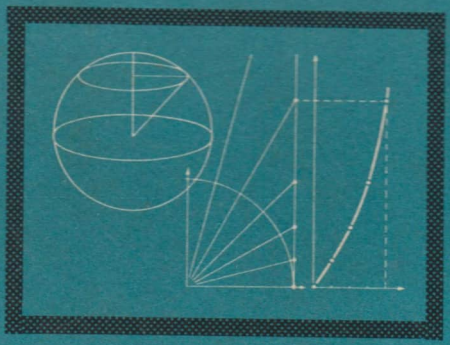
10

Mathematik



MATHEMATIK

EIN LEHRBUCH FÜR DIE OBERSCHULE

ZEHNTE KLASSE

Ausgabe 1960

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

1961

Den Teil Trigonometrie verfaßte Harald Stenzschell unter Verwendung von Abschnitten des entsprechenden Teils im Lehrbuch der Mathematik für die erweiterte Oberschule, 10. Schuljahr, der von Prof. Dr. Werner Renneberg und Johannes Reth geschrieben wurde. Der Teil Stereometrie wurde von Kurt Otte und der Teil Dyadisches Zahlensystem von Hans Simon verfaßt. An der Bearbeitung der Teile Trigonometrie und Stereometrie war Hans Simon beteiligt.

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Lehrbuch für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule bestätigt.

Redaktionsschluß: 5. 3. 1960
Zeichnungen: Kurt Dornbusch
Einband: Gerhard Anton

ES 11 G · Bestell-Nr. 00 920-3 · 2,10 DM · Lizenz Nr. 203 · 1000/61 (DN)
Satz: B.G.Teubner, Leipzig C 1, Querstr. 17 (III/18/154)
Druck: Messe- u. Musikaliendruck, Leipzig, III/18/157

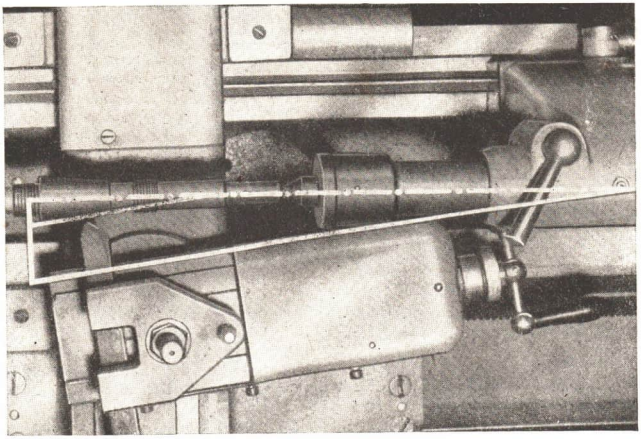


Abb. 1

EBENE TRIGONOMETRIE

I. Die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0° bis 90°

Zur Wiederholung:

1. Was versteht man unter ähnlichen Dreiecken?
2. Geben Sie Bedingungen an, unter denen Dreiecke ähnlich sind!
3. Was wissen Sie über das Verhältnis gleichliegender Seiten in ähnlichen Dreiecken?
4. Was wissen Sie über gleichliegende Winkel in ähnlichen Dreiecken?

Ein wichtiges Maschinenelement sind konische Zapfen (auch Kegelzapfen oder kurz „Kegel" genannt). Sie ergeben sich als mathematische Körper, wenn von einem „mathematischen Kegel" die Spitze abgeschnitten wird. Es sind sogenannte Kegelstümpfe (Abb. 2). Sie können auf einer Drehmaschine durch Schrägstellen des Oberteils des verschiebbaren Werkzeugschlittens, des sogenannten Längssupports, hergestellt werden. Der Einstellwinkel des Supports β hängt vom Kegelwinkel α ab; offenbar ist $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (Abb. 3; zur Vereinfachung wurde der Antrieb weggelassen).

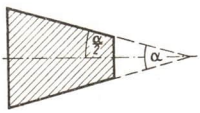


Abb. 2

Nun wird in der Technik aber die Gestalt eines Kegels nicht durch den Winkel α oder $\frac{\alpha}{2}$ angegeben, sondern durch die Fachbezeichnung „Kegel $\frac{1}{x}$“. Das bedeutet (Abb. 4a), daß auf eine Zapfenlänge von x mm sich der Durchmesser D um 1 mm vermindert. Hat der Kegel eine andere Länge l, so verjüngt er sich von D auf d (um $D - d$), wobei wegen des Strahlensatzes die Proportion gilt:

$$1 : x = (D - d) : l$$

(Abb. 4b)

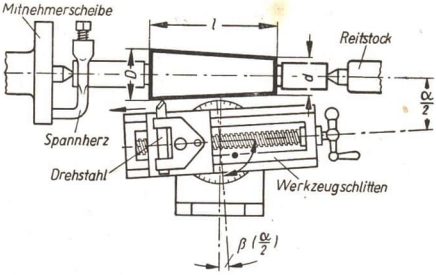


Abb. 3

Sowohl in Abbildung 4a als auch in Abbildung 4b sind „Kegel 1 : 4“ dargestellt.

Für das Arbeiten auf der Drehmaschine ist es nötig, aus der Vorschrift $1 : x$ den Einstellwinkel β des Supports, also letztlich den Kegelwinkel α zu bestimmen.

Mit den bisher bekannten mathematischen Mitteln ist die Bestimmung des Winkels α nur auf geometrischem Wege möglich. Eine sorgfältig angefertigte und maßgerechte Konstruktion nach Abbildung 4a ermöglicht es, die Größe des Winkels α mit meist hinreichender Genauigkeit abzulesen. Die Bestimmung des Winkels durch Rechnung ist dagegen mit den bisher behandelten mathematischen Mitteln nicht möglich.

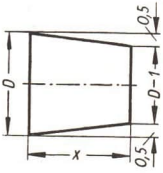


Abb. 4a

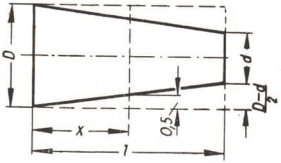


Abb. 4b

Die Bearbeitung technischer oder naturwissenschaftlicher Probleme führt häufig zu Aufgaben, in denen in einer Figur Zusammenhänge zwischen Streckenverhältnissen und Winkeln auftreten. Die rechnerische Lösung solcher Aufgaben ist mit Hilfe der **ebenen Trigonometrie** möglich. Diese beschäftigt sich zunächst mit Dreiecken[1] und zeigt, wie man aus drei bestimmten gegebenen Stücken alle übrigen Stücke und auch den Flächeninhalt durch Rechnung finden kann.

---

[1] Tri-gono-metrie (griech.), wörtlich: Drei-Winkel-Messung; frei: Dreiecksberechnung.

1. Die Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck ABC der Abbildung 5 bezeichnet man die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete $a = BC$ als **Gegenkathete** und die dem Winkel α anliegende Kathete $b = AC$ als **Ankathete** in bezug auf den Winkel α. Die Strecke $c = AB$ liegt dem rechten Winkel ACB gegenüber; sie ist die **Hypotenuse.**

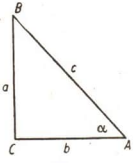


Abb. 5

Ändert sich der Winkel α, so muß sich notwendigerweise auch das Seitenverhältnis $\frac{a}{c}$ ändern, so daß jedem Winkel α ein ganz bestimmter Verhältniswert zugeordnet ist. Das Seitenverhältnis $\frac{a}{c}$ ist demnach eine Funktion des Winkels α. Es wird als der **Sinus** des Winkels α bezeichnet.

$$f(\alpha) = \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Erklärung 1

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man das Verhältnis aus der Gegenkathete eines Winkels und der Hypotenuse als den Sinus dieses Winkels.

$$\sin\alpha = \frac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Hypotenuse}}$$

Der Wert des Seitenverhältnisses $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ wächst, wenn der Winkel wächst; er wird kleiner, wenn der Winkel kleiner wird. Davon kann man sich anschaulich überzeugen, wenn man verschiedene rechtwinklige Dreiecke mit derselben Hypotenuse, aber verschiedenen Winkeln α zeichnet und die Größen der Gegenkatheten betrachtet (Thaleskreis!).

Bezeichnet man den Winkel als unabhängige Variable mit x und den Wert des Verhältnisses $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ als abhängige Variable mit y, so erhält man als analytischen Ausdruck der **Sinusfunktion:**

$$y = f(x) = \sin x$$

Die Funktionswerte $y = \sin x$ sind als Verhältnis zweier Strecken unbenannte Zahlen; ihre Berechnung ist nur in Ausnahmefällen mit elementaren Hilfsmitteln möglich.

2. Die Tangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Bei der Diskussion der linearen Funktion $y = mx$ ist der Koeffizient m von x als Richtungsfaktor bezeichnet worden, weil er die Richtung der Geraden kennzeichnet. Auch der Winkel α zwischen der positiven Richtung der Abszissenachse und der Geraden könnte dazu dienen. Wir wollen ihn als Richtungswinkel bezeichnen. Wir fragen, ob zwischen m und α eine funktionale Beziehung besteht.

Die Umformung des analytischen Ausdrucks $y = mx$ zu $m = \frac{y}{x}$ zeigt, daß m das Verhältnis zweier Strecken darstellt, nämlich aus dem Lot $y = PQ$ von einem beliebigen Punkte P der Geraden auf die x-Achse und dem zugehörigen Abschnitt $x = OQ$

auf der x-Achse vom Ursprung O bis zum Fußpunkt des Lotes Q (Abb. 6). Das Lot PQ und der Abschnitt OQ auf der x-Achse sind bekanntlich die Strecken, durch die die Ordinate y und die Abszisse x des Punktes $P(x; y)$ im rechtwinkligen Koordinatensystem grafisch dargestellt werden.

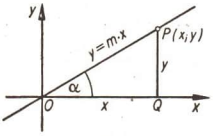


Abb. 6

Im rechtwinkligen Dreieck OQP ist die Seite $PQ = y$ die Gegenkathete, die Seite $OQ = x$ die Ankathete in bezug auf den Winkel α.

Ändert sich der Richtungswinkel α, so muß sich notwendigerweise auch das Seitenverhältnis $\frac{y}{x}$ ändern. Jedem Winkel α ist ein bestimmter Verhältniswert $\frac{y}{x}$ zugeordnet. Das Seitenverhältnis $\frac{y}{x}$ ist demnach eine Funktion des Richtungswinkels α. Es wird als der **Tangens** des Winkels α bezeichnet.

$$g(\alpha) = \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Wir stellen also fest: Der Richtungsfaktor m ist der Tangens des Richtungswinkels α:

$$m = \tan \alpha.$$

Erklärung 2

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man das Verhältnis aus der Gegenkathete und der Ankathete eines Winkels als den Tangens dieses Winkels.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Der Wert des Seitenverhältnisses $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ wächst, wenn der Winkel wächst; er wird kleiner, wenn der Winkel kleiner wird. Auch davon kann man sich anschaulich überzeugen, wenn man mehrere rechtwinklige Dreiecke mit verschiedenen Winkeln α, aber gleichen Ankatheten b (vgl. Abb. 5) zeichnet, und auf die Veränderung der Größe der Gegenkathete achtet. Bezeichnet man den Winkel als unabhängige Variable mit x und den Wert des Verhältnisses $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ als abhängige Variable mit y, so erhält man die **Tangensfunktion.**

$$y = g(x) = \tan x$$

Die Funktionswerte $y = \tan x$ sind als Verhältnisse zweier Strecken ebenfalls unbenannte Zahlen; ihre Berechnung ist nur in Ausnahmefällen mit elementaren Hilfsmitteln möglich.

Auch das Kegelverhältnis $\frac{1}{x}$ im Einführungsbeispiel ist durch die Tangensfunktion mit dem Kegelwinkel α verknüpft durch $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 \cdot x}$ (Abb. 2 und 4a).

3. Die Sinusfunktion am Einheitskreis

Es sei ein rechtwinkliges uv-Koordinatensystem gegeben (Abb. 7).

Läßt man einen im Ursprung des Koordinatensystems beginnenden Strahl um seinen Anfangspunkt $O(0; 0)$ von der positiven Seite der u-Achse als Ausgangslage aus im

positiven Drehsinn, das ist entgegen dem Uhrzeigersinn, rotieren, so ändert sich laufend der Winkel x zwischen Strahl und positiver Seite der u-Achse.

Um den Punkt O sei weiterhin ein Kreis mit dem Radius r gezeichnet. Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneide den Kreis in $P\ (u; v)$. Der Fußpunkt des Lotes von P aus auf die u-Achse sei Q. Das Dreieck OQP ist rechtwinklig.

Nach der Erklärung 1 ist in diesem Dreieck

$$\sin x = \frac{PQ}{OP} = \frac{v}{r} \qquad (1)$$

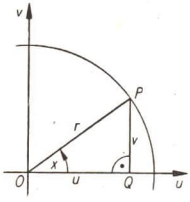


Abb. 7

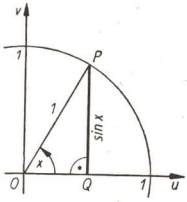


Abb. 8

Ergebnis: Das Verhältnis des Lotes von einem auf der Kreisperipherie beweglichen Punkte P auf die u-Achse zum Radius des Kreises ist gleich dem Sinus des Winkels x. Wird dabei der Radius r in derselben Einheit gemessen wie das Lot v, so ergibt sich als Funktionswert $\sin x$ das Verhältnis der beiden Maßzahlen dieser Strecken. Die Maßzahl des Lotes ist dabei die Ordinate v des Punktes $P\ (u; v)$.

Wird um den Punkt O der Kreis mit der Maßeinheit 1 als Radius gezeichnet, den man den **Einheitskreis** nennt (Abb. 8), so geht Gleichung (1) über in

$$\sin x = \frac{v}{1} = v \qquad (2)$$

Ergebnis: **Die Ordinate v eines auf der Peripherie des Einheitskreises liegenden Punktes P ist gleich dem Sinus des zugehörigen Winkels x.**

Wichtig ist, daß das uv-Koordinatensystem hier wie im folgenden aus zwei linear geteilten Koordinatenachsen mit gleichen Einheiten besteht. Die vorstehende Betrachtung hat zunächst nur für Winkel zwischen 0° und 90° Gültigkeit, da sich für Winkel $x = 0°$ und $x \geqq 90°$ kein rechtwinkliges Dreieck ergibt.

Aus Abbildung 8 können wir besonders gut ablesen, wie sich der Funktionswert $y = \sin x$ ändert, wenn sich der Winkel x ändert. Nimmt der Winkel x ab und nähert sich 0°, so nähert sich $\sin x$ dem Wert 0. Für $\sin 0°$ versagt Erklärung 1. Man setzt deshalb durch eine Definition fest:

$$\mathbf{\sin 0° = 0.} \qquad (3)$$

Nimmt der Winkel x zu und nähert sich 90°, so nähert sich $\sin x$ dem Wert 1. Man definiert entsprechend:

$$\mathbf{\sin 90° = 1} \qquad (4)$$

Folgerung: **Die Sinuswerte der Winkel zwischen 0° und 90° liegen zwischen 0 und 1, und zwar gehört zum größeren von zwei Winkeln stets der größere Sinuswert.**

4. Die Tangensfunktion am Einheitskreis

Im Punkt A (1; 0) der Abbildung 9 wird die Tangente an den Einheitskreis des uv-Koordinatensystems gelegt. Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneide die Tangente in R. In dem rechtwinkligen Dreieck OAR ist dann:

$$\tan x = \frac{AR}{OA} = \frac{AR}{1} = AR$$

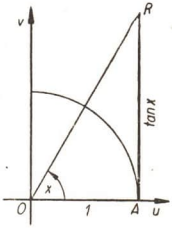


Abb. 9

Ergebnis: Die Maßzahl des Abschnittes AR auf der Tangente im Punkte A des Einheitskreises ist gleich dem Wert des Tangens des Winkels x.

Aus Abbildung 9 können wir ablesen, wie sich der Funktionswert $y = \tan x$ ändert, wenn sich der Winkel x ändert. Nimmt der Winkel x ab und nähert sich 0°, so nähert sich auch $\tan x$ dem Werte 0. Für $\tan 0°$ versagt Erklärung 2. Man setzt deshalb durch Definition fest:

$$\tan 0° = 0.$$

Nimmt der Winkel x zu und nähert sich dem Wert 90°, so wächst der Abschnitt AR unbegrenzt, und damit wird der Wert der Funktion $y = \tan x$ größer als jede angebbare Zahl. Ihr Verhalten ist vergleichbar mit dem der Funktion $y = \frac{1}{x}$, wenn x sich dem Werte 0 nähert. Für $x = 90°$ ist die Tangensfunktion demnach nicht erklärt. Es gilt also:

$$\tan 0° = 0;$$

tan 90° ist nicht erklärt.

Wächst der Winkel x von 0° bis 90°, so wächst der Tangens des Winkels x von 0 bis zu Werten, die größer sind als jede angebbare Zahl.

Aufgaben

1. a) Zeichnen Sie mehrere rechtwinklige Dreiecke, die in einem spitzen Winkel übereinstimmen! Bestimmen Sie in ihnen das Verhältnis der Gegenkathete dieses Winkels zur Hypotenuse
b) und vergleichen Sie die einzelnen Ergebnisse miteinander!
c) Wie ändert sich das Verhältnis, wenn sich der Winkel ändert?

2. Welche Werte haben $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ in einem rechtwinkligen Dreieck
a) mit den Katheten $a = 4$ dm und $b = 3$ dm,
b) mit der Hypotenuse $c = 13$ mm und der Kathete $a = 5$ mm,
c) mit den Katheten $a = b = 2$ cm,
d) mit der Hypotenuse $c = 8$ cm und der Kathete $a = 4$ cm,
e) mit der Hypotenuse r und den Katheten s und t?

3. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Sinus folgende Werte annimmt!

a) 0,5 **b)** 0,25 **c)** 0,1 **d)** 0,3 **e)** 0,4

f) 0,8 **g)** 0,9 **h)** $\frac{2}{3}$ **i)** 1,5

4. Zeichnen Sie zwei rechtwinklige Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ mit den Winkeln $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$ und mit den Katheten $b_1 = 5$ cm bzw. $b_2 = 7$ cm!

Messen Sie in beiden Fällen die Gegenkathete a_1 bzw. a_2 und bestimmen Sie die Quotienten $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$!

Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Feststellung!

5. Beweisen Sie mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre: In rechtwinkligen Dreiecken, die in einem spitzen Winkel übereinstimmen, ist das Verhältnis aus Gegenkathete und Ankathete unabhängig von der Länge der Katheten!

6. Zeichnen Sie rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln $\alpha = 10°, 20°, 30°, \ldots, 80°$!
Bestimmen Sie in jedem dieser Dreiecke das Verhältnis der Katheten $a : b$!
Tragen Sie die gefundenen Werte in eine Wertetafel ein!
Kommt es auf die Größe der Dreiecke an?
Überlegen Sie, wie man die Verhältnisse $a : b$ möglichst leicht bestimmen kann!

7. Welche Werte haben $\tan \alpha$ und $\tan \beta$ in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten

a) $a = 1$ dm und $b = 1$ dm; **b)** $a = 2$ cm und $b = 4$ cm;

c) $a = 0{,}6$ m und $b = 0{,}9$ m; **d)** p und q?

8. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Tangens folgende Werte annimmt:

a) 0,5; **b)** 0,8; **c)** $\frac{4}{7}$; **d)** 1; **e)** 2; **f)** $\sqrt{3}$; **g)** $\sqrt{5}$; **h)** 5!

9. Zeichnen Sie rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Hypotenuse und mit den Winkeln $\beta = 10°, 20°, 30°, \ldots, 80°$ und bestimmen Sie jedesmal das Verhältnis

a) $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$, **b)** $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$!

Tragen Sie die Ergebnisse einschließlich der Werte für 0° und 90° in eine Wertetafel ein!

10. In einem Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne von der Länge l mit dem zugehörigen Zentriwinkel α gezeichnet. Das Lot vom Kreismittelpunkt auf die Sehne halbiert Zentriwinkel und Sehne.

a) Stellen Sie eine funktionale Beziehung zwischen halbem Zentriwinkel, halber Sehne und Kreisradius auf!

b) Wie groß ist in einem Kreis vom Durchmesser 7 cm die Sehne zu den Zentriwinkeln 20°, 80°, 100°, 140°?

Benutzen Sie zur Bestimmung die Tabelle aus Aufgabe 9b!

5. Die Kosinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck ABC der Abbildung 10 stellt das Seitenverhältnis $b : c$ den Sinus des Winkels β dar. Man kann jedoch das Seitenverhältnis $b : c$ auch in Beziehung zum Winkel α setzen. Für den Winkel α bedeutet $b : c$ das Verhältnis von Ankathete zur Hypotenuse.

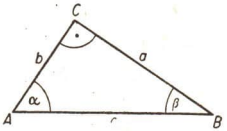


Abb. 10

Erklärung 3

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man das Verhältnis aus der Ankathete eines Winkels zur Hypotenuse als den Kosinus dieses Winkels.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Das Seitenverhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ wächst, wenn der Winkel kleiner wird; es wird kleiner, wenn der Winkel wächst.

Machen Sie sich das an einer Thaleskreisfigur wie beim Sinusverhältnis in Kapitel 1 klar!

Jedem Seitenverhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ ist ein bestimmter Winkel zugeordnet und umgekehrt. Bezeichnet man den Winkel als unabhängige Variable mit x und den Wert des Verhältnisses $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ als abhängige Variable mit y, so erhält man die **Kosinusfunktion**

$$y = h(x) = \cos x.$$

Die Funktionswerte $y = \cos x$ sind als Verhältnisse zweier Strecken ebenfalls unbenannte Zahlen; auch ihre Berechnung ist mit elementaren Hilfsmitteln nur in Ausnahmefällen möglich.

6. Die Kotangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck der Abbildung 10 stellt das Seitenverhältnis $a : b$ den Tangens des Winkels α dar. Die Größe des Winkels α wird auch durch das umgekehrte Verhältnis $b : a$ bestimmt.

Erklärung 4

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man das Verhältnis aus der Ankathete und der Gegenkathete eines Winkels als den Kotangens dieses Winkels.

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Das Seitenverhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$ wächst, wenn der Winkel kleiner wird; es wird kleiner, wenn der Winkel wächst.

Machen Sie sich das an einer Figur wie beim Tangensverhältnis in Kapitel 2 klar!

Jedem Seitenverhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$ ist ein bestimmter Winkel zugeordnet und umgekehrt. Bezeichnet man den Winkel als unabhängige Variable mit x und den Wert des Verhältnisses $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$ als abhängige Variable mit y, so erhält man die **Kotangensfunktion.**

$$y = k(x) = \cot x$$

Die Funktionswerte $y = \cot x$ sind als Verhältnisse zweier Strecken ebenfalls unbenannte Zahlen; ihre Berechnung ist mit elementaren Hilfsmitteln wiederum nur in Ausnahmefällen möglich.

7. Die Kosinusfunktion am Einheitskreis

Im rechtwinkligen Dreieck der Abbildung 11 ist nach Erklärung 3:

$$\cos x = \frac{OQ}{OP} = \frac{u}{1} = u \qquad (1)$$

Ergebnis: **Die Abszisse u eines auf der Peripherie des Einheitskreises liegenden Punktes P ist gleich dem Kosinus des zugehörigen Winkels x.**

Aus Abbildung 11 können wir ablesen, wie sich der Funktionswert $y = \cos x$ ändert, wenn sich der Winkel x ändert. Nimmt der Winkel x ab und nähert sich 0°, so nähert sich $\cos x$ dem Wert 1. Für $\cos 0°$ versagt Erklärung 3.
Man setzt deshalb durch eine Definition fest:

$$\cos 0° = 1 \qquad (2)$$

Nimmt der Winkel x zu und nähert sich 90°, so nähert sich $\cos x$ dem Wert 0.
Für $\cos 90°$ versagt Erklärung 3.
Man definiert entsprechend:

$$\cos 90° = 0 \qquad (3)$$

Folgerung: Die Kosinuswerte der Winkel zwischen 0° und 90° liegen zwischen 1 und 0, und zwar gehört zum größeren von zwei Winkeln stets der kleinere Kosinuswert.

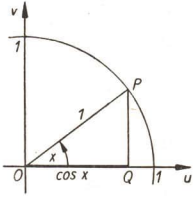


Abb. 11

8. Die Kotangensfunktion am Einheitskreis

Zur Wiederholung:

1. Wie nennt man die Winkel α und β in Abb. 12?
2. Welchen Satz kennen Sie über derartige Winkel an geschnittenen Parallelen?
3. Beweisen Sie diesen Satz!

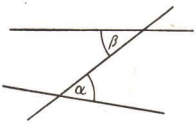


Abb. 12

Im Punkt B (0; 1) der Abbildung 13 wird die Tangente an den Einheitskreis des uv-Koordinatensystems gelegt. Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneide die Tangente in T. Das Dreieck OTB ist rechtwinklig, und es gilt $\sphericalangle OTB = \sphericalangle x$.
Nach Erklärung 4 ist dann

$$\cot x = \frac{BT}{OB} = \frac{BT}{1} = BT$$

Ergebnis: Die Maßzahl des Abschnitts BT auf der Tangente im Punkte B des Einheitskreises ist gleich dem Wert des Kotangens des Winkels x.

Aus Abbildung 13 können wir ablesen, wie sich der Funktionswert $y = \cot x$ ändert, wenn sich der Winkel x ändert.

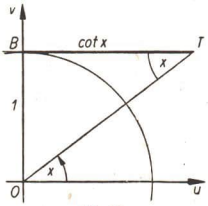


Abb. 13

Nimmt der Winkel x zu und nähert sich 90°, so nähert sich $\cot x$ dem Wert 0. Für cot 90° versagt Erklärung 4. Man setzt deshalb durch Definition fest: $\cot 90° = 0$.

Nimmt der Winkel x ab und nähert sich dem Wert 0°, so wird der Abschnitt BT und damit der Wert der Funktion $y = \cot x$ größer als jede angebbare Zahl. Für $x = 0°$ ist deshalb die Kotangensfunktion nicht erklärt. Es gilt also:

cot 0° ist nicht erklärt;

cot 90° = 0.

Wächst der Winkel x von 0° bis 90°, so nimmt der Kotangens von Werten, die größer sind als jede angebbare Zahl, bis zum Wert 0 ab.

Aufgaben

1. Zeichnen Sie mehrere rechtwinklige Dreiecke, die in einem spitzen Winkel übereinstimmen! Bestimmen Sie in ihnen das Verhältnis der Ankathete dieses Winkels zur Hypotenuse und vergleichen Sie die einzelnen Ergebnisse miteinander! Wie ändert sich das Verhältnis, wenn sich der Winkel ändert?
2. Welche Werte haben $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten, wie sie in Aufgabe 2, Seite 8, angegeben sind?
   Vergleichen Sie jeweils $\sin\alpha$ mit $\cos\beta$ und $\cos\alpha$ mit $\sin\beta$!
3. Konstruieren Sie rechtwinklige Dreiecke mit
   a) $\alpha = 22{,}5°$, **b)** $\alpha = 45°$, **c)** $\alpha = 67{,}5°$
   und ermitteln Sie die Kosinuswerte dieser Winkel!
4. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Kosinus die in Aufgabe 3, Seite 8, angegebenen Werte annimmt!
5. Zeichnen Sie über dem Durchmesser eines Halbkreises Dreiecke, deren Spitzen auf der Peripherie liegen! Wie ändert sich
   a) die Gegenkathete
   b) die Ankathete eines der spitzen Winkel des Dreiecks, wenn dieser, bei kleinen Winkeln angefangen, zunimmt?
   Ziehen Sie daraus Folgerungen für den Verlauf der Sinus- bzw. der Kosinusfunktion!
   Für welches rechtwinklige Dreieck ist $\sin\alpha = \cos\alpha$?
6. Zeichnen Sie zwei rechtwinklige Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ mit den Winkeln $\alpha_1 = \alpha_2 = 50°$ und mit den Katheten $a_1 = 6$ cm bzw. $a_2 = 8$ cm!
   Messen Sie in beiden Fällen die Ankathete b_1 bzw. b_2 und bestimmen Sie die Quotienten $\frac{b_1}{a_1}$ und $\frac{b_2}{a_2}$!
   Was stellen Sie fest?
   Begründen Sie ihre Feststellung!
7. Welche Werte haben $\cot\alpha$ und $\cot\beta$ in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten, wie sie in Aufgabe 7, Seite 9 angegeben sind?
8. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Kotangens die in Aufgabe 8, Seite 9, angegebenen Werte annimmt!
9. Zeichnen Sie rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Hypotenusen und mit den Winkeln $\alpha = 10°$, 20°, 30°, ..., 70° und bestimmen Sie jedesmal das Verhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$!
   Tragen Sie die Ergebnisse einschließlich des Wertes für 90° in eine Wertetafel ein!
10. Zeichnen und messen Sie die Werte
    a) der Kosinusfunktion, **b)** der Kotangensfunktion
    am Einheitskreis für die Winkel 10°, 20°, ..., 70°!

9. Der Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen

Wir haben kennengelernt, daß im rechtwinkligen Dreieck ABC (Abb. 14) folgendes gilt:

Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Der Kosinus eines Winkels ist das Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Der Tangens eines Winkels ist das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Der Kotangens eines Winkels ist das Verhältnis der Ankathete zur Gegenkathete.

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Man nennt diese Seitenverhältnisse die **trigonometrischen Funktionen** oder **Winkelfunktionen.**

Im folgenden untersuchen wir eine Reihe wichtiger Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen.

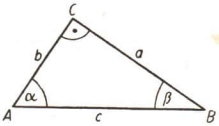


Abb. 14

1) Im rechtwinkligen Dreieck ABC der Abbildung 14 ist

$$\alpha + \beta = 90^\circ \qquad (1)$$

und damit

$$\beta = 90^\circ - \alpha \qquad (2)$$

Zwei Winkel, die einander wie α und β zu 90° ergänzen, nennt man **Komplementwinkel.** Im rechtwinkligen Dreieck ist also jeder spitze Winkel der Komplementwinkel zum anderen spitzen Winkel. Es ist weiterhin

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad (3)$$

und

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \qquad (4)$$

Daraus folgt

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

und wegen (2)

$$\mathbf{\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)} \qquad (5)$$

Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Kosinus seines Komplementwinkels. In ähnlicher Weise ergeben sich auch

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha) \tag{6}$$

$$\tan \alpha = \cot (90° - \alpha) \tag{7}$$

$$\cot \alpha = \tan (90° - \alpha) \tag{8}$$

Durch die Formeln (6) und (8) werden die Bezeichnungen Kosinus und Kotangens verständlich: complementi sinus (abgekürzt cosinus) bedeutet Sinus des Komplementwinkels, complementi tangens (abgekürzt cotangens) bedeutet Tangens des Komplementwinkels.

Diese Komplementbeziehung gilt nicht nur für einzelne Winkel, sondern für die gesamten Funktionen $\sin x$ und $\cos (90° - x)$ bzw. $\tan x$ und $\cot (90° - x)$. In diesem Sinne nennt man die Kosinus- bzw. die Kotangensfunktion die **Kofunktionen** zur Sinus- bzw. zur Tangensfunktion.

Damit können wir die Formeln (5) bis (8) folgendermaßen zusammenfassen:

Die Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels.

2) Im rechtwinkligen Dreieck der Abbildung 14 ist

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (1) \qquad\qquad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad (2)$$

Durch Quadrieren von (1) und (2) folgen

$$(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} \quad (1') \qquad\qquad (\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2} \text{ [1]} \quad (2')$$

Durch Addition der Gleichungen (1′) und (2′) folgt

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \tag{3}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt aber im rechtwinkligen Dreieck

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (4) in (3) folgt

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{5}$$

Die Summe der Quadrate des Sinus- und Kosinuswertes eines Winkels ist gleich 1.

Die Formel (5) wird auch als die **trigonometrische Form des pythagoreischen Lehrsatzes bezeichnet.** Das ist nicht nur durch den Aufbau der Formel, der an den des pythagoreischen Lehrsatzes erinnert, bedingt, sondern hat tiefere Gründe.

Wenn man gemäß Abbildung 8 und Abbildung 11 aus dem Einheitskreis das rechtwinklige Dreieck OQP herauszeichnet und alle drei Seiten wie dort beschriftet, näm-

---

[1] Man sagt für $(\sin \alpha)^2$ nicht „Sinus alpha Quadrat", sondern „Sinus Quadrat alpha", um zu kennzeichnen, daß nicht der Winkel, sondern der Funktionswert zu quadrieren ist. Entsprechendes gilt für beliebige Potenzen sämtlicher Winkelfunktionen.

lich mit $\sin x$, $\cos x$ und 1, außerdem jetzt die Hypotenuse mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes nochmals durch die Katheten ausdrückt ($c^2 = a^2 + b^2$), so ergibt sich die Formel (5). Prägen Sie sich diese einfache Figur zur Unterstützung Ihres Gedächtnisses ein! Beachten Sie dabei, daß es sich nur um eine Veranschaulichung dieser Beziehung handelt!

Aus Gleichung (5) folgen

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \tag{6}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \tag{7}$$

Bei den Wurzeln wird das negative Vorzeichen nicht verwendet, da die bisher betrachteten Sinus- und Kosinuswerte stets positiv sind.

3) Im rechtwinkligen Dreieck ABC der Abbildung 14 ist

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \tag{1}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \tag{2}$$

Durch Multiplikation ergibt sich

$$\tan\alpha \cot\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\tan\alpha \cot\alpha = 1} \tag{4}$$

bzw

$$\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}} \tag{5}$$

und

$$\boldsymbol{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}} \tag{6}$$

Das Produkt aus dem Tangens und dem Kotangens eines Winkels ist gleich 1.

Dividiert man in Gleichung (1) Zähler und Nenner durch c, so erhält man

$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \tag{7}$$

Nach **2)** (1) ist aber $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ und nach **2)** (2) ist $\frac{b}{c} = \cos\alpha$.

Damit folgt

$$\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \tag{8}$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$\boldsymbol{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \tag{9}$$

Auch die Beziehungen (8) und (9) lassen sich geometrisch gewinnen. Wenn Sie z. B. aus Abbildung 8, 9 und 11 die Dreiecke OQP und OAR für denselben Winkel x und

mit derselben Einheit $r = 1$ herauszeichnen in eine einzige Figur, so daß sich die beiden Winkel x decken, so können sie wegen der Ähnlichkeit die Proportionalität der Katheten feststellen (Strahlensatz): $\tan x : 1 = \sin x : \cos x$. Das ist aber die Beziehung (8). Für die Beziehung (9) läßt sich eine ähnliche Figur gewinnen. Beide können ebenfalls Ihr Gedächtnis unterstützen, wenn Sie sie sich einprägen.

Aus den Gleichungen

$$\textbf{2)}\ (5) \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\textbf{3)}\ (4) \quad \tan\alpha \cot\alpha = 1$$

$$\textbf{3)}\ (8) \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

lassen sich Beziehungen herleiten, die aus der Kenntnis eines Funktionswertes eines Winkels die Berechnung der übrigen Funktionswerte dieses Winkels ermöglichen, ohne den Winkel selbst zu bestimmen. Die gedächtnismäßige Beherrschung dieser drei Formeln ist unbedingt erforderlich.

Beispiel: Gegeben ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; es soll $\tan\alpha$ bestimmt werden. Dazu muß zunächst $\tan\alpha$ nur mit Hilfe von $\sin\alpha$ ausgedrückt werden.

Nach **3)** (8) ist $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

nach **2)** (7) ist $$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Einsetzen von **2)** (7) in **3)** (8) führt auf

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$$

Für $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ergibt sich dann

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1$$

Aufgaben

1. Beweisen Sie die Formeln!

a) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ **b)** $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

2. Leiten Sie aus den nachstehend angegebenen Werten der Sinus- und Tangensfunktion die entsprechenden Werte der Kofunktionen her!

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin x$	0	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$\tan x$	0	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	—

3. Nach den Ausführungen am Schluß von **3)** genügt die Kenntnis eines Funktionswertes eines Winkels, um alle übrigen Funktionswerte dieses Winkels zu bestimmen.
Die folgende Übersicht zeigt alle möglichen Umformungen:

gesucht \ ausgedrückt durch	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	—	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	—

Fünf Beziehungen dieser Übersicht sind bereits hergeleitet worden. Welche sind es? Leiten Sie die übrigen sieben Beziehungen entsprechend her!

4. a) Entnehmen Sie aus Abbildung 8 das Dreieck OQP, bezeichnen Sie den Winkel bei O mit α, und (wie in Abbildung 8) PQ mit $\sin\alpha$ und OP mit 1! Drücken Sie nun die dritte Seite mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes durch 1 und $\sin\alpha$ aus! Stellen Sie jetzt die vier trigonometrischen Funktionen von α auf und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der 1. Spalte der Tabelle in Aufgabe 3!

b) Verfahren Sie genauso mit dem Dreieck OQP aus Abbildung 11!

c) Desgleichen mit dem Dreieck OAR aus Abbildung 9!

d) Desgleichen mit dem Dreieck OTB aus Abbildung 13!

Anmerkung: Diese vier Figuren sind gute Gedächtnisstützen für die Umrechnungsbeziehungen der Tabelle in Aufgabe 3!

5. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke!

a) $\tan x \cdot \cos x$ **b)** $\sin\beta \cdot \cot\beta$ **c)** $\frac{\cos\gamma}{\cot\gamma}$

d) $\frac{\sin x}{\tan x}$ **e)** $\frac{\tan\beta}{\cot\beta}$ **f)** $\tan\alpha \cdot \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

6. Beweisen Sie die Richtigkeit der Beziehungen

a) $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; **b)** $1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$!

7. Gegeben sind:

a) $\sin 30° = 0{,}5$ **b)** $\tan 45° = 1$ **c)** $\cos 60° = 0{,}5$

d) $\tan 0° = 0$ **e)** $\cot 90° = 0$ **f)** $\sin 13° = 0{,}2250$

g) $\cos 40° = 0{,}7660$ **h)** $\tan 52° = 1{,}280$ **i)** $\cot 59° = 0{,}6009$

Bestimmen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 3 enthaltenen Übersicht die übrigen Funktionswerte der Winkel!

10. Geometrische Darstellung der trigonometrischen Funktionen

Um die vier trigonometrischen Funktionen in einem xy-Koordinatensystem geometrisch zu veranschaulichen, hat man darin Punkte mit den Winkeln x ($0° \leqq x \leqq 90°$) als Abszissen und den zugehörigen Funktionswerten als Ordinaten einzuzeichnen.

Es ist zweckmäßig, auf der Abszissenachse als Einheit für die Winkelgrade die Länge desjenigen Bogens zu wählen, den der Zentriwinkel 1° auf der Peripherie des Einheitskreises ausschneidet. Man rollt dazu den vierten Teil des Einheitskreises auf dem positiven Teil der x-Achse vom Koordinatenanfangspunkt O aus ab und teilt die so gefundene Strecke in 90 gleiche Teile.

In den Abbildungen 15 und 16 sind die Bilder der vier trigonometrischen Funktionen

$y = \sin x$ $\quad y = \tan x$

$y = \cos x$ $\quad y = \cot x$ $\quad$ gezeichnet.

Die Konstruktion der zu einem gegebenen Winkel gehörigen Kurvenpunkte wird aus den Abbildungen deutlich. Man erkennt aus den Abbildungen:

1. Im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ sind
   a) $y = \sin x$ und $y = \tan x$ steigende Funktionen,
   b) $y = \cos x$ und $y = \cot x$ fallende Funktionen.
2. Sinus- und Kosinusfunktion (Abb. 15) sowie Tangens- und Kotangensfunktion (Abb. 16) liegen jeweils symmetrisch zu der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt 45° auf der Abszissenachse. Daran erkennt man anschaulich: $\sin x = \cos(90° - x)$ und $\tan x = \cot(90° - x)$.
3. Die Tangensfunktion ist für den Winkel 90°, die Kotangensfunktion für den Winkel 0° nicht erklärt.

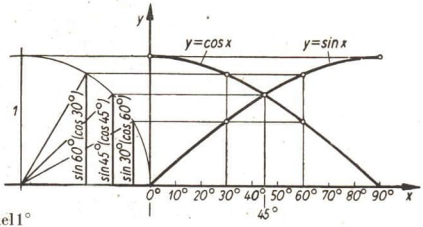


Abb. 15

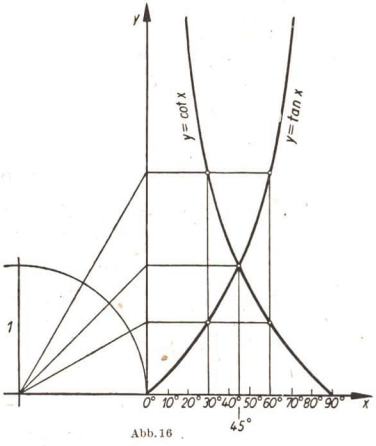


Abb. 16

11. Berechnung einzelner Funktionswerte

Zur Wiederholung:

1. Welche Sonderformen von Dreiecken kennen Sie?
2. Machen Sie Aussagen über die Größe von Seiten und Winkeln sowie über die Lage der Höhen in diesen Dreiecken!

3. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a und berechnen Sie die Dreieckshöhe!

4. Konstruieren Sie ein Quadrat mit der Seite a und ziehen Sie eine Diagonale!
   a) Was für Figuren entstehen dann?
   b) Wie lang ist die Diagonale?

Für die Lösung trigonometrischer Aufgaben ist es erforderlich, die vier Funktionswerte für beliebige Winkel zwischen 0° und 90° zahlenmäßig zu bestimmen. Das ist zunächst nur dadurch möglich, indem man rechtwinklige Dreiecke mit den gegebenen Winkeln zeichnet, die Seiten mißt und danach die jeweiligen Seitenverhältnisse ausrechnet. Wegen der Ungenauigkeit von Zeichnung und Messung erhält man dabei nur Näherungswerte.

Für die Winkel 30°, 45° und 60° lassen sich die Funktionswerte aber ohne Schwierigkeiten auf anderem Wege, nämlich unter Zuhilfenahme planimetrischer Lehrsätze ermitteln.

Bekanntlich läßt sich jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Die Höhe h zerlegt ein gleichseitiges Dreieck (Abb. 17) in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit Winkeln von 30° und 60°. Im rechtwinkligen Dreieck ADC der Abbildung 17 ist $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

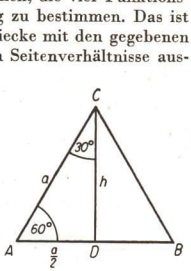


Abb. 17

Damit ergibt sich:

$$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} \qquad \boxed{\sin 30° = \frac{1}{2}}$$

$$\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} \qquad \boxed{\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$\cos 30° = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} \qquad \boxed{\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} \qquad \boxed{\cos 60° = \frac{1}{2}}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \qquad \boxed{\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}}$$

$$\tan 60° = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} \qquad \boxed{\tan 60° = \sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} \qquad \boxed{\cot 30° = \sqrt{3}}$$

$$\cot 60° = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \qquad \boxed{\cot 60° = \frac{1}{3}\sqrt{3}}$$

Die Diagonale d zerlegt ein Quadrat (Abb. 18) mit der Seite a in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke. Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABD der Abbildung 18 ist

$$d = a\sqrt{2}.$$

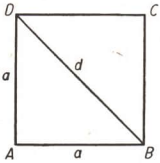


Abb. 18

Damit ergibt sich:

$$\sin 45^0 = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} \qquad \tan 45^0 = \frac{a}{a}$$

$$\boxed{\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}} \qquad \boxed{\tan 45^0 = 1}$$

$$\cos 45^0 = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} \qquad \cot 45^0 = \frac{a}{a}$$

$$\boxed{\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}} \qquad \boxed{\cot 45^0 = 1}$$

Mit den eben berechneten und den für 0° und 90° festgesetzten Funktionswerten ergibt sich folgende Übersicht:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Die gedächtnismäßige Beherrschung dieser Funktionswerte ist unerläßlich. Dabei genügt es, wegen der Komplementbeziehung, wenn man sich nur die Folgen der Sinus- und Tangenswerte einprägt. Für die Sinuswerte kann man dazu folgende Gedächtnisstütze benutzen:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

12. Die Tafeln der trigonometrischen Funktionen

Nur die wenigsten der trigonometrischen Funktionswerte lassen sich so einfach berechnen, wie es im Kapitel 11 an einigen Beispielen gezeigt wurde.

Zur Berechnung der Funktionswerte beliebiger Winkel benutzt die Mathematik Hilfsmittel, die im Mathematikunterricht der Oberschule nicht behandelt werden. Die

Werte der trigonometrischen Funktionen sind im allgemeinen irrationale Zahlen. Für den Gebrauch in der Praxis sind die Werte der trigonometrischen Funktionen in Tafeln zusammengefaßt und auf vier, fünf oder mehr Stellen gerundet.

Die Tafeln 13 und 14 in „Vierstellige Logarithmen – Zahlen, Werte, Formeln" enthalten die Werte der vier trigonometrischen Funktionen für die Winkel von 0° bis 90°, fortschreitend in zehntel Grad, auf vier geltende Ziffern gerundet. Wie alle Tafeln, ermöglichen es auch diese, zwei Aufgaben zu lösen:

a) Gegeben ist der Winkel, gesucht ist der Funktionswert.
b) Gegeben ist der Funktionswert, gesucht ist der Winkel.

1) Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$

Zur Wiederholung:

1. Erläutern Sie die Begriffe „steigende Funktion" und „fallende Funktion", indem Sie bei jeder der vier trigonometrischen Funktionen angeben, wie sich der Funktionswert bei einer Änderung des Winkels ändert!
2. Erläutern Sie den Begriff Kofunktion!

In der Tafel der natürlichen Werte der Sinus- und Kosinusfunktion (Tafel 13 aus „Vierstellige Logarithmen – Zahlen, Werte, Formeln", Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1959, Bestell-Nr. 00915-1) nutzt man die Tatsache aus, daß die Kosinusfunktion die Kofunktion zur Sinusfunktion ist, daß sie also dieselben Funktionswerte wie die Sinusfunktion aufweist, nur zugeordnet zu anderen Winkeln nach der Beziehung $\sin x = \cos(90° - x)$.

Die in Tafel 13 tabellierten Werte der Sinusfunktion für Winkel von 0° bis 90° sind also gleichzeitig die Werte der Kosinusfunktion, jedoch hierbei in umgekehrter Anordnung, d. h. für die Winkel von 90° bis 0°. Die Tafel muß infolgedessen mit zwei entgegengesetzt laufenden Winkeleingängen für die Sinus- und für die Kosinusfunktion versehen werden.

Es gehören

die in der äußersten linken Spalte angegebenen Winkel (Laufrichtung von oben nach unten) zur obenstehenden Funktion, also zur Sinusfunktion;
die in der äußersten rechten Spalte angegebenen Winkel (Laufrichtung von unten nach oben) zur untenstehenden Funktion, also zur Kosinusfunktion.

Tafel 13 enthält die Werte der Sinus- und Kosinusfunktion für volle und zehntel Grade, gerundet auf vier geltende Ziffern. Dabei stehen in den (waagerechten) Zeilen die Werte für die Zehntel ein und desselben Grades, in den (senkrechten) Spalten die Werte für dasselbe Zehntel aufeinanderfolgender Grade.

Tafel 14 enthält in entsprechender Tabellierung die Werte der Tangens- und der Kotangensfunktionen für Winkel von 0° bis 90° bzw. von 90° bis 0°, ebenfalls gerundet auf vier geltende Ziffern. In diesem Falle nützt man die Beziehung

$$\tan x = \cot(90° - x) \quad \text{aus.}$$

1. Beispiel: $\sin 15{,}6° = 0{,}2689$

Da die tabellierten Funktionswerte fast alle gerundet sind, müßte eigentlich geschrieben werden: $\sin 15{,}6° \approx 0{,}2689$. Doch verzichtet man (wie auch bei logarithmischen Rechnungen) auf diese Unterscheidung im Schriftbild.

2. Beispiel: $\cos 39{,}3° = 0{,}7738$

Ist der Winkel mit einer Genauigkeit von hundertstel Grad gegeben, so muß man interpolieren. Für das Interpolieren gelten bei dezimal geteilten Graden die gleichen Regeln wie beim Interpolieren in anderen Tafeln (Logarithmentafel, Quadratzahltafel).

