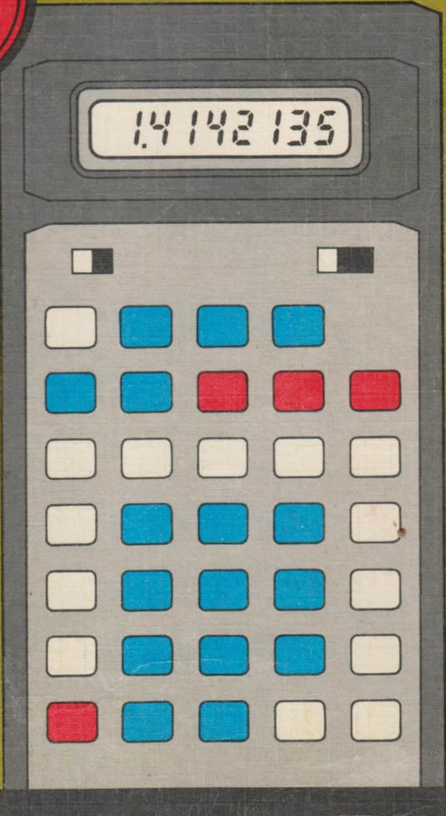
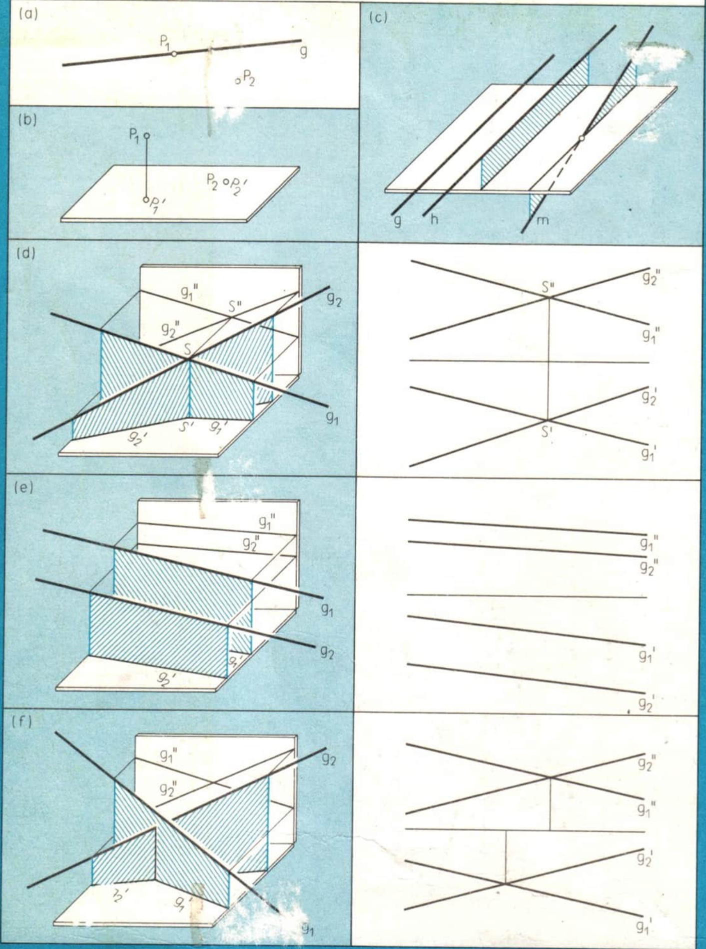
Mathematik

7



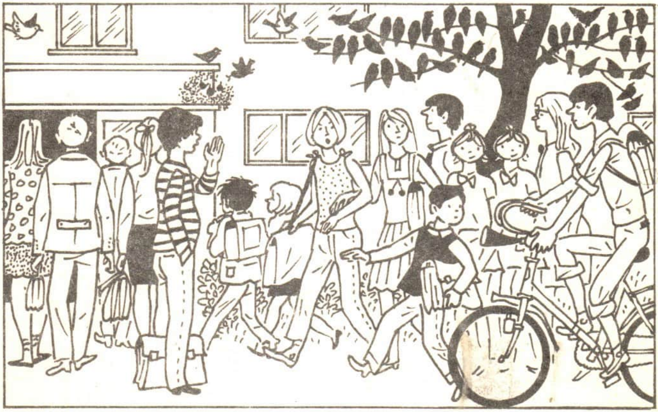
Lagebeziehungen im Raum



Mathematik

Lehrbuch für Klasse 7

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1985



Autorenkollektiv: Dr. Horst Bruchhold, Dr. sc. Günter Fanghänel, Doz. Dr. sc. Lothar Flade,
Dr. sc. Klaus Freytag, Prof. Dr. sc. Manfred Gimpel, Elke Goldberg,
Doz. Dr. sc. Hartmut Knopf, Dr. Henry-Joachim Kühn, Hella Reichenbach, Dr. Winfried Schietrumpf,
Jürgen Vortheil, Prof. Dr. sc. Werner Walsch (Kollektivleiter)

Gutachter und Berater: Dr. Renate Blachowiak, Reiner Franck,
Ruth Hense, Christa Marks, Marga Niecke, Hans-Joachim Röder,
Dr. sc. Siegfried Schneider, Rainer Schwebs, Wilfried Schwerin,
Doz. Dr. sc. Ludwig Stammler, Dr. Werner Tietz

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Schulbuch bestätigt.

1. Auflage · Ausgabe 1985
Lizenz-Nr. 203/1000/85 (E 000716-1); Kartengenehmig.: VWV 20/84
LSV 0681
Redaktion: Annemarie Mai, Karlheinz Martin
Zeichnungen: Birgit Werwigk, Jutta Wolff
Illustrationen: Harri Förster
Einband: Manfred Behrendt
Typographische Gestaltung: Atelier vwv, Karl-Heinz Bergmann
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Schrift: 9/10 Gill Mono
Redaktionsschluß: 10. September 1984
Bestell-Nr. 731 280 2
Schulpreis DDR: 2,10

Inhalt

A Elektronischer Taschenrechner; Anwendung von Verhältnisgleichungen

B Rationale Zahlen

C Gleichungen

D Quadratzahl und Quadratwurzel

E Darstellende Geometrie

F Der Kreis

G Stereometrie

Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Das Lehrbuch ist in die Kapitel A bis G gegliedert und diese weiter in Lehrbuchabschnitte, die mit blau gedruckten Überschriften eingeleitet werden.
Jedes Kapitel ist in Lerneinheiten, abgekürzt LE, eingeteilt, die jeweils durch ein Kapitel durchnumeriert sind.
Eine Titelzeile über jeder Seite gibt darüber Auskunft, zu welchem Kapitel, zu welchem Lehrbuchabschnitt und zu welcher Lerneinheit diese Seite gehört.
In den Lerneinheiten werden die Beispiele, Aufträge, Definitionen und Sätze durch folgende Marken am linken Rand des Textes gekennzeichnet:

■ Beispiel; ● Auftrag; ▶ Definition; ▷ Satz.

Beispiele, Aufträge und Merkstoffe (bestehend aus Definitionen und Sätzen) sind jeweils durch ein Kapitel durchnumeriert.
Verweise auf Abbildungen oder andere Textstellen beginnen mit einem schräggestellten Pfeil. So bedeutet z. B. (↗ Beispiel C 2, S. . . .) „vgl. Beispiel 2 im Kapitel C auf Seite . . .".
Wenn sich bei einer Aufgabennummer ein senkrechter Pfeil befindet, z. B. „3.↑", so bedeutet dieser Pfeil, daß weiter oben ein Aufgabentext zu beachten ist, der für mehrere Aufgaben gilt. Aufgaben, die zusätzlich durch einen Stern gekennzeichnet sind, zeichnen sich durch einen erhöhten Schwierigkeitsgrad aus.

A Elektronischer Taschenrechner; Anwendung von Verhältnisgleichungen

Einführung in den Gebrauch des Taschenrechners und Wiederholung des Rechnens mit Verhältnisgleichungen

1 Eingeben und Ablesen von Zahlen bei einem elektronischen Taschenrechner

Elektronische Taschenrechner (abgekürzt: ETR) werden in Betrieben, in der Verwaltung, in der Forschung und im Handel vielfach verwendet. Sie ermöglichen – falls man sie richtig bedient – ein schnelles und sicheres Ermitteln der Resultate von Rechenaufgaben. Ein Taschenrechner ist ein hochwertiges und empfindliches Gerät, das sorgsam behandelt werden muß. Beim Arbeiten mit dem Taschenrechner muß man die auszuführenden Schritte gut überlegen und genau ausführen, da falsch eingegebene Ziffern oder Operationsbefehle vom Taschenrechner weder erkannt noch korrigiert werden. Es ist deshalb auch notwendig, einzelne Eingaben und die Resultate in geeigneter Weise zu kontrollieren. Deshalb sind durch Kopfrechnen erzielte Überschläge zweckmäßig. Oftmals empfiehlt sich auch ein Nachrechnen.
Die Zellen, die den Taschenrechner mit der notwendigen Energie versorgen, haben eine relativ lange Lebensdauer. Trotzdem sollte man den Taschenrechner nach Beendigung einer Rechnung sofort ausschalten, um die Zellen zu schonen.
Es gibt eine Vielzahl verschiedener Taschenrechner, die sich in ihrer Arbeitsweise unterscheiden können. Im Lehrbuch wird vor allem die Funktionsweise des **Schulrechners SR 1** beschrieben.
Nach **Einschalten des Taschenrechners** erscheint in der Anzeige $\boxed{\quad\quad 0.}$, das Gerät ist betriebsbereit.
Durch Drücken der **Zifferntasten 0** bis **9** können beliebige natürliche Zahlen mit maximal acht Stellen eingegeben werden. Dabei werden die einzelnen Ziffern von links nach rechts (in der Reihenfolge, wie man sie schreibt) eingegeben.

■ **1** Gib die Zahl 426 in den Taschenrechner ein!
Das Gerät wird eingeschaltet. Es werden der Reihe nach die Tasten **4**, **2** und **6** gedrückt:

Einzugebende Zahl	Tastenfolge	Anzeige
426	$\boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{6}$	$\boxed{\quad\quad 426.}$

Nach jeder Eingabe einer Zahl kontrolliert man durch einen Blick auf die Anzeige, ob die richtigen Tasten gedrückt wurden. Hat man eine Zahl *falsch* eingegeben, so drückt man die **Löschtaste** CE · C und erreicht damit, daß die falsche Eingabe gelöscht wird.[1])
Es erscheint in der Anzeige [0.] , die Eingabe kann erneut beginnen.
Auch wenn eine neue Zahl eingegeben werden soll, muß man zunächst die bisher eingegebene Zahl löschen.

■ 2 Der Taschenrechner zeigt noch die Zahl 426 an; man möchte aber die Zahl 28 eingeben. Die Folge der zu drückenden Tasten wäre:
[CE·C] [2] [8]

● 1 Stelle fest, was geschieht, wenn man die 426 nicht löscht und dann die Zahl 28 eingibt!

■ 3

Einzugebende Zahl	Tastenfolge	Anzeige
705	[7] [0] [5]	705.
4 320	[4] [3] [2] [0]	4320.
803 007	[8] [0] [3] [0] [0] [7]	803007.

● 2 a) Gib folgende Zahlen ein! 3; 70; 803; 830; 7 824; 94 637; 8 070 605
b) Welches ist die größte Zahl, die man so in den Taschenrechner eingeben kann? Gib die Zahl ein und lies sie!

Dezimalbrüche können eingegeben werden, indem durch Betätigen der Taste , das Komma gesetzt wird. Zu beachten ist, daß in der Anzeige anstelle des Kommas ein Punkt erscheint.

■ 4

Einzugebende Zahl	Tastenfolge	Anzeige
4,3	[4] [,] [3]	4.3
77,286	[7] [7] [,] [2] [8] [6]	77.286
0,4	[0] [,] [4]	0.4

Hinweis: Es ist nicht notwendig, eine Null vor dem Komma, vor der keine weitere Ziffer steht, in den Rechner einzugeben. Als erste Taste kann also die Kommataste gedrückt werden.

● 3 a) Gib folgende Zahlen ein! 4,02; 4,002; 4,000 2; 7 891,6; 567 821,4; 10,230 45; 0,1; 0,01; 10,05; 0,404 004; 10 000,001; 54 321; 0,378 999
b) Welches ist die kleinste von Null verschiedene Zahl, die man so in den Taschenrechner eingeben kann? Gib diese Zahl ein und lies sie!

● 4 Gib die Zahl 35 137 135 ein und drehe den Taschenrechner um, so daß die Zahlen auf dem Kopf stehen! Was stellst du fest? Suche weitere derartige Zahlen!

2 Addieren und Subtrahieren mit dem Taschenrechner

Soll mit Hilfe eines Taschenrechners zu einer Zahl eine zweite addiert bzw. von ihr subtrahiert werden, so tastet man zunächst die erste Zahl ein, drückt dann die entsprechende **Operationstaste** + bzw. − , tastet danach die zweite Zahl ein und ruft das Ergebnis durch Drücken der Taste = auf.

[1]) clear (engl.) – reinigen
clear entry (engl.) – Eingang reinigen (bzw. „löschen")

■ 5 *Aufgabe:* 9,7 + 3,8
Wir stellen den Vorgang in folgender Übersicht dar:

Betätigte Tasten	Angezeigte Werte
Einschalten OFF [■] ON	0.
[9]	9.
[,]	9.
[7]	9.7
[+]	↗ 9.7
[3]	3.
[,]	3.
[8]	3.8
[=]	↗ 13.5

Durch das Zeichen ↗ wird die nach dem Eingeben jeder Zahl notwendige **Blickkontrolle** gekennzeichnet.
Im folgenden werden solche Übersichten kürzer angegeben, z. B. in dieser Form:

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
9,7 + 3,8	[9] [,] [7] ↗ [+] [3] [,] [8] ↗ [=]	13.5
9,7 — 3,8	[9] [,] [7] ↗ [−] [3] [,] [8] ↗ [=]	5.9

Will man eine neue Aufgabe lösen, so muß man dafür sorgen, daß nicht aus Versehen Werte oder Befehle der alten Aufgabe mit verarbeitet werden. Dieses wird erreicht durch

(1) **zweimaliges Betätigen** von CE · C *oder*

(2) **Betätigen** von = *oder*

(3) neues **Einschalten** des Rechners

vor Beginn der Rechnung.
Betätigt man die Löschtaste CE · C nur **einmal**, so werden nicht alle Eingaben, sondern nur die letzte Eingabe gelöscht, nämlich alle Ziffern, die nach dem letzten Operationszeichen eingegeben wurden. Man kann auf diese Weise Eingabefehler innerhalb einer Rechnung korrigieren, ohne ganz von vorn beginnen zu müssen. Dies wird an folgendem Beispiel deutlich.

■ 6 *Aufgabe:* 42 — 29
Gewählte Tastenfolge: [4] [2] ↗ [−] [3] [9] ↗
Man bemerkt bei der zweiten Blickkontrolle den Fehler. Durch *einmaliges* Betätigen der Taste CE · C wird die 39 gelöscht. Man drückt nun die Tasten 2 9 = und erhält das richtige Ergebnis 13.

● 5 **a)** Berechne mit dem Taschenrechner 0,723 + 0,049! Stelle einen Ablaufplan auf!
b) Welches Ergebnis würde man erhalten, wenn man folgende Tastenfolge eingäbe? (Bei der zweiten Blickkontrolle würde man den Eingabefehler natürlich bemerken.)

[0] [,] [7] [2] [3] ↗ [+] [0] [,] [4] [9] ↗ [=]

c) Welche Aufgabe ist durch den Ablaufplan dargestellt? Löse sie!

[3] [4] [,] [0] [2] [−] [0] [,] [9] [7] [=]

■ 7 *Aufgabe:* 10,34 + 0,963

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
10,34 + 0,963	[1] [0] [,] [3] [4] [+] [0] [,] [9] [6] [3] [=]	11.303

● 6 Löse folgende Aufgaben!

a) 123 + 390 **c)** 725,4 — 218,4 **e)** 0,995 2 — 0,221 4
b) 13 784 — 6 431 **d)** 137 806 + 243 572 **f)** 0,088 + 0,619

- Stelle jeweils die Tastenfolge in einem Ablaufplan dar!
- Prüfe jeweils durch einen im Kopf ausgeführten Überschlag, ob die Stellenzahl des Ergebnisses stimmen kann!
- Drehe nach jeder Rechnung den Taschenrechner! (Die Aufgaben sind hier so gewählt, daß das Ergebnis als Wort lesbar sein muß.)

Beim Addieren kann es vorkommen, daß das Ergebnis mehr als 8 Stellen hat, obwohl jeder einzelne Summand nur 8 Stellen hat.

■ 8 *Aufgabe:* 38 495 072 + 81 004 314
Überschlag: 40 000 000 + 80 000 000 = 120 000 000
Der Schulrechner SR 1 zeigt in diesem Fall an:

1.1949 08

Dies bedeutet: $1{,}194\,9 \cdot 10^8$
also $1{,}194\,9 \cdot 100\,000\,000$, also $\underline{\underline{119\,490\,000}}$

Die in der Anzeige rechts abgetrennt stehende Ziffer 08 gibt also den **Exponenten der Zehnerpotenz** an, mit der die angezeigte Zahl zu multiplizieren ist. Das bedeutet, daß das **Komma** um 8 Stellen **nach rechts verschoben** werden muß.
Rechnet man die Aufgabe im Beispiel A 8 schriftlich, so erhält man das Resultat 119 499 386. Ein Vergleich mit dem Resultat des Schulrechners SR 1 zeigt, daß das Gerät die letzten vier Stellen (d. h. die Ziffern 9, 3, 8 und 6) „abgeschnitten" hat.

> **Hat das Ergebnis einer Additionsaufgabe mehr als 8 Stellen, so zeigt der Taschenrechner dieses nur angenähert an.**

Diese Grenze des Gerätes muß man kennen, um die angezeigten Resultate hinsichtlich ihrer Genauigkeit beurteilen zu können.

■ 9 *Aufgabe:* 6,000 000 7 + 8,000 000 9 Anzeige: 14.000002
Auch dieses Ergebnis ist nicht genau. Der Taschenrechner hat das eigentliche Ergebnis 14,000 001 6 gerundet.

Subtraktionsaufgaben, bei denen der Subtrahend größer ist als der Minuend, sind im bisher verwendeten Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar. Um festzustellen, was der Taschenrechner in solch einem Fall anzeigt, wollen wir das folgende einfache Beispiel betrachten.

■ 10

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
5 — 9	[5] [−] [9] [=]	- 4.

Für diese im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbare Aufgabe zeigt der Taschenrechner also ein Resultat an. Im Verlaufe dieses Schuljahres werden wir lernen, was dies bedeutet und

wie man mit solchen Zahlen rechnen kann. Bis dahin schreiben wir bei derartigen Aufgaben an Stelle des Ergebnisses die Buchstaben n. l. (nicht lösbar im Bereich der gebrochenen Zahlen).
Das folgende Beispiel weist auf eine weitere Eigenschaft des Schulrechners SR 1 hin. (Derartige einfache Aufgaben werden sonst natürlich nur im Kopf gelöst.)

■ **11**

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
6 + 7	$\boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$	13.

Drückt man die Taste = aber zweimal, so erhält man als Ergebnis nicht 13, sondern 20.

● **7** Erkläre dieses Ergebnis! Drücke dann die Taste = weitere Male und erkläre die angezeigten Ergebnisse!

Das Beispiel A 11 macht deutlich, daß der Schulrechner SR 1 eine **Konstantenautomatik** für die Addition besitzt. Diese ist nützlich, wenn der gleiche Summand bei verschiedenen Aufgaben auftritt.

■ **12** Sollen die Aufgaben 4 + 3,7; 2,1 + 3,7 und 0,9 + 3,7 gelöst werden, kann man wie folgt vorgehen:

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
4 + 3,7	$\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$	7.7
2,1 + 3,7	$\boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{1}\ \ \boxed{=}$	5.8
0,9 + 3,7	$\boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{9}\ \ \boxed{=}$	4.6

Die Konstantenautomatik erspart also bei der 2. und 3. Aufgabe das Eingeben des Pluszeichens und des Summanden 3,7. Sie kann aber auch zu Fehlern führen, wenn man die Taste = versehentlich mehr als einmal betätigt. Kontrollen durch Überschläge oder Nachrechnen sind also nötig.
Zahlreiche Rechnertypen haben keine solche Konstantenautomatik bei der Addition. Falls du keinen Schulrechner SR 1 hast, prüfe dein Gerät, indem du eine einfache Aufgabe eingibst und die Ergebnistaste mehrfach betätigst!

● **8** Prüfe, ob der Schulrechner SR 1 auch für die Subtraktion eine Konstantenautomatik besitzt! Rechne dazu eine einfache Subtraktionsaufgabe, drücke die Taste = mehrmals und vergleiche die angezeigten Ergebnisse!

Aufgaben

Berechne die folgenden Summen bzw. Differenzen! Führe jeweils eine Kontrolle durch!

1.↑ **a)** 4 302 + 5 070 **b)** 5 031 + 3 010 **c)** 46,23 + 0,94 **d)** 72,76 + 0,58
e) 94,003 + 300,007 **f)** 82,007 + 200,003 **g)** 4,62 + 5,83 **h)** 3,91 + 8,09
i) 90 000 000 + 20 000 000 **k)** 1,462 388 3 + 9,243 807 4

2.↑ **a)** 4 326 — 1 873 **b)** 9 481 — 5 046 **c)** 42,73 — 18,09 **d)** 0,058 — 0,052
e) 97,04 — 23,87 **f)** 0,940 3 — 0,623 8 **g)** 0,061 — 0,094 **h)** 10,09 — 0,999

3. Gib zu folgenden Ablaufplänen jeweils die Aufgabe an und löse sie!

a) $\boxed{3}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$

b) $\boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{8}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

4. Löse die folgenden Aufgaben möglichst rationell!
a) 14,841 + 0,743; 3,862 + 0,743; 2,045 + 0,743
b) 22,34 — 7,29; 8,04 — 7,29; 10,02 — 7,29

3 Multiplizieren mit dem Taschenrechner

Beim Multiplizieren zweier Zahlen verwendet man die Taste × . Um Verwechslungen mit der Kommataste zu vermeiden, wird bei fast allen Taschenrechnern die Multiplikation nicht durch „·", sondern durch das auch in alten Büchern verwendete Multiplikationskreuz „ד gekennzeichnet.

■ **13**

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
9 · 38	9 × 3 8 =	342.

Überschlag: 9 · 40 = 360, d. h., die Größenordnung ist richtig.

● **9** Löse folgende Aufgaben! Stelle jeweils einen Ablaufplan auf und prüfe mit einem Überschlag, ob das Ergebnis stimmen kann!
a) 1 970 · 0,9 **b)** 643 · 192 **c)** 2,39 · 0,3
d) 0,336 7 · 0,33 **e)** 55 · 638 857 **f)** 185 185 · 2,4

● **10** Prüfe, ob dein Taschenrechner für die Multiplikation eine Konstantenautomatik besitzt! Rechne dazu eine einfache Multiplikationsaufgabe, drücke die Ergebnistaste = wiederholt und betrachte jedesmal das angezeigte Resultat!

Um zu erkennen, was der Schulrechner SR 1 anzeigt, wenn das Ergebnis größer als 99 999 999 wird, betrachten wir das folgende Beispiel:

■ **14**

Aufgabe	Anzeige	Das bedeutet:
a) 87 654 321 · 10	8.7654 08	$8{,}765\,4 \cdot 10^{8}$
		= 876 540 000
b) 87 654 321 · 100	8.7654 09	$8{,}765\,4 \cdot 10^{9}$
		= 8 765 400 000
c) 87 654 321 · 1 000	8.7654 10	$8{,}765\,4 \cdot 10^{10}$
		= 87 654 000 000

Die in der Anzeige rechts abgetrennt stehenden Ziffern (im Beispiel A 14 die Ziffern 08 bzw. 09 bzw. 10) geben also wie im Beispiel A 8 (↗ S. 10) den Exponenten der Zehnerpotenz an, mit der das angezeigte Ergebnis zu multiplizieren ist. Das bedeutet, daß das **Komma** um die entsprechende Anzahl von Stellen **nach rechts verschoben** werden muß. Dabei gibt der Schulrechner SR 1 allerdings nur 5 Ziffern an, die übrigen – im Beispiel A 14 die Ziffern 1, 2 und 3 – werden abgeschnitten.

● **11** Gib die Zahl 98 765 432 in den Taschenrechner ein, drücke die Taste × und dann mehrmals die Taste = ! Welche Operationen führt der Taschenrechner aus? Wie oft muß die Taste = betätigt werden, damit in der Anzeige das Zeichen „*E*" erscheint? Dieses Zeichen zeigt die „Überfüllung" des Gerätes an.[1])

---

[1]) error (engl.) – Irrtum

Solange in der Anzeige das Zeichen „*E*" steht, nimmt der Taschenrechner keine weiteren Befehle an. Man löscht dieses Zeichen durch die Betätigung der Taste **CE · C** oder durch Ausschalten des Gerätes.

■ **15** Berechne den Flächeninhalt einer rechteckigen Platte, deren Länge $l = 8{,}7$ cm und Breite $b = 4{,}3$ cm gemessen wurden!
Formal erhält man: $A = l \cdot b$ $\quad A = 8{,}7\text{ cm} \cdot 4{,}3\text{ cm}$ $\quad A = 37{,}41\text{ cm}^2$
Da die Ausgangswerte *Meßwerte* und damit *Näherungswerte* sind, ist das Resultat mit **sinnvoller Genauigkeit** anzugeben. Nach der in Klasse 6 behandelten Regel
– *Suche den Näherungswert mit der geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern heraus!*
– *Runde das Ergebnis auf diese Anzahl von Ziffern!*
kann das Ergebnis nur mit zwei Ziffern angegeben werden, also $A = 37\text{ cm}^2$.

Daß dies sinnvoll ist, erkennen wir, wenn wir mit Hilfe des Taschenrechners den größtmöglichen und den kleinstmöglichen Wert ausrechnen. Für die Näherungswerte l und b gilt: $8{,}65\text{ cm} \leqq l \leqq 8{,}75\text{ cm}$ und $4{,}25\text{ cm} \leqq b \leqq 4{,}35\text{ cm}$. Damit ist der kleinstmögliche Wert für $A = 36{,}762\,5\text{ cm}^2$ und der größtmögliche Wert für $A = 38{,}062\,5\text{ cm}^2$. Dazwischen muß das Ergebnis liegen. Es ist also sinnvoll, 37 cm^2 anzugeben, wobei die letzte Ziffer nicht mehr zuverlässig ist.

Aufgaben

Berechne die folgenden Produkte! Überprüfe jeweils die Größenordnung des Ergebnisses durch einen Überschlag! Überlege, ob vom Taschenrechner das Ergebnis genau oder nur angenähert angegeben wird!

1.↑ **a)** $432 \cdot 546$ **b)** $91{,}38 \cdot 0{,}97$ **c)** $46{,}27 \cdot 0{,}89$ **d)** $0{,}04 \cdot 0{,}29$
e) $14{,}37 \cdot 9{,}09$ **f)** $4\,876 \cdot 54\,321$ **g)** $6\,943 \cdot 98\,765$ **h)** $17{,}64 \cdot 8{,}08$

2.↑ **a)** $5{,}008 \cdot 7{,}000\,4$ **b)** $3{,}009 \cdot 8{,}000\,2$ **c)** $23{,}489 \cdot 21{,}584$
d) $840{,}29 \cdot 3{,}521$ **e)** $4{,}320\,8 \cdot 9{,}601\,3$ **f)** $23{,}843\,1 \cdot 7{,}602\,2$

3. Multipliziere die folgenden Zahlen jeweils mit 9! Vergleiche die Ergebnisse! Was stellst du fest?
a) 12 **b)** 123 **c)** 1 234 **d)** 12 345 **e)** 123 456 **f)** 1 234 567

4. Multipliziere die Zahl 1,234 567 9 nacheinander jeweils mit **a)** 0,9; **b)** 1,8; **c)** 2,7; **d)** 3,6; **e)** 4,5! Was stellst du fest?

5. Löse möglichst rationell! $23{,}4 \cdot 2{,}81$; $17{,}3 \cdot 2{,}81$; $0{,}96 \cdot 2{,}81$

6. Gib zu folgendem Ablaufplan die Aufgabe an und löse sie!
$\boxed{0}\,\boxed{,}\,\boxed{0}\,\boxed{3}\,\boxed{6}\,\boxed{\times}\,\boxed{0}\,\boxed{,}\,\boxed{1}\,\boxed{4}\,\boxed{=}$

7. Im Weltraum beträgt die Lichtgeschwindigkeit rund $300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.
a) Von der Sonne bis zur Erde braucht das Licht etwa 8,3 Minuten. Berechne die Entfernung Sonne – Erde!
b) In der Astronomie verwendet man die Einheit „Lichtjahr". Das ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Wieviel Kilometer sind dies? (Rechne mit 365 Tagen pro Jahr!)

4 Dividieren mit dem Taschenrechner

Beim Dividieren verwendet man die Operationstaste ÷. (Hierbei ist zu beachten, daß die Bezeichnung dieser Taste aus dem Symbol für *geteilt durch* „:" und dem Symbol für den *Bruchstrich* „–" kombiniert wurde.)

■ **16**

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
73 : 8	[7] [3] [÷] [8] [=]	9.125

Überschlag: 72 : 8 = 9 *Kontrolle:* 9,125 · 8 = 73

● **12** Löse die folgenden Aufgaben!

a) 37 962 : 74 **b)** 151 515 : 481 **c)** 2,296 336 : 3,248
d) 962 910 : 78 **e)** 0,456 565 2 : 4,52 **f)** 0,695 548 6 : 3,13

Um festzustellen, was der Schulrechner SR 1 anzeigt, wenn das Ergebnis kleiner als 0,000 000 1 wird, betrachten wir folgendes Beispiel:

■ **17**

Aufgabe	Anzeige
a) 0,000 000 1 : 10	1.-08
b) 0,000 000 1 : 100	1.-09
c) 0,000 000 1 : 1 000	1.-10

Wie im Beispiel A 14 (↗ Seite 12) gibt die abgetrennt stehende Ziffer eine Kommaverschiebung an. Das Zeichen „–" bedeutet aber, daß diese Verschiebung nach links zu erfolgen hat. So wird das **Komma** bei „– 08" um 8 Stellen **nach links verschoben**, bei „– 09" um 9 Stellen und bei „– 10" um 10 Stellen nach links. Die Ergebnisse lauten also:

a) 0,000 000 01, **b)** 0, 000 000 001, **c)** 0, 000 000 000 1.

Wir merken uns:
Stehen in der Anzeige rechts zwei **abgetrennte Ziffern**, so bedeutet dies, daß das **Komma** um die jeweils angegebene Anzahl von Stellen **nach rechts** verschoben werden muß.
Steht vor den rechts abgetrennten Ziffern ein **Minuszeichen**, so bedeutet dies, daß das Komma **nach links** verschoben werden muß. Dazu sind soviel Nullen vor das angezeigte Ergebnis zu schreiben, wie durch die abgetrennten Ziffern angegeben wird. Das Komma steht dann nach der ersten Null.

Beim Dividieren mit dem Schulrechner SR 1 tritt die abgetrennte Anzeige einer Ziffer mitunter auch bei einfachen Aufgaben auf.

■ **18**

Aufgabe	Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
a) 20 : 3	[2] [0] [÷] [3] [=]	6.6666667
b) 2 : 3	[2] [÷] [3] [=]	6.6666-01

Im Beispiel A 18a erkennt man, daß der Schulrechner SR 1 die unendliche Dezimalzahl $6,\overline{6}$ mit 7 Stellen nach dem Komma angibt, wobei die letzte angegebene Stelle aufgerundet wurde. Im Beispiel A 18b ist das Ergebnis als 0,66666 zu schreiben. Man erkennt, daß „nur" 5 Stellen nach dem Komma angegeben werden und eine Rundung **nicht** erfolgt. (Durch Multiplikation mit 10 könnte man aber die gesamte Ziffernfolge erhalten. Diese steht auch für weitere Rechnungen zur Verfügung.)

● **13** Löse die folgenden Aufgaben! In welchen Fällen erfolgt die Anzeige mit Hilfe einer rechts abgetrennten Ziffer?
a) 4 : 3; 4 : 4; 4 : 5; 4 : 6; 4 : 7; 4 : 8; 4 : 9
b) 15 : 3; 15 : 4; 15 : 5; 15 : 6; 15 : 7; 15 : 8; 15 : 9
c) 7 : 3; 7 : 4; 7 : 5; 7 : 6; 7 : 7; 7 : 8; 7 : 9
d) 23 : 4; 23 : 7; 23 : 19; 23 : 25; 23 : 27; 23 : 32; 23 : 31

● **14** Die Division durch Null ist bekanntlich nicht erklärt. Stelle fest, was der Taschenrechner anzeigt, wenn man eine Aufgabe n : 0 eingibt!

● **15** Prüfe, was der Taschenrechner anzeigt, wenn bei einer Divisionsaufgabe die Taste = zwei- oder mehrmals gedrückt wird! Erkläre die Ergebnisse!

Aufgaben

1. Berechne folgende Quotienten, führe jeweils eine Kontrolle durch!
a) 0,42 : 0,7 **b)** 0,005 5 : 0,11 **c)** 142,242 : 15,7 **d)** 0,63 : 0,9
e) 0,006 6 : 0,06 **f)** 0,708 : 35,4 **g)** 824 : 23 **h)** 94,3 : 183,6

2. Löse möglichst rationell! 20,34 : 0,86; 0,99 : 0,86; 0,07 : 0,86

3. 57 Kilowattstunden Elektroenergie kosten im Haushalt 4,56 M. Wieviel kostet 1 Kilowattstunde?

4. Welche der folgenden Zahlen ist durch 3, durch 6, durch 9 ohne Rest teilbar? Entscheide anhand der Teilbarkeitsregeln und überprüfe mit dem Taschenrechner!
a) 1 478 **b)** 4 287 **c)** 85 224 **d)** 10 035 **e)** 100 152
f) 46 487 **g)** 463 077 **h)** 3 458 763 **i)** 98 321 504 **k)** 98 321 505

5. Welche der folgenden Zahlen sind durch 7, welche durch 13 ohne Rest teilbar?
a) 5 324 873 **b)** 14 596 855 **c)** 11 150 022 **d)** 45 983 210 **e)** 60 874 032

6.* Stelle fest, welche der folgenden Zahlen eine Primzahl ist: 757; 851; 1 591; 1 319!

5 Aufgaben, bei denen die gleiche Operation mehrmals auszuführen ist

Aufgaben, bei denen die gleiche Operation mehrmals auszuführen ist, werden entsprechend ihrer schriftlichen Darstellung in den Taschenrechner eingegeben. Dabei wird beim Betätigen der Operationstaste jeweils das *Zwischenergebnis (Z)* angezeigt.

■ **19** *Aufgabe:* 15 + 23 + 8 + 37 + 128

Tastenfolge/Ablaufplan	Anzeige
1 5 + 2 3 + 8 + 3 7 + 1 2 8 =	211.
Z Z Z	

An der ersten durch Z markierten Stelle erscheint in der Anzeige 38. , also die Summe von 15 und 23.

Zur Vereinfachung der Darstellung im Lehrbuch wird in den folgenden Beispielen die Blickkontrolle nicht mehr angegeben. Es werden meist auch die Tastenfolgen verkürzt wiedergegeben.

■ **20** *Aufgabe:* 23,42 + 18,81 + 24,06 + 0,73

auszuführende Tastenfolge:

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{,}\ \boxed{8}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{7}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

Verkürzte Schreibweise	Anzeige
23,42 $\boxed{+}$ 18,81 $\boxed{+}$ 24,06 $\boxed{+}$ 0,73 $\boxed{=}$	67.02

● **16** Löse die folgenden Aufgaben!
a) 8 983 — 865 — 45 — 639 — 81 **b)** 81,7 · 3 · 7,5 · 4 **c)** 1 338 246 : 13 : 0,5 : 28
(Die Aufgaben wurden so ausgewählt, daß das Ergebnis jeweils als Wort lesbar ist, wenn man den Taschenrechner umdreht.)

■ **21** Ein trapezförmiges Flächenstück (↗ Bild A 1) soll umzäunt werden. Für die einzelnen Seiten wurden folgende Längen gemessen: a = 20,3 m; b = 20,2 m; c = 38,2 m; d = 9,45 m. Wie lang wird der Zaun?
Formal würde man l = 88,15 m erhalten. Nach den Regeln über **sinnvolle Genauigkeit** (↗ Beispiel A 15, S. 13) muß aber auf 88,2 m gerundet werden.

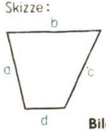


Bild A 1

● **17** Verdeutliche die Zweckmäßigkeit der verwendeten Regel durch Berechnen des kleinstmöglichen und des größtmöglichen Wertes!

● **18** Löse die folgenden Aufgaben jeweils mit unterschiedlicher Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren (von links nach rechts, von rechts nach links usw.)! Was stellst du fest? Welche Gesetzmäßigkeit liegt vor?
a) 24,34 + 17,6 + 18,2 + 0,28 + 14,03
b) 22,8 · 17,4 · 0,92 · 10,01

Aufgaben

1. **a)** 87,49 + 8,06 + 14,2 + 100,04 **c)** 73,56 + 7,02 + 18,3 + 200,05
b) 0,003 + 0,42 + 1,068 + 0,706 **d)** 0,002 + 0,58 + 1,071 + 0,604

2. **a)** 24,3 — 17,2 — 0,43 — 1,86 **c)** 8 — 1,3 — 2,9 — 3,4
b) 0,72 — 0,04 — 0,38 — 0,06 **d)** 0,86 — 0,09 — 0,46 — 0,01

3. **a)** 3 · 11 · 17 · 19 **b)** 0,13 · 0,98 · 0,74 **c)** 0,14 · 0,97 · 0,81
d) 1 : 2 : 3 : 4 : 5 **e)** 120 : 2 : 3 : 4 : 5 **f)** 0,48 : 0,21 : 0,3

6 Aufgaben, bei denen verschiedene Operationen auszuführen sind

Aufgaben, bei denen nur Additionen oder Subtraktionen auszuführen sind, werden entsprechend ihrer schriftlichen Darstellung in den Taschenrechner eingegeben.

■ **22** Der Kontostand eines Spargirokontos in Höhe von 4 726,23 M hat sich durch folgende Buchungen verändert. Ermittle den Endstand!

Gehaltszahlung:	+ 926,80 M
Abbuchung für Miete:	— 83,70 M
Abbuchung für Elektroenergie:	— 53,00 M
Einzahlung:	+ 250,00 M
Abbuchung für Fernsehen und Zeitungen:	— 16,00 M
Abbuchung für einen Scheck:	— 213,17 M

Daraus ergibt sich folgender Ablaufplan:

4 726,23 $\boxed{+}$ **926,80** $\boxed{-}$ **83,70** $\boxed{-}$ **53** $\boxed{+}$ **250** $\boxed{-}$ **16** $\boxed{-}$ **213,17** $\boxed{=}$

Angezeigtes Ergebnis: $\boxed{5537.16}$

Antwortsatz: Der Endstand beträgt 5 537,16 M.

Treten in einer Aufgabe neben Additionen und Subtraktionen (Strichrechnung) auch noch (mindestens) eine Multiplikation oder Division (Punktrechnung) auf, so sind die entsprechenden **Vorrangregeln** (Punktrechnung geht vor Strichrechnung) zu beachten. Man kann dann nicht immer in der Reihenfolge „von links nach rechts" arbeiten.

■ **23** **a)** $16 \cdot 5 + 10$ **b)** $10 + 16 \cdot 5$ **c)** $(10 + 16) \cdot 5$ **d)** $16 \cdot (5 + 10)$

Die *Aufgabe a)* kann entsprechend ihrer schriftlichen Darstellung in den Taschenrechner eingegeben werden.

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
16 · 5 + 10	**16** $\boxed{\times}$ **5** $\boxed{+}$ **10** $\boxed{=}$	$\boxed{90.}$

Auch die *Aufgabe b)* kann entsprechend der schriftlichen Darstellung in den Taschenrechner eingegeben werden, wenn dieser wie der Schulrechner SR 1 eine **Vorrangautomatik** (Hierarchie) hat.

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
10 + 16 · 5	**10** $\boxed{+}$ **16** $\boxed{\times}$ **5** $\boxed{=}$	$\boxed{90.}$

Prüfe, ob dein Taschenrechner eine Vorrangautomatik besitzt!
Ein Taschenrechner *ohne Vorrangautomatik* würde das falsche Ergebnis 130 anzeigen. Bei ihm müßte man die Rechnung mit der Multiplikation beginnen wie bei Aufgabe a):

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
10 + 16 · 5	**16** $\boxed{\times}$ **5** $\boxed{+}$ **10** $\boxed{=}$	$\boxed{90.}$

Aufgaben mit **Klammern**, z. B. die *Aufgaben c) und d)*, erfordern gesonderte Überlegungen:
Die *Aufgabe c)* wird mit dem Taschenrechner nach folgendem Ablaufplan gelöst:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
(10 + 16) · 5	**10** $\boxed{+}$ **16** $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ **5** $\boxed{=}$	$\boxed{130.}$

Z

Durch das erste Drücken der Taste = wird die Addition ausgeführt und das Zwischenergebnis 26 angezeigt.
Die *Aufgabe d)* wird nach folgendem Ablaufplan gelöst:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
16 · (5 + 10)	**5** $\boxed{+}$ **10** $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ **16** $\boxed{=}$	$\boxed{240.}$

Z

Wir merken uns für das **Rechnen mit Klammern**:

> **1. Gib zuerst den Ausdruck in der Klammer in den Taschenrechner ein!**
> **2. Schließe diese Rechnung durch Drücken der Taste = ab!**
> **3. Führe die weiteren Operationen aus!**

● **19** Löse folgende Aufgaben! Stelle zuvor jeweils die Tastenfolge in einem Ablaufplan dar!
a) $2\,509 + 18 \cdot 59$ **c)** $(0{,}621\,96 - 0{,}248\,31) : 0{,}53$
b) $9 \cdot (141 + 56)$ **d)** $2{,}62 - 2{,}7 : 1{,}2$

Besondere Überlegungen sind nötig, wenn Aufgaben die Form $a \cdot b + c \cdot d$ haben. Dazu betrachten wir das folgende einfache Beispiel:

■ **24** *Aufgabe:* $5 \cdot 3 + 4 \cdot 7$
Im Kopf kann man leicht das Ergebnis 43 ausrechnen. In den Schulrechner SR 1 kann man – dank der Vorrangautomatik – die Aufgabe von links nach rechts eingeben. Man erhält das richtige Ergebnis.

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$5 \cdot 3 + 4 \cdot 7$	5 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ 4 $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{=}$	$\boxed{43.}$

Bei einem Taschenrechner *ohne Vorrangautomatik* muß man zuerst die Produkte $5 \cdot 3$ und $4 \cdot 7$ gesondert ausrechnen, diese Zwischenergebnisse merken (besser notieren) und dann addieren. Hat der Taschenrechner einen Speicher, so kann man auch diesen benutzen. Die Verwendung des Speichers wird meist in der Betriebsanleitung erklärt. Im Unterricht wird darauf erst in Klasse 8 eingegangen.

● **20** Löse die folgenden Aufgaben!
a) $17 \cdot 23 + 21 \cdot 47$ **b)** $5 \cdot 53 - 18 \cdot 14$ **c)** $0{,}025 \cdot 4{,}8 + 0{,}24 \cdot 0{,}25$

Besonders häufig werden künftig Aufgaben der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ vorkommen. Bei diesen Aufgaben ist es im allgemeinen gleichgültig, ob man die Multiplikation oder die Division zuerst ausführt.

■ **25** *Aufgabe:* $\frac{125 \cdot 18}{45}$
Man kann diese Aufgabe nach dem Ablaufplan (a) oder (b) oder (c) lösen:

Ablaufplan	Anzeige
(a) 125 $\boxed{\times}$ 18 $\boxed{\div}$ 45 $\boxed{=}$	$\boxed{50.}$
(b) 125 $\boxed{\div}$ 45 $\boxed{\times}$ 18 $\boxed{=}$	$\boxed{50.}$
(c) 18 $\boxed{\div}$ 45 $\boxed{\times}$ 125 $\boxed{=}$	$\boxed{50.}$

■ **26** *Aufgabe:* $\frac{0{,}000\,25 \cdot 0{,}000\,12}{15}$
Der Schulrechner SR 1 zeigt hier als Ergebnis $\boxed{2.-09}$ an. Das Ergebnis lautet also 0,000 000 002.

Aufgaben

1. a) $26{,}3 + 17{,}4 - 14{,}3 - 21{,}6 + 7{,}8$ d) $34{,}1 + 18{,}9 - 29{,}7 - 3{,}9 + 10{,}4$
b) $0{,}07 - 0{,}02 + 4{,}06 - 4{,}11$ e) $0{,}09 - 0{,}06 + 5{,}13 - 5{,}16$
c) $24{,}89 - 0{,}06 + 10{,}04 - 20{,}08$ f) $36{,}76 - 10{,}09 + 0{,}07 - 20{,}03$

2. a) $4{,}2 \cdot 3{,}6 \cdot 1{,}9 \cdot 2{,}4$ c) $7{,}3 \cdot 4{,}1 \cdot 6{,}5 \cdot 3{,}8$
b) $0{,}7 \cdot 18{,}4 \cdot 0{,}04 \cdot 30{,}6$ d) $0{,}4 \cdot 23{,}5 \cdot 0{,}02 \cdot 18{,}7$

3. a) $814 + 12 \cdot 47$ d) $714 + 13 \cdot 28$ g) $951 \cdot 2{,}4 - 583$
b) $17{,}5 \cdot (0{,}76 + 3{,}5)$ e) $19{,}5 \cdot (0{,}85 + 3{,}7)$ h) $915 \cdot 3{,}8 - 486$
c) $0{,}473 + 4{,}81 \cdot 0{,}97$ f) $0{,}581 + 5{,}73 \cdot 0{,}84$ i) $0{,}2 \cdot (52{,}5 - 9{,}81)$

4. a) $(66{,}39 - 48{,}76) \cdot 0{,}72$ b) $17{,}5 \cdot (28{,}3 - 4{,}18)$ c) $14 \cdot 18 + 17 \cdot 21$
d) $31{,}5 \cdot 23{,}8 - 19{,}3 \cdot 11{,}1$ e) $(55{,}71 - 36{,}24) \cdot 0{,}87$ f) $13 \cdot 17 + 14 \cdot 23$
g) $13{,}5 \cdot (29{,}1 - 2{,}36)$ h) $36{,}5 \cdot 21{,}7 - 17{,}8 \cdot 13{,}5$

5. Thomas und Kerstin kaufen ein.

Thomas kauft:		Kerstin kauft:	
2 Tüten Mehl	à 1,40 M	1 Tüte Zucker	à 1,55 M
3 Flaschen Brause	à 0,53 M	2 Tüten Bonbons	à 0,95 M
2 Flaschen Milch	à 0,54 M	3 Flaschen Milch	à 0,54 M
1 Stück Butter	à 2,30 M	13 Milchbrötchen	à 0,08 M
7 Stück Kuchen	à 0,32 M	8 Flaschen Selters	à 0,42 M

a) Berechne, wieviel jeder zu bezahlen hat!
b) Wie hoch ist der zu zahlende Betrag, wenn man das Flaschenpfand (je Milchflasche 0,20 M; je Selters- bzw. Brauseflasche 0,30 M) abzieht?
c) Wieviel Geld erhält jedes Kind zurück, wenn Thomas 15,00 M und Kerstin 10,00 M hat?

6. a) $\dfrac{95 \cdot 15}{75}$ b) $\dfrac{0{,}47 \cdot 18{,}6}{0{,}031}$ c) $\dfrac{84\,480 \cdot 37\,200}{3\,600}$ d) $\dfrac{85 \cdot 21}{45}$
e) $\dfrac{0{,}63 \cdot 17{,}4}{0{,}046}$ f) $\dfrac{75\,530 \cdot 41\,600}{4\,800}$ g) $\dfrac{2{,}7 \cdot 58{,}3}{34{,}6}$ h) $\dfrac{0{,}000\,23 \cdot 0{,}000\,33}{4\,600}$

7 Umformen und Lösen von Verhältnisgleichungen

Im Zusammenhang mit direkter und umgekehrter Proportionalität wurde in Klasse 6 das Aufstellen, Umformen und Lösen von Verhältnisgleichungen geübt.

● **21** Stelle die Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nacheinander nach a, b, c und d um!

● **22** a) Löse folgende Aufgaben ohne Taschenrechner!

$$\frac{x}{3} = \frac{7}{6}; \quad \frac{1}{3} = \frac{x}{4}; \quad \frac{2}{x} = \frac{4}{7}; \quad \frac{1}{9} = \frac{2}{x}$$

b) Löse folgende Aufgaben mit dem Taschenrechner!

$$\frac{x}{0{,}183} = \frac{2{,}39}{0{,}61}; \quad \frac{0{,}42}{0{,}336\,7} = \frac{0{,}138\,6}{x}; \quad \frac{1\,344}{x} = \frac{280}{2\,572}$$

c) Ein Radfahrer fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie lange braucht er für 20 km; 35 km; 1 km?

Welche Strecke fährt er in 2 Stunden; 1,5 Stunden; 30 Minuten; 10 Minuten?
Stelle den Zusammenhang zwischen zurückgelegter Strecke und Fahrzeit graphisch dar!

Im Auftrag A 22 c sind Fahrzeit und zurückgelegter Weg direkt proportional. Auch umgekehrt proportionale Zusammenhänge führen oftmals zu Verhältnisgleichungen.

■ 27 6 Mähdrescher vom Typ E 516 ernten ein Feld in 8,4 Stunden ab. Wieviel Stunden würden 8 Mähdrescher dieses Typs brauchen?
Die Anzahl der Mähdrescher ist der benötigten Zeit umgekehrt proportional. Man kann also ansetzen:

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{8{,}4\ \text{h}}$$

Man erhält: $x = \frac{8{,}4\ \text{h} \cdot 6}{8}$ $\qquad x = 6{,}3\ \text{h}$

8 Mähdrescher würden 6,3 Stunden bzw. 6 Stunden und 18 Minuten benötigen.

● 23 a) Berechne die Zeit, die 10 Mähdrescher vom Typ E 516 benötigen würden (↗ Beispiel A 27)!
b) Wieviel Hektar erntet ein Mähdrescher pro Stunde ab, wenn das Feld 150 ha groß ist?

Aufgaben

1. 1 060 g Mehl kosten 1,40 M. Wieviel Mark kostet 1 kg?

2. 530 g Erbsen kosten 0,55 M. Wieviel Mark kostet 1 kg?

3. Für 23 kWh Elektroenergie bezahlt man im Haushalt 1,84 M.
   a) Wieviel Mark kosten 27 kWh?
   b) Wieviel Kilowattstunden kann man für 10 M verbrauchen?

4. 13 m³ Stadtgas kosten 2,08 M.
   a) Wieviel Mark kosten 231 m³?
   b) Wieviel Kubikmeter Stadtgas kann man für 15 Mark verbrauchen?

5. Ein sowjetischer Kreuzer legt in 2 h 30 min 73,5 sm zurück. Welche Entfernung legt er in 1 h 12 min bei dieser Geschwindigkeit zurück?

6. Eine Treppe mit 25 Stufen zu je 18 cm Höhe soll durch eine neue mit je 15 cm Stufenhöhe ersetzt werden. Wieviel Stufen hat dann die Treppe?

7. Um den Aushub einer Baugrube abzuführen, muß jedes von 8 Fahrzeugen gleicher Ladefähigkeit 60 Fahrten durchführen.
   a) Wievielmal muß jedes Fahrzeug fahren, wenn 2; 3; 5; 7; 9; 10; 12; 15; 20 Fahrzeuge derselben Ladefähigkeit eingesetzt werden?
   b) Wieviel Fahrzeuge derselben Ladefähigkeit muß man einsetzen, wenn jedes Fahrzeug 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 15; 20; 30 Fahrten durchführen soll?

8 Aufgaben zur Übung und Wiederholung

Bei den folgenden Aufgaben sollte großer Wert auf eine **Kontrolle** der Ergebnisse (durch Überschlag oder Nachrechnen oder beides) gelegt werden. Außerdem ist auf **sinnvolle Genauigkeit** der Ergebnisse zu achten, wenn Näherungswerte in die Rechnung eingehen.

1. a) $\dfrac{24{,}3\cdot(27{,}4-13{,}1)}{0{,}48}$ b) $\dfrac{16{,}4-12{,}1+0{,}9}{12\,846}$ c) $\dfrac{14{,}2+18{,}3\cdot 7{,}4}{0{,}18\cdot 4{,}6}$

2. Ein PKW „Trabant 601“ hat für 552 km 40 l Kraftstoffgemisch verbraucht. Wie hoch wird unter annähernd gleichen Fahrbedingungen der Verbrauch für 740 km sein?

3. Ein PKW „Wartburg 353“ hat für 312 km 30 l Kraftstoffgemisch verbraucht. Welche Entfernung wird er bei einem Verbrauch von 55 l zurücklegen?

4. Das Bild A 2 zeigt einen Ausschnitt aus dem Fahrplan für die Strecke Magdeburg—Halle—Leipzig.
   a) Berechne die Entfernung zwischen Calbe und Stumsdorf; Schönebeck und Niemberg; Köthen und Leipzig!
   b) Berechne die Fahrzeiten zwischen Magdeburg und Halle bzw. Leipzig für den D 441, den D 631 und den P 3331!
   c) Berechne für die angegebenen Züge die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Gesamtstrecke sowie auf den Teilstrecken Magdeburg/Köthen, Köthen/Halle und Halle/Leipzig!
   d) Berechne die Fahrkosten für die Strecken Magdeburg/Leipzig, Magdeburg/Halle, Calbe/Halle, Köthen/Leipzig für Personenzug und Schnellzug (falls möglich) bei Anwendung folgender Tarife:
   (1) Normaltarif 2. Kl.: 0,08 M pro km, Schnellzugzuschlag 3,00 M;
   (2) Normaltarif 1. Kl.: 0,116 M pro km, Schnellzugzuschlag 6,00 M;
   (3) Ferienrückfahrkarte: $\frac{1}{3}$ Ermäßigung ohne Ermäßigung des Zuschlages;
   (4) Schülerfahrkarte: $\frac{3}{4}$ Ermäßigung nur in 2. Klasse ohne Ermäßigung des Zuschlages!
   Beachte, daß alle Fahrpreise auf Zehntel Mark gerundet werden und daß die Entfernungsangaben im Kursbuch von den Tarifkilometern, die bei den Fahrkartenausgaben vorliegen, abweichen können!

730 Magdeburg–Halle (Saale)**–Leipzig** — **730** *(Elektrischer Betrieb)*

km				D 639	D 1739	8051	7351	3331	5303	D 441	D 631
	Rostock Hbf	770	ab	22.07	23.07						
	Schwerin (Meckl) Hbf	770	ab	23.15	0.09						
	Magdeburg Hbf	770	an	2.05	3.05						
km	*Rbd Magdeburg*		Zug Nr / Klasse	D 639 1. 2.	D 1739 1. 2.	8051	7351 2.	3331 2.	5303 2.	D 441 1. 2.	D 631 1. 2.
0,0	**Magdeburg** Hbf ✕	s. a. 650 702	ab	2.20	3.20	...	...	4.22	5.04	5.54	6.38
15,1	**Schönebeck** (E) ✕ 711		an			...	...	4.43	5.27		
			ab			...	...	4.44	5.32		
17,7	Schönebeck-Felgeleben					...	...	4.48	5.36		
20,6	Gnadau					...	...	4.52	5.40		
	30,1 **Barby** 682		an			...	...				
27,6	**Calbe** (Saale) Ost 671		an			...	...	5.00	5.48		
			ab			...	...	5.01	6.01		
34,5	Sachsendorf (b Calbe)					...	...	5.10	6.10		
43,5	Wulfen (Anh)					...	...	5.16	6.16		
50,2	**Köthen** ✕ 690, 691	*Rbd Halle*	an	2.56	3.56	...	...	5.24	6.24	6.31	7.15
			ab	2.58	3.58	4.01	5.05	5.32	...	6.33	7.20
55,2	Arensdorf (b Köthen)					4.16	5.10	5.37	...		
59,8	Weißandt-Gölzau					4.36	5.15	5.42	...		
66,3	**Stumsdorf** 523					4.56	5.24	5.52	...		
74,1	Niemberg					5.14	5.32	6.01	...		
81,0	Zöberitz					5.27	5.38	6.07	...		
86,0	**Halle** (Saale) Hbf ✕		an	3.25	4.24	5.40	5.44	6.13	...	7.00	7.47
			Zug Nr / Klasse			7323 2.					7331 2.
86,0	**Halle** (Saale) Hbf ✕	8v 515	ab	...	4.44	4.58	6.04	6.34	...	7.08	8.04
123,6	**Leipzig** Hbf ✕	8v 515	an	...	5.20	5.47	6.55	7.19	...	7.40	8.39
	Leipzig Hbf	320	ab	...	...	6.14	...	...	...	8.03	8.45
	Dresden Hbf	320	an	...	...	7.47	...	...	...	9.38	10.06

Bild A 2

5. Eine Familie will mit ihrem PKW „Trabant“ von Woldegk nach Bad Schandau fahren. Sie beschließen, von Prenzlau bis Dresden die Autobahn zu benutzen und ermitteln aus dem Autoatlas für die einzelnen Teilstrecken folgende Kilometerangaben: 18; 14; 35; 16; 32; 20; 23; 14; 20; 28; 10; 34; 15; 22; 11; 15; 22; 11; 8.

a) Wie lang ist die Gesamtstrecke?

b) Wieviel Liter Kraftstoffgemisch werden etwa benötigt, wenn der Durchschnittsverbrauch 7,6 l pro 100 km beträgt?

c) Was kostet die Fahrt, wenn man
- nur den Benzinverbrauch berücksichtigt (1 l Gemisch kostet 1,53 Mark);
- außerdem 0,08 M für Abnutzung pro Kilometer in Rechnung stellt?

d) Wie lange dauert die Fahrt, wenn man als Durchschnittsgeschwindigkeit 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ annimmt und außerdem 1 Stunde Pause einplant?

6. Auf einem Werkzeugautomaten können in 62 Minuten ebenso viele gleichartige Werkstücke bearbeitet werden wie vorher auf einer herkömmlichen Werkzeugmaschine in 465 Minuten, nämlich 155 Stück.
Wie groß ist die Zeitersparnis bei der Herstellung von 100 Werkstücken?

7. Die Familie Schulze fährt mit der Bahn von Aue nach Zinnowitz. Aus dem Kursbuch der Deutschen Reichsbahn wurden folgende Entfernungen entnommen:

Aue—Zwickau	27,1 km	Berlin—Züssow	197,0 km
Zwickau—Leipzig	89,2 km	Züssow—Wolgast (Hafen)	19,1 km
Leipzig—Berlin	182,0 km	Wolgast (Fähre)—Zinnowitz	8,5 km

a) Berechne die Gesamtstrecke!

b) Berechne den Fahrpreis für Hin- und Rückfahrt in der 2. Klasse eines Schnellzugs, wenn
- Mutter, Vater und der Sohn Uwe den vollen Fahrpreis und die kleine Tochter Birgit den halben Fahrpreis zahlen müssen (1 km kostet 8 Pf; der Schnellzugzuschlag beträgt bis 300 km 3,00 M, über 300 km 5,00 M; für Birgit kostet auch der Zuschlag nur die Hälfte);
- die Ermäßigung für Ferienreisen, die ein Drittel der Fahrkosten beträgt, aber nicht für Zuschläge gewährt wird, in Anspruch genommen wird!

