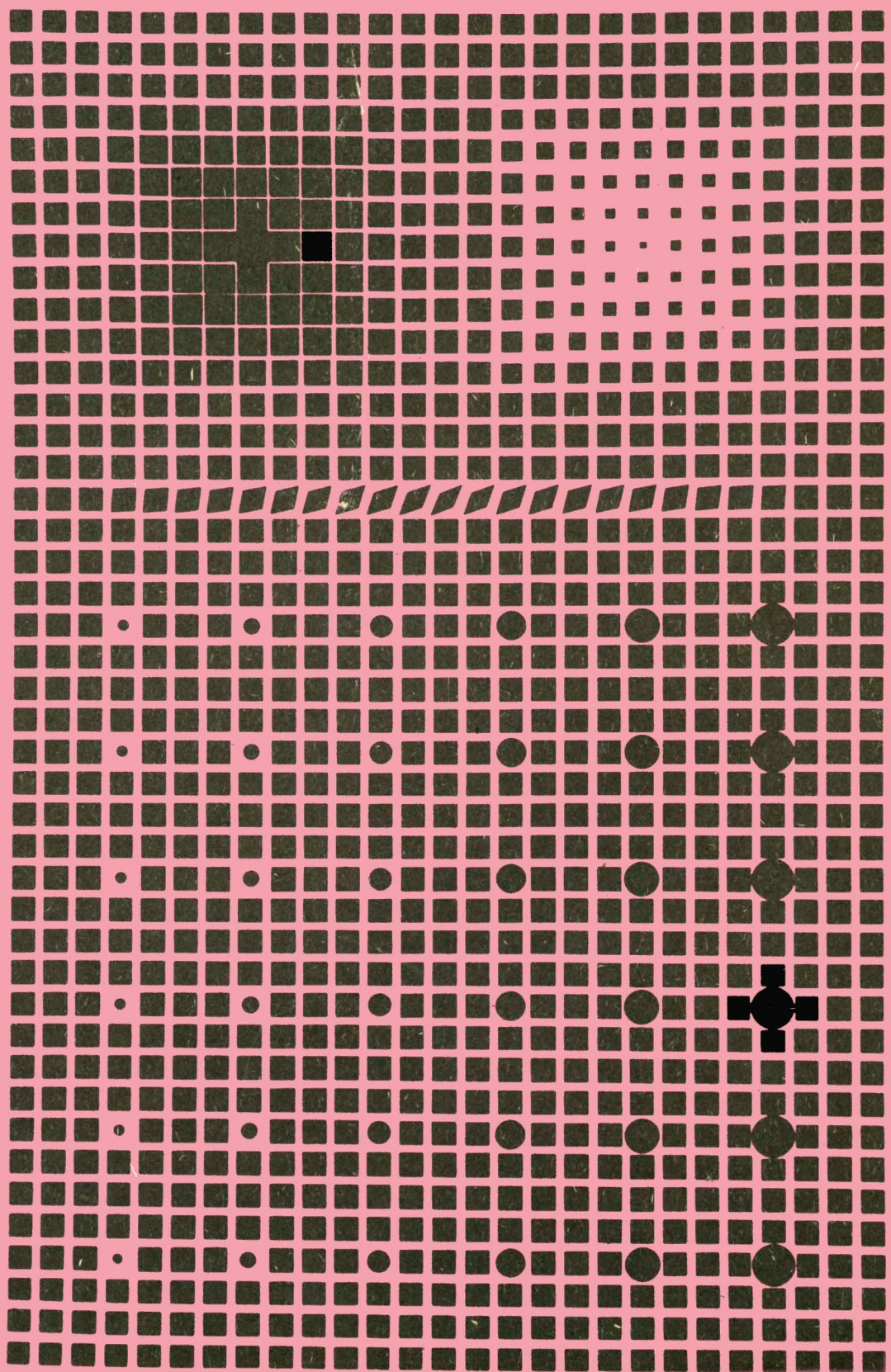
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Schröder, Karl-Marx-Stadt (S. 3); Hochschulbildstelle TH Karl-Marx-Stadt (S. 4)); Hochschul-Film und Bildstelle der Karl-Marx-Universität Leipzig (S. 6, 7, 8); K. Voigt, Leipzig (S. 7); Foto Michaelis, Lübbenau/Spreewald (S. 9); Rolf F. Müller, Erfurt (S. 20); H. Büttner, Berlin (S. 22).
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig.

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 28. Oktober 1981
Erscheinungstermin: 20. Februar 1982

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

1 Der Moskauer mathematische Papyrus [8]*
Dr. A. Volodarskij, Institut für Geschichte der Naturwissenschaften und Technik, Moskau/Dr. Sonja Bentjes, Karl-Sudhoff-Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig

3 Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Volkmar Friedrich [9]
Direktor der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

4 Ausbildung von Diplommathematiker mit vertieften technischen Kenntnissen [8]
Prof. Dr. V. Friedrich, TH Karl-Marx-Stadt

5 Ein *Hobelspan* aus Gauß' Werkstatt [7]
Prof. Dr. K.-R. Biermann, Akademie der Wissenschaften der DDR, Leiter der A.-v.-Humboldt-Forschungsstelle

6 Mathematiker-Kongreß der DDR 1981 [7]
OStR J. Lehmann, Leipzig/Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

8 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [1]
Speziell für Klasse 1 bis 7 · Ungleichungen
Zusammenstellung: OStR J. Lehmann/OStR Th. Scholl, Berlin

9 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [6]
Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

10 Was tun, wenn die Formelsammlung nicht mehr helfen kann? Lösungsverfahren statt Lösungsformel, Teil 2 [8]
Prof. Dr. I. O. Kerner, Sektion Mathematik/Geographie, Wissenschaftsbereich Numerische Math. u. Informationsverarbeitung, Päd. Hochschule Karl Friedrich Wander Dresden

12 Für den Briefmarkenfreund [6] · Aristarch von Samos
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

13 XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (18. Nov. 1981) [5]

16 Lösungsweg zur Ordnung des *Magischen Würfels* [5]
Aus practic 3/81

18 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz

20 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie

23 Differential- oder Differenzengleichungen [8]
Prof. Dr. L. Berg, Sektion Mathematik der W.-Pieck-Universität Rostock

23 Lösungen [5]

III./IV.-U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb [5]
Preisträger, Vorbildliche Leistungen, Abzeichen in Gold

Das Titelbild wurde gestaltet von W. Fuhr, Berlin nach Vasarely, Supernovae 1959 bis 1961, Öl, Tute Gallery London

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Moskauer mathematische Papyrus

Aus der Geschichte der altägyptischen Mathematik

In jener weit zurückliegenden Zeit, als der Moskauer mathematische Papyrus entstand, war das alte Ägypten ein Agrarstaat. Seine natürliche landwirtschaftliche Nutzfläche war sehr klein und reichte zur Versorgung der Bevölkerung nicht aus. Um sie zu vergrößern, baute man Bewässerungskanäle, legte Sümpfe trocken und errichtete Dämme. Das neu gewonnene Land wurde in Felder aufgeteilt, deren Grenzen bestimmt werden mußten, um das Eigentumsrecht zu klären. Zur Lagerung des geernteten Getreides wurden Speicher errichtet. Dazu mußte man wissen, wie man die Größe der erzielten Ernte berechnet und wie die Ernte zu verteilen war. So erwuchsen aus der täglichen Praxis allmählich eine Vielzahl mathematischer Aufgaben. Die dabei geschaffenen mathematischen Methoden gestatteten es den alten Ägyptern, neben den bereits erwähnten Problemen bei der Flächenvermessung von Feldern und beim Bau von Dämmen oder Getreidespeichern auch solche zu lösen, die bei Bauarbeiten, der Erhebung von Steuern, der Umwandlung von Gewichts- und Flüssigkeitsmaßen ineinander u. a. m. auftraten.

Wir besitzen heute nur noch einige wenige Texte mathematischen Inhalts. Sie sind auf sprödem Papyrus geschrieben, einem Material, das aus den Stengeln der gleichnamigen Pflanze hergestellt worden ist. Von der Vielzahl der einmal wahrscheinlich vorhandenen Werke blieben nur jene erhalten, die in Pyramiden aufbewahrt wurden, damit die Seelen der dahingeschiedenen hochgestellten Persönlichkeiten, die in diesen Gräbern bestattet worden sind, ihre geliebten Bücher auch im Jenseits lesen konnten.

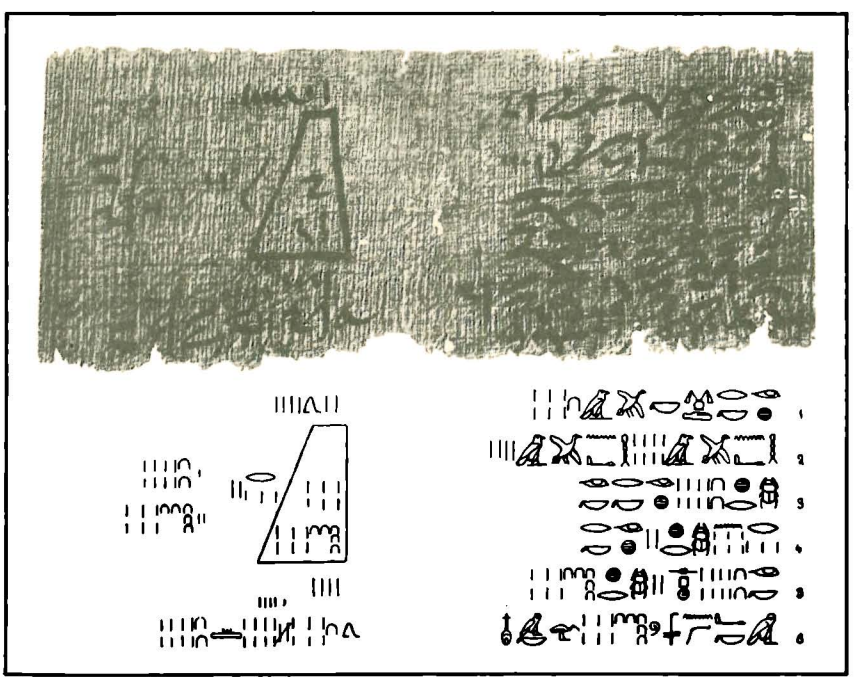
Die umfangreichste, uns bekannte altägyptische Aufgabensammlung ist der *Papyrus Rhind*. Er erhielt diesen Namen nach seinem Besitzer, einem englischen Archäologen. Seine Länge beträgt 5,25 m und seine Breite 33 cm. In ihm sind 87 Aufgaben zusammengestellt. Der Papyrus Rhind ist heute im *Britischen Museum* in London deponiert. Ein anderer Text mit einer Länge von 5,44 m, einer Breite von 8 cm und 25 Aufgaben befindet sich im *Staatlichen Museum der darstellenden Künste* „A. S. Puschkin" in Moskau. Deshalb wird er der *Moskauer Papyrus* genannt. Beide Texte gehören etwa in die gleiche Zeit, in die Epoche des Mittleren Reiches (2000 bis 1800 v. u. Z.). Die Kultur des Mittleren Reiches hatte ein hohes materielles und geistiges Niveau erreicht. Schreiber überlieferten im Dienste des Staates oder der Tempel wissenschaftliche Kenntnisse. Sie wurden an Spezialschulen ausgebildet und genossen bestimmte Privilegien. In einem der Papyri kann man über sie lesen: „Diese Pflicht steht über allen anderen und nichts gleicht ihr in diesem Land."

„Ein Schreiber leitet alle anderen. Die Schreibarbeiten sind nicht mit Steuern belegt." heißt es in einem anderen Text.

Beide mathematische Papyri waren für den Unterricht bestimmt. Der Moskauer Text entstammt der Feder eines Schülers einer Schreiberschule. Er entstand zwischen 1800 und 1600 v. u. Z. und ist eine Kopie einer Vorlage aus etwa dem 20. Jh. v. u. Z. Der Papyrus Rhind, in dem das Material systematischer angeordnet ist, geht auf ein Werk aus der zweiten Hälfte des 19. Jh. v. u. Z. zurück und wurde in der heutigen Form von einem Schreiber namens A'hmosé angefertigt. Neben diesen beiden fraglos wichtigsten mathematischen Papyri sind uns noch einige kleinere Auszüge aus anderen Werken überliefert, auf die wir hier aber nicht eingehen werden.

Da die uns bekannten mathematischen Schriften alle einer Periode angehören, haben wir kaum Vorstellungen über die Entwicklung der altägyptischen Mathematik. Aber wir wissen, daß es bereits im 3. Jt. v. u. Z. eine entwickelte Schrift, ein Zahlen-, ein Maßsystem und einen Kalender gab. Das Jahr wurde in 12 Monate zu 30 Tagen geteilt. Das Ende des Jahres beschlossen fünf zusätzliche Tage. Diese Jahreseinteilung stammt aus der Zeit, in der die ersten Pyramiden gebaut wurden, die die Griechen zu den sieben Weltwundern zählten.

Betrachtet man die altägyptische Mathematik, so erscheint sie vom Standpunkt selbst der Schulmathematik aus gesehen als ziemlich primitiv, gelangten doch die Ägypter über die Arithmetik gebrochener Zahlen, über lineare und unvollständige quadratische Gleichungen nicht hinaus. Da ein Begriff für Gleichungen fehlte, waren diese auch nicht von der Art, wie wir es heute gewöhnt sind. In ihrer Mehrheit tragen die Aufgaben einen konkreten Charakter. Im Mittelpunkt des



Das Foto zeigt zwei Spalten des *Moskauer Papyrus* mit der Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit Seiten 2 und 4, und Höhe 6 Ellen. Oben: der hieratische Text; unten: die Umschrift in Hieroglyphen.

Der Text lautet:

(1) Addiere du zusammen diese 16
(2) mit dieser 8 und mit dieser 4.
(3) Es entsteht 28. Berechne du
(4) $\frac{1}{3}$ von 6. Es entsteht 2. Rech-
(5) ne du 28 2mal. Es entsteht 56.
(6) Siehe: er ist 56. Du hast richtig gefunden.

Interesses standen die Rechnungen. Das Zahlensystem war recht einfach. Spezielle Zeichen gab es lediglich für die Zehnerpotenzen bis zu Zehnmillionen. Die anderen Zahlen wurden additiv gebildet. Bei 345 beispielsweise wiederholt sich das Zeichen für Hundert dreimal, das Zeichen für Zehn viermal und das Zeichen für Fünf fünfmal. Addition und Subtraktion werden in den Papyri nicht erläutert, da sie offensichtlich zu einfach waren. Wenn man addiert, so fügt man dem einen Summanden die Anzahl der Zeichen für die Einer, Zehner, Hunderter usw. des zweiten Summanden einfach hinzu. Dabei geht man von einer Potenz zur nächst höheren über, wenn zehn Zeichen der niederen geschrieben worden sind. Die Multiplikation mit einer ganzen Zahl wurde auf das Verdoppeln und somit auf die Addition zurückgeführt.

Beispiel (mit modernen Zahlzeichen):

29×21

/ 1	29
2	58
/ 4	116
8	232
/16	464
Ergebnis: 21	609

Die Schrägstriche kennzeichnen die notwendigen Summanden. Ihre Summe entspricht dem Produkt der beiden Faktoren. Mitunter führte man die Multiplikation anstelle mit 2 mit 5 und 10 aus.

Die Division wurde als eine Art Umkehrung der Multiplikation verstanden. Um 297 durch 11 zu teilen, stellte sich ein Schreiber offenkundig die Frage:

Mit welcher Größe muß man 11 multiplizieren, um 297 zu erhalten?

Modern geschrieben ergibt sich:

/ 1	11
/ 2	22
4	44
/ 8	88
/16	176
Ergebnis: 27	297

War der Quotient keine ganze Zahl, sondern eine gemischte Zahl oder ein Bruch, ersetzten die altägyptischen Rechner die Division $m:n$ durch die Multiplikation $m \cdot \frac{1}{n}$. Dadurch gelangten sie zu einer Klasse von Brüchen, deren Zähler Eins ist. Derartige Brüche werden Stammbrüche genannt und modern, dem altägyptischen Vorgehen angepaßt, als $\overline{n}$ geschrieben. Zu dieser Klasse zählten die Ägypter auch den Bruch $\frac{2}{3}$, der durch $\overline{\overline{3}}$ gekennzeichnet wird. Da alle anderen Brüche durch diese Stammbrüche dargestellt wurden, mußten sie in Summen von Stammbrüchen zerlegt werden.

Diese Aufgabe nun hat keine eindeutige Lösung. Aus diesem Grunde entstanden als Hilfsmittel spezielle Tabellen mit derartigen Zerlegungen. Auf das Potenzieren und Radizieren stießen die Schreiber im alten Ägypten bei der Berechnung quadratischer Flächen, kubischer Körper oder der Seite eines Quadrates aus seiner Fläche. Sie erläuterten diese Operationen jedoch nicht speziell und schufen auch keine besondere Terminologie dafür.

In den Papyri gibt es Aufgaben, die heute im Algebraunterricht in der Schule behandelt werden: lineare Gleichungen mit einer Unbekannten, unvollständige quadratische Gleichungen, arithmetische und geometrische Progressionen.

Beispiel: Aufgabe 19, Moskauer Papyrus

„Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $1\frac{1}{2}$mal zusammen mit 4. Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich? Berechne du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es entsteht 6. Rechne du mit $1\frac{1}{2}$, um zu finden 1. Es entsteht $\frac{2}{3}$. Berechne du von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4 nennt sich. Du hast richtig gefunden."

Modern ausgedrückt bedeutet das:

$$\frac{3}{2}x+4=10$$

1. Schritt $\frac{3}{2}x+4-4=10-4=6$

2. Schritt $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$

3. Schritt $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x=\frac{2}{3}\cdot 6=4$

Lösung: $x=4$.

In der Aufgabe 6 des Moskauer Papyrus werden die Seiten eines Rechtecks gesucht, wenn die Breite $\frac{3}{4}$ der Länge beträgt und die Fläche 12 ist. In moderner Form heißt das, daß die unvollständige quadratische Gleichung $ax^2=b$ zu lösen ist. Der altägyptische Rechner bewältigt dieses Problem verbal mit der Methode des „falschen Ansatzes". Der Schreiber nimmt zuerst an, daß die Länge 1 ist. Dann wird die Breite $\frac{3}{4}$. Ebenso groß wird der Flächeninhalt. Aber in der Aufgabe wurde gefordert, daß er 16mal größer sein soll, was bedeutet, daß die Länge gleich $\sqrt{16}=4$ und die Breite 3 sein müssen.

Die Aufgabe 79 im Papyrus Rhind führt zur Summe einer geometrischen Reihe:

„Inventar eines Haushaltes:

7 Häuser	2401 Getreideähren
49 Katzen	16807 hekat (ein Getreidemaß)
343 Mäuse	zusammen: 19607."

Diese Aufgabe ist dafür berühmt, daß sie sich mit geringfügigen Änderungen in der Formulierung bei verschiedenen Völkern zu unterschiedlichen Zeiten nachweisen läßt.

In der Geometrie bestimmten die alten Ägypter Flächeninhalte und Volumina von Körpern. Dabei erzielten sie gute Ergebnisse, ohne jedoch die Geometrie zu einer selbständigen mathematischen Disziplin zu entwickeln.

Probleme zur Ermittlung von Flächeninhalten ebener Figuren erwuchsen aus der Praxis der Landvermessung. Da keine Spezialausdrücke wie „Fläche" oder „Figur" vorhanden waren, sprach man in den Aufgaben von Feldern, von Flächenstücken mit festen Grenzen oder mit fester „Breite" und „Länge".

Die Flächen eines Rechtecks, eines Dreiecks oder eines Trapezes werden noch heute nach denselben Formeln ermittelt, wie es damals geschah. Ein beliebiges Viereck berechnete man approximativ $S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$, wo a und c, b und d die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks sind. Die Kreisfläche bestimmte man mit der Formel $S=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, wo d der Durchmesser ist. Das entspricht der ziemlich guten Näherung von 3,1605 für π. Das Volumen vieler Körper, z. B. des Würfels, des Parallelepipeds, des Prismas oder des Zylinders, berechneten die Ägypter als Produkt von Grundfläche und Höhe. Das war nötig, um die Getreidemengen in Speichern und Lagern derartiger Form feststellen zu können.

Obwohl seit der Veröffentlichung des Moskauer Papyrus einige Jahrzehnte vergangen sind, streiten sich die Mathematikhistoriker noch heute und stellen Hypothesen auf, wie diese oder jene Regel gefunden worden ist, wie diese oder jene Formulierung einer einzelnen Aufgabe zu deuten ist. Das betrifft z. B. die zehnte Aufgabe des Moskauer Papyrus. V. V. Struve übersetzte diese Aufgabe so: „Form der Berechnung eines Korbes, wenn man dir nennt einen Korb mit einer Mündung zu $4\frac{1}{2}$ in Erhaltung. *O* laß mich wissen seine (Ober)fläche. Berechne du $\frac{1}{9}$ von 9, weil ja der Korb die Hälfte eines Eies ist. Es entsteht 1. Berechne du den Rest als 8. Berechne du $\frac{1}{9}$ von 8. Es entsteht $\overline{\overline{3}}+\overline{6}+\overline{18}$. Berechne du den Rest von dieser 8 nach diesen $\overline{\overline{3}}+\overline{6}+\overline{18}$. Es entsteht $7+\overline{9}$. Rechne du mit $(7+\overline{9})$ $4\frac{1}{2}$mal. Es entsteht 32. Siehe: es ist seine (Ober)fläche. Du hast richtig gefunden."

In der Interpretation von V. V. Struve wird der in der Aufgabe genannte „Korb" zu einer Halbkugel, und es ergibt sich die exakte Formel für die Oberfläche der Halbkugel (Bild 1). Diese Deutung wird von einigen Mathematik-

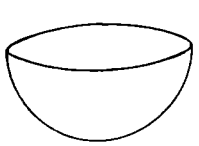


Bild 1

historikern geteilt. Zu ihnen gehören B. L. van der Waerden und R. Gillings.
E. T. Peet übersetzte die Bedingungen dieser Aufgabe anders. Seiner Meinung nach ist der „Korb" ein halber Zylinder. Damit ergibt sich die richtige Formel für die Mantelfläche eines Halbzylinders (Bild 2).

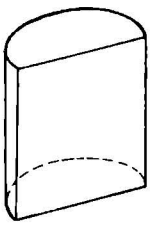


Bild 2

Eine dritte Erklärung gab O. Neugebauer. Er faßt den „Korb" als einen kuppelförmigen Getreidespeicher auf, wie er auf ägyptischen Zeichnungen abgebildet ist. Die Berechnung interpretiert er als Approximation (Bild 3).

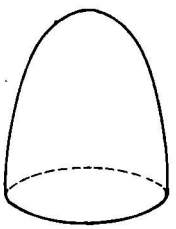


Bild 3

Vielleicht wird sich einer der Leser dieser Zeitschrift später beruflich mit der Geschichte der Mathematik beschäftigen und seine eigene Ansicht zu dieser und anderen ägyptischen Aufgaben vorstellen.

Eine bemerkenswerte Leistung der altägyptischen Mathematik ist die exakte Formel für das Volumen eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche, die in Aufgabe 14 des Moskauer Papyrus enthalten ist: $V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$,

h Höhe, a, b Seiten der Deck- und Grundfläche.

Wir haben gesehen, daß die Mathematik im alten Ägypten sich nicht in Arithmetik, Algebra und Geometrie aufgliederte, sondern sich als eine Menge von Regeln zur Lösung einfachster Aufgaben, die hauptsächlich aus der Praxis genommen worden sind, darbietet. Das Ergebnis wird häufig empirisch, durch Versuche gefunden. Dadurch läßt sich die Schwerfälligkeit vieler Regeln sowie die Tatsache erklären, daß die Lösungen nicht immer auf dem kürzesten Weg ermittelt werden. Gleichzeitig damit wurde Anfang des 2. Jahrt. v. u. Z. eine intensive theoretische Überarbeitung der Lösungsmethoden durchgeführt. Die Aufgaben selbst wurden in zunehmendem Maße verallgemeinert und nahmen einen abstrakten Charakter an. Die Mathematik Altägyptens beeinflußte ohne Zweifel die weitere Entwicklung der Wissenschaft, vor allem die altgriechische Mathematik.

A. I. Volodarskij (als Autor)/
S. Brentjes (als Übersetzer und Bearbeiter)

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. sc. nat. Volkmar Friedrich

Direktor der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

▲2206▲ Peter probiert zusammen mit seinem Vater einen neu gekauften einfachen Taschenrechner aus, der die vier Grundrechenarten ausführen kann. Begeistert ist er, wie schnell jetzt Rechnungen mit mehrstelligen Zahlen zu bewältigen sind.

Bei der Berechnung von $(9-\sqrt{80})^3$ wird es aber problematisch:

Da der kleine Taschenrechner keine Taste für Quadratwurzeln besitzt, greift Peter zu einer Zahlentafel und entnimmt ihr

$$\sqrt{80}\approx 8.9443.$$

Während Vater direkt

$$9-\sqrt{80}\approx 0.0557$$

und $(9-\sqrt{80})^3\approx 0.000173$

berechnet, benutzt Peter die ebenfalls in der Zahlentafel enthaltene Formel

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

und formt diese zu

$(a-b)^3=a^3+3ab^2-(3a^2+b^2)b$

um.