3. Beispiel: $\sin 23{,}47°$

$$\sin 23{,}40° = 0{,}3971$$
$$\sin 23{,}47° = 0{,}39\,..$$
$$\sin 23{,}50° = 0{,}3987$$

Wächst der Winkel um 10 Hundertstelgrad, so wächst der Funktionswert um $D = 16$ Zehntausendstel.

Wächst der Winkel um 7 Hundertstelgrad, so wächst der Funktionswert um d Zehntausendstel.

Wegen der linearen Interpolation ergibt sich folgende Beziehung:

$$7 : 10 = \text{Eigendifferenz } d : \text{Tafeldifferenz } D$$
$$7 : 10 = d : 16$$

Daraus folgt $d = \frac{16 \cdot 7}{10} = 11{,}2 \approx 11$

Nun fügt man $d = 11$ Zehntausendstel zu 0,3971 hinzu und erhält $\sin 23{,}47° = 0{,}3982$.

4. Beispiel: $\cos 52{,}14°$

$$\cos 52{,}10° = 0{,}6143$$
$$\cos 52{,}14° = 0{,}61\,..$$
$$\cos 52{,}20° = 0{,}6129$$

Wächst der Winkel um 10 Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um $D = 14$ Zehntausendstel.

Wächst der Winkel um 4 Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um d Zehntausendstel.

Wegen der linearen Interpolation ergibt sich folgende Beziehung:

$$4 : 10 = \text{Eigendifferenz } d : \text{Tafeldifferenz } D$$
$$4 : 10 = d : 14$$

Daraus folgt $d = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5{,}6 \approx 6$

Nun zieht man $d = 6$ Zehntausendstel von 0,6143 ab und erhält: $\cos 52{,}14° = 0{,}6137$.

5. Beispiel:

$$\begin{array}{rr} \tan 68{,}44° = & 2{,}526 \\ & \underline{+0{,}005} \\ \tan 68{,}44° = & 2{,}531 \end{array} \qquad d = \frac{13 \cdot 4}{10} = 5{,}2 \approx 5$$

6. Beispiel:

$$\begin{aligned} \cot 57{,}39^\circ &= 0{,}6420 \\ &\underline{-0{,}0023} \\ \cot 57{,}39^\circ &= 0{,}6397 \end{aligned} \qquad d = \frac{25 \cdot 9}{10} = 22{,}5 \approx 23$$

Ist der Winkel in sexagesimaler Teilung, also in Grad, Minuten und Sekunden, gegeben, so erfolgt zuerst eine Umrechnung in dezimal geteilte Grade.

7. Beispiel: $\tan 68^\circ 26' 24''$; $26' 24'' = 24' + 2' 24''$

$$24' = \frac{24^\circ}{60} = 0{,}4^\circ; \quad 2'24'' = 144'' = \frac{144^\circ}{3600} = 0{,}04^\circ$$

$$\tan = 68^\circ 26' 24'' = \tan 68{,}44^\circ$$

Die weitere Rechnung erfolgt nun wie im 5. Beispiel.

2) Aufsuchen des Winkels x

Man sucht den gegebenen Funktionswert für die Sinus- und Kosinusfunktion in Tafel 13, für die Tangens- und Kotangensfunktion in Tafel 14 auf.

Bei der Sinus- und Tangensfunktion liest man die vollen Grade für den Winkelwert x in der Zeile, in welcher der Funktionswert steht, links ab; bei der Kosinus- und Kotangensfunktion dagegen rechts. Die Zehntelgrade stehen für Sinus bzw. Tangens in den Spalten der Kopfzeilen; für Kosinus bzw. Kotangens in den Spalten der Fußzeilen.

1. Beispiel: $\sin x = 0{,}9100$; $x = 65{,}5^\circ$

2. Beispiel: $\tan x = 1{,}466$; $x = 55{,}7^\circ$

3. Beispiel: $\cos x = 0{,}9985$; $x = 3{,}1^\circ$

4. Beispiel: $\cot x = 0{,}0332$; $x = 88{,}1^\circ$

In den meisten Fällen wird der gegebene Funktionswert nicht in der Tafel stehen. Dann muß man interpolieren.

5. Beispiel: $\tan x = 0{,}3652$

Der gegebene Funktionswert liegt zwischen den in der Tafel verzeichneten Werten 0,3640 und 0,3659:

$$\begin{aligned} \tan 20{,}0^\circ &= 0{,}3640 \\ \tan x \quad &= 0{,}3652 \\ \tan 20{,}1^\circ &= 0{,}3659 \end{aligned}$$

Wächst der Funktionswert um $D = 19$ Zehntausendstel, so wächst der Winkel um 10 Hundertstelgrade.

Wächst der Funktionswert um $d = 12$ Zehntausendstel, so wächst der Winkel um n Hundertstelgrade.

Wegen der linearen Interpolation ergibt sich folgende Beziehung:

$$n : 10 = \text{Eigendifferenz } d : \text{Tafeldifferenz } D$$

$$n : 10 = 12 : 19$$

Daraus folgt $n = \frac{12 \cdot 10}{19} = 6{,}3 \ldots \approx 6$

Nun fügt man $n = 6$ Hundertstelgrad zu 20,0° hinzu und erhält: $x = 20{,}06°$.

6. Beispiel: $\cot x = 0{,}5189$

Der gegebene Funktionswert liegt zwischen den in der Tafel verzeichneten Werten 0,5206 und 0,5186;

$$\cot 62{,}5° = 0{,}5206$$
$$\cot x \quad = 0{,}5189$$
$$\cot 62{,}6° = 0{,}5184$$

Da es sich hierbei um eine fallende Funktion handelt, gehört beim üblichen Fortschreiten in Richtung wachsender Winkel zum ersten Winkel der größere Funktionswert. Dieser nimmt also bei den Interpolationsschritten ab.

Nimmt der Funktionswert um $D = 22$ Zehntausendstel ab, so wird der Winkel um 10 Hundertstelgrad größer.

Nimmt der Funktionswert um $d = 17$ Zehntausendstel ab, so wird der Winkel um n Hundertstelgrad größer.

Wegen der linearen Interpolation ergibt sich folgende Beziehung:

$$n : 10 = \text{Eigendifferenz } d : \text{Tafeldifferenz } D$$

$$n : 10 = 17 : 22$$

Daraus folgt $n = \frac{17 \cdot 10}{22} \approx 7{,}7 \approx 8$

Nun fügt man $n = 8$ Hundertstelgrad zu 62,5° hinzu und erhält: $x = 62{,}58°$.

7. Beispiel:

$$\sin x = 0{,}3110 \qquad n = \frac{3 \cdot 10}{16} \approx 2$$
$$x = 18{,}10°$$
$$\underline{+0{,}02°}$$
$$x = 18{,}12°$$

8. Beispiel:

$$\cos x = 0{,}8768 \qquad n = \frac{3 \cdot 10}{8} \approx 4$$
$$x = 28{,}70°$$
$$\underline{+0{,}04°}$$
$$x = 28{,}74°$$

Soll der errechnete Winkel ausnahmsweise einmal in sexagesimaler Teilung, also in Grad, Minuten und Sekunden, ausgedrückt werden, so erfolgt anschließend eine Umrechnung:

$x = 28{,}74°$

$$0{,}7° = 7 \cdot 6' = 42'$$

$$0{,}04° = 4 \cdot 36'' = 144'' = 2'\,24''$$

$x = 28°\,44'\,24''$

Aufgaben

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln 13 und 14!

1. a) sin 3°	**b)** sin 15°	**c)** sin 29°	**d)** sin 37°
e) sin 47°	**f)** sin 54°	**g)** sin 61°	**h)** sin 70°
i) sin 79°	**k)** sin 87°	**l)** cos 2°	**m)** cos 17°
n) cos 25°	**o)** cos 32°	**p)** cos 49°	**q)** cos 51°
r) cos 68°	**s)** cos 72°	**t)** cos 80°	**u)** cos 89°
2. a) tan 5°	**b)** tan 12°	**c)** tan 22°	**d)** tan 31°
e) tan 42°	**f)** tan 59°	**g)** tan 63°	**h)** tan 70°
i) tan 83°	**k)** tan 84°	**l)** cot 8°	**m)** cot 13°
n) cot 27°	**o)** cot 36°	**p)** cot 48°	**q)** cot 56°
r) cot 64°	**s)** cot 76°	**t)** cot 87°	**u)** cot 88°
3. a) sin 3,5°	**b)** sin 14,2°	**c)** sin 26,4°	**d)** sin 38,2°
e) sin 44,6°	**f)** sin 53,9°	**g)** sin 65,3°	**h)** sin 73,7°
i) sin 79,9°	**k)** sin 87,6°	**l)** cos 4,8°	**m)** cos 16,4°
n) cos 27,4°	**o)** cos 39,6°	**p)** cos 47,1°	**q)** cos 53,2°
r) cos 64,8°	**s)** cos 65,3°	**t)** cos 72,9°	**u)** cos 82,2°
4. a) tan 1,92°	**b)** tan 17,44°	**c)** tan 28,55°	**d)** tan 39,67°
e) tan 41,72°	**f)** tan 58,31°	**g)** tan 52,79°	**h)** tan 69,16°
i) tan 75,93°	**k)** tan 86,34°	**l)** cot 1,12°	**m)** cot 4,79°
n) cot 14,74°	**o)** cot 26,59°	**p)** cot 34,53°	**q)** cot 43,88°
r) cot 53,46°	**s)** cot 61,31°	**t)** cot 75,31°	**u)** cot 87,46°
5. a) cos 22,94°	**b)** tan 74,37°	**c)** cot 73,06°	**d)** cos 17,32°
e) sin 58,11°	**f)** cot 13,79°	**g)** sin 63,44°	**h)** sin 87,11°
i) tan 64,42°	**k)** cot 87,44°	**l)** tan 81,53°	**m)** cos 37,22°
n) tan 53,76°	**o)** sin 34,26°	**p)** cot 25,61°	**q)** sin 19,24°
r) cot 41,88°	**s)** cos 9,67°	**t)** cot 11,82°	**u)** tan 27,19°
6. a) sin 0,2°	**b)** tan 0,2°	**c)** sin 0,83°	**d)** tan 0,83°
e) sin 1,77°	**f)** tan 1,77°	**g)** sin 2,6°	**h)** tan 2,6°
i) sin 3,25°	**k)** tan 3,25°	**l)** sin 4,14°	**m)** tan 4,14°
n) sin 4,71°	**o)** tan 4,71°	**p)** sin 5,0°	**q)** tan 5,0°
r) sin 5,34°	**s)** tan 5,34°	**t)** sin 9,1°	**u)** tan 9,1°

7. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Werte der Sinus- und der Tangensfunktion
a) auf vier Dezimalen,
b) auf drei Dezimalen überein?
c) Begründen Sie diese Erkenntnis geometrisch und formulieren Sie sie in Worten!

8. Bestimmen Sie die Winkel!

a) $\sin x = 0{,}7108$	**b)** $\sin \alpha = 0{,}9945$	**c)** $\sin \beta = 0{,}2622$
d) $\sin \gamma = 0{,}0972$	**e)** $\sin x = 0{,}5821$	**f)** $\cos x = 0{,}8686$
g) $\cos \alpha = 0{,}2215$	**h)** $\cos \beta = 0{,}4115$	**i)** $\cos \gamma = 0{,}9348$
k) $\cos x = 0{,}7547$	**l)** $\tan x = 0{,}1890$	**m)** $\tan \alpha = 0{,}6976$
n) $\tan \beta = 1{,}739$	**o)** $\tan \gamma = 4{,}041$	**p)** $\tan x = 71{,}62$
q) $\cot x = 5{,}050$	**r)** $\cot \alpha = 2{,}014$	**s)** $\cot \beta = 1{,}122$
t) $\cot \gamma = 0{,}2549$	**u)** $\cot x = 0{,}0070$	

9. Bestimmen Sie die Winkel!

a) $\sin x = 0{,}8708$	**b)** $\sin \alpha = 0{,}9321$	**c)** $\sin \beta = 0{,}6421$
d) $\sin \gamma = 0{,}3942$	**e)** $\sin x = 0{,}5885$	**f)** $\cos x = 0{,}4171$
g) $\cos \alpha = 0{,}1731$	**h)** $\cos \beta = 0{,}4117$	**i)** $\cos \gamma = 0{,}2006$
k) $\cos x = 0{,}7629$	**l)** $\tan x = 0{,}6448$	**m)** $\tan \alpha = 0{,}1478$
n) $\tan \beta = 3{,}212$	**o)** $\tan \gamma = 0{,}4876$	**p)** $\tan x = 1{,}004$
q) $\cot x = 0{,}9918$	**r)** $\cot \alpha = 1{,}667$	**s)** $\cot \beta = 0{,}7272$
t) $\cot \gamma = 1{,}442$	**u)** $\cot x = 0{,}9927$	

10. Bestimmen Sie die Winkel!

a) $\sin x = 0{,}3021$	**b)** $\cot y = 1{,}274$	**c)** $\cos \gamma = 0{,}6992$
d) $\tan \alpha = 0{,}4397$	**e)** $\cos \alpha = 0{,}2793$	**f)** $\cot x = 2{,}471$
g) $\sin \alpha = 0{,}9876$	**h)** $\tan y = 3{,}469$	**i)** $\cos \alpha = 0{,}1289$
k) $\sin \gamma = 0{,}6318$	**l)** $\cos \beta = 0{,}5475$	**m)** $\tan \gamma = 0{,}4991$
n) $\cot \beta = 2{,}499$	**o)** $\sin \beta = 0{,}8927$	**p)** $\cos y = 0{,}3431$
q) $\tan y = 15{,}13$	**r)** $\cos x = 0{,}7262$	**s)** $\sin y = 0{,}8876$
t) $\cot y = 41{,}03$	**u)** $\tan \beta = 4{,}211$	

11.

a) $\sin 24° 15'$	**b)** $\cos 37° 21'$	**c)** $\tan 69° 57'$
d) $\cot 80° 03'$	**e)** $\sin 75° 20' 30''$	**f)** $\cos 61° 47' 20''$
g) $\tan 52° 52' 40''$	**h)** $\cot 29° 19' 50''$	**i)** $\cot 1° 30' 30''$
k) $\cot 42° 48' 15''$	**l)** $\cos 66° 17' 15''$	**m)** $\sin 19° 20' 45''$
n) $\sin 3° 42' 15''$	**o)** $\tan 70° 48' 50''$	**p)** $\sin 29° 18' 30''$
q) $\cos 0° 54' 30''$	**r)** $\tan 45° 45' 45''$	**s)** $\cos 54° 54' 54''$
t) $\tan 18° 18' 18''$	**u)** $\cot 30° 30' 30''$	

13. Anwendungsaufgaben

Wenn aus gegebenen Strecken Winkel berechnet werden sollen oder aus gegebenen Strecken und Winkeln andere Strecken, so ist das mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen möglich, sofern Winkel und Strecken in rechtwinkligen Dreiecken liegen. Bei jeder derartigen Anwendungsaufgabe ist daher das erste und wichtigste Ziel, ein solches für die Berechnung geeignetes rechtwinkliges Dreieck zu erkennen. In einer Skizze sollte man es möglichst auffällig markieren und an ihm die gegebenen und gesuchten Stücke kennzeichnen, ähnlich wie es früher bei den Konstruktionsaufgaben geschah.

1. Beispiel:

Welchen Anstiegswinkel besitzt eine Schraube mit metrischem Gewinde, deren Gewindedurchmesser $d = 11{,}4$ mm und deren Ganghöhe $h = 2{,}0$ mm beträgt?

Lösung:

Aus Abbildung 19 ergibt sich

$$\tan\alpha = \frac{h}{\pi d}$$

$$\tan\alpha = \frac{2{,}0\ \text{mm}}{\pi \cdot 11{,}4\ \text{mm}}$$

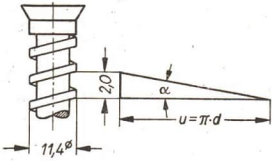


Abb. 19

Mit dem Rechenstab errechnet man

$$\tan\alpha = 0{,}0559.$$

Aus Tafel 14 ergibt sich $\alpha = 3{,}2°$

Die Schraube besitzt einen Anstiegswinkel von 3,2°.

2. Beispiel:

Der in Abbildung 20 dargestellte Bolzen soll gedreht werden. Wie groß sind Supporteinstellwinkel und Kegelwinkel? (Vgl. dazu das Einführungsbeispiel auf S. 3.)

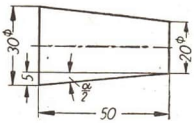


Abb. 20

Lösung:

Nach Abbildung 20 ist

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10}$$

Aus Tafel 14 ergibt sich $\frac{\alpha}{2} \approx 5{,}71°$ (nach DIN 254: 5° 42′ 38″)

$$\alpha \approx 11{,}42° \text{ (nach DIN 254: 11° 25′ 16″)}$$

Der Supporteinstellwinkel beträgt etwa 5,71°; der Kegelwinkel etwa 11,42°.

3. Beispiel:

An den Strecken der Deutschen Reichsbahn stehen am Beginn von Steigungen Schilder, von denen eines in Abbildung 21a dargestellt ist.

Die Beschriftung besagt, daß auf 40 m waagerechte Entfernung 1 m senkrechte Erhebung kommt; und zwar hält die gleiche Steigung auf den nächsten 830 m Streckenlänge an. (Abb. 21b; nicht maßgerecht)

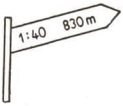


Abb. 21a

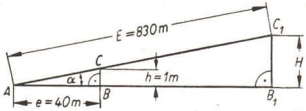


Abb. 21b

Wie groß ist der Höhenunterschied H zwischen Anfang A und Ende C_1 dieses Streckenabschnitts?

Lösung:

Aus Abbildung 20 entnehmen wir

$$\tan\alpha = \frac{1}{40} \quad \text{und} \quad \frac{H}{830\text{ m}} = \sin\alpha, \quad \text{also} \quad H = 830 \cdot \sin\alpha \text{ m}$$

Es ist demnach erforderlich, aus $\tan\alpha = \frac{1}{40}$ den Wert für $\sin\alpha$ zu errechnen. Das ist nach Kapitel 9, Aufgabe 3 möglich durch

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{40}}{\sqrt{1+\frac{1}{1600}}}$$

Dann ergibt sich:

$$H = \frac{830}{40\sqrt{\frac{1601}{1600}}}\text{ m} = \frac{830}{\sqrt{1601}}\text{ m}$$

Mit dem Rechenstab errechnet man $H \approx 20{,}75$ m. Die Erhebung beträgt also rund 20,8 m.

Nicht immer ist das wichtige rechtwinklige Dreieck sofort sichtbar. Oft tritt es uns als halbes gleichschenkliges Dreieck entgegen.

4. Beispiel:

Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm soll ein regelmäßiges Fünfkant gefräst werden (Abb. 22).

Bestimmen Sie

a) die Seite s des Fünfkants,

b) den prozentualen Verlust an Querschnittfläche!

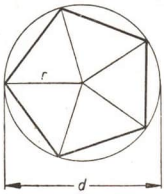


Abb. 22

Lösung:

Der Querschnitt des Fünfkants, ein regelmäßiges Fünfeck, besteht aus fünf kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit dem Winkel $\gamma = \frac{360^0}{5} = 72^\circ$ an der Spitze und dem Schenkel $\frac{d}{2} = 30$ mm. Durch die Höhe h_s wird das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige zerlegt. In diesen gelten die Beziehungen:

$$\frac{s}{2} : \frac{d}{2} = \sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad h_s : \frac{d}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$$

Daraus errechnet man

$$s = d \cdot \sin\frac{\gamma}{2} : \quad h_s = \frac{d}{2}\cos\frac{\gamma}{2}; \quad F_{\text{Dreieck}} = \frac{d^2}{4} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

und

$$F_{\text{Fünfeck}} = \frac{5}{4} d^2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

In Zahlen (mit Tafel 13 und dem Rechenstab):

$s = 60 \cdot \sin 36^\circ \text{ mm} = 60 \cdot 0{,}5878 \text{ mm} = 35{,}3 \text{ mm}$

$F_5 = \frac{5}{4} \cdot 60^2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \text{ mm}^2 = \frac{5}{4} \cdot 3600 \cdot 0{,}5878 \cdot 0{,}8090 \text{ mm}^2 \approx 2140 \text{ mm}^2$

Die Kreisfläche $F_{\text{Kreis}} = \frac{\pi}{4} d^2$ ergibt sich zu

$$F_{\text{Kreis}} = \frac{\pi}{4} 3600 \text{ mm}^2 = 2830 \text{ mm}^2$$

Der Verlust an Querschnittsfläche beträgt also

$2830 \text{ mm}^2 - 2140 \text{ mm}^2 = 690 \text{ mm}^2 \mathrel{\hat{=}} \frac{69\,000}{2830}\,\% \approx 24{,}4\,\%$

Die Seite des Fünfkants beträgt 35,3 mm, der Verlust an Querschnittsfläche rund 24%.

Übungen: (Alle Zahlenrechnungen sind mit dem Rechenstab durchzuführen.)

1. Ein Graben hat beiderseits einen Böschungswinkel $\alpha = 42^\circ$ sowie eine Tiefe $t = 2{,}50$ m. Berechnen Sie die Böschungslänge!

2. Berechnen Sie die Sparrenlänge x aus der durch Abbildung 23 gegebenen Skizze einer Dachkonstruktion!

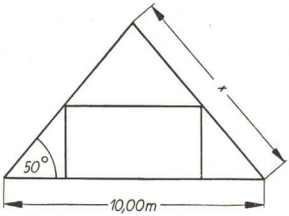


Abb. 23

3. Berechnen Sie den Umfang der Breitenkreise, auf denen folgende Orte liegen:

a) Berlin
b) Moskau
c) Johannesburg (Südafr. Union)
d) La Plata
e) Kairo
f) Ihr Heimatort!

4. Berechnen Sie die Entfernung (auf dem Breitenkreis) zwischen **a)** Naumburg und Görlitz, **b)** zwei weiteren Orten, die die gleiche geographische Breite besitzen!

5. Zwei Kreise berühren einander von außen. Ihre Durchmesser verhalten sich wie **a)** 1:2, **b)** 1:3, **c)** 1:4.
Unter welchem Winkel schneiden die beiden äußeren Tangenten einander?

6. a) Berechnen Sie die zu einem beliebigen Zentriwinkel α gehörige Sehne s, den zugehörigen Kreisbogen b und die Pfeilhöhe h (Abstand der Bogenmitte von der Sehne) eines Einheitskreises (Abb. 24) als Funktionen des Zentriwinkels und stellen Sie diese Funktionen grafisch dar!

b) Wie lauten die analytischen Ausdrücke für die Funktionen $s(\alpha)$; $b(\alpha)$ und $h(\alpha)$ in einem Kreis mit dem Radius r?

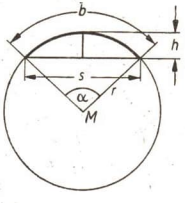


Abb. 24

7. Die Fläche eines Kreissegments über der Sehne s, das von dem Kreisbogen b begrenzt wird, berechnet man als Differenz aus dem Kreissektor zum Bogen b und dem gleichschenkligen Dreieck über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Kreismittelpunkt liegt.

a) Wie groß ist die Fläche des Kreissegments zum Zentriwinkel $\alpha = 54°$ in einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ m?

b) Berechnen Sie die Pfeilhöhe h des Segments in Aufgabe **a)**!

c) Von einem Segment sind die Sehne $s = 5{,}40$ m (Spannweite s) und die Pfeilhöhe $h = 0{,}50$ m (Bogenhöhe h) gegeben. Berechnen Sie die Fläche des Kreissegments und den zugehörigen Zentriwinkel!

d) Stellen Sie 1. den Sektor zum Bogen b eines Einheitskreises,

2. den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Mittelpunkt des Einheitskreises liegt,

3. das Kreissegment über der Sehne s, das von dem Kreisbogen b begrenzt wird,

als Funktionen des Zentriwinkels α analytisch und grafisch dar!

8. Eine Kiste vom Gewicht 220 kp wird mittels einer Schrotleiter abgeladen (Abb. 25).

Bei welchem Winkel α beginnt die Kiste zu gleiten, wenn zur Überwindung der Reibung 17 kp erforderlich sind?

9. Beim Abstecken eines rechtwinklig dreieckigen Grundrisses ergeben sich die Seitenlängen für die Hypotenuse zu 53,50 m und eine Kathete zu 25 m.

Wie groß sind die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, der Flächeninhalt und die dritte Seite?

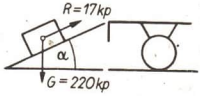


Abb. 25

10. Die Tiefe von Kohlenflözen wird durch Bohrungen ermittelt.

Bestimmen Sie aus Abbildung 26 den gegen die Horizontale einfallenden Winkel α des Flözes!

$e = 180$ m

$t_1 = 21{,}50$ m

$t_2 = 29{,}20$ m

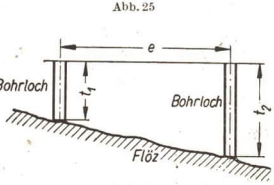


Abb. 26

II. Berechnung des rechtwinkligen und des gleichschenkligen Dreiecks

14. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen

Die meisten Werte der trigonometrischen Funktionen in der Zahlentafel sind Näherungswerte mit vier geltenden Ziffern. Das numerische Rechnen mit ihnen ohne Verwendung des Rechenstabs wird im allgemeinen recht umständlich. Reicht die Genauigkeit des Rechenstabs nicht aus, so verwendet man zur Erleichterung der Rechnung die Logarithmen der Werte der trigonometrischen Funktionen. Zur deutlichen Unterscheidung der Werte der trigonometrischen Funktionen von ihren Logarithmen nennt man erstere die **natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen.**

Die Logarithmen der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen sind in Tafel 2 und Tafel 3 in derselben Weise tabelliert wie die natürlichen Werte selbst.

Diese Tafeln sind in gleicher Weise zu handhaben wie die Tafeln der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen.

Alle Sinus- und Kosinuswerte sowie die Tangenswerte für Winkel von 0° bis 45° und die Kotangenswerte für Winkel von 45° bis 90° sind kleiner als 1. Ihre Logarithmen müssen demnach negative Kennzahlen haben.
So ist beispielsweise

$$\cos 31{,}5^\circ = 0{,}8526;$$

$$\text{also } \lg \cos 31{,}5^\circ = \lg 0{,}8526 = 0.9308-1$$

In den Tafeln 2 und 3 wird bei allen Logarithmen mit negativer Kennzahl die Kennzahl -10 verwendet; doch ist diese nicht mit gedruckt worden. Sie muß also jeweils ergänzt werden. In Tafel 2 steht also z. B. für

$\lg \cos 31{,}5^\circ$ der Wert 9.9308; das bedeutet:

$$\lg \cos 31{,}5^\circ = 9.9308 - 10$$

Bei dezimaler Teilung der Grade ist die Interpolation genauso durchzuführen wie beim Rechnen mit Logarithmen.

Beispiele:

Natürliche Werte der trigonometrischen Funktionen (Tafeln 13 und 14)	Logarithmen der Funktionswerte (Tafeln 2 und 3)
$\sin 21{,}43^\circ = 0{,}3654$	$\lg \sin 21{,}43^\circ = 9.5627-10$
$\cos 86{,}68^\circ = 0{,}0579$	$\lg \cos 86{,}68^\circ = 8.7628-10$
$\tan 34{,}94^\circ = 0{,}6986$	$\lg \tan 34{,}94^\circ = 9.8442-10$
$\cot 29{,}87^\circ = 1{,}741$	$\lg \cot 29{,}87^\circ = 0.2408$

Zu beachten ist, daß die Logarithmen der Sinus- und Tangenswerte von 0° bis 5° und die Logarithmen der Kosinus- und Kotangenswerte von 85° bis 90° auf Tafel 4 gesondert bis auf hundertstel Grad verzeichnet sind.

Aufgaben

1. a) lg sin 19,5° **b)** lg sin 31,67° **c)** lg sin 17°42′
d) lg sin 53° 6′ **e)** lg cos 73,92° **f)** lg cos 37,57°
g) lg cos 45°22′45″ **h)** lg sin 24,7°

2. Suchen Sie die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen der in den Aufgaben 1 und 3 des Kapitels 12 angegebenen Winkel auf!

3. a) lg tan 21,28° **b)** lg tan 50,68° **c)** lg tan 87,55°
d) lg tan 47° 33′ **e)** lg cot 38,95° **f)** lg cot 45,08°
g) lg cot 2°5′12″ **h)** lg cot 1,54°

4. Suchen Sie die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen der in den Aufgaben 2, 4 und 5 des Kapitels 12 angegebenen Winkel auf!

5. Stellen Sie die Funktionen

a) $y = \lg \sin x$ **b)** $y = \lg \cos x$ **c)** $y = \lg \tan x$
d) $y = \lg \cot x$ grafisch dar!

Benutzen Sie dazu die Tafelwerte für $x = 15°; 30°; 45°, 60°; 75°$!
Verwenden Sie für **a)** und **b)** bzw. für **c)** und **d)** je ein gemeinsames Koordinatensystem!
Beschreiben Sie den Verlauf jeder Funktion! Insbesondere untersuchen Sie folgende Probleme:

I. Wie verlaufen die Funktionen in der Umgebung von $x = 0°$ und $x = 90°$?
II. Für welche Winkel ändern sich die einzelnen Funktionen besonders stark, für welche besonders wenig?
III. Untersuchen Sie, ob die Kurven zu **a)** und **b)** bzw. die zu **c)** und **d)** Symmetrieeigenschaften aufweisen!

6. Welche rechnerischen Beziehungen bestehen zwischen

a) $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$;
b) $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \tan x$;
c) $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \cot x$?

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Gleichungen für einige selbstgewählte Beispiele $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$ aus $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$!
Gibt es eine entsprechende Beziehung auch zwischen $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$?

7. Bestimmen Sie die Winkel!

a) $\lg \sin x = 9.6903-10$ **b)** $\lg \sin \alpha = 0.3775-1$
c) $\lg \sin \gamma = 9.5717-10$ **d)** $\lg \sin \beta = 0.0135-1$
e) $\lg \sin \gamma = 0.1437-1$ **f)** $\lg \sin \gamma = 9.7963-10$
g) $\lg \sin x = 0.8101-1$ **h)** $\lg \sin \alpha = 9.9438-10$
i) $\lg \cos \gamma = 9.7230-10$ **k)** $\lg \cos x = 0.6400-1$
l) $\lg \cos \alpha = 9.6000-10$ **m)** $\lg \cos \beta = 0.9995-1$
n) $\lg \cos \alpha = 9.9892-10$ **o)** $\lg \cos \beta = 9.9900-10$
p) $\lg \cos \gamma = 0.4840-1$ **q)** $\lg \cos x = 9.2700-10$

8. Bestimmen Sie die Winkel!

a) lg tan $x = 0.1387$ **b)** lg tan $\beta = 9.1479-10$
c) lg tan $\gamma = 9.6486-10$ **d)** lg tan $\alpha = 0.6190-1$
e) lg tan $\beta = 0.8345-1$ **f)** lg tan $x = 0.8003$
g) lg tan $\alpha = 0.1599$ **h)** lg tan $\gamma = 1.0944$
i) lg cot $\alpha = 0.1888$ **k)** lg cot $\gamma = 9.6129-10$
l) lg cot $x = 0.2880$ **m)** lg cot $\gamma = 0.3688$
n) lg cot $\beta = 9.9848-10$ **o)** lg cot $\alpha = 0.9800$
p) lg cot $\beta = 0.2509$ **q)** lg cot $x = 0.6971-1$

9. Bestimmen Sie die Winkel!

a) lg sin $x = 7.4920-10$ **b)** lg cos $\alpha = 9.6000-10$
c) lg tan $\beta = 0.2833-3$ **d)** lg cot $\gamma = 0.8293-2$
e) lg tan $\alpha = 1.2000$ **f)** lg cot $\gamma = 1.6250$
g) lg sin $x = 9.8583-10$ **h)** lg cos $\gamma = 8.8221-10$
i) lg cos $\gamma = 0.4459-2$ **k)** lg tan $\beta = 0.8036-1$
l) lg cot $\alpha = 8.3090-10$ **m)** lg sin $x = 9.4783-10$
n) lg cot $\beta = 0.1064-1$ **o)** lg sin $x = 0.7460-2$
p) lg cos $\gamma = 9.4840-10$ **q)** lg tan $\alpha = 8.8960-10$

15. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Im Abschnitt 1 war erläutert worden, daß die Trigonometrie lehre, wie man aus drei Bestimmungsstücken eines Dreiecks die übrigen Stücke und den Flächeninhalt durch Berechnen findet. Da im rechtwinkligen Dreieck stets der rechte Winkel gegeben ist, sind zur Bestimmung dieses Dreiecks immer nur zwei Stücke erforderlich. Dazu können die Hypotenuse, die beiden Katheten und einer der beiden spitzen Winkel in geeigneter Zusammenstellung dienen. Das ist auf viererlei Weise möglich; gegeben können sein (vgl. Abb. 27):

1. die Hypotenuse und ein Winkel
   (z. B. $c = 51{,}90$ m; $\alpha = 52{,}55°$)
2. eine Kathete und ein Winkel
   (z. B. $a = 13{,}56$ m; $\alpha = 67{,}21°$)
3. eine Kathete und die Hypotenuse
   (z. B. $a = 35{,}60$ m; $c = 51{,}60$ m)
4. die beiden Katheten
   (z. B. $a = 15{,}48$ m; $b = 9{,}63$ m).

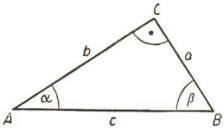


Abb. 27

Bei der Bearbeitung solcher Berechnungsaufgaben sollen folgende Anweisungen beachtet werden:

a) Zunächst wird die Aufgabe unter Verwendung der allgemeinen Symbole a, b, c, α, β, F gelöst, erst in einem zweiten Teil werden die gegebenen speziellen Zahlenwerte zur Berechnung verwendet.

b) Zur Lösung stellt man Beziehungen zwischen den gesuchten und den gegebenen Größen auf und löst sie nach den gesuchten Größen auf. Oft müssen dabei trigonometrische Funktionen benutzt werden. Eine gute Hilfe bei dem Auffinden dieser Beziehungen ist eine Figur mit Markierung der gesuchten und der gegebenen Stücke.

c) Eine gesuchte Größe gilt erst dann als berechnet, wenn sie nur durch die in der Aufgabe gegebenen Größen ausgedrückt ist.

Beispiel (1. Fall der obigen Zusammenstellung):

Gegeben: Die Hypotenuse ($c = 51{,}90$ m) und ein Winkel ($\alpha = 52{,}55°$).
Gesucht: a, b, β, F.

Allgemeine Lösung (Die Symbole a, b, c, α, β, F bedeuten Größen[1]):

1. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$a = c \cdot \sin\alpha$

2. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$b = c \cdot \cos\alpha$

3. $\beta = 90° - \alpha$

4. $F = \frac{ab}{2}$

$= \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot c \cdot \cos\alpha}{2}$

$= \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2}$

Rechnerische Lösung mit Hilfe von Logarithmen
(Die Symbole a, b, c, F bedeuten Zahlenwerte)

1.
$$\begin{aligned} \lg a &= \lg c + \lg\sin\alpha \\ \lg c &= 1.7152 \\ \lg\sin\alpha &= 9.8998-10 \\ \hline \lg a &= 11.6150-10 \\ \lg a &= 1.6150 \\ a &= 41{,}21 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \lg b &= \lg c + \lg\cos\alpha \\ \lg c &= 1.7152 \\ \lg\cos\alpha &= 9.7839-10 \\ \hline \lg b &= 11.4991-10 \\ \lg b &= 1.4991 \\ b &= 31{,}56 \end{aligned}$$

3. $\beta = 90° - 52{,}55°$

$\beta = 37{,}45°$

[1] Unter einer „Größe" wollen wir in diesem Zusammenhang eine Maßzahl einschließlich ihrer Benennung (Maßeinheit), unter einem „Zahlenwert" die reine Maßzahl (ohne die Maßeinheit) verstehen.

4. $\lg F = 2 \lg c + \lg \sin \alpha + \lg \cos \alpha - \lg 2$

$$\begin{aligned} \lg c &= 1.7152 \\ 2 \cdot \lg c &= 3.4304 \\ \lg \sin \alpha &= 9.8998-10 \\ \lg \cos \alpha &= 9.7839-10 \\ \hline \lg c^2 \sin \alpha \cos \alpha &= 3.1141 \\ \lg 2 &= 0.3010 \\ \hline \lg F &= 2.8131 \\ F &= 650{,}3 \end{aligned}$$

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = 41{,}21$ m	$\alpha = 52{,}55°$	$F = 650{,}3$ m²
$b = 31{,}56$ m	$\beta = 37{,}45°$	
$c = 51{,}90$ m	$\gamma = 90°$	

Aufgaben

1. Berechnen Sie Seiten, Winkel und Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke (vgl. Abb. 27), von denen folgende Stücke gegeben sind!

a) $c = 125$ m; $\alpha = 35{,}60°$

b) $c = 10{,}5$ cm; $\beta = 40{,}30°$

c) $a = 63$ cm; $\alpha = 40{,}30°$

d) $b = 80{,}70$ m; $\beta = 62{,}30°$

e) $a = 14{,}54$ cm; $c = 29{,}08$ cm

f) $b = 420$ m; $c = 645$ m

g) $a = 54{,}85$ m; $b = 74{,}54$ m

h) $a = 12{,}7$ cm; $b = 4{,}9$ cm

i) $a = 25$ m; $F = 420$ m²

2. Mitunter können auch andere Strecken des rechtwinkligen Dreiecks unter den gegebenen Stücken vorkommen, z. B. die Höhe h auf die Hypotenuse oder die durch h auf c entstehenden Hypotenusenabschnitte p und q.

a) $p = 10{,}2$ cm; $\alpha = 37{,}50°$

b) $q = 2{,}53$ m; $c = 4{,}20$ m

c) $a = 60{,}5$ cm; $h = 15{,}2$ cm

d) $p = 3{,}2$ dm; $q = 5{,}6$ dm

(Anleitung zu b und d: Benutzen Sie den Höhen- oder den Kathetensatz!)

16. Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck

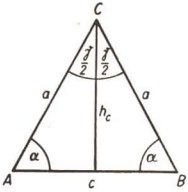


Abb. 28

Das gleichschenklige Dreieck wird durch seine Symmetrieachse, die gleichzeitig Basishöhe ist, in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. In diesen ist der Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks die Hypotenuse, die Basishöhe und die halbe Basis sind die Katheten. Als Winkel enthält das rechtwinklige Dreieck den Basiswinkel und den halben Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks.

Das Zurückführen des gleichschenkligen Dreiecks auf das rechtwinklige bedingt, daß auch hier 2 von den möglichen Bestimmungsstücken (Schenkel a, Basis c und einer der Winkel) genügen, um das Dreieck festzulegen, d. h. um eine Berechnung der fehlenden Stücke und des Flächeninhalts zu ermöglichen. Die gegebenen Stücke können dabei in folgender Zusammenstellung auftreten (Abb. 28):

1. Die Basis und ein Winkel (z. B. $c = 12{,}40$ m und $\alpha = 56{,}2°$)
2. Der Schenkel und ein Winkel (z. B. $a = 15{,}2$ cm und $\gamma = 76{,}8°$)
3. Die Basis und der Schenkel (z. B. $c = 14{,}30$ m und $a = 25{,}10$ m)

Im Gegensatz zum rechtwinkligen Dreieck ist es bei der Berechnung der Fläche beim gleichschenkligen Dreieck nötig, die Basishöhe zu bestimmen.

Beispiel: (2. Fall der obigen Zusammenstellung)

Gegeben: Der Schenkel ($a = 15{,}2$ cm) und der Winkel an der Spitze ($\gamma = 76{,}8°$).
Gesucht: α, c, F.

Allgemeine Lösung: (a, c, α, γ, F bedeuten Größen)

1. $$2\,\alpha = 180° - \gamma$$
$$\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

2. $$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{a} = \frac{c}{2\,a}$$
$$c = 2\,a \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

3. $$F = \frac{1}{2}\,c \cdot h_c$$
$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{h_c}{a}$$
$$h_c = a \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$
$$F = \frac{1}{2} \cdot 2\,a \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot a \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = a^2 \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Rechnerische Lösung unter Verwendung von Logarithmen (a, c, F bedeuten Zahlenwerte)

1. $\alpha = 90° - 38{,}4° = 51{,}6°$

2. $\lg c = \lg 2 + \lg a + \lg \sin \frac{\gamma}{2}$

$$\lg 2 = 0.3010 \qquad \left(\frac{\gamma}{2} = 38{,}4°\right)$$
$$\lg a = 1.1818$$
$$\lg \sin \frac{\gamma}{2} = 9.7932-10$$
$$\lg c = 1.2760$$
$$c = 18{,}88$$

3. $\lg F = 2 \lg a + \lg \sin \frac{\gamma}{2} + \lg \cos \frac{\gamma}{2}$

$$\lg a = 1.1818$$
$$2 \cdot \lg a = 2.3636$$
$$\lg \sin \frac{\gamma}{2} = 9.7932-10$$
$$\lg \cos \frac{\gamma}{2} = 9.8941-10$$
$$\lg F = 2.0509$$
$$F = 112{,}4$$

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = 15{,}2$ cm	$\alpha = 51{,}6°$	$F = 112{,}4$ cm²
$b = 15{,}2$ cm	$\beta = 51{,}6°$	
$c = 18{,}88$ cm $\approx 18{,}9$ cm	$\gamma = 76{,}8°$	

Das gleichschenklige Dreieck besitzt eine besondere Bedeutung als Bestimmungsdreieck des regelmäßigen n-Ecks.

In Abbildung 29 ist die Seite des regelmäßigen n-Ecks mit s_n bezeichnet. Die Schenkel AM und BM sind die Radien r_u des Umkreises, die Basishöhe des Bestimmungsdreiecks ist zugleich der Radius r_i des Inkreises des regelmäßigen n-Ecks. Der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks ist $\varphi = \frac{360°}{n}$. Die Fläche des n-Ecks besteht aus n kongruenten Dreiecksflächen.

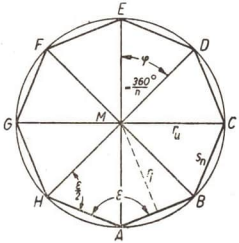


Abb. 29

Beispiel:

Gegeben ist die Seite $s = 6{,}41$ dm des regelmäßigen Zwölfecks. Wie groß sind die Radien von In- und Umkreis sowie der Flächeninhalt?

Gegeben: Die Zwölfeckseite ($s = 6{,}41$ dm) Gesucht: r_u, r_i, F

Allgemeine Lösung (s, r_u, r_i, F bedeuten Größen)

Zu allen Berechnungen muß als Hilfsgröße der Winkel an der Spitze φ des Bestimmungsdreiecks verwendet werden.

1. $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r_u}$

$$r_u = \frac{s}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

2. $\cot\frac{\varphi}{2} = \frac{r_i}{\frac{s}{2}}$

$$r_i = \frac{s}{2}\cot\frac{\varphi}{2}$$

3. $F = 12 \cdot \frac{s \cdot r_i}{2} = 6 \cdot s \cdot r_i$

$$F = 6 \cdot s \cdot \frac{s}{2}\cot\frac{\varphi}{2} = 3\,s^2\cot\frac{\varphi}{2}$$

Rechnerische Lösung mit Hilfe von Logarithmen (s, r_u, r_i, F bedeuten Zahlenwerte)

$$\varphi = \frac{360°}{12} = 30°; \quad \frac{\varphi}{2} = 15°$$

1. $\lg r_u = \lg s - \lg 2 - \lg\sin\frac{\varphi}{2}$

$$\begin{aligned} \lg s &= 0.8069 \\ \lg 2 &= 0.3010 \\ \lg\sin\frac{\varphi}{2} &= 9.4130 - 10 \\ \hline \lg r_u &= 1.0929 \\ r_u &= 12{,}39 \end{aligned}$$

2. $\lg r_i = \lg s + \lg\cot\frac{\varphi}{2} - \lg 2$

$$\begin{aligned} \lg s &= 0.8069 \\ \lg\cot\frac{\varphi}{2} &= 0.5719 \\ \hline \lg s \cdot \cot\frac{\varphi}{2} &= 1.3788 \\ \lg 2 &= 0.3010 \\ \hline \lg r_i &= 1.0778 \\ r_i &= 11{,}96 \end{aligned}$$

3. $\lg F = \lg 3 + 2 \cdot \lg s + \lg \cot \frac{\varphi}{2}$

$$\begin{aligned} \lg s &= 0.8069 \\ 2 \cdot \lg s &= 1.6138 \\ \lg 3 &= 0.4771 \\ \lg \cot \frac{\varphi}{2} &= 0.5719 \\ \hline \lg F &= 2.6628 \\ F &= 460 \end{aligned}$$

Die Stücke des Zwölfecks sind:

$s = 6{,}41$ dm $\qquad r_i = 11{,}96$ dm

$r_u = 12{,}39$ dm $\qquad F = 4{,}60$ m²

Aufgaben

1. Berechnen Sie Seiten, Winkel und Flächeninhalt der gleichschenkligen Dreiecke (vgl. Abb. 28), von denen die folgenden Stücke gegeben sind!

a) $c = 125$ m; $\qquad h_c = 85$ m

b) $a = 5{,}70$ m; $\qquad c = 3{,}50$ m

c) $c = 20{,}1$ cm; $\qquad \gamma = 55{,}40°$

d) $c = 75{,}92$ dm; $\qquad \alpha = 53{,}53°$

e) $h = 4{,}786$ m; $\qquad \gamma = 32{,}10°$

2. In einem regelmäßigen n-Eck ist

a) der Umkreisradius r_u **b)** der Inkreisradius r_i gegeben.

Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt des regelmäßigen n-Ecks im Falle

a) $F = \frac{n}{2} r_u^2 \sin \frac{360°}{n}$, im Falle **b)** $F = n \; r_i^2 \tan \frac{180°}{n}$ ist!

3. Berechnen Sie Seite, In- und Umkreisradius sowie Flächeninhalt für folgende regelmäßigen n-Ecke!

a) $n = 7$; $\qquad s = 13{,}2$ cm

b) $n = 10$; $\qquad r_u = 23{,}5$ cm

c) $n = 5$; $\qquad r_i = 17{,}4$ dm

d) $n = 8$; $\qquad F = 23{,}47$ m²

17. Anwendungsaufgaben

1. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hängt eine Last $Q = 400$ kp (Abb. 30).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßgerechte Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; $45°$; $60°$ der Zugstange gegen den Tragarm!

b) Handelt es sich um Zug- oder um Druckkräfte?

c) Berechnen Sie trigonometrisch die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

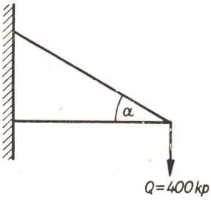


Abb. 30

2. Am Ende eines Tragarmes mit Stütze hängt eine Last von 400 kp (Abb. 31).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßgerechte Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; $45°$; $60°$ der Stütze gegen den Tragarm!

b) Werden Tragarm und Stütze auf Zug oder auf Druck beansprucht?

c) Berechnen Sie die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

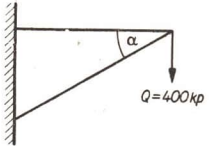


Abb. 31

3. Ein Ausleger soll 2000 kp tragen und ist mit einem Seil von 5000 kp Tragfähigkeit abzufangen (Abb. 32). Wie groß muß das Maß x mindestens werden, wenn die Tragfähigkeit des Seiles nicht überschritten werden soll?

4. Eine Schraube ist selbsthemmend, wenn die parallel zur schiefen Ebene wirkende Reibungskraft R gleich oder größer als der Hangabtrieb H ist (Abb. 19).
Wie hoch darf die Ganghöhe h einer Stahlschraube von $D = 52$ mm Durchmesser im Höchstfall sein, damit die Schraube selbsthemmend ist? Der Reibungswinkel von Stahl auf Stahl (bei Ölfettung) ist $\varrho = 8{,}50°$.