8. Im Physikunterricht soll die Dichte eines Steines ermittelt werden. Dazu wurden gemessen: $m = 39$ g, $V = 18$ cm³.

a) Berechne die Dichte!

b) Gib den größtmöglichen und den kleinstmöglichen Wert für die Dichte an!

Zusammenfassung

Addition bzw. Subtraktion

Aufgabe	Tastenfolge	Anzeige
2,5 + 0,6	[2] [,] [5] [+] [0] [,] [6] [=]	3.1
2,5 — 0,6	[2] [,] [5] [−] [0] [,] [6] [=]	1.9

Multiplikation bzw. Division

Aufgabe	Tastenfolge	Anzeige
7 · 34	[7] [×] [3] [4] [=]	238.
96 : 6	[9] [6] [÷] [6] [=]	16.

Beachte!

a) Bei der Addition bzw. Multiplikation kann in der Anzeige rechts abgetrennt eine Ziffer stehen. Das bedeutet: Kommaverschiebung nach rechts.

Aufgabe: 75 328 209 · 10
Anzeige: [7.5328 08]
Das bedeutet: 7,532 8 · 10^8, also 753 280 000.
(Genaues Ergebnis: 753 282 090)

b) Bei der Division kann in der Anzeige rechts abgetrennt eine Ziffer mit einem Minuszeichen davor stehen. Das bedeutet: Kommaverschiebung nach links.

Aufgabe: 0,785 236 9 : 10
Anzeige: [7.8523-02]
Das bedeutet: 7,852 3 : 10^2, also 0,078 523
(Genaues Ergebnis: 0,078 523 69)

c) Die Konstantenautomatik speichert den zuletzt eingegebenen Operationsbefehl und den als letztes eingegebenen Wert.[1]) Damit lassen sich mitunter Rechnungen vereinfachen. Versehentlich mehrmaliges Drücken der Ergebnistaste führt aber zu Fehlern.

Aufgabe	Tastenfolge	Anzeige
3 : 1,4	[3] [÷] [1] [,] [4] [=]	[2.1428571]
2,1 : 1,4	[2] [,] [1] [=]	[1.5]
0,8 : 1,4	[0] [,] [8] [=]	[5.7142-01]

d) Bei Division durch 0 (oder bei anderen nichtausführbaren Operationen bzw. bei Überschreitung der Kapazität des Gerätes) wird das Zeichen *E* angezeigt.

Aufgabe	Tastenfolge	Anzeige
3 : 0	[3] [÷] [0] [=]	[E 0.]

[1]) Das gilt nur, sofern nicht durch die Vorrangautomatik eine andere Arbeitsweise erfolgt.

Aufgaben, bei denen verschiedene Operationen auszuführen sind

Eingabe der Zahlenwerte und Operationsbefehle von links nach rechts. Die **Vorrangautomatik** des Taschenrechners berücksichtigt die Vorrangregel („Punktrechnung geht vor Strichrechnung").

Aufgabe	Tastenfolge	Anzeige
$2 + 3 \cdot 4$	[2] [+] [3] [×] [4] [=]	14.

Rechnen mit Klammern

Zuerst Ausdruck in der Klammer berechnen. Dabei die Rechnung durch Betätigen der Ergebnistaste abschließen. Danach die weiteren Operationen ausführen. Reihenfolge von links nach rechts muß dabei nicht zutreffen.

Aufgabe	Tastenfolge	Anzeige
$5 \cdot (3 + 4)$	[3] [+] [4] [=] [×] [5] [=]	35.

Beachte!

Ein Bruchstrich hat die Bedeutung einer Klammer, die Berechnung des Zählers (oder des Nenners) ist durch Betätigen der Ergebnistaste abzuschließen.

Aufgabe	Tastenfolge	Anzeige
$\frac{3 + 4}{5}$	[3] [+] [4] [=] [÷] [5] [=]	1.4

Prozentrechnung

9 Der Prozentbegriff

Wir haben schon Angaben der folgenden Art gehört oder gelesen: „Der Plan wurde mit 103 Prozent erfüllt", „Der Elektroenergieverbrauch konnte um 7 Prozent gesenkt werden", „Die Straße hat ein Gefälle von 8 Prozent" (↗ Bild A 3). Für „Prozent" wird dabei oft das Zeichen „%" geschrieben.

Bild A 3

Versuche, folgende Aufgaben zu lösen!

● **24** In einem kleinen Betrieb sind 60 Personen beschäftigt.

a) 50% der Betriebsangehörigen fahren mit dem Autobus zur Arbeitsstelle. Wieviel Personen sind das?

b) Die Belegschaft besteht zu 25% aus Frauen. Wieviel Frauen sind in dem Betrieb?

c) 10% haben ihre Lehre noch nicht abgeschlossen. Wieviel Lehrlinge werden in dem Betrieb ausgebildet?

d) Alle Kolleginnen und Kollegen sind Mitglied im Freien Deutschen Gewerkschaftsbund. Drücke die Mitgliedschaft in Prozent aus!

● **25** **a)** Gegeben sei ein Betrag von 400 M.
Wieviel Mark sind 50%, 25%, 75%, 10%, 100%, 1% davon?

b) Wieviel Mark sind 1% von 200 M, 2 000 M, 600 M, 750 M, 75 M, 4 900 M, 65 000 M, 5 M?

c) Auf wieviel Prozent steigt ein Betrag, wenn man ihn von 400 M auf 1 200 M erhöht?

● **26** **a)** Eine Eisenbahnstrecke von 200 km Länge wurde zu 75% elektrifiziert. Wieviel Kilometer sind das?

b) In einer LPG mit 2 400 ha landwirtschaftlicher Nutzfläche wird auf $33\frac{1}{3}$% dieser Fläche Getreide angebaut. Wieviel Hektar sind das?

c) Bei einem Betriebssportfest wurden 40 männliche Teilnehmer gezählt. Die Anzahl der weiblichen Teilnehmer war noch um 50% höher. Wieviel waren das?

d) In einem Sportstadion, in dem es 4 000 Sitzplätze gibt, soll deren Anzahl auf 150% erhöht werden. Wieviel Sitzplätze wird es dann geben?

Für *jede beliebige* Zahl oder Größe *G* gilt:

50% von *G* ist dasselbe wie **die Hälfte von *G*.**
25% von *G* ist dasselbe wie **ein Viertel von *G*.**
75% von *G* ist dasselbe wie **drei Viertel von *G*.**
$33\frac{1}{3}$% von *G* ist dasselbe wie **ein Drittel von *G*.**
10% von *G* ist dasselbe wie **ein Zehntel von *G*.**
100% von *G* ist dasselbe wie ***G*.**
1% von *G* ist dasselbe wie **ein Hundertstel von *G*.**

Die zuletzt genannte Feststellung ist grundlegend für das Verständnis aller Überlegungen und Redeweisen, in denen der Begriff „Prozent“ vorkommt, weil durch sie der Begriff „Prozent“ **definiert** wird.[1])

▶ **1** **DEFINITION:** ***Ein Prozent* von *G* ist *ein Hundertstel* von *G*.**
Kurz: *1% von G ist* $\frac{G}{100}$.

Die Größe ***G*** nennt man in diesem Zusammenhang **Grundwert.** Die vor dem Zeichen „%“ auftretende Zahl nennt man den jeweiligen **Prozentsatz.** Man bezeichnet ihn allgemein mit dem Buchstaben ***p*.**
Der **Prozentsatz** liegt *zwischen 0 und 100*, wenn er einem bestimmten *Teil des Grundwertes* ***G*** entspricht.

---

[1]) pro centum (lat.) – für hundert

Häufig werden aber auch Zahlen mit dem Grundwert verglichen, die *größer als* **G** sind. Ihnen entsprechen dann natürlich *Prozentsätze, die größer als 100* sind. Beispielsweise bedeuten
200% von **G** dasselbe wie *das Doppelte von* **G**,
500% von **G** dasselbe wie *das Fünffache von* **G**,
150% von **G** dasselbe wie *das 1,5fache von* **G**.

Neben dem Begriff „Prozent" begegnet man zuweilen auch dem Begriff „Promille" (z. B. im Zusammenhang mit der Angabe von Restalkoholkonzentrationen im Blut). Diese Redeweise bedeutet ursprünglich „für tausend". Dementsprechend versteht man unter *ein Promille von G ein Tausendstel* von *G*. Kurz: *1 ‰* von *G* ist $\frac{G}{1\,000}$.

Aufgaben

1. Es sei $G = 160$ kg. Wieviel Prozent von G sind dann **a)** 16 kg; **b)** 80 kg; **c)** 1,6 kg; **d)** 160 kg?

2. Es sei $G = 160$ kg. Wieviel Kilogramm sind dann **a)** 25% von G; **b)** 75% von G; **c)** 50% von G; **d)** 150% von G?

3. Steffen spart, um sich einen Fotoapparat zu kaufen. 50% des benötigten Geldes hat er schon, nämlich 70 Mark.
Wie teuer ist der Fotoapparat?

4. Wie groß ist G, wenn man weiß
a) 10% von G sind 90 l, **b)** 1% von G sind 8 m, **c)** 25% von G sind 120 ha, **d)** 100% von G sind 48 M, **e)** 75% von G sind 15 kg, **f)** 400% von G sind 1 000 M?

5. Wieviel Prozent der Fläche ist bei den Figuren im Bild A 4 jeweils schraffiert?

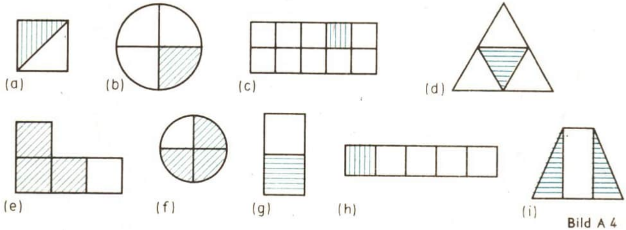


Bild A 4

6. **a)** Zeichne einen Kreis mit einem Radius von 3 cm! Male 50% seiner Fläche farbig aus!
b) Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 cm und 1 cm! Male 75% seiner Fläche farbig aus!
c) Zeichne einen Rhombus mit einer Seitenlänge von 4 cm und einem Innenwinkel von 60°! Male 25% seiner Fläche farbig aus!

7. Wieviel ist 1% von
a) 1 m, **b)** 1 dm², **c)** 1 hl, **d)** 1 dt?

8. Wieviel Prozent sind
a) 10 cm von 1 m, **b)** 50 dm² von 1 m², **c)** 10 g von 1 kg, **d)** 6 h von 1 d?

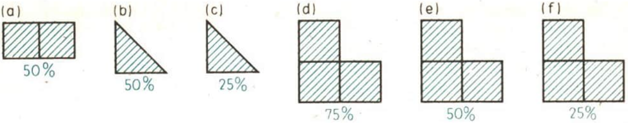


Bild A 5

9. Übertrage die Figuren im Bild A 5 in dein Heft! Ergänze sie dann jeweils so zu einer neuen Figur, daß die ursprünglichen (schraffierten) Flächen den angegebenen Prozentsätzen entsprechen!

10. Bei welchen Figuren im Bild A 6 ist mehr als 25% (weniger als 75%) der Fläche schraffiert?

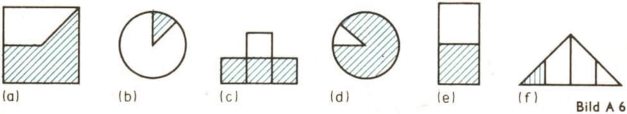


Bild A 6

10 Berechnungen mit beliebigen Prozentsätzen

In den Aufgaben des vorigen Abschnitts kamen nur einfache Prozentsätze vor. Es handelte sich z. B. um 50%, 25%, 75%, 10%, 5%, 20%, 1% oder 200% einer bestimmten Größe. Wie findet man die Lösungen von Aufgaben, in denen andere Prozentsätze auftreten?

■ **28** In einem Heizwerk setzt man sich das Ziel, den im Plan vorgesehenen Jahresbedarf von 1 200 t Braunkohle um mindestens 6% zu unterbieten. Wieviel Tonnen Braunkohle müssen wenigstens eingespart werden, um dieses Ziel zu erreichen?
Wir überlegen: Man kann den Wert von 6% leicht bestimmen, wenn man den Wert von 1% kennt.
1% von 1 200 t ist der hundertste Teil von 1 200 t.

$$\frac{1\,200\ \text{t}}{100} = 12\ \text{t}$$

6% von 1 200 t sind das Sechsfache von 12 t.

$12\ \text{t} \cdot 6 = 72\ \text{t}$

Antwort: Es müssen wenigstens 72 t Braunkohle eingespart werden.

■ **29** In einem anderen Heizwerk betrug die Planvorgabe 4 000 t Braunkohle. Davon wurden 160 t eingespart. Wieviel Prozent sind das?
Wir überlegen: Um zu ermitteln, wieviel Prozent von 4 000 t die 160 t darstellen, braucht man nur festzustellen, wie oft 1% von 4 000 t in 160 t enthalten ist.
1% von 4 000 t ist der hundertste Teil von 4 000 t.

$4\,000\ \text{t} : 100 = 40\ \text{t}$

Wie oft sind 40 t in 160 t enthalten?

$160\ \text{t} : 40\ \text{t} = 4$

Antwort: Es wurden 4% eingespart.

■ **30** Von einem dritten Heizwerk wird berichtet, daß sogar 9% der vorgesehenen Braunkohlenmenge eingespart werden konnten, nämlich 108 t. Wie groß war die ursprünglich im Plan vorgesehene Menge?

Wir überlegen: Die ursprünglich vorgesehene Menge ist der Grundwert, ihm entsprechen 100%. Man kann den Grundwert leicht bestimmen, wenn man den Wert von 1% kennt.

9% von G sind 108 t. 1% von G ist der 9. Teil von 108 t.

108 t : 9 = 12 t

100% (G) sind das Hundertfache von 12 t.

12 t · 100 = 1 200 t
G = 1 200 t

Antwort: Im Plan waren ursprünglich 1 200 t vorgegeben.

Die Beispiele A 28 bis 30 haben gezeigt, daß man Prozentaufgaben lösen kann, indem man *zunächst den Wert von 1% ermittelt* und dann je nach der Fragestellung weiterrechnet.
Falls ***G** und **p** gegeben* sind (wie im Beispiel A 28), kann man den zu p gehörigen **Prozentwert *W*** wie folgt ermitteln:

(1) Man bestimmt 1% von G, das ist $\frac{G}{100}$; (2) man multipliziert $\frac{G}{100}$ mit p.

Also: $\boxed{W = \frac{G}{100} \cdot p}$

Falls ***G** und **W** gegeben* sind (wie im Beispiel A 29), kann man den zu W gehörigen **Prozentsatz *p*** wie folgt ermitteln:

(1) Man bestimmt 1% von G, das ist $\frac{G}{100}$;

(2) man ermittelt, wie oft der Wert von 1% in W enthalten ist.

Also: $\boxed{p = W : \frac{G}{100}}$

Falls ein *Wert **W** und der zugehörige Prozentsatz **p** gegeben* sind (wie im Beispiel A 30), kann man den **Grundwert *G*** wie folgt ermitteln:

(1) Man bestimmt den Wert von 1%, das ist $\frac{W}{p}$;

(2) man multipliziert den gefundenen Wert mit 100.

Also: $\boxed{G = \frac{W}{p} \cdot 100}$

An der Gleichung $W = \frac{G}{100} \cdot p$ erkennt man: ***W** ist proportional zu **p***. Proportionalitätsfaktor ist dabei der Wert $\frac{G}{100}$.

● **27** Vervollständige zu wahren Aussagen!

a) Bei feststehendem Grundwert G ist W um so größer, je .... p ist.
b) Bei feststehendem Prozentsatz p ist W um so ...., je kleiner G ist.
c) Bei feststehendem Prozentwert W ist p um so ...., je .... G ist.

Aufgaben

1. **a)** $G = 500$ M. Wieviel Mark sind dann 3%?
b) $G = 700$ M. Wieviel Mark sind dann 12%?
c) $G = 300$ M. Wieviel Mark sind dann 210%?

2. **a)** $G = 500$ M. Wieviel Prozent sind dann 35 M?
b) $G = 600$ M. Wieviel Prozent sind dann 66 M?
c) $G = 200$ M. Wieviel Prozent sind dann 280 M?

3. Berechne jeweils G!
a) 7% von G sind 42 M **b)** 24% von G sind 72 km
c) 12% von G sind 72 t **d)** 250% von G sind 500 t

4. Wieviel Prozent sind
a) 36 m von 900 m, **b)** 180 km von 9 000 km, **c)** 3,50 M von 50 M,
d) 88 cm von 2 m, **e)** 5 km von 4 000 m, **f)** 2 dt von 600 kg?

5. Berechne!
a) Wieviel sind 7% von 1 500? **b)** 16% von G sind 48. Wie groß ist G?
c) Wieviel sind 81% von 30? **d)** Wieviel Prozent sind 46 von 2 300?

6. 18% eines gewissen Grundwertes G seien 70 M.
Wieviel Mark sind dann **a)** 9%, **b)** 36%, **c)** 90%, **d)** 180%?

7. 32 M seien 88% eines gewissen Grundwertes G.
Wieviel Prozent sind dann **a)** 16 M, **b)** 8 M, **c)** 4 M, **d)** 3,20 M?

8. 120 M sind 5% von 2 400 M.
Wie groß muß der Grundwert G sein, damit 120 M
a) 10%, **b)** 20%, **c)** 30%, **d)** 60% von G sind?

9. Herr Altmann und Frau Bürger unterhalten sich.
Herr A. erzählt: „Für meine Wohnung zahle ich 10% meines Gehalts an Miete."
Frau B. erwidert: „Die Miete für meine Wohnung beträgt nur 5% meines Gehalts."
Es stellt sich heraus, daß beide denselben Betrag zahlen. Können die Prozentangaben dann richtig sein? Urteile und begründe!

10. Zeichne zwei Rechtecke mit den Seitenlängen **a)** 1 cm und 5 cm, **b)** 1 cm und 10 cm! Schraffiere im ersten Rechteck 10% seiner Fläche, im zweiten Rechteck 5%! Was stellst du beim Vergleich der schraffierten Flächen fest?

11.* Frau X und Herr Y spenden monatlich einen Solidaritätsbeitrag, der 40% ihres Gewerkschaftsbeitrages entspricht. Fräulein Z behauptet: „Da zahlen beide also gleich viel." Hat Fräulein Z recht? Urteile und begründe!

12. Herr Reinhold und Herr Sauer unterhalten sich über die Ausgaben für ihre PKW.
Herr R. sagt: „Ich gebe etwa 6% meines Einkommens für Benzin aus."
Herr S. stellt fest: „Bei mir sind es etwa 8%."
Kann man aus diesen Angaben den Schluß ziehen, daß Herr S. mehr Geld für Benzin ausgibt als Herr R.?
Urteile und begründe!

13. Bei den Abschlußprüfungen erreichten 15% aller beteiligten Schüler einer Schule das Prädikat „Sehr gut" und 35% das Prädikat „Gut". Der Direktor stellt daraufhin fest: „50% der Schüler haben einen guten oder sehr guten Abschluß erreicht." Hat der Direktor mit dieser Angabe recht? Urteile und begründe!

14.* In zwei Schulen (*A* und *B*) wurde in der Klassenstufe 7 eine Mathematik-Kontrollarbeit geschrieben. In der Schule *A* erreichten 40% der beteiligten Schüler mindestens die Note 2, in der Schule *B* waren es nur 20%.
Elke meint: „In beiden Schulen zusammen haben also 60% der Schüler mindestens eine 2 bekommen."
Kurt vertritt dagegen die Meinung: „Insgesamt haben 30% der Schüler wenigstens eine 2 erreicht."
Wie hat Elke gerechnet? Hat sie recht? Wie hat Kurt gerechnet? Hat er recht? Begründe deine Urteile!

15. In den Darstellungen a bis c des Bildes A 7 sind jeweils zwei Rechteckflächen teilweise schraffiert gezeichnet. Untersuche für jede Abbildung, wieviel Prozent der Einzelflächen F_1 und F_2 und wieviel Prozent der Gesamtfläche $F = F_1 + F_2$ schraffiert sind!
Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen, die nebenstehendes Aussehen hat! Was stellst du fest?

	Schraffierter Anteil der Fläche in Prozent bei		
	F_1	F_2	F
a)			
b)			
c)			

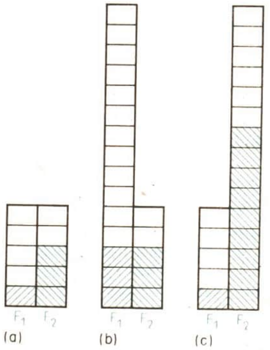


Bild A 7

11 Lösen von Prozentaufgaben mit Hilfe von Verhältnisgleichungen

In Lerneinheit 10 wurde festgestellt, daß der Prozentwert *W* proportional zum Prozentsatz *p* ist. Der Quotient einander zugeordneter Werte von *W* und *p* ist deshalb stets gleich dem Proportionalitätsfaktor. Das heißt:

$$\boxed{\frac{W}{p} = \frac{G}{100}}$$

Ausgehend von dieser Verhältnisgleichung können Prozentaufgaben gelöst werden, indem man die Gleichung nach *W*, *p* oder *G* auflöst, je nachdem, was zu berechnen ist. Es seien zum Beispiel der Grundwert *G* und der Prozentwert *W* gegeben, der Prozentsatz *p* gesucht.

Lösung: $\frac{W}{p} = \frac{G}{100} \quad \Big| \cdot p$

$W = \frac{G}{100} \cdot p \quad \Big| : \frac{G}{100}$

$p = W : \frac{G}{100}$ bzw. $p = \frac{W \cdot 100}{G}$

Beim Lösen von Anwendungsaufgaben kann es nützlich sein, eine *Zuordnungstabelle* anzufertigen, die der obigen Verhältnisgleichung entspricht:

Prozentwerte	W	G
Prozentsätze	p	100

(Dabei ist der Grundwert als derjenige Prozentwert aufgefaßt, der dem Prozentsatz 100 entspricht.)

Ausgehend von einer solchen Tabelle kann man eine zur Lösung der Aufgabe geeignete Verhältnisgleichung aufstellen, wobei es zweckmäßig ist, *stets mit dem Gesuchten zu beginnen.*

■ **31** Für einen LKW ist ein Normverbrauch von 25 l Kraftstoff auf 100 km vorgegeben. Durch kraftstoffsparende Fahrweise wurden durchschnittlich nur 23 l für 100 km verbraucht. Wieviel Prozent betrug die Einsparung?
Lösung: Gegeben sind $G = 25$ l und $W = 2$ l; gesucht ist p.

Prozentwerte	2 l	25 l
Prozentsätze	p	100

$\frac{p}{2} = \frac{100}{25} \quad \Big| \cdot 2$

$p = \frac{100}{25} \cdot 2; \quad p = 8$

Antwort: Die Einsparung betrug 8%.

■ **32** Es sollen 90 g Kochsalz in Wasser gelöst werden, so daß eine 15%ige Kochsalzlösung entsteht. Berechne die dafür notwendige Masse des Wassers!
Lösung: Gegeben sind $W_1 = 90$ g und $p_1 = 15$. Gesucht ist der zu $p_2 = 85$ gehörige Prozentwert W_2.

Prozentwerte	90 g	W_2
Prozentsätze	15	85

$\frac{W_2}{85} = \frac{90 \text{ g}}{15} \quad \Big| \cdot 85$

$W_2 = \frac{90}{15} \cdot 85 \text{ g}; \quad W_2 = 510 \text{ g}$

Antwort: Es müssen 510 g Wasser verwendet werden.

12 Die Verwendung des Taschenrechners für Prozentberechnungen

Damit wir lernen, den Taschenrechner auch für Prozentberechnungen richtig zu benutzen, rechnen wir absichtlich erst einige Aufgaben, die man auch im Kopf lösen kann.

■ **33** Wieviel sind 9% von 400?

Wir rechnen im Kopf
1% von 400 ist 4;
9% von 400 ist $4 \cdot 9$;
also $W = 36$.

Wir verwenden den Taschenrechner
Zunächst im Kopf: 1% von 400 ist 4.
Dann:

Ablaufplan	Anzeige
9 [×] 4 [=]	36.

Der Schulrechner SR 1 besitzt eine **Prozenttaste**. Bei ihrer Verwendung sind Rechenschritte im Kopf nicht erforderlich.

Für Beispiel A 33 gilt dann:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
9% von 400	**9** [×] **400** [%] [=]	36.

● **28** Berechne 3,25% von 610! Stelle den Ablaufplan auf!

■ **34** Wieviel Prozent sind 28 von 400?

Wir rechnen im Kopf
1% von 400 ist 4;
28 : 4 = 7;
also $p = 7$.

Wir verwenden den Taschenrechner
Zunächst im Kopf: 1% von 400 ist 4.
Dann:

Ablaufplan	Anzeige
28 [÷] **4** [=]	7.

Verwendet man die Prozenttaste, dann gilt für Beispiel A 34:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
Wieviel Prozent sind 28 von 400?	**28** [÷] **400** [%] [=]	7.

■ **35** Wie groß ist G, wenn 6% von G gleich 24 ist?

Wir rechnen im Kopf
24 : 6 = 4;
4 · 100 = 400;
also $G = 400$.

Wir verwenden den Taschenrechner

Ablaufplan	Anzeige
24 [÷] **6** [=]	4.

Das angezeigte Resultat entspricht dem Wert von 1%. Danach Multiplikation mit 100 im Kopf.

Wird die Prozenttaste benutzt, rechnet man Beispiel A 35 wie folgt:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
6% von G ist 24. Wie groß ist G?	**24** [÷] **6** [%] [=]	400.

Aufgaben

1. Berechne!
a) 64% von 4 070 **b)** 82,5% von 395 **c)** 6,4% von 210 **d)** 58% von 35
e) 75% von 8 **f)** 1,8% von 12,5 **g)** 0,73% von 38 500 **h)** 128% von 374

2. Wieviel Prozent sind
a) 271 von 410, **b)** 0,85 von 19, **c)** 88,5 von 91, **d)** 10 von 500,
e) 2 450 von 17 500, **f)** 4,3 von 8,6, **g)** 0,062 von 47,5, **h)** 296 von 258?

3. Berechne jeweils G!
a) 18% von G sind 57 **c)** 0,59% von G sind 11,4 **e)** 25% von G sind 12
b) 97% von G sind 48,5 **d)** 46% von G sind 53,4 **f)** 13,4% von G sind 0,65

4. Berechne den jeweils gesuchten Wert!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
G	826		1 070	68,4		6,5	
p		9,5		11,7	215		185
W	517	4,35	32,4		164	74	126

5. Berechne! Was fällt dir beim Vergleich der Ergebnisse untereinanderstehender Aufgaben auf? Begründe!

a) 18% von 680 c) 85% von 54 e) 136% von 75
b) 680% von 18 d) 54% von 85 f) 75% von 136

13 Abschätzungen und Überschlagsrechnungen

Es ist häufig der Fall, daß man von einer Größe gar nicht den genauen Wert wissen muß, sondern daß die Bestimmung eines **Näherungswertes** ausreicht, den man im Kopf ausrechnen kann. Aber auch dann, wenn der genaue Wert berechnet wurde (zum Beispiel mit Hilfe des Taschenrechners), ist es wichtig, durch eine Abschätzung oder Überschlagsrechnung eventuelle Fehler zu bemerken.

■ 36 Es soll berechnet werden, wie groß G ist, wenn 69% von G einem Betrag von 172,50 M entsprechen. Ein Schüler erhält als Lösung: $G = 40$ M.
Bei der Überprüfung *überlegt er*: Dieser Wert kann nicht richtig sein, denn der Wert von G (also von 100%) muß sicher *größer* sein als der Wert von 69% (also *größer* als 172,50 M).

● 29 Überlege, durch welchen Fehler der Schüler im Beispiel A 36 auf die Lösung $G = 40$ M gekommen sein könnte! Berechne den richtigen Wert!

■ 37 Ein Schüler berechnet 8,6% von 230 kg und erhält 197,8 kg. Bei der Überprüfung *überlegt er*: Dieses Ergebnis ist sicher falsch, denn 8,6% von 230 kg sind etwa soviel wie 10% von 200 kg, also etwa 20 kg.

● 30 Berechne für das Beispiel A 37 die richtige Lösung und stelle fest, worin der Fehler des Schülers bestand!

■ 38 Man möchte ungefähr wissen, wieviel Prozent 129 m² von 495 m² sind.
Man überlegt:
129 m² von 495 m² ist etwa dasselbe wie 125 m² von 500 m²; 125 ist ein Viertel von 500, also sind es rund 25%.

● 31 Berechne für das Beispiel A 38 den genauen Wert und urteile, ob der Näherungswert richtig bestimmt ist!

Aufgaben

1. Bestimme näherungsweise (durch Kopfrechnen)!

a) 9% von 176 kg c) 27% von 833 M e) 72% von 15 900 km
b) 43% von 7,8 m d) 35% von 0,7 l f) 143% von 320 t

2. Berechne näherungsweise (durch Kopfrechnen)! Wieviel Prozent sind
a) 2,3 m von 19,6 m, **c)** 58,5 kg von 80 kg, **e)** 1,5 l von 5 l,
b) 18,35 M von 39 M, **d)** 86 cm^2 von 98 cm^2, **f)** 112 m von 425 m?

3. Bestimme näherungsweise (durch Kopfrechnen) den Grundwert!
a) 13% von G sind 72 t. **c)** 48,5% von G sind 335 m^2. **e)** 92% von G sind 186 m^3.
b) 0,8% von G sind 4,6 l. **d)** 36% von G sind 52 M. **f)** 213% von G sind 52 km.

4. Ein Schüler kam bei Überschlagsrechnungen zu folgenden Ergebnissen:
a) 35% von 1 200 M sind etwa 800 M. **b)** 110 kg von 900 kg sind etwa 10%.
c) 650 m von 2 400 m sind etwa 70%. **d)** 780 M von 2 100 M sind etwa 30%.
e) Wenn 9,5% einem Betrag von 912 M entsprechen, dann ist der Grundwert etwa 9 000 M.
f) Wenn 28 m^3 einem Prozentsatz von 21% entsprechen, dann ist der Grundwert etwa 100 m^3.
Beurteile die Angaben des Schülers und berichtige die fehlerhaften Ergebnisse!

14 Lösen weiterer Anwendungsaufgaben

Beim Lösen von Anwendungsaufgaben wollen wir künftig folgende *Schritte* beachten:
1. *genau überlegen*, wonach gefragt ist, welche Größen bekannt sind und wie die gesuchte Größe bestimmt werden könnte;
2. durch eine *Überschlagsrechnung* die gesuchte Größe näherungsweise bestimmen;
3. den Wert der gesuchten Größe *genau berechnen*;
4. das Ergebnis *kontrollieren* (u. a. durch Vergleich mit dem Überschlag);
5. die gestellte *Frage beantworten*, dabei gegebenenfalls das Ergebnis *sinnvoll runden*.

■ **39** Von den 867 Schülern einer Schule A erwarben 543 das Touristenabzeichen, von den 943 Schülern der Schule B waren es 581 Schüler. Diese Zahlen beider Schulen sind miteinander zu vergleichen.
Wir überlegen: Es genügt nicht, nur 543 und 581 miteinander zu vergleichen. Man muß auch die Gesamtschülerzahlen berücksichtigen. Dies kann geschehen, indem man berechnet, *wieviel Prozent* der Schüler in jeder Schule das Touristenabzeichen erworben haben.

Überschlag:

a) 543 von 867 sind etwa soviel wie 540 von 900, also $p_1 \approx 60$.
b) 581 von 943 sind etwa soviel wie 600 von 1 000, also $p_2 \approx 60$.
Die genaue Berechnung unter Verwendung des Taschenrechners ergibt: a) 62,629 758; b) 61,611 877.
Kontrolle: Beide Ergebnisse stimmen mit dem Überschlag gut überein.
Antwort: In Schule A erwarben 62,6% der Schüler das Touristenabzeichen, in Schule B waren es 61,6%. Schule A hatte also ein etwas besseres Resultat.

■ **40** In Apotheken kann man getrocknete Kamillenblüten in Päckchen zu je 25 g kaufen, die einen nützlichen Tee zur Behandlung mancher Erkrankungen ergeben.
Frisch gesammelte Kamillenblüten verlieren beim Trocknen etwa 84% ihrer Masse. Welche Menge frischer Kamillenblüten ist demnach erforderlich, um ein Päckchen mit 25 g getrockneter zu erhalten?
Wir überlegen: Die 25 g entsprechen 16% der Frischmasse. Deren Größe ist der zu bestimmende Grundwert.

Überschlag: 16% von G sind 25 g. Demnach ist $G \approx 6 \cdot 25$ g = 150 g, denn $6 \cdot 16\% = 96\% \approx 100\%$.

Genaue Berechnung:

Weg 1: a) Wir bestimmen den Wert von 1%:

25 g : 16 = 1,562 5 g

b) $G = 100 \cdot 1{,}562\,5$ g; $G = 156{,}25$ g.

Möglicher Rechenablaufplan für den Taschenrechner:

25 $\boxed{\div}$ **16** $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$

Weg 2:

Prozentwerte	25 g	G
Prozentsätze	16	100

$$\frac{G}{100} = \frac{25\text{ g}}{16}$$

$$G = \frac{25\text{ g}}{16} \cdot 100; \quad G = 156{,}25\text{ g}$$

Kontrolle: Der errechnete Wert kommt dem Überschlagsergebnis sehr nahe. Wir überprüfen zusätzlich, ob 16% von G gleich 25 g sind. Das ist der Fall: $16 \cdot 1{,}562\,5$ g = 25 g.
Antwort: Es müssen rund 160 g Kamillenblüten gesammelt werden, um 25 g getrocknete zu erhalten.

■ **41** Braunkohle ist in der DDR die bedeutendste Energiequelle. Zugleich ist sie ein wichtiger Rohstoff für die Chemieindustrie. Im Jahre 1950 wurden in der DDR 137,050 Mill. t Rohbraunkohle gefördert, im Jahr 1980 waren es 258,097 Mill. t. Um die Steigerung der Produktion mit leicht überschaubaren Zahlen auszudrücken, ist zu berechnen, *auf wieviel Prozent* des Wertes von 1950 sie sich erhöht hat.

Wir überlegen:

Die Zahl 137,050 Mill. t ist der Grundwert, gefragt ist nach dem Prozentsatz p, der dem Wert von 258,097 Mill. t entspricht.
Überschlag: $258{,}097 \approx 260$; $137{,}050 \approx 140$.
Da 260 fast das Doppelte von 140 ist, muß der gesuchte Prozentsatz bei knapp 200 liegen.

Genaue Berechnung:

Weg 1: 1% von 137,050 ist 1,370 50.
$p = 258{,}097 : 1{,}370\,5$; $p = 188{,}323\,24$

Weg 2:

Prozentwerte in Mill. t	258,097	137,050
Prozentsätze	p	100

$$\frac{p}{258{,}097} = \frac{100}{137{,}050}; \quad p = \frac{100}{137{,}050} \cdot 258{,}097; \quad p = 188{,}323\,24$$

Kontrolle: Das Überschlagsergebnis bestätigt den errechneten Prozentsatz.
Antwort: Die Fördermenge im Jahre 1980 betrug rund 188% der Fördermenge von 1950.

Im Beispiel A 41 lautete die Frage, *auf wieviel Prozent* des Wertes von 1950 die Braunkohlenförderung im Jahr 1980 gestiegen war. Man will also wissen, *welchem Prozentsatz der neue Wert entspricht.* (Der ursprüngliche Wert wird dabei als Grundwert betrachtet.)
Man kann aber auch fragen: „*Um wieviel Prozent* erhöhte sich die Braunkohlenförderung?" Es geht dabei um die *Differenz* zwischen neuem und ursprünglichem Wert, und man will wissen, *welchem Prozentsatz diese Differenz entspricht.* (Der ursprüngliche Wert ist auch hier der Grundwert.)

Um diese Frage zu beantworten, kann man *zwei Wege* beschreiten:

a) Man ermittelt die Differenz der beiden Werte und rechnet dann den zugehörigen Prozentsatz aus.

$258{,}097 - 137{,}050 = 121{,}047$ (in Mill. t);
$p = 121{,}047 : 1{,}370\,5$; $p = 88{,}323\,24$

Die Fördermenge stieg *um* rund 88%.

b) Man berechnet den zum neuen Wert gehörigen Prozentsatz – so wie im Beispiel A 41 ($p \approx 188$) – und bildet dann die Differenz zu 100 (das ist ja der zum ursprünglichen Wert gehörige Prozentsatz!).

$188 - 100 = 88$

Das Ergebnis ist das gleiche wie beim ersten Weg.

Aufgaben

1. Von 157 FDJ-Mitgliedern der Thälmann-Oberschule erwarben 103 FDJler das „Abzeichen für gutes Wissen". In der benachbarten Wilhelm-Pieck-Schule waren es 94 FDJler von 138 FDJlern. Welche FDJ-Grundorganisation erreichte ein höheres Ergebnis?

2. Messing besteht im wesentlichen aus Kupfer und Zink sowie einigen speziellen Zusätzen (z. B. Blei). Wieviel Kupfer und wieviel Zink werden für 2,50 t Messingguß benötigt, wenn die Legierung 34% Zink und 64% Kupfer enthalten soll?

3.* Bronze ist eine Legierung, die im wesentlichen aus Kupfer und Zinn besteht.

a) Wieviel Bronze könnte man aus 450 kg Kupfer und 110 kg Zinn herstellen, wenn die Legierung 86% Kupfer enthalten soll?
b) Wieviel Bronze könnte man aus 500 kg Kupfer und 90 kg Zinn herstellen, wenn der Kupfergehalt 82% und der Zinngehalt mindestens 16% betragen soll?

4. Die Oberfläche der Erde beträgt rund 510,1 Millionen km². Davon sind 362,2 Millionen km² von Meeren bedeckt. Wieviel Prozent der Gesamtfläche sind das?

5. Von den rund 147,9 Millionen km² Festland der Erde entfallen auf Europa rund 10,1 Millionen km². Wieviel Prozent der Festlandfläche sind das?

6. Die DDR umfaßt eine Fläche von rund 108 000 km². Wieviel Prozent der Fläche Europas (10,1 Millionen km²) sind das?

7.* Altpapier ist ein wertvoller Rohstoff, dessen Verwendung dazu beiträgt, bei der Papierherstellung Holz einzusparen. Man kann davon ausgehen, daß 100 t Altpapier den Holzbestand von 1 ha Wald ersetzen können. Es wird geschätzt, daß in der DDR jährlich etwa 150 000 t Altpapier in den Haushalten verbrannt oder in den Müll geworfen werden.
Wieviel Hektar Holzbestand könnten in einem Jahr erhalten bleiben, wenn es gelänge, wenigstens 5% des sonst vernichteten Altpapiers zu sammeln?

8. **a)** Im Zeitraum von 1950 bis 1980 stieg die Weltbevölkerung von 2 513 Millionen Menschen auf 4 415 Millionen an. Auf wieviel Prozent des Wertes von 1950 war sie damit gewachsen?
b) Die entsprechenden Zahlen für Europa (ohne die UdSSR) lauten:
1950 waren es 392 Millionen Einwohner,
1980 waren es 487 Millionen Einwohner.
Um wieviel Prozent des Wertes von 1950 ist die Zahl angestiegen?

9. Von einem Buch wurden im ersten Monat nach seinem Erscheinen 8 000 Exemplare verkauft. Im zweiten Monat waren es 15% mehr als im ersten Monat, im dritten Monat lag die Verkaufszahl um 8% höher als im zweiten. Um wieviel Prozent war die Verkaufszahl im dritten Monat höher als im ersten?

10. Vergleiche die Alkoholmengen von 1 Glas Wein, 1 Glas Bier und 1 Glas Wodka!
Ein Weinglas enthält 100 ml, der Alkoholgehalt des Weins sei 10%. Ein Bierglas enthält 250 ml, der Alkoholgehalt des Bieres sei 4%. Ein Schnapsglas enthält 20 ml, der Alkoholgehalt von Wodka beträgt 40%.

15 Graphische Darstellungen

Im Zusammenhang mit Prozentangaben werden häufig graphische Darstellungen verwendet, um die jeweiligen Größen zu veranschaulichen.

■ 42 Die Erdatmosphäre in Bodennähe besteht aus etwa 77% Stickstoff, 21% Sauerstoff, 1% Edelgasen und 1% anderen Gasen. Zur Veranschaulichung dieser Zusammensetzung eignet sich ein **Kreisdiagramm**. (↗ Bild A 8)
Zu. Ermittlung der einzelnen Winkelgrößen geht man davon aus, daß der gesamten Kreisfläche (also 100%) ein Vollwinkel von 360° entspricht.
Stickstoffanteil: 77% von 360°, das sind rund 277°.
Sauerstoffanteil: 21% von 360°, das sind rund 76°.
Edelgasanteil: 1% von 360°, das sind rund 4°.
Der Rest der Kreisfläche entspricht dem Anteil der *sonstigen Gase*.

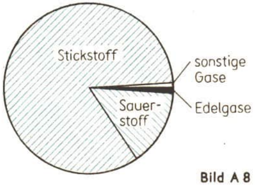


Bild A 8

■ 43 In einer Mathematik-Kontrollarbeit, die aus fünf verschiedenen Aufgaben bestand, erreichten die Schüler
bei Aufgabe 1 insgesamt 78% der Punkte,
bei Aufgabe 2 insgesamt 46% der Punkte,
bei Aufgabe 3 insgesamt 64% der Punkte,
bei Aufgabe 4 insgesamt 93% der Punkte,
bei Aufgabe 5 insgesamt 55% der Punkte.

Dieses Ergebnis kann durch ein **Streifendiagramm** veranschaulicht werden (↗ Bild A 9). Gewissen Strecken der horizontalen Achse ist jeweils eine Aufgabennummer zugeordnet, auf der vertikalen Achse werden die Prozentsätze in einer geeigneten Einheit (z. B. 100% ≙ 10 cm) abgetragen.

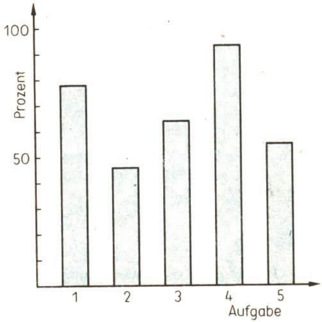


Bild A 9

■ 44 Im Bereich der Land- und Forstwirtschaft hat sich in der DDR in den vergangenen Jahrzehnten eine revolutionäre Umgestaltung vollzogen. Sie führte unter anderem zu einer großen Steigerung der Arbeitsproduktivität. Die Zahl der in diesem Bereich tätigen Arbeitskräfte konnte verringert werden. Sie betrug 1950 noch 2 005 000 Werktätige, sank auf 1 304 000 im Jahre 1960, 997 000 im Jahre 1970 und 878 000 im Jahre 1980.
Diese Entwicklung kann durch ein **Liniendiagramm** veranschaulicht werden (↗ Bild A 10). Die Verbindungsstrecken zwischen den Punkten im Diagramm dienen nur einer anschaulicheren Gestaltung, sie ermöglichen nicht, irgendwelche Zwischenwerte (etwa die zu 1958 oder 1972 gehörigen Prozentsätze) abzulesen.

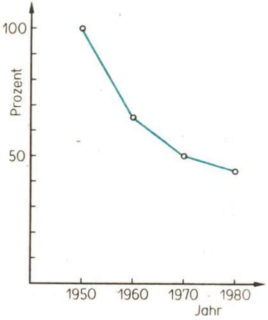


Bild A 10

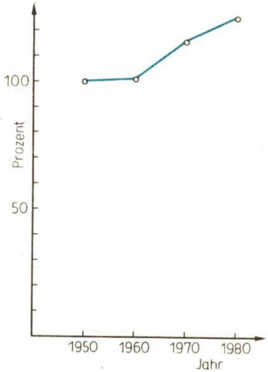


Bild A 11

■ 45 Im Bereich des Bauwesens ist im Zeitraum von 1950 bis 1980 trotz ständig gestiegener Arbeitsproduktivität die Anzahl der Beschäftigten erhöht worden, um die großen Aufgaben (zum Beispiel im Wohnungsbau) bewältigen zu können. In diesem Bereich waren tätig:

1950	465 000 Werktätige,
1960	470 000 Werktätige,
1970	538 000 Werktätige,
1980	583 000 Werktätige.

Diese Entwicklung ist in dem **Liniendiagramm** im Bild A 11 dargestellt. Der Anfangswert von 1950 wurde dabei wieder als Grundwert verwendet, ihm entsprechen also 100%.

Aufgaben

1. Über die Zusammensetzung einer bestimmten Brotsorte erfahren wir, daß sie 53% Kohlenhydrate, 6% Eiweiß, 1% Fett und 39% Wasser enthält. Der Rest sind andere Stoffe.
Stelle diese Zusammensetzung in einem Kreisdiagramm dar!

2. Die Tabelle enthält Angaben über die Größe einiger Länder sowie über die Größe der landwirtschaftlich genutzten Fläche (LNF) in diesen Ländern. Berechne für die genannten Länder die prozentualen Anteile der LNF an der Gesamtfläche und stelle diese Werte in einem Streifendiagramm dar!

Land	Gesamtfläche in 1 000 km²	LNF in 1 000 km²
Sowjetunion	22 402	5 500
USA	9 363	4 310
DDR	108	63
BRD	247	138
Ungarn	93	69
Japan	372	60

3. Die folgende Tabelle enthält Angaben über die durchschnittlichen Hektarerträge bei Weizen, die in den Jahren 1950, 1960, 1970 und 1980 in der DDR erzielt worden sind.

Jahr	1950	1960	1970	1980
Ertrag	24,3 dt	34,8 dt	35,6 dt	43,8 dt

a) Berechne, auf wieviel Prozent des Wertes von 1950 der Ertrag jeweils gestiegen ist, und stelle diese Prozentsätze in einem Liniendiagramm dar!

b) Im Jahr 1961 betrug der Hektarertrag 27,5 dt, im Jahr 1968 waren es 41,7 dt. Berechne die zugehörigen Prozentsätze (bezogen auf den Wert von 1950) und trage sie in das Liniendiagramm ein! Was stellst du fest?

4. Die folgende Tabelle enthält Angaben über den jährlichen Pro-Kopf-Verbrauch an Fleisch- und Wurstwaren bzw. Roggenmehl in der DDR.

Jahr	1960	1970	1980
Fleisch- und Wurstwaren	55,0 kg	66,1 kg	89,5 kg
Roggenmehl	49,9 kg	40,4 kg	31,6 kg

a) Berechne, um wieviel Prozent des Wertes von 1960 der Verbrauch jeweils in den anderen beiden Jahren gestiegen bzw. gesunken ist!

b) Stelle die Entwicklung in einem Liniendiagramm dar!

5. Die folgende Tabelle enthält Angaben über die Gesamtzahl an Wohnungen, die in bestimmten Jahren der Bevölkerung der DDR übergeben wurden, sowie über den Anteil der durch Neubau errichteten Wohnungen. Veranschauliche die Angaben durch graphische Darstellung!

Jahr	1960	1970	1980
Gesamtzahl	80 489	76 088	169 223
davon Neubau	71 857	65 786	120 206

16 Berechnung von Zinsen

Wenn man sich ein Sparkonto einrichtet, so erhält man von der Sparkasse **Zinsen**, die einem bestimmten Prozentsatz des auf dem Konto befindlichen Guthabens entsprechen. Diese Zinsen werden **jährlich** berechnet.
Dagegen muß man an die Sparkasse *Zinsen zahlen*, wenn man dort einen Kredit aufnimmt, z. B. für den Bau eines Eigenheimes.

■ **46** Jemand besitzt ein Sparbuch mit einem Guthaben von 2 500 Mark. Er erhält pro Jahr 3,25% dieses Betrages an Zinsen. Das sind

$$Z = 3{,}25 \cdot \frac{2\,500\text{ M}}{100} = 81{,}25\text{ M}.$$

Bei dieser Rechnung entspricht das **Guthaben G** dem *Grundwert G*. Der *Prozentsatz p* heißt in diesem Zusammenhang gewöhnlich **Zinssatz p**, die **Zinsen Z** entsprechen dem *Prozentwert W*.

Für die Berechnung von *jährlichen Zinsen* gilt somit die Gleichung

$$\boxed{Z = p \cdot \frac{G}{100}}.$$

Dabei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß sich das Guthaben in dem betreffenden Jahr nicht ändert. Falls in dem betrachteten Jahr weiteres Geld eingezahlt oder vom Konto abgehoben wird, müssen die Zinsen anteilmäßig berechnet werden.

■ **47** Am Beginn des Jahres befindet sich auf einem Konto ein Guthaben von 3 200 Mark. Nach fünf Monaten werden weitere 1 100 Mark eingezahlt, vier Monate später werden 2 700 Mark abgehoben. Der Zinssatz beträgt 3,25. Der Kontoinhaber kann sich die Zinsen für das betreffende Jahr wie folgt berechnen:

a) Fünf Monate lang (fünf Zwölftel des Jahres) betrug das Guthaben 3 200 Mark. Die Zinsen dafür betragen

$$Z_1 = 3{,}25 \cdot \frac{3\,200\text{ M}}{100} \cdot \frac{5}{12} = 43{,}33\text{ M}.$$

b) Die folgenden vier Monate betrug das Guthaben 4 300 M.

$$Z_2 = 3{,}25 \cdot \frac{4\,300\text{ M}}{100} \cdot \frac{4}{12} = 46{,}58\text{ M}.$$

c) Die restlichen drei Monate des Jahres befanden sich 1 600 Mark auf dem Konto.

$$Z_3 = 3{,}25 \cdot \frac{1\,600\text{ M}}{100} \cdot \frac{3}{12} = 13{,}00\text{ M}.$$

Die Gesamtzinsen betragen somit

$$Z = 43{,}33\text{ M} + 46{,}58\text{ M} + 13{,}00\text{ M} = 102{,}91\text{ M}.$$

Falls die einzelnen Zeiträume in Tagen angegeben sind, ist zu beachten, daß das Jahr stets mit 360 Tagen gerechnet wird. Die Zinsen für 43 Tage beispielsweise betragen somit $\frac{43}{360}$ der Jahreszinsen.

Aufgaben

1. Berechne die Jahreszinsen für folgende Beträge, wenn der Zinssatz 4,5 ist! Nutze dabei die Konstantenautomatik des SR 1!
a) 650 M **b)** 5 840 M **c)** 285 M **d)** 12 700 M

2. Auf einem Sparkonto befinden sich während eines Jahres folgende Beträge: ab 1. Januar 1 700 M; ab 1. April 2 600 M; ab 1. Oktober 3 400 M; ab 1. Dezember 600 M. Der Zinssatz sei 3,25. Berechne die Zinsen für dieses Jahr!

3. Es wird ein Konto mit 5 000 M Guthaben eröffnet. Wie hoch ist dieser Betrag nach vier Jahren, wenn die jährlichen Zinsen nicht abgehoben, sondern dem Guthaben hinzugefügt werden? Der Zinssatz betrage 3,25.

4. Jemand erhält einen Kredit von 30 000 M zu einem Zinssatz von 6,5. Wie hoch sind die jährlichen Zinsen, die er zahlen muß?

Zusammenfassung

Prozentrechnung	
Begriffe: *G* – **Grundwert** *p* – **Prozentsatz** *W* – **Prozentwert**	$G = 3\,200$ t $p = 1{,}5$ $W = 48$ t
Lösen von Aufgaben	
1. Möglichkeit Man berechnet zunächst den Wert von 1 %. Das ist a) $\frac{G}{100}$, wenn *G* bekannt ist; b) $\frac{W}{p}$, wenn *G* nicht bekannt ist. Mit Hilfe des Wertes von 1 % kann die jeweils gesuchte Größe errechnet werden.	a) $W = \frac{G}{100} \cdot p$ bzw. $p = W : \frac{G}{100}$ $G = 540$ kg; $p = 2$ $W = \frac{540}{100} \cdot 2$ kg $W = 10{,}8$ kg $G = 350$ km; $W = 70$ km $p = 70 : \frac{350}{100}$ $p = 20$ b) $G = \frac{W}{p} \cdot 100$ $W = 36$ M; $p = 3$ $G = \frac{36}{3} \cdot 100$ M; $G = 1\,200$ M
2. Möglichkeit Man geht von der Verhältnisgleichung $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$ oder einer dazu gleichwertigen aus und stellt sie nach *W*, *G* oder *p* um.	$G = 360$ g; $p = 1{,}5$; $W = ?$ $\frac{W}{p} = \frac{G}{100} \quad \| \cdot p$ $W = \frac{G \cdot p}{100}$ $W = \frac{360 \cdot 1{,}5}{100}$ g; $W = 5{,}4$ g

Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung

1.* Gegeben sind die Zahlen $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{5}$. Die erste Zahl soll um 25 % vergrößert, die zweite um 25 % vermindert werden.

a) Ist die Summe der so gebildeten neuen Zahlen gleich der Summe der ursprünglichen Zahlen?

b) Wenn nicht – wieviel Prozent beträgt die Abweichung gegenüber der Summe der gegebenen Zahlen?

c) Untersuche die Fragen a) und b) auch für das Produkt!

2. Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 5$ cm und $b = 2$ cm.
a) Welche Seitenlänge muß ein Quadrat haben, wenn sein Umfang gleich dem Umfang des Rechtecks sein soll?
b) Ist der Flächeninhalt dieses Quadrats gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks?
c) Wenn nicht – um wieviel Prozent ist der Flächeninhalt des Quadrats größer oder kleiner als der des Rechtecks?

3.* Bei der Produktion von rechteckförmigen Stahlplatten mit den Abmessungen $l = 800$ mm, $b = 500$ mm und $d = 15{,}5$ mm soll der Materialverbrauch durch Verminderung der Plattendicke gesenkt werden, und zwar um 8%.
a) Welche Dicke müssen die Platten dann bekommen?
b) Wieviel solcher neuen Platten können aus dem bisher für 2 000 Platten erforderlichen Material hergestellt werden?

4. Ein LKW fährt zu einem 200 km entfernten Zielort mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Um wieviel Prozent wäre seine Fahrzeit geringer, wenn der LKW mit einer um 30% höheren Durchschnittsgeschwindigkeit fahren könnte?

5.* Ein Kino mit 350 Plätzen, das täglich 2 Vorstellungen gibt, registrierte im Juni insgesamt 10 800 Besucher.
a) Zu wieviel Prozent ist damit die Platzkapazität ausgenutzt worden?
b) Im Juli ging die Besucherzahl gegenüber dem Vormonat um 20% zurück. Wieviel Prozent der Platzkapazität waren im Juli ausgenutzt?
c) Um wieviel Prozent müßte die Besucherzahl im August gegenüber dem Monat Juli ansteigen, wenn sie denselben Stand wie im Juni erreichen soll?
d) Wäre die Ausnutzung der Platzkapazität dann im August dieselbe wie im Juni?

6.* Um wieviel Prozent ist das Volumen von 1,0 kg Aluminium größer als das Volumen von 1,0 kg Stahl?

7.* Von einer bestimmten Pilzsorte ist bekannt, daß sie zu 85% aus Wasser besteht. Nach dem Trocknen beträgt der Wasseranteil an der Gesamtmasse nur noch 5%. Wieviel kg getrocknete Pilze erhält man aus 4,0 kg frischen?

8. In einem Ferienlager erhält eine Pioniergruppe den Auftrag, 25% ihrer Mitglieder für den Ordnungsdienst einzuteilen. Da ruft Klaus: „Das geht doch gar nicht! Wir sind ja nur 24 Pioniere!“
Was sagst du dazu?

B Rationale Zahlen

Der Begriff „Rationale Zahl"

1 Rückblick auf die natürlichen und die gebrochenen Zahlen

Schon in der Urgesellschaft ergab sich für die Menschen die Notwendigkeit, Viehherden und Ackerbauprodukte zu zählen oder für Aussaat und Ernte Kalender zu führen. Auf Grund dieser gesellschaftlichen Bedürfnisse entwickelten sich Zahlvorstellungen, bildeten sich die Anfänge des Rechnens heraus, und zwar zunächst des Rechnens mit natürlichen Zahlen. Im Verlauf der weiteren Entwicklung wurden Produkte ausgetauscht, wobei mitunter der Wunsch zur Angabe von Bruchteilen entstand. Auch das Aufteilen einer Jagdbeute, eines gemeinsam erarbeiteten Ernteertrages und einer von einer Kriegerschar eingebrachten Beute führten zum Problem des Teilens, das natürlich nicht immer ohne Rest möglich war. Bereits Hunderte von Jahren vor unserer Zeitrechnung enthielten die Aufzeichnungen aus den Königspalästen und aus den Tempeln auch Zeichen für gebrochene Zahlen, so die Keilschrifttafeln im alten Babylon (↗ Bild B 1; oben: Bildzeichen für das zur Hälfte gefüllte Gefäß; unten: Schreibweise für $\frac{1}{2}$ in der entwickelten Keilschrift) und die Papyrusrollen im alten Ägypten. Dennoch erstreckte sich der Prozeß der Herausbildung eines umfassenderen Zahlbegriffs, der neben den natürlichen Zahlen auch die gebrochenen Zahlen mit einschloß, über einen sehr langen Zeitraum.

Bild B 1

Wir wissen bereits,

– daß im Bereich der natürlichen Zahlen die Addition und die Multiplikation und
– daß im Bereich der gebrochenen Zahlen die Addition, die Multiplikation und die Division (ausgenommen durch Null) immer ausführbar sind.

● 1 **a)** Gib zwei Divisionsaufgaben und zwei Subtraktionsaufgaben an, die im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar sind!
b) Gib drei Rechenaufgaben an, die im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar sind!

	in N	**in** Q_+
Addition	immer ausführbar	immer ausführbar
Subtraktion	*nicht* immer ausführbar	*nicht* immer ausführbar
Multiplikation	immer ausführbar	immer ausführbar
Division	*nicht* immer ausführbar	immer ausführbar, falls der Divisor verschieden von Null ist

● 2 Gib an, welche Rechengesetze im Bereich der gebrochenen Zahlen gelten!

● 3 Löse – falls möglich – folgende Aufgaben im Bereich der gebrochenen Zahlen!
a) Am Montag hatte Anke Fieber und mußte zum Arzt. Ihre Körpertemperatur betrug 39,2 °C. Nach Einnahme von Tabletten sank die Temperatur um 2,4 °C. Wie hoch war ihre Körpertemperatur nun?
b) Am Abend wurde eine Außentemperatur von 4 °C gemessen. Fünf Stunden später war die Temperatur um 7 °C gesunken. Welche Temperatur wurde jetzt gemessen?

