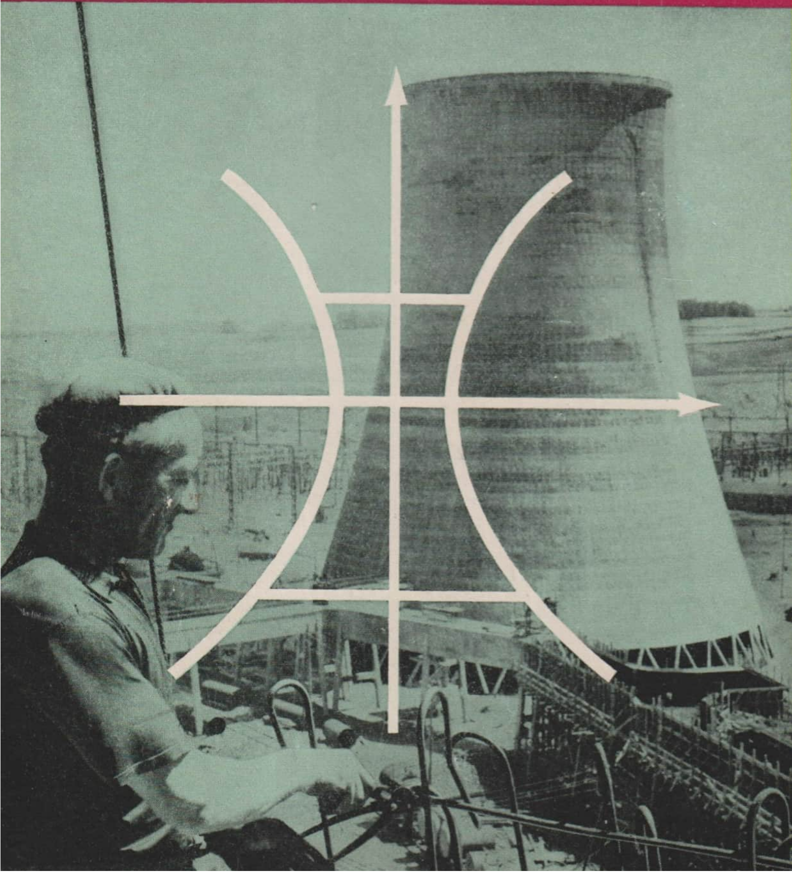
MATHEMATIK 12

ERWEITERTE OBERSCHULE · A/C-ZWEIG



Mathematik

Lehrbuch für die erweiterte Oberschule · Klasse 12 (A/C)

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN
1965

Verfasser:

Dr. Fritz Neigenfind	Abschnitte 1.1. bis 1.5.
Hans Simon	Abschnitte 1.6. bis 1.8.
Johannes Gronitz	Kapitel 2
Dr. Hans Wußing	Kapitel 3

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik als Lehrbuch für die erweiterte polytechnische Oberschule bestätigt.

Ausgabe 1963

Redaktion:	Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin, Peter Pfeiffer
Zeichnungen:	Heinz Grothmann
Umschlaggestaltung:	Werner Fahr
Vervielfältigungsgenehmigung für Abbildung 2.0.:	Nr. 1/7/64
Redaktionsschluß:	1. Dezember 1964

ES 11 G · Bestell-Nr. 001 252-2 · 3,80 MDN · Lizenz 203/1000/64 (DN)
Gesamtherstellung: VEB Landesdruckerei Sachsen, Dresden A 1
(1211) III 9 5 Kp 1264 12

1. Einführung in die Differentialrechnung

In der Straßenverkehrsordnung werden für den Kraftfahrzeugverkehr die Höchstgeschwindigkeiten festgelegt. So darf zum Beispiel innerhalb geschlossener Ortschaften die Geschwindigkeit von $50\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ nicht überschritten werden. Bekanntlich versteht man unter der Geschwindigkeit eines sich gleichförmig auf einem Streckenabschnitt bewegenden Körpers den Quotienten $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$. Dabei bedeuten $s_2 - s_1$ die Länge der Meßstrecke und $t_2 - t_1$ die zum Durchfahren der Strecke benötigte Zeit. Die Zeitmessung nimmt die Volkspolizei mit Stoppuhren vor. Die augenblickliche Geschwindigkeit eines Fahrzeuges weicht jedoch im allgemeinenvon dieser ermittelten Geschwindigkeit ab, da ein Kraftfahrzeug keine gleichförmige Bewegung ausführt. Zu einer genaueren Ermittlung der augenblicklichen Geschwindigkeit kann man kommen, indem man sich das Zeitintervall $t_2 - t_1$ immer mehr verkleinert denkt und den Grenzübergang $(t_2 - t_1) \to 0$ vornimmt (vgl. S. 27). Derartige Grenzübergänge sind charakteristisch für die Differentialrechnung.
Teilweise verwendet man bereits Radargeräte zur Geschwindigkeitskontrolle. Diese zeigen auf einem Gerät unmittelbar die augenblickliche Geschwindigkeit des Fahrzeuges an.

1.1. Zahlenfolgen

Bei der Herleitung einer Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A einer Kreisscheibe kann man von folgenden Gedanken ausgehen:
Dem Kreis wird zunächst ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben (Abb. 1.1.). Der Inhalt A_1 des von diesem Sechseck umschlossenen Flächenstücks ist offenbar kleiner als A, es ist also $A_1 < A$. Sodann wird dem Kreis ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben (Abb. 1.2.). Für den Inhalt A_2 des von dieser Figur umschlossenen Flächen-

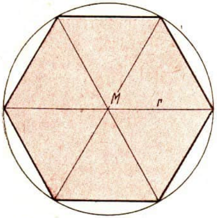


Abb. 1.1.

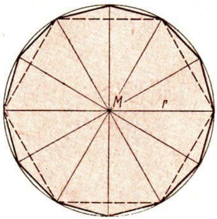


Abb. 1.2.

stücks gilt dann $A_1 < A_2 < A$. In entsprechender Weise werden dem Kreis weitere regelmäßige k-Ecke einbeschrieben, und zwar so, daß jedes folgende die doppelte Eckenzahl wie das vorangehende hat. Man erhält so ein 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, 48-Eck, 96-Eck, ... allgemein ein $3 \cdot 2^n$-Eck.[1]
Für die entsprechenden Flächeninhalte A_n gilt dann

$$A_1 < A_2 < A_3 < \ldots < A_n < A.$$

Wenn auch keines der A_n gleich A ist, so unterscheiden sich doch alle A_n, für die n hinreichend groß ist, beliebig wenig von A. Man sagt, „die Folge der A_n strebt gegen A“ oder „die Folge der A_n hat den Grenzwert A“.
Derartige Grenzprozesse, wie der soeben erläuterte, kommen sehr häufig vor und nehmen in der Mathematik eine zentrale Stellung ein.

1.1.1. Grundbegriffe aus der Lehre von den Zahlenfolgen

Bei einer Sportveranstaltung, etwa einem Radrennen, trägt jeder Teilnehmer eine Nummer n auf seinem Rücken. Ist N die Anzahl der Teilnehmer, so werden als Startnummern die natürlichen Zahlen $n = 1, 2, \ldots, N$ auftreten. Notiert man sich in der Reihenfolge der Startnummern die erzielten Zeiten, so erhält man eine **endliche Zahlenfolge.** Ebenso könnte man zum Beispiel auch die Körpergrößen oder die Körpermassen notieren.

[1] Diese Gedanken zur Berechnung des Flächeninhalts einer Kreisscheibe wurden in ihrem prinzipiellen Gehalt bereits von Antiphon und Bryson (beide um 430 v. u. Z.) geäußert. Archimedes (287–217 v. u. Z.) hat dann mit Hilfe dieses Verfahrens für π den Näherungswert $3\frac{10}{71}$ berechnet, indem er die Untersuchung bis zum 96-Eck führte.

Erzielte Zeiten t_n (in min)[1]	Körpergrößen l_n (in cm)	Körpermassen m_n (in kg)
$t_1 = 42{,}5$ $t_2 = 51{,}7$ $t_3 = 40{,}9$ . . . $t_N = 41{,}3$	$l_1 = 189$ $l_2 = 172$ $l_3 = 180$ . . . $l_N = 169$	$m_1 = 72{,}0$ $m_2 = 73{,}5$ $m_3 = 78{,}0$ . . . $m_N = 65{,}5$

Als Symbol für eine Zahlenfolge verwendet man häufig geschweifte Klammern. Im vorliegenden Fall könnte man schreiben:

$\{t_n\}$ mit $n = 1, 2, \ldots, N$.

Die einzelnen Werte der Zahlenfolge werden **Glieder** der Zahlenfolge $\{t_n\}$, $\{l_n\}$ bzw. $\{m_n\}$ genannt.
Im folgenden werden weitere Beispiele von Zahlenfolgen genannt.

Beispiele:

1. Die Folge der ersten 12 geraden Zahlen:
   2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24.
2. Die Folge der ungeraden Zahlen zwischen 100 und 108:
   101, 103, 105, 107.
3. Die Folge der Quadratzahlen im ersten Hundert:
   1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

1. Bilden Sie weitere Zahlenfolgen!

Charakteristisch für alle diese Zahlenfolgen ist, daß jeweils einer natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl, nämlich das betreffende Glied der Zahlenfolge, zugeordnet ist. So ist zum Beispiel im Falle der Zeiten t_n beim Radrennen der Zahl 3 die Zahl 40,9 zugeordnet. (Der Fahrer mit der Startnummer 3 hat die Strecke in der Zeit 40,9 min durchfahren.) Im Beispiel 2 ist der Zahl 3 die Zahl 105 zugeordnet.
Die Folge im Beispiel 2 kann man auch mit Hilfe eines sogenannten **allgemeinen Gliedes a_n** angeben.

Man schreibt:

$\{a_n\}$ mit $a_n = 100 + (2n - 1) = 99 + 2n$, wobei n die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchläuft.

2. Stellen Sie die Zahlenfolgen in den Beispielen 1 und 3 auf die angegebene Art dar!

[1] In diesem Beispiel wird angenommen, daß alle Fahrer das Ziel erreichten.

Allgemein kann man eine endliche Zahlenfolge etwa folgendermaßen erklären:

Bedeutet N eine beliebige natürliche Zahl und ist auf irgendeine Weise jeder natürlichen Zahl $n \leq N$ genau eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so entsteht eine endliche Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit den Gliedern a_n, wobei n die natürlichen Zahlen 1, 2, ..., N durchläuft.

Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist also eine für endlich viele natürliche Zahlen n erklärte Funktion $y = f(n)$. Man pflegt jedoch in solchen Fällen meistens statt der Schreibweise $f(n)$ die Schreibweise mit einem Index a_n zu bevorzugen. Während es im Beispiel vom Radrennen sinnlos ist, nach dem Wert von t_n für größere Werte von n als N zu fragen, etwa $n = N + 1$, könnte man zum Beispiel die Zahlen $a_n = 99 + 2n$ aus Beispiel 2 für beliebige natürliche n bilden. Man kommt so zu der folgenden Erklärung.

Ist jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so entsteht eine unendliche Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit den Gliedern a_n, wobei n die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... durchläuft.

Der Begriff der unendlichen Zahlenfolge ist wichtiger als der der endlichen Zahlenfolge, und die Sprechweise „Zahlenfolge“ wird meistens nur für unendliche Zahlenfolgen gebraucht.

Beispiel 4:

$\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ $\left(\text{Man schreibt auch kurz } \left\{\frac{1}{n}\right\}.\right)$

Die ersten Glieder dieser Zahlenfolge lauten

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1;\ a_2 = \frac{1}{2};\ a_3 = \frac{1}{3};\ \ldots$$

Es ergibt sich so die Zahlenfolge:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

Oft beginnt man bei der Numerierung der Glieder a_n auch mit der Zahl 0, so daß also die Zahlenfolge

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

entsteht.

Beispiel 5:

$\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Es kann auch jeder natürlichen Zahl n ein und dieselbe reelle Zahl $a_n = a$ zugeordnet sein. In diesem Fall heißt die Folge **konstant**.

Aufgaben

1. Schreiben Sie wie in Beispiel 4 einige Glieder der Zahlenfolge mit dem allgemeinen Glied

a) $a_n = 2^n$, **b)** $a_n = \frac{1}{2^n}$

auf!

2. Schreiben Sie die ersten zehn Glieder der unendlichen Zahlenfolge

$\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$

auf!

3. Ist $\{a_n\}$ mit $a_n = 1 + (-1)^n$ eine unendliche Zahlenfolge?

4. Schreiben Sie die ersten fünf Glieder der Zahlenfolgen mit den nachstehenden allgemeinen Gliedern nieder!

a) $a_n = 20 + 2n$ **b)** $a_n = 5n$ **c)** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}$

d) $a_n = n^n$ **e)** $a_n = \frac{5^n - 1}{5n - 1}$ **f)** $a_n = \sqrt[n]{n}$

(In diesen Aufgaben soll n die Werte 1, 2, 3, ... durchlaufen. Soweit es sinnvoll ist, soll jedoch auch der Wert $n = 0$ hinzugenommen werden.)

1.1.2. Arithmetische und geometrische Folgen

3. Welche gemeinsamen Eigenschaften haben die folgenden drei Zahlenfolgen?

$1, 7, 13, 19, \ldots, 1 + 6n, \ldots$

$\frac{15}{3}, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}, \frac{21}{3}, \ldots, \frac{15}{3} + \frac{2}{3}n, \ldots$

$2,\ 1{,}5,\ 1,\ 0{,}5,\ \ldots,\ 2 - 0{,}5n, \ldots$

Anleitung: Bilden Sie jeweils die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder!

Hat bei einer Zahlenfolge $\{a_n\}$ die Differenz $a_{n+1} - a_n$ aus einem Glied und dessen unmittelbar vorangehenden stets ein und denselben Wert d, so heißt die Folge $\{a_n\}$ eine arithmetische Folge.

Die Glieder jeder arithmetischen Folge lassen sich in der Form

(1) $\mathbf{a_n = a + nd}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

darstellen, und umgekehrt stellt jede Zahlenfolge, deren Glieder nach dem Gesetz (1) gebildet werden, eine arithmetische Folge dar.

4. Welchen Wert haben a und d in den drei Zahlenfolgen des Schülerauftrages 3?

5. Welche Zahlenfolge entsteht im Fall $d = 0$?

6. Untersuchen Sie, welche der bisher aufgetretenen Zahlenfolgen arithmetische Folgen sind!

In der Darstellung (1) nennt man a das **Anfangsglied** und d die **Differenz.** Durch diese beiden Zahlen sind sämtliche Glieder der arithmetischen Folge, und damit die Folge selbst, eindeutig bestimmt.

Die arithmetischen Folgen haben die Eigenschaft, daß bei ihnen jedes Glied vom zweiten an das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder ist; vgl. Aufg. 3:

(2) $\quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$.

Die folgende Aufgabe führt auf eine andere wichtige Art von Zahlenfolgen.
In einer Bakterienkultur befinden sich 30 Bakterien, die sich durch fortgesetzte Teilung stündlich auf das Doppelte vermehren. Aus wieviel Bakterien besteht die Kultur nach 1, 2, 3 und n Stunden, wenn die jeweils nötigen Wachstumsbedingungen vorhanden sind?

● 7. *Welche gemeinsamen Eigenschaften haben die nachstehenden drei Zahlenfolgen?*

$1, 5, 25, 125, 625, \ldots, 5^n, \ldots$

$3, 0{,}3, 0{,}03, 0{,}003, \ldots, 3 \cdot 10^{-n}, \ldots$

$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

Anleitung: Bilden Sie jeweils den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder!

▶ **Hat bei einer Zahlenfolge, deren Glieder sämtlich von Null verschieden sind, der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ aus einem Glied und dem unmittelbar vorangehenden stets ein und denselben Wert q ($q \neq 0$), so heißt die Folge $\{a_n\}$ eine geometrische Folge.**

Die Glieder jeder geometrischen Folge lassen sich in der Form

(3) $\quad a^n = a \cdot q^n \quad$ mit $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

darstellen, und umgekehrt stellt jede Zahlenfolge $\{a_n\}$, deren Glieder nach dem Gesetz (3) gebildet werden ($a \neq 0$; $q \neq 0$), eine geometrische Folge dar.

● 8. *Welchen Wert haben a und q in den drei Zahlenfolgen des Schülerauftrags 7?*

● 9. *Welche Zahlenfolge entsteht im Fall $q = 1$?*

In der Darstellung (3) nennt man a das **Anfangsglied** und q den **Quotienten.** Durch diese beiden Zahlen sind sämtliche Glieder der geometrischen Folge eindeutig bestimmt.
Diejenigen geometrischen Folgen, deren Glieder sämtlich positiv sind, haben die Eigenschaft, daß jedes Glied vom zweiten an gleich dem geometrischen Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist; vgl. Aufg. 3:

(4) $\quad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

Aufgaben

1. Wie heißen in den nachstehenden Zahlenfolgen die Glieder a_6, a_7, a_8 und a_n?

a) $1, 8, 27, 64, 125, \ldots$ **b)** $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ **c)** $5, 10, 15, 20, 25, \ldots$

d) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ **e)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **f)** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

g) $-1, 4, -9, 16, -25, \ldots$ **h)** $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$

2. Welchen Wert haben a und q in der einleitenden Aufgabe über das Anwachsen einer Bakterienkultur?

3. Beweisen Sie die Gleichungen (2) und (4)!

4. Von einer arithmetischen Folge sind die beiden ersten Glieder gegeben (a_1 steht an erster, a_2 an zweiter Stelle).

a) 1 und 5 **b)** 3 und 8 **c)** 9 und 2 **d)** 12 und 4 **e)** 1 und -1
f) 0 und 4 **g)** 0 und -4 **h)** -6 und -2 **i)** -2 und -5 **k)** 0,2 und $-0{,}3$
l) $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{8}$ **m)** $\frac{5}{6}$ und $-\frac{1}{3}$ **n)** 2 und $-\frac{1}{2}$

Geben Sie die folgenden fünf Glieder an!
Wie heißt das zehnte Glied der Folge?

5. Schreiben Sie die ersten zehn Glieder folgender arithmetischer Folgen nieder!

	a)	b)	c)	d)
a_1	2	5	$\frac{1}{4}$	9
d	3	-6	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$

	e)	f)	g)	h)
a_{10}	20	-8	$\frac{9}{5}$	1
d	2	-5	$-0{,}2$	0,1

	i)	k)	l)	m)
a_3	12	8,2	-3	$\frac{5}{12}$
a_4	15	9,6	2,2	$-\frac{1}{12}$

6. Von einer geometrischen Folge sind die beiden ersten Glieder gegeben (a_1 steht an erster, a_2 an zweiter Stelle).

a) 1 und 5 **b)** 4 und 12 **c)** 18 und 9 **d)** 12 und 3
e) 1 und -1 **f)** 20 und 4 **g)** -20 und 4 **h)** $-\frac{1}{4}$ und 1
i) $\sqrt{2}$ und 2 **k)** $\sqrt{2}$ und 1 **l)** $\sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **m)** $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{6}$

Geben Sie die folgenden fünf Glieder an! Wie heißt das zehnte Glied der Folge?

7. Schreiben Sie die ersten fünf Glieder der nachstehenden geometrischen Folgen nieder!

	a)	b)	c)	d)
a_1	1	2	3	4
q	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	0,4

	e)	f)	g)	h)
a_5	125	4802	$\frac{1}{3}$	200 000
q	5	7	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	10^{-1}

	i)	k)	l)	m)
a_3	1,2	$-3,6$	1,21	1,0201
a_4	3,6	1,2	1,331	1,030 301

8. Eine geometrische Folge lautet:

$u_1;\ u_1 q;\ u_1 q^2;\ \ldots;\ u_1 q^{k-1};\ \ldots;\ u_1 q^{n-2};\ u_1 q^{n-1}$ mit $u_1 > 0$ und $q > 0$.

Logarithmieren Sie sämtliche Glieder der vorgelegten geometrischen Folge, und untersuchen Sie die entstehende Folge der Logarithmen! Formulieren Sie allgemein den Zusammenhang zwischen beiden Zahlenfolgen! Erläutern Sie mit Hilfe dieser Erkenntnis den Vorteil des logarithmischen Multiplizierens!

9. Jemand faltet einen Bogen Papier von der Stärke $\frac{1}{10}$ mm in der Mitte einmal, so daß die beiden übereinanderliegenden Blätter zusammen $\frac{1}{5}$ mm stark sind. Diese werden abermals in der Mitte gefaltet, so daß vier Blätter von zusammen $\frac{2}{5}$ mm Stärke entstehen. Wie stark würde der Stoß Blätter sein, wenn man sich den Prozeß der Faltung 40mal ausgeführt denkt? Beachten Sie, daß $2^{10} = 1024 \approx 1000$ ist!

1.1.3. Grenzwerte von Zahlenfolgen

Betrachtet man eine beliebige arithmetische Zahlenfolge mit positivem d, so werden die a_n mit wachsendem n immer größer. Doch ist das Verhalten einer solchen arithmetischen Folge $\{a_n\}$ ganz anders als das der Folge, die im Abschnitt 1.1. in der Einleitung beschrieben wurde. Die Glieder der Folge $\{A_n\}$, die die Maßzahlen der Inhalte der von den einzelnen einbeschriebenen Polygonen umschlossenen Flächen sind, werden allerdings mit wachsendem n auch immer größer. Während aber die A_n stets kleiner als A sind, gibt es zu der arithmetischen Folge $\{a_n\}$ keine Zahl M, so daß für alle natürlichen Zahlen n stets a_n kleiner als M ist. Es ist vielmehr so, daß von einem gewissen Gliede a_{n_0} ab alle a_n größer als jede noch so große positive Zahl M sind. Man sagt darum, daß für n gegen unendlich die a_n über alle Grenzen wachsen, und schreibt dafür:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty,$$

lies: Limes[1] a_n für n gegen unendlich ist gleich unendlich.

[1] lim, Abkürzung von limes (lat.), Grenze.
Man beachte, daß das Symbol ∞ keine Zahl darstellt und daß mit ∞ nicht wie mit Zahlen gerechnet werden kann.

Bei geometrischen Folgen ist das Verhalten der Glieder von a und q abhängig. Ist nämlich $q > 1$ und $a > 0$, so gilt ebenfalls:

(5) $$\lim_{n \to \infty} (a \cdot q^n) = \infty .$$

(Beachten Sie die Aufgabe 1.a im Abschnitt 1.1.1. und die drei Zahlenfolgen im Schülerauftrag 7!)
Um (5) zu beweisen, wird $q > 1$ in der Form $q = 1 + p$ mit $p > 0$ dargestellt. Dann ist $q^n = (1 + p)^n$. Denkt man sich $(1 + p)^n$ ausmultipliziert, so erhält man:

$$(1 + p)^n = 1 + n \cdot p + \cdots + p^n,$$

wobei alle Summanden auf der rechten Seite positiv sind.

10. Multiplizieren Sie die Binompotenzen $(1 + p)^2$, $(1 + p)^3$ *und* $(1 + p)^4$ *aus, und vergleichen Sie die Summen mit* $(1 + p)^n$! *Erläutern Sie, wie die Formel* $(1 + p)^n = 1 + n \cdot p + \cdots + p^n$ *zustande kommt!*

Daraus folgt für $n > 1$

(6) $$q^n = (1 + p)^n > 1 + np,$$

also wegen $a > 0$

$$a \cdot q^n > a + n(a \cdot p) = a + n \cdot d \quad \text{mit} \quad d > 0.$$

Die Zahlen $a + n \cdot d$ sind Glieder einer arithmetischen Folge mit positiver Differenz d und wachsen demnach über alle Grenzen. Folglich wachsen auch die Zahlen $a \cdot q^n$ über alle Grenzen.

11. Geben Sie unter Benutzung von (6) *eine Zahl* n_0 *an, so daß für alle* $n > n_0$ *sicher* $(1{,}0001)^n > 1000000$ *ausfällt!*

Ist aber $a > 0$ und $0 < q < 1$, so nehmen die stets positiven Glieder $a_n = a\,q^n$ mit wachsendem n immer mehr ab. Setzt man $q = \frac{1}{q'}$, so ist $q' > 1$, und es gilt: $a_n = \frac{a}{q'^n}$.
Daraus erkennt man unter Benutzung von (6), daß für alle hinreichend großen Werte von n sich a_n beliebig wenig von Null unterscheidet. Man schreibt dafür:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

und sagt, $\{a_n\}$ sei eine **Nullfolge** oder die Folge $\{a_n\}$ habe den Grenzwert Null.
Damit eine Folge $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist, brauchen die Glieder mit wachsendem n nicht notwendig beständig abzunehmen. Sie können zum Beispiel auch pendelartig um Null hin und her schwanken, wie es etwa die Glieder folgender Nullfolge tun:

$$1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots;\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n;\ \ldots$$

Weiter ist auch die konstante Folge $a_n = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$ eine Nullfolge.
Andererseits ist nicht jede Zahlenfolge, deren Glieder positiv sind und mit wachsendem n immer kleiner werden, eine Nullfolge. Das wird am Beispiel der Folge

$\{a_n\}$ mit $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ deutlich. Hier bleiben alle Glieder oberhalb von 1 und kommen dem Wert 1 beliebig nahe.
Es gibt auch Folgen $\{a_n\}$, wie zum Beispiel die Folge $\{A_n\}$, die im Abschnitt 1.1. in der Einleitung beschrieben wurde, die folgende Eigenschaft haben:
Es gibt eine reelle Zahl g (die auch von Null und 1 verschieden sein kann) derart, daß für alle hinreichend großen Werte von n sich die Glieder a_n beliebig wenig von g unterscheiden. In diesem Falle nennt man g den **Grenzwert** der Zahlenfolge $\{a_n\}$ und schreibt dafür:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g\,.$$

In dieser Sprechweise ist dann eine Nullfolge eine Folge, die den Grenzwert 0 hat.

1.1.4. Das Summenzeichen

Aus einer Zahlenfolge $\{a_k\}$ kann man dadurch eine neue Zahlenfolge bilden, daß man nacheinander die ersten beiden Glieder, die ersten drei Glieder usw. addiert.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{7}$$

$$\ldots$$

Beginnt man bei dieser Summenbildung mit $n = 0$, so erhält man in der oben beschriebenen Weise als neue Zahlenfolge $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, also:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{7a}$$

$$\ldots$$

Man erhält so die Zahlenfolge $\{s_n\}$.
Die rechte Seite der Gleichung (7) bzw. (7a) kann durch Verwendung des Summenzeichens $\sum$[1] kürzer geschrieben werden:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{bzw.} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Zur Berechnung derartiger Summen wird von dem großen deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauss folgende Anekdote berichtet:
Als Gauss 9 Jahre alt war, stellte sein Lehrer den Schülern der Klasse die Aufgabe, alle natürlichen Zahlen von 1 bis 40 zusammenzuzählen.[2] Während die meisten der Schüler nun fleißig darauf los rechneten, erkannte Gauss, daß die Addition der

[1] Das Zeichen Σ ist der große griechische Buchstabe Sigma.
[2] Nach anderen Überlieferungen 1 bis 100.

Zahlen 1 und 40, 2 und 39, 3 und 38 usw. jedesmal 41 ergibt. Er rechnete deshalb nur $20 \cdot 41$ aus und erhielt so das Resultat 820 zur Überraschung des Lehrers in sehr kurzer Zeit.

Das von GAUSS benutzte Verfahren ermöglicht es, jede Summe der Form $\sum_{k=1}^{n} [a + (k-1)d]$ zu berechnen, wenn das Anfangsglied, die Differenz sowie die Anzahl der Glieder gegeben sind. Man erhält nämlich, wenn man die Summe der ersten n Glieder bildet:

$$(8a)\quad \begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} [a + (k-1)d] \\ &\equiv a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (n-1)d]. \end{aligned}$$

Andererseits gilt auch:

$$(8b)\quad \begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} [a + (n-k)d] \\ &\equiv [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \cdots + (a+d) + a. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch Addition von (8a) und (8b):

$$(8c)\quad \begin{aligned} 2s_n &= \sum_{k=1}^{n} [a + (k-1)d + a + (n-k)d] \\ &\equiv [a + a + (n-1)d] + [a + d + a + (n-2)d] + \cdots \\ &\qquad + [a + (n-1)d + a] \\ 2s_n &= \sum_{k=1}^{n} [2a + (n-1)d] \\ &\equiv [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \cdots + [2a + (n-1)d] \\ 2s_n &= [2a + (n-1)d] \sum_{k=1}^{n} 1 \equiv [2a + (n-1)d]\, n \end{aligned}$$

und schließlich

$$(8)\quad s_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d].$$

Bezeichnet man das letzte Glied der arithmetischen Folge mit $z = a + (n-1)d$, so ist

$$(9)\quad \mathbf{s_n = \frac{n}{2}(a + z)}.$$

Hier ist s_n die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge.

Auch jede Summe aus den ersten n Gliedern einer geometrischen Folge

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a \cdot q^k) = \sum_{k=1}^{n} a q^{k-1} = s_n$$

kann aus dem Anfangsglied, dem Quotienten und der Anzahl der Glieder explizit ermittelt werden.

Es gilt nämlich:

(10) $$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1},$$

woraus nach Multiplikation mit q

$$qs_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^{k+1} = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n$$

folgt.
Durch Subtraktion erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} s_n - qs_n &= \sum_{k=0}^{n-1} aq^k - \sum_{k=0}^{n-1} aq^{k+1} \\ &= a + \sum_{k=1}^{n-1} aq^k - \sum_{k=0}^{n-2} aq^{k+1} - aq^n \\ &= a + \sum_{k=1}^{n-1} aq^k - \sum_{k=1}^{n-1} aq^k - aq^n \end{aligned}$$

$$s_n - qs_n = a - aq^n$$

oder

$$s_n(1-q) = a(1-q^n).$$

Für $q \neq 1$ ergibt sich dann:

(11) $$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{q^n-1}{q-1}; \quad q \neq 1.$$

Für $q = 1$ besteht die rechte Seite von (10) aus den n einander gleichen Summanden a. Es gilt also:

(12) $$s_n = na, \quad \text{falls} \quad q = 1.$$

Beispiel 6:

Die Summe der ersten 40 natürlichen Zahlen ist zu berechnen (Anekdote über C. F. Gauss).

$\{a_n\} = 1, 2, 3, \ldots, 40$

$a = 1;\ d = 1;\ z = 40;\ n = 40$

Nach dem Einsetzen in die Gleichung

$$s_n = \frac{n}{2}(a + z)$$

erhält man:

$$s_n = 20(1 + 40) = 20 \cdot 41 = 820.$$

Die Summe beträgt 820.

Setzt man in

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a q^k = a \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{für} \quad a = 1 \quad \text{und für} \quad q = \frac{x}{x_1},$$

so erhält man für $x \neq x_1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{x_1}\right)^k = \frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^n - 1}{\frac{x}{x_1} - 1},$$

also:

$$\frac{x^n - x_1^n}{x - x_1} = x_1^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{x_1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_1^{n-1-k}$$

$$= x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x + x_1^{n-3} x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2} x_1 + x^{n-3} x_1^2 + \cdots + x_1^{n-1}.$$

Aufgaben

1. Schreiben Sie die folgenden Summen ohne Verwendung des Summenzeichens!

   a) $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k}$ b) $\sum_{k=1}^{7} k^2$ c) $\sum_{k=0}^{3} 7^k$

2. Schreiben Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens!

   a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ b) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

   c) $12 + 13 + 16 + 21 + 28 + 37 + 48 + 61 + 76$

3. Wie groß ist die Summe aller zweistelligen natürlichen Zahlen?

4. Berechnen Sie die Summe der ersten n ungeraden Zahlen!

5. Eine Anzahl zum Bau einer Ölleitung bestimmter Röhren ist in acht Reihen übereinander gelagert, so daß in der untersten Reihe 66 Röhren und in jeder nächsthöheren Reihe eine Röhre weniger liegt. Wieviel Röhren enthält dieser Stapel?

6. Der Erfinder des Schachspiels bat, als er von seinem König aufgefordert wurde, sich eine hohe Belohnung auszusuchen, um folgendes:
   „Man lege auf das erste Feld des Schachbretts ein Weizenkorn, auf das nächste zwei und so fort auf jedes folgende die doppelte Anzahl. Alle Körner, die dann auf dem Schachbrett liegen, sollen mein Lohn sein."
   Darauf ließ ihn der König wegen Verhöhnung in den Kerker werfen. Erst nachdem man berechnet hatte, wieviel Weizen man hätte aufbringen müssen, wurde der Erfinder des Schachspiels wieder freigelassen und soll dann Berater des Königs geworden sein.
   Wieviel Weizen hätte der König an ihn zahlen müssen?
   Vergleichen Sie diese Weizenmenge mit der Welternte des Jahres 1960, die 248 900 000 t betrug!

1.1.5. Unendliche Reihen

Da man die Summen $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ für jede beliebige natürliche Zahl n bilden kann, liegt es nahe, zunächst formal auch das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ einzuführen. Man nennt dies eine **unendliche Reihe**, s_n deren n-te **Partialsumme** und die a_k deren Glieder.
Da man nicht unendlich viele Zahlen addieren kann, hat der Terminus „unendliche Reihe" zunächst nur formale Bedeutung. Um ihm auch einen Inhalt zu verleihen, definiert man:

Gibt es eine Zahl s derart, daß sich die Partialsummen s_n für alle hinreichend großen Werte von n beliebig wenig von s unterscheiden, so sagt man, die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiere oder sie sei konvergent. Die Zahl s nennt man ihre Summe und schreibt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$.

Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist also genau dann konvergent und hat die Summe s, wenn ihre Partialsummenfolge $\{s_n\}$ den Grenzwert s hat.

Nicht jede unendliche Reihe ist konvergent. Zu den wichtigsten konvergenten Reihen, deren Summe explizit angegeben werden kann, gehören die unendlichen geometrischen Reihen, deren Quotienten q dem Betrag nach kleiner als 1 sind, $|q| < 1$. Für sie gilt nämlich

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a q^k = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n.$$

Da die Folge $\{q^n\}$ im Falle $|q| < 1$ für $n \to \infty$ nach Null strebt, unterscheiden sich die q^n für alle hinreichend großen n beliebig wenig von Null. Das Gleiche gilt dann auch für $\frac{a}{1-q}q^n$. Daraus ergibt sich, daß die s_n den Grenzwert $\frac{a}{1-q}$ haben, womit man das Resultat

$$\text{(13)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} a q^k = \frac{a}{1-q}, \quad \text{falls} \quad |q| < 1 \quad \text{ist,}$$

erhält.
Außer den unendlichen geometrischen Reihen gibt es noch viele andere konvergente unendliche Reihen.

1.2. Grenzwerte von Zahlenfolgen und von Funktionen

1.2.1. Grenzwertuntersuchungen, Nullfolgen

In der Folge der Stammbrüche $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ wird das allgemeine Glied $\frac{1}{n}$ mit wachsendem n immer kleiner, und zwar für hinreichend große n beliebig klein. Aus diesem Grunde vermutet man, daß der Grenzwert die Zahl Null ist. Um nachzuweisen, daß der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}$ tatsächlich Null ist, genügt der Nachweis, daß

$$|0 - a_n| = \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

kleiner ausfällt als jede noch so kleine positive Zahl ε, sobald man n größer als eine geeignete Zahl n_0 wählt.
Denkt man sich zum Beispiel für ε nacheinander eingesetzt a) $\varepsilon = 0{,}1$; b) $\varepsilon = 10^{-3}$; c) $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-8}$, so ist die Behauptung im Fall a) tatsächlich für alle $n > 10$ erfüllt. Es ist dann nämlich $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$. Ebenso ist im Fall b) für jedes $n > 10^3$: $\frac{1}{n} < 10^{-3}$. Schließlich ist im Fall c) für jedes $n > \frac{1}{4} \cdot 10^8$: $\frac{1}{n} < 4 \cdot 10^{-8}$.
Um die Behauptung für jedes beliebige positive ε zu beweisen, denkt man sich die positive Zahl ε beliebig klein vorgegeben und bildet mit ihr die Zahl $\frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für jede natürliche Zahl n, die größer ist als $\frac{1}{\varepsilon}$ sicherlich $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Damit ist bewiesen, daß gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Die Folge der Stammbrüche ist eine Nullfolge.

Zeigen Sie, daß die Folge $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ *eine Nullfolge ist!*

Die Untersuchung von Zahlenfolgen $\{a_n\}$, deren Grenzwert g von Null verschieden ist, kann häufig mit Vorteil auf die Untersuchung einer Nullfolge zurückgeführt werden. Dabei untersucht man an Stelle der Folge $\{a_n\}$ eine neue Folge $\{b_n\}$, für die $b_n = g - a_n$ ist. Aus der Definition des Grenzwertes ergeben sich nämlich leicht die beiden folgenden Sätze:

1. Hat die Folge $\{a_n\}$ den Grenzwert g, so ist die Folge $\{b_n\}$ mit $b_n = g - a_n$ eine Nullfolge.

Umgekehrt gilt:

2. Ist die Folge $\{b_n\}$ mit $b_n = g - a_n$ eine Nullfolge, so hat die Folge $\{a_n\}$ den Grenzwert g.

Als Beispiel hierfür diene die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Diese hat den Grenzwert 1, denn die Zahlen

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$$

bilden die Glieder einer Nullfolge. Dieses Beispiel zeigt auch, daß eine Folge, deren allgemeines Glied immer kleiner wird, nicht notwendig eine Nullfolge zu sein braucht.

Es soll nun der Grenzwert der Zahlenfolge $\left\{\frac{a}{n}\right\}$ mit $n = 1; 2; 3; \ldots$ und a konstant untersucht werden.

Bildet man mehrere Glieder der Folge $\left\{\frac{a}{n}\right\}$ durch Einsetzen von $n = 1; 2; 3; \ldots$, so entsteht die Vermutung, daß auch $\left\{\frac{a}{n}\right\}$ eine Nullfolge ist. Der Beweis für $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$ wird erbracht, indem nachgewiesen wird, daß $\left|0 - \frac{a}{n}\right| = \frac{|a|}{n}$ kleiner ausfällt als jede noch so kleine positive Zahl ε, sobald n hinreichend groß gewählt wird.

1. Ist $a = 0$, so ist die Behauptung offenbar richtig.
2. Ist $a \neq 0$, so bildet man die Zahl $|a| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$.

Wählt man n größer als diese Zahl $|a| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$, so fällt $\frac{|a|}{n}$ sicher kleiner aus als ε, womit die Behauptung bewiesen ist.

Folglich gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Allgemein gilt:

Multipliziert man jedes Glied einer Nullfolge mit ein und derselben Zahl, so ist die entstehende Zahlenfolge ebenfalls eine Nullfolge.

