Lösungsheft
Mathematik
zum
Lehrbuch
Klasse 11

Nur für Lehrer

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1980

Lösungsheft

MATHEMATIK

Zum Lehrbuch MATHEMATIK, Klasse 11

(Titel-Nr. 00 11 56)

Nur für Lehrer

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1980

An der Ausarbeitung der Lösungen waren Dietrich Bellack, Dr. Horst Lemke, Dr. Günter Lorenz, Prof. Dr. Günter Pietzsch, Dr. Werner Stoye, Gerhard Schulze und Dr. Hannelore Siemssen beteiligt.

Ausgabe 1980

1. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/80 (E 00 21 89-1)
LSV 0645
Redaktion: Karlheinz Martin
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: BS Rudi Arndt Berlin
Redaktionsschluß: 3. April 1980
Bestell-Nr. 707 155 1
DDR: 2,50 M

Inhalt

A. Zahlenfolgen; das Beweisverfahren der vollständigen Induktion; Kombinatorik

Lerneinheit A 1

o 1 a) N zerfällt in die beiden Teilmengen Ge und U, also
$Ge \subset N$ und $U \subset N$. Ferner gilt:
$Pr \subset N$, $Pr \not\subset G_e$ und $Pr \not\subset U$.
$Ge \cap P_r = \{2\}$.

o 2 a) Es handelt sich um eine Funktion, denn zu jedem x gehört genau ein y.
$D_f = \{x;\ x \in G \text{ und } |x| < 4\}$; $W_f = \{y;\ y = x^2 \text{ mit } x \in N \text{ und } x < 4\}$

b) keine Funktion

c) Funktion: $D_f = W_f = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

d) Funktion: $D_f = W_f = R$

e) keine Funktion

f) Funktion: $D_f = \{x;\ x \in P \text{ und } 1 \leqq x \leqq 5\}$;
$W_f = \{y;\ y \in P \text{ und } 1 \leqq y \leqq 2\}$

g) keine Funktion

h) Funktion: $D_f = W_f = N$

o 3 a) Für $x \in P$ folgt $y \in P$.

b) Für $y \geqq \frac{1}{3}$

c) Strahl (ohne Anfangspunkt), der von allen Punkten auf g_2 gebildet wird, die im 1. Quadranten liegen.

d) $\{[x;\ y];\ x \in P \text{ und } x \leqq \frac{4}{3} \text{ und } y = x - 1\}$

1. a) $M_1 = \{37\}$ b) $M_2 = \emptyset$ c) $M_3 = \{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$

d) und e) unendliche Mengen

2. a) M_1: Menge der reellen Zahlen, deren 2. Potenz eine natürliche Zahl ist. ($\sqrt{0,5} \notin M_1$)

M_2: Menge der ungeraden Zahlen ($2 \notin M_2$)

M_3: Menge der reellen Zahlen außer 1 ($1 \notin M_3$)

M_4: Menge der reellen Zahlen x mit $2 < x < 3$ ($2 \notin M_4$)

b) $N_1 = \{x;\ x = 3y \text{ und } y \in N\}$

$N_2 = \{x;\ x = 10^y \text{ und } y \in G\}$

$N_3 = \{x;\ x \in P \text{ und } 10 \leqq x \leqq 20\}$

3. $M_1 = \emptyset$; $M_2 = \{2\}$; $M_3 = \{35\}$; $M_4 = \emptyset$

4. a) (4), denn $N = G \cap R^*$

b) $\sqrt{100} = 10$; $8^{\frac{2}{3}} = 4$; $\log_5 1 = 0$

c) (2): -3; $\cos \pi = -1$

(3): $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

(5): $-\lg \sqrt{10} = -\frac{1}{2}$

(6): π ; $\log_3 17$

5. a) wahr: $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge

b) falsch: $2 = \lg 100$ ist Element, jedoch nicht Teilmenge

c) falsch: ϕ enthält kein Element

d) wahr: $0 = \lg 1$

e) falsch: ϕ ist Teilmenge, jedoch nicht Element

6. a) $k_1 \subset I_2$; $k_1 \subset I_3$; $k_2 \subset I_3$; $k_2 \subset A_1$; $k_3 \subset A_1$; $k_3 \subset A_2$

$I_1 \subset I_2$; $I_1 \subset I_3$; $I_2 \subset I_3$; $A_3 \subset A_1$; $A_3 \subset A_2$; $A_2 \subset A_1$

b) $R_{1/2}$: $A_1 \cap I_2$, dazu k_1 und k_2

$R_{2/3}$: $A_2 \cap I_3$, dazu k_2 und k_3

$R_{1/3}$: $A_1 \cap I_3$, dazu k_1 und k_3

	N	G	R^*	R	P
a) $z = 2$	ja	ja	ja	ja	ja
b) $z = \frac{29}{18}$	nein	nein	ja	ja	ja
c) $z = -\frac{41}{12}$	nein	nein	nein	ja	ja
d) $z = -0,05$	nein	nein	nein	ja	ja
e) $z = 1$	ja	ja	ja	ja	ja
f) $z = -\frac{17}{5}$	nein	nein	nein	ja	ja
g) $z = \sqrt{15}$	nein	nein	nein	nein	ja
h) $z = 3$	ja	ja	ja	ja	ja
i) $z = -1$	nein	ja	nein	ja	ja

(„ja" bedeutet z gehört der oben angeführten Menge an)

8. a) ja b) nein c) nein
d) nein e) ja f) ja

9. a) ja b) nein c) nein d) ja $3\sqrt[3]{2}$

10. a) $L = \{-1, 5\}$ b) $L = \{-1,5\}$ c) $L = \{\cancel{7}; 1\}$
d) $L = \{0\}$ e) $L = P$

11. a) $L = \{3; -3\}$ b) $L = \phi$ c) $L = \{2; -3\}$
d) $L = \{\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\}$ e) $L = \{-3\}$

12. a) $L_1 = \{x;\ x > -3\}$; $L_2 = \{x;\ x > \frac{3}{2}\}$; $L_2 \subset L_1$; $L_1 \cap L_2 = L_2$

b) $L_1 = \{x;\ x < -3,1\}$; $L_2 = \{x;\ x > \frac{1}{2}\}$; $L_1 \cap L_2 = \phi$

c) $L_1 = \{x;\ x > -9\}$; $L_2 = \{x;\ x > -2\}$; $L_2 \subset L_1$; $L_1 \cap L_2 = L_2$

d) $L_1 = \{x;\ x < -1\}$; $L_2 = \{x;\ x > -13\}$; $L_2 \not\subset L_1$ und $L_1 \not\subset L_2$;

$L_1 \cap L_2 = \{x;\ -13 < x < -1\}$

13. a) keine Funktion

b) Funktion: $D_f = G$

$W_f = \{ y;\ y = x^2 \text{ und } x \in N \}$

c) keine Funktion

d) Funktion: $D_f = \{x;\ x \in R \text{ und } x \neq 0\}$

$W_f = \{y;\ y \in R \text{ und } y \neq 0\}$

e) Funktion: $D_f = \{x;\ x \in P \text{ und } |x| \leqq \sqrt{5}\}$

$W_f = \{y;\ y \in P \text{ und } 0 \leqq y \leqq \sqrt[3]{5}\}$

f) Funktion: $D_f = P$

$W_f = G$

14. a) Funktion b) keine Funktion
c) keine Funktion d) Funktion
e) Funktion f) Funktion

15. a) Menge aller Q unterhalb g_1
b) Menge aller Q oberhalb g_2
c) Menge aller Q unterhalb g_1 und links der y-Achse
d) Menge aller Q oberhalb g_2 und rechts der y-Achse
e) Menge aller Q oberhalb g_1 und oberhalb g_2
f) Menge aller Q auf g_1 und unterhalb g_2

<u>Lerneinheit A 2</u>

o 4 a) Anfang – 7;
jedes Glied ist jeweils um 4 größer als das vorhergehende.
...; 5; 9; 13; 17; ...

b) Folge der Zahlen, die jeweils um 1 größer sind als die Quadratzahlen.
...; 26; 37; 50; 65; ...

c) Folge von Brüchen, deren Anfangsglied $\frac{1}{2}$ ist, deren Zähler und Nenner jeweils um 1 größer werden, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind. ...; $\frac{5}{6}$; $-\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}$; $-\frac{8}{9}$; ...

d) Folge der Zahlen, die abwechselnd größer und kleiner als 1 sind und deren Abstand zur 1 jeweils der 10. Teil des vorherigen Abstandes ist. ...; 1,001; 0,999; 1,0001; 0,9999; ...

e) Folge der Zahlen, deren Glieder abwechselnd 1 und $\frac{1}{n}$ mit $n \geqq 2$ und $n \in N$ sind. ...; 1; $\frac{1}{5}$; 1; $\frac{1}{6}$; ...

f) Folge der Zahlen, deren Anfangsglied $\sqrt{2}$ ist und deren folgende Glieder durch Multiplikation von $\sqrt{2}$ mit dem vorherigen Glied gebildet werden. ...; $4\sqrt{2}$; 8; $8\sqrt{2}$; 16; ...

o 5 a) (1) 2; 5; 8; 11; 14 (2) $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 4; $\frac{5}{2}$

(3) –1; 1; $\frac{5}{3}$; 2; $\frac{11}{5}$ (4) 0; –2; –6; –12; –20

b) (1) 299; 1499 (2) 50; 250

(3) 2,96; 2,992 (4) –9900; – 249 500

c) (1) $a_6 = 17$ (2) $a_2 = 1$; $a_{34} = 17$

(3) $a_1 = -1$; $a_2 = 1$ (4) $a_1 = 0$; $a_5 = -20$

o 6 a) $a_k = 4k - 11$; $a_{23} = 81$ b) $a_k = k^2 + 1$; $a_{23} = 530$

f) $a_k = \sqrt{2^k}$; $a_{23} = 2048 \cdot \sqrt{2}$

o 7 a) $a_{100} = 5 \cdot 100 + 2 = 502$
Vergleich: explizite Zuordnungsvorschrift: Einsetzen von $k = 100$ in $a_k = 5k + 2$ und berechnen von a_{100}; rekursive Zuordnungsvorschrift: Berechnen von a_2 bis a_{99}, dann Berechnung von a_{100} möglich.

b) (1) $a_1 = 3$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$; $a_4 = 9$; $a_5 = 13$

(2) $a_1 = -1$; $a_2 = -2$; $a_3 = 2$; $a_4 = -4$; $a_5 = -8$

(3) $a_1 = 1$; $a_2 = -3$; $a_3 = -11$; $a_4 = -27$; $a_5 = -59$

c) $a_1 = 1$; $a_{k+1} = 2 \cdot a_k$

1. a) 1; 9; 17; 25; 33 b) $\frac{5}{2}$; $\frac{10}{2}$; $\frac{15}{2}$; $\frac{20}{2}$; $\frac{25}{2}$ c) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$

d) 0; 2; 6; 12; 20 e) -6; $-\frac{7}{2}$; $-\frac{8}{3}$; $-\frac{9}{4}$; $-\frac{10}{5}$

f) -2; $\frac{1}{2}$; 0; $-\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$

2. a) $a_3 = 1$; $a_{75} = 25$; $a_{300} = 100$

b) $a_2 = 1$; $a_{10} = 25$; $a_1 = -2$; $a_{35} = 100$

c) $a_3 = -2$; $a_7 = 0$

3. a) $a_1 = -17$; $a_{k+1} = a_k - 6$; $a_k = -6(k+2) + 1 = -6k - 11$

-17; -23; -29; -35; -41; -47; -53; -59

b) $a_1 = 5$; $a_{k+1} = a_k - \frac{1}{2}$; $a_k = -\frac{k}{2} + \frac{11}{2}$

5; $\frac{9}{2}$; 4; $\frac{7}{2}$; 3; $\frac{5}{2}$; 2; $\frac{3}{2}$

c) $a_1 = 1$; $a_{k+1} = -a_k \cdot \frac{1}{k+1}$

1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{24}$; $\frac{1}{120}$; $-\frac{1}{720}$; $\frac{1}{5040}$; $-\frac{1}{40320}$

4. a) $a_k = \frac{2k}{2k-1}$

2; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{12}{11}$; $\frac{14}{13}$; $\frac{16}{15}$

b) $a_1 = 80$; $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k$; $a_k = \frac{80}{2^{k-1}}$

80; 40; 20; 10; 5; 2,5; 1,25; 0,625

c) $a_k = (-1)^k \frac{2k}{3^k}$

$-\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $-\frac{6}{27}$; $\frac{8}{81}$; $-\frac{10}{243}$; $\frac{12}{729}$; $-\frac{14}{2187}$; $\frac{16}{6561}$

5. a) $\frac{6}{3} = 2$; $\frac{7}{3}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{9}{3}$; $\frac{10}{3}$ $a_k = \frac{5+k}{3}$

b) 1; -3; -11; -27; -59, $a_k = 5 - 2^{k+1}$

6. a) $\frac{3}{2}$; 2; $\frac{8}{3}$; $\frac{32}{9}$; $\frac{128}{27}$

b) 0; $-\frac{1}{2}$; 0; 0; 0

Lerneinheit A 3

o 8 a) monoton wachsend

b) nicht monoton; monoton wachsend für $x < 0$;
monoton fallend für $x > 0$

c) monoton fallend

d) nicht monoton; monoton wachsend für $x \leq 0$,
monoton fallend für $x \geq 0$

e) monoton fallend

f) nicht monoton; monoton wachsend für $\frac{5}{2}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{2}\pi + 2k\pi$ $(k \in G)$
monoton fallend für $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{2}\pi + 2k\pi$ $(k \in G)$

o 9 a) $a_1 = -5$; $d = 2$

b) $m = d$; $x = 0$ folgt $y = n$; $k = 0$ folgt $a_k = a_1 - d$; $a_1 - d = n$

c) Arithmetische Folgen sind $\begin{cases} \text{monoton wachsend für } d \geq 0. \\ \text{monoton fallend für } d \leq 0. \end{cases}$

Nach Definition gilt $a_{k+1} - a_k = d$.

o10 a) Analogie wird zurückgeführt auf d bzw. q.
$d \hat{=} q$; Addieren von d entspricht Multiplizieren mit q;
Angabe von expliziter bzw. rekursiver Zuordnungsvorschrift ist möglich.

b) Exponentialfunktionen

c) Geometrische Folgen sind monoton wachsend für $a > 0$ und $q > 1$; für $a < 0$ und $0 < q < 1$; monoton fallend für $a > 0$ und $0 < q < 1$, für $a < 0$ und $q \geq 1$.

Beweis: $a_{k+1} - a_k = a_k \cdot q - a_k = a_k(q-1)$

$= a_1 \cdot q^{k-1}(q-1)$

Wegen $q > 0$ gilt auch $q^{k-1} > 0$.

Demzufolge ist $a_{k+1} - a_k$

positiv, wenn	negativ, wenn
$a_1 > 0$ und $q > 1$	$a_1 < 0$ und $q > 1$
$a_1 < 0$ und $0 < q < 1$,	$a_1 > 0$ und $0 < q < 1$.

Bei $q < 0$ liegt keine Monotonie vor, weil q^{k-1} ständig das Vorzeichen wechselt.

1. a) monoton wachsend b) monoton fallend
   c) monoton wachsend d) konstant
   e) monoton fallend f) nicht monoton

2. a) $a_{29} < 10 \leq a_{30}$; $a_{149} < 50 \leq a_{150}$; $a_{1499} < 500 \leq a_{1500}$
   b) $a_2 < 10 \leq a_3$; $a_{15} < 50 \leq a_{16}$; $a_{165} < 500 \leq a_{166}$
   c) $a_3 < 10 \leq a_4$; $a_7 < 50 \leq a_8$; $a_{22} < 500 \leq a_{23}$
   d) $a_2 < 10 \leq a_3$; $a_3 < 50 \leq a_4$; $a_4 < 500 \leq a_5$

3. a) $b_1 > -5 = b_2$; b_{59} $-120 = b_{60}$
   b) $b_4 > -5 = b_5$; b_{12} $-120 = b_{13}$
   c) $b_1 > -5 = b_2$; b_{12} $-120 = b_{13}$

4. a) 2; 3,8; 5,6; 7,4; 9,2; 11 b) 15; 7,5; 0; -7,5; -15; -22,5
   c) -1; -3; -5; -7; -9; -11 d) 0,7; 0,9; 1,1; 1,3; 1,5; 1,7

5. a) 8,5; 7; 5,5; 4; 2,5; 1 $a_{15} = -12,5$; $a_{27} = -30,5$
   b) 3; 7; 11; 15; 19; 23 $a_{15} = 59$; $a_{27} = 107$
   d) 25,04; 25,03; 25,02; 25,01; 25,00; 24,99 $a_{15} = 24,90$; $a_{27} = 24,78$
   e) $-2; -\frac{7}{3}; -\frac{8}{3}; -3; -\frac{10}{3}; -\frac{11}{3}$ $a_{15} = -\frac{20}{3}$; $a_{27} = -\frac{32}{3}$

6. a) -72; -60; -48; -36; -24; -12 $a_{15} = 96$; $a_{27} = 240$
   b) -10,5; -1,5; 7,5; 16,5; 25,5; 34,5 $a_{15} = 115,5$; $a_{27} = 223,5$
   c) 26,5; 25; 23,5; 22; 20,5; 19 $a_{15} = 5,5$; $a_{27} = -12,5$
   d) -44,8; -36,2; -27,6; -19; -10,4; -1,8 $a_{15} = 75,6$; $a_{27} = 178,8$
   e) $-3; -\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; -1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}$ $a_{15} = \frac{19}{3}$; $a_{27} = \frac{43}{3}$

7. 1a) ; 1d); 2a); 2b); 3a); 3c)

