

*Aufgabensammlung
und Leitfaden der*
GEOMETRIE

3.-5. SCHULJAHR

Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie

Dritte bis fünfte Klasse

Anmerkung:
entspricht der heutigen Klassen 7 bis 9



VOLK UND WISSEN VERLAGS-G.M.B.H.

Berlin / Leipzig

1946

Inhalt

Aufgabensammlung

Erstes Kapitel

Vorstufe der Geometrie

§ 1. Strecken, Strahlen, Geraden	1
§ 2. Quadrat, Rechteck, Rhombus	8
§ 3. Kreis und Winkel	19
§ 4. Das Dreieck	27

Zweites Kapitel

Geraden und Winkel

§ 5. Nebenwinkel und Scheitelwinkel	30
§ 6. Winkel an Parallelen	35

Drittes Kapitel

Das Dreieck

§ 7. Seiten und Winkel des Dreiecks	39
§ 8. Symmetrische und unsymmetrische Dreiecke. Die Grundkonstruktionen	50
§ 9. Kongruenz der Dreiecke	61

Viertes Kapitel

Das Viereck

§ 10. Das allgemeine Viereck	76
§ 11. Trapez und Parallelogramm	79
§ 12. Rechteck, Rhombus, Quadrat	86

Fünftes Kapitel

Der Kreis

§ 13. Punkt und Kreis, Gerade und Kreis	92
§ 14. Winkel und Kreis	99
§ 15. Dreieck und Kreis, Viereck und Kreis	103
§ 16. Kreis und Kreis	109

Sechstes Kapitel

Flächenlehre

§ 17. Flächenberechnung von Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Dreieck und Trapez	114
§ 18. Flächenberechnung beliebiger ebener Figuren	122
§ 19. Flächenvergleichung, Flächenverwandlung, Flächenteilung	127
§ 20. Der pythagoreische Lehrsatz	130
§ 21. Weitere geometrisch-algebraische Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes	140

Siebentes Kapitel

Ähnlichkeitslehre

§ 22. Der erste Strahlensatz	144
§ 23. Ähnlichkeit von Dreiecken	155
§ 24. Proportionen im Dreieck	161
§ 25. Figuren in Ähnlichkeitslage	163
§ 26. Der zweite Strahlensatz	168
§ 27. Berechnung und Konstruktion regelmäßiger Vielecke	173
§ 28. Umfang und Inhalt des Kreises	178

Achstes Kapitel

Einführung in die ebene Trigonometrie

§ 29. Einführung der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel	187
§ 30. Die Berechnung des rechtwinkligen und des gleichschenkligen Dreiecks	196
§ 31. Das allgemeine Dreieck	203

Neuntes Kapitel

Darstellung räumlicher Gebilde in einer Zeichenebene

§ 32. Punkt und Gerade	214
§ 33. Ebene Flächen	217
§ 34. Gekrümmte Flächen	219

Zehntes Kapitel

Einführung in die Stereometrie

§ 35. Würfel und Quader	221
§ 36. Das Prisma	229
§ 37. Die Pyramide	233
§ 38. Zylinder und Kegel	241
§ 39. Pyramidenstumpf und Kegelstumpf	246
§ 40. Die Kugel	251

Anhang

Die griechischen Buchstaben	258
-----------------------------------	-----

Leitfaden

§ 1. Geraden und Winkel	1
§ 2. Das Dreieck	5
§ 3. Das Viereck	10
§ 4. Der Kreis	13
§ 5. Geometrische Örter	21
§ 6. Flächenlehre	23
§ 7. Ähnlichkeitslehre	29
§ 8. Vielecke und Kreis	38
§ 9. Einführung in die Stereometrie	45
§ 10. Einführung in die Trigonometrie	59

Erstes Kapitel

Vorstufe der Geometrie

§ 1. Strecken, Strahlen, Geraden

Messen und Schätzen von Strecken

1. Stelle dir einen Maßstab von etwa 20 cm Länge durch Falten eines Papierblattes her. Trage die cm und in einen der cm die mm ein.
2. Miß **a)** die Länge, **b)** die Breite, **c)** die Dicke dieser Aufgabensammlung.
3. Von der untenstehenden Strecke AB (Fig. 1) ist die Länge in mm **a)** zu schätzen, **b)** mit dem Maßstab zu messen, **c)** der Fehler zwischen Messung und Schätzung festzustellen.¹⁾
4. Fig. 2 stellt ein Stück eines Zollmaßstabes dar. Schätze und miß, wie lang ein Zoll in Millimetern ist.
5. Schätze und miß **a)** die Länge eines noch nicht angespitzten (gewöhnlichen Schul-) Bleistiftes, **b)** die drei Kanten einer Streichholzschachtel, **c)** Länge und Breite eines großen Schreibbogens, **d)** Länge und Breite eines Quartheftes.
6. Schätze erst und miß dann mit dem Metermaß **a)** die Höhe eines Tisches, **b)** die Höhe der Sitzfläche eines Stuhles, **c)** Länge und Breite deines Wohnzimmers, **d)** Höhe und Breite der Tür zu deinem Schlafzimmer.
7. Stelle die durchschnittliche Länge fest **a)** eines Schrittes, **b)** einer Klafter (Raum zwischen den Fingerspitzen der ausgebreiteten Arme), **c)** deines Fußes, **d)** einer großen Spanne (Raum zwischen der Spitze des Daumens und des kleinen Fingers bei gespreizter Hand), **e)** einer kleinen Spanne (Raum zwischen der

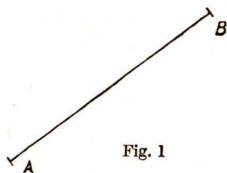


Fig. 1



Fig. 2

1) Am besten legt man hier und in ähnlichen anderen Fällen eine Tabelle folgender Gestalt an:

Gegenstand	geschätzt	gemessen	Fehler

Spitze des Daumens und des Zeigefingers, beide möglichst voneinander-gespreizt). Miß die Länge **f**) deines kleinen Fingers, **g**) des Nagels an deinem kleinen Finger, **h**) deines Unterarmes mit ausgestreckter Hand.

8. Schätze und stelle durch Schritte (Aufg. 7) fest **a**) die Länge deines Wohnhauses, **b**) die Breite der Straße, in der du wohnst.
9. Man sagt, ein Mensch klaftere so viel, als er hoch ist. Stelle bei dir den Unterschied von Klafter und Höhe in cm fest.
10. Schätze und miß (Fig. 3) den Unterschied **a**) zwischen den Strecken 1 und 2, **b**) zwischen den Strecken 2 und 3. (Die Begrenzungen sind nicht mitzurechnen.) Welche optische Täuschung ergibt sich daraus? **c**) Schätze und miß in der Fig. 4 den Unterschied zwischen der waagerechten Strecke **a** und der lotrechten **b**.

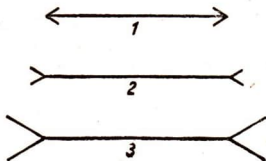


Fig. 3

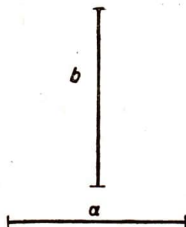


Fig. 4

11. Zeichne erst nach Augenmaß (Lineal ohne Zentimetereinteilung), dann mit Verwendung eines Maßstabes Strecken von **a**) 4 cm, **b**) 1 cm, **c**) 7 cm, **d**) $5\frac{1}{2}$ cm, **e**) 4 mm, **f**) 6,4 cm, **g**) 1,2 dm. Stelle jedesmal den Fehler fest.
12. Zeichne Länge, Breite und Höhe einer Streichholzschachtel in dein Heft **a**) nach der Erinnerung, **b**) nach Augenmaß, **c**) nach Maß. Stelle die Unterschiede zwischen **a**) und **c**) und zwischen **b**) und **c**) fest.
13. Zeichne zwei Punkte **A** und **B** und schätze ihren Abstand; verbinde sie durch eine Strecke und miß dann deren Länge. Wie groß ist der Fehler der Schätzung?
14. Stelle die Längen der Seiten des Dreiecks **ABC** in nebenstehender Fig. 5 nach Augenmaß und mit dem Maßstab fest und trage das Ergebnis in eine Tabelle ein.
15. Zeichne eine beliebige Strecke **a** und danach **a**) nach Augenmaß, **b**) unter Benutzung des Maßstabes eine zweite Strecke, die ebenso lang ist. **c**) Löse die Aufgabe ohne Maßstab nur mit einem Lineal und einem Stechzirkel.

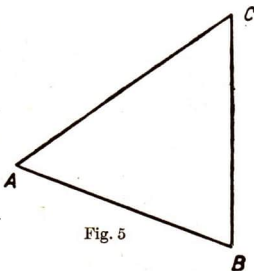


Fig. 5

Antragen (Addieren) von Strecken

16. Auf einer Strecke AB **a)** liegt ein Punkt C , **b)** liegen zwei Punkte M und N . Wie heißen die Teilstrecken? (Zeichnung!)
17. Zeichne eine Strecke von 3 cm und eine andere von 4 cm. Zeichne jetzt **a)** nach Augenmaß, **b)** ohne Maßstab, aber mit Verwendung des Stechzirkels eine Strecke, die so lang ist wie beide zusammen.
18. Zeichne die Summe zweier Strecken von 2 cm und 3 cm.
19. Trage an eine Strecke von 4,5 cm eine zweite von 2,5 cm Länge an. Auf wieviel Weisen kann das geschehen?
20. Verlängere die Strecke AB über B hinaus um sich selbst.
21. Verlängere eine Strecke AB , die die Länge 2,5 cm hat, über A hinaus um sich selbst bis C und über B hinaus um sich selbst bis D . Wie groß ist CD ?
22. Zeichne zwei beliebige Strecken a und b und konstruiere (mit Lineal und Stechzirkel) die Strecken **a)** $a + b$, **b)** $b + a$.
23. Verlängere eine Strecke **a)** von 4 cm beiderseits um 2,5 cm, **b)** von a cm beiderseits um b cm. Wie groß ist in jedem Falle die ganze Strecke?
24. Trage auf einer längeren Strecke erst nach Augenmaß, dann mit dem Stechzirkel 3 cm, 4 cm und 5 cm auf. Stelle nachträglich mit dem Maßstab fest, welchen Fehler du begangen hast.
25. Gegeben sind drei beliebige Strecken a , b und c . **a)** Zeichne die Strecke $a + b + c$. **b)** Zeige, daß du zu dem gleichen Ergebnis kommst, wenn du die Strecken b , c und a oder auch c , a und b nacheinander anträgst.
26. Zeichne eine Strecke, die gleich dem Umfange **a)** des Dreiecks ABC in Fig. 5, **b)** des nebenstehenden Vierecks (Fig. 6) ist.
27. Zeichne den Umriß deines Aufgabenheftes in dein mathematisches Heft und stelle dann seine Gesamtlänge fest.
28. Wie lang sind alle Kanten einer Streichholzschachtel zusammen?

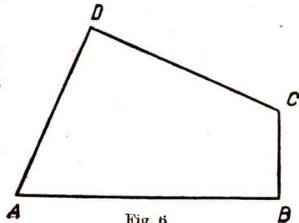


Fig. 6

Abtragen (Subtrahieren) von Strecken

29. Von einer Strecke von 6,5 cm Länge ist eine Strecke von 2,5 cm Länge abzuziehen (benutze den Stechzirkel). Auf wieviel Weisen ist das möglich? Wie lang ist die Strecke, die jedesmal übrigbleibt?
30. Zeichne zwei Strecken a und b und konstruiere dann ihre Differenz $a - b$. Wann ist das nicht möglich?
31. Gegeben sind drei Strecken a , b und c . Zeichne **a)** $a + b - c$, **b)** $a - b + c$, **c)** $a - b - c$. Wann sind die Aufgaben nicht lösbar?
32. Wieviel Streichholzschachteln kann man mit ihrer langen Seite an dem langen Rand eines Quartblattes hintereinanderreihen? (Nicht ausprobieren; du hast nur eine Streichholzschachtel zur Verfügung!)

33. Wie oft kann man die Höhe einer Streichholzschachtel auf einer Strecke von 10 cm abtragen? (Zeichnung.)

Anwendung

34. Ein mechanisches Verfahren zur Addition zweier Zahlen läßt sich mit zwei Meterstäben, die genaue Millimeterteilung haben, folgendermaßen bewerkstelligen. Es soll 123 und 144 addiert werden. Man legt (vgl. Fig. 7) Meter-

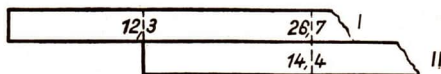


Fig. 7

stab II an Meterstab I so an, daß der Nullstrich von II genau unter 12,3 von I fällt. Dann liegt über 14,4 von II auf I das gewünschte Ergebnis 26,7. Addiere auf diese Weise¹⁾:

- | | | |
|----------------|------------------|------------------|
| a) $117 + 197$ | b) $19,8 + 12,9$ | c) $2,15 + 1,87$ |
| d) $93 + 256$ | e) $7,5 + 25,8$ | f) $0,68 + 2,77$ |
35. Welche Grenzen sind der in der vorangehenden Aufgabe genannten Methode a) hinsichtlich des Ergebnisses (bei Benutzung von Stäben, die genau 1 m lang sind!), b) hinsichtlich der Summanden gesetzt? c) Wie kann man nach der Methode auch drei und mehr Summanden addieren?
36. Bestimme nach dem in der Aufg. 34 entwickelten Verfahren die Differenzen:
- | | | |
|----------------|------------------|------------------|
| a) $297 - 119$ | b) $23,5 - 11,9$ | c) $2,89 - 1,97$ |
| d) $188 - 93$ | e) $21,8 - 12,3$ | f) $1,78 - 0,84$ |

Vervielfältigen von Strecken

37. Stelle die Höhe einer Streichholzschachtel durch eine Strecke dar. Wie hoch sind a) 2, f) 3 Streichholzschachteln? (Zeichnung erst nach Augenmaß, dann mit dem Stechzirkel. Stelle jeweilig den Fehler fest!)
38. Zeichne die Dicke dieses Buches als Strecke in dein Heft. Wie dick sind 10 Bücher? (Probe in der Klasse!)
39. Gegeben ist eine kleine Strecke s. Zeichne erst nach Augenmaß, dann mit Benutzung des Stechzirkels a) 4 s, b) 6 s.
40. Gegeben sind zwei kleine (warum klein?) Strecken p und q. Zeichne a) $2p + 3q$, b) $3p + 2q$ erst nach Augenmaß, dann mit dem Stechzirkel.
41. Gegeben sind zwei kleine Strecken u und v, wo u größer als v ist. Zeichne a) $3u - 2v$, b) $4u - 3v$ erst nach Augenmaß, dann mit dem Stechzirkel.

Teilen von Strecken

42. Gegeben ist eine Strecke von 4 cm Länge. Halbiere sie nach Augenmaß und nachher mit dem Stechzirkel. Wie groß war der Fehler?

1) Die Kenntnis der Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen wird vorausgesetzt.

43. Gegeben ist eine beliebige Strecke. Halbiere sie erst nach Augenmaß, dann mit dem Stechzirkel, dann mit dem Maßstab. Welches Verfahren ist am praktischsten?
44. Ein Streifen Papier ist erst nach Augenmaß, dann durch Falten zu halbieren.
45. Wie kann man die Mitte einer Tischkante mit Hilfe eines Fadens finden?
46. Eine Strecke von a) 9 cm, b) 11 cm ist mit dem Stechzirkel in drei gleiche Teile zu teilen.
47. Wie kann man die Länge eines Zimmers mit Hilfe eines Fadens in vier gleiche Teile teilen? Führe das im Wohnzimmer aus.
48. Eine durch einen Papierstreifen gegebene Strecke von 22 cm Länge ist durch Falten in vier Teile zu teilen.
49. Teile eine beliebige Strecke erst nach Augenmaß, dann mit dem Stechzirkel a) in 4, b) in 5, c) in 6 Teile.
50. Bezeichne auf einer Strecke von a) 10 cm, b) 12 cm nach Augenmaß die Hälfte, ein Drittel, zwei Drittel, ein Viertel, drei Viertel. Wie folgen die Punkte aufeinander?
51. Stelle von einer beliebigen Strecke mit dem Stechzirkel a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{4}{5}$, c) $\frac{5}{6}$, d) $\frac{2}{3}$ dar und überzeuge dich durch Ausmessung und Rechnung, ob es stimmt.

Punkt und Strecke

52. Ziehe von einem Punkt A aus Strecken von der Länge 3 cm. Auf wieviel verschiedene Weisen ist das möglich?
53. Lege durch einen Punkt A eine Strecke von 3 cm, d. h. ziehe eine Strecke so, daß A auf ihr liegt. Auf wieviel verschiedene Weisen ist das möglich?
54. Lege durch einen Punkt A eine Strecke von 4 cm so, daß A die Strecke halbiert. Auf wieviel verschiedene Weisen ist das möglich?
55. Gegeben sind zwei Punkte A und B . Wieviel Strecken AB gibt es? Gibt es immer eine Strecke, wo auch immer die Punkte A und B liegen mögen?
56. Zwischen a) 3, b) 4 Pfählen sollen Wäscheleinen gespannt werden. Wieviel Leinen lassen sich höchstens spannen? (Erläutere die Aufgabe durch eine Zeichnung!) Wie muß man die Pfähle aufstellen, damit man alle möglichen Leinen auch wirklich spannen kann?
57. Gegeben sind a) drei Punkte A, B, C , b) vier Punkte A, B, C, D in der Zeichenebene. Wieviel Strecken kann man zwischen ihnen ziehen, und wie heißen sie? Welche Lage dürfen die Punkte nicht haben, damit die Höchstzahl der Geraden erreicht werde?
58. Gegeben sind drei Punkte A, B und C in der Zeichenebene und ein Punkt über der Zeichenebene. Wieviel Strecken kann man zwischen diesen vier Punkten ziehen? (Fertige ein Modell aus vier aufgeweichten Erbsen und der gehörigen Anzahl angespitzter Streichhölzer an.)

Gerade, krumme, gebrochene Linien

59. Lege eine Anzahl Bohnen (Steinchen) in eine gerade Linie. Wieviel Bohnen kann man ganz beliebig legen?

60. Eine Strecke ist durch zwei Fluchtstäbe *A* und *B* (s. Fig. 8) auf dem Felde bezeichnet. Das Bandmaß reicht nicht aus, um die Strecke auszumessen. Man will deshalb einen dritten Fluchtstab *C* zwischenschalten. Wie macht man das ?

61. Zwei Punkte sollen durch eine Strecke verbunden werden. Man hat aber kein Lineal, das ausreicht. Wie kann man die Aufgabe lösen ?

62. Wie kann man die Aufg. 61 lösen auch in dem Falle, wo die beiden Punkte nicht in einer Zeichenebene liegen (z. B. auf verschiedenen Seiten einer Straße) ?

63. Lege eine Anzahl Bohnen (Steinchen) so, daß sie eine krumme Linie anzeigen. Wieviel Bohnen kann man jetzt ganz beliebig legen ?

64. Lege einen Faden in eine krumme Linie, spanne ihn dann gerade. In welchem Falle sind die Enden am weitesten voneinander entfernt ?

65. Man hält eine Kette an ihren Enden fest. Wann bildet sie eine gerade, wann eine krumme Linie ?

66. Ziehe eine krumme Linie. Schätze ihre Länge und miß sie dann, indem du einen Faden nimmst, der sich dieser Linie anschmiegt und dessen Länge dann am Maßstab festgestellt wird.

67. Verbinde zwei Punkte durch eine Strecke und durch mehrere krumme Linien. Stelle erst durch Schätzung, dann durch Messung die Länge aller dieser Linien fest. Welche ist die kürzeste ?

68. Verbinde zwei Punkte durch einen gebrochenen Streckenzug, der aus a) zwei, b) drei, c) fünf Strecken besteht.

69. Verbinde zwei Punkte durch eine Strecke und durch mehrere gebrochene Streckenzüge. Stelle erst durch Schätzung, dann durch Messung die Länge aller dieser gebrochenen Streckenzüge fest. Welche Beobachtung machst du ?

70. Untersuche, welche Linien geschlossen sein können, welche nicht. Es sind auch gebrochene Streckenzüge zu berücksichtigen.

71. Untersuche, ob es außer Strecken und krummen Linien und solchen, die daraus zusammengesetzt sind (zeichne einige Beispiele dafür!), noch andere Formen von Linien gibt.

72. Zeichne einen gebrochenen Streckenzug auf eine Streichholzschatel, indem du dabei verschiedene Flächen der Schachtel benutzt. Untersuche, ob der Streckenzug geschlossen sein kann.

73. Ziehe Linien auf einer Kugel (Ball, Globus). Welche Arten (gerade, gebrochene, krumme) sind möglich ?

74. Ziehe Linien auf einer Walze (Lampenzylinder, runder Bleistift, gerolltes Papierblatt). Welche Arten (gerade, gebrochene, krumme) sind möglich ?

75. Ziehe Linien auf einer Streichholzschatel (Zigarrenkiste). Welche Arten (gerade, gebrochene, krumme) sind möglich ?

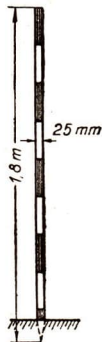


Fig. 8

76. Jemand hat mit einem Lineal die Punkte A und B durch eine Strecke a verbunden. Er legt das Lineal um und zieht wieder die Strecke AB . Was folgt aus der Tatsache, daß die beiden Linien AB sich nicht decken? Gib danach ein Verfahren zur Prüfung eines Lineals an.

Strahl und Gerade

77. Verlängere eine Strecke über einen ihrer Endpunkte hinaus. Wie weit ist das tatsächlich möglich? Wie weit kann man sich die Verlängerung denken?
78. Zeichne von einem Punkte A aus mehrere Strahlen.
79. Gegeben sind zwei Punkte A und B . **a)** Ziehe den Strahl, der A zum Anfangspunkt hat und durch B geht. **b)** Ziehe den Strahl, der B zum Anfangspunkt hat und durch A geht. Längs welcher Strecke fallen beide Strahlen zusammen?
80. Verlängere eine Strecke über ihre beiden Endpunkte hinaus. Wie weit ist das tatsächlich möglich? Wie weit kann man sich die Verlängerung denken?
81. Gegeben sind zwei Punkte A und B . **a)** Ziehe die Geraden, die durch A und B gehen. Wieviel gibt es? **b)** Ziehe die Strahlen, die durch A und B gehen. Wieviel gibt es? Wodurch unterscheiden sich die verschiedenen Strahlen?
82. Gegeben sind drei Punkte A , B und C . Wähle die Lage der Punkte nach Augenmaß so, daß man durch sie nur eine Gerade legen kann. (Zeichnung!)
- *83. Gegeben sind drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen. Wieviel Geraden kann man durch sie legen? (Zeichnung!) Wodurch unterscheidet sich diese Figur von einem Dreieck, das aus drei Punkten und ihren Verbindungsstrecken gebildet wird?
- *84. Gegeben sind in der Zeichenebene vier Punkte A , B , C und D . **a)** Wieviel Geraden kann man durch sie legen, vorausgesetzt, daß nicht irgend drei Punkte in einer Geraden liegen? **b)** Wieviel Geraden werden es, wenn irgendwelche drei Punkte, etwa A , B und C , in einer Geraden liegen?
85. Gib an, wieviel Begrenzungspunkte **a)** eine Strecke, **b)** ein Strahl, **c)** eine Gerade hat.
86. Welche von den drei Gebilden: Strecke, Strahl und Gerade kommen in deiner Umgebung vor? (Beispiele!)
87. Durch wieviel Punkte ist eine Gerade bestimmt?
88. Zeige an Gegenbeispielen, daß Strahl und Strecke nicht durch zwei ihrer Punkte bestimmt sind, wenn diese Punkte ganz beliebig liegen.
89. Zeige, daß eine Strecke durch zwei Punkte bestimmt ist, die nicht irgendwo beliebig auf der Strecke liegen, sondern eine ganz bestimmte Bedeutung haben. Welche?
90. Ein Strahl soll durch zwei Punkte bestimmt sein; was für ein Punkt muß dann der eine von ihnen sein?

§ 2. Quadrat, Rechteck, Rhombus

Waagerechte und lotrechte Geraden

1. Zeichne in dein Heft **a)** eine Anzahl waagerechter (horizontaler), **b)** eine Anzahl lotrechter (vertikaler) Strecken.
2. Halte dein Heft so, daß die beiden Arten nach Aufg. 1 gezeichneter Geraden waagerecht sind. Wie muß man das Heft halten, damit von lotrechten Geraden die Rede sein kann?
3. Zeichne in dein Heft eine Anzahl verschieden geneigter schräger Strecken.
4. Zeichne in dein Heft eine Gerade und halte jetzt das Heft so, daß sie **a)** waagerecht, **b)** lotrecht, **c)** schräg liegt.
5. Kann man auf einer geneigten Tischplatte **a)** waagerechte, **b)** lotrechte Geraden ziehen? (Beispiele!)
6. Gib die Kanten deines Heftes an, die als waagerechte und die als lotrechte Geraden anzusehen sind.
7. Wie muß die Klassentafel angebracht sein, damit man von waagerechten und lotrechten Geraden auf ihr sprechen kann?
8. Verfertige dir aus einem Faden und einem schweren kleinen Gegenstand ein Senkblei. Zeige, wie der Maurermeister das Senkblei benutzt.
9. **a)** Fertige dir (wenn nicht aus Holz, so aus Pappe) eine Setzwaage der nebenstehenden Art (Fig. 9).
b) Man kann, wie es in alten Zeiten geschah, der Setzwaage auch die Gestalt eines großen lateinischen **A** geben. Wo muß man auf dem Querbalken einen Strich angeben, über dem das an der Spitze befestigte Senkblei stehen muß, wenn die Setzwaage auf einer waagerechten Fläche steht?
10. Die Fig. 10 bis 12 zeigen ein Verfahren, wie man mit einem Senkblei und einem Lineal eine waagerechte Linie herstellen kann. Durch eine Heftzwecke wird an einer Kante das Senkblei befestigt und der Faden, wie Fig. 10 zeigt, über die eine rechtwinklige Ecke des Lineals gelegt. Wie kann

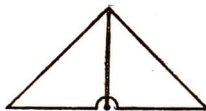


Fig. 9

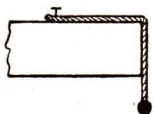


Fig. 10

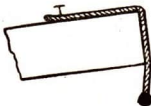


Fig. 11

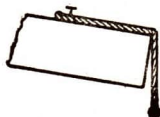


Fig. 12

man jetzt erkennen, ob die obere Linealkante waagerecht (Fig. 10) liegt oder nicht (Fig. 11 und 12)?

11. Wie kann man sich am einfachsten eine Fläche verschaffen, in der alle Geraden waagerecht sind?

12. Mache eine Skizze von der nebenstehend abgebildeten Kanalwaage (Fig. 13) und gib an, welches die durch die Wasserhöhe in den Röhren angegebene horizontale Gerade ist.
13. a) Halte ein Zeichendreieck (Winkelscheit) so, daß eine Seite waagrecht, die andere lotrecht liegt. Können dabei alle drei Seiten als waagerechte Geraden gewählt werden oder zwei oder nur eine? b) Wie kann man an einem Zeichendreieck ein Senkblei so anbringen, daß man den Apparat jetzt zum Prüfen lotrechter und waagerechter Strecken benutzen kann? Stelle dir einen solchen Apparat aus Pappe her.

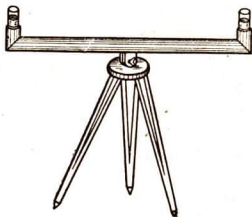


Fig. 13

Rechter Winkel

14. Zeichne einen waagerechten und einen lotrechten Strahl, die den Endpunkt gemeinsam haben (einen rechten Winkel).
15. Prüfe, ob das Zeichendreieck einen rechten Winkel anzeigt, indem du ein Senkblei in ein Gefäß mit Wasser hältst und daran das Dreieck in geeigneter Weise anlegst.
16. Zeichne nach Augenmaß eine waagerechte und eine lotrechte Gerade in dein Heft. Wieviel rechte Winkel entstehen? Prüfe mit dem Zeichendreieck, ob die rechten Winkel genau sind.
17. Zeichne a) an einen waagerechten, b) an einen lotrechten Strahl mit dem Zeichendreieck einen rechten Winkel.
18. Zeichne einen rechten Winkel an einen schrägen Strahl. Auf wieviel Weisen ist das möglich?
19. Zeichne a) an eine waagerechte, b) an eine lotrechte Gerade in einem gegebenen Punkte der Geraden einen rechten Winkel. Auf wieviel Weisen ist das möglich? Wieviel rechte Winkel entstehen jedesmal?
20. Der eine Schenkel eines rechten Winkels wird über den Scheitelpunkt hinaus verlängert. Prüfe mit dem Zeichendreieck, ob der neue Winkel, der entstanden ist, auch ein rechter ist.

Senkrechte Geraden

21. Gegeben ist eine beliebige Gerade. Ziehe durch einen ihrer Punkte a) nach Augenmaß, b) unter Verwendung des Zeichendreiecks eine Senkrechte.
22. Errichte in einem Punkte einer Geraden eine Senkrechte. Auf wieviel Weisen ist das möglich?
23. Fülle von einem Punkte auf eine Gerade eine Senkrechte. Wieviel Senkrechten gibt es?
24. Verbinde einen Punkt P mit verschiedenen Punkten einer Geraden durch Strecken. a) Miß diese Strecken und stelle fest, welche die kürzeste ist.

- b) Untersuche, welche die kürzeste ist, die man überhaupt ziehen kann.
- c) Bezeichne in deinem Heft einen Punkt und ermittle seine Abstände von den Seiten des Blattes.

Anwendungen

- 25. Stelle fest, wieviel rechte Winkel an einem Quartblatt auftreten. Sind sie genau?
- 26. Stelle fest, wieviel rechte Winkel an einer Zigarrenkiste auftreten, und untersuche, ob die rechten Winkel genau sind.
- 27. Nenne aus deiner Umgebung Beispiele, wo rechte Winkel auftreten.
- 28. Beantworte aus der Erinnerung, ob **a)** die Blattstiele senkrecht zum Zweig, **b)** die Stangen eines aufgespannten Schirmes senkrecht zum Stock, **c)** die Sprossen einer Leiter senkrecht zu den Holmen (Seitenstangen) stehen. Entwirf in jedem Falle eine kleine Skizze.
- 29. Nenne aus deiner Umgebung Beispiele von rechten Winkeln, wo die Schenkel waagrecht und lotrecht gerichtet sind, und andere, wo das nicht der Fall ist.
- 30. Der große Zeiger einer Uhr steht auf 12. Wo kann der kleine Zeiger stehen, wenn beide Zeiger einen rechten Winkel bilden sollen?
- 31. Der große Zeiger einer Uhr steht auf 6. Kann dann der kleine Zeiger einer richtiggehenden Uhr mit dem großen einen rechten Winkel bilden?
- 32. Zeichne unter Verwendung des Zeichendreiecks eine Windrose, die die vier Himmelsrichtungen angibt.

Parallele Geraden

- 33. Gib auf einer Geraden zwei Punkte *P* und *Q* an und errichte in ihnen auf dieser Geraden Senkrechte. Untersuche, ob die beiden Senkrechten sich schneiden.
- 34. Nenne Gebrauchs- und Ziergegenstände mit parallelen (gleichgerichteten) Geraden.
- 35. Zeichne parallele Geraden **a)** nach Augenmaß, **b)** mit Hilfe des Lineals und des Zeichendreiecks, das an dem Lineal entlang gleitet.
- 36. Zeige Parallele **a)** an einem Quartblatt, **b)** an einem Lineal, **c)** an einem kantigen Bleistift, **d)** an einer Zigarrenkiste. Gib jedesmal an, wieviel Kanten des betreffenden Gegenstandes gleichzeitig parallel sind.
- 37. Gib einen Punkt in deinem Heft an. Zeichne zu den Seiten des Quartblattes parallele Geraden durch den Punkt (nach Augenmaß, doch unter Verwendung des Lineals). Achte darauf, wie man solches Zeichnen von Parallelen am praktischsten einrichtet.
- 38. Gegeben ist eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt. Zeichne **a)** nach Augenmaß, **b)** mit Lineal und Zeichendreieck durch den Punkt zu der Geraden eine Parallele. Wieviel gibt es?
- 39. Untersuche mit dem Maßstab den Abstand zweier paralleler Geraden an verschiedenen Stellen. Was beobachtest du?

40. Stelle die Spurweiten der Eisenbahnschienen mit dem Maßstab fest und entwirf in deinem Heft eine Skizze von Eisenbahnschienen und -schwelen, in die die Spurweite eingetragen wird.
41. Wieviel Schnittpunkte sind vorhanden **a)** bei zwei Parallelen und einer sie schneidenden Geraden, **b)** bei vier Geraden, die zu je zwei parallel sind, **c)** bei drei Parallelen und einer sie schneidenden Geraden? (Zeichnung!)

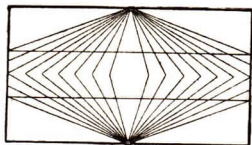


Fig. 14

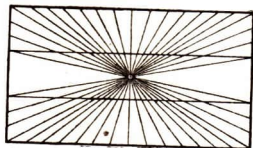


Fig. 15

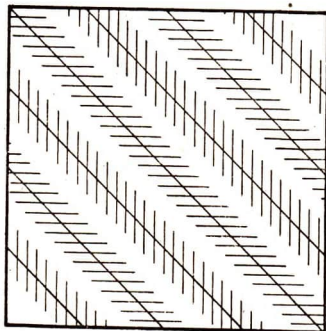


Fig. 16

42. In Fig. 14 und 15 sind zwei Linien von einer großen Anzahl von Strahlen überdeckt. Untersuche nach Augenmaß und durch Messung, was das für Linien sind und ob sie parallel sind oder nicht (optische Täuschung).
43. Beschreibe den Verlauf der in Fig. 16 durch Schraffuren überdeckten Strecken nach dem bloßen Anblick und nach genauerer Untersuchung (optische Täuschung).

Quadrat

44. Errichte auf einer 5 cm langen Strecke in den Endpunkten nach einer Seite Senkrechten. Mache sie je 5 cm lang und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke (Quadrat). Stelle durch Messung die Länge dieser zuletzt gezeichneten Strecke fest.
45. Zeichne Quadrate mit den Seiten **a)** 3 cm, **b)** 4 cm, **c)** 8 cm.
46. Zeichne erst eine beliebige Strecke und dann ein Quadrat, das diese Strecke zur Seite hat.
47. Zeichne ein Quadrat, das auf einer Ecke steht (d. h. dessen Seiten nicht lotrecht und waagerecht sind).
48. Beschreibe ein Quadrat mit den Ecken *A*, *B*, *C* und *D* im Hinblick auf die Lage seiner Seiten.
49. Nenne Gebrauchsgegenstände deiner Umgebung, die Quadrate aufweisen.

50. Zeichne ein beliebiges Quadrat und dann (ohne Verwendung des Maßstabes) ein zweites, das ebenso groß ist wie das erste.
51. Wann sind zwei Quadrate gleich groß?
52. Was läßt sich über die Größe **a)** der Seiten, **b)** der Winkel eines beliebigen Quadrates sagen? (Überzeuge dich durch Messung!)
53. Wie groß ist der Umfang eines Quadrates von **a)** 4 cm, **b)** 5 cm, **c)** 1 km, **d)** a Seitenlänge?

Würfel

54. Stelle ein Würfelmodell aus (aufgeweichten) Erbsen und angespitzten Streichhölzern oder dgl. her.
55. Gib die Zahl **a)** der Flächen, **b)** der Ecken, **c)** der Kanten eines Würfels an und beschreibe genau ihre Lage, wenn der Würfel vor dir steht (benutze zur Beschreibung die Worte vorn — hinten, oben — unten, rechts — links).
56. Welche Aussage läßt sich über die Größe der Würfelkanten machen?
57. Gib an, welche Kanten parallel verlaufen zu der Kante des Würfels, die von vorn rechts oben nach hinten rechts oben verläuft.
58. Gib an, welche Kanten senkrecht stehen zu der Kante des Würfels, die von vorn links oben nach vorn rechts oben verläuft.
59. Gib an, welche Kanten parallel verlaufen zu der Kante des Würfels, die von vorn links oben nach vorn links unten verläuft.
60. Gib an, welche Kanten senkrecht stehen zu der Kante des Würfels, die von hinten links unten nach hinten rechts unten verläuft.
61. Zähle die Kanten auf, die windschief zu der Kante sind, die von vorn links unten nach vorn rechts unten verläuft, d. h. die zu der genannten Kante weder parallel sind, noch mit ihr einen Endpunkt gemeinsam haben.
62. Nenne die Kanten, die zu der von vorn links unten nach hinten links unten verlaufenden Kante windschief sind.
63. Von wieviel Quadraten wird ein Würfel begrenzt? Stelle ihn möglichst praktisch auf und benenne die Quadrate nach ihrer Lage.
64. Gib an, wieviel Quadrate mindestens, wieviel höchstens beim Betrachten eines Würfels gleichzeitig zu übersehen sind.
65. Zeichne alle Begrenzungsflächen eines Würfels (Netz des Würfels).
66. Zeichne das Netz eines Würfels von 4 cm^2 Seitenfläche auf starkes Papier. Schneide es aus, falte es und stelle ein Würfelmodell her.
67. Wann sind zwei Würfel gleich groß?

Fläche des Quadrates

68. **a)** Zeichne einen Quadratzentimeter. **b)** Zeichne einen Quadratdezimeter und zerlege ihn in Quadratzentimeter.
69. Gib die Seitenlänge der Flächenmaße Ar und Hektar an.

70. Zeichne auf quadriertes Papier eines Rechenheftes Quadrate, deren Seiten **a)** 2, **b)** 3, **c)** 4 Einheiten lang sind. Wieviel Quadrate mit der Einheit als Seite liegen jeweilig in dem Quadrat?

71.¹⁾ Die nebenstehende Fig. 17 gibt ein Stück Millimeterpapier wieder. Zeichne auf solchem Millimeterpapier ein Quadrat mit der Seite **a)** 1,5 cm, **b)** 3,4 cm, **c)** 22 mm und stelle jedesmal möglichst praktisch fest, wieviel Quadratmillimeter das Quadrat enthält.

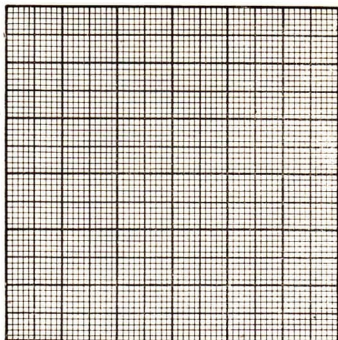


Fig. 17

72. Schätze die Fläche des in Fig. 16 (S. 11) als Umgrenzung gezeichneten Quadrates, miß dann die Seite aus, berechne den Inhalt und notiere den gemachten Schätzungsfehler.

73. Zeichne ein Quadrat, dessen Flächeninhalt **a)** 25 cm², **b)** 64 cm², **c)** 12½ cm² ist.

Rauminhalt des Würfels

74. Wieviel Kubikzentimeter hat ein Kubikdezimeter?

75.¹⁾ Ein Würfel hat eine Kante von **a)** 2 cm, **b)** 3 cm, **c)** 5 cm, **d)** 12 cm, **e)** 8 mm, **f)** 0,15 m. Wie groß ist sein Inhalt?

76. Wie groß ist die Kante eines Würfels, dessen Inhalt **a)** 64 cm³, **b)** 216 cm³ ist?

Linien im Quadrat

77. Schneide ein Quadrat aus Papier aus und falte es von einer Ecke zur gegenüberliegenden. Was beobachtest du?

78. Ziehe eine Diagonale in einem Quadrat, d. h. die Verbindungsstrecke zweier gegenüberliegenden Ecken. Was für Figuren entstehen?

79. Was läßt sich über die Länge der Diagonale eines Quadrates, verglichen mit der Seite, sagen?

80. Ziehe in einem Quadrat die beiden Diagonalen. **a)** Was ist über ihre Größe zu sagen? **b)** Welche Lage haben die beiden Diagonalen zueinander?

81. Halbiere die Seiten eines Quadrates und verbinde die gegenüberliegenden Seitenmitten. Was für Figuren entstehen dann?

82. Halbiere die Seiten eines Quadrates und verbinde die aufeinanderfolgenden Seitenmitten. Untersuche mit Maßstab und Zeichendreieck, was für eine Figur im Innern des Quadrates entsteht.

1) In Aufg. 71 und 75 ist bei einzelnen Werten, falls Dezimalrechnung nicht voraussetzen ist, erst eine Umwandlung der Maße vorzunehmen.

83. a)–d) Zeichne auf quadriertem Papier Zusammenstellungen von quadratischen Fliesen nach den Mustern der Fig. 18. e) Entwirf selbst andere quadratische Motive.
84. Beschreibe die nebenstehenden Zierformen (Fig. 19) a) Kreuz, b) Schrägkreuz schriftlich so genau, daß jemand sie lediglich nach deiner Beschreibung



Fig. 18

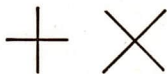


Fig. 19

ung wieder zeichnen kann. c) Zeichne in ein Quadrat die nebenstehende Fig. 20 (ein von den Astrologen des Mittelalters bei der Aufzeichnung der „Häuser“ des Himmels, d. h. der Sternbilder des Tierkreises, viel benütztes Bild); beschreibe sie.

85. Die Figuren 21 und 22 geben die Eisenfachwerke zweier Brücken von 20 bis 30 m Spannweite wieder. a) Zeichne die erste der Brücken in dein Heft, doch so, daß sie aus 8 Quadraten aufgebaut ist, deren Seitenlänge 2 cm ist. Deute auch an, wo der Fahrdamm liegt. b) Zeichne die zweite der Brücken in dein Heft, doch so, daß sie aus 7 Quadraten aufgebaut ist, deren Seitenlänge 2 cm ist. Deute auch hier die Lage des Fahrdammes an.

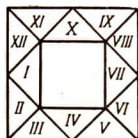


Fig. 20

86. Schraffiere ein Quadrat a) waagerecht, b) senkrecht und beobachte, welche Wirkung eine solche Schraffur für die oberflächliche Betrachtung der Figur hat.

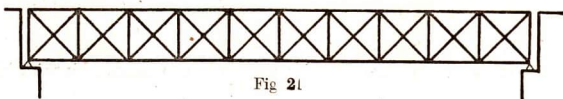


Fig. 21

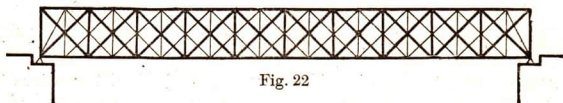


Fig. 22

Rechteck

87. Errichte auf einer 6 cm langen Strecke in den Endpunkten Senkrechten nach einer Seite. Mach diese je 4 cm lang und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke (Rechteck).
88. Untersuche, welche Aussagen sich über die Seiten und Winkel des Rechtecks machen lassen.
89. Beschreibe ein Rechteck nach Lage und Größe seiner Seiten.

90. Zeichne ein Rechteck mit den zwei anliegenden Seiten:
- a) 3 cm und 4 cm b) 2 cm und 7 cm c) 3,5 cm und 4,5 cm
d) 1,3 cm und 62 mm e) 11 cm und 8 mm f) 3 mm und 5 cm
91. Zeichne eine Reihe von Rechtecken, die alle eine Seite von 3 cm haben, während die anliegende Seite nacheinander 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm, 10 cm wird.
92. Gegeben sind zwei beliebige Strecken a und b . Zeichne ein Rechteck, das a und b zu Seiten hat.
93. Nenne aus deiner Umgebung Gebrauchsgegenstände, die Rechtecke aufweisen, und entwirf verkleinerte Skizzen von ihnen.
94. Zeichne ein beliebiges Rechteck und ein zweites, das ebenso groß ist wie das erste.
95. Wann haben zwei Rechtecke gleiche Größe und Gestalt?
96. a)–f) Wie groß ist der Umfang der in Aufg. 90 genannten Rechtecke?
97. Ein rechteckiges Zimmer von 5 m Länge und 3,40 m Breite soll tapeziert werden. Wieviel Tapetenborte zum Abschluß der Tapete unter der Decke ist notwendig?
98. Ein rechteckiges Feld von 14 m Breite und 32 m Länge soll mit einem Stacheldrahtzaun umhegt werden. Die Stangen stehen jeweilig in 2 m Abstand; der Stacheldraht wird dreifach gezogen. Wieviel Stangen (aufpassen!) und wieviel Meter Stacheldraht braucht man?
99. Wieviel Arten von Rechtecken gibt es an einer Streichholzschachtel?
100. Bestimme von jeder Art von Rechtecken der Streichholzschachtel die Länge der Seiten und zeichne ein Abbild in dein Heft.
101. Wieviel Arten von Rechtecken gibt es an einem Ziegelstein? Bestimme von einem Rechteck jeder Art den Umfang.

Quader

102. Beschreibe die Lage der Kanten eines Quaders. Stelle dir dazu ein Kantenmodell aus Erbsen und Stäben her.
103. Gib an, welche Kanten des Quaders parallel verlaufen zu der Kante des Quaders, die (bei entsprechender Stellung des Quaders) a) von vorn links oben nach hinten links oben, b) von hinten links oben nach hinten rechts oben verläuft.
104. Gib an, welche Kanten des Quaders senkrecht stehen zu der Kante des Quaders, die (bei entsprechender Stellung des Quaders) a) von hinten links oben nach hinten rechts oben, b) von vorn rechts unten nach vorn links unten verläuft.
105. Gib an, welche Kanten des Quaders (bei entsprechender Stellung) windschief zu der Kante liegen, die a) von vorn rechts oben nach hinten rechts oben, b) von vorn rechts oben nach vorn links oben verläuft.

- 106.** Gib an, welche Kante des Quaders parallel zu der von hinten links oben nach hinten rechts oben verlaufenden Kante und senkrecht zu der von hinten links oben nach vorn links oben verlaufenden Kante liegt.
- 107.** Zeichne alle Begrenzungsflächen einer Streichholzschachtel so, daß sie miteinander in Zusammenhang stehen (Netz des Quaders).
- 108. a)** Zeichne das Netz eines Quaders, von dem drei aneinanderstoßende Kanten die Längen 3 cm, 4 cm und 5 cm haben, auf starkes Papier.
b) Schneide das Netz aus, falte es zu einem Quadermodell zusammen.
- 109.** Zeichne das Netz einer quadratischen Säule, die eine Grundkante von 3 cm und eine Seitenkante von 10 cm hat, und fertige daraus ein Modell des Körpers.
- 110.** Beschreibe, wie die folgenden Quaderformen künstlich hergestellt werden:
a) Ziegelstein, **b)** Holzklotz, **c)** Seifenstück, **d)** Streichholzschachtel (Innen- und Außenteil), **e)** Zigarrenkiste.
- 111.** Wann haben zwei Quader gleiche Gestalt und Größe?

Fläche des Rechtecks

- 112.**¹⁾ Bestimme durch Auszählung der Quadratzentimeter und Quadratmillimeter oder durch Überlegung, welchen Flächeninhalt ein auf Millimeterpapier gezeichnetes Rechteck besitzt mit den Seiten:
- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a) 3 cm und 4 cm | b) 2 cm und 7 cm | c) 3 cm und 8 cm |
| d) 25 mm und 35 mm | e) 28 mm und 32 mm | f) 8 mm und 17 mm |
| g) 2,8 cm und 4,2 cm | h) 1,9 cm und 2,1 cm | i) 4,1 cm und 1,5 cm |
- 113.** Wie groß ist der Inhalt **a)** eines Großfoliobogens, **b)** eines Quartblattes (Größe deines Heftes) in cm^2 ?
- 114.** Wie groß ist der Flächeninhalt **a)** einer Postkarte, **b)** der Marke auf der Postkarte? (Schätze erst, dann miß die Seiten aus!)
- 115.**¹⁾ Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechteckigen Stückes Gartenland, das 17,5 m lang und 12,3 m breit ist?
- 116.** Zeichne ein Rechteck, dessen Inhalt **a)** 18 cm^2 , **b)** 24 cm^2 , **c)** 9 cm^2 ist, während die eine Seite 6 cm lang ist. Rechne in jedem Falle erst die andere Seite aus.
- 117.** Wie groß ist die Oberfläche einer Streichholzschachtel und zwar der eigentlichen Schachtel und der Hülle?
- 118.** Wieviel cm^2 Holz braucht man für eine Zigarrenkiste **a)** ohne, **b)** mit Deckel, wenn sie 10 cm hoch, 13 cm breit, 24 cm lang sein soll?

1) Wenn die Dezimalbruchrechnung noch nicht bekannt ist, sind die Maßeinheiten erst in geeigneter Weise zu wechseln.

Linien im Rechteck

119. Ziehe in einem Rechteck eine Diagonale. Was für Figuren entstehen?

120. Ziehe in einem Rechteck die beiden Diagonalen. Was ist über ihre Länge zu sagen? Was für Figuren entstehen!

121. Halbiere die Seiten eines Rechtecks und verbinde die Mitten der Gegenseiten. Was für Figuren entstehen?

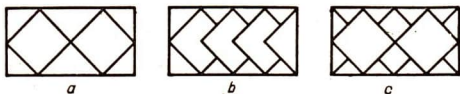


Fig. 23

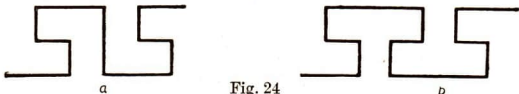


Fig. 24

122. Zeichne rechteckige Leisten nach den obenstehenden Motiven Fig. 23 a, b und c.

123. Zeichne Leisten nach den obenstehenden Andeutungen Fig. 24 a und b.

124. Entwirf selbst eine Anzahl rechteckiger Leisten.

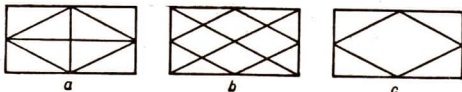


Fig. 25

125. Beschreibe schriftlich die obenstehenden Zierformen Fig. 25 a bis c so genau, daß jemand sie lediglich nach deiner Beschreibung wieder zeichnen kann.

Symmetrie

126. Die beigelegte Klexographie (Fig. 26) ist in der Weise entstanden, daß auf ein vorher mit einem Kniff versehenes Blatt regellos Tintenklexe gemacht sind. Das Blatt ist dann gefaltet, die Klexe sind breit gedrückt worden. **a)** Stelle fest, wo der Kniff lag. **b)** Fertige selbst eine Klexographie an. (Aber Vorsicht!)

127. Stelle durch Falten eines Blattes ein Quadrat her.

128. Fig. 27 zeigt ein Blatt, das dreimal gefaltet, dann am Rande mehrfach eingekerbt und wieder entfaltet ist. **a)** Wieviel Symmetrie-



Fig. 26

achsen hat die Figur? **b)** Stelle dir in der gleichen Weise eine Figur mit mehreren Symmetrieachsen her?

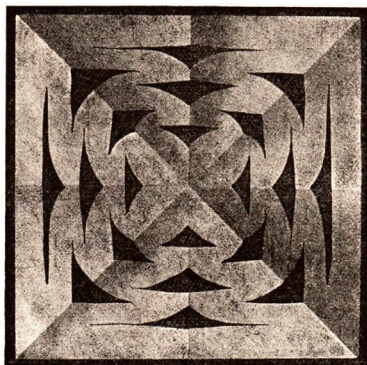


Fig. 27

- 129.** Wieviel Symmetrieachsen hat ein Quadrat? Zeichne die Achsen in das Quadrat ein, schneide es aus und überzeuge dich, ob die symmetrischen Hälften jeweils sich decken.
- 130.** Stelle dieselben Untersuchungen wie in Aufg. 129 für ein Rechteck an.
- 131.** Auf ein Blatt sind zwei parallele Geraden gezeichnet. Falte es so, daß die beiden Parallelen aufeinanderfallen. Wo liegt der Kniff (die Symmetrieachse)?
- 132.** Nenne symmetrische Figuren aus deiner Umgebung, mache eine Skizze von ihnen und zeichne die Symmetrieachse ein.
- 133.** Falte ein Papierblatt und bezeichne mit der Stecknadel einen Punkt. Klappe das Blatt auf und verbinde die beiden Stecknadelstiche durch eine Strecke. **a)** Was läßt sich über die Lage dieser Verbindungsstrecke zur Symmetrieachse sagen? **b)** Was ist über die Abschnitte zu sagen, in die die Strecke durch die Achse geteilt wird? (Benutze Stechzirkel und Zeichendreieck zu der Untersuchung.)
- 134.** Du kennst einen Punkt und die Symmetrieachse. Bestimme den zu dem ersten symmetrischen Punkt erst durch Falten (Stecknadel!), dann ohne Falten mit Zeichendreieck und Stechzirkel.

Rhombus

135. Halbiere die Seiten eines beliebigen Rechtecks, verbinde die Mitten der Reihe nach miteinander. Die Figur, die im Innern des Rechtecks entsteht, ist ein Rhombus (vgl. Fig. 25a).
136. Untersuche **a)** die Seiten, **b)** die Winkel eines Rhombus. Was ist von ihnen auszusagen?
137. Zwei Strecken stehen senkrecht aufeinander und halbieren einander. Verbinde die Endpunkte der Strecken und zeige, daß du einen Rhombus erhältst.
138. Welche von den dir bekannten Figuren ist auch ein Rhombus?
139. Beschreibe einen Rhombus (schriftlich!).
140. Zeichne verschiedene Rhomben, deren Seiten sämtlich 4 cm lang sind. Untersuche, ob sie alle gleiche Gestalt haben.
141. Nenne Gegenstände, an denen als Verzierung Rhomben auftreten.
142. Zeichne die Diagonalen eines Rhombus. Welche Lage haben sie zueinander?
143. Gib die Symmetrieachsen eines Rhombus an. Hat das Rechteck, das Quadrat mehr?
144. Zeichne einen Rhombus mit seinen Diagonalen und einen anderen, der gleiche Gestalt und Größe hat.
145. Wann haben zwei Rhomben gleiche Gestalt und Größe (achte auf die Diagonalen!)?
146. Untersuche an einem Modell, wie sich die Gestalt eines Rhombus mit einer waagerechten und einer lotrechten Diagonale ändert, wenn **a)** die waagerechte Diagonale erst länger, dann kürzer wird, während die lotrechte ihre Größe beibehält, **b)** wenn die lotrechte Diagonale erst länger, dann kürzer wird, während die waagerechte Diagonale ihre Größe beibehält.

§ 3. Kreis und Winkel**Kreis**

1. **a)** Beschreibe, wie der Gärtner den Umriss eines runden Beetes findet.
b) Drehe eine Strecke von 5 cm Länge um einen Endpunkt. Was für eine Linie beschreibt der andere Endpunkt? (Benutze als Strecke einen Faden oder einen Streifen Papier.)
2. Schlage mit dem Zirkel mehrere verschieden große Kreise.
3. Ein Strahl drehe sich um seinen Endpunkt. Was für eine Linie beschreibt dabei jeder Punkt, wenn man den Strahl einmal ganz herumdreht?
4. Erkläre auf verschiedene Weise (schriftlich), wie man sich einen Kreis entstanden denken kann.
5. Schlage einen Kreis mit dem Radius **a)** $r = 2$ cm, **b)** $r = 4$ cm, **c)** $r = 6$ cm. Miß jedesmal den Durchmesser. Was beobachtest du?

6. Wie kann man **a)** aus dem Radius den Durchmesser, **b)** aus dem Durchmesser den Radius eines Kreises finden? Bilde selbst Beispiele.
7. Schlage einen Kreis und nachher einen zweiten, der ebenso groß ist. Wann sind zwei Kreise gleich groß?
8. Zeichne in einen Kreis **a)** mehrere Radien, **b)** mehrere Durchmesser. Was beobachtest du?
9. Zeichne einen Kreis aus freier Hand, indem du erst einige Punkte nach Augenmaß angibst, die von dem zukünftigen Mittelpunkt gleichen Abstand haben.
10. Suche von einem Kreis, dessen Mittelpunkt verloren gegangen ist, nach Augenmaß den Mittelpunkt. Mache dann die Probe, ob es — ungefähr — stimmt.
11. Bestimme erst durch Schätzung, dann durch Messung mit dem Maßstab den Durchmesser folgender Kreise: **a)** eines Zehnpfennigstückes, **b)** des Querschnittes eines runden Bleistiftes, **c)** der Öffnung eines Wasserglases, **d)** der Öffnung deines Hutes (ist das ein genauer Kreis?), **e)** des Rades an einem Fahrrad. Berechne im Falle **a)** bis **c)** den Radius und zeichne einen gleich großen Kreis in dein Heft.
12. Ein Stein wird fest an eine Schnur gebunden und dann um das andere Ende der Schnur herumgewirbelt. Wie groß ist der Durchmesser des Kreises, den der Stein beschreibt?
13. Nenne Gegenstände deiner Umgebung, an denen Kreise auftreten. Schätze für jeden dieser Kreise ungefähr den Radius.
14. Nenne Gegenstände, die, wenn sie bewegt werden, Kreise beschreiben. Schätze in jedem Falle den Durchmesser des beschriebenen Kreises.
15. In der Fig. 28 kommen Kreise von verschiedenen Größen vor. Untersuche die Durchmesser mit dem Maßstab.

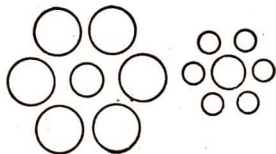


fig. 28

Walze (Zylinder)

16. Wie stellt man eine Walze (Zylinder) her **a)** aus Holz, **b)** aus Plastilina, Kuchenteig, Wachs?
17. Schätze und miß zur Nachprüfung der Schätzung die Höhe folgender Walzen: **a)** eines runden Bleistiftes, **b)** eines Wasserglases, **c)** eines Zehnpfennigstückes.
18. Was für ein Körper entsteht, wenn man **a)** ein Quadrat, **b)** ein Rechteck um eine Seite ganz herum dreht? Was für Linien beschreiben die nicht festgehaltenen Eckpunkte?
19. Wie findet man die Achse der Walze? Wähle als Beispiel einen runden Bleistift.
20. Zeichne einen Achsenschnitt **a)** des Bleistiftes, **b)** des Zehnpfennigstückes, **c)** des Wasserglases.

21. **a)** Stelle eine Walze aus einem rechteckigen Blatt Papier durch Biegen des Blattes und Zusammenkleben der Seiten her. **b)** Kann man auch aus einem Quadrat, aus einem Rhombus auf diese Art eine Walze herstellen?
22. **a)** Haben die beiden Walzen, die man durch Umbiegen eines Rechtecks herstellen kann, gleiche Gestalt? **b)** Beantworte dieselbe Frage für das Quadrat.
23. Denke dir den Mantel einer Walze, und zwar **a)** eines Bleistiftes, **b)** eines Wasserglases, **c)** eines Zehnpfennigstückes in eine Ebene abgerollt. Was für eine Figur entsteht? Zeichne sie im Falle **a)** und **c)** nach den Ausmessungen des Körpers in dein Heft.
24. Von was für Flächen wird eine Walze begrenzt?
25. Wann haben zwei Walzen gleiche Gestalt und Größe?
26. Wie muß man einen Schnitt durch eine Walze legen, damit als Querschnitt **a)** ein Kreis, **b)** ein Rechteck erscheint?
27. Sieh schräg auf den oberen kreisförmigen Rand eines Wasserglases und zeichne die Form, in der jetzt der Rand erscheint.
28. Halte einen Draht- oder Holzreifen ins Sonnenlicht und beschreibe die verschiedenen Gestalten, die der Schatten haben kann.
29. Ist jeder Schnitt durch eine Walze ein Kreis oder ein Rechteck?
30. Was für ein Körper entsteht, wenn man einen Kreis um einen Durchmesser dreht?

Kugel

31. Wie stellt man eine Kugel her **a)** aus Blei, **b)** aus Schnee (Plastilin, Wachs), **c)** aus Holz?
32. Schneide eine Kugel mit einem Messer durch (Apfel!). Was für einen Querschnitt hat die Kugel?
33. Schätze und miß den Durchmesser verschiedener Kugeln, die du aus deiner Umgebung kennst; trage das Ergebnis ins Heft ein.
34. Wann sind zwei Kugeln gleich groß?
35. Kann man die Oberfläche einer Kugel auch in eine Ebene bringen wie den Mantel einer Walze? (Versuche es mit einem Gummiball, einer Apfelsinenschale oder dgl.)
36. Nenne Körper **a)** mit nur ebenen, **b)** mit ebenen und gekrümmten, **c)** mit abwickelbaren, **d)** mit nicht abwickelbaren Flächen.
37. Nenne Körper mit **a)** nur geraden Kanten, **b)** mit krummen Kanten, **c)** ohne irgendwelche Kanten.

Kreisfiguren

38. Zeichne einen Kreis und einen Punkt **a)** im Innern, **b)** auf dem Umfang (der Peripherie), **c)** außerhalb des Kreises. Miß den Abstand des Punktes vom Mittelpunkt.

39. Was läßt sich über den Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt eines Kreises aussagen, wenn dieser Punkt **a)** innerhalb, **b)** auf dem Umfang, **c)** außerhalb des Kreises liegt?
40. Untersuche, wie man den Kreis falten kann, so daß beide Teile einander decken; mit anderen Worten: Wieviel Symmetrieachsen hat ein Kreis?
41. Zeichne einen Halbkreis.
42. Zeichne in einen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser.
43. Zeichne einen Viertelkreis.
44. Gegeben ist ein Kreis. Ziehe eine Gerade, die **a)** den Kreis schneidet (in wieviel Punkten?), **b)** den Kreis berührt, **c)** nicht durch den Kreis geht.
45. **a)** bis **e)** Beschreibe die untenstehenden Fig. 29 bis 33 so genau, daß es auf Grund der Beschreibung möglich ist, die Figuren wieder herzustellen.

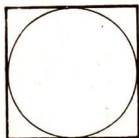


Fig. 29

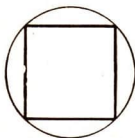


Fig. 30

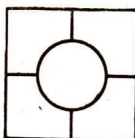


Fig. 31



Fig. 32

46. **a)** Zeichne zwei Kreise mit gleichem Mittelpunkt und mit den Radien 3 cm und 5 cm. **b)** Wie weit kann ich den Kreis mit kleinerem Radius im Innern des großen noch verschieben, ohne daß er aus ihm heraustritt (Versuch mit zwei ausgeschnittenen Kreisen)?



Fig. 33

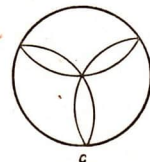
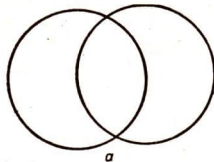
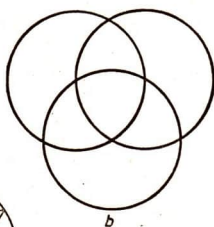


Fig. 34



47. Zeichne zwei Kreise, die sich schneiden. In wieviel Punkten schneiden sie sich?
48. Zeichne die beiden Räder eines Fahrrades. Welche Punkte der Räder (die natürlich still stehen müssen) sind einander am nächsten, welche sind am weitesten voneinander entfernt?

49. a) bis c) Beschreibe die Fig. 34a bis c, d) die Fig. 35, e) die Fig. 36 (achte auf die Hilfslinien, die sichtbar sind). Zeichne die Figuren in dein Heft, doch so, daß die Radien der auftretenden Kreise doppelt so groß wie hier im Lehrbuch sind.



Fig. 35

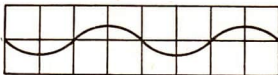


Fig. 36

50. Entwirf selbst eine Anzahl Sternfiguren.
 51. Entwirf eine Anzahl Bandverzierungen, die den Kreis oder Teile davon benutzen.

Der Winkel

52. Zeichne ein Kreuz der vier Windrichtungen. Welchen Winkel bilden die Windrichtungen a) S mit O, b) N mit W?
53. Welchen Winkel legt der große Zeiger einer Uhr in 15 Minuten zurück?
54. Welchen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr um 3 Uhr?
55. Fertige ein Modell einer Uhr mit zwei Zeigern, die getrennt voneinander beweglich sind. Der eine Zeiger steht auf 12, der andere auf a) 2 Uhr, b) 6 Uhr, c) 5 Uhr, d) 9 Uhr, e) 7 Uhr, f) 10 Uhr. Wieviel Grad schließen die Zeiger, als Schenkel eines Winkels betrachtet, ein?
56. Welchen Winkel bilden großer und kleiner Zeiger einer genau gehenden Uhr um a) 1 Uhr, b) 4 Uhr, c) 7 Uhr, d) 9 Uhr, e) 10 Uhr, f) 12 Uhr?
57. Wieviel Grad legt der große Zeiger einer Uhr zurück in a) 30 Minuten, b) 15 Minuten, c) 45 Minuten, d) 20 Minuten, e) 35 Minuten, f) 22 Minuten, g) 1 Minute?
58. Wieviel Grad legt der kleine Zeiger einer Uhr zurück in a) 4 Stunden, b) 9 Stunden, c) 11 Stunden, d) $4\frac{1}{2}$ Stunden, e) $7\frac{1}{2}$ Stunden, f) $\frac{1}{4}$ Stunde, g) 30 Minuten, h) 20 Minuten, i) 40 Minuten, k) 35 Minuten?
59. Zeichne eine Windrose. — Welchen Winkel bilden die Windrichtungen a) NO mit O, b) NW mit O, c) NO mit SW, d) N mit NW, e) N mit SW?
60. Stelle fest, wieviel Speichen a) ein Wagenrad, b) ein Fahrrad (sieh dir aber das Rad genau an!) hat. Wie groß ist der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Speichen?
61. Zeichne mit Hilfe des Winkelmessers ein Zahnrad mit a) 24, b) 30 Zähnen.
62. Zeichne einen Winkel, schätze seine Größe, miß ihn mit dem Winkelmesser und notiere den Schätzungsfehler.
63. Zeichne einen spitzen Winkel von a) 30° , b) 50° , c) 80° , d) 45° erst nach Augenmaß, dann unter Verwendung des Winkelmessers. Stelle in jedem Falle die Größe des Fehlers fest.
64. Zeichne einen rechten Winkel erst nach Augenmaß, dann unter Verwendung des Winkelmessers. Stelle den Fehler fest.

65. Zeichne einen stumpfen Winkel von a) 100° , b) 170° , c) 130° , d) 140° erst nach Augenmaß, dann unter Verwendung des Winkelmessers. Stelle in jedem Falle den Fehler fest.
66. Wieviel volle Grad hat ein spitzer Winkel im Höchsfalle?
67. Ist ein stumpfer Winkel von 91° der kleinste stumpfe Winkel, den es überhaupt gibt, oder gibt es noch kleinere? Wenn ja, nenne Beispiele.
68. Schätze die Neigung des Daches auf dem Schulhaus und zeichne den Winkel in dein Heft.
- 69.¹⁾ Schätze die Neigung derstraße und zeichne den Winkel in dein Heft.
- 70.¹⁾ Schätze die Neigung des Abhanges desberges und zeichne den Winkel in dein Heft.
71. Schätze, wie hoch heute nachmittag um 3 Uhr die Sonne steht.
72. Zeichne einen beliebigen spitzen Winkel α und mit Lineal und Winkelmesser einen ihm gleichen.
73. Zeichne einen beliebigen stumpfen Winkel β und mit Lineal und Winkelmesser einen ihm gleichen.
74. Zeichne a) einen gestreckten, b) einen überstumpfen Winkel, c) einen Winkel von 3 rechten.
75. Zwei Geraden schneiden sich. a) Schätze die Größe aller Winkel, die dabei entstehen. b) Miß die Winkel mit dem Winkelmesser; welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln? c) Wie groß sind alle Winkel zusammen, wie groß je zwei Nachbarwinkel zusammen?
76. Die drei Winkel α , β und γ des Dreiecks ABC , das in Fig. 5 (S. 2) dargestellt ist, sind a) zu schätzen, b) mit dem Winkelmesser zu messen. Schreibe in dein Heft die Winkel mit drei Buchstaben.
77. Die vier Winkel α , β , γ und δ des in Fig. 6 (S. 3) dargestellten Vierecks $ABCD$ sind a) zu schätzen, b) mit dem Winkelmesser zu messen. Schreibe in dein Heft die Winkel mit drei Buchstaben.
78. Ziehe in einem Quadrat $ABCD$ die Diagonale AC . Wie groß sind die Winkel, die AC mit den Quadratseiten bildet?
79. Ziehe in einem Rechteck mit den Seiten 3 cm und 4 cm die Diagonalen und stelle fest, unter welchen Winkeln sie sich schneiden.
80. Jemand macht eine Wanderung, die in der Fig. 37 auf Seite 25 in verkleinertem Maßstabe wiedergegeben ist. Nenne die Winkel, um die er sich in den Punkten A , B , . . . F drehen muß; schätze und miß ihre Größe.
81. Fig. 38 zeigt einen neuen Ausschnitt aus einem Stadtbebauungsplan. Stelle fest, unter welchem Winkel die schmalere Straße die breitere schneidet.

1) Der offene Raum ist vom Schüler in der Schule nach Angabe des Lehrers auszufüllen.

- 82. a)** Zeichne zwei Winkel von 30° . Die Schenkel des einen Winkels mache 3 cm, die des anderen 7 cm lang. Welcher Winkel ist größer? **b)** Worauf kommt es beim Messen und Vergleichen der Größe von Winkeln an?

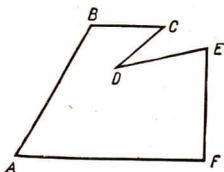


Fig. 37

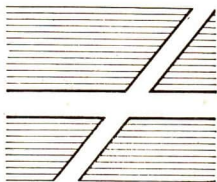


Fig. 38

- 83.** Zeichne einen spitzen und einen rechten Winkel. **a)** Welcher ist kleiner? **b)** Erkläre danach, was ein spitzer Winkel ist.
- 84.** Zeichne einen stumpfen, einen rechten, einen gestreckten Winkel. **a)** Welcher ist größer als der stumpfe, welcher kleiner? **b)** Erkläre danach, was ein stumpfer Winkel ist.
- 85.** Zeichne einen überstumpfen und einen gestreckten Winkel. **a)** Welcher ist größer? **b)** Erkläre danach, was ein überstumpfer Winkel ist.

Addieren und Subtrahieren von Winkeln

- 86.** Zeichne einen Strahl und trage in seinem Endpunkt mit dem Winkelmesser einen Winkel von **a)** 30° , **b)** 50° , **c)** 115° an. Auf wieviel Weisen kann man das jedesmal tun?
- 87.** Zeichne einen Winkel von 30° und trage erst nach Augenmaß, dann mit dem Winkelmesser an einen seiner Schenkel einen Winkel von 40° an. Überzeuge dich, ob der Winkel, der jetzt die Summe der beiden Winkel angibt, tatsächlich 70° ist.

- 88.** Zeichne zwei Winkel von

a) 45° und 20°

b) 30° und 45°

c) 50° und 60°

d) 75° und 85°

und addiere sie erst nach Augenmaß, dann mit dem Winkelmesser.

- 89.** Zeichne zwei beliebige (spitze) Winkel α und β und addiere sie erst nach Augenmaß, dann mit dem Winkelmesser. Stelle den Schätzungsfehler fest.
- 90.** Auf wieviel verschiedene Weisen ist die Addition zweier Winkel α und β möglich?
- 91.** Zeichne zwei Winkel, die zusammen **a)** 90° , **b)** 180° , **c)** 130° betragen. Der eine Winkel ist α ; wie groß ist jedesmal der andere Winkel?
- 92.** Zeichne zwei Winkel mit einem gemeinschaftlichen Schenkel, deren Summe **a)** ein rechter, **b)** ein gestreckter Winkel ist. Was ist über die nicht gemeinschaftlichen Schenkel zu sagen?

93. Zeichne zwei Winkel α und β . a) Schätze, welcher der größere ist und um wieviel dieser größer als der kleinere ist. b) Miß beide Winkel und berechne die Differenz. c) Ziehe den einen Winkel vom anderen mit Lineal und Winkelmesser ab.
94. Zeichne zwei Winkel mit einem gemeinschaftlichen Schenkel, deren Differenz a) 90° , b) 30° , c) 120° ist. Der eine, kleinere Winkel sei α ; wie groß ist in jedem Falle der andere?
95. a) Um wieviel Grad weicht auf einer richtiggehenden Uhr der große Zeiger um 3 Uhr 30 Minuten von der 12-Uhr-Stellung ab. b) Um wieviel weicht der kleine Zeiger um 3 Uhr von der 12-Uhr-Stellung ab? c) Um wieviel weicht der kleine Zeiger um 3 Uhr 30 von der 12-Uhr-Stellung ab? d) Welchen Winkel bilden um 3 Uhr 30 großer und kleiner Zeiger der Uhr?
96. Stelle erst fest, welche Stellung die beiden Zeiger der Uhr zur Richtung nach der 12 haben, und dann, welchen Winkel die beiden Zeiger miteinander bilden, um
- | | | | |
|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| a) 4h 30 ^m | b) 7h 30 ^m | c) 9h 30 ^m | d) 12h 30 ^m |
| e) 3h 20 ^m | f) 5h 40 ^m | g) 6h 20 ^m | h) 10h 20 ^m |
| i) 2h 15 ^m | k) 4h 45 ^m | l) 6h 45 ^m | m) 7h 15 ^m |
| n) 10h 15 ^m | o) 12h 45 ^m | p) 9h 45 ^m | q) 1h 10 ^m |

Vervielfältigen und Teilen von Winkeln

97. Zeichne einen spitzen Winkel α und verdoppele ihn a) nach Augenmaß, b) mit dem Winkelmesser. (Fehler?)
98. Zeichne einen Winkel von 30° und verdreifache ihn. Siehe zu, ob du wirklich einen rechten Winkel erhältst.
99. Gegeben sind zwei (kleine) spitze Winkel α und β . Zeichne a) $\alpha + 2\beta$, $2\alpha + \beta$, c) $2\alpha + 2\beta$.
100. Gegeben ist ein Winkel von a) 90° , b) 60° , c) 120° , d) 45° . Teile ihn in zwei Hälften erst nach Augenmaß, dann mit dem Stechzirkel.
101. Zeichne einen beliebigen a) spitzen, b) stumpfen Winkel und halbiere ihn mit dem Stechzirkel. Untersuche mit dem Winkelmesser das Ergebnis.
102. Zeichne a) ein Quadrat, b) ein Rechteck und untersuche, ob eine Diagonale die Winkel der Ecken, die sie verbindet, halbiert oder nicht.
103. Zeichne einen beliebigen a) spitzen, b) stumpfen Winkel und teile ihn mit dem Stechzirkel in drei gleiche Teile. Miß mit dem Winkelmesser nach, ob es stimmt. c) Teile einen gegebenen Winkel in vier gleiche Teile. Wie macht man das am besten?
104. Zeichne, ausgehend von einem rechten Winkel, einen Winkel von a) 45° , b) $22\frac{1}{2}^\circ$, c) 30° , d) 50° , e) 15° .
105. Teile einen Kreis mit Hilfe des Winkelmessers in a) vier, b) fünf, c) sechs gleiche Teile. Benutze die so geteilten Kreise, um Sternfiguren einzuzichnen.

106. Gegeben ist ein Kreis. Zeichne mit dem Zeichendreieck zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser. Teile jeden Viertelkreis in drei gleiche Teile (Modell des Zifferblattes einer Uhr).
107. Welches ist die Symmetrieachse eines Winkels? Zeichne sie!

Drehung von ebenen Figuren

108. Welche von den folgenden Figuren hat einen Mittelpunkt: Quadrat, Rechteck, Rhombus, Kreis? Zeichne ihn!
109. Drehe ein Quadrat um seinen Mittelpunkt. Um welchen Winkel muß du drehen, bis zum ersten Male ursprüngliche und neue Lage zur Deckung kommen? (Führe das mit einem ausgeschnittenen Quadrat wirklich aus.)
110. Drehe **a)** ein Rechteck, **b)** einen Rhombus um seinen Mittelpunkt. Nach welcher Drehung tritt zum ersten Male Deckung mit der Anfangslage ein?
111. Zwischen zwei parallelen Geraden liegt ein Punkt, um den die aus den beiden Geraden gebildete Figur gedreht wird. Wo muß der Punkt liegen, damit Deckung mit der Anfangslage schon nach einer Drehung um 180° eintritt?
112. Welche Beobachtung macht man, wenn ein Kreis um seinen Mittelpunkt gedreht wird?
113. Ein Winkel wird um seinen Scheitelpunkt gedreht. Zeichne den Winkel nach einer Drehung von **a)** 180° , **b)** 90° , **c)** 270° , **d)** 30° , **e)** 60° .

§ 4. Das Dreieck

Arten des Dreiecks

- Wähle drei Punkte auf dem Zeichenblatt, nenne sie *A*, *B* und *C*. **a)** Wieviel Verbindungsstrecken zwischen den drei Punkten gibt es? **b)** Wie heißt das von den Punkten gebildete Dreieck?
- Wie heißen die Seiten und Winkel **a)** eines Dreiecks *ABC*, **b)** eines Dreiecks *LMN*?
- Wann ist es nicht möglich, ein Dreieck zu zeichnen, das drei gegebene Punkte zu Ecken hat (Figur)?
- Zeichne drei Geraden und schraffiere das durch sie bestimmte Dreieck.
- Unter welchen Umständen wird durch drei Geraden kein Dreieck bestimmt?
- Nenne in deiner Umgebung Gegenstände, an denen Dreiecke vorkommen.
- Zeichne ein Dreieck, an dem alle Winkel spitz sind. Schätze und miß die Winkel.
- Untersuche, ob es möglich ist, ein Dreieck **a)** mit einem rechten Winkel, **b)** mit einem stumpfen Winkel, **c)** mit zwei rechten, **d)** mit zwei stumpfen, **e)** mit drei rechten, **f)** mit drei stumpfen Winkeln zu zeichnen.
- Zeichne verschiedene Formen rechtwinkliger Dreiecke.

10. Zeichne verschiedene Formen stumpfwinkliger Dreiecke.
11. Zeige, wo an den Pyramiden, wie sie die Ägypter bauten, Dreiecke auftreten. Was ist über die Seiten dieser Dreiecke zu sagen?
12. Zeichne **a)** nach Augenmaß, **b)** mit Lineal und Stechzirkel ein gleichschenkliges Dreieck.
13. Zeichne verschiedene Formen gleichschenkliger Dreiecke.
14. Zeichne **a)** nach Augenmaß, **b)** mit Lineal und Zirkel mehrere gleichseitige Dreiecke.
15. Untersuche, welche von den nachfolgend genannten Dreiecksformen möglich, welche unmöglich sind: **a)** spitzwinklige Dreiecke, die ungleichseitig, **b)** die gleichschenklige, **c)** die gleichseitig sind; **d)** rechtwinklige Dreiecke, die ungleichseitig, **e)** gleichschenklige, **f)** gleichseitig sind; **g)** stumpfwinklige Dreiecke, die ungleichseitig, **h)** gleichschenklige, **i)** gleichseitig sind.

Das symmetrische Dreieck

16. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Spitze A . Nenne die Schenkel, die Basis, den Winkel an der Spitze, die Basiswinkel.
17. Schneide ein gleichschenkliges Dreieck aus Papier aus und bestimme durch Falten die Symmetrieachse.
18. Was ist über die Winkel zu sagen, in die die Symmetrieachse den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks teilt? Begründe das Ergebnis der Untersuchung.
19. Was ist über die Teilstrecken zu sagen, in die die Symmetrieachse die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks teilt? Begründe das Ergebnis der Untersuchung.
20. Was ist über den Winkel zu sagen, unter dem die Symmetrieachse eines gleichschenkligen Dreiecks die Basis schneidet? Begründe das Ergebnis der Untersuchung. Bei welchem Apparat, den du kennengelernt hast, wird das Ergebnis benutzt?
21. Was ist über die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks zu sagen?
22. Untersuche, ob **a)** die Basiswinkel, **b)** die Winkel an der Spitze gleichschenkliger Dreiecke auch rechte oder stumpfe sein können.
23. Zeichne den Umriß eines Dachgiebels, bei dem der Winkel an der Spitze **a)** ein stumpfer, **b)** ein rechter, **c)** ein spitzer ist. Nenne Gebäude, an denen solche Giebel auftreten.
24. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck und zeige, daß alle Winkel gleich sind. Bestimme ihre Größe.
25. Wieviel Symmetrieachsen hat ein gleichseitiges Dreieck? Bestimme sie durch Falten.
26. Fig. 39 zeigt das Fachwerk einer Brücke. Zeichne es noch einmal in dein Heft, jedoch aus nur 9 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 2 cm zusammengesetzt.

27. a) Über einem Quadrat, b) über einem gleichseitigen Dreieck ist eine Pyramide mit lauter gleichseitigen Dreiecken als Begrenzungsflächen errichtet. Bestimme die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken der Körper.

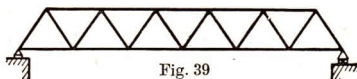


Fig. 39

28. Stelle aus einem ausgeschnittenen gleichseitigen Dreieck unter Benutzung der Symmetrieachsen das Netz einer dreiseitigen Pyramide durch Falten her.

Das rechtwinklige Dreieck

29. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC , dessen rechter Winkel beim Punkte C liegt. Nenne die Hypotenuse und die Katheten.
30. Untersuche, unter welchen Umständen ein rechtwinkliges Dreieck symmetrisch ist.
31. Bestimme alle Winkel eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks.
32. Ein Quadrat wird a) durch eine, b) durch zwei Diagonalen in Dreiecke zerlegt. Untersuche die Gestalt der Dreiecke.
33. Stelle ein gleichschenkligh-rechtwinkliges Dreieck durch Falten her.
34. Ein Rechteck wird a) durch eine, b) durch zwei Diagonalen in Dreiecke zerlegt. Untersuche die Gestalt der Dreiecke.
35. Stelle ein rechtwinkliges Dreieck mit ungleichen Katheten durch Falten her.
36. Ein Rhombus wird a) durch eine, b) durch zwei Diagonalen in Dreiecke zerlegt. Untersuche die Gestalt der Dreiecke.
37. Ergänze a) ein rechtwinkliges Dreieck zu einem Rechteck, b) ein gleichschenklighes Dreieck zu einem Rhombus, c) ein rechtwinklig-gleichschenklighes Dreieck zu einem Quadrat.
38. Drehe ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 3 cm und 4 cm um die eine Kathete als Achse. Wie groß ist die Höhe, wie groß der Radius des Grundkreises in dem entstehenden Kegel?
39. Ein Kegel ist durch Drehung eines rechtwinklig-gleichschenklighen Dreiecks mit der Kathete 5 cm entstanden. Zeichne einen Achsenschnitt.
40. Zeichne einen Achsenschnitt zu dem nach Aufg. 38 entstandenen Kegel.
41. Um welche Gerade muß man ein gleichschenklighes Dreieck drehen, um einen Kegel zu erhalten?
42. Drehe a) ein Quadrat, b) einen Rhombus um eine Diagonale. Was für ein Körper entsteht dann?
43. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, das a) die Katheten 3 cm und 4 cm hat, das b) eine Kathete von 3,5 cm hat und einen dieser Kathete anliegenden Winkel von 50° .
44. Zeichne ein rechtwinklig-gleichschenklighes Dreieck, dessen Kathete 3,8 cm lang ist. Untersuche, ob man noch ein anderes Stück vorschreiben kann.

Zweites Kapitel

Geraden und Winkel

§ 5. Nebenwinkel und Scheitelwinkel

Supplementwinkel und Komplementwinkel

1. Von zwei Winkeln ist der eine der Supplementwinkel des anderen, wenn die Summe beider 180° ist. Wie groß ist der Supplementwinkel eines Winkels von a) 30° , b) 45° , c) 89° , d) 130° ?
2. Zwei Supplementwinkel sind gleich groß. Wie groß sind sie?
3. Von zwei Supplementwinkeln ist der eine doppelt so groß wie der andere. Wie groß sind sie?
4. Von zwei Supplementwinkeln ist der eine a) α , b) $180^\circ - \alpha$, c) $90^\circ + \alpha$. Wie groß ist der andere?
5. Zeichne einen beliebigen Winkel und einen Supplementwinkel von ihm. Gibt es noch mehr Supplementwinkel? Wie viele?
6. Von zwei Winkeln ist der eine der Komplementwinkel des anderen, wenn die Summe beider 90° ist. Wie groß ist der Komplementwinkel eines Winkels von a) 10° , b) 45° , c) 85° ?
7. Zwei Komplementwinkel sind gleich groß. Wie groß sind sie?
8. Von zwei Komplementwinkeln ist der eine doppelt so groß wie der andere. Wie groß sind sie?
9. Von zwei Komplementwinkeln ist der eine a) α , b) $90^\circ - \alpha$, c) $45^\circ + \alpha$, d) $45^\circ - \alpha$. Wie groß ist der andere?
10. Zeichne einen beliebigen Winkel und einen Komplementwinkel von ihm. Gibt es noch mehr Komplementwinkel? Wie viele?
11. Von welchen Winkeln nur gibt es a) Komplementwinkel, b) Supplementwinkel? Nenne Winkel, zu denen es keine Komplementwinkel, keine Supplementwinkel gibt.

Nebenwinkel

12. Verlängere den einen Schenkel eines Winkels von 60° über den Scheitelpunkt hinaus. Die Verlängerung bildet mit dem anderen Schenkel einen neuen Winkel. Wie groß ist er?
13. Wie entsteht ein Nebenwinkel?
14. Wieviel Nebenwinkel besitzt ein Winkel? (Zeichnung!)
15. Zeige mit einer Skizze, wie bei einem Buch beim Umblättern, an einer Tür beim Öffnen Nebenwinkel auftreten. Nenne andere Beispiele.
16. Nenne in der Fig. 40 Nebenwinkel von a) α , b) δ , c) μ , d) ε , e) λ , f) ϑ .
17. Zeichne zu den Winkeln α , β und γ eines Dreiecks je einen Nebenwinkel

18. Fertige dir ein Modell eines Paares von Nebenwinkeln mit beweglichem gemeinschaftlichem Schenkel.
19. α und β sind Nebenwinkel. Wie groß ist β , wenn α a) 14° , b) 38° , c) 130° , d) 81° , e) 168° , f) $48^\circ 30'$, g) $113^\circ 30'$ ist?
20. α und β sind Nebenwinkel. α durchläuft nacheinander die Winkel 10° , 20° , 30° , ... bis 170° . Stelle in einer Tabelle die zugehörigen Werte von α und β zusammen.
21. α und β sind Nebenwinkel. a) Wie ändert sich α , wenn β zunimmt? b) Wie ändert sich β , wenn α zunimmt? c) Wie ändert sich β , wenn α abnimmt?
22. Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels a) α , b) $180^\circ - \alpha$, c) $\alpha + 90^\circ$, d) $\beta - 90^\circ$ (wo $\beta > 90^\circ$ ist), e) $90^\circ + \gamma$?
23. α und β sind Nebenwinkel. Welche Gleichung besteht zwischen α und β ?
24. Was ist über die Größe des Nebenwinkels a) eines spitzen, b) eines stumpfen, c) eines rechten Winkels zu sagen?
25. Welchen Winkel kann man als Nebenwinkel eines gestreckten Winkels ansehen?
26. Welcher Satz gilt über die Summe zweier Nebenwinkel? Begründe ihn.
27. Sprich den Satz über die Nebenwinkel aus, indem du den Begriff Supplementwinkel benutzt.
28. Was ist über die Größe der beiden Nebenwinkel zu sagen, die ein Winkel besitzt? (Zeichnung!)
29. Gegeben ist ein beliebiger Winkel α . Konstruiere ohne Winkelmesser mit dem Lineal den Winkel $(180^\circ - \alpha)$.
30. Zwei Nebenwinkel sind gleich. Wie groß ist jeder von ihnen?
31. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine halb so groß wie der andere. Wie groß sind sie?
32. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine dreimal so groß wie der andere. Wie groß sind beide?
33. Zwei Winkel haben gleich große Nebenwinkel. Was folgt daraus für die Winkel selbst?
34. In der Fig. 41 sind die beiden Nebenwinkel AOC und BOC durch die Strahlen OD und OE halbiert. Es sei $\sphericalangle AOC = 40^\circ$. Berechne nacheinander: $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle DOC$, $\sphericalangle COE$, $\sphericalangle DOE$.

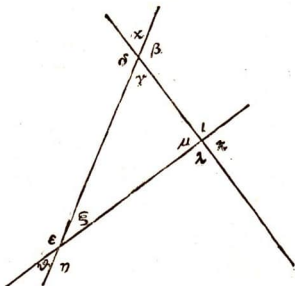


Fig. 40

35. Zeichne eine Figur wie zu Aufgabe 34, wobei jedoch a) $\sphericalangle AOC = 120^\circ$, b) 80° , c) 70° ist. Berechne in jedem Falle den Winkel zwischen den Halbierungslinien der beiden Nebenwinkel. Fasse das Ergebnis in Worte.
36. Nimm an, der Winkel AOC habe den beliebigen Wert α , und untersuche, ob du dann zu dem gleichen Ergebnis wie in Aufg. 34 und 35 kommst.
37. Beweise, daß die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel senkrecht aufeinander stehen.

Scheitelwinkel

38. Zwei Geraden schneiden einander. Von den Winkeln, die dabei entstehen, ist der eine a) 45° , b) 30° , c) 90° , d) 60° , e) 10° , f) $57^\circ 30'$, g) 125° , h) 117° , i) $175^\circ 45'$. Berechne in jedem Falle alle anderen Winkel und stelle das Ergebnis in einer Tabelle zusammen.

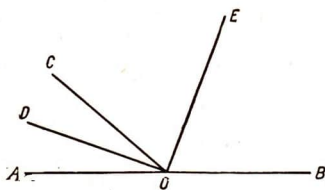


Fig. 41

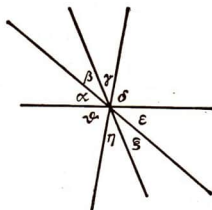


Fig. 42

39. Die beiden Schenkel eines Winkels α werden über den Scheitelpunkt hinaus verlängert. Dabei entstehen drei neue Winkel. Bezeichne als den Scheitelwinkel den, der nicht einer der beiden Nebenwinkel ist.
40. Nenne in der Fig. 40 den Scheitelwinkel von a) α , b) α , c) δ .
41. Nenne in der Fig. 42 den Scheitelwinkel von a) α , b) δ , c) ϑ , d) η , e) γ .
42. Zeichne zu den Winkeln α , β und γ eines Dreiecks die Scheitelwinkel.
43. Wie entsteht ein Scheitelwinkel durch Zeichnung, durch Drehung?
44. Zeige mit einer Skizze, wo a) an einem Kreuzweg, b) an einer Schere Scheitelwinkel auftreten.
45. Nenne aus deiner Umgebung andere Beispiele von Scheitelwinkeln.
46. Fertige ein Modell von Scheitelwinkeln mit beweglichen Schenkeln an.
47. Von den Winkeln, die beim Schnitt zweier um den Scheitelpunkt beweglichen Geraden entstehen, durchläuft der eine die Werte $5^\circ, 15^\circ, 25^\circ, \dots, 175^\circ$. Welche Werte durchläuft der zugehörige Scheitelwinkel? (Tabelle!)
48. Was ist über die Größe von Scheitelwinkeln zu sagen?
49. a) Suche zu den Scheitelwinkeln α und γ , die beim Schnitt zweier Geraden entstehen, einen gemeinsamen Nebenwinkel (Figur!) b) Was folgt aus der Tatsache, daß zwei Winkel gleichgroße Nebenwinkel haben?

50. In Fig. 43 ist der Winkel α gegeben. a) Berechne erst den mit κ bezeichneten Winkel (Nebenwinkel des ersten), dann den mit β bezeichneten (Nebenwinkel von κ).
51. Zeige durch Drehung einer Geraden um einen ihrer Punkte, daß Scheitelwinkel gleich sind.
52. Zwei Geraden schneiden sich. Ein Winkel ist ein rechter. Was ist von den drei anderen zu sagen?
53. Gegeben ist ein Winkel α und sein Scheitelwinkel β . Beide werden halbiert. Was ist über die von den Halbierungslinien gebildeten Winkel zu sagen?
54. Zwei Geraden schneiden sich unter beliebigem Winkel. Alle vier Winkel, die entstanden sind, werden halbiert. Was für eine Figur bilden die Halbierungsgeraden?
55. Wieviel Symmetrieachsen hat ein Paar sich schneidender Geraden, und wie liegen sie?
56. Wann hat ein Paar Nebenwinkel eine Symmetrieachse?

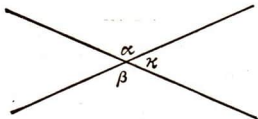


Fig. 43

Winkel und zugehöriger überstumpfer Winkel

57. Zeichne einen Winkel von 45° . Welcher Winkel ergänzt ihn zu 360° ?
58. Gegeben ist ein Winkel von a) 60° , b) 53° , c) 135° , d) α . Wie groß ist in jedem Falle der überstumpfe Winkel, der ihn zu einem Vollwinkel ergänzt?
59. Ein Winkel und der ihn zu einem Vollwinkel ergänzende Winkel sind gleich. Wie groß sind sie?
60. Ein Winkel ist halb so groß wie der ihn zu einem Vollwinkel ergänzende Winkel. Wie groß sind beide Winkel?

Praktische Anwendungen

61. Fig. 44 stellt eine Mauerecke im Grundriß dar. Den Winkel, den die beiden Mauerflächen miteinander bilden, kann man, da er im Innern des Mauerwerkes liegt, nicht messen. a) Man legt Stäbe an und mißt den Scheitelwinkel (Skizze). b) Wie kann man auch mit Hilfe von Nebenwinkeln zum Ziel kommen?
62. Miß in der gleichen Weise wie in Aufg. 61 den Winkel, der gebildet wird a) von den Flächen einer verschlossenen Zigarrenkiste, b) eines abgeschrägten Pultdeckels.
63. Probiere, ob der rechte Winkel deines Zeichendreiecks richtig ist, indem du feststellst, ob er mit seinem Nebenwinkel übereinstimmt.



Fig. 44

64. Fig. 45 zeigt den Querschnitt eines Bahndammes. Wie kann man den Böschungswinkel an einer Stelle A mit Hilfe eines Senkbleis feststellen?
65. Auf vielen Winkelmessern stehen bei den einzelnen Teilstrichen zwei Zahlen. Erkläre die Bedeutung und praktische Verwendung dieser Tatsache.
66. Fig. 46 zeigt einen Streckenzug, wie ihn der Feldmesser durch Fluchtstäbe im Gelände festlegt. Miß in cm die Streckenlängen und in den Punkten (1), (2), (2^a) bis (4) die mit $\beta_1, \beta_2, \beta_{2a}, \beta_3, \beta_4$ bezeichneten Winkel, indem du

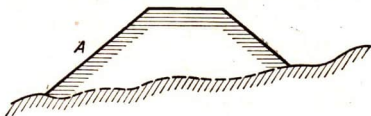


Fig. 45

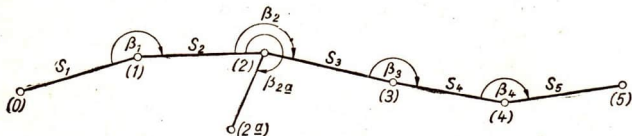


Fig. 46

gegebenenfalls erst statt der Winkel selbst diejenigen mißt, die sie zu 360° ergänzen.

Geometrische Überlegungen

67. Was ist der Scheitelwinkel eines Scheitelwinkels? Sprich einen Satz darüber aus.
68. Was ist der Nebenwinkel eines Nebenwinkels eines Winkels? (Entweder — oder!) Sprich einen Satz darüber aus.
69. Drei Geraden schneiden einander in drei Punkten (vgl. Fig. 40). Suche alle Beziehungen zwischen den dabei auftretenden Winkeln zusammenzustellen, soweit sie sich aus den Überlegungen des vorliegenden Paragraphen ergeben.
70. Drei Geraden gehen durch einen Punkt. Wieviel Winkel sind in der Figur vorhanden? (Achte auch auf die aus zwei oder mehr Teilwinkeln zusammengesetzten Winkel!) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Winkeln? Suche Ordnung in die große Zahl der Beziehungen zu bringen.
71. Untersuche, ob aus dem Satz: Nebenwinkel sind Supplementwinkel, auch folgt: Supplementwinkel sind Nebenwinkel.
72. Die Summe und die Differenz zweier Winkel ist gegeben. Wie kann man daraus die Winkel selber finden?
73. Im Scheitelpunkt eines Winkels sind auf den Schenkeln Senkrechte errichtet. In welcher Beziehung steht der von den Senkrechten gebildete Winkel zu dem gegebenen? Achte auf die verschiedenen möglichen Fälle!

§ 6. Winkel an Parallelen

Gegenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzt liegende Winkel

1. Zwei Geraden g_1 und g_2 werden von einer Geraden t geschnitten (Fig. 47). Bezeichne die dabei auftretenden Winkel (nicht die Winkel am Schnittpunkt von g_1 mit g_2 !) und stelle eine Liste aller zwischen den Winkeln geltenden Beziehungen auf. Wieviel Gleichungen liefern die Scheitelwinkel, wieviel die Nebenwinkel?

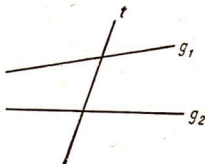


Fig. 47

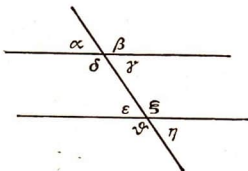


Fig. 48

2. Nenne bei den von der Geraden t geschnittenen Geraden g_1 und g_2 a) alle Paare von Gegenwinkeln, b) alle Paare von Wechselwinkeln, c) alle Paare von entgegengesetzt liegenden Winkeln.

Beziehungen zwischen den Winkeln an Parallelen

3. Zwei Parallelen g_1 und g_2 werden von einer dritten Geraden t geschnitten. Die dabei entstehenden Winkel sind, so wie es Fig. 48 zeigt, mit α bis η bezeichnet. Nenne a) den Gegenwinkel zu γ , b) den Wechselwinkel zu ϑ , c) den entgegengesetzt liegenden Winkel zu ε , d) den Gegenwinkel zu ζ , e) den Wechselwinkel zu ε , f) den entgegengesetzt liegenden Winkel zu γ .
4. In der Fig. 48 sei α gleich a) 30° , b) 45° , c) 60° , d) 90° , e) 120° . Zeichne die zugehörige Figur mit genauem Maß und stelle durch Rechnung oder Maß die Größe der anderen Winkel fest.
5. Der Winkel α in Fig. 48 durchlaufe die Werte 5° , 15° , 25° , ... 175° . (Fertige ein Modell mit beweglicher Geraden t an.) Stelle in einer Tabelle die Werte zusammen, die dann die Winkel β , ... ϑ durchlaufen.
6. Nenne die sämtlichen Winkel, die a) α , b) γ , c) ε , d) η gleich sind.
7. Nenne die sämtlichen Winkel, die a) β , b) δ , c) ζ , d) ϑ zu zwei Rechten ergänzen.
8. Stelle die Gleichungen für Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen auf.
9. Stelle alle Gleichungen für Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen auf.
10. Gib alle Gleichungen an, die zwischen entgegengesetzt liegenden Winkeln an geschnittenen Parallelen herrschen.

11. (Parallelensatz.) Sprich einen Satz aus über **a)** die Gegenwinkel, **b)** die Wechselwinkel, **c)** die entgegengesetzt liegenden Winkel an geschnittenen Parallelen.
12. Beweise **a)** den Satz von den Wechselwinkeln an Parallelen auf Grund der Sätze über Gegenwinkel und Scheitelwinkel, **b)** den Satz von den entgegengesetzt liegenden Winkeln auf Grund der Sätze über Gegenwinkel und Nebenwinkel.
13. Wann sind entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen gleich?



Fig. 49

14. Zwei Geraden g_1 und g_2 bilden mit einer Geraden t gleiche entgegengesetzt liegende Winkel. Folgt daraus, daß g_1 und g_2 parallel sind? (Mache Versuche mit entsprechenden Figuren.)
15. Wie lassen sich (Fig. 48) **a)** durch den Winkel α , **b)** durch den Winkel β , **c)** durch den Winkel ϑ die jeweilig sieben anderen ausdrücken?
16. Stelle dir größere Zeichnungen der beigegeführten (Fig. 49) stilisierten Buchstaben a bis f her; was ist über die an ihnen auftretenden gleichen und einander zu 180° ergänzenden Winkel zu sagen?
17. Suche in Fig. 50 **a)** zu α Wechselwinkel, **b)** zu γ entgegengesetzt liegende Winkel, **c)** zu β Wechselwinkel.

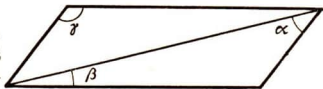


Fig. 50

18. Gib an, welche Winkel in Fig. 51, die den Schnitt zweier Parallelenpaare darstellt, **a)** dem Winkel α gleich sind, **b)** zu α Supplementwinkel sind. Füge in jedem Falle die Begründung hinzu.

Parallelelenkonstruktion

19. Gegeben seien eine Gerade g_1 und ein Punkt P . Durch P soll zu g_1 die Parallele gezogen werden. Lege irgendeine Gerade t durch P , die g_1 in Q schneidet. Wie kann man jetzt aus den Winkeln bei Q die Lage von g_2 finden?
20. Ziehe durch einen Punkt zu einer Geraden die Parallele, indem du dabei **a)** Gegenwinkel, **b)** Wechselwinkel, **c)** entgegengesetzt liegende Winkel benutzt. Beschreibe jede der drei Konstruktionen. Welche erscheint dir am zweckmäßigsten? Welche ist jedenfalls unpraktisch?

21. Der Zeichner zeichnet Parallelen mit Lineal und Zeichendreieck, so wie es Fig. 52 andeutet. Das Lineal wird festgehalten, das Dreieck so weit am Lineal entlang geschoben, bis die längste Seite durch P geht. Führe diese

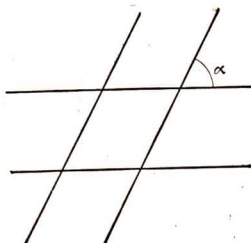


Fig. 51

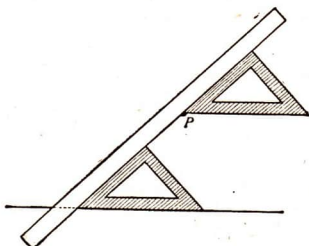


Fig. 52

Konstruktion selbst aus. Welche Winkel an geschnittenen Parallelen werden dabei benutzt?

22. Gegeben ist eine Gerade. Ziehe **a)** im Abstande von 4 cm, **b)** im gegebenen Abstand a Parallelen zu der Geraden. Wieviel gibt es?
23. Gegeben sind zwei Parallelen. Ziehe diejenige Parallele, die den Abstand beider halbiert.
24. Gegeben sind zwei Parallelen. Ziehe eine Parallele, die von der einen noch einmal soweit entfernt ist wie von der anderen. Wieviel gibt es?

Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln

25. Zeichne zwei Strahlen, die **a)** gleich gerichtet parallel, **b)** entgegengesetzt gerichtet parallel sind.
26. Es sind zwei Winkel mit parallelen, gleichgerichteten Schenkeln gegeben (vgl. Fig. 53). Der eine Winkel liegt ganz innerhalb des anderen. **a)** Miß die beiden Winkel; was beobachtest du? **b)** Ziehe durch die Scheitelpunkte eine Gerade und beweise durch zweimalige Anwendung des Parallelenatzes, daß die beiden Winkel gleich sind. **c)** Verlängere den einen Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus bis zum Schnitt mit dem anderen Schenkel des anderen Winkels und beweise so den Satz.
27. Führe den Beweis für die Tatsache, daß zwei Winkel mit paarweise parallelen und gleich gerichteten Schenkeln gleich sind, auch in dem Fall, daß der eine Winkel nicht ganz im Innern des andern liegt.
28. Untersuche, wie es mit Winkeln steht, von denen **a)** ein Schenkelpaar gleich gerichtet, das andere entgegengesetzt gerichtet ist, **b)** beide Schenkelpaare entgegengesetzt gerichtet sind.

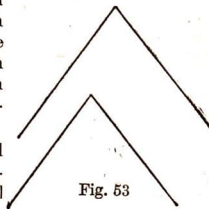


Fig. 53

Praktische Anwendungen

- 29.** Wenn man mit einem Zeichendreieck auf einer Geraden eine Senkrechte errichtet, so pflegt man eine Zeichnung, wie sie Fig. 54 andeutet, zu er-

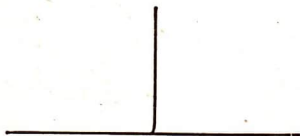


Fig. 54

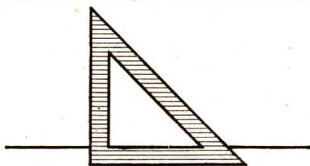


Fig. 55

halten, in der der Winkel in der Nähe des Scheitelpunktes ungenau ist. (Woran liegt das?) Ein besseres Verfahren ist durch die Fig. 55 angedeutet.

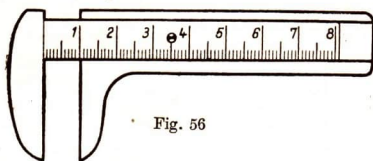


Fig. 56

- a) Was setzt diese Konstruktion beim Zeichendreieck voraus? b) Welcher Parallelen-satz wird angewandt? c) Errichte in einem Punkte einer Geraden die Senkrechte. d) Fülle auf diese Weise von einem Punkte auf die Gerade die Senkrechte.

- 30.** Fig. 56 zeigt eine einfache Schublehre, um Dicken von Stäben u. dgl. zu messen. a) Beschreibe die Benutzung. b) Welche Eigenschaft von Parallelen wird hier benutzt?

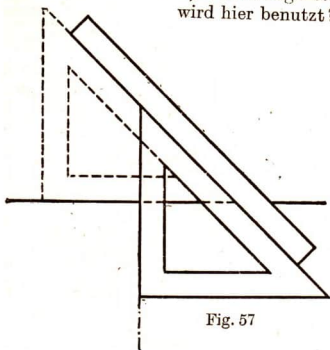


Fig. 57

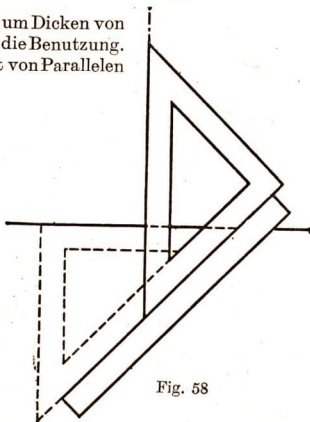


Fig. 58

- 31.** Die Fig. 57 zeigt, wie ein Zeichner mit Lineal und Zeichendreieck eine Senkrechte zieht. a) Welcher Parallelen-satz wird dabei benutzt (suche erst die

Parallelen und die von ihnen geschnittene Gerade!)? **b)** Ist die Konstruktion nur mit einem Dreieck von der Gestalt, wie es die Figur zeigt, oder auch mit anderen Dreiecken ausführbar? **c)** Errichte in dieser Weise in einem Punkt auf einer Geraden die Senkrechte. **d)** Fülle in dieser Weise von einem Punkt auf eine Gerade die Senkrechte.

- 32.** Die Fig. 58 zeigt ein anderes Verfahren des Zeichners, mit Lineal und Zeichendreieck eine Senkrechte zu ziehen. Beantworte die Fragen **a)** bis **d)** der Aufg. 31 für diese Art der Konstruktion.



Fig. 59

- 33.** Fig. 59 zeigt den Querschnitt einer Treppe. Durch welche Winkel wird die Steigung der Treppe gemessen? Warum sind diese Winkel alle gleich?

Überlegungen

- 34.** Zwei Winkel haben solche Lage zueinander, daß ihre Schenkel paarweis aufeinander senkrecht stehen. Untersuche, was über ihre Größe zu sagen ist (ziehe erst durch den Scheitel des einen Winkels Parallelen zu den Schenkeln des anderen).

Drittes Kapitel

Das Dreieck

§ 7. Seiten und Winkel des Dreiecks

Vorübungen¹⁾

1. Zeichne ein Dreieck ABC . Gib an, **a)** welche Seiten man a, b, c , **b)** welche Winkel man α, β, γ nennt.
2. Benenne, ohne eine Figur zu zeichnen, mit einem Buchstaben die folgenden Stücke des Dreiecks ABC : **a)** AB , **b)** $\sphericalangle ABC$, **c)** $\sphericalangle BCA$, **d)** AC , **e)** $\sphericalangle CAB$.
3. In einem Dreieck ABC werden **a)** die Punkte A und B vertauscht, **b)** die Punkte B und C vertauscht. Gib an, welche Seiten und Winkel ihre Benennung beibehalten.
4. In einem Dreieck wird eine (zyklische) Vertauschung der Eckenbezeichnung vorgenommen: Punkt A bekommt die Bezeichnung B , B bekommt die Bezeichnung C und C bekommt die Bezeichnung A . Was wird **a)** aus den Seiten AB, CA ? **b)** Was wird aus den Winkeln ABC, BCA, ACB ?
5. Die umstehenden Dreiecke stimmen in der Eckenbezeichnung, nicht aber in der Reihenfolge überein. Gehe so um das Dreieck herum, daß du die Fläche **a)** zur Linken, **b)** zur Rechten hast. Welches ist die Reihenfolge der Stücke (Seiten und Winkel) bei Fig. 60, welches bei Fig. 61?

1) Wiederholungen aus dem § 4.

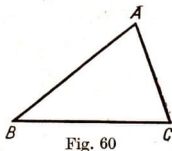


Fig. 60

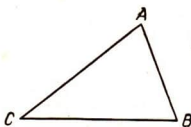


Fig. 61

6. Zeichne ein Dreieck aus den Seiten a , b und c , wo

- | | | |
|---------------|------------|------------|
| a) $a = 4$ cm | $b = 5$ cm | $c = 6$ cm |
| b) $a = 5$ cm | $b = 6$ cm | $c = 7$ cm |

ist. Die Konstruktion ist ein erstes Mal mit a , ein zweites Mal mit b , ein drittes Mal mit c zu beginnen.

7. Welche Arten von Dreiecken unterscheidet man im Hinblick auf die Seitenlängen?

Seiten des Dreiecks

8. Versuche ein Dreieck zu konstruieren aus den Seiten

- | | | |
|---------------|------------|------------|
| a) $a = 4$ cm | $b = 5$ cm | $c = 7$ cm |
| b) $a = 4$ cm | $b = 4$ cm | $c = 7$ cm |
| c) $a = 4$ cm | $b = 3$ cm | $c = 7$ cm |
| d) $a = 4$ cm | $b = 2$ cm | $c = 7$ cm |

In welchen Fällen ist die Konstruktion ausführbar, in welchen nicht (Grund!)? Untersuche, ob es etwas ausmacht, mit welcher Seite man die Konstruktion beginnt?

9. Untersuche, unter welchen Umständen aus den Strecken a , b und c ein Dreieck konstruiert werden kann.

10. Zeige, daß in einem Dreieck mit den Seiten a , b und c

$$b + c > a \quad \text{ist.}$$

11. Stelle entsprechende Ungleichungen für $c + a$ und für $a + b$ auf.

12. Sprich das in Aufg. 10 und 11 gefundene Gesetz für die Seiten eines Dreiecks in Worten aus.

13. Schreibe die drei Ungleichungen zwischen den Dreiecksseiten mit Benutzung des Zeichens $<$ (kleiner als).

14. Beurteile auf Grund des Satzes der Aufg. 12, ob die folgenden Konstruktionen ausführbar sind (ohne daß du an die Ausführung selbst gehst):

- | | | |
|------------------|---------------|---------------|
| a) $a = 4,3$ cm | $b = 3,8$ cm | $c = 5,5$ cm |
| b) $a = 6,5$ cm | $b = 2,5$ cm | $c = 3,5$ cm |
| c) $a = 6$ cm | $b = 4,3$ cm | $c = 1,7$ cm |
| d) $a = 17,3$ cm | $b = 12,2$ cm | $c = 4,1$ cm |
| e) $a = 23,8$ cm | $b = 13,8$ cm | $c = 33,8$ cm |

15. Ein Dreieck soll aus $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2,5$ cm konstruiert werden. Beginne die Konstruktion mit a , schlage dann den Kreis mit b und zeige, daß die Konstruktion unmöglich ist, weil die Ungleichung

$$a - b < c$$

nicht erfüllt ist (vgl. Ergebnis zu Aufg. 13).