Mit $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} a \cdot u_k = a \cdot \lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0.$

Ein lehrreicher Weg zur Berechnung des Grenzwertes einer Zahlenfolge wird im folgenden Beispiel gezeigt:

$$\{u_k\} \quad \text{mit} \quad u_k = \frac{k}{k+1} \quad \text{und} \quad k = 1; 2; \ldots$$

Wegen $k = (k + 1) - 1$ läßt sich u_k als Differenz schreiben:

$$u_k = \frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{k+1}.$$

Für jede Zahl k mit $k = 1; 2; 3; \ldots$ ist der Quotient $\frac{k+1}{k+1}$ gleich der Zahl 1. Es gilt somit:

$$u_k = 1 - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad n = k + 1 = 2; 3; 4; \ldots$$

Wegen $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ ist die Folge $\{1 - u_k\}$ eine Nullfolge, so daß gilt:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 1.$$

Dabei wurde wiederum der Satz benutzt, daß der Grenzwert einer Folge $\{a_n\}$ sicher dann gleich g ist, wenn $\{b_n\}$ mit $b_n = g - a_n$ eine Nullfolge ist.
Die Folge $\{b_n\}$ kann man sich auch folgendermaßen entstanden denken:
Bei den Folgen $g;\ g;\ g;\ \ldots$ (mit dem Grenzwert g)

und $\quad a_1; a_2; a_3; \ldots$ (mit dem Grenzwert g)

wird jeweils die Differenz zweier untereinanderstehender Glieder gebildet, also:

$$g - a_1;\ g - a_2;\ g - a_3;\ \ldots$$

Dann hat die Folge dieser Differenzen die Differenz der Grenzwerte $g - g = 0$ als Grenzwert.
Allgemeiner gelten die beiden folgenden Sätze über das Rechnen mit Grenzwerten, die zwar im folgenden benötigt, hier aber nicht bewiesen werden.
Voraussetzung: Die Folge $\{a_n\}$ habe den Grenzwert a, die Folge $\{b_n\}$ den Grenzwert b.
Dann hat

1. die Folge $\{a_n + b_n\}$ den Grenzwert $a + b$,

und

2. die Folge $\{a_n \cdot b_n\}$ den Grenzwert $a \cdot b$.

In Worten:

1. Der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte, falls diese Grenzwerte existieren.

2. Der Grenzwert eines Produkts ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren, falls diese Grenzwerte existieren.

1.2.2. Grenzwerte von Funktionen

Bisher wurden nur Grenzwerte von Zahlenfolgen betrachtet. Man kann jede Zahlenfolge wegen der eindeutigen Zuordnung zwischen den natürlichen Zahlen n und den Gliedern u_n der Zahlenfolge $\{u_n\}$ auch als eine Funktion der ganzzahligen Veränderlichen n betrachten und dafür schreiben:

$$y_n = f(n) = u_n.$$

Es sei nunmehr eine Funktion $y = f(x)$ gegeben, die stetig ist. Da auf den in der Mathematik außerordentlich wichtigen Begriff der **Stetigkeit** von Funktionen im Schulunterricht nicht näher eingegangen wird, mögen folgende Feststellungen genügen:

Die Bilder stetiger Funktionen weisen keine Lücken oder Sprünge auf.

Der Betrag der Differenz zweier Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ fällt kleiner aus als jede noch so kleine positive Zahl, sobald nur die Argumentdifferenz $x_1 - x_2$ dem Betrage nach hinreichend klein gewählt wird.

Ein beliebiger Punkt $P\,(x; y)$ durchlaufe die Kurve, die das Bild der Funktion $y = f(x)$ ist, so daß die Abszissen x gegen x_g streben. Wenn es nun einen Punkt $P\,(x_g; y_g)$ gibt (der Punkt braucht nicht dem Bild der Funktion $y = f(x)$ anzugehören), für den der Abstand zwischen ihm und den Punkten $P\,(x; y)$ bei dem betrachteten Grenzübergang $x \to x_g$ beliebig klein wird, so bezeichnet man $y_g = f(x_g)$ als **Grenzwert der Funktion** $y = f(x)$ für $x \to x_g$. Unter Benutzung von Zahlenfolgen kann dieser Sachverhalt wie folgt beschrieben werden:

Durchläuft x eine beliebige Zahlenfolge $\{x_n\}$ mit dem Grenzwert x_g und strebt dabei stets $y_n = f(x_n)$ gegen einen Grenzwert y_g, so bezeichnet man y_g als Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ für $x \to x_g$.

Man symbolisiert diesen Sachverhalt kurz mit

$$\lim_{x \to x_g} f(x) = y_g \, .$$

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß hier nicht gefordert ist, daß der Grenzwert $y_g = f(x_g)$ ist, ja nicht einmal, daß x_g dem Definitionsbereich der Funktion $y = f(x)$ angehört. Es ist durchaus möglich, daß die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_g$ gar nicht definiert ist. Durch die Festlegung des Grenzwertes als Funktionswert an einer solchen Stelle kann jedoch in vielen Fällen eine Funktion $y = f(x)$ zu einer an dieser Stelle stetigen Funktion ergänzt werden.

Beispiel:

Die Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x}$ ist für alle reellen Zahlen x, die ungleich Null sind, definiert. Es gilt für jedes $x \neq 0$:

$$y = f(x) = \frac{x}{x} = 1.$$

Wie wenig sich die reelle Zahl $x \neq 0$ auch von $x_g = 0$ unterscheiden mag, stets ergibt sich als Funktionswert $y = f(x) = 1$. Für $x_g = 0$ hingegen ist die Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x}$ nicht definiert, da in diesem Fall der Nenner Null ist. Setzt man aber wegen

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = y_g = 1$$

nunmehr $y_0 = f(0) = 1$ fest, so erhält man eine neue Funktion, die für alle Werte von x erklärt und stetig ist und für alle $x \neq 0$ mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt.

Wäre dagegen im Beispiel 1 als Festsetzung gewählt worden:

$$y_0 = f(x_g) = f(0) = 2 \neq y_g ,$$

so wäre ebenfalls eine Funktion $y = f(x)$ entstanden, die für alle reellen Werte von x erklärt ist und für alle $x \neq 0$ mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt. Die so definierte Funktion besäße jedoch an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle. Es ist offensichtlich, daß die zuerst gewählte Festsetzung $f(0) = 1$ mehr dem Wesen der Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x}$ außerhalb der kritischen Stelle $x = x_g = 0$ angepaßt ist.

Es sei noch bemerkt, daß für jede in ihrem Definitionsbereich stetige Funktion $y = f(x)$ an jeder Stelle x_g des Definitionsbereichs gilt:

$$\lim_{x \to x_g} f(x) = f(x_g)$$

Aufgaben

1. Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{n}$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{10^5}{2n}$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4}{n+3}$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{-5}{3n-1}$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n}$ f) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$ g) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n-5}{n}$ h) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{9n-2}{3n+4}$

2. Ermitteln Sie die Nullfolgen aus Aufgabe 1, und schreiben Sie davon die Beträge aller Glieder nieder, die größer sind als 0,03!

3. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{2n^2}$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5}{n^2+1}$ d) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7}{3n^2+4}$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n}{n^2}$ f) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n+2}{n^2}$ g) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5n-8}{3n^2}$ h) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{12n-3}{4n}$

4. Auf Seite 19 werden zwei Sätze für das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen genannt. Das Bestimmen von Grenzwerten von Funktionen wird auf das Bestimmen von Grenzwerten von Zahlenfolgen zurückgeführt. Daher gelten für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen zwei Sätze, die den Sätzen für das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen entsprechen.
Wie lauten diese beiden Sätze für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen? Schreiben Sie die Sätze mit Hilfe mathematischer Symbole nieder!

5. Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$ c) $\lim\limits_{x \to \sqrt{a}} \frac{x^2-a}{x-\sqrt{a}}$

Hinweis: Dividieren Sie zunächst!

1.3. Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten

1.3.1. Differenzenfolgen, Differenzenquotienten

Unter der Vielzahl von Grenzwerten von Funktionen spielt der Grenzwert aus dem Quotienten zweier Nullfolgen, die auf eine bestimmte Weise gebildet werden, eine besondere Rolle.

1. Wählen Sie eine bestimmte Zahl $x = x_0$! Bilden Sie mit dieser Zahl $x = x_0$ eine Zahlenfolge $\{u_n\}$ mit

$$u_n = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{(x_0 + h_n) - x_0} \quad \textit{für} \quad f(x) = 2x^2 + 3 \quad \textit{und} \quad x_0 = 5 \quad \textit{sowie}$$

a) $h_n = 10^{-n}$; *b)* $h_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$, *c)* $h_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, *d)* h_n *eine beliebige Nullfolge!*

(Beachten Sie bei der Rechnung, daß $(x_0 + h_n) - x_0 = h_n$ ist!)

Bedeutet h eine beliebige von Null verschiedene Zahl, die so beschaffen ist, daß mit x_0 auch $(x_0 + h)$ zum Definitionsbereich der Funktion $y = f(x)$ gehört, so bezeichnet man den Ausdruck $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ als **Differenzenquotienten** der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

2. *Deuten Sie den Quotienten in der Einführung auf Seite 3 als Differenzenquotienten!*

Für die im Zähler stehende Funktionswertdifferenz $f(x_0 + h) - f(x_0)$ wird häufig das Symbol Δy und für die im Nenner stehende Argumentdifferenz $(x_0 + h) - x_0 = h$ das Symbol Δx verwendet. Mit dieser Bezeichnungsweise kann man den Differenzenquotienten in folgender Form schreiben:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

3. *Bilden Sie den Differenzenquotienten der für alle positiven x erklärten Funktion $y = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$!*

1.3.2. Die Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle

Denkt man sich in dem Differenzenquotienten einer Funktion $y = f(x)$ an einer festen Stelle x_0 für h die Glieder h_n einer Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$ eingesetzt, so entsteht eine Folge von Quotienten. Solche Folgen sind zum Beispiel im Schülerauftrag 1 aufgestellt worden.
Es soll jetzt an einzelnen Beispielen untersucht werden, ob jede solche Quotientenfolge einem Grenzwert zustrebt und, wenn das der Fall ist, welchem Grenzwert.
Zur Ermittlung des Grenzwertes der Quotientenfolge muß im allgemeinen eine Umformung vorgenommen werden.

Beispiel 1:

Der Differenzenquotient von $y = f(x) = 3x^2 - 1$ an einer beliebigen Stelle x_0 soll bestimmt werden.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{[3(x_0 + h)^2 - 1] - [3x_0^2 - 1]}{h} = \frac{6x_0 h + 3h^2}{h}$$

Setzt man jetzt für h die Glieder einer beliebigen Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$ ein, so kann gekürzt werden, und die Glieder der entstehenden Folge der Differenzenquotienten haben die Gestalt:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = 6x_0 + 3h_n.$$

Auf den rechts stehenden Ausdruck können die Grenzwertsätze angewendet werden, und man erhält das Ergebnis, daß für jede beliebige Nullfolge $\{h_n\}$ die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten gegen $6x_0$ strebt.

Beispiel 2:

Es soll der Grenzwert einer beliebigen Differenzenquotientenfolge der Funktion $y = f(x) = |x|$ an einer beliebigen Stelle x_0 untersucht werden.

Hierbei werden drei Fälle unterschieden:

a) $x_0 > 0$, b) $x_0 < 0$, c) $x_0 = 0$.

Allgemein lautet der Differenzenquotient an der Stelle x_0:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h}.$$

Fall a): Denkt man sich für h die Glieder einer beliebigen Nullfolge $\{h_n\}$ eingesetzt, so gilt für die Glieder h_n von $\{h_n\}$, eventuell bis auf endlich viele Anfangsglieder, $h_n > -x_0$, also $x_0 + h_n > 0$. Für diese h_n ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{|x_0 + h_n| - |x_0|}{h_n} = \frac{x_0 + h_n - x_0}{h_n} = 1,$$

so daß die Folge $1; 1; 1; \ldots$ mit dem Grenzwert 1 vorliegt. Es gilt also in diesem Fall:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = 1.$$

Fall b): In diesem Fall gilt für die h_n, eventuell bis auf endlich viele Anfangsglieder, $h_n < -x_0$, also $x_0 + h_n < 0$. Der Differenzenquotient ist daher für diese Glieder h_n

$$\frac{|x_0 + h_n| - |x_0|}{h_n} = \frac{-(x_0 + h_n) - (-x_0)}{h_n} = \frac{-x_0 - h_n + x_0}{h_n} = -1.$$

Als Differenzenquotientenfolge erhält man $-1; -1; -1; \ldots$ mit dem Grenzwert -1. Es gilt also in diesem Fall:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = -1.$$

Fall c): In diesem Fall lautet die entsprechende Folge der Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \frac{|h_n|}{h_n}.$$

Denkt man sich nun die spezielle Nullfolge $h_n = \frac{(-1)^n}{n}$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \begin{cases} 1 & \text{für geradzahliges } n \\ -1 & \text{für ungeradzahliges } n. \end{cases}$$

Als Differenzenquotientenfolge erhält man $-1; 1; -1; 1; \ldots$ Diese Folge besitzt keinen Grenzwert.

Aus diesen Beispielen wird folgendes ersichtlich:

Es gibt Funktionen, für die bei beliebig vorgegebener Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$ die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten stets einem Grenzwert zustrebt. Es gibt aber auch Funktionen, für die nicht bei jeder Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$ die

Folge der zugehörigen Differenzenquotienten einem Grenzwert zustrebt. Von besonderer Bedeutung sind die zuerst genannten Funktionen. Daher wird folgendes definiert:

Ist die Funktion $y = f(x)$ in einer Umgebung der Stelle $x = x_0$ erklärt, und strebt für jede Nullfolge $\{h_n\}$ mit $h_n \neq 0$, für die $x_0 + h_n$ in dieser Umgebung liegt, stets die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten $\dfrac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$ einem Grenzwert g zu, so sagt man, die Funktion $y = f(x)$ sei an der Stelle x_0 differenzierbar.

Den Grenzwert g nennt man den Differentialquotienten oder die erste Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0.

Zur Bezeichnung des Differentialquotienten sind folgende Schreibweisen üblich:

$f'(x_0)$ oder $y'\big|_{x = x_0}$ (gelesen y Strich an der Stelle x gleich x_0)

oder $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$ (gelesen dy nach dx an der Stelle x gleich x_0)[1].

Unter Verwendung der Limes-Schreibweise gilt schließlich:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Ableitungen der Funktion $y = f(x) = 3x - 5$ an den folgenden Stellen!

a) $x_0 = 0$ **b)** $x_0 = 2$ **c)** $x_0 = 4$ **d)** $x_0 = -2$ **e)** $x_0 = -4$

2. Ermitteln Sie die Ableitungen der Funktionen $y = f(x)$ an der angegebenen Stelle $x = x_0$!

a) $y = f(x) = 5x + 3$; $x_{01} = -2$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 2$
b) $y = f(x) = 5x - 6$; $x_{01} = -2$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 2$
c) $y = f(x) = 5x + a$; a konstant; $x_0 = k$

3. Ermitteln Sie die Ableitungen folgender Funktionen $y = f(x)$ an der angegebenen Stelle $x = x_0$!

a) $y = f(x) = 4x - 5$; $x_0 = 3$
b) $y = f(x) = -3x + 2$; $x_0 = -4$
c) $y = f(x) = 7x - 9$; $x_0 = 0{,}03$
d) $y = f(x) = -x + 3$; $x_0 = -\frac{2}{3}$
e) $y = f(x) = \frac{1}{2}x - 4$; $x_0 = 5$
f) $y = f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}$; $x_0 = \frac{3}{10}$
g) $y = f(x) = mx$; $x_0 = k$; m konstant
h) $y = f(x) = mx + n$; $x_0 = k$; m, n konstant

4. Ermitteln Sie die Ableitungen der Funktionen $y = f(x)$ an der angegebenen Stelle $x = x_0$!

a) $y = f(x) = x^2 + 3x + 5$; $x_{01} = -2$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 1$
b) $y = f(x) = x^2 - 4x + 6$; $x_{01} = -1$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 2$
c) $y = f(x) = x^2 + 3x - 5$; $x_{01} = -5$; $x_{02} = 3$; $x_{03} = 8$
d) $y = f(x) = x^2 - 9x + 2$; $x_{01} = 3$; $x_{02} = 3{,}1$; $x_{03} = 3{,}2$
e) $y = f(x) = 3x^2 - 4x + 9$; $x_{01} = -1$; $x_{02} = 0$; $x_{03} = 1$
f) $y = f(x) = -2x^2 + 3x - 5$; $x_{01} = -1$; $x_{02} = 1$; $x_{03} = 2$

[1] Diese Symbolik stammt von G. W. LEIBNIZ.

5. Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden quadratischen Funktionen an der Stelle $x = x_0$ (a, b und c sind Konstanten)!

a) $y = f(x) = 2x^2 + 5x - 3$
b) $y = f(x) = 2x^2 + 5x + c$
c) $y = f(x) = 2x^2 + bx + c$
d) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

6. Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden kubischen Funktionen an der Stelle $x = 2$ und an der Stelle $x = x_0$ (a, b, c und d sind Konstanten)!

a) $y = f(x) = x^3$
b) $y = f(x) = 2x^3$
c) $y = f(x) = x^3 + 2$
d) $y = f(x) = x^3 + 2x$
e) $y = f(x) = x^3 - 2x$
f) $y = f(x) = 2x^3 + 5$
g) $y = f(x) = 2x^3 + 2x + 5$
h) $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2$
i) $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x$
k) $y = f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 3$
l) $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1.4. Geometrische und physikalische Deutung des Differenzenquotienten und der Ableitung

1.4.1. Die Ableitung als Tangentensteigung

Der Begriff des Differentialquotienten hängt sehr eng mit dem Tangentenproblem zusammen, von dem aus Leibniz zur Differentialrechnung gekommen ist.

1. *Was versteht man unter der Tangente a) beim Kreis, b) bei der Ellipse?*

Während man bei gewissen speziellen Kurven, zum Beispiel beim Kreis und bei der Ellipse, eine Tangente als eine Gerade erklären kann, die mit der Kurve nur einen Punkt gemeinsam hat, ist diese Erklärung für allgemeine Kurven nicht brauchbar. So ist zum Beispiel in Abbildung 1.3. die Gerade g_1, die mit der Kurve C nur einen Punkt gemeinsam hat, offenbar keine Tangente an C. Dagegen ist die Gerade g_2, die mit der Kurve C die Punkte P_2 und P_4 gemeinsam hat, Tangente an C in P_2. Während aber g_2 in der Umgebung des Berührungspunktes P_2 ganz auf der einen Seite von C verläuft, ist dies bei der Geraden g_3 nicht der Fall, obwohl g_3 Tangente an C im Punkte P_3 ist. Es sei noch bemerkt, daß die Gerade g_3 nur einen Punkt mit der Kurve C gemeinsam hat. Aus diesen Beispielen geht hervor, daß die Erklärung des Begriffs der Tangente einer Präzisierung bedarf.

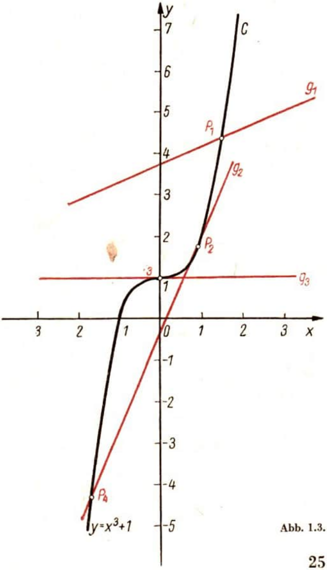


Abb. 1.3.

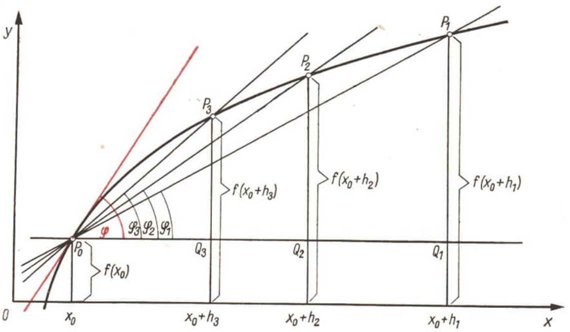


Abb. 1.4.

Dazu denkt man sich eine Kurve C gegeben (Abb. 1.4.) und legt durch den Punkt P_0 und einen Nachbarpunkt P die Sekante. Läßt man nun P eine beliebige Folge von Punkten P_n ($P_n \neq P_0$), die gegen P_0 streben, durchlaufen, so erhält man eine zugehörige Folge von Sekanten. Wenn bei dem Grenzübergang $P_n \to P_0$ die Sekanten stets einer Grenzlage zustreben, so nennt man die dieser Grenzlage entsprechende Gerade die **Tangente** an C in P_0.
Es sei jetzt C das Bild einer Funktion $y = f(x)$. Da jede Gerade, die durch einen festen Punkt P_0 geht, durch ihre Richtung eindeutig bestimmt ist, wird die Steigung der Sekante mit Hilfe der Funktion $y = f(x)$ ausgedrückt. Man erhält aus den Dreiecken $P_n Q_n P_0$:

$$\tan \varphi_n = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$

Die Steigung der Sekante ist also gleich dem Differenzenquotienten. Wenn daher der Differentialquotient von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ existiert, so strebt $\tan \varphi_n$ gegen den Grenzwert

$$\lim_{h_n \to 0} \tan \varphi_n = \lim_{h_n \to 0} \frac{f(x_0 - h_n) - f(x_0)}{h_n} = f'(x_0) = \tan \varphi_0,$$

die Steigung der Tangente an C in P_0.

Die Steigung der Tangente an C in P_0 ist gleich der Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle x_0.

Diese Steigung der Tangente wird auch als Steigung der Kurve in P_0 bezeichnet.

Anmerkung:
So wie hier aus der Differenzierbarkeit auf die Existenz einer Tangente geschlossen wird, kann nicht umgekehrt aus der Existenz einer Tangente auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden, da die Tangente parallel zur y-Achse verlaufen könnte.

2. *Welche Steigung hat die Tangente an die Parabel $y = 7x^2 - 5x + 1$ in demjenigen Kurvenpunkt, dessen Abszisse a) $x = 4$, b) $x = \frac{3}{7}$, c) $x = \frac{5}{14}$ ist?*

1.4.2. Die Ableitung als Momentangeschwindigkeit

Bereits in der Einleitung wurde auf das Problem der Erklärung der Geschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Körpers hingewiesen. Auch dieses Problem hängt mit dem Begriff des Differentialquotienten zusammen. Auf Grund dieses Problems ist NEWTON zur Differentialrechnung gekommen.

Denkt man sich die Länge s der zurückgelegten Strecke als Funktion der Zeit t gegeben, $s = f(t)$, so bedeutet der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

die mittlere Geschwindigkeit des bewegten Körpers auf dem entsprechenden Streckenabschnitt. Da sich bei sehr kleinem Δt die Bewegung auf dem entsprechenden Streckenabschnitt unter gewissen in den Anwendungen meistens erfüllten Voraussetzungen nur sehr wenig von einer gleichförmigen Bewegung unterscheidet, liegt es nahe, die Momentangeschwindigkeit nach der Zeit t_0 durch den Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$$

zu erklären. Bezeichnet man die Momentangeschwindigkeit mit v_0, so ergibt sich:

$$v_0 = f'(t_0) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t = t_0}.$$

In Worten:

Die Momentangeschwindigkeit v_0 nach Ablauf der Zeit t_0 ist gleich der Ableitung des Weges nach der Zeit in $t = t_0$.

3. *Überzeugen Sie sich, daß im Falle einer gleichförmigen Bewegung die so definierte Momentangeschwindigkeit mit der Ihnen bereits bekannten Erklärung der Geschwindigkeit für die gleichförmige Bewegung übereinstimmt!*

Aufgaben

1. Zeichnen Sie die Bilder der folgenden Funktionen!

a) $y = f(x) = 3x - 2$ **b)** $y = f(x) = -2x + 1$

c) $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ **d)** $y = f(x) = -\frac{4}{3}x - 2$

Ermitteln Sie rechnerisch durch Bilden der Differenzenquotienten an der Stelle $x_0 = 2$, unter welchem Richtungswinkel die Gerade $y = f(x)$ die Abszissenachse schneidet! Führen Sie auch Messungen an den Zeichnungen durch, und vergleichen Sie mit dem rechnerischen Ergebnis!

2. Welche lineare Funktion wird durch die Gerade dargestellt, die durch den Punkt $P_0(0; 3)$ geht und die Abszissenachse unter dem Winkel φ schneidet?

a) $\varphi = 30°$ **b)** $\varphi = 45°$ **c)** $\varphi = 60°$ **d)** $\varphi = 120°$ **e)** $\varphi = 135°$
f) $\varphi = 150°$ **g)** $\varphi = 70°$ **h)** $\varphi = 42°$ **i)** $\varphi = 112°$ **k)** $\varphi = 163°$

3. Wie heißen die Gleichungen der Geraden, von denen

   a) ein Punkt und die Richtung, b) zwei Punkte bekannt sind?

   Schreiben Sie diese Gleichungen mit Hilfe von Differenzenquotienten bzw. der Ableitung $f'(x_0)$ nieder!

4. Skizzieren Sie die Bilder folgender Funktionen!

   a) $y = f(x) = x^2$ b) $y = f(x) = x^2 + 4$ c) $y = f(x) = (x-1)^2$
   d) $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ e) $y = f(x) = x^2 + 3x - 1$

   Legen Sie an diese Parabeln die Tangenten in den Punkten mit den Abszissen $x_1 = -3$; $x_2 = -2{,}5$; $x_3 = -2$; ...; $x_{14} = 3{,}5$; $x_{15} = 4$! Ermitteln Sie die Steigung dieser Tangenten durch Bilden der Ableitungen der gegebenen Funktionen an diesen Stellen!

5. Welche Steigung besitzen die Sekanten der in Aufgabe 4 angegebenen Parabeln, wenn als Schnittpunkte von Parabel und Sekante folgende Punktpaare gewählt werden!

   a) $P_1(3; y_1)$ und $P_2(2; y_2)$ b) $P_1(-3; y_1)$ und $P_2(-2; y_2)$
   c) $P_1(3; y_1)$ und $P_2(2{,}5; y_2)$ d) $P_1(-3; y_1)$ und $P_2(-2{,}5; y_2)$
   e) $P_1(3; y_1)$ und $P_2(2{,}8; y_2)$ f) $P_1(-3; y_1)$ und $P_2(-2{,}8; y_2)$

   Zeichnen Sie auch die Bilder, und messen Sie die Steigungen!

6. Welche Steigung besitzen die Sekanten zum Bild der Funktion

   $$y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1,$$

   die durch den Punkt $P_0(1; y_0)$ und durch Kurvenpunkte mit folgenden Abszissen gehen?

   a) $x_1 = 0$ b) $x_2 = 0{,}5$ c) $x_3 = 0{,}8$ d) $x_4 = 1{,}1$
   e) $x_5 = 1{,}6$ f) $x_6 = 1{,}9$ g) $x_7 = 2{,}5$ h) $x_8 = 3$

   Welche Steigung hat die Tangente an die Kurve im Punkt $P_0(1; y_0)$? Messen Sie auch die Steigungen in den Zeichnungen, und vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den rechnerisch gewonnenen!

7. Zeichnen Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = |x|$! Erläutern Sie an Hand des Bildes dieser Funktion, weshalb $y = f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist!

8. Skizzieren Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = x^2 + 1$! Ermitteln Sie diejenige Tangente an die Kurve, die parallel zur Abszissenachse verläuft!

9. Skizzieren Sie das Bild der Funktion $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$! Ermitteln Sie diejenige Stelle, an der die Tangente parallel zur Abszissenachse verläuft! Welche Besonderheit über den Verlauf von Kurve und Tangente können Sie an der Zeichnung feststellen?

1.5. Rechnen mit Differentialquotienten

1.5.1. Die Ableitung als Funktion

Aus den bisher durchgeführten Rechnungen geht hervor, daß gewisse Funktionen Ableitungen haben, die relativ einfach zu ermitteln sind. Damit künftig nicht bei jeder Rechnung der gesamte Weg von der Bildung des Differenzenquotienten an einer bestimmten Stelle über die zweckmäßige Umformung des Differenzenquotienten bis zur Bildung des Grenzwertes des Differenzenquotienten an dieser Stelle gegangen werden muß, sollen nun einige Formeln hergeleitet werden, die unter gewissen Bedingungen die Berechnung der Ableitung auf einfache Weise ermöglichen.

1. Bilden Sie die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion $y = f(x) = mx + n$ an der Stelle $x = x_0$, wobei m und n beliebige Konstanten bedeuten!

2. Bilden Sie die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = x_0$, wobei a, b und c beliebige Konstanten bedeuten!

Da diese Funktionen $y = f(x) = mx + n$ und $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ an der Stelle $x = x_0$ eine Ableitung haben, gelten die Sätze:

Die für alle x erklärte Funktion $y = f(x) = mx + n$ (m und n sind beliebige Konstanten) hat an jeder Stelle $x = x_0$ die Ableitung $y' = f'(x_0) = m$.

Die für alle x erklärte Funktion $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b und c sind beliebige Konstanten) hat an der (beliebigen) Stelle $x = x_0$ die Ableitung $y' = f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Analog kann mit vielen anderen Funktionen verfahren werden, zum Beispiel mit der Funktion

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n x^n = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0,$$

bei der die a_n reelle Konstanten sind. Die Funktion besitzt an der beliebigen Stelle $x = x_0$ folgenden Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{[a_3(x_0+h)^3 + a_2(x_0+h)^2 + a_1(x_0+h) + a_0] - [a_3 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0]}{h} \\
&= \frac{3a_3 x_0^2 h + 3a_3 x_0 h^2 + a_3 h^3 + 2a_2 x_0 h + a_2 h^2 + a_1 h}{h} \\
&= \frac{h(3a_3 x_0^2 + 2a_2 x_0^1 + 1a_1 x_0^0) + h^2(3a_3 x_0 + a_2) + h^3 a_3}{h}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \sum_{n=1}^{3} n a_n x_0^{n-1} + h(3a_3 x_0 + a_2) + h^2 a_3.$$

Daraus ergibt sich beim Grenzübergang $h \to 0$:

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{3} n \cdot a_n x_0^{n-1}.$$

Hat man allgemein eine in einem Intervall $a < x < b$ erklärte Funktion $y = f(x)$, die dort an jeder Stelle des Intervalls differenzierbar ist, so entsteht, wenn man jedem Wert x_0 des Intervalls den Wert $f'(x_0)$ zuordnet, eine weitere ebenfalls im Intervall $a < x < b$ erklärte Funktion $y' = \varphi(x) = f'(x)$.

Die Ableitung einer Funktion in einem Intervall kann also ihrerseits wieder als eine Funktion aufgefaßt werden.

Aus den Funktionen in den oben behandelten Beispielen

1. $y = f(x) = mx + n$
2. $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
3. $y = f(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n x^n$

erhält man so die für alle x erklärten Funktionen

1. $y' = f'(x) = m$
2. $y' = f'(x) = 2\,ax + b$
3. $y' = f'(x) = \sum_{n=1}^{3} n\,a_n\,x^{n-1} = 3\,a_3\,x^2 + 2\,a_2\,x + a_1.$

Die Funktion $y = f'(x)$ kann gegebenenfalls abermals differenziert werden. Ist das im gesamten Definitionsintervall möglich, so entsteht dadurch eine neue Funktion:

$$y'' = [f'(x)]' = f''(x) = \frac{d^2 y}{d x^2} \text{ (gelesen: } d - \text{zwei} - y \text{ nach } d - x - \text{Quadrat).}$$

Man sagt, es wird die **zweite Ableitung** gebildet.
In den drei oben aufgeführten Beispielen ergibt sich so:

1. $y'' = f''(x) = 0$
2. $y'' = f''(x) = 2\,a$
3. $y'' = f''(x) = 6\,a_3 x + 2\,a_2.$

3. *Erklären Sie auch noch die dritte Ableitung* $y''' = \frac{d^3 y}{d x^3} = f'''(x)$, *und bilden Sie diese für die drei betrachteten Funktionen!*

1.5.2. Die Differentiation der Summe zweier Funktionen

Zur Differentiation gegebener Funktionen sind gewisse Regeln von Nutzen, die mit den beiden Grenzwertsätzen in engem Zusammenhang stehen.
Die beiden Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ seien in einer Umgebung der Stelle $x = x_0$ erklärt und an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann ist auch die Funktion $y = f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ in dieser Umgebung erklärt und an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x_0) = [\varphi(x_0) + \psi(x_0)]' = \varphi'(x_0) + \psi'(x_0).$$

Beweis: Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ an der Stelle x_0 läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{[\varphi(x_0+h) + \psi(x_0+h)] - [\varphi(x_0) + \psi(x_0)]}{h}$$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} + \frac{\psi(x_0+h) - \psi(x_0)}{h}.$$

Läßt man jetzt h gegen Null streben, so streben die beiden Brüche auf der rechten Seite, die offenbar Differenzenquotienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind, nach Voraussetzung gegen $\varphi'(x_0)$ bzw. $\psi'(x_0)$. Daher strebt nach Grenzwertsatz 1 auch $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0}$ einem Grenzwert zu, und zwar dem Grenzwert $f'(x_0) = \varphi'(x_0) + \psi'(x_0)$.

Sind die beiden Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ an jeder Stelle ihres Definitionsintervalls differenzierbar, so gilt dort für $y = f(x) = \varphi(x) + \psi(x) = u + v$ die Differentiationsregel:

$y' = u' + v'$ **(Summenregel).**

4. *Verallgemeinern Sie diesen Satz auf eine Summe von n Funktionen*

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)!$$

Ist die Funktion $u = f(x)$ in einer Umgebung der Stelle x_0 erklärt und an der Stelle x_0 differenzierbar und bedeutet c eine beliebige Konstante, so ist auch die Funktion $y = c \cdot f(x)$ in dieser Umgebung erklärt und an der Stelle x_0 differenzierbar. An dieser Stelle gilt dann:

$$y'\Big|_{x=x_0} = c \cdot f'(x).$$

Beweis: Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ an der Stelle x_0 ist

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_0} = \frac{cf(x_0+h) - cf(x_0)}{h} = c \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Hieraus ergibt sich für $h \to 0$ die Behauptung $y' = c \cdot f'(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Ist die Funktion $u = f(x)$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar, so gilt das gleiche auch für

$$y = c \cdot f(x), \text{ c konstant}$$

und es ist

$$y' = c \cdot f'(x) \cdot$$

Bei der Differentiation bleibt ein konstanter Faktor unverändert als solcher erhalten.

Beispiel 4:

Die erste Ableitung der Funktion $y = 5\,x^2$ lautet

$$y' = 5 \cdot 2\,x$$
$$y' = 10\,x$$

5. *Bestätigen Sie, daß die Ableitung eines konstanten Gliedes Null ist!*

$$y = f(x) + c; \quad y' = f'(x) + 0 = f'(x)$$

Aufgaben

1. Bilden Sie die erste, zweite und dritte Ableitung folgender Funktionen!

a) $y = f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5$
b) $y = f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + x^0$
c) $y = f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)$
d) $y = f(x) = (x - a)^3$ (a konstant)

2. Bilden Sie die Ableitungen folgender Funktionen!

a) $y = f(x) = x^2$
b) $y = f(x) = x^3$
c) $y = f(x) = x^4$
d) $y = f(x) = (2x - 5)(3x + 2)$
e) $y = f(x) = (3x - 4)(2x + 3)$

Stellen Sie fest, die wievielte Ableitung eine von Null verschiedene Konstante ist!

1.6. Die Ableitungen der Potenzfunktion $y = x^n$ für ganzzahlige Exponenten ($n \geqq 0$)

1.6.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Welche besonderen Wertepaare x, y sind allen Potenzfunktionen $y = x^n$ ($n > 0$; ganzzahlig) gemeinsam? Wie zeigt sich das in der grafischen Darstellung? Skizzieren Sie die zu den Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n > 0$; ganzzahlig gehörende Kurvenschar! Welches ist dabei der Scharparameter?
2. Begründen Sie die Zweckmäßigkeit der Festsetzung $a^0 = 1$! Für welche Zahlenbereiche von a ist die Definition gültig?

1.6.2. Die Ableitungen der Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$ mit $n \geqq 0$; ganzzahlig

Zum Zeichnen der Bilder der Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n \geqq 0$; ganzzahlig ist es vorteilhaft, die Tangenten an die Bilder in verschiedenen Punkten zu Hilfe zu nehmen. Dazu muß deren Steigung bestimmt werden. Sie ist durch die erste Ableitung der jeweils zugeordneten Funktion gegeben. Es ist demnach erforderlich, die Ableitung der Funktion $y = x^n$ für alle nicht negativen ganzzahligen Exponenten zu ermitteln. Diese Aufgabe soll mit Hilfe des binomischen Satzes gelöst werden.

1. Berechnen Sie $(a + b)^k$ für $k = 3, 4, 5$, und stellen Sie die Ergebnisse unter Einbeziehung der entsprechenden Beziehungen für $k = 1$ und $k = 2$ zusammen!
Wie sind die einzelnen Glieder aufgebaut?
Wie kann man die Koeffizienten mit Hilfe des PASCALschen Dreiecks berechnen? Wie lauten insbesondere die Koeffizienten des ersten und zweiten Gliedes für $k = 2, 3, 4, 5$?

Mit Hilfe dieser Entwicklung läßt sich die erste Ableitung der Potenzfunktionen aus dem Differenzenquotienten ermitteln.

Beispiel 1:

Die erste Ableitung der Potenzfunktion mit $n = 3$ ist zu berechnen.

Gegebene Funktion: $y = x^3$

Ableitung: $$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

Zur Bestimmung des Grenzwertes wird der Differenzenquotient unter Verwendung des binomischen Satzes umgeformt.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + h^2(3x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} [3x^2 + h(3x + h)]$$

$$y' = 3x^2.$$

Die Tangentensteigungen an das zugehörige Bild sind also im

Punkt $O\ (0; 0)$: $y_0' = 3 \cdot 0 = 0$,
im Punkt $P\ (1; 1)$: $y_1' = 3 \cdot 1^2 = 3$.

2. Ermitteln Sie in gleicher Weise die ersten Ableitungen von $y = x^n$ für $n = 4$ und $n = 5$, und geben Sie auch für die Bilder dieser Funktionen die Tangentensteigungen in den Punkten $O\ (0; 0)$ und $P\ (1; 1)$ an!

Auf gleichem Wege kann man die erste Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n$ für ein beliebiges positives ganzzahliges n ermitteln:

Gegebene Funktion: $y = x^n$

Ableitung: $$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Wenn $(x+h)^n$ nach dem binomischen Satz entwickelt wird, entstehen $(n+1)$ Glieder, die vom dritten an, soweit diese vorhanden sind, Faktoren h^i mit $i \geqq 2$ enthalten. Aus diesen läßt sich h^2 als Faktor ausklammern:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + n x^{n-1} \cdot h + h^2 \cdot \varphi(x, h) - x^n}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{n x^{n-1} h + h^2 \cdot \varphi(x, h)}{h} = n \cdot x^{n-1} + \lim_{h \to 0} [h \cdot \varphi(x, h)]$$

$$y' = n \cdot x^{n-1},$$

da $\varphi(x, h)$ für h gegen 0 einem endlichen Grenzwert zustrebt.
Die Steigungen der Tangenten an die entsprechenden Bilder in den allen gemeinsamen Punkten $O(0; 0)$ und $P_1(1; 1)$ ergeben sich daraus wie folgt:

im Punkt $O\ (0; 0)$: $y_0' = n \cdot 0^{n-1} = 0$ (für $n > 1$; ganzzahlig),

im Punkt $P(1; 1)$: $y_1' = n \cdot 1^{n-1} = n$.