Ihm scheint diese Formel günstiger, da er dann $a=9$ und $b^2=80$ verwenden kann und nur für b den Näherungswert $b'=8.9443$ benutzen muß. Erschrocken stellt er fest, daß er hiermit

$a^3+3ab^2-(3a^2+b^2)b'=-0.0089$

erhält, was natürlich vollkommen falsch ist, da wegen $9>\sqrt{80}$ auch $(9-\sqrt{80})^3>0$ gilt.

Vater kennt eine Methode, wie man auch ohne eine $\sqrt{\ }$-Taste auf diesem kleinen Rechner die Quadratwurzel ermitteln kann und erhält $\sqrt{80}\approx 8.9442719$.

Die zuerst verwendete Näherung für $\sqrt{80}$ ist also recht gut. Der Taschenrechner scheint also nicht richtig zu funktionieren. Beide beschließen, ihn am kommenden Tag in der Verkaufsstelle umzutauschen.

Der Verkäufer hört sich die Beschwerde beider an. Sie probieren alle noch nicht verkauften Taschenrechner an dieser Aufgabe aus – und alle verhalten sich gleich. Der Verkäufer beschließt, alle Rechner als Ausschuß an den Herstellerbetrieb zurückzuschicken. Doch da fällt Peter etwas ein. Er rechnet ohne Hilfe des Taschenrechners nach – und steckt den gekauften Taschenrechner wieder ein.

Wie erklärte sich Peter, daß er, obwohl er den gleichen Näherungswert b' wie sein Vater verwendet hat, für $(9-\sqrt{80})^3>0$ mit der negativen Zahl -0.0089 eine wesentlich schlechtere Näherung (sogar mit falschem Vorzeichen!) erhalten hatte?

Welche Schlußfolgerungen zieht er für die Rechnung mit Näherungswerten?

Mit dem letzten Satz weisen wir die *alpha*-Leser auf den in Heft 2/81 erscheinenden Artikel von Dr. J. Gronitz (TH Karl-Marx-Stadt) hin:

Was jeder wissen sollte:
Probleme, die beim numerischen Rechnen auftreten.

1939 in Brunndöbra (Kreis Klingenthal) geboren.
Besuch der Grundschule in Adorf/Vogtl. und der Oberschule in Lichtenstein,
Abitur 1957 an der ABF II Halle.
1957 bis 1962 Mathematikstudium in Leningrad,
1962 Diplom.
1962 bis 1964 Assistent in Jena,
1964 bis 1965 Zusatzstudium in Leningrad.
1966 bis 1969 Tätigkeit als Mathematiker im VEB Elektronische Rechenmaschinen Karl-Marx-Stadt (heute Bestandteil des VEB Robotron).
1969 Promotion (Dr. rer. nat.),
1969 bis 1970 Oberassistent an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt,
1970 bis 1972 Dozent,
1971 Promotion B (Dr. sc. nat.),
seit 1972 Professor für *Numerische Mathematik* an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt,
seit 1980 Direktor der Sektion Mathematik der TH Karl-Marx-Stadt, 2 Monographien und etwa 20 Publikationen in wissenschaftlichen Zeitschriften.

Ausbildung von Diplommathematikern

mit vertieften technischen Kenntnissen an der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt (THK)

An der Sektion Mathematik der THK werden seit 1963 Diplommathematiker und seit 1965 Diplomlehrer für Mathematik und Physik ausgebildet (vgl. Schülerzeitschrift alpha 5/1976). Ab Studienjahr 1981/82 werden auch Diplommathematiker mit vertieften technischen Kenntnissen ausgebildet.

Warum wurde diese Ausbildungsmöglichkeit geschaffen?

Die Mathematik dringt in immer mehr Bereiche der gesellschaftlichen Praxis ein. In den Naturwissenschaften, in den technischen Wissenschaften, in vielen Bereichen der Volkswirtschaft sowie in der Planung und Leitung werden mathematische Theorien und Verfahren angewandt. Moderne Entwicklungen auf vielen Gebieten, so z. B. in der Mikroelektronik, in der chemischen Industrie, im Maschinenbau und im Bauwesen, wären ohne die Hilfsmittel der Mathematik nicht möglich. Durch die Entwicklung der EDV, die es erlaubt, umfangreiche und komplizierte Rechnungen in kurzer Zeit auszuführen, sind die Anwendungsmöglichkeiten mathematischer Modelle und Methoden weiter gewachsen.

Voraussetzung für jede Anwendung ist die richtige mathematische Modellierung von naturwissenschaftlichen, technischen und volkswirtschaftlichen Prozessen. Dabei verstehen wir unter Modellierung die Erfassung der wesentlichen Zusammenhänge in diesen Prozessen durch mathematische Beziehungen (Gleichungen, Ungleichungen) zwischen den verschiedenen Ausgangs-, Ergebnis- und Einflußgrößen, d. h. zwischen den Größen (Variable, Funktionen), die Ausgangssituation und Endzustand beschreiben sowie Größen, über die wir den Prozeß steuern können oder die ihn zufällig beeinflussen. Zur Modellierung gehört auch eine mathematische Formulierung des angestrebten Zieles (z. B. Angabe der Abhängigkeit der Ergebnis- von den Ausgangsgrößen als Funktionen bzw. Funktionswerttabellen, Bestimmung des günstigsten (wirtschaftlichsten) Prozeßablaufs (Optimierung).) Wenn man solche mathematischen Modelle schaffen will, benötigt man vertiefte Kenntnisse auf physikalischem und technischem Gebiet, ist die Zusammenarbeit mit Physikern und Technikern notwendig. Deshalb werden in der Zukunft in viel stärkerem Maße Mathematiker mit vertieften Kenntnissen in den wesentlichsten Anwendungsgebieten benötigt.

Entsprechend dem Profil der THK sollen bestimmte Erfordernisse des Maschinenbaus als Grundlage für die vertiefte technische Ausbildung auf ausgewählten Gebieten als Schwerpunkte genommen werden. Dieses Ziel ist deshalb von uns zu verwirklichen, weil wir uns in den zurückliegenden Jahren auch mit unterschiedlichen angewandten Aufgabenstellungen befaßt haben. In diese Forschungsaufgaben sind auch viele Studenten einbezogen.

Die nachstehenden Beispiele sollen die Vielfalt technischer und naturwissenschaftlicher Aufgaben charakterisieren, die von Lehrkräften und Studenten der Sektion Mathematik der THK untersucht wurden oder noch werden.

- Die Berechnung von Temperatur- und Spannungsverteilungen während der Wärmebehandlung von Gußkörpern erlaubte dem SKET Magdeburg bedeutende Energieeinsparungen und Erweiterung der Produktionskapazität.
- Temperaturfeldberechnungen sind auch Grundlage für die Verbesserung von Patentierungstechnologien für Stahldrähte im VEB Draht- und Seilwerke Rothenburg.
- Als Jugendobjekt wurden Methoden zur Lösung großer Optimierungsaufgaben auf die Produktionsplanung im VEB Waschgerätewerk Schwarzenberg angewandt.
- Berechnungen an Ansaugsystemen und Dieseleinspritzanlagen verschiedener Varianten von Pkw-Motoren ermöglichten wesentliche Einsparungen bei Bau und Erprobung von Versuchsmustern.
- Mathematische Betrachtungen führten zu Verbesserungen an der Konstruktion von Zahnrädern und bei der Technologie des Fräsens von Schnecken und helfen bei der Untersuchung hochproduktiver Schleiftechnologien.
- Ein Kollektiv aus Ingenieur- und Mathematikstudenten erhielt für Untersuchungen zur zerstörungsfreien Prüfung von Gußstükken den Jugendneuererpreis.
- Die mathematische Nachbildung einzelner physikalischer Vorgänge bei der Herstellung und bei der Nutzung mikroelektronischer Bauelemente unterstützt Physiker und Technologen in ihrer Forschung.
- Untersuchungen zur Genauigkeit, mit der aus Satellitenmeßwerten die gesamte Temperaturverteilung in der Atmosphäre berechnet werden kann, ermöglichten dem *Meteorologischen Dienst* Schlußfolgerungen zur Nutzung spezieller Meßgeräte in Satelliten.

Die Erfahrungen aus diesen Untersuchungen und aus der Einbeziehung der Studenten in diese Anwendungen mathematischer Methoden zeigen deutlich, daß es notwendig ist, Mathematiker mit vertieften naturwissenschaftlichen und technischen Kenntnissen auszubilden. Für eine derartige Ausbildung besitzen Technische Hochschulen beste Voraussetzungen auf Grund der vorhandenen engen Zusammenarbeit von Mathematikern mit naturwissenschaftlichen und technischen Sektionen sowie mit unmittelbaren Praxis-

partnern. Entsprechend dem Profil der THK werden in der Mathematikerausbildung die Fragen der Modellierung an Problemstellungen des Maschinenbaus (im weiteren Sinne) erörtert. Die Möglichkeit einer Kombination der Mathematikerausbildung mit Problemen der Informationstechnik (mathematische Methoden des Schaltungsentwurfs, der Schaltungsanalyse usw.) werden gegenwärtig geprüft.

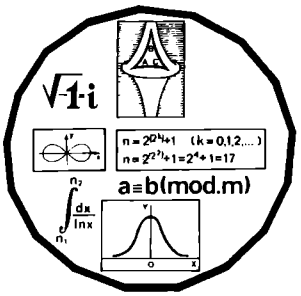
Was ist der Inhalt des Studiums?
Wie sieht der Studienplan aus?
Das Studium dauert 5 Jahre. Es ist ein Diplommathematiker-Studium. Der Studienplan unterscheidet sich von bisherigen Plänen durch eine verlängerte Grundstudienphase zugunsten physikalischer und technischer Gebiete. Der Plan orientiert auf die Vermittlung umfangreicher Kenntnisse aus allen wichtigen mathematischen Disziplinen (Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Algebra, Geometrie, Näherungsmethoden, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Optimierung) und auf die Entwicklung der erforderlichen Fertigkeiten in der Handhabung des mathematischen Apparates dieser Disziplinen entsprechend den für alle Universitäten und Hochschulen einheitlichen Zielen in der Mathematikerausbildung.
Eine wichtige Rolle im Studienplan spielen auch die Kenntnisse und Fertigkeiten in der Nutzung der modernen Rechentechnik, Grundlagen für die mathematische Modellierung werden vom ersten Studienjahr an vor allem durch die Ausbildung in Physik (Mechanik der Massenpunkte und Starrkörper sowie elastischer Körper und strömender Medien; Wärmelehre, elektrische und magnetische Felder) und durch die Diskussion grundlegender technischer Funktionselemente und der durch sie realisierten physikalischen Grundgesetze geschaffen.
Hierauf aufbauend werden in der Spezialausbildung sowohl analytische als auch numerische Untersuchungsmethoden vertieft als auch Ergebnisse und Tendenzen der Modellierung kontinuierlicher und diskontinuierlicher technologischer Verfahren und Prozesse im Maschinenbau an ausgewählten Beispielen behandelt (z. B. durch wahlobligatorische Lehrveranstaltungen zu mathematischen Modellen technologischer Verfahren, zum Stand der mathematischen Beschreibung von Werkstoffeigenschaften, zu Grundbegriffen der Regelungstheorie und technischen Regelungen, zur (optimalen) Steuerung technologischer Verfahren und zu vielfältigen Problemen des Einsatzes der Rechentechnik in der Steuerung von Produktionsprozessen).
Die Studenten haben günstige Voraussetzungen zur Mitarbeit bei Forschungsaufgaben, die stark anwendungsorientiert sind und für die Zusammenarbeit mit technischen Sektionen und Praxispartnern, insbesondere aus dem Maschinenbau. Eine solche Arbeit ist in Vorbereitung auf künftige Einsatzmöglichkeiten vorgesehen.
Beim Betriebspraktikum, bei der Vergabe der Themen für die Jahres- und Diplomarbeit sowie beim Einsatz nach Abschluß des Studiums wird die spezielle Ausbildungsrichtung starke Berücksichtigung finden.

Welche Einsatzmöglichkeiten gibt es für die Absolventen?
Die Diskussion verschiedenartiger Probleme der mathematischen Modellierung an Beispielen aus dem Maschinenbau engt das Einsatzgebiet des Absolventen jedoch nicht auf den Maschinenbau ein, sondern eröffnet gleichzeitig den Zugang zu Anwendungen in der chemischen Industrie, der Energetik, der Elektrotechnik und Mikroelektronik u. ä. Ebenso bestehen Möglichkeiten einer weiterführenden wissenschaftlichen Entwicklung an der Sektion auch zur mathematischen Grundlagenforschung, vor allem zu Näherungsmethoden (Numerische Mathematik), zur Mathematischen Physik, zur Optimierung und zur Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik.

V. Friedrich

Ein Hobelspan aus Gauß' Werkstatt

C. F. Gauß
* 30. April 1777
† 23. Februar 1855



Am 22. 9. 1836 teilte der Altonaer Astronom *H. C. Schumacher* (1780 bis 1850) seinem Freund *Carl Friedrich Gauß* (1777 bis 1855) in Göttingen mit, er habe von dem Hamburger Astronomen *K. L. Rümcker* (1788 bis 1862) folgende Aufgabe mit Lösung erhalten: *Es ist eine Ellipse und in ihrer Ebene außerhalb von ihr ein Punkt P gegeben. Von diesem Punkt sind Tangenten an die Ellipse zu ziehen, ohne einen Zirkel zu gebrauchen.*
Die Rümckersche Lösung sah so aus (siehe Bild 1): Von *P* werden 4 beliebige, die Ellipse schneidende Geraden gezogen. Sie schneiden die Ellipse in *A* und *a*, *B* und *b*, *C* und *c*, *D* und *d*. Nun wird *A* mit *b*, *B* mit *a*, *C* mit *d*, *D* mit *c* verbunden. Die jeweiligen Schnittpunkte sind *Q* und *R*. Die Gerade durch *Q* und *R* schneidet die Ellipse in *E* und *F*, das sind die Berührungspunkte der von *P* an die Ellipse gezogenen Tangenten.
Schumacher fügte hinzu, offenbar habe *Rümcker* eine Gerade zu viel gezogen, denn man könnte mit 3 Geraden durch *P*, die die Ellipse schneiden, auskommen.

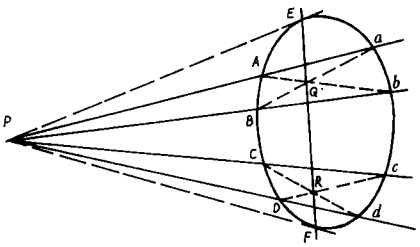


Bild 1
Konstruktion von *Rümcker*

Am 28. 9. 1836 antwortete *Gauß*, *Rümcker* habe in der Tat zu viele Linien gezogen und 3 Geraden reichten aus. Aber auch das sei noch zuviel – zwei Geraden durch *P*, die die Ellipse schneiden, seien schon hinreichend. Zugleich gab *Gauß* seine Lösung an. Zu finden ist die zu dieser Auskunft von *Gauß* gehörige Konstruktion unter Angabe des Satzes, auf dem sie beruht (siehe Bild 2).

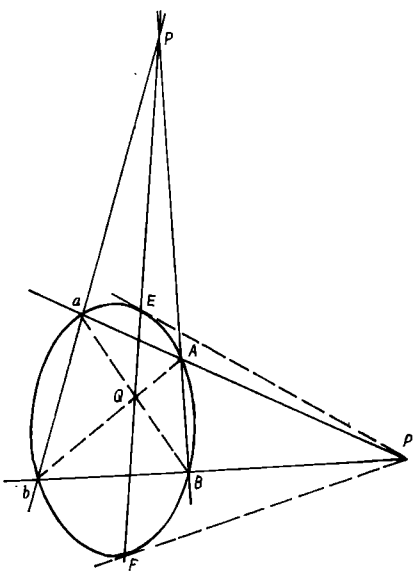


Bild 2
Lösung (Schnittpunkte der Polaren von *P* mit der Ellipse sind die Berührungspunkte der Tangenten von *P* an die Ellipse)

Mitgeteilt von K.-R. Biermann

Mathematiker-Kongreß der DDR 1981

Sonderstempel

Aus dem Referat des Ministers für Hoch- und Fachschulwesen der DDR
zur Eröffnung des Mathematiker-Kongresses

...Wenn auf dem X. Parteitag der SED im April 1981 festgestellt wurde, daß „die Möglichkeiten der wissenschaftlich-technischen Revolution unmittelbar zur Hauptreserve für Leistungswachstum und Effektivität unserer Volkswirtschaft geworden" sind, so gehört die Mathematik zweifellos zu den unverzichtbaren Kettengliedern bei der allseitigen Beschleunigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts.

Reichen die Wurzeln mathematischen Denkens in die Frühzeit der menschlichen Entwicklung zurück, so können wir doch heute feststellen, daß die Mathematik eine jung gebliebene und dynamische Wissenschaft ist. Besonders spürbare Impulse erwachsen ihrer Entwicklung und breiten Anwendung aus den modernen und revolutionierenden Möglichkeiten höchst leistungsfähiger Rechentechnik in den letzten Jahren.

In neuer Dimension stellen sich heute die Ansprüche an die Mathematik. Bereits Friedrich Engels schrieb dazu im Anti-Düring „Wie alle anderen Wissenschaften ist die Mathematik aus den Bedürfnissen der Menschen hervorgegangen."

...Aber wie in allen Gebieten des Denkens werden auf einer gewissen Entwicklungsstufe die aus der wirklichen Welt abstrahierten Gesetze von der wirklichen Welt getrennt, ihr als etwas Selbständiges gegenübergestellt, als von außen kommende Gesetze."

Deshalb gelten unsere Aufmerksamkeit und Förderung stets sowohl dem fundamentalen theoretischen Fortschritt der Mathematik als auch der konsequenten Anwendung und Nutzung ihrer Ergebnisse und Potenzen. Auf dem Gebiet der applikativen und interdisziplinären Forschung erschließen sich ständig neue Felder für volkswirtschaftlich interessante produktivitätswirksame Anwendungen.

Es ist daher eine Aufgabe von gesellschaftlicher Tragweite, die Mathematik in stärkerem Maße für die Entwicklung anderer Wissenschaftsdisziplinen wirksam zu machen.

Prof. H.-J. Böhme

Im Jahr des X. Parteitages der SED war die Karl-Marx-Universität Schauplatz eines für die mathematische Wissenschaft bedeutsamen Ereignisses: Aus Anlaß des 100. Geburtstages des Mathematischen Seminars der Leipziger Universität (siehe *alpha* 2/81) fand in der Zeit vom 28. 9. bis 2. 10. 1981 in Leipzig der „Mathematiker-Kongreß der DDR 1981" statt. (Der nächste Kongreß wird 1986 in Rostock sein.) Er wurde veranstaltet von der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Zusammenarbeit mit der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität. Dieser erste „Kongreß" stellte infolge der gewachsenen Breite, Leistungsfähigkeit und Praxiswirksamkeit der DDR-Mathematik und durch seinen auch auf Nichtmitglieder der Mathematischen Gesellschaft und ausländische Wissenschaftler erweiterten Teilnehmerkreis eine qualitativ und quantitativ neue Fortsetzung der bisher durchgeführten „Haupttagungen" der Mathematischen Gesellschaft dar.

Teilnehmer

Am Mathematiker-Kongreß nahmen etwa 1000 Fachwissenschaftler von den Universitäten, Hoch- und Fachschulen der DDR, Mathematiker und Praktiker aus vielen Bereichen der sozialistischen Volkswirtschaft, Mathematiklehrer aus unserem Volksbildungswesen sowie Wissenschaftler aus der UdSSR, der ČSSR, der VR Polen, der VR Bulgarien, der Ungarischen VR, der SR Rumänien, der SR Vietnam, der VDR Jemen, aus Kuba, Äthiopien, den USA, der BRD, der Schweiz, aus Japan, Österreich, Finnland, den Niederlanden, Belgien und Frankreich teil.

Wissenschaftliches Programm

Der Mathematiker-Kongreß verfolgte das Ziel, den bisher erreichten Entwicklungsstand und die Entwicklungstendenzen der Mathematik einzuschätzen sowie über neueste Forschungsmethoden und Forschungsergebnisse sowie ihre Anwendungen, insbesondere in der Physik und in anderen Natur- und Technikwissenschaften zu informieren. Er diente der Weiterbildung und Information für die in Forschung, Praxis und Volksbildung tätigen Fachkollegen. Auf dem Programm des Kongresses standen etwa 180 Veranstaltungen, darunter 4 Plenar-, 40 Übersichts- und etwa 80 Halbstundenvorträge. Des weiteren wurden auf 47 Poster-Beiträgen an Übersichtstafeln bedeutsame Forschungsergebnisse in Kurzform dargestellt. Außerdem fanden sieben Diskussionsveranstaltungen statt, in denen Probleme der Mathematik-Ausbildung in Schule und Hochschule, der Talenteförderung, der Rolle der Mathe-

Prominente Gäste zur Eröffnung des Kongresses (v. l. n. r.): Prof. Dr. H. Schumann, Direktor der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig, Prof. H.-J. Böhme, Minister für Hoch- und Fachschulwesen der DDR, Prof. Dr. L. Rathmann, Rektor der KMU Leipzig, Prof. Dr. W. Engel, Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der DDR (1971 bis 1981), Dr. D. Keller, Sekretär für Wissenschaften der SED-Bezirksleitung Leipzig

matik in der sozialistischen Praxis sowie des Zusammenwirkens von Mathematik und Informationsverarbeitung beraten und dabei gewonnene Erfahrungen ausgetauscht wurden.

Traditionspflege

Aus dem 1881 an der Universität Leipzig gegründeten *Mathematischen Seminar*, dessen Gründer und erster Direktor Felix Klein (1849 bis 1925) war, gingen das spätere Mathematische Institut und die heutige Sektion Mathematik hervor. Einige Aktivitäten der Sektion in Vorbereitung auf den 100. Jahrestag der Gründung des Leipziger Mathematischen Seminars waren die Einrichtung eines Traditionskabinetts und die Herausgabe eines Jubiläumsbandes „100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig", der zum Kongreß erschienen ist. Auch der Mathematiker-Kongreß stand ganz im Zeichen der Pflege fortschrittlicher Traditionen. Der Eröffnungsvortrag des Kongresses, gehalten vom Direktor der Sektion Mathematik der KMU, Prof. Dr. H. Schumann, „Zum 100. Jahrestag der Gründung des Leipziger Mathematischen Seminars" war ein würdiger Auftakt dazu und gab dem Kongreß das Gepräge. Ein weiterer Plenarvortrag war der mathematikhistorische Beitrag „Bernard Bolzano zum 200. Geburtstag, Beiträge zur Analysis" von Prof. Dr. H. Wußing (siehe *alpha* 6/81). Ebenso war das wissenschaftliche Programm des Kongresses stark ausgerichtet auf das historisch gewachsene, breite und anwendungsorientierte Forschungsprofil der Leipziger Mathematiksektion, in dem die Analysis eine dominierende Stellung einnimmt.

Studentenkonferenz

Am Vorabend des Mathematiker-Kongresses, am 25. 9. und 26. 9. 1981, fand in Leipzig ein weiteres – besonders für die studentische Forschung bedeutsames – Ereignis, die „3. Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonferenz Mathematik" statt. Veranstalter waren der Wissenschaftliche Beirat für Mathematik beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen, die Mathematische Gesellschaft und der Zentralrat der FDJ.
Teilnehmer der zweitägigen Konferenz waren etwa 200 Mathematik- und Mathematiklehrerstudenten von den Universitäten sowie Technischen und Pädagogischen Hochschulen der DDR, im sozialistischen Ausland studierende DDR-Studenten sowie ausländische Studentenvertreter. Teilnehmende Wissenschaftler und Praktiker standen den Studenten als erfahrene Gesprächspartner zur Seite. Wie schon bei den vorangegangenen Konferenzen dieser Art (1977 und 1979 in Leipzig) stellten die Studenten in 4 Plenar- und 33 Kurzvorträgen Ergebnisse ihrer mathematischen Forschungsarbeit vor, die sie im Rahmen von Jugendobjekten, Studentenzirkeln, Jahres-, Praktikums- und Diplomarbeiten oder als Forschungsstudenten in Dissertationen erzielt haben. Darüber hinaus wurden 23 der besten Exponate in einer Ausstellung gezeigt. Die vorgetragenen und ausgestellten Arbeiten waren durch eine Jury aus etwa 100 zur Konferenz eingereichten Arbeiten ausgewählt worden. Sie wurden mit Reisen, Geld- und Buchprämien sowie Ehrenmedaillen der Mathematischen Gesellschaft ausgezeichnet. Auswahlkriterien waren dabei wissenschaftlicher Erkenntniszuwachs, mathematische Originalität sowie praktische Nutzbarkeit. Als Beispiele hervorragender Exponate seien genannt: die im Rahmen eines Jugendobjekts entstandene Arbeit „Einhaltung des Komparatorprinzips bei der Herstellung mikroelektronischer Bauelemente" von Norman Bitterlich (FSU Jena), die Diplomarbeit „Thermoschockvorgänge bei metallurgischen Prozessen" von Andreas Schürer (TH Karl-Marx-Stadt), die Diplomarbeit „Ein relationales Datenbankmodell" von Christina Adler (KMU Leipzig), die Praktikumsarbeit „Spannungsgeometrie bei Stirnzahnrädern" von Eckard Wildgrube (MLU Halle) und die Dissertationen „Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren" von Helga Baum (HU Berlin), s. Foto, und „Grenzwertsätze" von Lothar Heinrich (TU Dresden). Neben dem von Prof. Dr. G. Laßner (KMU Leipzig) gehaltenen Eröffnungsvortrag „Zum mathematisch-physikalischen Weltbild" gehörten zum Konferenzprogramm noch zwei Diskussionsrunden, die sich mit den Anforderungen der Praxis an einen Mathematikabsolventen und den Möglichkeiten zur Förderung begabter Schüler auf dem Gebiet der Mathematik beschäftigten. Studentenkonferenzen dieser Art werden auch in Zukunft alle zwei Jahre stattfinden.

