

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalzkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Techn. Zeichnungen G. Tittel, Dres-
den (S. 1/2); PH Jerewan (S. 3); TU Dresden
(S. 5); L. Otto, Berlin (S. 8); Adar Darian,
Berlin (S. 10); Viktor Kubal, Berlin (S. 10);
L. Otto, Berlin (S. 15); Ing.-Schule f. Gießerei-
technik, Leipzig (S. 18); IV. U.-Seite: Abb.
nach Lietzmann: Der Pyth. Lehrsatz (BSB
B. G. Teubner)

Typographie: H. Tracksdorf

Titelbild: W. Fahr, Berlin



Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 · ISSN 0002-6395
Redaktionsschluss: 24. Oktober 1978

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Die Biene als Geometer [9]*
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 2 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [5]
Aus der Arbeit des Kreiskorrespondenzzirkels Zschopau
Dipl.-Lehrer S. Reulecke, EOS *Maxim Gorki*, Thum/Erzgeb.
Ein Mathematik-Klub in der Armenischen SSR
- 4 Olympiadaufgaben aus Freundesland [10]
Sozialistische Republik Vietnam
Zusammenstellung: stud. math. Nguyễn thái Hùng, Hanoi/Oberstudienrat Dr. R. Lü-
ders, Berlin
- 5 Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. M. Eganjan [8]
Pädagogisches Institut *H. Abowjan*, Jerewan, Armenische SSR
- 5 Leistungsschau der Studenten an der TU Dresden [9]
Bericht
- 6 Albert Einstein, Teil 2 [8]
Ein Einblick in Einsteins Gedankenwelt
Dr. R. Thiele, BSB B. G. Teubner, Leipzig
- 8 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik, Physik, Chemie
- 11 Die letzten 30 Jahre haben Gewicht [7]
Dr. G. Deweß, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 12 Lineare Optimierung, Teil 2 [9]
Oberlehrer Dr. E. Lehmann, Lektor an der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-
Universität Rostock
- 13 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 5/6
Drunter und drüber [5]
Diplom-Lehrer Cordula Röhr, Leipzig
- 16 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz
- 18 Berufsbild:
Ingenieurschule für Gießereitechnik *Georg Schwarz* Leipzig [8]
Studiendirektor Dipl.-Ing. O. Koch
- 19 *alpha*-Wettbewerb 1977/78 – Träger des Abzeichens in Gold – Preis-
träger (dreijährige Teilnahme) [5]
- 21 Lösungen [5]
- 24 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [7]

III. Umschlagseite: Wissen wo [5]

Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1978

IV. Umschlagseite: Mitgemacht und nachgedacht [5] Satz des Pythagoras

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die Biene als Geometer

Wenn wir uns eine dem Bienenstock frisch entnommene Honigwabe anschauen, so beeindruckt uns neben dem süßen, goldgelben Honig auch die aus Bienenwachs kunstvoll gefertigte Wabe, in deren Zellen die Bienen den Honig eingetragen haben. Wir fragen uns, wie die Bienen dieses komplizierte geometrische Gebilde so regelmäßig gestalten können. Wollen wir uns daher mit der Form der Bienenzelle und dem Aufbau der Wabe aus den Zellen näher vertraut machen! Hierzu werde einmal von der gewiß nicht richtigen Annahme ausgegangen, daß die Biene ein vernunftbegabtes und zu menschlichen Überlegungen fähiges Wesen sei.

Bei der Erfindung von Zelle und Wabe müßte die Biene folgende Forderungen aufgestellt haben:

1. Die Zellen der Wabe sollen der Arbeitsbiene Raum und Schutz bei ihrer Entwicklung vom Ei bis zum ausgewachsenen Individuum bieten.
2. Die Zellen sollen Aufnahmegefäße für den Wintervorrat (Honig) sein.
3. Jede Zelle soll in gleicher Weise leicht zugänglich und pflegeleicht sein.
4. Der Zellverband soll raum- und materialsparend angelegt sein; d. h. Blockbauweise ist anzustreben.

Diese vier Forderungen resultieren aus den natürlichen Trieben der Biene nach Selbsterhaltung und Arterhaltung. Zur Arterhaltung gehört z. B., daß die Königin mit einer kleinen Stammbelegung von Arbeitsbienen auch den strengsten Winter überleben kann. Entsprechend den vier Forderungen ist von der Grundkonzeption auszugehen, daß eine gewisse Anzahl von prismatischen Zellen, die den Körpermaßen der Biene angepaßt sind, zu einer Wand (Wabe) vereinigt werden. Wegen der zu fordernden lückenlosen Zusammensetzbarkeit kommen dafür nur reguläre Dreieck-, Viereck- oder Sechseckprismen als Zellformen in Betracht.

Beim Dreieckprisma ist die Größe der Innenwinkel 60° . Die Inhalte von Inkreis und Dreieck stehen im Verhältnis $1:1,654$. Der Raum der Zelle würde von der sich entwickelnden Biene nur zum Teil ausgelastet werden. Die Zelle ist nach jedem „Gebrauch“ zu reinigen. Auch dafür wäre der Arbeitsaufwand wegen der spitzen Innenwinkel sehr groß. Dreieck-

prismen scheiden daher für diesen Zweck aus.

Beim quadratischen Prisma ist die Größe der Innenwinkel 90° . Die Inhalte von Inkreis und Quadrat verhalten sich wie $1:1,273$. Auch hier wird der Raum der Zelle nicht hinreichend genutzt. Daher scheiden quadratische Prismen zur Gestaltung von Zellen aus. Bemerkenswert ist jedoch, daß der Mensch quadratische Prismen und Rechteckprismen für Speichierzwecke bevorzugt heranzieht. Man denke nur an die Schubkästen in den Schränken von Apotheken und Drogerien oder an Karteikästen in Verwaltungen und Bibliotheken.

Beim regulären Sechseckprisma ist die Größe der Innenwinkel 120° . Die Inhalte von Inkreis und Sechseck verhalten sich wie $1:1,102$. Dieses Prisma bietet unter der zusätzlichen Forderung der lückenlosen Zusammensetzbarkeit zu einem Verband die beste Anpassung an den Drehzylinder. Sechseckige Zellen erlauben bei optimaler Raumauslastung wegen der stumpfen Innenwinkel eine ökonomische Wartung. Im heutigen Sprachgebrauch würde man dies als die „nutzerfreundlichste Lösungsvariante“ bezeichnen.

Bis zu einem gewissen Entwicklungsstand, auf dem z. B. die Wespen stehengeblieben sind, wurden die Waben nur einseitig genutzt. Wie auch in neuzeitlichen Bibliotheken zweiseitig nutzbare Bücherregale parallel zueinander aufgestellt werden, baute die Biene von einem gewissen Entwicklungsstand an auch zweiseitig nutzbare Wabenwände auf. Diese ordnete sie in ihren Wohnhöhlen, z. B. hohlen Bäumen, parallel zueinander an.

Wie sieht nun die Mittelwand einer solchen zweiseitig nutzbaren Wabe aus? Die Biene löste dieses Problem in einer Weise, die nicht nur dem Geometer Bewunderung abnötigt. Wir denken uns zunächst eine Ebene, auf die eine Schicht kongruenter Kugeln mit dem Radius r derart ausgebreitet wird, daß jede innere Kugel der Schicht genau sechs weitere Kugeln in je einem Punkt berührt. Die Tangentialebenen an eine innere Kugel in den Berührungspunkten mit den sechs Nachbar-kugeln ergeben ein reguläres Sechseckprisma. Nun wird auf diese Kugelschicht eine zweite Schicht von Kugeln mit dem Radius r so aufgelegt, daß jede Kugel der oberen Schicht je drei Kugeln der unteren Schicht berührt. Außerdem berührt jede innere Kugel der aufgelegten Schicht genau sechs Kugeln der gleichen Schicht. In der Werkstoffkunde wird eine solche Kugelpackung als „dichteste Packung“ bezeichnet. Die Mathematiker haben noch nicht bewiesen, ob es sich hier wirklich um die dichteste Kugelpackung handelt. Wir wollen trotzdem die bei Technikern übliche Bezeichnung übernehmen.

Durch Ausmessung der Gipsabgüsse von Bienenzellen läßt sich bestätigen, daß man sich die doppelseitig genutzte Bienenzelle in der folgenden Weise erzeugt denken kann:

Legt man in den gemeinsamen Punkten je zweier sich berührender Kugeln aus zwei Schichten der dichtesten Packung von Kugeln mit geeignetem Radius die Tangentialebenen an die betreffenden Kugelpaare, so lassen sich die Begrenzungsebenen der Bienenzellen mit diesen Tangentialebenen zur Deckung bringen.

Wie man aus dieser Erzeugung der beiderseitig genutzten Wabe leicht erkennt, ist deren Mittelwand keineswegs eine ebene Wachsplatte, sondern ein aus Rhomben zusammengesetztes Flächenstück. Der Boden einer Zelle besteht aus drei Rhomben. Wir könnten nun die Größe der Schnittwinkel berechnen, die zwei Rhomben der Basisfläche bilden oder das Längenverhältnis der Diagonalen des Rhombus ermitteln.

Interessanter ist die Aufgabe zu zeigen, wie man das Kantengefüge einer Bienenzelle aus dem Würfel herleiten kann. Der geometrische Aufbau der Zelle wird dadurch übersichtlicher und für die Berechnung von Winkelgrößen und Streckenverhältnissen leichter zugänglich. Wir greifen eine Kugel K_0 mit dem Mittelpunkt M_0 aus der oberen Schicht heraus. Diese umschließen wir mit einem regulären Sechskantprisma, so daß jede Seitenfläche des Prismas gemeinsame Tangentialebene von K_0 und einer benachbarten Kugel ($K_1 \dots K_6$) der oberen Schicht ist. Nach unten wird dieses Prisma durch drei Rhomben abgeschnitten, die in den gemeinsamen Tangentialebenen von K_0 und K_1 bzw. K_0 und K_2 bzw. K_0 und K_3 liegen. Die Kugeln K_i ($i = 1, 2, 3$) gehören der unteren Schicht an (vgl. Bild 1).

Der Berührungspunkt von K_0 mit K_i wird mit B_i bezeichnet. Der zu K_i gehörige Mittelpunkt sei M_i . Dann gilt offenbar $\overline{M_0 B_i} = \overline{M_i B_i} = r$. Daraus folgt $\overline{M_0 M_i} = 2r$. Da sich die Kugeln K_i ($i = 1, 2, 3$) auch untereinander berühren, gilt ferner $\overline{M_i M_k} = 2r$ für $i \neq k$.

Folglich sind die Kugelmittelpunkte M_0, M_1, M_2, M_3 Eckpunkte eines regulären Tetraeders. Die Punkte B_i sind Halbierungspunkte der von M_0 ausgehenden Tetraederkanten $\overline{M_0 M_i}$. Ferner steht die gemeinsame Tangentialebene τ_i von K_0 und K_i in B_i senkrecht auf $\overline{M_0 M_i}$. Auf Grund der Symmetrie von

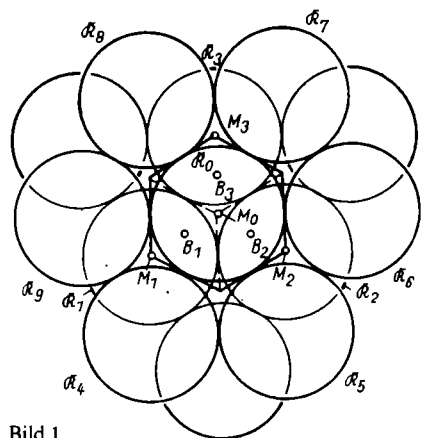


Bild 1

$\overline{M_0M_i}$ bezüglich τ_i schneiden sich die drei Basisbenen τ_i im Schwerpunkt S (Mittelpunkt) des Tetraeders (Bild 2). Als Kanten der Basisbenen ergeben sich die Strecken $\overline{SC_i}$ ($i=1, 2, 3$). Wie aus Bild 2 leicht erkennbar ist, gilt für die Längen dieser Kanten $C_iC_k=2r$ für $i \neq k$.

Nun passen wir das reguläre Tetraeder $M_0M_1M_2M_3$ in einen Würfel geeigneter Größe derart ein, daß jede der sechs Tetraederkanten mit genau einer Diagonalen aus jeder Seitenfläche des Würfels zur Deckung kommt. Bei dieser Einpassung werden die vier Tetraederecken in vier Ecken des Würfels und der Tetraederschwerpunkt S in den Würfelschwerpunkt übergeführt.

Bild 2

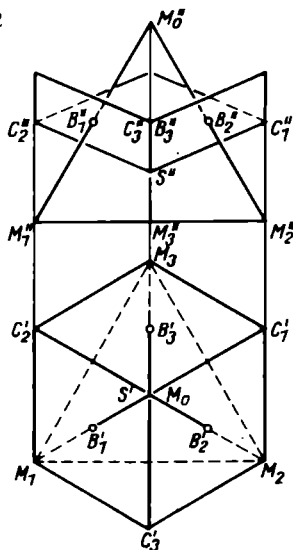


Bild 3

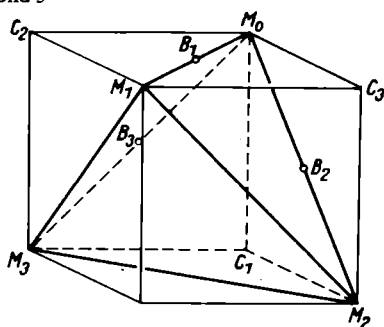
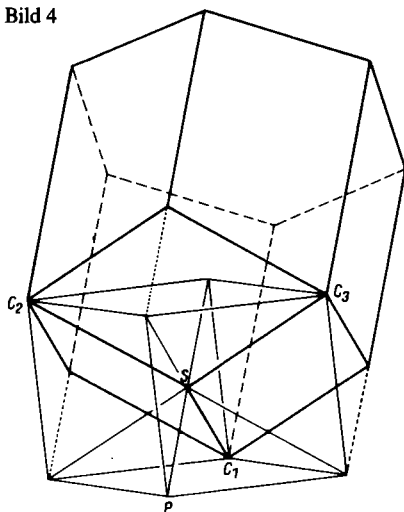


Bild 4



Da außerdem entsprechend Bild 2

$\overline{C_2C_3} = \overline{M_0M_1}$ sowie $\overline{C_2C_3} \perp \overline{M_0M_1}$ und

$\overline{C_2C_3} \perp \overline{SB_1}$ gilt, kann gefolgert werden, daß

die Punkte C_2, C_3 und damit auch C_1 bei

dieser Einpassung in drei weitere Eckpunkte

des Würfels fallen. Die Schnittgeraden $(\tau_1\tau_2)$

$= (SC_3), (\tau_2\tau_3) = (SC_1), (\tau_3\tau_1) = (SC_2)$ decken

sich also mit drei der vier Raumdiagonalen

des Würfels. Weiterhin ist erkennbar, daß die

Rhomben der Basisfläche der Zelle senkrecht

auf der sie jeweils durchsetzenden Würfel-

seite stehen. Zum Beispiel ist der von den

Strecken $\overline{SC_2}$ und $\overline{SC_3}$ aufgespannte Rhom-

buss senkrecht zu der Würfelwand $M_0C_2M_1C_3$.

Ferner sind die zu $\overline{SC_2}$ bzw. $\overline{SC_3}$ parallelen

Seiten des Basisrhombus Diagonalen in einem

Würfel, den man auf den gegebenen aufsetzen

kann. Aus dieser Einpassung der Zelle in den

Würfel ist weiterhin abzulesen, daß sich die

Diagonalen in den Rhomben der Basisfläche

wie $1:\sqrt{2}$ verhalten (vgl. Bilder 3 u. 4). Nach

Bild 2 stehen die Kanten des Sechsecks

senkrecht auf der von den Punkten C_1, C_2, C_3

aufgespannten Ebene. Aus Bild 4 ist zu schlie-

ßen, daß diese senkrecht zur Geraden (SP) ,

der vierten Raumdiagonalen des Würfels,

steht. Diese Diagonale ist eine drei Zellen der

Wabe gemeinsame Kante. Diese Zellen sind

in entgegengesetzter Stellung bezüglich der

bisher betrachteten angeordnet. Jeder der drei

Rhomben der Basisfläche der ersten Zelle ist

zugleich ein Rhombus der Basisfläche je einer

der drei gegenständigen Zellen. Legt man zu

(SP) Parallelen durch die Eckpunkte $M_1, C_2,$

M_3, C_1, M_2, C_3 des betrachteten Würfels, so

decken sich diese mit den Seitenkanten der

um die Kugel K_0 gelegten Zelle (Bild 4).

Diese Parallelen sind wiederum Diagonalen

in Würfeln, die man sich an den vorgegebenen

Würfel angebaut denken kann. Der lücken-

lose Zusammenbau untereinander kongruen-

ter Würfel führt zu einem „kubischen Raum-

gitter“.

Da alle Seitenkanten einer idealisierten Wabe

untereinander parallel sind, folgt aus diesen

Überlegungen der Satz: Die Kanten der

Zellen einer Bienenwabe liegen in den Diag-

onalen eines kubischen Raumgitters.

Der hier vorgeführte Idealfall des Aufbaus

einer Bienenwabe liegt in Wirklichkeit nicht

exakt vor. Da die Zellen u. a. flüssigen Honig

aufzunehmen haben, sind diese leicht nach

oben geneigt. Zur Arterhaltung gehört auch

die Aufzucht von Drohnen. Diese sind größer

und schwerer als die Arbeitsbienen. Es gibt

daher auch Zellen, die der Größe der Drohnen

angemessen sind. Die der Größe der Arbeits-

bienen angepaßten Zellen sind Mehrzweck-

zellen. Sie dienen sowohl der Aufnahme der

Brut wie auch des Honigs. Im Frühling ist zu-

nächst der Bedarf an Brutzellen größer. Im

Sommer und Herbst überwiegt die Nutzung

der Zellen für die Aufnahme von Honig.

Schließlich erfordert die Aufzucht einer Köni-

gin besonders große Zellen (Weiselzellen), da

der Hinterleib einer Königin besonders stark



Aus der Arbeit des Kreiskorrespondenzzirkels Zschopau

Die Kreiskorrespondenzzirkel im Kreis Zschopau sind aus den Kreisarbeitsgemeinschaften, die in drei Stützpunkten für die Klassenstufen 5/6, 7/8 und 9/10 durchgeführt wurden, hervorgegangen. Hierbei ergaben sich vor allem durch die geographisch ungünstige Lage des Kreisgebietes zwei Hauptmängel. Es war schwierig, Termine für die gemeinsamen Zusammenkünfte so zu finden, daß alle Schüler anreisen konnten, und einige Orte konnten in die Arbeit überhaupt nicht einbezogen werden. So beschlossen wir vor nunmehr zwei Jahren, die Förderung der Schüler auf der Basis der Korrespondenz fortzusetzen, wobei langjährige AG-Leiter als Leiter eines solchen Korrespondenzzirkels tätig sind.

Die Korrespondenzzirkel bestehen in den Klassenstufen 5 bis 10, die Teilnehmer werden nach dem Leistungsprinzip ausgewählt, die Teilnahme selbst erfolgt auf freiwilliger Basis.

Auf Grund der Ergebnisse bei der Kreisolympiade werden jedes Jahr die 16 Schüler

ausgebildet ist. So finden alle Belange der Selbsterhaltung des Bienenvolkes und der Arterhaltung der Bienen beim Bau ihrer Zellen und Waben einen konstruktiven Niederschlag.

E. Schröder

Aufgaben

▲1▲ Wie groß ist der Winkel, den die Normalenvektoren zweier Basisrhomben der Bienenzelle miteinander einschließen?

▲2▲ Wie groß ist der Winkel, den die Normalenvektoren eines Basisrhombus und einer Seitenfläche der Bienenzelle miteinander einschließen?

Bem.: Die Normalenvektoren sollen in das Innere der Zelle zeigen.

▲3▲ Zwei Basisflächen einer Bienenzelle (Rhombentripel) lassen sich zu einem Rhomboeder (geschlossenes konvexes Polyeder) zusammensetzen. In welchem Verhältnis stehen die Längen von Kante und Höhe dieses Körpers?

der Klassenstufe 5 mit den besten Ergebnissen angesprochen und durch die Schule delegiert. Besondere Hinweise und Wünsche der Schule werden dabei mit berücksichtigt. Wer nicht regelmäßig am Zirkel teilnimmt oder keine entsprechenden Leistungen bringt, scheidet aus. Andererseits besteht aber auch die Möglichkeit, nach guten Ergebnissen bei der Kreismathematikolympiade neu in den Zirkel aufgenommen zu werden. Unser Ziel besteht darin, einen Stamm von Schülern zu erhalten, die von der Klasse 5 bis 10 sich regelmäßig außerunterrichtlich mit Mathematik beschäftigen.

