lineare Gleichung mit zwei Variablen beschrieben werden. Die beiden Gleichungen gehören zusammen; sie bilden ein **lineares Gleichungssystem**.

## 6 Zur Wiederholung

Für alle in dieser Lerneinheit auftretenden Funktionen wird  $R$  als Definitionsbereich festgelegt. In einigen Aufgaben wird gefordert, Graphen linearer Funktionen in einem Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie selbst ein jeweils geeignetes Intervall!

- Gegeben sind die linearen Funktionen  $f(x) = 4x + 1$ ,  $g(x) = 2x - 3$  und  $h(x) = -x + 1$ .
  - Ermitteln Sie die folgenden Funktionswerte:  
 $f(2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $g(2)$ ,  $g(-1)$ ,  $g(0)$ ,  $h(2)$ ,  $h(-1)$ ,  $h(0)$ !
  - Untersuchen Sie, ob die folgenden geordneten Zahlenpaare zu einer der gegebenen Funktionen gehören:  
 $(2; -1)$ ,  $(1; 5)$ ,  $(4; 5)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(2; 9)$ ,  $(-\frac{1}{4}; 0)$ !
  - Ermitteln Sie die Argumente  $x$  für  $f(x) = 13$ ,  $f(x) = -7$ ;  $f(x) = 0$ ;  $g(x) = -2$ ;  $g(x) = 17$ ;  $g(x) = 0$ ;  $h(x) = \frac{1}{2}$ ;  $h(x) = 0$ ;  $h(x) = -7$ !
  - Die Graphen linearer Funktionen mit  $R$  als Definitionsbereich sind Geraden. Stellen Sie die gegebenen Funktionen in einem Koordinatensystem dar!
- Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden linearen Funktionen!
 

a)  $y = 4x - 8$     b)  $y = -x + 3$     c)  $y = \frac{x}{2} + 3$     d)  $y = -2x - \frac{1}{2}$
- a) Stellen Sie die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen in einem Koordinatensystem graphisch dar! Nennen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede!
 

$y = x + 2$      $y = -x + 2$      $y = \frac{1}{2}x + 2$      $y = 0x + 2$

$y = 4x + 2$      $y = -4x + 2$      $y = -\frac{1}{2}x + 2$

b) Nennen Sie je eine lineare Funktion, deren Graph im Vergleich zum Graph von  $y = x + 2$  einen größeren bzw. kleineren Anstieg aufweist bzw. parallel verläuft!
- Stellen Sie die folgenden Funktionen in einem Koordinatensystem graphisch dar! Nennen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede!
 

$y = x + 3$      $y = x - 4$      $y = x$
- Die Zahl  $m$  gibt Auskunft über das Steigen bzw. Fallen der Geraden, die zur Funktion  $f(x) = mx$  gehört. Beschreiben Sie den Verlauf der Geraden für  $0 < m < 1$ ;  $1 < m$ ;  $m < -1$ ;  $-1 < m < 0$ ;  $m = 0$ !

6. Beschreiben Sie die Lage der Geraden, die zur Funktion  $f(x) = x + n$  gehört für  $n > 0$ ;  $n = 0$ ;  $n < 0$ !
7. Stellen Sie jedes der folgenden Paare linearer Funktionen in einem Koordinatensystem graphisch dar, und lesen Sie – falls möglich – die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden ab!
- a)  $y = 3x + 4$  und  $y = -x$       b)  $y = -2x + 3$  und  $y = x - 4,5$   
 c)  $y = 3x - 4$  und  $y = -x + 4$       d)  $y = x + 4$  und  $y = x - 3$   
 e)  $y = -x + 1$  und  $y = -x - 5$

## 7 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Eine Gleichung, in welcher die Variablen nur durch Rechenoperationen *erster Stufe* miteinander verknüpft werden, heißt *lineare Gleichung*. Wir betrachten im folgenden lineare Gleichungen, die *zwei Variable* enthalten.

*Beispiele:*  $2x + 3y + 4 = 0$ ;  $3x = 4 - 7y + x$ ;  $0,5x = 0,6y$ ;  $y = 4x + 1$ ;  $x = 2 - 0,4y$ ;

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

Als lineare Gleichungen mit zwei Variablen wollen wir z. B. auch  $3x + 0y = 6$  und  $0x = 6y - 1$  zulassen.

*Wir wissen:* Treten in einer Gleichung genau zwei (voneinander verschiedene) Variable auf, so ist jede Lösung ein *geordnetes Paar* von Zahlen.

- 30 a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge der Gleichung  $x + y = 5$  ( $x, y \in \mathbb{N}$ ), und veranschaulichen Sie diese durch eine Menge von Punkten in einem Koordinatensystem!  
 b) Ermitteln Sie fünf geordnete Paare  $(x; y)$ , die zur Lösungsmenge von  $2x - y = 1$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) gehören!  
 c) Geben Sie fünf geordnete Paare an, die zur Lösungsmenge von  $0 \cdot x + 2y = 4$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) gehören!  
 d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von  $0x + 0y + 7 = 0$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ )! (L)

Es soll die lineare Gleichung  $ax + by = c$  mit  $\mathbb{R}$  als Grundbereich für die beiden Variablen  $x$  und  $y$  gelöst werden;  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind beliebige reelle Zahlen. Ist z. B.  $b \neq 0$ , so kann  $ax + by = c$  umgeformt werden in  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ . Setzt man für  $x$  eine beliebige Zahl aus dem Variablengrundbereich ein, so läßt sich der zugehörige Wert für  $y$  leicht ausrechnen. Jedes so gewonnene Paar reeller Zahlen erfüllt die Gleichung  $ax + by = c$ . Ist  $a \neq 0$ , so kann  $ax + by = c$  auch umgeformt werden in  $x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}$ . Man erhält alle zur Lösungsmenge gehörenden geordneten Paare reeller Zahlen, indem man mit Hilfe dieser Gleichung für jede reelle Zahl  $y$  den zugehörigen Wert für  $x$  berechnet.

- 31 a) Lösen Sie die Gleichung  $2x + y - 5 = 0$  nach  $y$  auf! Setzen Sie in die umgeformte Gleichung für  $x$  nacheinander  $0$ ;  $\frac{5}{2}$ ;  $2$ ;  $-1$  ein, und berechnen Sie die zugehörigen Werte für  $y$ ! Geben Sie die Paare  $(x; y)$  an!  
 b) Lösen Sie die Gleichung  $2x + y - 5 = 0$  nach  $x$  auf! Setzen Sie in die umgeformte Gleichung für  $y$  nacheinander  $5$ ;  $0$ ;  $1$ ;  $7$  ein, und berechnen Sie die zugehörigen Werte für  $x$ ! Geben Sie die Paare  $(x; y)$  an!

c) Vergleichen Sie die in a) ermittelten geordneten Paare  $(x; y)$  mit denen der Aufgabe b)!

- 13 Die Lösungsmenge der Gleichung  $-2x + y + 3 = 0$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) ist zu bestimmen und graphisch darzustellen.

Wir formen die gegebene Gleichung um in  $y = 2x - 3$ .

Für  $x = 0$  erhält man  $y = -3$ , also ist  $(0; -3)$  eine Lösung.

Für  $x = \frac{3}{2}$  erhält man  $y = 0$ , also ist  $(\frac{3}{2}; 0)$  eine Lösung.

Für  $x = 2$  erhält man  $y = 1$ , also ist  $(2; 1)$  eine Lösung.

Alle Lösungen würde man erhalten, wenn man für  $x$  nacheinander alle reellen Zahlen einsetzen und jeweils  $y$  mit Hilfe von  $y = 2x - 3$  berechnen würde. Dies ist praktisch nicht möglich; es gibt unendlich viele Paare, welche die Gleichung erfüllen.

Die Lösungsmenge  $L$  ist die Menge aller geordneten Paare  $(x; y)$  mit folgender Eigenschaft:

Wenn  $x$  die Menge aller reellen Zahlen „durchläuft“, so ergibt sich das jeweils zugehörige  $y$  aus  $y = 2x - 3$ .

Diese Gleichung beschreibt eine lineare Funktion; ihr Bild ist eine Gerade. Sie enthält u. a. die Punkte  $P_1(0; -3)$  und  $P_2(2; 1)$  (→ Bild B 14).

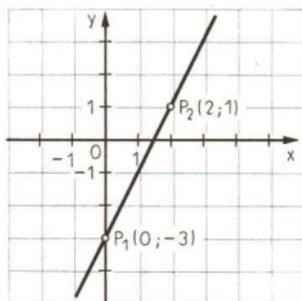


Bild B 14

*Wir wissen:* Eine lineare Funktion  $y = mx + n$  mit  $\mathbb{R}$  als Definitionsbereich ist eine Menge geordneter Paare  $(x; y)$  reeller Zahlen. Ihr Graph ist eine Gerade. Wir haben uns überlegt, daß jede *lineare Gleichung*  $ax + by = c$  (mit  $b \neq 0$ ) auf die Form  $y = mx + n$  gebracht werden kann:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Ordnet man jedem geordneten Paar reeller Zahlen  $(x; y)$  bezüglich eines Koordinatensystems einen Punkt zu, so läßt sich die Menge aller Lösungen einer solchen linearen Gleichung mit zwei Variablen und  $\mathbb{R}$  als Grundbereich durch eine Gerade veranschaulichen.

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung  $ax + by + c = 0$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) läßt sich bezüglich eines Koordinatensystems auch dann durch eine Gerade veranschaulichen, wenn  $b = 0$ , aber  $a \neq 0$  ist.

Lineare Gleichungen  $ax + by = c$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) mit  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$  kann man als *Gleichungen von Geraden* auffassen.

- 32 Stellen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen durch Geraden graphisch dar! ( $x; y \in \mathbb{R}$ )

a)  $y + \frac{1}{2}x - 5 = 0$

b)  $y + 0x = 3$

c)  $2x + 0y - 4 = 0$

## Aufgaben

*Hinweis:* Wenn nicht anders vermerkt, wird im folgenden  $R$  als Grundbereich gewählt.

- Suchen Sie unter den folgenden Gleichungen die linearen Gleichungen mit (genau) zwei Variablen heraus! Begründen Sie Ihre Auswahl! Beachten Sie, daß bei einer solchen Gleichung statt  $x$  und  $y$  auch zwei andere Variable gewählt werden können!  
 $2x + 3y + 4 = 0$ ;  $2 \cdot x = -5 \cdot y$ ;  $x^2 + y = 1$ ;  $x \cdot y = 5$ ;  
 $y = 2x + 3$ ;  $0 \cdot x = 2y + 3$ ;  $x + y + z = 1$ ;  $2u - 3v = 5$ ;  
 $2s = 4 - t$ ;  $2x + 2y - xy + 1 = 0$ ;  $x - y = 8 + x - 3y$ ;  
 $3x + 0y = 4$ ;  $x + y = z$
- Berechnen Sie fünf Lösungen der Gleichung  $3 - x = y$ , wobei  $Z$  der Grundbereich für die Variablen  $x$  und  $y$  ist!
- Beschreiben Sie alle geordneten Paare natürlicher Zahlen, welche Lösung der Gleichung  $x - y = 0$  sind! (L)
- a) Geben Sie je eine lineare Gleichung mit zwei Variablen an, welche das Paar  $(2; 0)$ ;  $(-3, -3)$ ;  $(-3; 3)$ ;  $(0; -7)$ ;  $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$  bzw.  $(0,5; 0,7)$  als Lösung besitzt!  
 b) Geben Sie drei voneinander verschiedene Gleichungen mit zwei Variablen an, zu deren Lösungsmenge jeweils das Paar  $(1; 2)$  gehört!  
 c) Versuchen Sie, eine lineare Gleichung mit zwei Variablen anzugeben, welche sowohl das Paar  $(0; 2)$  als auch das Paar  $(-2; 0)$  als Lösung besitzt!
- Geben Sie acht Lösungen der Gleichung  $y - x = 3$  ( $x, y \in Z$ ) an, und stellen Sie diese als Punkte in einem Koordinatensystem dar! Geben Sie drei Punkte an, von denen Sie vermuten, daß sie ebenfalls Lösungen von  $y - x = 3$  entsprechen! Überprüfen Sie Ihre Vermutung!
- Ermitteln Sie von jeder der folgenden Gleichungen drei Lösungen! Stellen Sie die Lösungsmengen der Gleichungen als Geraden in einem Koordinatensystem dar!  
 a)  $2y - 3x - 2 = 0$     b)  $5a + 10b = 0$     c)  $4u = 8v + 12$
- Stellen Sie die Lösungsmengen der Gleichungen  $2x + 4y = -6$ ;  $x + 2y = -3$  und  $x + 2y = 3$  graphisch in einem Koordinatensystem dar! Was stellen Sie fest?
- Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem, welche zu folgenden Gleichungen gehören!  
 a)  $x + y = -4$     b)  $x - y = 0$     c)  $x = 2$     d)  $y = -3$     e)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
- \* Tragen Sie in je ein Koordinatensystem möglichst viele Punkte ein, die Lösungen der folgenden Gleichungen graphisch veranschaulichen!  
 Deuten Sie an, welches Bild von jeder der Gleichungen beschrieben wird, wenn  $R$  als Grundbereich für die Variablen  $x$  und  $y$  gewählt wird.  
 a)  $x \cdot y = 6$     b)  $y = x^2$     c)  $x^2 + y^2 = 4$     d)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Beschreiben Sie die Lösungsmengen der Gleichungen  
 $x + 2y = 5$  ( $x, y \in R$ ) und  
 $x - y = -2$  ( $x, y \in Z$ )!  
 Orientieren Sie sich am Beispiel B 13!

## Zusammenfassung

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung  $ax + by = c$  ( $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ ) mit  $R$  als Grundbereich für die beiden Variablen  $x$  und  $y$  ist eine unendliche Menge geordneter Paare reeller Zahlen. Jeder Lösung kann mittels eines Koordinatensystems umkehrbar eindeutig ein Punkt zugeordnet werden.

Die gesamte Lösungsmenge läßt sich durch eine Gerade in einer Ebene graphisch darstellen.

## 8 Systeme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen

Zur Auszeichnung von dreizehn erfolgreichen Mitgliedern einer Mathematischen Schülergesellschaft werden Bücher für je 8 Mark und solche für je 12 Mark ausgewählt. Wieviel Bücher jeder Sorte können gekauft werden, wenn genau 120 Mark zur Verfügung stehen und jedes der 13 Mitglieder genau ein Buch erhalten soll?

Es werden  $x$  Bücher zum Preis von je 8 Mark und  $y$  Bücher zum Preis von je 12 Mark gekauft und dafür 120 Mark ausgegeben. Wir erhalten:

$$(I) \quad 8x + 12y = 120.$$

Mit den Büchern sollen 13 Mitglieder der Mathematischen Schülergesellschaft ausgezeichnet werden. Also gilt:

$$(II) \quad x + y = 13.$$

Der Grundbereich für die beiden Variablen  $x$  und  $y$  ist  $N$ . Von beiden Gleichungen können wir die Lösungsmengen vollständig angeben.

$$L_{(I)} = \{(0; 10); (3; 8); (6; 6); (9; 4); (12; 2)\}$$

$$L_{(II)} = \{(0; 13); (1; 12); (2; 11); (3; 10); (4; 9); (5; 8); (6; 7); (7; 6); (8; 5); (9; 4); (10; 3); (11; 2); (12; 1); (13; 0)\}$$

Das geordnete Paar  $(9; 4)$  ist das einzige, welches sowohl zu  $L_{(I)}$  als auch zu  $L_{(II)}$  gehört. Alle anderen geordneten Paare natürlicher Zahlen erfüllen höchstens eine der beiden Gleichungen. Es müssen 9 Bücher zu je 8 Mark und 4 Bücher zu je 12 Mark gekauft werden.

*Wir überprüfen:* Es werden 9 Bücher der einen und 4 Bücher der anderen Sorte, also 13 Bücher gekauft.

9 Bücher für je 8 Mark kosten 72 Mark,

4 Bücher für je 12 Mark kosten 48 Mark.

Also wurden genau 120 Mark ausgegeben.

Bei der vorliegenden Aufgabe wurden die beiden Bedingungen

(I) Kauf von Büchern für 8 Mark bzw. 12 Mark für insgesamt 120 Mark und

(II) Auszeichnung von 13 Mitgliedern einer Mathematischen Schülergesellschaft mit diesen Büchern

jeweils durch eine lineare Gleichung mit zwei Variablen beschrieben:

$$(I) \quad 8x + 12y = 120$$

$$(II) \quad x + y = 13$$

Da beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden sollen, sagt man, die beiden Gleichungen bilden ein **System**.

$$(I) \quad a_1x + b_1y = c_1$$

$$(II) \quad a_2x + b_2y = c_2$$

ist ein **lineares Gleichungssystem** mit den beiden Variablen  $x$  und  $y$ . Es besteht aus den beiden linearen Gleichungen (I) und (II).

Die reellen Zahlen  $a_1, b_1, a_2, b_2$  heißen **Koeffizienten** des Systems.

Die reellen Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  heißen **Absolutglieder** des Systems.

- 33 Ein lineares Gleichungssystem ist durch

$$(I) \quad y = 3 - x$$

$$(II) \quad 3x - 7 = -4y \quad \text{gegeben.}$$

- a) Bringen Sie jede der beiden linearen Gleichungen (I) und (II) durch äquivalente Umformungen auf die Form  $ax + by = c$ !
- b) Geben Sie die Koeffizienten und die Absolutglieder des entstandenen Gleichungssystems an!

Als Lösung der eingangs gestellten Aufgabe hatten wir das Paar  $(9; 4)$  gefunden. Es ist das einzige Paar, welches sowohl zur Lösungsmenge der Gleichung (I) als auch zur Lösungsmenge der Gleichung (II) gehört. Die Menge  $L = \{(9; 4)\}$  ist die *Lösungsmenge des Systems*.

## ▶ 4

**DEFINITION:**

Unter der *Lösungsmenge  $L$  eines linearen Gleichungssystems*

$$(I) \quad a_1x + b_1y = c_1$$

$$(II) \quad a_2x + b_2y = c_2$$

versteht man die Menge, welche aus genau denjenigen geordneten Paaren reeller Zahlen besteht, die zur Lösungsmenge der Gleichung (I) *und* auch zur Lösungsmenge der Gleichung (II) gehören.

- 34 Der Grundbereich für die Variablen  $x$  und  $y$  im System

$$(I) \quad x + y = 3$$

$$(II) \quad y = 5 - 2x$$

sei die Menge  $N$  aller natürlichen Zahlen.

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von (I)!
- b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von (II)!
- c) Das Gleichungssystem besitzt *genau eine Lösung*. Geben Sie diese Lösung an!
- 35 Begründen Sie, warum die Lösungsmenge des Systems
- $$(I) \quad x + y = 5$$
- $$(II) \quad x + y = 2 \quad (x, y \in N)$$
- keine Lösung besitzen kann!
- 36 Zu ermitteln ist die Lösungsmenge von
- $$(I) \quad y - 2x = 0$$
- $$(II) \quad 4x - 2y = 0 \quad (x, y \in N).$$
- a) Multiplizieren Sie beide Seiten von (I) mit  $-2$ ! Begründen Sie, warum die Gleichungen (I) und (II) einander äquivalent sind!
- b) Die Lösungsmenge  $L$  des Systems stimmt sowohl mit der Lösungsmenge von (I) als auch mit der Lösungsmenge von (II) überein. Es ist eine unendliche Menge geordneter Paare natürlicher Zahlen. Beschreiben Sie  $L$ !

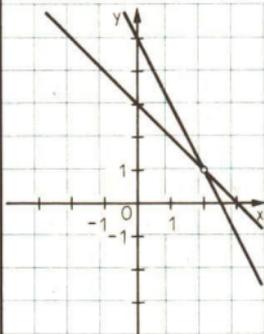
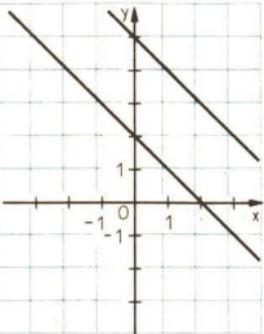
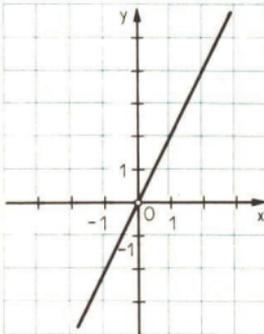
Bezüglich der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sind *drei Fälle* aufgetreten:

Das Gleichungssystem besitzt *genau eine Lösung* (↗ Auftrag B 34).

Das Gleichungssystem besitzt *keine Lösung* (↗ Auftrag B 35).

Das Gleichungssystem besitzt *unendlich viele Lösungen* (↗ Auftrag B 36).

Bei der *graphischen Veranschaulichung* eines linearen Gleichungssystems wird deutlich, daß es keine weiteren Fälle gibt. Wir wählen  $R$  als Grundbereich für die beiden Variablen. Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen kann bezüglich eines Koordinatensystems als Gerade dargestellt werden. Zu einem System aus zwei linearen Gleichungen gehören somit zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$ . Bezüglich der gegenseitigen Lage dieser beiden Geraden existieren *genau drei Möglichkeiten*:

$g_1$ nicht parallel zu $g_2$	$g_1$ parallel zu $g_2$ und $g_1 \neq g_2$	$g_1$ parallel zu $g_2$ und $g_1 = g_2$
Das System besitzt <i>genau eine Lösung</i> . Beispiel: (I) $x + y = 3$ (II) $y = 5 - 2x$ $(x, y \in R)$	Das System besitzt <i>keine Lösung</i> . Beispiel: (I) $x + y = 5$ (II) $x + y = 2$ $(x, y \in R)$	Das System besitzt <i>unendlich viele Lösungen</i> . Beispiel: (I) $y - 2x = 0$ (II) $4x - 2y = 0$ $(x, y \in R)$
		

Unsere Überlegungen zeigen, daß es möglich ist, lineare Gleichungssysteme graphisch zu lösen.

■ 14 Folgendes System soll graphisch gelöst werden:

(I)  $9x - 3y = 3$

(II)  $2x + y = 4$

Wir lösen (I) und (II) nach  $y$  auf:

$$y = 3x - 1$$

$$y = -2x + 4$$

Jede der zu den beiden Gleichungen gehörenden Geraden ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt. Die Gerade  $g_1$  schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $P_1(0; -1)$  und enthält z. B. auch den Punkt  $P_2(2; 5)$ . Die Gerade  $g_{II}$  schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $P_3(0; 4)$  und enthält außerdem den Punkt  $P_4(2; 0)$  (↗ Bild B 18).

Der Punkt  $S(1; 2)$  ist der einzige, der beiden Geraden angehört.

Probe am Ausgangssystem:

$$9 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 3 \quad (\text{wahre Aussage})$$

$$2 \cdot 1 + 2 = 4 \quad (\text{wahre Aussage})$$

Als Lösungsmenge ergibt sich:  $L = \{(1; 2)\}$ .

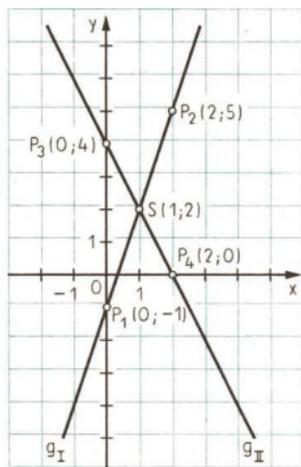


Bild B 18

Beim *graphischen Lösen eines linearen Gleichungssystems* geht man wie folgt vor:

- (1) Zeichnen der zu den beiden Gleichungen des Systems gehörenden Geraden  $g_I$  und  $g_{II}$ ;
- (2) Ermitteln der Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden  $g_I$  und  $g_{II}$  (falls  $g_I \neq g_{II}$ );
- (3) Überprüfen des ermittelten Zahlenpaares durch Einsetzen in die beiden Gleichungen des Systems;
- (4) Angeben der Lösungsmenge.

Häufig wird es beim graphischen Lösen eines linearen Gleichungssystems lediglich gelingen, *Näherungswerte* für die gesuchten Lösungen zu ermitteln. Diese Näherungswerte sind um so besser, je genauer man zeichnet und je günstiger man die Einheiten im Koordinatensystem wählt.

## Aufgaben

*Hinweis:* Wenn nicht anders angegeben, wird im folgenden  $R$  als Grundbereich für die in einem Gleichungssystem auftretenden Variablen  $x$  und  $y$  gewählt.

1. Bestimmen Sie jeweils die Menge, deren Elemente sowohl in der Menge  $M_1$ , als auch in der Menge  $M_2$  liegen!
  - a)  $M_1 = \{a; b; c; d\}$ ;  $M_2 = \{c; d; e; f; g\}$
  - b)  $M_1 = \{(1; 1); (1; 2); (2; 2); (3; 4)\}$ ;  $M_2 = \{(2; 1); (2; 2); (4; 3); (4; 4)\}$
2. Begründen Sie, warum das System
  - a) (I)  $x + y = -2$   
(II)  $x + y = 0$  keine Lösung besitzen kann,
  - b) (I)  $x + 2y = 5$   
(II)  $2x + 4y = 10$  unendlich viele Lösungen besitzt,
  - c) (I)  $0x + y = 2$   
(II)  $x + y = 2$  genau eine Lösung besitzt!

3. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$(I) \quad x + 3y = 7$$

$$(II) \quad 2x + y = 4 \quad (x, y \in \mathbb{N}).$$

- a) Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen, die (I) erfüllen!  
 b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung (II)!  
 c) Untersuchen Sie, ob es ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen gibt, welches sowohl zur Lösungsmenge der Gleichung (I) als auch zur Lösungsmenge der Gleichung (II) gehört! (L)

4. a) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$(I) \quad x = 6 - 3y$$

$$(II) \quad 2x + 6y = 12 \quad (x, y \in \mathbb{N}).$$

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der Gleichungen (I) und (II)! Was stellen Sie fest?

- b) Untersuchen Sie, ob es ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen gibt, welches zur Lösungsmenge jeder der beiden Gleichungen des Systems

$$(I) \quad y = 6 - 2x$$

$$(II) \quad 4x + 2y = 10 \quad \text{gehört! (L)}$$

5. Eine Gleichung eines linearen Gleichungssystems ist  $x + y = 100$ .

Geben Sie eine zweite Gleichung und Variablengrundbereiche so an, daß das entstehende System

- a) keine Lösung, b) genau eine Lösung, c) unendlich viele Lösungen besitzt!

6. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme graphisch! Verwenden Sie Millimeterpapier! Entscheiden Sie in jedem einzelnen Fall, ob Sie die Lösung des Systems oder nur einen Näherungswert für die Lösung ermittelt haben!

a)  $y = x - 1$

b)  $y - 2x = 2$

c)  $x - 2y = 1$

$$\underline{y = -x + 3}$$

$$\underline{y = 0,5x - 1}$$

$$\underline{4y - x = 5}$$

d)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

e)  $\frac{4}{3}x + y = 5$

f)  $y = x - 1,2$

$$\underline{\frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 0}$$

$$\underline{y = 2x + 1}$$

$$\underline{3x + y = -0,8}$$

7. Durch die folgenden Gleichungen sind jeweils zwei Geraden gegeben. Bestimmen Sie graphisch die Koordinaten des Schnittpunktes  $S$  dieser Geraden!

a)  $y = -7 + 2x$

b)  $y - x = -1$

c)  $2y - 4 = 0$

$$y = 2 - x$$

$$2y + 3x - 13 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

- 8.\* Durch die Gleichungen  $a_1x + b_1y = c_1$  ( $b_1 \neq 0$ ) und  $a_2x + b_2y = c_2$  ( $b_2 \neq 0$ ) sind zwei Geraden gegeben.

- a) Lösen Sie beide Gleichungen nach  $y$  auf!

- b) Geben Sie eine Bedingung dafür an, daß beide Geraden einen Schnittpunkt besitzen! (L)

- c) Was können Sie über die gegenseitige Lage der beiden Geraden aussagen, wenn gilt  $a_1 = 3a_2$ ;  $b_1 = 3b_2$  und  $c_1 = c_2$ ?

- 9.\* Durch die Gleichungen  $y - mx = 2$  und  $2y - 6x = c$  sind Geraden gegeben.

- a) Für welche reellen Zahlen  $m$  und  $c$  fallen die Geraden zusammen? (L)

- b) Geben Sie reelle Zahlen für  $m$  und  $c$  an, so daß die Geraden keinen Punkt gemeinsam haben!

10. In den Bildern B 19(a) bis (d) sind vier Systeme aus je zwei linearen Gleichungen durch Geradenpaare graphisch dargestellt. Geben Sie die Lösungsmenge jedes Systems an!

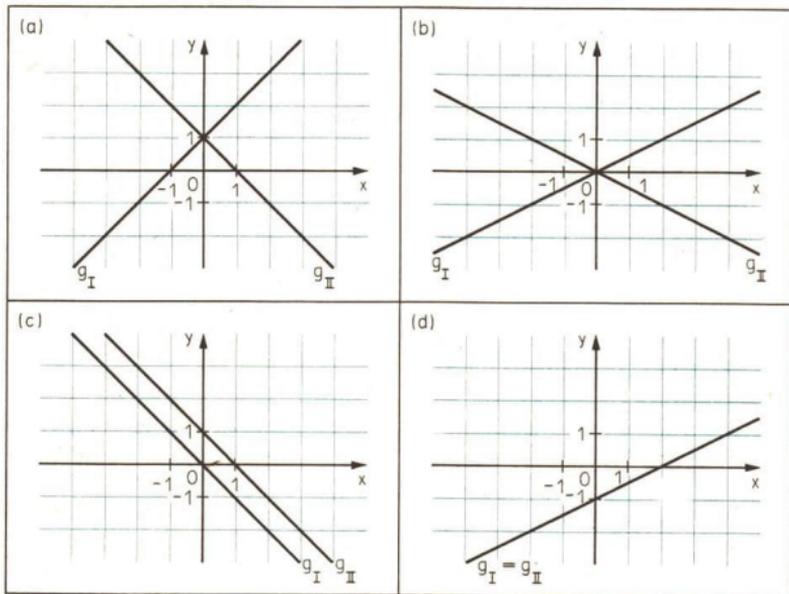


Bild B 19

11. Stellen Sie fest, welches der folgenden Gleichungssysteme keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen hat, indem Sie die Gleichungen graphisch durch Geraden darstellen!

a)  $x - y = 1$   
 $3x + y = 1$

b)  $y = 2x + 3$   
 $2y = 4x + 4$

c)  $6x - 3y = 6$   
 $2x - y = 2$

d)  $\frac{4}{3}x + y = 5$   
 $-4x - 3y = 9$

e)  $2x - y = 4$   
 $x = 2 + \frac{y}{2}$

f)  $x + y = 1$   
 $x - y = 1$

- 12.\* Es existiert genau ein geordnetes Paar reeller Zahlen, welches zur Lösungsmenge jeder der beiden Gleichungen

$$2x + 0y = 4\sqrt{2} \quad \text{und} \quad 0x - 4y = 2\sqrt{2}$$

gehört!

Ermitteln Sie dieses Paar!

## 9 Rechnerisches Lösen linearer Gleichungssysteme

Wir werden nun nach einem Verfahren suchen, mit dessen Hilfe man die Lösungen eines Systems aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen berechnen kann. Als Grundbereich für die in den Gleichungen auftretenden Variablen wählen wir die Menge  $R$  aller reellen Zahlen.

Wir betrachten zunächst ein einfaches System:

$$(I) \quad x + y = 3$$

$$(II) \quad 0x + y = 2.$$

Wir schreiben einfacher:

$$(I) \quad x + y = 3$$

$$(II) \quad \underline{y = 2}.$$

Auch dieses System besteht aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Die Lösungsmengen beider Gleichungen sind Mengen *geordneter Paare* reeller Zahlen.

Wir nehmen an, das System besitzt mindestens eine Lösung  $(x; y)$ . Die Lösungsmenge von (II) besteht aus allen geordneten Paaren  $(x; 2)$  mit  $x \in R$ . Damit kann auch die Lösungsmenge des Systems nur aus Paaren  $(x; y)$  bestehen, für die  $y = 2$  gilt. Aus (I) erhält man  $x + 2 = 3$ , also  $x = 1$ .

Wenn das System überhaupt eine Lösung besitzt, so kann dies nur das Paar  $(1; 2)$  sein.

Wir überprüfen:  $1 + 2 = 3$  (wahre Aussage)

$$0 \cdot 1 + 2 = 2 \quad (\text{wahre Aussage})$$

Die Lösungsmenge des gegebenen Systems ist  $L = \{(1; 2)\}$ .

Man kann also ein lineares Gleichungssystem leicht lösen, wenn in einer der beiden Gleichungen ein Koeffizient gleich 0 ist.

■ 15 Gelöst werden soll das System

$$(I) \quad x + y = 1$$

$$(II) \quad \underline{2x - y = 8}.$$

Man nimmt an, das System besitzt eine Lösung  $(x; y)$ .

Auf beiden Seiten von (I) wird die reelle Zahl  $x$  subtrahiert. Man erhält:

Da  $y$  die gleiche reelle Zahl wie  $1 - x$  ist, kann man diese Differenz in (II) für  $y$  einsetzen:

Aus (II') ergibt sich:

Diese Zahl setzt man in (I') ein; man erhält:

$$(I') \quad y = 1 - x$$

$$(II') \quad \underline{2x - (1 - x) = 8}$$

$$x = 3$$

$$\underline{y = -2}$$

*Probe:*  $(3; -2)$  wird in das Ausgangssystem eingesetzt.

Die Annahme von der Existenz einer Lösung war richtig. Die Lösungsmenge des Systems ist

$$3 + (-2) = 1 \quad (\text{wahr})$$

$$2 \cdot 3 - (-2) = 8 \quad (\text{wahr})$$

$$\underline{L = \{(3; -2)\}}^{1)}$$

Man nimmt also beim Lösen eines Gleichungssystems an, daß es mindestens eine Lösung besitzt.<sup>2)</sup> Setzt man diese Zahlen für  $x$  und  $y$  ein, so enthält das System nur noch reelle Zahlen.

<sup>1)</sup> Ist ein System eindeutig lösbar, verzichtet man mitunter auf die Angabe der Lösungsmenge und gibt die Lösung z. B. durch  $x = 3$ ,  $y = -2$  an.

<sup>2)</sup> Diese (noch nicht bekannte) Lösung müßte man eigentlich besonders bezeichnen, z. B. durch  $(x_0; y_0)$ , um sie von den Variablen  $x$  und  $y$  zu unterscheiden. Zur Vereinfachung wollen wir jedoch darauf verzichten.

- 16 Gelöst werden soll das System

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x - 13 = -2y \\ \text{(II)} \quad & -2x - 4y = -1 \\ \text{(I')} \quad & x = -2y + 13 \\ \text{(II')} \quad & -2(-2y + 13) - 4y = -1 \\ & 4y - 26 - 4y = -1 \\ & 0 \cdot y = 25 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist für jede reelle Zahl  $y$  eine falsche Aussage. Unsere Annahme von der Existenz einer Lösung war falsch. Das Gleichungssystem besitzt *keine* Lösung, die Lösungsmenge  $L$  ist leer:  $L = \emptyset$ .

- 17 Zu lösen ist das System

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & y = 4x + 1 \\ \text{(II)} \quad & y - 2 - x = 7x - y \\ \text{(I')} \quad & y = 4x + 1 \\ \text{(II')} \quad & (4x + 1) - 2 - x = 7x - (4x + 1) \\ & 3x - 1 = 3x - 1 \\ & 0 \cdot x = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen von  $4x + 1$  für  $y$  in (II):

Aus (II') ergibt sich:

Die letzte Gleichung ist für *alle* geordneten Paare  $(x; y)$  reeller Zahlen eine wahre Aussage. Also wird die Lösungsmenge des Systems allein durch (I') bestimmt. Sie besteht aus allen geordneten Paaren  $(x; 4x + 1)$ . Setzt man diese Paare in die Ausgangsgleichungen (I) und (II) ein, so erhält man für jede reelle Zahl  $x$  eine wahre Aussage. Die Annahme von der Existenz (mindestens) einer Lösung war richtig. Das System besitzt sogar *unendlich viele* Lösungen, nämlich alle Paare  $(x; 4x + 1)$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .

Man nennt den in den Beispielen B 15, B 16 und B 17 angewandten Lösungsweg **Einsetzverfahren**.

Beim rechnerischen Lösen eines linearen Gleichungssystems zeigen sich die drei bekannten Lösungsfälle wie folgt:

Eine Gleichung wird z. B. nach  $y$  aufgelöst. Der auf der rechten Seite stehende Term wird für  $y$  in die andere Gleichung des Systems eingesetzt.

Ergibt sich aus dieser Gleichung

$x = c$ ,  
so besitzt das System **genau**  
**eine Lösung**

(↗ Beispiel B 15)

$0 \cdot x = c$  ( $c \neq 0$ ),  
so besitzt das System **keine**  
**Lösung**

(↗ Beispiel B 16)

$0 \cdot x = 0$ ,  
so besitzt das System **un-**  
**endlich viele Lösungen**

(↗ Beispiel B 17)

- 37 a) Lösen Sie das System

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & y = 2x + 5 \\ \text{(II)} \quad & y = x + 3 \end{aligned}$$

Die Anwendung des Einsetzverfahrens ist hier besonders einfach. Man kann die rechten Seiten der gegebenen Gleichungen sofort *gleichsetzen*.

- b) Lösen Sie das System

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 24y + 8x = 8 \\ \text{(II)} \quad & 12y = x + 14 \quad (L) \end{aligned}$$

### Rechnerische Ermittlung der Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden:

- 18 Durch die Gleichungen  $4x + 3y = -1$  und  $x = 2y + 8$  sind zwei Geraden gegeben. Die Koordinaten ihres Schnittpunktes  $S$  sollen berechnet werden. Da der Schnittpunkt zu *beiden* Geraden gehört, müssen seine Koordinaten *beide* Gleichungen erfüllen.

Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 4x + 3y = -1 \\ \text{(II)} \quad \quad \quad x = 2y + 8 \end{array}$$

Durch *Einsetzen* ergibt sich:

$$\begin{array}{l} \text{(I')} \quad 4(2y + 8) + 3y = -1 \\ \text{(II')} \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = 2y + 8 \end{array}$$

Aus (I') ergibt sich:

$$y = -3$$

Aus (II') erhält man dann:

$$x = 2$$

*Probe:*

$$\begin{array}{l} 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -1 \quad (\text{wahr}) \\ 2 = 2(-3) + 8 \quad (\text{wahr}) \end{array}$$

Der Schnittpunkt  $S$  besitzt die Koordinaten 2 und  $-3$ .

- 38 Berechnen Sie die Schnittpunktkoordinaten der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Geraden!
- a)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$  und  $2x + y = 6$       b)  $y = 4$  und  $x + 5 = 0$

In einem Gleichungssystem mit den Variablen  $x$  und  $y$  können zusätzlich Variable für Koeffizienten oder Absolutglieder auftreten.

- 19 Zu lösen ist das Gleichungssystem in Abhängigkeit von  $a$ :

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 3x + y = 2a \\ \text{(II)} \quad ax + y = 3 \end{array}$$

Auflösen von (II) nach  $y$ :

$$\text{(II')} \quad y = 3 - ax$$

*Einsetzen* von  $3 - ax$  für  $y$  in (I):

$$\text{(I')} \quad 3x + (3 - ax) = 2a$$

Aus (I') ergibt sich

$$\begin{array}{r} 3x + 3 - ax = 2a \quad | -3 \\ (3-a)x = 2a - 3 \quad | : (3-a); \quad a \neq 3 \\ x = \frac{2a-3}{3-a} \end{array}$$

*Einsetzen* von  $\frac{2a-3}{3-a}$  für  $x$

$$y = 3 - a \frac{2a-3}{3-a}$$

in (II'):

$$y = \frac{9-2a^2}{3-a}$$

Für  $a = 3$  besitzt das System keine Lösung. Für jede von 3 verschiedene Zahl  $a$  existiert genau eine Lösung, nämlich  $\left(\frac{2a-3}{3-a}; \frac{9-2a^2}{3-a}\right)$ . Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen bestätigt man die Richtigkeit der ermittelten Lösung.

- 39 a) Bestimmen Sie die Lösung des im Beispiel B 19 angegebenen Gleichungssystems für  $a = 0$ !
- b) Wählen Sie die reelle Zahl  $a$  so, daß die Lösung des Systems ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen ist!

An einem Beispiel wird noch auf ein weiteres Lösungsverfahren hingewiesen:

- 20 Gelöst werden soll das bereits im Beispiel B 15 angegebene System

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x + y = 1 \\ \text{(II)} \quad & 2x - y = 8 \end{aligned}$$

Es fällt auf, daß sich die Koeffizienten von  $y$  in beiden Gleichungen nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Wir **addieren** die rechte (bzw. linke) Seite von (I) zur rechten (bzw. linken) Seite von (II) und erhalten:

$$\begin{aligned} \text{(I')} \quad & x + y = 1 \\ \text{(II')} \quad & 2x + x - y + y = 8 + 1 \end{aligned}$$

Aus (II') ergibt sich:  
Einsetzen von 3 für  $x$  in (I') ergibt:  
Wie im Beispiel B 15 erhalten wir die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

$$L = \{(3; -2)\}.$$

Bei diesem Lösungsweg wurden die rechten bzw. die linken Seiten der beiden Gleichungen (I) und (II) addiert. Man spricht deshalb vom **Additionsverfahren**.

## Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme!

a)  $x = 7$       b)  $x = 4y$       c)  $x + y = 54$   
 $x + y = 10$        $x + y = 100$        $x = 2y$

d)  $6x - 4y = 24$       e)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 4$       f)  $2x - 3y = 15$   
 $x = y + 2$        $3(x + y) = 10$        $3x - 22,5 = 4,5y$  (L)

g)  $2x + 3y = 12$       h)  $3x + 2y = -2$       i)  $12x - 5y = 1$   
 $3x - 2y = 5$        $7x + 8y = -3$        $10x - 2y = -10$

k)  $5(x + 2) - 3(y + 1) = 23$       l)  $10(3x + 5) = 2(16 - 3y)$   
 $3(x - 2) + 5(y - 1) - 19 = 0$  (L)       $6(1 - 7x) = 5(4y - 10)$  (L)

m)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = -4$       n)  $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 13$   
 $\frac{2x}{3} + 11 = -\frac{5y}{6}$        $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 11$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme! Nutzen Sie dabei Ihren Taschenrechner, auch bei der Probe!

a)  $0,8x + 3,5y = 8,272$       b)  $3x + 0,5y = 0,8$   
 $1,1x - y = -0,716$        $0,5x + 2y = -6$

c)  $1,2x + 3,5y = 0,827$       d)  $0,80x = 0,60 + 0,25y$   
 $2,8x + 1,5y = 1,063$  (L)       $0,64x + 1,25y = 6,28$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme möglichst rational!

a)  $10x - 3y = -55$       b)  $15x + y = 25$   
 $5x = 2y - 35$        $15x = 25 - 5y$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme! Nutzen Sie aus, daß die linken Seiten der beiden Gleichungen in jedem System übereinstimmen!

a)  $x = 3y - 2$       b)  $3y = 2x + 9$       c)  $5y - 1 = 3x$   
 $x = 5y - 12$        $3y = 15 + 4x$        $5y - 1 = 2x$

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme! Suchen Sie einen möglichst rationalen Lösungsweg!

$$\text{a) } \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{l} 2x + 7y = 13 \\ 4x - 7y = 5 \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{l} 5x = 3 - y \\ -5x = -16 + 2y \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{l} 8y = 5x \\ -8y - 80 = 5x \end{array}$$

$$\text{e) } \begin{array}{l} 2x - 4y = 14 \\ -2x + 4y = -14 \end{array}$$

$$\text{f) } \begin{array}{l} \frac{3}{5}x - \frac{1}{18}y = 4 \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{18}y = 6 \end{array}$$

6. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der durch die folgenden linearen Gleichungen bestimmten Geraden!

$$\text{a) } y - x = 0 \quad \text{und} \quad y = 3x - 1$$

$$\text{b) } y + 2x - 4 = 0 \quad \text{und} \quad 2y - 4x + 16 = 0$$

$$\text{c) } y + 2x = 4 \quad \text{und} \quad 2y - 4x = 0 \quad (\text{L})$$

$$\text{d) } y = 4 \quad \text{und} \quad x = -3 \quad (\text{L})$$

$$\text{e) } x + y = 1 \quad \text{und} \quad x + \frac{y}{2} = 1$$

$$\text{f) } x = 0 \quad \text{und} \quad y = 1$$

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme!

$$\text{a) } \begin{array}{l} \frac{1}{x+y} = \frac{2}{3x+1} \\ \frac{1}{2x+1} = \frac{2}{7y} \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{l} \frac{x+y}{x+1} = \frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{9-y} = 2 \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{l} 11(x-y) + 12(y-x) = 1 \\ (x-2) : y = 1 : 4 \end{array}$$

$$\text{d)* } \begin{array}{l} \frac{1}{x+y} + \frac{12}{x+2y} = 0 \\ \frac{12}{x-y} - \frac{12}{2x-3y} = 0 \end{array}$$

8. Lösen Sie das Gleichungssystem in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$ ! Welche Lösung erhält man für  $a = b$ ? (L)

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \end{array}$$

9. Lösen Sie das Gleichungssystem in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$ !

$$\begin{array}{l} ax + by = 0 \\ x + y = 0 \end{array}$$

- 10.\* Wählen Sie für  $a$  eine reelle Zahl so, daß das Gleichungssystem keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen besitzt!

$$\begin{array}{l} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = a \end{array}$$

- 11.\* Das folgende Gleichungssystem besitzt mindestens eine Lösung. Geben Sie eine Lösung an!

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{array}$$

Wählen Sie die Koeffizienten  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  und  $b_2$  so, daß das System sogar unendlich viele Lösungen besitzt!

- 12.\* Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$ !

$$\text{a) } \begin{array}{l} x + y = a^2 + b^2 \\ x - y = a^2 - b^2 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{l} 2x + 3y = a \\ x - y = b \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{l} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{array} \quad (\text{L})$$

## 13.\* Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme!

(Hinweis: Man kann die Rechenverfahren zum Lösen von Systemen aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen auf die gegebenen Systeme übertragen.)

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } 2x + y + z = 1 & \text{b) } x + y + z = 2 & \text{c) } x + 2y - z + 3 = 0 \\
 \quad y + z = -1 & \quad 2x + y = 5 & \quad 4x - y = z \\
 \quad \quad 5z = 5 & \quad 2y + 3z = 0 & \quad 2(2x + z) + y = 12 \quad (L)
 \end{array}$$

## 10 Lösen von Sachaufgaben mit Hilfe von Gleichungssystemen

Wir greifen unser Einführungsbeispiel auf Seite 84f. auf:

■ 21 Dichte des Frostschutzmittels:  $1,135 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Dichte des Gemisches:  $1,027 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

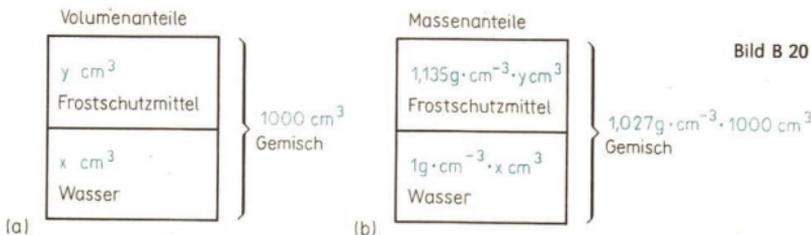
Wieviele Anteile des Frostschutzmittels müssen in 1 l Gemisch enthalten sein?

(1) *Durchdenken des Sachverhaltes:*

Für  $1000 \text{ cm}^3$  Kühlwasser sind  $x \text{ cm}^3$  Wasser und  $y \text{ cm}^3$  Frostschutzmittel zu mischen. [→ Bild B 20(a)]

Die Masse des Kühlwassers beträgt  $1,027 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1000 \text{ cm}^3$ .