5. Lichtbrechung

Fallen Lichtstrahlen unter dem Winkel α aus Luft in ein optisch dichteres Mittel ein, so werden sie von ihrer ursprünglichen Richtung zum Einfallslot hin derart gebrochen, daß das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels α zum Sinus des Brechungswinkels β gleich der Brechungszahl n des optischen Mittels gegenüber Luft ist.

$$\text{Brechungsgesetz: } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

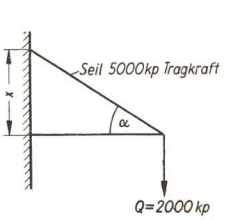


Abb. 32

Bei umgekehrtem Strahlengang ist die Brechungszahl $n' = \frac{1}{n}$.

Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel $\alpha = 15°$; $30°$; $45°$; $60°$; $75°$; $90°$ aus Luft in Wasser. Die Brechungszahl für den Übergang von Luft in Wasser ist $n = \frac{4}{3}$.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Brechungswinkel β!

b) Stellen Sie die einander zugeordneten Werte von Einfalls- und Brechungswinkel in einer Tafel zusammen!

6. Beim Durchgang durch eine planparallele Platte wird ein Lichtstrahl parallel verschoben.

a) Wie groß ist die Parallelverschiebung, die ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte von $d = 10$ cm Dicke bei einem Einfallswinkel $\alpha = 60°$ erfährt $\left(n = \frac{3}{2}\right)$?

b) Bestimmen Sie den Gang des Lichtstrahls geometrisch!

c) Stellen Sie die Verschiebung des Lichtstrahls als Funktion des Einfallswinkels α grafisch dar!

7. Auf ein Glasprisma (Brechungszahl $n = \frac{3}{2}$), dessen brechende Flächen einen Winkel $\varepsilon = 60°$ bilden, fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 45°$ ein (Abb. 33).

a) Bestimmen Sie geometrisch den Gang des Lichtstrahls!

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gesamtablenkung δ des Lichtstrahls!

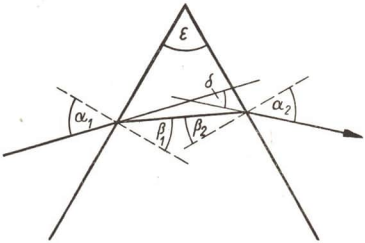


Abb. 33

8. Unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion versteht man denjenigen spitzen Einfallswinkel im optisch dichteren Mittel, für den der Brechungswinkel im optisch dünneren Mittel 90° wird. Wie groß ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion für den Übergang von

a) Wasser in Luft $\left(n' = \frac{3}{4}\right)$;

b) Glas in Luft $\left(n' = \frac{2}{3}\right)$?

9. Eine oben und unten offene Übergabeschurre ist herzustellen. Die technische Zeichnung zeigt Abb. 34.

Der Rutschwinkel γ soll 50°, die (obere) Aufnahmefläche 0,4 m² und die (untere) Abgabefläche 0,25 m² betragen.

Berechnen Sie die fehlenden Maße für b_1, b_2, l_1, l_2 und β!

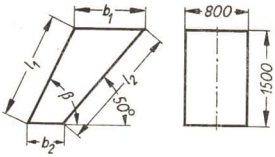


Abb. 34

10. Berechnen Sie für die in Abbildung 35 dargestellte Schwalbenschwanzführung das Maß x!

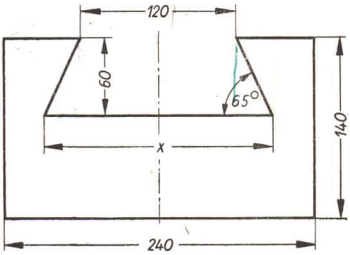


Abb. 35

11. Berechnen Sie für das in Abbildung 36 dargestellte Führungsprisma die fehlenden Maße!

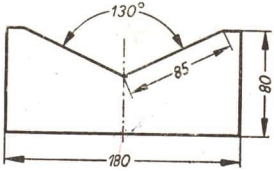


Abb. 36

12. Die Neigung von Nasenkeilen, die zur Befestigung von Rädern auf Wellen dienen, beträgt 1:100 (Abb. 37).

a) Berechnen Sie den Neigungswinkel!

b) Warum ist es in diesem Falle belanglos, ob man die Neigung als das Verhältnis von d zur waagerechten Entfernung e oder zur schrägen Strecke s definiert?

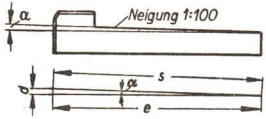


Abb. 37

13. Eine Rauchabzugshaube ist anzufertigen (Abb. 38). Berechnen Sie die Neigungswinkel der Seitenbleche gegen die Grundfläche!

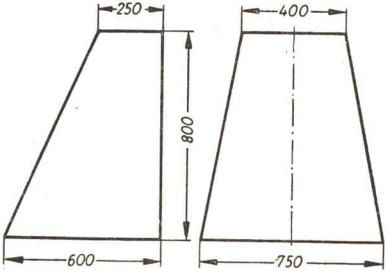


Abb. 38

14. Auf der Drehmaschine soll ein konischer Zapfen gedreht werden (vgl. dazu das Einführungsbeispiel auf S. 3).

a) Wie groß muß der Einstellwinkel am Werkzeugschlitten sein, wenn $D = 80$ mm (30 mm; 100 mm), $d = 60$ mm (20 mm; 60 mm) und $l = 100$ mm (120 mm; 90 mm) werden sollen?

b) Wie groß muß man den kleinen Durchmesser d eines $l = 45$ mm langen konischen Zapfens wählen, wenn $D = 25$ mm und die Neigung des Zapfens $\frac{1}{x} = \frac{1}{10}$ betragen sollen?

15. Bestimmen Sie den Supporteinstellwinkel α (in Grad und Minuten) für den in Abbildung 39 dargestellten Kegel!

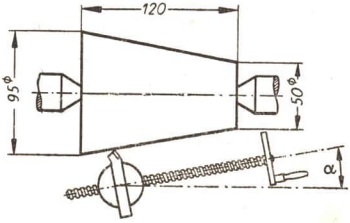


Abb. 39

16. Der Dreher hat bei der Arbeit nach Aufgabe 15 versehentlich 11° 40′ eingestellt. Wie groß wird jetzt der kleine Kegeldurchmesser?

17. Nebenstehender Kegel soll bearbeitet werden (Abb. 40). Berechnen Sie **a)** den Supporteinstellwinkel, **b)** den kleinen Durchmesser d!

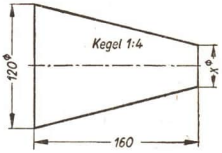


Abb. 40

18. Kegel können auf Drehmaschinen auch durch seitliches Verstellen der Körnerspitze des Reitstocks um ein Stück s hergestellt werden (Abb. 41).

a) Wie groß wird der Kegel $\frac{1}{x}$, wenn die Reitstockspitze der Drehmaschine um s verschoben wird?

b) Drücken Sie die Verschiebung s der Reitstockspitze als Funktion des Kegelwinkels α aus (vgl. Abb. 41)!

c) Wie läßt sich die Verjüngung $\frac{1}{x}$ des Kegelzapfens als Funktion des Kegelwinkels α darstellen?

d) Es soll ein Kegel mit den Maßen $D = 65$ mm, $l = 245$ mm und $\frac{1}{x} = \frac{1}{20}$ gedreht werden. Wie groß werden d und α? Um welches Stück s muß die Körnerspitze des Reitstocks auf der Drehmaschine seitlich verstellt werden?

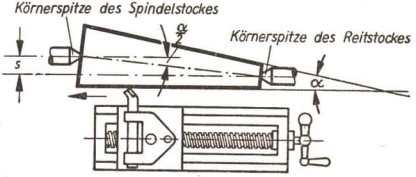


Abb. 41

19. Das in Abbildung 42 dargestellte Führungsprisma ist zu bearbeiten. Berechnen Sie

a) den Einstellwinkel α für den drehbaren Support zur Bearbeitung der seitlichen Schrägen,

b) die Tiefe x der Prismenführung!

20. In einem Kugellager sollen um einen Kreiszylinder vom Durchmesser $D = 50$ mm $n = 20$ Kugeln so angeordnet werden, daß sie einander gegenseitig berühren.

a) Wie groß muß der Kugeldurchmesser d gewählt werden, wenn die Kugeln den Kreiszylinder von außen berühren sollen?

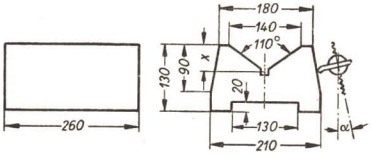


Abb. 42

b) Wie groß muß der Kugeldurchmesser gewählt werden, wenn die Kugeln einen Hohlzylinder vom lichten Durchmesser D von innen berühren sollen?

c) Berechnen Sie den Durchmesser der Kugeln, wenn der Abstand zweier aufeinanderfolgender Kugeln im Kugelkäfig $a = 5$ mm betragen soll!

d) Stellen Sie die einzelnen Kugellager in maßgerechten Schnittzeichnungen dar!

21. Um einen Kreiszylinder mit dem Durchmesser D werden n Kugeln vom Durchmesser d derart angeordnet, daß sie einander berühren.

a) Berechnen Sie d aus D und n!

b) Berechnen Sie d, wenn $D = 40$ cm und $n = 40$ sind!

22. Berechnen Sie für den in Abb. 43 dargestellten offenen Riementrieb

a) die Umfassungswinkel α und β,

b) die erforderliche Riemenlänge l (102 % des errechneten Ergebnisses)!

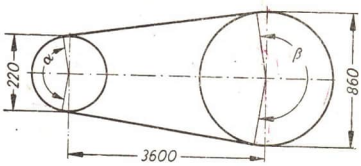


Abb. 43

23. Berechnen Sie für den in Abb. 44 dargestellten gekreuzten Riementrieb

a) die Umfassungswinkel α und β,

b) die erforderliche Riemenlänge l (102 % des errechneten Ergebnisses)!

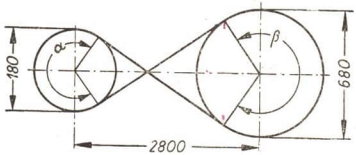


Abb. 44

24. Der Umfassungswinkel α der kleinen Riemenscheibe (Abb. 45) soll 170° betragen.

Berechnen Sie den Achsabstand x der beiden Riemenscheiben!

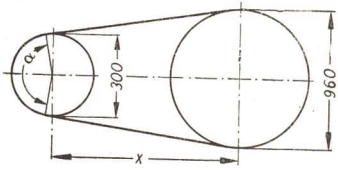


Abb. 45

25. Die Achsen zweier Kegelräder stehen aufeinander senkrecht (Abb. 46). Ihre großen Durchmesser sind $D_1 = 150$ mm (900 mm) und $D_2 = 120$ mm (480 mm). Die Länge der ineinandergreifenden Zähne ist $s = 30$ mm (150 mm).

a) Welche Neigungswinkel α und β bilden die Zähne der beiden Kegelräder mit ihren Grundflächen?

b) Wie groß sind die kleinen Durchmesser d_1 und d_2 der beiden Kegelräder?

c) Wie hoch sind die beiden Kegelräder?

d) Stellen Sie die Kegelräder in einer maßgerechten Zeichnung dar und lösen Sie die Aufgabe geometrisch!

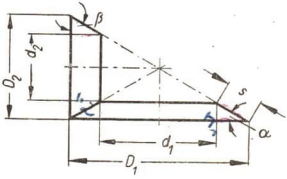


Abb. 46

26. Bei sich senkrecht kreuzenden Wellen wird die Drehbewegung meist mittels Kegelrädern übertragen.

Zum Fräsen der Zähne müssen die Radkörper (Abb. 47) vorgedreht werden.

Berechnen Sie die Maße $x_1 \ldots x_5$ sowie die Winkel $\alpha_1 \ldots \alpha_4$!

27. Der Stößelantrieb der Kurzhobelmaschine (Shapingmaschine) erfolgt mittels Kurbelschwinge (Abb. 48 a und b). Dadurch wird ein schnellerer Rücklauf erreicht. Außerdem kann durch Verstellen des Kurbelradius r der Hub H des Stößels verändert werden.

a) Berechnen Sie aus Abbildung 48 a die Hublänge und die Winkel α und β für $r = 90$; 120; 180 mm!

b) Wieviel Zeit wird jeweils für einen Vorlauf und für einen Rücklauf benötigt, wenn die Kurbel 45 Umdrehungen je Minute macht?

28. Berechnen Sie aus Abbildung 49 die für das Anreißen zweier Bohrungen eines Werkstückes notwendigen Maße x_1 und x_2!

29. Von einer Welle mit dem Durchmesser $d = 100$ mm (Abb. 50) wird das schraffierte Stück abgefräst, so daß

a) $s_1 = 75$ mm,

b) $s_2 = 60$ mm beträgt.

Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall?

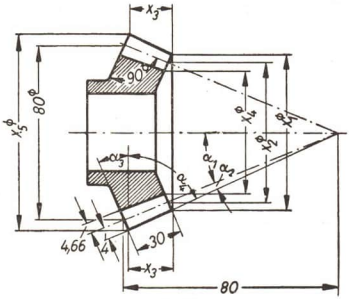


Abb. 47

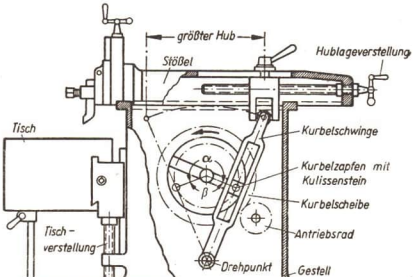


Abb. 48 a

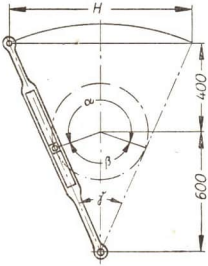


Abb. 48 b

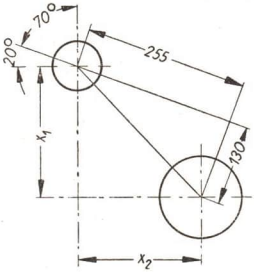


Abb. 49

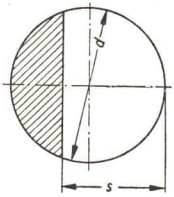


Abb. 50

30. Bestimmen Sie die gestreckte Länge eines laufenden Meters Wellblech nach Abbildung 51!

a) $r = 3{,}2$ cm $\quad a = 10{,}0$ cm

b) $r = 7{,}2$ cm $\quad a = 20{,}0$ cm

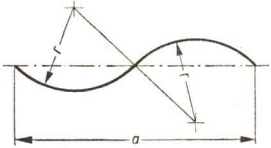


Abb. 51

31. Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seite a wird an seinen Ecken mit dem Radius $r = \frac{a}{6}$ abgerundet (Abb. 52).

Wie groß ist die schraffiert gezeichnete Abfallfläche

a) ausgedrückt mit Hilfe von a,

b) in Prozenten?

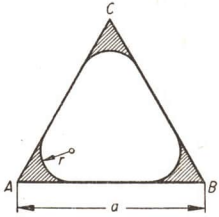


Abb. 52

32. Stellen Sie den Flächeninhalt I des in Abbildung 53 dargestellten Querschnittes durch ein Zementrohr als Funktion von r dar: $I = \varphi(r)$!

33. Berechnen Sie

a) den Inhalt I des in Abbildung 54 dargestellten Kanalquerschnittes,

b) den Umfang u der benetzten Fläche aus den Größen b, h, α!

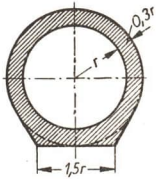


Abb. 53

34. Ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt F_1 und dem Durchmesser d_1 wird durch ein kegelförmiges Stück mit einem zweiten Rohr vom Querschnitt $F_2 = 3F_1$ (Abb. 55) verbunden. Berechnen Sie die Mantellinien s des Verbindungsstückes!

35. Welchen Durchmesser d muß ein Rundstahl besitzen, damit aus ihm ein Sechskant mit 80 cm² Querschnitt gefräst werden kann?

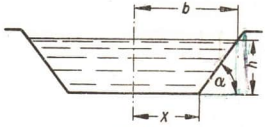


Abb. 54

36. Die Abbildung 56 zeigt das Whitworth-Gewinde. Die Gewindetiefe wird mit t bezeichnet; die Steigung mit h.

Stellen Sie eine funktionale Beziehung $t = \varphi(h)$ her!

37. Ein zylinderförmiger liegender Dampfkessel ist 1800 mm lang und besitzt einen lichten Durchmesser $D = 1500$ mm. Der Kessel ist als Einflammrohrkessel mit konzentrisch eingebautem glattem Flammrohr von 700 mm Durchmesser ausgeführt. Die Wasserstandslinie des Kessels liegt bei 1000 mm.

a) Zeichnen Sie einen Querschnitt des Kessels und tragen Sie die Wasserstandslinie ein!

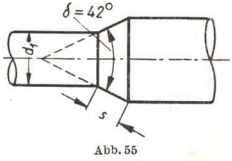


Abb. 55

b) Drücken Sie für den gezeichneten Querschnitt die Sehnenlänge, die Bogenlänge und die Fläche des Kreissegments als Funktionen des Zentriwinkels aus, welcher einer Wasserstandshöhe h in diesem Querschnitt zugeordnet ist, und stellen Sie die Funktionen grafisch dar!

c) Drücken Sie die Verdampfungsfläche des Kessels in Quadratmetern als Funktion des Zentriwinkels aus und stellen Sie die Funktion grafisch dar!

d) Berechnen Sie für die angegebenen Zahlenwerte die Verdampfungsfläche in Quadratmetern und den Wasserinhalt des Dampfkessels in Kubikmetern!

e) Berechnen Sie für die Wasserstandshöhen 1000 mm; 1200 mm; 1300 mm; 1400 mm die zugehörigen Verdampfungsflächen in Quadratmetern und die Wasserinhalte in Kubikmetern und stellen Sie diese als Funktionen der Wasserstandshöhe grafisch dar!

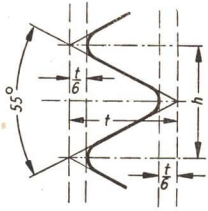


Abb. 56

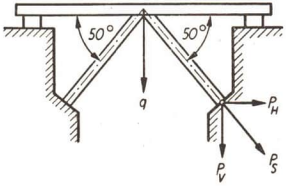


Abb. 57

38. Berechnen Sie für die in Abb. 57 dargestellte Brückenkonstruktion **a)** den Strebendruck P_s, **b)** den Horizontalschub P_h, **c)** den Vertikaldruck P_v, den die Streben ausüben, wenn von einer gleichmäßig verteilten Gesamtlast $Q = 6{,}000$ Mp in der Mitte $q = 3{,}200$ Mp wirken!

39. Zwei Straßen stoßen geradlinig unter einem Winkel von 120° aufeinander. Sie werden an der Stelle des Treffpunktes durch einen Kreisbogen vom Radius

a) $r = 300$ m,

b) $r = 500$ m ersetzt.

Wie groß ist die dadurch bewirkte Abkürzung?

Mathematische Schüleraufträge

1. Berechnen Sie **a)** die Höhe Ihrer Schule, **b)** die Höhe Ihres Wohnhauses, **c)** die Höhe des nächsten Fabrikschornsteines, indem Sie von Ihrem Standort bis zum Fußpunkt des Objekts eine waagerechte Standlinie vermessen und den Erhebungswinkel mit dem Theodoliten bestimmen!

2. Berechnen Sie aus selbstgewonnenen Meßwerten die Größe einiger Ackerflächen, auf denen Sie im Unterrichtstag in der Produktion arbeiten!

3. Stellen Sie in der näheren Umgebung an einer steilen Straße fest, unter welchem Winkel sie gegen die Horizontale ansteigt!

Berechnen Sie den Höhenunterschied, den sie auf 100 m Weglänge überwindet!

4. Messen Sie im Unterrichtstag in der Produktion Durchmesser und Mittelpunktsabstand von evtl. vorhandenen Riemenscheiben und berechnen Sie die entsprechenden Riemenlängen!

5. Stellen Sie im Unterrichtstag in der Produktion die Abmessungen sowie die Tragkraft einfach konstruierter Kranausleger fest und berechnen Sie die in den Streben auftretenden Kräfte!

6. Der Fahrdraht einer elektrischen Bahn (Straßenbahn, Grubenbahn) ist in Abständen von a Metern an Querdrähten aufgehängt (Abb. 58). Sie haben bei b Metern Spannweite einen Durchhang von c Metern. Das Gewicht des Fahrdrahtes betrage $d\,\frac{\text{kp}}{\text{m}}$; das Eigengewicht des Querdrahtes werde vernachlässigt.

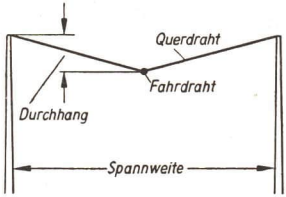


Abb. 58

Abb. 59

Erfragen Sie die Werte für a, b, c, d und berechnen Sie

a) die durch das Gewicht des Fahrdrahtes hervorgerufene senkrechte Belastung am Aufhängungspunkt,

b) die Spannkraft im Querdraht!

7. Die Lauffläche von Riemenscheiben für Flachriemen weist eine Krümmung auf, wie sie Abbildung 59 (vergrößert) zeigt.

Stellen Sie im Unterrichtstag in der Produktion den Grund dafür fest und bekräftigen Sie die Begründung durch eine mathematische Überlegung!

III. Die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0° bis 360°

18. Erweiterung des Definitionsbereiches

Im Abschnitt I ist gezeigt worden, daß zwischen der Größe eines Winkels x und den mit $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ bezeichneten Verhältniszahlen funktionale Beziehungen bestehen, sofern die Winkel spitz sind.

Es erhebt sich die Frage, ob eine solche Beschränkung der Winkelgröße erforderlich ist oder ob sich Funktionen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$ angeben lassen, bei denen der Winkel x beliebig groß sein kann.

Diese Frage entsteht, wenn man z. B. versucht, die Dreiecksberechnung nicht nur auf rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke zu beschränken, sondern sie auf beliebige Dreiecke auszudehnen. Solche Dreiecke nennt man im Gegensatz zu den erstgenannten in der Trigonometrie gewöhnlich **schiefwinklige**. Sobald dabei ein stumpfwinkliges Dreieck vorliegt, entsteht bereits das Problem, trigonometrische Funktionen von Winkeln größer als 90° zu benutzen.

Es macht sich also erforderlich, die vier trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel zu erklären. Dazu müssen neue Definitionen festgelegt werden.

Die in den Kapiteln 3, 4, 7 und 8 gegebenen Definitionen, die entweder einen beliebigen Kreis oder den Einheitskreis als Grundlage hatten, sind für eine Erweiterung auf

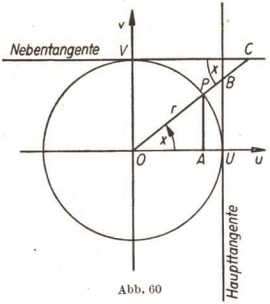


Abb. 60

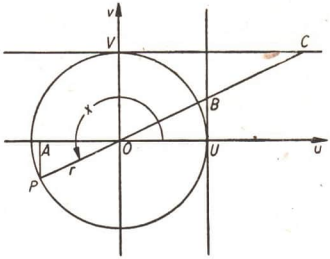


Abb. 61

beliebige Winkelgrößen geeignet. Dadurch wird zugleich die notwendige Forderung erfüllt, daß die neuen Definitionen die alten mit umfassen müssen, damit keine Widersprüche entstehen. Wir fassen diese Festsetzungen für alle vier trigonometrischen Funktionen nochmals an einer einzigen Figur (Abb. 60) zusammen.

Grundlage ist ein Kreis mit dem Radius r um den Ursprung eines rechtwinkligen uv-Systems. In seinen Schnittpunkten U mit der positiven u-Achse und V mit der positiven v-Achse werden die Tangenten an den Kreis gelegt. Die erstere nennt man Haupttangente, die letztere Nebentangente. Der Winkel x, dessen trigonometrische Funktionen definiert werden sollen, wird von der positiven u-Achse aus in mathematisch positivem Umdrehungssinn (Gegenzeigersinn) gemessen und mit seinem Scheitel im Nullpunkt angetragen.

Man verlängert den freien Schenkel des Winkels x, bis er den Kreis (in P), die Haupttangente (in B) und die Nebentangente (in C) schneidet. Weiterhin fällt man von P aus das Lot auf die u-Achse. Man nennt dieses Lot PA das **projizierende Lot**, die Strecke OA die **Projektion**.

Dabei ist nicht mehr gefordert, daß $0° \leqq x \leqq 90°$, also P, B und C im I. Quadranten liegen. x darf vielmehr durchaus auch größer als $90°$ sein. Doch wird festgesetzt, daß B und C stets auf den beiden Tangenten liegen sollen, die die Abbildung 60 zeigt. Infolgedessen ist es, falls $90° < x < 360°$, erforderlich, den freien Schenkel des Winkels x über den Scheitel hinaus zu verlängern, um stets zwei Schnittpunkte B und C zu erhalten (Abb. 61). Nunmehr setzt man im Sinne der in Abbildung 60 dargelegten Begriffe fest (zunächst für $0° \leqq x < 360°$):

Definition 5:

Unter dem Sinus eines Winkels x versteht man das Verhältnis

Projizierendes Lot : Radius.

Definition 6:

Unter dem Kosinus eines Winkels x versteht man das Verhältnis

Projektion : Radius.

Definition 7:

Unter dem Tangens eines Winkels x versteht man das Verhältnis

Haupttangentenabschnitt : Radius.

Definition 8:

Unter dem Kotangens eines Winkels x versteht man das Verhältnis

Nebentangentenabschnitt : Radius.

In Kurzzeichen:

$$\sin x = \frac{PA}{r}; \quad \cos x = \frac{OA}{r}; \quad \tan x = \frac{BU}{r}; \quad \cot x = \frac{CV}{r}$$

Hierbei ist zu beachten:

1. $\sphericalangle OCV = \sphericalangle POU = x$ (Wechselwinkel)
2. Die achsenparallelen Strecken OA, CV, PA und BU müssen mit den Vorzeichen verwendet werden, die sie nach den gebräuchlichen Festsetzungen im rechtwinkligen Koordinatensystem erhalten.
3. Der Radius r ist stets ohne Vorzeichen zu nehmen.

Man erkennt aus diesen neuen Definitionen:

1. Sie enthalten die Erklärungen 1 bis 4 der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel.
2. Sie sind sinnvoll für Winkel $x > 90°$.

Die Darstellung der trigonometrischen Funktionen wird besonders einfach, wenn als Radius des Kreises die im Koordinatensystem verwendete Maßeinheit genommen wird ($r = 1$ Längeneinheit).

Damit wird (Abb. 62)

$$\sin x = \frac{PA \text{ Längeneinheiten}}{1 \text{ Längeneinheit}} = PA$$

$$\cos x = \frac{OA \text{ Längeneinheiten}}{1 \text{ Längeneinheit}} = OA$$

$$\tan x = \frac{BU \text{ Längeneinheiten}}{1 \text{ Längeneinheit}} = BU$$

$$\cot x = \frac{CV \text{ Längeneinheiten}}{1 \text{ Längeneinheit}} = CV$$

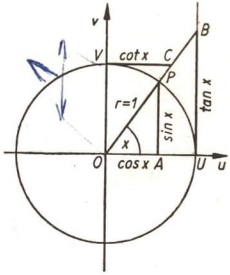


Abb. 62

In Worten:

Der Sinus eines Winkels ist gleich der Maßzahl des projizierenden Lotes am Einheitskreis.

Der Kosinus eines Winkels ist gleich der Maßzahl der Projektion am Einheitskreis.

Der Tangens eines Winkels ist gleich der Maßzahl des Haupttangentenabschnittes am Einheitskreis.

Der Kotangens eines Winkels ist gleich der Maßzahl des Nebentangentenabschnittes am Einheitskreis.

Diese Darstellung der trigonometrischen Funktion ist bequem und übersichtlich, deshalb ist sie allgemein üblich und wird im folgenden meist verwendet werden. Es muß aber ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die trigonometrischen Funktionswerte nicht die zur Definition benutzten Strecken selbst, sondern deren Maßzahlen, also unbenannte Zahlen sind.

19. Beziehungen zwischen Funktionen und Winkeln verschiedener Quadranten

In den Zahlentafeln sind nur die Funktionswerte der Winkel zwischen 0° und 90° verzeichnet. Eine Erweiterung dieser Zahlentafeln ist nicht erforderlich, weil die Funktionswerte von Winkeln, die größer als 90° sind, durch Funktionswerte von Winkeln zwischen 0° und 90° ausgedrückt werden können.

1. Beispiel:

Gesucht ist cos 152°.

Aus Abbildung 63 ist ersichtlich, daß die Funktionswerte der Kosinusfunktion im II. Quadranten negativ sind. Die Axialsymmetrie der Figur (Symmetrieachse ist die v-Achse) bedingt, daß gilt:

$$\cos 152° = -\cos 28° = -\cos (180° - 152°)$$

Unter der Voraussetzung, daß α ein Winkel im II. Quadranten ist, wird allgemein

$$\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$$

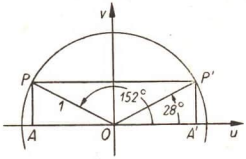


Abb. 63

2. Beispiel:

Gesucht ist cot 215°.

Aus Abbildung 64 ist ersichtlich, daß die Funktionswerte der Kotangensfunktion im III. Quadranten positiv sind. Die Figur zeigt weiter wegen der Scheitelwinkelbeziehung:

$$\cot 215° = \cot 35° = \cot (215° - 180°)$$

Unter der Voraussetzung, daß β ein Winkel im III. Quadranten ist, wird allgemein

$$\cot \beta = \cot (\beta - 180°)$$

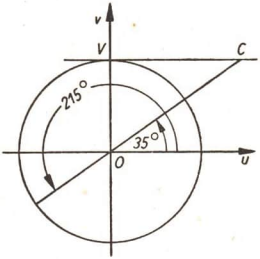


Abb. 64

3. Beispiel:

Gesucht ist tan 312°.

Aus Abbildung 65 ist ersichtlich, daß die Funktionswerte der Tangensfunktion im IV. Quadranten negativ sind. Die Axialsymmetrie der Figur (Symmetrieachse ist die u-Achse) zeigt ferner:

$$\tan 312° = -\tan 48° = -\tan (360° - 312°)$$

Unter der Voraussetzung, daß γ ein Winkel im IV. Quadranten ist, wird allgemein

$$\tan \gamma = -\tan (360° - \gamma)$$

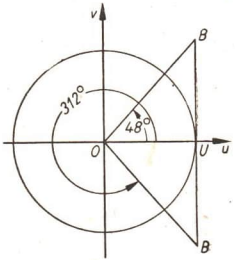


Abb. 65

Durch entsprechende Betrachtungen erhält man folgende Ergebnisse:

α ist ein Winkel im II. Quadranten:

$$\sin \alpha = \sin (180° - \alpha) \quad (1^a) \qquad \tan \alpha = - \tan (180° - \alpha) \quad (1^e)$$
$$\cos \alpha = - \cos (180° - \alpha) \quad (1^b) \qquad \cot \alpha = - \cot (180° - \alpha) \quad (1^d)$$

β ist ein Winkel im III. Quadranten:

$$\sin \beta = - \sin (\beta - 180°) \quad (2^a) \qquad \tan \beta = \tan (\beta - 180°) \quad (2^e)$$
$$\cos \beta = - \cos (\beta - 180°) \quad (2^b) \qquad \cot \beta = \cot (\beta - 180°) \quad (2^d)$$

γ ist ein Winkel im IV. Quadranten:

$$\sin \gamma = - \sin (360° - \gamma) \quad (3^a) \qquad \tan \gamma = - \tan (360° - \gamma) \quad (3^e)$$
$$\cos \gamma = \cos (360° - \gamma) \quad (3^b) \qquad \cot \gamma = - \cot (360° - \gamma) \quad (3^d)$$

Allgemein:

Um zu einem Winkel φ ($90° < \varphi < 360°$) einen Funktionswert zu ermitteln, sucht man in den Tafeln den Wert der gleichen Funktion für denjenigen Winkel auf, der φ zu 180° oder zu 360° ergänzt ($180° - \varphi$; $\varphi - 180°$; $360° - \varphi$).

Bei der Vorzeichenbestimmung des Funktionswertes kann die nebenstehende Tabelle helfen.

Quadrant	I	II	III	IV
$\sin \varphi$	+	+	−	−
$\cos \varphi$	+	−	−	+
$\tan \varphi$	+	−	+	−
$\cot \varphi$	+	−	+	−

Man erkennt, daß bei jeder der vier Funktionen jedes Vorzeichen gerade zweimal vorkommt. Bei einem gegebenen Funktionswert eines Winkels findet man infolgedessen für den Winkel (im Bereich von 0° bis 360°) stets zwei Lösungen.

1. Beispiel: $\sin \alpha = 0{,}9664$

Der Funktionswert ist positiv, also liegen die Winkel α im I. und II. Quadranten.

$$\alpha_1 = x \qquad (0° \leqq x \leqq 90°)$$
$$\alpha_2 = 180° - x \; (0° \leqq x \leqq 90°)$$

Aus $\sin x = 0{,}9664$ folgt $x = 75{,}1°$

Demnach ist $\alpha_1 = 75{,}1°$

$$\alpha_2 = 180° - 75{,}1° = 104{,}9°$$

2. Beispiel: $\cos \gamma = - 0{,}7145$

Der Funktionswert ist negativ, also liegen die Winkel γ im II. und III. Quadranten.

$$\gamma_1 = 180° - x \; (0° \leqq x \leqq 90°)$$
$$\gamma_2 = 180° + x \; (0° \leqq x \leqq 90°)$$

Aus $\cos x = 0{,}7145$ folgt $x = 44{,}4°$

Demnach ist $\gamma_1 = 180° - 44{,}4° = 135{,}6°$

$$\gamma_2 = 180° + 44{,}4° = 224{,}4°$$

Das Rechnen mit den Logarithmen der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen von Winkeln, die größer als 90° sind, erfordert, daß die negativen Vorzeichen außer Betracht gelassen werden. Denn Logarithmen von negativen Zahlen existieren im Bereich der reellen Zahlen nicht. Man muß also in diesen Fällen mit den absoluten Beträgen der natürlichen Werte der Funktionen rechnen. Im übrigen gelten dann die gleichen Gesetze, die für das Rechnen mit den Logarithmen bei Winkeln im I. Quadranten erklärt wurden.

1. Beispiel: Gesucht ist $\lg \cos 152°$

$\cos 152°$ ist negativ. Deshalb wird der Logarithmus des Betrages des trigonometrischen Funktionswertes angegeben.

$$\lg |\cos 152°| = 9.9459-10$$

2. Beispiel: $\lg \tan x = 0.4389$ $(\tan x < 0)$

In diesem Fall soll der natürliche Wert der trigonometrischen Funktion, zu dem der Logarithmus angegeben ist, negativ sein. Man bestimmt in diesem Falle zunächst den im I. Quadranten liegenden Winkelwert $(x = 70°)$ und gibt dann unter Berücksichtigung der Vorschrift $\tan x < 0$ als Lösungen an:

$$x_1 = 110°$$
$$x_2 = 290°$$

Während die Erklärungen 1 bis 4 (vgl. Abschnitt I) für $x = 0°$ und $x = 90°$ ihren Sinn verloren, so daß die vier Funktionswerte durch eine besondere Definition festgesetzt werden mußten, trifft das für die Definitionen 5 bis 8 nicht mehr zu. Wir überzeugen uns an Hand von Abbildung 60, daß die im Abschnitt I getroffenen Festsetzungen

$$\sin 0° = 0 \qquad \cos 0° = 1 \qquad \tan 0° = 0$$
$$\sin 90° = 1 \qquad \cos 90° = 0 \qquad \cot 90° = 0$$

auch den Definitionen 5 bis 8 genügen. Ebenso stellen wir erneut fest, daß $\tan x$ größer wird als jede angebbare Zahl, wenn x gegen 90° strebt, und ebenso $\cot x$, wenn x gegen 0° strebt. Dafür verwendet man das Symbol:

$$\tan x \to \infty, \text{ falls } x \to 90°$$
$$\cot x \to \infty, \text{ falls } x \to 0°$$

gelesen: „$\tan x$ ($\cot x$) wird größer als jede angebbare Zahl, falls x gegen 90° (gegen 0°) strebt."

Da man infolgedessen für diese Winkel keine konkreten Werte der Funktionen angeben kann, sagt man auch, $\tan 90°$ und $\cot 0°$ seien nicht erklärt.

Entsprechende Überlegungen an Hand der Abbildung 60 führen auch für die Winkel 180°, 270° und 360° zu eindeutigen Funktionswerten bzw. zu der Feststellung, daß ein Funktionswert nicht erklärt ist.

Man erhält:

$$\sin 180° = 0 \qquad \cos 180° = -1$$
$$\sin 270° = -1 \qquad \cos 270° = 0$$
$$\sin 360° = 0 \qquad \cos 360° = 1$$

$$\tan 180° = 0 \qquad \cot x \to \infty, \text{ falls } x \to 180°$$
$$\tan x \to \infty, \text{ falls } x \to 270° \qquad \cot 270° = 0$$
$$\tan 360° = 0 \qquad \cot x \to \infty, \text{ falls } x \to 360°$$

Aufgaben

1. Zeigen Sie mit Hilfe selbstgefertigter Zeichnungen die Richtigkeit der Gleichungen

a) 1a, 1c, 1d

b) 2a, 2b, 2c

c) 3a, 3b, 3d auf Seite 52!

2. Bestimmen Sie:

a) sin 135°	**b)** cos 150°	**c)** tan 120°	**d)** cot 110°
e) sin 200°	**f)** cos 213°	**g)** tan 261°	**h)** cot 249°
i) sin 300,2°	**k)** cos 321,4°	**l)** tan 336,5°	**m)** cot 282,2°
n) sin 97,3°	**o)** cos 131,5°	**p)** tan 172,5°	**q)** cot 99,9°
r) sin 219,73°	**s)** cos 209,65°	**t)** tan 216,36°	**u)** cot 224,33°
v) sin 331,12°	**w)** cos 348,48°	**x)** tan 298,47°	**y)** cot 337,29°

3. Welche Werte besitzen die vier trigonometrischen Funktionen für die Winkel

a) 0°	**b)** 90°	**c)** 180°	**d)** 270°	**e)** 360°
f) 200°	**g)** 194,5°	**h)** 265,35°	**i)** 298,46°	**k)** 354,63°
l) 211,49°	**m)** 315,32°	**n)** 244,66°	**o)** 327,76°	**p)** 300° 23′ 15″?

4. Suchen Sie, soweit möglich, die Logarithmen der Beträge der trigonometrischen Funktionen aus den Aufgaben 2 und 3 in der Tafel auf!

5. Bestimmen Sie die Winkel δ zwischen 0° und 360° zu den folgenden Funktionswerten $f(\delta)$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin\delta$	0	1	− 0,5	0,3746	− 0,7314	0,1500	− 0,0728
$\cos\delta$	0	1	− 1	0,7071	− 0,9336	0,2358	− 0,7005
$\tan\delta$	0	1	2	− 3	− 0,4452	0,9387	− 0,0120
$\cot\delta$	0	1	− 3	− 16,50	0,1700	− 1,319	− 2,439

6. Bestimmen Sie zu den nachstehenden Logarithmen der trigonometrischen Funktionen die zwischen 0° und 360° liegenden Winkel x!

a) $\lg \sin x = 0.8810-1$ $(\sin x > 0)$;

b) $\lg |\sin x| = 0.9750-2$ $(\sin x < 0)$;

c) $\lg \cos x = 0.9996-1$ $(\cos x > 0)$;

d) $\lg |\cos x| = 0.3075-1$ $(\cos x < 0)$;

e) $\lg \tan x = 0.2764-1$ $(\tan x > 0)$;

f) $\lg |\tan x| = 0.9000-2$ $(\tan x < 0)$;

g) $\lg \cot x = 0.7718$ $(\cot x > 0)$;

h) $\lg |\cot x| = 1.2700$ $(\cot x < 0)$.

20. Das Bogenmaß eines Winkels

Im Kapitel 18 haben wir erkannt, daß jedem beliebigen Winkel zwischen 0° und 360° je ein bestimmter Wert jeder der vier trigonometrischen Funktionen zugeordnet ist. Man kann also im allgemeinen Sinne von trigonometrischen Funktionen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ sprechen und sie grafisch darstellen. Man müßte dazu auf der x-Achse eine bestimmte Einheit zur Darstellung der Winkelgrade wählen, während man auf der y-Achse eine Maßeinheit für die unbenannten Verhältniszahlen wählen müßte. Beide haben also wesensverschiedene Bedeutung und lassen sich deshalb schwer aufeinander abstimmen.

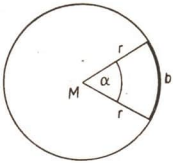


Abb. 66

Man benutzt deshalb in der Trigonometrie gern ein anderes Winkelmaß, bei dem auch unbenannte Zahlen verwendet werden.

Aus Abbildung 66 erkennt man die Gültigkeit folgender Proportion:

$$\text{Kreisumfang} : \text{Kreisbogen} = \text{Vollwinkel} : \text{Zentriwinkel}$$

$$2r\pi \quad : \quad b \quad = \quad 360^\circ \quad : \quad \alpha^\circ \tag{1}$$

Daraus folgt:

$$b = \frac{r\pi}{180^\circ}\,\alpha^\circ \tag{2}$$

In Worten:

Die Länge eines Kreisbogens b ist dem Zentriwinkel und dem Radius r proportional.

Bildet man hieraus die neue Beziehung $\frac{b}{r} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$, so ist dieses Verhältnis aus Kreisbogen und Radius nur noch dem Zentriwinkel proportional, kann also als neues Maß für diesen Winkel dienen. Da dabei der Bogen zum Messen des Winkels benutzt wird, bezeichnet man es als **Bogenmaß** und symbolisiert es durch arc α° oder $\widehat{\alpha}$; gelesen: „arcus von alpha Grad".[1]

Es gilt also die Definition

$$\widehat{\alpha} = \text{arc}\,\alpha^\circ = \frac{b}{r} = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \tag{3}$$

Das Bogenmaß des Winkels ist also, wie es beabsichtigt war, als Verhältnis zweier Strecken eine unbenannte Zahl. Wird zur Bestimmung des Bogenmaßes speziell der Einheitskreis genommen, so vereinfacht sich die Beziehung (3) zu

$$\widehat{\alpha} = \frac{b\ \text{Längeneinheiten}}{1\ \text{Längeneinheit}} = b \tag{4}$$

Das Bogenmaß eines Winkels ist also gleich der Maßzahl des zugehörigen Bogens auf dem Einheitskreis.

---

[1] arcus lat. Bogen.

Übergang vom Gradmaß zum Winkelmaß und umgekehrt

Aus der Beziehung (3) erhält man, wenn man π durch 3,14 annähert, folgende Zusammenhänge:

Zum Gradmaß 1° gehört als Bogenmaß die Zahl $1^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}0175$

$$\approx \frac{7}{400}$$

Zum Gradmaß 45° gehört als Bogenmaß die Zahl $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$

Zum Gradmaß 90° gehört als Bogenmaß die Zahl $90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

Zum Gradmaß 180° gehört als Bogenmaß die Zahl $180^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \pi \approx 3{,}14$

Zum Gradmaß 360° gehört als Bogenmaß die Zahl $360^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 2\pi \approx 6{,}28$

Zum Gradmaß α° gehört als Bogenmaß die Zahl $\alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}0175 \cdot \alpha$

$$\approx \frac{7\alpha}{400}$$

Wird die Beziehung (3) nach α° aufgelöst, so ergibt sich $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \widehat{\alpha}$. Daraus erhält man:

Zur Zahl $\pi \approx 3{,}14$ als Bogenmaß gehört als Gradmaß $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \pi = 180^\circ$

Zur Zahl 1 als Bogenmaß gehört als Gradmaß $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 \approx \frac{180^\circ}{3{,}14}$

$$\approx 57{,}3^\circ$$

Die Winkeleinheit im Bogenmaß ist also ein Winkel, der fast die Größe der Winkel des gleichseitigen Dreiecks hat. Die Einheit ist also wesentlich größer als im Gradmaß. Die Bogenmaße der Winkel 0° bis 360° sind in Tafel 16 von „Vierstellige Logarithmen-Zahlen, Werte, Formeln" von Grad zu Grad fortschreitend zusammengestellt. Die Bogenmaße von Winkeln mit nicht tabellierten Gradzahlen, z. B. von Bruchteilen von Graden, bestimmt man durch additive oder subtraktive Zusammensetzung aus tabellierten Werten oder Bruchteilen davon. Auch der Interpolation kann man sich bedienen.

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &= 132^\circ \\ 130^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 2{,}2689 \\ 2^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 0{,}0349 \\ \hline \widehat{\alpha} &= 2{,}3038 \end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &= 198{,}92^\circ \\ 180^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 3{,}1416 \\ 18^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 0{,}3142 \\ 0{,}92^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 0{,}0161 \\ \hline \widehat{\alpha} &= 3{,}4719 \end{aligned}$$

3. Beispiel:

$\bar{\alpha} = 4{,}9742$

$4{,}7124 \mathrel{\widehat{=}} 270°$

$0{,}2618$

$0{,}2618 \mathrel{\widehat{=}} 15°$

$\alpha° = 285°$

4. Beispiel:

$\bar{\alpha} = 2{,}7193$

$2{,}7053 \mathrel{\widehat{=}} 155°$

$0{,}0140$

$0{,}0140 \mathrel{\widehat{=}} 0{,}8°$

$\alpha° = 155{,}8°$

Bei Benutzung des Bogenmaßes ist es nunmehr möglich, in der grafischen Darstellung der trigonometrischen Funktionen Maßeinheiten auf beiden Achsen zu verwenden, die nach Bedeutung und Größe übereinstimmen, und die Bildkurven punktweise zu konstruieren. Wir haben das bei der grafischen Darstellung der trigonometrischen Funktionen im I. Quadranten bereits getan. Bei der Benutzung der Tafeln, die die Winkel im Gradmaß enthalten, muß allerdings jeder Winkelgradwert erst in den zugehörigen Bogenmaßwert umgerechnet werden.

Aufgaben

1. Stellen Sie die Funktionen

a) $y = \sin x$ **b)** $y = \cos x$ **c)** $y = \tan x$ **d)** $y = \cot x$

im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ grafisch dar, indem Sie die Winkel auf der x-Achse im Bogenmaß auftragen und dabei auf beiden Achsen gleiche Maßeinheiten benutzen!

2. Rechnen Sie folgende im Gradmaß gegebenen Winkel ins Bogenmaß um!

a) $1°$ **b)** $0{,}1°$ **c)** $0{,}01°$ **d)** $1'$

e) $1''$ **f)** $45°$ **g)** $120°$ **h)** $75°$

i) $300°$ **k)** $-180°$ **l)** $200°$ **m)** $32°$

n) $67{,}5°$ **o)** $102{,}7°$ **p)** $256{,}58°$ **q)** $318{,}04°$

3. Rechnen Sie die folgenden im Bogenmaß gegebenen Winkel in Gradmaß um!

a) $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{5}$ **d)** $\frac{\pi}{10}$

e) $\frac{\pi}{15}$ **f)** $\frac{\pi}{30}$ **g)** $\frac{\pi}{180}$ **h)** $\frac{3}{2}\pi$

i) $\frac{3}{4}\pi$ **k)** $\frac{7}{8}\pi$ **l)** $\frac{\pi}{12}$ **m)** $1{,}3\,\pi$

n) $0{,}7\,\pi$ **o)** $1{,}13\,\pi$ **p)** $0{,}1$ **q)** $0{,}01$

r) 2 **s)** $1{,}5$ **t)** $3{,}04$

4. Berechnen Sie die Bogenlänge auf einem Kreis mit dem Radius $r = 8$ cm für die Zentriwinkel

a) 36,5° **b)** 124,15° **c)** 255,58°!

5. Berechnen Sie die Bogenlänge zum Zentriwinkel 1 auf einem Kreis mit dem Radius

a) $r = 1$ cm; **b)** $r = 2$ cm; **c)** $r = 4$ cm!

6. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Zahlenwerte von arc α

a) mit denen von sin α,

b) mit denen von tan α

bis auf 3 Dezimalen überein?