Im allgemeinen erhalten die *Jungen Mathematiker* bis zum 10. jeden Monats vier Aufgaben (eine Serie) zugeschickt, die Lösungen sind bis Monatsende an den Betreuer zurückzusenden, der mit den neuen Aufgaben die Aufgaben des Vormonats korrigiert und mit Hinweisen versehen dem Teilnehmer zusendet. Geplant sind im Jahr acht bis zehn Serien je nach Klassenstufe. Am Ende jedes Jahres erhalten alle erfolgreichen Teilnehmer eine Urkunde, die Besten Buchprämien.

Über die brieflichen Verbindungen hinaus treffen sich die Betreuer ein- oder zweimal pro Jahr mit den Teilnehmern zu Konsultationen. Eine Konsultation ist dabei eingebettet in das Mathematik-Spezialistenlager, welches wir jährlich in den ersten drei Tagen der Herbstferien durchführen und vorwiegend der Vermittlung neuen Gedankengutes dient, auf dem dann die Betreuer im Korrespondenzzirkel aufbauen können. S. Reulecke

Aufgaben (Auswahl)

Klassenstufe 5

▲1▲ Aus zwei Orten A und B, die 75 km auseinander liegen, fuhrn gleichzeitig zwei Radfahrer ab und sich entgegen. Der eine fuhr mit einer Geschwindigkeit von 12 km in der Stunde, der andere mit 13 km in der Stunde. Zusammen mit dem ersten Radfahrer lief ein Hund los, der in der Stunde 35 km zurücklegte. Nachdem dieser Hund den ersten Radfahrer hinter sich gelassen hatte, lief er dem zweiten Radfahrer entgegen. Als er ihm begegnete, lief er zum ersten zurück. So lief er vor und zurück, bis die Radfahrer einander begegneten.

Wieviel km lief der Hund in dieser Zeit insgesamt?

▲2▲ Auf einer Wiese weiden Gänse und Schafe. Alle zusammen haben 40 Köpfe und 96 Beine. Wieviel Gänse und Schafe weiden auf der Wiese?

▲3▲ Aus einem Draht von 120 cm Länge soll einmal das Kantenmodell eines Würfels, zum anderen das Kantenmodell eines Quaders mit einer Länge von 15 cm und einer Breite von 10 cm hergestellt werden.

Um wieviel Kubikzentimeter unterscheiden sich die Rauminhalte dieser beiden Körper?

Klassenstufe 6

▲1▲ Es ist sowohl die kleinste als auch die größte natürliche Zahl zu ermitteln, die durch 36 teilbar ist und in der Form $7x35x$ dargestellt werden kann, wobei x beliebige Ziffern sein können.

▲2▲ Wenn man die Seiten a und b eines Rechteckes um 6 cm verlängert, vergrößert sich der Flächeninhalt um 174 cm^2 . Berechne die Seiten a und b , wenn $a=b+1$ ist!

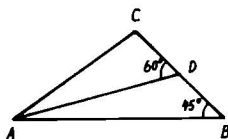
▲3▲ Im Dreieck ABC sei der Winkel $ABC=45^\circ$, $\overline{BD}=a$, $\overline{DC}=2a$ und der Winkel $ADC=60^\circ$. Bestimme den Winkel ACB !

Hinweise: a) Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenkelig. Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei gleiche Winkel.

b) Hat ein rechtwinkliges Dreieck noch Winkel von 30° und 60° , dann verhält sich die kurze Kathete zur Hypotenuse wie 1:2.

c) Beginne so: Fällt man das Lot von C auf AD...

d) Nicht maßstäbliche Skizze:



Klassenstufe 8

▲1▲ Beweise, daß für alle natürlichen Zahlen m auch der Ausdruck $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ eine natürliche Zahl ist!

Hinweise: a) Bilde den Hauptnenner und addiere! b) Klammere aus! c) Überlege dir die Regel zur Teilbarkeit von Produkten natürlicher Zahlen!

▲2▲ Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC . Zu konstruieren ist ein Quadrat. Zwei Quadrate sollen auf der Hypotenuse AB liegen, die anderen beiden auf der Kathete $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$.

Hinweis: Zur gesuchten Figur finde eine ähnliche, brauchbare Hilfsfigur (zentrische Streckung)!

▲3▲ Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung im Bereich der ganzen Zahlen:

$$\frac{4-2x}{1+3x} > 0$$

Hinweis: Wann ist ein Bruch positiv? Fallunterscheidung!

Ein Mathematik-Klub in der Armenischen SSR

Prof. Eganjan hat viel mit Schülern zu tun und berichtet uns von einem Mathematik-Klub „xyz“ an einer Mittelschule der Armenischen SSR:

„...Der Klub „xyz“ hat sich auf meine Anregung hin den Namen ‚C. F. Gauß‘ gegeben. Seine Mitglieder sind Schüler der Mittelschule des Ortes Lernadsor im Kafansker Rayon der Armenischen SSR, die sich unter Anleitung ihres Lehrers Robert Grigorjan mit speziellen mathematischen Problemen befassen. Sie hören dazu Vorträge von erfahrenen Lektoren oder tragen auch selbst vor, und natürlich bemühen sie sich um die Lösung von Aufgaben aus dem gerade behandelten Gebiet, die an der Klubwandzeitung veröffentlicht werden. Ich nenne euch einige Themen des Klubs:

1. Primzahlen und Primzahlverteilung
2. Darstellung bestimmter Primzahlen als Summe zweier Quadratzahlen und Fermatscher Satz
3. Gitterpunktprobleme
4. Planare Graphen und Vierfarbenproblem
5. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal...

Wie unser Bild zeigt, wird unsere Zeitschrift von den Schülern im fernen Armenien gelesen, worüber wir uns alle sicher freuen. Vielleicht sendet ein Mathematikzirkel unserer Republik seine Lösung der Aufgabe von Prof. Eganjan an den Klub „C. F. Gauß“ und tritt mit ihm in Erfahrungsaustausch? Die Adresse lautet: Klub im K. F. Gaussa pri shkole sela Lernadsor, Kafanskogo raiona Armen. SSR, UdSSR



Olympiadeaufgaben aus Freundesland

Sozialistische Republik Vietnam (1974 bis 1976, Klassenstufe 10)

▲ 1 ▲ Man beweise, daß die Zahl $2^{147} - 1$ durch 343 teilbar ist.

Lösung: Wegen $2^{10} = 1024$ und $1029 = 3 \cdot 343$ gilt

$$\begin{aligned} 2^{147} - 1 &= 2^7 \cdot (2^{10})^{14} - 1 = 2^7 \cdot 1024^{14} - 1 \\ &= 2^7 \cdot (1029 - 5)^{14} - 1 \\ &\equiv 2^7 \cdot 5^{14} - 1 \pmod{343} \equiv 50^7 - 1 \pmod{343}. \end{aligned} \quad (1)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} 50^7 - 1 &= (50 - 1) \cdot (50^6 + 50^5 + 50^4 + 50^3 + 50^2 + 50 + 1) \\ &= 49 \cdot [(50^6 - 1) + (50^5 - 1) + \dots + (50 - 1) + 7]. \end{aligned} \quad (2)$$

Da die Summanden $50^6 - 1, 50^5 - 1, \dots, 50 - 1$ in der eckigen Klammer auf der rechten Seite von (2) sämtlich durch $50 - 1 = 49$, also durch 7 teilbar sind und da auch der Summand 7 durch 7 teilbar ist, ist auch die Summe durch 7 teilbar.

Daraus folgt, daß die Zahl $50^7 - 1$ durch $49 \cdot 7 = 343$ teilbar ist. Wegen (1) ist daher auch $2^{147} - 1$ durch 343 teilbar, w. z. b. w.

▲ 2 ▲ Es sind alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen x und y zu ermitteln, für die $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$ gilt.

Lösung: Es seien x, y ganze Zahlen, für die die Gleichung (1) erfüllt ist. Setzt man $u = x + 4$, so ist auch u eine ganze Zahl, und es gilt

$$\begin{aligned} (u-4)(u-3)(u+3)(u+4) &= y^2, \\ \text{also } (u^2-16)(u^2-9) &= y^2. \end{aligned}$$

Setzt man weiter $t = u^2 - \frac{25}{2}$, so ist $2t$ eine ganze Zahl, und es gilt

$$\begin{aligned} \left(t - \frac{7}{2}\right)\left(t + \frac{7}{2}\right) &= y^2, \\ t^2 - \frac{49}{4} &= y^2, \\ 4t^2 - 49 &= 4y^2, \\ (2t+2y)(2t-2y) &= 49. \end{aligned} \quad (2)$$

Da $2t+2y$ und $2t-2y$ ganze Zahlen sind und 49 sich wie folgt als das Produkt zweier ganzer Zahlen darstellen läßt:

$$\begin{aligned} 49 &= 1 \cdot 49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1 = (-1) \cdot (-49) \\ &= (-7) \cdot (-7) = (-49) \cdot (-1), \end{aligned}$$

erhält man die Gleichungen $2t+2y = a$ mit $a = \pm 1, \pm 7, \pm 49$, $2t-2y = \frac{49}{a}$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 4t &= a + \frac{49}{a}, & t &= \frac{1}{4}\left(a + \frac{49}{a}\right), \\ 4y &= a - \frac{49}{a}, & y &= \frac{1}{4}\left(a - \frac{49}{a}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Man erhält daher alle Werte für x und y , für die die Gleichung (1) erfüllt ist, aus der folgenden Tabelle:

a	$\frac{49}{a}$	$t = \frac{1}{4}\left(a + \frac{49}{a}\right)$	$u^2 = t + \frac{25}{2}$	u	$x = u - 4$	$y = \frac{1}{4}\left(a - \frac{49}{a}\right)$
1	49	$\frac{25}{2}$	25	5	1	-12
-1	-49	$-\frac{25}{2}$	0	-5	-9	-12
7	7	$\frac{7}{2}$	16	4	0	0
-7	-7	$-\frac{7}{2}$	9	-4	-8	0
49	1	$\frac{25}{2}$	25	5	1	12
-49	-1	$-\frac{25}{2}$	0	-5	-9	12

Daher hat die Gleichung (1) genau die folgenden ganzzahligen Lösungen (x, y) :

$(0, 0), (1, 12), (1, -12), (-1, 0), (-4, 12), (-4, -12), (-7, 0), (-8, 0), (-9, 12), (-9, -12).$

▲ 3 ▲ Man ermittle alle Paare (a, b) reeller Zahlen, für die das Polynom $x^4 + ax^2 + b$ durch das Polynom $x^2 + ax + b$ teilbar ist.

Lösung: Es seien a und b reelle Zahlen, für die $x^4 + ax^2 + b$ durch $x^2 + ax + b$ teilbar ist. Dann gilt für alle reellen x

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \quad (1)$$

wobei c und d reelle Zahlen sind. Aus (1) folgt $x^4 + ax^2 + b = x^4 + (a+c)x^3 + (b+d+ac)x^2 + (ad+bc)x + bd$.

Da die Gleichung (2) für alle x erfüllt ist, stimmen die Koeffizienten auf beiden Seiten von (2) überein. Daher gilt

$$\begin{aligned} a+c &= 0, \text{ also } c = -a, \\ b+d+ac &= a, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{also } b+d-a^2 = a, \quad (4)$$

$$ad+bc=0, \text{ also } ad-ab=0,$$

$$\text{d. h., } a(d-b)=0. \quad (5)$$

$$bd=b. \quad (6)$$

1. Ist $b \neq 0$, so folgt aus (6) $d=1$ und daher aus (5)

$$a(1-b)=0. \quad (7)$$

1.1. Ist $a \neq 0$, so folgt aus (7) $b=1$ und daher aus (4)

$$2-a^2=a, \text{ also } a^2+a-2=0, \text{ d. h.,}$$

$a=1$ und $c=-1$ oder $a=-2$ und $c=2$.

Man erhält also die beiden Polynome

$$P_1(x) = x^4 + x^2 + 1,$$

$$P_2(x) = x^4 - 2x^2 + 1,$$

die die gestellten Bedingungen erfüllen; denn es gilt

$$P_1(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),$$

$$P_2(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1).$$

1.2. Ist $a=0$, so folgt aus (4)

$$b+d=0, \text{ also } b=-1.$$

Man erhält das Polynom

$$P_3(x) = x^4 - 1,$$

das wegen $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ die gestellten Bedingungen erfüllt.

2. Ist $b=0$, so folgt aus (5) $ad=0$, also $a=0$ oder $d=0$.

2.1. Ist $a=0$, so folgt weiter wegen (4) $d=0$. Man erhält das Polynom

$$P_4(x) = x^4,$$

das wegen $x^4 = x^2 \cdot x^2$ die gestellten Bedingungen erfüllt.

2.2. Ist $a \neq 0$, so gilt $d=0$. Wegen (4) folgt weiter

$$\begin{aligned} a^2 + a &= 0, \text{ also } a(a+1) = 0, \text{ d. h.,} \\ a &= -1. \end{aligned}$$

Man erhält das Polynom

$$P_5(x) = x^4 - x^2,$$

das wegen $x^4 - x^2 = (x^2 - x)(x^2 + x)$ die gestellten Bedingungen erfüllt.

Daher haben die Polynome $P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)$ und $P_5(x)$ und nur diese die geforderten Eigenschaften. Es gibt also genau 5 Paare von reellen Zahlen mit den geforderten Eigenschaften, nämlich $(1, 1), (-2, 1), (0, -1), (0, 0), (-1, 0).$

Eine Aufgabe von Prof. Dr. A. M. Eganjan

Pädagogisches Institut Jerewan „H. Abowjan“
Armenische SSR

▲1822▲ Gesucht ist eine natürliche Zahl mit fünf Ziffern, die 45mal größer ist als das Produkt ihrer Ziffern.

▲4▲ Es seien a und b sowie $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) positive reelle Zahlen mit
 $a \leq a_k \leq b$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Ferner sei

$$m_1 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

$$m_2 = \frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Man beweise

$$m_2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} m_1^2.$$

▲5▲ Es seien x, y, z reelle Zahlen mit
 $x + y + z = xyz$ (1)

und $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |y| < \frac{1}{\sqrt{3}}, |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. (2)

Man beweise, daß

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2} + \frac{3y-y^3}{1-3y^2} + \frac{3z-z^3}{1-3z^2} = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \cdot \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \cdot \frac{3z-z^3}{1-3z^2}. \quad (3)$$

gilt.

▲6▲ Ohne Benutzung eines Tafelwerks ist die folgende Summe zu berechnen:

$$S = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18}.$$

▲7▲ Es sind alle regelmäßigen n -Ecke ($n \geq 4$) anzugeben, die die folgende Eigenschaft besitzen:

Die Differenz der Länge der größten Diagonale und der Länge der kleinsten Diagonale ist gleich der Länge der Seite des regelmäßigen n -Ecks.

Nguyễn thái Hùng/R. Lüders

Wir danken dem Mathematikstudenten Nguyễn thái Hùng (z.Z. TU Dresden) für die Übersendung der sieben Aufgaben und Oberstudienrat Dr. R. Lüders für ihre Bearbeitung. Die Lösungen zu den Aufgaben 4 und 5 siehe S. 21. Die Lösungen zu den Aufgaben 6 und 7 veröffentlichen wir im Mittelteil des Heftes 3/79, d. Red.

Leistungsschau der Studenten an der TU Dresden

Alljährlich werden an der Technischen Universität Dresden Leistungsschauen der Studenten und jungen Wissenschaftler auf Sektions- und Universitätsebene durchgeführt. Die Leistungsschau lehrt, sich an den Besten zu messen und spornet zu neuen Erfolgen an.

In der Leistungsschau der Sektion Mathematik stellt Rainer Tichatzky sein Exponat „Bildschirmhardcopy mittels Zeichenmaschine“ aus. Er studiert in der Seminargruppe 74/07/02 der Sektion Mathematik die Spezialrichtung *Mathematische Kybernetik und Rechentechnik*. Vor dem Ehrendienst in der NVA absolvierte er die Erweiterte Oberschule Pasewalk mit Auszeichnung und ist Träger der Lessingmedaille in Silber. Als mathematisch interessierter Schüler war er bei Mathematikolympiaden erfolgreich. Im Kollektiv der Seminargruppe wirkt er gesellschaftlich als einer der FDJ-Aktivisten der Gruppe. Er leitet den Filmklub der Sektion.

Das vorgestellte Praktikumsergebnis ist Rainer Tichatzkys erste selbständige Entwicklungsarbeit. Innerhalb kürzester Zeit hat er Programmierung und Geräte zu beherrschen gelernt. Seine eigene Arbeit stets kritisch und methodisch prüfend, gelangte er vor allem auch zu einer bewußten Einordnung seiner Tätigkeit in das *Gesamtsystem Bildschirm*.

Die Verteidigung der Praktikumsarbeit fand erfolgreich im Rahmen des Austauschpraktikums in der VR Bulgarien statt.

Die Aufgabenstellung *Kopie von Bildschirmbildern mittels Zeichenmaschine* ist aus den Forschungs- und Entwicklungsarbeiten der Arbeitsgruppe Digitalgeometrie am WB Mathematische Kybernetik und Rechentechnik der Sektion Mathematik zum Aufbau eines ESER-an-schlußfähigen Kleinrechner-Bildschirm-Systems (Digitalgeometrischer Arbeitsplatz) abgeleitet. Die Erzeugung der Bildschirmkopie gestattet das Fixieren des Bildschirmbildes in im allgemeinen ausreichender Detailtreue und im Zusammenwirken mit der Umkehraktion, dem Darstellen von als Steuerlochbänder vorliegenden, mittels Zeichenmaschine herstellbaren Bildern, ein redigierfähiges Darstellungsarchiv zu verwalten.

Übrigens: Die Besten sind nie mit sich zufrieden. Rainer Tichatzky hat inzwischen sein Hardcopyprogramm selbständig weiterentwickelt – ohne Betreuung und ohne Aufgabenstellung.

Rainer Tichatzky bei der Arbeit am ungarischen grafischen Bildschirmgerät GD'71. Das Steuergerät ist ein DDR-Kleinrechner KRS 4201, der wiederum mit einer ESER-Anlage gekoppelt ist.

Als Zeichenmaschine wird ein DIGIGRAF aus der ČSSR verwendet. Der Digitalgeometrische Arbeitsplatz entstand in internationaler sozialistischer Gemeinschaftsarbeit.

Kurzbiographie: Geboren 1953 in Lommatzsch, Besuch der EOS, Pasewalk, Abitur; Auszeichnung mit der Lessingmedaille in Silber, Teilnehmer an Mathematikolympiaden; Ehrendienst bei der NVA, Mathematikstudium an der TU Dresden, Sektion Mathematik, Leiter des Filmklubs der Sektion.



Albert Einstein

Teil 2

Ein Einblick in Einsteins Gedankenwelt (spezielle Relativitätstheorie)

Isaac Newton hatte zwar auf die Schwierigkeiten, die sich beim Messen und Vergleichen der Zeit ergeben, hingewiesen, von weitreichenderem Einfluß war jedoch seine Ansicht, die er in seinem Buch „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687) äußerte: „Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.“ Neben der absoluten Zeit, einer für alle Beobachter gleichen Zeit (Weltzeit), benutzt Newton auch den absoluten Raum, in dem sich die Bewegungen physikalischer Körper vollziehen. Einstein, der dem Machschen Prinzip folgte, nur experimentell Nachweisbares zu akzeptieren, durchdachte die Zusammenhänge nochmals. Zunächst ist es klar, daß jeder Beobachter ein Koordinatensystem zur Verfügung hat, mit dem er den ihn umgebenden Raum beschreibt und seine eigene Zeit (Ortszeit) mißt. Um mit einem anderen Beobachter Informationen auszutauschen, muß er mit diesem Signale austauschen (Lichtzeichen, Töne usw.), wozu Zeit benötigt wird.

Betrachten wir ein Signal, das längs einer Geraden, als x -Achse bezeichnet, vom Beobachter B im Punkt 0 ($x=0$) ausgesandt wird. Das Signal ist ausreichend im Sinn der Physik beschrieben, wenn wir zu jeder Zeit wissen, an welchem Ort es sich befindet, also jedem Zeitpunkt t ein Ort in Abhängigkeit von t zugeordnet werden kann: $x(t)$. Das können wir z. B. tun, indem wir an jedem Ort die Zeit notieren oder in einem Achsenkreuz die Funktion $x(t)$ einzeichnen, die den Zusammenhang herstellt $t \rightarrow x(t)$. (Zur Vereinfachung betrachten wir im weiteren nicht Bewegungen im dreidimensionalen Raum, sondern lediglich längs einer in ihm gelegenen Geraden, die als x -Achse gewählt wird. Das hat den Vorteil, daß wir in einer Ebene eine Zeitachse (t -Achse) anbringen können. Würden wir eine Ebene als Bewegungsraum wählen, so benötigen wir bereits den dreidimensionalen Raum zur Anbringung einer Zeitachse, und für den dreidimensionalen Raum selbst ist das Anbringen einer Zeitachse anschaulich nicht mehr möglich.)