Weitere Veranstaltungen

Zum Geschehen des Mathematiker-Kongresses gehörte auch eine Mitgliederversammlung der Mathematischen Gesellschaft der DDR, auf welcher der neue Vorstand der Gesellschaft gewählt wurde. Ebenso wurde auf dem Kongreß erstmalig die *Ehrenmedaille der Mathematischen Gesellschaft* verliehen, und zwar an zwei Wissenschaftler und drei ehemalige Forschungsstudenten. Auch erwartete die Kongreßteilnehmer ein interessantes Rahmenprogramm: Führungen und Besichtigungen in Leipzig, Ausflüge nach Kohren-Sahlis, Wörlitz, Altenburg und Rochsburg und ein geselliger Abend. *J. Lehmann/R. Mildner*

Prof. Dr. sc. nat. Rolf Klötzler, während des Kongresses zum neuen Vorsitzenden der Mathematischen Gesellschaft gewählt

Kurzbiographie

Geboren 1931 in Chemnitz (jetzt Karl-Marx-Stadt), hier Besuch der Grundschule von 1937 bis 1945 und der Oberschule mit Abitur von 1945 bis 1949.
1949 bis 1953 Studium in Leipzig, 1953 Diplom, Aspirantur bei Ernst Hölder, 1956 Promotion zum Dr. rer. nat., 1960 Habilitation,
1956 bis 1959 tätig am Forschungsinstitut für reine Mathematik der Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
ab 1959 Dozent und von 1963 bis 1965 ordentlicher Professor an der Hochschule für Bauwesen in Leipzig, anschließend (1965 bis 1971) an der Martin-Luther-Universität Halle tätig,
seit 1972 ord. Prof. an der Sektion Mathematik der KMU Leipzig. Hier baute er die Forschungsrichtung „Mathematische Methoden der Operationsforschung" mit auf. Sein wissenschaftliches Arbeitsgebiet: Variationsrechnung und Steuerungstheorie; bisher etwa 40 Veröffentlichungen, seit Anfang 1981 Chefredakteur der neugegründeten internationalen „Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen". Prof. K. leitete während seiner Tätigkeit an der Hochschule für Bauwesen Leipzig eine Arbeitsgemeinschaft zur Förderung *Junger Mathematiker* und war stets Förderer der Olympiadebewegung.

Prof. Dr. W. Engel überreicht Helga Baum (Humboldt-Universität zu Berlin) die Ehrenmedaille der Mathematischen Gesellschaft. Weiter erhielten für ihre Beiträge zur Studentenkonferenz eine Ehrenmedaille: Albrecht Heß (Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald) und Thomas Runst (Friedrich-Schiller-Universität Jena). Diese drei jungen Wissenschaftler werden wir in *alpha* vorstellen.

Grußadresse aus der UdSSR

An den Mathematiker-Kongreß der DDR 1981

Liebe Freunde und Kollegen!

Gestatten Sie mir bitte, den Teilnehmern des 1. Mathematiker-Kongresses der DDR – einer wichtigen Etappe der Entwicklung der Wissenschaft in Ihrem Land – die herzlichsten Grüße zu übermitteln.

Ich bin glücklich, wenn ich daran denke, daß ich Anfang der 50er Jahre am Wiederaufleben des Hochschulwesens Ihrer damals ganz jungen Republik teilnehmen konnte. Ich bin stolz, daß ich eine Reihe von Mathematikern Ihres Landes zu meinen Schülern zählen darf und daß sie zu führenden Gelehrten herangewachsen sind, die wichtige Gebiete der Wissenschaft bereichern.

Ich möchte meine große Bewunderung zum Ausdruck bringen, welche ich bei der Arbeit mit der mathematischen Jugend empfand, denn sie besitzen Fähigkeiten, hervorragend zu arbeiten, sind gewohnt, eine begonnene Arbeit bis zum Ende durchzuführen und dringen in ein vor ihnen stehendes Problem bis zum Kern ein.

Ohne Zweifel ist, daß Wissenschaft und Bildung zusammengehören; es kann keine wertvolle mathematische Bildung sein, ohne daß dabei moderne Probleme der Wissenschaft aufgezeigt und eine tiefe Klärung der Rolle der mathematischen Methoden in den Erkenntnissen der Natur, Entwicklung der Technik und Organisation der Industrie gezeigt werden.

Für mich ist ein Ideal der Mathematiker, welcher erstens der Mathematik in ihren wichtigsten Entwicklungsrichtungen Fortschritt verleiht, zweitens die mathematischen Methoden für die Lösung der Aufgaben in der Praxis benutzen kann und in Anwendungsfragen die Quelle der neuen Möglichkeiten der Entwicklung der Mathematik selbst sieht und drittens die Schüler so erziehen kann, daß sie zur Begeisterung des wissenschaftlichen Suchens fähig sind.

Ich selbst bin glücklich, daß ich solche Lehrer – Kolmogorow, Chintschin u. a. – hatte.

Leider kann ich an Ihrem Kongreß nicht teilnehmen. Ich wünsche Ihnen von ganzem Herzen große Erfolge bei der Arbeit des Kongresses und weitere stürmische Entwicklung der theoretischen und angewandten Mathematik in Ihrem Land.

Leninpreisträger Prof. Dr. B. W. Gnedenko
Akademiemitglied der Ukrainischen SSR,
Sektion Mathematik der Lomonossow-Universität

Ungleichungen

Klasse 1

▲1▲ $a<3$

▲2▲ $3+a<7$

▲3▲ $7-u>3$

▲4▲ Vergleiche 62 mit 69!

Klasse 2

▲1▲ Vergleiche 7 mit 11! Begründe mit Hilfe der Addition!

▲2▲ $48<x<53$

▲3▲ Vergleiche die Produkte $3\cdot4$ und $5\cdot4$!

▲4▲ $y\cdot4<11$

Klasse 3

▲1▲ Vergleiche 700 mit 900, und begründe das Ergebnis!

▲2▲ Für welche Zahlen x gilt die Ungleichung $5897<x<5903$?

▲3▲ Ordne die Zahlen 857, 386, 397, 75, 392 der Größe nach!

▲4▲ Welche Zahlen x erfüllen die Ungleichung $580<10\cdot x<620$?

Klasse 4

▲1▲ Vergleiche 70000 mit 40000, und begründe den Vergleich!

▲2▲ Welche Vielfachen von 10000 erfüllen die Ungleichung $70000-a<20000$?

▲3▲ Ermittle jeweils die kleinste und die größte Zahl x, die die Ungleichung $10000<x<100000$ erfüllt!

▲4▲ Gib alle möglichen Zahlenpaare an, die die Ungleichung $m+n<3$ erfüllen!

Klasse 5

▲1▲ Vergleiche die Brüche $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}$ miteinander!

▲2▲ Gibt es zwischen den folgenden Ungleichungen einen Zusammenhang?

a) $2<3$ und $7<8$,

b) $9>6$ und $99>66$.

▲3▲ Welche natürlichen Zahlen erfüllen die folgenden Ungleichungen?

a) $27>3\cdot x-2$,

b) $3z+3<17$,

c) $d+4<11$,

d) $11>a-1$,

e) $3<x+4<11$.

▲4▲ Vergleiche $4\cdot3$ mit 4^3!

▲5▲ Für das Volumen V eines Quaders gilt $V<12\,\text{cm}^2$.

Welche Kantenlängen a, b, c (gemessen in cm) mit $a<b<c$ erfüllen diese Ungleichung, wenn die Maßzahlen natürliche Zahlen sind?

Klasse 6

▲1▲ Für welche natürlichen Zahlen x gelten folgende Ungleichungen?

a) $\frac{3}{5}<\frac{x}{5}<\frac{8}{5}$,

b) $\frac{9}{11}<\frac{x}{2}<\frac{8}{9}$,

c) $\frac{3}{5}<\frac{4}{x}<\frac{5}{3}$ mit $x\neq0$.

▲2▲ Gib mindestens drei gebrochene Zahlen x an, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen!

a) $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$,

b) $\frac{25}{7}<x<\frac{24}{9}$,

c) $6\frac{3}{4}>x>\frac{6}{4}$.

▲3▲ Setze zwischen die folgenden Terme die richtigen Zeichen ($<$; $>$; $=$)!

a) $1{,}83+0{,}5\,\square\,1{,}14+1{,}17$,

b) $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\,\square\,\frac{36}{12}$,

c) $2\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}\,\square\,\frac{27}{5}-\frac{22}{7}$.

▲4▲ Es seien a, b, c, d, die Längen der Seiten und e, f die Längen der Diagonalen eines konvexen Vierecks $ABCD$.

Weise nach, daß dann stets $e+f<a+b+c+d$ gilt!

Klasse 7

▲1▲ Es seien a, b, c die Längen der Seiten eines Dreiecks ABC und h_a, h_b, h_c die Längen der zugehörigen Dreieckshöhen.

Weise nach, daß aus $a<b<c$ stets $h_a>h_b>h_c$ folgt.

▲2▲ Es sind 3 Liter 70%ige Säure mit 12%iger Säure so zu mischen, daß eine Flüssigkeit entsteht, die weniger als 30%, aber mehr als 20% Säure enthält.

Wieviel Liter 12%iger Säure darf man zusetzen?

▲3▲ Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a<b$, die beide von Null verschieden sind.

Beweise, daß dann $\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$ gilt!

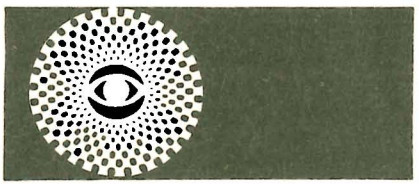
▲4▲ Löse die folgenden Ungleichungen im Grundbereich der rationalen Zahlen!

a) $|x|>2x$, c) $|x+2|<12$,

b) $|x|+2>10$, d) $|x+1|>1$.

Zusammenstellung aus den Mathematiklehrbüchern der DDR (Klasse 1 bis 7) von J. Lehmann/Th. Scholl

Die Lösungen folgen in Heft 2/82 sowie weitere Probleme für die Klassen 8 bis 10, d. Red.



ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Sechs mal sechs

2. Bezirksvergleich Junger Mathematiker zwischen den Bezirken Cottbus und Potsdam für Schüler der Klassenstufe 6

Seit vielen Jahren bestehen gute Kontakte zwischen den Bezirken Cottbus und Potsdam in der Mathematikbewegung. Eines von vielen Beispielen dafür ist dieser Bezirksleistungsvergleich, der 1980 in Potsdam und 1981 in Cottbus stattfand. Jeder Bezirk delegiert dafür sechs Schüler aus der Klassenstufe 6. Am wichtigsten ist der mathematische Wettbewerb, aber interessiert und begeistert werden natürlich auch alle anderen Eindrücke aufgenommen. In Cottbus besuchten die Schüler das Raumfahrt-Planetarium, und mit der Pioniereisenbahn ging die Fahrt in den Tierpark, den Abschluß der drei Tage bildete eine Spreewaldrundfahrt.

Aber die Aufgaben des Wettbewerbes möchten wir unseren *alpha*-Lesern auch noch vorstellen:

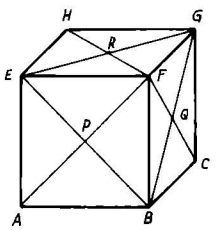
Aufgaben

▲1▲ Gib alle Teiler der Zahl 777 an!

▲2▲ In einem Quadrat $ABCD$ sind M und N die Mitten der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$.
Es ist zu beweisen, daß die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$ aufeinander senkrecht stehen!

▲3▲ Gib sämtliche Geldbeträge bis zu 50 Pfennigen an, die sich unter alleiniger Verwendung von 1-Pfennig-Stücken, 5-Pfennig-Stücken und 10-Pfennig-Stücken (wobei von jeder Sorte stets mindestens ein Stück zu nehmen ist) auszahlen lassen und bei denen der in Pfennigen angegebene Geldbetrag genau doppelt so groß ist wie die benötigte Anzahl von Münzen!
(*Beispiel:* Ist x die Anzahl der Pfennig-Stücke, y die der 5-Pfennig-Stücke und z die der 10-Pfennig-Stücke, so erfüllen die Zahlen $x=20$, $y=4$ und $z=1$ alle gestellten Bedingungen, da 20 Pf + 20 Pf + 10 Pf = 50 Pf.)

▲4▲ Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge a, so wie im Bild veranschaulicht.
P, Q und R seien die Mittelpunkte der Flächen $ABFE$, $BCGF$ und $EFGH$. Axel behauptet, daß P, Q und R die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind. Bernd behauptet, daß Axel nicht recht hat.
Wer hat recht?



Das Ergebnis zeigte, daß diese Aufgaben für einen solchen Wettbewerb sehr gut ausgewählt waren. Einerseits wurden im Durchschnitt 54% der vollen Punktzahl erreicht, andererseits war es wohl sehr schwer, hohe Punktzahlen zu erzielen.

Spreewaldrundfahrt

Ingo Warnke (aus Oranienburg) erhielt für 27 von 30 Punkten einen 1. Preis; einen 2. und zwei 3. Preise erhielten Schüler aus dem Bezirk Cottbus.
Zum nächsten Vergleich 1982 hat nun wieder Potsdam eingeladen. Vielleicht können wir dann auch eine Delegation aus einem dritten Bezirk begrüßen? *H.-J. Sprengel*

Lösungen

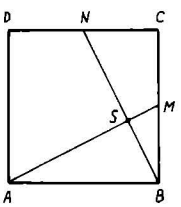
▲1▲ Man sieht leicht, daß 7 und 3 Teiler der Zahl 777 sind. $777 : 21 = 37$ ergibt den restlichen Primfaktor.
Aus der Darstellung $777 = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$ kann man alle Teiler ablesen: 1, 3, 7, 37, $3 \cdot 7 = 21$, $3 \cdot 37 = 111$, $7 \cdot 37 = 259$ und 777.

▲2▲ Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$ sei S (vgl. Bild). Aus den Quadrateigenschaften folgt: Da die Dreiecke ABM und BCN in zwei Seiten ($\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{BM} = \overline{CN}$) und dem eingeschlossenen Winkel (90°) übereinstimmen, gilt

$$\triangle ABM \cong \triangle BCN.$$

Daraus folgt

$$\sphericalangle NBC = \sphericalangle MAB.$$



Daher ergänzen sich die Winkel $\sphericalangle AMB$ und $\sphericalangle NBC$ ebenso wie die Winkel $\sphericalangle AMB$ und $\sphericalangle MAB$ zu 90°, d. h. $\overline{AM} \perp \overline{BN}$.

▲3▲ Sind x, y, z die Anzahlen der Münzen, wie angegeben, so gilt für die Gesamtzahl a

(1) $a = x + y + z$

und für den Geldbetrag b

(2) $b = x + 5y + 10 \cdot z$.

Aus dem Text folgt dann weiter

(3) $b = 2 \cdot a = a + a$ und

(4) $b \leqq 50$.

Schreibt man für (2)

(2′) $b = x + y + z + 4y + 9z$,

so ergibt sich mit (1) und (3)

(5) $a + a = a + 4y + 9z$.

Vergleicht man die linke und rechte Seite von (5) miteinander, so ergibt sich

(6) $a = 4y + 9z$.

Aus (3) und (4) ergibt sich

(7) $a \leqq 25$.

Aus (6) und (7) ergeben sich nun die für z und y möglichen Werte. Für z sind nur die Werte $z = 1$ oder $z = 2$ möglich, da schon $9 \cdot 3 > 25$. Es sei $z = 2$: Dann ist für y nur der Wert $y = 1$ möglich, da schon $4 \cdot 2 + 9 \cdot 2 > 25$. Es sei $z = 2$. Dann ist für y nur der Wert $y = 1$ möglich, da schon $4 \cdot 2 + 9 \cdot 2 > 25$.
Mit $z = 2$ und $y = 1$ folgt aus (6), daß $a = 22$ (also ist (z) bzw. (4) erfüllt). Aus (1) folgt $x = 19$. Aus (2) folgt $b = 44$. Damit ist (3) erfüllt. Also ist $x = 19$, $y = 1$, $z = 2$ eine Lösung.

Fortsetzung auf Seite 24

Was tun, wenn die Formelsammlung nicht mehr helfen kann?

Lösungsverfahren statt Lösungsformel
Teil 2

Im ersten Teil, der euch hoffentlich neben der Arbeit und Knobelei auch Freude gemacht hat, nannte ich einige Probleme und stellte Fragen. Hier sind nun die Antworten als Bestätigung für diejenigen von euch, die eine Antwort fanden – eventuell auch als Korrektur, falls eure Antwort nicht in Ordnung ist oder ihr keine finden konntet.

1. Der „3A + 1"-Algorithmus

Die entstehenden Zahlenfolgen für 3, 11 und 40 lauten:

3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1;
11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1;
40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

In diesen Beispielen kommt man immer zu einem Ende. Das nahende Ende erkennt man sogar schon, sobald eine Potenz von 2 erzeugt wird, denn dann erreicht man durch dauerndes Halbieren stets die 1.

In den drei Beispielen war diese Potenz von 2 immer $2^4 = 16$. Das muß aber nicht sein. Manchmal sind auch sehr lange Zahlenfolgen bis zum Erreichen einer Zweierpotenz erforderlich:

31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Es kommen auch unerwartet große Zahlen (hier z. B. 9232) vor.

Streicht man die Endevorschrift bei 1, so ergibt sich in allen Fällen, die oben bei 1 endeten, am Schluß jetzt ein Zyklus

..., 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Läßt man auch negative ganze Zahlen zu, so entstehen am Schluß andere Zyklen:

$-80, -40, -20, -10, -5, -14, -7,$
$-20, -10, -5, \ldots;$
$-108, -54, -27, -80, -40, -20, \ldots;$
$-3, -8, -4, -2, -1, -2, -1, \ldots.$

Es ist aber nicht immer derselbe Zyklus wie bei positiven Zahlen. Man hat für negative Zahlen bis jetzt 3 verschiedene Zyklen gefunden:

$-20, -10, -5, -14, -7;$
$-2, -1;$
$-272, -136, -68, -34, -17, -50, -25,$
$-74, -37, -110, -55, -164, -82, -41,$
$-122, -61, -182, -91.$

Nimmt man den Zyklus 0 für 0 und den Zyklus 4, 2, 1 für positive Zahlen dazu, so kennt man beim 3A + 1-Algorithmus 5 Zyklen, in die er bei Anwendung auf ganze Zahlen einlaufen kann. Es gibt dafür aber keinen Beweis. Bereits 1972 hat man mit einem Computer alle ganzen Zahlen im Bereich $-10^8 \leqq A \leqq 6 \cdot 10^7$ überprüft. Es zeigten sich keine anderen Zyklen als die angegebenen. Später sollen noch Überprüfungen für $6 \cdot 10^7 \leqq A \leqq 2^{39} \approx 5 \cdot 10^{11}$ und sogar $A \leqq 10^{40}$ durchgeführt worden sein. Es gab stets den Zyklus 4, 2, 1.

2. Eine Funktion zur Erzeugung von Primzahlen

Die ersten 10 ganzzahligen Glieder der Folge $a_n = \sqrt{24n+1}$ lauten

n	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40
a_n	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31

Es entstehen fast nur Primzahlen. Lediglich die 25 stört bis zum 10. Glied die Aussage, daß nur Primzahlen geliefert werden.

Wir wollen den Sachverhalt näher untersuchen. Nach Quadrieren haben wir

$$a_n^2 = 24n + 1.$$

Da $24 = 2^3 \cdot 3$ als Primfaktoren die 2 und 3 enthält, kann $24n+1$ für kein positives ganzes n diese Faktoren auch enthalten. Stets liegt $24n+1$ in den Restklassen 1 modulo 2 und modulo 3, d. h., stets liefert $24n+1$ bei den Divisionen durch 2 oder durch 3 die Reste 1.

Der Ausdruck $24n+1$ kann also nie eine Quadratzahl sein, die 2 oder 3 als Primfaktoren enthält. Also kann auch a_n diese Faktoren nicht enthalten. Demnach können die Zahlen

6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30 nicht geliefert werden.

Wird aber jede ganze Zahl > 5 ohne Primfaktoren 2 und 3 auf diese Weise gewonnen?

Es muß also ein ganzzahliges n aus

$$\frac{a_n^2 - 1}{24} = n$$

bestimmbar sein, d. h. $a_n^2 - 1$ muß durch 24 teilbar sein.

Da a_n bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2 läßt, ist es darstellbar als

$a_n = 3M + 1$
$a_n^2 = 9M^2 + 6M + 1$
$a_n^2 - 1 = 9M^2 + 6M$ oder
$a_n = 3M + 2$
$a_n^2 = 9M^2 + 12M + 4$
$a_n^2 - 1 = 9M^2 + 12M + 3.$

In beiden Fällen ist $a_n^2 - 1$ durch 3 teilbar. Da a_n ungerade ist, ergibt es bei der Division durch 4 entweder den Rest 1 oder den Rest 3. Genau wie eben folgert man

$a_n = 4N + 1$
$a_n^2 = 16N^2 + 8N + 1$
$a_n^2 - 1 = 16N^2 + 8N$ oder
$a_n = 4N + 3$
$a_n^2 = 16N^2 + 24N + 9$
$a_n^2 - 1 = 16N^2 + 24N + 8.$

In beiden Fällen ist $a_n^2 - 1$ durch 8 teilbar. Da 3 und 8 zueinander teilerfremd sind, ist somit $a_n^2 - 1$ durch 24 teilbar, d. h. stets gibt es ein ganzzahliges n, und alle Zahlen ohne Teiler 2 oder 3 werden durch die Folge erzeugt.

Als nächste (11.) würde $35 = 5 \cdot 7$ für $n = 51$ zu bilden sein.

3. Drei Anweisungen

	A	B
	a	b
1. Schritt	a+b	b
2. Schritt	a+b	a
3. Schritt	b	a

Die Kästcheninhalte werden vertauscht. Die drei Schritte werden als Computerbefehle

$A := A + B;$
$B := A - B;$
$A := A - B$

geschrieben. Das Gleichheitszeichen bekommt durch den Doppelpunkt einen Richtungssinn und dynamisch-algorithmischen Charakter. Ein neuer Inhalt von A (links) wird aus dem alten Inhalt von A (rechts) durch Addition des Inhalts von B gebildet. Es kommt auch streng auf die Reihenfolge der Abarbeitung der Befehle oder Anweisungen an. Dies muß „seriell" in der angegebenen Reihenfolge der Niederschrift geschehen. Zu verschiedenen Zeitpunkten der Abarbeitung sind A und B Namen für unterschiedliche Zahlwerte: Dynamische Anweisungen gegenüber statischen Formeln!

Beispiel:

	A	B
	3	5
1.	8	5
2.	8	3
3.	5	3

4. Eine Zahlenfolge

Der angegebene Algorithmus ändert die Zahl 153 nicht.

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3,$$
$$= 1 + 125 + 27.$$

Die Zahl 153 ist für den Algorithmus ein „Fixpunkt". Es ist also sinnvoll, ihn mit 153 abbrechen zu lassen.

Für $A = 9$ entsteht die Zahlenfolge

9, 27, 351, 153.

Sie endet also sehr schnell. Zur Beantwortung der Frage nach einem größten A, das durch den Algorithmus vergrößert wird, erinnern wir uns an die Bedeutung von Dezimalzahlen Z mit den Ziffern $z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Eine $(K+1)$stellige Zahl Z ist

$$Z = z_K z_{K-1} \ldots z_1 z_0$$
$$= z_K \cdot 10^K + z_{K-1} \cdot 10^{K-1} + \ldots + z_1 \cdot 10 + z_0.$$

Der Algorithmus macht daraus die Zahl Y.

$$Y = z_K^3 + z_{K-1}^3 + \ldots + z_1^3 + z_0^3.$$

Die größte 3. Potenz einer Ziffer ist natürlich $9^3 = 729$.