Auch der Bereich der gebrochenen Zahlen erweist sich als unzureichend (↗ z. B. Auftrag B 1 b, B 3 b). Deshalb ist eine **Erweiterung des Zahlenbereichs** der gebrochenen Zahlen erforderlich. Im nun zu bildenden Zahlenbereich müßten alle Rechenoperationen ausführbar sein, die schon im Bereich der gebrochenen Zahlen ausführbar waren. Außerdem sollte auch *jede Subtraktionsaufgabe lösbar* sein.
Bevor wir uns neuen Zahlen zuwenden, überlegen wir nochmals, wie wir die gebrochenen Zahlen erklärt haben:
Wir faßten alle Brüche, die ein und denselben Punkt des Zahlenstrahls bezeichnen, d. h. die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, zu einer **Menge** zusammen. Jede solche Menge wird **gebrochene Zahl** genannt. (↗ Bild B 2)

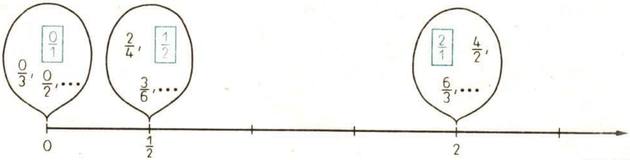


Bild B 2

Aufgaben

1. Löse folgende Aufgaben! Falls eine Aufgabe in Q_+ nicht lösbar ist, schreibe „n. l.“!

a) $1{,}7 + 3{,}9$ **b)** $46 - 11 \cdot 2$ **c)** $3{,}3 - 4{,}9$ **d)** $5{,}6 : 4$
e) $12 : (18 + 6)$ **f)** $5 - 2 : \frac{1}{7}$ **g)** $\frac{1}{2} - 0{,}25$ **h)** $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
i) $3 : 0$ **k)** $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ **l)** $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}$ **m)** $0{,}3^2$
n) $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$ **o)** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} : 2$ **p)** $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) : 3$ **q)** $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$
r) $0 : \frac{1}{2}$ **s)** $\frac{2}{3} : 9$ **t)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2}$ **u)** $0{,}5 \cdot 0{,}79 \cdot 2$
v) $\frac{1}{7} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{7} \cdot 0{,}4$ **w)** $2{,}2 - 1{,}9$ **x)** $0{,}2 : 2$ **y)** $4 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)$

2. Löse folgende Gleichungen im Bereich der gebrochenen Zahlen!

a) $4 - x = 0$ **b)** $3 + x = 0$ **c)** $x - 7 = 6$ **d)** $x + 7 = 1$
e) $x \cdot 7 = 0$ **f)** $x \cdot 6 = 2$ **g)** $12 : x = 3$ **h)** $4 : x = 3$

3. Gehören die beiden Brüche zu ein und derselben gebrochenen Zahl? Begründe deine Antwort!

a) $\frac{5}{9}$; $\frac{15}{27}$ **b)** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{8}$ **c)** $\frac{6}{8}$; $\frac{9}{12}$ **d)** $\frac{8}{6}$; $\frac{12}{9}$ **e)** $\frac{5}{15}$; $\frac{1}{5}$

2 Rationale Zahlen

● **4** Stelle, falls möglich, folgende Differenzen mit Hilfe von Streckenabtragungen auf einem Zahlenstrahl dar! (↗ Bild B 3)

a) $6 - 4$ **b)** $4{,}5 - 4$ **c)** $3 - 3$ **d)** $1 - 4$ **e)** $2 - 3$

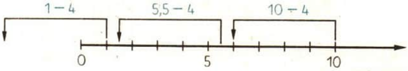


Bild B 3

Wie wir sehen, kann nicht jeder Differenz auf dem Zahlenstrahl durch Streckenabtragung ein Punkt zugeordnet werden. Erweitern wir jedoch den Zahlenstrahl zu einer Zahlengeraden, so kann jeder Differenz ein Punkt dieser Geraden zugeordnet werden. Der Zahlenstrahl kann zur Zahlengeraden erweitert werden, indem man ihn an einer Geraden *g* spiegelt, die senkrecht zum Zahlenstrahl durch den Punkt 0 geht. (↗ Bild B 4)
Bei dieser Spiegelung bezeichnet man den Bildpunkt von 2 mit -2 („minus zwei“). Das Zeichen „—“ nennt man **Vorzeichen**. (Damit haben wir eine weitere Bedeutung des Zeichens „—“ kennengelernt, denn bisher kannten wir das Zeichen „—“ nur als Operations-

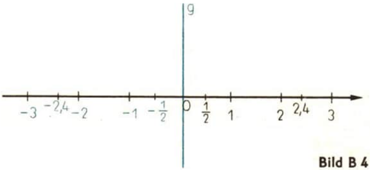


Bild B 4

zeichen bei der Subtraktion.) Der Bildpunkt von $\frac{1}{2}$ ist $-\frac{1}{2}$ („minus ein halb"), der Zahl 2,4 wird die Zahl —2,4 („minus zwei Komma vier")[1]) zugeordnet usw. Der Punkt 0 hat sich selbst zum Bildpunkt.
Auf der so entstandenen Geraden kann auch der Differenz 1 — 4 eindeutig ein Punkt zugeordnet werden.

● **5** Welcher Punkt der Geraden (↗ Bild B 4) wird der Differenz **a)** 1 — 4, **b)** 1,5 — 3, **c)** $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$ zugeordnet?

Die neuen Zahlen, die auf der Zahlengeraden *links* vom Punkt 0 liegen, heißen **negative Zahlen**. Sie sind alle durch ein Minuszeichen als „Vorzeichen" gekennzeichnet.

▶ **1**

> **DEFINITION: Die gebrochenen und die negativen Zahlen zusammen bezeichnet man als *rationale Zahlen*. Die *Menge der rationalen Zahlen* wird mit dem *Symbol Q* bezeichnet.**

Jeder rationalen Zahl ist genau ein Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet.

● **6** Zeichne eine Zahlengerade! Trage auf ihr folgende rationale Zahlen ein: 0; 1; 5; —1; —5; $\frac{3}{2}$; $-1\frac{1}{2}$; $\frac{9}{4}$; —2,25!

Die Menge der gebrochenen Zahlen Q_+ ist eine Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen ($Q_+ \subset Q$). Damit gilt auch: $N \subset Q$.

● **7** Veranschauliche in einem Mengendiagramm die Menge der natürlichen Zahlen *N*, die Menge der gebrochenen Zahlen Q_+ und die Menge der rationalen Zahlen *Q*!

Alle rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden *rechts* vom Punkt 0 liegen, nennt man **positive Zahlen**. Man schreibt sie manchmal mit dem Vorzeichen „+", also z. B. +3 statt 3; +2,7 statt 2,7; $+\frac{3}{4}$ statt $\frac{3}{4}$. Die Zahl Null ist weder positiv noch negativ. Spricht man von **nichtnegativen** rationalen Zahlen, so meint man die **positiven und die Null**, also eigentlich die **gebrochenen Zahlen**.

Die Zahlenstrahlen des uns bekannten rechtwinkligen **Koordinatensystems** ergänzen wir nun zu Zahlengeraden. Dadurch können auch geordnete Zahlenpaare, in denen *negative Zahlen* vorkommen, in diesem Koordinatensystem durch Punkte dargestellt werden. (↗ Bild B 5)

● **8** Gib für die im Bild B 5 dargestellten Punkte jeweils Abszisse und Ordinate an!

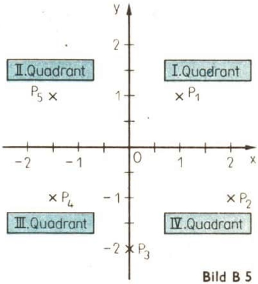


Bild B 5

[1]) Wir können auch kurz sagen, daß solche Zahlen wie z. B. 2 und —2, $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, 2,4 und —2,4 auf der Zahlengeraden *symmetrisch zur Null* liegen.

Aufgaben

1. Gib Beispiele an, in denen negative Zahlen auftreten!

2. Welche der folgenden Aussagen sind falsch? **a)** $2 \in N$ **b)** $-2 \in N$
c) $-\frac{1}{2} \in Q_+$ **d)** $0 \in Q$ **e)** $0{,}3 \in Q$ **f)** $0{,}75 \in Q_+$ **g)** $-2{,}1 \in Q_+$
h) $-3{,}7 \in Q$

3. Zeichne eine Zahlengerade (Einheit 1 cm) auf Millimeterpapier und gib auf ihr die folgenden rationalen Zahlen möglichst genau an!
a) $4;\ -4;\ 2;\ -2;\ 0;\ -3;\ -1$
b) $-0{,}5;\ \frac{1}{4};\ -\frac{5}{4};\ 1{,}7;\ -\frac{11}{10};\ -3\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}$

4. Gib an, welche Zahlen auf der Zahlengeraden im Bild B 6 durch die blauen Buchstaben gekennzeichnet sind!

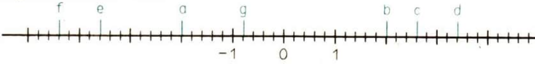


Bild B 6

5. Nenne drei Zahlen, die auf der Zahlengeraden (↗ Bild B 6)
a) rechts von 1;
b) links von —5;
c) rechts von $-\frac{3}{4}$ liegen!

6. Nenne drei Zahlen, die auf der Zahlengeraden (↗ Bild B 7)
a) unter 1,5;
b) über —2;
c) unter —7,2 liegen!

Bild B 7

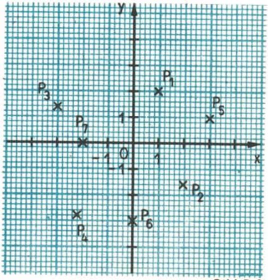


Bild B 8

7. Im Zeitraum vom 1. bis 6. Dezember wurden folgende Tagesdurchschnittstemperaturen ermittelt:

Tag	1. 12.	2. 12.	3. 12.	4. 12.	5. 12.	6. 12.
ϑ in °C	3,0	—2,5	5,5	2,5	—1,5	—5,0

Stelle die ermittelten Temperaturen in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar!

8. Gib die Punkte P_1 bis P_7 im Bild B 8 durch geordnete Zahlenpaare $(x; y)$ an!

9. Zeichne folgende Punkte in ein Koordinatensystem ein! $A\,(0; 4)$; $B\,(1; 1)$; $C\,(2; 0)$; $D\,(-1; 1)$; $E\,(1; -1)$; $F\,(-1; 1)$; $G\,(-2; 3)$; $H\,(3; -4)$; $I\,(-2; -3)$

10. Welche Temperatur würde jedes Thermometer im Bild B 9 anzeigen, wenn die Temperatur
a) um 3 Grad sinkt,
b) um 2 Grad steigt,
c) um 5 Grad sinkt,
d) um 4 Grad steigt?

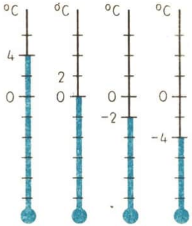


Bild B 9

Ordnung rationaler Zahlen

3 Zueinander entgegengesetzte Zahlen — ganze Zahlen

● 9 Gib sechs Paare von Zahlen an, die auf der Zahlengeraden symmetrisch zur 0 liegen! Was fällt dir auf?

▶ 2

DEFINITION: Zahlen, die auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null liegen, heißen *zueinander entgegengesetzte Zahlen*. Die Zahl 0 ist zu sich selbst entgegengesetzt. Die entgegengesetzte Zahl der rationalen Zahl *a* bezeichnet man mit „$-a$“.

Damit haben wir noch eine Bedeutung des Zeichens „—“ kennengelernt. Das Zeichen „—“ bedeutet hier den Übergang zur entgegengesetzten Zahl.

■ 1 Wenn $a = 3{,}8$ ist, so ist $-a = -3{,}8$.
Wenn $a = -1$ ist, so ist $-a = 1$.
Wenn $a = 0$ ist, so ist $-a = 0$.

Genau wie a kann auch $-a$ sowohl eine positive rationale Zahl als auch eine negative rationale Zahl als auch Null sein. Wenn a eine positive rationale Zahl ist, dann ist $-a$ eine negative rationale Zahl. Wenn a eine negative rationale Zahl ist, dann ist $-a$ eine positive rationale Zahl.
Mit $-a$ wird also nur dann eine negative Zahl bezeichnet, wenn $a > 0$ ist.

▷ 3

SATZ: Für alle rationalen Zahlen a gilt stets: $-(-a) = a$.

● 10 Bilde zu vier natürlichen Zahlen jeweils die entgegengesetzte Zahl!

▶ 4

DEFINITION: Die natürlichen Zahlen und die zu ihnen entgegengesetzten Zahlen zusammen bezeichnet man als *ganze Zahlen*. Die *Menge der ganzen Zahlen* wird mit dem *Symbol Z* bezeichnet.

Es gilt: $Z \subset Q$; $N \subset Z$.

Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger. Da es aber zu jeder natürlichen Zahl eine entgegengesetzte Zahl gibt, hat jede **ganze Zahl** genau einen **Nachfolger**, aber auch genau einen **Vorgänger**.

Aufgaben

1. Bilde zu folgenden rationalen Zahlen jeweils die entgegengesetzte Zahl!
a) $4;\ 0{,}7;\ -2;\ \frac{3}{4};\ 0;\ -1{,}5;\ -2$ **b)** $2;\ 0{,}3;\ -4;\ \frac{1}{3};\ 0;\ -1{,}25;\ -3$

2. Löse die Gleichungen! **a)** $-(-40) = x$ **b)** $-(-24{,}7) = x$ **c)** $2{,}5 = -x$

3. Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie!

a	3				$-\frac{1}{2}$
$-a$		2,1			
$-(-a)$			1,5	0	

4. Gib eine Zahl an, deren entgegengesetzte Zahl
a) positiv, **b)** negativ, **c)** weder positiv noch negativ ist!

5. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?
a) $0{,}75 \in Q_+$ **b)** $N \subset Z$ **c)** $-3 \in Z$ **d)** $3 \in Z$ **e)** $Z \subset Q_+$

6. Gib Vorgänger und Nachfolger folgender ganzer Zahlen an: $-2;\ 2;\ 0;\ 99;\ -99$!

4 Der absolute Betrag einer rationalen Zahl

Die zueinander entgegengesetzten rationalen Zahlen 3 und -3 (allg.: die rationalen Zahlen a und $-a$) haben auf der Zahlengeraden die gleiche Entfernung vom Punkt 0. Verwendet man zum Messen der Entfernung die auf der Zahlengeraden durch die Zahlen 0 und 1 markierte Einheit, so beträgt die Entfernung der rationalen Zahlen 3 und -3 vom Nullpunkt gerade jeweils drei Einheiten. Diesen Zahlenwert nennt man den absoluten Betrag von 3, aber auch von -3, und schreibt:

$|3| = 3$ (Der absolute Betrag von 3 ist gleich 3.)
$|-3| = 3$ (Der absolute Betrag von -3 ist gleich 3.)

▶ **5** **DEFINITION: Der *absolute Betrag einer rationalen Zahl a* (kurz: Betrag von *a*) wird mit $|a|$ bezeichnet. Er wird folgendermaßen festgelegt:**

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ falls } a \text{ positiv ist.} \\ 0, \text{ falls } a \text{ Null ist.} \\ -a, \text{ falls } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

■ **2** $|0{,}5| = 0{,}5$, da 0,5 eine positive Zahl ist.
$|0| = 0$
$|-2| = -(-2)$, da -2 eine negative Zahl ist, d. h. $|-2| = 2$.

Der Betrag einer rationalen Zahl ist also *nie negativ*.

● **11** Löse folgende Gleichungen! Was stellst du fest?
a) $|x| = 4$ **b)** $|x| = 0$ **c)** $|x| = -2$

Aufgaben

1. Gib alle Zahlen an, deren absoluter Betrag gleich **a)** 13, **b)** 2,3, **c)** $\frac{3}{4}$, **d)** 6,5 ist!

2. Übertrage nebenstehende Tabelle in dein Heft und ergänze!

x	3	-2					
$-x$			-2	1,7		1	
$\|x\|$					0		
$-\|x\|$							-7

3. Gib alle rationalen Zahlen an, die die Gleichung erfüllen!
a) $|x| = 2$ **b)** $|a| = 0{,}5$ **c)** $|x| = 0$ **d)** $-|z| = -0{,}5$
e) $|x| - 1 = 0$ **f)** $-|u| = -2$ **g)** $|g| = -1$ **h)** $|a| + 1 = 2{,}7$

4. Betrachte den jeweiligen Abschnitt der Zahlengeraden!

a) Wo liegt 0? (↗ Bild B 10)
b) Wo liegt 4? Wo liegt -4? (↗ Bild B 11)
c) Wo liegt $|3|$? Wo liegt -3? Wo liegt $|-3|$? (↗ Bild B 12)

Bild B 10

Bild B 11

Bild B 12

5 Ordnung der rationalen Zahlen

● **12** Bei einem Kartenspiel erhält jeder Mitspieler je nach Ausgang des Spieles Plus- oder Minuspunkte. Das Ziel jedes Mitspielers besteht darin, möglichst viele Pluspunkte zu erhalten. Ermittle von Michael, Sabine, Kirsten und Jens den Endstand nach zwei Spielen! Wer von den Mitspielern ist Sieger und wer belegt den letzten Platz?

	1. Spiel	2. Spiel	Endstand
Frank	3 Pluspunkte	3 Minuspunkte	0 Punkte
Michael	4 Pluspunkte	1 Pluspunkt	
Sabine	3 Minuspunkte	4 Pluspunkte	
Kirsten	3 Pluspunkte	5 Minuspunkte	
Jens	3 Minuspunkte	4 Minuspunkte	

● **13** Lies aus der Wetterkarte (↗ Bild B 13) die eingetragenen Lufttemperaturen ab! Zeichne eine Thermometerskala von -10 °C bis 20 °C! Markiere an der Thermometerskala die Lufttemperaturen der einzelnen Orte; beschrifte sie mit den Ortsnamen!

Bild B 13

Für die rationalen Zahlen legen wir wie bei den natürlichen und bei den gebrochenen Zahlen folgendes fest:

▶ 6 **DEFINITION: Von zwei verschiedenen rationalen Zahlen ist diejenige *kleiner*, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.** (↗ Bild B 14)

Bild B 14

Es gilt z. B. $-3 < -1$; $-3 < 2$ und $0 > -2$; $2 > -7$.

Aus der Definition folgt:
- Jede positive rationale Zahl ist größer als Null.
- Jede negative rationale Zahl ist kleiner als Null.
- Jede positive rationale Zahl ist größer als jede negative rationale Zahl.

● **14** Drücke folgende Sachverhalte für ganze Zahlen mit Hilfe von Ungleichungen aus!
a) x ist kleiner als 7. **b)** y ist größer als -4.
c) z ist größer als -4 und kleiner als 7, das heißt, z liegt zwischen -4 und 7.

● **15** Nenne jeweils drei rationale Zahlen, die zwischen **a)** -1 und 1; **b)** -1 und 0; **c)** -1 und $-\frac{1}{2}$; **d)** $-0{,}6$ und $-0{,}5$; **e)** $-0{,}134$ und $-0{,}135$; **f)** 0,75 und $\frac{3}{4}$ liegen!
Gibt es noch weitere rationale Zahlen, die zwischen diesen Zahlen liegen?

Die gebrochenen Zahlen liegen auf dem Zahlenstrahl überall dicht, d. h., wie man auch zwei gebrochene Zahlen a und b ($a \neq b$) wählt, immer findet man eine gebrochene Zahl x, die zwischen a und b liegt. Nach der Spiegelung (↗ Lerneinheit 2) liegt dann die Zahl $-x$ auch zwischen $-b$ und $-a$. Das bedeutet: Auch zwischen zwei verschiedenen negativen rationalen Zahlen liegt stets eine weitere Zahl. Somit liegen auch die negativen rationalen Zahlen, also alle rationalen Zahlen, überall dicht.
Für $a = 1$ und $b = 1{,}1$ gibt es eine Zahl x (z. B. $x = 1{,}02$), so daß gilt $a < x < b$. Entsprechend gibt es für $-a = -1$ und $-b = -1{,}1$ eine Zahl $-x$ (z. B. $-x = -1{,}02$), so daß gilt $-b < -x < -a$.

Aufgaben

1. Vergleiche! Setze das richtige Relationszeichen ($=$, $>$, $<$)!
a) 0 ... 3 **b)** 0 ... -5 **c)** $-\frac{3}{4}$ ... -2 **d)** 2 ... -1
e) -3 ... -12 **f)** $-1{,}8$ ... $-1{,}9$ **g)** $-0{,}5$ ... $-\frac{1}{2}$ **h)** $-0{,}9$ ... $-0{,}89$
i) -12 ... -12 **k)** -2 ... 1 **l)** $-1{,}8$ ... 1,8 **m)** $-\frac{4}{6}$ ... $-\frac{10}{15}$

2. In Potsdam und Warnemünde wurde täglich um 12.00 Uhr die Außentemperatur gemessen. Entnimm der folgenden Tabelle die Tage, an denen die Temperatur in Warnemünde niedriger war als in Potsdam!

Tag	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Temperatur (in °C) in Potsdam	8,2	0	−1,5	−7,8	−6,2	−3,6	−2,7
Temperatur (in °C) in Warnemünde	6,4	−1,2	1,2	−7,9	−4,1	−4,1	−1,3

3. Ordne die folgenden rationalen Zahlen ihrer Größe nach! Beginne mit der kleinsten!
a) $-3;\ 2;\ -9;\ 0;\ 1;\ 17$
b) $2{,}3;\ -1{,}9;\ -0{,}9;\ -1{,}8;\ 0$
c) $-\frac{8}{7};\ \frac{3}{2};\ -9;\ 0;\ -4{,}6$

4. Nenne alle ganzen Zahlen, die
a) zwischen -3 und 3 liegen;
b) zwischen $-\frac{1}{10}$ und 1 liegen;
c) zwischen $-\frac{1}{100}$ und 0 liegen!

5. Setze anstelle des Sterns eine solche Ziffer ein, daß eine wahre Aussage entsteht!
a) $98 < 9*$ **b)** $-269 > -2*9$ **c)** $-78,* < -78{,}5$ **d)** $-22,* < -22{,}9$

6. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?
a) $-3 < -2{,}7$ **b)** $3 < 2{,}7$ **c)** $-3 < |-2{,}7|$ **d)** $0{,}2 < |-2{,}9|$
e) $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{4}$ **f)** $\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$ **g)** $|-2| > |-1|$ **h)** $\left|-\frac{4}{7}\right| > 1$
i) $\left|-4\frac{1}{10}\right| < 4{,}1$ **k)** $-\frac{5}{3} > 2$ **l)** $|-3| < 3$ **m)** $|-1{,}7| = -1{,}7$

7. Gib alle ganzen Zahlen an, die folgende Ungleichung erfüllen!
a) $98 < x < 103$ **c)** $-4 < x < -2$ **e)** $|x| < 3$ **g)** $|x| + 2 < 4$
b) $-8 < x < -3$ **d)** $-5 < x < -4$ **f)** $-2 < x < 2$ **h)** $|x| < -1$

8.* Für welche rationalen Zahlen x ist die Gleichung bzw. Ungleichung eine wahre Aussage?
a) $|x| > x$ **c)** $|x| = -x$ **e)** $-|x| = x$ **g)** $|x| = x$
b) $|x| < x$ **d)** $|x| = -2$ **f)** $-|x| = -x$ **h)** $|x| = 0$

9. Gegeben sind folgende Zahlen: $-2;\ 0{,}7;\ 230;\ -0{,}9;\ 0{,}1;\ -2{,}7;\ -329$.
a) Welche der Zahlen ist die größte?
b) Welche der Zahlen ist die kleinste?
c) Welche der Zahlen hat den kleinsten absoluten Betrag?
d) Welche der Zahlen hat den größten absoluten Betrag?

10. Gib die kleinste ganze Zahl an, die größer ist als
a) $3{,}7$; **b)** $-\frac{3}{28}$; **c)** $-5{,}9$; **d)** $3{,}2$; **e)** $-2{,}7$!

11. Vergleiche jeweils die angegebenen negativen Zahlen! Vergleiche jeweils die absoluten Beträge der angegebenen negativen Zahlen! Was stellst du fest?
a) $-7;\ -3$ **b)** $-5;\ -6$ **c)** $-1;\ -2$ **d)** $-3{,}5;\ -7{,}5$

12. Kann man alle rationalen Zahlen angeben, die zwischen **a)** -1 und 0; **b)** $-0{,}6$ und $-0{,}5$ liegen?

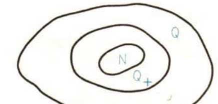
Zusammenfassung

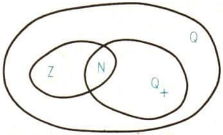
Rationale Zahlen

Die gebrochenen und die negativen Zahlen zusammen bezeichnet man als **rationale Zahlen.**

Symbol für die Menge der rationalen Zahlen: **Q**

$N \subset Q_+;\ Q_+ \subset Q;\ N \subset Q$



Zahlen, die auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null liegen, heißen **zueinander entgegengesetzt**. Die Zahl Null ist zu sich selbst entgegengesetzt. Die zu a entgegengesetzte Zahl wird mit $-a$ bezeichnet.	$a = 7;\ -a = -7;\ -(-a) = 7$ $a = -3;\ -a = 3;\ -(-a) = -3$ $a = 0;\ -a = 0;\ -(-a) = 0$
Die natürlichen Zahlen und die zu ihnen entgegengesetzten Zahlen zusammen bezeichnet man als **ganze Zahlen**.	
Symbol für die Menge der ganzen Zahlen: **Z**	
$N \subset Z;\ N \subset Q_+;\ Z \subset Q$	
Als **absoluter Betrag** $\|a\|$ einer rationalen Zahl a wird festgelegt: $\|a\| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \text{ positiv} \\ 0, & \text{falls } a \text{ Null} \\ -a, & \text{falls } a \text{ negativ} \end{cases}$	$\|3\| = 3$ $\|0\| = 0$ $\|-7\| = 7$
Von zwei verschiedenen rationalen Zahlen ist diejenige *kleiner*, die auf der Zahlengeraden *weiter links* liegt. (↗ Bild B 14, S. 51)	$-3 < -1{,}5$ $-3 < 0$ $-3 < 2$
Rationale Zahlen *liegen* überall *dicht*, d. h., zu beliebigen rationalen Zahlen a, b (mit $a < b$) gibt es stets eine rationale Zahl x, für die gilt: $a < x < b$.	$-7{,}1 < -7{,}0$ $-7{,}1 < -7{,}01 < -7{,}0$

Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

6 Addieren rationaler Zahlen

Wie man mit *gebrochenen Zahlen* (nichtnegativen rationalen Zahlen) rechnet und welche Rechengesetze für sie Gültigkeit haben, ist uns aus Klasse 6 bekannt. Für die *negativen rationalen Zahlen* muß das Rechnen noch erklärt werden. Wir beginnen mit der Addition.
Um nichtnegative rationale Zahlen zu addieren, kann man einen Additionsrechenstab verwenden. (↗ Bild B 15)

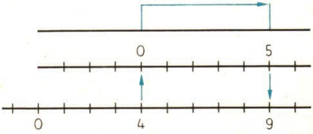


Bild B 15

● **16** Erläutere anhand des Bildes B 15 das Vorgehen beim Lösen der Aufgabe 4 + 5!

Für die **Addition** beliebiger **rationaler Zahlen** können wir den Additionsrechenstab in analoger Weise anwenden (↗ Beispiel B 3a und b).

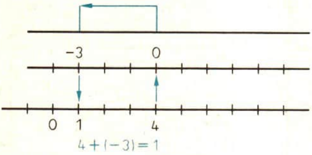


Bild B 16

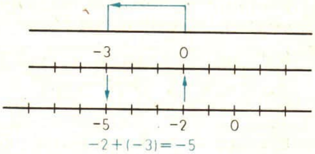


Bild B 17

■ **3** **a)** 4 + (—3) = 1 (↗ Bild B 16) **b)** —2 + (—3) = —5 (↗ Bild B 17)

● **17** **a)** Fertige einen Additionsrechenstab an und löse mit ihm folgende Aufgaben!
3 + (—4); 4 + (—4); —2 + (—3); —5 + 3; 0 + (—3); —6 + 3; —2 + (—2); —3 + 9

b) Welches Resultat erhält man, wenn man zwei zueinander entgegengesetzte Zahlen addiert?

c) Welches Ergebnis erhält man, wenn man zu einer rationalen Zahl *x* die Zahl 0 addiert?

Aufgaben

1. Berechne!

a) 3 + (—4) **b)** 4 + (—4) **c)** —2 + (—3) **d)** —5 + 3
e) 35 + (—30) **f)** 35 + (—35) **g)** 0 + (—27) **h)** —13 + 20
i) 45 + (—50) **k)** 49 + (—52) **l)** —18 + 20 **m)** —7 + 7
n) —17 + 0 **o)** —3 + 0 **p)** —12 + (—12)

2. **a)** Gib zwei rationale Zahlen an, deren Summe 4 (—6; 0; —7) ist!
b) Gib eine positive und eine negative rationale Zahl an, deren Summe 10 (—4; —11; 0) ist!

3. Berechne!

a) —3 + 3 + 7 = 7 **b)** 3 + 2 + (—2) 3 **c)** —2,9 + 0 + 2,9 0 **d)** —5 + 2 + 5 2
e) 3 + 6 + (—3) 6 **f)** 0 + 7 + 0 = 7 **g)** —7 + 3 + 4 = 0 **h)** —3 + 5 + (—2) 0

4. Vereinfache! **a)** 7 + *a* + (—*a*) **b)** *m* + 0 **c)** 0 + (—*t*) + *t* + 7
d) *b* + (—*b*) + *r* **e)** —2 + (—4) + *n* **f)** *m* + (—*m*) + 0

5. Berechne!

a) 2 + 3; 1 + 3; 0 + 3; —1 + 3; —2 + 3; —3 + 3; —4 + 3
b) 1 + 3; 1 + 2; 1 + 1; 1 + 0; 1 + (—1); 1 + (—2); 1 + (—3)
c) —4 + 4; —4 + 3; —4 + 2; —4 + 1; —4 + 0; —4 + (—1); —4 + (—2)
d) 4 + (—3); 3 + (—3); 2 + (—3); 1 + (—3); 0 + (—3); —1 + (—3); —2 + (—3)

7 Regeln für die Addition rationaler Zahlen

Aus der Lerneinheit 6 wissen wir, daß für alle rationalen Zahlen $a + 0 = 0 + a = a$ gilt und daß die Summe zueinander entgegengesetzter Zahlen Null ist. Außerdem wissen wir, wie *nichtnegative rationale Zahlen* addiert werden.

Im folgenden wollen wir Regeln formulieren, nach denen man
- zwei *negative rationale Zahlen* oder
- zwei *rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen* addieren kann.

Um die Summe zweier rationaler Zahlen zu ermitteln, sind jeweils – falls die Summe nicht Null ist – das **Vorzeichen** der Summe und der **Betrag** der Summe zu bestimmen.

● **18** **a)** Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige!

Kann die Summe $a + b$ für	positiv sein?	negativ sein?	Null sein?
$a > 0, b > 0$	ja	nein	nein
$a < 0, b < 0$			
$a > 0, b < 0$			
$a < 0, b > 0$			

Was kannst du über das *Vorzeichen* der Summe zweier *negativer* Summanden aussagen?

b) Berechne!

$-2 + (-3)$; $|-2 + (-3)|$;
$|-2| + |-3|$; $-5 + (-4)$;
$|-5 + (-4)|$; $|-5| + |-4|$;
$-1 + (-3)$; $|-1 + (-3)|$;
$|-1| + |-3|$; $-2 + (-4)$;
$|-2 + (-4)|$; $|-2| + |-4|$

> Man erhält die **Summe** *zweier negativer rationaler Zahlen* in zwei Schritten:
> 1. Bestimmen des *Vorzeichens* — Man nimmt das Vorzeichen „—".
> 2. Bestimmen des *Betrages* — Man addiert die Beträge der Summanden.

■ **4** **a)** $-2 + (-3)$

1. Vorzeichen: $-$
2. Betrag: $2 + 3 = 5$

Also:
$-2 + (-3) = -5$

b) $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)$

1. Vorzeichen: $-$
2. Betrag: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Also:
$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$

● **19** Aus der ausgefüllten Tabelle im Auftrag B 18a ist zu entnehmen, daß die Summe zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen eine positive oder eine negative Zahl oder auch Null sein kann. Wovon hängt das ab?

Wir können folgende Rechenregel für das **Addieren rationaler Zahlen** mit *unterschiedlichen Vorzeichen* und *unterschiedlichen Beträgen* sinnvoll festlegen:

> Man erhält die **Summe** *zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen und unterschiedlichen Beträgen* in zwei Schritten:
>
> 1. Bestimmen des *Vorzeichens* — Man nimmt das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.
> 2. Bestimmen des *Betrages* — Man bildet die Beträge der Summanden und subtrahiert den kleineren vom größeren.

■ 5 a) $-2+3$
1. Vorzeichen: $+$
2. Betrag: $3-2=1$

Also: $-2+3=1$

b) $-4+2$
1. Vorzeichen: $-$
2. Betrag: $4-2=2$

Also: $-4+2=-2$

Aufgaben

1. Berechne!
a) $-4+(-9)$ b) $-3+(-8)$ c) $-2+2$ d) $-9+(-7)$ e) $-3+0$
f) $-2{,}1+3{,}1$ g) $-0{,}5+\frac{1}{2}$ h) $-0{,}5+\left(-\frac{1}{2}\right)$ i) $3{,}5+\frac{1}{4}$ k) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)$
l) $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{5}\right)$ m) $-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}$ n) $-\frac{1}{7}+\frac{2}{7}$ o) $-0{,}75+\left(-\frac{1}{4}\right)$ p) $0{,}\overline{3}+\frac{2}{3}$

2. Entscheide mit Hilfe einer Überschlagsrechnung, welche Aussagen falsch sind!
a) $-379+(-591)>-1\,000$ b) $-878+(-86)<-1\,000$
c) $-76{,}3+(-89{,}9)>-100$

3. Berechne!
a) $-8+3$ b) $-28+12$ c) $125+(-75)$ d) $-250+223$
e) $-\frac{1}{2}+(-0{,}5)$ f) $-0{,}7+0{,}3$ g) $1{,}2+(-2{,}5)$ h) $-0{,}72+(-0{,}03)$
i) $-15+(-13)$ k) $-1{,}9+(-0{,}1)$

4. Gib an, ob die Summe größer oder kleiner als Null ist! Begründe jeweils deine Aussage!
a) $-14{,}4+27{,}5$ b) $-27+(-3{,}37)$ c) $-9\,201+1\,793$ d) $1\,007+(-10\,371)$
e) $-\frac{1}{9}+\frac{3}{4}$ f) $-27{,}79+27{,}76$ g) $2{,}\overline{6}-2{,}6$ h) $-29{,}78+29{,}79$

5. Löse folgende Gleichungen!
a) $x+3=-12$ b) $-628+327=y$ c) $3+a=0$
d) $-12+x=-18$ e) $x+13=3$ f) $x-3=-4$

6. Fülle die Tabelle aus!

a	3	+1,2	1,9	−7	−9,3
b		−2		−1,5	10
$a+b$	+10				
$a+b<a$			falsch		
$a+b>a$			falsch		

7. Vereinfache die Terme! a) $-3+3+x$ b) $r+(-r)+t$ c) $3+(-5)+s$

8. Gib jeweils drei Zahlen an, für die gilt:
a) $3 + z < 3$, b) $z + (-7) < -7$!

9.* Überprüfe die Richtigkeit der Aussagen!
a) Es gibt rationale Zahlen x, y, so daß gilt: $x + y < x$.
b) Für alle rationalen Zahlen x, y gilt: $x + y \geqq x$.
c) Es gibt gebrochene Zahlen x, y, so daß gilt: $x + y < x$.
d) Für alle gebrochenen Zahlen x, y gilt: $x + y \geqq x$.

10. Berechne!
a) $3 + z$ für $z = 2; -1; -3; 0$
b) $-4 + a$ für $a = -2; \frac{1}{2}; -4$
c) $x + (-2)$ für $x = -3; 2; 0{,}25$
d) $y + \left(-\frac{3}{4}\right)$ für $y = \frac{3}{4}; -2{,}5; 0$

11. Gib alle rationalen Zahlen an, für die gilt:
a) $3 + n = -2$, b) $|x| = 4$, c) $y = |-3|$, d) $|z| = 0$, e) $-3 < x < 3$, f) $|x| < 3$!

12. Untersuche, nach welcher Vorschrift jeweils die angefangene Folge gebildet sein könnte! Setze sie entsprechend der Vorschrift um weitere vier Glieder fort!
a) 11; 8; 5; . . .
b) 50; 40; 31; 23; 16; . . .
c) —0,47; —0,57; —0,67; . . .
d) 11; 10; 8; 5; 1; . . .
e) 11; 9; 7; 5; . . .
f) 4; 1; 3; 0; 2; —1; . . .

13. a) Gib zwei rationale Zahlen an, die die Ungleichung $a < -3$ nicht erfüllen!
b) Gib die kleinste rationale Zahl an, die die Ungleichung $a < -3$ nicht erfüllt!
c) Gib die größte rationale Zahl an, die die Ungleichung $a < -3$ erfüllt!

8 Eigenschaften der Addition rationaler Zahlen

● 20 a) Überprüfe anhand einiger Beispiele die Gültigkeit des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes der Addition für rationale Zahlen! Fertige dir dazu jeweils eine Tabelle an!
b) Versuche, die Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Addition zu begründen!

Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition rationaler Zahlen erlauben es, Summanden in beliebiger Reihenfolge zusammenzufassen. Dadurch können sich Rechenvorteile ergeben.

■ 6
$$\begin{aligned}-4{,}6 + 8{,}2 + (-1{,}4) + (-8{,}2) + 2 &= -4{,}6 + (-1{,}4) + 8{,}2 + (-8{,}2) + 2\\ &= -6 + 2\\ &= -4\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Berechne!
a) $-13{,}2 + (-17{,}1) + 13{,}2$
b) $-3{,}7 + 5{,}8 + 0{,}7 + (-0{,}8)$
c) $3 + (-7) + 17$
d) $-3{,}9 + 0{,}8 + 0{,}1 + \left(-\frac{1}{2}\right)$
e) $-\frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \left(-\frac{2}{14}\right)$
f) $-5 + (-7) + 2$
g) $57 + (-22) + (-18)$
h) $12 + (-8) + (-12)$
i) $-13 + (-11) + (-7)$

2. Vereinfache die Terme!
a) $26 + c + (-27)$
b) $a + 36 + b + (-36)$
c) $a + 2{,}7 + (-a) + 0 + 0{,}3$
d) $-3{,}7 + t + (-r) + (-t)$

3. Überprüfe!
a) $-12{,}7 + 27 = 10$ **b)** $-13{,}9 + (-11) = 24{,}9$ **c)** $-9{,}1 + 12{,}5 = 3{,}4$
d) $-7 + 3{,}6 = -3{,}4$ **e)** $-3{,}5 + (-2{,}5) = -6$ **f)** $-3{,}5 + 3{,}5 = 7$

4.* Gib alle rationalen Zahlen x an, für die gilt:
a) $3 + x$ ist eine negative rationale Zahl; **b)** $-4 + x$ ist eine positive rationale Zahl;
c) $x + (-6)$ ist eine nichtnegative rationale Zahl!

5.* Gib den Sachverhalt mit Hilfe einer Ungleichung bzw. einer Gleichung an!
a) x ist eine positive rationale Zahl.
b) x ist eine negative rationale Zahl.
c) x ist eine nichtnegative rationale Zahl.

Zusammenfassung

Addition zweier rationaler Zahlen	
I Summanden haben *gleiche Vorzeichen*: 1. Vorzeichen beibehalten 2. Beträge addieren	$5 + 4 = 9$ $-6 + (-4) = -10$
II Summanden haben *verschiedene Vorzeichen* und a) *verschiedene Beträge:* 1. Vorzeichen des betragsmäßig größeren Summanden nehmen 2. Beträge subtrahieren b) *gleiche Beträge:* Summe ist Null.	$-4 + 3 = -1$ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
Die Addition rationaler Zahlen ist **immer ausführbar.**	
Für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt: (1) $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz) (2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz) (3) $a + 0 = a$	$-2 + 6 = 6 + (-2)$ $7 + [(-2) + 1] =$ $= [7 + (-2)] + 1$ $-\frac{1}{9} + 0 = -\frac{1}{9}$

9 Subtraktion rationaler Zahlen

Wie wir *schon wissen*, ist für nichtnegative rationale Zahlen die **Subtraktion** die *Umkehrung der Addition.*
Für beliebige nichtnegative rationale Zahlen x, y, z gilt: *Wenn* $x + y = z$, *so ist* $z - x = y$ und $z - y = x$.

■ **7** Weil $8 + 5 = 13$ ist, gilt auch $13 - 8 = 5$ und $13 - 5 = 8$.

● **21** Überprüfe mit Hilfe der Addition, ob folgende Differenzen richtig berechnet wurden!
a) $42 - 27 = 15$ **b)** $82 - 19 = 63$ **c)** $8{,}7 - 3{,}9 = 5{,}8$ **d)** $2{,}9 - 1{,}7 = 1{,}1$

Wir wollen die **Subtraktion** auch für *beliebige* rationale Zahlen so festlegen, daß sie die *Umkehrung der Addition* ist.

■ **8** Löse die Aufgabe $4 - 9$!
Für das Ergebnis x müßte gelten: $x + 9 = 4$.
Dann muß $x = -5$ sein, denn $-5 + 9 = 4$. Also: $4 - 9 = -5$

● **22** Versuche, folgende Aufgaben zu lösen!
a) $5 - 9$ **b)** $-8 - 2$ **c)** $6 - (-3)$ **d)** $-4 - (-7)$

● **23** **a)** Berechne $5 + (-9)$; $-8 + (-2)$; $6 + 3$; $-4 + 7$!
b) Vergleiche Auftrag B 22 mit Auftrag B 23a! Was stellst du fest?

Für die **Subtraktion rationaler Zahlen** legen wir folgende Regel fest:

> **Man subtrahiert von einer rationalen Zahl *a* die rationale Zahl *b*, indem man zu *a* die entgegengesetzte Zahl von *b* addiert.**
> $a - b = a + (-b)$

Damit ist die Subtraktion rationaler Zahlen auf die Addition rationaler Zahlen zurückgeführt.
Da es zu jeder rationalen Zahl eine entgegengesetzte Zahl gibt und da die Addition im Bereich der rationalen Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist, haben wir ein in Lerneinheit 1 gestelltes Ziel erreicht:

> **Im Bereich der rationalen Zahlen ist die *Subtraktion immer ausführbar*.**

Es gilt: $a - 0 = a + 0 = a$ und $a - a = a + (-a) = 0$.

■ **9**
$10 - 30 = 10 + (-30) = -20$
$-15 - 10 = -15 + (-10) = -25$
$-15 - (-5) = -15 + 5 = -10$
$-15 - (-15) = -15 + 15 = 0$
$3 - 0 = 3 + 0 = 3$
$25 - 25 = 25 + (-25) = 0$

Beim Rechnen ist es nicht immer zweckmäßig, die Subtraktion einer Zahl durch die Addition der zu ihr entgegengesetzten Zahl zu ersetzen. Zum Beispiel werden wir wie bisher $18 - 7 = 11$ rechnen und nicht $18 - 7 = 18 + (-7) = 11$. Ebenso kann es zweckmäßig sein, die Addition durch die Subtraktion einer zum Summanden entgegengesetzten Zahl zu ersetzen. Dadurch ergeben sich unter Umständen Vereinfachungen in der Schreibweise, z. B.:

■ **10** **a)** $20 + (-10) = 20 - 10 = 10$ **b)** $-10 + (-15) = -10 - 15 = -25$

Den Term $-10 - 15$ kann man also als *Differenz* der Zahlen -10 und 15 auffassen, aber auch als *Summe* der Zahlen -10 und -15. Aus diesem Grund bezeichnet man z. B. auch folgende Terme als *Summen*: $3 - 4$; $r - s$; $3 + r - 5$; $x - y - r + t$.

Aufgaben

Berechne!
1.↑ **a)** $4 - 6$ **b)** $9 - 12$ **c)** $-3 - 17$ **d)** $-2 - (-3)$
e) $-2 - 2$ **f)** $|-2| + 2$ **g)** $-2 - 0$

2.↑ a) $-24 + 0{,}72$ b) $-22 - 0{,}7$ c) $|-0{,}2| + 0{,}04$ d) $0{,}3 - 0{,}04$
e) $0{,}5 - (-0{,}2)$ f) $3{,}15 + (-0{,}15)$ g) $|-3{,}7| - 0{,}7$ h) $0{,}3 + (-0{,}5)$
i) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ k) $-\frac{8}{16} + \frac{3}{8}$ l) $-\frac{2}{7} - \left|-\frac{3}{7}\right|$

3. Löse folgende Gleichungen!
a) $2 - x = 0$; $2 + x = 0$ b) $3 - x = 2$; $3 + x = 2$
c) $2 - x = -2$; $2 + x = -2$ d) $-5 - x = -4$; $-5 + x = -4$
Wodurch unterscheiden sich jeweils die beiden Gleichungen? Was kannst du über ihre Lösungen aussagen?

4. Überführe jeweils die Differenz in eine Summe und berechne!
a) $3 - 5$ b) $9 - (-8)$ c) $8 - (-3)$
d) $-7 - 9$ e) $-9 - (-3)$ f) $-3 - (-4)$

5. Überführe jeweils die Summe in eine Differenz und berechne!
a) $4 + (-2)$ b) $5 + (-4)$ c) $-4 + 3$
d) $-3 + 5$ e) $12 + (-4)$ f) $-5 + 5$

6. Setze zwischen die folgenden Terme eines der Zeichen $<$, $=$, $>$, so daß eine wahre Aussage entsteht! Versuche, ohne Berechnung der Differenzen eine Entscheidung zu fällen!
a) $-86 - (-43) \ldots 1$ b) $82{,}5 - |-82{,}5| \ldots 0$ c) $-348 - 348 \ldots 0$
d) $-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \ldots -2$ e) $|-1{,}5| - 2{,}9 \ldots 10$ f) $|-1{,}5| - 2{,}9 \ldots 7$

7. Berechne!
a) $3 + 7 - 9 - 11 + 5 - 2$ b) $2 + 6 - 8 - 9 + 5 - 12$
c) $-18 - 22 + 18 + 22 - 45$ d) $-17 - 21 + 19 + 22 - 45$
e) $-7{,}4 + 3{,}6 - 0 + 7{,}4$ f) $7{,}4 + 4{,}7 - 0 + 6{,}3$
g) $\frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{1}{2} - \frac{3}{7}$ h) $-\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$
i) $-\frac{1}{3} - \frac{3}{11} + \frac{2}{3} + \frac{3}{11}$

8. Gib jeweils drei rationale Zahlen an, die die Ungleichungen erfüllen!
a) $3 - z < 3$ c) $2 - t < 2$ e) $|x| + 1 > 1$
b) $7 - x > 7$ d) $5 - m > 5$ f) $2 + |x| < 2$

9. Überprüfe!
a) Zu jeder rationalen Zahl x gibt es eine rationale Zahl y, so daß gilt: $x + y = 0$.
b) Zu jeder gebrochenen Zahl x gibt es eine gebrochene Zahl y, so daß gilt: $x + y = 0$.

10. Vereinfache!
a) $-2 + t + 5 - u$ b) $-2 + x + 3 - y$ c) $-1 - x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$
d) $-2 - t + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$ e) $-5 - x + t + 5 + x$ f) $-15 - y + x + 7 + y$

11. Gib jeweils zwei Zahlenpaare x, y an, so daß gilt:
a) $x - y = 5$, b) $x - y = -3$, c) $x + y = x$, d) $x + y = 0$!

12. Ordne die folgenden rationalen Zahlen ihrer Größe nach! Beginne mit der kleinsten Zahl!
a) $\frac{7}{9}$; $-4{,}6$; $\frac{9}{7}$; $|-0{,}5|$; 0; 2; $4{,}1$ b) $\left|\frac{1}{3}\right|$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{6}$; 0; $0{,}9$; -1; 1
c)* $-2{,}\overline{34}$; $-2{,}34$; $3{,}6$; $3{,}66$; $-2{,}3\overline{4}$

13. Überprüfe! Korrigiere, falls nötig!
a) $3 - 4 = -1$ b) $-3 - (-2) = -5$ c) $-4 - (-3) = -1$ d) $4 - 7 = -3$

Zusammenfassung

Subtraktion rationaler Zahlen	
Man bildet die Differenz $a - b$, indem man zu a die Zahl $(-b)$ addiert: $a - b = a + (-b)$	$3 - 7 = 3 + (-7) = -4$ $-3 - (-11) = -3 + 11 = 8$
Die Subtraktion rationaler Zahlen ist **immer ausführbar.**	
Für alle rationalen Zahlen a gilt: (1) $a - a = a + (-a) = 0$ (2) $a - 0 = a$	$3 - 3 = 3 + (-3) = 0$ $-8 - 0 = -8$

Multiplikation und Division rationaler Zahlen

10 Multiplikation rationaler Zahlen

Für die **Multiplikation** der *nichtnegativen rationalen Zahlen* sind uns die Rechenvorschriften und Rechengesetze aus Klasse 6 bekannt.

● 24 Berechne! **a)** $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$ **b)** $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9}$ **c)** $+0{,}5 \cdot (+1{,}7)$ **d)** $+0{,}3 \cdot 0$ **e)** $3 \cdot \frac{1}{3}$ **f)** $0 \cdot \frac{3}{5}$

Auch für *negative rationale Zahlen a* legen wir fest:

$$\boxed{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0}$$

Nun muß noch erklärt werden, nach welchen Vorschriften das Produkt bestimmt werden soll, wenn negative Faktoren auftreten und kein Faktor 0 ist. Wenden wir uns zuerst der **Multiplikation** zweier Faktoren mit *unterschiedlichen Vorzeichen* zu.

● 25 **a)** Berechne $2 + 2 + 2 + 2$; $5 + 5 + 5$; $-3 + (-3)$; $-4 + (-4) + (-4)$; $-\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)$!

b) Schreibe jeweils die Summe der ersten beiden Aufgaben als Produkt, wobei ein Faktor mit den Summanden übereinstimmt!

Für negative rationale Zahlen a und natürliche Zahlen n legen wir deshalb fest:

$$\boxed{n \cdot a = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ Summanden}}}$$

■ 11 $2 \cdot (-3) = -3 + (-3)$, d. h. $2 \cdot (-3) = -6$
$3 \cdot (-4) = -4 + (-4) + (-4)$, d. h. $3 \cdot (-4) = -12$
$3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)$, d. h. $3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{5}$

Für die Multiplikation zweier beliebiger rationaler Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen wird folgendes vereinbart:

> Man erhält das **Produkt** *zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen* in zwei Schritten:
> 1. Bestimmen des *Vorzeichens* — Man nimmt das Vorzeichen „—".
> 2. Bestimmen des *Betrages* — Man multipliziert die Beträge.

■ 12 a) $-3 \cdot 2$
1. Vorzeichen: —
2. Betrag: $3 \cdot 2 = 6$

Also: $-3 \cdot 2 = -6$

b) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$
1. Vorzeichen: —
2. Betrag: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Also: $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$

Nun müssen wir noch klären, wie *zwei negative rationale Zahlen*, z. B. —2 und —3, miteinander zu multiplizieren sind. Naheliegend wären folgende Möglichkeiten:
(1) Das Produkt $-2 \cdot (-3)$ ist negativ, also -6.
(2) Das Produkt $-2 \cdot (-3)$ ist positiv, also 6.

● 26 Begründe, warum die Möglichkeit (1) nicht in Frage kommt!

Wir legen fest:

> Man erhält das **Produkt** *zweier negativer rationaler Zahlen* in zwei Schritten:
> 1. Bestimmen des *Vorzeichens* — Man nimmt das Vorzeichen „+".
> 2. Bestimmen des *Betrages* — Man multipliziert die Beträge.

■ 13 $-3 \cdot (-4)$ 1. Vorzeichen: + 2. Betrag: $3 \cdot 4 = 12$
Also: $-3 \cdot (-4) = 12$

Aufgaben

1. Multipliziere im Kopf!
a) $-5 \cdot 6$ b) $9 \cdot (-3)$
c) $0{,}5 \cdot (-1)$ d) $0{,}7 \cdot (-10)$
e) $-\frac{1}{2} \cdot 0$ f) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$
g) $-\frac{1}{4} \cdot 4$ h) $-0{,}5 \cdot \frac{1}{2}$

2. Löse die Gleichungen!
a) $2 \cdot x = 32$ b) $3 \cdot x = -36$
c) $x + 3 = -5$ d) $x \cdot (-3) = 39$
e) $-5 \cdot x = 0$ f) $-3 + x = 6$
g) $-0{,}3 \cdot x = -0{,}03$ h) $\frac{1}{4} \cdot x = -\frac{1}{8}$

3. Berechne!
a) $-7 \cdot 6$ b) $-9 \cdot (-8)$ c) $-2 \cdot (-2)$ d) $(-11)^2$
e) $-0{,}7 \cdot (-0{,}2)$ f) $-\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ g) $-\frac{3}{7} \cdot 0$ h) $-\frac{1}{4} \cdot (-0{,}5)$
i) $-\frac{2}{7} \cdot (-7)$ k) $-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$ l) $(-0{,}5)^2$ m)* $(-0{,}5)^3$

4. Nenne alle rationalen Zahlen, für die gilt:
a) $m^2 = 9$, b) $|x| = 3$,
c) $x^2 = \frac{1}{4}$, d) $|x| = 0$,
e) $-4 \cdot x = 20$!

5. Gib jeweils drei rationale Zahlen an, für die gilt:
a) $-3 \cdot x > 6$, b) $2 \cdot x < -2$,
c) $-6 < 3 \cdot x < 6$, d) $|x| < 2$,
e) $-|x| < 0$!

11 Eigenschaften der Multiplikation rationaler Zahlen

Auch für rationale Zahlen gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Multiplikation und das Distributivgesetz.

● **27** Überprüfe anhand von Beispielen die Gültigkeit der oben genannten Gesetze für die Multiplikation rationaler Zahlen! Fertige dir dazu jeweils eine Tabelle an!

Summen von Produkten, die einen gemeinsamen Faktor enthalten, können auf Grund des Distributivgesetzes als Produkt geschrieben werden.

■ **14** $2 \cdot x + 3 \cdot x = (2 + 3) \cdot x$
$ = 5 \cdot x$

Auf Grund des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes der Multiplikation können wir die Faktoren in einem Produkt in beliebiger Reihenfolge zusammenfassen. Dadurch können sich Rechenvorteile ergeben.

● **28** Rechne vorteilhaft!

a) $-3 \cdot (-5) \cdot 2$ **b)** $-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} \cdot 2$ **c)** $-2 \cdot \frac{3}{7} \cdot 0{,}5 \cdot 0 \cdot 7$

d) $-4 \cdot 7 \cdot 25$ **e)** $\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 10$ **f)** $-4 \cdot (-0{,}25) \cdot \frac{1}{7} \cdot 0$

● **29** Bestimme das Vorzeichen folgender Produkte!
Was stellst du fest?

a) $-37 \cdot (-22) \cdot 0{,}73 \cdot (-1) \cdot (-3)$ **b)** $-3{,}9 \cdot 0{,}79 \cdot (-0{,}73) \cdot (-7{,}1)$

c) $-9{,}3 \cdot (-9) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-1{,}1)$ **d)** $-9{,}2 \cdot (-39) \cdot 0 \cdot (-2{,}7)$

● **30** Übertrage in dein Heft und fülle die Tabelle aus!

a	2	0	$-\frac{1}{4}$				
$-a$				$-0{,}5$		$\frac{1}{3}$	
$-1 \cdot a$					$-0{,}3$		$\frac{3}{4}$

Multiplizieren wir eine rationale Zahl a mit -1, so erhalten wir die zu a entgegengesetzte Zahl. Deshalb können wir statt $-1 \cdot a$ kürzer $-a$ schreiben.

$$\boxed{-1 \cdot a = -a}$$

Wird eine Zahl mit einer Variablen multipliziert, dann kann man den Malpunkt weglassen und die Zahl *vor* die Variable schreiben, also

$a \cdot 3 = 3a$ (*nicht* $a3$).

Man schreibt auch statt $a \cdot b$ zuweilen ab und läßt oft bei Termen wie $3 \cdot (a + b)$ den Malpunkt weg. Man darf den „Malpunkt" aber nur dann weglassen, wenn keine Mißverständnisse entstehen können.

■ **15** $5 \cdot x = 5x$; $a \cdot b = ab$; $6 \cdot (a + b) = 6(a + b)$
aber: $-3 \cdot 9 \neq -39$;
$2 \cdot \frac{1}{2} \neq 2\frac{1}{2}$

Aufgaben

1. Berechne!

a) $-2 \cdot 6 \cdot (-50) \cdot 12$ **b)** $4 \cdot 7 \cdot (-25) \cdot 9$

c) $5 \cdot (-13) \cdot (-0{,}2)$ **d)** $\frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{1}{4}\right| \cdot (-2) \cdot 4$

2. Für welche natürlichen Zahlen n ($n \neq 0$) ist $(-2)^n$ **a)** positiv; **b)** negativ?

3. Berechne und vergleiche die Ergebnisse miteinander!

a) $(5 + 3) \cdot 4$ und $5 + 3 \cdot 4$ **b)** $(-6 + 3) \cdot 2$ und $-6 + 3 \cdot 2$

c) $(-6 - 7) \cdot (-2)$ und $-6 - 7 \cdot (-2)$

4. Bilde das Produkt aller ganzen Zahlen zwischen -3 und 3; -5 und 2; -5 und 0!

5. Löse die Klammern auf! (Wende dabei das Distributivgesetz an!)

a) $(x + y) \cdot 2$ **b)** $-3(x - 2)$ **c)** $-t\,(-3 + 2a)$

d) $8m + 4(2 + n)$ **e)** $5(2 + a) + (-8b)$

6. Schreibe jeweils die Summe als Produkt!

a) $7a + 7b$ **b)** $6b - 6f$ **c)** $ax + bx$ **d)** $6a + ab$

e) $6a - ab$ **f)** $9a + 18b$ **g)** $6a + 6$ **h)** $-3x - 5x$

7. Fasse soweit wie möglich zusammen!

a) $5x + 7x + 3$ **b)** $4a - 3a$ **c)** $2b - 5b$ **d)** $-5c - 3c$

e) $5x - 3 + 2x$ **f)** $5x - 3 - 3x$ **g)** $2x - 10 - 2x$ **h)** $2x - x$

i) $3x + 2 - 5x - 3 - 2$

k) $-2x + 3 + 2x - 2y + 5y$

l) $-7x + 3x + 2y + 7x + 2y$

8.* Fasse soweit wie möglich zusammen! Vergiß nicht, daß du immer zuerst die Klammern auflösen mußt!

a) $9 - (3x + 2)$ **b)** $-3x - (-2x + 3)$ **c)** $2x - (3 + 2x) + 4$

d) $-5x - (3 - x) - 2x$ **e)** $3 - (2x + 3)$ **f)** $3(2x - 1) - (3x + 2)$

g) $-2(x + 3) - 2(x + b)$ **h)** $-4(-2x - 3) + 2(x - 3)$

9. Löse die Gleichungen!

a) $3(x - 7) = -15 - 3 \cdot 7$

b) $4(9 + x) = 4 \cdot 9 - 8$

Zusammenfassung

Multiplikation zweier rationaler Zahlen	
I Faktoren haben *gleiche Vorzeichen*: 1. Vorzeichen des Ergebnisses „+“ 2. Beträge multiplizieren	$3 \cdot 4 = 12$ $-1{,}2 \cdot (-2) = 2{,}4$
II Faktoren haben *verschiedene Vorzeichen*: 1. Vorzeichen des Ergebnisses „—“ 2. Beträge multiplizieren	$3 \cdot (-2) = -6$ $-\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = -\frac{5}{14}$
Die Multiplikation rationaler Zahlen ist **immer ausführbar**.	