7. Schlagen Sie folgende Werte in der Tafel auf!

a) $\sin \frac{\pi}{3}$ **b)** $\cos \frac{3}{8} \pi$ **c)** $\sin 1$ **d)** $\cos 2{,}163$

e) $\tan \frac{2}{7} \pi$ **f)** $\cot 1{,}8\, \pi$ **g)** $\tan 0{,}7$ **h)** $\cot \sqrt{2}$

i) $\lg \sin 1\frac{3}{4} \pi$ **k)** $\lg \cos 2{,}4$ **l)** $\lg \tan \frac{19}{20}$ **m)** $\lg \cot 0{,}1$

8. Geben Sie mit Hilfe der Tafel folgende Winkel x im Bogenmaß an!

a) $\sin x = 0{,}9511$ **b)** $\cos x = -0{,}885°$

c) $\tan x = -3{,}630$ **d)** $\cot x = -5{,}18 \cdot 10^{-2}$

e) $\lg \sin x = 0.8495-1$ $(\sin x > 0)$

f) $\lg |\cos x| = 0.8026-1$ $(\cos x < 0)$

g) $\lg \tan x = 0.8699-2$ $(\tan x > 0)$

h) $\lg |\cot x| = 0.0456$ $(\cot x < 0)$

9. a) Berechnen Sie den Weg, den ein um die Strecke $r = 5$ cm vom Scheitelpunkt entfernter Punkt P zurücklegt, wenn der Winkel 90°; 270°; 360°; 45°; 57,3° beträgt!

b) Zeichnen Sie die jeweiligen Winkel sowie die dazugehörigen Wege des Punktes P als Kreisbögen und als Strecken!

10. Geben Sie die in Aufgabe 9 bestimmten Wege unter der Voraussetzung an, daß $r = 1$ cm ist!

11. Stellen Sie die Funktion $y = \text{arc}\, x$ $(0 \leqq x \leqq 360)$ in geeignetem Maßstab grafisch dar!

IV. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

21. Der Sinussatz und die Flächenformel

Das schiefwinklige Dreieck läßt sich genauso wie das gleichschenklige berechnen: Man zerlegt es durch eine Höhe in zwei rechtwinklige. Diese sind in diesem Fall allerdings nicht mehr kongruent.

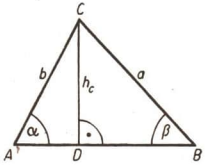


Abb. 67

Beispiel:

Gegeben: $a = 24$ cm; $\alpha = 23°$; $\beta = 53°$

Gesucht: b

Allgemeine Lösung: (a, b, α, β bedeuten Größen)

In Abbildung 67 läßt sich die Höhe h_c des Dreiecks ABC auf zweifache Weise ausdrücken:

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \qquad h_c = a \sin\beta \tag{1}$$

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \qquad h_c = b \sin\alpha \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (1) und (2) läßt sich h_c eliminieren. Es ergibt sich

$$a \sin\beta = b \sin\alpha.$$

Daraus läßt sich b errechnen:

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \tag{3}$$

Rechnerische Lösung: (mit Hilfe von Logarithmen)

(a, b bedeuten Zahlenwerte)

$\lg b = \lg a + \lg \sin\beta - \lg \sin\alpha$

$$\begin{aligned} \lg a &= 1.3802 \\ \lg \sin\beta &= 9.9023 - 10 \\ \hline \lg a \cdot \sin\beta &= 11.2825 - 10 \\ \lg \sin\alpha &= 9.5919 - 10 \\ \hline \lg b &= 1.6906 \\ b &= 49{,}04 \end{aligned}$$

Ergebnis: $b \approx 49$ cm

Die durch die Elimination von h_c entstehende Beziehung (3) wird sich bei jeder derartigen Aufgabe ergeben. Es lohnt sich deshalb, sie als besonderen Lehrsatz zu notieren. Dazu verwendet man meist die Proportionenform:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta \tag{3a}$$

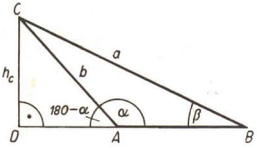


Abb. 68

Entsprechend findet man bei Zerlegung des Dreiecks durch die Höhen h_a bzw. h_b:

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma \qquad (3\,b)$$

und

$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma \qquad (3\,c)$$

Die Gleichungen (3b) und (3c) kann man auch mittels zyklischer Vertauschung der Stücke aus Gleichung (3a) erhalten.

Für das stumpfwinklige Dreieck ergeben sich zwar bei der Zerlegung mit Hilfe einer Höhe, die nicht durch den stumpfen Winkel verläuft, anders gelegene Teildreiecke (Abb. 68). Bei der Elimination dieser Höhe ergibt sich aber dasselbe Endergebnis.

Begründung:

Wegen $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

wird im Teildreieck ACD $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ und damit genau wie beim spitzwinkligen Dreieck $h_c = b \sin\alpha$ (2). Gleichung (1) bleibt ebenfalls unverändert. Damit ergeben sich auch für das stumpfwinklige Dreieck die gleichen Beziehungen (3a), (3b) und (3c).

Die Gleichungen

$$\boldsymbol{a : b = \sin\alpha : \sin\beta} \qquad (3\,a)$$

$$\boldsymbol{b : c = \sin\beta : \sin\gamma} \qquad (3\,b)$$

$$\boldsymbol{c : a = \sin\gamma : \sin\alpha} \qquad (3\,c)$$

werden als **Sinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet. In Worten lautet er:

In einem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus[1] der gegenüberliegenden Winkel.

Man kann den Sinussatz auch als fortlaufende Proportion schreiben:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \qquad (3\,d)$$

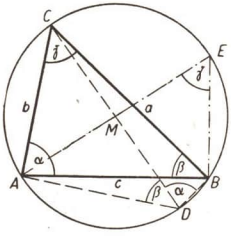


Abb. 69

Durch den Sinussatz erübrigt es sich, bei der Berechnung der übrigen Stücke eines beliebigen Dreiecks aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren oder aus einer Seite und zwei Winkeln jedesmal erneut die Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Hilfe einer Höhe durchzuführen und diese Höhe als Hilfsgröße zunächst zu berechnen und dann wieder zu eliminieren.

Eine Herleitung des Sinussatzes in anderer Form ergibt sich wie folgt (Abb. 69).

Um das Dreieck ABC wird der Umkreis gezeichnet. Weiterhin zeichnet man den Kreisdurchmesser $CMD = 2\,r$ und verbindet A und B mit D. Damit erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke ADC und BCD. Die Winkel CAD und DBC sind als Peripheriewinkel im Halbkreis rechte Winkel (Satz des Thales).

---

[1] Der Plural von Sinus (Kosinus) ist Sinus (Kosinus), nicht „Sinusse" („Kosinusse")!

Weiterhin sind $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB = \alpha$

und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \beta$ jeweils als Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen.

Damit wird:

$$\sin\alpha = \frac{CB}{CD} = \frac{a}{2r}$$

$$\sin\beta = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{2r}$$

oder

$$2r = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad (4\,a) \qquad\qquad 2r = \frac{b}{\sin\beta} \qquad (4\,b)$$

Zieht man den Durchmesser $AME = 2r$, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ABE:

$$\sin\gamma = \frac{AB}{AE} = \frac{c}{2r}$$

oder

$$2r = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (4\,c)$$

Aus den Gleichungen 4 a, b, c folgt der Sinussatz in der Form

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \qquad (4\,d)$$

In Worten:

In einem Dreieck ist der Quotient aus einer Seite und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels gleich dem Umkreisdurchmesser.

Mit Hilfe der Höhe kann auch der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden. Nach Abbildung 67 ist

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$h_c = b\sin\alpha$$

Damit wird

$$F = \frac{c\,h_c}{2} = \frac{b\,c\sin\alpha}{2}$$

Entsprechend ergibt sich

$$F = \frac{a\,c\sin\beta}{2} \quad \text{durch} \quad h_a = c\cdot\sin\beta$$

$$\text{und} \quad F = \frac{a\cdot b\sin\gamma}{2} \quad \text{durch} \quad h_b = a\cdot\sin\gamma$$

Wir erkennen:

Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Bei der Verwendung des Sinussatzes zur Berechnung von Winkeln im Dreieck ist zu beachten, daß der Sinus im I. und im II. Quadranten positiv ist, d. h. daß zu einem Sinuswert stets ein Winkel im I. und ein Winkel im II. Quadranten gehören. Beide Winkel sind zunächst als Rechenergebnisse möglich, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, ob sie auch beide als Lösungen der betreffenden Aufgabe in Frage kommen.

1. Beispiel:

Gegeben: $a = 20$ cm; $b = 8$ cm; $\alpha = 117°$.
Gesucht: c, β, γ, F.

Allgemeine Lösung: ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, F$ bedeuten Größen)

1. $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

2. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$

3. $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

4. $F = \frac{a\, b \sin\gamma}{2}$

Rechnerische Lösung: (a, b, c, F bedeuten Zahlenwerte)

1. $\lg \sin\beta = \lg b + \lg \sin\alpha - \lg a = \lg b + \lg \sin(180° - \alpha) - \lg a$

$$\begin{aligned} \lg b &= 0.9031 \\ \lg \sin(180° - \alpha) &= 9.9499 - 10 \\ \hline \lg b \cdot \sin\alpha &= 10.8530 - 10 \\ \lg a &= 1.3010 \\ \hline \lg \sin\beta &= 9.5520 - 10 \end{aligned}$$

$\beta_1 = 20{,}88°$ $\qquad$ $\beta_2 = 180° - 20{,}88° = 159{,}12°$

2. $\gamma_1 = 180° - 137{,}88°$ $\qquad$ $\gamma_2 = 180° - 276{,}12°$

$\gamma_1 = 42{,}12°$ $\qquad$ $\gamma_2 = -96{,}12°$

Da negative Dreieckswinkel sinnlos sind, entfällt γ_2 und damit auch β_2 als Lösung.

3. $\lg c = \lg a + \lg \sin\gamma_1 - \lg \sin\alpha = \lg a + \lg \sin\gamma_1 - \lg \sin(180° - \alpha)$

$$\begin{aligned} \lg a &= 1.3010 \\ \lg \sin\gamma_1 &= 9.8266 - 10 \\ \hline \lg a \cdot \sin\gamma_1 &= 11.1276 - 10 \\ \lg \sin(180° - \alpha) &= 9.9499 - 10 \\ \hline \lg c &= 1.1777 \\ c &= 15{,}06 \end{aligned}$$

4. $\lg F = \lg a + \lg b + \lg \sin \gamma_1 - \lg 2$

$$\begin{aligned} \lg a &= 1.3010 \\ \lg b &= 0.9031 \\ \lg \sin \gamma_1 &= 9.8266 - 10 \\ \hline & 12.0307 - 10 \\ \lg 2 &= 0.3010 \\ \hline \lg F &= 11.7297 - 10 \\ \lg F &= 1.7297 \\ F &= 53{,}66 \end{aligned}$$

Ergebnisse:

$a = 20$ cm	$\alpha = 117°$	$F = 53{,}66$ cm²
$b = 8$ cm	$\beta = 20{,}88°$	
$c = 15{,}06$ cm $\approx 15{,}1$ cm	$\gamma = 42{,}12°$	

2. Beispiel:

Gegeben: $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $r = 8{,}2$ cm.

Gesucht: c, α, β, γ, F.

Allgemeine Lösung: (a, b, c, α, β, γ, F, r bedeuten Größen)

1. $\dfrac{a}{\sin \alpha} = 2r$ 2. $\dfrac{b}{\sin \beta} = 2r$ 3. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$

$\sin \alpha = \dfrac{a}{2r}$ $\sin \beta = \dfrac{b}{2r}$

4. $F = \dfrac{a\, b \sin \gamma}{2}$ 5. $c = 2r \cdot \sin \gamma$

Rechnerische Lösung: (a, b, c, F, r bedeuten Zahlenwerte)

1. $\lg \sin \alpha = \lg \dfrac{a}{2} - \lg r$

$$\begin{aligned} \lg \frac{a}{2} &= 10.5798 - 10 \\ \lg r &= 0.9138 \\ \hline \lg \sin \alpha &= 9.6660 - 10 \\ \alpha_1 &= 27{,}61° \\ \alpha_2 &= 180° - 27{,}61° = 152{,}39° \end{aligned}$$

2. $\lg \sin \beta = \lg \frac{b}{2} - \lg r$

$$\begin{aligned} \lg \frac{b}{2} &= 10.5051 - 10 \\ \lg r &= 0.9138 \\ \hline \lg \sin \beta &= 9.5913 - 10 \\ \beta_1 &= 22{,}97^\circ \\ \beta_2 &= 180^\circ - 22{,}97^\circ = 157{,}03^\circ \end{aligned}$$

Da sich rechnerisch je zwei Winkelgrößen für α und β ergeben haben, muß untersucht werden, welche davon möglich sind. An sich wäre es denkbar, daß das Dreieck folgende Winkel enthielte:

(1) α_1 und β_1; (2) α_1 und β_2;

(3) α_2 und β_1; (4) α_2 und β_2.

Da aber die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, darf die Summe von α und β diesen Betrag nicht erreichen. Damit entfallen die Möglichkeiten (2) und (4). Die Paarungen (1) und (3) hingegen widersprechen der Winkelsummenbedingung nicht und müssen für die weitere Berechnung berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 27{,}61^\circ & \alpha_2 &= 152{,}39^\circ \\ \beta_1 &= 22{,}97^\circ & \beta_1 &= 22{,}97^\circ \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 180^\circ - 50{,}58^\circ & \gamma_2 &= 180^\circ - 175{,}36^\circ \\ \gamma_1 &= 129{,}42^\circ & \gamma_2 &= 4{,}64^\circ \end{aligned}$$

4. $\lg F_1 = \lg \frac{a}{2} + \lg b + \lg \sin (180^0 - \gamma_1)$

$$\begin{aligned} \lg \frac{a}{2} &= 0.5798 \\ \lg b &= 0.8062 \\ \lg \sin (180^\circ - \gamma_1) &= 9.8879 - 10 \\ \hline \lg F_1 &= 1.2739 \\ F_1 &= 18{,}79 \end{aligned}$$

$\lg F_2 = \lg \frac{a}{2} + \lg b + \lg \sin \gamma_2$

$$\begin{aligned} \lg \frac{a}{2} &= 0.5798 \\ \lg b &= 0.8062 \\ \lg \sin \gamma_2 &= 8.9079 - 10 \\ \hline \lg F_2 &= 0.2939 \\ F_2 &= 1{,}967 \end{aligned}$$

5. $\lg c_1 = \lg 2\,r + \lg \sin (180^\circ - \gamma_1)$

$$\begin{aligned} \lg 2\,r &= 1.2148 \\ \lg \sin (180^\circ - \gamma_1) &= 9.8879 - 10 \\ \hline \lg c_1 &= 1.1027 \\ c_1 &= 12{,}67 \end{aligned}$$

$\lg c_2 = \lg 2\,r + \lg \sin \gamma_2$

$$\begin{aligned} \lg 2\,r &= 1.2148 \\ \lg \sin \gamma_2 &= 8.9079 - 10 \\ \hline \lg c_2 &= 0.1227 \\ c_2 &= 1{,}326 \end{aligned}$$

Ergebnisse:

(I) $a = 7{,}6$ cm
$b = 6{,}4$ cm
$c = 12{,}7$ cm
$\alpha = 27{,}6°$
$\beta = 23{,}0°$
$\gamma = 129{,}4°$
$F = 18{,}79$ cm²

(II) $a = 7{,}6$ cm
$b = 6{,}4$ cm
$c = 1{,}3$ cm
$\alpha = 152{,}4°$
$\beta = 23{,}0°$
$\gamma = 4{,}6°$
$F = 1{,}97$ cm²

Aufgaben

1. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt und kontrollieren Sie die Ergebnisse, gegebenenfalls maßgerecht verkleinert, durch Konstruktion!

a) $a = 4$ cm, $\beta = 43°$, $\gamma = 55°$

b) $a = 5{,}6$ cm, $\beta = 83{,}8°$, $\gamma = 26{,}5°$

c) $c = 1{,}46$ m, $\alpha = 20{,}2°$, $\beta = 74{,}3°$

d) $b = 8{,}5$ cm, $\beta = 44{,}2°$, $\gamma = 54{,}5°$

e) $c = 121{,}56$ m, $\beta = 13{,}47°$, $\gamma = 101{,}25°$

f) $b = 2{,}389$ km, $\alpha = 39° 17'$, $\beta = 68° 28'$

g) $a = 44{,}8$ cm, $\alpha = 59° 10'$, $\beta = 41° 18'$

h) $c = 64{,}9$ m, $\alpha = 42° 43'$, $\gamma = 102° 19'$

2. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt! Achten Sie dabei darauf, ob der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren Seite gegenüberliegt!

a) $b = 3{,}8$ cm, $c = 4{,}5$ cm, $\gamma = 53{,}6°$

b) $a = 35{,}75$ m, $c = 26{,}48$ m, $\alpha = 93{,}57°$

c) $a = 7{,}0$ cm, $b = 5{,}8$ cm, $\beta = 43{,}7°$

d) $a = 32{,}3$ cm, $c = 36{,}6$ cm, $\alpha = 55{,}7°$

e) $a = 12{,}15$ m, $b = 27{,}83$ m, $\beta = 109{,}24°$

f) $b = 4{,}3$ cm, $c = 4{,}6$ cm, $\gamma = 20° 35'$

g) $a = 30{,}4$ cm, $c = 27{,}8$ cm, $\alpha = 67° 23'$

h) $b = 24{,}9$ m, $c = 17{,}2$ m, $\beta = 117° 4'$

3. Leiten Sie die Formel

$$F = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}$$

für den Flächeninhalt eines Dreiecks her! Wie heißen die entsprechenden Beziehungen für F, in denen die Seite a bzw. b verwendet wird? Sprechen Sie die Formeln in Worten aus und geben Sie ihre Bedeutung an!

4. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, wenn die folgenden Stücke gegeben sind:

a) $a = 8{,}7$ cm, $b = 7{,}1$ cm, $\gamma = 44{,}6°$

b) $a = 52{,}85$ cm, $c = 75{,}23$ cm, $\beta = 56{,}91°$

c) $a = 34{,}76$ m, $\beta = 59° 10'$, $\gamma = 79° 33'$

d) $b = 4{,}475$ km, $\beta = 59{,}27°$, $\gamma = 41{,}31°$

5. Berechnen Sie die Seiten eines Dreiecks aus $\alpha = 81{,}91°$, $\beta = 41{,}54°$ und $r = 258{,}4$ cm!

6. a) Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks gegeben ist durch

$$F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\,!$$

b) Berechnen Sie aus den Winkeln $\alpha = 56{,}79°$ und $\beta = 62{,}89°$ sowie dem Umkreisradius $r = 12$ cm den Flächeninhalt des Dreiecks!

7. Warum können die Strecken $a = 8$ cm, $b = 5$ cm und der Flächeninhalt $F = 22$ cm² nicht Bestimmungsstücke eines Dreiecks sein?

a) Begründen Sie geometrisch, daß dies nicht möglich ist!
Anleitung: Untersuchen Sie die funktionale Abhängigkeit des Flächeninhaltes vom Winkel γ, wenn dieser von 0° bis 180° zunimmt!

b) Wie zeigt sich beim trigonometrischen Lösungsverfahren, daß die Aufgabe keine Lösung hat?

22. Der Kosinussatz

Entsprechend den vier Kongruenzsätzen ist es möglich, die übrigen Stücke zu berechnen, wenn gegeben sind

(1) zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren (*ssw*)
(2) eine Seite und zwei Winkel (*sww*)
(3) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (*sws*)
(4) drei Seiten (*sss*).

Im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, daß die Lösung der Aufgaben (1) und (2) mit Hilfe des Sinussatzes sehr vereinfacht werden kann. Bei den Aufgaben (3) und (4) kann er aber nicht zur Verwendung kommen, weil für ihn Voraussetzung ist, daß eine Seite und ihr Gegenwinkel gegeben sind. Das ist bei den Aufgaben (3) und (4) nicht der Fall. Deshalb führt der Sinussatz in diesen Fällen nicht weiter. Vielmehr muß man wiederum eine Zerlegung durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke durchführen, um mit ihrer Hilfe Winkelfunktionen aufstellen zu können.

Beispiel:

Gegeben: $b = 10{,}3$ cm; $c = 8{,}9$ cm; $\alpha = 70{,}4°$.
Gesucht: a

Allgemeine Lösung: (a, b, c, α bedeuten Größen)

Um a zu berechnen, zerlegen wir das Dreieck durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige und verwenden als Hilfsgrößen, die am Ende wieder eliminiert werden müssen, die beiden Abschnitte p und q, in die die Höhe h_c die Seite c aufteilt (Abb. 70).

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$
$$h_c^2 = a^2 - p^2.$$

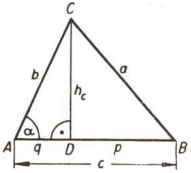


Abb. 70

Durch Gleichsetzen erhält man

$$b^2 - q^2 = a^2 - p^2$$
$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2.$$

Wegen $p = c - q$ wird

$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq. \qquad (1)$$

Im Dreieck ADC ist weiterhin $\cos\alpha = \frac{q}{b}$, woraus folgt

$$q = b\cos\alpha. \qquad (2)$$

Durch Einsetzen von (2) in (1) erhält man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (3a)$$

und

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Rechnerische Lösung (mit Hilfe von Quadratzahltafel und Logarithmen; a, b, c bedeuten Zahlenwerte).

$$b^2 = 106{,}1$$
$$c^2 = 79{,}21$$
$$b^2 + c^2 = 185{,}31$$

$$\lg 2bc\cos\alpha = \lg 2 + \lg b + \lg c + \lg\cos\alpha$$
$$\lg 2 = 0.3010$$
$$\lg b = 1.0128$$
$$\lg c = 0.9494$$
$$\lg\cos\alpha = 9.5256 - 10$$
$$\lg 2bc\cos\alpha = 1.7888$$
$$2bc\cos\alpha = 61{,}49$$

$$a = \sqrt{185{,}31 - 61{,}49}$$
$$a = \sqrt{123{,}82}$$
$$a = 11{,}13$$

Da die hergeleitete Beziehung (3a) bei allen derartigen Aufgaben entsteht, empfiehlt es sich, sie als einen Lehrsatz festzuhalten und durch entsprechende Zerlegungen mit Hilfe der Höhen h_a bzw. h_b noch zu ergänzen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta \qquad (3\,b)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma \qquad (3\,c)$$

Im stumpfwinkligen Dreieck ABC (Abb. 71) wird $p = c + q$.

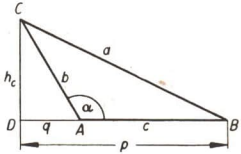


Abb. 71

Weiterhin ist

$$\cos(180^0 - \alpha) = \frac{q}{b}$$

$$q = b\cos(180^\circ - \alpha). \qquad (4)$$

Wegen

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad (5)$$

wird (4):

$$q = -b\cos\alpha \qquad (6)$$

Damit wird

$$a^2 = b^2 + (c + q)^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cq + q^2 - q^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c\,(-b\cos\alpha)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha.$$

Man erhält ebenfalls Gleichung (3a).

Die drei Gleichungen

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha} \qquad (3\,a)$$

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta} \qquad (3\,b)$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma} \qquad (3\,c)$$

werden als **Kosinussatz der ebenen Trigonometrie** bezeichnet.

Durch den Kosinussatz wird es überflüssig, in den am Anfang dieses Abschnitts genannten Fällen (3) und (4) in jedem Einzelfall eine Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige vorzunehmen. Damit sind alle 4 Fälle der Dreiecksberechnung unmittelbar lösbar.

Zusammenstellung:

	Gegebene Stücke	Zur Lösung verhilft der
(1)	*ssw*	Sinussatz
(2)	*sww*	Sinussatz
(3)	*sws*	Kosinussatz und Sinussatz
(4)	*sss*	Kosinussatz und evtl. Sinussatz

Da der Kosinus von Winkeln im I. und II. Quadranten verschiedene Vorzeichen besitzt, ist die Berechnung eines Dreieckswinkels nach dem Kosinussatz (im Gegensatz zur Berechnung mit Hilfe des Sinussatzes) eindeutig.

Beispiel:

Gegeben: $a = 24$ cm; $b = 13$ cm; $c = 15$ cm.
Gesucht: α, β, γ, F.

Allgemeine Lösung: ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, F$ bedeuten Größen)

1.
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

2.
$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$
$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

3.
$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

4.
$$F = \frac{a\,b \sin\gamma}{2}$$

Rechnerische Lösung: (mit Hilfe von Quadrattafel und Logarithmen; a, b, c, F bedeuten Zahlenwerte)

1.
$$\begin{aligned} b^2 &= 169 \\ c^2 &= 225 \\ \hline b^2 + c^2 &= 394 \\ a^2 &= 576 \\ \hline b^2 + c^2 - a^2 &= -182 \\ 2\,b\,c &= 390 \\ \cos\alpha &= -\frac{182}{390} = -0{,}4667 \\ \alpha &= 180^\circ - 62{,}18^\circ \\ \alpha &= 117{,}82^\circ \end{aligned}$$

2. $\lg \sin\beta = \lg b + \lg \sin\alpha - \lg a = \lg b + \lg \sin(180^\circ - \alpha) - \lg a$

$$\begin{aligned} \lg b &= 1.1139 \\ \lg \sin(180^\circ - \alpha) &= 9.9466-10 \\ \hline \lg b \cdot \sin\alpha &= 11.0605-10 \\ \lg a &= 1.3802 \\ \hline \lg \sin\beta &= 9.6803-10 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = 28{,}62^\circ \qquad \beta_2 = 180^\circ - 28{,}62^\circ$$
$$\beta_2 = 151{,}38^\circ$$

Da $b < a$, muß auch $\beta < \alpha$ sein. Infolgedessen entfällt β_2 als Lösung. (β_2 wäre auch deshalb nicht möglich, weil $\beta_2 + \alpha > 180^\circ$.)

3.

$$\gamma = 180° - 146{,}44°$$
$$\gamma = 33{,}56°$$

$$\lg F = \lg \frac{a}{2} + \lg b + \lg \sin \gamma$$
$$\lg \frac{a}{2} = 1.0792$$
$$\lg b = 1.1139$$
$$\lg \sin \gamma = 9.7426-10$$
$$\lg F = 1.9357$$
$$F = 86{,}24$$

Ergebnisse:

$a = 24$ cm	$\alpha = 117{,}8°$	$F = 86{,}24$ cm²
$b = 13$ cm	$\beta = 28{,}6°$	
$c = 15$ cm	$\gamma = 33{,}6°$	

Aufgaben

1. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie die Dreieckfläche!

a) $a = 6{,}1$ cm, $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 63{,}2°$

b) $a = 123{,}5$ m, $b = 134{,}2$ m, $\gamma = 102{,}16°$

c) $b = 17{,}18$ m, $c = 13{,}85$ m, $\alpha = 74{,}32°$

d) $a = 245{,}9$ m, $b = 392{,}5$ m, $\gamma = 47° 43'$

2. Berechnen Sie die Dreieckswinkel sowie die Dreieckfläche!

a) $a = 5{,}38$ m, $b = 1{,}97$ m, $c = 4{,}75$ m

b) $a = 2{,}458$ km, $b = 3{,}019$ km, $c = 1{,}389$ km

c) $a = 27{,}18$ m, $b = 33{,}88$ m, $c = 35{,}03$ m

d) $a = 8{,}754$ km, $b = 6{,}672$ km, $c = 8{,}386$ km

23. Anwendungsaufgaben

1. Drei Kreise mit den Radien

a) $r_1 = 6{,}5$ cm, $r_2 = 5{,}2$ cm, $r_3 = 3{,}8$ cm

b) $r_1 = 9{,}5$ cm, $r_2 = 7{,}6$ cm, $r_3 = 5{,}1$ cm

c) $r_1 = 24{,}2$ cm, $r_2 = 15{,}6$ cm, $r_3 = 21{,}8$ cm

berühren einander gegenseitig von außen. Welchen Winkel schließen je 2 Zentralen miteinander ein? (Unter der Zentrale zweier Kreise versteht man die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte).

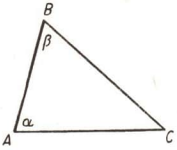


Abb. 72

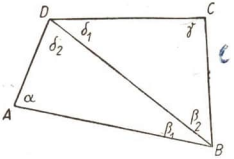


Abb. 73

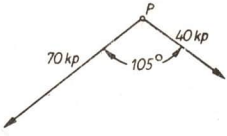


Abb. 74

2. Im Gelände ist eine Basis (Standlinie) $AB = 225$ m vermessen worden. C ist ein dritter Punkt im Gelände, der von A und B aus nicht zugänglich ist. Mit dem Theodoliten wurden $\sphericalangle CAB = \alpha = 75° 20'$ und $\sphericalangle CBA = \beta = 42° 40'$ ermittelt.

Wie lang sind die Strecken AC und BC (Abb. 72)?

3. Wieviel Hektar Land werden durch die Trockenlegung der obenstehend skizzierten feuchten Wiese $ABCD$ gewonnen (Abb. 73)?

Bemerkung: AD und DC sind nicht begehbar.

$AB = 470$ m $\quad BC = 675$ m

$\alpha = 115°$ $\quad \beta_1 = 26°$

$\beta_2 = 72{,}5°$

4. Ein nach Wismar auf geradem Kurs mit 8,5 kn fahrendes Schiff peilt das Leuchtfeuer bei Timmendorf (Poel) unter 32° 50′ und das Leuchtfeuer bei Hohen Wischendorf unter 184° an. (Winkelangaben von N über O.) Aus der Seekarte wird die Entfernung Schiff–Timmendorf mit 1,85 sm festgestellt.

In welcher Richtung verläuft die Fahrrinne, wenn 12 min später Timmendorf unter 337° und Hohen Wischendorf unter 268° gesehen werden?

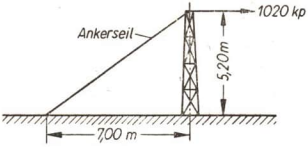


Abb. 75

5. Ein Leitungsmast wird unter einem Winkel von 105° mit 70 kp und 40 kp Zug beansprucht (Abb. 74).

Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch Größe und Richtung der Resultierenden!

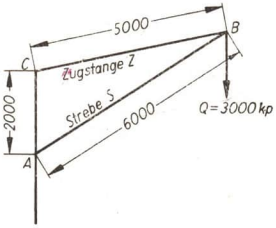


Abb. 76

6. Der 5,20 m hohe Mast am Ende einer elektrischen Grubenbahn ist durch eine waagerechte Seilspannkraft von 1020 kp belastet und durch ein schräges Drahtseil am Boden gegen Biegung verankert (Abb. 75).

Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch

a) die Spannkraft im Ankerseil,

b) die Belastung des Mastfundamentes (Gewicht des Mastes $G = 800$ kp)!

7. Ein Drehkran trägt am Auslegerkopf B eine Last $Q = 3000$ kp.

Welche Spannkräfte treten in der Strebe S und in der Zugstange Z auf (Abb. 76)? Sind es Zug- oder Druckkräfte?

8. Beantworten Sie die Fragen aus Aufgabe 7 für

a) $Q = 6000$ kp; $AB = 6000$ mm; $BC = 5000$ mm; $AC = 2000$ mm;

b) $Q = 4000$ kp; $AB = 3000$ mm; $BC = 2000$ mm; $AC = 1500$ mm!

9. Drei Kräfte, deren Wirkungslinien in einer Ebene liegen, greifen in einem Punkte P an und halten sich das Gleichgewicht.

a) $P_1 = 50$ kp, $P_2 = 60$ kp, $P_3 = 80$ kp

b) $P_1 = 720$ kp, $P_2 = 315$ kp, $P_3 = 555$ kp

Welche Winkel schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein?

Mathematische Schüleraufträge

1. Vermessen Sie im Gelände eine Basis (Standlinie) AB! C sei ein von A und B aus nicht zugänglicher Punkt. Ermitteln Sie mit dem Theodoliten die Winkel CAB und CBA und berechnen Sie die Strecken AC und BC!

2. Stellen Sie im Unterrichtstag in der Produktion die Abmessungen sowie die Tragkraft einfach konstruierter Kranausleger fest und berechnen Sie die in den Streben auftretenden Kräfte!

3. Stellen Sie im Unterrichtstag in der Produktion die Schubstangenlänge und den Kurbelradius bei Kurbelgetrieben fest und führen Sie Berechnungen analog den Fragen in Aufgabe 8 auf Seite 73 durch!

4. Stellen Sie im Unterrichtstag in der Produktion fest, in welchen Betriebsabteilungen bzw. an welchen Maschinen trigonometrische Berechnungen von schiefwinkligen Dreiecken vorgenommen werden und führen Sie diese Berechnungen durch!

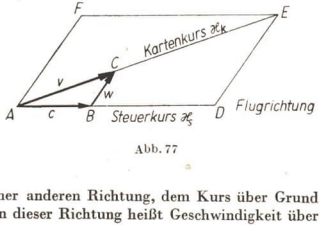


Abb. 77

Der Kurs eines Flugzeuges in der eigentlichen Flugrichtung wird als Steuerkurs $\varkappa_s$, die Geschwindigkeit in dieser Richtung als Eigengeschwindigkeit c bezeichnet.

Der Wind wirkt unter einer bestimmten Windrichtung und mit einer bestimmten Windstärke — der Windgeschwindigkeit w — beschleunigend oder verzögernd auf das Flugzeug ein und treibt das Flugzeug aus der beabsichtigten Flugrichtung heraus. Dadurch fliegt das Flugzeug in einer anderen Richtung, dem Kurs über Grund oder dem Kartenkurs $\varkappa_k$. Die Geschwindigkeit in dieser Richtung heißt Geschwindigkeit über Grund v.

Das Geschwindigkeitsdreieck ABC heißt Winddreieck, der Winkel CAB Abtrift, in umgekehrter Richtung Vorhaltewinkel (Abb. 77).

5. Ein Lufttaxi der DLH fliegt mit einer Geschwindigkeit $c = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

a) von Karl-Marx-Stadt nach Berlin-Schönefeld (175 km),

b) von Berlin-Schönefeld nach Barth (225 km),

c) von Erfurt nach Karl-Marx-Stadt (135 km) und

d) von Berlin-Schönefeld nach Dresden (165 km).

Es herrscht Südwind mit Windstärke 7, $\left(w \approx 47 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Berechnen Sie in jedem Falle den Kartenkurs $\varkappa_k$, die Geschwindigkeit über Grund v und die Abtrift! Entnehmen Sie den Kartenkurs aus dem Atlas.

6. Eine Maschine vom Typ IL 14 der DLH $\left(c = 320 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ fliegt von Barth nach Berlin-Schönefeld. Es herrscht Westwind, Stärke 8 $\left(w \approx 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$. Berechnen Sie $\varkappa_k$, v und die Abtrift!

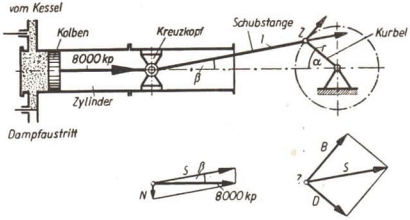


Abb. 78

7. Eine Maschine vom Typ IL 14 der DLH $\left(c = 320 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ fliegt von Dresden nach Erfurt (190 km). Der Kartenkurs $\varkappa_k$ beträgt 267° (Winkelangabe: N über O). Es herrscht NW-Wind mit einer Windgeschwindigkeit $w = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit über Grund v, den Vorhaltewinkel und die Flugzeit!

8. Die Schubstange eines Kurbelgetriebes ist 750 mm lang, der Kurbelradius ist $r = 200$ mm (Abb. 78).

a) Wie groß ist die Ablenkung β der Schubstange, wenn die Kurbel sich um α dreht?

b) Berechnen Sie die zu den Winkeln $\alpha = 0°; 15°; 30°; \ldots; 360°$ gehörigen Winkel β und stellen Sie β als Funktion von α grafisch dar!

c) Für welche Drehwinkel α erreicht die Ablenkung β der Schubstange ihre größten Werte?

d) Welche Verschiebung des Kreuzkopfes entspricht den Kurbelstellungen $\alpha = 0°; 15°; 30°; \ldots; 360°$?

e) Stellen Sie die Verschiebung des Kreuzkopfes als Funktion des Winkels α der Kurbeldrehung analytisch und grafisch dar!

f) Zerlegen Sie die von der Kolbenstange auf den Kreuzkopf übertragene Kraft $P = 8000$ kp in ihre Komponenten S und N! S wirkt in Richtung der Schubstange, N senkrecht zur Gleitbahn des Kreuzkopfes bei den einzelnen Kurbelstellungen (Abb. 78).

g) Zerlegen Sie die auf den Kurbelzapfen Z wirkende Schubstangenkraft S in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten B und D! D stellt den Druck auf die Kurbelwelle dar, B ist die tangential zur Kreisbahn des Kurbelzapfens wirkende Bewegungskraft.

h) Berechnen Sie die Größe der Komponentenkräfte D und B für die Kurbelstellungen $\alpha = 0°; 15°; 30°; \ldots; 360°$!

i) Stellen Sie die Größe der treibenden Kraft B als Funktion des Winkels α grafisch dar!

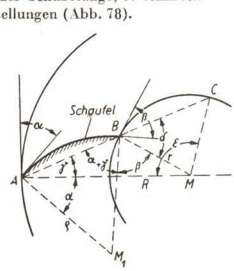


Abb. 79

9. Bei der Konstruktion der Schaufeln einer Schleuderpumpe tritt folgendes Problem auf:
Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien R und r. Durch einen beliebigen Punkt A des großen Kreises soll ein dritter Kreis gezogen werden, der den großen Kreis unter dem vorgeschriebenen Winkel α, den kleinen Kreis dagegen unter dem vorgeschriebenen Winkel β schneidet (Abb. 79).

Konstruktion:

Wir nehmen an, $\widehat{AB}$ sei ein Bogen des gesuchten Kreises, M_1 sein Mittelpunkt und ϱ sein Radius. AB wird bis C verlängert. Dann sind die Dreiecke AM_1B und BMC gleichschenklig; weiterhin ist

$\sphericalangle M_1AM = \alpha$ und

$\sphericalangle M_1BM = \beta$.

$\sphericalangle BAM$ sei γ; dann wird

$$\varepsilon = 180^\circ - (\delta + \gamma)$$
$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma); \quad \text{und damit}$$
$$\varepsilon = 180^\circ - 180^\circ + (\alpha + \beta + \gamma) - \gamma$$
$$\varepsilon = \alpha + \beta$$

Man findet den Punkt B folgendermaßen:

Man zieht AM und macht $\sphericalangle AMC$ gleich $\varepsilon = \alpha + \beta$. Damit erhält man den Punkt C. AC schneidet den kleinen Kreis in B.

Jetzt ist M_1 aus AB und den Tangenten in A und B zu konstruieren.

a) Leiten Sie eine Beziehung für ϱ her!

Anleitung: Ziehen Sie MM_1 und wenden Sie den Kosinussatz auf die Dreiecke AM_1M und BM_1M an!

b) Wie groß wird ϱ, wenn $R = 420$ mm; $r = 200$ mm; $\alpha = 40^\circ$; $\beta = 60^\circ$ sind?

10. Die Abbildungen 80a bis 80c zeigen zwei Kegelzahnräder, deren Achsen sich unter dem Winkel α schneiden.

a) Zeigen Sie, daß gilt:

$$R_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2 \cos\alpha} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\alpha}$$

$$R_1 = \frac{r_1}{r_2 + r_1 \cos\alpha} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\alpha}$$

Anleitung: Für die Konstruktion der Zahnräder sind die sogenannten „Ersatzradien" R_1 und R_2 nötig. Sie sind diejenigen Mantellinien von zwei Kegeln, die auf den Mantellinien der Grundkegel mit den Radien r_1 und r_2 senkrecht stehen.

In Abbildung 80b sind die für die Berechnung notwendigen Stücke gesondert gezeichnet.

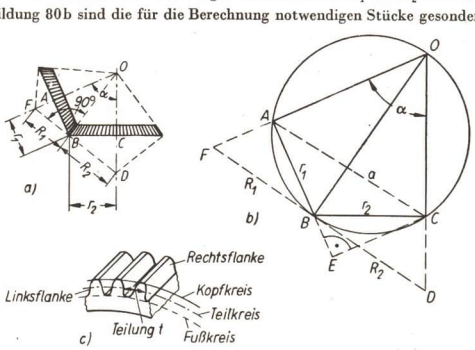


Abb. 80

b) Man kann in den Formeln für R_1 und R_2 anstelle von r_1 und r_2 die Zähnezahlen z_1 und z_2 einführen.
Die Teilung t eines Zahnrades ist der Abstand zweier benachbarter gleichgerichteter Flanken, in mm auf dem Bogen des Teilkreises gemessen (Abb. 80c).
Bedeutet z die Zähnezahl, dann ist $u = 2\pi r = zt$
Man kann die Teilung auch als Vielfaches von π wählen; man nennt dann den Faktor M von π den Modul M:

$$t = M\pi.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{u}{\pi} = 2r = Mz$$

Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$R_1 = r_1 \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos\alpha}}{z_2 + z_1 \cos\alpha}$$

und

$$R_2 = r_2 \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos\alpha}}{z_1 + z_2 \cos\alpha}$$

c) Wie lauten die Formeln für R_1 und R_2, wenn die Achsen der Kegelräder senkrecht aufeinander stehen?

d) Berechnen Sie R_1 und R_2, wenn

$$n_1 = 75 \frac{U}{\text{min}}; \quad n_2 = 150 \frac{U}{\text{min}}$$

$$M = 10 \text{ mm}$$

$$z_1 = 50;\ z_2 = 25$$

$$d_1 = 400 \text{ mm};\ d_2 = 200 \text{ mm}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

sind!

Ausblick

24. Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Durch die Definitionen 5 bis 8 (Kapitel 18) sind die trigonometrischen Funktionen für den Bereich $0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ (im Bogenmaß $0 \leqq x \leqq 2\pi$) erklärt worden. Es entsteht die Frage, ob diese Einschränkung notwendig ist. Wenn man sich den frei beweglichen Schenkel des Winkels x erstens nicht nur im Gegenzeigersinn, sondern auch im Uhrzeigersinn beweglich denkt, und zweitens die Bewegung nicht auf einen einzigen vollen Umlauf beschränkt, so wird von diesem Schenkel auch bei jeder in diesem Sinne verallgemeinerten Bewegung in jeder Lage ein ganz bestimmter Winkel gegen die Ausgangslage gebildet. Es ist nur nötig, eindeutig festzusetzen, wie diese Winkel gemessen werden sollen, sowie die Definitionen 5 bis 8 auch auf diese Winkel zu übertragen.

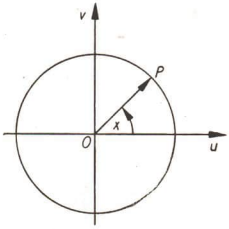


Abb. 81

25. Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel

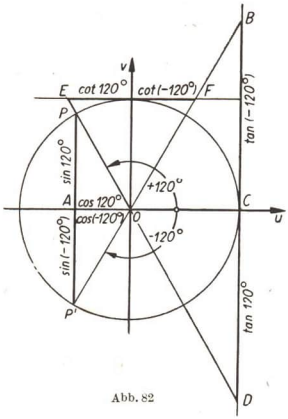


Abb. 82

Erfolgt die Drehung des freien Schenkels des Winkels x im Gegenzeigersinn, so bezeichnet man das als eine Drehung im mathematisch positiven Sinn. Entsprechend nennt man eine Drehung im Uhrzeigersinn eine Drehung im mathematisch negativen Sinn und kennzeichnet die so entstehenden Winkel durch negative Vorzeichen vor ihren Grad- bzw. Bogenmaßwerten: $-120°$; $-\frac{\pi}{3}$; $-1{,}9$ usw.

Nunmehr wird festgelegt, daß die Definitionen 5 bis 8 der trigonometrischen Funktionen auch für Winkel im Bereich $0° > x \geqq -360°$ gelten sollen. Damit wird beispielsweise:

$$\sin(-60°) = \sin(+300°)$$

$$\cos(-110°) = \cos(+250°)$$

usw.

Nun ist aber andererseits (vgl. Kapitel 19)

$$\sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60°.$$

Daraus folgt schließlich:

$$\sin(-60°) = -\sin 60°.$$

Abbildung 82 zeigt diese Beziehungen für die vier trigonometrischen Funktionen für den Winkel $-x = -120°$. Daran erkennt man allgemein:

$$\mathbf{\sin x = -\sin(-x)} \qquad \mathbf{\tan x = -\tan(-x)}$$
$$\mathbf{\cos x = \cos(-x)} \qquad \mathbf{\cot x = -\cot(-x)} \tag{1}$$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Werte aller trigonometrischen Funktionen der folgenden Winkel:

a) $-30°$ b) $-18°$ c) $-135°$ d) $-83{,}4°$
e) $-90{,}45°$ f) $-174{,}77°$ g) $-214{,}92°$ h) $-282°\,12'\,38''$
i) $-393{,}27°$ k) $-450{,}13°$

2. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionswerten $f(x)$ die zwischen $0°$ und $-360°$ liegenden negativen Winkel!

	a)	b)	c)		d)	e)	f)
$\sin x$	$-0{,}4848$	$-0{,}9024$	$0{,}0820$	$\tan x$	$-0{,}3759$	$-0{,}9935$	$2{,}877$
$\cos x$	$0{,}9655$	$0{,}3704$	$-0{,}8604$	$\cot x$	$-191{,}0$	$-1{,}333$	$0{,}0107$

3. Zeigen Sie geometrisch, daß die Beziehungen (1) auch für spitze und überstumpfe Winkel Gültigkeit besitzen!

4. Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Beziehungen auch für negative Winkel Gültigkeit besitzen!

a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ b) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

c) $\tan x \cot x = 1$ d) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

e) $\sin x = \cos(90° - x)$ $\tan x = \cot(90° - x)$

$\cos x = \sin(90° - x)$ $\cot x = \tan(90° - x)$

26. Die trigonometrischen Funktionen für Winkel mit Beträgen über 360°

Dreht sich der freie Schenkel im positiven oder negativen Sinne um mehr als nur einen vollen Umlauf, so werden Winkel erzeugt, deren Beträge größer als 360° sind, nach zwei Umläufen Winkel, deren Beträge größer als 720° sind usw. Abbildung 83 veranschaulicht den Winkel + 480°.

Winkel, die sich um ganzzahlige Vielfache von 360° voneinander unterscheiden, heißen **äquivalent.** So sind beispielsweise −1150°; −790°; −430°; −70°; +290°; +650°; +1010° äquivalente Winkel.

Bezeichnet man den zwischen 0° und 360° liegenden Winkel $\bar{x}$ als Hauptwert, so läßt sich jeder beliebige äquivalente Winkel durch folgende Beziehung darstellen:

$$x = \bar{x} + k \cdot 360° \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

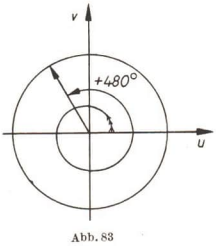


Abb. 83

1. Beispiel:

$$x = 1000°$$
$$x = x - k \cdot 360°$$
$$\bar{x} = 1000° - 2 \cdot 360° = 1000° - 720°$$
$$\bar{x} = 280°$$

Also ist $1000° = 280° + 2 \cdot 360°$ (k ist also $+2$)

2. Beispiel:

$$x = -790°$$
$$\bar{x} = x - k \cdot 360°$$
$$\bar{x} = -790° - (-3) \cdot 360°$$
$$\bar{x} = -790° + 3 \cdot 360° = -790° + 1080°$$
$$\bar{x} = 290°$$

Also ist $-790° = 290° - 3 \cdot 360°$ (k ist also -3)

Die Definitionen 5 bis 8 sollen auch für Winkel gelten, deren Beträge größer als 360° sind. Dreht sich der freie Schenkel von einer beliebigen Ausgangslage aus im Einheitskreis, so hat sein Schnittpunkt P mit dem Kreis nach einem, zwei, drei, ... vollen Umläufen dieselben Koordinaten wie in dieser Ausgangslage. Auch die Schnittpunkte mit Haupt- und Nebentangente sind dann wieder die gleichen. Die Werte der trigonometrischen Funktionen müssen sich deshalb periodisch jeweils nach 360° wiederholen:

Die trigonometrischen Funktionen sind periodische Funktionen.