Sie setzt sich zusammen aus den Massenanteilen des Wassers und den Massenanteilen des Frostschutzmittels. [→ Bild B 20(b)]



(2) *Aufstellen der Gleichungen des Systems:*

Aus den Volumenanteilen im Gemisch ergibt sich:

(I)  $x + y = 1000$

Aus den Massenanteilen im Gemisch ergibt sich:

(II)  $x + 1,135y = 1,027 \cdot 1000$

(3) *Lösen des Gleichungssystems:*

Wir lösen (I) nach  $x$  auf:

Wir setzen  $1000 - y$  für  $x$  in (II) ein:

Wir berechnen  $y$ .

$$\begin{aligned}
 x &= 1000 - y \\
 1000 - y + 1,135y &= 1027 \\
 1000 + 0,135y &= 1027 \\
 0,135y &= 27 \\
 y &= 200
 \end{aligned}$$

Wir berechnen  $x$  aus  $x = 1000 - y$ :  $x = 1000 - 200$   
 $x = 800$

(4) *Probe am Text:*

0,2 l Frostschutzmittel und 0,8 l Wasser ergeben 1 l Kühlwassergemisch. 200 cm<sup>3</sup> Frostschutzmittel besitzen eine Masse von 227 g. 800 cm<sup>3</sup> Wasser besitzen eine Masse von 800 g. 1000 cm<sup>3</sup> Kühlwassergemisch mit einer Dichte von  $1,027 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  besitzen eine Masse von 1027 g. Sie stimmt mit der Masse des Gemisches überein, das man erhält, wenn man 200 cm<sup>3</sup> Frostschutzmittel und 800 cm<sup>3</sup> Wasser wählt.

(5) *Antwortsatz:*

Um einen Liter Kühlwassergemisch mit einer Dichte von  $1,027 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  zu erhalten, muß man 0,2 l Frostschutzmittel mit 0,8 l Wasser mischen.

- 22 Eine GST-Gruppe bricht um 7 Uhr von Ort A auf und marschiert mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  nach einem 10 km entfernten Übungsgelände G. 45 Minuten später startet von G aus ein Kradmelder und fährt der Gruppe mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  entgegen, um ihr eine Nachricht zu überbringen. Wann und wieviel Kilometer vom Übungsgelände entfernt hat der Melder die Gruppe erreicht?

(1) *Durchdenken des Sachverhaltes:*

Gesucht ist die Länge des Weges  $s_1$ , welchen der Kradmelder zurücklegt, sowie seine Fahrzeit  $t_1$ .

Bekannt ist:

- (a) Der Weg von A nach G hat eine Länge von 10 km. Er setzt sich zusammen aus der Strecke  $s_1$ , welche der Kradmelder zurücklegt, und der Strecke  $s_2$ , welche die GST-Gruppe marschiert. (↗ Bild B 21)  
 (b) Bis zum Treffpunkt T ist die GST-Gruppe 0,75 Stunden länger unterwegs als der Kradmelder.

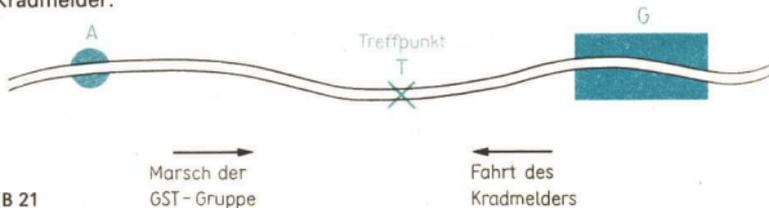


Bild B 21

(2) *Aufstellen der Gleichungen des Systems:*

Wir nutzen die Formel  $s = v \cdot t$  und bezeichnen mit  $t_1$  die Fahrzeit des Kradmellers und mit  $t_2$  die Laufzeit der GST-Gruppe (in Stunden).

Aus (a) ergibt sich: (I)  $60 t_1 + 6 t_2 = 10$

Aus (b) ergibt sich: (II)  $t_1 + 0,75 = t_2$

(3) *Lösen des Gleichungssystems:*

Als Lösung des Systems ermittelt man  $t_1 = \frac{1}{12}$  und  $t_2 = \frac{5}{6}$ .

(4) *Probe am Text:*

Der Kradmelder ist 5 Minuten, die Gruppe 50 Minuten unterwegs, also ist der Melder genau 45 Minuten später gestartet. Der Kradmelder legt eine Strecke von

$\frac{1}{12} \cdot 60 \text{ km} = 5 \text{ km}$  zurück, die Gruppe eine Strecke von  $\frac{5}{6} \cdot 6 \text{ km} = 5 \text{ km}$ . Die Länge der Strecke von A nach G beträgt also tatsächlich 10 km.

(5) **Antwortsatz:**

Der Melder hat die Gruppe 5 km vom Übungsgelände entfernt um 7.50 Uhr erreicht.

### Aufgaben

- Gesucht sind zwei ganze Zahlen. Ihre Summe ist 4. Wird das Dreifache der einen Zahl um das Doppelte der anderen Zahl vermindert, so erhält man 52.
- Zwei natürliche Zahlen verhalten sich wie 8:3. Ihre Summe ist gleich der größten zweistelligen Zahl. Wie heißen die beiden Zahlen?
- Zwei Zahlen  $a$  und  $b$  verhalten sich wie 5:6. Addiert man zu jeder der Zahlen 3, verhalten sich die entstandenen Summen wie 7:8. Ermitteln Sie  $a$  und  $b$ !
- Vergrößert man Zähler und Nenner einer in Bruchdarstellung gegebenen Zahl um 1, so erhält man  $\frac{8}{9}$ ; vermindert man Zähler und Nenner um 1, erhält man  $\frac{7}{8}$ . Ermitteln Sie die Zahl!
- Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 10. Schreibt man beide Ziffern in umgekehrter Reihenfolge, so entsteht eine um 36 kleinere Zahl als die gegebene. Für welche zweistellige Zahl gilt dies?
- In einem gleichschenkligen Dreieck mit einem Umfang von 70 cm ist die Basis 10 cm länger als ein Schenkel. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?
- Wie lang sind die parallelen Seiten eines Trapezes, die sich wie 4:5 verhalten, wenn die Mittellinie 5,4 cm lang ist?
- Wird die Grundseite eines Dreiecks um 2 cm verkürzt und die zugehörige Höhe um 2 cm verlängert, so vergrößert sich der Flächeninhalt um  $2 \text{ cm}^2$ . Verlängert man dagegen die Grundseite um 3 cm und verkürzt die Höhe um 2 cm, so nimmt der Flächeninhalt um  $4 \text{ cm}^2$  zu. Wie lang sind Grundseite und zugehörige Höhe?
- \* Ein Junge biegt aus zwei gleich großen Drahtstücken einen Kreis und ein gleichseitiges Dreieck. Die Flächeninhalte der beiden Figuren unterscheiden sich um  $5,2 \text{ cm}^2$ . Wie lang war jedes der Drahtstücke? Nutzen Sie Ihren Taschenrechner! (L)
- Ein Vater sagt zu seinem Sohn: „In vier Jahren werde ich dreimal so alt sein wie du. Vor vier Jahren war ich fünfmal so alt wie du.“ Wie alt sind Vater und Sohn?
- \* Ein junger Mann, nach seinem und dem Alter seiner Eltern befragt, antwortet scherzhaft in folgender Weise: „Meine Mutter war vor vier Jahren doppelt so alt, wie ich jetzt bin. Mein Vater wird in fünf Jahren doppelt so alt sein, wie ich dann sein werde. Addiert man zu meinem Alter das Alter meines Vaters und das meiner Mutter, so ergeben sich 109 Jahre.“ (L)
- Ein Campingplatz vermietet Hütten für 3 Personen und Hütten für 4 Personen. Eine FDJ-Gruppe bestellt für 43 Jugendfreunde 12 Hütten. Wieviel Hütten jeder Art muß die Leitung des Campingplatzes bereitstellen?

13. In „Die Wunder der Rechenkunst“ von JOHANN CHRISTOPH SCHÄFER (1802 bis 1854) findet man Aufgaben, welche die damaligen gesellschaftlichen Verhältnisse widerspiegeln:

a) Eine Köchin hat 18 Häringe für 18 Groschen gekauft. Es waren gute Häringe für die Herrschaft, das Stück für 5 Groschen, und schlechte Häringe für das Gesinde, 5 Stück für 1 Groschen.

Wieviel gute und wieviel schlechte Häringe hatte die Köchin?

b) Ein Schullehrer wird um den Betrag des Schulgeldes gefragt, worauf er zur Antwort gibt: Von jedem Knaben erhalte ich jährlich 15 Neugroschen und von jedem Mädchen 10 Neugroschen. In diesem Jahr, wo sich die Anzahl der Knaben zu der der Mädchen wie 2:3 verhält, beträgt die Summe des Schulgeldes 16 Thaler; im vorigen Jahr aber, wo das umgekehrte Verhältnis bestand, hatte ich 1 Thaler und 10 Neugroschen mehr.

Welches war die Anzahl der Kinder von jedem Geschlechte in diesem und im vorigen Jahr? (1 Thaler sind 30 Neugroschen.) (L)



14. Ein Schubverband transportiert Düngemittel auf der Elbe. Er benötigt für die 130 km von M nach D stromaufwärts 14 Stunden und 15 Minuten. Auf der Rückfahrt von D nach M erreicht er das Ziel bereits nach 8 Stunden und 45 Minuten. Wie groß ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers und die Eigengeschwindigkeit des Schubverbandes bei unbewegtem Wasser? Runden Sie die ermittelten Zahlenwerte auf eine Stelle nach dem Komma! (L)
15. Bei einem Manöver wird ein gegnerischer Aufklärer um 7.40 Uhr über dem Ort T gesichtet; er bewegt sich mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $1000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  in Richtung Z. 7.42 Uhr starten in Z zwei Jagdflugzeuge und fliegen mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $2400 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  dem Aufklärer entgegen. Wieviel Minuten nach dem Start treffen die Jagdflugzeuge auf den Aufklärer, wenn die Entfernung von T nach Z 420 km beträgt?
- 16.\* Bei einer Schnellzuglokomotive macht auf einer Strecke von 441 m das Laufrad 112 Umdrehungen mehr als das größere Treibrad. Auf je sieben Umdrehungen des Laufrades kommen drei Umdrehungen des Treibrades. Wieviel Umdrehungen macht das Treibrad auf einer Strecke von 10,5 km? (L)
17. Der Stausee eines Elektrizitätswerkes wird durch einen Zufluß gleichmäßig mit Wasser versorgt. Wenn drei der fünf gleichstarken Turbinen in Betrieb sind, nimmt der Inhalt des Stausees stündlich um  $30000 \text{ m}^3$  zu. Sind dagegen alle fünf Turbinen in Betrieb, so verringert sich der Wasservorrat trotz unverändertem Zufluß stündlich um  $50000 \text{ m}^3$ .

Wieviel Wasser fließt in einer Stunde zu und welche Wassermenge benötigt eine Turbine pro Stunde? (L)

18. Ein Tieflader transportiert zwei Arten von Platten, kurze und lange. Bei einer Beladung mit fünf langen Platten und neun kurzen Platten transportiert er insgesamt eine Masse von 40 t. Wenn er mit neun langen und drei kurzen Platten beladen ist, transportiert er 39 t. Berechnen Sie die Masse einer langen und die einer kurzen Platte!
19. Während der Ernte wird neben dem Mähdrescher E 512 immer häufiger der leistungsfähigere Typ E 516 eingesetzt. In der ersten Schicht ernten neun Mähdrescher vom Typ E 512 und drei Mähdrescher vom Typ E 516 zusammen eine Fläche von 180 ha ab. In der zweiten Schicht ernten sechs Mähdrescher vom Typ E 512 und fünf Mähdrescher vom Typ E 516 unter sonst gleichen Bedingungen zusammen 192 ha ab.
- a) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die vom E 512, und die Größe der Fläche, die vom E 516 unter diesen Bedingungen abgeerntet wird!
- b) Wieviel Hektar könnte der E 516 in einer Schicht von 18 Stunden abernten, wenn er ohne Unterbrechung mit  $7,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  fahren und seine volle Arbeitsbreite von 6,60 m ausnützen würde?
20. Für die Bearbeitung von Werkstücken in einem Kleinbetrieb stehen zwei Drehmaschinen zur Verfügung. Die erste Maschine muß zur Bearbeitung 20 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 14 Minuten ein Werkstück aus. Die zweite, modernere Maschine muß 200 Minuten vorbereitet werden und stößt dann alle 2 Minuten ein Werkstück der gleichen Art aus.
- a) Wieviel Minuten werden bereits bei der Herstellung von 100 Werkstücken eingespart, wenn die modernere Maschine eingesetzt wird?
- b) Bestimmen Sie diejenige Stückzahl, bei deren Herstellung beide Maschinen die gleiche Zeit benötigen! Geben Sie an, wie lange beide Maschinen in diesem Fall eingesetzt werden müssen!
21. In einem chemischen Betrieb sollen aus einer 96%igen und aus einer 70%igen Schwefelsäure 3 t einer 86%igen Schwefelsäure hergestellt werden. Welche Ausgangsmengen sind erforderlich?
22. Wieviel Tonnen Stahl mit 0,5% Kohlenstoff und wieviel Tonnen Grauguß mit 2,5% Kohlenstoff ergeben beim Zusammenschmelzen 12 t Stahl mit 1,45% Kohlenstoff? (L)
23. Eine Platte aus Messingblech hat die Masse von 9,405 kg und die Abmessungen 500 mm, 500 mm und 4,4 mm. Wieviel Kupfer und wieviel Zink sind in der Legierung enthalten?  
Es ist  $\rho_{\text{Cu}} = 8,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  und  $\rho_{\text{Zn}} = 7,13 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .
24. In einem Gleichstromkreis, in dem zwei Widerstände parallel geschaltet sind, sei die Gesamtstromstärke 2 A. Welche Stromstärken werden in den einzelnen Verzweigungen gemessen, wenn die Widerstände 500  $\Omega$  und 750  $\Omega$  betragen?
25. In einem Stromkreis sind zwei Widerstände  $R_1 = 50 \Omega$  und  $R_2 = 150 \Omega$  in Reihe geschaltet. Die Gesamtspannung beträgt 220 V. Welche Spannungen treten an jedem der Teilwiderstände auf?

## Komplexe Übungen

*Hinweis:* Falls nicht anders festgelegt, ist der Grundbereich für die in den folgenden Gleichungen und Ungleichungen auftretenden Variablen die Menge der reellen Zahlen.

- Beschreiben Sie jeden der folgenden Sachverhalte durch eine Gleichung oder eine Ungleichung!
  - Eine natürliche Zahl ist stets kleiner als ihr Nachfolger.
  - Die Quadratwurzel aus dem Quadrat einer reellen Zahl ist stets gleich dem absoluten Betrag dieser Zahl.
  - Das Quadrat einer Summe zweier reeller Zahlen ist stets mindestens so groß wie das Doppelte des Produktes dieser beiden Zahlen. (L)
  - Die Länge einer Dreiecksseite ist stets kleiner als die Summe der Längen der beiden anderen Dreiecksseiten.

- Vereinfachen Sie die folgenden Terme!

$$\text{a) } (6a + 5b) \cdot \left(\frac{1}{2}a - 2b\right) \quad \text{b) } \frac{10^5}{10^6} \cdot 10^{-3}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} \quad (a \geq 0) \quad \text{d) } (x + y)^2 - (x - y)^2$$

- Es ist  $x$  der absolute Betrag von  $(-7)$ ,  
 $y$  die entgegengesetzte Zahl von  $(+2,5)$ ,  
 $z$  das Reziproke von  $\frac{2}{5}$ .

Berechnen Sie  $x^2 + y^2 + z^2$  und  $(x + y + z)^2$ ! (L)

- Schreiben Sie als Potenz mit der Basis  $a$  ( $a > 0$ )!
  - $\frac{1}{a}$
  - $a$
  - $\frac{1}{a^3}$
  - $\left(\frac{1}{a}\right)^2$
  - $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$

- Wenden Sie binomische Formeln auf die folgenden Terme an!

$$\text{a) } (a^3 + b^3)^2 \quad \text{b) } (\sqrt{2} - 1)^2$$

- Nennen Sie alle natürlichen Zahlen, die größer als  $n - 5$  und auch kleiner als  $n + 7$  ( $n \geq 5$ ) sind! (L)
  - Wieviel gerade Zahlen liegen höchstens zwischen  $m - 3$  und  $m + 9$  ( $m \geq 3$ )?
- Für die natürlichen Zahlen  $s$  und  $t$  gilt  $0 < s < t$ .

$$\text{a) Ordnen Sie } 1; \frac{s}{t}; \frac{t}{s}; -\frac{s}{t} \text{ und } -\frac{t}{s} \text{ der Größe nach!}$$

$$\text{b)* Welcher der Beträge } \left|1 - \frac{s}{t}\right| \text{ und } \left|1 - \frac{t}{s}\right| \text{ ist der größere? Begründen Sie!}$$

- Gegeben sind die Ungleichungen

$$(1) \frac{3(5x - 8)}{2} < 5x - 2 \quad \text{und} \quad (2) 15x - 3 < 14x + n.$$

- Lösen Sie (1)!
- Geben Sie diejenigen Elemente der Lösungsmenge von (1) an, die natürliche Zahlen sind!
- Bestimmen Sie  $n$  so, daß (2) die gleiche Lösungsmenge wie (1) hat!

9. Es ist  $L$  die Lösungsmenge von  $15 < n < 20$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- Geben Sie die Menge  $L$  an!
  - Geben Sie diejenige Teilmenge  $T$  von  $L$  an, welche genau aus den in  $L$  enthaltenen Primzahlen besteht!
10. a) Veranschaulichen Sie die Menge aller Punkte, deren Koordinaten die Gleichung  $y - |x| = 0$  erfüllen, in einem Koordinatensystem!
- b)\* Ermitteln Sie rechnerisch und graphisch die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme!
- $$y - \frac{1}{2}x = 1 \quad y - 2x = 3$$
- $$y - |x| = 0 \quad y - |x| = 0$$
11. Zu bestimmen ist die Menge  $M$  aller natürlichen Zahlen  $n$ , die folgende drei Eigenschaften besitzen:
- (1)  $n \mid 90$ ;    (2)  $n$  ist ungerade;    (3)  $4 \leq n \leq 15$ .    (L)
12. Gegeben ist die Ungleichung  $\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$ .
- Lösen Sie die Ungleichung, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis!
  - Geben Sie die Menge  $M_1$  aller natürlichen Zahlen an, die Lösung der gegebenen Ungleichung sind!
  - Geben Sie die Menge  $M_2$  aller ganzzahligen Lösungen der gegebenen Ungleichung an, welche im Intervall  $-4 < x < 1$  liegen!
  - Geben Sie die Menge  $D$  aller Elemente an, die sowohl in  $M_1$  als auch in  $M_2$  liegen!
13. Kleine Veränderungen – große Wirkung!
- Gegeben ist das Gleichungssystem
- $$\sqrt{5}x + y = 2$$
- $$5x + \sqrt{5}y = 4,4.$$
- Lösen Sie das gegebene System!
  - In dem gegebenen System wird  $\sqrt{5}$  durch den Näherungswert 2,2 ersetzt. Lösen Sie das dadurch entstandene Gleichungssystem!
  - Im gegebenen System wird  $\sqrt{5}$  durch den Näherungswert 2,236 ersetzt. Lösen Sie das dadurch entstandene System! Nutzen Sie Ihren Taschenrechner! Vergleichen Sie die ermittelte Lösungsmenge mit den in Aufgabe a) und in Aufgabe b) gewonnenen Ergebnissen!
  - Stellen Sie die durch die Gleichungen des gegebenen Systems bestimmten Geraden in einem Koordinatensystem dar! Führen Sie den gleichen Auftrag für das in Aufgabe b) beschriebene System aus!
- 14.\* Untersuchen Sie, ob es eine reelle Zahl  $a$  gibt, für die das folgende System keine Lösung besitzt!
- $$2x + (9a^2 - 2) \cdot y = 3a$$
- $$x + y = 1$$
- 
15. Durch  $y = x + 4$  wird eine Gerade  $g$  bestimmt.
- Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit den Koordinatenachsen an!
  - Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die zu  $g$  parallel verläuft und den Punkt  $P(1; 0)$  enthält!

16. Eine Gerade  $g$  enthält die Punkte  $P_1(2; 1)$  und  $P_2(-1; -\frac{1}{3})$ .
- Tragen Sie die beiden Punkte in ein Koordinatensystem ein, und zeichnen Sie die Gerade  $g$ !
  - Geben Sie eine Gleichung für diese Gerade an! (L)
  - Untersuchen Sie, welcher der Punkte  $P_3(-0,5; 0)$  und  $P_4(0; \frac{1}{9})$  auf  $g$  liegt!
17. Zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  sind durch die Gleichungen  $y - ax = 2$  bzw.  $2y - 6x = b$  gegeben.
- Geben Sie zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$  so an, daß die Geraden zusammenfallen!
  - Geben Sie zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$  so an, daß gilt  $g_1 \neq g_2$  und  $g_1 \parallel g_2$ !
18. a) Zeichnen Sie die durch die Gleichung  $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$  bestimmte Gerade in einem Koordinatensystem!
- b) In welchen Punkten schneidet die durch  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a \neq 0; b \neq 0$ ) bestimmte Gerade die Koordinatenachsen?
- c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, welche die Koordinatenachsen in den Punkten  $P_1(4; 0)$  und  $P_2(0; -3)$  schneidet!
19. Gegeben ist das Gleichungssystem
- $y = -2x + 7$
  - $3y - 6 = 9x$ .
- Lösen Sie das System rechnerisch!
  - Jede der Gleichungen beschreibt eine Gerade. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden!
  - Ermitteln Sie graphisch die Koordinaten der vier Punkte, in denen die durch die Gleichungen (I) und (II) bestimmten Geraden die Koordinatenachsen schneiden!
20. a) Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge der Gleichung  $y = x - 2$  durch eine Gerade!
- b) Die durch die Gleichung  $y = x - 2$  bestimmte Gerade zerlegt die Ebene in zwei Halbebenen. Kennzeichnen Sie die durch die Lösungsmenge der Ungleichung  $y \geq x - 2$  bestimmte Halbebene!
- c) Geben Sie die Menge aller Punkte an, die sowohl zu der durch  $y = x - 2$  als auch zu der durch  $y = 2x + 1$  bestimmten Geraden gehören!
- d) Schraffieren Sie die Punktmenge, die sowohl zu der durch  $y \leq x - 2$  als auch zu der durch  $y \geq 2x + 1$  bestimmten Halbebene gehören!
21. a) Jede der Gleichungen  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = -x + 3$  und  $y = x - 2$  beschreibt eine Gerade. Zeichnen Sie die vier Geraden in ein und demselben Koordinatensystem!
- b) Kennzeichnen Sie die Menge aller Punkte, welche in jeder der durch die Ungleichungen  $y \geq 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \leq -x + 3$  und  $y \geq x - 2$  bestimmten Halbebenen liegen!
- c) Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte des in Aufgabe b) bestimmten Vielecks!
- Jedem Eckpunkt  $P(x; y)$  wird durch die Gleichung  $z = 2x + 3y$  eine reelle Zahl  $z$

zugeordnet. Berechnen Sie diese Zahlen! Zu welchem Eckpunkt gehört die größte Zahl?<sup>1)</sup>

22. Eine kugelförmige Hefezelle erreicht bei ihrem Wachstum nach 210 Minuten ein Volumen von  $3 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^3$ . Nach 230 Minuten beträgt ihr Volumen  $5 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^3$ . Prüfen Sie, ob Proportionalität zwischen dem Alter der Zelle und ihrem Volumen besteht!
23. Gegeben sind die Terme  $24x^2 - 6$  und  $(6x + 3)(4x - 2)$ . Setzt man für  $x$  in beiden Termen die gleiche reelle Zahl ein, so sind die Werte beider Terme gleich. Beweisen Sie diese Behauptung!
24. a) Untersuchen Sie, ob gilt: 17% von 85 ist gleich 85% von 17!  
b) Jemand behauptet,  $a\%$  von  $b$  sei stets größer oder gleich  $b\%$  von  $a$ . Was meinen Sie zu dieser Auffassung?
- 25.\* Beweisen Sie!  
a) Für beliebige  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $a \neq 0$  und  $a < b$  gilt:  

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$$
  
 b) Für reelle Zahlen  $r$  und  $s$  gilt: (1) Wenn  $0 < r < s$ , so  $r^2 < s^2$ .  
 (2) Wenn  $r < s < 0$ , so  $r^2 > s^2$ .
26. Der Durchmesser der größeren einer zweistufigen Riemenscheibe soll 6 cm länger als der der kleineren Scheibe sein. Die Längen der Durchmesser sollen sich wie 4:5 verhalten. Welche Längen müssen die Durchmesser der Riemenscheibe bekommen? (L)
27. Ein LKW hat einen Normverbrauch von 24,0 l Kraftstoff auf 100 km. Durch eine kraftstoffsparende Fahrweise kann der Verbrauch je 100 km um durchschnittlich 1,2 l gesenkt werden.  
a) Wieviel Prozent Kraftstoff werden auf diese Weise eingespart?  
b) Wieviel Liter Kraftstoff können auf diese Weise bei einer monatlichen Fahrstrecke von 8000 km eingespart werden? (L)
28. Es ist die mittlere Dichte der Erde zu ermitteln. Das Volumen der Erde beträgt  $1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$ , ihre Masse  $5,98 \cdot 10^{25} \text{ kg}$ .
29. a) Zwei Wasserwerke pumpen Trinkwasser für eine Kleinstadt in den Vorratsbehälter eines Wasserturms mit einem Fassungsvermögen von  $9000 \text{ m}^3$ . Ihr Leistungsvermögen ist so angelegt, daß sie den Behälter füllen, wenn beide Werke drei Tage arbeiten und kein Wasser entnommen wird. Dabei liefert das eine Werk täglich  $500 \text{ m}^3$  mehr Wasser als das andere. Welche Tagesleistung besitzt jedes der beiden Wasserwerke? (L)  
b) Die Kleinstadt besitzt einen durchschnittlichen täglichen Wasserverbrauch von  $2000 \text{ m}^3$ . Das größere Wasserwerk fällt plötzlich aus. Trotz gefülltem Vorratsbehälter muß sparsam mit Wasser umgegangen werden. Durch einen entsprechenden Aufruf wird erreicht, daß der tägliche Wasserverbrauch um  $500 \text{ m}^3$  gesenkt wird. Für wieviel Tage ist dadurch die Stadt länger mit Wasser versorgt? (L)

<sup>1)</sup> Mit Systemen aus linearen Gleichungen und linearen Ungleichungen können Probleme minimalen Materialverbrauchs, minimaler Transportkosten oder maximaler Auslastung von Maschinen beschrieben werden. Bei vielen solchen in der Wirtschaft häufig auftretenden Fragen wird – unter Berücksichtigung gegebener Bedingungen – eine optimale Lösung gesucht.

# C Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen; Potenzfunktionen

## Quadratische Funktionen

### 1 Zur Wiederholung

1. Welche der folgenden Abbildungen sind Funktionen? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Jeder natürlichen Zahl wird ihr Nachfolger zugeordnet.

<b>x</b>	0	1	2	3	4
<b>y</b>	3	5	7	9	11

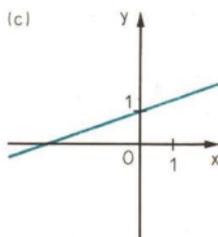
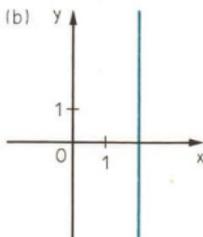
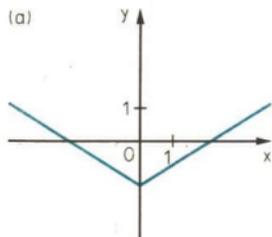
<b>a</b>	1	-1	2	-2	3	-3
<b>b</b>	0	1	0	1	0	1

d)  $M = \{(1; 2); (2; 3); (1; 4); (2; 5); (3; 6)\}$

e)  $y = 2|x| \quad (x \in \mathbb{R})$

f) Bild C 1

Bild C 1



2. Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar! Beachten Sie die Definitionsbereiche!

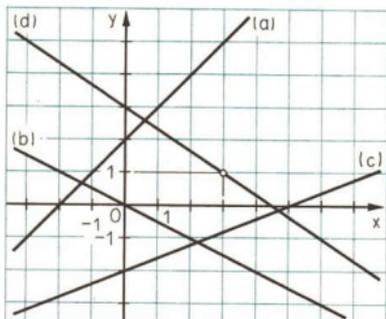
a)  $y = 2x \quad (x \in \mathbb{N})$

b)  $y = x + 2 \quad (x \in \mathbb{Q}_+)$

c)  $y = -\frac{1}{2}x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$

d)  $y = 0,25x + 1,25 \quad (x \in \mathbb{R})$

3. Geben Sie Gleichungen für die im Bild C 2 dargestellten Funktionen an!



4. Geben Sie die Wertebereiche für die Funktionen von Aufgabe 2 an!
5. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Bestimmen Sie die Funktionswerte  $f(3)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-2,6)$ ,  $f(100)$ !
6. Welche der folgenden Zahlenpaare gehören zur Funktion mit der Gleichung  $y = -1,5x + 4$ ?  $(0; 4)$ ,  $(-6; 13)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(0,4; 3,4)$ ,  $(-7; 14,5)$
7. Gegeben sind die Funktionen mit den Gleichungen  
 a)  $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$  und b)  $f(x) = 0,7x - 2,8$ .  
 Berechnen Sie jeweils die Argumente zu den Funktionswerten  $-1$ ,  $0$ ,  $2$ ,  $4$ ,  $100$ !
8. Geben Sie eine Gleichung für eine lineare Funktion an, die  
 a) als Graph eine fallende (steigende) Gerade hat, die die  $y$ -Achse im Punkt  $P(0; 3)$  schneidet,  
 b) eine positive Nullstelle hat und deren Graphen parallel zum Graphen der Funktion  $y = 2x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) verläuft!

## 2 Der Begriff „quadratische Funktion“

Eine Vielzahl von Zusammenhängen aus Mathematik und Naturwissenschaften läßt sich durch Funktionen beschreiben. Entsprechende Gleichungen sind zum Beispiel

$$s(t) = v \cdot t \text{ (} v \text{ konst.); } A(r) = \pi \cdot r^2; \quad u(r) = 2\pi \cdot r; \quad V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3; \quad A(a) = a^2;$$

$$U(R) = I \cdot R \text{ (} I \text{ konst.); } A_0(r) = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2 \text{ (} s \text{ konst.); } R(A) = \frac{I}{A} \text{ (} I \text{ konst.);}$$

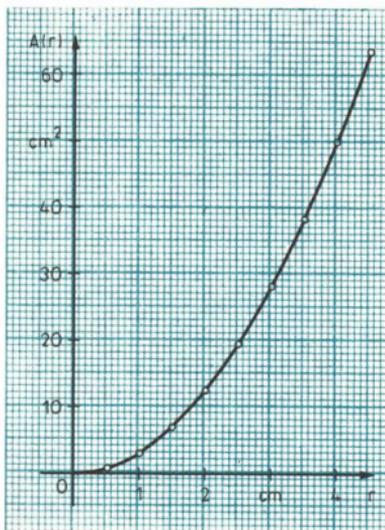
$V(a) = \frac{1}{3}h \cdot a^2$  ( $h$  konst.). Der Definitionsbereich ist in jedem Falle ein durch den Sachverhalt vorgegebener Größenbereich.

- 1 a) Geben Sie die durch die Gleichungen beschriebenen Zuordnungen in Worten an, indem Sie die Bedeutung der verwendeten Variablen berücksichtigen!  
 b) Ordnen Sie die Zuordnungen, indem Sie die Gleichungen in lineare und nichtlineare einteilen!
- 2 Stellen Sie den durch die Gleichung  $A(r) = \pi \cdot r^2$  gegebenen Zusammenhang zwischen dem Radius  $r$  und dem Flächeninhalt  $A$  eines Kreises im Intervall  $0 \text{ cm} \leq r \leq 4,5 \text{ cm}$  durch eine Wertetabelle dar! Wählen Sie für die Radien eine Schrittweite<sup>1)</sup> von  $0,5 \text{ cm}$ , und runden Sie die Zahlenwerte der zugehörigen Flächeninhalte (in  $\text{cm}^2$ ) auf eine Stelle nach dem Komma!

In der Gleichung  $A(r) = \pi \cdot r^2$  tritt die Variable  $r$  im Quadrat auf. Die Funktion, die durch die Gleichung  $A(r) = \pi \cdot r^2$  beschrieben wird, ist ein Beispiel für eine quadratische Funktion. Im Bild C 3 sind die Punkte entsprechend der Wertetabelle von Auftrag C 2 in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Alle weiteren Punkte, die man durch „Verfeinern“ der Wertetabelle erhalten würde, liegen auf der eingezeichneten Kurve, dem Graphen der Funktion. (→ Bild C 3)

<sup>1)</sup> Unter Schrittweite versteht man die Differenz unmittelbar aufeinanderfolgender Argumente.

Bild C 3



- 3 Lösen Sie mit Hilfe des Graphen im Bild C 3 näherungsweise die folgenden Aufgaben!
- Welcher Flächeninhalt  $A$  gehört zu einem Radius  $r = 1,8$  cm?
  - Zu welchem Radius  $r$  gehört der Flächeninhalt  $A = 42$  cm<sup>2</sup>?

Auch die Gleichungen  $A(a) = a^2$ ,  $A_O(r) = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2$  ( $s$  konst.),  $V(a) = \frac{1}{3} h \cdot a^2$  ( $h$  konst.) beschreiben quadratische Funktionen.

Wir legen allgemein fest:

Eine Funktion mit einer Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ) mit  $R$  (oder einer Teilmenge von  $R$ ) als Definitionsbereich nennt man eine **quadratische Funktion** oder Funktion 2. Grades.

Eine quadratische Funktion ist somit die Menge aller geordneten Paare  $(x; ax^2 + bx + c)$  mit  $x$  aus dem Definitionsbereich. In der Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  ist  $ax^2$  das quadratische,  $bx$  das lineare und  $c$  das absolute Glied.

*Hinweis:*

- Wenn im folgenden von einer Funktion nur die Gleichung angegeben wird, dann soll stets  $R$  der Definitionsbereich sein.
  - Anstelle von „die Funktion mit der Gleichung  $y = f(x)$ “ sagt man auch kurz „die Funktion  $y = f(x)$ “.
- 4 Geben Sie verschiedene Gleichungen für quadratische Funktionen an! Beachten Sie dabei, daß  $a = 1$  oder  $a \neq 1$  sein kann, und auch, daß  $b$  oder  $c$  Null sein können!

Mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle läßt sich der Graph jeder quadratischen Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ) angenähert zeichnen. Man sollte in diese Wertetabelle möglichst viele Wertepaare aufnehmen; im allgemeinen wird man dazu den Taschenrechner verwenden.

- 5 Die Funktion  $y = x^2$  ist im Intervall  $-2,5 \leq x \leq 2,5$  graphisch darzustellen.

a) Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle! (Rechnen Sie im Kopf!)

x	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y											

- b) Tragen Sie die entsprechenden Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit gleicher Achsenteilung (Einheit 1 cm) ein!  
 c) Ermitteln Sie für das Intervall  $-1 \leq x \leq 1$  mindestens 10 weitere Wertepaare, und tragen Sie auch die ihnen entsprechenden Punkte in das Koordinatensystem von b) ein!  
 d) Verbinden Sie alle Punkte durch eine sich möglichst gut einpassende Kurve!

Die Kurve, die man nach Auftrag C 5 erhält, wird dem gesuchten Graphen der Funktion  $y = x^2$  um so näher kommen, je mehr Punkte man zur Darstellung benutzt hat. Man kann nachweisen, daß der Graph selbst zwischen zwei beliebig dicht nebeneinanderliegenden Punkten nicht geradlinig verläuft. (→ Bild C 6, S. 115)

- 6 Begründen Sie, warum der Graph der Funktion  $y = x^2$  symmetrisch bezüglich der y-Achse verläuft!
- 7 a) Stellen Sie die Funktionen  $y = -x^2$  und  $y = -x^2 + 5$  im Intervall  $-3 \leq x \leq 3$  graphisch dar, und ermitteln Sie jeweils den höchsten Punkt des Graphen!  
 b) Stellen Sie die Funktionen  $y = x^2 - 4$  und  $y = x^2 + 2$  im Intervall  $-3 \leq x \leq 3$  graphisch dar, und ermitteln Sie jeweils den tiefsten Punkt des Graphen!
- 8 Stellen Sie

a) die Funktion  $y = x^2 - 2x + 3$  im Intervall  $-1,5 \leq x \leq 3,5$  und

b) die Funktion  $y = -0,5x^2 + 3x - 2,5$  im Intervall  $-0,5 \leq x \leq 6,5$  graphisch dar!

Verwenden Sie zum Aufstellen der Wertetabelle den Taschenrechner, und geben Sie jeweils den Ablaufplan an! Vergleichen Sie Ihre Graphen mit den entsprechenden Graphen aus Bild C 4!

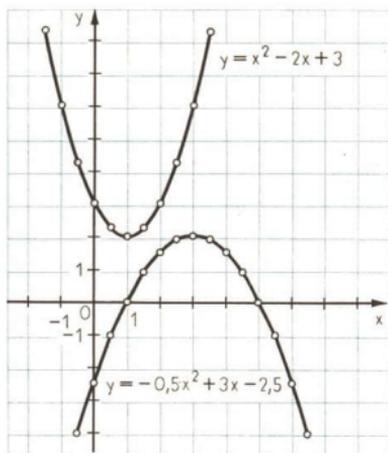


Bild C 4

- 9 Vergleichen Sie alle bisher gezeichneten Graphen quadratischer Funktionen, und suchen Sie nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden!

Die Graphen quadratischer Funktionen  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ) heißen **quadratische Parabeln**. Quadratische Parabeln<sup>1)</sup> haben eine Symmetrieachse, die **Achse der Parabel**. Der Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Parabel heißt **Scheitelpunkt** (kurz: Scheitel) der Parabel.

In den folgenden Lerneinheiten werden quadratische Funktionen  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ), in deren Gleichung  $a = 1$  ist, genauer untersucht werden. Um besonders auf  $a = 1$  hinzuweisen, werden wir in diesem Falle eine andere Bezeichnung verwenden. Wir schreiben in Zukunft anstelle von  $y = x^2 + bx + c$  ( $b, c \in \mathbb{R}$ ) die Gleichung  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ).

*Wir erinnern uns:* Bei linearen Funktionen  $y = mx + n$  ( $m, n \in \mathbb{R}; m \neq 0$ ) kann man Eigenschaften und insbesondere auch die Lage der betreffenden Geraden im Koordinatensystem aus den Zahlen  $m$  und  $n$  ermitteln.

Für quadratische Funktionen  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) besteht ein entsprechender Zusammenhang; Eigenschaften, insbesondere auch die Lage der Parabel im Koordinatensystem, sind durch  $p$  und  $q$  festgelegt. Dieser Zusammenhang wird im weiteren schrittweise untersucht.

## Aufgaben

- Welche der angegebenen Gleichungen beschreiben quadratische Funktionen?
 

a) $y = x^2 - x$	b) $y = 2x + 5$	c) $y = 2 x ^2$	d) $y = x^{-2}$
e) $y = x(x + 2)$	f) $y = -0,3x^2 - 1$	g) $y = (x^2 + 1)x$	h) $y = 1 - x^2$
i) $y = x^2 - 3x + 10$	k) $y = 3x^2 - 5x$		
- Zeichnen Sie mit Hilfe von Wertetabellen die Graphen der folgenden Funktionen im Intervall  $-3 \leq x \leq 3$  !
 

a) $f(x) = 0,5x^2$	b) $g(x) = -0,5x^2$
--------------------	---------------------
- Überprüfen Sie, welche der angegebenen Zahlenpaare zur Funktion  $y = x^2 - 3$  gehören!
 

$(0; -3), (\frac{1}{2}; \frac{11}{4}), (-3; -6), (17; 286), (0,40; -2,84)$
- Stellen Sie die folgenden Funktionen mittels Wertetabelle graphisch dar!
 

a) $y = x^2 + 1$ im Intervall $-2,5 \leq x \leq 2,5$
b) $y = x^2 - 5$ ( $x \in \mathbb{Z}$ ) im Intervall $-3 \leq x \leq 3$
c) $y = -x^2 + 4$ im Intervall $-3 \leq x \leq 3$
d) $y = x^2 - 6x + 5$ im Intervall $0 \leq x \leq 3$
e) $y = 0,25x^2 + x + 1$ im Intervall $-5 \leq x \leq 1$
- |  |
|--|
| a) Begründen Sie, warum für die Funktion $y = x^2 - 6$ der Scheitelpunkt der tiefste Kurvenpunkt ist!  |
| b) Begründen Sie, warum für die Funktion $y = -x^2 + 3$ der Scheitelpunkt der höchste Kurvenpunkt ist! |

Untersuchen Sie dazu die Terme  $x^2 - 6$  bzw.  $-x^2 + 3$  auf kleinsten bzw. größten Wert!

<sup>1)</sup> Im folgenden wird für „quadratische Parabel“ kurz „Parabel“ gesagt.

6. Das Aufstellen der Wertetabelle für die Funktion  $y = 0,5x^2 - 4x + 7$  im Intervall  $0 \leq x \leq 8$  soll einem Computer übertragen werden. In der Wertetabelle soll die Differenz aufeinanderfolgender Argumente 0,2 betragen. Grundlage für ein entsprechendes Programm ist der abgebildete Algorithmus. Was muß sinngemäß in das freie Feld eingetragen werden, damit die gewünschte Wertetabelle entsteht?

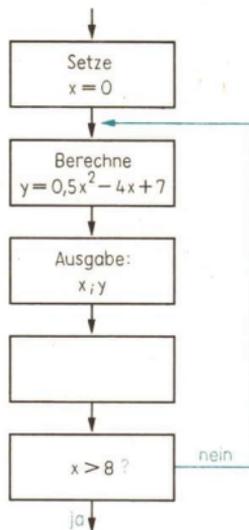


Bild C 5

### 3 Quadratische Funktionen mit Gleichungen $y = x^2$ und $y = x^2 + q$

Der einfachste Fall einer quadratischen Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) ist die Funktion  $y = x^2$ ; es ist  $p = 0$  und  $q = 0$ .

- 10 Welchen Wertebereich hat die Funktion  $y = x^2$ , wenn der Definitionsbereich alle reellen Zahlen umfaßt?
- 11 Wie ändern sich bei der Funktion  $y = x^2$  die Funktionswerte, wenn man die Argumente vergrößert?

#### Wichtige Eigenschaften der Funktion $y = x^2$ sind:

- Der **Wertebereich** ist die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.
- Es gibt einen **kleinsten Funktionswert**  $f(0) = 0$
- Die Funktionswerte **fallen** für wachsende  $x$ -Werte im Intervall  $x \leq 0$  und **steigen** für wachsende  $x$ -Werte im Intervall  $x \geq 0$ . Man sagt: Die Funktion  $y = x^2$  ist für  $x \leq 0$  **monoton fallend** und für  $x \geq 0$  **monoton steigend**.
- Die Funktion hat genau eine **Nullstelle**  $x_0 = 0$ .
- Der Graph der Funktion ist eine **Parabel**, deren Symmetrieachse, die **Achse** der Parabel, mit der  $y$ -Achse zusammenfällt. Der **Scheitelpunkt** der Parabel, der tiefste Kurvenpunkt  $S(0; 0)$ , fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen.

Der Graph der Funktion  $y = x^2$  ist eine sogenannte **Normalparabel**<sup>1)</sup> (↗ Bild C 6). Da Normalparabeln häufig zu zeichnen sind, verwendet man für ihre graphische Darstellung oft

<sup>1)</sup> Es wird dabei die graphische Darstellung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit gleicher Achsenteilung vorausgesetzt.

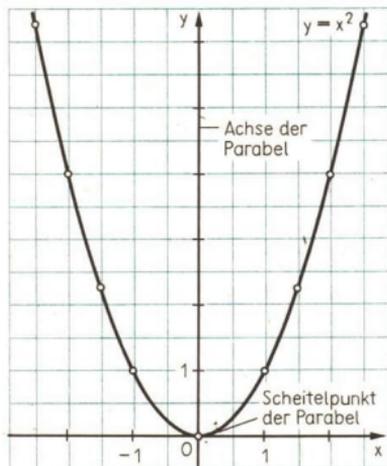


Bild C 6

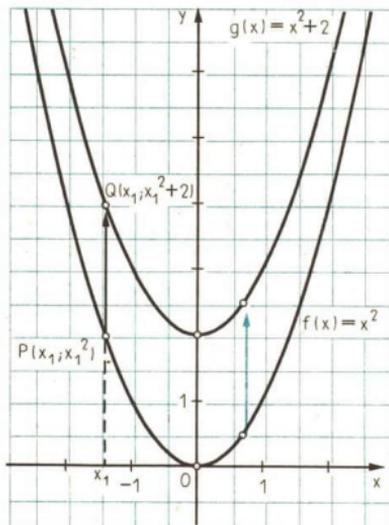


Bild C 7

eine Schablone. Man sollte derartige Parabeln aber auch ohne Schablone skizzieren können.

- 12 a) Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen  $g(x) = x + 2$  und  $f(x) = x!$
- b) Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen  $g(x) = x^2 + 2$  und  $f(x) = x^2$ , und stellen Sie eine Vermutung über den Einfluß des Summanden 2 auf die Lage der Parabel im Koordinatensystem auf!

Anhand der Gleichungen der Funktionen  $g(x) = x^2 + 2$  und  $f(x) = x^2$  stellt man fest: Zu einem beliebigen Argument  $x_1$  gehören die Funktionswerte  $g(x_1) = x_1^2 + 2$  und  $f(x_1) = x_1^2$ . Es ist also stets  $g(x) = f(x) + 2$ .

Also ist der Graph der Funktion  $g(x) = x^2 + 2$  das Bild des Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$  bei einer Verschiebung mit der Verschiebungsweite 2 in Richtung der positiven  $y$ -Achse.

Daraus ergibt sich: Der Graph der Funktion  $g(x) = x^2 + 2$  ist auch eine Normalparabel. Ihr Scheitel  $S(0; 2)$  ist der tiefste Punkt des Graphen. Die Achse der Parabel fällt mit der  $y$ -Achse zusammen. Man kann die Parabel mit der Schablone zeichnen ( $\rightarrow$  Bild C 7).

- 13 Begründen Sie, warum die Graphen *aller* Funktionen  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) Normalparabeln mit  $S(0; q)$  sind, deren Achsen mit der  $y$ -Achse zusammenfallen!

**Für Funktionen  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) gilt:**

Der Graph jeder dieser Funktionen ist eine Normalparabel. Der Scheitelpunkt der Parabel ist  $S(0; q)$ ; er liegt auf der  $y$ -Achse. Die Achse der Parabel fällt mit der  $y$ -Achse zusammen.

- 14 Ergänzen Sie die folgende Tabelle, und geben Sie für jeden Fall ein Beispiel an!

$y = x^2 + q$	Lage des Scheitels $S$ bezüglich der $x$ -Achse
$q > 0$	
$q = 0$	
$q < 0$	

Spezielle Eigenschaften von Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = x^2 + q$  lassen sich analog zu den Eigenschaften der Funktion  $y = x^2$  angeben.

- 1 Es sind Eigenschaften der Funktion  $y = x^2 - 2,5$  gesucht. Wir wissen, daß der Graph dieser Funktion (→ Bild C 8) Bild des Graphen der Funktion  $y = x^2$  bei einer Verschiebung mit der Verschiebungsweite 2,5 in Richtung der negativen  $y$ -Achse ist. Die Parabel hat den Scheitelpunkt  $S(0; -2,5)$ .