Geometrisch läßt sich dieses Ergebnis für den Punkt $O(0; 0)$ so deuten, daß alle Funktionsbilder der Schar, die zu $y = x^n$ mit $n > 1$; ganzzahlig gehören, im Koordinatenursprung die x-Achse zur Tangente haben (Abb. 1.5.).
Für $n = 1$ ergibt sich aus $y' = n \cdot x^{n-1}$

$$y' = 1 \cdot x^0 = 1 \text{ für jedes } x \neq 0.$$

Im Koordinatenursprung würde sich ergeben:

$y' = 1 \cdot 0^0$ mit dem nicht definierten Ausdruck 0^0.

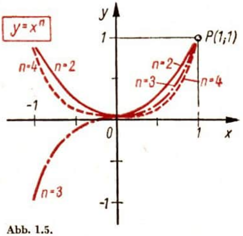


Abb. 1.5.

Da nun die Funktion $y = f(x) = mx + n$ an jeder Stelle $x = x_0$ die Ableitung $y' = f'(x_0) = m$ hat, gilt für den Fall $m = 1$ und $n = 0$, also für $y = f(x) = x$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Bezüglich des Verhaltens ihres Bildes im Koordinatenursprung stellt also die Potenzfunktion $y = x^1$ eine Ausnahme in der Schar der Funktionen $y = x^n$ mit positiven ganzzahligen Exponenten dar (Abb. 1.6.).

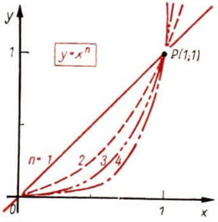


Abb. 1.6.

3. *Deuten Sie entsprechend $y_1' = n \cdot 1^{n-1} = n$ geometrisch als Steigung der Bilder im Punkt $P(1;\, 1)$! Wie ändert sich die Steigung der Bilder bei veränderlichem n? Was können Sie daraus über die Lage der einzelnen Bilder bezüglich der x- bzw. y-Achse in den Intervallen $0 < x < 1$ und $x > 1$ folgern?*

4. *Überprüfen Sie Ihre in der Wiederholungsübung 1 angefertigte Skizze in bezug auf den Verlauf der Bilder besonders in den Punkten $O\,(0;\, 0)$ und $P\,(1;\, 1)$!*

5. *Ermitteln Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die erste Ableitung der Funktion $y = x^0 = 1$!*

Das Ergebnis des fünften Schülerauftrages $y' = (x^0)' = 0$ ergibt sich für $x \neq 0$ auch, wenn $y' = n \cdot x^{n-1}$ für $n = 0$ gebildet wird:

$$y' = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \text{ für alle } x \neq 0.$$

Also gilt allgemein:

Die erste Ableitung von $y = x^n$ mit $n \geqq 0$; ganzzahlig ist

$$\boldsymbol{y' = n \cdot x^{n-1}}.$$

1.6.3. Höhere Ableitungen der Potenzfunktion $y = x^n$ mit $n \geqq 0$; ganzzahlig

Die höheren Ableitungen einer Funktion bilden eine Folge von Funktionen. Für die Potenzfunktionen $y = x^n$ erhält man dabei wieder Potenzfunktionen.

6. *Bilden Sie die ersten vier Ableitungen von $y = x^n$, und begründen Sie die folgenden Erkenntnisse!*

a) Jede der Ableitungen $y^{(i)}$ mit $i = 1;\, 2;\, \ldots;\, n$ der Potenzfunktion $y = x^n$ mit $n > 0$; ganzzahlig ist eine um einen Grad niedrigere Potenzfunktion als die vorhergehende Ableitung.

b) Die n-te Ableitung der Funktion $y = x^n$ hat den Grad 0, d. h., sie ist eine von Null verschiedene Konstante.

c) Die $(n + 1)$-te Ableitung der Funktion $y = x^n$ und alle folgenden sind identisch Null.

Aufgaben

1. Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die erste Ableitung jeder nicht konstanten geraden Potenzfunktion ist eine ungerade Funktion, die erste Ableitung jeder ungeraden Potenzfunktion ist eine gerade Funktion.

2. Begründen Sie mit Hilfe des in Aufgabe 1 genannten Satzes die Symmetrieverhältnisse der Bilder der geraden und der ungeraden Potenzfunktionen!
Anleitung: Die ersten Ableitungen an zwei Stellen x_0 und $-x_0$ bestimmen die Richtungen der Tangenten an das jeweilige Bild in den Punkten mit den Abszissen x_0 und $-x_0$. Achten Sie auf die Vorzeichen von $f'(x_0)$ und $f'(-x_0)$!

3. Inwiefern kann man $y = x^1$ zu den ungeraden und $y = x^0$ zu den geraden Funktionen rechnen? Begründen Sie diese Einteilung wie bei Aufgabe 2!

4. Wie groß ist die zweite Ableitung von
   a) $y = x^9$
   b) $y = x^{12}$ an den Stellen $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{1}{4}$; $x_4 = -0{,}3$; $x_5 = \sqrt{2}$?
   c) Wie groß ist die fünfte Ableitung der Funktionen in **a)** und **b)** an den entsprechenden Stellen?

5. An die Bilder der folgenden Funktionen sollen jeweils im Punkte $P_i\,(x_i; y_i)$ die Tangenten gelegt werden. Wie groß ist deren Steigung? Unter welchem Winkel schneiden sie jeweils die x-Achse, unter welchem die y-Achse? Wie heißen die Koordinaten dieser Schnittpunkte?
   a) $y = x^2$ $P_1\left(\frac{1}{2}; \ldots\right)$ $P_2\left(-\frac{1}{2}; \ldots\right)$ **b)** $y = x^3$ $P_1\,(\ldots; 8)$ $P_2\,(\ldots; -27)$
   c) $y = x^4$ $P_1\,(0{,}1; \ldots)$ $P_2\,(0{,}2; \ldots)$ **d)** $y = x^5$ $P_1\left(\ldots; \frac{1}{32}\right)$ $P_2\,(-3; \ldots)$

6. An die Bilder der folgenden Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die die gegebenen Steigungen m_i haben. In welchen Punkten muß das geschehen?
   a) $y = x^2$ $m_1 = 1$ $m_2 = -2$ **b)** $y = x^3$ $m_1 = \frac{4}{3}$ $m_2 = \frac{3}{4}$
   c) $y = x^4$ $m_1 = -\frac{1}{2}$ $m_2 = 4$ **d)** $y = x^5$ $m_1 = 80$ $m_2 = \frac{4}{5}$

1.7. Ganze rationale Funktionen

1.7.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Der analytische Ausdruck der allgemeinen quadratischen Funktion lautet in expliziter Form $y = A\,x^2 + B\,x + C$. Wie sieht das Funktionsbild aus?
2. Welche Bedeutung hat insbesondere der Koeffizient A des quadratischen Gliedes? Wie wirkt sich seine Größe und sein Vorzeichen auf das Funktionsbild aus?
3. Was versteht man unter den Nullstellen einer Funktion? Wie werden sie bestimmt?
4. Was entspricht den Nullstellen in der grafischen Darstellung der Funktion? Erläutern Sie das insbesondere an Hand der linearen und der allgemeinen quadratischen Funktion!

1.7.2. Die Ableitungen der ganzen rationalen Funktionen

Unter einer **ganzen rationalen Funktion** versteht man eine Funktion, die sich in der Form

$$(1) \qquad y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

für alle Werte von x darstellen läßt. Dabei bedeuten die Symbole a_k reelle Zahlen (Konstanten). Sie heißen die Koeffizienten des Polynoms auf der rechten Seite von (1). Falls $a_n \neq 0$, hat das Polynom den Grad n.

Beispiel 1:

Die rechte Seite der Gleichung

$$y = 4x^5 - 2x^3 + x^2 - 2x + 9$$

ist ein Polynom 5. Grades.

1. Bilden Sie die ersten drei Ableitungen von $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$! Begründen Sie die folgenden Erkenntnisse!

a) Die Ableitungen jeder ganzen rationalen Funktion vom Grad n sind wieder ganze rationale Funktionen, und zwar ist jede der Ableitungen $y^{(i)}$ mit $i = 1; 2; \ldots; n$ eine um einen Grad niedrigere Funktion als die vorhergehende Ableitung.

b) Sind alle Koeffizienten a_k von Null verschieden, so vermindert sich bei den unter a) genannten Ableitungen $y^{(i)}$ die Anzahl der Glieder von Ableitung zu Ableitung ebenfalls jeweils um 1.

c) Die n-te Ableitung $y^{(n)}$ ist eine Konstante.

$$y^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n.$$

d) Alle folgenden Ableitungen sind identisch Null.

Ergebnis:

Jede ganze rationale Funktion n-ten Grades hat genau n nicht identisch verschwindende Ableitungen.

1.7.3. Die Nullstellen der ganzen rationalen Funktion

Jeder Wert der unabhängigen Veränderlichen x, für den eine Funktion $y = f(x)$ den Wert Null annimmt, heißt eine **Nullstelle** dieser Funktion. Für die Ermittlung der Nullstellen x_i wird gesetzt: $f(x_i) = 0$. Die Lösungen dieser Bestimmungsgleichung sind die Nullstellen der zugrunde liegenden Funktion.

2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Nullstellen (Existenz, Lage)!

a) $y = x^2 - 4x - 3$ *b)* $y = x^2 - 6x + 9$ *c)* $y = x^2 - 2x + 5$

Unter Verwendung der Nullstellen können die Funktionen des Schülerauftrags 2 in folgender Form geschrieben werden:

a) $y = [x - (2 + \sqrt{7})] \cdot [x - (2 - \sqrt{7})]$

b) $y = (x-3) \cdot (x-3)$

c) Im Bereich der reellen Zahlen ist eine derartige Zerlegung nicht möglich.

Die hierbei auftretenden Klammern $(x - x_i)$ heißen **Linearfaktoren.** Aus der Zerlegung in Linearfaktoren läßt sich leicht der Wurzelsatz von VIETA herleiten. Die Zerlegung in Linearfaktoren ist gegebenenfalls auch bei Polynomen höheren Grades möglich. Ohne Beweis sei folgendes mitgeteilt:

▶ **Jede ganze rationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n voneinander verschiedene Nullstellen.**

▶ **Hat sie tatsächlich n voneinander verschiedene Nullstellen, so läßt sie sich durch ein Produkt von n verschiedenen Linearfaktoren darstellen.**

Aufgaben

1. Wenden Sie die Erkenntnisse über die Nullstellen der ganzen rationalen Funktion auf die quadratische Funktion und auf die Lage der zugehörigen Parabeln im Koordinatensystem an! Ziehen Sie daraus auch Schlüsse auf Art und Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung!

2. Die Ableitungen jeder ganzen rationalen Funktion sind ganze rationale Funktionen von abnehmendem Grade. Wieviel verschiedene, reelle Nullstellen kann die 1., 2., 5., $(n-2)$-te, $(n-1)$-te Ableitung einer Funktion n-ten Grades im Höchstfall haben?

3. Bilden Sie von folgenden Funktionen die erste, zweite und dritte Ableitung!

a) $y = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$ **b)** $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$ **c)** $y = x^2\sqrt{2} + x\sqrt{3} - \sqrt{5}$

d) $y = ax^k - bx^{k+1} + cx^{k+2}$ **e)** $y = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$ **f)** $y = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^2$

4. Bilden Sie von folgenden Funktionen jeweils diejenigen Ableitungen, die die angegebene Bedingung erfüllen!

Funktion	Bedingung
a) $y = \frac{1}{8}x^4 - 2x^3 + 7x - 0{,}2$	alle nicht identisch verschwindenden Ableitungen
b) $y = -\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}$	3., 6. Ableitung
c) $y = 0{,}1x^2 - 0{,}01x + 0{,}001$	diejenige Ableitung, die eine von Null verschiedene Konstante ist
d) $y = (0{,}1x^2 - 0{,}05)^2$	die Ableitung, die eine lineare Funktion ist.

5. Welchen Wert hat die 2., 3., 5. Ableitung von

a) $y = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{24}x^4$ **b)** $y = 0{,}02x^{10} + 0{,}01x^5 - x^2 + 4$

an den Stellen $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -\frac{1}{5}$; $x_4 = 0{,}1$; $x_5 = \sqrt{3}$?

6. An die Bilder folgender Funktionen sollen jeweils im Punkt $P_i(x_i; y_i)$ die Tangenten gelegt werden. Wie groß ist deren Steigung? Unter welchen Winkeln schneiden sie die x- und y-Achse? Wie heißen die Koordinaten dieser Schnittpunkte?

a) $y = 0{,}1x^2 + 0{,}2x + 0{,}3$ $P_1\left(\frac{1}{2}; \ldots\right)$ $P_2\left(-\frac{1}{2}; \ldots\right)$

b) $y = -x^3 + \frac{1}{2}x + 4$ $P_1\left(\frac{1}{2}; \ldots\right)$ $P_2\left(-\frac{1}{2}; \ldots\right)$

c) $y = x^2 - 2x + 1$ $P_1(x_1 > 0; 4)$ $P_2(x_2 < 0; 4)$

d) $y = 0{,}001x^6 + 0{,}01x^5$ $P_1(2; \ldots)$ $P_2(3; \ldots)$

7. An die Bilder folgender Funktionen sollen Tangenten gelegt werden, die die gegebenen Steigungen m_i haben. In welchen Punkten ist das möglich?

a) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + 3;$ $m_1 = 0{,}5;$ $m_2 = -\frac{3}{2}$

b) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x;$ $m_1 = 1;$ $m_2 = -3$

c) $y = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2x;$ $m = 2$ d) $y = x^5 - 5x^3;$ $m = -10$

8. Ermitteln Sie die Nullstellen der angegebenen Ableitungen folgender Funktionen!

Funktion	Ableitungen, deren Nullstellen zu bestimmen sind
a) $y = 1{,}6x^2 - 0{,}8x + 4$	1. Ableitung
b) $y = 2x^3 + 2{,}7x^2 - 21{,}6x + 3$	1. und 2. Ableitung
c) $y = x^4 + 1{,}4x^3 + 0{,}6x^2 + 12$	2. und 3. Ableitung

1.8. Untersuchung der ganzen rationalen Funktion

1.8.1. Aufgaben zur Wiederholung

1. Geben Sie eine Definition für die Nullstellen einer Funktion $y = f(x)$! Handelt es sich bei den Nullstellen um geometrische oder arithmetische Elemente, um physikalische Größen oder um Zahlenwerte? Wie werden sie ermittelt?

2. Im allgemeinen können Sie mit den Ihnen bekannten rechnerischen Methoden die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen nur dann genau berechnen, wenn der Grad nicht größer als 2 ist. Nennen Sie einige Sonderformen ganzer rationaler Funktionen höheren als zweiten Grades, deren Nullstellen sich mit den Ihnen geläufigen Mitteln rechnerisch genau ermitteln lassen!

1.8.2. Funktion und Funktionsbild

Durch jede Funktion ist einer vorgegebenen Menge von Werten der unabhängigen Veränderlichen eine ganz bestimmte Menge von Werten der abhängigen Veränderlichen zugeordnet. Diese zweite Menge wird jetzt an einigen Beispielen auf Besonderheiten untersucht.

Beispiele 1 bis 4:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
(1) $y = 9$	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	(konstant)								
(2) $y = \frac{1}{6}x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
	(proportional zu den x-Werten; erst negativ, dann positiv)								

(3) $y = x^2 - 2x + 2$	17 10 5 2 1 2 5 10 17 (erst kleiner, dann größer werdend; stets positiv)
(4) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$	$-\frac{25}{3}$ 0 $\frac{7}{3}$ $\frac{2}{3}$ -3 $-\frac{20}{3}$ $-\frac{25}{3}$ -6 $\frac{7}{3}$ (erst größer, dann kleiner, dann wieder größer werdend; erst negativ, dann positiv, dann wieder negativ, dann wieder positiv)

Einen rascheren Überblick über die Besonderheiten der Funktion gibt die grafische Darstellung durch die Gestalt des entsprechenden Funktionsbildes.

1. Entwerfen Sie die Bilder für die Funktionen (1) bis (4)!

Die **Untersuchung einer Funktion** kann also auch durch Zeichnen des zugehörigen Bildes und Erörterung seiner Gestalt **(Kurvendiskussion)** erfolgen. Das Bild kann dazu auf zweierlei Weise gezeichnet werden:

a) mit Hilfe möglichst vieler Punkte, deren Koordinaten einer Wertetafel der Funktion entnommen werden;

b) mit Hilfe einiger weniger, aber besonders charakteristischer Punkte und einzelner besonders markanter Eigenschaften des Bildes, die nach besonderen Verfahren aus dem analytischen Ausdruck der Funktion ermittelt werden.

Der erste Weg ist unbefriedigend, da man nicht weiß, wie sich die Kurve zwischen den zufällig ausgewählten Punkten verhält. Der zweite Weg besitzt diesen Mangel nicht und ist außerdem rechnerisch nicht so aufwendig. Er wird deshalb im folgenden beschritten.
In Abbildung 1.7. ist das Bild einer ganzen rationalen Funktion $y = f(x)$ dargestellt. An ihm sind die folgenden charakteristischen Bildbereiche mit besonderen geometrischen Eigenschaften zu erkennen:

1) Beim Fortschreiten in Richtung wachsender x-Werte kommt man bei (I) von Punkten mit beliebig kleinen Abszissen her und gelangt jenseits (II) zu Punkten mit beliebig großen Abszissen. Wichtig ist die Klärung der Frage, wie sich links von (I) und rechts von (II) die Ordinaten ändern und ob sie eventuell einem Grenzwert zustreben. Man spricht vom **Verhalten im Unendlichen.**

2) Denkt man sich an das Bild der Funktion in jedem Punkt die Tangente gelegt, so erkennt man, daß deren Neigungswinkel gegen die x-Achse in ihrer positiven Richtung im Bereich der Kurvenzüge bei (III) und (V) stets zwischen 90° und 180°, bei (IV) aber stets zwischen 0° und 90° liegen. In den Bereichen (III) und (V) gilt offenbar:

$$f(x_2) < f(x_1), \quad \text{falls} \quad x_2 > x_1,$$

d. h., die Funktion fällt hier monoton. Entsprechend wächst sie monoton im Bereich (IV) wegen

$$f(x_2) > f(x_1), \quad \text{falls} \quad x_2 > x_1.$$

Solche Teile des Funktionsbildes heißen **Monotoniebögen.**

3) Beobachtet man die Änderung der Neigungswinkel dieser Tangenten beim Fortschreiten in Richtung wachsender x-Werte, so stellt man im Bereich (VI) eine Zunahme, im Bereich (VII) aber eine Abnahme der Größe dieser Winkel fest. Da das Funktionsbild beim Betrachten in Richtung wachsender y-Werte („von unten her") im Bereich (VI) konvex, im Bereich (VII) aber konkav erscheint, sagt man, das Funktionsbild habe bei (VI) einen **Konvexbogen** und bei (VII) einen **Konkavbogen.**

An wichtigen und charakteristischen Punkten sind zu erkennen:

4) die **Schnittpunkte mit der x-Achse:** X_1, X_2, X_3;

5) der **Schnittpunkt mit der y-Achse:** Y_1;

6) die Punkte H_1 und T_1, in denen zwei verschiedenartige Monotoniebögen zusammenstoßen. Sie sind **innere lokale** (oder relative) **Extrempunkte** des Funktionsbildes. Insbesondere heißt H_1 (Übergang eines wachsenden in einen fallenden Monotoniebogen im Sinne wachsender Argumente) **Hochpunkt** oder **lokaler Maximumpunkt.** Entsprechend heißt T_1 (Übergang eines fallenden in einen wachsenden Monotoniebogen im Sinne wachsender Argumente) **Tiefpunkt** oder **lokaler Minimumpunkt** des Bildes der Funktion.

Die Formulierungen „relativer bzw. lokaler Extrempunkt" weisen darauf hin, daß es sich dabei nicht immer um einen Punkt handelt, der im gegebenen Definitionsbereich die überhaupt größte bzw. kleinste Ordinate besitzt. In einem vorgegebenen Definitionsbereich kann das Bild der Funktion nämlich sehr wohl mehrere lokale Extrempunkte besitzen. Es können auch unter Umständen am Rande des Definitionsbereichs Punkte existieren, deren Ordinaten größer bzw. kleiner als die der lokalen inneren Extrempunkte sind. In Anwendungsaufgaben ist es häufig wichtig, unter allen diesen Punkten gerade diejenigen zu bestimmen, die insgesamt gesehen die größte bzw. kleinste Ordinate haben. Sie heißen **globale** (oder absolute) **Extrempunkte.** Für Kurvendiskussionen sind aber die inneren lokalen Extrempunkte von besonderer Bedeutung.

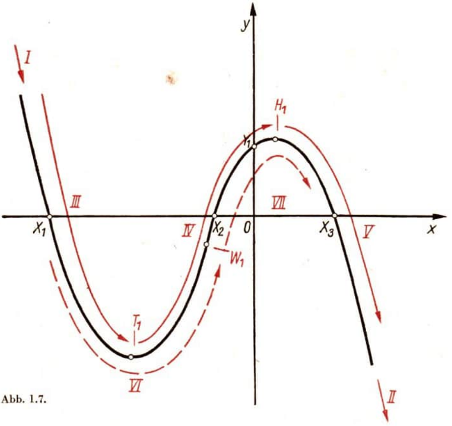


Abb. 1.7.

7) Der Punkt W_1, in dem ein Konvex- und ein Konkavbogen des Funktionsbildes zusammenstoßen, heißt **Wendepunkt.**

Den geometrischen Besonderheiten der Funktionsbilder entsprechen charakteristische analytische Eigenarten der Funktion. Es ist wichtig, die entsprechenden Fachbezeichnungen streng auseinanderzuhalten.

Gegenüberstellung entsprechender Begriffe und Fachbezeichnungen

Funktionsbild	Funktion $y = f(x)$
Beliebiger Punkt P_0 mit der Abszisse x_0 Ordinate y_0	Wertepaar mit dem Argument (der Stelle) x_0 Funktionswert $y_0 = f(x_0)$
Abszisse x_1 des Schnittpunktes X_1 mit der x-Achse	(reelle) Nullstelle x_1 der Funktion; Bedingung: $y_1 = f(x_1) = 0$
Ordinate y_2 des Schnittpunktes Y_2 mit der y-Achse	Funktionswert y_2 für das Argument $x_2 = 0$; Bedingung: $y_2 = f(0)$
Lokaler Maximumpunkt mit der Abszisse x_H Ordinate y_H Lokaler Minimumpunkt mit der Abszisse x_T Ordinate y_T *Gemeinsame Bezeichnung*: Lokaler Extrempunkt mit der Abszisse x_E Ordinate y_E	Lokale Maximumstelle x_H der Funktion Lokaler Maximumwert oder lokales Maximum der Funktion $[y_H = f(x_H)]$ Lokale Minimumstelle x_T der Funktion Lokaler Minimumwert oder lokales Minimum der Funktion $[y_T = f(x_T)]$ *Gemeinsame Bezeichnung*: Lokale Extremstelle x_E der Funktion Lokaler Extremwert oder lokales Extremum der Funktion $[y_E = f(x_E)]$
Wendepunkt mit der Abszisse x_W Ordinate y_W	(keine besondere Fachbezeichnung)
Wachsende oder fallende Monotoniebögen	Intervalle, in denen die Funktion monoton wächst bzw. fällt
Konvex- oder Konkavbögen	Intervalle, in denen die Funktion konvexes bzw. konkaves Verhalten zeigt
Verhalten im Unendlichen	Grenzwert der Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ $\left[\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right.$ bzw. $\left.\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right]$

1.8.3. Berechnung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Die Bestimmung geschieht ohne Anwendung der Differentialrechnung.

Beispiel 5:

Es sind die Schnittpunkte des Bildes der Funktion

$$y = 0{,}4\,x^4 - 0{,}1\,x^2 - 1{,}8$$

mit den Koordinatenachsen zu bestimmen.

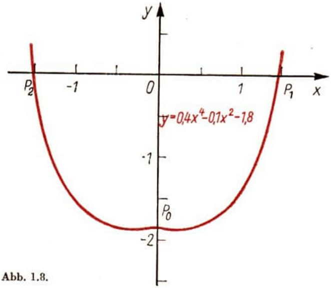


Abb. 1.8.

a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

Bedingung: $x_0 = 0$

$$y_0 = 0 - 0 - 1{,}8$$
$$y_0 = -1{,}8$$

Ergebnis:

geometrisch (Funktionsbild)

Die Ordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse ist $-1{,}8$ (Abb. 1.8.).

analytisch (Funktion)

Der Funktionswert für das Argument 0 ist $-1{,}8$.

b) Schnittpunkte mit der x-Achse

Bedingung: $y_0 = 0$

$$0 = 0{,}4\,x_0^4 - 0{,}1\,x_0^2 - 1{,}8$$
$$x_0^2 = z$$
$$0{,}4\,z^2 - 0{,}1\,z - 1{,}8 = 0$$
$$z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{9}{2} = 0$$
$$z = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{9}{2}}$$
$$z = \frac{1}{8} \pm \frac{17}{8}$$

$$z_1 = (x_{1,2})^2 = \frac{9}{4} \qquad z_2 = (x_{3,4})^2 = -2$$

$$x_1 = +\frac{3}{2} \qquad x_2 = -\frac{3}{2} \qquad \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} \text{nicht reell}$$

Da nur Bildpunkte mit reellen Koordinaten betrachtet werden und auch bei der Funktion nur reelle Werte untersucht werden sollen, entfallen x_3 und x_4 für die weiteren Untersuchungen.

Berechnet man die Ordinate eines Punktes mit einer etwas größeren und die eines Punktes mit einer etwas kleineren Abszisse als x_1 bzw. x_2, z. B. 1 und 2 bzw. -1 und -2, so erhält man jeweils Ordinaten mit unterschiedlichen Vorzeichen:

$$\text{zu } x_1 \begin{cases} f(1) = 0{,}4 - 0{,}1 - 1{,}8 < 0 \\ f(2) = 6{,}4 - 0{,}4 - 1{,}8 > 0 \end{cases}$$

$$\text{zu } x_2 \begin{cases} f(-1) = f(1) < 0 \\ f(-2) = f(2) > 0. \end{cases}$$

Da in diesen Intervallen außer x_1 bzw. x_2 keine weiteren Nullstellen der Funktion liegen, folgt, daß das Funktionsbild in $X_1\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ bzw. $X_2\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ jeweils von der einen auf die andere Seite der x-Achse übergeht.

Ergebnis:

geometrisch (Funktionsbild)

Das Bild der Funktion geht zweimal von der einen auf die andere Seite der x-Achse über. Die Abszissen der Schnittpunkte sind $\frac{3}{2}$ bzw. $-\frac{3}{2}$ (Abb. 1.8.).

analytisch (Funktion)

Die (reellen) Nullstellen der Funktion sind $\frac{3}{2}$ bzw. $-\frac{3}{2}$.

Die Auflösung der Gleichung $f(x_0) = 0$ liefert die Abszissen aller Schnittpunkte, d. h. aller Punkte, die Funktionsbild und Abszissenachse gemeinsam haben. Das sind außer solchen Punkten, wie sie sich im vorigen Beispiel ergaben, auch solche, in denen das Bild der Funktion nicht von der einen auf die andere Seite der x-Achse übergeht. (Berührungspunkte; vgl. dazu auch Abschnitt 1.8.4.!)

Beispiel 6:

Es sind die Nullstellen der Funktion $y = 2x - 3 - \frac{1}{3}x^2$ zu bestimmen.

Bedingung: $y_0 = 0$

$$0 = 2x_0 - 3 - \frac{1}{3}x_0^2$$

$$x_0^2 - 6x_0 + 9 = 0$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 3$$

Eine entsprechende Untersuchung zweier Punkte mit etwas größerer bzw. etwas kleinerer Abszisse ergibt hier Ordinaten mit gleichen Vorzeichen:

$$f(2) = 4 - 3 - \frac{4}{3} < 0,$$

$$f(4) = 8 - 3 - \frac{16}{3} < 0.$$

Ergebnis: Den Nullstellen $x_1 = x_2 = 3$ der Funktion entspricht beim Funktionsbild die Abszisse 3 eines Schnittpunkts mit der x-Achse, in dem es nicht von einer auf die andere Seite der x-Achse übergeht (Abb. 1.9.).

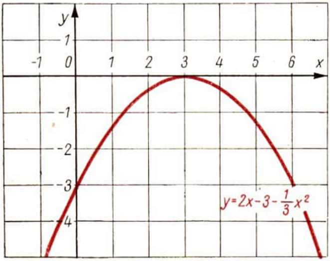


Abb. 1.9.

Aufgaben

1. Wieviel Schnittpunkte mit der x-Achse und wieviel Schnittpunkte mit der y-Achse kann das Bild einer ganzen rationalen Funktion n-ten Grades höchstens, wieviel muß es mindestens haben?
   Anleitung: Bei der Bestimmung der Mindestzahl von Schnittpunkten mit der x-Achse müssen Sie beachten, ob der Grad der zugehörigen Funktion gerade oder ungerade ist.

2. Welche Bedingungen muß der analytische Ausdruck einer Funktion erfüllen, wenn ihr Bild durch den Koordinatenursprung geht?

3. In welchen Punkten schneiden die Bilder folgender Funktionen die Koordinatenachsen? Zeichnen Sie im Anschluß an die Berechnung die Bilder mit Hilfe einer Wertetafel!
   a) $2x + 3y + 6 = 0$ **b)** $x - 2 = 0$ **c)** $y + 2 = 0$
   d) $y = 4x^2 + 5x - 6$ **e)** $y - \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x + 2) = 0$ **f)** $y = x^4 - 13x^2 + 36$

4. Bestimmen Sie alle Nullstellen und die zum Argument $x = 0$ gehörenden Funktionswerte!
   a) $y = 8x - 4x^2$ **b)** $y = x^3 - 3x^2$ **c)** $y = x^3 - 3x$
   d) $y = x^5 - x^4 - x^3$ **e)** $2y - x + 3 = 0$ **f)** $y = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^2$

1.8.4. Ermittlung der lokalen Extrempunkte und Wendepunkte

Die Bestimmung dieser Punkte wird durch den Einsatz der Differentialrechnung erleichtert. Die Abbildung 1.10. zeigt das Bild einer Funktion $y = f(x)$ mit zwei lokalen Extrempunkten. Entsprechend der Definition (vgl. Abschnitt 1.8.2.) werden zunächst die wesentlichen Merkmale eines Monotoniebogens untersucht. Innerhalb eines solchen Bogens haben die Tangenten entweder Neigungswinkel, die sämtlich zwischen 0° und 90° liegen, oder Neigungswinkel, die sämtlich zwischen 90° und 180° liegen. Das bedeutet, daß ihre Steigungen und damit die Werte der ersten Ableitung der betreffenden Funktion in diesem Intervall niemals verschiedene Vorzeichen haben.[1] Es gilt also die **notwendige Bedingung für Monotoniebögen:**

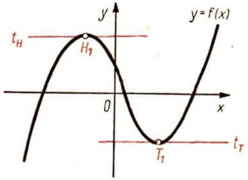


Abb. 1.10.

$f'(x) \geqq 0$ für alle x im Intervall bei monoton wachsender Funktion,

$f'(x) \leqq 0$ für alle x im Intervall bei monoton fallender Funktion.

Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, wenn der allgemeine Monotoniebegriff und nicht der der strengen Monotonie zugrunde gelegt wird. Voraussetzung dafür ist, daß die Funktion innerhalb der betrachteten Intervalle an jeder Stelle differenzierbar ist. Daß das nicht immer der Fall zu sein braucht, wurde z. B. für die Funktion $y = f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$ im Beispiel 2 im Abschnitt 1.3.2. gezeigt.

[1] Da nämlich mit einem Monotoniebogen zwei Sekantensteigungen (Differenzenquotienten) niemals verschiedenes Vorzeichen haben, gilt dies auch für die Grenzwerte der Differenzenquotienten, die Differentialquotienten.

Als notwendige Bedingung für die Abszisse x_E eines lokalen Extrempunktes, der als Trennungspunkt zwischen zwei verschiedenartigen Monotoniebögen beiden zugleich angehören muß, folgt daraus

$$f'(x_E) = 0.$$

Geometrisch bedeutet das, daß in einem lokalen Extrempunkt die Tangente an das Bild der Funktion parallel zur x-Achse verlaufen muß (Abb. 1.10.).
Die Bedingung $f'(x_E) = 0$ ist aber für einen lokalen Extrempunkt nicht hinreichend, denn sie kann auch für einen Punkt im Innern eines Monotoniebogens zutreffen. Die Abbildungen 1.11. und 1.12. veranschaulichen diesen Fall. Der betreffende Punkt ist in der Abbildung ein Wendepunkt W, der als Besonderheit eine zur x-Achse parallele Tangente t_W aufweist und gelegentlich als **Terrassenpunkt** bezeichnet wird.

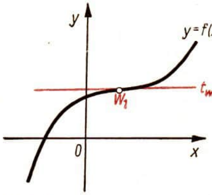


Abb. 1.11.

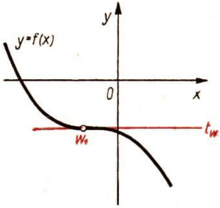


Abb. 1.12.

2. *Zeichnen Sie eine Kurve mit einem Terrassenpunkt und eine Kurve mit lokalen Extrempunkten! Untersuchen Sie das konvexe oder konkave Verhalten in der Umgebung dieser Punkte!*

Das Ergebnis der Untersuchungen in Schülerauftrag 2 kann in folgender Übersicht zusammengefaßt werden:

	Extrempunkt	Terrassenpunkt
Art des Monotoniebogens (wachsend oder fallend)	ändert sich	bleibt gleich
Art des Krümmungsverhaltens (Konvex- bzw. Konkavbogen)	bleibt gleich	ändert sich

Um festzustellen, ob ein Extrempunkt oder ein Terrassenpunkt vorliegt, ist es deshalb zweckmäßig, das konvexe bzw. das konkave Verhalten der Funktion zu untersuchen. Dieses Verhalten kann durch die Änderung der Steigung der Tangente beim Fortschreiten im Sinne wachsender Abszissen beschrieben werden.

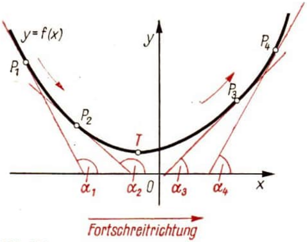


Abb. 1.13.

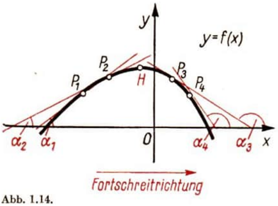


Abb. 1.14.

Ein **Konvexbogen** (Abb. 1.13.)

Ein **Konkavbogen** (Abb. 1.14.)

des Funktionsbildes liegt dort vor, wo im Sinne wachsender Abszissen der Neigungswinkel α der Tangenten in den Bereichen $90^\circ > \alpha \geqq 0^\circ$ bzw. $180^\circ > \alpha \geqq 90^\circ$ und damit auch $\tan\alpha$

monoton wächst.

monoton fällt.

Sofern die zugrunde liegende Funktion $y = f(x)$ im betrachteten Intervall überall differenzierbar ist, ist der Tangens des Neigungswinkels α überall gleich der ersten Ableitung $y' = f'(x)$ an der betreffenden Stelle. Die Ableitung y' muß daher bei einem

Konvexbogen

Konkavbogen

des Bildes von $y = f(x)$ eine

monoton wachsende

monoton fallende

Funktion sein. Das Bild von $y' = f'(x)$ muß also einen Monotoniebogen im Sinne

wachsender Werte von y' (Abb. 1.15.)

fallender Werte von y' (Abb. 1.16.)

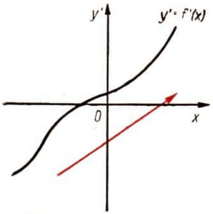


Abb. 1.15.

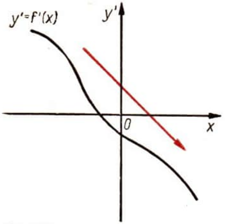


Abb. 1.16.

haben. Infolgedessen gilt, falls $y = f(x)$ zweimal differenzierbar ist, als notwendige und hinreichende Bedingung für einen

Konvexbogen:	Konkavbogen:
$y'' = f''(x) \geqq 0$	$y'' = f''(x) \leqq 0$

(in allen Punkten des Bogens).

Das folgt auf Grund der Definition aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung für Monotoniebögen (S. 44) unter Beachtung von $[f'(x)]' = f''(x)$.
Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann in vielen Fällen entschieden werden, ob das Funktionsbild an einer Stelle x_0, an der die erste Ableitung verschwindet, einen lokalen Extrempunkt besitzt. Falls nämlich $f''(x)$ stetig ist und $f''(x_0) > 0$ gilt, so ist $f''(x)$ auch noch in einer kleinen Umgebung von x_0 positiv. Das Funktionsbild ist also dort konvex. Daher ist die erste Ableitung $f'(x)$ dort monoton wachsend, mithin links von x_0 wegen $f'(x_0) = 0$ kleiner als Null, rechts von x_0 größer als Null. In diesem Fall ist demnach $f(x)$ in dem links von x_0 gelegenen Teil monoton fallend, in dem rechts von x_0 gelegenen Teil monoton steigend. Das Funktionsbild hat also zu beiden Seiten des Punktes mit der Abszisse x_0 verschiedenartige Monotoniebögen, links einen fallenden, rechts einen wachsenden. Der Punkt selbst ist also ein lokaler Minimumpunkt, die Funktion hat dort ein lokales Minimum.

3. *Führen Sie die entsprechenden Überlegungen für einen lokalen Maximumpunkt durch!*

Es ergibt sich also folgende **hinreichende Bedingung für lokale innere Extrempunkte:** Das Bild der Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle (x_E, y_E) einen lokalen inneren

Minimumpunkt $T(x_T; y_T)$	Maximumpunkt $H(x_H; y_H)$
wenn gilt:	
$f'(x_T) = 0$	$f'(x_H) = 0$
$f''(x_T) > 0$	$f''(x_H) < 0$

Ergebnisse:

1) Ob ein Funktionsbild in einer Umgebung des Punktes $P_0(x_0; y_0)$ einen Konvexbogen oder einen Konkavbogen hat, ergibt sich, falls $f''(x_0) \neq 0$ und $y = f''(x)$ stetig ist, aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung wie folgt:
Falls $f''(x_0) > 0$, hat das Funktionsbild in einer hinreichend kleinen Umgebung von P_0 einen Konvexbogen.
Falls $f''(x_0) < 0$, hat das Bild entsprechend einen Konkavbogen.

2) Ein Wendepunkt $W(x_W; y_W)$ liegt sicher dort vor, wo ein Konvexbogen des Funktionsbildes in einen Konkavbogen übergeht oder umgekehrt. Das ist immer dann der Fall, wenn die zweite Ableitung der Funktion $y = f(x)$ an dieser Stelle das Vorzeichen ändert. An einer solchen Stelle muß notwendig $f''(x_W) = 0$ gelten. Das ist also unter den oben genannten Voraussetzungen eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes. Diese Bedingung ist allerdings nicht hinreichend. Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß mit Sicherheit ein Wendepunkt an der Stelle x_W vorliegt, wenn außer $f''(x_W) = 0$ auch noch gilt $f'''(x_W) \neq 0$ (hinreichende Bedingung). Sollte hingegen an einer Stelle x_0 gleichzeitig $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ gelten, so sind weitere Untersuchungen nötig, um den Charakter von Funktion und Funktionsbild an dieser Stelle festzustellen. (Auf diese Untersuchungen wird hier nicht eingegangen.)