Stand diese 9 in der Hunderterstelle von Z, d. h. $900 = 9 \cdot 10^2$ mit $k = 2$ war ihr Beitrag zu Z, so ist jetzt ihr Beitrag zu Y nur 729. Es ist eine Verkleinerung des Beitrages um $900 - 729 = 171$ eingetreten. Stand sie in der Zehnerposition, d. h. 90 war ihr Beitrag zu Z, so ergibt sich eine Vergrößerung des Beitrages um $729 - 90 = 639$ zu Y. Wir fertigen uns eine Tabelle an, die diese Vergrößerungen (positiv) bzw. Verkleinerungen (negativ) beim Übergang von Z zu Y angibt.

Stellung der Ziffer in Z	Ziffer 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	0	0	6	*24*	60	120	210	336	504	720
Zehner	0	−9	−12	−3	24	*75*	156	273	432	639
Hunderter	0	*−99*	−192	−273	−336	−375	−384	−357	−288	171
Tausender	0	−999	−1992	−2973	−3936	−4875	−5784	−6657	−7488	−8271

Aus ihr liest man ab, daß 1999 die größte Zahl ist, die noch vergrößert werden kann. Der Verlust von 999 für die 1 in der Tausenderstelle wird durch die Gewinne der drei Neunen $171 + 639 + 720 = 1530$ aufgehoben. Der Verlust 1992 bei einer 2 in der Tausenderstelle kann nicht mehr kompensiert werden. Aber 1999 ist nicht durch 3 teilbar. Die nächstgelegene durch 3 teilbare Zahl, die noch vergrößert wird, ist 1998 mit $-999 + 171 + 639 + 504 = 315$ als Vergrößerung.

Man erkennt ferner den Fixpunkt 153, denn Verlust und Gewinn heben sich auf $-99 + 75 + 14 = 0$.

Läßt man die Bedingung der Teilbarkeit durch 3 fallen, so wären z. B. 1, 370, 371, 407 auch Fixpunkte (kursive Werte in der Tab.).

Es ist noch interessant nachzuweisen, daß aus einer durch 3 teilbaren Zahl auch wieder eine durch 3 teilbare Zahl entsteht:

Bei einer durch 3 teilbaren Zahl ist die Quersumme

$$Q = z_K + z_{K-1} + \ldots + z_1 + z_0 = \sum_{k=0}^{K} z_k$$

ebenfalls durch 3 teilbar. Erhebt man die Quersumme zur dritten Potenz, so ist diese natürlich auch wieder durch 3 teilbar,

$$Q^3 = (z_K + z_{K-1} + \ldots + z_1 + z_0)^3,$$

und man schließt nun wie folgt. Ihr könnt leicht den binomischen (bi = zwei, Vorsilbe aus dem Griechischen) Ausdruck

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

nachrechnen. Wir wenden ihn an für

$$a = z_K$$
$$b = z_{K-1} + \ldots + z_1 + z_0,$$

und wenn $Q^3 = (a+b)^3$ durch 3 teilbar ist, so muß es auch

$$a^3 + b^3 = z_K^3 + (z_{K-1} + \ldots + z_1 + z_0)^3 \equiv 0 \pmod 3$$

sein.

Man schreibt das so, wie es rechts angegeben ist und liest es „kongruent 0 modulo 3". Das bedeutet nichts anderes, als daß bei Division durch 3 der Rest 0 entsteht. Nun wenden wir dieselbe Überlegung für die in der dritten Potenz stehende Klammer an, die aber nun um ein Glied kürzer ist, usw.

Es entsteht schließlich

$$z_K^3 + z_{K-1}^3 + \ldots + (z_1 + z_0)^3 \equiv 0 \pmod 3,$$

und es bleibt noch ein letzter Schritt

$$z_K^3 + z_{K-1}^3 + \ldots + z_1^3 + 3z_1^2 z_0 + 3z_1 z_0^2 + z_0^3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Da Summanden mit dem Faktor 3 in der Teilbarkeitsbetrachtung weggelassen werden können, hat man endlich

$$z_K^3 + z_{K-1}^3 + \ldots + z_1^3 + z_0^3 = \sum_{k=0}^{K} z_k^3 \equiv 0 \pmod 3,$$

daß auch die Summe der dritten Potenzen der Ziffern einer durch 3 teilbaren Zahl wieder durch 3 teilbar ist. Der Algorithmus führt also aus der Menge der durch 3 teilbaren Zahlen nicht heraus.

Ein Nachweis, daß er stets bei 153 endet, könnte nun dadurch geführt werden, daß es einfach für alle durch 3 teilbaren Zahlen Z aus dem Bereich $3 \leqq Z \leqq 1998$, es sind 666 Stück, nachgerechnet wird. Dies ist ein Beispiel für den Beweis einer mathematischen Aussage, der nicht mehr kurz und „elegant", sondern aufwendig in der Durchführung – wenn auch trivial – ist. Probleme dieser Art mit z. T. ungeheurer Beweisarbeit, die nur noch mit Computern zu bewältigen ist, tauchen in alten und neuen mathematischen Fragestellungen auf. Die Mathematik kommt auch (wie die Technik z. B.) in Bereiche der Forschung, wo zwar prinzipiell etwas zu tun möglich ist, es aber aus ökonomischen Gründen (Zeit, Aufwand, auch Geld) unterbleiben muß.

5. Eine Funktion, die selbst wieder zu ihrer Definition verwendet wird

Nach der Definition ist, da $101 > 100$,

$$f(101) = 91.$$

Wendet man die Definition für das Argument 100 an, $f(100) = f(f(111))$,

so entsteht zunächst für die „innere" Anwendung auf 111

$$f(111) = 101,$$

so daß $f(100) = f(101) = 91$ wird.

Für die Anwendung auf 99 erhält man

$$f(99) = f(f(110)) = f(100) = 91$$

wieder 91, da uns $f(100)$ schon bekannt ist. So weiterschließend kommt man zu folgender Tabelle für die Werte von $f(n)$

n	$f(n)$	n	$f(n)$
111	101	100	$f(f(111)) = f(101) = 91$
110	100	99	$f(f(110)) = f(100) = 91$
109	99	98	$f(f(109)) = f(\ 99) = 91$
108	98	97	$f(f(108)) = f(\ 98) = 91$
107	97	96	$f(f(107)) = f(\ 97) = 91$
106	96	95	$f(f(106)) = f(\ 96) = 91$
105	95	94	$f(f(105)) = f(\ 95) = 91$
104	94	93	$f(f(104)) = f(\ 94) = 91$
103	93	92	$f(f(103)) = f(\ 93) = 91$
102	92	91	$f(f(102)) = f(\ 92) = 91$
101	91	90	$f(f(101)) = f(\ 91) = 91$
		89	$f(f(100)) = f(\ 91) = 91$
		88	$f(f(\ 99)) = f(\ 91) = 91$
		.	
		.	
		.	
		3	$f(f(\ 14)) = f(\ 91) = 91$
		2	$f(f(\ 13)) = f(\ 91) = 91$
		1	$f(f(\ 12)) = f(\ 91) = 91$

Es kommt also für $n \leqq 101$ stets der Wert 91 heraus. In der mathematischen Literatur wird diese Funktion deshalb auch „91er Funktion" genannt. Wir haben uns bei der Werteberechnung die Arbeit mit Hilfe der Tabelle sehr erleichtert. Folgt man lediglich der Definition ohne Kenntnis schon vorberechneter Werte, so verläuft bei $n = 100$ der Rechengang der wiederholten Anwendung der Funktion zwar genau wie oben in der Tabelle, aber bei $n = 99$ nimmt er die Gestalt an

$$f(99) = f(f(110)) = f(100) = f(f(111))$$
$$= f(101) = 91,$$

bei $n = 97$ entsteht sogar

$$f(97) = f(f(108)) = f(\ 98) = f(f(109))$$
$$= f(\ 99) = f(f(110) = f(100) = f(111))$$
$$= f(101) = 91$$

und bei $n = 1$ wäre der Anfang dieser Kette von Anwendungen der Funktion

$$f(1) = f(f(12)) = f(f(f(23))) = f(f(f(f(34))))$$
$$= \ldots$$

Dieses wiederholte oder verschachtelte Anwenden einer Funktion wird in der Mathematik oft durch einen Exponenten angezeigt, der dann aber nicht das Potenzieren bedeutet, hier also $f(1) = f^4(34)$

$$= f^{10}(100) = f^{11}(111) = f^{10}(101) = f^9(91)$$

$=f^{10}(102)=f^{9}(92)=f^{10}(103)=f^{9}(93)$
$=f^{10}(104)=f^{9}(94)=f^{10}(105)=f^{9}(95)$
$=f^{10}(106)=f^{9}(96)=f^{10}(107)=f^{9}(97)$
$=f^{10}(108)=f^{9}(98)=f^{10}(109)=f^{9}(99)$
$=f^{10}(110)=f^{9}(100)=f^{10}(111)=\ldots$

An dieser Stelle ist die Zahl der Anwendungen von f auf das Argument 100 um 1 abgebaut worden.

Der Zyklus von 21 Anwendungen der Funktionsdefinition (Anzahl der Gleichheitszeichen zwischen $f^{10}(100)$ und $f^{9}(100)$) muß noch achtmal wiederholt werden. bis man schließlich $f(100)=f^{2}(111)=f(101)=91$ erreicht. Das tatsächliche Berechnen rekursiv definierter Funktionen ist in der Dynamik der auf- und absteigenden Verschachtelungstiefe ein meist arbeitsaufwendiger Vorgang, auch für Computer. Aber rekursive Funktionen sind in der Mathematik und in jüngster Zeit auch in der Praxis ein interessantes und wirksames dynamisches Arbeitsmittel.

I. O. Kerner

Eine Schachstudie Intellektuelles Boxen

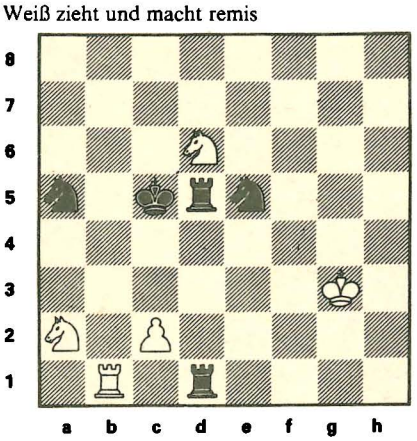
Dr. *Emanuel Lasker* (1868 bis 1941) ist als großartiger Schachpraktiker bekannt; er ist der Weltmeister, der die Krone von allen dreizehn Schachkönigen am längsten trug, nämlich 27 Jahre, von 1894 bis 1921! *Lasker*, der 1902 promovierte, legte längere Turnierpausen ein und arbeitete an wissenschaftlichen Werken. Er galt als bedeutender Mathematiker und Philosoph. Das Schach betrachtete er als Geistessport, als „intellektuelles Boxen", als Kampf der schöpferischen Individualitäten.

Dr. *Lasker*, der aus Berlinchen stammt und lange Zeit in Berlin lebte, machte auch auf dem Gebiet des Problemschachs von sich reden. Er löste nicht nur gern Aufgaben und Studien, sondern komponierte auch.

In der nachstehenden Studie hat Schwarz einen Turm mehr, doch findet Weiß eine geistreiche Möglichkeit, das gegnerische Übergewicht so zu wandeln, daß Schwarz nicht gewinnen kann.

Dr. Emanuel Lasker, 1905

Weiß zieht und macht remis



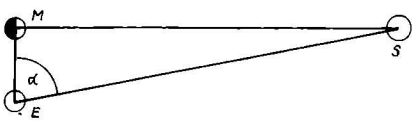
Aristarch von Samos

Im Mai 1980 erschienen in Griechenland zwei Briefmarken zum Gedenken an den griechischen Astronomen und Mathematiker *Aristarch von Samos* (um 320 bis um 250 v. u. Z.). Aristarch stellte als erster die im 16. Jh. von Copernicus (1473 bis 1543) erneuerte und längst als wahr erkannte Hypothese auf, daß die Sonne und nicht, wie damals allgemein angenommen, die Erde das Zentrum unseres Planetensystems bildet. Die Hypothese des Aristarch fand bei seinen Zeitgenossen keine Anerkennung, denn sie stand im Widerspruch zu den damals herrschenden, vor allem von Aristoteles (384 bis 322 v. u. Z.) fixierten physikalischen Vorstellungen. Zum Beispiel meinte man, von einer bewegten Erde müßten alle beweglichen Dinge heruntergeschleudert werden, man müßte den „Fahrtwind" spüren usw. Die Hypothese des Aristarch ist nur durch eine Bemerkung in der Schrift „Die Sandzahl" von Archimedes (287? bis 212 v. u. Z.) überliefert worden. Sie war Copernicus bekannt, der in seinem astronomischen Hauptwerk „De revolutionibus" seinen Vorgänger Aristarch rühmend erwähnte. Diese Bemerkung wurde jedoch beim Druck unterschlagen. Sie befindet sich nur im handschriftlichen Manuskript von Copernicus, das in der Universitätsbibliothek in Warszawa aufbewahrt wird.

Erhalten blieb durch Vermittlung mittelalterlicher islamischer Gelehrter eine kleine astronomisch-mathematische Abhandlung des Aristarch, in der er für das Verhältnis

$$v=\frac{\text{Abstand Erde–Sonne}}{\text{Abstand Erde–Mond}}$$

die Abschätzung $18<v<20$ herleitete. (In Wahrheit ist v ungefähr 370.) Aristarch ging dabei von der richtigen Überlegung aus, daß Erde E, Sonne S und Mond M ein bei M rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn wir genau die Hälfte des Mondes beleuchtet sehen (siehe Bild): Man braucht also „nur" den Winkel α zu messen, um v zu bestimmen.



Rechnet aus, wie groß dieser Winkel bei $v=370$ in Wahrheit ist und welche falschen Abschätzungen für α Aristarch gemessen haben muß, um zu seiner Abschätzung für v zu gelangen!

Übrigens gab es zu Aristarchs Zeiten und noch lange danach keine trigonometrische Tafeln, und als echter Grieche verschmähte Aristarch auch die naheliegende Methode, ein genügend großes ähnliches Dreieck zu konstruieren und dann die Seiten einfach zu messen, bestimmte vielmehr den v-Wert durch durch umständliche, aber streng bewiesene geometrische Abschätzungen. Diese machen den mathematischen Gehalt seiner Arbeit aus.

Lest über Aristarch und Copernicus in dem Buch *Entdecker des Himmels* von Dieter B. Herrmann (Urania-Verlag 1978) nach!

P. Schreiber

In der gleichen Abhandlung bestimmte er den Sonnendurchmesser als das 6,75fache (in Wahrheit das 109fache des Erddurchmessers. Die zu dieser Überlegung gehörige Skizze ist auf der 10-Drachmen-Marke wiedergegeben.

Welche auf der Erde beobachtbare Größe muß man messen, um das genannte Verhältnis v schon hiernach zu bestimmen?

Lest über Aristarch und Copernicus in dem Buch
Dieter B. Herrmann

Entdecker des Himmels

Urania-Verlag, Leipzig 1978
nach!

Aus Anlaß des 2300. Geburtstages des Begründers der heliozentrischen Theorie fand im Juni 1980 auf der Insel Samos ein wissenschaftliches Kolloquium statt.

P. Schreiber

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (18. November 1981)

Fortsetzungen von alpha 6/81

Lösung: I. Wenn ein Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so folgt:

Es gibt natürliche Zahlen m, n mit

$$a = 15m,\ b = 15n. \tag{1}$$

Wegen $0 < a < b$ folgt

$$0 < m < n, \tag{2}$$

wegen $ab = 7875$ folgt $15m \cdot 15n = 7875$, also $225mn = 7875$,

$$mn = 35. \tag{3}$$

Da 35 die Primfaktorzerlegung $35 = 5 \cdot 7$ hat, gibt es für (2), (3) nur die Möglichkeiten, daß entweder $m = 1$, $n = 35$ oder $m = 5$, $n = 7$ gilt. Aus (1) folgt daher, daß nur die Paare (15; 525), (75; 105) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen können.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt

$0 < 15 < 525$, $0 < 75 < 105$;

wegen der Primfaktorzerlegungen

$15 = 3 \cdot 5$, $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, $75 = 3 \cdot 5^2$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

ist $3 \cdot 5 = 15$ der g.g.T. von 15 und 525 sowie auch der g.g.T. von 75 und 105; schließlich gilt $15 \cdot 525 = 7875$ und $75 \cdot 105 = 7875$.

Daher erfüllen genau die Paare (15; 525) und (75; 105) die Bedingungen der Aufgabe.

4. Albrecht Dürer bringt auf seinem Stich „Melancholie" ein „magisches Quadrat" aus den Zahlen 1 bis 16, d. h. ein Quadrat, in dem jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale denselben Summenwert hat.

In den beiden Mittelfeldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr des Stiches abzulesen.

16	3	2	13
			8
9			12
4			

Im Bild ist dieses Quadrat mit unvollständiger Eintragung wiedergegeben.

Begründe, wie das magische Quadrat auszufüllen ist, und gib das Entstehungsjahr an!

Lösung: Wegen $16 + 3 + 2 + 13 = 34$ ist die Zeilen-, Spalten und Diagonalensumme 34. Daraus folgt, daß die fehlende Zahl in der ersten Spalte 5 und die fehlende Zahl in der vierten Spalte 1 beträgt. Für die restlichen 6 Felder bleiben die Zahlen 6, 7, 10, 11, 14 und 15 übrig.

Die Summe der beiden fehlenden Zahlen der vierten Zeile beträgt 29, sie läßt sich nur mit den Zahlen 15 und 14 bilden; die Summe der fehlenden Zahlen der dritten Zeile beträgt 13, sie läßt sich nur mit den Zahlen 6 und 7 bilden. Die Summe der restlichen Zahlen 10 und 11 beträgt 21. Sie ergibt zusammen mit den bereits in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die verlangte Summe 34.

Die Anordnung der beiden mittleren Zahlen der zweiten bzw. dritten Zeile muß nun so erfolgen, daß auch in beiden Diagonalen die Summe 34 erreicht wird. Da jeder der beiden Diagonalen zu dieser Summe noch 17 fehlt, kann die Anordnung nur

11	10
7	6

oder

10	11
6	7

lauten.

In der zweiten Spalte fehlt an der Summe 34 noch 16 oder 17, je nachdem, ob die zweite Zahl der vierten Zeile 14 oder 15 lautet. Daher erfüllt nur die zweite der oben angeführten Anordnungen die gestellten Bedingungen. Somit ergibt sich als einzige Möglichkeit die folgende Eintragung:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Sie erfüllt alle Bedingungen eines magischen Quadrates. Das Entstehungsjahr des Stiches lautet mithin 1514.

Olympiadeklasse 8

1. Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen a, für die

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$$

gilt!

Lösung: I. Wenn eine natürliche Zahl a die geforderte Ungleichung erfüllt, so gilt

$$\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} \tag{1}$$

und

$$\frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}. \tag{2}$$

Aus (1) folgt $a + 12 < 4a$, also $12 < 3a$, folglich

$$4 < a. \tag{3}$$

Aus (2) folgt $3a < a + 12$, also $2a < 12$, folglich

$$a < 6. \tag{4}$$

Die einzige natürliche Zahl, die (3) und (4) erfüllt, ist $a = 5$. Daher kann nur diese Zahl die geforderte Ungleichung erfüllen.

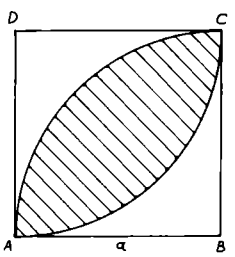
II. Sie erfüllt diese Ungleichung; denn es gilt

$\frac{1}{4} < \frac{5}{17}$, da $\frac{1}{4} = \frac{17}{68}$ und $\frac{5}{17} = \frac{20}{68}$ ist, sowie

$\frac{5}{17} < \frac{1}{3}$, da $\frac{5}{17} = \frac{15}{51}$ und $\frac{1}{3} = \frac{17}{51}$ ist.

Daher erfüllt genau $a = 5$ die Bedingungen der Aufgabe.

2. Gegeben sei die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$. Um B und D seien mit dem Radius a Kreisbögen gezeichnet, die in dem Quadrat $ABCD$ eine blattartige Figur (im Bild schraffiert) einschließen.



a) Berechne für $a = 3{,}5$ cm den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

b) Ermittle eine allgemeine Formel, die angibt, wie der Flächeninhalt der blattartigen Figur von der gegebenen Seitenlänge a abhängt!

Lösung: a) Durch die Diagonale AC wird das Quadrat und (wegen der symmetrischen Lage der beiden Kreisbögen) auch die schraffierte Fläche halbiert. Daher ergibt sich die Hälfte des gesuchten Flächeninhaltes, indem man vom Flächeninhalt des um B gezeichneten Viertelkreises den Flächeninhalt des Dreiecks ABC (d. h. den halben Flächeninhalt des Quadrates) subtrahiert. Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 3{,}5^2 - \frac{1}{2} \cdot 3{,}5^2\right) \text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 3{,}5^2 \text{cm}^2 = 0{,}57 \cdot 12{,}25 \text{cm}^2$$

$$\approx 6{,}98 \text{cm}^2.$$

b) Mit derselben Begründung wie in a) ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt die Formel

$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2.$$

Hinweise: 1. Man kann natürlich auch den Aufgabenteil b) zuerst lösen und dann durch Einsetzen von $a = 3{,}5$ cm das Ergebnis a) ermitteln.

3. a) Beweise folgenden Satz:

Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist die Summe irgend zweier zu verschiedenen

Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß wie die Summe der zugehörenden Innenwinkel.

b) Untersuche, ob auch die folgende Umkehrung des in a) genannten Satzes gilt!

Wenn in einem Dreieck ABC die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Lösung: a) Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, dann beträgt jeder Innenwinkel 60°, jeder Außenwinkel also $180° - 60° = 120°$. Die Summe der zu zwei Ecken gehörenden Außenwinkel beträgt mithin 240°, die Summe der zu diesen Ecken gehörenden Innenwinkel beträgt 120°. Da 240° das Doppelte von 120° ist, ist hiermit der geforderte Beweis geführt.

b) Die zu den Ecken A, B, C gehörenden Innenwinkelgrößen seien α, β bzw. γ; die zugehörigen Außenwinkelgrößen sind dann $180° - \alpha$, $180° - \beta$ bzw. $180° - \gamma$. In der zu untersuchenden Umkehrung besagt die Voraussetzung daher, daß die drei Gleichungen

$$(180° - \alpha) + (180° - \beta) = 2 \cdot (\alpha + \beta), \quad (1)$$

$$(180° - \beta) + (180° - \gamma) = 2 \cdot (\beta + \gamma), \quad (2)$$

$$(180° - \gamma) + (180° - \alpha) = 2 \cdot (\gamma + \alpha) \quad (3)$$

gelten. Aus (1) folgt $360° - \alpha - \beta = 2\alpha + 2\beta$, also $3\alpha + 3\beta = 360°$ und daher

$$\alpha + \beta = 120°. \quad (4)$$

Aus (2) und (3) folgt ebenso

$$\beta + \gamma = 120° \quad (5)$$

bzw. $$\alpha + \gamma = 120°. \quad (6)$$

Aus (4) und (5) folgt $\alpha = \gamma$, (7)

aus (5) und (6) folgt $\alpha = \beta$. (8)

Mit (7) und (8) ist aber die Aussage gewonnen, daß das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Damit ist bewiesen, daß auch die zu untersuchende Umkehrung gilt.

4. Über den Mitgliederstand einer Betriebssportgemeinschaft (BSG), in der genau fünf Sektionen bestehen, wurden folgende Angaben gemacht:

Genau 22 Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Schach.

Genau ein Drittel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Fußball.

Genau ein Fünftel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Leichtathletik.

Genau drei Siebentel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Tischtennis.

Genau zwei Neuntel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Turnen.

Genau 8 Mitglieder der BSG gehören zu je genau drei verschiedenen Sektionen.

Genau 72 Mitglieder der BSG gehören zu mindestens zwei verschiedenen Sektionen.

Kein Mitglied der BSG gehört mehr als drei Sektionen an, aber jedes Mitglied mindestens einer Sektion.

Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen sowohl der gesamten BSG als auch de: fünf einzelnen Sektionen gibt, so daß alle diese Aussagen zutreffen! Untersuche, ob diese Mitgliederzahlen durch die Aussagen eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib die Mitgliederzahlen an!