Eine Signalübertragung wird wie jede physikalische Bewegung durch die Menge aller durchlaufenen Orte (Punkte) mit der zugehö-

rigen Zeit beschrieben, also durch die Menge der Paare $(t, x(t))$. Das Paar $(t, x(t))$ gibt dabei an, was sich in bezug auf das Signal oder einen Körper an dem Ort x zur Zeit t ereignet hat. Deshalb wird jedes Paar $(t, x(t))$ ein Ereignis genannt. Die Menge aller Ereignisse charakterisieren den Bewegungsablauf, sie bilden gewissermaßen die „Lebenslinie“ des Signals oder des bewegten Körpers. Die „Lebenslinie“ nennen die Physiker genauer die Weltlinie eines Körpers.

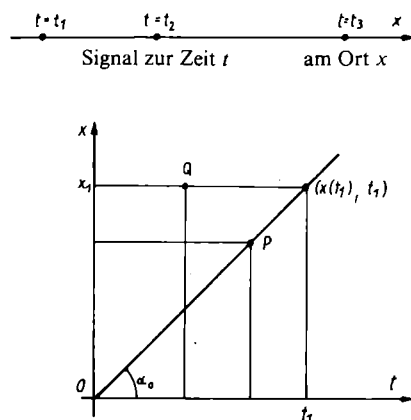


Bild 1: Weg-Zeit-Diagramm zur Beschreibung einer Signalausbreitung. (Die eingezeichnete Gerade ist die Weltlinie eines von 0 ausgehenden Lichtsignals)

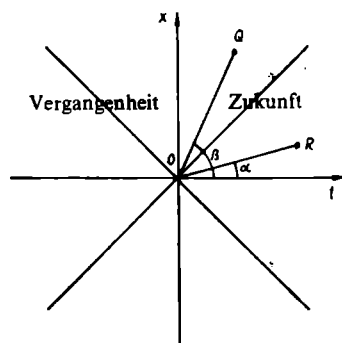


Bild 2: Der Lichtkegel
 $v = \tan \beta = x/t > \tan \alpha_0 = c$
für den Punkt R (mögliches Signal von 0 nach R)
 $V = \tan \beta = x/t > \tan \alpha_0 = c$
für den Punkt Q (unmögliches Signal von 0 nach Q)

In Bild 1 breitet sich das Signal P mit der Geschwindigkeit $v = \text{Weg}/\text{Zeit} = \text{const.}$ aus, der Zusammenhang zwischen Weg und Zeit ist durch die Gerade $x = \text{const.} \cdot t$ gegeben. Es gibt nun eine größtmögliche Signalgeschwindigkeit, die nicht zu übertreffen ist, und das ist die Geschwindigkeit, mit der sich das Licht ausbreitet ($c = 2,9979250 \cdot 10^8$ m/s im Vakuum. Berücksichtigen wir das in Bild 1, wenn die eingezeichnete Gerade als die von 0 ausgehende Weltlinie eines Lichtsignals angesehen wird, so zeigt sich, daß die oberhalb der Geraden gelegenen Ereignisse – wie Q –

nicht von einem Lichtsignal aus 0 erreicht werden können. Natürlich kann der zum Ereignis Q gehörige Ort x_1 durch ein Lichtsignal zur Zeit t_1 erreicht werden, aber das stellt das Ereignis $(t_1, x_1(t_1))$ dar, das vom Ereignis Q verschieden ist!

Verfolgen wir die Weltlinien des Lichtsignals für vergangene Zeiten und zeichnen noch die Weltlinie eines Lichtsignals ein, das in Richtung der negativen x -Achse ausgesandt wurde, so erhalten wir den in Bild 2 gezeichneten Lichtkegel. Die im mit Zukunft bezeichneten Teil liegenden Ereignisse können von 0 aus mit Signalen erreicht werden. Auf sie kann ein Beobachter in 0 Einfluß nehmen. Der Vergangenheitskegel enthält die Ereignisse, von denen Signale an einen Beobachter in 0 gesandt worden sein können. Die restlichen Ereignisse der „Welt“ stehen in keinem kausalem Zusammenhang zu einem Beobachter in 0. Die Weltlinie eines unbewegten Körpers verläuft parallel zur t -Achse.

Gibt es zwei Beobachter auf einer Geraden (x -Achse) mit den Koordinatensystemen K bzw. K' (x - bzw. x' -Achse sowie Zeit t bzw. t') und bewegen sich die Beobachter mit der Geschwindigkeit v bzw. $-v$ gegeneinander, so daß für $t=t'=0$ ihre Ursprünge 0 bzw. $0'$ zusammenfallen, dann rechnen sich nach Einstein deren Angaben (Koordinaten und Zeit) wie folgt ineinander um

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (2)$$

Bemerkenswert ist hieran, daß nicht nur die Übermittlungszeit für die Überwindung der gegebenen Entfernungen und die gegenseitige Geschwindigkeit v berücksichtigt werden, sondern die Beobachtungszeit ähnlich wie die Orte umgerechnet wird!! Ist v sehr klein, so liegt $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ sehr nahe bei 1, also ergeben (1) und (2) näherungsweise die Gleichungen

$$t = t' \quad x' = x - vt,$$

die aus der klassischen Mechanik bekannt sind (Bild 3). $t = t'$ bedeutet, daß es für alle Beobachter eine einheitliche Weltzeit gibt.

Die Einsteinsche Relativitätstheorie enthält ganz unerwartete Folgerungen, die unsere Vorstellungen von Raum und Zeit arg strapazieren. Auf einer Geraden (der x -Achse)

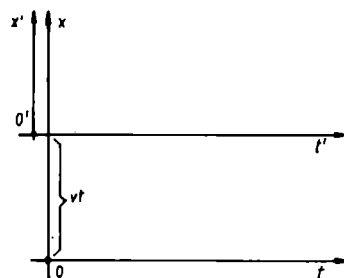


Bild 3: Zwei Beobachter mit verschiedenen Bezugssystemen in der klassischen Mechanik (Galilei-Transformation)

soll ein Stab der Länge l ruhen, dessen Endpunkte in einem Koordinatensystem auf der Geraden für einen ruhenden Beobachter B die Koordinaten x_1 und x_2 ($x_2 > x_1 > 0$) haben. An diesem Stab bewegt sich ein Beobachter B' längs der Geraden mit der Geschwindigkeit v vorüber. Welche Stablängen messen der ruhende und der bewegte Beobachter? Die Länge des Stabes wird von jedem Beobachter als Differenz der von ihm zur gleichen Zeit wahrgenommenen Koordinaten der Stabenden ermittelt. Der ruhende Beobachter erhält natürlich zu allen Zeiten $l = x_2 - x_1$. Der bewegte Beobachter muß die Koordinaten x_1' und x_2' der Stabenden zur gleichen Zeit messen, d. h. $t_1' = t_2'$.

Aus der ersten Gleichung von (1) folgt daher $t_2 - t_1 = (x_2 - x_1)v/c^2$.

Damit läßt sich aus der ersten Gleichung von (2) die Länge l' des Stabes für den bewegten Beobachter berechnen:

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$= \frac{l - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{l - l(v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = l \frac{1 - (v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$= l \sqrt{1 - (v/c)^2}, \text{ also}$$

$$l' = l \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Da die Wurzel kleiner als 1 ist, folgt

$$l' < l \text{ (Längenverkürzung),}$$

und der Unterschied der gemessenen Längen ist um so größer, je näher v bei c liegt (weil dann $\sqrt{1 - (v/c)^2} \rightarrow 0$).

Bild 4 zeigt die Verhältnisse anschaulich. l^* ist das durch Lichtsignale übermittelte visuelle Bild, das beide Beobachter vom Stab haben. l bzw. l' sind die verschiedenen Längen, die auf den x - bzw. x' -Achsen vom ruhenden bzw. bewegten Beobachter zum gleichen Zeitpunkt gemessen werden. Obwohl die Rechnung $l > l'$ ergab, zeigt Bild 4 $l < l'$! Hier liegt kein Widerspruch vor, denn in unserem Bild der Raum-Zeit-Welt werden die Abstände nicht so gemessen, wie wir es normalerweise gewöhnt sind. Zum Vergleich erinnern wir daran, daß es auf jeder geographischen Karte der Erde Größen gibt (z. B. Längen, Winkel, Flächen u. a.), deren Messung komplizierter als auf der Erde ist,

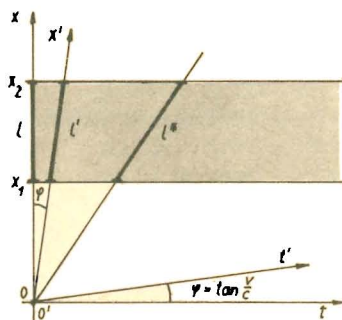


Bild 4: Längenverkürzung eines Stabes für den bewegten Beobachter. Der ruhende Beobachter B mißt im x, t -System, der bewegte im x', t' -System.

so daß beispielsweise größer erscheinende Entfernungen bei Azimutalprojektionen oder größer erscheinende Landflächen bei Mercatorprojektionen in Wirklichkeit kleiner sind.

Bücher über Einstein und die Relativitätstheorie

Landau/Rumer

Was ist die Relativitätstheorie?

8. Auflage 1977, 58 S., 3,60 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Melcher

Relativitätstheorie in elementarer

Darstellung (mit Aufgaben und Lösungen)

5. Auflage 1976, 344 S., 12,80 M

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Liebscher

Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal

1978, 155 S., 8,- M

Akademie-Verlag

Schmutzer

Relativitätstheorie aktuell

1979, etwa 180 S., 12,50 M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Herneck

Albert Einstein

3. Auflage 1977, 124 S., 5,- M

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Herneck

Einstein privat. Herta W. erinnert sich an die Jahre 1927–1933

1978, 172 S., 7,50 M

Buchverlag Der Morgen

Einstein

Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie

4. Auflage 1976, 130 S., 8,- M

Akademie-Verlag

In einem Moskauer Park fotografiert:

Sowjetische Studentinnen bei aktiver Beschäftigung mit Mathematik



Der Physiker A. F. Joffe über Einstein:

„Während meines Aufenthalts in Berlin interessierte sich Einstein für meine Untersuchungen über Kristalle. Er bat mich, ausführlicher darüber zu sprechen. Ich erinnere mich, daß ich um 3 Uhr zu ihm gekommen war. Ungefähr nach einer Stunde kam seine Frau und bat Einstein, irgend jemanden zu empfangen, der aus Hamburg gekommen war, um den berühmten Gelehrten kennenzulernen. Einstein ging derartigen Begegnungen und allem, was den Charakter von Reklame trug oder seine Berühmtheit unterstrich, aus dem Wege. Aber offenbar fand er in seiner Familie keine Unterstützung. Deshalb führte er mich in einen benachbarten Park, um ungestört das Gespräch fortsetzen zu können. Erst als die Gefahr einer Begegnung vorüber war, kehrten wir in sein Kabinett zurück. Schließlich, um 2 Uhr nachts, war das Gespräch beendet und alles klar. Weder ich noch wahrscheinlich die Mehrzahl der Wissenschaftler waren einer so langen und systematischen Gedankenanspannung fähig. Aber für Einstein war das offenbar eine gewohnte Sache!“ (Aus A. F. Joffe „Begegnungen mit Physikern“, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1967)

Einsteins Mantel

Einstein traf einen seiner Bekannten. „Herr Einstein, Sie sollten sich unbedingt einen neuen Mantel kaufen!“ riet ihm dieser. „Weshalb denn?“ entgegnete Einstein. „In dieser Stadt kennt mich doch keiner!“ Nach Jahren trafen sich beide in derselben Stadt wieder und Einstein trug den alten Mantel immer noch. Der Bekannte riet dem Gelehrten erneut, sich einen neuen Mantel zu kaufen. „Weshalb denn?“ entgegnete Einstein. „Hier kennt mich doch jeder!“

(Aus Wurzel 5/78, Jena)

Einstein schien geradezu eine Freude daran zu haben, alle Möglichkeiten der wissenschaftlichen Behandlung eines Gegenstandes mit unermüdlichem Wagemut durchzuko-

(Brod)

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 5. Mai 1979

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*
7027 Leipzig, Postfach 14.

Mathematik

Ma 5 ■ 1823 Wie lautet die vollständige Subtraktionsaufgabe $**** - *** = 1114$, wenn an Stelle der Sternchen nur Ziffern für gerade Zahlen stehen dürfen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

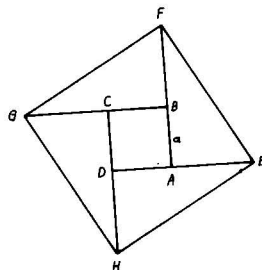
Ma 5 ■ 1824 Für eine Zirkusveranstaltung wurden genau 1978 Eintrittskarten verkauft, und zwar an der Kasse A Eintrittskarten von der Nummer 001 bis 498, an der Kasse B von der Nummer 1247 bis 1999. An der Kasse C hatte die erste verkaufte Eintrittskarte die Nummer 3000. Welche Nummer stand auf der zuletzt an der Kasse C verkauften Karte?

Mathematikfachlehrer W. Förg,
Schwaz, Österreich

Ma 5 ■ 1825 Erwin, Torsten und Simone gingen gemeinsam ins Kinderwarenhaus einkaufen. Erwin kaufte ein Hemd für 20,50 M. Torsten erwarb für seinen kleinen Bruder eine preisgesenkte Hose. Simone hatte für ein Kleid und eine Schürze zusammen 40,25 M zu bezahlen. Der Preis des Kleides war gleich dem dreifachen Preis der Hose, die Torsten kaufte. Wie teuer war die Schürze, wenn man weiß, daß die Hose genau halb so teuer war wie das Hemd, das Erwin kaufte?

Schüler St. Franze, Dresden, 67. OS

Ma 5 ■ 1826 Das Bild stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB} = a$ dar. Die Seite $\overline{AB}$ wurde über B hinaus bis F , die Seite $\overline{BC}$ über C hinaus bis G , die Seite $\overline{CD}$



über D hinaus bis H , die Seite $\overline{DA}$ über A hinaus bis E jeweils um sich selbst verlängert. Es ist zu untersuchen, wievielmals der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ im Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ enthalten ist. Sch.

Ma 5 ■ 1827 In dem Schema

$$\begin{array}{r} abb + cd = efb \\ - \quad : \quad + \\ \hline agd - f = aef \\ eb \cdot hk = fla \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß man sechs richtig gelöste Aufgaben erhält. Dabei sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen. Sch.

Ma 5 ■ 1828 Die Schüler einer Klasse gratulieren im Jahre 1978 ihrem Lehrer, der älter als 30 Jahre, aber jünger als 40 Jahre geworden ist, zum Geburtstag. Auf der Gratulationskarte wurden von den Schülern in scherzhafter Weise die beiden Ziffern der Zahl, die das Lebensalter des Lehrers angibt, vertauscht. Dadurch wurde dieser Lehrer um neun Jahre „jünger gemacht“. In welchem Jahre wurde dieser Lehrer geboren?

Schülerin Kirsten Hawlitschek
und Schüler Ulf Kretschmer, Döbeln

Ma 6 ■ 1829 In den drei Gleichungen

$$\begin{array}{l} (1) \quad aa \cdot b = ccd, \\ (2) \quad bb \cdot c = bb, \\ (3) \quad cc \cdot d = d, \end{array}$$

die ein-, zwei- und dreistellige natürliche Zahlen in dekadischer Darstellung enthalten sollen, sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen. Es ist die Zahl x aus der Gleichung $x = a + b + c + d$ zu bestimmen. Die Lösung ist zu begründen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Thies Luther, 26 Güstrow, Wendersstr. 22 Kersting-OS, Klasse 7		Ma 7 ■ 1369
30	150	
Prädikat:		
Lösung:		

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingegandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1978/79 läuft von Heft 5/78 bis Heft 2/79. Zwischen dem 1. und 10. September 1979 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingegandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/79 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten – richtig gelöst – (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1978/79 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

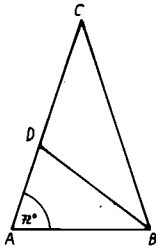
Redaktion *alpha*

Ma 6 ■ 1830 In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ sei der Mittelpunkt des Schenkels $\overline{AC}$ mit M bezeichnet. Der Streckenzug von M über C nach B sei 45 cm lang; der Streckenzug von B über A nach M sei 25 cm lang. Wie lang sind die Seiten dieses Dreiecks?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 1831 In dem abgebildeten Dreieck ABC mit dem Winkel $\angle CAB = \alpha = 72^\circ$ wurde auf der Seite $\overline{AC}$ ein innerer Punkt D so festgelegt, daß $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{CD}$ gilt. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 6 ■ 1832 In dem Schema

$$\begin{array}{r} ab \cdot cd = efgh \\ + \quad + \quad : \\ ci - dg = ik \\ \hline iga + hc = gig \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß in jeder Zeile und Spalte richtig gelöste Aufgaben stehen. Dabei sind für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern einzusetzen.

Sch.

Ma 6 ■ 1833 In einem Ferienlager treffen sich vier Schüler mit den Vornamen Mario, Torsten, Götz, Peter und den Nachnamen Krause, Saßnitz, Schmidt, Jacke. Von ihnen ist folgendes bekannt:

- (1) Sie wohnen in Berlin, Erfurt, Prag bzw. Rostock.
 - (2) Jeder von ihnen ist Schüler genau einer der Klassen 6, 7, 8 und 9.
 - (3) Der Schüler Mario heißt mit Nachnamen nicht Jacke.
 - (4) Der Schüler aus Berlin geht in die 6. Klasse.
 - (5) Peter und der Schüler mit dem Nachnamen Jacke stehen im Briefwechsel miteinander.
 - (6) Götz ist Schüler der 9. Klasse.
 - (7) In Rostock wohnt der Schüler mit dem Nachnamen Krause.
 - (8) Peter wohnt weder in Prag noch in Berlin und heißt mit Nachnamen nicht Krause.
 - (9) Der Schüler mit dem Nachnamen Krause geht in die 9. Klasse; er ist mit Torsten befreundet.
 - (10) Der Schüler mit dem Nachnamen Schmidt geht in die 6. Klasse; der Schüler mit dem Nachnamen Saßnitz geht in die 8. Klasse.
- Welchen Vor- und Nachnamen hat jeder die-

ser Schüler, welches ist ihr Wohnort, welche Klasse besucht jeder von ihnen?

Schüler Volker Franke, Nordhausen, Kl. 6

Ma 7 ■ 1834 Addiert man zur Summe zweier natürlicher Zahlen ihr Produkt, so erhält man 110. Wie viele Lösungen besitzt diese Aufgabe? Gib alle Lösungen an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 1835 Von einer Familie ist folgendes bekannt:

Vater und Mutter sind zusammen 75 Jahre, Vater und Sohn zusammen 54 Jahre, Vater und Tochter zusammen 51 Jahre alt. Alle vier sind zusammen 100 Jahre alt. Wie alt ist jedes Familienmitglied, wenn die Lebensalter in ganzen Zahlen ausgedrückt sind?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 1836 Es mögen folgende Definitionen gelten:

- (1) Ein Primdreieck ist ein Dreieck, bei dem die Maßzahlen der drei Seitenlängen Primzahlen sind.
- (2) Ein Primdreieck heißt regulär, wenn die Maßzahlen der drei Seitenlängen aufeinanderfolgende Primzahlen sind.
- (3) Ein Primdreieck heißt binär, wenn die Maßzahl des Umfangs des Dreiecks eine zweistellige Primzahl ist.

Wieviel Primdreiecke, die untereinander nicht kongruent sind, gibt es, die zugleich regulär und binär sind?

OL Werner Melka, Neubrandenburg

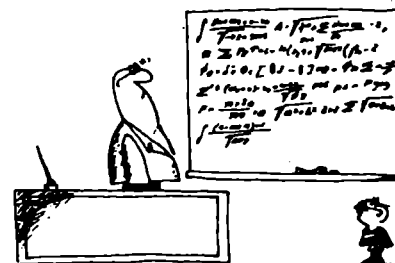
Ma 7 ■ 1837 Unser Kalender hat 7 Monate mit je 31 Tagen. Man beweise, daß es in jedem Kalenderjahr genau einen Wochentag gibt, auf den der 31. Tag eines solchen Monats nicht fallen kann.