3) Ein Punkt $E(x_E; y_E)$ ist für das Funktionsbild sicher dann ein lokaler Extrempunkt, wenn dort die Tangente parallel zur x-Achse liegt und wenn das Funktionsbild in einer Umgebung einen Konkavbogen bzw. einen Konvexbogen hat, wenn also sowohl $f'(x_E) = 0$, als auch $f''(x_E) \neq 0$ gilt, und zwar ergibt sich für den Fall $f''(x_E) > 0$ ein Tiefpunkt und für den Fall $f''(x_E) < 0$ ein Hochpunkt.
Es ist allerdings auch möglich, daß ein solcher Extrempunkt vorliegt, falls $f'(x_E) = f''(x_E) = 0$ gilt. In diesem Falle sind weitere Untersuchungen erforderlich. (Auf diese Untersuchungen wird hier nicht eingegangen.)

Beispiel 7:

Von dem zu $y = 30x^5 + 70x^4 + 40x^3 + 1$ gehörenden Funktionsbild sind die lokalen Extrempunkte und die Wendepunkte zu bestimmen.
Zuerst wird die erste, zweite und dritte Ableitung gebildet:

$$y' = 150x^4 + 280x^3 + 120x^2 \qquad y'' = 600x^3 + 840x^2 + 240x$$
$$y''' = 1800x^2 + 1680x + 240$$

a) Ermittlung der lokalen Extrempunkte (**Bedingung: $y' = 0$**):

$$y' = 150x_0^4 + 280x_0^3 + 120x_0^2 = 0$$
$$150x_0^2\left(x_0^2 + \frac{28}{15}x_0 + \frac{4}{5}\right) = 0$$
$$x_1 = x_2 = 0 \quad \Bigg| \quad x_0^2 + \frac{28}{15}x_0 + \frac{4}{5} = 0$$
$$x_3 = -\frac{2}{3}; \quad x_4 = -\frac{6}{5}$$

Durch Einsetzen von $x_1 = x_2$; x_3; x_4 in die zweite Ableitung wird untersucht,
1. ob es sich um die Abszissen von lokalen Extrempunkten handelt,
2. ob, falls das der Fall ist, ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt.

$y_1'' = y_2'' = 0$: nicht sicher, ob ein lokaler Extrempunkt vorliegt.

$$y_3'' = 600\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 840\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 240\left(-\frac{2}{3}\right) > 0: \quad \text{Tiefpunkt.}$$
$$y_4'' = 600\left(-\frac{6}{5}\right)^3 + 840\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 240\left(-\frac{6}{5}\right) < 0: \quad \text{Hochpunkt.}$$

Mit Hilfe des gegebenen analytischen Ausdrucks ergeben sich schließlich die Ordinaten der beiden Extrempunkte:

$$y_3 = -\frac{79}{81}; \quad y_4 = \frac{1489}{625}$$

b) Ermittlung der Wendepunkte: (***Bedingung*: $y'' = 0$**)

$$y'' = 600x_0^3 + 840x_0^2 + 240x_0 = 0$$
$$600x_0\left(x_0^2 + \frac{7}{5}x_0 + \frac{2}{5}\right) = 0$$
$$x_5 = 0 \quad \Bigg| \quad x_0^2 + \frac{7}{5}x_0 + \frac{2}{5} = 0$$
$$x_6 = -\frac{2}{5}; \quad x_7 = -1$$

Durch Einsetzen von x_5, x_6; x_7 in die dritte Ableitung läßt sich hier entscheiden, ob es sich um die Abszissen von Wendepunkten handelt.

$$y_5''' = 240 \neq 0$$

$$y_6''' = 1800 \cdot \frac{4}{25} - 1680 \cdot \frac{2}{5} + 240 \neq 0$$

$$y_7''' = 1800 - 1680 + 240 \neq 0$$

Alle drei Werte sind sicher Abszissen von Wendepunkten.

Die Ordinaten der drei Wendepunkte ergeben sich aus dem gegebenen analytischen Ausdruck:

$$y_5 = 1;\ y_6 = -\frac{47}{625};\ y_7 = 1.$$

Wegen $x_5 = x_1 = x_2$ ergibt sich hier ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente (Terrassenpunkt).
Damit ist nun auch entschieden, daß an den Stellen $x_1 = x_2 = 0$ die Funktion kein lokales Extremum hat.

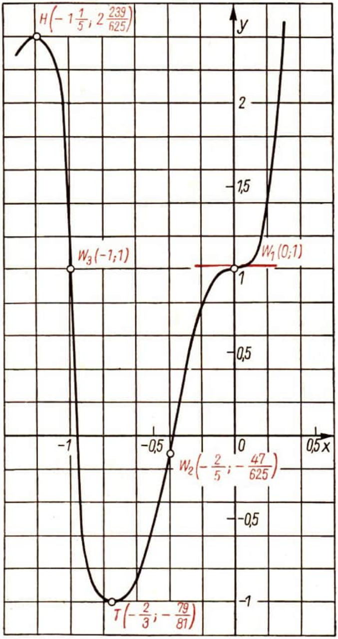


Abb. 1.17.

Ergebnis (Abb. 1.17.):

geometrisch (Funktionsbild)

Die Kurve besitzt zwei lokale Extrempunkte, einen lokalen Maximumpunkt $H\left(-\frac{6}{5}; \frac{1489}{625}\right)$ und einen lokalen Minimumpunkt $T\left(-\frac{2}{3}; -\frac{79}{81}\right)$ sowie drei Wendepunkte: $W_1\ (0;\ 1)$; $W_2\left(-\frac{2}{5}; -\frac{47}{625}\right)$ und $W_3(-1;\ 1)$. Davon ist W_1 ein Terrassenpunkt.

analytisch (Funktion)

Die Funktion besitzt ein lokales Maximum vom Wert $\frac{1489}{625}$ an der Stelle $-\frac{6}{5}$ und ein lokales Minimum vom Wert $-\frac{79}{81}$ an der Stelle $-\frac{2}{3}$.

Untersuchen Sie das Bild der Funktion $y = 4x - 4 - x^2$ auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte, und zeichnen Sie die Kurve! Welche Besonderheiten stellen Sie fest? (Vgl. dazu Beispiel 6 auf Seite 43!)

1.8.5. Das Hornersche Schema

Die Bestimmung der Extrempunkte und Wendepunkte erfordert jeweils auch die Berechnung von Funktionswerten $y = f(x)$ zu bestimmten Argumenten x. Häufig ist zur Berechnung von Funktionswerten einer ganzen rationalen Funktion das **Hornersche Schema** zeit- und arbeitsparend und ermöglicht die vorteilhafte Anwendung des Rechenstabs.
Der analytische Ausdruck einer Funktion, z. B.

$$y = f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

kann durch mehrmaliges Ausklammern von x schrittweise in einen Klammerausdruck umgeformt werden, im vorliegenden Beispiel zu

$$y = (a x^2 + b x + c) x + d$$
$$y = [(a x + b) x + c] x + d.$$

Man setzt nunmehr den betreffenden Zahlenwert für x ein und erhält unter abwechselndem Multiplizieren und Addieren schließlich den Funktionswert y. Dabei beginnt man mit der innersten Klammer. Zweckmäßig ist für diese Berechnung die Verwendung eines Schemas:

$$\begin{array}{c|cccc}
x & a & b & c & d \\
\hline
 & & a x_1 & (ax_1+b)\,x_1 & [(ax_1+b)x_1+c]\,x_1 \\
x_1 & a & (ax_1+b) & [(ax_1+b)x_1+c] & [(ax_1+b)x_1+c]+d = y_1
\end{array}$$

Beispiel 8:

Die lokalen Extremwerte der Funktion $y = 2x^3 - 9x^2 - 12x + 7$ sind zu bestimmen.

Ableitungen:

$$y' = 6x^2 - 18x - 12 \qquad y'' = 12x - 18$$

Ermittlung der lokalen Extremstellen ($y' = 0$):

$$6{x_0}^2 - 18x_0 - 12 = 0$$
$${x_0}^2 - 3x_0 - 2 = 0$$
$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}; \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$$
$${y_1}'' = 12 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}\right) - 18 = 6\sqrt{17} > 0 \quad \textbf{Minimum}$$
$${y_2}'' = 12 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}\right) - 18 = -6\sqrt{17} < 0 \quad \textbf{Maximum}$$

Ermittlung der lokalen Extremwerte:

Dazu sollen Näherungswerte für x_1 und x_2 verwendet werden.

$$x_1 \approx 1{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 4{,}12 = 3{,}56 \qquad x_2 \approx 1{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 4{,}12 = -0{,}56$$

Um die Extremwerte näherungsweise mit diesen Werten zu errechnen, wird jetzt der analytische Ausdruck der Funktion folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{2}\,x^3 - \mathbf{9}\,x^2 - \mathbf{12}\,x + \mathbf{7} \\ &= (2\,x^2 - 9\,x - 12) \cdot x + 7 \\ y &= [(2\,x - 9)\,x - 12] \cdot x + 7 \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir 3,56 für x und rechnen den Ausdruck von innen nach außen aus. Dazu sind für $x_1 \approx 3{,}56$ folgende Rechenschritte nötig:

(1) Teilmultiplikation $3{,}56 \cdot 2$, anschließend Addition des Ergebnisses zu -9.

(2) Teilmultiplikation der unter (1) erhaltenen Summe $(-1{,}88)$ mit 3,56, anschließend Addition des Ergebnisses zu -12.

(3) Teilmultiplikation der unter (2) erhaltenen Summe $(-18{,}69)$ mit 3,56, anschließend Addition des Ergebnisses zu $+7$.

x	2	-9	-12	7
		$\cdot x_1$ 7,12	$\cdot x_1$ -6,69	$\cdot x_1$ -66,5
$x_1 = 3{,}56$	2	-1,88	-18,69	-59,5 $\approx y_1$

Der gleichbleibende Faktor x_1 ermöglicht ein sehr rasches Arbeiten mit dem Rechenstab. Das Zusammenfassen der untereinanderstehenden Summanden kann im Kopf ausgeführt werden, so daß bei der üblichen Kurzform des Schemas, die anschließend wiedergegeben wird, ein beachtlicher Zeitgewinn entsteht.

x	2	-9	-12	7
$x_1 = 3{,}56$	2	$-1{,}88$	$-18{,}69$	$-59{,}5 \approx y_1$
$x_2 = -0{,}56$	2	$-10{,}12$	$-6{,}33$	$10{,}5 \approx y_2$

Beispiel 9:

Für $y = x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}$ ist der Funktionswert zu $x_1 = -2{,}17$ zu berechnen.

Die Zerlegung ergibt hier:

$$\begin{aligned} y &= \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)x + \frac{3}{4} \\ &= \left[\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)x + 0\right]x + \frac{3}{4} \\ y &= \left\{\left[\left(\mathbf{1}\,x - \mathbf{\frac{1}{2}}\right)x + \mathbf{0}\right]x + \mathbf{0}\right\}x + \mathbf{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Das entspricht dem Ausdruck $y = \mathbf{1}\,x^4 - \mathbf{\frac{1}{2}}x^3 + \mathbf{0} \cdot x^2 + \mathbf{0} \cdot x + \mathbf{\frac{3}{4}}$, d. h., in der Potenzfolge der unabhängigen Veränderlichen fehlende Glieder müssen (mit dem Koeffizienten 0 versehen) ergänzt werden.

HORNERsches Schema:

x	1	$-0{,}5$	0	0	0,75
$x_1 = -2{,}17$	1	$-2{,}17$ $-2{,}67$	$5{,}79$ $5{,}79$	$-12{,}56$ $-12{,}56$	$27{,}26$ $28{,}0 \approx y_1$

Aufgaben

1. Der Scheitel jeder Parabel, die als grafische Darstellung der Funktion $y = x^2 + px + q$ entsteht, ist ein lokaler Extrempunkt dieses Funktionsbildes. Bestimmen Sie auf diesem Wege die Koordinaten des Scheitels, und vergleichen Sie das Ergebnis mit den früher auf anderem Wege erhaltenen Koordinaten!

2. Verfahren Sie genauso mit der Funktion $y = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$! Wovon hängt es ab, ob sich an der Extremstelle ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ergibt? Was können Sie daraus über die Öffnungsrichtung der zugehörigen Parabel aussagen?

3. Die lokalen inneren Extremstellen einer Funktion sind unter den Nullstellen der ersten Ableitung, die Abszissen der Wendepunkte des zugehörigen Funktionsbildes unter den Nullstellen der zweiten Ableitung zu suchen. Wie viele lokale Extrempunkte und wie viele Wendepunkte kann infolgedessen das Funktionsbild einer ganzen rationalen Funktion 1., 2., 3., 4., ..., n-ten Grades im Höchstfall haben? Wie viele muß es mindestens haben?

4. Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte und Wendepunkte der Bilder folgender Funktionen, und zeichnen Sie danach diese Bilder in dem jeweiligen Bereich! Verwenden Sie zur Berechnung der Ordinaten gegebenenfalls das HORNERsche Schema!

a) $y = x^3 - x - 2$ **b)** $y = x^4 - 8x^2 + 16$ **c)** $y = 3x^3 - 36x + 30$
d) $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$ **e)** $y = x^2 + 2x - 4$ **f)** $y = x^3 - 12x^2 + 48x - 1$

5. An welchen Stellen haben die folgenden Funktionen lokale Extrema?
Von welcher Art sind sie und wie groß sind die Extremwerte?
Welche Punkte der Funktionsbilder sind Wendepunkte?

a) $y = x^3 - 9x^2 + 27x - 10$ **b)** $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$ **c)** $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$
d) $y = x^3 - 13x + 27$ **e)** $y = 30 - 24x + 9x^2 - x^3$ **f)** $y = 2x^4 - 32x^2 - 10$

1.8.6. Das Verhalten im Unendlichen

Um das Verhalten eines Funktionsbildes im Unendlichen festzustellen, müssen die Grenzwerte des analytischen Ausdrucks der zugehörigen Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ ermittelt werden.

Beispiel 10:

$$y = 4x^4 - 2x^2 + x - 3$$

Man bildet

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} (4x^4 - 2x^2 + x - 3).$$

Der analytische Ausdruck wird durch Ausheben der höchsten Potenz der Veränderlichen in ein Produkt verwandelt und darauf der Grenzwert für jeden Faktor getrennt ermittelt:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(4-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty} x^4$$

bzw.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(4-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right)\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4.$$

Da die Grenzwerte von $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$ für $x \to +\infty$ und auch für $x \to -\infty$ gleich Null sind und der Grenzwert von x^4 für $x \to +\infty$ sowie auch für $x \to -\infty$ keinen endlichen Wert hat, ergibt sich:

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to-\infty} y = +\infty.$$

Die Ordinaten der Punkte des zu der untersuchten Funktion gehörenden Bildes wachsen also für absolut wachsende Argumente über alle Grenzen, das heißt, das Bild verläuft dort im I. bzw. II. Quadranten. Für die allgemeine ganze rationale Funktion ergibt sich für $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} y &= \lim_{x\to+\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x^1} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\cdot x^n\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x^1} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty} x^n\end{aligned}$$

und für $x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} y &= \lim_{x\to-\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x^1} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\cdot x^n\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x^1} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\cdot\lim_{x\to-\infty} x^n.\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \infty, \quad \text{falls } n \text{ gerade}$$

$$\text{bzw.} \quad \lim_{x\to+\infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty, \quad \text{falls } n \text{ ungerade,}$$

folgt schließlich unter Berücksichtigung des Vorzeichens von a_n:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \infty; \quad \lim_{x\to-\infty} y = \infty, \quad \text{falls } n \text{ gerade und } a_n > 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = -\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \quad \text{falls } n \text{ gerade und } a_n < 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \infty; \quad \lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \quad \text{falls } n \text{ ungerade und } a_n > 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = -\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} y = \infty, \quad \text{falls } n \text{ ungerade und } a_n < 0.$$

Geometrisch bedeutet das:
Das Funktionsbild „kommt aus dem Unendlichen“ und „geht ins Unendliche“ auf derselben Seite der x-Achse, falls die ganze rationale Funktion von geradem Grade ist,
auf verschiedenen Seiten der x-Achse, falls sie von ungeradem Grade ist.
In welchen Quadranten das im einzelnen stattfindet, hängt vom Vorzeichen des Koeffizienten a_n von x^n ab (vgl. Abb. 1.18. a bis d).

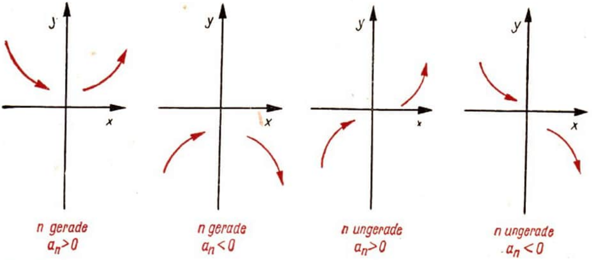


Abb. 1.18. a bis d

Beispiele (Abb. 1.19.)

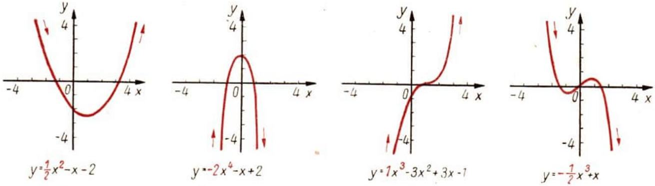


Abb. 1.19. a bis d

Zusammenfassung: Die Untersuchung einer ganzen rationalen Funktion an Hand des zugehörigen Bildes umfaßt die Diskussion folgender Eigenschaften:

Gegebene Funktion: $y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $k \geqq 0$; ganzzahlig.

1. Schnittpunkt mit der y-Achse	$x = 0$ (notwendige und hinreichende Bedingung)
2. Schnittpunkte mit der x-Achse	$y = 0$ (notwendige und hinreichende Bedingung)

3. Lokale Extrempunkte	$y' = 0$ (notwendige Bedingung)
Minimumpunkte	$y' = 0;\ y'' > 0$ (hinreichende Bedingung)
Maximumpunkte	$y' = 0;\ y'' < 0$ (hinreichende Bedingung)
4. Wendepunkte	$y'' = 0$ (notwendige Bedingung)
5. Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x \to +\infty} y;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} y$

Darüber hinaus können, soweit erforderlich, Einzelpunkte durch ihre Koordinaten festgelegt oder durch y' die Richtungen der Tangenten in einzelnen Punkten bestimmt werden.

Beispiel 11 (in abgekürzter Form):

$$y = x^4 - 5x^2 + 4 \qquad y' = 4x^3 - 10x \qquad y'' = 12x^2 - 10 \qquad y''' = 24x$$

1) $y_1 = 4$

2) $x_0^4 - 5x_0^2 + 4 = 0$

$x_0^2 = 1;\quad x_0^2 = 4$

$x_2 = 1;\quad x_3 = -1;\quad x_4 = 2;\quad x_5 = -2$

3) $4x_0^3 - 10x_0 = 0$

$x_6 = 0;\quad x_7 = \frac{1}{2}\sqrt{10};\quad x_8 = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\underset{\text{Max.}}{y_6'' < 0};\quad \underset{\text{Min.}}{y_7'' > 0};\quad \underset{\text{Min.}}{y_8'' > 0}$

$y_6 = 4\,(= y_1);\quad y_7 = -\frac{9}{4};\quad y_8 = -\frac{9}{4}$

4) $12x_0^2 - 10 = 0$

$x_9 = \frac{1}{6}\sqrt{30} \qquad x_{10} = -\frac{1}{6}\sqrt{30}$

$y_9''' \neq 0 \qquad y_{10}''' \neq 0$

$y_9 = \frac{19}{36} \qquad y_{10} = \frac{19}{36}$

5) $n = 4$ (geradzahlig); $a_n = 1 > 0$. Vom 2. in den 1. Quadranten.

6) $y_2' = -6;\quad y_3' = 6;\quad y_4' = 12;\quad y_5' = -12;\quad y_9' = -\frac{10}{9}\sqrt{30} \approx -6;$
$y'_{10} \approx 6$

Zeichnen Sie das Bild der Funktion!

Aufgaben

1. Vergleichen Sie für das Bild einer ganzen rationalen Funktion n-ten Grades das Verhalten im Unendlichen mit der Höchstzahl und der Mindestzahl an lokalen Extrempunkten und Wendepunkten (Aufgabe 3, S. 52) sowie mit der Anzahl der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (Aufgabe 1, S. 44)!

Formulieren Sie einen Satz, und ziehen Sie daraus Schlüsse für die allgemeine Gestalt dieser Bilder!
Anleitung: Beachten Sie, ob der Grad der entsprechenden ganzen rationalen Funktion gerade oder ungerade ist!

2. Untersuchen Sie folgende Funktionen durch Diskussion und Zeichnung der zugehörigen Bilder!

a) $y = x^3 - x^2 - 8x$ **b)** $y = x^4 - 25x^2 + 144$ **c)** $y = x^3 - x$

d) $y = \frac{x^5}{2} - 2x^3$ **e)** $y = 3 - 5x - 2x^2$ **f)** $y = ax^2 + bx + c$

g) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

1.8.7. Anwendungen zur Extremwertbestimmung

Außerordentlich häufig treten in Wirtschaft und Technik Fragen nach der besten (optimalen) Wirkung, der größten (maximalen) Leistung, der kleinsten (minimalen) Abnutzung und ähnlichem auf. Dabei handelt es sich im mathematischen Sinne um die Ermittlung der Extrema der Funktionen, die den betreffenden Sachverhalt charakterisieren. Diese Funktion muß zunächst aus der Aufgabenstellung heraus erkannt und aufgestellt werden, wobei es wichtig ist, den durch die Forderungen der Praxis bedingten Definitionsbereich festzulegen. Als Extremum kommt dabei (im Gegensatz zur Kurvendiskussion) meist das im Innern oder am Rande des Definitionsbereichs gelegene globale Maximum bzw. Minimum in Frage (vgl. Abschnitt 1.8.2.). Deshalb müssen bei solchen Aufgaben, wenn nicht aus der Problemstellung eindeutig hervorgeht, daß das lokale Extremum zugleich den größten bzw. kleinsten Funktionswert im Definitionsbereich darstellt, noch die Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs bestimmt werden.

Beispiel:

Aus Baumstämmen, die der Einfachheit halber mit durchgängig gleich großem kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d) angenommen werden, sollen Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit geschnitten werden. Diese ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkenhöhe.

Beim Aufstellen des analytischen Ausdrucks der Funktion ist zu beachten: Die Größe, die einen Extremwert annehmen soll, muß abhängige Veränderliche werden.[1] Hier ist das die Tragfähigkeit T ($T \triangleq y$). Eine Größe, die variabel ist und die so bestimmt werden muß, daß sich der geforderte Extremfall ergibt, muß unabhängige Veränderliche werden. Oft sind mehrere Größen variabel, hier Breite a und Höhe b des Balkens. Dann muß eine als unabhängige Veränderliche beibehalten werden

[1] Bei den in solchen Anwendungsaufgaben vorkommenden Konstanten und Veränderlichen und demgemäß auch bei den dafür verwendeten Symbolen handelt es sich meist um physikalische Größen. Da aber z. B. die Ableitung nur mit Zahlenwerten $\left(\text{Zahlenwert} = \frac{\text{Größe}}{\text{Maßeinheit}}\right)$ gebildet werden kann, müßten an sich für die mathematische Bearbeitung des Problems andere Symbole verwendet werden. Um diese doppelte Symbolik zu vermeiden, ist es im allgemeinen üblich, im mathematischen Rechengang die gebräuchlichen Größensymbole (z. B. d für den Durchmesser des Baumstammes) beizubehalten, ihnen aber dabei vorübergehend die Bedeutung von Zahlenwerten zu geben. So wird auch in diesem Beispiel verfahren.

(z. B. $a \triangleq x$), während die anderen (hier: b) mit Hilfe weiterer Beziehungen, die sich aus Text oder Figur ergeben, eliminiert werden müssen (Abb. 1.20.).

Ziel: $T = f(a)$

Ansatz: $T = p \cdot a \cdot b^2$ (p: Materialkonstante, Proportionalitätsfaktor)

Die Variable b läßt sich mit Hilfe der Beziehung $b^2 = d^2 - a^2$ eliminieren, und es ergibt sich:

$$T = p \cdot a \cdot (d^2 - a^2) = f(a).$$

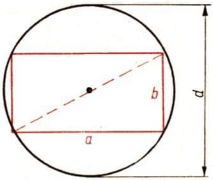


Abb. 1.20.

Es ist wichtig, nunmehr den Definitionsbereich der Funktion festzulegen, da dieser auf Grund der Aufgabe Beschränkungen unterworfen ist. Hier gilt offenbar: $0 < a < d$. Jetzt schließt sich die Untersuchung der Funktion auf ein lokales Maximum an.

Funktion: $T = p\,(a d^2 - a^3) = f(a)$

Ableitungen: $\dfrac{dT}{da} = p\,(d^2 - 3a^2)$

$$\frac{d^2T}{da^2} = p \cdot (-6a)$$

Aus der zweiten Ableitung folgt, daß im Definitionsbereich ($a > 0$) bei einer positiven Materialkonstanten p der Wert $\dfrac{d^2T}{da^2}$ auf jeden Fall negativ ist, daß also hier als innere Extrema nur Maxima vorkommen können.

Bestimmung der Extremstelle:

$$p\,(d^2 - 3a_0^2) = 0$$

$$a_1 = +\frac{d}{3}\sqrt{3}\,; \quad a_2 = -\frac{d}{3}\sqrt{3}\,.$$

Wegen des Definitionsbereichs entfällt a_2. Zu a_1 wird b_1 und T_1 berechnet:

$$b_1 = \sqrt{d^2 - a_1^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \frac{d}{3}\sqrt{6}$$

$$T_1 = p \cdot \frac{d}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{d^2}{9} \cdot 6 = \frac{2}{9}p\,d^3\sqrt{3}\,.$$

Um festzustellen, ob dieses lokale Maximum tatsächlich der größte Funktionswert im Definitionsbereich $0 < a < d$ ist, müßten noch die Funktionswerte auf dem Rand, also bei $a = 0$ und $a = d$, gebildet werden. Das ist aber nicht möglich, da die Funktion dort nicht erklärt ist. Da aber

$$\frac{dT}{da} = p\,(d^2 - 3a^2) \quad \text{für} \quad 0 < a < a_1 \quad \text{größer als Null}$$

$$\text{für} \quad a_1 < a < d \quad \text{kleiner als Null ist,}$$

die Funktion also links vom Extremum monoton wächst, rechts davon hingegen monoton fällt, ist T_1 tatsächlich der gesuchte größte Funktionswert im angegebenen Definitionsbereich.

Ergebnis: Der Balken muß so geschnitten werden, daß Breite zu Höhe im Verhältnis $1 : \sqrt{2} \approx 1 : 1{,}4$ stehen (Abb. 1.21.).

Die Abbildung 1.22. zeigt das Funktionsbild von $T = p\,(a d^2 - a^3)$ mit $d = 1$ und $p = 0{,}5$, also für $T = \frac{1}{2}(a - a^3)$.

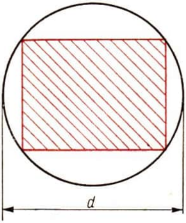


Abb. 1.21.

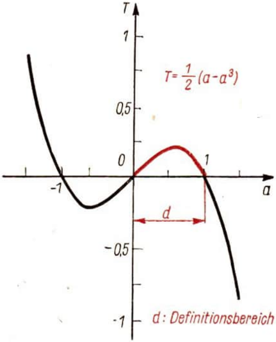
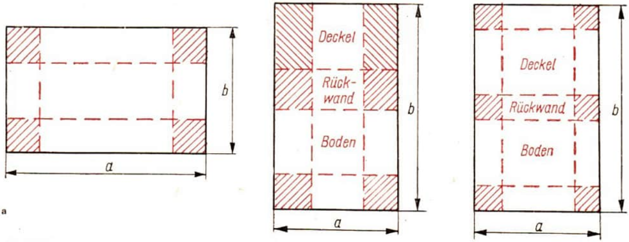


Abb. 1.22.

Aufgaben

1. Aus rechteckigen Pappen (Länge a, Breite b) sollen durch Ausstanzen von Quadraten bzw. Rechtecken und Zusammenfalten Kästen von möglichst großem Inhalt
   a) ohne Deckel (Abb. 1.23.a),
   b) mit anhängendem aufliegendem Deckel (Abb. 1.23.b),
   c) mit anhängendem übergreifendem Deckel (Abb. 1.23.c)
   hergestellt werden. In welchem Verhältnis stehen die Volumina bei a), b) und c)?



a

Abb. 1.23.

b

c

Anleitung: Lösen Sie die Aufgaben mit allgemeinen Zahlensymbolen, und diskutieren Sie die Lösungen! Setzen Sie dann passende Zahlenwerte ein, und veranschaulichen Sie sich die Ergebnisse, indem Sie die Kästchen herstellen und vergleichen!

2. Lösen Sie die Aufgabe 1 für den Fall, daß die zur Verfügung stehenden Pappstücken quadratisch sind!

3. Mit 100 m Maschendraht soll ein rechteckiges Tiergehege eingezäunt werden, und zwar
a) freistehend (Abb. 1.24. a),

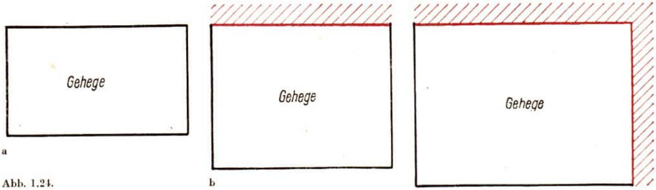


Abb. 1.24.

b) mit einer Seite an eine Mauer angelehnt (Abb. 1.24. b),
c) mit 2 Seiten in eine Mauerecke eingebaut (Abb. 1.24. c).
Welche Gestalt ergibt jeweils die größte Gehegefläche? In welchem Verhältnis stehen die Flächengrößen bei a), b) und c)? Fertigen Sie vom Ergebnis maßgerechte Skizzen an!

4. In einen geraden Kreiskegel (Grundkreisdurchmesser d, Höhe h) soll der gerade Kreiszylinder mit größtmöglichem Volumen einbeschrieben werden, d. h., sein Grundkreis soll in der Ebene des Kegelgrundkreises und seine Deckkreisperipherie in der Kegelmantelfläche liegen.

5. Beweisen Sie den folgenden Satz!
Von allen rechtwinkligen Dreiecken mit konstanter Summe (s) der Kathetenlängen (a und b) hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt.

6. In einen geraden Kreiskegel (Grundkreisdurchmesser d; Höhe h) soll ein zweiter von möglichst großem Rauminhalt so einbeschrieben werden, daß seine Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises des ersten Kegels liegt.

7. Bei einem Arbeitsprozeß in der Industrie fallen dreieckige Blechabschnitte (Grundseite g; zugehörige Höhe h) an. Aus ihnen sollen möglichst große rechteckige Bleche gewonnen werden.

8. Welcher Kreiszylinder hat bei gegebener Oberfläche O das größte Volumen?

9. Ein Abwässerkanal hat einen aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis bestehenden Querschnitt. Dieser soll bei feststehendem Umfang u möglichst groß werden.

10. Ein Wasserbehälter besteht aus einem auf der Spitze stehenden Kreiskegel mit aufgesetztem Kreiszylinder. Die Mantellinien vom Zylinder (2 m) und vom Kegel (6 m) sind vorgeschrieben. Welches Fassungsvermögen ist im Höchstfall möglich?
Anleitung: Wählen Sie die Kegelhöhe als unabhängige Veränderliche!

11. Aus einem Drahtstück von der Länge a soll das Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, der ein möglichst großes Volumen hat und außerdem folgende Bedingungen erfüllt:
a) eine Kante doppelt so groß wie eine andere; $a = 72$ cm;
b) zwei Kanten gleich lang: $a = 120$ cm.

12. Ein Draht von der Länge l wird zu einem Rechteck gebogen, welches nun um eine seiner Seiten rotiert. Unter welchen Bedingungen hat der entstehende Zylinder

a) den größten Mantel,

b) das größte Volumen?

In welchem Verhältnis stehen Mantel, Oberfläche und Volumen von a) und b)?

Anleitung: Lösen Sie die Aufgaben zunächst mit allgemeinen Zahlensymbolen, wählen Sie dann einen geeigneten speziellen Zahlenwert für l und stellen Sie zur Veranschaulichung beide Zylinder aus Papier her!

13. Eine positive ganze Zahl n ist so in zwei positive ganze Summanden zu zerlegen, daß

a) deren Produkt,

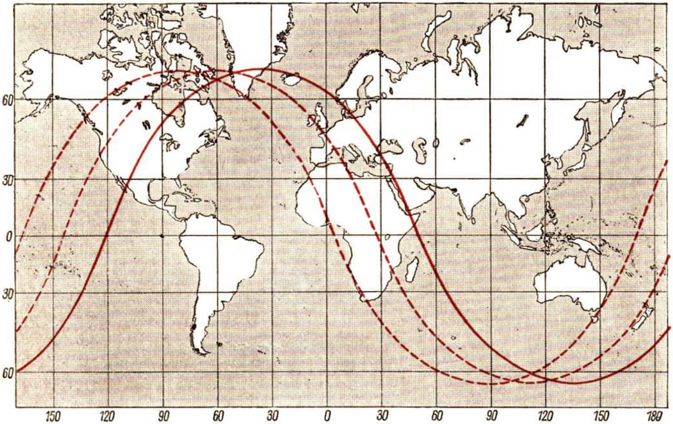
b) die Summe ihrer Quadrate,

c) die Summe ihrer dritten Potenzen ein Extremum wird.

Untersuchen Sie, ob in den einzelnen Fällen ein Maximum oder ein Minimum sinnvoll ist!

14. In einem Rechteck soll die längere Seite a um den gleichen Betrag verkürzt werden, um den die kürzere b verlängert wird. Das dadurch entstehende neue Rechteck soll eine möglichst große Fläche haben. Wie groß ist diese?

15. Von einer rechteckigen Glasscheibe (48 cm $\times$ 60 cm) ist eine Ecke so abgesprungen, daß die Seiten um 8 cm bzw. 10 cm verkürzt sind. Welche größtmögliche rechteckige Glasscheibe läßt sich aus dem Rest schneiden? Wieviel Prozent beträgt der Verlust?



2. Analytische Geometrie

Der erste Gruppenflug der beiden sowjetischen Kosmonauten Major A. G. Nikolajew und Oberstleutnant P. R. Popowitsch im August 1962 war ein bedeutendes Ereignis in der Geschichte der Weltraumfahrt. Die Raumschiffe Восток III und Восток IV führten 48 Erdumkreisungen in nur sehr geringem Abstand durch, teilweise bestand sogar Sichtweite.

Projiziert man eine solche Flugbahn auf die Erdoberfläche, und zwar so, daß die Projektionsstrahlen auf den Erdmittelpunkt gerichtet sind, so kann man unter anderem ablesen, welche Gebiete überflogen wurden und welche Neigung die Satellitenbahn zur Ekliptik besitzt. Das Kapitelbild stellt eine solche Projektion dar, auf der drei aufeinanderfolgende Erdumkreisungen abgebildet sind.

Da sich während der verschiedenen Umkreisungen der Bewegungsablauf regelmäßig wiederholt und die Neigung sich nicht ändert, unterscheiden sich die Projektionen der einzelnen Umkreisungen in ihrer Form nicht voneinander. Lediglich eine Verschiebung zeichnet sich ab, die auf die Erddrehung zurückzuführen ist. Man kann also mit Hilfe des Gradnetzes aus der Projektion auch die Umlaufzeit des Raumschiffes errechnen und einen Fahrplan für den weiteren Flug aufstellen.

Die analytische Untersuchung geometrischer Figuren und Gebilde (z. B. Kurven, Flächen), also die Anwendung rechnerischer Verfahren auf geometrische Probleme, ist Aufgabe der analytischen Geometrie.

2.1.1. Koordinaten eines Punktes in der Ebene

1. Beschreiben Sie den Aufbau eines kartesischen[1] Koordinatensystems! Was versteht man unter der Abszisse, der Ordinate, was unter den Koordinatenachsen?

Die Lage eines beliebigen Punktes P in der Ebene läßt sich mit Hilfe eines Koordinatensystems bestimmen. Die Abbildung 2.1. stellt ein **rechtwinkliges Koordinatensystem** dar. Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen wird mit dem Buchstaben O bezeichnet.[2] Vom Punkt O aus wird auf jeder Achse eine Einheit abgetragen. Mit den Endpunkten der Einheitsstrecken erhält man E_x und E_y. Ist P in der Abbildung 2.1. ein beliebiger Punkt der Ebene, so kann man durch P je eine Parallele zu den Achsen legen. Die Schnittpunkte P' und P'' begrenzen auf den Achsen Abschnitte, denen reelle Zahlen, die Maßzahlen x bzw. y der Abschnitte $\overline{OP'}$ und $\overline{OP''}$, zugeordnet werden. Man nennt diese Zahlen **Koordinaten** des Punktes P und schreibt $P(x;y)$.

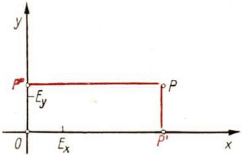


Abb. 2.1.

Nach diesem Verfahren werden jedem Punkt der Ebene eindeutig zwei Zahlen x und y zugeordnet. Umgekehrt entspricht jedem Zahlenpaar eindeutig ein Punkt.

2. Erklären Sie für ein solches Koordinatensystem die Begriffe „positiver und negativer Drehsinn" sowie „Quadrant"!

3. Stellen Sie eine Tabelle auf, aus der für Punkte in den vier Quadranten die Vorzeichen der Koordinaten ermittelt werden können!

Beispiele:

1) Die Punkte A, B und C in Abbildung 2.2. haben folgende Koordinaten: $A(3;4)$, $B(-3;2{,}5)$ und $C(2;-1{,}5)$.

2) Der Punkt $A(-2;3)$ liegt im zweiten, der Punkt $B(-5;-6)$ im dritten und der Punkt $C(3;-5)$ im vierten Quadranten.

3) Dem Zahlenpaar $-6;-4$ läßt sich nach dem oben angegebenen Verfahren der Punkt $P(-6;-4)$ zuordnen.

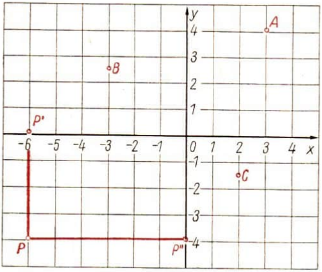


Abb. 2.2.

[1] Cartesius, latinisierter Name des französischen Mathematikers René Descartes (1596—1650).

[2] Der Schnittpunkt der Koordinatenachsen wird auch als Ursprung bezeichnet. Das Symbol O ist auf das Wort origo (lat.), Ursprung, zurückzuführen.

Neben dem rechtwinkligen oder kartesischen Koordinatensystem verwendet man auch noch schiefwinklige Koordinatensysteme. Bei diesen Systemen schneiden die Achsen einander nicht unter einem rechten Winkel.