Lösung: I. Wenn für eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen alle genannten Aussagen zutreffen, so folgt:

Ist x die Mitgliederzahl der BSG, so sind die Mitgliederzahlen der genannten Sektionen

$$22, \frac{x}{3}, \frac{x}{5}, \frac{3}{7}x, \frac{2}{9}x. \quad (1)$$

Addiert man diese Zahlen, so hat man damit jedes Mitglied der BSG so oft erfaßt, wie die Anzahl der Sektionen angibt, denen das betreffende Mitglied angehört. Dieselbe Art der Erfassung kann man folgendermaßen erreichen: Man erfasse jedes der x Mitglieder zunächst einmal, dann die im Aufgabentext genannten 72 Mitglieder noch ein zweites Mal und schließlich die zuvor genannten 8 Mitglieder noch ein drittes Mal. Daher gilt

$$22 + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{3}{7}x + \frac{2}{9}x = x + 80.$$

Durch Subtraktion von $22 + x$ und Multiplikation mit 315 folgt

$$105x + 63x + 135x + 70x - 315x = 18270,$$

$$58x = 18270,$$

$$x = 315.$$

Nach (1) können daher die genannten Aussagen nur dann zutreffen, wenn 315 die Mitgliederzahl der BSG ist und

22, 105, 63, 135, 70

die Mitgliederzahlen der Sektionen sind.

Olympiadeklasse 9

1. In der Divisionsaufgabe $a:b=c$ sind a, b, c, so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen:

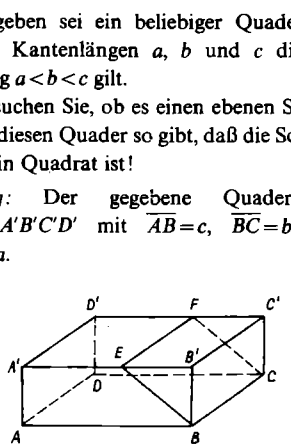
Ermitteln Sie alle Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

Lösung: Die Tripel (52; 13; 4) und (52; 4; 13) sind die gesuchten.

2. Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen a, b und c die Beziehung $a < b < c$ gilt.

Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, daß die Schnittfigur ein Quadrat ist!

Lösung: Der gegebene Quader sei $ABCDA'B'C'D'$ mit $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{AA'} = a$.



In der Ebene des Rechtecks $ABB'A'$ zeichne man den Kreis um B mit dem Radius b. Er schneidet wegen $\overline{BB'} < b < \overline{A'B'}$ die Strecke $A'B'$ in einem inneren Punkt, der E genannt sei. Die Parallele zu $B'C'$ durch E schneidet $D'C'$ in einem Punkt, der F genannt sei. Dann gilt $\overline{EF} = \overline{BC} = b$ und wegen der Kongruenz der Dreiecke $EB'B$ und $FC'C$ (nach s, w, s) auch $\overline{FC} = \overline{EB} = b$. Folglich bilden B, E, F und C die Ecken eines Rhombus. Da BC auf der Ebene $ABB'A'$ nach Voraussetzung senkrecht steht, steht BC auf jeder Geraden dieser Ebene durch B senkrecht und damit auch auf EB. $EBCF$ ist also sogar ein Quadrat. Damit ist gezeigt, daß es einen ebenen Schnitt durch den Quader so gibt, daß die Schnittfigur ein Quadrat ist.

3. Beweisen Sie, daß reelle Zahlen x, y, z genau dann das System der drei Ungleichungen

$$x + y + z > 0,$$

$$x \cdot y \cdot z > 0,$$

$$xy + xz + yz > 0$$

erfüllen, wenn x, y und z positiv sind!

Lösung: I. Wenn x, y und z positive reelle Zahlen sind, dann gelten die genannten Ungleichungen

$$x + y + z > 0, \quad (1)$$

$$xyz > 0, \quad (2)$$

$$xy + xz + yz > 0, \quad (3)$$

da Summe und Produkt von positiven Zahlen stets wieder positive Zahlen ergeben.

II. Wenn x, y und z die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllen, dann folgt:

Wäre $x \leqq 0$, so ergäbe sich aus (1) und (3)

$$x(x + y + z) \leqq 0 < xy + xz + yz,$$

also $x^2 < yz$ und daher wegen $x^2 \geqq 0$ erst recht $yz > 0$. Hieraus und aus $x \leqq 0$ folgte $xyz \leqq 0$ im Widerspruch zu (2). Somit ist die Annahme $x \leqq 0$ widerlegt, d. h. $x > 0$ bewiesen. Entsprechend erhält man die Schlußfolgerungen $y > 0$ und $z > 0$, w.z.b.w.

4. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruieren Sie eine Parallele zu BC so, daß sie die Dreieckseiten AB und AC in Punkten D bzw. E schneidet, für die $\overline{ED} = \overline{DB} + \overline{BC}$ gilt!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es (zu gegebenem Dreieck ABC) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

Lösung: I. Angenommen, eine Parallele zu BC hat die verlangte Eigenschaft. Wegen $\overline{ED} = \overline{DB} + \overline{BC}$ gibt es einen Punkt P auf ED mit $\overline{PD} = \overline{DB}$ und $\overline{PE} = \overline{EC}$. Für diesen gilt $\sphericalangle DBP = \sphericalangle DPB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BPD) $= \sphericalangle PBC$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen); d. h., P liegt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$. Ebenso erhält man, daß P auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ liegt.

II. Daraus folgt, daß eine Gerade g nur dann eine Parallele zu BC mit der verlangten Eigenschaft ist, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und die von $\sphericalangle ACB$. Sie schneiden sich in einem Punkt, der P genannt sei.

(2) Man zeichne die Parallele g zu BC durch P.

III. Wenn eine Gerade g durch diese Konstruktion erhalten wird, so genügt sie den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Es gilt:

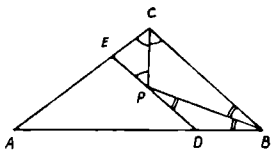
$\sphericalangle EPC = \sphericalangle BCP$ sowie $\sphericalangle DPB = \sphericalangle PBC$

als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Ferner gilt laut Konstruktion

$\sphericalangle BCP = \sphericalangle PCE$ sowie $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PBD$.

Also gilt

$\sphericalangle EPC = \sphericalangle PCE$ sowie $\sphericalangle DPB = \sphericalangle PBD$ d. h., die Dreiecke EPC und BPD sind gleichschenklig mit $\overline{EP} = \overline{EC}$ bzw. $\overline{PD} = \overline{DB}$. Folglich gilt $\overline{ED} = \overline{EP} + \overline{PD} = \overline{EC} + \overline{DB}$, w.z.b.w.



IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau eine Parallele der verlangten Art.

Olympiadeklasse 10

1. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die zur Hypotenuse AB senkrechte Höhe DC genau $\frac{2}{5}$mal so lang wie die Hypotenuse AB.

Für den Höhenfußpunkt D gilt $\overline{AD} < \overline{DB}$.

In welchem Verhältnis $\overline{AD}:\overline{DB}$ teilt er die Hypotenuse?

Lösung: Für die Längen $\overline{AB} = c$, $\overline{DC} = h$, $\overline{AD} = q$, $\overline{DB} = p$ gilt

$$h = \frac{2}{5}c \tag{1}$$

sowie $p + q = c$ (2)

und $q < p$. (3)

Ferner gilt nach dem Höhensatz

$$pq = h^2. \tag{4}$$

Setzt man h aus (1) in (4) ein, so folgt

$$pq = \frac{4}{25}c^2, \tag{5}$$

setzt man q aus (2) in (5) ein, so folgt

$$p(c-p) = \frac{4}{25}c^2,$$

$$P_{1,2} = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{4}{25}c^2}$$

$$= \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{100}c^2(25-16)}$$

$$= \frac{c}{10}(5 \pm 3),$$

also entweder $p = \frac{4}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{1}{5}c$ oder $p = \frac{1}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{4}{5}c$.

Von diesen beiden Möglichkeiten verbleibt wegen (3) nur die erste. Daher beträgt das gesuchte Verhältnis $\overline{AD}:\overline{DB} = q:p = 1:4$.

2. Über das Ergebnis eines 100-m-Laufs mit sechs Teilnehmern, von denen keine zwei die gleiche Zeit erreichten, wurden folgende vier Aussagen gemacht:

(1) A wurde nicht Zweiter, oder B wurde Erster.

(2) A wurde Zweiter, und C wurde Vierter.

(3) A wurde Zweiter, und B wurde Dritter.

(4) C wurde Vierter, oder B wurde Fünfter.

Entscheiden Sie, ob es möglich ist, daß

a) alle vier Aussagen (1) bis (4),

b) genau drei dieser Aussagen,

c) genau zwei dieser Aussagen,

d) genau eine dieser Aussagen,

e) keine dieser Aussagen gleichzeitig wahr sind!

Lösung: a) Wenn die Aussagen (2) und (3) wahr sind, so wurde A Zweiter und B Dritter, also ist dann Aussage (1) falsch. Daher ist es nicht möglich, daß alle vier Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig wahr sind.

b) bis e) Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist es jeweils möglich, daß die genannte Zahl von Aussagen wahr ist. Dabei bedeute das Zeichen x irgendwelche von A, B, C verschiedene Teilnehmer.

Zu b) BAxCxx (genau (1), (2) und (4) sind wahr),

zu c) xAxCBx (genau (2) und (4) sind wahr),

zu d) BACxxx (genau (1) ist wahr),

zu e) CAxBxx (alle Aussagen sind falsch).

3. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, für die

$x^2 - y^2 = 1981$ gilt!

Lösung: Ein Paar $(x; y)$ ganzer Zahlen hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn es

$$(x-y)(x+y) = 1981 \tag{1}$$

erfüllt. Wegen der Primzerlegung

$1981 = 7 \cdot 283$ gibt es für (1) in ganzen Zahlen $x-y$ und $x+y$ genau die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten. Durch Addieren bzw. Subtrahieren und jeweils anschließendes Halbieren erhält man, daß nur die anschließend angegebenen Werte von x und y die genannten Zahlen $x-y$ bzw. $x+y$ ergeben können; eine Probe zeigt jeweils, daß sie in der Tat diese Ergebnisse liefern.

$x-y$	$x+y$	x	y
1	1981	991	990
−1	−1981	−991	−990
1981	1	991	−990
−1981	−1	−991	990
7	283	145	138
−7	−283	−145	−138
283	7	145	−138
−283	−7	−145	138

Daher haben genau die Paare (991; 990), (−991; −990), (991; −990), (−991; 990), (145; 138), (−145; −138), (−145; 138), (145; −138) die verlangte Eigenschaft.

4. Über den Seiten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C werden gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke errichtet, über den Katheten nach außen, über der Hypotenuse nach innen.

Beweisen Sie, daß die Spitzen dieser Dreiecke und der Punkt C dann auf ein und derselben Geraden liegen!

Lösung: Die über BC und AC nach außen errichteten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke seien BCE bzw. ACF. Wegen

$\sphericalangle FCA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCE = 45° + 90° + 45° = 180°$

liegt C auf der Geraden durch E und F.

Die Mittelpunkte von BC, CA, AB seien U, V bzw. W. Der Kreis mit AB als Durchmesser geht nach der Umkehrung des Satzes von Thales durch C, ist also der Umkreis des Dreiecks ABC. Folglich liegt sein Mittelpunkt W auf den Mittelsenkrechten von BC und AC. Somit ist $WUCV$ ein Rechteck; E, F liegen auf den Verlängerungen von WU bzw. WV, und es gilt:[1)]

$$\overline{WE} = \overline{WU} + \overline{UE} = \overline{WU} + \overline{UC} = \overline{WV} + \overline{VC} = \overline{WV} + \overline{VF} = \overline{WF}, \tag{1}$$

Die Mittelsenkrechte von AB schneide EF in G. Dann gilt

$$\sphericalangle FWG = 90° - \sphericalangle AWV = 90° - \sphericalangle WBU = \sphericalangle EWB \tag{2}$$

und $\sphericalangle GFW = 45° = \sphericalangle BEW$. (3)

Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle FGW \cong \triangle EBW$, also $\overline{WG} = \overline{WB}$. Daher ist $\triangle ABG$ das über AB nach innen errichtete gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Dessen Ecke G liegt somit ebenfalls auf der Geraden durch E, F, w.z.b.w.

[1)] Nach den vorangehenden Feststellungen kann die folgende Gleichung $\overline{WE} = \overline{WF}$ auch aus $\sphericalangle EFW = 45° = \sphericalangle FEW$ geschlossen werden.

Olympiadeklasse 11/12

1. Sind a_1 und d gegebene reelle Zahlen, so sei (a_n) die arithmetische Zahlenfolge mit $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ferner werde für $n = 1, 2, 3, \ldots$ definiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ z_n = \sum_{k=1}^{n} s_k.$$

a) Man ermittle a_1 und d so, daß $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.

b) Man beweise, daß für beliebige reelle a_1, d und alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$z_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right) \text{ gilt.}$$

2. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die

$$\sqrt{2x^2 - 1} < \frac{1}{x} \text{ gilt.}$$

3. Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Seine Seitenlängen seien a, b, c, d; sein Flächeninhalt sei F.

Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$F \leqq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \tag{1}$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Vierecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

4. Man beweise: Für jede ungerade ganze Zahl $n \geqq 3$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)$$

eine durch n teilbare ganze Zahl.

Lösungsweg zur Ordnung des Magischen Würfels

Das Lösungsbeispiel wurde so gewählt, daß die Übersichtlichkeit jederzeit möglichst erhalten bleibt. Deshalb werden die Ebenen des Würfels nacheinander von oben nach unten geordnet. Die schon richtig stehenden Würfel kehren dabei nach jeder Operation in ihre Ausgangslage zurück.

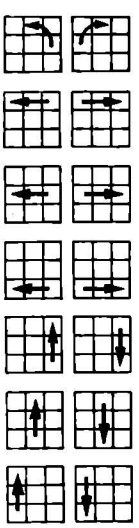
Bezugspunkte des Würfels sind immer die sechs einfarbigen Mittelstücke. Diese verändern ihre Lage zueinander nicht und geben somit die für die jeweilige Fläche aufzubauende Farbe an. Alle anderen Kanten- und Eckstücke hingegen lassen sich vertauschen.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit muß der Würfel bei jeder Operation in der gleichen Lage gehalten werden. In unserem Beispiel zunächst immer so, daß weiß oben und blau vorn liegt. Wo diese Regel nicht zutrifft, wird das im Lösungsbeispiel gesondert angegeben.

Die verwendeten Symbole für die Drehbewegungen (Darstellung 1) gehen immer von der Vorderseite des Würfels aus und stellen jeweils eine Vierteldrehung dar.

Haben wir uns mit der Symbolik vertraut gemacht, können wir mit dem Einordnen beginnen.

Bild 1



Vorderseite nach links bzw. rechts drehen

Obere Ebene nach links bzw. rechts drehen

Mittelebene nach links bzw. rechts drehen

Untere Ebene nach links bzw. rechts drehen

Rechte Ebene nach oben bzw. unten drehen

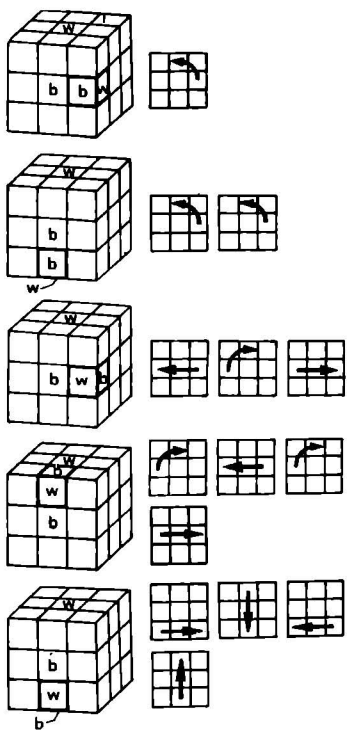
Mittelebene nach oben bzw. unten drehen

Linke Ebene nach oben bzw. unten drehen

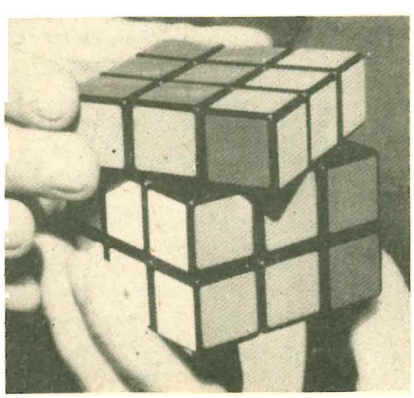
Aufbau der oberen Ebene

Wir drehen den gesamten Würfel so, daß das weiße Mittelstück oben und das blaue vorn liegt. Dann den Kantenwürfel blau/weiß nach vorn drehen. Steht er nicht zufällig richtig, kann man ihn mit einem der in Darstellung 2 gezeigten Züge in die richtige Lage bringen. Mit den anderen Kantenstücken verfahren wir ebenso, nachdem der ganze Würfel mit der entsprechenden Farbe nach vorn gedreht wurde.

Bild 2

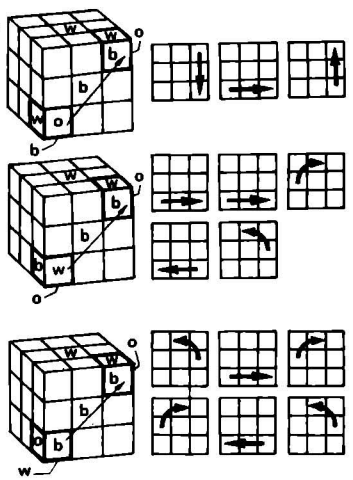


Sind alle Kantenstücke der oberen Ebene eingeordnet, ist auf der Oberseite ein weißes Kreuz entstanden, und die Seitenfarben stimmen mit den Mittelstücken der Seitenflächen überein.



Als nächstes sind die vier Eckstücke einzuordnen. Weiß ist wieder oben und blau vorn. Ein Eckstück mit weißer Fläche (hier blau/weiß/orange) soll nach rechts oben an seinen Platz gebracht werden. Dazu wird es zunächst nach links unten gedreht und nach Darstellung 3 eingeordnet.

Bild 3



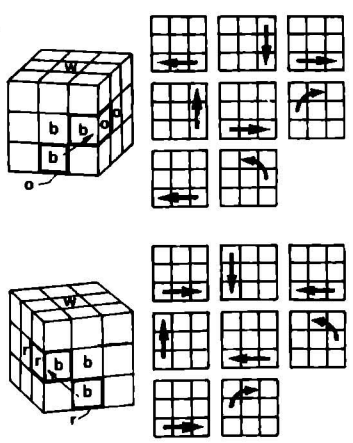
Entsprechend ist mit den anderen Eckstücken zu verfahren, nachdem jeweils der gesamte Würfel mit der zugehörigen Seite nach vorn gedreht wurde.

Nun ist die obere Ebene richtig sortiert.

Aufbau der mittleren Ebene

Hier sind die vier Kantenstücken einzuordnen. Wieder liegt weiß oben und blau vorn. Ein Kantenstück blau/orange oder blau/rot wird durch Drehen der unteren Ebene nach vorn und nach Darstellung 4 an die richtige Stelle gebracht.

Bild 4

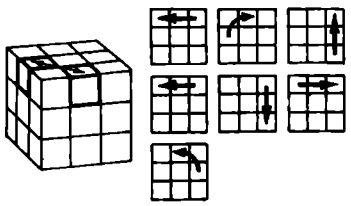


Sollten beide Kantenstücke mit ihrer blauen Seite nach unten zeigen, wählen wir eine andere Seitenfläche für diese Operation. Es kann aber auch vorkommen, daß alle gesuchten Kantenstücke schon in der mittleren Ebene sind, aber verdreht oder an falscher Stelle stehen. Dann müssen sie mit den gezeigten Zügen zunächst nach unten transportiert und eingeordnet werden.

Aufbau der unteren Ebene

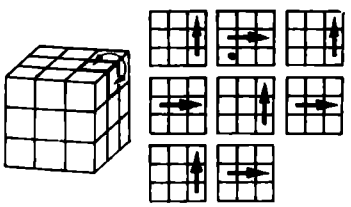
Hierzu drehen wir den Würfel um, so daß die weiße Fläche nach unten zeigt und die gelbe Fläche nach oben. Zunächst sind wieder die Kantenstücke einzuordnen. Die jetzt obere Ebene ist so zu drehen, daß ein Kantenstück zur farbig passenden Seite zeigt. Dabei ist es gleichgültig, ob gelb schon oben liegt. Befinden sich die anderen Kantenstücke noch nicht an ihrem Platz, sind sie nach Darstellung 5 auszutauschen.

Bild 5



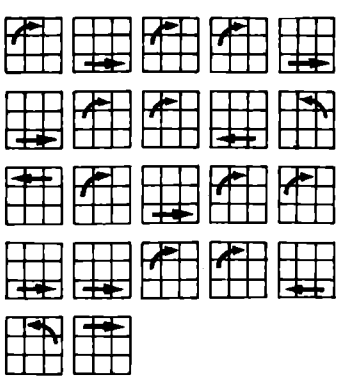
Jetzt müssen diese Kantenwürfel eventuell noch gedreht werden. Dazu wird der gesamte Würfel so gehalten, daß das erste zu drehende Kantenstück rechts oben liegt. Es folgen die in Darstellung 6 gezeigten Züge.

Bild 6



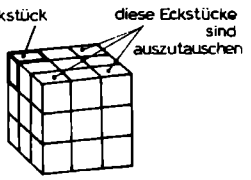
Danach kann der Würfel recht durcheinander aussehen. Davon sollte man sich nicht verwirren lassen. Wir drehen die obere Ebene (nicht den ganzen Würfel!) so, daß das nächste zu kippende Kantenstück nach oben rechts zeigt, und wiederholen die acht Züge. So wird verfahren, bis alle Kantenstücke richtig stehen. Danach ist oben ein gelbes Kreuz entstanden. Die Ebene wird so gedreht, daß die Seitenfarben übereinstimmen. Jetzt sind noch die Eckstücke in die richtige Position zu bringen (wobei die Seitenfarben noch vertauscht sein dürfen). Wenn noch keines der Eckstücke an der richtigen Stelle steht, sind die 22 Züge der Darstellung 7 auszuführen. Wenn danach noch kein Würfel an der richtigen Stelle steht, muß man die 22 Züge wiederholen.

Bild 7



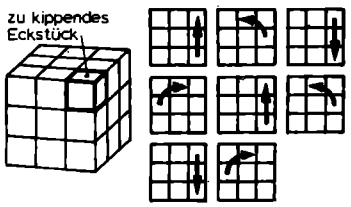
Wichtig ist, daß die gleiche Seite wieder nach vorn zeigt. Ist das geschehen, richten wir den gesamten Würfel durch Drehen der oberen Ebene entsprechend den Seitenfarben aus und bringen das richtig stehende Eckstück durch Drehen des gesamten Würfels nach links hinten, wie Darstellung 8 zeigt.

Bild 8



Nun sind die 22 Züge ein- oder zweimal zu wiederholen. Dann stehen die Eckwürfel richtig, aber eventuell noch nicht mit ihrer gelben Seite nach oben.
Darstellung 9 zeigt die nun auszuführenden Züge.

Bild 9

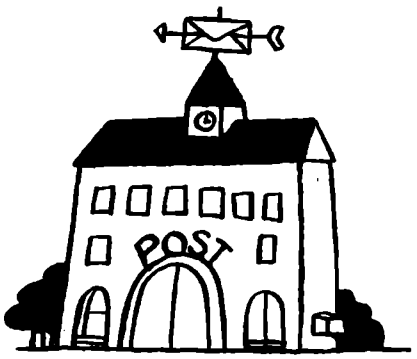


Der Würfel wird dabei so gehalten, daß ein zu drehendes Eckstück vorn rechts oben liegt. Zeigt die Operation nicht den gewünschten Erfolg, muß sie wiederholt werden.
Zum Drehen des nächsten Eckstücks muß dieses wieder nach rechts vorn gebracht werden. Dazu nur die obere Ebene drehen (nicht den ganzen Würfel). Es folgen wieder die acht Züge mit eventueller Wiederholung. So werden alle Eckstücke in die richtige Lage gebracht.
Jetzt brauchen wir nur noch die obere (gelbe) Ebene so zu drehen, daß die Seitenfarben mit denen der anderen Ebenen übereinstimmen.

Aus: practic 3/81

Der Zauberwürfel hat Nachfolger

Dem Zauberwürfel, den der ungarische Professor Ernoe Rubik entwickelt hat, sind weitere logische Spiele gefolgt. Mit Begeisterung beschäftigen sich die Ungarn jetzt auch mit dem Zauber-Domino, der Zauberkugel, dem Zauberstern und dem Zaubermais. Um neue, die menschliche Logik entwickelnde Spiele zu fördern, wurde in Ungarn ein Wettbewerb ausgeschrieben. Das Ergebnis übertraf alle Erwartungen. Insgesamt trafen 5600 Vorschläge für neue Spiele ein, die von 2179 Personen ausgedacht wurden. 30 Ideen wurden von einer Jury ausgewählt, von denen fünf sogar einen Sonderpreis errangen.



...Das Lösen von Aufgaben macht mir so viel Spaß, daß ich schon sechs Jahre lang regelmäßig am Wettbewerb teilgenommen habe. Für die Lösung der Aufgaben haben stets die Schulkenntnisse ausgereicht. Die Aufgaben haben mir sehr geholfen, mein logisches Denken zu trainieren. Alle Aufgaben habe ich mir aufgehoben, denn viele, vor allem theoretische Probleme, werden auch für mich als zukünftigen Physik-Studenten wichtig sein.