Schülerin Vera Wilhelm, Leipzig
Dr.-Bruno-Schoenlank-OS

Ma 8 ■ 1838 Gegeben seien folgende „alpha-Gleichungen“:

$$\begin{array}{ll} (1) & A = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha} \\ (2) & L = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha} \\ (3) & P = \frac{\alpha \cdot \alpha + \alpha}{\alpha} \\ (4) & H = (\alpha + \alpha) \cdot \frac{\alpha}{\alpha} \\ (5) & A = \frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} \end{array}$$

In den Gleichungen (1) bis (5) sind die Buchstaben A, L, P, H, α durch die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei sind gleiche Buch-



„Na und - ich nehme an der Fernsehakademie teil!“

staben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Gib sämtliche Möglichkeiten an!

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Ma 8 ■ 1839 Familie Müller war 25 Tage im Urlaub. Nach der Rückkehr fragten Freunde Herrn Müller, wie denn das Wetter gewesen sei. Herr Müller antwortete:

„95% der Tage waren kalt, 85% naß, 75% windig und 65% trübe.“

Wie viele Tage des Urlaubs waren windig, trübe, kalt und naß zugleich?

Schüler Maik Weide, POS Crostau, Kl. 8

Ma 8 ■ 1840 Welchen Flächeninhalt hat das Netz einer geraden quadratischen Pyramide, wenn eine Seitenfläche der Pyramide einen Umfang von 16 cm hat und eine Seitenkante der Pyramide 1,5mal so lang ist wie die Grundkante?

Fr.

Ma 8 ■ 1841 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Die parallelen Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ sind je 10 cm und die anderen parallelen Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AD}$ sind je 5 cm lang. Der Abstand der beiden längeren parallelen Seiten beträgt $h = 4$ cm. Zu berechnen sind die Längen der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$.

Schüler Dirk Spiering, 4. OS Zittau, Kl. 7

Ma 9 ■ 1842 Man bestimme drei natürliche Zahlen, deren Summe 945 ist, wobei $\frac{1}{6}$ der

ersten Zahl gleich $\frac{1}{7}$ der zweiten Zahl und gleich $\frac{1}{8}$ der dritten Zahl ist.

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 9 ■ 1843 Man ermittle alle Paare natürlicher Zahlen, für die gilt: Die Differenz der Quadrate beider Zahlen ist gleich dem Vierfachen des arithmetischen Mittels beider Zahlen.

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 9 ■ 1844 Man beweise, daß für jede Primzahl $p > 3$ der Term $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 9 ■ 1845 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit einem Umfang von 9,6 cm. Die Summe der Längen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ ist doppelt so groß wie die Länge der Seite $\overline{AC}$. Die Länge der Seite $\overline{BC}$ verhält sich zur Länge der Seite $\overline{AB}$ wie 5 : 3. Es sind die Längen der drei Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ zu berechnen.

Schüler Andreas Günther, Altenburg

Ma 10/12 ■ 1846 In einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c und den Größen der Innenwinkel α, β und γ soll gelten:

- (1) $c^2 = 4a^2$ und
- (2) $\alpha + \beta = \gamma$

In welchem Verhältnis stehen die drei Seitenlängen zueinander? Ing. A. Körner, Leipzig

Ma 10/12 ■ 1847 Es ist ein gleichseitiges Fünfeck $ABCDE$ mit der Seitenlänge $a = 2$ cm zu konstruieren. Das Fünfeck soll zwei nicht

benachbarte rechte Winkel besitzen. Der Flächeninhalt dieses Fünfecks ist zu berechnen.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

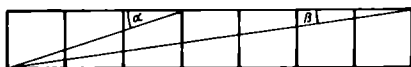
Ma 10/12 ■ 1848 Bei den 32. Ski-Weltmeisterschaften 1978 in Lahti errang die Sowjetunion mit 75 Punkten den ersten Rang in der Nationenwertung. Die Anzahl der Goldmedaillen war gleich der der Bronzemedaillen und gleich der der fünften Plätze. Die Anzahl der Silbermedaillen war gleich der Summe aus der Anzahl der Bronzemedaillen und der Anzahl der sechsten Plätze. Wieviel Gold-, Silber- und Bronzemedailles, 4., 5. und 6. Plätze errang die UdSSR?

(1. Platz: 7 Punkte; 2. Platz: 5 Punkte; 3. Platz: 4 Punkte; 4. Platz: 3 Punkte; 5. Platz: 2 Punkte; 6. Platz: 1 Punkt.)

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 10/12 ■ 1849 Gegeben sei eine aus sieben kongruenten Rechteckflächen zusammengesetzte Rechteckfläche (siehe Bild). Es ist zu beweisen, daß für die Winkel der Größen α und β der Figur gilt: $26,5^\circ < \alpha + \beta < 26,6^\circ$.

Schüler Andreas Fittke, Berlin



Ph 10/12 ■ 55 Eine Stimmgabel schwingt beim Kammerton a' mit einer Frequenz von 440 Hz und einer Amplitude von 3 mm. Bestimmen Sie:

- a) rechnerisch die Elongation nach 1 ms (Millisekunde);
- b) zeichnerisch die Elongation nach 1 ms, indem Sie die erste Schwingung in ein ty-System eintragen!

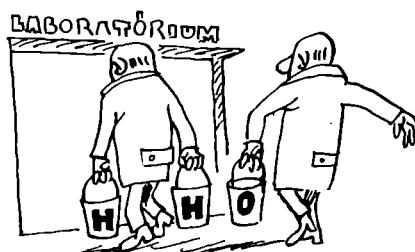


Chemie

Ch 7 ■ 41 Ein Kupfer(II)-oxid enthält 5% Verunreinigungen. Es soll mit Kohlenstoff zu Kupfer reduziert werden. Bei der Produktion entsteht außerdem noch Kohlenmonoxid.

- a) Wieviel Kilogramm Kupfer kann man aus 1,2 t Kupfer(II)-oxid gewinnen?
- b) Wieviel Kilogramm Kohlenmonoxid erhält man, wenn mit einem Gasverlust von 1,5% gerechnet werden muß?

Ch 8 ■ 42 0,57 g einer Substanz werden in Wasser gelöst und mit Salzsäure versetzt. Die Lösung wird zum Sieden erhitzt und mit einer Bariumchloridlösung vollständig gefällt. Nach dem Filtrieren, Auswaschen und Trocknen des Niederschlags von Bariumsulfat wird bis zur Massenkonzanz gegläht. Der leere Tiegel hat ein Gewicht von 13,92 g, nach dem Glühen wiegt er mit Inhalt 14,15 g. Berechnen Sie den Prozentgehalt an Schwefel in der ursprünglichen Substanz!



Ch 9 ■ 43 0,07 g Aluminiumpulver reagieren mit Natriumhydroxid nach folgender Gleichung:

$1 \text{ Al} + 2 \text{ NaOH} + 6 \text{ H}_2\text{O} \rightarrow 2 \text{ NaAl(OH)}_4 + 3 \text{ H}_2$
Dabei werden 77,4 ml trockenes Wasserstoffgas von 25°C und 750 Torr gebildet. Wieviel Prozent Aluminium enthält das Pulver?

Ch 10/12 ■ 44 Salpetersäure kann aus dem Nichtmetalloxid Stickstoffdioxid und durch Reaktion von Natriumnitrat mit Schwefelsäure hergestellt werden. Bei beiden Verfahren werden 25 kg 82%ige Stickstoffverbindung eingesetzt. Die Dichte der Salpetersäure beträgt $1,509 \text{ kg} \cdot \text{l}^{-1}$. Welche Variante liefert die größte Ausbeute 99%ige Salpetersäure in Liter?



Aus dem Referat des Ministers für Volksbildung, Margot Honecker, auf dem VIII. Pädagogischen Kongreß, Oktober 1978

Mit den jetzt geltenden Lehrplänen für Mathematik haben wir endgültig mit dem bürgerlichen Rechen- und Raumlehreunterricht gebrochen. Als dieser Weg vor fünfzehn Jahren eingeschlagen wurde, gab es noch manchen Zweifel an der Realisierbarkeit der hohen Zielstellung unseres Mathematikunterrichts. Wir können heute feststellen, daß diese Ziele in immer höherer Qualität realisiert wurden. Das mathematische Wissen unserer Schüler ist gründlicher geworden. Grundlegende Fertigkeiten werden sicherer beherrscht, was jedoch nicht heißt, daß wir beispielsweise mit der Entwicklung der Rechenfertigkeiten schon zufrieden sein könnten. Auch an der Überwindung der Schwierigkeiten bei der Lösung von Anwendungs- und Sachaufgaben muß weitergearbeitet werden. Wir müssen noch mehr darauf achten, alle Schüler zu befähigen, aus einem gegebenen Sachverhalt die mathematische Aufgabenstellung herauszuarbeiten und die erforderlichen mathematischen Verfahren zu ihrer Lösung einzusetzen. Gerade das Finden des Lösungsweges und das selbständige Begründen der einzelnen Schritte bereitet den Schülern oft Schwierigkeiten. Wir müssen daher prüfen, ob die Schüler genügend zum Vergleichen, Erläutern, Begründen angehalten und befähigt werden.

Physik

Ph 6 ■ 51 Der Mond bewegt sich auf einer fast kreisförmigen Bahn um die Erde. Diese Umlaufbahn hat eine Länge von rund 2400000 km und wird in ungefähr 40000 min durchlaufen. Berechne die Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit), mit der der Mond die Erde umkreist in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$!

Ph 7 ■ 52 Ein PKW mit einer Gewichtskraft von 1250 kp fährt eine Straße mit 12% Steigung hinauf. (Auf 100 m waagerechte Länge 12 m Steigung.) Welche Kraft muß der Motor mindestens aufbringen, wenn man die Reibung vernachlässigt?

Bemerkung: Entnimm einer maßstäblichen Zeichnung die Größe!

Ph 8 ■ 53 Durch einen Tauchsieder fließt ein elektrischer Strom mit einer Stärke von 2,3 A. Berechne die elektrische Ladung, die in $\frac{1}{4} \text{ h}$ durch den Tauchsieder transportiert wird!

Ph 9 ■ 54 In einem Fahrstuhl wird eine Person mit einer Masse von 75 kg erst aufwärts und dann abwärts befördert. Dabei treten jedesmal beim Anfahren Beschleunigungen von $1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ auf. Berechnen Sie die Belastung (in kp) des Fahrstuhlbodens durch die Person während der Beschleunigung in beiden Fällen!

Die letzten 30 Jahre haben Gewicht

Seit hunderttausend Jahren wird gezählt, und schon seit mehreren tausend Jahren beschäftigen sich Menschen „hauptberuflich“ mit Mathematik. Als im Jahre 1409 die Leipziger Universität gegründet wurde, gab es Lehrveranstaltungen in diesem Fach allerdings nur im Rahmen der „freien Künste“, deren Studium Voraussetzung war, um Theologie, Jura oder Medizin studieren zu können. Sie wurden oft von verschiedensten Professoren anderer Fachrichtungen mit gehalten. Später waren es in Leipzig vorwiegend Astronomen, die auch in der Mathematik hervortraten.

Seit etwas mehr als 100 Jahren gibt es einen Aufschwung der Mathematik in Leipzig, der vor allem durch eine ständig weitergeführte Anwendung der Analysis (Differential- und Integralgleichungen, Variationsrechnung, Theorie der komplexwertigen Funktionen) auf physikalisch-technische Probleme gekennzeichnet ist (Strömungslehre, Elastizitätstheorie, Optik, heute auch Relativitätstheorie und Quantenfeldtheorie).

Jeder künftige Fachmann auf diesem Gebiet stößt auf Ergebnisse berühmter Leipziger Professoren wie Carl Neumann, Sophus Lie, Otto Hölder, Paul Koebe, Leon Lichtenstein. Jedes Jahr beim Studentenaustausch mit der Sowjetunion, beim Aufenthalt in Leningrad oder Kiew, staunen unsere heutigen Studenten, wie gut die sowjetischen Freunde Namen und Leistungen dieser Gelehrten kennen. In jedem ernsthaften Lehrbuch über Geometrie in der Welt taucht der Name von Felix Klein auf, der 1861 das Mathematische Institut an der Leipziger Universität gründete. Er und seine Nachfolger führten eine Ausbildung von Mathematikern auf hohem Niveau ein, die ebenfalls bis heute ein Charakteristikum an unserer Universität ist.

● 1945 lag die Leipziger Universität in Trümmern. Zwei Drittel aller Gebäude, Bibliotheken und Geräte waren zerstört. Die Amerikaner nahmen bei ihrem Abzug aus Leipzig 46 Wissenschaftler und zahlreiches Material mit nach Westen. Bis zur Gründung der DDR waren die Kriegsfolgen an der Universität nicht überwunden. Wenn man noch diesen Ausgangspunkt bedenkt – was können dann angesichts tausendjähriger Ent-

wicklung der Mathematik, hundertjähriger Traditionen in Leipzig die letzten 30 Jahre bedeuten? Haben sie überhaupt Gewicht?

Es gibt sogar soviel Gewichtiges und Neues, daß man sich auf eine Aufzählung von Beispielen beschränken muß! Zunächst „Äußerlichkeiten“: Gegenüber den Maximalzahlen von vor 1949 hat sich an der Mathematik die Studentenzahl mehr als verdoppelt und die der Wissenschaftler etwa vervierfacht. Wir lernen, lehren und forschen in einem Neubaukomplex, der internationale Vergleiche nicht zu scheuen braucht. Die Mehrzahl der Studenten wohnt gut und billig in neu entstandenen Wohnheimen, wird durch eine Mensa mit Mittagessen versorgt, die pro Portion 0,60 M aus dem Staatshaushalt zuzahlt; der Anteil von Studenten mit Stipendium und die Stipendienhöhe sind gemessen an der Vergangenheit oder dem jetzt international Üblichen Spitze. Die Mathematik ist heute keine brotlose freie Kunst mehr, sondern hat eine anerkannte und wichtige Stellung im gesellschaftlichen Leben errungen. Die 1969 gegründete Sektion Mathematik ist geachteter Baustein der sozialistischen Karl-Marx-Universität. Seit 1963 verfügt die Universität über ein eigenes Rechenzentrum.

● *Neu in den letzten 30 Jahren:* Ein fortschrittlicher Geist hat sich auch an der Sektion Mathematik voll durchgesetzt. Das bürgerliche Bildungsprivileg wurde gebrochen – etwa die Hälfte aller Studenten und Wissenschaftler sind Arbeiter- oder Bauernkinder. Alle Studenten werden mit dem Marxismus-Leninismus vertraut gemacht. Aktive Partei-, FDJ- und Gewerkschaftsorganisationen mobilisieren die Sektionsangehörigen zu hohen Leistungen.

Etwa ein Drittel der Studierenden sind Mädchen und Frauen – da hat vor hundert Jahren

noch keiner dran gedacht. Noch der weltberühmte Physiker Max Planck empfand es als bemerkenswert, daß er „probeweise und stets widerruflich“ einigen Frauen den Zutritt zu seinen Vorlesungen gestattete. An unserer Sektion Mathematik haben in den letzten fünf Jahren sechs Frauen ihre Doktorarbeit verteidigt.

● *Neu in den letzten 30 Jahren:* Das Studium vollzieht sich auf der Grundlage wohlüberlegter Pläne. Die „akademische Freiheit“, nach der sich früher jeder Student aus einem nicht immer koordinierten Vorlesungsangebot etwas aussuchen und sich irgendwann einmal zur Prüfung melden konnte, ist überwunden:

Bei uns wird möglichst effektiv und deshalb angespannt und diszipliniert gearbeitet wie in anderen Bereichen der Gesellschaft auch.

● *Neu in den letzten 30 Jahren:* Um die führenden Professoren gruppieren sich ganze Forschungskollektive, deren Mitglieder gemeinsam versuchen, zusammenhängende Fragen der Mathematik in größerer Breite und Geschwindigkeit zu bearbeiten, als es ein einzelner vermag. Auf diese Weise gelang es uns, eine höhere Anzahl von Doktorarbeiten, wissenschaftlichen Aufsätzen und Büchern fertigzustellen als je zuvor – und ein beachtlicher Teil davon entspricht dem internationalen Höchststand. Unsere bedeutendsten Forscher erhalten Einladungen aus aller Welt, ihre neuen Ergebnisse vorzustellen. Besonders enge Beziehungen haben wir mit führenden Zentren der Sowjetunion, ständig befinden sich einige Wissenschaftler dort zum Gedankenaustausch.

● *Neu in den letzten 30 Jahren:* Studentenausbildung und Forschung orientieren sich bewußt auf die Bedürfnisse der Praxis. In die Studienpläne wurden rechtzeitig neue Lehrinhalte aufgenommen (Wahrscheinlichkeitsrechnung, Optimierung, Rechentechnik), deren Kenntnis wichtig für einen modernen Mathematikunterricht und die Anwendung mathematischer Methoden in der Wirtschaft ist. Alle Studenten gehen während des Studiums mehrmals ins Praktikum in Betriebe, Rechenzentren bzw. in die Schulen. Wir wirken bei der Weiterbildung der Mathematiker in den Betrieben und der Mathematiklehrer mit. Mehrere Forschungskollektive haben umfangreiche Forschungsverträge mit Braunkohlenkombinaten, metallurgischen Betrieben u. a. oder unterstützen Physiker und Chemiker beim Erarbeiten praxiswirksamer Forschungsergebnisse.

G. Deweß



In weiteren Beiträgen gehen wir speziell auf berühmte Mathematiker der Universität Leipzig, wie Felix Klein, Sophus Lie, A. F. Möbius u. a. ein, d. Red.

Lineare Optimierung

Teil 2

Im Heft 6/78 wurde eine Aufgabe der linearen Optimierung formuliert und grafisch gelöst. Wir betrachten jetzt unter Beibehaltung der Nebenbedingungen des Beispiels B4 eine andere Zielstellung in dem folgenden Beispiel:

4b Jedes der zu produzierenden Erzeugnisse E_1 und E_2 bringe einen Erlös von 5 Geldeinheiten (GE). Bei der Herstellung von x Erzeugnissen E_1 und y Erzeugnissen E_2 ist der Gesamterlös für den betrachteten Zeitraum gegeben durch $z = 5x + 5y$. Welches Produktionsprogramm sichert dem Betrieb unter Beachtung der gegebenen Kapazitätsbeschränkungen maximalen Erlös?

Mathematisches Modell:

Zielfunktion $z = 5x + 5y$ maximal

Nebenbedingungen (I) $x + y \leq 10$
 (II) $x + 2y \leq 16$
 (III) $4x + y \leq 28$
 (IV) $x \geq 2$
 (V) $y \geq 0$

Grafische Lösung: Den Nebenbedingungen werden lineare Funktionen und diesen die Geraden g_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) zugeordnet (Bild 7).