Die trigonometrischen Funktionen eines beliebigen Winkels x lassen sich damit auf dieselbe Funktion des Hauptwertes $\bar{x}$ dieses Winkels zurückführen:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(\bar{x} + k \cdot 360°) = \sin \bar{x} \\ \cos x &= \cos(\bar{x} + k \cdot 360°) = \cos \bar{x} \\ \tan x &= \tan(\bar{x} + k \cdot 360°) = \tan \bar{x} \\ \cot x &= \cot(\bar{x} + k \cdot 360°) = \cot \bar{x} \end{aligned} \qquad (k \text{ ganzzahlig})$$

Bei gegebener Funktion $f(x)$ und bekanntem Funktionswert findet man für den Winkel x zunächst die beiden Werte $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ zwischen 0° und 360°. Durch Addition bzw. Subtraktion von beliebigen ganzzahligen Vielfachen von 360° ergeben sich daraus die äquivalenten Winkel.

Zur gegebenen Funktion erhält man also die Winkel

$$\bar{x}_1 + k \cdot 360° \text{ und } \bar{x}_2 + k \cdot 360° \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

1. Beispiel:

a) $\sin 4160° = \sin(200° + 11 \cdot 360°) = \sin 200° = -\sin 20°$
$= -0{,}3420$

b) $\cot(-1470°) = \cot(330° - 5 \cdot 360°) = \cot 330° = -\cot 30°$
$= -1{,}732$

2. Beispiel:

a) $\cos x = 0{,}9100$;

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 24{,}5° & \bar{x}_1 &= 24{,}5° + k \cdot 360° \\ \bar{x}_2 &= 335{,}5° & \bar{x}_2 &= 335{,}5° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

b) $\tan x = -1{,}280$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 128° & x_1 &= 128° + k \cdot 360° \\ \bar{x}_2 &= 308° & \bar{x}_2 &= 308° + k \cdot 360° \end{aligned}\right\} \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

Aufgaben

1. Geben Sie zu den nachstehenden Winkeln die auf sie folgenden drei äquivalenten Winkel bei positivem und negativem Drehsinn an:

a) $50°$ **b)** $175°$ **c)** $335°$ **d)** $117{,}5°$ **e)** $-221{,}68°$

f) $-33°$ **g)** $212{,}7°$ **h)** $-148{,}5°$ **i)** $241°15'$ **k)** $7°10'10''$!

2. Wie groß ist der Hauptwert der Winkel

a) $1200°$ **b)** $5180°$ **c)** $-320°$ **d)** $-1755°$ **e)** $-615°23'$

f) $2123°$ **g)** $-4713°$ **h)** $498°10'$ **i)** $-913{,}2°$ **k)** $2916{,}48°$?

3. Bestimmen Sie die Funktionswerte

a) $\sin 383°$ **b)** $\sin 773{,}2°$ **c)** $\sin(-640{,}56°)$

d) $\sin(-3620{,}78°)$ **e)** $\cos 421°$ **f)** $\cos 1527{,}3°$

g) $\cos(-704{,}64°)$ **h)** $\cos(-1083{,}92°)$ **i)** $\tan 8000°$

k) $\tan(-444{,}7°)$ **l)** $\cot 992{,}25°$ **m)** $\cot(-524{,}44°)$!

4. Geben Sie sämtliche Lösungen folgender Gleichungen an!

a) $\sin x = 0{,}3223$ **b)** $\sin x = 0{,}8440$ **c)** $\cos x = 0{,}9018$

d) $\cos x = -0{,}1382$ **e)** $\tan x = -1{,}083$ **f)** $\tan x = 0{,}9045$

g) $\cot x = 0{,}0524$ **h)** $\cot x = -0{,}4109$

27. Die Perioden der trigonometrischen Funktionen

Im Kapitel 26 wurde festgestellt, daß infolge der Übertragung der Definitionen 5 bis 8 auch auf Winkel mit Beträgen über 360° die Funktionswerte nach jeweils 360° wiederkehren, die trigonometrischen Funktionen also periodisch sind.

In der grafischen Darstellung muß deshalb das Kurvenstück, das sich bei der Darstellung der einzelnen Funktionen im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ (im Bogenmaß: $0 \leqq x \leqq 2\pi$) ergab, sich nach beiden Seiten in regelmäßiger Wiederkehr fortsetzen. Für die Sinusfunktion ergibt sich so die Abbildung 84.

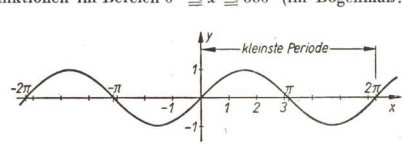


Abb. 84

Man erkennt, daß sich das zwischen 0 und 2π gelegene Kurvenstück immer wiederholt. Ebenso könnte man das allerdings auch von dem zwischen -2π und 0, oder dem zwischen -2π und $+2\pi$, oder dem zwischen 0 und 6π gelegenen Kurvenstück sagen. Die Längen von Abschnitten auf der x-Achse, innerhalb deren ein sich wiederholendes Kurvenstück liegt, nennt man **Perioden** der

betreffenden Funktion. Perioden der Sinusfunktion sind also 2π, 4π, 6π, 8π, ... Am wichtigsten ist die kleinste Periode; sie beträgt hier 2π. Mit ihrer Hilfe läßt sich nämlich der analytische Ausdruck der Sinusfunktion wie folgt umgestalten:

Statt $y = \sin x$ mit $-\infty < x < +\infty$ (lies: Definitionsbereich unbegrenzt von beliebig kleinen bis zu beliebig großen x-Werten) kann man auch schreiben:

$$y = \sin(x + 2k\pi) \text{ mit } 0 \leqq x < 2\pi;\ k \text{ ganzzahlig.}$$

Das ist deshalb erlaubt, weil nach unseren Überlegungen gilt:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \text{ mit } 0 \leqq x < 2\pi \text{ und } k \text{ ganzzahlig.}$$

Danach ist beispielsweise

$$\sin 6{,}5\pi = \sin(0{,}5\pi + 2 \cdot 3\pi) = \sin 0{,}5\pi;$$

im Gradmaß: $\sin 1170^\circ = \sin(90^\circ + 2 \cdot 3 \cdot 180^\circ) = \sin 90^\circ$.

Entsprechendes gilt für die Kosinusfunktion

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \text{ für } 0 \leqq x < 2\pi \text{ und } k \text{ ganzzahlig.}$$

In Abbildung 85 ist diese Funktion in der Form

$$y = \cos(x + 2k\pi) \text{ mit } 0 \leqq x < 2\pi \text{ und } k \text{ ganzzahlig}$$

grafisch dargestellt. Auch ihre kleinste Periode ist 2π.

Wir stellen weiter fest, daß die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ für jedes beliebige x erklärt sind.

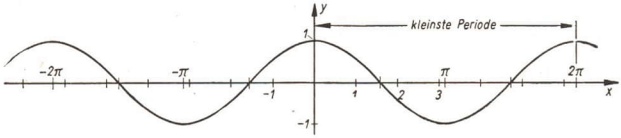


Abb. 85

Wenn wir genauso mit den Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ verfahren, so finden wir, daß diese sich zunächst ähnlich verhalten. Auch sie haben Perioden von der Größe 2π, 4π, 6π, ... Doch unterscheiden sie sich in 2 Punkten von der Sinus- bzw. Kosinusfunktion:

(1) Die kleinste Periode ist π.

(2) Sie sind nicht für alle x-Werte erklärt.

Die in Abbildung 86 dargestellte Tangensfunktion hat infolgedessen den analytischen Ausdruck

$$y = \tan(x + k\pi) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \pi$$
$$\text{und } k \text{ ganzzahlig.}$$

Sie ist nicht erklärt an den Stellen

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \text{ ganzzahlig}).$$

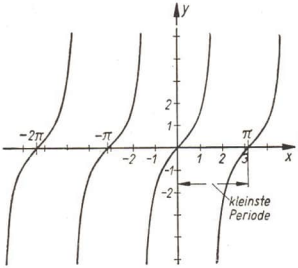


Abb. 86

Im übrigen gilt:

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

mit $0 \leqq x < \pi$ und k ganzzahlig.

Für die in Abbildung 87 dargestellte Kotangensfunktion gilt entsprechend der analytische Ausdruck:

$y = \cot(x + k\pi)$ mit $0 \leqq x < \pi$ und k ganzzahlig.

Es gilt

$$\cot(x + k\pi) = \cot x$$

mit $0 \leqq x < \pi$ und k ganzzahlig.

Die Funktion ist nicht erklärt an den Stellen

$$x = k\pi \quad (k \text{ ganzzahlig})$$

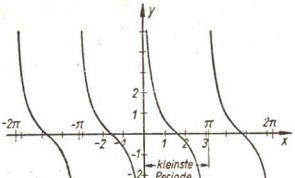


Abb. 87

Aus den grafischen Darstellungen der trigonometrischen Funktionen kann man den Wertevorrat jeder dieser Funktionen deutlich erkennen. Wir geben nachstehend nochmals eine zusammenfassende Übersicht über Definitionsbereich und Wertevorrat der trigonometrischen Funktionen.

Funktion	Definitionsbereich	Wertevorrat
$y = \sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq +1$
$y = \cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq +1$
$y = \tan x$	$-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ganzzahlig)	$-\infty < y < +\infty$
$y = \cot x$	$-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $k\pi$ (k ganzzahlig)	$-\infty < y < +\infty$

Aufgaben

1. Man bezeichnet eine Funktion als gerade Funktion, wenn $f(-x) = f(x)$ ist, als ungerade Funktion, wenn $f(-x) = -f(x)$ ist.

a) Untersuchen Sie an Hand von Beispielen, welche der trigonometrischen Funktionen gerade und welche ungerade sind!

b) Welche anderen geraden bzw. ungeraden Funktionen kennen Sie?

2. Untersuchen Sie die Symmetrieverhältnisse bei den Bildkurven der trigonometrischen Funktionen in folgenden Bereichen:

a) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ **b)** $0 \leqq x \leqq \pi$ **c)** $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$!

3. Es soll unter Benutzung der Formeln

$$(1) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(2) \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

gezeigt werden, daß die Tangens- und die Kotangensfunktion die kleinste Periode π besitzen.

4. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

a) $\sin 5\pi$ **b)** $\sin 7\frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin(-15{,}4\pi)$

d) $\sin 10{,}5$ **e)** $\cos(-3\pi)$ **f)** $\cos 2\frac{1}{2}\pi$

g) $\cos 100\pi$ **h)** $\cos 6{,}53$ **i)** $\tan\frac{3}{2}\pi$

k) $\tan 1{,}7\pi$ **l)** $\tan\left(-2\frac{1}{12}\pi\right)$ **m)** $\tan 3{,}487$

n) $\cot\left(-\frac{10}{9}\pi\right)$ **o)** $\cot 14\pi$ **p)** $\cot 14$

q) $\cot(-3{,}206)$!

5. Geben Sie die allgemeinen Lösungen für die folgenden Bestimmungsgleichungen im Bogenmaß an:

a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **b)** $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

c) $\sin x = 0{,}5052$ **d)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **f)** $\cos x = 0{,}9340$

g) $\tan x = 2+\sqrt{3}$ **h)** $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

i) $\tan x = 5{,}823$ **k)** $\cot x = -\sqrt{3}$

l) $\cot x = \sqrt{3}-2$ **m)** $\cot x = 0{,}1341$!

6. Stellen Sie in einem einzigen Diagramm dar:

$$\left.\begin{array}{r} \text{I. } y = \sin x \\ \text{II. } y = 2\sin x \\ \text{III. } y = \sin 2x \end{array}\right\} \quad (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

a) Vergleichen Sie die Ordinaten der Funktionen I. und II. bei jeweils gleichen Argumenten!

b) Welche Periode hat die Funktion III.?

c) Was ergibt ein Vergleich der Bilder der Funktionen

$$y = \sin x,\ y = n\sin x \text{ und } y = \sin nx?$$

7. Stellen Sie in einem einzigen Diagramm dar:

$$\left.\begin{array}{r} \text{I. } y = \sin x \\ \text{II. } y = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{III. } y = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \quad (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

Vergleichen Sie die Lage der drei Funktionsbilder im Koordinatensystem!

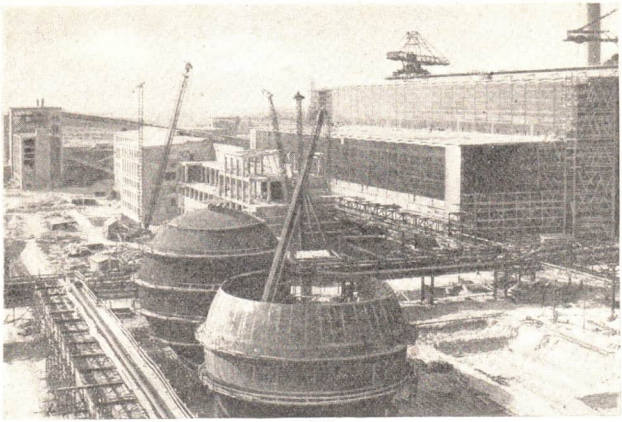


Abb. 88

STEREOMETRIE

Das Kombinat *Schwarze Pumpe* wird neben Brikettfakriken und Braunkohlenveredlungsanlagen auch zwei Kraftwerke erhalten. Große kugelförmige Reservewasserbehälter sichern den Arbeitsablauf der Dampfturbinen. Die Abbildung 88 vermittelt einen Einblick in die Bauarbeiten am Kraftwerk West im Kombinat *Schwarze Pumpe* und zeigt die Kugelbehälter während der Montage. Das Fassungsvermögen der Kugelbehälter, der Materialbedarf, die erforderlichen Fundamente und anderes mußten entsprechend dem Wasserbedarf der Kesselanlagen errechnet werden.

Derartige Probleme, in denen die Oberfläche, der Rauminhalt, Strecken an Körpern, Körperkanten oder auch Schnittflächen und Teile von Körpern berechnet werden müssen, begegnen uns in allen Wirtschaftszweigen.

Die mathematischen Grundlagen zur Lösung solcher Probleme vermittelt die **Stereometrie**[1], die Lehre von der Körperberechnung.

Wir beschäftigen uns in der Stereometrie mit Körpern. Darunter verstehen wir Gebilde, die drei Ausdehnungen haben, nämlich Länge, Breite und Höhe. Bei den Flächen haben wir es nur mit zwei Ausdehnungen zu tun (Länge und Breite), bei den Linien lediglich mit einer, der Länge. Man nennt aus diesem Grunde Körper auch dreidimen-

[1] Stereometrie (aus dem Griech.) Körpermessung

sionale geometrische Gebilde, Flächen zweidimensional und Längen eindimensional. Dem Punkt schreibt man in konsequenter Erweiterung dieser Überlegung die Dimension Null zu.

Die mathematischen Körper, die wir als Würfel, Pyramide, Kugel usw. kennen, sind nicht identisch mit den entsprechend gestalteten körperlichen Gegenständen unserer Umwelt, die man im Unterschied dazu wirkliche oder reale Körper nennt. Ein Ziegelstein z. B., den wir als einen Quader auffassen können, hat ein bestimmtes Gewicht, er besteht aus gebranntem Lehm, er sieht rötlich aus und hat kleine Risse und kleine Hohlräume. Alle diese Eigenschaften interessieren uns in der Mathematik nicht, wir sehen von diesen Eigenschaften ab. Für uns ist nur eine einzige Eigenschaft wichtig, die Form des Körpers.

Wenn wir bei der Untersuchung einige Eigenschaften in der geschilderten Weise unberücksichtigt lassen, so sagt man, es würde aus dem konkreten Begriff des Ziegelsteins der abstrakte Begriff des Quaders gewonnen. Alle Wissenschaften bedienen sich der Abstraktion, um Begriffe zu bilden. Für die Stereometrie sind diejenigen Körper wichtig, deren Formen nach bestimmten Gesetzen gebildet wurden.

Wir legen demnach fest:

Ein mathematischer Körper ist ein allseitig begrenzter Teil des Raumes von gesetzmäßiger Gestalt.

Die bisher behandelten Körper sind in Abbildung 89 in Zweitafeldarstellung (Grund- und Aufriß) zusammengestellt. Wir wollen uns noch einmal über den Vorteil und den Mangel dieser Art der Abbildung klarwerden. Wir können aus der Zeichnung sofort die wichtigsten Maße erkennen, dafür müssen wir den Nachteil in Kauf nehmen, daß die Abbildung mit den aus der Anschauung gewonnenen Bildern der Körper nicht übereinstimmt.

Die Darstellung in schräger Parallelprojektion (Abb. 90) ist anschaulicher, aus ihr können jedoch nur wenige Maße entnommen werden. Bei allen Verfahren der „Dar-

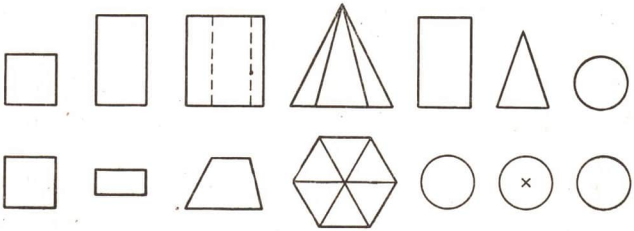


Abb. 89

stellenden Geometrie“ und ihrer Anwendung in der technischen Praxis, des „Technischen Zeichnens“, wird mit der größeren Maßgerechtheit die Anschaulichkeit verringert, und umgekehrt muß die größere Anschaulichkeit durch Verminderung der Maßgerechtheit erkauft werden. Ein Verfahren, bei dem beide Forderungen zugleich vollständig erfüllt werden, gibt es nicht.

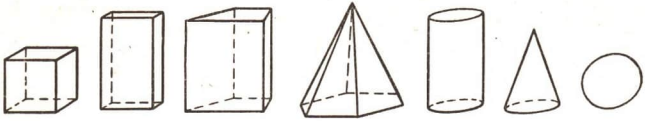


Abb. 90 $\left(q = \frac{1}{2}\,;\ \alpha = 30^\circ\right)$

Es gibt außer den oben dargestellten Körpern noch sehr viele andere mathematische Körper. Um sich in der Vielfalt der möglichen Körper zurechtzufinden, bedarf es eines Einteilungsprinzips.

Wir wollen die Körper nach ihren Begrenzungsflächen einteilen.

Es gibt Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, und Körper, bei denen wenigstens eine oder sämtliche Begrenzungsflächen gekrümmt sind.

Danach unterscheiden wir

ebenflächige Körper, auch Polyeder oder Vielflache genannt und

krummflächige Körper.

Aus dieser Definition geht hervor, daß die krummflächigen Körper eventuell auch einige ebene Begrenzungsflächen haben können, daß also der Zylinder ein krummflächiger Körper ist, obwohl er nur eine gekrümmte und zwei ebene Begrenzungsflächen hat.

Die Oberfläche von ebenflächigen Körpern ist zu berechnen als Summe der ebenen Begrenzungsflächen. Bei einigen krummflächigen Körpern ist es möglich, die gekrümmte Fläche dadurch zu berechnen, daß man sie ohne Verzerrung in eine Ebene legt, wie das beim Abrollen des Zylinders oder des Kegels geschieht. Diesen Vorgang nennt man „Abwickeln". Das ist aber nicht bei allen krummflächigen Körpern möglich, z. B. nicht bei der Kugel. Die Berechnung muß dann mit anderen Methoden erfolgen.

V. Ebenflächige Körper

Ebenflächige Körper sind die Prismen und die Pyramiden.

28. Die Definitionen der ebenflächigen Körper

Definition des Prismas:

Unter einem Prisma verstehen wir einen Körper, dessen Grundfläche und Deckfläche kongruente Vielecke und dessen Seitenflächen Parallelogramme sind.

Aus dieser Definition kann sofort hergeleitet werden, daß die Grund- und Deckfläche in parallelen Ebenen liegen. Nach der Anzahl der Seiten des Grundvielecks wird ein Prisma als n-seitiges Prisma bezeichnet. Wir unterscheiden gerade und schiefe Prismen, je nachdem, ob die Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche stehen

oder nicht. In Abbildung 91 ist ein gerades Prisma einem schiefen gegenübergestellt. Beide haben kongruente Grundflächen und gleiche Höhen. Beim geraden Prisma sind die Seitenflächen spezielle Parallelogramme, nämlich Rechtecke.

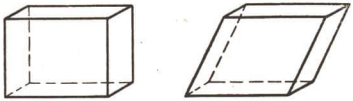


Abb. 91

Außerdem werden regelmäßige und unregelmäßige Prismen unterschieden, je nachdem, ob die Grundfläche ein regelmäßiges oder ein unregelmäßiges Vieleck ist.

Quader und Würfel sind Prismen. Ein **Quader** ist ein vierseitiges gerades Prisma, dessen Grundfläche ein Rechteck ist. Der **Würfel** ist ein Prisma, bei dem alle Flächen Quadrate sind. Der Würfel hat Bedeutung als Raummaß. Nach dem lateinischen Wort „cubus" für Würfel nennen wir die Raummaße Kubikmeter, Kubikzentimeter usw.

Definition der Pyramide:

Unter einer Pyramide verstehen wir einen Körper, der von einem Vieleck als Grundfläche und von Dreiecken als Seitenflächen begrenzt wird.

Als regelmäßige Pyramide bezeichnen wir eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt. Jede Pyramide läßt sich in dreiseitige Pyramiden zerlegen. Bei der dreiseitigen Pyramide kann jede Begrenzungsfläche Grundfläche sein.

29. Die Berechnung des Rauminhalts der ebenflächigen Körper

Wir gehen vom geraden Prisma aus. Die Abbildung 92 zeigt ein Prisma, dessen Grundfläche 8 Flächenmaßeinheiten groß ist. Es hat eine Höhe von einer Längenmaßeinheit. Es ist sofort einzusehen, daß das Volumen des Prismas 8 Raummaßeinheiten betragen muß. Bei einer Körperhöhe von n Längenmaßeinheiten läßt sich der Körper in n solcher Schichten zerlegen, sein Volumen beträgt dann n-mal 8 Volumeneinheiten (Abb. 93). Verallgemeinern wir diese Erkenntnis auch auf solche Körperhöhen, die Teile einer Längeneinheit sind, dann wird der Satz gewonnen:

Abb. 92

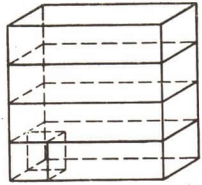


Abb. 93

Das Volumen eines geraden Prismas errechnen wir, indem wir die Grundfläche mit der Höhe multiplizieren.

Wenn dabei die Höhe h, die Grundfläche G und das Volumen V in entsprechenden Maßeinheiten angegeben bzw. berechnet werden, ergibt sich die einfache Beziehung:

$$V = G \cdot h$$

Beispiel: Höhe in cm, Grundfläche in cm^2; V ergibt sich dann in cm^3.

An sich ist es überflüssig, für Quader und Würfel besondere Volumenformeln aufzustellen, da sie in der allgemeinen Formel enthalten sind:

Quader mit den Seitenkanten a, b, c: $G = a \cdot b$; $h = c$; $V = a \cdot b \cdot c$

Würfel mit der Seitenkante a: $G = a^2$; $h = a$; $V = a^3$

Da die Quader- und die Würfelform in der Praxis aber besonders häufig anzutreffen sind, muß mit diesen speziellen Formeln sehr oft gerechnet werden.

Auch das Volumen des schiefen Prismas läßt sich jetzt berechnen, indem wir das schiefe Prisma auf das gerade zurückführen. Wir betrachten zunächst ein gerades Prisma. Wir nehmen einen Stapel Schulhefte oder ein Paket Postkarten, die genau senkrecht übereinanderliegen. Ein solcher Stapel hat die Form eines geraden Prismas.

Abb. 94

Sein Volumen wird berechnet nach unserer Formel $V = G \cdot h$. Wir verschieben jetzt die einzelnen Schulhefte oder Postkarten mit einem Lineal gleichmäßig nach rechts und nach hinten. Es entsteht ein anderer Stapel, dessen Form man, wenn man von der geringen Dicke der einzelnen Stufen absieht, als schiefes Prisma bezeichnen kann (Abb. 94). Da bei der Verschiebung das Volumen, aber auch die Grundfläche und die Höhe des ursprünglichen Stapels sich nicht geändert haben, können wir vermuten, daß auch für das schiefe Prisma die Formel $V = G \cdot h$ gilt.

Mit unserer Überlegung haben wir diese Formel nicht bewiesen. In Wirklichkeit haben wir kein schiefes Prisma vor uns, sondern ein stufenförmiges Gebilde, das einem Prisma immer näher kommt, je mehr wir die Dicke seiner Elemente vermindern. Besteht unser Stapel z. B. nicht mehr aus Postkarten, sondern aus ganz dünnen Papierblättern, ist dieser Stapel einem Prisma schon sehr nahe gekommen. In der Mathematik muß aber erst noch exakt bewiesen werden, daß an unserer Überlegung sich nichts ändert, wenn wir die Anzahl der Blätter größer werden lassen als jede angebbare Zahl, so daß die Dicke der einzelnen Schichten kleiner wird als jede angebbare Zahl, d. h. gegen Null strebt.

In jeder Höhe haben die beiden Körper, das gerade und das schiefe Prisma, gleiche Querschnittsflächen. Deshalb ist ihr Volumen gleich. In unserem Falle waren die Querschnittsflächen sogar kongruent. Auch in dem allgemeineren Falle, daß die beiden Querschnittsflächen nur flächengleich, aber von verschiedener Form sind, bleibt die Volumengleichheit der beiden Prismen bestehen.

Der italienische Mathematiker *Cavalieri*, der in Bologna am Anfang des 17. Jahrhunderts lebte und forschte, sprach diese anschaulich verständliche Tatsache zum ersten Male als mathematischen Satz aus, ohne ihn allerdings beweisen zu können. Das

konnte erst später mit mathematischen Mitteln nachgeholt werden, die Cavalieri noch nicht zur Verfügung standen. Er stellte fest:

Zwei Körper haben den gleichen Rauminhalt, wenn sie zwischen zwei parallelen Ebenen liegen und ihre Querschnitte in gleicher Höhe jedesmal gleich sind.

Dieser Satz wird als **Lehrsatz des Cavalieri** bezeichnet. Wir haben ihn hier ohne Beweis benutzt, um das Volumen jedes beliebigen Prismas zu berechnen. Wir werden von dem Lehrsatz auch in anderem Zusammenhang noch Gebrauch machen. Auch bei der Berechnung des Volumens einer **Pyramide** wird er benötigt.

Wir gewinnen zunächst das Volumen einer geraden Pyramide durch folgende Überlegung: Jedes gerade Prisma läßt sich in dreiseitige Prismen zerlegen, da sich die

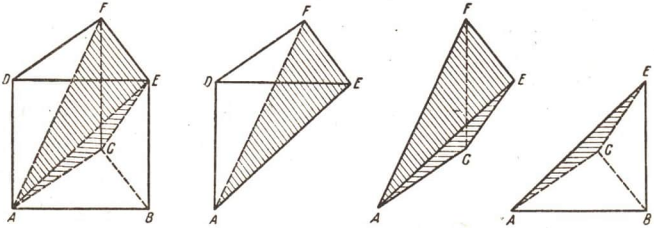


Abb. 95

Grundfläche in Dreiecke zerlegen läßt. Jedes dreiseitige Prisma aber kann durch Schnitte in drei Pyramiden zerlegt werden, die raumgleich sind, weil sich nachweisen läßt, daß sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben (Abb. 95). Mit Hilfe des Strahlensatzes ergibt sich, daß diese Pyramiden in gleicher Höhe gleiche Querschnittsflächen haben. Unter Benutzung des Lehrsatzes des Cavalieri ist damit die Volumengleichheit der Pyramiden bewiesen, und es gilt für das Volumen der geraden Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} G h$$

Da die Verschiebung bei einer Pyramide genauso möglich ist wie bei einem Prisma und sich dieselben Überlegungen anstellen lassen, gilt die Volumenformel nicht nur bei der geraden, sondern auch bei der schiefen Pyramide.

Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} G h$$

30. Die Berechnung der Oberfläche ebenflächiger Körper

Unter der **Oberfläche** verstehen wir die Gesamtheit aller Begrenzungsflächen eines Körpers.

Bei den ebenflächigen Körpern, die wir bisher betrachteten, den Prismen und Pyramiden, bezeichnen wir die Gesamtheit aller Seitenflächen als **Mantel.** Bei den Prismen vervollständigen die Grund- und die Deckfläche, bei den Pyramiden nur die Grund-

fläche die Oberfläche. Die Berechnung erfolgt grundsätzlich in der Weise, daß man die Flächengrößen der einzelnen Teilflächen bestimmt und diese addiert. Wenn bei regelmäßigen Körpern einzelne Teilflächen gleiche Größe haben, kann man die Berechnung durch Vervielfachung dieser Teilflächen vereinfachen.

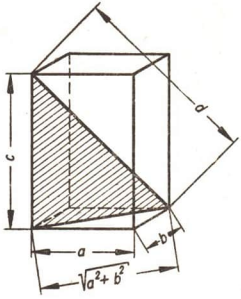


Abb. 96

Beispiele:

Quader mit den Seitenkanten a, b, c: Die Oberfläche besteht aus 6 paarweise gleichen Rechtecken:

$$O = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$$

Würfel mit der Seitenkante a: Die Oberfläche besteht aus 6 Quadraten:

$$O = 6a^2$$

Manche der für solche Volumen- oder Flächenberechnung nötigen Strecken lassen sich durch Messung nur schwer oder gar nicht bestimmen. Diese Strecken können meist mit Hilfe des Satzes des Pythagoras oder durch Benutzung trigonometrischer Beziehungen berechnet werden. In vielen Fällen ist zum Beispiel die Höhe einer Pyramide schwer zu messen, dagegen ist es in besonderen Fällen nicht schwierig, aus der leicht zu messenden Grundkante und der Seitenkante die Höhe zu berechnen. Das Verfahren für solche Berechnungen sei an zwei Beispielen gezeigt.

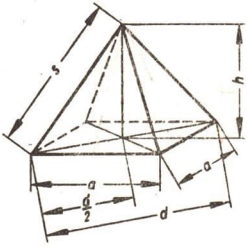


Abb. 97

Aus der Abbildung 96 ist sofort zu ersehen, daß die Raumdiagonale eines Quaders aus den drei Kanten berechnet werden kann: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Aus Abbildung 97 gehen die Zusammenhänge zwischen den Streckengrößen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide hervor.

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2; \quad d = a\sqrt{2}; \quad \frac{d}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}; \quad s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$$

$$\text{aus} \quad s^2 = h^2 + \frac{a^2}{2} \quad \text{ergibt sich} \quad h^2 = s^2 - \frac{a^2}{2}; \quad h = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Bei jeder Flächen- und Volumenberechnung müssen die zur Rechnung verwendeten Größen die gleiche Maßeinheit aufweisen. Multipliziert und dividiert werden nur die Maßzahlen. Die Benennung des Ergebnisses richtet sich nach den verwendeten Maßeinheiten.

Beispiel: Ein Quader von 1,20 m Länge, 8 dm Breite und 40 cm Höhe hat eine Oberfläche von

$$O = 2\,(1{,}2 \cdot 0{,}8 + 1{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}4)\ \mathrm{m}^2 = 3{,}52\ \mathrm{m}^2$$

oder $O = 2\,(12 \cdot 8 + 12 \cdot 4 + 8 \cdot 4)\ \mathrm{dm}^2 = 352\ \mathrm{dm}^2$

oder $O = 2\,(120 \cdot 80 + 120 \cdot 40 + 80 \cdot 40)\ \mathrm{cm}^2 = 35\,200\ \mathrm{cm}^2$

und ein Volumen von

$$V = (1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4)\ \mathrm{m}^3 = 0{,}384\ \mathrm{m}^3$$

oder $V = (12 \cdot 8 \cdot 4)\ \mathrm{dm}^3 = 384\ \mathrm{dm}^3$

oder $V = (120 \cdot 80 \cdot 40)\ \mathrm{cm}^3 = 384\,000\ \mathrm{cm}^3$.

Ein Behälter von dieser Form und Größe würde also 384 dm^3 = 384 l = 3,84 hl Wasser fassen.

In der Technik ist es sehr oft nötig, das Gewicht eines Körpers zu bestimmen. Das Gewicht (P) wird berechnet aus Volumen (V) und Wichte (γ), die durch folgende Beziehung miteinander verbunden sind:

$$P = V \cdot \gamma$$

Die Wichte γ wird definiert als Verhältnis von Gewicht und Volumen: $\gamma = \frac{P}{V}$. Sie erhält deshalb die Benennung: $\mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$. Aus der Maßzahl der Wichte, so z. B. bei Kupfer ($\gamma = 8{,}9\ \mathrm{p} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$) läßt sich sofort erkennen, daß 1 Kubikzentimeter Cu 8,9 p wiegen muß, 1 Kubikdezimeter 8,9 kp, 1 Kubikmeter 8,9 Mp und 1 Kubikmillimeter 8,9 mp.

Es ist nötig, jedes Ergebnis daraufhin zu überprüfen, ob der gefundene Zahlenwert möglich ist, z. B. dadurch, daß man das Ergebnis vor der Rechnung schätzt. Dabei kann uns der Vergleich mit einem Kubikzentimeter usw. sehr gute Dienste leisten.

Aufgaben

1. Eine Gemeinde beabsichtigt, ein Freibad zu errichten. Im ebenen Gelände ist ein Becken geplant von 50 m Länge und 25 m Breite, das an der flachen Seite 1 m und an der gegenüberliegenden tiefen Seite 4 m tief ausgeschachtet werden soll. Der Übergang erfolgt gleichmäßig.
   a) Wieviel Kubikmeter Erde müssen bewegt werden?
   b) Wie groß ist die Fläche, die durch einen Spezialbetonbewurf abgedichtet werden muß?
   c) Wieviel Kubikmeter Wasser faßt das Becken, wenn es bis 60 cm unterhalb des Randes gefüllt wird?

   Anleitung: Das Becken hat die Form eines Prismas, dessen Grundfläche ein Trapez ist.

2. 115 m^3 Baugrund sollen mit Lastwagen für 3,5 t Nutzlast abgefahren werden.
   a) Wieviel Fahrten sind nötig? $\left(\text{Die Wichte des Baugrundes beträgt } 2{,}1\ \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}.\right)$
   b) Wie hoch darf beladen werden, wenn die Pritsche des Lastwagens 4,40 m lang und 2,30 m breit ist?

3. Wieviel Mauerziegel sind zum Bau eines Giebels erforderlich, der die Form eines gleichschenkligen Dreiecks von 12 m Grundlinie und 5 m Höhe hat, wenn die Mauer einen Stein stark (≙ 25 cm) aufgeführt wird und als Norm für 1 m^3 Mauerwerk 400 Steine gelten?

4. Wieviel Kubikmeter Steine mußten beim Bau der Cheopspyramide in Ägypten bewältigt werden? Das gewaltige Bauwerk ist eine quadratische Pyramide. Eine Seite des Grundquadrates betrug ursprünglich 233 m, die Pyramide war 146,5 m hoch. (Jetzt betragen die Abmessungen nur noch 227,5 m und 137,2 m.)

5. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche einer Pyramide, deren Spitze senkrecht über der Mitte eines regelmäßigen Zwölfecks liegt, das die Grundfläche bildet! Der Radius des Umkreises des Zwölfecks ist 10 cm, die Pyramidenhöhe 12 cm groß. (Die Berechnung der Grundfläche ist mit Hilfe trigonometrischer Funktionen durchzuführen.)

6. Ein Balken soll 14 m lang, 28 cm breit und 20 cm dick sein.
   a) Um wieviel wird er schwerer, wenn er aus Buchenholz statt aus Fichtenholz geschnitten wird?
   b) Wievielmal so schwer ist er wie der Balken aus Fichtenholz?
   Buchenholz hat die Wichte 0,75 $\frac{p}{cm^3}$ Fichtenholz 0,56 $\frac{p}{cm^3}$.

Mathematische Schüleraufträge

1. Im Materiallager des Betriebes, in dem Sie den Unterrichtstag in der Produktion durchführen, finden Sie Stabstähle. Welche Querschnittsformen haben Sie entdeckt? Berechnen Sie das Gewicht in kp für einen Meter eines Stabstahles! Entwickeln Sie eine Tabelle, aus der für s (Durchmesser) im Intervall von 10 mm bis 30 mm das Gewicht pro Meter angegeben ist, und stellen Sie die Werte grafisch dar!

2. Vergleichen Sie den Laderaum (Kastenlänge, -breite und -höhe) des LKW „Sachsenring" H 3 A mit dem des LKW „Garant" prozentual! Beide LKW sollen zum Transport von Ziegelsteinen eingesetzt werden. Denken Sie an die zulässige Nutzlast!

3. An jeder Drehmaschine wird der Drehstahl durch Anziehen des Gewindebolzens und der Gegenstellschraube an der Klemmgabel befestigt. Deuten Sie die Länge der Überwurfmutter, und berechnen Sie das Volumen! Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Methode der Wasserverdrängung!

4. Bei Shapingmaschinen wird der Vorschubarm in Gleitschienen geführt, die infolge des auftretenden Verschleißes nachgestellt werden können. Das Gewicht einer Gleitschiene soll ermittelt werden!

5. Am Konsole und am Frästisch der Fräsmaschine sind meist Schwalbenschwanzgleitschienen angebracht. Welche technische Bedeutung haben diese Gleitschienen? Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Gleitschiene!

31. Die Berechnung des Pyramidenstumpfes

In der Technik begegnen uns noch andere als die bisher behandelten ebenflächigen Körper. So findet man häufig Kühltürme, die die Form eines **Pyramidenstumpfes** haben.
Wir definieren:

Ein Pyramidenstumpf ist der Restkörper, der entsteht, wenn von einer Pyramide durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche die Spitze abgetrennt wird.

Der Pyramidenstumpf hat als Grund- und Deckfläche ähnliche Vielecke. Um das zu beweisen, wenden wir den Strahlensatz auf jedes Strahlenbüschel an, das in einer Seitenflächenebene liegt. Die Seitenflächen sind Trapeze.

Die Berechnung des Volumens

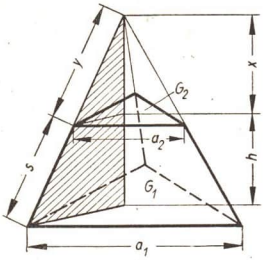


Abb. 98

Das Volumen einer abgestumpften Pyramide ist die Differenz zwischen dem Volumen der ursprünglichen Pyramide und dem Volumen der abgeschnittenen Pyramide. Die Berechnung kann mit Hilfe der Größen der Grund- und Deckfläche und mit Hilfe der Höhe des Stumpfes oder der Länge einer Seitenkante erfolgen; diese Größen können wir messen oder auf einfachem Wege rechnerisch bestimmen.

Aus der Abbildung 98 entnehmen wir:

$$V = \frac{1}{3} G_1 (h + x) - \frac{1}{3} G_2 x$$

$$= \frac{1}{3} G_1 h + \frac{1}{3} G_1 x - \frac{1}{3} G_2 x$$

$$= \frac{1}{3} G_1 h + \frac{1}{3} (G_1 - G_2) x$$

Um x zu eliminieren, benutzen wir die Tatsache, daß sich ähnliche Vielecke wie die Quadrate entsprechender Seiten verhalten:

$$G_2 : G_1 = a_2^2 : a_1^2 \tag{1}$$

Eine weitere Beziehung ergibt sich durch zweimaliges Anwenden des Strahlensatzes. Zuerst aus der Schnittebene, die die Höhe und eine Seitenkante enthält:

$$y : (s + y) = x : (h + x) \tag{2}$$

(Dabei bedeuten s die Seitenkante des Pyramidenstumpfes und y die Seitenkante der kleinen Pyramide.)

Dann aus der Ebene, in der die Seitenfläche mit der Grundkante a_1 liegt:

$$y : (s + y) = a_2 : a_1 \tag{3}$$

Aus den Proportionen (2) und (3) ergibt sich:

$$a_2 : a_1 = x : (h + x) \tag{4}$$

und in Verbindung mit (1):

$$G_2 : G_1 = x^2 : (h + x)^2$$

Daraus folgt schließlich:

$$G_1 \cdot x^2 = G_2 \cdot (h + x)^2$$

$$x \sqrt{G_1} = h \sqrt{G_2} + x \sqrt{G_2}$$

$$x (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}) = h \sqrt{G_2}$$

$$x = \frac{h \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} = \frac{h \sqrt{G_2} (\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2})}{G_1 - G_2}$$

$$V = \frac{1}{3} G_1 h + \frac{1}{3} (G_1 - G_2) \frac{h \sqrt{G_2} (\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2})}{G_1 - G_2}$$

$$= \frac{1}{3} G_1 h + \frac{1}{3} h (\sqrt{G_1 G_2} + G_2)$$

$$V = \frac{h}{3} (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$$

Da die gemessenen Werte, die die Grundlage der Berechnung bilden, in jedem Falle nur eine beschränkte Genauigkeit erreichen, wird an Stelle der entwickelten Formel in der Praxis oft eine einfachere Näherungsformel verwendet. Der Pyramidenstumpf wird ersetzt durch ein Prisma gleicher Höhe, dessen Grundfläche gleich dem arithmetischen Mittel aus der Grund- und der Deckfläche der Pyramide ist.

$$V \approx \frac{G_1 + G_2}{2}\, h = G_m \cdot h$$

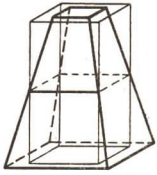


Abb. 99

Die Grundfläche G_m dieses Prismas ist nicht die Schnittfläche des Pyramidenstumpfes, die in der Mitte zwischen G_1 und G_2 liegt. Für den Fall des quadratischen Pyramidenstumpfes der Abbildung 99 ergibt sich nämlich:

$$G_1 = a_1^2; \quad G_2 = a_2^2; \quad G_m = a_m^2$$

$$a_m^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$$

$$a_m = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$$

Die Seite des Schnittquadrates, das genau in der Mitte zwischen G_1 und G_2 liegt, ist aber

$$a_m' = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Nun gilt:

$$a_m^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \neq (a_m')^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$

Aus $a_1 - a_2 > 0$ folgt nämlich $\frac{a_1 - a_2}{2} > 0$ und

$$\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} - \frac{a_1 a_2}{2} > 0$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} > \frac{a_1 a_2}{2} \qquad \Big| + \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4}$$

$$\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} > \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4}$$

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} > \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \qquad \text{oder}$$

$$a_m > a_m'$$

Das Näherungsprisma hat also eine Grundfläche G_m, die etwas größer ist als die Schnittfläche des Pyramidenstumpfes, die genau in der Mitte zwischen G_1 und G_2 liegt. Diese Näherungsformel ermöglicht eine wesentlich einfachere Rechnung und gibt in den meisten Fällen einen ausreichend genauen Wert.

Allerdings ist es nötig, zu untersuchen, welche Genauigkeit erreicht wird.

Wir erkennen zunächst aus der Gegenüberstellung der exakten Formel mit der Näherungsformel, daß die Genauigkeit von der Höhe unabhängig ist.

$$\frac{1}{3} h\left(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2\right) \approx \frac{G_1 + G_2}{2} h$$

Division durch h und einfache Umformung ergibt:

$$\frac{G_1 + G_2}{3} + \frac{\sqrt{G_1 G_2}}{3} \approx \frac{G_1 + G_2}{2}$$

und daraus durch Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$2\,(G_1 + G_2) + 2\sqrt{G_1 G_2} \approx 3\,(G_1 + G_2)$$

$$\sqrt{G_1 G_2} \approx \frac{G_1 + G_2}{2}$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als daß wir in unserer Näherungsformel für das geometrische Mittel zweier Zahlen das arithmetische Mittel gesetzt haben. Der Wert des arithmetischen Mittels ist, falls $a \neq b$, stets größer als der des geometrischen. Die Differenz zwischen beiden Werten wird um so größer, je größer der Unterschied zwischen den beiden Zahlen ist. Wir dürfen also die Näherungsformel ohne Bedenken anwenden, wenn der Unterschied zwischen den beiden Flächen des Pyramidenstumpfes nicht sehr groß ist. Bei den meisten Anwendungen in der Technik ist das der Fall. Das mit Hilfe der Näherungsformel bestimmte Volumen ist dabei stets um ein Geringes größer als das wahre Volumen des Pyramidenstumpfes.

An einem Beispiel wollen wir überprüfen, ob die Genauigkeit ausreicht. Ein Pyramidenstumpf habe eine quadratische Grundfläche von 6 m und eine quadratische Deckfläche von 4 m Seitenlänge. Die Höhe des Stumpfes sei 12 m.

Die genaue Formel ergibt dann ein Volumen von

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12\,(36 + 24 + 16)\ \mathrm{m}^3 = 304\ \mathrm{m}^3$$

Mit der Näherungsformel erhalten wir

$$V \approx \left(\frac{36 + 16}{2} \cdot 12\right) \mathrm{m}^3 = 312\ \mathrm{m}^3$$

Der prozentuale Fehler wird aus der Proportion

$$x : 100 = 8 : 304$$

ermittelt. Er beträgt

$$x = \frac{100 \cdot 8}{304} \approx 2{,}6$$

Der prozentuale Fehler ist also 2,6 %. Es hängt vom einzelnen Sachverhalt ab, ob dieser Fehler noch zulässig ist.

Die Berechnung der Oberfläche

Die Berechnung der Oberfläche eines Pyramidenstumpfes soll am Beispiel des Stumpfes einer regelmäßigen sechsseitigen geraden Pyramide, deren Kanten a, b und s

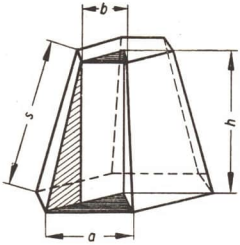


Abb. 100

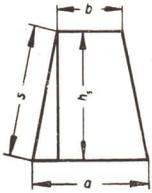


Abb. 101

sind, gezeigt werden (Abb. 100 und Abb. 101). Grundfläche und Deckfläche sind regelmäßige Sechsecke, die wir je aus 6 gleichseitigen Dreiecken berechnen können:

$$G_1 = 6 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}\,; \quad G_2 = 6 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \sqrt{3}$$

Die Oberfläche des Pyramidenstumpfes setzt sich zusammen aus der Grundfläche G_1, der Deckfläche G_2 und dem Mantel, der aus 6 Trapezen mit den parallelen Seiten a und b und der Höhe h_s besteht. Zur Berechnung des Mantels bestimmen wir zunächst die Höhe der Seitenfläche. Diese ist in Abbildung 101 dargestellt. Wir erkennen

$$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Daraus folgt

$$M = 6\,\frac{a+b}{2} \sqrt{s^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = 3\,(a+b) \sqrt{s^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Aus a, b, und s ist damit die Oberfläche berechnet:

$$O = \frac{3}{2} \sqrt{3}\,(a^2 + b^2) + 3\,(a+b) \sqrt{s^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Wir wollen nun auch das Volumen errechnen. Dazu muß die Körperhöhe h aus den Kanten mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras berechnet werden.

Das Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Sechsecks ist ein gleichseitiges Dreieck. Deshalb gilt im schraffierten Dreieck (Abb. 100):

$$h^2 = s^2 - (a-b)^2; \quad h = \sqrt{s^2 - (a-b)^2}$$

Für das Volumen dieses Pyramidenstumpfes ergibt sich dann:

$$V = \frac{h}{3}\left(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{s^2 - (a-b)^2} \cdot \left[\frac{3a^2}{2}\sqrt{3} + \frac{3b^2}{2}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3a^2}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{3b^2}{2}\sqrt{3}}\right]$$

$$V = \sqrt{s^2 - (a-b)^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2) + \frac{ab}{2}\sqrt{3}\right]$$

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{3\left[s^2 - (a-b)^2\right]} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Aufgaben

1. Ein Pyramidenstumpf hat Quadrate als Grund- und Deckfläche. Ihre Seitenlängen sind $a = 160$ mm und $b = 110$ mm. Die Seitenkante des Stumpfes mißt 220 mm. Berechnen Sie das Volumen, die Mantelfläche und die Oberfläche des Pyramidenstumpfes!