16. Stelle entsprechende Ungleichungen für $b - c$ und für $c - a$ auf.
17. Fasse das in Aufg. 15 gefundene Gesetz für die Seiten eines Dreiecks in einen Satz.
18. Schreibe die drei in Aufg. 15 und 16 gefundenen Ungleichungen zwischen den Dreiecksseiten mit Benutzung des Zeichens $>$.
19. a , b und c sind die Seiten eines Dreiecks. Schließe **a)** die Seite a , **b)** die Seite b , **c)** die Seite c in ihre obere und untere Grenze ein.
20. In einem Dreieck sind zwei Seiten
- | | |
|-----------------------|---------------------|
| a) 5 cm und 6 cm | b) 2,5 cm und 10 cm |
| c) 7,5 cm und 7,6 cm | d) 1 cm und 11 cm |
| e) 17,5 km und 7,5 km | f) 4 m und 4 m |

Gib die Grenzen an, zwischen denen die dritte Seite liegen kann.

21. Miß an dem Dreieck Fig. 5 die Seiten und untersuche, ob **a)** die Seite a , **b)** die Seite b , **c)** die Seite c wirklich zwischen den vorgeschriebenen Grenzen liegt.
22. Das Dreieck ABC sei gleichschenkelig mit der Spitze A , d. h. es sei $b = c$. Stelle die Ungleichungen **a)** für die Basis a , **b)** für einen Schenkel auf.
23. Das Dreieck ABC sei gleichseitig, d. h. es seien alle Seiten gleich, etwa gleich a . Welche Gestalt nehmen in diesem Falle die Ungleichungen für die Seiten an? Äußere dich über das Ergebnis der Untersuchung.

Winkel im Dreieck

24. Miß in dem Dreieck Fig. 5 die Winkel α , β und γ und berechne die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$.
25. Miß in dem nebenstehenden (Fig. 62) gleichschenkligen Dreieck die Winkel und berechne ihre Summe.
26. Die Schenkel eines Winkels werden von einer Geraden geschnitten. Gib dieser Geraden verschiedene Lagen und miß die Summe der Winkel, die sie mit den Schenkeln — nach dem Scheitelpunkt zu — bildet. Welche Tatsache fällt auf?
27. Versuche, Dreiecke zu zeichnen mit folgenden Winkeln:

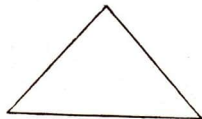


Fig. 62

- | | | |
|------------------------|--------------------|---------------------|
| a) $\alpha = 70^\circ$ | $\beta = 80^\circ$ | $\gamma = 50^\circ$ |
| b) $\alpha = 70^\circ$ | $\beta = 80^\circ$ | $\gamma = 40^\circ$ |
| c) $\alpha = 70^\circ$ | $\beta = 80^\circ$ | $\gamma = 30^\circ$ |

d) $\alpha = 70^\circ$	$\beta = 80^\circ$	$\gamma = 20^\circ$
e) $\alpha = 50^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\gamma = 70^\circ$
f) $\alpha = 50^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\gamma = 80^\circ$
g) $\alpha = 50^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\gamma = 50^\circ$
h) $\alpha = 70^\circ$	$\beta = 70^\circ$	$\gamma = 70^\circ$
i) $\alpha = 100^\circ$	$\beta = 90^\circ$	$\gamma = 20^\circ$

Welche dieser Dreiecke sind konstruierbar, welche nicht (gib gegebenenfalls an, warum die Konstruktion nicht möglich ist)?

28. Lege Papier in drei Lagen übereinander, schneide ein Dreieck mit den beliebigen Winkeln α , β und γ in 3 Exemplaren aus. Lege jetzt $\sphericalangle \alpha$ des ersten, $\sphericalangle \beta$ des zweiten, $\sphericalangle \gamma$ des dritten aneinander. Was beobachtest du?

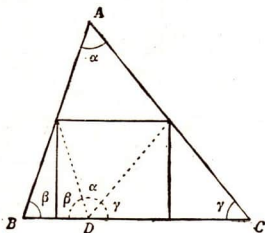


Fig. 63

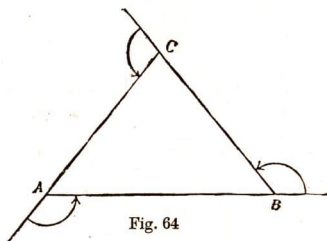


Fig. 64

29. Schneide ein Dreieck aus Papier aus, reiße die Ecken ab und lege die abgerissenen Winkel aneinander. Was beobachtest du?
30. Falte ein Dreieck in der Weise, wie es die obenstehende Fig. 63 angibt. Was läßt der Versuch über die Winkelsumme des Dreiecks vermuten?

Außenwinkel

31. Verlängere eine Dreiecksseite über einen ihrer Endpunkte hinaus; der entstehende Winkel heißt ein Außenwinkel des Dreiecks (im Gegensatz zu den Innenwinkeln). Wieviel Außenwinkel hat ein Dreieck?
32. a) Ein Dreieck hat die Innenwinkel $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 70^\circ$. Berechne alle Außenwinkel. b) Bestimme die Außenwinkel des in Fig. 5 dargestellten Dreiecks, nachdem du die Innenwinkel gemessen hast.
33. Welche Beziehung besteht zwischen einem Außenwinkel und dem zugehörigen Innenwinkel?
34. Wann ist ein Innenwinkel gleich seinem Außenwinkel?
35. Warum sind je zwei an dem gleichen Dreieckspunkt gelegene Außenwinkel gleich?
36. (Verfahren von Thibaut.) Denke dir einen Wanderer, der das $\triangle ABC$ umwandert von einem beliebigen Punkte auf einer Seite an (Fig. 64).

a) An welchen Stellen ändert er seine Richtung? b) Gib an, um welchen Winkel er an diesen Stellen seine Richtung ändert? c) Wenn der Wanderer am Ausgangspunkt seiner Wanderung angekommen ist, hat er seine ursprüngliche Richtung. Um wieviel hat er sich insgesamt gedreht? d) Was läßt sich aus dieser Überlegung für die Summe der Außenwinkel (gemeint sind drei verschiedenen Ecken anliegende Außenwinkel) sagen?

Winkelsatz

37. a) Was läßt sich über die Summe der drei Innenwinkel und der zugehörigen Außenwinkel aussagen? b) Was folgt daraus und aus dem Befund von Aufg. 36 für die Summe der Innenwinkel allein?
38. Gegeben ist ein Dreieck ABC . Trage $\sphericalangle \beta$ an AB in A nach außen und $\sphericalangle \gamma$ an AC in A nach außen an. a) Zeige, daß die freien Schenkel eine Gerade bilden. b) Wie liegt diese Gerade?
39. Gegeben ist ein Dreieck ABC . Ziehe durch A zu BC die Parallele $= XY$. a) Beweise jetzt, daß die Winkel bei A mit den Dreieckswinkeln übereinstimmen. b) Beweise den Satz:

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.

40. Gegeben ist ein Dreieck ABC . Trage β an AB in A nach außen an und an den freien Schenkel in A wieder nach außen auch γ . Zeige, a) daß der freie Schenkel von β parallel BC ist, b) daß der freie Schenkel von γ in die Verlängerung von AC fällt.

41. Entwickle aus Aufg. 40 einen neuen Beweis des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck.

- 42.¹⁾ Fülle von einem Punkt im Inneren des Dreiecks die Senkrechten auf die Seiten (Fig. 65). Es mögen von ihnen die Winkel α' , β' und γ' gebildet werden. Dann ist $\alpha + \alpha' = 2R$ usw. Leite daraus einen Beweis für den Satz von der Winkelsumme im Dreieck ab.

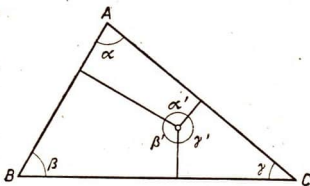


Fig. 65

43. Wie groß ist im $\triangle ABC$ der Winkel α , wenn man kennt:

- | | | | |
|---------------------------|-------------------------|----------------------------|--------------------------|
| a) $\beta = 40^\circ$ | $\gamma = 70^\circ$ | b) $\beta = 71^\circ$ | $\gamma = 28^\circ$ |
| c) $\beta = 107^\circ$ | $\gamma = 18^\circ$ | d) $\beta = 33^\circ$ | $\gamma = 113^\circ$ |
| e) $\beta = 31^\circ 40'$ | $\gamma = 83^\circ 45'$ | f) $\beta = 102^\circ 31'$ | $\gamma = 45^\circ 47'?$ |

44. Es ist ein Dreieckswinkel $\alpha = 70^\circ$. β durchläuft die Werte $10^\circ, 20^\circ \dots$. Welche Werte nimmt γ an? Stelle das Ergebnis in einer Tabelle dar.

45. Gegeben ist ein Dreieck ABC . Drehe den durch die Seite AB gegebenen Strahl um seinen Endpunkt A . Dann ändern sich α und β . In welcher Be-

1) Hier wird die Lösung der Aufg. 34 von § 6 vorausgesetzt.

ziehung stehen die Änderungen zueinander? Welches ist die Grenzlage, in der ein Dreieck nicht mehr entsteht? (Modell!)

46. Von einem Dreieck sind zwei Winkel α und β gegeben. Konstruiere den Winkel γ . Welcher Bedingung müssen α und β genügen, damit überhaupt ein Dreieck möglich ist?
47. Wie groß ist **a)** der Winkel α eines Dreiecks ausgedrückt durch β und γ , **b)** der Winkel β ausgedrückt durch α und γ , **c)** der Winkel γ ausgedrückt durch α und β ?

Begründe die Richtigkeit folgender Sätze:

48. In einem Dreieck kann höchstens ein Winkel stumpf sein.
49. In einem Dreieck kann höchstens ein Winkel ein rechter sein.
50. In einem Dreieck kann kein Winkel überstumpf sein.
51. Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich, dann stimmen die Dreiecke auch in dem dritten Winkel überein.
52. Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so können sie weder rechte noch stumpfe sein.
53. In einem Dreieck sind zwei Winkel gleich, $\alpha = \beta$. **a)** Konstruiere γ , wenn α gegeben ist. **b)** Konstruiere α , wenn γ gegeben ist.
54. In einem Dreieck sind zwei Winkel gleich, $\alpha = \beta$. Drücke **a)** γ durch α , **b)** α durch γ aus.
55. In einem Dreieck sind zwei Winkel gleich. Der dritte durchläuft die Werte $10^\circ, 20^\circ, \dots$ (bis?). Welche Werte durchlaufen dann die einander gleichen Winkel? Stelle eine Tabelle auf.
56. In einem Dreieck sind zwei Winkel gleich. Sie durchlaufen die Winkel $10^\circ, 20^\circ \dots$ (bis?). Welche Werte durchläuft dann der dritte Winkel? Stelle eine Tabelle auf.
57. In einem Dreieck sind alle Winkel gleich. Wie groß ist dann jeder?
58. Teile die Dreiecke **a)** nach der Größe der Winkel, **b)** nach der Gleichheit der Winkel ein. Zeichne von jeder Dreiecksgattung ein Beispiel.
59. Zeichne **a)** ein spitzwinkliges, **b)** ein rechtwinkliges, **c)** ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen einer Winkel 60° ist.
60. Berechne die Winkel eines Dreiecks, das rechtwinklig ist und zwei gleiche Winkel hat. Zeichne ein solches Dreieck.
61. Bestimme die Summe der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks.
62. In einem Dreieck ist $\alpha = \beta$ und γ doppelt so groß wie α . Wie groß sind die Winkel?
63. In einem Dreieck ist β doppelt so groß wie α , γ dreimal so groß wie α . Wie groß sind die Winkel?
64. In einem **a)** gleichwinkligen Dreieck, **b)** rechtwinkligen Dreieck, dessen spitze Winkel gleich sind (2 Fälle), ist ein Winkel in drei gleiche Teile geteilt. Berechne die Winkel der drei Teildreiecke.

Die Außenwinkel des Dreiecks

65. Beweise, daß ein Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der Innenwinkel ist, die nicht Nebenwinkel von ihm sind.
66. Beweise, daß ein Außenwinkel eines Dreiecks größer ist als jeder der Innenwinkel, die nicht Nebenwinkel von ihm sind.
67. In einem Dreieck ist der Außenwinkel α' (d. h. der Außenwinkel von α) 110° . Wie groß sind die Innenwinkel α und β , wenn $\gamma = 40^\circ$ ist?
68. In einem Dreieck ist der Außenwinkel $\alpha' = 100^\circ$. Der Innenwinkel β durchläuft die Werte $10^\circ, 20^\circ, \dots$ (bis?). Welche Werte durchläuft γ ? Stelle eine Tabelle auf.
69. In einem Dreieck ist $\alpha = \beta$. Der Außenwinkel des Winkels γ durchläuft die Werte $10^\circ, 20^\circ, \dots$ (bis?). Welche Werte durchläuft dabei α ? Stelle eine Tabelle auf. Erläutere einige Fälle durch Zeichnungen.
70. Ein Dreieck hat lauter gleiche Außenwinkel. Wie groß sind sie? Was ist das für ein Dreieck?
71. Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen spitzen Winkel von a) 40° , b) 30° , c) α . Wie groß sind die drei Außenwinkel?
72. Wie groß sind die Außenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks mit zwei gleichen Winkeln?
73. Wieviel Außenwinkel eines Dreiecks können ihren Innenwinkeln gleich sein?
74. Mit der nach rechts gerichteten horizontalen Geraden x bildet die Gerade g_1 nach oben den Winkel α , die Gerade g_2 nach oben den Winkel β (Fig. 66). Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden? (Gib den spitzen und den stumpfen Winkel an.)

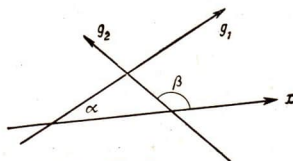


Fig. 66

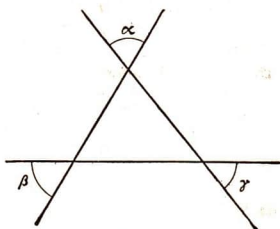


Fig. 67

75. Drei Geraden schneiden sich unter den Winkeln α , β und γ , wobei die Winkel gemeint sind, die die Fig. 67 angibt.
- a) Welcher Satz gilt über die drei Winkel? b) Was wird aus dem Satz, wenn die drei Geraden durch einen Punkt gehen?

76. Vier Geraden schneiden sich (Fig. 68) in den sechs Punkten A, B, C, D, E und F . Die spitzen Winkel bei A, B und C seien α, β und γ . Berechne die Winkel bei D, E und F . Beispiel:
 $\alpha = 37^\circ, \beta = 70^\circ, \gamma = 52^\circ$.

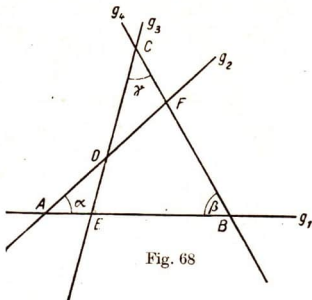


Fig. 68

Überlegungen

77. Leite den Satz, daß jede Dreiecksseite größer ist als die Differenz der beiden anderen, unmittelbar rechnerisch aus dem Satz ab, daß jede Dreiecksseite kleiner als die Summe der beiden andern ist.
78. Wie kann man den Satz, daß eine Seite kleiner als die Summe der beiden andern ist, von Dreiecken auf Vierecke verallgemeinern?
79. Auf welche geometrische Tatsache gehen alle Beweise für den Satz von der Winkelsumme im Dreieck, wenn man sie genau zergliedert, zurück?
- 80.¹⁾ Auf folgende Weise will jemand nachweisen, daß die Winkelsumme im Dreieck $2R$ ist: Die Winkelsumme sei x . Verbindet man einen Punkt im Innern des Dreiecks mit den Ecken, so ist die Winkelsumme aller drei dann vorhandenen Dreiecke $3x$; die Summe der Winkel um den Punkt herum ist $4R$, mithin ist

$$3x - 4R = x.$$

Daraus folgt $x = 2R$. Hier ist die Parallelenlehre nicht benutzt worden. Der Beweis ist also falsch. Wo steckt der Fehler?

- 81.¹⁾ Mache das Thibautsche Verfahren, die Summe der Außenwinkel zu vier Rechten zu bestimmen (Aufg. 36), zu einem strengen, indem du Parallelen benutzt. Was ist dann zu dem Beweis zu sagen?

82. Nimm mit einem Lineal die in Fig. 69 angedeuteten Verschiebungen und Drehungen vor und leite damit die Winkelsumme des Dreiecks ab.

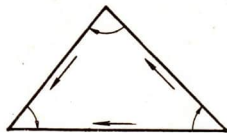


Fig. 69

83. Untersuche, wieviel von den sechs Außenwinkeln eines Dreiecks mindestens, wieviel höchstens stumpf sind.
84. Zwei Winkel liegen so, daß die Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen. Was läßt sich über die Größe der Winkel sagen? Beachte alle möglichen Fälle. (Wiederholung der Aufg. 34 in § 6; jetzt darf aber bei der Untersuchung auch der Satz von der Winkelsumme im Dreieck benutzt werden.)

1) Schwierigere Aufgabe.

85. Wenn man auf dem Umfang eines Kreises den Radius sechsmal mit dem Zirkel abträgt, so kommt man auf den Ausgangspunkt zurück. Man erhält ein gleichseitiges Sechseck. Begründe das.
86. Untersuche, unter welchem Winkel sich die Winkelhalbierenden **a)** der beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, **b)** zweier Winkel eines beliebigen Dreiecks schneiden.
- 87.¹⁾ Über den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks werden rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke errichtet, über den Katheten nach außen, über der Hypotenuse nach innen. Welche Aussagen lassen sich über die gegenseitige Lage der drei Spitzen dieser Dreiecke machen?

Praktische Anwendungen

88. Von den Punkten A und B einer angenähert geradlinigen Landstraße wird ein Kirchturm K anvisiert (Fig. 70). Die Visierrichtungen schließen mit der Richtung der Landstraße **a)** die Winkel $53\frac{3}{4}^\circ$ und $47\frac{1}{2}^\circ$, **b)** die Winkel α und β ein. Unter welchem Schwinke erscheint die Strecke AB von K aus (d. h. wie groß ist der Winkel AKB)?
89. Von der Spitze A eines Turmes erscheint die Breite eines Flusses BC unter dem Winkel $\alpha = 13\frac{1}{4}^\circ$. Das eine Ufer des Flusses (Punkt B) ist unzugänglich. Der Erhebungswinkel γ , d. h. die Steigung der Richtung CA gegen die Horizontale, ist 32° . Wie groß ist der Erhebungswinkel $\beta = \angle ABC$?
90. Um Erhebungswinkel zu messen, fertige dir folgenden Winkelmeßapparat an (Fig. 71): Auf einem halbkreisförmigen Winkelmesser wird im Mittelpunkt mit Wachs ein Lot befestigt. Nun visiert man längs der Kante des Winkelmessers. Durch welchen Winkel, den das Lot anzeigt, wird der Erhebungswinkel α gemessen? Miß mit dem Apparat einige Erhebungswinkel!
91. Wie kann man den in Aufg. 90 beschriebenen Apparat zum Messen von Tiefenwinkeln benutzen? Stelle solche Messungen an!
92. Fig. 72 zeigt einen zum Messen von Höhenwinkeln benutzbaren Quadranten. Untersuche an der Figur, durch welchen Winkel der Höhenwinkel gemessen wird.

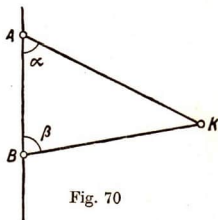


Fig. 70

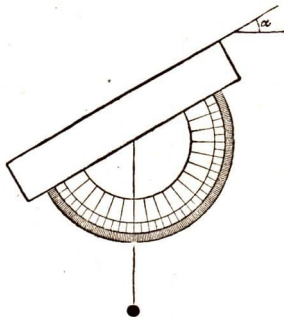


Fig. 71

1) Schwierigere Aufgabe.

93. Gib an, wie man mit dem in Fig. 72 dargestellten oder einem nach ihm gearbeiteten Quadranten Tiefenwinkel messen kann, und begründe die Richtigkeit des Verfahrens.

94. Um die Steigung einer Fläche (den Winkel α in der untenstehenden Fig. 73) zu messen, kann man etwa mit dem in Fig. 71 dargestellten Apparat, den man noch in geeigneter Weise für den besonderen Zweck zurichtet, den Winkel β messen. Untersuche, wie β und α zusammenhängen.

95. Mit einem genauen Winkelmeßapparat sind die drei Winkel eines Dreiecks auf dem Felde in folgender Weise bestimmt worden:

$$\alpha = 92^\circ 19' 37''$$

$$\beta = 68^\circ 27' 17''$$

$$\gamma = 19^\circ 13' 30''.$$

Stelle fest, wie groß der Fehler ist, verteile den Fehler gleichmäßig auf alle Ablesungen. Wie heißen dann die korrigierten Winkelwerte?

96. Man hat auf einem Grundstück (Fig. 74) gemessen $\sphericalangle \alpha_1 = 43^\circ$ und $\sphericalangle \beta_1 = 52^\circ$. Man weiß, daß $\sphericalangle BAD = 1 R$, $\sphericalangle CBA = 1 R$ ist. a) Berechne $\sphericalangle \delta_1$, $\sphericalangle \gamma_1$. b) Ist $\sphericalangle \delta_2$ bestimmt?

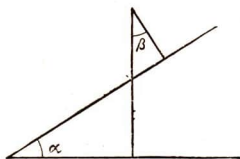


Fig. 73

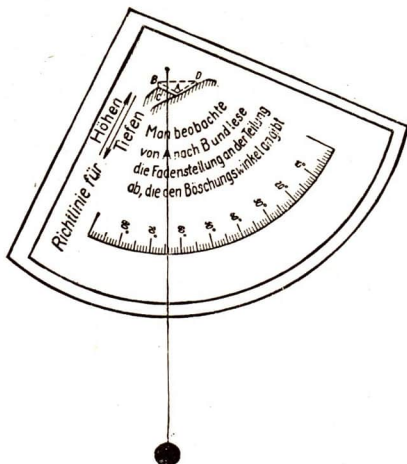


Fig. 72

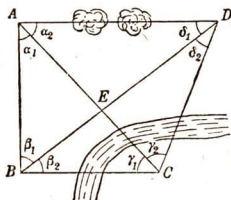


Fig. 74

97. Man will einen Winkel messen, dessen Scheitelpunkt nicht zugänglich ist. Man kann nur den Scheitelpunkt längs der Schenkel anvisieren. Wie kann

man trotzdem die Größe des Winkels bestimmen? Beispiele: die Winkel α und β in der Fig. 75.

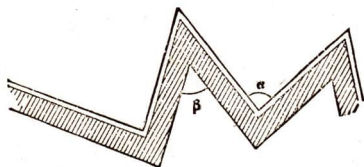


Fig. 75

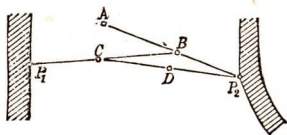


Fig. 76

98. P_1 und P_2 sind Punkte an zwei Mauern. Um die Strecke P_1 und P_2 abzustecken, sollen Zwischenpunkte eingeschaltet werden. Ein unmittelbares Visieren ist aber nicht möglich, da man nicht hinter die Mauern treten kann. Man wählt zunächst einen Punkt A in der Nähe der vermuteten Geraden (Fig. 76), steckt B auf der Geraden AP_2 , C auf der Geraden BP_1 , D auf der Geraden CP_2 usw. Beweise (Außenwinkelsatz), daß die Winkel bei $A, B, C, \dots$ sich immer mehr $2R$ nähern.

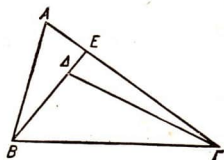


Fig. 77

Aus der Geschichte der Geometrie

99. Aus Euklids Elementen (wahrscheinlich um 300 v. Chr.) I. Buch, 21: „Wenn man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit den Endpunkten einer Seite verbindet, so ist die Summe der beiden Verbindungsstrecken kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten, sie schließen aber einen größeren Winkel ein.“ a) Führe selbst den Beweis (vgl. Fig. 77¹⁾). b) Gilt nun auch der Satz, daß ein gebrochener, von einem zum anderen Endpunkt einer Dreiecksseite gehender Streckenzug im Innern des Dreiecks kleiner ist als die Summe der beiden anderen Seiten?
100. Gauß (1777—1855, Göttingen) fand (Brief an Olbers vom 29. 1. 1822) als Fehler der Winkelsumme im größten von ihm gemessenen Dreieck, das vom Hohehagen bei Göttingen, Brocken und Inselsberg gebildet wird, — 9,56'' (das Minuszeichen besagt, daß dieser Wert von 180° abzuziehen ist). Wieviel Prozent beträgt also der Unterschied zwischen beobachtetem und wirklichem Wert?

1) Die Figuren zu Aufgaben von Euklid und anderen griechischen Autoren sind den Originalausgaben entnommen. In ihnen sind die Punkte mit großen griechischen Buchstaben bezeichnet worden.

§ 8. Symmetrische und unsymmetrische Dreiecke.

Die Grundkonstruktionen

Axiale Symmetrie¹⁾

1. Untersuche, welche der großen lateinischen Buchstaben (in steiler Druckschrift) axialsymmetrisch sind. Welche Buchstaben haben keine, welche eine, welche zwei Symmetrieachsen?
2. Nenne Worte, die, in lateinischer Druckschrift geschrieben, axialsymmetrisch sind (berücksichtige auch waagerechte Symmetrieachsen!).
3. Welche der Ziffern 0, 1, ... bis 9 haben Symmetrieachsen und welches ist deren Lage?
4. Bestimme die Symmetrieachse **a)** von zwei Punkten, **b)** von einem Punkt und einer Geraden, **c)** von zwei Geraden (welche möglichen Fälle?).
5. Bestimme die Lage der Symmetrieachse eines Kreises und einer Geraden, die **a)** den Kreis schneidet, **b)** den Kreis nicht schneidet.
6. Bestimme die Symmetrieachse von zwei sich schneidenden Kreisen **a)** mit gleichen, **b)** mit ungleichen Radien. Bestimme die Symmetrieachse von zwei sich nicht schneidenden Kreisen, **c)** von denen der eine ganz innerhalb des anderen liegt, **d)** von denen der eine außerhalb des anderen liegt.
7. Gegeben ist ein Punkt P_1 und eine Symmetrieachse a . Bestimme den zu P_1 in bezug auf a symmetrischen Punkt P_2 . Welche Punkte fallen mit den ihnen symmetrischen zusammen?
8. Gegeben ist eine Gerade g_1 und eine Symmetrieachse a , die **a)** g_1 parallel ist, **b)** g_1 schneidet. Bestimme die zu g_1 in bezug auf a symmetrische Gerade g_2 .
9. Gegeben sind eine Achse a und zwei zueinander symmetrische Punkte P_1 und P_2 (Fig. 78). Verbinde einen Punkt A der Achse mit P_1 und P_2 und zeige durch Umlappen, daß **a)** $\angle P_1 A = \angle P_2 A$ ist, **b)** daß die Winkel, die $P_1 A$ und $P_2 A$ mit der Symmetrieachse bilden, gleich sind.
10. Zeige, **a)** daß die Verbindungsstrecke zweier symmetrischer Punkte durch die Symmetrieachse halbiert wird, **b)** daß sie senkrecht zur Symmetrieachse steht.
11. Verbinde zwei symmetrische Punkte P_1 und P_2 mit den Punkten A und B der Symmetrieachse. Zeige, daß $\angle A P_1 B = \angle A P_2 B$ ist.
12. Auf einer Seite einer Geraden a liegen die Punkte P_1 und P_2 . Suche auf a einen Punkt A so, daß $P_1 A$ und $P_2 A$ mit a gleiche Winkel bilden.
13. Spiegele ein beliebiges Dreieck an einer Geraden, **a)** die das Dreieck nicht durchsetzt, **b)** die das Dreieck schneidet.

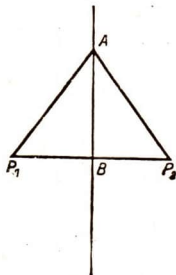


Fig. 78

1) Zum Teil Wiederholungen von § 2, Aufg. 126ff.

14. a) Spiegele ein spitzwinkliges Dreieck ABC an den Seiten a , b und c und nenne die neu entstehenden Punkte A' , B' und C' . Was ist über die Lage von AA' zu a , BB' zu b , CC' zu c zu sagen?

b) Welche Gestalt nimmt die Figur an, wenn das Ausgangsdreieck stumpfwinklig ist?

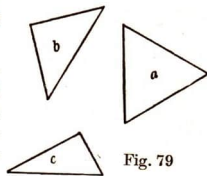


Fig. 79

15. Fig. 79 zeigt drei Dreiecke, und zwar ein gleichseitiges, ein rechtwinklig-gleichschenkliges und ein halbes gleichseitiges. a) Zeige, wie man durch fortgesetzte Spiegelung an den Seiten des Dreiecks und der entstehenden neuen zu einer vollständigen Überdeckung der Ebene kommt.

b) Zeichne in das Ausgangsdreieck irgendeinen beliebigen dicken Strich ein und siehe zu, auf was für Figuren man bei der fortgesetzten Spiegelung kommt (Kaleidoskop).

Symmetrische Dreiecke

16. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis ebenso lang wie ein Schenkel. Der Umfang ist 60 cm. Wie groß sind die Seiten?

17. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Schenkel a) doppelt, b) dreimal so groß wie die Basis. Der Umfang ist 70 cm. Wie groß sind die Seiten?

18. Halbiere den Winkel an der Spitze A eines gleichschenkligen Dreiecks ABC . a) Zeige, daß die Eckpunkte B und C in bezug auf die Halbierungslinie symmetrisch liegen. b) Zeige, daß die Basis von der Winkelhalbierenden halbiert wird. c) Zeige, daß die Winkelhalbierende senkrecht auf der Basis steht. d) Warum geht die Winkelhalbierende durch die Mitte der Basis?

19. Beweise durch Symmetriebetrachtung, daß im gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind, m. a. W. daß Dreiecke mit zwei gleichen Seiten auch Dreiecke mit zwei gleichen Winkeln sind.

20. Wie groß sind die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel an der Spitze a) 34° , b) 75° , c) 90° , d) 30° , e) α beträgt?

21. Wie groß ist der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn einer der Basiswinkel a) 35° , b) 76° , c) 45° , d) α beträgt?

22. Ziehe die Mittelsenkrechte zur Basis eines Dreiecks, das zwei gleiche Winkel hat. Zeige durch Symmetriebetrachtung, daß sich die beiden anderen Dreiecksseiten auf der Achse schneiden. Beweise damit, daß ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln auch gleichschenklige ist.

23. Zeige, daß a) ein gleichseitiges Dreieck gleichwinklig, b) ein gleichwinkliges Dreieck gleichseitig ist.

24. Konstruiere und bestimme die Winkel a) eines gleichseitigen, b) eines gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreiecks.

25. Konstruiere auf Grund der Tatsache, daß die Winkel im gleichseitigen Dreieck 60° betragen, mit Zirkel und Lineal einen Winkel von 60° .

- 26.** Drücke den Außenwinkel des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks durch einen Basiswinkel aus.
- 27.** Wie ändert sich die Gestalt eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis Größe und Lage beibehält (welche Bahn beschreibt die Spitze?), während **a)** der Basiswinkel zunimmt, **b)** die Schenkellänge abnimmt (bis zu welchem Wert?).
- 28.** Wie ändert sich die Gestalt eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel an der Spitze Größe und Lage beibehält, während **a)** die Schenkel wachsen, **b)** die Basis abnimmt? (Lage der verschiedenen Basen zueinander!)
- 29.** Wie ändert sich die Gestalt eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der eine Basiswinkel unverändert seine Lage und Größe beibehält? (Lage der anderen Schenkel zueinander!)

Der Rhombus

- 30.** Spiegle ein gleichschenkliges Dreieck an seiner Basis. Zeige, daß die entstehende Figur ein Rhombus ist.
- 31.** Gegeben ist ein Rhombus. Gib an, auf wieviel verschiedene Weisen der Rhombus durch Spiegelung gleichschenkliger Dreiecke an der Basis entstanden sein kann.
- 32.** Welches gleichschenklige Dreieck führt durch Spiegelung an der Basis auf das Quadrat? (Figur!)
- 33.** Welche Winkel hat ein Rhombus, der durch Spiegelung eines gleichseitigen Dreiecks an einer Seite entstanden ist?
- 34.** Ziehe im Rhombus die Diagonalen. Wie ändert sich die Gestalt (verfolge es an einigen Beispielen), wenn die eine Diagonale bei gleichbleibender anderen **a)** an Länge zunimmt, **b)** an Länge abnimmt?
Beweise **a)** durch Symmetriebetrachtungen, **b)** dadurch, daß du auf die Entstehung aus dem gleichschenkligen Dreieck zurückgehst, die folgenden Sätze:
- 35.** Im Rhombus halbieren die Diagonalen einander.
- 36.** Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.
- 37.** Im Rhombus halbieren die Diagonalen die Winkel.

Streckenhalbierung und Mittelsenkrechte

- 38.** Konstruiere über einer Strecke als einer Diagonale einen beliebigen Rhombus (d. h. nach beiden Seiten mit gleichen Schenkeln gleichschenklige Dreiecke) und ziehe die andere Diagonale. **a)** Welche Sätze gelten dann? — Benutze die Konstruktion, um **b)** eine gegebene Strecke mit Zirkel und Lineal zu halbieren, **c)** um zu einer gegebenen Strecke mit Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte zu ziehen.

39. Halbiere eine Strecke **a)** nach Augenmaß, **b)** mit dem Maßstab, **c)** mit dem Stechzirkel, **d)** mit Zirkel und Lineal (Aufg. 38) und beurteile die vier Verfahren hinsichtlich der Genauigkeit, der Schnelligkeit der Ausführung und der bei der Durchführung benutzten Hilfsmittel.
40. Halbiere die drei Seiten eines Dreiecks und verbinde die Seitenmitten. Welche Tatsache läßt sich aus der Anschauung vermuten?
41. Halbiere die Seiten **a)** eines Quadrates, **b)** eines Rechtecks und verbinde die Seitenmitten der Reihe nach. Welche Tatsache läßt sich aus der Anschauung vermuten?
42. Errichte auf einer Rechtecksseite die Mittelsenkrechte. Warum steht sie auch auf der Gegenseite senkrecht?
43. Die Verbindungsstrecke eines Eckpunktes eines Dreiecks mit der Mitte der Gegenseite heißt Seitenhalbierende (Mittellinie). Konstruiere die drei Seitenhalbierenden s_a , s_b und s_c **a)** eines spitzwinkligen, **b)** eines stumpfwinkligen Dreiecks. Welche Beobachtung machst du?
44. Konstruiere die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks. Welche Beobachtung machst du?
45. Untersuche, ob sich die Mittelsenkrechten eines Rhombus in einem Punkte schneiden.
46. Eine Strecke, die mit Zirkel und Lineal halbiert werden soll, liegt nahe dem unteren Rande des Zeichenblattes und ihm ungefähr parallel. **a)** Wie kann man sich da helfen? **b)** Durch welche Figur wird der Hilfsrhombus in diesem Falle ersetzt?

Fällen der Senkrechten

47. Gegeben ist eine Gerade und ein Punkt außerhalb der Geraden. **a)** Konstruiere einen beliebigen Rhombus so, daß der gegebene Punkt eine Ecke, die gegebene Gerade eine Diagonale wird. Ziehe dann die andere Diagonale. Was gilt über die Lage der beiden Diagonalen? **b)** Benutze die Konstruktion, um von einem Punkte auf eine Gerade mit Zirkel und Lineal die Senkrechte zu fällen.
48. Gegeben ist eine Gerade und ein Punkt außerhalb der Geraden. Fülle von dem Punkt auf die Gerade die Senkrechte **a)** nach Augenmaß (mit dem Lineal), **b)** mit dem Zeichendreieck, **c)** mit Zirkel und Lineal. Beurteile die drei Lösungen der Aufgabe hinsichtlich der Genauigkeit und der Schnelligkeit der Ausführung.
49. Warum kann man von einem Punkte auf eine Gerade nur eine Senkrechte fällen? (Nimm an, es gäbe zwei, und erörtere die Winkel in dem von den zwei Senkrechten und der Geraden gebildeten Dreieck.)
50. Fülle von einer Ecke eines spitzwinkligen Dreiecks die Senkrechte auf die Gegenseite (die Höhe).
51. Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 3 cm und 4 cm.

52. Fälle von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis die Höhe (möglichst einfach!).
53. Fälle vom Scheitel eines spitzen Winkels in einem stumpfwinkligen Dreieck die Höhe auf die Gegenseite.
54. Konstruiere **a)** in einem spitzwinkligen, **b)** in einem stumpfwinkligen, **c)** in einem rechtwinkligen Dreieck die drei Höhen h_a , h_b und h_c . Welche Beobachtung machst du?
55. Errichte über einer Strecke nach beiden Seiten gleichschenklige Dreiecke von verschiedener Höhe. Was ist über die Lage der Verbindungsgeraden der Spitzen zur Basis zu sagen?
56. Eine Gerade, auf die mit Zirkel und Lineal von einem gegebenen Punkt eine Senkrechte gefällt werden soll, liegt am Rande des Zeichenblattes, so daß auf der anderen Seite wenig Platz ist. Wie kann man sich da helfen? (Vgl. Aufg. 55.)
57. Errichte über einer Strecke nach der gleichen Seite gleichschenklige Dreiecke von verschiedener Höhe. **a)** Was ist über die durch die beiden Spitzen gelegte Gerade zu sagen? **b)** Benutze die Figur zur Lösung der Aufg. 56. **c)** Benutze sie zur Lösung der Aufg. 46.
58. Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen Winkel von **a)** 90° , **b)** 270° .
59. Konstruiere mit Hilfe eines gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecks einen Winkel **a)** von 45° , **b)** von 135° .

Errichten einer Senkrechten

60. Gegeben ist eine Gerade und ein Punkt auf ihr. **a)** Zeichne einen Rhombus so, daß die Gerade Diagonale, der gegebene Punkt Diagonalschnittpunkt wird. Ziehe dann die andere Diagonale. Was gilt über die Lage der beiden Diagonalen? **b)** Benutze die Konstruktion, um in einem Punkte einer Geraden auf ihr mit Zirkel und Lineal die Senkrechte zu errichten.
61. Errichte auf einer Geraden in einem ihrer Punkte die Senkrechte **a)** nach Augenmaß, **b)** mit dem Zeichendreieck, **c)** mit Zirkel und Lineal. Beurteile die drei Lösungen der Aufgabe hinsichtlich der Genauigkeit und der Schnelligkeit der Ausführung.
62. Wieviel Senkrechten kann man in einem Punkte einer Geraden auf der Geraden errichten?
63. Konstruiere mit Zirkel und Lineal **a)** ein Quadrat, dessen Seite die Länge $a = 4$ cm hat, **b)** ein Rechteck mit den Seiten 3 cm und 4 cm, **c)** ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Kathete 4,5 cm, **d)** ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 3 cm und 5 cm

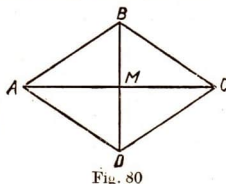
Halbieren eines Winkels

64. Gegeben ist ein spitzer Winkel. **a)** Zeichne einen Rhombus, in dessen einer Ecke dieser Winkel liegt, und ziehe die durch die Ecke gehende Diagonale. Welche Lage hat diese zu dem Winkel? **b)** Benutze die Konstruktion, um einen spitzen Winkel zu halbieren.

65. Halbiere einen beliebigen stumpfen Winkel.
66. Gilt die Konstruktion der Winkelhalbierenden auch für überstumpfe Winkel?
67. Halbiere einen Winkel von a) 90° , b) 60° , c) 120° , d) 180° , e) 270° , f) 240° , g) 300° .
68. Konstruiere mit Zirkel und Lineal folgende Winkel:
- | | | | |
|----------------|------------------|----------------|------------------|
| a) 45° | b) 30° | c) 15° | d) $22,5^\circ$ |
| e) 135° | f) 120° | g) 105° | h) 165° |
| i) 75° | k) $112,5^\circ$ | l) 150° | m) $127,5^\circ$ |
69. a) Konstruiere mit möglichster Beschränkung der Hilfslinien einen rechten Winkel in der Weise, daß du an einen Winkel von 60° einen Winkel von 30° anträgst. (Nur Zirkel und Lineal benutzen!) b) Wann empfiehlt sich diese Konstruktion?
70. Stelle Reihen von Winkeln zusammen, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, indem du a) von 60° , b) von 45° ausgehst.
71. a) Konstruiere einen rechten Winkel, indem du einen gestreckten halbiest. b) Mit welcher anderen Grundkonstruktion fällt diese Konstruktion zusammen?
72. Konstruiere eine Windrose.
73. Gegeben ist ein beliebiger Winkel α . Konstruiere a) $\frac{\alpha}{4}$, b) $\frac{3}{2}\alpha$, c) $\frac{3}{4}\alpha$.
74. a) Konstruiere in einem Dreieck die Winkelhalbierende eines Winkels. b) Untersuche an verschiedenen Beispielen, ob die Winkelhalbierende die Gegenseite halbiert.
75. Konstruiere die drei Winkelhalbierenden a) eines gleichseitigen, b) eines gleichschenkligen, c) eines spitzwinkligen, d) eines stumpfwinkligen Dreiecks. Welche Beobachtung machst du?

Zusammenfassung der Grundkonstruktionen

76. Die in Aufg. 38, 47, 60 und 64 angegebenen vier Grundkonstruktionen können aufgefaßt werden als Konstruktionen eines Rhombus, bei denen in den einzelnen Fällen an verschiedenen Stellen begonnen wird, und bei denen nachher nur einzelne Stücke benutzt werden. Wiederhole alle Konstruktionen noch einmal, indem du in einer Tabelle mit folgendem Kopf für jede Konstruktion den Gang der Handlung durch Angabe der Stücke in nebenstehender Fig. 80 andeutest (ein Beispiel ist ausgeführt):



Art der Aufgabe	Gegebene Punkte, Strecken und Winkel	Nacheinander gefundene Punkte, Strecken, Winkel
Strecke halbieren	A, C	B, D, M

Unsymmetrische Dreiecke

- 77.** Zeichne ein Dreieck ABC , in dem $AC > AB$ ist, und schneide es aus (Fig. 81). Konstruiere die Winkelhalbierende des Winkels α , AD , und klappe $\triangle ADB$ um AD um. Beweise, **a)** daß $\sphericalangle ABD = \sphericalangle A'B'D$ ist, **b)** daß B' auf AC liegt, **c)** daß $\sphericalangle A'B'D$ und damit auch $\beta > \gamma$ ist.
- 78.** Untersuche den Satz (Aufg. 77): Der größeren Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber, am rechtwinkligen Dreieck.
- 79.** Zeige, daß man auch sagen kann: Der größten Seite eines Dreiecks liegt der größte Winkel gegenüber.
- 80.** Kann man auch den Satz so aussprechen: Der kleineren Seite eines Dreiecks liegt der kleinere Winkel gegenüber?
- 81.** Zeige, daß die Seite, die in einem stumpfwinkligen Dreieck dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, die größte ist.
- 82.** (Begriff der Umkehrung eines Satzes): Es liege der Satz vor: Ein Mann, der in Berlin wohnt, ist ein Mann, der in Deutschland wohnt. **a)** Was ist die Voraussetzung? Was ist die Behauptung? **b)** Bilde die Umkehrung des Satzes. Ist sie richtig? Was ist jetzt Voraussetzung? Was Behauptung? **c)** Bilde Sätze aus dem täglichen Leben, die umkehrbar sind, **d)** bilde solche, die man nicht umkehren darf.
- 83. a)** Wie lautet die Umkehrung des Satzes: Ein gleichschenkliges Dreieck hat gleiche Basiswinkel? Ist sie richtig? **b)** Untersuche genau das Verhältnis von Voraussetzung und Behauptung bei Satz und Umkehrung.
- 84.** Stelle die gleiche Untersuchung wie in Aufg. 83 an für den Satz: Die Seite, die dem stumpfen Winkel eines Dreiecks gegenüberliegt, ist die größte.
- 85.** Wie lautet die Umkehrung des Satzes: Der größeren Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber? Beweise ihn.
- 86.** Beweise, daß die kürzeste Verbindung eines Punktes mit einer Geraden durch die Senkrechte von dem Punkt auf die Gerade gegeben ist (Abstand des Punktes von der Geraden).

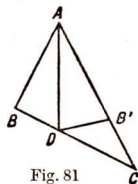


Fig. 81

Der Satz von Thales

- 87.** In einem Kreis mit dem Mittelpunkt M sei ein Durchmesser AB gezogen. Ein beliebiger Punkt P des Umfanges sei mit A , B und M verbunden. **a)** Was ist über die Dreiecke MAP und MBP zu sagen? **b)** Es sei $\sphericalangle AMP = 30^\circ$. Berechne dann nacheinander $\sphericalangle APM$, $\sphericalangle PMB$, $\sphericalangle MPB$, schließlich $\sphericalangle APB$. **c)** Führe dieselbe Rechnung durch, wenn $\sphericalangle AMP$ den beliebigen Wert α hat. **d)** Fasse das Ergebnis in einem Satz (Satz von Thales).
- 88.** Beweise, daß im rechtwinkligen Dreieck die vom rechten Winkel ausgehende Seitenhalbierende (Mittellinie) gleich der Hälfte der Hypotenuse ist.

- 89. a)** Im Endpunkt einer Strecke ist unter Benutzung des Satzes von Thales die Senkrechte zu errichten. **b)** Von einem Punkt ist auf eine Gerade unter Benutzung des Satzes von Thales die Senkrechte zu fällen.
- 90.** Wie kannst du auf den Satz von Thales ein „Examen normae“ (wie z. B. Jungius [1688] sagt), d. h. eine Probe auf die Richtigkeit eines rechten Winkelhakens oder -dreiecks, gründen?

Vermischte Konstruktionen

- 91.** Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 3$ cm.
- 92.** Konstruiere ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck **a)** aus der Kathete $a = b = 3$ cm, **b)** aus der Hypotenuse $c = 5$ cm.
- 93.** Von einem Quadrat ist die Diagonale $e = 7$ cm gegeben. Konstruiere es.
- 94.¹⁾** In einem Dreieck ist zu der Seite a eine Parallele so zu ziehen, daß sie ebenso lang ist wie die zwischen den Parallelen liegenden Stücke der Seiten b und c zusammen.
- 95.** Teile mit Zirkel und Lineal **a)** einen Winkel von 180° , **b)** einen solchen von 90° , **c)** einen Winkel von 45° in drei gleiche Teile. **d)** Mache den Versuch auch bei einem Winkel von 60° . (Genaue Probe mit dem Winkelmesser!)
- 96.** Gegeben ist eine Gerade und ein Punkt. Von dem Punkt soll nach der Geraden eine Strecke gezogen werden, die mit der Geraden einen Winkel von **a)** 60° , **b)** α einschließt. (Konstruktion mit und ohne Verwendung einer Parallelen.)
- 97.** Stelle **a)** von einem Winkel von 135° , **b)** von einem beliebig gegebenen Winkel α den vierten Teil dar. Vermeide alle unnötigen Hilfslinien!

Projektion

- 98.** Man projiziert einen Punkt P auf eine Gerade a , indem man von P auf a die Senkrechte PQ fällt. PQ heißt die Projizierende, Q die Projektion von P auf a . **a)** Projiziere die Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks auf die Gegenseiten (definiere die Begriffe Höhe und Höhenfußpunkt im Dreieck unter Verwendung der Begriffe Projektion und Projizierende). **b)** Entspricht jedem gegebenen Punkte eine und nur eine Projektion auf eine gegebene Gerade? **c)** Entspricht jeder Projektion Q nur ein Punkt P , der auf die gegebene Gerade projiziert wird?
- 99.** Projiziere eine Strecke P_1P_2 auf eine Gerade a . Beachte insbesondere den Fall, daß P_1 oder P_2 ein Punkt auf a selbst ist. Wann ist die Projektion einer Strecke auf eine Gerade nicht eine Strecke, sondern ein Punkt?

1) Etwas schwierigere Aufgabe.

100. a) Projiziere die Seiten a und b eines Dreiecks ABC auf die Seite c .
 b) Welcher Satz läßt sich über die Projektionen zweier Dreiecksseiten auf die dritte aussprechen?
101. a) Von welcher Größe ist die Länge der Projektion einer Strecke auf eine Gerade abhängig, wenn die Länge der Strecke selbst ungeändert bleibt?
 b) Bei welcher Lage erreicht die Projektion einer gegebenen Strecke ihren größten, bei welcher ihren kleinsten Wert?

Geometrische Überlegungen

102. Wir haben bisher immer gefunden (vgl. z. B. Fig. 27), daß in einer Figur, die mehr als zwei Symmetrieachsen hat, sämtliche Achsen durch einen Punkt gehen. Untersuche das genauer.
103. Zwei Geraden sind gegeben. Zeichne die Winkelhalbierende des einen der von ihnen gebildeten Winkel, ohne daß der Schnittpunkt beider zugänglich ist (er möge z. B. nicht mehr auf dem Zeichenblatt liegen).
104. Wenn man ein Dreieck an einer Seite spiegelt und die beiden Spitzen verbindet, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke. Untersuche die Figur, die man Deltoid oder auch Drachen nennt, für verschiedene Fälle, indem du den einen der der Symmetrieachse anliegenden Dreieckswinkel sich ändern läßt.
105. Was läßt sich über die Halbierungslinie des Außenwinkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks sagen?
106. Eine Winkelhalbierende in einem ungleichseitigen Dreieck teilt die Gegenseite in ungleiche Stücke. Untersuche, ob sich eine Aussage darüber machen läßt, wo der größere Abschnitt liegt.
107. Untersuche, wie groß die aus dem rechten Winkel gefällte Höhe eines gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecks ist.
108. Welche Aussage läßt sich über die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks machen, dessen einer Winkel 30° ist?
109. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen einer spitzer Winkel α ist, ist vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse die Höhe gefällt. Untersuche die Winkel der beiden Dreiecke, in die die Höhe das gegebene Dreieck zerlegt.
110. Es seien zwei sich schneidende Kreise mit gleichem Radius gegeben. Die Mittelpunkte der Kreise seien M_1 und M_2 , die Schnittpunkte A und B .
 a) Untersuche die Symmetrieverhältnisse der Figur. b) Suche Sätze über die Figur aufzustellen.
111. Knüpfe an den in Aufg. 110 behandelten Doppelkreis die vier Grundkonstruktionen an.

Praktische Anwendungen

112. Um die Höhe eines Gegenstandes zu messen, kann man folgendermaßen verfahren (Fig. 82). Man geht so weit von dem Gegenstand AB ab, daß

beim Visieren der Hypotenuse eines gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete horizontal, dessen andere Kathete vertikal liegt, die Spitze A in der Blickrichtung erscheint. Ist C der gefundene Standort, C' der Ort des Auges des Beobachters und $B'C' \parallel BC$, so ist $BC = B'A$. Berechne die Höhe AB , wenn sich ergeben hat $BC = 17,3$ m und wenn die Höhe des Auges über der Ebene ($C'C$) 1,3 m ist.

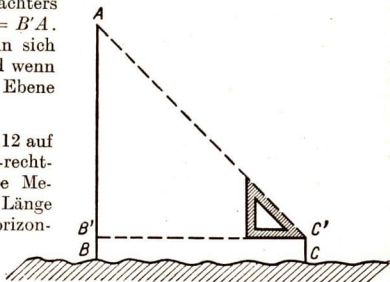


Fig. 82

113. Erkläre, wie man die in Aufg. 112 auf ein vertikales, gleichschenkligh-rechtwinkliges Dreieck angewandte Methode für die Feststellung der Länge unmittelbar nicht meßbarer horizontaler Strecken im Felde verwenden kann. Gib ein Beispiel.

114. In der Nähe der Ortschaften A und B geht eine — angenähert geradlinige — Bahnstrecke vorüber. Man will eine Haltestelle anlegen, die von beiden Ortschaften gleich weit entfernt ist. a) Wie kann man diesen Punkt auf der Karte zeichnerisch finden? b) Ist die Konstruktion auch ausführbar, wenn beide Ortschaften zu verschiedenen Seiten der Bahnstrecke liegen? c) Gilt die Konstruktion praktisch auch dann, wenn die Bahnstrecke an jener Stelle nicht geradlinig verläuft? Kann es dann mehrere Lösungen und unter ihnen wieder eine günstigste geben?

115. In einer kleinen Ortschaft liegen zwei Brunnen A und B . Gib die Grenze zwischen dem Gebiet an, in dem man vorziehen wird, nach A zu gehen, und dem, in dem man lieber nach B geht.

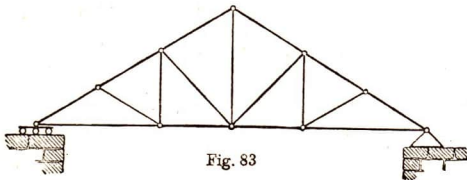


Fig. 83

116. Fig. 83 zeigt einen „Dachbinder“, d. h. ein Fachwerk als Träger eines Daches. Beachte, daß eines der Dreieckspaare gleichseitig ist. Die beiderseits anschließenden Dreiecke sind gleichschenkligh. Auf Grund dieser Tatsache sind alle an dem Dachbinder auftretenden Winkel zu berechnen.

Aus der Geschichte der Geometrie

- 117.** Euklids Elemente, Buch I, 7: „Wenn über einer Geraden AB nach derselben Seite die Dreiecke ATB und ADB gezeichnet sind, so kann nicht gleichzeitig $AT = AD$ und $BT = BD$ sein.“¹⁾ Führe den Beweis. (Fig. 84.)

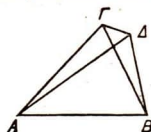


Fig. 84

- 118.** Euklids Elemente, Buch I, 16 (in der Fassung einer Euklidübersetzung von Pirkenstein von 1694): „Wann in einem Triangel die zwey Winckeln einander gleich seynd | so werden auch die zwo Seiten | welche die gleichen Winckeln unterspannen | einander gleich seyn. — Beweis. Ob zwar diese Vorgab auß der Vorhergehenden für eine Warheit könnte angenommen werden: so möchte dannoch einer einwerffen | daß eine von denen zwo Seiten gesetzt | als wie $AB <$ wäre | als die Seiten CB ...“ Und nun wird ein indirekter Beweis des Satzes (vgl. Aufg. 22) gegeben. Führe selbst einen indirekten Beweis.

- 119.** Euklids Elemente, Buch I, 12 (vgl. Fig. 85): „Auf eine gegebene Gerade von einem nicht auf ihr liegenden Punkt eine Senkrechte zu fallen. — Es sei AB die gegebene Gerade, der nicht auf ihr liegende Punkt Γ ... Dann nehme man auf der anderen Seite der Geraden AB einen beliebigen Punkt Δ und beschreibe um Γ als Mittelpunkt mit dem Radius $\Gamma\Delta$ einen Kreis EZH . Die Strecke EH ist dann zu halbieren durch Θ und es sind die Geraden ΓH , $\Gamma\Theta$, ΓE zu ziehen. Ich behaupte, daß dann $\Gamma\Theta$ die Senkrechte zur Geraden AB durch Γ ist.“ Führe den Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion. Vergleiche diese Konstruktion Euklids mit der uns bekannten.

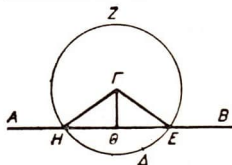


Fig. 85

- 120.** Euklids Elemente, Buch IV, 10 (in der Fassung einer Euklidübersetzung von Pirkenstein von 1694): „Einen zwey gleichseitigen (= gleichschenkligen) Triangel zu machen | dessen jeder Winckel insonderheit bey der Basis | zweymahlen so groß seye | als der übrige dritte Winckel bey dem Schpitz.“ — Berechne die Winkel und zeichne das Dreieck mit Hilfe des Winkelmessers; Euklid verlangt an der angegebenen Stelle eine Zeichnung mit Zirkel und Lineal.
- 121.** (Aus dem Tractatus Quadrantis des Robertus Anglicus, deutsche Übersetzung aus dem Jahre 1477): „Du solt baiten (= abwarten), bis die sunn (= Sonne) wirt jn der höchin 45 staffel (= Grad), so ist der schatt ain yetlichen dings dem ding gleich. dan miß den schatten, so hastu die höchin des dings.“ Erläutere das Verfahren.
- 122.** In alten Lehrbüchern der „geometria practica“, der praktischen Geometrie, findet man folgendes Verfahren zur Höhenbestimmung: Der Beob-

¹⁾ Der Wortlaut ist bei Euklid etwas anders. Wir schließen uns gleich an die beigelegte Figur an.

achter legt sich am Fuße eines Stabes, der Augenhöhe hat, lang auf den Boden und wechselt so lange seine Stellung, bis Auge, Stabspitze und Höhenpunkt in einer Geraden liegen. Erläutere das Verfahren ausführlicher durch eine Zeichnung.

Aus Daniel Schwenters *Geometriae practicae novae* (1618):

123. „Mit dem kurtzen Lineal a vngefehr eine lange lini ziehen so gantz recht.“
D. h. man soll eine lange Linie gerade mit einem kurzen Lineal ziehen. Benutzung des Zirkels ist gestattet.
124. „So eine Lini so lang | vnd man den Circel (weil er zu klein) über die helffte der Lini nicht könnnt aufthun | alsdann die Lini in zwei theil zu theilen.“

§ 9. Kongruenz der Dreiecke

Homologe Stücke

- Gegeben sind zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Beide sind deckungsgleich oder kongruent, d. h. man kann $A'B'C'$ so auf ABC legen, daß sie sich decken. Es falle A' auf A , B' auf B , C' auf C . a) Nenne die zu a, α, c, b' , $\sphericalangle ABC$ homologen Stücke. b) Zeichne in $\triangle ABC$ die Stücke h_a, w_β, s_c und in $\triangle A'B'C'$ die ihnen homologen.¹⁾
- Es ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, und zwar so, daß beim Aufeinanderlegen D auf A , E auf B , F auf C fällt. Nenne (erst mit, dann ohne Figur) die homologen Stücke zu a) AB , b) $\sphericalangle BCA$, c) $\sphericalangle ABC$, d) BC .
- P_1 und P_2 sind symmetrisch in bezug auf die Gerade a (Fig. 78). Punkt A auf a wird mit P_1 und P_2 verbunden, P_1P_2 schneidet die Symmetrieachse in B . Dann ist aus Symmetriegründen $\triangle AP_1B$ deckungsgleich $\triangle AP_2B$. Nenne die homologen Stücke zu a) $\sphericalangle P_1AB$, b) P_1A , c) P_2B , d) $\sphericalangle ABP_2$, e) $\sphericalangle AP_2B$.
- Ein Dreieck ABC wird an der Seite BC gespiegelt; der Gegenpunkt von A ist A' . Wie heißen a) die Paare homologer Seiten, b) die Paare homologer Winkel?

Der erste Kongruenzfall

- Konstruiere ein Dreieck aus $b = 3,5$ cm, $c = 4,5$ cm, $\alpha = 60^\circ$. Beginne die Konstruktion a) mit b , b) mit c , c) mit α . Beurteile die drei Möglichkeiten.
- b und c seien beliebig vorgegebene Strecken, α sei ein beliebig gegebener (spitzer, rechter oder stumpfer) Winkel. Zeichne das Dreieck und untersuche, a) ob immer ein Dreieck konstruierbar ist, b) wieviel gestaltlich verschiedene Dreiecke möglich sind.
- Konstruiere eine Anzahl Dreiecke a) mit den Seiten $b = 3$ cm, $c = 5$ cm, b) mit der Seite $c = 5$ cm und dem Winkel $\alpha = 45^\circ$. Untersuche in beiden Fällen, wieviel gestaltlich verschiedene Dreiecke möglich sind.

1) h_a ist die Höhe auf a , w_α die Winkelhalbierende des Winkels α , s_a die Seitenhalbierende der Seite a .

8. Konstruiere eine Anzahl Dreiecke aus $b = 3 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$. Zeige durch Aufeinanderlegen, daß sie kongruent sind (Dreiecke vorher ausschneiden!).
9. Konstruiere ein Dreieck aus¹⁾ **a)** a, b, γ , **b)** a, β, c .
10. Was folgt aus dem ersten Kongruenzsatz für die Kongruenz **a)** von rechtwinkligen, **b)** von gleichschenkligen, **c)** von rechtwinklig-gleichschenkligen, **d)** von gleichseitigen Dreiecken?
11. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten a und b .
12. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus dem Winkel an der Spitze a und dem Schenkel b .
13. Konstruiere ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, **a)** dessen Kathete b , **b)** dessen Hypotenuse c ist.
14. Es ist $\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$. Man zieht in beiden Dreiecken die Seitenhalbierende AD bzw. $A'D'$. **a)** Beweise, daß die Seitenhalbierenden gleich lang sind. **b)** Beweise, daß die Winkel, die AD mit den Seiten a, b und c bildet, entsprechend gleich sind den Winkeln, die $A'D'$ mit den Seiten a', b', c' bildet.

Der zweite Kongruenzfall

15. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. Beginne die Konstruktion **a)** mit a , **b)** mit β , **c)** mit γ . Beurteile die drei Möglichkeiten.
16. a sei eine beliebige Strecke, β und γ seien beliebige Winkel. **a)** Untersuche, unter welchen Bedingungen aus den drei Stücken ein Dreieck konstruiert werden kann. **b)** Stelle fest, wieviel gestaltlich verschiedene Dreiecke möglich sind (wenn überhaupt Dreiecke möglich sind).
17. Konstruiere eine Anzahl Dreiecke aus $a = 7,5 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 30^\circ$. Zeige durch Aufeinanderlegen, daß sie kongruent sind (vorher ausschneiden!). Zeige auch durch genaue Überlegung, daß man die Dreiecke zur Deckung bringen kann.
18. Konstruiere ein Dreieck aus **a)** b, α, γ ; **b)** c, α, β .
19. Es ist ein Dreieck aus $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ zu konstruieren. **a)** Berechne erst γ und konstruiere dann das Dreieck. **b)** Konstruiere γ und konstruiere danach das Dreieck. **c)** Konstruiere das Dreieck, ohne daß du γ vorher berechnest oder konstruierst (Parallele!).
20. Konstruiere ein Dreieck aus
a) b, β, γ **b)** b, β, α **c)** c, α, γ

1) Wenn für die gegebenen Stücke keine Zahlenwerte angegeben sind, so ist bei der Konstruktion von Stücken von beliebiger Größe auszugehen, die durch Zeichnung gegeben sind.

21. a) Sprich den zweiten Fall des zweiten Kongruenzsatzes in Worten aus.
b) Fasse beide Fälle des zweiten Kongruenzsatzes in einem Satz zusammen.
22. Was folgt aus dem zweiten Kongruenzsatz insbesondere für die Kongruenz
a) von rechtwinkligen, b) von gleichschenkligen Dreiecken?
23. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus einer Kathete und a) dem anliegenden, b) dem gegenüberliegenden Winkel.
24. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, von dem die Basis und a) ein Basiswinkel, b) der Winkel an der Spitze gegeben ist.
25. Gegeben sind zwei kongruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Ziehe in beiden die Winkelhalbierende AD bzw. $A'D'$. Beweise, a) daß beide gleich lang sind, b) daß die Abschnitte, in die BC von D geteilt wird, entsprechend gleich sind den Abschnitten, in die $B'C'$ von D' geteilt wird.
26. Gegeben sind zwei kongruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Ziehe in beiden die Höhen AD bzw. $A'D'$. Beweise, a) daß beide gleich lang sind, b) daß die Höhenabschnitte auf BC entsprechend gleich sind denen auf $B'C'$.

Der dritte Kongruenzfall

27. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 4,5$ cm, $b = 5,5$ cm, $c = 5$ cm.
28. a , b und c seien beliebige Strecken. Gib an, ob immer die Konstruktion eines Dreiecks aus ihnen möglich ist, wenn nicht, welche Bedingungen zwischen a , b und c erfüllt sein müssen.
29. a , b und c seien drei Strecken derart, daß aus ihnen ein Dreieck konstruiert werden kann. Stelle fest, wieviel Dreiecke verschiedener Gestalt daraus konstruiert werden können. Untersuche insbesondere, ob man auf verschiedene Dreiecke kommt, wenn man die Konstruktion einmal mit a , das andere Mal mit b oder schließlich mit c beginnt.
30. Versuche ähnlich wie im Falle der beiden ersten Kongruenzsätze den Nachweis dafür, daß zwei in den drei Seiten übereinstimmende Dreiecke kongruent sind, durch einen Deckungsbeweis zu erbringen. Warum versagt dieses Verfahren hier?
31. Lege zwei in den drei Seiten übereinstimmende Dreiecke mit den größten Seiten aneinander, und zwar so, daß die freien Spitzen auf verschiedene Seiten der gemeinschaftlichen Dreiecksseite und daß beide Dreiecke symmetrisch zueinander liegen. a) Verbinde die Spitzen und zeige, daß die Verbindungsstrecke die gemeinschaftliche Seite schneidet. b) Wende auf die gleichschenkligen Dreiecke, die entstehen, den Satz vom Basiswinkel an. c) Folgere daraus, daß die Winkel an den freien Spitzen gleich sind. d) Wie läßt sich jetzt daraus die Kongruenz der beiden Dreiecke beweisen?

Welche besondere Form nimmt der dritte Kongruenzsatz

32. für gleichschenklige,
33. für gleichseitige Dreiecke an?

34. Ist der Beweis in der Weise von Aufg. 31 auch zu erbringen, wenn man die in symmetrische Lage gebrachten Dreiecke nicht mit der größten Seite aneinanderlegt? Was wird dadurch möglicherweise anders?
35. Einen gegebenen Winkel trägt man an einen Strahl an, indem man dem gegebenen Winkel einen Kreisbogen einzeichnet und einen gleichen Kreisbogen an den Strahl anträgt. Nun trägt man dabei aber mit dem Zirkel eigentlich nicht den Kreisbogen, sondern die zugehörige Sehne an. Beweise die Richtigkeit des Verfahrens durch Kongruenzbetrachtung.

Der vierte Kongruenzfall

36. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 60^\circ$. Untersuche, mit welchen Stücken man die Konstruktion beginnen kann und welches Verfahren das praktischste ist.
37. Konstruiere ein Dreieck aus $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $\alpha = 60^\circ$. Was beobachtest du?
38. Konstruiere (in einer Figur) Dreiecke, in denen $b = 4$ cm und $\alpha = 60^\circ$ fest bleibt, während a) a von 7 auf 8, auf 9 wächst, b) von 7 auf 6, auf 5, auf 3 auf 2, auf 1 abnimmt. Was ist über die Anzahl der Lösungen zu sagen?
39. Beweise ähnlich wie den dritten Kongruenzsatz auch den vierten durch Aneinanderlegen zweier Dreiecke in symmetrischer Weise.
40. Dreieck aus
- a) a, b, β , wo $b > a$ ist;
 - b) b, c, β , wo $b > c$ ist,
 - c) a, c, γ , wo $c > a$ ist.
41. Gilt der vierte Kongruenzsatz auch dann, wenn von einer größeren Seite nicht die Rede ist, wenn vielmehr die beiden gegebenen Seiten gleich sind?
42. Was folgt aus dem vierten Kongruenzsatz für das rechtwinklige Dreieck?
43. Bei der Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem der kleineren von ihnen gegenüberliegenden Winkel mögen zwei Dreiecke entstehen. Zeige, daß dann die der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel sich zu zwei rechten ergänzen.

Zusammenfassung der vier Kongruenzsätze

44. Stelle fest, ob mit den Kongruenzsätzen SSS , SWS , WSW und SWW , SsW (wo S eine Seite, W einen Winkel, s eine kleinere Seite bedeutet, und durch die Nebeneinanderstellung die gegenseitige Lage der Stücke angedeutet wird) alle möglichen Fälle erschöpft sind.
45. Stelle alle Kongruenzsätze zusammen a) für rechtwinklige, b) für gleichschenklige Dreiecke.
46. Sprich alle Kongruenzsätze a) für gleichseitige, b) für rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke aus.
47. Welche Dreiecke sind a) durch drei, b) durch zwei voneinander unabhängige Stücke bestimmt? c) Bei welchen Dreiecken genügt die Angabe eines Stückes?

Vermischte Aufgaben

48. Gegeben sind zwei kongruente Dreiecke. Beweise die Gleichheit entsprechender Winkel, die **a)** von Seitenhalbierenden, **b)** von Höhen, **c)** von Winkelhalbierenden gebildet sind.

Beweise mit Hilfe von Kongruenzsätzen die folgenden, z. T. schon aus § 8 bekannten Sätze über das gleichschenklige Dreieck:

49. Die Höhe von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis ist auch Winkelhalbierende, Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte.
50. Die Halbierende des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist auch Seitenhalbierende, Höhe und Mittelsenkrechte.
51. Die zur Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gehörige Seitenhalbierende ist auch Winkelhalbierende, Höhe und Mittelsenkrechte.
52. Die Mittelsenkrechte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.
53. Die Höhen auf die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich.
54. Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Höhen gleich sind.
55. Die Seitenhalbierenden nach den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich.
56. Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Seitenhalbierende gleich sind.
57. Konstruiere ein Dreieck aus
- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) a, b, α | b) a, b, γ | c) b, c, α |
| d) a, α, β | e) b, α, β | f) c, α, β |
58. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck (der rechte Winkel liegt bei C) aus
- | | | |
|----------------|----------------|---------------|
| a) a, b | b) b, c | c) a, β |
| d) a, α | e) b, α | f) c, β |
59. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck (die Spitze liegt bei A) aus
- | | | | | | |
|-----------|---------------|----------------|----------------|---------------|----------------|
| a) a, b | b) a, β | c) a, α | d) b, α | e) b, β | f) b, γ |
|-----------|---------------|----------------|----------------|---------------|----------------|

Dreieckskonstruktionen mit Teildreiecken

60. Dreieck aus a, s_a und b . **a)** Zeichne ein beliebiges Dreieck und bezeichne darin die drei gegebenen Stücke. Suche ein Teildreieck, das nach einem der Kongruenzfälle zu konstruieren ist. **b)** Konstruiere jetzt erst das Teildreieck, dann die noch fehlenden Stücke. **c)** Untersuche, ob die Konstruktion immer ausführbar ist oder ob zwischen den gegebenen Stücken besondere Bedingungen erfüllt sein müssen.

61. Konstruiere Dreiecke aus den folgenden Stücken und gib jeweilig an, unter welchen Umständen die Konstruktion ausführbar ist, und ob sie ein- oder mehrdeutig ist¹⁾:

a) a, c, s_a	b) $a, \sphericalangle \beta, s_a$	c) $a, s_a, \sphericalangle \gamma$
d) $b, s_b, \sphericalangle \alpha$	e) $b, s_b, \sphericalangle s_b c$	f) $b, s_b, \sphericalangle s_b b$
g) $s_c, \sphericalangle s_c c, \sphericalangle s_c a$	h) $c, b, \sphericalangle s_c c$	i) $c, a, \sphericalangle s_c a$

62. Konstruiere Dreiecke aus den folgenden Stücken und beurteile die Ausführbarkeit und Eindeutigkeit:

a) w_a, α, c	b) w_β, β, c	c) w_γ, γ, a
d) w_a, β, c	e) w_β, γ, a	f) w_γ, α, b
g) w_a, β, γ	h) w_β, β, γ	i) w_γ, α, β

63. Konstruiere Dreiecke aus den folgenden Stücken und beurteile die Ausführbarkeit und Eindeutigkeit:

a) h_a, β, b	b) h_a, c, γ	c) h_b, γ, β
d) h_a, a, β	e) h_b, b, α	f) h_b, a, β
g) h_a, β, γ	h) h_b, α, γ	i) h_c, α, γ

64. Die Abschnitte BD und DC , in die die Dreiecksseite a durch die Höhe $h_a = AD$ geteilt wird, seien p und q genannt (Seitenprojektionen). Konstruiere Dreiecke aus:

a) p, q, b	b) p, q, c	c) p, q, β
d) p, q, γ	e) p, q, h_a	f) p, h_a, α
g) q, h_a, β	h) p, h_a, b	i) q, h_a, c

65. Warum sind die folgenden Konstruktionen von Dreiecken im allgemeinen nicht ausführbar?

a) p, q, a ; b) p, h_a, β ; c) h_a, q, γ ; d) rechtwinkliges Dreieck aus c, s_c .

66. Konstruiere die folgenden Dreiecke (um die Lösung zu finden, suche erst ein geeignetes Teildreieck):

a) s_a, h_a, a	b) s_a, h_a, b	c) s_b, h_b, c
d) s_c, h_c, a	e) w_a, h_a, α	f) w_a, h_a, b
g) w_a, h_a, c	h) w_β, h_b, c	i) w_γ, h_c, a

67. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus (rechter Winkel bei C):

a) h_c, a	b) h_c, α	c) h_c, β
d) w_γ, β	e) w_γ, α	f) w_γ, a
g) w_γ, b	h) s_b, a	i) s_a, b

1) $\sphericalangle ab$, wo a und b irgendwelche Geraden, Strahlen oder Strecken sind, bedeutet: Winkel zwischen a und b . Entstehen mehrere verschiedene Winkel, so sei der spitze gemeint.

68. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck (Spitze bei A) aus:

a) h_a, a

b) h_a, α

c) h_a, b

d) h_a, β

e) h_b, a

f) h_c, a

g) h_b, b

h) w_β, α

i) h_c, c

Dreieckskonstruktionen mit Seitensumme und Seitendifferenz

69. Zeichne ein Dreieck ABC , verlängere AC über A hinaus um AB bis D und ziehe BD . **a)** Was für ein Dreieck ist ABD ? Berechne seine Winkel aus den Winkeln des Dreiecks ABC . **b)** Wie kann man $\triangle ABC$ finden, wenn $\triangle BCD$ bekannt ist? **c)** Wie groß ist CD und $\sphericalangle CDB$, ausgedrückt durch Stücke des Dreiecks ABC ?

70. Konstruiere unter Verwendung der eben (Aufg. 69) angestellten Überlegung ein Dreieck aus:

a) $b + c, a, \gamma$

b) $b + c, a, \alpha$

c) $b + c, \alpha, \beta$

d) $a + b, \alpha, \beta$

e) $b + c, \alpha, \gamma$

f) $b + c, a, h_b$

g) $b + c, a, h_c$

h) $a + c, b, h_c$

i) $b + c, h_c, \alpha$

k) $b + c, a, \beta$

l) $a + b, h_a, \beta$

m) $a + c, b, \alpha$

71. Zeichne ein Dreieck ABC . Es sei $AC > AB$. Trage AB auf AC von A bis D ab und ziehe BD . **a)** Was für ein Dreieck ist ABD ? Berechne seine Winkel aus den Winkeln des Dreiecks ABC . **b)** Wie kann man $\triangle ABC$ finden, wenn $\triangle BCD$ bekannt ist? **c)** Wie groß ist CD und $\sphericalangle CDB$, ausgedrückt durch Stücke des Dreiecks ABC ?

72. Konstruiere unter Verwendung der eben (Aufg. 71) angestellten Überlegung ein Dreieck aus (die auftretenden Differenzen sollen positiv sein):

a) $b - c, a, \gamma$

b) $b - c, a, \alpha$

c) $b - c, \alpha, \beta$

d) $a - b, \alpha, \beta$

e) $b - c, \alpha, \gamma$

f) $b - c, a, h_b$

g) $b - c, a, h_c$

h) $a - c, b, h_c$

i) $b - c, h_c, \alpha$

k) $b - c, a, \beta$

l) $a - b, h_a, \beta$

m) $a - c, b, \alpha$

73. a) bis m) Löse die Aufgaben 72 a) bis m) unter der Voraussetzung, daß die auftretenden Differenzen negativ sind, daß also beispielsweise in den Aufgaben a, b, c, e, f, g, i, k ist: $b < c$ usf.

74. Konstruiere ein Dreieck aus

a) $a + b + c, \alpha, \beta$

b) $a + b + c, h_a, \gamma$

c) $a + b + c, h_c, \alpha$

Geometrische Örter

75. a) Auf welchen Linien liegen die Punkte, die von einer gegebenen Geraden gegebenen Abstand haben? **b)** Zeige, daß alle Punkte der eben gefundenen Linien der vorgeschriebenen Bedingung genügen.

76. Gegeben ist eine Gerade a . Bestimme auf einer zweiten Geraden b die Punkte, die von der Geraden a den gegebenen Abstand s haben. Erörtere die Ausführbarkeit und die Zahl der Lösungen.

- 77. a)** Gegeben sind zwei Geraden a und b . Bestimme die Punkte, die von der Geraden a den gegebenen Abstand p , von der Geraden b den gegebenen Abstand q haben. **b)** Wähle insbesondere $p = q$. **c)** Wieviel Punkte gibt es in jedem Falle?
- 78. a)** Auf welcher Linie liegen die Punkte, die von einem gegebenen Punkte den gegebenen Abstand haben? **b)** Zeige, daß alle Punkte der gefundenen Linie der vorgeschriebenen Bedingung genügen.
- 79.** Gegeben ist eine Gerade a und ein Punkt P . **a)** Gesucht werden die Punkte, die von a den gegebenen Abstand p , von P den gegebenen Abstand q haben. **b)** Wähle insbesondere $p = q$. **c)** Erörtere, wann die Aufgabe ausführbar ist und wieviel Lösungen sie hat.
- 80.** Konstruiere ein Dreieck aus:
- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) a, h_a, h_b | b) b, h_a, h_b | c) c, h_b, h_c |
| d) α, h_b, h_c | e) β, h_a, h_c | f) γ, h_a, h_b |
- 81. a)** Welches ist der geometrische Ort der Punkte, die von zwei gegebenen, nicht parallelen Geraden gleichen Abstand haben? **b)** Zeige, daß alle Punkte der gefundenen Linien die vorgeschriebene Bedingung erfüllen.
- 82.** Gegeben sind drei Geraden a, b und c , von denen keine zwei parallel sind. Gesucht sind die Punkte, die von a und b gleichen Abstand, von c den gegebenen Abstand p haben. (Gilt die Konstruktion auch, wenn die Geraden durch einen Punkt gehen?)
- 83.** Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden a und b und ein Punkt P . Gesucht sind die Punkte, die von a und b gleichen Abstand und von P den gegebenen Abstand p haben.
- 84.** Welches ist der geometrische Ort der Punkte, die von zwei parallelen Geraden gleichen Abstand haben?
- 85.** Gegeben sind zwei parallele Geraden a und b und eine dritte Gerade c , die die ersten schneidet. **a)** Gesucht sind die Punkte, die von den Parallelen a und b gleichen, von c den gegebenen Abstand p haben. **b)** Gesucht sind die Punkte, die von allen drei Geraden den gleichen Abstand haben.
- 86.** Gegeben sind zwei parallele Geraden a und b und ein Punkt P . **a)** Gesucht sind die Punkte, die von den Parallelen a und b gleichen, von P den gegebenen Abstand p haben. **b)** Wann ist kein solcher Punkt vorhanden? **c)** Gesucht werden die Punkte, die von den Parallelen und dem Punkt gleichen Abstand haben. **d)** Wann ist kein solcher Punkt vorhanden?
- 87. a)** Welches ist der geometrische Ort der Punkte, die von zwei Punkten gleichen Abstand haben? **b)** Zeige, daß alle Punkte der eben gefundenen Linie die vorgeschriebene Bedingung erfüllen.
- 88.** Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 und ein dritter Punkt Q . **a)** Gesucht werden die Punkte, die von beiden Punkten gleichen Abstand und von dem

dritten Punkt den gegebenen Abstand p haben. **b)** Wie steht es mit der Ausführbarkeit der Konstruktion?

- 89.** Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 und eine Gerade a . Gesucht werden die Punkte, die von den beiden Punkten gleiche Entfernung haben und **a)** von der Geraden den gegebenen Abstand p haben, **b)** auf der gegebenen Geraden liegen. Erörtere jedesmal die Ausführbarkeit der Konstruktion.
- 90.** Gegeben sind die Punkte P_1 und P_2 . Gesucht wird der geometrische Ort der Scheitelpunkte rechter Winkel, deren Schenkel durch P_1 und P_2 gehen (vgl. § 8, Aufg. 87).
- 91.** Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 . Gesucht werden die Punkte Q , für die $\sphericalangle P_1QP_2$ ein rechter und $P_1Q = P_2Q$ ist.
- 92.** Gegeben sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 . Gesucht werden Punkte Q derart, daß $\sphericalangle P_1QP_2$ und $\sphericalangle P_2QP_3$ beide rechte sind. Erörtere die Ausführbarkeit der Konstruktion.
- 93.** Gegeben ist die Strecke AB . Von welchen von dieser Strecke um die gegebene Strecke p entfernten Punkten Q aus erscheint die Strecke unter einem rechten Winkel?
- 94.** Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck (rechter Winkel bei C) aus **a)** c, h_c ; **b)** p, q .

Vermischte Konstruktionen, die mit Hilfe geometrischer Örter zu lösen sind

- 95.** Welcher Punkt einer Dreiecksseite ist von den beiden andern Seiten gleichweit entfernt?
- 96. a)** Welcher Punkt auf einer Dreiecksseite oder auf ihrer Verlängerung ist von dem gegenüberliegenden Dreieckspunkt und dem einen Endpunkt der Seite selbst gleichweit entfernt? **b)** Wann ist ein solcher Punkt nicht vorhanden?
- 97.** Gegeben ist ein Winkel und zwischen den Schenkeln des Winkels ein Punkt P . Lege durch P eine Gerade, die auf den Schenkeln gleiche Stücke abschneidet. Erörtere die Aufgabe, wenn der Punkt P nicht innerhalb der Schenkel des Winkels liegt.
- 98.** Gegeben ist ein Winkel und zwischen den Schenkeln des Winkels ein Punkt P . **a)** Durch P ist eine Gerade so zu legen, daß von den beiden auf der Geraden durch Punkt und Schenkel herausgeschnittenen Strecken die eine gleich dem anliegenden Abschnitt auf dem Schenkel ist. **b)** Erörtere die Anzahl der Lösungen. **c)** Untersuche, was aus der Aufgabe wird, wenn der Punkt P nicht zwischen den Schenkeln des Winkels liegt.
- 99. a)** Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 und zwei Geraden a_1 und a_2 . Gesucht werden die Punkte, die von P_1 und P_2 und ebenso von den Geraden a_1 und a_2 gleichen Abstand haben. **b)** Wann hat die Aufgabe keine Lösung?

Praktische Anwendungen¹⁾

- 100.** Um die Breite eines Flusses oder eine andere nicht unmittelbar begehbare Strecke zu messen, wird folgende Regel angegeben: Man stellt sich an das Ufer des Flusses; es wird von ihm vorausgesetzt, daß es eben ist. Man hebt den Arm so weit, daß die Daumenspitze und der gegenüberliegende Ufer- rand in einer Richtung liegen. Dann wendet man sich (ohne Arm und Daumen in ihrer Lage zu verändern) nach rechts oder links, merkt sich den Punkt, auf den jetzt die Daumenspitze scheinbar hinweist. Die Strecke bis hin zu diesem Punkt schreitet man ab und hat die Flußbreite. Erkläre, worauf diese Regel beruht.
- 101.** Die Strecke AB ist wegen eines dazwischenliegenden Sees nicht unmittelbar meßbar (Fig. 86). Um ihre Länge festzustellen, kann man so verfahren: Man wählt einen Punkt P im Gelände so, daß die Strecken AP und BP meßbar sind. Man verlängert BP über P um sich selbst bis B' und AP über P um sich selbst bis A' . Dann ist $A'B'$ gleich der gesuchten Länge. **a)** Beweise das. **b)** Wie kann man verfahren, wenn man an die Stelle des Absteckens des zur Messung geeigneten Dreiecks eine Zeichnung in verkleinertem Maßstabe treten läßt?

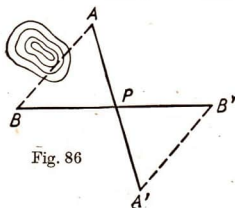


Fig. 86

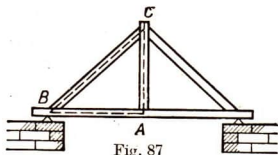


Fig. 87

- 102.** Nimm an, zwischen A und B befinde sich ein Berg, so daß man nicht imstande ist, B von A anzuvisieren. Man will die Richtung von A nach B — etwa um einen Tunnel zu bauen oder um einen möglichst kurzen Verbindungsweg anzulegen — abstecken. Wie kann man da in ähnlicher Weise (**a**) auf dem Felde, **b**) auf dem Zeichenblatt) wie bei Aufg. 101 verfahren?
- 103.** Fig. 87 zeigt in Skizze ein einfaches „Hängewerk“, wie es etwa bei Brücken benutzt wird. Es ist bekannt die Länge des Grundbalkens ($2AB = 10$ m) und die Balkenlänge $AC = 3$ m. Durch eine Zeichnung ist die Länge des Balkens BC und der Winkel ABC zu finden, unter dem der Balken CB in den Balken BA einzusetzen ist.

1) Die Mehrzahl der hier gegebenen Aufgaben erhält erst ihre rechte Bedeutung, wenn durch wirkliche Messungen in der Umgegend der Schule ganz bestimmte zahlenmäßige Beispiele durchgeführt werden. — Nicht wenige der Aufgaben gehören, genau genommen, der Ähnlichkeitslehre an, wenn man nämlich beachtet, daß die Figur im Heft in anderen Maßen gezeichnet wird, als sie die Figur in der Wirklichkeit besitzt. Wenn in dieser Hinsicht Bedenken bestehen, so verschiebe man die Aufgabe bis zur Ähnlichkeitslehre. Unmittelbar der Kongruenzlehre gehören an Aufg. 100, 101 a, 102 a, 106 a.

104. Fig. 88 gibt die Skizze eines doppelten Hängewerks, wie es bei Brücken zwischen 12 m und 14 m Spannweite benutzt wird. Konstruiere aus den gegebenen Größen die fehlenden Balkenlängen.

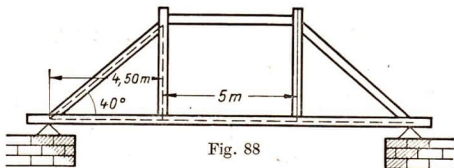


Fig. 88

105. Fig. 89 gibt ein „doppeltes Sprenggewerk“ wieder, das gleichfalls beim Brückenbau (Spannweite 10 m bis 14 m) Verwendung findet. Gegeben ist die Spannweite 12 m, der Mittelbalken ist $\frac{1}{3}$ der Spannweite lang, die Ansatzstelle darf wegen des Wasserspiegels nur 3 m unter der Brückenfläche liegen. Konstruiere die Länge der Seitenstreben und die Winkel, unter denen sie ansetzen.

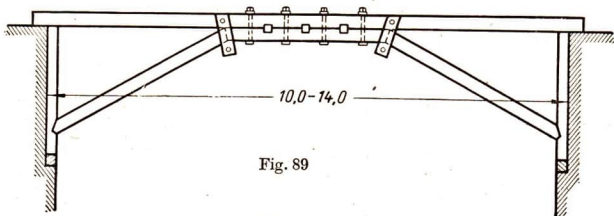


Fig. 89

106. Rechts von einer zwischen den Punkten A und B angenähert geradlinigen Landstraße liegt ein Kirchturm K (Fig. 90). Die Messung der Entfernung des Kirchturms von der Landstraße ist wegen eines dazwischen her fließenden Flusses unmittelbar nicht möglich. Welche Stücke kann man an der Landstraße messen, um die Lage von K a) durch geeignete Stücke, die man auf der linken, der Feldmessung zugänglichen Seite der Landstraße absteckt, b) durch Zeichnung in verkleinertem Maßstabe bestimmen zu können?

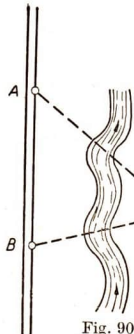


Fig. 90

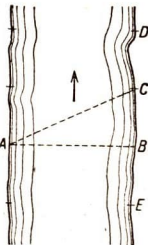


Fig. 91

107. An den Ufermauern des Rheins sind beiderseits in Abständen von 100 m weithin sichtbar weiße Striche angebracht (Fig. 91).

Um die Rheinbreiten an einer Stelle zu bestimmen, beobachtet man an dem einen Ufer an der Stelle A , wo sich ein solcher Strich befindet, unter welchem Winkel die gegenüberliegende Strecke BC von 100 m erscheint. Bestimme durch Zeichnung die Breite, wenn der beobachtete Winkel $\alpha = 25^\circ$ ist.

108. Man kann die Breite des Rheins auch in der Weise bestimmen, daß man von einem Punkte C , der 100 m von B entfernt ist, den B gegenüberliegenden Punkt A anvisiert. Der Winkel zwischen AC und BC sei 63° . Bestimme auf Grund dieser Beobachtung die Flußbreite durch Zeichnung.
109. Nimm an, der A gegenüberliegende Punkt B ist wegen eines Gebüsches am Ufer nicht erkennbar. Es sind jedoch zwei neben B liegende Punkte, etwa C und D oder C und E , sichtbar. Wie ist die in Aufg. 108 entwickelte Methode auf diesen Fall auszudehnen?
110. In den Aufg. 107 bis 109 ist angenommen worden, daß beiderseits vom Flusse Marken in Abständen von 100 m angebracht sind. Wie kann man bei der Bestimmung der Breite des Flusses verfahren, wenn solche Marken nicht vorhanden sind? Voraussetzung ist, daß man beide Ufer betreten kann.
111. Um die Breite eines Flusses zu messen, kann man am gegenüberliegenden Ufer eine Stange von bekannter Länge aufstellen und den Erhebungswinkel ihrer Spitze bestimmen. Daraus läßt sich dann die Breite durch Zeichnung finden. Erläutere das Verfahren.
112. Ist das jenseitige Ufer nicht zugänglich, so kann man etwa von einem am zugänglichen Flußufer stehenden Hause aus von einem Punkte, dessen Erhebung über dem Wasserspiegel bekannt ist, das gegenüberliegende Flußufer anvisieren und den Tiefenwinkel feststellen. Wie läßt sich aus diesen Größen die Flußbreite zeichnerisch finden?
113. Um die Höhe einer Mauer zu bestimmen, hat man folgende Messungen vorgenommen: Man hat aus einer Entfernung $a = 4,85$ m die Mauerkrönung anvisiert und einen Erhebungswinkel von 43° gefunden. Wie läßt sich die Mauerhöhe durch Zeichnung (Maßstab 1 m $\equiv$ 1 cm) bestimmen?

114. Wie ändert sich das Ergebnis (Aufg. 113), wenn man beachtet, daß das Auge des Beobachters beim Anvisieren 1,4 m hoch war?

115. Um die Höhe h eines Berges (oder eines Gegenstandes, dessen Fuß nicht zugänglich ist) zu messen (Fig. 92), steckt man in Richtung auf die Bergspitze eine Strecke AB ab so, daß die

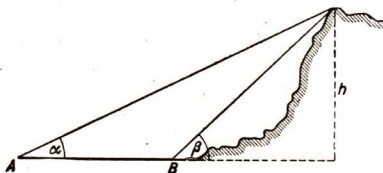


Fig. 92

Bergspitze von A und B aus sichtbar ist. Dann mißt man die Erhebungswinkel α bei A und β bei B . a) Fertige eine Zeichnung in geeignetem Maßstabe unter der Annahme: $AB = 300$ m, $\alpha = 24^\circ$, $\beta = 27^\circ$. b) Unter welchem Winkel würde die Strecke AB vom Gipfel des Berges aus erscheinen?

116. Um festzustellen, wie hoch ein Fenster über der Straße liegt, mißt man von der Stube aus die Fensterhöhe und von der gegenüberliegenden Straßenseite aus die Erhebungswinkel des oberen und unteren Fensterrandes. Erläutere das Verfahren an einer Zeichnung.
117. Man will die Höhe der Sonne messen, d. h. den Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die horizontale Ebene auftreffen. Man beobachtet, daß eine Fahnenstange von 5,35 m Länge einen Schatten von 4,85 m Länge wirft. Bestimme danach durch eine Zeichnung in verkleinertem Maßstabe den gesuchten Winkel.

Geometrische Überlegungen

118. (Erster Inkongruenzsatz.) Zwei Dreiecke stimmen in zwei Seiten, nicht aber in den eingeschlossenen Winkeln überein. Zeige, daß das Dreieck mit dem größeren Winkel auch die größere dritte Seite hat.
119. (Zweiter Inkongruenzsatz.) Formuliere die Umkehrung des ersten Inkongruenzsatzes und beweise sie.
120. Gegeben ist ein Dreieck. Die Seiten werden halbiert und die Halbierungspunkte der Reihe nach miteinander verbunden. Was läßt sich über die so entstandene Figur sagen?
121. Zwei parallele gleichlange Strecken werden über Kreuz miteinander verbunden. a) Welche Aussage läßt sich über die Verbindungsstrecken machen? b) Benutze die Figur zur Herleitung eines Verfahrens, mit Zirkel und Lineal Parallelenkonstruktionen auszuführen.
122. Im Dreieck ABC ist AB über A hinaus um AC bis D , AC über A hinaus um BA bis E verlängert. Was ist über die Geraden BE und CD zu sagen?
123. Die beiden Winkelhalbierenden der Dreieckswinkel α und β mögen sich in O schneiden. Durch O wird die Parallele zu c gezogen. Untersuche, ob du etwas über ihre Länge aussagen kannst.
124. Die Seite AB eines Quadrates $ABCD$ ist in zwei Teile geteilt; dem Punkte A liege die Teilstrecke a an. Man trägt a von B auf BC , von C auf CD , von D auf DA ab und verbindet die Teilpunkte der Reihe nach. Untersuche, was für eine Figur entsteht.
125. Stelle eine entsprechende Untersuchung wie in Aufg. 124 für ein gleichseitiges Dreieck an.
126. Untersuche, was aus den in Aufgabe 124 und 125 erörterten Figuren wird, wenn $a > AB$ ist, d. h., wenn der Teilpunkt auf den Verlängerungen der Quadrat- bzw. Dreiecksseiten liegt.
127. Trage auf dem Umfang des Kreises sechsmal den Radius (als Sehne) ab und verbinde die Teilpunkte, indem du jedesmal einen überspringst. So entsteht ein Hexagramm. Untersuche das Hexagramm.

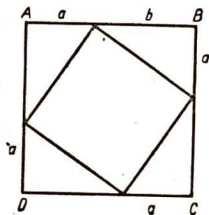


Fig. 93

128. Untersuche, wo in dem folgenden Trugschluß der Fehler steckt:

Jedes Dreieck ist gleichschenkelig. Es sei ABC irgendein Dreieck; dann konstruiere man die Winkelhalbierende des Winkels bei A und die Mittelsenkrechte der Seite BC , die Mitte von BC sei D (Fig. 94). Beide Geraden werden sich schneiden, es sei denn, daß sie parallel sind; im letzteren Falle

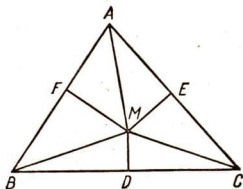


Fig. 94

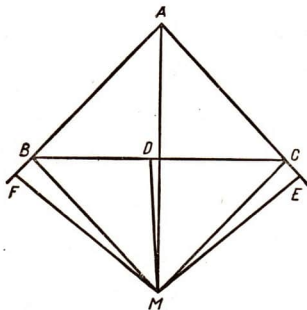


Fig. 95

wäre das Dreieck aber bereits gleichschenkelig, und wir könnten uns den weiteren Beweis ersparen. Der Schnittpunkt der Geraden sei M . Wir betrachten zunächst den Fall, daß dieser Punkt M innerhalb des Dreiecks liegt. Wir fallen von M auf AB und AC die Senkrechten MF und ME . Dann ist

$$(1) \quad \triangle AFM \cong \triangle AEM,$$

$$(2) \quad \triangle MDB \cong \triangle MDC.$$

Aus (1) folgt $MF = ME$, aus (2) $MB = MC$, folglich ist auch

$$(3) \quad \triangle MBF \cong \triangle MCE.$$

Aus (1) folgt $AF = AE$, aus (3) $FB = EC$. Addiert man diese Gleichungen, so ergibt sich entsprechend unsere Behauptung $AB = AC$.

Sollten sich die Winkelhalbierende und die Mittelsenkrechte nicht innerhalb des Dreiecks schneiden, sondern außerhalb, so lassen sich an der Hand der Figur 95 dieselben Schlüsse durchführen wie eben, nur daß am Schluß die beiden Gleichungen nicht zu addieren, sondern zu subtrahieren sind.

Räumliche Betrachtungen

129. Beweise durch Kongruenzbetrachtungen die Gleichheit der Körperdiagonalen **a)** im Würfel, **b)** im Quader; ***c)** konstruiere die Körperdiagonale und ***d)** den Winkel zwischen ihr und einer anstoßenden Kante.

- 130. a)** Die ägyptischen Pyramiden haben eine quadratische Grundfläche, die Spitze liegt senkrecht über der Mitte dieser Grundfläche. Die Seitenkanten sind durch die Verbindungsstrecken der Spitze mit den Quadratecken gebildet. Stelle dir ein Modell einer Pyramide her. Untersuche die durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegten Schnitte; untersuche die Seitenflächen. **b)** Die Spitze einer dreiseitigen Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche liegt über der Mitte der Grundfläche. Untersuche den Körper.
- *131. a)** Unterrichte dich über die Gestalt von Pultdach, Satteldach, Zeltdach, Walmdach und untersuche sie näher. **b)** Lege geeignete Schnitte durch diese Körper und konstruiere sie.
- 132.** Untersuche einen Kegel, dessen Achsenschnitt **a)** ein gleichseitiges, **b)** ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck ist.

Aus der Geschichte der Geometrie

- 133.** Euklids Elemente, Buch I, 5: „Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich und, wenn man die Schenkel verlängert, sind auch die Winkel unterhalb der Basis gleich (Fig. 96). — Es sei $AB\Gamma$ das gleichschenklige Dreieck und $AB = A\Gamma$. AB und $A\Gamma$ sollen verlängert werden um BA und ΓE . Ich behaupte, es ist $\sphericalangle AB\Gamma = \sphericalangle A\Gamma B$ und $\sphericalangle \Gamma BA = \sphericalangle B\Gamma E$. Man nehme nämlich auf BA irgendwo den Punkt Z , und von AE schneide man $AH = AZ$ ab und ziehe $Z\Gamma$ und BH .“ Den jetzt folgenden Beweis dafür, daß zunächst $\sphericalangle \Gamma BZ = \sphericalangle B\Gamma H$ ist, führe selbst.

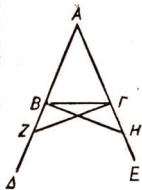


Fig. 96

- 134.** Euklid beweist in den Elementen (Buch I, 8) den dritten Kongruenzsatz mit Hilfe des in § 8 Aufg. 119 genannten Satzes. Führe diesen Beweis.
- 135.** Aus Schwenters Erquickstunden (1686): „Ein distants zweyer Ort so nicht gar weit von einander gelegen | vnd man von einem zum andern nicht gehen kan | mit einem Hut vngefehr zu mässen.“ „Gesetzt du soltest mässen die Breite eines Wassers | vnnd hättest kein Geometrisches Instrument bey dir | woltest aber mit dem Hut | die Breite des Wassers mässen: So stelle dich an das Vfer | ziehe den Stulp deß Huts an den Kopff | daß er vnter sich hange | vnd bewege dein Kopff über sich oder vnter sich | so lang | biß du an dem Stulp hin das ende des Wassers ersehest; darnach halte den Kopff fein still | treh dich umb | sihe wider an den Stulp hinauff die Erde | vnnd wo sich dein radius darauff endet | laß ein Zeichen stecken | miß die distants von dir zum zeichen | so wirst du die Braite des Wassers ziemlich genew haben.“ Warum?

Aus Christian Freiherrn v. Wolff, Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften, 1713:

- 136.** „Mit einer bloßen Schnure oder Kette einen Winkel auf dem Felde von einem Orte auf den andern zu tragen.“ — Gib selbst eine Lösung.

137. „Die Weite zweyer Oerter zu messen, zu deren einem B man nur kommen kan. — Stecket nach Gefallen einen Stab in E und traget die Linie BF dergestalt zurücke, daß der Stab C mit E und B in eine Linie kommet. Machet einen Winckel in C , der so groß ist wie der Winckel B . Endlich gehet mit dem Stabe D so weit zurücke, bis er mit C und F , ingleichen mit E und A in einer Linie stehet. So ist die Linie CD der Linie AB gleich.“ a) Führe den Beweis. b) Der Verf. fügt hinzu: „Wenn man die Breite eines Flusses messen wolte und könnte die Linie BE an dem Ufer nicht zurücke tragen; so stöcket man den Stab B so weit vom Ufer weg als einem beliebt. Alsdenn wird die Linie CD um so viel breiter als der Fluß, um wieviel der Stab B von dem Ufer weggerücktet worden.“ Führe auch hier den Beweis.

Viertes Kapitel

Das Viereck

§ 10. Das allgemeine Viereck

Begriff des Vierecks

1. Wann ist durch vier Punkte ein ebenes Viereck bestimmt?
2. Zeichne ein Viereck mit vier konvexen Ecken. Wie liegen in einem solchen Viereck die Diagonalen?
3. a) Wieviel einspringende Ecken kann ein Viereck haben? b) Wie liegen in einem Viereck mit einspringenden Ecken die Diagonalen?
4. a) Zeichne ein überschlagenes Viereck. b) Wie liegen in einem überschlagenen Viereck die Diagonalen?
5. a) Bei welchen Arten von Vielecken schneiden sich die Diagonalen im Inneren, bei welchen Arten außerhalb des Vierecks? b) Können die Diagonalen auch parallel sein?
6. Gegeben sind vier beliebige Punkte der Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Wieviel Vierecke lassen sich aus Verbindungsstrecken der gegebenen Punkte finden?
7. Gegeben sind a) irgend drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, b) irgend vier nicht zu dreien in gerader Linie liegende Punkte. Die Punkte werden der Reihe nach miteinander verbunden. Untersuche, ob es a) Dreiecke, b) Vierecke gibt, die nicht in einer Ebene liegen.
8. Gegeben sind vier Geraden in einer Ebene. a) Wieviel Vierecke sind durch sie bestimmt? b) Wann sind keine Vierecke durch sie bestimmt?
9. Bilde ein Viereck aus Stäben mit Scharniergelenken (Pappstreifen, mit Punzen verbunden, oder dgl.) an den Ecken. a) Ist ein Viereck mit bestimmten Seitenlängen starr? b) Ist ein entsprechendes Dreieck starr? c) Wie kann man ein Viereck starr machen? (Fachwerk.)

Der Winkel im Viereck¹⁾

10. Bestimme die Summe der Innenwinkel im Viereck dadurch, daß du das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegst.
11. Verbinde einen Punkt im Innern des Vierecks mit den vier Ecken. Wieviel Dreiecke entstehen? Wie groß ist die Winkelsumme aller Dreiecke? Wie groß ist die Summe der Viereckswinkel?
12. Führe die Überlegung der Aufg. 11 durch, wenn der Punkt, der mit den Ecken des Vierecks verbunden wird, außerhalb des Vierecks liegt.
13. Lasse den Punkt, der mit den Ecken des Vierecks verbunden wird, **a)** auf eine Seite, **b)** in eine Vierecksecke fallen. Wie gestalten sich die Überlegungen dann?
14. Bestimme die Summe der Außenwinkel des Vierecks nach dem Verfahren von Thibaut (vgl. § 7, Aufg. 36). Wie groß ist die Summe der Innen- und Außenwinkel zusammen, wie groß die der Innenwinkel allein?
15. Führe den Beweis für den Satz von der Winkelsumme im Viereck, indem du etwa mit einem Lineal die in der Fig. 97 angegebenen Verschiebungen und Drehungen ausführst.
16. In einem Viereck ist:
 - a) $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$; gesucht δ .
 - b) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 90^\circ$; gesucht δ .
 - c) $\alpha = \beta = 100^\circ$ und $\gamma = \delta$; gesucht γ .
 - d) $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $\alpha = 50^\circ$; gesucht β , γ , δ .
 - e) $\alpha = \beta = 2R$, $\alpha = \gamma$, $\beta = 45^\circ$; gesucht α , γ , δ .
 - f) $\alpha = \gamma$, $\beta = 180^\circ - \delta$. Was kann noch gegeben sein?

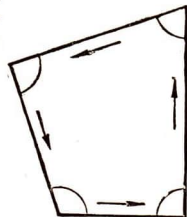


Fig. 97

17. Bestimme die Winkelsumme in einem Viereck mit einspringender Ecke. Welche Beweismethoden sind geeignet, welche nicht?
18. Versuche die Winkelsumme in einem überschlagenen Viereck zu bestimmen.
19. Ist bei den Beweisen für die Winkelsumme im Viereck vorausgesetzt, daß die Vierecke eben sind, oder gilt der Satz auch für räumliche Vierecke?

Konstruktionen

In einem Viereck $ABCD$ werden genannt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$.

20. Konstruiere ein Viereck aus

- | | | |
|-------------------------|------------------------------|-------------------------|
| a) a, b, c, d, e | b) a, c, d, β, e | c) b, c, d, α, f |
| d) a, b, d, γ, f | e) a, b, α, γ, e | f) a, b, c, α, e |

21. Wieviel Stücke kann man in einem Viereck beliebig geben?
22. Gib an, welche Bedingungen erfüllt sein müssen zwischen folgenden Stücken eines beliebigen Vierecks:

- | | | |
|---|-------------------|-------------------|
| a) α, β, γ und δ | b) a, b und e | c) a, d und f |
|---|-------------------|-------------------|

1) Wo nichts anderes gesagt wird, wird das Viereck konvex vorausgesetzt.

Praktische Anwendung

23. Fig. 98 zeigt eine Lageskizze. Die Entfernung PC ist zu bestimmen, ohne daß P von C aus sichtbar ist. Man steckt die Punkte A und B so ab, daß AC , BC meßbar sind und daß die Winkel α , β , γ durch Visieren gefunden werden können. Führe die Konstruktion auf dem Papier (im Maßstab 1 : 10000) durch, wenn gefunden ist: $a = 350$ m, $b = 400$ m, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 48^\circ$, $\gamma = 125^\circ$.

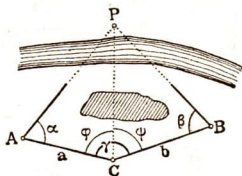


Fig. 98

Die Winkelsumme im Vieleck

24. Bestimme die Summe der Innenwinkel in einem konvexen a) Fünfeck, b) Sechseck, c) Achteck nach verschiedenen Methoden.
25. Gib einen allgemeinen Ausdruck für die Summe der Winkel in einem n -Eck an und berechne ihn für $n = 10$, $n = 17$.
26. a) Berechne die Winkelsumme eines Pentagramms (Fig. 99), d. h. die Summe der Winkel an den fünf Ecken; *b) gib auch alle anderen Winkel an.

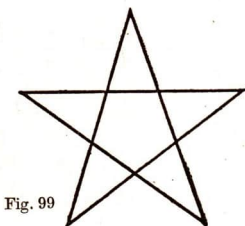


Fig. 99

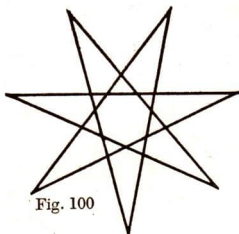


Fig. 100

27. a) Wie groß ist die Summe der Innenwinkel eines Siebensterns (Fig. 100)? *b) Gib die Größe aller anderen in der Figur auftretenden Winkel an.
28. Wie groß sind die Innenwinkel eines nicht überschlagenen gleichwinkligen a) 5-Ecks, b) 6-Ecks, c) n -Ecks, *d)—*f) wie groß die Außenwinkel?

Geometrische Überlegungen

29. Welche regelmäßigen Vielecke können um einen Punkt herum so angeordnet werden, daß sie einander nicht überdecken und keine Lücken lassen (Parkettmuster)?
30. a) Untersuche, unter welchen Umständen zwei Vierecke kongruent sind. b) Stelle eine Anzahl von Kongruenzsätzen für das Viereck auf (als Stücke sollen in Betracht kommen die Seiten, Winkel und Diagonalen des Vierecks).
- *31. Durch einen Endpunkt A des Vierecks zieht man die Parallele zu einer der beiden nicht durch A gehenden Seiten. Beweise an der Hand dieser Figur auf Grund von Parallelenätzen den Satz von der Winkelsumme des Vierecks.
- *32. Gib obere und untere Grenzen für die Summe der Diagonalen eines Vierecks an.

Räumliche Betrachtungen

- *33.** Untersuche den Begriff der Kongruenz bei **a)** Würfeln, **b)** Quadern.
- 34.** Untersuche die Schnitte durch ein **a)** gerades, **b)** schiefes vierseitiges Prisma.
- 35.** Durch die Mitte eines Würfels wird ein Schnitt gelegt, der zwei aneinanderstoßende Würfelkanten halbiert. Untersuche die Schnittfigur.
- 36.** Untersuche die bei regelmäßigen **a)** fünfseitigen, **b)** sechsseitigen Prismen auftretenden Körperdiagonalen.

§ 11. Trapez und Parallelogramm**Das Trapez**

- 1.** Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit ein Viereck ein Trapez ist?
- 2.** Wie kann ich mir ein Trapez **a)** aus einem Viereck, **b)** aus einem Dreieck entstanden denken?
- 3.** Wie kann ich ein Trapez zu einem Dreieck ergänzen?
- 4. a)** Zeichne ein gleichschenkliges Trapez. **b)** Wie kann ich mir ein gleichschenkliges Trapez aus einem gleichschenkligen Dreieck entstanden denken?
c) Wie kann ich ein gleichschenkliges Trapez zu einem gleichschenkligen Dreieck ergänzen?
- 5. a)** Zeichne ein rechtwinkliges Trapez. **b)** Wie kann ich mir ein rechtwinkliges Trapez aus einem rechtwinkligen Dreieck entstanden denken?
c) Wie kann ich ein rechtwinkliges Trapez zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzen?
- 6.** Welche Arten von Trapezen sind axialsymmetrisch? Konstruiere die Symmetrieachse.
- 7.** Kann es auch **a)** Trapeze mit einspringenden Ecken, **b)** überschlagene Trapeze geben? (Grund.)
- 8.** Welche Beziehungen bestehen zwischen den Winkeln **a)** eines beliebigen, **b)** eines rechtwinkligen, **c)** eines gleichschenkligen Trapezes?
- 9.** In einem Trapez mögen die Winkel α und β der einen, γ und δ der anderen Parallelen anliegen. Es ist gegeben:

a) $\alpha = 50^\circ$	$\beta = 45^\circ$	Berechne γ und δ .
b) $\alpha = 130^\circ$	$\beta = 150^\circ$	Berechne γ und δ .
c) $\gamma = 140^\circ$	$\delta = 60^\circ$	Berechne α und β .
d) $\alpha = \delta$	$\beta = 70^\circ$	Berechne α , γ und δ .
e) $\alpha = \beta$	$\gamma = 100^\circ$	Berechne α , β , δ .
- 10.** In einem gleichschenkligen Trapez durchläuft ein Winkel die Werte $10^\circ, 20^\circ, \dots, 170^\circ$. Stelle in einer Tabelle zusammen, welche Werte gleichzeitig die anderen Winkel durchlaufen.
- 11.** In einem beliebigen Trapez behält der Winkel α den Wert **a)** 60° , **b)** 110° bei. β durchläuft die Werte $10^\circ, 20^\circ, \dots, 170^\circ$. Stelle in einer Tabelle zusammen, welche Werte gleichzeitig die Winkel γ und δ durchlaufen.