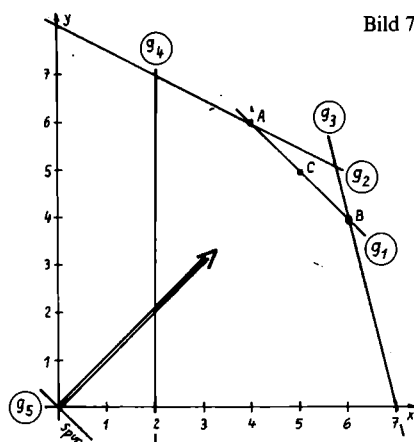


Bild 7

Der Lösungsbereich ist durch das konvexe Fünfeck mit den Eckpunkten (2; 0), (7; 0), (6; 4), (4; 6), (2; 7) gegeben. Für $z=0$ erhält man aus der Zielfunktion deren Spur $y = -x$. Bei größtmöglicher Parallelverschiebung dieser Spur in den Lösungsbereich hinein erhält man die durch die Punkte A(4; 6) und B(6; 4) gehende Gerade, deren Punkte alle denselben maximalen Wert der Zielfunktion $z_{\max} = 50$ besitzen. Aus der Problemstellung der Auf-

gabe geht hervor, daß ganzzahlige Anzahlen der Produktionserzeugnisse E_1 und E_2 gefordert werden. Alle Punkte der Kante $\overline{AB}$ mit A(4; 6) und B(6; 4) sind optimale Punkte; für das vorliegende praktische Problem kommen jedoch nur diejenigen Punkte der Strecke in Betracht, die ganzzahlige Koordinaten haben: A(4; 6), B(6; 4), C(5; 5). Bezüglich der gegebenen Zielfunktion sind alle diese Punkte gleichwertig. In jedem Fall wird derselbe maximale Erlös $z_{\max} = 50$ GE erzielt. Andere Überlegungen werden darüber entscheiden, welches Programm realisiert wird, z.B. die Frage nach Auslastung einer bestimmten Maschineneinheit oder die Frage nach der Gesamtzahl der freien Maschinenstunden, die Frage nach dem Materialeinsatz oder nach Auslastung der Arbeitskräfte. In der folgenden Tabelle sind die optimalen Produktionsprogramme dargestellt:

Produktionsprogramm			
	A	B	C
Anzahl der Erzeugnisse E_1 (x)	4	6	5
Anzahl der Erzeugnisse E_2 (y)	6	4	5
Maximaler Erlös in GE ($z_{\max}$)	50	50	50
Freie Maschinenstunden: M_1	—	—	—
M_2	—	2	1
M_3	6	—	3
insgesamt	6	2	4

Für das Beispiel 4b wurde das Zahlenmaterial derart gewählt, daß die Eckpunkte des Lösungsbereiches ganzzahlige Koordinaten haben. In den meisten Fällen praktischer Anwendungen erhält man nach der Parallelverschiebung der Spur der Zielfunktion einen Eckpunkt des Lösungsbereiches als Optimum, dessen Koordinaten nicht ganzzahlig sind. Fordert die Aufgabenstellung ganzzahlige Werte, so stellt ein Nachbarpunkt des Optimums mit ganzzahligen Koordinaten in der Regel einen brauchbaren Näherungswert dar. Dieser Nachbarpunkt muß ein innerer Punkt des Lösungsbereiches sein. Es ist vorteilhaft, die Gitterpunkte – Punkte mit ganzzahligen Koordinaten – im Lösungsbereich besonders zu kennzeichnen, dann vom Optimum aus eine Parallelverschiebung der Zielgeraden – das ist die Parallele zur Spur der Zielfunktion durch das Optimum – in den Lösungsbereich soweit vorzunehmen, bis die Gerade durch einen der Gitterpunkte geht. Dieser Gitterpunkt nähert das Optimum am besten an. Es gibt Methoden zur Berechnung eines Optimums mit ganzzahligen Koordinaten, die unter dem Begriff „ganzzahlige Optimierung“ zusammengefaßt sind. Darauf wird hier nicht eingegangen.

Zur Festigung der grafischen Lösungsmethode für eine Aufgabe der linearen Optimierung mit zwei Variablen sei ein einfaches Beispiel angeschlossen, das sogleich als mathematisches Modell gegeben ist. Der Leser möge sich jedoch vorstellen, daß es sich wie-

der um die Herstellung zweier Erzeugnisse handelt, daß die Ungleichungen (I) bis (III) gewisse Kapazitätsbeschränkungen widerspiegeln und daß die Zielfunktion den Erlös für die Erzeugnisse angibt, wie etwa im Eingangsbeispiel des Solidaritätsbasars.

B5 Für welche nichtnegativen Werte der Variablen x und y nimmt die Zielfunktion $z = 2x + 3y$ unter den Nebenbedingungen

(I) $3x + 2y \leq 28$

(II) $5x + y \leq 35$

(III) $x + 2y \leq 20$ ihr Maximum an?

Die Forderung nach Nichtnegativität der Variablen x und y läßt sich durch zwei zusätzliche Nebenbedingungen darstellen:

(IV) $x \geq 0$

(V) $y \geq 0$

(1) Den Ungleichungen werden die Geraden g_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), der Zielfunktion wird ihre Spur g_z zugeordnet:

$g_1: 3x + 2y = 28$ oder $g_1: y = -\frac{3}{2}x + 14$

$g_2: 5x + y = 35$ $g_2: y = -5x + 35$

$g_3: x + 2y = 20$ $g_3: y = -\frac{1}{2}x + 10$

$g_4: x = 0$ $g_4: x = 0$

$g_5: y = 0$ $g_5: y = 0$

$g_z: 2x + 3y = 0; z = 0$ $g_z: y = -\frac{2}{3}x$

(2) Eintragen der Geraden g_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) und der Geraden g_z in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Bild 8).

(3) Einzeichnen des Lösungsbereiches des gegebenen Systems linearer Ungleichungen.

(4) Maximale Parallelverschiebung der Geraden g_z in den Lösungsbereich.

(5) Ablesen der Koordinaten des Optimums und Berechnung des maximalen Wertes der Zielfunktion: $P_{\text{opt}}(4; 8); z_{\max} = 32$.

Eine geometrische Lösung für ein Problem der linearen Optimierung mit mehr als zwei Variablen ist im allgemeinen nicht möglich. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich ein Problem mit drei Variablen jedoch auf eine Aufgabe mit nur zwei Veränderlichen transformieren, die dann geometrisch gelöst werden kann. Dies soll an dem folgenden Beispiel

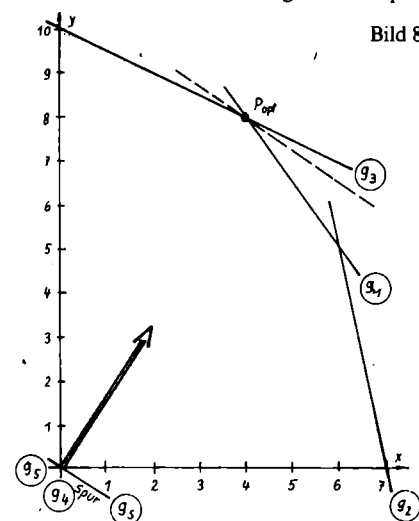


Bild 8

gezeigt werden, das bei Gasmischungsproblemen eine Rolle spielt. Es sei sogleich das mathematische Modell der Aufgabe gegeben:

B6 Für welche nichtnegativen Werte der Variablen x_1 , x_2 und x_3 nimmt die Zielfunktion $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3$ unter den Nebenbedingungen

$$(0) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 60$$

$$(I) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 210$$

$$(II) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 120$$

$$(III) \quad 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 180$$

ihr Minimum an?

Der Forderung nach Nichtnegativität der Variablen entsprechen die folgenden zusätzlichen Bedingungen

$$(IV) \quad x_1 \geq 0$$

$$(V) \quad x_2 \geq 0$$

$$(VI) \quad x_3 \geq 0$$

Unter den Nebenbedingungen tritt eine Gleichung auf. Dies macht die Transformation auf eine Aufgabe mit nur zwei Variablen $x_1 = x$ und $x_2 = y$ möglich. Nach Subtraktion der Summe $(x_1 + x_2)$ in der Gleichung (0) erhält man $x_3 = 60 - x - y$ und nach Einsetzen dieser Beziehung in die Zielfunktion und alle Ungleichungen (I) bis (VI):

$$z = 60 + x + 4y \text{ minimal}$$

$$(I') \quad x + 3y \leq 150$$

$$(II') \quad x + 3y \geq 60$$

$$(III') \quad x - y \leq 0$$

$$(IV') \quad x \geq 0$$

$$(V') \quad y \geq 0$$

$$(VI') \quad x + y \leq 60$$

Den Ungleichungen werden die Geraden g_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) zugeordnet:

$$g_1: x + 3y = 150 \quad \text{oder} \quad g_1: y = -\frac{1}{3}x + 50$$

$$g_2: x + 3y = 60 \quad g_2: y = -\frac{1}{3}x + 20$$

$$g_3: x - y = 0 \quad g_3: y = x$$

$$g_4: x = 0 \quad g_4: x = 0$$

$$g_5: y = 0 \quad g_5: y = 0$$

$$g_6: x + y = 60 \quad g_6: y = -x + 60$$

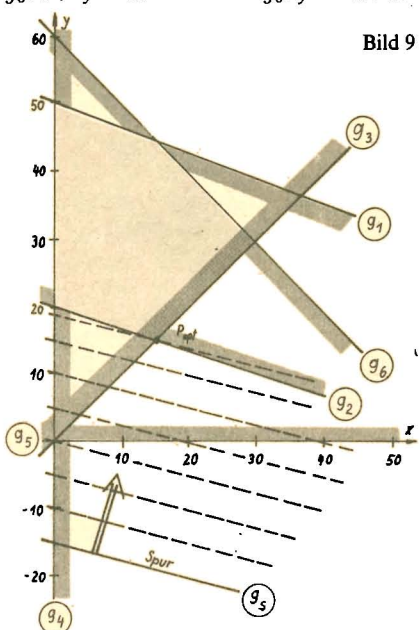


Bild 9

Der Lösungsbereich des Systems der Ungleichungen (I') bis (VI') ist das konvexe Fünfeck mit den Eckpunkten (0; 20), (15; 15), (30; 30), (15; 45), (0; 50) (Bild 9).

Die Spur der Zielfunktion erhält man für $z = 0: 60 + x + 4y = 0$ oder $y = -\frac{1}{4}x - 15$. Setzt

man in der Zielfunktion für z der Reihe nach $z = 1, 2, 3, \dots$ ein, so erhält man Parallelen zur Spurgeraden in der in Bild 9 angegebenen Richtung. Für alle Punkte ein und derselben Parallelen sind alle z -Werte gleich. Da im vorliegenden Fall das Minimum der Zielfunktion unter den gegebenen Nebenbedingungen zu ermitteln ist, muß unter allen Parallelen zur Spur der Zielfunktion diejenige betrachtet werden, die den kleinsten Abstand von der Spur besitzt und mindestens einen Punkt mit dem Lösungsbereich gemeinsam hat. Die durch den Punkt $P(15; 15)$ gehende Parallele zur Spur erfüllt diese Bedingungen. Damit ist dieser Punkt das gesuchte Optimum: $P_{\text{opt}}(15; 15)$. Durch Einsetzen der Koordinaten $x = 15$, $y = 15$ in die Zielfunktion erhält man deren Minimum unter den angegebenen Nebenbedingungen: $z_{\text{min}} = 135$. Aus Gleichung (0) folgt: $x_3 = 30$. Damit ist die Lösung der Aufgabe

$$(x_1, x_2, x_3)_{\text{opt}} = (15; 15; 30); z_{\text{min}} = 135.$$

Dem Leser wird empfohlen, die Lösungen der folgenden Aufgaben 8 und 9 grafisch zu ermitteln. Die Lösungen werden am Ende des Beitrages angegeben.

8. Man ermittle Maximum und Minimum der Zielfunktion $z = 2x + 4y$ für nichtnegative Variablen x und y unter den Nebenbedingungen

$$(I) \quad -x + 2y \geq 4$$

$$(II) \quad 3x + y \leq 44$$

$$(III) \quad -x + 2y \leq 32$$

$$(IV) \quad x + y \geq 8$$

9. Für welche nichtnegativen Werte der Variablen x_1 , x_2 und x_3 nimmt die Zielfunktion $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3$ unter den folgenden Nebenbedingungen a) ihr Maximum, b) ihr Minimum an?

$$(0) \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 90$$

$$(I) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 100$$

$$(II) \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 130$$

$$(III) \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 90$$

E. Lehmann

Es sei darauf hingewiesen, daß auch analytische Verfahren entwickelt wurden für die Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung. Diese Methoden sind auf Probleme mit beliebig vielen Veränderlichen anwendbar. Interessierte Leser seien auf das im Teubner-Verlag erschienene Büchlein „Lineare Optimierung für Junge Mathematiker“ hingewiesen.



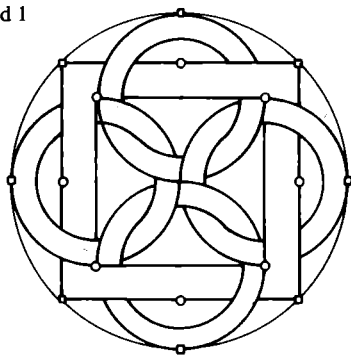
Drunter und drüber

Verzweifelt sucht Christoph in seiner Schultasche nach dem Zeichendreieck. Alle anderen in der Klasse 6b haben schon lange begonnen, die gestellte Aufgabe zu lösen. Dabei weiß er genau, daß er alles für den Geometrieunterricht eingepackt hat. Und jetzt kommt auch schon Frau Schulze, die Mathematiklehrerin, um ihm freundlich Hilfe anzubieten. Sie wirft einen Blick in seine Schultasche und sieht gar nicht mehr so freundlich aus. „In dieser Tasche kannst du nichts finden“, sagt sie, „so ein Durcheinander, alles liegt *drunter und drüber*.“ Nach der Schule eilt Christoph sofort nach Hause. Kaum nimmt er sich die Zeit, Mutti zu begrüßen, und verschwindet sofort in seinem Zimmer. Nach kurzem Klappern und Poltern ist es still hinter der Tür.

Am Nachmittag klingelt Anja, Christophs Freundin. Schon seit Tagen vermißt sie Christoph beim Fußballspielen auf dem Hof. Als sie in sein Zimmer tritt, bleibt sie erst einmal erschrocken an der Tür stehen. Das sieht ja aus bei Christoph! Mitten im Zimmer liegen viele Zeichnungen mit seltsamen, verworrenen und ineinander verschlungenen Figuren; manche schwarzweiß, andere farbig. Am Schreibtisch sitzt Christoph selbst, ganz vertieft in seine Arbeit, von Zeichenblättern, Zirkel, Lineal, Dreiecken und Farbstiften umgeben. Anja sagt zur Begrüßung nur: „Na, bei dir ist ja was los, da geht ja alles *drunter und drüber*. So eine Unordnung!“ Christoph scheint das nicht zu erschüttern. Ruhig und gelassen sitzt er an seinem Tisch, angelt nach einem Stuhl, den er an seine Seite rückt und bittet Anja Platz zu nehmen. Dann sagt er: „Du denkst wohl, wenn es *drunter und drüber* geht, ist das das gleiche wie Unordnung? Da irrst du dich aber. Sieh dir einmal diese Zeichnung an!“

„Auch hier geht alles *drunter und drüber*, und doch ist es wohlbedacht und nach einem bestimmten Schema gezeichnet.“ Anja betrachtet die Figur und überlegt. Dann sagt sie: „Wie hast du denn das so hinbekommen?“ Christoph schlägt einfach vor: „Hier hast du ein Blatt Papier, wir wollen es zusammen versuchen. Ich werde dir helfen.“ Dann bückt er

Bild 1



sich, hebt ein Blatt vom Fußboden auf und meint: „Mit dieser einfachen Figur fangen wir an.“

„Der Grundgedanke ist bei allen Figuren gleich. Es handelt sich immer um einen Kreis mit vier Quadraten darin.¹⁾ Zeichne zuerst den Kreis, und teile ihn in acht gleichgroße Teile!“ Als Anja soweit ist, ruft sie: „Ich sehe schon, die acht Schnittpunkte mit dem Kreis sind die Eckpunkte für die zwei großen Quadrate.“ „Ja“, sagt Christoph, „jetzt fehlen aber noch die zwei kleinen Quadrate. Auch diese findest du leicht, wenn du alle Punkte suchst, in denen sich je eine Seite des einen großen Quadrats mit der Diagonalen des anderen schneidet. Verbindest du diese acht Punkte in der richtigen Art und Weise, erhältst du wieder zwei Quadrate. Jetzt mußt du mit dem Farbstift noch beide Figuren so nachzeichnen, daß die eine mal über und mal unter der anderen liegt.“ Anja findet, daß das Nachzeichnen gar nicht so einfach ist. Ein paarmal zeichnet sie verkehrt, aber dann hat sie es doch geschafft.

„Jetzt will ich auch noch versuchen, die andere Figur (Bild 1) zu zeichnen“, sagt Anja nun. „Dazu ist es notwendig, die Grundfigur noch einmal zu konstruieren, allerdings ohne sie am Ende mit dem Farbstift nachzuziehen“, schickt Christoph voraus. Als Anja so weit ist, erklärt er weiter: „Du mußt jetzt vier gleichgroße Kreisringe zeichnen. Der Radius jedes

Außenkreises beträgt die Hälfte vom Radius des großen Kreises. Der Radius der Innenkreise ist so groß wie der vierte Teil der Länge einer Diagonalen eines kleinen Quadrats.“ „Ja, das verstehe ich“, sagt Anja, „aber es fehlt noch der Mittelpunkt.“ „Den Mittelpunkt eines Kreisringes findest du als Schnittpunkt der Diagonalen eines großen mit der Seite eines kleinen Quadrats“, erwidert Christoph darauf. Anja überlegt eine Weile und sagt dann erstaunt: „Da finde ich ja zwei verschiedene Mittelpunkte, je nachdem, welche Diagonale ich betrachte.“

Das hat sich Christoph auch schon überlegt, und so kann er gleich darauf antworten: „Das macht nichts, Anja, deine Figur wird trotzdem richtig. Sie ist aber gegenüber meiner Figur um 45° gedreht. Du mußt dann nur darauf achten, daß du beim Nachzeichnen das richtige Quadrat²⁾ auswählst.“ Anja zeichnet die vier Kreise ein und stöhnt darüber, daß es ganz schön schwierig sei. „Jetzt wird es noch komplizierter“, sagt Christoph, „wenn du die Figuren so nachzeichnest, daß es richtig drunter und drüber geht. Am besten ist, du beginnst mit den Kreisringen und legst dann am Ende das Quadrat hinein.“

Anja müht sich sehr und wird bald ungeduldig, denn immer wieder muß sie zum Radiergummi greifen, weil sie falsch gezeichnet hat. Als Anja endlich fertig ist, schaut sie zu Christoph hinüber, der inzwischen merkwür-

Bild 2

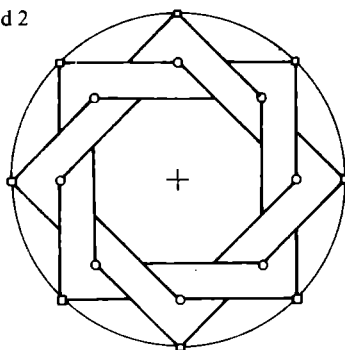
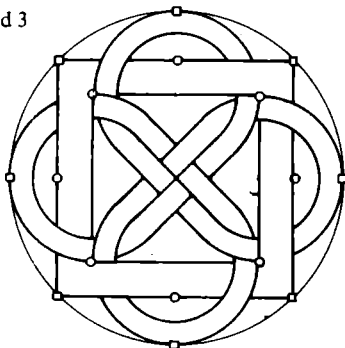


Bild 3



²⁾ Hier drückt sich Christoph unkorrekt aus, denn er spricht von einer Figur, die durch ein Innen- und ein Außenquadrat begrenzt wird; also von einem Quadrating. Diese Bezeichnung ist aber ebenfalls widersprüchlich. Der Einfachheit halber akzeptieren wir deshalb diese Ausdrucksweise.

dig still geworden ist, weil er angefangen hat, eine neue Figur zu zeichnen, die ihm gerade eingefallen ist. Ein paar Skizzen sind schon, wie die anderen Zeichnungen vorher, auf dem Fußboden gelandet, und jetzt ist er bereits dabei, die Figur sauber und ordentlich zu konstruieren.

Schnell hat Anja das Grundprinzip dieser Figur erkannt und beginnt selbst mit der Konstruktion. Wenige Minuten nach Christoph ist sie damit fertig. Nur am Ende beim Nachziehen muß sie mal schnell auf sein Blatt sehen, sonst hat sie es allein geschafft. Da es schon spät geworden ist, mahnt Christophs Mutter, die leise ins Zimmer gekommen ist, zum Ausbruch. Anja und Christoph verabreden sich für morgen, und Anja erinnert ihn daran, daß er seine Schultasche doch noch aufräumen muß, denn das Drunter-und-Drüber darin war sicher nicht so ordentlich wie die gezeichneten Drunter-und-drüber-Figuren. Am nächsten Tag überraschen sich Anja und Christoph gegenseitig damit, daß jeder für sich schon neue Figuren erfunden hat.