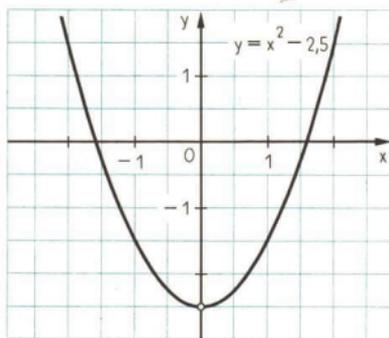


Bild C 8

*Eigenschaften der Funktion  $y = x^2 - 2,5$  sind:*

- Der Wertebereich ist die Menge aller reellen Zahlen mit  $y \geq -2,5$ .
  - Es gibt einen kleinsten Funktionswert  $f(0) = -2,5$ .
  - Die Funktion ist für  $x \leq 0$  monoton fallend und für  $x \geq 0$  monoton steigend.
  - Die Funktion hat zwei Nullstellen  $x_1 \approx -1,6$  und  $x_2 \approx 1,6$ , wie wir aus der graphischen Darstellung ablesen.
- 15 Nennen Sie Eigenschaften aller Funktionen  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ )! Untersuchen Sie insbesondere das Vorhandensein von Nullstellen in Abhängigkeit von  $q$ !

*Wir erinnern uns:* Eine lineare Funktion  $y = mx + n$  ( $m, n \in \mathbb{R}; m \neq 0$ ) ist bei gegebenem Definitionsbereich durch zwei Wertepaare eindeutig bestimmt.

Entsprechend fragen wir, wie viele Wertepaare man braucht, um eine Funktion  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) eindeutig festzulegen.

- 2 Es ist eine Funktion mit einer Gleichung der Form  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) zu ermitteln, die das geordnete Paar  $(-2; 9)$  enthält!  
Da das geordnete Paar  $(-2; 9)$  zur Funktion gehören soll, muß gelten:  $9 = (-2)^2 + q$ . Daraus folgt  $q = 5$ , und damit ist  $y = x^2 + 5$  die einzige derartige Funktion, die dieses Zahlenpaar enthält.

Eine Funktion mit einer Gleichung der Form  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) ist bereits durch *eines ihrer Wertepaare* eindeutig bestimmt. Stets ist eine lineare Gleichung mit einer Variablen zu lösen.

## Aufgaben

- Geben Sie für die folgenden Funktionen die Scheitelpunkte ihrer Graphen an, und zeichnen Sie die Graphen mittels Schablone!<sup>1)</sup>  
 a)  $y = x^2 - 1$     b)  $y = x^2 - 3,5$     c)  $y = x^2 + 3$     d)  $y = x^2 - 5,3$
- Der Graph einer quadratischen Funktion  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) hat den Scheitel  
 a)  $S(0; -3)$ ,    b)  $S(0; 1,5)$ ,    c)  $S(0; -1,8)$ .  
 Zeichnen Sie die Graphen, und geben Sie die Gleichungen der Funktionen an!
- Geben Sie für die Funktionen von Aufgabe 1 jeweils an: (1) Wertebereich, (2) kleinsten Funktionswert, (3) Monotonieverhalten, (4) Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion!  
 Untersuchen Sie jeweils, ob die Funktion Nullstellen hat, und lesen Sie vorhandene Nullstellen aus der Zeichnung ab!
- Ermitteln Sie jeweils eine Funktion  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ), die das gegebene geordnete Paar enthält!  
 a)  $(0; 0)$     b)  $(-3; 2)$     c)  $(-0,50; -2,75)$     d)  $(2; 4 + \sqrt{2})$
- Der Wertebereich einer Funktion  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) enthalte nur positive reelle Zahlen.  
 a) Geben Sie die Gleichung für eine spezielle Funktion an, die diese Bedingung erfüllt!  
 b) Welche Koordinaten hat der Scheitel des Graphen der von Ihnen gewählten Funktion?  
 c) Welche der folgenden Funktionen erfüllen die angegebene Bedingung:  
 $y = x^2$ ;  $y = x^2 + 3$ ;  $y = x^2 - 0,2$ ;  $y = x^2 + 0,001$ ?

## 4 Quadratische Funktionen mit Gleichungen $y = x^2 + px + q$

- 16 a) Stellen Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe einer Wertetabelle graphisch dar!  
 (1)  $y = x^2 + 6x + 9$  im Intervall  $-5 \leq x \leq -1$   
 (2)  $y = x^2 + 6x + 11$  im Intervall  $-5 \leq x \leq -1$   
 (3)  $y = x^2 - 2,6x - 1,9$  im Intervall  $-2 \leq x \leq 4$
- b) Vergleichen Sie die Graphen von (1), (2) und (3) mit dem Graphen der Funktion  $y = x^2$ ! Erkennen Sie einen Zusammenhang zwischen den Graphen?

Der Auftrag C 16 führt uns zu der **Vermutung** daß der Graph einer Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) auch im Falle  $p \neq 0$  Bild des Graphen der Funktion  $y = x^2$  bei einer Verschiebung ist. Allerdings handelt es sich dabei offenbar nicht nur wie im Falle  $p = 0$  um eine Verschiebung in Richtung der  $y$ -Achse. Um diese Vermutung zu bestätigen, ist es zweckmäßig, die Gleichung  $y = x^2 + px + q$  auf eine andere Form zu bringen.

<sup>1)</sup> Es werden im folgenden i. allg. keine Intervalle für das Zeichnen der Graphen angegeben. Selbstverständlich kann man stets nur *einen Teil* des Graphen darstellen.

- 17 Ergänzen Sie die folgenden Summen so, daß ein vollständiges Quadrat entsteht! (→ S. 31)

a)  $x^2 + 8x$     b)  $x^2 + 5x$     c)  $x^2 + x$   
 d)  $x^2 - 6x$     e)  $x^2 - 0,4x$     f)  $x^2 + bx$

- 18 Gegeben sind die folgenden Terme:

(1)  $x^2 + 8x + 16$ ,    (2)  $x^2 - 10x + 25$ ,  
 (3)  $x^2 - 4x + 7$ ,    (4)  $x^2 + 6x - 9$ .

Suchen Sie diejenigen Terme heraus, die sich nicht als Quadrat eines Binoms schreiben lassen, und formen Sie diese so um, daß eine Summe entsteht, deren erster Summand das Quadrat eines Binoms ist!

Jeder Term  $x^2 + px + q$  läßt sich in die Form  $(x + d)^2 + e$  überführen. Man benötigt dazu die *quadratische Ergänzung* (→ S. 32):

$x^2 + 8x + 18$ $= x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 18$ $= (x + 4)^2 + 2$	$x^2 + px + q$ $= x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ $= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left[-\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right]$ $= (x + d)^2 + e$	quadratische Ergänzung  binomische Formel
$d = 4; e = 2$	$d = \frac{p}{2}; e = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$	Vergleich

Durch diese Umformung erhält also die Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) die Form  $y = (x + d)^2 + e$  ( $d, e \in \mathbb{R}$ ). Diese Form nennt man *Scheitelpunktform*, da man aus ihr – wie wir noch sehen werden – die Koordinaten des Scheitelpunktes der entsprechenden Parabel unmittelbar ablesen kann.

- 19 Bringen Sie die Gleichungen von Auftrag C 16 auf die Scheitelpunktform, und geben Sie jeweils  $d$  und  $e$  an!

Mit Hilfe der Scheitelpunktform  $y = (x + d)^2 + e$  können wir nun die Vermutung bestätigen, daß der Graph jeder Funktion  $y = x^2 + px + q$  Bild des Graphen der Funktion  $y = x^2$  bei einer Verschiebung ist. Wir gehen schrittweise vor und beginnen mit dem Fall  $e = 0$ .

- 20 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen  $h(x) = (x + 3)^2$  und  $f(x) = x^2$  in ein und dasselbe Koordinatensystem, und stellen Sie eine Vermutung über den Einfluß des Summanden 3 auf die Lage der Parabel im Koordinatensystem auf!

Anhand der Gleichungen der Funktionen  $h(x) = (x + 3)^2$  und  $f(x) = x^2$  erkennt man: Wählt man bei der Funktion  $f(x) = x^2$  ein beliebiges Argument  $x_1$ , so ist der zugehörige Funktionswert  $f(x_1) = x_1^2$ . Bei der Funktion  $h(x) = (x + 3)^2$  gehört zu dem um 3 verminderten Argument  $(x_1 - 3)$  der gleiche Funktionswert, nämlich  $h(x_1 - 3) = [(x_1 - 3) + 3]^2 = x_1^2$ . Es ist also stets  $h(x - 3) = f(x)$ .

Für die Graphen heißt das: Der Graph der Funktion  $h(x) = (x + 3)^2$  ist das Bild des Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$  bei der Verschiebung mit der Verschiebungsweite 3 in Richtung der negativen  $x$ -Achse. Somit ist der Graph der Funktion  $h(x) = (x + 3)^2$  auch eine Normalparabel. Ihr Scheitelpunkt ist  $S(-3; 0)$ . Die Achse der Parabel verläuft parallel zur  $y$ -Achse ( $\nearrow$  Bild C 9).

- 21 Begründen Sie, daß die Graphen *aller* Funktionen mit einer Gleichung  $y = (x + d)^2$  Normalparabeln mit zur  $y$ -Achse paralleler Parabelachse und dem Scheitelpunkt  $S(-d; 0)$  sind!

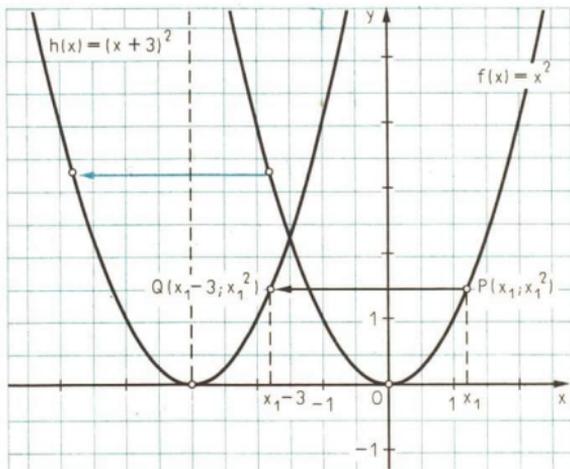


Bild C 9

Für Funktionen  $y = (x + d)^2$  ( $d \in \mathbb{R}$ ) gilt:

Der Graph jeder dieser Funktionen ist eine Normalparabel. Der Scheitelpunkt der Parabel ist  $S(-d; 0)$ ; er liegt auf der  $x$ -Achse. Die Achse der Parabel verläuft parallel zur  $y$ -Achse durch  $S$ .

- 22 Ergänzen Sie die folgende Tabelle, und geben Sie für jeden Fall ein Beispiel an!

$y = (x + d)^2$	Lage des Scheitels $S$ bezüglich der $y$ -Achse
$d > 0$	
$d = 0$	
$d < 0$	

- 3 Um den Graphen der Funktion  $y = (x - 1,5)^2$  zu zeichnen, liest man aus der Gleichung die Koordinaten des Scheitelpunktes ab:  $S(1,5; 0)$ . Mittels Schablone zeichnet man die gesuchte Parabel mit diesem Scheitelpunkt so, daß ihre Achse parallel zur  $y$ -Achse durch  $S$  verläuft. ( $\nearrow$  Bild C 10)
- 23 a) Zeigen Sie, daß der Graph der Funktion  $k(x) = (x + 3)^2 + 2$  das Bild des Graphen der Funktion  $h(x) = (x + 3)^2$  bei einer Verschiebung mit der Verschiebungsweite 2 in Richtung der positiven  $y$ -Achse ist! ( $\nearrow$  Bild C 11)
- b) Begründen Sie, warum damit bereits gezeigt ist, daß auch der Graph der Funktion  $k(x) = (x + 3)^2 + 2$  eine Normalparabel ist!

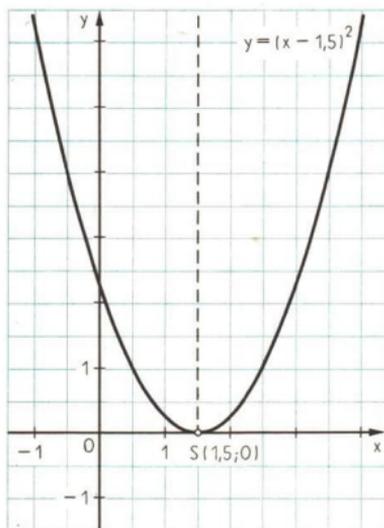


Bild C 10

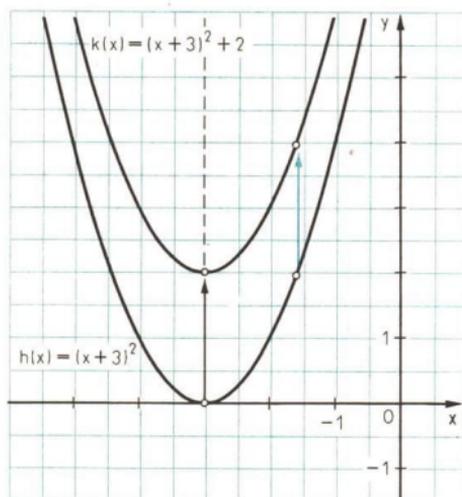


Bild C 11

Entsprechend Auftrag C 23 kann man die Überlegungen für beliebige  $d$  und  $e$  durchführen. Bezieht man alle Fälle ein, die für  $d$  und  $e$  auftreten können, so ergibt sich:

Für Funktionen  $y = (x + d)^2 + e$  ( $d, e \in \mathbb{R}$ ) gilt:

Der Graph jeder dieser Funktionen ist eine Normalparabel. Der Scheitel der Parabel ist  $S(-d; e)$ . Die Achse der Parabel verläuft parallel zur  $y$ -Achse durch  $S$ .

- 24 Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, indem Sie für die Funktionen  $y = (x + d)^2 + e$  angeben, welche Lage im Koordinatensystem jeweils der Scheitelpunkt  $S(-d; e)$  der zugehörigen Parabel hat! Nennen Sie für jeden Fall ein Beispiel!

	$d > 0$	$d = 0$	$d < 0$
$e > 0$	S im II. Quadranten		S im ... Quadranten
$e = 0$	S auf der $x$ -Achse und links von der $y$ -Achse	S im Ursprung	
$e < 0$	S im ... Quadranten	S auf der $y$ -Achse und unterhalb der $x$ -Achse	S im IV. Quadranten

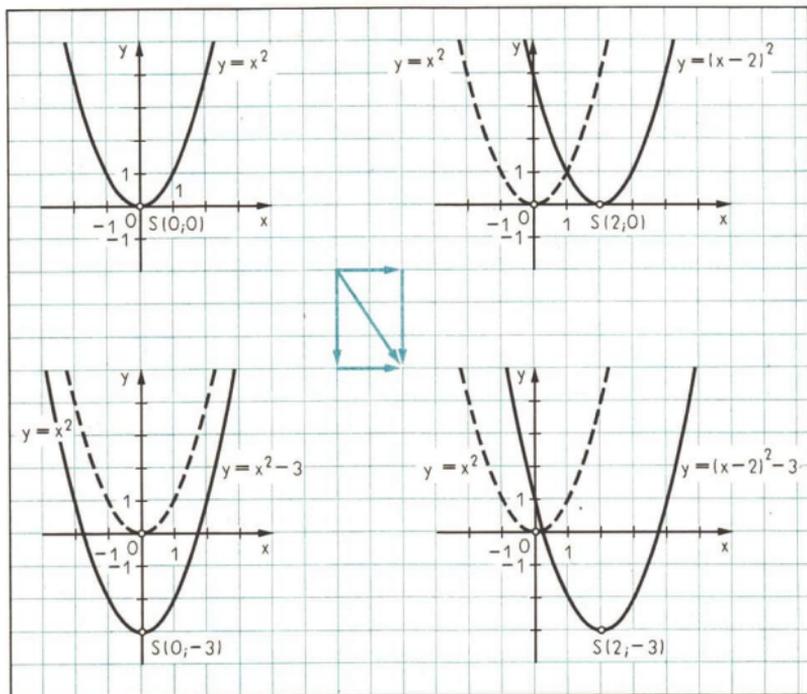


Bild C 12

Wie man vom Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$  zum Graphen einer Funktion  $k(x) = (x+d)^2 + e$  ( $d, e \in \mathbb{R}$ ) gelangt, kann man sich am Beispiel der Funktion  $y = (x-2)^2 - 3$ , also für  $d = -2$ ,  $e = -3$ , verdeutlichen, indem man  $d$  und  $e$  nacheinander berücksichtigt. Die Reihenfolge, in der das geschieht, ist dabei beliebig. (↗ Bild C 12)

- 25 a) Begründen Sie, warum Eigenschaften einer Funktion  $y = (x+d)^2 + e$  aus Eigenschaften der Funktion  $y = x^2$  folgen!  
 b) Geben Sie derartige Eigenschaften an  
 (1) für die Funktion  $y = (x-2)^2 - 3$ ,  
 (2) für alle Funktionen  $y = (x+d)^2 + e$ !
- 26 Der Graph einer quadratischen Funktion sei eine Normalparabel mit zur  $y$ -Achse paralleler Parabelachse und dem Scheitelpunkt  $S(1; -4)$  als dem tiefsten Kurvenpunkt. Geben Sie die Gleichung dieser Funktion in der Scheitelpunktform und in der Form  $y = x^2 + px + q$  an! Nennen Sie Eigenschaften dieser Funktion!

Auf dem Weg über die Scheitelpunktform konnte nachgewiesen werden: Jede quadratische Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) hat als Graph eine Normalparabel, die Bild des Graphen von  $y = x^2$  bei einer Verschiebung ist und die deshalb mit Schablone gezeichnet werden kann.

- 27 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $y = x^2 - 4x + 5$  mittels Schablone! Stellen Sie dazu zuerst die Scheitelpunktform her!

Günstig wäre es, könnte man die für das Zeichnen des Graphen einer Funktion  $y = x^2 + px + q$  erforderlichen Angaben über die **Koordinaten des Scheitelpunktes**  $S(x_S; y_S)$  **unmittelbar** aus  $p$  und  $q$  erhalten – nicht auf dem Umweg über die Scheitel-

punktform. Dies ist möglich mit Hilfe der Gleichungen  $d = \frac{p}{2}$  und  $e = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$  bzw.

$$e = -\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] \quad (\rightarrow \text{S. 118}).$$

Für den Scheitelpunkt  $S$ , der bisher in der Form  $S(-d; e)$  angegeben werden konnte, erhalten wir  $S\left(-\frac{p}{2}; -\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]\right)$ .

- 28 Ermitteln Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes  $S(x_S; y_S)$  des Graphen der Funktion  $y = x^2 - 4x + 5$  ( $\rightarrow$  Auftrag C 27) unmittelbar aus den Werten für  $p$  und  $q$ !

Es ist üblich, in dem Term  $-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$ , der die Ordinate des Scheitelpunktes angibt,

eine Abkürzung zu verwenden. Man ersetzt  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  durch  $D$  und erhält

$$S\left(-\frac{p}{2}; -D\right).$$

$D$  ist die sogenannte **Diskriminante** der quadratischen Funktion

$$y = x^2 + px + q \quad (p, q \in R).$$

$$\text{Diskriminante } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

- 29 a) Begründen Sie, warum man mittels der Diskriminante  $D$  Aussagen darüber treffen kann, welche Lage der Scheitelpunkt  $S$  des Graphen einer Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in R$ ) bezüglich der  $x$ -Achse hat!  
b) Ergänzen Sie die folgende Tabelle!

Lage von $\hat{S}$ bezüglich der $x$ -Achse	Bedingung für $D$
$S$ liegt unterhalb der $x$ -Achse	
$S$ liegt auf der $x$ -Achse	
$S$ liegt oberhalb der $x$ -Achse	

Bei den Funktionen  $y = x^2 + q$  ( $q \in R$ ) genügt ein Wertepaar, um sie eindeutig zu bestimmen ( $\rightarrow$  Beispiel C 2). Man kann eine entsprechende Frage auch für die Funktionen  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in R$ ) stellen.

- 4 Vom Graphen einer quadratischen Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in R$ ) weiß man, daß er die Punkte  $P_1(3; -1)$  und  $P_2(6; 2)$  enthält. Wie lautet die Gleichung dieser Funktion?

Die Koordinaten von  $P_1$  und  $P_2$  müssen die Funktionsgleichung erfüllen:

I.  $-1 = 3^2 + p \cdot 3 + q$

II.  $2 = 6^2 + p \cdot 6 + q$

Aus diesem linearen Gleichungssystem errechnet man  $p = -8$  und  $q = 14$ . Die Probe bestätigt diese Lösung. Die gesuchte Funktion hat die Gleichung

$$y = x^2 - 8x + 14.$$

Eine Funktion mit einer Gleichung der Form  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) ist durch *zwei Wertepaare* eindeutig bestimmt. Man erhält  $p$  und  $q$  durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

## Aufgaben

1. Fügen Sie die quadratische Ergänzung hinzu, und schreiben Sie die entstandene Summe als Potenz!

a)  $x^2 + 6x$     b)  $x^2 - 3x$     c)  $x^2 - x$     d)  $x^2 - 1,4x$     e)  $x^2 + \frac{x}{10}$

2. Bringen Sie die folgenden Gleichungen auf die Scheitelpunktform!

a)  $y = x^2 + 10x + 25$     b)  $y = x^2 - 8x + 16$     c)  $y = x^2 + 3x + 2,25$

d)  $y = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$     e)  $y = x^2 + 10x + 27$     f)  $y = x^2 - 8x + 10$

g)  $y = x^2 + 3x + 1$     h)  $y = x^2 - 5x - 1$

3. Geben Sie für die folgenden Funktionen die Koordinaten der Scheitelpunkte des Graphen an, und zeichnen Sie den Graphen!

a)  $y = x^2 + 3$     b)  $y = x^2 - 1,5$     c)  $y = (x - 4)^2$   
 d)  $y = (x + 3,5)^2$     e)  $y = (x + 4)^2 - 3$     f)  $y = (x - 1,5)^2 + 3,5$   
 g)  $y = (x + 2)^2 + 4$     h)  $y = (x - 1,8)^2 - 0,5$

4. Geben Sie Gleichungen für quadratische Funktionen an, deren Graphen Normalparabeln mit den folgenden Scheitelpunkten sind!

Die Achsen der Parabeln liegen parallel zur  $y$ -Achse.

a)  $S(0; -3)$     b)  $S(0; 0,5)$     c)  $S(1,5; 0)$     d)  $S(-2,5; 0)$   
 e)  $S(-4; 1)$     f)  $S(6; -2)$     g)  $S(-1; -1)$     h)  $S(3,2; 3,2)$

5. Die Graphen im Bild C 13 sind Normalparabeln. Lesen Sie die Scheitelpunkte aus der Zeichnung ab, und geben Sie die Gleichungen für die entsprechenden Funktionen an!

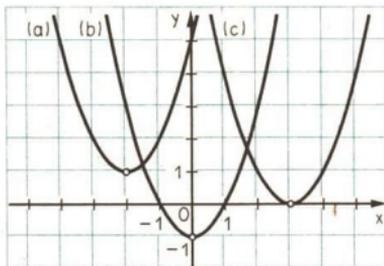


Bild C 13

6. Zeichnen Sie für die nachstehenden Funktionen jeweils den Graphen, und geben Sie die folgenden Eigenschaften an!

- (1) Wertebereich    (2) kleinster Funktionswert  
 (3) Monotonieverhalten    (4) Nullstellen

(5) Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen

a)  $y = x^2 - 4$     b)  $y = (x + 1,8)^2$     c)  $y = (x - 1)^2 + 1,5$

7. Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen! (*Hinweis*: Stellen Sie zuerst die Scheitelpunktform her!)

a)  $y = x^2 + 8x + 16$     b)  $y = x^2 - 5x + 6,25$     c)  $y = x^2 - 3x - \frac{7}{4}$

8. Gegeben sind alle Funktionen  $y = (x + d)^2$  ( $d \in \mathbb{R}$ ).

a) Geben Sie drei Beispiele derartiger Funktionen an!

b) Für welche Werte von  $d$  ist der Scheitelpunkt des Graphen der Funktion ein Punkt auf der negativen  $x$ -Achse?

c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion für  $d = -2$ !

9. Gegeben sind alle Funktionen  $y = (x + d)^2 + 2$  ( $d \in \mathbb{R}$ ).

a) Geben Sie drei Beispiele derartiger Funktionen an!

b) In welchen Quadranten liegen die Graphen aller Funktionen

$y = (x + d)^2 + 2$ ? (L)

c) Geben Sie für alle diese Funktionen die Koordinaten der Scheitelpunkte der Graphen an! (L)

d) Geben Sie den Wertebereich für alle diese Funktionen an! (L)

10. Gegeben sind alle Funktionen  $y = (x + 1)^2 + e$  ( $e \in \mathbb{R}$ ).

a) Geben Sie drei Beispiele derartiger Funktionen an!

b) Wie verläuft die Symmetrieachse für die Graphen aller Funktionen

$y = (x + 1)^2 + e$ ?

c) Geben Sie für alle diese Funktionen die Koordinaten der Scheitelpunkte der Graphen an!

d) Geben Sie den Wertebereich für alle diese Funktionen an!

11. Eine Normalparabel, deren Achse parallel zur  $y$ -Achse verläuft, hat im Bereich der reellen Zahlen für  $x < 1$  und  $x > 3$  nur positive und für  $1 < x < 3$  nur negative Funktionswerte. Zeichnen Sie den Graph der Funktion, und geben Sie die Gleichung der Funktion an!

12. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen!

a)  $y = x^2 + 2x + 1$     b)  $y = x^2 - 8x + 16$     c)  $y = x^2 - 4x - 1$

d)  $y = x^2 + 8x + 18$     e)  $y = x^2 - 5x + 1,25$     f)  $y = x^2 + 5x + 3,25$

13. Geben Sie für die Funktionen von Aufgabe 12 nachfolgende Eigenschaften an: (1) Wertebereich, (2) kleinster Funktionswert, (3) Monotonieverhalten!

14. Der Graph einer quadratischen Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) geht durch die Punkte  $P_1(2; 3)$  und  $P_2(5; 0)$ . Berechnen Sie  $p$  und  $q$ , und geben Sie die Gleichung der Funktion an!

15.\* Ermitteln Sie jeweils den kleinsten und den größten Funktionswert der folgenden Funktionen in dem angegebenen Intervall! (L)

a)  $y = x^2 - 4x + 1$  ( $3 \leq x \leq 7$ )    b)  $y = x^2 - 2x - 3$  ( $-5 \leq x \leq 1$ )

c)  $y = x^2 + 2x + 2$  ( $-6 \leq x \leq 2$ )    d)  $y = x^2 - 2x + 5$  ( $-1 \leq x \leq 3$ )

16.\* Eine quadratische Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) enthält das Zahlenpaar  $(0; 0)$  und hat als Wertebereich alle reellen Zahlen, die größer oder gleich  $-4$  sind.

a) Skizzieren Sie das Bild einer solchen Funktion!

b) Geben Sie die Gleichung für eine solche Funktion an!

c) Wie viele derartige Funktionen gibt es? (L)

## Zusammenfassung

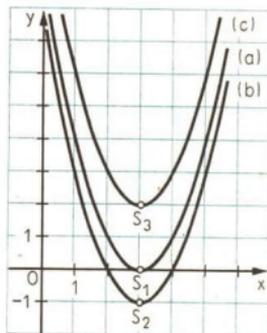
	allgemein		Beispiel
<b>Gleichung; Definitionsbereich <math>x \in \mathbb{R}</math></b>	$y = (x + d)^2 + e$	$y = x^2 + px + q$	$y = (x + 2)^2 - 3$ bzw. $y = x^2 + 4x + 1$
<b>Wertebereich</b>	alle reellen Zahlen mit $y \geq e$	alle reellen Zahlen mit $y \geq -D$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	alle reellen Zahlen mit $y \geq -3$ $D = 3$
<b>kleinster Funktionswert</b>	$f(-d) = e$	$f\left(-\frac{p}{2}\right) = -D$	$f(-2) = -3$
<b>monoton wachsend</b>	für $x \geq -d$	für $x \geq -\frac{p}{2}$	für $x \geq -2$
<b>monoton fallend</b>	für $x \leq -d$	für $x \leq -\frac{p}{2}$	für $x \leq -2$
<b>Graph der Funktion</b>	Normalparabel		
<b>Scheitel der Parabel</b>	$S(-d; e)$	$S\left(-\frac{p}{2}; -D\right)$	$S(-2; -3)$
<b>Achse der Parabel</b>	Parallele zur y-Achse durch S		

## 5 Existenz von Nullstellen quadratischer Funktionen

- 30 a) Begründen Sie, warum jede lineare Funktion  $y = mx + n$  ( $m, n \in \mathbb{R}; m \neq 0$ ) im Bereich der reellen Zahlen genau eine Nullstelle hat!
- b) Geben Sie an, wie man diese Nullstelle rechnerisch ermittelt! (Wählen Sie selbst ein Beispiel!)
- 31 a) Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Nullstellen (falls es welche gibt) für die folgenden drei Funktionen:  
(1)  $y = |x| - 3$     (2)  $y = |x|$     (3)  $y = |x| + 2$
- b) Machen Sie eine Aussage über die Anzahl von Nullstellen aller Funktionen  $y = |x| + b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ) in Abhängigkeit von  $b$ !
- 32 Geben Sie je ein Beispiel für quadratische Funktionen  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) an, die zwei, eine, keine Nullstellen haben!

Für quadratische Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = x^2 + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) haben wir die Frage nach Vorhandensein und Anzahl von Nullstellen bereits beantwortet und drei mögliche Fälle in Abhängigkeit von  $q$  erkannt ( $\rightarrow$  Auftrag C 15). Nun soll das Problem für alle Funktionen  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) geklärt werden.

Bild C 14



- 33 a) Im Bild C.14 sind die drei quadratischen Funktionen  
 (a)  $y = x^2 - 6x + 9$  (b)  $y = x^2 - 6x + 8$  (c)  $y = x^2 - 6x + 11$   
 graphisch dargestellt. Lesen Sie vorhandene Nullstellen aus der graphischen Darstellung ab, und führen Sie eine Probe durch!  
 b) Formulieren Sie eine Aussage über den Zusammenhang zwischen den Schnittpunkten der jeweiligen Parabel mit der  $x$ -Achse und den Nullstellen der dargestellten Funktion!

Vorhandensein und Anzahl von Nullstellen quadratischer Funktionen  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) lassen sich aus der Lage der entsprechenden Parabeln im Koordinatensystem ablesen:

Liegt der *Scheitelpunkt der Parabel*

- unterhalb der  $x$ -Achse, dann hat die Funktion *zwei* Nullstellen,
- auf der  $x$ -Achse, dann hat die Funktion *eine* Nullstelle,
- oberhalb der  $x$ -Achse, dann hat die Funktion *keine* Nullstelle.

- 34 a) Untersuchen Sie, wieviel Nullstellen die folgenden Funktionen haben, ohne die Graphen der Funktionen zu zeichnen! Ermitteln Sie dazu rechnerisch den Scheitelpunkt der jeweiligen Parabel (→ Auftrag C 28)!
- (1)  $y = x^2 - 2x - 1$  (2)  $y = x^2 + 2x + 1$  (3)  $y = x^2 - 4x + 6$
- b) Auf welche Koordinate des Scheitelpunktes kommt es an?

Es reicht aus, die Ordinate  $y_S$  des Scheitelpunktes  $S(x_S; y_S)$  des Graphen einer quadratischen Funktion  $y = x^2 + px + q$  zu kennen, um Aussagen über das Vorhandensein von Nullstellen treffen zu können. Bei gegebener Gleichung der Funktion hat man lediglich die Ordinate  $y_S = -D$  zu berechnen.

Es hängt also von der Größe der Diskriminante  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  ab, wie viele Nullstellen eine quadratische Funktion hat.

Allgemein gilt:

Eine Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) hat stets dann Nullstellen, wenn die Diskriminante

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  größer oder gleich Null ist.

Im Falle  $D > 0$  hat die Funktion zwei Nullstellen.

Im Falle  $D = 0$  hat die Funktion eine Nullstelle.

Ist dagegen  $D < 0$ , so hat die Funktion keine Nullstellen.

- 5 Mit Hilfe der Diskriminante ist zu untersuchen, ob die folgenden Funktionen zwei, eine oder keine Nullstellen haben.

a)  $y = x^2 - 5x + 3$     b)  $y = x^2 - 5x + 6,25$     c)  $y = x^2 - 5x + 8$

Man setzt jeweils die Werte für  $p$  und  $q$  in  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  ein:

a)  $y = x^2 - 5x + 3$     b)  $y = x^2 - 5x + 6,25$     c)  $y = x^2 - 5x + 8$

$p = -5; q = 3$

$p = -5; q = 6,25$

$p = -5; q = 8$

$D = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 3$

$D = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6,25$

$D = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 8$

$D = 3,25$

$D = 0$

$D = -1,75$

$D > 0$

$D < 0$

zwei Nullstellen

eine Nullstelle

keine Nullstelle

- 35 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen im Beispiel C 5, und entnehmen Sie vorhandene Nullstellen angenähert aus Ihrer Zeichnung! Führen Sie eine Probe durch!

## Aufgaben

- Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch die Nullstellen (falls es welche gibt) der folgenden Funktionen!
 

a)  $y = -\frac{3}{5}x + 5$     b)  $y = |x| - 4$     c)  $y = |x + 2| + 1$
- Ermitteln Sie zeichnerisch die Nullstellen (falls es welche gibt) folgender Funktionen!
 

a)  $y = x^2 - 5$     b)  $y = x^2 + 4x - 1$     c)  $y = (x + 3,5)^2 - 2,5$   
 d)  $y = x^2 + 10x + 25$     e)  $y = x^2 - 2x + 2$     f)  $y = (x - 5)^2 - 3$
- Untersuchen Sie (ohne den Graph zu zeichnen), ob die folgenden Funktionen Nullstellen haben oder nicht!
 

a)  $y = x^2 + 5x + 6$     b)  $y = x^2 + 8x + 16$     c)  $y = x^2 - 3x + 5$   
 d)  $y = (x - 6)^2$     e)  $y = x^2 - \frac{5}{2}x - 8$     f)  $y = (x + 7)^2 + 1$
- Für welche reellen Zahlen  $p$  haben Funktionen  $y = x^2 + px + 9$  Nullstellen? Geben Sie zwei derartige Funktionen an! (L)
- Für welche reellen Zahlen  $q$  haben Funktionen  $y = x^2 + 6x + q$  keine Nullstellen? Geben Sie zwei derartige Funktionen an! (L)
- Es ist eine quadratische Funktion mit einer Gleichung  $y = (x + 3)^2 + e$  gesucht, die zwei (eine, keine) Nullstellen hat! Geben Sie für jeden Fall eine spezielle Gleichung an! Für welches  $e$  hat eine solche Funktion die einzige Nullstelle  $x_1 = -3$ ?
- Eine quadratische Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) hat  $x_1 = -2$  als eine Nullstelle. Der Graph der Funktion schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $P(0; -6)$ .
 

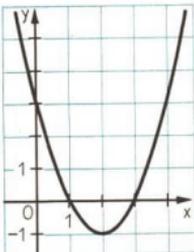
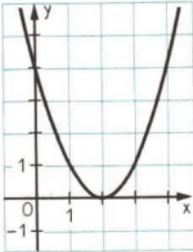
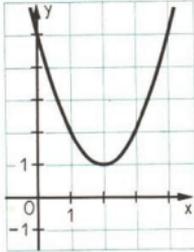
a) Geben Sie eine Gleichung für diese Funktion an! (L)  
 b) Welches ist die zweite Nullstelle? (L)
- Eine quadratische Funktion  $y = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) hat die Nullstellen  $x_1 = -3$  und  $x_2 = 5$ .
 

a) Welche Abszisse hat der Scheitelpunkt des Graphen der Funktion? (L)  
 b) Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt? (L)  
 c) Wie lautet die Gleichung der Funktion? (L)

- d) Wie lautet die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen der Funktion? (L)
9. Gegeben sind alle Funktionen  $y = x^2 - 4x + q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ).
- a) Geben Sie diejenige spezielle Funktion an, deren Graph durch den Punkt  $P(2; 1)$  geht!
- b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Diskriminante, ob diese Funktion Nullstellen hat!
- c) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt des Graphen dieser Funktion!
10. Gegeben sind alle Funktionen  $y = x^2 + px + 4$  ( $p \in \mathbb{R}$ ).
- a) Geben Sie diejenigen speziellen Funktionen an, deren Graph mit der  $x$ -Achse genau einen gemeinsamen Punkt hat!
- b) Für welche Werte von  $p$  ergibt sich eine Funktion mit zwei Nullstellen?
11. Geben Sie die Gleichungen für zwei verschiedene quadratische Funktionen an, die beide  $x_1 = -5$  als Nullstelle besitzen!
- 12.\* Lösen Sie die folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Graphen der entsprechenden quadratischen Funktion graphisch!
- a)  $x^2 - 2x - 3 < 0$       c)  $x^2 - 7x + 12 > 0$   
 b)  $x^2 + 3x - 10 > 0$       d)  $x^2 - 4x + 3 < 0$
- 13.\* Ermitteln Sie zeichnerisch alle diejenigen Argumente, für die bei den nachstehenden Funktionen die Funktionswerte kleiner als Null sind!
- a)  $y = x^2 - 6x + 4$   
 b)  $y = x^2 - x - \frac{3}{2}$
- 14.\* Ermitteln Sie zeichnerisch die Nullstellen der folgenden Funktionen! (Hinweis: Zeichnen Sie die Graphen mit Hilfe einer Wertetabelle!)
- a)  $y = -x^2 + 3$  (L)      b)  $y = 0,5x^2 + 2x - 0,5$  (L)

### Zusammenfassung

$y = x^2 + px + q$ ( $p, q \in \mathbb{R}$ )			
Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Ordinate des Scheitels der Parabel	$y_s < 0$	$y_s = 0$	$y_s > 0$
Gemeinsame Punkte des Graphen mit der $x$ -Achse	zwei Schnittpunkte	ein Berührungspunkt	kein Schnittpunkt
Anzahl der Nullstellen	2	1	0

Beispiel	$y = x^2 - 4x + 3$	$y = x^2 - 4x + 4$	$y = x^2 - 4x + 5$
Diskriminante	$D = 1, D > 0$	$D = 0$	$D = -1, D < 0$
Graph			
Schnittpunkte mit der x-Achse	$P_1(1; 0),$ $P_2(3; 0)$	$P_0(2; 0)$	keine
Nullstellen	$x_1 = 1; x_2 = 3$	$x_0 = 2$	keine

## Quadratische Gleichungen

### 6 Zur Wiederholung

#### Aufgaben

- Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Nullstellen der folgenden Funktionen! Der Definitionsbereich ist der Bereich der reellen Zahlen.
  - $y = 2x - 3$
  - $y = -\frac{4}{3}x - 2$
  - $y = |x| - 1$
- Geben Sie die Lösungsmenge im Bereich der reellen Zahlen an! (Lösen Sie im Kopf!)
  - $x^2 = 225$
  - $x^2 = 0,81$
  - $x^2 - 1 = 0$
  - $x^2 = \frac{1}{4}$
  - $x^2 = 3$
  - $x^2 = 0$
  - $x^2 + 100 = 0$
  - $x^2 - 0,36 = 0$
- Sind die angegebenen Gleichungen äquivalent zueinander?
  - $5x - 3 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) und  $-25x = -15$  ( $x \in \mathbb{R}$ )
  - $x - 7 = 0$  ( $x \in \mathbb{N}$ ) und  $x^2 = 49$  ( $x \in \mathbb{N}$ )
  - $x^2 = 625$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) und  $2x^2 - 1250 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ )
  - $4x + 69 = x$  ( $x \in \mathbb{Q}$ ) und  $x^2 = 529$  ( $x \in \mathbb{Q}$ )
- Geben Sie jeweils einen Grundbereich an, in dem die gegebenen Gleichungen äquivalent zueinander sind!
  - $x - 3 = 0$  und  $x^2 = 9$
  - $-2x = 8$  und  $x^2 - 16 = 0$

5. Geben Sie die Lösungsmenge an, indem Sie bekannte Gesetzmäßigkeiten berücksichtigen! ( $x \in R$ )
- a)  $x(x-2) = 0$       b)  $(x-8)(x-1) = 0$       c)  $(x-6)^2 = 0$   
 d)  $x^2 - 4x + 4 = 0$       e)  $x^2 + 3x = 0$       f)  $(x-4,5)(x+3,6) = 0$

6. Ordnen Sie den folgenden Gleichungen bzw. Gleichungssystemen jeweils die richtige Lösungsmenge zu!

Gleichung/Gleichungssystem	Lösungsmenge
a) $x^2 = 4$ ( $x \in N$ )	$L_1 = \{-2; 2\}$
b) $-25x - 50 = 0$ ( $x \in N$ )	$L_2 = \{-2\}$
c) $(x-2)(x+2) = 0$ ( $x \in R$ )	$L_3 = \{(-2; 2)\}$
d) (I) $2x - y = -6$ ( $x \in R, y \in R$ ) (II) $x + 3y = 4$	$L_4 = \{2\}$
e) $x^2 - 4 = 0$ ( $x \in R$ )	$L_5 = \emptyset$

7. Bilden Sie die quadratische Ergänzung für die folgenden Terme!

a)  $x^2 + 8x$       b)  $x^2 - 100x$       c)  $x^2 - 5x$       d)  $x^2 + px$

8. Berechnen Sie!

a)  $\sqrt{64}$       b)  $\sqrt{6084}$       c)  $\sqrt{-81}$       d)  $\sqrt{0,0025}$       e)  $\sqrt{37}$   
 f)  $\sqrt{(-3)^2}$       g)  $\sqrt{\frac{25}{64}}$       h)  $\sqrt{a^2}$       i)  $\sqrt{(u+2)^2}$       k)  $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$

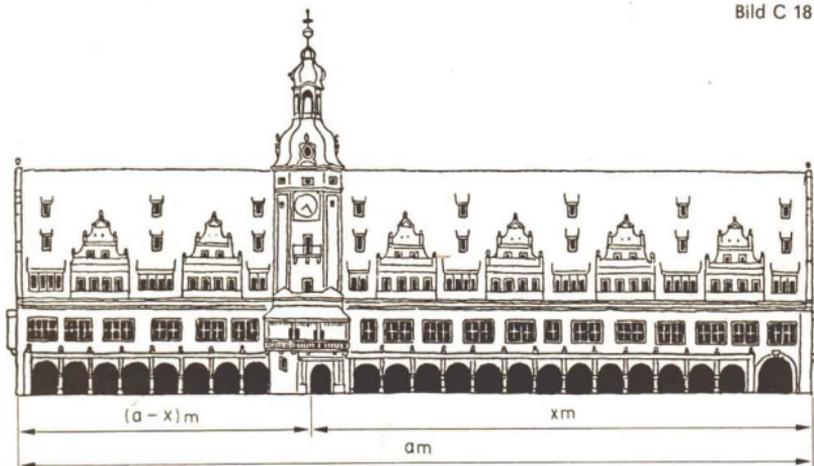
9. Berechnen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte!

$a$	$b$	$-\frac{a}{2}$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$
3	-4			
-5	-3,6			
27,3	-35,4			
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$			

## 7 Der Begriff „quadratische Gleichung“

Das 1556 erbaute Alte Rathaus in Leipzig ist ein sehr schönes Bauwerk aus der Zeit der Renaissance. Beim Betrachten fällt auf, daß der Turm die Vorderfront nicht genau in der Mitte teilt; trotzdem wirkt der Anblick sehr harmonisch. Dieser Eindruck kommt zustande, weil der Turm die Vorderfront in einem besonderen Verhältnis, der sogenannten *Proportion des Goldenen Schnittes*, teilt. Diese Proportion wurde bereits in der Antike bei Kunstwerken oft benutzt; sie vermittelt das Gefühl der Schönheit und Harmonie. Man nannte sie in der Renaissance auch die „göttliche Proportion“. Eine Strecke wird dabei so geteilt, daß das Verhältnis der Gesamtstrecke zum größeren Teil gleich dem Verhältnis des größeren Teils zum kleineren Teil ist.

An welche Stelle des ca. 90 Meter langen Leipziger Rathauses mußte der Baumeister HIERONIMUS LOTTER (1497?–1580) den Turm setzen? (→ Bild C 18)



Goldener Schnitt:  $\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)}$  bzw.  
 $x^2 = a(a-x)$  oder  $x^2 + ax - a^2 = 0$

Gleichungen dieser Form konnten bereits die Babylonier und die Pythagoreer geometrisch lösen. Es sind sogenannte *quadratische Gleichungen*. Im folgenden werden wir ein Verfahren zur rechnerischen Lösung quadratischer Gleichungen kennenlernen. Auch bei der Frage nach den Nullstellen quadratischer Funktionen gelangt man zu derartigen Gleichungen.

*Wir erinnern uns!* Hat eine Funktion  $y = f(x)$  Nullstellen, dann sind sie Lösungen der Gleichung  $f(x) = 0$ .

Im Falle der quadratischen Funktion  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ) ist somit die Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ ) zu lösen.

Eine Gleichung der Form  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ ) heißt *quadratische Gleichung* oder *Gleichung zweiten Grades*. Ist in dieser Gleichung  $a = 1$ , so spricht man von der *Normalform* der quadratischen Gleichung.

(1) Allgemeine Form:  $ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a \quad (a \neq 0)$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{oder}$$

(2) Normalform:  $x^2 + px + q = 0$  mit  $p = \frac{b}{a}$  und  $q = \frac{c}{a}$

Die Gleichungen (1) und (2) sind einander äquivalent. Sie haben somit die gleichen Lösungsmengen. Es genügt deshalb zu untersuchen, unter welchen Bedingungen Gleichungen der Form  $x^2 + px + q = 0$  Lösungen haben und wie man diese findet.

- 6 Wir stellen uns die Aufgabe, die Nullstellen der quadratischen Funktion  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) rechnerisch zu bestimmen. Dazu haben wir die Gleichung  $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$  zu lösen. Diese Gleichung ist im Bereich der reellen Zahlen äquivalent zur Gleichung  $x^2 - 4 = 0$  mit den Lösungen 2 und  $-2$ . Somit sind  $x_1 = 2$  und  $x_2 = -2$  die Nullstellen der gegebenen Funktion.
- 36 Stellen Sie die Funktionen  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) und  $y = x^2 - 4$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) graphisch dar, und ermitteln Sie ihre Nullstellen aus den graphischen Darstellungen! Was stellen Sie fest?

### Aufgaben

- Stellen Sie zunächst die allgemeine Form und dann die Normalform der quadratischen Gleichung her, und geben Sie jeweils  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bzw.  $p$ ,  $q$  an!
  - $3x^2 = 6x + 18$
  - $25x^2 - 100 = 0$
  - $-7x^2 = -28x$
  - $(x + 5)(x - 9) = 2x^2 - 5$
  - $4x^2 - \frac{1}{2} = 2x^2 + \frac{1}{2}$
  - $\frac{8x^2 + 3}{2} = 2x^2 + 2x$
- Für die quadratische Gleichung  $x^2 - 8x + 15 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) wurde  $L = \{3; 5\}$  als Lösungsmenge angegeben.
  - Überprüfen Sie, ob  $L$  richtig angegeben wurde!
  - Geben Sie zwei zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichungen an!

## 8 Die Gleichungen $x^2 = r$

Gleichungen der Form  $x^2 = r$ , wie z. B.  $x^2 = 49$  oder  $x^2 = 0,36$ , haben wir schon häufig gelöst. Auch viele geometrische Probleme führen auf derartige Gleichungen.