2. Ein Pyramidenstumpf hat ein gleichseitiges Dreieck von 15 cm Seitenlänge zur Grundfläche. Die Höhe des Pyramidenstumpfes ist 9 cm, die Seite der Deckfläche 12 cm groß.
   a) Das Volumen ist zu berechnen.
   b) Berechnen Sie das Volumen mit der Näherungsformel, und bestimmen Sie den prozentualen Fehler!

3. Als Sockel eines Denkmals wird ein Pyramidenstumpf gemauert. Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Sechseck von 3,20 m Seitenlänge, die Seite der Deckfläche mißt 2,40 m. Der Sockel wird 1,70 m hoch. Wieviel Kubikmeter Mauerwerk enthält er?

4. Ein Löschwasserbehälter wird als quadratischer Pyramidenstumpf angelegt. Die Tiefe beträgt 6 m, die obere Kante ist 52 m, die untere 19 m lang.
   a) Wieviel Kubikmeter Wasser faßt der Behälter?
   b) Wieviel Quadratmeter Fläche müssen durch Betonbewurf abgedichtet werden?

5. Entnehmen Sie der Abbildung 102 die Maße für die untere Kante, die obere Kante und die Höhe eines Kühlturms, und berechnen Sie die Summe der Seitenflächen!

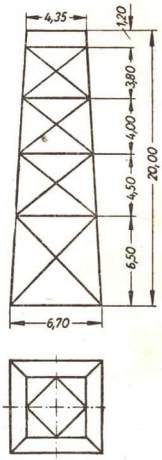


Abb. 102

Mathematische Schüleraufträge

1. Sie haben mit einem konischen Fräser eine Ankerplatte gefräst. Berechnen Sie das Gewicht der Ankerplatte in Kilopond exakt und mit Hilfe einer Näherungsrechnung! Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse, und untersuchen Sie den absoluten und den relativen Fehler!

2. Beim Fräsen von Stahlplatten mit konischen Fräsern entstehen Pyramidenstümpfe mit kleinen Höhen. Welcher Materialverlust entsteht durch die Zerspanung? Weisen Sie den prozentualen Spanabfall an einem Werkstück nach, das Sie selbst gefräst haben!

32. Zusammengesetzte ebenflächige Körper

In allen Gebieten der Technik begegnen wir mathematischen Körpern, die aus den bisher behandelten zusammengesetzt sind. Wir wollen sie **zusammengesetzte Körper** nennen, auch wenn aus einem Körper ein anderer ausgespart ist.

Bei der Berechnung des Volumens oder der Oberfläche solcher zusammengesetzter Körper müssen die einzelnen Teile getrennt berechnet werden. Der Berechnung selbst sollte eine Überschlagsrechnung vorausgehen, damit grobe Rechenfehler sofort erkannt werden können. Der Rechenweg selbst muß gründlich durchdacht und die numerische Rechnung soweit wie möglich vereinfacht werden. Wie überall gilt es auch hierbei, gut zu planen, damit das Ziel mit dem geringsten Arbeitsaufwand erreicht wird.

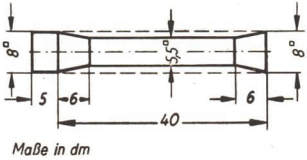


Abb. 103

Als Beispiel berechnen wir das Volumen und die Oberfläche einer Sandsteinsäule. Die Säule ist aus einem Sandsteinprisma gearbeitet, der Achsenschnitt in Abbildung 103 enthält die Maße in Dezimetern. Die Grundkante der Säule ist gleich der Grundkante des Prismas.

Die Wichte des Sandsteins entnehmen wir einer Tabelle; sie beträgt $2{,}33\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.

Das Volumen der Säule besteht aus dem zweier verschiedener quadratischer Prismen und dem zweier gleicher Pyramidenstümpfe. Das Volumen muß kleiner sein als das des ursprünglichen Prismas, dessen Größe $(8^2 \cdot 45)\ \text{dm}^3$, im Überschlag mit $(60 \cdot 50)\ \text{dm}^3 = 3000\ \text{dm}^3$, bestimmt wird. Es muß aber größer sein als das eines kleineren Prismas mit der Grundkante 5,5 dm, also größer als $(5{,}5^2 \cdot 45)\ \text{dm}^3$, in ausreichender Annäherung $(25 \cdot 50)\ \text{dm}^3 = 1\,250\ \text{dm}^3$. Durch diese Überschlagsrechnung wird V zwischen zwei Grenzen eingeschlossen:

$$1\,250\ \text{dm}^3 < V < 3000\ \text{dm}^3$$

Die Berechnung selbst kann zum Beispiel so durchgeführt werden:

$$V_1 = 8^2 \cdot 5\ \text{dm}^3 \qquad = 320\ \text{dm}^3$$

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6(8^2 + 8 \cdot 5{,}5 + 5{,}5^2)\ \text{dm}^3 \qquad = 553\ \text{dm}^3$$

$$V_3 = 5{,}5^2 \cdot 28\ \text{dm}^3 \qquad = 847\ \text{dm}^3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \qquad = 1\,720\ \text{dm}^3$$

Das Ergebnis von $1\,720\ \text{dm}^3$ liegt in den Grenzen, die beim Überschlag ermittelt wurden. Es entspricht somit dem Überschlag. Das Gewicht der Säule beträgt $(1\,720 \cdot 2{,}33)\ \text{kp} \mathrel{\hat{=}} 4\,007{,}6\ \text{kp}$. Die Säule wiegt also rund 4 Mp.

Bei der Berechnung der Oberfläche verfahren wir ebenso: Überschlagsrechnung, Berechnung, Überprüfung. Um einen Überschlagswert für die Oberfläche der Säule zu bekommen, vergleichen wir sie mit der Oberfläche eines quadratischen Prismas von

etwa 7 dm Seitenlänge des Grundquadrates und der Länge von 45 dm. Diese würde die Oberfläche von $(2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 \cdot 45)\ \mathrm{dm}^2$ haben; für die Überschlagsrechnung genügt als Wert $(2 \cdot 50 + 30 \cdot 40)\ \mathrm{dm}^2 = 1\,300\ \mathrm{dm}^2$.

Zur genauen Berechnung der Oberfläche betrachten wir die einzelnen Flächen. Es sind zwei gleich große Quadrate der Grund- und Deckfläche mit je 8 dm Seitenlänge, 4 Rechtecke mit den Seiten 8 dm und 5 dm, 4 Rechtecke mit den Seiten 5,5 dm und 28 dm und 8 gleichgroße Trapeze mit den parallelen Seiten 8 dm und 5,5 dm und einer Höhe, die berechnet werden kann als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten von 6 dm und $\frac{8 - 5{,}5}{2}$ dm Länge. Nach diesen Überlegungen kann die Oberfläche berechnet werden.

$$O = \left(2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 5 + 4 \cdot 5{,}5 \cdot 28 + 8 \cdot \frac{8 + 5{,}5}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 1{,}25^2}\right) \mathrm{dm}^2$$

$$\approx (128 + 160 + 616 + 54 \cdot 6{,}13)\ \mathrm{dm}^2 \approx 1\,235\ \mathrm{dm}^2$$

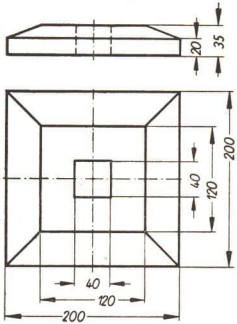


Abb. 104

Zum Vergleich und zur Überprüfung berechnen wir noch die Größe der Oberfläche des ursprünglichen Prismas von 8 dm Seitenlänge und der Höhe von 45 dm. Die Rechnung ergibt:

$$O = (2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 45)\ \mathrm{dm}^2 = (128 + 1\,440)\ \mathrm{dm}^2$$
$$= 1\,568\ \mathrm{dm}^2.$$

Auch hier zeigt sich, daß der errechnete Wert möglich ist.

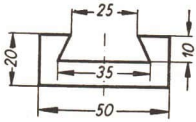


Abb. 105

Aufgaben

1. Es ist das Gewicht der Ankerplatte in Abbildung 104 zu berechnen $\left(\gamma = 7{,}8\ \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}\right)$.
2. Es ist der Querschnitt der in Abbildung 105 dargestellten Platte mit Schwalbenschwanzführung zu berechnen.
3. Die Oberfläche der in Abbildung 106 dargestellten Schwalbenschwanzführung soll eloxiert werden. Sie ist zu berechnen.
4. In Abbildung 107 ist ein Bock dargestellt, dessen Oberfläche veredelt werden soll.
   a) Berechnen Sie die Oberfläche des Bockes!
   b) Berechnen Sie Volumen und Gewicht des Werkstückes! $\left(\gamma = 7{,}8\ \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}\right)$

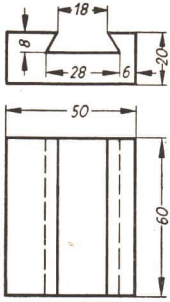


Abb. 106

5. Berechnen Sie das Gewicht des in Abbildung 108 dargestellten Ambaßeinsatzes aus Stahl!

6. Berechnen Sie das Gewicht des Abschrotes aus Stahl (Abbildung 109)!

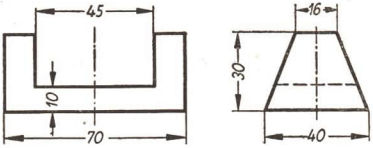


Abb. 107

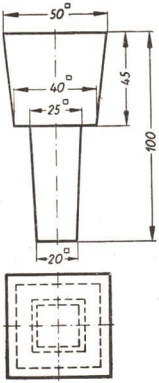


Abb. 108

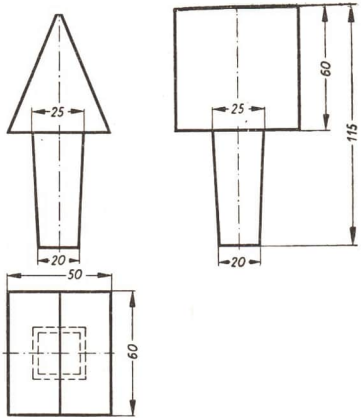


Abb. 109

Mathematische Schüleraufträge

1. Im Walzwerk werden verschiedene Formen von Profilstählen hergestellt. Die wichtigsten davon sind: der Winkelstahl (L-Stahl), der U-Stahl ([-Stahl), der T-Stahl (⊥-Stahl) und der Doppel-T-Stahl (I-Stahl). Diese Profilstähle finden meist als Träger in den verschiedensten Zweigen des Maschinen-, des Waggon-, des Brücken- und des Hochbaues Anwendung. Welche Profilstähle haben Sie im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion schon entdeckt? Wozu dienen sie? Entnehmen Sie (soweit das möglich ist) den Trägern die Maße und berechnen Sie die Gewichte der Stahlträger!

2. Die Klemmgabel am Support der Drehmaschine ist die Halterung für den Drehstahl. Berechnen Sie das Volumen der Klemmgabel, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Wasserverdrängung!

VI. Krummflächige Körper

Im Maschinenbau treten uns besonders häufig „runde" Maschinenelemente entgegen: Wellen, konische Stifte, Kugellager usw. Das sind Formen, die wir in der Mathematik als Zylinder, Kegel bzw. Kugel bezeichnen. Wir können sie am einfachsten als Rotationskörper (Drehkörper) erklären. Rotiert ein Rechteck um eine seiner Seiten, so beschreibt es einen geraden **Kreiszylinder.** Durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten entsteht ein gerader **Kreiskegel**, und durch Rotation eines Halbkreises um seinen Durchmesser entsteht eine **Kugel** (Abb. 110).

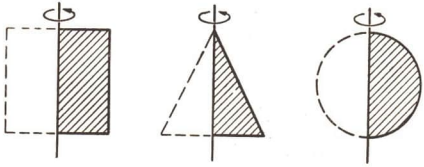


Abb. 110

Außer diesen regelmäßigen Körpern gibt es auch andere krummflächige Körper, die nicht diese Regelmäßigkeit aufweisen, z. B. sch efe Kreiszylinder und schiefe Kreiskegel. Wir sprechen von einem schiefen Kreiszylinder, wenn die Deckfläche in einer zur Grundfläche parallelen Ebene, aber nicht mehr senkrecht über dem Grundkreis liegt. Beim schiefen Kreiskegel liegt die Spitze nicht mehr senkrecht über dem Mittel-

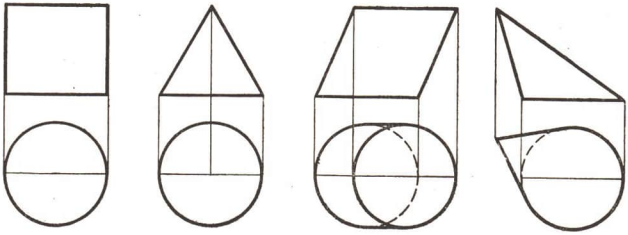


Abb. 111

punkt des Grundkreises. Der schiefe Kreiszylinder und der schiefe Kreiskegel sind keine Rotationskörper (Abb. 111). Die Kugel ist ein mathematischer Körper von besonderer Eigenart. Sie hat keine Ecke, keine Kante und nur eine Fläche, die in jedem ihrer Punkte die gleiche Krümmung aufweist.

33. Die Berechnung des Rauminhalts von Zylinder und Kegel

Wir betrachten zunächst den **geraden Kreiszylinder.** Hier hilft uns die gleiche Überlegung wie beim geraden Prisma. Ein Zylinder von 1 Längeneinheit als Höhe hat das Volumen, das der Maßzahl seiner Grundfläche, also der des Grundkreises entspricht. Gerade Kreiszylinder anderer Höhe h denken wir uns zusammengesetzt aus „Einheitsschichten" und gewinnen damit ihr Volumen V als

$$V = G \cdot h$$

Da die Grundfläche ein Kreis ist, nimmt die Berechnung des Volumens die besondere Form an:

$$V = \pi r^2 h = \frac{1}{4} \pi d^2 h$$

Den **geraden Kreiskegel** denken wir uns entstanden aus einer regelmäßigen geraden Pyramide, deren Kantenzahl immer größer wird. Beim regelmäßigen Vieleck der Grundfläche wird dadurch ebenfalls die Zahl der Seiten immer größer, und es nähert sich dabei immer mehr der Kreisform. Wird die Seitenzahl größer als jede angebbare Zahl, so kann man vermuten, daß dann das Vieleck durch einen Kreis ersetzt werden darf. Daß diese Vermutung richtig ist, bedarf eines Beweises mit Mitteln der Mathematik, die uns noch nicht zur Verfügung stehen.

Daß es überhaupt möglich und sinnvoll ist, Aussagen über die Ergebnisse solcher Denkprozesse zu machen, bei denen die Anzahl irgendwelcher Größen größer wird als jede angebbare Zahl, wollen wir uns an folgendem einfachem Zahlenbeispiel klarmachen:

Wir addieren zu der Zahl 1 die Hälfte dieser Zahl, dazu wieder die Hälfte der Hälfte, und so fahren wir ohne Ende fort. Wir bilden also die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$

Wir werden, so oft wir auch die Addition vornehmen, nicht über die Zahl 2 hinauskommen, wir werden sie nicht einmal erreichen, da wir ja immer nur die Hälfte des Restes bis zur 2 addieren. Wir werden aber der Zahl 2 so nahe kommen, wie wir nur wollen, so daß wir den Wert dieser Summe als 2 annehmen können. Geometrisch sieht das so aus, daß wir an eine Strecke die Hälfte

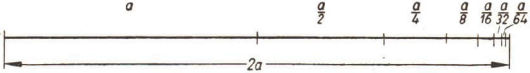


Abb. 112

anfügen, dann wieder die Hälfte des angefügten Stückes und so fort ohne Ende. Wir werden niemals über die Verdoppelung der Strecke hinauskommen, wir werden sie aber mit jeder gewünschten Genauigkeit erreichen (Abb. 112).

Entsprechend nähert sich die gerade regelmäßige Pyramide bei dauernder Verdoppelung der Seitenzahl dem geraden Kreiskegel. Die Berechnung seines Volumens gleicht infolgedessen dem der Pyramide

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

und wird:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{12} \pi d^2 h$$

Zahlentafeln, Tabellenbücher der Technik und andere Hilfsmittel enthalten fast immer Tafeln, in denen aus dem Durchmesser der Flächeninhalt des Kreises ermittelt werden kann. Dadurch wird die unbequeme Rechnung mit der Zahl π unnötig. Wir wollen diese Tafelwerte benutzen. Beim Rechnen mit dem Rechenstab wird uns das Berechnen eines Zylindervolumens durch die Marke c erleichtert.

Statt der Rechnung $V = \frac{1}{4}\,\pi\, d^2\, h$ stellen wir auf dem Stab $V = \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot h$ ein. Es muß demnach $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{c}$ sein, das bedeutet, daß $c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}128$ ist. Wir haben also zunächst über dem Durchmesser d auf der Skala D die Marke c einzustellen. Dann liest man über der auf Skala B ermittelten Höhe h das Zylindervolumen V auf Skala A ab. Beim Volumen des Kegels ist noch die Division durch 3 vorzunehmen. Da beim Rechnen mit dem Stab die Division am besten vor der Multiplikation vorgenommen wird, halten wir den Wert von $\left(\frac{d}{c}\right)^2$ mit dem Läufer fest, schieben auf der Skala B die 3 darunter und können nun zu jedem Wert h auf der Skala B auf A den Wert des Volumens ablesen (Abb. 113). Während bei der Berechnung von Kreisflächen $\left(F = \frac{\pi}{4}\, d^2 = \left(\frac{d}{c}\right)^2\right)$ statt der Marke c auch der Dreistrichläufer verwendet und dadurch ein Bewegen der Zunge vermieden werden kann, ist das bei den erwähnten Volumenberechnungen nicht zu empfehlen, da die Multiplikation mit h bzw. $\frac{h}{3}$ auf jeden Fall die Benutzung der Zunge erfordert. Wir rufen uns dabei ins Gedächtnis zurück, daß auf dem Stab nur die Ziffernfolge abgelesen werden kann, daß wir aber den Stellenwert durch Überschlagsrechnung gewinnen müssen. Es ist stets falsch, durch numerische Multiplikation mit möglichst vielen Stellen eine große Genauigkeit vorzutäuschen, Tafelwerte reichen immer aus, in den meisten Fällen genügt die mit dem Rechenstab erzielte Genauigkeit.

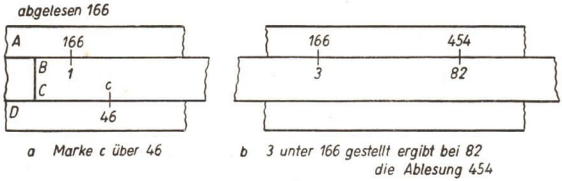


Abb. 113

Beispiel: Wie groß ist das Volumen eines Kegels, von dem gegeben sind: $d = 4{,}6$ cm; $h = 8{,}2$ cm? (Vergleichen Sie Abb. 113)

Ergebnis: Das Volumen beträgt rund 45,4 cm³.

34. Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche von Zylinder und Kegel

Wir haben bereits festgestellt, daß wir den Mantel eines Zylinders und ebenso den eines Kegels durch Abwickeln, d. h. durch Abrollen in eine Ebene legen können. Beim geraden Zylinder erhalten wir dabei ein Rechteck, dessen eine Seite gleich dem

Umfang des Grundkreises und dessen andere Seite gleich der Höhe des Zylinders ist. Daraus ergibt sich als Formel für den

Mantel (M) eines Zylinders:

$$M = 2\pi rh = \pi dh$$

Zur Berechnung der **Oberfläche (O) des Zylinders** sind zum Mantel die Grundfläche und die Deckfläche zu addieren.

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) \qquad \text{oder}$$

$$O = \pi dh + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi d^2 = \pi d\left(h + \frac{1}{2}d\right)$$

Beim **Kegel** ergibt die Abwicklung des **Mantels** einen Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Mantellinie des Kegels ist und dessen Kreisbogen dieselbe Länge hat wie der Umfang des Grundkreises des Kegels (Abb. 114). Da sich die Länge des Kreisbogens zum Kreisumfang wie die Fläche des Kreisausschnittes zur Kreisfläche verhält, gilt die Proportion

$$b : 2\pi s = M : \pi s^2$$

Wegen $b = 2\pi r$ ergibt sich durch Umformung

$$2\pi s M = 2\pi r \cdot \pi s^2$$

und daraus als

Formel für den Kegelmantel (M):

$$M = \pi rs$$

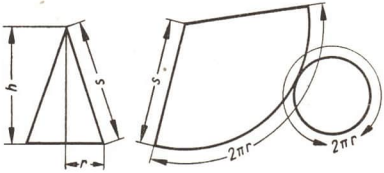


Abb. 114

Die **Oberfläche des geraden Kreiskegels** ist die Summe aus Mantel- und Grundfläche:

$$O = \pi rs + \pi r^2 = \pi r(r + s) \qquad \text{oder}$$

$$O = \frac{1}{2}\pi ds + \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2}\pi d\left(s + \frac{1}{2}d\right)$$

Zwischen der Seitenlinie s, der Höhe h und dem Radius r des Kegels besteht die Beziehung $s^2 = r^2 + h^2$. Aus zwei dieser Größen kann stets die dritte bestimmt werden.

Aufgaben

1. a) Der Personenwagen Trabant vom VEB Sachsenring Automobilwerke Zwickau hat einen Zweizylinder-Zweitaktmotor von rund 500 cm³ Hubraum. Die Bohrung (Zylinderdurchmesser) wird mit 66 mm, der Hub (Weg des Kolbens vom oberen bis zum unteren Totpunkt) mit 73 mm angegeben. Berechnen Sie den Hubraum genau!

b) Bei der RT 125, einem Motorrad aus Zschopau, das einen Einzylinder-Zweitaktmotor hat, ist die Bohrung 52 mm und der Hub 58 mm. Wie groß ist der Hubraum?

c) Beim Simson-Moped SR 2 wird die Bohrung mit 38 mm und der Hub mit 42 mm angegeben. Wie groß ist bei diesem Motor der Hubraum?

2. Im neuen Rostocker Ölhafen befinden sich Rolltanks im Bau, die zur Einlagerung des Öls notwendig sind.
   a) Wieviel fassen sie, wenn sie 23 m Durchmesser haben und ihre Höhe 12,5 m beträgt?
   b) Aus wieviel Quadratmeter Stahlblech ist jeder Tank hergestellt?
3. Ein runder Schacht hat 7,00 m Durchmesser und eine Teufe (bergmännischer Ausdruck für Tiefe) von 490,00 m. Welchen Raum nehmen die beim Abteufen auf der Halde verkippten Berge (das aus dem Schacht gesprengte Gestein) bei einem Auflockerungsfaktor von 1,8 ein? (Der Auflockerungsfaktor gibt an, das Wievielfache ein Kubikmeter bisher festen Bodens beim Verkippen auf der Halde einnimmt, in unserem Falle also 1,8 Kubikmeter).
4. In einer LPG soll rund 180 m^3 Siloraum geschaffen werden. Es werden 4 zylinderförmige Silos mit je 3,50 m Durchmesser gebaut. Wie tief müssen sie werden?
5. Wie schwer ist eine 850 mm lange Stahlwelle mit dem Durchmesser $d = 125$ mm? (Wichte des Stahls: $7{,}8 \frac{p}{cm^3}$).
6. Ein zu einem Kegel aufgeschütteter Haufen Sand soll mit Lastkraftwagen von 3000 kp Ladefähigkeit abgefahren werden. Wieviel Fahrten sind ungefähr nötig, wenn der Umfang des Grundkreises durch Abschreiten auf 22 m und die Höhe des Kegels auf 2,50 m geschätzt wurde? (Als Wichte des Sandes soll in diesem Falle $1{,}8 \frac{p}{cm^3}$ angenommen werden.)
7. Das kegelförmige Dach eines Turmes soll mit Ekadur eingedeckt werden. Der Turm hat einen äußeren Durchmesser von 6,00 m, das Dach steht um 0,40 m vor. Die Länge der Mantellinie beträgt 11,00 m. Wieviel Quadratmeter Ekadur werden benötigt?
8. Ein kegelförmiges Filter soll eine Oberfläche von 150 cm^2 erhalten. Wie groß muß der obere Trichterdurchmesser mindestens gewählt werden, wenn der Achsenschnitt des Trichters ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck sein soll?
9. Wie groß ist das Volumen eines Kegels, der durch Zusammenbiegen eines Halbkreises von 10 cm Radius entstanden ist?
10. Nach der Eichordnung sollen die Hohlmaße doppelt so hoch wie weit sein. Welche Maße wird dann ein zylindrisches Fünflitermaß aufweisen?
11. Welche Länge muß eine Stahlwelle vom Durchmesser $d = 85$ mm haben, wenn ihr Gewicht 50 kp betragen soll? $\left(\gamma = 7{,}8 \frac{p}{cm^3}.\right)$
12. Ein Kochtopf hat den lichten Durchmesser von 17,5 cm und die lichte Höhe von 15 cm.
    a) Wieviel Liter faßt er, wenn er bis 2 cm unter den Rand gefüllt wird?
    b) Wie hoch füllen 1,25 l den Topf?
    c) Wieviel Quadratdezimeter Blech bilden die Grundfläche und den Mantel?

Mathematische Schüleraufträge

1. Im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion lernen Sie das Lang- und das Plandrehen glatter Werkstücke. Berechnen Sie die Oberfläche, das Volumen und das Gewicht einer Welle, die von Ihnen auf der Drehmaschine bearbeitet wurde!
   Lassen Sie den Durchmesser d fünfmal um jeweils 10 mm wachsen!
   Rechnen Sie und stellen Sie die Funktion grafisch dar!
2. Beim Drehen fallen Späne an. Stellen Sie den prozentualen Spanabfall in einer Tabelle zusammen! Nehmen Sie Schnitte mit den jeweiligen Vorschüben von $s = 1{,}5$ mm ... $s = 2$ mm ... $s = 2{,}5$ mm an!

3. Sie kennen den Durchmesser einer Welle, die von Ihnen auf der Drehmaschine geschruppt oder geschlichtet wurde. Lassen Sie den Durchmesser der Welle jeweils um 20 mm wachsen! Untersuchen Sie die Bearbeitungsmöglichkeiten an Ihrer Drehmaschine! Bis zu welchem Durchmesser können Sie das Werkstück noch in das Drehfutter einspannen? Schlußfolgern Sie die Abhängigkeit von d zur Schnittgeschwindigkeit v! Stellen Sie die Funktion grafisch dar!

4. Zu der Überholung eines Motors gehören u. a. das Ausschleifen der Zylinder und Lagern der Kurbelwelle. Berechnen Sie den Zylinderinhalt des Motors, den Sie „ausschlachten"! Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Leistungsschild des Fahrzeuges! Die Schwungmasse der Kurbelwelle hat ein bestimmtes Gewicht! Rechnen Sie!

5. Ein Kolbenbolzen wird auf Abscheren beansprucht. Errechnen Sie die Kraft P, die wirken müßte, um den Kolbenbolzen zu scheren!
Anleitung: Zur Berechnung der Scherfestigkeit werden die Formeln der Zug- und Druckfestigkeit mit dem Unterschied gebraucht, daß die zulässige Beanspruchung τ_{zul} nur $\frac{4}{5}$ der zulässigen Zugbeanspruchung σ_{zul} beträgt. Mit $\tau_{zul} = \frac{4}{5}\,\sigma_{zul}$ ergibt sich $P = F \cdot \tau_{zul}$.

6. Die Benzin- und die Teerfässer sind standardisiert. Berechnen Sie das Fassungsvermögen! Bei richtiger Lösung fällt Ihnen ein Widerspruch zur Normung der Fässer auf! Deuten Sie den physikalischen Sachverhalt!

35. Die Berechnung des Kegelstumpfes

Ein häufiges Konstruktionselement in der Technik ist der Konus. So wird in der Technik meist der Kegelstumpf bezeichnet. In der Mathematik definieren wir:

Der Kegelstumpf ist der Restkörper, der entsteht, wenn von einem geraden Kreiskegel durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt die Spitze abgetrennt wird.

Den Abstand der Deckfläche von der Grundfläche bezeichnen wir als Höhe h, die Radien der Grund- und Deckfläche mit r und ϱ, die Mantellinie mit s. Abbildung 115 zeigt den Kegelstumpf in Zweitafeldarstellung. Aus der Abbildung ist zu entnehmen, daß zwischen der Mantellinie s, der Höhe h und den beiden Radien r und ϱ die Beziehung besteht: $s^2 = h^2 + (r - \varrho)^2$.

Die Berechnung des **Volumens des Kegelstumpfes** entspricht der Berechnung des Volumens des Pyramidenstumpfes.

$$V = \frac{1}{3}\,r^2\pi(h + x) - \frac{1}{3}\,\varrho^2\pi x$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\,[r^2(h + x) - \varrho^2 x]$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\,[h r^2 + x(r^2 - \varrho^2)]$$

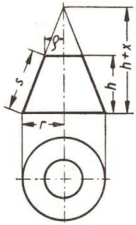


Abb. 115

Nach dem Strahlensatz gilt $x : (h + x) = \varrho : r$

Daraus folgt $r x = h\varrho + x\varrho$ und $x = \frac{h \cdot \varrho}{r - \varrho}$

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\left[h r^2 + \frac{h\,\varrho\,(r^2 - \varrho^2)}{r - \varrho}\right] \quad \text{und wegen} \quad \frac{r^2 - \varrho^2}{r - \varrho} = r + \varrho$$

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\,\pi\,h\,(r^2 + r\varrho + \varrho^2)}$$

Man kann auch dadurch zum Ziel kommen, daß man den Kegelstumpf als einen Pyramidenstumpf mit der Grundfläche $G_1 = \pi r^2$ und der Deckfläche $G_2 = \pi \varrho^2$ auffaßt und nun das Ergebnis der Volumenberechnung des Pyramidenstumpfes verwendet.

Leiten Sie die Volumenformel für den Kegelstumpf auf diese Weise her!

Auch für das Volumen des Kegelstumpfes werden zuweilen wie bei dem Pyramidenstumpf Näherungsformeln verwendet, obwohl der hierbei erzielte Rechenvorteil nicht so groß ist wie dort. Der Kegelstumpf kann ersetzt werden durch einen Zylinder mit gleicher Höhe und mit dem Mittelschnitt des Stumpfes als Grundfläche. Der Mittelschnitt ist ein Kreis mit einem Radius r_m, der gleich dem arithmetischen Mittel aus Grund- und Deckkreisradius ist: $r_m = \frac{r + \varrho}{2}$

Diese Näherung ergibt

$$V \approx \frac{1}{4} \pi h (r + \varrho)^2$$

Eine andere Annäherung an den wahren Wert erhält man, wenn man einen Zylinder wählt, dessen Grundfläche gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grundkreisflächen ist:

$$G_m = \frac{G_1 + G_2}{2} = \frac{r^2\pi + \varrho^2\pi}{2}$$

Dann ergibt sich:

$$V \approx \frac{1}{2} \pi h (r^2 + \varrho^2)$$

Das entspricht der beim Pyramidenstumpf verwendeten Näherungsformel. Das damit errechnete Volumen ist wie dort stets etwas größer als der wahre Wert.

Vergleicht man den mit der ersten Näherungsformel errechneten Wert

$$V' = \frac{\pi h}{4} (r^2 + 2 r \varrho + \varrho^2)$$

mit dem wahren Volumenwert $V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r \varrho + \varrho^2)$, indem man jeweils den Zahlenfaktor $\frac{\pi h}{12}$ vor die Klammer stellt:

$$V' = \frac{\pi h}{12} (3 r^2 + 6 r \varrho + 3 \varrho^2) \quad \text{und} \quad V = \frac{\pi h}{12} (4 r^2 + 4 r \varrho + 4 \varrho^2),$$

so ergibt sich wegen $r > \varrho$:

$$\begin{aligned} r - \varrho &> 0 \\ (r - \varrho)^2 &> 0 \\ r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho &> 0 \\ r^2 + \varrho^2 &> 2 r \varrho \qquad | + 3 r^2 + 3 \varrho^2 + 4 r \varrho \\ 4 r^2 + 4 \varrho^2 + 4 r \varrho &> 3 r^2 + 3 \varrho^2 + 6 r \varrho \\ V &> V' \end{aligned}$$

Der auf diesem Wege errechnete Näherungswert für das Volumen ist also etwas kleiner als der wahre Wert. Auch hier zeigt sich wie bei dem Pyramidenstumpf, daß die durch Näherungsformeln bestimmten Werte um so genauer sind, je geringer der Unterschied zwischen dem Radius des Grundkreises und dem des Deckkreises ist. Die Untersuchung

über die Genauigkeit der erzielten Näherung wird so durchgeführt wie bei dem Pyramidenstumpf.

Der **Mantel des Kegelstumpfes** kann abgewickelt werden (Abb. 116). Wir berechnen ihn als Differenz der Mäntel zweier Kegel.

$$M = \pi r (s + y) - \pi \varrho y$$
$$= \pi (r s + r y - \varrho y)$$
$$= \pi [r s + y (r - \varrho)]$$

Aus der Proportion $y : (y + s) = 2 \varrho \pi : 2 r \pi$ wird y errechnet.

$$r y = \varrho y + \varrho s$$
$$y (r - \varrho) = \varrho s$$
$$y = \frac{\varrho s}{r - \varrho}$$

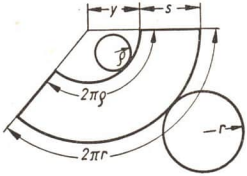


Abb. 116

Dieser Wert für y wird in die oben entwickelte Gleichung eingesetzt und ergibt:

$$M = \pi \left[r s + \frac{\varrho s}{r - \varrho} (r - \varrho) \right]$$
$$\boldsymbol{M = \pi s (r + \varrho)}$$

Zur Berechnung der **Oberfläche eines Kegelstumpfes** müssen zur Mantelfläche noch die Flächen des Grundkreises und des Deckkreises addiert werden. Das ergibt

$$\boldsymbol{O = \pi [r^2 + \varrho^2 + (r + \varrho) s]}$$

In der Technik werden die Kegelstümpfe als Kegel bezeichnet und in technischen Zeichnungen so dargestellt, wie es Abbildung 117 zeigt. Die Angabe $1 : k$ bedeutet, daß sich auf k mm Kegellänge der Durchmesser um 1 mm verringert. Auf Abbil-

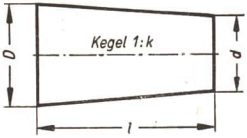


Abb. 117

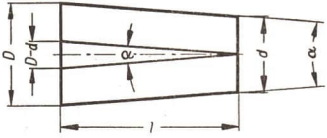


Abb. 118

dung 118 ist zu ersehen, daß sich der Durchmesser um $(D - d)$ mm verringert, wenn der Kegelstumpf l mm lang ist. Es gilt die Proportion $k : 1 = l : (D - d)$, und die Umformungen ergeben $k (D - d) = l$; $k D - k d = l$.

In Abbildung 118 sehen wir, daß der zum Kegel vervollständigte Stumpf an der Spitze den Winkel α bilden würde. Mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen läßt sich dieser Winkel leicht ermitteln. Er gibt uns ein Maß für die Steigung des Kegels.

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2} (D - d)}{l} \text{ und daraus } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{D - d}{2 l}$$

Mit Hilfe dieses Winkels lassen sich weitere Beziehungen aufstellen.

Aufgaben

1. Im Haushalt verwendete Eimer sind Kegelstümpfe. Wieviel Liter Wasser faßt ein solcher Eimer, der einen unteren Durchmesser von 20 cm, einen oberen Durchmesser von 27 cm und eine Höhe von 27 cm aufweist?
2. Wieviel Festmeter Holz enthält ein Baumstamm von 25 m Länge, dessen oberer Umfang mit 110 cm und dessen unterer Umfang mit 198 cm gemessen wurde?
3. Ein Meßbecher hat die Gestalt eines Kegelstumpfes mit den lichten Weiten $d_1 = 10$ cm und $d_2 = 3$ cm. Die innere Seitenlänge beträgt $s = 13$ cm. 9,8 cm Seitenlänge vom Boden entfernt befindet sich der Eichstrich für $\frac{1}{4}$ Liter. Stimmt diese Angabe?
4. Ein Kegelstumpf hat die Maße $r_1 = 13$ cm, $r_2 = 7{,}5$ cm, $h = 5{,}5$ cm. Wie groß ist der Neigungswinkel der Seitenlinie gegen die Grundfläche? (Der Winkel ist durch trigonometrische Berechnung und auch zeichnerisch zu ermitteln.)
5. Berechnen Sie Mantel und Volumen eines Kegelstumpfes, wenn gegeben sind: $r_1 = 25$ cm, $r_2 = 12$ cm und der Öffnungswinkel $\alpha = 75°$!
6. Das Flammrohr eines 860 mm langen Dampfkessels hat die Form eines abgestumpften Kegels, der auf der einen Seite den Durchmesser 450 mm, auf der anderen den Durchmesser 280 mm hat. Wie groß ist die Heizfläche?

Mathematische Schüleraufträge

1. Lassen Sie sich während Ihrer Arbeit an der Drehmaschine vom Lehrausbilder die drei Methoden für das Kegeldrehen erklären! Berechnen Sie die Oberfläche, das Volumen und das Gewicht eines Kegelstumpfes, der von Ihrem Ausbilder bearbeitet wird! Vergleichen Sie die Ergebnisse für das Gewicht und das Volumen, wenn Sie nach der Näherungsformel und nach der genauen Volumenformel rechnen!
2. Auf der Drehmaschine wird aus einer Welle ein Kegel (Kegelstumpf) unter dem Neigungswinkel $\frac{\alpha}{2}$ der Drehscheibe mit Hilfe der Supportverstellung hergestellt. Errechnen Sie den Spanabfall prozentual, und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar! Richten Sie das Diagramm so ein, daß ein Ablesen des prozentualen Spanabfalls von 0° bis $\frac{\alpha}{2}°$ möglich ist!

36. Die Kugel und die Kugelteile

Die Kugel ist als Drehkörper erklärt worden. Aus dieser Entstehung kann sofort eine andere Definition hergeleitet werden. Jeder Punkt der rotierenden Halbkreislinie ist von dem auf der Drehachse gelegenen Mittelpunkt gleich weit entfernt. Das ändert sich auch bei der Drehung nicht. Jeder Punkt der Kugeloberfläche hat demnach die gleiche Entfernung von diesem Punkte. Es kann also auch definiert werden:

Die Kugeloberfläche ist der geometrische Ort (die Bestimmungsfläche) aller Punkte im Raum, die von einem Punkt, dem Mittelpunkt, die gleiche Entfernung haben. Wir bezeichnen diese Entfernung als Radius der Kugel.

Eine wichtige Eigenschaft der Kugel ist, daß jeder Schnitt einer Ebene mit ihr einen Kreis ergibt. (Beim Zylinder und beim Kegel ergeben nur Schnitte in einer besonderen

Lage einen Kreis.) Der Beweis für diese Behauptung ist leicht zu erbringen. Wir bezeichnen den Radius der Kugel mit r, den Abstand der Ebene vom Mittelpunkt der Kugel mit a, den Mittelpunkt mit M und den Fußpunkt des Lotes vom Mittelpunkt der Kugel auf die schneidende Ebene mit P. Dann ist S ein Schnittpunkt der Ebene mit der Kugel (Abb. 119).

$$SM = r; \; MP = a$$

Damit die Ebene die Kugel schneidet, muß $a < r$ sein.

$$PS = \sqrt{r^2 - a^2}$$

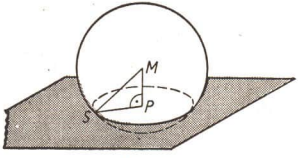


Abb. 119

Jeder Punkt der Schnittlinie ist also vom Fußpunkt des Lotes durch den Mittelpunkt der Kugel auf die Schnittebene gleich weit entfernt: Die Schnittfigur ist ein Kreis.

Jeder derartige Schnitt zerlegt die Kugeloberfläche in zwei Teile, die als **Kugelhauben** oder **Kalotten** bezeichnet werden. Der Kugelkörper wird dabei in zwei **Kugelsegmente** oder **Kugelabschnitte** geteilt.

Die Höhe der Kugelhaube oder des Kugelabschnittes wird meist mit h, der Radius des Schnittkreises mit ϱ und der Radius der Kugel mit r bezeichnet. Die Abbildung 120 zeigt die genannten Größen an einer Kugel in senkrechter Eintafelprojektion, die in Richtung $A-B$ geschnitten wurde.

Fügt man zum kleineren von beiden Segmenten, dessen Höhe kleiner als der Radius der Kugel ist, den Kegel hinzu, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt, so

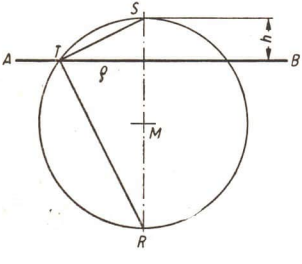


Abb. 120

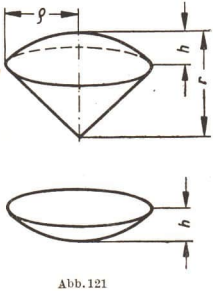


Abb. 121

entsteht ein **Kugelsektor**. Die Höhe h des Kugelsegments gilt zugleich als Höhe des zugehörigen Kugelsektors. Die Abbildung 121 zeigt beide Kugelteile in schiefer Parallelprojektion.

Die Beziehungen zwischen den Größen r, ϱ und h können aus Abbildung 120 gewonnen werden. In dem nach dem Satz des Thales bei T rechtwinkligen Dreieck RST gilt der Höhensatz $\varrho^2 = h(2r - h)$, der nach Umformung $h^2 - 2rh + \varrho^2 = 0$ ergibt, woraus h oder r ermittelt werden kann: $h = r \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ (Lösung einer Gleichung

2. Grades) oder $r = \frac{h^2 + \varrho^2}{2h}$. Für h ergeben sich 2 Werte; das steht im Einklang mit unserer Definition, wonach jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene zwei Kugelhauben ergibt.

Eine Kugel kann auch von zwei parallelen Ebenen geschnitten werden. Der Teil der Kugel zwischen diesen beiden Ebenen wird als **Kugelschicht** bezeichnet (Abb. 122 und Abb. 123). Deren Oberfläche setzt sich zusammen aus zwei Kreisflächen mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2 und aus dem Teil der Kugeloberfläche, der zwischen den beiden parallelen Kreislinien liegt. Diesen bezeichnet man als **Kugelzone**. Der Abstand der beiden Schnittflächen voneinander wird als Höhe h der Kugelschicht bezeichnet. Dabei sind

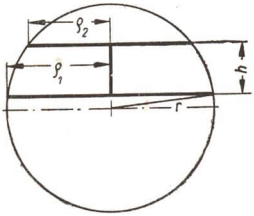


Abb. 122

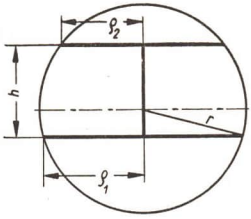


Abb. 123

zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Der Mittelpunkt liegt entweder innerhalb oder außerhalb der Kugelschicht. Das zeigen auch die Beziehungen zwischen den vier Größen r, ϱ_1, ϱ_2 und h, die aus den Abbildungen 122 und 123 gewonnen werden können. Sie lassen sich zusammenfassen zu:

$$h = \sqrt{r^2 - \varrho_2^2} \pm \sqrt{r^2 - \varrho_1^2}$$

Dabei gilt das positive Vorzeichen, wenn der Mittelpunkt der Kugel innerhalb der Kugelschicht liegt. Im anderen Falle ist das negative Vorzeichen zu setzen.

37. Die Berechnung der Kugel und ihrer Teile

Auf allen Gebieten unseres Lebens hat die Kugelform besondere Bedeutung. Wir leben auf einem Weltenkörper, der fast Kugelgestalt hat. Auch die anderen Planeten unseres Sonnensystems und der Trabant unserer Erde, der Mond, haben annähernd Kugelform. In der Technik treten die Kugel und ihre Teile als Konstruktionselemente in sehr vielen Fällen auf. Die Kugellager sind zum Begriff für reibungsverminderte Bewegung geworden. Die optische Industrie verwendet Kugelteile bei fast allen Linsen. Es ist deswegen oft nötig, Volumen und Oberfläche von Kugeln und Kugelteilen zu berechnen.

Wir beginnen mit dem Volumen der Kugel. Dazu gehen wir von der Halbkugel aus. Nach dem Lehrsatz des Cavalieri sind zwei Körper dann volumengleich, wenn ihre Schnittflächen in gleicher Höhe gleiche Größen haben. Wir suchen also einen Vergleichskörper, den wir berechnen können und der mit der Halbkugel in jedem Abstand von der Grundfläche gleich große Schnittflächen hat. Unser Vergleichskörper

ist ein Zylinder mit dem gleichen Grundkreisdurchmesser wie der der Halbkugel und mit der Höhe, die seinem Radius gleich ist, aus dem ein Kegel ausgebohrt ist. Den Achsenschnitt zeigt Abbildung 124. Die Abbildung zeigt außerdem noch die Schnittflächen der Halbkugel und des Vergleichskörpers in der beliebigen Höhe h.

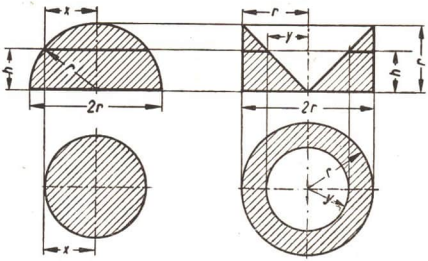


Abb. 124

Die Schnittfläche der Halbkugel ergibt einen Kreis mit dem Radius x, also $F = \pi x^2$, und da $x^2 = r^2 - h^2$ ist, ergibt sich

$$F = \pi (r^2 - h^2)$$

Die Schnittfläche des Restkörpers ist ein Kreisring mit r und y als Radien,

$$F = \pi (r^2 - y^2);$$

und wegen $r : y = r : h$ wird $y = h$;

$$F = \pi (r^2 - h^2)$$

Da die beiden Schnitte in beliebiger Höhe gleich sind (für h waren keine Einschränkungen gemacht worden außer der selbstverständlichen Bedingung $0 \leqq h \leqq r$), ist nach dem Lehrsatz des Cavalieri das Volumen der Halbkugel gleich dem Volumen des Restkörpers.

$$V = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} r^2 \pi r = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

Als **Volumen der Kugel** ergibt sich daraus

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \pi r^3} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{V = \frac{1}{6} \pi d^3}$$

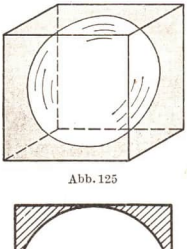


Abb. 125

Für die Technik ist die zweite Formel wichtiger als die erste, weil der Radius einer Kugel nicht direkt gemessen, wohl aber der Durchmesser d unmittelbar, etwa mit der Schieblehre, bestimmt werden kann.

Bei Überschlagsrechnungen ergibt sich ein brauchbarer Wert, wenn π durch die Zahl 3 angenähert wird:

$$V = \frac{1}{6} \pi d^3 \approx \frac{1}{2} d^3$$

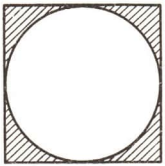


Abb. 126

Das bedeutet, daß das Volumen der Kugel annähernd halb so groß ist wie das eines Würfels, dessen Seitenkante gleich dem Durchmesser der Kugel ist. Beim Kreis läßt sich durch die gleiche Überlegung $\left(F = \frac{d^2 \pi}{4} \approx \frac{3}{4} d^2\right)$ feststellen, daß er annähernd $\frac{3}{4}$ von der Fläche des umbeschriebenen Quadrates beträgt (Abb. 125 und 126).

Für Überprüfungen der Ergebnisse oder für der Rechnung vorangehende Abschätzungen sind diese Näherungswerte sehr wichtig.