8. a) 3; 6; 12; 24; 48; 96 b) $36; 12; 4; \frac{4}{3}; \frac{4}{9}; \frac{4}{27}$
   c) $-4; -\sqrt{16}; -4; -4; -4; -4$ d) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{9}{8}; \frac{27}{16}; \frac{81}{32}; \frac{243}{64}$
   e) 1; -2; 4; -8; 16; -32 f) $-20; -5; -\frac{5}{4}; -\frac{5}{16}; -\frac{5}{64}; -\frac{5}{256}$

9. a) 0,7; 1,4; 2,8; 5,6; 11,2 monoton wachsend
   b) $3; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \frac{3}{16}$ monoton fallend
   c) -2; 2; -2; 2; -2 nicht monoton
   d) $-16; 4; -1; \frac{1}{4}; -\frac{1}{16}$ nicht monoton

10. a) $-\frac{5}{3}; 5; -15; 45; -\cancel{225}$ 135 nicht monoton
    b) $\frac{112}{81}; \frac{56}{27}; \frac{28}{9}; \frac{14}{3}; 7$ monoton wachsend
    c) 1000; 400; 160; 64; 25,6 monoton fallend
    d) $\frac{9,1^2}{2,6} \approx 31,85$; 9,1; 2,6; $\frac{2,6^2}{9,1} \approx 0,743$; $\frac{2,6^3}{9,1^2} \approx 0,212$ monoton fallend

11. 1c); 1d); 1e); 2d)

o 11

7	8	9	10	11	12
68,5	76,1	86,0	96,8	108,1	117,6

o 12

I	II	III	IV
28,2	26,6	28,0	27,6

o 13 a) $s_1 = 8$; $s_2 = 19$; $s_3 = 33$; $s_4 = 50$; $s_5 = 70$

b) $s_1 = 1$; $s_2 = 5$; $s_3 = 14$; $s_4 = 30$; $s_5 = 55$

c) $s_1 = 0{,}1$; $s_2 = 0{,}12$; $s_3 = 0{,}123$; $s_4 = 0{,}1234$; $s_5 = 0{,}12345$

o 14 $(a_k) = (1;\ 7;\ 19;\ 37;\ 61;\ 91;\ \ldots)$

o 15 $\sum\limits_{k=1}^{7} 2^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{7} 2^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{6} 2^n$

o 16 a) $s_k = \frac{1}{2}(b_{k+1} - 1) = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$; $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n - 1}{2}$

1.a) $\sum\limits_{k=0}^{10} (5k+3) = 3+8+13+18+23+28+33+38+43+48+53$

b) $\sum\limits_{i=0}^{5} (\frac{1}{3})^i = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{6} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$

2.a) $\sum\limits_{k=1}^{8} k = 1 + \sum\limits_{k=2}^{8} k < \sum\limits_{k=1}^{5} k + \sum\limits_{k=5}^{8} k < \sum\limits_{k=1}^{7} (k+8)$

b) $\sum\limits_{n=2}^{11} \frac{1}{n} < \sum\limits_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=0}^{9} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{m=2}^{11} \frac{1}{m-1}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{3} 2^n = \sum\limits_{k=0}^{3} 2^k < \sum\limits_{k=2}^{5} 2^{k-1} = \sum\limits_{p=1}^{4} 2^p$

3. a) $\sum\limits_{k=1}^{10} (6k-1)$ b) $\sum\limits_{k=0}^{6} (\frac{1}{2})^k$

c) $\sum\limits_{k=0}^{7} (-1)^k\ (4k+2)$ d) $\sum\limits_{k=1}^{9} (k^2 + k)$

4. a) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k = n\ (n+1)$ b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

5. a) $\sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{(3m-2)(3m+1)} = \frac{n}{3n+1}$ b) $\sum\limits_{k=2}^{n} k \cdot 2^{k-1} = 2^n\ (n-1)$

6. $1 + 199 = 3 + 197 = 5 + 195 = \ldots = 200$

$50 \cdot 200 = 10\,000 = 100^2$

7. Es ist auch anwendbar, wenn die Summe eine ungerade Anzahl von Summanden hat.

$1 + 148 = 4 + 145 = \ldots = 149$

$25 \cdot 149 = 3725$

Verhältnismäßig bequeme Summenberechnung für arithmetische Folgen.

8. $\sum\limits_{k=0}^{n} 4^k = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$

9.* $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z-1}$; $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

Lerneinheit A 5

o 18 a) H (0) : 7 ist durch 5 teilbar.
H (2) : 17 ist durch 5 teilbar.
H (3) : 25 ist durch 5 teilbar. (wahr)
H (4) : 35 ist durch 5 teilbar. (wahr)
H (8) : 95 ist durch 5 teilbar. (wahr)
H(10) : 137 ist durch 5 teilbar.
H (k-1) : $(k^2 + k + 3)$ ist durch 5 teilbar.
H (k+1) : $(k^2 + 5k + 11)$ ist durch 5 teilbar.
H (n+2) : $(n^2 + 7n + 17)$ ist durch 5 teilbar.
H (2n) : $(4n^2 + 6n + 7)$ ist durch 5 teilbar.

b) H (3) : $\sum_{k=0}^{3} 2^k = 2^4 - 1$

H (5) : $\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^6 - 1$

H (n-1) : $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$

H (n+1) : $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$

H(2n+1) : $\sum_{k=0}^{2n+1} 2^k = 2^{2n+2} - 1$

1. a) mindestens 63 Umsetzungen

b) Man muß erst einen Turm aus k Scheiben vom Stift A auf den Hilfsstift H bringen (u_k Umsetzungen), dann die größte Scheibe auf den Stift B (1 Umsetzung) und nun den Turm aus k Scheiben vom Hilfsstift H auf den Stift B (u_k Umsetzungen). Also ist $u_{k+1} = u_k + 1 + u_k = 2u_k + 1$

$u_8 = 2^8 - 1 = 255$; $u_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$

$u_{12} = 2^{12} - 1 = 4095$

c) $u_n = 2^n - 1$

2. a) 24 verschiedene Wörter

b) $5 \cdot 4! = 5! = 120$ c) $w_{k+1} = (k+1)\, w_k$

3. a) Aussage gültig für alle $n = 3k$

b) keine Aussage über Gültigkeit möglich

c) Aussage gültig für alle n

d) Aussage gilt für 1 und alle geraden n

e) Aussage gilt für alle $n \leqq 100$

f) Aussage gilt für alle $n \geqq 3$

Lerneinheit A 6

o 19 b) $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 \sum_{k=1}^{n} k$ c) $\sum_{k=1}^{n} 3k = 3 \sum_{k=1}^{n} k = \frac{3n(n+1)}{2}$

o 20 a) Für n = 0 gilt die Aussage wegen $0^2 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{2}$

b) Bei Beispiel A 15 hätte n = 0 mit einbezogen werden können, bei Beispiel A 16 nicht.

o 21 Natürliche Zahlen:
$s_{50} = 25 \cdot 49 = 1225$ (bzw. $25 \cdot 51 = 1275$ bei Beginn mit 1)
$s_{100} = 50 \cdot 99 = 4950$ (bzw. $50 \cdot 101 = 5050$ bei Beginn mit 1)
Gerade Zahlen:
$s_{50} = 25 \cdot 98 = 2450$ (bzw. $25 \cdot 102 = 2550$)
$s_{100} = 50 \cdot 198 = 9900$ (bzw. $50 \cdot 202 = 10\,100$)
Ungerade Zahlen:
$s_{50} = 25 \cdot 100 = 2500$
$s_{100} = 50 \cdot 200 = 10\,000$

o 22 Voraussetzung: z beliebig reell, $z \neq 0$, $z \neq 1$, n beliebig natürlich

Behauptung: $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$

Beweis:

1. Induktionsanfang: $\sum_{k=0}^{0} z^k = 1; \quad \frac{z^{0+1} - 1}{z - 1} = \frac{z-1}{z-1} = 1$

Also ist $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ für n=0 eine wahre Aussage.

2. Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:

Für beliebiges, aber festes n gelte $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch $\sum_{k=0}^{n+1} z^k = \frac{z^{n+2} - 1}{z - 1}$

Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=0}^{n+1} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k + z^{n+1}$$
$$= \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} + z^{n+1}$$
$$= \frac{z^{n+1} - 1 + (z-1)\, z^{n+1}}{z - 1}$$
$$= \frac{z^{n+1} - 1 + z^{n+2} - z^{n+1}}{z - 1}$$
$$= \frac{z^{n+2} - 1}{z - 1}$$

Also folgt aus der Gültigkeit der Summenformel für eine beliebige, aber feste Zahl n die Gültigkeit auch für deren Nachfolger n+1. Die behauptete Summenformel gilt für alle natürlichen Zahlen n.

3. a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ b) $\sum_{k=1}^{n} (4k-3) = n(2n-1)$

c) $\sum_{k=1}^{n} (9k - 2) = \frac{1}{2}n\,(9n + 5)$

4. a) $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + 4\cdot5\cdot6 + 5\cdot6\cdot7 = 420$

$s_5 = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{4} = 420$

b) $\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13} + \frac{1}{13\cdot17} + \frac{1}{17\cdot21} = \frac{5}{21}$

$s_5 = \frac{5}{21}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

$s_5 = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} = \frac{57}{32}$

$s_5 = 2 - \frac{7}{32} = \frac{57}{32}$

Mit k=0 könnte die Summation beginnen bei a) und d).

5. a) $\frac{n}{3n+1}$ b) $(n-1) \cdot 2^n$

Lerneinheit A 7

o 23 Es wird von der Behauptung auf die Voraussetzung geschlossen.

1. a) $n \geq 3$ b) $n \geq 3$ c) $n = 0,\ n = 1,\ n \geq 5$

4. $d_n = \frac{n\,(n-3)}{2}$

Lerneinheit A 8

o 24 Statt $\frac{1}{5}$ lg 14 wurde lg $\frac{14}{5}$ gebildet.

o 25 a) Die Vermutung besteht zu Recht.

$a_{19} = 1{,}51 > 1{,}5; \quad a_{20} = 1{,}43 < 1{,}5; \quad n_o = 20$

b) Der Vorzeichenwechsel hat seine Ursache im Dividieren durch eine negative Zahl; denn es ist lg 0,95 < 0 wegen 0,95 < 1.

1. a) n= 23 b) $a_{37} = 43$

2. $(a_n) = (5{,}25;\ 6{,}5;\ 7{,}75;\ 9;\ 10{,}25;\ 11{,}5;\ 12{,}75;\ 14;\ 15{,}25;$
$16{,}5;\ 17{,}75;\ 19;\ 20{,}25;\ 21{,}5;\ 22{,}75)$

3. a) $a_1 = 3$ b) $s_6 = \frac{133}{81}$; $s_7 = \frac{463}{243}$ c) $n = 16$

4. a) $q = 0{,}8$ b) $a_9 = 7 \cdot 0{,}8^8 \approx 1{,}17$; $a_{10} = 7 \cdot 0{,}8^9 \approx 094$; $a_{10} < 1$

c) $s_7 = \frac{7}{0{,}2}(1-0{,}8^7) \approx 27{,}66$; $s_8 = \frac{7}{0{,}2}(1-0{,}8^8) \approx 29{,}12$

5. a) ca. 78° b) ca. 3025 m c) ca. 2100 m

6. $(a_n) = (20;\ 27{,}6;\ 38{,}1;\ 52{,}6;\ 72{,}5;\ 100)$ (Angaben in min^{-1})

7. a) R 5 $q = \sqrt[5]{10} \approx 1{,}58$

$a_1 = 1{,}58$; $a_2 = 2{,}51$; $a_3 = 3{,}98$; $a_4 = 6{,}29$

R10 $q = \sqrt[10]{10} \approx 1{,}26$

$a_1 = 1{,}26$; $a_2 = 1{,}59$; $a_3 = 2{,}00$; $a_4 = 2{,}51$; $a_5 = 3{,}16$;
$a_6 = 3{,}98$; $a_7 = 5{,}01$; $a_8 = 6{,}31$; $a_9 = 7{,}94$

b) maximale Abweichung: 1,25 %

8. a) 1300,- M b) 1508,- M

Darstellung mit Hilfe der Wertetabelle

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	130	260	390	520	650	780	910	1040	1170	1300
b_n	130	264	403	546	694	846	1004	1166	1334	1508

9. a) 2960 000 m^3 b) 2998000 m^3 c) 213000 m^3

<u>Weitere Aufgaben zu den Lerneinheiten A 2 bis A 8</u>

1. a) $a_2 = \frac{3}{5}$; $a_3 = 1$; $a_4 = \frac{7}{5}$; $a_8 = 3$

b) $b_4 = \frac{7}{4}$; $b_5 = \frac{7}{5}$; $b_7 = 1$; $b_{14} = \frac{1}{2}$

c) $c_1 = \frac{1}{2}$; $c_3 = \frac{7}{4}$

2. a) $0;\ \frac{9}{10};\ \frac{99}{100};\ \frac{999}{1000}$

b) $1;\ 0;\ -1;\ 0;\ 1$

c) $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$

3.* a) $a_k = \frac{4k}{2k-1}$ $(k \geqq 0)$; $a_0 = \cancel{-1},0$ $a_{k+1} = a_k \frac{2k-1}{2k+1} + \frac{4}{2k+1}$ $(k \geqq 0)$

bzw. $a_k = \frac{4(k-1)}{2k-3}$ $(k > 0)$; $a_1 = \cancel{-1},0$ $a_{k+1} = a_k \frac{2k-3}{2k-1} + \frac{4}{2k-1}$ $(k > 0)$

b) $a_k = \frac{k+1}{2^k}$ $(k \geqq 0)$; $a_0 = 1$, $a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2^k}$ $(k \geqq 0)$

bzw. $a_k = \frac{k}{2^{k-1}}$ $(k > 0)$; $a_1 = 1$, $a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2^{k-1}}$ $(k > 0)$

c) $a_k = k^2 + k$; $a_1 = 2$, $a_{k+1} = a_k + 2\,(k+1)$

d) $a_k = \frac{k\,(k+2)}{(k+1)(k+3)}$; $a_1 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$, $a_{k+1} = a_k \frac{(k+1)^2\,(k+3)^2}{k(k+2)^2\,(k+4)}$

4. a) $\frac{2}{3};\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{9}{4};\ \frac{27}{8};\ \frac{81}{16};\ \frac{243}{32};\ \ldots$

$n = 20$; $a_{19} = (\frac{3}{2})^{17} \approx 985 < 1000 < a_{20} = (\frac{3}{2})^{18} \approx 1480$

b) $-1;\ 0{,}8;\ -0{,}64;\ 0{,}512;\ -0{,}4096;\ 0{,}32768;\ \ldots$; 1000 wird nicht erreicht.

c) $\sqrt{3};\ 3;\ 3\sqrt{3};\ 9;\ 9\sqrt{3};\ 27;\ \ldots$

$n = 13$; $a_{12} = 3^6 = 729 < 1000 < a_{13} = 3^6\sqrt{3} \approx 1260$

5. a) 7 b) 9 c) 8

6.* $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k^2+3k-2}{2k^2+3k+1} < 1$ und $a_k > 0$ für alle k; (a_k) fällt (streng) monoton.

8. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)\,(2n+1)}{3}$

Induktives Vermuten dieser Formel schwierig; deshalb Herleiten aus Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^2$ (vgl. Beispiel A 17 bzw. Zusammenfassung S. 48)

9. Statt eines Beweises mittels vollständiger Induktion kann auch eine Herleitung der Formel unter Benutzung von

$\sum_{k=1}^{n} k^2$ erfolgen: $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{m} (2k)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 8\sum_{k=1}^{m} k^2$

mit $m = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ für gerades } n. \\ \frac{n-1}{2} \text{für ungerades } n. \end{cases}$

Ist vorher Aufgabe 8 bearbeitet worden, kann man sich auch auf deren Lösung stützen.

11. 45 045 12. 226,1

13. a) $a_4 = \frac{250}{64} = 3{,}90625 \approx 3{,}91$; $s_4 = 11{,}53125 \approx 11{,}5$

b) $n = 12$ ($a_{11} \approx 18{,}6$; $a_{12} \approx 23{,}3$)

14.* a) Zu zeigen: Für $b = \frac{a+c}{2}$ gilt

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 6\,(a - b)^2 - (a + b + c)^2 = 0. \quad (*)$$

b) Umkehrung gilt nicht, denn (*) ist auch erfüllt für $a = \frac{b+c}{2}$; d.h. dafür, daß (b, a, c) eine geometrische Folge ist.

16. 13 Tage Maximaldosis; 191 Tabletten insgesamt

15. $R_1 = 33\,\Omega$; $R_2 = 45\,\Omega$; $R_3 = 59\,\Omega$; $R_4 = 79\,\Omega$
$R_5 = 106\,\Omega$; $R_6 = 140\,\Omega$; $R_7 = 188\,\Omega$; $R_8 = 250\,\Omega$

17. (a_k) und (b_k) sind geometrische Folgen mit $a_0 = 841$ mm, $b_0 = 1189$ mm und $q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Lerneinheit A 9

o 26	a b e r	b a e r	e a b r	r a b e
	a b r e	b a r e	e a r b	r a e b
	a e b r	b e a r	e b a r	r b a e
	a e r b	b e r a	e b r a	r b e a
	a r b e	b r a e	e r a b	r e a b
	a r e b	b r e a	e r b a	r e b a

o 27 a) $P_5 = 5 \cdot 24 = 120$ Das 5. Element kann in jeder der 24 Permutationen von 4 Elementen an 5 verschiedenen Stellen hinzugefügt werden.

b) Es gibt $P_6 = 6 \cdot 120 = 720$ Einlaufmöglichkeiten.

o 28 $P_8 = 8! = 40\,320$ Wenn weniger als 8 Personen im Abteil Platz nehmen, bleiben bei jeder Platzverteilung Plätze frei. Da deren "Anordnung" für die Anzahl ohne Einfluß ist, verringert sich diese Anzahl.