- 37
- Der Flächeninhalt eines Quadrates sei  $A = 625 \text{ cm}^2$ .  
Wie lang ist die Quadratseite?
  - Der Flächeninhalt eines Kreises sei  $A = 79 \text{ cm}^2$ .  
Welchen Radius hat der Kreis?
  - Eine gerade quadratische Pyramide ist 12 cm hoch, ihre Seitenfläche hat eine Höhe von 15 cm. Wie lang ist die Grundkante der Pyramide (→ Bild C 19)?

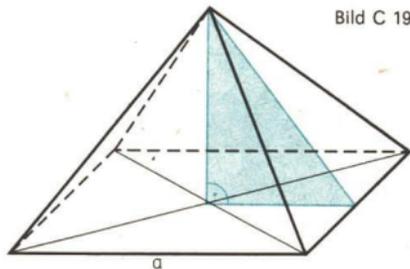


Bild C 19

Die Gleichungen im Auftrag C 37 sind Größengleichungen. Der Variablengrundbereich ist jeweils die Menge aller Streckenlängen. Die Zahlenwerte in den Lösungen sind positive reelle Zahlen. Sehen wir jetzt einmal vom konkreten Sachverhalt ab, so können wir bei den Gleichungen  $x^2 = 625$ ,  $\pi \cdot x^2 = 79$  und  $15^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 12^2$  auch nach *allen* Lösungen bezüglich des gesamten Bereiches der reellen Zahlen fragen.

- 7 a)  $x^2 = 625$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Außer der positiven Zahl 25 ist auch noch die zu ihr entgegengesetzte Zahl  $-25$  Lösung der Gleichung, denn  $25^2 = 625$  und  $(-25)^2 = 625$  sind wahre Aussagen. Weitere Lösungen kann es nicht geben, da stets gilt: Wenn  $|x| < 25$ , so  $x^2 < 625$  und wenn  $|x| > 25$ , so  $x^2 > 625$ . Die Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 = 625$  ist somit  $L = \{-25; 25\}$ .
- b)  $\pi \cdot x^2 = 79$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) bzw.  $x^2 = 79 : \pi$ .  
Die einzigen Lösungen sind angenähert 5 und  $-5$ , wie man durch eine Probe bestätigt.
- c)  $15^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 12^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) bzw. nach äquivalenter Umformung  $x^2 = 324$ .  
Die einzigen Lösungen der Gleichung sind 18 und  $-18$ . Es ist  $L = \{-18; 18\}$ .

Auch durch die folgenden Überlegungen gelangt man zu den Lösungen von Gleichungen der Form  $x^2 = r$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $r \in \mathbb{R}$ ). Als Beispiel wählen wir  $x^2 = 25$  ( $x \in \mathbb{R}$ ):

1. **Möglichkeit:** Die Gleichung  $x^2 = 25$  ist äquivalent zur Gleichung  $\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$ <sup>1)</sup>. Wir wissen, daß  $\sqrt{x^2} = |x|$  und  $\sqrt{25} = 5$  ist.

Also können wir anstelle von  $\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$  auch  $|x| = 5$  schreiben. Diese Gleichung hat die Lösungen  $x_1 = 5$  und  $x_2 = -5$ . Somit sind auch die Lösungen der Ausgangsgleichung  $x_1 = 5$  und  $x_2 = -5$ .

2. **Möglichkeit:** Die Gleichung  $x^2 = 25$  ist äquivalent zur Gleichung  $x^2 - 25 = 0$  und somit zur Gleichung  $(x - 5)(x + 5) = 0$ . Das Produkt  $(x - 5)(x + 5)$  ist genau dann Null, wenn  $x - 5 = 0$  oder  $x + 5 = 0$ . Das ergibt wiederum die Lösungen  $x_1 = 5$  und  $x_2 = -5$ .

Die bisher betrachteten Gleichungen hatten jeweils zwei Lösungen. Es stellt sich die Frage, ob das für alle Gleichungen  $x^2 = r$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $r \in \mathbb{R}$ ) zutrifft.

- 38 a) Begründen Sie, warum die Gleichung  $x^2 = -9$  keine Lösungen hat!  
b) Geben Sie weitere Gleichungen der Form  $x^2 = r$  an, die keine Lösungen haben!  
c) Kann es Gleichungen der Form  $x^2 = r$  geben, die genau eine Lösung haben?

Allgemein sind *drei Fälle* zu unterscheiden:

$x^2 = r \quad (x \in \mathbb{R}; r \in \mathbb{R})$			
Fall	$r > 0$	$r = 0$	$r < 0$
Lösungen	zwei Lösungen $x_1 = \sqrt{r}$ $x_2 = -\sqrt{r}$	eine Lösung $x = 0$	keine Lösung
Lösungsmenge	$L = \{-\sqrt{r}; \sqrt{r}\}$	$L = \{0\}$	$L = \emptyset$

Im Falle  $r \geq 0$  ist es üblich, zusammenfassend kurz zu schreiben  $x_{1,2} = \pm \sqrt{r}$   
(Lies:  $x$  eins zwei gleich plus minus  $\sqrt{r}$ !)

<sup>1)</sup> Für alle nichtnegativen reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:  $a = b$  genau dann; wenn  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ .

## Aufgaben

- Geben Sie die Lösungsmengen für folgende Gleichungen an! ( $x \in \mathbb{R}$ )
  - $x^2 = 256$
  - $x^2 = 32,49$
  - $x^2 = \frac{1}{36}$
  - $x^2 - \frac{1}{9} = 0$
  - $x^2 - 4,12 = 0$
  - $64 - x^2 = 0$
  - $x^2 + 81 = 0$
  - $2x^2 - 6498 = 0$
  - $\frac{x^2}{3} - 243 = 0$
- Wählen Sie in der Gleichung  $x^2 + q = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) für  $q$  jeweils eine reelle Zahl so, daß eine Gleichung mit
  - zwei,
  - einer,
  - keiner Lösung entsteht!
- Geben Sie zwei zueinander äquivalente quadratische Gleichungen an, die die Lösungsmenge  $L = \{-6; 6\}$  haben!
- Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Nullstellen der folgenden Funktionen!
  - $y = x^2 - 5$
  - $y = 0,5x^2 - 1,5$
- Eine quadratische Funktion  $y = x^2 + px + q$  hat die Nullstellen  $x_1 = -2,5$  und  $x_2 = 2,5$ . Bestimmen Sie  $p$  und  $q$ !

9 Die Gleichungen  $x^2 + px + q = 0$ 

- 39 Lösen Sie die folgenden Gleichungen! Orientieren Sie sich am Lösungsweg für Gleichungen der Form  $x^2 = r$  ( $r \in \mathbb{R}$ )!
  - $(x-1)^2 = 9$  ( $x \in \mathbb{R}$ )
  - $(x+2)^2 = 16$  ( $x \in \mathbb{R}$ )
  - $(x-10)^2 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ )
  - $(x-3)^2 = -4$  ( $x \in \mathbb{R}$ )
- 40
  - Formen Sie die Gleichung  $x^2 - 4x - 12 = 0$  so um, daß sie die Form  $(x+u)^2 = v$  hat!
  - Lösen Sie die Gleichung  $x^2 - 4x - 12 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) auf diesem Wege!

Das Lösen quadratischer Gleichungen der Form  $x^2 + px + q = 0$  läßt sich auf das Lösen von Gleichungen der Form  $x^2 = r$  zurückführen. Man hat zu diesem Zweck die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  geeignet äquivalent umzuformen. Dazu benötigt man wiederum – ähnlich wie beim Herstellen der Scheitelpunktsform der Gleichung einer quadratischen Funktion – die quadratische Ergänzung (→ S. 32).

- 8 Um die Gleichung  $x^2 - 6x + 5 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) zu lösen, geht man folgendermaßen vor:

- Die Gleichung wird in eine zu ihr äquivalente Gleichung *umgeformt*:

$$\begin{array}{rcl}
 x^2 - 6x + 5 = 0 & & | -5 \\
 x^2 - 6x & = & -5 \quad | \text{quadratische Ergänzung} \\
 x^2 - 6x + 3^2 & = & -5 + 3^2 \quad | \text{binomische Formel} \\
 (x-3)^2 & = & 4
 \end{array}$$

- Beim Lösen der Gleichung  $(x-3)^2 = 4$  orientiert man sich am Lösungsweg für Gleichungen der Form  $x^2 = r$ .  
Somit ergibt sich:  $(x-3) = 2$  oder  $(x-3) = -2$ .  
Daraus folgt  $x_1 = 3 + 2$  und  $x_2 = 3 - 2$   

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 1$$

- (3) Die *Probe* wird für beide Zahlen, die als Lösungen in Frage kommen, durchgeführt: Die Zahlen 1 und 5 gehören zum gegebenen Grundbereich.

$$\text{Einsetzen von } x_1: 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{wahr}$$

$$\text{Einsetzen von } x_2: 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{wahr}$$

- (4) Die Lösungen sind somit  $x_1 = 5$  und  $x_2 = 1$ , die Lösungsmenge ist  $L = \{1; 5\}$ .

Man kann beim Lösen der Gleichung  $(x-3)^2 = 4$  auch anders vorgehen:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 4 \\ \sqrt{(x-3)^2} &= \sqrt{4} \\ |x-3| &= 2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $x-3=2$  oder  $x-3=-2$ .

Die Lösungen sind somit wiederum  $x_1 = 5$  und  $x_2 = 1$ .

- 41 a) Geben Sie je eine quadratische Gleichung in der Form  $(x+u)^2 = v$  an, die zwei Lösungen, eine Lösung, keine Lösungen hat!

b) Stellen Sie für Ihre Gleichungen von a) jeweils die Normalform her!

- 9 Gegeben sei die Gleichung  $x^2 - 6x + 9 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Sie ist äquivalent zur Gleichung  $(x-3)^2 = 0$ .

In diesem Fall kann nur  $(x-3) = 0$  gelten.

Daraus ergibt sich genau eine Lösung  $x = 3$ .

*Probe:* Die Zahl 3 gehört zum gegebenen Grundbereich.

$$3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 0 \quad \text{wahr}$$

Lösungsmenge:  $L = \{3\}$ .

- 10 Gegeben sei die Gleichung  $x^2 - 6x + 12 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Sie ist äquivalent zur Gleichung  $(x-3)^2 = -3$ . Da für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $(x-3)^2 \geq 0$ , kann es keine reelle Zahl geben, für die  $(x-3)^2 < 0$  ist. Also hat die gegebene Gleichung keine Lösungen; es ist  $L = \emptyset$ .

- 42 Vergleichen Sie die Lösungen der Gleichungen aus den Beispielen C 8, C 9 und C 10 mit den aus den graphischen Darstellungen ermittelten Nullstellen der entsprechenden Funktionen

$$y = x^2 - 6x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad y = x^2 - 6x + 9 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad y = x^2 - 6x + 12 \quad (x \in \mathbb{R}) !$$

## Aufgaben

1. Bilden Sie für die folgenden Summen die quadratische Ergänzung, und schreiben Sie den entstehenden Term als Quadrat eines Binoms!

a)  $x^2 - 16x$       b)  $x^2 + 3x$

c)  $x^2 - \frac{1}{2}x$       d)  $x^2 + ax$

2. Bringen Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf die Form  $(x+u)^2 = v$ !

a)  $x^2 - 2x - 3 = 0$

b)  $x^2 + 18x + 80 = 0$

c)  $x^2 - 24x + 144 = 0$

d)  $x^2 + 10x + 28 = 0$

e)  $x^2 + 6x = 0$

f)  $x^2 + 3x - 4 = 0$

3. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen auf dem Wege über die quadratische Ergänzung! ( $x \in \mathbb{R}$ ) (L)
- a)  $x^2 + 8x - 20 = 0$       b)  $x^2 - 4x - 5 = 0$       c)  $x^2 + 3x - 10 = 0$   
 d)  $x^2 - 12x + 36 = 0$       e)  $x^2 + 3x + 2,25 = 0$       f)  $x^2 + x - 0,75 = 0$   
 g)  $x^2 + 8x = 0$       h)  $x^2 - 10x = 0$
4. Wählen Sie in der Gleichung  $(x - 4)^2 = v$  für  $v$  jeweils eine reelle Zahl so, daß eine Gleichung entsteht, die  
 a) eine,    b) zwei    und    c) keine Lösungen hat!
5. Geben Sie für die Gleichung  $x^2 - 4x - 5 = 0$  einen Grundbereich so an, daß die Lösungsmenge nur ein Element enthält!

## 10 Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Im folgenden werden wir eine Formel entwickeln, die es ermöglicht, jede quadratische Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$  zu lösen, ohne jedes Mal das vollständige Quadrat zu bilden. Dabei werden wir auch untersuchen, unter welchen Bedingungen eine solche quadratische Gleichung überhaupt Lösungen besitzt.

- 43 a) Formen Sie die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  mit Hilfe der quadratischen Ergänzung so äquivalent um, daß auf der linken Seite der Gleichung ein vollständiges Quadrat steht!  
 b) Woher kennen Sie den Term, der auf der rechten Seite der Gleichung erscheint, bereits? Geben Sie seinen Namen an!

Das Vorgehen beim Lösen der Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $p, q \in \mathbb{R}$ ) entspricht dem der Beispiele C 8, C 9, C 10 aus Lerneinheit 9.

- (1) Die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  wird in eine zu ihr äquivalente Gleichung umgeformt:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + px + q & = & 0 \quad | -q \\ x^2 + px & = & -q \quad | \text{quadratische Ergänzung} \\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 & = & \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \text{binomische Formel} \end{array}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = D, \text{ dabei ist } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \text{ die Diskriminante (} \rightarrow \text{ Lerneinheit 4).}$$

- (2) Es hängt von der rechten Seite der Gleichung – also von der Diskriminante  $D$  – ab, ob die Gleichung Lösungen hat. Wir führen eine *vollständige Fallunterscheidung* für  $D$  durch:

1. Fall:  $D > 0$

Die Gleichung  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = D$  führt auf die beiden Gleichungen

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{D} \quad \text{oder} \quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{D}$$

mit den Lösungen  $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$  und  $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$ .

Man schreibt dafür auch zusammenfassend

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \text{bzw.}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

2. Fall:  $D = 0$

Die Gleichung  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$  führt auf die Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung hat genau eine Lösung, und zwar  $x = -\frac{p}{2}$ .

3. Fall:  $D < 0$

Die Gleichung  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = D$  hat keine Lösungen, da  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$  als Quadrat einer reellen Zahl niemals negativ sein kann.

Somit ergibt sich:

Eine Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $p, q \in \mathbb{R}$ ) hat dann Lösungen, wenn die Diskriminante  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  größer oder gleich Null ist.

Man nennt  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  die *Lösungsformel* der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ .

- 44 a) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, bei der  $D = 0$  ist!
- b) Zeigen Sie, daß die Lösungsformel auch im Falle  $D = 0$  anwendbar ist!

*Bemerkung:* Bei Verwendung der Formel müßte man eigentlich stets zuerst die Diskriminante  $D$  berechnen, um zu prüfen, ob  $D \geq 0$  ist. In der Praxis wird man jedoch im allgemeinen so vorgehen, daß man versuchsweise die Werte für  $p$  und  $q$  sofort in die Formel einsetzt. Ergibt sich dann als Radikand der Wurzel eine negative Zahl, und damit insgesamt ein nicht definierter Ausdruck, so bedeutet das, daß die Lösungsmenge leer ist.

- 45 Führen Sie für die nach der Lösungsformel gefundenen Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  die Probe durch Einsetzen in die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  durch!

Es ist zweckmäßig, sich beim Anwenden der Lösungsformel an eine gewisse Schrittfolge zu gewöhnen.

- 11 Um die Gleichung  $x^2 - 6x - 112 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) mit Hilfe der Lösungsformel zu lösen, geht man wie folgt vor:
  - Man liest aus der Gleichung  $p$  und  $q$  ab und setzt diese Werte in die Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - (-112)}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 112}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{121}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm 11$$

$$x_1 = 14$$

$$x_2 = -8$$

- Man führt für alle Zahlen, die als Lösungen in Frage kommen, eine *Probe* durch:

14 und -8 sind reelle Zahlen, gehören also zum Grundbereich.

$$14^2 - 6 \cdot 14 - 112 = 0$$

$$196 - 84 - 112 = 0 \quad \text{wahr}$$

$$(-8)^2 - 6 \cdot (-8) - 112 = 0$$

$$64 + 48 - 112 = 0 \quad \text{wahr}$$

- Man gibt die *Lösungsmenge* an:

$$L = \{-8; 14\}.$$

- 46 Lösen Sie die Gleichungen aus den Beispielen C 8, C 9 und C 10 mit Hilfe der Lösungsformel!

Im allgemeinen wird der Radikand der Wurzel keine Quadratzahl sein, wie z. B. bei der Gleichung  $x^2 + 8x + 3 = 0$ . Hier ist  $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{13}$ . Die Lösungen sind somit irrationale Zahlen. Man gibt dann meist Näherungswerte für die Lösungen an. Bei der Probe ist zu beachten, daß die linke Seite der Gleichung nur angenähert den Wert 0 annimmt. Verwendet man z. B. die Taschenrechneranzeige  $\sqrt{13} = 3,60555113$ , so erhält man  $x_1 = -0,39444873$  und  $x_2 = -7,6055513$ . Das liefert bei der Probe:

$$0,0000017 \approx 0 \quad \text{bzw.} \quad 0,0000001 \approx 0.$$

Selbstverständlich wird man – wenn erforderlich – den Taschenrechner beim Auswerten der Lösungsformel auch bei anderen Teilschritten einsetzen, ggf. sogar für den gesamten Rechenweg.

- 47 Lösen Sie die Gleichung  $x^2 - 768x + 125847 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) unter Verwendung des Taschenrechners, und geben Sie den von Ihnen verwendeten Ablaufplan an!

Will man den Rechenweg von Auftrag C 47 *allgemein* darstellen, so kann dies in Form des folgenden Ablaufplanes geschehen:

$$p \quad + \quad 2 \quad = \quad x^2 \quad - \quad q \quad = \quad \sqrt{\quad} \quad \times \quad M$$

$$p \quad \div \quad + \quad 2 \quad + \quad MR \quad = \quad [x_1]$$

$$p \quad \div \quad + \quad 2 \quad - \quad MR \quad = \quad [x_2]$$

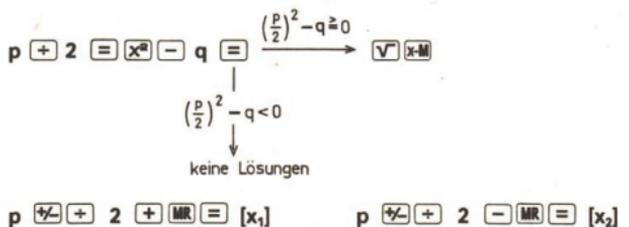
- 48 a) Stellen Sie einen anderen Ablaufplan für die Berechnung der Lösungen nach der Lösungsformel auf, indem Sie nicht mit der Berechnung der Diskriminante beginnen!

b) Vergleichen Sie die beiden Pläne!

- 49 Begründen Sie, warum der angegebene Ablaufplan bei formalem Abarbeiten auch im Falle  $D = 0$  zum Ziel, d. h. zu genau einer Lösung, führt?

- 50 Lösen Sie die Gleichung  $x^2 + 7x + 128 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) nach dem angegebenen Ablaufplan! Was stellen Sie fest?

Um die beiden Fälle  $D \geq 0$  und  $D < 0$  in *einem* Ablaufplan darzustellen, ist eine *Verzweigung* des Plans erforderlich:



Es liegt ein verzweigter *Algorithmus* vor. Algorithmen mit Verzweigungen *kennen wir bereits* aus dem Kapitel A (S. 20f.) und dem Kapitel B (S. 78f.).

- 51 Wie müßte dieser Ablaufplan verändert werden, wenn auch noch zwischen den Fällen  $D > 0$  und  $D = 0$  unterschieden werden soll?

Bei Spezialfällen quadratischer Gleichungen –  $p$  oder  $q$  haben den Wert 0 – gelangt man auch ohne Lösungsformel zur Lösungsmenge; und dieser Weg ist im allgemeinen auch rationeller.

*Spezialfälle:*

1.  $p = 0, q = 0$ :  $x^2 = 0$
2.  $p = 0, q \neq 0$ :  $x^2 + q = 0$
3.  $p \neq 0, q = 0$ :  $x^2 + px = 0$

- 52 Lösen Sie die folgenden Gleichungen, indem Sie beachten, daß die linke Seite der Gleichung ein Produkt ist bzw. in ein solches umgeformt werden kann! ( $x \in \mathbb{R}$ )

a)  $x(x - 7) = 0$       b)  $(x + 17)x = 0$   
 c)  $x^2 - 3x = 0$       d)  $x^2 + 8x = 0$

Gleichungen der Form  $x^2 + px = 0$  kann man auf die folgende Weise schnell lösen: Man klammert  $x$  aus:  $x(x + p) = 0$ .

Auf der linken Seite der Gleichung steht jetzt ein Produkt. Bekanntlich ist ein Produkt genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Somit gilt  $x = 0$  oder  $x + p = 0$ . Daraus ergeben sich für die gegebene Gleichung die Lösungen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = -p$ , wie man durch die Probe bestätigt. Die Lösungsmenge ist also

$$L = \{0; -p\}.$$

- 53 Zeigen Sie, wie man für die Gleichungen  $x^2 = 0$ ,  $x^2 + q = 0$  und  $x^2 + px = 0$  mit Hilfe der Lösungsformel die Lösungen erhält!

## Aufgaben

1. Entscheiden Sie mit Hilfe der Diskriminante, ob die folgenden quadratischen Gleichungen Lösungen haben oder nicht!

a)  $x^2 + 5x - 24 = 0$       b)  $x^2 + 12x + 11 = 0$       c)  $x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{15} = 0$   
 d)  $x^2 - 0,7x + 0,1 = 0$       e)  $x^2 - 8x + 16 = 0$       f)  $x^2 + 74x + 1368 = 0$   
 g)  $x^2 - 26x + 169 = 0$       h)  $x^2 - 5x + 6,5 = 0$

Geben Sie für die Aufgaben 2. bis 7. jeweils die Lösungsmenge an! ( $x \in \mathbb{R}$ )

2. ↑ a)  $x^2 + 10x + 24 = 0$     b)  $x^2 - 6x - 112 = 0$     c)  $x^2 + 2x - 24 = 0$   
 d)  $x^2 - 38x + 361 = 0$     e)  $x^2 - 3x + 10 = 0$     f)  $x^2 - 9x + 20 = 0$   
 g)  $x^2 + 15x + 56 = 0$     h)  $x^2 - x - 12 = 0$
3. ↑ a)  $x^2 - 0,5x - 1,5 = 0$     b)  $x^2 + 3x + 0,81 = 0$     c)  $x^2 - 2x + 0,36 = 0$   
 d)  $x^2 + x - 8,75 = 0$     e)  $x^2 + 515x - 91976 = 0$     f)  $x^2 - 1126x + 24288 = 0$   
 g)  $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$     h)  $x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{3}{7} = 0$
4. ↑ a)  $x^2 - 4x = 0$     b)  $x^2 + 7x = 0$     c)  $x^2 + \sqrt{2}x = 0$   
 d)  $x^2 - \sqrt{3} = 0$     e)  $x^2 - \pi = 0$     f)  $x^2 - 0,0064 = 0$
5. ↑ a)  $x^2 + 160x - 36 = 0$     b)  $x^2 - 325x - 6241 = 0$   
 c)  $x^2 + 153x - 3000 = 0$     d)  $x^2 - 8,37x + 0,68 = 0$
6. ↑ a)  $x^2 - 100x + 2500 = 0$     b)  $x^2 + 64x + 1024 = 0$   
 c)  $x^2 - 0,12x + 0,0036 = 0$     d)  $x^2 + 0,008x + 0,000016 = 0$
7. ↑ a)  $x^2 + 18x + 90 = 0$     b)  $x^2 - 7x + 13 = 0$     c)  $x^2 + 125x + 4000 = 0$   
 d)  $x^2 - 0,28x + 0,02 = 0$     e)  $x^2 + 144 = 0$     f)  $x^2 + 2,5 = 0$
8. Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an! (L)  
 a)  $x^2 + 2x - 24 = 0$  ( $x \in \mathbb{N}$ )    b)  $x^2 + 12x + 11 = 0$  ( $x \in \mathbb{N}$ )  
 c)  $x^2 + 0,5x - 1,5 = 0$  ( $x \in \mathbb{N}$ )    d)  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{21}{2} = 0$  ( $x \in \mathbb{Z}$ )  
 e)  $x^2 + \frac{20}{7}x - \frac{3}{7} = 0$  ( $x \in \mathbb{Q}_+$ )    f)  $x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0$  ( $x \in \mathbb{Q}_+$ )
9. Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen der folgenden Funktionen! (Der Definitionsbereich ist der Bereich der reellen Zahlen.)  
 a)  $y = x^2 - 6x + 6$     b)  $y = x^2 - 7,2x + 12,96$     c)  $y = x^2 - 2x + 5$   
 Führen Sie die Probe zeichnerisch durch!
10. Geben Sie je eine quadratische Gleichung an, die die folgende Lösungsmenge hat:  
 a)  $L = \{0\}$ ,    b)  $L = \{0; -2\}$ ,    c)  $L = \{-2; 2\}$ ,    d)  $L = \emptyset$ !

## Zusammenfassung

$x^2 + px + q = 0$ ( $x \in \mathbb{R}; p, q \in \mathbb{R}$ ); $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$			
Lösungsformel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$			
Fall	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Lösungen	zwei Lösungen $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$ $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$	eine Lösung $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$	keine Lösung
Lösungsmenge	$L = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{D}; -\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right\}$	$L = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$L = \emptyset$

## 11 Zusammenhänge zwischen $p$ und $q$ und den Lösungen

Die Lösungsformel stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen  $p$  und  $q$  und den Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  einer quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  her. Wir suchen nach einer weiteren derartigen Beziehung.

- 54 Lösen Sie die folgenden Gleichungen, und vergleichen Sie jeweils (1) die Summe Ihrer Lösungen mit  $p$  und (2) das Produkt Ihrer Lösungen mit  $q$ !
  - a)  $x^2 - 8x + 15 = 0$       b)  $x^2 + x - 2 = 0$
  - c)  $x^2 + 6x + 8 = 0$       d)  $x^2 - 3x - 40 = 0$
 Formulieren Sie Ihre Vermutung!
- 55 Versuchen Sie, diejenige quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  zu finden, die die Lösungen  $x_1 = 3$  und  $x_2 = 4$  hat!  
Nutzen Sie Ihre Vermutung von Auftrag C 54, und machen Sie eine Probe!

Die Aufträge C 54 und C 55 führen uns auf einen Zusammenhang, den bereits der französische Mathematiker FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) – oder VIETA, wie er sich in der lateinischen Form seines Namens nannte – erkannt hatte. Der folgende Satz wird deshalb nach ihm **Satz von Vieta**<sup>1)</sup> genannt:

**Die Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  sind genau dann die Lösungen der Gleichung**

$$x^2 + px + q = 0, \quad \text{wenn gilt:}$$

$$(1) \quad x_1 + x_2 = -p \quad \text{und}$$

$$(2) \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Ein Beweis dieses Satzes wird hier nicht geführt.

Der Satz von Vieta liefert uns eine besonders gute Möglichkeit der Probe bei quadratischen Gleichungen, die in Normalform vorliegen.

- 12 Zu zeigen ist, daß  $x_1 = -6$  und  $x_2 = 3$  die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + 3x - 18 = 0$  sind!  
Es gilt: (1)  $x_1 + x_2 = -p$ , denn  $-6 + 3 = -3$  (wahr) und  
(2)  $x_1 \cdot x_2 = q$ , denn  $(-6) \cdot 3 = -18$  (wahr),  
also sind  $-6$  und  $3$  die Lösungen der Gleichung  $x^2 + 3x - 18 = 0$ .

Eine weitere Aufgabenstellung läßt sich mit Hilfe des Satzes von Vieta lösen: Man kann aus gegebenen Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  einer quadratischen Gleichung schnell die Gleichung selbst aufstellen.

- 13 Gesucht ist diejenige quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ , die die Lösungen  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 5$  besitzt.  
Mit Hilfe des Satzes von Vieta erhält man:  
(1)  $x_1 + x_2 = 2 + 5 = 7$ , also ist  $-p = 7$  bzw.  $p = -7$ ;  
(2)  $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 5 = 10$ , also ist  $q = 10$ .  
Die gesuchte Gleichung lautet  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .

<sup>1)</sup> VIETA hat den Satz allerdings nicht in dieser Form angegeben. Seine Fassung würde in moderner Form etwa so formuliert werden können: Wenn in einer Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  gilt  $p = -(x_1 + x_2)$  und  $q = x_1 \cdot x_2$ , so sind  $x_1$  und  $x_2$  die Lösungen der Gleichung.

- 56 Man kennt von den zwei Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + 15x + 44 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) eine, nämlich  $x_1 = -4$ . Mit Hilfe des Satzes von Vieta kann man die andere finden. Wie lautet sie?

### Aufgaben

1. Überprüfen Sie, ob die Lösungsmenge richtig angegeben wurde, und begründen Sie Ihre Entscheidung auf zwei verschiedenen Wegen! Berichtigen Sie fehlerhafte Lösungsmengen!

Gleichung ( $x \in \mathbb{R}$ )	Lösungsmenge
a) $x^2 - 5x - 84 = 0$	$L = \{-7; 12\}$
b) $x^2 + 25x + 144 = 0$	$L = \{9; 16\}$
c) $x^2 + 100x - 101 = 0$	$L = \{-101; 1\}$
d) $x^2 - 10x + 25 = 0$	$L = \{5\}$
e) $x^2 - 9x + 14 = 0$	$L = \{-7; -2\}$
f) $x^2 + 24x - 25 = 0$	$L = \{-25; 1\}$

2. Geben Sie jeweils diejenige quadratische Gleichung in Normalform an, die die angegebenen Lösungen hat!
- a)  $x_1 = -15; x_2 = 9$     b)  $x_1 = -3; x_2 = 0$     c)  $x_1 = -8; x_2 = 8$   
 d)  $x_1 = -7; x_2 = \frac{1}{2}$     e)  $x_{1,2} = 0$     f)  $x_{1,2} = 4$
3. Mit Hilfe des Satzes von Vieta sind die folgenden Gleichungen im Kopf zu lösen! ( $x \in \mathbb{Z}$ )
- a)  $x^2 - 15x + 14 = 0$     b)  $x^2 + 9x + 20 = 0$     c)  $x^2 - 11x + 10 = 0$   
 d)  $x^2 - 5x - 14 = 0$     e)  $x^2 - 12x + 36 = 0$     f)  $x^2 + x - 6 = 0$
4. Geben Sie drei zueinander nicht äquivalente quadratische Gleichungen an, die alle  $x_1 = 3$  als eine Lösung haben!
- 5.\* Zeigen Sie für die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  mit den Lösungen  $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  und  $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ , daß die Summe der Lösungen mit  $-p$  und das Produkt der Lösungen mit  $q$  übereinstimmt!
6. Jemand hat als mögliche Lösungen der Gleichung  $x^2 + 2x - 35 = 0$  die Zahlen 5 und  $-7$  gefunden. Er bildet das Produkt  $(x - 5) \cdot (x + 7)$  und errechnet  $x^2 + 2x - 35$ . Das sieht er als Bestätigung seiner Lösungen an. Hat er recht?
- 7.\* Bestätigen Sie allgemein mit Hilfe des Satzes von Vieta, daß der folgende Zusammenhang gilt:  
 $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ , wobei  $x_1$  und  $x_2$  die Lösungen der Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  sind! (L)
- 8.\* Gibt es quadratische Gleichungen der Form  $x^2 + px + q = 0$ , bei denen eine der Lösungen mit  $p$ , die andere mit  $q$  übereinstimmt?

## 12 Lösen von Gleichungen, die auf eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ zurückgeführt werden können

Wenn man weiß, wie man eine quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  löst, kann man bereits jede quadratische Gleichung lösen.

- 57 Bringen Sie die folgenden Gleichungen auf die Normalform!

$$\text{a) } \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} = 0 \quad \text{b) } -2x^2 + 12x - 10 = 0$$

- 58 a) Stellen Sie die folgenden drei Funktionen im Intervall  $0 \leq x \leq 6$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) in ein und demselben Koordinatensystem graphisch dar!

$$(1) \ y = x^2 - 6x + 5 \quad (2) \ y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \quad (3) \ y = -2x^2 + 12x - 10$$

- b) Lesen Sie die Nullstellen aller drei Funktionen aus der Zeichnung ab, und begründen Sie das Ergebnis!

Um die Nullstellen der drei Funktionen von Auftrag C 58 zu berechnen, hat man, wie wir wissen, die folgenden drei Gleichungen zu lösen:

$$(1) \ x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (2) \ \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} = 0 \quad (3) \ -2x^2 + 12x - 10 = 0$$

Diese drei Gleichungen sind im Bereich der reellen Zahlen einander äquivalent. Die Normalform für (2) und (3) ist (1). Die Gleichung  $x^2 - 6x + 5 = 0$  hat die Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 5$ . Die Nullstellen jeder der drei Funktionen sind somit  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 5$ .

Damit ist bereits gezeigt, wie man bei quadratischen Gleichungen, die nicht in Normalform gegeben sind, vorgehen kann: Durch äquivalentes Umformen wird die Normalform hergestellt. Der weitere Lösungsweg ist bekannt.

- 14 Um die Lösungsmenge der Gleichung

$-5x^2 + 120x - 700 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) zu ermitteln, geht man wie folgt vor:

– Normalform herstellen:  $-5x^2 + 120x - 700 = 0 \quad | : (-5)$   
 $x^2 - 24x + 140 = 0$

– Lösungsformel anwenden:  $x_{1,2} = 12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 140}$   
 $x_{1,2} = 12 \pm \sqrt{4}$   
 $x_{1,2} = 12 \pm 2$   
 $x_1 = 14$   
 $x_2 = 10$

– Probe in der Ausgangsgleichung durchführen:

Probe für  $x_1$ :  $14 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -5 \cdot 14^2 + 120 \cdot 14 - 700 &= 0 \\ -980 + 1680 - 700 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{wahr} \end{aligned}$$

Probe für  $x_2$ :  $10 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -5 \cdot 10^2 + 120 \cdot 10 - 700 &= 0 \\ -500 + 1200 - 700 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{wahr} \end{aligned}$$

– Lösungsmenge angeben:  $L = \{10; 14\}$

- 59 Berechnen Sie die Lage des Turmes beim Leipziger Alten Rathaus! ( $\rightarrow$  S. 131)
- 15 Die Gleichung  $(2x + 3)(2x - 3) = 6x + 112$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist zu lösen. Die Lösungen sind mit drei zuverlässigen Ziffern anzugeben.

$$\begin{aligned} - \text{Normalform herstellen: } 4x^2 - 9 &= 6x + 112 \\ 4x^2 - 6x - 121 &= 0 \\ x^2 - 1,5x - 30,25 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{Lösungsformel anwenden: } x_{1,2} &= 0,75 \pm \sqrt{0,75^2 + 30,25} \\ (\text{Taschenrechner benutzen}) \quad x_{1,2} &= 0,75 \pm 5,5509008 \\ x_1 &= 6,30 \\ x_2 &= -4,80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{Probe für } x_1: \quad (2 \cdot 6,30 + 3)(2 \cdot 6,30 - 3) &= 6 \cdot 6,30 + 112 \\ &149,76 \approx 149,80 \\ \text{für } x_2: [2 \cdot (-4,80) + 3][2 \cdot (-4,80) - 3] &= 6 \cdot (-4,80) + 112 \\ &83,16 \approx 83,20 \end{aligned}$$

Lösungen:  $x_1 = 6,30$  und  $x_2 = -4,80$

- 16 Es ist die Lösungsmenge der folgenden Gleichung im größtmöglichen Grundbereich gesucht:

$$\frac{x+8}{x-1} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{x^2+21x+14}{(x-1)(x+3)}$$

Der größtmögliche Grundbereich ist der Bereich der reellen Zahlen mit Ausnahme von 1 und  $-3$ . Diese Zahlen sind wegen der in der Gleichung auftretenden Nenner auszuschließen.

Durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit  $(x-1)(x+3)$  erhält man für  $x \neq 1, x \neq -3$  eine zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} (x+8)(x+3) - (x-4)(x-1) &= x^2 + 21x + 14 \\ x^2 + 11x + 24 - x^2 + 5x - 4 &= x^2 + 21x + 14 \\ x^2 + 5x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsformel führt auf  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -6$ . Da die Zahl 1 nicht zum Grundbereich gehört, ist die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung somit  $L = \{-6\}$ .

## Aufgaben

Lösen Sie die folgenden Gleichungen im größtmöglichen Grundbereich!

- a)  $5x^2 - 10x - 315 = 0$       b)  $-2x^2 + 28x + 550 = 0$       c)  $3x^2 + 17x - 6 = 0$   
 d)  $6x^2 - 3x = 30$       e)  $20x^2 = 7x + 3$       f)  $8x^2 - 1 = 2x$
- a)  $2x^2 + 6x + 9 = 0$       b)  $0,5x^2 - 17x + 144,5 = 0$   
 c)  $12x^2 - 24x + 60 = 0$       d)  $28x + 50 = -4x^2$
- a)  $4x^2 + 10x = -4$       b)  $2x^2 + 2 = 5x$       c)  $2,5x^2 - 4,5 = 6x$   
 d)  $-3x^2 + 12x - 3 = 0$       e)  $-1,5x^2 - 1,5x = -1,5$       f)  $17x^2 - 12x = 28$
- a)  $20x^2 + 4 = 30x^2 - 16$       b)  $8x^2 - 1 = 6x^2 + 1$       c)  $2x^2 - 5,6 = 4,08$   
 d)  $0,3x^2 = 0,6x$       e)  $49x = -7x^2$       f)  $\frac{3}{8}x^2 = -\frac{3}{4}x$

<sup>1)</sup> Der größtmögliche Grundbereich der neuen Gleichung ist umfassender als der der Ausgangsgleichung.

5. ↑ a)  $(2x - 1)(3x + 4) = 7(2 - x)$  b)  $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 20x - 9$   
 c)  $(x - 8)(3x + 9) - (2x + 4)(x - 5) = 0$  d)  $(2x - 5)^2 - (x - 6)^2 = 80$
6. ↑ a)  $(7 + x)(9 - x) + (7 - x)(9 + x) = 76$  b)  $(x + 3)^2 - (x + 1)^2 = 1 + (x + 2)^2$   
 c)  $(4x - 3)(x + 2) - (3x + 2)(x - 3) = 0$  d)  $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 - 6x^2 = 0$
7. ↑ a)  $4x^2 - 9x + 15 = 0$  b)  $(3x - 1)(x + 2) = 5(x - 4)$   
 c)  $(2x - 1)^2 - (2x - 1)(2x + 1) = 3(-1 - x)^2$  d)  $x - 2 = \frac{-4}{x + 1}$
8. ↑ a)  $\frac{(x + 2)^2}{2} - \frac{(x - 5)^2}{3} = 0$  (L) b)  $-\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x + 5}{6}$  (L)  
 c)  $2x + \frac{30}{x} = 16$  (L) d)  $\frac{4}{x} - \frac{x}{4} = \frac{8}{x} - \frac{3x}{4}$  (L)  
 e)  $\frac{9}{x - 2} - 5 = \frac{4}{x - 7}$  (L) f)  $\frac{x}{x + 2} + \frac{x}{x - 2} = -2$  (L)
9. ↑ a)  $\frac{3}{x} + \frac{4}{x - 2} = \frac{3}{x - 4}$  (L) b)  $\frac{x - 1}{x - 2} + \frac{x - 3}{x - 4} = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x - 2)(x - 4)}$  (L)  
 c)  $\frac{x - 1}{x - 2} + \frac{x - 3}{x - 4} = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x - 2)(x - 4)}$  (L) d)  $1 - \frac{2}{x + 1} = \frac{2x^2 - 14}{x^2 - 1} - \frac{6}{x - 1}$  (L)  
 e)  $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1}$  (L) f)  $\frac{2x}{x - 5} - \frac{x^2 + 8x}{x^2 - 25} = \frac{-4x}{x + 5}$  (L)

10. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen rechnerisch diejenigen Argumente, denen der Funktionswert 12 zugeordnet ist!  
 a)  $y = x^2 - 6x + 5$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) b)  $y = x^2 + 2x - 3$  ( $x \in \mathbb{R}$ )
11. Gegeben ist die quadratische Gleichung  $x^2 - 4x + 3 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Zur Überprüfung der gefundenen Lösungen ( $x_1 = 3$  und  $x_2 = 1$ ) zeichnet jemand die Bilder der Funktionen  $y = x^2$  und  $y = 4x - 3$  und ermittelt die Abszissen ihrer Schnittpunkte. Er findet die Werte 1 und 3 und sieht dies als Bestätigung der rechnerisch gefundenen Lösungen an. Ist das gerechtfertigt?
- 12.\* Gegeben ist die Gleichung  $x^3 + 2x^2 - 24x = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Man kann diese Gleichung auf folgende Weise lösen: Man klammert  $x$  aus, erhält  $x(x^2 + 2x - 24) = 0$  und folgert daraus:  $x = 0$  oder  $x^2 + 2x - 24 = 0$ . Diese beiden Gleichungen kann man lösen, und man erhält somit die Lösungen der gegebenen Gleichung. Begründen Sie dieses Vorgehen! Geben Sie weitere Gleichungen dritten Grades an, die Sie nach dieser Methode lösen können!
- 13.\* Gegeben ist die Gleichung  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Um diese Gleichung zu lösen, kann man wie folgt vorgehen: Man setzt anstelle von  $x^2$  die Variable  $z$ , also  $x^2 = z$ ,  $x^4 = z^2$ . Dann löst man die quadratische Gleichung  $z^2 - 5z + 4 = 0$  und findet die Lösungen  $z_1 = 1$  und  $z_2 = 4$ . Daraus ergibt sich  $x^2 = z_1$  bzw.  $x^2 = z_2$ .  $x^2 = 1$  hat die Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$ ,  $x^2 = 4$  hat die Lösungen  $x_3 = 2$  und  $x_4 = -2$ . Damit hat man die Lösungen der Ausgangsgleichung gefunden. Begründen Sie dieses Vorgehen! Überlegen Sie, ob eine derartige Gleichung auch weniger als vier Lösungen haben kann!
- 14.\* Lösen Sie das folgende Gleichungssystem! (L)  
 (I)  $x + 2y = 20$  ( $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ )  
 (II)  $x \cdot y = 32$

## 13 Lösen quadratischer Gleichungen, die Fallunterscheidungen erfordern

- 60 Lösen Sie die folgenden Gleichungen bez.  $x$  auf! Beachten Sie, daß in Abhängigkeit von den Variablen  $a$ ,  $b$  bzw.  $c$  verschiedene Fälle nötig sind!

a)  $a + x = b$  ( $x \in \mathbb{N}$ ;  $a, b \in \mathbb{N}$ )

b)  $a \cdot x = b$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ )

c)  $|x| = c$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $c \in \mathbb{R}$ )

In den Gleichungen im Auftrag C 60 treten neben der Variablen  $x$  weitere Variablen auf. Beim Lösen derartiger Gleichungen sind im allgemeinen Fallunterscheidungen erforderlich. Dies gilt auch für quadratische Gleichungen. Beim Herleiten der Lösungsformel für die Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  hatten wir das bereits zu beachten (→ S. 136f.).

- 17 Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung  $x^2 + 4x + k = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $k \in \mathbb{R}$ ) in Abhängigkeit von  $k$ . (Eine Probe wird nicht verlangt.)

Man setzt 4 für  $p$  und  $k$  für  $q$  in die Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - k}$$

Für die Diskriminante  $D = 4 - k$  kommen genau drei Fälle in Frage:

1. Fall:  $D > 0$ ;  $4 - k > 0$  bzw.  $k < 4$

Für alle  $k < 4$  hat die Gleichung  $x^2 + 4x + k = 0$  zwei voneinander verschiedene Lösungen. Die Lösungsmenge ist  $L = \{-2 + \sqrt{4 - k}; -2 - \sqrt{4 - k}\}$ .

2. Fall:  $D = 0$ ;  $4 - k = 0$  bzw.  $k = 4$

Für  $k = 4$  hat die Gleichung genau eine Lösung. Die Lösungsmenge ist  $L = \{-2\}$ .

3. Fall:  $D < 0$ ;  $4 - k < 0$  bzw.  $k > 4$ .

Für alle  $k > 4$  hat die Gleichung keine Lösungen. Es ist  $L = \emptyset$ .

- 61 Geben Sie für jeden der drei Fälle im Beispiel C 17 selbst ein Beispiel an, und bestimmen Sie die Lösungsmengen Ihrer Gleichungen!

- 18 Es ist die Gleichung  $x^2 + 2ax + 9 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $a \in \mathbb{R}$ ) in Abhängigkeit von  $a$  zu lösen. (Eine Probe wird nicht verlangt.)

Wir setzen in die Lösungsformel  $2a$  für  $p$  und  $9$  für  $q$  ein:

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 9}$$

Für die Diskriminante  $D = a^2 - 9$  kommen wiederum genau drei Fälle in Frage:

1. Fall:  $D > 0$ ;  $a^2 - 9 > 0$  bzw.  $a^2 > 9$  bzw.  $|a| > 3$ . Für alle  $|a| > 3$  hat die Gleichung also zwei Lösungen. Die Lösungsmenge ist

$$L = \{-a + \sqrt{a^2 - 9}; -a - \sqrt{a^2 - 9}\}.$$

2. Fall:  $D = 0$ ;  $a^2 - 9 = 0$  bzw.  $a^2 = 9$ , d. h.  $a = 3$  oder  $a = -3$ .

Für  $a = 3$  und für  $a = -3$  hat die Gleichung genau eine Lösung.

Für  $a = 3$  ist die Lösungsmenge  $L = \{-3\}$ .

Für  $a = -3$  ist die Lösungsmenge  $L = \{3\}$ .

3. Fall:  $D < 0$ ;  $a^2 - 9 < 0$  bzw.  $a^2 < 9$  oder  $|a| < 3$ . Für alle  $|a| < 3$  hat die Gleichung keine Lösungen; die Lösungsmenge ist  $L = \emptyset$ .

- 62 a) Geben Sie für jeden der drei Fälle von Beispiel C 18 ein eigenes Beispiel an!  
b) Begründen Sie, warum man davon sprechen kann, daß man eine „Lösungsformel“ für alle Gleichungen  $x^2 + 2ax + 9 = 0$  gefunden hat!
- 63 a) Leiten Sie eine Lösungsformel für die quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ ) her, und zeigen Sie, daß für  $a = 1$  die bekannte Lösungsformel entsteht!  
b) Geben Sie einen Ablaufplan für den Schulrechner auf der Grundlage der Lösungsformel von a) an!<sup>1)</sup>

## Aufgaben

*Hinweis:* In den Aufgaben 1. bis 12.\* ist  $R$  der Grundbereich für alle auftretenden Variablen.