Für alle rationalen Zahlen a, b, c gilt:	
(1) $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)	$3 \cdot (-4) = -4 \cdot 3$
(2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz)	$-6 \cdot (2 \cdot 4) = (-6 \cdot 2) \cdot 4$
(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)	$-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}$
(4) $a \cdot 1 = a$	$-\frac{2}{7} \cdot 1 = -\frac{2}{7}$
(5) $a \cdot (-1) = -a$	$3 \cdot (-1) = -3$
(6) $a \cdot 0 = 0$	$-\frac{6}{7} \cdot 0 = 0$

12 Division rationaler Zahlen

Für negative rationale Zahlen soll – ebenso wie für nichtnegative rationale Zahlen – gelten, daß die **Division** *Umkehroperation zur Multiplikation* ist. Also wird das **Vorzeichen** nach analogen Regeln wie bei der Multiplikation ermittelt:

Vorzeichen von Dividend und Divisor	gleich	verschieden
Vorzeichen des Quotienten	+	–

Den **Betrag** des Quotienten erhält man, indem man den Quotienten der Beträge ermittelt.

■ 16

Aufgabe	Vorzeichen	Betrag	Ergebnis
$6 : (-4)$	–	$6 : 4 = 1{,}5$	$-1{,}5$
$-\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$	–	$\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{5}{6}$	$-\frac{5}{6}$
$-6 : (-5)$	+	$6 : 5 = 1{,}2$	$1{,}2$

Bei der Division von Null durch eine beliebige rationale Zahl, die ungleich Null ist, erhält man Null.

$$\boxed{0 : a = 0 \quad (a \in Q, a \neq 0)}$$

● 31 Begründe, warum eine Division durch Null auch im Bereich der rationalen Zahlen nicht erklärt werden kann!

Im Bereich der rationalen Zahlen kann man – wie bei den gebrochenen Zahlen – den Bruchstrich als Divisionszeichen auffassen und umgekehrt.

$$\boxed{\frac{a}{b} = a : b \quad (a, b \in Q, b \neq 0)}$$

■ 17 a) $\frac{3}{5} = 3 : 5$ b) $\frac{-5}{8} = -5 : 8 = -\frac{5}{8}$ c) $\frac{7}{-9} = 7 : (-9) = -\frac{7}{9}$

Allgemein gilt: $\boxed{\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad (a, b \in Q, b \neq 0)}$

Wie im Bereich der gebrochenen Zahlen nennen wir auch im Bereich der rationalen Zahlen $\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ die *zu a reziproke Zahl.*

■ 18

a	3	$-\frac{1}{2}$	-3	$-0{,}3$
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	-2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$

Aufgaben

1. Berechne! **a)** $-10 : 2$ **b)** $2{,}5 : (-5)$ **c)** $-60 : (-12)$ **d)** $-1{,}4 : (-2)$ **e)** $0 : (-2)$ **f)** $-2{,}5 : 0$

2. Welche der Aussagen sind wahr?
a) $-54 : 2 = -27$ **b)** $-60 : (-5) > 12$ **c)** $0 : (-13) = 0$ **d)** $-1 : (-4) < 0$

3. Löse folgende Gleichungen! **a)** $x \cdot (-12) = 48$ **b)** $x + 3 = -12$
c) $x : (-12) = 12$ **d)** $-2x = 0$ **e)** $5x = -20$ **f)** $\frac{1}{2}x = -2$

4. Gib einen Überschlag an!
a) $37{,}7 : (-3{,}12)$ **b)** $-478 : (-9{,}8)$
c) $1\,903 : (-0{,}019)$ **d)** $2{,}91 : (-5{,}78)$
e) $27{,}37 : (-0{,}290\,1)$ **f)** $-190 : 47{,}5$

5. Berechne!
a) $(11 + 7) : (-3)$ **b)** $5 + 3 : (-3)$
c) $(-3 + 5) : 2$ **d)** $-\frac{1}{2} + 5 : 2$
e) $-\frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{1}{2}$ **f)** $-6 : 2 - 8 : 2$

6. Vereinfache! **a)** $78x : 78$ **b)** $6{,}3a : (-6{,}3)$ **c)** $-9k + 9k$
d) $1{,}8x : (-x)$ $(x \neq 0)$ **e)** $2a : (-1)$ **f)** $-3a + 4a$

7. Gib drei Divisionsaufgaben an, deren Quotient -3 ist!

8. Berechne!
a) $(3m + 9m) : 6$ für $m = -3; 2; -1; 0; -\frac{1}{2}$
b) $(2a + 5a) : (-3)$ für $a = 2; -2; -1; 0; -\frac{1}{3}$

9. Kürze, falls möglich!
a) $\frac{-27}{36}$ **b)** $\frac{25}{-40}$ **c)** $\frac{-24}{-60}$ **d)** $\frac{-7t}{14}$ **e)** $\frac{-2ab}{a}$ $(a \neq 0)$ **f)** $\frac{2xy}{xy}$ $(x, y \neq 0)$

10. Für welche rationale Zahl x sind die Terme nicht erklärt?
a) $\frac{1}{x}$ **b)** $\frac{1}{x+1}$ **c)** $\frac{2}{x-2}$ **d)** $\frac{-5}{x}$ **e)** $\frac{-3}{2x-4}$

11. Berechne!
a) $4 + 7 \cdot (-8)$ **b)** $4 - 3 : (-3)$ **c)** $-3 \cdot (4 - 11)$
d) $-3 : (12 - 3)$ **e)** $-0{,}2 \cdot (-0{,}3) + 0{,}8 \cdot (-0{,}7)$ **f)** $9 \cdot (-8) + 4 : (-2)$
g) $-4 : (-2) - (-3) : (-1)$ **h)** $3 \cdot 4 + 6 \cdot (-7)$ **i)** $-7 \cdot 6 - 9 \cdot (-7)$

12. Berechne die durchschnittliche Temperatur für die Zeit vom 1. 12. bis zum 7. 12., die jeweils um 18 Uhr gemessen wurde! Nutze dazu die Temperaturangaben der folgenden Tabelle!

Tag	1. 12.	2. 12.	3. 12.	4. 12.	5. 12.	6. 12.	7. 12.
Temperatur in °C	+3	−5	−1	0	+2	−4	−2

13. Berechne, falls möglich!

a) $\frac{1}{x-3}$ für $x = 0;\ -6;\ \frac{1}{3};\ 3;\ -3$ **b)** $\frac{2(-x)}{3+x}$ für $x = 0;\ 1;\ -2;\ 3;\ -3$

14.* Setze in die Terme $-3x;\ \frac{x-2}{2};\ -\frac{x}{3};\ \frac{x+1}{3}$ für x jeweils eine rationale Zahl ein, so daß diese **a)** eine positive rationale Zahl, **b)** eine negative rationale Zahl, **c)** die Zahl Null bezeichnen!

Zusammenfassung

Division zweier rationaler Zahlen	
I Dividend und Divisor haben *gleiche Vorzeichen*: 1. Vorzeichen des Ergebnisses „+" 2. Beträge dividieren	$\frac{1}{5} : \frac{1}{4} = \frac{4}{5}$ $-1{,}2 : (-0{,}2) = 6$
II Dividend und Divisor haben *verschiedene Vorzeichen*: 1. Vorzeichen des Ergebnisses „—" 2. Beträge dividieren	$-8 : 4 = -2$ $\frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}$
Die Division ist im Bereich der rationalen Zahlen *mit Ausnahme der Division durch Null* **immer ausführbar**.	
Für alle rationalen Zahlen a, b gilt: (1) $a : a = a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$ (2) $a : 1 = a$ (3) $a : (-1) = -a$ (4) $a : b = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$ (5) $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$	$-2 : (-2) = 1$ $\frac{1}{4} : 1 = \frac{1}{4}$ $4 : (-1) = -4$ $-3 : 4 = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

13 Übersicht über die Zahlenbereiche

Durch die kaufmännische Praxis gelangten die Vorstellungen über negative Zahlen schon in alten Zeiten in die Mathematik. Im 6. Jahrhundert unserer Zeitrechnung wurde in China und Indien mit „Schulden" gerechnet, das heißt, negative Zahlen wurden unmittelbar mit dem Begriff „Schulden" verbunden. Auch in der Mathematik der arabischen Länder, die etwa seit dem Jahre 800 einen großen Aufschwung nahm, war der Begriff der negativen Zahl verankert. In Europa dagegen dauerte es noch viele Jahrhunderte, bis die negativen Zahlen auch in der Mathematik selbst unumstritten waren. Während die Kaufleute und

Buchhalter längst mit negativen Zahlen – eben mit „Schulden“ – Rechenoperationen ausführten, gab es noch bis ins 17. Jahrhundert hinein bei einigen Wissenschaftlern Vorbehalte gegenüber negativen Zahlen. Die übersichtliche Darstellung der verschiedenen Zahlenbereiche durch Mengendiagramme setzte sich erst in unserem Jahrhundert durch (↗ Bild B 18). Dies war ein Verdienst des Begründers der Mengenlehre, des Hallenser Mathematikers GEORG CANTOR (1845—1918).

● **32** Erläutere das Mengendiagramm im Bild B 18!

● **33** Welche Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) sind im Bereich
a) der natürlichen Zahlen **b)** der gebrochenen Zahlen
c) der ganzen Zahlen **d)** der rationalen Zahlen
immer ausführbar?

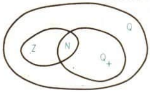


Bild B 18

Im Bereich der gebrochenen Zahlen läßt sich jede gebrochene Zahl, die größer als Null ist, in der Form $\frac{p}{q}$ ($p, q \in N$; $q > 0$) darstellen, wobei p und q teilerfremde natürliche Zahlen sind. Entsprechendes gilt auch im Bereich der rationalen Zahlen.

▷ **7** **SATZ: Jede *rationale Zahl*, die verschieden von Null ist, läßt sich in der Form $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) darstellen, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen sind.**[1]

■ **19** **a)** $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ($p = 2$; $q = 3$) **b)** $-0{,}5 = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$ ($p = -1$; $q = 2$)
c) $-0{,}\overline{3} = -\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$ ($p = -1$; $q = 3$)

Aufgaben

1. Stelle in einem Mengendiagramm dar:
a) die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen;
b) die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der gebrochenen Zahlen!

2. Welche der Aussagen sind wahr?
a) $3 \in N$ **b)** $-3 \in Q_+$ **c)** $\frac{1}{3} \in Q_+$ **d)** $\frac{1}{4} \in Q$ **e)** $-0{,}5 \in Z$
f) $Q_+ \subset Q$ **g)** $N \subset Q_+$ **h)** $Z \subset Q$ **i)** $Z \subset N$ **k)** $N \subset Z$

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
a) Null ist die kleinste natürliche Zahl.
b) —1 ist die größte ganze Zahl.
c) —1 ist die größte negative ganze Zahl.
d) —3 ist die größte ganze Zahl zwischen —7 und —2.

4. Gib jede der folgenden Zahlen in der Form $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) an, wobei p, q teilerfremde ganze Zahlen sind! **a)** 7 **b)** —0,125 **c)** —6,2 **d)** $-0{,}\overline{6}$

5.* Beweise $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$ ($a, b \in Q$; $b \neq 0$)!

---

[1]) Zwei ganze Zahlen heißen teilerfremd, wenn sie außer 1 und —1 keine weiteren ganzen Zahlen als Teiler haben.

Übungen mit dem Taschenrechner

14 Übungen mit dem Taschenrechner

Wie man die vier Grundrechenoperationen im Bereich der gebrochenen Zahlen mit einem Taschenrechner ausführt, wissen wir bereits. Um diese Rechenoperationen auch im Bereich der rationalen Zahlen mit einem Taschenrechner auszuführen, müssen wir zunächst lernen, negative Zahlen in einen Taschenrechner einzugeben. Dazu steht uns die Taste +/— **(Vorzeichenwechseltaste)** zur Verfügung.

■ **20** Gib die Zahl —2 in den Taschenrechner ein!

Ablaufplan	Anzeige
2 [+/-] (aber nicht: [+/-] **2**!)	-2.

Um den Term 10 · (—2) zu berechnen, führt folgender Ablaufplan zum richtigen Ergebnis:

Ablaufplan	Anzeige
10 [×] **2** [+/-] [=]	-20.

Häufig ist es zweckmäßig, mit dem Taschenrechner nur den Betrag des Resultats zu ermitteln und das Vorzeichen des Ergebnisses im Kopf zu bestimmen.

■ **21** **a)** *Aufgabe:* —329 — 793

Ablaufplan	Anzeige (Ergebnis)
329 [+/-] [−] **793** [=]	-1122.

oder Vorzeichen: —

Ablaufplan	Anzeige	Ergebnis
329 [+] **793** [=]	1122.	**— 1 122**

b) *Aufgabe:* 397 · (—27,2)

Ablaufplan	Anzeige (Ergebnis)
397 [×] **27,2** [+/-] [=]	-10798.4

oder Vorzeichen: —

Ablaufplan	Anzeige	Ergebnis
397 [×] **27,2** [=]	10798.4	**— 10 798,4**

Aufgaben

1. Berechne mit dem Taschenrechner! Gib jeweils einen Ablaufplan an!
a) 83,48 + (—119,99) **b)** —797,7 — 9 761,7 **c)** —923,1 — (—789,2)
d) —927,3 + 297,72 **e)** —27,39 · (—7,931) **f)** 77,44 : (—0,32)

2. Berechne! Bestimme zur Kontrolle im Kopf das Vorzeichen des Resultats!
a) 37,82 — 979,3 **b)** —3 792 — 9 379 **c)** 0,732 1 + (—1,732)
d) —0,793 — (—0,978 1) **e)** —0,92 + 3,42 **f)** 723 · (—27,2)
g) —92,3 : (—7,2) **h)** 0,73 : (—1,72)

3. Berechne mit Hilfe des Taschenrechners!
a) $2\,732 - 9\,827 + 37 - 799 - 932$ b) $213 - (-921) + 271 + (-921) - 271$
c) $-0{,}921 - 321{,}21 + 22{,}87 - (-9{,}3) - 7{,}9$
d) $2{,}371 + 0{,}79 - 79{,}312 + 0 - 8{,}213$ e) $-27{,}2 \cdot (-23{,}7) \cdot 0 \cdot (-3{,}1)$
f) $2{,}71 \cdot (-0{,}32) \cdot (-7{,}1) \cdot (-0{,}72)$
Welche Aufgaben kannst du schneller im Kopf rechnen?

4. Gib einen Überschlag an! Ermittle das Ergebnis jeweils mit dem Taschenrechner!
a) $306 - 719 + 978$ b) $219{,}2 - 29{,}301 - 279{,}2$ c) $-272{,}2 \cdot 0{,}26 \cdot (-1{,}7)$
d) $923{,}29 : (-199)$ e) $-272 - (-599)$ f) $-0{,}73 : 0{,}49$

5. Berechne mit Hilfe des Taschenrechners!
a) $9{,}72 : (3{,}72 - 5{,}97)$ b) $-7{,}94 : (-7{,}237 + 2{,}92)$
c) $(-25{,}97 + 19{,}73) \cdot (-6{,}3)$ d) $\left(\frac{5}{16} + 0{,}75\right) : (-0{,}72)$

Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung

15 Fehler und Schranken für Fehler

Wie wir bereits wissen, erhält man beim Runden und Schätzen von Zahlen oder Größen *Näherungswerte*. Auch im Physikunterricht haben wir gelernt, daß beim Messen, selbst bei Verwendung hochwertiger Meßgeräte, immer Näherungswerte entstehen. Zwischen diesen Näherungswerten und den jeweiligen genauen Werten treten Differenzen auf, die in der Mathematik **Fehler** genannt werden.

● 34 a) Runde auf Vielfache von 10 (100) und ermittle jeweils die Differenz zwischen gerundeter und gegebener Zahl! 12 423; 5 448; 2 035; 899; 7 850; 7 845; 7 855
b) Schätze die Seitenzahl deines Mathematiklehrbuches und bestimme die Differenz zwischen der geschätzten und der genauen Seitenzahl! Wann ist die Differenz positiv und wann ist sie negativ?

Im Gegensatz zu anderen, noch zu behandelnden Fehlern heißen die beim Runden, Schätzen oder Messen auftretenden Abweichungen vom genauen Wert **absolute Fehler**.[1])

> Als **absoluten Fehler** eines Näherungswertes a in bezug auf den genauen Wert x einer Größe oder Zahl bezeichnet man die Differenz $a - x$.

● 35 Oliver, Felix und Michael gehen in die 6. Polytechnische Oberschule. Beim Schätzen der Schülerzahl ihrer Schule kommen sie zu folgenden Ergebnissen:

Schüler	Oliver	Felix	Michael
Schätzwert	500	600	555

Die genaue Schülerzahl ist 536.
Ermittle jeweils den absoluten Fehler und gib an, wer am besten geschätzt hat!

[1]) Beachte, daß der absolute Fehler nicht mit dem absoluten Betrag verwechselt werden darf!

Will man die Güte verschiedener Näherungswerte bezüglich ein und desselben genauen Wertes bestimmen, so muß man die Beträge der absoluten Fehler vergleichen. Der beste Näherungswert ist der mit dem betragsmäßig kleinsten absoluten Fehler.
Häufig ist nur ein Näherungswert, nicht aber der zugehörige genaue Wert bekannt. Demnach kann auch der absolute Fehler nicht bestimmt werden. Man versucht dann, eine **Schranke für den absoluten Fehler** anzugeben.

■ **22** Kerstin mißt die Länge eines Bleistiftes mit ihrem Lineal. Sie ermittelt eine Länge von 17,7 cm. Die genaue Länge l ist unbekannt. Da die Genauigkeit des Lineals 1 mm beträgt, kann man annehmen, für l gilt: $17{,}65\text{ cm} \leqq l \leqq 17{,}75\text{ cm}$. Der Meßwert weicht also höchstens um 0,05 cm vom genauen Wert l ab. Damit sind die 0,05 cm eine Schranke für den absoluten Fehler.

Es seien a der Näherungswert und x der genaue Wert einer Größe oder Zahl.
Durch die **Schranke für den absoluten Fehler**, die wir mit $\boldsymbol{\Delta a}$ bezeichnen ($\Delta a > 0$), wird festgelegt, daß für den genauen Wert x gilt:

$$a - \Delta a \leqq x \leqq a + \Delta a.$$

Dasselbe wird auch durch die Schreibweise

$x = a \pm \Delta a$ ausgedrückt.

(Man bezeichnet $a - \Delta a$ als untere Wertschranke und $a + \Delta a$ als obere Wertschranke.)

● **36** Erkläre, was $F = (100\,000 \pm 3\,000)$ N als Angabe für die Zugkraft einer Lokomotive bedeutet!

Wird für einen Näherungswert keine Schranke für den absoluten Fehler angegeben, so wird – wie wir bereits aus dem 6. Schuljahr wissen – vorausgesetzt, daß der Näherungswert durch Runden entstanden ist (die Meßgenauigkeit nicht größer als der Rundungsfehler ist). Die Schranke für den absoluten Fehler ist dann also nicht größer als 0,5 Einheiten des Stellenwertes der letzten angegebenen Ziffer.

■ **23** Der Meßwert 13,2 m bedeutet für den genauen Wert l

$13{,}15\text{ m} \leqq l \leqq 13{,}25\text{ m}.$

Der Meßwert 2,370 kg bedeutet für den genauen Wert m

$2{,}369\,5\text{ kg} \leqq m \leqq 2{,}370\,5\text{ kg}.$

Der Meßwert $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bedeutet für den genauen Wert v

$44{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leqq v \leqq 45{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$

● **37** Drei Schüler schätzen die Anzahl ihrer gesammelten Briefmarken. In der folgenden Tabelle sind die Schätzwerte und die genauen Werte angegeben:

Schüler	**Schätzwert**	**Genauer Wert**
Torsten	3 000	2 899
Claudia	280	311
Gunnar	740	685

a) Wer hat am besten geschätzt?
b) Doreen meint, daß Claudia am besten geschätzt hat, weil der Betrag des absoluten Fehlers ihrer Schätzung am kleinsten ist. Was meinst du dazu?

Werden Näherungswerte verschiedener Größen derselben Art (zum Beispiel die Längen bzw. die Massen verschiedener Gegenstände oder die Flächeninhalte verschiedener geometrischer Figuren) miteinander verglichen, so genügt es nicht, die jeweiligen Beträge der absoluten Fehler miteinander zu vergleichen. Man muß den Zahlenwert der zu schätzenden Größe mit berücksichtigen. Der Betrag des Verhältnisses des absoluten Fehlers zum tatsächlichen Wert $\left(\left|\frac{a-x}{x}\right|\right)$ ist ein Maß für die Güte des Näherungswertes. Je kleiner der Betrag dieses Verhältnisses ist, um so besser ist die Qualität des Näherungswertes.

Man bezeichnet die Zahl $\left|\frac{a-x}{x}\right|$ als **relativen[1]) Fehler** eines Näherungswertes a in bezug auf den genauen Wert x einer Größe oder Zahl.

Im Auftrag B 37 hat Torsten am besten (kleinster relativer Fehler) und Claudia am schlechtesten (größter relativer Fehler) geschätzt.
Oft gibt man die Abweichung des Näherungswertes a vom genauen Wert x in Prozent an. Der Betrag des genauen Wertes ($|x|$) entspricht dabei dem *Grundwert*, der Betrag der Abweichung ($|a-x|$) entspricht dem *Prozentwert*. Der *Prozentsatz* wird mit Hilfe der aus der Prozentrechnung bekannten Gleichung $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$ berechnet.

$p = \frac{|a-x|}{|x|} \cdot 100$. Da stets gilt $\frac{|b|}{|c|} = \left|\frac{b}{c}\right|$, kann man auch schreiben: $p = \left|\frac{a-x}{x}\right| \cdot 100$.

Der Wert $p\,\%$ wird **prozentualer Fehler** genannt.

■ 24 Näherungswert: $a = 200$ M; genauer Wert: $x = 218$ M

$p = \left|\frac{a-x}{x}\right| \cdot 100 \qquad p = \left|\frac{200-218}{218}\right| \cdot 100 \qquad p = 8{,}26$

Der prozentuale Fehler beträgt 8,26 %.

■ 25

Relativer Fehler	0,082 6	0,10	$\frac{1}{8}$
Prozentualer Fehler	8,26 %	10 %	12,5 %

● 38 Übertrage folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie! Überlege, wie man aus dem relativen Fehler sehr schnell den prozentualen Fehler berechnen kann!

Münze	**Schätzwert des Durchmessers in mm**	**Genauer Wert[2]) des Durchmessers in mm**	**Absoluter Fehler**	**Relativer Fehler**	**Prozentualer Fehler**
5,00 M	33	29			
2,00 M	31	27			
1,00 M	28	25			
0,50 M	25	23			
0,20 M	20	22			

[1]) „Relativ" heißt soviel wie „in einem Verhältnis zu etwas stehend".
[2]) Der genaue Wert entspricht hier dem vorgegebenen Sollwert.

Aufgaben

1. Für die Zahl $\frac{1}{3}$ wird als Näherungswert benutzt: **a)** 0,3; **b)** 0,33; **c)** 0,34.
Berechne den absoluten Fehler dieser Näherungswerte!

2. Es sei $x = 9{,}6 \pm 0{,}4$. Kann es sein, daß x eine der Zahlen **a)** 9,6; **b)** 10,1; **c)** 10; **d)** 9,199 ist?

3. Gib in Form einer Ungleichung alle Zahlen an, die beim Runden auf Hundertstel den Näherungswert **a)** 3,42; **b)** —13,21; **c)** —0,73 ergeben!

4. Gib in Form einer Ungleichung alle Zahlen an, die beim Runden auf die letzte angegebene Stelle den Näherungswert **a)** —474; **b)** 2,73; **c)** —15,82; **d)** 15; **e)** 15,0; **f)** 15,00 ergeben!

5. Beim Achtelfinale im Fußballwettbewerb um den FDGB-Pokal wurden die folgenden Zuschauerzahlen in den einzelnen Stadien ermittelt: Erfurt 8 500, Aue 7 200, Brandenburg 1 800, Berlin 12 500, Frankfurt 11 000, Jena 15 500, Dresden 18 000, Leipzig 15 000.
Berechne die Gesamtzuschauerzahl sowie die durchschnittliche Zuschauerzahl, wenn man annimmt, daß alle Zahlen unter 10 000 zwei zuverlässige Ziffern und alle über 10 000 drei zuverlässige Ziffern haben!

6. Berechne jeweils den relativen Fehler!

a)

Genauer Wert	Absoluter Fehler
48,0 m	+ 0,5 m
48,0 m	—0,05 m
120,0 m²	—0,5 m²

b)

Genauer Wert	Absoluter Fehler
2,4 kg	+ 0,05 kg
3 min 20 s	+5 s
2,40 kg	—0,005 kg

7. Jan schätzt die Höhe eines Wohnhauses auf 30 m. Gunnar schätzt die Höhe eines Baumes auf 40 m. Wer hat genauer geschätzt, wenn als genaue Werte 32 m bzw. 42 m angenommen werden? Begründe durch Angabe der relativen Fehler!

8. Andreas soll im polytechnischen Unterricht ein Werkstück mit einer Länge von 5,6 mm und Stefan ein Werkstück mit einer Länge von 12,7 mm herstellen. Ein Nachmessen zeigt, daß das Werkstück von Andreas 1 mm und das von Stefan 2 mm zu lang ist. Wer hat genauer gearbeitet?

9. Die Länge des Äquators beträgt nach neueren Berechnungen etwa 40 075 km. Welchen prozentualen Fehler begeht man, wenn man mit einer Länge von 40 000 km rechnet?

10.* Der prozentuale Fehler einer Längenmessung beträgt 1,7%. Als genaue Werte werden angenommen **a)** 34,7 cm; **b)** 109,2 cm; **c)** 420 km; **d)** 0,02 mm. Wie groß ist jeweils der Betrag des absoluten Fehlers?

11. Runde auf drei zuverlässige Ziffern!
a) 1,223 **b)** 7,218 6 **c)** 221,62 **d)** 12,449 **e)** 0,068 49

12. Wieviel Gramm Mehl können in einer Tüte sein, deren Inhalt mit 1 040 g und einer Schranke für den absoluten Fehler von **a)** 16 g; **b)** 25 g angegeben wurde?

13. Die Zahlen **a)** 123,45; **b)** 123,548; **c)** 1 234,57; **d)** 12,34; **e)** 1,23 werden auf Einer gerundet.
Welche prozentualen Fehler gehen in eine Rechnung ein, wenn mit den gerundeten Zahlen gerechnet wird?

14. Wie groß ist der absolute Fehler des mit dem Taschenrechner SR 1 ermittelten Ergebnisses der Aufgabe 921 478 · 2 389?

15. Berechne den absoluten, den relativen und den prozentualen Fehler!

Näherungswert	10,5 g	1,5 g	0,6 g
Genauer Wert	10 g	1 g	0,1 g

16. Holger, Andreas und Stefan lösten die Aufgabe $0,\overline{3} \cdot 0,\overline{6}$ auf unterschiedlichen Wegen. Beurteile die erzielten Resultate!

Holger: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ Andreas: $0,3 \cdot 0,7 = 0,21$ Stefan: $0,33 \cdot 0,67 = 0,221\,1$

Komplexe Übungen

1. Berechne ohne Taschenrechner!
a) $-2 + 9 \cdot 8$ **b)** $[2 + (-3)] \cdot (-7)$ **c)** $8 \cdot (-7) - 9 \cdot (-7)$
d) $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-2)$ **e)** $2 \cdot (-2 - 6 : 12)$ **f)** $\frac{2 - 4 : (-4)}{3}$
g) $(-2)^2 - (-1)^2$ **h)** $[(-2)^2 + 4] : (-2)$ **i)** $-5 + 17 \cdot |-3|$
k) $|-36| : (-3) + 17$ **l)** $2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - (-3)$ **m)** $\frac{4 \cdot (-3)}{4 - 5}$

2. Löse folgende Gleichungen!
a) $x + 4 = -2$ **b)** $8 : x = -2$ **c)** $16 : x = 20$ **d)** $x : (-2) = -3$
e) $5x + 2 = 12$ **f)** $\frac{1}{2} : x = -2$ **g)** $|x| = 2$ **h)** $|x| \cdot 2 = 2$
i) $-3x^2 = 0$ **k)** $-|x| = -4$ **l)** $-\frac{x^2}{3} = -3$ **m)** $-3 \cdot (-x) = 1$
n) $-4 - x = -16$ **o)** $x^2 = -4$ **p)** $\frac{1}{4}x = 0$ **q)** $x^2 = 9$

3. Gib jeweils einen Überschlag an! **a)** $-68\,732 \cdot (-93\,240)$
b) $-0,010\,9 \cdot 371$ **c)** $(-3,19)^2$ **d)** $4,127 - 97,07$ **e)** $-3\,782 + 7\,921$

4. Welche der Aufgaben sind falsch gelöst? **a)** $-3 : \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$
b) $-1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 1$ **c)** $-7 - 3 = -10$ **d)** $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$

5. **a)** Addiere zum Produkt der Zahlen 17 und −3 das Produkt der Zahlen −9 und −8!
b) Subtrahiere vom Produkt der Zahlen −7 und 8 die Summe derselben beiden Zahlen!

6. Schreibe mit Variablen
a) die Differenz des Dreifachen einer Zahl und des Viertels dieser Zahl;
b) das Doppelte einer Zahl, vermindert um −2;
c) das Vierfache einer Zahl, vermehrt um −6;
d) den Quotienten aus der Summe und der Differenz einer rationalen Zahl und −3!

7. Schreibe jeweils den Term in Worten!
a) $4x - \frac{1}{4}x$ **b)** $3x - (-4)$ **c)** $\frac{a + b}{a - b}\,(a + b)$

8. Wenn man die Summe aus 3 und −7 mit der Zahl m multipliziert, ist das Ergebnis 12. Ermittle m!

9. Ingo denkt sich eine Zahl. Bildet er das Reziproke dieser Zahl und multipliziert es mit der Differenz der Zahlen —5 und —9, so erhält er —2. Welche Zahl hat sich Ingo gemerkt?

10. Formuliere die Gleichungen als Zahlenrätsel! Löse sie!

a) $2x - 2 = -2$ **b)** $\frac{x}{2} = -18$ **c)** $(x - 2) \cdot (-3) = -39$

11. Stelle folgende Punkte in einem Koordinatensystem dar!
$A\,(2; 1)$, $B\,(5; 1)$, $C\,(4; 4)$

a) Führe eine Spiegelung an der Abszisse aus! Gib die Koordinaten der Bildpunkte von A, B, C an!

b) Führe eine Drehung um den Punkt $M\,(0; 0)$ mit dem Drehwinkel 180° aus! Gib die Koordinaten der Bildpunkte von A, B, C an!

12. Stelle folgende Punkte in einem Koordinatensystem dar! Verbinde jeweils fortlaufend durch Strecken die Punkte im Koordinatensystem, deren Zahlenpaare untereinander stehen!

A (3; 3)	E (—1; 0)	I (2; 0)	N (4; —2)	R (—1; —1)	V (—5; —1)
B (4; 4)	F (—1; 1)	K (3; 0)	O (5; —1)	S (1; —1)	W (—3; —1)
C (4; 5)	G (1; 1)	L (3; —1)	P (5; —3)	T (1; —3)	X (—3; —2)
D (3; 5)	H (1; 0)	M (2; —1)	Q (4; —3)	U (—1; —3)	Y (—5; —2)
A (3; 3)	E (—1; 0)	I (2; 0)	N (4; —2)	R (—1; —1)	V (—5; —1)

Welche der Figuren sind kongruent zueinander?
Welche der Figuren sind Rechtecke? Welche der Figuren sind Trapeze?

13. Eleanor kauft in einer Drogerie ein. Auf den Verpackungen der gekauften Waren stehen folgende Masseangaben:
Zahnpasta 50 g ± 4 g; Florena-Creme 60 g ± 2,5 g; Waschpulver 900 g ± 40 g.
Zwischen welchen Werten liegt der genaue Wert für die jeweilige Masse?

14. Am 1. Januar wurden die folgenden Tageshöchsttemperaturen gemessen: Berlin +4 °C; Moskau —7 °C; Warschau +2 °C und Prag 0 °C.

a) Ordne die Städte nach der Temperatur! Beginne mit der Stadt, die die höchste Temperatur erreichte!

b) Welcher Temperaturunterschied bestand zwischen Berlin und Moskau?

15. Der Tschomolungma (Mt. Everest) ist mit 8 848 m der höchste Berg und die Witjas-II-Tiefe mit 11 022 m die größte Meerestiefe der Erde. Wie groß ist der dazwischenliegende Höhenunterschied?

16. Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie!

Genauer Wert	Näherungswert	Absoluter Fehler	Relativer Fehler	Prozentualer Fehler
4,25	4,2			
	27	—0,2		
0,38		0,12		
		0,2	0,4	
0	—2			

C Gleichungen

Äquivalente Gleichungen

1 Wiederholung

● 1 Versuche, folgende Aufgaben zu lösen!

a) Herr Rödel fährt zum ersten Mal mit dem PKW von Dresden nach Greifswald und kontrolliert deshalb 150 km vor dem Ziel seinen Kraftstoffvorrat. Er stellt fest: Für die bisher zurückgelegte Strecke von 246 km wurden 21 l verbraucht, 14 l sind noch vorhanden. Kann er damit das Ziel seiner Fahrt erreichen, ohne zu tanken?

b) Wie lang müßte in einem Trapez mit 36 cm² Flächeninhalt eine von zwei parallelen Seiten sein, wenn die andere 11 cm und die Höhe 3 cm betragen sollen?

c) Martin erzählt: „Zur Pflege der Grünanlagen vor unserem Haus haben sich am Sonnabend besonders viele Hausbewohner getroffen. Die Hälfte von ihnen hat umgegraben und gepflanzt, ein Drittel hat Wege gesäubert und Bänke gestrichen, die restlichen vier Bewohner sorgten für Verpflegung und Getränke.“ Wieviel Personen haben an diesem Arbeitseinsatz teilgenommen?

Die erste Aufgabe können wir bereits lösen, z. B. mit Hilfe einer Verhältnisgleichung.
Zur zweiten Aufgabe kann man die Gleichung $36 = \frac{11 + x}{2} \cdot 3$ finden und zur dritten die Gleichung $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 4$. Bisher kennen wir für diese beiden Gleichungen noch kein Lösungsverfahren. Deshalb werden wir lernen, auch solche Gleichungen zu lösen. Zuvor wollen wir das Wichtigste über Gleichungen *wiederholen*:
Gleichungen bestehen aus zwei Termen, die durch das Zeichen $=$ verbunden sind.
Ungleichungen bestehen aus zwei Termen, die durch eines der Zeichen $<$, $>$ oder $\neq$ verbunden sind.

Terme können aus Ziffern, Variablen, Operationszeichen, Vorzeichen, Betragsstrichen, Kommas und Bruchstrichen zusammengesetzt sein, wobei auch die Potenzschreibweise vorkommen darf. Aber *nicht jede* Zusammensetzung aus diesen Zeichen ist ein Term!

● 2 a) Entscheide, welche der Beispiele (1) bis (12) Gleichungen, welche Ungleichungen und welche Terme sind!

(1) $3a + 7 = 9a + 8$ (5) $7 \mid 28 = 4$ (9) x^2
(2) $4b - 3 > c$ (6) $|y| < 0$ (10) $2x + 3{,}4$
(3) $u + u = 2u$ (7) $4 - 6$ (11) $|-2|$
(4) $2 + 1 = 3$ (8) $\frac{1}{2}$ (12) $(2 : -y +$

b) Begründe, warum die restlichen Beispiele *keine* Gleichungen, Ungleichungen oder Terme sind!

c) Gib zu den in den Beispielen vorkommenden Gleichungen jeweils die beiden Terme an, die durch das Gleichheitszeichen verbunden sind!

Terme können eine bestimmte Zahl bezeichnen. Zum Beispiel bezeichnet der Term $(8 - 5) \cdot 4$ die Zahl 12.
Man kann Terme nach den für Zahlen geltenden Rechengesetzen *umformen*. Sie bezeichnen dann immer noch dieselbe Zahl. Zum Beispiel kann man statt $(8 - 5) \cdot 4$ nach dem Distributivgesetz auch $8 \cdot 4 - 5 \cdot 4$ schreiben. Dieser Term bezeichnet ebenfalls die Zahl 12.
Auch wenn in einem Term *Variable* vorkommen, für die ein Grundbereich vorgegeben ist, kann man den Term nach den für diesen Grundbereich geltenden Rechengesetzen umformen.

■ 1 Man kann z. B. in einem Term verschiedene Teile *zusammenfassen*, wenn sie dieselbe Variable enthalten. Nach dem Distributivgesetz gilt nämlich:

$$4a - 1{,}7a + \frac{a}{2} - a = \left(4 - 1{,}7 + \frac{1}{2} - 1\right) \cdot a = 1{,}8 \cdot a.$$

In Termen wie $4a$; $-2{,}5r$ oder $\frac{2}{3}x$ nennt man die Zahl vor der Variablen auch **Koeffizient** dieser Variablen.

Neben Termen, die Zahlen bedeuten, kennen wir auch solche, die Größen bezeichnen, z. B.: $12 \cdot 3$ cm; $10\ \text{m}^2 + 7\ \text{m}^2$; $a \cdot b$ (Flächeninhalt eines Rechtecks; hier sind a und b Variable für Längen). Aus solchen Termen können ebenfalls Gleichungen gebildet werden, z. B.: $7\ \text{m} \cdot 12\ \text{m} = 84\ \text{m}^2$; $u = 2(a + b)$; $s = v \cdot t$ (s – Weg, v – Geschwindigkeit, t – Zeit).
Manche Zusammenhänge zwischen Zahlen oder Größen kann man durch Terme ausdrücken:

■ 2 **a)** *Ein Drittel einer Zahl*
Die Zahl sei x; ein Drittel davon ist dann $\frac{x}{3}$.

b) *Das Alter eines Jungen, der 4 Jahre älter als seine Schwester ist*
Das Alter der Schwester: a Jahre; das Alter des Jungen: $(a + 4)$ Jahre

● 3 Schreibe als Term
a) das Fünffache der Masse einer Kiste;
b) die Höhe eines Hauses, das 6 Stockwerke niedriger als ein anderes ist;
c) eine Zahl, deren Summe mit einer zweiten 7 beträgt;
d) die Zeit, die ein Schüler für seinen Schulweg benötigt, wenn zwei Schüler dafür 8 min brauchen!

Mit Hilfe von **Gleichungen** (bzw. Ungleichungen) *ohne Variable* kann man Aussagen über Zahlen (oder Größen) aufschreiben. Sie sind entweder wahr oder falsch.

$3 + 2 = 5$ ist wahr; $7 \cdot 8 < 6 \cdot 9$ ist falsch.

Mit Hilfe von **Gleichungen** (bzw. Ungleichungen) *mit Variablen* können Beziehungen zwischen bekannten und unbekannten Zahlen (oder Größen) ausgedrückt werden.

■ 3 **a)** *Die Differenz aus 5 und einer natürlichen Zahl ist gleich der Summe aus dieser Zahl und 3.*

Bezeichnet man die natürliche Zahl mit a, dann wird der Text durch die *Gleichung* $5 - a = a + 3$ wiedergegeben.

b) *Am Sportwettkampf nahmen insgesamt 80 Jungen und Mädchen teil.*
Anzahl der Jungen: j; Anzahl der Mädchen: m
Gleichung: $j + m = 80$

c) *Am Sportwettkampf nahmen insgesamt 80 Jungen und Mädchen teil. Es waren 10 Mädchen weniger als Jungen.*
Anzahl der Jungen: j; Anzahl der Mädchen: $j - 10$
Gleichung: $j + (j - 10) = 80$
oder: Anzahl der Mädchen: m; Anzahl der Jungen: $m + 10$
Gleichung: $(m + 10) + m = 80$

Für den Sachverhalt im Beispiel C 3b benötigten wir *mehr als eine* Variable, um ihn als Gleichung wiederzugeben. Das Beispiel C 3c zeigt, daß man manchmal mit *einer* Variablen auskommt, weil im Text noch zusätzliche Angaben gemacht werden.

● 4 Gib den Inhalt folgender Texte durch eine Gleichung wieder! Gib für die verwendete Variable den Grundbereich an!

a) Subtrahiert man von einer gebrochenen Zahl 0,5, so erhält man die Hälfte dieser Zahl. (Eine gebrochene Zahl: z)

b) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 50 cm. Die Länge der einen Seite ist ein Viertel der Länge der benachbarten Seite. (Länge der kürzeren Seite: a cm)

c) 60 l Wasser wurden auf mehrere Gefäße gleichmäßig verteilt. Sie sind in 3 Reihen zu je 5 Gefäßen aufgestellt. (Inhalt eines Gefäßes: v Liter Wasser)

● 5 Formuliere zwei verschiedene Texte, denen die Gleichung $15x = 60$ entspricht!

Damit die gefundenen Gleichungen einfacher werden, wollen wir in Zukunft in den Gleichungen keine Größen, sondern nur die Zahlenwerte der Größen verwenden. (Dabei müssen wir vorher darauf achten, daß auf beiden Seiten der Gleichung die gleichen Einheiten stehen.)

■ 4 Wir schreiben z. B.
statt $x \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$ kürzer $x + 5 = 7$ und
statt $x \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$ kürzer $3x = 6$.

Gleichungen mit Variablen sind keine Aussagen. Wenn man aber in einer Gleichung (oder Ungleichung) für die Variablen Zahlen (oder Größen) aus ihrem Grundbereich einsetzt, wird sie zu einer Aussage. Entsteht dadurch eine *wahre Aussage*, dann heißt die eingesetzte Zahl (oder Größe) *Lösung der Gleichung* (bzw. Ungleichung). Man sagt auch, diese Zahlen (oder Größen) *erfüllen* die Gleichung (bzw. Ungleichung).
Alle Lösungen bilden zusammen die **Lösungsmenge** L der betreffenden Gleichung (bzw. Ungleichung). Diese Lösungsmenge hängt im allgemeinen vom jeweiligen Grundbereich ab.
Die Gleichung $a - 0{,}5 = \frac{a}{2}$ müssen wir noch durch „Probieren" lösen, die Gleichung $15x = 60$ können wir bereits *durch Umformen* lösen.
Manchmal kann man komplizierte Gleichungen ebenso durch Umformen lösen, wenn man zuvor die Terme auf beiden Seiten vereinfacht hat.

● 6 Vereinfache einen Term der Gleichung $50 = 2\left(a + \frac{a}{4}\right)$ durch Auflösen der Klammern und Zusammenfassen! Löse die so entstandene Gleichung durch Umformen! Hat diese Gleichung dieselbe Lösung wie die Ausgangsgleichung?

Aufgaben

1. Fasse zusammen!

a) $15a + 4a$ **b)** $0{,}7b - 3{,}6b$ **c)** $12c + c$ **d)** $0{,}3d + 2{,}7d - 3d$
e) $15e + 2 - 20e + 3$ **f)** $0{,}7f - 2{,}3 - f + 2{,}3$
g) $6g - 3i - 5g - 3i$ **h)** $-h - l + 6h + 27 + l - 20$

2. Versuche, folgende Zusammenhänge durch eine Gleichung wiederzugeben! Gib die Bedeutung der jeweils verwendeten Variablen an!

a) Michael besitzt zwei Aquarien, die zusammen 180 Liter fassen.
b) Ein Winkel und ein Nebenwinkel sind zusammen 180° groß.
c) Einige gleich schwere Kartons haben zusammen eine Masse von 8 kg.
d) Gabi und Andreas wohnen 8 Jahre in der gleichen Straße.

3. Gib zu folgenden Texten eine Gleichung mit *einer* Variablen an! (Ihre Bedeutung ist in Klammern gegeben.) Löse die Gleichung!

a) Wenn man von einer rationalen Zahl erst die Hälfte, dann ihren dritten und danach ihren vierten Teil subtrahiert, erhält man —5. (Eine rationale Zahl: y)
b) Ein Werkstück besitzt einschließlich Verpackung eine Masse von 7,3 kg. Die Masse des Werkstücks allein ist das Zehnfache der Masse der Verpackung. (Masse der Verpackung: m kg)
c) Der Erlös der Altstoffsammlung von zwei Klassen betrug 300 M. Die eine Klasse sammelte dreimal so viel wie die andere. (Kleineres Sammelergebnis: x Mark)
d) Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist 75 cm² groß. Die eine Seite ist dreimal so lang wie die benachbarte. (Länge der kürzeren Seite: a cm)

4. Ermittle jeweils die Lösungsmenge im angegebenen Grundbereich!

a) $3a = 15 \quad (a \in N)$ **b)** $14m = 7 \quad (m \in N)$ **c)** $\frac{2}{y} = 3 \quad (y \in Q_+)$
d) $x + 3 = 2 \quad (x \in N)$ **e)** $2x < 5 \quad (x \in N)$ **f)** $x + x = 2x \quad (x \in Q)$

5. Ermittle alle Zahlen, die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen! Welche Gleichungen bzw. Ungleichungen haben dieselbe Lösungsmenge?

a) $2x - 1 = 7 \quad (x \in Q)$ **b)** $x^2 = 16 \quad (x \in N)$ **c)** $x^2 = 16 \quad (x \in Q)$
d) $|x| - 4 = 0 \quad (x \in Q)$ **e)** $|x| - 2 = 0 \quad (x \in N)$ **f)** $2x < x \quad (x \in Q)$

2 Umformungsregeln für Gleichungen

Bei manchen Gleichungen, z. B. bei $x = -3$, können wir die Lösungsmenge sofort *ablesen*. In Q hat $x = -3$ die Lösungsmenge $L = \{-3\}$. Bei anderen Gleichungen, wie z. B. $15x = 60$, können wir die Lösungsmenge *durch Umformen* der Gleichung finden. Bei Gleichungen, wie z. B. $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 4$ (↗ Auftrag C 1, S. 76), können wir das noch nicht. Wir wollen lernen, wie man solche komplizierten Gleichungen in *leicht lösbare* Gleichungen umformt, die *dieselbe Lösungsmenge* wie die Ausgangsgleichung haben.

● **7** **a)** In welchen der folgenden Beispiele besitzen beide Gleichungen in Q dieselbe Lösungsmenge?

b) Untersuche dasselbe im Grundbereich Q_+!

(1) $2x - 5 = 1$	(2) $4x = -16$	(3) $x + 5 = 10$	(4) $x^2 = 16$
$x = 3$	$5x = -25$	$x - 1 = 4$	$3x = 12$

▶ 1

DEFINITION: Gleichungen heißen in bezug auf einen Grundbereich *zueinander äquivalent*[1]), wenn sie in diesem dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Im vorigen Auftrag waren die Gleichungen $2x - 5 = 1$ und $x = 3$ in Q zueinander äquivalent. (Bei der Gleichung $x = 3$ kann die Lösung sofort abgelesen werden.)
Wir suchen *Regeln*, nach denen man eine Gleichung in eine zu ihr äquivalente Gleichung umformen kann. Bei diesem *Umformen* wollen wir die bekannten Rechenoperationen anwenden. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, und wir untersuchen deshalb, in welchen Fällen zu einer Gleichung äquivalente Gleichungen entstehen. Der Grundbereich sei Q.

● 8 Gegeben ist die Gleichung $2x - 5 = 1$. Ihre Lösung ist 3.
  a) Addiere auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl 5! Erhältst du eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung?
  b) Addiere nur auf der linken Seite der Gleichung die Zahl 5! Erhältst du eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung?

● 9 Gegeben ist die Gleichung $3x = 10 - 2x$. Ihre Lösung ist 2.
  a) Addiere auf beiden Seiten der Gleichung $2x$! Welche Gleichung erhältst du? Sind beide Gleichungen zueinander äquivalent?
  b) Addiere nur auf der rechten Seite der Gleichung $2x$! Erhältst du eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung?

● 10 Untersuche an der Gleichung $2x + 5 = 11$, deren Lösung die Zahl 3 ist, ob auch die Subtraktion ein und derselben Zahl bzw. ein und desselben Vielfachen der Variablen x auf beiden Seiten der Gleichung auf eine zu ihr äquivalente Gleichung führt!

▷ 2

SATZ: *Addiert* man auf beiden Seiten einer Gleichung, die eine Variable enthält,
dieselbe *Zahl* oder
dasselbe *Vielfache der Variablen*,
so erhält man eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung. Dasselbe gilt, wenn man eine Zahl oder ein Vielfaches der Variablen *subtrahiert*.

(Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir.)

● 11 Gegeben ist die Gleichung $\frac{2x}{3} = 4$. Ihre Lösung ist 6.
  a) Multipliziere beide Seiten der Gleichung mit 3! Erhältst du eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung?
  b) Multipliziere nur die rechte Seite der Gleichung mit 3! Erhältst du eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung?

Gegeben ist die Gleichung

(1) $6x = 24$.

Die Lösung der Gleichung (1) ist 4. Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit 0 und erhalten

(2) $6x \cdot 0 = 24 \cdot 0$.

Die Gleichung (2) wird von *jeder* Zahl erfüllt; sie ist also zu (1) *nicht* äquivalent.

---

[1]) „äquivalent“ bedeutet soviel wie „gleichwertig“.

Gegeben ist die Gleichung

(3) $x - 4 = 6.$

Ihre Lösung ist 10. Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit x und erhalten

(4) $(x - 4) \cdot x = 6 \cdot x.$

Diese Gleichung besitzt die Lösungen 10 und 0; sie ist also zu (3) *nicht* äquivalent.

● 12 Gegeben ist die Gleichung $\frac{8}{x} = 2$ $(x \neq 0)$. Ihre Lösung ist 4. Multipliziere beide Seiten der Gleichung mit x! Erhältst du eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung?

● 13 Untersuche an der Gleichung $2x(x + 1) = 6x$, die die Lösungen 0 und 2 hat, ob auch die Division durch eine Zahl oder durch die Variable auf beiden Seiten der Gleichung auf eine zu ihr äquivalente Gleichung führt!

▷ 3

SATZ: *Multipliziert* man beide Seiten einer Gleichung, die eine Variable enthält,
mit derselben *von Null verschiedenen Zahl* oder
mit der *Variablen*, sofern *für sie nicht die Zahl 0* eingesetzt werden darf,
so erhält man eine zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung. Dasselbe gilt, wenn man durch eine solche Zahl oder durch die Variable *dividiert*.

(Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir.)

Aufgaben

1. Welche Gleichungen jeder Gruppe sind bezüglich des Variablengrundbereiches N (bzw. Q) zueinander äquivalent?
   a) (1) $100 = 10x$; (2) $70 : x = 7$; (3) $x = 10$; (4) $x^2 = 100$
   b) (1) $x = 7$; (2) $|x| = 7$; (3) $2x = 14$; (4) $x^2 = 49$
   c) (1) $2x - 1 = -9$; (2) $x - 10 = -6$; (3) $x = 4$; (4) $7x = 28$

2. Gib zu jeder Gleichung eine zu ihr äquivalente Gleichung an! (Grundbereich sei Q.)
   a) $2x = 4$ b) $3x = 12$ c) $\frac{4}{x} = 2$ $(x \neq 0)$ d) $2x + 5 = 7$

3. Durch welche Umformung entstand die zweite Gleichung?
   a) $x + 10 = 4$; $x = -6$
   b) $3x = 27$; $x = 9$
   c) $\frac{x}{5} = 4$; $x = 20$
   d) $\frac{6}{x} = 3$ $(x \neq 0)$; $6 = 3x$
   e) $\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$; $x = 6$
   f) $5x - 8 = -23$; $5x = -15$
   g) $3x - 9 = 7 - 6x$; $9x - 9 = 7$
   h) $7x + 5 = 3x + 17$; $7x = 3x + 12$

Zusammenfassung

Man erhält zu einer Gleichung eine **äquivalente Gleichung**	
– durch Addition (bzw. Subtraktion) derselben Zahl bzw. desselben Vielfachen der Variablen auf beiden Seiten der Gleichung;	$6x - 2 = 16 \quad L = \{3\}$ $6x - 2 + 2 = 16 + 2$ $6x = 18 \quad L = \{3\}$

– durch Multiplikation mit derselben (bzw. Division durch dieselbe) von Null verschiedene(n) Zahl auf beiden Seiten der Gleichung;	$2{,}5x = 37{,}5 \quad L = \{15\}$ $\frac{2{,}5x}{2{,}5} = \frac{37{,}5}{2{,}5}$ $x = \frac{37{,}5}{2{,}5} \quad L = \{15\}$
– durch Multiplikation mit der (bzw. Division durch die) Variable(n) auf beiden Seiten der Gleichung, wenn man voraussetzt, daß die Variable eine von Null verschiedene Zahl bedeutet ($x \neq 0$);	$\frac{9{,}6}{x} = 3{,}2 \; (x \neq 0) \quad L = \{3\}$ $\frac{9{,}6x}{x} = 3{,}2x$ $9{,}6 = 3{,}2x \quad L = \{3\}$
– durch Termumformungen auf einer Seite der Gleichung.	$3x + 0{,}5x = 5 \quad L = \left\{\frac{10}{7}\right\}$ $3{,}5x = 5 \quad L = \left\{\frac{10}{7}\right\}$

Übungen zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

3 Lösen von Gleichungen durch Umformungen

Gelingt es uns, zu einer Gleichung eine *leicht lösbare* äquivalente Gleichung zu finden, dann kennen wir mit ihrer Lösungsmenge auch die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung. Wir wollen deshalb gegebene Gleichungen schrittweise mit Hilfe der Umformungsregeln in die Form $x = a$ umwandeln. Das schrittweise Umformen nennen wir **„*Auflösen* einer Gleichung nach einer Variablen“** oder **„*Isolieren* der Variablen“**.

■ 5 $3{,}6x + 0{,}3 = 4{,}8 \quad (x \in Q)$

Der linke Term der Gleichung ist eine Summe, die aus den Summanden $3{,}6x$ und $0{,}3$ besteht. Um den Summanden, der die Variable enthält, allein im linken Term zu erhalten, subtrahieren wir auf beiden Seiten der Gleichung 0,3. Wir notieren diesen Schritt hinter einem senkrechten Strich und schreiben:

$$3{,}6x + 0{,}3 = 4{,}8 \qquad | -0{,}3$$
$$3{,}6x + 0{,}3 - 0{,}3 = 4{,}8 - 0{,}3$$
$$3{,}6x = 4{,}5$$

Wie man solche Gleichungen löst, weißt du schon aus *Klasse 6*: Der linke Term ist ein Produkt. Um die Variable zu isolieren, dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch 3,6. Wir schreiben:

$$3{,}6x = 4{,}5 \qquad | : 3{,}6$$
$$x = 1{,}25$$

Im Anschluß an jede Aufgabe führen wir eine Probe durch. Dazu setzen wir die gefundene Zahl für die Variable ein und stellen fest, ob eine wahre Aussage entsteht.

Probe: $3{,}6 \cdot 1{,}25 + 0{,}3 = 4{,}8$
$4{,}5 + 0{,}3 = 4{,}8$

Diese Gleichung ist eine *wahre Aussage*. Daraus folgt, daß die Zahl 1,25 *Lösung* der Ausgangsgleichung ist.

14 Löse die Gleichungen durch Umformen! (Es gilt: $x \in Q$.)

a) $x + 9{,}7 = 3{,}5$ **b)** $4{,}5x - 35{,}7 = 3$ **c)** $\frac{x}{2{,}8} + 11{,}5 = 0$

Häufig kommt die Variable im linken und im rechten Term vor.
Sind beide Terme Summen, *ordnen* wir zunächst, damit die Summanden mit der Variablen nur auf einer Seite der Gleichung stehen. Bei dem Beispiel

$$5x + 3 = 2x + 7 \quad (x \in Q)$$

subtrahieren wir $2x$ auf beiden Seiten der Gleichung und *fassen* die Summanden mit der Variablen *zusammen*:

$$5x + 3 - 2x = 2x + 7 - 2x$$
$$3x + 3 = 7$$

15 **a)** Forme selbständig weiter um und gib die Lösung der Gleichung $5x + 3 = 2x + 7$ an!

b) Bernd löst eine Gleichung und notiert in seinem Heft:

$$5x - 1 = -25 - 3x \quad | +1 + 3x$$
$$8x = -24 \quad | :8$$
$$x = -3$$

Erläutere sein Vorgehen!

Sind die Terme der Ausgangsgleichung Summen wie im folgenden Beispiel, *fassen* wir *zusammen*:

$$7x + 5 - 2x - 6 = -16 + 9x - 9 - 12x \quad (x \in Q)$$
$$5x - 1 = -25 - 3x$$

16 Forme selbständig weiter um und gib die Lösung der Ausgangsgleichung an!

In den Termen auftretende *Klammern* werden *aufgelöst*:

$$3(4 + 5x) = 5x + 2 \quad (x \in Q)$$
$$12 + 15x = 5x + 2$$

17 **a)** Forme selbständig weiter um, gib die Lösung von $3(4 + 5x) = 5x + 2$ an!

b) Löse die im Auftrag C 1 b und c (↗ S. 76) gefundenen Gleichungen durch Umformen!

Schritte beim Lösen einer Gleichung	
Struktur der Terme	Art der Umformung
Es kommen Klammern vor.	**Klammern auflösen**
Es kommen Summanden mit einer Variablen oder (und) Summanden ohne eine Variable **mehrmals** vor.	**Zusammenfassen**
Es kommt auf einer Seite oder auf beiden Seiten ein Term der Form $ax + b$ vor.	**Ordnen** a) durch Addition bzw. Subtraktion auf beiden Seiten der Gleichung b) Zusammenfassen

Es kommt ein Term der Form ax oder $\frac{x}{a}$ vor.	**Isolieren** von x durch Multiplikation bzw. Division auf beiden Seiten der Gleichung
	Probe

Aufgaben

Hinweis: In allen folgenden Aufgaben ist Q der Grundbereich für die Variable.

Löse die Gleichungen!