1. Summe: 2664 2. 24 Permutationen a) 6 b) 7 c) 9

3. a) $5! = 120$ b) $4! = 24$ c) $2! = 2$

4. a) $2 \cdot 4! = 48$ b) $8! = 40320$ c) $4 \cdot 4! = 96$ d) $3! = 6$

e) $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{5}$ f) $\frac{24}{25}$

5. a) $n + 1$ b) $n!$ c) $\frac{1}{n-2}$ d) $n(n+1)$ e) $(n-2)! \cdot n$

6. a) $x = 7$ b) $x = 5$ c) $x \in N$, $x \neq 0$ d) nicht lösbar

7. $P_7 = 7! = 5040$; am 19.10.1993 wiederholt sich die Sitzordnung

Lerneinheit A 10

o 29 220; 650

o 30 drei Buchstaben; 60 Wörter; vier Buchstaben; 120 Wörter fünf Buchstaben; 120 Wörter o 31 15 Möglichkeiten

xxx	xxx	xxx	xoo	oxo	oox
xoo	oxo	oox	xxx	xxx	xxx
xxo	xox	oxx	xxo	xxo	oxx
xxo	xox	oxx	oxx	xox	xxo
oxx	xox	xox			
xox	xxo	oxx			

o 32 $C_1^1 = 1$ $C_2^1 = 2$ $C_2^2 = 1$ $C_3^1 = 3$ $C_3^2 = 3$

$C_3^3 = 1$ $C_4^1 = 4$ $C_4^2 = 6$ $C_4^3 = 4$ $C_4^4 = 1$

o 33 $C_5^3 = 10$ $C_5^4 = 5$

o 34 $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$

1. den/2; die/3; eid/9; ein/10; nie/24

2. a) 840 b) 720 c) 3024 d) 132

3. a) $n(n-1)$ b) $n!$ c) $\frac{1}{2}n!$ d) $(n+1)!$

4. a) 84 b) 35 c) 495

5. 21; abceg; abefg; adefg; bdefg

6. a) 21 b) 120 c) 30 d) 1 e) 66 f) 1

7. a) $\binom{10}{4} = 210$ b) $\binom{17}{14} = \binom{17}{3} = 680$

c) $\binom{15}{3} + \binom{14}{2} = 546$ d) $\binom{11}{7} = \binom{11}{4} = 330$

8. a) $C_6^2 = \binom{6}{2} = 15$ b) ${}^{W}C_6^2 = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$, d.h.,

$C_6^2 + 6 = 21$

9. $\binom{35}{5} = 324632$; $\binom{35}{4} = 52360$; $\binom{35}{3} = 6545$

Lerneinheit A 11

o 35 a) $6 + 15 + 20 = 41 > 32$

b) Ja. Da jede Farbe außen mit jeder anderen Farbe innen kombiniert werden kann, ergeben sich zusätzlich $5 \cdot 4 = 20$ Plättchen.

1. $\binom{100}{5} = 75\,287\,520$

2. 63 Zeichen; z.B.

xo		oo
xo	und	xo
oo		xo

7. a) $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$

b)* $\binom{48}{6} = 12\,271\,512$

3. 14 4. 10 Punkte 5. a) 80000 Anschlüsse

b) 3 199 960 Verbindungen

6. 260 000 bzw. 676 000 polizeiliche Kennzeichen

Übungen und Anwendungen

1. a) $\left(\frac{n^2}{n!}\right) = (1;\ 2;\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{24};\ \frac{1}{20};\ \ldots)$

$\left(\frac{2^n}{n!}\right) = (2;\ 2;\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{15};\ \frac{4}{45};\ \ldots)$

$\left(\frac{4^n}{n!}\right) = (4;\ 8;\ \frac{32}{3};\ \frac{128}{15};\ \frac{256}{45};\ \ldots)$

b) $\left(\frac{n^2}{n!}\right)$ fällt streng monoton ab $n = 2$.

$\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ fällt monoton (ab $n = 2$ streng monoton).

$\left(\frac{4^n}{n!}\right)$ fällt monoton ab $n = 3$ (ab $n = 4$ streng monoton).

$\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ fällt monoton für jedes $x \in N$ ab $n = x - 1$, ab $n = x$ streng monoton.

$\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ wächst streng monoton.

2. a) $n \geqq 1$ b) $n \geqq 2$

3. a) - b) - c) $e_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$

4. Eine Dreieckfläche enthält 35 + 33 + 31 + ... + 1 Ziegel. Das ergibt 18 Schichten, mithin 324 Ziegel. Eine Trapezfläche enthält 65 + 63 + 61 + ... + 31 Ziegel. Das ergibt 864 Ziegel. Insgesamt werden 2376 Ziegel ohne Abfall benötigt, die 100 % - 8 % = 92 % entsprechen. Bereitzustellen sind somit 2583 Ziegel.

5. a) 21; $\frac{n}{2}(n+1)$ b) 8 Schichten; $h = (\frac{7}{2}\sqrt{3} + 1)\, d$

c) 110 ~~Rohre~~ f 136 Rohre

6. ohne Beachtung der Reihenfolge: $\binom{5}{3} = 10$

bei Beachtung der Reihenfolge: $\frac{5!}{2!} = 60$ (unzweckmäßig!)

7. a) 10 b) 15

Für 10 bzw. 11 Augen gibt es jeweils 27 Möglichkeiten als größte Anzahl.

8. a) $18 \cdot 18! \approx 1{,}15 \cdot 10^{17}$ b)* $2 \cdot 17 \cdot 17! \approx 1{,}21 \cdot 10^{16}$

9. ADCB

10. a) $\binom{9}{4} = 126$ b) $\binom{9}{4} + \binom{9}{3} = 210$ c) $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 1680$

d) $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{1} + \binom{9}{4}\binom{5}{2} + \binom{9}{3}\binom{6}{3} = 3570$

11. a) 2(4; 6) b) 5(6; 8) c) 4(5; 7) d) 4(5; 6)

12. a) 63 b)* ~~32~~ 35

13. a) nach 6 Aufschwemmungen b) $1{,}6 \cdot 10^6$ Bakterien

14. $5 \cdot 10^{-6}$ g

15. a)

t (in s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s (in m)	5	20	45	80	125	180	245	320	405	500
v (in $m\,s^{-1}$)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Die Wege bilden weder eine arithmetische noch eine geometrische Folge. Die Geschwindigkeiten bilden eine arithmetische Folge mit $d = 10\ m\ s^{-1}$.

b) nach unten:

t (in s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s (in m)	20	50	90	140	200	270	350	440	540	650
v (in $m\,s^{-1}$)	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115

nach oben:

t (in s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s (in m)	-10	-10	0	20	50	90	140	200	270	350
v (in $m\,s^{-1}$)	- 5	5	15	25	35	45	55	65	75	85

16. a) Halbwertzeit: 1570 Jahre b) Alter ca. 9000 Jahre

17.* a) 943 mbar b) rund 240 m (Tafel/Stab $2{,}44 \cdot 10^2$ m)

c) rund 4800 m (Tafel/Stab $4{,}78 \cdot 10^3$ m)

18. 180

19. $W_1 \mathrel{\hat=} 1$, $W_2 \mathrel{\hat=} 2$, $W_3 \mathrel{\hat=} 3$, $W_4 \mathrel{\hat=} 4$

1234	61	2134	38	3124	58	4123	75
1243	54	2143	26	3142	27	4132	56
1324	46	2314	47	3214	24	4213	37
1342	35	2341	51	3241	42	4231	48
1423	34	2413	54	3412	56	4312	62
1432	30	2431	42	3421	19	4321	34

Optimale Bearbeitungsfolge: W_3 W_4 W_2 W_1 mit der Einrichtezeit t = 19 min

b) Arbeitsaufwand sehr groß

20. a) 5 Jahre b) 1 200 000,- M

21. a) (a_n) mit $a_n = 19 \cdot 1{,}35^{n-1}$ $(1 \leq n \leq 6)$

$(a_n) = (19;\ 25{,}6;\ 34{,}6;\ 46{,}8;\ 63{,}1;\ 85{,}0)$

b) (b_n) mit $b_n = 68 \cdot 1{,}045^{n-1}$ $(1 \leq n \leq 6)$

$(b_n) = (68;\ 71{,}1;\ 74{,}4;\ 77{,}8;\ 81{,}3;\ 85{,}0)$

c) nein; $q = 1{,}046$

B Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

Lerneinheit B 1

o 2 (1) monoton wachsend (2) monoton fallend
(3) und (4) nicht monoton

o 4 (a_n) heißt unbeschränkt fallend, wenn für jede beliebige reelle Zahl s gilt: für fast alle n ist $a_n < s$.

1. a) monoton wachsend $-1 \leq a_n$

b) monoton fallend $4 < a_n \leq 6$

c) nicht monoton $-1 \leq a_n \leq 1$

2. a) monoton fallend $a_n \leq 0$

b) monoton fallend $0 < a_n \leq 1$

c) nicht monoton $-\frac{1}{10} \leq a_n \leq 1$

3. a) ja b) nein 4. a) nein b) ja

5. a) $2 < a_n \leq 3$

6. z.B. $\left(-\frac{1}{n}\right)$ oder $\left(-1 - \frac{1}{n}\right)$

7. z.B. $\left(3 + \frac{1}{n}\right)$ oder $\left(5 + \frac{1}{n^2}\right)$

8. a) wahr b) wahr c) wahr

9. a) falsch b) wahr c) falsch

10. a) unbeschränkt wachsend
b) unbeschränkt fallend
c) unbeschränkt wachsend
d) /

11. a) unbeschränkt wachsend
b) /
c) unbeschränkt fallend
d) unbeschränkt wachsend

Lerneinheit B 2

o 6 a) jedes n mit $n > 100$ b) jedes n mit $n > 1000$

1. a) $G_u = 0$; G_o exist. nicht
b) $G_u = 1$; $G_o = 2$
c) $G_u = 2$; G_o exist. nicht

2. a) G_u exist. nicht; $G_o = 1$
b) $G_u = 0$; $G_o = 1$
c) $G_u = 0$; G_o exist. nicht

3. a) Wegen $a_n > 1$ für alle n ist 1 eine untere Schranke von (a_n). Eine noch größere untere Schranke kann es nicht geben, da sich $1 + \frac{1}{n^2}$ beliebig wenig von 1 unterscheidet, wenn man nur n genügend groß wählt.

b) Jedes n mit $n > 10$

4. a) Wegen $a_n < 2$ für jedes n ist 2 eine obere Schranke von (a_n). Eine noch kleinere obere Schranke kann es nicht geben, da sich $2 - \frac{1}{10^n}$ beliebig wenig von 2 unterscheidet, wenn man nur n genügend groß wählt.

b) Jedes n mit $n > 3$

Lerneinheit B 3

o 7 $n > 5$ o 9 $n > 1000$

3. a) ja; $x = 1,02$; $x = 1$; $x = \frac{12}{11}$

b) ja; $x = 0,009$; $x = -0,001$; $x = 0$

4. a) ja; $x = -1,005$; $x = -\frac{12}{11}$; $x = -0,98$

b) ja; $x = 0,499$; $x = 0,505$; $x = 0,501$

5. a) ja b) $n > 1000$ 6. a) nein b) $n > 100$

Lerneinheit B 4

o 11 Wenn für fast alle n die Folgenglieder a_n in der gewählten ε-Umgebung von b liegen, so gibt es nur endlich viele n mit a_n außerhalb der ε-Umgebung von b, also nur endlich viele n mit a_n in der ε-Umgebung von a. Dann kann aber a nicht Grenzwert von (a_n) sein im Widerspruch zur Annahme.

1. a) $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ ist gleichwertig mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ist nun ε beliebig vorgegeben, so ist die letzte Ungleichung für fast alle n erfüllt.

b) $\left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$; $n > \frac{1}{2\varepsilon}$ c) $\left|\frac{-n-1}{n} + 1\right| < \varepsilon$; $n > \frac{1}{\varepsilon}$

2. a) $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$; $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ b) $\left|\frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$; $n > \frac{1}{3\varepsilon}$

c) $\left|\frac{1-n}{2n} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$; $n > \frac{1}{2\varepsilon}$

3. b) $n > 10$ (100; 1000) 4. b) $n > 10$ (100; 1000)

5. a) ja b) ja c) nein 5. a) ja b) nein c) ja

Lerneinheit B 5

o 13 (a_n) ist monoton wachsend; $G_u = 0$, $G_o = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

o 14 $G_o = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$

1. a) nicht konvergent

b) und c) monoton wachsend und nach oben beschränkt; deshalb nach Satz B 2 konvergent

d) nicht konvergent

2. a), b) und c) monoton fallend und nach unten beschränkt; deshalb nach Satz B 2 konvergent

d) nicht konvergent

3. $a_1 = 1$ $a_5 = 1,4636$ $a_9 = 1,5397$

$a_2 = 1,25$ $a_6 = 1,4914$ $a_{10} = 1,5497$

$a_3 = 1,3611$ $a_7 = 1,5118$ $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,64$

$a_4 = 1,4236$ $a_8 = 1,5274$

Lerneinheit B 6

o 18 $(a_n - b_n) = \left(\frac{n-3}{2n}\right)$; $(a_n \cdot b_n) = \left(\frac{n^2 - 1}{2n^2}\right)$;

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{2n - 2}{n + 1}\right)$

o 19 $c_{10} = \frac{29}{20} = 1,45$; $c_{100} = \frac{299}{200} = 1,495$;

$c_{1000} = \frac{2999}{2000} = 1,4995$; $c_{10000} = \frac{29999}{20000} = 1,49995$;

$c_{100000} = \frac{299999}{200000} = 1,499995$

o 20 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{3}{2}$

1. a) $(a_n + b_n) = \left(\frac{5n+1}{2n}\right)$; $(a_n - b_n) = \left(\frac{n-3}{2n}\right)$;

$(a_n \cdot b_n) = \left(\frac{3n^2+2n-1}{2n^2}\right)$; $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{3n-1}{2n+2}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \frac{5}{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \frac{3}{2} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{3}{2}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7n + 1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(7 + \frac{1}{n}\right) = 7$

Lerneinheit B 7

o 21 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$

1. a) 1 b) 1 c) 0 d) 0 e) 3 f) $\frac{1}{3}$ g) 0
   h) 1 i) $-\frac{5}{6}$ k) 0

2. a) 1 b) 2 c) 0 d) 0 e) 0 f) 0 g) $\frac{1}{2}$
   h) 0 i) 2 k) $\frac{1}{2}$

3. <u>Induktion über m</u>

Für m = 1 gilt die Behauptung ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\,1} = a^1$).

Es sei m eine beliebige natürliche Zahl mit $m \geqq 1$.

Induktionsvoraussetzung: $(a_n^{\,m})$ konvergiert gegen a^m.

Induktionsbehauptung: $(a_n^{\,m+1})$ konvergiert gegen a^{m+1}.

Beweis der Induktionsbehauptung:

Es ist $a_n^{\,m+1} = a_n^{\,m} \cdot a_n$.

Nach Voraussetzung konvergiert a_n gegen a; nach Induktionsvoraussetzung konvergiert $(a_n^{\,m})$ gegen a^m. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\,m+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^{\,m} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

4. Von den unendlich vielen Lösungen wird jeweils eine angegeben:
   a) $(1 + \frac{1}{n})$ b) $(1 - \frac{1}{n})$ c) $(1 + (-1)^n \frac{1}{n})$

5. Von den unendlich vielen Lösungen wird jeweils eine angegeben:
   a) $(-2 + \frac{1}{n})$ b) $(-2 - \frac{1}{n})$ c) $(-2 + (-1)^n \frac{1}{n})$

Lerneinheit B 8

o 23 a) (1) P; $x \neq 1$ (2) P (3) P (4) P; $x \neq 0$ (5) P; $x \neq 1$

b)

	x	−2	−1	0	0,5	1,5	2	3	4
f(x)	(1)	−1	0	1	1,5	2,5	3	4	5
	(2)	2	1	0	0,5	1,5	2	3	4
	(3)	0	0,5	1	1,25	2,75	3	3,5	4
	(4)	−1	−1	/	1	1	1	1	1
	(5)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−1	−2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

o 24 a) (1) und (3) sind streng monoton wachsend,
(4) ist monoton wachsend

b) z.B. (2) im Intervall $\langle -5; 0\rangle$ monoton fallend
(5) im Intervall (1; 3) monoton fallend

c) $x_0 = -2$

1. a) $x \neq -2$ c) $y = x - 2$ <u>2.</u> a) $x \neq 1$ c) $y = x - 1$

3. a) $x \neq -1$ c) $y = x^2 + x$
   d) in den Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(-1, -\frac{1}{2}\rangle$ monoton fallend, im Intervall $\langle -\frac{1}{2}, +\infty)$ monoton wachsend

4. a) P
   c) $\langle -1, 0\rangle$ und $\langle 1, +\infty)$
   d) $x_{01} = -1$, $x_{02} = 1$

5. a) $x \neq 0$
   c) $(0, +\infty)$
   d) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

Lerneinheit B 9

o 26 $1;\ \frac{3}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{7}{4};\ \frac{9}{5};\ \frac{11}{6};\ \frac{13}{7};\ \frac{15}{8};\ \frac{17}{9};\ \frac{19}{10}$

o 27 Es sei $f(x) = c$ eine beliebige konstante Funktion, x_o eine beliebige reelle Zahl. Ferner sei (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o$ und $x_n \neq x_o$ für alle n.

Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die konstante Folge $(f(x_n)) = (c)$. Es ist

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} c = c.$

Also ist $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = c.$

o 28 Es seien x_o eine beliebige reelle Zahl, (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o$ und $x_n \neq x_o$ für alle n.

a) Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge $(f(x_n)) = (x_n)$. Es ist

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o.$

Also ist $\lim\limits_{x \to x_o} x_n = x_o.$

b) Die Folge der zugehörigen Funktionswerte ist die Folge $(f(x_n)) = (5x_n)$. Es ist

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (5x_n) = 5 \cdot \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 5x_o.$

Also ist $\lim\limits_{x \to x_o} 5x = 5x_o.$

1. $g = 5$ 2. $g = 1$ 3. $\lim\limits_{x \to 0} x^o = 1$

4. f ist für alle reellen Zahlen x definiert; g ist für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ definiert. Für alle x mit $x \neq 0$ gilt $f(x) = g(x)$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$

5. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x + 3) = 6$

6. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+4x+4}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} (x+2) = 0$

7. Für die Nullfolgen $(x_n) = (\frac{1}{n})$ und $(\bar{x}_n) = (-\frac{1}{n})$ gilt

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(\bar{x}_n) = -1.$

Lerneinheit B 10

o 29 $d(x) = x^2 - 5x + 1,\quad p(x) = 5x^3 + 5x,\quad q(x) = \frac{x^2 + 1}{5x}\ (x \neq 0)$

o 30 $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 5x + 1) = 7 = 2 + 5 = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 1) + \lim\limits_{x \to 1} 5x$

Der Vergleich zeigt Übereinstimmung

1. a) 27   b) 0   c) 478

2. a) 81   b) 0   c) 2

3. a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{2}{5}$ c) -2 d) $-\frac{5}{4}$ e) -5
   f) $\frac{1}{2}$

4. a) $-\frac{2}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) 4   d) $-\frac{4}{5}$ e) $-\frac{7}{15}$
   f) 8,5

5. a) 1   b) 6   c) $3\,x_o^2$

6. a) 1   b) 7   c) $2\,ax_o$

Lerneinheit B 11

1. a) stetig   b) stetig   c) unstetig, da f an der Stelle 0 nicht definiert

2. a) stetig b) stetig c) unstetig, da $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ nicht existiert

3. a) - d) }
4. a) - d) } Nach Definition B 5 sind die Funktionen stetig.

Lerneinheit B 12

o 31 a) Für den eingezeichneten Wert y zwischen f(a) und f(b) gibt es drei Stellen im Intervall $\langle a, b\rangle$, an denen der Funktionswert jeweils y ist.

b) Die Funktion ist im offenen Intervall (a, b) stetig, jedoch gibt es keine Stelle x im Intervall $\langle a, b\rangle$ mit $f(x) = y$.

o 32 Gibt es unter den Funktionswerten von f in einem Intervall I eine kleinste Zahl, so nennt man diese das Minimum von f in I.

1. a) f ist stetig im Intervall $\langle 0, 2\rangle$; $f(0) = -3$, $f(2) = 1$
Nach Satz B 6 hat f im Intervall $\langle 0, 2\rangle$ eine Nullstelle.

b) $f(1) = -11$, $f(2) = 116$

2. a) $f(1) = -5$, $f(2) = 4$ b) $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = -2$

3. $f(1{,}6) = -0{,}304$, $f(1{,}7) = 0{,}613$
Damit gilt für eine Nullstelle x_0: $1{,}6 < x_0 < 1{,}7$.

4. Wegen $f(1{,}6) = -0{,}704$ und $f(1{,}7) = 0{,}313$ liegt eine Nullstelle im Intervall (1,6; 1,7).

5. a) $x_{Min} = 7$; $y_{Min} = -2$ $x_{Max} = 5$; $y_{Max} = 0$
b) Die Funktion hat kein Minimum und kein Maximum.

6. a) $x_{Min} = 1$; $y_{Min} = -3$ $x_{Max} = 5$; $y_{Max} = 6$
b) $x_{Min} = 4$; $y_{Min} = \frac{1}{4}$ Die Funktion hat kein Maximum.

7.* f genügt den Voraussetzungen des Satzes B 6. Wegen $f(a) < 0 < f(b)$ ist 0 eine Zahl zwischen f(a) und f(b). Nach Satz B 6 gibt es dann im Intervall $\langle a, b\rangle$ wenigstens ein x mit $f(x) = 0$, also eine Nullstelle.

Übungen und Anwendungen

1. a) nicht monoton, beiderseits beschränkt, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

b) nicht monoton (für alle n mit $n \geqq 3$ wächst (a_n) streng monoton), beiderseits beschränkt, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

c) streng monoton fallend, beiderseits beschränkt, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

d) nicht monoton (für alle n mit $n \geqq 2$ wächst (a_n) streng monoton), nach unten beschränkt, wächst unbeschränkt

e) monoton wachsend, nach unten beschränkt, wächst unbeschränkt

f) monoton fallend, beiderseits beschränkt, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

g) nicht monoton (für alle n mit $n \geqq 2$ monoton fallend), beiderseits beschränkt, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

h) nicht monoton, beiderseits beschränkt; $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

i) monoton wachsend, beiderseits beschränkt, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$

k) monoton fallend, beiderseits beschränkt, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$

2. a) $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \epsilon$ ist äquivalent mit $n > \frac{1}{\epsilon^2}$ $(\epsilon > 0)$.
Ist nun ϵ beliebig vorgegeben, so ist die letzte Ungleichung für fast alle n erfüllt. Also ist $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine Nullfolge.

3. a) Es sei K eine beliebige positive Zahl. Zu zeigen:
Für fast alle n gilt $\sqrt{n} > K$.
$\sqrt{n} > K$ ist äquivalent mit $n > K^2$. Es gibt nur endlich viele natürliche Zahlen n mit $n \leqq K^2$. Folglich muß für fast alle n gelten $n > K^2$ bzw. $\sqrt{n} > K$.

4. a) Es sei K eine beliebige positive Zahl. Zu zeigen:
Für fast alle n gilt $\frac{1}{a_n} > K$.
$\frac{1}{a_n} > K$ ist äquivalent mit $a_n < \frac{1}{K}$. Da (a_n) eine Nullfolge ist, die nur positive Glieder hat, muß für fast alle n gelten: $|a_n| = a_n < \frac{1}{K}$. und folglich $\frac{1}{a_n} > K$.

b) Es sei ε eine beliebige positive Zahl. Zu zeigen:
Für fast alle n gilt $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$.
Da (a_n) unbeschränkt wächst, gilt $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ für fast alle n und folglich auch $\frac{1}{a_n} = \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ für fast alle n.

6. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) konvergiert nicht
f) 0 g) konvergiert nicht h) konvergiert nicht i) $\frac{5}{8}$

7. a) $\frac{1}{18}$ b) -1

8. a) beiderseits beschränkt; $G_u = -1$, $G_o = 1$; nicht monoton; divergent

b) beiderseits beschränkt; $G_u = -\frac{1}{3}$, $G_o = 1$; nicht monoton; Grenzwert ist 0.

9. Die Folge der Partialsummen ist die Folge s_n mit

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{wenn n ungerade} \\ 0, & \text{wenn n gerade.} \end{cases}$$

(s_n) ist nicht konvergent.

10. a) $s_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$; $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1$

b) $s_n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$; (s_n) wächst unbeschränkt

11. a)

q	q^1	q^2	q^3	q^4	q^5
0,9	0,9	0,81	0,729	0,6561	0,59049
1,1	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,61051

b) $0{,}9^{10} = 0{,}348\,678\,440\,1$
$1{,}1^{10} = 2{,}593\,742\,460\,1$

c) $0{,}9^n \geqq 10^{-3}$ für $n > 65$

d) $s_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$; $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$

12. a) $(a_n) = a_1; \frac{a_1}{2}\sqrt{2}; \frac{a_1}{2}; \frac{a_1}{4}\sqrt{2}; \ldots; (\frac{1}{2}\sqrt{2})^{n-1} a_1; \ldots$

b) $4a_1\,(2 + \sqrt{2})$ c) $2a_1^2$

13. a) $b_1 = \pi r$, $b_2 = \frac{1}{2}\pi r$, $b_3 = \frac{1}{4}\pi r$, ..., $b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}\pi r$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 2\pi r$

14. a) $W_n = \frac{1}{3^n}$ b) $h_n = \frac{3}{2}\,(1 - \frac{1}{3^{n+1}})$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = \frac{3}{2}$

d) $V_n = \frac{1}{3^{3n}}$ e) $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = \frac{27}{26}$

15. a) $s_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $s_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

c) $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = \frac{1}{2}\sqrt{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$

16. a) $s_1 = 1;\ s_2 = \frac{4}{3};\ s_3 = \frac{6}{4};\ s_4 = \frac{8}{5};\ s_5 = \frac{10}{6}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$ d) 198

e) $a_1 = 1;\ a_2 = \frac{2}{6};\ a_3 = \frac{2}{12};\ a_4 = \frac{2}{20};\ a_5 = \frac{2}{30}$

f) $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

17. a) z.B. $p = 5n$ b) z.B. $p = 10\,n$

c) z.B. $p = n^2$ d) z.B. $p = 1$

18.* a) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Bei jedem positiven ε gilt für fast alle n:

$|a_n - a| < \varepsilon$ bzw. $|(a_n - a) - 0| < \varepsilon$, d.h.:

$(a_n - a)$ ist eine Nullfolge.

Umkehrung analog.

b) Es sei ε eine beliebige positive Zahl. Für jede natürliche Zahl n gilt:

a_n liegt in der ε-Umgebung von 0 genau dann, wenn $|a_n|$ in der ε-Umgebung von 0 liegt. Also gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

19. a) $a_3 = 2,\quad a_4 = \frac{1}{2},\quad a_5 = \frac{1}{8},\quad a_6 = \frac{1}{32}$

b) $a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

c) $s_n = 32 \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{128}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

d) (a_n) fällt monoton; beiderseitig beschränkt; obere Grenze: 32, untere Grenze existiert

(s_n) wächst monoton; beiderseitig beschränkt; untere Grenze: 32, obere Grenze existiert.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\qquad \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{128}{3}$

20. a) 8 b) $\frac{6}{7}$ c) 17

d) -2 e) 6 f) 0

g) 1 h)* $-\frac{2}{3}$ i)* $-\frac{5}{3}$

21. Man zeigt:

Für jede beliebige Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$

und $x_n \neq x_o$

sowie $x_n \in U$ für alle n gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} (u(x_n) + v(x_n)) = g_1 + g_2$.

Sei (x_n) eine beliebige Folge, die den Voraussetzungen genügt.

Wegen $\lim\limits_{x\to x_o} u(x) = g_1$ und $\lim\limits_{x\to x_o} v(x) = g_2$ ist dann

$\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = g_1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} v(x_n) = g_2$.

Nach Satz B 4 ist dann

$\lim\limits_{n\to\infty} (u(x_n) + v(x_n)) = g_1 + g_2$, was zu zeigen war.

22. a) Angenommen, g ist negativ.

Dann gibt es eine ε-Umgebung von g

(z.B. $\varepsilon = \frac{|g|}{2}$),

die kein Folgenglied von (a_n) enthält.

Widerspruch zur Voraussetzung, daß g Grenzwert von (a_n) ist.

b) Angenommen, g ist positiv.

Dann gibt es eine ε-Umgebung von g, die kein Folgenglied von (a_n) enthält.

c) Ist $g > 0$,

so gibt es eine ε-Umgebung von g, die nur positive Zahlen enthält.

Da für fast alle n gilt: a_n liegt in der ε-Umgebung von g, ist a_n für fast alle n positiv.

d) Ist $g < 0$,
so gibt es eine ε-Umgebung von g, die nur negative Zahlen enthält.
Da für fast alle n gilt: a_n liegt in der ε-Umgebung von g, ist a_n für fast alle n negativ.

23. a) $\langle 0;\ 1\rangle$ und $\langle 2;\ 3\rangle$ b) $\left\langle \frac{1}{2};\ 1\right\rangle$
c) $\langle 0;\ 1\rangle$ und $\langle 1;\ 2\rangle$ d) $x_o = 0$ und $\left\langle \frac{1}{2};\ 2\right\rangle$

24.

	a)	b)	c)	d)
y_{Max}	9	4	16	1
y_{Min}	-7	-5	0	$\frac{1}{2}$

C. Differentialrechnung

2. a) $\alpha \approx 29{,}7^\circ$ b) $h \approx 17{,}36$ mm ≈ 17 mm

Lerneinheit C 1

o 1 a) 7 b) 1

o 2 a) $m = 2$ b) $m = -\frac{1}{2}$

o 3 a)

h	1	0,1	0,01
m	2	1,1	1,01

b)

h	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$
m	0	0,9	0,99

1. a) $\alpha \approx 63{,}4^\circ$
b) $\alpha \approx 153{,}4^\circ$

2. a) $\tan\alpha = 1{,}25$; $\alpha \approx 51{,}3^\circ$
HA b) $\tan\alpha = -\frac{6}{\sqrt{2}} \approx -4{,}243$; $\alpha \approx 103{,}3^\circ$

3.* $y = x - 0{,}25$; die Gleichung $x^2 = x - 0{,}25$ hat nur die Lösung $x = 0{,}5$.

4. $m = -4$ 5. $m = \frac{1}{2}$

Lerneinheit C 2

o 4 $v = \frac{s}{t}$ (geradlinig gleichförmige Bewegung)
$v = at$; $s = \frac{a}{2}t^2$ (gleichmäßig beschleunigte Bewegung)

o 5 $v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$

1. a) $s \approx 19{,}62$ m b) $t \approx 4{,}5$ s

c)

Δt	1 s	0,1 s	0,01 s	0,0001 s
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$24{,}52\ m\cdot s^{-1}$	$20{,}11\ m\cdot s^{-1}$	$19{,}67\ m\cdot s^{-1}$	$19{,}62\ m\cdot s^{-1}$

d) $v \approx 19{,}62\ m\cdot s^{-1}$

2.* b)

Δt	$\langle 0s;\ 0{,}5s\rangle$	$\langle 0s;\ 5s\rangle$	$\langle 1s;\ 2s\rangle$	$\langle 2s;\ 5s\rangle$	$\langle 1{,}5s;\ 3s\rangle$
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$0{,}25\ ms^{-1}$	$1{,}6\ ms^{-1}$	$1{,}5\ ms^{-1}$	$2\ ms^{-1}$	$1{,}92\ ms^{-1}$

c) $v = 2\ ms^{-1}$

Lerneinheit C 4

o 6 $f(1{,}5) = 3{,}375$; $f(1{,}5 + h) = 3{,}375 + 6{,}75\,h + 4{,}5\,h^2 + h^3$

1. a) $f'(\sqrt{3}) = 9$ b) $f'(-0{,}5) = 2$ 2. a) $f'(\sqrt{3}) = 9$ b) $f'(2)=8$

3. a) $f'(x_o) = 1$ b) $f'(x_o) = 2\,x_o$ c) $f'(x_o) = x_o$ d) $f'(x_o)=3x$

4. a) $y = 9x - 6\sqrt{3}$; $\alpha \approx 83{,}7^\circ$ b) $y = 8x - 8$; $\alpha \approx 82{,}9^\circ$

Lerneinheit C 5

o 7 a) $f'(x)$ ist der Anstieg des Graphen von f an der Stelle x.
b) $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$; für $x > 0$ wächst f streng monoton.
$f'(x) < 0$ für alle $x < 0$; für $x < 0$ fällt f streng monoton.
An der Stelle 0 ist der Anstieg des Graphen von f gleich Null.

o 8 $f'(x) = 0$; der Graph der Funktion $f(x) = c$ verläuft parallel zur Abszissenachse.

1. a) $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$ b) $f'(x) = x^2$, $f'(0) = 0$

2. Anstieg der Sekante: 3

$f'(x) = 3x^2$; $f'(x) = 3$ gilt für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

Lerneinheit C 6

o 9 a) 3; 2; 0,38; 0

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|0 + \frac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |0| + \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0 + 0 = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |0| - \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0 - 0 = 0$

1. a) stetig; nicht differenzierbar b) stetig; nicht differenzierbar.

2. a) wahr b) wahr c) wahr d) falsch

Lerneinheit C 7

1. $s(x) = u(x) + c$; $s'(x) = u'(x)$

2. a) $f'(x) = g'(x) = h'(x) = 2x$

3. a) $f'(x) = 3x^2 + x$ b) $f'(z) = z^2 + 2z$

c) $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ d) $f'(x) = x + 1$

e) $f'(a) = 2a + 1$ f) $f'(x) = 2x + 1$

4. a) $x = 0$ b) $s_1\ (\sqrt{3};0)$; $s_2\ (-\sqrt{3};0)$

c) $y_1 = 2\sqrt{3}x - 6$; $\alpha_1 \approx 73{,}9^\circ$

$y_2 = -2\sqrt{3}x - 6$; $\alpha_2 \approx 106{,}1^\circ$

5.* H(n): $s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)$; $s_n'(x_o) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i'(x_o)$

H(n+1): $s_{n+1}(x) = s_n(x) + u_{n+1}(x)$

$s_{n+1}'(x_o) = s_n'(x_o) + u_{n+1}'(x_o) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i'(x_o) + u_{n+1}'(x_o)$

$s_{n+1}'(x_o) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} u_i'(x_o)$

Lerneinheit C 8

o 11 $f'(x) = 3x^2 \neq 2x \cdot 1$

o 12 a) $f'(x_o) = 0 \cdot v(x_o) + c \cdot v'(x_o) = c \cdot v'(x_o)$

b) $d(x) = u(x) - v(x)$

Wir setzen $v(x) = (-c) \cdot f(x)$, wobei $c > 0$. Dann ist

$-v(x) = c \cdot f(x)$ und

$d(x) = u(x) + c \cdot f(x)$. Für $d'(x_o)$ gilt nach Satz C 1

$d'(x_o) = u'(x_o) + c \cdot f'(x_o) = u'(x_o) - v'(x_o)$.