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen bezüglich  $x$ , und führen Sie dabei jeweils die notwendigen Fallunterscheidungen durch!  
a)  $x^2 + 2ax + b = 0$       b)  $ax^2 + b^2 = bx^2 + a^2$  (L)      c)  $(x + a)^2 = 2ax + b^2$
2. a) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung  $6x^2 - ax - a^2 = 0$  in Abhängigkeit von  $a$  an! (L)  
b) Geben Sie eine spezielle Gleichung dieser Form an, die die Lösungsmenge  $L = \left\{ \frac{1}{3}; -\frac{1}{2} \right\}$  hat! (L)
3. Gegeben ist die Gleichung  $x^2 - 2ax = 0$   
a) Geben Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung in Abhängigkeit von  $a$  an!  
b) Geben Sie zwei spezielle Gleichungen dieser Form an!  
c) Für welchen Wert von  $a$  entsteht diejenige spezielle Gleichung, die die Lösungsmenge  $L = \{0; -6\}$  hat?
4. Gegeben ist die Gleichung  $x^2 + 2x - r = 0$ .  
a) Geben Sie die Lösungsmenge dieser Gleichung in Abhängigkeit von  $r$  an!  
b) Geben Sie zwei spezielle Gleichungen dieser Form an, die je zwei ganzzahlige Lösungen haben!
5. a) Für welche reellen Zahlen  $v$  hat die quadratische Gleichung  $x^2 - 6x + v = 0$  zwei, eine, keine Lösungen?  
b) Geben Sie für jeden Fall eine spezielle Gleichung an!
6. a) Für welche reellen Zahlen  $r$  hat die quadratische Gleichung  $x^2 + 4rx + 100 = 0$  zwei, eine, keine Lösungen?  
b) Geben Sie für jeden Fall eine spezielle Gleichung an!
7. Für welche Werte von  $a$  hat die quadratische Gleichung  $x^2 + 2x + a^2 = 0$  ganzzahlige Lösungen?
8. In der Gleichung  $x^2 - 8x + q = 0$  soll  $q$  so gewählt werden, daß die Gleichung zwei verschiedene gerade natürliche Zahlen als Lösungen hat!
9. a) Gibt es eine Zahl  $p$ , für die die Gleichung  $x^2 + px - 25 = 0$  zwei entgegengesetzte Zahlen als Lösungen hat?  
b) Gibt es quadratische Gleichungen  $x^2 + px + q = 0$ , deren Lösungen zueinander entgegengesetzte Zahlen sind, obwohl  $p \neq 0$  ist?

<sup>1)</sup> Beim häufigen Lösen quadratischer Gleichungen der Form  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$ ) mit dem Taschenrechner wird man diese Lösungsformel bevorzugen.

- 10.\* Begründen Sie, daß jede Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  für negatives  $q$  stets Lösungen hat!
- 11.\* Begründen Sie, daß die Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) stets Lösungen hat, wenn  $a$  und  $c$  verschiedene Vorzeichen haben! (L)
- 12.\* Beweisen Sie: Alle Funktionen mit einer Gleichung der Form  $y = x^2 + px + 2$  haben genau dann zwei Nullstellen, wenn  $\left|\frac{p}{2}\right| > \sqrt{2}$  ist. (L)

## 14 Sach- und Anwendungsaufgaben

- 64 Der Flächeninhalt eines Rechteckes, dessen Seitenlängen sich um 4 cm unterscheiden, beträgt  $1152 \text{ cm}^2$ . Welche Seitenlängen hat das Rechteck?
- 19 Eine Sehne eines Kreises hat vom Mittelpunkt des Kreises den Abstand  $a = 4 \text{ cm}$ . Sie ist um 1 cm länger als der Radius des Kreises. Wie lang ist dieser?

### 1. Erfassen des Sachverhaltes:

Skizze: Radius:  $r = x \text{ cm}$  ( $x \in \mathbb{R}; x > 0$ )  
Sehne:  $s = (x + 1) \text{ cm}$

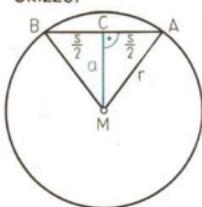


Bild C 20

- Das Dreieck  $MAB$  ist gleichschenkelig, das Dreieck  $MAC$  ist rechtwinklig.
2. *Aufstellen einer Gleichung:*  
 Nach dem Satz des Pythagoras gilt im Dreieck  $MAC$ :

$$a^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2$$

$$(4 \text{ cm})^2 + \left(\frac{x+1}{2} \text{ cm}\right)^2 = (x \text{ cm})^2$$

### 3. Lösen der Gleichung:

$$4^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}; x > 0)$$

$$16 + \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = x^2$$

$$3x^2 - 2x - 65 = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{65}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{65}{3}}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -\frac{13}{3}$$

## 4. Probe:

Die Zahlen 5 und  $-\frac{13}{3}$  lösen die quadratische Gleichung für  $x \in \mathbb{R}$ ;  $-\frac{13}{3}$  entfällt aber wegen des gegebenen Sachverhalts (siehe Grundbereich!).

So kommt als Radius nur  $r = 5$  cm in Frage. Die um 1 cm längere Sehne  $s = 6$  cm hat vom Mittelpunkt des Kreises den Abstand  $a = 4$  cm, denn es gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$(5 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2 = (4 \text{ cm})^2 \quad \text{wahr}$$

## 5. Antwortsatz: Der Radius des Kreises beträgt 5 cm.

- 65 a) Wie hätte man sich ohne Rechnung vorher überlegen können, daß es (genau) eine Lösung gibt?  
 b) Zeigen Sie, daß die Aufgabenstellung im Beispiel C 19 für jedes beliebige  $a$  genau eine Lösung liefert!
- 20 Die Eigengeschwindigkeit eines Schiffes betrage  $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Für einen Weg von 45 km benötigt das Schiff gegen die Strömung eine um 0,5 h längere Fahrzeit, als wenn es mit der Strömung fährt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Strömung!

1. Die Bewegung kann als gleichförmig angenommen werden; es ist also

$$s = v \cdot t$$

( $s$  – Weg;  $v$  – Geschwindigkeit;  $t$  – Zeit).

Die Geschwindigkeit des Schiffes ist

$$v_1 = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Die Geschwindigkeit der Strömung sei

$$v_2 = x \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \quad (x \in \mathbb{R}; 0 < x < 30).$$



Fahrtrichtung	Weg $s$	Geschwindigkeit $v$	Zeit $t = \frac{s}{v}$
mit der Strömung	45 km	$v_1 + v_2 = (30 + x) \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$\frac{45}{30 + x} \text{ h}$
gegen die Strömung	45 km	$v_1 - v_2 = (30 - x) \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$	$\frac{45}{30 - x} \text{ h}$

2. Man weiß ferner, daß die Fahrzeit bei der Fahrt gegen die Strömung um 0,5 h länger ist als bei der Fahrt mit der Strömung.

$$\frac{45}{30 - x} \text{ h} = \frac{45}{30 + x} \text{ h} + 0,5 \text{ h}$$

$$3. \quad \frac{45}{30-x} = \frac{45}{30+x} + 0,5 \quad | \cdot (30-x)(30+x)$$

$$45(30+x) = 45(30-x) + 0,5(30-x)(30+x)$$

$$1350 + 45x = 1350 - 45x + 450 - 0,5x^2$$

$$0,5x^2 + 90x - 450 = 0$$

$$x^2 + 180x - 900 = 0$$

$$x_{1,2} = -90 \pm \sqrt{90^2 + 900}$$

$$x_1 \approx -90 + 95 \quad x_1 \approx 5$$

$$x_2 \approx -90 - 95 \quad x_2 \approx -185$$

Nebenrechnung (mit dem Taschenrechner):

$$\sqrt{9000} = 94,86833$$

entfällt (siehe Grundbereich!)

4. Bei einer Geschwindigkeit von rund  $(30+5) \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  dauert die Fahrt  $(45:35) \text{ h} \approx 1,3 \text{ h}$ . Bei einer Geschwindigkeit von rund  $(30-5) \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  dauert die Fahrt  $(45:25) \text{ h} = 1,8 \text{ h}$ . Die Differenz der Fahrzeiten beträgt also rund  $0,5 \text{ h}$ .
5. Die Geschwindigkeit der Strömung beträgt rund  $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

## Aufgaben

- Die Summe der Quadrate von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen betrage 630. Berechnen Sie die betreffenden Zahlen! Wieviel Möglichkeiten gibt es?
- Die Zahl 28 soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß ihr Produkt 192 beträgt. Berechnen Sie die Summanden!
- Der Nenner eines Bruches ist um 2 größer als der Zähler. Addiert man zum Zähler 7 und subtrahiert vom Nenner 6, so wird der Bruch sechsmal so groß. Welcher Bruch ist es?  
(Zähler und Nenner sollen natürliche Zahlen sein.)
- Addiert man zum Quadrat einer gewissen natürlichen Zahl die nächstgrößere Quadratzahl, so erhält man 613. Wie heißt die Zahl?
- Bei einem Tischtenniswettkampf spielt jeder Teilnehmer gegen jeden. Es werden insgesamt 66 Spiele ausgetragen. Wieviel Schüler nahmen an dem Wettkampf teil?
- \* In einem konvexen Vieleck sind alle möglichen Diagonalen gezogen, und zwar 14. Wie viele Seiten hat dieses Vieleck? (L)
- In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Hypotenuse 25 cm lang. Eine Kathete sei 5 cm länger als die andere. Berechnen Sie die Länge der Katheten!
- In einem rechtwinkligen Dreieck von 36 mm Höhe ist die Hypotenuse 78 mm lang. In welchem Verhältnis wird die Hypotenuse durch den Höhenfußpunkt geteilt?
- Verlängert man bei einem bestimmten Quadrat die eine Seite um 1 cm, während man die andere um 2 cm verkürzt, so erhält man ein Rechteck mit  $54 \text{ cm}^2$  Flächeninhalt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des gegebenen Quadrates!
- Der Umfang eines Rechtecks beträgt 142 cm, sein Flächeninhalt  $1170 \text{ cm}^2$ . Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?
- Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen längste und kürzeste Seite sich um 6 cm unterscheiden, beträgt 30 cm. Wie lang sind die Dreiecksseiten?

12. In einem Drachenviereck mit zwei rechten Winkeln sind die beiden Diagonalen 4,8 cm und 6,0 cm lang. In welche Abschnitte wird die längere der beiden Diagonalen durch den Diagonalschnittpunkt zerlegt?
13. Eine Schar Affen vergnügt sich. Der achte Teil des unruhigen Haufens zum Quadrat erhoben turnt in den Bäumen herum. Die restlichen 12 vollführen alle zugleich ein Geschrei auf dem Gipfel des Hügels. Wieviel Affen zählt die aufgeregte Schar? [Diese Aufgabe stammt wahrscheinlich vom Inder BHASKARA (um 1150 u. Z.).]



- 14.\* Ein Großvater sagt: Vor zwei Jahren war ich gerade 10mal so alt wie man ältester Enkel. Sollte mir noch ein weiteres Dutzend Jahre vergönnt sein, so würde bis dahin das Verhältnis unserer Jahre auf die Hälfte des heutigen Wertes sinken. Wie alt ist der Großvater? (L)
15. Zwei Brigaden verrichten eine Arbeit gemeinsam in 10 Stunden. Die erste Brigade würde allein für diese Arbeit zwei Stunden weniger als die zweite Brigade benötigen. In welcher Zeit könnte jede der zwei Brigaden die Arbeit allein schaffen?
16. Ein Arbeiter erzeugt durch bessere Arbeitsorganisation jetzt stündlich 3 Werkstücke mehr als bisher, so daß er nach der Herstellung von 720 Werkstücken einen achtstündigen Arbeitstag eingespart hat. Wieviel Werkstücke stellte der Arbeiter früher in 1 Stunde her?
17. Eine Schulklasse hat 880 M für eine Klassenfahrt gespart. Wegen Krankheit können 2 Schüler nicht an der Fahrt teilnehmen. Dadurch kann jeder der übrigen Schüler 4 M mehr verbrauchen. Wieviel Schüler gehören zur Klasse?
18. Ein Buch enthält 20000 Zeilen. Jede Seite hat die gleiche Anzahl von Zeilen. Würde das Buch in einem Format gedruckt werden, das jeweils 10 Zeilen mehr auf einer Seite hat (bei gleicher Zeilenlänge), dann würde sich die Seitenzahl um 100 vermindern. Wieviel Zeilen sind auf jeder Seite, und wie viele Seiten hat das Buch?
19. Für eine elektrische Anlage benötigt man zwei Widerstände, die hintereinander geschaltet einen Gesamtwiderstand von  $40 \Omega$  und parallel geschaltet einen Gesamtwiderstand von  $7,5 \Omega$  ergeben sollen. Wie groß hat man die Widerstände zu wählen?

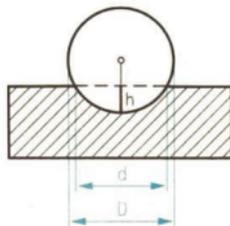


Bild C 21

20. Beim Ermitteln der Härte eines Werkstückes mit Hilfe der Brinellschen Kugeldruckprobe wird eine kleine Stahlkugel (Durchmesser  $D$ ) mit einer bestimmten Kraft in den zu prüfenden Gegenstand eingedrückt. Aus dem leicht zu messenden Durchmesser  $d$  des Eindrucks und dem Kugeldurchmesser  $D$  wird die Eindringtiefe  $h$  berechnet, die zur Berechnung der Härtezahl benötigt wird. Berechnen Sie  $h$  für  $D = 10$  mm und  $d = 6$  mm! (→ Bild C 21)
- 21.\* Ein Flugzeug benötigt für eine 50 km lange Prüfstrecke mit Wind und gegen den Wind zusammen eine Flugzeit von 9,5 min. Die Windgeschwindigkeit beträgt  $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges!
- 22.\* Zwei Orte A und B liegen 300 km voneinander entfernt. Um 9.00 Uhr fährt in A ein Güterzug ab, der sich auf der Hälfte der Strecke mit einem Schnellzug trifft, der um 10.00 Uhr in B abgefahren ist. Die Geschwindigkeit des Schnellzuges ist um  $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  größer als die des Güterzuges. Wann treffen sich die Züge?
- 23.\* Ein Motorboot legt in 22 min eine Strecke von 12 km zweimal zurück, und zwar einmal stromaufwärts und das zweite Mal stromabwärts. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Bootes, wenn die Strömungsgeschwindigkeit  $100 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$  beträgt!

## Potenzfunktionen

### 15 Zur Wiederholung

#### Aufgaben

- Formen Sie die gegebenen Terme so um, daß keine negativen Exponenten mehr auftreten!  
 a)  $ab^{-1}$     b)  $z^{-3}$     c)  $\frac{a^{-3}b^2}{a^{-4}}$     d)  $u^0v^{-2}$
- Wenden Sie auf folgende Terme jeweils geeignete Potenzgesetze an!  
 a)  $a^2b^{-3} \cdot a^{-5}b^6$     b)  $\left(\frac{2a^2}{3b^4}\right)^5$     c)  $\left(\frac{a-b}{4a^2}\right)^2$     d)  $\frac{20^3}{5^3}$     e)  $\frac{(6a^3)^2}{2a^2}$     f)  $\frac{u^{-8}v}{u^{-9}v^2}$
- Schreiben Sie als Wurzell!  
 a)  $a^{\frac{2}{3}}$     b)  $z^{-\frac{5}{6}}$     c)  $32^{\frac{1}{5}}$
- Schreiben Sie als Potenz mit rationalem Exponenten!  
 a)  $\sqrt{x^3}$     b)  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$     c)  $a\sqrt[3]{a}$
- Berechnen Sie ohne Taschenrechner bzw. Tafelwerk!  
 a)  $\sqrt{25 \cdot 36}$     b)  $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$     c)  $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$
- \* Zerlegen Sie die Radikanden so in Faktoren, daß sich aus einem dieser Faktoren die Wurzel im Kopf ziehen läßt!  
 a)  $\sqrt{50}$     b)  $\sqrt[3]{81}$     c)  $\sqrt[5]{a^7}$

7. In größeren LKW sind Fahrten-schreiber eingebaut. Sie zeichnen u. a. zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Geschwindigkeit  $v$  des Fahrzeuges auf. Solch ein  $v$ - $t$ -Diagramm ist im Bild C 22 dargestellt. Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen die Geschwindigkeit
- a) wächst, b) fällt, c) konstant ist!

Bild C 22



8. Das Bild 23 zeigt den Graphen einer Funktion  $y = f(x)$  mit  $-6 \leq x \leq 5$ .
- a) Geben Sie die Intervalle an, in denen die Funktion wächst bzw. in denen sie fällt!
- b) Für welche Argumente sind die Funktionswerte positiv, für welche sind sie negativ?
- c) Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion an!
- d) Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion!

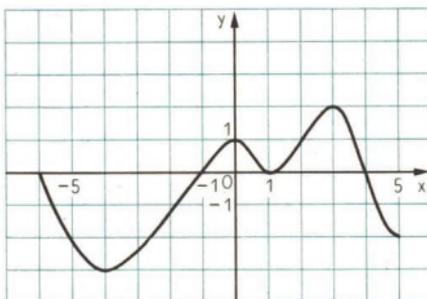


Bild C 23

9. Zeichnen Sie die Graphen der gegebenen Funktion, und ermitteln Sie
- Wertebereich,
  - Nullstellen,
  - Intervalle, in denen die Funktion monoton wächst bzw. monoton fällt,
  - Quadranten des Koordinatensystems, durch die der Graph der Funktion verläuft,
  - ggf. die Symmetrieachse des Graphen!
- a)  $y = (x - 1,5)^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ )      b)  $y = x^2 + 3x - 2$  ( $x \in \mathbb{R}$ )
- c)  $y = -x^2 + x + 6$  ( $x \in \mathbb{R}; x > 0$ )      d)  $y = |x| + 2$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

## 16 Die Funktion $y = x^3$ ( $x \in \mathbb{R}$ ); der Begriff „Potenzfunktion“

- 66 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $y = x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), und sprechen Sie über Eigenschaften dieser Funktion!

Sie haben die Funktion  $y = x^2$  als einfachstes Beispiel einer quadratischen Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ) kennengelernt ( $\rightarrow$ S. 114). Ersetzt man nun in der Gleichung  $y = x^2$  den Exponenten 2 durch die Zahl 3, so erhält man die Gleichung einer von uns bisher noch nicht untersuchten Funktion:  $y = x^3$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Diese Funktion ordnet jeder reellen Zahl  $x$  ihre *dritte Potenz*  $x^3$  zu.

- 67 a) Stellen Sie mit Hilfe des Taschenrechners eine Wertetabelle für die Funktion  $y = x^3$  ( $x \in \mathbb{R}$ ;  $-2,5 \leq x \leq 2,5$ ) auf, und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion!
- b) Ermitteln Sie Eigenschaften der Funktion  $y = x^3$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), und stellen Sie diese den Eigenschaften von  $y = x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) gegenüber!

Der Graph der Funktion  $y = x^3$  ( $x \in \mathbb{R}$ )<sup>1)</sup> besitzt keine Symmetrieachse; er ist nicht axialsymmetrisch (→ Bild C 24). Aber bei einer Drehung um den Koordinatenursprung mit dem Drehwinkel  $180^\circ$  wird dieser Graph auf sich selbst abgebildet. Er ist *zentralsymmetrisch* bezüglich des Koordinatenursprungs. In dieser Eigenschaft des Graphen von  $y = x^3$  kommt zum Ausdruck, daß zu einander entgegengesetzten Argumenten einander entgegengesetzte Funktionswerte gehören: Der Funktionswert von  $-x$  ist immer entgegengesetzt zum Funktionswert von  $x$ , d. h.  $f(-x) = -f(x)$ .

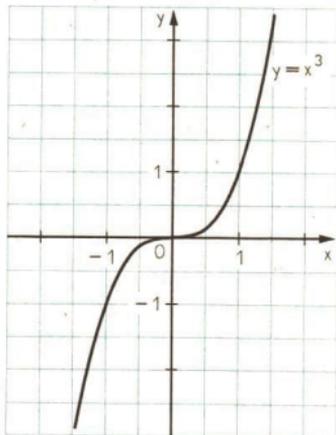


Bild C 24

- 68 Begründen Sie entsprechend die Axialsymmetrie des Graphen der Funktion  $y = x^2$  bez. der  $y$ -Achse!
- 69 Für welche der Funktionen  $y = x^2 - 1$ ,  $y = x$ ,  $y = x + 1$  bzw.  $y = |x|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist der Graph
- zentralsymmetrisch bez. des Koordinatenursprungs,
  - axialsymmetrisch bez. der  $y$ -Achse?

Auch  $y = x^4$ ,  $y = x^{-2}$ ,  $y = x^{\frac{1}{3}}$  usw. sind – bei geeignet festgelegtem Definitionsbereich – Gleichungen von Funktionen.

*Allgemein gilt:* Beim Potenzieren mit einem bestimmten Exponenten  $n$  wird jeder reellen Zahl  $x$ , die als Basis auftritt, eindeutig eine reelle Zahl  $y$  als Potenz zugeordnet. Alle dabei entstehenden Paare reeller Zahlen erfüllen die Gleichung  $y = x^n$ .

Eine Funktion mit einer Gleichung der Form  $y = x^n$ , die  $\mathbb{R}$  oder auch eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  als Definitionsbereich hat, heißt **Potenzfunktion**. Dabei ist  $n$  jeweils eine fest vorgegebene rationale Zahl.

- 70 Welche der folgenden Funktionen sind keine Potenzfunktionen?
- |                                     |   |                                      |
|-------------------------------------|---|--------------------------------------|
| a) $y = x^5$ ( $x \in \mathbb{R}$ ) | b) $y = x$ ( $x \in \mathbb{Q}$ )                       | c) $y =  x $ ( $x \in \mathbb{R}$ )  |
| d) $y = 3^x$ ( $x \in \mathbb{R}$ ) | e) $y = x^{-\frac{1}{3}}$ ( $x \in \mathbb{R}, x > 0$ ) | f) $y = 3x^2$ ( $x \in \mathbb{R}$ ) |

<sup>1)</sup> Dieser Graph wird auch als *kubische Parabel* bezeichnet.

Bei der Festlegung des Definitionsbereichs für eine Potenzfunktion ist zu beachten, für welche reellen Zahlen die betreffenden Potenzen definiert sind. Deshalb interessiert man sich für die größtmögliche (das heißt: die umfassendste) Menge von reellen Zahlen, die als Definitionsbereich überhaupt in Frage kommt.

*Wir vereinbaren:* Ist von einer Potenzfunktion nur ihre Gleichung angegeben, so soll ihr Definitionsbereich diese größtmögliche Menge reeller Zahlen sein.

- 71 Begründen Sie: Der Definitionsbereich einer Potenzfunktion mit der Gleichung

$y = x^{-1}$  ( $y = x^{\frac{1}{3}}$ ) kann nur eine solche Menge von reellen Zahlen sein, die die Null nicht enthält (die keine negativen Zahlen enthält)!

- 72 Geben Sie die größtmögliche Menge von reellen Zahlen an, die als Definitionsbereich einer Potenzfunktion mit der Gleichung a)  $y = x^4$ , b)  $y = x^{-2}$ ,

c)  $y = x^{\frac{1}{2}}$ , d)  $y = x^0$  in Frage kommt!

## Aufgaben

1. Zeichnen Sie mit Hilfe der entsprechenden Schablone den Graphen der Funktion  $y = x^3$ , und lesen Sie die in der folgenden Tabelle fehlenden Argumente bzw. Funktionswerte ab!

x	-1,8			-1,3		-0,5		0,8	1,0			
y		-5,8	-4,2		-1,0		0			2,0	3,0	4,0

2. Bestimmen Sie anhand des Graphen von  $f(x) = x^2$
- die Menge aller  $x$  mit  $f(x) = 4$
  - einige Argumente  $x$ , für die  $f(x) > 4$
  - die Menge aller  $x$  mit  $f(x) > 4$ !
3. Vergleichen Sie unter Verwendung des Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$
- a)  $f(1,9)$  und  $f(2,2)$ , b)  $f(-2,8)$  und  $f(-1,4)$ ,  
 c)  $f(-3,1)$  und  $f(2,6)$ , d)  $f(-1,7)$  und  $f(2,4)$ ,  
 e)  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$ , wenn  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  und  $x_1 < x_2$ ,  
 f)  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$ , wenn  $x_1 < 0$ ,  $x_2 < 0$  und  $x_1 < x_2$ !
4. Zeichnen Sie in ein und dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Funktionen  $y = x$ ,  $y = x^2$  und  $y = x^3$  für  $0 \leq x \leq 2$ ! Vergleichen Sie anhand der Graphen:  $0,23$  und  $0,23^2$ ;  $1,47$  und  $1,47^2$ ;  $0,23$  und  $0,23^3$ ;  $1,47$  und  $1,47^3$ ;  $0,23^2$  und  $0,23^3$ ;  $1,47^2$  und  $1,47^3$ !
5. Wie ändern sich die Funktionswerte bei der Funktion a)  $f(x) = x^2$ , b)  $f(x) = x^3$ , wenn man von einem Argument  $x_0$  zu  $2x_0$ ,  $3x_0$ ,  $\frac{x_0}{2}$ ,  $\frac{x_0}{3}$ ,  $\frac{x_0}{10}$  übergeht? Beschreiben Sie die Änderungen von Argument und Funktionswert mit Worten!
6.  $\frac{7}{5}$  ist eine Lösung der Gleichung  $x^3 = \frac{343}{125}$ . Überprüfen Sie dies! Begründen Sie, daß  $\frac{7}{5}$  die einzige Lösung der gegebenen Gleichung ist! (Nutzen Sie die Monotonie von  $y = x^3$  aus!)

7. Auf welche Mengen bildet die Funktion  $y = x^2$  die folgenden Intervalle ab?  
 a)  $1 \leq x \leq 3$     b)  $-2 \leq x \leq 0$     c)  $-1 \leq x \leq 2$     d)  $-3 \leq x \leq 1$
8. a) Der Definitionsbereich der Funktion  $y = x^2$  sei eingeschränkt auf das Intervall  $-m \leq x \leq m$ . Der zugehörige Wertebereich sei das Intervall  $0 \leq y \leq 49$ . Bestimmen Sie  $m$ !  
 b) Der Definitionsbereich von  $y = x^2$  sei eingeschränkt auf das Intervall  $a \leq x \leq b$ , der zugehörige Wertebereich sei  $0 \leq y \leq 25$ . Warum lassen sich  $a$  und  $b$  hier nicht eindeutig bestimmen?
9. Bestimmen Sie die Grenzen  $a$  und  $b$  desjenigen Intervalls  $a \leq x \leq b$ , das durch die Funktion  $y = x^3$  auf das Intervall  $-8 \leq y \leq 125$  abgebildet wird! Warum läßt sich diese Aufgabe (im Gegensatz zu Aufgabe 8b) eindeutig lösen?
10. a) Stellen Sie die Volumina von Würfeln in Abhängigkeit von den Kantenlängen graphisch dar! Tragen Sie dazu auf der Abszissenachse (Einheit 2 cm) die Kantenlängen und auf der Ordinatenachse (Einheit 2 mm) die Volumina ab!  
 b) Ermitteln Sie mit Hilfe der graphischen Darstellung die folgenden Größen: Volumina zu den Kantenlängen 2,2 m; 0,7 cm; 3,5 dm; 1,3 mm; 2,8 cm; Kantenlängen zu den Volumina  $2 \text{ m}^3$ ;  $10 \text{ cm}^3$ ;  $25 \text{ dm}^3$ ;  $33 \text{ mm}^3$ ;  $50 \text{ cm}^3$ !
- 11.\* Skizzieren Sie den Graph der Funktion  $y = x^3$ , und gewinnen Sie daraus die Graphen von  $y = |x|^3$  und  $y = |x^3|$ !
- 12.\* Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen  $y = x^2$  und  $y = |x|^2$ !
- 13.\* Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen mit den Gleichungen  $y = f(x) = x^2$  und  $y = g(x) = x^3$  in ein gemeinsames Koordinatensystem, und ermitteln Sie die Lösungsmenge der Ungleichung  $x^3 < x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ )! (L)
- 14.\* Bestimmen Sie graphisch die Lösungsmengen der Ungleichungen  
 a)  $x^2 < x^3$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),    b)  $x^3 \leq x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),    c)  $x^3 > 2x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )!
- 15.\* a) Weisen Sie nach: Wenn  $y = f(x)$  eine Potenzfunktion ist, so gilt für beliebige Argumente  $x_1$  und  $x_2$  aus ihrem Definitionsbereich:  $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ !  
 b) Von drei Funktionen sind jeweils einige Wertepaare bekannt:

$\alpha)$ x	2	3	4	6
y	16	81	256	1296

$\beta)$ x	2	3	4	6
y	9	27	81	729

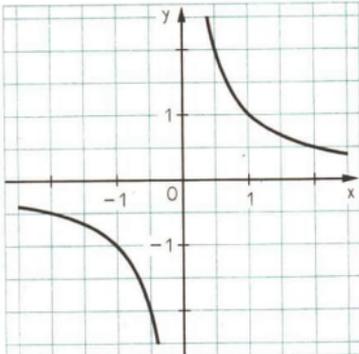
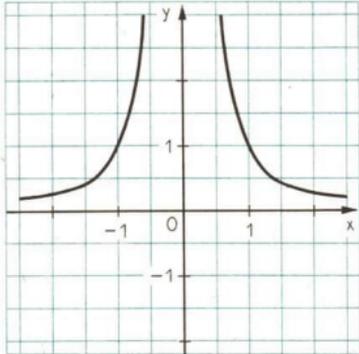
$\gamma)$ x	2	3	4	6
y	2,8284	5,1962	8,0000	14,6969

Eine dieser Funktionen kann keine Potenzfunktion sein. Welche?

## 17 Die Potenzfunktionen $y = x^{-1}$ und $y = x^{-2}$ ( $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ )

Nach Definition ist (für  $x \neq 0$ )  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  und  $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$  ( $\rightarrow$  S. 51).

- 73 Überlegen Sie, mit welchen Rechenablaufplänen man möglichst rationell Wertetabellen für die beiden Funktionen  $y = x^{-1}$  und  $y = x^{-2}$  aufstellen kann!
- 74 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen  $y = x^{-1}$  und  $y = x^{-2}$ ! Ermitteln Sie dazu mit Hilfe des Taschenrechners zunächst mindestens 20 Funktionswerte für  $-4 \leq x \leq 4$ ! Überlegen Sie dann, wie die Graphen außerhalb dieses Intervalls fortzusetzen sind!
- 75 Wie müßten in der folgenden Tabelle die Lücken ausgefüllt werden?

Funktionsgleichung	
$y = x^{-1}$	$y = x^{-2}$
Definitionsbereich	
Menge aller von Null verschiedenen reellen Zahlen	Menge aller von Null verschiedenen reellen Zahlen
Wertebereich	
_____	_____
Nullstellen	
keine	_____
Graph	
	

Lage des Graphen	
_____ und _____ Quadrant	_____ und _____ Quadrant
Monotonieverhalten	
Die Funktion ist _____ im Intervall $x < 0$ und auch im Intervall $x > 0$ .	Die Funktion ist _____ im Intervall $x < 0$ , sie ist _____ im Intervall $x > 0$ .
Symmetrie des Graphen	
Der Graph ist _____ symmetrisch bez. des Koordinatenursprungs.	Der Graph ist _____ symmetrisch bez. der $y$ -Achse.

Die Bilder der Funktionen  $y = x^{-1}$  und  $y = x^{-2}$  sind **Hyperbeln**. Sie deuten auf ein besonderes Verhalten der Funktionen für sehr große Argumente, für sehr kleine Argumente und für Argumente in der Nähe der Null hin. Im Falle sehr großer Argumente sind die Funktionswerte Zahlen in der Nähe der Null, sie sind aber niemals gleich Null. Dasselbe trifft für sehr kleine Argumente<sup>1)</sup> zu. Im Falle der Annäherung positiver Argumente an die Null wachsen die Funktionswerte und werden größer als jede noch so große Zahl. Bei der Annäherung negativer Argumente an die Null werden die Funktionswerte kleiner als jede noch so kleine Zahl.

- 76 Ermitteln Sie mit dem Taschenrechner für die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  je drei positive und drei negative Argumente, für die a)  $|f(x)| < 0,001$  b)  $|f(x)| > 1000$  ist!

Hinsichtlich des Monotonieverhaltens der Funktion  $y = x^{-1}$  ist folgendes zu beachten: Sie ist für  $x < 0$  monoton fallend, und sie ist auch für  $x > 0$  monoton fallend. Sie ist dies aber nicht für den gesamten Definitionsbereich, denn es gilt z. B.  $-1 < 1$ , aber nicht  $f(-1) > f(1)$ .

- 77 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Graphen der beiden Potenzfunktionen  $y = x^{-1}$  und  $y = x^{-2}$  im I. Quadranten! Übertragen Sie dazu die entsprechenden „Äste“ der im Auftrag C 74 gezeichneten Hyperbeln in ein gemeinsames Koordinatensystem!
- 78 Haben die Potenzfunktionen  $y = x^{-1}$  und  $y = x^3$  bzw.  $y = x^{-2}$  und  $y = x^2$  gemeinsame Eigenschaften?

## Aufgaben

1. Ergänzen Sie die Wertetabelle der Funktion  $y = x^{-1}$ !

x	$-10^5$	-350			-2,75	0		0,125	0,25		$10^7$
y			$-10^5$	-350		0				0,25	

<sup>1)</sup> Sehr kleine Zahlen sind negative Zahlen, deren Betrag sehr groß ist, z. B.  $-10^5$ .

2. Füllen Sie die Lücken in der Wertetabelle der Funktion  $y = x^{-2}$ !

x	-100	-43			-3	0	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
y			-25	25							

3. Lesen Sie aus dem Graphen der Funktion  $f(x) = x^{-1}$  (→ Auftrag C 74) ab:

- die Funktionswerte für die Argumente 2, 3, -1, -4;
- die Argumente für die Funktionswerte -3, -2, 4;
- die Menge aller Argumente  $x$ , für die  $f(x) > 0$  ist;
- $f(1)$ ,  $f(1,5)$ ,  $f(2)$ ,  $f(2,5)$ ;
- $x$ , so daß  $f(x) = 3$ ;
- die Menge, auf die das Intervall  $1 \leq x \leq 3$  durch diese Funktion abgebildet wird!

4. Gehören die folgenden Punkte zum Graphen der Funktion  $y = x^{-2}$ ?

A (2; 0,25)    B (0; 0)    C ( $-\frac{1}{16}$ ; 4)    D (-3;  $-\frac{1}{9}$ )    E (-0,5; 4)    F (7;  $\frac{1}{49}$ )  
G (0,1; 100)

5. Wie ändern sich die Funktionswerte bei der Funktion a)  $y = x^{-1}$ , b)  $y = x^{-2}$ , wenn man ein Argument verdoppelt, verdreifacht, halbiert? Formulieren Sie Ihre Antwort in Sätzen!

6. a) Berechnen Sie die Funktionswerte  $y$  der Funktion  $y = \frac{1}{x^2}$  für die in der Tabelle vorgegebenen Argumente  $x$ , ohne den Taschenrechner zu benutzen! Geben Sie die Funktionswerte als ganze Zahlen bzw. gemeine Brüche an!

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	+1	+2	$+\frac{5}{2}$
y							

- Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
- Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graph der Funktion  $y = x^2$ !
- Geben Sie die Koordinaten derjenigen Punkte an, die sowohl zum Graphen der Funktion  $y = \frac{1}{x^2}$  als auch zu dem der Funktion  $y = x^2$  gehören!
- Welche Eigenschaften haben beide Funktionen gemeinsam?

- 7.\* Gewinnen Sie den Graphen der Funktion  $y = \frac{1}{|x|}$  aus dem Graphen von  $y = x^{-1}$ !

- 8.\* Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Wenden Sie Ihre Kenntnisse über Potenzfunktionen an!)

- Aus  $x_2 > x_1$  folgt  $x_2^3 > x_1^3$ .
- Aus  $x_2 > x_1 > 0$  folgt  $\frac{1}{x_2} > \frac{1}{x_1}$ .
- Aus  $x_2 > x_1 > 0$  folgt  $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ .
- Aus  $x_2 > x_1 > 0$  folgt  $x_2^2 > x_1^2$ .

## 18 Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{2}}$ und $y = x^{\frac{1}{3}}$ ( $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ )

- 79 a) Berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners  $x^{\frac{1}{2}}$  und  $x^{\frac{1}{3}}$  für jedes  $x \in \left\{\frac{1}{2}; 1; 2; 3; 4; 5\right\}$ !
- b) Setzen Sie für  $\square$  jeweils eines der Zeichen  $<$ ,  $=$ ,  $>$  ein, so daß wahre Aussagen entstehen!
- $0,5 \square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$
- $0,5^{\frac{1}{2}} \square 1^{\frac{1}{2}} \square 2^{\frac{1}{2}} \square 3^{\frac{1}{2}} \square 4^{\frac{1}{2}} \square 5^{\frac{1}{2}}$
- $0,5^{\frac{1}{3}} \square 1^{\frac{1}{3}} \square 2^{\frac{1}{3}} \square 3^{\frac{1}{3}} \square 4^{\frac{1}{3}} \square 5^{\frac{1}{3}}$
- 80 a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Taschenrechners  $\sqrt{x}$  und  $\sqrt[3]{x}$  für jedes  $x \in \{0,2; 0,5; 0,8; 1; 1,5; 2; 5\}$ !
- b) Bilden Sie für jede Zahl  $x$  aus der unter a) genannten Menge den Ausdruck  $\sqrt[3]{x} \square \sqrt{x} \square x$ !
- Setzen Sie dabei für  $\square$  jeweils eines der Zeichen  $<$ ,  $=$ ,  $>$  ein, so daß eine wahre Aussage entsteht! Welche Gesetzmäßigkeiten erkennen Sie?

Die **Funktionsgleichungen**  $y = x^{\frac{1}{2}}$  und  $y = x^{\frac{1}{3}}$  kann man auch in der Form  $y = \sqrt{x}$  bzw.  $y = \sqrt[3]{x}$  schreiben.

Allerdings wurden Potenzen mit Exponenten, die rationale, aber keine ganzen Zahlen sind, bisher nur für **positive Basen** erklärt ( $\nearrow$  S. 155). Da aber  $\sqrt{0} = 0$  und  $\sqrt[3]{0} = 0$  gilt, definieren wir zusätzlich  $0^{\frac{1}{2}} = 0$  und  $0^{\frac{1}{3}} = 0$ . Negative Basen sind für derartige Potenzen auch weiterhin nicht möglich.

Damit ist die größtmögliche Menge reeller Zahlen, die als **Definitionsbereich** für eine Funktion mit der Gleichung  $y = x^{\frac{1}{2}}$  bzw.  $y = x^{\frac{1}{3}}$  in Frage kommt, die **Menge der nichtnegativen reellen Zahlen**.

Wir wählen die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen als Definitionsbereich und bestimmen den zugehörigen Wertebereich: Auf Grund der Definition von  $\sqrt{x}$  bzw.  $\sqrt[3]{x}$  ist für alle Argumente  $x$  aus dem Definitionsbereich  $f(x) \geq 0$ , d. h., kein Funktionswert ist negativ. Umgekehrt tritt auch jede nichtnegative reelle Zahl  $y$  als Funktionswert auf. Die

Funktion  $y = x^{\frac{1}{2}}$  ordnet beispielsweise die nichtnegative Zahl 5 dem Argument 25 als Funktionswert zu und die Zahl 17,3 dem Argument 17,3<sup>2</sup>. Ist allgemein eine nichtnegative reelle Zahl  $y$  gegeben, so findet man als zugehöriges Argument das Quadrat von  $y$  (bzw. die dritte Potenz von  $y$  bei der Funktion  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ).

Bei beiden Funktionen ist der **Wertebereich** die **Menge der nichtnegativen reellen Zahlen**.

- 81 Ermitteln Sie mit dem Taschenrechner für mindestens 20 Argumente aus dem Intervall  $0 \leq x \leq 10$  die Werte der Funktion  $y = x^{\frac{1}{2}}$  und  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ! Stellen Sie die geord-

neten Paare in einem Koordinatensystem dar, und skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen!

Bei den Graphen der Funktionen

$y = x^{\frac{1}{2}}$  und  $y = x^{\frac{1}{3}}$  handelt es sich jeweils um einen Teil einer (quadratischen bzw. kubischen) Parabel, deren Scheitel im Koordinatenursprung liegt und deren Achse mit dem positiven Teil der  $x$ -Achse zusammenfällt (→ Bild C 27).

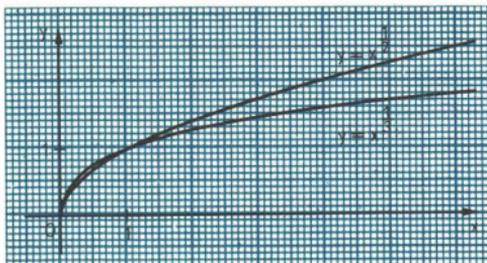


Bild C 27

- 82 Lesen Sie aus dem Bild C 27 weitere Eigenschaften der Funktionen  $y = x^{\frac{1}{2}}$  und  $y = x^{\frac{1}{3}}$  ab! Orientieren Sie sich dabei an den Eigenschaften der bisher untersuchten Potenzfunktionen! Berücksichtigen Sie auch Ihre Erkenntnisse aus den Aufträgen C 77 und C 78!

Der Graph der Funktion  $y = x^{\frac{1}{2}}$  ( $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ) ist axial-symmetrisch zum Graph der Funktion  $y = x^2$  ( $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ). Symmetrieachse ist der Graph der Funktion  $y = x$  (→ Bild C 28).

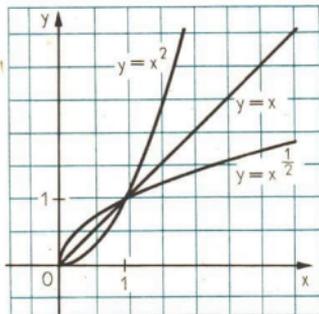


Bild C 28

- 83 Begründen Sie diese Feststellung, indem Sie zunächst an einigen Beispielen und dann allgemein nachweisen: Ein Punkt  $P(a; b)$  mit  $a \geq 0, b \geq 0$  gehört genau dann zum Graphen von  $y = x^{\frac{1}{2}}$ , wenn der Punkt  $Q(b; a)$  zum Graphen von  $y = x^2$  gehört!

Deshalb kann man zum Zeichnen des Graphen von  $y = x^{\frac{1}{2}}$  die Schablone für die Normalparabel benutzen.

Ein entsprechender Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Funktion  $y = x^{\frac{1}{3}}$  und  $y = x^3$  ( $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ).

## Aufgaben

1. Lesen Sie aus dem Graphen der Funktion  $y = x^{\frac{1}{2}}$  (→ Bild C 27) ab:
- a)  $1,3^{\frac{1}{2}}$ ;  $2,8^{\frac{1}{2}}$ ;  $7,9^{\frac{1}{2}}$ ;

b) die Lösungen der Gleichungen  $x^{\frac{1}{2}} = 2,2$ ;  $x^{\frac{1}{2}} = 0,7$ ;  $x^{\frac{1}{2}} = 1,0$ ;

c)  $\sqrt{2,5}$ ;  $\sqrt{5,5}$ ;  $\sqrt{8,4}$ ;

d) die Lösungen der Gleichungen  $\sqrt{x} = 1,2$   $\sqrt{x} = 1,7$ ;  $\sqrt{x} = 2,5$ !

2. Vervollständigen Sie mit Hilfe des Taschenrechners die Wertetabelle der Funktion

$$y = x^{\frac{1}{2}}!$$

x	1,2	1,4		2,0	2,5		4,0	65,3	
y		1,18	1,34			1,92	2,00		13,0

3. Welche der folgenden Punkte gehören zum Graphen der Funktion  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ?  
 A (64; 8)    B (10000; 100)    C (-81; 9)    D (25; -5)    E (169; 13)  
 F (186; 14)

4. Lesen Sie aus dem Graphen der Funktion  $y = x^{\frac{1}{3}}$  (→ Bild C 27) ab:

a)  $1,2^{\frac{1}{3}}$ ;  $2,5^{\frac{1}{3}}$ ;  $8,9^{\frac{1}{3}}$ ;

b) die Lösungen der Gleichungen  $x^{\frac{1}{3}} = 2,2$ ;  $x^{\frac{1}{3}} = 1,4$ ;  $x^{\frac{1}{3}} = 0,8$ ;

c)  $\sqrt[3]{0,5}$ ;  $\sqrt[3]{5,5}$ ;  $\sqrt[3]{8,0}$ ;

d) die Lösungen der Gleichungen  $\sqrt[3]{x} = 0,4$ ;  $\sqrt[3]{x} = 1,7$ ;  $\sqrt[3]{x} = 2,1$ !

5. Überprüfen Sie die angegebene Wertetabelle für die Funktion  $y = x^{\frac{1}{3}}$ !

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
y	0	0,73	-1,00	1,44	1,26	1,35	1,44	1,52	1,59	16,5

6. Welche der folgenden Punkte gehören zum Graphen der Funktion  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ?  
 A (125; 5)    B (10000; 100)    C (64; 4)    D (-64; -4)    E (-8; 2)  
 F (8; -2)

7. Welche Zahl ist größer? (Entscheiden Sie, ohne die Wurzeln zu berechnen! Nutzen Sie Eigenschaften der Funktionen  $y = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt[3]{x}$ !)

a)  $\sqrt{68}$  oder  $\sqrt{72}$     b)  $\sqrt{24,7}$  oder 5    c)  $\sqrt[3]{0,1}$  oder  $\sqrt[3]{0,01}$

d)  $\sqrt[3]{127}$  oder 5    e)  $\sqrt[3]{1}$  oder  $\sqrt[3]{1}$

8. Klären Sie anhand des Graphen von  $y = x^{\frac{1}{2}}$ , für welche reellen Zahlen x die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllt sind!

a)  $\sqrt{x} = 2$     b)  $\sqrt{x} < 2$     c)  $\sqrt{x} > 2$

- 9.\* Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x$  und  $y = \frac{1}{2}x$  in ein gemeinsames Koordinatensystem! Lösen Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnung

a)  $\sqrt{x} = x$ ;    b)  $\sqrt{x} > 0$ ;    c)  $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ ;    d)  $\sqrt{x} < \frac{1}{2}x$ !

- 10.\* Welche der folgenden Differenzen sind positiv, welche negativ, welche haben den Wert 0? (Entscheiden Sie, ohne zu rechnen! Nutzen Sie Eigenschaften von Potenzfunktionen!)
- a)  $17^2 - 13^2$     b)  $0,4^3 - 0,7^3$     c)  $9^2 - 9^3$     d)  $0,7^2 - 0,7^3$   
 e)  $\sqrt[3]{28} - \sqrt[3]{34}$     f)  $\sqrt{0,5} - \sqrt{0,4}$     g)  $\sqrt{0,8} - \sqrt[3]{0,8}$
- 11.\* Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $y = \sqrt{|x|}$ ! Nutzen Sie den Graphen von  $y = \sqrt{x}$ ! Welche Eigenschaften hat  $y = \sqrt{|x|}$ ?

## 19 Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^2$ und $y = a \cdot x^{-1}$

Ein Blick in das Tafelwerk zeigt, daß sowohl in der Mathematik selbst (z. B. Flächen- und Rauminhaltsberechnungen) als auch bei Anwendungen der Mathematik (z. B. in der Physik) Potenzfunktionen fast nie in „reiner“ Form vorkommen. Treten in Größengleichungen Potenzen auf, so sind sie meist mit Faktoren versehen.

- 21 a) Das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung wird durch die Größengleichung  $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$  beschrieben (→ Tafelwerk S. 46). In dieser Gleichung ist  $\frac{a}{2}$  ein Faktor der Potenz  $t^2$ .
- b) Das Widerstandsgesetz  $R = \frac{\rho \cdot l}{A}$  (→ Tafelwerk S. 49) kann in der Form  $R = \rho \cdot l \cdot A^{-1}$  geschrieben werden. In dieser Größengleichung ist  $\rho \cdot l$  ein Faktor der Potenz  $A^{-1}$ .
- c) Die Gewichtskraft  $G$ , mit der ein Körper mit der Masse  $m$  auf eine Unterlage einwirkt, wird nach der Gleichung  $G = m \cdot g$  berechnet (→ Tafelwerk S. 45). In dieser Größengleichung kann man  $m$  als Potenz  $m^1$  auffassen, die mit dem Faktor  $g$  versehen ist.
- 84 Entnehmen Sie dem Tafelwerk (S. 45 bis 53 und S. 15 bis 17) weitere Größengleichungen, in denen Potenzen auftreten!