1.↑ **a)** $x - 1{,}3 = -2{,}7$ **b)** $27 + a = 1{,}8$ **c)** $1{,}5 - z = 1{,}2$
d) $4{,}2 = 1{,}2 - x$ **e)** $-4{,}6 = c - 9{,}9$ **f)** $\frac{27}{2} + b = 42$

2.↑ **a)** $4x - 3 = 9$ **b)** $7x + 6 = 20$ **c)** $3x + 2{,}4 = 0{,}6$
d) $-6a + 1{,}2 = 2{,}4$ **e)** $\frac{1}{2}y + \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$ **f)** $\frac{3{,}4}{x} - 6 = 0{,}8 \quad (x \neq 0)$

3.↑ **a)** $5a + 7 = 22$ **b)** $4z - 2{,}1 = 5{,}1$ **c)** $6{,}8 = 15{,}2 + 3k$
d) $-3{,}2y + 9{,}4 = -6{,}6$ **e)** $\frac{3}{8}b - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ **f)** $\frac{13}{x} - 2{,}2 = 4{,}3 \quad (x \neq 0)$

4.↑ **a)** $\frac{3}{7} = \frac{1}{2}a$ **b)** $6x - 1{,}6 = 0{,}2$ **c)** $\frac{0{,}12}{x} = 0{,}3 \quad (x \neq 0)$
d) $\frac{2}{3}u + \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$ **e)** $24 - e = 25{,}85$ **f)** $-2{,}92 = -3{,}2m + 2{,}2$

5.↑ **a)** $12x + 15 = 15x + 9$ **b)** $7y = 20 - 3y$ **c)** $-8x + 18 = 4x - 30$
d) $1{,}2 + 2{,}4z = 3{,}6z - 4{,}8$ **e)** $2{,}8b = 0{,}34 + 1{,}1b$ **f)** $\frac{3}{4}m + \frac{7}{6} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{8}m$

6.↑ **a)** $21 + 8x = 6x$ **b)** $25 + 12x = 16x - 7$ **c)** $7u + 2 = 20 - 2u$
d) $3{,}5a + 1{,}5 = 1{,}7 + 4{,}5a$ **e)** $0{,}5x = 6 - 4{,}5x$ **f)*** $0{,}3y - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}y - 0{,}7$

7.↑ **a)** $\frac{2}{5} + x = \frac{3}{2}$ **b)** $3{,}6a + 4{,}5 = -0{,}54$ **c)** $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}b$
d) $\frac{3{,}9}{m} = 1{,}3 \quad (m \neq 0)$ **e)** $9y + 12 = 5y$ **f)** $9 + 5p - 6 = 3p - 11$

8.↑ **a)** $5x + 8 = 26 - 3x - 2$ **b)** $10 - 4z = 6z + 22 - 2z$
c) $5a - 1 - 3a + 25 = 20a + 24 - 10a - 8$
d)* $0{,}6x - 1{,}2 - 5{,}4x + 2{,}4 = -3x + 3{,}6 + 1{,}2 - 2{,}4x$

9.↑ **a)** $12a - 9 - 3a = 18$ **b)** $8x + 14 - 7x - 3 = 5 - x$
c)* $12x + 17 - 6x - 5 = 18x + 24 - 6x + 12$ **d)*** $\frac{4}{3}x + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

10.↑ **a)** $2(x + 3) = 4$ **b)** $8(2a + 1) = -24$ **c)** $12x - 1 = 5(4x + 3)$

4 Lösungsmengen bei Gleichungen und Ungleichungen

Die in der Lerneinheit 3 betrachteten Gleichungen hatten alle genau eine Lösung, z. B. hat auch die Gleichung $5x + 7 = 3 + 8x$ in Q nur die Lösung $\frac{4}{3}$. Das ist aber nicht immer so.

■ 6 Die Gleichung $5x + 7 = 3 + 8x$ soll im Grundbereich N gelöst werden. Durch Umformen erhält man $x = \frac{4}{3}$. Die Zahl $\frac{4}{3}$ gehört nicht zu N. Also hat die Gleichung in N *keine Lösung*, die Lösungsmenge L ist hier $L = \emptyset$.

■ 7 Es ist $4x + 5 - x = 6 + 3x - 1$ im Grundbereich Q zu lösen. Man erhält durch Umformen

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 3x + 5 \\ 3x &= 3x \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der wahren Aussage $0 = 0$ kann man keine Lösungen der Gleichung entnehmen. Aber die *vorher* erhaltenen Gleichungen lassen erkennen, daß man *jede beliebige* rationale Zahl für x einsetzen kann und dabei stets eine wahre Aussage erhält. Die Lösungsmenge enthält also alle rationalen Zahlen: **$L = Q$.**

■ 8 Löse $5 + 7x - 8 = 4x + 6 + 3x$ im Grundbereich Q!

Man erhält
$$\begin{aligned} 7x - 3 &= 7x + 6 \\ 7x &= 7x + 9 \\ 0 &= 9. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist eine falsche Aussage. Die vorher erhaltenen Gleichungen führen stets zu falschen Aussagen, wenn man für x irgendeine rationale Zahl einsetzt. Die Gleichung besitzt also *keine Lösung*, **$L = \emptyset$.**

Wir können feststellen:

1. Wenn man eine Gleichung durch Umformen in die *Form* $x = a$ bringen kann, dann hat sie
   - *genau eine Lösung*, falls a *ein* Element des Grundbereichs ist (die Lösung ist die Zahl a);
   - *keine Lösung*, falls a *kein* Element des Grundbereichs ist.
2. Wenn man eine Gleichung durch Umformen in eine *wahre Aussage* überführen kann, dann ist *jede Zahl* des Grundbereichs *Lösung* dieser Gleichung.
3. Wenn man eine Gleichung durch Umformen in eine *falsche Aussage* überführen kann, dann ist *keine Zahl* des Grundbereichs *Lösung* dieser Gleichung.

Das folgende Beispiel zeigt, wie man auch für *Gleichungen mit Beträgen* Lösungsmengen durch Umformen findet:

■ 9 **a)** $|x - 1{,}5| = 0{,}7 \quad (x \in Q)$

Wir wissen: Wenn $|z| = 0{,}7$ ist, dann kann $z = 0{,}7$ oder $z = -0{,}7$ sein. Beim Lösen der gegebenen Gleichung muß man also *zwei Fälle* unterscheiden.

1. Fall: $x - 1{,}5 = 0{,}7 \quad | +1{,}5$

$x = 2{,}2$

Probe: $|2{,}2 - 1{,}5| = 0{,}7$

$|0{,}7| = 0{,}7$ (wahr)

2. Fall: $x - 1{,}5 = -0{,}7 \quad | +1{,}5$

$x = 0{,}8$

Probe: $|0{,}8 - 1{,}5| = 0{,}7$

$|-0{,}7| = 0{,}7$ (wahr)

Also: $L = \{2{,}2; 0{,}8\}$

b) $|x| + 9 = 6 \quad (x \in Q)$

Durch Subtraktion von 9 erhält man $|x| = -3$. Diese Gleichung besitzt *keine Lösung*, da der Betrag einer Zahl nicht negativ sein kann: $L = \emptyset$.

c) $|2x| + 6 = 6 \quad (x \in Q)$

Man erhält $|2x| = 0$. Die einzige Lösung dieser Gleichung ist 0.

Also: $L = \{0\}$

Ungleichungen können wir noch nicht durch Umformen lösen. Das folgende Beispiel zeigt, wie man auch hier Lösungsmengen findet.

■ 10 **a)** Es ist die Ungleichung $2x + 3 < 12$ in N zu lösen. Durch Einsetzen natürlicher Zahlen in die Ungleichung kann man hier die Lösungsmenge finden:

$L = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Man kann sie auch ermitteln, indem man die Gleichung $2x + 3 = 12$ in Q löst; alle natürlichen Zahlen, die kleiner als die Lösung dieser Gleichung sind, sind Lösung der Ungleichung in N.

b) Es ist $x + 5 < 2$ im Bereich der *ganzen Zahlen* zu lösen. Man kann überlegen: Die Lösungen können sicher keine positiven Zahlen sein, denn wenn man 5 zu einer positiven Zahl addiert, dann ist das Ergebnis nicht kleiner als 2.
Die *größte* ganze Zahl, die die Ungleichung erfüllt, ist -4, denn $-4 + 5 = 1$ und $1 < 2$ ist wahr. Die Zahl -3 erfüllt die Ungleichung nicht, denn $-3 + 5 = 2$ und $2 < 2$ ist falsch.
Also sind -4, aber auch alle kleineren ganzen Zahlen Lösungen:

$L = \{\ldots, -6; -5; -4\}$

c) Es ist $5x < 8$ im Bereich Q zu lösen.
Für $x = \frac{8}{5}$ findet man: $5 \cdot \frac{8}{5} < 8$, das ist eine *falsche* Aussage. Setzt man für x noch größere Zahlen ein, erhält man ebenfalls falsche Aussagen. Alle rationalen Zahlen, die *kleiner als* $\frac{8}{5}$ sind, *erfüllen* die Ungleichung. Sie bilden die Lösungsmenge.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen bzw. Ungleichungen im jeweils angegebenen Grundbereich!

1.↑ **a)** $2x = 9 \quad (x \in Q)$ **b)** $3x - 7 = 4 \quad (x \in N)$
c) $3 - x = 11 - 4x \quad (x \in Q_+)$ **d)** $6x + 8 = 3 \quad (x \in Q_+)$

2.↑ **a)** $-17{,}3 - r = 1{,}7 \quad (r \in Q_+)$ **b)** $1{,}7z = 2{,}7 - 1{,}3z \quad (z \in Q)$
c) $-28{,}7 - v = 32{,}3 \quad (v \in N)$ **d)** $4{,}5c = 24 + 0{,}5c \quad (c \in N)$

3.↑ **a)** $7x + 5 = 9x + 4 - 2x \quad (x \in Q)$ **b)** $6(a - 4) = 2a - (24 + 4a) \quad (a \in Q)$
c) $\frac{10}{x} = 7 \quad (x \in Q) \quad (x \neq 0)$ **d)** $8x = 2(4x + 3) \quad (x \in Q_+)$
e) $2x + 4 + 3x = 5x + 4 \quad (x \in Q)$ **f)** $5x + 18 - 2x = 3(x + 6) \quad (x \in N)$

4.↑ **a)** $z - 3 < z + 4 \quad (z \in Q)$ **b)** $10 - x > 6 \quad (x \in N)$ **c)** $4a + 5 < 3 \quad (a \in Z)$

5.↑ **a)** $|x| - 4 = 5 \; (x \in Q)$ **b)** $|x| + 5 = 2 \; (x \in Q)$ **c)** $|x + 11| = 5 \; (x \in Q)$
d) $|x - 4| + 5 = 1 \; (x \in Q)$ **e)** $|8x| = 8 \; (x \in Q)$ **f)** $|3x + 5| + 4 = 11 \; (x \in Q)$

6.↑ **a)** $|x| + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \; (x \in Q)$ **b)** $|x| + 1{,}5 = 1{,}7 \; (x \in Q)$ **c)** $|x + 7| = 5 \; (x \in Q)$
d) $|x + 3| - 4 = 6 \; (x \in Q)$ **e)** $|6x| = 12 \; (x \in Q)$ **f)** $|4x + 2| + 3 = 7 \; (x \in Q)$

7.*↑ **a)** $|x - 1| = 0{,}5x + 1 \quad (x \in Q)$ **b)** $|x - 3| = x \quad (x \in Q)$
c) $|x + 1| = x - 3 \quad (x \in Q)$ **d)** $|x + 2| + 4 > 1 \quad (x \in Q)$

5 Lösen von Anwendungsaufgaben

Jemand dingt einen Arbeiter für 28 Tage unter der Bedingung, daß er ihm 5 Pfennige (pro Tag) zahlt, wenn er arbeitet, daß der Arbeiter ihm aber 3 Pfennige (pro Tag) zu zahlen habe, wenn er nicht arbeitet. Als nun die 28 Tage um sind, rechnen sie miteinander ab und kommen zu dem Ergebnis, daß keiner dem anderen etwas schuldig ist, daß aber auch keiner dem anderen etwas zu geben hat, weder der Herr noch der Arbeiter. Die Aufgabe lautet nun: Wieviel Tage hat der Arbeiter gearbeitet und wieviel Tage nicht?

Diese Aufgabe stammt aus einem alten Mathematikbuch, das 1524 von ADAM RIES geschrieben wurde. In diesem Buch erklärt ADAM RIES an praktischen Aufgaben aus dem Leben, wie man unbekannte Größen mit Hilfe von Gleichungen bestimmen kann und wie man dabei den Rechenweg aufschreibt.

Kupferschmiede bei der Arbeit;
Darstellung aus dem 17. Jahrhundert

Am Beispiel der Aufgabe von ADAM RIES wollen wir wiederholen, wie man den Lösungsweg für eine Sachaufgabe aufschreiben kann.

11 *Gegeben:*

Vereinbarte Arbeitszeit	28 Tage
Lohn pro Tag	5 Pf
Strafe pro Tag bei Nichtarbeit	3 Pf

Gesucht:
Tatsächliche Arbeitszeit x Tage ($x \in Q_+$)

Lösungsweg:

Lohn für die Arbeitstage	$5x$ Pf
Resttage	$28 - x$
Strafe für diese	$3(28 - x)$ Pf

Gleichung:
$$5x = 3(28 - x)$$
$$5x = 84 - 3x$$
$$8x = 84$$
$$x = 10{,}5$$

Probe:
$$5 \cdot 10{,}5 = 3(28 - 10{,}5)$$
$$52{,}5 = 3 \cdot 17{,}5 \quad \text{(wahr)}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{10{,}5\}$.

Probe am Text:

Lohn für $10\frac{1}{2}$ Tage: $10\frac{1}{2} \cdot 5$ Pf $= 52{,}5$ Pf

Strafe für $17\frac{1}{2}$ Tage: $17\frac{1}{2} \cdot 3$ Pf $= 52{,}5$ Pf

Antwortsatz: Der Arbeiter hat zehn und einen halben Tag gearbeitet, siebzehn und einen halben Tag hat er nicht gearbeitet.

● 18 Nenne wichtige Schritte, die man beim Lösen von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Gleichungen beachten sollte!

■ 12 Familie Müller beschließt, ihr Auto am Parkplatz stehen zu lassen und von dort auf einem 12 km langen ausgeschilderten Weg zu wandern, der wieder zum Parkplatz führt. Nach 4 Stunden wollen Müllers am Parkplatz zurück sein, also im Durchschnitt 3 km in einer Stunde zurücklegen. Eine Stunde nachdem Müllers ihre Wanderung begonnen haben, läuft Herr Friedrich vom Parkplatz aus denselben Weg entlang. Er schafft 5 km in einer Stunde. Nach wieviel Stunden hat er Familie Müller eingeholt?

1. *Wir überlegen:*

Gegeben sind die Geschwindigkeit der Familie $\left(3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, die Geschwindigkeit des Herrn Friedrich $\left(5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, die Weglänge (12 km), die gesamte Wanderzeit der Familie (4 h) und der zeitliche Vorsprung der Familie (1 h).

Gesucht ist die Zeit, die Herr Friedrich bis zum Einholen der Familie benötigt (x h).

Wir fertigen eine Tabelle an:

	Herr Friedrich	**Familie Müller**
Geschwindigkeit $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	5	3
Wanderzeit bis zum Einholen (in h)	x	$x + 1$
Wanderweg bis zum Einholen (in km)	$5x$	$3(x + 1)$

2. *Wir stellen eine Gleichung auf:*

Wenn Herr Friedrich Familie Müller eingeholt hat, hat er *denselben Weg* wie sie zurückgelegt, deshalb muß gelten:

$5x = 3(x + 1)$

3. *Wir berechnen die Lösungsmenge:*

Durch Umformen der Gleichung erhalten wir $x = 1{,}5$. Als Grundbereich kommt nur Q_+ in Frage.

4. *Wir kontrollieren das Resultat:*

Die Lösung der Gleichung besagt, daß Herr Friedrich 1,5 h bis zum Einholen der Familie benötigt.

Probe am Text:

In 1,5 h legt Herr Friedrich einen Weg $s_1 = 5\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1{,}5\text{ h} = 7{,}5\text{ km}$ zurück. Die Familie ist 2,5 h unterwegs und legt einen Weg $s_2 = 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2{,}5\text{ h} = 7{,}5\text{ km}$ zurück. Beide Wege sind gleich, die Lösung 1,5 h ist also richtig.

5. *Wir beantworten die Frage:*

Nach $1\frac{1}{2}$ Stunden hat Herr Friedrich die Familie eingeholt.

● **19** Wann würde Herr Friedrich die Familie einholen, wenn er *zwei* Stunden später als diese vom Parkplatz losgelaufen wäre?
Beachte, daß der Wanderweg nur 12 km lang ist!

■ **13** Sven und seine drei Freunde haben in einem Arbeitseinsatz zusammen 600 M verdient. Sie wollen damit einen gemeinsamen Zelturlaub finanzieren und überlegen, wieviel Tage sie bleiben können. Hin- und Rückfahrt kosten für alle zusammen 150 M. Für Verpflegung und kulturelle Ausgaben planen sie täglich 25 M ein. Außerdem sind für jede Person pro Tag 0,50 M Campinggebühren zu zahlen. Wie lange können sie höchstens bleiben?

1. *Wir überlegen:*

Gegeben sind der zur Verfügung stehende Betrag (600 M), die Fahrtkosten (150 M), die täglichen Kosten (25 M), Campinggebühren pro Person und Tag (0,50 M).
Gesucht ist die größtmögliche Anzahl der Zelturlaubstage (x). Für x Tage ergeben sich als Verpflegungskosten $x \cdot 25$ M und die Campinggebühren
$x \cdot 0{,}50 \text{ M} \cdot 4 = x \cdot 2 \text{ M}$.

2. *Wir stellen eine Gleichung auf:*

Die *Gesamt*kosten dürfen 600 M nicht übersteigen. Angenommen, sie betragen genau 600 M, dann müßte gelten

$25x + 2x + 150 = 600$

3. *Wir berechnen die Lösungsmenge:*

Durch Umformen der aufgestellten Gleichung erhalten wir $x = 16{,}\overline{6}$. Als Grundbereich für die Variable müssen wir N wählen.

4. *Wir kontrollieren das Resultat:*

Die aufgestellte Gleichung besitzt in N keine Lösung, das bedeutet, daß die geplanten Gesamtkosten des Zelturlaubs *nicht* genau 600 M sein können. Das Ergebnis $16{,}\overline{6}$ läßt erkennen, daß die Urlaubsdauer höchstens 16 Tage sein kann.

Probe am Text:

Die Kosten betragen dann $25 \text{ M} \cdot 16 + 2 \text{ M} \cdot 16 + 150 \text{ M} = 582 \text{ M}$.
Für 17 Tage wären die Kosten 609 M, würden also den vorhandenen Geldbetrag übersteigen.

5. *Antwort:*

Die Freunde können höchstens 16 Tage bleiben.

● **20** a) Wieviel Geld könnten die vier Freunde pro Tag für Verpflegung und kulturelle Ausgaben einplanen, wenn sie nur 14 Tage bleiben wollten?
b) Mit welchem Betrag müßten sie pro Tag auskommen, wenn sie 3 Wochen zelten wollten?

Aufgaben

1. Das Vierfache einer Zahl ist gleich der Summe aus dieser Zahl und 4. Ist diese Zahl eine natürliche Zahl?

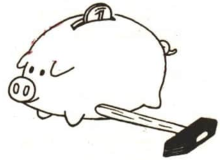
2. Für welche positive Zahl gilt: Wenn man ihr Doppeltes durch ihr Dreifaches dividiert und zu diesem Quotienten $\frac{1}{3}$ addiert, erhält man 1?

3. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 56, dabei ist die eine Zahl um 2 kleiner als die andere. Wie heißen diese beiden Zahlen?

4. In einem Schrank stehen Biergläser und Weingläser. Insgesamt sind es 20 Gläser, aber es sind 6 Biergläser mehr als Weingläser. Wieviel Biergläser stehen im Schrank?

5. Herr Otto erzählt, daß er für einen Koffer mit Werkzeug 125 M bezahlt hat und daß der Koffer genau 100 M billiger als das Werkzeug war. Wieviel hätte dasselbe Werkzeug ohne Koffer gekostet?

6. Drei Geschwister bekommen ein Sparschwein mit 50 M geschenkt. Sie sparen für eine Modelleisenbahn, deshalb gibt jeder der drei Geschwister wöchentlich noch 1 M vom Taschengeld hinzu. Als sie das Sparschwein öffnen, enthält es 83 M (75 M). Wieviel Wochen haben die drei gespart?



Von den Schülern der Klasse 7b kommt die Hälfte zu Fuß zur Schule, ein Drittel benutzt das Fahrrad und 6 Schüler bringt der Schulbus. Wieviel Schüler gehen in die 7b?

Großvater schickt seinen drei Enkeln zu Weihnachten eine größere Geldsumme und schreibt: Der Älteste soll 100 M weniger als die Hälfte der Geldsumme bekommen, der Mittlere ein Drittel der Geldsumme und der Jüngste 50 M mehr als ein Viertel der Geldsumme. **a)** Wieviel Geld hat der Großvater überwiesen? **b)** Wieviel Geld bekommt jeder Enkel?

9.* Heike fragt Onkel Thomas, ob er in diesem Jahr 100 Schüler im Mathematiklager betreut hätte. Der erwidert: „Hätte ich doppelt soviel wie in diesem Jahr zu betreuen gehabt und dazu die Hälfte und noch ein Viertel der Schülerzahl dieses Jahres und dann noch dich dazu, dann wären es 100 gewesen." Wieviel Schüler hat er betreut?

10. Eine Strecke von 1 m Länge soll in 4 (3; 5) Teile zerlegt werden. Dabei soll der erste Teil 10 cm länger sein als der zweite, der zweite 10 cm länger als der dritte usw. Wie lang müssen die Teilstrecken werden?

11. In einem Trapez mit 10 cm² (8 cm²) Flächeninhalt und einer Höhe von 8 cm unterscheiden sich die beiden parallelen Seiten um 2 cm. Wie lang ist die kürzere der parallelen Seiten?

12. Ein gleichschenkliges Dreieck soll einen Umfang von 24 cm haben. Wie lang ist die Basis, wenn
a) jeder Schenkel 1 cm länger als die Basis ist,
b) jeder Schenkel 12 cm länger als die Basis ist?

13. Ein Tiergehege soll mit 100 m Zaun rechteckig eingezäunt werden.
a) Wie groß wird die eingezäunte Fläche, wenn eine der Seiten 10 m länger als die andere sein soll?
b) Wird die gleiche Fläche eingezäunt, wenn alle Seiten gleich lang sind?

14. 164 Salatpflanzen sollen im Schulgarten in 4 Reihen im Abstand von 30 cm gepflanzt werden. Wie lang wird eine Reihe?

15. Formuliere jeweils drei verschiedene Texte, denen folgende Gleichung entspricht:
a) $x + 500 = 1\,800$ **b)** $12x = 7\,200$
(Mögliche Bedeutung für x: Zahlenwert einer Masse, einer Sparsumme usw.)

Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung

1. Ein Wanderer verläßt um 8 Uhr eine Jugendherberge, sein Ziel ist ein 35 km entfernter Zeltplatz. Dreieinhalb Stunden danach bemerkt man, daß er seinen Ausweis vergessen hat. Ein hilfsbereiter Urlauber fährt ihm sofort mit dem Fahrrad hinterher, um ihm den Ausweis zu bringen. Wann kann der Urlauber wieder zurück sein, wenn man damit rechnet, daß der Wanderer durchschnittlich 5 km, der Radfahrer aber 15 km in einer Stunde zurücklegt?

2. Auf einem 24 km langen Wanderweg von A nach B wollen sich zwei Gruppen entgegengehen. Sie laufen gleichzeitig los, aber die Gruppe von A läuft $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und die von B $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jemand will ein Picknick für alle dort vorbereiten, wo beide Gruppen gleichzeitig eintreffen werden. In welcher Entfernung von A (bzw. von B) ist das?

3.* Auf der 50 km langen Bahnstrecke Riesa—Dresden-Neustadt fährt 11.56 Uhr der D-Zug Saxonia von Dresden-Neustadt ab und trifft 12.36 Uhr in Riesa ein; 11.56 Uhr fährt von Riesa ein Personenzug ab, der 12.57 Uhr in Dresden-Neustadt eintrifft. Wann begegnet ihm der D-Zug (Haltestellen usw. sollen unberücksichtigt bleiben)?

4. Schmidts wandern im Urlaub in 6 Stunden nach einem 24 km entfernten Wanderziel. Anfangs ging es mit einer Geschwindigkeit von etwa $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durch ebenes Gelände. Später, in bergigem Gelände, schafften sie nur noch etwa $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
   a) Wie lange haben sie das flotte Tempo durchgehalten?
   b) Wie lang war das bergige Wegstück?

5. Eine Unruhe soll gebastelt werden. Wo muß man bei einem 10 cm langen Stab den Aufhängepunkt wählen, wenn an dem einen Stabende eine Gewichtskraft von 20 mN zwei Gewichtskräften von je 15 mN am anderen Stabende das Gleichgewicht halten sollen?

6.* Zwei Stäbe haben einen gleich großen quadratischen Querschnitt (1 cm^2) und unterscheiden sich in der Länge um 10 cm. Welche Masse haben sie, wenn einer aus Aluminium und der andere aus Eisen ist und beide die gleiche Masse besitzen?

7. Zwei Werkstücke haben das gleiche Volumen. Ihre Massen unterscheiden sich um 5,1 kg; denn das eine Werkstück ist aus Aluminium und das andere aus Eisen. Wie groß ist das Volumen jedes Werkstücks?

8. Wasser soll aus einer Baugrube ausgepumpt werden. Es stehen 5 gleiche Pumpen zur Verfügung. Der Bauleiter meint: „Mit 5 Pumpen schaffen wir die Arbeit in $4\frac{1}{2}$ Stunden." Wieviel Stunden dauert das Auspumpen länger, wenn nur 4 Pumpen eingesetzt werden können?

9. Wieviel Gramm Sauerstoff braucht man zur vollständigen Verbrennung von 1 kg Kohlenstoff?

10. Wieviel Gramm Magnesium benötigt man, um 500 g Magnesiumoxid (MgO) herstellen zu können?
    Wieviel Gramm Sauerstoff werden dabei verbraucht?

11. Zur Vorbereitung einer Mathematikertagung werden im Hotel für 64 Personen 38 Zimmer bestellt, nur Ein- und Zweibettzimmer. Muß das Hotelbüro zurückfragen, wieviel Zimmer von jeder Sorte reserviert werden sollen?

12. Für die Gewinner eines Musikrätsels sollen Schallplatten eingekauft werden. Einige sollen eine Langspielplatte zu 16,10 M als ersten Preis, die anderen eine Quartettplatte zu 8,10 M als zweiten Preis erhalten. Insgesamt stehen 100 M zur Verfügung und es soll 10 Preisträger geben.
   a) Wieviel erste Preise können höchstens vergeben werden?
   b) Wieviel erste Preise wären möglich, wenn Langspielplatten zu 12,10 M gekauft würden?

13. Wieviel Prozent der Masse einer Ware kann man für dieselbe Summe weniger einkaufen, wenn ihr Preis um 50% (um 100%) gestiegen ist?

14. Die Straßenbahnen der Linien 6 und 8 fahren morgens 6 Uhr gleichzeitig von derselben Haltestelle ab. Die Linie 6 fährt alle 12 Minuten, die Linie 8 alle 20 Minuten. Nach wieviel Minuten fahren wieder beide Linien gleichzeitig von dieser Haltestelle ab?

15. Wieviel zweistellige Zahlen kann man aus den Ziffern 0; 2; 4; 6; 8 aufschreiben?

16. Runde in jeder Gleichung alle auftretenden Koeffizienten von x auf eine Dezimalstelle und ermittle die Lösungsmenge der so gefundenen Gleichung! Vergleiche sie mit der Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung! $(x \in Q)$
   a) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x$ b) $-3{,}99x + 8{,}3 = -4{,}1x + 8{,}3$
   c) $\frac{1}{8}x - 1 = \frac{1}{7}x$ d) $0{,}01x - 2 = -0{,}01x - 2$

17.* Löse jede Gleichung, indem du zunächst alle Rechnungen mit dem Taschenrechner ausführst; löse dann ohne Taschenrechner! Vergleiche und erkläre! $(y \in Q)$
   a) $\frac{12\,345\,679}{37\,037\,034}y = \frac{1}{3}y + 1$ b) $\frac{24\,691\,365}{86\,419\,746}y = \frac{2}{7}y - 1$

D Quadratzahl und Quadratwurzel

Quadrieren

1 Zur Wiederholung

● 1 **Berechne die Flächeninhalte der im Bild D 1 dargestellten Rechtecke!**

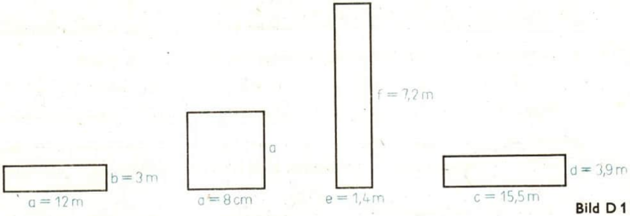


Bild D 1

In einem der Rechtecke sind die Seiten gleich lang. Solche Rechtecke heißen *Quadrate*. Das Quadrat ist ein Sonderfall des Rechtecks. Deshalb ist die Formel für den *Flächeninhalt* des Quadrats ein Sonderfall der Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks.

Flächeninhalt des Rechtecks: $A_R = a \cdot b$
Flächeninhalt des Quadrats: $A_Q = a \cdot a$

Man schreibt das Produkt $a \cdot a$ auch in der Form a^2 (sprich: „*a* hoch zwei", oder „*a* Quadrat") und sagt, daß die Größe *a quadriert* wird. Man nennt a^2 **das Quadrat von *a***. Diese Schreib- und Sprechweisen benutzt man auch dann, wenn *a keine Größe* (bestehend aus Zahlenwert und Einheit), sondern *nur eine Zahl* ist.

Falls a eine *natürliche Zahl* ist, nennt man die Zahl a^2 eine **Quadratzahl**. Die Zahl 16 ist eine Quadratzahl, denn sie ist das Quadrat der natürlichen Zahl 4. ($4^2 = 16$)
Die Zahl 2,25 ist zwar das Quadrat der Zahl 1,5 (es ist $1{,}5^2 = 2{,}25$), dennoch ist 2,25 keine Quadratzahl, weil 1,5 *keine* natürliche Zahl ist.

● 2 Ermittle die Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 20 und präge dir diese Quadratzahlen fest ein!

2 Das Quadrieren

Bei der Berechnung des Flächeninhalts eines *Quadrats* werden nur *positive* Zahlen quadriert, weil der Zahlenwert der Seitenlänge eines Quadrats stets größer als Null ist. Wie wir bereits wissen, kann man aber *für jede beliebige rationale Zahl a* statt $a \cdot a$ auch a^2 schreiben (und umgekehrt).
Man bezeichnet die Zahl a^2 als das **Quadrat von a**.

● 3 Berechne!
a) $(-7)^2$ **b)** $(-1)^2$ **c)** $(-11)^2$ **d)** $(-20)^2$

Wegen der eindeutigen Ausführbarkeit der Multiplikation rationaler Zahlen gilt:

▷ 1 **SATZ: Zu jeder rationalen Zahl a gibt es genau eine rationale Zahl b, die gleich a^2 ist.**

● 4 **a)** Berechne im Kopf die Quadrate der folgenden rationalen Zahlen!
2; −2; 0,4; −0,4; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{7}$; $-\frac{3}{7}$; 0,2; −0,2; 0,01; −0,01; 1; −1; 0
b) Begründe, warum man beim Quadrieren kein negatives Ergebnis erhalten kann!

▷ 2 **SATZ: Das Quadrat einer rationalen Zahl a ist stets größer oder gleich Null. ($a^2 \geqq 0$)**

Wählt man für a der Reihe nach die Zahlen 0; 1; 2; 3; ...; 8 und berechnet jeweils a^2, so ist zu erkennen: Je größer a ist, um so größer ist a^2.

● 5 Überlege, ob die Feststellung auch dann gilt, wenn man für a die Zahlen −6, −3, 1 und 10 einsetzt!

Man kann allgemein feststellen:
Wenn *a positiv* ist, dann ist *a^2 um so größer, je größer a* ist.
Wenn *a negativ* ist, dann ist *a^2 um so größer, je kleiner a* ist.
Wählt man für a der Reihe nach die Zahlen 4, 6, 7 und 9 und berechnet jeweils a^2, so gilt in diesen Fällen: $a^2 > a$.

● 6 **a)** Gib drei positive Zahlen an, für die $a^2 > a$ *nicht* gilt!
b) Für welche *positiven* Zahlen a gilt $a^2 < a$, für welche $a^2 = a$ und für welche $a^2 > a$?
c) Gilt die Ungleichung $a^2 > a$, wenn man für a *negative* Zahlen einsetzt?

In einem Kindergarten wurde ein Sandkasten angelegt. Seine Form ist quadratisch, die Seitenlänge beträgt 2,0 m. Es sollte noch ein zweiter Sandkasten gebaut werden – ebenfalls quadratisch, aber doppelt so groß wie der erste. Man steckte dafür ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 4,0 m ab. (↗ Bild D 2)

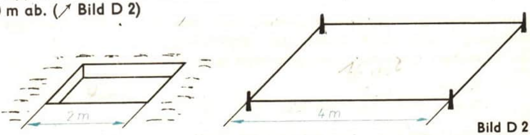


Bild D 2

● 7 Überlege, ob der zweite Sandkasten doppelt so groß wird wie der erste! Zeichne dazu beide Quadrate im Maßstab 1:100 in dein Heft und vergleiche sie!

Was kann die Redeweise „doppelt so groß" bedeuten?
Hat ein Quadrat zum Beispiel eine Seitenlänge von 5 m und ein zweites eine von 10 m, so ist die *Seitenlänge* des zweiten Quadrates *doppelt so groß* wie die des ersten (↗ Bild D 3). Der *Flächeninhalt* des zweiten Quadrates ist aber *viermal so groß* wie der des ersten, denn es gilt:

$$A_1 = (5\ \mathrm{m})^2 = 25\ \mathrm{m}^2 \text{ und } A_2 = (10\ \mathrm{m})^2 = 100\ \mathrm{m}^2.$$

Für den Bau des zweiten Sandkastens hätte also gesagt werden müssen, *was* doppelt so groß sein soll – seine Seitenlänge oder sein Flächeninhalt.

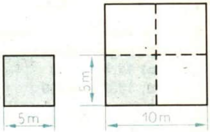


Bild D 3

Aufgaben

1. Beurteile folgende Aussagen! Widerlege falsche Aussagen durch Gegenbeispiele!
   a) Das Quadrat einer Zahl ist stets größer als die Zahl selbst.
   b) Es gibt rationale Zahlen, deren Quadrat gleich der Zahl selbst ist.
   c) Wenn $a < b$ ist, dann ist $a^2 < b^2$.
   d) Wenn $a = a^2$ ist, dann ist $a = 1$.
   e) Wenn a^2 eine gerade Zahl ist, dann ist auch a eine gerade Zahl.

2. Auf das Wievielfache wächst der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man seine Seitenlänge vervierfacht?

3. Berechne 8^2; $(-1{,}2)^2$; $(-0{,}5)^2$; $1{,}5^2$!

4. Welche rationalen Zahlen erfüllen folgende Gleichungen?
   a) $x^2 = 49$ b) $x^2 = 0{,}36$ c) $x^2 = 1$ d) $x^2 = 0$

5.* Auf das Wievielfache muß man die Seitenlänge eines Quadrats vergrößern, wenn sein Flächeninhalt auf das Hundertfache wachsen soll?

3 Bestimmen von a^2 durch Überschlagsrechnung; Abschätzen von a^2

Um Rechenergebnisse zu überprüfen, kann man sie mit den Resultaten von Überschlagsrechnungen oder von Abschätzungen vergleichen.
Bei **Überschlagsrechnungen** geht man so vor:

■ 1 $78{,}4^2$
$78{,}4 \approx 80$; $80^2 = 6\,400$, also $78{,}4^2 \approx 6\,000$

Abschätzungen kann man in folgender Weise ausführen:

■ 2 678^2
678 liegt zwischen 600 und 700;
$600^2 = (6 \cdot 100)^2 = (6 \cdot 100) \cdot (6 \cdot 100) = 6 \cdot 6 \cdot 100 \cdot 100$
$= 36 \cdot 10\,000 = 360\,000$;
$700^2 = (7 \cdot 100)^2 = 49 \cdot 10\,000 = 490\,000$;
also gilt: $360\,000 < 678^2 < 490\,000$.

Aufgaben

(Alle Aufgaben sind im Kopf zu lösen.)

1. Bestimme durch Überschlagsrechnung Näherungswerte für
$9{,}1^2$; $18{,}5^2$; 129^2; $1{,}57^2$; $0{,}194^2$; $0{,}825^2$!

2. In welchen der folgenden Beispiele wurden die Näherungswerte falsch bestimmt? Korrigiere diese!
a) $12{,}9^2 \approx 170$ **b)** $1{,}7^2 \approx 3$ **c)** $19{,}4^2 \approx 40$
d) $188^2 \approx 4\,000$ **e)** $(-7{,}31)^2 \approx \cancel{-}50$ **f)** $0{,}214^2 \approx 0{,}5$

3. Gib Abschätzungen an für $14{,}3^2$; 37^2; $0{,}064^2$; 238^2; $0{,}43^2$; $(-6{,}42)^2$!

4 Quadrieren mit dem Taschenrechner und der Quadrattafel

■ 3 Es ist mit dem *Taschenrechner* das Quadrat der Zahl 8,76 zu ermitteln.
1. Möglichkeit:

Ablaufplan	Anzeige
8,76 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$	$\boxed{76.7376}$

2. Möglichkeit: Der Schulrechner SR 1 besitzt die Taste x^2, mit deren Hilfe man das Quadrat einer Zahl bestimmen kann:

Ablaufplan	Anzeige
8,76 $\boxed{x^2}$	$\boxed{76.7376}$

● 8 Berechne mit deinem Taschenrechner die Quadrate der folgenden Zahlen! Vergleiche die Ergebnisse mit den Resultaten von Überschlagsrechnungen, die du vorher ausführen sollst! **a)** 15,4 **b)** 6,29 **c)** 0,417 **d)** $-28{,}53$

■ 4 Um das Quadrat von 8,76 mit Hilfe der *Quadrattafel* zu bestimmen, geht man wie folgt vor:
1. Man sucht in der mit x bezeichneten Spalte die Zahl 8,7 auf.
2. Man geht von 8,7 aus nach rechts, und zwar bis in die Spalte, über der die Zahl 6 steht.
3. Man liest die so gefundene Zahl ab – es ist 76,74.

Der Taschenrechner hatte den Wert 76,737 6 angezeigt. In der Quadrattafel ist demnach nur ein durch Runden entstandener *Näherungswert* angegeben. Dies trifft auch für viele andere in der Quadrattafel enthaltene Werte zu. (Auch der Taschenrechner zeigt zuweilen nur Näherungswerte an, z. B. bei zu großer Stellenzahl des genauen Wertes.)
In der Quadrattafel sind nur Quadrate von Zahlen angegeben, die im Bereich von 1 bis 9,99 liegen.

■ 5 Es soll das Quadrat von 876 mit Hilfe der Quadrattafel bestimmt werden.
Man schreibt diese Zahl zunächst als Produkt von 8,76 und 100, also $876 = 8{,}76 \cdot 100$.
Nun gilt:
$$\begin{aligned} 876^2 &= (8{,}76 \cdot 100)^2 \\ &= 8{,}76 \cdot 8{,}76 \cdot 100 \cdot 100 \\ &= 8{,}76^2 \cdot 100^2 \end{aligned}$$
Den Wert von $8{,}76^2$ kann man in der Quadrattafel finden, 100^2 berechnet man im Kopf. So erhält man: $876^2 = 76{,}74 \cdot 10\,000 = 767\,400$.

■ 6 Bei der Ermittlung des Quadrates von 0,876 geht man ähnlich wie im Beispiel D 5 vor:
Da $0{,}876 = 8{,}76 \cdot \frac{1}{10}$ ist, erhält man: $0{,}876^2 = 76{,}74 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}7674$.

Aufgaben

1. Bestimme mit Hilfe des Taschenrechners die Quadrate folgender Zahlen! Führe vorher Überschlagsrechnungen aus!
   a) 204,3 b) 0,078 1 c) 476 000 d) 1,020 3 e)* 825 000 000 f) —17,9

2. Bestimme mit Hilfe der Zahlentafel die Quadrate folgender Zahlen! Führe vorher Überschlagsrechnungen aus!
   a) 3,64 b) —8,02 c) 4,2 d) 6,358 e) 451 f) —0,765

3. Entscheide ohne Benutzung von Rechenhilfsmitteln, welche der folgenden Lösungen offensichtlich fehlerhaft sind! Berichtige diese (Rechenhilfsmittel sind jetzt angebracht)!
   a) $28{,}4^2 = 806{,}56$ b) $71{,}2^2 = 50{,}69$ c) $0{,}85^2 = 0{,}722\,5$ d) $0{,}213^2 = 0{,}453\,7$
   Woran konnte man die einzelnen Fehler jeweils erkennen?

4. Berechne ohne Rechenhilfsmittel die Quadrate von
   a) 11; —1,1; 0,11; 110; b) 18; 180; —1,8; 0,18!

5. Löse folgende Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen! ($x \in Q$)
   a) $x^2 = 2 \cdot x$ b) $2x^2 = x$ c) $x^2 : x = 1$

Die Quadratwurzel

5 Das Wurzelziehen

● 9 Eine rechteckige Rasenfläche ist 16,0 m lang und 4,0 m breit. Wie groß müßte die Seitenlänge einer *quadratischen* Rasenfläche sein, wenn sie denselben Flächeninhalt wie die rechteckige haben soll?

Die Bearbeitung des Auftrags D 9 führt auf die Aufgabe, die Seitenlänge eines Quadrates zu bestimmen, dessen Flächeninhalt bekannt ist.

● 10 Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und bestimme dann die Seitenlängen der Quadrate, deren Flächeninhalte angegeben sind! Begründe!

Flächeninhalt	36 m²	25 cm²	81 km²	1 m²	400 mm²	49 m²
Seitenlänge						

Die im Auftrag D 10 auszuführende Operation bezeichnet man als **Quadratwurzelziehen**, oft auch kurz als **Wurzelziehen**. Es tritt nicht nur bei Berechnungen am Quadrat auf, sondern auch bei anderen mathematischen Fragestellungen, in der Physik, in der Technik usw.

■ 7 Es soll die Quadratwurzel aus 16 bestimmt werden.
Lösung: Die Quadratwurzel aus 16 ist 4, denn $4^2 = 16$.
Man schreibt: $\sqrt{16} = 4$

Die Zahl unter dem Wurzelzeichen heißt **Radikand**.
Nun gilt aber auch $(-4)^2 = 16$. Ist also vielleicht auch $\sqrt{16} = -4$ richtig?
Beim Ausführen einer Rechenoperation darf man nicht *mehrere* richtige Ergebnisse zulassen, das Resultat muß *eindeutig* bestimmbar sein.
Man legt deshalb fest: Die Zahl -4 gilt **nicht** als Quadratwurzel aus 16, obwohl $(-4)^2 = 16$ ist.
Allgemein: Quadratwurzel aus b kann nur eine *nichtnegative* Zahl a sein, für die $a^2 = b$ gilt.

● 11 Berechne $\sqrt{5^2}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{9^2}$; $\sqrt{(-9)^2}$; $\sqrt{1^2}$; $\sqrt{(-1)^2}$!
Was stellst du fest?

Für *positive* rationale Zahlen a (und auch für $a = 0$) gilt: $\sqrt{a^2} = a$. In diesem Bereich ist das *Wurzelziehen* demnach die *Umkehrung des Quadrierens*.
Für *beliebige* rationale Zahlen x aber gilt:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Aufgaben

1. Bestimme die Quadratwurzel aus folgenden Zahlen! Begründe wie bei Beispiel D 7!
4; 900; 1; 144; 0; 0,25; $\frac{9}{16}$; $\frac{81}{64}$

2. Welche Aufgaben wurden falsch gelöst? Berichtige diese!
a) $\sqrt{1\,600} = 400$ **b)** $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ **c)** $\sqrt{0{,}09} = 0{,}03$

3. Berechne!
a) $\sqrt{169}$ b) $\sqrt{400}$ c) $\sqrt{0{,}81}$ d) $\sqrt{0{,}04}$

4. Welche Lösungen sind falsch? Berichtige diese!
a) $\sqrt{9{,}3^2} = 9{,}3$ b) $-\sqrt{(-1{,}5)^2} = -1{,}5$ c) $\sqrt{0{,}5^2} = 0{,}25$ d) $\sqrt{y^2} = y$

5.* Löse folgende Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen! $(x \in Q)$
a) $8 \cdot \sqrt{x} = 16$ b) $5 \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}$ c) $12 : \sqrt{x} = 3$

6 Ausführbarkeit des Wurzelziehens

● 12 Überlege, ob man aus —25 die Quadratwurzel ziehen kann! Untersuche ebenso die Zahlen —81; —4; —1!

Im Satz D 2 wurde festgestellt, daß das Quadrat einer rationalen Zahl nicht negativ sein kann. Das heißt, daß es zu einer *negativen* Zahl *b keine* rationale Zahl *a* gibt, deren Quadrat gleich *b* ist. Mit anderen Worten:

Aus negativen Zahlen können wir keine Quadratwurzel ziehen.

Wir überlegen, ob man aus 8 die Quadratwurzel ziehen kann.

a) Es gibt offenbar *keine natürliche Zahl a*, deren Quadrat gleich 8 ist, denn 0^2, 1^2 und 2^2 sind alle *kleiner* als 8, während 3^2, 4^2 usw. alle *größer* als 8 sind.

b) Wenn man die Quadratwurzel aus 8 sucht, kommen als Ergebnis höchstens noch Zahlen in Frage, die zwischen 2 und 3 liegen müßten. (Solche Zahlen kann man durch *Brüche* darstellen.)

Einige Versuche:

Ist $\sqrt{8} = \frac{5}{2}$? Nein, denn $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, und $\frac{25}{4} < 8$.

Ist $\sqrt{8} = \frac{11}{4}$? Nein, denn $\left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}$, und $\frac{121}{16} < 8$.

Ist $\sqrt{8} = \frac{29}{10}$? Nein, denn $\left(\frac{29}{10}\right)^2 = \frac{841}{100}$, und $\frac{841}{100} > 8$.

Bis jetzt haben wir *keine Lösung* gefunden.

c) Wir fragen uns, welche Eigenschaften ein Bruch $\frac{p}{q}$ überhaupt haben müßte, für den $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 8$ gelten soll.

Dabei können wir voraussetzen, daß $\frac{p}{q}$ bereits *in gekürzter Form* vorliegt. (Anderenfalls würden wir erst kürzen.)

1. In einem solchen Bruch müßte $q > 1$ sein, denn sonst würde er eine natürliche Zahl darstellen.
   Wir wissen aber bereits, daß es keine natürliche Zahl gibt, deren Quadrat 8 ist.
2. Andererseits müßte sich aber $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ so kürzen lassen, daß der Nenner gleich 1 wird, denn sonst könnte $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ nicht gleich 8 sein.

Die Forderungen 1. und 2. sind jedoch nicht beide gleichzeitig erfüllbar. Wenn man $\frac{p}{q}$ nicht kürzen kann, dann kann man auch $\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ nicht kürzen, und wenn $q > 1$ ist, dann ist auch $q \cdot q > 1$, also sicher

$\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \neq \frac{8}{1}$.

Das bedeutet: Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 8 ist.

● 13 a) Untersuche, ob man aus der Zahl 2 (bzw. aus 7; 33) die Quadratwurzel ziehen kann!

b) Gibt es eine rationale Zahl a, deren Quadrat gleich $\frac{2}{7}$ ist?

▷ 3 **SATZ: Es gibt positive rationale Zahlen, die im Bereich der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel besitzen.**

Im Bereich der rationalen Zahlen gilt:

Eine *natürliche Zahl* besitzt *nur dann* eine Quadratwurzel, wenn sie eine **Quadratzahl** ist.

Eine *gebrochene Zahl* besitzt *nur dann* eine Quadratwurzel, wenn sie durch einen Bruch dargestellt werden kann, dessen **Zähler und Nenner Quadratzahlen** sind.

Aufgaben

1. Welche der folgenden Zahlen besitzen im Bereich der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel? Gib zu den *anderen* Zahlen die Quadratwurzel an!

   5; —9; $\frac{1}{35}$; 13; —10; $\frac{4}{9}$; $\frac{9}{10}$; 100; 200; 1,44

2. a) Gib alle natürlichen Zahlen zwischen 100 und 200 an, die eine Quadratwurzel besitzen!

   b) Nenne eine Zahl zwischen 3 und 4, die eine Quadratwurzel besitzt!

   c) Gibt es zwischen 1,2 und 1,3 eine Zahl, die eine Quadratwurzel besitzt? Wenn ja, nenne eine!

7 Nichtrationale Quadratwurzeln

Wir wollen jetzt das „Sandkastenproblem" aus der Lerneinheit 2 noch einmal aufgreifen und nunmehr festlegen, daß der *Flächeninhalt* verdoppelt werden soll.
Der vorhandene Sandkasten hat eine Seitenlänge von 2,0 m. Sein Flächeninhalt beträgt also 4,0 m². Demnach müßte der *neue* Sandkasten einen Flächeninhalt von 8,0 m² bekommen. Für den Zahlenwert a seiner Seitenlänge folgt daraus, daß $a^2 = 8$ sein muß.
In der Lerneinheit 6 haben wir festgestellt:

Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 8 ist!

Gibt es dann auch den gewünschten Sandkasten nicht? Oder anders gesagt: Gibt es vielleicht kein Quadrat, dessen Flächeninhalt 8 m² ist?
Wir untersuchen das Problem *zeichnerisch* im Maßstab 1:100.

Wir zeichnen ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm und halbieren es durch eine Diagonale. Jedes der beiden so entstandenen rechtwinkligen Dreiecke besitzt einen Flächeninhalt von 2 cm². (↗ Bild D 4)

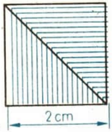


Bild D 4

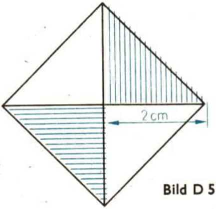


Bild D 5

Aus vier derartigen Dreiecken kann man ein neues Quadrat zusammensetzen, dessen Flächeninhalt 8 cm² beträgt. (↗ Bild D 5)
Dieses Quadrat besitzt offensichtlich auch eine bestimmte Seitenlänge, die (gemessen in cm) durch eine Zahl a angebbar sein muß. Wie wir bereits festgestellt haben, kann diese Zahl a *keine rationale Zahl* sein. Sie gehört zu einer neuen Art von Zahlen. Man bezeichnet sie als eine **irrationale Zahl**. Sie ist dadurch bestimmt, daß $a^2 = 8$ gilt, daß also $a = \sqrt{8}$ ist.
Einen **Näherungswert** für a können wir an unserer Zeichnung durch Messen ermitteln. Man findet: $a \approx 2{,}8$, d. h. $\sqrt{8} \approx 2{,}8$. Für den Bau des gewünschten Sandkastens reicht dieser Näherungswert wahrscheinlich schon aus. Wenn er eine Seitenlänge von 2,8 m erhält, ist sein Flächeninhalt

$$A = (2{,}8\ \text{m})^2 = 7{,}84\ \text{m}^2 \approx 8\ \text{m}^2.$$

Wir wollen aber versuchen, $\sqrt{8}$ *genauer* anzugeben.
Es ist $2{,}8^2 = 7{,}84$ und $2{,}9^2 = 8{,}41$;
also $2{,}8 < \sqrt{8}$ und $\sqrt{8} < 2{,}9$.
Durch systematisches Probieren (Quadrieren der jeweils ausgewählten Zahlen) können wir $\sqrt{8}$ weiter „einschachteln“:

$2{,}82^2 = 7{,}952\,4$ und $2{,}83^2 = 8{,}008\,9$
also $2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83$;
$2{,}828^2 = 7{,}997\,584$ und $2{,}829^2 = 8{,}003\,241$,
also $2{,}828 < \sqrt{8} < 2{,}829$.

Nach weiteren vier Schritten gelangt man zu

$$2{,}828\,427\,1 < \sqrt{8} < 2{,}828\,427\,2$$

Damit ist $\sqrt{8}$ bereits bis auf ein Zehnmillionstel genau angegeben. Man kann diesen Prozeß noch weiter fortsetzen, erhält jedoch nie einen endlichen Dezimalbruch, der den *genauen Wert* von $\sqrt{8}$ angibt, weil die Zahl $\sqrt{8}$ **irrational** ist – jeder *endliche Dezimalbruch* ist aber eine *rationale Zahl*. Das „Einschachteln“ von $\sqrt{8}$ kann auch nicht auf einen *periodischen* Dezimalbruch führen, denn periodische Dezimalbrüche sind, wie wir wissen, ebenfalls *rationale* Zahlen.
$\sqrt{8}$ ist ein *unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch*. Man kann ihn zwar nicht vollständig *angeben* (aufschreiben), trotzdem ist er eindeutig *bestimmt*. Durch „Einschachteln“ zum Beispiel kann man im Prinzip für jede gewünschte Stelle feststellen, welche Ziffer dort steht.

Andere Beispiele für unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche sind:

$a_1 = 0{,}12345678910111213\ldots$
$a_2 = 10{,}12112111211112111112\ldots$
$a_3 = 1{,}4916253649648110012 1\ldots$

(Dabei muß aber vorausgesetzt werden, daß durch die hier leicht erkennbaren Bildungsvorschriften wirklich *alle* Stellen des Dezimalbruchs festgelegt sein sollen!)

▶ 4

DEFINITION: Jeder unendliche, nichtperiodische Dezimalbruch ist eine *irrationale Zahl*.
Die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen bezeichnet man als *die Menge der reellen Zahlen* (Symbol: *R*).

Weitere Beispiele für *irrationale Zahlen* sind:
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ – *kurz*: die Wurzeln aus allen natürlichen Zahlen, die keine Quadratzahlen sind;
$\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{7}{5}}$, $\sqrt{\frac{9}{10}}$ – *kurz*: die Wurzeln aus allen (gekürzten) Brüchen, deren Zähler oder Nenner keine Quadratzahlen sind;
$-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $-\sqrt{\frac{7}{5}}$ – *kurz*: alle negativen Zahlen, deren Beträge irrational sind.
Irrationale Zahlen treten darüber hinaus auch in anderen Zusammenhängen auf, nicht nur beim Quadratwurzelziehen.

Für die meisten praktischen Belange genügt es, irrationale Zahlen auf relativ wenige Stellen genau anzugeben (etwa auf drei oder vier), also mit **rationalen Näherungswerten** zu arbeiten.

Aufgaben

1. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und dazu ein zweites mit doppelt so großem Flächeninhalt!
Wie groß ist die Seitenlänge des zweiten Quadrates? Ist ihr Zahlenwert eine rationale oder eine irrationale Zahl?

2. Zwischen welchen benachbarten natürlichen Zahlen liegt die Zahl **a)** $\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{10}$; **c)** $\sqrt{40}$; **d)** $\sqrt{95}$?

3. Überprüfe durch Quadrieren, welche der folgenden Ungleichungen richtig und welche falsch sind! Berichtige die falschen Ungleichungen!
a) $4{,}46 < \sqrt{20}$ **b)** $1{,}732 > \sqrt{3}$ **c)** $3{,}465 < \sqrt{12}$

4. Bestimme durch schrittweises Einschachteln den Wert von $\sqrt{18}$ auf 5 Stellen genau!

8 Quadratwurzeln auf der Zahlengeraden

Wir wissen:
– Jeder rationalen Zahl ist ein Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet. Dabei gehören zu unterschiedlichen Zahlen auch unterschiedliche Punkte.
– Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden *dicht*, d. h., zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen stets noch weitere rationale Zahlen.

Wir wollen nunmehr *den* Punkt auf der Zahlengeraden bestimmen, der der Zahl $\sqrt{8}$ zugeordnet ist:
Wir zeichnen eine Zahlengerade und über ihr ein Quadrat $ABCD$ (↗ Bild D 6). Wie wir aus Lerneinheit 7 wissen, hat die Diagonale $\overline{AC}$ eine Länge von $\sqrt{8}$ Längeneinheiten (↗ Bilder D 4 und D 5, Seite 101). Wir drehen nunmehr die Strecke $\overline{AC}$ um A so weit, daß ihr Bild $\overline{AC'}$ auf dem positiven Teil der Zahlengeraden liegt (↗ Bild D 6). Dem Punkt C' ist somit die Zahl $\sqrt{8}$ zugeordnet.

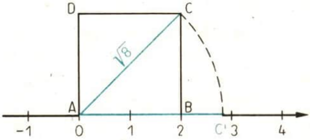


Bild D 6

● 14 Bestimme zeichnerisch die Punkte auf der Zahlengeraden, die den Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$ und $-\sqrt{8}$ zugeordnet sind!

Mit den zu $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $-\sqrt{8}$ und $\sqrt{18}$ gehörigen Punkten haben wir Beispiele für Punkte der Zahlengeraden gefunden, denen *keine rationale Zahl* zugeordnet ist. Obwohl also die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden dicht liegen, werden nicht alle Punkte der Zahlengeraden durch die rationalen Zahlen erfaßt. Erst die Gesamtheit aller **reellen Zahlen** füllt die Zahlengerade lückenlos aus, das heißt:

Zu jeder reellen Zahl gehört ein Punkt der Zahlengeraden, und umgekehrt gehört auch zu jedem Punkt der Zahlengeraden eine reelle Zahl.

Im Bereich der reellen Zahlen gibt es zu jeder *nichtnegativen* Zahl b genau eine nichtnegative Zahl a, für die gilt: $a^2 = b$.
Deshalb können wir nun für $b \geqq 0$ ohne Einschränkungen definieren:

▶ 5 **DEFINITION: Unter $\sqrt{b}$ versteht man diejenige nichtnegative Zahl a, für die $a^2 = b$ gilt. Das Bestimmen der Quadratwurzel bezeichnet man als *Quadratwurzelziehen*.**

Aus *negativen Zahlen* kann man auch im Bereich der reellen Zahlen keine Quadratwurzel ziehen, weil für alle reellen Zahlen a gilt: $a^2 \geqq 0$.

Aufgaben

1. Bestimme zeichnerisch die Punkte der Zahlengeraden, die zu **a)** $\sqrt{32}$; **b)** $2 \cdot \sqrt{8}$; **c)** $-\sqrt{2}$ gehören!

2.* Löse folgende Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen! $(x \in Q)$
a) $\left(\sqrt{x^2}\right)^2 = 100$ **b)** $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ **c)** $\sqrt{\sqrt{x} : x} = 1$ **d)** $\sqrt{x : \sqrt{x}} = 2$

9 Wurzelziehen mit dem Taschenrechner und der Quadrattafel

Um mit dem **Taschenrechner** die Quadratwurzel aus einer Zahl zu bestimmen, benutzt man die Taste $\sqrt{\ }$.

■ 8 *Aufgabe:* $\sqrt{225}$

Ablaufplan	Anzeige
225 $\boxed{\sqrt{\ }}$	15.

Kontrolle: Das angezeigte Ergebnis 15 wird quadriert, indem die Taste x^2 gedrückt wird. Es erscheint in der Anzeige die Zahl 225.

● 15 Berechne mit Hilfe des Taschenrechners die Wurzeln aus folgenden Zahlen! Quadriere zur Kontrolle das jeweilige Ergebnis!
27; 81; 546; 3,69; 38,44; 0,9; 0,096 1; 128 400

In vielen Fällen zeigt der Taschenrechner nur einen **Näherungswert** für die Quadratwurzel an, zum Beispiel für $\sqrt{46}$ den Näherungswert 6,782 33. ($\sqrt{46}$ ist eine **irrationale Zahl,** also sicher kein endlicher Dezimalbruch.)
Treten Quadratwurzeln im Zusammenhang mit weiteren Rechenoperationen auf, so ist jeweils genau zu überlegen, wie der Rechenablaufplan für den Taschenrechner aussehen muß.

■ 9 Berechne $8{,}42 \cdot \sqrt{13}$ auf vier Stellen genau!

Ablaufplan	Anzeige	Ergebnis
8,42 $\boxed{\times}$ 13 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$	30.358742	30,36

Das Gleichheitszeichen am Schluß darf nicht vergessen werden, sonst zeigt der Rechner nur den Wert von $\sqrt{13}$ an.

■ 10 Berechne $\sqrt{18{,}4 + 39{,}7}$ auf vier Stellen genau!