Aufgaben

1. Gegeben sind die Zahlen a und b als Maßzahlen von Strecken. Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem die folgenden Punkte! $P_1(a; b)$; $P_2(a; a)$; $P_3(-b; -b)$; $P_4(-a; b)$; $P_5(a; -b)$; $P_6(a+b; a)$; $P_7(a+b; a-b)$; $P_8(a-b; b-a)$; $P_9(a-b; -a-b)$
2. Beschreiben Sie die Lage der folgenden Punkte! $A(3; 0)$; $B(0; -5)$; $C(-3; 3)$; $D(5; -6)$
3. Spiegeln Sie die Punkte $A(a; b)$ und $B(-2; 3)$ an den Achsen! Welche Koordinaten haben die neuen Punkte?
4. Vertauschen Sie die Koordinaten a und b (3 und 5) eines Punktes! Welche Lage hat der neue Punkt? Zeichnen Sie die Punkte und ihre Symmetrieachse in ein Koordinatensystem ein!
5. Beschreiben Sie die gegenseitige Lage der beiden Punkte $A(3; 2)$ und $B(3; -2)$!
6. Die Eckpunkte eines Dreiecks ABC sind $A(4; 5)$, $B(1; 1)$ und $C(6; -4)$. Welche Koordinaten haben die Eckpunkte des zum Dreieck ABC in bezug auf die y-Achse symmetrischen Dreiecks $A'B'C'$? Zeichnen Sie die beiden Dreiecke in ein Koordinatensystem ein!
7. Ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ hat die in Abbildung 2.3. dargestellte Lage. Die Länge der Seiten ist 4. Welche Koordinaten haben die Eckpunkte?

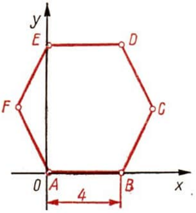


Abb. 2.3.

2.1.2. Verschiebung eines rechtwinkligen Koordinatensystems

Die Abbildung 2.4. enthält in der Ebene des xy-Koordinatensystems den Punkt $\overline{O}(a; b)$ als Ursprung eines weiteren Koordinatensystems, dessen ξ-Achse bzw. η-Achse parallel und gleichgerichtet zur x- bzw. y-Achse ist. Die Längeneinheiten stimmen in beiden Systemen überein.

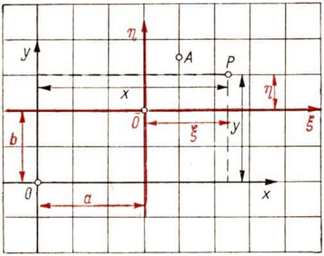


Abb. 2.4.

Für die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(x; y)$ gilt dann (Abb. 2.4.):

(1a) $\boldsymbol{x = a + \xi}$;

(1b) $\boldsymbol{y = b + \eta}$.

Umgekehrt gelten die entsprechenden Transformationsgleichungen

$$\xi = x - a; \quad \eta = y - b.$$

Man spricht im vorliegenden Fall von einer **Verschiebung** oder **Translation** des Koordinatensystems.

Beispiel 4:

Ein Punkt A habe im xy-System die Koordinaten 4 und 3,5.
Der Ursprung $\overline{O}$ des $\xi\eta$-Systems hat in bezug auf das xy-System die Koordinaten 3 und 2. Die Koordinaten des Punktes A im $\xi\eta$-System sind dann 1 und 1,5.

2.1.3. Länge und Richtung einer Strecke

Jede Strecke kann durch zwei voneinander verschiedene Punkte, ihre Endpunkte, eindeutig bestimmt werden. In der Abbildung 2.5. sind $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ die Endpunkte einer Strecke. Um die Länge s dieser Strecke zu ermitteln, werden die senkrechten Projektionen von P_1 und von P_2 auf die x-Achse eingezeichnet.
Da das Dreieck P_1RP_2 rechtwinklig ist, ergibt sich nach dem Satz des PYTHAGORAS:

$$s = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(\overline{P_1R})^2 + (\overline{P_2R})^2}\,.$$

Wegen

$$\overline{P_1R} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{OQ_2} - \overline{OQ_1} = |\,x_2 - x_1\,|$$

und

$$\overline{P_2R} = \overline{P_2Q_2} - \overline{Q_2R} = |\,y_2 - y_1\,|,$$

ergibt sich durch Einsetzen der gefundenen Werte

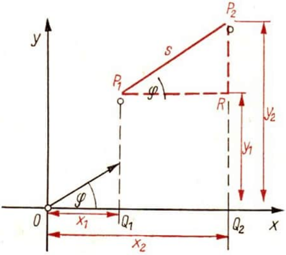


Abb. 2.5.

$$(2) \qquad \boldsymbol{s = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.}$$

Die Herleitung der Formel (2) wurde an Hand einer Figur vorgenommen, die ganz im ersten Quadranten liegt. Sie gilt aber für jede beliebige Lage der Punkte P_1 und P_2.
Für den Sonderfall, daß einer der beiden Punkte mit dem Ursprung $O\,(0; 0)$ zusammenfällt und der andere die Koordinaten x_1 und y_1 hat, erhält man:

$$(2\,\text{a}) \qquad s = \overline{OP} = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}\,.$$

4. *Leiten Sie diese Formel mit Hilfe geometrischer Überlegungen und durch Anwenden des Satzes des* PYTHAGORAS *her!*

Beispiel 5:

Wie lang ist die Strecke mit den Endpunkten $P_1(5; -1)$ und $P_2(-3; 5)$?

$$s = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(-3-5)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + 6^2}$$

$$s = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Zur Bestimmung der **Richtung einer Strecke** legt man zunächst den Durchlaufsinn fest. In der Abbildung 2.5. wird zum Beispiel festgelegt, daß die Strecke $\overline{P_1P_2}$ von P_1 nach P_2 durchlaufen werde. Damit ist ihr ein positiver Durchlaufsinn, nämlich der von P_1 nach P_2, zugeordnet. Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist dann eine gerichtete (orientierte) Strecke. Man schreibt kurz $\overrightarrow{P_1P_2}$ und spricht: Strecke von P_1 nach P_2.

Die Richtung einer gerichteten Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ erhält man, indem ein Strahl mit dem Anfangspunkt O von der positiven Richtung der x-Achse ausgehend im mathematisch positiven Sinn gedreht wird, bis er mit der Strecke gleichgerichtet ist (Abb. 2.5.). Als Richtungswinkel bezeichnet man den Winkel φ im Intervall $0° \leqq \varphi < 360°$. Aus Abbildung 2.5. ergeben sich zur eindeutigen Bestimmung des Richtungswinkels φ zwei Gleichungen:

(3a) $\cos\varphi = \dfrac{x_2 - x_1}{s}$ und (3b) $\sin\varphi = \dfrac{y_2 - y_1}{s}$.

5. *Begründen Sie, weshalb in* (3a) *und* (3b) *die Bedingung* $s \neq 0$ *gilt!*

Wenn einer der beiden Punkte mit dem Koordinatenursprung $O\,(0;\,0)$ zusammenfällt und der andere Endpunkt der Strecke die Koordinaten x_1 und y_1 hat, erhält man:

(4a) $\cos\varphi = \dfrac{x_1}{s}$ und (4b) $\sin\varphi = \dfrac{y_1}{s}$.

Beispiel 6:

Der Richtungswinkel der Strecke aus Beispiel 2 ist zu ermitteln.

$s = 10$

$\cos\varphi = \dfrac{-8}{10} = -0{,}8;\ \sin\varphi = \dfrac{6}{10} = 0{,}6.$

Der Richtungswinkel φ beträgt rund 143°.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Entfernung der folgenden Punkte vom Koordinatenursprung!

a) $P\,(3;\,4)$ **b)** $P\,(3;\,-4)$ **c)** $P\,(6;\,8)$ **d)** $P\,(-6;\,-8)$ **e)** $P\,(5;\,-12)$
f) $P\,(-4;\,5)$ **g)** $P\,(3;\,-7)$ **h)** $P\,(3{,}1;\,-4{,}2)$ **i)** $P\left(-\frac{9}{4};\,\frac{10}{3}\right)$ **k)** $P\,(0;\,4)$
l) $P\,(-5;\,0)$ **m)** $P\,(a;\,b)$ **n)** $P\,(a;\,-a)$ **o)** $P\,(a-b;\,a+b)$ **p)** $P\,(3a;\,-3a)$

2. Berechnen Sie die Länge s der Strecke $\overline{P_1P_2}$!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
P_1	(1; 2)	(2; 2)	(3; 8)	(−6; −2)	(1,5; 33,1)	$(a;\,b)$	$(-m;\,n)$	$(a+b;\,a-b)$
P_2	(4; 6)	(5; 6)	(−3; 8)	(0; 6)	(15,7; −2,8)	$(b;\,a)$	$(m;\,-n)$	$(a-b;\,a+b)$

Zeichnen Sie die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in ein Koordinatensystem, und prüfen Sie durch Messung das Ergebnis!

3. Ermitteln Sie die Richtung der Strecken $\overrightarrow{P_1P_2}$ in Aufgabe 2 a) bis e) rechnerisch und zeichnerisch!

4. Berechnen Sie die Seitenlängen der Dreiecke, deren Eckpunkte A, B und C folgende Koordinaten haben!

	a)	b)	c)	d)	e)
A	$(0; 0)$	$(-1; -1)$	$(9; 0)$	$(11; 46)$	$(a; b)$
B	$(25; 0)$	$(3; -5)$	$(-5; 0)$	$(21; 16)$	$(a; -b)$
C	$(0; 33)$	$(3; 7)$	$(0; 12)$	$(-9; 21)$	$(0; -b)$

Zeichnen Sie auch die Dreiecke, und messen Sie die Dreiecksseiten! Vergleichen Sie die zeichnerischen Ergebnisse mit den rechnerischen!

5. Untersuchen Sie, von welcher besonderen Art die Dreiecke sind, deren Eckpunkte die folgenden Koordinaten haben!

a) $A\,(0; 2)$ $B\,(1; -2)$ $C\,(-3; -1)$ **b)** $A\,(3; 3)$ $B\,(-1; 1)$ $C\,(1; -2)$
c) $A\,(4; 2)$ $B\,(-2; 2)$ $C\,(1; -5)$ **d)** $A\,(2; 3)$ $B\,(4; 1)$ $C\,(4; 5)$
e) $A\,(3; 0)$ $B\,(3; 7)$ $C\,(-5; 0)$ **f)** $A\,(-1; 6)$ $B\,(2; -3)$ $C\,(8; -1)$

6. Untersuchen Sie, von welcher besonderen Art die Vierecke sind, deren Eckpunkte die folgenden Koordinaten haben!

a) $A\,(1; 3)$ $B\,(2; 1)$ $C\,(4; 4)$ $D\,(5; 2)$
b) $A\,(1; 2)$ $B\,(6; 2)$ $C\,(5; 4)$ $D\,(2; 4)$
c) $A\,(2; 2)$ $B\,(3; -1)$ $C\,(0; -2)$ $D\,(-1; 1)$
d) $A\,(3; 2)$ $B\,(1; 4)$ $C\,(-2; 1)$ $D\,(0; -1)$
e) $A\,(4; 0)$ $B\,(0; 4)$ $C\,(-4; 0)$ $D\,(0; -4)$

7. Zeigen Sie, daß das Dreieck mit den Eckpunkten $A\,(2; 1)$, $B\,(5; 0)$ und $C\,(6; 3)$ gleichschenklig ist! Überprüfen Sie die Rechnung durch eine Zeichnung!

8. Weisen Sie nach, daß das Dreieck mit den Eckpunkten $A\,(-4; 1)$, $B\,(2; 1)$ und $C\left(-1; 1 + 3\sqrt{3}\right)$ gleichseitig ist! Fertigen Sie auch eine Zeichnung an, und vergleichen Sie mit der Rechnung!

2.1.4. Koordinaten des Teilpunktes einer Strecke

Ebenso wie man eine gerichtete Strecke betrachten kann, ist es auch möglich, gerichtete Geraden einzuführen. Sind P_1 und P_2 zwei Punkte der Geraden g, so kann man auf g etwa dadurch einen positiven Durchlaufsinn $\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$ einführen, daß man denjenigen Durchlaufsinn von g zum positiven erklärt, bei dem ein die Gerade g beständig in dieser Richtung durchlaufender Punkt P zuerst nach P_1 und dann nach P_2 gelangt. Ist jetzt P ein Punkt, der auf P_1 folgt, so soll unter $\overline{P_1P} = d$ der Abstand des Punktes P von P_1 verstanden werden. Folgt aber P_1 auf P, so soll $\overline{P_1P} = -d$ sein, wobei $d > 0$ den Abstand von P und P_1 bedeutet. Bei dieser Festsetzung gilt dann offenbar $\overline{PP_1} = -\overline{P_1P}$.
Ist jetzt T ein beliebiger von P_1 und P_2 verschiedener Punkt der Geraden durch P_1 und P_2 mit dem Durchlaufsinn $\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$ und bedeutet λ den Quotienten $\frac{\overline{P_1T}}{\overline{TP_2}}$, so sagt man, T teile die Strecke im Verhältnis λ und nennt λ das Teilverhältnis. Liegt dabei T zwischen P_1 und P_2 (**innere Teilung**, Abb. 2.6.), so ist λ positiv. Liegt aber T außerhalb der Strecke $\overline{P_1P_2}$ (**äußere Teilung**, Abb. 2.7.), so ist λ negativ.

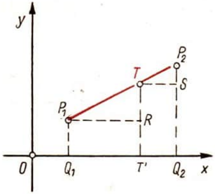


Abb. 2.6.

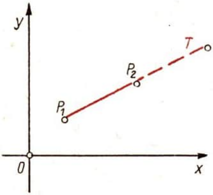


Abb. 2.7.

Die Punkte T, P_1 und P_2 liegen in Abbildung 2.6. alle im ersten Quadranten. Die senkrechten Projektionen der Punkte T, P_1 und P_2 auf die x-Achse seien T', Q_1 und Q_2. Die Parallelen zur x-Achse durch P_1 bzw. T schneiden $\overline{TT'}$ bzw. $\overline{P_2Q_2}$ in R bzw. S. Es werden nun die Dreiecke RTP_1 und STP_2 betrachtet. Diese Dreiecke sind einander ähnlich, und man erhält:

$$\frac{\overline{P_1T}}{\overline{TP_2}} = \frac{\overline{P_1R}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{Q_1T'}}{\overline{T'Q_2}} = \frac{x_T - x_1}{x_2 - x_T} = \lambda.$$

Daraus erhält man die Abszisse des Teilpunktes T und durch entsprechende Überlegungen auch die Ordinate:

(5a) $\mathbf{x_T = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}}$; (5b) $\mathbf{y_T = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}}$.

6. Führen Sie die Überlegungen zur Berechnung der Ordinate selbständig durch!

Die Herleitung der Formeln (5a) und (5b) wurde an Hand einer Figur vorgenommen, die ganz im ersten Quadranten liegt. Sie gilt aber für jede beliebige Lage der Punkte T, P_1 und P_2.
Für $\lambda = 1$ erhält man die **Koordinaten des Mittelpunktes** $M(x_m; y_m)$ der Strecke $\overline{P_1P_2}$:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

7. Prüfen Sie durch Rechnung nach, daß (6) *tatsächlich die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{P_1P_2}$ sind!*

Aufgaben

1. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{P_1P_2}$ an, wenn die Endpunkte die folgenden Koordinaten haben!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
P_1	(6; 6)	(4; 12)	(0; 6)	(−2; −6)	(−1; −1)	(a; 0)	(a; b)
P_2	(2; 2)	(2; 15)	(4; 2)	(−3; 4)	(3; −3)	(a; b)	(c; d)

2. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke zwischen dem Koordinatenursprung und dem Punkt $P_1(x_1; y_1)$ bzw. $A(7; 9)$ an!

3. Verlängern Sie die Verbindungsstrecken des Koordinatenursprungs mit den Punkten $A(-3; 2)$, $B(3; 3)$, $C(4; -6)$ und $P_1(x_1; y_1)$ nach beiden Seiten um sich selbst!
   a) Wie heißen die Koordinaten der Endpunkte dieser Strecken?
   b) Welche Länge haben die Strecken?
   c) Welche Richtungswinkel haben die Strecken $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ und $\overrightarrow{OP_1}$?

4. Gegeben sind die Punkte $A(-1; -3)$ und $B(2; -1)$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, der auf der Verlängerung der Strecke $\overrightarrow{AB}$ symmetrisch zu A in bezug auf B liegt!

5. Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die Koordinaten des Teilpunktes T, der die Strecke $\overrightarrow{OP}$ mit $P(8; -3)$ im Verhältnis **a)** $\lambda = -4$ und **b)** $\lambda = 3$ teilt!

6. Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Teilpunkte T_1 und T_2, die die Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ mit $P_1(1; 1)$ und $P_2(7; 4)$ im Verhältnis $\lambda = -2$ bzw. $\lambda = 2$ teilen!
   Lösen Sie die Aufgaben auch zeichnerisch, und vergleichen Sie die Ergebnisse!

7. Halbieren Sie die Seiten des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(1; 2)$, $B(6; 1)$ und $C(2; 5)$, und weisen Sie nach, daß das von den Seitenmitten gebildete Dreieck Seiten hat, die halb so groß sind wie die Seiten des ursprünglichen Dreiecks!
   Fertigen Sie auch eine Zeichnung an, und vergleichen Sie mit dem rechnerischen Ergebnis!
   Zeigen Sie rechnerisch und elementargeometrisch, daß die Aussage für jedes beliebige Dreieck gilt!

8. Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die Längen der Seitenhalbierenden im Dreieck mit den Eckpunkten $A(1; 1)$, $B(7; 2)$, $C(2; 7)$!

2.1.5. Flächeninhalt eines Dreiecks

Ein Dreieck ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ und $P_3(x_3; y_3)$ bestimmt. Um den Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ durch die Koordinaten der Eckpunkte darzustellen, fällt man von P_1, P_2 und P_3 die Lote auf die x-Achse (Abbildung 2.8.) und erhält so die Trapeze $Q_1Q_3P_3P_1$, $Q_3Q_2P_2P_3$ sowie $Q_1Q_2P_2P_1$. Bezeichnet man die Trapezflächen mit A_1, A_2 und A_3 und die Inhalte dieser Flächen mit I_1, I_2 und I_3, so gilt für die Dreiecksfläche in Abbildung 2.8.:

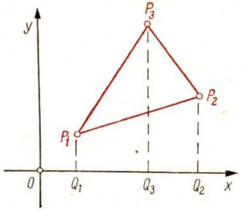


Abb. 2.8.

$$I = I_1 + I_2 - I_3.$$

Unter Verwendung der Koordinaten der Eckpunkte können die Inhalte der Trapezflächen nun folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$I_1 = \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1);$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3);$$

$$I_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1).$$

Als Flächeninhalt I für das Dreieck $P_1P_2P_3$ ergibt sich somit:

$$I = \frac{1}{2}[(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_1 + y_2)(x_1 - x_2)]$$

oder

$$(7) \qquad I = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Die Gleichung (7) gilt auch, wenn die Punkte P_1, P_2 und P_3 nicht alle im ersten Quadranten liegen.

Es ist jedoch folgendes zu beachten. Die rechte Seite von (7) gibt den sogenannten vorzeichenbehafteten Flächeninhalt an. Vertauscht man nämlich etwa P_2 und P_3 miteinander, so erhält man:

$$\begin{aligned} I_{132} &= \frac{1}{2}[x_1(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_3)] \\ &= -\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = -I_{123}. \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich, daß I genau dann positiv ist, wenn bei derjenigen Durchlaufung des Dreiecks, bei der die Punkte P_1, P_2, P_3 in der angegebenen Anordnung aufeinanderfolgen, die Fläche zur Linken liegt, wenn also das Dreieck positiv orientiert ist!

Für die Maßzahl $|I|$ des (nicht vorzeichenbehafteten) Flächeninhalts gilt schließlich

$$(8) \qquad |I| = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Beispiel 7:

Es ist die Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$ mit $P_1(5; -1)$, $P_2(-3; 5)$ und $P_3(-6; -4)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2}[5(5 + 4) - 3(-4 + 1) - 6(-1 - 5)] \\ I &= 45 \end{aligned}$$

Wenn der Umlaufsinn geändert wird, etwa P_2 und P_3 in der Reihenfolge vertauscht werden, so erhält man $I = -45$.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Flächen der Dreiecke mit den folgenden Eckpunkten!

   a) $P_1(1; 1)$; $P_2(5; 4)$; $P_3(2; 6)$ **b)** $P_1(4; 3)$; $P_2(-4; 3)$; $P_3(-4; -3)$
   c) $P_1(0; 0)$; $P_2(6; 8)$; $P_3(13; 5)$ **d)** $P_1(0; 0)$; $P_2(x_2; y_2)$; $P_3(x_3; y_3)$

   Zeichnen Sie die Dreiecke, und überprüfen Sie die gefundenen Ergebnisse!

2. Ein Streckenzug ist durch die Punkte $A(0; 4)$, $B(1; 6)$, $C(4; 3)$ und $D(6; 7)$ bestimmt. Wie groß ist das Flächenstück, das von der y-Achse, der x-Achse, dem Streckenzug und dem Lot von D auf die x-Achse begrenzt wird?

1. *Wiederholen Sie, was Sie über lineare Funktionen gelernt haben!*

2. *Welche Bilder erhält man bei der grafischen Darstellung der Funktionen $y = x$, $y = 3x$, $y = 3x + 4$ und $y = -3x - 4$? Zeichnen Sie die Funktionsbilder!*

3. *Welche Bedeutung haben m und n bei der Funktion $y = mx + n$?*

4. *Stellen Sie eine Tabelle zusammen, in der folgendes enthalten ist:*
   a) die Größe des Winkels, den die Gerade, die durch die Funktion $y = mx$ dargestellt wird, mit der x-Achse bildet und
   b) der Verlauf der Geraden, wenn m die folgenden Werte annimmt!
   $m > 1$; $m = 1$; $0 < m < 1$; $0 > m > -1$; $m = -1$; $m < -1$

Jede Gerade der Ebene ist entweder durch einen Punkt der Geraden und die Richtung oder durch zwei Punkte der Geraden eindeutig bestimmt. Man erhält, wenn man diese beiden Fälle betrachtet, die wichtigsten Geradengleichungen.

2.2.1. Die Punktrichtungsgleichung der Geraden

Die Gerade g in Abbildung 2.9. verläuft durch den Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und bildet mit der x-Achse in ihrer positiven Richtung den Richtungswinkel α. Um diesen Winkel α muß die x-Achse im mathematisch positiven Sinn gedreht werden, wenn sie parallel zur Geraden verlaufen soll. Der Wert $m = \tan\alpha$ ist im Fall $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ganzzahlig) die **Steigung** der Geraden. Für einen beliebigen von $P_1(x_1; y_1)$ verschiedenen Punkt $P(x; y)$, der auf der Geraden g liegt, gilt dann:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{P_1R}} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan\alpha = m,$$

falls $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ k, ganzzahlig.

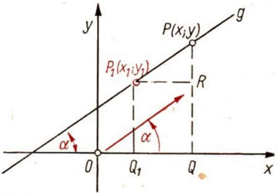


Abb. 2.9.

1. *Begründen Sie die Einschränkung!*

Sieht man P_2 als veränderlichen (laufenden), aber von P_1 verschiedenen Punkt an, also $P_2 = P(x; y) \neq P_1$, so erhält man (Abb. 2.9.)

$$(9) \qquad \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

und nach Multiplikation mit $(x - x_1)$ die Punktrichtungsgleichung der Geraden

$$(10) \qquad y - y_1 = m(x - x_1).$$

Für (10) kann die Einschränkung $P \neq P_1$ aufgehoben werden, so daß die Koordinaten aller Punkte P der Geraden der Gleichung (10) genügen.

Beispiel 1:

Es ist eine Gleichung der Geraden g aufzustellen, die durch den Punkt $P_1(5; -1)$ und die Steigung $m = -\frac{3}{4}$ bestimmt ist.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 5)$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

2. Leiten Sie die Punktrichtungsgleichung für den Sonderfall her, daß die Gerade durch den Punkt $P_1(0; n)$ und den Winkel α festgelegt ist (Abb. 2.10.)! Der Punkt $P(x; y)$ sei wieder ein variabler Punkt der Geraden.

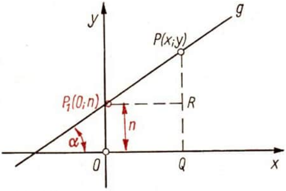


Abb. 2.10.

Als Ergebnis dieses Schülerauftrags erhalten Sie die **Normalform der Geradengleichung:**

(11) $\boldsymbol{y = mx + n}$.

2.2.2. Die Zweipunktegleichung der Geraden

Die Gerade g in Abbildung 2.11. verläuft durch die Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$. Zieht man den variablen Punkt $P(x; y)$ hinzu, so gilt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{P_1S}} = \frac{\overline{P_2R}}{\overline{P_1R}}.$$

Drückt man die Strecken mit Hilfe der Koordinaten aus, so erhält man:

(12) $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

mit $P_1(x_1; y_1) \neq P_2(x_2; y_2)$

und $x_1 \neq x_2$.

Durch Umformung erhält man hieraus

(12a) $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

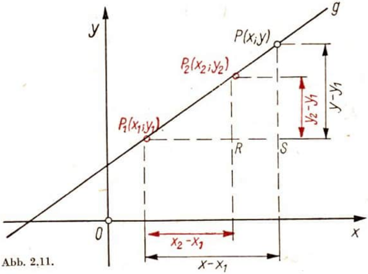


Abb. 2.11.

und schließlich die **Zweipunktegleichung der Geraden**

(12b) $\boldsymbol{(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0.}$

Für (12b) können die Einschränkungen aus (12) aufgehoben werden, so daß die Koordinaten aller Punkte P der Geraden der Gleichung (12b) genügen. Aus (12a) erkennt man leicht, daß gilt:

(13a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; (13b) $n = y_1 - x_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ falls $x_1 \neq x_2$ ist.

Wenn $x_1 = x_2$ bzw. $y_1 = y_2$ gilt, so verläuft die Gerade parallel zur y-Achse bzw. x-Achse. Die Gleichung der Geraden lautet dann $x = x_1$ bzw. $y = y_1$.

Beispiel 2:

Es ist eine Gleichung der Geraden g aufzustellen, die durch die Punkte $P_1\,(5; -1)$ und $P_2\,(-3; 5)$ bestimmt wird.

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

$$(y + 1)(-3 - 5) - (x - 5)(5 + 1) = 0$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

3. Leiten Sie die Zweipunktegleichung der Geraden für den Sonderfall her, daß ein Punkt auf der y-Achse $[P_1\,(0; b)]$ und der andere auf der x-Achse $[P_2\,(a; 0)]$ liegt (Abb. 2.12.)!

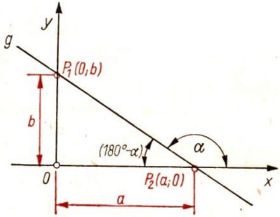


Abb. 2.12.

Sind beide Punkte vom Ursprung verschieden, so erhalten Sie als Ergebnis des Schülerauftrags 3 die **Achsenabschnittsgleichung der Geraden**

(14) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Wenn man eine Geradengleichung in die Achsenabschnittsgleichung umgewandelt hat, hat man die Abschnitte der Geraden auf den Achsen und kann so die Gerade leicht in ein Koordinatensystem einzeichnen.

Beispiel 3:

Es sind die Achsenabschnitte $a = 5$ und $b = -3$ bekannt. Als Gleichung der Geraden erhält man:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1;$$

$$y = \frac{3}{5}x - 3.$$

Beispiel 4:

Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$ ist unter Anwendung der Achsenabschnittsgleichung zu zeichnen.

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$$

$$\frac{3x}{4} - y = \frac{11}{4}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot x}{4 \cdot 11} - \frac{y}{\frac{11}{4}} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{11}{3}} + \frac{y}{\frac{-11}{4}} = 1$$

In der nachfolgenden Übersicht werden die bisher behandelten Geradengleichungen zusammengestellt:

Form der Geradengleichung	Formel	Bestimmungsstücke
Punktrichtungsgleichung	$y - y_1 = m(x - x_1)$	fester Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und Steigung $m = \tan\alpha$
Sonderfall der Punktrichtungsgleichung mit $P_1(0; n)$	$y = mx + n$	Punkt $P_1(0; n)$ und Steigung m
Sonderfall der Punktrichtungsgleichung mit $P_1(0; 0)$	$y = mx$	Punkt $P_1(0; 0)$ und Steigung m
Zweipunktegleichung	$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$	zwei feste Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$
Achsenabschnittsgleichung	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Achsenabschnitte a und b [Punkte $P_1(a; 0)$ und $P_2(0; b)$]

2.2.3. Die allgemeine Form der Geradengleichung

Wie bereits aus der Lehre von den Funktionen bekannt ist, läßt sich eine beliebige Gleichung ersten Grades zwischen den Veränderlichen x und y stets auf die Form

$$(15) \quad \boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

bringen, wobei für das folgende noch vorausgesetzt werden soll, daß A und B nicht gleichzeitig Null sind. Man bezeichnet die Gleichung $Ax + By + C = 0$ als **allgemeine Form der Geradengleichung.**

Setzt man in der Zweipunktegleichung

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$
$$-(y_2 - y_1) = A, \quad x_2 - x_1 = B \quad \text{und} \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = C,$$

so erkennt man, daß sich jede Gerade in der Form (15) darstellen läßt.
Um zu zeigen, daß auch (15) stets eine Gerade darstellt, sobald nicht A und B gleichzeitig Null sind, werden zwei Fälle unterschieden:

1) $B \neq 0$ 2) $B = 0$, dann ist $A \neq 0$.

Im Fall 1) erhält man, indem man beide Seiten von (15) durch B dividiert, die Gleichung

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Das ist aber die Gleichung einer Geraden in der Form $y = mx + n$ mit der Steigung $m = -\frac{A}{B}$ und dem Abschnitt $n = -\frac{C}{B}$ auf der y-Achse.

Im Fall 2) erhält man aus (15) die Gleichung $x = -\frac{C}{A}$, durch die eine Parallele zur y-Achse dargestellt wird.
Multipliziert man beide Seiten von (15) mit einer beliebigen von Null verschiedenen reellen Zahl k, so entsteht die Gleichung

(15 a) $k \cdot Ax + k \cdot By + k \cdot C \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

mit $A_1 = kA$, $B_1 = kB$ und $C_1 = kC$, die dieselbe Gerade darstellt. Man kann umgekehrt zeigen, daß zwei Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, bei denen die Koeffizienten nicht in dieser Weise zueinander proportional sind, zwei voneinander verschiedene Geraden darstellen.

Beispiel 5:

Die Gerade $3x + 5y + 8 = 0$ hat eine Steigung $m = -\frac{3}{5}$, und der Abschnitt auf der y-Achse beträgt $n = -\frac{8}{5}$.

Beispiel 6:

Gegeben ist die Gerade $y = 6x - 3$. Zu bestimmen sind A, B und C.

$$y = 6x - 3$$
$$6x - y - 3 = 0 \quad \text{also: } A = 6;\ B = -1;\ C = -3.$$

2.3. Zwei Geraden

2.3.1. Schnittpunkt zweier Geraden

Zwei Gleichungen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

seien die allgemeinen Gleichungen zweier Geraden.

Wenn die Geraden einen Punkt $P_0(x_0; y_0)$ gemeinsam haben, so müssen dessen Koordinaten beiden Gleichungen genügen. Man erhält also für x_0 und y_0 die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$$
$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, falls $A_1B_2 \neq A_2B_1$ ist, die **Schnittpunktkoordinaten:**

$$\mathbf{x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}}; \quad \mathbf{y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}}.$$

1. Führen Sie die Berechnungen von x_0 und y_0 durch!

Ohne den Beweis auszuführen, sei bemerkt, daß im Falle $A_1B_2 = A_2B_1$ die beiden betrachteten Geraden zueinander parallel sind. Sie haben dann entweder gar keinen gemeinsamen Punkt, oder sie fallen zusammen.

Beispiel 1:

Es soll der Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2 bestimmt werden, die durch die Gleichungen $3x + y - 7 = 0$ und $2x - y - 3 = 0$ gegeben sind. Man erhält:

$$x_0 = \frac{1 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-7)}{3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$y_0 = \frac{2 \cdot (-7) - 3 \cdot (-3)}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Der Schnittpunkt ist $P_0(2; 1)$.

Beispiel 2:

Die durch die Gleichung $3x + 5y - 3 = 0$ und $6x + 10y + 7 = 0$ gegebenen Geraden sind auf Schnittpunkte zu untersuchen.

$$(A_1B_2 - A_2B_1) = (3 \cdot 10 - 5 \cdot 6) = 0$$

Die Geraden verlaufen parallel und wegen

$$6x + 10y + 7 \equiv 2[3x + 5y - 3] + 13$$

können nicht beide Gleichungen durch ein Wertepaar $x_1; y_1$ gleichzeitig erfüllt werden, also existiert kein Schnittpunkt.

2.3.2. Parallelität und Orthogonalität zweier Geraden

Zwei Geraden sind genau dann zueinander parallel, wenn ihre Richtungswinkel α_1 und α_2 einander gleich sind. Im Falle $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k ganzzahlig, sind aber zwei Geraden genau dann parallel, wenn die Steigungen m_1 und m_2 gleich sind.

Entsprechend ergibt sich für die Orthogonalität zweier Geraden, die einander im Punkt S schneiden mögen:

$$\alpha_1 + (180° - \alpha_2) = 90°$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 - 90°.$$

Man betrachtet dazu das Dreieck QRS in Abbildung 2.13. Hieraus ergibt sich dann, falls $\alpha_2 \neq 0$:

$$\tan \alpha_1 = \tan(\alpha_2 - 90°)$$
$$= -\tan(90° - \alpha_2)$$

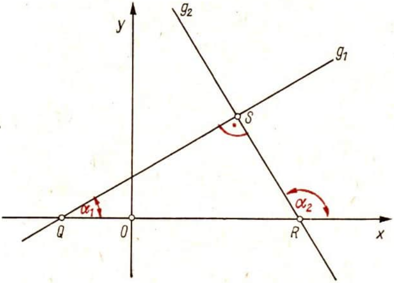


Abb. 2.13.

und weiter

$$\tan \alpha_1 = -\cot \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_2}.$$

Sind die beiden Geraden in der Form

$$y = m_1 x + n_1 \quad \text{und} \quad y = m_2 x + n_2$$

darstellbar, so stehen sie dann und nur dann senkrecht aufeinander, wenn gilt:

$$(16) \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{oder} \quad m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Wenn die Geraden g_1 und g_2 senkrecht aufeinanderstehen, gilt $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Es gilt auch die Umkehrung. Aus $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ folgt, daß g_1 und g_2 senkrecht aufeinanderstehen.

Beispiel 3:

Die Steigung der Geraden $3x + 5y + 10 = 0$ ist $m_1 = -\frac{3}{5}$. Die Gerade $10x - 6y + 11 = 0$ hat die Steigung $m_2 = \frac{5}{3}$. Die beiden Geraden stehen senkrecht aufeinander.

Aufgaben

1. Wie ändert sich m in der Gleichung einer Geraden $y = mx$, wenn die Gerade um den Koordinatenursprung gedreht wird?

2. Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch den Punkt P_1 geht und von der die Steigung m bekannt ist.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
P_1	$(0; -1{,}5)$	$(3; 4)$	$(-6; -6)$	$(-8; -9)$	$(3; 3)$	$(-5; 8)$
m	-3	$2{,}5$	1	-1	$0{,}5$	$-\frac{3}{4}$

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem!

3. Eine Gerade hat die Steigung $m = 3$ und schneidet auf der y-Achse vom Nullpunkt aus die Strecke **a)** 1, **b)** 3, **c)** -3, **d)** -4, **e)** 5 ab. Wie lautet die Gleichung der Geraden? Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem!

4. Ermitteln Sie für die durch folgende Gleichungen gegebenen Geraden die Schnittpunkte mit der y-Achse und die Richtungswinkel!

a) $y = 2x + 3$ **b)** $y = x - \frac{1}{3}$ **c)** $y = -\frac{x}{3} + 5$

d) $y = -x - 3$ **e)** $y = -3x + 5$ **f)** $y = ax + b$

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem!
Bestimmen Sie auch die Schnittpunkte der Geraden mit der x-Achse!

5. Eine Gerade geht durch den Punkt $P(3; 4)$ und hat die Steigung **a)** 2, **b)** 1, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** $-\frac{1}{2}$. Wie lautet die Gleichung der Geraden?

6. In welchen Punkten schneiden die folgenden Geraden die Koordinatenachsen?

a) $16x + 10y - 32 = 0$ **b)** $-9x - 8{,}1y + 18 = 0$ **c)** $\frac{x}{4{,}3} + \frac{y}{3{,}7} = 1$

d) $y = -11{,}4x + 7{,}5$ **e)** $\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{y}{3\sqrt{2}} = 1$

Wie groß sind die Steigungen der Geraden?

7. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Ursprung und durch den Punkt **a)** $P_1(3; 4)$, **b)** $P_2(-2; 3)$, **c)** $P_3\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, **d)** $P_4(2{,}2; 3{,}3)$, **e)** $P_5(-10{,}5; 3{,}0)$, **f)** $P_6(a; -a)$, **g)** $P_7(a; a)$, **h)** $P_8(-a; b)$ geht?

8. Es ist eine Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
P_1	$(5; 6)$	$(-3; -4)$	$(2; 3)$	$\left(2; -\frac{1}{2}\right)$	$(1; 4)$	$(a; a)$	$(0; a)$
P_2	$(7; 8)$	$(3; 4)$	$(3; 2)$	$\left(-3; \frac{1}{3}\right)$	$(-1; -2)$	$(b; b)$	$(a; 0)$

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem! Wie groß sind die Abschnitte auf den Achsen? Stellen Sie die Achsenabschnittsgleichungen auf!

9. Ein Dreieck wird gebildet von den Punkten $A(2; 6)$, $B(1; 1)$ und $C(0; 5)$.
a) Wie lauten die Gleichungen der Geraden, auf denen die Dreiecksseiten liegen?
b) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks mit Hilfe der Richtungswinkel der Geraden! Zeichnen Sie das Dreieck in ein Koordinatensystem, und vergleichen Sie die Ergebnisse!

10. Ermitteln Sie die Gleichungen der Geraden, auf denen die Seiten eines Rhombus liegen, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und dessen Diagonalen mit den Achsen zusammenfallen! Die Länge der Diagonalen auf der x-Achse sei $2\,a$ und die Länge der Diagonalen auf der y-Achse $2\,b$. Wie groß sind die Seiten des Rhombus?

11. Wie lautet die Gleichung der Geraden, deren Abschnitte auf der x-Achse und der y-Achse

a) 2 bzw. 3, **b)** 3 bzw. -2, **c)** 5 bzw. -6, **d)** a bzw. a, **e)** $-a$ bzw. a sind?

12. Es sind die Geraden, die durch die nachfolgenden Gleichungen gegeben sind, mit Hilfe der Achsenabschnitte zu zeichnen.

a) $4\,x + 3\,y - 12 = 0$ **b)** $\frac{3}{2}\,x - 3 = y$ **c)** $x + \frac{y}{2} = 1$ **d)** $\frac{x}{3} - y = 1$

e) $3\,x + \frac{y}{2} = 1$ **f)** $x + y = 1$ **g)** $x - y = 1$ **h)** $3\,x + 3\,y = 1$

13. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Konstanten a und b in der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und der Steigung m der Geraden?

14. Die Geradengleichungen **a)** der Aufgabe 2 und **b)** der Aufgabe 7 sind in die allgemeinen Geradengleichungen und in die Achsenabschnittsgleichungen überzuführen.