Wir interessieren uns deshalb auch für Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = a \cdot x$ ,  $y = a \cdot x^2$  bzw.  $y = a \cdot x^{-1}$ , deren Definitionsbereich  $R$  oder eine Teilmenge von  $R$  ist. Dabei ist  $a$  jeweils eine fest vorgegebene, von Null verschiedene reelle Zahl.

- 85 Stellen Sie die Funktionen  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 1,5x^2$  und  $h(x) = -1,5x^2$  in einem gemeinsamen Koordinatensystem graphisch dar! Wählen Sie dazu mindestens 10 Argumente aus dem Intervall  $-2,5 \leq x \leq 2,5$ ! Überlegen Sie, wie Sie rationell vorgehen können! Beschreiben Sie die gegenseitige Lage der gezeichneten Graphen!
- 86 Erläutern Sie, wie man die Graphen der Funktionen
- a)  $y = 2x^2$ ;    b)  $y = -2x^2$ ;    c)  $y = \frac{1}{2}x^2$ ;    d)  $y = -\frac{1}{2}x^2$

aus dem Graphen der Funktion  $y = x^2$  gewinnen kann!

Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem!

- 87 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

a)  $y = 3x^{-1}$ ;    b)  $y = \frac{1}{3}x^{-1}$ ;    c)  $y = -x^{-1}$

Definitionsbereich sei jeweils die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

- 88 Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen  $y = a \cdot x$  mit dem Graphen der Potenzfunktion  $y = x!$  Welche Fallunterscheidung für  $a$  ist hier zweckmäßig?

- 89 Stellen Sie für jede der Funktionen a)  $y = \frac{1}{4}x$ , b)  $y = x^2$ , c)  $y = 120x^{-1}$  eine Wertetabelle für die Argumente 2; 4; 6; 8; 10 auf!

Untersuchen Sie jeweils, ob zwischen Argumenten und Funktionswerten Proportionalität oder umgekehrte Proportionalität vorliegt!

Aus dem im Beispiel C 21 b) erwähnten Widerstandsgesetz läßt sich folgende Aussage ableiten: Der elektrische Widerstand  $R$  von Drähten gleicher Länge, die alle aus demselben Material bestehen, ist (bei konstanter Temperatur) *umgekehrt proportional* zum Querschnitt  $A$  dieser Drähte. (Begründung: Die Gleichung  $R = \frac{\rho \cdot l}{A}$  kann umgeformt werden zu  $R \cdot A = \rho \cdot l$ . Da alle diese Drähte dieselbe Länge  $l$  und denselben spezifischen Widerstand  $\rho$  haben, hat für jeden der Drähte das Produkt  $R \cdot A$  denselben Wert  $\rho \cdot l$ .) Auch bei jeder Funktion  $y = k \cdot x^{-1}$  haben die Produkte  $x \cdot y$  aus zusammengehörigen Argumenten  $x$  und Funktionswerten  $y$  jeweils denselben Wert  $k$ . Deshalb sind diese Funktionen geeignet, den Zusammenhang zwischen umgekehrt proportionalen Größen zu beschreiben. Der Definitionsbereich ist entsprechend dem jeweiligen Sachverhalt festzulegen.

- 90 In einem Betrieb sollen zylindrische Behälter verschiedener Höhe angefertigt werden, die sämtlich das Volumen  $V = 1000 \text{ cm}^3$  haben.
- Geben Sie eine Funktion an, die die Abhängigkeit der Höhen dieser Zylinder von ihren Grundflächeninhalten beschreibt!
  - Stellen Sie diese Funktion graphisch dar!
  - Welche Höhen haben die Zylinder für die Grundflächeninhalte  $50 \text{ cm}^2$ ,  $100 \text{ cm}^2$ ,  $150 \text{ cm}^2$ ,  $200 \text{ cm}^2$ ?

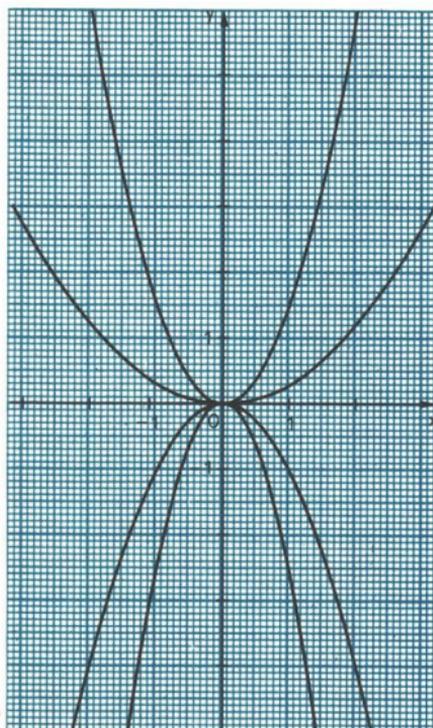
Bereits aus Klasse 8 wissen Sie: Der Zusammenhang zwischen (*direkt*) *proportionalen* Größen kann durch eine Funktion  $y = k \cdot x$  ( $k \neq 0$ ) beschrieben werden, denn bei jeder solcher Funktion ergeben alle Quotienten  $\frac{f(x)}{x}$  ( $x \neq 0$ ) denselben von Null verschiedenen Wert  $k$ .

- 91 a) Geben Sie eine Funktion an, die die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes  $R$  von Kupferdrähten mit dem Querschnitt  $1,5 \text{ mm}^2$  von der Länge  $l$  dieser Drähte (bei konstanter Temperatur) beschreibt!
- b) Stellen Sie diese Funktion für  $0 \text{ m} \leq l \leq 100 \text{ m}$  graphisch dar! (Teilen Sie die Achsen des Koordinatensystems geeignet ein!)
- c) Wie lang darf ein derartiger Draht höchstens sein, wenn sein Widerstand  $0,5 \Omega$  nicht übersteigen soll?

## Aufgaben

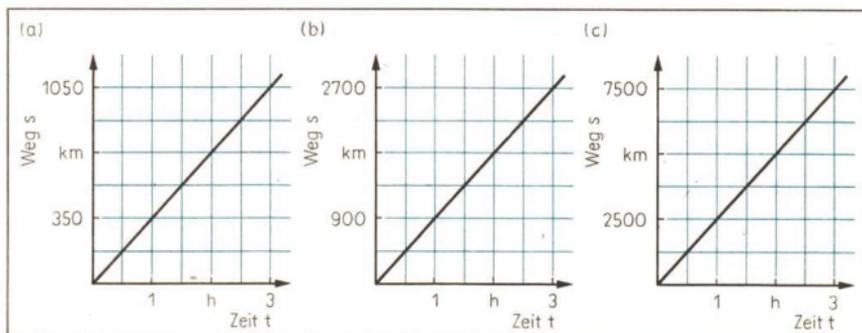
- Im Bild C 29 sind Graphen von Funktionen mit Gleichungen der Form  $y = ax^2$  gezeichnet. Bestimmen Sie für jeden dieser Graphen das zugehörige  $a$ !
- Zeigen Sie, daß der Graph der Funktion  $y = ax^2$  stets durch den Punkt  $P(1; a)$  geht!
  - Für welchen Wert von  $a$  geht der Graph von  $y = ax^2$  durch den Punkt  $A(1; 2,7)$ , für welches  $a$  durch  $B(1; -3,92)$ ?
- In welchen Quadranten verlaufen die Graphen der folgenden Funktionen? Antworten Sie, ohne die Graphen zu zeichnen!
  - $y = 0,0001x$
  - $y = -23,4x^2$
  - $y = 3x^{-1}$
  - $y = -2,75x^{-1}$
- Der Flächeninhalt eines Rechtecks betrage  $15 \text{ cm}^2$ , die Längen seiner Seiten seien  $x \text{ cm}$  und  $y \text{ cm}$ . Drücken Sie  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  aus! Stellen Sie den Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  graphisch dar!

Bild C 29



- Die Bilder C 30 (a), (b), (c) stellen Weg-Zeit-Diagramme für die gleichförmige Bewegung einiger Flugzeugtypen dar. Beim Arbeiten mit diesen Diagrammen muß man die unterschiedliche Teilung der Achsen beachten. – Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Bilder für jeden der drei Typen **a)** die Flugzeiten für 300 km, 1000 km, 1200 km; **b)** die Strecken, die in 0,5 h, 1,25 h, 2 h zurückgelegt werden; **c)** die Gleichungen der dargestellten Funktionen!

Bild C 30



## Komplexe Übungen

Hinweis: Für die in den folgenden Aufgaben auftretenden Funktionen ist  $R$  der Definitionsbereich.

1. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Angaben!

Nr.	Quadratische Funktion		Scheitel der Parabel	Nullstellen	Wertebereich
	$y = (x + d)^2 + e$	$y = x^2 + px + q$			
1.	$y = (x + 4)^2 - 3$				
2.		$y = x^2 - 3x + 4$			
3.			$S(-2; -2)$		
4.				$x_1 = -1$ $x_2 = 3$	
5.	$y = (x - 4)^2$				
6.			$S(1; y_s)$		alle reellen Zahlen mit $y \geq -2$

2. Für die folgenden Funktionen sind die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen und das Monotonieverhalten anzugeben.

Nr.	Funktion	Symmetrieachse des Graphen	Monotonieverhalten
1.	$y = (x + 3)^2$		
2.	$y = x^2 - 2x + 1$		
3.	$y = (x - 1)^2 + 2$		
4.	$y = x^2 - 8x + 19$		
5.	$y = x^{-2}$		
6.	$y = 6x^2$		

3. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Schnittpunkte der Graphen der folgenden Funktionen!

a)  $y = x^2 - 2x - 3$  und  $y = 2x + 2$     b)  $y = x^2 - 2$  und  $y = \frac{1}{2}x^2$   
 c)  $y = x^2 - 2x - 4$  und  $y = -2x^2$     d)  $y = 0,5x^2 - 4$  und  $y = -2x - 4$

e)  $y = -2x^2 + 12x - 14$  und  $y = 0,5x^2 - x - 3,5$  (L)

f)  $y = 2x^2 + 4x - 4$  und  $y = -x^2 + 4$

4. Gibt es Argumente, denen durch die folgenden Funktionen der Funktionswert  $-2$  zugeordnet wird?

a)  $y = -2x^2 + 6x + 8$     b)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

5. Von einer quadratischen Funktion  $f(x) = x^2 + px + q$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) wissen wir, daß  $f(0) = -3$  und  $f(3) = 0$  ist. Geben Sie eine Gleichung der Funktion an! (L)

6. Geben Sie Gleichungen für die in den Bildern C 31 und C 32 dargestellten Funktionen an!

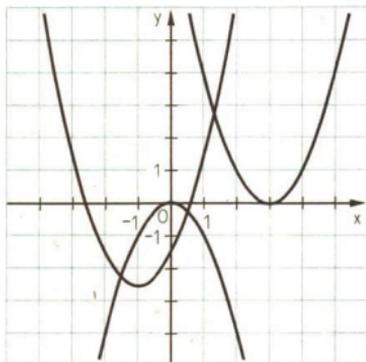


Bild C 31

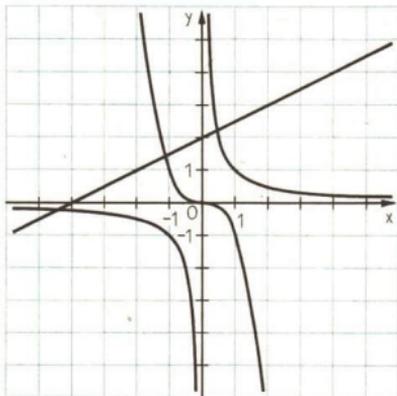


Bild C 32

7. Stellen Sie die folgenden drei Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem graphisch dar, und ermitteln Sie graphisch und rechnerisch die Nullstellen!

a)  $y = x^2 - 10x + 23$     b)  $y = 2x^2 - 20x + 46$     c)  $y = 0,1x^2 - x + 2,3$

- 8.\* Ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen aus ihrer graphischen Darstellung, und führen Sie eine Probe durch!

a)  $y = x^3 - x^2 - 8x + 8$  (L)    b)  $y = 0,1x^3 - 0,15x^2 - 1,8x$  (L)

c)  $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$  (L)    d)  $y = 0,2x^3 - 0,2x^2 - 1,2x + 1$  (L)

e)  $y = \frac{x^2 - 4}{x}$  (L)

- 9.\* Ermitteln Sie für jede der folgenden Funktionen angenähert eine Nullstelle (3 zuverlässige Ziffern), indem Sie wie folgt vorgehen: Suchen Sie durch Probieren zwei Argumente, zu denen Funktionswerte mit unterschiedlichen Vorzeichen gehören! Zwischen diesen Argumenten muß sich dann mindestens eine Nullstelle befinden.

Halbieren Sie das von Ihnen ermittelte Intervall, und arbeiten Sie mit einem geeigneten Teilintervall weiter! Dieses Verfahren setzen Sie so lange fort, bis Sie die Nullstelle mit der gewünschten Genauigkeit gefunden haben. (L)

a)  $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$     b)  $y = 5x^3 - 6x - 7$     c)  $y = -2x^3 + 4x - 3$

- 10.\* Eine Funktion  $y = f(x)$  ist auf folgende Weise festgelegt:  
 Jeder reellen Zahl  $x$  wird die größte ganze Zahl  $y$  zugeordnet, für die gilt:  $y \leq x$ .
- a) Geben Sie die nachstehenden Funktionswerte an!  
 $f(0)$ ;  $f(1,5)$ ;  $f(-2,6)$ ;  $f(\pi)$ ;  $f(\sqrt{15})$
- b) Stellen Sie die Funktion im Intervall  $-5 \leq x \leq 5$  graphisch dar!
11. Die Seite eines Quadrates sei 3 dm lang. Man erhält aus dem Quadrat ein Rechteck, wenn man von zwei benachbarten Quadratseiten eine um  $x$  dm verlängert und die andere um  $x$  dm verkürzt. Geben Sie die Abhängigkeit des Zahlenwertes des Flächeninhaltes des entstehenden Rechtecks von  $x$  durch eine Funktion an, und stellen Sie diese graphisch dar!
12. Das Bild C 33 zeigt einen parabelförmigen Brückenbogen. Der Scheitel  $S$  befindet sich in der Mitte des Bogens. Die Form der Parabel ist durch die Strecken  $\overline{AB} = 100$  m und  $\overline{OS} = 10$  m eindeutig bestimmt.

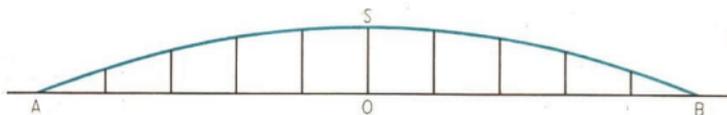


Bild C 33

- a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, und geben Sie die Gleichung des Parabelbogens an!
- b) Berechnen Sie die Länge der eingezeichneten Streben!
13. Ein waagrecht geworfener Körper bewegt sich (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) auf einer Bahn, die der Gleichung  $y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$  genügt (Fallbeschleunigung  $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ). Die waagerechte Wurfgeschwindigkeit sei  $v_0 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Zeichnen Sie die Bahn der Bewegung für  $0 \text{ m} \leq x \text{ m} \leq 20 \text{ m}$ !
- 14.\* Ein unter einem Winkel von  $\alpha = 45^\circ$  geworfener Körper bewegt sich (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) auf einer Bahn, die der Gleichung  $y = x - \frac{g}{v_0^2} \cdot x^2$  genügt. Zeichnen Sie die Bahn der Bewegung! (Fallbeschleunigung  $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , Abwurfgeschwindigkeit  $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Nach wieviel Metern trifft der Körper wieder auf dem Erdboden auf?
15. Von allen Rechtecken, die einen Umfang von  $u = 12$  cm haben, ist dasjenige Rechteck mit dem größten Flächeninhalt zu ermitteln.
- 16.\* Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis  $g = 8$  cm und der Höhe  $h_g = 5$  cm soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Wie lang sind die Seiten des gesuchten Rechtecks?
17. Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungen doppelt (dreimal, viermal) so groß sind wie die Lösungen der Gleichung  $x^2 + x - 20 = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ )!
18. Lösen Sie die folgenden Gleichungen! ( $x \in \mathbb{R}$ )
- |                      |                             |                        |
|----------------------|-----------------------------|------------------------|
| a) $\sqrt{x} = 8$    | f) $2^x = 64$               | l) $x(x-2)(x+3) = 0$   |
| b) $\sqrt{x+3} = 4$  | g) $5^x = \frac{1}{25}$     | m) $\frac{1}{x^2} = x$ |
| c) $\sqrt{x-1} = -5$ | h) $(-3)^x = -\frac{1}{27}$ | n) $\sqrt[6]{x} = 5$   |

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \quad \sqrt{x^2} = 6 & \text{i)} \quad (x+5)^4 = 81 & \text{o)} \quad x+3 = x-4 \\ \text{e)} \quad \sqrt[3]{x} = 2 & \text{k)} \quad (x-4) \cdot x = 6x & \text{p)} \quad 4(x+1) - 4 = 4x \end{array}$$

19. Lösen Sie die folgenden Gleichungen! (Schreiben Sie dazu den Term auf der linken Seite der Gleichung als Produkt!) ( $x \in R$ )

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad x^3 - 2x^2 = 0 \quad (L) & \text{b)} \quad x^3 - x = 0 \quad (L) & \text{c)} \quad x^4 + 3x^2 = 0 \quad (L) \\ \text{d)} \quad x^3 - x^2 - 6x = 0 \quad (L) & \text{e)} \quad x^4 + x^3 - 6x^2 = 0 \quad (L) & \text{f)} \quad x^3 + 2x^2 - 48x = 0 \quad (L) \end{array}$$

20. Geben Sie die Lösungsmenge an!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad |2x+1| = 7 \quad (x \in R) \quad (L) & \text{c)} \quad |x+1| < 3 \quad (x \in Z) \quad (L) \\ \text{b)} \quad |x|-1 = 2x \quad (x \in R) \quad (L) & \text{d)} \quad |2x|-1 < 5 \quad (x \in Z) \quad (L) \end{array}$$

- 21.\* a) Jemand löst die Gleichung  $\sqrt{2x+5} = x+1$  ( $x \in R$ ) so, daß er beide Seiten der Gleichung quadriert und die entstehende quadratische Gleichung löst. Hat er damit die Lösungen der gegebenen Gleichung gefunden? Begründen Sie Ihre Antwort! (L)

- b) Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf die unter a) angegebene Weise! Beachten Sie die Probe! ( $x \in R$ ) (L)

$$\begin{array}{lll} (1) \quad \sqrt{2x+8} = x & (2) \quad \sqrt{4x+13} = x-2 & (3) \quad 3\sqrt{2x+4} = 9 \\ (4) \quad \sqrt{x+5} = -10 & (5) \quad 3\sqrt{4x+10} = 4\sqrt{2x+6} & \end{array}$$

22. Der Mathematiker ADRIAN MARIE LEGENDRE (1752–1833) hat den Ausdruck  $2x^2 + 29$  angegeben, der interessante Eigenschaften zeigt, wenn für  $x$  die natürlichen Zahlen von 1 bis 28 eingesetzt werden. Was für Zahlen erhält man?

23. Welche natürlichen Zahlen haben folgende Eigenschaft: Multipliziert man die Summe der Quadrate mit der Differenz der Zahlen, so ergibt sich 313 (Primzahl)?

24. Eine Badewanne wird in 9 min gefüllt, wenn Kalt- und Warmwasserhahn geöffnet sind. Füllt man die Wanne nur mit kaltem Wasser, so benötigt man 7,5 min weniger, als wenn man sie nur mit warmem Wasser füllt. In welcher Zeit füllt jeder der zwei Hähne allein die Wanne?

- 25.\* Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $a = 8$  cm soll durch einen Schnitt parallel zu einer der Dreiecksseiten in zwei flächengleiche Teilflächen zerlegt werden. In welchem Abstand von der Dreiecksseite ist der Schnitt zu führen?

26. Aus einem 50 cm langen Stahlblock mit quadratischem Querschnitt (20 cm  $\times$  20 cm) wird ein Stahlrohr mit einer Wandstärke von 5 mm und einem lichten Durchmesser von 120 mm gezogen. Wie lang ist das Rohr?

27. In welcher Entfernung vom Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius  $r = 12$  cm muß sich eine punktförmige Lichtquelle befinden, damit sie  $\frac{1}{3}$  der Kugeloberfläche beleuchtet?

28. Im Bild C 34 ist der Zusammenhang zwischen der gewählten Durchschnittsgeschwindigkeit und der benötigten Zeit zum Durchfahren einer Strecke  $\overline{AB}$  dargestellt.

a) Welche Zeit benötigt das Fahrzeug bei einer Geschwindigkeit  $v_1 = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $v_2 = 35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $v_3 = 45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ?

- b) Welche Geschwindigkeit muß gewählt werden, wenn die Strecke  $\overline{AB}$  in höchstens einer Stunde durchfahren sein soll?

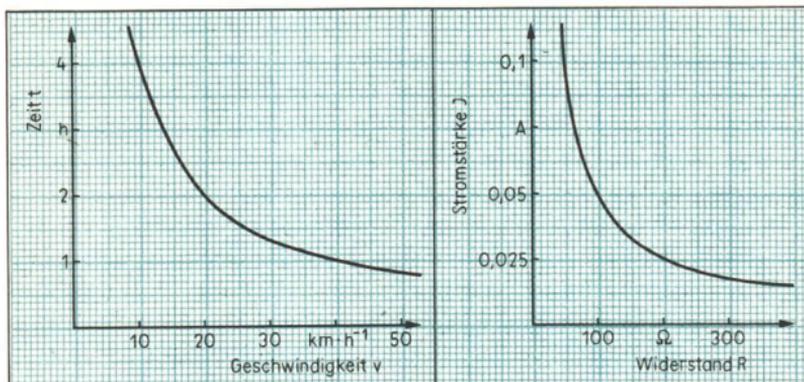


Bild C 34

Bild C 35

- c) Wie weit sind die Punkte A und B voneinander entfernt?  
 d) Durch welche Funktion kann der dargestellte Zusammenhang beschrieben werden?
29. An eine Gleichspannungsquelle wurden nacheinander verschiedene Widerstände angeschlossen. Das Diagramm (↗ Bild C 35) zeigt, welche Stromstärken jeweils gemessen wurden.
- Wie groß ist die Stromstärke bei einem Widerstand von 50 Ohm, 100 Ohm?
  - Wie groß ist die Spannung, die die Spannungsquelle liefert?
  - Zeichnen Sie das entsprechende Diagramm für eine Spannung von 40 Volt! Überlegen Sie, wie Sie die Achsen einteilen müssen, damit die Stromstärken für Widerstände zwischen 5 Ohm und 200 Ohm abgelesen werden können!
  - Erläutern Sie die Vorgänge bei einem „Kurzschluß“ und bei einer der Korrosion unterliegenden Klemmstelle!
30. a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem zeichnerisch und rechnerisch!  
 (I)  $y + 2x = 2$  ( $x, y \in R$ )  
 (II)  $-2y - 2x = 2$
- Betrachten Sie den Schnittpunkt der Graphen von I. und II. als Scheitelpunkt S des Graphen einer quadratischen Funktion  $y = x^2 + px + q = 0$  ( $p, q \in R$ ), und geben Sie Gleichung und Graph dieser Funktion an!
  - Geben Sie die Schnittpunkte  $P_1$  und  $P_2$  des Graphen der quadratischen Funktion mit der  $x$ -Achse an!
  - Wie findet man die Koordinaten von  $P_1$  und  $P_2$  rechnerisch?
  - Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks  $P_1SP_2$ !
31. a) Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen im Intervall  $-3 \leq x \leq 3$  in ein und dasselbe Koordinatensystem!  
 (1)  $y = \frac{1}{2}x^2$     (2)  $y = -2x + 6$     (3)  $y = 2x + 6$
- Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der drei Funktionen, die in dem angegebenen Intervall liegen!
  - Geben Sie die Gleichung derjenigen linearen Funktion an, deren Graph die Schnittpunkte der Geraden (2) und (3) mit der Parabel (1) verbindet!

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen den drei Geraden und der Abszissenachse!

32. Berechnen Sie die Länge der Strecke  $\overline{AC}$  ( $\rightarrow$  Bild C 36), wenn gegeben ist:  
 $SA = AC + 2$  cm;  $\overline{AB} = 3$  cm;  $\overline{BD} = 6$  cm!

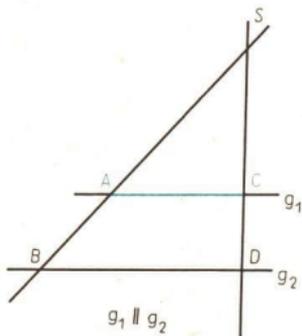


Bild C 36

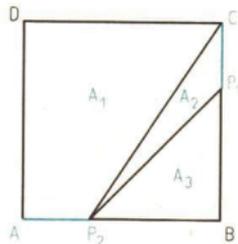


Bild C 37

33. Es ist das Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $a = 15$  cm gegeben ( $\rightarrow$  Bild C 37). Ferner gilt:  $A_2 = \frac{1}{9} A_{\text{Quadrat}}$ .
- Ermitteln Sie die Länge der Strecke  $\overline{CP_1} = \overline{AP_2}$ !
  - Berechnen Sie die Flächeninhalte  $A_1, A_2, A_3$ !
- 34.
- Geben Sie mindestens drei rationale Zahlen an, die zwischen dem Vorgänger und dem Nachfolger der natürlichen Zahl 8 liegen!
  - Gibt es für jede natürliche Zahl einen Vorgänger und einen Nachfolger?
  - Gegeben ist eine natürliche Zahl  $n$  ( $n \neq 0$ ). Schreiben Sie ihren Vorgänger und ihren Nachfolger auf!
  - Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl sei 483. Für welche natürlichen Zahlen gilt das?
  - Geben Sie alle natürlichen Zahlen zwischen 300 und 400 an, die sich als Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl darstellen lassen!
35. Die Sehne  $\overline{AB}$  eines Kreises hat vom Kreismittelpunkt  $M$  eine Entfernung von 8 cm. Der Radius des Kreises ist um 2 cm kürzer als die Sehne.
- Berechnen Sie den Radius des Kreises!
  - Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Kreises!
  - Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABM$ !
  - Wie groß ist der Umfang des Kreises?
  - Bestimmen Sie den Zentriwinkel  $\sphericalangle AMB$  durch Messung!
  - Berechnen Sie die Länge des Kreisbogens, der zum Zentriwinkel  $\sphericalangle AMB$  gehört!
  - Konstruieren Sie das Bild des Dreiecks  $AMB$  bei der zentrischen Streckung ( $M; 1,5$ )!
  - In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte von Original und Bild?

# D Körperdarstellung und Körperberechnung

## Wiederholung und Ergänzung

### 1 Geometrische Körper

- 1 Durch welche Ihnen bekannten (zusammengesetzten) geometrischen Körper werden die im Bild D 1 dargestellten Gegenstände angenähert beschrieben?



Bild D 1

Aus den vorausgegangenen Klassenstufen *wissen wir*:

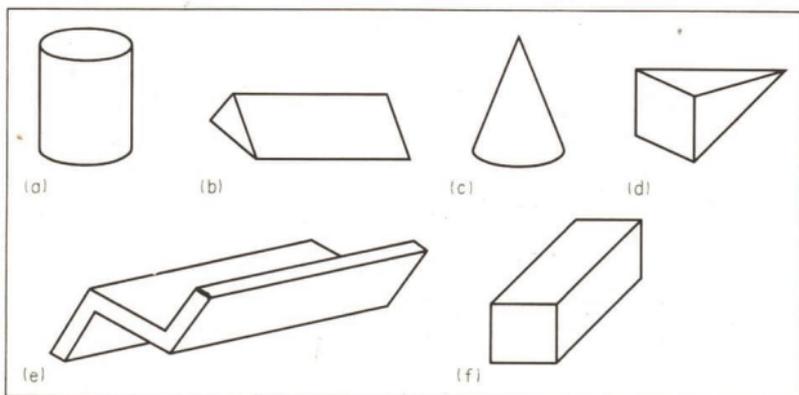
Zur angenäherten Beschreibung von Gegenständen bedient man sich oft geometrischer Körper, wie *Prismen, Zylinder, Pyramiden, Kegel* oder *Kugeln*. Dabei wird von bestimmten Eigenschaften der Gegenstände abgesehen (z. B. von Masse, Farbe, Oberflächenbeschaffenheit), aber auch von unwesentlichen Einzelheiten der Form solcher Gegenstände. Die geometrischen Körper sind Idealisierungen der Wirklichkeit.

Um die genannten geometrischen Körper zu charakterisieren, kann man die sie begrenzenden Flächen genauer beschreiben. Bestimmte geometrische Körper kann man sich auch durch Rotation einer ebenen Figur entstanden denken. Man muß dann diese Figur und die Lage der Rotationsachse in bezug auf sie angeben.

- 2 Welche der Ihnen bekannten geometrischen Körper werden von folgenden Flächen begrenzt:

- von einer Fläche, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkt gleichen Abstand haben;
  - von einem  $n$ -Eck und  $n$  Dreiecken;
  - von einer Kreisfläche und einer gekrümmten, in die Ebene abwickelbaren Fläche, die in eine Spitze ausläuft;
  - von zwei kongruenten  $n$ -Ecken, die in zueinander parallelen Ebenen liegen, und  $n$  Parallelogrammen;
  - von zwei kongruenten Kreisflächen, die in zueinander parallelen Ebenen liegen, und einer gekrümmten, in die Ebene abwickelbaren Fläche?
- Beschreiben bzw. definieren Sie auf der Grundlage Ihrer Ergebnisse zum Schülerauftrag D 2, was man unter Prismen, Zylindern, Pyramiden, Kegeln und Kugeln versteht!
  - Beschreiben Sie die im Bild D 2 dargestellten geometrischen Körper! Nennen Sie Grund- bzw. Deckflächen!

Bild D 2



- Skizzieren Sie je ein Körpernetz für ein dreiseitiges Prisma, für einen Zylinder, für eine quadratische Pyramide sowie für einen Kegel! Schraffieren Sie jeweils den Mantel!
- Welche der Ihnen bekannten geometrischen Körper sind Rotationskörper? Von welchen ebenen Figuren können sie erzeugt werden? Wie liegt die Rotationsachse zu diesen Figuren?

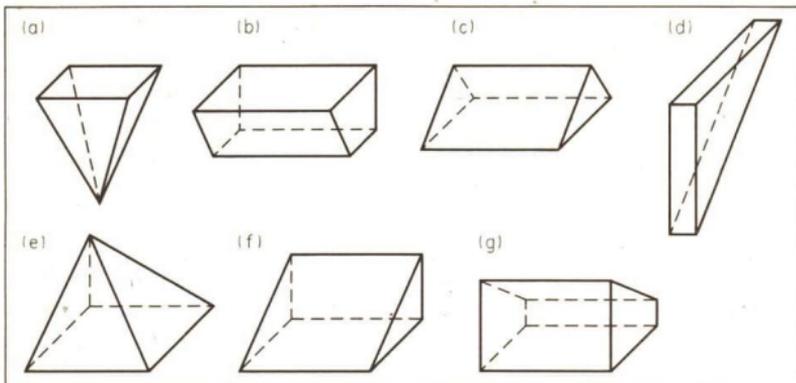
*Wir wissen:* Bei Prismen, Zylindern, Pyramiden und Kegeln unterscheidet man jeweils *gerade* und *schiefe*. Prismen oder Pyramiden, die gerade sind und zudem ein regelmäßiges  $n$ -Eck als Grundfläche haben, nennt man *regelmäßige Prismen* bzw. *regelmäßige Pyramiden*.

- Vergleichen Sie bei den folgenden Körpern jeweils „gerade“ und „schiefe“! Beachten Sie dabei die angegebenen Gesichtspunkte!
  - Prismen (Lage der Seitenkanten bezüglich der Grundfläche)
  - Zylinder und Kegel (Lage der Achse bezüglich der Grundfläche)
  - Pyramiden (Vorhandensein eines Mittelpunktes der Grundfläche und Lage der Höhe in bezug auf diesen)

## Aufgaben

1. Geben Sie für jeden der im Bild D 3 durch ein Schrägbild dargestellten Körper den Namen an!

Bild D 3



2. Ein Hohlziegel ( $\rightarrow$  Bild D 4) kann z. B. durch den geometrischen Körper „Quader“ angenähert beschrieben werden. Bei welcher der folgenden Aufgabenstellungen erweist sich dieser Körper als ein geeignetes mathematisches Modell?

- Bestimmung des Bedarfs an Ziegelton zur Herstellung
- Bestimmung der Anzahl der Steine für eine Mauer
- Bestimmung des Transportraums auf einem LKW
- Bestimmung der Masse eines Steins bei bekannter Dichte

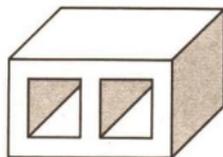
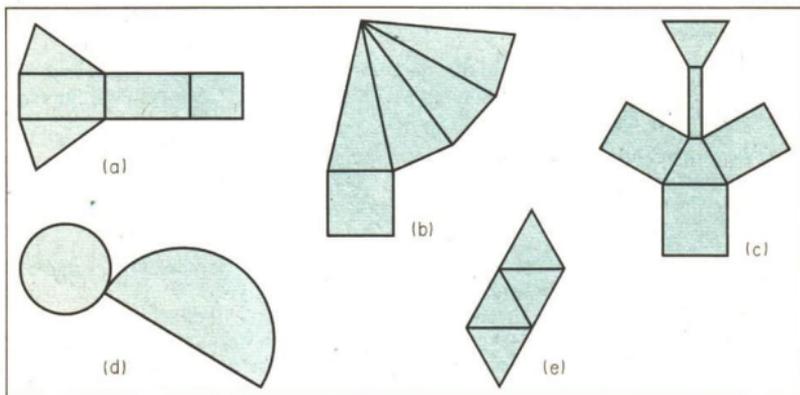


Bild D 4

3. Im Bild D 5 sind fünf Netze von Körpern dargestellt. Geben Sie, wenn möglich, jeweils den genauen Namen des Körpers an!

Bild D 5



4. a) Nennen Sie alle Kanten des Quaders im Bild D 6, die zur Kante  $\overline{AB}$  (bzw.  $\overline{CG}$ ) parallel, senkrecht bzw. windschief sind!  
 b) Führen Sie die gleiche Betrachtung für die Kante  $\overline{TK}$  (bzw.  $\overline{KS}$ ) der quadratischen Pyramide in Bild D 7 durch!

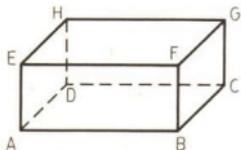


Bild D 6

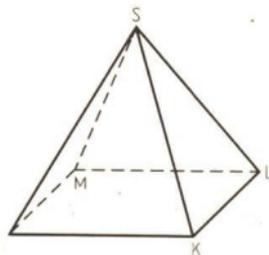


Bild D 7

5. Welche der fünf Netze gehören zu dem abgebildeten Spielwürfel? (→ Bild D 8)

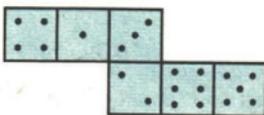
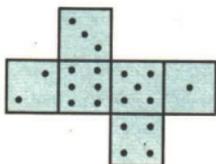
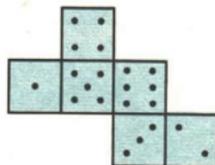
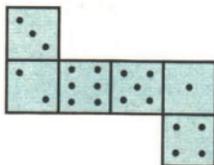
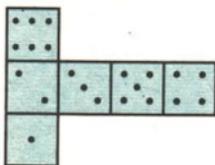


Bild D 8

6. Um welche geometrischen Körper kann es sich im Bild D 9 handeln? Beschreiben Sie ihre Grundflächen!

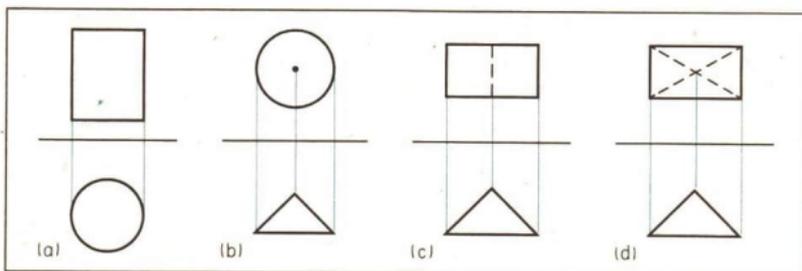


Bild D 9

## 2 Volumen und Oberflächeninhalte

Wir kennen bereits für einige Körper Formeln zur Berechnung von Volumen und Oberflächeninhalt:

Für den Oberflächeninhalt der Kugel gilt:  $A_0 = 4\pi r^2$ .

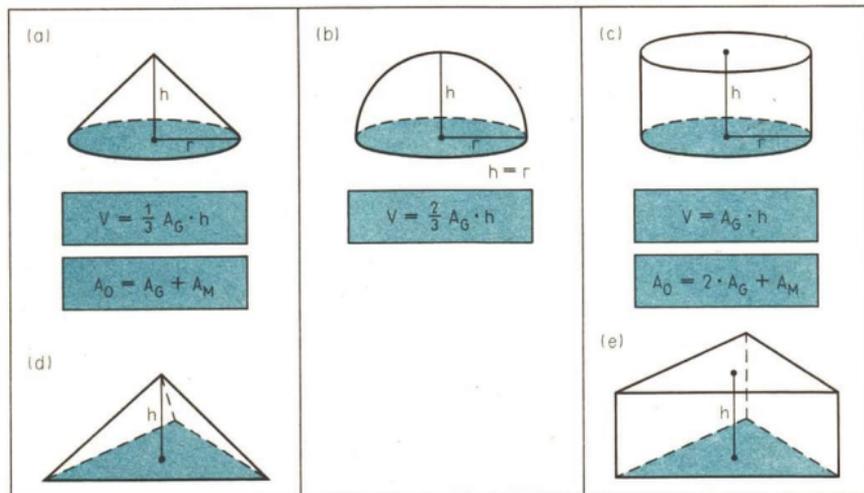


Bild D 10

- 8 Entwickeln Sie aus den im Bild D 10 angegebenen Formeln zur Volumenberechnung die speziellen Formeln für die Berechnung des Volumens
  - a) eines Quaders mit den Kanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;
  - b) eines Zylinders mit dem Grundkreisradius  $r$  und der Höhe  $h$ ;
  - c) einer Kugel mit dem Durchmesser  $d$ ;
  - d) einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, der Grundkante  $a$  und der Höhe  $h$ !
- 9 Entwickeln Sie aus den entsprechenden Formeln (Bild D 10) die speziellen Formeln zur Berechnung des Oberflächeninhaltes
  - a) eines Quaders mit den Kanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;
  - b) eines Würfels mit der Kante  $a$ ;
  - c) eines Zylinders mit dem Grundkreisradius  $r$  und der Höhe  $h$ !

### Aufgaben

1. Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt eines Prismas, das als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a = 3,2$  cm und  $b = 5,1$  cm und die Körperhöhe  $h = 12,3$  cm hat!
2. Welche Masse haben 13,50 m L-Stahl, wenn die Dichte des Materials  $7,85 \text{ g cm}^{-3}$  beträgt (↗ Bild D 11)?

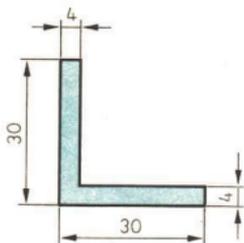


Bild D 11

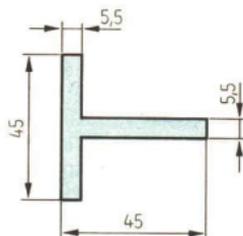


Bild D 12

3. Welche Masse haben 12,0 m T-Stahl, wenn die Dichte des Materials  $7,85 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  beträgt (→ Bild D 12)?
4. In einem Chemiebetrieb stehen zylindrische Behälter mit 1,20 m Durchmesser und 2,00 m Höhe (Innenmaße). Überprüfen Sie, ob ein solcher Behälter 3000 kg Natrienlauge (Dichte  $1,25 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ) fassen kann!
5. Aus einer Bleikugel ( $r = 6 \text{ cm}$ ) wird ein Gegenstand von der Form eines geraden Kreiskegels gegossen (Körperhöhe 30 cm). Berechnen Sie den Radius des Grundkreises des Kegels! Welchen Oberflächeninhalt hat dieser Kegel?
6. Ein rechteckiges Stück Blech mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  wird zu einem zylindrischen Rohr zusammengebogen. Die Länge des Rohres sei  $b$ . Geben Sie das Volumen des Rohres an, wenn  $2a = b$  ist!
7. Ein zylinderförmiges Werkstück aus Stahl ( $d = h = 75 \text{ mm}$ ,  $\rho = 7,8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ) wird so bearbeitet, daß daraus eine Kugel entsteht, die den gleichen Durchmesser wie der Zylinder hat. Berechnen Sie die Masse des Abfalls, der bei dieser Bearbeitung entsteht! Geben Sie die Masse in Gramm an!
- 8.\*
- Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche und das Volumen des Körpers, dessen Netz im Bild D 13 dargestellt ist!
  - Wie bezeichnet man diesen Körper?
  - Ergänzen Sie diesen Körper zu einem Quader mit kleinstmöglichem Volumen, und geben Sie das Volumen und ein Netz des Ergänzungskörpers an!
  - Zeichnen Sie ein Schrägbild des Quaders (einschließlich der Schnittfläche)!
- 9.\* Der Oberflächeninhalt eines Würfels und der einer Kugel betragen je  $1 \text{ m}^2$ . Welcher der beiden Körper hat das größere Volumen?

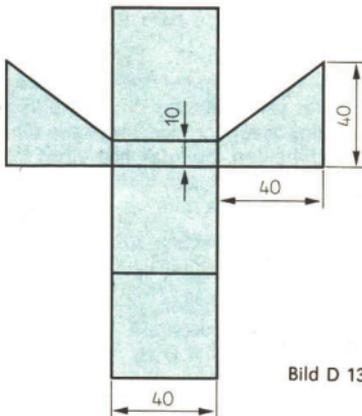


Bild D 13

- 10.\* Einem oben offenen würfelförmigen Behälter für Flüssigkeiten von 1 m Kantenlänge hat man unter eine Bodenkante eine Unterlage gegeben, so daß diese Kante 10 cm höher liegt als die gegenüberliegende Bodenkante. Wieviel Kubikdezimeter Flüssigkeit befinden sich in diesem Behälter, wenn er maximal gefüllt ist?

### 3 Schrägbilder und Zweitafelbilder

Sowohl praktische als auch rein mathematische Problemstellungen machen es häufig erforderlich, Körper zeichnerisch darzustellen. Eine Zeichnung bzw. Skizze unterstützt oft das Lösen von Aufgaben zur Körperberechnung. Manche Aufgaben – wie z. B. die Bestimmung des Neigungswinkels einer Seitenfläche einer Pyramide zur Grundfläche – können wir vorläufig *nur* zeichnerisch lösen.

Als eine Abbildung von Punkten des Raumes auf Punkte einer Ebene haben Sie die *Projektion* kennengelernt (→ LB 7, S. 108ff.).

- 10 Erläutern Sie anhand des Bildes D 14 die Begriffe Original, Bild, Bildebene, Projektionsgerade und Projektion! Erklären Sie auch, warum die Projektion eine eindeutige, aber nicht eineindeutige Abbildung ist!

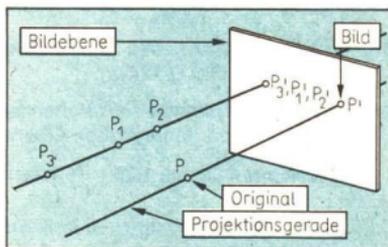


Bild D 14

Wir werden hier ausschließlich die *Parallelprojektion* benutzen, bei der bekanntlich alle Projektionsgeraden zueinander parallel verlaufen. Wir kennen die *schräge Parallelprojektion* und die *senkrechte Projektion*.

- 11 Wie nennt man das Bild eines Körpers bei schräger Parallelprojektion? Wie nennt man es bei senkrechter Projektion? Für welche Projektion würden Sie sich entscheiden, wenn Sie beabsichtigen,
  - a) daß man sich den dargestellten Körper anhand des Bildes möglichst gut vorstellen kann,
  - b) daß man dem Bild „Abmessungen“ des Körpers möglichst leicht entnehmen kann?

*Wir erinnern uns:* Bei der Parallelprojektion lassen sich die Bilder von Strecken, die parallel oder senkrecht zur Bildebene liegen, besonders einfach konstruieren. Deshalb ist es günstig, bezüglich der Bildebene eine *Breiten-*, eine *Höhen-* und eine *Tiefenrichtung* zu unterscheiden. Soll das Bild eines Körpers gezeichnet werden, so stellt man ihn zweckmäßigerweise so zur Bildebene, daß möglichst viele seiner Kanten in diesen speziellen Richtungen verlaufen.

Bilder bei senkrechter Projektion machen besonders deutlich, daß die Projektion zwar eine eindeutige, aber keine eineindeutige Abbildung ist.

- 12 Welche Körper könnten durch die Risse im Bild D 15 dargestellt sein? Welche Möglichkeiten kennen Sie, einen Riß so zu ergänzen, daß aus dem Bild eindeutig auf das Original geschlossen werden kann?

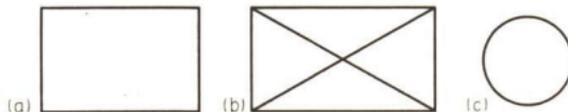
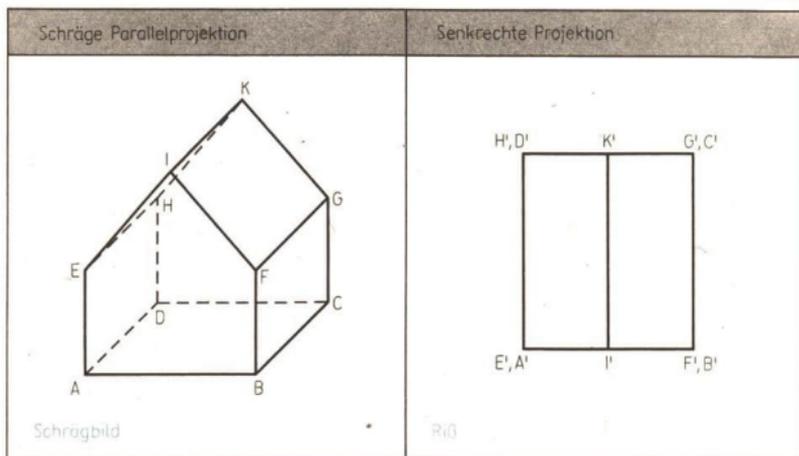


Bild D 15

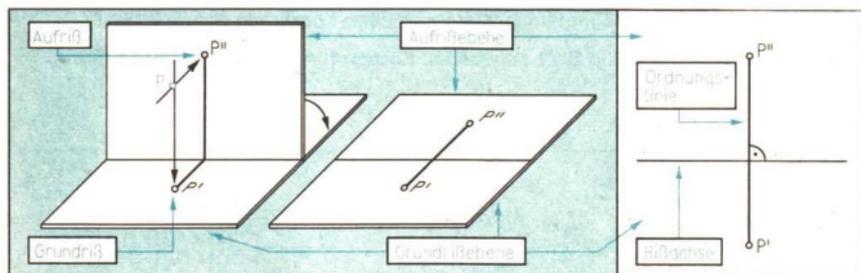
- 13 Welche Kanten des Originalkörpers im Bild D 16 verlaufen in Breiten-, Höhen- bzw. Tiefenrichtung bezüglich der jeweils gewählten Bildebene? Beschreiben Sie, wie diese speziellen Kanten abgebildet werden!