Ralf Launhardt, Rathenow

...Ist es nicht möglich, dem Schach in *alpha* Raum zu verschaffen, um damit jungen Menschen die Möglichkeit zu geben, dieses interessante Spiel zu betreiben?

Harald Rüdiger, Grünheide

...Das Knobeln an den Aufgaben bereitet mir viel Spaß. Nicht nur das logische Denken wird geschult, sondern man lernt auch Geduld und Ausdauer, wenn es beim ersten Versuch nicht klappt.

Anke Krukenberg, Schönberg

...Seitdem ich mich am *alpha*-Wettbewerb beteilige, habe ich nun auch nicht mehr so große Angst vor Mathematikarbeiten. Ich konnte meine Leistungen durch den Wettbewerb verbessern. Ich mache auch künftig weiter mit! *Annett Vogel, Empfertshausen*

...Sehr gut gefallen mit die theoretischen Betrachtungen zu mathematischen Problemen und die Seite „In freien Stunden – *alpha* heiter". Macht weiter so!

Frank Wagner, Hettstedt

...Unsere Kinder nehmen gern an Ihrem Wettbewerb teil. Wir freuen uns als Eltern, daß sie durch Ihre Zeitschrift die Möglichkeit haben, ihre Kenntnisse in Mathematik und Deutsch zu festigen.

Familie Baitalow, Kasan (UdSSR)

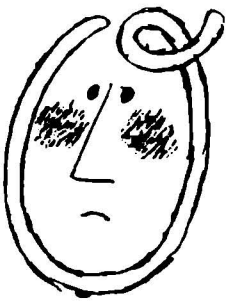
...Die Knobelei in *alpha* macht mir riesigen Spaß und deshalb vielen Dank für die interessanten Aufgaben.

Jörg Peschke, Sebnitz (Kl. 6)

...Obwohl ich schon einige Jahre aus der Schule bin, löse ich gern Ihre Aufgaben. Mir macht Mathematik einfach Spaß, obwohl ich arbeitsmäßig nicht viel damit zu tun habe. Es ist sozusagen ein Hobby von mir.

Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde

In freien Stunden · alpha-heiter



Sport frei!

Auf einer Wäscheleine hängen 8 Fußballjerseys einer Mannschaft. Ermittelt man das arithmetische Mittel dieser sichtbaren Rückennummern, so erhält man die Zahl 7. Die Summe aus den Rückennummern der drei fehlenden Trikots ergibt die Summe 10. Welche Dresse mit welchen Rückennummern fehlen auf der Leine? *Fachlehrer D. Knape, Jessen*

Begriffe gesucht

Verändere je Wort einen Buchstaben, so daß mathematische Begriffe entstehen! Alle neuen Buchstaben aneinandergereiht ergeben einen weiteren mathematischen Ausdruck!

*K*eiler, *U*r, M*ü*tze, Ta*l*, S*a*hne, *K*enner, *S*onne, Sch*i*nkel *Mathematikfachlehrer Regina Brincks, OS II, Saalfeld*

Kryptarithmetik

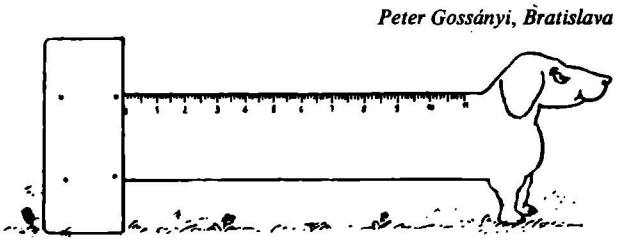
Bei einer Divisionsaufgabe waren alle Ziffern mit Ausnahme der „1" unleserlich. Wie heißt die vollständige Aufgabe, wenn die Ziffer „1" genau an diesen sechs Stellen auftritt?

$$\begin{array}{l} xxxxxx:xx = x1x1 \\ \underline{xx1} \\ 11x \\ \underline{xx} \\ xxx \\ \underline{1xx} \\ xx \\ \underline{xx} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} C+B=S \\ \cdot\ \ \cdot\ \ - \\ B+R=A \\ =\ \ =\ \ = \\ C-R=D \\ A:B=C \\ :\ \ :\ \ + \\ D+B=E \\ \overline{A-D=F} \end{array}$$

Mathematikfachlehrer Regina Brincks, OS II, Saalfeld

Schülerin Elke Schwetz, Schmalkalden

Peter Gossányi, Bratislava

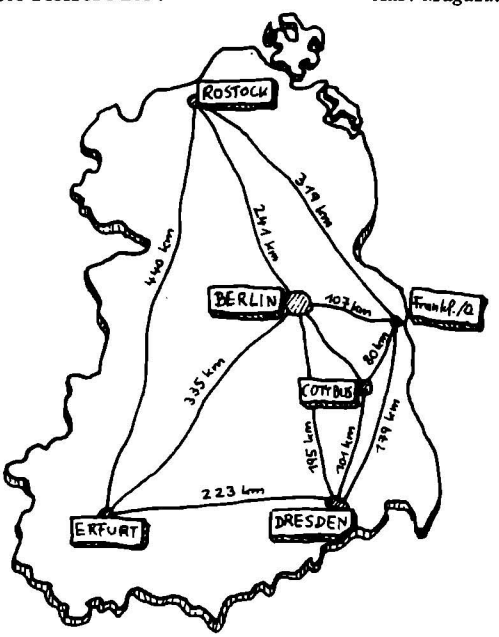


Rund um Pilze

„Steinpilze habe ich mit dem Hasen nach dem Regen gesammelt", erzählte der Bär, „und wir konnten sie kaum nach Hause tragen, aber in der Hauptsache haben wir Wasser getragen, denn die frisch gesammelten Pilze enthalten 90% Wasser. Als aber die Pilze ein wenig abgetrocknet waren, wurden sie um 15 kg leichter, denn sie enthielten nur noch 60% Wasser." Wieviel kg Pilze brachten Bär und Hase aus dem Wald? *Aus einem sowjetischen Unterhaltungsbuch*

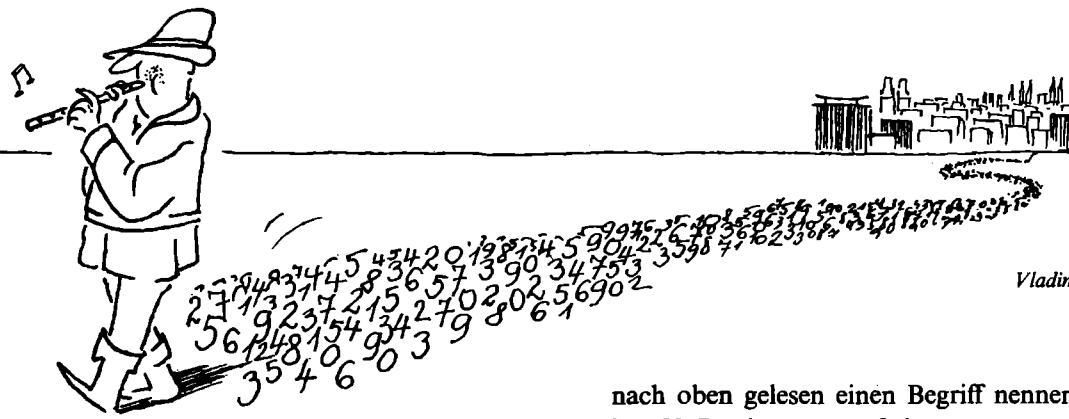
Heimatkunde

Von Berlin aus soll eine Rundreise durch die angegebenen fünf Städte gemacht werden. Welches ist die kürzeste Reiseroute? *Aus: Magazin 9/81*



Kniffliges Zerlegungsproblem

Man zerlege ein rechtwinkliges Dreieck in 7 spitzwinklige Dreiecke, ein Quadrat in 8 spitzwinklige Dreiecke und überlege sich jeweils, daß eine Zerlegung in eine kleinere Zahl spitzwinkliger Dreiecke nicht möglich ist. *Dr. P. Schreiber, E.-Moritz-Arndt-Universität Greifswald*



Vladimir Renčin, Praha

19 +82=1 +98 +2

$1^2 = (1+9):(8+2)$
$2^2 = 1+9-8+2$
$3^2 = 19-8-2$
$4^2 = 1+9+8-2$
$5^2 = 1 \cdot 9+8 \cdot 2$
$6^2 = 1 \cdot 9 \cdot 8:2$
$7^2 = 1 \cdot 98:2$
$8^2 = 1^9 \cdot 8^2$
$9^2 = -1^9+82$
$10^2 = (1+9)(8+2)$
$11^2 = (19-8)^2$
$12^2 = 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2$

Ing. H. Decker, Köln

Lesen – denken – lösen

Von der durch 11 teilbaren Zahl „1320" ausgehend sind neue vierstellige Zahlen zu bilden, indem jeweils eine Ziffer entnommen und eine andere hinzugefügt wird. Durch Permutieren der Ziffern ergeben sich dann Zahlen mit nachfolgenden Eigenschaften:

1. Größte gerade durch 11 teilbare Zahl;
2. kleinste gerade durch 11 teilbare Zahl;
3. größte ungerade durch 11 teilbare Zahl;
4. kleinste ungerade durch 11 teilbare Zahl;
5. größte gerade durch 11 teilbare Zahl;
6. kleinste gerade durch 11 teilbare Zahl.

	–	1320	+
1.	0		4
2.	1		5
3.	2		6
4.	3		7
5.	4		8
6.	5		9

Hinweis: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Silbenrätsel

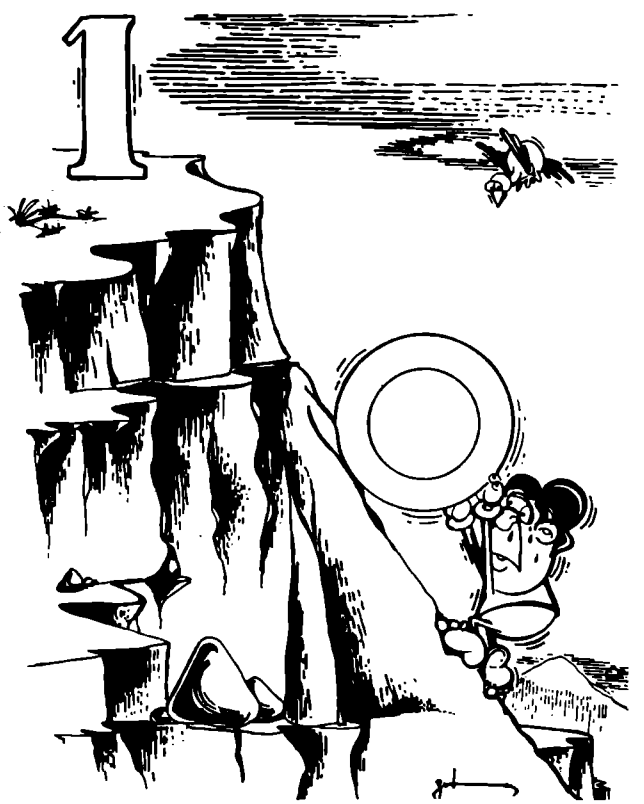
Aus den folgenden Silben sind 12 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben der gefundenen Wörter von oben nach unten gelesen ergeben den Namen eines genialen Mathematikers des Altertums (275 bis 194 v. u. Z.), während die Endbuchstaben von unten nach oben gelesen einen Begriff nennen, der bei der k. g. V.-Bestimmung auftritt.

a – a – di – eck – ep – eu – ex – ga – go – haff – jekt – ki – le – ler – lon – mum – na – na – ob – raum – sa – sechs – si – stop – ta – the – to – to – tom – tre – uhr.

1. Griechischer Buchstabe;
2. für sie gilt: $e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$;
3. Zeitmeßgerät höchster Genauigkeit;
4. Spiel, in dem die Kombinatorik eine Rolle spielt;
5. Element einer Menge;
6. ein n-Eck;
7. griechischer Buchstabe;
8. vom Meer abgetrennter flacher Strandsee;
9. Begriff der Differentialrechnung;
10. Hafenstadt in Japan;
11. genialer schweizerischer Mathematiker;
12. Kennzeichnung des Programmendes.

Ing. D. Völzke, Greifswald

M. Bukowan, Moskau

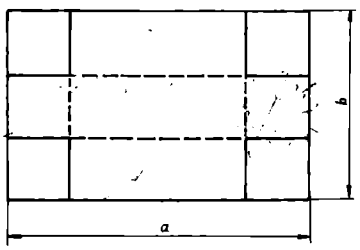


Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1982

Mathematik

Ma 5 ■2179 Von einem rechteckigen Stück Pappe mit den Seitenlängen $a = 90\,\text{cm}$ und $b = 45\,\text{cm}$ werden an jeder Ecke gleich große Quadrate ausgeschnitten. Es verbleibt danach eine Fläche mit einem Flächeninhalt von $3650\,\text{cm}^2$.



a) Wie lang ist die Seite jedes der vier ausgeschnittenen Quadrate?
b) Faltet man das so entstandene Stück Pappe um die gestrichelten Linien, so entsteht ein oben offener Karton. Welchen Rauminhalt hat dieser Karton?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2180 Setze für die fünf Sternchen fünf paarweise voneinander verschiedene Ziffern so ein, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht! Dabei soll der erste Summand größer sein als jeder andere. (Die erste Ziffer des ersten bzw. dritten Summanden darf nicht die Ziffer 0 sein.)

$$\begin{array}{r} *** \\ +\ 19* \\ +\ *81 \\ \hline 1981 \end{array}$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2181 In einem Verkaufsregal liegen vier verschiedene Seifensorten *A*, *B*, *C* und *D*. Von Sorte *A* sind es halb soviel Stück Seife wie von Sorte *B*. Von Sorte *B* sind es halb soviel Stück Seife wie von Sorte *C*. Von der Sorte *D* sind es 15 Stück Seife; das sind halb soviel Stück Seife wie von den Sorten *B* und *C* zusammengenommen. Wieviel Stück Seife liegen im Regal?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■2182 Von zwei leeren Zuckerdosen weiß man folgendes: Die größere der beiden Dosen ist doppelt so schwer wie die kleinere. Füllt man in die kleinere 300 g Zucker und in die größere 100 g Zucker, so sind beide Dosen gleich schwer. Wie schwer ist jede der beiden leeren Zuckerdosen? *StR H.-J. Kerber*

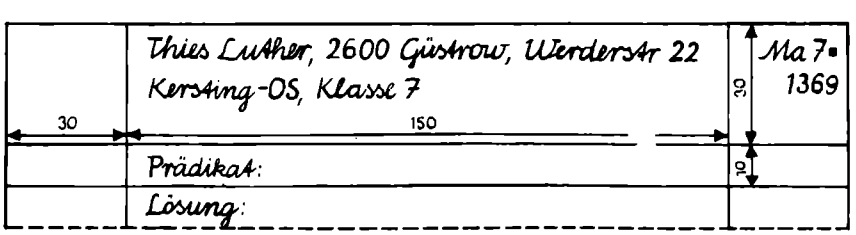
Ma 5 ■2183 Ein Winzer schenkte seinen drei Söhnen (*A*, *B*, *C*) sieben volle, sieben halbvolle und sieben leere Weinfässer, die sie unter sich so aufteilen sollten, daß jeder von ihnen gleich viel Fässer und gleich viel Wein erhält. Wie könnte die Aufteilung vorgenommen werden? *Schülerin Bettina Fröhlich, Manschnow (Kl. 5)*

Ma 5 ■2184 Die Mutter von Jens wurde im Jahre 1980 zehnmal so alt, wie sie (vom Jahre 1980 zurück gerechnet) vor 27 Jahren alt war. Welches Lebensalter erreicht die Mutter von Jens im Jahre 1981?

Schüler Jens Taggeselle, Borna

Ma 6 ■2185 Ein Radfahrer und ein PKW brechen zur gleichen Zeit im gleichen Ort auf und fahren dieselbe Wegstrecke mit konstanter Geschwindigkeit, der Radfahrer mit $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der PKW mit $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nach $1\frac{1}{2}$ Stunden Fahrzeit macht der Kraftfahrer 2 Stunden Rast in einer Gaststätte und fährt danach den gleichen Weg wieder zurück. Wieviel Minuten nach Abfahrt von der Gaststätte trifft der PKW auf den Radfahrer?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1981/82 läuft von Heft 5/1981 bis Heft 2/82. Zwischen dem 1. und 10. September 1982 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/82 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1981/82 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ■2186 Auf einer Weide grasen Pferde, Schafe und Ziegen; es sind zusammen mehr als 30, aber weniger als 36 Tiere. Es sind zwei Ziegen weniger und 11 Pferde mehr als Schafe. Wieviel Pferde, Schafe bzw. Ziegen grasen auf dieser Weide?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

Ma 6 ■2187 Von zwei natürlichen Zahlen sei die erste doppelt so groß wie die zweite. Multipliziert man die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten aus diesen beiden Zahlen miteinander, so erhält man 192. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

Ma 6 ■2188 Fritz fordert seinen Freund Fred auf: „Denke dir eine beliebige von Null verschiedene natürliche Zahl, multipliziere sie mit 5, addiere zum Produkt 2, multipliziere die so erhaltene Summe mit 4, addiere zu diesem Produkt 3, multipliziere die nunmehr erhaltene Summe mit 5, addiere schließlich 7, und nenne mir dein Ergebnis!" Fritz gibt nach kurzem Überlegen dem erstaunten Fred die von ihm gedachte Zahl an. Wie ist das möglich?

Schüler Jens Weber, Karl-Marx-Stadt

Ma 6 ■2189 Gesucht sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgende beiden Bedingungen erfüllen:

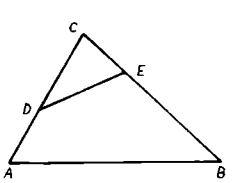
a) Die Quersumme einer solchen Zahl ist eine Primzahl.

b) Dividiert man eine solche Zahl durch ihre Quersumme, so ist der Quotient um 1 größer als die Quersumme.

Schülerin Kathrin Gnatdoski, Mühlhausen

Ma 7 ■2190 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar. Ein beliebiger innerer Punkt E der Seite $\overline{BC}$ wurde mit einem beliebigen inneren Punkt D der Seite $\overline{AC}$ verbunden. Es sei $\overline{AD}$ genau so lang wie $\overline{CE}$. Es habe $\overline{DE}$ die Länge 5 cm, und es sei $\overline{CD}$ genau 5 cm länger als $\overline{AD}$. Dann wäre der gerade Weg von A nach C genau so lang wie der Weg von A über D und E nach C. Dies kann jedoch nicht sein, da der gerade Weg $\overline{AC}$ immer der kürzeste ist. Wo steckt der Fehler?

StR H.-J. Kerber



Ma 7 ■2191 Zeige, daß

a) die in dekadischer Darstellung gegebene sechsstellige natürliche Zahl $z_1 = \overline{a2b3c4}$ nicht durch 4 teilbar sein kann, wenn z_1 durch 9 teilbar ist und $a+b=c$ gelten soll;

b) diese Behauptung für $z_2 = \overline{2a3b4c}$ nicht gilt!

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■2192 Ein Großvater unterhält sich mit seinem Enkelkind. Das Enkelkind stellt folgendes fest: „Wenn du von meinem (ganzzahligen) Lebensalter den fünften Teil von 5 subtrahierst und diese Differenz mit 5 multiplizierst, dann erhält man genau das Lebensalter von dir." Der Großvater meint darauf: „Wenn du zu meinem Lebensalter die Quadratzahl von 7 addierst, von dieser Summe das Zweifache von 7 subtrahierst und das so erhaltene Ergebnis durch 7 dividierst, so erhält man das Lebensalter von dir." Wie alt ist jeder?

StR H.-J. Kerber

Ma 7 ■2193 Angenommen, es gäbe im Lande „Utopia" nur Geldscheine zu 5 Uto und zu 7 Uto (angenommene Währung dieses Landes). Es sollten Wertgegenstände bezahlt werden, die

a) 1 Uto, b) 2 Uto, c) 3 Uto, d) 4 Uto kosten.

Wie kann das geschehen, wenn Käufer und Verkäufer genügend Scheine dieser beiden Sorten haben? Wie macht man das bei einem Kaufpreis von 99 Uto? Begründe, daß jeder beliebige ganzzahlige Betrag bezahlt werden kann!

StR H.-J. Kerber

Ma 8 ■2194 In der Gleichung $\overline{abc} = (\overline{bc})^b$ stellt $\overline{abc}$ eine dreistellige, $\overline{bc}$ eine zweistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise dar. Die Buchstaben a, b, c sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine wahre Aussage entsteht. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen.

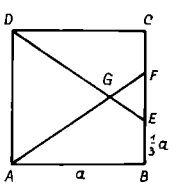
Sch.

Ma 8 ■2195 Es ist zu beweisen, daß die Summe aus den Quadraten zweier natürlicher Zahlen a und b mit $a>b$ stets größer ist als das zweifache Produkt dieser Zahlen.

Sch.

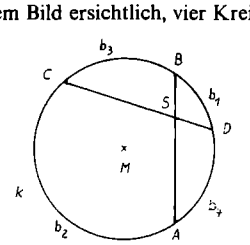
Ma 8 ■2196 Das Bild zeigt ein Quadrat $ABCD$. Die Punkte E und F sind derart eingezeichnet, daß gilt: $\overline{BE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FG}$. Ist das Dreieck EFG gleichseitig? Die Vermutung ist zu beweisen.

Schüler Axel Schulz, Potsdam (Kl. 8)



Ma 8 ■2197 In einen Kreis k wurden zwei verschieden lange Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die sich im Punkte S schneiden, eingezeichnet. Die Endpunkte dieser Sehnen erzeugen, wie aus dem Bild ersichtlich, vier Kreisbögen der Länge b_1, b_2, b_3 bzw. b_4. Es ist zu beweisen: Wenn $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$, dann $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

Sch.



Ma 9 ■2198 In der Sowjetunion gibt es gegenwärtig insgesamt 138 Zirkusse. Es sind viermal soviel Standortzirkusse wie Wanderzirkusse, zwei Tierzirkusse weniger als Wanderzirkusse, zehn Bühnenzirkusgruppen weniger als Standortzirkusse. Wieviel Zirkusse jeden Typs gibt es gegenwärtig in der Sowjetunion?

Aufgabe aus der UdSSR

Ma 9 ■2199 Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts eines Kreises zum Flächeninhalt des ihm einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

Studentin Marion Staskowiak, Päd. Hochschule Köthen

Ma 9 ■2200 Es ist nachzuweisen, daß die Zahl $1211^{100} - 1211^{98}$ durch 1111 teilbar ist.

Schüler Jens Grundmann, Limbach-Oberfrohna (Kl. 12)

Ma 9 ■2201 Es ist zu beweisen, daß der Term $7^{2n} - 4^{2n}$ für alle natürlichen Zahlen n durch 33 teilbar ist.

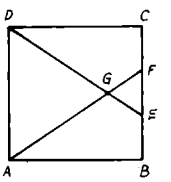
Schüler Volker Sachse, Mülsen (Kl. 9)

Ma 10/12 ■2202 Man ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die genau so groß sind wie das Produkt aus ihrer Quersumme und der Zahl, die ihre letzte Ziffer darstellt.

Andreas Fittke, Berlin, z. Z. NVA

Ma10/12 ■2203 Das Bild zeigt ein Quadrat $ABCD$. Die Punkte E und F sind derart eingezeichnet, daß gilt: $\overline{BE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FC}$. Ist das Dreieck EFG gleichseitig? Die Vermutung ist zu beweisen.

Schüler Axel Schulz, Potsdam (Kl. 8)



Ma10/12 ■2204 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Flächeninhalt $A_k = 19{,}63\,\text{cm}^2$. Die drei Eckpunkte A, B, C des Dreiecks ABC liegen auf k, wobei $\overline{AC}$ Durchmesser von k ist. Die Seite $\overline{AB}$ ist genau so lang wie der vierte Teil des Umfangs von k. Der Winkel $\sphericalangle BAC$ hat die Größe 35°.

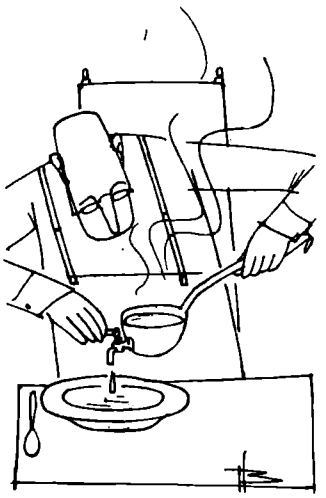
a) Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ABC?

b) Wieviel Prozent der Kreisfläche nimmt die Fläche des Dreiecks ein?

Schüler André Pohlers, Dresden (Kl. 10)

Ma10/12 ■2205 In einer Entfernung von $a = 10\,\text{m}$ vom Ufer eines Flusses steht ein Haus. Visiert man von zwei senkrecht übereinanderliegenden Fenstersimsen, deren Höhenunterschied $e = 8\,\text{m}$ ist, das andere Ufer an, so erhält man Neigungswinkel von $\alpha = 18{,}4°$ und $\beta = 24{,}6°$. Wie breit ist der Fluß?