12. Zeige, daß ein Trapez, in dem die Winkel an einer der Parallelen gleich sind, gleichschenkelig ist.
13. Unter welchen Umständen sind in einem Trapez die Diagonalen gleich?
14. Verbinde in einem gleichschenkligen Trapez die Mitten der parallelen Seiten. Was läßt sich über die Lage der Geraden sagen?
15. Verbinde in einem Trapez die Mitten der nicht parallelen Seiten **a)** Was läßt sich über die Lage dieser Geraden sagen? **b)** Drücke die Länge dieser Mittellinie des Trapezes durch die beiden Parallelen a und c aus.¹⁾
16. Ein Trapez ist aus Stäben gebildet, die in den Ecken durch Scharniere verbunden sind. Ist das Trapez beweglich oder stabil, wenn dafür gesorgt wird, daß tatsächlich die beiden parallelen Seiten parallel bleiben?

Konstruktion von Trapezen

17. Konstruiere ein Trapez aus (die parallelen Seiten sind a und c , die Diagonalen $AC = e$, $BD = f$, der Parallelenabstand h):

a) a, b, c, β b) a, b, c, γ c) a, b, c, e d) a, b, d, e e) a, c, e, β f) a, d, e, γ g) a, b, α, β h) c, d, α, γ i) a, α, β, h

18. Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez aus (die parallelen Seiten sind a und c , so daß b und d gleich lang sind):

a) a, b, β b) a, b, e c) a, d, δ

19. Konstruiere ein rechtwinkliges Trapez aus (die rechten Winkel liegen bei B und C):

a) a, b, c b) a, b, α c) a, d, δ

20. Wieviel voneinander unabhängige Stücke sind erforderlich, um **a)** ein beliebiges, **b)** ein gleichschenkliges, **c)** ein rechtwinkliges Trapez zu konstruieren?

21. Nenne Stücke im Trapez, die voneinander abhängig sind.

22. In einem Trapez $ABCD$ (Fig. 101) mit den parallelen Seiten a und c sei $a > c$. Ziehe durch D zu BC die Parallele. Sie schneide AB in E . Wie groß ist AE ?

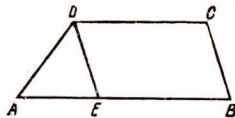


Fig. 101

23. Konstruiere ein Trapez aus (überall ist $a > c$ vorausgesetzt):

a) $a - c, d, e, h$ b) $a - c, h, \alpha, f$ c) $a - c, \alpha, \beta, e$ d) $a + c, \alpha, \beta, h$ e) $a + c, \alpha, b, h$ f) $a + c, \beta, d, h$

1) Zum Nachweis dieser Beziehung sind die Überlegungen in Aufg. 24ff. zu benutzen.

Das Parallelogramm

24. Unter welchen Umständen ist ein Viereck ein Parallelogramm?
25. Die Winkel eines Parallelogramms seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Mache eine Aussage über die Winkel, indem du die Tatsache benutzt, daß das Parallelogramm **a)** ein Viereck, **b)** ein Trapez, **c)** in doppelter Weise ein Trapez ist.
26. Welcher Unterschied und welche Übereinstimmung besteht zwischen Parallelogramm und gleichschenkligen Trapez?

Winkel im Parallelogramm

27. Mache eine Aussage über die Gegenwinkel im Parallelogramm, indem du **a)** einen dritten Parallelogrammwinkel, **b)** den Außenwinkel eines dritten Parallelogrammwinkels zu Hilfe nimmst. **c)** Ziehe eine Diagonale und beweise den Satz über die Gegenwinkel aus der Kongruenz der entstehenden Dreiecke.
28. Ein Winkel eines Parallelogramms ist **a)** 63° , **b)** 113° , **c)** φ . Wie groß sind die anderen?
29. Ein Winkel α eines Parallelogramms durchläuft die Werte $10^\circ, 20^\circ, \dots, 170^\circ$. Stelle in einer Tabelle zusammen, welche Werte dabei die anderen drei Winkel durchlaufen.
30. Es bestehen insgesamt sechs Gleichungen zwischen zwei der Winkel des Parallelogramms. (Warum?) Stelle sie zusammen.
31. Fertige ein Modell eines in den Ecken beweglichen Parallelogramms. Welche Bewegungsmöglichkeiten sind vorhanden?
32. Unter welchem Winkel schneiden sich die Höhen eines Parallelogramms, dessen einer Winkel α ist?

Seiten im Parallelogramm

33. Ziehe in einem Parallelogramm eine Diagonale und beweise durch Kongruenzbetrachtung, daß im Parallelogramm die Gegenseiten gleich sind.
34. Gegeben ist ein Viereck, in dem die Gegenseiten paarweise gleich sind. Beweise, daß das Viereck ein Parallelogramm ist (eine Diagonale als Hilfslinie).
35. Gegeben ist ein Viereck, in dem ein Paar Gegenseiten gleich und parallel ist. Beweise, daß das Viereck ein Parallelogramm ist (eine Diagonale als Hilfslinie).
36. Konstruiere ein Parallelogramm aus
- | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| a) a, b, α | b) a, b, β | c) a, b, e |
| d) a, b, f | e) a, α, f | f) a, β, e |

Diagonalen im Parallelogramm

37. Ziehe in einem Parallelogramm die beiden Diagonalen und untersuche, ob sie gleich lang sein müssen und ob sie gleich lang sein können.
38. Ziehe in einem Parallelogramm die Diagonalen und beweise, daß sie sich gegenseitig halbieren.

39. Gegeben ist ein Viereck, in dem die Diagonalen einander halbieren. Untersuche, ob das Viereck ein Parallelogramm ist.
40. Konstruiere ein Parallelogramm aus $e, f, \sphericalangle ef$.
41. Ein Parallelogramm behält die Seitenlängen bei, ändert aber die Winkel. Ändert sich die Länge der Diagonalen oder nicht? (Zeichnung!)
42. Ein Parallelogramm behält die Länge der Diagonalen bei, ändert aber den Winkel zwischen den Diagonalen. Ändern sich die Seiten des Parallelogramms?

Das Parallelogramm als zentralsymmetrische Figur

43. Gegeben ist ein Punkt O und ein Punkt P . Verbinde P mit O und verlängere PO über O hinaus um sich selbst bis Q . P und Q heißen in bezug auf O zentralsymmetrisch; O heißt das Zentrum der Symmetrie. Nenne zentralsymmetrische Buchstaben und Ziffern.
44. Um wieviel Grad muß man den Strahl OP um O drehen, damit P mit dem ihm zentralsymmetrischen Punkt Q zusammenfällt?
45. Gegeben ist eine Gerade und außerhalb der Geraden ein Punkt O . Suche die zu der Geraden in bezug auf O zentralsymmetrische Gerade.
46. a) Welche Vereinfachung erfährt die Lösung der Aufg. 45, wenn O auf der Geraden liegt. b) Suche zu einem Winkel die in bezug auf den Scheitelpunkt zentralsymmetrische Figur.
47. P_1 und P_2 mögen in bezug auf O zentralsymmetrisch liegen. Zeige, daß P_1P_2 von O halbiert wird.
48. Zeige, daß in einer zentralsymmetrischen Figur die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte alle durch einen Punkt, das Zentrum der Symmetrie, gehen und von diesem Punkt halbiert werden.
49. Gegeben sind ein Punkt O und eine Figur. Man konstruiert zu der Figur die in bezug auf O zentralsymmetrische. Zu der Figur, die man erhält, konstruiert man wieder die in bezug auf O zentralsymmetrische. Was ist das Ergebnis?
50. Untersuche, welche von den im folgenden genannten Figuren zentralsymmetrisch sind. Bei denen, die es sind, trage in eine Zeichnung das Zentrum der Symmetrie ein:
- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| a) Kreis, | b) gleichschenkliges Dreieck, |
| c) rechtwinkliges Dreieck, | d) beliebiges Dreieck, |
| e) Quadrat, | f) Rechteck, |
| g) Parallelogramm, | h) Pentagramm, |
| i) Trapez, | k) beliebiges Viereck. |
51. Suche das Zentrum der Symmetrie bei den folgenden Figuren: a) zwei sich schneidende Geraden, b) zwei parallele Geraden, c) eine Gerade, d) ein Paar paralleler Geraden, das von einer dritten Geraden geschnitten wird.
52. Konstruiere zu einem Dreieck dasjenige, das zentralsymmetrisch a) in bezug auf einen Eckpunkt, b) in bezug auf die Mitte einer Seite liegt.

53. Beweise **a)** die Gleichheit der Gegenseiten, **b)** die Gleichheit der Gegenwinkel im Parallelogramm, indem du das eine der durch eine Diagonale gebildeten Dreiecke um das Symmetriezentrum des Parallelogramms um 180° drehst.
54. Beweise, daß aus jeder durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen eines Parallelogramms gelegten Geraden durch das Parallelogramm Strecken herausgeschnitten werden, die durch jenen Schnittpunkt halbiert werden.

Konstruktionen von Parallelogrammen

55. Konstruiere ein Parallelogramm aus:

a) b, e, f

b) $a, e, \sphericalangle e f$

c) a, h_a, e

d) c, h_a, f

e) e, h_a, β

f) h_a, e, f

56. Wieviel voneinander unabhängige Stücke kann man für die Konstruktion eines Parallelogramms vorschreiben?
57. Es seien $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Seiten und Winkel eines Parallelogramms. Welche Stücke sind voneinander abhängig? Gib, soweit möglich, die Abhängigkeit in Gestalt von Gleichungen.
58. Konstruiere zu einer Geraden a durch einen Punkt P die Parallele, indem du eine Strecke auf der Geraden als Seite und P als einen Eckpunkt eines Parallelogramms wählst. Die mit Zirkel und Lineal konstruierte Gegenseite ist dann die gesuchte Parallele.
59. Beurteile, welche von den Parallelenkonstruktionen, diejenige, die den Satz vom Parallelogramm benutzt, oder diejenigen, die auf den Sätzen vom Schnitt eines Parallelenpaares mit einer Geraden beruhen, die zweckmäßigeren sind. — Wiederhole die vom Zeichner angewandten Methoden.

Konstruktionen mit Hilfe von Parallelogrammen

60. Um eine Strecke AB in drei Teile zu teilen, hat man (Fig. 102) in A einen Strahl angetragen und auf ihm dreimal die beliebige Strecke m abgetragen. Den letzten Endpunkt verbindet man mit B und zieht durch die anderen Endpunkte Parallelen zu der Verbindungsstrecke. Die Parallelen schneiden dann aus der Strecke die gesuchten Teilmittel heraus. **a)** Beweise die Kongruenz der schraffierten Dreiecke. **b)** Beweise, daß die nicht schraffierten Figuren Parallelogramme sind. **c)** Beweise die Richtigkeit der Konstruktion.
61. Teile nach der in Aufg. 60 entwickelten Methode eine gegebene Strecke in **a)** fünf, **b)** sieben Teile.

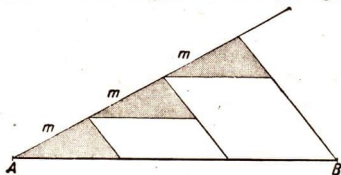


Fig. 102

62. Um bei der Lösung der Aufg. 61 das Konstruieren der Parallelen zu vereinfachen, kann man (Fig. 103) in B nach unten unter gleichem Winkel wie in A nach oben einen freien Schenkel antragen und auf dem die gleichen Abschnitte auftragen. **a)** Begründe das Verfahren. — Teile so eine Strecke in **b)** sechs, **c)** neun Teile. — Wann verdient das Verfahren in Aufg. 62 vor dem in Aufg. 60 den Vorzug?

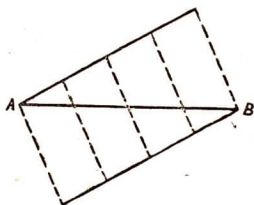


Fig. 103

63. In einem Schreibheft befinden sich parallele Linien in gleichem Abstand. Wie kann man mit Benutzung dieser Linien eine gegebene Strecke in 5, 6, 7, ... Teile teilen? — Unter welchen Umständen ist das Verfahren nicht anwendbar?
64. Gegeben ist ein Dreieck ABC und eine Strecke s , die **a)** kleiner, **b)** größer als BC ist. s ist parallel BC zwischen die Schenkel des Winkels α einzuschieben. Löse die Aufgabe erst durch tatsächliches Einschieben und Ausprobieren mit dem Lineal, dann mit Zirkel und Lineal.
65. Verlängere im $\triangle ABC$ die Seitenhalbierende AD um sich selbst über D hinaus bis A' . **a)** Zeige, daß $ABA'C$ ein Parallelogramm ist. **b)** Welches sind die Winkel, die Seiten und die Diagonalen des Parallelogramms, ausgedrückt durch Stücke des Dreiecks?
66. Benutze die Überlegungen von Aufg. 65, um folgende Dreieckskonstruktionen zu lösen:
- | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| a) b, c, s_a | b) a, b, s_c | c) a, c, s_b |
| d) a, s_c, γ | e) b, s_a, α | f) a, s_b, β |
| g) c, h_c, s_a | h) a, h_a, s_b | i) a, h_b, s_c |
67. Zwei Geraden haben einen unzugänglichen, d. h. nicht auf das Zeichenblatt fallenden Schnittpunkt. Bestimme den Winkel zwischen den beiden Geraden.

Geometrische Überlegungen

68. Verbinde die Seitenmitten eines Dreiecks. Zeige, daß dann mehrere, einander z. T. überdeckende Parallelogramme auftreten. Was folgt daraus für die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten im Dreieck?
69. **a)** Verbinde in einem Parallelogramm die Mitten gegenüberliegender Seiten. Was für Figuren entstehen? **b)** Was für Figuren entstehen, wenn man die Seitenmitten der Reihe nach verbindet?
70. Untersuche, unter welchen Umständen Parallelogramme kongruent sind.
71. Zeige, daß im Parallelogramm der größeren Diagonale der größere Winkel gegenüberliegt, und kehre diesen Satz um.

- 72.** Gib einige Fälle an, unter welchen Bedingungen Trapeze kongruent sind.
- 73.** Wenn man durch den Mittelpunkt einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes die Parallele zu den parallelen Seiten zieht, so halbiert diese Seite auch die andere nicht parallele Seite. Untersuche, ob dieser Satz sich dahin erweitern läßt, daß man die erste, nicht parallele Seite in drei, vier oder irgend wie viele Teile teilt und nun Parallelen zu den parallelen Seiten durch diese Teilpunkte zieht.
- 74.** Man findet außer den schon genannten Methoden zum Zeichnen von Parallelen auch die in der Fig. 104 angedeutete. Untersuche, ob diese Konstruktion den Bedingungen, die wir an „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“ stellen, genügt.
- 75.** Eine andere Parallelenkonstruktion ist die folgende (Fig. 105): Um einen beliebigen Punkt P der gegebenen Geraden schlägt man einen Kreis, der die



Fig. 104

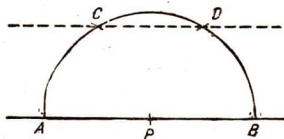


Fig. 105

Gerade in A und B trifft. Um A und B schlägt man mit gleicher Zirkelöffnung Kreisbögen, die auf dem vorher gezeichneten Kreis die Punkte C und D (entsprechend zwei Punkte auf der anderen Seite von AB) heraus-schneiden. Die Gerade durch CD ist parallel zu AB . **a)** Beweise das. **b)** Muß man beim zweiten Male die Zirkelöffnung beibehalten oder kann man sie auch ändern und was ist praktischer? **c)** Ist dieses Verfahren eine „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“? **d)** Ändere die Konstruktion so um, daß sie brauchbar ist, um durch einen Punkt zu einer Geraden die Parallele zu ziehen.

Räumliche Betrachtungen

- 76.** Wenn man von einer Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche die Spitze abschneidet, bleibt ein Pyramidenstumpf übrig. **a)** Untersuche die Seitenflächen dieses Körpers. — Der Pyramidenstumpf ist aus einer quadratischen Pyramide entstanden. Die Grundfläche hat die Kante a , die Deckfläche die Kante b . ***b)** Konstruiere, ***c)** berechne den Mittelschnitt des Stumpfes.
- 77.** Wenn man von einem Kegel durch eine Ebene parallel zur Grundfläche die Spitze abschneidet, bleibt ein Kegelstumpf übrig. Untersuche die Achsen-schnitte dieses Körpers.

Praktische Anwendungen

78. a) Fig. 106 stellt eine einfache Briefwaage dar, **b)** Fig. 107 das Konstruktionsschema der sog. Robervalschen Tafelwaage. Erläutere, wie in beiden

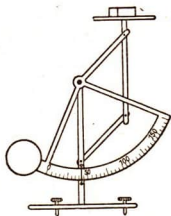


Fig. 106

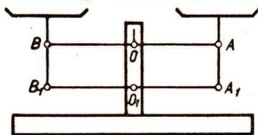


Fig. 107

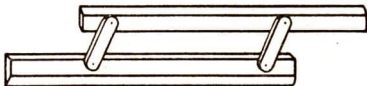


Fig. 108

Fällen die Forderung, daß die Schalen bei der Bewegung der Waage horizontal bleiben, erfüllt ist.

79. Fig. 108 zeigt ein Parallelenlineal, wie es heute, ebenso wie in älteren Zeiten, viel gebraucht wird. Auf welchem Satz beruht der Apparat. Stelle dir ein Modell (Pappe oder Holz) her.

80. In der nebenstehenden Fig. 109 ist ein dreigeschossiges Bücherregal ohne Rückwand im Querschnitt dargestellt. Das seitliche Hin- und Herwackeln das bei altersschwachen Regalen eintritt, kann man dadurch beseitigen, daß man über Kreuz auf der Rückwand zwei Latten festnagelt, so wie es in der Figur in gestrichelter Zeichnung angedeutet ist. Welcher Satz kommt da zur Anwendung? Sind beide Latten notwendig?

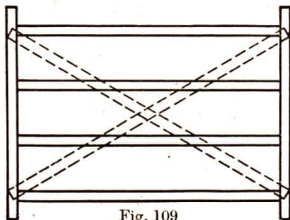


Fig. 109

81. Erörtere, welche Gestalten das Turngerät, das man Trapez nennt, in Ruhe und Bewegung annehmen kann. Warum bleibt die Trapezstange stets horizontal?

§ 12. Rechteck, Rhombus, Quadrat

Das Rechteck

1. Unter welchen Umständen ist **a)** ein Parallelogramm, **b)** ein rechtwinkliges Trapez, **c)** ein gleichschenkliges Trapez, **d)** ein allgemeines Viereck ein Rechteck?
2. Beweise, daß in einem Parallelogramm, in dem ein Winkel ein rechter ist, alle Winkel rechte sind.
3. Sprich die für das Parallelogramm geltenden Sätze **a)** über Gegenseiten, **b)** über Diagonalen für das Rechteck aus.

4. Welche Aussage läßt sich über die Diagonalen des Rechtecks machen, die beim Parallelogramm nicht gemacht werden kann?
5. Bestimme das Zentrum der Symmetrie beim Rechteck.
6. Durch wie viele Stücke ist ein Rechteck bestimmt (Grund)?
7. Konstruiere ein Rechteck (aneinanderstoßende Seiten a und b , Diagonale e) aus:

a) a, e	b) $e, \sphericalangle ef$	c) $a + b, e$
-----------	----------------------------	---------------
8. Berechne die Seiten eines Rechtecks, dessen eine Seite um 3 cm größer ist als die andere, während der Umfang 54 cm beträgt.
9. Berechne die Seiten eines Rechtecks mit dem Umfang 42 cm, in dem eine Seite doppelt so groß ist wie eine andere.
10. Zeichne auf quadriertes Papier zwei aufeinander senkrechte Achsen. Die waagerechte sei als x -Achse, die dazu senkrechte als y -Achse bezeichnet.

a) Gib einzelne Punkte an, die von der x -Achse einen Abstand von 3 cm haben; welches ist der geometrische Ort dieser Punkte?	b) Gib Punkte an, die von der y -Achse einen Abstand von 2,5 cm haben; welches ist der geometrische Ort dieser Punkte?	c) Gib Punkte an, die von beiden Achsen gleichen Abstand haben; welches ist der geometrische Ort dieser Punkte?
---	--	---
11. Bestimme Punkte mit den Koordinaten:

a) $x = 2, \quad y = 3$	b) $x = 3,5, \quad y = 7$	
c) $x = 2\frac{3}{4}, \quad y = 4\frac{1}{2}$	d) $x = 3\frac{1}{2}, \quad y = 3\frac{1}{2}$	
12. Ein Punkt P hat von den Achsen die Abstände a und b . Wie groß sind die Abstände der Fußpunkte der von P auf die Achsen gefällten Senkrechten vom Schnittpunkt der Achsen?

Der Rhombus

13. Unter welchen Umständen ist a) ein Parallelogramm, b) ein Viereck ein Rhombus?
14. Sprich die für das Parallelogramm geltenden Sätze über die Diagonalen für den Rhombus aus.
15. Welche Sätze lassen sich über die Diagonalen des Rhombus aussprechen, die für Parallelogramme im allgemeinen nicht gelten (vgl. § 11, Aufg. 38)?
16. Durch wieviel Stücke ist ein Rhombus bestimmt? (Grund!)
17. Konstruiere einen Rhombus aus (Seite a , Diagonalen e, f):

a) a, α	b) e, f	c) α, e
----------------	-----------	----------------
18. Berechne die Winkel eines Rhombus, wenn der eine doppelt so groß ist wie der andere. Welche besonderen Eigenschaften hat dieser Rhombus?
19. Einem a) gleichschenkligen, b) beliebigen Dreieck ist ein Rhombus so einzuzichnen, daß der eine Rhombuswinkel a) mit dem Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks, b) mit einem Winkel zusammenfällt; die gegenüberliegende Rhombusecke soll auf die Gegenseite des Dreiecks fallen.

20. Gegeben sind eine Gerade und ein Punkt außerhalb der Geraden. Ziehe durch den Punkt zu der Geraden die Parallele, indem du den Punkt zu der Ecke eines Rhombus machst, dessen eine Seite auf der gegebenen Geraden liegt. Welche Konstruktion ist einfacher, diese oder diejenige, die statt des Rhombus ein Parallelogramm benutzt (vgl. § 11, Aufg. 58)?

Das Quadrat

21. Unter welchen Umständen ist **a)** ein Rechteck, **b)** ein Rhombus, **c)** ein Parallelogramm, **d)** ein Viereck ein Quadrat?
22. Sprich die für das Rechteck und die für den Rhombus geltenden Sätze über die Diagonalen für das Quadrat aus; was folgt durch Zusammenziehung beider Aussagen?
23. Durch wieviel Stücke ist ein Quadrat bestimmt?
24. Konstruiere ein Quadrat **a)** aus seiner Diagonale, **b)** aus der Summe von Seite und Diagonale, **c)** aus der Differenz von Diagonale und Seite.
25. Einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Quadrat einzuschreiben, dessen einer Winkel in den rechten Winkel fällt, während die Gegenecke auf der Hypotenuse liegt.

Rückblick auf die verschiedenen Arten von Vierecken

26. Teile die Vierecke ein **a)** hinsichtlich der Parallelität von Gegenseiten, **b)** hinsichtlich der Gleichheit von Gegenseiten, **c)** hinsichtlich der Gleichheit von Gegenwinkeln, **d)** hinsichtlich der Gleichheit von anliegenden Winkeln.
27. Untersuche, um was für ein Viereck es sich handelt, wenn **a)** alle Seiten gleich sind, **b)** alle Winkel gleich sind, **c)** die Diagonalen einander halbieren, **d)** die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, **e)** ein Paar Gegenwinkel gleich ist, **f)** ein Paar Gegenseiten gleich ist, **g)** ein Paar Anseiten gleich ist, **h)** ein Paar Anwinkel gleich ist.
28. Stelle alle die Seiten, Winkel und Diagonalen heranziehenden Kriterien zusammen dafür, daß ein Viereck **a)** ein Trapez, **b)** ein Parallelogramm, **c)** ein Rechteck, **d)** ein Rhombus, **e)** ein Quadrat ist.
29. Welche Bedingungen gelten **a)** für die Seiten, **b)** für die Winkel, **c)** für die Diagonalen im Trapez, Parallelogramm, Rechteck, Rhombus und Quadrat?

Geometrische Überlegungen

30. Zwei Punkte auf den Gegenseiten eines Quadrates werden durch eine Strecke verbunden, und senkrecht zu dieser Strecke wird eine beliebige das andere Paar Gegenseiten schneidende Senkrechte gezogen. Was läßt sich über die zwischen den Gegenseiten liegende Strecke dieser Senkrechten sagen?
31. Ziehe in einem Rechteck die Diagonalen und untersuche, welche Aussagen sich über die Winkel machen lassen, in die die Diagonalen die rechten Winkel teilen.

32. Zeige, daß im Rhombus der Diagonalschnittpunkt von allen Seiten gleichweit entfernt ist.
33. Drehe **a)** ein Parallelogramm, **b)** einen Rhombus, **c)** ein Rechteck um das Zentrum der Symmetrie. Nach welcher Drehung tritt zum ersten Male Deckung ein?
34. Gib die Bedingungen für die Kongruenz **a)** von Rechtecken, **b)** von Rhomben, **c)** von Quadraten an. Als Stücke mögen außer Seiten und Winkeln auch Diagonalen in Betracht gezogen werden.
35. In einem Viereck sind die anliegenden Seiten paarweise gleich (Deltoid). Sprich Sätze über die Diagonalen dieser Art von Vierecken aus.
36. Führe die Lösung der vier Fundamentalaufgaben (Strecke und Winkel halbieren, Senkrechte errichten und fällen) auf das Deltoid (Aufg. 35) zurück.
37. Gegeben ist ein Würfel. Lege durch ihn einen Diagonalschnitt, in dem eine Körperdiagonale liegt. Konstruiere den Diagonalschnitt und dann die Körperdiagonale, wenn die Würfelseite gegeben ist.
38. Konstruiere in der Ebene die Körperdiagonale eines Quaders mit den Kanten a , b und c .
39. Die Seitenmitten eines Vierecks werden der Reihe nach miteinander verbunden. Untersuche, was sich über das so entstehende, dem ersten eingeschriebene Viereck sagen läßt, insbesondere auch, wenn das Ausgangsviereck von besonderer Art ist.
40. Die Winkelhalbierenden eines Vierecks schließen ein Viereck ein. Untersuche, ob sich bei manchen Vierecken über dieses von den Winkelhalbierenden gebildete Viereck etwas Besonders aussagen läßt.

Praktische Anwendungen

41. Ein von Feldmessern angewandtes Verfahren, um die nicht unmittelbar meßbare Entfernung zweier zugänglicher Punkte A und B zu bestimmen, ist das folgende (Fig. 110): Man geht unter rechtem Winkel von der Richtung AB nach C so weit, daß man jetzt ohne Hindernis parallel der Richtung AB weitergehen kann und zwar bis D so weit, daß man, unter rechtem Winkel abbiegend, auf B stößt. Dann ist $AB = CD$. Untersuche, ob man statt des Rechtecks auch eine andere Vierecksart benutzen kann. Muß B von A aus sichtbar sein?

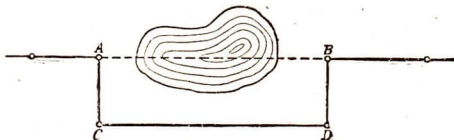


Fig. 110

42. Fig. 111 zeigt eine Feldmeßaufnahme. Die Fluchtstäbe sollen eine in C zu A senkrechte Gerade markieren. Das unmittelbare Abstecken hindert aber

ein bei C stehendes Haus H . Die Figur zeigt die Umgehung. Beweise, daß $FK \perp AB$ ist.

43. (Das Nivellieren). Um den Höhenunterschied zwischen den Punkten A und B festzustellen, schaltet man zwischen beide Punkte genügend Punkte $W_1, W_2, \dots$ ein derart, daß man zwischen A und W_1 , dann zwischen W_1 und W_2 , W_2 und W_3 usw. bis B mit Hilfe einer Wasserwaage oder einer Libelle den Höhenunterschied an der Meßstange unmittelbar durch Visieren von einem Ort zum anderen feststellen kann.

Erläutere an der Fig. 112, welche Größen man messen muß, wie man aus ihnen den gesuchten Höhenunterschied findet und wie man die Richtigkeit des Verfahrens beweisen kann.

44. Fig. 113 zeigt eine Messung des Höhenunterschiedes zwischen den Punkten A und B in einer Skizze, in die die Ablesungen an den Fluchtstäben eingetragen sind (die Angaben sind in m und mm gemacht). Berechne den Höhenunterschied.

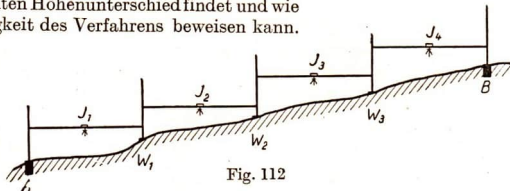


Fig. 112

45. Es soll festgestellt werden, wieviel Bäume auf einer schräg abfallenden Halde, deren Querschnitt in

Fig. 114 AB ist, gepflanzt werden können. Da die Bäume senkrecht in die Höhe wachsen, ist für

ihren Abstand die Projektion CB auf die Horizontale maßgebend. Zeige, daß man CB durch Addition der mit der Meßlatte zu bestimmenden Strecken AD, GE, HF findet.

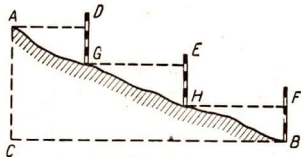


Fig. 114

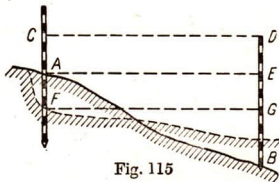


Fig. 115

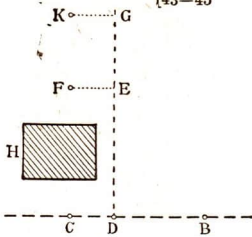


Fig. 111

46. Ein abschüssiges Stück Land soll geebnet werden. Man stellt in A und B Meßstangen auf (Fig. 115). CD sei eine mit der Wasserwaage bestimmte Horizontale. Wie kann man dann zunächst den Punkt E so bestimmen, daß eine Schnur AE auch horizontal ist? Man trägt nun, der Lage dieser Schnur folgend, in der Gegend von A Erde ab. Wie kann man jetzt verfahren, um nach größerer Abtragung eine neue, zum Erkennen der Horizontalen notwendige Schnur FG zu spannen? In der Praxis schiebt man die erst in der Lage AE , dann in der Lage FG gespannte Schnur mit fortschreitender Abtragung immer weiter nach unten.

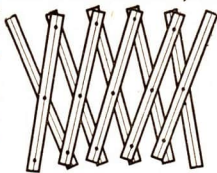


Fig. 116

47. Eine Nürnberger Schere wird von gleich langen Hölzern gebildet, die etwa so, wie es Fig. 116 zeigt, aneinander gesetzt sind. Die Kreuzungs-

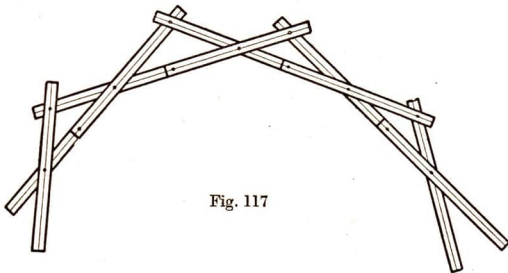


Fig. 117

stellen sind aber in Gegensatz zur Fig. 116 genau die Mitten der Stäbe (s. Fig. 222). Beweise, daß die Kreuzungsstellen Geraden beschreiben, wenn die Schere geöffnet oder geschlossen wird (Geradföhrung).

48. Bei der in Fig. 116 dargestellten Nürnberger Schere, die als Kinderspielzeug, an den äußeren Ecken mit Püppchen oder dgl. besetzt, verwandt wird, sind die Kreuzungsstellen nicht genau in der Mitte gewählt. Dann treten an die Stelle der beweglichen Rhomben bewegliche Deltoide. Verfolge mit schematischen Zeichnungen die Lageveränderung der Schere beim Auf- und Zuklappen und erkläre insbesondere die in Fig. 117 und Fig. 118 dargestellten Lagen.

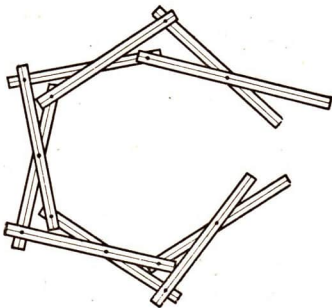


Fig. 118

Fünftes Kapitel

Der Kreis

§ 13. Punkt und Kreis, Gerade und Kreis

Begriff des Kreises

1. a) Definiere den Kreis als geometrischen Ort. b) Was ist der Unterschied von Kreis und Kugel?
2. Definiere den Kreis durch eine Bewegung eines geometrischen Gebildes.
3. Untersuche, ob man mit der Schiebellehre (Fig. 56) feststellen kann, ob eine kreisförmige Fläche wirklich ein Kreis ist.
4. Welche Eigenschaft des Kreises benutzt man, wenn man sich bei der Zeichnung des Zirkels bedient? Gib Methoden an, wie man Kreise ohne Zirkel zeichnen kann.
5. Man hat einen Kreis gezeichnet und hat den Radius noch „im Zirkel“, es ist aber der Mittelpunkt nicht mehr erkennbar. Wie findet man ihn wieder? (Konstruktion.)
6. Der Radius eines Kreises wird kleiner und kleiner. Welcher Figur nähert sich dann der Kreis immer mehr und mehr?
7. Gib an, unter welchen Bedingungen zwei Kreise kongruent sind.

Punkt und Kreis

8. Gegeben sind ein Punkt P und ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M . Untersuche die Zentrale PM und gib an, wann P innerhalb, wann P außerhalb des Kreises liegt, wann P auf dem Kreisumfang liegt.
9. Gegeben sind ein Punkt P und ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Konstruiere die längste und die kürzeste Entfernung des Punktes P von der Kreisperipherie. Der Punkt P liegt a) außerhalb, b) innerhalb des Kreises.
10. Gegeben ist ein Punkt P a) innerhalb, b) außerhalb eines Kreises mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M . P hat von M den Abstand a . Berechne die längste und die kürzeste Entfernung des Punktes P von der Kreisperipherie.

Gerade und Kreis

11. Gegeben ist eine Gerade g und ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M . Fülle von M auf g die Senkrechte und untersuche, wann die Gerade den Kreis schneidet, berührt oder nicht schneidet.
12. Welche Lage hat eine Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkt Null ist?
13. Was ist der Unterschied a) von Sekante und Tangente, b) von Sehne und Sekante, c) von Durchmesser und Zentrale?

14. Gegeben sind ein Kreis und eine Gerade, die den Kreis **a)** schneidet, **b)** berührt, **c)** nicht schneidet. Konstruiere in jedem Falle die Symmetrieachse.
15. Gegeben sind ein Kreis und eine Gerade. Die Gerade wird parallel zu sich verschoben. Verfolge die Figur bei dieser Lagenveränderung und gib für einige besondere Lagen Zeichnungen.
16. Gegeben sind ein Kreis und eine Sekante. Die Sekante wird um einen ihrer Punkte gedreht, der **a)** innerhalb des Kreises, **b)** außerhalb des Kreises, **c)** auf dem Kreisumfang liegt. Beschreibe die Bewegung, achte besonders auf die Schnittpunkte mit dem Kreis und gib für einige besondere Lagen Zeichnungen.
17. Gegeben sind ein Kreis mit dem festen Mittelpunkt M und eine Gerade, die den Kreis **a)** schneidet, **b)** nicht schneidet. Beschreibe die Veränderungen, die an der Figur vor sich gehen, wenn der Radius des Kreises zunimmt oder abnimmt. Zeichne einige besondere Fälle.

Kreischnitten

18. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r . Welches ist die obere, welches die untere Grenze für die Länge einer Sehne dieses Kreises?
19. Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Untersuche, wie sich die Länge der Sehne ändert, wenn sie **a)** parallel zu sich verschoben, **b)** um einen ihrer Endpunkte gedreht wird.
20. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius 5 cm. Zeichne einen Durchmesser und verschiebe ihn parallel zu sich um 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm. Stelle durch Messung die zugehörigen Sehnenlängen fest (Tabelle).
21. Die Endpunkte einer Kreissehne sind mit dem Mittelpunkt verbunden. Welches ist die Symmetrieachse dieser Figur?
Beweise **a)** durch Symmetriebetrachtung, **b)** durch Kongruenzbetrachtung folgende Sätze:
22. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Mittelsenkrechten der Sehne.
23. Die Verbindungsgerade von Kreismittelpunkt und Sehnenmitte steht senkrecht auf der Sehne.
24. Die Senkrechte, die man vom Kreismittelpunkt auf die Sehne fällt, halbiert die Sehne.
25. Fasse die Sätze 22 bis 24 in einen einzigen zusammen.
26. **a)** Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 . Konstruiere Kreise, die durch P_1 und P_2 gehen. **b)** Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch zwei Punkte gehen?
27. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 . Konstruiere den Kreis durch P_1 und P_2 , der den Radius r hat. Welche Bedingung muß r erfüllen?
28. Ein Kreis ist zu konstruieren, der eine gegebene Strecke AB zur Sehne hat, und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt.

29. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm. In den Kreis sollen Sehnen von **a)** 2 cm, **b)** 4 cm Länge gelegt werden.
30. **a)** Beweise: In einem Kreise haben Sehnen gleicher Länge gleichen Abstand vom Mittelpunkt. **b)** Formuliere und beweise die Umkehrung.
31. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen eines Kreises, die gleiche Länge besitzen?
32. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r und in ihm ein Durchmesser. Konstruiere die Sehne, deren Länge b ist, und die **a)** senkrecht, **b)** parallel zu dem gegebenen Durchmesser liegt.
33. In einen Kreis sind zwei Sehnen von den Längen s_1 und s_2 gelegt. Es sei $s_1 > s_2$. Was folgt über die Abstände der Sehnen vom Mittelpunkt?
34. Zwei Sehnen eines Kreises haben vom Mittelpunkt die Abstände a_1 und a_2 . Es ist $a_1 > a_2$. Was ist über die Länge der Sehnen zu sagen?
35. Lege durch einen Punkt im Innern des Kreises Sehnen. Welches ist die größte, welches die kleinste? (Konstruiere sie!)
36. Suche den geometrischen Ort der Mitten einer Schar paralleler Sehnen. (Beweis?)

Tangente

37. Definiere die Tangente als Grenzlage der Sekante (warum nicht der Sehne?). Die Sekante ist **a)** parallel zur ursprünglichen Lage zu verschieben, **b)** um einen Schnittpunkt mit dem Kreis zu drehen (Fig. 119). **c)** Kommt es auf den Verschiebungssinn bzw. den Drehungssinn an?
38. Gegeben ist ein Kreis und eine Tangente. Untersuche die Symmetrieverhältnisse (Konstruktion der Symmetrieachse). Beweise die folgenden Sätze **a)** mit Symmetriebetrachtungen, **b)** mit Hilfe von Sätzen über die Senkrechten, **c)** indem du die Tangente als Grenzlage der Sekante auffaßt und die Sehnensätze anwendest:
39. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der im Berührungspunkt auf der Tangente errichteten Senkrechten.
40. Die Verbindungsgerade von Kreismittelpunkt und Berührungspunkt steht senkrecht auf der Tangente.
41. Die Senkrechte vom Mittelpunkt auf die Tangente trifft diese im Berührungspunkt.
42. Fasse die Sätze 39 bis 41 in einen einzigen zusammen.
43. Gegeben sind ein Kreis und ein Punkt seines Umfanges. Ziehe die Tangente in diesem Punkt an den Kreis.
44. Gegeben sind eine Gerade und ein Punkt auf ihr. Konstruiere Kreise, die die Gerade in dem Punkt berühren.

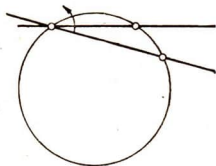


Fig. 119

45. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine Gerade in einem bestimmten ihrer Punkte berühren?
46. Gegeben sind eine Gerade g , ein Punkt P_1 auf ihr und ein zweiter beliebiger Punkt P_2 . Durch P_1 und P_2 ist der Kreis zu legen, der g berührt.
47. Gegeben sind ein Kreis und **a)** eine Sekante, **b)** eine den Kreis nicht schneidende Gerade. Konstruiere die Tangenten, die der gegebenen Geraden parallel sind.
48. Gegeben sind ein Kreisbogen, dessen zugehöriger Mittelpunkt unzugänglich ist, und auf ihm ein Punkt. Ziehe die Tangente in diesem Punkt an den Kreisbogen.
49. Gegeben sind ein Kreis und eine Gerade. Konstruiere die Tangente, die **a)** zu der gegebenen Geraden senkrecht steht, **b)** mit der gegebenen Geraden den vorgeschriebenen Winkel α bildet.

Tangentenpaar

50. Von einem Punkte P außerhalb eines Kreises sind an den Kreis die Tangenten zu ziehen. **a)** Beachte, daß (Fig. 120) MT_1P ein rechter Winkel ist, und benutze den Lehrsatz von Thales. **b)** Schlage um M einen zweiten Kreis mit doppelt so großem Radius und um P mit MP einen Kreis. Dann ist die Tangente als Symmetrieachse zu bestimmen. Von welcher Figur?

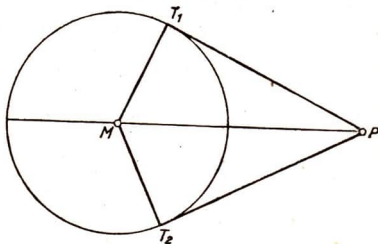


Fig. 120

51. Von P sind an den Kreis um M die Tangenten PT_1 und PT_2 gelegt. **a)** Beschreibe das Viereck MT_1PT_2 . **b)** Untersuche die Symmetrieverhältnisse dieser Figur.
Beweise **a)** durch Symmetriebetrachtung, **b)** durch Anwendung von Dreieckskongruenzsätzen, **c)** an der Hand von Sätzen über das Deltoid (§ 12, Aufg. 35) die folgenden Sätze:
52. Der Winkel zwischen zwei von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten wird durch die Zentrale halbiert.
53. Die von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten (genauer die Strecken von diesem Punkt bis zum Berührungspunkt) sind gleich.
54. Es sei in der Fig. 120 $\sphericalangle T_1PT_2 = \alpha$. Wie groß ist $\sphericalangle T_1MT_2$?
55. Untersuche, wie sich in Fig. 120 der Winkel zwischen den beiden Tangenten und der zugehörige Winkel T_1MT_2 ändert, wenn sich P auf der Zentralen dem Mittelpunkt M nähert.
56. Ziehe in Fig. 120 die Berührungssehne T_1T_2 . Wie ändert sich die Lage und Länge der Berührungssehne, wenn sich die Entfernung PM ändert?

57. Gegeben ist ein Kreis und ein Durchmesser. Auf der Verlängerung des Durchmessers sind Punkte so zu bestimmen, daß von ihnen aus der Kreis unter dem Winkel **a)** 60° , **b)** 90° , **c)** 120° , **d)** α erscheint (d. h. daß $\sphericalangle T_1 P T_2$ in der Fig. 120 die vorgeschriebene Größe hat).
58. Gegeben ist ein Kreis und ein Durchmesser. Auf der Verlängerung des Durchmessers sind Punkte (wieviel gibt es?) zu bestimmen derart, daß die von ihnen an den Kreis gelegten Tangenten **a)** die gegebene Länge t haben, **b)** gleich dem Radius, **c)** gleich der Berührungssehne sind.
59. Gegeben ist ein Paar sich schneidender Geraden. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die die beiden Geraden gleichzeitig berühren?
60. Gegeben ist ein Paar sich schneidender Geraden. Es sind die Kreise zu konstruieren, die die gegebenen Geraden berühren und **a)** durch den Punkt P der einen Geraden gehen, **b)** den Radius r haben, **c)** die gegebene Berührungssehne s haben.

Praktische Anwendungen

61. Konstruiere mit gegebenem Radius r **a)** die bei Gesimsverzierungen vielfach gebrauchte Karnieslinie (Fig. 121), **b)** einen Eselsrücken (Fig. 122),

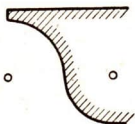


Fig. 121

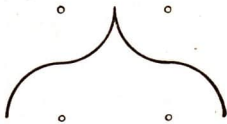


Fig. 122

wie er sich häufig an (gotischen) Bauwerken findet. In welcher Weise sind in diesen Figuren Kreisbögen aneinandergesetzt?



Fig. 123

62. Zeichne als oberen Abschluß einer rechteckigen Fensteröffnung einen Kreisbogen, dessen zugehöriger Mittelpunktswinkel **a)** 60° , **b)** 90° , **c)** 180° ist.
63. Konstruiere über der Strecke AB (Fig. 123) **a)** einen gleichseitigen Spitzbogen (Kreismittelpunkte in A und B), **b)** einen gedrückten Spitzbogen (Kreismittelpunkte in den Punkten A_1 und B_1 , die man durch Viertelung von AB findet), **c)** einen überhöhten Spitzbogen (Kreismittelpunkte in den Punkten A_2 und B_2 , die man durch beiderseitige Verlängerung von AB um ein Viertel findet).
64. Konstruiere über AB einen „gedrückten Bogen“ nach folgender Vorschrift. C und D mögen AB in drei Teile teilen. Schlage um C und D mit $\frac{1}{3} AB$ Kreisbögen. Errichte über CD nach der entgegengesetzten Seite ein gleichseitiges Dreieck mit der Spitze E und verbinde die beiden ersten Kreisbögen durch einen Kreisbogen mit dem Radius $\frac{2}{3} AB$ um E .
65. Die Fig. 124, 125 und 126 zeigen einfache Korbbogenkonstruktionen **a)** der Ellipse (vgl. Aufg. 64), **b)** des Ovals, **c)** einer Spirale. Beschreibe die Konstruktionen und führe sie mit gegebenem Radius aus.

66. Die Lage einer Eisenbahnlinie ist festzulegen an der Stelle, wo sie aus der durch die Gerade g_1 angegebenen Richtung in die gegen g_1 um den Winkel 57° abweichende Richtung g_2 übergeht (Fig. 127).

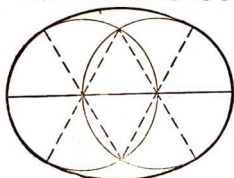


Fig. 124

Der Krümmungsradius der Strecke beim Übergang aus der einen in die andere Richtung soll 600 m betragen. Skizze und Konstruktion im Verhältnis 100 m $\equiv$ 1 cm.

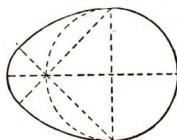


Fig. 125

67. Mit Rücksicht auf eine Bahnhofsanlage soll eine neue Bahnstrecke 2, die eine alte Strecke 1 unter dem Winkel von 30° schneiden würde, für eine

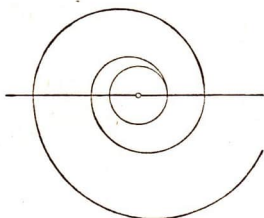


Fig. 126

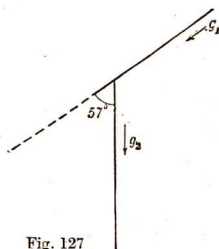


Fig. 127

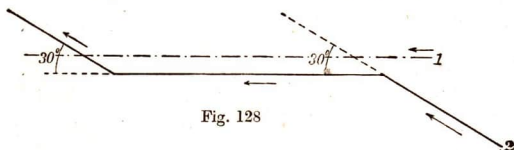


Fig. 128

längere Strecke dieser parallel gelegt werden. Dadurch ist eine Führung, wie sie die Skizze Fig. 128 angibt, bedingt. Zeichne die Geleisführung im Maßstab 100 m $\equiv$ 1 cm unter Zugrundelegung eines Krümmungsradius von 500 m an den beiden Stellen.

68. Fig. 129 zeigt die Skizze einer Weganlage. Zwei nach S gerichtete Wege oder Bahnstrecken sollen durch einen Kreis-

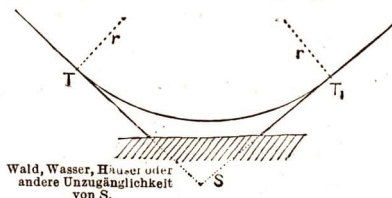


Fig. 129

bogen von dem gegebenen Radius r verbunden werden. Der Punkt S ist aber für die Absteckung und Abmessung auf dem Felde nicht zugänglich. Wie sind in diesem Falle die Ansatzstellen T und T_1 des Kreisbogens und dieser selbst zu bestimmen?

69. Um den Mittelpunkt von Kreisen (Balken, Stämmen u. dgl.) zu finden, benutzen Handwerker einen Winkelhaken, dem eine Leiste aufgenagelt ist, deren eine Kante Winkelhalbierende des rechten Winkels ist (Fig. 130). **a)** Wie kann man mit einem solchen Instrument den Mittelpunkt bestimmen (Satz, daß die Zentrale Winkelhalbierende des Winkels zwischen zwei Tangenten ist)? **b)** Stelle dir ein Modell des Apparates her. **c)** Muß der Winkelhaken einen Rechten einschließen, oder könnte es auch ein anderer Winkel sein?

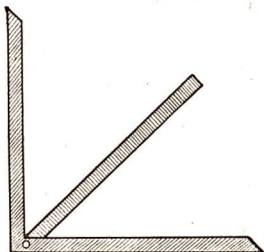


Fig. 130

70. Fig. 131 gibt eine schematische Darstellung der Übertragung einer rotierenden Bewegung in eine geradlinige Hin- und Herbewegung. Der Radius MA

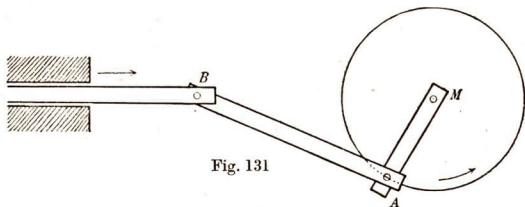


Fig. 131

sei r , die Länge der Pleuelstange AB sei p . **a)** In welcher Lage hat die Bewegung „tote Punkte“? **b)** Welchen Abstand hat B von M in den toten Punkten?

71. In Fig. 132 stellt N ein Nivellierinstrument dar. Im Punkt A steckt eine Meßstange, die von dem Nivellierinstrument aus anvisiert wird.

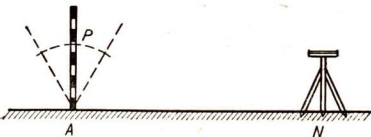


Fig. 132

a) Wie bewegt sich ein Punkt P der Meßstange, wenn diese mit der Spitze in A bleibt, aber seitlich (in der Visierebene) bewegt wird? **b)** Wie kann man die ausgezeichnete Stellung, in der die Stange vertikal ist, beim Visieren sofort erkennen?

Geometrische Überlegungen

72. Inwiefern kann man die Gerade als einen Grenzfall des Kreises auffassen?
73. Wieviel Kreise kann man um einen gegebenen Kreis herumlegen, die den gleichen Radius haben und den gegebenen und jedesmal ihre Nachbarkreise berühren? Bleibt eine Lücke?
74. a) Was ist über die Kreisbögen zwischen parallelen Sehnen zu sagen?
b) Welche Tatsache ergibt sich daraus, wenn die eine Sekante zur Tangente wird?
75. Was ist über gleich lange Sehnen eines Kreises zu sagen, die sich schneiden?
76. Parallele Geraden kann man einmal durch den Begriff der Verschiebung, zum anderen durch den Begriff des gleichen Abstandes erklären. Untersuche, ob beide Arten der Erklärung auch beim Kreis zu ein und demselben Begriff paralleler Kreise führen oder ob etwas Verschiedenes herausspringt.

Aus der Geschichte der Geometrie

77. Euklids Elemente, III. Buch, 4. „Wenn zwei Sehnen, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden, können sie sich nicht gegenseitig halbieren.“ Beweise den Satz.
78. Ebenda, III. Buch, 17. „Von einem gegebenen Punkte ist an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen. — Es sei A der gegebene Punkt, $B\Gamma\Delta$ der gegebene Kreis. Von A ist also an den Kreis $B\Gamma\Delta$ eine Tangente zu ziehen. Man nehme den Kreismittelpunkt E , ziehe AE und beschreibe um E mit dem Radius EA den Kreis AZH . Man errichte in A auf EA die Senkrechte AZ , ziehe EZ und AB . Ich behaupte, es ist dann von A an den Kreis $B\Gamma\Delta$ die Tangente AB gezogen“ (Fig. 133). Beweise die Richtigkeit der Konstruktion.

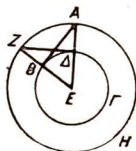


Fig. 133

§ 14. Winkel und Kreis

Winkel am Kreis

- Gegeben ist ein Winkel. Zeichne einen Kreis so, daß der Scheitelpunkt a) in den Kreismittelpunkt (Zentriwinkel), b) auf den Kreisumfang fällt (Peripheriewinkel), c) daß die Schenkel des Winkels Sekanten werden, d) daß die Schenkel des Winkels Tangenten werden, e) daß der Scheitelpunkt auf den Kreisumfang fällt und der eine Schenkel gleichzeitig Tangente wird (Sehnentangentenwinkel).
- Zeichne a) einen Halbkreis, b) einen Quadranten, c) einen Sextanten, d) einen Oktanten eines Kreises. Wie groß ist in jedem Falle der von den begrenzenden Radien gebildete Zentriwinkel?
- Gegeben sind ein Kreis und auf dem Umfang zwei Punkte P_1 und P_2 . Zeichne a) den zugehörigen Zentriwinkel, b) drei zugehörige Peripheriewinkel, c) die zugehörigen Sehnentangentenwinkel (wieviel gibt es?).

4. Gegeben ist ein Zentriwinkel. Zeichne **a)** einen Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen, **b)** den zugehörigen Sehnentangentenwinkel.
5. Gegeben ist ein Peripheriewinkel. Zeichne **a)** den zugehörigen Zentriwinkel, **b)** den zugehörigen Sehnentangentenwinkel.
6. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 . Konstruiere die durch P_1 und P_2 gehenden Kreise, die einen gegebenen Winkel α zum Zentriwinkel haben.

Sehnentangentenwinkel, Zentriwinkel und Kreis von Thales

7. Gegeben ist ein Kreis und eine Sehne. Konstruiere in den Endpunkten der Sehne die Tangenten. **a)** Beweise, daß die beiden Sehnentangentenwinkel gleich sind. — Der Sehnentangentenwinkel sei α . **b)** Berechne den zu der Sehne gehörigen Zentriwinkel. **c)** Sprich die Beziehung zwischen Sehnentangentenwinkel und Zentriwinkel in einem Satz aus.
8. Was wird aus der Beziehung, die in Aufg. 7 gefunden ist, wenn die Berührungssehne zum Durchmesser geworden ist?
9. Gib an, wie sich **a)** der Zentriwinkel, **b)** der Sehnentangentenwinkel ändert, wenn die zugehörige Sehne größer oder kleiner wird bei gleichbleibendem Radius.
10. (Wiederholung): Sprich den Satz von Thales unter Verwendung des Begriffes Peripheriewinkel aus und beweise ihn.
11. Gegeben ist ein Kreis mit dem Durchmesser AB und ein Punkt P . Zeige, **a)** daß $\sphericalangle APB > 90^\circ$ ist, wenn P innerhalb des Kreises liegt, **b)** daß $\sphericalangle APB < 90^\circ$ ist, wenn P außerhalb des Kreises liegt.
12. Gegeben ist eine Strecke PQ . Welches ist der geometrische Ort der Scheitelpunkte von rechten Winkeln, deren Schenkel durch P und Q gehen (der geometrische Ort der Punkte, von denen aus gesehen PQ unter einem rechten Winkel erscheint)?

Zentriwinkel und Peripheriewinkel

13. Verlängere den einen Schenkel eines Zentriwinkels über den Scheitelpunkt hinaus bis zum Schnitt mit dem Kreisumfang. Diesen Punkt nimm zum Scheitelpunkt eines Peripheriewinkels, der über dem gleichen Bogen steht, wie der Zentriwinkel. Berechne diesen Peripheriewinkel, wenn der Zentriwinkel α ist.
14. In einem Kreis sind über einem Bogen AB ein Zentriwinkel und ein Peripheriewinkel konstruiert. Der Scheitel des Zentriwinkels liege **a)** zwischen, **b)** nicht zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels. Beweise durch zweimalige Anwendung der eben (Aufg. 13) abgeleiteten Beziehung: der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen.
15. Untersuche, ob der Satz, der die Beziehung zwischen Zentriwinkel und Peripheriewinkel angibt, auch gilt, wenn der Zentriwinkel überstumpf wird.

16. Der Zentriwinkel eines Kreises durchläuft die Werte $10^\circ, 20^\circ \dots$ bis 350° . Welche Winkel durchläuft der zugehörige Peripheriewinkel? Stelle die Abhängigkeit in einer Tabelle dar.
17. Welche Beziehung besteht zwischen einem Sehnentangentenwinkel und den zu der Sehne gehörigen Peripheriewinkeln?
18. Was wird aus dem Peripheriewinkel, wenn der Scheitel in den einen Endpunkt der zugehörigen Sehne rückt? Zeige, daß so der Satz vom Sehnentangentenwinkel als ein besonderer Fall des Satzes vom Peripheriewinkel aufgefaßt werden kann.
19. Über einer Sehne sind zwei Peripheriewinkel nach verschiedenen Seiten gezeichnet. Was gilt über die Summe beider? (Vgl. § 15, Aufg. 22.)
20. Wie groß sind zwei gleiche Peripheriewinkel, die über entgegengesetzten Bogen stehen?
21. Von zwei Peripheriewinkeln zu verschiedenen Seiten einer Sehne ist der eine doppelt so groß wie der andere. Wie groß sind sie?
22. Welcher Peripheriewinkel ist gleich dem Zentriwinkel über dem entgegengesetzten Bogen.

Konstruktionen mit dem Ortsbogen

23. Gegeben ist eine Strecke AB und ein Winkel α . a) Konstruiere den auf der Mittelsenkrechten von AB liegenden Punkt P , von dem aus AB unter dem Winkel α erscheint. b) Suche den Mittelpunkt des durch A , B und P gehenden Kreises. c) Beweise, daß jeder Winkel $AQP = \alpha$ ist, wenn sein Scheitelpunkt Q auf dem Kreis liegt.
24. Konstruiere in der Weise der Aufg. 23 den Kreis, der die gegebene Strecke $AB = 5$ cm als Sehne und den Winkel a) 60° , b) 45° , c) 120° , d) α als Peripheriewinkel faßt.
25. Gegeben ist eine Strecke AB und ein Winkel α . Es soll der Kreis, der über AB als Sehne α als Peripheriewinkel faßt, in der Weise gefunden werden, daß man gleich den Mittelpunkt des Kreises mit Hilfe des bekannten Zentriwinkels bestimmt.
26. Gegeben ist eine Strecke AB und ein Winkel. Es soll der Kreis, der über AB als Sehne α als Peripheriewinkel faßt, in der Weise gefunden werden, daß man erst die Lage einer Tangente an den gesuchten Kreis und dann den Mittelpunkt konstruiert.
27. Beurteile, welches von den drei in Aufg. 24, 25 und 26 gegebenen Verfahren zur Konstruktion des Ortsbogens das zweckmäßigste ist.
28. Gegeben sind eine Strecke AB und der Kreis, der über AB als Sehne den Winkel α als Peripheriewinkel faßt. Ein Punkt P liege a) innerhalb, b) außerhalb des Kreisbogens. Vergleiche den Winkel APB mit α .
29. Konstruiere ein Dreieck aus:

a) a, h_a, α	b) a, s_a, α	c) c, s_c, γ
d) s_c, α, γ	e) h_c, s_a, γ	f) s_a, α, β

- 30. a)** Auf einer Geraden sind zwei Strecken a und b gegeben. Konstruiere die Punkte, von denen aus a unter dem gegebenen Winkel α , b unter dem gegebenen Winkel β erscheint. **b)** Löse die Aufgabe für den Fall, daß a und b irgendwo in der Ebene liegen. Erörtere die Ausführbarkeit der Konstruktion.
- 31.** Gegeben ist ein Dreieck. Konstruiere den Punkt im Innern des Dreiecks, von dem aus alle Seiten unter gleichem Winkel erscheinen.

Praktische Anwendungen

- 32.** Um praktisch zu untersuchen, ob tatsächlich der geometrische Ort für die Scheitelpunkte gleicher Winkel, deren Schenkel durch zwei gegebene Punkte gehen, ein Kreis ist, schlage man zwei Nägel in ein Brett und bewege nun ein Dreieck zwischen beiden Nägeln so, daß die Schenkel eines der Dreieckswinkel (in der Fig. 134 der von 90°) an den Nägeln gleiten. Verfolge die Wanderung des Scheitelpunktes.
- 33.** Schneide in dünne Pappe einen Spalt und schiebe einen Winkel aus Pappe hindurch, um ähnlich wie in Aufg. 32 zu bestätigen, daß der geometrische Ort der Scheitelpunkte ein Kreis ist.
- 34. (Zweikreisemethode.)** Um auf einer Karte den augenblicklichen Standort festzustellen, beobachtet man, unter welchem Winkel zwei bekannte

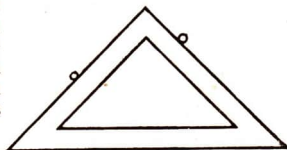


Fig. 134

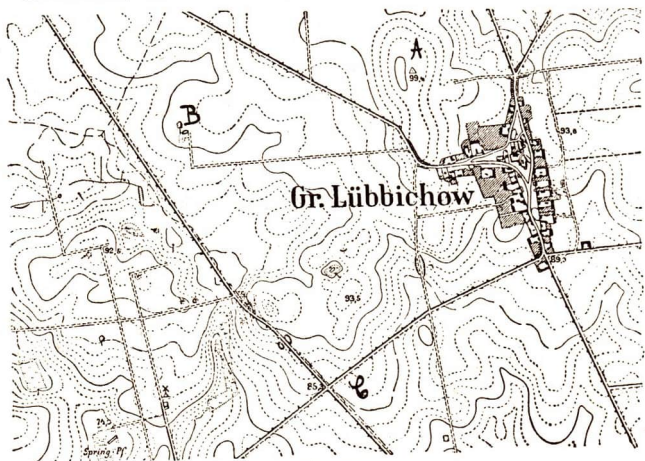


Fig. 135

Strecken erscheinen. Dann schlägt man auf der Karte über den bekannten Strecken die Ortskreise und findet den Standort als Schnittpunkt der Kreise. Beispiel: Man beobachtet von einem Punkte, daß die Strecke AB (A ist ein trigonometrischer Punkt, B ein einzeln stehender Baum) aus dem beigefügten Ausschnitt eines Meßtischblattes (Fig. 135) unter dem Winkel 79° , die Strecke BC (C ist eine Wegkreuzung) unter dem Winkel 100° erscheint. Wo befindet sich der Beobachter? (Achte auf die Mehrdeutigkeit.)

Geometrische Überlegungen

35. Bei welchen Vierecksarten gibt es einen (oder mehrere?) Punkt, von dem aus alle Seiten unter gleichem Winkel erscheinen?
36. (Wie man ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln konstruiert.) Zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 schneiden sich; ein Schnittpunkt ist A . Ziehe die Durchmesser AA_1 und AA_2 , verbinde A_1 und A_2 . Die andern Schnittpunkte mit den Kreisen seien B_1 und B_2 . Dann sind nach dem Satz von Thales AB_1A_2 und AB_2A_1 rechte Winkel. $\triangle AB_1B_2$ hat also zwei rechte Winkel. Wo steckt der Fehler?
37. Der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks ABC sei M . a) Beweise, daß $\sphericalangle BMA = 2\alpha$ usw. ist. b) Da die Summe der Winkel um M herum $4R$ ist, muß $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ sein. Ist das ein Beweis für den Satz von der Summe der Innenwinkel im Dreieck?
38. Wenn man einen Winkel mit dem Winkelmesser mißt, so macht man den Winkel zum Zentriwinkel eines Kreises und liest an dessen Umfang die Gradzahl ab. Untersuche, in welcher Weise die Messung fehlerhaft wird, wenn Scheitelpunkt und Kreismittelpunkt nicht zusammenfallen, wenn vielmehr der Kreismittelpunkt, wie es bei flüchtiger Ablesung leicht geschieht, auf dem einen Schenkel oder dessen Verlängerung fällt.

§ 15. Dreieck und Kreis, Viereck und Kreis

Umkreis und Inkreis des Dreiecks

- Konstruiere den Umkreis a) eines spitzwinkligen, b) eines stumpfwinkligen, c) eines rechtwinkligen Dreiecks (Beziehung zum Satz von Thales!). Was ist in jedem Falle über die Lage des Mittelpunktes zu sagen?
- Sprich auf Grund der Konstruktion bei Aufg. 1 einen Satz über die Mittelsenkrechten des Dreiecks aus.
- Konstruiere ein Dreieck aus (r bedeutet den Radius des Umkreises):

a) b, c, r	b) a, h_a, r	c) b, γ, r
d) a, β, r	e) c, r, s_c	f) α, β, r
g) α, r, s_a	h) α, r, h_a	i) a, r, h_c

4. Zeige, daß die drei Stücke a, α, r (ebenso b, β, r und c, γ, r) voneinander abhängig sind, so daß, wenn zwei gegeben, das dritte gefunden werden kann.
5. Benutze die eben (Aufg. 4) gefundene Tatsache, um folgende Dreiecks-konstruktionen auf einfachere zurückzuführen. Gegeben ist:
- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $a + b, r, \beta$ | b) $a - b, r, \alpha$ | c) $a + b, r, \gamma$ |
| d) $b, \alpha + \beta, r$ | e) $a, \alpha - \beta, r$ | f) $b, \alpha - \beta, r$ |
6. Die Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel führt unter Umständen auf zwei gestaltlich verschiedene Dreiecke. Zeige, daß beide den gleichen Umkreis haben.
7. Konstruiere den Inkreis eines Dreiecks. Was ist über die Lage des Mittelpunktes zu sagen?
8. Sprich auf Grund der Konstruktion von Aufg. 7 einen Satz über die Winkelhalbierenden eines Dreiecks aus.
9. Konstruiere ein Dreieck aus (ϱ bedeutet den Radius des Inkreises):
- | | | |
|----------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| a) c, α, ϱ | b) b, γ, ϱ | c) α, β, ϱ |
| d) h_b, w_β, ϱ | e) β, ϱ, h_a | f) β, ϱ, h_c |

Die Ankreise eines Dreiseits

10. Drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen und auch nicht alle drei oder zu je zwei parallel sind, bilden ein Dreiseit. Zeichne ein Dreiseit und mache den Unterschied von Dreiseit und Dreieck klar.
11. a) Konstruiere die sämtlichen Kreise, die alle drei Seiten eines Dreiseits gleichzeitig berühren. b) Überlege, wie die Konstruktion der Mittelpunkte aller Ankreise mit möglichst wenig Hilfslinien auszuführen ist.
12. Konstruiere ein Dreieck aus (ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bezeichnen die Radien der den Seiten a, b und c anliegenden Ankreise):
- | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| a) c, α, ϱ_a | b) b, γ, ϱ_c | c) α, β, ϱ_c |
| d) β, γ, ϱ_b | e) $\alpha, \varrho, \varrho_a$ | f) ϱ_b, h_b, w_β |
13. In ein Dreieck ABC sind der Inkreis mit dem Mittelpunkt O und die Ankreise mit den Mittelpunkten O_a (der Seite a anliegend), O_b und O_c einzuzichnen. Die Berührungspunkte seien D, D_a, D_b, D_c auf der Seite a, E, E_a, E_b, E_c auf der Seite b , schließlich F, F_a, F_b, F_c auf der Seite c . (Die Figur ist im folgenden als Ankreisfigur bezeichnet.)
In den folgenden Aufgaben sind die Bezeichnungen von Aufg. 13 benutzt.
14. Beweise:
- | | |
|------------------|------------------|
| a) $FF_a = EE_a$ | b) $FF_b = DD_b$ |
| c) $BD_c = BF_c$ | d) $CE = CD$ |
- e) Stelle andere Gleichungen an der Ankreisfigur auf.

15. a) Beweise, daß $AF_a + AE_a$ gleich dem Umfang des Dreiecks ist. b) Setze

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

und beweise, daß $AF_a = s$ ist. c) Gib alle anderen Strecken in der Ankreisfigur an, die die Länge s haben.

16. a) Beweise, daß $FF_a + EE_a = 2B$

und deshalb $FF_a = EE_a = a$

ist. b) Wie groß ist DD_c, EE_c, FF_b ?

17. Wie groß ist a) D_bD_c , b) E_aE_c , c) F_aF_b ?

18. Berechne die Länge folgender Stücke:

a) AF

b) CD

c) BF

d) AF_c

e) CD_b

f) BF_c

g) FF_c

h) DD_a

i) EE_b

19. Gib Stücke an, die die folgende Länge haben:

a) s

b) $s - a$

c) $s - b$

d) $s - c$

e) a

f) b

20. Konstruiere Dreiecke aus

a) a, α, w_a

b) s, ϱ, ϱ_b

c) $s - a, \alpha, w_a$

d) $s - b, \varrho_a, \beta$

e) $s - c, \beta, w_\beta$

f) $s - a, \varrho, \gamma$

21. Berechne im rechtwinkligen Dreieck den Radius a) des Inkreises, b) des Hypotenusenankreises.

Sehnenviereck

22. Zeichne im Sehnenviereck $ABCD$ die Diagonale AC und die zugehörigen Zentriwinkel. Was gilt über die Summe der beiden Peripheriewinkel ABC und ADC über der Sehne AC ?

23. Beweise den Satz, daß im Sehnenviereck die Summe der Gegenwinkel $2R$ beträgt—mit anderen Worten, daß die Summen der Gegenwinkel gleich sind — a) mit Hilfe der Überlegungen von Aufg. 22, b) indem du die Gleichheit der in Fig. 136 mit gleichen Zeichen versehenen Winkel nachweist und daraus Schlüsse ziehst.

24. Formuliere und beweise die Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck?

25. Welche Parallelogramme sind Sehnenvierecke?

26. Welche Trapeze sind Sehnenvierecke?

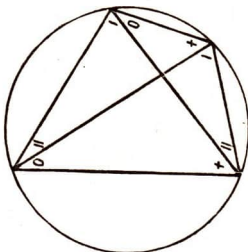


Fig. 136

27. Was ist von einem Sehnenviereck zu sagen, in dem **a)** ein Paar Gegenseiten, **b)** beide Paare von Gegenseiten parallel sind, **c)** in dem zwei Gegenseiten gleich, **d)** zwei Anseiten gleich, **e)** alle Seiten gleich sind?
28. Von einem Punkte P sind an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M die Tangenten PT_1 und PT_2 gelegt. Beweise, daß sich um PT_1MT_2 ein Kreis beschreiben läßt.
29. In einem beliebigen Viereck bilden die Winkelhalbierenden ein Viereck. Untersuche, was für ein Viereck das ist.
30. Konstruiere ein Sehnenviereck aus:
- | | | |
|---------------------|---------------------------|--------------------------|
| a) a, b, c, r | b) b, c, γ, r | c) α, β, c, r |
| d) a, b, f, β | e) a, d, α, δ | f) a, α, β, f |

Tangentenviereck

31. Stelle für das Tangentenviereck $ABCD$ in Fig. 137, bei dem die Berührungspunkte der Reihe nach mit E, F, G und H bezeichnet sind, die vier Gleichungen auf, die aus der Gleichheit der von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten folgen. Ordne die Gleichungen so an, daß durch Addition der linken Seiten die Summe der Gegenseiten entsteht. Was steht dann auf der rechten Seite?

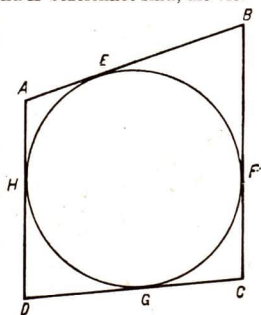


Fig. 137

32. Formuliere und beweise die Umkehrung des Satzes vom Tangentenviereck.
33. Welche Parallelogramme sind Tangentenvierecke?
34. Konstruiere ein Tangentenviereck aus (Radius des Inkreises ist ϱ):
- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|
| a) a, b, α, β | b) a, b, c, β |
| c) a, b, c, e | d) $b, \beta, \delta, \varrho$ |
| e) $\alpha, \beta, \gamma, \varrho$ | f) b, c, β, ϱ |
35. Einem gleichseitigen Dreieck sind drei Kreise einzuschreiben derart, daß jeder die beiden anderen und zwei Dreiecksseiten berührt.

Feuerbachscher Kreis (Neunpunktekreis)

36. Zeichne die Ankreisfigur des Dreiecks ABC (Aufg. 13) und betrachte das von den Mittelpunkten der drei Ankreise gebildete Dreieck $O_aO_bO_c$. **a)** Was für Linien sind O_aA , O_bB , O_cC in diesem Dreieck? **b)** Beweise, daß die Höhen des Dreiecks die Winkelhalbierenden des Fußpunktsdreiecks sind. **c)** Beweise, daß die Außenwinkel des Fußpunktsdreiecks von den Dreiecksseiten halbiert werden. **d)** Beweise, daß die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.
37. Welche Rolle spielen die Höhen eines Dreiecks in seinem Fußpunktsdreieck?

38. Beweise an der Ankreisfigur: **a)** der Kreis um $OBCO_a$ hat die Mitte von OO_a zum Mittelpunkt. **b)** Es sei M_a dieser Mittelpunkt. Beweise dann, daß $2 \cdot \sphericalangle BO_aC = \sphericalangle BM_aC$ ist. **c)** Berechne $\sphericalangle BM_aC$ aus $\triangle BO_aC$. **d)** Zeige, daß nach der Umkehrung des Sehnenviereckssatzes M_a auf dem Umkreis von ABC liegt.

Beweise folgende Sätze:

39. Der Kreis, dessen Durchmesser der obere Abschnitt einer Dreieckshöhe, d. h. der der Dreiecksecke anliegende ist, geht durch die Fußpunkte der beiden anderen Höhen.
40. Der Kreis, dessen Durchmesser eine Dreiecksseite ist, geht durch die Höhenfußpunkte auf den beiden anderen Dreiecksseiten.
41. Der Umkreis des Höhenfußpunktsdreiecks halbiert die oberen Höhenabschnitte.
42. Der Umkreis des Höhenfußpunktsdreiecks halbiert die Dreiecksseiten.
43. Der Kreis, der die Seiten eines Dreiecks halbiert, geht auch durch die Höhenfußpunkte und durch die Mitten der oberen Höhenabschnitte.
44. Erörtere die Umkehrungen des in Aufg. 43 ausgesprochenen Satzes vom Neunpunktekreis.

Dualität zwischen Punkt und Gerade

45. Zwei Punkte bestimmen eine Gerade. Welcher Satz ist diesem dual entsprechend (ersetze Punkt durch Gerade, Gerade durch Punkt)?
46. Nenne die den folgenden geometrischen Begriffen dual zugeordneten: **a)** Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten, **b)** Halbierende eines Winkels, **c)** Schnittpunkt einer Anzahl von Geraden (Strahlenbüschel).
47. Untersuche, ob eine Dualität zwischen den Eigenschaften einer Winkelhalbierenden und einer Mittelsenkrechten besteht.
48. Untersuche, ob eine Dualität zwischen den Eigenschaften des einem Dreieck umgeschriebenen und des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises besteht.
49. Erörtere die zwischen den Sätzen vom Sehnens- und Tangentenviereck bestehende Dualität. Vgl. auch die beiden in Aufg. 23b und 31 gegebenen Beweise miteinander.

Geometrische Überlegungen

50. Von einem Punkt sind an einen Kreis die Tangenten konstruiert. Eine dritte bewegliche Tangente bildet mit den beiden ersten ein Dreieck. Untersuche den Umfang dieser Dreiecke.
51. Das Dreieck kann angesehen werden als der Grenzfall eines Sehnenvierecks, bei dem zwei Eckpunkte beliebig nahe aneinander gerückt sind. Was für ein Satz folgt aus der Anwendung des Sehnenvierecks für das Dreieck?
52. Fasse das Dreieck als Grenzfall eines Tangentenvierecks auf. Welcher Satz ergibt sich daraus für das Dreieck?

- 53. a)** Untersuche die Änderung der Ankreisfigur, wenn die — vorher ausgeschalteten — Sonderfälle eintreten, wenn also die Geraden durch einen Punkt gehen oder alle oder zum Teil einander parallel sind. **b)** Wie lang sind die Ankreisradien des gleichseitigen Dreiecks?
- 54.** Untersuche, wann die Verbindungsstrecke des Inkreismittelpunktes mit dem Mittelpunkt eines Ankreises auf einer Dreiecksseite senkrecht steht.
- 55.** Gegeben ist ein Quadrat. Durch dessen Mittelpunkt ist irgendein Paar zueinander senkrecht stehender Geraden gelegt, durch die das Quadrat in vier Teilfiguren zerlegt wird. Untersuche, was über diese Teilfiguren und ihre Umkreise zu sagen ist.
- 56.** Einem Kreis ist ein Sehnenviereck eingeschrieben und außerdem ein Tangentenviereck derart umgeschrieben, daß die Berührungspunkte der Tangenten die Ecken des Sehnenvierecks sind. Untersuche, bei welchen besonderen Gestalten des Sehnenvierecks sich besondere Aussagen über das Tangentenviereck machen lassen.
- 57.** Untersuche, was über überschlagene Sehnenvierecke zu sagen ist.
- 58.** Untersuche, was über Tangentenvierecke mit einer einspringenden Ecke (Berührungspunkt auf der Verlängerung der Seiten) zu sagen ist.
- 59.** Was ist **a)** über die Dreiecke, **b)** über die Vierecke zu sagen, bei denen die Mittelpunkte von Umkreis und Inkreis zusammenfallen?
- 60.** Einem Kreis ist ein $2n$ -Eck **a)** eingeschrieben, **b)** umgeschrieben. Untersuche, ob sich den Sätzen über Sehnenviereck und Tangentenviereck entsprechende Aussagen auch für diese Figuren machen lassen.

Aus der Geschichte der Geometrie

- 61.** Euklids Elemente (Buch IV, 2) in der Fassung von Pirkenstein: „In einem vorgegebenen Zirckel einen Triangel einzuschreiben / dessen drey Winckel insonderheit gleich seynd / dreyen andern Winckeln / eines andern vorgegebenen Triangels.“ Löse die Aufgabe! (Sehnentangentenwinkel!)
- 62.** Euklids Elemente (Buch IV, 3) in der Fassung von Pirkenstein: „Umb einen vorgegebenen Zirckel einen Triangel zu schreiben / dessen drey Winckel insonderheit gleich seynd / andern dreyen Winckeln insonderheit / eines andern vorgegebenen Triangels.“ Löse die Aufgabe.
- 63.** Aus Schwenters *Geometriae practicae novae* (1618): „Wann die drey fürgegebene punct etwa zu nahend bey einander gegeben würden | oder aber | fast nach einer rechten lini | mehr punct zu finden | die in die circumferentz fallen deß Circels | so umb die drey fürgegebenen punct soll beschrieben werden.“

§ 16. Kreis und Kreis

Kreisscharen

1. **a)** Zeichne eine Schar von Kreisen mit gleichem Mittelpunkt, aber verschiedenem Radius (konzentrische Kreise). **b)** Zeichne einen Kreisring. Durch wieviel Größen ist er bestimmt?
2. Zeichne eine Schar von Kreisen mit gleichem Radius, die alle durch einen Punkt gehen. Wo liegen die Mittelpunkte?
3. Zeichne eine Schar von Kreisen mit verschiedenem Radius, die durch zwei Punkte gehen. Wo liegen die Mittelpunkte?
4. Zeichne eine Schar von Kreisen mit verschiedenem Radius, die eine Gerade in einem gegebenen Punkte berühren. Wo liegen die Mittelpunkte?
5. Zeichne eine Schar von Kreisen mit gleichem Radius, die eine Gerade berühren. Wo liegen die Mittelpunkte?
6. Zeichne eine Schar von Kreisen, die zwei sich schneidende Geraden berühren. Wo liegen die Mittelpunkte?
7. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r . Der Mittelpunkt wandert und gleichzeitig **a)** wächst, **b)** nimmt der Radius in gleichem Maße ab. Zeichne die Kreisschar. (Wellenbewegung.)
8. Löse die Aufg. 7, wenn der Mittelpunkt **a)** schneller, **b)** langsamer fortschreitet, als der Radius zu- bzw. abnimmt.

Gegenseitige Lage zweier Kreise

9. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist gegeben. Ein anderer Kreis mit dem Radius r_1 bewegt sich auf einer Geraden, die durch M geht. Verfolge die verschiedenen Lagen, insbesondere achte auf die Schnittpunkte der beiden Kreise und die vorhandenen Grenzfälle. Es sei **a)** $r > r_1$, **b)** $r < r_1$, **c)** $r = r_1$.
10. Löse die Aufg. 9 für den Fall, daß der zweite Kreis sich nicht auf einer Zentralen, sondern auf einer beliebigen Sekanten des ersten bewegt.
11. Löse die Aufg. 9 für den Fall, daß der zweite Kreis sich auf einer Geraden bewegt, die den ersten Kreis nicht schneidet. Unterscheide verschiedene Fälle im Hinblick auf die Größe der Radien.
12. Zeige, daß sich zwei Kreise nicht so schneiden können, daß sich ihre Umfänge gegenseitig halbieren.
13. Gegeben sind zwei sich nicht schneidende Kreise mit den Radien r und r_1 und dem Zentralabstand $MM_1 = a$. Während r konstant bleibt, möge r_1 stetig wachsen. Gib an, welche Beziehung zwischen a , r und r_1 besteht, wenn **a)** der zweite Kreis den ersten von außen berührt, **b)** wenn der erste den zweiten von innen berührt.
14. Zwei Kreise berühren sich (innerlich oder äußerlich). **a)** Zeige, daß der Berührungspunkt auf der gemeinschaftlichen Zentralen liegt. **b)** Was wird aus

der beim Schnitt der Kreise vorhandenen Berührungssehne bzw. der zugehörigen Sekante im Falle der Berührung?

Winkel zweier Kreise

15. Unter dem Winkel, unter dem sich zwei Kurven schneiden, versteht man den Winkel zwischen den im Schnittpunkt an die beiden Kurven gelegten Tangenten. Zwei Kreisbogen schneiden sich unter **a)** 90° , **b)** 30° , **c)** 135° (Zeichnung!). Wie groß ist der Winkel zwischen den zum Schnittpunkt gehörigen Radien?
16. Beweise, daß sich zwei Kreise zweimal unter gleichem Winkel schneiden.
17. Konstruiere Kreispaaire, die sich unter einem Winkel von **a)** 90° , **b)** 30° , **c)** 60° schneiden.
18. Gegeben ist ein Kreis und ein Punkt auf seinem Umfang. Konstruiere Kreise, die den gegebenen Kreis in dem angegebenen Punkt unter Winkeln von **a)** 90° , **b)** 45° schneiden. Untersuche, ob die Aufgabe eindeutig bestimmt ist.
19. Gegeben ist ein Kreis, auf ihm ein Punkt P und **a)** außerhalb, **b)** innerhalb des Kreises ein Punkt Q ; gesucht ist ein Kreis, der den gegebenen in P unter einem gegebenen Winkel α schneidet, und der durch Q geht.
20. Gegeben ist ein Kreis, auf ihm ein Punkt P und eine beliebige, nicht durch P gehende Gerade g . Konstruiere den Kreis, der den gegebenen in P unter einem gegebenen Winkel α schneidet, und der g berührt.

Gemeinschaftliche Tangenten

21. An zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 ist eine gemeinschaftliche äußere Tangente $T_1 T_2$ gelegt. Was für ein Viereck ist $M_1 T_1 T_2 M_2$, und welche Stücke sind in ihm als bekannt anzusehen? Nimm an, **a)** die beiden Kreise schneiden sich nicht, **b)** die beiden Kreise schneiden sich.
22. Verschiebe in der zu Aufg. 21 gezeichneten Figur $T_1 T_2$ parallel zu sich, bis die Strecke durch den Mittelpunkt des kleineren Kreises geht. Dann zerfällt das Viereck $M_1 T_1 T_2 M_2$ in ein Rechteck und ein Dreieck. Gib an, welche Stücke in dem Dreieck bekannt sind.
23. Konstruiere die gemeinschaftliche äußere Tangente $T_1 T_2$ an zwei Kreise, indem du erst ein rechtwinkliges Dreieck über dem Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise konstruierst und dann T_1 und T_2 .
24. Führe die Konstruktion der äußeren gemeinschaftlichen Tangente für den Fall durch, daß beide Kreise sich äußerlich berühren.
25. Was wird aus der Konstruktion der äußeren gemeinschaftlichen Tangente, **a)** wenn der eine Kreis den anderen innerlich berührt, **b)** wenn der eine Kreis ganz innerhalb des anderen liegt, **c)** wenn beide Kreise gleichen Radius haben?
26. Zeichne zwei Kreise und die beiden gemeinschaftlichen äußeren Tangenten. Ihr Schnittpunkt sei P . Nimm noch die gemeinschaftliche Zentrale hinzu. **a)** Sprich Sätze über die Figur aus. **b)** Was wird aus diesen Sätzen, wenn die beiden äußeren Tangenten in eine einzige verschmelzen?

27. Gegeben sind zwei Kreise, die sich nicht schneiden und die verschiedenen Radius haben. Was ist von dem Schnitt der gemeinschaftlichen äußeren Tangenten zu sagen, wenn der Kreis mit kleinerem Radius näher und näher an den größeren herankommt, ihn schneidet, ihn schließlich innerlich berührt?
28. Gegeben sind zwei Kreise, die sich nicht schneiden und die gleichen Radius haben. Beantworte dieselben Fragen wie in Aufg. 27.
29. Gegeben sind zwei Kreise, die sich nicht schneiden. Wie wandert der Schnittpunkt der gemeinschaftlichen äußeren Tangenten, wenn der Radius des einen Kreises bei festliegendem Mittelpunkt **a)** größer und größer, **b)** kleiner und kleiner und schließlich Null wird?
30. An zwei sich nicht schneidende Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 ist eine gemeinschaftliche innere Tangente $T_1 T_2$ gelegt. Untersuche, was an die Stelle des Trapezes im Falle der äußeren Tangente getreten ist, und was in der betreffenden Figur bekannt ist.
31. Verschiebe in der zu Aufg. 30 gezeichneten Figur $T_1 T_2$ parallel zu sich, bis die Strecke durch den Mittelpunkt des kleineren Kreises geht. Dadurch entsteht ein konstruierbares Dreieck. Was kennt man in ihm?
32. Benutze die Überlegung von Aufg. 31, um die gemeinschaftliche innere Tangente zweier Kreise zu konstruieren, die sich nicht schneiden.
33. Was wird aus der Konstruktion der gemeinschaftlichen inneren Tangente, wenn **a)** die Kreise sich äußerlich berühren, **b)** die Kreise sich schneiden, **c)** ein Kreis ganz innerhalb des anderen liegt?
34. Zeichne zwei sich nicht schneidende Kreise und die beiden gemeinschaftlichen inneren Tangenten. Ihr Schnittpunkt sei P . Nimm noch die gemeinschaftliche Zentrale hinzu. **a)** Sprich Sätze über die Figur aus. **b)** Was wird aus diesen Sätzen, wenn die beiden inneren Tangenten in eine einzige verschmelzen?
35. Gegeben sind zwei Kreise, die sich nicht schneiden und die verschiedenen Radius haben. Was ist von dem Schnitt der gemeinschaftlichen inneren Tangenten zu sagen, wenn die Kreise sich bei unverändertem Radius allmählich nähern, bis sie sich (von außen) berühren?
36. Gegeben sind zwei Kreise mit gleichem Radius, die sich nicht schneiden. Die Kreise nähern sich bis zur Berührung. Wie bewegt sich der Schnittpunkt der gemeinschaftlichen inneren Tangenten? Welcher Satz ist über den Schnitt der gemeinschaftlichen inneren Tangenten von Kreisen mit gleichem Radius auszusprechen?
37. Gegeben sind zwei Kreise, die sich nicht schneiden. Wie wandert der Schnittpunkt der gemeinschaftlichen inneren Tangenten, wenn der Radius des einen Kreises bei festbleibendem Mittelpunkt **a)** größer und größer, **b)** kleiner und kleiner und schließlich Null wird?

- 38.** Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r_1 . Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise mit dem Radius r_2 (wobei **a)** $r_1 > r_2$, **b)** $r_1 < r_2$ ist), die den ersten Kreis von innen berühren?
- 39.** Beantworte die Frage der Aufg. 38, wenn es sich um äußere Berührung handelt.

Geometrische Überlegungen

- 40.** Gegeben sind zwei Kreise. Suche die Punkte, von denen aus beide unter dem gleichen Winkel erscheinen. Erörtere die möglichen Fälle.
- 41.** Gegeben sind zwei **a)** sich nicht schneidende, **b)** sich schneidende Kreise. Stelle die Bedingungen fest, die für die Umfangspunkte kleinster und größter Entfernung gelten.
- 42.** Untersuche die Figur eines Dreiseits mit seinen Ankreisen und seinem Inkreis mit Rücksicht auf die gemeinschaftlichen Tangenten und Zentralen.
- 43.** Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 und dem Mittelpunktsabstand a . Wann schneiden sich die Kreise, wann schneiden sie sich nicht, wann berühren sie sich innerlich, wann äußerlich?
- 44.** Gegeben sind drei Punkte. Konstruiere drei Kreise, die sich in den gegebenen Punkten berühren. (Erörtere alle möglichen Fälle.)
- 45.** Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten M und N . Lege durch M und durch N beliebige Doppelsehnen, deren andere Schnittpunkte mit den Kreisen A, B, C und D heißen mögen. **a)** Was für ein Viereck ist $ABCD$? **b)** Was wird aus der Figur, wenn die beiden Kreise, statt sich zu schneiden, sich berühren?
- 46.** Fig. 138 zeigt Teile zweier Kreisinge. Beurteile ihre Größe auf Grund bloßer Anschauung und auf Grund genauer Messung. Versuche herauszubekommen, was entscheidend ist für diese optische Täuschung.
- 47.** Welche Lage haben innere und äußere gemeinschaftliche Tangenten, wenn einer der beiden Kreise in eine Gerade ausartet?

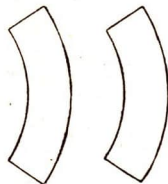


Fig. 138

Praktische Anwendungen

- 48.** Zwei Riemenscheiben von 0,75 m und 0,30 m Radius und einem Abstand (der Mittelpunkte) von 2 m sind durch einen Riemen ohne Ende miteinander verbunden. Gib eine Zeichnung in verkleinertem Maßstabe von der Riemenführung **a)** für den Fall, daß beide Scheiben gleichen, **b)** für den Fall, daß sie entgegengesetzten Drehungssinn haben sollen.
- *49.** Nimmt man die Bahn der Venus, der Erde und des Mars angenähert kreisförmig an, so ist der Radius der Venusbahn ungefähr 0,72, derjenige der Marsbahn ungefähr 1,52, wenn der Radius der Erdbahn = 1 gesetzt wird. Berechne den Abstand **a)** der Venus, **b)** des Mars von der Erde bei Erdnähe und bei Erdferne.

- *50.** Gib eine Konstruktionsskizze des Fahrrades mit Gestell und Zahnradübertragung.
- *51.** Fig. 139 zeigt die Skizze eines gotischen Kirchenfensters. Untersuche die Figur und konstruiere sie in doppeltem Maßstab. Gib insbesondere Lage und Radius des kleinen vollständigen Kreises an.
- *52.** Fig. 140 zeigt die Skizze eines einfachen Maßwerkes. Untersuche die Figur und konstruiere sie in doppeltem Maßstab.
- *53.** Fig. 141 zeigt einen einfachen Träger mit Kreisverzierung. Konstruiere den Träger in dreifachem Maßstabe.

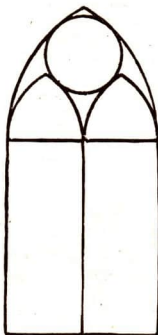


Fig. 139

Räumliche Betrachtungen

- *54. a)** Untersuche, wann Schnitte durch einen Zylinder Kreise sind. **b)** Gegeben ist ein gerader Kreiskegel. Parallel zur Grundfläche sind 5 Schnitte in gleichem Abstand zu legen und auf die Grundfläche zu projizieren. **c)** Das Gleiche ist mit einer Halbkugel zu tun.

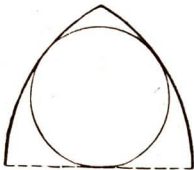


Fig. 140



Fig. 141

- 55.** Bei einem Kugellager ist die zylindrische Achse eines Rades von beweglichen Kugeln umgeben. **a)** Welchen Weg beschreiben die Mittelpunkte der Kugeln? (Zeichnung!) **b)** Welche Gestalt muß man der Umhüllung (der Schale) geben?
- *56.** Zwei Kugeln K_1 und K_2 vom Radius $r_1 = 2$ und $r_2 = 1$ und der Entfernung l sind gegeben. Konstruiere Kern- und Halbschatten in einem Zentralschnitt (d. h. in einer Ebene, die durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln geht **a)** unter der Annahme, daß K_1 , **b)** unter der Annahme, daß K_2 die andere Kugel beleuchtet.

Aus der Geschichte der Geometrie

Aus Schwenters *Geometriae practicae novae* (1618)¹⁾:

- *57.** „Zu zweyen vngleichen Circeln | so einander berühren | den dritten vngleichen dessen semidiameter bekannt | zu finden | die beyde gegebene anrührend.“
- *58.** „So zwey Circeltrümmer (= Kreisbögen) oder zween Circel innwendig einander berühren | wie der Punct deß anrührens zu finden.“

1) Achte auf die Bezeichnungen.

Sechstes Kapitel

Flächenlehre¹⁾

§ 17. Flächenberechnung von Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Dreieck und Trapez

Quadrat und Rechteck

1. Zeichne **a)** ein Quadratdezimeter (dm^2), **b)** ein Quadratzentimeter (cm^2), **c)** ein Quadratmillimeter (mm^2).
2. Gib an:
 - a) Wieviel Quadratdezimeter hat ein Quadratmeter?
 - b) Wieviel Quadratmillimeter hat ein Quadratzentimeter?
 - c) Wieviel Quadratmillimeter hat ein Quadratdezimeter?
 - d) Wieviel Quadratzentimeter hat ein Quadratmeter?
 - e) Wieviel Quadratmeter hat ein Quadratkilometer?
 - f) Wieviel Quadratmeter hat ein Hektar?
 - g) Wieviel Quadratmeter hat ein Ar?
3. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats von **a)** 3 cm, **b)** 7,1 cm, **c)** 133 m **d)** a cm Seitenlänge, **e)** von 10 cm, **f)** 17,2 cm, **g)** u cm Umfang?
4. Die Seite eines Quadrates nimmt zu in der Reihe 1, 2, 3, ... Wie wächst der Flächeninhalt des Quadrates?
5. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt **a)** $0,81 \text{ m}^2$, **b)** $1,69 \text{ cm}^2$, **c)** 10 cm^2 , **d)** 2 cm^2 , **e)** $a \text{ cm}^2$ ist?
6. Es ist eine Rute **a)** in Dänemark = 10 Fuß = 3,139 m, **b)** in England = $5\frac{1}{2}$ Yard = 5,029 m, **c)** in Nordamerika = 5 Yard = 4,572 m, **d)** im Rheinland = 12 Fuß = 3,766 m. Wie groß ist in jedem dieser Fälle eine Quadratruete, wie groß ein Quadratfuß in unserem dezimalen Maßsystem?
7. Ein Quadratkilometer hat ungefähr 400 Morgen. Wie lang ist die Seite eines quadratischen Feldes von der Fläche eines Morgens?
8. Berechne den Inhalt eines Rechtecks mit den Seiten:

a) 7 cm und 13 cm	b) 5 m und 12 m	c) 1,3 cm und 2,5 cm
d) $7\frac{1}{2}$ m und $3\frac{1}{4}$ m	e) 0,03 m und 0,09 m	f) 30 cm und 3 m
g) 1,5 cm und 3 mm	h) a cm und b cm	
9. Schätze, miß und berechne folgende Flächen: **a)** Quartblatt, **b)** Postkarte, **c)** Briefmarke, **d)** die verschiedenen Begrenzungsflächen einer Streichholzsachtel, **e)** die Größe eines Blattes in diesem Buch, **f)** die Größe des Schriftsatzes in diesem Buch.

1) Es empfiehlt sich, im Anschluß an die Flächenlehre den Inhalt von § 36 und 37 zu behandeln, soweit er sich auf Körperberechnung bezieht.

10. Berechne **a)** eine rechteckige Wiese von 87,5 m Länge und 25,7 m Breite, **b)** den Fußboden eines Zimmers von 5,25 m Länge und 4,20 m Breite, **c)** die Fläche eines Tisches von 1,39 m Länge und 0,83 m Breite.
11. **a)** Ein Rechteck hat die Seite a und den Flächeninhalt f . Wie groß ist die andere Seite? **b)** Beispiel: $f = 3,14 \text{ m}^2$, $a = 0,52 \text{ m}$.
12. **a)** Der Umfang eines Rechtecks ist u , der Inhalt f . Wie groß sind die Seiten? **b)** Beispiel: $u = 26,4 \text{ cm}$, $f = 32 \text{ cm}^2$.
13. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das flächengleich einem Rechteck mit den Seiten 0,9 cm und 3,6 cm ist?
14. Gib die Oberfläche **a)** eines Würfels mit der Kante a , **b)** einer quadratischen Säule mit der Grundkante a und der Höhe h , **c)** eines Quaders mit den Kanten a , b und c an.

Beispiele von Kalkulationen

15. Ein Turnplatz von 35 m Länge und 13,5 m Breite soll „befestigt“, d. h. festgestampft und mit Kies usw. versehen werden. Ein Angebot lautet auf 1150 RM. Was ist da auf das m^2 für Material, Anfuhr, Arbeit usw. gerechnet worden?
16. Für eine auf 850 Schüler im Maximum berechnete Schule ist ein rechteckiger Schulplatz vorgesehen, dessen Tiefe — von der Straße aus gerechnet — 27 m ist. Wie lang muß man den Platz nehmen, damit auf den einzelnen Schüler mindestens $2,5 \text{ m}^2$ kommen?
17. In den Dünen an der Ostsee kauft jemand ein Grundstück. Das Quadratmeter kostet 0,75 RM. Der rechteckige Platz ist 115 m tief. Wie lang kann die Strandseite sein, wenn 2000 RM für den Kauf angesetzt sind?
18. Ein Platz von 83,4 m Länge und 42,8 m Breite ist zu pflastern. Was kostet das, wenn 12,35 RM für das Quadratmeter in Ansatz gebracht werden?
19. Wie hoch stellt sich das Chausssieren einer Chaussee von 12,6 km Länge, deren Fahrdamm 7,9 m breit ist? Das Quadratmeter soll mit 5,68 RM veranschlagt sein.
20. In einem Park sind 265 m Wege von 1,3 m Breite zu befestigen. Ein Voranschlag setzt dafür 1300 RM an. Wie ist da das Quadratmeter gerechnet?
- *21. Ein Zimmer von 5,2 m Länge, 4,8 m Breite und 4,2 m Höhe ist bis zu 1,2 m mit einem Ölanstrich, das m^2 zu 2,60 RM, darüber mit einem Kalkanstrich, das m^2 zu 1,40 RM versehen. Was kostet das?

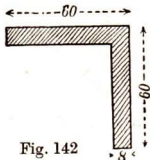


Fig. 142

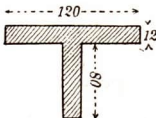


Fig. 143

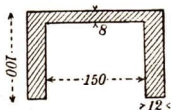


Fig. 144

22. a) bis e) Die Fig. 142—146 sind Querschnittsskizzen von eisernen Trägern. Berechne auf Grund der eingezeichneten Maße (in mm) in jedem der Fälle den Querschnitt.

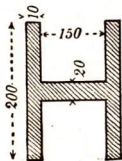


Fig. 145

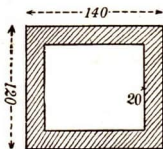


Fig. 146

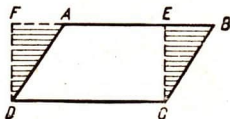


Fig. 147

23. Auf eine Kartoffelstaude rechnet man etwa 2000 cm² Bodenfläche. Wieviel Kartoffeln kann man also auf einen rechteckigen Acker von 15,5 m Länge und 9,5 m Breite setzen?

Das Parallelogramm

24. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ (siehe Fig. 147). Verwandle das Parallelogramm in der Weise in ein flächengleiches Rechteck, daß du $\triangle EBC$ auf der einen Seite wegnimmst und dafür das ihm kongruente FAD ansetzt. Wann entstehen Schwierigkeiten bei diesem Verfahren?
25. Nimm die Verwandlung eines Parallelogramms in ein Rechteck in der Weise vor (Fig. 148), daß du das Parallelogramm durch eine zu einem

Seitenpaar senkrechte Gerade in zwei Teile I und II zerschneidest, die in der Gestalt II und I' aneinander gelegt ein Rechteck ergeben. Geht das immer?

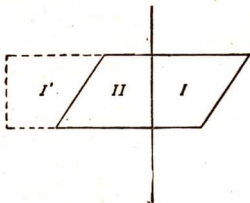


Fig. 148

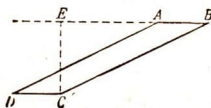


Fig. 149

26. Nimm die Verwandlung des Parallelogramms in ein Rechteck auch in dem Falle vor, wo die von dem Endpunkt der einen Seite gefällte Senkrechte nur die Verlängerung der Gegenseite trifft (wie z. B. in Fig. 149).
27. Es sei a eine Seite eines Parallelogramms und h_a die zugehörige Höhe, d. h. der Abstand dieser Seite von ihrer Gegenseite. Zeige, daß dann für den Flächeninhalt des Parallelogramms die Formel gilt:

$$f = a \cdot h_a.$$

28. Zeige, daß die Formel für den Inhalt eines Rechtecks nur ein besonderer Fall der Formel für das Parallelogramm ist.

29. Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms, von dem gegeben ist:

a) $a = 5 \text{ cm}$, $h_a = 3 \text{ cm}$

b) $c = 7 \text{ cm}$, $h_c = 4 \text{ cm}$

c) $a = 5,2 \text{ cm}$, $h_a = 10,8 \text{ cm}$

d) $b = 3,7 \text{ cm}$, $h_b = 4,1 \text{ cm}$

e) $a = 3\frac{1}{2} \text{ m}$, $h_a = 1\frac{3}{4} \text{ m}$

f) $d = 3,73 \text{ m}$, $h_d = 1,88 \text{ m}$

30. In einem Parallelogramm ist a) $a = 15 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $h_a = 6 \text{ cm}$. Wie groß ist h_b ?

b) Es ist allgemein gegeben a , b und h_a . Berechne h_b .

31. In einem Parallelogramm ist a) $a = 2,5 \text{ cm}$, $h_a = 7,2 \text{ cm}$, $h_b = 5,4 \text{ cm}$. Wie groß ist b ? Es ist allgemein gegeben a , h_a , h_b ; berechne b .

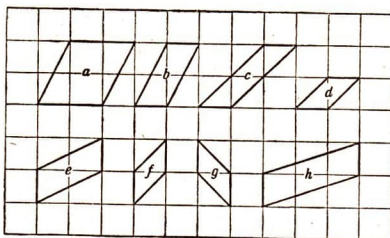


Fig. 150

32. Berechne die Flächeninhalte der in der nebenstehenden Fig. 150 eingetragenen Parallelogramme a bis h in Flächeneinheiten der mit dargestellten Quadrateinteilung.

Das Dreieck

33. a) Zerlege ein Rechteck mit den Seiten a und b durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke. b) Ergänze ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b zu einem Rechteck von doppeltem Inhalt.

34. Beweise, daß, wenn a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dessen Flächeninhalt

$$f = \frac{a \cdot b}{2} \text{ ist.}$$

35. Berechne den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten

a) 3 cm und 4 cm

b) 5 cm und 12 cm

c) $\frac{1}{2} \text{ m}$ und $\frac{1}{4} \text{ m}$

d) $0,75 \text{ m}$ und $7,5 \text{ m}$

e) $0,1 \text{ m}$ und $0,01 \text{ m}$

f) $1,243 \text{ m}$ und $7,281 \text{ m}$

36. a) In einem Dreieck sei von einem Eckpunkt auf die Gegenseite das Lot gefällt, ihr Fußpunkt liege auf der Gegenseite (Fig. 151). Ergänze die beiden

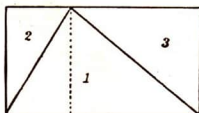


Fig. 151



Fig. 152

rechtwinkligen Teildreiecke zu Rechtecken. **b)** Beweise die Formel für die Dreiecksflächen:

$$f = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

37. Zeige, daß die Formel von Aufg. 36 auch gilt, wenn der Höhenfußpunkt D auf die Verlängerung von BC über B oder C hinaus fällt.

38. Ergänze das Dreieck ABC durch Parallelen zu einem Parallelogramm von doppeltem Flächeninhalt und leite daraus die Formel der Aufg. 36 ab.

39. Fig. 152 zeigt ein Parallelogramm und ein schraffiertes Dreieck mit gleicher Grundlinie und Höhe. Ziehe durch die Endpunkte der Grundlinie des Dreiecks Parallelen zu den Gegenseiten und weise an der so entstehenden Figur nach, daß das Parallelogramm den doppelten Inhalt des Dreiecks hat.

40. Ein Dreieck und ein Parallelogramm mit gleicher Grundlinie und Höhe sind gegeben. Zeige an der Hand einer der Fig. 151 ähnlichen Figur, daß das Parallelogramm den doppelten Inhalt des Dreiecks hat.

41. Berechne den Inhalt eines Dreiecks aus:

a) $a = 3,4 \text{ cm}$, $h_a = 2,6 \text{ cm}$;

b) $b = 2\frac{1}{4} \text{ m}$, $h_b = 2\frac{3}{4} \text{ m}$;

c) $a = 7,5 \text{ cm}$, $h_a = 5,9 \text{ cm}$;

d) $c = 7\frac{1}{2} \text{ m}$, $h_c = 7\frac{1}{2} \text{ m}$.

42. In einem Dreieck ist

a) gegeben $a = 14,57 \text{ m}$, $b = 18 \text{ m}$, $h_a = 10,53 \text{ m}$; gesucht h_b ;

b) gegeben $a = 22,81 \text{ m}$, $c = 20 \text{ m}$, $h_c = 12,81 \text{ m}$; gesucht h_a ;

c) gegeben $a = 30,17 \text{ m}$, $h_a = 15,88 \text{ m}$, $h_c = 5 \text{ m}$; gesucht c ;

d) gegeben $b = 0,13 \text{ m}$, $c = 0,23 \text{ m}$, $h_c = 0,11 \text{ m}$; gesucht h_b ;

e) gegeben $a = 3,18 \text{ m}$, $b = 2,62 \text{ m}$, $f = 6,34 \text{ m}^2$; gesucht h_a und h_b .

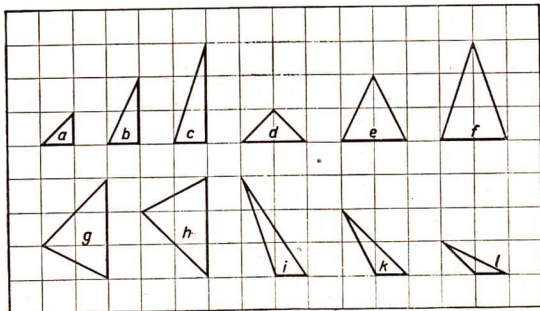


Fig. 152

43. a) bis l) Berechne die Flächeninhalte der in die Quadrateinteilung Fig. 153 eingezeichneten Dreiecke a) bis l) in Flächeneinheiten der benutzten Teilung.
44. Ein Haus ist vom Boden bis zum Dachrand 8,5 m, bis zum Dachfirst 15,5 m hoch und 9,5 m breit. Wieviel m² mißt eine Giebelfläche?

Das Trapez

45. In einem Trapez seien a und b die beiden parallelen Seiten, h die Höhe (der Parallelenabstand). Ziehe eine Diagonale und berechne den Inhalt des Trapezes als Summe der Dreiecke.
46. Lege an das Trapez in der Weise ein kongruentes Trapez, wie es Fig. 154 zeigt. Beweise, daß die Gesamtfigur ein Parallelogramm ist; berechne den Inhalt erst des Parallelogramms, dann des Trapezes.

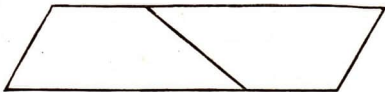


Fig. 154

47. Ziehe im Trapez die Mittelparallele und durch einen ihrer Endpunkte die Parallele zu der gegenüberliegenden Trapezseite. Mit Benutzung der in der



Fig. 155

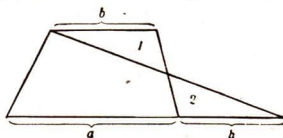


Fig. 156

Fig. 155 mit 1 und 2 bezeichneten kongruenten Dreiecke leite dann die Inhaltsformel ab.

48. Gib an der Hand der Fig. 156 einen Beweis für die Inhaltsformel des Trapezes

$$f = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

49. Berechne den Inhalt eines Trapezes, von dem gegeben ist:

a) $a = 5$ cm	$b = 9$ cm	$h = 4$ cm
b) $a = 1,2$ m	$b = 0,85$ m	$h = 35$ cm
c) $a = 15,38$ m	$b = 12,02$ m	$h = 8,55$ m

50. Leite aus der Inhaltsformel für das Trapez diejenige für das Dreieck ab, indem du eine Parallele des Trapezes Null werden läßt. Ist auch dann der Inhalt gleich dem Produkt aus Höhe und Mittelparallele (d. h. Verbindungsstrecke der Seitenmitten)?

51. Eine trapezförmige Fensterbank soll aus einer Kalksteinplatte herausgeschnitten werden. Sie ist vorn 1,25 m, hinten 1,05 m lang und 0,30 m breit. Welchen Flächeninhalt hat die Platte?

52. Ein Bild wird gerahmt. Die Seiten des Bildes sind 1,25 m und 0,95 m, die äußeren Rahmenlängen 1,47 m und 1,17 m. Berechne die Rahmenfläche als Summe von vier Trapezen.
53. Der Giebel eines Hauses ist oben durch ein Querdach abgeschrägt. Die Maße sind der Skizze Fig. 157 zu entnehmen. Berechne die Giebelfläche.