1. a) $f'(x) = 5x^4$ b) $f'(x) = 12x^3$ c) $f'(z) = z$

d) $u'(x) = (2x-7)\cdot(x^3+5) + (x^2-7x) \cdot 3x^2 = 5x^4-28x^3+10x-35$

e) $g'(a) = (2a+1)\cdot(a-2) + (a^2+a) \cdot 1 = 3a^2-2a-2$

2. a) $f'(x) = 7x^6$ b) $f'(x) = -3x^5$ c) $f'(t) = 6t^2 - \frac{1}{t^2} + 3\ (t \neq 0)$

d) $v'(x) = (1{,}5x^2-6x)\cdot(4x^3-\sqrt{2}x) + (0{,}5x^3-3x^2)\cdot(12x^2-\sqrt{2})$

$= 12x^5 - 60x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 9\sqrt{2}x^2$

e) $w'(z) = (5z^4+3z^2)\cdot(2z+3) + (z^5+z^3) \cdot 2$

$= 12z^5 + 15z^4 + 8z^3 + 9z^2$

3. a)

x	0	0,5	-0,5	2	-2
f'(x)	0	0,5	-0,5	32	-32

b) $f'(1) = 4$

$y = 4x - 1{,}5$

4. a) $P_1(1;\ 0)$, $P_2(0;\ -1)$ b) $f'(0) = 0$, $f'(1) = 3$

c) $f'(-1) = 3$

5. $f'(x) = 5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$ 6. $f'(x) = 8x^3 + \frac{9}{2}x^2 + x - 5$

7. $a = 3$ 8. $f'(x) = 2u(x) \cdot u'(x)$

9. $p(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ $\qquad u(x) \cdot v(x) = z(x)$

$$z'(x_o) = u'(x_o) \cdot v(x_o) + u(x_o) \cdot v'(x_o)$$

$$p'(x_o) = z'(x_o) \cdot w(x_o) + z(x_o) \cdot w'(x_o)$$
$$= \left[u'(x_o) \cdot v(x_o) + u(x_o) \cdot v'(x_o)\right] \cdot w(x_o) + u(x_o) \cdot v(x_o) - w'(x_o)$$
$$= u'(x_o) \cdot v(x_o) \cdot w(x_o) + u(x_o) \cdot v'(x_o) \cdot w(x_o) + u(x_o) \cdot v(x_o) \cdot w'(x_o)$$

Lerneinheit C 9

1. a) $f'(x) = -\dfrac{14x}{(x^2+1)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{(3x^2+7)(x+1) - (x^3+7x-5)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 12}{(x+1)^2}$ $(x \neq -1)$

c) $f'(t) = \dfrac{-2t \cdot (t^2-4) - (4-t^2) \cdot 2t}{(t^2-4)^2} = 0$ $(t \neq 2;\ t \neq -2)$

d) $f'(x) = -\dfrac{15}{x^4}$ $(x \neq 0)$ $\qquad$ e) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5} - \dfrac{2}{x^3}$

2. a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (x^2+2) - (7-x) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{x^2 - 14x - 2}{(x^2+2)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{(3x^2-4x) \cdot (2x^2+7) - (x^3-2x^2+1) \cdot 4x}{(2x^2+7)^2} = \dfrac{2x^4+21x^2-32x}{(2x^2+7)^2}$

c) $f'(z) = \dfrac{(2z^3+6z)(z^2-4z+3) - (0{,}5z^4+3z^2+7)(2z-4)}{(z^2-4z+3)^2}$

$= \dfrac{z^5-6z^4+6z^3-12z^2+4z+28}{(z^2-4z+3)^2}$ $(z \neq 1;\ z \neq 3)$

d) $f'(x) = \frac{1}{5} \cdot (-3x^{-4}) = -\dfrac{3}{5x^4}$ $(x \neq 0)$

e) $f'(x) = -\dfrac{5}{x^6} - \dfrac{3}{x^4}$ $(x \neq 0)$

3. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $\quad f'(3) = -\frac{1}{4}$

4. a) $m = -1$ $\qquad$ b) $P_1(1;\ 1)$, $P_2(-1;\ -1)$ $\qquad$ c) $y_1 = -x + 2$
$y_2 = -x - 2$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{1}{v}\right)' = \dfrac{0 \cdot v - 1 \cdot v'}{v^2} \Rightarrow \dfrac{-v'(x_o)}{[v(x_o)]^2} = \left(\dfrac{1}{v(x_o)}\right)'$

6. a) $f'(x) = -\dfrac{6x+5}{(3x^2+5x+1)^2}$ $\qquad$ b) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

7. a) $f'(x) = -\dfrac{4x \cdot (x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^3}$ $\qquad$ b) $f'(x) = -\dfrac{a}{(ax+b)^2}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{2x+a}$ $(a \in P)$; $\quad f'(x) = \dfrac{-2}{(2x+a)^2}$ $\qquad a_1 = -2;\ a_2 = -6$

Lerneinheit C 10

1. a) ganze rationale Funktion
b) gebrochene rationale Funktion
c) nichtrationale Funktion

2. a) gebrochene rationale Funktion
b) gebrochene rationale Funktion
c) ganze rationale Funktion

3. (1.a) $f'(x) = 3x^2-5$
(1.b) $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$ $(x \neq 1)$
(1.c)

(2.a) $f'(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
(2.b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ $(x \neq -1)$
(2.c) $f'(x) = 2 \cdot \sin\frac{1}{2} \cdot x$

4. a) nichtrationale Funktion $\qquad$ b) ganze rationale Funktion
c) gebrochene rationale Funktion $\qquad$ d) nichtrationale Funktion

5. a) $f(x) = ax + 2$ $(a \in P)$ $\qquad$ b) $f(x) = x^2 - x$

6. a) $f(x) = 7x$ $\qquad$ b) $f(x) = a_1x^2 + a_2x - 1$

7. 5.b) und 6.a) sind eindeutig lösbar.

8. Die Koeffizienten $a_o, a_1, \ldots, a_n$ werden mit ganzen rationalen Zahlen multipliziert.

9. $f(x) \neq g(x)$, weil $f(x)$ für $x = 1$ nicht definiert ist.

Lerneinheit C 11

o 16 Es sei f eine streng monoton wachsende Funktion.

Wir zeigen:

Für beliebige x_1, x_2 gilt: Wenn $x_1 \neq x_2$, so $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Es sei $x_1 \neq x_2$, also gilt entweder $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$.

Da f streng monoton wächst, gilt

$f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$ bzw. $f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 < x_1$.

o 17 $\bar{f}(y) = 2y+1$ $\quad \left[\bar{f}(x) = 2x+1\right]$

1. Die Funktionen a) und d) sind eineindeutig.

2. a), b), d) $\qquad$ 3. b), c), e)

4. a) $\bar{f}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$ $(x \geqq 0)$ $\qquad$ b) $\bar{f}(x) = -\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$

c) $\bar{f}(x) = \sqrt[6]{x}$ $(x \geqq 0)$ $\qquad$ d) $\bar{f}(x) = x^3-2$ $(x \geqq 0)$

5. a) $\bar{f}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ $\qquad$ b) $\bar{f}(x) = x$

c) $\bar{f}(x) = x^2$ $(x \leqq 0)$ $\qquad$ d) $\bar{f}(x) = x^2 + 1$ $(x \geqq 0)$

Lerneinheit C 12

o 19 a) $f'(1{,}5) = 3$ $\qquad g'(1{,}5^2) = \frac{1}{3}$

b) $g(x) = \bar{f}(x)$ $\qquad \tan\alpha = f'(x)$; $\tan\beta = g'(y)$

1. a) $\bar{f}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}$; $\bar{f}'(y) = \frac{1}{2}$ $\quad$ b) $\bar{f}(y) = \frac{1}{y}(y > 0)$; $\bar{f}'(y) = -\frac{1}{y^2}$

c) $\bar{f}(y) = \frac{y+1}{y}$ $(y > 0)$; $\bar{f}'(y) = -\frac{1}{y^2}$

2. a) $\bar{f}(y) = -y+7$; $\bar{f}'(y) = -1$

b) $\bar{f}(y) = -\sqrt{y}$ $(y \geqq 0)$; $\bar{f}'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$ $(y > 0)$

c) $\bar{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ $(y > 0)$; $\bar{f}'(y) = \frac{1}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}x^3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^3}}$ $(y > 0)$

3. a) $x \geqq 0$; $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ $(x > 0)$

b) $x > 0$; $f'(x) = -\frac{1}{5x\sqrt[5]{x}}$ $(x > 0)$

c) $t \geqq 0$; $f'(t) = \frac{5}{2\sqrt{t}}$ $(t > 0)$

d) $x \geqq 0$; $f'(x) = \sqrt{x} + (x-2)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

e) $z \geqq 0$; $f'(z) = 2z - 2\left(\sqrt{z} + z\frac{1}{2\sqrt{z}}\right) + 1$

$= 2z - 3\sqrt{z} + 1$ $(z > 0)$

f) $x \geqq 0$, $x \neq 2$; $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2) - \sqrt{x}}{(x-2)^2} = -\dfrac{x+2}{2\sqrt{x}\,(x-2)^2}$

$(x > 0, x \neq 2)$

g) $x > 0$; $f'(x) = \dfrac{x + \sqrt{x} - x\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2}$

h) $x > 0$; $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(a+\sqrt{a}) - \sqrt[3]{a}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)}{(a+\sqrt{a})^2}$ $(a > 0)$

$= -\dfrac{4\sqrt{a} + 1}{6\sqrt[6]{a}\,(a+\sqrt{a})^2}$ $(a > 0)$

i) $x > 0$; $f'(x) = \dfrac{a\sqrt[4]{x} - ax \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt[4]{x^2}} = \dfrac{3a}{4\sqrt[4]{x}}$ $(x > 0)$

4. a) $x > 0$; $f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

b) $x \geqq 0$; $f'(x) = \frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$ $(x > 0)$

c) $t \geqq 0$; $f'(t) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{t}}$ $(t > 0)$

d) $x \geqq 0;\; f'(x) = \sqrt[3]{x} + (x+1) \cdot \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{4x+1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0)$

e) $z \geqq 0;\; f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{z^2}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{z^3}} \quad (z > 0)$

f) $x > 0;\; f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - (x-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{x+2}{2x\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

g) $x > 0;\; f'(x) = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)x - (x + \sqrt{x})}{x^2} = -\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2} \quad (x > 0)$

h) $a > 0;\; f'(a) = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\sqrt[3]{a} - (a + \sqrt{a}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2}} \quad (a > 0)$

$= \dfrac{4\sqrt{a} + 1}{6\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a}} \quad (a > 0)$

i) $x \geqq 0;\; f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3x}} \quad (x > 0)$

5. $f'(4) = 2{,}5; \quad y = 2{,}5x - 6$

6.

	x	1	10	100	1000
a)	f'(x)	0,5	0,158	0,05	0,0158
b)	f'(x)	$0{,}\overline{3}$	0,072	0,015	$0{,}00\overline{3}$

Lerneinheit C 13

o 20 $u(x) + v(x) = 2x^2 \qquad u(x) - v(x) = -2$

$u(x) \cdot v(x) = x^4 - 1 \qquad \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

1. a) $f(x) = (x-1)^3 \quad (x \in P)$

b) $f(x) = \lg(x^2-1) \quad (|x| > 1)$

c) $f(x) = \sqrt{3x-5} \quad (x \geqq \frac{5}{3})$

3. a) $u(z) = z^7; \qquad z = v(x) = ax-b$

b) $u(z) = \sqrt{z}; \qquad z = v(x) = x-1$

c) $u(z) = \dfrac{1}{z^2}; \qquad z = v(x) = x+5$

d) $u(z) = \cos z; \qquad z = v(x) = 2x+1$

e) $u(z) = \sqrt[3]{z}\,; \qquad z = v(x) = x^2-4$

f) $u(z) = \sqrt{z}; \qquad z = v(x) = 2x^2+1$

4. Für jedes x gilt: $z = -x^2 - 4 < 0$; $\sqrt{z}$ existiert nur für $z \geqq 0$
$g(x) = v(u(x)) = -x-4, \quad x \geqq 0$

Lerneinheit C 14

o 22 $f(x) = x^{-\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^{-m}$

$u(z) = z^{-m}; \quad v(x) = x^{\frac{1}{n}}; \quad z = x^{\frac{1}{n}}$

v ist für jedes positive x differenzierbar. Es gilt:

$v'(x) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n} - 1}$

Dann ist auch f für jedes positive x differenzierbar.

Man erhält:

$$f'(x) = -m \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-m-1} \cdot \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n} - 1}$$

$$= -\frac{m}{n}\left(x^{\frac{-m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1}\right)$$

$$= -\frac{m}{n}\, x^{\frac{-m-n}{n}}$$

$$= -\frac{m}{n}\, x^{-\frac{m}{n} - 1}$$

1. a) $f'(x) = 10(2x-3)^4 \qquad$ b) $f'(x) = 20x\,(x^2+1)^9$

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} \quad (x > 0)$

d) $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $f'(x) = \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{(2x^2-x+6)^2}}$

f) $y' = -\frac{4}{5x\sqrt[5]{x^4}}$

2\. a) $f'(x) = \frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x - 7\right)^6$

b) $f'(x) = -8x\,(1-x^2)^3$

c) $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+10}}$

d) $f'(x) = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(x^4+5)^2}}$

e) $f'(x) = \frac{3x^2+8}{2\sqrt{x^3+8x}}$

f) $z'(a) = -\frac{1}{2\sqrt[2]{a^3}}$

3\. a) $f'(x) = -\frac{18(3x-5)}{(3x-5)^4} = \frac{-18}{(3x-5)^3} \quad (x \neq \frac{5}{3})$

b) $f'(x) = 3(4+x)^2(x-5)^4 + 4(4+x)^3(x-5)^3$
$= (4+x)^2(x-5)^3(7x+1)$

c) $f'(x) = 3\left(\frac{2x+5}{3x-1}\right)^2\cdot\frac{2(3x-1)-(2x+5)3}{(3x-1)^2} = \frac{-51(2x+5)^2}{(3x-1)^4}$

d) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2x+1}\cdot(2x+1)}$

e) $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}(x^2-7x) + \sqrt{x^3}\,(2x-7) = \frac{7x^2\sqrt{x} - 35x\sqrt{x}}{2}$
$= \frac{7x\sqrt{x}\,(x-5)}{2}$

f) $f'(x) = \frac{2\sqrt{3x-x^2} - (2x-5)\frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}}{3x-x^2}$
$= \frac{15-4x}{2x\,(3-x)\sqrt{3x-x^2}}$

4\. a) $f'(x) = \frac{2x(x^2+1)^3 - (x^2+1)\,3\,(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}$.

b) $f'(x) = 4\left[(x^2+1)(x-7)\right]^3\left[2x(x-7) + (x^2+1)\right]$
$= 4\left[(x^2+1)(x-7)\right]^3(3x^2-14x+1)$

c) $f'(x) = 3\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2\cdot\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{12x(x^4-2x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

d) $f'(x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-5)^2}\cdot\sqrt[3]{(x^2-5)^2}} = \frac{-2x}{3(x^2-5)\sqrt[3]{x^2-5}}$

e) $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{2\sqrt{2x}} = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}$

f) $f'(x) = \frac{\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}(5-2x) - \sqrt{x^2-3x}\cdot(-2)}{(5-2x)^2} = \frac{4x-15}{2(5-2x)^2\sqrt{x^2-3x}}$

5\. a) $f'(x) = n\cdot(ax+b)^{n-1}\cdot a$

b) $f'(x) = \frac{a}{n\sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}}}$

6\. a) $f'(x) = n\left[g(x)\right]^{n-1}\cdot g'(x)$

b) $f'(x) = \frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{\left[g(x)\right]^{n-1}}}$

7\. a) $f'(x) = \frac{10x-7}{2\sqrt{5x^2-7x+8}}$

b) $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

c) $f'(x) = \frac{4x^3+3x^2-1}{2\sqrt{x^4+x^3-x}}$

d) $f'(x) = \frac{9x^2+4x+1}{2\sqrt{3x^3+2x^2+x+1}}$

8\. a) $f'(2) = 60\cdot 3^{14} \approx 2{,}87\cdot 10^8$

b) $f'(3) = \frac{3\sqrt{10}}{10} \approx 0{,}949$

Lerneinheit C 15

o 2.3 a) $f'(x) = 3x^2$ b) $f'(x) = 6x$ c) $f'(x) = 6$

1. a) $f'(x) = 6x+6;\ f''(x) = 6$

b) $f'(x) = 6x\,(x^2+1)^2;\quad f''(x) = 6\,(x^2+1)^2 + 24x^2\,(x^2+1)$

$$= 6\,(x^2+1)\,(5x^2+1)$$

c) $f'(x) = 2x(2x^3+5) + (x^2+1)\,6x^2 = 10x^4 + 6x^2 + 10x$

$f''(x) = 40x^3 + 12x + 10$

d) $$f'(x) = \frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+2)(x^2+1)^2 - (-x^2+2x+1)\cdot 4x\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$

2. a) $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 + 14x - 1;\quad f''(x) = \frac{6}{5}x + 14$

b) $f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^3;\quad f''(x) = 3\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^2$

c) $f'(x) = -2x(5-x^3) + (1-x^2)(-3x^2) = 5x^4 - 3x^2 - 10x$

$f''(x) = 20x^3 - 6x - 10$

d) $$f'(x) = \frac{(2x+5)(2x^2+x+10) - (x^2+5x-7)(4x+1)}{(2x^2+x+10)^2}$$

$$= \frac{-9x^2+48x+57}{(2x^2+x+10)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-18x+48)(2x^2+x+10)^2-(-9x^2+48x+57)\cdot 2\cdot(2x^2+x+10)(4x+1)}{(2x^2+x+10)^4}$$

$$= \frac{(-18x+48)(2x^2+x+10)-(-9x^2+48x+57)\cdot 2\cdot(4x+1)}{(2x^2+x+10)^3}$$

$$= \frac{36x^3-288x^2-684x+366}{(2x^2+x+10)^3}$$

4. a) $f^{(8)}(x) = 8!$ b) $f'''(x) = 24x + 30$

c) $$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}$$

5. a) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\quad (x>0)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\quad (x>0)$$

An der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

b) $$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\quad (x>0)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}\quad (x>0)$$

An der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

c) $$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad (|x|<1)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\quad (|x|<1)$$

An den Stellen $x = 1$ und $x = -1$ nicht definiert.