Steffen Lausch, Grimma (Elektromechanikerlehrling)



Victor Kubal, Prag

Physik

Ph 6 ▪111 Betrachte die beiden Bilder 1 und 2! Welche Strecke ist länger, welcher Kreisbogen ist kürzer? Miß nach! Welche Schlußfolgerungen mußt du ziehen?

Bild 1

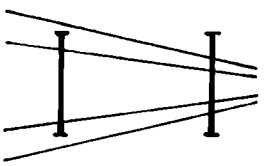
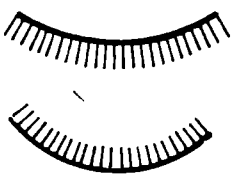


Bild 2



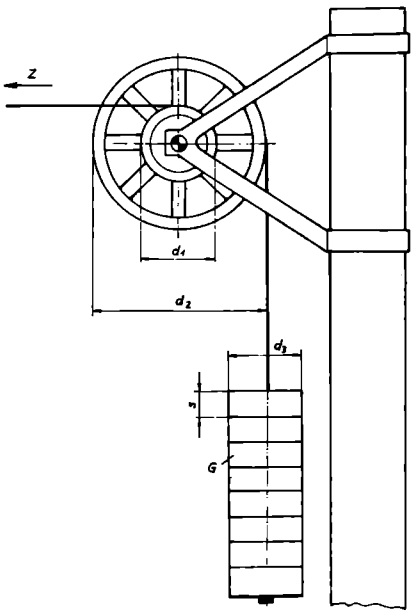
Ph 7 ▪112 Ein Taucher kann mit einem Druckluftgerät bis in ungefähr 45 m Tiefe vordringen. Berechne den Schweredruck, dem der Taucher im Meer (Wichte des Meerwassers $1{,}03\frac{p}{cm^3}$) ausgesetzt ist! Welche Druckkraft wirkt auf den gleichen Taucher, wenn man seine Körperoberfläche mit $1{,}6\,m^2$ annimmt?

Ph 8 ▪113 Der Gesamtwiderstand von drei parallel geschalteten Widerständen beträgt 28 kΩ. Wie groß sind die anderen drei Widerstände, wenn man weiß, daß die ersten beiden gleich sind und der dritte doppelt so groß ist wie die Summe der beiden anderen?

Schüler Stefan Franze, Dresden

Ph 9 ▪114 Bei Eisenbahnen, die mit elektrischer Oberleitung betrieben werden, muß der Fahrdraht durch entsprechende Spannwerke stets in einer bestimmten Höhenlage gehalten werden. Die Spannwerke haben also die Aufgabe, Längenänderungen des Fahrdrahtes infolge von Temperaturänderungen auszugleichen. Das Bild zeigt den prinzipiellen Aufbau eines sogenannten Radspanners. Dabei wird die konstante Zugspannung im Fahrdraht durch das Gewicht G, das aus einzelnen Betonscheiben besteht, erzeugt. Durch einen solchen Radspanner soll ein Fahrdraht von 700 m Länge bei $+15\,°C$ unter einer konstanten Zugspannung von $z = 98,\ 1\frac{N}{mm^2}\left(10\frac{kp}{mm^2}\right)$ gehalten werden. Ermitteln Sie die Anzahl der erforderlichen Betonscheiben, wenn der Beton eine Dichte von $\varrho = 2{,}25\frac{kg}{dm^3}$ hat, der Durchmesser der Scheiben $d_3 = 30\,cm$ beträgt und jede Scheibe eine zentrische Bohrung von $d_b = 4\,cm$ Durchmesser hat! Die Dicke der Scheiben sei $s = 12\,cm$. Gegeben seien weiterhin $d_1 = 30\,cm$, $d_2 = 80\,cm$ und der Fahrdrahtquerschnitt $A_f = 100\,mm^2$. Sonstige Details bleiben unberücksichtigt.

Ing. A. Körner, Leipzig



Ph 10/12 ▪115 Ein mathematisches Pendel wird um die Hälfte seiner Länge gekürzt. In welchem Verhältnis steht die Schwingungsdauer der beiden Pendel?

Chemie

Ch 7 ▪89 Kupfer(II)-oxid soll durch Oxydation gewonnen werden. Es werden 60 kg Kupfer eingesetzt.

a) Wieviel Kilogramm Kupfer(II)-oxid läßt sich aus dieser Kupfermenge gewinnen?

b) Welcher Sauerstoffmenge ist diese Kupfermenge äquivalent?

c) Die monatliche Planproduktion von Kupfer(II)-oxid ist um 200 t höher als die, die aus 60 kg Kupfer gewonnen wird.

Wieviel Tonnen Kupfer(II)-oxid werden bei einer Planerfüllung von 104% produziert?

Ch 8 ▪90 Wassergas ist ein Gasgemisch, welches aus 50% Wasserstoff und 40% Kohlenmonoxid besteht. Die restlichen 10% sind andere Gase, die in der Rechnung vernachlässigt werden sollen.

a) Wieviel m^3 Wasserdampf sind zur Umsetzung von 1 kg Hüttenkoks erforderlich?

b) Wieviel m^3 Wassergas entstehen dabei?

c) Wieviel m^3 Wassergas werden stündlich in einer modernen Wassergasanlage produziert, wenn der Koksdurchsatz $5{,}8\frac{t}{h}$ beträgt?

Ch 9 ▪91 Kalkmörtel, der als Baubindemittel sehr große Bedeutung besitzt, wird in großen Industriebetrieben produziert. So z. B. wird ein Kalkmörtel geliefert, der zu einem Drittel aus Löschkalk besteht. Wieviel Kubikmeter Luft sind notwendig, um 2,4 kg Kalkmörtel der angegebenen Zusammensetzung abzubinden? (1 Liter Luft enthält 0,03% Kohlendioxid)

Ch 10/12 ▪92 Im VEB Chemiewerk Coswig/Anhalt erfolgt die technische Herstellung von Schwefeldioxid durch Reduktion von Anhydrit. Als Reduktionsmittel dient Kohlenstoff. Die Ausbeute an Schwefeldioxid beträgt 94%. Aus 6 t Anhydrit, welches 20% Verunreinigungen enthält, soll eine 65%ige Schwefelsäure hergestellt werden. Wieviel Tonnen Schwefelsäure dieser prozentualen Zusammensetzung entstehen?

Gestalt der Erde wurde präzise vermessen

Der Durchmesser der Erde, von der schon Newton vermutete, daß sie aufgrund ihrer Rotation keine ideale Kugelgestalt haben könnte, ist zwischen den Polen gemessen um 42,77 km kleiner als am Äquator. Das stellten englische Wissenschaftler anhand präziser Vermessungen von Satellitenbahnen fest. Schon in den sechziger Jahren war entdeckt worden, daß die tatsächliche Gestalt der Erde auch von einer Ellipsoidform abweicht, daß sie eher die Form einer Birne hat. Sie ist am Nordpol etwas ausgebeult und hat am Südpol eine Senke. Wie die Zeitschrift „Nature" berichtet, ist nun auch die Gestalt der Erde genauer bestimmt worden, als dies bisher möglich war. Wie die englischen Wissenschaftler berichten, ist jetzt die Gestalt der Erde bis in Breiten von 86 Grad auf 50 Zentimeter genau bekannt. Den neuen Daten zufolge ragt der Nordpol um 17,84 Meter über die Ellipsoidfläche, und der Südpol liegt 27,23 Meter tiefer. Mit diesen Angaben wird jedoch nicht die tatsächliche Topographie wiedergegeben, sondern das sogenannte Geoid beschrieben. Darunter ist jene Fläche zu verstehen, die der Meeresspiegel unter dem Einfluß von Schwerkraft und Rotation einnehmen würde. Die Abweichungen von der Ellipsoidform sind eine Folge der unsymmetrischen Verteilung der Massen in der Erde. Dies führt zu Änderungen der Umlaufbahn von Satelliten, aus denen sich die Verzerrungen des Schwerefeldes bestimmen lassen.

Differential- oder Differenzengleichungen?

Bei der mathematischen Modellierung der unterschiedlichsten Vorgänge in Natur und Technik stellen *Differentialgleichungen* ein unentbehrliches Hilfsmittel dar. Zu den ältesten Beispielen gehören die Bewegungsgleichungen der Himmelskörper. Größere Teilgebiete der Theoretischen Physik sind in ihrem mathematischen Kern nichts anderes als Folgerungen aus den grundlegenden Differentialgleichungen dieser Gebiete. Von modernen Anwendungen sei etwa die Beschreibung biokybernetischer Systeme durch Differentialgleichungen erwähnt.

Um mit Differentialgleichungen arbeiten zu können, benötigt man zum Verständnis den Begriff des Differentialquotienten, der nach dem heutigen Lehrplan in der 11. Klasse behandelt wird. Im Zeitalter der Rechentechnik haben Differentialgleichungen den Nachteil, daß sie sich auf digitalen Rechenautomaten nicht direkt lösen lassen, sondern dort näherungsweise durch Differenzengleichungen ersetzt werden.

Mit *Differenzengleichungen* kann man sich schon ab Klasse 8 beschäftigen, denn sie erfordern neben dem Funktionsbegriff nur die vier Grundrechnungsarten. Da das qualitative Verhalten der Lösungen von Differenzengleichungen dem der Lösungen von Differentialgleichungen entspricht, hat diese Beschäftigung den Vorteil, daß man dabei schon viel für ein späteres Studium der Differentialgleichungen lernt. Wegen ihres elementaren Charakters sind Differenzengleichungen als Gegenstand mathematischer Schülerzirkel bestens geeignet, zumal sie in Form von Rekursionsformeln (vgl. *alpha* 9 (1975), S. 73 bis 75) immer häufiger in Olympiadeaufgaben auftreten.

Differenzengleichungen sind aber nicht nur elementare Approximationen für Differentialgleichungen, sondern sie machen ihnen in Form diskreter Modelle (vgl. Wiss. u. Fortschritt 28 (1978) S. 146 bis 149) bereits Konkurrenz. Ihre Verwendung zur mathematischen Beschreibung konkreter Vorgänge ist vor allem in solchen Wissenschaftsdisziplinen angebracht, die sich noch am Anfang der Mathematisierung befinden. Für zahlreiche weitere numerische Verfahren bilden Differenzengleichungen die Grundlage, wobei ihre einfache Programmierbarkeit sie als besonders nutzerfreundlich erscheinen läßt. Eine Einführung in verschiedene Anwendungsmöglichkeiten dieser Gleichungen bietet der Band 97 der Mathematischen Schülerbücherei *Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen*, VEB DVW, Berlin 1979.

An drei Stellen des Heftes 3 von *alpha* (1981) wurde in dessen Titel das erste Wort irrtümlich durch „Differentialgleichungen" ersetzt, was der Anlaß zu diesem kurzen Artikel war. *L. Berg*

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb

Heft 5/81

Ma 5 ▪2124 $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 = 100$

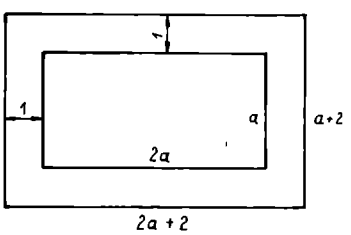
Ma 5 ▪2125 Angenommen, Dorothea sammelte x kg Altpapier; dann sammelte Astrid $3x$ kg Altpapier, und es gilt
$x + 3x = 43 - 19, 4x = 24, x = 6$. Dorothea sammelte 6 kg Altpapier, Astrid 18 kg. Beate sammelte 6 kg + 4 kg = 10 kg, Cordula 19 kg − 10 kg = 9 kg Altpapier.

Ma 5 ▪2126 Die fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$; dann gilt $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=25$,

$$5n + 10 = 25,$$
$$5n = 15, \text{ also } n = 3.$$

Daraus folgt weiter $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520$.

Ma 5 ▪2127 Die Rasenfläche sei a Meter breit, also $2a$ Meter lang. Das vom äußeren Rand des Fußweges gebildete Rechteck hat dann eine Breite von $(a+2)$ Metern und eine Länge von $(2a+2)$ Metern. Für den Umfang gilt deshalb
$2 \cdot (3a+4) = 248, 3a+4 = 124, 3a = 120, a = 40$.
Die Fläche des Rasens beträgt somit
$A = 2a \cdot a = 2a^2 = 2 \cdot 40^2 \text{m}^2 = 3200 \text{m}^2$.



Ma 5 ▪2128 Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $10a+b$ mit $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$. Nun gilt

$$10a + b + 27 = 10b + a,$$
$$9b - 9a = 27,$$
$$b - a = 3.$$

Es existieren genau sechs solcher Zahlen; sie lauten 14, 25, 36, 47, 58, 69.

Ma 5 ▪2129 Angenommen, Klasse 8c erreichte n Ringe, also Klasse 8b $(n+15)$ Ringe und Klasse 8a $(n+25)$ Ringe. Das sind insgesamt $(3n+40)$ Ringe; nun gilt $3n+40=901$, $3n=861$, $n=287$. Die Klasse 8a erreichte 312 Ringe, die Klasse 8b 302 Ringe und die Klasse 8c 287 Ringe.

Ma 6 ▪2130 Angenommen, Anna hat n Äpfel gekauft; dann gilt

$$(3 \cdot n + 5) \cdot 3 = 10 \cdot n,$$
$$9n + 15 = 10n, \text{ also } n = 15.$$

Anna hat 15 Äpfel gekauft.

Ma 6 ▪2131 17^7 endet auf die Ziffer 3; 12^3 endet auf die Ziffer 8; 15^2 endet auf die Ziffer 5; 16^4 endet auf die Ziffer 6. Wegen $3+8+5-6=10$ endet der Wert des Terms auf die Ziffer 0.

Ma 6 ▪2132 Da eine solche Zahl z durch 8 teilbar sein soll, muß sie gerade sein. An der vierten Stelle kann folglich nur die Primzahl 2 stehen. An der zweiten bzw. dritten Stelle könnten die Primzahlen 3, 5 oder 7 stehen. Deshalb sind folgende Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 8 zu untersuchen:
352, 532, 372, 732, 572, 752. Von diesen Zahlen sind nur 352 und 752 durch 8 teilbar. Nur die Zahlen 3752 und 7352 besitzen die geforderten Eigenschaften.

Ma 6 ▪2133 Aus $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$ folgt, daß Frau Heller $\frac{4}{5}$ der Menge der im Keller vorhandenen Kohlen verbraucht hat. Es verbleibt somit $\frac{1}{5}$ des ursprünglich vorhandenen Bestands an Kohlen; das sind 120 kg Kohlen. Deshalb waren im Keller $5 \cdot 120 \text{ kg} = 600 \text{ kg}$ Kohlen vorhanden. Das sind zwölf Säcke mit je 50 kg Kohlen.

Ma 6 ▪2134 Angenommen, Frau Schulze kaufte a Pfannkuchen und c Streuselkuchen, Frau Lehmann b Spritzkuchen; dann kaufte Frau Meier $(a+3)$ Pfannkuchen und $(b+5)$ Spritzkuchen, und Frau Winkler kaufte $(c+2)$ Streuselkuchen. Das sind zusammen $(2a+2b+2c+10)$ Stück Kuchen. Nun gilt

$$2a + 2b + 2c + 10 = 22,$$
$$2a + 2b + 2c = 12,$$
$$a + b + c = 6.$$

Wegen $a<b<c$ existiert genau eine Lösung, nämlich $a=1$, $b=2$ und $c=3$.
Frau Meier kaufte 4 Pfannkuchen und 7 Spritzkuchen; Frau Schulze kaufte 1 Pfannkuchen und 3 Streuselkuchen; Frau Lehmann kaufte 2 Spritzkuchen, Frau Winkler 5 Streuselkuchen.

Ma 7 ▪2135 Angenommen, Peter dachte sich die vier natürlichen Zahlen a, b, c, d; dann gilt

$$a+b+c=13, \quad (1)$$
$$b+c+d=17, \quad (2)$$
$$a+c+d=14, \quad (3)$$
$$a+b+d=16. \quad (4)$$

Addieren wir diese vier Gleichungen, so erhalten wir

$$3a+3b+3c+3d=60,$$
$$a+b+c+d=20. \quad (5)$$

Durch Einsetzen erhalten wir aus (1) und (5)

$13+d=20$, also $d=7$,

aus (2) und (5)

$a+17=20$, also $a=3$,

aus (3) und (5)

$b+14=20$, also $b=6$,

aus (4) und (5)

$c+16=20$, also $c=4$.

Peter dachte sich die Zahlen 3, 6, 4 und 7.

Ma 7 •2136 Angenommen, Jürgen hat die Zahlen a, b, c, d, e mit $a<b<c<d<e$ getippt. Dann gilt

(1) $a+b+c+d+e=78$,

(2) $d+e=2\cdot(a+b+c)$,

(3) $a+b=c$,

(4) $a+5=b$,

(5) $d:e=5:8$.

Aus (1) und (2) folgt durch Einsetzen $3(a+b+c)=78$, also $a+b+c=26$ (6) und $d+e=52$ (7).

Aus (3) und (6) folgt $2c=26$, also $c=13$ und somit (8) $a+b=13$.

Aus (4) und (8) folgt $2b=18$, also $b=9$ und somit $a=4$. Aus (5) und (7) folgt $d:(52-d)=5:8$, also $d=20$ und somit $e=32$. Jürgen hat die Zahlen 4, 9, 13, 20 und 32 getippt.

Ma 7 •2137 Eine zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $z=10a+b$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$. Die Quersumme der gesuchten Zahl lautet $a+b=9$. Nun gilt

$(10a+b)\cdot 3-9=10b+a$,

$30a+3b-9=10b+a$,

$29a-7b=9$.

Wegen $b=9-a$ erhalten wir durch Einsetzen

$29a-7(9-a)=9$,

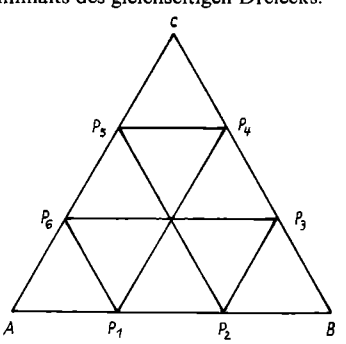
$29a-63+7a=9$,

$36a=72$, also $a=2$

und somit $b=7$.

Die gesuchte Zahl lautet 27, und es gilt $27\cdot 3-9=72$.

Ma 7 •2138 Das Dreieck ABC läßt sich, wie aus dem Bild ersichtlich, in genau neun kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen. Das regelmäßige Sechseck setzt sich aus sechs dieser kongruenten Dreiecke zusammen. Die Flächeninhalte verhalten sich also wie 6:9 = 2:3. Der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks beträgt somit $66\frac{2}{3}\%$ des Flächeninhalts des gleichseitigen Dreiecks.



Lösungen zu: alpha-heiter

Sport frei!

Die Zahlen 1, 4 und 5 erfüllen die Bedingungen.

Begriff gesucht

*T*eiler, *A*r, *M*ünze, *T*ag, *S*ehne, *N*enner, *T*onne, *S*chenkel – *Tangente*

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet y\cdot xy=\bullet 1\bullet 1 \\ \bullet\bullet 1 \\ \hline 11\bullet \\ \quad xy \\ \hline \quad abc \\ \quad 1de \\ \hline \quad fy \\ \quad xy \\ \hline \quad - \end{array}$$

(1) Da keine weitere „1" und der Divisor zweistellig → $a=2$.

Da die Differenz $f=x$ sogar einstellig → $b=0$ und $d=9$

(2)
$$\begin{array}{ll} \bullet\bullet\bullet\bullet & \\ 11\bullet & \\ \hline xy & \rightarrow\ x=9 \\ 20\bullet & \\ \hline 19\bullet & \rightarrow\ y>5 \\ \quad xy & \\ \hline \quad xy & \\ \hline \quad - & \end{array}$$

(3) $\bullet\bullet\bullet y\bullet y\cdot 9y=\bullet 1\bullet 1$

$\bullet\bullet 1$

$3\cdot 7$ oder $7\cdot 3$ → wegen $y>5$ $y=7$;

(4)
$$\begin{array}{l} \bullet\bullet 27\bullet 7:97=3121 \\ \quad 291 \\ \hline \quad 117 \\ \quad\ 97 \\ \hline \quad 20\bullet \\ \quad 19\bullet \\ \hline \quad\ 97 \\ \quad\ 97 \\ \hline \quad\ - \end{array}$$

Ergebnis: 302737 : 97 = 3121

$8+1=9$	$8:2=4$	$8:4=2$
$\cdot\ \cdot\ -$	$:\ :\ +$	$:\ :\ +$
$1+5=6$	$1+2=3$	$1+4=5$
$=\ =\ =$	$8-1=7$	$8-1=7$
$8-5=3$		

Rund um Pilze

$0{,}9x-15=0{,}6(x-15)$

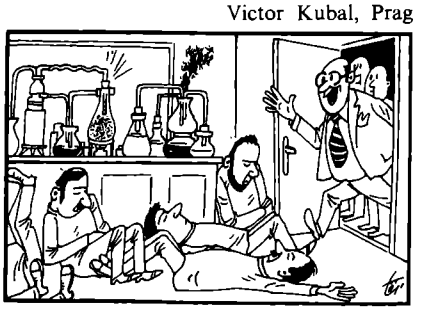
$x=20$

Bär und Hase brachten 20 kg frische Pilze mit nach Hause.

Heimatkunde

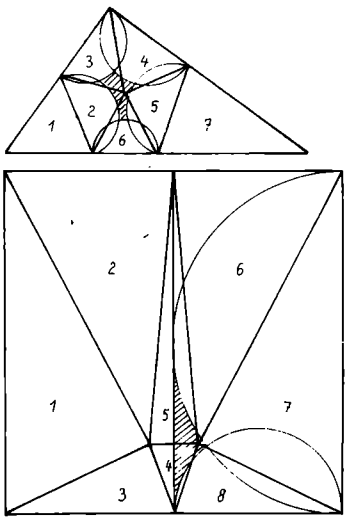
Berlin – Rostock – Erfurt – Dresden – Cottbus – Frankfurt/O. – Berlin oder umgekehrt (1192 km).

Victor Kubal, Prag



Kniffliges Zerlegungsproblem

Damit wirklich alle Teildreiecke spitzwinklig sind, müssen die inneren Zerlegungspunkte im jeweils schraffierten Gebiet liegen.



Lesen – denken – lösen

1. 4312; 2. 2354; 3. 6435; 4. 4675; 5. 8756; 6. 6798.

Silbenrätsel

1. Epsilon, 2. Raumdiagonale, 3. Atomuhr, 4. Toto, 5. Objekt, 6. Sechseck, 7. Theta, 8. Haff, 9. Extremum, 10. Nagasaki; 11. Euler, 12. Stop – Eratosthenes – Primfaktoren

Fortsetzung von Seite 9

Für $z=1$ erhält man durch ähnliche Schlüsse:

z	y	a	x	b
1	1	13	11	26
1	2	17	14	34
1	3	21	17	42
1	4	25	20	50

Die Tabelle enthält vier weitere Lösungen (von denen die letzte schon im Text angegeben war). Die Fallunterscheidung ist vollständig, damit haben wir alle Lösungen erhalten.

▲4▲ Man zerlege den gegebenen Würfel durch drei ebene Schnitte, die durch P, Q bzw. R gehen und paarweise senkrecht zueinander stehen, in acht gleich große Würfel. In einem so entstandenen Würfel sind P, Q, R und F Eckpunkte und somit $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ und $\overline{RP}$ Flächendiagonalen. Flächendiagonalen eines Würfels sind aber von gleicher Länge, folglich gilt $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RP}$. Das besagt aber gerade, daß das Dreieck PQR gleichseitig ist. Axel hat recht.

Lösung zu Schachstudie: Intellektuelles Boxen, S. 12

1. Tb5+ K:d6 2. T:d5+ T:d5 3. Sc3 (interessant, daß der schwarze Turm kein geeignetes Fluchtfeld hat) 3. ... Sac4 4. S:d5, und Schwarz kann mit den verbleibenden zwei Springern nicht matt setzen.