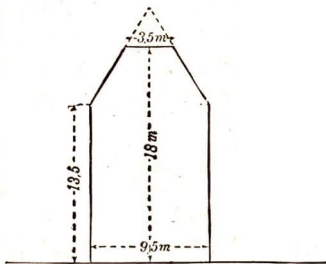


Fig. 157

Funktionsbetrachtungen

54. Wie stellt sich **a)** der Flächeninhalt des Quadrates, ***b)** die Oberfläche eines Würfels als Funktion der Seite dar? Stelle die Funktionen graphisch dar.
55. Wie stellt sich **a)** der Flächeninhalt des Rechtecks als Funktion einer Seite dar, wenn die andere konstant bleibt, ***b)** die Oberfläche einer quadratischen Säule mit konstanter Grundfläche aber veränderlicher Höhe, ***c)** die Oberfläche einer quadratischen Säule mit veränderlicher Grundfläche aber konstanter Höhe? Graphische Darstellung.
56. Wie stellt sich der Flächeninhalt des Dreiecks als Funktion **a)** einer Seite bei konstant gehaltener zugehöriger Höhe, **b)** einer Höhe bei konstant gehaltener zugehöriger Seite dar? Graphische Darstellung.
57. Wie stellt sich der Flächeninhalt des Trapezes dar als Funktion der Höhe bei konstant gehaltener Mittellinie? Graphische Darstellung.
58. Wie stellt sich der Flächeninhalt des Trapezes dar als Funktion einer der parallelen Seiten, während die andere parallele Seite und die Höhe konstant bleibt? Graphische Darstellung.
59. Wie stellt sich die Seite des Quadrates dar als Funktion des Flächeninhaltes? Graphische Darstellung.
60. Wie stellt sich eine Seite des Rechtecks dar als Funktion des Flächeninhaltes, wenn die andere Seite konstant bleibt? Graphische Darstellung.
61. Wie stellt sich eine Seite des Dreiecks dar als Funktion der zugehörigen Höhe und des Flächeninhaltes?
62. Wie stellt sich die Höhe des Trapezes dar als Funktion der Mittelparallele und des Flächeninhaltes?
63. Wie stellt sich die eine parallele Seite des Trapezes als Funktion der anderen und der Höhe dar?

Geometrische Überlegungen

64. Ein Dreieck kann man auf dreifache Weise zu einem Rechteck (Aufg. 36) oder einem Parallelogramm (Aufg. 38) ergänzen. Warum erhält man trotzdem alle Male den gleichen Inhalt?

65. Stelle die folgenden Formeln durch Flächen geometrischer Figuren dar:

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

d) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

66. Zeige, daß die Wahl der Einheitsmaße (cm, dm) für die Richtigkeit der Flächenberechnung nicht ins Gewicht fällt, wohl aber, daß alle gemessenen Strecken in der gleichen Einheit ausgedrückt werden.

67. Vergleiche Dreiecke mit gleicher Grundlinie und a) gleicher anliegender Seite, b) gleichem der Grundlinie gegenüberliegenden Winkel hinsichtlich ihres Flächeninhalts. Wann erreicht der Flächeninhalt einen Höchstwert?

68. Bei der Messung von Grundlinie und Höhe a) eines Rechtecks, b) eines Parallelogramms, c) eines Dreiecks sind kleine Fehler im Höchstbetrage von n und v gemacht. Stelle den größtmöglichen Fehler im Ergebnis der Flächenberechnung rechnerisch und geometrisch dar.

69. Zeige, daß es immer möglich ist, durch gesteigerte Genauigkeit in der Angabe der Ausgangswerte den bei der Flächenberechnung auftretenden Fehler unter eine vorgeschriebene Größe herabzudrücken.

70. Gegeben sind zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe. Versuche einen Zerlegungsbeweis für die Flächengleichheit der beiden Dreiecke, d. h. untersuche, ob du das eine Dreieck so in Teilfiguren zerlegen kannst, daß sie, anders zusammengefügt, das andere Dreieck bilden.

71. Gegeben sind ein Rechteck und ein flächengleiches Quadrat. Zerlege beide Figuren in Teilstücke derart, daß jedem Teilstück des Rechtecks ein kongruentes Teilstück des Quadrates entspricht. Versuche mit möglichst wenigen Teilstücken auszukommen.

Aus der Geschichte der Geometrie

72. Aus einer mittelalterlichen Münchener Handschrift: „Idem ager est longum pedum CCXL, cuius latitudo ignoratur, sed in eo dispositae sunt arbores inter quinos pedes singulae crassae pedum duorum DXXV.“ (Ein Acker ist 240 Fuß lang, seine Breite ist unbekannt. Es stehen aber auf ihm im Abstand von jedesmal 5 Fuß 525 zwei Fuß dicke Bäume.) Berechne die Breite des Ackers.

73. Aus dem Liber Embadorum des Abraham bar Chijja Savasorda (1116) nach der lateinischen Übersetzung von Plato von Tivoli: „Es ist ein Rhombus gegeben, dessen Inhalt 96 ist, und das als eine der beiden Diagonalen 16 enthält. Wie groß wird die andere Diagonale sein?“

§ 18. Flächenberechnung beliebiger ebener Figuren

Inhalt des Vierecks

1. Gegeben ist ein beliebiges Viereck $ABCD$. Fällt die Lote BB_1 und DD_1 auf die Diagonale AC . Wie groß ist dann der Flächeninhalt des Vierecks?

2. Berechne ein Vieleck aus den durch Messung gefundenen Stücken¹⁾ (Bezeichnung wie in Aufg. 1):

a) $AC = 7 \text{ cm}$

$BB_1 = 3 \text{ cm}$ $DD_1 = 5 \text{ cm}$

b) $AC = 12,75 \text{ m}$

$BB_1 = 6,80 \text{ m}$ $DD_1 = 4,35 \text{ m}$

c) $AC = 124,5 \text{ m}$

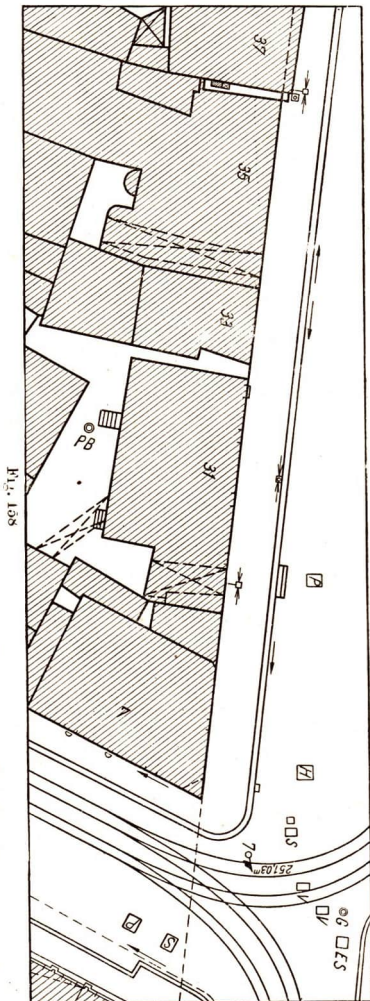
$BB_1 = 133,8 \text{ m}$ $DD_1 = 85,3 \text{ m}$

3. Gib an, ob die in Aufg. 1 gegebene Berechnungsmethode sich auch empfiehlt, wenn man eine besondere Art von Vierecken (Parallelogramm, Rhombus, Trapez usw.) vor sich hat.

4. Gib an, welche Gestalt die in Aufg. 1 gegebene Berechnungsmethode annimmt bei Vierecken, deren Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

5. Einem Viereck werde ein Rechteck in der Weise umgeschrieben, daß dessen eines Seitenpaar parallel einer Diagonale des Vierecks ist. In welcher Beziehung stehen Inhalt des Rechtecks und Inhalt des Vierecks?

1) Sind die Vierecke aus diesen Stücken konstruierbar?



Inhalt des Vielecks. Dreiecksmethode

6. Durch wieviel Diagonalen (Mindestzahl) läßt sich **a)** ein Fünfeck, **b)** ein Sechseck, **c)** ein Zehneck, **d)** ein n -Eck in Dreiecke zerlegen?
7. Man kann den Flächeninhalt eines Vielecks berechnen, wenn man es in Dreiecke zerlegt und deren Inhalte bestimmt. Zeichne **a)** ein Fünfeck, **b)** ein Sechseck, **c)** ein Zehneck, **d)** ein beliebiges n -Eck, konstruiere die nötigen Hilfslinien und bezeichne diejenigen, die auszumessen sind. Achte darauf, daß die Zahl der zu messenden Strecken möglichst klein wird.
8. Fig. 158 zeigt einen Grundstücksplan (Maßstab 1 : 500; es ist ein Ausschnitt aus dem Ortsplan von Stuttgart). Fertige zunächst eine Kopie der im folgenden erwähnten Grundstücke in gleichem Maßstab. **a)** Zerlege das Eckgrundstück 7 in möglichst zweckmäßiger Weise in Teilfiguren, die leicht meßbar sind. Miß die nötigen Strecken und berechne den Flächeninhalt des ganzen Grundstücks und des darin bebauten Teiles. **b)** Beantworte dieselbe Frage für das Grundstück 33, **c)** für den bebauten Teil des Grundstücks 31.

9. Gegeben ist ein Tangentenviereck. Verbinde den Mittelpunkt des Inkreises mit den Ecken des Vierecks und zeige, daß der Flächeninhalt

$$f = \varrho \cdot s$$

ist, wo ϱ der Radius des Inkreises,

$$s = \frac{1}{2} (a + b + c + d)$$

der halbe Umfang ist.

10. Beweise, daß die Formel in Aufg. 9 auch gilt
a) für Dreiecke, **b)** für alle Tangentenvielecke.

11. **a)** Das Quadrat, **b)** den Rhombus kann man als Tangentenviereck auffassen. Zeige, daß die auf diesem Wege erhaltenen Inhaltsformeln übereinstimmen mit den sonst bekannten.

12. **a)** Leite an der Hand der Fig. 159 für den Inhalt des Dreiecks die Formel

$$f = \frac{\varrho_a}{2} \cdot (b + c - a) \quad \text{ab.}$$

- b)** Beweise die Formeln:

$$f = \varrho_a \cdot (s - a),$$

$$f = \varrho_b \cdot (s - b),$$

$$f = \varrho_c \cdot (s - c).$$

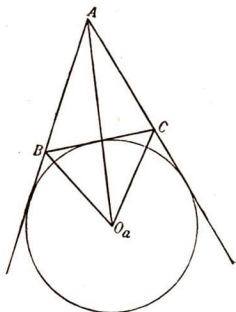


Fig. 159

Inhalt des Vielecks. — Trapezmethode

13. Fig. 160 zeigt einen in Millimeterpapier eingetragenen Streckenzug. Berechne die zwischen Strecke, x -Achse und den Ordinaten AA_1 und BB_1 liegende Fläche als Summe von Trapezen. Die nötigen Größen sind aus der Zeichnung abzulesen.



Fig. 160

14. Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks ABC sind

a) $A \equiv (2,3)$	$B \equiv (7,4)$	$C \equiv (6,5)$
b) $A \equiv (2,1, 4,5)$	$B \equiv (6,7, 6,4)$	$C \equiv (5,5, 7,8)$
c) $A \equiv (a_1, a_2)$	$B \equiv (b_1, b_2)$	$C \equiv (c_1, c_2)$
d) $A \equiv (0,0)$	$B \equiv (b_1, b_2)$	$C \equiv (c_1, c_2)$
e) $A \equiv (0,0)$	$B \equiv (0, a)$	$C \equiv (b, 0)$

Zeichne in jedem Falle das Dreieck und berechne den Inhalt nach der Trapezmethode.

15. Berechne den Inhalt der umstehenden Fläche (Fig. 161), indem du die Begrenzungen **a)** auf eine die Fläche durchsetzende Gerade (etwa g_1), **b)** auf eine außerhalb der Fläche verlaufende Gerade (etwa g_2) projizierst und die nötigen Stücke ausmißt.

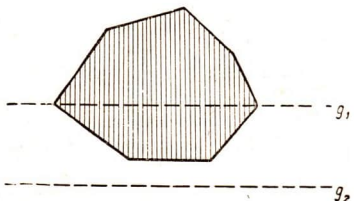


Fig. 161

- 21.** Um eine beliebige krummlinig begrenzte Fläche auszumessen, legt man durch sie eine Schar von parallelen Geraden und ersetzt dann die Fläche durch eine Schar von Trapezen, die Umgrenzung also durch einen Streckenzug, indem man die Krümmung zwischen zwei Schnittpunkten aufeinander folgender Geraden unberücksichtigt läßt. **a)** Führe die Methode an einem selbstgewählten

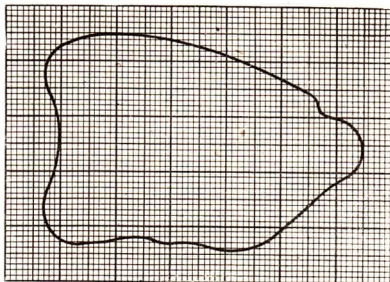


Fig. 165

- Beispiel durch, etwa der Fläche eines Sees, die du am besten von der Landkarte gleich auf Millimeterpapier überträgst. **b)** Welcher Vorteil entspringt daraus, daß man die Abstände der parallelen Geraden gleich wählt?
- 22.** Wenn die ihrem Flächeninhalt nach zu bestimmende Fläche nicht zugänglich ist (z. B. auf dem Felde die Fläche eines Sees), so umgibt man die Fläche mit einem ausmeßbaren geschlossenen Streckenzug und mißt von da aus mit der Trapezmethode die Flächen zwischen Streckenzug und Flächenbegrenzung. Zeichne selbst ein Beispiel und miß die Fläche möglichst zweckmäßig aus.
- 23.** Eine sehr rohe Methode zur Bestimmung des Flächeninhalts ist die: Man überträgt die zu messende Fläche auf Papier von möglichst gleichmäßiger Dicke, schneidet die Fläche aus und wiegt sie (Briefwaage!). Daneben wiegt man auch die Flächeneinheit. **a)** Stelle auf diese Art den Flächeninhalt eines Kreises von 10 cm Radius fest (als Vergleichsfläche nimm ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge. **b)** Beurteile die Genauigkeit dieses Verfahrens, indem du z. B. prüfst, ob ein Dreieck halb so viel wiegt wie das zugehörige Parallelogramm.
- 24.** Um die in einem Flusse in einer gewissen Zeit durch den Querschnitt fließende Wassermenge zu berechnen, muß man die Strömung und den Querschnitt kennen. Der Fluß sei an der betreffenden Stelle 27,5 m breit, man stellt durch Lotung von 5 zu 5 m fest (vgl. den überhöhten Querschnitt in Fig. 166): 2 m; 2,2 m; 2,5 m; 3,5 m; 2,7 m. Berechne den Querschnitt nach der Trapezmethode.

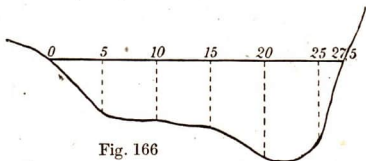


Fig. 166

Aus der Geschichte der Geometrie

- 25.** Heron behandelt in seinen Geometrica die folgende Aufgabe: „Es sei ein nicht rechtwinkliges Parallelogramm, dessen größere Länge = 32 Fuß, die

andere = 30 Fuß, $32 + 30 = 62$, $\frac{1}{2} \cdot 62 = 31$. Und die Breite = 18 Fuß, die andere = 16 Fuß, $18 + 16 = 34$, $\frac{1}{2} \cdot 34 = 17$, $17 \cdot 31 = 527$; so viel Fuß ist der Rauminhalt.“ Untersuche, **a)** was Heron hier unter einem „nicht rechtwinkligen Parallelogramm“ versteht, **b)** welche allgemeine Näherungsformel hier von Heron benutzt wird, **c)** ob diese Näherungsformel richtig ist oder nicht, insbesondere für welche Arten von Vierecken etwa sie genau stimmen würde.

§ 19. Flächenvergleichung, Flächenverwandlung, Flächenteilung

1. Zeige **a)** arithmetisch, **b)** geometrisch an der Hand der Fig. 167 (das schraffierte Dreieck an der einen Seite ist wegzunehmen und an der anderen anzusetzen), **c)** geometrisch an der Hand der Fig. 168 (von den kongruenten Trapezen $AB'C'D$ und $A'BCD'$ wird das Trapez $BB'C'C$ abgezogen), daß Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich sind.



Fig. 167

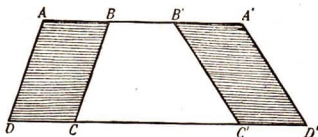


Fig. 168

2. Ein Parallelogramm ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln.
3. Ein Parallelogramm ist in ein anderes mit gleicher Grundlinie und Höhe zu verwandeln, in dem außerdem vorgeschrieben ist **a)** ein Winkel, **b)** eine Diagonale, **c)** eine Seite, die nicht Grundlinie ist.
4. (Satz vom Gnomon.) Durch einen beliebigen Punkt P der Diagonale AC eines Parallelogramms $ABCD$ sind Parallelen zu den Seiten gezogen (Fig. 169). Die Schnitte mit den Seiten seien bei den Parallelen zu AB die Punkte E und F , bei den Parallelen zu AD die Punkte G und H . **a)** Beweise, daß die schraffierten Parallelogramme flächengleich sind. **b)** Zeichne die Figur für ein Rechteck. **c)** Zeichne die Figur für ein Quadrat (warum ist da der Satz trivial?).

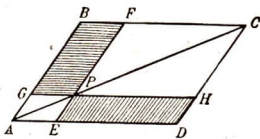


Fig. 169

5. Ein gegebenes Parallelogramm ist in ein anderes zu verwandeln, von dem vorgeschrieben sind:
 - a) a, b
 - b) a, α
 - c) a, e
6. Ein Parallelogramm ist durch Parallelen zu einer Seite in **a)** zwei, **b)** drei, **c)** vier gleiche Teile zu teilen.

7. Ein Parallelogramm ist durch eine Parallele zu einer Seite so zu teilen, daß der eine Teil **a)** den doppelten, **b)** den dreifachen Flächeninhalt des anderen hat.

Verwandlung und Teilung von Dreiecken

8. Zeige **a)** arithmetisch, **b)** geometrisch, daß ein Parallelogramm doppelt so groß ist wie ein Dreieck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.
9. Zeige, daß Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe gleich sind.
10. Suche den geometrischen Ort der Spitzen von Dreiecken gleichen Flächeninhalts und gleicher Grundlinie.
11. Ein Dreieck ist in ein flächengleiches, rechtwinkliges (mit gleicher Grundlinie) zu verwandeln. Wieviel Lösungen sind möglich?
12. Ein Dreieck ist in ein flächengleiches, gleichschenkliges mit gleicher Grundlinie zu verwandeln.
13. Verwandle ein Dreieck unter Beibehaltung der Grundlinie a in ein flächengleiches andere, von dem vorgeschrieben ist:
- | | | |
|----------|-------------|------------|
| a) b | b) c | c) β |
| d) s_a | e) α | f) r |
14. Ein Dreieck ist durch zweimalige Verschiebung in ein flächengleiches zu verwandeln, von dem gegeben ist:
- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| a) a, b | b) a, α | c) a, γ |
| d) c, β | e) a, s_a | f) c, s_c |
15. Verwandle ein Dreieck ABC unter Beibehaltung des Winkels γ (durch Teilverschiebung) in ein flächengleiches, von dem ein neuer Eckpunkt der gegebene Punkt P auf **a)** AC (Fig. 170), **b)** auf BC ist.
16. Verwandle ein Dreieck unter Beibehaltung des Winkels γ in ein flächengleiches, wenn gegeben ist:
- | | | |
|--------|--------|----------|
| a) a | b) b | c) h_a |
|--------|--------|----------|

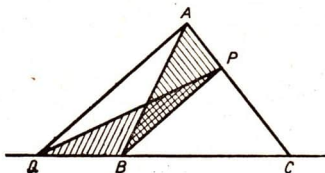


Fig. 170

17. Teile ein Dreieck von einer Ecke aus in **a)** drei, **b)** vier, **c)** fünf gleiche Teile.
18. Teile ein Dreieck von einer Ecke aus so in zwei Teile, daß der eine **a)** doppelt, **b)** dreimal so groß ist wie der andere.
19. Teile ein Parallelogramm von einer Ecke aus in **a)** vier, **b)** sechs, **c)** drei, **d)** fünf gleiche Teile.
20. Teile ein Parallelogramm durch eine die eine Ecke durchsetzende Gerade so, daß der eine Teil doppelt so groß ist wie der andere.
21. Teile **a)** ein gleichschenkliges, **b)** ein rechtwinkliges, **c)** ein beliebiges Trapez in drei flächengleiche Teile.

Verwandlung von Vierecken und Vielecken in Dreiecke und umgekehrt

22. Beweise: Ein Parallelogramm ist flächengleich einem Dreieck **a)** von gleicher Höhe und doppelter Grundlinie, **b)** von gleicher Grundlinie und doppelter Höhe.
23. **a)** Verwandle ein Dreieck in ein Rechteck mit gleicher Grundlinie. **b)** Stelle dir nach Fig. 171 ein bewegliches Modell für eine solche Verwandlung her (D_1 und D_2 sind die Drehpunkte).
24. **a)** Verwandle ein Dreieck in ein Rechteck mit gleicher Höhe. **b)** Konstruiere auch für diesen Fall ein bewegliches Modell.
25. Verwandle ein Dreieck in ein Rechteck, **a)** mit gegebener Seite, **b)** mit gegebener Diagonale.
26. Verwandle ein Parallelogramm in ein Dreieck mit gleicher Grundlinie und **a)** einem gegebenen Winkel, **b)** einer gegebenen Seite.
27. Verwandle ein Parallelogramm in **a)** ein gleichschenkliges, **b)** ein rechtwinkliges Dreieck unter Beibehaltung einer Seite.
28. Verwandle ein Dreieck **a)** in ein gleichschenkliges, **b)** in ein rechtwinkliges Trapez unter Beibehaltung der Grundlinie.
29. Gegeben ist ein beliebiges Viereck. Ziehe eine Diagonale und verwandle das eine Teildreieck in ein anderes derart, daß es mit dem anderen Teildreieck zusammen ein einziges Dreieck bildet.
30. Verwandle ein beliebiges Viereck in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite vorgeschrieben ist.
31. Verwandle **a)** ein beliebiges Fünfeck, **b)** ein beliebiges Sechseck in ein Dreieck. **c)** Dürfen die Vielecke auch einspringende Ecken haben?
32. Verwandle zwei Dreiecke in ein einziges flächengleiches Dreieck. — Ist die Aufgabe eindeutig?
33. Konstruiere ein Dreieck mit der Seite a , das flächengleich ist der Differenz der Flächen zweier beliebiger gegebener Dreiecke.

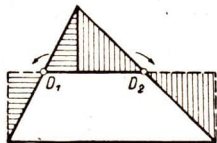


Fig. 171

Geometrische Überlegungen

34. In einem Trapez $ABCD$ sind die Diagonalen gezogen; sie schneiden sich in O (Fig. 172). **a)** Beweise, daß die Dreiecke OAD und OBC flächengleich sind. **b)** Untersuche, wie man diese Tatsache zur Verwandlung von Dreiecken unter Beibehaltung eines Winkels benutzen kann. **c)** Beachte, daß die Tatsache bereits in Fig. 170 benutzt ist; inwiefern?
35. Versuche, Sätze über die Flächengleichheit von Trapezen zu formulieren.
36. Ein Viereck werde durch die Diagonalen in vier Dreiecke geteilt. Untersuche, was über die Flächen dieser Dreiecke zu sagen ist, wenn das Viereck von besonderer Art ist (z. B. Rechteck, Rhombus usw.).

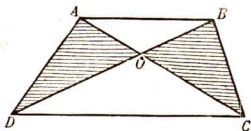
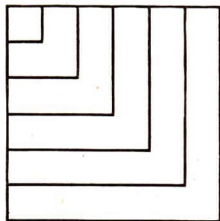


Fig. 172

Aus der Geschichte der Geometrie

37. Euklids Elemente (Buch II, 7): „Wenn man eine Strecke irgendwie teilt, so wird das Quadrat über der ganzen Strecke vermehrt um das Quadrat der einen Teilstrecke gleich dem doppelten Rechteck aus der ganzen Strecke und der eben genannten Teilstrecke, vermehrt um das Quadrat der anderen Teilstrecke.“ Schreibe den Satz in eine arithmetische Formel um und beweise ihn arithmetisch und geometrisch.
38. Ebenda (Buch II, 8): „Wenn man eine Strecke irgendwie teilt, so wird das vierfache Rechteck aus der ganzen Strecke und der einen Teilstrecke, vermehrt um das Quadrat der anderen Teilstrecke, gleich dem Quadrat, das über der um die zuerst genannte Teilstrecke verlängerten ganzen Strecke konstruiert ist.“ Schreibe den Satz in eine arithmetische Formel um und beweise ihn arithmetisch und geometrisch.
39. Ebenda (Buch II, 9): „Wenn man eine Strecke in zwei gleiche und in zwei ungleiche Teile teilt, so ist die Summe der Quadrate über den ungleichen Teilen doppelt so groß als das Quadrat über der Hälfte (der ganzen Strecke) zusammen mit dem Quadrat über der Strecke, die zwischen den beiden Teilpunkten gelegen ist.“ Schreibe den Satz in eine arithmetische Formel um und beweise ihn arithmetisch und geometrisch.
40. Aristoteles (384–322 v. Chr.) sagt in seiner Metaphysik, die Pythagoreer hätten die Quadratzahlen gebildet, indem sie die Gnomonen allmählich zur Einheit zfügten. Erkläre diesen Ausspruch an der Hand der Fig. 173 und zeige, daß es sich, arithmetisch gesprochen, um die Summierung



2. In der Fig. 175 ist das Vergleichsdreieck durch ein Parallelogramm ersetzt. Führe den Beweis des eben genannten Satzes mit dieser Hilfsfigur.
3. In der Fig. 176 ist das eine Kathetenquadrat nach innen umgeklappt. Dann ist eine Drehung des Hilfsdreiecks nicht erst nötig. a) Beweise, daß die Verlängerung von FG durch D geht; b) führe den Beweis des Satzes der Aufg. 1 mit dieser Hilfsfigur.

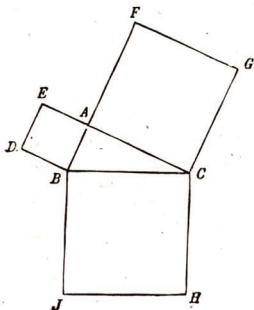


Fig. 174

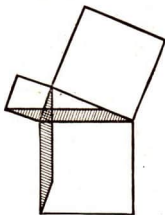


Fig. 175

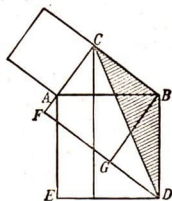


Fig. 176

4. Wende den Lehrsatz von Euklid auf beide Kathetenquadrate an und beweise so den Lehrsatz von Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate flächengleich dem Hypotenusenquadrat.

Zerlegungsbeweise des Satzes. — Additionsbeweise

5. (Epsteinscher Beweis.) In der Fig. 177 ist das Hypotenusenquadrat in acht Dreiecke zerlegt, ebenso sind die beiden Kathetenquadrate zerlegt und zwar so, daß die gleichen Dreiecke wie bei der Zerlegung des Hypotenusenquadrates auftreten. a) Zeichne eine Figur, zerschneide sie und führe die Zerlegung praktisch aus. b) Welche Form nimmt dieser Zerlegungsbeweis an, wenn das Dreieck rechtwinklig-gleichschenkelig ist?
6. In der Fig. 178 ist eine einfachere und sehr symmetrische

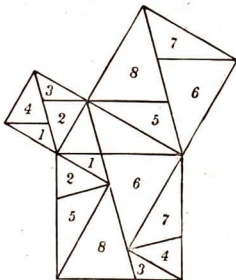


Fig. 177

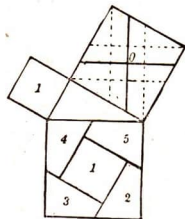


Fig. 178

Zerteilung des Hypotenusenquadrates angegeben; die Teilfiguren sind diesmal Vierecke. **a)** Stelle ein Modell der Zerlegung her. **b)** Konstruiere die Zerlegung für den Fall eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks. **c)** Versuche, ob die Zerlegung auch ausführbar ist, wenn man als Schnittpunkt O der Teilgeraden in dem einen Kathetenquadrat nicht den Mittelpunkt, sondern einen anderen geeigneten Punkt im Innern des Quadrates wählt.¹⁾

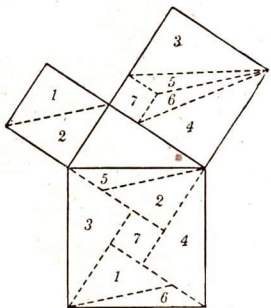


Fig. 179

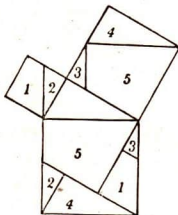


Fig. 180

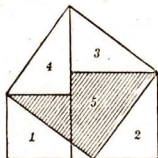


Fig. 181

7. Fig. 179 gibt einen Zerlegungsbeweis nach Gutheil²⁾ an. **a)** Beweise die Kongruenz der Teildreiecke. **b)** Untersuche, welche Gestalt der Beweis im Falle des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks annimmt.
8. Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Zerlegungsfigur von Annairizi (Fig. 180) und beweise die Kongruenz der einander entsprechenden Stücke im Hypotenusenquadrat und in den Kathetenquadraten.

Zerlegungsbeweise des Satzes. — Subtraktionsbeweise

9. Wenn man in der Fig. 180 die rechtwinkligen Dreiecke 1 und 2 wegnimmt, so bleibt das Hypotenusenquadrat übrig, nimmt man aber die den eben genannten flächengleichen Dreiecke 3 und 4 weg, so bleibt die Summe der beiden Kathetenquadrate übrig. Fertige zu diesem Beweis ein Modell in der Weise, daß du die Dreiecke, die ihre Lage ändern, um geeignete Ecken beweglich machst.
10. Zeige, daß die Fläche $ADEFGBA$ in der Fig. 182 flächengleich der Fläche $ACBHKJA$ ist (man zeigt, daß zwei geeignet gewählte Hälften von jeder der beiden Flächen durch Drehung ineinander übergeführt werden können). Folgere daraus durch Subtraktion gleicher Stücke, daß das Hypotenusenquadrat flächengleich der Summe der Kathetenquadrate ist.
11. Wenn man von dem die ganze Pythagoras-Figur umschließenden Rechteck (Fig. 183) die schraffierten Flächen und die Rechtecke 7, 5 und 6 abzieht, so

1) Dieser „Schaufelradbeweis“ rührt von Perigal her.

2) Gutheil, ein junger Mathematiker, ist 1914 gefallen; die Figur zu seinem Beweis ist etwas anders orientiert, als er es seinerzeit getan.

erhält man die Summe der Kathetenquadrate. Zieht man hingegen außer den gleichen Rechtecken 7, 5 und 6 die Kathetenquadrate 9 und 8, sowie die vier gleichen Dreiecke 1, 2, 3 und 4 ab, so erhält man das Hypotenusenquadrat. Erbringe den Nachweis, daß die in beiden Fällen abgezogenen Flächenstücke flächengleich sind.

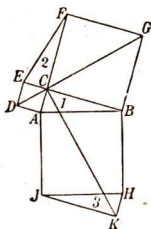


Fig. 182

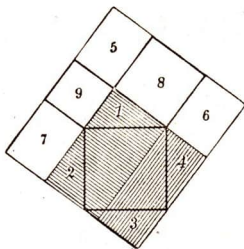


Fig. 183

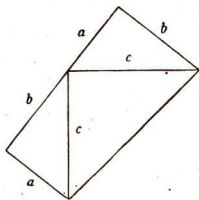


Fig. 184

Berechnungsweise des Satzes

12. Trage auf den Seiten eines Quadrates, dessen Seitenlänge $a + b$ ist, von jedem Eckpunkt aus in einer Umdrehungsrichtung die Strecke a ab und verbinde die Teilpunkte (Fig. 93). Die Figur, die dann im Innern des großen Quadrates entsteht, ist ein Quadrat. Dann ist nach der Figur

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2,$$

wo c die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b bedeutet. Wenn man andererseits für $(a + b)^2$ einen anderen, ihm arithmetisch gleichwertigen Ausdruck schreibt, läßt sich der pythagoreische Lehrsatz leicht rechnerisch beweisen.

13. Ein alter chinesischer Beweis verfährt folgendermaßen: In das Hypotenusenquadrat wird das rechtwinklige Dreieck viermal hineingelegt und zwar so, daß Quadratseite und Hypotenuse aufeinanderfallen. Dann bleibt in der Mitte ein kleines Viereck frei. a) Was für ein Viereck ist es? Wie groß ist seine Fläche? b) Drücke das Hypotenusenquadrat lediglich durch die Katheten a und b aus; dann erhältst du die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

14. Von Fig. 184, deren Entstehung leicht zu erkennen ist, berechne man den Flächeninhalt einmal als Summe dreier Dreiecke, zum andern als Trapez. Durch Gleichsetzen beider Werte erhält man den pythagoreischen Lehrsatz.
15. Führe den in Aufg. 6 angegebenen geometrischen Beweis durch Rechnung.

Verwandlungsaufgaben

16. Gegeben sind zwei Quadrate Q_1 und Q_2 ; konstruiere Quadrate von der Größe a) $Q_1 + Q_2$, b) $Q_1 - Q_2$, c) $2 Q_1$, d) $3 Q_2$.
17. Gegeben sind drei Quadrate Q_1 , Q_2 , Q_3 . Konstruiere a) $Q_1 + Q_2 + Q_3$, b) $Q_1 + Q_2 - Q_3$, c) $Q_1 - Q_2 + Q_3$.
18. Gegeben sind die Strecken a , b und c . Konstruiere die Strecken a) $\sqrt{a^2 + b^2}$, b) $\sqrt{a^2 - b^2}$ (welche Bedingung muß bestehen?), c) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, d) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ (welche Bedingung muß bestehen?), e) $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ (welche Bedingung muß bestehen?).
19. Gegeben ist ein Quadrat. Verwandle es in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite die vorgegebene Länge a hat.
20. Verwandle a) ein Parallelogramm, b) ein Trapez, c) ein Dreieck, d) ein beliebiges Viereck, e) ein beliebiges Fünfeck in ein Quadrat.

Berechnungsaufgaben

21. Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten:
- | | |
|--------------------|--------------------|
| a) 3 cm und 4 cm | b) 5 cm und 12 cm |
| c) 6 cm und 1,1 cm | d) 36 cm und 15 cm |
| e) 10 cm und 10 cm | f) 5 cm und 6 cm |
22. Wie groß ist die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die andere, b , und die Hypotenuse, c , gegeben sind:
- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| a) $b = 7$ cm und $c = 25$ cm | b) $b = 9$ cm und $c = 41$ cm |
| c) $b = 2$ cm und $c = 10,1$ cm | d) $b = 5$ cm und $c = 10$ cm? |
23. Berechne die Diagonale eines Quadrates mit der Seite a .
24. Berechne die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a .
25. Berechne den Inhalt a) eines gleichseitigen Dreiecks, b) eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seite a .
26. Berechne den Inhalt eines Quadrates mit der Diagonale a) 10 cm, b) d .
27. Berechne die Diagonale eines Rechtecks mit den Seiten:
- | | |
|----------------------|-----------------------|
| a) 1,50 m und 0,80 m | b) 4,4 cm und 11,7 cm |
| c) 12 cm und 25 cm | d) a und b |
28. Von einem Rechteck ist die Diagonale und eine Seite gegeben; berechne die andere:
- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) 51,4 cm und 6,4 cm | b) 48,5 cm und 4,4 cm |
| c) 100 m und 25 m | d) d und a |
29. Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Höhe h gegeben. Berechne die Seite.
30. Von dem Punkte A eines Dreiecks ABC ist auf die Gegenseite die Höhe h gefällt. Die Gegenseite ist dadurch in die Abschnitte p und q geteilt. Berechne die Seiten des Dreiecks, wenn $h = 12$, $p = 18,2$ und $q = 2,2$ ist.

40. In einen Kreis mit dem Radius **a)** 10 cm, **b)** r ist eine Sehne von der Länge **a)** 14 cm, **b)** s gelegt. Welchen Abstand hat sie vom Mittelpunkt?
41. Die Sehne eines Kreises mit dem Radius **a)** 5 cm, **b)** r ist vom Kreismittelpunkt **a)** 3 cm, **b)** a entfernt. Wie lang ist sie?
42. Um die Kreisfläche angenähert nach der Trapezmethode zu berechnen, verfährt man so: Man teilt einen Kreisquadranten (Fig. 185) in Streifen durch eine Schar paralleler Sehnen mit gleichem Abstand. Man bestimmt die Länge der Sehnen und dann in bekannter Weise (vgl. § 18, Aufg. 21) den Inhalt der einzelnen Streifen. Berechne einen Näherungswert, indem du von einem Kreis mit 10 cm Radius von 2 zu 2 cm Sehnen ziehst und die Rechnung für den Kreisquadranten durchführst.
43. Eine Vereinfachung der eben gegebenen Methode deutet die Fig. 186 an. Dem Kreisquadranten AMC ist ein gleichseitiges Dreieck MCB ein-

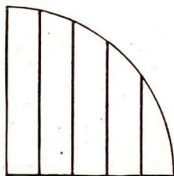


Fig. 185

beschrieben. Dann stellt der Kreisausschnitt AMB ein Zwölftel der ganzen Kreisfläche dar. Fällt man noch von B auf MC das Lot BD , so ist nach der Trapezmethode der Streifen $ABDM$ zu berechnen; da auch die Fläche MDB berechenbar ist, erhält man dann sofort das Kreiszwölftel. **a)** Führe die Berechnung durch für

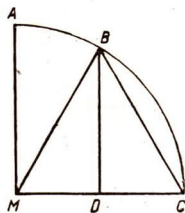


Fig. 186

einen Kreis vom Radius 10 cm und laß die parallelen Sehnen einen Abstand von 1 cm haben. **b)** Warum ist das eben angegebene Verfahren praktischer als das in der vorhergehenden Aufgabe angegebene?

Praktische Anwendungen

44. Eine Leiter lehnt an eine Mauer. Sie soll 13,5 m hoch reichen, während ihr Fuß 2,5 m von der Wand absteht. Wie lang muß die Leiter sein, um für diesen Zweck brauchbar zu sein?
45. Ein Weg, der für eine kartographische Aufnahme vermessen werden soll, steigt auf 33 m insgesamt 1,60 m an. In die Karte wird nun aber nicht der Weg selber, sondern seine Projektion auf die Horizontalebene eingetragen. Wie lang ist diese Projektion, und wie groß der Unterschied zwischen der wirklichen Weglänge und der in die Karte einzutragenden?
46. Die Spitze eines kegelförmigen Daches soll 7,50 m über der Grundfläche liegen, die 5,40 m Durchmesser hat. Wie lang müssen die Dachsparren gemacht werden?
47. Um die Länge einer Strecke AB zu bestimmen, die selbst nicht unmittelbar meßbar ist, deren Endpunkte aber zugänglich sind, wählt man einen Standpunkt P , von dem aus die Strecke unter einem rechten Winkel er-

scheint (die Bestimmung eines solchen Punktes läßt sich mit Hilfe eines Winkelspiegels ausführen). Dann mißt man die Entfernung dieses Punktes von den Endpunkten der Strecke und findet die Länge der Strecke selbst durch Rechnung. Das Verfahren ist von Bedeutung, wenn Punkt A von B aus nicht sichtbar ist. Beispiel: Die gemessenen Entfernungen seien 212 m und 342 m.

48. Es sei die Länge einer unmittelbar nicht meßbaren Strecke AB festzustellen, bei der man A von B aus anvisieren kann. Dann stecke man in B zu AB einen rechten Winkel ab und wähle auf dem freien Schenkel den Punkt C so, daß CA unmittelbar meßbar ist. Berechne AB . Beispiel: $BC = 265$ m, $AC = 288$ m.
49. Wie weit muß man eine Doppelleiter am Fuße auseinandersetzen, um eine Höhe von 3,5 m zu erreichen, wenn die Leiter selbst 4 m mißt?
50. Wie weit kann man (bei Annahme ebener Umgebung, also z. B. auf dem Wasser) aus einer Höhe von a) 1000 m, b) 100 m, c) 10 m sehen? Zu bestimmen ist die Länge der Tangente an die Erdoberfläche von jenem Punkte aus. Der Erdradius ist 6370 km.
51. (Eine Aufgabe aus einer englischen Schulprüfung.) Eine Spinne auf einem Flur sieht an der drei Fuß entfernten Wand eine Fliege. Wenn sie stracks nach der Mauer hinkriecht, dann drei Fuß hinaufläuft und dann sieben Fuß nach rechts waagerecht geht, wird sie die Fliege erreichen. Wie groß ist die direkte Entfernung der Spinne von der Fliege?
52. Der Tischler stellt an Leisten und dgl. eine „Fase“ her, indem er (mit Hobel und Feile) eine Kante abschrägt. Stelle fest, um wieviel die Fläche einer 1 m langen Leiste, deren Querschnitt Fig. 187 zeigt, durch Anbringung der Fase abgenommen hat.

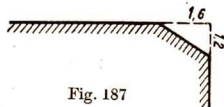


Fig. 187

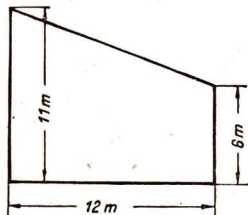


Fig. 188

53. Ein Gebäude von 20 m Länge ist mit einem Pultdach gedeckt. Aus dem in Fig. 188 gezeichneten Querschnitt sind die Querdimensionen zu entnehmen. Wie groß ist die Dachfläche?
54. Ein Haus von 23 m Länge und 9 m Tiefe ist mit einem Satteldach versehen. Es mißt von unten bis zum Dachrand 7,5 m, bis zum First des Daches 14,5 m. a) Wie groß sind die Dachflächen? b) Auf dem Dach soll ein Blitzableiter angebracht werden, dessen Spitze den First um 3 m überragt. Der Blitzableiter wird auf kürzestem Wege über das Dach an der Hauswand zum Erdboden und 1 m in diesen hineingeführt. Wie lang ist er?

55. Fig. 189 zeigt den Querschnitt eines zweigliedrigen Säge- oder Sheddaches. Die Lichtöffnungen sind in der steilen, immer nach Norden gerichteten Dachfläche angebracht. Für die Beleuchtung ergibt sich die Notwendigkeit einer Breite der Lichtwand von 1,50 m. Der ganze Shedraum soll 17,5 m breit werden und ein siebengliedriges Dach tragen. Wie breit werden die schwach geneigten Dachflächen?



Fig. 189

56. Berechne die Längen der für den Dachbinder in Fig. 83 (S. 59) nötigen Eisenstangen unter der Annahme, daß die Seite des in dem Fachwerk auftretenden gleichseitigen Dreiecks 3 m ist.

Pythagoreische Zahlentripel

57. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten 3 cm und 4 cm. Miß und berechne die Hypotenuse.
58. Benutze die Tatsache, daß 3, 4, 5 ein pythagoreisches Zahlentripel ist, zu einer Fadenkonstruktion des rechten Winkels mit Hilfe eines Fadens von $3 + 4 + 5$ Längeneinheiten (vgl. auch Aufg. 76 und 82).
59. Zeige, daß auch $3n$, $4n$ und $5n$, wo n irgendeine positive ganze Zahl bedeutet, ein pythagoreisches Tripel ist.
60. Zeige, daß die drei Zahlen $x = uv$,

$$y = \frac{u^2 - v^2}{2},$$

$$z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

ein pythagoreisches Zahlentripel bilden. Welche Werte durchlaufen dabei u und v ?

61. Stelle eine Tabelle teilerfremder pythagoreischer Zahlentripel zusammen.
62. Zeige, daß man durch Multiplikation der Zahlen eines teilerfremden Tripels mit positiven ganzen Zahlen eine unendlich große Schar pythagoreischer Zahlentripel finden kann.
63. Beweise, daß die Zahl teilerfremder pythagoreischer Zahlentripel unendlich groß ist.

Funktionsbetrachtungen

64. Stelle die Hypotenuse als Funktion einer Kathete bei konstant gehaltener anderer Kathete dar.
65. Gib eine graphische Darstellung der Funktion, die die Hypotenuse als Funktion einer Kathete darstellt, während die andere Kathete den Wert 4 hat. Durch welche Punkte mit ganzzahligen Koordinaten geht die Kurve?
66. Stelle die eine Kathete als Funktion der Hypotenuse dar, während die andere Kathete konstant bleibt.

67. Gib eine graphische Darstellung der Funktion, die die eine Kathete als Funktion der Hypotenuse darstellt, während die andere Kathete den Wert 4 beibehält. Durch welche Punkte mit ganzzahligen Koordinaten geht die Kurve?
68. Zeige, daß die beiden in den Aufg. 65 und 67 erhaltenen Kurven symmetrisch in bezug auf die Winkelhalbierende des Koordinatensystems sind.
69. Stelle die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks als Funktion der anderen bei konstant bleibender Hypotenuse dar.
70. Gib eine graphische Darstellung für die Funktion, die die eine Kathete als Funktion der anderen darstellt, wenn die Hypotenuse den konstanten Wert 5 hat. Durch welche ganzzahligen Punkte geht die Kurve?

Geometrische Überlegungen

71. Man kann als Grad der Einfachheit eines Zerlegungsbeweises die Anzahl der bei der Zerlegung benutzten Dreiecke ansehen. Bei der Zerlegung auftretende Vierecke müssen dabei natürlich erst in Dreiecke zerlegt werden, ebenso Fünfecke usw. Untersuche die dir bekannten Zerlegungsbeweise des pythagoreischen Lehrsatzes in dieser Hinsicht.
72. Man errichtet über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks nicht Quadrate, sondern gleichseitige Dreiecke; gilt ein dem pythagoreischen entsprechender Satz auch dann?
73. Formuliere und beweise die Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes.
74. Verbinde in der Figur zum pythagoreischen Lehrsatz (alle Quadrate nach außen gezeichnet) die Ecken benachbarter Quadrate durch Strecken. Dann entstehen, von diesen Verbindungsstrecken und den Quadratseiten begrenzt, drei Dreiecke. Untersuche, was sich über deren Flächeninhalt aussagen läßt.
75. An der Mauer lehnt ein Meterstab. Er gleitet an ihr herab. Welche Kurve beschreibt die Mitte des Meterstabes?

Aus der Geschichte der Geometrie

76. Aus Proclus (412—485 n. Chr.): „Es werden auch einige Methoden mitgeteilt, solche Dreiecke zu finden, deren eine man auf Platon, die andere welche von ungeraden Zahlen ausgeht, auf Pythagoras zurückführt. Man nimmt nämlich die gegebene ungerade Zahl als die kleinere Kathete an; von dem Quadrate derselben die Einheit subtrahiert und der Rest halbiert, gibt die größere Kathete; zu dieser die Einheit addiert, gibt die Hypotenuse. Man nimmt z. B. 3. Von dem Quadrat 9 nimmt man die Einheit hinweg und halbiert den Rest 8, was 4 gibt. Dazu addiert man wiederum die Einheit, was 5 macht, und es wird somit das rechtwinklige Dreieck gefunden, was zu Seiten die Werte 3, 4 und 5 hat.“ a) Berechne andere Zahlentripel nach dieser Vorschrift. b) Beweise die Richtigkeit des Verfahrens. c) Gib die Vorschrift alle pythagoreischen Zahlentripel?
77. Aus einer Münchener Handschrift des 15. Jahrhunderts: „Item scala 20 pedum iuxta aquam latitudinis 10 pedum producitur ad murum

iuxta aquam: queritur, ad quantam altitudinem se extendit.“ (Eine Leiter von 20 Fuß lehnt über ein 10 Fuß breites Gewässer an eine dicht am Wasser stehende Mauer. Gefragt wird, wie hoch sie reicht.)

Aus dem Liber Embadorum des Abraham bar Chijja Savasorda (1116) nach einer lateinischen Übersetzung von Plato von Tivoli:

78. „Wenn man in einem Rechteck das Quadrat des Unterschiedes zwischen den beiden Seiten dem doppelten Inhalte hinzufügt, so ist die Summe dem Quadrate der Diagonale gleich.“ Beweise das und löse danach die folgenden Aufgaben:
79. „Wenn in einem Rechteck, dessen Diagonale 10 Ellen beträgt, die Länge die Breite um 2 übertrifft, wieviel Ellen beträgt dann die Länge, wieviel die Breite, und wieviel Quadratellen der Flächeninhalt?“
80. „Wieviel Ellen wird die Seite eines Rhombus enthalten, dessen eine Diagonale 16, die andere aber 12 Ellen umfaßt?“
81. L. Junius Moderatus Columella gibt in seinem Buche *De re rustica* (62 n. Chr.?) u. a. folgende Maßenweisung, die auf Heron zurückgeht: „Ein gleichseitiges Dreieck von der Seite 300 hat die Fläche $\frac{300^2}{3} + \frac{300^2}{10} = 39000$.“ Welcher Näherungswert ist hier zugrunde gelegt? Aus Schwenters Erquickstunden (1636):
82. „Eine leiter 20 schuch lang | leinet an einem Thurm 16 schuch hoch | steht vnten von dem Thurn 12 schuch | nun so die Leiter ein schuch weiter von dem Thurn angeleinet wird | ist die Frag wieviel schuch hoch von der Erden sie den Thurn berühren würde.“
83. „Es stehn zween Bäume auff ebnem Felde | der eine ist hoch 30 schuch | der ander 40. Stehen voneinander 50, solche fallen mit den gipffeln zusam | ist die frag | wie weit von beeden gipffeln auff die Erde?“

§ 21. Weitere geometrisch-algebraische Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes

Erweiterungen des pythagoreischen Lehrsatzes

1. Es seien a und b zwei Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks und p die Projektion von a auf b , q die Projektion von b auf a (Fig. 190). a) Beweise dann in genau derselben Weise wie im Euklidischen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes, daß das Rechteck aus a und q flächengleich dem Rechteck aus b und p ist. b) Unter welchen Umständen geht dieser Satz in den Satz von Euklid über (vgl. § 20 Aufg. 1)?
2. Errichte über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks Quadrate und zerlege jedes von ihnen in zwei Rechtecke, deren eine Seite die Quadratseite, deren andere eine Seitenprojektion ist. Untersuche, welche Rechtecke nach

dem eben abgeleiteten Satz gleich sind, und folgere daraus den Satz: In jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

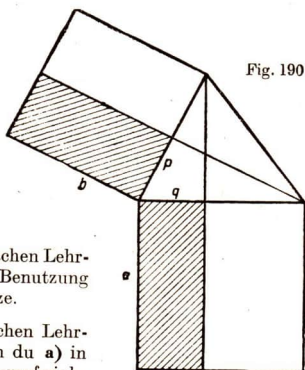


Fig. 190

3. Untersuche, ob der Satz auch im stumpfwinkligen Dreieck gilt; unterscheide dabei den Fall, daß die Seite, um deren Quadrat es sich handelt, einem spitzen oder einem stumpfen Winkel gegenüberliegt.
4. Sprich die Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes aus und beweise sie jetzt mit Benutzung der in Aufg. 2 und 3 abgeleiteten Sätze.
5. Beweise den allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz auf arithmetischem Wege, indem du a) in einem spitzwinkligen, b) in einem stumpfwinkligen Dreieck eine Höhe ziehst, die eine Höhenprojektion p nennst (wie groß ist dann die andere?) und nun nach dem pythagoreischen Lehrsatz das Quadrat über der Höhe auf zwei verschiedene Weisen durch die Dreiecksseiten und p ausdrückst. Durch Gleichsetzung erhält man eine Beziehung zwischen den Seiten und p .
6. (Satz von Pappus.) Gegeben ist ein Dreieck ABC . Über der einen Seite ist ein Parallelogramm errichtet, dessen zwei freie Ecken A' und B' außerhalb des Dreiecks liegen mögen. Verschiebe jetzt Dreieck ABC so, daß es in die Lage $A'B'C'$ kommt. a) Zeige durch einen Subtraktionsbeweis, daß das konstruierte Parallelogramm flächengleich den beiden Parallelogrammen $AA'C'C$ und $BB'C'C$ ist. b) An die Seite dieser beiden Parallelogramme kann man auch flächengleiche Rechtecke setzen. Sprich dann den Satz aus.
7. Zeige, daß der pythagoreische Lehrsatz ein besonderer Fall des Lehrsatzes von Pappus ist.
8. Löse die Gleichungen, die zwischen den Seiten eines Dreiecks (erst eines spitzwinkligen; dann eines stumpfwinkligen) und je einer Seitenprojektion bestehen, nach dieser Seitenprojektion auf. Wie lauten die Ausdrücke für die sechs Seitenprojektionen eines Dreiecks?
9. Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten 13 cm, 14 cm und 15 cm. Berechne die sechs Seitenprojektionen des Dreiecks.
10. Berechne von dem in Aufg. 9 genannten Dreieck den Inhalt.

11. Ein Dreieck hat die Seiten a , b , c . Setze in $f = \frac{a \cdot h_a}{2}$ für h_a den Wert $\sqrt{b^2 - p^2}$ ein und für p den in Aufg. 8 erhaltenen. Verwandle den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in ein Produkt aus vier Faktoren und leite so die heronische Inhaltsformel ab:

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wo s der halbe Umfang des Dreiecks ist (§ 18, Nr. 9).

Berechnungen und Konstruktionen

12. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis gleich der Höhe. Wie groß ist **a)** der Schenkel, **b)** der Inhalt des Dreiecks, ausgedrückt durch die Basis des Dreiecks?
13. Wie groß ist die Raumdiagonale **a)** eines Würfels mit der Kante a , **b)** eines Quaders mit den Kanten a , b und c . **c)** Wie groß ist die Höhe einer dreiseitigen Pyramide mit lauter gleichen Kanten a (Tetraeder)?
14. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein Quadrat einbeschrieben. Wie groß ist die Seite des Quadrats?
15. Wie groß sind die Flächen der Dreiecke, in die ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite a durch die von einem Eckpunkt ausgehenden Diagonalen geteilt wird?
16. In einem Kreis ist ein gleichseitiges Dreieck eingezeichnet und ein zweites, dessen Seiten dem ersten paarweis parallel sind (ein Hexagramm). Berechne **a)** den Radius des Inkreises dieses Hexagramms, **b)** den Radius des durch die einspringenden Ecken des Hexagramms gehenden Kreises.
17. Berechne unter Beachtung der Tatsache, daß der Inhalt des Dreiecks auch durch eine der Formeln

$$f = \varrho \cdot s = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) = \varrho_c(s-c)$$

gegeben ist, **a)** den Radius des Inkreises, **b)** die Radien der Ankreise eines Dreiecks mit den Seiten $a = 9,2$ cm, $b = 3,9$ cm, $c = 8,5$ cm.

18. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 9,49 m, die eine Kathete 8,51 m. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?
19. Berechne **a)** die Seite, **b)** die Höhe, **c)** den Umkreisradius eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Inhalt 1 dm^2 ist. **d)** Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, das einem gegebenen Quadrat flächengleich ist.
20. **a)** Berechne die Seite und damit den Umkreisradius eines regelmäßigen Sechsecks, dessen Inhalt 1 dm^2 ist. **b)** Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck, das einem gegebenen Quadrat flächengleich ist.
- 21.¹⁾ Ein Quadrat mit der Seitenlänge a ist gegeben. Die Ecken sind so abzuschneiden, daß die Restfigur ein gleichseitiges Achteck bildet. Wie groß ist

1.) Die Aufgaben führen auf quadratische Gleichungen.

a) die Seite, b) der Inhalt des Achtecks? c) Konstruiere das Achteck, wenn das Quadrat gegeben ist.

- 22.¹⁾ Einem Quadrat mit der Seite a ist ein gleichseitiges Dreieck in der Weise eingeschrieben, daß beide eine Ecke gemeinsam haben und daß die beiden anderen Ecken des Dreiecks auf den beiden in der ersten Ecke nicht aneinanderstoßenden Seiten liegen. a) Berechne die Seite des gleichseitigen Dreiecks aus der Quadratseite. b) Konstruiere das gleichseitige Dreieck, wenn das Quadrat gegeben ist. c) Berechne die Seite des Quadrates aus der Dreiecksseite. d) Konstruiere das Quadrat, wenn das gleichseitige Dreieck gegeben ist.

Praktische Anwendungen

23. Fig. 191 zeigt ein romanisches Motiv. Der Radius des äußersten Kreises sei R . Berechne den Radius des kleinen Vollkreises.
24. Fig. 192 zeigt das Maßwerk eines gotischen Kirchenfensters (Christuskirche in Frankfurt a. M., nach Gerlach). Die großen Bogen sind gedrückte; es ist

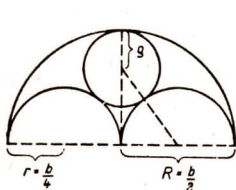


Fig. 191

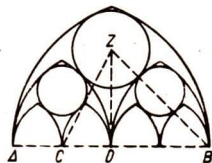


Fig. 192

beispielsweise C der Mittelpunkt des rechten Bogens. Alle anderen Bogen sind gleichseitig. a) Berechne zunächst den Radius der beiden unteren Vollkreise. b) Zur Berechnung des Radius z des unpaaren Kreises um Z beachte, daß BZ und die Verlängerung von CZ durch Berührungspunkte des Kreises um Z geht. Drücke DZ aus den beiden Dreiecken DCZ und DBZ aus und berechne aus der sich ergebenden Gleichung z .

25. Fig. 193 zeigt ein Maßwerk, das sich z. B. am Rathaus in Braunschweig findet (nach Gerlach). Berechne den Radius des Vollkreises, wenn die Kämpferlinie (die Fensterbreite) gegeben ist.

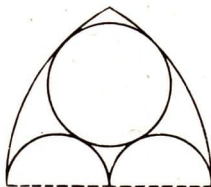


Fig. 193

Geometrische Überlegungen

26. Untersuche, wie sich der Beweis des Satzes von Pappus gestaltet, wenn die Parallelogramme über den Dreiecksseiten nicht die in Aufg. 6 angegebene Lage haben, sondern alle nach innen oder zum Teil nach innen, zum Teil nach außen fallen.

1) Die Aufgaben führen auf quadratische Gleichungen.

27. Entwickle Ausdrücke für die Höhen der Dreiecke, wenn die Seiten bekannt sind.

Anleitung: Der verallgemeinerte pythagoreische Lehrsatz gibt die Möglichkeit, die Abschnitte, in die die Höhe die Gegenseite teilt, zu berechnen. Dann ist aber die Höhe mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes aus einem dieser Abschnitte und der anliegenden Seite zu berechnen.

28. Entwickle eine Formel für den Trapezinhalt, ausgedrückt durch die vier Seiten.

Anleitung: Schneide durch eine Parallele zu einer der nichtparallelen Seiten des Trapezes ein Dreieck ab. Zeige dann, indem du für die Trapezhöhe sowohl aus dem Trapez wie aus dem Dreieck einen Ausdruck aufstellst, daß man die Trapezfläche erhält, wenn man die Dreiecksfläche mit $\frac{a+b}{a-b}$ multipliziert. Die Dreiecksfläche werte nach der heronischen Formel aus.

29. Entwickle Ausdrücke **a)** für die Seitenhalbierenden, **b)** für die Winkelhalbierenden der Dreiecke, wenn die Seiten bekannt sind.

Siebentes Kapitel

Ähnlichkeitslehre¹⁾

§ 22. Der erste Strahlensatz

Verhältnis und Proportion²⁾

1. Gib Zahlen an, die im Verhältnis **a)** 1 : 2, **b)** 2 : 3, **c)** 5 : 100, **d)** 12 : 36, **e)** $m : n$ stehen.
2. Welche Veränderungen kann man mit den Zahlen m und n vornehmen, ohne daß das Verhältnis $m : n$ sich ändert?
3. Es sei $a : b = c : d$. Welche anderen Proportionen folgen daraus lediglich durch Umstellung der Glieder?
4. Bilde die Produktengleichung der Proportion

$$a : b = c : d.$$

5. Bilde alle möglichen Proportionen aus der Produktengleichung

$$x \cdot y = m \cdot n.$$

6. Zerlege die fortlaufende Proportion

$$a : b : c : d = u : v : x : y$$

in einfache Proportionen.

7. Welche Proportionen lassen sich bilden aus der fortlaufenden Porportion

$$a : u = b : v = c : x = d : y?$$

1) Es empfiehlt sich, im Anschluß an die Ähnlichkeitslehre den Inhalt von § 38 zu behandeln, soweit er sich auf Körperberechnung bezieht.

2) Zur Wiederholung arithmetischer Begriffe.

8. Wenn $a : b = c : d$ ist, so läßt sich ein Proportionalitätsfaktor t (Verhältniszahl) so bestimmen, daß

$$a = t \cdot c$$

$$b = t \cdot d$$

ist. Bestimme ihn für folgende Proportionen:

a) $3 : 4 = 12 : 16$

b) $2 : 7 = 14 : 49$

c) $10 : 15 = 2 : 3$

d) $a : b = c : d$

9. Bestimme den Proportionalitätsfaktor für die fortlaufenden Proportionen

a) $1 : 2 : 3 = 3 : 6 : 9$

b) $2 : 3 : 4 = 4 : 6 : 8$

10. Zeige, daß aus der Proportion

$$a : b = c : d$$

durch korrespondierende Addition oder Subtraktion die Proportion

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$$

folgt. Nenne andere ähnliche Folgerungen aus der gegebenen Proportion.

(Innere) Teilung einer Strecke

11. Teile eine Strecke von 12 cm im Verhältnis

a) $1 : 2$

b) $1 : 3$

c) $5 : 1$

d) $5 : 7$

12. Teile eine gegebene Strecke im Verhältnis

a) $1 : 2$

b) $2 : 3$

c) $3 : 4$

d) $1 : 3$

13. Eine Strecke ist **a)** im Verhältnis $2 : 3$, **b)** im Verhältnis $4 : 9$, **c)** im Verhältnis $m : n$ geteilt (m und n positive ganze Zahlen). In welchem Verhältnis steht der kleinere, in welchem der größere Teil zum Ganzen?

14. Eine Strecke ist im Verhältnis $m : n$ geteilt, wo m und n positive ganze Zahlen sind. Wie ändert der Teilpunkt seine Lage, wenn **a)** m zunimmt, während n konstant bleibt, **b)** n zunimmt, während m konstant bleibt?

15. In welchem Verhältnis teilt der Punkt **a)** 50, **b)** 30, **c)** 85, **d)** 1, **e)** 75 einen mit den Zentimeterzahlen versehenen Meterstab?

16. Zwei Personen gehen aus 18 km Entfernung einander entgegen; der eine legt stündlich 4 km, der andere 5 km zurück. Wo treffen sie sich?

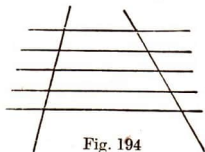


Fig. 194

Der erste Teil des Strahlensatzes

17. (Wiederholung.) Eine Schar von Parallelen gleichen Abstandes werde von einer Geraden geschnitten (Fig. 194). Beweise, daß die zwischen den Parallelen liegenden Stücke auf der Geraden gleich sind und daß das zutrifft, welche Gerade man auch als Schnittgerade wählt.

18. (Erster Teil des ersten Strahlensatzes.) Die Schenkel eines Winkels werden von zwei Geraden g_1 und g_2 geschnitten. Das Teilverhältnis¹⁾ auf dem einen Schenkel sei $m : n$. **a)** Beweise dann mit Hilfe einer Parallelen-schar, daß auch auf dem andern Schenkel das Teilverhältnis $m : n$ herrscht (Fig. 195). **b)** Stelle eine Proportion zwischen den Teilstrecken auf den Schenkeln auf.

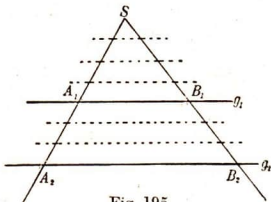


Fig. 195

19. Untersuche, welches die geometrische Bedeutung der Tatsache ist, daß man aus einer Proportion durch Vertauschung von Gliedern neue erhalten kann (Fig. 195).
20. Wende das Gesetz der korrespondierenden Addition auf die Proportion

$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2$$

(Fig. 195) an. Welches ist die geometrische Seite der Tatsache?

21. Wähle in der Zeichnung (Fig. 195) zum Strahlensatz **a)** $SA_1 = 2SB_1$, **b)** $SA_1 = 3SB_1$, **c)** $SA_1 = \frac{1}{n}SB_1$, **d)** $mSA_1 = nSB_1$. Wie groß ist in jedem Falle der Proportionalitätsfaktor in der Proportion

$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2?$$

22. Die beiden parallelen Geraden, die die Schenkel eines Winkels durchsetzen, mögen nicht auf der gleichen Seite vom Scheitelpunkt aus liegen, sondern auf verschiedenen. Untersuche, ob man den ersten Teil des ersten Strahlensatzes auf diesen ausdehnen kann.
23. Stelle an einem Schenkelpaar die Proportion
- a)** $1 : 2 = 2 : 4$ **b)** $2 : 3 = 4 : 6$
- dar unter Zugrundelegung eines geeigneten Maßstabes.
24. Die Schenkel eines Winkel mögen **a)** von drei Parallelen, **b)** von einer Schar paralleler Geraden geschnitten werden. Suche auch in diesem Falle Proportionen auf.
25. Übertrage das laufende Verhältnis $a : b : c : d$ der Teilstrecken auf einer beliebigen Geraden durch Parallelprojektion auf eine andere Gerade.
26. Durch Parallelprojektion wird das laufende Verhältnis $a : b : c : d$ der Teilstrecken auf einer beliebigen Geraden auf eine dieser ersten parallele Gerade übertragen. Was ist dann von den neuen Teilstrecken zu sagen?
27. Ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel S wird von zwei Parallelen g_1 und g_2 geschnitten (Fig. 196). Gib die Proportionen zwischen den auf den einzelnen Strahlen entstehenden Abschnitten an.

1) Es wird angenommen, daß das Teilverhältnis kommensurabel ist.

28. Formuliere den ersten Teil des ersten Strahlensatzes, indem du berücksichtigst, daß an die Stelle zweier paralleler Geraden eine Parallelschar, an die Stelle eines Winkels mit zwei Schenkeln ein Strahlenbüschel treten kann.

29. Ein Punkt S hat von einer Geraden g_1 den Abstand p , von einer der ersten parallelen Geraden g_2 den Abstand q . Ein Strahl mit dem Endpunkt S dreht sich um S , und es werden auf ihm durch die Schnittpunkte X_1 und X_2 auf g_1 und g_2 die Strecken $SX_1 = x$, $SX_2 = y$ abgeschnitten. Welcher Gleichung gehorchen x und y , ganz gleichgültig, welche Lage der Strahl einnimmt?

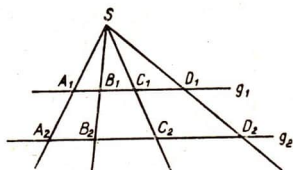


Fig. 196

30. (Umkehrung des ersten Teiles des ersten Strahlensatzes.) Beweise indirekt, daß zwei Geraden, die auf den Schenkeln eines Winkels entsprechende verhältnismäßige Abschnitte abschneiden, parallel sind.

Konstruktionsaufgaben

31. Teile eine gegebene Strecke (innerlich) im Verhältnis **a)** 2 : 3, **b)** 3 : 2, **c)** 4 : 1, **d)** 1 : 2 : 4, **e)** 1 : 2 : 3 : 4, **f)** $a : b$, **g)** $a : b : c$, wenn a , b und c gegebene Strecken sind.

32. **a)–g)** Berechne in jedem Falle der Aufg. 31 a) bis g) die Länge der einzelnen Teilstrecken, wenn die ganze gegebene Strecke s ist.

33. Konstruiere mit Hilfe des ersten Teiles des Strahlensatzes die unbekannte Strecke x , wenn verlangt ist:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $1 : 2 = 3 : x$ | b) $a : b = c : x$ |
| c) $a : b = b : x$ | d) $a : b = x : c$ |
| e) $x : a = b : c$ | f) $a : x = b : c$ |
| g) $(a + b) : a = b : x$ | h) $(a - b) : b = a : x$ |

dabei sind in jedem Falle a , b und c gegebene Strecken.

34. Konstruiere mit Hilfe des ersten Teiles des Strahlensatzes die unbekannten Strecken x und y , wenn verlangt ist:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $a : b : c = d : x : y$ | b) $a : b = c : x = d : y$ |
| c) $a : b : c = x : d : y$ | d) $a : x = b : c = d : y$ |

dabei sind in jedem Falle a , b , c und d gegebene Strecken.

35. Löse geometrisch (a , b und c sind gegebene Strecken, x ist gesucht) die Gleichungen:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $ax = bc$ | b) $ax = b^2$ |
| c) $ax = b(a + c)$ | d) $ax = b(a - c)$ |

36. Ein Rechteck mit den Seiten a und b ist in ein flächengleiches zu verwandeln, dessen eine Seite c ist. (Bestimme die fehlende Seite rechnerisch und geometrisch.)
37. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b ist in ein flächengleiches zu verwandeln, dessen eine Kathete m ist. (Bestimme die fehlende Kathete rechnerisch und geometrisch.)
38. Von einem Dreieck sind a , b und h_a bekannt. Bestimme (geometrisch durch Konstruktion und arithmetisch durch Rechnung) h_b .

Zweiter Teil des ersten Strahlensatzes

39. Der Winkel mit dem Scheitel S sei durch die parallelen Geraden A_1B_1 und A_2B_2 geschnitten (Fig. 197). Ziehe durch B_1 zu SA_1 die Parallele B_1C_2 und stelle jetzt eine Proportion auf, die mit $A_1B_1 : A_2B_2$ oder, was dasselbe ist, mit $A_2C_2 : A_2B_2$ beginnt.
40. Es sei A_1 der Mittelpunkt von SA_2 . In welchem Verhältnis stehen A_1B_1 und A_2B_2 zueinander?
41. Untersuche, ob der zweite Teil des ersten Strahlensatzes auch gilt, wenn die beiden Parallelen auf verschiedenen Seiten des Scheitelpunktes liegen.

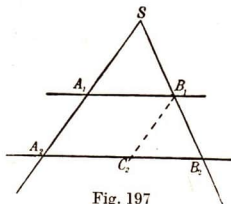


Fig. 197

42. Die Schenkel eines Winkels mögen **a)** von drei Parallelen, **b)** von einer Schar paralleler Geraden geschnitten werden. Dehne den zweiten Teil des ersten Strahlensatzes auf diese Fälle aus.
43. Ein Strahlenbüschel (Fig. 196) mit dem Scheitel S wird von zwei Parallelen g_1 und g_2 geschnitten. Entsprechende Schnittpunkte seien A_1 und A_2 , B_2 und B_2 , C_1 und C_2 usf. Beweise die Proportion
- $$A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2.$$
44. Übertrage das fortlaufende Verhältnis $a : b : c : d$ der Teilstrecken auf einer beliebigen Geraden durch Zentralprojektion (d. h. mit Hilfe eines Strahlenbüschels) auf eine beliebige, der ersten parallele Gerade.
45. Löse die Aufg. 44, doch mit der Bestimmung, daß die erste, a entsprechende Teilstrecke auf der neuen Parallelen vorgeschriebene Größe hat.
46. Teile eine gegebene Strecke AB durch Zentralprojektion in **a)** 3, **b)** 5, **c)** 7 gleiche Teile.
47. Formuliere den zweiten Teil des ersten Strahlensatzes, indem du berücksichtigst, daß an die Stelle zweier paralleler Geraden eine Parallelenschar, an die Stelle eines Winkels mit zwei Schenkeln ein Strahlenbüschel treten kann.
48. (Umkehrung des zweiten Teiles des ersten Strahlensatzes.) Untersuche, ob es eine Umkehrung des zweiten Teiles des ersten Strahlensatzes gibt.

Konstruktionsaufgaben

49. Gegeben ist eine Strecke AB von 10 cm Länge; auf ihrer Verlängerung über A hinaus liegt, von A um 5 cm entfernt, der Punkt C . In welchem Verhältnis stehen die Strecken CA und CB ?
50. (Äußere Teilung.) Bestimme auf den Verlängerungen der gegebenen Strecke AB einen Punkt C so, daß
- a) $AC : BC = 1 : 2$ b) $AC : BC = 2 : 3$
 c) $AC : BC = 2 : 1$ d) $AC : BC = 3 : 2$ ist.
51. Zwei Wanderer, von denen der eine stündlich 4 km, der andere 5 km zurücklegt, gehen auf einer durch die 7 km voneinander entfernten Orte A und B führenden Straße in einer Richtung, der eine von A , der andere von B aus. Wo holt der eine den anderen ein?
52. Teile eine Strecke innerlich und äußerlich im Verhältnis a) 2 : 5, b) 1 : 4, c) 3 : 7, d) $m : n$, wo m und n als Strecken gegeben sind.
53. Eine dreiseitige Pyramide wird von einer Ebene so geschnitten, daß alle ihre Seitenkanten im Verhältnis 2 : 3 geteilt werden. Zeichne die Lage der Schnittebene in irgendeine Darstellung des Körpers ein.
54. Zwei Geraden schneiden sich in einem unzugänglichen, nicht auf dem Zeichenblatt liegenden Punkte. Konstruiere mit Hilfe des ersten Strahlensatzes Geraden, die durch diesen Punkt gehen.
55. In einem Dreieck ABC ist die Seite BC zu halbieren unter der Voraussetzung, daß B und C unzugänglich sind. Es sei der Punkt A a) zugänglich, b) auch unzugänglich. Führe die Konstruktion mit Hilfe des ersten Strahlensatzes aus.

Praktische Anwendungen

56. Eine Karte hat den Maßstab 1 : 100000; man mißt auf der Karte eine Entfernung zu 6,7 cm ab. Wie groß ist sie in Wirklichkeit?
57. Die Meßtischblätter (vgl. z. B. Fig. 135) sind im Maßstab 1 : 25000 gezeichnet. Wie groß ist eine Strecke, die auf der Landkarte 17,5 cm lang ist?
58. Zeichne a) für die Karte 1 : 100000, b) für das Meßtischblatt einen Maßstab (d. h. eine Strecke, an deren Skala die ihnen in Wirklichkeit entsprechenden Strecken angeschrieben sind).
59. Zeichne einen Maßstab zu Karten, die in folgendem Maßstab gezeichnet sind: a) 1 : 200000, b) 1 : 100000, c) 1 : 4000, d) 1 : 500 (z. B. Fig. 158).
60. Ein Relief ist im Maßstab 1 : 10000 hergestellt, die Berge sind außerdem vierfach überhöht. Wie hoch über Normalniveau muß in dem Relief ein Berg a) von 85 m, b) von 750 m, c) von 2850 m dargestellt werden? Zeichne einen Maßstab für die Berghöhen.
61. Fig. 198 zeigt einen „verjüngten Maßstab“. Greife an dem verjüngten Maßstab mit dem Steckzirkel a) 1,5, b) 2,3, c) 1,05, d) 1,33, e) 2,78, f) 3,45 Einheiten ab und zeichne diese Strecken. g) Stelle dir selbst einen verjüngten Maßstab her, bei dem du als Einheit 1 cm wählst.

62. Wie kann man mit dem verjüngten Maßstab eine beliebige in den Zirkel genommene Strecke auf Hundertstel der Einheit messen? Miß in dieser Weise einige Strecken in Einheiten des in Fig. 198 wiedergegebenen Maßstabes.



Fig. 198

63. Gib die Begründung für die Benutzung des verjüngten Maßstabes.
64. Fig. 199 zeigt einen Proportionalzirkel (die Schraube ist je nach der gewünschten Vergrößerung zu verstellen.) Man greift eine Strecke AB mit dem kürzeren Ende ab und hat nun in dem anderen Spitzenabstand die Strecke $A'B' = m \cdot AB$, wo m den Proportionalitätsfaktor angibt. **a)** Wie kann man den Proportionalzirkel zum Verkleinern benutzen? **b)** Bestimme (angenähert) den Proportionalitätsfaktor bei dem in Fig. 199 dargestellten

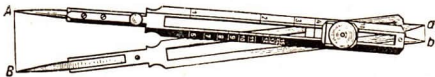


Fig. 199

Modell. **c)** Ist es notwendig, daß die beiden Schenkel des Proportionalzirkels gleich lang sind? **d)** In Georgij Galgemayrs deß Circfels Schregmeß etc. (1655) wird der „Proportional-Circkel“ ausführlich beschrieben und in verschiedenster Weise angewandt. Galgemayr gibt auch Beispiele aus der Regeldetri, z. B. „Item 16. Pfund kosten 10. alb. (= Weißpfennig) was kosten 24. Pfund.“ Wie ist der Proportionalzirkel für solche Zwecke nutzbar zu machen?

65. Die Stellschraube eines Proportionalzirkels ist mit einer Einteilung versehen, die die Ablesung der Vergrößerung (die Größe m in Aufg. 64) gestattet. Gilt die Teilung noch, wenn hier die Spitzen abbrechen und neu nachgeschliffen werden? Fig. 200 zeigt die Seitenansicht einer anderen Form. Welchen Vorteil bietet sie, wenn hier die Spitzen abbrechen und nachgeschliffen werden?

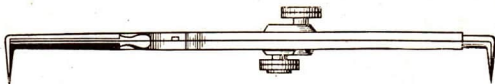


Fig. 200

nachgeschliffen werden? Fig. 200 zeigt die Seitenansicht einer anderen Form. Welchen Vorteil bietet sie, wenn hier die Spitzen abbrechen und nachgeschliffen werden?

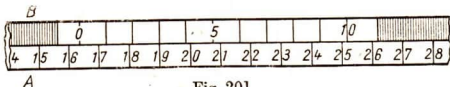


Fig. 201

66. Fig. 201 zeigt das Modell eines Nonius. **a)** Fertige ein Modell aus steifem Papier. **b)** Erkläre die Benutzung.
67. In Fig. 202 ist ein Fühlhebel dargestellt, der zur Messung geringer Dicken dient. Erkläre und begründe seine Verwendung.
68. Um die Höhe eines Gegenstandes festzustellen, dessen Fuß zugänglich ist, stellt man (Fig. 203) zwei Stangen in Richtung auf den Gegenstand so auf, daß die Stangenspitzen A , C und P in einer Richtung liegen. Man mißt die Länge der beiden Stangen, ihren Abstand voneinander und von dem Fuß des Gegenstandes. **a)** Wie ist jetzt die gesuchte Höhe zu finden? **b)** Versuche, nach diesem Prinzip einen handlichen Apparat zu bauen.

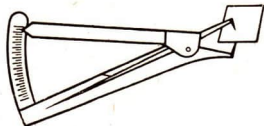


Fig. 202

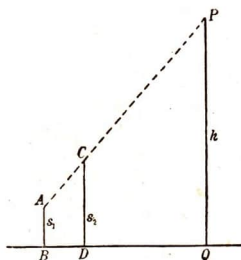


Fig. 203

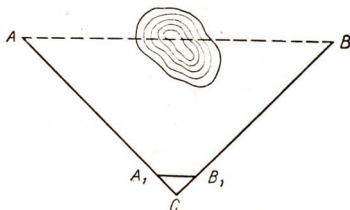


Fig. 204

69. Um die nicht unmittelbar meßbare gegenseitige Entfernung zweier Orte A und B zu messen, wählt man einen Punkt C so, daß von ihm aus A und B erreichbar sind (Fig. 204). Man trägt auf CA von C aus einen bestimmten Bruchteil der Strecke, etwa $\frac{1}{10} AC$, bis A_1 ab; ebenso verfährt man auf BC und erhält B_1 . Die Strecke A_1B_1 wird gemessen. Es sei $A_1B_1 = 123$ m gefunden. Berechne AB .
70. Die Strecke AB ist wegen eines Gebüsches nicht absteckbar (Fig. 205). Man kann aber an dem Gebüsch vorbei die Strecke AD abstecken, wobei D so gewählt ist, daß BD auf AD senkrecht steht. Die Figur zeigt nun, wie jetzt ein Abstecken möglich ist. **a)** Erkläre und begründe das Verfahren.

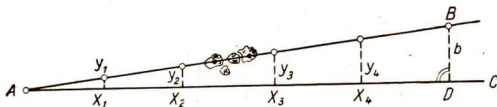


Fig. 205

b) Die Entfernungen zwischen A und x_1 , x_1 und x_2 usf. bis x_4 und D seien gleich groß. Wie groß sind die Strecken y_1 , y_2 , y_3 und y_4 , ausgedrückt durch b ? **c)** Ist es notwendig, daß $\sphericalangle BDA$ ein rechter ist? Wie kann man gegebenenfalls bei anderem Winkel verfahren?

- 71.** Fig. 206 zeigt einen Gebäudeplan, der, um verkleinert zu werden, mit einem Quadratnetz überzogen ist; Fig. 207 zeigt dann denselben Plan in verkleinertem Maßstab.

a) Untersuche, in welchem Maßstab der Plan verkleinert ist.

b) Stelle ausgehend von Fig. 206 einen Plan im dreifachen Maßstabe her.

- 72.** Um eine „Dammböschung“ oder eine „Einschnittböschung“ anzulegen, gibt man die gewünschte Steigung durch eine Latte an zwei Pflöcken an (Fig. 208 und 209). Es sei vorgeschrieben die Böschung $1:1\frac{1}{2}$. Man wählt **a)** 60 cm, **b)** 80 cm als Abstand der Pflöcke. In welcher Höhe muß man die Latte an die beiden Pflöcke schlagen?

- 73.** Mit einer einfachen Lochkamera ohne Linse wird eine Aufnahme gemacht. Eine 12 m hohe Fahnenstange erscheint auf dem Bilde, das 15 cm hinter der Öffnung aufgenommen ist, 8 cm hoch. Wie weit entfernt von der Fahnenstange war die Kamera aufgestellt?

- 74.** Man beobachtet, daß die Länge des erhobenen Daumens der ausgestreckten rechten Hand sich scheinbar deckt mit einer Telegraphenstange in einiger Entfernung. Wie kann man eine solche Beobachtung zur Entfernungsschätzung benutzen?

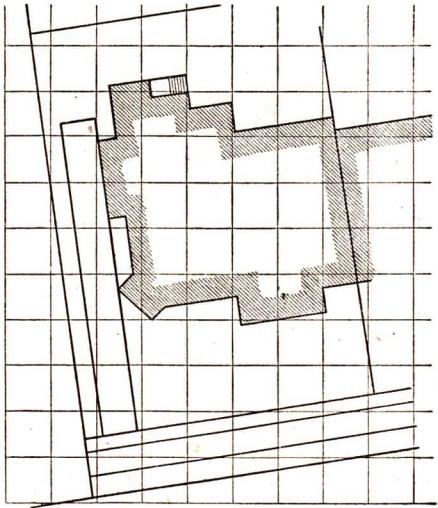


Fig. 206

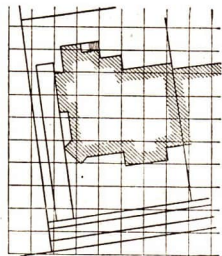


Fig. 207

Geometrische Überlegungen

75. Untersuche, ob der erste Strahlensatz auch gilt, wenn das Verhältnis der dabei auftretenden Strecken nicht genau, sondern immer nur mit gewünschter Genauigkeit sich als Bruch darstellen läßt. Beispiele: Die gegebene Strecke a ist innerlich und äußerlich im Verhältnis **a)** von Seite

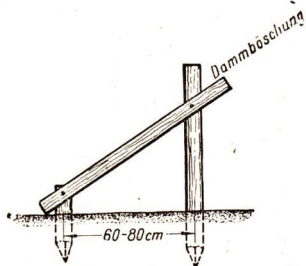


Fig. 208

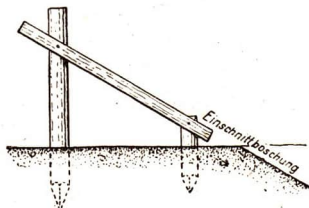


Fig. 209

und Diagonale eines Quadrates, **b)** von Seite und Höhe eines gleichseitigen Dreiecks zu teilen. **c)** Die Diagonale eines gegebenen Rechtecks ist im Verhältnis der Rechtecksseiten zu teilen.

76. Beweise, daß die Diagonalen im Trapez einander in gleichem Verhältnis schneiden. In welchem?
77. Wie groß ist die Verbindungsstrecke der Diagonalenmitten eines Trapezes?
78. Eine Pyramide wird parallel zur Grundfläche von einer Ebene geschnitten. Beweise, daß alle Seitenkanten im gleichen Verhältnis geteilt werden.
79. Fig. 210 zeigt ein Rechteck mit den Seiten 5 und 13, dessen Inhalt also 65 Quadrateinheiten zählt, in vier Teile zerschnitten, die so, wie Fig. 211 es andeutet, zusammengelegt, ein Quadrat mit der Seite 8, also vom Inhalt 64 ergeben. Es wird hier also scheinbar $65 = 64$.

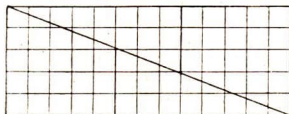


Fig. 210

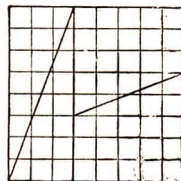


Fig. 211

Prüfe die Figur an der Hand des ersten Strahlensatzes.

80. In einem Kreis mit dem Radius r liegt ein kleinerer mit dem Radius **a)** $\frac{r}{2}$, **b)** r_1 , der ihn von innen im Punkte P berührt. Untersuche, was über die durch P gehenden Sehnen zu sagen ist.

Aufgaben aus alter Zeit

- 81.** Aus Herons Dioptra (Aufg. VIII). „Wenn zwei Punkte, der eine bei unserm Standort, der andere in der Ferne, gegeben sind, ihren Abstand in horizontaler Ebene zu finden, ohne sich dem Punkte in der Ferne zu nähern (Fig. 212). — Es seien A und B die gegebenen Punkte, und zwar liege A bei unserm Standpunkt, B in der Ferne, die Dioptra aber mit dem Halbkreis bei A . Man drehe nun das Visierlineal auf der großen Kreisscheibe so lange, bis B sichtbar wird. Ich trete sodann nach dem anderen Teile des Visierlineals herum, drehe den Halbkreis, während die übrigen Teile des Instruments unbeweglich bleiben, und bestimme nach unserer Seite zu den Punkt C , der mit AB auf einer und derselben Geraden liegt. Dann ziehe ich zu BC von A aus vermittle der Dioptra die Gerade AD und von C aus vermittle der Dioptra eine andere Gerade CE und nehme auf ihr einen beliebigen Punkt E . Ich setze darauf die Dioptra nach E um und stelle das Visierlineal so, daß der Punkt B durch dasselbe sichtbar ist, und nehme auf AD einen anderen Punkt D an, der auf der Geraden BE liegt. Es verhält sich also

$$CE : AD = CB : BA."$$

Nimm an, es sei das Verhältnis $CE : AD = 4$, und $AC = 13,5$ m. Bestimme dann die Entfernung AB .

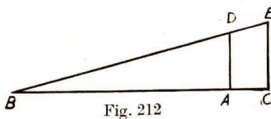


Fig. 212

- 82.** Aus Herons Dioptra (Aufg. XIV): „Wenn ein Graben gegeben ist, seine Tiefe zu bestimmen, d. h. die Länge der Senkrechten, die von dem Punkt in der Tiefe auf die durch uns gelegte horizontale Ebene oder auch auf die durch einen anderen Punkt gelegte horizontale Ebene gezogen wird.“

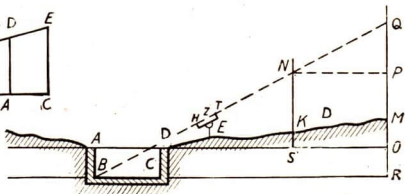


Fig. 213

- Heron beschreibt nun die aus der beigegebenen Fig. 213 ersichtliche Konstruktion im Felde und mißt $NP : PQ = 4$, $AO = a$, $QO = b$. Berechne die gesuchte Größe, wenn $a = 32$ m, $b = 6,5$ m ist.
- 83.** Aus Schwenters Geometriae practicae novae (1618): „So sich zwei Linien also einander durchschneidend | das sie sich weit miteinander schleiffen | vnd also der punct deß durchschnids gantz vnkenntlich: solchen Geometricè zu finden.“
- 84.** Aus G. Ph. Harsdörffers Erquickstunden (1651): „Wenn auf zweyen Thürn | deren jeder 1000 Schritt hoch | eine Schnur gespannt würde | ist die Frage | wieviel die Schnur kürtzer | wann sie auf der Erden von einem zu dem andern gezogen würde.“ (Setze 1 Schritt = $\frac{3}{4}$ m! Erdradius 6370 km.)

§ 23. Ähnlichkeit von Dreiecken

Die Ähnlichkeitssätze

1. Untersuche, welche Beziehungen **a)** zwischen den Winkeln, **b)** zwischen den Seiten zweier Dreiecke von gleicher Gestalt bestehen (ähnliche Dreiecke).
2. Zeige, daß man die Verhältnisgleichheit zweier Seiten a und b bzw. a' und b' in ähnlichen Dreiecken ebenso durch die Proportion $a : a' = b : b'$ wie durch die Proportion $a : b = a' : b'$ zum Ausdruck bringen kann. Erläutere die geometrische Bedeutung des Proportionalitätsfaktors.
3. Gegeben ist ein Dreieck ABC . Zu BC ist **a)** im Innern, **b)** außerhalb des Dreiecks auf der gleichen Seite von A aus gesehen wie BC , **c)** auf der anderen Seite von A eine Parallele gezogen, die auf den beiden andern Seiten oder ihren Verlängerungen die Punkte B' und C' herauschneidet. Beweise, daß die Dreiecke ABC und $AB'C'$, die sich in Ähnlichkeitslage befinden, in allen Winkeln und im Verhältnis gleichliegender Seiten übereinstimmen, daß sie also ähnlich sind.
4. (Erster Ähnlichkeitssatz.) Zwei Dreiecke stimmen in einem Winkel und im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten überein. Zeige, daß man sie in Ähnlichkeitslage bringen kann, daß sie also ähnlich sind.
5. (Zweiter Ähnlichkeitssatz.) Zwei Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein. Zeige, daß man sie in Ähnlichkeitslage bringen kann, daß sie also ähnlich sind.
6. (Dritter Ähnlichkeitssatz.) **a)** Formuliere den dem dritten Kongruenzsatz entsprechenden Ähnlichkeitssatz. **b)** Beweise ihn durch den Nachweis, daß beide Dreiecke in Ähnlichkeitslage gebracht werden können.
7. (Vierter Ähnlichkeitssatz.) **a)** Formuliere den dem vierten Kongruenzsatz entsprechenden Ähnlichkeitssatz. **b)** Beweise ihn durch den Nachweis, daß beide Dreiecke in Ähnlichkeitslage gebracht werden können.
8. Stelle Ähnlichkeitssätze auf **a)** für gleichschenklige, **b)** für rechtwinklige Dreiecke.
9. Wann sind **a)** gleichseitige, **b)** rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke ähnlich?
10. Beweise, daß in ähnlichen Dreiecken **a)** gleichliegende Seitenhalbierende, **b)** gleichliegende Höhen, **c)** gleichliegende Winkelhalbierende, **d)** die Radien der Umkreise, **e)** die Radien der Inkreise, **f)** die Radien der Ankreise, **g)** überhaupt die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte sich verhalten wie zwei gleichliegende Seiten.

Konstruktionsaufgaben

11. Gegeben ist ein Dreieck. Konstruiere ein ihm ähnliches, in dem vorge-schrieben ist:

a) a	b) h_a	c) s_b
d) r	e) w_f	f) q

12. Gegeben ist ein Dreieck, gesucht ein ihm ähnliches. Welche Stücke darf man noch vorschreiben? Welche Stücke darf man nicht wählen, wenn die Aufgabe bestimmt sein soll?
13. In den folgenden Aufgaben ist zunächst ein dem gesuchten ähnliches Dreieck zu konstruieren, dann das gesuchte selbst. Gegeben ist:

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) $a : b : c, s_a$ | b) $a : b : c, w_\beta$ | c) $a : b : c, h_c$ |
| d) α, β, h_c | e) β, γ, s_a | f) α, γ, w_β |
| g) $b : c, \alpha, h_a$ | h) $a : c, \beta, w_\gamma$ | i) $a : b, \gamma, s_c$ |
| k) $b : c, \gamma, w_a$ | l) $a : c, \alpha, h_b$ | m) $a : b, \beta, s_b$ |

14. In den folgenden Aufgaben ist zunächst ein Teildreieck aufzusuchen, zu dem erst ein ähnliches konstruiert werden kann. Dann ist das gesuchte Dreieck zu finden. Gegeben ist:

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| a) $a : b : s_a, c$ | b) $b : s_a, \gamma, a$ | c) $a : c : s_a, h_a$ |
| d) $b : w_a, \alpha, a$ | e) $c : w_a, \alpha, h_a$ | f) $c : w_a, \beta, b$ |
| g) $b : h_a, a, \beta$ | h) $c : h_a, a, b$ | i) $c : h_a, \alpha, b$ |

15. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus (Spitze bei A)¹⁾:

- | | | |
|------------------|-----------------|----------------------|
| a) $a : b, h_a$ | b) $a : b, h_b$ | c) $a : b, s_b$ |
| d) α, s_b | e) β, h_c | f) α, w_β |

16. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus (rechter Winkel bei C):

- | | | |
|------------------|---------------------|-----------------|
| a) $a : b, h_c$ | b) $a : b, s_b$ | c) $a : b, w_a$ |
| d) α, s_a | e) β, w_β | f) $a : c, h_c$ |

Flächeninhalt ähnlicher Dreiecke

17. Im Dreieck ABC ist zu BC die Parallele $B'C'$ gezogen, die die Seiten AB und AC halbiert. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und $AB'C'$? (Untersuche, in wieviel dem Dreieck $AB'C'$ kongruente Dreiecke sich $\triangle ABC$ zerlegen läßt.)
18. Im Dreieck ABC ist zu BC eine Parallele $B'C'$ gezogen so, daß $AB' = \frac{1}{3} AB$ ist. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und $AB'C'$? (Untersuche, in wieviel dem Dreieck $AB'C'$ kongruente Dreiecke sich $\triangle ABC$ zerlegen läßt.)
19. Im Dreieck ABC ist zu BC eine Parallele $B'C'$ gezogen so, daß $AB' : AB$ im Verhältnis

- | | | |
|------------|-------------------|-------------------|
| a) $1 : 3$ | b) $2 : 3$ | c) $3 : 2$ |
| d) $2 : 1$ | e) $m : n, m < n$ | f) $m : n, m > n$ |

steht. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke $AB'C'$ und ABC ?

1) Auch hier soll erst ein ähnliches Dreieck konstruiert werden, dann das gesuchte selbst. Überlege aber, wie man die Aufgaben auch anders lösen kann.

- 20.** Vom Dreieck ABC ist durch eine Parallele zur Seite BC ein Dreieck $AB'C'$ abzuschneiden so, daß die Fläche des abgeschnittenen Dreiecks sich zu der des ganzen Dreiecks verhält wie:

a) $1:4$

b) $1:9$

c) $4:9$

d) $4:25$

e) $1:2$

f) $2:3$

Konstruiere die Parallele.

- 21.** Ein Dreieck hat die Seite a und die zugehörige Höhe h_a . In einem ihm ähnlichen Dreieck sind die entsprechenden Stücke a' und h_a' . Beweise, daß sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke wie $a^2 : a'^2$ verhalten.
- 22.** Ein Dreieck mit der Seite $a = 5$ cm und der zugehörigen Höhe $h_a = 3,5$ cm ist ähnlich einem Dreieck, dessen a entsprechende Seite $a' = 3$ cm ist. Wie groß sind die Flächen beider Dreiecke?
- 23.** Beweise, daß die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke sich verhalten wie die Quadrate irgendwelcher entsprechender Strecken im Dreieck.
- 24.** Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie $m:n$. In welchem Verhältnis stehen entsprechende Seiten?
Beweise die folgenden Sätze:
- 25.** Die Flächen zweier Dreiecke, die in einer Seite übereinstimmen, verhalten sich wie die zu diesen Seiten gehörigen Höhen.
- 26.** Die Flächen zweier Dreiecke, die in einer Höhe übereinstimmen, verhalten sich wie die zu diesen Höhen gehörigen Seiten.
- 27.** Die Flächen zweier Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Rechtecke (Produkte) aus den den Winkeln anliegenden Seiten.

Neue Begründung des pythagoreischen Lehrsatzes

- 28.** Errichte über den Katheten und über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Dreiecke. Die Dreiecke über den Katheten mögen die Flächeninhalte f_1 und f_2 , das Dreieck über der Hypotenuse mag den Flächeninhalt f_3 haben. Beweise mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes, daß

$$f_1 + f_2 = f_3$$

ist. (Welche Bedingung muß für die drei ähnlichen Dreiecke genau genommen noch ausdrücklich angegeben werden?)

- 29. a)** Beweise, daß, wenn D der Fußpunkt der Höhe von C auf die Hypotenuse ist, $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ und $\triangle BDC$ ähnlich sind. Beweise daraus (h die Höhe, p und q die Hypotenusenabschnitte):

b) $h^2 = p \cdot q$,

c) $a^2 = p \cdot c$,

d) $b^2 = q \cdot c$.

- 30.** Beweise aus den Formeln c) und d) der Aufg. 29 den pythagoreischen Lehrsatz.
- 31.** Klappe $\triangle DAC$ um AC , $\triangle DBC$ um BC und $\triangle CAB$ um AB herum. Folgere aus der Ähnlichkeit der drei über den Katheten und der Hypotenuse stehenden Dreiecke mit den Flächen f_1, f_2 und f_3 unter Hinzunahme der Tatsache, daß $f_1 + f_2 = f_3$ ist, den pythagoreischen Lehrsatz.

Praktische Anwendungen

- 32.** Von A soll nach B eine gerade Verbindung hergestellt werden, die einen dazwischen liegenden Berg in einem Tunnel durchsetzt. (Benutze Fig. 204 S. 151). Man wählt einen Punkt C so, daß AC und BC zugänglich sind, trägt auf AC von C aus $\frac{1}{n} AC$ ab bis A' , ebenso auf BC von C aus $\frac{1}{n} BC$ bis B' . **a)** Wie kann man jetzt die Richtung, in der die Verbindungsstrecke von B aus einzuschlagen ist, finden? **b)** Müssen, um das Verfahren anwenden zu können, A, B und C in gleicher Höhe über dem Meeresspiegel liegen?
- 33.** Konstruiere die Steigung einer Treppe, deren Schwellen 12 cm hoch und 30 cm breit sind.
- 34.** Die höchste zulässige Steigung bei Adhäsionsbahnen ist 1 : 25 (für Nebensrecken). Wie groß ist die Steigung, ausgedrückt durch den Steigungswinkel? Konstruiere ein entsprechendes Dreieck und miß dann den Winkel!
- 35.** Bei Winkelschätzungen im Gelände ist die Benutzung des „Faustwinkels“ zu empfehlen. Der Gesichtswinkel der geballten, ausgestreckten Faust beträgt etwa 10° . **a)** Stelle durch Messung und Zeichnung fest, ob das zutrifft. **b)** Untersuche den Gesichtswinkel, der der gespreizten Hand entspricht.
- 36.** Um die Höhe eines Turmes zu bestimmen, mißt man seinen Schatten (73 m) und gleichzeitig den Schatten s einer senkrecht stehenden Stange von bekannter Länge l . Es sei $s = 2,45$ m, $l = 1,88$ m. Wie hoch ist der Turm?
- 37.** Um die Höhe der Sonne zeichnerisch zu bestimmen, stellt man fest, daß eine Stange von 12,5 m Länge einen Schatten von 23,5 m Länge wirft. Konstruiere die Höhe der Sonne.
- 38.** Beweise, daß bei Maßstabsänderung in einer Figur (z. B. in Fig. 206 u. 207) die Abbildung winkeltreu ist, d. h. daß irgendein Winkel ABC in der Vorlage dem ihm in der Verkleinerung oder Vergrößerung entsprechenden Winkel $A'B'C'$ gleich ist.
- 39.** Um die Höhe eines Sternes festzustellen, beobachtet der Astronom vielfach den Stern in einem horizontalen Quecksilberspiegel und stellt fest, unter welchem Winkel er das Fernrohr neigen muß. **a)** Erläutere das Verfahren und gib die physikalische Begründung. **b)** Wie kann man das Verfahren bei Beobachtung mit bloßem Auge so ausbauen, daß man die Höhe von Gegenständen bestimmen kann?

40. Eine sehr praktische Methode zur Entfernungsmessung ist die folgende. Den Daumen der ausgestreckten Hand visiert man erst mit dem rechten, dann mit dem linken Auge an. An dem Gegenstand, dessen Entfernung man abschätzen will, etwa einem Haus, schätzt man dann auf Grund der Kenntnisse, die man von den Gegenständen hat, die Strecke zwischen den beiden Punkten, die bei den beiden Beobachtungen vom Daumen verdeckt wurden. Diese Strecke multipliziert man mit 10 und hat die gewünschte Entfernung. Beispiel (Fig. 214): A_1 und A_2 seien die Augen, D der vorgestreckte Daumen. Bei der Beobachtung mit A_1 decken sich D und B_1 , bei der Beobachtung mit A_2 decken sich D und B_2 . Man weiß aus Erfahrung, daß B_1B_2 etwa 15 m lang ist (etwa die Länge eines mäßig großen Hauses). Dann ist die Entfernung 150 m. Erkläre diese überraschende Methode und erprobe sie im Freien.

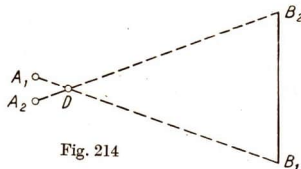


Fig. 214

Geometrische Überlegungen

41. Sprich Ähnlichkeitssätze aus **a)** für Quadrate, **b)** für Kreise, **c)** für Rechtecke, **d)** für Rhomben, **e)** für Parallelogramme, ebenso für Dreiecke, indem du auch **f)** Höhen, **g)** Seitenhalbierende, **h)** Winkelhalbierende als Stücke (neben Seiten und Winkeln) benutzt.
42. Untersuche, in welchem Verhältnis Grundfläche und Deckfläche eines Pyramidenstumpfes stehen.
43. Gegeben ist ein Parallelogramm. Es soll durch eine Gerade ein dem gegebenen ähnliches Parallelogramm abgeschnitten werden.
44. Die Gesellschaft „Brücke“ hat Rechtecke in ganz bestimmten Größen als allgemeines Normalformat vorgeschlagen, die so beschaffen sind, daß die Hälften den Ganzen ähnlich sind. **a)** In welchem Verhältnis stehen die Seiten dieser Rechtecke? **b)** Stelle eine Reihe von Größenformaten auf, von 1 cm als der kleineren Seite des ersten Rechtecks ausgehend, von denen jede Größe das Doppelte der vorhergehenden ist.
45. Untersuche, wieviel Stücke man vorschreiben kann, wenn ein einem vorgelegten ähnliches **a)** Dreieck, **b)** Viereck (verschiedene Fälle!) konstruiert werden soll.
46. Einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Quadrat einbeschrieben, wie es **a)** Fig. 215 zeigt. Drücke die Quadratseite durch die Kathetenabschnitte aus. **b)** Das Quadrat ist in der Weise eingeschrieben, wie es Fig. 216 zeigt. Drücke die Quadratseite durch die Hypotenusenabschnitte aus. **c)** Berechne die Quadratseite, wenn es sich um ein in der Art des Falles **b)** eingeschriebenes Quadrat in einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck handelt.

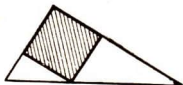


Fig. 215

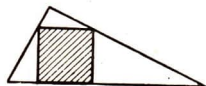


Fig. 216

47. Gegeben ist ein Quadrat und ein Dreieck. Dem Quadrat ist ein dem gegebenen ähnliches Dreieck in der Weise von Fig. 216 umzuschreiben.

Aus der Geschichte der Geometrie

48. Aus Diogenes Laërtios (um 200 n. Chr.): „Hieronymos berichtet, er (Thales) habe die Pyramiden gemessen mittelst des Schattens, indem er beobachtete, wenn (der unsrige) mit uns von gleicher Größe ist.“ Erkläre die Methode und ihre Schwierigkeit bei der Anwendung gerade auf Pyramiden.
49. Aus Plutarch: Niloxenos spricht mit Thales über den König Amasis: „Obschon er dich auch um anderer Dinge willen bewundert, so schätzt er doch über Alles die Messung der Pyramiden, daß du nämlich ohne alle Mühe und ohne eines Instrumentes zu bedürfen, indem du nur den Stock in den Endpunkt des Schattens stellst, den die Pyramide wirft, aus den durch die Berührung des Sonnenstrahls entstehenden zwei Dreiecken zeigst, daß der eine Schatten zum andern das nämliche Verhältnis hat, wie die Pyramide zum Stock“. Erkläre die Methode (vgl. Aufg. 36).
50. Aus dem Liber Assumptorum von Archimedes: „Wenn sich zwei Kreise berühren wie (in Fig. 217) AEB und CED in E , und Durchmesser von ihnen, wie AB und CD parallel sind, und wenn man die beiden Punkte B und D mit E verbindet, so wird EDB eine Gerade.“ Beweise den Satz und untersuche ihn für den Fall äußerer Berührung der Kreise.
51. Levi ben Gerson († 1344) beschreibt in einer als Handschrift erhaltenen Abhandlung ein Instrument, das er *relevator secretorum* nennt, und das später als Jakobsstab viel benutzt wurde. Auf einer Meßstange AB ist senkrecht dazu ein auf der Stange verschiebbarer Stabangebracht von bekannter Länge (Fig. 218).

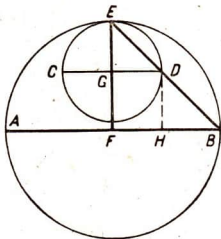


Fig. 217

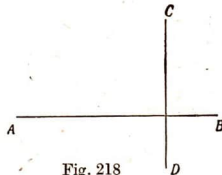


Fig. 218

Es sei etwa die Höhe eines Turmes zu messen. Dann schiebt man CD so, daß AC in die Blickrichtung nach der Spitze, AD in die Blickrichtung nach dem Fuß des Turmes fällt. a) Suche die beiden ähnlichen Dreiecke auf, die die Berechnung der Turmhöhe gestatten. b) Wie kann man bei bekannter Turmhöhe die Entfernung bestimmen? c) Fertige selbst ein Modell.

§ 24. Proportionen im Dreieck

Die Seitenhalbierenden

1. Ziehe im Dreieck ABC die zwei Seitenhalbierenden BE und CF und die Verbindungsstrecke der Seitenmitten EF . Untersuche mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen, in welchem Verhältnis die Seitenhalbierenden einander schneiden.
2. Beweise, daß die drei Seitenhalbierenden sich in einem Punkte schneiden.
3. Es seien AD , BE und CF die Seitenhalbierenden. Beweise, daß jede von ihnen die Dreiecksfläche halbiert.
4. Konstruiere ein Dreieck aus (achte auf ein Teildreieck!):

a) a, s_b, s_c	b) b, s_a, s_c	c) $s_a, s_b, \sphericalangle (s_a, s_b)$
d) a, s_a, s_b	e) b, s_a, s_b	f) h_a, s_b, s_c
5. Konstruiere ein Dreieck aus s_a, s_b, s_c .
6. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck aus (Spitze bei A) h_a, s_b .

Die Höhen

7. Beweise a) durch Ähnlichkeitsbetrachtungen, b) arithmetisch auf Grund der Formeln für den Dreiecksinhalt, daß die Höhen eines Dreiecks sich umgekehrt verhalten wie die Seiten.
8. Bestimme bei den folgenden Dreieckskonstruktionen erst ein Stück als vierte Proportionale zu den gegebenen, um dann das Dreieck selbst zu konstruieren. Gegeben ist:

a) $a, h_a : h_b, \beta$	b) $b, h_a : h_b, \beta$	c) $a, h_a : h_b, r$
--------------------------	--------------------------	----------------------
9. Konstruiere ein Dreieck aus:

a) $b, a : h_b, s_b$	b) $b, a : h_b, \beta$	c) $b, h_a : h_b, s_c$
d) $a, a, h_b : h_c$	e) $a, h_a, h_b : h_c$	f) h_a, h_b, h_c
10. Formuliere einen Satz über die Seiten und zugehörigen Höhen im Parallelogramm und beweise ihn.

Die Winkelhalbierenden

11. Verlängere in $\triangle ABC$ die Seite AC über A hinaus um AB bis D . a) Beweise, daß BD der Winkelhalbierenden w_a parallel ist. b) Beweise, daß sich die Abschnitte der Winkelhalbierenden auf einer Seite verhalten wie die anliegenden Seiten.
12. Leite einen entsprechenden Satz wie für die Winkelhalbierende des Innenwinkels eines Dreiecks auch für die Winkelhalbierende des Außenwinkels ab.
13. Im Dreieck ABC sei AD die Winkelhalbierende des Innenwinkels α , die des zugehörigen Außenwinkels sei AD' , wo D und D' auf der Seite a liegen. a) Zeige, daß A auf dem Kreis liegt, der DD' zum Durchmesser hat (Kreis von Apollonius). b) Welches ist der geometrische Ort der Spitzen von Dreiecken, für die die Seite a und das Seitenverhältnis $b : c$ vorgeschrieben ist?

14. Welche Gestalt nimmt der Kreis von Apollonius an, wenn das vorgeschriebene Seitenverhältnis 1 ist (welcher Art ist dann das Dreieck?)?
15. Eine Strecke AB ist durch den Punkt C in zwei Teilstrecken geteilt. Konstruiere den geometrischen Ort der Punkte, von denen aus die beiden Teilstrecken unter gleichem Winkel erscheinen.
16. Gegeben sind die Punkte P_1 , P_2 und P_3 . Gesucht sind die Punkte, deren Abstände von P_1 und P_2 sich verhalten wie $m : n$ und die **a)** von P_3 den Abstand a , **b)** von P_1 und P_3 den gleichen Abstand, **c)** von P_1 und P_3 Abstände haben, die im Verhältnis $a : b$ stehen.
17. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 . Gesucht sind die Punkte, deren Abstände von P_1 und P_2 sich verhalten wie $m : n$ und die **a)** von einer Geraden g den Abstand a , **b)** von der durch P_1 und P_2 gelegten Geraden und einer zweiten Geraden g gleichen Abstand, **c)** von zwei Geraden g_1 und g_2 gleichen Abstand haben.
18. Konstruiere ein Dreieck aus:

a) $a, b : c, \beta$	b) $a, b : c, h_a$	c) $b, a : c, s_b$
d) $b, a : c, r$	e) $a : c, r, \beta$	f) $a, b : c, w_a$
19. Eine Strecke AB ist durch die Punkte C und D in drei ungleiche Teile geteilt. Bestimme die Punkte, von denen aus die Teilstrecken unter dem gleichen Winkel erscheinen. (Achte besonders darauf, wann die Konstruktion ausführbar ist, wann nicht.)
20. Bestimme auf den Seiten eines Vierecks die Punkte, von denen aus die Abschnitte auf einer Diagonale unter gleichem Winkel erscheinen.
21. Bestimme auf zwei Seiten eines Dreiecks die Punkte, von denen aus die Seitenprojektionen auf der dritten Seite unter gleichem Winkel erscheinen.

Geometrische Überlegungen

22. Untersuche, ob sich die Tatsache, daß im gleichseitigen Dreieck die Höhen, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden gleich lang sind, umkehren läßt.
23. Beweise: **a)** die oberen Abschnitte zweier Dreieckshöhen verhalten sich umgekehrt wie die unteren; **b)** eine Seitenprojektion im Dreieck verhält sich zur zugehörigen Höhe, wie deren unterer Abschnitt zur anderen Seitenprojektion.
24. In $\triangle ABC$ seien die Seitenhalbierenden AD , BE und CF gezogen. **a)** Beweise, daß diese Linien auch in $\triangle DEF$ Seitenhalbierende sind. **b)** Setze das Verfahren fort und leite daraus einen Beweis dafür ab, daß die Seitenhalbierenden sich in einem Punkte schneiden.
25. Untersuche, was sich über die Flächen der sechs Dreiecke sagen läßt, in die ein Dreieck durch die drei Seitenhalbierenden geteilt wird.
26. Gegeben sind ein Punkt P und zwei Geraden mit unzugänglichem Schnittpunkt. Konstruiere die von P nach jenem Schnittpunkt gehende Gerade auf Grund des Satzes, daß die Dreieckshöhen durch einen Punkt gehen.