Bild 4

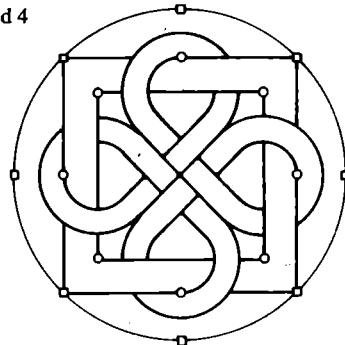


Bild 5

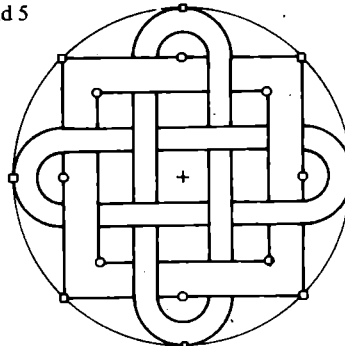
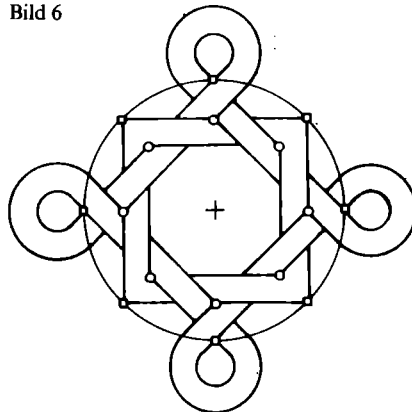
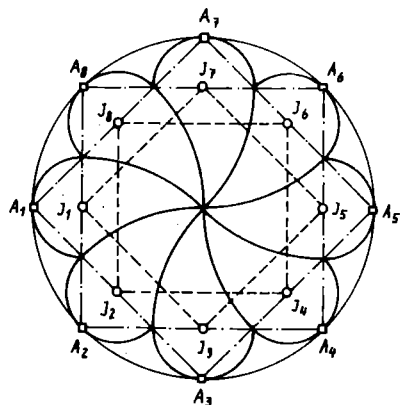


Bild 6



¹⁾ Der Grundaufbau ist unten erkennbar. Die vier Quadrate sind $A_1A_3A_5A_7$, $A_2A_4A_6A_8$, $I_1I_3I_5I_7$ und $I_2I_4I_6I_8$. Der Kreis hat den Durchmesser $d = A_1A_5 = \dots = A_4A_8$.

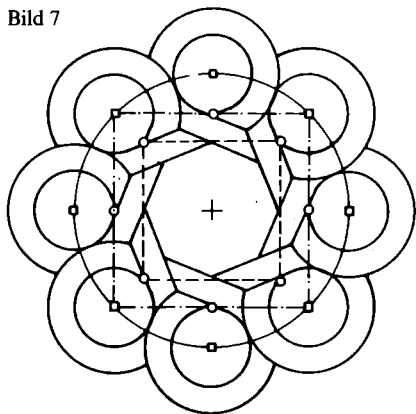


Anja hat eine Figur konstruiert (Bild 5) und Christoph sogar zwei (Bild 4 und 6). Aufmerksam betrachten beide ihre Entwürfe. Schließlich sagt Christoph: „Dein Einfall ist prima, denn die Figur ist etwas Neues; meine erste Konstruktion dagegen ist beinahe so wie die andere gestern. Ich habe nur den Radius so gewählt, daß sich die Kreisschleife gerade um das Quadrat herumlegt.“ Anja meint dagegen, daß ihr seine zweite Figur (Bild 6) sehr gefällt, da sich die Kreise ganz außerhalb vom Quadrat befinden. Den restlichen Nachmittag verbringen sie damit herauszufinden, wie der andere das wohl konstruiert habe und es dann selbst zu probieren. Anja hat auch schon einen Vorschlag für das nächste Mal. „Wir machen es folgendermaßen“, sagt sie: „Wir überlegen uns jeder eine neue Figur und fertigen dazu eine Konstruktionsbeschreibung an. Diese tauschen wir dann aus.“ Christoph unterbricht sie aufgeregt: „Ich weiß schon, wie es gemeint ist. Wir zeichnen die Figur nach der Konstruktionsbeschreibung, ohne sie vorher gesehen zu haben. Dabei können wir sehr gut überprüfen, wie exakt wir uns in der Beschreibung ausgedrückt haben.“

„Nun habe ich doch noch eine Frage“, bemerkt Anja: „Bist du ganz allein auf die Idee gekommen, solche Figuren zu konstruieren?“

„Nein, Anja, das natürlich nicht. Ich habe neulich auf dem Dachboden gekramt und ein ganz altes Geometriebuch gefunden. Darin sah ich diese Figur.“

Bild 7

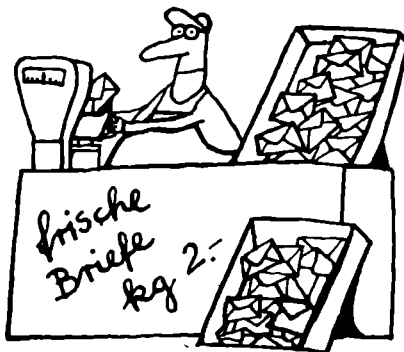


„Ich versuchte, sie zu konstruieren, aber es gelang mir nicht sofort. Zur Vorübung habe ich mir dann die anderen Figuren ausgedacht.“ „Aber inzwischen hast du diese schwierige Figur schon konstruiert?“ will Anja jetzt wissen. „Ja“, sagt er stolz, „hier ist sie!“

Und nun versucht es einmal selbst mit folgenden Aufgaben!

▲ 1 ▲ Es sei P der Schnittpunkt der Strecken $\overline{A_6A_8}$ und $\overline{A_5A_7}$. Zeige, daß $\overline{AP} = \frac{d}{2}$!

▲ 2 ▲ Konstruiere eine Grundfigur, die aus einem Kreis und vier darin liegenden gleichseitigen Dreiecken besteht (analog Bild 2)!



...Nun ist das letzte Schuljahr für mich vorbei. Ich möchte mich nochmals für die Hilfe durch *alpha* bedanken. In allen Abiturfächern habe ich je die 1 geschafft, Abi mit Auszeichnung, Herdermedaille in Silber.

Guido Blossfeld, Halle
Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb
seit 10 Jahren

...Nun nehme ich schon drei Jahre am *alpha*-Wettbewerb teil. Dies verbesserte meine Leistungen in Mathematik und das Denkvermögen.

Viola Petermann, Leipzig (Kl. 8)

...Ich glaube, ohne die Hilfe der Fülle der in *alpha* abgedruckten Olympiade-, Wettbewerbs- und sonstigen Aufgaben hätte ich meine bisherigen Erfolge (Preise bei OJM der Stufen III und IV) nicht erreichen können, dafür herzlichen Dank.

Frank Erdmann, Zeitz

...Wir möchten Ihnen weiterhin soviel Geschick und Einfühlungsvermögen für die *alpha*-Leser wünschen und auch neue Erfolge.

Familie Baitalow, Kasan (UdSSR)

...Wir werten stets in unserer nächsten Zusammenkunft – nach Erscheinen der Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb – alles Material gründlich aus, um eine noch höhere Qualität zu erreichen.

AG Mathe, OS Schmölln

...Im Mathe-Club der Stadt Wismar, dem ich angehöre, freuen wir uns über jede neue Aufgabenstellung in der *alpha*.

Silke Gabriel, Wismar

...Die *alpha* lese ich sehr gern. Ich bemerkte, daß ich mich gegenüber dem Wettbewerb 1976/77 stark verbesserte.

Volker Winkler, Görlitz

▲ 3 ▲ Zeichne in die Grundfigur von Aufgabe 2 drei ineinander verschlungene Kreise (analog Bild 3)!

▲ 4 ▲ Konstruiere die in Bild 7 gezeigte Figur!

▲ 5 ▲ Zeichne die Konstruktion von Bild 7 (Aufgabe 4) so nach, daß eine andere Drunter-und-drüber-Figur entsteht!

Cordula Röhr

...Als Schülerin der 8. Klasse stöbere ich schon in den Beiträgen der 9. und 10. Klasse, schon weil es mir hilft, Wettbewerbsaufgaben höherer Klassenstufen zu lösen, auch in denen der Klasse 5 bis 7, weil auch das immer interessant ist. ... Anbei ein Aufgabenvorschlag.

Iren Böhme, Dresden (Kl. 8)

...Ich begann im Oktober 1978 an der Technischen Universität in Wien mit dem Studium der Technischen Mathematik und werde gern weiterhin am *alpha*-Wettbewerb teilnehmen.

Hannes Kubr, Klosterneuburg (Österreich),
alpha-Teilnehmer seit 8 Jahren

...Ich gehe seit September 1978 auf die EOS und bin sicher, daß mich auch dort die regelmäßige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb im Fach Mathematik in meinen Leistungen voranbringen wird.

Kristine Lessig, Leipzig

...Ich habe mich sehr gefreut, daß meine eingesandte Aufgabe veröffentlicht wurde (Ma 6/1714). Das ist ein Ansporn für die weitere gewissenhafte Teilnahme am Wettbewerb; anbei weitere Aufgabenvorschläge.

Kerstin Müller, Wernshausen (Kl. 8)

...Hiermit sende ich meine im Schuljahr 1977/78 erworbenen 50 Antwortkarten und 2 Urkunden dazu. ... Die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb hat meine mathematische Entwicklung wesentlich vorangetragen... Auf weiterhin gute Zusammenarbeit!

Gabriele Sprotte, Döbeln (Kl. 9)

...Ein großes Kompliment und Dankeschön an *alpha* für die interessanten Stunden bei der Lösung kniffliger Aufgaben. Damit kann man sein Wissen überprüfen.

Petra Korn, Aschersleben (Kl. 8)

...Ich habe eine Vertretung in der Lenin-OS in Greifswald in der Klasse 6R übernommen (außerhalb meiner Tätigkeit an der Universität). Vom ersten Tage an gehörten die *alpha*-Aufgaben fest zum Unterricht, der dadurch bereichert wurde...

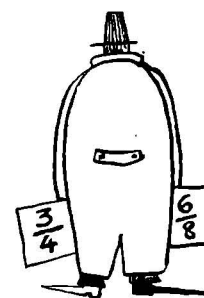
Dozent Dr. sc. J. Buhrow, Greifswald

Ich bin Schüler einer 6. Klasse und beschäftige mich oft in meiner Freizeit mit Mathematik. Als ich zur Übung Terme umformte, bekam ich zufällig $a^2 + 2a + 1$ heraus. Ich setzte in diesen Term für a natürliche Zahlen ein und erhielt dabei dieselben Werte wie für den Term $(a + 1)^2$. Ich vermutete, daß für alle natürlichen Zahlen a die Gleichung $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ eine wahre Aussage sei.

Ich suchte den Beweis dafür, fand ihn aber nicht. Als ich dann im *Kompendium der Mathematik* blätterte, entdeckte ich die binomische Formel $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Sehr schnell hatte ich heraus, daß die Gleichung $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ die binomische Formel mit $b = 1$ ist. So war mein Problem gelöst.

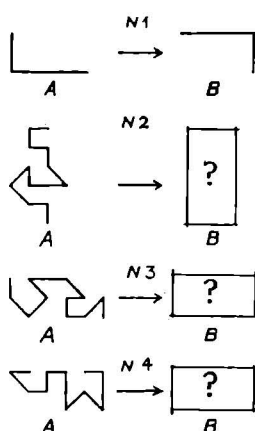
Thomas Strobel, Berlin-Lichtenberg

In freien Stunden **alpha** heiter



Psychologischer Test

Wie sehen die Figuren 2, 3 und 4 aus, wenn man sie aus der Lage A in die Lage B in Gedanken umdreht, entsprechend der Figur 1?



Wer in einer Minute mit dem „Umzeichnen“ fertig wird, besitzt eine ausgezeichnete Fähigkeit, mit Vorstellungen zu operieren; wer anderthalb Minuten dafür braucht, ist gut; wer mehr Zeit benötigt, muß noch tüchtig üben!

aus: Sputnik 7/78, Moskau

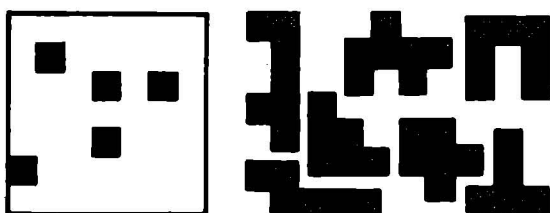
Muß Strafe sein?

„Kann man denn für etwas bestraft werden, was man nicht getan hat?“ fragt der kleine Leo Lüdermann seinen Mathematiklehrer. „Nein, das wäre ungerecht“, erklärt der Pädagoge. „Da habe ich aber nochmal Glück gehabt. Ich habe heute nämlich meine Mathe-Aufgaben nicht gemacht!“

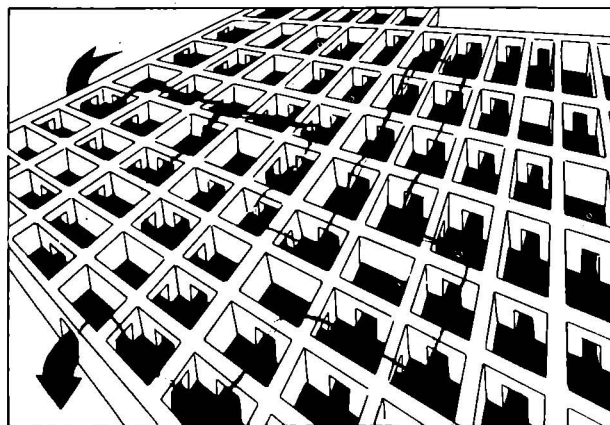
Unterhaltsames Legespiel

Pause die sieben schraffierten Teile ab, schneide sie aus, und lese sie so, daß sie die weiße Fläche des Quadrats voll bedecken!

aus: Füles, Budapest



Wer findet den Weg?



aus: Füles, Budapest

Kleinschachbrett: 5 × 5

a) Ein Springer ist am Mittelfeld eines 5 × 5-Kleinschachbretts platziert, von wo er acht Felder erreichen kann (die in dem Bild a) einen Punkt haben). Trage die Zahlen in die restlichen Felder ein, die angeben, wieviel Felder der Springer von diesem Feld aus in einem Zug erreichen kann!

	•		•		0		2		2
•				•			1	2	
		8			2	1			2
•				•		2		2	
	•		•		2		2		

b) Der Springer ist jetzt in einer Ecke (Feld 0) platziert. Die Felder, die er mit einem Zug erreichen kann, sind mit 1, die er mit zwei Zügen erreichen kann, mit 2 gekennzeichnet. Gib für jedes Feld des Bretts die Zahl der Züge an, die der Springer mindestens braucht!

aus: Math. Pie, London

Studentenhobbys

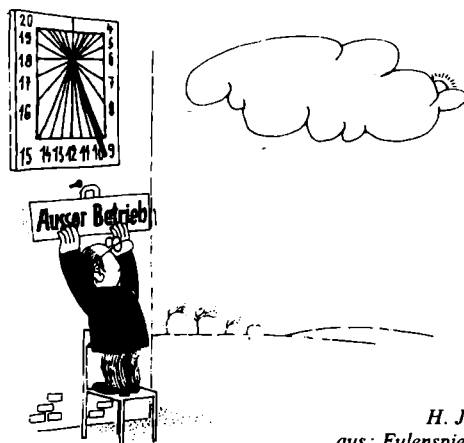
Vier Studenten treiben Sport und betätigen sich in der Laienkunst. Rate, welcher was macht, wenn dir folgendes bekannt ist:

1. Der Boxer ißt gern Kaviar, Mischa dagegen Torte.
2. Der Tänzer ist mit dem Schwerathleten befreundet.

3. Grisha ist ein Original.
4. Der Kunstpfeifer meint, wenn der Schachspieler so stark wie Tischa und so gewandt wie Mischa wäre, dann wäre er der Schwarm aller Mädels.
5. Eduard putzt sich jeden Morgen die Schuhe, was man vom Schwerathleten leider nicht sagen kann.
6. Der Student, dessen Hobby Sticken ist, hat blaue Augen.
7. Der Boxer hält es für unter seiner Würde, Tanzen zu lernen. Tischa ist anderer Meinung, lernt aber auch nicht tanzen.
8. Der Schwerathlet kennt Tischa nicht und will ihn auch nicht kennen.
9. Der Boxer liebt Mascha, Mascha liebt Eduard, und der singt im Chor.
10. Der vierte Student spielt Fußball.

aus: Nauka i Shisn, Moskau

Ohne Worte



H. Jankowski,
aus: Eulenspiegel, 33/78

Silbenrätsel

Aus den Silben

ar – bei – car – da – de – de – des – fi – ge – mo – mo –
nat – ni – nie – no – on – on – ra – ro – ta – ten – tes –
ti – ti – to – tung – ver

sind Wörter folgender Bedeutung zu bilden:

1. unbegrenzte gerade Linie
2. Drehung um eine Achse
3. Festlegung eines Begriffs
4. Einheit der Zeit
5. französischer Mathematiker (1596 bis 1650)
6. Anwendungsbereich der Mathematik in der Wirtschaft
7. spezieller Untersuchungsgegenstand bei Kurvendiskussionen.

Sodann entnimmt man jedem dieser Wörter eine Silbe. Aneinandergereiht ergeben sie den Namen eines italienischen Mathematikers, der sich um die Lösung kubischer Gleichungen verdient gemacht hat. Zur Erleichterung kann die nachstehende Zahlenfolge benutzt werden, aus der ersichtlich ist, welche der Silben zu benutzen ist: 1; 1; 3; 1; 2; 1; 2

K.-H. Lehmann, Berlin

Ein Rechentrick

Mit dem folgenden Trick kannst du deine Freunde verblüffen. Laß sie drei Zahlen untereinander schreiben, dann darunter die Summe dieser 3 Zahlen, weiter die Summe der letzten 3 Zahlen und so fort, bis 8 Zahlen untereinander stehen.

Nun kannst du ihnen erklären, du könntest in kürzester Zeit die Summe dieser 8 Zahlen berechnen.

Dazu mußst du nur die zweitletzte Zahl mit 4 multiplizieren ($11221 \cdot 4 = 44884$).

Ingo Rath, Wien

```

638
487
821
1946
3254
6021
11221
20496
44884

```

Wie fängt ein Mathematiker einen Löwen in der Wüste?

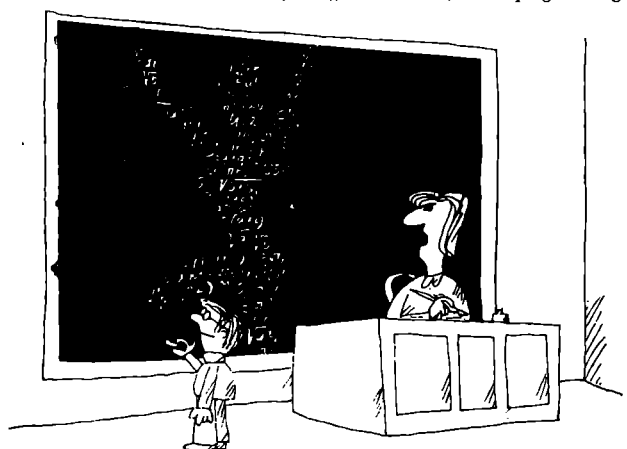
Der Mathematiker muß zuerst definieren, was es heißt, einen Löwen gefangen zu haben.

Definition: Ich habe einen Löwen gefangen, wenn zwischen mir und dem Löwen überall Gitter ist.

Der Mathematiker setzt sich selbst in einen Käfig und hat somit entsprechend seiner Definition den Löwen gefangen. Wenn der Mathematiker jedoch ein Spezialist in Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik ist, wird er wahrscheinlich eine noch elegantere Lösung finden. Er stellt einen Käfig mit geöffneter Tür in die Wüste. Dann hat das Ereignis „Im Käfig befindet sich ein Löwe“ eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit. Er braucht also nur zu warten, bis dieses Ereignis eintritt, und dann die Tür zu schließen. Der Löwe ist gefangen.

aus: Wurzel 4/78, Jena

L. Otto, aus „Kindereien“, Eulenspiegelverlag



Berufsbild:

Ingenieurschule für Gießereitechnik „Georg Schwarz“ Leipzig

Wo Maschinen laufen, ob in einer Werkhalle oder im Haushalt, wo Autos fahren oder Züge der Reichsbahn, der aufmerksame Beobachter wird feststellen, die genannten Einrichtungen enthalten Teile aus gegossenen Werkstoffen – Gußteile. Es wird deutlich, die Produktion von Gußzeugnissen ist volkswirtschaftlicher Schwerpunkt und gewinnt in zunehmendem Maße an Bedeutung.

Für die Erfüllung der dabei zu lösenden Aufgaben werden Ingenieure benötigt, die u. a. auch ein anwendungsbereites Wissen und Können auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet besitzen müssen.

Aufbauend auf dem in der 10klassigen polytechnischen Oberschule und in der Berufsausbildung erworbenen Wissen ist die Vermittlung eines soliden, anwendungsbereiten gesellschaftswissenschaftlichen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und technischen Grundlagenwissens Voraussetzung für eine praxisverbundene Fachausbildung und für einen vielseitig einsetzbaren Gießereingenieur. Diese Ingenieure werden in der Ingenieurschule für Gießereitechnik „Georg Schwarz“ in der Fachrichtung „Technologie des Gießereiwesens“ ausgebildet. Sie ist die einzige Ingenieurschule mit diesem Ausbildungsprofil in der DDR und hat den gesamten Bedarf an mittleren Kadern für die Gießereiindustrie als einem der wichtigsten Zulieferzweige zu decken.