15. Es sind jeweils der Schnittpunkt und der Schnittwinkel der folgenden Geraden zu bestimmen, sofern die Geraden nicht parallel verlaufen.

a) $y = \frac{5}{3}\,x - 1$, $y = \frac{-4}{5}\,x + \frac{32}{5}$ **b)** $x + y - 2 = 0$, $x + 3\,y - 10 = 0$ **c)** $4{,}5\,x + 3{,}3\,y = 18{,}9$, $3\,x - y = 3$

d) $y = x + 3$, $y = -x - 8$ **e)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ **f)** $3\,x + 5\,y - 10 = 0$, $3{,}3\,x + 5{,}5\,y + 8 = 0$

g) $\frac{y-1}{x-1} = 3$, $\frac{y-2}{x-2} = 1$ **h)** $0{,}8\,x + 0{,}4\,y - 1{,}2 = 0$, $2\,x + y - 3 = 0$

Die Rechnungen sind mit Zeichnungen zu vergleichen.

16. Die Seiten eines Dreiecks werden von den folgenden Geraden gebildet.

a) $3\,x + 4\,y - 52 = 0$; $4\,x - y - 6 = 0$; $x - 5\,y + 8 = 0$
b) $y = 7 - 3\,x$; $x = 3\,y - 1$; $x + 7\,y + 11 = 0$

Die Koordinaten der Eckpunkte sind rechnerisch und zeichnerisch zu bestimmen.

17. Es ist die Gleichung der Parallelen durch $P_1\,(x_1; y_1)$ zu einer gegebenen Geraden g zu bestimmen.

a) $P_1\,(5; 3)$; $2\,x - 3\,y - 12 = 0$ **b)** $P_1\,(-2; -3)$; $5\,x - 6\,y - 27 = 0$

c) $P_1\,(-2; 2)$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ **d)** $P_1\,(3; 3)$; $y = 2\,x - 3$

e) $P_1\,(a; -a)$; $Ax - By + C = 0$

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem, und konstruieren Sie die Parallelen!

18. Der Punkt $P(2; 3)$ liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 1$. Wie lautet die Gleichung der in dem Punkt auf der Geraden errichteten Senkrechten? Konstruieren Sie diese Senkrechte!

19. Vom Punkt $P(1; 2)$ ist auf die Gerade $2y - 4x - 8 = 0$ das Lot gefällt. Wie lautet die Gleichung des Lotes? In welchem Punkt trifft das Lot die Gerade?
Führen Sie die Konstruktion durch!

20. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $x - 2y - 5 = 0$ und $2x + 3y - 3 = 0$ und durch den Punkt $P(1; 2)$ geht!

21. Untersuchen Sie das Schnittverhalten der folgenden Geraden!

a) $9x - 15y + 7 = 0$ und $3x - 5y + 4 = 0$ **b)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$ und $4x - 2y - 1 = 0$

c) $9x - 6y + 3 = 0$ und $2x + 3y - 5 = 0$

2.4. Anwendungsaufgaben

In der Geodäsie werden die Punkte eines als eben angesehenen Gebietes auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen. Man kann so Vermessungen von kleinen Geländeteilen durchführen, ohne große Verzerrungen befürchten zu müssen. Ein solches Koordinatensystem ist aber so orientiert, daß die positive x-Achse mit der Nordrichtung übereinstimmt, also mit irgendeinem Meridian, während die positive Richtung der y-Achse nach Osten zeigt.
In den nachfolgenden Aufgaben wird dieses System angenommen.

1. Worin unterscheidet sich das geodätische Koordinatensystem vom kartesischen Koordinatensystem?

2. Ein Punkt P hat folgende geodätische Koordinaten:

a) $x_1 = 2153{,}7$ m; $y_1 = 3288{,}3$ m **b)** $x_2 = 537$ m; $y_2 = 2{,}3$ km
c) $x_3 = 4{,}5$ km; $y_3 = 2355$ m.

In welcher Richtung vom Nullpunkt des Koordinatensystems liegt der Punkt? Welchen Winkel bildet die Richtung vom Nullpunkt zum Punkt P mit der Nord-Süd-Richtung? Welchen Abstand hat der Punkt vom Nullpunkt?

3. Zwei Punkte P_1 und P_2 haben die geodätischen Koordinaten:

$x_1 = 1700$ m; $y_1 = 2500$ m und $x_2 = 350$ m; $y_2 = 5200$ m.

Welcher Punkt liegt nördlicher bzw. östlicher?
Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Punkten?
In welcher Richtung liegt der Punkt P_2 von P_1 aus?

Geben Sie den Winkel an, den $\overrightarrow{P_1P_2}$ mit der Nordrichtung bildet!

4. Von einem Punkt P_1 mit den geodätischen Koordinaten $x_1 = 1380$ m und $y_1 = 1800$ m liegt ein Punkt P_2 1,5 km entfernt.

Welche Koordinaten hat P_2, wenn $\overrightarrow{P_1P_2}$ mit der Nordrichtung einen Winkel von $50°$ bildet?

5. Bei der Landesvermessung wird bei kleineren Flächen, bei denen die Eckpunkte der zu vermessenden Fläche markiert sind, eine Abszissenlinie (Abszissenachse) so festgelegt, daß sie die Fläche entweder in der Mitte oder diagonal durchschneidet. Auf der Abszissenlinie werden die Abszissen der Eckpunkte gemessen, senkrecht dazu die Ordinaten.

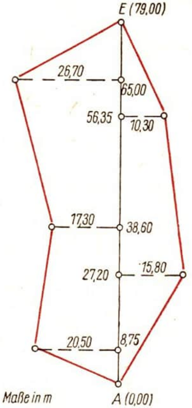


Abb. 2.14.

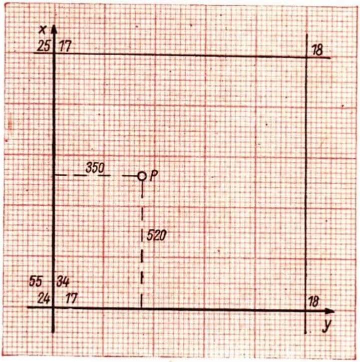


Abb. 2.15.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des in Abbildung 2.14. wiedergegebenen Grundstücks!
b) Bestimmen Sie den Umfang der Fläche!

Auch in der Topographie verwendet man neben geographischen und Polarkoordinaten das in der Geodäsie übliche Koordinatensystem.
Auf topographischen Karten, die unter anderem auch bei der Nationalen Volksarmee verwendet werden, befindet sich ein Gitternetz. Durch dieses Netz wird die Karte in Planquadrate eingeteilt. Jedes Planquadrat kann genau angegeben werden, und zwar mit dem Hochwert (x-Wert) und dem Rechtswert (y-Wert) der südwestlichen Ecke. Mit Hilfe des Gitternetzes und seiner Bezifferung am Blattrand lassen sich also sowohl Geländeobjekte nach ihren Koordinaten in die Karten eintragen als auch die Koordinaten auf der Karte dargestellter Objekte bestimmen. Meist arbeitet man dabei mit dem Planzeiger.
Die Koordinaten eines Punktes erhält man, indem man seinen senkrechten Abstand von der südlichen horizontalen Gitterlinie zum x-Wert und seinen senkrechten Abstand von der westlichen vertikalen Gitterlinie zum y-Wert des Planquadrats addiert. Die Koordinaten für einen Kartenpunkt setzen sich also aus den Koordinaten der südwestlichen Ecke seines Planquadrats und den senkrechten Abständen von der südlichen und der westlichen Gitterlinie des Planquadrats zusammen. Zur Bezeichnung der Planquadrate werden gewöhnlich die sogenannten verkürzten Koordinatenzahlen benutzt, bei denen man die ersten beiden Ziffern der Koordinaten wegläßt.
In Abbildung 2.15. ist der x-Wert des Planquadrats 5524, der y-Wert 3417, kurz sagt man: Planquadrat 24–17. Der Punkt P_1 hat die Koordinaten $x_1 = 5\,524\,520$ m und $y_1 = 3\,417\,350$ m, die verkürzten Koordinaten sind $x_1 = 24\,520$ m und $y_1 = 17\,350$ m.

In den folgenden Aufgaben werden verkürzte Koordinaten angegeben. Die Maßangaben erfolgen in Metern.

6. Zwei Objekte P_1 und P_2 haben auf einer topographischen Karte die Koordinaten
P_1: $x_1 = 24\,500$; $y_1 = 17\,300$ und P_2: $x_2 = 32\,900$; $y_2 = 19\,200$.
Wie weit sind die Objekte voneinander entfernt?
In welcher Richtung liegt P_2 von P_1 aus?

7. Im Manöver befinde sich die Stellung einer Einheit der Nationalen Volksarmee im Punkt A (10500; 18300), eine feindliche Stellung im Punkt B (29500; 19900).
Wie weit ist die feindliche Stellung entfernt?
In welcher Richtung liegt sie?

8. Ein Melder der Nationalen Volksarmee soll eine Meldung vom Ort A (9300; 1100) nach dem Ort B (12000; 2600) bringen.
Wie weit (Luftlinie) sind die Orte voneinander entfernt?
In welche Richtung muß der Melder laufen?

9. Ein Geschütz steht am Ort A (12500; 13500). Das Ziel befindet sich am Ort B (25300; 18200).
Welche Zielrichtung muß angegeben werden?
Welche Entfernung liegt vor?

10. Eine Einheit der Nationalen Volksarmee macht einen Geländemarsch, Ausgangspunkt ist der Ort A (2500; 3600). Die Einheit marschiert 2,5 km in Richtung Nordost und anschließend 10 km in Richtung Nord.
Welche Koordinaten hat der Ort, den sie erreicht?

11. Bestimmen Sie mit Hilfe einer topographischen Karte die Koordinaten einiger Geländeobjekte!
Messen Sie die Entfernung zweier Objekte!
Prüfen Sie den gemessenen Wert durch eine Rechnung nach!
Tragen Sie Punkte, von denen die Koordinaten bekannt sind, in eine topographische Karte ein!

2.5. Der Kreis

1. *Wiederholen Sie wichtige Sätze über den Kreis!*
2. *Wie kann man mit Hilfe der analytischen Geometrie die Länge einer Strecke berechnen? Leiten Sie die entsprechende Formel her!*

In der Geometrie spielt unter anderem der Begriff des geometrischen Ortes eine große Rolle. Unter dem **geometrischen Ort G** aller Punkte P, die der Bedingung B genügen, versteht man die Gesamtheit aller Punkte P, für die die beiden folgenden Sätze gelten:

1. *Voraussetzung:* P genügt der Bedingung B.
   Behauptung: P gehört G an.
2. *Voraussetzung:* P gehört G an.
   Behauptung: P genügt der Bedingung B.

Diese beiden Sätze hängen sehr eng miteinander zusammen. Sie entstehen nämlich auseinander durch Vertauschung von Voraussetzung und Behauptung. Die Voraus-

setzung des ersten Satzes wird zur Behauptung des zweiten und die Behauptung des ersten Satzes wird zur Voraussetzung des zweiten.
Stehen zwei Sätze in einer solchen Beziehung zueinander, so sagt man, der zweite Satz ist die **Umkehrung** des ersten. Natürlich ist dann auch der erste Satz die Umkehrung des zweiten.
Durch Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung kann man aus jedem gegebenen mathematischen Satz ein neues Schema der Form „Voraussetzung – Behauptung" herstellen. Man nennt dieses dann die formale Umkehrung des gegebenen Satzes. Ob diese formale Umkehrung, die zwar die Form eines mathematischen Satzes hat, auch tatsächlich einen (richtigen) mathematischen Satz darstellt, muß in jedem einzelnen Fall erst untersucht werden.[1]

3. Untersuchen Sie, ob die Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS *einen richtigen mathematischen Satz darstellt!*

Mit Hilfe des Begriffes des geometrischen Ortes wird der Kreis folgendermaßen definiert.

Definition:

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt M dieser Ebene, dem Mittelpunkt, den gleichen Abstand r haben.

4. Formulieren Sie die Definition unter Vermeidung des Wortes „geometrischer Ort" in der oben beschriebenen Weise als „Voraussetzung – Behauptung"!

2.5.1. Die Gleichung des Kreises

In der Abbildung 2.16. fällt der Mittelpunkt M des Kreises mit dem Koordinatenursprung zusammen: $M\ (0; 0)$. Von einem beliebigen Punkt der Kreislinie $P\ (x; y)$ werde auf die x-Achse das Lot gefällt und der Fußpunkt des Lotes mit Q bezeichnet. Im Dreieck OQP mit $\overline{OP} = r$, $\overline{OQ} = x$ und $\overline{PQ} = y$ gilt dann nach dem Satz des PYTHAGORAS

(18) $\quad x^2 + y^2 = r^2.$

Diese Gleichung gilt für alle Punkte des Kreises. Genügen umgekehrt die Koordinaten eines Punktes P der Gleichung (18), so hat P vom Ursprung den Abstand r, liegt also auf dem Kreis. Daher ist (18) eine Gleichung des Kreises mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius r.

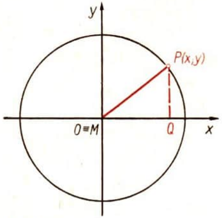


Abb. 2.16.

[1] Nicht bei jedem Satz ist die in der formalen Umkehrung zum Ausdruck gebrachte Feststellung richtig. So würde z. B. die formale Umkehrung des Satzes: „Wenn es geregnet hat, sind die Felder naß" lauten: „Wenn die Felder naß sind, hat es geregnet", was natürlich wegen der Möglichkeit des Bewässerns oder des künstlichen Beregnens nicht richtig ist. In diesem Fall sagt man, der Satz sei nicht umkehrbar. Stellt aber die formale Umkehrung einen (richtigen) Satz dar, so sagt man von dem ursprünglichen Satz, er sei umkehrbar. Die Umkehrung bedarf dann eines besonderen Beweises.

Für alle Punkte, die innerhalb der Kreislinie liegen, gilt $x^2 + y^2 < r^2$ und für alle Punkte, die außerhalb liegen, $x^2 + y^2 > r^2$.

5. *Stellen Sie mit Hilfe von* (18) *fest, in welchen Punkten der Kreis die Achsen schneidet!*

Für $r = 1$ erhält man die Gleichung des Einheitskreises

(18a) $x^2 + y^2 = 1.$

Eine Aufgabe der analytischen Geometrie besteht darin, für Kurven, die durch geometrische Bedingungen definiert sind, Gleichungen aufzustellen.

Beispiel 1:

Der Mittelpunkt eines Kreises sei $M\,(0;\,0)$, der Radius sei $r = 5$. Für diesen Kreis erhält man die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Beispiel 2:

Der Mittelpunkt eines Kreises sei $M\,(0;\,0)$, ein Punkt der Kreislinie sei $P_1\,(6;\,8)$. Da die Koordinaten jedes Punktes des Kreises der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ genügen, müssen auch die Koordinaten P_1 dieser Gleichung genügen. Es muß also

$$6^2 + 8^2 = r^2$$

sein, woraus

$$r^2 = 100$$

folgt. Man erhält somit die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 100.$

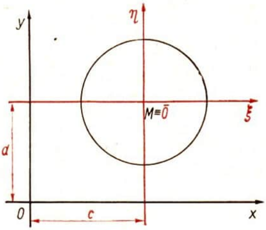


Abb. 2.17.

Wenn der Mittelpunkt eines Kreises wie in Abbildung 2.17. nicht mit dem Ursprung des xy-Koordinatensystems zusammenfällt, wird ein neues $\xi\eta$-Koordinatensystem eingeführt, dessen Ursprung $\overline{O}$ gegenüber O so verschoben ist, daß $\overline{O}$ mit M zusammenfällt.

6. *In welcher Beziehung stehen die xy-Koordinaten zu den $\xi\eta$-Koordinaten, wenn das $\xi\eta$-System gegenüber dem xy-System parallel zur x-Achse um c und parallel zur y-Achse um d verschoben ist?*

7. *Wie lautet in Abbildung 2.17. die Gleichung des Kreises im $\xi\eta$-Koordinatensystem? Wie lautet die Gleichung des Kreises in bezug auf das xy-System?*

Nach den Überlegungen im Schülerauftrag 7 erhält man als Gleichung des Kreises in allgemeiner Lage

(19) $\mathbf{(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2}$ •

Beispiel 3:

Der Mittelpunkt eines Kreises sei $M\,(3;7)$, ein Punkt der Kreislinie $P_1\,(11;13)$. Wendet man dieselben Überlegungen wie beim Beispiel 2 an, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Koordinaten des Mittelpunktes aus (19):

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = r^2.$$

Durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes P_1 der Kreislinie ergibt sich:

$$\begin{aligned}(11-3)^2 + (13-7)^2 &= r^2\\ r^2 &= 100.\end{aligned}$$

Die Kreisgleichung lautet schließlich

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 100.$$

Beispiel 4:

Es ist $x^2 + y^2 - 6 = 0$ eine Gleichung für einen Kreis mit dem Mittelpunkt $M\,(0;0)$ und dem Radius $r = \sqrt{6}$.

Beispiel 5:

Gegeben ist die Gleichung $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung wird sie in die Form

$$x^2 - 10x + 5^2 + y^2 - 4y^2 + 2^2 = 5^2$$

oder

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 - 25 = 0$$

übergeführt.
Daraus folgt, daß sie eine Gleichung für den Kreis mit dem Mittelpunkt $M\,(5;2)$ und dem Radius $r = 5$ ist.

2.5.2. Kreis und Gerade

Der durch

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$$

gegebene Kreis werde von der Geraden $y = mx + n$ geschnitten. Die Koordinaten jedes Schnittpunktes $P_s\,(x_s;y_s)$ der beiden Kurven müssen als Koordinaten gemeinsamer Punkte beide Gleichungen befriedigen. Es müssen also die Gleichungen

(20) $\quad (x_s-c)^2 + (y_s-d)^2 = r^2$

(20 a) $\quad y_s = m x_s + n$

gelten.
Beide Gleichungen bilden ein Gleichungssystem mit den Unbekannten x_s und y_s. Unter Anwendung des Substitutionsverfahrens ergibt sich:

(20 b) $\quad (x_s-c)^2 + (m x_s + n - d)^2 = r^2.$

Das ist eine quadratische Gleichung für x_s.
Durch Einsetzen der Lösungen von (20 b) (soweit solche vorhanden sind) in (20 a) erhält man dann zugehörige Werte y_s, die zusammen mit x_s also (20 a) genügen.

Durch Einsetzen dieser Werte in (20) findet man, daß diese Wertepaare auch (20) genügen und daher die Koordinaten von Schnittpunkten darstellen. Damit erhält man das folgende Resultat: Je nachdem, ob die Gleichung (20b) keine Lösung, eine Doppellösung oder zwei voneinander verschiedene Lösungen hat, haben Kreis und Gerade keinen Punkt, einen Punkt (Tangente) oder zwei Punkte (Sekante) gemeinsam.

Beispiel 6:

Das Schnittverhalten des Kreises $x^2 + y^2 = 10$ und der Geraden $y = -3x + 10$ ist zu untersuchen.

$$\begin{aligned}
x_s^2 + (-3x_s + 10)^2 &= 10 \\
10x_s^2 - 60x_s + 90 &= 0 \\
x_s^2 - 6x_s + 9 &= 0 \\
x_{s1,s2} &= 3 \pm \sqrt{9-9} \\
x_{s2} = x_{s2} &= 3 \text{ (Doppelwurzel)} \\
y_{s2} = y_{s1} &= 1
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also ein gemeinsamer Punkt P_s (3; 1). Die Gerade ist Tangente.

Beispiel 7:

Das Schnittverhalten des Kreises $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ und der Geraden $y = 2x - 2$ ist zu untersuchen.

$$\begin{aligned}
(x_s - 1)^2 + (2x_s - 2 - 2)^2 &= 25 \\
5x_s^2 - 18x_s - 8 &= 0 \\
x_{s1} &= 4 \qquad y_{s1} = 6 \\
x_{s2} &= -0{,}4 \qquad y_{s2} = -2{,}8
\end{aligned}$$

Es ergeben sich zwei gemeinsame Punkte P_{s1} (4; 6) und P_{s2} (– 0,4; – 2,8). Die Gerade ist Sekante.

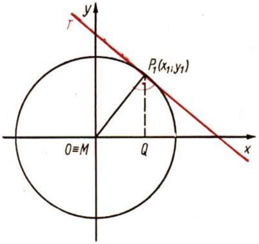


Abb. 2.18.

Soll durch einen gegebenen Kreis eine Sekante so gelegt werden, daß die Kreispunkte P_1 $(x_1;\ y_1)$ und P_2 $(x_2;\ y_2)$ Schnittpunkte sind, so wird die Gleichung für die Sekante entsprechend der Zweipunktegleichung der Geraden aufgestellt.
Eine Gleichung der Tangente an einen gegebenen Kreis im Punkt P_1 $(x_1;y_1)$ (in der folgenden Betrachtung werde zunächst $x_1 \neq 0$ und $y_1 \neq 0$ festgelegt) wird mit Hilfe der Punktrichtungsgleichung der Geraden aufgestellt. Zur Bestimmung des Richtungsfaktors der Tangente wird zunächst eine Gleichung der Geraden durch M und P_1 aufgestellt. In Abbildung 2.18. ergibt sich dann $y = \frac{y_1}{x_1}x$ mit dem Richtungsfaktor $\frac{y_1}{x_1}$. Die Tangente steht auf der Geraden durch den Mittelpunkt senkrecht, sie hat also den Richtungsfaktor $-\frac{x_1}{y_1}$. Folglich nimmt die Tangentengleichung folgende Form an:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$
$$y y_1 - y_1^2 = -x x_1 + x_1^2$$
$$x x_1 + y y_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Wegen $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ erhält man als Tangentengleichung schließlich:

(21) $\boldsymbol{x x_1 + y y_1 = r^2.}$

8. Die Gleichung (21) gilt auch, wenn einer der Werte x_1 und y_1 Null ist. Überzeugen Sie sich davon!

9. Leiten Sie auch die Tangentengleichung für einen Kreis in allgemeiner Lage her!

Als Ergebnis des Schülerauftrages erhalten Sie die Gleichung:

$$\boldsymbol{(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2.}$$

Beispiel 8:

An den Kreis $x^2 + y^2 = 58$ soll im Punkt P_1 (7; −3) der Kreislinie die Tangente gelegt werden. Wie lautet die Gleichung der Tangente?

$$x x_1 + y y_1 = r^2$$
$$7x - 3y = 58$$

Beispiel 9:

Vom Punkt P_0 (7; 1) außerhalb des Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ sollen die beiden Tangenten an den Kreis gelegt werden. Wie lauten die Tangentengleichungen?
Zur Aufstellung der Tangentengleichungen werden zunächst die Koordinaten der Berührungspunkte P_1 (x_1; y_1) und P_2 (x_2; y_2) ermittelt.
Für die Berührungspunkte findet man in Verbindung mit der Kreisgleichung folgendes Gleichungssystem:

$$\text{(I)} \quad x x_1 + y y_1 = 25$$
$$\text{(II)} \quad x_1^2 + y_1^2 = 25$$

Da P_0 auf der Tangente liegen soll, müssen die Koordinaten von P_0 (7; 1) der Gleichung (I) genügen, so daß also die beiden folgenden Gleichungen bestehen müssen:

$$\text{(I a)} \quad 7x_1 + y_1 = 25$$
$$\text{(II a)} \quad x_1^2 + y_1^2 = 25.$$

Aus diesem Gleichungssystem erhält man als Lösungen:

$$P_1(4; -3) \quad \text{und} \quad P_2(3; 4).$$

Die Gleichungen für die Tangenten lauten also:

$$4x - 3y = 25 \quad \text{und} \quad 3x + 4y = 25.$$

Aufgaben

1. Ermitteln Sie die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und mit dem Radius r!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
M	$(0; 0)$	$(0; 0)$	$(0; 3)$	$(-10; 0)$	$(2; -3)$	$(-2; -5)$	$(-4; 3{,}5)$
r	15	7	8	1,732	$\sqrt{5}$	6	4

2. Es ist die Gleichung des Kreises mit $M(m; n)$ und dem Radius r zu ermitteln.

3. Zeichnen Sie die Kreise mit den folgenden Gleichungen!

   a) $x^2 + y^2 = 49$ **b)** $x^2 + y^2 = 10$ **c)** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

4. In welchen Punkten schneiden folgende Kreise die Achsen?

   a) $x^2 + y^2 = 5$ **b)** $x^2 + y^2 - 32 = 0$ **c)** $x^2 + y^2 = a$

   Zeichnen Sie die Kreise!

5. Ermitteln Sie die Gleichung des Kreises, der durch den Ursprung geht und dessen Mittelpunkt M gegeben ist!

   a) $M(3; 4)$ **b)** $M(-6; 8)$ **c)** $M(12; -5)$ **d)** $M(0; 7)$ **e)** $M(a; a)$ **f)** $M(-b; 0)$

   Zeichnen Sie die Kreise!
   Welche Besonderheit muß die Gleichung stets aufweisen, wenn die zugehörige Kurve durch den Ursprung geht?

6. Geben Sie die Gleichung des Kreises um den Ursprung an, der durch $P(3; 7)$ geht!

7. Geben Sie die Gleichung des Kreises an, der durch den Ursprung und durch die Punkte $P_1(2; 3)$ und $P_2(3; 2)$ geht! Konstruieren Sie diesen Kreis!

8. Ermitteln Sie die Gleichung des Kreises, der durch die drei Punkte $A(-2; -1)$, $B(0; -5)$ und $C(6; 3)$ geht! Konstruieren Sie diesen Kreis!

9. Es sei $r = 3$. Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius r, und geben Sie die Gleichung an, wenn der Kreis

   a) die x-Achse berührt und sein Mittelpunkt auf der Geraden $x = 4$ liegt,

   b) die y-Achse berührt und sein Mittelpunkt auf der Geraden $y = -5$ liegt,

   c) die x- und die y-Achse berührt!

10. Geben Sie Mittelpunkt und Radius der Kreise mit den folgenden Gleichungen an!

    a) $x^2 + y^2 = 144$ **b)** $(x-3)^2 + y^2 = 36$

    c) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 18$ **d)** $x^2 + y^2 + 2x = 3$

    e) $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 3$ **f)** $x^2 + y^2 - 5x - 3y - 40{,}5 = 0$

    g) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ **h)** $5x^2 + 5y^2 - 11x - 9y - 12 = 0$

    i) $x^2 + y^2 - 2x + 2\sqrt{5}\,y - 10 = 0$ **k)** $y^2 = 10x - x^2$

    Ermitteln Sie für **a)** bis **e)** die Schnittpunkte mit den Achsen! Zeichnen Sie die Kreise, und prüfen Sie Ihr Ergebnis nach!

11. Wie liegen die folgenden Punkte P_1 bis P_4 in bezug zum Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 20$?

    a) $P_1(2; 3)$ **b)** $P_2(3; -3)$ **c)** $P_3(-4; -2)$ **d)** $P_4(-4; 3)$

12. Berechnen Sie die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden!

a) $x^2 + y^2 = 25 \quad x + y = 7$ **b)** $x^2 + y^2 = 9 \quad x - y = 2$

Zeichnen Sie Kreis und Gerade, und prüfen Sie das Ergebnis nach!

13. Berechnen Sie die Länge der Sehne, die der Kreis aus der Geraden herausschneidet! Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Sehne! Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse auch mit Konstruktionen!

a) $x^2 + y^2 = 36; \quad 4x - 3y + 24 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 + 3x - 2 = 0; \quad x - 2y + 2 = 0$

14. Es ist die Lage der Geraden zum Kreis zu untersuchen.

a) $x^2 + y^2 = 100; \quad 4x + 3y = 50$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0; \quad 3x - 2y - 6 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0; \quad 2\sqrt{2}\,x - y + 2\left(1 - \sqrt{2}\right) = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 80 = 0; \quad 4x + 3y - 70 = 0$

15. Berechnen Sie die Längen der Sehnen, die der Kreis $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 44 = 0$ auf den Achsen ausschneidet!

16. Wie lautet die Gleichung der Tangenten an einen gegebenen Kreis im Punkt P_i?

a) $x^2 + y^2 = 9; \quad P_1\left(4; \sqrt{5}\right)$

b) $x^2 + y^2 = 58; \quad P_2(-7; 3)$

c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 8 = 0; \quad P_3(7; 5)$

17. Ermitteln Sie die fehlende Koordinate und die Gleichung der Tangente im Punkt P_i an den Kreis!

a) $x^2 + y^2 = 169; \quad P_1(-5; y_1 > 0)$

b) $x^2 + y^2 = 30; \quad P_2(5; y_2)$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0; \quad P_3(x_3; 1)$

18. Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten von den Punkten P_i an den Kreis!

a) $x^2 + y^2 = 25$ $P_1(10; 0)$ **b)** $x^2 + y^2 = 100$ $P_2(6; 8)$ **c)** $x^2 + y^2 - 6x + 3y - 5 = 0$ $P_3(-1; -2)$

2.6. Die Kegelschnitte

2.6.1. Entstehung der Kegelschnitte

Wird eine Gerade g_1 so um eine sie schneidende Gerade g_2 gedreht, daß der Schnittwinkel γ ($0° < \gamma < 90°$) stets gleich bleibt (Abb. 2.19.), so entstehen zwei gerade Kreiskegel mit gemeinsamer Spitze S (Schnittpunkt der Geraden), gemeinsamer Achse (Gerade g_2) und gleichem Öffnungswinkel 2γ (Winkel zwischen Mantellinien, die in einer Ebene mit der Achse liegen). Man spricht auch von einem **Doppelkegel**.
Schneidet eine Ebene E einen Doppelkegel, so entstehen je nach Lage der Ebene zum Kegel verschiedene Schnittkurven, die **Kegelschnitte** genannt werden. Die Abbildungen 2.20. und 2.21. stellen einen solchen Doppelkegel in orthogonaler Axonometrie bzw. im Achsenschnitt dar. Darin ist α jeweils der kleinste Winkel zwischen Schnittebene und Achse (Neigungswinkel der Schnittebene in bezug auf die Achse).

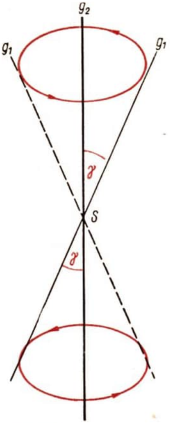


Abb. 2.19.

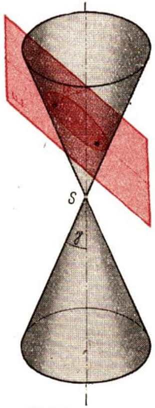


Abb. 2.20.

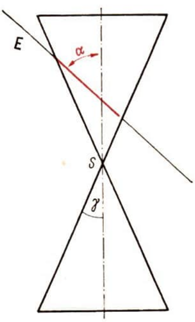
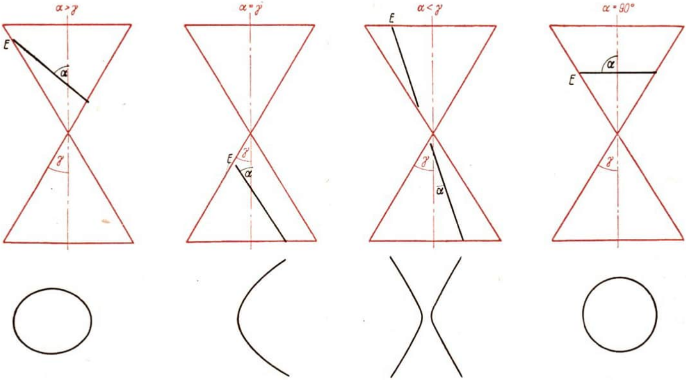


Abb. 2.21.

Die Kegelschnitte, die sich bei den verschiedenen möglichen Lagen der Ebene und des Doppelkegels zueinander ergeben können, werden, wenn *E* nicht durch die Spitze *S* des Kegels geht, folgendermaßen bezeichnet (Abb. 2.22.):



$90° > \alpha > \gamma$ **Ellipse;** $\alpha = \gamma$ **Parabel;** $0° \leqq \alpha < \gamma$ **Hyperbel;** $\alpha = 90°$ **Kreis.**

Abb. 2.22.

Die Kegelschnitte werden in den nachfolgenden Abschnitten als geometrische Örter definiert. Zu diesen Definitionen gelangt man, wenn man die Kegelschnitte näher untersucht. Diese Untersuchungen werden hier nicht durchgeführt. Bei der analytischen Behandlung der Kegelschnitte bilden die Definitionen mit Hilfe der geometrischen Örter die Grundlage. Mit Hilfe dieser Ortsdefinition ist es möglich, Gleichungen für die einzelnen Kegelschnitte herzuleiten und die Eigenschaften dieser Kurven analytisch zu untersuchen.
Wenn die Spitze S des Kegels der Schnittebene E angehört, so entstehen sogenannte **zerfallende Kegelschnitte.**

● *1. Überlegen Sie, welche Schnittfiguren entstehen können, wenn die Spitze S des Doppelkegels dem Kegelschnitt angehört!*

Die zerfallenden Kegelschnitte werden in den folgenden Abschnitten nicht untersucht.
Die Art eines (nicht zerfallenden) Kegelschnittes kann auch durch die Lage der Schnittebene zu den Mantellinien des Kegels charakterisiert werden. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel bzw. Hyperbel, je nachdem ob die schneidende Ebene keiner, einer oder zwei Mantellinien des Kegels parallel ist. (Der Kreis wird dabei als Spezialfall einer Ellipse aufgefaßt.)
In der nachfolgenden Übersicht werden die Kegelschnitte zusammengestellt.

Neigungswinkel	S gehört nicht zu E: Kegelschnitt	S gehört zu E: zerfallender Kegelschnitt
$\alpha = 90°$	Kreis	Punkt
$90° > \alpha > \gamma$	Ellipse	Punkt
$\alpha = \gamma$	Parabel	eine Gerade (Doppelgerade)
$0° \leqq \alpha < \gamma$	Hyperbel	zwei einander schneidende Geraden

2.6.2. Die Ellipse

Zur Aufstellung einer Gleichung für die Ellipse wird die folgende Ortsdefinition benutzt, die aus der obigen Erklärung der Ellipse als Kegelschnitt hergeleitet werden kann,was hier jedoch nicht ausgeführt wird.

Ortsdefinition:

▶ **Jede Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten dieser Ebene, den Brennpunkten F_1 und F_2 der Ellipse, konstant ist.**

Die Entfernung der beiden Brennpunkte wird mit $2e$ und die konstante Summe mit $2a$ bezeichnet. Die Größe e, die halbe Entfernung der Brennpunkte, heißt die **lineare Exzentrizität** der Ellipse. Die Verbindungsstrecken $\overline{F_1P}$ und $\overline{F_2P}$ eines beliebigen Ellipsenpunktes P mit den Brennpunkten heißen Brennstrahlen.

Die Brennpunkte einer Ellipse seien $F_1(-e;\,0)$ und $F_2(e;\,0)$, und es sei $P(x;y)$ ein beliebiger Punkt auf der Ellipse. Der Mittelpunkt M, der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{F_1F_2}$, fällt dann mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen (Abb. 2.23.). Im Fall $F_1 = F_2$, d. h. $e = 0$, ist die Ellipse ein Kreis.

Es gilt für jeden Punkt der Ellipse:

(22) $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$ (konstant) mit $a > e \geqq 0$.[1]

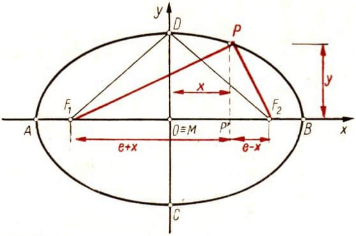


Abb. 2.23.

Durch Einsetzen der Koordinaten und durch Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS erhält man

$$\overline{F_1P} = \sqrt{(e+x)^2+y^2} \quad \text{und} \quad \overline{F_2P} = \sqrt{(e-x)^2+y^2} \quad \text{und damit}$$

(22a) $\sqrt{(e+x)^2+y^2} + \sqrt{(e-x)^2+y^2} = 2a.$

Aus dieser Gleichung folgt durch Umformung (Trennen der Wurzeln, Quadrieren und Ordnen):

(22b) $\sqrt{(e+x)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2+y^2}$

(22c) $e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2+y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$

(22d) $4a\sqrt{(e-x)^2+y^2} = 4a^2 - 4ex$

(22e) $a\sqrt{(e-x)^2+y^2} = a^2 - ex$

(22f) $a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2) = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$

(22g) $x^2(a^2-e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-e^2).$

Der Ausdruck (a^2-e^2) ist positiv wegen $a > e$. Man setzt zur weiteren Vereinfachung $a^2 - e^2 = b^2$, und erhält, daß für die Koordinaten eines jeden Punktes P der Ellipse gilt:

(22h) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

oder

(23) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Es wird jetzt untersucht, ob umgekehrt jeder Punkt, dessen Koordinaten (23) genügen, auch ein Punkt der Ellipse ist, d. h., ob er (22) genügt.

Es sei P ein beliebiger Punkt, dessen Koordinaten (23) genügen. Die Koordinaten von P genügen dann auch sicher den Gleichungen (22h), (22g) und (22f).

[1] Die Gleichung (22) ist offenbar bei vorgegebenem a und e nur für $a \geqq e$ erfüllbar, da für jeden Punkt P der Ebene stets $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} \geqq 2e$ gilt.

(Die Summe zweier Dreieckseiten ist niemals kleiner als die dritte.) Da das Gleichheitszeichen in dieser Gleichung nur steht, wenn P auf der Verbindungsstrecke von F_1 und F_2 liegt, ist auch der Fall $a = e$ auszuschließen. Eigentlich müßte dies schon bei der Ortsdefinition geschehen.

Um nun festzustellen, ob von (22f) auf (22e) geschlossen werden kann, muß untersucht werden, ob $a^2 - ex \geqq 0$ ist. Dazu benutzt man nochmals (23), woraus sich

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,$$

also

$$x^2 \leqq a^2 \text{ oder } |x| \leqq a,$$

ergibt. Mithin ist wegen $e < a$ sicher

$$a^2 - ex > a^2 - a^2 = 0.$$

Folglich kann von (22f) auf (22e) und weiter auf (22d) und (22c) geschlossen werden. Von (22c) kann dann und nur dann auf (22b) geschlossen werden, wenn die rechte Seite von (22b) nicht negativ ist. Da für alle Punkte, deren Koordinaten (23) genügen, (22e) gilt, folgt:

$$\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = \frac{a^2 - ex}{a}$$

$$\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = a - \frac{e}{a}x$$

und damit

$$2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a - a + \frac{e}{a}x$$

$$2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = a + \frac{e}{a}x.$$

Wegen $0 \leqq e < a$ und $|x| \leqq a$, also $x \geqq -a$, folgt hieraus:

$$2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = a + \frac{e}{a}x > a - a = 0.$$

Damit kann nun tatsächlich von (22c) auf (22b) und von dort weiter auf (22a) sowie auf (22) geschlossen werden. Also liegt P auf der Ellipse, und (23) ist eine Gleichung für die Ellipse mit den Brennpunkten $F_1(-e; 0)$ und $F_2(e; 0)$ sowie der Entfernungssumme $2a$. Die Gleichung (23) heißt **Mittelpunktsgleichung der Ellipse**.