27. Mit Anwendung des Satzes, daß die Höhen eines Dreiecks durch einen Punkt gehen, ist von dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden auf eine dritte Gerade die Senkrechte zu fallen. Die Schnittpunkte der dritten Geraden mit den beiden anderen seien **a)** zugänglich, **b)** unzugänglich.

Praktische Aufgaben

28. Ein Dreieck ist aus gleichmäßiger Pappe geschnitten und wird an einer Ecke aufgehängt. **a)** Warum fällt dann die Vertikale mit der Seitenhalbierenden des Dreiecks von jener Ecke aus zusammen? **b)** Beweise, daß der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden der Schwerpunkt des Dreiecks ist.
29. Im Punkte A , 1,50 m über dem Boden, befindet sich das Auge eines Beobachters. Dieser betrachtet eine 10 m entfernte Plakattafel. Dort ist **a)** in seiner Augenhöhe, **b)** in einer Höhe von 3 m über dem Erdboden in 1 m großen Buchstaben eine Inschrift angebracht worden. Eine zweite Inschrift soll darüber angebracht werden. Wie groß muß man die Buchstaben wählen, damit sie gleich groß erscheinen (d. h. unter gleichem Gesichtswinkel), wie die der unteren Zeile (Zeichnerische Bestimmung)?

§ 25. Figuren in Ähnlichkeitslage

Perspektive Lage

- Gegeben ist eine Gerade g_1 . Die Punkte der Geraden sind durch ein Strahlenbündel mit dem Augenpunkt S auf eine zweite Gerade g_2 perspektivisch bezogen (Fig. 219). Zeichne eine Reihe von einander entsprechenden Punkten, wenn gegeben sind **a)** g_1, g_2 und S , **b)** g_1, g_2 und die einander entsprechenden Punktepaare P_1 und P_2 sowie Q_1 und Q_2 .
- Welche Gestalt nimmt das Strahlenbündel an, wenn der Augenpunkt ins Unendliche rückt?
- Zeichne **a)** zwei Dreiecke, **b)** zwei Vierecke, **c)** drei Dreiecke, die zueinander perspektivisch liegen, d. h. bei denen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen.
- Zeichne **a)** zwei Dreiecke, **b)** zwei Quadrate, die zueinander perspektivisch liegen, doch so, daß das Zentrum der Perspektive unendlich fern ist.
- Zeichne zwei Dreiecke, die zueinander perspektivisch liegen, doch so, daß das Zentrum der Perspektive **a)** zwischen den beiden Dreiecken, **b)** innerhalb der beiden Dreiecke liegt.
- Zeichne ein Dreieck und sein Höhenfußpunktsdreieck. Zeige, daß beide perspektivisch zueinander liegen (spitzwinkliges und stumpfwinkliges Dreieck).
- Zwei parallele Geraden sind perspektivisch aufeinander bezogen. Was läßt sich über einander entsprechende Abschnitte aussagen?

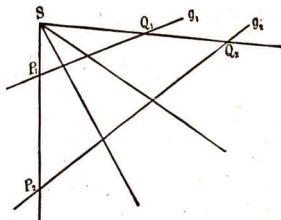


Fig. 219

Dreiecke in Ähnlichkeitslage

8. Zwei Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ mögen perspektivisch zueinander liegen, d. h. $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ oder ihre Verlängerungen schneiden sich in einem Punkte S . Außerdem aber seien die einander entsprechenden Dreiecksseiten einander parallel. Beweise, daß **a)** entsprechende Winkel der Dreiecke gleich, **b)** entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis stehen, mit anderen Worten, daß die Dreiecke ähnlich sind.
9. Gegeben sind zwei ähnliche Dreiecke. Beweise, daß man sie in eine solche Lage bringen kann, daß sie in perspektiver Lage zueinander sind (Ähnlichkeitslage¹⁾).
10. Zeichne zwei ähnliche Dreiecke in Ähnlichkeitslage und zwar so, daß der Ähnlichkeitspunkt (das Zentrum der Perspektivität) **a)** auf ein und derselben Seite von den beiden Dreiecken, **b)** zwischen den beiden Dreiecken **c)** im Innern der beiden Dreiecke, **d)** in einer Ecke eines Dreiecks, **e)** auf einer Seite eines Dreiecks liegt. **f)** Welchen besonderen Fall der Ähnlichkeitslage haben wir bei der Ableitung der Ähnlichkeitssätze (§ 23) benutzt?
11. Zwei ähnliche Dreiecke liegen so, daß entsprechende Seiten parallel sind. Beweise, daß die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen.
12. Wie ändert sich die Lage des Ähnlichkeitspunktes, wenn man das eine der beiden ähnlichen Dreiecke parallel zu sich verschiebt?
13. Der Ähnlichkeitspunkt zweier im Endlichen liegender ähnlicher Dreiecke in Ähnlichkeitslage liegt im Unendlichen, mit anderen Worten die Strahlen des Strahlenbüschels sind parallel. Was ist über die ähnlichen Dreiecke zu sagen? (Zeichnung.)
14. Untersuche, in welchen Fällen der Ähnlichkeitspunkt zweier ähnlicher Dreiecke zwischen den Dreiecken liegt (innerer Ähnlichkeitspunkt), in welchen Fällen auf ein und derselben Seite von beiden Dreiecken aus gesehen (äußerer Ähnlichkeitspunkt).
15. Zwei Dreiecke sind kongruent und liegen symmetrisch zueinander. Wo liegt der innere Ähnlichkeitspunkt?
16. Zeige, daß ein Dreieck und das aus den Seitenmitten gebildete in Ähnlichkeitslage liegen, daß also die Seitenhalbierenden des Dreiecks durch einen Punkt gehen.
17. (Eulersche Gerade.) **a)** Zeige, daß der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks ABC zugleich Höhenschnittpunkt des aus den Seitenmitten gebildeten Dreiecks ist, daß also Mittelpunkt des Umkreises und Höhenschnittpunkt des Dreiecks entsprechende Punkte zweier Dreiecke in Ähnlichkeitslage sind. **b)** Warum muß also die Verbindungsgerade von Umkreismittelpunkt M und Höhenschnittpunkt H durch den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden gehen? **c)** Wie groß ist $SM : SH$?

¹⁾ Was früher im § 23 Ähnlichkeitslage genannt wurde, ist ein Sonderfall des hier benutzten allgemeineren Begriffes, nämlich der in Aufg. 10 unter d) genannte.

Vierecke und Vielecke in Ähnlichkeitslage

18. Gegeben ist **a)** ein Viereck, **b)** ein Fünfeck, **c)** ein beliebiges Vieleck. Zeichne ein dem gegebenen ähnliches Vieleck in Ähnlichkeitslage derart, daß das Seitenverhältnis zwischen beiden 1 : 2 ist.
19. **a)** bis **c)** dasselbe wie Aufg. 18; vorgeschriebenes Verhältnis 3 : 1.
20. **a)** bis **c)** dasselbe wie Aufg. 18; vorgeschriebenes Verhältnis 2 : 3.
21. Beweise, daß sich in ähnlichen Vielecken **a)** gleichliegende Diagonalen, **b)** allgemein irgendwelche gleichliegenden Strecken wie gleichliegende Seiten verhalten.
22. Beweise, daß sich bei ähnlichen Vielecken **a)** die Umfänge wie gleichliegende Seiten, **b)** die Flächeninhalte wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten.
23. Untersuche, ob die Umfänge des einem Kreise eingeschriebenen und des einem Kreise umgeschriebenen Quadrates sich verhalten wie die Diagonalen.
24. Bringe ein regelmäßiges Sechseck, das einem Kreis mit dem Radius r eingeschrieben ist, in Ähnlichkeitslage zu dem diesem Kreis umgeschriebenen Sechseck. **a)** Berechne den Umfang des eingeschriebenen Sechsecks. **b)** Berechne danach den Umfang des umgeschriebenen Sechsecks.
25. Um einem Dreieck ABC ein Quadrat einzuschreiben, kann man verfahren, wie Fig. 220 es andeutet, in der das schraffierte Quadrat gesucht ist. **a)** Erläutere das Verfahren. Warum ist die eingeschriebene Figur wirklich ein Quadrat? **b)** Einem Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck einzuschreiben, dessen Ecken auf den drei Dreiecksseiten liegen. **c)** Einem Dreieck ist ein Rechteck mit vorgeschriebenem Seitenverhältnis einzuschreiben. **d)** Ist es notwendig, bei der Konstruktion die der gesuchten ähnliche Figur gerade einer Dreiecksseite anzuschreiben, oder genügt es, irgendeine andere Ähnlichkeitslage zu wählen?

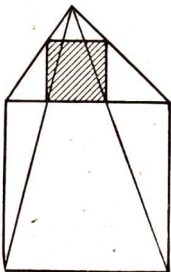


Fig. 220

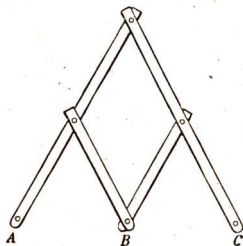


Fig. 221

Praktische Anwendungen

26. Fig. 221 zeigt einen Storchschnabel oder Pantographen. Punkt A wird festgehalten, mit dem Stift in Punkt B folgt man einer Figur, dann

beschreibt ein Schreibstift in C die der gegebenen ähnliche in vergrößertem Maßstab. **a)** Untersuche, in welchem Maßstabe die Figur vergrößert wird. **b)** Wie kann man den eben beschriebenen Storchschnabel zur Verkleinerung benutzen? **c)** Beweise, daß die von B und C beschriebenen Figuren sich in Ähnlichkeitslage befinden.

27. Fig. 222 zeigt einen Teil einer Nürnberger Schere (vgl. § 12, Aufg. 47). Beweise, daß, wenn Punkt 1 festgehalten wird und irgendeiner der Punkte

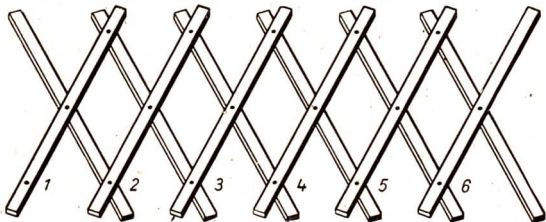


Fig. 222

2, 3, 4, 5 . . . eine Figur beschreibt, alle anderen Punkte Figuren beschreiben, die zu der ersten in Ähnlichkeitslage sind.

28. Fig. 223 zeigt eine andere Form des Storchschnabels. (Eine genauere Ausführung für die Praxis gibt Fig. 224 wieder.) Der Stab s ist je nach der gewünschten Vergrößerung verschiebbar. Die Punkte A , B und C liegen auf der Diagonalen. Wenn A festgehalten wird, kann, je nachdem, ob es sich um Vergrößerung oder Verkleinerung handelt, B oder C für den Führungsstift, jeweilig der andere für den Zeichenstift dienen. **a)** Begründe die Verwendbarkeit. **b)** Untersuche, ob man auch B festhalten kann, so daß also A und B beweglich sind.

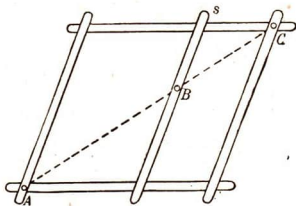


Fig. 223

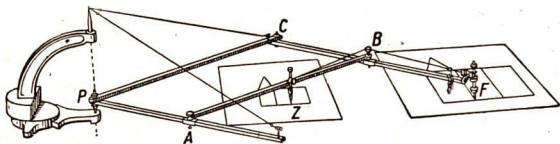


Fig. 224

- 29.** (Hauptaufgabe beim Meßtischverfahren.) Im Felde liegt eine auf dem Meßtisch (d. h. einer horizontalen Zeichenfläche) darzustellende Fläche (in Fig. 225 das schraffierte Viereck). Man stellt den Apparat in I auf und legt dort die Richtungen nach den Ecken der Figur von einem Punkte A

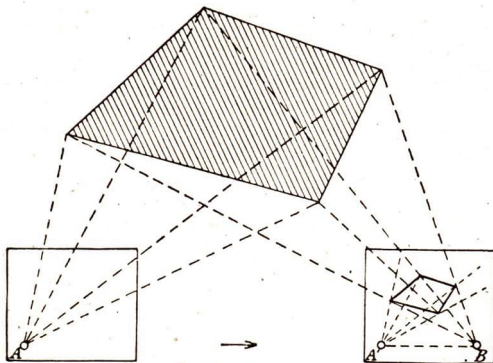


Fig. 225

auf dem Meßtisch aus fest. Dann stellt man den Apparat in II auf. Die neue Lage des Punktes A sei A' . B wählt man so, daß $A'B$ in die Richtung AB fällt. Es sei $A'B = \frac{1}{n} AB$. Nun visiert man von B aus nach den Ecken der aufzunehmenden Figur. Durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen, die von der Meßtischaufnahme von A und B aus herrühren, ist auf dem Meßtisch eine der Figur im Felde ähnliche Figur bestimmt.

a) Begründe die Richtigkeit des Verfahrens. **b)** In welchem Maßstab ist die Figur verkleinert? **c)** Wiederhole das Verfahren an irgendeiner anderen Figur. **d)** Führe das Verfahren durch, wenn es sich um eine Figur handelt, deren Begrenzung den Meßtisch allseitig umgibt. **e)** Gib eine Darstellung für den Fall, daß man den Meßtisch beide Male in Eckpunkten der aufzunehmenden Fläche aufstellen kann, daß also A und B Eckpunkte der Figur sind.

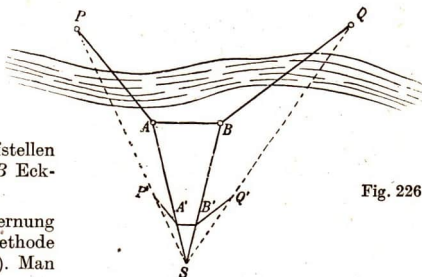


Fig. 226

- 30.** Die unzugängliche Entfernung PQ ist nach folgender Methode zu bestimmen (Fig. 226). Man

wählt zwei zugängliche Hilfspunkte A und B , bestimmt $A'S = \frac{1}{n} AS$, $B'S = \frac{1}{n} BS$. Dann bestimmt man Q' auf SQ so, daß $B'Q'$ parallel BQ ist. Ebenso findet man P' . Wie ist nun PQ zu finden? Erörtere im einzelnen, welche Annahmen über die Sichtbarkeit der Zeichen usf. zu machen sind.

Geometrische Überlegungen

31. Zwei Kreise besitzen zwei Ähnlichkeitspunkte, einen inneren und einen äußeren. **a)** Warum gibt es bei den Vielecken im allgemeinen nur einen, beim Kreis zwei Ähnlichkeitspunkte? **b)** Stelle fest, ob einander entsprechende (d. h. in Ähnlichkeitslage befindliche) Radien von Kreisen parallel sind. **c)** Untersuche, ob es auch gewisse Vielecke mit innerem und äußerem Ähnlichkeitspunkt gibt.
32. Dehne den für ähnliche Dreiecke über Katheten und Hypotenuse ausgesprochenen pythagoreischen Lehrsatz (§ 23 Aufg. 28) aus auf beliebige ähnliche Vielecke, in denen die Katheten und die Hypotenuse entsprechende Stücke sind.
33. Zwei Geraden haben einen unzugänglichen Schnittpunkt. Durch einen gegebenen Punkt P ist die Gerade zu legen, die durch diesen Schnittpunkt geht. (Mache P zum Eckpunkt eines Dreiecks, dessen andere Ecken auf den gegebenen Geraden liegen, und benutze ein zweites Dreieck in Ähnlichkeitslage.)
34. Zwei Kreise werden äußerlich von einem dritten Kreis berührt. Untersuche, was sich über die Lage der Berührungssehne dieses Kreises sagen läßt.
35. Drei ähnliche Figuren I, II und III sind so gelegen, daß sich I zu II und I zu III in Ähnlichkeitslage befindet. Läßt sich über die Lage von II und III etwas sagen? Was kann man über die Ähnlichkeitspunkte aussagen?
36. (Satz von Monge.) Von drei Kreisen, die sich nicht schneiden, sollen alle inneren und äußeren Ähnlichkeitspunkte gefunden werden. **a)** Was ist über deren Lage zu sagen? **b)** Erörtere den Fall, daß von den Kreisen sich zwei oder auch alle drei schneiden.

§ 26. Der zweite Strahlensatz

Der zweite Strahlensatz

1. Die Schenkel eines Winkels mit dem Scheitelpunkt S werden von einem Kreis geschnitten und zwar so, daß S außerhalb des Kreises liegt. Verbinde die Schnittpunkte über Kreuz und leite mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre eine Beziehung zwischen den Abschnitten auf den beiden Schenkeln ab.
2. Die Schenkel eines Winkels mit dem Scheitelpunkt S und ihre Verlängerungen über S hinaus werden von einem Kreis geschnitten und zwar so, daß S innerhalb des Kreises liegt. Leite eine Beziehung zwischen den Abschnitten auf den Schenkeln ab.

3. (Zweiter Strahlensatz.) Ein Strahlenbüschel wird von einem Kreis geschnitten. Beweise den Satz, daß das Produkt der Abschnitte auf den einzelnen Strahlen, gemessen vom Strahlenmittelpunkt aus, einen festen Wert hat (die Potenz des Strahlenmittelpunktes in bezug auf den Kreis).
4. Formuliere den zweiten Strahlensatz in geometrischer Form als eine Gleichung zwischen Flächen.
5. Was wird aus dem zweiten Strahlensatz, wenn der Strahlenmittelpunkt auf den Kreisumfang fällt?
6. Greife aus dem Strahlenbüschel, dessen Scheitel außerhalb des Kreises liegt, zwei Strahlen heraus, von denen der eine eine Sekante, der andere eine Tangente ist. **a)** Welcher besondere Satz läßt sich da aussprechen? Gib einen Beweis für diesen Sonderfall.
7. Greife aus dem Strahlenbüschel, dessen Scheitel innerhalb des Kreises liegt, zwei Geraden so heraus, daß die eine Sehne vom Scheitelpunkt halbiert wird. **a)** Welcher besondere Satz läßt sich da aussprechen? **b)** Gib einen Beweis für diesen Sonderfall. **c)** Auf welchen von früher her bekannten Fall stößt man, wenn man den zweiten Strahl in die Richtung des Kreisdurchmessers fallen läßt?
8. Suche mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes zu den Strecken a , b und c die vierte Proportionale (zwei verschiedene Methoden).
9. Verwandle unter Benutzung des zweiten Strahlensatzes **a)** ein Rechteck in ein Quadrat, **b)** ein Quadrat in ein Rechteck, dessen eine Seite gegeben ist, **c)** ein Rechteck in ein anderes, dessen eine Seite gegeben ist.

Die mittlere Proportionale

10. Konstruiere **a)** mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks, **b)** mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes die mittlere Proportionale (das geometrische Mittel) zweier gegebener Strecken (verschiedene Lösungsmethoden).
11. Gegeben sind zwei Strecken a und b . Berechne und konstruiere die mittlere Proportionale zwischen $a + b$ und $a - b$.
12. Gegeben ist eine Strecke a . Konstruiere und berechne die mittlere Proportionale zwischen

a) a und $2a$,	b) a und $3a$,	c) a und $\frac{a}{2}$.
--------------------------	--------------------------	-----------------------------------
13. Löse geometrisch (mit Zirkel und Lineal) die folgenden Gleichungen (x ist die gesuchte Größe, a und b sind die als Strecken gegebenen Größen):

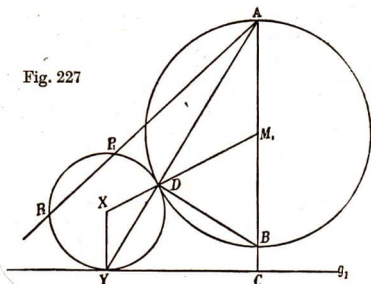
a) $x^2 = ab$,	b) $x^2 = 2a^2$,	c) $x^2 = 3a^2$,
d) $x = \frac{a}{2} \sqrt{3}$,	e) $x = \frac{a}{2} \sqrt{3}$,	f) $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$,
g) $x^2 = a^2 - b^2$,	h) $ax = 2b^2$,	i) $2ax = b^2$.

14. Durch einen Punkt im Innern eines Kreises ist eine Sehne zu legen, die in diesem Punkte halbiert wird.
15. Durch einen Punkt im Innern eines Kreises ist eine Sehne zu legen, die durch diesen Punkt im Verhältnis $m : n$ geteilt wird.

Einige besondere Fälle des Berührungsproblems von Apollonius

16. Wiederhole die Aufgaben a) den Kreis zu zeichnen, der durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 geht, b) die Kreise zu zeichnen, die drei Geraden g_1, g_2, g_3 berühren.
17. Zeichne den Kreis, der durch zwei Punkte P_1, P_2 geht und eine Gerade g_1 berührt. (Anwendung des zweiten Strahlensatzes.)
18. Zeichne den Kreis, der durch einen Punkt P_1 geht und zwei Geraden g_1 und g_2 berührt. (Bestimme durch Symmetriebetrachtung einen zweiten Punkt P_2 , durch den der Kreis geht, und wende dann das Verfahren in Aufg. 17 an.)
19. Zeichne die Kreise, die durch zwei Punkte P_1 und P_2 gehen und einen Kreis um M_1 berühren. — Anleitung: Zeichne einen beliebigen Kreis durch die beiden Punkte P_1 und P_2 , der den anderen Kreis um M_1 in Q_1 und Q_2 schneidet. Bestimme durch $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ einen Strahlenmittelpunkt, von dem aus die Tangente an den gegebenen und gleichzeitig den gesuchten Kreis gelegt wird.
20. Zeichne die Kreise, die zwei Geraden g_1 und g_2 und einen Kreis um M_1 berühren. (Man sucht nicht diesen Kreis, sondern den, der durch M_1 geht, und der statt der Geraden g_1 und g_2 zwei leicht bestimmbare Parallelen zu ihnen berührt.)
21. Zeichne die Kreise, die einen Punkt P_1 , eine Gerade g_1 und einen Kreis um M_1 berühren. (Analysisfigur 227: X sei Mittelpunkt des gesuchten Kreises. XY und AB seien zu g_1 senkrecht. AY geht durch den Berührungspunkt der beiden Kreise. Um $BCYD$ läßt sich ein Kreis beschreiben. Dann ist $AB \cdot AC = AD \cdot AY = AP_1 \cdot AP_2$, woraus P_2 bestimmbar ist.)
22. Zeichne die Kreise, die eine Gerade g_1 und zwei Kreise um M_1 und M_2 berühren. (Zurückführung auf Aufg. 21, indem statt des gesuchten ein ihm konzentrischer konstruiert wird, der etwa durch M_1 geht.)

Fig. 227



Der ptolemäische Lehrsatz

23. Gegeben ist ein Sehnenviereck $ABCD$. Ziehe eine Diagonale, etwa BD , und trage $\sphericalangle BDC$ an die Seite AD an. Der freie Schenkel schneidet die andere Diagonale AC in E . a) Suche in der entstandenen Figur zwei ähnliche Dreiecke und leite daraus ab, daß

$$BC \cdot AD = DB \cdot AE$$

ist. b) Stelle eine ähnliche Beziehung für $DB \cdot EC$ her. c) Beweise den Satz: Das aus den Diagonalen gebildete Rechteck ist gleich der Summe der aus den einander gegenüberliegenden Seiten gebildeten Rechtecke.¹⁾

24. Welche Gestalt nimmt der ptolemäische Lehrsatz a) für das Rechteck, b) für das gleichschenklige Trapez an?

Algebraisch-geometrische Konstruktionen

25. Bei den folgenden Dreieckskonstruktionen ist aus den gegebenen drei Stücken zunächst ein viertes zu bestimmen (durch Gleichsetzung zweier Inhaltsausdrücke) und mit dessen Hilfe dann die Dreieckskonstruktion auszuführen:

a) a, h_a, q

b) s, h_c, q

c) c, h_c, s

d) b, h_b, q_b

e) $a, b - c, q_b$

f) a, s, q_a

26. Von einem Dreieck ist der Flächeninhalt gegeben und

a) b, q

b) h_a, q

c) s, h_a

d) $s - a, h_a$

e) $s - b, \beta$

f) s, q_a

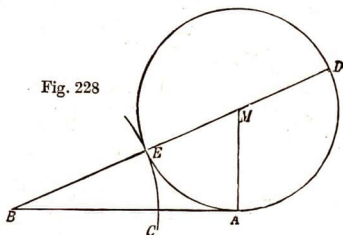
Der goldene Schnitt (stetige Teilung)

27. (Teilung nach dem goldenen Schnitt.) Zeichne einen Kreis mit dem Durchmesser d und in einem beliebigen Punkte des Umfanges eine Tangente von der Länge d . Von diesem Endpunkt ziehe die Zentrale des Kreises. Welche Strecke ist dann so geteilt, daß ihr größerer Abschnitt mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt ist?
28. Eine Strecke von a) 1 dm, b) von a cm sei nach dem goldenen Schnitt geteilt. Berechne die Länge des größeren Teilabschnittes.
29. Um eine vorgegebene Strecke a nach dem goldenen Schnitt zu teilen, zeichne einen Kreis, dessen Durchmesser a ist, und der die Strecke in einem Endpunkt berührt. Dann findet sich auf der Zentralen vom anderen Endpunkt aus eine nach dem goldenen Schnitt geteilte Strecke. Übertrage das Teilverhältnis durch Parallelen auf die gegebene Strecke a .

¹⁾ So ist der Wortlaut des Satzes in Ptolemäus' Handbuch der Astronomie (um 150 n. Chr.).

30. Beweise, daß die Teilung der Strecke AB nach dem goldenen Schnitt (Fig. 228) auch in der Weise vorgenommen werden kann, daß der kleinere Abschnitt der Sekante BE auf BA von B aus abgetragen wird.

31. Zeige, daß die Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt auch mit einem Kreise von beliebigem Durchmesser vorgenommen werden kann, wenn nur statt der Zentrale eine Sekante gewählt wird, deren Sehne gleich der zu teilenden Strecke ist.



32. Eine Strecke ist so zu verlängern, daß die ganze Strecke nach dem goldenen Schnitt geteilt ist. Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?
33. Konstruiere eine Strecke derart, daß ihre Teilstrecken a , b und c folgenden Bedingungen genügen: b ist größerer Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke $a + b$, c ist größerer Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke $a + b + c$.
34. Konstruiere eine Reihe von Strecken derart, daß, angefangen von einer Strecke 1 cm, jede folgende größerer Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten, aus ihr und allen vorhergehenden zusammengesetzten Strecke ist.

Praktische Anwendungen

35. Man will ein rechteckiges Format einrichten, derart, daß die eine Seite der größere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten anderen Seite ist. Stelle in irgendeinem Maßstabe eine Vorlage her.
36. Zeichne ein Kreuz, bei dem der Querbalken den Längsbalken nach dem goldenen Schnitt teilt und selbst gleich dem größeren Abschnitt ist. Vergleiche diese Kreuzform mit anderen.
37. Berechne die Weite der Aussicht nach dem Meere a) vom Vesuv (1300 m), b) vom Ätna (3279), c) vom Pic von Teneriffa (3730).
38. Wie hoch müßte ein Turm sein, von dem aus man 25 km weit sehen kann?

§ 27. Berechnung und Konstruktion regelmäßiger Vielecke

Allgemeines über regelmäßige Vielecke

1. Ein regelmäßiges Vieleck ist ein solches, in dem alle Seiten und alle Winkel gleich sind. Untersuche, ob ein n -Eck, in dem **a)** alle Winkel, **b)** alle Seiten gleich sind, ein regelmäßiges ist (die Fälle $n = 3, 4, 5 \dots$ sind durchzugehen).
2. Berechne die Winkel eines regelmäßigen **a)** Dreiecks, **b)** Vierecks, **c)** Fünfecks, **d)** Sechsecks, **e)** Achtecks, **f)** Zehnecks, **g)** Zwölfecks, **h)** n -Ecks.
3. Beweise, daß einem regelmäßigen Vieleck ein Kreis umgeschrieben werden kann (zeige, daß die Mittelsenkrechten dreier nebeneinander liegender Seiten durch einen Punkt gehen).
4. Beweise, daß einem regelmäßigen Vieleck ein Kreis eingeschrieben werden kann (zeige, daß die Winkelhalbierenden dreier nebeneinander liegender Winkel durch einen Punkt gehen).
5. Berechne den Zentriwinkel eines Teildreiecks (Bestimmungsdreiecks) vom regelmäßigen **a)** Dreieck, **b)** Viereck, **c)** Fünfeck, **d)** Sechseck, **e)** Achteck, **f)** Zehneck, **g)** Zwölfeck, **h)** n -Eck.
6. Welche Beziehung besteht zwischen den Zentriwinkeln, die zu den Seiten des regelmäßigen Dreiecks, Fünfecks und Fünfzehnecks gehören?
7. Welche Beziehung besteht zwischen dem Zentriwinkel der Seite eines regelmäßigen n -Ecks und dem Außenwinkel des n -Ecks?

Konstruktion regelmäßiger Vielecke

8. Einem Kreis ist ein regelmäßiges **a)** Sechseck, **b)** Zwölfeck, **c)** Dreieck, **d)** Hexagramm (zwei entgegengesetzt parallele Dreiecke) einzuschreiben.
9. Einem Kreis ist ein regelmäßiges **a)** Sechseck, **b)** Zwölfeck, **c)** Dreieck, **d)** Hexagramm umzuschreiben.
10. Es ist ein regelmäßiges **a)** Sechseck, **b)** Zwölfeck aus einer Seite zu konstruieren.
11. Einem Kreis ist ein regelmäßiges **a)** Viereck, **b)** Achteck, **c)** Sechzehneck einzuschreiben.
12. Einem Kreis ist ein regelmäßiges **a)** Viereck, **b)** Achteck, **c)** Sechzehneck umzuschreiben.
13. Es ist ein regelmäßiges **a)** Achteck, **b)** Sechzehneck aus einer Seite zu konstruieren.
14. Zeichne ein Teildreieck des regelmäßigen Zehnecks. Halbiere den einen Basiswinkel und untersuche die beiden Dreiecke, in die das Dreieck dann zerfällt.

15. Beweise durch Ähnlichkeitsbetrachtung des in Aufg. 14 zerlegten Zehneck-teildreiecks, daß die Zehneckseite der größere Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius des Umkreises ist.
16. Einem Kreis ist ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben.
17. Einem Kreis ist ein regelmäßiges a) Fünfeck, b) Zwanzigeck einzuschreiben.
18. Einem Kreis ist ein regelmäßiges a) Zehneck, b) Fünfeck, c) Zwanzigeck umzuschreiben.
19. Konstruiere ein regelmäßiges a) Zehneck, b) Fünfeck aus einer Seite a .
20. Zeichne einem Kreise ein regelmäßiges Pentagramm ein.
21. Konstruiere ein einem gegebenen Kreis eingeschriebenes Fünfzehneck, indem du a) die Beziehung $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, b) die Beziehung $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ benutzt.
22. Konstruiere ein regelmäßiges a) Sechseck, b) Fünfeck, c) Zehneck, wenn die Länge einer kleinsten Diagonale gegeben ist.

Berechnung der Seite eines regelmäßigen Vielecks

23. (Gleichung zwischen s_n und s_{2n} .) Es sei AB eine Seite s_n des regelmäßigen eingeschriebenen n -Ecks. Fäle von dem Kreismittelpunkt auf AB die Höhe MD , deren Verlängerung den Kreis in C schneidet. Dann ist AC die Seite s_{2n} des $2n$ -Ecks. a) Drücke MD durch r und s_n , DC durch s_n und s_{2n} aus. b) Addiere beide Ausdrücke und setze für $MD + DC$ den Wert r ein. c) Leite daraus die Formel

$$s_{2n} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - s_n^2})}$$

ab. d) Drücke umgekehrt s_n durch s_{2n} aus.

24. Berechne, ausgehend von der Sechseckseite, die Seite des regelmäßigen a) Zwölfecks, b) Vierundzwanzigecks als Funktion des Radius.
25. Wie groß ist der Umfang des einem Kreis von dem Radius $r = 10$ cm eingeschriebenen a) Zwölfecks, b) Vierundzwanzigecks?
26. Berechne, ausgehend vom Quadrat, die Seite des regelmäßigen a) Achtecks, b) Sechzehnecks als Funktion des Radius.
27. Wie groß ist der Umfang des einem Kreis mit dem Radius $r = 10$ cm eingeschriebenen a) Vierecks, b) Achtecks, c) Sechzehnecks?
28. Berechne die Seite des einem Kreis mit dem Radius r eingeschriebenen regelmäßigen a) Zehnecks, b) Fünfecks, c) Zwanzigecks.
29. Wie groß ist der Umfang des einem Kreis mit dem Radius $r = 10$ cm eingeschriebenen a) Fünfecks, b) Zehnecks, c) Zwanzigecks?
30. Gegeben ist die Seite a eines regelmäßigen a) Vierecks, b) Achtecks, c) Zwölfecks, d) Zehnecks, e) Fünfecks. Berechne den Radius des Umkreises.
31. Gegeben ist der Radius r des einem regelmäßigen a) Fünfeck, b) Zehneck, c) Sechseck, d) Zwölfeck, e) Achteck umgeschriebenen Kreises. Berechne alle Diagonalen (verschiedener Größe).

32. Berechne den Radius des einem regelmäßigen **a)** Dreieck, **b)** Viereck, **c)** Fünfeck, **d)** Sechseck, **e)** Achteck, **f)** Zehneck, **g)** Zwölfeck eingeschriebenen Kreises als Funktion des Umkreisradius.
33. **a)** bis **g)** Berechne für die in Aufg. 32 genannten regelmäßigen Vielecke den Inkreisradius als Funktion der Seite.
34. Es sei r_n der Radius des Umkreises, ϱ_n der Radius des Inkreises eines regelmäßigen n -Ecks mit der Seite s_n . Ist dann t_n die Seite des dem Sehnenvieleck entsprechenden regelmäßigen Tangentenvielecks, so ist t_n aus r_n , ϱ_n und s_n zu berechnen. Welchen allgemeinen Ausdruck erhält man?
35. Berechne die Seite eines regelmäßigen, einem Kreise mit dem Radius ϱ umgeschriebenen **a)** Vierecks, **b)** Achtecks, **c)** Sechzehnecks, **d)** Sechsecks, **e)** Dreiecks, **f)** Zwölfecks, **g)** Fünfecks, **h)** Zehnecks.
36. **a)** bis **h)** Berechne für die in Aufg. 35 genannten regelmäßigen Vielecke den Umfang, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises $\varrho = 10$ cm ist.
37. Berechne den Radius des einem regelmäßigen **a)** Viereck, **b)** Achteck, **c)** Sechseck, **d)** Dreieck, **e)** Zwölfeck, **f)** Fünfeck, **g)** Zehneck eingeschriebenen Kreises, wenn die Vielecksseite a ist.

Berechnung des Flächeninhaltes des regelmäßigen Vielecks

38. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein beliebiges Tangentenvieleck mit dem Umfang u umgeschrieben; beweise, daß der Flächeninhalt

$$f = \frac{u \cdot r}{2}$$

ist (vgl. § 18, Aufg. 9 und 10).

39. Berechne den Flächeninhalt eines regelmäßigen **a)** Vierecks, **b)** Sechsecks, **c)** Dreiecks, **d)** Fünfecks, **e)** Zehnecks, das einem Kreise mit dem Radius r umgeschrieben ist.
40. Berechne den Flächeninhalt eines regelmäßigen **a)** Vierecks, **b)** Sechsecks, **c)** Dreiecks, **d)** Fünfecks, **e)** Zehnecks, das einem Kreise mit dem Radius r eingeschrieben ist.
41. Einem Kreise ist ein regelmäßiges n -Eck mit der Seite s_n eingeschrieben und ein regelmäßiges n -Eck mit der Seite t_n umgeschrieben. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte beider Vielecke?
42. Berechne den Flächenstreifen, der zwischen dem einem Kreis mit dem Radius r eingeschriebenen und dem ihm umgeschriebenen **a)** Quadrat, **b)** gleichseitigen Dreieck, **c)** regelmäßigen Sechseck liegt.

Geometrische Überlegungen

43. Zeige, daß man ein regelmäßiges Vieleck **a)** der Dreier-Reihe (Dreieck, Sechseck, . . .), **b)** der Viererreihe (Viereck, Achteck, . . .) aus irgendeiner bestimmten Diagonale konstruieren kann.

44. Zeige, daß diejenigen regelmäßigen Vielecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, deren Zentriwinkel konstruierbar sind und umgekehrt.
45. Welches ist der kleinste ganzzahlige Winkel (das soll heißen, die Zahl der Grade soll eine ganze Zahl sein), den du konstruieren kannst?
46. Zeige, daß man alle Winkel, die Vielfache von 9° sind, mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen kann.
47. Suche Sätze über die Abschnitte auf den Seiten eines regelmäßigen Pentagramms zu entwickeln.
48. Als Näherungskonstruktion für die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen n -Ecks wird die folgende angegeben: Einen Durchmesser AB teilt man in n Teile und errichtet über AB ein gleichseitiges Dreieck. Die Verbindungsstrecke des zweiten Teilpunktes auf AB mit C schneidet in ihrer Verlängerung die Peripherie in D . AD ist dann die n -Ecksseite. Untersuche die Näherungskonstruktion für den Fall **a)** $n = 4$, **b)** $n = 5$, **c)** $n = 6$, **d)** $n = 7$.
49. Untersuche, **a)** ob jedes eingeschriebene Vieleck mit gleichen Seiten, **b)** jedes eingeschriebene Vieleck mit gleichen Winkeln, **c)** jedes umgeschriebene Vieleck mit gleichen Seiten, **d)** jedes umgeschriebene Vieleck mit gleichen Winkeln regelmäßig ist. Wo die Antwort nein lautet, stelle einen neuen Satz auf.

Aus der Geschichte der Geometrie

50. Bei Leonardoda Vinci (1452–1519) findet sich folgende Figur (Fig. 229). In einem beliebigen Punkte A eines Kreises um M wird mit dem Radius ein Bogen BMC geschlagen und mit der gleichen Zirkelöffnung um B ein Bogen MDA . Die Verlängerung der Strecke MD über D hinaus trifft den Kreis in E . An der Figur treten die zum regelmäßigen Dreieck, Sechseck, Achteck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck gehörigen Kreisbögen auf. Wo?

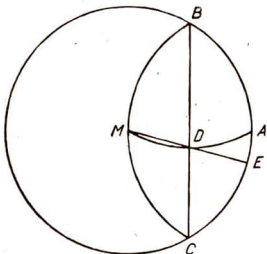


Fig. 229

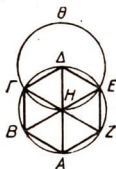


Fig. 230

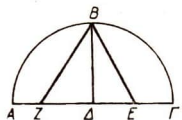


Fig. 231

51. In Euklids Elementen (Buch IV, 15) wird die Aufgabe: „Einem gegebenen Kreis ein gleichseitig-gleichwinkliges Sechseck einzuschreiben, mit einem einzigen Hilfskreis gelöst.“ Fig. 230 zeigt die entstandene Figur, bei der außer bei dem Schlagen des einen Hilfskreises nur das Lineal benutzt ist. Beschreibe die Euklidische Konstruktion.

52. Aus Ptolemäus' Handbuch der Astronomie (um 150 n. Chr.): „Es sei (Fig. 231) $AB\Gamma$ ein Halbkreis auf dem Durchmesser $A\Delta\Gamma$ um das Zentrum Δ . Von Δ aus ziehe man ΔB rechtwinklig zu $A\Gamma$ und halbiere $\Delta\Gamma$ in Punkt E . Dann ziehe man die Verbindungslinie EB , trage ihr gleich EZ ab und verbinde Z mit B durch eine Gerade. Meine Behauptung geht dahin: 1. $Z\Delta$ ist die Seite des (eingeschriebenen) Zehnecks, 2. BZ ist die Seite des (eingeschriebenen) Fünfecks.“ Beweise das arithmetisch und geometrisch.

Aus Dürers Unterweisung der messung | mit dem zirckel vñ richtscheyt in Linien ebenen vñnd gantzen corporen . . . (1525):

53. (Fig. 232) „Nyn will ich durch den vorigen Dryangel (ein gleichseitiges Dreieck ist gemeint, das dem Kreis eingeschrieben ist) vñd auß seiner beschreibung durch einen gemeinen Weg | den man von behendigkeit wege | in der arbeyt braucht ein siben eck mache | ich thuë im also | ich zeuch ein gerade lini auß dem Centrũ . a . in den punctken . 2 . so schneidt sich die seyten des dryangels . 1 . 3 . in der mitt von einander in den selben punctke setz ich ein . b . so geet die leng . 1 . b . siben mal herum | wie das oben in der figur angetzeigt . . . ist.“ Untersuche, ob die Teilung genau — demonstrative, wie Dürer sagt — oder nur angenähert — mechanice nennt das Dürer — richtig ist.¹⁾

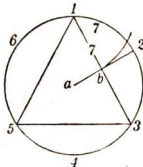


Fig. 232

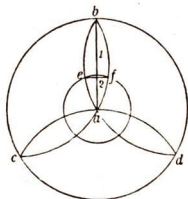


Fig. 233

54. (Fig. 233) „Ein neun eck ist durch ein dryangel zu finden | also | Reiß auß einem Centrum . a . ein große zirckellini | darein Reiß mit vnuerrucktem zirckel | drey fischs blosen | der obern ende an der zirckellini sey . b . der andern end auf den seyten sey . c . d . Darnach Reiß in der öbern fischblosen | ein aufrechte gerade lini . b . a . dise lini teil mit zweyen punctken . 1 . 2 . in drey gleiche felt | also das 2 . der negst punctt beym . a . sey | vñnd far durch den punctken . 2 . mit einer geraden zwerch lini zu gleichen winckeln . b . a vñd wo sie die blosen lini zu beden seyten durchschneidet, da setz . e . f . Darnach nym ein zirckel | setz jñ mit dem ein fuß | in das Centrũ . a . vñd den andern in den punctken . e . vñd Reiß durch das . f . zuring herumb | ein zirckellini so geet die leng . e . f . zu neun mal in disem zirckelriß herum | solchs hab ich hernach aufgerysen.“
a) Untersuche, ob diese Konstruktion „demonstrative“ oder nur „mechanice“ richtig ist. **b)** Einem gegebenen Kreis ist ein regelmäßiges Neuneck einzuschreiben. **c)** Ein regelmäßiges Neuneck ist zu konstruieren, wenn die Seite gegeben ist.

1) Die Figuren schließen sich in der Bezeichnungsweise Dürer an, sind aber nach dem Original neu gezeichnet.

55. „So ich bald ein eylf eck in ein zirkel reyssen eill | nym ich ein vierteyl von des zirkels diameter vnd erleng in [verlängere ihn um] ein acht teyl auß im selbs | vnd far mit diser leng herumb im zirkel das tryt beileuftig ein | also das es sich Mechanice | aber nit demonstratiue findet |“

56. (Fig. 234) „Weyter so ich behend ein . 13 . eck soll machen | so reiß ich auß einem Centrum . *a* . ein zirkellini. Darnach reiß ich ein halbenn diameter . *a . b* vnd schneid den mit einem puncten . *d* . in der mit von einander vnd brauch die leng *c . d* . zu . 13 . malen im zirkel herum | ist aber auch mechanice vnd nit demonstratiue.“

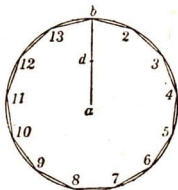


Fig. 234

§ 28. Umfang und Inhalt des Kreises

Der Kreisumfang

1. Zeige, daß der Kreis als Grenzlage der regelmäßigen Sehnenvielecke mit wachsender Seitenzahl angesehen werden kann.
2. Beweise, daß der Umfang eines regelmäßigen Sehnenvielecks mit Zunahme der Seitenzahl auch zunimmt.
3. Zeige, daß der Kreis als Grenzlage der regelmäßigen Tangentenvielecke mit wachsender Seitenzahl angesehen werden kann.
4. Beweise, daß der Umfang eines regelmäßigen Tangentenvielecks mit Zunahme der Seitenzahl abnimmt.
5. Untersuche praktisch, bei welcher Seitenzahl eines regelmäßigen Sehnenvielecks und eines regelmäßigen Tangentenvielecks sich beide von dem Kreis dem Augenschein nach nicht mehr unterscheiden, wenn der Radius des Kreises 10 cm ist und die Strichbreite jedenfalls größer als 1 mm ist?
6. Gib obere und untere Grenzen für den Umfang des Kreises an, wenn du dazu das regelmäßige um- und eingeschriebene **a)** Dreieck, **b)** Viereck, **c)** Sechseck, **d)** Zwölfeck, **e)** Vierundzwanzigeck benutzt.
7. Gib ein Verfahren an, den Umfang eines Kreises mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit zu berechnen.
8. Bestimme durch Abrollen eines Kreises längs einer Geraden — etwa eines Fünfmarkstückes — das Verhältnis von Durchmesser und Umfang des Kreises experimentell.
9. Stelle **a)** den Umfang des Kreises als Funktion des Radius, **b)** den Durchmesser als Funktion des Umfangs graphisch dar.
10. Für π sind folgende Näherungswerte in Bruchform angegeben worden: **a)** $3\frac{1}{7}$ (Archimedes), **b)** $3\frac{1}{8}$ (Dürer), **c)** $3\frac{10}{71}$ (Archimedes), **d)** $3\frac{16}{113}$ (Adrian Anthonisz [Endsilbe *z* = *zoon* = Sohn], aber auch bei dem

Chinesen Tschu-Kong), **e)** $3\frac{17}{120}$ (Ptolemäus). Vergleiche in jedem Falle den auf fünf Dezimalen zu berechnenden Näherungswert mit

$$\pi = 3,14159265 \dots$$

11. Der Umfang eines Kreises mit dem Radius 1 m ist nach den in Aufg. 10 **a)** bis **e)** angegebenen Näherungswerten zu berechnen, und es ist die Abweichung vom genauen fünfstelligen Wert anzugeben.
12. Der Umfang eines Kreises, dessen Radius $r = 5$ cm ist, soll berechnet werden unter Benutzung folgender Näherungswerte: **a)** $\sqrt{10}$ (Brahmagupta), **b)** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, **c)** $4\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}$, **d)** $3 + \frac{1}{10} \cdot \sqrt{2}$, **e)** $1,8 + \sqrt{1,8}$ (Vieta).
13. Gib eine Näherungskonstruktion für den Umfang eines Kreises mit dem Radius 1 auf Grund des altindischen Näherungswertes $\pi = \sqrt{10}$ (π als Hypotenuse eines geeigneten rechtwinkligen Dreiecks).
14. Gib eine Näherungskonstruktion für den Kreisumfang auf Grund des altägyptischen Näherungswertes (Achmes) $\pi \approx (\frac{16}{9})^2$ an.

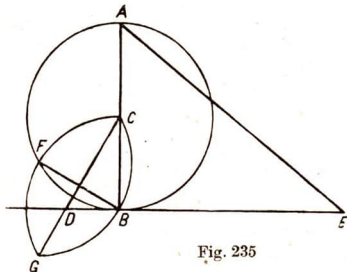


Fig. 235

15. Gib eine Näherungskonstruktion für den Kreisumfang auf Grund des Näherungswertes **a)** $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$, **b)** $\pi \approx 3 + \frac{1}{10}\sqrt{2}$. (Welche Bedeutung haben $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ im Kreis mit dem Radius 1?)
16. Gib eine Näherungskonstruktion für den Kreisumfang auf Grund des Näherungswertes $\frac{\pi}{4} \approx \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}$. (Bemachte, daß $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ die Zehnecksseite ist!)

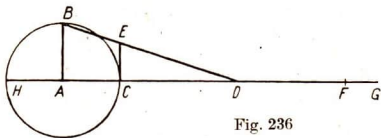


Fig. 236

- 17.¹⁾ Stelle fest, welche Genauigkeit die folgende Näherungskonstruktion von Kochansky (1685) hat (Fig. 235): AB ist ein Durchmesser, BF ist gleich dem Radius, die Mittelsenkrechte von BF schneidet die Tangente in B im Punkt D , DE ist $= 3BC$. AB ist der Näherungswert für den halben Umfang.
18. Stelle fest, welche Genauigkeit die folgende Näherungskonstruktion von Pioche (1818) hat (Fig. 236): $AB \perp AC$. $CD = 2r$. $CE \parallel AB$. $DF = DE$. $FG = \frac{3}{8}r$. $AH = \frac{2}{3}r$. Dann ist $HG \approx 2\pi r$.

1) Vgl. auch die in Aufg. 76 angegebene Näherungskonstruktion von Dürer!

19. Stelle fest, wie groß der Fehler höchstens ist, wenn man bei der Berechnung des Kreises, dessen Radius 1 km ist, einen Wert von π benutzt, der auf **a)** 0,001, **b)** 0,0002, **c)** 0,000001 genau ist. (Den genauen Wert von π auf 24 Stellen merke dir an der Hand des folgenden Versehens von Weinmeister, bei dem die Buchstabenzahl der Worte die Dezimalziffern angibt:

Wie, o! dies π
 Macht ernstlich so vielen viele Müh'!
 Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
 Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein.)

Berechnungsaufgaben

20. Berechne den Umfang des Kreises mit dem Radius

a) 25 cm **b)** 238 m **c)** 0,85 m;

mit dem Durchmesser

d) 74 cm **e)** 167 m **f)** 0,05 m.

21. Ein Kreis soll einen Umfang von

a) 75 cm **b)** 1 m **c)** a cm

haben. Wie groß ist sein Radius?

22. Welchen Weg beschreibt an einem Tage die Spitze **a)** des großen Zeigers einer Turmuhr, der 2,5 m lang ist, **b)** des kleinen Sekundenzeigers einer Taschenuhr, der 0,8 cm lang ist?

23. Wieviel Drehungen macht ein Fahrrad auf einer 1 km langen Strecke? Stelle den Durchmesser des Fahrrades selbst fest.

24. Ein Baumstamm hat einen Umfang von 2,53 m. Wie groß ist sein Durchmesser?

25. Wieviel Umdrehungen in der Minute macht das Rad eines Eisenbahnwagens, das einen Durchmesser von 0,85 m hat, wenn der Zug 80 km in der Stunde zurücklegt?

26. Wie lang ist der Äquator der Erde (Erdradius $R = 6370$ km)? Erläutere das Ergebnis!

27. Welchen Weg legt irgendein Punkt des Erdäquators infolge der Achsendrehung der Erde in 1 sec zurück?

28. Welchen Weg legt die Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne in 1 sec zurück? (Die Erdbahn ist kreisförmig anzunehmen, der Bahnhalmeser 150 000 000 km.)

29. Man denke sich um den Erdäquator einen Strick gelegt. Es bleiben, wenn man fest anzieht, noch 6 m übrig. Man soll nun den Strick überall gleichmäßig lockern, so daß er überall gleich weit von der Erdoberfläche absteht. Wie groß ist dieser Abstand?

30. Ein Turm ist ebenso hoch, wie er an Umfang mißt. Der Durchmesser ist 12 m. Wie hoch ist er? Zeichne in verkleinertem Maßstabe einen Achsenschnitt.

Der Kreisinhalt

31. Zerlege die Kreisfläche durch Radien in n gleiche Kreisausschnitte. Ordne diese Kreisausschnitte so an, wie es Fig. 237 zeigt. a) Welcher Figur nähert sich die Fläche mit wachsender Zahl der Kreisausschnitte immer mehr? b) Berechne den Inhalt der Grenzfigur.

32. Zeige, daß man aus dem Ausdruck

$$f = \frac{n \cdot s_n \cdot \varrho_n}{2}$$

für den Inhalt eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks mit der Seite s_n und dem Inkreisradius ϱ_n bei wachsendem n die Grenze

$$f = \frac{u \cdot r}{2}$$

erhält, wo u der Kreisumfang ist.

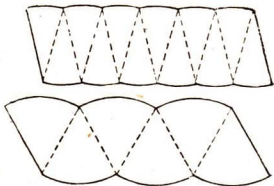


Fig. 237

33. Leite aus der Formel für den Kreisumfang die Formel für den Kreisinhalt

$$f = \pi r^2$$

ab.

34. Drücke den Inhalt des Kreises durch den Durchmesser aus.

35. Stelle den Inhalt des Kreises a) als Funktion des Radius, b) als Funktion des Durchmessers graphisch dar.

Berechnungsaufgaben

36. Berechne den Inhalt eines Kreises mit dem Radius

a) 35 cm

b) 157 cm

c) 0,88 m;

mit dem Durchmesser

d) 62 cm

e) 128 cm

f) 0,65 m.

37. Wie groß ist der Radius des Kreises mit dem Inhalt

a) 17 cm^2

b) 1 m^2

c) $a \text{ cm}^2$?

38. Berechne den Umfang eines Kreises mit dem Flächeninhalt

a) 12 cm^2

b) 1 cm^2

c) $a \text{ cm}^2$.

39. Berechne den Inhalt eines Kreises mit dem Umfang

a) 7 cm

b) 1 m

c) $a \text{ cm}$.

40. Berechne den Querschnitt eines Baumes, dessen Umfang 2,75 m ist.
41. Eine runde Glasröhre soll 1 cm^2 Querschnitt haben. Wie groß muß man ihre lichte Weite wählen?
42. Aus einem Baumstamm von dem Umfang 1,12 m soll ein möglichst großer Balken mit quadratischem Querschnitt geschnitten werden. Wie groß ist der Querschnitt des Balkens?
43. (Näherungskonstruktion von Baader, 1880.) Auf einem Durchmesser AB des Kreises sei $AF = \frac{1}{3} AB$. In B und F werden auf AB Senkrechten nach einer Seite errichtet. Die Senkrechte in B ist $BC = AF$. AC schneidet die Senkrechte in F in D . FD wird um AF über D hinaus bis E verlängert. Dann ist das Quadrat über BE angenähert flächengleich dem Kreisinhalt. — Berechne den Inhalt des Quadrates genau und untersuche den Grad der Annäherung.

Kreisausschnitt, Kreisabschnitt, Kreisring

44. Berechne die Länge des in einem Kreis mit dem Radius $r = 45 \text{ cm}$ zu dem Zentriwinkel a) 30° , b) 45° , c) 48° , d) 132° , e) $13^\circ 30'$ gehörigen Kreisbogens.
45. Berechne die Länge des zu dem Bogen a) r , b) $2r$, c) $\frac{r}{2}$ eines Kreises vom Radius r gehörigen Zentriwinkels.
46. Das Einsetzen eines dritten Fluchtstabes zwischen zwei vorhandene so, daß alle drei in gerader Linie stehen, kann der Feldmesser mit bloßem Auge bei einer Distanz von 100 m auf 1 cm genau vornehmen. Wie groß ist also die größtmögliche Winkelabweichung der Geraden AC und AB , wenn der Stab C gerade in die Mitte von AB gesetzt wird? (Fasse die Abweichung von 1 cm als Kreisbogen eines Kreises mit dem Radius 50 m auf!)
47. Berechne die Länge eines Meridiangrades, wenn der Erdradius mit 6370 km angesetzt wird.
48. Kapstadt und Danzig liegen auf demselben Meridian ($18\frac{1}{2}^\circ$ ö.). Die Breite von Kapstadt ist $33^\circ 54'$ s., die von Danzig $54^\circ 21'$ n. Wie groß ist ihre Entfernung (Erdradius $R = 6370 \text{ km}$).
49. Berechne den Inhalt eines Kreisausschnittes, wenn gegeben ist (α bedeutet den zugehörigen Zentriwinkel, a den zugehörigen Kreisbogen):
- | | | | | |
|---------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------|
| a) $r = 5 \text{ cm}$, | $a = 135^\circ$; | b) $r = 1,75 \text{ m}$, | $a = 72^\circ$; | c) r, a ; |
| d) $r = 0,55 \text{ m}$, | $a = 1 \text{ m}$; | e) $r = 1,25 \text{ m}$, | $a = 3,75$; | f) r, a ; |
| g) $a = 7 \text{ cm}$, | $\alpha = 45^\circ$; | h) $a = 1 \text{ m}$, | $\alpha = 60^\circ$; | i) a, α . |
50. Zur Darstellung des Verhältnisses zweier Größen benutzt man vielfach Kreisausschnitte. Stelle das Verhältnis von Erde und Wasser ($\approx 3:7$) auf der Erde durch Kreisausschnitte des Vollkreises dar.

51. Berechne den Inhalt eines Kreisabschnittes, wenn gegeben ist (a Bogenlänge, α zugehöriger Zentriwinkel, s zugehörige Sehne):
- a) $r = 12$ cm, $\alpha = 60^\circ$; b) $r = 0,5$ m, $a = \frac{\pi}{4}$ m; c) $r, s = \sqrt{2} \cdot r$.
52. Berechne den Inhalt eines Kreisringes. r_1 sei der Radius des größeren, r_2 der des kleineren Kreises.
53. Stelle den Inhalt eines Kreisringes als Trapez dar (nicht mit Zirkel und Lineal, sondern algebraisch).
54. Stelle den Inhalt eines Kreisringes als Kreis dar (bestimme den Radius dieses Kreises rechnerisch und geometrisch).
55. a) Um einen Kreis, b) in einen Kreis ist ein Kreisring zu legen, der flächengleich einem gegebenen Kreis ist.
56. Gegeben sind zwei Kreisflächen k_1 und k_2 . Stelle als Kreis (mit Zirkel und Lineal) dar: a) $k_1 + k_2$, b) $k_1 - k_2$ (es sei $k_1 > k_2$), c) $2k_1$.

Kreisbogenzweiecke und -dreiecke

57. Fig. 238 zeigt ein Kreisbogendreieck und läßt seine Entstehung erkennen. Berechne den Inhalt. Gegeben ist der Radius des größeren Kreises.

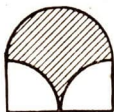


Fig. 238

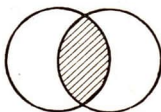


Fig. 239



Fig. 240



Fig. 241

58. Die Strecke AB werde durch C halbiert. Über AB , AC und CB werden nach der gleichen Seite Halbkreise geschlagen (Fig. 240). a) Berechne die schraffierte Fläche; b) vergleiche den großen Halbkreisbogen mit den beiden kleinen.
59. Zwei Kreise von gleichem Radius schneiden sich so, daß die Peripherie des einen durch den Mittelpunkt des andern geht (Fig. 239). Berechne das gemeinsame Flächenstück.
60. Berechne die von den Viertelkreisen in den Ecken eines Quadrates in dessen Innern freigelassene Figur (in Fig. 241 schraffiert).
61. Berechne den Flächeninhalt der in Fig. 242 dargestellten vier Möndchen.

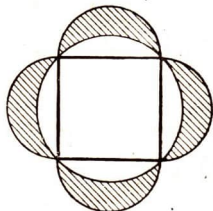


Fig. 242

62. Nimm an, die Halbkreise über den Quadratseiten in Fig. 242 seien statt nach außen nach innen konstruiert. Berechne dann den Inhalt der vier, diesen Halbkreisen gemeinsamen Stücke.
63. (Sog. Möndchen des Hippokrates.) **a)** Vergleiche den Inhalt der Möndchen über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 243) mit diesem Dreieck selbst. **b)** Hippokrates selbst quadriert das Möndchen nur im Falle des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks. Untersuche diesen Fall (vgl. Aufg. 43).
64. Über den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks werden Kreisviertelbögen konstruiert und zwar über den Katheten nach innen, über der Hypotenuse nach außen. Vergleiche den Inhalt des entstehenden Kreisbogendreiecks (Pelekoid) mit dem rechtwinkligen Dreieck.

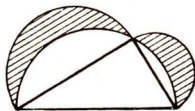


Fig. 243

Geometrische Überlegungen

65. Eine Strecke a werde in n gleiche Teile geteilt. Abwechselnd nach der einen oder anderen Seite werden Halbkreise gezeichnet. Zeige, daß die Länge der so entstehenden Wellenlinie unabhängig von der Anzahl n der Teile ist. (Vgl. Fig. 35.)
66. Ein Ring sei flächengleich dem in seinem Innern ausgesparten Kreis. Untersuche, was sich über die Radien des Ringes aussagen läßt.
67. Der Radius eines Kreises wird bis auf einen Höchstfehler ϱ genau gemessen. Welches wäre der größtmögliche Fehler bei der Umfangs- und bei der Flächenberechnung?
68. Eine praktische Näherungsformel für den Inhalt eines Kreisabschnittes ist $f \approx \frac{2}{3} s h$, wo s die Länge der Sehne, h die „Pfeilhöhe“, d. h. den größten Abstand des Bogens von der Sehne bedeutet. (Statt des Kreisbogens ist ein Parabelbogen angenommen!) Weise nach, daß es sich hier nur um eine Näherungsmethode handelt, und untersuche, wann dieses Verfahren gute und schlechte Annäherung gibt.
69. Eine Näherungsformel für den Kreisbogen ist

$$b \approx s + \frac{8}{3} \frac{h^2}{s},$$

wo s die Länge der Sehne, h die Pfeilhöhe bedeutet. Untersuche die mit dieser Formel zu erzielende Annäherung.

Aus der Geschichte der Geometrie

70. Aus Euklids Elementen, Buch VI, 33: „In gleichen Kreisen stehen die Zentriwinkel ebenso wie die Peripheriewinkel im Verhältnis der zugehörigen Kreisbögen.“ Beweise den Satz.

71. Kreisquadratur von Bryson. Nach Joh. Philoponus.¹⁾ „Der Kreis, sagt er, ist größer als jedes ihm eingeschriebene Vieleck, kleiner als jedes umgeschriebene. Es soll nun, gibt er an, innerhalb des Kreises ein eingeschriebenes und außerhalb desselben ein umgeschriebenes gezeichnet werden. Dann ist ein Vieleck, welches zwischen dem ein- und umgeschriebenen konstruiert wird, kleiner als das umgeschriebene und größer als das eingeschriebene. Kreis und Zwischenvieleck sind beide kleiner als das umgeschriebene und beide größer als das eingeschriebene. Was aber größer als dasselbe und kleiner als dasselbe ist, ist gleich. Also ist der Kreis gleich diesem Zwischenvieleck. Wir wissen aber, daß es möglich ist, ein zu jedem gegebenen Vielecke gleiches Quadrat zu konstruieren.“ Wo steckt der Fehler in dieser Überlegung?

Aus dem Liber Assumptorum von Archimedes:

72. „Es sei ABC ein Halbkreis. Über dem Durchmesser AC sind zwei Halbkreise AD und DC gezeichnet und DB senkrecht zu AC . So entsteht eine

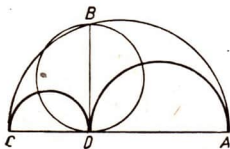


Fig. 244

Figur, die Archimedes Arbelos nennt. Sie ist flächengleich dem Kreise, dessen Durchmesser die Höhe DB ist“ (Fig. 244). Beweise den Satz.

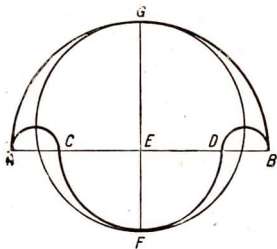


Fig. 245

73. „Wenn in und um ein Quadrat ein Kreis gezeichnet wird, hat der umgeschriebene Kreis die doppelte Fläche des eingeschriebenen.“

74. Fig. 245 zeigt die Figur, die Archimedes Salinon nennt. Über GF als Durchmesser ist noch ein Kreis gezeichnet. Vergleiche dessen Inhalt mit dem des Salinons.

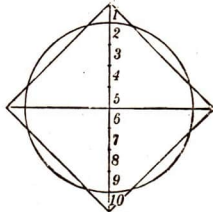


Fig. 246

75. Aus Dürers Underweysung der messung (1525) (Fig. 246): „Von nöten wer zuwissen quadratura circuli | das ist | die vergleychnus eines cirkels | vnnd eines quadrates | also das

¹⁾ Johannes Philoponus ist ein Kommentator des Aristoteles etwa in der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts n. Chr.

eins als vil inhielt als dz ander | aber soliches ist noch nit von den gelernten demonstrirt. Mechanice | aber das ist beyleyfig | also das es im werck nit | oder gar ein kleyns felt | mag dise vergleynüß also gemacht werden. Reyß ein fierung (= Quadrat) vñ teyl den ortstrich (= Diagonale) in zehen teyl | vñ reyß demach ein circelriß des Diameter sol achtteyl haben | wie die quadratur zechne hat | wie ich das vñden hab aufgerissen.“ Welcher Näherungswert für π liegt dieser Konstruktion zugrunde?

76. Aus Daniel Schwenters Erquickstunden (1636): „Sempronius hatte eine Röhre eines Daumens dick Wasser | von einem öffentlichen Brunnen | weil ihme aber solche zu seinem Haußhalten zu wenig Wasser gab | langet er bey der Obrigkeit an | ihme noch so viel zu geben | welches ihme verwilliget | drauff nam er ein Röhren derer diameter 2 Daumen groß | be-
thörte also die Obrigkeit | vorgebend | nun hätte er zweymahl so viel Wassers als zuvor.“ Welcher Durchmesser wäre richtig gewesen?
77. Aus G. Ph. Harsdörffers Erquickstunden (1651): „Wann ein Mann 6 Schuhe hoch | die Welt umbraiset | ist die Frag wieviel der Kopff mehr wäge (= Weg) | thut | als die Füße.“
78. Aus Georgi Galgemayrs deß Circels Schregmaß usw. (1655): „Item | einer kauft ein Wasser für ein Thaler | welches ihm in einer Röhrlin wird für die Thür geleitet | welcher diameter ist A. B. als er nun einen Brunnen darauf zugerichtet | begehret sein Nachbawer | daß er ihme darauf für einen Weißpfenning Wasser in einem Röhrlin wolle lassen zukommen | doch in gleichem Kauff gegen der grossen Röhren | so er für einen Thaler erkaufft. Ist die Frag | wie groß der diameter seyn müsse? Dieweil der Thaler 32. Alb. (= Weißpfennig) gilt.“ Berechne und konstruiere den gesuchten Durchmesser, wenn AB gegeben ist.

Aus der „Geometrischen Gallerie“ in Tobias Beutels „Lust-Garten“ (1685):
79. „Item | so in künstlichen Uhrwercken oder andern Maschinen etliche Räder gegen einander einzutheilen | und man ein Rad hätte | dessen Diameter $2\frac{1}{2}$ Elle hielte | ist die Frage | wenn dieses 8. mahl herum gelauffen | und man ains dagegen machen wolte | welches indessen 10. mal herum lauffen solte | wie groß dieses in seinem Diametro seyn müsse?“
80. „Item man lasset in den Nieder-Laußnitzer Wäldern zu etlich hunder Piquen tüchtig Holtz fallen | und solche Piquen-Stangen gleicher Dicke zurichten | solche in etliche Bund zusammenbinden | aufladen und anführen: Wenn man nun in einem Strick 5. Ellen lang 100. Stück einbindet | wie viel Stück kann man in einem Strick binden von 10. Ellen lang?“

Achtes Kapitel

Einführung in die ebene Trigonometrie

§ 29. Einführung der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel

Der Sinus

1. Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke, das eine mit der Hypotenuse $A_1B_1 = 4$ cm, das andere mit der Hypotenuse $A_2B_2 = 6$ cm. In beiden soll $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^\circ$ sein. Miß in beiden Fällen die Gegenkathete B_1C_1 bzw. B_2C_2 , und bestimme die Quotienten $\frac{B_1C_1}{A_1B_1}$ und $\frac{B_2C_2}{A_2B_2}$. Warum sind beide gleich?

2. Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre, daß in einem rechtwinkligen Dreieck der Sinus eines spitzen Winkels α , d. h. der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse, unabhängig von der Größe der Seiten, abhängig allein von α ist.

3. Bestimme durch Zeichnung (Benutzung des Winkelmessers ist gestattet!) und Messung: **a)** $\sin 10^\circ$, **b)** $\sin 20^\circ$, **c)** $\sin 30^\circ$, **d)** $\sin 40^\circ$, **e)** $\sin 45^\circ$, **f)** $\sin 50^\circ$, **g)** $\sin 60^\circ$, **h)** $\sin 70^\circ$, **i)** $\sin 80^\circ$.

Anmerk. 1: Wie richtet man die Zeichnung möglichst praktisch ein, d. h. so, daß man bei der Bestimmung aller Werte a) bis i) möglichst wenig Linien braucht?

Anmerk. 2: In welchen der neun Fälle läßt sich die Zeichnung allein mit Zirkel und Lineal, also ohne Winkelmesser, herstellen?

4. Benutze die Ergebnisse von Aufg. 3 zur Herstellung einer graphischen Darstellung der Sinusfunktion. (Wähle den Maßstab auf der y -Achse in geeigneter Weise!)
5. (Interpolation.) Es ist $\sin 30^\circ = 0,500$, $\sin 31^\circ = 0,515$. Ersetze die Sinuskurve zwischen 30° und 31° durch eine Gerade und berechne unter dieser Annahme $30^\circ 10'$, $30^\circ 20'$, $30^\circ 30'$, $30^\circ 40'$, $30^\circ 50'$. (Nachprüfung in einer vierstelligen Tafel.)
6. Bestimme entweder durch Zeichnung oder mit Hilfe der graphischen Darstellung (Aufg. 4)

- a)** $\sin 15^\circ$,
d) $\sin 85^\circ$,

- b)** $\sin 48^\circ$,
e) $\sin 27^\circ$,

- c)** $\sin 63^\circ$,
f) $\sin 72^\circ$.

Welches der beiden Verfahren ist praktischer?

7. Bestimme durch Zeichnung rechtwinkliger Dreiecke den Winkel, dessen Sinus den Wert hat:
- a) 0,1, b) 0,3, c) 0,5,
d) $\frac{1}{4}$, e) $\frac{1}{3}$, f) 0,9.
8. Bestimme an der graphischen Darstellung der Sinusfunktion. (Aufg. 4) den Winkel, dessen Sinus den Wert hat:
- a) 0,7, b) 0,35, c) $\frac{1}{3}$,
d) $\frac{2}{3}$, e) 0,22, f) 0,87.
9. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in dem ein Winkel a) 45° , b) 30° , c) 60° ist. Berechne den Sinus (drücke die Gegenkathete durch die Hypotenuse aus!).
10. Welchen Wert wird man a) $\sin 0^\circ$, b) $\sin 90^\circ$ beilegen? (Grund!)
11. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in dem der eine spitze Winkel 18° ist. Berechne a) $\sin 18^\circ$, b) $\sin 72^\circ$.
12. Schlage in der Tafel der natürlichen trigonometrischen Funktionen auf¹⁾:
- a) $\sin 13^\circ$, b) $\sin 37^\circ$, c) $\sin 68^\circ$,
d) $\sin 85^\circ$, e) $\sin 24^\circ$, f) $\sin 76^\circ$,
g) $\sin 15,5^\circ$, h) $\sin 28,3^\circ$, i) $\sin 77,8^\circ$,
k) $\sin 41,7^\circ$, l) $\sin 48,8^\circ$, m) $\sin 85,1^\circ$,
n) $\sin 23,75^\circ$, o) $\sin 34,87^\circ$, p) $\sin 57,28^\circ$,
q) $\sin 68,23^\circ$, r) $\sin 79,77^\circ$, s) $\sin 87,88^\circ$,
t) $\sin 22^\circ 40'$, u) $\sin 83^\circ 50'$, v) $\sin 57^\circ 45'$,
w) $\sin 35^\circ 17'$, x) $\sin 77^\circ 52'$, y) $\sin 43^\circ 24'$.
13. Schlage in der Tafel der natürlichen trigonometrischen Funktionen auf²⁾:
- a) $\sin 14^\circ$, b) $\sin 39^\circ$, c) $\sin 71^\circ$,
d) $\sin 84^\circ$, e) $\sin 31^\circ$, f) $\sin 77^\circ$,
g) $\sin 13^\circ 30'$, h) $\sin 38^\circ 40'$, i) $\sin 77^\circ 25'$,
k) $\sin 25^\circ 47'$, l) $\sin 67^\circ 22'$, m) $\sin 5^\circ 7'$,
n) $\sin 17^\circ 47' 30''$, o) $\sin 28^\circ 13' 50''$, p) $\sin 78^\circ 32' 45''$,
q) $\sin 4^\circ 22' 17''$, r) $\sin 7^\circ 29' 58''$, s) $\sin 11^\circ 42' 33''$,
t) $\sin 15,6^\circ$, u) $\sin 78,9^\circ$, v) $\sin 83,85^\circ$,
w) $\sin 22,38^\circ$, x) $\sin 45,24^\circ$, y) $\sin 57,83^\circ$.

1) Vierstellige Tafel.

2) Fünfstellige Tafel oder zunächst Abkürzung der gegebenen Werte so, daß eine vierstellige Tafel benutzt werden kann.

14. Schläge in der Tafel der natürlichen trigonometrischen Funktionen den Winkel α auf, dessen Sinus ist¹⁾:

- | | | |
|------------|------------|------------|
| a) 0,2924, | b) 0,6018, | c) 0,8746, |
| d) 0,4772, | e) 0,3007, | f) 0,2136, |
| g) 0,6406, | h) 0,8307, | i) 0,8923, |
| k) 0,4775, | l) 0,6400, | m) 0,6060. |

15. Schläge in der Tafel den Winkel α auf, dessen Sinus ist²⁾:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a) 0,12187, | b) 0,48481, | c) 0,89879, |
| d) 0,38268, | e) 0,61795, | f) 0,84495, |
| g) 0,98610, | h) 0,99967, | i) 0,60525, |
| k) 0,84388, | l) 0,29850, | m) 0,09390. |

16. Berechne die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn gegeben ist:

- | | | | |
|---------------------------|---------------|----------------------------------|---------------|
| a) $\alpha = 50^\circ$, | $c = 2,9$ cm, | b) $\alpha = 47^\circ 48'$, | $c = 1345$ m, |
| c) $\beta = 38,7^\circ$, | $c = 21,2$ m, | d) $\beta = 73^\circ 22' 30''$, | $c = 112$ m. |

17. Berechne den Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn gegeben ist (Hypotenuse ist c):

- | | | | |
|-----------------|---------------|--------------------|-----------------|
| a) $c = 5$ cm, | $a = 4$ cm, | b) $c = 5$ cm, | $b = 3$ cm, |
| c) $c = 157$ m, | $a = 93,5$ m, | d) $c = 2,850$ km, | $b = 0,930$ km. |

18. Berechne die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn gegeben ist:

- | | | | |
|--------------------|---------------------------|-------------------|--------------------------|
| a) $a = 2,13$ m, | $\alpha = 43^\circ 45'$, | b) $b = 17,1$ km, | $\beta = 35^\circ 17'$, |
| c) $a = 0,713$ km, | $\beta = 17,5^\circ$, | d) $b = 5$ m, | $\alpha = 1,5^\circ$. |

Der Kosinus

19. Zeichne eine Anzahl rechtwinkliger Dreiecke, die in einem spitzen Winkel α übereinstimmen. Bestimme in ihnen den Quotienten aus Ankathete des Winkels α und Hypotenuse. Was ist das Ergebnis?

20. Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre, daß in einem rechtwinkligen Dreieck der Kosinus eines spitzen Winkels α , d. h. der Quotient aus Ankathete und Hypotenuse, unabhängig von der Größe der Seiten, abhängig allein von α ist.

21. Untersuche, ob die in Aufg. 20 behauptete Unabhängigkeit von den Seiten auch dann vorhanden ist, wenn es sich um ein beliebiges, nicht um ein rechtwinkliges Dreieck handelt und wenn an Stelle der Ankathete und der Hypotenuse die beiden dem Winkel anliegenden Seiten treten.

1) Vierstellige Tafel.

2) Fünfstellige Tafel oder zunächst Abkürzung der gegebenen Werte so, daß eine vierstellige Tafel benutzt werden kann.

22. Bestimme durch Zeichnung (Benutzung des Winkelmessers ist gestattet!) und Messung:

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) $\cos 10^\circ$, | b) $\cos 20^\circ$, | c) $\cos 30^\circ$, |
| d) $\cos 40^\circ$, | e) $\cos 45^\circ$, | f) $\cos 50^\circ$, |
| g) $\cos 60^\circ$, | h) $\cos 70^\circ$, | i) $\cos 80^\circ$. |

Anmerk. 1: Wie richtet man die Zeichnung möglichst praktisch ein, d. h. so, daß man bei der Bestimmung aller Werte a) bis i) möglichst wenig Linien braucht?

Anmerk. 2: In welchen der neun Fälle läßt sich die Zeichnung allein mit Zirkel und Lineal, also ohne Winkelmesser, herstellen?

23. Benutze die Ergebnisse von Aufg. 22 zur Herstellung einer graphischen Darstellung der Kosinusfunktion. (Wähle den Maßstab auf der y -Achse in geeigneter Weise!)

24. (Interpolation.) Es ist $\cos 59^\circ = 0,5150$, $\cos 60^\circ = 0,5000$. Ersetze die Kosinuskurve zwischen 59° und 60° durch eine Gerade und berechne unter dieser Annahme den Kosinus von $59^\circ 10'$; $59^\circ 20'$; $59^\circ 30'$; $59^\circ 40'$; $59^\circ 50'$. (Nachprüfung in einer vierstelligen Tafel!)

25. Bestimme entweder durch Zeichnung oder mit Hilfe der graphischen Darstellung (Aufg. 23):

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) $\cos 16^\circ$, | b) $\cos 47^\circ$, | c) $\cos 64^\circ$, |
| d) $\cos 54^\circ$, | e) $\cos 26^\circ$, | f) $\cos 73^\circ$. |

26. Bestimme durch Zeichnung rechtwinkliger Dreiecke den Winkel, dessen Kosinus den Wert hat:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) 0,1, | b) 0,8, | c) 0,5, |
| d) $\frac{1}{3}$, | e) $\frac{1}{4}$, | f) $\frac{2}{3}$. |

27. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in dem ein Winkel a) 45° , b) 30° , c) 60° ist. Berechne den Kosinus in diesen Fällen.

28. Welchen Wert wird man a) $\cos 0^\circ$, b) $\cos 90^\circ$ beilegen? (Grund!)

29. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in dem der eine spitze Winkel 18° ist. Berechne a) $\cos 18^\circ$, b) $\cos 72^\circ$.

30. a) bis y) Schlage in der Tafel¹⁾ der natürlichen trigonometrischen Funktionen die Kosinus der Winkel auf, deren Sinus in Aufg. 12 a) bis y) verlangt wurden.

31. a) bis y) Schlage in der Tafel²⁾ der natürlichen trigonometrischen Funktionen die Kosinus der Winkel auf, deren Sinus in Aufg. 13 a) bis y) verlangt wurden.

1) Vierstellige Tafel.

2) Fünfstellige Tafel oder zunächst Abkürzung der gegebenen Werte so, daß eine vierstellige Tafel benutzt werden kann.

32. a) bis m) Schlage in der Tafel¹⁾ den Winkel α auf, dessen Kosinus den in Aufg. 14 a) bis m) angegebenen Wert hat.
33. a) bis m) Schlage in der Tafel²⁾ den Winkel α auf, dessen Kosinus den in Aufg. 15 a) bis m) angegebenen Wert hat.
34. a) bis d) Berechne die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hilfe der Kosinusfunktion, wenn von dem Dreieck die in Aufg. 16 a) bis d) gegebenen Stücke bekannt sind.
35. a) bis d) Berechne die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hilfe der Kosinusfunktion, wenn von dem Dreieck die in Aufg. 17 a) bis d) gegebenen Stücke bekannt sind.
36. a) bis d) Untersuche, bei welchen der vier Aufg. 18 a) bis d) sich die Anwendung der Kosinusfunktion empfiehlt, und führe in diesen Fällen die Berechnung durch.

Beziehungen zwischen Sinus- und Kosinusfunktion

37. a) α und β seien die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks. Beweise,

$$\text{da\ss} \quad \sin \alpha = \cos \beta,$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

ist.

- b) Beweise, da\ss

I. $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha),$

II. $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$

ist. (Erkläre den Namen Kosinus = complementi sinus!)

38. Erkläre, warum sich die trigonometrischen Tafeln auf Winkel von 0° bis 45° beschränken können.
39. Beschreibe und vergleiche den Verlauf der Sinuskurve und der Kosinus-kurve.
40. In welchem Punkte schneiden sich Sinus- und Kosinuskurve?
41. a) Wie läßt sich aus dem Verlauf der Sinuskurve derjenige der Kosinus-kurve zeichnerisch finden? b) Wie läßt sich aus dem Verlauf der Sinus- und der Kosinuskurve von 0° bis 45° der gesamte Verlauf der Sinus- und der Kosinuskurve zeichnerisch finden?
42. Zeige durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf das recht-winklige Dreieck, dessen einer Winkel α ist, da\ss

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

ist.

43. a) Gegeben ist $\sin \alpha$; berechne $\cos \alpha$. b) Gegeben ist $\cos \alpha$; berechne $\sin \alpha$.

1) Vierstellige Tafel.

2) Fünfstellige Tafel oder zunächst Abkürzung der gegebenen Werte so, da\ss eine vier-stellige Tafel benutzt werden kann.

44. Gegeben ist $\sin \alpha =$

a) $\frac{1}{4}$,

b) $\frac{1}{2}$,

c) $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$;

berechne $\cos \alpha$.

45. Gegeben ist $\cos \alpha =$

a) $\frac{1}{3}$,

b) $\frac{1}{4}$,

c) $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$;

berechne $\sin \alpha$.

Der Tangens

46. Zeichne eine Anzahl rechtwinkliger Dreiecke, die in einem spitzen Winkel α übereinstimmen. Bestimme in ihnen den Quotienten aus Gegenkathete und Ankathete. Was ist das Ergebnis?

47. Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre, daß in einem rechtwinkligen Dreieck der Tangens eines spitzen Winkels, d. h. der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete, unabhängig von der Größe der Seiten, abhängig allein von α ist.

48. Bestimme an einer möglichst zweckmäßig eingerichteten Zeichnung nacheinander durch Messung die Werte $\operatorname{tg} 10^\circ$, $\operatorname{tg} 20^\circ$, . . . $\operatorname{tg} 80^\circ$.

49. Benutze die Ergebnisse der Aufg. 48 zur graphischen Darstellung der Tangensfunktion.

50. Bestimme durch Interpolation an der Tangenskurve

a) $\operatorname{tg} 15^\circ$,

b) $\operatorname{tg} 33^\circ$,

c) $\operatorname{tg} 57^\circ$.

51. Konstruiere die Winkel, deren Tangens die folgenden Werte haben:

a) $\frac{1}{2}$,

b) $\frac{3}{4}$,

c) 1,5,

d) 2,

e) 3,

f) $\sqrt{2}$.

52. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in dem ein Winkel a) 45° , b) 30° , c) 60° ist. Berechne den Tangens in diesen Fällen.

53. Welchen Wert wird man a) $\operatorname{tg} 0^\circ$, b) $\operatorname{tg} 90^\circ$ beilegen? (Grund!)

54. Berechne a) $\operatorname{tg} 18^\circ$, b) $\operatorname{tg} 72^\circ$.

55. a) bis y) Schlage in der Tafel der natürlichen trigonometrischen Funktionen¹⁾ die Tangens der Winkel auf, deren Sinus in Aufg. 12 a) bis y) verlangt wurden.

56. a) bis y) Schlage in der Tafel der natürlichen trigonometrischen Funktionen²⁾ die Tangens der Winkel auf, deren Sinus in Aufg. 12 a) bis y) verlangt wurden.

1) Vierstellige Tafel.

2) Fünfstellige Tafel oder zunächst Abkürzung der gegebenen Werte so, daß eine vierstellige Tafel benutzt werden kann.

57. Schlage in der Tafel¹⁾ den Winkel α auf, dessen Tangens folgenden Wert hat:

- | | | |
|------------|------------|------------|
| a) 0,0875, | b) 0,2867, | c) 0,9511, |
| d) 0,9925, | e) 0,1495, | f) 0,3346, |
| g) 1,8561, | h) 0,3100, | i) 1,8940, |
| k) 2,5826, | l) 3,4150, | m) 5,2200. |

58. Schlage in der Tafel²⁾ den Winkel α auf, dessen Tangens den folgenden Wert hat:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a) 0,12278, | b) 0,55431, | c) 0,62487, |
| d) 2,05030, | e) 6,31375, | f) 0,09335, |
| g) 1,85462, | h) 2,62791, | i) 7,77035, |
| k) 0,31000, | l) 3,41500, | m) 5,22000. |

59. Berechne die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten:

- | | | | |
|-----------------|----------------|-------------------|----------------|
| a) $a = 3$ m, | $b = 4$ m, | b) $a = 57,5$ m, | $b = 43,3$ m, |
| c) $a = 100$ m, | $b = 43,34$ m, | d) $a = 0,173$ m, | $b = 0,838$ m. |

60. Berechne die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem gegeben ist:

- | | | | |
|---------------------|-------------------------------|--------------------|--------------------------------|
| a) $a = 34,5$ cm, | $\alpha = 60^\circ$, | b) $b = 3,180$ km, | $\beta = 47,5^\circ$, |
| c) $a = 18,345$ km, | $\beta = 33^\circ 17' 40''$, | d) $b = 0,343$ m, | $\alpha = 22^\circ 28' 30''$. |

Beziehungen zwischen der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion und der Tangensfunktion

61. a) Zeige auf Grund der Definition trigonometrischer Funktionen von Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks, daß

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

ist. b) Gilt die Beziehung auch, wenn α die Werte 0° und 90° annimmt?

62. Vergleiche den Verlauf der Tangenskurve mit dem der Sinuskurve. Schneiden sich die Kurven? Welchen Punkt haben sie gemeinsam?

63. Gegeben ist a) $\sin \alpha$, b) $\cos \alpha$. Berechne $\operatorname{tg} \alpha$.

64. Gegeben ist $\operatorname{tg} \alpha$. Berechne a) $\sin \alpha$, b) $\cos \alpha$.

65. a) bis c) Berechne aus den in Aufg. 44 gegebenen Werten für $\sin \alpha$ die zugehörigen Werte von $\operatorname{tg} \alpha$.

66. a) bis c) Berechne aus den in Aufg. 45 gegebenen Werten für $\cos \alpha$ die zugehörigen Werte von $\operatorname{tg} \alpha$.

1) Vierstellige Tafel.

2) Fünfstellige Tafel oder zunächst Abkürzung der gegebenen Werte so, daß eine vierstellige Tafel benutzt werden kann.

67. Gegeben ist $\operatorname{tg} \alpha =$

a) 1,

b) $\frac{1}{2}$,

c) $\sqrt{3}$.

Berechne $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$.

Der Kotangens

68. Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeitslehre, daß in einem rechtwinkligen Dreieck der Kotangens eines spitzen Winkels α , d. h. der Quotient aus Ankathete und Gegenkathete, unabhängig von der Größe der Seiten, abhängig allein von α ist.

69. Bestimme durch Zeichnung oder auf anderem Wege

a) $\operatorname{cotg} 10^\circ$,

b) $\operatorname{cotg} 20^\circ$.

c) $\operatorname{cotg} 30^\circ$,

d) $\operatorname{cotg} 40^\circ$,

e) $\operatorname{cotg} 45^\circ$,

f) $\operatorname{cotg} 50^\circ$,

g) $\operatorname{cotg} 60^\circ$,

h) $\operatorname{cotg} 70^\circ$,

i) $\operatorname{cotg} 80^\circ$.

70. Stelle die Funktion $y = \operatorname{cotg} x$ auf Grund der Ergebnisse von Aufg. 69 a) bis i) graphisch dar.

71. Bestimme durch Interpolation an der Kotangenskurve

a) $\operatorname{cotg} 25^\circ$,

b) $\operatorname{cotg} 57^\circ$,

c) $\operatorname{cotg} 78^\circ$.

72. Konstruiere die Winkel, deren Kotangens die folgenden Werte hat:

a) $\frac{1}{3}$,

b) 3,

c) 2,5,

d) $\frac{4}{3}$,

e) 0,8,

f) $\sqrt{3}$.

73. Berechne a) $\operatorname{cotg} 45^\circ$, b) $\operatorname{cotg} 60^\circ$, c) $\operatorname{cotg} 30^\circ$.

74. Welchen Wert wird man a) $\operatorname{cotg} 0^\circ$, b) $\operatorname{cotg} 90^\circ$ beilegen?

75. a) bis y) Schlage in der Tafel der natürlichen trigonometrischen Funktionen¹⁾ den Kotangens der in Aufg. 12 a) bis y) genannten Winkel auf.

76. a) bis y) Schlage in der Tafel²⁾ den Kotangens der in Aufg. 13 a) bis y) genannten Winkel auf.

77. a) bis m) Schlage in der Tafel¹⁾ die Winkel auf, deren Kotangens die in Aufg. 57 a) bis m) genannten Werte hat.

78. a) bis m) Schlage in der Tafel²⁾ die Winkel auf, deren Kotangens die in Aufg. 58 a) bis m) genannten Werte hat.

79. a) bis d) Führe die Berechnungsaufgaben 59 a) bis d) mit Hilfe der Kotangensfunktion aus.

80. a) bis d) Führe die Berechnungsaufgaben 60 a) bis d) mit Hilfe der Kotangensfunktion aus.

¹⁾ Vierstellige Tafel.

²⁾ Fünfstellige Tafel oder zuerst Abkürzung der gegebenen Werte so, daß eine vierstellige Tafel benutzt werden kann.

Die Beziehungen des Kotangens zu den anderen trigonometrischen Funktionen

81. Zeige auf Grund der Definition trigonometrischer Funktionen von Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks, daß

$$\text{a) } \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{b) } \tg \alpha \cdot \cotg \alpha = 1 \quad \text{ist.}$$

c) Untersuche, ob diese Beziehung auch gilt, wenn α die Werte 0° oder 90° annimmt.

82. Vergleiche den Verlauf der Kotangenskurve a) mit dem der Tangenskurve, b) mit dem der Kosinuskurve. Welchen Punkt haben sie gemeinsam?

83. a) Zeige, wie man durch Spiegelung die Kotangenskurve aus der Tangenskurve gewinnen kann und umgekehrt. b) Beweise an der graphischen Darstellung und auf Grund der Definition, daß

$$\begin{aligned} \cotg \alpha &= \tg (90^\circ - \alpha), \\ \tg \alpha &= \cotg (90^\circ - \alpha) \end{aligned} \quad \text{ist.}$$

84. Gegeben ist a) $\sin \alpha$, b) $\cos \alpha$, c) $\tg \alpha$. Berechne $\cotg \alpha$.

85. a) bis c) Berechne aus den in Aufg. 44 gegebenen Werten für $\sin \alpha$ die zugehörigen Werte von $\cotg \alpha$.

86. a) bis c) Berechne aus den in Aufg. 45 für $\cos \alpha$ gegebenen Werten $\cotg \alpha$.

87. Gegeben ist $\tg \alpha =$

$$\text{a) } \frac{1}{3}, \quad \text{b) } \frac{3}{4}, \quad \text{c) } \sqrt{2} - 1;$$

berechne daraus $\cotg \alpha$.

88. Gegeben ist $\cotg \alpha =$

$$\text{a) } 1, \quad \text{b) } \frac{1}{3}, \quad \text{c) } \sqrt{2} - 1;$$

berechne daraus $\tg \alpha$, $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$.

Überlegungen

89. Untersuche, ob mit den vier trigonometrischen Funktionen $\sin$, $\cos$, $\tg$ und $\cotg$ die Zahl der im rechtwinkligen Dreieck möglichen Winkelfunktionen* erschöpft ist, wenn man sich auf Quotienten zweier Seiten beschränkt.

90. Untersuche an Zahlenbeispielen oder an der Hand geometrischer Überlegungen, ob für irgendeine der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ \text{b) } f(2x) &= 2f(x) \end{aligned} \quad \text{ist.}$$

91. Recht praktisch ist die Gedächtnisregel

$$\sin 0^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{0} = 0,$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{1} = \frac{1}{2},$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1.$$

Untersuche, ob die Regel der Ausdruck eines allgemeinen Gesetzes oder gewissermaßen zufällig ist.

92. Ist der Satz: Wenn $\alpha + \beta = 90^\circ$ ist, dann ist

$$\sin \alpha = \cos \beta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta,$$

umkehrbar?

93. Beweise, daß $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

ist und bilde selbst ähnliche Beziehungen.

94. Wenn man die durch den pythagoreischen Lehrsatz gegebene Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ statt durch c^2 durch a^2 oder b^2 dividiert, kommt man auf eine andere Beziehung zwischen den trigonometrischen Funktionen. Auf welche?

Praktische Anwendungen

Beim Übergang eines Lichtstrahles aus einem ersten in ein zweites Medium gilt zwischen Einfallswinkel α und Brechungswinkel β die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

95. Konstruiere für $n = \frac{4}{3}$ (Luft—Wasser) a) α , wenn β gegeben, b) β , wenn α gegeben ist.
96. Konstruiere für $n = \frac{3}{2}$ (Luft—Glas) a) α , wenn β gegeben, b) β , wenn α gegeben ist.
97. Zeige, daß $\alpha = 0$ auch $\beta = 0$ zur Folge hat.
98. Konstruiere den Grenzwinkel, d. h. den Winkel, bei dem totale Reflexion eintritt, a) für das Brechungsverhältnis $\frac{4}{3}$, b) für $\frac{3}{2}$.

§ 30. Die Berechnung des rechtwinkligen und des gleichschenkligen Dreiecks

Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen¹⁾

1. Schlage in der Tafel die Winkel α auf, deren Logarithmus-Sinus ist:

a) 9,6570 — 10,

b) 9,9437 — 10,

c) 8,8436 — 10,

d) 9,7960 — 10,

e) 9,9101 — 10,

f) 9,9727 — 10,

g) 9,6821 — 10,

h) 9,4809 — 10,

i) 9,9900 — 10,

k) 9,2580 — 10,

l) 8,7800 — 10,

m) 9,8875 — 10,

n) 9,9995 — 10,

o) $\log \frac{1}{2} \sqrt{2}$,

p) $\log \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

1) Es bleibt dem Lehrer überlassen, an welcher Stelle er die Logarithmen der trigonometrischen Funktion einführt. Die Aufgaben 21ff. sind auch ohne Logarithmen zu lösen, wenn man sich etwa auf drei Stellen beschränkt und abgekürzt rechnet.

2. Schlage in der Tafel auf:

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $\log \sin 23^\circ$, | b) $\log \sin 41^\circ$, | c) $\log \sin 77^\circ$, |
| d) $\log \sin 7,3^\circ$, | e) $\log \sin 28,9^\circ$, | f) $\log \sin 45,5^\circ$, |
| g) $\log \sin 12^\circ 40'$, | h) $\log \sin 38^\circ 20'$, | i) $\log \sin 83^\circ 50'$, |
| k) $\log \sin 21,28^\circ$, | l) $\log \sin 48,71^\circ$, | m) $\log \sin 73,92^\circ$, |
| n) $\log \sin 18^\circ 35'$, | o) $\log \sin 53^\circ 38'$, | p) $\log \sin 13^\circ 18'$. |

3. a)—p) Schlage in der Tafel die Winkel α auf, deren Logarithmus-Kosinus den in Aufg. 1 a)—p angegebenen Wert hat.

4. a)—p) Schlage in der Tafel den $\log \cos$ der Winkel auf, die in Aufg. 2 a) — p) genannt sind.

5. Schlage in der Tafel die Winkel auf, deren Logarithmus-Tangens ist:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $9,2887 - 10$, | b) $0,1387$, | c) $1,1554$, |
| d) $9,8208 - 10$, | e) $9,9909 - 10$, | f) $0,5600$, |
| g) $0,1268$, | h) $0,6560$, | i) $9,4410 - 10$, |
| k) $0,0001$, | l) $0,0707$, | m) $1,9200$. |

6. a)—p) Schlage in der Tafel den $\log \operatorname{tg}$ der Winkel auf, die in Aufg. 2 a)—p) genannt sind.

7. a)—m) Schlage in der Tafel die Winkel auf, deren Logarithmus-Kotangens in Aufg. 5 a)—m) genannt ist.

8. a)—p) Schlage in der Tafel den $\log \operatorname{cotg}$ der Winkel auf, die in Aufg. 2 a)—p) genannt sind.

9.¹⁾ Schlage in der Tafel den Winkel α auf, dessen Logarithmus-Sinus ist:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $9,44034 - 10$, | b) $9,92514 - 10$, | c) $9,18461 - 10$, |
| d) $9,62049 - 10$, | e) $8,68627 - 10$, | f) $9,99877 - 10$, |
| g) $9,50542 - 10$, | h) $9,95018 - 10$, | i) $9,81312 - 10$, |
| k) $9,77570 - 10$, | l) $8,96299 - 10$, | m) $8,83725 - 10$, |
| n) $9,97654 - 10$, | o) $9,30272 - 10$, | p) $8,87871 - 10$. |

10. Schlage in der Tafel auf:

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| a) $\log \sin 24^\circ$, | b) $\log \sin 43^\circ$, | c) $\log \sin 84^\circ$, |
| d) $\log \sin 13^\circ 50'$, | e) $\log \sin 53^\circ 10'$, | f) $\log \sin 82^\circ 40'$, |
| g) $\log \sin 17^\circ 42'$, | h) $\log \sin 35^\circ 17'$, | i) $\log \sin 77^\circ 42'$, |
| k) $\log \sin 19,5^\circ$, | l) $\log \sin 31,6^\circ$, | m) $\log \sin 63^\circ 2'$, |
| n) $\log \sin 11^\circ 15' 45''$, | o) $\log \sin 35^\circ 48' 30''$, | p) $\log \sin 72^\circ 25' 15''$ |
| q) $\log \sin 22^\circ 13' 41''$, | r) $\log \sin 47^\circ 33' 12''$, | s) $\log \sin 69^\circ 53' 43''$ |
| t) $\log \sin 5^\circ 22' 28''$, | u) $\log \sin 8^\circ 49' 27''$, | v) $\log \sin 2^\circ 5' 12''$. |

1) Aufg. 9—16 setzen fünfstellige Zahlen voraus, oder aber die Werte sind erst abzukürzen, ehe vierstellige Logarithmen angewandt werden.

11. a)—p) Schlage in der Tafel die Winkel α auf, deren Logarithmus-Kosinus den in Aufg. 9 a)—p) angegebenen Wert hat.
12. a)—v) Schlage in der Tafel den $\log \cos$ der Winkel auf, die in Aufg. 10 a)—v) genannt sind.
13. Schlage in der Tafel die Winkel auf, deren Logarithmus-Tangens ist:
- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| a) 9,14780 - 10, | b) 9,79579 - 10, | c) 0,18748, |
| d) 9,85647 - 10, | e) 0,15989, | f) 9,61901 - 10, |
| g) 9,34640 - 10, | h) 9,34100 - 10, | i) 9,75420 - 10, |
| k) 0,18888, | l) 0,06222, | m) 0,06300 - 10. |
14. a)—v) Schlage in der Tafel den $\log \operatorname{tg}$ der Winkel auf, die in Aufg. 10 a)—v) genannt sind.
15. a)—v) Schlage in der Tafel den Logarithmus-Kotangens der Winkel auf, die in Aufg. 10 a)—v) genannt sind.
16. a)—m) Schlage in der Tafel die Winkel auf, deren $\log \operatorname{cotg}$ in Aufg. 13 a)—m) genannt ist.
17. Stelle fest, ob die logarithmisch errechneten Ausdrücke
- | | | |
|---------------------------|--|--|
| a) $\log \sin 30^\circ$, | b) $\log \operatorname{tg} 45^\circ$, | c) $\log \cos 30^\circ$, |
| d) $\log \sin 60^\circ$, | e) $\log \operatorname{tg} 30^\circ$, | f) $\log \operatorname{cotg} 30^\circ$ |
- mit den der Tafel zu entnehmenden übereinstimmen.
18. Welche Gleichungen gelten a) zwischen $\log \operatorname{tg} a$ und $\log \operatorname{cotg} a$, b) zwischen $\log \sin a$, $\log \cos a$ und $\log \operatorname{tg} a$, c) zwischen $\log \sin a$, $\log \cos a$ und $\log \operatorname{cotg} a$? Gib in jedem Falle für die gefundene Beziehung aus der Tafel ein paar Beispiele an.
19. Gib eine ungefähre graphische Darstellung vom Verlauf der Funktionen a) $y = \log \sin x$, b) $y = \log \cos x$, c) $y = \log \operatorname{tg} x$, d) $y = \log \operatorname{cotg} x$. Beachte dabei, daß die Logarithmen der Form 9,1713 - 10 erst in negative Zahlen umzuschreiben sind.
20. Für welche Winkel ändert sich a) $\log \sin$, b) $\log \cos$, c) $\log \operatorname{tg}$, d) $\log \operatorname{cotg}$ am stärksten, für welche am schwächsten? Mit anderen Worten: Wo sind die Differenzen aufeinanderfolgender Logarithmen größer, wo kleiner?

Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

21. In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben a) die beiden Katheten a und b , b) eine Kathete a und die Hypotenuse c , c) ein spitzer Winkel α und die Hypotenuse c , d) ein spitzer Winkel α und die Gegenkathete a , e) ein spitzer Winkel α und die Ankathete b . In jedem Falle sind die fehlenden Stücke zu berechnen. Untersuche, wie man möglichst schnell zum Ziel kommt.

22. Rechtwinkliges Dreieck (rechter Winkel bei C) aus:

- a) $a = 35,2 \text{ cm}$, $h_c = 13,4 \text{ cm}$, b) $b = 5,13 \text{ m}$, $h_c = 4,28 \text{ m}$,
 c) $b = 13,68 \text{ m}$, $f = 3,33 \text{ m}^2$, d) $c = 22,3 \text{ cm}$, $h_c = 17,8 \text{ cm}$,
 e) $c = 25,8 \text{ m}$, $f = 213,25 \text{ m}^2$, f) $a = 15,3 \text{ cm}$, $s_a = 18,4 \text{ cm}$.

23. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten 12 cm und 5 cm gegeben. Berechne a) die Höhe, b) die Kathetenprojektionen, c) die Seitenhalbierenden, d) die Halbierungslinien der beiden spitzen Winkel.

24. Rechteck aus (e Diagonale, r Umkreis):

- a) $a = 12,31 \text{ m}$, $e = 17,85 \text{ m}$, b) $a = 2,5 \text{ cm}$, $r = 1,9 \text{ cm}$.

Die Rechnung ist ohne Benutzung des pythagoreischen Lehrsatzes auszuführen.

25. Wenn $y = mx + n$ die Gleichung einer Geraden ist, so bedeutet darin m die „Steigung“ der Geraden, d. h. den Tangens des Winkels, den die nach oben gerichtete Gerade mit der nach rechts gerichteten x -Achse bildet. Berechne den Winkel für die folgenden Geraden:

- a) $y = x$, b) $y = x - 2$, c) $y = 2x + 3$,
 d) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$, e) $y = \frac{x}{3} + 2$, f) $y = 5\frac{1}{2}x + 6$.

26. Wie lautet die Gleichung einer Geraden durch den Nullpunkt, die mit der x -Achse den Winkel a) 30° , b) 60° , c) 45° bildet?

27. Die Gleichung einer Geraden, die auf der positiven x -Achse die Strecke a (vom Nullpunkt aus gerechnet), auf der positiven y -Achse die Strecke b abschneidet, ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Bestimme die Winkel der Geraden mit den beiden Achsen, wenn die Gleichung lautet:

- a) $x + y = 1$; b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$; c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Praktische Anwendungen

28. Um die Höhe einer Hauswand zu messen, wird in 18 m Abstand von der Wand der Dachrand anvisiert. Man findet $39,2^\circ$. Wie hoch ist die Hauswand? (Berücksichtige, daß die Augenhöhe bei der Beobachtung $1,5 \text{ m}$ ist.)
29. Wie hoch steht die Sonne, wenn eine Fahnenstange von 15 m Höhe einen Schatten von $23,7 \text{ m}$ wirft?
30. Löse § 23, Aufg. 37 trigonometrisch.
31. Ein Baum wirft bei einer Sonnenhöhe von $43,8^\circ$ einen Schatten von $30,5 \text{ m}$ Länge. Wie hoch ist er?
32. Wie lang ist der Schatten des Obelisk von Luksor auf dem Pariser Concordienplatz bei einer Sonnenhöhe von $35^\circ 45'$? (Höhe $22,83 \text{ m}$.)
33. Ein an der Spitze eines Mastes befestigtes Tau von 20 m Länge bildet, seitwärts zur Erde gespannt, mit dem Erdboden einen Winkel von $64,3^\circ$. Wie hoch ist der Mast?

34. Ein Schulhaus mit Satteldach ist 25 m lang und 14 m breit. Bestimme die Größe der Dachfläche, wenn ihr Neigungswinkel 50° ist.
35. Eine Bahnstrecke hat ein Gefälle a) 1 : 300; b) 1 : 210; c) 1 : 180. Wie groß ist der Neigungswinkel gegen die Horizontale?
36. Eine Zahnradbahn hat eine Neigung von 23° . Wie groß ist das Gefälle der Bahn?
37. Die Granitschwellen, die für eine Treppe benutzt werden, sind 25 cm breit und 15 cm hoch. Welche Neigung muß man dem Treppengeländer geben?
38. Fig. 247 zeigt den Querschnitt eines Kanals mit eingeschriebenen Maßen. a) Wie groß ist der Querschnitt der auszuhebenden Erdmasse? b) Wie groß ist der Querschnitt der Wassermenge bei 4 m hohem Wasserstande?

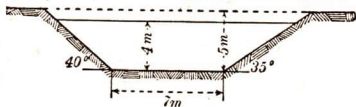


Fig. 247

39. Berechne den durchschnittlichen Neigungswinkel des in Fig. 113 dargestellten Abhanges auf Grund der eingetragenen Messungsergebnisse. Die Abstände zwischen zwei Meßstangen sind jeweils 5 m.
40. Um das Fließen eines Gletschers nachzuweisen, werden zu beiden Seiten des Gletschers im Fels zwei Marken A und B in 157,5 m Abstand angegeben; die Verbindungsstrecke der beiden Marken liegt senkrecht zur Flußrichtung. In der Verbindungsgeraden der beiden Marken, 53,5 m von A entfernt, wird eine dritte Marke C auf dem Eise angebracht. Nach einiger Zeit beobachtet man, daß C vorgerückt ist, derart, daß $\angle CAB = 1^\circ 54'$ ist. a) Um wieviel ist C vorgerückt? b) Man macht eine Kontrollmessung, indem man $\angle ABC$ bestimmt. Welchen Wert muß man da erhalten?
41. Unter welchem Sehwinkel erscheint ein ausgewachsener Mensch von 1,80 m bei a) 25 m, b) 250 m, c) 2,5 km Entfernung? Der Beobachter steht auf der gleichen Horizontalebene mit dem Beobachteten. Untersuche zuvor, ob es theoretisch und praktisch etwas ausmacht, wo der Augenpunkt des Beobachters liegt.
42. Ein (nicht selbstleuchtender) Gegenstand ist im allgemeinen noch erkennbar, wenn der Sehwinkel größer als $\frac{1}{3}$ Minuten ist. Untersuche, welche wirkliche Größe ein Gegenstand in a) 1 m, b) 1 km, c) in Mondferne (384 000 km), d) in Sonnenferne (149 Mill. km) haben müßte, um noch gesehen zu werden.

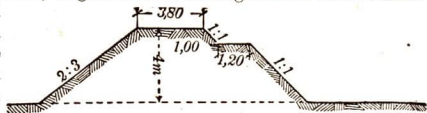


Fig. 248

43. Berechne den Querschnitt des in Fig. 248 mit eingeschriebenen Maßen dargestellten Bahndammes.
44. Berechne die Länge des Breitenkreises deines Wohnortes; $\varphi = \dots\dots^1$) Der Radius der Erde ist im Mittel 6370 km.

1) Vom Schüler selbst auszufüllen.

45. In welcher Breite ist der Radius des Breitenkreises gleich **a)** dem halben Erdradius, **b)** einem Drittel des Erdradius?
46. Der Pico de Teyde auf Teneriffa ist 3730 m hoch. Wie weit ist ein Schiff von ihm entfernt, wenn der Gipfel von ihm aus gesehen unter einem Winkel von 6° über dem Horizont erscheint? (Von der Krümmung der Meeresfläche ist abzusehen.)
47. Ein Blitz leuchtet $29^\circ 30'$ über dem Horizont auf. Den Donner hört man 4 Sekunden nach der Blitzerscheinung. Wie hoch liegt die Entladungsstelle über dem Horizont? (Schallgeschwindigkeit 330 m pro sec.)
48. Auf einer um 25° gegen die Horizontale geneigten Ebene ruht ein Gewicht von 255 kg. Welchen Druck übt es auf die Unterlage aus?
49. Auf einer Bahnstrecke, die eine Neigung 1 : 120 hat, steht ein D-Zug, der mit Lokomotive ein Gewicht von 325 000 kg hat. Wie groß ist die durch die Neigung der Strecke gegebene Druckverringernug?
50. Ein Lichtstrahl quert unter einem Winkel von **a)** 25° , **b)** 75° eine 2,7 cm dicke Glasplatte. Wie groß ist die Parallelverschiebung, die er dabei erfährt? (Brechungsquotient 1,7.)
51. Der scheinbare Durchmesser sowohl der Sonne wie des Mondes ist ungefähr $32'$. Berechne danach den wahren Durchmesser dieser Himmelskörper, wenn als Entfernung der Sonne im Mittel 149 000 000 km, als Entfernung des Mondes 384 000 km angesetzt wird.
52. Unter welchem scheinbaren Durchmesser würde die Erde (Radius 6370 km) von **a)** der Sonne, **b)** von dem Monde aus gesehen werden (Entfernungen siehe Aufg. 52)?
53. Die Sternwarten Altona und Göttingen liegen auf gleichem Meridian, ihr Breitenunterschied ist $2^\circ 0' 57''$. In dem Augenblick, in dem der Mond durch den Meridian geht, wird seine Erhebung über dem Horizont in Göttingen zu $58^\circ 42' 2''$, in Altona zu $56^\circ 39' 25''$ bestimmt. (In beiden Fällen steht der Mond natürlich im Süden!) Berechne daraus die Entfernung des Mondes von der Erde.

Gleichschenkliges Dreieck und Rhombus

54. Zerlege das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige und zeige, daß dadurch die Berechnung der Stücke des gleichschenkligen Dreiecks aus irgend zwei gegebenen (zwei Seiten oder eine Seite und ein Winkel) möglich ist. Auch dann, wenn ein stumpfer Winkel auftritt?
55. Gleichschenkliges Dreieck (Spitze bei A) aus:

a) $a = 7$ cm,	$b = 8$ cm;	b) $a = 17,5$ cm,	$\beta = 35^\circ 48'$;
c) $a = 22,3$ cm,	$\alpha = 65^\circ 30'$;	d) $a = 48,31$ m,	$\alpha = 168^\circ 24'$;
e) $b = 17,9$ cm,	$\alpha = 108^\circ 36'$;	f) $b = 9,81$ m,	$\beta = 75^\circ 54'$;
g) $a = 22,8$ cm,	$h_a = 17,3$ cm;	h) $b = 19,81$ m,	$h_a = 17,18$ m;
i) $\beta = 17^\circ 30'$,	$h_a = 12,5$ cm;	k) $a = 95,3$ m,	$h_b = 73,8$ cm;
l) $f = 450$ cm ² ,	$h_a = 4,1$ cm;	m) $f = 513$ cm ² ,	$h_b = 23,4$ cm.
56. Zerlege den Rhombus in vier rechtwinklige Dreiecke und drücke durch die Seite und einen Winkel **a)** die Diagonalen, **b)** den Flächeninhalt, **c)** den Radius des Inkreises des Rhombus aus.