Ablaufplan	Anzeige	Ergebnis
18,4 $\boxed{+}$ 39,7 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$	7.6223356	7,622

Vor der Taste $\sqrt{\ }$ muß erst die Taste $=$ gedrückt werden, weil der Rechner sonst nur den Wert von $\sqrt{39{,}7}$ anzeigt.

Man kann Quadratwurzeln auch mit Hilfe der **Quadrattafel** bestimmen, da das Wurzelziehen die Umkehrung des Quadrierens ist (für positive Zahlen).

■ 11 Um $\sqrt{58}$ zu ermitteln, geht man wie folgt vor:

1. Man sucht „im Inneren" der Tabelle die Zahl, die am wenigsten von 58 abweicht. (Das ist 58,06.)
2. Man geht in der betreffenden Zeile nach links bis in die erste Spalte und liest ab: 7,6.
3. Man geht in der Spalte, in der 58,06 steht, nach oben bis in die erste Zeile, um die dritte Ziffer des Ergebnisses abzulesen: 2.

So findet man: $\sqrt{58} = 7{,}62$.

7,62 ist nur ein *Näherungswert* für $\sqrt{58}$. In vielen Fällen reicht die mit ihm gegebene Genauigkeit aber aus.

Will man mit Hilfe der Quadrattafel Wurzeln aus Zahlen ziehen, die kleiner als 1 oder größer als 100 sind, so muß man zusätzliche Überlegungen anstellen.

■ 12 Gesucht ist $\sqrt{818}$.
Man schreibt die Zahl 818 wie folgt als Produkt: $818 = 100 \cdot 8{,}18$.
Es gilt: $\sqrt{818} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{8{,}18}$
$\sqrt{100} = 10$ (im Kopf)
$\sqrt{8{,}18} = 2{,}86$ (Das ermittelt man aus der Quadrattafel.)
Also ist $\sqrt{818} = 10 \cdot 2{,}86 = 28{,}6$.

■ 13 Um $\sqrt{0{,}75}$ zu ermitteln, geht man ähnlich wie im Beispiel D 12 vor:
$0{,}75 = \frac{1}{100} \cdot 75$; also ist $\sqrt{0{,}75} = \frac{1}{10} \cdot 8{,}66 = 0{,}866$.

Aufgaben

1. Berechne mit Hilfe des Taschenrechners auf 4 Stellen genau!
a) $18{,}31 + \sqrt{39}$ b) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ c) $\sqrt{75} : \sqrt{3}$
d) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}$ e) $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ f) $\sqrt{25 - 16}$

2. Berechne mit dem Taschenrechner auf 6 Stellen genau:
a) $\sqrt{\sqrt{10}}$; b) $\sqrt{\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{\sqrt{1\,000}}$!
Schätze vorher das Ergebnis!

3. a) Gib in den Taschenrechner die Zahl 10 ein! Drücke danach wiederholt auf die Wurzeltaste!
b) Wiederhole das Experiment mit der Zahl 0,1! Was stellst du fest?

4. Bestimme mit Hilfe der Quadrattafel die Wurzeln aus folgenden Zahlen!
a) 4,84 b) 78,5 c) 21 d) 1,3 e) 3 400 f) 0,61

5. Löse folgende Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen!
a) $\sqrt{x} = 17$ b) $\sqrt{x} - 3 = 6$ c) $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 10$

6. Berechne ohne Rechenhilfsmittel die Wurzeln aus
a) 64; 6 400; 0,64; b) 169; 1,69; 0,016 9!

7. Berechne die Wurzeln aus 0,49; 4,9; 49; 490; 4 900; 49 000!

8. Berechne!
a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{0{,}5}$
d) $\sqrt{0{,}05}$ e) $\sqrt{35} + \sqrt{37}$ f) $\sqrt{35 + 37}$

9. Berechne!
a) $\sqrt{29{,}826}$ b) $\sqrt{29{,}527}$ c) $\sqrt{2{,}952\,7}$
d) $\sqrt{70{,}8}$ e) $70{,}8 \cdot \sqrt{70{,}8}$ f) $\sqrt{70{,}8} \cdot \sqrt{70{,}8}$
g) $\sqrt{70{,}8 \cdot 70{,}8}$ h) $\sqrt{5{,}79 \cdot 29{,}38}$ i) $105 \cdot \sqrt{105}$

10.* a) $\sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{25}}$ b) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{27}$ c) $\sqrt{\sqrt{5{,}79} \cdot \sqrt{5{,}79}}$

Zusammenfassung

Quadrieren	
a^2 bedeutet das Produkt der Zahl a mit sich selbst: $a^2 = a \cdot a$	$6^2 = 6 \cdot 6$
Man bezeichnet a^2 als das **Quadrat der Zahl a**. Falls a eine *natürliche* Zahl ist, heißt a^2 eine **Quadratzahl**.	
Für *alle reellen Zahlen* a gilt: $a^2 \geqq 0$.	
Für *positive reelle Zahlen* a und b gilt: Wenn $a < b$ ist, dann ist auch $a^2 < b^2$.	Weil $3{,}5 < 4{,}7$ ist, ist $3{,}5^2 < 4{,}7^2$.
Quadratwurzelziehen	
Es sei b eine nichtnegative reelle Zahl (d. h.: $b \geqq 0$). Unter $\sqrt{b}$ versteht man diejenige nichtnegative reelle Zahl a, für die $a^2 = b$ gilt. Es ist also stets $\sqrt{b} \geqq 0$.	$\sqrt{21{,}16} = 4{,}6$, denn $4{,}6^2 = 21{,}16$ und $4{,}6 > 0$.
$\sqrt{b}$ bezeichnet man als die **Quadratwurzel aus b**.	
Für *positive reelle Zahlen* a und b gilt: Wenn $a < b$ ist, dann ist auch $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.	Weil $5{,}29 < 16{,}81$ ist, ist $\sqrt{5{,}29} < \sqrt{16{,}81}$.
Für *nichtnegative reelle Zahlen* ist das Wurzelziehen die Umkehrung des Quadrierens. ($a \geqq 0$)	Für $a \geqq 0$: $a \underset{\text{Wurzelziehen}}{\overset{\text{Quadrieren}}{\rightleftarrows}} a^2$
Für *beliebige reelle Zahlen* x gilt: $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\sqrt{(-3)^2} = 3$; $\sqrt{5^2} = 5$

Komplexe Übungen

1. Bestimme alle natürlichen Zahlen, die folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen!

a) $x^2 < 5$ **b)** $\sqrt{x} < 5$ **c)** $x^2 = 5$ **d)** $\sqrt{x} = 5$

2. Löse folgende Gleichungen im Bereich der rationalen Zahlen durch inhaltliche Überlegungen!

a) $\sqrt{x} = x$ **b)** $25 : \sqrt{x} = \sqrt{x}$ **c)** $\sqrt{x : \sqrt{x}} = 1$

3. Bestimme für folgende Ergebnisse von Überschlagsrechnungen den absoluten und den prozentualen Fehler im Vergleich zum genauen Resultat!

a) $8{,}8^2 \approx 80$ b) $205^2 \approx 40\,000$ c) $0{,}52^2 \approx 0{,}25$ d) $\sqrt{115} \approx 10{,}5$

4. Bei einem Quadrat wird die Seitenlänge $a = 65$ m um 10% vergrößert. Auf wieviel Prozent wächst dadurch sein Flächeninhalt?

5. Neben einer quadratischen Rasenfläche mit einer Seitenlänge von $a = 6{,}8$ m soll eine zweite angelegt werden, deren Fläche doppelt so groß wie die der ersten ist. Um wieviel Prozent ist der Umfang der zweiten Fläche größer als der Umfang der ersten?

6.* Die Seitenlänge eines Quadrats wird gemessen, man findet $a = 3{,}6$ m. Wie groß kann der prozentuale Fehler beim Berechnen des Flächeninhalts dieses Quadrats werden, wenn der Meßfehler höchstens 2% beträgt?

7.* Setze das richtige der Zeichen $<$, $=$, $>$, ohne die Quadrate bzw. Wurzeln genau zu berechnen! Prüfe dann mit dem Taschenrechner nach, ob du die richtigen Zeichen gesetzt hast!

a) $3{,}4^2 \ldots 4{,}3^2$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \ldots 0{,}75^2$ c) $(-1{,}9)^2 \ldots 1{,}3^2$ d) $0{,}87^2 \ldots 0{,}78^2$

e) $\sqrt{0{,}5} \ldots 0{,}5$ f) $\sqrt{38} \ldots 38^2$ g) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \ldots \sqrt{\frac{4}{5}}$ h) $\left(\frac{3}{8}\right)^2 \ldots \frac{3}{8}$

8. Gib wenigstens eine Zahl x an, für die gilt:

a) $50 < x^2 < 100$; b) $120 < x^2 < 150$; c) $12 < \sqrt{x} < 13$!

9. Berechne sowohl mit dem Taschenrechner als auch mit Hilfe der Quadrattafel:

a) $\sqrt{10 + \sqrt{24}}$; b) $\sqrt{8{,}5 \cdot \sqrt{12}}$; c) $\sqrt{\dfrac{8{,}05}{(11{,}2 - 10{,}8)^2}}$!

Wie groß ist jeweils die Differenz der beiden Werte?

10.* Überlege, welche der folgenden Aufgaben eine rationale und welche eine irrationale Zahl als Ergebnis haben! Begründe deine Auffassung!

a) $\sqrt{8} - 1{,}5$ b) $3 \cdot \sqrt{1{,}44}$ c) $8{,}6 : \sqrt{5}$ d) $\sqrt{13^2 - 9^2}$ e) $\sqrt{\sqrt{20}}$

E Darstellende Geometrie

Projektionsbegriff; Projektionsarten; schräge Parallelprojektion ($\alpha = 45°$; $q = \frac{1}{2}$)

1 Projektion

Neben der Sprache ist die Zeichnung ein wichtiges Verständigungsmittel der Menschen. Sprechen sie verschiedene Sprachen, kann oft eine Zeichnung eine Verständigung zwischen ihnen ermöglichen. Aber auch bei anderen Gelegenheiten nutzt der Mensch Zeichnungen, z. B. wenn er Gegenstände herstellen will oder wenn er sich im Gelände orientieren möchte. Dann werden **technische Zeichnungen** bzw. **Landkarten** verwendet, für die im RGW einheitliche Regeln in Form von Standards (TGL) festgelegt sind, um ein Verstehen des Inhalts unabhängig von der Sprache in jedem Land zu ermöglichen.
Wir werden jetzt Verfahren kennenlernen, nach denen man geometrische Gebilde des Raumes auf ein Zeichenblatt abbildet. Diese Verfahren machen es möglich, daß man sich auf Grund der Zeichnung auch geometrische Gebilde des Raumes genau vorstellen kann.
Das Bild E 1 zeigt eine Möglichkeit, wie wir von Gegenständen Bilder erhalten können. Wir erhalten vom Objekt, das man allgemein **Original** nennt, ein **Bild** auf einer **Bildebene**. Originalpunkte sind mit ihren Bildpunkten durch **Projektionsgeraden** verbunden. Das Abbildungsverfahren nennen wir **Projektion**. Im Bild E 2 ist veranschaulicht, wie Punkte des Raumes auf Punkte einer Ebene **projiziert** werden.

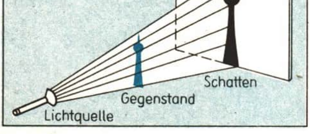


Bild E 1

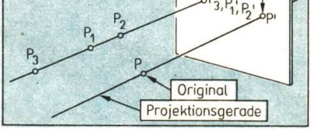


Bild E 2

Im bisherigen Unterricht haben wir vor allem **eineindeutige Abbildungen** einer Ebene auf sich kennengelernt, z. B. Verschiebungen und Drehungen. Die Bezeichnungen der Bilder werden bei einer Projektion genau wie bei einer Verschiebung mit einem Strich versehen: Originalpunkt — P; Bildpunkt — P' (↗ Bild E 2).

● 1 Betrachte das Bild E 2 und begründe, warum der folgende Satz gilt!

▷ 1 **SATZ: Die *Projektion* ist eine *eindeutige Abbildung* von Punkten des Raumes auf Punkte einer Ebene.**

Wir betrachten zwei voneinander verschiedene Lagen der Projektionsgeraden zueinander:

Die Projektionsgeraden verlaufen alle durch einen Punkt (der Punkt liegt nicht in der Bildebene) – **Zentralprojektion.** (↗ Bild E 3a)

Die Projektionsgeraden verlaufen alle zueinander parallel (und nicht parallel zur Bildebene) – **Parallelprojektion.** Dabei können die Projektionsgeraden *schräg* bzw. *senkrecht zur Bildebene* liegen; wir sagen dann **schräge Parallelprojektion** bzw. **senkrechte Projektion.** (↗ Bild E 3b und c)

Die Zentralprojektion kann durch die Schattenbildung mit Hilfe einer Glühlampe veranschaulicht werden, die Parallelprojektion durch die Schattenbildung des Sonnenlichts.

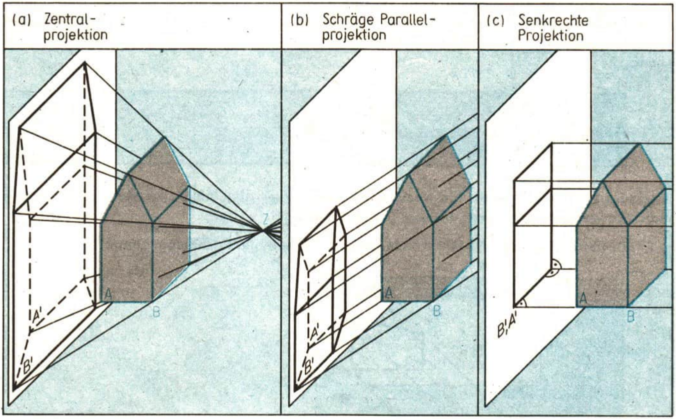


Bild E 3

2 Parallelprojektion

Beim Projizieren eines Körpers bringen wir diesen meist in eine solche Stellung vor eine lotrecht stehende Bildebene, daß sich möglichst viele Kanten und Flächen in Parallellage oder in senkrechter Lage zur Bildebene befinden.

● 2 Welche Flächen (Kanten) der Körper im Bild E 4 befinden sich in Parallellage, welche in senkrechter Lage zur Bildebene?

Bei der Lage von Kanten (Strecken) zur Bildebene unterscheiden wir (↗ Bild E 4):

Kanten in *Breitenrichtung* (z. B. $\overline{EF}$, $\overline{MN}$),
Kanten in *Höhenrichtung* (z. B. $\overline{AE}$, $\overline{CG}$),
Kanten in *Tiefenrichtung* (z. B. $\overline{BC}$, $\overline{MP}$),
geneigte Kanten (z. B. $\overline{MS}$, $\overline{PS}$).

Je nach der Stellung des Körpers zur Bildebene kann eine Körperkante jede Richtung einnehmen.

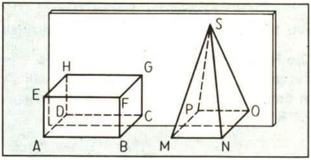


Bild E 4

● 3 Halte Modelle eines Quaders, einer quadratischen Pyramide und anderer Körper in verschiedenen Stellungen zu einer Bildebene (z. B. Zimmerwand) und untersuche, welche Kanten in welcher Richtung liegen!

Bei schräger Parallelprojektion eines Würfels haben die Bilder der Kanten spezielle Lagen in der Bildebene: Die Bilder der Kanten in Breitenrichtung liegen in der Richtung der Zeilen der Bildebene, die Bilder der Kanten in Höhenrichtung in der Richtung der Spalten der Bildebene.

▷ 2 **SATZ: Wenn eine Strecke oder eine ebene Figur *parallel zur Bildebene* liegt, dann ist das Bild zum Original kongruent.** (↗ Bild E 5)

Man sagt bei *Strecken* dazu: Sie werden in *wahrer Länge* abgebildet. Bei *ebenen Figuren* sagt man: Sie werden in *wahrer Größe und Gestalt* abgebildet.

● 4 Beweise den Satz E 2! (Verwende im Bild E 5 gezeigte Parallelogramme!)

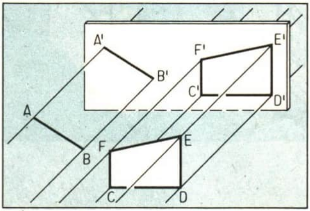


Bild E 5

Kanten in Breitenrichtung und Kanten in Höhenrichtung werden in *wahrer Länge* abgebildet. Die Bilder der Kanten in Tiefenrichtung werden durch eine Richtungsänderung der Projektionsgeraden in ihrer Lage, Länge und Richtung unterschiedlich abgebildet, man sagt dazu: Die Kanten in Tiefenrichtung werden *verzerrt* abgebildet (↗ Bild E 6; jeweils Bilder eines Würfels). Die Bilder zueinander paralleler Geraden (Kanten) sind zueinander parallel.

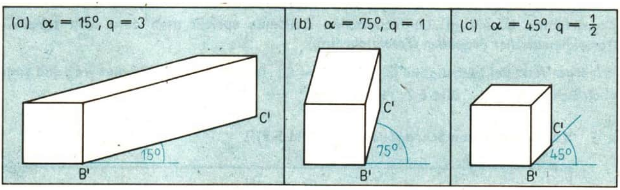


Bild E 6

Der Winkel zwischen der Richtung der Zeilen der Bildebene und dem Bild einer Strecke in Tiefenrichtung heißt **Verzerrungswinkel α.** Sein Scheitel ist der Bildpunkt des vorderen Endpunktes der Strecke in Tiefenrichtung. Der Quotient aus der Länge des Bildes und der Länge des Originals einer Strecke in Tiefenrichtung wird **Verzerrungsverhältnis *q*** genannt (auch bei $q = 1$).

$$q = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} \qquad (q > 0)$$

Bei *jeder* Wahl von α und q entstehen Bilder in schräger Parallelprojektion. (↗ Bild E 6 und Arbeitsblatt 2 des Heftes „Darstellende Geometrie“)

3 Schrägbilder

Wir nennen die Bilder bei schräger Parallelprojektion *Schrägbild* und fügen die Größen von α und q hinzu, z. B. *Schrägbild* $\left(\alpha = 60°;\ q = \frac{1}{3}\right)$. (↗ Bild E 7)

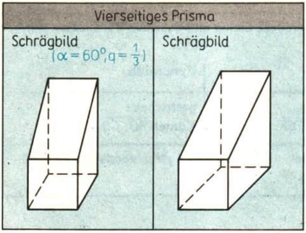


Bild E 7

Im Bild E 6 und im Arbeitsblatt 2 deutet man nicht sofort jedes Teilbild als Schrägbild eines Würfels.

● 5 Welches Schrägbild im Bild E 6 gibt den Würfel deiner Meinung nach am besten wieder?

Das Schrägbild $\left(\alpha = 45°;\ q = \frac{1}{2}\right)$ wird wegen seiner Anschaulichkeit und der bequemen Konstruktion bevorzugt. Im technischen Zeichnen spricht man dann von *schiefwinkliger frontaldimetrischer Projektion* (*Frontaldimetrie*).

Wir legen fest: Bei „Schrägbild $\left(\alpha = 45°;\ q = \frac{1}{2}\right)$" lassen wir die Klammer weg und sagen nur noch **Schrägbild**. (↗ Bild E 7; rechte Seite)

■ 1 Konstruktion von Schrägbildern (↗ Bild E 8)[1]

Gegeben sei

ein **Quader** *ABCDEFGH*.	ein **regelmäßiges dreiseitiges Prisma** *ABCDEF* (keine Kanten in Tiefenrichtung).	eine **quadratische Pyramide** *ABCDS* (keine Kanten in Höhenrichtung).

Gesucht ist das Schrägbild.

Wir verschaffen uns Klarheit über die Körperform und den voraussichtlichen Platzbedarf des Schrägbildes auf dem Zeichenblatt. Wir zeichnen mit einem harten Bleistift schmale Hilfslinien.

(1) Wir konstruieren das Schrägbild der Grundfläche und bezeichnen die Bilder der Eckpunkte. (↗ Bild E 8a)
Beachte beim dreiseitigen Prisma: Wir konstruieren zunächst das gleichseitige Dreieck *ABC* in wahrer Größe als Hilfsfigur ($\overline{AB}$ sei eine Kante in Breitenrichtung). Von *C* fällen wir das Lot auf $\overline{AB}$ und erhalten den Fußpunkt *P*. $\overline{CP}$ ist eine Strecke in Tiefenrichtung.

(2) Wir konstruieren die Bilder der Kanten oder Strecken in Höhenrichtung und bezeichnen die Bilder der Eckpunkte. (↗ Bild E 8b)
Beachte bei der Pyramide: Das Bild des Fußpunktes der Pyramidenhöhe ist der Schnittpunkt *M* der Diagonalen der Grundfläche.

(3) Wir konstruieren die Bilder der restlichen Kanten. (↗ Bild E 8c)

(4) Wir zeichnen mit einem weichen Bleistift breitere Linien und beachten die Sichtbarkeit. (↗ Bild E 8d)

Quader	**Prisma**	**Pyramide**
gestrichelt: Kanten $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{DH}$	gestrichelt: Kanten $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CF}$	gestrichelt: Kanten $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, $\overline{DS}$

Wir kontrollieren, indem wir uns den Körper nach dem Schrägbild vorstellen und mit der Aufgabenstellung vergleichen.

[1]) Bei Schrägbildern bezeichnen wir die Bilder der Eckpunkte wie die Originalpunkte, z. B. mit *A*, *nicht* mit *A'*.

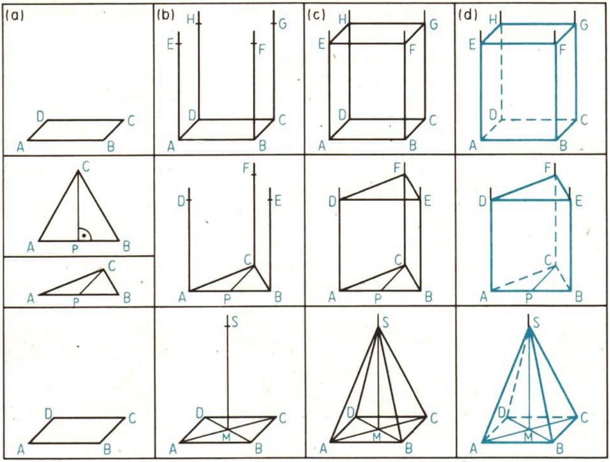


Bild E 8

Aufgaben

1. Konstruiere das Schrägbild eines Quaders ($a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm), wenn er **a)** auf einer größten, **b)** auf einer kleinsten Begrenzungsfläche steht!

2. Konstruiere das Schrägbild eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas ($a = 4$ cm, $h = 6$ cm)!

3. Konstruiere das Schrägbild einer quadratischen Pyramide ($a = 4$ cm; $h = 6{,}5$ cm)!

4.* Gegeben sei die Grundfläche eines 5 cm hohen Prismas. Konstruiere das Schrägbild des Prismas! Vorgabe der Grundfläche *ABCDE* mit Hilfe der Lochschablone: *A*(22), *B*(24), *C*(19), *D*(15), *E*(14).

5. Ermittle die wahren Kantenlängen der im Bild E 9 im Schrägbild dargestellten Prismen! Bezeichne zuvor die Eckpunkte!

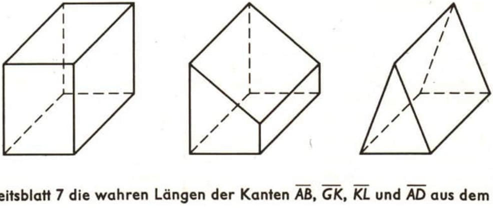


Bild E 9

6. Bestimme im Arbeitsblatt 7 die wahren Längen der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{GK}$, $\overline{KL}$ und $\overline{AD}$ aus dem Schrägbild!

7. Konstruiere nach Prismenmodellen des Stereometriebaukastens die Schrägbilder; entnimm die Maße den Modellen!

8. Skizziere (Freihandzeichnung; ohne Zeichengeräte, nur mit Bleistift!) das Schrägbild **a)** eines Würfels, **b)** einer quadratischen Pyramide, **c)** eines Quaders, dessen Höhe halb so groß und dessen Tiefe viermal so groß wie seine Breite sind!

Zusammenfassung

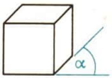
In der darstellenden Geometrie werden geometrische Gebilde des Raumes durch eine **Projektion** auf eine Bildebene so abgebildet, daß man aus der ebenen Zeichnung auf das geometrische Gebilde des Raumes und dessen Eigenschaften schließen kann.

Wir unterscheiden zwischen **Zentralprojektion** und **Parallelprojektion**, bei der alle Projektionsgeraden zueinander parallel liegen, und zwar schräg bzw. senkrecht zur Bildebene.

Abbildung von Körperkanten beim Schrägbild:

Kantenart	Richtung des Bildes in der Bildebene	Länge des Bildes im Vergleich zur Länge des Originals
Kante in Breitenrichtung	in Richtung der Zeilen	kongruent (wahre Länge)
Kante in Höhenrichtung	in Richtung der Spalten	kongruent (wahre Länge)
Kante in Tiefenrichtung	Verzerrungswinkel $\alpha = 45°$	Verzerrungsverhältnis $q = \frac{1}{2}$

Schrägbild eines Würfels



Senkrechte Eintafelprojektion

4 Eintafelbilder

Wir wollen uns jetzt dem Abbilden durch senkrechte Projektion zuwenden. Die Originale werden über einer *horizontal liegenden Bildebene* angeordnet. Die Projektionsgeraden verlaufen „von oben nach unten“. Man spricht von der **senkrechten Eintafelprojektion**. Das Bild nennt man **Riß**. (↗ Bild E 10)

Wir wissen bereits: Jede Projektion ist eine eindeutige Abbildung (↗ Satz E 1). Im Bild E 2 (↗ S. 108) kann nur dann angegeben werden, wo z. B. der Punkt P_2 liegt, wenn zusätzlich zu seinem Bild sein Abstand zur Bildebene bekannt ist.

Bei der senkrechten Eintafelprojektion wird der *Abstand* eines Punktes von der Bildebene (also die *Höhe des Punktes*) bestimmt und auf einen **Höhenmaßstab** abgetragen. Dieser Höhenmaßstab wird dem Riß beigefügt. (↗ Bild E 11)

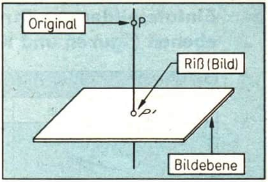


Bild E 10

● 6 Miß im Schrägbild des Bildes E 11 die Punkthöhen und vergleiche sie mit denen im Höhenmaßstab!

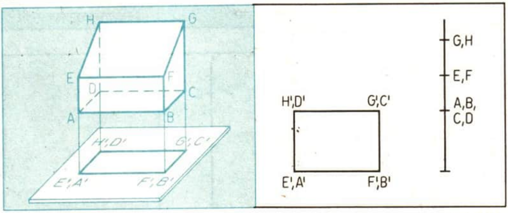


Bild E 11

Aus dem Riß eines Punktes und seiner Höhe auf dem Höhenmaßstab kann man genau einen Punkt als Original ermitteln (*umkehrbar eindeutige* bzw. *eineindeutige Abbildung*).
Den Riß und den zugehörigen Höhenmaßstab eines geometrischen Objektes nennen wir das **Eintafelbild** dieses Objektes.
Beachte: Fallen Bilder mehrerer Punkte in einem Bildpunkt zusammen, so schreiben wir zuerst die Bezeichnung des von der Bildebene weiter entfernt liegenden Punktes an das Bild.

In Landkarten wird die senkrechte Eintafelprojektion angewandt. Dort werden die Höhen jedoch meist durch Höhenlinien, Höhenzahlen (Koten) oder Farben angegeben, selten durch einen Höhenmaßstab. (↗ Atlas für die 6. bis 11. Klasse, Seite 1, Topographische Karte 1:25 000)

Aufgabe

1. Bestimme die Höhen der Punkte A bis I im Bild E 12!

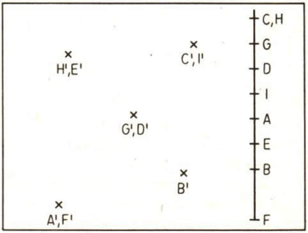


Bild E 12

5 Eintafelbilder von Strecken, Geraden, ebenen Figuren und Körpern

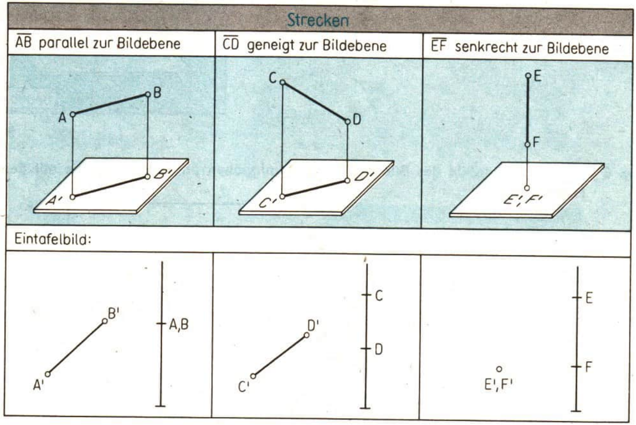


Bild E 13

● **7** **Halte einen Bleistift als Modell einer Strecke in den Lagen, wie sie das Bild E 13 zeigt! Formuliere Aussagen über die Abbildung von Strecken bei senkrechter Eintafelprojektion in einem Satz der Wenn-so-Form! Betrachte nur die Risse im Bild E 13!**

● **8** **Formuliere Aussagen über die Abbildung von Geraden bei senkrechter Eintafelprojektion! Betrachte nur die Risse!**

Im Bild E 14 werden Eintafelbilder eines Würfels (a), einer quadratischen Pyramide (b) und eines dreiseitigen Prismas (c) gezeigt.

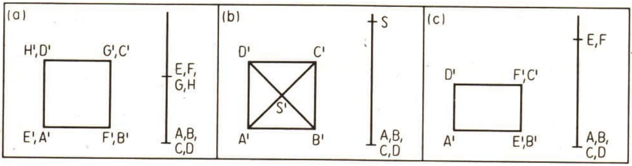


Bild E 14

● **9** **Halte ein Stück Pappe als Modell einer ebenen Figur in den Lagen, wie sie das Bild E 15 zeigt!**
Formuliere Aussagen über die Abbildung von ebenen Figuren bei senkrechter Eintafelprojektion in einem Satz der Wenn-so-Form! Betrachte nur die Risse im Bild E 15!

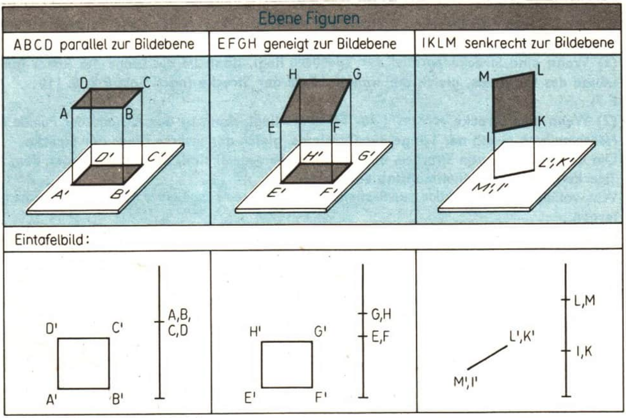


Bild E 15

Aufgaben

1. Konstruiere Eintafelbilder der im Bild E 9 (↗ S. 113) im Schrägbild dargestellten drei Prismen!

2. Welche Körper sind im Bild E 16a bis d dargestellt?

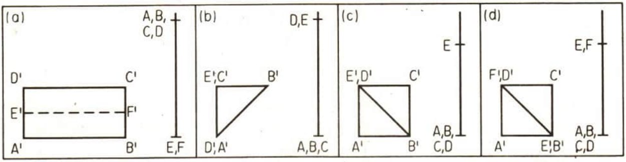


Bild E 16

6 Wahre Länge und Neigungswinkel einer Strecke (Grundaufgabe)

Aus einer Landkarte, auf der die Strecke einer Bergbahn abgebildet ist, kann man nicht die *tatsächliche (wahre) Länge* der Strecke und auch nicht deren *Steigung (Neigungswinkel)* unmittelbar entnehmen. Nur mit Hilfe der Höhenangaben an zwei Streckenpunkten kann man die durchschnittliche Steigung und Länge des Streckenabschnitts ermitteln. Wir wollen in dieser Lerneinheit eine Methode kennenlernen, die in einem solchen Fall angewandt werden kann.

Für zwei Lagen von Strecken können die **wahren Längen** der Originalstrecken sofort bestimmt werden:

(1) Wenn eine Strecke *parallel zur Bildebene* liegt, dann ist die *Länge des Risses* gleich der Länge des Originals, gleich der *wahren Länge* der Strecke (nach Satz E 2, S. 110; ↗ Auftrag E 7).

(2) Wenn eine Strecke *senkrecht zur Bildebene* liegt, dann ist der *Abstand der Punkte auf dem Höhenmaßstab* gleich der Länge des Originals, gleich der *wahren Länge* der Strecke.

Die wahre Länge von *Strecken, die zur Bildebene geneigt* sind, kann man weder dem Riß der Strecke noch dem Höhenmaßstab entnehmen.

Wir wollen die *Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer (geneigten) Strecke* kennenlernen.

Im Bild E 17 ist zwischen der Originalstrecke $\overline{PQ}$ und der Bildebene das Trapez $PP'Q'Q$ hervorgehoben, dessen eine Seite die Originalstrecke $\overline{PQ}$ bildet, deren wahre Länge gesucht ist. Die anderen Seiten sind gegeben: der Riß $\overline{P'Q'}$, die Lote $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ als entsprechende Höhen der Punkte im Höhenmaßstab. Wir *klappen* nun das *Trapez* $PP'Q'Q$ um $\overline{P'Q'}$ in die Bildebene.

Die Länge der geklappten Strecke $\overline{(P)\,(Q)}$ (gelesen: „Strecke *P* geklappt, *Q* geklappt") ist gleich der wahren Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

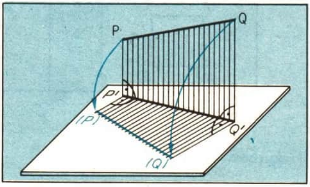


Bild E 17

■ **2** *Gegeben* sei das Eintafelbild der Strecke $\overline{PQ}$. (↗ Bild E 18a)

Gesucht ist die wahre Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

Am Eintafelbild erkennen wir, daß die Strecke $\overline{PQ}$ zur Bildebene geneigt ist.

Konstruktion:

1. Wir errichten in den Punkten P' und Q' die Senkrechten zur Strecke $\overline{P'Q'}$ in die gleiche Halbebene. (↗ Bild E 18b)
2. Wir tragen auf den Senkrechten die entsprechenden Höhen der Punkte P und Q ab, die wir dem Höhenmaßstab entnehmen, und erhalten die Punkte (P) und (Q). (↗ Bild E 18c)
3. Wir zeichnen die Strecke $\overline{(P)\,(Q)}$. (↗ Bild E 18d)
4. Wir messen die Länge der Strecke $\overline{(P)\,(Q)}$.

Die Länge der Strecke $\overline{(P)\,(Q)}$ ist gleich der wahren Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

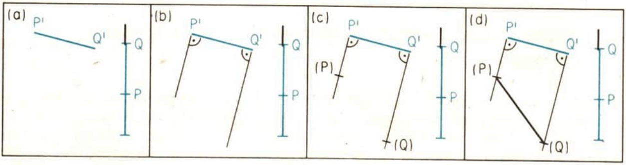


Bild E 18

● 10 Die eben erläuterte Konstruktion könnte auch bei Parallellage der Strecke zur Bildebene angewandt werden. Welche Form hätte dann das Trapez?

Im Bild E 19a ist der **Neigungswinkel α der Strecke $\overline{PQ}$ gegen die Bildebene** eingetragen. Es ist der Winkel, den die Strecke $\overline{PQ}$ mit der Strecke $\overline{RQ}$ einschließt, wobei die Strecke $\overline{RQ}$ parallel zur Bildebene und R auf der Projektionsgeraden durch P liegt. Man kann diesen Winkel auch als einen Winkel α zwischen der Geraden PQ und dem Bild $P'Q'$ der Geraden PQ finden.

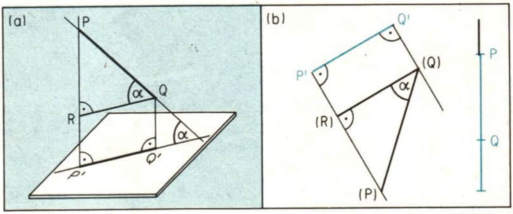


Bild E 19

● 11 Begründe, warum die soeben beschriebenen Winkel zueinander kongruent sind!

Der Neigungswinkel einer Strecke kann alle Werte von 0° bis 90° ($0° \leqq \alpha \leqq 90°$) annehmen.

● 12 Bei welcher Lage einer Strecke beträgt ihr Neigungswinkel 0°, bei welcher 90°?

■ 3 Um den *Neigungswinkel α* einer beliebigen geneigten Strecke *durch Konstruktion* zu bestimmen,
- konstruieren wir deren wahre Länge (↗ Beispiel E 2),
- zeichnen durch den geklappten, tieferen Endpunkt der Strecke eine Parallele zum Riß der Strecke und
- messen den Winkel zwischen der geklappten Strecke und der Parallelen. (↗ Bild E 19b)

Aufgaben

1. Konstruiere die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$, deren Eintafelbild gegeben sei! Bestimme jeweils den Neigungswinkel α!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Länge von $\overline{A'B'}$ in mm	32	28	0	33	36	65	42
Höhe von A in mm	20	25	13	0	12	46	42
Höhe von B in mm	44	25	48	37	12	0	31

2. Bestimme im Arbeitsblatt 14/2. des Heftes „Darstellende Geometrie" die wahre Länge der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{CG}$, $\overline{EH}$, $\overline{GH}$ und $\overline{BF}$!

3. Konstruiere drei voneinander verschiedene Eintafelbilder der Strecke $\overline{AB}$, deren wahre Länge gegeben sei! **a)** $\overline{AB} = 60$ mm **b)** $\overline{AB} = 4{,}2$ cm

4. Konstruiere in die Eintafelbilder der Aufgabe 1a bis d das Eintafelbild je eines Punktes C, der 3 cm hoch und auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt!

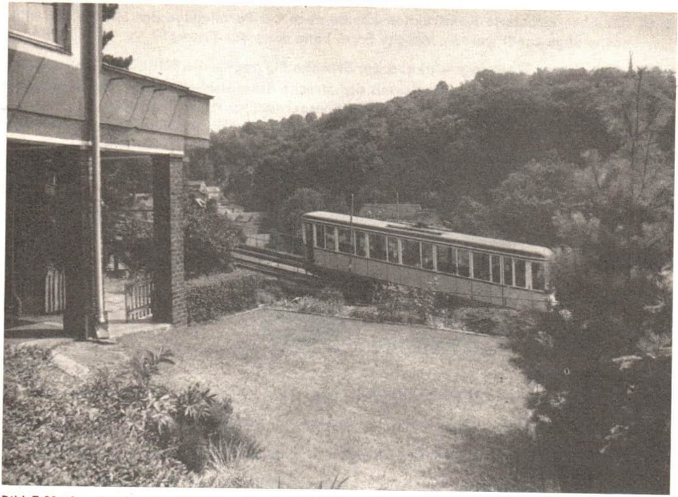


Bild E 20: Standseilbahn in Dresden–Loschwitz (1895 eröffnet; erste Bergseilbahn Deutschlands)

5. Die Stationen der Schwebeseilbahn Dresden-Loschwitz sind auf einer Karte (1 : 5 000) 5,3 cm voneinander entfernt. Die Talstation liegt 114 m hoch, die Bergstation 198 m. Bestimme die Länge und die Steigung der Seilbahn!

7 Wahre Größe und Gestalt ebener Figuren

Geneigte Begrenzungsflächen an Körpern werden in der Bildebene *nicht* in wahrer Größe und Gestalt abgebildet. Die **wahre Größe und Gestalt** von Pyramidenseitenflächen kann durch eine Konstruktion aus dem Eintafelbild der Pyramide ermittelt werden.

● 13 **a)** Welche Form haben die Seitenflächen einer Pyramide?
b) Miß an einem Modell einer Pyramide die Längen der Seitenkanten und formuliere eine Erkenntnis!
c) Skizziere den Riß einer quadratischen Pyramide! Untersuche die Abbildung der Seitenkanten in der Bildebene! (↗ Auftrag E 7, S. 116)

Wir erkennen: Die wahre Größe und Gestalt einer Pyramidenseitenfläche läßt sich konstruieren, wenn die *wahre Länge der Seitenkanten* bekannt ist, d. h., wir müssen die wahre Länge von Dreiecksseiten bestimmen. (↗ Arbeitsblatt 15)

● 14 Führe die Konstruktion aus und richte dich nach Bild E 21! Nach welchem Kongruenzsatz ist die Konstruktion ausführbar? Warum genügt es, die wahre Länge *einer* Seitenkante zu konstruieren?

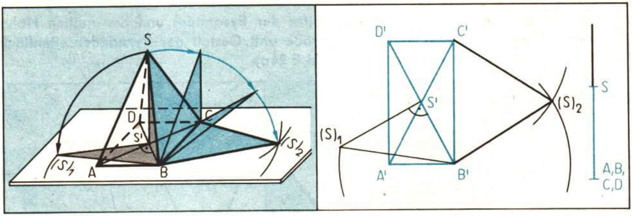


Bild E 21

Für eine zweite Konstruktionsmöglichkeit müssen wir einige neue Begriffe kennenlernen. *Wir wissen bereits* aus dem Geographieunterricht: Höhenlinien verbinden alle Punkte des Geländes mit gleicher Höhe. Auch auf einer geneigten Ebene liegen alle Punkte mit gleicher Höhe auf einer **Höhenlinie *h***. Alle Höhenlinien einer Ebene sind stets zueinander parallel, ebenso ihre Risse (↗ Bild E 22). Die Schnittgerade einer geneigten Ebene mit der Bildebene ist die *nullte Höhenlinie* h_0. Im Bild E 22 ist diese nullte Höhenlinie nicht enthalten, denn von der gegen die Grundrißebene geneigten Ebene wurde nur ein Stück gezeichnet – ein schwarz gerastertes Rechteck. Denkt man sich das Rechteck nach unten fortgesetzt, so trifft es wie im Bild E 23a auf die Grundrißebene. Jede Gerade einer Ebene, die senkrecht zu den Höhenlinien dieser Ebene verläuft, heißt **Fallinie *f***. Der Riß einer Fallinie steht senkrecht zu den Rissen der Höhenlinien (↗ Bild E 22).
Das Dreieck $PF'P'$ heißt **Stützdreieck der Ebene**. In ihm ist der **Neigungswinkel** β der geneigten Ebene gegen die Bildebene zu finden (∢ $PF'P'$; ↗ Bild E 23a, b).

● **15** Veranschauliche dir die vorangegangenen Erklärungen mit einem Stück Pappe und einem Zeichendreieck!

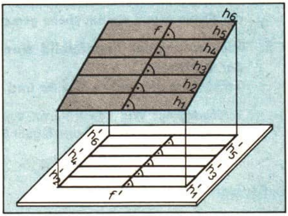


Bild E 22

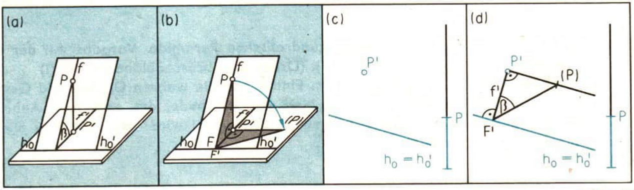


Bild E 23

Nun wollen wir aus einem Punkt (der Spitze der Pyramide) und der nullten Höhenlinie (Grundkante der Pyramide) die wahre Größe und Gestalt der Pyramidenseitenfläche *mit Hilfe eines Stützdreiecks* konstruieren. (↗ Bild E 24a)

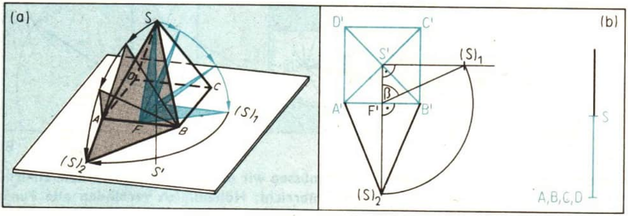


Bild E 24

● 16 **a)** Welche Stücke des Stützdreiecks sind im Eintafelbild gegeben? Welche Seite des Stützdreiecks liegt in der Seitenfläche der Pyramide? Welches Stück ist diese Seite in ihr?

b) Führe die beiden folgenden Konstruktionen (Beispiele E 4 und E 5) selbständig nach den Bildern E 23d und E 24b aus und formuliere eine Beschreibung! (Auch hier hilft die Veranschaulichung mit einem Stück Pappe und einem Zeichendreieck.)

■ 4 *Gegeben* sei die Ebene durch die nullte Höhenlinie h_0 ($h_0 = h_0'$) und das Eintafelbild eines Punktes P der Ebene. (↗ Bild E 23c)
Gesucht ist das Stützdreieck (der Neigungswinkel β der Ebene gegen die Bildebene).

Hinweis: Man konstruiert die wahre Größe und Gestalt des Stützdreiecks $PF'P'$ durch Klappen um $F'P'$ in die Bildebene. Im geklappten Stützdreieck wird der Winkel $P'F'(P)$ als Neigungswinkel β der Ebene gegen die Bildebene gemessen.

■ 5 *Gegeben* sei das Eintafelbild einer quadratischen Pyramide. Die Grundfläche liege in der Bildebene.
Gesucht ist die wahre Größe und Gestalt der Seitenfläche ABS. (↗ Bild E 24a)

Vorüberlegung: Wir konstruieren zuerst das geklappte Stützdreieck $S'F'(S)_1$ der Seitenfläche ABS (↗ Beispiel E 4). Durch A und B geht die benötigte Höhenlinie h_0 der Ebene ABS; S ist der Punkt auf der Ebene.

Aufgaben

1. Gegeben sei das Eintafelbild einer rechteckigen Pyramide ($a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $h = 7$ cm). Konstruiere die Neigungswinkel und die wahren Größen und Gestalten der Seitenflächen!

2. Gegeben sei das Schrägbild einer quadratischen Pyramide. Vorgabe mit der Lochschablone: $A(5)$, $B(4)$, $C(7)$, $D(9)$, $S(17)$. (Drehe die Lochschablone um 180°!)
Konstruiere **a)** das Eintafelbild, **b)** im Eintafelbild die wahren Größen und Gestalten der Pyramidenseitenflächen, **c)** das Netz der Pyramide, das nach dem Anbringen von Klebefalzen ausgeschnitten und zusammengeklebt wird! (Benutze dazu ein Blatt stärkeren Zeichenkartons!)

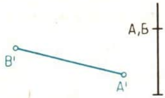
Zusammenfassung

Senkrechte Eintafelprojektion

Die senkrechte Eintafelprojektion ist eine senkrechte Projektion auf eine horizontale Bildebene. Dem Riß wird ein **Höhenmaßstab** beigefügt, auf dem die Höhen aller Punkte abgelesen werden können.
Jedem Punkt des Raumes als Original ist ein Punktepaar zugeordnet. Dieses Punktepaar setzt sich aus dem Punkt im Riß und dem Punkt auf dem Höhenmaßstab zusammen. Umgekehrt ist jedem derartigen Punktepaar eindeutig ein Punkt im Raum zugeordnet. Es handelt sich somit um eine eineindeutige Abbildung.
Den Riß zusammen mit dem zugehörigen Höhenmaßstab eines geometrischen Objektes nennen wir das **Eintafelbild** dieses Objektes (↗ Bild E 11).

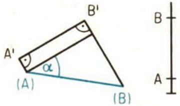
Bestimmen der wahren Länge und des Neigungswinkels α einer Strecke

Strecke parallel zur Bildebene:
Länge in der Bildebene messen; $\alpha = 0°$

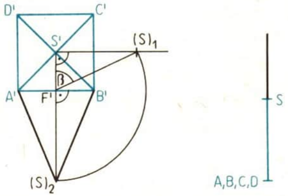


Strecke senkrecht zur Bildebene:
Länge im Höhenmaßstab messen; $\alpha = 90°$

Strecke geneigt zur Bildebene:
Länge in der Konstruktion messen; α kann ebenfalls in der Konstruktion gemessen werden



Konstruktion zur Bestimmung des Neigungswinkels β einer Ebene gegen die Bildebene (Stützdreieck) und der wahren Größe und Gestalt einer geneigten ebenen Figur



Senkrechte Zweitafelprojektion

8 Zweitafelbilder

Wir wissen bereits: Ohne Angabe der Höhe kann das Original aus dem Riß nicht genau bestimmt werden. Eine andere Möglichkeit, die Höhen der Punkte über der Bildebene bzw. den Abstand der Punkte von der Bildebene anzugeben, bietet eine *zweite Bildebene*, die *senkrecht zur ersten* steht und auf die auch *senkrecht projiziert* wird. Diese zweite Bildebene wird meist *hinter* das abzubildende Objekt gestellt. Die (horizontale) Bildebene wird jetzt **Grundrißebene** genannt, das in ihr liegende Bild **Grundriß**. Die zweite, zur Grundrißebene senkrecht stehende Bildebene heißt **Aufrißebene**, das darauf entstehende Bild **Aufriß**. (↗ Bild E 25a)
Durch zwei senkrechte Projektionen (auf die Grundrißebene und auf die Aufrißebene) werden der Grundriß und der Aufriß eines geometrischen Objektes erzeugt. Den Aufriß eines Punktes P bezeichnen wir mit P'' (gelesen: P zwei Strich).
In der Aufrißebene erkennt man die *Höhen der Punkte über der Grundrißebene* bzw. den *Abstand der Punkte von der Grundrißebene*, in der Grundrißebene den *Abstand der Punkte von der Aufrißebene*. Dieses Abbildungsverfahren heißt **senkrechte Zweitafelprojektion.**
Damit die Bilder in einer Zeichenebene dargestellt werden können, denkt man sich die zweite Bildebene – die Aufrißebene – in die Grundrißebene geklappt. Die Klappachse ist dabei die Schnittgerade der beiden Bildebenen und heißt **Rißachse**. Nach dem Klappen liegen der Grundriß P' und der Aufriß P'' des Punktes P auf einer Geraden, die *senkrecht zur Rißachse* verläuft.
Diese Gerade heißt **Ordnungslinie**. (↗ Bild E 25)

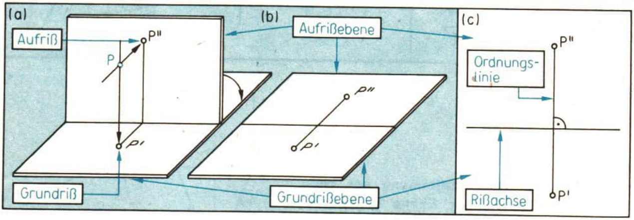


Bild E 25

Jedem Originalpunkt werden in der senkrechten Zweitafelprojektion genau ein Grundriß und genau ein Aufriß auf einer Ordnungslinie zugeordnet und umgekehrt *(eineindeutige Abbildung)*. Den Grundriß und den zugeordneten Aufriß eines geometrischen Objektes nennen wir das **Zweitafelbild** dieses Objektes.

Ein sehr wichtiges Anwendungsgebiet der senkrechten Zweitafelprojektion ist das technische Zeichnen. Dort werden durch Standards (TGL) die Abbildungen entsprechend den praktischen Erfordernissen in Zeichenregeln festgelegt. Wir werden in der darstellenden Geometrie diese Regeln – bis auf die Linienarten – nicht beachten.

Aufgabe

1. Konstruiere die Zweitafelbilder der Punkte *A* bis *E*:
   - *A* liegt 3 cm über der Grundrißebene und 2 cm vor der Aufrißebene;
   - *B* ist von der Grundrißebene 2,5 cm und von der Aufrißebene 3,5 cm entfernt;
   - *C* hat einen Abstand von 2,5 cm von der Grundrißebene und liegt in der Aufrißebene;
   - *D* hat eine Höhe von 4 cm und ist von beiden Bildebenen gleich weit entfernt;
   - *E* liegt in beiden Bildebenen!

9 Zweitafelbilder von Strecken, Geraden, ebenen Figuren und Körpern

Im Bild E 26 sind eine Strecke und ihr Zweitafelbild dargestellt. Wenn man die Bilder der Endpunkte der Strecke kennt, dann kennt man die Bilder der Strecke in den Bildebenen. Aus dem Zweitafelbild einer Strecke kann man auf die *Lage der Originalstrecke im Raum* schließen.

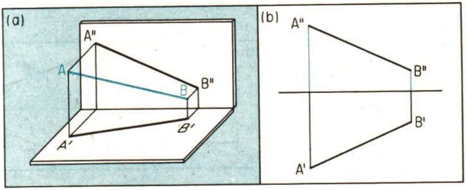


Bild E 26

■ 6 Aus der Grundrißebene im Bild E 26 erkennen wir: *A* liegt *weiter vorn* als *B*, weil *A'* weiter von der Rißachse entfernt ist als *B'*.
Aus der Aufrißebene im Bild E 26 erkennen wir: *A* liegt *höher* als *B*, weil *A"* weiter von der Rißachse entfernt ist als *B"*.

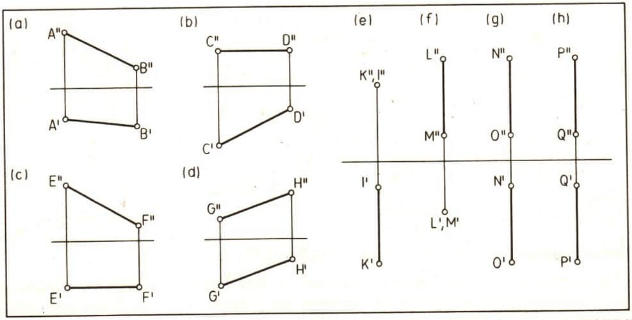


Bild E 27

● **17** Formuliere Aussagen über die Lagen der Strecken im Bild E 27! Veranschauliche dir die Lagen durch einen Bleistift in einem Klapptafelmodell (z. B. aufgeschlagenes Heft)!

Für *Geraden* lassen sich ähnliche Aussagen treffen. Um Zweitafelbilder von Geraden zu erhalten, müssen die Bilder der Strecken über die Endpunkte hinaus verlängert werden. (↗ Bild E 28)

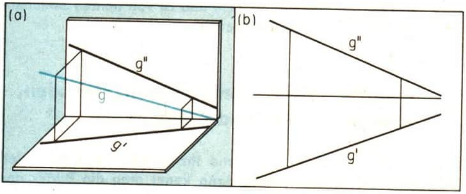


Bild E 28

● **18** Veranschauliche dir die Lage der Geraden im Bild E 29!

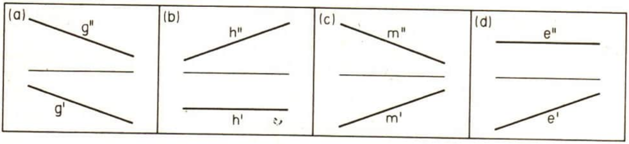


Bild E 29

Das Zweitafelbild *ebener Figuren* betrachten wir am Beispiel von Dreiecksflächen.

● **19** Veranschauliche dir die Lagen der ebenen Figuren im Bild E 30 in einem Klapptafelmodell!
Zeichne ein Dreieck auf Pappe und schneide es aus!

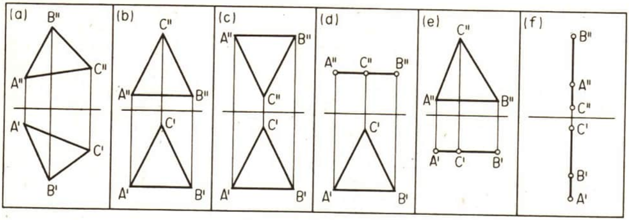


Bild E 30

Einige Zweitafelbilder von *Körpern* zeigt das Bild E 31.

● **20** Wir betrachten die Kanten der Körper im Bild E 31 als Strecken. Formuliere wie im Auftrag E 17 Aussagen über die Lage der Körperkanten im Raum und beschreibe deren Zweitafelbild!

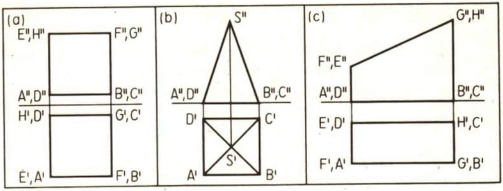


Bild E 31

Aufgaben

1. Konstruiere die Zweitafelbilder der im Bild E 9 (↗ S. 113) gezeigten Prismen!

2. Gegeben seien die Grundrisse der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und die Höhen der Endpunkte der Strecken. Konstruiere die Aufrisse der Strecken und beschreibe die Lage der Strecken im Raum! Zeichne zuerst eine Gerade als Rißachse!
Vorgabe mit der Lochschablone:
Rißachse (13, 16); $A'(20)$, $B'(23)$, $C'(24)$, $D'(19)$;
Punkthöhen: A – 2 cm, B – 4 cm, C – 3 cm, D – 1 cm.

3. Gegeben sei der Grundriß eines Würfels. Konstruiere den Aufriß, wenn der Würfel auf der Grundrißebene steht! Zeichne zuerst eine Gerade als Rißachse!
Vorgabe mit der Lochschablone: Rißachse (8, 3) (Lochschablone drehen!); E', $A'(15)$; F', $B'(16)$; G', $C'(11)$; H', $D'(10)$.

10 Lagebeziehungen im Raum

Zwischen Punkten, Geraden und Ebenen gibt es im Raum bestimmte Lagebeziehungen, die auf der zweiten Umschlagseite dargestellt sind. Aus dem Zweitafelbild zweier Geraden kann man meist auf die Lage der Originalgeraden im Raum schließen und umgekehrt: Die Geraden *schneiden einander* (↗ zweite Umschlagseite, Bild d) oder schneiden einander nicht. Die Geraden sind im zweiten Fall entweder *zueinander parallel* (↗ zweite Umschlagseite, Bild e) oder *zueinander windschief* (↗ zweite Umschlagseite, Bild f).

● 21 Formuliere zu den Lagebeziehungen Aussagen, z. B. für das Bild b auf der zweiten Umschlagseite: „Der Punkt P_1 liegt nicht in der Ebene“ bzw. „Die Ebene geht nicht durch den Punkt P_1“! Veranschauliche dir die einzelnen Beispiele durch entsprechende Modelle (z. B. eines Quaders oder einer quadratischen Pyramide)! Verwende die Eckpunktbezeichnungen wie im Bild E 8, Seite 113!

Aufgabe

1. Beschreibe die gegenseitige Lage der im Bild E 32 im Zweitafelbild dargestellten Geradenpaare und veranschauliche dir die Lagen in einem Klapptafelmodell!

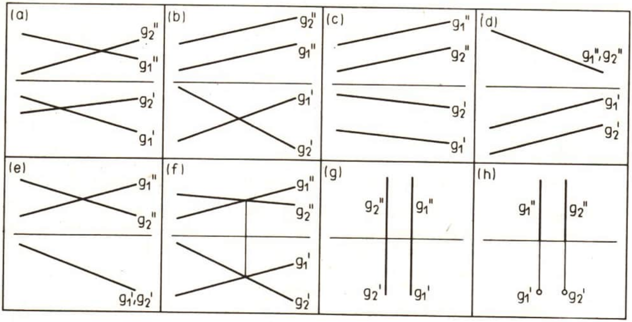


Bild E 32

11 Wahre Länge einer Strecke; ebener Schnitt durch ein Prisma

Wenn man Aussagen über die *wahre Länge einer Strecke* aus dem Zweitafelbild gewinnen will, muß man die Lagen zu den Bildebenen untersuchen.