Bild D 16



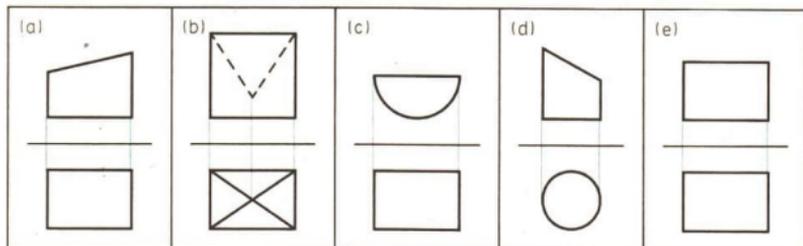
Bei der *senkrechten Zweitafelprojektion* werden zwei senkrechte Projektionen auf zueinander senkrechten Bildebenen vereinigt ( $\rightarrow$  Bild D 17). In den meisten Fällen ist es möglich, sich anhand des *Zweitafelbildes* das Original vorzustellen.

Bild D 17



- 14 Welche Körper sind durch die Zweitafelbilder im Bild D 18 dargestellt?

Bild D 18



Sind allerdings die Bildebenen ungünstig gewählt, so gehen auch beim Zweitafelbild Informationen verloren. So kann im Bild D 18(e) sowohl ein Quader als auch ein liegender Zylinder dargestellt sein. Wählt man eine andere Lage des Körpers zur Aufriß- bzw. Grundrißebene, so ist der dargestellte Körper besser erkennbar (→ Bild D 19). Beim Lösen von Aufgaben aus der Stereometrie können sowohl *Schrägbilder* als auch *Zweitafelbilder* nützlich sein. Deshalb steht man oft vor der Aufgabe, von einer Darstellung zur anderen überzugehen.

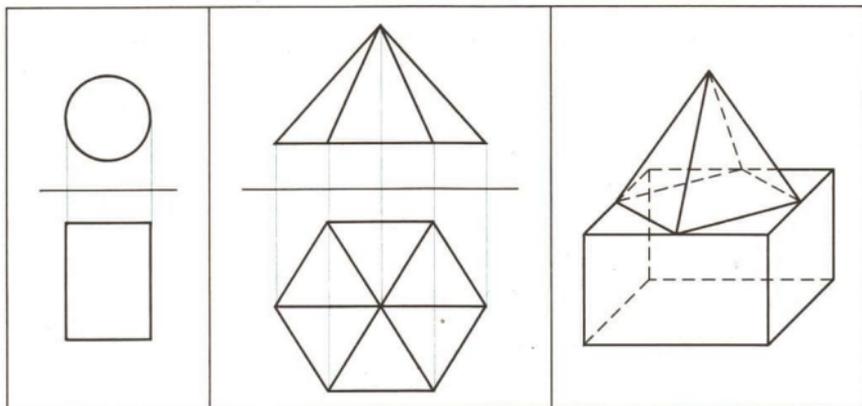


Bild D 19

Bild D 20

Bild D 21

- 15 Zeichnen Sie für den im Bild D 20 dargestellten Körper ein Schrägbild!
- 16 Stellen Sie den im Bild D 21 gegebenen Körper durch ein Zweitafelbild dar!

## Aufgaben

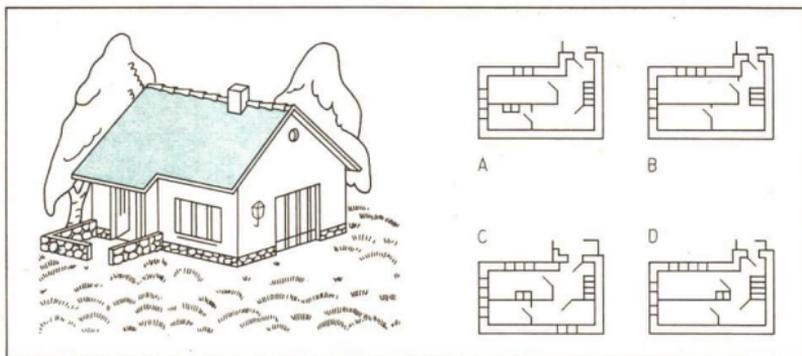


Bild D 22

1. Nach welchem der vier Grundrisse wurde das Haus erbaut (→ Bild D 22)?

2. Die Skizze im Bild D 23 zeigt ein gerades Prisma im Grund- und Aufriß. Die Maße des Prismas sind  $\overline{AB} = a = 5,0$  cm;  $\overline{AE} = \overline{BE} = s = 6,5$  cm;  $\overline{BC} = l = 14,0$  cm.
- a) Zeichnen Sie ein Schrägbild dieses Körpers!  
 b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieses Prismas!

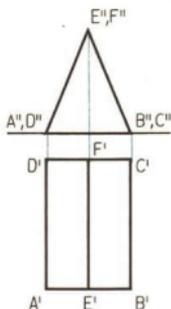


Bild D 23

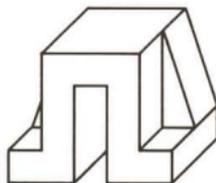


Bild D 24

3. Skizzieren Sie ein Zweitafelbild des im Bild D 24 gegebenen Körpers!
- 4.\* Skizzieren Sie für jeden der drei im Bild D 25 durch ein Zweitafelbild gegebenen Körper ein Schrägbild!

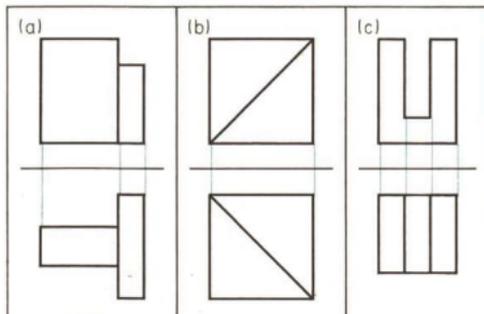


Bild D 25

- 5.\* Im Bild D 26 sind von fünf Körpern Zweitafelbilder gegeben. In welchen Fällen kann es sich dabei um Kreiszyylinder handeln?

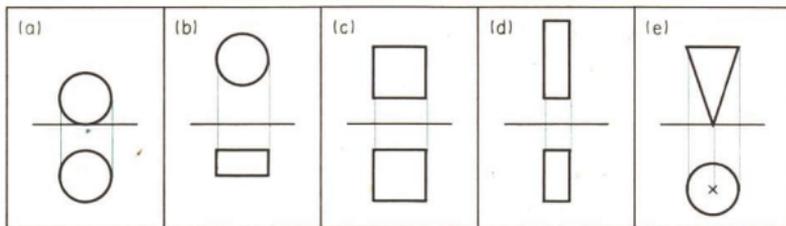


Bild D 26

## 4 Darstellung von Zylinder, Kegel und Kugel

- 17 Zeichnen Sie von jedem der folgenden drei Körper ein Zweifafelbild!
  - a) gerader Kreiszylinder (Grundkreisradius 2,5 cm, Höhe 6 cm)
  - b) gerader Kreiskegel (Grundkreisradius 3 cm, Höhe 5 cm)
  - c) Kugel (Durchmesser 4 cm)

Sollen Zylinder oder Kegel durch Zweifafelprojektion abgebildet werden, so kann man die Bildebenen stets so legen, daß sich Grund- und Aufriß nur aus Kreisen und Strecken zusammensetzen. Das Zweifafelbild einer Kugel besteht immer nur aus zwei kongruenten Kreisen.

Im Schrägbild dagegen werden Kreise meist verzerrt abgebildet. Die Bilder von Kreisen bei schräger Parallelprojektion nennt man **Ellipsen**. Solche Ellipsen können wir näherungsweise zeichnen, wenn wir für hinreichend viele Punkte des abzubildenden Kreises die Bildpunkte bestimmen und diese miteinander verbinden.

- 1 Es soll das Schrägbild eines auf seiner Grundfläche stehenden geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius  $r$  und der Körperhöhe  $h$  gezeichnet werden.

*Lösung:*

- (1) Wir zeichnen die Grundfläche in wahrer Größe und Gestalt ( $\nearrow$  Bild D 27 (a)). In diesen Kreis  $k$  zeichnen wir den Durchmesser  $\overline{AB}$  ein, der in Breitenrichtung bezüglich der Bildebene verläuft, und senkrecht zu diesem Durchmesser einige Sehnen. Diese Sehnen verlaufen in Tiefenrichtung.
- (2) Wir zeichnen das Schrägbild des Durchmessers  $\overline{AB}$  und der eingezeichneten Sehnen ( $\nearrow$  Bild D 27 (b)). Die Endpunkte der Bilder der Sehnen liegen alle auf dem Bild des Kreises  $k$ . Wir verbinden sie durch eine gekrümmte Linie, die auch durch  $A$  und  $B$  verläuft (und die keine Knicke haben darf), und erhalten *näherungsweise* das Bild des Kreises  $k$ .
- (3) Das Bild der Spitze  $S$  des Kegels liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{AB}$  und hat vom Mittelpunkt dieser Strecke den Abstand  $h$ .
- (4) Wir können nun die Bilder einiger Mantellinien des Kegels zeichnen, indem wir  $S$  mit den soeben konstruierten Ellipsenpunkten verbinden. Es genügt jedoch, diejenigen Strecken anzugeben, die das Bild des Kegels *begrenzen*. Diese liegen auf den beiden *Tangenten* vom Punkt  $S$  an die Ellipse. Auch diese Tangenten können wir hier nur *näherungsweise* zeichnen, indem wir das Lineal „nach Augenmaß“ an die Ellipse anlegen.
- (5) Abschließend kennzeichnen wir sichtbare und verdeckte Linien ( $\nearrow$  Bild D 28).

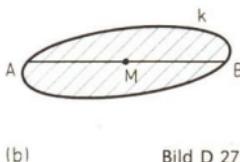
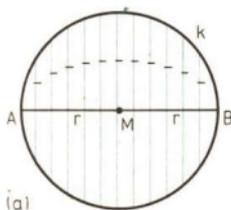


Bild D 27

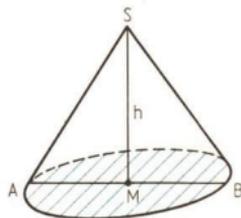


Bild D 28

- 18 Ein gerader Zylinder mit dem Grundkreisdurchmesser  $d = 5$  cm und der Höhe  $h = 6$  cm soll
- vor der Bildebene auf seiner Grundfläche stehen;
  - so vor der Bildebene liegen, daß seine Achse parallel zur Bildebene verläuft;
  - so vor der Bildebene liegen, daß seine Achse senkrecht zur Bildebene verläuft.

Zeichnen Sie jeweils ein Schrägbild des Zylinders!

Wir haben hier *Ellipsen* als *Schrägbilder von Kreisen* kennengelernt. Schrägbilder von Kugeln sind ebenfalls Ellipsen. Ellipsen können aber auch entstehen, wenn Zylinder oder Kegel von einer Ebene geschnitten werden. Man beobachtet das z. B. in einem Fleischerladen, wenn eine zylinderförmige Wurst schräg angeschnitten wurde.

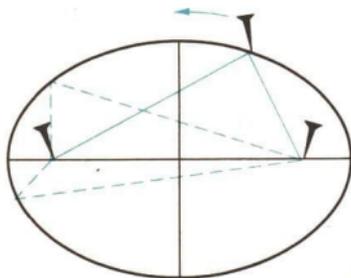


Bild D 29

Beim Zeichnen von Ellipsen ist man meist auf Näherungskonstruktionen angewiesen. Solche Konstruktionen nutzen aus, daß jede Ellipse zwei aufeinander senkrecht stehende *Symmetrieachsen* und zwei sogenannte *Brennpunkte* hat. Beispielsweise legt ein Gärtner ein ellipsenförmiges Beet wie im Bild D 29 angedeutet an.

## Aufgaben

- Zeichnen Sie das Schrägbild eines Kegels mit dem Grundkreisradius  $r = 2$  cm und der Höhe  $h = 1,5$  cm!
- Skizzieren Sie das Schrägbild eines schiefen Kreiszylinders!
- Einem geraden Kreiszyliner sei ein gerader Kreiskegel aufgesetzt. Grundkreisradius des Zylinders, Grundkreisradius des Kegels, Zylinderhöhe und Kegelhöhe sollen jeweils 4 cm betragen.
  - Skizzieren Sie ein Schrägbild dieses Körpers!
  - Bei Rotationskörpern zeichnet man mitunter auch Schrägbilder mit dem Verzerrungswinkel  $90^\circ$  und dem Verzerrungsverhältnis  $\frac{1}{2}$ . Zeichnen Sie solch ein Schrägbild des gegebenen Körpers!
- \* Bild D 30 zeigt das Zweitafelbild eines Körpers.
  - Skizzieren Sie ein Schrägbild dieses Körpers!
  - Stellen Sie Ihr Lehrbuch „auf den Kopf“, so daß das Zweitafelbild um  $180^\circ$  gedreht erscheint! Zeichnen Sie jetzt ein entsprechendes Schrägbild!

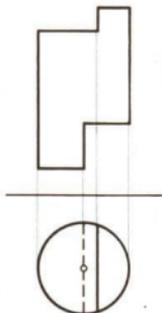


Bild D 30

## 5 Bestimmung von Strecken und Flächen an Körpern

Es soll ein Modell für die im Bild D 31(a) dargestellte dreiseitige Pyramide gebastelt werden. Außerdem sind Oberflächeninhalt und Volumen dieses Körpers zu bestimmen.

Wenn wie in dieser Aufgabe Abmessungen eines Körpers einem Zweifaltbild entnommen werden müssen, kann es notwendig werden, für bestimmte Strecken ihre *wahre Länge* zu ermitteln. Zur Lösung dieser Grundaufgabe haben Sie sowohl zeichnerische als auch rechnerische Verfahren kennengelernt.

Diese Verfahren nutzen aus, daß die interessierende Strecke, ihr Grundriß und die beiden Projektionsgeraden durch ihre Endpunkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und in dieser Ebene ein rechtwinkliges Trapez bzw. Dreieck begrenzen.

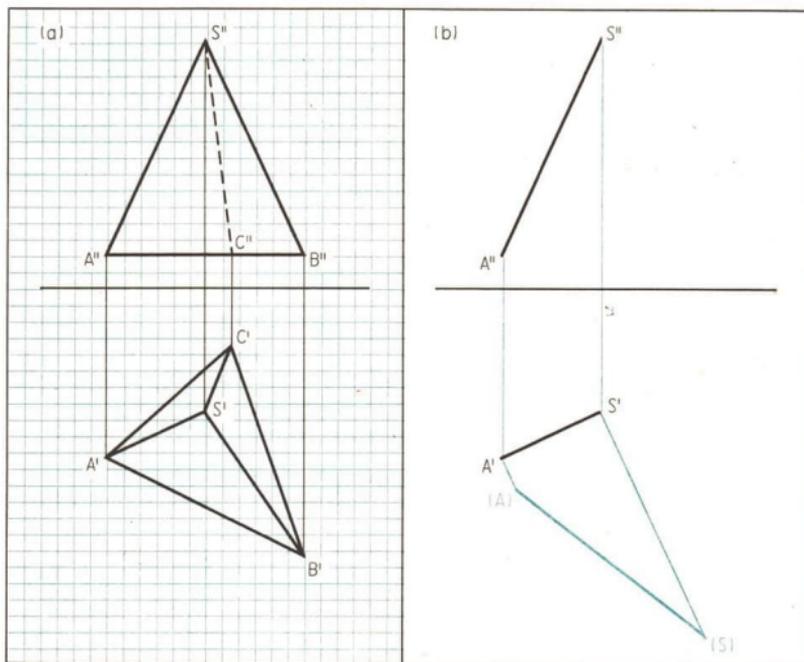


Bild D 31

■ 2 Die Länge der Strecke  $\overline{AS}$  kann wie folgt bestimmt werden:

a) *zeichnerisch:*

*Lösungsidee:* Die Ebene durch die Punkte  $A$ ,  $S$ ,  $A'$  und  $S'$  wird um die Gerade  $A'S'$  in die Grundrißebene geklappt (→ Bild D 32).

*Lösung:* → Bild D 31(b)     *Ergebnis:*  $\overline{AS} = 3,6 \text{ cm}$

b) *rechnerisch:*

*Lösungsidee:* Wir denken uns eine Parallele zu  $A'S'$  durch den Punkt  $A$ . Diese schneidet die Gerade  $SS'$  in einem Punkt  $F$ . (Hier ist  $F$  zugleich der Fußpunkt der

Körperhöhe.) Das Dreieck  $AFS$  ist *rechtwinklig* mit dem rechten Winkel bei  $F$ . Nach dem *Satz des Pythagoras* gilt:  $\overline{AS}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{SF}^2$ .

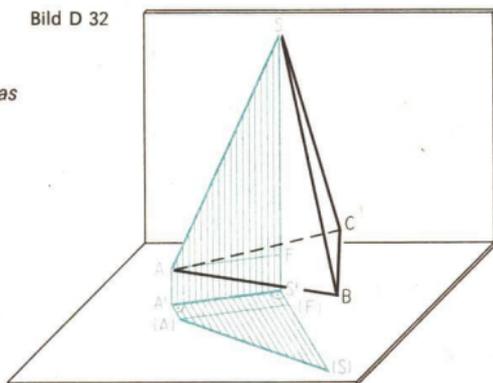
*Lösung:* Wegen  $\overline{AF} = \overline{A'S'}$  entnehmen wir dem Grundriß  $\overline{AF} = 1,6$  cm.  $\overline{SF}$  ergibt sich als Differenz der dem Aufriß entnommenen Höhen von  $A$  bzw.  $S$  über der Grundrißebene:

$$\overline{SF} = 3,2 \text{ cm. Wir erhalten } \overline{AS}^2 = (1,6 \text{ cm})^2 + (3,2 \text{ cm})^2.$$

*Ergebnis:*  $\overline{AS} = 3,6$  cm.

*Bemerkung:* Das für die Berechnung benötigte rechtwinklige Dreieck findet man mitunter schneller, wenn man zunächst die zeichnerische Lösung skizziert.

Bild D 32



Wurden für die im Bild D 31(a) dargestellte Pyramide auch die Längen der Strecken  $\overline{BS}$  und  $\overline{CS}$  ermittelt, so kann man ein Kantenmodell dieses Körpers (z. B. aus Trinkröhrchen) bauen. Legt man jedoch Wert auf ein aus Pappflächen zusammengesetztes Modell, so ist die **wahre Größe und Gestalt der Seitenflächen** der Pyramide zu ermitteln. Dafür kann man die bereits bestimmten Kantenlängen nutzen. Beispielsweise läßt sich das Dreieck  $ABS$  aus den Strecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BS}$  und  $\overline{AS}$  nach dem Kongruenzsatz (sss) in wahrer Größe und Gestalt konstruieren.

- 19 Zeichnen Sie ein Netz der Pyramide aus Bild D 31(a), versehen Sie es mit Klebefalzen, und kleben Sie es zu einem Körpermodell zusammen!
- 20 Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt der Pyramide aus Bild D 31(a)!

Die wahre Größe und Gestalt der Pyramidenseitenflächen hätten wir auch *mit Hilfe eines Stützdreiecks* konstruieren können. Bei unregelmäßigen Vielecken oder krummlinig begrenzten ebenen Figuren als Seitenflächen eines Körpers sind wir auf diese Methode sogar angewiesen.

- 21 Erläutern Sie am Beispiel der Ebene, in der das Dreieck  $ABS$  liegt, die Begriffe „Höhenlinie“, „Fallinie“ und „Stützdreieck“!
- 22 Beschreiben Sie die Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Seitenfläche  $ABS$  mit Hilfe eines Stützdreiecks! Verwenden Sie dazu das Bild D 33; hier wurde das Dreieck  $ABS$  um die durch  $\overline{AB}$  verlaufende Höhenlinie in eine zur Grundrißebene parallele Ebene geklappt.

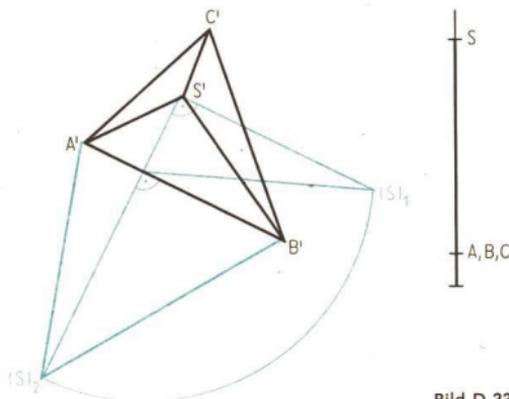


Bild D 33

## Aufgaben

1. Gegeben ist ein Quader, der von einer Ebene in den Punkten  $P, Q, R, S$  geschnitten wird ( $\rightarrow$  Bild D 34). Dabei ist  $\overline{AB} = \overline{BC} = 6,0$  cm;  $\overline{AE} = 7,0$  cm;  $\overline{AP} = \overline{DQ} = 5,0$  cm;  $\overline{ES} = \overline{HR} = 2,0$  cm.

a) Zeichnen Sie ein Zweitafelbild des Quaders einschließlich der Schnittfigur!

b) Konstruieren Sie die Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt!

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke  $\overline{PS}$ !

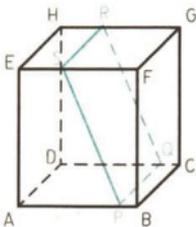


Bild D 34

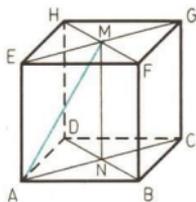


Bild D 35

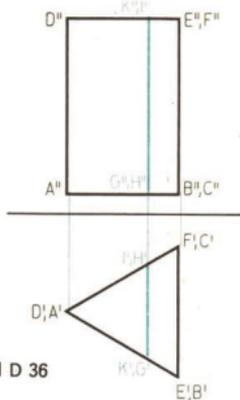


Bild D 36

2. Bild D 35 zeigt ein Schrägbild eines Würfels. Die Kantenlänge  $\overline{AB}$  sei 50 mm. Berechnen Sie die Länge der Strecke  $\overline{AM}$ ! (L)

3. Zeichnen Sie die Schnittfläche  $GHIK$  im Zweitafelbild D 36 in wahrer Größe und Gestalt! Berechnen Sie ihren Flächeninhalt!

$$\overline{AG} = \overline{DI} = 14 \text{ mm}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DF} = 20 \text{ mm}$$

$$\overline{CF} = 27 \text{ mm}$$

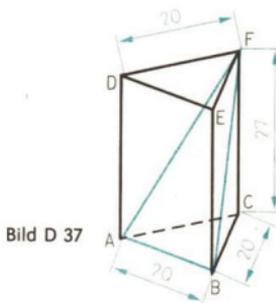


Bild D 37

- 4.\* Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche  $ABF$  im Schrägbild D 37 (Skizze; Maßangaben in Millimetern)!

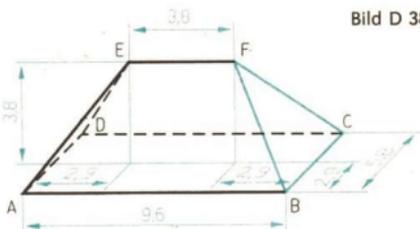
5. Berechnen Sie die fehlenden Stücke der gegebenen geraden Kreiskegel!

	$r$	$h$	$s$	$A_M$	$A_O$	$V$
$K_1$	5,3 cm	17,8 cm				
$K_2$		12,3 cm	17,7 cm			
$K_3$		3,8 cm				18,4 cm <sup>3</sup>
$K_4$			10 cm		300 cm <sup>2</sup>	

6. Das Bild D 38 zeigt das Schrägbild eines Walmdaches (Skizze; Maßangaben in Metern).

Bild D 38

- a) Zeichnen Sie ein Zweitafelbild des Walmdaches im Maßstab 1:100!  
 b) Konstruieren Sie im Maßstab 1:100 die wahre Größe und Gestalt einer dreieckigen Seitenfläche dieses Daches!



- 7.\* Einem Würfel mit der Kantenlänge  $a$  seien eine Kugel einbeschrieben und eine zweite Kugel umbeschrieben. Wie verhalten sich die Volumina dieser drei Körper zueinander?

## Berechnung und Darstellung zusammengesetzter Körper

### 6 Volumenberechnung bei zusammengesetzten Körpern

Bei praktischen Anwendungen treten häufig Körper auf, die sich aus von uns bereits behandelten Körpern zusammensetzen. Das Volumen des Gesamtkörpers berechnet sich dann als *Summe der Volumina* der einzelnen Teilkörper.

- 3 Das Volumen und die Masse der dargestellten Welle aus Stahl ( $\rho = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ) sind zu berechnen ( $\rightarrow$  Bild D 39).

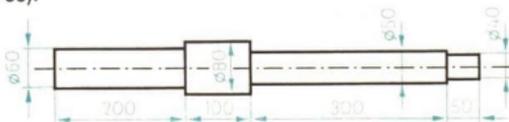


Bild D 39 Maßangaben in Millimetern

**Lösung:**

Sinnvolle Genauigkeit des Ergebnisses: 2 zuverlässige Ziffern

**Überschlag:** Der Körper entspricht etwa einem Zylinder mit einem Radius von 3 cm und einer Höhe von 65 cm.

$$V \approx \pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2 \cdot 65 \text{ cm} \approx 30 \cdot 60 \text{ cm}^3 = 1800 \text{ cm}^3$$

$$m \approx 2000 \text{ cm}^3 \cdot 8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 16 \text{ kg}$$

**Gleichungen:**

$$V = V_{z_1} + V_{z_2} + V_{z_3} + V_{z_4}$$

( $V_z$  – Volumen des Zylinders)

$$V = \pi \cdot r_1^2 h_1 + \pi \cdot r_2^2 h_2 + \pi \cdot r_3^2 h_3 + \pi \cdot r_4^2 h_4$$

$$V = \pi \cdot (r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2 + r_3^2 h_3 + r_4^2 h_4)$$

$$m = V \cdot \rho$$

Ablaufplan:

$$3 \times 20 + 4 \times 10 + 2,5 \times 30 + 2 \times 5 = \pi \approx [1720.022]$$

$$V \times 7,85 = [13502.172]$$

*Ergebnis:* Das Volumen der Welle beträgt  $1,7 \text{ dm}^3$ , ihre Masse  $14 \text{ kg}$ .  
(Dieses Ergebnis liegt in der Größenordnung des Überschlags.)

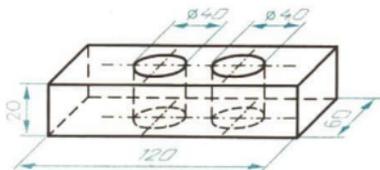
Oft läßt sich ein Körper, dessen Volumen berechnet werden soll, mit Hilfe geeigneter *Ergänzungskörper* zu einem geometrischen Körper zusammensetzen, für den wir eine Volumenformel kennen. Dann ergibt sich das Volumen des gegebenen Körpers als *Differenz der Volumina* von Gesamtkörper und Ergänzungskörper.

- 4 Das Volumen des im Bild D 40 skizzierten Werkstücks läßt sich wie folgt berechnen ( $V_Q$  – Volumen des Quaders;  $V_Z$  – Volumen des Zylinders):

$$V = V_Q - 2 \cdot V_Z$$

$$V = a \cdot b \cdot h - 2 \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h$$

- 23 Berechnen Sie das Volumen des im Bild D 40 skizzierten Werkstücks! Welche Masse hat ein solches Werkstück aus Stahl ( $\rho = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ )?



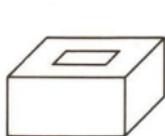
Maßangaben in Millimetern

Bild D 40

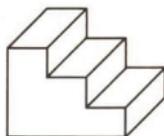
## Aufgaben

1. Je zwei der im Bild D 41 skizzierten Bauteile ((a), (b), ..., (l), (m)) bilden zusammengesetzt einen Würfel. Welche sind das jeweils?

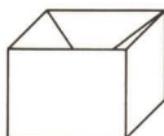
Bild D 41



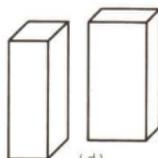
(a)



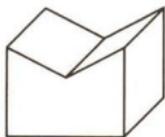
(b)



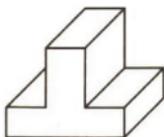
(c)



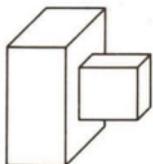
(d)



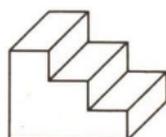
(e)



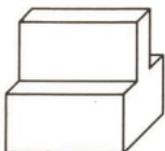
(f)



(g)



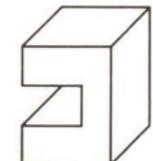
(h)



(i)



(k)



(l)



(m)

2. Ein Körper ist aus einem Quader und einer geraden Pyramide zusammengesetzt (→ Bild D 42). Berechnen Sie sein Volumen!

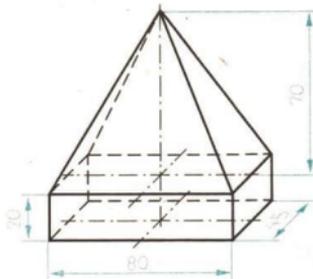
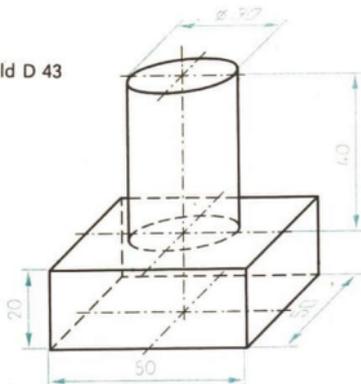


Bild D 42 Maßangaben in Zentimetern

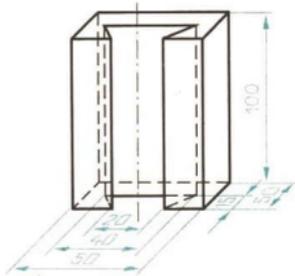
3. Ein Werkstück besteht aus einem zylinderförmigen und einem aufgesetzten kegelförmigen Teil mit gleichen Grundkreisdurchmessern  $d = 22,0$  mm. Die Höhe des Zylinders beträgt  $h_z = 51,0$  mm, die des Kegels  $h_k = 27,0$  mm. Berechnen Sie Volumen und Masse des Werkstücks ( $\rho = 7,80 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ )!
4. Ein gerader Kreiszyylinder mit der Höhe  $h$  und dem Durchmesser  $d$  stehe auf seiner Grundfläche. Auf seiner Deckfläche sei eine Halbkugel mit dem gleichen Durchmesser aufgesetzt.
- Zeichnen Sie den Aufriß eines solchen zusammengesetzten Körpers für  $d = h = 4,4$  cm!
  - Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers für  $d = h = 4,4$  cm! (L)
  - Bei einem anderen so zusammengesetzten Körper soll das Volumen des Zylinders genau so groß wie das der Halbkugel sein. Berechnen Sie die Höhe dieses Zylinders für  $d = 4,4$  cm! (L)
5. Das Bild D 43 zeigt ein Werkstück aus Stahl ( $\rho = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ), das aus einem quaderförmigen und einem zylinderförmigen Teil besteht. Berechnen Sie seine Masse!

Bild D 43



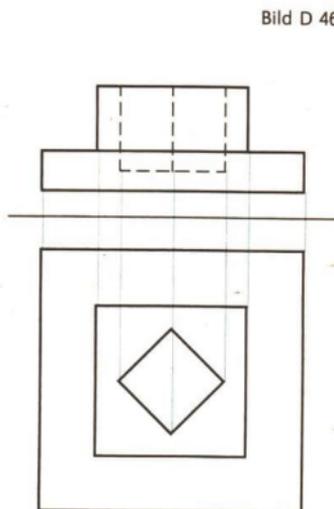
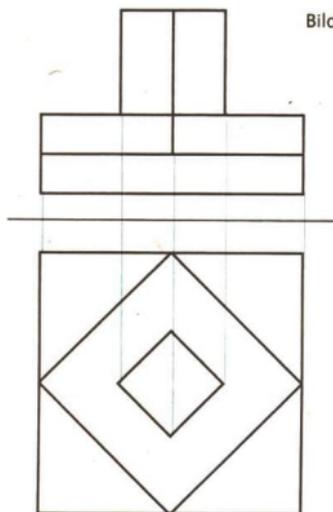
Maßangaben in Millimetern

Bild D 44



Maßangaben in Millimetern

6. Bild D 44 zeigt das Schrägbild eines Maschinenteils (Schlittenführung). Skizzieren Sie seinen Grundriß! Berechnen Sie das Volumen des Maschinenteils!
7. Berechnen Sie Oberflächeninhalt und Volumen der in den Bildern D 45 und D 46 dargestellten Körper!



- 8.\* Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a = 1,5 \text{ dm}$  und  $b = 3,6 \text{ dm}$  dreht sich um die Hypotenuse. Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt des Rotationskörpers! (L)

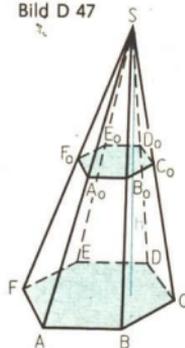
## 7 Berechnung und Darstellung von Pyramiden- und Kegelstümpfen

Eine sechsseitige Pyramide mit einem Volumen von  $576 \text{ cm}^3$  werde in halber Höhe parallel zur Grundfläche zerschnitten ( $\rightarrow$  Bild D 47). Welches Volumen hat die Restpyramide?

*Wir überlegen:* Auf jeder Seitenfläche der Pyramide liegen Grundkante und Schnittkante zueinander parallel und bilden zusammen mit den beiden Seitenkanten eine Strahlensatzfigur. Eine weitere Strahlensatzfigur erhalten wir, wenn wir uns z. B. durch die Seitenkante  $\overline{SF}$  und die Pyramidenhöhe eine Ebene gelegt denken. Indem wir auf jede dieser Strahlensatzfiguren den ersten Strahlensatz anwenden, bekommen wir

$$\frac{\overline{SA}_0}{SA} = \frac{\overline{SB}_0}{SB} = \frac{\overline{SC}_0}{SC} = \frac{\overline{SD}_0}{SD} = \frac{\overline{SE}_0}{SE} = \frac{\overline{SF}_0}{SF} = \frac{\frac{1}{2} h}{h} = \frac{1}{2}$$

Bild D 47



Wir dürfen uns demnach die Restpyramide aus der gegebenen Pyramide durch zentrische Streckung entstanden denken mit dem Streckungszentrum  $S$  und dem Streckungsfaktor  $k = \frac{1}{2}$ . Weil damit Pyramide und Restpyramide ähnliche Körper mit dem Ähnlich-

keitsfaktor  $k = \frac{1}{2}$  sind, gilt für ihre Volumina  $V$  und  $V_0$  die Beziehung

$$V_0 = k^3 \cdot V.$$

- 24 a) Berechnen Sie das Volumen der Restpyramide!
- b) Den wievielten Teil des Grundflächeninhalts der Pyramide beträgt der Inhalt der Schnittfläche? Begründen Sie Ihre Antwort!
- c) Eine von den Grundkanten der Pyramide habe eine Länge von 4 cm. Wie lang ist die ihr entsprechende Schnittkante?
- 25 Ein gerader Kreiskegel mit einem Oberflächeninhalt von  $600 \text{ cm}^2$  werde in halber Höhe parallel zur Grundfläche zerschnitten. Wie groß ist der Oberflächeninhalt des Restkegels?

Wird eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so zerfällt sie in einen **Pyramidenstumpf** und die zum Stumpf gehörende **Ergänzungs- oder Restpyramide** (↗ Bild D 48). Wenn ein Kreiskegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so entsteht ein **Kegelstumpf** und ein zum Stumpf gehörender **Ergänzungs- oder Restkegel** (↗ Bild D 49).

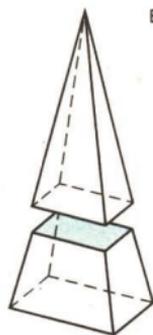


Bild D 48

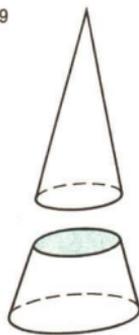


Bild D 49

- 26 Beschreiben Sie allgemein einen Pyramidenstumpf, indem Sie seine Begrenzungsflächen kennzeichnen!
- 5 Ein gerader quadratischer Pyramidenstumpf habe Grundkanten  $a = 6 \text{ cm}$ , Deckkanten  $b = 3 \text{ cm}$  und die Höhe  $h = 4 \text{ cm}$ . Es sollen a) ein Zweitafelbild, b) ein Schrägbild dieses Körpers gezeichnet werden.

*Lösungsidee:*

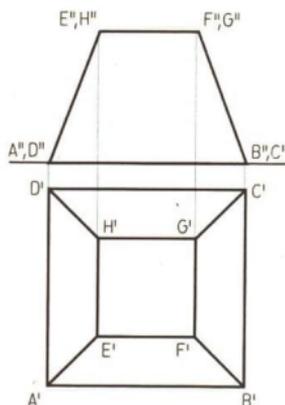
Eine besondere Lage des Körpers ist nicht vorgeschrieben. Der Einfachheit halber wird die Grundfläche des Stumpfes so angenommen, daß sie in der Grundrißebene liegt und eine Grundkante parallel zur Aufrißebene ist.

Im Zweitafelbild sind der Grundriß der Grundfläche und der Grundriß der Deckfläche *ähnliche Figuren in Ähnlichkeitslage* (↗ Bild D 50). Ähnlichkeitspunkt ist dabei der Grundriß der Spitze der Gesamtpyramide, der Ähnlichkeitsfaktor beträgt

$k = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ . Gleiches gilt für die Bilder von Grundfläche und Deckfläche im



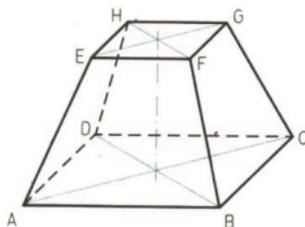
Bild D 50



Maßstab 1 : 2

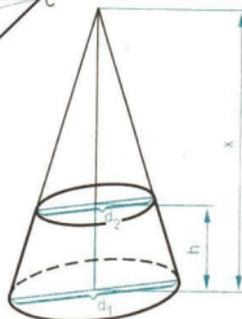


Bild D 51



Maßstab 1 : 2

Bild D 52



Schrägbild ( $\nearrow$  Bild D 51). Dies kann man für eine Zeichenkontrolle nutzen: Im Zweitafelbild wie im Schrägbild müssen sich die Verlängerungen der Bilder der Seitenkanten des Stumpfes in einem Punkt (dem Bild der Spitze der Gesamtpyramide) schneiden.

- 27 Gegeben sei ein gerader Kreiskegelstumpf, dessen Grundfläche einen Radius von 5 cm und dessen Deckfläche einen Radius von 3 cm habe, die Höhe des Stumpfes sei 2 cm.
  - a) Zeichnen Sie ein Zweitafelbild des Körpers!
  - b) Skizzieren Sie das Schrägbild des Körpers!
- 28 Ein gerader Kreiskegel mit einem Grundflächeninhalt  $A_G = 48 \text{ cm}^2$  und der Höhe  $h = 20 \text{ cm}$  wird 5 cm von der Spitze entfernt durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Kegelstumpfes!

Bei Berechnungen an Pyramiden- oder Kegelstümpfen ist es oft zweckmäßig, den aus Stumpf und zugehörigem Ergänzungskörper zusammengesetzten Gesamtkörper zu betrachten. Wie ist z. B. bei Berechnungen am Kegelstumpf zu verfahren, wenn uns der Ergänzungskegel bzw. der Gesamtkegel nicht gegeben ist?

- 6 Der Stumpf eines geraden Kreiskegels habe einen Grundflächendurchmesser  $d_1 = 9 \text{ cm}$ , einen Deckflächendurchmesser  $d_2 = 6 \text{ cm}$  und die Höhe  $h = 5 \text{ cm}$ . Welche Höhe hat der Gesamtkegel?

*Lösungsidee:*

Der Gesamtkegel und der Ergänzungskegel sind zueinander ähnliche Körper. Demzufolge stehen einander entsprechende Strecken im selben Verhältnis ( $\nearrow$  Bild D 52).

Lösung:

$$\frac{x}{x-h} = \frac{d_1}{d_2} \quad \frac{x}{x-5 \text{ cm}} = \frac{9 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} \quad \underline{x = 15 \text{ cm}}$$

Ergebnis: Die Höhe des Gesamtkegels beträgt 15 cm.

- 29 Der Stumpf einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide habe Grundkanten  $a = 6 \text{ cm}$ , Deckkanten  $b = 4 \text{ cm}$  und die Höhe  $h = 3 \text{ cm}$ . Welche Höhe und welches Volumen hat die Gesamtpyramide?
- 30 Das Volumen von Pyramidenstümpfen und Kreiskegelstümpfen läßt sich auch mit Hilfe der Gleichung

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_G + \sqrt{A_G A_D} + A_D) \quad (\rightarrow \text{Tafelwerk S. 17})$$

berechnen, die hier nicht hergeleitet werden soll. Dabei bezeichnen  $A_G$  den Inhalt der Grundfläche,  $A_D$  den der Deckfläche und  $h$  die Höhe des Stumpfes.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Gleichung das Volumen des im Schülerauftrag D 29 gegebenen Körpers!
- b) Denken Sie sich beim Kreiskegelstumpf den Radius der Deckfläche zunächst immer größer werdend, bis er schließlich gleich dem Radius der Grundfläche ist, dann immer kleiner werdend, bis er schließlich gleich Null ist. Was für ein Körper ist jeweils entstanden und was ist aus der angegebenen Gleichung für das Volumen geworden?
- c) Stellen Sie entsprechende Überlegungen wie in b) für den quadratischen Pyramidenstumpf an!

## Aufgaben

1. Gibt es eines unter den fünf Netzen, das auf den „Pyramidenrest“ paßt ( $\rightarrow$  Bild D 53)?
2. Untersuchen Sie, ob die im Bild D 54 dargestellten Körper aus Pyramiden entstanden sind! Ergänzen Sie die Bilder in der Vorstellung so nach oben, daß die Gestalt der Körper erkennbar ist, aus denen die dargestellten Restkörper entstanden sind! Beschreiben Sie die „vervollständigten“ Körper!

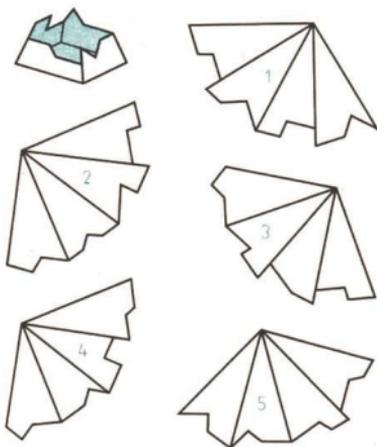
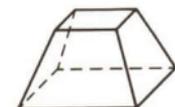


Bild D 53

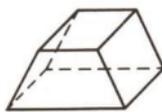
Bild D 54



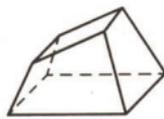
(a)



(b)



(c)



(d)

3. Kohlereserven werden auf Halden gelagert. Aus Gründen des Brandschutzes hat eine solche Halde angenähert die Form eines geraden Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche. Seine Abmessungen sind:
- |  |                        |
|--|------------------------|
| Seitenlänge der Grundfläche                  | $s = 19,0 \text{ m}$ , |
| Höhe des Pyramidenstumpfes                   | $h = 4,5 \text{ m}$ ,  |
| Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche | $\alpha = 45^\circ$ .  |
- a) Skizzieren Sie ein Zweitafelbild des Pyramidenstumpfes!  
b) Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes!
4. Ein gerader Kreiskegel ( $r = 3,0 \text{ cm}$ ;  $h = 6,0 \text{ cm}$ ) wird von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten. Der Abstand der Ebene von der Grundfläche des Kegels beträgt  $2,0 \text{ cm}$ .
- a) Zeichnen Sie ein Zweitafelbild des so entstandenen Stumpfes!  
b) Berechnen Sie die Länge des Radius der Schnittfläche! (Vergleichen Sie auch mit der Zeichnung!)  
c) Berechnen Sie das Volumen des Kegelstumpfes!
5. Das Bild D 55 zeigt das Schrägbild eines geraden Pyramidenstumpfes mit rechteckiger Grund- und Deckfläche. Es sei  $\overline{AB} = \overline{CD} = 72 \text{ mm}$ ,  $\overline{BC} = \overline{AD} = 48 \text{ mm}$ ,  $\overline{EF} = \overline{GH} = 24 \text{ mm}$ ,  $\overline{FG} = \overline{EH} = 16 \text{ mm}$ ,  $h_K = 40 \text{ mm}$ .
- a) Zeichnen Sie ein Zweitafelbild des Stumpfes! (Legen Sie zweckmäßigerweise eine Grundkante parallel zur Rißachse!)  
b) Benennen Sie in beiden Rissen alle Eckpunkte!  
c) Konstruieren Sie eine der Seitenflächen des Pyramidenstumpfes in wahrer Größe, und kennzeichnen Sie die wahre Länge einer Seitenkante des Pyramidenstumpfes!

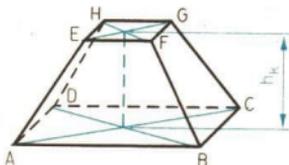


Bild D 55

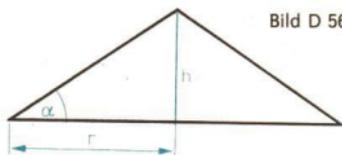


Bild D 56

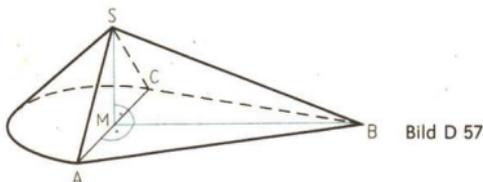
- 6.\* Auf einer Baustelle ist ein Kieshaufen in Form eines geraden Kreiskegels aufgeschüttet worden (↗ Bild D 56). Er ist  $4,0 \text{ m}$  hoch und hat einen Schüttwinkel  $\alpha = 30^\circ$ . Die Skizze zeigt den Achsenschnitt eines solchen Kegels.
- a) Berechnen Sie den Radius der Grundfläche dieses Kegels! (L)  
b) Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels! (L)  
c) Berechnen Sie die Masse des aufgeschütteten Kieses ( $\rho = 2,2 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ )! (L)  
d) Ein zweiter kegelförmiger Kieshaufen habe den gleichen Schüttwinkel, sei aber doppelt so hoch wie der erste. In welchem Verhältnis stehen  
– die Radien  
– die Volumina dieser beiden Kegel?

## 8 Berechnung und Darstellung weiterer Körper

Für die Berechnung des Volumens bzw. des Oberflächeninhalts zusammengesetzter Körper sind oft nicht die Stücke gegeben, deren Werte unmittelbar in die entsprechenden Formeln eingesetzt werden können. Damit werden *zusätzliche Berechnungen* notwendig. Dafür sucht man am jeweiligen Körper geeignete Teilfiguren (z. B. rechtwinklige Dreiecke, Kreise, ähnliche Figuren) und nutzt bekannte Gesetzmäßigkeiten. Solche Figuren findet man mitunter auch erst dann, wenn man den gegebenen Körper sinnvoll ergänzt.

- 7 Die Abraumphalde der Schachanlage „Bernard Koenen“ im Mansfelder Bergbaurevier hat angenähert die Form eines Körpers, der aus einem halben geraden Kreiskegel und einer Pyramide zusammengesetzt ist (→ Bild D 57).

Bekannt ist:  $\overline{AC} = 310$  m;  $\overline{MS} = 115$  m;  $\overline{BS} = 380$  m.



- Wieviel Kubikmeter Abraum lagern auf dieser Halde?
- In wieviel Jahren ist diese Halde entstanden, wenn auf ihr jährlich  $300\,000$  m<sup>3</sup> Abraum gelagert wurden?

*Lösungsidee:* Das Volumen  $V_{HK}$  des halben Kreiskegels ist die Hälfte des Volumens  $V_K$  eines Kegels mit dem Grundkreisradius  $\frac{1}{2} \overline{AC}$  und der Höhe  $\overline{MS}$ .