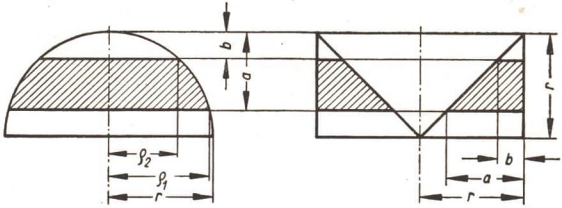


Abb. 127

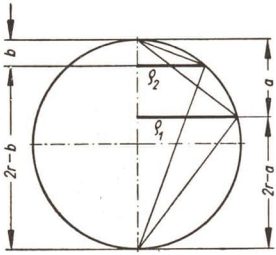


Abb. 128

Um das Volumen der **Kugelschicht** zu berechnen, verfahren wir wie bei der Berechnung des Kugelvolumens. Wir stellen wieder der Kugelschicht einen Körper gegenüber, der in gleicher Höhe jeweils eine gleich große Schnittfläche aufweist. Beide Körper müssen dann nach dem Lehrsatz des Cavalieri das gleiche Volumen haben. Die Abbildung 127 zeigt die beiden Körper.

Daß die Schnittflächen in jeder Höhe gleich sind, war schon bei der Berechnung des Kugelvolumens bewiesen worden. Das Volumen der Kugelschicht ist demnach gleich der Differenz aus dem Volumen des Zylinders und dem des Kegelstumpfes.

$$V = r^2 \pi (a - b) - \frac{1}{3}(a - b)\pi[(r - b)^2 + (r - a)(r - b) + (r - a)^2]$$

Das erste Glied der rechten Seite wird mit 3 erweitert, und dann wird auf der rechten Seite der gemeinsame Faktor $\frac{\pi}{3}(a - b)$ ausgeklammert:

$$V = \frac{\pi}{3}(a - b)[3r^2 - (r - b)^2 - (r - a)(r - b) - (r - a)^2]$$

$$V = \frac{\pi}{3}(a - b)[3r^2 - r^2 + 2br - b^2 - r^2 + ar + br - ab - r^2 + 2ar - a^2]$$

$$V = \frac{\pi}{3}(a - b)(3ar + 3br - a^2 - ab - b^2)$$

$$V = \frac{\pi}{3}(a - b)[3r(a + b) - (a^2 + ab + b^2)]$$

Aus Abbildung 128 ist zu entnehmen, daß für ϱ_1 und ϱ_2 der Höhensatz gilt

$$\varrho_1^2 = a(2r - a)$$

$$\varrho_2^2 = b(2r - b).$$

Daraus folgt
$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = 2r(a+b) - a^2 - b^2$$
$$r(a+b) = \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + a^2 + b^2}{2}$$

Dieser Wert wird eingesetzt in die vorhin hergeleitete Beziehung für die Kugelschicht.

$$V = \frac{\pi(a-b)}{3} \cdot \left[\frac{3}{2}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + a^2 + b^2) - \frac{2}{2}(a^2 + ab + b^2)\right]$$
$$= \frac{\pi(a-b)}{6}(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + 3a^2 + 3b^2 - 2a^2 - 2ab - 2b^2)$$
$$= \frac{\pi(a-b)}{6}[3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + (a-b)^2]$$

Da aber $(a-b)$ die Höhe h der Kugelschicht bedeutet, ergibt sich schließlich für das **Volumen der Kugelschicht:**

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi}{6} h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)}$$

Für $\varrho_2 = 0$ wird die Kugelschicht zum **Kugelabschnitt.** Sein Volumen wird

$$V = \frac{\pi}{6} h (3\varrho^2 + h^2)$$

Um das Volumen des Kugelabschnittes aus r und h zu bestimmen, eliminieren wir ϱ^2. Es gilt $\varrho^2 = h(2r - h)$ (Abb. 120). Wir erhalten dadurch:

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)}$$

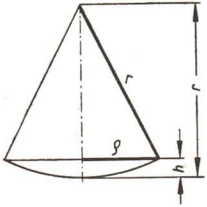


Abb. 129

Zur Kontrolle betrachten wir die Kugel als Kugelabschnitt mit der Höhe $h = 2r$ und finden als Volumen tatsächlich $V = \frac{\pi}{3} 4r^2 (3r - 2r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Der **Kugelsektor** besteht aus einem Kugelabschnitt und dem zugehörigen Kreiskegel. Deswegen ist sein Volumen gleich der Summe dieser beiden Körper (Abb. 129).

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) + \frac{\varrho^2 \pi}{3}(r - h)$$

Wegen $\varrho^2 = h(2r - h)$ ergibt sich:

$$V = \frac{\pi}{3}[h^2(3r - h) + h(2r - h)(r - h)]$$
$$= \frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3 + 2r^2h - 3rh^2 + h^3)$$
$$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}\pi r^2 h}$$

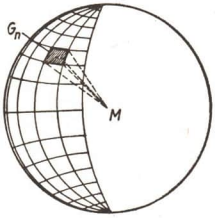


Abb. 130

Die Berechnung der **Oberfläche** der Kugel und der Kugelteile bereitet Schwierigkeiten, weil diese Flächen nicht abgewickelt werden können. Wir müssen uns so helfen, daß wir uns die Kugel in eine sehr große Anzahl pyramidenähnlicher Körper zerlegt denken, deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel liegen und deren Grundflächen möglichst kleine Teile der Kugeloberfläche sind (Abb. 130). Diese Teile sind keine

Pyramiden, weil die Grundflächen als Teile der Kugeloberfläche gekrümmt sind. Je kleiner aber die Grundfläche eines solchen Teilkörpers ist, um so weniger weicht sie von einer ebenen Teilfläche ab. Wenn wir die Kugeloberfläche in eine sehr große Anzahl von Teilflächen zerlegen und damit sehr viele Teilkörper erhalten, läßt sich setzen

$$\frac{1}{3} r (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_n) \approx \frac{4}{3} \pi r^3$$

Das Gesamtvolumen aller Teilkörper ergibt annähernd das Volumen der Kugel. Dabei ist die Summe der Grundflächen der pyramidenähnlichen Körper gleich der Oberfläche der Kugel.

$$G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n = O$$

Die Teilung der Kugeloberfläche und damit des Kugelvolumens läßt sich immer weiter fortsetzen, bis die Anzahl der Teile größer wird als jede angebbare Zahl. Dann wird der Wert des Volumens der Teilkörpersumme dem Wert des Kugelvolumens beliebig nahe kommen, d. h., der Unterschied zwischen beiden wird kleiner als jede noch so kleine Zahl.

Einen solchen Vorgang nennen wir einen **Grenzübergang.** Daß die Summe aus einer beliebig großen Anzahl von Summanden einen bestimmten Wert annehmen kann, ist schon dargelegt worden (Seite 101).

Wir können also, wenn n größer wird als jede angebbare Zahl, setzen

$$\frac{1}{3} r (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_n) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Das bedeutet: $\frac{1}{3} r \cdot O = \frac{4}{3} \pi r^3$ und daraus

$$\boldsymbol{O = 4 \pi r^2} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{O = \pi d^2}$$

Die Kugeloberfläche ist viermal so groß wie der größte Kugelkreis. Es ist allerdings notwendig, zu wissen, daß unsere Herleitung der Formel für die Kugeloberfläche mathematisch nicht exakt ist, es fehlt der Beweis für die Richtigkeit des Grenzübergangs. Dieser kann nur mit Mitteln der höheren Mathematik geführt werden, die uns noch nicht zur Verfügung stehen.

In den Tabellenbüchern der Technik finden wir Tafeln, mit deren Hilfe aus dem Durchmesser einer Kugel sofort das Volumen und die Oberfläche abgelesen werden können. Für Überschlagsrechnungen genügt es fast immer, bei der Oberflächenbestimmung für π den Näherungswert 3 zu setzen: $O \approx 3\,d^2$.

Bei der Berechnung der **Fläche einer Kalotte** (Kugelhaube) lassen sich dieselben Überlegungen anstellen. Das Volumen eines Kugelsektors (Abb. 121) läßt sich zerlegen in pyramidenähnliche Körper, deren Grundflächensumme gleich der Kalottenfläche ist.

Auch hier erfolgt ein Grenzübergang, und wir erhalten

$$\frac{1}{3} F r = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

und daraus:

$$\boldsymbol{F = 2 \pi r h}$$

Die **Kugelzone** fassen wir als Differenz zweier Kugelhauben mit den Höhen a und b auf (Abb. 127). Wir erhalten

$$F = 2\pi r a - 2\pi r b = 2\pi r(a - b)$$

und wegen $a - b = h$ ergibt sich

$$\boldsymbol{F = 2\pi r h}$$

Setzen wir wieder $h = 2r$, erhalten wir die Oberfläche der Kugel $O = 4\pi r^2$.

Es bereitete mehr Schwierigkeiten, die Kugelflächen zu berechnen, als die Mäntel von Zylinder und Kegel zu bestimmen. Der Grund dafür liegt darin, daß der Mantel des Kegels und der des Zylinders „abwickelbar" ist, die Oberfläche der Kugel dagegen nicht. Aus diesem Grunde ist es auch nicht möglich, Teile der Erdoberfläche ohne Verzerrung auf den ebenen Karten abzubilden. Je größer das dargestellte Gebiet ist, um so stärker treten die Verzerrungen in Erscheinung. Die Abbildungen sind entweder in der Größe oder in der Form oder in beiden zugleich verzerrt. Es sind besondere Projektionsverfahren entwickelt worden, die ein einigermaßen richtiges Bild der Erdoberfläche auf den Karten ermöglichen.

Die Formeln für die Kugel und die Kugelteile:

Volumen

Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{6}\pi d^3$$

Oberfläche

Kugel

$$O = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

Kugelabschnitt (Segment)

$$V = \frac{\pi}{6} h (3\varrho^2 + h^2)$$

$$= \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$$

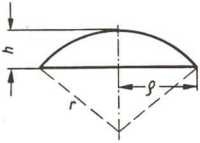


Abb. 131a

Kugelhaube (Kalotte)

$$F = 2\pi r h$$

Kugelschicht

$$V = \frac{\pi}{6} h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$$

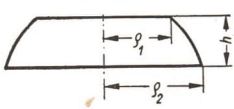


Abb. 131b

Kugelzone

$$F = 2\pi r h$$

Kugelsektor

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

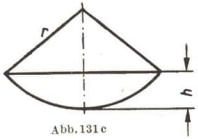


Abb. 131c

Aufgaben

1. In der Leichtathletik werden zum Kugelstoßen Kugeln von 7,250 kp Gewicht (Männer) und von 4,000 kp Gewicht (Frauen) benutzt. Welche Durchmesser müssen diese Kugeln haben, wenn sie als Vollkugeln aus Eisen mit der Wichte $\gamma = 7{,}8 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$ hergestellt sind? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem gemessenen Wert!

2. Genormte Rundkolben aus Glas (Kugelform mit Hals) haben nach den DIN-Bestimmungen u. a. folgende Durchmesser: 9 cm, 10,5 cm, 12 cm. Der nutzbare Inhalt wird mit 300 cm³, 500 cm³, 750 cm³ angegeben.
   a) Wieviel beträgt der Rauminhalt der Kolben ohne Hals?
   b) Wieviel Prozent des Raumes bleiben ungenutzt?
   c) Wie hoch steht die Flüssigkeit im Rundkolben?

3. Eine Holzkugel von 11,1 cm Durchmesser taucht 6,9 cm tief in Wasser ein.
   a) Wie groß ist die unbenetzte Fläche?
   b) Wie groß ist die Wichte des Holzes?

4. Der Durchmesser eines kugelförmigen Ballons, der im Wetterdienst als Ballon für Radiosonden verwendet wird, beträgt 1,2 m.
   a) Wieviel Quadratmeter Stoff braucht man zu seiner Hülle?
   b) Wieviel Gas faßt er?

5. Das Gewicht einer Korkkugel von 2 m Durchmesser ist zu bestimmen. Die Wichte des Korks beträgt $0{,}2 \frac{\text{F}}{\text{cm}^3}$.

6. Eine Kugel mit dem Radius $r = 32$ cm wird durch eine Ebene geschnitten, die den Abstand $a = 24$ cm vom Mittelpunkt der Kugel hat.
   a) Wie groß ist die Fläche der kleineren Kugelhaube, wie groß ist das Volumen des kleineren Kugelabschnittes?
   b) Bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Kalotten und der beiden Kugelabschnitte!

7. Wie groß ist das Volumen einer Kugelschicht, die aus einer Kugel von 130 mm Durchmesser durch zwei Ebenen mit den Abständen 23 mm und 47 mm vom Mittelpunkt herausgeschnitten wird? (Es gibt 2 Lösungen!)

8. Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muß der innere Durchmesser der Kelle mindestens sein, wenn sie 1 l Flüssigkeit fassen soll?

9. Eine plankonvexe sphärische Linse wiegt 178,2 p, ihr Durchmesser ist 90 mm, ihre größte Dicke 15 mm. Welche Wichte hat die Glassorte, aus der die Linse besteht?
   Unter einer sphärischen Linse versteht man eine solche, deren gekrümmte Begrenzungsflächen Kugelhauben sind. Die hier gemeinte Linse hat die Form eines Kugelsegments, ihre Oberfläche setzt sich aus einer Kalotte und einem Kreis zusammen.

10. Welchen Durchmesser hat eine Kugel, auf der eine Zone von 18 cm Höhe einen Flächeninhalt von 3960 cm² hat?

11. a) Wieviel Kugeln von 1 cm Durchmesser lassen sich aus einer Vollkugel von 10 cm Durchmesser durch Guß, also ohne wesentlichen Materialverlust herstellen?
    b) In welchem Verhältnis steht die gesamte Oberfläche aller kleinen Kugeln zur Oberfläche der ursprünglichen Kugel?

12. Wieviel Kugeln von 5 mm Durchmesser können aus einer Menge Zinn von 1 kp Gewicht gegossen werden $\left(\gamma = 7{,}3 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$?

13. Es ist der Durchmesser einer Messingkugel von 828 kp Gewicht zu berechnen.

14. Eine bikonvexe sphärische Linse mit beiderseits gleicher Krümmung hat 70 mm Durchmesser, sie ist in der Mitte 16 mm stark. Die Linse besteht aus quarzhaltigem Glas von der Wichte 2,65 $\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.

Es werden 37 solcher Linsen angefertigt. Wieviel Rohglas ist erforderlich, wenn mit einem Verlust von 40 % gerechnet werden muß?

15. In der Werkstoffprüfung spielt die Härteprüfung nach Brinell eine wichtige Rolle. Unter der Härte eines Werkstoffes versteht man den Widerstand, den er dem Eindringen eines Körpers entgegensetzt.

Bei der Brinellhärteprüfung wird eine gehärtete Stahlkugel mit einer bestimmten Kraft, die man als Prüfkraft bezeichnet, in die Oberfläche des Prüfkörpers eingedrückt. Die Größe des entstehenden Eindrucks, also die Größe der Kalotte, dient zur Bestimmung der Härte (Abbildung 132). Diese wird durch $HB = \frac{P}{F}$ berechnet, wobei die Prüfkraft P in kp und die Fläche F der Kalotte in mm² gemessen werden. Die Brinellhärte erhält deshalb die Maßeinheit $\frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}$. Leiten Sie die Formel $HB = \frac{2P}{\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})}$ her! Die Brinellhärte wird also aus den gegebenen Werten a, P und dem gemessenen Wert b, dem Durchmesser der Kalotte berechnet. Die Eindrucktiefe h kann nur ungenau bestimmt werden, sie wird deshalb aus der Rechnung eliminiert. In der Praxis wird mit Tabellen gearbeitet.

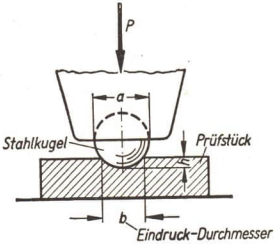


Abb. 132

Mathematische Schüleraufträge

1. Während der Traktor-Fahrschule werden Sie besonders auf das Beachten der Verkehrs- und der Betriebssicherheit Ihres Fahrzeuges hingewiesen. Dabei ist die ständige Kontrolle der Kugelbolzen in der Lenkung des Traktors wichtig. Berechnen Sie die Oberfläche, das Volumen und das Gewicht der Kugelbolzen verschiedener Fahrzeugtypen!

Vergleichen Sie! Kugelbolzen werden auch auf Scherfestigkeit beansprucht. Rechnen Sie!

2. In der Technik werden u. a. Gleit-, Rollen- und Kugellager unterschieden. Berechnen Sie das Gewicht der Kugeln in einem Kugellager! Durch Verschleiß sind die „Kugeln" unrund geworden und sollen eingeschmolzen werden. Welche größte Kugel ließe sich nun herstellen, wenn Sie für Materialschwund und Bearbeitungsabfall 11% Verlust einplanen?

38. Zusammengesetzte krummflächige Körper

Aus den von uns besprochenen einfachen krummflächigen Körpern, den Zylindern, Kegeln und Kugeln, setzen sich viele Körper zusammen, die in der Praxis vorkommen. Täglich rollen lange Güterzüge durch die DDR, die Rohstoffe in unsere volkseigenen Betriebe bringen oder Zwischenprodukte und Fertigfabrikate befördern. Für die Erzeugnisse unserer chemischen Industrie gibt es dafür mitunter besondere Wagen, zum

Beispiel solche mit Behältern, die aus einem stehenden Zylinder mit aufgesetztem Kegelstumpf bestehen, oder solche, die aus einem liegenden Zylinder und angesetzten Kugelabschnitten zusammengesetzt sind. Immer mehr Maschinen werden konstruiert, die den Bauern die schwere Arbeit auf den Feldern erleichtern. Auch die Teile dieser Maschinen sind aus verschiedenen geometrischen Körpern zusammengesetzt. Auf der Leipziger Messe finden wir jedes Jahr Neukonstruktionen und Verbesserungen der verschiedensten Maschinen für unsere Industrie. Auch bei ihnen lassen sich die einzelnen Teile auf geometrische Grundkörper zurückführen.

Die moderne Leichtbauweise zwingt dazu, jedes Teil so zu konstruieren, daß sein Gewicht möglichst gering wird. Dazu ist die Bestimmung des Volumens nötig, aus dem mit Hilfe der Wichte des Stoffes das Gewicht berechnet werden kann. Oft ist es auch erforderlich, die Oberfläche zu berechnen, wenn der Materialbedarf für die Verchromung oder eine andere Veredlung der Oberfläche ermittelt werden soll.

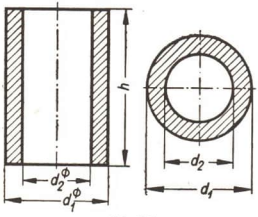


Abb. 133

Die zusammengesetzten krummflächigen Körper werden genauso wie die zusammengesetzten ebenflächigen berechnet: Man betrachtet sie dazu als Summe oder Differenz einfacher krummflächiger Körper. Die Differenzbildung ist dann erforderlich, wenn beispielsweise aus einer Kugel ein Zylinder ausgebohrt wurde und der Restkörper berechnet werden soll. Auch diesen wollen wir einen zusammengesetzten Körper nennen.

Wegen ihrer häufigen Verwendung wollen wir zwei Körper dieser besonderen Art etwas näher betrachten. Es handelt sich um den **Hohlzylinder** und die **Hohlkugel**. Die Abbildung 133 zeigt die Achsenschnitte beider Körper.

Das **Volumen des Hohlzylinders** ergibt sich als Differenz

$$V = \frac{\pi}{4} d_1^2 h - \frac{\pi}{4} d_2^2 h = \frac{\pi}{4} h (d_1^2 - d_2^2)$$

Der äußere und der innere Durchmesser werden mit der Schieblehre gemessen. Diese Formel ist wegen der enthaltenen Differenz $d_1^2 - d_2^2$ für das Rechnen mit Rechenstab oder Logarithmentafel wenig geeignet. Für diese Zwecke wird sie deshalb meist in der umgestalteten Form

$$V = \frac{\pi}{4} h (d_1 + d_2)(d_1 - d_2)$$

verwendet.

Diese Form kann geometrisch gedeutet werden als Prisma, dessen Grundfläche die mittlere Hohlzylinderschicht, also der Mantel eines Zylinders mit dem Durchmesser $\frac{d_1 + d_2}{2}$, und dessen Höhe gleich der Wandstärke ist.

Der mittlere Mantel ist $M = \frac{d_1 + d_2}{2} \pi h$, die Wandstärke beträgt $\frac{d_1 - d_2}{2}$. Das Prisma hat dann das Volumen:

$$V = \frac{d_1 + d_2}{2} \pi h \frac{d_1 - d_2}{2}$$

Das Volumen stimmt mit dem des Hohlzylinders überein.

Bei der **Hohlkugel** ist die Größe des Volumens entsprechend dem des Hohlzylinders als Differenz zweier Kugeln zu bestimmen.

$$V = \frac{\pi}{6} d_1^3 - \frac{\pi}{6} d_2^3$$

$$V = \frac{\pi}{6} (d_1^3 - d_2^3)$$

An zwei Beispielen soll nun gezeigt werden, wie die Berechnung anderer zusammengesetzter krummflächiger Körper durchgeführt werden kann. Auch hier ist die Überschlagsrechnung nötig, auch hier muß der Rechnungsweg gründlich durchdacht werden, damit sich die numerische Rechnung vereinfacht. Vor allem ist die Multiplikation und ebenso die Division mit der irrationalen Zahl π möglichst nur einmal und an das Ende der numerischen Rechnung zu legen. Dazu zwingt schon die Tatsache, daß der in der Rechnung verwendete Wert für π in jedem Falle ungenau und meist auch für die Rechnung unbequem ist. Nach der Rechnung ist das Ergebnis unbedingt daraufhin zu überprüfen, ob es möglich ist.

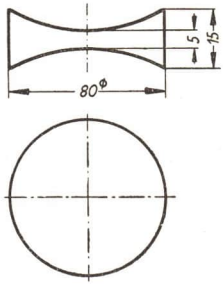


Abb. 134

Die Abbildung 134 zeigt eine bikonkave sphärische Linse. Sie ist dadurch entstanden, daß aus einem Zylinder zwei Kugelabschnitte herausgeschliffen wurden. Wir berechnen das Gewicht und die Oberfläche der Linse. Wir nehmen an, daß sie aus einem schweren optischen Glas mit der Wichte $\gamma = 3{,}1 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$ besteht.

a) Beim Überschlagen des Gewichtes vergleichen wir die Linse mit einem annähernd so großen Zylinder, der einen Radius von 4 cm, eine Höhe von 1 cm hat und aus einem Stoffe mit der Wichte $\gamma = 3 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$ besteht.
Sein Gewicht wäre

$$P = (4^2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 3)\, p \approx 144 \text{ p.} \quad (\text{bei } \pi \approx 3)$$

Das Gewicht in p ist das Produkt aus dem Volumen in cm^3 und der Wichte in $\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.
Das Volumen wird gefunden als Differenz aus dem Volumen des Zylinders und dem der beiden Kugelabschnitte.

$$P = \gamma (V_1 - 2\, V_2)$$

V_1 ist ein Zylinder mit $d = 8$ cm und $h_1 = 1{,}5$ cm; V_2 ist ein Kugelabschnitt mit $\varrho = 4$ cm und $h_2 = 0{,}5$ cm.

Diese Überlegungen führen auf die Gleichung

$$P = 3{,}1 \left[\frac{\pi}{4} 8^2 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 0{,}5 (3 \cdot 4^2 + 0{,}5^2)\right] \text{p}$$

Wir formen so um, daß nur eine Multiplikation mit π erforderlich ist

$$P = 3{,}1\, \pi \left(16 \cdot 1{,}5 - \frac{1}{6} \cdot 48{,}25\right) \text{p}$$

$$= 3{,}1\, \pi\, (24 - 8{,}04)\, \text{p} = 3{,}1 \cdot \pi \cdot 15{,}96 \text{ p}$$

Eine logarithmische Rechnung führt am schnellsten zum Ziel. Das Gewicht ist x p, $\lg x = 0.4914 + 0.4971 + 1.2030 = 2.1914$.

Ergebnis: Das Gewicht ergibt sich zu 155,4 p.

Ein Vergleich dieses Rechenergebnisses mit dem durch Überschlag bestimmten Wert bestätigt uns, daß unser errechneter Wert möglich ist.

b) Um die Oberfläche der Linse zu überschlagen, wird statt der Linsenoberfläche die Oberfläche des ursprünglichen Zylinders berechnet.

$$O = 8 \cdot \pi \cdot 1{,}5\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 4^2 \cdot \pi\ \text{cm}^2 = 44\,\pi\ \text{cm}^2$$

das sind bei $\pi \approx 3$ rund 130 cm². Dann erfolgt die genaue Berechnung.

Die Oberfläche der Linse setzt sich zusammen aus dem Mantel des Zylinders mit $d = 8$ cm, $h_1 = 1{,}5$ cm und der Fläche der beiden Kalotten, die die Höhe $h_3 = 0{,}5$ cm und den Kugelradius $r = x$ cm haben. x wird errechnet aus $\varrho = 4$ cm und $h_3 = 0{,}5$ cm. Wir erhalten

$$4^2 = 0{,}5\,(2x - 0{,}5)$$

und daraus $2x - 0{,}5 = 32$, was zu $x = 16{,}25$ führt.
Mit Hilfe dieses Wertes kann die Oberfläche $O = y$ cm² berechnet werden.

$$O = (8\,\pi \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2\,\pi \cdot 16{,}25 \cdot 0{,}5)\ \text{cm}^2$$

Auch hier formen wir zweckmäßig um

$$O = \pi\,(8 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2 \cdot 16{,}25 \cdot 0{,}5)\ \text{cm}^2 = 44{,}5\,\pi\ \text{cm}^2 = y\ \text{cm}^2$$

Wir berechnen y wieder logarithmisch.

$\lg y = 1.6484 + 0.4971 = 2.1455$; y ergibt sich zu 139,8.

Die Oberfläche der Linse ist 139,8 cm² groß.

Auch hier zeigt ein Vergleich mit dem Ergebnis des Überschlags, daß das errechnete Ergebnis möglich ist.

Als zweites Beispiel wird das Volumen eines aus Rundstahl gedrehten Bolzens ermittelt, dessen Achsenschnitt die Abbildung 135 zeigt. Wir führen zunächst eine Überschlagsrechnung durch. Dabei ersetzen wir den Bolzen durch einen Zylinder mit dem geschätzten Radius von 7 mm und der Länge 100 mm. Wir rechnen mit dem Wert 3 für π und erhalten $V = (7^2 \cdot \pi \cdot 100)\ \text{mm}^3 \approx (50 \cdot 3 \cdot 100)\ \text{mm}^3 = 15000\ \text{mm}^3$. Zur genauen Berechnung des Volumens ist es günstig, die Maße in cm umzuwandeln, dadurch wird das Volumen in Kubikzentimetern gewonnen. Es muß in der Größenordnung von 15 cm³ liegen. Wieder wird zunächst der Rechnungsgang genau durchdacht. Der Bolzen setzt sich zusammen aus einer Halbkugel mit dem Durchmesser $d_1 = 2$ cm; einem Kegelstumpf mit den Durchmessern $d_1 = 2$ cm und $d_2 = 1{,}5$ cm sowie der Höhe $h_1 = 3{,}5$ cm; einem Zylinder mit dem Durchmesser $d_3 = 1{,}2$ cm und der Höhe $h_2 = 4$ cm und aus einem Kegel mit dem Durchmesser $d_3 = 1{,}2$ cm und der Höhe h_3.

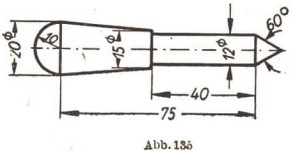


Abb. 135

Diese Höhe soll nach der Zeichnung offenbar Höhe in einem gleichseitigen Dreieck sein. Als solche läßt sie sich mit dem Lehrsatz des Pythagoras berechnen:

$$h_3^2 = d_3^2 - \left(\frac{d_3}{2}\right)^2; \quad h_3 = \sqrt{\frac{3\,d_3^2}{4}} = \frac{d_3}{2}\sqrt{3}$$

Nach diesen Vorüberlegungen kann das Volumen bestimmt werden.

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\,\pi d_1^3 + \frac{1}{3}\,\pi h_1\left(\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_1 d_2}{2\cdot 2} + \frac{d_2^2}{4}\right) + \pi h_2\frac{d_2^2}{4} + \frac{1}{3}\,\pi\frac{d_3^2}{4}h_3$$

Das 3. Glied der rechten Seite wird mit 3 erweitert und $\frac{\pi}{12}$ als gemeinsamer Faktor ausgeklammert.

$$V = \frac{\pi}{12}\left[d_1^3 + h_1(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2) + 3\,h_2 d_3^2 + d_3^2 h_3\right]$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte führt zu:

$$V = \frac{\pi}{12}\left[2^3 + 3{,}5\,(2^2 + 2\cdot 1{,}5 + 1{,}5^2) + 3\cdot 4\cdot 1{,}2^2 + 1{,}2^2\cdot\frac{1{,}2}{2}\sqrt{3}\right]\text{cm}^3$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(8 + 3{,}5\cdot 9{,}25 + 12\cdot 1{,}44 + 1{,}44\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{3}\right)\text{cm}^3$$

$$= \frac{\pi}{12}\,(8 + 32{,}375 + 17{,}28 + 1{,}496)\,\text{cm}^3 \approx \frac{\pi}{12}\cdot 59{,}15\,\text{cm}^3$$

Die weitere Rechnung wird zweckmäßig logarithmisch durchgeführt. Das Volumen beträgt x cm³.

$$\begin{aligned} \lg\pi &= 0.4971 \\ \lg 59{,}15 &= 1.7720 \\ \hline & \ 2.2691 \\ \lg 12 &= 1.0792 \\ \hline \lg x &= 1.1899 \end{aligned}$$

$$x = 15{,}49 \qquad V = 15{,}49\ \text{cm}^3$$

Das Volumen des Bolzens beträgt annähernd 15,5 cm³.

Es zeigt sich, daß die Überschlagsrechnung einen recht brauchbaren Wert lieferte, der für grobe Berechnungen ausgereicht hätte. Bei der Berechnung von zusammengesetzten Körpern wird man im allgemeinen ähnlich verfahren können, wie es in den beiden Beispielen geschah. Grundsätzlich ist zu beachten, daß vor der Rechnung alle Längen, die verwendet werden, auf dieselbe Längeneinheit gebracht werden, da dadurch zugleich die Maßeinheit des Ergebnisses festgelegt wird. Die Berechnung selbst muß so durchgeführt werden, daß die numerischen Berechnungen auf ein Mindestmaß beschränkt werden. Die Genauigkeit des Ergebnisses richtet sich nach der Genauigkeit der gegebenen Größen. Es ist falsch, durch numerisches Rechnen mit möglichst vielen Dezimalstellen, z. B. bei π, eine Genauigkeit vorzutäuschen, die gar nicht vorhanden sein kann. Besonders wichtig ist, daß durch eine Überschlagsrechnung mit zweckmäßig veränderten Werten vor der Berechnung die Größenordnung des Ergebnisses ermittelt und nach der Ausrechnung überprüft wird, ob der gefundene Wert richtig sein kann.

Aufgaben

1. Wieviel wiegt eine Buchse aus Bronze mit dem Außendurchmesser 80 mm, dem Innendurchmesser 60 mm und der Länge 120 mm? Die Wichte der Bronze ist $8{,}7\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$. (Unter einer Buchse versteht man in der Technik einen Hohlzylinder.)

2. Wie schwer ist der nach DIN 322 genormte Schmierring aus Messing (Abb. 136)? Die Wichte des Messings ist $8{,}5\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.

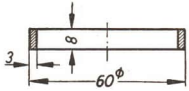


Abb. 136

3. Wieviel wiegt ein 3,50 m langes Stahlrohr vom Außendurchmesser 22 mm und der Wandstärke 1,5 mm $\left(\gamma = 7{,}85\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$?

4. Eine gußeiserne Kugel mit der Wandstärke 1,5 cm hat den äußeren Umfang von 21,7 cm. Wie schwer ist sie? Die Wichte des Gußeisens beträgt $7{,}2\ \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.

5. Aus 125 cm³ Metall soll eine Hohlkugel mit dem inneren Durchmesser von 20 cm gegossen werden. Wie groß ist die äußere Oberfläche dieser Kugel?

6. Aus einer Walze von 10 cm Radius und 15 cm Höhe ist in Richtung der Achse ein Kegel herausgebohrt, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen, wenn die Bohrung 5 cm tief in die Walze geht.

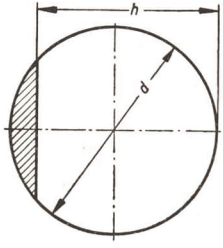


Abb. 137

7. Von einer Welle mit dem Durchmesser $d = 80$ mm wird das schraffierte Stück abgefräst, so daß $h = 70$ mm ist. Wieviel Prozent beträgt der dabei entstehende Materialabfall (Abb. 137)?

8. Wie groß ist das Volumen des kegelig ausgebohrten Werkstückes mit den Maßen der Abbildung 138?

9. Eine halbkugelförmige Schale vom äußeren Durchmesser $d = 90$ cm und der Wandstärke $s = 2$ cm soll verchromt werden. Wie groß ist die Oberfläche?

10. Eine Kugel von 170 mm Durchmesser ist zentrisch mit einem Bohrer von 80 mm durchbohrt.

a) Wie groß ist das Volumen der ausgebohrten Kugel?

b) Wieviel Prozent des Materials der Kugel gingen bei der Bohrung verloren?

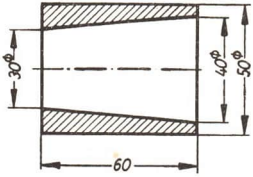


Abb. 138

11. In der Bekanntmachung der sowjetischen Nachrichtenagentur Tass über den Start des ersten Erdsatelliten hieß es: „Am 4. Oktober 1957 wurde der erste Erdsatellit in der Sowjetunion mit Erfolg abgeschossen. Der Satellit hat die Form einer Kugel mit einem Durchmesser von 58 cm und wiegt 83,6 kg."

Welche Wandstärke würde eine gleichschwere und gleichgroße Hohlkugel aus Eisen mit der Dichte $7{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ haben?

12. Ein Körper besteht aus einem Zylinder, der durch eine Halbkugel abgeschlossen wird. Die Höhe des Gesamtkörpers ist 115 cm und der gemeinsame Durchmesser 70 cm.

a) Es ist der Achsenschnitt des Körpers zu zeichnen.

b) Volumen und Oberfläche des Gesamtkörpers sind zu berechnen.

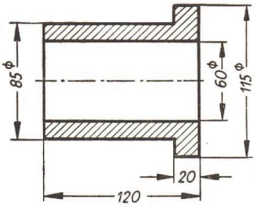


Abb. 139

13. Auf einem Zylinder mit der Höhe $h_1 = 3$ cm ist ein Kegel mit gleicher Grundfläche und der Höhe $h_2 = 6$ cm aufgesetzt.

a) Es ist der Grundkreisradius r zu berechnen, wenn das Volumen V des zusammengesetzten Körpers 65 cm³ beträgt.

b) Der Mantel des Gesamtkörpers ist zu berechnen.

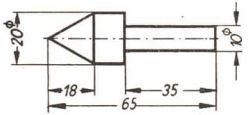


Abb. 140

14. Aus einem 75 mm langen runden Eisenstab von 20 mm Durchmesser soll ein Senklot hergestellt werden, das die Form einer Walze mit zwei aufgesetzten Kegeln hat. Der eine Kegel hat 20 mm, der andere 5 mm Höhe.

a) Wie groß ist das Volumen des Senklotes?

b) Wieviel wiegt der Abfall, wenn die Wichte des Eisens $7{,}8\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$ beträgt?

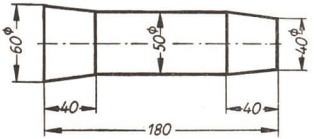


Abb. 141

15. Eine Milchkanne setzt sich zusammen aus einem Zylinder von 30 cm Durchmesser und 20 cm Höhe, einem darüberliegenden Kegelstumpf von 10 cm Seitenlänge und dem kleineren Durchmesser von 18 cm sowie einem darauf sitzenden Zylinder von 10 cm Höhe. Die Kanne soll 20 l fassen. Es ist nachzuprüfen, ob diese Angabe stimmt.

16. Das Volumen und die Oberfläche der in Abbildung 139 dargestellten Buchse ist zu berechnen.

17. Welches Gewicht hat der aus Schnellstahl $\left(\gamma = 8{,}1\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$ hergestellte Spitzsenker, den Abbildung 140 zeigt?

18. Es ist das Gewicht eines Kreuzkopfzapfens zu berechnen. Die Wichte des Materials beträgt $7{,}85\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$, die Maße sind der Abbildung 141 zu entnehmen!

19. Es ist das Gewicht von 1000 Stück des in Abbildung 142 dargestellten Nietes aus Eisen zu berechnen.

$\left(d = 13\,\text{mm};\ l = 70\,\text{mm};\ r = 11\,\text{mm};\ h = 8{,}5\,\text{mm};\ \gamma = 7{,}8\,\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}\right)$

Abb. 142

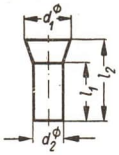


Abb. 143

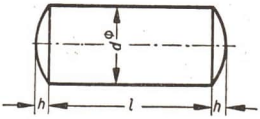


Abb. 144

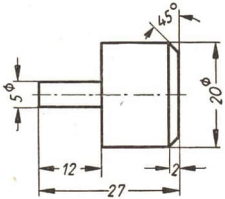


Abb. 145

20. Das Gewicht von 64 Bolzen aus Eisen ist nach Abbildung 143 zu berechnen.
($d_1 = 9$ mm; $d_2 = 6$ mm; $l_1 = 11$ mm; $l_2 = 15{,}5$ mm; $y = 7{,}8 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$)

21. Ein zylindrischer Stahlblechbehälter ist an seinen beiden Enden durch Kalotten abgeschlossen. Wie schwer ist der leere Behälter, wenn er die Maße $d = 1{,}20$ m, $l = 2{,}50$ m und $h = 20$ cm hat? 1 m² Blech soll 24 kp wiegen (Abb. 144).

22. Das Belastungsgewicht nach Abbildung 145 soll allseitig verchromt werden. Zur Feststellung des Materialverbrauchs soll die Oberfläche berechnet werden.

23. Beim Hartverchromen betragen die Metallkosten für eine Schichtdicke von 0,1 mm etwa 0,20 DM je Quadratdezimeter. Berechnen Sie die Metallkosten für das Hartverchromen von 65 Druckplatten (Abb. 146), wenn die Schichtdicke 0,075 mm betragen soll!

24. a) Es ist der Blechverbrauch bei Herstellung eines Kruges nach Abbildung 147 zu ermitteln!

b) Wie groß ist das Volumen des Kruges?
($r_1 = 5$ cm; $r_2 = 10$ cm; $r_3 = 4{,}5$ cm; $s_1 = 28$ cm; $s_2 = 8$ cm; $s_3 = 7$ cm)

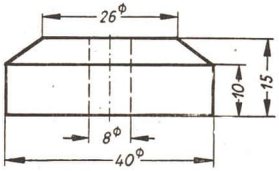


Abb. 146

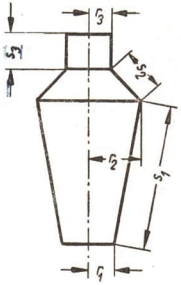


Abb. 147

Mathematische Schüleraufträge

1. Betrachten Sie die Körnerspitze am Reitstock einer Drehmaschine oder einer Fräsmaschine! Messen, konstruieren und rechnen Sie!
Anleitung: Hier sind absichtlich keine Fragen gestellt worden. Wählen Sie sich selbst ein mathematisches Problem, und untersuchen Sie es!

2. Die Kraftstofftanks der verschiedensten Fahrzeugtypen sind nicht standardisiert. Oft findet man „unförmige" Behälter, die ihre Form den geringen Platzverhältnissen am Fahrzeug

unterordnen mußten. Diese Tatsache ist besonders bei „Fallbenzin" verbreitet. Berechnen Sie das Fassungsvermögen eines Kraftstoffbehälters in l! Stellen Sie eine Meßsonde her, an deren Strichteilung der jeweils im Tank vorhandene Kraftstoff gemessen werden kann!

Anleitung: Die Meßsonde darf nicht aus Holz hergestellt werden, da Holz sehr kapillar ist und dadurch Meßfehler auftreten würden. Auf der Meßsonde müssen die Eichstriche so eingefeilt werden, daß ein Ablesen von Liter zu Liter möglich ist.

3. Untersuchen Sie ein Rollenlager (kein Kugellager), und errechnen Sie das Volumen einer Rolle! Entwickeln Sie aus der Volumensumme aller Rollen eine größte Rolle, wenn Sie **a)** den ursprünglich gegebenen Durchmesser und **b)** die ursprünglich gegebene Länge beibehalten! Konstruieren und berechnen Sie ein Rollenlager, das im lichten Durchmesser 50 mm mißt! Welches Gewicht hat ein Rollenlager (Käfig und Rollen)?

4. Tritt an einem Fahrzeug ein Achsenbruch auf, so wird der gebrochene Achsschenkel ausgewechselt. Berechnen Sie das Gewicht eines Achsschenkels von einem Fahrzeug, an dessen Reparatur Sie beteiligt sind!

39. Aufgaben zur Übung und Wiederholung

1. Eine LPG legt für Rübenblätter und Zuckerrübenschnitzel Tiefsilos an, wie sie Abbildung 148 im Querschnitt zeigt. Die Außenbreite eines Silos beträgt 4,00 m. Die Silos werden bis zum Rand gefüllt. Durch den Gärprozeß setzt sich die Masse und hat nach der „Reife" nur noch eine Höhe von etwa 3,00 m. Für eine GVE (Großvieheinheit) Rind werden als Tagesbedarf etwa 25 kg angenommen. Man rechnet im Durchschnitt mit 150 Winterfütterungstagen. 1 m³ Masse wiegt ungefähr 750 kg. In der LPG handelt es sich um einen 60er-Stall (60 Rinder).

a) Wie lange reicht der Vorrat, der in einem Silo eingelagert wird?

b) Wieviel Silos muß die LPG anlegen, damit der gesamte Stall während des Winters versorgt werden kann?

c) Wieviel Kubikmeter Beton werden zum Bau der Silos benötigt?

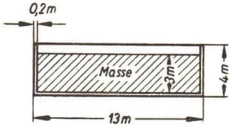


Abb. 148

2. Für den Mais, der nicht auf einmal geerntet wird, ist ein Fahrsilo geplant. Der Querschnitt der in einem solchen Silo gespeicherten Masse ist trapezförmig. Die Lastwagenanhänger werden in den Silo gefahren, entladen, und die Masse wird mit einer Raupe festgewalzt. Die Auf- und Abfahrten sind schräg, dadurch ergibt sich der trapezförmige Querschnitt. Die Breite der Anlage beträgt etwa 4,00 m. Die anderen Maße können aus der Abbildung 149 entnommen werden.

a) Wievel Kubikmeter enthält ein solcher Fahrsilo?

b) Wieviel Silos werden für einen 60er-Stall (siehe Aufgabe 1) benötigt?

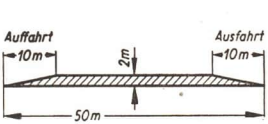


Abb. 149

3. Die Futterrüben werden eingemietet. Der Querschnitt der Rübenmiete ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Maße aus Abbildung 150 entnommen werden können. Die Länge der Miete

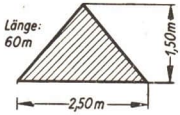


Abb. 150

beträgt annähernd 60 m. Ein Kubikmeter Rüben wiegt etwa 7,1 dt. Der Verbrauch je Kuh und Tag beträgt 20 kg. Wieviel Mieten werden benötigt, um die Tiere 150 Tage im Winter zu füttern?

4. Das Heu wird in einer 30 m langen Scheune eingelagert. Den Querschnitt des Lagerraums zeigt Abbildung 151. Wieviel Dezitonnen Heu können eingelagert werden, wenn das Gewicht eines Kubikmeters Wiesenheu, das lose aufgespeichert wird, etwa 70 kg beträgt?

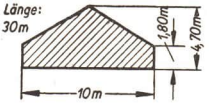


Abb. 151

5. Als Jauchetonnen oder als Wassertonnen für die Weide werden zylinderförmige Tonnen aus Zink mit einem Durchmesser von 75 cm und einer Länge von 2,80 m hergestellt.
   a) Wieviel Kubikmeter faßt eine Tonne?
   b) Wieviel solcher Tonnen decken den Tagesbedarf einer Herde von 40 GVE, wenn für eine GVE 40 Liter gerechnet werden?

6. Eine andere LPG verwendet Holztonnen, die die Form eines Kegelstumpfes haben. Der Durchmesser der größeren Kreisfläche beträgt 0,80 m, der Durchmesser der kleineren 0,55 m. Die Tonne ist 3,50 m lang.
   Wieviel Liter Wasser faßt eine solche Tonne?

7. Eine Mischtrommel für Beton oder Mörtel hat die Abmessungen der Abbildung 152. (Die Darstellung ist vereinfacht.)
   a) Berechnen Sie den größten Durchmesser aus den angegebenen Maßen!
   b) Prüfen Sie durch Rechnung nach, ob die Angabe stimmt, daß der Mischer 250 l Masse faßt!
   c) Ein Neubau von 12 Wohneinheiten wird auf 475 Kubikmeter Mauerwerk veranschlagt. Wieviel Trommeln Mörtel werden dazu benötigt, wenn für ein Kubikmeter Mauerwerk etwa 300 l Mörtel erforderlich sind?
   d) Bei dem Neubau sind 700 Quadratmeter Außenputz und 4000 Quadratmeter Innenputz auszuführen. Wieviel Trommeln sind dazu nötig, wenn der Quadratmeter Außenputz zu etwa 25 Liter und der Quadratmeter Innenputz zu etwa 17 Liter Mörtel veranschlagt wird?

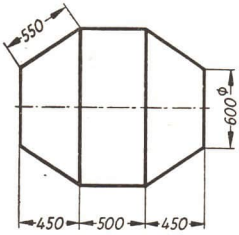


Abb. 152

8. Die Reichsbahn verwendet zur Beförderung von Mineralöl vierachsige Kesselwagen in Leichtbauweise. Der Kessel dieser Wagen hat die Abmessungen der Abbildung 153.
   a) Welches Volumen hat der Kessel?
   b) Wieviel Quadratmeter Material werden zu seiner Herstellung benötigt?

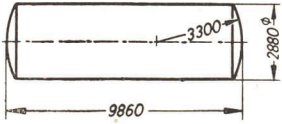


Abb. 153

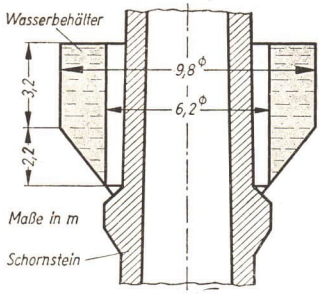


Abb. 154

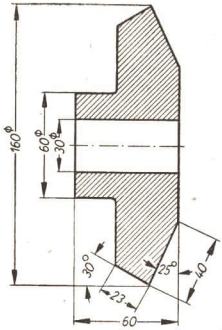


Abb. 155

9. Um Raum zu sparen und um die Baukosten niedrig zu halten, wird ein Wasserbehälter ringförmig um einen Fabrikschornstein gebaut. Wieviel Kubikmeter Wasser faßt dieser Behälter bei den in der Abbildung 154 angegebenen Maßen?

10. In einer Textilmaschinenfabrik wird ein Zahnrad nicht mehr aus Gußeisen sondern aus Polyamid hergestellt. Räder aus Plasten laufen geräuschärmer als solche aus Eisen. Außerdem wird eine Gewichtsersparnis erzielt, da die Wichte des Polyamids 1,6 $\frac{p}{cm^3}$ beträgt, während die Wichte des Gußeisens 7,26 $\frac{p}{cm^3}$ ist.

Wie groß ist die Gewichtsersparnis bei dem Rohling eines Zahnrads, der in Abbildung 155 dargestellt ist?