● 22 Bei welchen speziellen Lagen kann man sofort Aussagen über die wahre Länge einer Strecke treffen? Verwende zur Begründung Satz E 2!

■ 7 Im Bild E 33 liegen die Kanten $\overline{BS}$ und $\overline{DS}$ der Pyramide zur ersten, zweiten und dritten Aufrißebene *geneigt* und werden deshalb in diesen Bildebenen *verkürzt* abgebildet. Zur vierten Aufrißebene liegen die Kanten $\overline{BS}$ und $\overline{DS}$ jedoch *parallel* und werden nach Satz E 2 in *wahrer Länge* abgebildet: $\overline{B^{(5)}S^{(5)}} = \overline{BS}$, $\overline{D^{(5)}S^{(5)}} = \overline{DS}$.

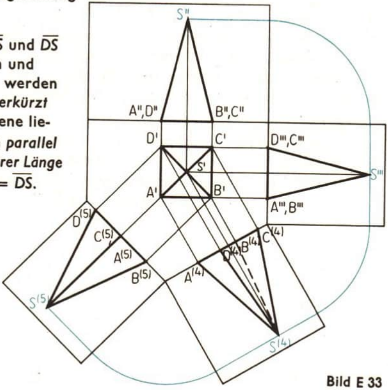


Bild E 33

● 23 Bei welchen Lagen im Bild E 27 (↗ S. 125) kann man die wahre Länge einer Strecke angeben? Miß die Länge der entsprechenden Bilder und gib die wahre Länge der Strecken bei diesen Beispielen an!

Wenn eine Strecke *zu beiden Bildebenen geneigt* liegt, dann kann die wahre Länge der Strecke durch eine *Konstruktion* ermittelt werden.

● 24 Wiederhole die Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke aus dem Eintafelbild! (↗ Lerneinheit 6, Beispiel E 2, S. 118)

Die Konstruktionsschritte gewinnen wir wiederum durch *Klappen des Trapezes AA'B'B* um $\overline{A'B'}$ in die Grundrißebene (↗ Bild E 34). Die Konstruktion ist im Prinzip die gleiche wie beim Eintafelbild, nur müssen die Punkthöhen der Aufrißebene entnommen werden.

● 25 Formuliere die Konstruktionsbeschreibung selbst! Richte dich nach der in Lerneinheit 6 gegebenen Beschreibung und nach Bild E 34!

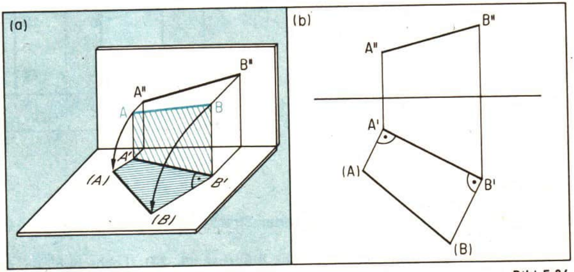


Bild E 34

Ein Quader werde von einer Ebene geschnitten. Die Schnittebene stehe senkrecht zur Aufrißebene und habe zur Grundrißebene den Neigungswinkel β (↗ Bild E 35).

Durch eine Konstruktion wird die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur bestimmt:

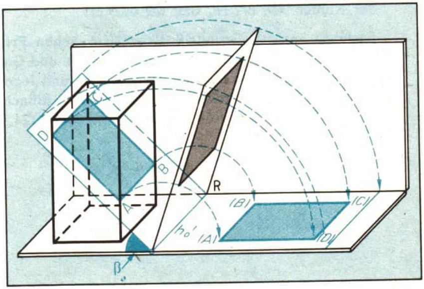


Bild E 35

Die *Schnittebene* mit der Schnittfigur wird um h_0 in die Grundrißebene *geklappt*. In der Aufrißebene beschreiben dabei die Bilder der zu klappenden Punkte Kreise, deren Radius gleich dem Abstand des Aufrisses der Schnittpunkte vom Punkt R auf der Rißachse ist, mit R als Mittelpunkt. In der Grundrißebene liegen die geklappten Punkte auf Parallelen zur Rißachse. Damit ist ein Konstruktionsweg gefunden (↗ Bild E 36).

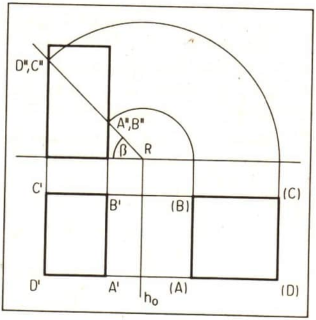


Bild E 36

Aufgaben

1. Gegeben sei das Zweitafelbild einer Strecke $\overline{AB}$. Zeichne zuerst eine Gerade als Rißachse!
Vorgabe mit der Lochschablone: Rißachse (9, 23) (Lochschablone drehen!); $A'(7)$, $A''(10)$; $B'(17)$, $B''(18)$.

a) Konstruiere die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$!

b) Konstruiere das Zweitafelbild eines Punktes C, der 3,5 cm hoch und auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt!

2. Bestimme im Arbeitsblatt 19 des Heftes „Darstellende Geometrie" die wahren Längen der Kanten $\overline{AD}$, $\overline{BF}$, $\overline{HI}$, $\overline{GH}$, $\overline{CG}$ und $\overline{EI}$!

3. Gegeben sei der Grundriß eines 6 cm hohen Prismas und das Zweitafelbild einer Schnittebene. Konstruiere die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur!
Zeichne zuerst eine Gerade als Rißachse und lege die Lochschablone an den linken Blattrand! Vorgabe mit der Lochschablone: Rißachse (13, 16); Grundriß des Prismas (20, 23, 18, 17); Zweitafelbild der Schnittebene (24, 15, 4).

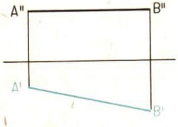
Zusammenfassung

Senkrechte Zweitafelprojektion

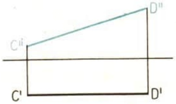
Die senkrechte Zweitafelprojektion besteht aus senkrechten Projektionen auf zwei zueinander senkrecht stehende Bildebenen, die **Grundrißebene** und die **Aufrißebene**. Grund- und Aufriß eines Punktes liegen auf einer **Ordnungslinie**, die senkrecht zur Rißachse liegt.
Jedem Punkt des Raumes wird ein Punktepaar zugeordnet. Dieses Punktepaar setzt sich aus dem Punkt im Grundriß und dem Punkt im Aufriß zusammen. Umgekehrt ist jedem derartigen Punktepaar eindeutig ein Punkt im Raum zugeordnet. Es handelt sich somit um eine eineindeutige Abbildung.
Den Grundriß zusammen mit dem zugeordneten Aufriß eines geometrischen Objektes nennen wir das **Zweitafelbild** dieses Objektes (↗ Bild E 25).

Bestimmen der wahren Länge einer Strecke

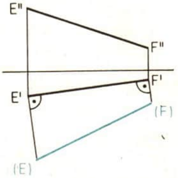
Strecke parallel zur Grundrißebene:
Länge in der Grundrißebene messen



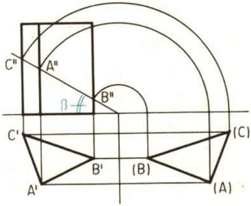
Strecke parallel zur Aufrißebene:
Länge in der Aufrißebene messen



Strecke geneigt zu beiden Bildebenen:
Länge in der Konstruktion messen



Konstruktion zur Bestimmung der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur



Komplexe Übungen

1. Konstruiere Schräg-, Eintafel- und Zweitafelbilder folgender Körper!
   a) Regelmäßiges dreiseitiges Prisma ($a = 4$ cm, $h = 6$ cm), das auf einer Seitenfläche liegt
   b)* 5 cm hohe Prismen, deren Lage der Grundfläche zu einer lotrechten Bildebene gegeben sei
   Zeichne zuerst eine Gerade als Richtung der Bildebene! Vorgabe mit der Lochschablone:

Körper	Ebenenrichtung	Grundfläche
Quader	(1, 16)	(13, 14, 8, 7)
dreiseitiges Prisma	(7, 11)	(17, 15, 12)
fünfseitiges Prisma	(4, 6)	(13, 2, 18, 15, 8)

   c) 7 cm hoher Körper, der aus einem Würfel und einer daraufgesetzten quadratischen Pyramide, deren Grundfläche kongruent einer Seitenfläche des Würfels ist, besteht
   Die Länge der Kante des Würfels betrage α) 2 cm, β) 8 cm, γ) 4 cm.

2. Bestimme in Aufgabe 1. c die wahre Länge der Seitenkanten der aufgesetzten Pyramide
   a) aus dem Eintafelbild mit Hilfe der in Lerneinheit 6 (Beispiel E 2, S. 118) beschriebenen Konstruktion;
   b) aus dem Zweitafelbild (↗ Lerneinheit 11, Bild E 34, S. 129);
   c)* mit Hilfe einer neuen Aufrißebene, die parallel zur entsprechenden Kante liegen muß (warum?)!

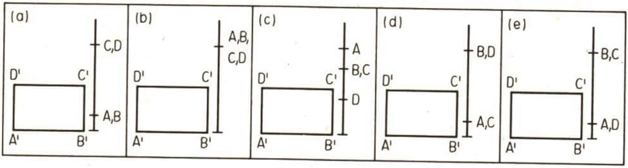


Bild E 37

3. Welche Darstellungen im Bild E 37 sind Eintafelbilder eines Rechtecks, welche nicht?

4. Bestimme im Bild E 37 jeweils die wahren Längen der Kanten (Strecken) $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$! Übertrage das Bild E 37 in dein Heft!

5. Ein Prisma ($h = 8$ cm), dessen Grundfläche
   a) ein gleichseitiges Dreieck ($a = 4$ cm),
   b) ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm)

   ist, werde von einer Ebene geschnitten, die senkrecht zur Aufrißebene verläuft und einen Neigungswinkel $\beta = 40°$ gegen die Grundrißebene besitzt, auf der das Prisma steht. Der Abstand der Höhenlinie h_0 zum Prisma betrage 2 cm. Konstruiere die wahre Größe und Gestalt der Schnittfigur!

6. Welche Darstellungen im Bild E 38 sind nicht Zweitafelbilder jeweils eines Körpers? Gib bei den anderen Beispielen einen Körper als Original an!

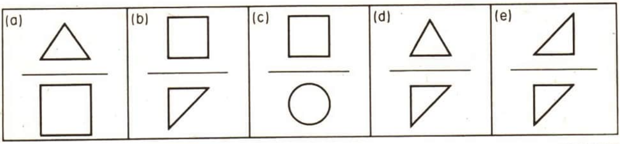


Bild E 38

7.* Konstruiere das Schrägbild $\left(\alpha = 60°;\ q = \frac{1}{3}\right)$ und das Schrägbild $(\alpha = 30°;\ q = 1{,}5)$ einer quadratischen Pyramide ($a = 6$ cm, $h = 8$ cm)!

8.* Konstruiere das Zweitafelbild einer quadratischen Pyramide! Entnimm die Maße einem Modell des Stereometriebaukastens! Konstruiere weitere Aufrisse wie im Bild E 33 (↗ S. 128)! Die Rißachse soll **a)** parallel zu $B'C'$, **b)** beliebig und **c)** parallel zu $D'B'$ liegen.

Hinweis: Beachte, daß die Ordnungslinien stets senkrecht zur zugehörigen Rißachse liegen! Drehe beim Konstruieren das Blatt so, daß die jeweilige Aufrißebene „oben“ liegt!

F Der Kreis

Definition des Kreises; Sätze über den Kreis

1 Definition des Kreises

● 1 **a)** Was wäre die Folge, wenn ein Rad nicht kreisförmig wäre? (↗ Bild F 1)
b) Welche der Figuren im Bild F 2 sind ganz offensichtlich keine Kreise? Begründe deine Antwort!

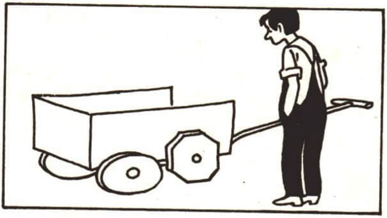


Bild F 1

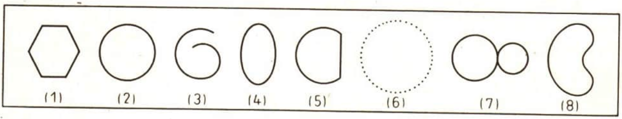


Bild F 2

Wollen wir exakt beschreiben, was ein **Kreis** ist, benötigen wir eine Definition.

▶ 1 **DEFINITION: Gegeben ist eine Ebene mit dem Punkt *M*. Als Kreis um *M* mit dem Radius *r* bezeichnet man die Menge aller Punkte dieser Ebene, die von *M* den Abstand *r* haben.**

Der *Radius* des Kreises im Bild F 4 beträgt 1,0 cm; **der** *Durchmesser* 2,0 cm.
$\overline{BM}$ ist **ein** Radius, und $\overline{AC}$ ist **ein** Durchmesser dieses Kreises.

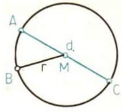


Bild F 4

● 2 **a)** Welche der in der Definition genannten Bedingungen sind bei den Figuren (1) und (3) bis (8) im Bild F 2 nicht erfüllt?
b) Begründe, warum der Mittelpunkt eines Kreises nicht zum Kreis gehört!
c) Gib Bewegungen an, die den Kreis im Bild F 4 auf sich selbst abbilden!
d) Welche der Figuren in den Bildern F 2, F 5 und F 44 (↗ S. 160) besitzen Symmetrieachsen? Beschreibe jeweils die Lagen aller Symmetrieachsen!

Aufgaben

1. Beschreibe, wie man im Garten ein kreisförmiges Beet abstecken kann, das einen Durchmesser von 3 m haben soll!

2. Konstruiere die im Bild F 5 dargestellten Rundfenster!

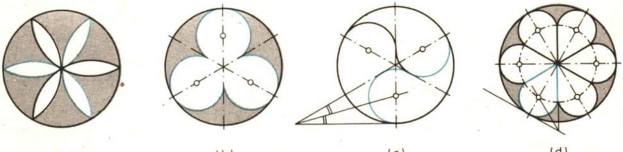


Bild F 5

3. Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Punkte $M_1(4)$, $M_2(5)$, $A(1)$, $B(7)$, $C(8)$! Zeichne dann den Kreis k_1 um M_1, der durch A geht, und den Kreis k_2 um M_2, der durch C geht!
a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?
(1) $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser des Kreises k_1.
(2) Der Radius des Kreises k_1 beträgt 2,5 cm.
(3) Der Radius des Kreises k_2 ist halb so groß wie sein Durchmesser.
(4) $\overline{M_2A}$ ist ein Radius des Kreises k_2.
(5) Alle Durchmesser des Kreises k_1 gehen durch seinen Mittelpunkt.
(6) Der Durchmesser von k_2 ist kleiner als der von k_1.
b) Welche dieser Aussagen gelten für alle Kreise?

4. Im Bild F 4 sei **a)** $\sphericalangle\, AMB = 30°$; **b)** $\sphericalangle\, MAB = 70°$. Berechne jeweils die anderen Winkel des Dreiecks AMB! Begründe!

2 Lagebeziehungen

● 3 Zeichne einen Kreis mit $r = 3$ cm und Geraden, die mit dem Kreis unterschiedlich viele Punkte gemeinsam haben!

Für die gegenseitige *Lage eines Kreises und einer Geraden* gibt es drei Möglichkeiten:

1. Die Gerade *schneidet* den Kreis *in zwei Punkten*. Eine solche Gerade nennt man **Sekante** (Schneidende) des Kreises.
2. Die Gerade hat mit dem Kreis *genau einen Punkt* gemeinsam; sie *berührt* den Kreis in diesem Punkt. Eine solche Gerade heißt **Tangente** (Berührende) des Kreises.
3. Die Gerade hat mit dem Kreis *keinen gemeinsamen Punkt*.

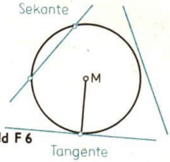


Bild F 6

● 4 Betrachte das Bild F 8 auf Seite 137!
Wie viele Geraden gibt es, die zu g_1 parallel sind und (a) Sekanten, (b) Tangenten, (c) weder Sekanten noch Tangenten des Kreises sind?

Im Bild F 7 sind Zahnräder und Riemenscheiben dargestellt. Wir erkennen in jeder Darstellung mindestens zwei Kreise, die in verschiedenen Lagebeziehungen zueinander stehen. Die Kreise im Bild F 7c heißen zueinander *konzentrisch*, weil sie den gleichen Mittelpunkt haben.

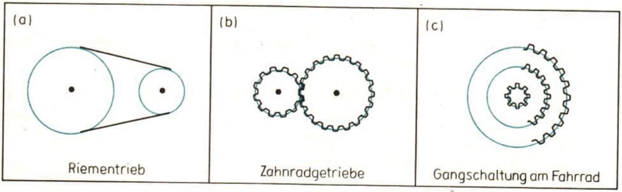


Bild F 7

● 5 **a)** Welche verschiedenen Möglichkeiten für die Anzahl der gemeinsamen Punkte zweier Kreise (mit unterschiedlichen Radien) gibt es?
b) Beschreibe die gegenseitige Lage der Kreise im Bild F 7!
c) Welche weiteren Möglichkeiten für die gegenseitige Lage zweier Kreise gibt es?

Aufgaben

1. Zeichne zwei Kreise k_1 und k_2, die einander schneiden! Zeichne die Punkte A, B, C so, daß gilt:
a) A liegt innerhalb von k_1 und außerhalb von k_2.
b) B liegt innerhalb von k_1 und nicht innerhalb von k_2.
c) $\overline{M_1C} > r_1$ und $\overline{M_2C} < r_2$.

2. Zeichne zwei Kreise k_1 und k_2 mit $r_1 = 2$ cm und $r_2 = 3$ cm, die **a)** keinen Punkt, **b)** genau einen Punkt, **c)** genau zwei Punkte, **d)** mehr als zwei Punkte gemeinsam haben!
(1) Falls eine Aufgabe nicht lösbar ist, begründe, warum!
(2) In welchen dieser Fälle gibt es Geraden, die Tangenten an beide Kreise sind?

3. Wieviel Punkte haben zwei Kreise k_1 und k_2 gemeinsam, wenn folgendes gilt? (Maßangaben in mm)

Entfernung der Mittelpunkte	17	9	10	11	0	13
Radius von k_1	8	11	15	10	9	6
Radius von k_2	5	2	3	2	1	7

3 Tangenten

● 6 a) Nenne Beispiele aus der Praxis, bei deren geometrischer Darstellung Tangenten an einen Kreis auftreten!
b) Zeichne einen Kreis mit $r = 3$ cm und auf ihm einen Punkt P! Zeichne dann eine Tangente, die den Kreis in P berührt!

Wollen wir die Tangente in einem Punkt P eines Kreises mit Sicherheit konstruieren, so muß entweder ein zweiter Punkt der Tangente oder ihre Richtung gegeben sein. Da die Tangente keinen zweiten Punkt mit dem Kreis gemeinsam hat, versuchen wir, den Winkel zwischen der Tangente und dem dazugehörigen Radius $\overline{MP}$ zu bestimmen. Diesen Radius nennen wir *Berührungsradius* der Tangente.

● 7 Betrachte das Bild F 8! Sprich eine Vermutung über die Größe des Winkels aus, den die Tangente t mit ihrem Berührungsradius $\overline{MP}$ bildet! Begründe diese Vermutung!

Da t Tangente ist, liegen außer P alle Punkte von t außerhalb des Kreises; d. h., von allen Punkten der Tangente hat P den kürzesten Abstand zu M. Also muß P Fußpunkt des Lotes von M auf P sein. Damit gilt der erste Teil des folgenden SATZES F 2. (Den zweiten Teil wollen wir hier nicht beweisen.)

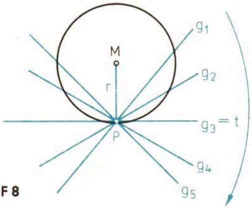
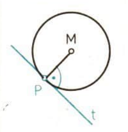


Bild F 8

▷ 2 **SATZ: Für alle Geraden g, die mit einem Kreis um M einen Punkt P gemeinsam haben, gilt:**
1. Wenn g *Tangente* an den Kreis ist, dann steht g *senkrecht auf* $\overline{MP}$.
2. Wenn g *senkrecht auf* $\overline{MP}$ steht, dann ist g *Tangente* an den Kreis.
Kurz: Tangente und Berührungsradius stehen senkrecht aufeinander.



● 8 a) Begründe, daß der zweite Teil des SATZES F 2 die Umkehrung des ersten Teiles ist!
b) Begründe, daß es durch jeden Punkt eines Kreises eine und nur eine Tangente gibt!

Auf Grund des SATZES F 2 können wir nun an einen Kreis um M in einem beliebigen Punkt P dieses Kreises die Tangente konstruieren, da uns ein Punkt und die Richtung der Tangente bekannt sind.

■ 1 Gegeben sind ein Kreis um M und ein Punkt P auf diesem Kreis (↗ Bild F 10). Gesucht ist die Tangente, die den Kreis in P berührt.

Konstruktionsbeschreibung

1. Wir zeichnen den Radius $\overline{MP}$ und verlängern ihn über P hinaus.
2. Wir errichten in P die Senkrechte t zu $\overline{MP}$.

Wegen SATZ F 2 wissen wir, daß t die gesuchte Tangente ist.

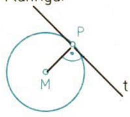


Bild F 10

Aufgaben

1. Zeichne einen Kreis mit $r = 2{,}4$ cm und in ihm zwei Radien $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$, die einen Winkel von 30° einschließen! Konstruiere in den Punkten A und B die Tangenten und berechne den Winkel zwischen den Tangenten!

2. Zeichne einen Kreis mit $r = 3$ cm! Konstruiere an diesen Kreis zwei Tangenten, die einen Winkel von 40° einschließen!

3. Zeichne eine Gerade g und auf ihr den Punkt A! Konstruiere alle Kreise mit $r = 3$ cm, die durch A verlaufen und für die g Tangente ist!

4.* a) Zeichne zwei Geraden g_1 und g_2, die einen Winkel von 40° einschließen! Konstruiere einen Kreis mit $d = 3$ cm, der die beiden Geraden g_1 und g_2 als Tangenten hat! Wie viele solcher Kreise gibt es?
b) Wie müßten zwei Geraden liegen, damit es (1) unendlich viele, (2) gar keinen solcher Kreise gibt?

4 Sehne, Bogen, Winkel am Kreis

Das Bild F 11 zeigt einen Jungen mit einem Bogen. Der **Bogen** wird durch die **Sehne** gespannt.
In der Mathematik bezeichnet man als **Sehne** eines Kreises jede Strecke, deren Endpunkte auf dem Kreis liegen. Durch zwei Punkte auf einem Kreis wird dieser in zwei **Bögen** (oder auch **Kreisbögen**) zerlegt. Mit $\overset{\frown}{AB}$ wollen wir denjenigen Bogen bezeichnen (↗ Bild F 12), auf dem der Punkt A bei Linksdrehung in den Punkt B übergeht. $\overset{\frown}{BA}$ sei der Bogen, auf dem der Punkt B bei Linksdrehung in den Punkt A übergeht.

● 9 a) Kann man in einen Kreis mit $r = 4$ cm beliebig große bzw. beliebig kleine Sehnen einzeichnen?
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Sehne und Sekante?

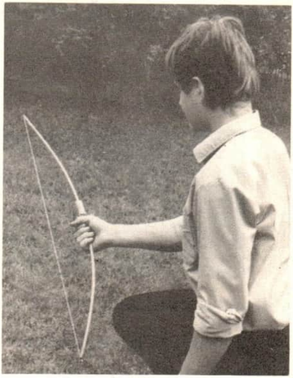


Bild F 11

Zum Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ im Bild F 12 gehören die beiden Winkel BMA und BCA. Man nennt den Winkel BMA **Zentriwinkel** und den Winkel BCA **Peripheriewinkel** über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$.

	Zentriwinkel über $\overset{\frown}{AB}$	Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AB}$
Scheitelpunkt	ist Mittelpunkt M des Kreises	liegt auf dem Kreis, aber nicht auf $\overset{\frown}{AB}$
Schenkel	schneiden den Kreis in den Punkten A und B	

● **10** Zeichne einen Kreis und zwei Punkte C und D auf diesem Kreis!
Zeichne dann
a) die Zentriwinkel α und β über $\overset{\frown}{CD}$ bzw. $\overset{\frown}{DC}$,
b) je einen Peripheriewinkel γ und δ über $\overset{\frown}{CD}$ bzw. $\overset{\frown}{DC}$!
Welcher Zusammenhang besteht zwischen α und β?

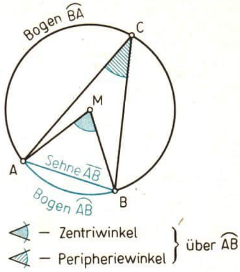


Bild F 12

Aufgaben

1. **a)** Versuche, durch Konstruieren, Messen und Vergleichen Antworten auf folgende Fragen zu finden!
(1) Zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eines Kreises um M seien gleich groß. Was kannst du über die Dreiecke AMB und CMD aussagen?
(2) Welcher Zusammenhang besteht zwischen zwei Zentriwinkeln, die zu gleich großen Bögen gehören?
(3) Ein Durchmesser stehe senkrecht auf einer Sehne desselben Kreises. Vergleiche die durch den Durchmesser gebildeten Teilstrecken der Sehne miteinander!
b) Begründe deine Antwort, indem du dich auf deine Kenntnisse über Bewegungen stützt!
c)* Beweise die Antworten zu (1) und (3)!

2. Zeichne einen Kreis mit $r = 3$ cm und einen Punkt A, der auf dem Kreis liegt!
a) Zeichne in diesen Kreis Sehnen ein, die 30 mm, 40 mm bzw. 60 mm lang sind und den Punkt A gemeinsam haben! Beschreibe die Konstruktion und gib jeweils die Anzahl der Lösungen an!
b) Begründe, warum du keine 7 cm lange Sehne in diesen Kreis einzeichnen kannst!

3. Beweise: $\triangle ABM \cong \triangle CDM$! (↗ Bild F 13)

4. Zeichne **a)** einen Halbkreis, **b)** einen Viertelkreis!
Wie groß sind die zugehörigen Zentriwinkel?

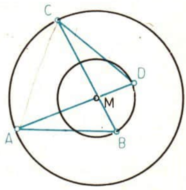
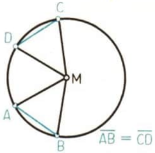


Bild F 13

5 Das Beweisen von Sätzen

Aus Klasse 6 *wissen wir bereits*:
– Die Wahrheit einer mathematischen Aussage wird durch einen **Beweis** nachgewiesen.
– Wichtige wahre Aussagen bezeichnet man als **Sätze**.

■ 2 Beweise die Aussage: Wenn $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lange Sehnen eines Kreises um M sind,
so gilt: $\triangle ABM \cong \triangle CDM$! (↗ Bild F 14)



Beweisfigur:
Bild F 14

Die im folgenden gestellten Fragen helfen uns, einen Beweis zu finden:

Frage	*Antwort* (und Darstellung im Beweisschema)
Was wird vorausgesetzt?	$\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind gleich lange Sehnen eines Kreises um M. [Voraussetzung: $\overline{AB} = \overline{CD}$]
Was wird behauptet?	Die Dreiecke ABM und CDM sind zueinander kongruent. [Behauptung: $\triangle ABM \cong \triangle CDM$]
Wir suchen *Sätze* oder *Definitionen*, die wir anwenden können:	
a) Woraus würde die Behauptung folgen?	Aus einer möglichen Bewegung, die die Dreiecke aufeinander abbildet *oder* aus einem der Kongruenzsätze, wenn die Dreiecke in drei geeigneten Stücken übereinstimmen. (Wir wählen die zweite Möglichkeit und suchen kongruente Stücke der Dreiecke.)
b) Was folgt aus der *Voraussetzung* und welche allgemeingültigen Schlußfolgerungen kann man aus der *Beweisfigur* ziehen? (↗ Bild F 14)	$\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{DM}$ sind Radien des Kreises, also gleich lang. [$\overline{AM} = \overline{CM}$; $\overline{BM} = \overline{DM}$ (Radien) $\overline{AB} = \overline{CD}$ (nach Voraussetzung)]
Kann man schon auf die Behauptung schließen?	Ja, nach dem Kongruenzsatz (sss). [$\triangle ABM \cong \triangle CDM$ (sss), w. z. b. w.[1]]

Nach der Lösung der Aufgabe 1. (3) der Lerneinheit 4 (↗ S. 139) vermuten wir, daß der folgende SATZ gilt:

Wenn ein Durchmesser senkrecht auf einer Sehne desselben Kreises steht, so halbiert er diese.

[1]) w. z. b. w. bedeutet: was zu beweisen war

Um einen Beweis zu finden, fertigen wir zuerst eine *Beweisfigur* an (↗ Bild F 15). Mit Hilfe der Fragen aus Beispiel F 2 auf der vorhergehenden Seite erhalten wir den Beweis für den *1. Fall* im Beweisschema, nämlich **für den Fall $\overline{AB} < d$** (↗ unten).
Wir müssen uns hier aber noch weitere Fragen stellen:

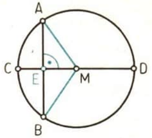


Bild F 15

Haben wir schon alle möglichen Fälle beachtet?	Nein! Dieser Beweis gilt nur, wenn $\overline{AB} < d$, weil sonst keine Dreiecke *AME* und *BME* entstehen. [2. *Fall*: $\overline{AB} = d$]
Gilt die Vermutung auch für die anderen Fälle?	Ja, denn wenn $\overline{AB}$ Durchmesser ist, wird $\overline{AB}$ vom Durchmesser $\overline{CD}$ in zwei Radien zerlegt, also halbiert.

Wir stellen den Beweis in einem *Schema* dar:

Voraussetzung: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ *Behauptung:* $\overline{AE} = \overline{BE}$

Beweis: **1. *Fall*: $\overline{AB} < d$**

(1) $\sphericalangle AEM = \sphericalangle BEM$ (nach Voraussetzung 90°)
(2) $\overline{AM} = \overline{BM}$ (Radien)
(3) $\overline{EM} = \overline{EM}$

Daraus folgt: $\triangle AME \cong \triangle BME$ (ssw)
Also gilt: $\overline{AE} = \overline{BE}$ (entsprechende Stücke in kongruenten Dreiecken)
w. z. b. w.

2. *Fall*: $\overline{AB} = d$
In diesem Fall ist *M* der Schnittpunkt *E* von $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$, und es gilt:
$\overline{AE} = \overline{BE}$ (Radien)
w. z. b. w.

Die *Umkehrung dieses SATZES* ist keine wahre Aussage. Dies kann man ganz einfach beweisen, indem man ein *Gegenbeispiel* angibt.
Umkehrung: Wenn in einem Kreis ein Durchmesser eine Sehne halbiert, dann steht er senkrecht auf dieser.
Gegenbeispiel: Die halbierte Sehne sei auch ein Durchmesser. Zwei Durchmesser eines Kreises halbieren einander immer; sie müssen aber nicht senkrecht aufeinander stehen.

Aufgaben

1. Zwei Kreise k_1 um M_1 und k_2 um M_2 schneiden einander in den Punkten *A* und *B*. Beweise, daß die Dreiecke AM_1M_2 und BM_1M_2 zueinander kongruent sind!

2. **a)** Beweise: Wenn $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Durchmesser eines Kreises um *M* sind, so sind die Dreiecke *AMC* und *BMD* kongruent zueinander!
b) Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes?

3.* Zeichne in einen Kreis zwei Durchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ein!
Beweise **a)** $\overline{AC} = \overline{BD}$; **b)** $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$!

4. Zeichne in einen Kreis um M den Durchmesser $\overline{AB}$ und in den Punkten A und B die Tangenten an den Kreis! Beweise, daß die beiden Tangenten parallel zueinander sind!

Zusammenfassung

Das Finden eines **Beweises** kann durch eine *Beweisfigur* und die Beantwortung der folgenden Fragen erleichtert werden:
- Was ist *gegeben*?
- Was wird *behauptet*?

Wir suchen *Sätze* oder *Definitionen*, die wir anwenden können:
- Woraus würde die *Behauptung* folgen?
- Was folgt aus der *Voraussetzung*?
- Welche weiteren Feststellungen ergeben sich aus der *Beweisfigur*?
- Können wir schon auf die *Behauptung* schließen?
- Haben wir alle *Fälle* beachtet?

Den Beweis dafür, daß eine Aussage falsch ist, führt man oft, indem man ein *Gegenbeispiel* angibt.

6 Umkreis von Dreiecken

● 11 Zeichne fünf Kreise mit jeweils $r = 3$ cm und, falls es möglich ist, in diese eine der folgenden Figuren so, daß alle Eckpunkte der Figur auf dem Kreis liegen:
a) ein Dreieck, **b)** ein gleichschenkliges Dreieck, **c)** ein Viereck, **d)** ein Trapez, **e)** ein Fünfeck!

Kann man auch zu einem beliebigen Vieleck immer einen Kreis konstruieren, der durch alle Eckpunkte des Vielecks geht? Wir betrachten zunächst einen Punkt, dann zwei und schließlich drei Punkte in einer Ebene.

● 12 Zeichne **a)** einen Punkt A; **b)** zwei Punkte A, B; **c)** drei Punkte A, B, C! Konstruiere dann jeweils Kreise, die durch alle gezeichneten Punkte verlaufen! Wie viele solcher Kreise gibt es jeweils?

Wir überlegen: Welche Bedingungen muß der Mittelpunkt M eines Kreises erfüllen, der durch *zwei* Punkte A und B geht?
Wir wissen: A und B müssen von M denselben Abstand haben, d. h., M muß auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ liegen. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ ist also Mittelpunkt eines Kreises durch A und B.

Wollen wir einen Kreis durch *drei* Punkte A, B und C zeichnen, die Eckpunkte eines Dreiecks sind, dann muß der Mittelpunkt eines solchen Kreises auf jeder der drei Mittelsenkrechten des Dreiecks liegen. Wir wissen, daß die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sich immer in *genau einem* Punkt schneiden. Es gibt also immer einen, aber auch nur einen solchen Kreis, den wir **Umkreis** des Dreiecks nennen wollen.

▷ 3 **SATZ: Jedes Dreieck besitzt genau einen Umkreis.**

■ **3** *Gegeben:* Dreieck ABC; *gesucht:* Umkreis des Dreiecks ABC.
Konstruktion (↗ Bild F 16):
(1) Wir zeichnen die Mittelsenkrechten m_c zu $c = \overline{AB}$ und m_a zu $a = \overline{BC}$.
(2) Der Schnittpunkt von m_c und m_a ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

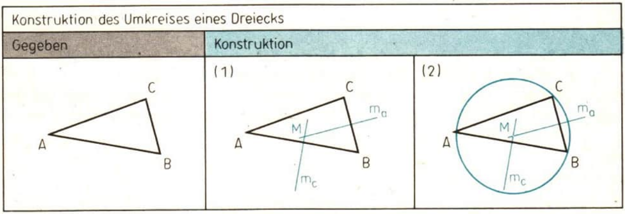


Bild F 16

● **13** **a)** Begründe, warum man zur Konstruktion des Umkreises nur zwei Mittelsenkrechte benötigt!
b) Gibt es zu drei beliebigen Punkten immer einen Kreis, der durch alle drei Punkte geht?

Aufgaben

1. Zeichne jeweils die Punkte in ein Koordinatensystem und konstruiere, falls es möglich ist, den Kreis durch A, B und C!
a) $A\,(1;\,1)$, $B\,(-3;\,4)$, $C\,(-3;\,-1)$ **b)** $A\,(1;\,1)$, $B\,(5;\,3)$, $C\,(11;\,0)$
c) $A\,(-1;\,-1)$, $B\,(0;\,1)$, $C\,(1;\,3)$ **d)** $A\,(1;\,1)$, $B\,(1;\,-5)$, $C\,(5;\,-5)$

2.* Zeichne ein Dreieck, dessen Umkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt! Welche Besonderheit weist ein solches Dreieck auf?

3. Ein Arbeiter bekommt den Auftrag, einen Ersatz für ein kreisförmiges Werkstück aus Blech auszuschneiden. Als Vorlage steht ihm jedoch nur ein abgebrochenes Stück des beschädigten Teiles zur Verfügung. Kann er den Durchmesser bestimmen? Wenn ja, wie?

7 Sehnenvierecke

● **14** Zeichne mit Hilfe der Lochschablone die Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ mit A (17), B (19), C (11), D (12), E (14), F (15), G (10), H (8)! Versuche, zu beiden Vierecken jeweils einen Umkreis zu konstruieren!

Für das Viereck $ABCD_2$ im Bild F 17 gibt es keinen Umkreis, denn es gibt außer dem gezeichneten keinen weiteren Kreis durch die Punkte A, B und C.

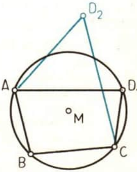


Bild F 17

Den Vierecken, für die ein Umkreis existiert, gibt man einen besonderen Namen:

▶ 4 **DEFINITION: Als *Sehnenviereck* bezeichnet man jedes Viereck, zu dem es einen Umkreis gibt.**

● 15 **a)** Begründe, warum gerade der Name „Sehnenviereck“ gewählt wurde!
b) Ist es auch sinnvoll, von einem „Sehnendreieck“ zu sprechen?
c) Was für Winkel sind die Innenwinkel eines Sehnenvierecks in bezug auf den Umkreis? Formuliere mit Hilfe dieser Eigenschaft eine andere Definition des Begriffs „Sehnenviereck“!

Aufgaben

1. **a)** Zeichne einen Kreis mit $r = 3{,}5$ cm! Konstruiere zu ihm ein Sehnenviereck $ABCD$, in dem $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ cm ist!
b) Ist das gezeichnete Sehnenviereck das einzige mit diesen Eigenschaften? Begründe!
c) Stelle fest, ob es ein Drachenviereck sein kann oder sein muß!

2. Stelle fest, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe deine Antworten!
a) Jedes Sehnenviereck mit einem Paar paralleler Seiten ist ein Rechteck.
b) Es gibt ein Sehnenviereck mit einem Paar paralleler Seiten, das ein Rechteck ist.
c)* Jedes Quadrat (Rechteck, gleichschenklige Trapez, Drachenviereck) ist ein Sehnenviereck.
d) Es gibt Drachenvierecke, die Sehnenvierecke sind.
e) In jedem Drachenviereck, das ein Sehnenviereck ist, ist eine Diagonale ein Durchmesser des Umkreises.

3.* Konstruiere in einen Kreis Sehnen, die **a)** ein Quadrat, **b)** ein gleichseitiges Dreieck, **c)** ein gleichseitiges Sechseck, **d)** ein gleichseitiges Fünfeck bilden!

8 Winkel im Sehnenviereck

● 16 **a)** Welcher Zusammenhang besteht zwischen γ und δ im Bild F 18?
b) Zeichne drei Kreise ($r_1 = 2$ cm; $r_2 = 3$ cm; $r_3 = 4$ cm) und in jeden der Kreise Peripheriewinkel α und β wie im Bild F 18! Miß in jedem der Kreise α und β! Entdeckst du einen Zusammenhang zwischen diesen Winkeln?

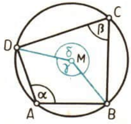
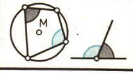


Bild F 18

Die Winkel α und β im Bild F 18 sind gegenüberliegende Innenwinkel im Sehnenviereck $ABCD$. Den vermuteten Zusammenhang (↗ Auftrag F 16 b) „$\alpha + \beta = 180°$“ können wir deshalb folgendermaßen formulieren:

▷ 5 **SATZ: In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel jeweils 180°.**



Voraussetzung: **$ABCD$ ist ein Sehnenviereck.**
Behauptung: **$\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$**
Zu beweisen sind 3 Fälle (↗ Bild F 20a, b, c).

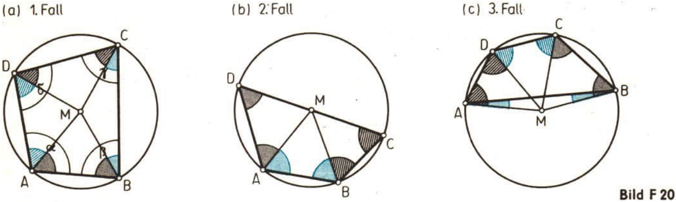


Bild F 20

Das Bild F 20a liefert uns folgende ***Beweisidee*** **für den 1. Fall:**

$$2\sphericalangle + 2\sphericalangle + 2\sphericalangle + 2\sphericalangle = 360°$$

also: $\underbrace{\sphericalangle + \sphericalangle}_{\beta} + \underbrace{\sphericalangle + \sphericalangle}_{\delta} = 180°$

(Winkelsumme im Viereck, Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

also: $\beta + \delta = 180°$, **w. z. b. w.**

Der Beweis für $\alpha + \gamma = 180°$ wird analog dazu geführt.

Aufgaben

1. **Von dem Sehnenviereck $ABCD$ mit dem Umkreismittelpunkt M sei bekannt:**
$\sphericalangle DAB = 80°$, $\sphericalangle DAM = 30°$, $\sphericalangle BMC = 70°$.
Fertige eine Skizze an und berechne die Winkel:
$\sphericalangle MAB$, $\sphericalangle BCM$, $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle AMD$, $\sphericalangle DMC$, $\sphericalangle MCD$, $\sphericalangle BCD$!

2. **$ABCD$ sei ein Sehnenviereck mit den Winkeln α, β, γ und δ (↗ Bild F 20a). Fülle die Tabelle aus, soweit es möglich ist!**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
α	60°		80°	144	n.l.		95°
β	70°	55	n.l.	40°	63°		n.l.
γ	n.l.	125°	140°	140°	74°		n.l.
δ	n.l.	55°	n.l.	40°	n.l.	98°	89°

3.* **Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe deine Antworten!**
a) **Jedes Sehnenviereck mit vier gleich langen Seiten ist ein Quadrat.**
b) **Es gibt unter den Sehnenvierecken Parallelogramme, die keine Rechtecke sind.**

4. **Im Bild F 23 auf Seite 146 sind 2 Sehnenvierecke AC_1BD und AC_2BD gezeichnet. Es sei $\gamma = 130°$.**
Berechne α und β und begründe deine Rechnung!

9 Peripheriewinkelsatz

Der Trainer einer Fußballmannschaft ordnet zur Verbesserung der Treffsicherheit einiger Spieler eine Übung an, bei der vier von ihnen (Alf, Bodo, Carsten, Detlef) so auf einer kreisförmigen Linie vor dem Tor aufgestellt werden, wie es das Bild F 21 zeigt. Sie haben die Aufgabe, den Ball flach in das Tor zu schießen. Welcher der vier Spieler hat dabei den größten Schußwinkel?

● **17** **a)** Übertrage das Bild F 21 in dein Heft und stelle eine Vermutung auf!
b) Was für Winkel sind die Schußwinkel in bezug auf den Kreis?
c) Versuche, deine Vermutung mit Hilfe der Fragen in der Zusammenfassung auf Seite 142 und des Bildes F 23 zu beweisen!

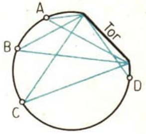


Bild F 21

Wir können die Vermutung allgemein formulieren und erhalten den **Peripheriewinkelsatz**:

▷ **6**

SATZ: Liegen zwei Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises, so sind sie gleich groß.

Voraussetzung: α, β – Peripheriewinkel über demselben Bogen $\widehat{BA}$ (↗ Bild F 23)

Behauptung: $\alpha = \beta$

Beweis:
(1) $\alpha + \gamma = 180°$ (Gegenwinkel im Sehnenviereck)
(2) $\beta + \gamma = 180°$ (Gegenwinkel im Sehnenviereck)

Also gilt: $\alpha = \beta$, w. z. b. w.

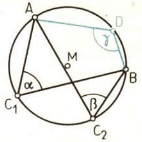


Bild F 23

Die Antwort auf obige Frage lautet also: *Alle vier Spieler haben einen gleich großen Schußwinkel.*

● **18** Bilde die Umkehrung des SATZES F 6 und überprüfe, ob sie wahr ist!

Das Bild F 24 veranschaulicht, wie wir den SATZ F 6 mit Hilfe schon bewiesener Sätze und der Definition des Kreises beweisen können: Aus dem Satz über die Winkelsumme im Viereck, der Definition des Kreises und dem Satz über Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck folgt der Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck und daraus der Peripheriewinkelsatz.

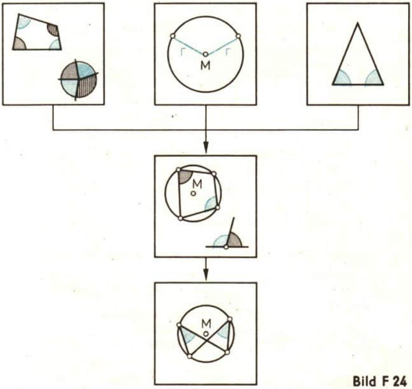


Bild F 24

Aufgaben

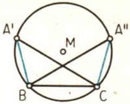


Bild F 25

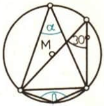


Bild F 26

1. Im Bild F 25 sei $\overline{A'B} = \overline{A''C}$.
   a) Beweise: $\triangle A'BC \cong \triangle A''CB$!
   b)* Gilt die Behauptung für jede Lage von A' und A''? Begründe!
2. Konstruiere ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = 5$ cm, $b = 4$ cm und $c = 7$ cm und seinen Umkreis! Konstruiere dann weiter
   a) das Dreieck ABC' mit $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle ACB$ und $b' = 6$ cm,
   b) das Dreieck $A'BC$ mit $\sphericalangle BA'C = \sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CBA' = 90°$,
   c)* das Dreieck $AB'C$ mit $\sphericalangle AB'C = \sphericalangle ABC$ und $\overline{AB'} = \overline{B'C}$!
3. Berechne die im Bild F 26 angegebenen Winkel! Begründe!

10 Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz

● **19** **a)** Berechne an Hand von Bild F 27 β und γ für $\alpha = 20°, 40°, 2°, 89°$! Begründe jeweils deine Rechnung!

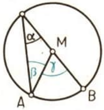


Bild F 27

Bild F 28

b) Berechne an Hand von Bild F 28 jeweils α für $\delta = 20°, 40°, 2°, 89°$! Begründe!

Wir verallgemeinern das Vorgehen bei den Berechnungen im Auftrag F 19 und erhalten so den Beweis für den **Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz**.

▷ **7** **SATZ: Jeder Peripheriewinkel über einem Kreisbogen ist halb so groß wie der Zentriwinkel über diesem Bogen.**

Voraussetzung: α – Peripheriewinkel, γ – Zentriwinkel } über demselben Bogen $\widehat{AB}$ (Beweisfigur ↗ Bild F 27)

Behauptung: $\gamma = 2 \cdot \alpha$

Beweis:
(1) $\gamma = \alpha + \beta$ (Außenwinkelsatz für Dreiecke)
(2) $\alpha = \beta$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

Daraus folgt: (3) $\gamma = \alpha + \alpha$ (Einsetzen von (2) in (1))

Also gilt: $\gamma = 2 \cdot \alpha$, w. z. b. w.

Wegen des Peripheriewinkelsatzes ist damit der SATZ F 7 bewiesen, allerdings nur für Zentriwinkel, die kleiner als 180° sind.

Diese Einschränkung müssen wir machen, weil der Zentriwinkel in der Beweisführung als Außenwinkel von Dreiecken auftrat und somit kleiner als 180° war. Den Beweis dieses SATZES für gestreckte Zentriwinkel führen wir in der Lerneinheit 11 (SATZ des THALES), für überstumpfe Zentriwinkel in der Aufgabe 1 (↗ S. 148).

Aufgaben

1. Im Bild F 18 (↗ S. 144) sei $\gamma = 140°$.
a) Berechne δ, β und α!
b)* Beweise den SATZ F 7 für überstumpfe Zentriwinkel!

2. Markiere zwei Punkte A und B! Konstruiere, wenn es möglich ist, einen Kreis so durch A und B, daß
a) der Zentriwinkel über $\widehat{AB}$ eine Größe von 100° hat,
b) ein Peripheriewinkel über $\widehat{AB}$ eine Größe von 50° hat,
c) der Zentriwinkel über $\widehat{AB}$ eine Größe von 110° und ein Peripheriewinkel über demselben Bogen $\widehat{AB}$ eine Größe von 65° haben!
Wie viele Lösungen gibt es jeweils?

3.* Konstruiere alle Punkte, von denen eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge 5 cm unter einem Winkel von 20°, 30°, 45°, 60° bzw. 90° erscheint!

4. Berechne die Größe von α und begründe! (↗ Bild F 30)

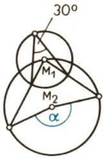


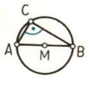
Bild F 30

11 Satz des THALES

● **20** **a)** Was läßt sich über die Größe eines Peripheriewinkels über einem Halbkreis vermuten?
b) Überprüfe diese Vermutung durch Zeichnen und Messen!

Die Vermutung aus Auftrag F 20 b führt uns zu einem Sonderfall des Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satzes, der nach dem griechischen Mathematiker THALES VON MILET, der im 6. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung lebte, „Satz des THALES" genannt wird:

▷ **8** **SATZ des THALES: Wenn der Punkt C auf dem Kreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser liegt, dann gilt:**
$\sphericalangle ACB = 90°$.
Oder kurz: **Alle Peripheriewinkel über einem Halbkreis sind rechte Winkel.**



Voraussetzung: (1) $\overline{AB}$ ist Durchmesser
(2) C liegt auf dem Kreis.
(Beweisfigur ↗ Bild F 32)

Behauptung: $\gamma = 90°$

Beweis: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck)

Daraus folgt: $\underbrace{\gamma_1 + \gamma_2}_{\gamma} + \gamma = 180°$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

$\gamma + \gamma = 180°$

Also gilt: $\gamma = 90°$, w. z. b. w.

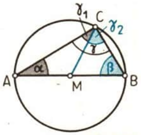


Bild F 32

Die Grundlage für einige Konstruktionen und Beweise anderer Sätze wird uns durch die *Umkehrung des Thalessatzes* geliefert, die wir hier jedoch nicht beweisen wollen.

	Voraussetzung	Behauptung
SATZ	C liegt auf dem Kreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser.	$\sphericalangle ACB = 90°$
Umkehrung	$\sphericalangle ACB = 90°$	C liegt auf dem Kreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser.

▷ 9 **SATZ: Ist der Winkel ACB ein rechter Winkel, so liegt sein Scheitelpunkt C auf dem Kreis, für den $\overline{AB}$ ein Durchmesser ist.**

Aufgaben

1. a) Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = 5$ cm! Markiere nur mit Hilfe des Zeichendreiecks 8 Punkte des Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AB}$!
   b) Zeichne mit Hilfe eines Trinkglases einen Kreis! Konstruiere nur mit Hilfe des Zeichendreiecks den Mittelpunkt!
   c) Begründe jeweils dein Vorgehen!
2. In einem Dreieck ist eine Seite genauso lang wie der Durchmesser seines Umkreises. Wie groß ist der dieser Seite gegenüberliegende Winkel?
3.* Beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der längsten Seite halb so lang wie diese!

Zusammenfassung

α, β – Peripheriewinkel } über dem Bogen $\overset{\frown}{AC}$
γ – Zentriwinkel } (↗ Bild F 33)
t – Tangente des Kreises im Punkt A

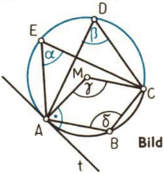


Bild F 33

Es gilt:

$\alpha + \delta = 180°$ (Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck)
$\alpha = \beta$ (Peripheriewinkelsatz)
$\gamma = 2\alpha$ (Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz)
$t \perp \overline{AM}$ (Tangente steht senkrecht auf dem Berührungsradius)

Falls $\overset{\frown}{AC}$ ein Halbkreis ist, gilt: $\alpha = \beta = \delta = 90°$ (SATZ des THALES).

12 Konstruktionen

● 21 Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ und konstruiere mit Hilfe eines Kreises rechtwinklige Dreiecke, in denen $\overline{AB}$ die längste Seite ist!

■ 4 *Gegeben* sind der Kreis um M mit dem Radius r und ein Punkt P außerhalb des Kreises.
Gesucht sind alle Tangenten an den Kreis durch den Punkt P. (↗ Bild F 34)
Wir konstruieren zuerst die Berührungspunkte A_1 und A_2 der gesuchten Tangenten mit dem Kreis. Punkte konstruiert man immer als Schnittpunkte zweier Linien (Geraden, Kreise).

Planfigur

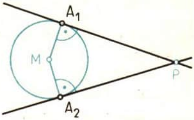


Bild F 34

Wir wissen	Wir zeichnen
1. A_1 und A_2 sind Punkte des Kreises.	den gegebenen Kreis;
2. $\sphericalangle MA_1P = \sphericalangle MA_2P = 90°$	um den Mittelpunkt von $\overline{MP}$ den Kreis mit $\overline{MP}$ als Durchmesser.

Konstruktionsbeschreibung: (↗ Bild F 35)
(1) Wir konstruieren den Mittelpunkt N der Strecke $\overline{MP}$.
(2) Wir zeichnen den Kreis mit dem Radius $\overline{MN}$ um N und bezeichnen seine Schnittpunkte mit dem gegebenen Kreis mit A_1 und A_2.
(3) Wir zeichnen die Geraden PA_1 und PA_2. Sie sind die gesuchten Tangenten.

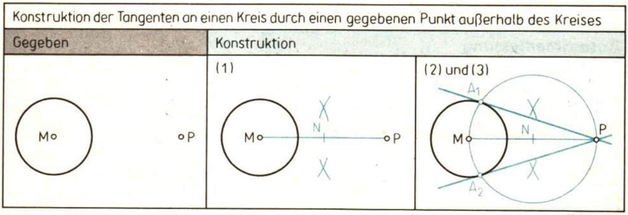


Bild F 35

Auch für viele Dreieckskonstruktionen kann man den SATZ des THALES zu Hilfe nehmen.

■ 5 *Gegeben:* $\gamma = 90°$; $c = 8$ cm; $h_c = 3$ cm
Gesucht: $\triangle ABC$

Wir wissen	Wir zeichnen (↗ Bild F 36)
1. $c = 8$ cm	die Strecke $\overline{AB} = c$;
2. $h_c = 3$ cm	eine Parallele zu $\overline{AB}$ im Abstand von 3 cm;
3. $\gamma = 90°$	um den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ den Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$.

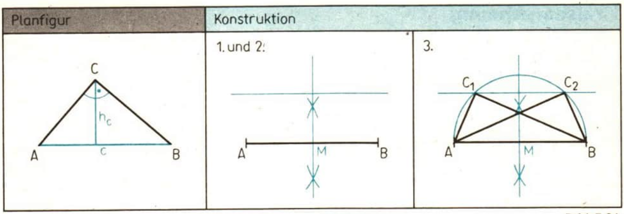


Bild F 36

● **22** **a)** Begründe, warum die Winkel AC_1B und AC_2B im Bild F 36 rechte Winkel sind!
b) Erläutere, wodurch bei dieser Konstruktion vier verschiedene Dreiecke entstehen können!
c) Begründe, warum diese vier Dreiecke alle zueinander kongruent sind!

Aufgaben

Zeichne einen Kreis mit $r = 3$ cm. Konstruiere von einem Punkt, der vom Mittelpunkt des Kreises 8 cm entfernt ist, die Tangenten an den Kreis!

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck (↗ Bild F 37) aus folgenden Stücken:
~~a)~~ $c = 6$ cm; $\beta = 55°$ **c)** $c = 8$ cm; $h_c = 3$ cm
~~b)~~ $c = 5$ cm; $p = 2$ cm **d)** $p = 3$ cm; $q = 4$ cm

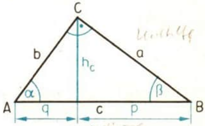


Bild F 37

3. **a)** Begründe, warum im Beispiel F 4 die in der Planfigur blau gekennzeichneten Stücke gegeben sind! (↗ Bild F 34)
b) Beweise, daß die Strecken $\overline{PA_1}$ und $\overline{PA_2}$ im Bild F 35 gleich lang sind!

4. Zeichne eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die auf derselben Seite von g liegen!
a) Konstruiere einen Punkt C so auf g, daß der Winkel ACB ein rechter Winkel ist!
b)* Ist die Aufgabe für jede Lage von A, B und g lösbar? Wie viele Lösungen gibt es in den einzelnen Fällen?

Zusammenfassung

Lösen von Konstruktionsaufgaben

Viele Konstruktionsaufgaben löst man, indem man sie auf die Konstruktion von Punkten zurückführt.
Dafür können die folgenden Überlegungen nützlich sein:
1. Welche Bedingungen sollen erfüllt sein?
2. Wir suchen *Sätze* oder *Definitionen*, die wir anwenden können:
– Welche *Geraden oder Kreise* erfüllen die Bedingungen?
– Wieviel Lösungen gibt es?

Kreisberechnung

13 Umfang von Kreisen

Stellen wir uns die Erde einmal als glatte Kugel mit einem Umfang von 40 000 km vor. Wir denken uns einen festanliegenden Draht um den Äquator gelegt. Nun verlängern wir in Gedanken diesen Draht um einen Meter und spannen ihn dann so, daß er überall gleich weit von der „Erdkugel“ entfernt ist. Könnte jetzt eine Maus zwischen Draht und „Erdkugel“ hindurchschlüpfen?
Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir lernen, wie man den Umfang eines Kreises berechnet. Solche Berechnungen sind für viele praktische Aufgabenstellungen wichtig. Schon im Altertum war man bemüht, Möglichkeiten zur Berechnung des Kreisumfangs und des Kreisinhalts zu finden, denn kreisförmige Gegenstände, wie zum Beispiel das Wagenrad, waren seit alters her von großer Bedeutung. Auch in der Baukunst schenkte man kreisförmigen Elementen seine Aufmerksamkeit. Das Bild F 38 zeigt die weltberühmte Kathedrale Notre-Dame in Paris, ein Bauwerk aus dem 13. Jahrhundert mit einem kreisförmigen Fenster über dem Eingangsportal. Um zu einer Formel zur Berechnung des Kreisumfangs zu kommen, untersuchte man das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser. Wir vermuten sofort, daß der Umfang um so größer wird, je größer man den Durchmesser des Kreises wählt.

● **23** Ermittle den Umfang von sechs verschiedenen Kreisen, die du an bestimmten Gegenständen findest (Wasserglas, Tasse, Teller, Topf, Schüssel, Eimer)! Lege dazu einen Faden um diese Gegenstände und miß die Länge des Fadens! Stelle außerdem durch Messen den Durchmesser der Kreise fest! Erfasse die ermittelten Daten der Größe nach in einer Tabelle und versuche, den Zusammenhang zu erkennen!

Umfang *u* in cm						
Durchmesser *d* in cm						

Wenn du sorgfältig gemessen hast, erhältst du für Umfang und Durchmesser Meßwertreihen, die anscheinend proportionale Zahlenfolgen darstellen.

● **24** Ermittle den Proportionalitätsfaktor k, indem du die Quotienten $\frac{u}{d}$ bildest!