Carla Müller, Friedeburg; Matthias Bauer, Genthin; Urte Conrad, Gielow; Kerstin Schneider, Goßwitz; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Grit Möckel, Grünbach; Petra Brandstädter, Güstrow; Günter Schielinsky, Roger Fischl, beide Halle-Neustadt; René Geipel, Hartha; Kerstin und Heinz Wickner, Hermannsdorf; Jens Fiebig, Höhnstedt; Rigobert Hupach, Hüpstedt; Martin Arnold, Ilmenau; Marion Endrigkeit, Jessen; Ralph Gruber, Frank Hübler, Andreas Berner, alle Karl-Marx-Stadt; Andreas Kardos, Ralf Häntsch, beide Köthen; Joachim Braun, Koßdorf; Axel Schüler, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Petra Pluta, Lauchhammer; Gerald Pfützenreuter, Reiner Nolte, Steffi Begau, Meike Pfützenreuter, Jörg Drechsel, Dagmar Schunk, alle Leinefelde; Lutz Lämmer, Petra Sarodnick, beide Leipzig; Heike Nowara, Ingo Göll, Uwe Lautenschläger, alle Lössau; Birgit Arndt, Loitz; Matthias Neundorf, Carola Hönn, beide Meiningen; Uwe Würker, Mülsen; Dieter Seifert, Pinnau; Sigurd Assing, Karsten Milek, Axel Schulz, Thomas Schreckenbach, alle Potsdam; Jens Uhlemann, Prausitz; Tim Planke, Premnitz; Lutz Hübschmann, Raschau; Ina und Manfred Hille, Uwe Mattutat, alle Riesa; Katrin Lippuner, Rheinsberg; Ines Dalisda, Ulrike Martin, Hans Nitschke, Klaus Vilbrandt, Anette Müller, Sylke Giese, alle Rostock; Sigrid Schröter, Martina Rühl, beide Schladitz; Beate und Gabi Rein, Bernd Winkelmann, Mathias Brandt, Michael Gerth, alle Schmalkalden; Anke Krukenberg, Schönberg; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Klaus Pfeiffer, Taubach; Christine Mohr, Teterow; Lars Herrmann, Töplitz; Reiner Burkhardt, Voigtsdorf; Birgit Schmidt, Weißwasser; Ralph Nemitz, Wittenförden; Steffen Klimpel, Uwe Eix, beide Wolgast; Rolf Heubner, Wolfen; Claudia Groh, Wüstenbrand; Karl Oertel, Zeitz; Uwe Müller, Thorsten Eidner, beide Zeulenroda; Olaf Kretschmar, Gerald Sommer, Gabriele Schubert, Ingrid Soblik, Kerstin Hoffmann, alle Zittau; Ulrich Zeitzmann, Zingst; Norbert Welzel, Birgit Schenke, beide Zschornewitz; Uta Escher, Zwickau

Für fünfjährige Teilnahme

Michael Elte, Ahlum; Jens und Sven Fache, Altenburg; Olaf Köbernick, Babelsberg; Roland Hesse, Bad Blankenburg; Silke Schröder, Maike Jorzyk, beide Bad Kleinen; Esther Goroncy, Bahrendorf; Silke Rechner, Baruth; Michael Krüger, Berlin; Heidrun Spurell, Bernau; Andreas Jock, Blankenfelde; Marlis Schröder, Thomas Streich, beide Brandenburg; Sylvia Burgemann, Britz; Cornelia Kopte, Callenberg; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Christian Kunze, Karsten Mittag, alle Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Frank Sarodnik, Dallgow; Simone Marks, Mario Dette, Ruth Backhaus, Astrid Schunck, Hanna Baumgarten, alle Dingelstädt; Mario Jäpel, Dohna; Brigitte Rotter, Titus Ziegler, Cornelia Müller, Heike und Lutz Lauter, Maja Oelschlägel, Ute Schulze, Cathrin Engel, Rainer Schültke, Karsten Zosel, Grit Kammer, Stefan Franze, Christine und Werner Kirsch, André Pohlers, alle Dresden; Hardy Kutzscher, Dürrenhofe; Christine Frei, Ebeleben; Uwe Wollert, Edderitz; Olaf Hein, Eisenach; Volkmar Kolleck, Eisenhüttenstadt; Astrid Kafka, Katrin Schröter, beide Eisleben; Elvira Stallbohm, Eldena; Anke Adolf, Feldberg; Antje Hollstein, Fred Mettke, beide Frankfurt; Birgit Voigtmann, Thomas Heidrich, beide Freiberg; Marion Meyer, Goldbeck; Torsten Knaust, Gossa; Sylvia Döring, Gotha; Frank Creutzburg, Gransee; Britta und Achmed Schulz, Greifswald; Jörn Wintsche, Steffen Lausch, beide Grimma; Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Anke Misch, Michael Schulze, beide Halberstadt; Dany Lindenberg, Matthias Schünemann, Frank Siebert, alle Halle; Cordelia Kripnner, Kerstin Frank, beide Hammerbrücke; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Frank Pampel, Heinrichsort; Sabine Trommler, Ingo Wickner, beide Hermannsdorf; Steffen Frigge, Herzberg; Axel Herbst, Hohendodeleben; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Anita und Felix Baitalow, Kasan (UdSSR); Birgit Sandhop, Kasnevitz; Eske Röhrich, Ricarda Ramm, Andreas Niepel, alle Karl-Marx-Stadt; Bernd Schmutzler, Kirchberg; Christoph Hübel, Königsee; Ines Reichert, Königs Wusterhausen; Elke Willek, Kriebitzsch; Jens-Uwe Eigenwillig, Lauchhamer; Gabi Gold, Karola Pfitzenreuter, beide Leinefelde; Uta Hubrig, Leipzig; Heiko Schinke, Stefan Hähnel, beide Leuna; Ralf Schmidt, Lössau; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Jenny Pelzer, Lübars; Sabine Gerlach, Lübs; Beate Krause, Menteroda; Jürgen Welz, Meyenburg; Michael Simang, Mittel-Herwigsdorf; Olaf Wender, Mühlhausen; Andrea Weber, Neukirch; Holger Alsguth, Neuseddin; Kerstin Paul, Nordhausen; Dietmar Hennig, Olbersdorf; Kerstin und Petra Köbke, Oranienburg; Sabine Oestreich, Oschersleben; Margit Möllhoff, Piesau; Gudrun Zirnstein, Steffen Gottschlich, beide Pirna; Manuela Krause, Plauen; Rainer Räthe, Torsten Kühn, beide Potsdam; Iljana Planke, Premnitz; Tobias Mahlow, Radebeul; Frank Berndt, Radeburg; Andreas Korb, Raschau; Kristian Lauritzen, Reichenberg; Silke Gubick, Röbel; Ines Gülden, Roitzsch; Bernd Schentschischin, Annegret Opitz, Gitta Schöne, Mathias Slosarek, alle Rostock; Evelin Neumann, Jürgen Schmalisch, beide Rotta; Claudia Lieske, Saalfeld; Karola Klitsch, Scharlibbe; Ronald Bojarski, Saßnitz; Holger Laube, Schlotheim; Birgit Nößler, Bernd Winkelmann, Andre Wiegand, Sibylle Heuer, alle Schmalkalden; Sylke Lüder, Schönborn; Angela Böttcher, Liane Pappe, beide Schönfeld; Kerstin Freitag, Schwarzheide; Thomas Bienek, Schwepnitz; Andreas Prpic, Thomas Vorndran, beide Sonneberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Ralf-Birger Häfner, Theresa Häfner, Corina Kaiser, Anke Sauerteig, Sabine Dziatzko, Doreen Wahl, Ramona Holland-Nell, Stefan Kürth, Elfi Recknagel, Ines Nothnagel, Sabine Marr, Frank Pfannschmidt, Petra Preiß, Uwe Holland-Nell, Frank König, Gabriele Knebel, alle Steinbach-Hallenberg; Ramona Löser, Stendal; Stephan Meyerhöfer, Strasburg; Sabine Scheller, Teltow; Doris Grünler, Thierbach; Heiko van Schyndel, Trebsen; Silke Raßmann, Annette Stephan, beide Unterbreizbach; Birgit Lorenz, Meike Dallüge, beide Waren; Jens Köhler, Weida; Hartmut Boettcher, Weimar; Beate Hentschke, Ines Hoffmann, Sylvia Feige, alle Weißwasser; Marita Kalisch, Wismar; Steffen Thiele, Steffen Noack, beide Wittenberg; Petra Zander, Marion Reek, Kerstin Häntschke, alle Wittstock; Dietmar Polster, Zeithain; Christina Voß, Zepernick; Henry Jahn, Zittau; Jörg Steinbach, Zwickau; Markus Kostrzewa, Bad Liebenstein; Birgit Nößler, Bernd Winkelmann, André Wiegand, alle Schmalkalden

Für vierjährige Teilnahme

Arndt Löber, Ahrenshoop; Frank Schönherr, Anklam; Heike Dittmar, Beate Zimmer, Angelika Heilgeist, Simone Jung, Kathrin Arndt, Heike Himmel, Sabine Weisheit, Wolfgang Klee, Mario Martin, alle Asbach; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Heike Eckardt, Manuela Winges, beide Bad Liebenstein; Kerstin Kantiem, Berit Kleinbauer, Karin Leonhardt, Karin Gröger, Holger Neye, Andris Möller, René Damm, Thomas Strobel, Udo Bellack, alle Berlin; Elvira Hundeshagen, Berlingerode; Beate Weber, Bernburg; Peter Rößler, Bischofswerda; Kai Fischer, Bitterfeld; Micaela Ewert, Boizenburg; Kerstin Westphal, Heike Fischer, beide Borna; Susanne Kraska, Jens Przybilla, Mathias Tauscher, alle Breitenworbis; Annegret Richter, Andrea Fischer, beide Burkau; Heike Köhler, Callenberg; Peter Strempel, Daniela Syrbe, Andreas Heinze, Karsten Kehler, Christian Harnath, Uta Bolz, alle Cottbus; Stefan Klinzing, Creuzburg; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Ulf Fache, Culitzsch; Holger Schmidt, Demmin; Wolfgang Tenor, Katrin und Dieter Horn, alle Dessau; Heike Rosenthal, Thomas Strecker, Monika Ifland, Sabine Wetzel, Heike Arnold, Beate Meinhardt, alle Dingelstädt; Olaf Jenkner, Dorfchemnitz; Jens Danzer, Ines Lauter, Horst Seidel, Heinz Moll, Christoph Metzner, Pedro Thiele, Heiko Ringel, Christian Donath, Astrid Roll, Susann Piry, Kerstin Urban, Gerald Eichler, alle Dresden; Annette Wöhner, Eilenburg; Claudia Pleyer, Peter Kallenbach, beide Eisenach; Enrico Dietrich, Stefan Nitzsche, beide Elsterwerda; Lars Mönch, Kerstin Heer, beide Erfurt; Jens Wackernagel, Falkenberg; Cornelia Kreher, Heidi Kahleyß, beide Floh; Annett Helbig, Frankfurt; Karsten Thon, Freyburg; Mathias Gerlach, Friedeburg; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Kathrin Köhler, Gossa; Holger Stoffel, Grabow; Christian Röhl, Gräfenhainichen; Ines Schicker, Greiz; Ingolf Hintzsche, Gremmin; Thomas Wedekind, Grimma; Bianca Potthoff, Groß Wüstenfelde; Kerstin Vinke, Gr. Zarnewanz; Gunnar Müller, Güstrow; Thomas Koch, Halle; Annett Eichner, Andreas Löffler, beide Halle-Neustadt; Jens Strobel, Hammerbrücke; Bernd Müller, Heyerode; Thomas Benusch, Heidrun Schmidt, Hoyerswerda; Gabi Missal, Insel; Susanne Valentini, Detlef Ritter, beide Jena; Kai-Uwe Scherer, Jessen; Steffen Herpich, Ralph Buckisch, beide Kamsdorf; Andreas Paukert, Karbow; Hendrik Pönisch, Tanja Mittag, Katrin Richter, alle Karl-Marx-Stadt; Silvia Kriesche, Klausa; Axel Dübler, Klausdorf; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Thomas Senger, Klosterfelde; Kerstin Vogel, Kmehlen; Sonnfried Lätsch, Edith Löffler, beide Königshain; Karsten Rieger, Ingolf Raabe, beide Langengrassau; Andreas Helbig, Langenleuba-N.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Uta Mersiowsky, Sabine Mersiowsky, beide Langewiesen; Matthias Heller, Lauscha; Solveig Woitek, Sabine Hartung, beide Leinefelde; Max Pohl, Vera Wilhelm, Torsten Lill, Petra Polster, Andreas Eifler, Jan Klemm, alle Leipzig; Elke Hoffmann, Leisnig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Mathias Springwald, Löderburg; Andre Kerl, Lössau; Jörg Ladendorf, Lübtheen; Angela Zschörper, Maltitz; Gerd Eckstein, Mehltheuer; Norbert Fuchs, Meiningen; Steffen Hirn, Mellenbach-G.; Ute Krampitz, Bettina Heß, beide Mengersgereuth-H.; Hagen Haberland, Meschekenhagen; André Wiegand, Mittelschmalkalden; Detlef-Sven Saar, Mühlhausen; Jörg Fiebig, Mülsen; Michael Münzer, Michael Glockenstein, beide Neubrandenburg; Uwe Knispel, Neuburxdorf; André Ewert, Neuhaus; Eva Hartmann, Neustadt; Dieter Beyer, Neustrelitz; Heike Engelhardt, Niedersachsenwerfen; Volker Frank, Petra Hahn, beide Nordhausen; Timo Kaiser, Niederschmalkalden; Andy Marr, Oberschönau; Olaf Winkler, Oschatz; Birgit Seifert, Pinnau; Jörg Stark, Plauen; Iris Bernhardt, Podelwitz; Steffen Hoffmann, Potsdam-B.; Friedemann Domke, Premnitz; Annett Schmidt, Rackwitz; Antje Hertzschuch, Radebeul; Peter Wenke, Radibor; Ralf Launhardt, Rathenow; Sabine Ehrlich, Rechlin; Ute Zahn, Reichenbach; Katrin Dorendorf, Riesa; Andreas Puls, Röbel; Gunter Siebenhaar, Roßdorf; Ralf Heidenreich, Roßleben; Grit Maciejewski, Lutz Andrews, beide Rostock; Bodo Bricks, Sabine Pfeffer, beide Saalfeld; Rolf Richter, Schkölen; Annett Spaltholz, Schladitz; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Sabine Schüler, Schöna; Petra Joschenak, Schwaz (Österreich); Heiko Schulz, Schwedt; Michael Goletzka, Senftenberg; Frank Zöllner, Sabine Rahner, beide Sondershausen; Birgit Götz, Sonneberg; Peter Lehmann, Rainer Schwäblein, Kay-Uwe Weber, André Seling, Ralf Hoffmann, Silke Fischer, Sabine Recknagel, Heike Nothnagel, Stefan Menz, alle Steinbach-Hallenberg; Christian Wiegand, Steinheid; Cordula Gottwald, Stendal; Anke und Erhard Zilinske, Stralsund; Nicole Gößner, Syrau

alpha-Wettbewerb Preisträger

Fortsetzung aus Heft 6/81

Steffen Scharnowski, Möser; Volker Sachse, Mülsen; Claudia Nosek, Packisch; Michael Taeschner, Parchim; Diana Schlüter, Parchim; Steffen Scheithauer, Parley; Claudia Tiersch, Heiko Kühn, beide Potsdam; Ines Schmidt, Reuth; Dirk Röske, Riesa; Antje Pöhlmann, Röppisch; Michael Gräber, Annette Kersten, Heiner Ruser, Anne Ruser, alle Rostock; Katja Klotsch, Rotta; Knut Marzisch, Rudolstadt; Annette Polt, Saalfeld; Jörg Fuchs, Schkölen; Sabine Schwelgien, Anja Bohne, beide Schönhausen; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Matthew Harrison, Barbara Ploner, Andrea Schiedlbauer, Anke Donau, alle Schwaz (Österreich); Kerstin Klement, Schwerin; Mike Selig, Stauchitz; Beate Neuber, Steinbach-Hallenberg; Frank Leißring, Tauche; Wolfgang Vogel, Thalheim; Olaf Gleim, Trinkenberg; Silke Winges, Trusetal; Kati Pforr, Unterbreizbach; AG Junge Math., Vitzenburg; Thomas Vandahl, Völkershausen; Edith Boettcher, Weimar; Lutz Grothe, Andreas Döring, beide Wiederitzsch; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Chris Törpe, Wilkau-Haßlau; Maren Zech, Zahna; Angelika Weyh, Zella-Mehlis; Andreas Burkhart, Zeulenroda; Christine Thomas, Zittau.

Vorbildliche Leistungen

Angela Heiser, Abbendorf; Jana Koschka, Bad Gottleuba; Marko Jorzyk, Bad Kleinen; Uwe Völker, Bad Salzungen; Marko Pohl, Matthias Röder, Karen Böhme, alle Berlin; Thomas Franke, Barbara Richter, beide Bernsbach; Karsten Kühne, Blankenfelde; Carsta Patzschke, Böhlitz; Katrin Schulz, Böhne; Bärbel Scholz, Borkow; Anett Sperling, Bräunrode; Jörg Nachilla, Cottbus; Silke Fröhlich, Culitzsch; Yvonne Wagner, Matthias Ludwig, Michael Ludwig, alle Dahme; Jutta Schwabe, Kathrin Wiehe, beide Diesdorf; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Michael Dietsch, Fambach; Anke Thiel, Farnroda; Michael Scheibe, Ferdinandshof; Wolfgang Krüger, Kai Mettke, beide Frankfurt; Annemarie Heidrich, Freiberg; Frank Schulte, Udo Schulte, beide Freienbessingen; Kersten Ehberg, Gebersdorf; Hanka Pruditsch, Geithain; Uwe Knaust, Gossa; Mario Kapp, Gräfenhainichen; Thomas Bahls, Greifswald; Ralf Kramer, Greiz; Kathrin Henker, Groitzsch, Cordula Hesse, Halle; Karen Beume, Halle-Neustadt; Susan Meinel, Hammerbrücke; Maik Otto, Holzthaleben; Manuela Plunert, Kaltennordheim; Steffen Müller, Gesine Festag, beide Kamsdorf; Carla Umlauf, Udo Weiße, beide Karl-Marx-Stadt; Rolf Trautmann, Tobias Hoffmann, beide Leinefelde; Karl Heyde, Leipzig; Silke Blume, Liederstädt; Jörg Deichsel, Bettina Denecke, beide Löderburg; Frank Schmidt, Ludwigsfelde; Ute Korell, Lützen; Christian Eisele, Mölkau; Dirk Franke, Mülsen; Susanne Lind, Christoph Hachtmann, beide Neuhaus; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Ines Hartmann, Silke Stieber, beide Olbersdorf; Antje Reichel, Pirna; Peter Mattke, Plauen; Wolfgang Schneider, Radeberg; Sabine Lätsch, Röppisch; Oliver Eidam, Niels Hansen, Stephan Dittmann, Martin Wolff, alle Rostock; Bert Exner, Saalfeld; Katrin Mandel, Schlaitz; Anke Friedrich, Undine Link, Steffi Peterhänsel, Simone Peterhänsel, alle Schönbrunn; Jörg Gersonde, Schwerin; Steffen Jacob, Sondershausen; Uta Linz, Suhl; Petra Tiersch, Vacha; Lutz Müller, Weigsdorf; Claudia Genée, Wiederau; Susann Reichel, Wiesenburg; Ulrike Korb, Zoppoten; Alexandra Polenz, Schwerin.

Abzeichen in Gold

Für vierzehnjährige Teilnahme

Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Lutz Püffeld, Hennigsdorf

Für dreizehnjährige Teilnahme

Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blosfeld, Halle

Für zwölfjährige Teilnahme

Ullrich Riedel, Flöha; Angelika Müller, Greifswald

Für elfjährige Teilnahme

Arno Feuerherdt, Brandenburg; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Rainer Seifert, Kamenz; Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Frank Aßmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Sondershausen

Für zehnjährige Teilnahme

Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin; Wolfgang Seeber, Gehren; Bengt Nölting, Greifswald; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornewitz (Rentner)

Für neunjährige Teilnahme

Volkmar Türke, Auerbach; Andrea Nießen, Cordula Becher, Andreas Gude, alle Berlin; Werner Jeroch, Frank Regensburger, beide Dresden; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Eberhard Georgy, Erfurt; Claudia Endtricht, Görlitz; Wolfhart Umlauft, Freital; Armin Körner, Leipzig; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Thomas Richter, Neuhausen; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Armin Hoell, Ribnitz; Heinz-Olaf Müller, Heiko Müller, beide Schmalkalden; Bernadette Domaschke, Seifhennersdorf; Torsten Löwe, Schleiz; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Dirk Herrmann, Töplitz; Sylvia Kunze, Weißenfels; Ralf Becker, Wolmirstedt; Ute Scharkowski, Zepernick

Für achtjährige Teilnahme

Udo Clemens, Altenburg; Frank Maschke, Altendorf; Henri und Dieter Koch, Arnstadt; Peter Möller, Bad Doberan; Hans-Jürgen Kopf, Bad Frankenhausen; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Katrin Kolliwer, Berlin; Werner König, Berlingerode; Jens Purand, Ellen Harnath, Andrea Dreyer, alle Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Klaus Schlegel, Angela Jircik, Peter-Alexander Pöhler, Annett Körner, alle Dresden; Daina Semper, Eisleben; Uwe Kintzel, Erfurt; Bernd Dübe, Forst; Bernd Hartwig, Heike Brüggemann, Ute Ribbe, alle Friedeburg; Silvio Klose, Gera; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; Hubert Steinmeth, Grüningen; Jens Folgmann, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Uwe Müller, Hohenstein-E.; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Marko Hanke, Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Jens Rudolf, Leipzig; Ute Barbara Heuer, Leisnig; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Gabriele Otto, Meißen; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Rüdiger Düsing, Osterburg; Uwe Langer, Oybin; Ute Möllhoff, Piesau; Sigrid und Jens-Peter Planke, Premnitz; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Regina Bricks, Saalfeld; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Thomas Gerth, Henry Kriechling, Susanne Heuer, alle Schmalkalden; Torsten Jeschke, Schwarz-Gabriele Herzig, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken

Für siebenjährige Teilnahme

Frank Kämpfer, Altenburg; Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Ralph Müller, Bad Bibra; Thorsten Tonndorf, Bad Salzungen; Birgit Wollschläger, Bergwitz; Stefan Berg, Frank Bendin, Claudia Ziehm, alle Berlin; Ulrich Kramer, Bernterode; Andreas Kraska, Breitenworbis; Ralph Voigtländer, Guido Mehne, beide Calbe; Maik Weide, Callenberg; Olaf Seifert, Camburg; Andreas Winkler, Cossebaude; Claudia Kerstan, Susanne Liebelt, Kathrin Magister, alle Cottbus; Harry Höfer, Dorndorf; Carolin Engel, Thomas Schindhelm, Lutz Jeroch, Ingolf Körner, Karl-Heinz Jünger, Jürgen Gräfenstein, Jörn Wittig, Jens Rotsch, Uta Oelschläger, Susanne Müller, alle Dresden; Volker Georgy, Dirk-Thomas Orban, Henrik Seifert, Renate Lützkendorf, Thomas Mittelbach, alle Erfurt; AG Math. der Hugo-Joachim-OS, Espenhain; Jörg Butter, Freiberg; Steffi Haucke, Ralf Baumhekel, beide Freital; Gerd Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Frank Scheffler, Gnoien; Gunnar Boll, Ines Kath, Stefan Göckeritz, alle Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Regine Binder, Mathias Berle, beide Halle-Neustadt; Volker Reck, Heiligenstadt; Enka Stelzer, Heringsdorf; Eike Harmel, Hohenferchesar; Mathias Grundmann, René und Chonchita Schüppel, alle Hoyerswerda; Volkmar Liebscher, Ilmenau; Horst Fliegner, Jarmen; Birgit Hofmann, Andreas Hengst, Jens Pönisch, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Peter Witte, Königs Wusterhausen; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Birgit Schmidt, Monika Nolte, Astrid Markgraf, alle Leinefelde; Stephan Bönewitz, Heiko Rudolf, beide Leipzig; Thomas Eller, Meiningen; Tobias Lücke, Meißen; Heidrun Jänchen, Mohlsdorf; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Uwe Grasenack, Nauendorf; Torsten Kretschmer, Naumburg; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Kerstin Feigel, Neundorf; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Birgit Uhlmann, Oberlungwitz; Kerstin Johannes, Oranienbaum, Andreas Bollmann, Osteroda; Peter Seifert, Pinnau; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Claudia Würker, Reichenbach; Hartmut Lipke, Ribnitz; Astrid Wruck, Rostock; Ina und Uwe Ebert, Ruppersdorf; Birgit Bricks, Saalfeld; Eva Schubert, Schalkau; Elke Meißner, Sitzendorf; Bert Hoffmann, Söllichau; Roland Goldenbogen, Stralsund; Peter Pfannschmidt, Suhl; Heidrun Tiedt, Teterow; Margit Creutzburg, Thal; Annekatrein Heuer, Tieckow; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Stefan Syring, Warin; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Karsten Schlutter, Wittstock; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Anett Schulzensohn, Zittau

Für sechsjährige Teilnahme

Frank Baumgart, Aschersleben; Kirsten Rechner, Baruth; Marc Schewe, Berlin; Henry Fischer, Bitterfeld; Tilman Völzke, Böhlen; Irene Palm, Brieselang; Uta Boldt, Burg Stargard; Royald Lenk, Christine Pompe, Stefan Jakubaschk, alle Cottbus; Gabriele Sprotte, Döbeln; Manuela Schwenke, Dohna; Kathrin Wustmann, Ulf Riechen, Stefan Edelmann, Jörg Hempelt, Birgit Wittwer, Jochen Lattermann, alle Dresden; Reinhard Weißnicht, Siegfried Obst, beide Eberswalde; Marlies und Petra Patz, Eisenach; Thomas Pigorsch, Eisleben; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Karsten Meißner, Forst;