Beispiel 1:

Die Brennpunkte einer Ellipse seien $F_1(-3; 0)$ und $F_2(3; 0)$, die konstante Summe sei $2a = 10$. Die Mittelpunktsgleichung ist aufzustellen.

Für b^2 erhält man wegen $b^2 = a^2 - e^2$ den Wert $b^2 = 16$. Durch Einsetzen in (23) ergibt sich dann:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

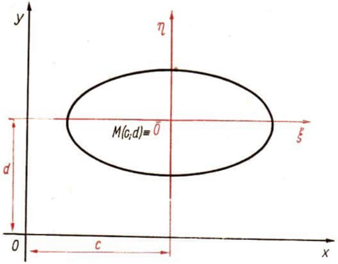


Abb. 2.24.

Wenn der Mittelpunkt der Ellipse wie in Abbildung 2.24. nicht mit dem Ursprung des xy-Koordinatensystems zusammenfällt, wird ein neues $\xi\eta$-Koordinatensystem eingeführt, dessen Ursprung $\overline{O}$ gegenüber O so verschoben ist, daß er mit M zusammenfällt.

Der Mittelpunkt M der Ellipse habe in bezug auf das xy-Koordinatensystem die Koordinaten c und d. Ein Punkt P der Ellipse mit den Koordinaten ξ und η im $\xi\eta$-System hat dann im xy-System die Koordinaten

$$x = \xi + c \text{ und } y = \eta + d.$$

In bezug auf das $\xi\eta$-System lautet die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

in bezug auf das xy-System erhält man die Gleichung einer Ellipse in achsenparalleler Lage:

$$(24) \quad \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1\,.$$

(Von einer allgemeinen Lage kann man hier deshalb nicht sprechen, weil die Gleichung nicht die Möglichkeit einer Drehung berücksichtigt.)

2. Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ellipse mit den Koordinatenachsen, wenn der Mittelpunkt M der Ellipse mit dem Ursprung O zusammenfällt!

Bei den Ellipsen (Abb. 2.23.) bezeichnet man die Strecke $\overline{AB} = 2a$ als **Hauptachse** (größter Durchmesser), die Strecke $\overline{CD} = 2b$ als **Nebenachse** (kleinster Durchmesser), $\overline{OB} = a$ und $\overline{OD} = b$ sind die **Halbachsen.**

Bei der Herleitung der Gleichung (23) wurde $a^2 - e^2 = b^2$ gesetzt. Der Zusammenhang mit der halben Nebenachse ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ODF_1. Die Brennpunkte F_1 und F_2 liegen auf der x-Achse symmetrisch zur y-Achse. Da $\overline{DF_1} + \overline{DF_2} = 2a$ gilt, folgt $\overline{DF_1} = a$. Außerdem gilt $\overline{OF_1} = e$ und $\overline{OD} = b$.

3. Weisen Sie nach, daß die Ellipsenpunkte mit der Abszisse e die Ordinaten $\pm \frac{b^2}{a}$ haben!

Der Wert $\frac{b^2}{a} = p$ wird **Halbparameter** der Ellipse genannt.

Löst man die Mittelpunktsgleichung (23) nach y auf, so ergibt sich

$$(23\,a) \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

Man erhält so zu jedem Wert aus $-a < x < a$ zwei Werte von y, die dem Betrag nach gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Das bedeutet, daß die Ellipse symmetrisch zur x-Achse liegt. Zur weiteren Untersuchung genügt es daher, die Funktion

$$(23\,b) \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

im Intervall $-a \leqq x \leqq a$ zu betrachten. Aus dem Ausdruck auf der rechten Seite von (23b) erkennt man weiter, daß die Funktionswerte an zwei Stellen (x_1 und x_2) des Definitionsbereichs, für die $x_1 = -x_2$ ist, einander gleich sind. Die durch die

Gleichung (23) dargestellte Ellipse ist also auch zur y-Achse symmetrisch. Daher genügt es, die Gleichung (23b) im Intervall $0 \leqq x \leqq a$ zu betrachten.
Nun nimmt mit wachsendem x sicher x^2 zu und daher $a^2 - x^2$ ab. Folglich nimmt auch $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ mit wachsendem x ab, und zwar von b bis 0, wenn x von 0 bis a zunimmt.
Schließlich sei noch bemerkt, daß aus der Axialsymmetrie zu den beiden Koordinatenachsen die Zentralsymmetrie in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt folgt.
Die gesamte Ellipse liegt in dem achsenparallelen Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$, dessen Diagonalen einander im Ursprung schneiden. Die Punkte A, B, C und D in Abbildung 2.23. heißen **Scheitel** der Ellipse, und zwar A und B die **Hauptscheitel** und C und D die **Nebenscheitel**.
Für $a = b$ erhält man als **Spezialfall der Ellipse** einen **Kreis**. Beide Brennpunkte fallen dann im Mittelpunkt zusammen, und es gilt $2e = 0$ sowie $a = b = r$, wenn r den Durchmesser des Kreises bedeutet.

2.6.3. Die Hyperbel

Zur Aufstellung einer Gleichung für die Hyperbel wird die folgende Ortsdefinition benutzt, die aus der Erklärung der Hyperbel als Kegelschnitt (Abschnitt 2.6.1.) hergeleitet werden kann,was hier jedoch nicht ausgeführt wird.

Ortsdefinition:
Jede Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für die der Betrag der Differenz der Abstände von zwei festen Punkten dieser Ebene, den Brennpunkten F_1 und F_2 der Hyperbel, konstant ist.

Dadurch, daß der Betrag der Differenz $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}|$ zugrunde gelegt wird, ist es gleichgültig, welcher der beiden Abstände $\overline{F_1P}$ und $\overline{F_2P}$ Minuend und welcher Subtrahend ist.
Die Entfernung der beiden Brennpunkte wird mit $2e$ und der konstante Betrag der Differenz mit $2a$ bezeichnet. Die Größe e, der halbe Abstand der Brennpunkte, heißt die **lineare Exzentrizität.** Die Verbindungsstrecken $\overline{F_1P}$ und $\overline{F_2P}$ eines beliebigen Hyperbelpunktes P mit den Brennpunkten heißen Brennstrahlen.
Die Brennpunkte einer Hyperbel seien $F_1(-e;\, 0)$ und $F_2(e;\, 0)$, und es sei $P(x;\, y)$ ein beliebiger Punkt auf der Hyperbel. Der Mittelpunkt M, der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{F_1F_2}$, fällt dann mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen (Abb. 2.25.). Der Fall $F_1 = F_2$, d. h. $e = 0$, hat hier offenbar keine Bedeutung, da sonst für jeden Punkt der Ebene die Ortsdefinition erfüllt wäre.
Es gilt dann im Fall $F_1 \neq F_2$ für jeden Punkt der Hyperbel

$$(25)\quad |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 2a \text{ (konstant)} \quad \text{mit} \quad 0 < a < e.$$ [1]

[1] Die Gleichung (25) ist offenbar bei vorgegebenem a und e nur für $a \leqq e$ erfüllbar, da für jeden Punkt P der Ebene stets

$$(*)\ |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| \leqq 2e \text{ gilt.}$$

(Die Differenz zweier Dreieckseiten ist niemals größer als die dritte.) Da das Gleichheitszeichen in (*) nur steht, wenn P auf der Verbindungsstrecke von F_1 und F_2 liegt, ist auch der Fall $a = e$ auszuschließen. Aber auch der Fall $a = 0$ ist auszuschließen, da alle Punkte P, für die $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 0$ ist, auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke von F_1 und F_2 liegen. Dies hätte eigentlich schon bei der Definition berücksichtigt werden müssen.

Durch das Einsetzen der Koordinaten und durch Anwenden des **Satzes des** PYTHAGORAS erhält man

$$\overline{F_1P} = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \overline{F_2P} = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

und damit

$$\left|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Umformung (Quadrieren, Isolieren der Wurzeln, nochmaliges Quadrieren):

$$\left[\left|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right|\right]^2 = 4a^2$$

$$(x+e)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = (x+e)^2 + (x-e)^2 + 2y^2 - 4a^2$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2}\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2$$

$$[(x+e)^2 + y^2][(x-e)^2 + y^2] = [x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2]^2$$

$$-e^2x^2 = e^2x^2 - 2a^2x^2 - 2a^2e^2 - 2a^2y^2 + 2a^4$$

$$2a^2x^2 - 2e^2x^2 + 2a^2y^2 = 2a^4 - 2a^2e^2$$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Der Ausdruck $(e^2 - a^2)$ ist positiv wegen $e > a$. Man setzt zur weiteren Vereinfachung $a^2 + b^2 = e^2$, also $a^2 - e^2 = -b^2$, und erhält, daß für die Koordinaten eines jeden Punktes P der Hyperbel

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

oder

$$(26) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gilt.

Ähnlich wie beim Fall der Ellipse kann man zeigen, daß jeder Punkt, dessen Koordinaten (26) genügen, auch (25) genügt und daher auf der Hyperbel liegt.

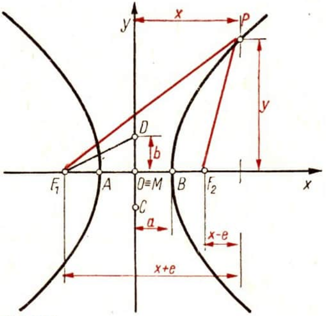


Abb. 2.25.

4. Führen Sie diese Überlegung durch, indem Sie zeigen, daß die Gleichungen in umgekehrter Reihenfolge auseinander hervorgehen!

Mithin ist (26) eine Gleichung für die Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1(-e; 0)$ und $F_2(e; 0)$ sowie dem Betrag der Entfernungsdifferenz $2a$.
Die Gleichung (26) heißt **Mittelpunktsgleichung** der Hyperbel.

Beispiel 2:

Die Brennpunkte einer Hyperbel seien $F_1(-5; 0)$ und $F_2(5; 0)$, die konstante Differenz sei $2a = 8$. Die Mittelpunktsgleichung ist aufzustellen.
Für b^2 erhält man wegen $b^2 = e^2 - a^2$ den Wert $b^2 = 9$. Durch Einsetzen in (26) ergibt sich dann:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Wenn der Mittelpunkt der Hyperbel nicht mit dem Ursprung des xy-Koordinatensystems zusammenfällt, kann man durch ähnliche Überlegungen wie bei der Ellipse eine Gleichung für die Hyperbel in achsenparalleler Lage aufstellen:

$$(27) \quad \frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1,$$

wobei c und d die Koordinaten des Mittelpunktes sind.

5. *Führen Sie diese Überlegungen selbständig durch!*

6. *Ermitteln Sie die Schnittpunkte der durch (26) gegebenen Hyperbel mit den Koordinatenachsen!*

Bei den Hyperbeln (Abb. 2.25.) bezeichnet man die Strecke $\overline{AB} = 2a$ als **Hauptachse**, die Strecke $CD = 2b$ als **Nebenachse**, $\overline{OB} = a$ und $\overline{OD} = b$ sind die **Halbachsen.**

7. *Untersuchen Sie in ähnlicher Weise wie bei der Ellipse die Symmetrieeigenschaften!*
   a) *Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertevorrat!*
   b) *Beschreiben Sie die Lage der Hyperbel!*
   c) *Untersuchen Sie den im ersten Quadranten gelegenen Teil der Hyperbel!*
   d) *Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Übersicht zusammen!*

Mit Hilfe der in dem Schülerauftrag 6 geforderten Untersuchungen erhalten Sie die Koordinaten der Scheitel. Die Größe $p = \frac{b^2}{a}$ heißt wie bei der Ellipse der Halbparameter.

8. *Welche Punkte der Hyperbel haben die Ordinate p?*

Es soll nun das Schnittverhalten der Gerade $y = mx$ mit der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ untersucht werden. Ist P_s ein Schnittpunkt, so müssen dessen Koordinaten x_s, y_s den folgenden Gleichungen genügen:

$$\text{(I)} \quad \frac{x_s^2}{a^2} - \frac{y_s^2}{b^2} = 1$$

$$\text{(II)} \quad y_s = m x_s.$$

Aus (I) folgt

(Ia) $\quad b^2 x_s^2 - a^2 y_s^2 = a^2 b^2$

und hieraus unter Benutzung von (II) durch Substitution:

$$b^2 x_s^2 - a^2 m^2 x_s^2 = a^2 b^2$$

(III) $\quad x_s^2 (b^2 - a^2 m^2) = a^2 b^2.$

Für $b^2 \leqq a^2 m^2$ ist die linke Seite von (III) sicher kleiner oder gleich Null, während die rechte Seite wegen $a > 0$; $b > 0$ positiv ist. Daher kann die Gerade keinen Schnittpunkt mit der Hyperbel haben.
Ist aber $b^2 > a^2 m^2$, so erhält man aus (III) unter Berücksichtigung von (II) die beiden Schnittpunkte:

$$P_{s1}\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}};\ \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}\right) \quad \text{und} \quad P_{s2}\left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}};\ -\frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}\right).$$

9. Prüfen Sie nach, ob die errechneten Werte für die Koordinaten der Schnittpunkte tatsächlich den Gleichungen (I) *und* (II) *genügen!*

Die beiden Geraden, für die der Grenzfall $b^2 = a^2 m^2$ eintritt, haben die Gleichungen

(28) $\quad y = \frac{b}{a} x \quad$ und $\quad y = -\frac{b}{a} x.$

Man bezeichnet sie als **Asymptoten der Hyperbel.**
Ist $a = b$, so erhält man eine sogenannte **gleichseitige Hyperbel.** In diesem Falle lauten die Gleichungen der Asymptoten: $y = \pm x$. Sie sind die Winkelhalbierenden der Quadranten. Die Asymptoten stehen dann senkrecht aufeinander.
Beim Zeichnen einer Hyperbel ist es zweckmäßig, vorher die Asymptoten zu konstruieren.

Beispiel 3:

Es sind die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbel $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$ zu bestimmen. Man erhält

$$\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{8} = 1,$$

daraus

$$a = 2, \quad b = \sqrt{\frac{8}{5}}$$

und als Gleichungen für die Asymptoten

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}\, x.$$

2.6.4. Die Parabel

Zur Aufstellung einer Gleichung für die Parabel wird die folgende Ortsdefinition benutzt, die aus der Erklärung der Parabel als Kegelschnitt (Abschnitt 2.6.1.) hergeleitet werden kann, was hier jedoch nicht ausgeführt wird.

Ortsdefinition:

Jede Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für die der Abstand von einem festen Punkt dieser Ebene, dem Brennpunkt F der Parabel, gleich dem Abstand von einer festen Geraden dieser Ebene, der Leitlinie l der Parabel, ist.

Der Abstand des Brennpunktes F von der Leitlinie l heißt **Halbparameter p** der Parabel. Die Verbindungsstrecke eines Parabelpunktes P mit dem Brennpunkt heißt **Brennstrahl.**
Die Leitlinie l verlaufe parallel zur y-Achse durch den Punkt $P\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, sie hat also die Gleichung $x = -\frac{p}{2}$. Der Brennpunkt F habe die Koordinaten $\frac{p}{2}$ mit $p > 0$. Der Halbierungspunkt der Senkrechten von F auf l fällt dann mit dem Koordinatenursprung zusammen. Es sei $P(x; y)$ ein beliebiger Punkt der Parabel, P' seine senkrechte Projektion auf die x-Achse und N seine senkrechte Projektion auf l. L sei die senkrechte Projektion von F auf l (Abb. 2.26.). Es gilt dann $\overline{FP} = \overline{NP}$. Durch Einsetzen der Koordinaten erhält man mit Hilfe der Formel für die Länge einer Strecke

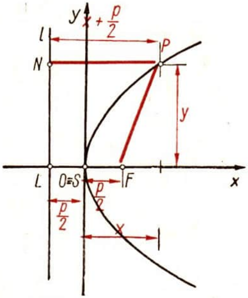


Abb. 2.26.

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Nach dem Quadrieren und Ordnen ergibt sich

$$y^2 - 2px = 0 \quad \text{oder}$$

(29) $$y^2 = 2px.$$

Jeder Punkt der Parabel genügt also der Gleichung (29). Die Gleichung (29) heißt **Scheitelgleichung der Parabel.**
Die Parabel schneidet die x-Achse und die y-Achse nur im Punkt O. Sie hat in $S\,(0; 0)$ ihren **Scheitel,** der mit dem Ursprung zusammenfällt. Der positive Teil der x-Achse heißt in diesem Fall auch **Achse der Parabel.**
Wenn der Scheitel der Parabel nicht mit dem Koordinatenursprung des xy-Koordinatensystems zusammenfällt, wird ein neues $\xi\eta$-Koordinatensystem eingeführt, dessen Ursprung $\overline{O}$ so verschoben ist, daß er mit S zusammenfällt. Sind c und d die Koordinaten des Punktes $S \equiv \overline{O}$, so lautet die Gleichung der Parabel

(30) $$(y-d)^2 = 2p(x-c)^2.$$

10. Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften der Parabel!

a) Schreiben Sie die Parabelgleichung (29) in expliziter Form!

b) Bestimmen Sie Definitionsbereich und Wertevorrat der entstehenden Funktion!

c) Beschreiben Sie den Verlauf der Parabel im ersten Quadranten!

d) Stellen Sie den Verlauf der Parabel in einer Übersicht zusammen!

Wenn die Parabel der Gleichung $y^2 = 2px\ (p > 0)$ genügt, verläuft die Kurve im ersten und vierten Quadranten und hat die im Schülerauftrag 10 festgestellten Eigenschaften.
Die Gleichung (29) ist auch für $p < 0$ sinnvoll. Sie ist die Gleichung einer nach links geöffneten, im zweiten und dritten Quadranten verlaufenden Parabel.

11. Welche geometrische Bedeutung hat p im Fall $p < 0$?

Auch die Gleichung $x^2 = 2py$ ist eine Gleichung für eine Parabel. Die Koordinaten sind vertauscht.
Geometrisch bedeutet das, daß die Parabel $y^2 = 2px$ an der Geraden $y = x$ gespiegelt wurde. Die Parabel liegt im ersten und zweiten (für $p > 0$) bzw. im dritten und vierten Quadranten (für $p < 0$). Die Parabelachse ist die y-Achse.

2.6.5. Punktkonstruktionen der Kegelschnitte

Ellipse: Eine Möglichkeit, Ellipsen zu konstruieren, ergibt sich unmittelbar aus der Ortsdefinition (vgl. Abschnitt 2.6.2.).
Wenn der Abstand $2e$ der Brennpunkte F_1 und F_2 und die Länge a der großen Halbachse bekannt sind, verläuft die Konstruktion wie in Abbildung 2.27. ($a > e$).
Die Strecke von der Länge $2a$ wird durch einen beliebigen Teilpunkt T geteilt. Die Strecke wird so in zwei Teilstrecken g und h zerlegt. Bei der Teilung muß allerdings beachtet werden, daß $g \geqq a - e$ ist. Nach Festlegung der Brennpunkte F_1 und F_2 schlägt man um F_1 und F_2 Kreise mit den Radien g und h. Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 dieser Kreise sind Ellipsenpunkte. Mit anderer Unterteilung der Strecke $2a$ erhält man weitere Ellipsenpunkte.
Eine andere Möglichkeit ist die bekannte Gärtnerkonstruktion (Abb. 2.28.).
Hyperbel: Nach der Ortsdefinition der Hyperbel (vgl. Abschnitt 2.6.3.) ist der Betrag der Differenz der Längen der Brennstrahlen konstant: $|r_1 - r_2 = 2a|$.
Aus dieser Definition ergibt sich folgende Konstruktion für die Punkte der Hyperbel (Abb. 2.29.):

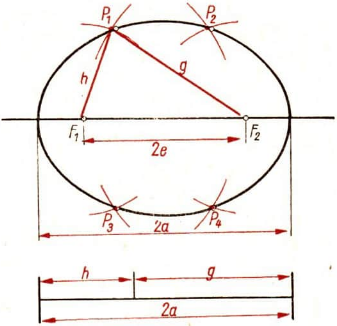


Abb. 2.27.

Die Entfernung der Brennpunkte sei $2e$ und die Entfernung der Scheitel $2a$ ($a < e$). Eine beliebige Strecke $r_1 \geqq 2a + e$ wird so unterteilt, daß sich die Teilstrecken r_2 und $r_1 = 2a + r_2$ ergeben. Nach Festlegung der Brennpunkte F_1 und F_2 schlägt man mit den Radien r_1 und r_2 Kreise um F_1 und F_2. Die Schnittpunkte dieser Kreise P_1, P_2, P_3 und P_4 sind Hyperbelpunkte. Dieselben Konstruktionen mit einer anderen Strecke $r_1 \geqq 2a + e$, die ebenfalls in zwei Teilstrecken r_2 und $r_1 = 2a + r_2$ zerlegt wurde, ergeben weitere Hyperbelpunkte.

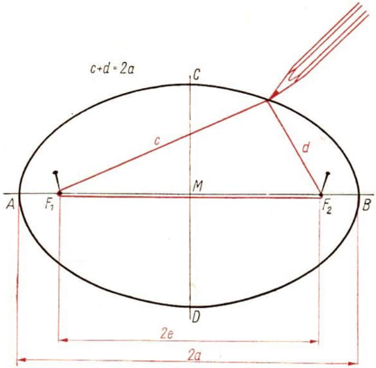


Abb. 2.28.

Parabel: Ähnlich wie bei der Ellipse und der Hyperbel ergibt sich aus der Ortsdefinition (vgl. Abschnitt 2.6.4.) auch eine Punktkonstruktion für die Parabel (Abb. 2.30.).
Die Leitlinie l und der Brennpunkt F seien durch ihren Abstand p voneinander gegeben. Schlägt man um F einen Kreis mit dem Radius $r > \frac{p}{2}$ und zieht eine Parallele im Abstand r zu l in der Halbebene, in der F liegt, so erhält man zwei Punkte P_1 und P_2, in denen sich Kreis und Parallele schneiden. Diese Punkte sind Parabelpunkte, da nach Konstruktion ihr Abstand von der Leitlinie l gleich dem Abstand vom Brennpunkt F ist.

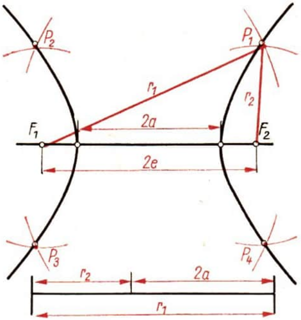


Abb. 2.29.

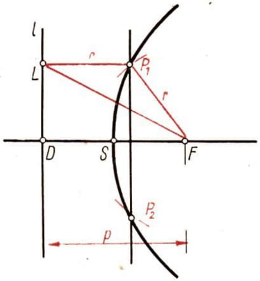


Abb. 2.30.

Aufgaben

1. Es sind die Mittelpunktsgleichungen der folgenden Ellipsen aufzustellen.

a) $a = 10;\ b = 6$ **b)** $a = 15;\ b = 12$ **c)** $a = 4{,}5;\ b = 6{,}5$ **d)** $a = 3;\ b = 5$
e) $a = 10;\ e = 6$ **f)** $a = 20;\ e = 16$ **g)** $b = 10;\ e = 25$ **h)** $b = 4;\ e = 3$

(M falle mit dem Ursprung zusammen, die Hauptachse falle in die x-Achse.) Geben Sie die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte an!

2. Es sind die Mittelpunktsgleichungen für folgende Hyperbeln aufzustellen.

a) $a = 5;\ b = 3$ **b)** $a = 3;\ b = 3$ **c)** $a = 3;\ b = 2$
d) $a = 2{,}3;\ b = 2{,}0$ **e)** $a = 3;\ e = 5$ **f)** $a = 5;\ e = 8$

(M falle mit dem Ursprung zusammen, die Achse mit der x-Achse.) Geben Sie die Koordinaten der Scheitel- und Brennpunkte an!

3. Es sind die Scheitelgleichungen der Parabeln aufzustellen, die durch die folgenden Achsen und Parameter bestimmt werden.

a) x-Achse und $2p = 4$ **b)** x-Achse und $2p = 3{,}5$
c) x-Achse und $2p = -8$ **d)** y-Achse und $2p = 4$
e) y-Achse und $2p = -12$ **f)** y-Achse und $2p = 3{,}5$

(S fällt mit dem Ursprung zusammen.)

4. Ermitteln Sie für die Parabeln aus Aufgabe 3

a) die Koordinaten der Scheitel und Brennpunkte,
b) die Gleichungen der Leitlinien!
c) Beschreiben Sie die Lage der Parabeln!

5. Von einer Ellipse sind die Brennpunkte $F_1(-6;\ 0)$ und $F_2(6;\ 0)$ und die Hauptscheitel $A_1(-8;\ 0)$ und $A_2(8;\ 0)$ gegeben.

a) Welche Koordinaten haben die Nebenscheitel?
b) Wie lautet die Gleichung der Ellipse?
c) Bestimmen Sie die Nebenscheitel durch Konstruktion!

6. Von einer Ellipse sind die vier Scheitel gegeben.
Die Hauptscheitel liegen auf der x-Achse und haben eine Entfernung von 18 Einheiten vom Koordinatenursprung. Die Nebenscheitel liegen auf der y-Achse und haben eine Entfernung von 12 Einheiten vom Ursprung. Der Mittelpunkt liegt im Ursprung.

a) Welche Koordinaten haben die Brennpunkte?
b) Bestimmen Sie die Brennpunkte durch Konstruktion!

7. Einem Rechteck mit den Seitenlängen 16 und 25 ist eine Ellipse einbeschrieben, deren Achsen zu den Rechteckseiten parallel sind. Die Nebenscheitel liegen auf der y-Achse und einer von ihnen hat eine Entfernung von 12 Einheiten vom Ursprung.
Wählen Sie sich ein geeignetes Koordinatensystem, und ermitteln Sie

a) die Gleichung der Ellipse und
b) die Koordinaten der Brennpunkte!

8. Einem Rechteck mit den Seitenlängen 16 und 7,2 ist eine Ellipse umbeschrieben, deren Achsen zu den Rechteckseiten parallel sind. Die Brennpunkte liegen in den Mittelpunkten der kleineren Seiten. Es ist die Gleichung der Ellipse zu bestimmen.

9. Von einer Hyperbel sind die Brennpunkte $F_1(-8;\ 0)$ und $F_2(8;\ 0)$ und die Scheitel $A_1(-6;\ 0)$ und $A_2(6;\ 0)$ gegeben.

a) Wie groß ist b?
b) Wie lautet die Gleichung der Hyperbel?

10. Wie lautet die Gleichung einer durch den Punkt P_1 (9; 4) gehenden Hyperbel, deren Achsen mit den Achsen des Koordinatensystems zusammenfallen und bei der $2a = 6$ ist?

11. Welche Lage hat die Parabel $y^2 = 2px$ mit $p < 0$, welche die Parabel $x^2 = 2py$ mit $p \gtrless 0$?

12. Von einer Parabel in Scheitellage ist der Brennpunkt F (6,5; 0).

a) Wie lautet die Gleichung der Parabel?
b) Wie lautet die Gleichung der Leitlinie?

13. Wie lautet die Gleichung der Parabel mit dem Brennpunkt $F(-7; 0)$ und der Leitliniengleichung $x - 7 = 0$?

14. Bestimmen Sie die Gleichungen und die Brennpunkte der Parabeln mit den folgenden Achsen, Parametern und Scheiteln!

a) $y = 4$; $p = 2$; $S(2; y_s)$ **b)** $y = -5$; $p = 3,5$; $S(3; y_s)$
c) $x = 5$; $p = 2,2$; $S(x_s; 3)$ **d)** $x = -3$; $p = 3$; $S(x_s; -8)$

Wie lautet jeweils die Gleichung der Leitlinie?

15. Die Parabel $y^2 = 2px$ soll durch

a) $P_1(-2; 2)$ **b)** $P_2(2; 4)$ **c)** $P_3\left(-2; \sqrt{56}\right)$,
d) $P_4(12; 6)$ **e)** $P_5(1; -8)$ **f)** $P_6(-25; -10)$ gehen.

Bestimmen Sie jeweils den Halbparameter p und die Gleichung der Leitlinie!

16. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel, die durch den Punkt P_1 geht, die Scheitelabszisse x_s bzw. die Scheitelordinate y_s hat und deren Achse gegeben ist.

	P_1	Scheitelkoordinaten	Achse
a)	(7; 4)	$x_s = 3$	$y = 8$
b)	(5; − 5)	$x_s = -3$	$y = 3$
c)	(−11; 4)	$y_s = -2$	$x = -5$

Geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes an!

17. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel, die den Halbparameter $p = 4$, die Achse $y = 3$ und die Scheitelabszisse $x_s = 4$ hat!
Geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes an!

18. Es ist die Gleichung der Parabel zu ermitteln, deren Achse der x-Achse parallel ist und die durch die folgenden Punkte geht! Geben Sie die Koordinaten des Brennpunktes und die Gleichung der Leitlinie an!

a) $P_1(-3; 1)$; $P_2(2; 4)$; $P_3(-6; -2)$ **b)** $P_1(7; 2)$; $P_2(7,4; 4)$; $P_3(17; 12)$

19. Ermitteln Sie die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte sowie die Größe der Halbachsen der folgenden Kegelschnitte!

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{9} + 4y^2 = 1$ **c)** $2x^2 - 3y^2 = 1$ **d)** $x^2 + 4y^2 = 64$
e) $25x^2 + 16y^2 = 400$ **f)** $64x^2 + 225y^2 = 14\,400$ **g)** $5x^2 - 4y^2 = 20$
h) $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$ **i)** $2x^2 + 4y^2 - 5 = 0$ **k)** $2x^2 + \frac{4y^2}{9} = 1$

20. Drücken Sie die Länge der Brennpunktstrahlen, die zu einem Ellipsenpunkt $P(x; y)$ gehören, durch a, e und x aus!

21. Es sei $P_1(x_1; y_1)$ ein Punkt des Kegelschnitts

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) Geben Sie Gleichungen für die Brennstrahlen an!

b) Wie lang sind die Strecken $\overline{F_1P_1}$ und $\overline{F_2P_1}$ (F_1 und F_2 sind die Brennpunkte)?

22. Weisen Sie nach, daß der Kreis ein Spezialfall der Ellipse ist!

23. Wie lauten die Gleichungen des Haupt- bzw. Nebenscheitelkreises der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d. h. des Kreises, der den gleichen Mittelpunkt wie die Ellipse hat und der durch die Haupt- bzw. Nebenscheitel der Ellipse geht?

24. Wie lautet die Gleichung des Scheitelkreises der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, d. h. des Kreises, der den gleichen Mittelpunkt wie die Hyperbel hat und durch die Scheitel geht?

25. Die Achsen eines Kegelschnitts verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie die Brennpunkts-, Scheitel- und Mittelpunktskoordinaten der folgenden Kegelschnitte!

a) $3x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$

b) $4x^2 + 9y^2 + 18y + 8 = 0$

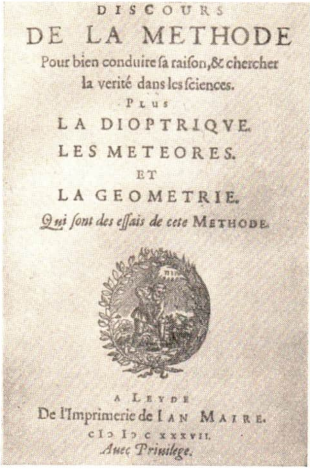
c) $25x^2 - 6y^2 - 90x + 17 = 0$

d) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 40y - 56 = 0$

e) $25x^2 - 64y^2 - 300x - 256y - 955 = 0$

f) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$

26. Ermitteln Sie die Gleichung der Ellipse, deren Hauptachse $2a = 26$ und deren Brennpunkte $F_1(14; 0)$ und $F_2(-10; 0)$ sind!



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

Abbildung 3.1. Titelblatt des *Discours de la methode* von René Descartes

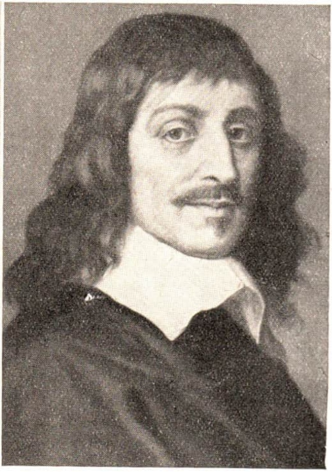


Abbildung 3.2. René Descartes (1596—1650)

3.1. Zur Entstehungsgeschichte der analytischen Geometrie und der Differentialrechnung

In den republikanischen Niederlanden erschien 1637 ein Buch, das die Entwicklung der europäischen Philosophie und Mathematik nachhaltig beeinflußte, der *Discours de la methode* (Abhandlung über die Methode, Abb. 3.1.). Der Autor hatte sich wegen der darin geführten Angriffe gegen Mystizismus und christlichen Dogmatismus gehütet, seinen Namen zu nennen, war doch im Jahre 1600 der mutige Denker GIORDANO BRUNO in Rom lebendig verbrannt worden, und der große Naturforscher GALILEO GALILEI befand sich seit 1633 in Gefangenschaft der Inquisition, weil er sich dem kopernikanischen Weltbild angeschlossen hatte.
In Freundeskreisen aber wußte man, daß RENÉ DESCARTES (Abb. 3.2.) den *Discours* verfaßt hatte. DESCARTES, der 1596 im nördlichen Frankreich, in der Normandie, geboren worden war, hatte sich nach einem Rechtsstudium und nach Teilnahme an den ersten Kämpfen des 30jährigen Krieges 1628 in die befreiten republikanischen Niederlande zurückgezogen, um unbehelligt von kirchlichen Angriffen sein Weltbild ausarbeiten zu können. Auch in Holland sah sich DESCARTES später erneuten An-

griffen der philosophischen Dunkelmänner ausgesetzt und nahm 1649 eine Einladung an den schwedischen Hof nach Stockholm an. Dort ist er 1650 gestorben.
DESCARTES hatte sich nicht getäuscht: Der *Discours* und seine anderen Werke wurden auf den päpstlichen Index (der verbotenen Bücher) gesetzt, da in ihnen der im Sinne der Kirche verbrecherische Versuch unternommen wurde, die Welt aus den Gesetzen der Mechanik zu erklären, nicht aber aus dem Willen Gottes. Die Existenz des Menschen hatte DESCARTES nicht aus einem göttlichen Schöpfungsakt hergeleitet, sondern aus der Fähigkeit zu denken, und dafür die Formel geprägt: Cogito, ergo sum — Ich denke, also bin ich. Überhaupt: Nicht göttlicher Offenbarung, der Bibel also, komme bei der Wahrheitsfindung die entscheidende Rolle zu, sondern der Ratio, der Vernunft, dem Denken. Daher komme es darauf an, klare Begriffe und möglichst allgemeine Bezeichnungs- und Schlußweisen zu schaffen. Um den Nutzen dieser Methode zu demonstrieren, wandte sie DESCARTES im *Discours* auf die Optik, auf die Wissenschaft von den Meteoren und auf die Geometrie an.
Jener dritte Teil des *Discours* mit dem Titel *La géometrie* stellt einen der wesentlichsten Beiträge zur Begründung der analytischen Geometrie dar. Er beginnt nach Einführung einer Einheitsstrecke mit der Feststellung, daß jede Strecke als Zahl aufgefaßt werden kann. Mit diesem Grundgedanken kann die Arithmetisierung der Geometrie vollzogen, können geometrische Untersuchungen rechnerisch geführt werden. Die Verschmelzung geometrischen und algebraischen Denkens in Verbindung mit dem funktionalen Denken hat sich als ein mächtiges Hilfsmittel zur Erforschung und Erfassung der objektiven Realität erwiesen. Die Entstehungszeit der analytischen Geometrie charakterisiert zusammen mit der in der zweiten Hälfte desselben Jahrhunderts erfolgten Herausbildung der Methoden der Differentialrechnung und ihrer Umkehrung, der Integralrechnung, den Übergang zur modernen Mathematik der veränderlichen Größen.
Dieser Übergang von der Mathematik der Statik zur Mathematik der funktionalen Beziehungen ist keineswegs durch Zufall eingetreten, etwa durch das unvermittelte Auftreten einzelner mathematischer Genies. Vielmehr spiegelt diese Entwicklungsrichtung der Mathematik auf ihre Weise die allgemeine gesellschaftliche Entwicklung wider. Im europäischen Frühkapitalismus entstanden Manufakturen, deren höhere Produktivität auf verstärkter Arbeitsteilung und auf der Verwendung von Maschinen beruhte. Daher bestand ein starkes gesellschaftliches Interesse an der Konstruktion aller möglichen Mechanismen. Ganz typisch war dabei die sich aufdrängende Untersuchung der Kraft- und Energieverhältnisse gegeneinander beweglicher Teile von Maschinerien. Die Mathematiker dieser Periode standen unter dem Eindruck jener technischen Großanlagen: der Wasserhebemaschinen, Windmühlen, Pumpwerke, Papiermühlen, der Pochmühlen zum Zerkleinern der Erze, der Walkmühlen des Textilgewerbes, der Seilzugaggregate, der mit Treträdern betriebenen Kräne, der Bagger und der Schiffshebewerke (Abb. 3.3.). So drängte die Entwicklung der Produktionsinstrumente zu einer Weiterentwicklung des theoretisch-mechanischen Denkens und folgerichtig auch der mathematischen Methoden. KARL MARX hat diesen Prozeß mit folgenden Worten ausgedrückt: „Sehr wichtig wurde die sporadische Anwendung der Maschinerie im 17. Jahrhundert, weil sie den Mathematikern dieser Epoche Anhaltspunkte und Reizmittel zur Schöpfung der modernen Mechanik darbot.“[1]

[1] Karl Marx: *Das Kapital*. Bd. 1, Dietz Verlag, Berlin 1951, S. 365.

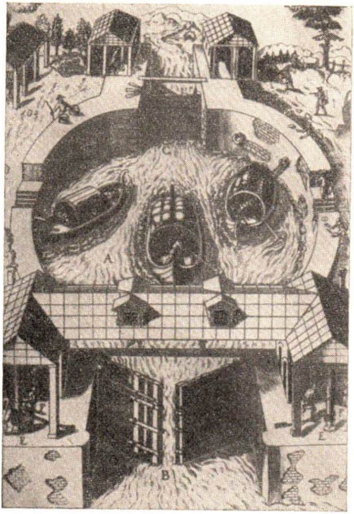


Abbildung 3.3. Frühe italienische Schiffsschleuse (1607)

Die sich formierende neue Klasse, die Bourgeoisie, hatte in den Naturwissenschaften ein Mittel erkannt, die Produktion in ihrem Interesse auf eine höhere Stufe der Produktivität und Organisationsform zu heben. Auf der Grundlage eines sprunghaft gestiegenen gesellschaftlichen Interesses an den Naturwissenschaften entwickelten sich viele Zweige der Naturwissenschaften sehr rasch, insbesondere Mechanik, Optik, Astronomie und Hydromechanik. Zugleich erhielten die Naturwissenschaftler eine neue gesellschaftliche Stellung. GIORDANO BRUNO mußte den Scheiterhaufen besteigen, GALILEI starb im Gewahrsam der Inquisition und DESCARTES in der Emigration, NEWTON aber wurde Präsident der Royal Society, einer vom britischen König privilegierten wissenschaftlichen Gesellschaft, und wurde geadelt.
Zu Beginn des 17. Jahrhunderts wurden die Grundlagen der, wie wir sie heute bezeichnen, klassischen Naturwissenschaft gelegt. Ihr Wesen besteht neben der wissenschaftlichen Methode des Experiments in der Verschmelzung qualitativer und quantitativer Untersuchungen, das heißt in dem Bestreben, das Naturgeschehen durch Zahlenwerte zu erfassen.
Insbesondere von Mechanik und Astronomie ergingen starke Impulse und Anforderungen an die Mathematik. Bald wurde sichtbar, daß die Mathematik nicht mehr dabei stehenbleiben konnte, Zustände zu beschreiben, sondern daß es darauf ankam, die sich vollziehenden Veränderungen zu erfassen. Hier erwiesen sich insbesondere die Fallbewegung und die Bewegung der Planeten als Schlüsselprobleme.
Die geistige Bewältigung mechanischer Bewegungsabläufe in Form neuer Rechnungsarten war die zentrale Aufgabe der Mathematiker eines ganzen Jahrhunderts. Männer wie GALILEO GALILEI, JOHANNES KEPLER, PIERRE FERMAT und RENÉ DESCARTES, BONAVENTURA CAVALIERI, BLAISE PASCAL, CHRISTIAAN HUYGENS, JOHN WALLIS, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ und ISAAC NEWTON, JAKOB und JOHANN BERNOULLI – um nur die „Sterne erster Größe" am mathematischen Himmel zu nennen – vollzogen jenen von der gesellschaftlichen Entwicklung getragenen Umschwung im mathematischen Denken, gleich revolutionär in der Zielstellung und in den Methoden. Am durchgreifendsten haben die funktionale Denkweise, das methodische Verfahren der analytischen Geometrie und die Ausbildung der infinitesimalen Methoden den Charakter der Mathematik umgestaltet und damit zugleich wesentliche Züge der modernen Mathematik geformt.