Wir finden $k \approx 3{,}1$.
Mit Hilfsmitteln, die uns in Klasse 7 noch nicht zur Verfügung stehen, kann man beweisen, daß man den Umfang jedes beliebigen Kreises aus seinem Durchmesser durch Multiplikation mit diesem Proportionalitätsfaktor k erhalten kann. Für den **Proportionalitätsfaktor *k*** verwendet man allgemein den griechischen Buchstaben π (lies: pi).
Die **Zahl** π ist also als Quotient aus Umfang und Durchmesser eines beliebigen Kreises definiert. Schon ARCHIMEDES, ein bedeutender Mathematiker und Physiker des Altertums, hat um 300 vor unserer Zeitrechnung für die Zahl π einen Näherungswert von **3,14** gefunden. Um das Jahr 1600 wurde von dem holländischen Mathematiker LUDOLF VAN CEULEN die Zahl π auf 35 Stellen hinter dem Komma berechnet
($\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,88\ldots$).
Mit einer elektronischen Rechenmaschine wurde π in jüngster Zeit bis auf 2 400 Stellen hinter dem Komma bestimmt. Die Zahl π ist ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch. Sie ist wie viele Quadratwurzeln eine **irrationale Zahl**. Bei Berechnungen genügt es oft, für π die Näherungswerte 3,14 oder $\frac{22}{7}$ zu benutzen.

Bild F 38: Kathedrale Notre-Dame in Paris

▷ 10

SATZ: Der *Umfang u eines Kreises* mit dem Durchmesser *d* beträgt $\pi \cdot d$.
Kurz: $u = \pi \cdot d$
Da $d = 2r$ ist, gilt auch: $u = 2\pi \cdot r$.

Man kann zu jedem Kreis mit gegebenem Umfang den zugehörigen Radius bzw. Durchmesser berechnen, indem man die Gleichung zur Berechnung des Umfanges nach *r* bzw. *d* umstellt:

$$r = \frac{u}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{u}{\pi}$$

Beim Lösen von Aufgaben mit aufwendigem Zahlenmaterial werden wir künftig den Schulrechner SR 1 verwenden. Die Zahl π ist auf dem SR 1 und den meisten anderen Taschenrechnern als Konstante enthalten. Durch Drücken der Taste π erscheint ein Näherungswert auf acht Stellen genau. Entsprechend den Ausgangswerten ist beim Lösen von Aufgaben stets auf sinnvolle Genauigkeit zu achten.

■ **6** Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 24{,}37$ dm!
Gegeben: $r = 24{,}37$ dm *Gesucht:* u (in dm)
Allgemeine Lösung: $u = 2\pi r$ *Überschlag:* $2 \cdot 3 \cdot 25 = 150$; $u \approx 150$ dm

Lösen der Aufgabe mit dem *Taschenrechner:*

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$2 \cdot \pi \cdot 24{,}37$	2 $\boxed{\times}$ π $\boxed{\times}$ 24,37 ↗ $\boxed{=}$	$\boxed{153{,}12123}$

(Der Pfeil markiert wieder die Stelle, an der eine Kontrolle der Anzeige erfolgen sollte.)
Vergleiche mit dem Überschlag!
Antwort: Der Umfang des Kreises beträgt rund 153,1 dm.

Solche und ähnliche Aufgaben können wir auch mit Hilfe der Tabellen des Tafelwerkes lösen.

Aufgaben

1. Berechne den Kreisumfang **a)** mit dem Taschenrechner, **b)** mit Hilfe der Tabellen des Tafelwerkes!

r	5,0 cm		2,13 m		55 mm
d		20 mm		9,2 dm	
u					

2. Berechne die Länge eines Halbkreises mit dem Radius $r = 10{,}0$ cm!
3. Wie groß ist die Länge eines Viertelkreises mit dem Durchmesser $d = 100$ mm?
4. Wie groß ist die Länge b eines Kreisbogens mit dem Radius $r = 2$ m und dem zugehörigen Zentriwinkel $\alpha = 60°$? (Beachte dabei, daß der Kreisbogen dem zugehörigen Zentriwinkel direkt proportional ist!) (↗ Bild F 41, S. 157)
5. Berechne den Radius eines Kreises, wenn sein Umfang u **a)** 220,0 m; **b)** 44 cm; **c)** 3,0 m beträgt!
6. Berechne den Durchmesser eines Kreises, wenn sein Umfang u **a)** 20 mm; **b)** 125,5 m; **c)** 75,0 m beträgt!
7.* Löse das zu Beginn der Lerneinheit 13 gestellte Problem! Beachte dabei Bild F 39!

Bild F 39

14 Inhalt von Kreisflächen

Wie wir aus früheren Klassen wissen, kann der Inhalt einer Rechteckfläche durch „Auszählen" ermittelt werden, wenn diese mit einem quadratischen Gitter überdeckt wird. Wir wenden diese Methode an, um Näherungswerte für die Inhalte von Kreisflächen zu erhalten. Dazu überdecken wir eine Kreisfläche mit einem quadratischen Gitter, das aus Quadratflächen (Einheitsquadraten) von 0,5 cm Seitenlänge besteht. (↗ Bild F 40)
Wir wählen als Radius $r = 3{,}0$ cm. Das Auszählen ist nicht so leicht möglich wie beim Rechteck, weil „durchgeschnittene" Quadrate auftreten. Die blaue Fläche enthält alle „ganzen" Quadrate, die innerhalb des Kreises liegen. Wir bezeichnen den Inhalt dieser Fläche mit A_i. Die stark schwarz umrandete Fläche enthält die Menge aller Quadrate, durch die die Kreisfläche gerade noch vollständig überdeckt wird. Den Inhalt dieser Fläche bezeichnen wir mit A_a. Den Kreisflächeninhalt bezeichnen wir mit A. Dann gilt:

$$A_i < A < A_a.$$

In unserem Falle ist $A_i = 22\ \text{cm}^2$ und $A_a = 33\ \text{cm}^2$, woraus folgt:

$$22\ \text{cm}^2 < A < 33\ \text{cm}^2.$$

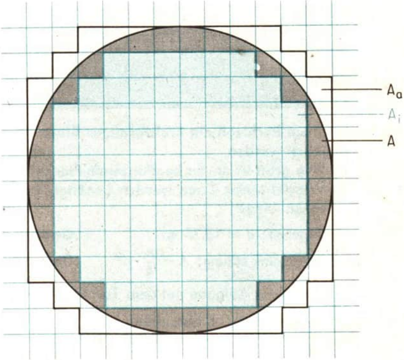


Bild F 40

Wird das quadratische Gitter verfeinert, so wird die Zahl A_i größer, weil man die Kreisfläche „vollständiger" überdecken kann. Die Zahl A_a wird kleiner, weil sie weniger „überflüssige" Flächenstücke enthält. Bei fortgesetzten Verfeinerungen des Gitters weichen die Werte für A_i und A_a immer weniger voneinander ab. Sie nähern sich einem gemeinsamen Wert, den man als Zahlenwert des Kreisflächeninhaltes betrachtet.

● 25 Zeichne Kreise mit den Radien 1,0 cm; 2,0 cm; 3,0 cm; 4,0 cm; 5,0 cm und 6,0 cm auf Millimeterpapier! Ermittle die Flächeninhalte A_i und A_a und gib jeweils einen Näherungswert für den Kreisflächeninhalt an! Stelle die Werte in einer Tabelle zusammen!

r in cm	1	2	3	4	5	6
A_i in cm²						
A_a in cm²						
Näherungswert für A in cm²						

Es wäre viel zu aufwendig, Kreisflächeninhalte immer durch Auszählen bestimmen zu wollen. Darum versuchen wir, anhand der vorhin aufgestellten Tabelle einen Zusammenhang zwischen A und r zu finden.

● **26** Vergleiche jeweils die Werte von A, die zu folgenden Radien gehören!
a) $r = 1{,}0$ cm und $r = 2{,}0$ cm **c)** $r = 1{,}0$ cm und $r = 3{,}0$ cm
b) $r = 2{,}0$ cm und $r = 4{,}0$ cm **d)** $r = 2{,}0$ cm und $r = 6{,}0$ cm

Es zeigt sich, daß der Flächeninhalt *proportional* zum Quadrat des Radius ist.

● **27** Ermittle den Proportionalitätsfaktor!

Es ist festzustellen, daß dieser Quotient $\frac{A}{r^2}$ etwa bei 3,1 liegt. Wir stoßen wieder auf den uns schon bekannten **Proportionalitätsfaktor** π. Die Zahl π haben wir bisher als Quotient $\frac{u}{d}$ definiert; sie könnte nun auch als Quotient $\frac{A}{r^2}$ definiert werden, wobei A der **Inhalt** einer Kreisfläche mit dem Radius r ist.

▷ **11**

SATZ: Der *Inhalt A* einer *Kreisfläche* mit dem Radius *r* beträgt $\pi \cdot r^2$.
Kurz: $A = \pi \cdot r^2$
Da $r = \frac{d}{2}$ ist, gilt auch: $A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$.

■ **7** In einem Park soll ein kreisförmiges Blumenbeet mit einem Durchmesser von 15,75 m angelegt werden.
a) Wie groß ist die zu bepflanzende Fläche?
b) Wieviel Meter Zaun werden benötigt, wenn eine Umzäunung für das Beet vorgesehen wird?

a) *Gegeben:* $d = 15{,}75$ m *Gesucht:* A (in m²)
Allgemeine Lösung: $A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ *Überschlag:* $\frac{3}{4} \cdot 16^2 = 192$; $A \approx 192$ m²

Lösen der Aufgabe mit dem Taschenrechner:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$\frac{\pi}{4} \cdot 15{,}75^2$	π [÷] 4 [×] 15,75 [x²] [=]	194.82783

Vergleiche mit dem Überschlag! Achte auf sinnvolle Genauigkeit!
Antwort: Eine Fläche von rund 195 m² ist zu bepflanzen.

b) *Gegeben:* $d = 15{,}75$ m *Gesucht:* u (in m)
Allgemeine Lösung: $u = \pi \cdot d$ *Überschlag:* $3 \cdot 16 = 48$; $u \approx 48$ m

Lösen der Aufgabe mit dem Taschenrechner:

Aufgabe	Ablaufplan	Anzeige
$\pi \cdot 15{,}75$	π [×] 15,75 [=]	49.480084

Vergleiche mit dem Überschlag! Achte auf sinnvolle Genauigkeit!
Antwort: Für die Umzäunung werden rund 49,5 m Zaun benötigt.

Die Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben können wir auch mit Hilfe der Tabellen des Tafelwerkes finden. Stets ist zu überlegen, welches der genannten Hilfsmittel schneller zum Ziel führt.

Man kann zu jeder Kreisfläche mit gegebenem Inhalt den zugehörigen Radius bzw. Durchmesser berechnen, indem man die *Gleichung* zur Berechnung des Flächeninhaltes nach r^2 bzw. d^2 *umstellt* und dann die Wurzel zieht. (Beachte, daß Aufgaben dieser Art besonders zweckmäßig mit Hilfe der Tabellen aus dem Tafelwerk gelöst werden können!)

Aufgaben

1. Berechne den Inhalt einer Kreisfläche
a) mit dem Radius $r = 5{,}2$ cm (16,7 mm; 132,8 m);
b) mit dem Durchmesser $d = 1{,}25$ m (0,48 m; 112 dm)!
Löse die Aufgaben sowohl mit Hilfe des Taschenrechners als auch mit Hilfe der Tabellen aus dem Tafelwerk!

2. Eine Kreisfläche hat den Durchmesser $d = 8{,}25$ m. Berechne den Inhalt einer Viertelkreisfläche!

3. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes mit dem Radius $r = 5{,}80$ dm und dem zugehörigen Zentriwinkel $\alpha = 36°$? (Beachte dabei, daß der Flächeninhalt des Kreisausschnittes dem zugehörigen Zentriwinkel direkt proportional ist!) (↗ Bild F 41)

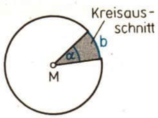


Bild F 41

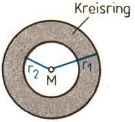


Bild F 42

4. Eine Unterlegscheibe hat die Form eines Kreisringes. Berechne den Flächeninhalt dieses Kreisringes mit dem äußeren Radius $r_1 = 5{,}5$ cm und dem inneren Radius $r_2 = 3{,}2$ cm!
(↗ Bild F 42)

5. Berechne den Umfang des Kreises mit dem Radius

a) $r = 3\,125$ cm	**b)** $r = 36{,}42$ km	**c)** $r = 0{,}435$ dm
d) $r = 2{,}135$ m	**e)** $r = 6\,378{,}0$ km	**f)** $r = 1\,200$ mm!

Vergleiche die Ergebnisse mit den Angaben im Tafelwerk!

6. Berechne den Inhalt der Kreisfläche! Vergleiche mit den Ergebnissen, die du bei Verwendung des Tafelwerkes erhältst!

a) $r = 750$ cm	**b)** $d = 12{,}25$ m	**c)** $d = 65{,}8$ dm
d) $d = 1{,}38$ m	**e)** $r = 225{,}5$ mm	**f)** $r = 0{,}85$ m

7. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, wenn der Inhalt der zugehörigen Kreisfläche 37,80 m² beträgt?

8. Berechne die Fläche eines Kreisringes, wenn
a) $r_1 = 12{,}9$ cm und $r_2 = 9{,}8$ cm,
b) $r_1 = 3{,}2$ mm und $r_2 = 0{,}9$ mm,
c) $r_1 = 0{,}84$ m und $r_2 = 41$ cm,
d) $r_1 = 12{,}5$ mm und $r_2 = 8{,}7$ mm!

9. In den folgenden Aufgaben ist mit α der Zentriwinkel eines Kreisausschnittes und mit A_α der Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes bezeichnet. Berechne die gesuchten Werte!
a) Gegeben: $u = 13{,}2$ cm; $\alpha = 47{,}5°$
Gesucht: r, d, A, A_α
b)* Gegeben: $A_\alpha = 12{,}5$ cm²; $d = 5$ cm
Gesucht: r, A, u, α

Zusammenfassung

Bei der Kreisberechnung spielt die **irrationale Zahl** π eine besondere Rolle. Für viele praktische Belange reichen Näherungswerte für π aus, z. B. **3,14** oder auch $\frac{22}{7}$. Bei Überschlagsrechnungen verwenden wir für π die Zahlen 3 oder 4. Größere Genauigkeiten für π werden bei der Verwendung des Taschenrechners oder von Zahlentafeln erreicht.

Umfang von Kreisen	
$u = \pi \cdot d$ $u = 2\pi r$	$d = 6{,}5\text{ cm};\ u = \pi \cdot 6{,}5\text{ cm};\ u \approx 20\text{ cm}$ $r = 8{,}2\text{ m};\ u = 2 \cdot \pi \cdot 8{,}2\text{ m};\ u \approx 52\text{ m}$
Inhalt von Kreisflächen	
$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ $A = \pi \cdot r^2$	$d = 6{,}5\text{ cm};\ A = \frac{\pi}{4} \cdot 6{,}5^2\text{ cm}^2;\ A \approx 33\text{ cm}^2$ $r = 8{,}2\text{ m};\ A = \pi \cdot 8{,}2^2\text{ m}^2;\ A \approx 211\text{ m}^2$

Komplexe Übungen

1. Wie kann man von einem Punkt A feststellen, ob er auf dem Kreis um M mit $r = 4$ cm liegt, ohne einen Zirkel zu benutzen?

2. Zeichne in einen Kreis eine Sehne, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft! Konstruiere die Sehne, die zur gezeichneten Sehne parallel und genauso lang wie diese ist!

3.* In einem Dreieck sei eine Seite genauso groß wie der Radius seines Umkreises. Wie groß ist der dieser Seite gegenüberliegende Winkel? (Fertige dir eine Skizze an!)

4. Wo liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks? Begründe deine Antwort!

5. In der Mitte einer quadratischen Rasenfläche (Seitenlänge 20 m) soll ein kreisförmiges Rosenbeet angelegt werden. Die kürzeste Entfernung zwischen dem Beetrand und dem Rand der Rasenfläche soll 5 m betragen.
   a) Beschreibe, wie du die Beetumrandung markieren würdest! Zeichne Rasenfläche und Beet in einem geeigneten Maßstab!
   b) Für wieviel Quadratmeter Fläche wird Grassamen benötigt?

6. Aus einem Stamm soll ein Balken geschnitten werden, der als Querschnitt ein Quadrat mit der Seitenlänge 17 cm hat.
   a) Welchen Mindestdurchmesser muß der Stamm besitzen? (Löse die Aufgabe zeichnerisch!)
   b) Wieviel Prozent beträgt der Holzabfall, wenn man einen Stamm von 3 dm Durchmesser wählt?
   c) Überlege, warum der Durchmesser des Stammes auf dm gerundet wurde! Runde auch das Ergebnis sinnvoll!

7. Die folgende Tabelle enthält Zahlenwerte für den Radius, den Durchmesser, den Umfang und den Inhalt einer Kreisfläche. Berechne die jeweils gesuchten Zahlenwerte mit Hilfe der Tabellen aus dem Tafelwerk! Überprüfe die Ergebnisse mit Hilfe des Taschenrechners!

	r	d	u	A
a)	1,52			
b)		78,4		
c)			29,44	
d)				78,07

8. Der Durchmesser der Räder eines Fahrrades beträgt 73 cm.
a) Wieviel Umdrehungen machen sie auf einer 45 km langen Strecke?
b) Welche Strecke wird bei 1 000 Radumdrehungen zurückgelegt?

9. Ein kegelförmig aufgeschütteter Sandhaufen hat einen Umfang von 12 m. Wieviel Bodenfläche bedeckt der Sandhaufen?

10. **a)** In einem Kreisdiagramm (Radius $r = 7{,}5$ cm) sind 65% der Fläche schraffiert hervorgehoben. Welchen Flächeninhalt besitzt dieser Kreisausschnitt?
b) Wie groß ist der absolute Fehler, wenn wir statt 65% den bequemen Prozentsatz von $66\frac{2}{3}\%$ berechnen?
c)* Wie groß ist ein Peripheriewinkel über dem Bogen des Kreisausschnittes?

11.* In manchen Tafelwerken finden wir als Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreisringes
$A_R = \pi\,(r_1{}^2 - r_2{}^2)$ mit $r_1 > r_2$.
Wie kommt diese Formel zustande?

12. Ein nahtloses Gasrohr hat einen Außendurchmesser von $d_a = 13{,}25$ mm und einen Innendurchmesser von $d_i = 11{,}15$ mm. Berechne **a)** die Wanddicke, **b)** den lichten Rohrquerschnitt, **c)** den Wandquerschnitt dieses Gasrohres! Gib jeweils eine Schranke für den absoluten Fehler an!

13. Eine quadratische Marmorplatte hat eine Seitenlänge von 89,0 cm. Aus ihr wird die größtmögliche Kreisfläche als Tischplatte ausgeschnitten. Berechne den Flächeninhalt
a) der Tischfläche, **b)** des Abfalls!
Wieviel Prozent der Quadratfläche der Marmorplatte beträgt der Abfall?

14. Berechne Inhalt und Umfang der Kreisfläche mit $r = 4{,}8$ cm! Wie ändern sich Inhalt und Umfang, wenn der Radius verdoppelt (verdreifacht, halbiert) wird?

15. Betrachte die beiden Kreisflächen K_1 und K_2 im Bild F 43!
Welche von beiden ist die größere? Begründe deine Überlegungen!

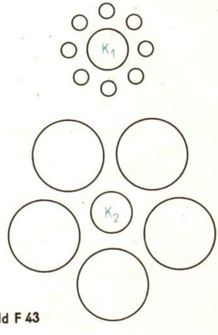


Bild F 43

16. Welche der farbigen Flächeninhalte im Bild F 44a bis i kannst du mit deinen bisherigen Kenntnissen über die Kreisberechnung ermitteln? Welche Angaben müßtest du dazu haben?

17. Wann entsteht mehr Abfall:
a) wenn man aus einem quadratischen Blech eine größtmögliche Kreisfläche oder
b) wenn man aus diesem Blech vier gleich große Kreisflächen ausstanzt? (↗ Bild F 45)

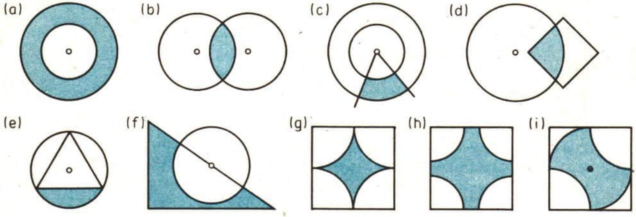


Bild F 44

18. Zeichne in einen Kreis um M zwei senkrecht aufeinander stehende Durchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$! Konstruiere in den Punkten A, B, C, D jeweils die Tangenten an den Kreis!
a) Was für ein Viereck wird von diesen Tangenten gebildet? Begründe deine Antwort!
b) Wieviel Prozent des Flächeninhalts (Umfangs) dieses Vierecks beträgt der Inhalt (Umfang) der Kreisfläche?

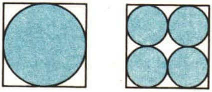


Bild F 45

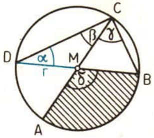


Bild F 46

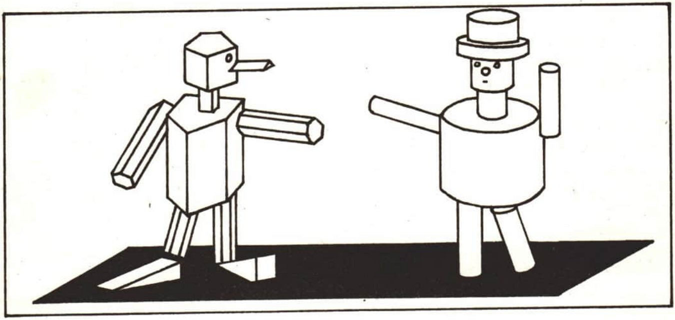
19. Martina will für einen runden Tisch mit einem Durchmesser von 76 cm eine runde Tischdecke nähen, die mindestens 10 cm herunterhängt. Für den Saum braucht sie 1,5 cm. Im Geschäft gibt es Stoffe mit 0,90 m bzw. 1,50 m Breite.
a) Genügt der schmalere Stoff für die Decke?
b) An den Rand der Tischdecke will Martina ganz schmale Borte nähen. Wieviel Meter Borte muß sie mindestens kaufen?

20. In der obenstehenden Abbildung (Bild F 46) seien $\alpha = 30°$ und $r = 1{,}2$ cm gegeben. Berechne **a)** die Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ und **b)** den Flächeninhalt des schraffierten Kreisausschnittes!

G Stereometrie

Prismen und Kreiszylinder

1 Prismen und Zylinder



Prismen und Zylinder sind uns im Mathematikunterricht schon oft begegnet. Viele Gegenstände des täglichen Bedarfs haben die Form eines Prismas oder eines Zylinders.[1]) In der Technik spielen prismatische und zylindrische Werkstücke eine große Rolle.

Prismatische Werkstücke werden zum Beispiel auf Hobelmaschinen hergestellt.	**Zylindrische Werkstücke** können auf Drehmaschinen produziert werden.

[1]) Zylinder, deren Grund- und Deckflächen Kreisflächen sind, heißen Kreiszylinder. Da wir hier keine Zylinder mit anderen Grund- und Deckflächen behandeln, wollen wir unter Zylinder stets Kreiszylinder verstehen.

▶ 1

DEFINITION: Ein geometrischer Körper heißt

gerades Prisma,
wenn er begrenzt wird
(1) von zwei zueinander kongruenten und parallelen *n*-Eckflächen *(Grundfläche* und *Deckfläche)* und
(2) von *n* rechteckigen Seitenflächen *(Mantel).* (↗ Bild G 1 a)

gerader Zylinder,
wenn er begrenzt wird
(1) von zwei zueinander kongruenten und parallelen Kreisflächen *(Grundfläche* und *Deckfläche)* und
(2) von einer gekrümmten Seitenfläche, deren Abwicklung rechteckig ist *(Mantel).* (↗ Bild G 1 b)

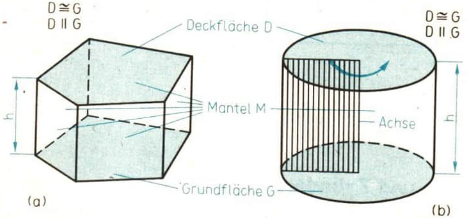


Bild G 1

Arten von Prismen
Nach der Zahl *n* der Seitenflächen spricht man von **n-seitigen Prismen** (drei-, vier-, fünf-, sechs-, *n*-seitige Prismen). Ist die Grundfläche regelmäßig, nennt man das Prisma **regelmäßiges Prisma.**

Zylinder als Drehkörper
Drehen wir eine Rechteckfläche um eine ihrer Seiten, so entsteht ein **gerader Zylinder**. Die Drehachse heißt *Achse* des Zylinders.

Der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche heißt **Höhe.** Sie ist beim geraden Prisma bzw. Zylinder genau so lang wie eine Seitenkante bzw. eine Strecke des Mantels, die Grund- und Deckfläche verbindet und senkrecht zu ihnen verläuft. Diese Strecken heißen beim Zylinder **Mantellinien.**
Außer den geraden gibt es auch **schiefe Prismen** bzw. **schiefe Zylinder**. Die Seitenflächen des schiefen Prismas sind Parallelogrammflächen. (↗ Bild G 2a und b)

Hinweis: Wenn nicht ausdrücklich vom schiefen Prisma oder schiefen Zylinder gesprochen wird, wollen wir in diesem Kapitel unter Prisma bzw. Zylinder immer ein *gerades Prisma* bzw. einen *geraden Zylinder* verstehen.

● 1 Untersuche mit Hilfe der Definitionen,
a) ob Würfel und Quader Prismen sind,
b) ob die Kugel ein Zylinder ist!

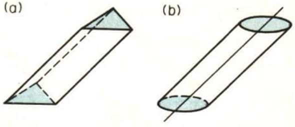


Bild G 2

Auch wenn Prismen oder Zylinder nicht aufrecht stehen, sondern liegen, spricht man weiterhin von **Grund-** bzw. **Deckfläche** und **Höhe.** (↗ Bild G 3a und b)

In der Technik wird häufig Profilstahl verwendet. Ein senkrecht zu den Kanten abgeschnittenes Stück eines solchen Profilstahls hat die Form eines Prismas. Dabei sagt man zu diesen Schnittflächen auch **Querschnitt**. So gibt es z. B. Stähle mit L-, T-, I- und U-Querschnitt. (↗ Bild G 4a bis d)

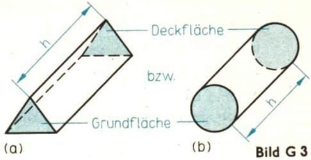


Bild G 3

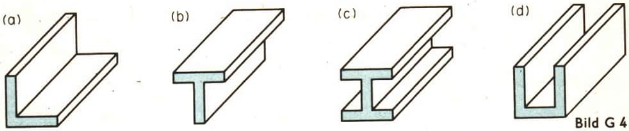


Bild G 4

● **2** Übertrage die Tabelle in das Heft und ergänze sie durch die Namen von sechs Gegenständen, die prismatisch oder zylindrisch sind!

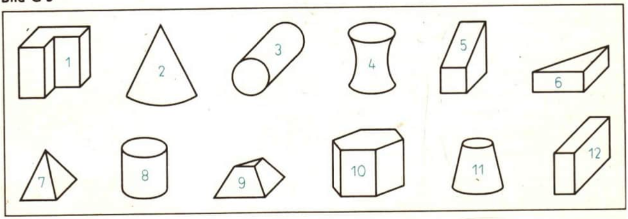
Prismen	**Zylinder**
Streichholz Postkarte . . .	Ein gerades Stück Draht Schallplatte . . .

● **3** Zeichne das Zweitafelbild
a) eines Zylinders ($r = 3$ cm, $h = 4$ cm),
b) eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas ($a = 3$ cm, $h = 4$ cm)!

● **4** Übertrage die Tabelle in das Heft und schreibe die Nummern 1 bis 12 der im Bild G 5 abgebildeten Körper in die richtige Zeile. Begründe deine Entscheidung mit Hilfe der Definitionen des geraden Prismas und des geraden Zylinders!

Körperart	**Nummern**
Prismen	
Zylinder	8
Andere Körper	

Bild G 5



Aufgaben

1. Nenne prismatische und zylindrische Gegenstände aus einem Klassenraum, einer Wohnung und einem Produktionsbetrieb!

2. Im Bild G 6 sind acht Körper in senkrechter Zweitafelprojektion dargestellt. Welche davon stellen Prismen dar, welche davon Zylinder? Begründe deine Antwort!

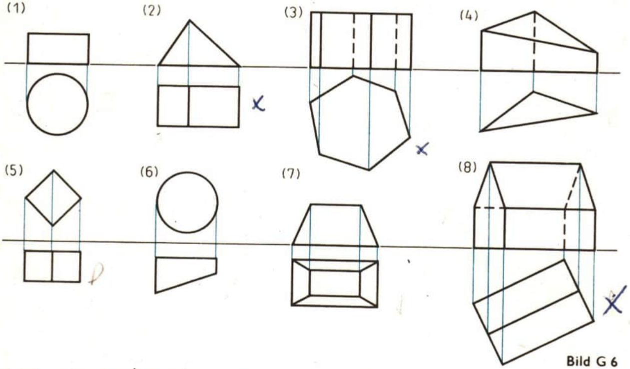


Bild G 6

3. Zeichne das Schrägbild eines „liegenden" und dasjenige eines „stehenden" regelmäßigen dreiseitigen Prismas! ($a = 4{,}5$ cm; $h = 7$ cm)

4. Zeichne das Netz **a)** eines Würfels mit $a = 6$ cm; **b)** eines Quaders mit $a = 6$ cm, $b = 5$ cm und $c = 4$ cm; **c)** eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas mit $a = 6$ cm und $h = 7$ cm; **d)** eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas mit $a = 4$ cm und $h = 12$ cm; **e)** eines Zylinders mit $d = 6$ cm und $h = 8$ cm!
Füge Klebefalze hinzu und fertige die Modelle dieser Körper an!

2 Oberflächeninhalt von Prisma und Zylinder

Will man wissen, wieviel Blech zur Herstellung eines prismatischen oder eines zylindrischen Behälters benötigt wird, berechnet man den Oberflächeninhalt des entsprechenden geometrischen Körpers. Nach der Definition von Prisma und Zylinder setzt sich die Oberfläche dieser Körper aus der **Grundfläche *G***, der **Deckfläche *D*** und dem **Mantel *M*** zusammen. Da Grund- und Deckfläche zueinander kongruent sind, gilt für die Berechnung des **Oberflächeninhalts A_O** die Formel

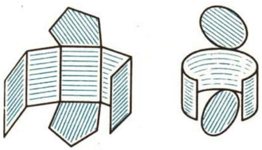


Bild G 7

$$\boxed{A_O = 2 \cdot A_G + A_M}\ .$$

Wird der Mantel längs einer Kante bzw. einer Mantellinie aufgeschnitten, so kann er in die Ebene abgewickelt werden. Als Abwicklung erhalten wir ein Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Umfang der Grundfläche *G* und dessen andere Seite gleich der Höhe *h* des Prismas oder Zylinders ist. (↗ Bild G 8a und b)

Prisma | **Zylinder**

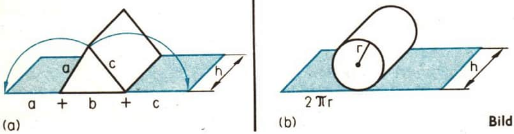


Bild G 8

Somit gilt für die Berechnung des Flächeninhalts des Mantels die Formel

$$\boxed{A_M = u \cdot h}.$$

Für ein *dreiseitiges Prisma* gilt:
$u = a + b + c$
und damit
$A_M = (a + b + c) \cdot h.$

Für einen *Zylinder* gilt:
$u = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$
und damit
$A_M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot d \cdot h.$

Wird die Abwicklung des Mantels durch Grund- und Deckfläche ergänzt, entsteht ein Körpernetz. (↗ Bild G 9a und b)

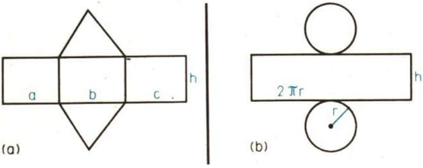


Bild G 9

■ 1 Es ist der Oberflächeninhalt eines Prismas mit der Höhe $h = 10$ cm zu berechnen. Die Grundfläche sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten $a = 3$ cm, $b = 4$ cm und $c = 5$ cm.

Gegeben: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, $h = 10$ cm, $\gamma = 90°$
Gesucht: A_O in cm²
Lösung: $A_O = 2 \cdot A_G + A_M$

$$A_O = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (a + b + c) \cdot h$$

Rechne im Kopf:

$$A_O = 2 \cdot \frac{3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{2} + (3 + 4 + 5)\text{ cm} \cdot 10\text{ cm}$$

$$A_O = 12\text{ cm}^2 + 120\text{ cm}^2$$

$$A_O = 132\text{ cm}^2$$

Antwortsatz: Der Oberflächeninhalt des Prismas beträgt 132 cm².

■ 2 Wieviel Blech wird zur Herstellung einer Konservendose mit einem Grundflächenradius von 43 mm und einer Höhe von 112 mm ohne Berücksichtigung des Zuschlages für das Falzen und den Verschnitt benötigt?

Gegeben: $r = 43$ mm; $h = 112$ mm

Gesucht: A_O (in cm²)

Lösung:

$A_O = 2 \cdot A_G + A_M$

$A_O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$A_O = 2 \cdot \pi \cdot 43^2\ \text{mm}^2 + 2 \cdot \pi \cdot 43\ \text{mm} \cdot 112\ \text{mm}$

Überschlag:

$2 \cdot 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11 = 360$

$A_O \approx 360\ \text{cm}^2$

Rechne mit dem Taschenrechner!

$A_O = 41\,877{,}429\ \text{mm}^2$; gerundet $42\,000\ \text{mm}^2 = 420\ \text{cm}^2$

Vergleiche mit dem Überschlag! (Größenordnung stimmt.)

Antwortsatz: Zum Herstellen der Dose werden ohne Berücksichtigung des Zuschlags für das Falzen und den Verschnitt rund 420 cm² Blech benötigt.

● 5 Entwickle selbständig eine Formel zur Berechnung des Mantelflächeninhaltes eines regelmäßigen *n*-seitigen Prismas!

Das Bild G 10 zeigt ein gerades Stück Rohr, das einen **Hohlzylinder** darstellt. Dieses Rohrstück soll „innen", „außen" und an den Kreisringflächen mit einem Schutzanstrich versehen werden. Will man berechnen, wieviel Farbe dazu benötigt wird, ist es zweckmäßig, den Oberflächeninhalt dieses Hohlzylinders zu bestimmen.

● 6 Stelle eine Formel für die Berechnung des Oberflächeninhalts eines Hohlzylinders auf! (↗ Bild G 10)

Hinweis:

(1) Verwende die Bezeichnungen wie im Bild G 10!

(2) Grund- und Deckfläche sind Kreisringe.

(3) Zur Oberfläche gehört nicht nur der Mantel des Zylinders mit dem größeren Grundflächenradius r_1, sondern auch der Mantel des Zylinders mit dem kleineren Grundflächenradius r_2. ($r_1 > r_2$)

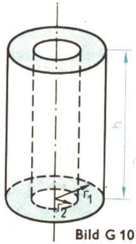


Bild G 10

Aufgaben

1. Berechne den Oberflächeninhalt der Prismen, für die folgende Angaben vorliegen!
   a) Quader: $a = 3{,}8$ cm; $b = 5{,}2$ cm; $c = 4{,}7$ cm
   b) Quader: $A_G = 4800$ mm²; $a = 64$ mm; $h = 38$ mm
   c) Quader: $a = 43$ mm; $b = 4{,}7$ cm; $c = 0{,}45$ dm
   d) Quader: $A_G = 52$ cm²; $a = 83$ mm; $h = 92{,}4$ cm
   e) Würfel: $a = 0{,}43$ m
   f) Würfel: $a = 35{,}4$ cm
   g) Würfel: $A_G = 0{,}49$ m²

2. Zeichne das Netz eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas, dessen fünf Begrenzungsflächen jeweils gleichen Umfang haben! Die Länge einer Grundflächenseite sei 6 cm!

3. Berechne den Oberflächeninhalt eines Zylinders, dessen Mantelflächeninhalt 1 dm² beträgt und bei dem
   a) die Höhe genau so lang wie der Radius ist,
   b) die Höhe genau so lang wie der Durchmesser ist,
   c) die Mantelfläche abgewickelt ein Quadrat ergibt!

4. Berechne den Inhalt der Oberfläche für die in dem Bild G 11 a bis e dargestellten Prismen!
(Die Kantenlängen sind in mm angegeben.)

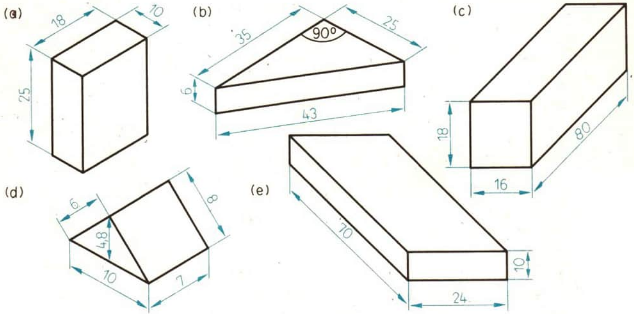


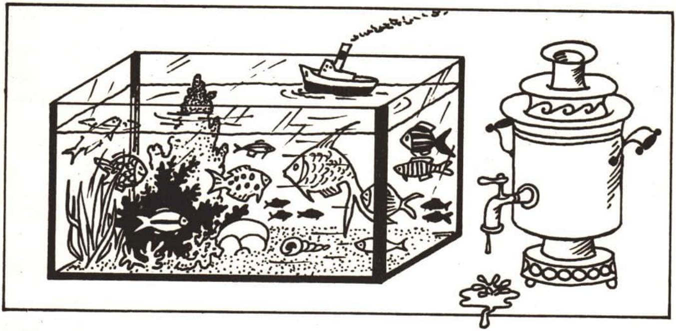
Bild G 11

5. Berechne in der folgenden Tabelle die fehlenden Größen eines Zylinders!

	r	d	h	A_G	A_M	A_O
a)	3,4 cm		7,8 cm			
b)	48 mm		34,3 cm			
c)		12,6 cm	32,0 cm			
d)		0,85 m	0,25 m			
e)			18,4 m	78 cm²		
f)			0,37 m		3,08 m²	
g)				0,92 m²	2,18 m²	
h)				125 cm²		985 cm²
i)	0,285 m					8,17 m²
k)		59,0 cm				9 018 cm²

6. Von einem Hohlzylinder sind die folgenden Maße gegeben. Berechne den Inhalt seiner Oberfläche!
a) $r_1 = 5{,}3$ cm; $r_2 = 4{,}8$ cm; $h = 11{,}7$ cm
b) $r_2 = 0{,}72$ m; $r_1 - r_2 = 0{,}02$ m; $h = 1{,}8$ m
c) $d_1 = 17{,}8$ m; $d_2 = 17{,}7$ m; $h = 22{,}5$ m
d) $r_1 = 14{,}5$ cm; $d_2 = 28{,}8$ cm; $h = 512$ mm

3 Volumen von Prisma und Zylinder



In Klasse 5 berechneten wir bereits das Volumen von Quadern. Wir legten den Quader mit Einheitswürfeln aus und ermittelten so die Formel $V = a \cdot b \cdot c$. Nun soll die Volumenformel auch für beliebige Prismen und für Zylinder gefunden werden (↗ Bild G 12a, b, c).

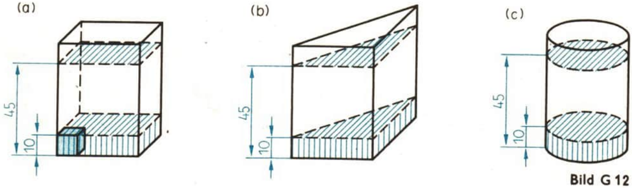


Bild G 12

Der Grundflächeninhalt eines prismatischen oder eines zylindrischen Gefäßes betrage 12 cm². Das Gefäß soll bis zu einer Höhe von 4,5 cm mit Wasser gefüllt werden. Wieviel Kubikzentimeter Wasser enthält dann das Gefäß?
Wir füllen erst einmal Wasser bis zu einer Höhe von 1 cm in das Gefäß und überlegen, daß sich dann über jedem Quadratzentimeter der Grundfläche genau ein Kubikzentimeter Wasser befindet, *unabhängig von der Form der Grundfläche.*
Die erste Schicht von 1 cm Höhe enthält deshalb genau so viele Kubikzentimeter Wasser, wie die Grundfläche Quadratzentimeter enthält. In unserem Gefäß befinden sich also bei einer Wasserhöhe von 1 cm über der Grundfläche von 12 cm² genau 12 cm³ Wasser.
Füllen wir nun das Gefäß bis zu einer Höhe von 4,5 cm mit Wasser, so befinden sich über jedem Quadratzentimeter der Grundfläche 4,5 cm³ Wasser. Um also das Volumen (in cm³) zu berechnen, muß man den Grundflächeninhalt (in cm²) mit der Höhe (in cm) multiplizieren:

$V = 12\ \text{cm}^2 \cdot 4{,}5\ \text{cm};$
$V = 54\ \text{cm}^3.$

Allgemein: $\boxed{V = A_G \cdot h}$

Für das **dreiseitige Prisma** gilt	Für den **Zylinder** gilt
$A_G = \frac{g \cdot h_g}{2}$	$A_G = \pi \cdot r^2$
und damit	und damit
$V = \frac{g \cdot h_g}{2} \cdot h.$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h.$

Man muß also die Formeln für die Berechnung des Inhalts der jeweiligen Grundfläche kennen, wenn das Volumen eines Prismas oder eines Zylinders berechnet werden soll.

■ **3** Berechne das Volumen eines Rundstabes, dessen Durchmesser 12 mm und dessen Länge 250 mm beträgt!

Gegeben: $d = 12\ \text{mm} = 1{,}2\ \text{cm}$
$h = 250\ \text{mm} = 25{,}0\ \text{cm}$

Gesucht: V (in cm^3)

Lösung: $V = A_G \cdot h$

$V = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h$

$V = \pi \cdot \frac{(1{,}2\ \text{cm})^2}{4} \cdot 25\ \text{cm}$

Überschlag: $4 \cdot \frac{1^2}{4} \cdot 25 = 25$

$V \approx 25\ \text{cm}^3$

Rechne mit dem Taschenrechner!
$V = 28{,}274\,333\ \text{cm}^3$; gerundet $28\ \text{cm}^3$
Vergleiche mit dem Überschlag!
Antwortsatz: Das Volumen des Rundstabes beträgt rund $28\ \text{cm}^3$.

● **7** Stelle für verschiedene Prismenarten die Volumenformeln in einer Tabelle zusammen! (Übertrage die Tabelle ins Heft!)

Form der Grundfläche	Volumenformel
1. Rechtwinkliges Dreieck	
2. Quadrat	
3. Rechteck	
4. Parallelogramm	
5. Trapez	
6. Drachenviereck	

● **8** Zeige, daß die allgemeine Volumenformel für Prismen und Zylinder auch die Volumenformel für den Würfel, $V = a^3$, und den Quader, $V = a \cdot b \cdot c$, umfaßt!

Die Formel für das Volumen eines *n*-seitigen Prismas erhält man, indem man die Grundfläche durch geeignete Geraden in Dreiecke zerlegt (↗ Bild G 13). Dann gilt:

$$\boxed{V = (A_1 + A_2 + \ldots + A_k) \cdot h}$$

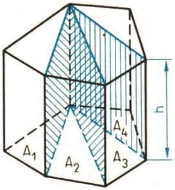


Bild G 13

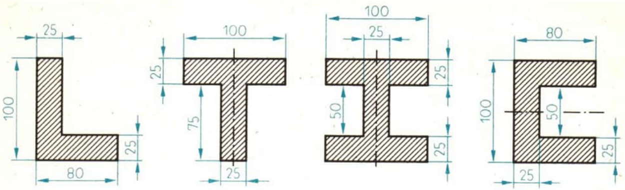


Bild G 14

● 9 Auch andere komplizierte Grundflächen kann man in einfache Flächen zerlegen, deren Flächeninhaltsformeln bekannt sind. Gegeben seien Profilstähle von 1,4 m Länge mit den im Bild G 14 dargestellten Querschnitten. Berechne ihr Volumen!

In der Technik spielen Rohre eine große Rolle. Wenn sie gerade sind, haben sie die Form eines Hohlzylinders. Berechnet man dessen Volumen, weiß man, wieviel Material für das Rohr benötigt wird ($r_1 > r_2$). (↗ Auftrag G 6, Bild G 10, S. 166)

Aufgaben

1. Ergänze in der folgenden Tabelle die fehlenden Größen eines Quaders!

	a	b	$c = h$	A_G	V
a)	4 cm	5,2 cm	3,8 cm		
b)	512 mm	83,4 cm	0,707 m		
c)	43 mm	4,7 cm	0,503 m		
d)	70,8 cm	312 mm	0,45 dm		
e)	7,6 cm		81,2 mm		512 cm³
f)		115,3 cm	57,8 cm		0,478 m³
g)	5,3 cm	4,7 cm			87,4 cm³
h)	4,8 cm			14,2 cm²	712 cm³

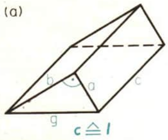
2. Vergleiche das Volumen eines Quaders mit den folgenden Kantenlängen mit dem Volumen des Quaders mit den Kantenlängen a, b, c!

a) $2a, b, c$ **b)** $a, b, 2c$ **c)** $2a, 2b, c$ **d)** $a, 2b, 3c$
e) $2a, 3b, 4c$ **f)** $\frac{a}{2}, b, c$ **g)** $\frac{a}{2}, b, \frac{c}{3}$ **h)** $\frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{4}$

3. Ergänze in der folgenden Tabelle die fehlenden Größen eines Würfels!

	a	A_G	V	A_O
a)	0,43 cm			
b)				93,4 cm²

4. Im Bild G 15a ist ein Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche dargestellt. Wie groß ist sein Volumen, wenn folgendes gilt?



a) $a = 4{,}8$ cm; $b = 7{,}3$ cm; $l = 10{,}4$ cm
b) $a = 40{,}3$ cm; $b = 458$ mm; $l = 0{,}704$ m
c) $a = 15{,}7$ mm; $b = 2{,}38$ cm; $l = 0{,}478$ m
d) $a = 7{,}4$ cm; $b = 7{,}4$ cm; $l = 7{,}4$ cm
e) $a = s$; $b = 2s$; $l = s$
f) $a = 2s$; $b = 2s$; $l = 3s$

5. Im Bild G 15b ist ein dreiseitiges Prisma dargestellt. Wie groß ist sein Volumen, wenn folgendes gilt?

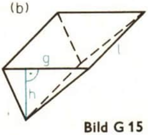


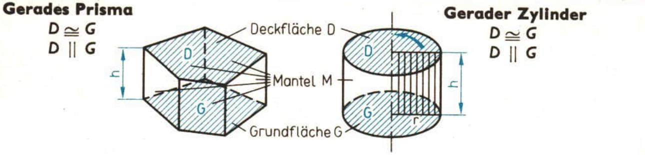
Bild G 15

a) $g = 5{,}3$ cm; $h = 4{,}1$ cm; $l = 20{,}8$ cm
b) $g = 24{,}7$ mm; $h = 8{,}12$ cm; $l = 0{,}031$ m
c) $g = 4{,}7$ mm; $h = 2{,}8$ mm; $l = 103$ mm
d) $g = 60{,}4$ mm; $h = 6{,}71$ cm; $l = 0{,}407$ m
e) $h = 2g$; $l = 3g$
f) $g = h = l$

6. Berechne für die folgende Tabelle die fehlenden Größen eines Zylinders bzw. Hohlzylinders!

	r oder d	A_G	h	V
a)	$r = 12{,}50$ m		18,75 m	
b)	$r = 33{,}7$ cm		58,1 cm	
c)	$d = 234$ mm		943 mm	
d)		5 710 cm²	0,74 m	
e)			1,00 m	1,00 m³
f)		870 cm²		4 320 cm³
g)	$d = 7{,}6$ dm			148 dm³
h)	$r = 0{,}58$ m			622 dm³
i)	$r_1 = 6{,}8$ cm $r_2 = 4{,}5$ cm		27,3 cm	
k)	$d_1 = 112$ mm $d_2 = 100$ mm		60,0 cm	

Zusammenfassung



Oberflächeninhalt: $A_O = 2 \cdot A_G + A_M$ mit $A_M = u \cdot h$

u – Umfang der Grundfläche

Volumen: $V = A_G \cdot h$

Komplexe Übungen

1. Berechne das Volumen und die Masse des im Bild G 16a dargestellten Körpers, wenn er **a)** aus Stahl, **b)** aus Aluminium besteht!

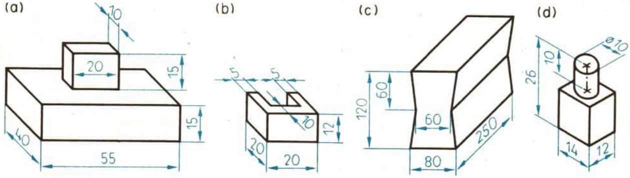


Bild G 16

2. Berechne das Volumen und die Masse des im Bild G 16b dargestellten Körpers, wenn er **a)** aus Gußeisen, **b)** aus Kupfer besteht!

3. Berechne das Volumen und die Masse
a) des im Bild G 16c dargestellten Werkstücks aus Bronze,
b) des im Bild G 16d dargestellten Werkstücks aus Stahl!

4. Welche Masse hat der im Bild G 6 (↗ S. 164) im Zweitafelbild dargestellte Körper (2), wenn er aus Stahl besteht? Um wieviel Prozent geringer wäre seine Masse, würde man den Körper aus Polystyrol herstellen? Entnimm die Maße dem Zweitafelbild!

5. Der quaderförmige Trog des Schiffshebewerkes Rothensee bei Magdeburg hat eine Breite von 12,50 m und eine Länge von 85 m. Seine Wassertiefe beträgt 2,50 m. Wieviel m³ Wasser faßt der Trog?

6. Das Becken eines Schwimmbades hat die Form eines Quaders mit den Maßen 50 m × 20 m × 3 m. Bestimme, in welcher Zeit das Becken bis zu einer Höhe von 2,8 m mit Wasser gefüllt wird, wenn dem Becken in 1 Minute 6,7 m³ Wasser zufließen!

7.* Ein Ziegelstein hat die Abmessungen 65 mm, 12 cm und 2,5 dm. Ein quaderförmiger Großblock soll 1,80 m lang, 130 cm breit und 19 cm dick sein. Wieviel Ziegelsteine müßten anstelle eines Großblockes vermauert werden, wenn man Mörtelfugen von 1 cm berücksichtigt?

8. Eine 2,75 m breite und 9,00 m lange Sprunggrube soll mit frischem Sand so aufgefüllt werden, daß der Sand 50 cm hoch liegt. Wieviel Tonnen Sand $\left(\varrho' = 1{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ sind anzufahren?

9. Für das Gehäuse einer Haushaltswaage wurde ein rechteckiger Blechstreifen von 390 mm Länge und 85 mm Breite verwendet. Die Stärke des Materials betrug 2,5 mm. Durch einen Verbesserungsvorschlag gelang es, 2 mm starkes Blech zu benutzen. Berechne die Materialeinsparung in Tonnen für eine Serie von 100 000 Stück! $\left(\text{Dichte des Eisens } 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$

10. Ein zylindrischer Brunnen soll gegraben werden ($d = 1{,}50$ m).
a) Wieviel Kubikmeter Erdreich sind auszuschachten, wenn man 12 m tief graben muß?
b) Wieviel Fuhren sind das, wenn ein Wagen 2 m³ faßt?

11. Ein zylindrisches Gefäß ist 4,00 m hoch und hat einen Durchmesser von 1,40 m. Wie viele solcher Gefäße werden in einem Chemiewerk benötigt, um 46 m³ Salzsäure zu lagern?

12. Bis zu welcher Höhe füllt 1 Liter Wasser ein Gefäß von der Form eines Zylinders, wenn der innere Radius **a)** 4 cm, **b)** 5 cm beträgt?

13.* In einem zylindrischen Gefäß befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der inneren Höhe des Gefäßes. Nachdem genau 3,5 Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der inneren Gefäßhöhe. Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

14. Ein 6,00 m langes Kupferrohr hat einen äußeren Durchmesser von 36 mm, einen inneren Durchmesser von 30 mm. Berechne **a)** seinen Querschnitt, **b)** seine Masse!

15. Ein zylindrischer Silo einer LPG ist innen 4,2 m hoch und hat einen Innendurchmesser von 3,5 m.
a) Wie groß ist sein Fassungsvermögen?
b) Wieviel Tage reicht der Futtervorrat, wenn täglich 0,25 m³ Futter verbraucht werden?

16. Der Teil einer Anschlagsäule, der mit Plakaten beklebt wird, hat einen Durchmesser von 1,40 m und ist 2,50 m hoch. Wie groß ist die Fläche zum Bekleben?

17. Wieviel Eisenblech benötigt man zur Herstellung eines Abflußrohres von 14 cm Durchmesser und 250 cm Länge? (Für den Falz sind 10% hinzuzufügen!)

18. Ein Werkstück aus Grauguß $\left(\varrho = 7{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ mit der Masse von 80 kg erhält durch Bearbeitung die Form eines Zylinders. Dessen Durchmesser beträgt 25 cm, die Höhe 20 cm. Berechne die Masse des Werkstücks! Wieviel Prozent beträgt der Bearbeitungsabfall?

19. Aus einem Kupferbarren (100 mm × 100 mm × 700 mm) wird Kupferdraht hergestellt. Berechne die Länge des Drahtes, wenn der Durchmesser **a)** 6 mm, **b)** 0,08 mm beträgt!

20. Die Längen von Durchmesser und Höhe eines Rundbolzens aus Stahl werden mit $d = (43 \pm 0{,}1)$ mm und $h = (180 \pm 1{,}0)$ mm angegeben. Berechne **a)** den absoluten, **b)** den relativen, **c)** den prozentualen Fehler seines Volumens, das diesen Toleranzen entspricht! Was bedeutet das für den Materialverbrauch?

21. Wieviel Kilogramm wiegt der Bleimantel eines Kabels von 3,000 km Länge und einer Wanddicke von 3 mm? Der Durchmesser des Kabels ohne Mantel betrage 44 mm; die Dichte von Blei ist dem Tafelwerk zu entnehmen!

22. Berechne das Volumen und die Masse der Werkstücke aus Stahl, die in dem Bild G 17a bis d dargestellt sind!

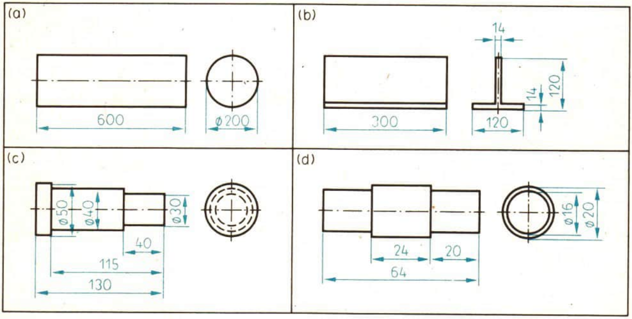


Bild G 17

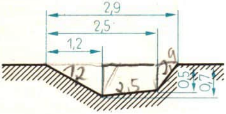


Bild G 18

23. Ein Flußbett hat an einem Beobachtungsort im Querschnitt die Form und die Maße, wie sie im Bild G 18 angegeben sind (Maßangaben in m). Die Strömungsgeschwindigkeit beträgt $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Bestimme, wieviel Kubikmeter Wasser an dieser Stelle während einer Minute passieren!

24. Welchen Druck übt eine 40 cm hohe Schneeschicht auf ein horizontales Dach aus? (Die Dichte des Schnees ist mit $0{,}35\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ anzunehmen.)

25. Die Abwicklung der Mantelfläche eines Zylinders ergibt ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Bestimme das Volumen des Zylinders!

Bildnachweis:

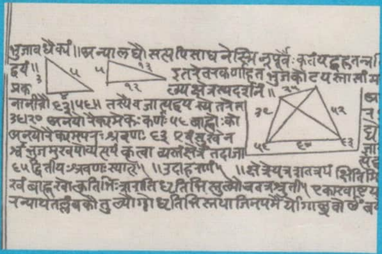
Bilder A 2 und F 11: Foto Seifert, Berlin; Bild B 1, Bild S. 87 und Bilder auf dritter Umschlagseite: Bildarchiv Volk und Wissen; Bilder E 20 und F 38: Zentralbild

R Register

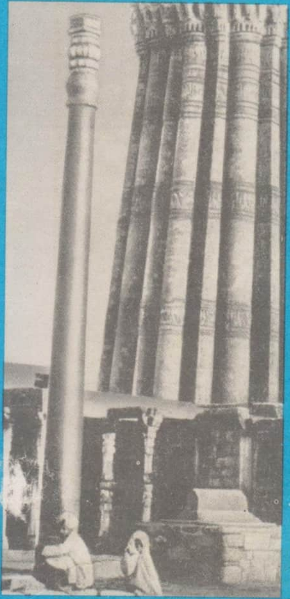
Im folgenden Register findest du alphabetisch geordnet Stichwörter mit Seitenangaben, die dir das Aufsuchen von Begriffen und wichtigen Merksätzen erleichtern. Steht hinter der Seitenziffer noch ein „f.", so bedeutet das, daß sich die Erklärungen zu diesem Stichwort bis zur folgenden Seite erstrecken. Folgt der Seitenziffer das Zeichen „ff.", so erstrecken sich die Erklärungen sogar über mehrere der folgenden Seiten.

Über das Lösen von Gleichungen in der Antike

Das Aufstellen und Lösen von Gleichungen reicht bis in die Frühzeit der menschlichen Entwicklung zurück. Bei der planmäßigen Feldbestellung, der Errichtung von Bauwerken, der Herstellung von Gerätschaften, dem Handel mit den fertigen Produkten und vielen anderen Tätigkeiten entstand die Notwendigkeit, unbekannte Größen mit Hilfe von Gleichungen zu ermitteln. Im alten Ägypten wurden schon im 2. Jahrtausend v. u. Z. Gleichungen gelöst.
Als Schriftzeichen für die Variable in einer Gleichung wurde das Zeichen verwendet, das in anderen Texten „Haufen" oder „Menge" bedeutet.
Aber auch in anderen Kulturkreisen, so in Indien und China, war das Lösen von Gleichungen bekannt, und es wurden auch Lösungsverfahren für kompliziertere Arten von Gleichungen entwickelt.



Dieses Bild zeigt einen Ausschnitt aus einem Werk des indischen Mathematikers Bhaskara, das im Jahre 522 geschrieben wurde.



Eiserne Säule aus dem Jahre 415, die im Hof einer Moschee in Delhi (Indien) ihren Platz hat. Sie zeigt anschaulich die großen Fertigkeiten indischer Handwerker in der Metallbearbeitung. Die 7,25 m hohe Säule mit einer Masse von ca. 6,5 t zeigt bisher kaum einen Rostansatz.

Kurzwort: 000716 Lehrb. Mathe Kl7
Schulpreis DDR: 2,10