57. Rhombus aus (Diagonale $AC = e$, $BD = f$):

- a) $a = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 70^\circ$, b) $e = 13,5 \text{ cm}$, $\alpha = 112^\circ 36'$,
 c) $e = 15 \text{ cm}$, $f = 16 \text{ cm}$, d) $\alpha = 63^\circ 54'$, Inh. = 1000 m^2 .

Aufgaben am Kreis

58. In einen Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne von der Länge s gelegt. Wie groß ist a) der zugehörige Zentriwinkel, b) der zugehörige Bogen, c) der zugehörige Kreisausschnitt, d) der zugehörige Kreisabschnitt? Beispiel: $r = 10 \text{ cm}$, $s = 13 \text{ cm}$.
59. Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r . Wie groß ist die Sehne, die zu dem Zentriwinkel α gehört? Beispiel: $r = 7,5 \text{ cm}$, $\alpha = 57^\circ 36'$.
60. Der Peripheriewinkel über der Sehne eines Kreises mit dem Radius $r = 5 \text{ cm}$ ist 72° . Wie groß ist die Sehne?
61. In einem Kreise steht über einer Sehne von 3 cm ein Peripheriewinkel von 35° . Wie groß ist der Radius dieses Kreises?
62. Wie groß ist a) der Zentriwinkel der Seite eines regelmäßigen n -Ecks, b) die Seite eines regelmäßigen n -Ecks, c) der Inhalt eines regelmäßigen n -Ecks, wenn der Radius des Umkreises r ist?
63. Einem Kreis mit dem Radius $r = 10 \text{ cm}$ ist ein regelmäßiges a) Dreieck, b) Sechseck, c) Viereck, d) Fünfeck, e) Achteck, f) Neuneck, g) Zehneck, h) Siebeneck, i) Zwölfeck, k) Fünfzehneck, l) Pentagramm, m) ein regelmäßiger Siebenstern (vgl. Fig. 100) eingeschrieben. Berechne in jedem Falle Seite, Umfang, Inkreisradius und Inhalt des n -Ecks.
64. Wie groß ist a) die Seite, b) der Inhalt eines regelmäßigen n -Ecks, wenn der Radius des Inkreises ρ ist?
65. a)—m) Berechne Seite, Umfang, Umkreisradius und Inhalt der in Aufg. 63 a)—m) genannten regelmäßigen Vielecke, wenn diese einem Kreis mit dem Radius $r = 12 \text{ cm}$ umgeschrieben sind.
66. Berechne die sämtlichen Diagonalen des regelmäßigen a) Siebenecks, b) Neunecks mit der Seite a . Beispiel: $a = 2,5 \text{ cm}$.
67. An einen Kreis mit dem Radius r werden von einem Punkte P , der vom Kreismittelpunkt den Abstand a hat, die Tangenten gelegt. Berechne a) die Länge der Tangenten (von P bis zum Berührungspunkt), b) den Winkel zwischen den beiden Tangenten, c) die Länge der Berührungssehne. Beispiel: $r = 4 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$.
68. Von einem Punkte P sind an einen Kreis zwei 12 cm lange Tangenten gelegt. Wie weit ist P vom Mittelpunkt entfernt, wenn a) der Kreisradius 5 cm ist, b) der Winkel zwischen den Tangenten 45° ist, c) die Berührungssehne 10 cm lang ist?
69. In einen Kreis mit dem Radius 8 cm ist eine Sehne von 12 cm Länge gelegt. Wie lang sind die in den Endpunkten der Sehne an den Kreis gelegten Tangenten (vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt), und unter welchem Winkel schneiden sie sich?
70. Zwei Kreise mit den Radien 10 cm und 12 cm schneiden sich unter einer Sehne von 11 cm . a) Wie groß ist der Mittelpunktsabstand? b) Wie groß sind die durch die zwei Kreise gegebenen Kreiszwiecke?

71. Zwei Kreisscheiben mit den Radien 0,45 m und 0,17 m sind durch einen Treibriemen ohne Ende verbunden. Wie lang muß der Treibriemen sein, wenn der Abstand der Scheibenmittelpunkte 5,50 m ist? **a)** Die Riemen sind gekreuzt, **b)** sind nicht gekreuzt.
72. Zwei Straßen stoßen geradlinig in einem Winkel α aufeinander. Sie werden an der Stelle des Treffpunktes durch einen Kreisbogen vom Radius r ersetzt. Wie groß ist die dadurch bewirkte Abkürzung? Beispiel: $\alpha = 105^\circ$, $r = 500$ m.

Aus der Geschichte der Trigonometrie

73. Aristarch von Samos (um 270 v. Chr.) berechnete das Verhältnis der Mondentfernung zur Sonnenentfernung, indem er beim ersten Viertel des Mondes den Winkel zwischen der Richtung nach dem Sonnenmittelpunkt und der Richtung nach dem Mondmittelpunkt feststellte. Erkläre die Methode. Welche trigonometrische Funktion kommt zur Anwendung?
74. Die Griechen rechneten statt mit dem Sinus mit der Sehne (chorda). $\text{crd } \alpha$ bezeichne die Länge der Sehne, die im Kreis mit dem Radius 1 zu dem Zentriwinkel α gehört. Drücke dann **a)** $\text{crd } \alpha$ durch den Sinus, **b)** $\sin \beta$ durch die Sehne aus.
75. Al Battāni (um 900 n. Chr. in Bagdad) behandelte die umbra extensa, die Länge des Schattens, den ein vertikaler Stab von der Länge 1 auf eine horizontale Ebene wirft, und die umbra versa, die Länge des Schattens, den ein horizontaler Stab von der Länge 1 auf eine senkrecht zu ihm stehende, also vertikale Ebene wirft. Welche trigonometrischen Funktionen hat er damit benutzt?
76. Der chinesische Kaiser Tschu-Kong (1100 v. Chr.) soll die Länge des Schattens eines senkrechten Stabes von 8 Maßeinheiten am Mittag des längsten Tages zu 1,54 Einheiten, am Mittag des kürzesten Tages zu 13,12 Einheiten gefunden haben. Wie groß sind die entsprechenden Sonnenhöhen, und wie groß ist die Schiefe der Ekliptik (d. h. die Hälfte der Differenz beider Sonnenhöhen)?
77. Plinius (23—79 n. Chr.) berichtet, daß am Tage der Tag- und Nachtgleiche zur Mittagszeit der Schatten eines senkrechten Stabes in Alexandrien die halbe Länge des Stabes gehabt habe, in Rom hingegen um $\frac{1}{3}$ kürzer als der ganze Stab sei. **a)** Berechne für beide Fälle die Sonnenhöhe. **b)** Das Komplement der Sonnenhöhe an diesem Tage ist die Breite des Ortes. Wie groß ist also nach diesen Beobachtungen die Breite von Alexandrien und von Rom? (Prüfe das Ergebnis auf der Karte!) **c)** Plinius gibt auch eine Messung für Ancona an. Dort soll der Schatten um $\frac{1}{3}$ länger als der Stab gewesen sein. Rechne diese Beobachtung durch und beurteile das Ergebnis.

§ 31. Das allgemeine Dreieck

Sinussatz für spitzwinklige Dreiecke

1. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den spitzen Winkeln β und γ . Drücke die Höhe h_a zweimal durch Seiten und Winkel aus. Beweise durch Gleichsetzung beider Ausdrücke den Sinussatz:

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma.$$

2. Beweise wie in Aufg. 1

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Warum folgt der Satz sofort aus der Ableitung in Aufg. 1? Welche Voraussetzungen sind zunächst über α , β und γ zu machen?

3. Zeige, daß der Sinussatz auch dann noch gilt, wenn irgendeiner der Winkel ein rechter ist.

4. Von einem spitzwinkligen Dreieck ist

gegeben:	gesucht:	gegeben:	gesucht:
a) $a, \alpha, \beta,$	$b;$	b) $b, \beta, \gamma,$	$c;$
c) $a, b, \alpha,$	$\beta;$	d) $a, c, \gamma,$	$\alpha;$
e) $a, \beta, \gamma,$	$b, c.$		

In jedem Falle ist nur der Ausdruck für das gesuchte Stück hinzuschreiben.

5. Berechne ein Dreieck aus:

a) $a = 8,6 \text{ cm},$	$\alpha = 48,6^\circ,$	$\beta = 58,4^\circ;$
b) $a = 63 \text{ cm},$	$\beta = 53,8^\circ,$	$\gamma = 67,2^\circ;$
c) $b = 10 \text{ cm},$	$\alpha = 50^\circ,$	$\beta = 60^\circ;$
d) $b = 0,38 \text{ m},$	$\alpha = 47^\circ 54',$	$\gamma = 59^\circ 12';$
e) $c = 17,3 \text{ cm},$	$\alpha = 77^\circ 34',$	$\beta = 43^\circ 17';$
f) $c = 0,238 \text{ km},$	$\alpha = 83^\circ 35' 30'',$	$\gamma = 27^\circ 38' 15''.$

Kosinussatz für spitzwinklige Dreiecke

6. Drücke in dem Dreieck ABC , das die spitzen Winkel β und γ hat, das Quadrat der Höhe h_a zweimal mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes aus (führe für den einen Abschnitt auf der Seite a die Bezeichnung p ein, wie groß ist dann der andere?) und setze beide Ausdrücke gleich. Wie lautet die so erhaltene Beziehung zwischen den Seiten und einer Seitenprojektion im Dreieck?

7. Ersetze in dem nach Aufg. 6 gefundenen Ausdruck oder in dem verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz (§ 21, Aufg. 2) die darin auftretende Seitenprojektion durch eine Seite und eine Winkelfunktion und beweise so den Kosinussatz:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

8. a) Führe auch für die Formeln

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

die ja sofort aus dem Satz Aufg. 7 folgen, die Herleitung vollständig durch.

b) Wo ist in der Ableitung des Kosinussatzes benutzt worden, daß der in ihm auftretende Winkel spitz ist?

9. Welche Gestalt nimmt der Kosinussatz an, wenn der Winkel, der in ihm auftritt, ein rechter wird?
10. Löse die Formeln des Kosinussatzes nach $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ auf.
11. Von einem spitzwinkligen Dreieck ist

gegeben:	gesucht:	gegeben:	gesucht:
a) a, b, γ ,	c ;	b) a, c, β ,	b ;
c) b, c, α ,	a ;	d) a, b, c ,	α, β, γ .

In jedem Falle sind nur die Ausdrücke für die gesuchten Stücke hinzuschreiben.

12. Berechne Dreiecke aus:

a) $a = 18,5$ cm,	$b = 19,4$ cm,	$\gamma = 78^\circ$;
b) $b = 4$ cm,	$c = 5$ cm,	$\alpha = 60^\circ$;
c) $a = 10,9$ cm,	$c = 10,2$ cm,	$\beta = 79^\circ 17' 40''$;
d) $a = 13$ cm,	$b = 14$ cm,	$c = 15$ cm.

Erweiterung des Sinusbegriffes für stumpfe Winkel

13. Gegeben ist ein Dreieck ABC , dessen Winkel β stumpf ist. Drücke die Höhe h_a wie bei der Ableitung des Sinussatzes zweimal in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken aus, wobei jetzt aber $\sin(180^\circ - \beta)$ an Stelle von $\sin \beta$ auftritt. Zeige, daß wieder der Sinussatz gilt, wenn man
- $$\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$
- setzt.

14. Fasse die Definitionsgleichung des Sinus für stumpfe Winkel in Worte.

15. Bestimme folgende Werte (von Aufg. e) an mit Hilfe der Tafel!):

a) $\sin 135^\circ$,	b) $\sin 120^\circ$,	c) $\sin 150^\circ$,
d) $\sin 180^\circ$,	e) $\sin 170^\circ$,	f) $\sin 145^\circ$,
g) $\sin 163^\circ$,	h) $\sin 105,3^\circ$,	i) $\sin 161,8^\circ$,
k) $\sin 117^\circ 30'$,	l) $\sin 93^\circ 45'$,	m) $\sin 155^\circ 33'$,
n) $\sin 122^\circ 35' 13''$,	o) $\sin 178^\circ 12' 47''$,	p) $\sin 151^\circ 39' 56''$.

16. Setze die graphische Darstellung der Sinusfunktion für stumpfe Winkel fort, wobei du die Sinuskurve für spitze Winkel benutztst.
17. Welche Symmetrieverhältnisse zeigt die Sinuskurve im Bereich von 0° bis 180° ?

18. Beweise den Sinussatz für beliebige, also auch stumpfwinklige Dreiecke.

19. Gib die beiden Winkel α an, für die $\sin \alpha$ ist:

a) $\frac{1}{2}$,	b) 0,	c) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$,	d) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$,	e) $\frac{1}{3}$,	f) 0,3.
--------------------	-------	----------------------------	----------------------------	--------------------	---------

20. Gegeben ist ein Achsenkreuz und ein Kreis mit dem Radius r , dessen Mittelpunkt O der Koordinatenanfangspunkt ist (Fig. 249). Ist P ein Punkt des

Kreises, α der Winkel zwischen OP und der positiven x -Achse und Q der Fußpunkt des Lotes von P auf die x -Achse, so definiert man den Sinus des Winkels α als das Verhältnis der Projektierenden PQ zum Radius. Zeige, daß diese Definition des Sinus am Kreise mit den früheren übereinstimmt. (Zeichne die Lage von P , wenn $\alpha = 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ ist.)

21. Es ist $\sin \alpha = \sin \beta$, wo α und β irgendwelche Winkel $< 2R$ sind. Was ist über α und β zu sagen?

22. α, β und γ sind die Winkel eines Dreiecks. Drücke $\sin \gamma$ durch α und β aus.

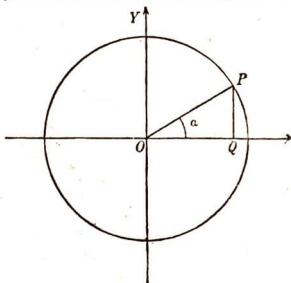


Fig. 249

Formeln für den Inhalt des Dreiecks

23. Ersetze in der Formel

$$f = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

für den Inhalt des Dreiecks h_a durch einen Ausdruck, der eine Seite und einen Winkel des Dreiecks enthält. Auf wieviel Weisen ist das möglich?

24. Beweise die drei Inhaltsformeln (achte auch auf stumpfwinklige Dreiecke!):

I.
$$f = \frac{a \cdot b}{2} \sin \gamma,$$

II.
$$f = \frac{a \cdot c}{2} \sin \beta,$$

III.
$$f = \frac{b \cdot c}{2} \sin \alpha.$$

25. Zeige, daß die Inhalte von Dreiecken, die in einem Winkel übereinstimmen, sich wie die Rechtecke aus den anliegenden Seiten verhalten (vgl. § 23, Aufg. 27).

26. Zeige, daß Dreiecke, die in zwei Seiten übereinstimmen und deren eingeschlossene Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen, gleichen Inhalt haben.

27. Ersetze in der Inhaltsformel I in Aufg. 24 die Seite b nach dem Sinussatz durch einen Ausdruck, der a enthält, und beweise so die Formel I und ebenso die ihr entsprechenden Formeln II und III:

I.
$$f = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha},$$

II.
$$f = \frac{b^2 \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta},$$

III.
$$f = \frac{c^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin \gamma}.$$

28. Berechne den Inhalt der folgenden Dreiecke:

a) $a = 12 \text{ cm}, \quad b = 15 \text{ cm}, \quad \gamma = 60^\circ;$

b) $b = n, \quad c = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot n, \quad \alpha = 30^\circ;$

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|--------------------------|
| c) $a = 725,5 \text{ m},$ | $c = 288,3 \text{ m},$ | $\beta = 113^\circ 36';$ |
| d) $a = 10 \text{ cm},$ | $\alpha = 135^\circ,$ | $\beta = 30^\circ;$ |
| e) $b = 77,31 \text{ m},$ | $\beta = 73,4^\circ,$ | $\gamma = 78,7^\circ;$ |
| f) $c = 100 \text{ m},$ | $\alpha = 85,34^\circ,$ | $\beta = 79,81^\circ.$ |

29. Bestimme den Proportionalitätsfaktor in

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

durch folgende Überlegung. Zeichne den Umkreis des a) spitzwinklig, b) stumpfwinklig angenommenen Dreiecks. Fälle vom Mittelpunkt auf die Seite a die Senkrechte und zeige, daß

I. $a = 2r \cdot \sin \alpha,$

und ebenso II. $b = 2r \cdot \sin \beta,$

III. $c = 2r \cdot \sin \gamma$

ist. c) Entwickle mit Hilfe der eben gefundenen Formeln einen neuen Beweis des Sinussatzes.

Die übrigen Funktionen für stumpfe Winkel

Der Kosinus

30. Führe die Überlegungen, die zum Beweis des Kosinussatzes geführt haben (Aufg. 6 und 7), für den Fall durch, daß der in der Formel auftretende Winkel stumpf ist. Zeige, daß dann $\cos(180^\circ - \beta)$ auftritt, und daß der Kosinussatz weiter gilt, wenn man

$$\cos \beta = -\cos(180^\circ - \beta)$$

definiert.

31. Fasse die Definitionsgleichung des Kosinus für stumpfe Winkel in Worte.

32. Gib auf Grund der Definitionsgleichung folgende Werte an (von e) an mit Hilfe der Tafel):

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\cos 135^\circ,$ | b) $\cos 120^\circ,$ | e) $\cos 150^\circ,$ |
| d) $\cos 180^\circ,$ | e) $\cos 108^\circ,$ | f) $\cos 162^\circ,$ |
| g) $\cos 177^\circ,$ | h) $\cos 122,7^\circ,$ | i) $\cos 95,2^\circ,$ |
| k) $\cos 101^\circ 36',$ | l) $\cos 125^\circ 54',$ | m) $\cos 179^\circ 43'.$ |

33. Setze die graphische Darstellung der Kosinusfunktion für stumpfe Winkel fort, indem du dabei die Kosinuskurve für spitze Winkel benutzt.

34. Welche Symmetrieverhältnisse zeigt die Kosinuskurve im Bereich von 0° bis 180° ?

35. Gib den Winkel α an, für den $\cos \alpha$ ist:

- | | | |
|--------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $-\frac{1}{2},$ | b) $0,$ | c) $-\frac{1}{2}\sqrt{2},$ |
| d) $-1,$ | e) $-\frac{1}{2}\sqrt{3},$ | f) $-\frac{1}{3}.$ |

36. Es ist ein Achsenkreuz gegeben usf. wie in Aufg. 20 (Fig. 249). Man definiert den Kosinus des Winkels α als das Verhältnis der Projektion OQ zum Radius. **a)** Wie kommt hier bei den stumpfen Winkeln das negative Vorzeichen zum Ausdruck? **b)** Zeige, daß diese Definition am Kreise mit den früheren Definitionen übereinstimmt.
37. Es ist $\cos \alpha = \cos \beta$, wo α und β irgendwelche Winkel $< 2R$ sind. Was ist über α und β zu sagen?
38. α , β und γ sind die Winkel eines Dreiecks. Drücke $\cos \gamma$ durch α und β aus.
39. Untersuche, ob die folgende Formel auch für stumpfe Winkel α gilt:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Tangens und Kotangens

40. Wie muß man über das Vorzeichen von $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{cotg} \alpha$ für stumpfe Winkel α verfügen, wenn die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

erhalten bleiben sollen?

41. Gib eine graphische Darstellung **a)** der Tangensfunktion, **b)** der Kotangensfunktion auch für stumpfe Winkel. Achte auf den Sprung bei 90° .
42. Bestimme die folgenden Werte:
a) $\operatorname{tg} 135^\circ$, **b)** $\operatorname{cotg} 180^\circ$, **c)** $\operatorname{cotg} 135^\circ$, **d)** $\operatorname{tg} 120^\circ$, **e)** $\operatorname{tg} 150^\circ$, **f)** $\operatorname{cotg} 150^\circ$.
43. α , β und γ sind die Winkel eines Dreiecks; drücke **a)** $\operatorname{tg} \alpha$, **b)** $\operatorname{cotg} \alpha$ durch β und γ aus.
44. Was folgt aus **a)** $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, **b)** $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta$ für die Winkel α und β selbst, wenn sie kleiner als $2R$ vorausgesetzt werden?
45. Was ist über die Werte $\operatorname{tg} 90^\circ$ und $\operatorname{cotg} 90^\circ$ zu sagen?

Weitere Dreieckssätze¹⁾

46. (Mollweidesche Formel.) **a)** Verlängere im Dreieck ABC die Seite über A hinaus um c bis D und gib die Seiten und Winkel von $\triangle DBC$ an. **b)** Wende auf dieses Dreieck den Sinussatz an und beweise so:

$$\text{I.} \quad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

47. (Mollweidesche Formel.) Beweise in gleicher Weise wie in Aufg. 47 mit Hilfe eines Dreiecks, das statt $b+c$ die Strecke $b-c$ als Seite enthält,

$$\text{II.} \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

1) Nach Bedarf durchzunehmen.

48. a) Stelle andere Mollweidesche Formeln auf. b) Verwandle die Mollweideschen Formeln so, daß der dritte Winkel des Dreiecks nicht auftritt.
 49. Leite aus den Mollweideschen Formeln I und II (Aufg. 47 u. 48) durch Division den Tangenssatz ab:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

50. a) Leite an der Ankreisfigur (vgl. § 15, Aufg. 13) die Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$$

her. b) Beweise die anderen entsprechenden Formeln. c) Beweise ebenso die Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\varrho_a}{s}.$$

51. Leite aus den beiden Formeln (§ 18, Aufg. 9 und 10, und § 21, Aufg. 11)

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$F = \varrho \cdot s$$

zusammen mit der ersten Gleichung in Aufg. 51 für $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ einen Wert ab, der lediglich die Seiten enthält. — Stelle entsprechende Formeln für $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ und $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ auf.

Die vier Fundamentalfälle

52. Von einem Dreieck sind gegeben a) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, b) eine Seite und zwei Winkel, c) drei Seiten, d) zwei Seiten und ein der einen gegenüberliegender Winkel (!). Stelle in jedem Falle die Formeln auf, die zur Berechnung der fehlenden Seiten und Winkel sowie des Inhalts führen. Achte auf die Mehrdeutigkeit der Lösungen und darauf, daß die Berechnung möglichst praktisch ist.
 53. Gib Mittel und Wege an, wie man bei den vier Fundamentalfällen eine möglichst zweckmäßige Probe auf die Richtigkeit der Lösung anstellt.
 54. Dreieck aus:

a) $a = 2,73 \text{ m},$	$b = 3,96 \text{ m},$	$\gamma = 54,7^\circ;$
b) $a = 3,185 \text{ km},$	$c = 2,833 \text{ km},$	$\beta = 87^\circ 52';$
c) $b = 0,708 \text{ km},$	$a = 123,4^\circ,$	$\gamma = 33,6^\circ;$
d) $c = 8,57 \text{ m},$	$a = 103^\circ 48',$	$\gamma = 17^\circ 24';$
e) $a = 29 \text{ m},$	$b = 52 \text{ m},$	$c = 75 \text{ m};$
f) $a = 5,3 \text{ cm},$	$b = 7,8 \text{ cm},$	$c = 6,5 \text{ cm};$
g) $b = 57,34 \text{ m},$	$c = 51,81 \text{ m},$	$\beta = 74,4^\circ;$
h) $a = 2,814 \text{ km},$	$b = 4,284 \text{ km},$	$\beta = 112,7^\circ;$
i) $a = 3,147 \text{ km},$	$b = 5,831 \text{ km},$	$a = 10,8^\circ.$

Vermischte Dreiecksberechnungen**55.** Berechne in einem Dreieck, von dem

$a = 17 \text{ cm},$

$b = 12 \text{ cm},$

$\alpha = 58^\circ 36'$

gegeben ist, **a)** die Höhen, **b)** die Winkelhalbierenden, **c)** die Seitenhalbierenden.**56.** Berechne in einem Dreieck, von dem

$a = 9,2 \text{ cm},$

$b = 8,5 \text{ cm},$

$c = 3,9 \text{ cm}$

gegeben ist, die Radien **a)** des Inkreises, **b)** des Umkreises.**57.** Berechne in einem Dreieck, von dem

$\alpha = 67^\circ,$

$b = 12 \text{ cm},$

$\gamma = 72^\circ$

gegeben ist, die Abschnitte, in die die Winkelhalbierenden ihre Gegenseiten teilen.

58. Berechne in einem Dreieck, von dem

$a = 6,3 \text{ cm},$

$b = 4,8 \text{ cm},$

$\alpha = 114^\circ 54'$

gegeben ist, die Winkel zwischen den Seitenhalbierenden.

59. Berechne ein Dreieck aus (Doppellösungen?):

a) $a = 6,555 \text{ m},$

$b = 7,04 \text{ m},$

$s_b = 6,895 \text{ m};$

b) $\alpha = 85^\circ 15',$

$\beta = 61^\circ 30',$

$w_\beta = 6,75 \text{ m};$

c) $a = 17,6 \text{ cm},$

$w_\gamma = 10,75 \text{ cm},$

$\gamma = 64^\circ 24';$

d) $h_a = 2,31 \text{ m},$

$h_b = 3,055 \text{ m},$

$\alpha = 103^\circ 27' 36'';$

e) $a = 234,1 \text{ m},$

$h_a = 157,25 \text{ m},$

$s_a = 252,4 \text{ m};$

f) $b = 90,8 \text{ cm},$

$\gamma = 39^\circ 45',$

$\sphericalangle b s_b = 106^\circ 12';$

g) $h_a = 85,3 \text{ cm},$

$h_b = 90,7 \text{ cm},$

$\gamma = 71^\circ 31';$

h) $h_c = 11,14 \text{ cm},$

$w_\beta = 5,58 \text{ cm},$

$\beta = 111^\circ 18';$

i) $b:c = 0,9588,$

$\alpha = 50,42^\circ,$

$h_a = 27,6 \text{ m};$

k) $h_a = 87,5 \text{ cm},$

$s_b = 113,4 \text{ cm},$

$\beta = 57^\circ 48';$

l) $c = 19,12 \text{ m},$

$s_a = 20,88 \text{ m},$

$s_b = 15,22 \text{ m};$

m) $s_a = 138,1 \text{ m},$

$s_b = 104,3 \text{ m},$

$s_c = 145 \text{ m};$

n) $c = 23,64 \text{ m},$

$s_c = 11,28 \text{ m},$

$\alpha = 63,72^\circ;$

o) $a = 3,36 \text{ m},$

$h_b = 3,29 \text{ m},$

$h_c = 2,03 \text{ m};$

p) $b = 21,96 \text{ m},$

$c = 14,70 \text{ m},$

$r = 11,26 \text{ m};$

q) $a = 9,45 \text{ cm},$

$r = 5,36 \text{ cm},$

$\beta = 40^\circ;$

r) $a = 56,12 \text{ m},$

$b + c = 105,04 \text{ m},$

$\alpha = 63^\circ;$

s) $a + b = 31,38 \text{ cm};$

$c = 18,92 \text{ cm};$

$\alpha - \beta = 36^\circ 54';$

- | | | |
|------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| t) $a = 36,26 \text{ cm};$ | $b = 32,40 \text{ cm};$ | $f = 397,8 \text{ qcm};$ |
| u) $a = 84,75 \text{ cm};$ | $\beta = 41^\circ 6';$ | $f = 1174 \text{ qcm};$ |
| v) $\alpha = 109^\circ 30';$ | $\beta = 38^\circ 29';$ | $f = 449,6 \text{ qm};$ |
| w) $a = 5,612 \text{ cm};$ | $s_a = 1,612 \text{ cm};$ | $f = 4,192 \text{ qcm};$ |
| x) $h_b = 48,36 \text{ cm};$ | $s_b = 51,48 \text{ cm};$ | $f = 1572,3 \text{ qcm}.$ |

60. a) In einem Dreieck verhalten sich die Seiten wie $2 : 3 : 4$. Bestimme die Winkel des Dreiecks. b) In einem Dreieck ist das Verhältnis zweier Seiten $1 : 2$, der eingeschlossene Winkel zählt 60° . Wie groß sind die beiden andern Winkel?
61. Berechne Seiten und Winkel eines Dreiecks, in dem gegeben ist $a : b = 2 : 3$, $c = 10 \text{ cm}$ und $\beta = 45^\circ$.
62. Berechne den Radius des Umkreises der beiden Dreiecke mit den Seiten 13, 14, 15 und 13, 4, 15.

Vierecksberechnungen

63. Berechne a) die Diagonalen, b) den Inhalt eines Parallelogramms mit den Seiten $3,75 \text{ cm}$ und $5,38 \text{ cm}$ und dem eingeschlossenen Winkel 75° .
64. Ein Parallelogramm hat die Seiten 5 cm und 8 cm . Die eine Diagonale ist 7 cm . Wie groß ist die andere?
65. Von einem Parallelogramm sind die Diagonalen $11,5 \text{ cm}$ und $17,2 \text{ cm}$ und der Winkel, den sie bilden, 57° , bekannt. Berechne Seiten, Winkel und Inhalt.
66. Ein Trapez hat die Seiten $c = 18 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $a = 4,2 \text{ cm}$ und $d = 14,6 \text{ cm}$. Berechne die Winkel und den Inhalt. (Berechne erst ein Teildreieck!) Die parallelen Seiten sind a und c .

Höhenmessung

67. Um die Höhe eines Berges zu messen, wird eine 113 m lange Standlinie abgesteckt, deren Richtung genau auf die Bergspitze hinweist. An den Enden der Standlinie werden die Erhebungswinkel $24^\circ 17'$ und $19^\circ 48'$ gemessen. Wie hoch ist der Berg?
68. Von der Plattform eines Turmes aus wird das untere und das obere Ende einer auf dem Erdboden stehenden 14 m hohen Fahnenstange anvisiert. Die beiden Tiefenwinkel sind $22,5^\circ$ und $28,5^\circ$. Wie hoch ist die Plattform und wie weit steht die Fahnenstange von dem Turm ab?
69. Um die Höhe eines Gebäudes zu messen, wird auf der höchsten Erhebung eine 5 m lange, vertikale Meßstange angebracht und deren unteres und oberes Ende vom Erdboden aus anvisiert. Die abgelesenen Erhebungswinkel sind 61° und 67° . Wie hoch ist das Gebäude?
70. Auf einem Turme steht ein $2,87 \text{ m}$ hohes Kreuz. Mit einem Winkelfernrohr, dessen Drehachse $1,51 \text{ m}$ über dem Erdboden steht, werden Spitze und Fuß des Kreuzes anvisiert. Dabei liest man die Winkel 33° und $30^\circ 30'$ ab. Wie hoch ist der Turm?

71. Die eine Wand eines Turmes trägt das Zifferblatt einer Uhr. Ein Beobachter steht 27,25 m von dieser Wand entfernt auf der Erde. Er erblickt den Mittelpunkt der Uhr unter einem Erhebungswinkel von $43^\circ 30'$. Unter welchem Winkel erscheint ihm der 1,20 m lange große Zeiger, wenn er a) auf 12, b) auf 6 steht?
72. Von den Ringmauern der ehemaligen Feste Königstein aus beobachtet man die beiden Elbufer unter Tiefenwinkeln von $31,8^\circ$ und $25,4^\circ$. Der Fluß hat an jener Stelle eine Breite von 121 m. Wie hoch liegt die Beobachtungsstelle über dem Spiegel der Elbe?
73. 4,21 m über einem Wasserspiegel liegt der Drehpunkt eines Winkelmeßapparates, mit dem man die Spitze eines Turmes und ihren Spiegelpunkt im Wasser anschnidet. Man findet den Erhebungswinkel $55^\circ 57'$ und den Tiefenwinkel $58^\circ 9'$. Wie hoch ist der Turm?

Aus der Mechanik

74. a) Berechne die Größe der Resultierenden zweier Kräfte (allgemein Vektoren), die im gleichen Punkte angreifen und den Winkel α bilden. b) Welche Form nimmt der Ausdruck an, wenn im besonderen $\alpha = 0^\circ, 180^\circ, 90^\circ$ wird?
75. Im Punkte P greifen die Kräfte a, b und c an; der Winkel zwischen a und b ist α , zwischen b und c ist β . Alle drei Kräfte liegen in einer Ebene. Berechne die Resultierende.
76. In einem Punkt greifen zwei Kräfte $p_1 = 7,5$ kg und $p_2 = 11,2$ kg an, deren Richtungen miteinander den Winkel 60° bilden. Welche Winkel bildet die Resultierende mit den beiden Kräften?
77. Zwei Kräfte $p_1 = 10$ kg und $p_2 = 14$ kg, die in einem Punkte angreifen, sollen durch eine Kraft $p_3 = 18$ kg ersetzt werden. a) Ist das im allgemeinen möglich, wenn der Winkel zwischen p_1 und p_2 gegeben ist? b) Berechne die Winkel zwischen p_1 und p_2 und zwischen p_2 und p_3 .

Triangulation

78. Fig. 250 zeigt schematisch, wie bei einer Triangulierung das Land von Dreiecksnetzen verschiedener Ordnung überzogen wird. a) Greife zwei Punkte erster Ordnung heraus, die durch eine als bekannt anzusehende Basis ver-

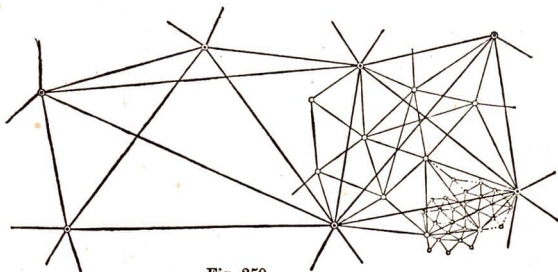


Fig. 250

bunden sind, und zeige, wie von da aus lediglich auf Grund von Winkelbeobachtungen die andern Punkte rechnerisch bestimmt werden können. **b)** Gib einige Proben an, die die Prüfung der Genauigkeit gestatten. **c)** Zeige an Beispielen, wie man von Punkten erster Ordnung ausgehend die Lage von Punkten zweiter Ordnung errechnen kann.

79. Fig. 251, die einem Brief von Gauß an Olbers vom 10. Juni 1821 entnommen ist, zeigt den Plan zu einer von der Göttinger Sternwarte und dem zugehörigen Meridianzeichen ausgehenden Triangulation. Nimm die Strecke Sternwarte Meridianzeichen als Ausgangsbasis an und zeige, durch welche Beobachtungen man zu den Punkten: Brocken, Inselsberg und Herkules (bei Kassel) kommen kann.

80. Die Basis BC eines Dreiecks ABC wird zu 117,58 m gemessen, die Winkel β und γ ergeben sich zu $73^\circ 32' 45''$ und $81^\circ 17' 15''$. Berechne AB und AC .

81. Ein Punkt D wird an das eben bezeichnete $\triangle ABC$ dadurch angeschlossen, daß die Winkel $DAB = 54^\circ 25' 35''$ und $DBA = 63^\circ 51' 40''$ gemessen werden. **a)** Berechne DA und DB . **b)** Berechne auf zweifache Weise DC . (Zwei Fälle je nach der Lage von D .)

82. Bei einer Landvermessung wurde eine Basis PQ von 170 m abgesteckt. Dann wurde ein Punkt A angeschlossen durch die Winkel $\sphericalangle APQ = 74,24^\circ$ und $\sphericalangle AQP = 35,81^\circ$, ein Punkt B durch die Winkel $\sphericalangle BPA = 42,34^\circ$ und $\sphericalangle BAP = 74,63^\circ$, ein Punkt C durch die Winkel $\sphericalangle CAB = 75,08^\circ$ und $\sphericalangle CBA = 46,42^\circ$. Berechne die Strecken **a)** AP , **b)** AB , **c)** BC , **d)** BP , **e)** BQ , **f)** CP .

83. Bei einer Landvermessung wird eine Kette von 5 Dreiecken aneinandergereiht, es seien die Dreiecke 1. PQA , 2. QAB , 3. ABC , 4. ACD , 5. CDE . Gegeben ist die Basis $PQ = 685,35$ m, gesucht (ohne Zwischenrechnung!) DE . Gemessen werden alle Dreieckswinkel. In der folgenden Tabelle bedeutet der erste Winkel eines Dreiecks denjenigen Winkel, der an der an erster Stelle genannten Dreiecksecke liegt, entsprechend beim zweiten und dritten Winkel.

$\triangle PQA$:	$75^\circ 23' 40''$,	$50^\circ 30' 20''$,	$54^\circ 6' 0''$;
$\triangle QAB$:	$65^\circ 35' 40''$,	$68^\circ 51' 0''$,	$45^\circ 33' 20''$;
$\triangle ABC$:	$59^\circ 48' 30''$,	$50^\circ 7' 30''$,	$70^\circ 4' 0''$;
$\triangle ACD$:	$39^\circ 42' 50''$,	$72^\circ 15' 10''$,	$68^\circ 2' 0''$;
$\triangle CDE$:	$47^\circ 28' 50''$,	$83^\circ 12' 20''$,	$49^\circ 18' 50''$.

Zeichne zunächst einen Lageplan. (Nach Hammer.)

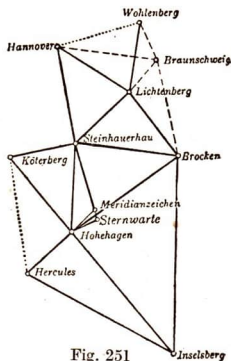


Fig. 251

Überlegungen

84. Beurteile die zur Berechnung der Dreiecke dienenden Sätze **a)** hinsichtlich ihrer praktischen Verwendbarkeit, wenn logarithmisch gerechnet wird, **b)** hinsichtlich der Eindeutigkeit der Ergebnisse.

85. Bringe die Tatsache, daß eine Dreiecksseite die Summe der Projektionen der beiden anderen auf sie ist, in einen trigonometrischen Satz.

86. Stelle eine Beziehung zwischen den Quadraten über den Seiten eines Parallelogramms und den Quadraten über seinen Diagonalen her.

87. Folgender Trugschluß führt zu dem Ergebnis, daß alle Dreiecke gleichschenkelig sind: Man verlängert die Seiten b und c des Dreiecks ABC (Fig. 252) über A hinaus, und zwar c um b bis D und b um c bis E . Aus dem Sinussatz, angewandt auf die Dreiecke BCE und BCD , folgt dann

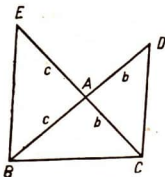


Fig. 252

$$\sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{b+c}{a} \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\sin(\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{b+c}{a} \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Hieraus ergibt sich $\sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \sin(\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha)$,

also $\beta = \gamma$.

88. Die Aufgabe: Wie weit kann ein Mensch (Augenhöhe $h = 1,50$ m) am Meeresstrand sehen, führt, wenn man den Winkel φ des zugehörigen Zentriwinkels durch den Erdradius R und h ausdrückt, zu der Beziehung

$\cos \varphi = \frac{R}{R+h}$. Die Logarithmentafel gibt nun dafür gar keinen Wert an, weil R und $R+h$ sich nur außerordentlich wenig unterscheiden. Überlege, wie man durch Einführung von $\sin \varphi$ den Wert genauer berechnen kann.

89. Wenn von einem Dreieck zwei Seiten und der der kleineren gegenüberliegende Winkel gegeben sind, so erhält man zwei, eine oder keine Lösung. Untersuche an geeigneten Beispielen, wie die einzelnen Fälle bei der trigonometrischen Berechnung zum Ausdruck kommen.

Neuntes Kapitel

Darstellung räumlicher Gebilde in einer Zeichenebene

§ 32. Punkt und Gerade

Darstellung des Punktes

1. Über einer quadratischen Fläche ist ein Zeltdach errichtet, d. h. ein pyramidenförmiger Körper, dessen Spitze über der Mitte der Grundfläche liegt. Entwirf ein Bild des Daches, indem du die Grundfläche als Zeichenebene benutzt und die Spitze senkrecht auf sie projizierst. Die Höhe der Spitze über

der Zeichenebene (die „Kote“) gib durch eine neben die Zeichnung gesetzte Strecke (Abstandsstrecke) an.

2. Über einer rechteckigen Fläche ist **a)** ein Pultdach, **b)** ein Satteldach, **c)** ein Walmdach errichtet. Entwirf ein Bild der Dächer, bezogen auf die Dachgrundfläche als Zeichenebene unter Beifügung der notwendigen Abstandsstrecken. — Erkünde dich nötigenfalls, wie die genannten Arten von Dächern aussehen.
3. Eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche steht auf der Zeichenebene. Zeichne ihr Bild, indem du neben ihrer Projektion auf die Zeichenebene noch die Höhe der Spitze über der Zeichenebene durch eine Strecke angibst.

Strecken

4. Lege durch das Zeltdach einen Schnitt, der zwei gegenüberliegende Seitenkanten (Grate) trifft. Konstruiere mit seiner Hilfe die Länge der Seitenkanten.
5. Von einer im Eintafelbild gegebenen Pyramide mit dreieckiger Grundfläche sind die Seitenkanten in wahrer Länge zu konstruieren.
6. Ein Satteldach ist durch Eintafelbild gegeben; konstruiere **a)** die Firstlänge, **b)** die Grate.
7. Auf einer quadratischen Säule sitzt ein Zeltdach auf. Entwirf von dem Turm ein Eintafelbild und konstruiere die Länge der Grate des Daches.
8. Ein Punkt ist durch Projektion und Abstandsstrecke gegeben. Konstruiere seinen wahren Abstand von einem beliebigen anderen Punkte der Zeichenebene. (Länge einer von der Spitze einer Stange irgendwohin gespannten Schnur).
9. Zwei Punkte sind durch Projektion und Abstandsstrecke gegeben. **a)** Konstruiere die Länge der durch sie begrenzten Strecke. **b)** Welche Besonderheit tritt ein, wenn die Strecke senkrecht zur Zeichenebene steht?
10. Ein Zeltdach ist **a)** über einem Quadrat, **b)** über einem gleichseitigen Dreieck, **c)** über einem regelmäßigen Sechseck zu konstruieren, für das die Länge der Grate vorgeschrieben ist. Konstruiere die Abstandsstrecke der Dachspitze.
11. Konstruiere die Höhe eines Kegels (gib die Abstandsstrecke der Spitze an), dessen Grundfläche und Seitenlinie gegeben ist.
12. Von einem durch Eintafelprojektion gegebenen **a)** Zeltdach mit quadratischer Grundfläche, **b)** beliebigem dreiseitigem Dach sind die Seitenflächen in wahrer Größe zu konstruieren.
13. **a)** Von einem Satteldach, **b)** von einem Walmdach, das durch Eintafelprojektion gegeben ist, sind die Seitenflächen zu konstruieren.
14. Konstruiere **a)** von einem Zeltdach, **b)** von einer Pyramide mit beliebiger dreiseitiger Grundfläche, **c)** von einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide, wobei in jedem Falle ein Eintafelbild vorausgesetzt ist, die Neigungen der Seitenkanten gegen die Zeichenebene.

Geraden

15. Gegeben sind zwei Punkte durch Projektion und Höhe über der Zeichenebene. Lege durch sie eine Gerade und bestimme **a)** den Punkt, in dem die Gerade die Zeichenebene durchsetzt (Spurpunkt), **b)** die Neigung der Geraden gegen die Zeichenebene. **c)** Welche Besonderheit tritt ein, wenn die Gerade senkrecht zur Zeichenebene steht.
16. Auf irgendeiner der Flächen eines drei- oder vierseitigen Daches ist irgendeine Gerade gezogen. Was läßt sich über die Lage ihres Spurpunktes sagen?
17. Ein Satteldach oder Walmdach hat **a)** einen zur Zeichenebene parallelen, **b)** geneigten First. Was läßt sich über den Spurpunkt des Firstes sagen?

Vermischte Aufgaben

18. Von einer durch Eintafeldarstellung gegebenen Pyramide ist durch eine Ebene, die die Seitenkanten halbiert, die obere Spitze abzuschneiden.
19. Gegeben ist eine Gerade durch zwei ihrer Punkte. Auf ihr ist ein Punkt zu bestimmen, der eine gegebene Höhe über der Zeichenebene hat.
20. Eine Strecke ist gegeben, deren Endpunkte die Abstände 3 cm und 8 cm von der Zeichenebene besitzen. Auf der Strecke sind die Punkte mit den Koten 4, 5, 6, 7 cm einzuzeichnen.
21. Gegeben ist ein Punkt durch Projektion und Abstandsstrecke und in der Zeichenebene eine Gerade, die durch die Projektion des Punktes geht. Es ist durch den Punkt eine Gerade zu legen, die mit der Zeichenebene den Neigungswinkel **a)** 45° , **b)** 30° hat, und die in der Zeichenebene gelegene Gerade schneidet. Der Spurpunkt der Geraden und ein beliebiger dritter Punkt der Geraden ist zu zeichnen.
22. Gegeben ist eine Strecke durch ihre Projektion und durch die Abstandsstrecken ihrer Endpunkte. **a)** Auf der Projektion, **b)** auf der Verlängerung der Projektion liegt ein Punkt. Welche Abstandsstrecke hat der Punkt auf der Strecke oder ihrer Verlängerung, der jenen Punkt als Projektion hat?
23. Ein Dreieck ist durch die Lage der Projektionen seiner Eckpunkte in der Zeichenebene und durch die Höhen der Eckpunkte über der Ebene gegeben. Konstruiere **a)** die Länge der Dreiecksseiten und danach die wahre Größe des Dreiecks, **b)** die Neigungen der drei Dreiecksseiten gegen die Tafelenebene. **c)** Konstruiere die Höhe des Schwerpunktes des Dreiecks über der Zeichenebene.

Überlegungen

24. Wir nahmen bisher die Abstandsstrecken (bzw. die Koten der Punkte) stets als positive Werte an. Untersuche, wie es mit der Ausdehnung des Begriffes auf negative Werte steht und wie sich dann die Konstruktion der wahren Länge von Strecken und ihrer Neigung gegen die Zeichenebene gestaltet.

25. Untersuche **a)** die Projektionen paralleler Geraden und **b)** die Geraden, deren Projektionen parallel sind.
26. Untersuche, wie man erkennt, ob zwei Geraden, deren Projektionen sich schneiden, sich wirklich schneiden oder windschief sind.

§ 33. Ebene Flächen

Neigungswinkel

1. **a)** Ein Tetraeder, **b)** ein halbes Oktaeder, **c)** ein beliebiges Zeltdach mit quadratischer Grundfläche steht auf der Zeichenebene. Bestimme im Falle **a)** und **b)** erst noch die Abstandsstrecke der Spitze. Die Seitenflächen sind um die Grundkanten in die Zeichenebene herumzuklappen. Zeichne in jedem Falle die Figur, die entsteht (Netz). Welchen Weg beschreibt die Projektion der Spitze beim Umlappen.
2. Konstruiere in einer Seitenfläche irgendeiner auf der Zeichenebene stehenden Pyramide die Senkrechte auf die Grundkante (die Fallinie) und bestimme den Winkel, den sie mit ihrer Projektion bildet — den Neigungswinkel der Fläche gegen die Zeichenebene.
3. Gegeben ist in der Zeichenebene ein Dreieck und in dessen Innern ein Punkt. In einer durch eine Abstandsstrecke gegebenen Höhe über diesem Punkt liegt die Spitze einer Pyramide, die das Dreieck zur Grundfläche hat. Konstruiere die Neigungswinkel aller drei Seitenflächen gegen die Zeichenebene.
4. Gegeben ist ein Satteldach. Konstruiere die Fallinien. Was ist über sie zu sagen?
5. Zeige, daß man immer den gleichen Neigungswinkel zwischen einer Ebene und der Zeichenebene erhält, welche Fallinie man auch benutzt.
6. Über einem gegebenen Rechteck ist **a)** ein Satteldach, **b)** ein Pultdach von vorgeschriebener Neigung α zu konstruieren (α ist durch Zeichnung gegeben). Bestimme die Abstandsstrecken der Punkte der Firstlinie.
7. **a)** Von dem in Fig. 248 im Querschnitt mit eingezeichneten Maßen dargestellten Bahndamm, **b)** von dem in Fig. 247 dargestellten Kanalquerschnitt ist eine Eintafeldarstellung zu konstruieren.
8. Wie sehen die Fallinien von Ebenen aus, die **a)** senkrecht, **b)** waagrecht zur Zeichenebene stehen?

Spur einer Ebene

9. Die Schnittgerade von Ebene und Zeichenebene heißt Spur. Zeige, daß alle in der Ebene liegenden Geraden, soweit sie nicht zur Zeichenebene parallel sind, ihre Spurpunkte in der Ebenenspur haben.
10. Eine Ebene ist durch ein Dreieck gegeben, von dem **a)** ein Punkt, **b)** kein Punkt in der Zeichenebene liegt. Konstruiere die Spurgerade der Ebene.
11. Entwirf die Eintafeldarstellung eines Obelisken, d. h. eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche, auf dessen kleinere Grundfläche

eine Pyramide aufgesetzt ist. Bestimme möglichst einfach die Spurgeraden der Pyramidenseitenflächen.

12. Ein Krüppelwalmdach entsteht aus einem Satteldach, wenn die Firstenden durch ebene Flächen, die jedoch nicht wie beim Walmdach bis zur Traufe herabreichen, schräg abgeschnitten werden. Bestimme die Spuren dieser Dreiecksflächen.
13. Zeige, daß die Falllinien einer Ebene senkrecht zur Spurgeraden liegen.
14. Gegeben ist eine Gerade in der Zeichenebene; konstruiere Punkte der beiden Ebenen, die durch die Gerade gehen und vorgeschriebene Neigung haben.
15. Ein Satteldach über gegebenem Rechteck mit vorgeschriebenem Neigungswinkel α ist **a)** zu einem Walmdach, **b)** zu einem Krüppelwalmdach, dessen Abschnittsflächen in halber Giebelhöhe ansetzen, umzukonstruieren, wobei die neuen Dachflächen den gleichen Neigungswinkel α haben sollen.

Spurparallelen oder Höhenlinien

16. Unter einer Höhenlinie versteht man eine solche in einer Fläche gelegene Linie, deren Punkte alle die gleiche Höhe über der Zeichenebene haben. Zeige an der Eintafeldarstellung **a)** eines Satteldaches, **b)** eines Walmdaches eine Höhenlinie.
17. Zeige, daß die Höhenlinien und nur diese ihren Projektionen parallel sind.
18. Gegeben ist **a)** eine dreiseitige Pyramide, **b)** ein Walmdach. Durch einen beliebigen Punkt einer Seitenkante sollen in den Dachflächen gelegene Höhenlinien gezogen werden und zu einem Höhenlinienzug rund um den Körper herum vervollständigt werden.
19. Warum nennt man die Höhenlinien einer Ebene auch Spurparallelen?
20. Welche Lage haben Falllinien und Höhenlinien einer Ebene zueinander?
21. Gegeben ist in Eintafeldarstellung **a)** irgendein Dach, **b)** eine beliebige Pyramide. In die Seitenflächen ist eine Schar von fünf äquidistanten Höhenlinien einzutragen.
22. Beweise, daß äquidistante Höhenlinien einer Ebene auch gleiche Höhenunterschiede haben.
23. Was ist über die Spurparallelen **a)** waagrecht, **b)** senkrecht zur Zeichenebene stehender Ebenen zu sagen?
24. Eine Ebene ist durch drei ihrer Punkte gegeben. **a)** Durch die drei Punkte sind Spurparallelen zu ziehen. — **b)** Durch irgendeinen Punkt des Dreiecksumfanges, **c)** des Dreiecksinnern ist die Spurparallele zu ziehen.
25. Wie steht es mit den Projektionen der Höhenlinien von Ebenen, die **a)** senkrecht, **b)** parallel zur Zeichenebene sind.
26. Untersuche, ob **a)** Höhenlinien, **b)** Projektionen von Höhenlinien einer Ebene sich schneiden können.

Schnitt zweier Ebenen

27. Zeige am Bilde **a)** einer Pyramide, **b)** eines Daches, daß sich Linien gleicher Höhe in zwei sich schneidenden Ebenen in der Durchschnittsgeraden treffen.

- 28.** Ein Dach mit beliebig vorgeschriebener dreieckiger Grundfläche hat lauter Dachflächen mit dem gegebenen Neigungswinkel α . Konstruiere das Dach.
Anmerk. Zeige und benutze die Tatsache, daß die Projektion der Durchschnittsgeraden zweier Ebenen mit gleicher Neigung gegen die Zeichenebene die Winkelhalbierende zwischen den Spuren der Ebenen ist.
- 29.** Von zwei aneinanderstoßenden Dachflächen eines rechteckigen Walmdaches sind ihre Spuren, und ihre beiden Neigungswinkel ($\alpha \neq \beta$) gegeben. Die Projektion des Gattes ist zu konstruieren; die anderen Gatte folgen durch Symmetrie.
Anmerk. Es genügt, zwei Spurparallelen von gleicher Höhe über der Zeichenebene zum Schnitt zu bringen.
- 30.** Von einem dreiseitigen Dach sind außer der Grundfläche die drei Neigungswinkel α , β und γ gegeben. Die Spitze ist zu konstruieren.

Vermischte Aufgaben

- 31. a)** Ein Würfel, **b)** ein Quader sind in möglichst einfacher Lage in Einta-felprojektion gegeben. Konstruiere eine Körperdiagonale, ihre wahre Länge, ihre Winkel mit den Kanten, ihren Neigungswinkel gegen die Zeichenebene.
- 32.** Eine Ebene ist durch drei ihrer Punkte in Einta-feldarstellung gegeben. Von einem vierten Punkte kennt man die Projektion. Bestimme seine Abstands-strecke. Erörtere den Fall, daß die Projektionen der drei Punkte in einer Geraden liegen.
- 33.** Zwei durch je drei Punkte gegebene Ebenen sind zum Schnitt zu bringen.

Überlegungen

- 34.** Untersuche die Einta-feldarstellung eines Mansardendaches.
- 35.** Wie sieht die Einta-feldarstellung eines ansteigenden, in einer ebenen Fläche aufgeschütteten Dammes aus?
- 36.** Wie sieht die Einta-feldarstellung eines horizontalen Weges in einem gleich-mäßig ansteigenden Gelände aus, wenn der Weg senkrecht zu den Höhen-linien verläuft?
- 37.** Eine Gerade steht senkrecht zu einer Ebene. Untersuche das Einta-felbild dieser räumlichen Figur.
- 38.** Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte, eine Ebene durch drei ihrer Punkte gegeben. Der Durchstoßungspunkt ist zu konstruieren.

§ 34. Gekrümmte Flächen

Böschungskörper

- 1.** Über einer horizontalen rechteckigen Grundfläche ist ein Böschungskörper errichtet, dessen Querschnitt **a)** ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel 45° , **b)** ein Halbkreis, **c)** irgendein Kreisabschnitt ist, der jedoch kleiner als ein Halbkreis ist. Konstruiere für alle drei Dämme jeweils eine Schar Höhenlinien von gleichem Höhenunterschied und vergleiche sie miteinander.
- 2.** In einer ebenen Fläche ist ein Graben gezogen, dessen Querschnitt **a)** ein gleichschenkliges Dreieck, **b)** ein gleichschenkliges Trapez, **c)** ein Halb-

- kreis ist. Gib eine Eintafeldarstellung des Grabens mit eingezeichneten Höhenlinien gleichen Niveauunterschiedes.
3. Über einer ebenen Fläche erhebt sich ein Böschungskegel, entstanden etwa dadurch, daß Sand oder Kies oder dgl. aufgeschüttet ist. Gib eine Eintafeldarstellung mit eingezeichneten Höhenlinien und eingezeichneten Seitenlinien.
 4. Von einem Böschungskegel ist der durch das Aufschüttungsmaterial bedingte Neigungswinkel und der Grundkreisradius bekannt. Bestimme die Spitzenhöhe.
 5. Von einem Böschungskegel ist Spitzenhöhe und Grundkreisdurchmesser bekannt. Bestimme den Neigungswinkel.
 6. In eine Ebene ist durch eine Sprengung ein kegelförmiger Krater eingegraben. Gib eine Eintafeldarstellung mit eingezeichneten Höhenlinien und Seitenlinien.
 7. Von einem Sprengkrater ist der durch das Bodenmaterial bedingte Neigungswinkel und die durch die Sprengladung bedingte Spitzentiefe gegeben. Konstruiere den Kraterdurchmesser.
 8. Auf der Zeichenebene ruht eine Halbkugel. Gib eine Eintafeldarstellung mit Höhenlinien gleichen Niveauunterschiedes und vergleiche das Bild mit demjenigen eines Kegels gleicher Grundfläche und Höhe.

Tangentialebenen

9. An einen Böschungskegel ist die Tangentialebene gelegt, die den Kegel in einer gegebenen Seitenlinie berührt. Zeichne die Spur der Tangentialebene und zeige, daß die Seitenlinie Falllinie der Ebene ist. Verwende die in Aufg. 9 gegebene Konstruktion zur Lösung folgender Aufgaben:
10. Gegeben ist ein Punkt durch Projektion und Abstandsstrecke. Es ist durch ihn eine Ebene zu legen, deren Spur von dem Punkt vorgeschriebenen Abstand hat und einer gegebenen in der Zeichenebene liegenden Geraden parallel läuft.
11. Gegeben ist ein Punkt durch Projektion und Abstandsstrecke. Es ist durch ihn eine Ebene zu legen, die vorgeschriebenen Neigungswinkel hat und deren Spur zu einer gegebenen, in der Zeichenebene liegenden Geraden senkrecht steht.

Überlegungen

12. Eine Halde (von Schutt, Schlacke oder Abraumgestein) entsteht dadurch, daß man von einer die Punkte P_1 und P_2 , die durch Projektion und Abstandsstrecke gegeben sind, verbindenden Strecke allseitig das Material herabschüttet. Die Halde ist also der Raum, den die Böschungskegel aller Punkte der Strecke einnehmen. Entwirf von der Halde ein Eintafelbild mit Höhenlinien unter der Annahme, daß a) P_1 und P_2 gleiche, b) verschiedene Höhe über der Bildebene haben und daß c) einer der Punkte in der Ebene selbst liegt. In jedem Falle ist der Böschungswinkel α gegeben.

13. Eine Halde entsteht als Summe der Böschungskegel einer horizontalen, in ihrem Abstände von der Bodenfläche bekannten **a)** rechteckigen, **b)** beliebig dreieckigen Fläche. Entwirf von der Halde ein Eintafelbild mit Höhenlinien. Der Böschungswinkel α ist gegeben.
- 14.¹⁾ Untersuche, wie man den Rauminhalt **a)** der in Aufg. 12a, **b)** der in Aufg. 13a beschriebenen Halde berechnen kann.
15. Lege durch das in Fig. 135 wiedergegebene Gelände eine Reihe von Profilen.

Zehntes Kapitel

Einführung in die Stereometrie

§ 35. Würfel und Quader

Räumliche Darstellungen des Würfels

1. Beschreibe einen Würfel **a)** hinsichtlich der Anzahl, **b)** der Gestalt, **c)** der Größe der auftretenden Kanten und Flächen.
2. Beschreibe eine Würfecke.
3. Stelle ein Kantenmodell des Würfels (aus Stäben) her.
4. Zeichne das Netz eines Würfels mit der Kantenlänge 2 cm, wobei du verschiedene Möglichkeiten des Zusammenhanges der Seitenflächen berücksichtigst. Schraffiere in jedem Netz diejenigen beiden Flächen, die du als Grund- und als Deckfläche ansiehst.
5. Zeichne das Netz eines Würfels auf starkes Papier und setze geeignete Klebefalze an. Dann stelle ein Flächenmodell des Würfels her.
6. Stelle ein körperliches Modell des Würfels (aus Plastilin, Kartoffel oder dgl.) her und lege einen Diagonalschnitt durch den Körper. Wieviel verschiedene Diagonalschnitte sind möglich? Ritze in den Diagonalschnitt eine Körperdiagonale ein.
7. Deute in einem Kantenmodell (Aufg. 3) des Würfels alle Raumdiagonalen durch Fäden an. Wieviel sind es?
8. Ziehe auf der Oberfläche eines Flächenmodells (Aufg. 5) vom Würfel alle Flächendiagonalen. Wieviel sind es?
9. Beweise an einem geeigneten Modell die Gleichheit **a)** aller Flächendiagonalen, **b)** aller Raumdiagonalen des Würfels.

Ebene Darstellung des Würfels

10. Gib in dem umstehenden ebenen Bild eines Würfels (Fig. 253) die Kanten und ihren Verlauf (z. B. AB verläuft von vorn oben links nach ...) in einer Tabelle an.

1) Die Berechnung einfacher Körperformen wird hier vorausgesetzt.

11. Untersuche, welche Würfelkanten in dem Schrägbild in wirklicher Größe und welche in Verkürzung erscheinen.
12. Untersuche, auf welchen Teil der wirklichen Länge die verkürzt gezeichneten Kanten verkleinert sind. Welche Lage haben alle im Bilde verkürzt gezeichneten Kanten des räumlichen Würfels zur Zeichenebene?
13. Untersuche, welche Würfelkanten im Schrägbild des Würfels dieselbe Richtung haben wie im räumlichen Würfel, also nur parallel verschoben sind.
14. Untersuche, welche Lage die verkürzt gezeichneten Kanten in der Zeichnung und im räumlichen Würfel (in bezug auf die Zeichenebene) haben.
15. Zeichne einen Würfel mit der Kante 4 cm als Schrägbild, wobei die Verkürzung $\frac{1}{2}$ ist, während der Neigungswinkel der in Verkürzung gezeichneten Kanten gegen die nach rechts gerichtete Horizontale a) 0° , b) 30° , c) 45° , d) 60° , e) 90° , f) 120° , g) 135° , h) 150° , i) 180° ist. Gib an, welche dieser verschiedenen Abbildungen die beste Anschauung von dem Würfel gibt.
16. a) bis i) Löse die Aufg. 15 für den Fall, daß die Verkürzung der zur Zeichenebene senkrechten Kanten $\frac{1}{2}$ ist.
17. Zeichne einen Würfel mit einer Kante von 3 cm im Schrägbild, wobei der Verzerrungswinkel 30° und die Verkürzung nacheinander a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{1}{5}$, e) $\frac{1}{6}$, f) 1, g) 2 ist. Welche Zeichnungen sind am schnellsten auszuführen, welche geben die beste Anschauung vom Würfel?
18. a) bis g) Löse die Aufg. 17 für den Fall eines Verzerrungswinkels von 45° .
19. Zeichne einen Würfel in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 45°) und zeichne die Flächendiagonalen hinein.
20. Zeichne einen Würfel in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 30°) und zeichne die Körperdiagonalen hinein.
21. Projiziere einen Würfel mit der Kante 3 cm auf seine Grundebene durch Strahlen, die senkrecht zu dieser Ebene stehen. Wie sieht der Grundriß aus?
22. Projiziere einen Würfel mit der Kante 3 cm auf eine seiner Seitenflächen durch Strahlen, die senkrecht zu dieser Ebene stehen. Wie sieht der Aufriß aus?
23. In Fig. 254 ist ein Würfel in Grundriß und Aufriß gezeichnet. Zeichne in gleicher Weise einen ebenso orientierten Würfel mit der Kante 4 cm in Grundriß und Aufriß und trage in beide Projektionsbilder die Lage der 8 Würfecken durch Buchstaben oder Ziffern ein.
24. Zeichne einen Würfel von 5 cm Kantenlänge in Grundriß und Aufriß und trage a) die sämtlichen Flächendiagonalen, b) die sämtlichen Raumdiagonalen in die Projektionen ein.

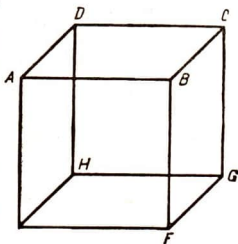


Fig. 253

25. Zeichne einen Würfel von 3 cm Kantenlänge in Grundriß und Aufriß und trage die Lage eines Diagonalschnittes in die Projektionen ein.
26. Ein Würfel steht auf der Grundrißebene so, daß eine Kante parallel der (Projektions-)Achse ist und 1 cm von ihr absteht. Zeichne das Bild des Würfels, wenn seine Kantenlänge 3,5 cm beträgt.
27. Zeichne den in Aufg. 26 genannten Würfel, nachdem du ihn ganz in den von Grundriß- und Aufrißebene gebildeten Winkel hineingeschoben hast.

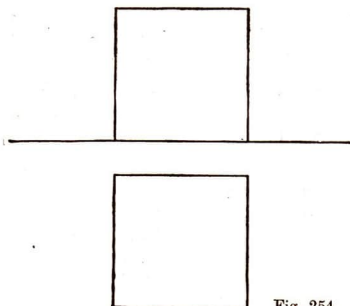


Fig. 254

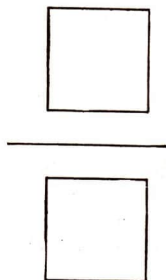


Fig. 255

28. Ein Würfel mit Kanten von 4 cm Länge steht auf der Grundrißebene schräg zur Achse. Zeichne Grundriß und Aufriß von ihm.
29. Beschreibe genau die Lage des a) in Fig. 255, b) in Fig. 256 in Grundriß und Aufriß dargestellten Würfels in bezug auf die Projektionsebenen.
30. Gegeben ist die Länge der Flächendiagonalen eines Würfels. Konstruiere a) ein Schrägbild, b) eine Grundriß-Aufrißdarstellung des Würfels.
31. Gegeben ist die Länge der Raumdiagonalen eines Würfels. Konstruiere a) ein Schrägbild, b) eine Grundriß-Aufrißdarstellung des Würfels.

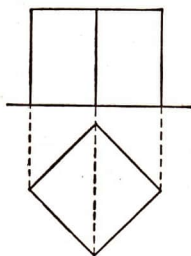


Fig. 256

Berechnung des Würfels

32. Berechne die Oberfläche eines Würfels, wenn die Kanten die Länge a) 5 cm, b) 17 cm, c) 1,4 m, d) $\frac{2}{3}$ m, e) 0,13 m, f) 2,4 cm haben. g) Zeige, daß sich für die Oberfläche eines Würfels mit der Kante a ergibt

$$O = 6a^2.$$

33. Berechne den Inhalt eines Würfels, wenn die Kanten die Länge a) 4 cm, b) 19 cm, c) 1,1 cm, d) $\frac{1}{2}$ m, e) 0,35 m, f) 1,34 cm haben. g) Zeige, daß sich für den Rauminhalt eines Würfels mit der Kante a ergibt

$$V = a^3.$$

34. a) Wieviel cm^3 hat ein dm^3 ? b) Wieviel cm^3 hat ein m^3 ?
 c) Wieviel l hat ein m^3 ? d) Wieviel hl hat ein m^3 ?
 e) Wieviel mm^3 hat ein cm^3 ? f) Wieviel mm^3 hat ein dm^3 ?
 g) Wieviel mm^3 hat ein m^3 ?
35. Berechne die Flächendiagonalen eines Würfels mit der Kantenlänge a) 1 cm, b) 3 cm, c) 13 cm, d) 1,5 m, e) a.
36. a) bis e) Berechne die Größe des Diagonalschnittes eines Würfels mit den in Aufg. 35 genannten Kanten.
37. Berechne die Körperdiagonale eines Würfels mit den Kanten a) 7 cm, b) 1 m, c) 36 cm, d) $1\frac{1}{2}$ m, e) a.
38. Berechne die Kante eines Würfels, dessen Oberfläche a) 144 cm^2 , b) 1 m^2 , c) f ist.
39. Berechne Inhalt und Körperdiagonale eines Würfels, dessen Oberfläche a) 217 cm^2 , b) 1 dm^2 , c) f ist.
40. Berechne Kante und Oberfläche eines Würfels mit dem Inhalt a) 729 cm^3 , b) $1,728 \text{ m}^3$, c) 2 m^3 , d) a. e) Wie groß muß die Kante eines hohlen Würfels sein, dessen Inhalt a) 1 l, b) 1 hl faßt?
41. Berechne Oberfläche und Volumen eines Würfels, wenn gegeben ist a) die Körperdiagonale, b) die Flächendiagonale, c) der Diagonalschnitt.

Praktische Anwendungen

42. Wie schwer ist ein Würfel von der Seitenlänge 35 cm a) aus Kork (spez. Gewicht 0,24), b) aus Silber (spez. Gewicht 10,47), c) aus Gold (spez. Gewicht 19,26)?
43. Wie groß ist ein Würfel a) von Kork (spez. Gew. 0,24), b) von Blei (spez. Gew. 11,44), c) von Gold (spez. Gew. 19,26), d) von Aluminium (spez. Gew. 2,59), der 1 dz wiegt?

Funktionalbetrachtungen

44. Stelle a) die Oberfläche, b) den Inhalt, c) die Länge der Flächendiagonale, d) die Länge der Raumdiagonale (in verschiedenen Farben in einem rechtwinkligen Koordinatensystem) graphisch dar.

Die folgenden Aufgaben sind, soweit nicht anders angegeben, rechnerisch und auf Grund graphischer Betrachtungen zu beantworten:

45. Die Oberfläche eines Würfels mit der Kante a soll ohne Änderung der Gestalt verdoppelt werden. a) Wie groß ist die Kante des neuen Würfels? b) Konstruiere die Kante des neuen Würfels mit Zirkel und Lineal, wenn die des alten gegeben ist.
46. Der Inhalt eines Würfels mit der Kante a soll ohne Änderung der Gestalt verdoppelt werden. a) Wie groß ist die Kante des neuen Würfels? b) Erörtere, welche Schwierigkeiten auftreten, wenn man die neue Kante aus der alten mit Zirkel und Lineal konstruieren will.

47. **a)** Die Kanten, **b)** die Körperdiagonalen, **c)** die Oberflächen zweier Würfel stehen im Verhältnis $m : n$. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte?
48. **a)** Die Inhalte, **b)** die Oberflächen, **c)** die Körperdiagonalen zweier Würfel stehen im Verhältnis $m : n$. In welchem Verhältnis stehen die Kanten?

Räumliche Darstellung des Quaders

49. Beschreibe einen Quader **a)** hinsichtlich der Zahl, **b)** der Gestalt, **c)** der Größe der auftretenden Kanten und Flächen.
50. Beschreibe eine Quaderecke (Zahl und gegenseitige Lage der von der Ecke ausgehenden Kanten).
51. Stelle ein **Kantenmodell** des Quaders (aus Stäben) her.
52. Zeichne das **Netz** eines Quaders mit den Kanten 3 cm, 4 cm, 5 cm. Berücksichtige dabei die verschiedenen Möglichkeiten für den Zusammenhang der Seitenflächen. Schraffiere in jedem Netz diejenigen beiden Flächen, die du als Grund- und als Deckfläche ansiehst.
53. Zeichne das Netz eines Quaders mit drei verschiedenen Kanten und setze geeignete Klebefalze an. Dann stelle ein **Flächenmodell** des Quaders her.
54. Stelle ein körperliches Modell eines Quaders (aus Plastilin, Kartoffel oder dgl.) her.
55. Zeichne auf einem Flächenmodell des Quaders (Aufg. 53) alle Flächen-diagonalen ein. **a)** Wieviel sind es? **b)** Was ist über ihre Länge zu sagen?
56. Deute in einem Kantenmodell des Quaders alle Raumdiagonalen durch Fäden an. **a)** Wieviel sind es? **b)** Was ist über ihre Länge zu sagen?
57. Lege Diagonalschnitte durch den Körper. Was ist über deren Gestalt und Größe zu sagen?
58. Beweise, daß sich die Körperdiagonalen alle in einem Punkte schneiden.
59. Konstruiere nach den einer fertigen Streichholzschachtel entnommenen Maßen Netze (mit Klebefalzen) für die beiden Teile der Streichholzschachtel.
60. Miß die drei Ausdehnungen **a)** eines Kalenderblockes, **b)** dieses Buches ohne die Pappschalen und bestimme danach die drei Ausdehnungen eines einzelnen Blattes.

Ebene Darstellung des Quaders

61. Zeichne ein Bild des Quaders mit den Kanten 3 cm, 4 cm, 5 cm in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 45°) so, daß **a)** das Rechteck mit den Kanten 3 cm, 4 cm, **b)** das Rechteck mit den Kanten 4 cm, 5 cm, **c)** das Rechteck mit den Kanten 3 cm, 5 cm der Grundfläche ist.
62. Miß die Kanten einer Streichholzschachtel und stelle dann die Schachtel in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 30°) dar.
63. Stelle eine Zigarrenkiste im Maßstab 1 : 3 in schräger Parallelprojektion dar. Wähle die Projektion so, daß das Bild möglichst anschaulich wird.

64. Stelle eine quadratische Säule (Seite der Grundfläche 4,8 cm, Höhe 8 cm) in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 30°) dar.
65. Zeichne einen Quader in Grundriß und Aufriß. Der Quader steht mit einem Rechteck, das die Seiten 4 cm und 2,5 cm hat, auf der Grundrißebene; die 4 cm lange Kante ist parallel der Achse und 1 cm von ihr entfernt. Die Höhe des Quaders ist 3,5 cm.
66. Stelle einen Ziegelstein in möglichst zweckmäßiger Lage im Maßstab 1 : 4 in Grundriß und Aufriß dar.
67. Ein Quader mit den Kanten $a = 3,2$ cm, $b = 4,8$ cm, $c = 6,4$ cm steht so mit dem aus b und c gebildeten Rechteck auf der Grundrißebene, daß die Diagonale der Grundfläche (wie lang ist sie?) der Achse parallel und 5 cm von ihr entfernt liegt. Zeichne den Quader in Grund- und Aufriß.
68. Eine quadratische Säule, deren Grundfläche $20,25$ cm², deren Höhe 7 cm ist, ist möglichst praktisch in Grundriß und Aufriß darzustellen.
69. In einem Quader mit den Kanten 3 cm, 4 cm, 5 cm sind die Körperdiagonalen zu zeichnen. Der Quader ist **a)** in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 30°), **b)** in Grundriß und Aufriß zu zeichnen.
70. Konstruiere erst Grundriß und Aufriß, dann ein Schrägbild von einem Quader, wenn gegeben ist (Kanten a, b, c ; d_1 die Diagonale des Rechtecks mit den Seiten b und c , d_2 die des Rechtecks aus a und c , d_3 die des Rechtecks aus a und b ; d_k die Körperdiagonale):
- | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|
| a) a, b, d_1 ; | b) a, b, d_k ; | c) d_1, d_2, b ; |
| d) a, d_3, d_k ; | e) d_1, d_2, d_3 ; | f) d_1, d_2, d_k . |

Berechnung des Quaders

71. Berechne die Oberfläche eines Quaders, wenn die Kanten die folgenden Längen haben:
- | | |
|----------------------------|---|
| a) 7 cm, 8 cm, 10 cm; | b) $2\frac{1}{2}$ cm, $3\frac{1}{4}$ cm, $5\frac{3}{8}$ cm; |
| c) 1,15 m, 0,87 m, 0,75 m; | d) a, b, c ; |
| e) $a, 2a, 3a$; | f) a, a, b (quadratische Säule). |
72. Zeichne in einen Quader mit den Kanten 2 cm, 3 cm und 4 cm, der in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 45°) dargestellt ist, die den Inhalt des Quaders zusammensetzenden Kubikzentimeter ein.
73. Berechne den Inhalt eines Quaders, wenn die Kanten die folgenden Längen haben:
- | | |
|----------------------------|---|
| a) 5 cm, 7 cm, 9 cm; | b) $3\frac{3}{4}$ cm, $5\frac{1}{2}$ cm, $7\frac{1}{8}$ cm; |
| c) 1,03 m, 2,45 m, 0,67 m; | d) a, b, c ; |
| e) $a, 2a, \frac{a}{2}$; | f) a, a, b (quadratische Säule). |
74. a) bis f) Berechne von den in Aufg. 73 a) bis f) genannten Quadern die sämtlichen Flächendiagonalen.
75. Zeige arithmetisch (durch Rechnung), daß die Körperdiagonalen eines Quaders sämtlich gleich sind.

76. a) bis f) Berechne von den in Aufg. 71 a) bis f) genannten Quadern die Körperdiagonalen.

In den folgenden Aufgaben bedeuten a , b und c die Kanten, d_1 die Diagonale des von b und c gebildeten, d_2 die Diagonale des von a und c gebildeten, d_3 die Diagonale des von a und b gebildeten Rechtecks, d_k die Körperdiagonale, O die Oberfläche, V den Inhalt

Gegeben:

Gesucht:

- | | | | |
|-----|------------------|---------------|-----------|
| 77. | $a, b, d_k;$ | a) $c;$ | b) $V.$ |
| 78. | $a, b, d_1;$ | a) $c;$ | b) $O.$ |
| 79. | $a, b, d_2;$ | a) $d_3;$ | b) $d_k.$ |
| 80. | $d_1, d_2, d_k;$ | a) $a, b, c;$ | b) $d_3.$ |
| 81. | $a, b, V;$ | a) $c;$ | b) $O.$ |
| 82. | $a, b, O;$ | a) $c;$ | b) $V.$ |
83. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie 4 : 5 : 6. Die Oberfläche ist 592 cm^2 . Wie groß sind die Kanten?
84. a) Die Oberfläche, b) der Inhalt eines Quaders mit den Kanten a , b und c soll ohne Änderung der Gestalt (d. h. hier des Kantenverhältnisses) verdoppelt werden. Wie groß sind die neuen Kanten zu wählen?
85. Die entsprechenden Kanten zweier Quader stehen im Verhältnis $m : n$, d. h. es ist $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = m : n$, wenn a_1, b_1, c_1 die Kanten des ersten, a_2, b_2, c_2 die Kanten des zweiten Quaders sind. In welchem Verhältnis stehen a) die Oberflächen, b) die Inhalte der beiden Quader?

Praktische Anwendungen

86. Miß die Kanten eines Ziegelsteines und berechne, wieviel Ziegelsteine auf einen km^3 gehen.
87. Wie schwer ist a) ein Goldklumpen (spez. Gewicht 19,26), b) ein Korkstück (spez. Gewicht 0,24) von der Größe einer Streichholzschachtel?
88. In einem Schulgebäude sind Klassenzimmer mit 45 m^2 und 62 m^2 Grundfläche und 4,20 m Höhe. Die großen Zimmer sind für Klassen bis zu 50, die kleinen für Klassen bis zu 30 Schülern bestimmt. Wieviel m^3 Luft kommen auf jeden Schüler in beiden Zimmerarten im Mindestfall?
89. a) Wie groß ist der Raum eines Zimmers von 7,45 m Länge, 5,50 m Breite und 4,25 m Höhe? b) Wieviel Schüler können darin unterrichtet werden, wenn auf jede Person 5 m^3 Luftraum gerechnet wird?
90. Die Aula einer Schule ist 24 m lang, 11 m breit und 7,50 m hoch. Wieviel wiegt die in der Aula befindliche Luftmenge? Spez. Gewicht der Luft 0,001293.
91. Eine Marmorplatte ist 1,30 m lang, 0,80 m breit und 4 cm dick. Wie schwer ist sie? Spez. Gewicht des Marmors 2,65.

92. Die Goldschläger sind imstande, 1 mm^3 Gold durch Hämmern in eine Goldhaut von 100 cm^2 zu verwandeln. Wie dick ist eine solche Goldhaut?
93. Ein quadratisches Stück Eisenblech mit $10,5 \text{ cm}$ Seitenlänge wiegt 53 g . Das spez. Gewicht ist $7,8$. Wie dick ist das Blech?
94. Ein für den Bau benutzter quaderförmig zugehauener Sandsteinklotz hat folgende drei Ausmessungen: $0,85 \text{ m}$, $0,43 \text{ m}$, $0,35 \text{ m}$. Wie schwer ist er? (Spez. Gewicht $2,35$.)
95. Ein Balken soll $10\frac{1}{2} \text{ m}$ lang, 20 cm dick und ebenso breit sein. Wieviel wird er schwerer, wenn man ihn aus Buchenholz statt aus Tannenholz wählt? (Spez. Gewicht von Buchenholz $0,75$, von Tannenholz $0,56$.)
96. Die Abmessungen eines quaderförmigen Kastens sollen sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. Wie groß müssen die Kanten sein, wenn der Kasten 1 m^3 fassen soll?

Trigonometrische Berechnungen

97. Bestimme den Winkel, den die Körperdiagonale eines Würfels **a)** mit den Kanten, **b)** mit den Flächen bildet.
98. Bestimme die Winkel, die eine Körperdiagonale eines Quaders mit den Kanten a , b und c bildet. Beispiel: $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $d = 4 \text{ cm}$.
99. Zeige, daß die Summe der Quadrate der Kosinus der drei Winkel, die die Körperdiagonale eines Quaders mit den drei Kanten bildet, den Wert 1 hat.
100. Leite aus der in Aufg. 99 gefundenen Beziehung eine Gleichung für den Winkel zwischen Kante und Körperdiagonale des Würfels ab.
101. Berechne die Winkel, die eine Körperdiagonale eines Quaders mit den Kanten 4 cm , 5 cm und 6 cm mit den drei in einem ihrer Endpunkte zusammenstoßenden Flächen bildet.
102. Berechne für die schräge Parallelprojektion **a)** $\frac{1}{2}$, 45° , **b)** $\frac{1}{3}$, 60° , **c)** $\frac{1}{4}$, 90° den Winkel, den die projizierenden Strahlen mit der Projektion bilden.

Geometrische Überlegungen

103. Bringe das assoziative Gesetz der Multiplikation

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

usf. in Beziehung zur Formel für den Quaderinhalt.

104. Aus einem rechteckigen Blech mit den Seiten 8 cm und 12 cm werden an den Ecken Quadrate mit der Seite a herausgeschnitten. Dann wird das Blech längs der in Fig. 257 punktiert gezeichneten Strecken zu einem oben offenen Kasten umbogen. Verfolge, wie sich der Inhalt dieses Kastens ändert, wenn a nacheinander die Werte 1 cm , 2 cm usf. (bis?) durchläuft.

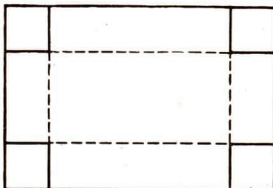


Fig. 257

105. Eine gefüllte Streichholzdose ist ein Quader, in dem sich andere Quader mit meist quadratischer Grundfläche befinden. Stelle die Ausmaße fest und erörtere die Zahl der Streichhölzer in einer Dose in theoretischer und praktischer Hinsicht.

106. Gib eine geometrische Veranschaulichung der Formeln

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

§ 36. Das Prisma

Das Netz des geraden Prismas

- 1.** Fertige ein Kantenmodell eines geraden Prismas an, dessen Grundfläche **a)** ein gleichseitiges, **b)** ein rechtwinkliges Dreieck ist.
- 2. a)** Zeichne das Netz eines geraden Prismas von der Höhe $h = 7$ cm, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 3 cm ist. **b)** Stelle aus dem Netz ein Flächenmodell her.
- 3. a)** Zeichne das Netz eines geraden Prismas von der Höhe 2 cm, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 3 cm und 4 cm ist. **b)** Stelle danach ein Flächenmodell her.
- 4. a)** Zeichne das Netz eines geraden Prismas von der Höhe 8 cm, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 2 cm ist. **b)** Stelle danach ein Flächenmodell her.
- 5.** Das Netz eines geraden dreiseitigen Prismas mit der Höhe h , dessen Grundfläche die Seiten a , b und c und die Winkel α , β und γ hat, ist zu zeichnen, wenn gegeben ist:

a) a, b, c, h ; **b)** a, b, γ, h ; **c)** a, β, γ, h .
- 6.** Das Netz eines vierseitigen, geraden Prismas ist zu zeichnen, wenn die Höhe h gegeben ist, und wenn die Grundfläche **a)** ein Parallelogramm mit den Seiten a und b und einem Winkel α , **b)** ein Rhombus mit den Seiten a und einem Winkel α , **c)** ein beliebiges Viereck mit den Seiten a, b, c, d und einem Winkel α ist.
- 7.** Das Netz eines geraden Prismas mit der Höhe h ist zu zeichnen, dessen Grundfläche **a)** ein regelmäßiges Fünfeck, **b)** ein regelmäßiges Achteck mit der Seite a ist.
- 8.** Beweise, daß die Seitenflächen eines geraden Prismas Rechtecke sind.
- 9.** Zeige, daß Grundfläche und Deckfläche eines Prismas kongruent sind.
- 10.** Beschreibe einen ebenen Schnitt durch das Prisma, der **a)** parallel zu einer Seitenkante, **b)** parallel zu der Grundfläche gelegt ist.

Das Schrägbild des geraden Prismas

11. Ein Quadrat mit der Seite $a = 5$ cm liegt senkrecht zur Bildfläche und eine Seite des Quadrats ist ihr parallel. Stelle das Quadrat in schräger Parallelprojektion dar ($\frac{1}{2}$, 45°).
12. Stelle ein senkrecht zur Bildebene gelegenes, mit einer Seite in der Bildebene liegendes Rechteck mit den Seiten 4 cm und 6 cm in schräger Parallelprojektion dar: a) $\frac{1}{2}$, 45° , b) $\frac{1}{2}$, 60° .
13. a) Ein Quadrat, das senkrecht zur Bildebene liegt, und zwar mit einer Diagonale in der Bildebene, ist in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 60°) darzustellen. Ebenso b) ein gleichschenkliges Dreieck, das mit der Höhe, c) ein beliebiges Dreieck, das mit einer Seitenhalbierenden, d) ein Rhombus, der mit einer Diagonale in der Bildebene liegt.
14. Zusatzfragen zu Aufg. 13: Zu a) Was für eine Figur entsteht in der Zeichenebene? Zu b) Was für eine Gerade ist die Schnittgerade von Bild- und Gegenstandsebene in der Figur der Bildebene? Zu c) Ist die Schnittgerade von Bild- und Gegenstandsebene wieder Seitenhalbierende im Bilddreieck? Zu d) Was für eine Figur entsteht in der Zeichenebene?
15. Zeichne ein beliebiges Dreieck und in der Dreiecksebene eine Gerade, die a) das Dreieck schneidet, b) das Dreieck nicht schneidet. Drehe das Dreieck um die Gerade als Achse um 90° und entwirf jetzt von dem Dreieck in der neuen Lage ein Schrägbild in der ursprünglichen Ebene.
16. Löse die Aufg. 15 für ein beliebiges Viereck.
17. a) Ein gleichseitiges Dreieck, b) ein Quadrat, c) ein regelmäßiges Sechseck, dessen Ebene senkrecht zur Bildebene liegt, soll in je zwei verschiedenen Lagen in schräger Parallelprojektion dargestellt werden.
18. Ein gerades Prisma von der Höhe $h = 6$ cm mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche (Seitenlänge $a = 3$ cm) ist in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 30°) darzustellen und zwar a) so, daß eine Grundkante parallel, b) so, daß eine Grundkante senkrecht zur Bildebene steht. Die Grundfläche des Prismas liegt senkrecht zur Bildebene.
19. Zeichne das Schrägbild eines Würfels so, daß eine Diagonalebene der Bildebene parallel ist.
20. Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche a) ein Rechteck mit den Seiten a und b , b) ein Parallelogramm mit den Seiten a und b und dem Winkel α , c) ein regelmäßiges Sechseck ist, ist in schräger Parallelprojektion darzustellen.
21. a) bis c) Von den dreiseitigen Prismen, deren Netze in Aufg. 5 a) bis c) konstruiert wurden, sind Schrägbilder zu entwerfen.
22. Zeige, daß Grund- und Deckfläche eines in schräger Parallelprojektion dargestellten Prismas auch in der Zeichnung durch kongruente Figuren wiedergegeben werden.

23. Von einem Prisma, dessen Seitenkanten parallel zur Bildebene stehen, kennt man die Höhe und das Schrägbild der Grundfläche. Zeige, daß dann das vollständige Schrägbild konstruiert werden kann.

Grundriß und Aufriß des geraden Prismas

24. Ein gerades Prisma mit der Höhe $h = 7$ cm, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a ist, steht auf der Grundrißebene. Zeichne Grundriß und Aufriß, wenn das Prisma so steht, daß eine Grundkante a) parallel der Achse, b) senkrecht zur Achse, c) schräg zur Achse, und zwar um 45° geneigt liegt.
25. a) bis c) Konstruiere Grundriß und Aufriß der Prismen, deren Netze in Aufg. 5a) bis c) gezeichnet wurden. Beschreibe in jedem Falle vollständig die Lage, in der du die Prismen gezeichnet hast.
26. Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche a) ein regelmäßiges Sechseck, b) ein regelmäßiges Fünfeck ist, ist in Grundriß und Aufriß in möglichst zweckmäßiger Lage zu zeichnen. Gegeben Sechseckseite bzw. Fünfeckseite $a = 3$ cm, Prismenhöhe $h = 2$ cm.
27. Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Sechseck ist, liegt mit einer Seitenfläche so auf der Grundrißebene, daß die Seitenkanten des Prismas der Achse parallel sind. Zeichne den Körper in Grundriß und Aufriß. Zeichne den Seitenriß.

Darstellung des schiefen Prismas

28. a) Von einem schiefen Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, stelle ein Kantenmodell her. b) Entsprechende Ecken zweier kongruenter Quadrate verbinde durch gleichlange Schnüre, dann hast du ein bewegliches Prismenmodell. — Wie müssen die Quadrate liegen, damit tatsächlich ein schiefes Prisma durch das Modell dargestellt wird?
29. Untersuche die Gestalt der Seitenflächen des schiefen Prismas mit quadratischer Grundfläche. Wann sind zwei Flächen Rechtecke, wann alle Parallelogramme?
30. Sind auch beim schiefen Prisma Grund- und Deckfläche kongruent? (Grund.)
31. Ein schiefes Prisma hat ein Quadrat mit der Seite 4 cm als Grundfläche. Zwei von den Seitenflächen sind Parallelogramme mit einem Winkel von 60° , die beiden andern sind Rechtecke. Die Höhe des Prismas beträgt 6 cm. Zeichne ein Netz des Prismas.
32. Zeichne das in Aufg. 31 genannte schiefe Prisma in geeigneter Lage in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 45°).
33. Zeichne ein beliebig geneigtes Prisma, dessen Grundfläche a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Sechseck ist, in Grundriß und Aufriß.

Berechnung des geraden Prismas

34. Berechne den Mantel (d. h. die Summe der Seitenflächen) eines geraden Prismas mit der Höhe h und a) mit einer dreiseitigen Grundfläche (gegeben

die Seiten a , b und c), **b**) mit einem Parallelogramm als Grundfläche (gegeben die Seiten a , b), **c**) mit einem regelmäßigen Sechseck mit der Seite a als Grundfläche.

- 35. a)** Zeige, daß der Mantel eines geraden Prismas mit der Höhe h , dessen Grundfläche den Umfang u hat,

$$M = h \cdot u$$

ist. **b)** Untersuche, ob die Formel auch für das schiefwinklige Prisma gilt.

- 36.** Berechne die Oberfläche eines dreiseitigen Prismas mit der Höhe $h=5$ cm, wenn die Grundfläche **a)** ein gleichseitiges Dreieck mit der Kante 3 cm ist, **b)** die Kanten $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm hat, **c)** eine Seite $a = 5$ cm und die zugehörige Dreieckshöhe 4 cm hat.
- 37. a)** Berechne den Rauminhalt eines geraden Prismas von der Höhe h , dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a und b ist. **b)** Zeige, daß allgemein der Inhalt V von geraden Prismen

$$V = g \cdot h$$

ist, wo g den Inhalt der Grundfläche angibt.

- 38. a) bis c)** Berechne von den in Aufg. 36 genannten dreiseitigen Prismen den Rauminhalt.
- 39.** Die Maße des Querschnittes **a)** eines T-Eisens, **b)** eines Doppel-T-Eisens sind aus den Fig. 143 und 145 zu entnehmen. Wie schwer ist eine Schiene von 4 m Länge (spez. Gewicht des Eisens 74)?
- 40.** Wie groß ist der Bodenraum einer Scheune mit Giebeldach von 16,5 m Länge, 11,2 m Breite und 4,5 m Höhe?
- 41.** Ein rechteckiger Platz 35 m $\times$ 12,5 m ist in der Richtung der längeren Seite geneigt, so daß die eine kürzere Seite 65 cm höher liegt als die andere. Der Platz soll horizontal gemacht werden. Wieviel m³ Erde sind abzufahren, wenn man den Platz so hoch legt, wie die untere kürzere Seite?

Berechnung des schiefen Prismas

- 42.** Berechne die Oberfläche des schiefen Prismas, das in Fig. 258 im Maßstab 1:5 in Grundriß und Aufriß dargestellt ist.
- 43.** In Fig. 259 ist ein schiefes Prisma mit der Höhe h durch Ebenen, die in gleichem Abstand parallel zur Grundfläche liegen, geschnitten, und die Teilkörper sind durch Quader mit gleicher Grundfläche und Höhe ersetzt. **a)** Gib an Stelle des Schrägbildes eine Darstellung in Grundriß und Aufriß. **b)** Was ist über den Querschnitt zu sagen; wie groß ist die Höhe der Teilkörper, wenn es deren n gibt?
- 44.** Entwirf von dem treppenförmig aussehenden Körper, der in Fig. 259 nicht in schräger Parallelprojektion (sondern in Zentralperspektive) dargestellt ist, ein Schrägbild.

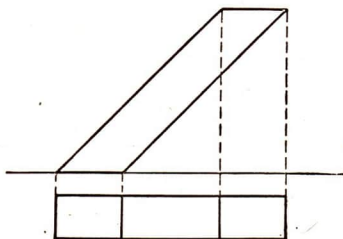


Fig. 258

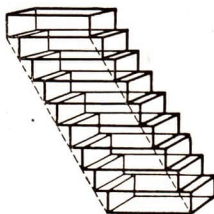


Fig. 259

45. Berechne **a)** den Inhalt eines Teilkörpers, **b)** daraus den Inhalt des ganzen Treppenkörpers.
46. Untersuche, ob der Inhalt des Treppenkörpers sich ändert, wenn die Zahl der Teilkörper (der Stufen) wächst oder abnimmt.
47. Die Zahl der Teilkörper wächst unbegrenzt. Welchem Körper nähert sich dann der Treppenkörper mehr und mehr?
48. Beweise mit Hilfe der in Aufg. 43 bis 47 angestellten Überlegung, daß auch der Inhalt des schiefen Prismas

$$V = g \cdot h$$

ist, wo h die Höhe, g die Grundfläche ist.

Trigonometrische Berechnungen

49. Eine gerade quadratische Säule wird von einer Ebene geschnitten, die mit den Seitenkanten den Winkel α bildet. Berechne den Querschnitt, wenn die Grundkante a ist. Beisp. $\alpha = 30^\circ$, $a = 4,5$ cm.
50. Ein gerades Prisma von der Höhe h hat ein Dreieck zur Grundfläche, von dem zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben sind. Berechne **a)** den Inhalt, **b)** die Oberfläche des Prismas. Beisp. $h = 17,3$ cm, $a = 4,7$ cm, $b = 5,3$ cm, $\gamma = 53^\circ 30'$.
51. Um wieviel wird der Schwerpunkt **a)** einer geraden quadratischen Säule, **b)** eines geraden Prismas mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche gehoben, bis der Körper beim Umkippen über eine Grundkante umfällt? (Stabilität eines Tisches!) Beisp. $h = 10$ cm, Grundkante $a = 4$ cm.

§ 37. Die Pyramide

Räumliche Darstellung und Netz der Pyramide

1. Stelle ein Kantenmodell einer Pyramide mit gleichen Seitenkanten her, deren Grundfläche ein Quadrat ist.
2. Baue sechs Streichhölzer so zu einer Pyramide (Tetraeder) zusammen, daß aus den sechs Streichhölzern vier gleichseitige Dreiecke gebildet werden.

3. Konstruiere das Modell einer sechsseitigen Doppelpyramide, indem du in der Mitte eines regelmäßigen Sechsecks eine Senkrechte (Stricknadel oder dgl.) errichtest und deren beide Enden mit den Ecken des Sechsecks verbindest.
4. Konstruiere das Kantenmodell einer Doppelpyramide, indem du über den beiden Seiten eines Quadrates eine Pyramide errichtest, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind (Oktaeder).
5. Beschreibe die Seiten, Flächen und Ecken **a)** des Tetraeders, **b)** der regelmäßigen vierseitigen Pyramide, **c)** der regelmäßigen sechsseitigen Pyramide.
6. Konstruiere das Netz einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren sämtliche Kanten 4 cm lang sind. Setze Klebefalze an und stelle ein Flächenmodell der Pyramide her.
7. Konstruiere das Netz eines Tetraeders mit der Kante 5 cm. Stelle damit ein Flächenmodell her.
8. Das Netz einer Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Grundkante 4 cm ist, und deren Seitenkanten sämtlich **a)** 6 cm, **b)** 3 cm sind, ist in verschiedenen Zusammenhängen zu zeichnen.
9. Konstruiere das Netz einer Pyramide, deren Spitze senkrecht über der Mitte eines regelmäßigen Fünfecks steht (Fünfeckseite 3 cm, Seitenkante 6 cm).
10. Konstruiere das Netz einer Pyramide, deren Grundfläche ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Kathete 4 cm ist und deren Spitze 7 cm senkrecht über dem Scheitel des rechten Winkels liegt. Stelle ein Flächenmodell des Körpers her. — Kann man aus zwei dieser Körper ein Prisma zusammenbauen?
11. Konstruiere das Netz einer Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Seite 3 cm ist, und deren Spitze 5 cm senkrecht über der einen Quadratecke liegt. Stelle ein Flächenmodell des Körpers her.
12. Konstruiere mit Fäden in einem Kantenmodell einer quadratischen Pyramide die Höhe.
13. Beweise, daß in Pyramiden mit **a)** einem Dreieck, **b)** einem Quadrat, **c)** einem Rechteck, **d)** einem Sehnenviereck, **e)** einem regelmäßigen n -Eck als Grundfläche, deren Spitzen in allen Fällen über der Mitte des Umkreises liegen, die Seitenkanten gleich sind.
14. Eine Pyramide ist so gebaut, daß die Grundfläche einen Umkreis besitzt, und daß die Spitze senkrecht über der Mitte dieses Umkreises liegt.
a) Untersuche, was über die Neigung der Seitenkanten gegen die Grundfläche zu sagen ist (mit anderen Worten, über den Winkel zwischen einer Seitenkante und ihrer Projektion auf der Grundfläche). **b)** Gib Fälle an, in denen eine solche Pyramide, wenn man sie auf die Grundfläche setzt, umfallen würde.
15. Eine Pyramide ist so gebaut, daß die Grundfläche einen Inkreis besitzt, und daß die Spitze senkrecht über der Mitte dieses Inkreises liegt. Untersuche,

was über die Neigung der Seitenflächen gegen die Grundfläche zu sagen ist (mit andern Worten, über den Winkel zwischen der Höhe einer Seitenfläche und deren Projektion auf die Grundfläche).

16. a) Kann eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche an der Spitze stumpfe Winkel haben? b) Welche gleichseitigen Pyramiden können stumpfe und rechte Winkel an der Spitze haben?
17. a) Können in einer Pyramide mit regelmäßiger sechseitiger Grundfläche die Seitenkanten gleich den Grundkanten sein? Was ist die untere Grenze für die Seitenkante einer geraden Pyramide, deren Grundfläche b) ein Quadrat, c) ein gleichseitiges Dreieck, d) ein regelmäßiges Fünfeck, e) ein reguläres n -Eck ist?
18. Eine dreiseitige, eine vierseitige und eine sechseitige Pyramide werden auf eine Seitenfläche gelegt. Welcher Körper läßt sich wieder als Pyramide mit der früheren Seitenfläche als Grundfläche ansehen?
19. Eine dreiseitige Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche wird auf eine Seitenfläche gelegt. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit die Pyramide auch in der neuen Lage eine gerade ist, d. h. daß die Spitze über der Mitte der Grundfläche liegt?
20. Gegeben ist eine quadratische Pyramide. a) Die Seite der Grundfläche ist 4 cm, die Höhe ist 6 cm. b) Die Grundkante der Pyramide ist a , die Seitenkante b . Zeichne einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der die Höhe und eine Seitenkante enthält.
21. Gegeben ist ein Tetraeder mit der Seite $a = 5$ cm. Konstruiere einen ebenen Schnitt durch das Tetraeder, der die Höhe und eine Kante enthält. Welcher Winkel gibt die Neigung der Kante gegen die Grundfläche an (vgl. Aufg. 14)?
22. Gegeben ist eine Pyramide, deren Spitze 5 cm über der Mitte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seite 3 cm liegt. Zeichne einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der die Höhe enthält und a) zwei Seitenkanten enthält, b) durch die Mitte zweier gegenüberliegender Grundkanten geht. Deute im Falle b) den Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche an (vgl. Aufg. 15).
23. Wie ändert sich die Gestalt einer Pyramide (Kanten und Flächen), wenn sich die Spitze auf einer Senkrechten zur Grundebene bewegt?
24. Wie ändert sich die Gestalt einer Pyramide, wenn sich die Spitze in einer zur Grundebene parallelen Ebene bewegt?
25. Konstruiere das Netz einer dreiseitigen Pyramide, deren Spitze über der Mitte des Umkreises liegt, wenn gegeben ist (a, b, c Seiten, α, β, γ Winkel des Grunddreiecks, h Höhe, s Seitenkante der Pyramide, φ Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundfläche):

a) a, b, c, h ;	b) a, b, c, s ;	c) a, b, c, φ ;
d) a, b, γ, h ;	e) a, β, γ, s ;	f) a, β, c, φ .

26. Konstruiere das Netz einer quadratischen Pyramide, deren Spitze über dem Mittelpunkt des Quadrates liegt, wenn gegeben ist (a Seite des Quadrates, h Höhe, s Seitenkante der Pyramide, φ Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche oder Quadratdiagonale, α Winkel zwischen a und s):

- a) a, h ; b) a, s ; c) a, φ ; d) a, α .

27. Konstruiere das Netz einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, deren Spitze über dem Mittelpunkt des Rechtecks liegt, wenn gegeben ist (a und b Seiten des Rechtecks, sonst wie in Aufg. 26):

- a) a, b, h ; b) a, b, s ; c) a, b, φ .

Ebene Darstellung der Pyramide

28. Konstruiere in schräger Parallelprojektion das Bild einer Pyramide, deren Höhe 6 cm ist, während die Grundfläche **a)** ein Quadrat mit den Seiten 4 cm, **b)** ein Rechteck mit den Seiten 3 cm und 5 cm, **c)** ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 2 cm, **d)** ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 4 cm und 5 cm ist. Die Spitze der Pyramide steht immer senkrecht über der Mitte des Umkreises der Grundfläche.

29. Konstruiere in schräger Parallelprojektion das Bild **a)** eines Tetraeders mit der Seite 5 cm, **b)** eines Oktaeders mit der Seite 5 cm.

30. Konstruiere in schräger Parallelprojektion das Bild einer Pyramide, deren Grundfläche **a)** ein Quadrat mit der Seite 5 cm, **b)** ein beliebiges Dreieck ist, und deren Spitze 4 cm senkrecht über einer Ecke der Grundfläche liegt.

31. Gegeben ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren sämtliche Kanten gleichlang sind (halbes Oktaeder). Die Pyramide ist auf eine Seitenfläche zu legen und in dieser Lage im Schrägbild ($\frac{1}{2}, 60^\circ$) zu zeichnen.

32. In Grundriß und Aufriß ist eine Pyramide zu zeichnen, die mit ihrer Grundfläche auf der Grundrißebene steht derart, daß eine Grundkante parallel der Achse ist. Gegeben ist die Höhe $h = 5$ cm und als Grundfläche **a)** ein Quadrat mit den Seiten 4 cm, **b)** ein Rechteck mit den Seiten 3,5 cm und 4,5 cm, **c)** ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 2 cm, **d)** ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 3 cm. Die Spitze liegt in allen Fällen senkrecht über der Mitte der Grundfläche.

33. **a) bis d)** Löse die Aufg. 32 **a) bis d)** unter den gleichen Annahmen, nur soll die Spitze senkrecht über einer der Ecken der Grundfläche liegen.

34. **a) bis d)** Löse die Aufg. 32 **a) bis d)** unter den gleichen Annahmen, nur soll statt der Höhe die Seitenkante 5 cm sein.

35. **a) bis d)** Löse die Aufg. 32 **a) bis d)** unter den gleichen Annahmen, nur soll nicht eine (bzw. zwei) Grundkanten parallel der Achse sein, sondern sie soll mit ihr einen gegebenen Winkel bilden.

36. Zeichne **a)** ein Tetraeder, **b)** ein Oktaeder in Grundriß und Aufriß.

Berechnung der Pyramide

Strecken und Flächen

37. Berechne die Höhe einer Oktaederhälfte, deren Seitenkante a ist.
38. Wie groß ist die Höhe eines Tetraeders mit der Kante a ?
39. Über einem regelmäßigen Sechseck mit der Seite a ist eine Pyramide errichtet, deren Spitze h über der Grundfläche liegt. Berechne die Seitenkante. (Beispiel $a = 4,5$ cm, $h = 6$ cm.)
40. Über einem rechtwinkligen Dreieck (Katheten a und b) ist eine Pyramide errichtet, deren Spitze um h **a)** über dem Scheitel des rechten Winkels, **b)** über der Hypotenusenmitte liegt. Berechne die fehlenden Kanten (Beisp. $a = 7,5$ cm, $b = 10$ cm, $h = 10$ cm).
41. Berechne die Oberfläche **a)** eines Tetraeders mit der Kante a (Beispiel $a = 1$ dm), **b)** eines Oktaeders mit der Kante a (Beisp. $a = 5$ cm), **c)** einer Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a ist, und deren Spitze um h über der Mitte der Grundfläche liegt (Beisp. $a = 4$ cm, $h = 5$ cm), **d)** einer Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a und b ist und deren Höhe (die Spitze liegt senkrecht über der Mitte des Rechtecks) h ist (Beispiel $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $h = 12$ cm).
42. Eine quadratische Pyramide wird von einer Ebene parallel zur Grundfläche so geschnitten, daß die Höhe halbiert wird. Zeichne die Pyramide mit Schnittfläche **a)** in schräger Parallelprojektion, **b)** in Grundriß und Aufriß.
43. Gib für die in Aufg. 42 dargestellte Pyramide an, in welchem Verhältnis **a)** die Abschnitte auf den Seitenkanten, **b)** die Seiten von Grund- und Schnittfläche, **c)** die Inhalte von Grund- und Schnittfläche stehen.
44. **a)** bis **c)** Beantworte die Fragen der Aufg. 43, wenn die Pyramidenhöhe von der Schnittebene im Verhältnis $1:n$ (die Abschnitte von der Spitze ab gerechnet), **d)** bis **f)** im Verhältnis $m:n$ geteilt wird.
45. Von einer beliebigen Pyramide soll durch eine Ebene parallel zur Grundfläche eine kleinere abgeschnitten werden, deren Grundfläche **a)** die Hälfte, **b)** ein Drittel, **c)** $\frac{1}{n}$ der ursprünglichen Grundfläche ist. In welchem Abstand von der Spitze ist der Schnitt zu führen?

Inhalt

46. Zeichne eine quadratische Pyramide mit der Grundkante 4 cm und der Höhe 6 cm **a)** in schräger Parallelprojektion, **b)** in Grundriß und Aufriß. Durch Ebenen parallel zur Grundfläche im Abstände von 1 cm zerlege die Pyramide in Schichten (und eine Spitze). **c)** Berechne die Schnittflächen. **d)** Ersetze die Pyramide durch einen Prismensatz derart, daß du über jeder Schnittfläche ein Prisma von der Höhe 1 cm errichtest. **e)** Berechne den Inhalt dieses Stufenkörpers.

47. Führe die in Aufg. 46 angegebene Rechnung für eine Pyramide mit der Grundfläche f und der Höhe h durch, wobei die Anzahl der Treppenstufen jetzt n ist.¹⁾
48. a) Zeige, daß der Inhalt des in Aufg. 46 und 47 beschriebenen Treppenkörpers sich mit wachsender Stufenzahl dem Inhalt der Pyramide nähert. b) Berechne den Inhalt der Pyramide, indem du in dem in Aufg. 47 gefundenen Wert zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergehst.
49. a) Zeichne irgend zwei Pyramiden von gleich großer, aber verschieden gestalteter Grundfläche und gleicher Höhe. b) Ersetze sie durch Treppenkörper in der in Aufg. 46 und 47 angegebenen Weise und beweise, daß bei gleicher Stufenzahl die beiden Treppenkörper gleichen Inhalt haben. c) Beweise auf diese Weise, daß Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich sind.
50. Zeichne ein gerades Prisma a) in schräger Parallelprojektion, b) in Grundriß und Aufriß und zerlege es durch ebene Schnitte in drei Pyramiden. Weise nach, daß je zwei dieser Pyramiden in Grundfläche und Höhe übereinstimmen, daß also alle drei inhaltsgleich sind. (Sind sie auch kongruent?)
51. Führe Aufg. 50 für ein schiefes dreiseitiges Prisma aus.
52. Gegeben ist eine beliebige dreiseitige Pyramide a) in schräger Parallelprojektion, b) in Grundriß und Aufriß. Ergänze sie zu einem Prisma, das den dreifachen Inhalt hat.
53. Beweise, daß für den Inhalt V jeder Pyramide mit der Grundfläche g und der Höhe h die Formel gilt:

$$V = \frac{1}{3} g \cdot h.$$

54. Berechne den Inhalt a) eines Tetraeders mit der Kante a (Beisp. $a = 10$ cm), b) eines Oktaeders mit der Kante a (Beisp. $a = 10$ cm), c) einer dreiseitigen Pyramide mit den Grundkanten a, b und c und der Höhe h (Beisp. $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm, $h = 18$ cm), d) einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Seite a ist, und mit gleichen Seitenkanten s (Beisp. $a = 7,5$ cm, $s = 10$ cm).
55. Berechne den Inhalt einer Pyramide, deren Spitze senkrecht über der Mitte des regelmäßigen n -Ecks liegt, das die Grundfläche bildet. Gegeben ist (a ist die Grundkante, s die Seitenkante, h die Höhe):

$$\text{a) } n = 4,$$

$$a = 2,5 \text{ cm},$$

$$h = 7 \text{ cm};$$

$$\text{b) } n = 3,$$

$$s = 14,43 \text{ cm},$$

$$h = 13,002 \text{ cm};$$

1) Hier ist ein geschlossener Ausdruck für die Summe der n ersten Quadratzahlen zu benutzen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ist dieser Ausdruck nicht bekannt, dann ist die Ableitung des Ergebnisses von Aufg. 53 in den Aufg. 46 bis 49 durch die in Aufg. 50 bis 52 angestellte Überlegung zu ersetzen.

- c) $n = 8$, $a = 19,43$ cm, $h = 33,42$ cm;
 d) $n = 12$, $a = 4,06$ cm, $s = 9,75$ cm.

56. Eine Pyramide wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten, die die Höhe **a)** halbiert, **b)** im Verhältnis $m:n$ (die Abschnitte werden von der Spitze an gerechnet) teilt. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der abgeschnittenen und der ganzen Pyramide zueinander?