Für die Begründung der analytischen Geometrie bildeten eine Reihe wichtiger mathematischer Erkenntnisse und Methoden die Grundlage, auf denen René Descartes und Pierre Fermat (Abb. 3.4.) aufbauen konnten. So hatte sich bereits die Verwendung von Symbolen in der Mathematik durchgesetzt. Insbesondere wurden Buchstaben zur Bezeichnung von Zahlen und Größen benutzt.

Auch grafische Darstellungen verschiedenartiger Quantitäten wurden schon von Nicole Oresme (1323?—1382) angegeben, aber da die Verbindung von Rechnung mit Geometrie und funktionalem Denken fehlte, kann man diese Ansatzpunkte nicht als analytische Geometrie bezeichnen.

Koordinatensysteme waren schon lange vorher in Gebrauch gekommen. Der Astronom, Mathematiker und Geograph Ptolemaios (85?—165?) hatte geographische Länge und Breite benutzt, und seit der Renaissance wurden „Koordinatensysteme" in der Architektur und beim perspektivischen Zeichnen verwendet.

Die aus der Antike übernommenen und die neu gefundenen Ergebnisse zur Kegelschnittslehre (z. B. Keplers erstes Planetengesetz von 1609 und die Entdeckung, daß die ballistische Kurve eine Parabel ist) und überhaupt zur Geometrie sind zu Anfang des 17. Jahrhunderts verschiedentlich zusammengefaßt worden. Diesen Darstellungen mangelte es aber an einer neuen Methode, die es ermöglichte, die fast unübersehbar gewordene Fülle der einzelnen Lehrsätze nach einem einheitlichen Verfahren zu gewinnen.

Als erster tat diesen Schritt Pierre Fermat, der 1601 in der Nähe von Toulouse als Sohn eines reichen Lederhändlers geboren wurde. Fermat hatte die Rechtswissenschaften studiert, wurde 1631 Rat am Gericht in Toulouse und starb 1665. Seine Stellung ließ ihm viel Zeit für mathematische Studien. In der Zahlentheorie, der Differential- und Integralrechnung sowie für die analytische Geometrie hat er Bahnbrechendes geleistet. Aber er publizierte nur ungern. Seine wichtigste Abhandlung zur analytischen Geometrie mit dem Titel *Ad locos planos et solidos isagoge* (Einführung in die ebenen und räumlichen geometrischen Örter) erschien erst 1679 im Druck, obwohl es feststeht, daß sie vor 1637, also vor dem Erscheinen der *Géometrie* von Descartes, fertiggestellt und in Mathematikerkreisen bekannt war.

Abbildung 3.4. Pierre Fermat (1601—1665)

Die *Isagoge* von Fermat stellt sich die Aufgabe, die Wissenschaft von den geometrischen Örtern „einer besonderen und ihr eigens angepaßten Analyse zu unterwerfen, damit in Zukunft ein allgemeiner Zugang zu den Örtern offensteht". Gleich anschließend wird das Prinzip der analytischen Geometrie erstmals ausgesprochen: „Sobald in einer Schlußgleichung zwei unbekannte Größen auftreten, hat man einen Ort, und der Endpunkt der einen Größe beschreibt eine gerade oder krumme Linie..."

Koordinatenachsen traten in der *Isagoge* nicht auf. Auch die analytische Geometrie des Raumes wird nicht behandelt, sondern nur ebene geometrische Örter.

Da FERMATs Abhandlung erst so spät erschien, hat die weitere Entwicklung der analytischen Geometrie nicht an die *Isagoge* angeknüpft, sondern an die *Géometrie* von DESCARTES. Daher kommt es, daß wir heute noch, so wie es DESCARTES getan hat, die unbekannten Größen mit x, y, z, den letzten Buchstaben des Alphabets, bezeichnen. Freilich hat das Studium der *Géometrie* den Zeitgenossen große Schwierigkeiten bereitet. Bald nach 1637 wurden ausführliche Kommentare angefertigt, die teilweise den eigentlichen Umfang weit überschritten.

Auch bei DESCARTES ist das heute nach ihm benannte kartesische Koordinatensystem noch nicht vorhanden, er verwendete nur eine feste Koordinatenachse, und zwar darum, weil negative Gleichungswurzeln für ihn keine Lösung darstellten und er sie als „falsche Wurzeln" zurückwies. Dagegen entwickelte er erste Vorstellungen einer räumlichen analytischen Geometrie, ein Gedanke, der am Ende des 17. Jahrhunderts von JOHANN BERNOULLI (1667–1748) durchgebildet wurde.

DESCARTES hatte das schon früher gebrauchte Wort „Ordinate" übernommen und das Wort „Abszisse" (d. i. Abgeschnittene) geprägt, der Ausdruck „Koordinaten" wurde indessen erst 1694 von LEIBNIZ gebraucht.

Ihre heutige Form hat die analytische Geometrie erst im 18. Jahrhundert, insbesondere durch das Wirken des genialen Schweizer Mathematikers LEONHARD EULER (1707–1783), erhalten.

Die Methoden der Differentialrechnung wurden, wie die ihrer Umkehrung, der Integralrechnung, ebenfalls im 17. Jahrhundert herausgearbeitet. Wie bei der Entwicklungsgeschichte der analytischen Geometrie bildete hierbei die gesellschaftliche Entwicklung die entscheidende Triebkraft.

Während die Mathematiker der Neuzeit auf einige frühere Vorarbeiten zur Integralrechnung zurückgreifen konnten, hatten die Antike und das Mittelalter keine Vorstufen zur Differentialrechnung herausgebildet. Das „differentielle Denken" wurde vielmehr erst durch die Entwicklung der klassischen Mathematik erzwungen, insbesondere durch die Behandlung des Tangentenproblems und der Fallbewegung.

Das Tangentenproblem ist zunächst hauptsächlich in den Kreisen der französischen Mathematiker studiert worden, insbesondere von ROBERVAL (1602–1675), von BLAISE PASCAL (1623–1662) und von dem aus den Niederlanden stammenden, aber hauptsächlich in Paris wirkenden CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695). Die bedeutendsten Fortschritte erzielte jedoch PIERRE FERMAT. Von ihm stammt zugleich eine allgemeine Methode, Maxima und Minima von ganzen rationalen Funktionen zu bestimmen, eine Untersuchungsrichtung, die sich auch durch das Studium der Kurve größter Schußweite aufgedrängt hatte. Diese Methode hat FERMAT später auch auf Wurzelfunktionen ausgedehnt und 1662 auf die Lichtbrechung angewendet. Er kam zu dem Ergebnis, daß „die Entfernungen bei geringstem Widerstande in kürzester Zeit durchlaufen werden" (FERMATsches Prinzip).

Somit lagen bereits Mitte des 17. Jahrhunderts sehr gute Ergebnisse zur späteren Differentialrechnung und Integralrechnung vor. Beide Gebiete schienen aber gänzlich Verschiedenes zu behandeln. Als erster erfaßte der britische Mathematiker, Philologe und Theologe ISAAC BARROW (1630–1677) den gegenseitigen Zusammenhang des Tangentenproblems mit der Flächeninhaltsbestimmung. Er erkannte, daß sich, wie wir heute sagen, Differenzieren und Integrieren gegenseitig aufheben. Durch ihn wurde ISAAC NEWTON während seiner Studienzeit in Cambridge in die mathematischen Studien eingeführt, durch seine Vermittlung auch 1669 Professor der Mathematik in Cambridge.

Abbildung 3.5. Isaac Newton (1643—1727)

NEWTON (Abb. 3.5.) war am 4. Januar 1643 in Woolsthorpe, nahe der Stadt Grantham, geboren worden. Er verdankte es einsichtsvollen Verwandten, daß ihm Schulbesuch und Universitätsstudium ermöglicht wurden. Er entwickelte sich zu einem überragenden Astronomen und Experimentalphysiker, vollendete den Aufbau der klassischen Physik und starb, nachdem er 1703 zum Präsidenten der Royal Society, der Londoner Akademie, gewählt worden war, hochgeehrt im Jahre 1727. Er war unstreitig einer der außergewöhnlichsten Mathematiker aller Zeiten. Man verdankt ihm höchst wichtige algebraische Untersuchungen, die noch tiefer den Gang der Entwicklung der Mathematik beeinflussende Durchbildung der Potenzreihenmethode zur Reihenentwicklung von Funktionen und eine besondere, fruchtbare Form der Differential- und Integralrechnung, die sogenannte Fluxionsrechnung.

NEWTON ging von Grundvorstellungen der Mechanik aus. Er nahm eine absolute, stetig verlaufende Zeit an, die er als Argument aller Veränderlichen auffaßte, die physikalische Veränderungen beschreiben. Solche stetig sich verändernden „fließenden Größen" nannte er „Fluenten", deren Geschwindigkeiten „Fluxion". Dabei bezeichnete er die Fluxion einer Fluente x mit darübergesetztem Punkt, also bedeutet $\dot{x}$ die Fluxion der Fluente x. Der Übergang von x zu $\dot{x}$ entspricht der Differentiation nach der Zeit, der umgekehrte Weg der Integration, der Bestimmung der Stammfunktion (oder allgemein der Lösung von Differentialgleichungen). Der dritte wichtige Begriff der NEWTONschen Infinitesimalrechnung war das „Moment", d. i. der „gerade noch wahrnehmbare Zuwachs einer Größe", das dem heutigen Differential entspricht und von NEWTON mit o bezeichnet wurde. Dann ist oz das Moment der Fluente z. Trotz aller auch von NEWTON erkannten gedanklichen Schwierigkeiten der Fluxionsrechnung besaß er damit ein hervorragendes mathematisches Werkzeug zur Behandlung physikalischer und astronomischer Probleme. Mit ihm vermochte NEWTON zum Beispiel aus den KEPLERschen Gesetzen der Planetenbewegung das Gravitationsgesetz herzuleiten.

Der Vorzug der NEWTONschen Fluxionsrechnung bestand in ihrer engen Bindung an die Physik. Aber die Bezeichnungen waren noch zu wenig durchgebildet. Daher kommt es, daß sich die von G. W. LEIBNIZ gewählten geschickteren Bezeichnungen für die Differential- und Integralrechnung durchgesetzt haben, wie überhaupt LEIBNIZ mit DESCARTES und LEONHARD EULER zu den Schöpfern der heutigen mathematischen Symbolik gehört.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (Abb. 3.6.) war 1646, am Ende des 30jährigen Krieges, als Sohn eines Professors der Moral an der Leipziger Universität in Leipzig geboren worden. Nach einem Rechtsstudium in Leipzig und Jena trat er in die Dienste des Kurfürsten von Mainz, der ihn 1672 in diplomatischer Mission nach Paris schickte. Die Jahre 1672 bis 1676, die er dort, in einem der Zentren der europäischen Naturwissenschaft und Mathematik, zubrachte, stellen die eigentliche mathematische Periode im Schaffen des unerhört vielseitigen Gelehrten LEIBNIZ dar. In Paris wurde er in die Gedanken der neuen Infinitesimalmathematik eingeführt, arbeitete die schon erschienene Literatur gründlich durch und entwickelte sich in ganz kurzer Zeit zu einem der führenden Mathematiker Europas. Trotz aller Anstrengungen konnte er indes als Nichtadeliger und Ausländer in Paris nicht Fuß fassen; er war schließlich noch froh, im Dienste des Herzogs von Hannover unterzukommen. Dort ist er rastlos tätig gewesen als Bibliothekar, als Autor vieler bedeutender philosophischer Werke, als Historiograph, als Organisator der Wissenschaft. So wurde 1710 hauptsächlich durch seine Initiative nach Londoner und Pariser Vorbild in Berlin eine Societät der Wissenschaften gegründet, aus der die heutige Deutsche Akademie der Wissenschaften hervorgegangen ist. Jedoch gestalteten sich die Verhältnisse für LEIBNIZ in Hannover immer ungünstiger. Ziemlich vereinsamt starb er 1716. Kein Mitglied des Hofes befand sich im Trauergefolge. Der umfassendste Gelehrte seiner Zeit, so sagte ein Zeitgenosse, wurde wie ein Straßenräuber begraben.

Abbildung 3.6. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716)

Es steht heute fest, daß LEIBNIZ unabhängig von NEWTON selbständig zur Ausbildung seiner Differential- und Integralrechnung gekommen ist und daß der zwischen den Anhängern von LEIBNIZ und NEWTON geführte Prioritätsstreit den Verdiensten von LEIBNIZ nicht gerecht geworden ist. Noch in Paris erkannte LEIBNIZ den gegenseitigen Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung und erfand im Spätherbst 1675 den „Calculus", ein System von Bezeichnungen der Infinitesimalrechnung.

Erst in Hannover, nachdem er brieflich schon Mitteilungen an seine Fachkollegen hatte ergehen lassen, kam er dazu, seine Methode zu publizieren, insbesondere in einem Zeitschriftenartikel aus dem Jahre 1684, der den Titel *Nova methodus...* (*Eine neue Methode für Maxima und Minima sowie für Tangenten ... und eine merkwürdige Art des Kalküls dafür*) trug. Hierin werden die Differentiationsregeln für Summe und Differenz, für Produkt und Quotient ausgesprochen sowie $\frac{dy}{dx} = 0$ bzw. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ als Bedingungen für Extremwerte bzw. Wendepunkte angegeben. Dort treten zum erstenmal die Symbole dx, dy im Druck auf. LEIBNIZ selbst hat die Worte „Differential" und „Differentialrechnung" geprägt.

Interessanterweise ist sowohl die NEWTONsche Fluxionsrechnung wie die LEIBNIZsche Differentialrechnung von den Vertretern des extremen philosophischen Idealis-

mus scharf bekämpft worden, in England beispielsweise von Bischof BERKELEY, ein weiteres Beispiel für die Wissenschaftsfeindlichkeit des Idealismus.
Trotz aller Angriffe und trotz logischer Schwierigkeiten, die mit den noch unexakten LEIBNIZschen Begriffen verbunden waren, setzte sich die Differentialrechnung außerordentlich rasch durch, und zwar auf Grund ihrer überwältigenden Erfolge. Nur in England hielt man während des 18. Jahrhunderts an der NEWTONschen Fluxionsrechnung fest. Auf dem europäischen Kontinent dagegen übernahm man die LEIBNIZschen Bezeichnungsweisen. Durch das Wirken der Brüder JOHANN BERNOULLI (1667–1748) und JAKOB BERNOULLI (1655–1705), durch LEONHARD EULER (1707–1783), der viele Jahrzehnte an der Petersburger Akademie der Wissenschaften tätig war, durch J. L. LAGRANGE (1736–1813), durch P. S. LAPLACE (1749 bis 1827), die die herausragendsten Vertreter einer Vielzahl schöpferischer Mathematiker waren, wurde die Differential- und Integralrechnung im 18. Jahrhundert weiter ausgebaut. Die logischen Schwierigkeiten bei der Grundlegung der Infinitesimalrechnung wurden allerdings erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts bewältigt, insbesondere auf Grund der Untersuchungen des böhmischen Philosophen und Mathematikers B. BOLZANO (1781–1848), des russischen Mathematikers P. L. TSCHEBYSCHEW (1821 bis 1894) und des französischen Mathematikers A. L. CAUCHY (1789–1857).
Die Infinitesimalrechnung ist bereits im 18. Jahrhundert zur Lösung einer Vielzahl praktischer Probleme benutzt und bald auch als außerordentlich wichtiges Hilfsmittel für die Naturwissenschaften erkannt worden. Aber erst mit dem Einsetzen der industriellen Revolution zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurde sie auch zum Handwerkszeug der Ingenieure. Schrittmachend war hier für ganz Europa die während der Revolutionszeit in Paris 1794 gegründete Ecole Polytechnique, die erste Technische Hochschule, an der u. a. LAGRANGE und CAUCHY lehrten. Nach Pariser Vorbild wurden dann später in ganz Europa technische Bildungsstätten eingerichtet, und nach dortigem Muster wurde die Differential- und Integralrechnung fester Bestandteil der Ingenieurausbildung.

3.2. Abschließende Bemerkungen zur Geschichte der Mathematik

Auf viele tausend Jahre ihrer Geschichte blickt die Mathematik zurück; sie gehört neben Astronomie und Medizin zu den ältesten Wissenschaften überhaupt.

Abbildung 3.7. Mathematische Ornamente auf Tongefäßen aus der jüngeren Steinzeit (Bandkeramik)

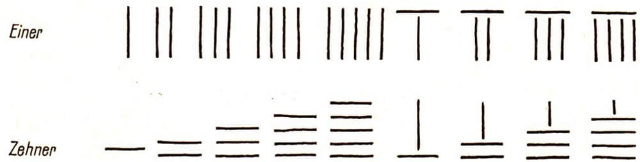


Abbildung 3.8. Chinesische sogenannte Bambusziffern. Ungefähr 6. Jahrhundert v. u. Z.

Beim Studium der vergangenen Gesellschaftsformationen findet der Historiker der Mathematik schon in der Urgesellschaft einfache mathematische Kenntnisse, geometrische Grundtatsachen und Anfänge des Zählens und Rechnens. Freilich noch bis in die Periode der Entstehung der Klassengesellschaft handelte es sich um eine rezeptartige, weitgehend empirisch betriebene Mathematik. Die Herausbildung des ursprünglichen mathematischen Denkens hat sich bei allen Völkern unter ähnlichen gesellschaftlichen Bedingungen fast gleichartig und voneinander unabhängig vollzogen. Zu den frühesten Pionieren der Mathematik gehören die Chinesen und die Inder, die schon zwischen 3000 und 500 v. u. Z. bedeutende mathematische Kenntnisse besaßen, zum Beispiel den Satz des PYTHAGORAS, Dreisatzrechnung, Quadratwurzelziehen. Auch im alten Ägypten waren weitreichende mathematische Verfahren in Gebrauch, wie wir aus erhalten gebliebenen Papyri des 18. Jahrhunderts v. u. Z. ersehen können. Eine ganz besonders erstaunliche Entwicklung hat die babylonische Mathematik genommen. Auf

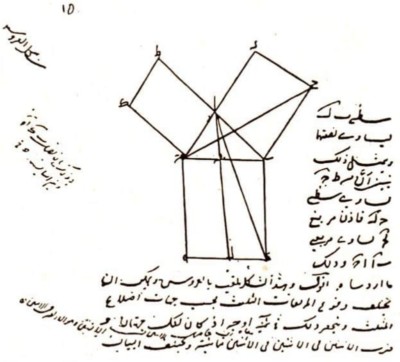


Abbildung 3.9. Ausschnitt aus einem arabischen mathematischen Manuskript (etwa 1350), das den Satz des Pythagoras behandelt

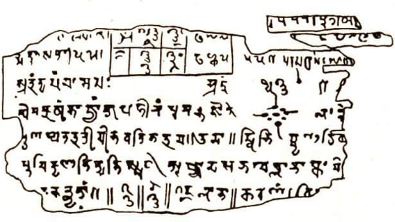


Abbildung 3.10. Ausschnitt aus einem indischen mathematischen Manuskript des 10. Jahrhunderts

erhaltenen Keilschrifttafeln, die bis ins 2. Jahrtausend v. u. Z. zurückreichen, tritt uns eine Höhe des algebraischen Denkens entgegen, die in Europa erst zur Zeit der Renaissance überschritten werden konnte. Mit dem Übergang zur durchgebildeten Sklavenhaltergesellschaft vollzog sich im alten Griechenland unter Verarbeitung des hauptsächlich aus Babylonien übernommenen mathematischen Erfahrungsschatzes im 7. und 6. Jahrhundert v. u. Z. der Übergang zu einer selbständigen Wissenschaft Mathematik, die auf sicheren Definitionen aufbaut und Beweise heranzieht. Griechische und hellenistische Mathematiker haben die Mathematik in den nächsten Jahrhunderten weit vorangetrieben. Führend war insbesondere die mathematische Schule von Alexandria, aus der die bedeutendsten antiken Mathematiker Eukleides (4. Jh. v. u. Z.), Archimedes

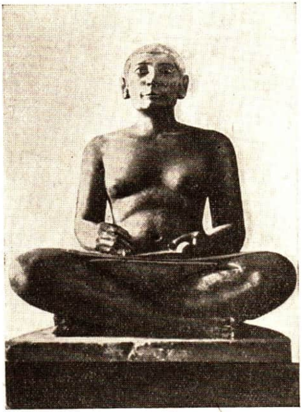


Abbildung 3.11. Ägyptischer Schreiber. Altes Reich, ungefähr 2500 v. u. Z.

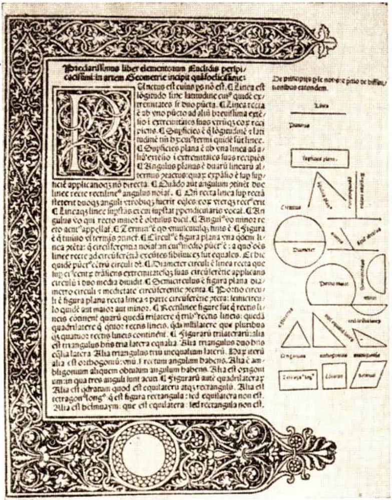


Abbildung 3.12. Eine Seite aus der ersten lateinischen Druckausgabe der *Elemente* von Eukleides in Europa (1482)

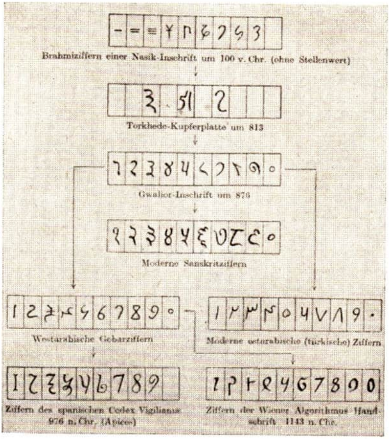


Abbildung 3.13. Stammbaum der indisch-arabischen Ziffern, unserer heutigen Zahlzeichen

und Apollonios (3. Jh. v. u. Z.) sowie Diophantos (wahrscheinlich 3. Jh. u. Z.) hervorgegangen sind.

Während der Feudalgesellschaft kam die Mathematik in China, Indien und im arabischen Kulturbereich weit voran, während sich in Europa durch die wissenschaftsfeindliche Haltung der christlichen Kirche nur ganz geringe mathematische Kenntnisse halten konnten. Beispielsweise stießen die Chinesen im 13. Jahrhundert bis zu ausgezeichneten Verfahren zur numerischen Gleichungsauflösung vor und fanden eine Methode, die wir heute als das Hornersche Schema bezeichnen. Etwa zur gleichen Zeit stellten sie das nach Pascal (17. Jh.) benannte Dreieck auf. Die folgenreichste mathematische Leistung der Inder besteht in der Erfindung des dezimalen Stellenwertsystems mit der Null. Es ist seit dem 7. Jahrhundert u. Z. verbürgt. Die indischen Ziffern drangen längs der Karawanenwege in den arabischen Kulturbereich vor und von dort später, seit dem 12. Jahrhundert, nach Europa; daher nennen wir die indischen Ziffern bei uns arabische Ziffern. Die arabisch schreibenden Gelehrten, die vorwiegend aus dem Nahen und Mittleren Osten sowie aus Zentralasien stammten, also ihrer Nationalität nach vorwiegend Iraner, Syrer und Usbeken waren, haben aus dem Zusammenbruch des römischen Weltreiches unter anderem auch viele mathematische Kenntnisse der hellenistischen Kultur gerettet. Auf dieser Grundlage und in Berührung mit der hochentwickelten indischen und chinesischen Mathematik haben sie vom 8. Jahrhundert bis zum 13. Jahrhundert die Mathematik zu einer erstaunlichen Höhe geführt, insbesondere die Algebra und die Trigonometrie entwickelt. Das Wort „Algebra“ selbst ist arabischen Ursprungs. Arabische

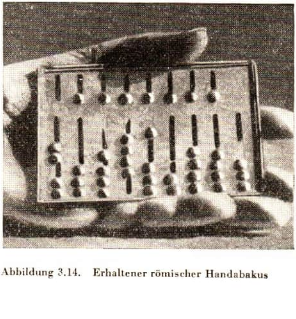


Abbildung 3.14. Erhaltener römischer Handabakus

Abbildung 3.15. Zeitgenössische Illustration zum Sieg des schriftlichen Ziffernrechnens über das Abakusrechnen (1504)
Unter Aufsicht der Göttin Arithmetica führen Boethius und Pythagoras, die damals als Erfinder des schriftlichen Rechnens bzw. des Rechnens auf dem Rechentisch galten, ein Wettrechnen durch. Boethius ist bereits fertig. Beachten Sie die Gesichtsausdrücke, insbesondere wie griesgrämig Pythagoras noch rechnet!

Mathematiker vollzogen den Übergang zur Trigonometrie auf der Grundlage der Winkelfunktionen, haben diese bis zur Genauigkeit von 17 Dezimalen tabelliert und kannten den Sinus- und Kosinussatz der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Viele dieser Kenntnisse sind in Europa lange Zeit unbekannt geblieben und mußten hier noch einmal neu gefunden werden.

In Europa konnten sich die Wissenschaften erst seit dem 15. Jahrhundert entfalten, und zwar auf Grund der gesellschaftlichen Anforderungen, die sich aus der Entwicklung des Frühkapitalismus ergaben. Die Mathematik schritt im 15. und im 16. Jahrhundert in enger Berührung mit der gesellschaftlichen Praxis in drei Hauptrichtungen vorwärts:

1. Die Rechenmethoden wurden entwickelt; unter anderem setzte sich der Übergang vom Rechnen auf dem Abakus zum schriftlichen Rechnen mit den arabischen Ziffern durch.
2. Auf dieser Grundlage entfaltete sich die Algebra und setzte sich die Verwendung spezieller mathematischer Symbole durch. Zum Beispiel war der Franzose F. Vieta (Ende 16. Jh.) der erste, der durchgängig Buchstaben in Rechengängen verwendete.
3. Die Trigonometrie wurde zum geschlossenen System ausgebaut; führend war hierbei der deutsche Gelehrte Regiomontanus (15. Jh.) beteiligt. Anfang des 17. Jahrhunderts wurde zur Vereinfachung der umfangreichen trigonometrischen Rechnungen das logarithmische Rechnen erfunden.

Auf Grund des Übergangs zur Produktion in Manufakturen und der damit verbundenen Entwicklung der Produktionsinstrumente sowie in engem Zusammenhang mit der stürmischen Entfaltung der Naturwissenschaften vollzog sich im 17. Jahrhundert der Übergang von der Mathematik der Statik zur Mathematik der veränderlichen Größen, ein Vorgang von größter Bedeutung, der das Erfassen von Prozessen in Natur und Gesellschaft erst ermöglicht hat. Hierauf haben Marx und Engels oftmals mit großem Nachdruck hingewiesen. Der Funktionsbegriff und das Denken in Veränderlichen, die Erfindung der analytischen Geometrie und der weittragenden Methoden der Infinitesimalrechnung waren für die damalige Zeit gleich revolutionär in den Methoden und in der Zielstellung. Heute gehören sie mit Recht zum Bestand einer gediegenen mathematischen Grundausbildung.

Zweifellos hat man die Ursachen für den starken Aufschwung der mathematischen Wissenschaften in Europa während des 18. und besonders des 19. Jahrhunderts in der Entwicklung des Kapitalismus und da wieder vor allem in der Ende des 18. Jahrhunderts einsetzenden industriellen Revolution zu suchen. Der Übergang zum Fabriksystem erforderte die Ausbildung wissenschaftlich und mathematisch geschulter Ingenieure.

Zugleich mit der angewandten Mathematik und der Anwendung bereits vorliegender mathematischer Ergebnisse in der Praxis entwickelte sich auch die abstrakte Mathematik im Laufe des 19. Jahrhunderts ganz außerordentlich rasch. Eine Vielzahl neuer mathematischer Disziplinen wurde weit ausgebaut, die nicht mehr Gegenstand der Schulmathematik sind und darum hier nicht erwähnt werden sollen. Mit dem Ausbau nach dem Umfang schritt auch der Ausbau der Mathematik nach der Tiefe weit voran. So wurde die mathematische Axiomatik entwickelt und der Zahlbegriff schrittweise vertieft und logisch analysiert. Doch führten um die Jahrhundertwende einige schwierige erkenntnistheoretische Fragen der Grundlagen der Mathematik zum Ausbruch einer sogenannten „Grundlagenkrise der Mathematik". Die dabei aufgetretene „mathematische Weltuntergangsstimmung" war in Anbetracht der großen Erfolge der Mathematik in Naturwissenschaften und Technik trotz aller effektiven Schwierigkeiten durchaus unangebracht und kann nur verstanden werden als ideologischer Reflex der beginnenden Zersetzung des kapitalistischen Systems im Zeitalter des Imperialismus.

Der erste sozialistische Staat der Erde, die Sowjetunion, und die Kommunistische Partei der Sowjetunion haben von Anfang an der Entwicklung der Mathematik große Unterstützung zuteil werden lassen. Die sowjetischen Mathematiker gehören heute zu den führenden Mathematikern der Welt. Ohne die zielbewußte Ausbildung einer großen Anzahl fähiger Mathematiker wären zum Beispiel die sowjetischen Raumflüge nicht möglich gewesen. Der XXII. Parteitag der KPdSU im Herbst 1961 und das dort beschlossene Programm des Aufbaus der kommunistischen Gesellschaft eröffnen für die reine und angewandte Mathematik in der Sowjetunion und in den Staaten des sozialistischen Lagers weitere großartige Perspektiven. Auch in der Deutschen Demokratischen Republik sind der Mathematik große Aufgaben gestellt, deren schnelle Lösung von bedeutendem Einfluß auf das Tempo unserer gesellschaftlichen und ökonomischen Entwicklung sind.

Schon ein kurzer Streifzug durch die vieltausendjährige Geschichte der Mathematik läßt einige Gesetzmäßigkeiten deutlich hervortreten. Die Mathematik ist nicht, wie es in einigen uralten Sagen heißt, als „Geschenk des Himmels an die Menschen auf die Erde gekommen", sie ist Ergebnis des menschlichen Denkens. Aber die Menschen haben sie nicht aus Spielerei erschaffen, aus purem geistigem Übermut oder, wie noch Aristoteles meinte, aus Langeweile. Im Gegenteil: Die Mathematik ist entstanden als Ergebnis sehr handgreiflicher Forderungen der gesellschaftlichen Praxis, als abstrakte Widerspiegelung recht konkreter Zusammenhänge der Natur und Gesellschaft, nicht als Ergebnis „reinen Denkens", losgelöst von der Realität. So hat nicht, wie noch im 19. Jahrhundert ein bedeutender deutscher Mathematiker

meinte, „der liebe Gott die natürlichen Zahlen" gemacht. Der Zahlbegriff ist vielmehr entstanden durch einen schrittweise vertieften Abstraktionsprozeß.
Immer wieder hat sich die gesellschaftliche Praxis als die entscheidende Triebkraft für die Entwicklung der Mathematik erwiesen, jene Forderungen nämlich, die sich aus der Landvermessung, dem Bauwesen, der Schiffahrt, dem Handel usw., vor allem aber aus der Entwicklung der Produktionsinstrumente ergaben. Von der allergrößten Wichtigkeit für die Weiterentwicklung der Mathematik sind gerade in den letzten Jahrhunderten auch diejenigen mathematischen Probleme gewesen, die sich aus der Entwicklung der Naturwissenschaften, insbesondere der Astronomie und Physik, ergaben, und diejenigen Probleme, die aus den Bereichen der Technik stammen. Wichtige Impulse verdankt die Mathematik auch ökonomischen Problemen, eine Entwicklungsrichtung, die gerade unter den Bedingungen der sozialistischen Planwirtschaft noch stark an Bedeutung gewinnen wird.
Natürlich besitzt auch und gerade die Mathematik eigengesetzliche, aus inneren Problemen erwachsende Entwicklungsgänge. Aber ohne neue, aus der Praxis stammende Anforderungen ist der eigengesetzliche Schwung früher oder später erlahmt, und die Entwicklung kam und kommt, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, zum Stillstand. Aus dieser Gesetzmäßigkeit, die sich in allen Gesellschaftsordnungen nachweisen läßt, ist die Schlußfolgerung zu ziehen, daß Wissenschaft und Praxis Hand in Hand gehen müssen. Für uns kommt heute, in der Übergangsperiode vom Kapitalismus zum Sozialismus und weiter zum Kommunismus, in der die Wissenschaften, darunter auch die Mathematik, immer mehr zu einer unmittelbaren Produktivkraft werden, der engen Verbindung von Wissenschaft und Praxis eine noch größere Bedeutung für den Fortschritt der menschlichen Gesellschaft zu. Doch hat man Praxisverbundenheit nicht zu eng aufzufassen, nicht im Sinne eines flachen Praktizismus. Die Mathematik arbeitet teilweise mit einem beträchtlichen zeitlichen Vorgriff auf künftige Anwendungen in Wissenschaft und Technik, und die Geschichte der Mathematik ist reich an Beispielen, daß abstrakte Theorien, zum Zeitpunkt ihrer Entstehung von praktischen Anwendungen ganz weit entfernt, in der Folge zu außerordentlicher Bedeutung gelangt sind. Ein klassisches Beispiel dieser Art ist die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie. Seit der Antike war versucht worden, das sogenannte „euklidische Parallelenpostulat" mit Hilfe der anderen geometrischen Axiome zu beweisen, indessen blieben alle derartigen Ansätze erfolglos. Gauss, der größte deutsche Mathematiker, erkannte als erster, daß dieses Parallelenpostulat, also die Annahme, daß es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt eine und nur eine parallele Gerade gibt, sich nicht mit Hilfe der anderen Postulate beweisen läßt und daß es möglich ist, Geometrien aufzubauen, die ohne diese Annahme auskommen. Doch scheute er sich vor der Veröffentlichung solcher nichteuklidischer Geometrien, die in starkem Widerspruch zu idealistischen Zügen der damals herrschenden Philosophie Kants standen. Unabhängig von Gauss kam der russische Mathematiker N. Lobatschewski (1793–1856) zum gleichen Ergebnis und tat 1829 als erster den mutigen Schritt der Veröffentlichung, unabhängig von seinen Vorgängern. (Im Jahre 1832 hat dann auch der Ungar J. Bolyai [1802–1860] seine Ergebnisse veröffentlicht, vgl. auch Abb. 3.16.) Hier hat später B. Riemann (1826 bis 1866) weitergearbeitet und die sogenannte Riemannsche Geometrie begründet, die im 20. Jahrhundert in der Relativitätstheorie A. Einsteins (1879–1955) zu außerordentlicher Wichtigkeit für die Theorie gelangte und im Zeitalter kosmischer Flüge auch große praktische Bedeutung gewinnen wird.

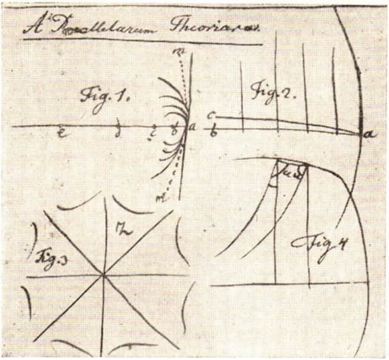


Abbildung 3.16. Handzeichnung Johann Bolyais zur nichteuklidischen Geometrie (1820)

Dieser Fall der ausgebreiteten Anwendung einer abstrakten mathematischen Theorie steht keineswegs allein da, im Gegenteil. So beruht – abgesehen von den technischen Voraussetzungen – auf der Entwicklung der abstrakten Algebra, der mathematischen Logik und der Mengenlehre die Entwicklung der maschinellen elektronischen Rechentechnik, die zu einer unbedingten Notwendigkeit für den Raketenflug, zur Konstruktion kybernetischer Maschinen, zur Steuerung komplizierter ökonomischer Vorgänge und zur Bewältigung

Abbildung 3.17. Sowjetische elektronische Rechenmaschine

einer Unzahl einzelner mathematischer, physikalischer und technischer Probleme geworden ist.
In ihrer vieltausendjährigen Geschichte ist die Mathematik auch starken ideologischen Einflüssen ausgesetzt gewesen. Sie ist in ihrer Entwicklung durch idealistische philosophische Systeme, zum Beispiel durch die pythagoreische Schule, den antiken Platonismus und die christlichen Dogmen, gebremst worden; sie nahm einen gewaltigen Aufschwung durch ihre Verbindung mit dem philosophischen Materialismus, so bei dem antiken Materialisten DEMOKRITOS VON ABDERA, in der Periode der Aufklärung und heute durch den dialektischen Materialismus.

Abbildungsnachweis

Kapitelbild 1.0.	Horst E. Schulze
Abbildung 3.2.	Zentralbild
Abbildung 3.3.	Reproduktion aus R. Payne: The Canal Builders. New York 1959, S. 83
Abbildung 3.4.	Deutsche Fotothek Dresden
Abbildung 3.5.	Volk und Wissen
Abbildung 3.6.	Erich Balg
Abbildung 3.7.	Propyläen — Weltgeschichte, Bd. I
Abbildung 3.9.	D. E. Smith: History of Mathematics. Vol. I, 1923
Abbildung 3.10.	D. E. Smith: History of Mathematics, Vol. I, 1923
Abbildung 3.11.	B. L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Basel und Stuttgart 1956
Abbildung 3.12.	D. E. Smith: History of Mathematics. Vol. I, 1923
Abbildung 3.13.	Volk und Wissen
Abbildung 3.14.	K. Menninger: Zahlwort und Ziffer. Göttingen 1958
Abbildung 3.15.	B. L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Basel und Stuttgart 1956
Abbildung 3.16.	W. und I. Bolyai: Geometrische Untersuchungen. Leipzig 1913
Abbildung 3.17.	Zentralbild

INHALTSVERZEICHNIS

001252-2