6. a) $$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\quad (x>0)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\quad (x>0)$$

An der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

b) $$f'(x) = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}\quad (x>0)$$

$$f''(x) = \frac{10}{9x^2\sqrt[3]{x^2}}\quad (x>0)$$

Keine Veränderungen im Definitionsbereich.

c) $$f'(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x^2-x\sqrt{x}}}$$

$$f''(x) = \frac{6x\sqrt{x}-4x^2-3x}{16\sqrt{x}\,(x^2-x\sqrt{x})\sqrt{x^2-x\sqrt{x}}}$$

An der Stelle $x = 1$ nicht definiert

7. a) $f'(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$$f''(x) = \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - x\left[-2x\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right]}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$f''(x) = \dfrac{3x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} \quad (x > 0)$

$f''(x) = -\frac{6}{25}x^{-\frac{7}{5}} = -\dfrac{6}{25x\sqrt[5]{x^2}} \quad (x > 0)$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

$f''(x) = \dfrac{4}{9x^2\sqrt[3]{x}}$

8. a) $f''(x) = \dfrac{2x^4+4x^2-6}{9(1-x^2)^2\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = -\dfrac{2x^2+6}{9(1-x^2)\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(1-x)^5}} = \dfrac{1}{4(1-x)\sqrt[4]{1-x}}$

$f''(x) = -\frac{5}{16}(1-x)^{-\frac{9}{4}} = -\dfrac{5}{16(1-x)^2\sqrt[4]{1-x}}$

c) $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0)$

$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{8}{3}} = \dfrac{10}{9x^2\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0)$

d) $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0)$

Lerneinheit C 16

o 24 $t_o = \dfrac{2v_o}{g}$

o 25 a) $-\frac{\sqrt{2}}{3} \approx -0{,}47$ b) 12 c) keine d) $\frac{3+\sqrt{29}}{2} \approx 4{,}19$; $\frac{3-\sqrt{29}}{2} \approx -1{,}19$

1.a) $5+\sqrt{27} \approx 10{,}20$; $5-\sqrt{27} \approx -0{,}20$ b) 0; 3

c) $1+\sqrt{13{,}6} \approx 4{,}69$; $1-\sqrt{13{,}6} \approx -2{,}69$

2.a) 0; 2 b) 0; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$

c) 0; $-1{,}4$

3.a) 3; -3; $\sqrt{8} \approx 2{,}83$; $-\sqrt{8}$ b) 0; $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) 2; -2; 0; $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}62$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38$

4.a) 0; 0,8 b) 0 c) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $-\sqrt{2}$

5. $f(x) = x^2 + 6x + 8$

6. $S(-\frac{3}{2}; -\frac{17}{2})$

7. $S_1(1; 11)$; $S_2(-4; 6)$

8. $S_1(3; 81)$; $S_2(-3; 81)$ $S_3(\sqrt{2}; 4)$; $S_4(-\sqrt{2}; 4)$

Lerneinheit C 17

1. a) $x_{01} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx -0{,}44$; $x_{02} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx -4{,}56$

b) $x_0 = 0$ c) $x_0 = -5$

2. a) $x_{01} = 2$; $x_{02} = -2$ b) Keine Nullstellen c) $x_{01} = 2$; $x_{02} = -5$

3. a) $x_{01} = \frac{1 + \sqrt{33}}{4} \approx 1{,}69$; $x_{02} = \frac{1 - \sqrt{33}}{4} \approx -1{,}19$

b) $x_{01} = \frac{7 + \sqrt{29}}{2} \approx 6{,}19$; $x_{02} = \frac{7 - \sqrt{29}}{2} \approx 0{,}81$

4. $S_1\left(\frac{\sqrt{13} - 3}{2} \approx 0{,}30;\ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3{,}30\right)$;

$S_2\left(-\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx -3{,}3;\ \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \approx -0{,}30\right)$

Lerneinheit C 18

o 26 a) $D_f: x \geqq -\frac{5}{2}$; $W_f: y \geqq 0$

b) $D_f: x \geqq -2$; $W_f: y \geqq -5$

c) $D_f: -3 \leqq x \leqq 3$; $W_f: 0 \leqq y \leqq 21$

d) $D_f: x \geqq 2$ und $x \leqq -2$; $W_f: y \geqq 0$

1. a) $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$ b) $\sqrt{1}$; $-\sqrt{1}$ c) 2 d) 13

2. a) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$ b) 1; -2 c) 2 ~~d)~~ 9 HA

3. $S\left(\frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}80\right)$ 4. $S_1(2;\ \sqrt{2})$

Lerneinheit C 19

o 27 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$ o 29 $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$

1.

	$x \to -\infty$	$x \to +\infty$
a)	1	1
b)	0	0
c)	$-\infty$	$+\infty$
d)	$-\infty$	$+\infty$
e)	0	0
f)	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$

2.

	x −	x +
a)	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$
b)	0	0
d)	0	0
c)	$-\infty$	$+\infty$
e)	$+\infty$	$+\infty$
f)	$a > 0$: $-\infty$	$+\infty$
	$a < 0$: $+\infty$	$-\infty$

Lerneinheit C 20

o 30 $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ wächst unbeschränkt

o 31 $f(x) = \frac{1}{x}$ wächst unbeschränkt, wenn x von rechts gegen 0 konvergiert.

$f(x) = \frac{1}{x}$ fällt unbeschränkt, wenn x von links gegen 0 konvergiert.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ wächst unbeschränkt, wenn x gegen 0 konvergiert.

o 32 Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$, $x_n < 1$ für alle n.

Dann konvergiert $(x_n - 1)$ von links gegen 0. Folglich fällt

$\left(\frac{1}{x_n - 1}\right)$ unbeschränkt, d. h.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty .$$

1. a) 2; -2 b) -6; 1 2. a) -2 b) 0; $-1+\sqrt{5} \approx 1{,}24$; $-1-\sqrt{5} \approx -3{,}24$

3. a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1+\sqrt{5} \\ x < -1+\sqrt{5}}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1+\sqrt{5} \\ x > -1+\sqrt{5}}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1-\sqrt{5} \\ x < -1-\sqrt{5}}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1-\sqrt{5} \\ x > -1-\sqrt{5}}} f(x) = +\infty$

4. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$

Lerneinheit C 21

o 33 f hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein lokales Minimum = Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für jedes x mit $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ und jedes $x \neq x_0$ gilt: $f(x) > f(x_0)$.

1.

Intervall	globales Max. von f an der Stelle	lokales Max. von f an der Stelle	globales Min. von f an der Stelle	lokales Min. von f an der Stelle
$\langle a; 0 \rangle$	x_1	x_1	0	—
$\langle 0; b \rangle$	b	x_3; x_5	x_4	x_2; x_4; x_6
$\langle x_1; x_3 \rangle$	x_1	—	x_2	x_2
$\langle x_1; x_4 \rangle$	x_1	x_3	x_4	x_2

2. a) globale Max.-Stelle bei x = 3; globale Min.-Stelle bei x = 1
   b) globale Max.-Stelle bei x = 4; globale Min.-Stelle bei x= -1
   lokale Min.-Stelle bei x = -1

3. a) globale Max.-Stelle bei x = 1 und x = - 1;
   globale Min.-Stelle bei x = 0
   lokale Min.-Stelle bei x = 0
   b) globale Max.-Stelle bei $x = \frac{1}{6}$; globale Min.-Stelle bei x= -6
   lokale Max.-Stelle bei $x = \frac{1}{6}$

Lerneinheit C 22

o 34 $f'(25) = 0$

o 35 Die Folge wächst mit $n \to \infty$; der Grenzwert der Folge ist positiv

1. a) x = - 2 b) $x_1 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \approx 0{,}535$; $x_2 = \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \approx -1{,}869$
   c) $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{3}{2}$

2. a) $x = \frac{3}{2}$ b) - c) x = 0

3. a) keine b) keine

4. a) x = 1 kann Extremstelle sein b) keine

5. f für $x \neq -1$ differenzierbar;
   $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ für alle $x \neq -1$

6. f für alle $x > -1$ differenzierbar;
   $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt[2]{(x+1)^3}} < 0$

7. $\left(-\frac{p}{2};\ -\frac{p^2}{4} + q\right)$

8.* $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2}{4a} + c\right)$
   Wenn a > 0, so lokales Minimum; wenn a < 0, so lokales Maximum

9. a) z.B. $f(x) = x^2 - 4x$ b) z.B. $f(x) = x^2 + 6x$

Lerneinheit C 23

1. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{9 - 2}{5 - 1} = \frac{7}{4} = 1{,}75$

   Die Zahl 1,75 kommt bestimmt im Wertebereich von f' vor.

2. $\xi = 2$

3. a) $f'(x) = 2x$ ist streng monoton wachsend. Deshalb kann jeder Wert nur einmal angenommen werden.

   b) $f'(\xi) = 2\xi$, also $2\xi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = b+a$, also $\xi = \frac{a + b}{2}$

Lerneinheit C 24

o 37 a) $(x-3)(x+1)$ b) $(x-2)(x-2)$

o 38 $f'(x) \geqq 0$, dann f(x) monoton steigend.

$f'(x) \leqq 0$, dann f(x) monoton fallend.

1. a) Minimum: $(2; -2)$

   f ist streng monoton fallend für $x < 2$.

   f ist streng monoton wachsend für $x > 2$.

   b) Maximum: $(-1 - \sqrt{3}; \frac{8}{3} + 2\sqrt{3})$ oder auch $(-2{,}73; 6{,}13)$

   Minimum: $(-1 + \sqrt{3}; \frac{8}{3} - 2\sqrt{3})$ oder auch $(0{,}73; -0{,}80)$

   f ist streng monoton wachsend für $x < -1 - \sqrt{3}$ und $x > -1 + \sqrt{3}$.

   f ist streng monoton fallend für $-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$.

   c) Minimum: $(-\frac{3}{2}; -1{,}6875 = -\frac{27}{16})$

   f ist streng monoton wachsend für $x > -1{,}5$.

   f ist streng monoton fallend für $x < -1{,}5$.

   d) Maximum: $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$

   f ist streng monoton wachsend für $0 \leqq x < \frac{1}{4}$.

   f ist streng monoton fallend für $x > \frac{1}{4}$.

2. a) Maximum: $(1{,}5; -5{,}75 = -\frac{23}{4})$

   f ist streng monoton wachsend für $x < 1{,}5$.

   f ist streng monoton fallend für $x > 1{,}5$.

   b) Maximum: $(-1; 15)$; Minimum: $(3; -17)$

   f ist streng monoton wachsend für $x < -1$ und $x > 3$.

   f ist streng monoton fallend für $-1 < x < 3$.

   c) Minimum: $(1; 2)$; Maximum: $(-1; -2)$

   f ist streng monoton wachsend für $x < -1$ und $x > 1$.

   f ist streng monoton fallend für $-1 < x < 0$ und $0 < x < 1$.

   d) Keine lokalen Extrema

   f ist streng monoton fallend für $0 \leqq x$.

Lerneinheit C 25

o 40 f'' ist an der Stelle $x = x_0$ stetig und $f''(x_0) > 0$, d. h., es gibt eine Umgebung U von x_0, in der f'' nur positive Werte annimmt. Das bedeutet, daß in U f' streng monoton wächst.

$f'(x_0) = 0$ (1) Für alle $x \in U$ und $x < x_0$ gilt $f'(x) < 0$ (f ist dort streng monoton fallend).

(2) Für alle $x \in U$ und $x > x_0$ gilt $f'(x) > 0$ (f ist dort streng monoton wachsend)

$\Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

o 41 f hat an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum, obwohl $f''(0) = 0$ ist.

1. a) Minimum: $(\frac{1}{3}\sqrt{3}; -\frac{2}{9}\sqrt{3} - 2)$ oder auch $(0{,}58; -2{,}39)$

   Maximum: $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}; \frac{2}{9}\sqrt{3} - 2)$ oder auch $(-0{,}58; -1{,}62)$

   b) Minimum: $(-\frac{3}{8}; -\frac{25}{16})$ oder auch $(-0{,}38; -1{,}56)$

   c) keine Extrema

   d) Maximum: $(4; 14)$; Minimum: $(2; 10)$

e) Minimum: $(0;\ -1)$

f) Maximum: $(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4})$

2. a) Minimum: $(\frac{1}{3}\sqrt{39};\ 27 - \frac{26}{9}\sqrt{39})$ oder auch $(2{,}08;\ 8{,}96)$

   Maximum: $(-\frac{1}{3}\sqrt{39};\ 27 + \frac{26}{9}\sqrt{39})$ oder auch $(-2{,}08;\ 45{,}04)$

   b) Maximum: $(\frac{5}{2};\ 0)$

   c) Minimum: $(2\sqrt{2};\ -138)$ oder auch $(2{,}83;\ -138)$ sowie

   $(-2\sqrt{2};\ -138)$ oder auch $(-2{,}83;\ -138)$

   Maximum: $(0;\ -10)$

   d) keine Extrema

   e) Minimum: $(-1;\ -1)$; Maximum: $(1;\ 1)$

   f) Minimum: $(0;\ 1)$

Lerneinheit C 26

1. a) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{3 + \sqrt{45}}{2} \approx 4{,}85$; $x_3 = \frac{3 - \sqrt{45}}{2} \approx -1{,}85$

   keine Polstellen

   Minimum: $(3;\ -27)$; Maximum: $(-1;\ 5)$

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

   b) keine Nullstellen

   Polstelle: $x = 2$

   Minimum: $(8;\ 21)$; Maximum: $(-4;\ -3)$

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

   c) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{\frac{19 + \sqrt{505}}{6}} \approx 2{,}63$; $x_3 = -\sqrt{\frac{19 + \sqrt{505}}{6}} \approx -2{,}63$

   keine Polstellen

   Minimum: $(2;\ -\frac{16}{3})$; Maximum $(-2;\ \frac{16}{3})$

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

d) Nullstellen: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 5$

   keine Polstellen

   Minimum: $(2 - \sqrt{\frac{24}{5}} \approx -0{,}19;\ -2{,}26)$; Maximum: $(2 + \sqrt{\frac{24}{5}} \approx 4{,}19;\ 3{,}05)$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ (Definitionsbereich: $x \leqq 5$)

2. a) Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1 + \sqrt{45}}{2} \approx 3{,}85$; $x_3 = \frac{1 - \sqrt{45}}{2} \approx -2{,}85$

   keine Polstellen

   Minimum: $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{34} \approx 2{,}27;\ -18{,}43)$

   Maximum: $(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{34} \approx -1{,}61;\ 10{,}94)$

   $\lim\limits_{x \to \infty} (f_x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

   b) Nullstellen: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$. Polstellen: $x_3 = \sqrt{3}$; $x_4 = -\sqrt{3}$

   Minimum: $(0;\ -\frac{2}{3})$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$

   c) Nullstellen: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = \sqrt{6}$; $x_4 = -\sqrt{6}$

   keine Polstellen

   Minimum: $(0;\ -6)$. Maxima: $(-2;\ 2)$ und $(2;\ 2)$

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

   d) Nullstellen: $x_1 = 2$; $x_2 = 5$. Keine Polstellen

   Maximum: $(4;\ 2)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

   Definitionsbereich: $x \leqq 5$

Lerneinheit C 27

o 44 $A = b \cdot h$; $h_1 : a = (h_1 - h) : b$

   Funktion: $A(h) = -\frac{a}{h_1} h^2 + ah$

   Maximum für $h = \frac{h_1}{2} = 2{,}8$ m und $b = 3{,}2$ m

1. $V = 180a^2 - \frac{15}{4} a^3$; $a = 32$ cm; $b = 48$ cm; $c = 40$ cm

2. $V = 18h^2 - 6h^3$; $a = 4$ m; $b = 3$ m; $h = 2$ m

3. $V = \frac{\pi}{3}(s^2 h - h^3)$; $h = 4\sqrt{3}$ cm $\approx 6{,}9$ cm, $r = 4\sqrt{6}$ cm $\approx 9{,}8$ cm

4. $V = \frac{A_o r}{2} = r^3\pi$; $r = \sqrt{\frac{A_o}{6\pi}}$; $h = \sqrt{\frac{2A_o}{3\pi}}$, $r : h = 1 : 2$

5. $A = \frac{400b - b^2\pi}{2}$; $b = 64$ m nicht im Definitionsbereich
$b = 50$ m, $l = 121$ m, $A = 6050\ m^2$

6. a) $A_a = 50b - b^2$; $a = 25$ m, $b = 25$ m

b) $A_b = 50b - \frac{b^2}{2}$; $a = 25$ m, $b = 50$ m

c) $A_c = 100b - b^2$; $a = 50$ m, $b = 50$ m

$A_a : A_b : A_c = 1 : 2 : 4$

8. $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ Minima: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ oder auch (0,71; 0,87)

$f'(x) = \frac{4x^3 + 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ oder auch (- 0,71; 0,87)

Maximum: (0; 1)

7. $A = a \cdot b$; $\frac{a^2}{4} + b^2 = r^2$

$A = f(a) = a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ $a = r\sqrt{2}$; $b = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

$a : b = 2 : 1$

Lerneinheit C 28

Ö 46 a) z.B. $F(x) = 2x^2 + 7$

b) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 28,5$

c) Noch keine Funktion bekannt, deren Ableitung $\frac{1}{x}$ ist.