Trigonometrische Berechnungen

57. Über einem gleichseitigen Dreieck mit der Grundkante a ist eine Pyramide von der Höhe h errichtet. Die Spitze liegt über der Mitte der Grundfläche.
a) Berechne die Höhen der Dreiecke, die die Seitenflächen bilden. **b)** Berechne die Neigungswinkel dieser Dreieckshöhen gegen die Grundfläche. **c)** Berechne die Neigungswinkel der Seitenkante gegen die Grundfläche. Beisp. $h = 6$ cm, $a = 4$ cm.
58. Berechne die Neigung einer Seitenkante gegen die Grundfläche **a)** beim Tetraeder, **b)** beim Oktaeder.
59. Der Neigungswinkel der Seitenflächen bei den ägyptischen Pyramiden ist ungefähr 52° . **a)** Wie hoch ist unter Zugrundelegung dieses Winkels eine Pyramide von 135 m Länge der Grundkante? **b)** Von welcher Grundfläche mußten die Ägypter bei einer Anlage einer 95 m hohen Pyramide ausgehen?
60. Berechne die Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide, deren drei Seitenkanten die Länge 16 cm haben, während die drei Grundkanten 13 cm, 14 cm und 15 cm lang sind.
61. Berechne den Inhalt einer dreiseitigen Pyramide mit den Grundkanten b und c , die den Winkel α einschließen, und der Höhe h . Beisp. $b = 8$ cm, $c = 12$ cm, $\alpha = 30^\circ$, $h = 15$ cm.
62. Berechne Oberfläche und Inhalt einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche (Seiten: $a = 13,5$ cm, $b = 18$ cm), deren sämtliche Seitenkanten gegen die Grundfläche den Neigungswinkel $76^\circ 20'$ haben.
63. Um die Höhe h eines Gegenstandes CD mit unzugänglichem Fuß zu bestimmen (Fig. 260), wird die Standlinie AB gemessen (13,85 cm); bei A werden die Winkel α ($63^\circ 45'$) und α' ($70^\circ 30'$), bei B wird der Winkel β ($58^\circ 15'$) gemessen. **a)** Berechne h . **b)** Wie kann man durch Messung des Winkels β' eine Kontrolle ausüben?

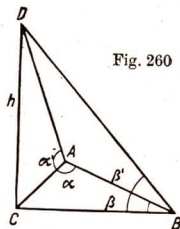


Fig. 260

Praktische Anwendungen

64. Die Cheopspyramide hat eine quadratische Grundfläche von 233 m Seitenlänge und eine Höhe von 148 m. **a)** Wie groß ist jede der vier Seitenflächen? **b)** Wie groß ist das Gewicht der Steinmasse, wenn das spezifische Gewicht des Steines, aus dem sie gebaut ist, zu $2\frac{1}{4}$ angenommen wird? **c)** Unter welchem Winkel sind die Seitenkanten gegen die Grundfläche geneigt? **d)** Prüfe

die in Aufg. 59 aufgestellte Behauptung, daß der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche etwa 52° sei. e) Genaue (aber wohl übertrieben genaue) Werte für die Grundkante und die Höhe der Cheopspyramide sind 763,810 englische Fuß und 486,256 englische Fuß (nach einem Roman von E. y. t. h.). Untersuche, ob wirklich, wie behauptet wird, der quadratische Umfang der Grundfläche gleich dem Umfang eines Kreises ist, der die Höhe zum Radius hat. f) Der Tangens des Winkels, den eine Seitenkante mit der Diagonale der Grundfläche bildet, soll 0,9 sein. Wie weit trifft das zu?

65. Ein Turm hat ein regelmäßiges Sechseck zum Querschnitt. Wie groß ist die Fläche des Turmdaches, wenn die Seite des Sechsecks 2,10 m lang, die Gratsparren (= Seitenkanten) 12 m lang sind?
66. Ein Turm mit quadratischem Grundriß soll oben ein flaches, mit Schiefer zu deckendes Abschlußdach erhalten. Die Grundkante ist 4,5 m, die Höhe der Dachspitze über den Grundkanten soll 2,5 m werden. a) Wie lang sind die Gratsparren zu wählen? b) Wie groß ist die Dachfläche?
67. Begründe das optische Gesetz, daß die Beleuchtungsstärke paralleler Ebenenteile umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle ist.

Geometrische Überlegungen

68. Um den Inhalt einer dreiseitigen Pyramide zu finden, war ein dreiseitiges Prisma in drei raumgleiche Pyramiden zerlegt worden. Versuche in ähnlicher Weise einen Würfel in drei inhaltsgleiche Pyramiden zu zerlegen.
69. Untersuche, ob, und wenn ja, in welchem Verhältnis sich die Höhen eines Tetraeders schneiden.
70. An einem Würfel werden alle Kanten halbiert und die Ecken durch Ebenen, die durch die Mitten dreier in einer Ecke aneinanderstoßender Kanten gehen, abgeschnitten. Wie groß ist der Inhalt des Restkörpers? (Vergleich mit der entsprechenden ebenen Figur!)
71. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Sehnenvieleck, die Spitze liegt senkrecht über der Mitte des umgeschriebenen Kreises. Zeige, daß dann die Seitenkanten gleich sind, und untersuche, ob der Satz umkehrbar ist.
72. Denke dir die Kanten eines Prismas und einer Pyramide beweglich (vielleicht mit Kugelgelenken) aneinandergefügt. Welche Körper sind dann starr (nicht deformierbar)? Wie kann man die nicht starren Pyramiden, wie die nicht starren Prismen durch Einfügung neuer Stäbe starr machen? (Räumliches Fachwerk.)

Aus der Geschichte der Geometrie

Aus dem sog. 15. Buch von Euklids Elementen, das wahrscheinlich um 530 n. Chr. von Isidorus verfaßt wurde:

73. Einem gegebenen Würfel ist ein Tetraeder einzuschreiben.
74. Einem gegebenen Tetraeder ist ein Oktaeder einzuschreiben.

75. Einem gegebenen Würfel ist ein Oktaeder einzuschreiben.
76. Eine Scherzfrage aus Daniel Schwenters Erquickstunden (1636): „Ein Tetraëtron oder Corpus so von vier gleichseitigen Trianglen beschlossen | also zu werffen | daß die Spitz vnter sich | die Fläch aber über sich (= oben) stehe.“

§ 38. Zylinder und Kegel

Darstellung des Zylinders

1. Zeichne das Netz eines geraden Zylinders. Setze Klebefalze an und fertige ein Flächenmodell.
2. Zeichne Grundriß und Aufriß eines geraden Zylinders, dessen Grundkreisradius 2 cm und dessen Höhe 6 cm ist: **a)** der Zylinder steht auf der Grundrißebene (Achse senkrecht zur Grundrißebene); **b)** der Zylinder liegt auf der Grundrißebene (Achse senkrecht zur Aufrißebene).
3. Zeichne einen Zylinder, dessen Achsenschnitt ein Quadrat mit der Seite $a = 3,5$ cm ist, in Grundriß und Aufriß.
4. Ein Kreis, dessen Fläche senkrecht zur Bildebene liegt, ist in schräger Parallelprojektion darzustellen: **a)** $\frac{1}{2}$, 90° , **b)** $\frac{1}{2}$, 45° , **c)** $\frac{1}{2}$, 60° . Was für eine Figur entsteht in der Ebene?
5. Ein gerader Zylinder mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h ist in schräger Parallelprojektion darzustellen. Es sei

a) $r = 3$ cm, $h = 7$ cm;	b) $r = 3$ cm, $h = 1$ cm;
c) $r = 0,5$ cm, $h = 7$ cm;	d) $2r = h = 6$ cm.
6. Warum fällt der zur Bildebene parallele Achsenschnitt nur im Falle der „geraden Draufsicht“ ($m, 90^\circ$) in den Umriß der Darstellung?

Berechnung des Zylinders

7. Rolle den Mantel eines geraden Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h in die Ebene ab und beweise, daß der Mantel

$$M = 2\pi r h \quad \text{ist.}$$

8. Berechne den Mantel eines geraden Zylinders, von dem gegeben ist:

a) $r = 2,5$ cm, $h = 23$ cm;	b) $r = 3$ mm, $h = 2,15$ m.
--------------------------------------	-------------------------------------
9. Ein Rechteck mit den Seiten **a)** 3 cm und 4 cm, **b)** 15,3 cm und 23,8 cm, **c)** m und n rotiert einmal um die eine, das andere Mal um die andere Seite als Achse. In welchem Verhältnis stehen die Mäntel der entstehenden Zylinder?
10. Berechne den Mantel eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt (Quadratseite a).
11. Beweise, daß die Oberfläche eines geraden Zylinders ist

$$O = 2\pi r(r + h).$$

12. **a)** und **b)** Berechne die Oberfläche der in Aufg. 8 genannten Zylinder.

13. a) bis c) Beantworte die Frage in Aufg. 9 für die Oberfläche der Zylinder.
 14. Berechne die Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt (Quadratseite a).
 15. Beweise, daß der Rauminhalt eines geraden Zylinders ist

$$V = \pi r^2 h.$$

16. a) und b) Berechne das Volumen der in Aufg. 8 genannten Zylinder.
 17. In der Technik pflegt man in den Formeln für den Zylinder an Stelle des Radius den leichter meßbaren Durchmesser $d = 2r$ zu benutzen. Schreibe die Formeln für M , O und V dementsprechend um.

18. Von einem Zylinder ist

gegeben:

gesucht:

- | | | |
|--|-------------------------|----------------|
| a) $M = 1 \text{ m}^2$, | $h = 10 \text{ cm}$; | r, O, V ; |
| b) $M = 126 \text{ cm}^2$, | $r = 3,25 \text{ cm}$; | h, O, V ; |
| c) $O = 10 \text{ cm}^2$, | $r = 1 \text{ cm}$; | h, M, V ; |
| d) $O = 1 \text{ m}^2$, | $h = 2r$; | r, h, M, V ; |
| e) $M = 1 \text{ m}^2$, | $O = 2 \text{ m}^2$; | r, h, V ; |
| f) $V = 1 \text{ m}^3$, | $r = 12 \text{ cm}$; | h, M, O ; |
| g) $V = 100 \text{ dm}^3 (= 1 \text{ hl})$, | $2r : h = 2 : 3$; | r, h, O . |

Praktische Anwendungen

19. Ein zylinderförmiger Papierkorb soll aus dickem Linoleum hergestellt werden. Linoleum wird in der Breite von 66 cm benutzt, das Meter kostet 4,50 RM. Der Papierkorb soll 66 cm hoch sein und 30 cm Durchmesser haben. Wie groß ist der Materialpreis, wenn die Pappe für den Boden mit 20 Pf. in Anrechnung gebracht wird?
20. Ein zylinderförmiger Gasometer soll 3000 m^3 Gas fassen und 10 m hoch werden. a) Wie groß ist der Durchmesser zu wählen? b) Wie groß ist die aus Eisenplatten herzustellende Oberfläche (d. h. die Mantelfläche und die obere Deckfläche)?
21. Ein zylindrisches Litergefäß soll quadratischen Achsenschnitt erhalten. Wie groß sind die Ausmessungen zu wählen?
22. Aus einer quadratischen Säule von der Höhe h , deren Grundkante a ist, ist ein Zylinder mit möglichst großem Querschnitt herauszuschneiden. Wieviel beträgt der Abfall? (Beisp. $h = 3,75 \text{ m}$, $a = 20 \text{ cm}$.)
23. Wieviel wiegt das laufende Meter geschmiedetes Rundeisen (d. s. zylindrische Eisenstäbe) von 4,5 cm Dicke (spez. Gewicht 7,79)?
24. Wieviel wiegt das laufende Meter Bleirohr (spez. Gewicht 11,44) von 3,1 cm lichter Weite und 11,3 cm äußerem Umfang?
25. Wieviel wiegt das laufende Meter eines gußeisernen Wasserrohres (spez. Gewicht 7,24) von 55 cm (äußerem) Durchmesser und 1 cm Wandstärke?

26. **a)** Was wiegen 500 m Kupferdraht von 3 mm Stärke? **b)** Wieviel Meter Draht kommen auf 1 kg? (Spez. Gewicht 8,79.)
27. Wieviel Weinkorke von 3,9 cm Länge und 2,3 cm Dicke wiegen 1 kg? (Spez. Gewicht 0,24.)
28. Ein Glasbläser zieht **a)** eine 35 m lange Glasröhre von 15 mm lichter Weite, **b)** eine 45 m lange Glasröhre von 8 mm lichter Weite aus. Wieviel Liter Luft gebraucht er zum Blasen der Röhre? **c), d)** Wieviel Glas braucht er in jedem Falle, wenn die Wandstärke beide Male 1 mm ist?

Darstellung des Kegels

29. Wickle den Mantel eines geraden Kreiskegels in die Ebene ab. Gib an, welche Figur entsteht.
30. Zeichne das Netz eines geraden Kreiskegels. Setze Klebefalze an und fertige ein Flächenmodell an.
31. Zeichne Grundriß und Aufriß eines geraden Kegels, dessen Grundkreis den Radius 2 cm hat, und dessen Höhe 5 cm ist. Der Kegel stehe mit der Grundfläche auf der Grundrißebene.
32. Zeichne einen geraden Kreiskegel mit dem Radius $r = 2,5$ cm und der Höhe $h = 6$ cm in schräger Parallelprojektion und zwar **a)** $\frac{1}{2}$, 90° , **b)** $\frac{1}{2}$, 45° , **c)** $\frac{1}{2}$, 60° .
33. Zeichne **a)** im Grundriß und Aufriß, **b)** in schräger Parallelperspektive einen geraden Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist.
34. Fällt bei irgendeiner Art schräger Parallelprojektion der zur Bildebene parallele Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels in den Umriß der Zeichnung?

Berechnung des Kegels

35. Beweise die Formel

$$M = \pi r s$$

für den Mantel eines geraden Kreiskegels (r Radius des Grundkreises, s Seitenlinie).

36. Führe in die Formel für den Kegelmantel an Stelle der Seitenlinie s die Höhe h ein.
37. Berechne den Zentriwinkel α des Kreisausschnittes, der durch Abrollen des Kegelmantels entsteht. Gegeben sind **a)** Radius des Grundkreises r und Seitenlinie s , **b)** Radius des Grundkreises r und Höhe h .
38. Leite für die Oberfläche des Kegels die Formel

$$O = \pi r (r + s) \quad \text{ab.}$$

39. Berechne Mantel und Oberfläche eines geraden Kreiskegels, von dem gegeben ist:

a) $r = 3$ cm, $s = 10$ cm;

b) $r = 6$ cm, $h = 8$ cm;

c) $r = 13$ cm, $h = 12$ cm;

d) $s = 2r = 10$ cm.

40. Leite durch Grenzübergang aus der Formel für die Pyramide die folgende Formel für den Inhalt eines geraden Kreiskegels ab:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

41. a) bis d) Berechne den Inhalt der in Aufg. 39 a) bis d) gegebenen geraden Kreiskegel.
42. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 15 cm und 20 cm rotiert einmal um die eine, das andere Mal um die andere Kathete. In welchem Verhältnis stehen a) die Mäntel, b) die Oberflächen, c) die Inhalte der entstehenden Kegel? d) bis f) Beantworte dieselben Fragen für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a .
43. Ein Dreieck mit den Seiten $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm rotiert a) um die Seite a , b) um die Seite b , c) um die Seite c . Berechne in jedem Falle Oberfläche und Inhalt des entstehenden Doppelkegels.
44. Ein gleichschenkliges Trapez mit den parallelen Seiten 10 cm und 4 cm und der Höhe 8 cm rotiert um die größere der parallelen Seiten. Berechne Oberfläche und Inhalt des entstehenden Rotationskörpers.
45. Von einem geraden Kreiskegel ist

gegeben:

gesucht:

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------|------------|
| a) $h = 17,34$ cm, | $s = 19,48$ cm; | $M, O, V;$ |
| b) $h = 12,18$ cm, | $r = 5,71$ cm; | $M, O, V;$ |
| c) $M = 44,01$ cm ² , | $s = 5,175$ cm; | $O, V;$ |
| d) $M = 147,4$ cm ² , | $O = 224,4$ cm ² ; | $r, h.$ |

46. Ein Kreisausschnitt, dessen Zentriwinkel a) 180° , b) 90° , c) 120° , d) 270° , und dessen Radius 10 cm ist, wird zum Mantel eines Kegels gemacht. Wie groß ist der Rauminhalt dieses Kegels?

Trigonometrische Berechnungen

47. Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete $a = 10$ cm und dem gegenüberliegenden Winkel a) 45° , b) 30° , c) 60° , d) 72° , e) α rotiert um die Kathete b . Berechne Mantel und Inhalt des entstehenden Kegels.
48. Berechne den Öffnungswinkel eines geraden Kreiskegels, wenn gegeben ist
- | | | | |
|-----------------|-------------|-----------------|--------------|
| a) $s = 5$ cm, | $h = 4$ cm; | b) $r = 10$ cm, | $h = 12$ cm; |
| c) $s = 13$ cm, | | $h = 12$ cm. | |
49. Ein Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel a) 180° , b) 90° , c) 270° , d) 135° , e) α wird zu einem Kegelmantel aufgerollt. Wie groß ist der Öffnungswinkel des Kegels?
50. Welche Neigung haben die Seitenlinien eines geraden Kreiskegels gegen die Grundfläche, dessen Höhe dreimal so groß ist wie der Radius des Grundkreises?

51. Die Seitenlinien eines geraden Kreiskegels sind um $65^{\circ} 30'$ gegen die Grundfläche geneigt und 13 cm lang. Berechne Mantel und Rauminhalt des Kegels.
52. Der Öffnungswinkel eines geraden Kreiskegels ist 135° , die Höhe beträgt 4,2 cm. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt?

Praktische Anwendungen

53. a) Ein Trichter (ohne Abflußrohr) hat oben eine Weite von 9,4 cm und eine Tiefe von 4,63 cm. Wieviel cm^3 faßt er? b) Wieviel Blech ist zur Herstellung des Trichters nötig, wenn noch unten ein 5 cm langes, 1 cm weites Ausflußrohr angesetzt wird?
54. Einem Turm von kreisförmigem Grundriß, der einen Umfang von 35,5 m hat, soll ein kegelförmiges Dach von 25 m Höhe aufgesetzt werden. a) Wie lang muß man die Sparren wählen? b) Wie groß ist die Dachfläche?

Geometrische Überlegungen

55. Welche der Formeln für den geraden Kreiszylinder

$$M = 2\pi rh, \quad V = \pi r^2 h$$

und für den geraden Kreiskegel

$$M = \pi rs, \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

gelten auch für schiefe Körper?

56. Stelle Formeln für den Inhalt von Zylindern und Kegeln auf, deren Grundfläche nicht gerade ein Kreis ist.
57. Bei einem geraden Kreiszylinder haben wir die fünf Größen r , h , M , O , V kennengelernt. Untersuche, durch wieviele von ihnen der Zylinder bestimmt ist und gehe in allen möglichen Fällen die Bestimmung der fehlenden Stücke durch.
58. Stelle die Überlegung der Aufg. 57 für den geraden Kreiskegel an, wobei als sechstes Stück noch die Seitenkante s hinzugefügt wird.
59. Untersuche a) beim geraden Kreiszylinder, b) beim geraden Kreiskegel die Gestalt der nicht zur Achse senkrechten Querschnitte.

Aus der Geschichte der Stereometrie

Die folgenden Sätze aus der Schrift „Über Kugel und Zylinder“ von Archimedes (287—212 v. Chr.) sind an der Hand unserer Formeln zu bestätigen:

60. „Der Mantel eines jeden geraden Zylinders ist gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale zu der Seitenlinie des Zylinders und dem Durchmesser seiner Grundfläche ist.“
61. „Der Mantel eines jeden geraden Kegels ist gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale zu der Seitenlinie des Kegels und dem Radius des Grundkreises ist.“
62. „Der Mantel eines jeden geraden Kegels verhält sich zu seiner Grundfläche wie die Seitenlinie des Kegels zum Radius der Grundfläche.“

63. „Wenn zwei gerade Kegel gegeben sind, und der Mantel des einen Kegels der Grundfläche des anderen gleich ist, während das von der Mitte der Grundfläche (des ersten Kegels) auf die Seitenlinie gefällte Lot der Höhe (des anderen Kegels) gleich ist, so sind die Kegel gleich.“

Beweise die folgenden Sätze aus dem 12. Buch der Elemente von Euklid (in der Fassung der Euklidübersetzung von Pirkenstein von 1694¹⁾):

64. „Wann eine Waltze mit einer Fläche | so denen gegenüberstehenden Basen Parallel ist | durchschnitten wird: | so werden sich die Waltzen-Stücke gegeneinander verhalten | gleich wie ihre Achse.“
65. „Die Waltze und Kögeln | welche gleiche Bases haben | verhalten sich gegeneinander | als wie ihre Höhe.“
66. „Gleiche Waltze | und Kögeln haben ihre Bases und Höhe Widerkehrlich geproportionirter: und welche ihre Bases | und Höhe widerkehrlich geproportionirter haben | seynd einander gleich.“
67. Aus der „Geometrischen Gallerie“ in Tobias Beutels „Lustgarten“ (1685): „Item | ein Mann läßt sich ein Zelt verfertigen 8. Ellen perpendiculariter in der Mitten hoch | und unten in seinem Diameter der Rundung auff der Erden 12. Ellen | braucht dazu Zwillich $1\frac{1}{2}$ Elle breit | ist die Frage | wie viel er deßen dazu bedürffen werde?“

§ 39. Pyramidenstumpf und Kegelstumpf

Darstellung des Pyramidenstumpfes

1. Stelle ein Kantenmodell eines Pyramidenstumpfes her, dessen Grundfläche ein Quadrat ist.
2. Zeichne das Netz eines Pyramidenstumpfes, dessen parallele Flächen a) gleichseitige Dreiecke von 5 cm und 3 cm Seitenlänge, b) Quadrate von 4 cm und 2 cm Seitenlänge sind, während die Seitenkanten sämtlich 4 cm sind.
3. a) bis b) Führe die Konstruktion der Netze der in Aufg. 2 genannten Pyramidenstumpfe aus, wenn statt der Länge der Seitenkanten die Höhe des Pyramidenstumpfes gegeben ist ($h = 3$ cm). Die Mitte der Deckfläche soll senkrecht über der Mitte der Grundfläche liegen.
4. Zeichne den Pyramidenstumpf a) der Aufg. 3 a), b) der Aufg. 2 b) in Grundriß und Aufriß.
5. Zeichne den Pyramidenstumpf a) der Aufg. 3 b), b) der Aufg. 2 a) in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 45°).
6. Wie ändert sich die Gestalt eines Pyramidenstumpfes, bei dem die Mitte der Deckfläche senkrecht über der Mitte der Grundfläche liegt, wenn a) die Deckfläche parallel zur Anfangslage so verschoben wird, daß ihre Punkte zur Grundfläche senkrechte Bahnen beschreiben, b) wenn die Deckfläche

1) Achte auf die Verdeutschungen der Fachausdrücke.

in ihrer Ebene parallel zur Anfangslage verschoben wird? c) Behält man einen Pyramidenstumpf, wenn sich die obere Deckfläche um ihren Mittelpunkt in ihrer Ebene dreht?

Darstellung des Kegelstumpfes

7. Welche Figur muß man a) um eine ihrer Seiten, b) um ihre Symmetrieachse rotieren lassen, um einen geraden Kreiskegelstumpf¹⁾ zu erhalten?
8. Zeichne das Netz eines Kegelstumpfes, dessen Grund- und Deckflächen Kreise mit dem Radius 2,5 cm und 1,5 cm sind, und dessen Seitenlinie 4 cm ist.
9. Zeichne das Netz eines Kegelstumpfes, dessen Radien 4,5 cm und 1,5 cm sind und dessen Höhe 4 cm ist.
10. Zeichne den Kegelstumpf a) der Aufg. 9, b) der Aufg. 8 in Grundriß und Aufriß.
11. Zeichne den Kegelstumpf a) der Aufg. 9, b) der Aufg. 8 in schräger Parallelprojektion (entweder $\frac{1}{2}$, 45° oder $\frac{1}{3}$, 60°).

Berechnung des Pyramidenstumpfes und des Kegelstumpfes

Oberfläche und Mantel

12. Von einem Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche sind gegeben die Seiten $a_1 = 10,5$ cm und $a_2 = 4,5$ cm der parallelen Flächen und die Höhe $h = 4$ cm (die Mitte der oberen Fläche liegt senkrecht über der Mitte der unteren). Berechne die Oberfläche des Körpers.
13. Von einem Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche sind gegeben die Seiten $a_1 = 17,8$ cm und $a_2 = 1,8$ cm und die Seitenkante $s = 12,8$ cm. Berechne die Oberfläche des Körpers.
14. Rolle den Mantel des geraden Kegelstumpfes in die Ebene ab und leite für ihn die Formel

$$M = \pi s (r_1 + r_2)$$

ab, wo s die Seitenlinie, r_1 und r_2 die Radien bezeichnen.

15. Berechne den Zentriwinkel, der zu dem Kreisringausschnitt gehört, den der Mantel eines Kegelstumpfes von der Seitenlänge s und den Radien r_1 und r_2 bildet.
16. Welche Beziehung besteht zwischen den Radien, der Höhe und der Seitenlinie eines Kegelstumpfes?
17. Gib eine Formel für die Oberfläche des Kegelstumpfes an, ausgedrückt durch s , r_1 und r_2 .
18. Gib Formeln für a) den Mantel, b) die Oberfläche des Kegelstumpfes an, die außer den Radien r_1 und r_2 die Höhe h des Kegelstumpfes enthalten.
19. Berechne Mantel und Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes aus:

a) $r_1 = 0,425$ m,	$r_2 = 0,275$ m,	$s = 31,83$ cm;
b) $r_1 = 8,35$ cm,	$r_2 = 5,35$ cm,	$h = 7,2$ cm.

1) Wo nichts anderes gesagt, schreiben wir statt „gerader Kreiskegelstumpf“ in Zukunft einfach „Kegelstumpf“.

Inhalt

- 20.** (Wiederholung.) Es sei x die Höhe der Ergänzungspyramide oder des Ergänzungskegels, h die Höhe des Stumpfes, G die größere, g die kleinere Deckfläche. Beweise, daß

$$x : (x + h) = \sqrt{g} : \sqrt{G} \quad \text{ist.}$$

- 21.** Fasse den Inhalt des Pyramidenstumpfes als Differenz der Vollpyramide und der Ergänzungspyramide auf, beseitige in dem Ausdruck an der Hand der in Aufg. 20 abgeleiteten Proportion x und leite so die Formel für den Inhalt des Pyramidenstumpfes ab:

$$V = \frac{1}{3} h (G + \sqrt{Gg} + g).$$

- 22.** Leite **a)** ebenso wie in Aufg. 21, **b)** indem du den Kegelstumpf als Grenze eines Pyramidenstumpfes ansiehst, die Formel für den Inhalt des Kegelstumpfes ab

$$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

- 23.** Berechne den Inhalt **a)** des in Aufg. 12 genannten, **b)** des in Aufg. 13 genannten Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche.

- 24.** Grundfläche und Deckfläche eines Pyramidenstumpfes sind gleichseitige Dreiecke mit den Seiten 12,5 cm und 7,5 cm. Die Höhe ist 10 cm. Berechne den Inhalt.

- 25.** **a)** und **b)** Berechne den Inhalt der in Aufg. 19 gegebenen Kegelstumpfe.

- 26.** Von einem Kegelstumpf ist

gegeben:

gesucht:

a) $r_1 = 1,539$ cm, $r_2 = 42,66$ cm, $V = 3,8688$ m³; h, M ;

b) $r_1 : r_2 = 2 : 5$, $V = 188,25$ cm², $h = 5,665$ cm; r_1, r_2, M .

- 27.** **a)** Ein Kegelstumpf mit den Radien r_1 und r_2 und der Höhe h , **b)** ein quadratischer Pyramidenstumpf mit den Seiten a und b und der Höhe h ist durch eine Parallele zur Grundfläche zu halbieren. Berechne Lage und Größe des Querschnittes.

Trigonometrische Berechnungen

- 28.** Berechne von dem in Aufg. 12 gegebenen Pyramidenstumpf **a)** die Neigung der Seitenflächen gegen die Grundfläche, **b)** die Neigung der Seitenkanten gegen die Grundfläche, **c)** die Winkel der Trapeze, die die Seitenflächen bilden.
- 29.** Berechne von dem in Aufg. 13 gegebenen Pyramidenstumpf **a)** die Neigung der Seitenkanten gegen die Grundfläche, **b)** die Neigung der Seitenflächen gegen die Grundfläche, **c)** die Winkel der Trapeze, die die Seitenflächen bilden.

30. Wie groß ist der Neigungswinkel der Seitenlinien eines Kegelstumpfes gegen die Grundfläche, wenn gegeben ist **a)** $r_1 = 13$ cm, $r_2 = 7,5$ cm, $h = 5,5$ cm, **b)** $r_1 = 12,4$ cm, $r_2 = 8,4$ cm, $s = 4,8$ cm?
31. Von einem Kegelstumpf sind die Radien $r_1 = 25$ cm und $r_2 = 12$ cm und der Neigungswinkel der Seitenlinien gegen die Grundfläche $\alpha = 75^\circ$ gegeben. Berechne Mantel und Inhalt des Kegelstumpfes.

Näherungsformeln

32. Eine Näherungsformel für den Pyramiden- und für den Kegelstumpf gibt als Maß des Inhalts das Produkt aus Höhe und Mittelschnitt. Sprich das **a)** für einen quadratischen Pyramidenstumpf, **b)** für den Kegelstumpf in einer Formel aus.
33. Stelle den Fehler fest, den man bei Anwendung der eben (Aufg. 32) genannten Näherungsformel begeht, **a)** bei einem Kegelstumpf mit den Radien 9 cm und 10 cm und der Höhe 5 cm, **b)** bei einem Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche (Seiten a und b) und der Höhe h .
34. Einen Kegel kann man als Kegelstumpf, eine Pyramide als Pyramidenstumpf ansehen, dessen Deckfläche zu Null geworden ist. Stelle fest, welchen Wert die Näherungsformel von Aufg. 32 für diesen Fall angibt und welches also der Fehler ist.
35. Einen Zylinder kann man als Kegelstumpf, ein Prisma als Pyramidenstumpf ansehen, dessen Deckfläche und Grundfläche gleich sind. Erörtere die Näherungsformel von Aufg. 32 für diesen Fall.
36. Eine andere Näherungsformel gibt für den Inhalt des Pyramiden- und Kegelstumpfes das Produkt aus Höhe und arithmetischem Mittel der beiden Deckflächen an. Sprich die Regel in einer Formel aus.
37. Stelle den Fehler fest, den man bei Anwendung dieser zweiten Näherungsformel (Aufg. 36) begeht **a)** bei einem Kegelstumpf mit den Radien 9 cm und 10 cm und der Höhe 5 cm, **b)** bei einem Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche (Seiten a und b) und der Höhe h . **c)** Vergleiche die Ergebnisse mit den in Aufg. 33 bei der ersten Näherungsformel gewonnenen.
38. Beantworte die Frage in Aufg. 34 für die zweite Näherungsformel.
39. Beantworte die Frage in Aufg. 35 für die zweite Näherungsformel.
40. Untersuche, in welchem Verhältnis die Fehler stehen, die man bei Anwendung der beiden Näherungsformeln auf Pyramiden- und Kegelstumpf begeht.
41. Ein Faß kann man in roher Annäherung als Summe zweier Kegelstumpfe berechnen, die mit ihren Grundflächen aneinanderstoßen. Zur Berechnung kann man **a)** die genaue Formel, **b)** die erste Näherungsformel (Aufg. 32), **c)** die zweite Näherungsformel (Aufg. 36) benutzen. Gib in allen drei Fällen zunächst die Formel für die Spundweite S (= Durchmesser in der Faßmitte), die Bodenweite B (= Durchmesser an den Faßenden) und Faßlänge l an und führe sodann die Rechnung für $S = 80$ cm, $B = 70$ cm, $l = 110$ cm durch.

- 42.** Die Lambert'sche Näherungsformel (1765) für die Berechnung eines Fasses berücksichtigt auch die Wölbung. Sie lautet

$$V \approx \frac{1}{12} \pi l (2S^2 + B^2).$$

Berechne für das in Aufg. 41 angeführte Beispiel die Abweichungen von den dort genannten drei Näherungsformeln.

Praktische Anwendungen

- 43.** Wie schwer ist ein Kork, der die Gestalt eines Kegelstumpfes hat, und 3,5 cm lang, oben 2,1 cm, unten 1,3 cm dick ist? (Spez. Gew. 0,24).
- 44.** Ein Eimer aus Holzfaserstoff von $\frac{3}{4}$ cm Dicke hat oben einen Umfang von 95 cm, unten von 73 cm und eine Seitenlinie von 27 cm; sämtliche Maße sind außen genommen. Berechne, wieviel Liter Wasser er faßt, wenn er
a) bis zum Rande gefüllt ist, b) wenn das Wasser 5 cm vom oberen Rand absteht.
- 45.** Der Schornstein einer Hütte ist 140 m hoch, hat unten eine lichte Weite von 5,25 m und 1,50 m Wanddicke, oben 2,50 m lichte Weite und 0,25 m Wanddicke. Berechne a) den Inhalt des Mauerwerkes unter der (nicht genau zutreffenden) Annahme, daß die Abnahme der Dicke von unten bis oben gleichmäßig erfolgt, b) den Gesamtdruck auf die Fundamente, wenn als spez. Gewicht des Mauerwerkes 1,75 angenommen wird.
- 46.** Berechne die Zahl der Festmeter (= Kubikmeter Holz mit Rinde) a) bei einem Stammende von 14 m Länge und 170 cm mittlerem Umfang, b) bei einem Stammende von 12,5 m Länge und einer Stammdicke (Durchmesser) unten 66 cm, oben 52 cm, c) bei einem Stammende von 25 m Länge, das unten einen Umfang von 2,35 m, oben von 0,75 m hat. In allen Fällen sind die Näherungsformeln zu verwenden.
- 47.** Ein Kohlenkasten aus Blech hat die Gestalt eines Pyramidenstumpfes mit quadratischem Querschnitt. Er ist 54 cm hoch, die oberen Kanten sind 15 cm, die unteren 32 cm lang. a) Wieviel l Kohlen faßt er? b) Wieviel Blech erfordert er zu seiner Herstellung (er ist natürlich oben offen)?
- 48.** Ein Wagenkasten ist ähnlich gestaltet wie ein Pyramidenstumpf mit rechteckiger Grundfläche, nur sind zwei Seitenflächen parallel zueinander. Die Innenmaße sind unten 1,2 m $\times$ 2,9 m, oben 1,7 m $\times$ 2,9 m, die Tiefe ist 0,9 m. a) Wie groß ist der Rauminhalt? (Wende eine der für den Pyramidenstumpf abgeleiteten Näherungsformeln an.) b) Wieviel Doppelzentner Kartoffeln gehen in den Wagen, wenn man als Gewicht von 11 Kartoffeln $\frac{1}{4}$ kg annimmt?

Geometrische Überlegungen

- 49.** Welche Formeln für den Mantel, die Oberfläche und den Inhalt des Kegelstumpfes, für den Inhalt des Pyramidenstumpfes gelten für schiefe ebenso wie für gerade Stumpfe? Erörtere bei den Formeln, die nicht erhalten bleiben, die auftretenden Schwierigkeiten.
- 50.** Wie steht es mit der Anwendung der Näherungsformeln (Aufg. 32 und 36) bei schiefen Pyramiden- und Kegelstumpfen?

Aus der Geschichte der Geometrie

- 51.** Der folgende Satz aus der Schrift „Über Kugel und Zylinder“ von Archimedes (287—212 v. Chr.) ist zu beweisen:

„Schneidet man einen geraden Kegel mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene, so ist der Teil des Kegelmantels zwischen den parallelen Ebenen gleich einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zu dem Teil der Seitenlinie des Kegels, der zwischen die parallelen Ebenen fällt, und der Strecke, die gleich der Summe der Radien der in den Parallelebenen liegenden Kreise ist.“

Löse die folgenden Aufgaben aus Herons Vermessungslehre, Buch III, durch Rechnung:

- 52.** „Es sei eine Pyramide, die eine Basis $ABTA$ von beliebiger Form hat und zur Spitze den Punkt E . Es sei gegeben eine Seite derselben $AE = 5$ und die Aufgabe sei, sie mit einer der Basis parallelen Ebene so zu schneiden, daß die an der Spitze abgeschnittene Pyramide beispielsweise viermal so groß sei als der übrigbleibende Körper.“
- 53.** „Es sei ein Kegelstumpf gegeben, den man in einem gegebenen Verhältnis teilen soll. Seine Basis sei der Kreis AB , seine obere Abschlußfläche der Kreis AE und die Aufgabe sei, ihn durch eine der Basis parallele Ebene so zu teilen, daß der Abschnitt an der oberen Abschlußfläche viermal so groß ist als der übrigbleibende.“

§ 40. Kugel

Darstellung der Kugel

- 1. a)** Welche ebene Figur muß man um eine Begrenzungslinie, **b)** welche ebene Figur um eine Symmetrieachse rotieren lassen, um eine Kugel zu erhalten?
- 2.** Untersuche ebene Schnitte durch eine Kugel. **a)** Was ist über ihre Gestalt zu sagen? **b)** Unter welchen Umständen sind die Schnitte gleich groß?
- 3.** Zeige, daß man die Kugeloberfläche nur angenähert (wie? — Globus) in die Ebene abwickeln kann.
- 4.** Stelle eine Kugel im Grundriß und Aufriß dar.
- 5.** Eine Kugel wird durch eine Ebene **a)** parallel zur Grundrißebene, **b)** parallel zur Aufrißebene geschnitten. Zeichne den Querschnitt in die Grundriß-Aufrißdarstellung ein.
- 6.** Stelle eine Kugel (Radius 5 cm) in schräger Parallelprojektion dar, indem du zunächst in gleichen Abständen horizontale Schnitte legst, diese in schräger Parallelprojektion ($\frac{1}{2}$, 60°) darstellst und den Umriß der Kugel als Umhüllende der Bildellipsen zeichnest.
- 7.** Was für eine Figur ist der Umriß einer in schräger Parallelprojektion dargestellten Kugel (Grund!)?

8. Zeichne in möglichst praktischer Lage **a)** einen Kugelabschnitt, **b)** eine Kugelzone, **c)** einen Kugelausschnitt im Grundriß und Aufriß und in den gleichen Maßen in schräger Parallelprojektion.

Berechnung der Kugel

9. Denke auf der Kugel Längen- und Breitenkreise wie auf der Erdkugel eingezeichnet. Die Ecken jedes Vierecks (sind es nur Vierecke?) verbinde mit dem Mittelpunkt. Zeige, daß durch Summation aller pyramidenähnlichen Teilkörper, je größer ihre Zahl wird, um so genauer die Gleichung

$$V = \frac{1}{3} r \cdot O$$

gilt, wo V der Inhalt, O die Oberfläche, r der Radius der Kugel ist.

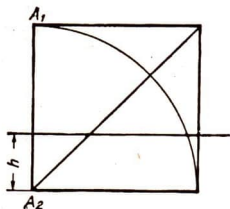


Fig. 261

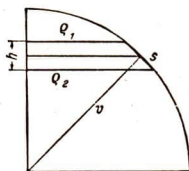


Fig. 262

10. (Archimedischer Beweis.) Fig. 261 zeigt ein Quadrat mit Diagonale und eingeschriebenem Kreisquadranten. Zeichne die durch Rotation um A_1A_2 entstehenden Rotationskörper **a)** in schräger Parallelprojektion, **b)** in Grundriß und Aufriß.
11. Lege in beliebigem Abstand h parallel zur Grundfläche einen ebenen Schnitt durch die Rotationskörper und zeichne den Querschnitt **a)** in wirklicher Größe (also im Grundriß), **b)** in schräger Parallelprojektion.
12. Beweise, daß der Querschnitt durch die Halbkugel flächengleich dem Kreisring ist, der aus dem Restkörper von Zylinder und Kegel ausgeschnitten wird (Halbkugel, Zylinder und Kegel sind so entstanden, wie es Aufg. 10 angibt).
13. Beweise aus dem Ergebnis der Aufg. 12 die Gleichung

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

für den Inhalt der Kugel.

14. Leite aus den Gleichungen der Aufg. 13 und 9 für die Kugeloberfläche die Formel ab

$$O = 4 \pi r^2.$$

15. Lege durch eine Halbkugel in gleichen Abständen parallel zur Grundfläche eine Ebenenschar. Die entstehenden Kugelzonen ersetze durch Kegel-

stumpfe. In Fig. 262 sind von einem dieser Kegelstumpfe die Radien ϱ_1 und ϱ_2 der Deckflächen, die Höhe h und die Seitenlinie s gezeichnet. **a)** Beweise, daß

$$\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} : v = h : s$$

ist, wo v der Abstand des Kugelmittelpunktes von s ist. **b)** Drücke jetzt den Kegelstumpfmantel statt durch ϱ_1 , ϱ_2 und s durch h und v aus. **c)** Beweise, daß man durch Addition aller Kegelstumpfmäntel für die gesamte Kugel erhält $O = 4\pi r^2$, wenn man berücksichtigt, daß, je kleiner h wird, um so mehr v sich r nähert. **d)** Leite jetzt, von dem Ausdruck für O ausgehend, die Formel für V ab.

16. Sprich die Formeln für Oberfläche und Inhalt der Kugel statt für den Radius für den Durchmesser der Kugel aus.
17. Berechne den Inhalt einer Kugel mit dem Radius 10 cm.
18. Welchen Radius hat eine Kugel, deren Inhalt 1 l ist?
19. Welchen Durchmesser hat eine Kugel, deren Oberfläche ein Quadratmeter ist?
20. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte und die Oberflächen zweier Kugeln, deren Radien sich **a)** wie 1 : 2, **b)** wie $m : n$ verhalten?
21. In welchem Verhältnis stehen die Radien und die Oberflächen zweier Kugeln, deren Inhalt sich **a)** wie 1 : 2, **b)** wie $m : n$ verhalten?
22. Gegeben sind zwei Kugeln mit dem Radius r_1 und r_2 . Wie groß ist **a)** eine Kugel, die den gleichen Rauminhalt, **b)** eine Kugel, die die gleiche Oberfläche hat, wie die beiden gegebenen zusammen?
23. **a)** Gegeben ist ein Würfel. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der drei Kugeln, von denen die eine von den Würfebenen, die zweite von den Würfelkanten berührt wird, während die dritte durch die Würfecken geht. **b)** Beantworte dieselbe Frage für ein Tetraeder, **c)** für ein Oktaeder.
24. Eine Kugel und **a)** ein Würfel, **b)** ein Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt haben gleiche Oberfläche. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der beiden Körper?
25. Eine Kugel und **a)** ein Würfel, **b)** ein Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt haben gleichen Inhalt. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der beiden Körper?
26. Einer Halbkugel ist eine Kugel eingeschrieben, die in der Mitte des Halbkreises ruht und die Halbkugel berührt. Wie groß ist der Restkörper?
27. Einer Kugel ist ein Würfel eingeschrieben. Den Würfelflächen sind gerade Pyramiden aufgesetzt, deren Spitzen in der Kugeloberfläche liegen. **a)** Wie groß ist der Rauminhalt des Körpers? **b)** Zeichne den Körper in Grundriß und Aufriß oder in schräger Parallelprojektion.
28. Einer Halbkugel ist der größte Kegel eingeschrieben, also der gerade Kegel, der die gleiche Grundfläche wie die Halbkugel hat, und dessen Höhe gleich dem Radius ist. Berechne Oberfläche und Inhalt des Restkörpers, der entsteht, wenn man diesen Kegel aus der Halbkugel herauschneidet.

29. Aus einer Halbkugel wird ein auf der Grundfläche stehender gerader Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt herausgebohrt, dessen Achse durch die Mitte der Grundfläche geht. **a)** Zeichne den Restkörper in Grundriß und Aufriß. **b)** Berechne den Inhalt des Restkörpers.
30. Stelle **a)** die Oberfläche, **b)** den Inhalt einer Kugel graphisch dar als Funktion des Radius (geeigneter Maßstab).
31. Einem Kegel mit gleichseitigem Achsenschnitt ist eine Kugel eingeschrieben, eine andere umgeschrieben. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächen, **b)** die Inhalte der Kugeln?
32. Einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt ist eine Kugel eingeschrieben, eine andere umgeschrieben. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächen, **b)** die Inhalte der Kugeln?

Praktische Anwendungen

33. Wie schwer wäre eine Korkkugel vom Radius 1 m (spez. Gewicht 0,24)?
34. Welchen Durchmesser hat eine Goldkugel, die einen Zentner (= 50 kg) wiegt (spez. Gewicht 19,3)?
35. Welchen Durchmesser und welche Oberfläche hat ein Freiballon, der 1500 m³ faßt?
36. **a)** Wie groß ist die Oberfläche eines „Heuers“ (in anderen Gegenden „Klikkers“, einer „Murmelkugel“)? Schätze erst, miß dann den Durchmesser und berechne. **b)** Was kostet das Vergolden einer Kirchturmkugel vom Radius 22 cm, wenn der Quadratzentimeter auf 15 Pf. kommt.
37. **a)** Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn sie als Kugel mit dem Radius 6370 km betrachtet wird? **b)** Um wieviel größer ist die Oberfläche, wenn der Erdradius statt 6370 km die Länge 6377 km hat?
38. Das Pantheon in Rom ist in seinem Hauptteil ein Zylinder und eine diesem Zylinder aufgesetzte Halbkugel. Durchmesser des Zylinders und Höhe des Bauwerkes sind gleich und zwar 43,5 m. Wie groß ist (von Nischen und dem „Auge“ oben abgesehen) die Innenfläche?
39. Eine Wandnische hat die Gestalt eines halben Kreiszylinders von der Höhe 6 m und dem Radius 2 m, dem eine Viertelkugel aufgesetzt ist. Zeichne die Nische in Grundriß und Aufriß und berechne ihre Wandfläche.
40. Eine gußeiserne Kugel ist 1,5 cm dick und hat einen äußeren Umfang von 16,9 cm. Wie schwer ist sie? (Spez. Gewicht des Gußeisens 7,24.)
41. Aus einem Tropfen Seifenlösung, dessen Gestalt als Kugel mit $\frac{1}{2}$ cm Durchmesser angenommen werde, wird eine Seifenblase geblasen, die einen Durchmesser von 10 cm hat. **a)** Wie dick ist die Flüssigkeitsschicht, die die Seifenblase bildet? **b)** Um wieviel muß der Durchmesser größer werden, wenn die Flüssigkeitsschicht nur noch halb so dick sein soll?

Kugelabschnitt, Kugelausschnitt, Kugelkappe, Kugelzone

42. Führe die Überlegung im Archimedisches Beweis (Aufg. 10—12) für einen Kugelabschnitt durch und beweise, daß sein Inhalt

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) \quad \text{ist.}$$

43. Führe an Stelle des Kugelradius r den Radius ϱ des den Kugelabschnitt begrenzenden Kreises ein und beweise so die Formel

$$V = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho^2 + h^2).$$

44. Berechne einen Kugelabschnitt aus $r = 4$ cm und a) $h = 1$ cm, b) $h = 2$ cm, c) $h = 3$ cm.

45. Berechne den Inhalt des Kugelabschnittes, dessen Grundkreisradius die Hälfte des Kugelradius ist.

46. Berechne die Inhalte der beiden Kugelabschnitte, die entstehen, wenn ein Kugeldurchmesser durch eine zu ihm senkrechte Ebene im Verhältnis a) 1:3, b) 1:2 geteilt wird.

47. Berechne einen Kugelabschnitt, dessen Höhe $h = 3,1$ cm, dessen Grundkreisdurchmesser $d = 11,4$ cm ist.

48. Zeige, daß man durch geeignete Wahl von h aus der Formel für den Kugelabschnitt die für die Halbkugel und für die ganze Kugel erhält.

49. Fasse den Kugelausschnitt als Summe von Kugelabschnitt und Kegel auf und leite so die Inhaltsformel ab

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h.$$

50. Berechne den Kugelausschnitt, der zu dem a) in Aufg. 44a), b) in Aufg. 45, c) in Aufg. 47 genannten Kugelabschnitt gehört.

51. Zeige, daß man bei geeigneter Wahl von h aus der Formel für den Kugelausschnitt die für die Halbkugel gewinnt.

52. Leite mit Hilfe der Beziehung $V = \frac{1}{3} r O$ die Formel für die Kugelkappe ab:

$$O = 2\pi r h.$$

53. Berechne eine Kugelkappe aus (ϱ ist der Radius des Grenzkreises):

$$\begin{array}{ll} \text{a) } r = 10 \text{ cm, } h = 5 \text{ cm;} & \text{b) } r = 15 \text{ cm, } \varrho = 12 \text{ cm;} \\ & \text{c) } \varrho = 4,8 \text{ cm, } h = 3,2 \text{ cm.} \end{array}$$

54. Fasse eine Kugelzone als Differenz zweier Kugelkappen auf und leite so die Formel

$$O = 2\pi r h \quad \text{ab.}$$

55. Zeige, daß man aus der Formel für die Kugelzone als besonderen Fall die für die Kugelkappe und die für die ganze Kugelfläche herauslesen kann.

56. Berechne eine Kugelzone, wenn gegeben ist $h = r = 7,83$ cm.

57. Eine Halbkugel ist durch eine Ebene parallel zur Grundfläche so zu schneiden, daß sich die abgeschnittene Kugelkappe zur verbleibenden Kugelzone wie 1 : 2 verhält. Wie ist der Schnitt zu legen?
58. Stelle **a)** die Kugelzone (oder Kugelkappe), **b)** den Inhalt des Kugelausschnittes, **c)** den Inhalt des Kugelabschnittes als Funktion der Höhe h bei gleichbleibendem Radius r dar. (Für die konstant gehaltenen Größen sind zweckmäßige Werte anzunehmen.)

Trigonometrische Berechnungen

59. Wie groß ist der Öffnungswinkel eines Kugelausschnittes, wenn der Kugelradius $r = 7,5$ cm und die Höhe $h = 2,5$ cm gegeben ist?
60. Von einem Kugelausschnitt ist der Öffnungswinkel **a)** $\alpha = 120^\circ$, **b)** $\alpha = 90^\circ$ gegeben. Berechne den Inhalt des Kugelausschnittes und die Oberfläche der zugehörigen Kugelkappe, wenn der Kugelradius $r = 10$ cm ist.
61. Das Volum eines Kugelausschnittes ist ein Drittel der ganzen Kugel. Wie groß ist der Öffnungswinkel?

Praktische Anwendungen

62. Berechne den Radius **a)** des 30., **b)** des 45. Breitenkreises, **c)** des Breitenkreises deines Wohnortes. **d)** Welcher Breitenkreis ist halb so lang wie der Äquator?
63. Wie groß ist **a)** eine kalte, **b)** eine gemäßigte, **c)** die heiße Zone der Erde?
64. Eine plankonvexe Linse aus Flintglas (spez. Gewicht 3,33) soll einen Durchmesser von 12 cm haben und der Radius der konvexen Fläche soll 23,4 cm sein. **a)** Wieviel cm^3 Glas braucht man zu ihrer Herstellung? **b)** Wie schwer ist sie?
65. Eine bikonvexe Linse, die beiderseits gleich gekrümmt ist, hat in der Mitte eine Dicke von 25 mm und einen Durchmesser von 30 cm. Wie groß ist **a)** ihr Gewicht (spez. Gew. 3,33), **b)** ihre Oberfläche?
66. Eine Holzkugel von 11,1 cm Durchmesser taucht 6,9 cm tief in Wasser ein. **a)** Wie groß ist die unbenetzte Fläche? **b)** Wie groß ist das spezifische Gewicht der Kugel?
67. Aus einer Kugel mit dem Radius $r = 5$ cm ist ein Zylinder vom Radius $\rho = 4$ cm so herausgebohrt, daß seine Achse gerade durch den Kugelmittelpunkt geht. Berechne **a)** die Oberfläche, **b)** den Inhalt des dabei entstehenden Restkörpers.
68. Wie groß ist die Kugelkappe der Erde, die man vom Pic von Teneriffa (3730 m) überblickt?
69. Eine Kugel vom Radius r wird von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet, deren Abstand vom Kugelmittelpunkt **a)** $2r$, **b)** $k \cdot r$ ist. In welchem Verhältnis stehen beleuchtete und unbeleuchtete Kugelkappe?

Rückblick auf die Berechnungsformeln der Körper

70. Zeige, daß die Formeln **a)** für die Oberflächen, **b)** für die Rauminhalte von Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Pyramidenstumpf, Kegelsumpf, Kugel die gleiche Dimension haben. Welche?

71. Wann sind **a)** Zylinder, **b)** Kegel, **c)** Kugeln kongruent?
72. Wann sind **a)** Prismen, **b)** Pyramiden, **c)** Zylinder, **d)** Kegel, **e)** Kugeln, **f)** Kugelkappen ähnlich?
73. In zwei ähnlichen Körpern verhalten sich homologe Strecken wie $m:n$. In welchem Verhältnis stehen **a)** die Oberflächen, **b)** die Rauminhalte?
74. Die Oberflächen zweier ähnlicher Körper verhalten sich wie $m:n$. In welchem Verhältnis stehen **a)** homologe Strecken, **b)** die Rauminhalte?
75. Die Rauminhalte zweier ähnlicher Körper verhalten sich wie $m:n$. In welchem Verhältnis stehen **a)** homologe Strecken, **b)** homologe Flächen?
76. Nenne Formen von **a)** Quadern, **b)** Pyramiden, **c)** Zylindern, **d)** Kegeln, die ohne weitere Bedingungen ähnlich sind.
77. Es sei die Oberfläche oder der Rauminhalt eines Körpers nur von einer einzigen Strecke x (etwa der Kante beim Würfel, dem Radius bei der Kugel) abhängig. Zeige an Beispielen, daß dann $O = k_1 x^2$, $V = k_2 x^3$ ist, wo k_1 und k_2 Konstanten sind. (Gib die Konstanten für einige Körper an!)
78. **a)** Ein Würfel, **b)** ein Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt, **c)** eine Kugel aus irgendeinem Metall im Gewicht von 1 kg wird erst in 10, dann in 100, dann in 1000 Körper der gleichen Art umgegossen. Wie groß ist in jedem Falle die Oberfläche aller Körper? Welche Strecke füllen die Körper in jedem Falle aus, wenn man sie aneinanderreih?

Aus der Geschichte der Geometrie

79. Untersuche, ob der Ausdruck, den Aryabhatta (geb. 476 n. Chr.) für den Inhalt der Kugel angibt, nämlich das Produkt aus der Fläche des größten Kreises und der Quadratwurzel daraus, ein Näherungswert oder ein falscher Wert ist.
80. Prüfe in gleicher Weise die Angabe von Beha Eddin (1547—1622), daß der Kugelinhalt $\left(\frac{11}{14}d\right)^3$ oder, mit π geschrieben, $\left(\frac{r\pi}{2}\right)^3$ sei.
81. Prüfe in gleicher Weise die Angabe, die sich in einem Brief von Adelbold von Utrecht an Gerbert, den nachmaligen Papst Sylvester († 1003), findet, daß von dem Kubus des Durchmessers $\frac{1}{11}$ abgezogen, mit anderen Worten also, $\frac{1}{11}$ dieses Kubus zu nehmen sei, damit man den Kugelinhalt erhalte.
- Aus der Schrift „Über Kugel und Zylinder“ von Archimedes (287—212 v. Chr.):
82. „Jede Kugel ist gleich dem Vierfachen des Kegels, dessen Grundfläche gleich dem größten Kreise und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.“ Zeige, daß dieser Satz sich aus unseren Formeln ergibt.
83. „Die Kugelkappe ist gleich einem Kreise, dessen Radius gleich dem Abstand des Scheitels der Kalotte von einem Punkte des Grundkreises ist.“ Zeige die Übereinstimmung mit unserer Formel.

Anhang

Die großen und kleinen griechischen Buchstaben

$A, \alpha = \text{a, alpha}$	$I, \iota = \text{i, iöta}$	$P, \rho = \text{r, rho}$
$B, \beta = \text{b, bēta}$	$K, \kappa = \text{k, kappa}$	$\Sigma, \sigma = \text{s, sigma}$
$\Gamma, \gamma = \text{g, gamma}$	$\Lambda, \lambda = \text{l, lambda}$	$T, \tau = \text{t, tau}$
$\Delta, \delta = \text{d, delta}$	$M, \mu = \text{m, my}$	$Y, \upsilon = \text{y, ypsilon}$
$E, \varepsilon = \text{ě, ěpsilon}$	$N, \nu = \text{n, ny}$	$\Phi, \varphi = \text{ph, phi}$
$Z, \zeta = \text{z, zēta}$	$\Xi, \xi = \text{x, xi}$	$X, \chi = \text{ch, chi}$
$H, \eta = \text{ē, ēta}$	$O, o = \text{ö, ömikron}$	$\Psi, \psi = \text{ps, psi}$
$\Theta, \theta = \text{th, thēta}$	$\Pi, \pi = \text{p, pi}$	$\Omega, \omega = \text{ō, ōmēga}$

Geometrischer Leitfaden

§ 1. Geraden und Winkel

Strahl und Strecke

- 1. Erklärung.** Ein Strahl ist ein von einem Punkt begrenztes Stück einer Geraden.

Während sich also die Gerade nach beiden Seiten beliebig weit erstreckt, erstreckt sich der Strahl nur nach einer Seite beliebig weit. Der Punkt, der ihn auf der anderen Seite begrenzt, heißt Anfangspunkt.

- 2. Erklärung.** Eine Strecke ist ein von zwei Punkten begrenztes Stück einer Geraden. Die beiden begrenzenden Punkte heißen die Endpunkte der Strecke.

Zwischen zwei Punkten gibt es nur eine einzige Strecke, und diese ist kürzer als jeder zwischen den beiden Endpunkten gezogene gebrochene Streckenzug.

- 3. Messung von Strecken.** Eine Strecke wird dadurch gemessen, daß man feststellt, wie oft eine Einheit auf ihr abgetragen werden kann. Als Einheit nimmt man je nach der Länge der Strecke mm (Millimeter), cm (Zentimeter), dm (Dezimeter), m (Meter), km (Kilometer). Ein Meter sollte ursprünglich der 10000000. Teil des Erdquadranten sein, d. h. des vom Pol bis zum Äquator reichenden Stückes eines Erdmeridians. Genauer gesagt ist es der Abstand zweier Striche, die auf einem im internationalen Maß- und Gewichtsbüro in Paris niedergelegten Metallmaßstab mit einem Diamanten eingeritzt sind. 1 dm ist der zehnte, 1 cm der hundertste, 1 mm der tausendste Teil des Meters, 1 km ist das Tausendfache des Meters.

Winkel

- 4. Erklärung.** Ein Winkel ist eine Figur, die aus zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt gebildet wird. Die beiden Strahlen heißen Schenkel, der gemeinsame Ausgangspunkt heißt Scheitel des Winkels.

Das Zeichen für Winkel ist $\sphericalangle$.

Ein Winkel entsteht, wenn man einen Strahl um seinen Anfangspunkt dreht. Anfangs- und Endlage des Strahles sind dann die Schenkel des Winkels.

- 5. Erklärung.** Ein Vollwinkel entsteht, wenn man einen Strahl so lange um seinen Anfangspunkt dreht, bis er zum ersten Male in seine Anfangslage zurückkehrt. Die Hälfte eines Vollwinkels nennt man einen gestreckten Winkel. Den vierten Teil eines Vollwinkels nennt man einen rechten Winkel. Man teilt einen Vollwinkel auch in 360 gleiche Teile; diese heißen Grade. Das Zeichen für Grad ist $^{\circ}$. Der rechte Winkel hat z. B. 90° , der gestreckte 180° .

Erklärung. Winkel, die kleiner als ein rechter sind, heißen spitze Winkel; Winkel, die größer als ein rechter und kleiner als ein gestreckter sind, heißen stumpfe Winkel. Winkel, die größer als ein gestreckter sind, heißen überstumpfe Winkel.

Nebenwinkel und Scheitelwinkel

- 6. Erklärung.** Nebenwinkel entstehen, wenn man den einen Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, d. h. zu einer Geraden ergänzt. Zwei Winkel sind also Nebenwinkel, wenn sie den Schenkel gemeinsam haben und wenn die anderen Schenkel eine Gerade bilden.

Nebenwinkelsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180° . Die beiden Nebenwinkel bilden nämlich zusammen einen gestreckten Winkel.

Folgerung. Sind zwei Nebenwinkel gleich, so ist jeder ein rechter.

- 7. Erklärung.** Scheitelwinkel entstehen, wenn man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert oder wenn man eine Gerade um einen ihrer Punkte dreht. Scheitelwinkel sind also Winkel, bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind. Schneiden sich zwei Geraden, so ent-

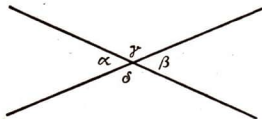


Fig. 1

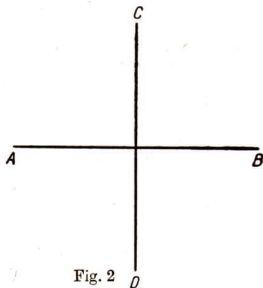


Fig. 2

stehen zwei Paare von Scheitelwinkeln. In der Fig. 1 sind die Winkel α und β Scheitelwinkel und ebenso die Winkel γ und δ .

Scheitelwinkelsatz. Scheitelwinkel sind gleich.

Denke ich sie mir nämlich durch Drehung einer Geraden um einen Punkt entstanden, so entstehen beide Winkel durch die gleiche Drehung.

Folgerung. Schneiden sich zwei Geraden so, daß zwei durch den Schnittpunkt begrenzte Strahlen einen rechten Winkel bilden, so sind alle vier Winkel, die entstehen, rechte. Der eine ist nämlich ein rechter als Scheitelwinkel des gegebenen, die beiden anderen sind es als Nebenwinkel des gegebenen.

Man sagt in diesem Falle, die Geraden stehen senkrecht aufeinander, die eine Gerade ist eine Senkrechte auf der anderen.

Das Zeichen für senkrecht ist $\perp$.

In Fig. 2 ist z. B. $AB \perp CD$.

Gegenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzt liegende Winkel

8. Erklärung. Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten (Fig. 3), so entstehen, wenn wir von dem Schnittpunkt der beiden ersten Geraden absehen, insgesamt acht Winkel. Man nennt

a) Winkel, die auf gleichen Seiten der schneidenden und der geschnittenen Geraden liegen, gleichliegende Winkel oder Gegenwinkel;

in der Fig. 3 sind z. B. α und ε Gegenwinkel;

b) Winkel, die auf verschiedenen Seiten der schneidenden und der geschnittenen Geraden liegen, Wechselwinkel;

in der Fig. 3 sind z. B. γ und ε oder α und η Wechselwinkel;

c) Winkel, die auf gleichen Seiten der schneidenden und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden liegen, entgegengesetzt liegende Winkel;

in der Fig. 3 sind z. B. γ und ζ oder α und ϑ entgegengesetzt liegende Winkel.

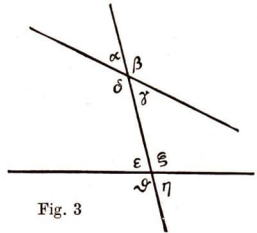


Fig. 3

Parallele Geraden

9. Erklärung. Wenn man einen Winkel längs des einen Schenkels verschiebt, so bilden die anderen Schenkel mit ihren Verlängerungen parallele Geraden (Parallelen).

Parallelen schneiden sich nicht, so weit man sie auch verlängert. Ist eine Gerade gegeben und ein Punkt, der nicht auf ihr liegt, so kann man durch diesen Punkt immer eine und nur eine Parallele zu der Geraden ziehen.

Sind die Geraden g_1 und g_2 parallel, so schreibt man das $g_1 \parallel g_2$.

10. Parallelsatz. 1. Wenn zwei Parallelene von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die Gegenwinkel gleich.

Ich kann mir nämlich die Parallelene durch Verschieben des einen Winkels in seinen Gegenwinkel entstanden denken (Fig. 4).

2. Wenn zwei Parallelene von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die Wechselwinkel gleich.

Es ist beispielsweise (Fig. 4) $\alpha = \varepsilon$ als Gegenwinkel,
 $\alpha = \gamma$ als Scheitelwinkel,

folglich sind die Wechselwinkel ε und γ gleich.

3. Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so beträgt die Summe zweier entgegengesetzt liegenden Winkel zwei rechte.

Es ist beispielsweise (Fig. 4)

$\alpha = \varepsilon$ als Gegenwinkel,

$\alpha + \delta = 180^\circ$ als Nebenwinkel;

folglich beträgt auch die Summe der Winkel ε und δ zwei rechte.

11. Umkehrung des Parallelensatzes.

1. Werden zwei Geraden von einer dritten Geraden so geschnitten, daß ein Paar Gegenwinkel gleich ist, so sind die geschnittenen Geraden parallel:

Zwei Parallelen können nämlich durch Verschieben eines Winkels längs eines seiner Schenkel entstanden gedacht werden (Fig. 4).

2. Werden zwei Geraden von einer dritten Geraden so geschnitten, daß ein Paar Wechselwinkel gleich ist, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Ist nämlich etwa in Fig. 4 der Winkel $\delta = \zeta$, so ist, weil δ und β als Scheitelwinkel gleich sind, auch $\zeta = \beta$. Es sind also auch zwei Gegenwinkel an den geschnittenen Geraden gleich; mithin sind die Geraden nach dem Vorangehenden parallel.

3. Werden zwei Geraden von einer dritten Geraden so geschnitten, daß zwei entgegengesetzt liegende Winkel sich zu zwei rechten ergänzen, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Ist nämlich etwa in Fig. 4 $\delta + \varepsilon = 180^\circ$,
 so ist, weil δ und α Nebenwinkel sind, auch

$$\delta + \alpha = 180^\circ.$$

Es ist also

$$\delta + \varepsilon = \delta + \alpha,$$

und mithin

$$\varepsilon = \alpha.$$

Es sind also auch zwei Gegenwinkel an den geschnittenen Geraden gleich; mithin sind die Geraden nach dem Vorhergehenden parallel.

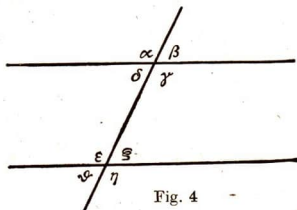


Fig. 4

§ 2. Das Dreieck

Begriff des Dreiecks

- 1. Erklärung.** Ein Dreieck ist eine Figur, die aus drei Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, und ihren Verbindungsstrecken gebildet wird.

Die drei Punkte heißen die Ecken des Dreiecks, die drei Strecken die Seiten des Dreiecks, die Winkel zwischen den Strecken die Winkel (genauer die Innenwinkel) des Dreiecks.

Zur Bezeichnung des Dreiecks benutzt man das Zeichen $\triangle$. Ein Dreieck mit den Ecken A , B und C schreibt man also $\triangle ABC$.

Wenn nichts anderes gesagt wird, bedeutet α den Winkel BAC , β den Winkel ABC , γ den Winkel ACB , a die Seite BC , b die Seite AC , c die Seite AB .

Seiten des Dreiecks

- 2. Seitensatz.** Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Es ist im $\triangle ABC$ z. B. der Weg von A nach B auf der Strecke c kürzer als der Weg auf dem Streckenzug über C , weil die Strecke eine kürzere Verbindung zwischen zwei Punkten ist als irgendein Streckenzug (§ 1, Nr. 2).

Folgerung. Im Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Winkel des Dreiecks

- 3. Winkelsatz.** Im Dreieck ist die Summe der Winkel 180° .

Beweis. Zieht man zu BC durch A die Parallele MN , dann ist (Fig. 5)

$\sphericalangle MAB$ gleich dem Innenwinkel β des Dreiecks als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus dem gleichen Grunde ist $\sphericalangle NAC$ gleich dem Innenwinkel γ . Da aber die Winkel MAB , $BAC = \alpha$, NAC zusammen einen gestreckten Winkel bilden, ist auch die Summe aller drei Innenwinkel α , β und γ gleich 180° .

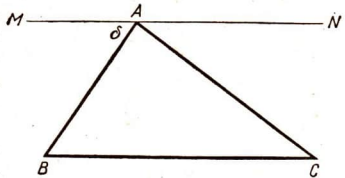


Fig. 5

Folgerung. Ein Dreieck kann nicht mehr als einen stumpfen Winkel, nicht mehr als einen rechten Winkel haben. Die beiden anderen Winkel sind spitz.

- 4. Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln.** Ein Dreieck mit drei spitzen Winkeln heißt spitzwinklig, ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt rechtwinklig, ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt stumpfwinklig.

Erklärung. Im rechtwinkligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite Hypotenuse, die beiden anderen Seiten heißen Katheten.

Folgerung. Die Summe der spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck ist 90° .

5. Erklärung. Verlängert man eine Dreiecksseite über eine Ecke hinaus, so entsteht ein Außenwinkel.

6. Außenwinkelsatz. Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Beweis. Als Nebenwinkel sind ein Innenwinkel und der zugehörige Außenwinkel zusammen 180° groß; es ist etwa, wenn α' der dem Innenwinkel α anliegende Außenwinkel ist,

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ.$$

Andererseits sind alle drei Innenwinkel zusammen auch gleich 180° nach dem Winkelsatz.

Es ist also

$$\alpha + \alpha' = \alpha + \beta + \gamma,$$

mithin

$$\alpha' = \beta + \gamma.$$

Folgerung. Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Axialsymmetrische Dreiecke

7. Erklärung. Eine ebene Figur heißt axialsymmetrisch, wenn man durch Umklappen um eine in der Ebene gelegene Gerade den einen Teil der Figur mit dem anderen zur Deckung bringen kann. Die Gerade heißt die Symmetrieachse der Figur.

8. Satz. Im symmetrischen Dreieck sind zwei Seiten und zwei Winkel gleich; die Symmetrieachse halbiert den dritten Winkel und dessen Gegenseite und steht auf ihr senkrecht.

Beweis. Ist ABC das symmetrische Dreieck (Fig. 6), so muß die Symmetrieachse durch eine Ecke des Dreiecks gehen. Wäre das nämlich nicht der Fall, so lägen auf der einen Seite der Geraden zwei Eckpunkte des Dreiecks, auf der anderen läge einer. Dann wäre es unmöglich, daß die beiden Teile der Figur zur Deckung kommen. Die Möglichkeit, daß alle drei Ecken auf einer Seite der Geraden liegen, scheidet erst recht aus.

Die Symmetrieachse gehe also durch eine Ecke, etwa durch A ; sie schneide die gegenüberliegende Seite im Punkte D . Dann fällt beim Umklappen A auf A , D auf D und Punkt B auf C . Mithin ist $AB = AC$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$, $BD = CD$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC$. Aus der Gleichheit der letzten beiden Winkel, die zugleich Nebenwinkel sind, folgt aber (§ 1, Nr. 6, Folgerung) $AD \perp BC$.

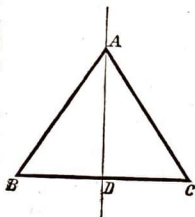


Fig. 6

9. Satz. Ein Dreieck ist symmetrisch, wenn in ihm zwei Seiten oder zwei Winkel gleich sind.

Beweis. 1. Ist im Dreieck ABC (Fig. 6) $AB = AC$, dann betrachte man die Winkelhalbierende des Winkels BAC als Symmetrieachse. Beim Um-

klappen fällt A auf A , D , der Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Gegenseite, auf D , AB wegen der Gleichheit von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CAD$ in die Richtung von AC und wegen der Gleichheit der Seiten AB und AC auch B auf C . Das Dreieck ist also symmetrisch.

2. Ist im Dreieck ABC (Fig. 6) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$, dann betrachte man die Mittelsenkrechte von BC als Symmetrieachse. Der Schnitt der Symmetrieachse mit BC sei D . Klappt man den einen Teil der Figur um die Symmetrieachse herum, so fällt D auf D , B auf C und wegen der Gleichheit der Winkel BA in die Richtung von CA . Der Schnitt von AB mit der Symmetrieachse ist also der gleiche, wie der Schnitt von AC mit der Symmetrieachse. Das heißt aber, die Symmetrieachse geht durch den Punkt A .

- 10. Erklärung.** Das symmetrische Dreieck heißt auch gleichschenkliges Dreieck. Die gleichen Seiten heißen die Schenkel, die Seite, die von der Symmetrieachse geschnitten wird, heißt die Basis. Der Winkel, der von der Symmetrieachse durchsetzt wird, heißt der Winkel an der Spitze, die beiden anderen Winkel heißen Basiswinkel.

Unter Verwendung dieser Begriffe wollen wir die beiden wichtigsten Tatsachen aus den Sätzen in Nr. 8 und Nr. 9 noch einmal aussprechen:

Satz 1. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

Satz 2. Sind in einem Dreieck die Basiswinkel gleich, so ist es gleichschenkelig.

Folgerung 1. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie jeder Basiswinkel.

Folgerung 2. Ein gleichseitiges Dreieck hat drei Symmetrieachsen. Alle Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind gleich und zwar beträgt jeder 60° .

Unsymmetrische Dreiecke

11. Satz. Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis (Fig. 7). Es sei $AC > AB$. Dann ziehe man die Winkelhalbierende durch A , die die Gegenseite in D schneidet. Klappt man jetzt ABD um AD herum, so fällt B auf AC , weil ja $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$ ist, und zwar zwischen A und C ; seine Lage sei B' . Nach dem Außenwinkelsatz ist dann im Dreieck $B'DC$

$$\sphericalangle AB'D > \sphericalangle ACB,$$

und, da $\sphericalangle AB'D = \sphericalangle ABD$ ist,

$$\text{auch } \sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB.$$

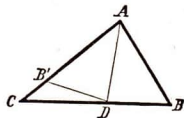


Fig. 7

12. Satz. Im Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Beweis. Im Dreieck ABC sei $\beta > \gamma$. Dann ist zunächst unmöglich, daß $AC = AB$ ist, denn dann wäre ja $\beta = \gamma$ (Nr. 9). Es kann aber auch nicht

$AB > AC$ sein, denn dann wäre nach Nr. 10 $\gamma > \beta$. Also bleibt nur die Möglichkeit übrig, daß $AC > AB$ ist.

Folgerung 1. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die größte Seite.

Folgerung 2 und Erklärung. Von allen Strecken, die einen Punkt mit Punkten einer Geraden verbinden, ist die Senkrechte von dem Punkt auf die Gerade die kürzeste. Diese kürzeste Strecke nennt man den Abstand des Punktes von der Geraden.

Kongruenz der Dreiecke

13. Erklärung. Zwei Figuren heißen kongruent, wenn sie zu vollständiger Deckung gebracht werden können.

Die Kongruenz zweier Dreiecke kann man also nachweisen, indem man zeigt, daß sie so aufeinander gelegt werden können, daß die Ecken aufeinanderfallen. Man kann den Nachweis für die Kongruenz auch dadurch erbringen, daß man die Dreiecke in symmetrische Lage bringt; von dieser Lage führt nämlich das Umklappen um die Symmetrieachse zur Deckung. Die Stücke (Seiten, Winkel), die bei der Deckung aufeinanderfallen, heißen homologe (gleichliegende) Stücke.

Das Zeichen für kongruent ist $\cong$.

14. Erster Kongruenzsatz. Dreiecke, die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent.

Beweis (Fig. 8). Wenn in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ $a = a'$, $b = b'$ und $\gamma = \gamma'$ ist, dann kann ich $\triangle A'B'C'$ so auf $\triangle ABC$ legen, daß γ' auf γ fällt und zwar der Schenkel $C'A'$ in die Richtung von CA . Dann fällt A' auf A , weil $C'A' = CA$ ist, und B' auf B , weil $C'B' = CB$ ist. Die Dreiecke decken sich also.

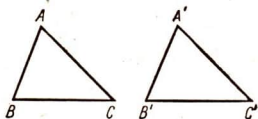


Fig. 8

15. Zweiter Kongruenzsatz. Dreiecke, die in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.

Beweis. Wir beweisen zunächst, daß Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, kongruent sind. Wenn (Fig. 8) in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ $a = a'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$ ist, so kann man $\triangle A'B'C'$ so auf $\triangle ABC$ legen, daß B' auf B und C' auf C fällt. $A'B'$ fällt in die Richtung von AB und $A'C'$ fällt in die Richtung von AC wegen der Gleichheit der Winkel. Folglich fällt auch A' auf A .

Stimmen die Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel überein, ist etwa $a = a'$, $\beta = \beta'$ und $\alpha = \alpha'$, so läßt sich zunächst zeigen, daß auch $\gamma = \gamma'$ ist. Da nämlich die Summe der Winkel jedes Dreiecks den Wert 180° hat, stimmen Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen, auch in den dritten Winkeln überein. Die Dreiecke sind deshalb nach dem ersten Teil dieses Beweises kongruent.

16. Dritter Kongruenzsatz. Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen, sind kongruent.

Beweis (Fig. 9). Es sei BC die größte Seite des Dreiecks. Ich lege dann $\triangle A'B'C'$ so an $\triangle ABC$, daß B' auf B , C' auf C fällt und ziehe AA' . Sollten die Dreiecke stumpfwinklig sein, so liegt der stumpfe Winkel jedenfalls beim

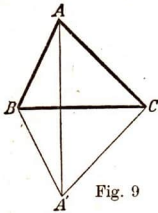


Fig. 9

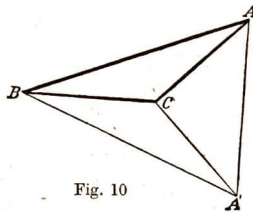


Fig. 10

Punkt A (Nr. 10); keinesfalls liegt ein stumpfer Winkel beim Punkt B oder C . AA' schneidet also BC . Dann sind $\triangle BAA'$ und $\triangle CAA'$ gleichschenkelig, mithin

$$\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BA'A,$$

$$\sphericalangle CAA' = \sphericalangle CA'A.$$

Durch Addition folgt daraus $\alpha = \alpha'$.

Es ist also $\triangle BA'C \cong \triangle BAC$ und $BACA'$ eine symmetrische Figur mit der Symmetrieachse BC . Damit ist die Kongruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ bewiesen (Nr. 15).

17. Vierter Kongruenzsatz. Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent.

Beweis (Fig. 9 u. 10). Es sei BC die größere, AC die kleinere der beiden Seiten von $\triangle ABC$, deren Gleichheit mit den entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ bekannt ist. Dann kann β nur spitz sein, γ aber kann spitz oder stumpf sein. Man legt $\triangle A'B'C'$ so an $\triangle ABC$; daß B' auf B und C' auf C fällt. Die Verbindungsstrecke AA' schneidet dann, je nachdem γ ein spitzer oder stumpfer Winkel ist, BC oder die Verlängerung von BC über C hinaus. $\triangle CAA'$ ist gleichschenkelig, weil $CA = CA'$ ist.

Folglich ist $\sphericalangle CAA' = \sphericalangle CA'A$.

Nun ist aber $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CA'B$,

mithin ist, wie sich in dem Falle, daß γ spitz ist, durch Subtraktion, in dem Falle, daß γ stumpf ist, durch Addition beider Gleichungen ergibt,

$$\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BA'A.$$

Daraus folgt (Nr. 9), daß auch BAA' ein gleichschenkliges Dreieck ist, also $BA = BA'$. $\triangle ABC$ und $\triangle A'BC$ sind also nach dem 1. oder 3. Kongruenzsatz kongruent, und damit ist die Kongruenz von $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ bewiesen.

§ 3. Das Viereck

Das allgemeine Viereck

- 1. Erklärung.** Ein Viereck ist eine Figur, die entsteht, wenn man vier Punkte, die in einer Ebene liegen, von denen aber keine drei in einer Geraden liegen, der Reihe nach miteinander verbindet.

Die Punkte heißen die Ecken, die Verbindungsstrecken die Seiten des Vierecks; je zwei aufeinanderstoßende Seiten schließen einen Viereckswinkel ein. Man unterscheidet überschlagene Vierecke, bei denen zwei nicht in einer Ecke aneinanderstoßende Seiten sich schneiden, und nicht überschlagene Vierecke. Es ist im folgenden angenommen worden, daß das Viereck nicht überschlagen ist. (Vgl. auch die Erklärung Nr. 3.)

Die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Ecken eines Vierecks heißen Diagonalen.

- 2. Winkelsatz.** Die Summe der Winkel im Viereck beträgt 360° .

Beweis. Zieht man eine das Viereck durchsetzende Diagonale, so entstehen zwei Dreiecke. Die Summe der sechs Winkel der beiden Dreiecke ist die gleiche wie die Summe der vier Winkel des Vierecks. Mithin ist die Summe der Viereckswinkel nach dem Winkelsatz des Dreiecks $180^\circ \cdot 2$, d. h. 360° .

Erklärung. Ist in einem Viereck ein Winkel überstumpf, so heißt das Viereck eingebuchtet.

Das Trapez

- 3. Erklärung.** Ein Viereck, in dem ein Paar Gegenseiten parallel ist, heißt Trapez.
- 4. Winkelsatz.** Im Trapez ist die Summe der beiden Winkel, die einer der nicht parallelen Seiten anliegen, 180° .

Beweis. Entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen ergänzen sich zu 180° (§ 1, Nr. 10).

Das Parallelogramm

- 5. Erklärung.** Ein Viereck, in dem die Gegenseiten paarweise parallel sind, heißt Parallelogramm.
- 6. Winkelsatz.** Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

Beweis. Als entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen, die von einer Geraden geschnitten werden (§ 1, Nr. 10), werden zwei gegenüberliegende Winkel von jedem der beiden anderen Viereckswinkel zu 180° ergänzt und sind deshalb gleich.

- 7. Seitensatz.** Im Parallelogramm sind die Gegenseiten gleich.

Beweis. Zieht man eine Diagonale, dann entstehen zwei Dreiecke (Fig. 11), die nach dem zweiten Kongruenzsatz kongruent sind. Außer der gemein-

samen Diagonale sind nämlich auch die Winkel gleich, wie wieder der Satz über den Schnitt zweier Parallelen mit einer Geraden zeigt. Als homologe Stücke sind dann die Gegenseiten des Parallelogramms gleich.

8. Diagonalsatz. Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.

Beweis. Zieht man zwei Diagonalen (Fig. 12), so entstehen vier Dreiecke.

Je zwei gegenüberliegende Dreiecke sind nach dem zweiten Kongruenzsatz kongruent. Die Gleichheit der Winkel kann man wie oben (Nr. 7)

nachweisen, außerdem sind ja im Parallelogramm die Gegenseiten gleich.

Ist also etwa

$$\triangle ABO \cong \triangle CDO,$$

so sind als homologe Stücke AO

und CO gleich und ebenso BO und DO .

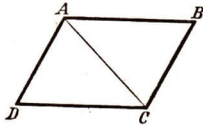


Fig. 11

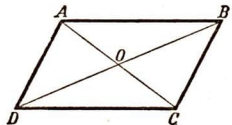


Fig. 12

9. Erklärung. Eine ebene Figur heißt zentralsymmetrisch, wenn man sie so um einen Punkt drehen kann, daß sie nach einer Drehung um 180° mit sich selbst zur Deckung kommt.

Der Drehpunkt heißt das Zentrum der Symmetrie.

Unter Benutzung dieser Begriffe kann man die bisherigen Sätze über das Parallelogramm (Nr. 6 bis 8) in der folgenden Form zusammenfassen:

Satz. Das Parallelogramm ist zentralsymmetrisch in bezug auf den Schnittpunkt der Diagonalen.

10. Umkehrung der Parallelogrammsätze. Ein Viereck ist ein Parallelogramm,

- a) wenn die gegenüberliegenden Winkel gleich sind,
- b) wenn die Gegenseiten gleich sind,
- c) wenn ein Paar Gegenseiten gleich und parallel ist,
- d) wenn die Diagonalen sich halbieren.

Beweis. a) Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die vier Winkel des Vierecks und $\alpha = \gamma, \beta = \delta$.

Dann ist nach dem Winkelsatz des Vierecks $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ und also $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ und $\alpha + \beta = 180^\circ$. Nach der Umkehrung des Parallelenatzes (§ 1, Nr. 11) folgt aber daraus zunächst, daß ein Paar Gegenseiten parallel ist. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß $\alpha + \delta = 180^\circ$ ist; diese Gleichung liefert ebenso den Nachweis dafür, daß auch das andere Paar Gegenseiten parallel ist.

b) Zieht man eine Diagonale (Fig. 11), so entstehen zwei Dreiecke, die nach dem dritten Kongruenzsatz kongruent sind. Daraus folgt dann, daß als homologe Stücke die Winkel gleich sind. Wieder zeigt jetzt die Umkehrung des Parallelenatzes, daß die Gegenseiten paarweise parallel sind.

c) Zieht man eine Diagonale (Fig. 11), so sind die entstehenden Dreiecke diesmal nach dem ersten Kongruenzsatz kongruent. Daß auch das andere Paar Gegenseiten parallel ist, folgt jetzt wie im Falle b).

d) Die beiden Diagonalen zerlegen das Viereck in vier Dreiecke (Fig. 12), von denen je zwei gegenüberliegende nach dem ersten Kongruenzsatz kongruent sind. Die Gleichheit der homologen Winkel erweist dann wieder, daß die Gegenseiten paarweise parallel sind.

Die Mittellinie im Trapez

11. Erklärung. Die Verbindungsstrecke der Mitten der nichtparallelen Seiten eines Trapezes heißt die Mittellinie des Trapezes.

Satz. Die Mittellinie eines Trapezes ist den beiden parallelen Seiten parallel.

Beweis. Sind E und F die Mitten der nichtparallelen Seiten AD und BC eines Trapezes $ABCD$ (Fig. 13), so zieht man durch F die Parallele zu AD , die die eine der parallelen Seiten und die Verlängerung der anderen in G und H trifft. $AGHD$ ist ein Parallelogramm, also AE , die Hälfte von AD , gleich GF , der Hälfte von GH . Mithin ist auch $AGFE$ ein Parallelogramm und deshalb $AG \parallel EF$.

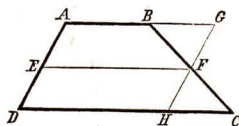


Fig. 13

12. Satz. Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten.

Beweis. Im vorangehenden Beweis war gefunden worden, daß $AGFE$ ein Parallelogramm ist (Fig. 13). Das gleiche läßt sich ebenso von $EFHD$ beweisen.

So ergibt sich

$$EF = AG = AB + BG,$$

$$EF = DH = DC - HC.$$

Durch Addition erhält man $2EF = AB + CD + BG - HC$.

Nun ist $\triangle BFG \cong \triangle CFH$, also $BG = CH$. Mithin wird

$$EF = \frac{1}{2}(AB + DC).$$

Das Rechteck

13. Erklärung. Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, in dem alle Winkel rechte sind. — Es genügt zu sagen, daß ein Winkel ein rechter ist, denn dann müssen es nach den Sätzen vom Parallelogramm auch die anderen sein.

Satz. Im Rechteck sind die Diagonalen gleich.

Beweis. Zieht man im Rechteck $ABCD$ die Diagonalen AC und BD , so sind die Dreiecke ABD und ACD (Fig. 14) kongruent nach dem ersten Kongruenzsatz. Als homologe Stücke sind mithin AC und BD gleich.

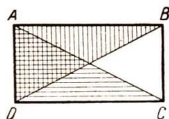


Fig. 14

Der Rhombus

14. Erklärung. Ein Rhombus ist ein Viereck, in dem alle Seiten gleich sind.
Satz. Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren die Rhombuswinkel.

Beweis. Schneiden sich die Diagonalen AC und BD des Rhombus $ABCD$ im Punkt O , so sind zwei nebeneinander liegende Teildreiecke, z. B. AOD und AOB , kongruent nach dem dritten Kongruenzsatz (Fig. 15). Es ist nämlich $AO = AO$, $AD = AB$ und, da der Rhombus ein Parallelogramm ist (Nr. 10), nach dem Diagonalsatz des Parallelogramms $DO = BO$. Mit hin sind als homologe Stücke die Winkel DOA und BOA gleich und, da sie gleichzeitig Nebenwinkel sind, beide rechte. Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke folgt gleichzeitig, daß $\sphericalangle DAO = \sphericalangle BAO$ ist, mit anderen Worten, daß AO den Winkel DAB des Rhombus halbiert.

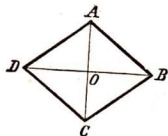


Fig. 15.

Das Quadrat

15. Erklärung. Ein Quadrat ist ein Viereck, das lauter gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat.

Folgerung. Ein Quadrat ist zugleich Rechteck und Rhombus, seine Diagonalen sind also gleich, stehen senkrecht aufeinander und halbieren den Quadratwinkel.

§ 4. Der Kreis

Kreis und Punkt

1. Erklärung. Wenn in der Ebene eine Strecke um den einen Endpunkt gedreht wird, beschreibt der andere Endpunkt einen Kreis.

Will man die Kreislinie von der von ihr begrenzten Fläche unterscheiden, so spricht man im ersten Falle von Kreisumfang oder Peripherie, im zweiten Falle von Kreisfläche. Der Punkt, von dem alle Punkte der Peripherie gleichen Abstand haben, heißt der Mittelpunkt des Kreises. Eine Strecke, die einen Punkt der Peripherie mit dem Mittelpunkt verbindet, heißt Radius (Halbmesser).

Nach der Erklärung des Kreises sind alle Radien eines Kreises gleich.

Der Abstand eines Punktes innerhalb des Kreises vom Mittelpunkt des Kreises ist kleiner, der Abstand eines Punktes außerhalb des Kreises vom Mittelpunkt des Kreises größer als der Radius.

Der Winkel zwischen zwei Radien heißt Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel); ein von zwei Punkten der Peripherie begrenztes Stück heißt Kreisbogen; das von zwei Radien und dem einen der beiden zugehörigen Kreisbögen begrenzte Stück der Kreisfläche heißt Kreisausschnitt.

Kreis und Sehne

- 2. Erklärung.** Eine Gerade und ein Kreis haben entweder zwei Punkte gemeinsam, oder sie berühren sich (haben einen Punkt gemeinsam), oder sie haben keinen Punkt gemeinsam.

Sind zwei Schnittpunkte vorhanden, so heißt die Gerade eine Sekante; eine durch den Mittelpunkt gehende Sekante heißt auch Zentrale. Die zwischen den Schnittpunkten einer Sekante mit einem Kreise liegende Strecke heißt Sehne, eine durch den Mittelpunkt gehende Sehne heißt Durchmesser. Der Durchmesser ist doppelt so groß wie der Radius.

Haben Gerade und Kreis einen Punkt gemeinsam, so heißt die Gerade eine Tangente; der Punkt, in dem sich Kreis und Gerade berühren, ist der Berührungspunkt. Man kann die Tangente als Grenzlage der Sekante auffassen, wenn deren zwei Schnittpunkte mit dem Kreis immer näher und näher zusammenrücken.

Das von einer Sehne und dem einen der beiden zugehörigen Kreisbögen begrenzte Stück der Kreisfläche heißt Kreisabschnitt.

- 3. Erklärung.** Ist der Abstand einer Geraden vom Kreismittelpunkt kleiner als der Radius, so ist die Gerade eine Sekante und umgekehrt.

Hat nämlich die Gerade Punkte, deren Abstand vom Mittelpunkt kleiner als der Radius ist, dann liegt sie zum Teil innerhalb des Kreises und muß ihn deshalb schneiden. Ist andererseits eine Gerade Sekante, so liegen die Punkte der Geraden innerhalb des Kreises; der Abstand dieser Punkte vom Mittelpunkt ist also kürzer als der Radius des Kreises, mithin ist auch der Abstand der Sekanten vom Mittelpunkt kleiner als der Radius.

- 4. Satz.** Die von einem Kreis und einer Sehne gebildete Figur ist axialsymmetrisch. Die Symmetrieachse geht durch den Mittelpunkt des Kreises, durch den Mittelpunkt der Sehne, steht auf der Sehne senkrecht und halbiert den zur Sehne gehörenden Zentriwinkel.

Beweis. Verbindet man die Endpunkte der Sehne mit dem Mittelpunkt des Kreises, so entsteht ein symmetrisches Dreieck, auf das die Sätze von § 2, Nr. 7, 8 anwendbar sind.

Folgerung. Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht durch den Kreismittelpunkt.

- 5. Satz.** 1. In einem Kreise haben Sehnen gleicher Länge gleichen Abstand vom Mittelpunkt.
2. Sehnen eines Kreises, die gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, sind gleich lang.

Beweis. 1. Sind (Fig. 16) AB und CD die gleichlangen Sehnen, ME und MF die den Abstand messenden Senkrechten vom Mittelpunkt M auf die Sehnen, so ist $\triangle MAE \cong \triangle MDF$ nach dem vierten Kongruenzsatz. Mit-hin ist $ME = MF$.

2. Ist umgekehrt $ME = MF$, so kann man die Kongruenz der gleichen Dreiecke wieder aus dem vierten Kongruenzsatz folgern und jetzt $AE = DF$ finden, wonach dann auch $AB = CD$ ist.

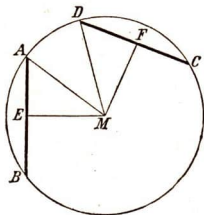


Fig. 16

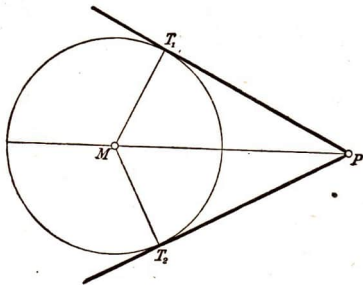


Fig. 17

Kreis und Tangente

6. Satz. Die von einem Kreis und einer Tangente gebildete Figur ist axialsymmetrisch. Die Symmetrieachse geht durch den Mittelpunkt des Kreises, durch den Berührungspunkt und steht auf der Tangente senkrecht.

Beweis. Der Satz folgt aus Nr. 4, wenn man die Tangente als Grenzlage der Sekante auffaßt.

Folgerung. Die im Endpunkt eines Radius auf diesem errichtete Senkrechte ist Tangente an den Kreis.

7. Satz. Die Figur, die von einem Kreis und den von einem Punkte außerhalb des Kreises an diesen gelegten Tangenten gebildet wird, ist axialsymmetrisch. Die Symmetrieachse ist die durch den Schnittpunkt der Tangenten gelegte Zentrale.

Beweis (Fig. 17). Sind T_1 und T_2 die Berührungspunkte der von dem Punkt P an den Kreis um M gelegten Tangenten, so ist nach dem vierten Kongruenzsatz $\triangle PT_1M \cong \triangle PT_2M$.

Folgerung 1. Die Winkelhalbierende des von zwei Kreistangenten gebildeten Winkels geht durch den Kreismittelpunkt.

Folgerung 2. Legt man von einem Punkte an einen Kreis die beiden Tangenten, so sind die beiden Strecken von dem Punkt bis zu den Berührungspunkten gleich.

Kreis und Winkel

8. Erklärung. Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Peripherie eines Kreises liegt, heißt Peripheriewinkel, wenn die Schenkel Sekanten sind, er heißt Sehnentangentenwinkel, wenn ein Schenkel Sekante, der andere Tangente ist.

Satz vom Peripheriewinkel. Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen.

Beweis. 1. Fall (Fig. 18). Es sei $\angle APB$ ein Peripheriewinkel und der Mittelpunkt M des Kreises liege auf einem der Schenkel, etwa auf PA . Dann ist $\triangle MPB$ gleichschenkelig, also (nach § 2, Nr. 9, Folgerung 1) $\angle AMB = 2 \cdot \angle APB$.

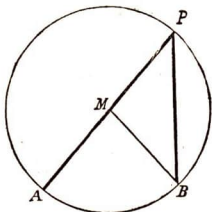


Fig. 18

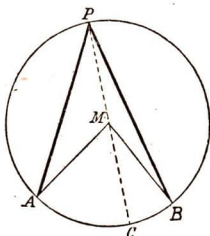


Fig. 19

2. Fall (Fig. 19). Liegt der Mittelpunkt M des Kreises zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels, so ziehe man MP . Dieser Strahl treffe den Kreisbogen in C .

Nach dem 1. Fall ist dann

$$\angle AMC = 2 \cdot \angle APC$$

$$\angle BMC = 2 \cdot \angle BPC,$$

und durch Addition erhält man

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle APB.$$

3. Fall (Fig. 20). Liegt M nicht zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels, sondern außerhalb, so verfährt man genau so wie im 2. Falle, nur hat man statt der Summe die Differenz der beiden Winkel zu nehmen.

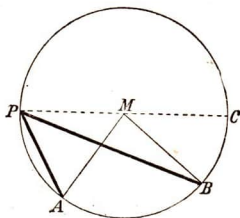


Fig. 20

Folgerung 1. Peripheriewinkel über gleichem Bogen sind gleich.

Folgerung 2 (Satz von Thales). Der Peripheriewinkel über dem Halbkreis ist ein rechter.

9. Satz vom Sehnentangentenwinkel. Der Sehnentangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel über dem zugehörigen Kreisbogen.

Beweis. Der Satz folgt aus dem vorangehenden, wenn man nachweist, daß der Sehnentangentenwinkel gleich dem halben Zentriwinkel über dem zugehörigen Kreisbogen ist. Ist (Fig. 21) CM die durch den Kreismittelpunkt gehende Mittelsenkrechte der Sehne AB und NAB der Sehnentangentenwinkel, dann ergänzt $\sphericalangle MAB$ sowohl den Sehnentangentenwinkel wie den Winkel AMC zu einem rechten. Es ist also $\sphericalangle AMC$, der die Hälfte des Zentriwinkels und damit gleich dem Peripheriewinkel über AB ist, gleich dem Sehnentangentenwinkel.

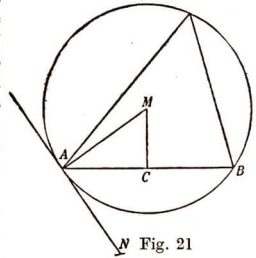


Fig. 21

Bemerkung. Läßt man den Scheitelpunkt P eines Peripheriewinkels auf der Peripherie wandern, bis er mit dem einen Endpunkt (etwa A) der zum Peripheriewinkel gehörenden Sehne AB zusammenfällt, dann wird aus dem Peripheriewinkel ein Sehnentangentenwinkel. Der Satz vom Sehnentangentenwinkel ist also ein Grenzfall des Satzes vom Peripheriewinkel.

Kreis und Dreieck

10. Satz. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkt des Umkreises.

Beweis. Die Dreiecksseiten werden Sehnen des Kreises. Dessen Mittelpunkt liegt also nach Nr. 4, Folgerung, auf den Mittelsenkrechten aller drei Seiten. Der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten hat von allen drei Ecken gleichen Abstand, gehört also auch der dritten Mittelsenkrechten an. Es gehen also alle drei Mittelsenkrechten durch einen Punkt.

11. Satz. Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem Höhenpunkt.

Beweis. Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten, so entsteht ein neues Dreieck, dessen Mittelsenkrechten die Höhen des ursprünglichen sind. Da die Mittelsenkrechten des neuen Dreiecks sich in einem Punkt schneiden, tun es auch die Höhen des ursprünglichen.

12. Satz. Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des Inkreises.

Beweis. Die Dreiecksseiten werden Tangenten des Kreises. Der Mittelpunkt des Inkreises liegt also nach Nr. 7, Folgerung 1, auf den Halbierenden aller drei Dreieckswinkel. Der Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden hat von allen drei Seiten gleichen Abstand, gehört also auch der dritten Winkelhalbierenden an. Es gehen also alle drei Winkelhalbierenden durch einen Punkt.

- 13. Satz.** Die Halbierende des Innenwinkels eines Dreiecks und der beiden Außenwinkel, die nicht Nebenwinkel von ihm sind, schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkt eines der drei Ankreise.

Beweis. Ein Ankreis hat eine Dreiecksseite und die Verlängerungen der beiden anderen zu Tangenten (Fig. 22). Sein Mittelpunkt liegt nach Nr. 7, Folgerung 1, auf einer Winkelhalbierenden und gleichzeitig auf den Halbierenden der beiden diesem Dreieckswinkel nicht anliegenden Außenwinkel. Der Schnittpunkt zweier dieser Halbierenden ist von allen drei Seiten gleichweit entfernt und gehört deshalb der dritten Halbierenden an. Es gehen also alle drei Halbierenden durch einen Punkt.

- 14. Satz.** Die Strecke von einer Ecke eines Dreiecks bis zum Berührungspunkt des Ankreises mit der Gegenseite ist gleich dem halben Umfang des Dreiecks. Die Strecke von einer Ecke des Dreiecks bis zum Berührungspunkt des Inkreises ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang und der Gegenseite.

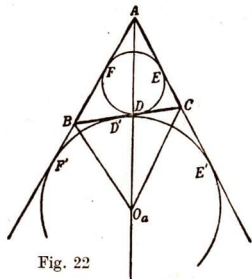


Fig. 22

Beweis (Fig. 22). Sind D, E, F die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten BC, AC und AB des Dreiecks ABC , und sind D', E', F' die entsprechenden Berührungspunkte des Ankreises an BC , dann ist $AE' = AF'$ und $AE = AF$ (Nr. 7, Folgerung 2) und deshalb $EE' = FF'$. Weiter ist (wieder nach Nr. 7, Folgerung 2)

$$FF' + EE' = BD' + BD + CD' + CD = 2BC$$

und nach dem oben Bewiesenen also

$$FF' = EE' = BC.$$

Nennt man den halben Umfang des Dreiecks s , setzt also

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

dann ist $AF' + AE' = AB + BD' + CD' + AC = 2s$,

mithin $AF' = AE' = s$

und $AF = AF' - FF' = s - a.$

Kreis und Viereck

- 15. Erklärung.** Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt Sehnenviereck.

Satz vom Sehnenviereck. Im Sehnenviereck beträgt die Summe der gegenüberliegenden Winkel 180° .

Beweis. Ist (Fig. 23) M der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$, so verbinde man M mit B und D , dann ist nach dem Peripheriewinkelsatz der Zentriwinkel BMD das Doppelte des einen Viereckswinkels, etwa von α . Der andere, den eben genannten zu 360° ergänzende Zentriwinkel BMD ist dann das Doppelte des α gegenüberliegenden Winkels γ . Es ist also

$$2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$$

und folglich

$$\alpha + \gamma = 180^\circ.$$

Dann ist auch $\beta + \delta = 180^\circ$.

Umkehrung. Beträgt in einem Viereck die Summe der gegenüberliegenden Winkel 180° , dann ist es ein Sehnenviereck.

Beweis (Fig. 24). Durch die Ecken A, B, C eines Vierecks $ABCD$ läßt sich immer ein Kreis legen. Dieser schneidet die Vierecksseite AD entweder in

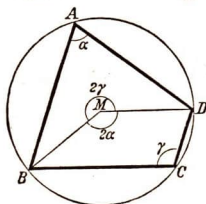


Fig. 23

einem Punkte D_1 zwischen A und D oder auf der Verlängerung von AD über D hinaus in einem Punkte D_2 oder schließlich in D selbst. Im ersten Fall ist nach der Voraussetzung $\beta + \delta = 180^\circ$ und nach dem Satz vom Sehnenviereck $\beta + \angle AD_1C = 180^\circ$, also $\angle AD_1C = \delta$. Das ist nicht möglich, da nach dem Außenwinkelsatz

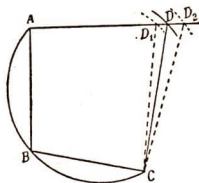


Fig. 24

im $\triangle CDD_1$ $\angle AD_1C > \delta$ ist. Im zweiten Falle ergäbe sich ebenso $\angle AD_2C = \delta$, während aus dem Außenwinkelsatz folgt, daß $\angle AD_2C > \delta$ ist. Es bleibt also nur der dritte Fall übrig, daß der Kreis auch durch den Punkt D geht.

16. Erklärung. Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißt Tangentenviereck.

Satz vom Tangentenviereck. Im Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.

Beweis (Fig. 25). Sind E, F, G, H die Berührungspunkte der Seiten AB, BC, CD und DA des Tangentenvierecks mit dem eingeschriebenen Kreis, dann ist (Nr. 7, Folgerung 2)

$$AE = AH, BE = BF, CF = CG, DG = DH.$$

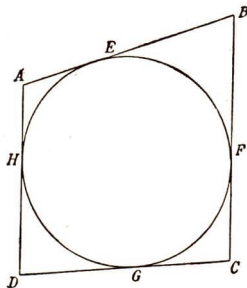


Fig. 25

Folglich ist

$$AB + CD = AE + EB + CG + GD = AH + FB + CF + DH = AD + BC.$$

Umkehrung. Ist in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen, so ist es ein Tangentenviereck.

Beweis (Fig. 26). Dem durch die Seiten AB , BC und CD bestimmten Dreieck läßt sich immer ein Kreis einschreiben. Wenn man dann von A an diesen Kreis eine zweite Tangente legt, so schneidet diese die Seite CD entweder in einem Punkte D_1 zwischen C und D oder in einem Punkte D_2 auf der Verlängerung von CD über D hinaus oder im Punkte D selbst. Im letzten Falle fällt also die Tangente mit der vierten Vierecksseite zusammen. Nach der Voraussetzung ist

$$AB + CD = BC + DA.$$

Nach dem Satz vom Tangentenviereck ist im ersten Falle

$$AB + CD_1 = BC + D_1A;$$

subtrahiert man diese Gleichung von der obigen, so erhält man

$$CD - CD_1 = DA - D_1A$$

oder

$$DA = DD_1 + D_1A.$$

Das ist nach dem Seitensatz des Dreiecks unmöglich.

Im zweiten Falle erhält man

$$AB + CD_2 = BC + D_2A.$$

Subtrahiert man von dieser Gleichung die oberste, so erhält man

$$CD_2 - CD = D_2A - DA$$

oder

$$D_2A = DD_2 + AD.$$

Das ist wieder nach dem Seitensatz des Dreiecks unmöglich. Es bleibt within nur die dritte Möglichkeit offen; dann ist aber $ABCD$ ein Tangentenviereck.

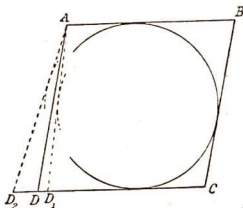


Fig. 26

Kreis und Kreis

17. Erklärung. Zwei Kreise haben entweder gar keinen oder einen oder zwei Punkte gemeinsam. Haben sie einen Punkt gemeinsam, so nennt man diesen den Berührungspunkt. Haben sie zwei Punkte gemeinsam, so ist die Verbindungsstrecke beider Punkte eine beiden Kreisen gemeinsame Sehne.

Satz. Die aus zwei sich schneidenden Kreisen gebildete Figur ist axialsymmetrisch. Die Symmetrieachse geht durch die beiden Mittelpunkte und ist Mittelsenkrechte auf der den beiden Kreisen gemeinsamen Sehne.

Beweis. Verbindet man die Schnittpunkte A und B der beiden Kreise mit deren Mittelpunkten M_1 und M_2 , so ist $\triangle AM_1M_2 \cong \triangle BM_1M_2$. Das Viereck ist also symmetrisch mit der gemeinsamen Zentrale als Achse.

18. Satz. Die aus zwei sich berührenden Kreisen gebildete Figur ist axialsymmetrisch. Die Symmetrieachse geht durch die beiden Mittelpunkte und den Berührungspunkt und steht auf der gemeinsamen Tangente senkrecht.

Beweis. Läge der Berührungspunkt der beiden Kreise nicht auf der gemeinsamen Zentralen, so gäbe es nach dem Lehrsatz in Nr. 17 symmetrisch zur Zentralen zwei Schnittpunkte.

§ 5. Geometrische Örter

1. Erklärung. Unter dem geometrischen Ort eines Punktes versteht man diejenige Linie oder diejenigen Linien, denen alle Punkte angehören, die einer gestellten Bedingung genügen, und keine anderen.

2. Aus der Erklärung des Kreises folgt:

Satz. Der geometrische Ort für die Punkte, die von einem festen Punkte P die Entfernung r haben, ist der Kreis mit dem Radius r um P .

Aus der Tatsache, daß Parallelen überall gleichen Abstand haben, folgt:

Satz. Der geometrische Ort für die Punkte, die von einer festen Geraden g die Entfernung a haben, ist das Parallelenpaar beiderseits von g im Abstand a von g .

3. Durch zwei geometrische Örter ist im allgemeinen die Lage eines Punktes fest bestimmt.

Beispiel. Gesucht werden die Punkte, die von einem gegebenen Punkte P vorgeschriebene Entfernung r und gleichzeitig von einer gegebenen Geraden g vorgeschriebenen Abstand a haben.

Wegen der ersten Forderung liegt der Punkt auf dem Kreis mit r um P , wegen der zweiten Forderung auf dem im Abstand a zu g gezogenen Parallelenpaar.

Eine Erörterung der verschiedenen Schnittmöglichkeiten der Ortslinien liefert für die Zahl der Punkte, die den gestellten Bedingungen genügen, folgende Fälle:

a) Der Kreis hat mit keiner der beiden Parallelen Punkte gemein: Es gibt überhaupt keine Punkte, wie sie gefordert werden.

b) Der Kreis hat mit einer der beiden Parallelen, nicht aber mit der anderen Parallelen Punkte gemein: Es gibt zwei Punkte, wenn Schnitt, einen Punkt, wenn Berührung eintritt.

c) Der Kreis hat mit beiden Parallelen Punkte gemein: Es gibt vier Punkte, wenn mit beiden Parallelen Schnitt, drei Punkte, wenn mit einer Parallelen Schnitt, mit der anderen Berührung, zwei Punkte, wenn mit beiden Par-

allelen Berührung eintritt. Das letztere ist dann der Fall, wenn P auf g liegt und $a = r$ ist.

4. Satz. Der geometrische Ort für die Punkte, die von zwei festen Punkten P_1 und P_2 gleiche Entfernung haben, ist die Mittelsenkrechte der Strecke P_1P_2 .

Satz. Der geometrische Ort für die Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden g_1 und g_2 gleichen Abstand haben, sind die beiden Halbierungsgeraden der von g_1 und g_2 gebildeten Winkel.

Satz. Der geometrische Ort für die Punkte, die von zwei Parallelen g_1 und g_2 gleichen Abstand haben, ist die Parallele zu g_1 und g_2 , die den Abstand von g_1 und g_2 halbiert.

Beweis. Im ersten Falle ist die Mittelsenkrechte, im zweiten Falle das Paar der Winkelhalbierenden, im dritten Falle schließlich ist die Mittelparallele Symmetrieachse der Figur.

5. Aus der Erklärung des Kreises folgt:

Satz. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die durch einen festen Punkt P gehen und den Radius r haben, ist der Kreis um P mit dem Radius r .

Aus dem Satz, daß die Tangenten eines Kreises senkrecht auf den nach ihren Berührungspunkten gezogenen Radien stehen (§ 4, Nr. 6), folgt:

Satz. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die eine feste Gerade g in einem festen Punkte P berühren, ist die Senkrechte auf g in P .

Satz. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die eine feste Gerade g berühren und den Radius r haben, ist das Parallelenpaar beiderseits von g im Abstand r .

6. Satz. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die durch zwei feste Punkte P_1 und P_2 gehen, ist die Mittelsenkrechte der Strecke P_1P_2 .

Satz. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die zwei feste Geraden g_1 und g_2 , die sich schneiden, berühren, sind die beiden Halbierungsgeraden der von g_1 und g_2 gebildeten Winkel.

Satz. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, die zwei feste parallele Geraden g_1 und g_2 berühren, ist die Parallele zu g_1 und g_2 , die den Abstand von g_1 und g_2 halbiert.

Beweis. Im ersten Falle ist die Mittelsenkrechte, im zweiten Falle das Paar der Winkelhalbierenden, im dritten Falle schließlich ist die Mittelparallele Symmetrieachse der Figur.

7. Satz. Der geometrische Ort für die Mitten einer Schar paralleler Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser, der auf der Schar senkrecht steht.

Beweis. Dieser Durchmesser ist Symmetrieachse der Figur.

Satz. Der geometrische Ort für die Mitten einer Schar von Kreis-sehnen mit vorgeschriebener Länge ist der zu dem gegebenen konzentrische Kreis, der zum Radius den Abstand einer Sehne der Schar vom Mittelpunkte der Kreise hat.

Beweis. Sehnen gleicher Länge haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt (§ 4, Nr. 5).

8. Aus dem Satz vom Peripheriewinkel (§ 4, Nr. 8) folgt:

Satz. Der geometrische Ort für die Punkte, von denen aus eine Strecke P_1P_2 unter einem Winkel α erscheint, ist der Kreisbogen, der über P_1P_2 als Sehne α zum Peripheriewinkel hat.

Als Sonderfall hieraus oder unmittelbar aus dem Satz von Thales (§ 4, Nr. 8) ergibt sich:

Satz. Der geometrische Ort für die Punkte, von denen aus eine Strecke P_1P_2 unter rechtem Winkel erscheint, ist der Kreis mit dem Durchmesser P_1P_2 .