Die erwähnte Pyramide ist schief. Für die Berechnung ihres Volumens  $V_P$  können wir als Grundfläche das Dreieck  $ABC$  oder das Dreieck  $ACS$  wählen. Die Körperhöhe ist dann  $\overline{MS}$  oder  $\overline{BM}$ . In jedem Fall wird die Länge der Strecke  $\overline{BM}$  benötigt. Wir wählen als Grundfläche das Dreieck  $ABC$  mit der Grundseite  $\overline{AC}$  und der Höhe  $\overline{BM}$ . Die Strecke  $\overline{BM}$  ist Kathete im rechtwinkligen Dreieck  $MBS$ . Die zweite Kathete  $\overline{MS}$  und die Hypotenuse  $\overline{BS}$  dieses Dreiecks sind bekannt. Das berechnete Gesamtvolumen ist durch  $300\,000$  m<sup>3</sup> zu dividieren.

*Lösung:*

Sinnvolle Genauigkeit des Ergebnisses: drei zuverlässige Ziffern

*Überschlag:* Der Körper entspricht etwa einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche (Grundkanten  $300$  m und  $400$  m) und einer Höhe von  $100$  m:

$$V \approx \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot 1 \cdot 10^2 \text{ m} = 4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

Der Zeitraum beträgt ungefähr  $\frac{4 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^5}$  Jahre, also rund 13 Jahre.

Variante A: Die Lösung erfolgt in Einzelschritten.

Schritt	Formel	Ablaufplan	Teil- ergebnis
Kegel	$V_K = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 \cdot \overline{MS}$	310 [ + ] 2 [ = ] $\times^{\circ}$ [ x ] 115 [ x ] $\pi$ [ + ] 3 [ = ]	2893000
halber Kegel	$V_{HK} = \frac{1}{2} V_K$	2893000 [ + ] 2 [ = ]	1447000
Strecke $\overline{BM}$	$\overline{BM} = \sqrt{\overline{BS}^2 - \overline{MS}^2}$	380 [ $\times^{\circ}$ ] - 115 [ $\times^{\circ}$ ] [ = ] $\sqrt{\phantom{x}}$	362,2
Dreieck $ABC$	$A_G = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BM}$	310 [ x ] 362,2 [ + ] 2 [ = ]	56140
Pyramide	$V_P = \frac{1}{3} A_G \cdot \overline{MS}$	56140 [ x ] 115 [ + ] 3 [ = ]	2152000
Gesamt- volumen	$V = V_{HK} + V_P$	1447000 [ + ] 2152000 [ = ]	3599000
Zeitraum	$\frac{V}{300000 \frac{\text{m}^3}{\text{a}}}$	3599000 [ + ] 300000 [ = ]	12

Variante B: Es wird ein Ablaufplan entwickelt, der direkt das Gesamtvolumen liefert. Damit entfällt das Ablesen von Zwischenergebnissen.

$$\begin{aligned}
 V &= V_{HK} + V_P = \frac{1}{2} V_K + \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot \overline{MS} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{\overline{AC}^2}{4} \cdot \overline{MS} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BM}}{2} \cdot \overline{MS} \\
 &= \frac{1}{6} \overline{AC} \cdot \overline{MS} \cdot \left( \frac{\overline{AC} \cdot \pi}{4} + \sqrt{\overline{BS}^2 - \overline{MS}^2} \right) \\
 V &= \frac{1}{6} \cdot 310 \cdot 115 \cdot \left( \frac{310 \cdot \pi}{4} + \sqrt{380^2 - 115^2} \right) \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Ablaufplan:

$$\begin{aligned}
 &380 [ \times^{\circ} ] - 115 [ \times^{\circ} ] [ = ] \sqrt{\phantom{x}} [ + ] 310 [ x ] \pi [ + ] 4 [ = ] [ x ] 115 [ x ] 310 [ + ] 6 [ = ] [ 3598596.1 ] \\
 &V [ + ] 300000 [ = ] [ 11.99532 ]
 \end{aligned}$$

**Ergebnis:** Auf der Halde lagern etwa 3600000 m<sup>3</sup> Abraum. Sie entstand in ca. 12 Jahren.

(Dieses Ergebnis liegt in der Größenordnung des Überschlags.)

Auch Rotationskörper lassen sich mitunter in Körper *zerlegen* oder zu Körpern *ergänzen*, deren Volumen bzw. Oberflächeninhalt wir bereits berechnen können. Durch anschließende Summen- bzw. Differenzbildung erhalten wir die gesuchten Größen.

- 8 Ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm rotiere um eine Achse, die mit dem Quadrat in einer Ebene liegt, parallel zu einer Quadratseite verläuft und vom Mittelpunkt des Quadrats einen Abstand von 10 cm hat. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Körpers!

**Lösungsidee:** Es entsteht ein Hohlzylinder mit der Höhe 6 cm (im Bild D 58 längs der Achse aufgeschnitten dargestellt). Sein Volumen ergibt sich als Differenz aus dem Volumen des „äußeren“ Zylinders mit dem Radius  $(10 + 3)$  cm und dem Volumen des „inneren“ Zylinders mit dem Radius  $(10 - 3)$  cm.

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } V_a &= \pi r_a^2 h = 13^2 \cdot \pi \cdot 6 \text{ cm}^3 \\ V_i &= \pi r_i^2 h = 7^2 \cdot \pi \cdot 6 \text{ cm}^3 \\ V &= V_a - V_i = 6\pi \cdot (13^2 - 7^2) \text{ cm}^3 \\ &= 6\pi \cdot 120 \text{ cm}^3 = 720\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

**Ergebnis:** Das Volumen des Rotationskörpers beträgt rund  $2260 \text{ cm}^3$ .

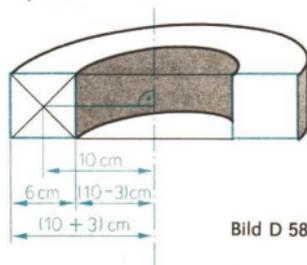


Bild D 58

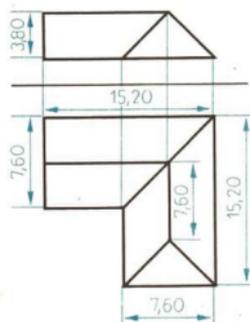
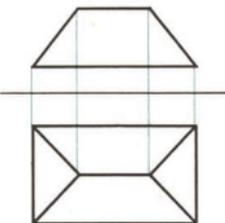
- 31 Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers aus Beispiel D 8!

Bild D 59

## Aufgaben

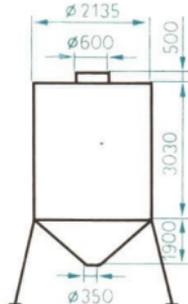
- a) Ein Walmdach ( $\nearrow$  Bild D 59) überdecke eine rechteckige Fläche von 13,20 m Länge und 5,40 m Breite. Der Dachfirst sei 7,80 m lang und liege 2,60 m höher als die untere Dachbegrenzung (Traufkante). Wie groß sind Dachoberfläche und Dachraum?

b) Zeichnen Sie ein Schrägbild dieses Daches! Wählen Sie dazu einen geeigneten Maßstab!
- \* Berechnen Sie für das im Bild D 60 im Grund- und Aufriß dargestellte Dach den Inhalt der einzelnen Dachflächen und den gesamten Dachraum!
- Berechnen Sie das Fassungsvermögen des im Bild D 61 dargestellten Zementsilos!
- Der im Bild D 62 dargestellte Maßbecher soll dazu dienen,  $\frac{1}{2}$  Liter abzumessen. In welcher Höhe ist der Eichstrich anzubringen? (L)



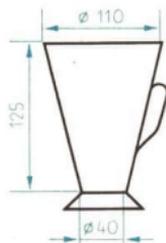
Maßangaben in Metern

Bild D 60



Maßangaben in Millimetern

Bild D 61



Maßangaben in Millimetern

Bild D 62

5. Ein Quadrat rotiert um eine seiner Diagonalen. Beschreiben und skizzieren Sie den entstehenden Rotationskörper!
- 6.\* Der Würfel im Bild D 63 habe die Kantenlänge  $a$ . Er wird von einer Ebene, die durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  verläuft, geschnitten.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur und den Abstand des Eckpunktes  $S$  von der Schnittebene!
  - Bestimmen Sie die Volumina der beiden entstehenden Teilkörper! (L)

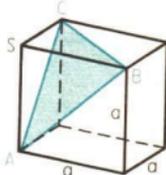


Bild D 63

## 9 Gegenseitige Abhängigkeit von Volumen, Oberflächeninhalt und anderen Bestimmungsstücken an Körpern

Bei Flächen- und Rauminhaltsberechnungen treten – ebenso wie bei der Beschreibung physikalischer und anderer naturwissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten oder bei der Anwendung der Mathematik in der Technik und in der Ökonomie – *Größengleichungen* auf. Mit ihrer Hilfe haben auch wir schon oft aus gegebenen Größen eine andere Größe berechnet. Sind beispielsweise von einer quadratischen Pyramide die Grundkantenlänge  $s$  und die Körperhöhe  $h$  gegeben, so bestimmen wir ihr Volumen nach der Größengleichung  $V = \frac{1}{3} s^2 h$ . Der Oberflächeninhalt  $A_0$  eines geraden Kreiszyllinders hängt ab

von seinem Grundkreisradius  $r$  und seiner Höhe  $h$ . Der Zusammenhang zwischen diesen drei Größen wird durch die Gleichung  $A_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r h$  beschrieben.

Eine derartige Abhängigkeit drückt sich auch darin aus, daß Änderungen der Werte der „unabhängigen“ Größen Veränderungen der „abhängigen“ Größe bewirken. So führt z. B. eine Verdopplung des Radius eines Kreises zu einer Vervierfachung seines Flächeninhalts.

Hängt eine Größe von *mehreren* anderen ab, so lassen sich solche Aussagen nicht mehr ganz so leicht treffen.

- 32 Wie ändert sich das Volumen eines geraden quadratischen Prismas, wenn seine Grundkantenlänge verdoppelt und zugleich seine Höhe halbiert wird?

Aus dem Physikunterricht ist bekannt, daß man zwecks eingehender Untersuchung solcher Zusammenhänge jeweils nur den Einfluß *einer* der unabhängigen Größen auf die abhängige Größe betrachtet. Die übrigen Größen sieht man dabei als konstant an. Damit sind wir in der Lage, unsere Kenntnisse über lineare, quadratische bzw. Potenzfunktionen auch bei der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen geometrischen Größen anzuwenden.

- 9 Wird die Höhe einer quadratischen Pyramide als konstant angesehen, so drückt die Gleichung  $V(s) = \frac{1}{3} h \cdot s^2$  die Abhängigkeit des Volumens von der Grundkantenlänge aus. Die Gleichung ist von der Gestalt  $f(x) = a \cdot x^2$ . Der Graph der entsprechenden quadratischen Funktion ist im Bild D 64 skizziert. Die Abhängigkeit des Volumens einer quadratischen Pyramide von der Körperhöhe (bei konstanter Grundkantenlänge) wird durch die Gleichung  $V(h) = \frac{1}{3} s^2 \cdot h$ , also durch eine lineare Funktion  $y = m \cdot x$  beschrieben (→ Bild D 65).

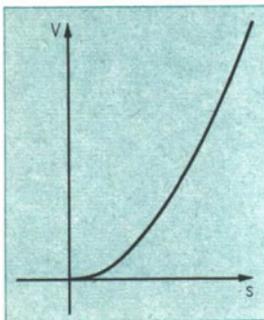


Bild D 64

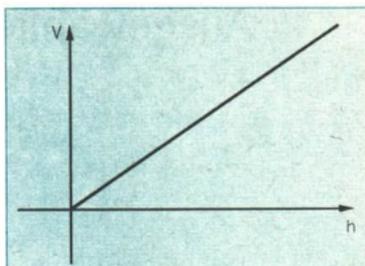


Bild D 65

- 33 Analysieren Sie die Abhängigkeit des Oberflächeninhaltes eines geraden Kreiszylinders von seinem Grundkreisradius und von seiner Höhe nach dem Muster von Beispiel D 9! Schreiben Sie die jeweiligen Funktionsgleichungen unter Verwendung der Variablen  $x$  und  $y$ , und skizzieren Sie die entsprechenden Graphen!

### Aufgaben

- Das Volumen eines Quaders beträgt  $32 \text{ cm}^3$ . Welches Volumen hat ein zweiter Quader, dessen Kanten alle halb so lang wie die entsprechenden Kanten des ersten Quaders sind? In welchem Zusammenhang stehen die Oberflächeninhalte der beiden Quader?
- Geben Sie vier Möglichkeiten an, das Volumen eines Quaders zu vervierfachen!
- Vier parallele Kanten eines Quaders werden verneunfacht. Wie sind die übrigen Kanten zu verändern, damit der entstehende Quader dasselbe Volumen hat wie der ursprüngliche?
- Ein Quadrat rotiere **a)** um eine seiner Mittellinien, **b)** um eine seiner Seiten. Stellen Sie jeweils Volumen und Oberflächeninhalt des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von der Seitenlänge  $a$  des Quadrats dar (Funktionsgleichung und Graph)!
- Für die Lösung gewisser wärmetechnischer Probleme ist das Verhältnis  $\frac{A_0}{V}$  von Körpern von Bedeutung. Ermitteln Sie dieses Verhältnis
  - für Kugeln in Abhängigkeit vom Radius,
  - für Kreiszylinder in Abhängigkeit vom Grundkreisradius (bei konstanter Höhe)!
 Skizzieren Sie die Graphen der entsprechenden Funktionen!
- Es sollen zylinderförmige Dosen mit dem Volumen  $V = 1,00 \text{ dm}^3$  produziert werden. Bestimmen Sie für die Radien 4 cm, 6 cm, 8 cm, ..., 16 cm die Höhe der jeweiligen Dose! Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Radius und Höhe von Zylindern bei konstantem Volumen graphisch dar!
- Es sollen zylinderförmige Werkstücke mit dem Mantelflächeninhalt  $A_M = 200 \text{ cm}^2$  hergestellt werden. Bestimmen Sie für die Radien 4 cm, 8 cm, 12 cm, ..., 24 cm die Länge des jeweiligen Werkstücks! Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Radius und Höhe von Zylindern bei konstantem Mantelflächeninhalt graphisch dar!



- LE 6: ● 32b)  $(2n+1)^2 - 1 = (2n+1)(2n+1) - 1 = 4n^2 + 2n + 2n + 1 - 1 = 4(n^2 + n)$   
Wegen  $(n^2 + n) \in \mathbb{N}$  ist  $4(n^2 + n)$  durch 4 teilbar.
2.  $a|b$  bedeutet, es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a \cdot n = b$ . (1)  
 $b|c$  bedeutet, es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $b \cdot m = c$ . (2)  
Für  $b$  wird in (2) die linke Seite von (1) eingesetzt: Man erhält  $(a \cdot n) \cdot m = c$  bzw.  $a \cdot (n \cdot m) = c$ . Also existiert mit  $n \cdot m$  eine natürliche Zahl, die mit  $a$  multipliziert  $c$  ergibt, d. h.,  $a|c$ .
8. c) Die erste, dritte und vierte Aussage ist wahr; die anderen beiden Aussagen sind falsch.
- 10.\* In allen Fällen entstehen wahre Aussagen. Bei der Division muß zusätzlich  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$  und  $d \neq 0$  gefordert werden.
- LE 7: ● 34c)  $9a + b$ ;  $5y - 12z$ ;  $31r + 20s + 4rs$   
● 35a)  $8a - b + 10c$  b)  $3ab$   
● 36c)  $8a^5b^5c$   
● 38a)  $-6ab - 10a^3$ ;  $-21m^2n + 14mn^2 - 49mn$  b)  $a(3 + 5r)$ ;  $3xyz^2(6x - 7z)$ ;  $4s(2s - r + 3r^2)$   
● 39  $8a + \frac{9}{4}b$ ;  $s + 4 + 5r$ ;  $-\frac{7x}{y} + 9 - 3y$
1. d)  $-\frac{r}{3} - a$  f)  $5r^2 + 3r + 4s - 3s^2$
6. d)  $0,5 + 0,1 \frac{a}{b} - 0,03a$  7. d)  $-14rs + 8$  e)  $\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}$
10. d)  $\frac{n}{2}(n+1)$  11. b) 0 e)  $-0,4$  12. d)  $a = \frac{2A}{h} - c$  13.\* c) 0
- LE 8: ● 44b)  $(3x+a)^2$ ;  $(4b-a)^2$ ;  $(p+q)^2$ ;  $(\frac{3}{5}+x)^2$   
● 45  $x^2 + px + q + (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$
1. f)  $\frac{a^2}{16} + \frac{ab}{14} + \frac{b^2}{49}$  h)  $9t^4 - 30t^2r^2 + 25r^4$
2. e)  $a^4 - d^2$  f)  $\frac{r^2}{25} - \frac{s^2}{49}$
3. g)  $(\sqrt{3}s + 6t)(\sqrt{3}s - 6t)$  h)  $(\frac{2}{3}a - 1,2b)(\frac{2}{3}a + 1,2b)$
6. a)  $97^2 = (100 - 3)^2 = 10000 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 9 = 9409$   
c)  $104 \cdot 96 = (100 + 4)(100 - 4) = 10000 - 16 = 9984$
8. e)  $2 : 1$  11. a)  $y^2 + 2y + 3 = (y+1)^2 + 2$
12. c)  $(u+1)^2 + 99$ ; der kleinstmögliche Termwert ist 99.
- LE 9: ● 48b)  $\frac{u+4v}{3uv}$   
● 50d)  $\frac{5a(a+b)}{30(a+b)^2(a-b)}$  und  $\frac{3b(a-b)}{30(a+b)^2(a-b)}$
1. e) 1 f)  $\frac{4}{5(m+n)}$  4. e)  $\frac{c^2-4}{2c}$  i)  $\frac{5xz-2y^2}{60xyz}$  k)  $\frac{a+b^4}{b^2}$
5. f)  $\frac{2u^2+2uv-3v^2}{3uv}$
- LE 10: ● 54d)  $\frac{z}{9y^2}$  f)  $\frac{4}{81r^2s^3t}$
2. c)  $\frac{-3m^2p}{7n}$  g)  $\frac{y}{5y+2}$  3. f)  $8000 \text{ mpf}$  g)  $\frac{1}{s^2}$  4. d)  $-\frac{6}{s}$  5. c)  $\frac{3}{4}$

LE 11: ● 60 c)  $1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$  d)  $\frac{\sqrt{a-b}}{c+d}$

● 61 Gleichwertige Ablaufpläne sind (2) und (3) sowie (5) und (6).

6. c) Beginnt man mit  $x_1 = 33$ , so ergibt sich  $x_2 = 31,651515$ ,  $x_3 = 31,62279$ , und es gilt  $|1000 - x_3^2| < 0,001$ .

LE 12: 7. a)  $2^3$  b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^5$  c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$  11.  $a-b$  und  $b-a$  13.  $a^2 = \frac{1}{4}$

LE 13: 6. d)  $\frac{1}{3}x^2$  g)  $x^4$  8. c)  $5^{3k+1}$

15. a) Die Aussage ist wahr, denn nach den Potenzgesetzen gilt:

$$(a^m)^n \cdot (b^m)^n = (a^m \cdot b^m)^n = [(a \cdot b)^m]^n = (a \cdot b)^{m \cdot n}$$

LE 14: 3. e)  $\sqrt[4]{4^2} = 2$

4. e)  $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$  ist für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  definiert wegen  $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$  und  $(a-b)^2 \geq 0$ .

LE 15: ● 73 4; 5;  $\frac{1}{5}$ ; 2; 4

6. Nein, z. B. ist  $2^4 = 4^2$ . 7. a)  $1\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$  8. a)  $(5^2)^{-3} = \frac{1}{(5^2)^3} = \frac{1}{5^6}$ LE 16: ● 75 Voraussetzung:  $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0; b \neq 0$ 

Behauptung:  $a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$

Beweis:  $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1$  (nach Definition)

$(a \cdot b)^0 = 1$  (nach Definition)

daraus folgt  $a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$ , w. z. b. w.

2. a)  $-4^{-2}$  c)  $a^{-1} \cdot b^{-3n} \cdot c^{-1}$  7. a)  $n = -3$  b)  $n = -5$  c)  $n = -4$  d)  $n = 1$ 14.\* a)  $2\sqrt{2}$  c)  $-3\sqrt{2}$  c)  $2\sqrt{2} + 6$  d)  $-52 + 35\sqrt{2}$ 

LE 17: ● 81 a)  $9,9999999 \cdot 10^{99}$  b)  $-9,9999999 \cdot 10^{99}$  c)  $1 \cdot 10^{-99}$  d)  $-1 \cdot 10^{-99}$

LE 18: 3.\* a) LL0000 (48) b) L00L00L (73) c) L0L0LLO (86)  
d) L0L0L00L (169) e) LL00000LLO (774) f) L00LLLLLLOLLO (2550)

## Zum Kapitel B: Ungleichungen und Gleichungssysteme

LE 1: ● 4 a) Die Aussagen (1), (2), (4) und (5) drücken den gleichen Sachverhalt aus:  $x_0$  ist eine der Lösungen der Gleichung. Dagegen sagt (3) aus:  
Die Gleichung besitzt genau eine Lösung, nämlich  $x_0$ .● 6 c)  $L = \{1; 2; 3\}$  f)  $L = N$ 7. b)  $L = \{0; 1; 2; \dots; 99\}$  c)  $L = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ 

f) Menge aller gebrochenen Zahlen, die größer als 0 und kleiner als 1 sind

g) Menge aller rationalen Zahlen  $z$ , für die gilt:  $0 < z \leq 1$ h)  $L = \emptyset$ 

9. Menge aller reellen Zahlen, die sowohl größer als 3 als auch kleiner als 9 sind

13.\*  $L = \{(0; 0); (0; 1); (0; 2); (1; 0); (1; 1); (2; 0)\}$ LE 2: 2. Es gehört z. B. 0,4 zur Lösungsmenge von  $x + 1 > 0$ ; nicht aber zur Lösungsmenge von  $2x > 1$ .7. c)  $z \leq \sqrt{2}$  und  $z < \sqrt{2}$  sind äquivalent bez.  $Q$ ; die beiden Ungleichungen sind nicht äquivalent bez.  $R$ .

LE 3: 1. b)  $x = \frac{1}{6}$  d)  $x = 2$  8.\* c)  $a; a^3; a^2$  d)  $a^3; a; a^2$

LE 4: ● 24 b)  $3x + 9 > 0$

● 26  $L = \emptyset$

2. a)  $x < \frac{1}{4}$     b)  $x > 5$     c)  $u > -1$     h)  $x < \frac{5}{2}$     i)  $x > \frac{17}{4}$     k)  $z > \frac{120}{19}$

3. f)  $L = R$     i)  $L = \emptyset$

4. b)  $x \leq \sqrt{5}; x \in R$     5. d)  $x > -0,07$     6. a)  $L = \{19\}$     7. b)  $x \leq -3$   
 $x < \sqrt{5}; x \in Q$   
 $L = \{0; 1; 2\}$

LE 5: 5. Für die Durchschnittsgeschwindigkeit  $v_D$  von Dieter gilt:

$$\frac{630}{63} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \leq v_D \leq \frac{670}{61} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Für die Durchschnittsgeschwindigkeit  $v_P$  von Peter gilt:  $\frac{415}{39} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \leq v_P \leq \frac{435}{37} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

Da sich die Intervalle für die Durchschnittsgeschwindigkeiten „überlappen“, kann keine Aussage darüber gemacht werden, wer von beiden schneller fuhr.

11.\* Laut Voraussetzung gilt  $a < b$  und  $c < d$ ; d. h., es gibt positive reelle Zahlen  $n$  und  $m$  mit  $a + n = b$  und  $c + m = d$ .Durch Addition beider Gleichungen ergibt sich  $(a + n) + (c + m) = b + d$  bzw.  $a + c + (n + m) = b + d$ .Da  $n + m$  eine positive reelle Zahl ist, gilt  $a + c < b + d$ .

LE 7: ● 30 d)  $L = \emptyset$

3. Alle geordneten Paare  $(x; y)$  natürlicher Zahlen mit  $y = x$  sind Lösung der Gleichung.LE 8: 3. c)  $(1; 2) \in L_{(1)}$  und  $(1; 2) \in L_{(2)}$     4. b) Es existiert kein solches Paar.8.\* b) Ein Schnittpunkt existiert, falls gilt:  $-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$ .9.\* a) Für  $m = 3$  und  $c = 4$  fallen die Geraden zusammen.LE 9: ● 37 b)  $L = \{(-2; 1)\}$ . Man nutzt  $24y = 2 \cdot 12y$  und  $12y = x + 14$ .1. f) Alle geordneten Paare  $(x; \frac{2x-15}{3})$  mit  $x \in R$  gehören zur Lösungsmenge des Gleichungssystems.

k)  $L = \{(5; 3)\}$     l)  $L = \{(-2; 7)\}$

2. c)  $L = \{(0,31; 0,13)\}$     6. c)  $S(1; 2)$     d)  $S(-3; 4)$ 8.  $L = \left\{ \left( \frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2} \right) \right\}$ . Für  $a = b$  erhält man  $x = a$  und  $y = 0$ .12.\* c)  $L = \left\{ \left( \frac{1}{a+b}; \frac{1}{a+b} \right) \right\}$  ( $a \neq -b$ )    13.\* c)  $L = \{(1; 4)\}$ 

LE 10: 9.\* Jedes der Drahtstücke ist etwa 12,9 cm lang. [12.855476]

11.\* Alter des Vaters: 45 Jahre; Alter der Mutter: 44 Jahre; Alter des Kindes: 20 Jahre.

13. b) im laufenden Jahr: 16 Jungen, 24 Mädchen  
im vergangenen Jahr: 24 Jungen, 16 Mädchen14. mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers:  $\approx 2,9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$   
mittlere Eigengeschwindigkeit des Schubverbandes:  $\approx 12,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 

16.\* 2000 Umdrehungen

17. stündlicher Zufluß:  $150000 \text{ m}^3$     Verbrauch einer Turbine pro Stunde:  $40000 \text{ m}^3$ 

22. 6,3 t Stahl und 5,7 t Grauguß

### Komplexe Übungen:

1. c)  $(a + b)^2 \geq 2ab$  mit  $a; b \in R$     3. 61,5 und 496. a)  $n - 4; n - 3; n - 2; n - 1; n; n + 1; n + 2; n + 3; n + 4; n + 5; n + 6$ 

11. 5; 9; 15

16. b) Liegen  $P_1$  und  $P_2$  auf der durch  $y = mx + n$  bestimmten Geraden  $g$ , so gilt
- $$1 = 2m + n$$
- $$-\frac{1}{3} = (-1) \cdot m + n.$$
- Das Gleichungssystem besitzt die Lösung  $m = \frac{4}{9}$  und  $n = \frac{1}{9}$ .
- $$y = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}$$
- ist eine Gleichung für die Gerade  $g$ .
26. Die größere Riemenscheibe besitzt einen Durchmesser von 30 cm, die kleinere einen Durchmesser von 24 cm.
27. b) Es können monatlich 96 l Kraftstoff gespart werden.
29. a) Die Wasserwerke besitzen eine Tagesleistung von 1250 m<sup>3</sup> bzw. 1750 m<sup>3</sup>.  
b) Die Kleinstadt ist 24 Tage länger mit Wasser versorgt.

## Zum Kapitel C: Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen; Potenzfunktionen

- LE 4: 9. b) I. und II. Quadrant    c)  $S(-d; 2)$   
d) Wertebereich: alle reellen Zahlen  $y$  mit  $y \geq 2$ .
- 15.\* a)  $S(2; -3)$ , monoton steigend für  $x \geq 2$ ; also ist im angegebenen Intervall der kleinste Funktionswert  $f(3) = -2$ , der größte Funktionswert  $f(7) = 22$ .  
b)  $S(1; -4)$ , monoton fallend für  $x \leq 1$ ; also ist im angegebenen Intervall der größte Funktionswert  $f(-5) = 32$ , der kleinste Funktionswert  $f(1) = -4$ .  
c)  $S(-1; 1)$ , monoton steigend für  $x \geq -1$ , monoton fallend für  $x \leq -1$ ; also ist der größte Funktionswert  $f(-6) = 26$ , der kleinste Funktionswert  $f(-1) = 1$ .  
d)  $S(1; 4)$ , monoton steigend für  $x \geq 1$ , monoton fallend für  $x \leq 1$ ; also ist der kleinste Funktionswert  $f(1) = 4$ , der größte Funktionswert  $f(-1) = f(3) = 8$ .
- 16.\* c) Es gibt zwei Funktionen:  $y = x^2 - 4x$  und  $y = x^2 + 4x$ .
- LE 5: 4.  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 9$ ; Nullstellen für  $|p| \geq 6$     5.  $D = 9 - q$ ; keine Nullstellen für  $q > 9$
7. a) Das Gleichungssystem  
(I)  $0 = (-2)^2 + p(-2) + q$   
(II)  $-6 = 0^2 + p \cdot 0 + q$   
hat die Lösung  $p = -1$ ,  $q = -6$ . Die Gleichung der Funktion lautet:  $y = x^2 - x - 6$ .
- b)  $S\left(\frac{1}{2}; -\frac{25}{4}\right)$ ; die 2. Nullstelle liegt wegen der Symmetrie der Parabel bei  $x_2 = 3$ .
8. a) Die Symmetrieachse halbiert den Abstand zwischen den Nullstellen, also  $x_5 = 1$ .  
b)  $y = (x-1)^2 + e$ ;  $0 = (-3-1)^2 + e$ ;  $e = -16$ ;  $S(1; -16)$   
c)  $y = (x-1)^2 - 16$  bzw.  $y = x^2 - 2x - 15$     d)  $x = 1$
- 14.\* a)  $x_1 = 1,7$ ;  $x_2 \approx -1,7$     b)  $x_1 \approx 0,2$ ;  $x_2 \approx -4,2$
- LE 9: 3. a)  $(x+4)^2 = 36$ ;  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -10$     e)  $(x + \frac{3}{2})^2 = 0$ ;  $x_{1,2} = -\frac{3}{2}$   
b)  $(x-2)^2 = 9$ ;  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = -1$     f)  $(x+0,5)^2 = 1$ ;  $x_1 = 0,5$ ;  $x_2 = -1,5$   
c)  $(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{49}{4}$ ;  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = 2$     g)  $(x+4)^2 = 16$ ;  $x_1 = -8$ ;  $x_2 = 0$   
d)  $(x-6)^2 = 0$ ;  $x_{1,2} = 6$     h)  $(x-5)^2 = 25$ ;  $x_1 = 10$ ;  $x_2 = 0$
- LE 10: 8. a)  $L = \{4\}$     b)  $L = \emptyset$     c)  $L = \{1\}$     d)  $L = \{-3\}$     e)  $L = \left\{\frac{1}{7}\right\}$     f)  $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
- LE 11: 7.\*  $x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = (x - x_1)(x - x_2)$   
 $x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2$
- LE 12: 8. a)  $x^2 + 32x - 38 = 0$ ;  $L = \{-33,15; 1,15\}$  (auf zwei Stellen gerundet)

$$b) x^2 + \frac{25}{6}x + \frac{25}{6} = 0; L = \{-1,67; -2,50\} \text{ (auf zwei Stellen gerundet)}$$

$$c) x \neq 0; x^2 - 8x + 15 = 0; L = \{3; 5\}$$

$$e) x \neq 2; x \neq 7; x^2 - 10x + 25 = 0; L = \{5\}$$

$$d) x \neq 0; x^2 - 8 = 0; L = \{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$$

$$f) |x| \neq 2; x^2 - 2 = 0; L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

$$9. a) x \neq 0; x \neq 2; x \neq 4; x^2 - 7x + 6 = 0; L = \{1; 6\}$$

$$b) x \neq 2; x \neq 4; x^2 - 6x + 8 = 0; L = \emptyset$$

$$c) x \neq 2; x \neq 4; x^2 - 5x + 6 = 0; L = \{3\}$$

$$e) |x| \neq 1; x^2 - 4x = 0; L = \{0; 4\}$$

$$d) |x| \neq 1; x^2 - 4x - 21 = 0; L = \{-3; 7\}$$

$$f) |x| \neq 5; 5x^2 - 18x = 0; L = \left\{0; \frac{18}{5}\right\}$$

$$14.* (I') x = 20 - 2y; (II') y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$L = \{(4; 8); (16; 2)\}$$

$$LE 13: 1. b) \text{ Fall } a \neq b: a > -b; L = \{-\sqrt{a+b}; \sqrt{a+b}\}$$

$$a = -b; L = \{0\}$$

$$a < -b; L = \emptyset$$

$$\text{Fall } a = b: L = R$$

$$2. a) L = \left\{-\frac{a}{3}; \frac{a}{2}\right\} \quad b) 6x^2 + x - 1 = 0$$

$$11.* D = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}; \text{ wenn } a \text{ und } c \text{ verschiedene Vorzeichen haben, so ist } b^2 - 4ac > 0 \text{ und damit } D > 0.$$

$$12.* D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2; D > 0 \text{ genau dann, wenn } \left|\frac{p}{2}\right| > \sqrt{2}.$$

LE 14: 6.\* Anzahl der Diagonalen in einem konvexen  $n$ -Eck:  $\frac{n(n-3)}{2}$ . Das gesuchte Vieleck ist ein 14.\* 7-Eck und hat demzufolge 7 Seiten.

Alter	vor 2 Jahren	jetzt	in 12 Jahren
Enkel	$(x - 2)$ Jahre	$x$ Jahre	$(x + 12)$ Jahre
Großvater	$10(x - 2)$ Jahre	$[10(x - 2) + 2]$ Jahre	$[10(x - 2) + 14]$ Jahre

$$\frac{10(x - 2) + 14}{x + 12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10(x - 2) + 2}{x}$$

Der Großvater ist 72 Jahre alt.

LE 16: 13.\* Die Menge aller Argumente  $x$ , für die  $g(x) < f(x)$  gilt (für die der Graph von  $y = x^3$  „unterhalb“ des Graphen von  $y = x^2$  verläuft), besteht aus allen reellen Zahlen, die kleiner als 1 und verschieden von 0 sind. ( $\rightarrow$  Bild L 1)

## Komplexe Übungen:

$$3. e) -2x^2 + 12x - 14 = 0,5x^2 - x - 3,5;$$

$$x^2 - 5,2x + 4,2 = 0$$

Schnittpunkte:  $P_1(4,2; 1,12); P_2(1; -4)$

$$5. y = x^2 - 2x - 3$$

$$8.* a) x_1 = 1; x_2 \approx 2,8; x_3 \approx -2,8$$

$$b) x_1 = 0; x_2 \approx 5,1; x_3 \approx -3,6$$

$$c) x_1 \approx -0,9; x_2 \approx 1,3; x_3 \approx 2,5$$

$$d) x_1 \approx -2,4; x_2 \approx 0,8; x_3 \approx 2,6$$

$$e) x_1 = -2; x_2 = 2$$

$$9.* a) \text{ Die Funktion hat genau eine Nullstelle } x_0 \approx 0,430.$$

$$b) \text{ Die Funktion hat genau eine Nullstelle } x_0 \approx 1,47.$$

$$c) \text{ Die Funktion hat genau eine Nullstelle } x_0 \approx -1,70.$$

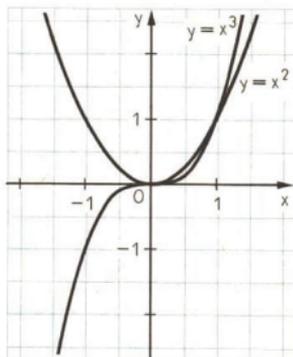


Bild L 1

19. a)  $x^2(x-2)=0$ ;  $L = \{0; 2\}$       b)  $x(x^2-1)=0$ ;  $x(x+1)(x-1)=0$ ;  
 $L = \{-1; 0; 1\}$   
 c)  $x^2(x^2+3)=0$ ;  $L = \{0\}$       d)  $x(x^2-x-6)=0$ ;  $L = \{-2; 0; 3\}$   
 e)  $x^2(x^2+x-6)=0$ ;  $L = \{-3; 0; 2\}$       f)  $x(x^2+2x-48)=0$ ;  $L = \{-8; 0; 6\}$
20. a)  $L = \{-4; 3\}$       b)\*  $L = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$   
 c)\*  $L = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$       d)\*  $L = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
- 21.\* a) nein, denn  $\sqrt{2 \cdot 2 + 5} = 2 + 1$  (wahr) und  $\sqrt{2 \cdot (-2) + 5} = -2 + 1$  (falsch);  $L = \{2\}$   
 b) (1)  $L = \{4\}$ ; (2)  $L = \{9\}$ ; (3)  $L = \{2,5\}$ ; (4)  $L = \emptyset$ ; (5)  $L = \{1,5\}$

## Zum Kapitel D: Körperdarstellung und Körperberechnung

LE 5: 2.  $\overline{AM} = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \overline{AB} \approx 61 \text{ mm}$  [61.237244]

LE 6: 4. b)  $V = \frac{\pi}{3} \cdot (4,4 \text{ cm})^3 \approx 89 \text{ cm}^3$  [89.204476]

c)  $h = \frac{4,4 \text{ cm}}{3} \approx 1,5 \text{ cm}$  [1.4666667]

8.\*  $V = \frac{a^2 \cdot b^2}{c} \cdot \frac{\pi}{3} \approx 7,8 \text{ dm}^3$  [7.8298155]

$A_0 = \frac{a \cdot b}{c} (a + b) \cdot \pi \approx 22 \text{ dm}^2$  [22.184477]

mit  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3,9 \text{ cm}$

Die als Hilfsgröße benötigte Höhe  $h$  des Dreiecks erhält man durch Anwenden des Höhen- und des Kathetensatzes oder durch folgende Überlegung: Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt  $A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$ . Daraus folgt  $a \cdot b = c \cdot h$  und schließlich  $h = \frac{a \cdot b}{c}$ .

- LE 7: 6.\* a) Spiegelt man eines der rechtwinkligen Dreiecke im Bild D 56 an seiner Kathete  $r$ , so bilden Original- und Bilddreieck zusammen ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $2h$ . Die Länge der Hypotenuse des Originaldreiecks ist demnach  $2h$ .

$r = 4,0 \text{ m} \cdot \sqrt{3} \approx 6,9 \text{ m}$  [6.9282032]

b)  $V \approx 200 \text{ m}^3$       c)  $m \approx 440 \text{ t}$   
 ( $= 2,0 \cdot 10^2 \text{ m}^3$ )      ( $= 4,4 \cdot 10^2 \text{ t}$ )

- LE 8: 4. Der Eichstrich ist 115 mm über dem Boden des Gefäßes anzubringen.

6.\* b)  $V = \frac{1}{6} a^3$ ;  $V' = \frac{5}{6} a^3$

### Bildnachweis

ADN Zentralbild, Innentitel

Bildarchiv Volk und Wissen, S. 5; 103; Bild C 18

Wußing, Leipzig, 3. Umschlagseite

Reproduktion aus Z-R 201 (14), 3. Umschlagseite

Kopie aus „Unterhaltsames Mathe-ABC“, Mathematik und Technik, S. 22, Leipziger Volkszeitung

Verlag 1983, Bild D 22

# R Register

Im folgenden Register finden Sie alphabetisch geordnet Stichwörter mit Seitenangaben, die Ihnen das Aufsuchen von Begriffen und wichtigen Merksätzen erleichtern. Steht hinter der Seitenziffer noch ein „f.“, so bedeutet das, daß sich die Erklärungen zu diesem Stichwort bis zur folgenden Seite erstrecken. Folgt der Seitenziffer das Zeichen „ff.“, so erstrecken sich die Erklärungen sogar über mehrere der folgenden Seiten.

absolutes Glied 111  
Additionsverfahren 98  
Algorithmus 18ff.  
–, verzweigter 20f., 78f., 139  
Argument 158

Binome 30  
binomische Formeln 30

Definitionsbereich 109ff., 160  
Dezimalsystem 62  
Dezimalzahlen 63  
Diskriminante 122, 126  
Dualsystem 62f.

Einsetzungsverfahren 96f.  
Ellipse 182f.  
Exponenten  
–, ganzzahlige 51ff.  
–, natürliche 51  
–, negative 54  
–, rationale 51ff.

Fallunterscheidung 79, 146  
–, vollständige 136f.  
Funktion  
Potenz- 152ff.  
–, quadratische 109ff.  
– zweiten Grades 111ff.  
Funktionstasten 13

geometrische Körper 172ff.  
Gleichungen  
–, einander äquivalente 69

–, lineare 86f.  
–, quadratische 129ff.  
Gleichungssystem 85, 89ff.  
Absolutglieder des -s 90  
graphisches Lösen des -s 91f.  
Koeffizienten des -s 90  
–, lineares 85, 90  
Lösungsmenge des -s 90  
rechnerisches Lösen des -s 95f.  
Goldener Schnitt 130  
Graph quadratischer Funktionen 110ff.  
Größengleichungen 198

Halbkugel, Volumen 176  
Hyperbel 158

Intervall 112  
– reeller Zahlen 82

Kegel 173  
Kegelstumpf 190ff.  
Kugel, Oberflächeninhalt 176

lineares Glied 111  
Logarithmieren 63f.  
Logarithmus 64  
Lösungsformel 136f.  
Lösungsmenge 68ff., 90f., 133ff.  
– einer linearen Gleichung 89  
– eines linearen Gleichungssystems 90 (► 4)

Monotonieverhalten 158  
monoton fallend 114ff., 158  
monoton steigend (wachsend) 114ff., 158

Näherungswerte 92, 138  
 Normalform der quadratischen  
 Gleichung 131ff.  
 Nullstelle 114, 125ff.

Operationstasten 13

Parabel

–, Achse der 113  
 –, kubische 154  
 Normalparabel 114, 120  
 –, quadratische 113  
 –, Scheitelpunkt der 113ff.  
 Positionssysteme 62f.

Potenzen

– mit ganzzahligen Exponenten 51 (► 3)  
 – mit rationalen Exponenten 52 (► 4)  
 –, Rechnen mit 45ff.

Potenzfunktionen 152ff.

$$y = x^3 \quad 153f.$$

$$y = x^{-1} \quad 157f.$$

$$y = x^{-2} \quad 157f.$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \quad 160f.$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} \quad 160f.$$

$$y = a \cdot x^2 \quad 163f.$$

$$y = a \cdot x^{-1} \quad 163f.$$

Potenzgesetze 47 (► 1), 65

–, Verallgemeinerung der 55 (► 3)

Potenzieren 154

Prisma 173

Projektion 178f.

Parallel- 178

Pyramide 173, 176

Pyramidenstumpf 190ff.

quadratische Ergänzung 32, 118, 134ff.

quadratische Gleichungen 130ff.

$$x^2 = r \quad 132f.$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad 134f.$$

quadratisches Glied 111

Quadratwurzel 50

Quotienten

–, Multiplikation von 37f.

–, Division von 37f.

Radikand 50

Radizieren 50

Rechenoperation

– dritter Stufe 11

– erster Stufe 11

– zweiter Stufe 11

Scheitelpunktform 118, 121ff.

Schrägbilder 178f.

– von Kreisen und Kugeln 182f.

Taste EEX 59

Terme

– in Bruchdarstellung 35

–, Struktur der 46

–, Umformen der 26ff.

Termwert

Berechnungen mit Hilfe  
 des Taschenrechners 40ff.

Ungleichungen 66ff.

–, einander äquivalente 70ff.

–, lineare 66ff.

–, nichtlineare 79

–, Umformungsregeln für 72 (► 1), 73  
 (► 2; ► 3)

Variablengrundbereich 7

Vieta, Satz von 141

vollständiges Quadrat 31

wahre Größe und Gestalt 185

wahre Länge 184f.

Wurzel 50 (► 2)

-exponent 50

-gesetze 55f.

-ziehen 50

Addition und Subtraktion von -n 55

Multiplikation und Division von -n 55

Radizieren und Potenzieren von -n 56

Zehnerpotenzen

–, abgetrennte 58ff.

Anzeige von – mit dem SR 1 58f.

Zifferntasten 13

zusammengesetzte Körper 187ff.

zuverlässige Ziffern 58ff.

Zweitafelbilder 178f.

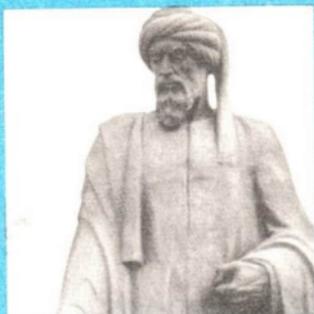
Zylinder 173, 176

# Al-Hwarizmi – Algebra – Algorithmus

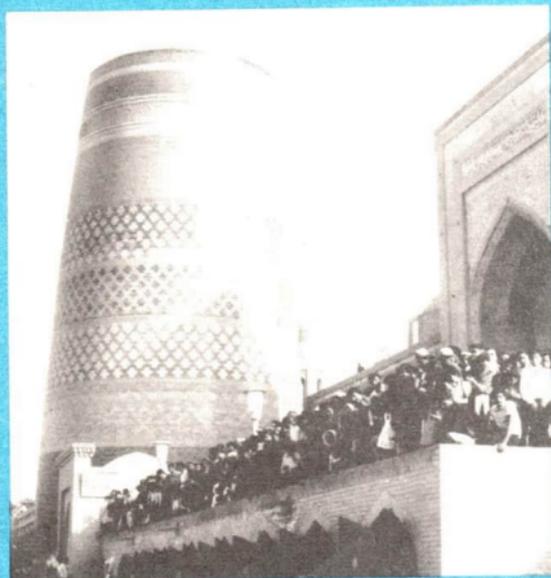
Anknüpfend an die hochentwickelte Mathematik der griechisch-hellenistischen Antike und an die in Indien erzielten Ergebnisse erlebte die Mathematik vom 9. bis zum 14. Jahrhundert im Nahen und Mittleren Osten, in Nordafrika und Spanien eine Hochblüte. Arabisch wurde zur Sprache der Wissenschaft der islamischen Welt.

Von den islamischen Gelehrten hat der Mathematiker, Astronom und Geograph Muhammad ibn Musa al-Hwarizmi (geboren vor 800, gestorben nach 847) einen bedeutenden Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik, auch in Europa, ausgeübt. Eine Abhandlung, die sich u. a. mit dem Lösen von Gleichungen befaßt, trug (verkürzt) den Titel „Al-kitab ... al-ğabr ...“. Aus dem „al-ğabr“ entstand schließlich das Wort „Algebra“.

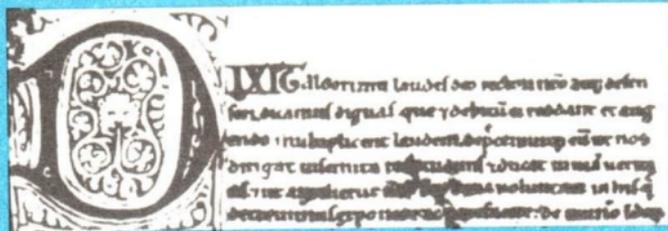
Im Jahre 1983 wurde der 1200. Geburtstag von al-Hwarizmi festlich begangen. Auch in Taschkent wurde für ihn ein Denkmal errichtet.



Eine andere Abhandlung von al-Hwarizmi machte unter den islamischen Gelehrten die indischen Ziffern bekannt; als „arabische Ziffern“ gelangten sie später in den mitteleuropäischen Teil der christlichen Welt. Die in lateinischer Übersetzung aus dem 13. Jh. erhaltene Abhandlung beginnt mit den Worten: „Dixit algarizmi ...“ („Es sprach al-Hwarizmi ...“). Da in dieser Abhandlung Rechenverfahren angegeben wurden, entstand hieraus das Fachwort *Algorithmus*.



Al-Hwarizmi stammt aus Choresm in Usbekistan, dem heutigen Chiwa (UdSSR). Minarett in Chiwa.



Kurzwort: 000905 Lehrb. Mathe KI9  
Schulpreis DDR: 2,70  
ISBN 3-06-000905-8