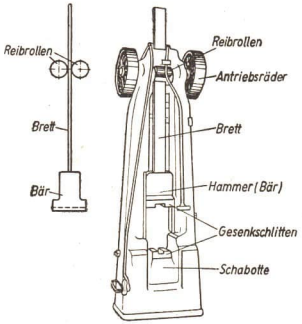


Abb. 156

11. Die moderne Technik ist bemüht, durch spanlose Formung Material zu sparen. Ein Verfahren zur spanlosen Formgebung ist das Schmieden, das in den großen Schmiedewerken unserer Republik mit Hilfe von Fallhämmern erfolgt. Die Abbildung 156 zeigt einen Brettfallhammer. Seine Größe wird angegeben durch das Gewicht des Hammers (Bärgewicht). Der Hammer ist an einem Brett befestigt, das durch zwei mit Motorkraft betriebenen Rollen hochgezogen wird. Der Hammer fällt dann durch sein Eigengewicht auf die Schabotte herunter und liefert durch diesen Fall die Schmiedeenergie. Die Schabotte trägt einen Gesenk-

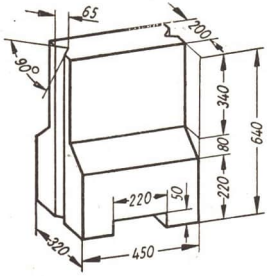


Abb. 157

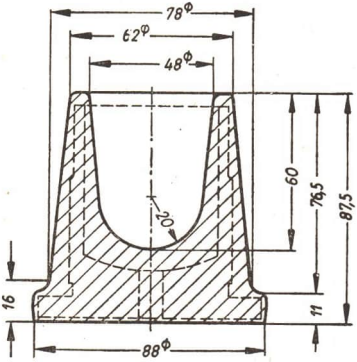


Abb. 158

schlitten, der das Gesenk aufnimmt. In dieses Gesenk wird das weiche Eisen hineingeschlagen. Dadurch erhält es die gewünschte Form.

Die Abbildung 157 zeigt die vereinfachte Darstellung des Hammerbärs eines Brettfallhammers von 500 kp Bärgewicht.

Welche Wichte muß das Material haben, aus dem der Hammerbär besteht, wenn er 500 kp wiegt?

12. Die Abbildung 158 zeigt den Rohteil einer Verschraubung, der geschmiedet werden soll.

Berechnen Sie das Gewicht des Rohteils, wenn er aus Stahl mit der Wichte $7{,}8\ \frac{p}{cm^3}$ geschmiedet wird!

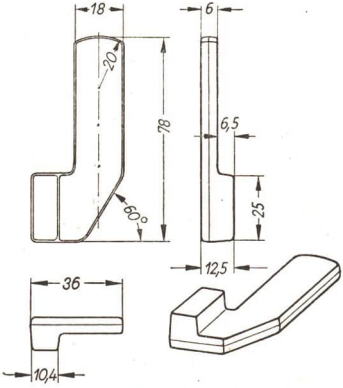


Abb. 159

13. Berechnen Sie das Gewicht des in Abbildung 159 dargestellten Rohteils eines Sicherungswinkels, der als Genauschmiedestück hergestellt werden soll! Die Wichte des Materials ist wieder $7{,}8\ \frac{p}{cm^3}$.

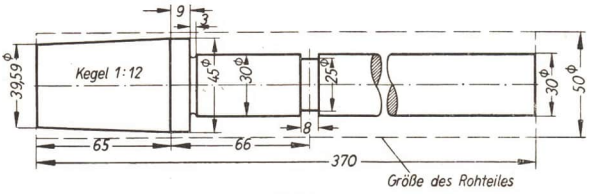


Abb. 160

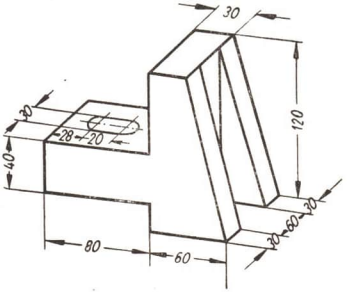


Abb. 161

14. Bei der spanenden Formgebung entsteht viel Materialabfall. Die Abbildung 160 zeigt eine Halbachse, die aus einem Rohteil gedreht wird.

Berechnen Sie den Abfall in Prozenten, der beim Drehen entsteht! (Die Einschnürung zwischen Kegel und Zylinder kann dabei vernachlässigt werden.)

15. Das Spannstück, das in Abbildung 161 dargestellt ist, soll durch eine besondere Oberflächenbehandlung veredelt werden.

a) Berechnen Sie die Oberfläche des Spannstücks!

b) Zeichnen Sie das Spannstück in drei Ansichten!

16. Im Kombinat *Schwarze Pumpe* wurden zur Bereitstellung des benötigten Wassers große Behälter in Kugelform errichtet. Bei solchen Behältern ist es besonders nötig, die Beziehung zwischen der Höhe des Wasserstandes und der Wassermenge zu ermitteln.

a) Berechnen Sie die Fassungskraft eines kugelförmigen Behälters von 15 m Durchmesser!

b) Berechnen Sie die vorhandene Wassermenge bei einem Wasserstand von 0,50 m, 1,00 m, 1,50 m usw. bis zum höchsten Stande!

c) Tragen Sie die Wasserstände auf der x-Achse und die Wassermengen auf der y-Achse eines Koordinatensystems auf!
(Wählen Sie günstige Maßstäbe!) Verbinden Sie die einzelnen Punkte zu einer Kurve!

d) Versuchen Sie, eine allgemeine Lösung des Problems (Abhängigkeit des Flüssigkeitsstandes von der Flüssigkeitshöhe in einem kugelförmigen Behälter) zu gewinnen!

17. Ein auf der Spitze stehender Kegel von 12 m Durchmesser und 10 m Seitenlänge dient als Flüssigkeitsbehälter.

a) Berechnen Sie das Gesamtvolumen!

b) Berechnen Sie die Füllung bei einem Füllungsstand von 0,50 m und je 0,50 m mehr!

c) Tragen Sie auch in diesem Falle bei geeigneten Maßstäben die Höhen des Wasserstandes und die dazugehörigen Mengen auf den Achsen eines Koordinatensystems auf, und zeichnen Sie die sich daraus ergebende Kurve!

18. Ein besonders einfaches Bild ergibt sich, wenn der Vorratsbehälter zylinderförmig ist, wie wir das häufig bei Gasbehältern finden.

a) Ermitteln Sie die Abhängigkeit der Füllung von der Wasserstandshöhe bei einem Zylinder, der dieselben größten Ausdehnungen hat wie die in Aufgabe 16 angenommene Kugel!

b) Welche Kurve ergibt sich in diesem Falle bei der Darstellung im Koordinatensystem?

Anmerkung: Die letzten drei Aufgaben eignen sich gut dazu, von der Klasse oder einer Gruppe in der Klasse kollektiv gelöst zu werden.

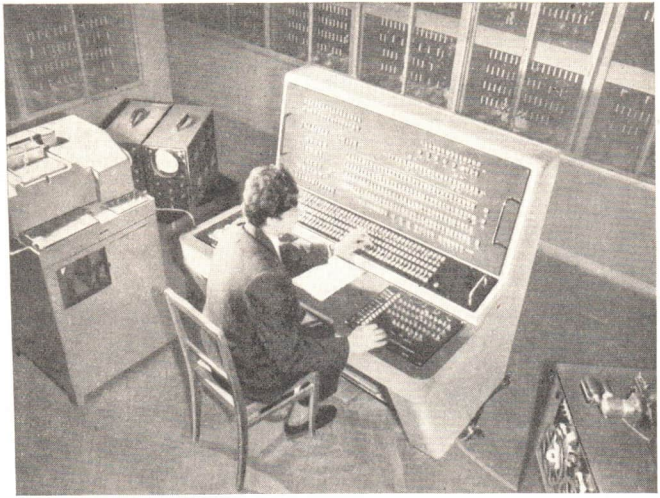


Abb. 162

DAS DYADISCHE ZAHLENSYSTEM

Eine Hauptlinie des technischen Fortschritts im Sozialismus ist die Mechanisierung und Automatisierung der Produktion. Unter Mechanisierung versteht man die Ablösung der menschlichen Arbeit durch maschinelle Arbeit, unter Automatisierung die Anwendung von Maschinen, die in ihrem Arbeitsablauf maschinell gesteuert werden. Darüber hinaus ist es das Ziel der Automatisierung, Automaten zu konstruieren, die bestimmte Aufgaben, die bisher nur von Menschen unter sehr großem Zeitaufwand bearbeitet werden konnten, selbständig steuern und lösen. Solche Aufgaben sind hauptsächlich komplizierte Rechenoperationen, zu deren Durchführung eine große Anzahl von Mathematikern für eine lange Zeit in Anspruch genommen würden. Umfangreiche Rechnungen werden in dem Maße in immer größerem Umfang erforderlich, wie der Mensch in Natur und Technik, in Forschung und Industrialisierung weiter vordringt. Die Vorausberechnung der Bahn der sowjetischen interplanetarischen Raketen, die Entwicklung neuer optischer Geräte, die Konstruktion von Großmaschinen auf verschiedenen Gebieten der Industrie und Landwirtschaft stellen laufend rechnerische

Probleme an Wissenschaftler und Konstrukteure, die ohne mechanische Rechenhilfsmittel nicht mehr zu bewältigen sind. Das Ziel der Mechanisierung und Automatisierung ist hierbei in erster Linie nicht die Einsparung menschlicher Arbeitskräfte, sondern vielmehr der Gewinn an Arbeitszeit. Rechnungen, für die mehrere Mathematiker Stunden, Tage oder Monate benötigen würden, müssen in Minuten oder Sekunden bewältigt werden. Das fordert u. U. kategorisch das betreffende Problem, z. B. die laufende Überwachung und Korrektur des Flugs einer Rakete.

Aber auch weniger weitreichende Aufgaben werden kaum noch ohne mechanische Rechenhilfsmittel gelöst. Der Arbeitsplatz in einem Lohnbüro, in einer Sparkasse oder in einer Abrechnungsstelle der SVK ist heute ohne eine mechanische Rechenmaschine undenkbar (Abb. 163). Diese kann als kleine Tischrechenmaschine für manuellen Kurbelantrieb oder in größerer Ausführung für elektromotorischen Antrieb konstruiert sein. Auch die Additionskassen in den Selbstbedienungsläden der HO sind ein Beispiel für die Mechanisierung von Rechenoperationen. Schließlich ist die Arbeit des Ingenieurs und Konstrukteurs sowie vieler Facharbeiter mit dem Rechenstab zur Selbstverständlichkeit geworden.

Abb. 163

Bei allen diesen Geräten handelt es sich um Hilfsmittel, die der Mechanisierung dienen. Sie stellen aber noch keine Rechenautomaten dar, da sie die Aufeinanderfolge einzelner Rechenschritte nicht selbst steuern, sondern diese Steuerung laufend durch den bedienenden Menschen vorgenommen werden muß. Mechanische Rechenmaschine und Rechenstab nehmen ihm nur die geistige Operation des Addierens und Subtrahierens, Multiplizierens oder Dividierens, Potenzierens oder Radizierens (jeweils als einzelne, vom Menschen gelenkte Rechnung) ab. Das entschieden wichtigere Ziel muß es sein, eine Rechenmaschine zu konstruieren, die ein größeres rechnerisches Problem, das aus einer Fülle einzelner Rechenoperationen in bestimmter Reihenfolge besteht, selbständig löst, wenn ihr der „Auftrag erteilt" wurde. Das könnte z. B. der Auftrag sein, eine Bestimmungsgleichung höheren Grades zu lösen, oder zu einem gegebenen Zahlenwert den Funktionswert einer komplizierteren Funktion zu berechnen. Hierzu ist eine echte Automatisierung nötig; denn die Maschine muß hierbei auf Grund der vom Menschen gestellten Aufgabe durch Selbststeuerung die einzelnen Rechenschritte in richtiger Reihenfolge auswählen und dabei möglichst alle Teilschritte sofort selbst kontrollieren, um sie bei unterlaufenden Fehlern zu wiederholen und zu korrigieren. Die Konstruktion solcher „programmgesteuerter Rechenautomaten", die samt und sonders Wunderwerke der modernen elektronischen Relaistechnik darstellen und in ihren Ausmaßen ganze Zimmer ausfüllen, gehört seit etwa 25 Jahren zu den Standardforschungsaufgaben der mathematischen Wissenschaft. Sie kann heute dank der unermüdlichen Arbeit von Mathematikern und Ingenieuren aus verschiedensten Ländern als

gelöst gelten, und viele Großtaten der Wissenschaft und Technik (z. B. die alle Welt in Atem haltende stürmische Weiterentwicklung der Erforschung des Weltraums durch die Sowjetunion) sind ohne den Großeinsatz von Rechenautomaten undenkbar.

Die Grundlage alles Rechnens ist das Zählen, die des Zählens ein Zahlensystem. Soll durch einen Rechenautomaten das Rechnen möglichst ökonomisch, d. h. also mit großer Sicherheit und Geschwindigkeit ausgeführt werden, muß die Frage nach dem geeignetsten Zahlensystem gestellt werden. Das uns geläufige dekadische System (Zehnersystem) ist nicht das einzig mögliche. Es ist sogar nicht das einfachste, das man aufstellen kann, und für ökonomisches maschinelles Rechnen ist es keineswegs das am besten geeignete System. Während einfachere Rechenmaschinen (mechanische Büromaschinen, Rechenstäbe u. ä.) zwar mit dem Zehnersystem zum Ziel kommen, trifft das für moderne programmgesteuerte Rechenautomaten nicht mehr zu. Sie bedienen sich des dyadischen Zahlensystems (Zweiersystem). Um einen Einblick in die moderne Mechanisierung und Automatisierung auf dem Gebiete der Rechentechnik zu erhalten, wollen wir uns deshalb zum Schluß kurz mit anderen als unserem Zehnersystem, speziell mit dem Zweiersystem, beschäftigen.

40. Das Zehnersystem

Zur Wiederholung:

1. a) Lesen Sie die Zahlen 12 345,678 9 und 102 030 405,060 708 09!
b) Welche Ziffern benutzt man zur Darstellung der Zahlen in unserem Zahlensystem?
c) Welche Werte haben die einzelnen Ziffern in den beiden Zahlen?
d) Welche wichtige Aufgabe hat die Null?

2. a) Welche Symbole benutzt man zur Darstellung der Zahlen im römischen Zahlensystem?
b) Lesen Sie die Zahlen XXXVI, CLIX, MDCLXVI, MMCDXCIX!
c) Lesen sie die Zahlen VI und 51; IV und 15;
MDCLXVI und 1 000 500 100 501 051!
d) Warum nennt man unser Zahlensystem ein Stellenwertsystem, das römische aber ein Additionssystem?

3. a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen als eine Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen!
2 576; 2,576; 300,14; 30,014; 1 234,567 89; 9 807 006,500 403 21
b) Warum heißt unser Zahlensystem dekadisches oder Zehnersystem?
c) Wievieler Ziffern bedarf es zur Darstellung aller Zahlen im Zehnersystem?

4. a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in das dezimale Stellenwertsystem um!
DCCLXXXII; XIX; CMXCIX; CMXLIX
b) Schreiben Sie folgende Zahlen mit römischen Zahlzeichen!
368; 497; 89; 1 945
c) Welche Zahlenschreibung ist vorteilhafter? Begründen Sie Ihre Antwort!

In dem von uns verwendeten **Zehnersystem** werden zehn **Ziffern** benutzt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Unter ihnen befindet sich die Null. Dieser kommt hierbei wie in jedem Stellenwert- (oder Positions-)system eine besondere Bedeutung zu. Sie wird zur Kennzeichnung der „leeren Stellen" in einem Zahlbild benötigt.

Ihr erstes Vorkommen in einer indischen Handschrift um 800 u. Z. bedeutet in der Entwicklung der Stellenwertsysteme einen entscheidenden Fortschritt. (Positionssysteme ohne Verwendung der Null finden sich bereits lange vor dieser Zeit, zum ersten Male um 2000 v. u. Z. in Babylonien.)

Die Verwendung von nur 10 unterschiedlichen Schriftzeichen bedeutet, daß, von der Null angefangen, bereits jede 11. Zahl in der Zahlenfolge der ganzen Zahlen durch ein Zahlbild wiedergegeben werden muß, das kein eigenes Schriftzeichen (Individualzeichen) darstellt. Das wird bekanntlich dadurch erreicht, daß gewisse Ziffern im Zahlbild an andere Stellen gesetzt werden. Benachbarte Stellenwerte im Zahlbild verhalten sich infolgedessen jeweils wie 10 : 1 (Stellenwertfaktor 10).

Im dekadischen System hat deshalb jedes Zahlbild folgende Form:

$$z = \ldots a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$
$$+ a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + a_{-3} \cdot 10^{-3} + \ldots + a_{-n} \cdot 10^{-n} + \ldots$$

n: positive ganze Zahlen,

$a_{-n} \ldots a_n$: jeweils eine der Ziffern 1, 2, 3, ..., 8, 9, 0.

Jede Zahl kann also als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen dargestellt werden.

Beispiel: $z = 2057{,}60238$

$$z = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2}$$
$$+ 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5}$$

Also: $a_3 = 2;\ a_2 = 0;\ a_1 = 5;\ a_0 = 7;$

$a_{-1} = 6;\ a_{-2} = 0;\ a_{-3} = 2;\ a_{-4} = 3;\ a_{-5} = 8$

Es sind also gekennzeichnet die		durch den Exponenten $n =$
...		...
Zehntausender	(ZT)	4
Tausender	(T)	3
Hunderter	(H)	2
Zehner	(Z)	1
Einer	(E)	0
Zehntel	(z)	— 1
Hundertstel	(h)	— 2
Tausendstel	(t)	— 3
...		...

Aufgaben

1. Folgende Zahlen sind als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen zu schreiben (Zahlenanalyse)!

12 058; 99,99; 100,001; 0,000 598 3; 473 000 000; 270 038; 51 525,3; 175,250 008; 120 005 002; 9 876,543 21.

2. Folgende algebraischen Summen sind als Zahlen im Zehnersystem zu schreiben (Zahlensynthese)!

a) $5 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$

b) $7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-3} + 10^{-5}$

c) $4 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^7 + 10^6$

d) $9 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^{-5}$

e) $10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 10^0 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + 10^{-8}$

f) $5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$

g) $3 \cdot 10^{-6} + 10^{-7} + 8 \cdot 10^{-8}$

h) $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^{-6}$

i) 10^{-9}

k) $3 \cdot 10^{10}$

3. Schreiben Sie als Zahlen im Zehnersystem und als Summen von Vielfachen von Zehnerpotenzen!

9 ZT 8 T 7 H 4 Z 5 E; 4 E 2 z 1 h; 6 Millionen; 7 Millionstel; 13 Milliarden; 300 T; 6 Z 6 z; 1 E 1 h 1 t; 50 zt; 6 Billionstel.

41. Andere Stellenwertsysteme

Die Wahl von gerade zehn verschiedenen Schriftzeichen (Ziffern) zum Aufbau der Zahlbilder ist mehr oder weniger willkürlich. Obwohl sie sich bei vielen Völkern und zu allen Zeiten findet, ist der oft vermutete Zusammenhang mit den zehn Fingern nicht erwiesen, aber als Ursache der Wahl wahrscheinlich. Ebenso hat es zu allen Zeiten auch schon andere Positionssysteme, teils mit weniger, teils mit mehr als 10 Grundschriftzeichen, gegeben. Wir wollen zwei Beispiele besprechen.

a) Das Fünfersystem

Das Fünfersystem enthält nur fünf durch unterschiedliche Schriftzeichen dargestellte Ziffern, darunter natürlich die Null. Wir wollen dazu die Schriftzeichen 1, 2, 3, 4, 0 benützen. Jede sechste Zahl der Zahlenfolge der ganzen Zahlen muß daher durch dieselben Schriftzeichen unter Benützung einer anderen Stelle im Zahlbild dargestellt werden. Benachbarte Stellenwerte verhalten sich also hier wie 5 : 1 (Stellenwertfaktor 5), und jede Zahl kann als eine Summe von Vielfachen von Fünferpotenzen dargestellt werden:

$$z = \ldots a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 5^3 + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5^1 + a_0 \cdot 5^0 + a_{-1} \cdot 5^{-1}$$
$$+ a_{-2} \cdot 5^{-2} + a_{-3} \cdot 5^{-3} + \ldots + a_{-n} \cdot 5^{-n} + \ldots,$$

n: positive ganze Zahlen.

$a_{-n} \ldots a_n$: jeweils eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 0.

Die Zahlenfolge der positiven ganzen Zahlen einschließlich der 0 hat also hier folgendes Aussehen:

0; 1; 2; 3; 4; 10; 11; 12; 13; 14; 20; 21; 22; 23; 24; 30 ... ... 42; 43; 44; 100; 101; 102; 103; 104; 110; 111; ...

Wir dürfen zum Beispiel dabei die Zahl 13 nicht als „dreizehn" lesen; denn die Eins hat hier nicht den Wert $1 \cdot 10$ beziehungsweise 10, sondern den Wert $1 \cdot 5$, also 5. Deshalb wollen wir 13 als „eins — drei" lesen, und das durch eine eckige Klammer mit dem Index 5 kenntlich machen: $[13]_5$ gelesen: eins — drei im Fünfersystem. Dieser Zahl entspricht im Zehnersystem die Zahl 8:

$$[13]_5 \mathrel{\widehat{=}} 8; \text{ denn } [13]_5 \mathrel{\widehat{=}} 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 5 + 3 = 8.$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{aligned}
[4043021]_5 &\mathrel{\widehat{=}} 4 \cdot 5^6 + 4 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 \\
&= 4 \cdot 15625 + 4 \cdot 625 + 3 \cdot 125 + 2 \cdot 5 + 1 \\
&= 62500 + 2500 + 375 + 10 + 1 \\
&= 65386 \\
[2{,}314]_5 &\mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^{-1} + 1 \cdot 5^{-2} + 4 \cdot 5^{-3} \\
&= 2 + \frac{3}{5} + \frac{1}{25} + \frac{4}{125} \\
&= 2 + 0{,}6 + 0{,}04 + 0{,}032 \\
&= 2{,}672
\end{aligned}$$

Die Umkehrung, das Ermitteln des Zahlbildes im Fünfersystem bei gegebenem Zahlbild im Zehnersystem wird folgendermaßen dargestellt:

$$\begin{aligned}
14578 &= 4 \cdot 3125 + 3 \cdot 625 + 1 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 3 \\
&= 4 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^0 \\
&\mathrel{\widehat{=}} [431303]_5
\end{aligned}$$

b) Das Zwölfersystem

Im Zwölfersystem benötigen wir zwölf unterschiedliche Zahlzeichen für die elf ersten Zahlen aus der Folge der positiven ganzen Zahlen und für die Null. Wir wollen sie darstellen durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, z, e, 0.

Die Stufenwerte für die einzelnen Stellen sind diesmal die Zwölferpotenzen.

$$\begin{aligned}
z = \ldots a_n \cdot 12^n + a_{n-1} \cdot 12^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 12^3 + a_2 \cdot 12^2 + a_1 \cdot 12^1 + a_0 \cdot 12^0 \\
+ a_{-1} \cdot 12^{-1} + a_{-2} \cdot 12^{-2} + a_{-3} \cdot 12^{-3} + \ldots + a_{-n} \cdot 12^{-n} + \ldots
\end{aligned}$$

n: positive Zahlen

$a_{-n} \ldots a_n$: jeweils eine der Ziffern 1, 2, 3, . . . , 9, z, e, 0.

Die Zahlenfolge der nichtnegativen ganzen Zahlen lautet:

0; 1; 2, 3; . . .; 9; z; e; 10; 11; 12; 13; . . .; 19; 1z; 1e; 20; 21; 22; 23; . . .; 29; 2z; 2e; 30; . . .; 40; . . .; 90; . . .; 98; 99; 9z; 9e; z0; z1; z2; z3; . . . z9; zz; ze; e0; e1; e2; . . .; e9; ez; ee; 100; 101; 102; 103; . . .; 200; . . .: 300; . . .;z00; . . .;e00; e01; e02; . . .; ee9; eez; eee; 1000 . . .

Beispiele für Umrechnungen:

$$\begin{aligned}[3405]_{12} &\mathrel{\widehat{=}} 3 \cdot 12^3 + 4 \cdot 12^2 + 0 \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0 \\ &= 3 \cdot 1728 + 4 \cdot 144 + 5 \cdot 1 \\ &= 5765\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{ze,02e}]_{12} &\mathrel{\widehat{=}} 10 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0 + 0 \cdot 12^{-1} + 2 \cdot 12^{-2} + 11 \cdot 12^{-3} \\ &= 10 \cdot 12 + 11 \cdot 1 + \frac{2}{144} + \frac{11}{1728} \\ &= 120 + 11 + \frac{2}{144} + \frac{11}{1728} \\ &= 131\,\frac{35}{1728}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5902 &= 3 \cdot 1728 + 4 \cdot 144 + 11 \cdot 12 + 10 \\ &= 3 \cdot 12^3 + 4 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12^1 + 10 \cdot 12^0 \\ &\mathrel{\widehat{=}} [34\,\mathrm{e\,z}]_{12}\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Schreiben Sie im dekadischen System!
$[2103{,}4]_5$; $[0{,}1234]_5$; $[10203040]_5$,
$[4\mathrm{e,z}]_{12}$; $[0{,}941]_{12}$; $[8\mathrm{e,z\,z\,z}]_{12}$

2. Schreiben Sie **a)** im Fünfersystem, **b)** im Zwölfersystem!
24 402; 998 877; 1 000 001

3. Welche Zahlen werden im Fünfer-, Zehner- und Zwölfersystem durch dieselben Zahlzeichen dargestellt, welche außerdem im Zehner- und Zwölfersystem?

42. Das dyadische Zahlensystem

1) a) Wir wollen Zahlen durch Flaggensignale derart übertragen, daß jede Ziffer durch eine andersartige Flagge dargestellt wird und diese entsprechend der Aufeinanderfolge der Ziffern im Zahlzeichen nacheinander gehißt werden. Wieviel verschiedenartige Flaggen benötigen wir bei den verschiedenen Positionssystemen?

b) Wir wollen dieselbe Übertragung auf elektrischem Wege durch ein mehradriges Kabel durchführen, so daß jede Ziffer durch einen Stromstoß in der zu ihr gehörenden Ader signalisiert wird. Wieviel Adern muß das Kabel bei den verschiedenen Positionssystemen haben?

c) Im Fernsprechverkehr werden die gewählten Rufnummern ebenfalls durch Stromstöße in den Wählersaal des Fernsprechamts übertragen, jedoch durch Stromstöße auf einer normalen Leitung. Wie wird das mit Hilfe der Wählerscheibe erreicht?
Wieviel Kontakte hat sie, wenn wir mit dem Zehnersystem arbeiten? Wieviel müßte sie in anderen Positionssystemen haben?

2) Diese Überlegungen sagen uns, daß die Übertragung von Zahlen um so weniger technischen Aufwand erfordert, je kleiner die Grundzahl des Positionssystems ist. Allerdings wird mit abnehmender Stufenzahl die Anzahl der Stellen für ein und den-

selben darzustellenden Zahlenwert immer größer (vgl. vorigen Abschnitt), so daß bei der Übertragung von größeren Zahlen durch Stromstöße dem Vorteil der kleineren Grundzahl der Nachteil der größeren Stellenanzahl gegenübersteht.

Beispiel: Bei der Übertragung von Zahlen im Fernsprechverkehr würde die größte fünfstellige Zahl des Zehnersystems 99999 genau $5 \cdot 9 = 45$ Stromstöße und vier Pausen erfordern. Für die gleiche Übertragung wären bei Benutzung des Fünfersystems trotz der größeren Stellenzahl aber nur 23 Stromstöße mit sieben Pausen erforderlich: denn $99999 \mathrel{\hat{=}} [11144444]_5$.

Mitunter ergibt sich allerdings im Fünfersystem auch eine größere Anzahl von Signalen als im Zehnersystem.

Beispiel: Die kleinste fünfstellige Zahl des Zehnersystems $11111 \mathrel{\hat{=}} [323421]_5$ erfordert $5 \cdot 1 = 5$ Stromstöße mit vier Pausen beim Zehnersystem, aber 15 Stromstöße mit fünf Pausen beim Fünfersystem. Der technische Aufwand bleibt beim Fünfersystem aber trotzdem kleiner als beim Zehnersystem.

3) In konsequenter Fortführung dieses Gedankens müßten die geringsten technischen Schwierigkeiten bei Benützung der Grundzahl 2 entstehen. In diesem System gibt es nur zwei Ziffern, von denen die eine wiederum die Null sein muß. Wir wollen sie mit E und 0 bezeichnen. Dann können wir, da Verwechselungen ausgeschlossen sind, die eckige Klammer mit dem Index 2 weglassen. Die Stellenwerte benachbarter Ziffern in einem Zahlsymbol verhalten sich dabei jeweils wie 2 : 1 (Stellenwertfaktor 2). Die Zahl zeigt dann folgenden Aufbau:

$$z = \ldots a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1}$$
$$+ a_{-2} \cdot 2^{-2} + a_{-3} \cdot 2^{-3} + \ldots + a_{-n} \cdot 2^{-n} + \ldots$$

n: positive ganze Zahlen,

$a_{-n} \ldots a_n$ jeweils eine der beiden Ziffern E oder 0.

Dieses Zahlensystem heißt das Zweiersystem oder dyadische System (gelegentlich auch Dualsystem oder Binärsystem). Dieses System ist für mechanische Übertragungen von Zahlen besonders geeignet, da es nur zweier Signale bedarf (Prinzip des Entweder-Oder), z. B. Flagge rechts oder Flagge links; bei elektrischer Übertragung Stromstoß oder stromlos; bei optischer Übertragung Licht oder Dunkel usw. Als Nachteil muß allerdings die außerordentliche Länge der Zahlbilder festgestellt werden.

Die Zahlenfolge der nichtnegativen ganzen Zahlen heißt hier:

0; E; E0; EE; E00; E0E; EE0; EEE; E000; ...

Beispiele für Umrechnungen:

$$\begin{aligned}
\text{EEE00EEE} &\mathrel{\hat{=}} 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= 128 + 64 + 32 + 4 + 2 + 1 \\
&= 231
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{EE,0E0E} &\mathrel{\hat{=}} 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\
&= 2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\
&= 3\,\frac{5}{16}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
15\,209 &= 1 \cdot 8192 + 1 \cdot 4096 + 1 \cdot 2048 + 0 \cdot 1024 + 1 \cdot 512 + 1 \cdot 256 \\
&\quad + 0 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \\
&= 1 \cdot 2^{13} + 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^{9} + 1 \cdot 2^{8} + 0 \cdot 2^{7} + 1 \cdot 2^{6} \\
&\quad + 1 \cdot 2^{5} + 0 \cdot 2^{4} + 1 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 0 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0} \\
&\mathrel{\widehat{=}} \mathrm{EEE0EE0EE0E00E}
\end{aligned}
$$

Trotz der Länge des Zahlbildes gestaltet sich die Umrechnung ins dekadische System sehr einfach, da die Grundzahlpotenzen (hier die Potenzen von 2) niemals wie bei anderen Systemen mit irgendwelchen Ziffern multipliziert werden müssen, sondern lediglich eine Addition gewisser Zweierpotenzen zum dekadischen Zahlbild führt. Dabei fängt man am besten mit dem niedrigsten Stellenwert im Zweiersystem an.

Beispiel: $\mathrm{E0EE00E} \mathrel{\widehat{=}} 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^6$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + 8 + 16 + 64 \\
&= 89
\end{aligned}
$$

Im umgekehrten Fall kommt man durch fortlaufende Subtraktion von Zweierpotenzen zum Ziel. Dabei beginnt man mit der größten, die in der Zahl enthalten ist.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
185 &= 128 + (185 - 128) \\
&= 128 + \quad 57 \\
&= 128 + 32 + (57 - 32) \\
&= 128 + 32 + \quad 25 \\
&= 128 + 32 + 16 + (25 - 16) \\
&= 128 + 32 + 16 + \quad 9 \\
&= 128 + 32 + 16 + 8 + (9 - 8) \\
&= 128 + 32 + 16 + 8 + \quad 1 \\
&= \quad 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + \quad 2^0 \mathrel{\widehat{=}} \mathrm{E0EEE00E}
\end{aligned}
$$

Aufgaben

1. Wie heißen die Potenzen von 2? Stellen Sie eine Tabelle für $n = 0$ bis $n = 15$ auf!

2. Zählen Sie im dyadischen Zahlensystem **a)** von 0 bis 20 in Einersprüngen vorwärts, **b)** von 16 bis 2 in Einersprüngen rückwärts, **c)** von 0 bis 16 in Zweiersprüngen vorwärts, **d)** von 10 bis 50 in Zehnersprüngen vorwärts!

3. Welche ungleichmäßigen Sprünge ermöglichen **a)** im Zehnersystem, **b)** im dyadischen System ein besonders einfaches Zählen?

4. Schreiben Sie in das dyadische Zahlensystem um!
25; 999; 10 000; 265 423; 18 005; 3 003; 60 606; 75; 910; 33

5. Schreiben Sie in das dekadische Zahlensystem um!
EEE; E00E0EE0; E00000000; EE00EEE000EE; EE0EE; E00E00; E0EE00EEE; EE00EE00; EE00E0E; EE0,E0E; 0,00EE

43. Rechenoperationen im dyadischen Zahlensystem

Jedes Rechnen ist vereinfachtes Zählen. So läßt sich das Potenzieren (mit positiven, ganzzahligen Exponenten) als vereinfachtes Multiplizieren, dieses als vereinfachtes Addieren und dies wieder als abgekürztes Vorwärtszählen auffassen. Die Umkehroperationen des Dividierens und des Subtrahierens stellen sinngemäß letzten Endes ein vereinfachtes Rückwärtszählen dar. Die Grundlage aller Grundrechenarten bilden deshalb die Zahlenfolgen des Einsundeins und des Einmaleins. Je größer die Grundzahl des Systems, desto größer ist die Zahl der Zahlenfolgen und desto länger ist jede von ihnen. Beim Zehnersystem sind es bekanntlich zehn Folgen zu je zehn Gliedern.

$$\begin{array}{llll} 0+0 & 0+1 & 0+2 \ldots 0+9 \\ 1+0 & 1+1 & 1+2 \ldots 1+9 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 9+0 & 9+1 & 9+2 \ldots 9+9 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{llll} 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 2 \ldots 0\cdot 9 \\ 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 2 \ldots 1\cdot 9 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 9\cdot 0 & 9\cdot 1 & 9\cdot 2 \ldots 9\cdot 9 \end{array}$$

Beim Zwölfersystem sind es je zwölf solcher Folgen zu je zwölf Gliedern, beim Fünfersystem aber nur fünf Folgen zu je fünf Gliedern, auf die alle anderen Rechenoperationen zurückgeführt werden können.

Beim dyadischen System reduzieren sich Einsundeins und Einmaleins auf ein Mindestmaß:

Einsundeins		Einmaleins	
$0+0=0$	$0+E=E$	$0\cdot 0=0$	$0\cdot E=0$
$E+0=E$	$E+E=E0$	$E\cdot 0=0$	$E\cdot E=E$

In rechnerischer Hinsicht stellt also das dyadische System das denkbar einfachste Zahlensystem dar.

Die umgekehrten Rechenoperationen ergeben sich daraus wie üblich:

Einswegeins		Einsdurcheins		
$0-0=0$	$E-E=0$	$0:0=$	nicht	$0:E=0$
$E-0=E$	$E0-E=E$	$E:0=$	möglich	$E:E=E$

a) Addition und Multiplikation

1. Beispiel:

$$\begin{array}{r} \overset{E}{E}E0E \\ EE0 \\ \hline E00EE \end{array}$$

Sprich beim Rechnen wie folgt!

a) 0 und E ist $\underline{E}$

b) E und 0 ist $\underline{E}$

c) E und E ist E0, schreibe $\underline{0}$, merke E

d) E und E ist $\underline{E0}$

Zur Probe kann man die Aufgabe ins dekadische System übertragen:

$$\begin{array}{r} \text{E E 0 E} \mathrel{\widehat{=}} 13 \\ \text{E E 0} \mathrel{\widehat{=}} 6 \\ \hline \text{E 0 0 E E} \mathrel{\widehat{=}} 19 \end{array}$$

2. Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{E E 0 E 0} \cdot \text{E 0 E} \\ \hline \text{E E 0 E 0} \\ 0 \\ \text{E E 0 E 0} \\ \hline \text{E 0 0 0 0 0 E 0} \end{array}$$

Sprich beim Rechnen wie folgt!

a) E mal E E 0 E 0 ist $\underline{\text{E E 0 E 0}}$

b) 0 mal E E 0 E 0 ist $\underline{0}$

c) E mal E E 0 E 0 ist $\underline{\text{E E 0 E 0}}$

d) addieren wie beim 1. Beispiel

Probe im dekadischen System: $\frac{26 \cdot 5}{130}$

b) Subtraktion

1. Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{E 0 E E} \\ - \quad \text{E 0} \\ \hline \text{E 0 0 E} \end{array}$$

Sprich beim Rechnen wie folgt!

a) 0 und $\underline{\text{E}}$ ist E

b) E und $\underline{0}$ ist E

c) 0 und $\underline{0}$ ist 0

d) 0 und $\underline{\text{E}}$ ist E

Probe im dekadischen System:

$$\begin{array}{r} 11 \\ - \quad \underline{2} \\ \hline 9 \end{array}$$

2. Beispiel: Wie bei jeder Subtraktion, ergibt sich auch hier eine Schwierigkeit, wenn in einer Spalte der Subtrahend größer als der Minuend ist. Im dyadischen System kann das nur darin bestehen, daß die Aufgabe 0 — E vorkommt. Dann muß auch hier auf die nächsthöhere Stelle zurückgegriffen werden, so daß die Aufgabe E0 — E entsteht:

$$\begin{array}{r} \text{E E 0 E} \\ - \text{E 0 E E} \\ \text{E} \\ \hline \text{0 0 E 0} \end{array}$$

Sprich beim Rechnen wie folgt!

a) E und $\underline{0}$ ist E

b) E zu 0 zu ergänzen ist nicht möglich, also E und $\underline{\text{E}}$ ist E0, merke E

c) nicht mehr 0, sondern (E + 0 =) E und $\underline{0}$ ist E

d) E und $\underline{0}$ ist E

Probe im dekadischen System:

$$\begin{array}{r} 13 \\ - \quad \underline{11} \\ \hline 2 \end{array}$$

3. Beispiel: Sehr häufig kommt es vor, daß über mehrere höhere Stellenwerte zurückgegriffen werden muß:

```
  E E 0 0 0 E
-     E E E 0
        E E E
  E 0 0 0 E E
```

Sprich beim Rechnen wie folgt!

a) 0 und $\underline{E}$ ist E

b) E und $\underline{E}$ ist E0, merke E

c) nicht mehr E, sondern (E + E =) E0 und $\underline{0}$ ist E0, merke E

d) wieder (E + E =) E0 und $\underline{0}$ ist E0, merke E

e) E und $\underline{0}$ ist E

f) 0 und $\underline{E}$ ist E

Probe im dekadischen System:

```
  49
- 14
  35
```

c) Division

Die Division verläuft nach dem üblichen Schema. Da aber nur 0 oder E herauskommen kann, entfällt das Probieren und das besondere Ausmultiplizieren. Es bleibt nur das Subtrahieren und das Herunterziehen übrig.

1. Beispiel:

```
  E 0 E 0 E 0 0 : E 0 0 = E 0 E 0 E
- E 0 0
  E 0 E
- E 0 0
    E 0 0
  - E 0 0
```

Probe im dekadischen System: 84 : 4 = 21

2. Beispiel:

```
  E 0 E E 0 0 0 0 0 E : E E E E = E 0 E E E E
- E E E E
  E E E 0 0
- E E E E
  E E 0 E 0
- E E E E
    E 0 E E 0
  - E E E E
      E E E E
    - E E E E
```

Probe im dekadischen System: 705 : 15 = 47

Aufgaben

Machen Sie jeweils die Probe durch Übertragen ins dekadische System!

1. a) E0EE0 + EE0E b) EEEEEE + EEEE0 c) E00E00E + EE0EE
   d) E0E0EE + EE0E0 + E0E e) EE000 + E0EE + E0E
   f) E0EE0E + EE0EE + E000E + E0E0EE

2. a) E0EE0E — E000E b) E0E0E0 — E0E0E c) E00000 — EE0EE
   d) EEE00E — E0E — EEEE
   e) E0E00E00 — EEEE — E00E00
   f) E00EE00 — E000E — E00E — E0E

3. a) E0EE0 · EE0E b) E0EE · EE00E c) EEEE · EEEE
   d) EE0 · E0E · E00 e) EE · E00E · E0 f) E0 · EE · E0E0E
   g) EEE^3 h) $E0E^4$ i) EE^5

4. a) EE00000 : EE00 b) E0000E0E : E00EE
   c) E00E0EE00 : EEEE d) EEEEE00 : EEEEE
   e) E0000E : EE f) E00000E : E0E

44. Die praktische Bedeutung des dyadischen Zahlensystems

Das dyadische Zahlensystem gehört zu den Zahlensystemen, die sich die Menschen zum Rechnen schon sehr frühzeitig schufen. So verwendeten es zum Beispiel die Ägypter unbewußt beim Multiplizieren schon um 2000 v. u. Z. Systematisch entwickelt wurde es zum ersten Male 1689 von dem deutschen Mathematiker und Philosophen Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716), damals allerdings aus rein theoretisch-wissenschaftlichem Interesse. Eine außerordentliche praktische Bedeutung hat das dyadische System aber in den letzten 25 Jahren durch die schnelle Entwicklung der programmgesteuerten elektronischen Rechenautomaten erhalten, ohne die der heutige stürmische Aufschwung der Wissenschaft und Technik undenkbar wäre.

Die schon seit Jahrzehnten in Lohnbüros, Banken, technischen Betrieben, wissenschaftlichen Instituten usw. benützten kleineren oder größeren Rechenmaschinen haben manche Unvollkommenheit an sich:

a) Sie ermöglichen im allgemeinen nur Additionen und Subtraktionen auszuführen. Multiplikationen und Divisionen müssen meist als eine Folge von Additionen beziehungsweise Subtraktionen dargestellt werden.

b) Sie haben eine geringe Rechenkapazität, das heißt, man kann auf ihnen nur mit Zahlen rechnen, die eine recht beschränkte Anzahl geltender Ziffern besitzen.

c) Sie arbeiten samt und sonders außerordentlich langsam, da sie die Zahlen im Zehnersystem verwenden und die Rechenoperationen durch mechanische Vorgänge (Bewegung eines Räder- oder Zahlenwalzwerkes durch Hand oder mittels eines Elektromotors) ausgeführt werden.

Moderne Rechenautomaten benützen elektrische Vorgänge in der Entweder-Oder-Form, also zum Beispiel entweder Strom oder Nichtstrom, um Zahlen zu übertragen und rechnerisch zu verknüpfen. Dazu ist es nötig, die Zahlen im dyadischen Zahlen-

system darzustellen und zu verwenden, da nur in diesem lediglich zwei Ziffern (0 und E), wie es für das Entweder-Oder-Prinzip nötig ist, vorkommen. Die Übertragung vom dekadischen System in das dyadische vor Beginn der Arbeit und umgekehrt vom dyadischen in das dekadische vor Ausgabe des Ergebnisses wird dabei ebenfalls vom Rechenautomaten durchgeführt.

Auf diese Weise ist es möglich, sowohl die Rechenkapazität als auch die Rechengeschwindigkeit zu steigern und auch die Beschränkung auf die Rechenoperationen erster Stufe fallen zu lassen. Sofern als Schaltelemente für die Stromstöße elektromagnetische Relais benützt werden (wie z. B. bei der *OPREMA* vom *VEB Carl Zeiss*, Jena: rund 17000 Relais. 90000 Selengleichrichter, 500 km Leitungsdraht), ist die Geschwindigkeit infolge der mechanischen Trägheit der Relaisanker noch immer viel zu gering für die heutigen Anforderungen der Praxis. Deshalb werden heute in den sogenannten elektronischen Rechenautomaten als Schaltelemente Elektronenröhren und Transistoren benutzt. Der erste elektronische Rechenautomat *ENIAC* arbeitete mit 18000 Röhren. Modernere Maschinen enthalten oft noch mehr solcher Elemente, wobei man sich heute bemüht, die Elektronenröhren weitgehend durch Gleichrichter und Transistoren zu ersetzen, da diese weit weniger störanfällig sind als jene.

Ein wichtiges Moment moderner Rechenautomaten ist, daß sie programmgesteuert sind. Darunter versteht man die Tatsache, daß die Zahlen einschließlich der damit auszuführenden Rechenoperationen von einem Lochstreifen oder einem Magnettonband in die Maschine gegeben werden, so daß die Maschine nunmehr vollautomatisch diese Aufträge erledigt. Während dieser Zeit kann das neue Programm vorbereitet werden. Infolgedessen braucht das Rechenwerk der Maschine nie stillzustehen im Gegensatz zu den handgesteuerten mechanischen Büromaschinen, bei denen auf einer Tastatur die Rechenaufgabe in die Maschine eingegeben werden muß, während das Rechenwerk stillsteht. Ein mittelschneller, programmgesteuerter elektronischer Rechenautomat kann so in etwa $4\frac{1}{2}$ Stunden gegen 750000 Grundoperationen durchführen und gegen 100000 Quadratwurzeln berechnen, wozu ein perfekter Rechner etwa drei Jahre benötigen würde. Größere Rechenautomaten mit höheren Geschwindigkeiten sind in der Lage, in einer Sekunde bis zu 2 Millionen Additionen beziehungsweise bis zu 500000 Multiplikationen 12- bis 15-stelliger Dezimalzahlen auszuführen. In allen diesen Fällen müssen dazu die Dezimalzahlen vorher ins dyadische System umgeschrieben werden. Auch die erforderlichen Rechenanweisungen werden in einer Verschlüsselung in die Maschine gegeben, die dem dyadischen Zahlensystem angepaßt ist.

INHALTSVERZEICHNIS

Ebene Trigonometrie

I. Die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0° bis 90° 3

1. Die Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck 5
2. Die Tangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck 5
3. Die Sinusfunktion am Einheitskreis 6
4. Die Tangensfunktion am Einheitskreis 8
5. Die Kosinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck 9
6. Die Kotangensfunktion im rechtwinkligen Dreieck 10
7. Die Kosinusfunktion am Einheitskreis 11
8. Die Kotangensfunktion am Einheitskreis 11
9. Der Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen 13
10. Geometrische Darstellung der trigonometrischen Funktionen 18
11. Berechnung einzelner Funktionswerte 18
12. Die Tafeln der trigonometrischen Funktionen 20
13. Anwendungsaufgaben 27

II. Berechnung des rechtwinkligen und des gleichschenkligen Dreiecks 31

14. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen 31
15. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck 33
16. Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck 36
17. Anwendungsaufgaben 40

III. Die trigonometrischen Funktionen der Winkel von 0° bis 360° 48

18. Erweiterung des Definitionsbereichs 48
19. Beziehungen zwischen Funktionen und Winkeln verschiedener Quadranten 51
20. Das Bogenmaß eines Winkels 55

IV. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks 59

21. Der Sinussatz und die Flächenformel 59
22. Der Kosinussatz 66
23. Anwendungsaufgaben 70
24. Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen 75
25. Die trigonometrischen Funktionen negativer Winkel 76
26. Die trigonometrischen Funktionen für Winkel mit Beträgen über 360° 77
27. Die Perioden der trigonometrischen Funktionen 79

Stereometrie

V. Ebenflächige Körper 85

28. Die Definitionen der ebenflächigen Körper 85
29. Die Berechnung des Rauminhalts ebenflächiger Körper 86
30. Die Berechnung der Oberfläche ebenflächiger Körper 88
31. Die Berechnung des Pyramidenstumpfes 91
32. Zusammengesetzte ebenflächige Körper 97

VI. Krummflächige Körper 100

33. Die Berechnung des Rauminhalts von Zylinder und Kegel 101
34. Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche von Zylinder und Kegel 102
35. Die Berechnung des Kegelstumpfes 105
36. Die Kugel und die Kugelteile 108
37. Die Berechnung der Kugel und ihrer Teile 110
38. Zusammengesetzte krummflächige Körper 117
39. Aufgaben zur Übung und Wiederholung 125

Dyadisches Zahlensystem

40. Das Zehnersystem 133
41. Andere Stellenwertsysteme 135
42. Das dyadische Zahlensystem 137
43. Rechenoperationen im dyadischen Zahlensystem 140
44. Die praktische Bedeutung des dyadischen Zahlensystems 143

Abbildungsnachweis:

Photo Brüggemann: Abb. 163. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin: Abb. 1, 88.

Zentralbild: Abb. 162.