§ 6. Flächenlehre

Flächenmaß

1. Erklärung. Als Flächeneinheit, mit der die Flächen gemessen werden, benutzt man das Quadrat, dessen Seiten die Längeneinheit haben. Den Längeneinheiten 1 cm, 1 m, 1 km entsprechen als Flächeneinheiten 1 qcm oder 1 cm², 1 qm oder 1 m², 1 qkm oder 1 km². Andere Flächeneinheiten sind 1 mm², 1 a = 100 m², 1 ha = 100 a.

Im folgenden ist die Angabe der Längen- und Flächeneinheiten unterblieben; die entwickelten Sätze sind unabhängig von der Wahl der benutzten Einheiten. Wenn von der Länge a einer Strecke oder kurz von der Strecke a die Rede ist, so gibt a die Maßzahl an, die sich bei der Messung unter Benutzung irgendeiner Längeneinheit ergibt. Wenn gleichzeitig andere Längen $b, c, \dots$ auftreten, so wird vorausgesetzt, daß die bei diesen Maßzahlen zugrunde gelegte Längeneinheit die gleiche ist, wie bei a . Treten die Maßzahlen von Längen in einem Ausdruck für eine Fläche auf, so gehört zu diesem Ausdruck diejenige Flächeneinheit, die der benutzten Längeneinheit entspricht. Sind also z. B. die Längen in cm gemessen, so ist die zugehörige Flächeneinheit cm².

Quadrat und Rechteck

2. Satz. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich dem Quadrat einer Seite.

Hat also eine Seite die Länge a , so ist

$$f = a^2.$$

Beweis. 1. Fall. Es sei a eine ganze Zahl, dann kann man das Quadrat durch Parallelen zu den Seiten in a Reihen von je a Flächeneinheiten zerlegen. (In der Fig. 27 ist z. B. $a = 4$, die Längeneinheit ist cm, die Flächeneinheit also cm^2 .) Die Anzahl der Flächeneinheiten ist dann $a \cdot a = a^2$.

2. Fall. Ist $a = \frac{1}{p}$, also die Seitenlänge des Quadrates der p te Teil der Einheit (p eine ganze Zahl), so führt man $\frac{1}{p}$ der vorhergehenden Einheit als neue Längeneinheit ein. Von der zugehörigen kleineren Flächeneinheit

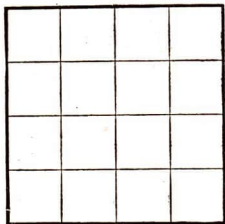


Fig. 27

gehen dann p Reihen von je p auf die ursprüngliche Flächeneinheit, d. h. insgesamt p^2 . Die kleinere Flächeneinheit ist also der p^2 te Teil der ursprünglichen. Mithin ist der Flächeninhalt der kleineren Einheit, gemessen in der größeren,

$$\frac{1}{p^2} = a^2.$$

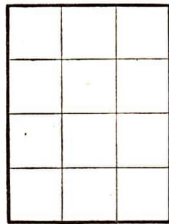


Fig. 28

3. Fall. Ist a ein Bruch, etwa $\frac{q}{p}$, so führt man $\frac{1}{p}$ der früheren als neue kleinere Längeneinheit ein. In der zugehörigen Flächeneinheit mißt jetzt die Fläche q^2 Einheiten. Da aber nach Fall 2 jede der kleineren Einheiten $\frac{1}{p^2}$ der vorhergehenden ist, beträgt der Flächeninhalt, gemessen in der ursprünglichen Einheit, $\frac{q^2}{p^2}$ oder $\left(\frac{q}{p}\right)^2 = a^2$.

4. Fall. Ist a nicht ein Bruch, sondern eine irrationale Zahl, so läßt sich a doch durch einen endlichen Dezimalbruch so genau annähern, daß das Quadrat des Näherungswertes mit beliebig vorschreibbarer Genauigkeit den Inhalt des Quadrates darstellt.

3. Satz. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus zwei anstoßenden Seiten.

Haben also die Seiten die Längen a und b , so ist

$$f = a b.$$

Beweis. 1. Fall. Sind a und b ganze Zahlen, so kann man das Rechteck durch Parallelen zu den Seiten in a Reihen von je b Flächeneinheiten zerlegen. (In der Fig. 28 ist z. B. $a = 3$ und $b = 4$; die Längeneinheiten sind cm, die Flächeneinheiten also cm^2 .) Der Flächeninhalt zählt dann $a \cdot b$ Flächeneinheiten.

2. Fall. Sind a und b Brüche, etwa $a = \frac{q}{p}$ und $b = \frac{s}{r}$, dann wählt man als kleinere Längeneinheit $\frac{1}{pr}$ der vorhergehenden. Gemessen in den zugehörigen Flächeneinheiten (von denen $(pr)^2$ auf die Einheit gehen), erhält man qr Reihen von je ps kleinen Quadraten. Man erhält also als Flächeninhalt, ausgedrückt in den kleineren Einheiten, $qr \cdot ps$; kehrt man zur früheren Einheit zurück, so gibt das

$$\frac{qrps}{(pr)^2} = \frac{qs}{pr} = ab.$$

3. Fall. Sind a und b oder ist eine der beiden Größen irrational, so lassen sie sich durch endliche Dezimalbrüche so genau annähern, daß das Produkt der Näherungswerte mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit den Inhalt des Rechtecks darstellt.

Parallelogramm

4. Satz. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe.

Ist a eine Seite des Parallelogramms, h_a die zugehörige Höhe, so ist

$$f = a h_a.$$

Beweis (Fig. 29). Ist CE die Höhe h_a im Parallelogramm $ABCD$, so verschiebt man $\triangle ECB$ längs AB so, daß B auf A und C auf D fällt. Die neue Lage von E heiße F . Dann ist $FECD$ ein Rechteck mit dem Flächeninhalt ah_a . Das Rechteck hat die gleiche Fläche wie das Parallelogramm, mithin ist auch dessen Fläche ah_a . (In der Fig. 29 liegt der Fußpunkt E der Höhe CE auf der Seite AB ; er kann ebenso gut auch auf der Verlängerung der Seite liegen.)

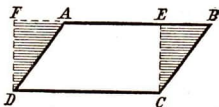


Fig. 29

Folgerung. Parallelogramme, die in einer Seite und der dazugehörigen Höhe übereinstimmen, sind flächengleich.

5. Satz. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe.

Ist a eine Seite und h_a die zugehörige Höhe, so ist

$$f = \frac{1}{2} a h_a.$$

Beweis (Fig. 11). Man ergänzt das Dreieck ABC durch Parallelen, die man durch C zu AB und durch A zu BC zieht, zum Parallelogramm $ABCD$. Da $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ ist, hat das Parallelogramm den doppelten Inhalt des Dreiecks. Nach dem eben (Nr. 4) bewiesenen Satz ist also der Flächeninhalt des Dreiecks gleich der Hälfte des Produktes aus Seite und zugehöriger Höhe.

Folgerung 1. Dreiecke, die in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sind flächengleich.

Folgerung 2. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist halb so groß wie der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das mit ihm in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmt.

6. Satz. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus dem Radius des Inkreises und dem halben Umfang.

Ist ϱ der Radius des Inkreises, s der halbe Umfang des Dreiecks, so ist

$$f = \varrho \cdot s.$$

Beweis (Fig. 30). Verbindet man den Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks mit den Ecken, so zerfällt das Dreieck in drei Teildreiecke, die sämtlich die Höhe ϱ haben, während die zugehörige Seite eine der Seiten des ganzen Dreiecks ist. Es ist also

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} a \cdot \varrho + \frac{1}{2} b \cdot \varrho + \frac{1}{2} c \cdot \varrho \\ &= \frac{1}{2} \varrho (a + b + c) \\ &= \varrho \cdot s. \end{aligned}$$

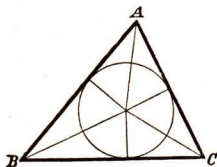


Fig. 30

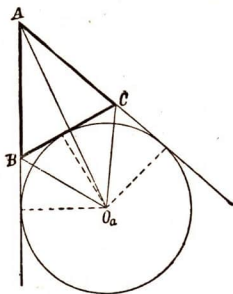


Fig. 31

Satz. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus dem Radius eines Ankreises und der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und derjenigen Seite, der der Kreis anliegt.

Ist ϱ_a der Radius des der Seite a anliegenden Ankreises, s der halbe Umfang, so ist

$$f = \varrho_a \cdot (s - a).$$

Beweis (Fig. 31). Verbindet man den Mittelpunkt O_a des der Seite a anliegenden Kreises mit den Ecken des Dreiecks ABC , dann kann man die Fläche des Dreiecks darstellen durch

$$f = \triangle O_a AB + \triangle O_a AC - \triangle O_a BC.$$

Die Höhe aller drei Teildreiecke ist ϱ_a , der Radius des Ankreises; die zugehörigen Seiten sind die Seiten des Dreiecks. Man erhält also

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} b \cdot \varrho_a + \frac{1}{2} c \cdot \varrho_a - \frac{1}{2} a \cdot \varrho_a \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varrho_a (b + c - a) \\ &= \varrho_a (s - a). \end{aligned}$$

Trapez

7. Satz. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der halben Summe der beiden parallelen Seiten und dem Parallelenabstand.

Sind a und c die beiden parallelen Seiten, h der Parallelenabstand, dann ist

$$f = \frac{a+c}{2} \cdot h.$$

Beweis (Fig. 32). Man zieht im Trapez $ABCD$ die Diagonale AC , dann ist der Inhalt von $\triangle ABC$ gleich $\frac{1}{2}ah$ und der Inhalt von $\triangle ACD$ gleich $\frac{1}{2}ch$. Durch Addition beider Werte erhält man den Ausdruck für den Inhalt des Trapezes.

Folgerung. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Mittelparallele und dem Parallelenabstand (§ 3, Nr. 12).

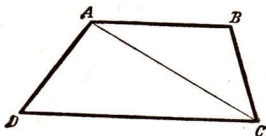


Fig. 32

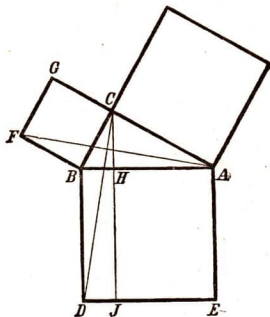


Fig. 33

Der pythagoreische Lehrsatz

8. Erklärung. Fällt man im rechtwinkligen Dreieck vom Scheitelpunkt des rechten Winkels das Lot auf die Hypotenuse, so zerfällt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.

Lehrsatz von Euklid. Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Ist a die Länge der Kathete, p die Länge des der Kathete a anliegenden Hypotenusenabschnittes und c die Hypotenuse, dann ist

$$a^2 = pc.$$

Beweis (Fig. 33). Das über der Kathete BC des rechtwinkligen Dreiecks ABC errichtete Quadrat $BFGC$ ist doppelt so groß wie das Dreieck BFA , das gleiche Grundlinie und gleiche Höhe mit ihm hat (Nr. 5, Folgerung 2). Dreht man dieses Dreieck um B um 90° , so kommt es in die Lage BCD . Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist aber die Hälfte des Rechtecks $BHJD$, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. Mithin ist das Quadrat $BFGC$ flächengleich mit dem Rechteck $BHJD$.

9. Lehrsatz von Pythagoras. Die Summe der Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.

Sind a und b die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, c die Länge der Hypotenuse, dann ist

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis (Fig. 33). Nach dem Lehrsatz von Euklid ist das eine Kathetenquadrat gleich einem Rechteck, das von der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt gebildet wird. Das entsprechende gilt von der anderen Kathete. Die beiden Rechtecke bilden aber zusammen das Hypotenusenquadrat.

Die heronische Dreiecksformel

10. Heronische Dreiecksformel. Ist s der halbe Umfang des Dreiecks, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Beweis. Es sei AD die Höhe h_a des Dreiecks ABC , und BD habe die Länge p . Dann ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz im $\triangle ABD$

$$h_a = \sqrt{c^2 - p^2} = \sqrt{(c+p)(c-p)}.$$

Aus $\triangle ADC$ ergibt sich, wenn β ein spitzer Winkel ist (Fig. 34),

$$\begin{aligned} b^2 &= h_a^2 + (a-p)^2 \\ &= h_a^2 + a^2 - 2ap + p^2 \end{aligned}$$

oder, wenn man aus $\triangle ABD$ einsetzt,

$$b^2 = a^2 - 2ap + c^2$$

und daraus

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Ist β ein stumpfer Winkel (Fig. 35), so erhält man auf gleichem Wege

$$p = -\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

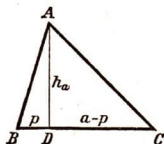


Fig. 34

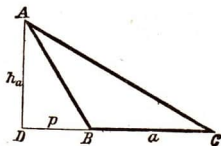


Fig. 35

Setzt man das in den obigen Wert von h_a ein, so folgt in beiden Fällen

$$h_a = \sqrt{\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)},$$

$$h_a = \frac{1}{2a} \sqrt{([a+c]^2 - b^2) \cdot (b^2 - [a-c]^2)},$$

und wenn man jeden Faktor unter dem Wurzelzeichen noch einmal zerlegt,

$$h_a = \frac{1}{2a} \sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}.$$

Führt man hier den halben Umfang s ein, so folgt für die Höhe des Dreiecks

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Für den Flächeninhalt erhält man dann, indem man diesen Wert in die Formel $f = \frac{1}{2} a h_a$ einsetzt,

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

§ 7. Ähnlichkeitslehre

Der erste Strahlensatz

- 1. Erklärung.** Das Verhältnis der Maßzahlen zweier in irgendeiner Einheit gemessenen Strecken nennt man Streckenverhältnis oder Verhältnis der beiden Strecken.

Ist P ein Punkt der Strecke AB , so hat das Streckenverhältnis $PA : PB$ einen bestimmten Wert, der, wenn P von A nach B wandert, von 0 bis ∞ wächst. Ist P der Halbierungspunkt von AB , dann ist das Streckenverhältnis 1. Umgekehrt gehört zu jedem Wert des Streckenverhältnisses $PA : PB$ eine und nur eine Lage des Punktes P ; sind also P und Q zwei Punkte der Strecke AB und haben $PA : PB$ und $QA : QB$ den gleichen Wert, so fällt P auf Q . Haben die Streckenverhältnisse $a : b$ und $c : d$ gleichen Wert, ist also

$$a : b = c : d,$$

so bilden die vier Maßzahlen a, b, c und d eine Proportion. Auf eine solche Gleichung von Streckenverhältnissen sind also die Gesetze der Proportionslehre anwendbar.

- 2. Erster Strahlensatz, erster Teil.** Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Parallelen geschnitten, so ist das Streckenverhältnis auf dem einen Schenkel gleich dem entsprechenden auf dem andern.

Schneiden die Parallelen g_1 und g_2 die Schenkel eines Winkels mit dem Scheitelpunkt S in den Punkten A_1, B_1 und A_2, B_2 , dann ist

$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2$$

oder $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2.$

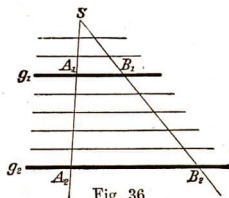


Fig. 36

Beweis. 1. Fall (Fig. 36). Das Streckenverhältnis $SA_1 : A_1A_2$ habe den rationalen Wert $m : n$, d. h. es gibt eine Längeneinheit, von der m auf SA_1 , n auf A_1A_2 fallen. Durch alle Teilpunkte werden Parallelen zu g_1 und g_2 gezogen. Dann entstehen auch auf dem anderen Schenkel lauter gleiche Abschnitte, und zwar m auf SB_1 und n auf B_1B_2 . Also ist das Streckenverhältnis auf dem anderen Schenkel gleichfalls $m : n$.

2. Fall. Ist ein gemeinsames Maß für die Strecken SA_1 und A_1A_2 nicht vorhanden, ist also das Streckenverhältnis ein irrationaler Wert, so läßt es sich doch mit beliebiger Genauigkeit durch einen rationalen Bruch annähern. Von diesem Näherungswert gilt dann das in Fall 1 Bewiesene.

Bemerkung. Der Satz gilt in gleicher Weise, wenn die eine Parallele die Verlängerungen der Schenkel des Winkels über den Scheitelpunkt hinaus schneidet.

3. Erster Strahlensatz, erster Teil, Umkehrung. Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Geraden so geschnitten, daß das Streckenverhältnis auf den beiden Schenkeln gleich ist, so sind die Geraden parallel.

Beweis (Fig. 36). Es sei $SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2 = m : n$, und dabei sei A_1B_1 nicht parallel A_2B_2 . Dann könnte man durch A_1 zu A_2B_2 die Parallele ziehen, die SB_2 etwa in B_1 schneiden würde. Nach dem ersten Teil des ersten Strahlensatzes wäre dann

$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1' : B_1'B_2.$$

So würde man erhalten $SB_1 : B_1B_2 = SB_1' : B_1'B_2$.

Das ist nur möglich, wenn B_1 und B_1' zusammenfallen.

4. Erster Strahlensatz, zweiter Teil. Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Parallelen geschnitten, so ist das Verhältnis der beiden Parallelstrecken das gleiche wie das Verhältnis der zugehörigen vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf einem Schenkel.

Schneiden die Parallelen g_1 und g_2 die Schenkel eines Winkels mit dem Scheitelpunkt S in den Punkten A_1, B_1 und A_2, B_2 , dann ist

$$A_1B_1 : A_2B_2 = SB_1 : SB_2.$$

Beweis (Fig. 37). Zieht man durch B_1 zu SA_2 die Parallele, die A_2B_2 in C_2 schneidet, dann ist nach dem ersten Teil des ersten Strahlensatzes

$$SB_1 : SB_2 = A_2C_2 : A_2B_2$$

oder, da $A_1B_1C_2A_2$ ein Parallelogramm ist und also $A_1B_1 = A_2C_2$,

$$SB_1 : SB_2 = A_1B_1 : A_2B_2.$$

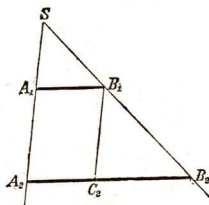


Fig. 37

5. Erklärung. Ein Strahlenbüschel ist eine Schar von Geraden, die durch einen Punkt gehen. Der Punkt heißt der Scheitel des Strahlenbüschels. Unter Benutzung dieses Begriffes lassen sich die beiden Teile des ersten Strahlensatzes in folgender allgemeinerer Form zusammenfassend aussprechen:

Erster Strahlensatz. Wird ein Strahlenbüschel von einer Parallelen-
schar geschnitten, so stehen entsprechende Abschnitte
auf verschiedenen Strahlen in gleichem Verhältnis, und
entsprechende Abschnitte auf verschiedenen Parallelen
verhalten sich wie die zugehörigen, vom Scheitel aus ge-
messenen Abschnitte auf einem Strahl.

Ähnlichkeit von Dreiecken

6. Erklärung. Vielecke heißen ähnlich, wenn ihre Winkel der Reihe nach
gleich und ihre Seiten in gleicher Reihenfolge das gleiche Streckenverhältnis
haben. Das Zeichen für ähnlich ist $\sim$.

Ist also $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, so ist

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C', \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A', \sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B';$$

und $AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A',$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$AB : BC : CA = A'B' : B'C' : C'A'.$$

Wie bei kongruenten Figuren spricht man auch bei ähnlichen von homo-
logen Stücken.

Wir setzen zunächst fest (vgl. aber § 8 Nr. 2): Dreiecke befinden sich in
Ähnlichkeitslage, wenn sie mit einem Winkel einander decken, während
die gegenüberliegenden Seiten parallel sind (Fig. 38).

Satz. Ähnliche Dreiecke lassen sich stets
in Ähnlichkeitslage bringen.

Beweis. Es sei $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Dann trage
man $A'B'$ von A aus auf AB bis B_1 und $A'C'$
von A aus auf AC bis C_1 ab und ziehe B_1C_1 .
Da $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB_1C_1$ nach dem ersten
Kongruenzsatz ist, läßt sich $\triangle A'B'C'$ in die
Lage AB_1C_1 bringen. Da aber

$$AB_1B : AB = AC_1 : AC$$

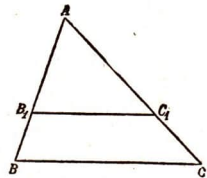


Fig. 38

ist, ist nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes $B_1C_1 \parallel BC$; die
Dreiecke ABC und AB_1C_1 befinden sich also in Ähnlichkeitslage.

Umkehrung. Dreiecke, die in Ähnlichkeitslage gebracht werden
können, sind ähnlich.

Beweis. Die beiden Dreiecke stimmen nach dem Parallelsatz in allen drei
Winkeln überein, und nach dem ersten Strahlensatz ist das Streckenver-
hältnis homologer Seiten das gleiche.

7. Ähnlichkeitssätze für das Dreieck. Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

- a) in dem Verhältnis zweier Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel,
- b) in zwei Winkeln,
- c) in dem Verhältnis der drei Seiten,
- d) in dem Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Beweis (Fig. 38). a) Legt man die beiden Dreiecke mit dem Winkel, den sie gemeinsam haben, aufeinander, und zwar so, daß entsprechende Schenkel aufeinanderfallen, dann sind die diesem Winkel gegenüberliegenden Seiten parallel nach der Umkehrung des ersten Teiles des Strahlensatzes. Die Dreiecke befinden sich also in Ähnlichkeitslage.

b) Legt man die beiden Dreiecke mit dem einen der beiden gemeinsamen Winkel aufeinander, und zwar so, daß homologe Schenkel aufeinanderfallen, so sind die gegenüberliegenden Seiten nach der Umkehrung des Parallelenatzes parallel. Die Dreiecke befinden sich also in Ähnlichkeitslage.

c) Es seien ABC und $A'B'C'$ die beiden Dreiecke. Man trägt $A'B'$ von A aus auf AB bis B_1 ab und $A'C'$ von A aus auf AC bis C_1 und zieht B_1C_1 . Es war

$$A'B' : AB = A'C' : AC;$$

danach ist auch $AB_1 : AB = AC_1 : AC$,

mithin ist nach der Umkehrung des ersten Teiles des ersten Strahlensatzes $B_1C_1 \parallel BC$. Es ist also jetzt

$$B_1C_1 : BC = AB_1 : AB.$$

Andererseits war $B'C' : BC = A'B' : AB$.

Da AB_1 und $A'B'$ gleich sind, sind es auch die Streckenverhältnisse $AB_1 : AB$ und $A'B' : AB$; es ist also

$$B_1C_1 : BC = B'C' : BC,$$

d. h. aber, es ist $B_1C_1 = B'C'$. Damit ist gezeigt, daß $\triangle A'B'C' \sim \triangle AB_1C_1$ nach dem dritten Kongruenzsatz ist. Wir haben also mit unserer Konstruktion $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ in Ähnlichkeitslage gebracht.

d) Es seien ABC und $A'B'C'$ die vorgelegten Dreiecke, und es sei in ihnen $\beta = \beta'$ und

$$A'B' : AB = A'C' : AC, \quad AC > AB.$$

Man trägt $A'B'$ auf AB von A bis B_1 und $A'C'$ auf AC von A bis C_1 ab, dann ist auch

$$AB_1 : AB = AC_1 : AC$$

und deshalb nach der Umkehrung des ersten Teiles des ersten Strahlensatzes $B_1C_1 \parallel BC$. Demnach ist $\sphericalangle AB_1C_1 = \beta = \beta'$ und $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$ nach dem vierten Kongruenzsatz. Wir haben also mit unserer Konstruktion $\triangle A'B'C'$ mit $\triangle ABC$ in Ähnlichkeitslage gebracht.

8. Satz. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Beweis. Sind BC und $B'C'$ homologe Seiten, AD und $A'D'$ die zugehörigen homologen Höhen zweier ähnlicher Dreiecke, dann sind die Dreiecke ADB und $A'D'B'$ ähnlich, also $AD : A'D' = c : c'$. Andererseits ist auch $BC : B'C' = c : c'$. Mithin ist

$$f : f' = (\frac{1}{2} AD \cdot BC) : (\frac{1}{2} A'D' \cdot B'C') = c^2 : c'^2.$$

Proportionalität im rechtwinkligen Dreieck

9. Erklärung. Unter der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks versteht man die zum rechten Winkel gehörige Höhe (Fig. 39).

Ist $a : b = b : c$, so heißt, wie aus der Arithmetik bekannt, b die mittlere Proportionale von a und c . Da die zu der Proportion gehörige Produktengleichung $b^2 = ac$ lautet, kann man auch in geometrischer Fassung sagen, das Quadrat über der Strecke b sei gleich dem Rechteck aus den Strecken a und c .

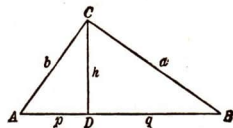


Fig. 39

Satz. Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen den Hypotenusenabschnitten.

Ist h die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, und sind p und q die Hypotenusenabschnitte, dann ist

$$h^2 = pq.$$

Beweis (Fig. 39). Der Fußpunkt der Höhe von C auf die Hypotenuse AB sei D , dann sind die Dreiecke ADC und BDC ähnlich, weil sie in den Winkeln übereinstimmen. Mithin ist

$$q : h = h : p.$$

Satz. Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Ist p der der Kathete a anliegende Abschnitt der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, dann ist

$$a^2 = pc.$$

Beweis (Fig. 39). Der Fußpunkt der Höhe von C auf die Hypotenuse AB sei D , dann sind die Dreiecke BDC und ABC ähnlich, weil sie in den Winkeln übereinstimmen. Mithin ist

$$p : a = a : c.$$

Dieser Satz ist nur eine andere Fassung des Lehrsatzes von Euklid (§ 6, Nr. 8).

Proportionen im Dreieck

- 10. Satz von den Seitenhalbierenden.** Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks teilen sich im Verhältnis 1:2 und schneiden sich in einem Punkte, dem Schwerpunkt.

Beweis (Fig. 40). Es seien BE und CF Seitenhalbierende, die sich in S schneiden. Dann ist nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes EF parallel

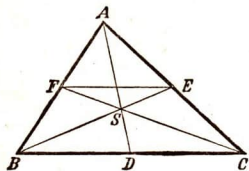


Fig. 40

und halb so groß wie BC . Die Dreiecke SBC und SEF sind in Ähnlichkeitslage und also ähnlich, mithin ist

$$\begin{aligned} FS : SC &= ES : SB = FE : BC = 1 : 2. \end{aligned}$$

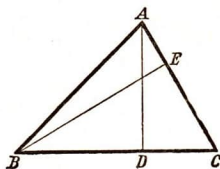


Fig. 41

Die dritte Seitenhalbierende AD schneidet BE nach dem, was eben bewiesen, gleichfalls im Verhältnis 1:2. Da es aber nur einen Punkt auf BE gibt, der diesem Streckenverhältnis entspricht, eben den Punkt S , geht auch die dritte Seitenhalbierende durch S .

- 11. Satz von den Höhen.** Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

Beweis (Fig. 41). Ist AD die zu a gehörige Höhe h_a , BE die zu b gehörige h_b , so sind die Dreiecke ADC und BEC ähnlich, weil sie in zwei Winkeln übereinstimmen. Mithin verhält sich

$$a : b = h_b : h_a.$$

Dieser Satz folgt arithmetisch auch unmittelbar aus § 6, Nr. 5.

- 12. Erklärung.** Wenn ein Punkt P auf einer Strecke AB liegt, so wollen wir in Zukunft sagen, daß er AB innerlich teilt. Die Teile (Abschnitte), die wir immer mit ihren Endpunkten so benennen wollen, daß der Teilpunkt vorangeht, sind PA und PB . Liegt P auf der Verlängerung von AB über A oder B hinaus, so sagt man, P teilt die Strecke äußerlich. Die Teile (Abschnitte) sind PA und PB . Liegt P auf der Verlängerung von AB über B hinaus und entfernt sich weiter und weiter von B , so nimmt das Streckenverhältnis $PA : PB$ von ∞ bis 1 ab. Liegt P auf der Verlängerung von AB über A hinaus und nähert sich A , dann nimmt das Streckenverhältnis $PA : PB$ von 1 bis 0 ab. Jedem Wert des Streckenverhältnisses entspricht auch bei der äußeren Teilung eine und nur eine Lage von P .

- 13. Satz von den Winkelhalbierenden.** Die Halbierungslinie eines Innenwinkels im Dreieck teilt die Gegenseite innerlich, die eines Außenwinkels äußerlich im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

Beweis (Fig. 42). a) Zieht man zu der Winkelhalbierenden AD des Dreiecks ABC durch B die Parallele, die die Verlängerung von AC in E schneidet, so ist nach dem Parallelsatz $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle BEA = \sphericalangle DAC$, und weil AD Winkelhalbierende ist, sind zunächst $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle DAC$ und damit auch $\sphericalangle EBA$ und $\sphericalangle BEA$ gleich. $\triangle ABE$ ist also gleichschenkelig und $BA = EA$. Nach dem ersten Strahlensatz ist

$$DC : DB = AC : AE$$

und deshalb auch $DC : DB = AC : AB$.

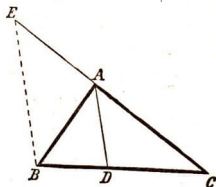


Fig. 42

b) (Fig. 43a und b). Zieht man zu der Winkelhalbierenden AD' des Außenwinkels BAC' des Dreiecks ABC durch B die Parallele, die AC in E schneidet, so ist nach dem Parallelsatz $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAD'$ und $\sphericalangle BEA = \sphericalangle D'AC'$, und weil AD' Halbierende des Außenwinkels ist, sind zunächst $\sphericalangle BAD'$ und $\sphericalangle D'AC'$ und damit auch $\sphericalangle EBA$ und $\sphericalangle BEA$ gleich. $\triangle ABE$ ist also gleichschenkelig und $AB = AE$. Nach dem ersten Strahlensatz ist zunächst

$$D'C : D'B = AC : AE$$

und deshalb auch $D'C : D'B = AC : AB$.

Bei diesem Verhältnis ist es gleichgültig, ob man die Lageverhältnisse von Fig. 43a oder b zugrunde legt.

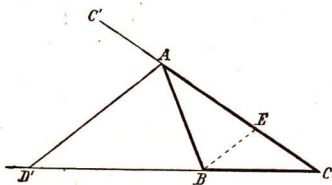


Fig. 43a

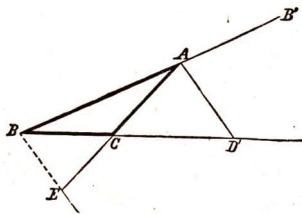


Fig. 43b

Der zweite Strahlensatz

- 14. Schnensatz.** Schneiden sich zwei Sehnen innerhalb oder außerhalb eines Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte auf der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnitte auf der anderen Sehne.

Beweis (Fig. 44 und 45). Sind A_1B_1 und A_2B_2 die Sehnen, die sich in S schneiden, dann ziehen wir A_1B_2 und A_2B_1 ; nach dem Peripheriewinkel-

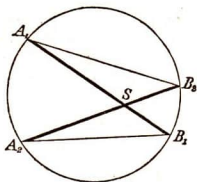


Fig. 44

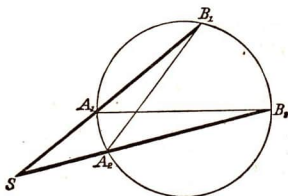


Fig. 45

satz ist $\sphericalangle A_1B_1A_2 = \sphericalangle A_1B_2A_2$ und $\sphericalangle B_1A_1B_2 = \sphericalangle B_1A_2B_2$. Mithin ist nach dem zweiten Ähnlichkeitssatz $\triangle S B_1 A_2 \sim \triangle S B_2 A_1$. Daraus folgt aber

$$S A_1 : S B_2 = S A_2 : S B_1$$

oder

$$S A_1 \cdot S B_1 = S A_2 \cdot S B_2.$$

15. Sekanten-Tangentensatz. Jede Tangente teilt eine Sekante an den Kreis so, daß der Tangentenabschnitt mittlere Proportionale zwischen den Sekantenabschnitten ist.

Beweis (Fig. 46). Der Satz ist ein Grenzfall des vorhergehenden, wenn nämlich der Schnittpunkt der Sehnen außerhalb des Kreises liegt und die eine Sekante in eine Tangente übergeht. Ist das etwa der erste der Schenkel des Winkels von eben, so fällt also A_1 und B_1 in den Berührungspunkt, etwa A , zusammen. Die beiden Dreiecke, die jetzt verglichen werden, sind $S A A_2$ und $S A B_2$, und um die Ähnlichkeit nach dem zweiten Ähnlichkeitsgesetz zu beweisen, ist an Stelle des Peripheriewinkelsatzes der Sehnentangentensatz zu benutzen. Dann folgt

$$S A^2 = S A_2 \cdot S B_2.$$

Verallgemeinert man den Sehnensatz, indem man an die Stelle zweier Sehnen ein Geradenbüschel setzt, dann erhält man den

Zweiten Strahlensatz. Werden die Geraden eines Geradenbüschels von einem Kreis geschnitten, wobei der Scheitelpunkt des Büschels in dem Kreise oder außerhalb des Kreises liegen kann, dann ist das Produkt der beiden Teilstrecken auf jeder Kreissehne eine konstante Größe.

Erklärung. Man nennt das Produkt der beiden Teilstrecken auf jeder Kreissehne die Potenz des Punktes (d. h. des Scheitelpunktes des Geradenbüschels) in bezug auf den Kreis.

Bemerkung. Benutzt man Strecken mit Vorzeichen, so sind in dem Falle, wo der Punkt außerhalb des Kreises liegt, die Teilstrecken gleichgerichtet, in dem Falle, wo der Punkt innerhalb des Kreises liegt, entgegengesetzt gerichtet. Die Potenz eines Punktes außerhalb eines Kreises ist also, wenn

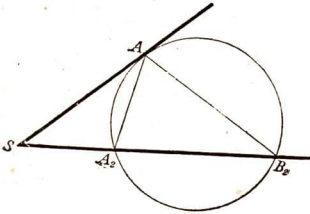


Fig. 46

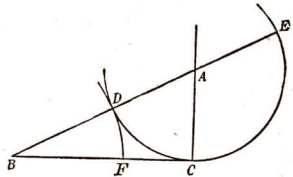


Fig. 47

wir gerichtete Strecken benutzen, positiv, die Potenz eines Punktes innerhalb des Kreises ist negativ. Liegt der Punkt auf dem Kreise selbst, dann hat die Potenz den Wert 0.

Goldener Schnitt

16. Erklärung. Eine Strecke heißt stetig oder nach dem goldenen Schnitt geteilt, wenn der größere Abschnitt mittlere Proportionale zwischen dem kleineren Abschnitt und der Strecke ist.

Satz. In einem rechtwinkligen Dreieck, in dem die eine Kathete gleich der Hälfte der anderen ist, ist die Differenz der Hypotenuse und der kleineren Kathete gleich dem größeren Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten anderen Kathete.

Beweis (Fig. 47). Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei die Kathete BC gleich dem Doppelten der Kathete AC , also $BC = 2 AC$, dann schlage man um A mit AC als Radius den Kreis, der AB in D und die Verlängerung von AB in E schneidet. Nach dem Tangenten-Sekantensatz ist dann

$$BE : BC = BC : BD$$

oder, da $BC = DE$ ist,

$$BE : DE = DE : BD,$$

d. h. es ist BE durch D nach dem goldenen Schnitt geteilt. Nach der Proportionenlehre ist also auch

$$(BE - DE) : DE = (DE - BD) : BD,$$

d. h. es ist, da $BE - DE = BD$ ist, BD mittlere Proportionale zwischen DE und $DE - BD$. Setzt man wieder an die Stelle von DE die gleichgroße Kathete BC , so ist gezeigt, daß BD der größere Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke BC ist.

Folgerung. Trägt man BD von B aus auf BC bis E ab, dann ist BC durch E nach dem goldenen Schnitt geteilt.

§ 8. Vielecke und Kreis

Winkel im Vieleck

1. Erklärung. Verbindet man n in einer Ebene liegende Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, der Reihe nach durch Strecken, so entsteht ein Vieleck (n -Eck). Die Punkte heißen Ecken, die Verbindungsstrecken Seiten, die von zwei aufeinanderfolgenden Seiten eingeschlossenen Winkel Winkel des Vielecks. Ein Vieleck heißt überschlagen, wenn irgendwelche Seiten andere Seiten innerlich teilen.

Wir setzen im folgenden, wenn nichts anderes gesagt ist, ein Vieleck als eben und nicht überschlagen voraus.

Ein ebenes, nicht überschlagenes Vieleck heißt *konvex*, wenn keiner seiner Winkel überstumpf ist.

Winkelsatz. Die Summe der Winkel im konvexen n -Eck ist $2n - 4$ rechte.

Beweis. Verbindet man einen Punkt im Innern des n -Ecks mit den Ecken, so entstehen n Dreiecke. Die Summe der Winkel aller dieser Dreiecke ist $2n$ rechte. Die Winkelsumme des Vielecks erhält man, wenn man hiervon die Winkel um den angenommenen Punkt herum abzieht; das sind 4 rechte. Mithin ist die Summe der Winkel im n -Eck $2n - 4$ rechte.

Erklärung. Ein Viereck, das lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat, heißt *regelmäßig*.

Folgerung. Die Winkel eines regelmäßigen konvexen n -Ecks zählen alle $2 - \frac{4}{n}$ rechte.

Vielecke in Ähnlichkeitslage

2. Erklärung. Zwei Vielecke befinden sich in Ähnlichkeitslage, wenn die Seiten paarweise parallel sind und wenn die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch einen Punkt, den Ähnlichkeitspunkt, gehen.

In § 7 Nr. 6ff. haben wir als Ähnlichkeitslage zweier Dreiecke einen besonderen Fall vorgenommen, den nämlich, bei dem der Ähnlichkeitspunkt gleichzeitig Eckpunkt der beiden Dreiecke ist.

Satz. Ähnliche Vielecke lassen sich stets in Ähnlichkeitslage bringen.

Beweis (Fig. 48). Es seien AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CD und $C'D'$ usf. homologe Seiten zweier ähnlicher Vielecke $ABCD \dots$ und $A'B'C'D' \dots$. Dann kann man die Vielecke stets so legen, daß $AB \parallel A'B'$ und $BC \parallel B'C'$ ist, weil wegen der Ähnlichkeit der Vielecke $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ ist. Dann wird, weil $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B'C'D'$ ist, auch $CD \parallel C'D'$ usf.; es liegen also alle homologen Seiten parallel. Es sei nun S der Schnittpunkt von AA' und BB' . Dann geht auch CC' durch S . Angenommen nämlich, SC träfe $B'C'$ nicht in C' , sondern in C'' , dann wäre nach dem ersten Strahlensatz $SB:SB' = BC:B'C''$. Andererseits ist aber $SB:SB' = AB:A'B'$, und da $AB:A'B' = BC:B'C'$ ist, auch $SB:SB' = BC:B'C'$. Mithin müßte $BC:B'C' = BC:B'C''$ sein, das ist aber nur möglich, wenn C'' auf C' fällt. Ebenso läßt sich nachweisen, daß DD' durch S geht usf.

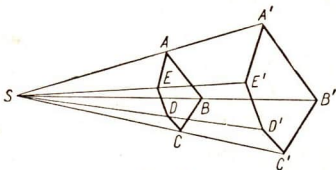


Fig. 48

Umkehrung. Vielecke, die in Ähnlichkeitslage gebracht werden können, sind ähnlich.

Beweis (Fig. 48). Es sei S der Ähnlichkeitspunkt der beiden Vielecke $ABCD \dots$ und $A'B'C'D' \dots$, und es seien die Seiten AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CD und $C'D'$ usf. parallel. Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sind gleich, wie man mit Hilfe des Parallelenatzes beweisen kann. Homologe Winkel der Vielecke sind also gleich. Ist ferner beispielsweise $SA:SA' = m:n$, so ist nach dem ersten Strahlensatz auch $SB:SB' = m:n$, $SC:SC' = m:n$ usf. und also auch $AB:A'B' = m:n$, $BC:B'C' = m:n$ usf. Die Vielecke stimmen also in den Winkeln überein, und die Seiten stehen im gleichen Verhältnis. Mithin sind die Vielecke ähnlich.

3. Satz. Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Beweis. Bringt man die Vielecke in Ähnlichkeitslage und zerlegt sie durch homologe Diagonalen in Teildreiecke, so verhalten sich nach dem ersten Strahlensatz auch die Diagonalen wie homologe Seiten und die Flächeninhalte gleichliegender Teildreiecke wie die Quadrate homologer Seiten. Mithin verhalten sich auch die Flächeninhalte der ganzen Vielecke wie die Quadrate homologer Seiten.

Konstruktion regelmäßiger Vielecke

4. Satz. Einem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis umschreiben und ein Kreis einschreiben.

Beweis (Fig. 49). Es seien AB , BC , CD drei aufeinanderfolgende Seiten eines regelmäßigen Vielecks. Die in dem Mittelpunkt E von AB errichtete Senkrechte schneidet die in dem Mittelpunkt F von BC errichtete Senkrechte in dem Punkte M . Dann ist $MA = MB$ und $MB = MC$; der mit MA um M geschlagene Kreis geht also durch B und C . Da $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM$ ist, ist BM Winkelhalbierende, und da $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB$ ist, ist auch CM Winkelhalbierende von $\sphericalangle BCD$. Die Mitte von CD sei G . Dann ist GM Mittelsenkrechte von CD . Die Dreiecke MCF und MCG sind nämlich nach dem ersten Kongruenzsatz kongruent. Es ist also wie MFC auch MGC ein rechter Winkel. Mithin ist $MC = MD$; der um M mit AM geschlagene Kreis geht also auch durch D . Gleiches läßt sich für jeden weiteren Eckpunkt des regelmäßigen Vielecks beweisen. Das Vieleck ist also ein Sehnenvieleck; es hat einen Umkreis.

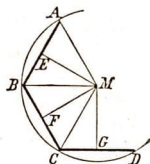


Fig. 49

Aus der Kongruenz der Dreiecke MBE und MBF , dann MCF und MCG folgt aber auch, daß die Mittelsenkrechten ME , MF , MG usf. sämtlich gleich werden, daß also ein Kreis um M mit ME durch E , F , G usf. geht und die Vielecksseiten zu Tangenten hat. Das Vieleck ist also auch ein Tangentenvieleck; es hat einen Inkreis.

Erklärung. Unter dem Teildreieck eines regelmäßigen Vielecks versteht man das gleichschenklige Dreieck, das von einer Seite des Vielecks und dem Mittelpunkt des Umkreises bestimmt wird.

Unter dem Zentriwinkel eines regelmäßigen Vielecks versteht man den Winkel an der Spitze des Teildreiecks.

Satz. Der Zentriwinkel eines regelmäßigen n -Ecks zählt $\frac{4}{n}$ rechte; er ergänzt den Vieleckswinkel zu zwei rechten.

Beweis. Um den Mittelpunkt des Umkreises des regelmäßigen n -Ecks herum liegen n gleichgroße Zentriwinkel; jeder zählt also $\frac{4}{n}$ rechte. Der Vieleckswinkel zählt $2 - \frac{4}{n}$ rechte (Nr. 1). Vieleckswinkel und Zentriwinkel ergänzen sich also zu zwei rechten.

5. Konstruktion der regelmäßigen Vielecke der Dreier-, Vierer- und Fünferreihe. Ein regelmäßiges n -Eck gehört der Dreier-, Vierer- oder Fünferreihe an, wenn n von der Form $2^p \cdot 3$, $2^p \cdot 4$ oder $2^p \cdot 5$ ist. Dabei ist p eine Zahl der Reihe 0, 1, 2, 3 usf.

Hat man nachgewiesen, daß ein regelmäßiges Vieleck einer Reihe mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, dann sind auch alle anderen Angehörigen der Reihe konstruierbar, da sie aus dem konstruierten Vieleck durch Halbieren oder Verdoppeln des Zentriwinkels gewonnen werden können.

Aus der Dreierreihe greifen wir das regelmäßige Sechseck heraus. Da der Zentriwinkel $\frac{1}{3}$ rechte oder 60° zählt, ist das Teildreieck in diesem Falle

gleichseitig, die Sechsecksseite also gleich dem Radius des Umkreises. Damit ist jedes regelmäßige Vieleck der Dreierreihe konstruierbar.

Aus der Viererreihe greifen wir das Quadrat heraus. Da der Zentriwinkel $\frac{1}{2}$ rechte oder 90° beträgt, ist das Teildreieck in diesem Falle rechtwinklig-gleichschenkl; die Quadratseite ist also gleich der Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, dessen Katheten gleich dem Umkreisradius sind.

Aus der Fünferreihe greifen wir das Zehneck heraus. Da der Zentriwinkel $\frac{1}{5}$ rechte oder 36° beträgt, ist das Teildreieck in diesem Falle ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel von 36° an der Spitze (Fig. 50). Zieht man die Winkelhalbierende des einen Basiswinkels, etwa MB , die MC in C schneidet, dann ist $\triangle CMA$ gleichschenkl, weil die Basiswinkel gleich sind, also ist $MC = AC$. $\sphericalangle ACB$ ist gleich 72° , also ebenso groß wie $\sphericalangle ABC$; es ist also auch $\triangle ABC$ gleichschenkl und obendrein $\triangle MAB$ ähnlich. Mithin ist

$$MB : AB = AC : CB.$$

Da $MC = AC = AB$ ist, so heißt das: die Zehnecksseite ist der größere Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Umkreisradius. Damit ist jedes regelmäßige Vieleck der Fünferreihe konstruierbar (vgl. § 7, Nr. 16).

Wir haben gezeigt, daß bei den regelmäßigen Vielecken der Dreier-, Vierer- und Fünferreihe die Seite konstruierbar ist, wenn der Radius des Umkreises gegeben ist. Es ist umgekehrt auch der Radius des Umkreises und damit das Vieleck selbst konstruierbar, wenn die Länge der Seiten vorgeschrieben ist.

Man kann die Konstruktion eines regelmäßigen n -Ecks auch so auffassen, daß sie uns die Möglichkeit gibt, einen Winkel von $\frac{4}{n}$ rechten zu konstruieren. Danach ist aber auch jedes regelmäßige Vieleck einer der drei Reihen konstruierbar, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben ist; umgekehrt ist der Radius des eingeschriebenen Kreises und damit das Vieleck selber konstruierbar, wenn die Seite des regelmäßigen Tangentenvielecks gegeben ist.

Berechnung regelmäßiger Vielecke

- 6. Satz.** Ist s_n die Seite des einem Kreise mit dem Radius r eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks, s_{2n} die Seite des dem gleichen Kreis eingeschriebenen regelmäßigen $2n$ -Ecks, dann ist

$$s_{3n} = r \sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

Beweis (Fig. 51). Es sei AB eine Seite des dem Kreis um M eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks, MD sei die Höhe des Teildreiecks, und die Verlänge-

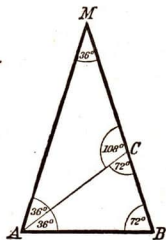


Fig. 50

rung von MD über D hinaus schneide den Kreisbogen, der zu AB gehört, in C . AC ist dann eine Seite des $2n$ -Ecks. Aus $\triangle MDA$ ergibt sich

$$MD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Aus $\triangle ADC$ ergibt sich

$$DC = \sqrt{s_{2n}^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

und also, da

$$DC = r - MD$$

ist,

$$\sqrt{s_{2n}^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Quadriert man beiderseits, dann folgt

$$s_{2n}^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = r^2 + r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 - r \sqrt{4r^2 - s_n^2}$$

oder

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - s_n^2}},$$

$$s_{2n} = r \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{s_n}{r}\right)^2}}.$$

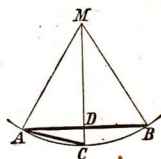


Fig. 51

7. Berechnung der regelmäßigen Vielecke der Dreier-, Vierer- und Fünferreihe. Hat man nachgewiesen, daß von einem regelmäßigen Vieleck einer der drei Reihen die Seite als Funktion des Umkreisradius ausgedrückt werden kann, dann sind auf Grund der in Nr. 6 abgeleiteten Formel auch alle anderen regelmäßigen Vielecke dieser Reihe durch den Radius ausdrückbar.

Aus der Dreierreihe greifen wir das Sechseck heraus. Hier ist

$$s_6 = r.$$

Von hier aus läßt sich jedes andere regelmäßige Vieleck der Dreierreihe berechnen.

Aus der Viererreihe greifen wir das Quadrat heraus. Das Teildreieck ist in diesem Falle rechtwinklig-gleichschenkelig, und seine Katheten sind gleich dem Umkreisradius. Mithin ist

$$s_4 = \sqrt{r} \cdot 2.$$

Aus der Fünferreihe greifen wir das Zehneck heraus. Da die Zehneckseite gleich dem größeren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Umkreisradius ist, hat man für sie die Proportion

$$r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10}).$$

Daraus folgt

$$s_{10}^2 = r^2 - r s_{10},$$

$$s_{10}^2 + r s_{10} = r^2,$$

$$s_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}.$$

Von den beiden Wurzeln kommt nur das positive Vorzeichen in Frage, da die Länge der Strecke nicht negativ ist, mithin ist

$$s_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5-1}).$$

8. Beziehungen zwischen den Umfängen der regelmäßigen Sehnen- und Tangentenvielecke. Ist u_n der Umfang eines regelmäßigen Sehnen- n -Ecks, U_n der Umfang des entsprechenden regelmäßigen Tangenten- n -Ecks, dann ist

$$u_n = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}} \cdot U_n.$$

Beweis (Fig. 52). Ist AB eine Seite eines regelmäßigen, dem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r eingeschriebenen n -Ecks, dann ist die Höhe h des Teildreiecks

$$h = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} = r \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}.$$

Verlängert man die Höhe des Teildreiecks bis zum Schnitt mit dem Kreis und zieht durch diesen Punkt zu AB die Parallele, die die Verlängerungen von MA und MB in A' und B' schneidet, dann ist $A'B'$ die Seite des zu dem Kreise gehörenden Tangenten- n -Ecks. Da $\triangle MAB \sim \triangle MA'B'$ ist, erhält man für die Seite S_n des Tangenten- n -Ecks die Proportion

$$S_n : s_n = MC' : MC = r : r \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}.$$

Es ist also

$$s_n = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}} \cdot S_n,$$

und wenn ich beiderseits mit n multipliziere,

$$u_n = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}} \cdot U_n.$$

Folgerung. Läßt sich die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen n -Ecks berechnen, dann ist das auch für die Seite des entsprechenden regelmäßigen Tangenten- n -Ecks möglich.

9. Inhalt der regelmäßigen Sehnen- und Tangentenvielecke. Ist u_n der Umfang eines regelmäßigen Sehnen- n -Ecks, U_n der Umfang des entsprechenden regelmäßigen Tangenten- n -Ecks, dann ist der Flächeninhalt des Sehnenvielecks

$$f_n = \frac{u_n r}{2} \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}},$$

der Flächeninhalt des Tangentenvielecks

$$F_n = \frac{U_n \cdot r}{2}.$$

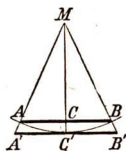


Fig. 52

Beweis. Durch Summation der Flächeninhalte der Teildreiecke ergibt sich beide Male der Inhalt des Vielecks als halbes Produkt aus dem Umfang des Vielecks und der Höhe des Teildreiecks.

Kreisberechnung

10. Archimedisches Verfahren zur Berechnung des Kreisumfanges.

Die Länge der Kreisperipherie u liegt zwischen dem Umfang u_n eines regelmäßigen Sehnenecks und dem Umfang U_n des entsprechenden regelmäßigen Tangentenvielecks. Es ist also

$$u_n < u < U_n$$

oder, wenn wir den Wert aus Nr. 8 einsetzen, auch

$$\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}} \cdot U_n < u < U_n.$$

Je größer n wird, je kleiner also s_n wird, desto mehr nähert sich die Quadratwurzel dem Wert 1. Auch arithmetisch sieht man also, wie die Grenzen, in die u eingeschlossen wird, mit wachsendem n immer näher aneinander-rücken.

Man führt für die Zahl, mit der man den Kreisdurchmesser multiplizieren muß, um den Umfang zu erhalten, das Zeichen π ein.

Satz vom Kreisumfang. Der Umfang des Kreises mit dem Radius r ist

$$u = 2\pi r.$$

Für π liefert das archimedische Verfahren Werte von beliebig vorzuschreibender Genauigkeit, man hat nur in der Berechnung der Seiten von regelmäßigen Vielecken in der Dreier-, Vierer- oder Fünferreihe zu genügend hohem n fortzuschreiten. Viel benutzte Näherungswerte sind die folgenden:

$$\pi \approx 3\frac{1}{2},$$

$$\pi \approx 3,14,$$

$$\pi \approx 3,1416.$$

11. Satz vom Kreisinhalt. Der Inhalt des Kreises mit dem Radius r ist

$$f = \pi r^2.$$

Beweis. Der Inhalt des Kreises liegt zwischen dem Inhalt des eingeschriebenen und dem des umgeschriebenen regelmäßigen n -Ecks. Es ist also

$$f_n < f < F_n$$

oder unter Verwendung der in Nr. 9 abgeleiteten Ausdrücke

$$\frac{u_n \cdot r}{2} \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}} < f < \frac{U_n \cdot r}{2}.$$

Wird die Anzahl n der Seiten des Vielecks größer und größer, dann nähern sich u_n und U_n immer mehr dem Kreisumfang u , die Quadratwurzel strebt immer mehr dem Wert 1 zu. Für beliebig großes n erhält man also

$$f = \frac{u \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

12. Kreisbogen und Kreisausschnitt. Der zum Zentriwinkel α gehörige Kreisbogen b hat die Länge

$$b = \frac{\pi \alpha r}{180^\circ},$$

der zum Zentriwinkel α und zum Kreisbogen b gehörige Kreisausschnitt hat den Flächeninhalt

$$f = \frac{\pi \alpha r^2}{360^\circ} = \frac{b r}{2}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß α in Graden gemessen ist.

Beweis. 1. Der Kreisbogen, der zum Zentriwinkel α gehört, verhält sich zum ganzen Kreisumfang, wie α zu 360° . Es ist also

$$b : 2\pi r = \alpha : 360^\circ,$$

$$b = \frac{2\pi \alpha r}{360^\circ} = \frac{\pi \alpha r}{180^\circ}.$$

2. Der Kreisausschnitt, der zum Zentriwinkel α gehört, verhält sich zur ganzen Kreisfläche wie α zu 360° . Es ist also

$$f : \pi r^2 = \alpha : 360^\circ,$$

$$f = \frac{\pi \alpha r^2}{360^\circ}.$$

Führt man in diesen Ausdruck den eben abgeleiteten Wert von b ein, so erhält man

$$f = \frac{b \cdot r}{2}.$$

§ 9. Einführung in die Stereometrie¹⁾

Raummaß

1. Erklärung. Als Raumeinheit, mit der Rauminhalte gemessen werden, benutzt man den Würfel, dessen Kanten die Längeneinheit haben. Der Längeneinheit 1 cm und 1 m entsprechen als Raumeinheiten 1 ccm oder 1 cm³ und 1 cbm oder 1 m³.

In den Sätzen und Formeln dieses Abschnittes unterbleibt die Angabe der Längen-, Flächen- und Raumeinheiten. (Vgl. § 6, Nr. 1.) Die Sätze sind unabhängig von der Wahl der Einheiten. Wenn von der Länge a einer Strecke oder kurz von der Strecke a die Rede ist, so gibt a die Maßzahl an, die sich bei der Messung unter Benutzung irgendeiner Längeneinheit ergibt. Wenn gleichzeitig andere Längen $b, c \dots$ in dem Ausdruck, um den es sich handelt, auftreten, so wird vorausgesetzt, daß die bei diesen Maßzahlen zugrunde liegende Längeneinheit die gleiche ist wie eben bei a . Treten die Maßzahlen von Längen in Ausdrücken für Flächen und für Rauminhalte auf oder treten die Maßzahlen von Flächen in Ausdrücken

¹⁾ Es empfiehlt sich, Nr. 1 bis 10 bereits nach der Flächenlehre, Nr. 11 bis 13 nach der Ähnlichkeitslehre zu behandeln.

für Rauminhalte auf, so gehören zu den Maßzahlen der Flächen- und Rauminhalte diejenigen Einheiten, die den benützten Längen- und Flächeneinheiten entsprechen. Sind also z. B. die Längen in dem Ausdruck für einen Rauminhalt in cm gemessen, so gehört zu dem Rauminhalt als Einheit cm^3 ; sind die Flächen in dem Ausdruck für einen Rauminhalt in m^2 gemessen, dann müssen gleichzeitig die etwa auftretenden Längen in m gemessen sein, und zu dem Rauminhalt gehört als Einheit m^3 .

Würfel

2. Satz. Ist a die Kante eines Würfels, so ist die Länge der Körperdiagonale

$$d = a\sqrt[3]{3}.$$

Beweis (Fig. 53). Die Körperdiagonale d ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete eine Kante a , dessen andere Kathete eine Flächendiagonale ist. Deren Länge ist, als Diagonale eines Quadrates mit der Seite a , $\sqrt{2} \cdot a$. Mithin ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$d^2 = a^2 + (\sqrt{2} \cdot a)^2 = 3a^2,$$

$$d = a\sqrt{3}.$$

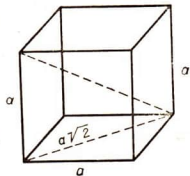


Fig. 53

3. Satz. Ist a die Kante eines Würfels, so ist die Oberfläche

$$O = 6a^2.$$

Beweis. Die Oberfläche des Würfels besteht aus sechs Quadraten. Jedes hat den Inhalt a^2 .

4. Satz. Ist a die Kante eines Würfels, so ist der Rauminhalt

$$V = a^3.$$

Beweis. 1. Fall. Es sei die auf irgendeine Einheit bezogene Maßzahl a eine ganze Zahl. Dann läßt sich der Würfel durch parallele Ebenen zu einer der Seitenflächen in a Schichten zerlegen, von denen jede die Höhe 1, die Länge a und die Breite a hat. Eine solche Schicht kann ich in a Reihen von Raumeinheiten zerlegen; jede Reihe zählt a Raumeinheiten, die ganze Schicht also a^2 . Die Anzahl der Raumeinheiten, aus denen sich der ganze Würfel aufbauen läßt, ist also $a \cdot a \cdot a = a^3$.

2. Fall. Ist die Kantenlänge des Würfels der $\frac{1}{p}$ te Teil der Längeneinheit (p eine ganze Zahl), also $a = \frac{1}{p}$, so führt man $\frac{1}{p}$ der ursprünglichen Längeneinheit als neue, kleinere Längeneinheit ein. Von der zu der neuen Längeneinheit gehörigen Raumeinheit gehen dann nach Fall 1 auf die zu der ursprünglichen Längeneinheit gehörende Raumeinheit p^3 . Mithin ist der Rauminhalt der kleineren Einheit, gemessen in der ursprünglichen,

$$\frac{1}{p^3} = \left(\frac{1}{p}\right)^3 = a^3.$$

3. Fall. Ist a ein Bruch, etwa $\frac{q}{p}$, so führt man $\frac{1}{p}$ der ursprünglichen als neue Längeneinheit ein. In der zugehörigen neuen Raumeinheit mißt jetzt der ganze Würfel q^3 Einheiten. Da aber der Rauminhalt jeder der kleineren Raumeinheiten, gemessen in der ursprünglichen, (Fall 2) $\frac{1}{p^3}$ ist, so ist der Rauminhalt des Würfels, gemessen in der der ursprünglichen Längeneinheit entsprechenden Raumeinheit, $\frac{q^3}{p^3} = \left(\frac{q}{p}\right)^3 = a^3$.

4. Fall. Ist a nicht ein Bruch, sondern eine irrationale Zahl, so läßt sich a doch durch einen endlichen Dezimalbruch so genau annähern, daß die dritte Potenz des Näherungswertes mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit den Inhalt des Würfels darstellt.

Quader

5. Satz. Sind a, b, c die Kanten eines Quaders, so ist die Körperdiagonale

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Beweis (Fig. 54). Die Körperdiagonale d ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Kathete eine der Kanten, etwa a ist. Die andere Kathete ist dann Flächendiagonale, und zwar eines Rechtecks mit den Kanten b und c , also $\sqrt{b^2 + c^2}$. Mithin ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz

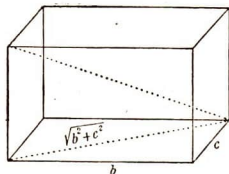


Fig. 54

$$d^2 = a^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

6. Satz. Sind a, b und c die Kanten eines Quaders, so ist die Oberfläche

$$O = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc).$$

Beweis (Fig. 54). Die Oberfläche eines Quaders besteht aus sechs Rechtecken, von denen je zwei gleich sind. Die Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke sind ab, ac und bc .

7. Satz. Sind a, b und c die Kanten eines Quaders, so ist der Rauminhalt

$$V = abc.$$

Beweis. 1. Fall. Sind a, b und c ganze Zahlen, dann läßt sich der Quader durch parallele Ebenen zu einer der Seitenflächen in a Schichten zerlegen. Jede von ihnen hat die Höhe 1, die Länge b und die Breite c . Eine solche Schicht besteht also aus b Reihen von je c Raumeinheiten. Die Anzahl der Raumeinheiten, aus denen sich der ganze Quader aufbauen läßt, ist also abc .

2. Fall. Sind a, b und c Brüche, etwa $a = \frac{q}{p}, b = \frac{s}{r}, c = \frac{v}{u}$, dann wähle man als kleinere Längeneinheit $\frac{1}{pru}$ der ursprünglichen. In dieser neuen

Einheit gemessen zählt die erste Kante gru , die zweite psu , die dritte prv Einheiten. Der Inhalt des Quaders, gemessen in der der neuen Längeneinheit entsprechenden Raumeinheit, ist also (nach Fall 1) $gru \cdot psu \cdot prv$. Jede der neuen Raumeinheiten ist gleich $\frac{1}{(pru)}$ der ursprünglichen. Der in der ursprünglichen Raumeinheit gemessene Rauminhalt ist also

$$V = \frac{gru \cdot psu \cdot prv}{(pru)^3} = \frac{q \cdot s \cdot v}{p \cdot r \cdot u} = \frac{q}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{v}{u} = abc.$$

3. Fall. Sind a , b und c oder auch nur eine oder zwei dieser Maßzahlen irrational, so lassen sie sich durch endliche Dezimalbrüche so genau annähern, daß das Produkt der Näherungswerte mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit den Inhalt des Quaders darstellt.

Prisma

8. Erklärung. Ein Prisma wird begrenzt von zwei kongruenten, in parallelen Ebenen liegenden Vielecken (den beiden Grundflächen), deren homologe Seiten parallel sind, und soviel durch je zwei homologe parallele Seiten bestimmten Seitenflächen, als die Vielecke Seiten haben.

Ein Prisma heißt gerade, wenn alle Seitenflächen Rechtecke sind; es heißt schief, wenn das nicht der Fall ist, wenn also mindestens einige Parallelogramme sind. Unter der Höhe des Prismas versteht man den Abstand der beiden Grundflächen.

Unter dem Mantel des Prismas versteht man die Summe aller Seitenflächen.

Eine Ebene, die parallel zu den Grundflächen des Prismas liegt, schneidet das Prisma in einer Figur, die den Grundflächen kongruent ist.

9. Grundsatz von Cavalieri. Kann man zwei Körper so zwischen zwei parallele Ebenen legen, daß jede dritte, zu den beiden anderen parallele Ebene die Körper in zwei flächengleichen Figuren schneidet, dann sind die beiden Körper raumgleich.

Wir betrachten zunächst zwei besondere Fälle dieses Grundsatzes ausführlich. Später (Nr. 12, 26) werden wir noch andere Fälle kennenlernen.

1. Fall. Wir vergleichen ein Quader mit einem geraden Prisma von gleicher Höhe und einer beliebigen Grundfläche, die aber flächengleich der rechteckigen Grundfläche des Quaders ist. Hier treffen die Voraussetzungen des Cavalierischen Grundsatzes zu. Setze ich nämlich beide Körper auf die gleiche Ebene und schneide sie durch eine dieser parallele Ebene, so schneidet diese Ebene sowohl beim Quader wie beim Prisma eine der Grundfläche flächengleiche Figur heraus, und da die Grundflächen flächengleich sind, sind es auch die Querschnitte. Die Richtigkeit des Cavalierischen Grundsatzes kann man sich in diesem Falle in der Weise klar machen, daß man sich beide Körper in Schichten von der Höhe 1 zerschnitten denkt, die jeweils raumgleich sind.

2. Fall. Wir vergleichen ein gerades Prisma mit einem schiefen Prisma,

die beide gleiche Höhe und kongruente Grundfläche haben. Hier treffen wieder die Voraussetzungen des Cavalierischen Grundsatzes zu.

Die Richtigkeit des Cavalierischen Grundsatzes kann man sich in diesem Falle durch die folgende Überlegung klarmachen. Durch $n-1$ Ebenen parallel zu den beiden Grundflächen der beiden auf die gleiche Ebene gestellten Prismen seien die beiden Körper in gleich dicke Schichten zerschnitten. In dem schiefen Prisma ersetzt man jede Schicht, die ein schiefes Prisma von kleinerer Höhe darstellt, durch das gerade Prisma, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Das schiefe Prisma wird damit durch eine Art Treppenkörper ersetzt (Fig. 55). Dieser Treppenkörper ist raumgleich dem geraden Prisma, da die einzelnen Stufen den entsprechenden Schichten des geraden Prismas kongruent sind. Die Übereinstimmung bleibt erhalten, wie groß auch die Anzahl der Stufen gewählt wird. Je größer aber diese Anzahl wird, um so mehr nähert sich der Treppenkörper dem schiefen Prisma. Durch einen Treppenkörper mit einer genügend großen Anzahl von Schichten kann ich das schiefe Prisma mit beliebig vorschreibbarer Genauigkeit annähern. Schiefes und gerades Prisma sind mithin raumgleich.

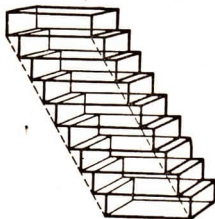


Fig. 55

- 10. Satz.** Der Mantel eines geraden Prismas, das die Höhe h und eine Grundfläche mit dem Umfange u besitzt, ist

$$M = u \cdot h.$$

Beweis. Die Seitenflächen des geraden Prismas sind Rechtecke, die alle in einer Seite übereinstimmen, der Höhe des Prismas. Die anderen Seiten sind der Reihe nach die Seiten der Grundfläche, etwa $a, b, c, \dots n$. Es ist also

$$\begin{aligned} M &= ah + bh + ch + \dots + nh \\ &= (a + b + c + \dots + n)h = uh. \end{aligned}$$

- Satz.** Der Rauminhalt eines Prismas, das die Höhe h und die Grundfläche g hat, ist

$$V = g \cdot h.$$

Beweis. Ich vergleiche das Prisma mit einem Quader, dessen eine Seitenkante, etwa a , gleich der Höhe h des Prismas ist, während die zugehörige Grundfläche, hier also das Rechteck mit dem Flächeninhalt bc , gleich dem Flächeninhalt g des gegebenen Prismas ist. Es ist also $a = h, bc = g$. Nach dem Grundsatz von Cavalieri (Nr. 9) ist dann das Prisma dem Quadrat raumgleich; und zwar ist das, wenn das Prisma gerade ist, sofort aus dem ersten von uns näher betrachteten Falle ersichtlich; wenn das Prisma schief ist, vergleiche man es erst mit dem geraden von gleicher Grundfläche und Höhe, wobei es sich um den zweiten von uns besonders

besprochenen Fall handelt, dann das gerade Prisma mit dem Quader. Man erhält also für den Rauminhalt des geraden wie des schiefen Prismas

$$V = gh.$$

Pyramide

11. Erklärung. Eine Pyramide wird begrenzt von einem Vieleck (der Grundfläche) und soviel durch je eine Vielecksseite und einen Punkt außerhalb der Vielecksebene (der Spitze) bestimmten Seitenflächen, als das Vieleck Seiten hat. Unter der Höhe der Pyramide versteht man den Abstand der Spitze von der Grundfläche.

Satz. Eine zur Grundfläche parallele Ebene schneidet die Pyramide in einer Figur, die der Grundfläche ähnlich ist. Die homologen Seiten von Schnittfigur und Grundfläche verhalten sich wie die Abstände der Spitze von der Schnittebene und von der Grundfläche. Die Schnittfläche verhält sich zur Grundfläche wie das Quadrat des Abstandes der Spitze von der Schnittfläche zum Quadrat der Pyramidenhöhe.

Beweis (Fig. 56). Die Pyramide mit der Spitze S und der Grundfläche $ABCD \dots$ werde von einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten und die Durchschnitsfigur sei $A'B'C'D' \dots$. Von S sei auf die Grundfläche die Höhe SH gefällt, die die Schnittebene in H' durchsetzt. Nach dem ersten Strahlensatz ist dann beispielsweise

$$AB : A'B' = SA : SA'$$

und nach dem gleichen Satz

$$SA : SA' = SH : SH',$$

mithin $AB : A'B' = SH : SH'$.

Das gleiche gilt von allen anderen Vielecksseiten, ebenso aber auch von allen Diagonalen. Daraus folgt aber die Ähnlichkeit aller gleichliegenden Teildreiecke und damit auch der Vielecke selbst. Daß die Flächen $ABCD \dots$ und $A'B'C'D' \dots$ im Verhältnis $SH^2 : SH'^2$ stehen, folgt aus § 8, Nr. 3.

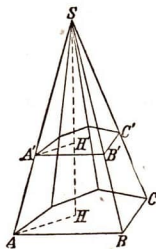


Fig. 56

12. Satz. Pyramiden, die gleiche Höhe und gleiche Grundfläche haben, sind raumgleich.

Beweis. Wir wenden den Cavalierischen Grundsatz an. Legen wir irgendeine zu den Grundflächen parallele Ebene durch die beiden auf eine Ebene gestellten Pyramiden, dann sind die Querschnitte flächengleich. Sind nämlich g_1 und g_2 die beiden flächengleichen Grundflächen der Pyramiden und g'_1 und g'_2 die entsprechenden Querschnitte, so ist, wenn h die Höhe und h' der Abstand der Schnittebene von den Spitzen ist (Nr. 11),

$$g_1 : g'_1 = h^2 : h'^2.$$

Ebenso ist aber auch

$$g_2 : g'_2 = h^2 : h'^2.$$

Aus der Flächengleichheit von g_1 und g_2 folgt also auch die Flächengleichheit von g'_1 und g'_2 . Die Voraussetzungen des Cavalierischen Grundsatzes treffen also zu und damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Wir haben hier einen neuen, von den bisher näher betrachteten verschiedenen Fall des Cavalierischen Grundsatzes vor uns. Wir wollen ihn noch ausführlich klarlegen. Zerlegt man etwa zwei dreiseitige Pyramiden, die flächengleiche, aber nicht kongruente Grundflächen besitzen, durch $n-1$ parallele Ebenen in n Schichten von gleicher Dicke, dann sind die Grundflächen entsprechender Schichten flächengleich, wie wir eben bewiesen haben. Ersetzt man nun jede Schicht durch ein Prisma, das die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe wie die Schicht hat, dann werden die beiden Pyramiden durch Treppenkörper ersetzt. Da die einzelnen Stufen raumgleich sind, sind es auch die beiden Treppenkörper. Die Treppenkörper gehen aber mit beliebig vorschreibbarer Genauigkeit in die Pyramiden über, wenn man nur die Anzahl n der Schichten genügend groß nimmt.

13. Satz. Ein dreiseitiges Prisma läßt sich in drei raumgleiche Pyramiden zerlegen.

Beweis (Fig. 57). Es sei das dreiseitige Prisma $ABCA'B'C'$ vorgelegt. Man legt einen ebenen Schnitt durch A' , B und C ; er schneidet die dreiseitige Pyramide $A'ABC$ ab. Es bleibt übrig der Körper $A'BCC'B'$, den man als eine vierseitige Pyramide mit der Spitze bei A' betrachten kann. Ein Schnitt $A'C'B$ zerlegt auch diese vierseitige Pyramide in zwei dreiseitige, nämlich $A'B'C'B$ und $A'C'BC$. Die letzten beiden Pyramiden sind raumgleich, weil sie flächengleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben. Aber auch die Pyramide $A'ABC$ und die Pyramide $BA'C'B'$, wie ich die zweite auch schreiben kann, haben gleiche Grundfläche und Höhe. Mithin sind alle drei Pyramiden raumgleich.

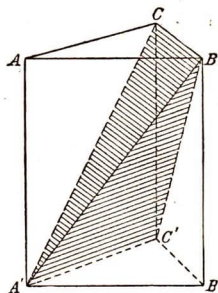


Fig. 57

Folgerung 1. Jede dreiseitige Pyramide läßt sich durch Ebenen, die man durch die Ecken des Körpers parallel zu den gegenüberliegenden Seitenflächen legt, zu einem dreiseitigen Prisma ergänzen, das gleiche Höhe und gleiche Grundfläche und den dreifachen Rauminhalt hat.

Folgerung 2. Eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche g und der Höhe h hat den Rauminhalt

$$V = \frac{1}{3}gh.$$

Satz. Eine Pyramide mit der Grundfläche g und der Höhe h hat den Rauminhalt

$$V = \frac{1}{3}gh.$$

Beweis. Ich vergleiche die beliebige Pyramide mit einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche den gleichen Inhalt wie die Grundfläche der gegebenen Pyramide hat. Für den Rauminhalt der dreiseitigen Pyramide gilt der Ausdruck

$$V = \frac{1}{3}gh,$$

mithin nach dem in Nr. 12 abgeleiteten Satz auch für die beliebige Pyramide, die mit der dreiseitigen gleiche Höhe und flächengleiche Grundfläche hat.

Zylinder

14. Erklärung. Ein Zylinder wird begrenzt von zwei in parallelen Ebenen liegenden Kreisen mit gleichem Radius, den Grundflächen, und einer krummen Fläche, dem Mantel, die beide verbindet.

Der Abstand der beiden Kreise heißt die Höhe des Zylinders, die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der beiden Kreise die Achse, eine Parallele zur Achse durch einen Punkt des Umfanges des Grundkreises eine Seitenlinie. Der Zylindermantel ist so beschaffen, daß durch jeden seiner Punkte eine und nur eine Seitenlinie geht; er läßt sich in eine Ebene abwickeln.

Ein Zylinder heißt gerade, wenn die Achse senkrecht auf der Grundlinie steht. Im andern Falle heißt er schief.

15. Satz. Ein gerader Zylinder mit dem Radius r und der Höhe h hat den Mantel

$$M = 2\pi rh$$

und die Oberfläche $O = 2\pi r(r + h)$.

Beweis. Rollt man den Mantel des Zylinders in die Ebene ab, so erhält man ein Rechteck; dessen eine Seite ist gleich der Höhe des Zylinders, die andere ist gleich dem Umfang des Grundkreises, hat also die Länge $2\pi r$. Der Mantel hat danach den Flächeninhalt $2\pi rh$.

Nimmt man zum Mantel noch die beiden Grundkreise hinzu, dann erhält man die Oberfläche. Jeder Grundkreis hat den Flächeninhalt πr^2 ; mithin ist

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h).$$

16. Satz. Der Rauminhalt eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h ist

$$V = \pi r^2 h.$$

Beweis. Man kann den geraden ebenso wie den schiefen Zylinder mit beliebig vorschreibbarer Genauigkeit durch ein Prisma annähern, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck mit genügend großer Seitenzahl ist. Dessen Rauminhalt ist aber gh , wenn g die Grundfläche ist. An die Stelle der Grundfläche des Prismas tritt beim Zylinder der Kreisinhalt πr^2 . Mithin erhält man als Wert für den Rauminhalt des Zylinders

$$V = \pi r^2 h.$$

Kegel

- 17. Erklärung.** Ein Kegel wird begrenzt von einem Kreis (der Grundfläche) und einer krummen Fläche (dem Mantel), die einen Punkt außerhalb der Ebene der Grundfläche (die Spitze des Kegels) mit der Grundfläche verbindet. Den Abstand der Spitze von der Grundfläche nennt man die Höhe des Kegels, die Verbindungsstrecke der Spitze mit dem Mittelpunkt des Grundkreises die Achse, die Verbindungsstrecken der Spitze des Kegels mit Punkten des Grundkreises Seitenlinien. Der Kegelmantel ist so beschaffen, daß durch jeden seiner Punkte, ausgenommen die Spitze des Kegels, eine und nur eine Seitenlinie geht; er läßt sich in eine Ebene abwickeln.

Steht die Achse des Kegels senkrecht auf der Grundfläche, dann heißt der Kegel gerade, im anderen Falle heißt er schief. Beim geraden Kegel sind alle Seitenlinien gleich lang.

- 18. Satz.** Ein gerader Kegel mit dem Radius r und der Seitenlinie s hat den Mantel

$$M = \pi r s$$

und die Oberfläche $O = \pi r (r + s)$.

Beweis. Rollt man den Mantel des geraden Kegels in die Ebene ab, dann erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Radius s ist und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist, also gleich $2\pi r$. Es ist also der Flächeninhalt des Mantels (§ 8, Nr. 12)

$$M = \frac{1}{2} s \cdot 2\pi r = \pi r s.$$

Fügt man zum Mantel die Grundfläche, deren Flächeninhalt πr^2 ist, hinzu, so erhält man für die Oberfläche

$$O = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s).$$

- 19. Satz.** Der Rauminhalt eines Kegels mit dem Radius r und der Höhe h ist

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Beweis. Man kann den geraden ebenso wie den schiefen Kegel mit beliebig vorschreibbarer Genauigkeit durch eine Pyramide annähern, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck mit genügend großer Seitenzahl ist. Der Rauminhalt dieser Pyramide ist $\frac{1}{3} g h$, wenn g die Grundfläche angibt. An die Stelle der Grundfläche der Pyramide tritt beim Kegel der Kreisinhalt πr^2 . Mithin erhält man als Wert für den Rauminhalt des Kegels

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Pyramidenstumpf und Kegelstumpf

- 20. Erklärung.** Schneidet man eine Pyramide (die Vollpyramide) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so zerfällt sie in einen Pyramidenstumpf und die Ergänzungspyramide dieses Stumpfes. Schneidet man einen Kegel (den Vollkegel) durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so zerfällt er in einen Kegelstumpf und den Ergänzungskegel dieses Stumpfes.

Den Abstand der Schnittebene von der Grundfläche nennt man die Höhe des Pyramidenstumpfes oder des Kegelstumpfes. Die zur Grundfläche parallele Fläche heißt Deckfläche. Unter den Seitenkanten eines Pyramidenstumpfes versteht man diejenigen Kanten, die von der Deckfläche zur Grundfläche verlaufen. Unter der Seitenlinie eines Kegelstumpfes versteht man den Teil der Seitenlinie des Vollkegels, der zwischen Grundfläche und Deckfläche liegt. Ein Kegelstumpf heißt gerade, wenn der zugehörige Vollkegel gerade ist.

21. Satz. Ist G die Grundfläche, g die Deckfläche eines Pyramidenstumpfes von der Höhe h , dann ist

$$V = \frac{1}{3} h (G + \sqrt{G \cdot g} + g).$$

Beweis. x sei die Höhe der Ergänzungspyramide, dann ist (Nr. 11)

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (x + h) : x,$$

$$x \cdot \sqrt{G} = \sqrt{g}(x + h),$$

$$x \cdot (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = h \cdot \sqrt{g},$$

folglich ist

$$x = \frac{\sqrt{g} \cdot h}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Der Rauminhalt des Pyramidenstumpfes wird also

$$V = \frac{1}{3} G \cdot (x + h) - \frac{1}{3} g \cdot x,$$

$$= \frac{1}{3} Gh + \frac{1}{3} x(G - g)$$

$$= \frac{1}{3} Gh + \frac{1}{3} \frac{h \sqrt{g}(G - g)}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{1}{3} Gh + \frac{1}{3} h \sqrt{g} (\sqrt{G} + \sqrt{g})$$

$$= \frac{h}{3} (G + \sqrt{G \cdot g} + g).$$

22. Satz. Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes, der R zum Radius der Grundfläche, r zum Radius der Deckfläche und s zur Seitenlinie hat, ist

$$M = \pi s (R + r).$$

Beweis. Rollt man den Mantel eines Kegelstumpfes in die Ebene ab, dann erhält man den Ausschnitt eines Kreisringes, den man als Differenz zweier Kreisausschnitte ansehen kann; der eine rührt vom Vollkegel, der andere vom Ergänzungskegel her. Es ist danach, wenn x die Seitenlinie des Ergänzungskegels ist,

$$M = \pi(s + x)R - \pi x r = \pi s R + \pi x(R - r).$$

Nun gilt aber nach dem ersten Strahlensatz die Proportion

$$R : r = (x + s) : x,$$

$$Rx = rx + rs,$$

$$x(R - r) = rs.$$

Mithin ist

$$M = \pi s(R + r).$$

- 23. Satz.** Der Rauminhalt eines Kegelstumpfes von der Höhe h , der R zum Radius der Grundfläche, r zum Radius der Deckfläche hat, ist

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2).$$

Beweis. Den Rauminhalt eines Kegelstumpfes kann man mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit durch den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes annähern, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck mit genügend großer Seitenzahl ist. Für ihn gilt also auch die Formel für den Inhalt des Pyramidenstumpfes, wobei

$$G = \pi R^2 \quad \text{und} \quad g = \pi r^2$$

einzuführen ist. Mithin ist

$$V = \frac{1}{3} h (\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2),$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2).$$

Kugel

- 24. Erklärung.** Die Gesamtheit der Punkte im Raum, die von einem festen Punkte gleiche Entfernung haben, bildet die Oberfläche einer Kugel. Der feste Punkt im Innern der Kugelfläche heißt der Mittelpunkt der Kugel, die Strecke, die den Mittelpunkt mit einem Punkte der Oberfläche verbindet, der Radius der Kugel.

Die Strecke, die von der Kugeloberfläche aus einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden geschnitten wird, heißt Durchmesser. Ein Durchmesser der Kugel ist doppelt so groß wie der Radius.

Eine Ebene schneidet die Kugeloberfläche in einem Kreise. Der Radius dieses Kreises ist am größten, nämlich gleich dem Radius der Kugel, wenn die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Der Kreis heißt dann ein größter Kugelkreis. Eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene teilt die Kugel in zwei Halbkugeln.

- 25. Satz.** Zwischen der Oberfläche O und dem Rauminhalt V der Kugel mit dem Radius r besteht die Beziehung

$$V = \frac{1}{3} r \cdot O.$$

Beweis. Durch die beiden Endpunkte (Pole) eines Durchmessers der Kugel lege man eine Schar größter Kugelkreise (Meridiane). Senkrecht zum Durchmesser lege man eine zweite Schar von Kugelkreisen (Breitenkreisen). Die Kugeloberfläche wird dann zerschnitten in Vierecke, die als Begrenzung je zwei Meridiane und zwei Breitenkreise haben. Nur um die Pole herum treten Dreiecke auf. Wenn man die Ecken der Dreiecke und Vierecke mit dem Kugelmittelpunkt verbindet, entstehen pyramidenförmige Körper, deren Spitzen alle im Kugelmittelpunkte liegen, während die Grundflächen, die freilich nicht eben sind, die Kugeloberfläche vollständig überdecken. Je größer die Anzahl der Meridiane und Breitenkreise wird, um so mehr nähern sich diese pyramidenförmigen Körper wirklichen Pyramiden mit der Höhe r . Bezeichnen wir mit $V_1, V_2, \dots V_n$ die Rauminhalte der pyra-

midenförmigen Körper, mit $O_1, O_2, \dots O_n$ ihre Grundflächen, dann gilt angenähert, aber mit vorschreibbarer Genauigkeit

$$V_1 = \frac{1}{3}r \cdot O_1, \quad V_2 = \frac{1}{3}r \cdot O_2, \dots \quad V_n = \frac{1}{3}r \cdot O_n.$$

Addiert man nun diese Gleichungen, so erhält man

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{1}{3}r(O_1 + O_2 + \dots + O_n)$$

oder, wenn man nur n genügend groß wählt, mit beliebiger Genauigkeit

$$V = \frac{1}{3}r \cdot O.$$

26. Satz. Der Rauminhalt der Kugel mit dem Radius r ist

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Beweis. Läßt man (Fig. 58) ein Quadrat $ABCD$, dessen Seiten die Länge r haben, sich um eine Seite, etwa um AB , drehen, so beschreibt sein Umfang die Oberfläche eines Zylinders von der Höhe r und dem Grundkreisradius r . Eine Diagonale BD des Quadrates beschreibt bei dieser Drehung den Mantel eines Kegels von der Höhe r und dem Grundkreisradius r . Ein dem Quadrat eingeschriebener Kreisquadrant AC beschreibt eine Halbkugel vom Radius r .

Durch den eben beschriebenen Drehkörper (oder besser durch die Gesamtheit der drei Drehkörper) legt man im Abstände a die zur Grundfläche parallele Ebene. Diese schneidet den Zylinder, die Halbkugel und den Kegel je in einem Kreis. Der Radius des Zylinderschnittes sei MR , der Radius des Halbkugelschnittes MQ , der Radius des Kegelschnittes sei MP . Dann ist

$$MR = r,$$

$$MP = a,$$

weil MPB ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist,

$$MQ = \sqrt{r^2 - a^2},$$

weil $\triangle MQB$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse r ist.

Wir weisen nun nach, daß die Halbkugel raumgleich dem Restkörper ist, der entsteht, wenn aus dem Zylinder der Kegel herausgeschnitten wird. Den Nachweis liefern wir auf Grund des Cavalierischen Grundsatzes, indem wir feststellen, daß die in dem beliebigen Abstände a parallel der Grundfläche geführten Querschnitte durch die Halbkugel und den Restkörper gleich sind. Der Querschnitt durch die Halbkugel ist ein Kreis mit dem Radius MQ und mit dem Flächeninhalt

$$f_1 = \pi(r^2 - a^2).$$

Der Querschnitt durch den Restkörper ist ein Kreisring. Der Radius des äußeren Kreises ist MR , der Radius des inneren MP ; es ist also

$$f_2 = \pi r^2 - \pi a^2 = \pi(r^2 - a^2).$$

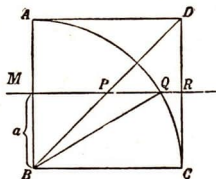


Fig. 58

In der Tat sind beide Querschnitte flächengleich und damit Halbkugel und Restkörper raumgleich. Der Rauminhalt des Restkörpers ergibt sich als Differenz des Zylinders und des Kegels:

$$V' = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{2}{3}\pi r^2.$$

V' ist also auch der Rauminhalt der Halbkugel.

Die Vollkugel hat mithin den Rauminhalt

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Bemerkung. Der Cavalierische Grundsatz ist hier auf Körper angewendet worden, die nicht ausschließlich von Ebenen begrenzt sind. Ähnlich wie in dem in Nr. 12 behandelten besonderen Falle kann man den Nachweis für die Richtigkeit des Cavalierischen Grundsatzes für unsere Körper führen, indem man sie in gleichdicke Schichten zerlegt und diese durch Zylinder im Falle der Halbkugel, durch Hohlzylinder im Falle des Restkörpers von Zylinder und Kegel ersetzt. Dann stimmen beide Körper schichtweise überein, und bei genügend großer Anzahl von Schichten können die ursprünglichen Körper durch die Treppenkörper mit beliebig vorschreibbarer Genauigkeit angenähert werden.

27. Satz. Die Oberfläche der Kugel mit dem Radius r ist

$$O = 4\pi r^2.$$

Beweis. Wir haben gezeigt (Nr. 25), daß zwischen der Oberfläche O und dem Rauminhalt V der Kugel die Beziehung

$$V' = \frac{1}{3}rO$$

gilt. Setzt man den oben für den Rauminhalt gefundenen Wert für V ein, dann erhält man aus

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rO$$

$$O = 4\pi r^2.$$

Teile des Kugelraumes und der Kugelfläche

28. Erklärung. Ein beliebiger ebener Schnitt teilt die Kugel in zwei Kugelabschnitte. Unter der Höhe des Kugelabschnittes versteht man den Teil des auf der Schnittebene senkrecht stehenden Durchmesser, der von der Schnittebene und der Oberfläche des Kugelabschnittes begrenzt wird. Den Teil der Kugeloberfläche, der den Kugelabschnitt begrenzt, nennt man Kugelkappe. Unter der Höhe einer Kugelkappe versteht man die Höhe des zugehörigen Kugelabschnittes.

Der Teil der Kugeloberfläche, der zwischen zwei parallelen, die Kugel schneidenden Ebenen liegt, heißt Kugelzone. Unter der Höhe der Kugelzone versteht man den Abstand der beiden parallelen Ebenen, die die Zone begrenzen. Wenn man einen Kugelabschnitt, dessen Höhe kleiner als der Kugelradius ist, durch den Kegel ergänzt, der die Schnittfläche des Kugelabschnittes zur Grundfläche, den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat, dann erhält man einen Kugelausschnitt. Ebenso erhält man einen Kugelausschnitt, wenn man aus einem Kugelabschnitt, dessen Höhe größer als der Kugelradius ist, den Kegel herauschneidet, der die Schnittfläche

des Kugelabschnittes zur Grundfläche, den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat. Unter der Höhe eines Kugelausschnittes versteht man die Höhe des zugehörigen Kugelabschnittes.

29. Satz. Der Rauminhalt eines Kugelabschnittes mit der Höhe h ist

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h),$$

wenn r der Radius der Kugel ist.

Beweis. Die Überlegungen in Nr. 26 gelten auch, wenn es sich nicht um eine Halbkugel, sondern um einen Kugelabschnitt handelt. Es sei h die Höhe des Kugelabschnittes (Fig. 59). Der Restkörper entsteht in diesem Falle, indem man aus einem Zylinder, der die Höhe h und den Grundkreisradius r hat, einen Kegelstumpf herauschneidet, dessen Höhe gleichfalls h ist. Der Radius der größeren Deckfläche ist r , der Radius der Grundfläche ist $r - h$. Es ergibt sich also für den Rauminhalt des Kegelstumpfes

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r[r - h] + [r - h]^2),$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi h(h^2 - 3rh + 3r^2).$$

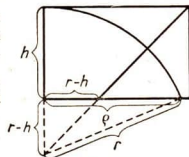


Fig. 59

Danach ist der Inhalt des Restkörpers und damit der des Kugelabschnittes

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h(h^2 - 3rh + 3r^2) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$

Bei dieser Ableitung ist $h < r$ vorausgesetzt. Die Formel gilt aber auch für $h > r$. Ist $h' = 2r - h$, so gilt der Satz jedenfalls für den Kugelabschnitt mit der Höhe h' , der den Rauminhalt V' habe. Dann ist

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 - V',$$

wo $V' = \frac{1}{3}\pi(2r - h)^2(3r - [2r - h]) = \frac{1}{3}\pi(4r^3 - 3rh^2 + h^3)$ ist.

Mithin ist $V = \frac{1}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi(4r^3 - 3rh^2 + h^3) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

30. Satz. Der Rauminhalt eines Kugelausschnittes von der Höhe h ist

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h,$$

wenn r der Radius der Kugel ist.

Beweis. Der Rauminhalt des Kugelabschnittes ist

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$

Dazu tritt der Rauminhalt V_2 des Kegels, dessen Höhe $r - h$ ist. Für den Radius ρ der Grundfläche ergibt sich nach dem pythagoreischen Lehrsatz (vgl. Fig. 59)

$$\rho^2 = r^2 - (r - h)^2 = 2rh - h^2.$$

Es ist also $V_2 = \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)(r - h)$

$$= \frac{1}{3}\pi(2r^2h - 3rh^2 + h^3).$$

Folglich ist $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi(3rh^2 - h^3 + 2r^2h - 3rh^2 + h^3)$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Bei dieser Ableitung wird $h < r$ vorausgesetzt. Ist $h > r$, dann ist die Höhe des Kegels, der vom Kugelabschnitt abzuziehen ist, $h - r$. Dann ist

$$V = V_1 - V_2,$$

wobei aber $V_2 = \frac{1}{3}\pi(2rh - h^2)(h - r) = \frac{1}{3}\pi(3rh^2 - 2r^2h - h^3)$ ist. Das Ergebnis für V ist das gleiche.

- 31. Satz.** Die Fläche einer Kugelkappe von der Höhe h und ebenso die Fläche einer Kugelzone von der Höhe h ist

$$O = 2\pi rh,$$

wenn r der Radius der Kugel ist.

Beweis. Die in Nr. 25 angestellte Überlegung gilt auch, wenn es sich nicht um die ganze Kugel und ihre Oberfläche handelt, sondern um eine Kugelkappe und den zugehörigen Kugelausschnitt. Es ist also in

$$V = \frac{1}{3}rO$$

für V der Rauminhalt des zugehörigen Kugelausschnittes einzusetzen. Aus

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}rO$$

folgt

$$O = 2\pi rh.$$

Eine Kugelzone von der Höhe h kann man als Differenz zweier Kugelkappen ansehen, von denen die eine die Höhe x , die andere die Höhe $x + h$ hat. Wenn der ersten die Oberfläche O_1 , der zweiten die Oberfläche O_2 zukommt, dann ist

$$O = O_2 - O_1 = 2\pi r(x + h) - 2\pi rx$$

$$O = 2\pi rh.$$

§ 10. Einführung in die Trigonometrie

Die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

- 1. Erklärung.** Im rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus eines Winkels der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse, der Kosinus eines Winkels der Quotient aus Ankathete und Hypotenuse, der Tangens eines Winkels der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete, der Kotangens eines Winkels der Quotient aus Ankathete und Gegenkathete.

In dem bei C rechtwinkligen Dreieck (Fig. 60) ist also

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c},$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{cotg} \beta = \frac{a}{b}.$$

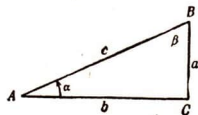


Fig. 60

Alle rechtwinkligen Dreiecke mit gleichem Winkel α oder β sind ähnlich; die Werte der trigonometrischen Funktionen sind deshalb nur von der Größe der Winkel abhängig.

Alle vier trigonometrischen Funktionen sind Quotienten zweier Strecken; sie sind also unbenannte Zahlen.

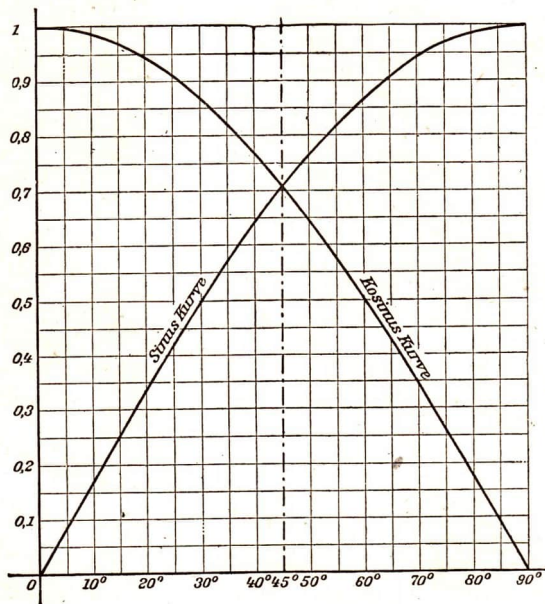


Fig. 61

2. Graphische Darstellung. Durch Konstruktion und Messung kann man die Werte der trigonometrischen Funktionen mit beliebiger Genauigkeit bestimmen. Fig. 61 und 62 geben graphische Darstellungen des Verlaufes der Funktionen für Werte von 0° bis 90°.

Für die Grenzwerte 0° und 90°, für die es genau genommen kein rechtwinkliges Dreieck gibt, setzt man zweckmäßigerweise, wie die graphischen Darstellungen zeigen, fest:

$$\begin{array}{llll} \sin 0^\circ = 0, & \cos 0^\circ = 1, & \operatorname{tg} 0^\circ = 0, & \operatorname{cotg} 0^\circ = \infty, \\ \sin 90^\circ = 1, & \cos 90^\circ = 0, & \operatorname{tg} 90^\circ = \infty, & \operatorname{cotg} 90^\circ = 0. \end{array}$$

Der Sinus und der Tangens steigen, der Kosinus und der Kotangens fallen, wenn der Winkel von 0 bis 90° steigt. Sinus und Kosinus bleiben zwischen 0 und 1, Tangens und Kotangens zwischen 0 und ∞ .

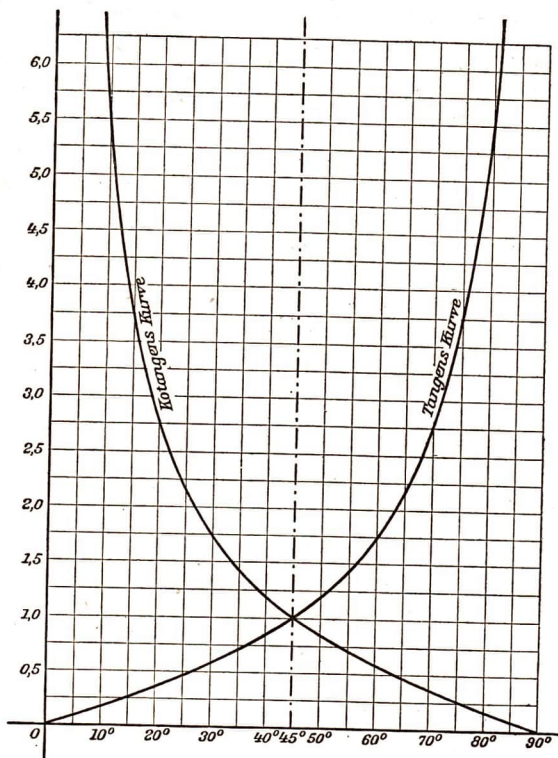


Fig. 62

3. Wurzelausdrücke für einige Werte trigonometrischer Funktionen. Im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ist die Hypotenuse $\sqrt{2}$, wenn die Katheten die Länge 1 haben. Mithin ist

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \quad \operatorname{cotg} 45^\circ = 1.$$

Im rechtwinkligen Dreieck, in dem der eine spitze Winkel 30° ist, der andere 60° ist, habe die Hypotenuse die Länge 1; dann hat eine Kathete die Länge $\frac{1}{2}$, die andere die Länge $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Mithin ist

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3}, & \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}, & \operatorname{cotg} 30^\circ &= \sqrt{3}, \\ \sin 60^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3}, & \cos 60^\circ &= \frac{1}{2}, & \operatorname{tg} 60^\circ &= \sqrt{3}, & \operatorname{cotg} 60^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eines Winkels.

Es ist

$$(1) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$(3) \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$(4) \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1.$$

Beweis. 1. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

und wenn man durch c^2 dividiert,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Setzt man an die Stelle der Quotienten die trigonometrischen Funktionen, so erhält man die obige Gleichung (1).

2. und 3. Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}.$$

Setzt man wieder an die Stelle der Quotienten die trigonometrischen Funktionen, so erhält man die Formeln (2) und (3).

4. Die Richtigkeit der Formel ergibt sich durch Multiplikation der Formeln (2) und (3).

5. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen der beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks. Sind α und β die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

Beweis. Die Richtigkeit folgt sofort, wenn man an die Stelle der Funktionen die Quotienten der Dreiecksseiten einsetzt.

Da zwischen α und β die Beziehung $\alpha + \beta = 90^\circ$ besteht, nehmen die Formeln auch die Gestalt an:

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha),$$

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} (90^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha).$$

6. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks. Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C seien gegeben

1. die Hypotenuse c und eine Kathete a ; dann ist

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \quad \text{oder} \quad \beta = 90^\circ - \alpha;$$

2. die beiden Katheten; dann ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \quad \text{oder} \quad \beta = 90^\circ - \alpha;$$

3. die Hypotenuse und einer der spitzen Winkel, etwa α , dann ist

$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha;$$

4. eine Kathete a und der gegenüberliegende Winkel α , dann ist

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha};$$

5. eine Kathete a und der anliegende Winkel β , dann ist

$$b = \frac{a}{\operatorname{cotg} \beta}, \quad c = \frac{a}{\cos \beta}.$$

Die trigonometrischen Funktionen stumpfer Winkel

7. Erklärung. Die Definition der trigonometrischen Funktionen stumpfer Winkel wird durch die folgenden Gleichungen auf den Begriff der trigonometrischen Funktionen spitzer Winkel zurückgeführt:

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha),$$

$$\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha),$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = -\operatorname{cotg} (180^\circ - \alpha).$$

Es ist also der Sinus eines Winkels gleich dem positiven Wert des Sinus, der Kosinus, Tangens, Kotangens gleich dem negativen Wert des Kosinus, Tangens, Kotangens seines Nebenwinkels.

Folgerung. Es ist

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha,$$

$$\operatorname{cotg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

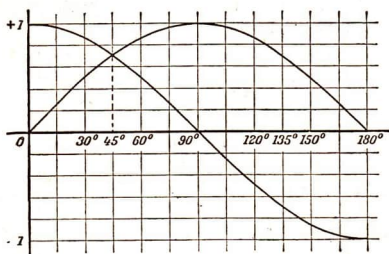


Fig. 63

8. Graphische Darstellung. Setzt man auf Grund der Erklärungen in Nr. 7 die graphische Darstellung der trigonometrischen Funktionen von 90° bis 180° fort, dann erhält man die Fig. 63 und 64.

Die Sinuskurve ist axialsymmetrisch in bezug auf eine in dem Abstände, der dem Winkel 90° entspricht, zur y -Achse gezogene Parallele. Alle anderen drei Kurven sind zentralsymmetrisch in bezug auf den eben genannten Punkt der x -Achse. Die Tangenskurve springt bei 90° von $+\infty$ nach $-\infty$.

Sätze über das schiefwinklige Dreieck

9. Sinussatz. Im Dreieck ist

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Beweis. Fällt man im Dreieck ABC die Höhe AD , so ergeben sich aus den beiden Dreiecken, die dann entstehen, für die Höhe h_a zwei Ausdrücke. Setzt man sie gleich, so erhält man, wenn β und γ spitz sind (Fig. 34),

$$c \sin \beta = b \sin \gamma,$$

wenn dagegen einer der Winkel β oder γ stumpf ist, etwa β (Fig. 35),

$$c \sin(180^\circ - \beta) = b \sin \gamma.$$

Da nach der Erklärung der trigonometrischen Funktionen für stumpfe Winkel

$$\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

ist, hat man auch im zweiten Fall

$$c \sin \beta = b \sin \gamma.$$

Sieht man diese Gleichung als Produktengleichung einer Proportion an, dann folgt

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma.$$

Das ist der Sinussatz für eines der Winkelpaare.

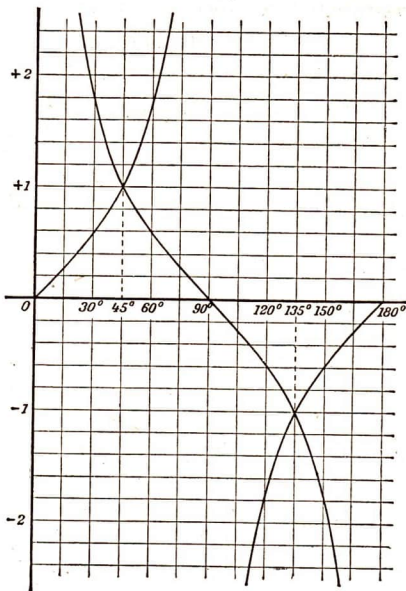


Fig. 64

10. Kosinussatz. Im Dreieck ist

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$(2) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$(3) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Beweis. Es genügt, eine der drei Formeln zu beweisen. Für die Höhe h_a des Dreiecks ABC erhält man, wenn man den der Seite c anliegenden Abschnitt auf der Seite a mit p bezeichnet,

$$h_a^2 = c^2 - p^2,$$

und wenn β spitz ist (Fig. 34),

$$h_a^2 = b^2 - (a - p)^2,$$

wenn dagegen β stumpf ist (Fig. 35),

$$h_a^2 = b^2 - (a + p)^2.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man bei spitzem Winkel β

$$c^2 - p^2 = b^2 - a^2 + 2ap - p^2,$$

bei stumpfem Winkel β hingegen

$$c^2 - p^2 = b^2 - a^2 - 2ap - p^2.$$

Beachtet man, daß sich aus dem rechtwinkligen Teildreieck bei spitzem Winkel β

$$p = c \cos \beta,$$

bei stumpfem Winkel β

$$p = c \cos(180^\circ - \beta) = -c \cos \beta$$

ergibt, so erhält man in beiden Fällen, wenn man noch p^2 weghebt,

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ac \cos \beta$$

oder

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Folgerung. Es ist

$$(1) \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$(2) \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$(3) \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

11. Inhaltsformeln. Im Dreieck ist der Flächeninhalt

$$(1) \quad f = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

$$(2) \quad f = \frac{1}{2} ac \sin \beta,$$

$$(3) \quad f = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Beweis. Es genügt, eine der Formeln zu beweisen. Für die Höhe h_a ergibt sich aus dem Teildreieck im Falle eines spitzen Winkels β (Fig. 34)

$$h_a = c \sin \beta,$$

im Falle eines stumpfen Winkels β (Fig. 35)

$$h_a = c \sin(180^\circ - \beta) = c \sin \beta.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel für den Inhalt des Dreiecks

$$f = \frac{1}{2} ah_a$$

ein, so erhält man die erste der obigen Formeln.

12. Satz. Ist r der Radius des Umkreises eines Dreiecks, so ist

$$(1) \quad a = 2r \sin \alpha,$$

$$(2) \quad b = 2r \sin \beta,$$

$$(3) \quad c = 2r \sin \gamma.$$

Beweis (Fig. 65). Es genügt, eine der Formeln abzuleiten. Verbindet man den Mittelpunkt M des Umkreises mit den Punkten B und C des Dreiecks ABC und fällt von M auf BC die Senkrechte MD , dann ist $\sphericalangle BMD$ nach dem Peripheriewinkelsatz gleich α . Aus dem Dreieck MBD ergibt sich also

$$\frac{a}{2} = r \sin \alpha$$

oder $a = 2r \sin \alpha.$

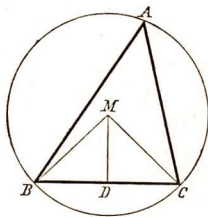


Fig. 65

13. Die vier Hauptfälle der Dreiecksberechnung.

a) Dreieck aus a, b, γ . Der Kosinussatz liefert die Seite c . α und β sind nach dem Sinussatz zu finden.

b) Dreieck aus a, β und γ . Da auch a bekannt ist, lassen sich nach dem Sinussatz die fehlenden Seiten berechnen.

c) Dreieck aus a, b und c . Zwei Winkel liefert der Kosinussatz.

d) Dreieck aus a, b und α . Der Sinussatz liefert zunächst β . Dann ist auch γ bekannt, und wieder gibt der Sinussatz die fehlende Seite c .

Bemerkung. Wird der Sinussatz zur Bestimmung eines Winkels angewandt, so liefert er einen spitzen und einen stumpfen Winkel. Es ist jeweils ausdrücklich zu entscheiden, ob zwei Winkel möglich sind (Fall, in dem die einschränkende Bedingung des vierten Kongruenzsatzes nicht erfüllt ist) oder ob nur ein Winkel in Frage kommt, und zwar welcher.

Bei der Anwendung des Kosinussatzes fällt ins Gewicht, daß er sich schlecht für logarithmische Rechnung eignet.

Weiterführende Formeln zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke

14. Mollweidesche Formeln. Im Dreieck ist

$$(1) \quad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$(3) \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}},$$

$$(2) \quad \frac{a+c}{b} = \frac{\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}},$$

$$(4) \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$(5) \quad \frac{a-c}{b} = \frac{\sin \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}},$$

$$(6) \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Beweis. 1. (Fig. 66). Wir beweisen zunächst eine der drei ersten Formeln. Verlängert man die Seite AC des Dreiecks ABC über A hinaus um c bis D , dann ist $\triangle ABD$ gleichschenkelig und nach dem Außenwinkelsatz

$$\sphericalangle CDB = \frac{\alpha}{2} \text{ und } \sphericalangle CBD = \beta + \frac{\alpha}{2} = \frac{2\beta + \alpha}{2}$$

$$= \frac{\beta + (180^\circ - \gamma)}{2} = 90^\circ + \frac{\beta - \gamma}{2}. \text{ Wendet man}$$

den Sinussatz auf $\triangle CBD$ an, so ergibt sich

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin \left(90^\circ + \frac{\beta - \gamma}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

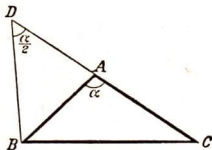


Fig. 66

2. (Fig. 67.) Wir wollen aus der zweiten Gruppe Mollweidescher Formeln die vierte beweisen und nehmen an, es sei $\beta > \gamma$. Trägt man AB auf AC von A bis D ab, dann ist $\triangle ABD$ gleichschenkelig, mithin $\sphericalangle ADB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,

$$\sphericalangle CDB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \text{ und } \sphericalangle CDB$$

$$= \beta - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2\beta - 180^\circ + \alpha}{2}$$

$$= \frac{\beta - 180^\circ + (180^\circ - \gamma)}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

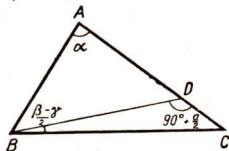


Fig. 67

Wendet man den Sinussatz auf $\triangle CBD$ an, so ergibt sich

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Folgerung. Da z. B. $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2}$ ist, lassen sich die Formeln (1) und (4) auch in der Form

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}}, \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}$$

ausprechen.

15. Tangenssatz. Im Dreieck ist

$$(1) \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2}},$$

$$(2) \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\gamma}{2}},$$

$$(3) \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Beweis. Auf Grund der Mollweideschen Formeln findet man (vgl. Nr. 13, Folgerung)

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\frac{b+c}{a}}{\frac{b-c}{a}} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Folgerung. Führt man an die Stelle der halben Winkelsumme den halben dritten Winkel ein, dann nimmt der Tangenssatz die Gestalt an:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}} \text{ usf.}$$

16. Satz. Ist ϱ der Radius des Inkreises eines Dreiecks, dann ist

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a},$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b},$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}.$$

Beweis. (Fig. 68.) Ist E der Berührungspunkt des Inkreises (Mittelpunkt O) mit der Dreiecksseite AB , dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck AEO

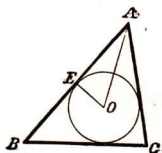


Fig. 68

die Seite $AE = s - a$ (§ 4, Nr. 14) und $\angle EAO = \frac{\alpha}{2}$, mithin

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}.$$

Halbwinkel. Ist s der halbe Umfang eines Dreiecks, dann ist

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Beweis. Aus der heronischen Formel für den Inhalt des Dreiecks (§ 5, Nr. 10)

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

und der anderen Inhaltsformel (§ 6, Nr. 6)

$$f = \varrho \cdot s$$

folgt für den Radius ϱ des Inkreises

$$\varrho = \frac{f}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Setzt man diesen Wert von ϱ in die im vorangehenden Satz entwickelte Formel für $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ein, so erhält man

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

17. Noch einmal der erste und dritte Hauptfall der Dreiecksberechnung. Wenn man auch die in Nr. 13ff. entwickelten Dreieckssätze zur Verfügung hat, lassen sich unter Vermeidung des für logarithmische Rechnung unzumutbaren Kosinussatzes und des bei der Winkelberechnung zwei Werte liefernden Sinussatzes die folgenden Rechnungsgänge einschlagen:

a) Dreieck aus a, b, γ . Mit γ ist auch $\frac{\alpha+\beta}{2}$ bekannt. Der Tangenssatz liefert auch $\frac{\alpha-\beta}{2}$ und damit α und β . Die fehlende Seite liefert eine der Mollweideschen Formeln.

b) Dreieck aus a, b und c . Die Winkel liefert der Halbwinkelsatz.