Die Vielseitigkeit der fachwissenschaftlichen Ausbildung bedingt ein sehr praxisorientiertes Studium. Aus diesem Grunde arbeitet die Ingenieurschule eng mit der sozialistischen Praxis zusammen. Auf der Basis von Partnerschaftsverträgen halten viele erfahrene Fachleute der Industrie, insbesondere aus dem VEB Kombinat GISAG, Vorlesungen an unserer Schule. Während des Studiums erfolgt ein umfangreiches Exkursionsprogramm in führende Gießereibetriebe der DDR.

Zum Studium aufgenommen werden 10-Klassen-Abgänger mit Gießereiberufen wie Gießereifacharbeiter und Modellbauer. Wegen der bereits dargelegten volkswirtschaftlichen Notwendigkeit der Entwicklung der Gießereiindustrie besteht ein großer Bedarf an Gießereingenieuren. Aus diesem Grunde können sich auch 10-Klassen-Abgänger bewer-

ben, wenn sie einen Beruf der metallverarbeitenden Industrie wie Schlosser, Maschinenbauer und dergleichen erlernt haben. Die Ingenieurschule organisiert für diese Bewerber ein 12wöchiges Praktikum und sichert den dem Studienplan entsprechenden Ablauf des Studiums ohne Zeitverlust.

Die Gesamtdauer der Ausbildung im Direktstudium beträgt drei Jahre. Die Mathematikausbildung innerhalb des Studiums soll den Studenten befähigen, technische Probleme durchdenken und lösen zu können. Neben dem eigenen Bildungsziel der Mathematik hat die Ausbildung an der Ingenieurschule die Aufgabe, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu entwickeln, die in den technischen Lehrgebieten angewendet werden. Es versteht sich von selbst, daß die technisch orientierte Mathematik neben einer soliden Theorie vor allem viele Übungen und Aufgaben mit großem Rechenaufwand aus der Praxis beinhalten muß.

Damit der Student diesen Anforderungen gerecht wird, muß er gefestigte Kenntnisse aus der POS (einschließlich des Umgangs mit dem Rechenstab) mitbringen. Dann ist er in der Lage, folgende Teilgebiete der Mathematik in drei Semestern mit insgesamt 324 Stunden (1. Semester 144 Stunden, 2. Semester 108 Stunden, 3. Semester 72 Stunden) zu studieren:

Zahlenbereich und Rechenoperationen –
Funktionen – Kegelschnitte –
Folgen, Reihen, Grenzwerte –
Differential- und Integralrechnung –
Gewöhnliche Differentialgleichungen –
Gleichungen und Ungleichungen –
Lineare Systeme (Determinanten und Matrizen) – Lineare Optimierung –
Wahrscheinlichkeitsrechnung –
Mathematische Statistik – Nomografie.

Im 6. Semester führen die Studenten ein halbjähriges Ingenieurpraktikum in einem sozialistischen Betrieb durch, der in der Regel der spätere Einsatzbetrieb des Absolventen ist. Das Studium wird mit dem Ablegen von Prüfungen sowie der Anfertigung und der erfolgreichen Verteidigung der Ingenieurabschlußarbeit beendet. Der Absolvent erhält die Berufsbezeichnung „Ingenieur“. Der Einsatz der Absolventen erfolgt in den Gießereien zur Vorbereitung, Durchführung, Überwachung und Analyse der Produktion. Die Absolventen sind in der Lage, Produktionsanlagen in der Gießerei zu leiten, hochproduktive Gieß-, Form- und Kernherstellungsverfahren zu beherrschen und an der Rationalisierung der Anlagen und Prozesse mitzuwirken. In der Ingenieurschule für Gießereitechnik hat sich unter Leitung der FDJ ein vielseitiges geistig-kulturelles und sportliches Leben entwickelt. Diese Entwicklung wird begünstigt durch die Stadt Leipzig selbst, die als Groß- und Messestadt eine Fülle von kulturellen und sportlichen Veranstaltungen bietet.

Weitere Angaben über die Ausbildung können dem vom Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der DDR veröffentlichten Studienplan für die Grundstudienrichtung Werkstoffwesen entnommen werden.

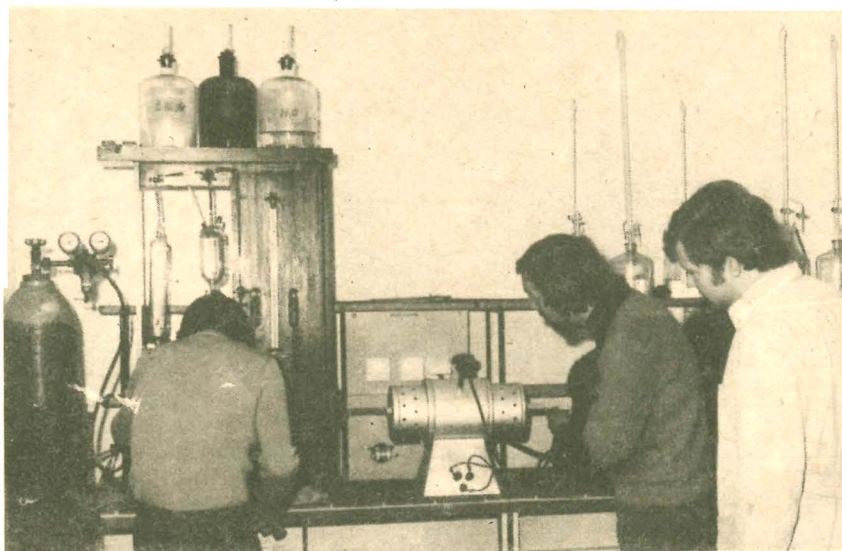
Aufgabe

Ein gußeiserner Würfel mit der Kantenlänge a wird rechtwinklig zu zwei Seitenflächen derart durchbohrt, daß der so entstehende Restkörper eine Oberfläche erhält, die um 25% größer als die Würfeloberfläche ist.

Wie groß ist der Radius der Bohrung?

(Bemerkung: Für 10. Klasse, keine Eigenentwicklung, Quelle der Aufgabe unbekannt)

Studenten bei der Bestimmung der chemischen Zusammensetzung von Legierungen



Abzeichen in Gold

Für elfjährige Teilnahme

Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Henrik Frank, Greifswald; Lutz Püffeld, Hennigsdorf; Eckhard Schadow, Oranienburg

Für zehnjährige Teilnahme

Martin Ermrich, Elbingerode; Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blossfeld, Halle; Astrid Rösel, Rostock

Für neunjährige Teilnahme

Holger Jurack, Burkau; Ullrich Riedel, Flöha; Angelika Müller, Greifswald; Falk Bachmann, Halle; Rainer Gutsche, Herzberg

Für achtjährige Teilnahme

Borwin Wegener, Berlin; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Marid Helbig, Frankfurt; Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Thies Luther, Güstrow; Ulv Krabich, Leipzig; Lew Dimenstein, Leningrad (UdSSR); Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Regina Kupfer, Miltitz; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Frank Abmus, Oranienburg; Rainer Seifert, Pinnau; Volker Lerche, Schmalkalden; Bernhard Zschada, Sondershausen; Gudrun Drews, Wöbbelin

Für siebenjährige Teilnahme

Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin; Ulf Ritschel, Booßen; Uwe Lumm, Clingen; Clemens Jaunich, Cottbus; Wolfgang Seeber, Gehren; Karin Kramer, Görlitz; Sylke und Bengt Nölting, Irmhild Bittner, alle Greifswald; Ingo Lenz, Hagenow; Claudia Kummer, Stefan Kasper, beide Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Axel Müller, Oberlungwitz; Barbara Gehb, Henri Hofmann, Reinhold Beckmann, alle Schmalkalden; Birgit Rosenberger, Suhl; Manfred Häußler, Westgreußen; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Katrin Richter, Wittenberg; Karsten König, Zeuthen; Jörg Brüstel, Ziegelheim; Kurt Oertel, Zschornowitz

Für sechsjährige Teilnahme

Volkmar Türke, Auerbach; Torsten Flade, Beierfeld; Cordula Becher, Andreas Gude, Andrea Nießen, alle Berlin; Michael Feudel, Bischofferode; Peter Röhl, Cottbus; Ralf Ott, Demmin; Frank Regensburger, Michael Apitz, Werner Jeroch, Uwe Hanisch, Reinhard Pohl, alle Dresden; Andrea Puchert, Eichicht; Heide Lore Stallbohm, Eldena; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolhart Umlauf, Freital; Dietmar Richter, Garitz; Michael Schott, Gräfenhain; Christian Wolf, Greifswald; Jens Negwer, Grimma; Burkhard Rahr, Gr. Naundorf; Günter Mosel, Gülze; Andrea Herrmann, Hammerunterwesenthal; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Armin Körner, Leipzig; Ralf Kretschmer, Dresden; Peter Wiehe, Leinefelde; Steffen Langbein, Lichte; Gabriele Otto, Meißen; Rainer Bauer, Mittweida; Thomas Richter, Neuhausen; Andreas Massanek, Neusornzig; Michael Thränhardt, Oranienburg; Jörg Schubert, Pfaffroda; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Christiane Jordan, Reitwein; Armin Hoell, Ribnitz; Michael

Zwicke, Riesa; Ralf Briesemeister, Siegfried Müller, beide Sachsendorf; Haiko Müller, Thomas Wingeß, beide Schmalkalden; Torsten Löwe, Schleiz; Bernadette Domaschke, Seifhennersdorf; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Holger Hoppe, Stendal; Günter Carlsen, Titschendorf; Dirk Herrmann, Töplitz; Katrin Wahn, Uebigau; Sylvia Zipf, Waldheim; Thomas Weiß, Weimar; Sylvia Kunze, Weißenfels; Carola Senft, Wingerode; Ralf Becker, Wolmirstedt; Ute Scharkowski, Zepernick; Jürgen Rolle, Zittau

Für fünfjährige Teilnahme

Udo Clemens, Altenburg; Dieter und Henri Koch, Arnstadt; Olaf Rausch, Aue; Burkhard Maeß, Bad Doberan; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Dagmar Fischer, Birgit Ewald, Marion Breitschuh, Michael Prescher, Katrin Kollmer, alle Berlin; Werner König, Berlingerode; Thomas Ditttrich, Brand-Erbisdorf; Vera Schulze, Brandis; Adelbert Heddergott, Büttstedt; Iris Grinda, Calbe; Jens Schumann, Coswig; Ilka Kohlstock, Andrea Dreyer, Ellen Harnath, Jens Purand, Grit Schulze, Iris Grundke, alle Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Mario Binkowski, Demmin; Annett Körner, Uta Oelschlägel, Angela Jirick, Klaus-Dieter Gloe, Norbert Katsch, Lutz Friedemann, Matthias Apitz, Peter Alexander Pöhler, Frank Wittwer, Andreas Schimmang, alle Dresden; Jörg Bruchertseifer, Dubna (UdSSR); Daina Semper, Thomas Böhme, beide Eisleben; Uwe Kintzel, Erfurt; Maritta Heß, Lutz Mittelsdorf, beide Fambach; Kathrin Meißner, Forst; Beret Brabec, Frankfurt; Heike Brügge-mann, Thomas Gerlach, Ute Ribbe, Bernd Hartwig, Steffen Toepfer, Mike Liebegott, Dirk Kramer, alle Friedeburg; Sylvio Klose, Gera; Kerstin Müller, Pedro Tiesler, Christof Herrmann, alle Greifswald; Viola Richter, Garnitz; Bernd Dübe, Gr.-Bade-meusel; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; André Motz, Grünhain; Hubert Steinmetz, Grünungen; Gudrun Tapert, Guben; Jens Folgmann, Ruth Jacobs, beide Halle; Doris Planer, Hohendorf; Knut Bauer, Hohenstein-Ernstthal; Undine Nathan, Michael Dietrich, beide Hoyerswerda; Rolf Kamieth, Kakkerbeck; Marko Hanke, Ronald und Arnd Rösch, alle Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhlend, Klingenthal; Alois Weniger, Knittelfeld (Österreich); Heimo Woitek, Leinefelde; Uwe Haberlandt, Karola Näther, Jens Rudolf, Thomas Richter, alle Leipzig; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Jörg Steinbach, Limbach-Oberfrohna; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Annett Weise, Löderburg; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretschmann, Markneukirchen; Peter Stolze, Möhlau; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Liane Krümming, Neuenhofe; Matthias Theurich, Olbersdorf; Rüdiger Düsing, Osterburg; Antje Langer, Oybin; Ute Möllhoff, Piesau; Sabine Einert, Pockau; Jens Jacobi, Jens-Uwe Sprengel, beide Potsdam; Jens-Peter Planke, Premnitz; Uwe Hadamik, Dagmar Herrlich, Karsten und Falk Breuer, alle Radebeul; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Birgit und Heiko Lehmann, Rostock; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Regina Bricks, Saalfeld; Helmut Engelmann, Sachsendorf; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Heinz-Olaf Müller, Sabine Ender, Frank Wurschi, Almut Beckmann, Martin Tengler, alle Schmalkalden; Lutz Möller, Schmiedeburg; Torsten Jeschke, Schwarzeide; Eckart Möbius, Roderich Winkler, beide Schwerin; Frank Maschke, Sebnitz; Annelie Meyer, Silberstraße; Simone Mahlow, Sondershausen; Volker Steuer, Spremberg; Gerd Birnbaum, Spitzkunnersdorf; Thomas Eichhorn, Steinach; Angela Bieber, Sabine Munk, beide Steinbach-Hallenberg; Simone Teichmüller, Stöckey; Heike Carlsen, Titschendorf; Jürgen Prestin, Waren; Beate Seiler, Ralf Kurch, Beate Näher, alle Weimar; Uwe Felsberg, Worbis; Uwe Müller, Wroclaw (VR Polen); Christoph Chojetzki, Zeithain; Frank Erdmann, Zeitz; Birgit Thomas, Uwe Langer,

Regina Kreul, Uta Rößler, Matthias Theurich, Steffen Pankow, Gabriele Herzig, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken; Dietmar Ulbricht, Veltin

Für vierjährige Teilnahme

Frank Kämpfer, Holger Herold, beide Altenburg; Hajo Herbst, Altenplein; Uwe Maaz, Arnstadt; Henri Kriechling, Asbach; Guntram Türke, Auerbach; Ralph Müller, Bad Bibra; Frauke Maeß, Bad Doberan; Elke Herrlich, Bad Gottleuba; Kersten Pegesa, Bad Muskau; Thorsten Tonndorf, Bad Salzungen; Jens Spyrika, Bergen; Birgit Wollschläger, Bergwitz; Stefan Berg, Frank Bendin, Andreas Schaale, Ingrid Wolf, alle Berlin; Hagen Geppert, Bernburg; Gabriele Orgis, Bernsbach; Ulrich Kramer, Gundolf Schilling, beide Bernterode; Astrid Markgraf, Bischofferode; Carmen Schneider, Bischofswerda; Pia Zimmermann, Inge Beck, beide Bleicherode; Andreas Kraska, Breitenworbis; Birgit Weishaupt, Bülow; Hagen Hartleb, Büttstedt; Bärbel König, Annegret Schneider, Simone Kahl, alle Burkau; Guido Mehne, Ralph Voigtländer, beide Calbe; Maik Weide, Callenberg; Olaf Seifert, Camburg; Andreas Winkler, Cossebaude; Uwe Röhl, Ralf Hortig, Andreas Schlecht, Thomas Hoffmann, Susanne Liebelt, Kathrin Magister, Detlef Baur, Ralph Bernhardt, alle Cottbus; Karola Sarodnick, Dallgow; Carsten Lehmann, Damsdorf; Manfred Kutschank, Deutschenbora; Monika Nolte, Silke Zimpel, beide Dingelstädt; Michael Beetz, Dreetz; Michael Giesecke, Jörn Wittig, Thomas Süß, Jürgen Gräfenstein, Thomas Hartwig, Thomas Keffler, Lutz Jeroch, Jens Rotsch, Michael Pietschner, Uwe Riedel, Michael Berton, Ralph Rönch, Helmuth Goldberg, Karl Klotzsche, Carolin Engel, Susanne Müller, Thomas Schindhelm, Ingolf Körner, alle Dresden; Mandy Rinklin, Thomas Marek, Peter Weise, alle Eisenach; Volker Georgy, Henrik Seifert, Dirk-Thomas Orban, Renate Lützkendorf, Uwe Nagel, Uwe Strohmeier, alle Erfurt; Math. Zirkel der Hugo-Joachim-Os Espenhain; Iris Abt, Elke Häfner, beide Fambach; Jörg Butter, Freiberg; Ralf Baumhöl, Freital; Andreas Fintzel, Friedeburg; Gerd Hackbarth, Gallentin; Anne-Katrin Schmidt, Gelmeroda; Angela Illing, Gersdorf; Meike Pfützenreuter, Gerterode; Frank Scheffler, Gnoien; Rafael Stein, Gödern; Bodo Heise, Anne-Katrin Endtricht, beide Görlitz; Yvonne Pforr, Matthias Kasperek, beide Gräfenhainichen; Andreas Wolf, Stefan Göckeritz, Gunnar Müller, Katharina Herrmann, Ines Kath, Manuela Heims, Astrid Renz, Silvia Falk, alle Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Cornelia Wewes, Marian Wiepke, beide Guben; Susanne Zöllner, Halle; Regine Binder, Halle-Neustadt; Volker Reck, Heiligenstadt; Enka Stelzer, Heringsdorf; Eike Harmel, Hohenferchesar; Kerstin Hirsch, Holzdorf; Mathias Grundmann, Roland Dietrich, Rene und Conchita Schüppel, alle Hoyerswerda; Volkmar Liebscher, Ilmenau; Horst Flieger, Jarmen; Torsten Zahn, Kandelin; Thomas Mader, Jens Pönisch, Birgit Hofmann, Anett Märker, Andreas Hengst, alle Karl-Marx-Stadt; Ute Silchmüller, Heike Wenig, beide Kieselbach; Barbara Tschada, Kleinberndten; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Antje Meyer, Krautheim; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Karsten Drescher, Leinefelde; Birgit Haberlandt, Ines Bauer, Stephan Bönewitz, Heiko Rudolf, Jörg Schwarzer, Peter Kasper, Katrin Bormann, alle Leipzig; Kathleen Weise, Löderburg; Manuela Marpet, Markersdorf; Uwe Zscherpel, Meerane; Thomas Eller, Silke Marquardt, Dagmar Werner, alle Meiningen; Tobias Lücke, Meißen; Kerstin Friedrich, Beate Dutschke, beide Mittelherwigsdorf; Antke Kössel, Mittelschmalkalden; Per Witte, Mittenwalde; Angelika Radtke, Mittweida; Heidrun Jänchen, Mohsdorf; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Uwe Grasenack, Nauendorf; Torsten Kretschmer, Naumburg; Birger Wirth, Nermsdorf; Kerstin Feigel, Neundorf; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woi-ke, Neustadt; Uwe Pauluhn, Nordhausen; Anett

Rabe, Birgit Uhlmann, beide Oberlungwitz; Jörg Lehmer, Oelsen; Kerstin Johannes, Oranienbaum; Andreas Bollmann, Osteroda; Peter Seifert, Pinnau; Kerstin Zirnstein, Pirna; Thomas Mittelbach, Plessa; Elisabeth Schültke, Potsdam; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Christiane Dobberstein, Rathenow; Claudia Würker, Reichenbach; Ralph Neumann, Ulrich Zeitmann, beide Ribnitz; Susanne Forstreuter, Astrid Wruck, Kirsten Kowalewski, alle Rostock; Wolfgang Stein, Rudolstadt; Birgit Bricks, Saalfeld; Eva Schubert, Schalkau; Cornelia Grulke, Schernberg; Jens Gollmer, Henri Kriechling, Cornelia Schädlich, Susanne Heuer, Thomas Gerth, Christoph Wille, Werner Häfner, alle Schmalkalden; Sabine Buß, Schorssow; Wolfgang Förg, Schwab (Österreich); Elke Meißner, Sitzendorf; Bert Hoffmann, Silke Mistol, Martin Förster, alle Söllichau; Matthias Schneiderheinze, Sondershausen; Cornelia Recknagel, Pia Köllmann, Corina Speck, Udo Walther, Andrea Möller, Sabine Bahner, Barbara und Christina Usbeck, Peter Nickel, Annedore Röhl, Doris Rothämle, alle Steinbach-Hallenberg; Silke Reuscher, Ines Pubanz, Roland Goldenbogen, alle Stralsund; Elke Rösner, Strausberg; Peter Pfannschmidt, Suhl; Heidrun Tiedt, Teterow; Annkatrin Heuer, Tieckow; Ulf Carlsen, Titschendorf; Margit Creutzburg, Thal; Ute Bergmann, Katrin Schatz, beide Torgau; Kerstin Spiegel, Waldheim; Stefan Syring, Warin; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Kerstin Ackermann, Wausungen; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Sebastian Strube, Wernsdorf; Mayk Rehtanz, Wernshausen; Torsten Grimm, Sven Ribmann, beide Wesenberg; Silke Gabriel, Eric Link, beide Wismar; Torsten Noack, Wittenberg; Karsten Schlutter, Wittstock; Jörg Schleinitz, Wölfskendorf; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schmidt, Worbs; Birgit Schlutheiß, Wüstenbrand; Torsten Ninebuck, Roland Wehmeier, beide Wüsteney; Christine Gruhn, Zepernick; Uli Zurth, Zerpenschleuse; Michael Holdys, Heike Kiehne, beide Ziesar; Gabriele Schubert, Anett Schulzensohn, Heimo Henschelmann, Bernd Dunger, alle Zittau; Gerald Köthe, Leinefelde

Für dreijährige Teilnahme

Margret Detsch, Bad Salzuflen; Timo Kretzschmar, Bahral; Henry Fischer, Bitterfeld; Marlis Schröder, Brandenburg; Stefanie Began, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Kerstin Krähe, Calbe; Petra Sarodnick, Dallgow; Gabriele Sprotte, Döbeln; Birgit Wittwer, Jochen Lattermann, alle Dresden; Gabriele Fischer, Deutschenbora; Susanne Schreiber, Elsterwerda; Thomas Schmidt, Erfurt; Birgit Voigtmann, Freiberg; Carla Müller, Friedeburg; Kerstin Wickner, Hermannsdorf; Thomas Jez, Herzberg; Sabine Sentker, Hettstedt; Ines Gillwald, Holzendorf; Marion Endrigkeit, Jessen; Jens Hoffmann, Holger Friedrich, Andreas Bernd, alle Karl-Marx-Stadt; Axel Schüler, Kleinmachnow; Karsten Ihlenburg, Königs Wusterhausen; Gerald Pfitzenreuter, Jörg Drechsel, beide Leinefelde; Ute Fischer, Lützenau; Uwe Würker, Mülzen; Liane Helmbold, Neuenhofe; Dieter Seifert, Pinnau; Axel Schulz, Potsdam; Katrin Lippuner, Rheinsberg; Dieter Grebner, Roßdorf; Ulrike Martin, Ines Dalissa, beide Rostock; Petra Zachert, Sachsendorf; Michael Gerth, Schmalkalden; Manuela Recknagel, Steinbach-Hallenberg; Ekkehard Breuer, Stendal; Christine Mohr, Teterow; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Kerstin Hoffmann, Zittau; Birgit Schenke, Zschornowitz; André Schlosser, Klingenthal. Die hier genannten Schüler erhielten Buchpreise.