1. a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + c_1$ (c_2, c_3) (c_1, c_2, c_3 nach Wahl des Schülers)

b) $F(t) = -\frac{1}{t} + 6t + c_1$ (c_2, c_3)

2. a) $F(x) = x^3 + c_1$ (c_2, c_3)

b) $G(z) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + c_1$ (c_2, c_3)

3. $f(x) = x^2 - 2x + c_1 (c_2, c_3)$ (c_1, c_2, c_3 nach Wahl des Schülers)

4. a) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 6x - \frac{9}{4}$ b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

c) $f(x) = x$ d) $f(x) = \sqrt{x}$

5. a) $f(x) = \frac{x^3}{18} + x^2 - 3x$ b) $f(x) = \frac{x^3}{12} + px + 2$ (p beliebig reell)

c) $f(x) = \frac{a}{2}x^2$ d) $f(x) = -\sqrt{x} - 2$

Lerneinheit C 29

1. a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$ (c_2, c_3) (c_1, c_2, c_3 nach Wahl des Schülers)

b) $F(x) = \frac{x^2}{4} + \sqrt{2}x + c_1$ (c_2, c_3)

c) $F(x) = \frac{3}{2}x^{-2} + c_1$ (c_2, c_3) d) $F(x) = c_1$ (c_2, c_3)

2. a) $F(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + c_1$ (c_2, c_3) b) $F(x) = \pi x - \frac{1}{3}x^2 + c_1$ (c_2, c_3)

c) $F(x) = -4,2x^{-1} + c_1$ (c_2, c_3) d) $F(x) = \sqrt{3}\,x + c_1$ (c_2, c_3)

3. a) $F(x) = x^n$ b) $F(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t$

c) $G(h) = \frac{h^6}{6} + \frac{h^3}{3}$ d) $F(x) = \frac{a \cdot x^{-n+1}}{b\ (1-n)} = \frac{a}{bx^{n-1}\ (1-n)}$

e) $F(t) = \sqrt{a} \cdot t - \frac{t^2}{2} + \sqrt{b} \cdot t$

4. a) $F(x) = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{x^{-(n-1)}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$

b) $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2$ c) $F(x) = \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + a_o x$

d) $F(z) = \frac{z^4}{4} + \frac{8}{9}z^3 + z^2 + 9z$

e) $F(a) = \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^3}{3}x^3 + ax^4$

5. a) $F(x) = \sqrt[3]{x^2}$ b) $F(x) = 2\sqrt{x}$

c) $F(x) = \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{4}{7}\sqrt{x^7} - \frac{1}{2x^2}$

d) $F(x) = \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} = \frac{3}{11}x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

6. a) $F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

c) $F(x) = 3a\sqrt[3]{x} + 3b\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $F(x) = 2\sqrt{x}$

7. F_i seien Stammfunktionen von f_i mit $i = \{1; 2; \ldots; n\}$

Beh.: $\sum_{i=1}^{n} F_i$ ist Stammfunktion von $\sum_{i=1}^{n} f_i$

H(2) erfüllt nach Regel (a)

$$\left[F_1 + F_2\right]' = F_1' + F_2' = f_1 + f_2$$

H(n) $\left[\sum_{i=1}^{n} F_i\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i$

H(n+1) Wenn F_{n+1} Stammfunktion von f_{n+1}, so muß gelten:

$\sum_{i=1}^{n+1} F_i$ ist Stammfunktion von $\sum_{i=1}^{n+1} f_i$.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right]' = \left[\sum_{i=1}^{n} F_i\right]' + F_{n+1}' = \sum_{i=1}^{n} f_i + f_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} f_i$$

8. $F(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$ ist eine Stammfunktion von f.

9. a) $F(x) = 3x + 5{,}5$ b) $F(x) = \frac{1}{5}x^3 - 0{,}1x^2 + x$

c) $F(x) = \frac{4}{5}x \cdot \sqrt[4]{x}$

10. a) $F(x) = -\sqrt{5}\cdot x - \sqrt{7} + \sqrt{10}$ b) $F(x) = \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{\pi}{3}x + \pi + \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^3}{4}$

c) $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt{2}$

Übungen und Anwendungen

1. a) $f'(x) = 2x - 4x^3$ b) $f'(x) = 2(x^2-ax)(2x-a) = 4x^3-4ax^2+2a^2x$

c) $f'(x) = \frac{5}{(6-x)^2}$ d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$

e) $f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x) - (x^2-x-2)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{2x^2+4x+2}{(x^2+x)^2}$

f) $f'(x) = 4(4x^5-20x+1)^3(20x^4-20) = 80(x^4-1)(4x^5-20x+1)^3$

2. a) $f'(x) = 4x^3 + 2x$ b) $f'(x) = 6x^5 + 3x^2(b-a)$

c) $f'(x) = \frac{-7(3-10x) + 10(-7x)}{(3-10x)^2} = \frac{-21}{(3-10x)^2}$

d) $f'(x) = \frac{x+a-(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{-2a}{(x-a)^2}$

e) $f'(x) = \frac{(3x^2+12x)(x^2+12x+36) - (x^3+6x^2)(2x+12)}{(x^2+12x+36)^2}$

$= \frac{x^4+24x^3+180x^2+432x}{(x+6)^4} = \frac{x^2+12x}{(x+6)^2}$

f) $f'(x) = 3\left[(x^2+x)(x^2-5x+1)\right]^2 \cdot \left[(2x+1)(x^2-5x+1)+(x^2+x)(2x-5)\right]$

$= 3(x^4-4x^3-4x^2+x)^2 \cdot (4x^3-12x^2-8x+1)$

3. a) $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-4} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 5\sqrt{x^3} - \frac{3}{x^4}$

b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

c) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

4. a) $f'(x) = -\frac{2}{3}ax^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}bx^{-\frac{7}{3}} = -\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}$

b) $f'(x) = \frac{bc - 2ad\sqrt{x} - bdx}{2\sqrt{x}(c+dx)^2}$

c) $f'(x) = \frac{(9x^2-25)\,2x - (x^2-4)9x}{(9x^2-25)^2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4}{9x^2-25}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{11x}{(9x^2-25)\sqrt{(x^2-4)(9x^2-25)}}$

5. a) $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2}{4} - 5;\quad f'(0) = -5$

b) $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 5;\quad f''(x) = \frac{3}{2}x;\quad f'''(x) = \frac{3}{2}$

c) $f'(2) - f'(-2) = 0$

d) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{20}{3}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{15} \approx \pm 2{,}582$

e) $1 + \sqrt{\frac{23}{3}} \approx 3{,}769;\quad 1 - \sqrt{\frac{23}{3}} \approx -1{,}769$

f) $\left(\frac{x^3}{4} - 5x\right)\cdot\frac{3}{2} + 5\cdot\frac{3}{2}x = \frac{3}{8}x^3 - \frac{15}{2}x + \frac{15}{2}x = \frac{3}{8}x^3$

6. a) $f'(x) = 3x^2 - \frac{5}{x^2};\quad f''(x) = 6x + \frac{10}{x^3};$

$f'''(x) = 6 - \frac{30}{x^4};\quad f^{(4)}(x) = \frac{120}{x^5}$

b) f hat keine Nullstellen; Polstelle: $x = 0$

c) Nullstellen von f': $x_1 = \sqrt[4]{\frac{5}{3}} \approx 1{,}136;\quad x_2 = -\sqrt[4]{\frac{5}{3}} \approx -1{,}136$

d) $f(2) = 10{,}5;\quad f'(1{,}2) = \frac{108}{25} - \frac{125}{36} \approx 0{,}85;$

$f''(-2) = -13{,}25;\quad f^{(4)}(1) = 120$

7. a) $f'(0) = 0$ c) $y = 12x - 16$

8. a) $\tan\alpha = 10;\quad \alpha \approx 84{,}3^\circ$

b) $y = 10x + 17$ c) $(0;\ 17)$ und $(-1{,}7;\ 0)$

9. a) $x = \frac{5}{4} = 1{,}25;\quad y = \frac{1}{2}$ c) $y = x - 0{,}75$

10. a) $m = 1$: $P_1(2;\ 3)$; $m = -3$: $P_2\ (0;\ 5)$

b) $y = x+1;\quad y = -3x + 5$ c) $P\ (1;\ 2)$

11. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{16}$

12. a) Die Funktion $y = \sqrt{x+1}$ ist für alle x mit $x > -1$ differenzierbar; folglich ist f an der Stelle 0 differenzierbar

b) $f'(0) = \frac{1}{2}g(0) + g'(0)$

13. b) $ad - bc = 2 - (-15) = 17 > 0$; also ist $f'(x)$ für jedes $x \neq -\frac{1}{5}$ positiv. Folglich wächst f streng monoton in $(-\infty;\ -\frac{1}{5})$ und in $(-\frac{1}{5};\ \infty)$.

c) $5a - 8 < 0;\quad a < \frac{8}{5}$

14. $f'(x) = x + 1;\quad f''(x) = 1$

$1 + (x+1)^2 = 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)\cdot 1$

$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 2$

15. $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2};\quad f(x) = \frac{1-x^4}{4x}\cdot\frac{-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

16. a) Für alle n mit $n \geq 7$ gilt $f^{(n)}(x) = 0$.

b) $f''''(x)$ ist eine ganze rationale Funktion 2. Grades

c) $n = 4$

d) $f'(x) = (1+x)^2(5x^2+2x-6) = 5x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 10x - 6$

e) $-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{31} \approx 0{,}914;\quad -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{31} \approx -1{,}314;\quad -1$

17. a) $x_1 = 0,\ x_2 = 2$

b) $f''(x) = 2(1-x)^{-3};\quad f'''(x) = 6(1-x)^{-4};\quad f^{(4)}(x) = 24(1-x)^{-5}$

c) $H(1)\quad f'(x) = 1!\,(1-x)^{-1-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$H(n)\quad f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-n-1}$

$H(n+1)\quad f^{(n+1)}(x) = (n+1)!\,(1-x)^{-(n+1)-1}$

$[f^{(n)}(x)]' = n!\,(-n-1)(1-x)^{-n-1-1}\,(-1)$

$f^{(n+1)}(x) = n!\,(n+1)(1-x)^{-(n+1)-1}$

$= (n+1)!\,(1-x)^{-(n+1)-1}$

18. $t = \sqrt{24}\ s \approx 4{,}9 s$; $v \approx 49\ m \cdot s^{-1}$

19. b) $v = g \cdot t$ c) $\frac{dv}{dt} = g$

d)* $v = f'(t) = \begin{cases} 2at & \text{für } 0s \leqq t \leqq 2s \\ b & \text{für } 2s \leqq t \leqq 5s \end{cases}$

$= \begin{cases} t\ m \cdot s^{-2} & \text{für } 0s \leqq t \leqq 2s \\ 2\ m \cdot s^{-1} & \text{für } 2s \leqq t \leqq 5s \end{cases}$

e)* ja

f) $a = 1{,}5\ m \cdot s^{-2}$; $b = 9\ m \cdot s^{-1}$

20. a) $x_0 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$

b) $f'(x_0) = -\frac{g}{v_0}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{-1}{v_0}\sqrt{2gh}$

c) $x_0 \approx 3140\ m$; $f'(x_0) \approx -0{,}64$

21. a) $h = 15\ km$ b) $x_0 \approx 79\ km$

c) $f'(x_0) \approx -1$; $\alpha \approx 135^\circ$ d) $x_g = 30\ km$; $y_g = 24\ km$

22. a) $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \infty$

23. Maximum: $f(2{,}5) = 11{,}125$; Minimum: $f(1) = 1$

24. a) $f(-2) = f(3) = 0$

b) Da f differenzierbar und f nicht konstant ist, muß f im Intervall $(-2;\ 3)$ eine lokale Extremstelle haben.

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{19}}{3} \approx 1{,}786$; $x_2 = \frac{1 - \sqrt{19}}{3} \approx -1{,}120$

25. $p > 0$; q beliebig

f hat an der Stelle $x_1 = -\sqrt{\frac{p}{3}}$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}$ ein lokales Minimum.

26. a) Maximum: $(0;\ 0)$; Minimum: $(2;\ -4)$

b) Maximum: $(1;\ 2)$; Minima: $(0;\ 1)$ und $(2;\ 1)$

c) keine Extrema

d) Minimum: $(15;\ \frac{135}{4})$ oder $(15;\ 33{,}75)$

e) Maximum: $(1;\ 1)$; Minimum: $(5;\ 9)$

27. a) Maximum: $(0;\ 7)$; Minima: $(2;\ -9)$ und $(-2;\ -9)$

b) Minimum: $(\frac{1}{2};\ \frac{31}{48})$ oder $(0{,}5;\ 0{,}65)$

c) Minimum: $(0;\ -1)$

d) Minimum: $(1{,}4;\ -0{,}56)$

e) keine Extrema

28. a) Minimum: $(-2;\ 2)$

b) Maximum: $(r\sqrt{2};\ 2r^2)$

29. a) Maximum: $(2;\ 3\sqrt[3]{4})$ oder $(2;\ 4{,}76)$

b) Minimum: $(\sqrt{3};\ \frac{3}{2}\sqrt{3} + 6)$ oder $(1{,}73;\ 8{,}60)$

30. a) streng monoton wachsend

b) streng monoton wachsend

c) streng monoton fallend in $\langle 0;\ 1 + \sqrt{3} \rangle$, streng monoton wachsend in $\langle 1 + \sqrt{3};\ 4 \rangle$

d) streng monoton wachsend in $\langle 0;\ \frac{1}{2} \rangle$, streng monoton fallend in $\langle \frac{1}{2};\ 4 \rangle$

31. Minimum: $f(-4) = -28$; Maximum: $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$

32. a) Nullstelle: $x = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}59$

Polstelle: $x = 0$; Minimum: $(2;\ 3)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

b) Nullstellen: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$

keine Polstellen

Maximum: $(0;\ 3{,}6)$

Minima: $\left(\sqrt{\frac{13}{2}};\ -\frac{25}{40}\right)$ oder $(2{,}55;\ -0{,}63)$ sowie

$\left(-\sqrt{\frac{13}{2}};\ -\frac{25}{40}\right)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) Nullstellen: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Polstelle: $x = 0$

Minimum: $\left(\frac{12}{5};\ -\frac{1}{24}\right)$ oder $(2{,}4;\ -0{,}04)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

d) Nullstelle: $x = -1$; keine Polstelle

Maximum: $(2;\ \frac{1}{4})$; Minimum: $(-4;\ -\frac{1}{8})$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

33. a) keine Nullstellen und keine Polstellen

Minimum: $(0;\ 10)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) keine Nullstellen und keine Polstellen

Minimum: $(0;\ 9)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Nullstellen: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

Polstelle: $x = 2$

Minimum: $(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3})$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

d) keine Nullstellen; Polstelle: $x = 2$

Minimum: $(2 + \sqrt{3};\ 2(1 + \sqrt{3}))$ oder $(3{,}73;\ 5{,}46)$

Maximum: $(2 - \sqrt{3};\ 2(1 - \sqrt{3}))$ oder $(0{,}27;\ -1{,}46)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

34. a) Definitionsbereich: $0 \leq x \leq 4$; keine Nullstellen

Maximum: $(2;\ 2\sqrt{2} \approx 2{,}83)$

b) Definitionsbereich: $|x| < 2$; keine Nullstellen

Minimum: $(0;\ 2)$

35. Definitionsbereich: $x \neq \pm 1$; $f'(x) = \dfrac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$

Nullstelle: $x = 0$

Aus der Abteilung f' ist ablesbar:

f ist streng monoton wachsend für $x < -\sqrt{3}$ und $x > \sqrt{3}$;

f ist streng monoton fallend für $-\sqrt{3} < x < -1$ und $-1 < x < 1$

sowie für $1 < x < \sqrt{3}$. Deshalb liegt ein Maximum bei $x = -\sqrt{3}$

und ein Minimum bei $x = \sqrt{3}$ vor.

$f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx -1{,}37$; $f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}37$.

Polstellen: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

36. a) $x \geq 0$ b) $x_{0_1} = 0$ $x_{0_2} = 4$ c) Minimum: $(1;\ -1)$

d) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $f'(1) = 0$; $f'(4) = 0{,}5$; $f'(6{,}25) = 0{,}6$

$f'(10) = 1 - \frac{1}{10}\sqrt{10} \approx 0{,}68$

37. a) $f'(x) = (x-3)(3x+1)$

f streng monoton fallend für $-\frac{1}{3} < x < 3$ und

streng monoton wachsend für $x < -\frac{1}{3}$ und $x > 3$.

Minimum: $(3;\ 0)$; Maximum: $(1;\ 12)$

b) $f'(x) = (x-1)(3x - 13)$

f streng monoton fallend für $1 < x < \frac{13}{3}$ und

streng monoton wachsend für $x < 1$ und $x > \frac{13}{3}$.

Minimum: $\left(\frac{13}{3}; -\frac{500}{27}\right)$ oder $(4{,}33; -18{,}52)$

Maximum: $(1; 0)$

38. $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

39. $x = 1$

40. a) $8 = 4 + 4$ (Max.) b) $8 = 4+4$ (Min.) c) kein Extremum

d) $8 = 4 + 4$ (Min.) e) kein Extremum

41. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{für } |x| < 1 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} \neq \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

Analog an der Stelle $x = -1$.

c) Minima: $(-1; 0)$ und $(1; 0)$; Maximum: $(0; 1)$

d) Globales Minimum an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

42. Seitenlängen des Rechtecks: $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

43. Radius des Zylinders: $r_{zyl} = \frac{2}{3} R$;

Höhenlänge des Zylinders: $h_{zyl} = \frac{1}{3} H$

44. Radius: $r = \frac{U}{4}$; Bogen: $b = \frac{U}{2}$; $\varphi = 115^\circ$

45. $r = \dfrac{18}{4 + \pi}$ m $\approx 2{,}52$ m

46. keine Lösung ($a = 20$ cm; $6 = 0$ cm: deshalb kein Rechteck)

47. $b = \frac{h}{2}$; $a = \frac{g}{2}$

Es gibt unendlich viele Parallelogramme, die dieser Bedingung genügen.

48. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$

49. b) $r = \frac{R}{3}\sqrt{6}$; $h = \frac{r}{3}\sqrt{3}$ c) $V = \frac{2}{27}\sqrt{3}\,\pi R^3$

50. Seitenlänge der Grundfläche: $a = 8$ m; Höhenlänge: $h = 0{,}5$ m

51. $R_1 = R_2 = 180\,\Omega$

52. $x = 2$ m

53. $V = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 H$; $\frac{V}{\pi} = 2r^2 + \frac{1}{3}r^2\sqrt{36-r^2}$

$r = 4\sqrt{2}$ m; Höhenlänge des Kegels: $H = 2$ m

54. 30 cm

55. a) $A(x) = \begin{cases} (a\sqrt{2} - x)^2 & \text{für } \frac{a}{2}\sqrt{2} \leq x < a\sqrt{2} \\ a^2 - x^2 & \text{für } 0 \leq x < \frac{a}{2}\sqrt{2} \end{cases}$

b) $A(0) = a^2$; $A(a\sqrt{2}) = 0$

A ist streng monoton fallend. Der Graph von A ist aus zwei Parabelbögen zusammengesetzt.

56. Obere Breite: 40 cm; Höhe: $10\sqrt{3}$ cm

57. Die Länge der anderen parallelen Seite des Trapezes beträgt R.

58. $a = 6$ dm; $b = 3$ dm

59.* Radius: $r = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}V}$; Höhenlänge: $h = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$

60. Abstand: $d \approx 8{,}86$ m

62. Ungefähr 13,1 km vom Punkt A entfernt.

63. Nach etwa 2 Stunden und 40 min

64. 60 cm; 30 cm

65. a) 660 M b) 420 M c) 6 Bestellungen

Kosten: 380 M

66. a) optimale Losgröße: $x_o = \sqrt{\frac{2cr}{lT}}$

b) $x_o = 2000$ c) in 20 Losen

67. a) $f'(x_o) = -\frac{a}{x_o^2}$ b) $y = -\frac{a}{x_o^2}x + \frac{a}{x_o^2} + \frac{a}{x_o}$

c) $x_r = 1 + x_o$ d) $y_T = \frac{a}{x_o^2} + \frac{a}{x_o}$

$A = \frac{a}{2x_o^2} + \frac{a}{x_o} + \frac{a}{2}$

68. $v \approx 27{,}9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Lösungen zum Kapitel D: Integralrechnung

1. a) $A = 2$ b) $A = 5$ c) $A = 15{,}5$ d) $A = 13{,}5$

2.

	Intervall	kleinster Funktionswert	größter Funktionswert
a)	$\langle 0;\ 1\rangle$	1	2
b)	$\langle 0;\ \frac{1}{2}\rangle$	1	$\frac{5}{4}$
	$\langle \frac{1}{2};\ 1\rangle$	$\frac{5}{4}$	2
c)	$\langle 0;\ \frac{1}{4}\rangle$	1	$\frac{17}{16}$
	$\langle \frac{1}{4};\ \frac{2}{4}\rangle$	$\frac{17}{16}$	$\frac{5}{4}$
	$\langle \frac{2}{4};\ \frac{3}{4}\rangle$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
	$\langle \frac{3}{4};\ 1\rangle$	$\frac{25}{16}$	2

3. a) 110 b) 55a c) $\frac{a}{2}n(n+1)$ d) $\frac{a}{b}\,\frac{n(n+1)}{2}$ e) n

4. a) $\frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ $\qquad$ $\frac{2^n+1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n}$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)$ monoton fallend $\qquad$ $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ monoton fallend

$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ monoton wachsend $\qquad$ $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ monoton fallend

b) Für alle n gilt $\qquad$ Für alle n gilt

$\frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$ $\qquad$ $\frac{2^n+1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n} > 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1$

5. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2^n)^2} = 0$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{2^n}\right) = 2$

Lerneinheit D 1

1. a) $s_3 = \frac{652}{512} \approx 1{,}27$ b) $S_3 = \frac{716}{512} \approx 1{,}40$

2. $s_o = 2$ | $s_1 = \frac{21}{8} = 2{,}625$ | $s_2 = \frac{95}{32} = 2{,}96875$

$S_o = 5$ | $S_1 = \frac{33}{8} = 4{,}125$ | $S_2 = \frac{119}{32} = 3{,}71875$

Lerneinheit D 2

o 2 b) $A = \frac{25}{2}$

1. $s_o = 0$ $\quad s_1 = 4$ $\quad s_2 = 6$ $\quad s_3 = 7$ $\quad s_4 = \frac{15}{2}$

$S_o = 16$ $\quad S_1 = 12$ $\quad S_2 = 10$ $\quad S_3 = 9$ $\quad S_4 = \frac{17}{2}$

2. b) $A = \frac{45}{2} = 22{,}5$

3. b) $s_o = -20$ $\quad s_1 = -18$ $\quad s_2 = -16{,}5$

$S_o = -4$ $\quad S_1 = -10$ $\quad S_2 = -12{,}5$

Lerneinheit D 3

o 3 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{2^n} = \cancel{k}\ 0$ $(k \in P)$

o 5 $\sum\limits_{i=1}^{k} i^o = k$ $\qquad$ $\sum\limits_{1=1}^{k} 1 = 1$

1. Die Integrale $\int\limits_2^3 \frac{1}{x}\,dx$ und $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$ existieren, weil die Funktionen in den angegebenen Intervallen monoton sind.

2. a) - $\quad$ b) $\int\limits_{-1}^{4} f(x)dx$ existiert, weil die Funktion monoton ist.

3. b) $A = 18$

c) $\Delta x = \frac{3}{2^n}$, $x_i = 1 + i\,\frac{3}{2^n}$, $U_i = 2(1 + i\,\frac{3}{2^n}) + 1$

$$S_n = \sum_{i=1}^{2^n} \left(3 + i\,\frac{6}{2^n}\right)\frac{3}{2^n} = 9 + \frac{9}{2^n}\,(2^n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 18$$

Lerneinheit D 4

o 6 $A = 24 + 12 = 36$

1. a) 0 b) 0

2. a) 0 b) 0

3. a) $\frac{b^2}{2}$ b) $-\frac{b^2}{2}$

4. a) $\frac{b^2}{2}$ b) $-\frac{b^2}{2}$

5. 0

6. $\frac{4}{3}$

Lerneinheit D 5

o 7 $\lim\limits_{h\to 0} 2(2x_o+h) = 4x_o$

Lerneinheit D 6

1. a) $\frac{9}{2}$ b) 0 c) 4 d) $\frac{3}{2}$ e) 0 f) $\frac{3}{2}\,b^2$

2. a) $\frac{15}{2}$ b) 15 c) -3 d) -15 e) $-0{,}2$ f) $\frac{7}{3}\,a$

3. a) $-46{,}8$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{104}{81}$ d) $\frac{100}{3}$ e) $-\frac{7}{8}$

4. a) 4 b) $-\frac{5}{72}$ c) $-\frac{45}{64}$ d) $\frac{7}{12}$ e) $-\frac{19}{8}$

5. a) $\frac{2}{3}(7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \approx \frac{2}{3}\cdot 15{,}69 \approx 10{,}46$ b) $2(\sqrt{5} - 1) \approx 2{,}47$

c) $4(4\sqrt[4]{4} - 1) \approx 4(4\sqrt{2} - 1) \approx 4 \cdot 4{,}657 = 18{,}628$

d) $\frac{5}{2} + \frac{9}{4}\sqrt[3]{3} - \frac{6}{4}\sqrt[3]{2} \approx 2{,}5 + 3{,}245 - 1{,}890 = 3{,}855$ e) $\frac{10}{3}$

6. a) $\frac{45}{4}$ b) $\frac{3}{2}\,(2\sqrt[3]{2} - 1) \approx 1{,}5 \cdot 1{,}520 = 2{,}280$

c) $\frac{20}{3}\,(2\sqrt[4]{4} - 1) \approx \frac{20}{3} \cdot 1{,}828 \approx 12{,}187$

d) $\frac{1}{2}\,(5 - 3\sqrt[3]{4}) \approx 0{,}119$ e) $\frac{7}{2}$

7. $\int_0^2 f(x)\,dx = 8$ $\int_2^4 f(x)\,dx = 8$ $\int_0^4 f(x)\,dx = 16$

8. $\int_3^6 f(x)\,dx = \frac{37}{6}$

Lerneinheit D 7

o 10 $\frac{1}{a(n+1)}\left[(ax_2+b)^{n+1} - (ax_1+b)^{n+1}\right]$

1. a) $\frac{1}{12}\,(25^3 - 5^3) = \frac{15500}{12} \approx 1291{,}67$

b) $-\frac{1}{4}\,(\frac{1}{16} - \frac{1}{64}) = (-\frac{1}{4}) \cdot \frac{3}{64} = -\frac{3}{256} \approx -0{,}012$ c) ~~100~~ 74

2. a) $\frac{4}{5}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^5 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right] = \frac{1441}{640} \approx 2{,}25$ b) $\frac{3}{8}$

c) $\frac{1}{2}\,(\frac{1}{9} - \frac{1}{121}) = \frac{56}{1089} \approx 0{,}051$

3. a) $\frac{3}{10}\,(7\sqrt[3]{49} - 3\sqrt[3]{9}) \approx 5{,}81$ b) $-\frac{2}{3}\,(\sqrt{5} - \sqrt{8}) \approx 0{,}395$

c) $\frac{3}{2}\,(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}) \approx 0{,}74$

4. a) $\frac{19}{150}\sqrt{10} \approx 0{,}401$ b) $\frac{3}{8}\,(\sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{4}) \approx$ ~~0,643~~ 0,528

c) $\frac{3}{32}\,(25\sqrt[3]{25} - 1) \approx \frac{3}{32} \cdot 72{,}1 \approx 6{,}76$

Lerneinheit D 8

o 11 a) $A = 4$ b) $A = 8$ c) $A = 6$ d) $A = 15$ e) $A = 13{,}5$

o 12 a) $a_1 = 5$; $a_2 = \frac{5}{2}$ b) $x_1 = 5$; $x_2 = -1$

1. a) $A = 1{,}5$ b) $A = 16{,}5$ 2. $A = 16$ 3. b) $A = 32$

4. b) $A = 11{,}25$ 5. b) $A = \frac{16}{5}\sqrt[4]{12} \approx 5{,}96$

Lerneinheit D 9

o 14 $-\frac{9}{2}$

1. a) $\frac{20}{3}$ b) $\frac{41}{3}$ c) 1 d) $9\frac{1}{6} \approx 9{,}17$

   e) $x_o = 9$; $A = 9 + 3\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}$

   f) $x_o = \frac{23}{9}$; $A = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

2. a) $x_o = -\frac{1}{2}$; $A = \frac{25}{4} + \frac{9}{4} = \frac{17}{2}$

   b) $x_o = 1$; $A = \frac{20}{6} + \frac{80}{3} = 30$

   c) $A = 3\frac{1}{3}$ d) $x_o = 4{,}25$; $A = \frac{7}{24} + \frac{11}{24} = \frac{3}{4}$

3. a) $x_{o1} = 0$, $x_{o2} = 1$, $x_{o3} = 5$; $A = \frac{3}{4} + 32 = 32{,}75$

   b) $x_{o1} = 0$, $x_{o2} = 3$, $x_{o3} = 5$; $A = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = 21\frac{1}{12} \approx 21{,}08$

Lerneinheit D 10

1. a) $A = 32$ b) $A = 36$ 2. a) $A = 4{,}5$ b) $A = 4{,}5$

3. a) $A = 51$ b) $A = 9$ c) $A = 4{,}5$ d) $A \approx 7{,}906$

4. $A = \frac{8}{3}$ 5. $A \approx 4{,}78$

Lerneinheit D 11

o 16 $W = 28{,}8$ Ncm

1. $W = \frac{k}{3}(s_2^{\,3} - s_1^{\,3}) - \frac{1}{4}(s_2^{\,2} - s_1^{\,2})$

2. $W = k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

Übungen und Anwendungen

1. a) $23{,}4$ b) $57\frac{7}{12}$ c) $68\frac{12}{25}$ d) π^2 e) $+\frac{3}{20}$ f) 16

2. a) 60 b) $57\frac{(7)}{12}$ c) $-\frac{19}{8}$ d) $-\pi$ e) $5{,}25$ f) $302\frac{20}{81}$

3. a) $\frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_o$ b) $\frac{3}{8}w^2$ c) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

4. a) $\frac{1}{2}(b-a)$ b) $\frac{7}{3z^3}$ c) $2z\,(\sqrt{2} - 1)$

5. a) $c = 2$ b) $c = 2$

6. a) $k_1 = \sqrt{12}$, $k_2 = -\sqrt{12}$ b) $k = 0{,}4$ c) $k = \frac{2}{3}$ d) $k = \frac{2}{3}$

7. a) $A = 4$ b) $A = 8$ c) $A = 6$ d) $A = 15$ e) $A = 13{,}5$

8. a) $A = \frac{1}{3}(x_2^{\,3} - x_1^{\,3})$ 9. $A = \frac{37}{12}$ 10. $A = \frac{1}{3}$

11. a) $x_{s1} = 1$, $x_{s2} = 5$ c) $A = 10\frac{2}{3}$

12. a) $A = 4{,}5$ b) $A = 48$

13. a) $x_{o1} = 0$ $x_{o2} = -1 + \sqrt{5} \approx 1{,}24$ $x_{o3} = -1 - \sqrt{5} \approx -3{,}24$

    lokales Maximum $(-2;\ 8)$

    lokales Minimum $(\frac{2}{3};\ -\frac{40}{27})$

    b) $x_{o1} = 0$ $x_{o2} = -1$

    lokales Minimum $(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2})$

    c) $(0;\ 0)$ $(\sqrt{6};\ 12 + 2\sqrt{6})$ $(-\sqrt{6};\ 12 - 2\sqrt{6})$

    e) $A = 18$

14. a) $x_{o1} = 3;\quad x_{o2} = -3;\quad x_{o3} = \sqrt{2};\quad x_{o4} = -\sqrt{2}$

b) lokales Maximum (0; 18)

lokale Minima $(\frac{1}{2}\sqrt{22};\ -12{,}25)$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{22};\ -12{,}25)$

d) $S_1\ (\sqrt{11};\ 18)\qquad S_2\ (-\sqrt{11};\ 18)$

e) $A \approx 107$

15. a) $A = \frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{5}$

16. a) $P(\sqrt{a};\ a\sqrt{a})$

b) $A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot a\sqrt{a} = \frac{1}{2}a^2;\quad A_2 = \int_0^{\sqrt{a}} x^3 dx = \frac{1}{4}a^2$

17. a) $A_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$ b) $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{2}$

18. a) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4;\quad y = \frac{5}{4}x^2 - 3$ b) $A = \frac{56}{3}$

19. $A_{Rechteck} = ax_o^3;\quad A_f = \frac{1}{3}ax_o^3;\quad A_{Rechteck} - A_f = \frac{2}{3}ax_o^3$

20. a) $a_{max} = 3\quad b_{max} = 0 \Rightarrow$ Rechteck entartet

b) $a_{max} = \sqrt{3}\quad b_{max} = 2 \Rightarrow A_{max} = 4\sqrt{3}$

21. a) $y = \frac{1}{10}x^2$ b) $A = \frac{50}{3}$

22. a) $y = -\frac{4}{81}x^2$ (Koordinatenursprung im Scheitelpunkt der Parabel)

b) $A = 384\ m^2$ c) $V = 70\ 272\ m^3$

23. a) $x_{max} = 1;\quad x_{min} = 5;\quad A = 84$

b) $x_{max} = -1;\quad x_{min} = 2;\quad A = 26{,}25$

24. a) $x_{o1} = -2;\quad x_{o2} = -1;\quad x_{o3} = 1;\quad x_{o4} = 2$

$x_{max} = 0;\quad f(x_{max}) = 4$

$x_{min,1} = -\sqrt{\frac{5}{2}};\quad x_{min,2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$f(x_{min,1}) = -2{,}25;\quad f(x_{min,2}) = -2{,}25$

b) $A = \frac{20}{3}\sqrt{5} \approx 14{,}91$ c) $A = \frac{35}{6}\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 9{,}22$

25. $A = \frac{1}{3}$

26. a) $P_1(1;\ 2\sqrt{2});\quad P_2(1;\ -2\sqrt{2})$

b) $f_1'(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2};\quad f_2'(1) = -\sqrt{2};\quad \alpha = 90^\circ$

c) $A = \frac{28}{3}\sqrt{2} \approx 13{,}20$

27. $A = \int_0^{\sqrt{8}} (\sqrt{8}\sqrt{x} - \frac{1}{8}x^2)dx = \frac{64}{3}$

28. a) $V = 1{,}86\ m^3$ b) 54,8 % c) $5{,}55\ m^3$

29. $x_1 = -\sqrt{2};\quad x_2 = 0;\quad x_s = \sqrt{2};\quad A = 1$

30. a) $P_1(0;\ 0)$, $P_2(-1;\ -3)$, $P_3(2;\ 0)$

b) f: $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$ g: $x_1 = 0,\ x_2 = 2$

c) f: $x_{min} = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \approx -1{,}15;\quad f(x_{min}) \approx -3{,}1$

$x_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15;\quad f(x_{max}) \approx 3{,}1$

g: $x_{max} = 1;\quad g(1) = 1$

d) $A_1 = \frac{5}{12},\ A_2 = \frac{8}{3}$

31. $W \approx 3\cdot 10^{11}$ Nm <u>32.</u> $s = 22{,}8$ m <u>33.</u> $W = 10\frac{1}{6}$ kWs

34. $p = -6$

35.* a) $a = -\frac{5}{8}$, $b = c = 2$, $d = 0$

b) $x_{o1} = 0$, $x_{o2} = 4$, $x_{o3} = -\frac{4}{5}$

lokales Maximum (2,55; 7,74)

lokales Minimum (-0,42; -0,53)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

c) $A \approx 18{,}7$

36.* a) $m = -\frac{5}{8}$; $n = \frac{21}{8}$ b) $A = \frac{27}{16} \approx 1{,}688$

37.* b) $A(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}$ c) $\lim\limits_{t \to \infty} A(t) = \frac{1}{2}$

Kurzwort: 002189 Loesungsh. Mathe 11
DDR 2.50 M