Immanuel Dittrich, Altenburg; Ines Matthesie, Simone Groß, Peter Engelhaupt, Rolf Standau, Gerhard Fräbel, Heike Rem, Antje Eck, alle Asbach; Frank Baumgart, Aschersleben; Evelyn Heyer, Aue; Ulrich Horn, Bad Frankenhausen; Kathrin Gutte, Bad Gottleuba; Dagmar Klopsch, Bad Kleinen; Knut Rommel, Bad Liebenstein; Susanne Stadler, Uwe Wiczorek, Steffen Beyer,

Ingrid Heidrich, Karola Durner, alle Leimbach; Heidrun Schwerin, Bandau; Kerstin Strohbach, Bautzen; Kirsten Rechner, Baruth; Jörg und Peter Kruppa, Cornelia Schroeter, Ute Huebscher, Liane Winkler, Sabine Mantel, Cortez Schulz, Andrea Schick, Jürgen Pommerering, Marc Schewe, alle Berlin; Wilfried Düring, Binz; Stefan Krtischil, Birkenwerder; Steffi Löffler, Blankenfelde; Heike Frenzel, Rita Kriehoff, beide Blumberg; Tilman Völzke, Böhlen; Holger Reimann, Böhmlitz-Ehrenberg; Heike Hoffmann, Frank Blinkerei, Brita Hoffmann, alle Boizenburg; Kerstin Quedenfeld, Daniela Bruer, Beate Daul, Monika Bruer, Detlef Krüger, Diana Meiner, alle Bregenstein; Uwe Döll, Heiko Walter, Heike Wiegand, Matthias Beißberger, Claudia Heller, Sandro Endter, alle Breitenungen; Irene Palm, Brieselang; Catrin Zenner, Buttelstedt; Ute Wolf, Burgstädt; Steffen Grütner, Burkau; Uwe Queck, Burkensdorf; Britta Leschka, Buttelstedt; Bernd Bethge, Butzow; Katrin Treue, Calbe; Frank Glotz, Camburg; Christine Pompe, Axel Harnath, Stefan Jakubasch, Royald Lenk, alle Cottbus; Dietmar Berthold, Crimmitschau; Olaf Mattis, Meike Stegmann, beide Dambeck; Thomas Claus, Demitz-Thumitz; Anette Paetzold, Demmin; Ines Fehrmann, Deutschenbora; Thomas Richter, Dietlas; Rainer Nolte, Dagmar Schunck, Annette Hindermann, alle Dingelstädt; Steffen Kanert, Mike Westphal, Carsta Roloff, alle Döbberitz; Helga Loos, Dörfel; Manuela Schwenke, Dohna; Heike Georgi, Heike Taschenberger, Kerstin Hofmann, Frank Moldenhauer, Veronika Enkelmann, Manuela Geisler, alle Deutschenbora; Peer Forberg, Stefan Gärtner, Peter Schreiber, Stefan Edelmann, Asja Nürnberger, Matthias Liebig, Jörg Hempelt, Frank Eiselt, Elmar Hartenstein, Falk Wagner, Antje Kühn, Günter Kühn, Michaela Woelk, Thorsten Nürnberger, Hans-Peter Kulbe, Gerd Schmidt, Cornelia Müller, Uta Reiche, alle Dresden; Reinhard Weißnicht, Siegfried Obst, beide Eberswalde; Martina Beau, Effelder; Petra Albsleben, Eichenbarleben; Birgit Röbber, Kerstin Mans, beide Eisenach; Peter Schlag, Eisenberg; Andre Köbel, Thomas Jagemann, alle Eisenberg; Thomas Pigorsch, Dirk Kuberne, beide Eisleben; Petra Kramer, Elmenhorst; Matthias Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Marlis Patz, Petra Patz, beide Elterwinden; Heiko Blochwitz, Falkenberg; Simone Ötzel, Katrin Sievers, beide Farnbach; Petra Ziemann, Feldberg; Reinhard Walter, Finsterwalde; Karsten Meißner, Forst; Antje Wagner, Kathrin Hoffmann, beide Frankfurt; Elke Jahn, Kathrin Schmieder, beide Freiberg; Cornelia Voigt, Friedeburg; Torsten Siebert, Görnitz; Gesine Beyrich, Greifswald; Klaus Siemoneit, Grimmen; Ute Hennig, Großbröhrendorf; Uwe Ansoerge, Grünhain; Matthias Bauer, Genthin; Urte Conrad, Gielow; Andreas Schulz, Glindow; Torsten Köchy, Gniest; Birgit Reilinger, Britta Pfützer, Gudrun Kirstein, Uwe Rehbein, André Köster, alle Goldberg; Kerstin Schneider, Annette Meckel, beide Goßwitz; Angelika Ceslik, Thomas Silz, beide Gräfenhainichen; Olaf Schmidt, Wilfried Schleinitz, Eckhard Buhrow, alle Greifswald; Heike Möbius, Grimma; Andrea Milke, Großbodungen; Sylke Jager, Groß-Ernsthof; Claudia Müller, Gr.-Leuthen; Grit Möckel, Grünbach; Götz Kluttig, Thomas Burkhardt, beide Guben; Petra Brandstädter, Michael Rohn, beide Güstrow; Annegret Winkler, Gustebin; Anka Nagler, Halberstadt; Volker Kunert, Thomas Reissig, beide Halle; Ralf Grub, Roger Fischl, Günter Schichinsky, Katrin Müller, alle Halle-Neustadt; Thomas Enghardt, Peggy Unger, Jan-Erik Kunze, alle Hammerbrücke; René Geipel, Hartha; Christina Liebe, Gudrun Liebe, beide Hartmannsdorf; Ralf Gruner, Ramona Möckel, beide Hauptmannsgrün; Carmen Schwaab, Christine Hatzky, Silvio Anohle, alle Haynrode; Bärbel Päßler, Heike Wendler, Katrin Ullmann, Frank Eberlein, Heinz Wickner, alle Hermannsdorf; Carola Gresens, Herold; Gerald Jage, Christel Schiewietz, beide Herzberg; Regina

Planer, Hohendorf; Jens Fiebig, Hohnstedt; Harald Krüger, Hohenstein; Cornelia Gillwald, Holzendorf; Anke Rentsch, Horka; Katrin Schulze, Torsten Dietrich, beide Hoyerswerda; Rigobert Hupach, Hüpstedt; Martin Arnold, Ilmenau; Joachim Krummow, Hanjo und Conny Sauermann, alle Joachimsthal; Detlef Henschel, Kamenitz; Norbert Nehrlich, Kandelin; Simona Ritzke, Karbow; Birgit Georgi, Jane Voll, Uwe Seidel, Frank Hübler, Holger Leonhardt, Andreas Niepel, Mike und Ralf Kösser, Claus-Peter Endter, Ralf Buschmann, Christiane Glumann, alle Karl-Marx-Stadt; Manuela Wohlfahrt, Thomas Baer, Dany Eiche, Bernd August, alle Kieselbach; Kathrin Geier, Karin Hempel, Dagmar Mühlmann, alle Kirchberg; Ralf Schüler, Kleinmachnow; Joachim Pankewald, Klein Zetelitz; Susanne Marx, Klepzig; Dirk Schlender, Klosterfelde; Frank Drons, Königs Wusterhausen; Ralf Häntsch, Köthen; Joachim Braun, Koßdorf; Frank Batschon, Krauschwitz; Ramona Werner, Krauthaus; Andrea Ludwig, Kummersdorf; Gunar Schneider, Langenbach; Stefan Kügler, Langenleuba; Grit Heyde, Latdorf; Dirk Eigenwillig, Lauchhammer; Silke Greiner-Vetter, Heidi Krumpholz, beide Lauscha; Barbara Surma, Jens Dettke, Roland Bolze, Sylvio May, Thomas Winkler, Anka Reinecke, Ralf Hertram, Peter Grolle, alle Leinefelde; Annette Zschiesche, Jana Deckbar, Ulrike Haas, Susan Müller, Lutz Lämmer, Holger Rhan, alle Leipzig; Marika Goeckede, Leisnig; Heiko Schinke, Leuna; Andrea Walther, Limbach-Oberfrohna; Heiko Nowarra, Uwe Lautenschläger, beide Lössau; Birgit Arndt, Loitz; Ronald Arndt, Lüblow; Torsten Harnisch, Lützen; Sven Weinkaut, Mammendorf; Antje Zscherpel, Meerane; Matthias Neundorf, Carola Höhn, beide Meiningen; Peter Kürbis, Meißen; Christiane Krause, Menteroda; Rolf Dietzel, Menzengraben; Frank Birnbaum, Beate Besser, beide Merseburg; Marko Badel, Michendorf; Birgit Zabel, Andrea Richter, beide Mühlhausen; Katrin Wilke, Anke Krukenberg, beide Nauendorf; Christine Braun, Naundorf; Anett Jennrich, Heike Meinecke, Beatrice Pätz, Anne-Kathrin Pätz, alle Neuenhofe; Fred Hückstädt, Petra Ahrens, beide Neukloster; Ronny Förster, Neumark; Thomas Lange, Winfried Solf, beide Neustadt; Hans-Dieter Büchler, alle Neustadt; Gabi Strätz, Neustrelitz; Thomas Kunz, Nossen; Jens Horn, Michael Döll, beide Oberschöna; Rolf Bittig, Oschatz; Petra Kirchner, Thomas Kelch, beide Pöschim; Dieter, Jörg und Uwe Vogel, alle Petschowitz; Uwe Schulze, Pirna; Ingrid Becker, Annette Hergert, Andrea Sesselmann, alle Plauen; Sabine Kernbach, Pöbbeck; Ralph Lorenz, Poggendorf; Petra Baldauf, Anne Klausnitzer, Ines Freyholdt, Rainer Rätke, Sigurd Assing, Georg Schreckenbach, Karsten Milek, Michael Hänsch, Thomas Schreckenbach, alle Potsdam; Jens Uhlemann, Prausnitz; Sigrid Planke, Tim Planke, beide Premnitz; Katrin Arnold, Radebeul; Lutz Hübschmann, Simone Lein, beide Raschau; Thurald Meinel, Raßnitz; Birgit Richter, Reuden; Christiane Smykalla, Ribnitz; Ina und Manfred Hille, Steffen Andrich, alle Riesa; Frank und Uwe Holubek, beide Rietzen; Thomas Rühlemann, Beate Walke, beide Röbel; Gertrud Rudisch, Roitzsch; Lutz Otto, Heiko Baubel, Ellen Fuß, Silke Bieleit, Christine Pfaff, alle Roßdorf; Matthias Neundorf, Roßlau; Jürgen Träger, Roßleben; Bernd Schentschischin, Christiane Woitke, Klaus Viebrandt, Anett Müller, Hans Nitschke, Anett Becker, Sabine Heinze, Sylke Giese, alle Rostock; Steffi Lehmann, Heike Grosser, Yvonne Löser, alle Rothschönberg; Cathrin Ballmann, Birgit Quinke, beide Rotta; Anke Benecke, Sachau; Frank Richter, Schkölen; Sigrid Schröter, Martina Rühl, beide Schladditz; Ronald Fabian, Schleife; Gabi Rem, Sonja Gramann, Antje Poerschle, Brita Brettschneider, Beate Rym, Mathias Brandt, Steffen Abicht, Heike Wittmann, Detlef Christ, Sylvia Luck, Petra Viereck, Silke Kaus, Erike Peter, Gabi Kirchner,

Ute Morgenroth, alle Schmalkalden; Markus Wolf, Schönbach; Edgar Lüder, Schönbach; Gabriele Müller, Schönbach; Gunnar Jeschke, Schwarzhede; Dettlef Wassermann, Schweinitz; Ralf Bekkert, Schwerin; Heike Menk, Seehausen; Jens Gläßer, Seiffen; Michael Hruschka, Seiffen; Daniela Ziegert, Sondershausen; Jens Recknagel, Veiko Recknagel, Stefan Schüler, Christoph Nothnagel, Yvonne Recknagel, Anka Wilhelm, Karin Lehmann, Kathrin Röder, Silke Köllmann, André Bartsch, Matthias Baumann, Frank Häfner, Matthias Holland-Nell, Friedo Lohse, Claudia Häfner, Latrin Heim, Astrid Keller, Christine Mangold, Jens Pfannschmidt, Veiko Zeiß, Sabine Artschwager, Ines Baumeister, Martina Büchner, Heike Häfner, Evi König, Beate König, Kerstin Holland-Letz, Sabine Holland-Letz, Andreas König, Evelin Pfannschmidt, Andrea Hoffmann, alle Steinbach-Hallenberg; Ralf Wunderlich, Steinsdorf; Torsten Roeger, Stendal; Thomas Merten, Stralsund; Kerstin Gundlach, Stralsund; Katrin Rosenberger, Suhl; Susanne Kühnert, Tangerhütte; Klaus Pfeiffer, Taubach; Uwe Köhler, Thomas Köhler, beide Taura; Antje Wulf, Constanze Gasch, Holger Nörenberg, alle Teltow; Lars Herrmann, Töplitz; Heike Walter, Torgelow; Kathrin Scheibe, Trebitz; Ralf Reinhold, Katrin Gruschwitz, Andrea Geier, alle Unterheinsdorf; Corina Walter, Uthausen; Holger Schick, Ronald Kallenbach, Heidrun Kallenbach, alle Vacha; Annette Schiller, Katrin Badeke, beide Wallwitz; Ralf Dittmar, Kerstin Anschütz, beide Waren; Petra Ackermann, Wasungen; Bettina Lüttich, Weimar; Ute Hausmann, Christiane Hotze, beide Weißenborn; Holger Meinhard, Weißenfels; Birgit Schmidt, Steffen Rüger, beide Weißwasser; Manfred Petzelis, Wendisch-Rietz; Carola Schauseil, Jörg Goldammer, Gunda Görlich, alle Wesenberg; Frank Schöne, Matthias Scharf, Ralf Breda, Dirk Hilbrecht, Ingo Förster, Almuth Nehring, alle Wiehe; Carmen Rauscher, Wilkau-Haßlau; Wolfgang Kähler, Wismar; Berrit Richter, Wittenberg; Christel Hartig, Wodorf; Ellen Raeck, Wolmirstedt; Rolf Heubner, Wolfen; Uwe Eix, Steffen Klimpel, beide Wolgast; Claudia Groh, Wüstenbrand; Jörg Meißner, Zeißholz; Karl und Jochen Oertel, Zeitz; Uwe Müller, Zeulenroda; Hella Paelchen, Andrea Garske, beide Ziesar; Kerstin Wünsche, Cornelia Lorenz, Katrin Böhme, Claudia Hampel, Jörg Rothe, Michael Mönch, Karsten Amthor, Ingrid Soblik, Olaf Kretschmar, alle Zittau; Norbert Welzel, Zschornowitz; Norbert Schlosser, Uta Escher, beide Zwickau; Achim Saft, Sigurd Heller, Ralph Töpfer, Iris Krech, alle Bad Liebenstein; Freddy Dallmann, Coswig; Ulf Riechen, Dresden; Andreas Kerdas, Köthen; Antje Schlosser, Klingenthal; Uwe Schulze, Pirna; Jens Balbuweit, Sondershausen.

10. Internationale Chemie-Olympiade

Warschau: Eine Goldmedaille für die DDR erkämpfte Michael Handschuh aus Dessau bei der 10. Internationalen Chemie-Olympiade von Schülern der allgemeinbildenden Ober- und Mittelschulen in Toruń. Die Jury erkannte ihm in der Gesamtwertung des unter UNESCO-Patronat stehenden Wettbewerbs den 2. Platz zu. Sieger des am 10. Juli beendeten Wettstreits in der Toruñer Nicolaus-Kopernikus-Universität, an dem Mannschaften aus 12 europäischen Ländern mit jeweils vier Schülern teilnahmen, wurde Andrej Wedernikow (UdSSR).

Lösungen



Lösungen zu den Aufgaben 4 und 5 der Olympiadeaufgaben aus der SR Vietnam:

▲ 4 ▲ Wegen $a \leq a_k$ gilt $a_k - a \geq 0$, wegen $a_k \leq b$ gilt $a_k - b \leq 0$, also $(a_k - a)(a_k - b) \leq 0$. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a)(a_k - b) \leq 0,$$

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 - (a+b) \sum_{k=1}^n a_k + nab \leq 0,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 - (a+b) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k + ab \leq 0,$$

$$m_2 - (a+b)m_1 + ab \leq 0,$$

$$ab + m_2 \leq (a+b)m_1.$$

Wegen $ab + m_2 > 0$ und $(a+b)m_1 > 0$ folgt weiter

$$(ab + m_2)^2 \leq (a+b)^2 m_1^2, \text{ also}$$

$$(ab + m_2)^2 - (ab - m_2)^2 \leq (a+b)^2 m_1^2,$$

$$4abm_2 \leq (a+b)^2 m_1^2,$$

$$m_2 \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} m_1^2, \text{ w. z. b. w.}$$

▲ 5 ▲ Ist $x = \tan u$ mit $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $|u| < \frac{\pi}{6}$, so gilt

$$\tan 3u = \tan(2u + u) = \frac{\tan 2u + \tan u}{1 - \tan 2u \tan u}$$

$$= \frac{\frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} + \tan u}{1 - \frac{2 \tan^2 u}{1 - \tan^2 u}} = \frac{3 \tan u - \tan^3 u}{1 - 3 \tan^2 u}$$

$$= \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$$

Es liegt daher nahe,

$$x = \tan u, y = \tan v, z = \tan w$$

$$\text{mit } |u| < \frac{\pi}{6}, |v| < \frac{\pi}{6}, |w| < \frac{\pi}{6}$$

zu setzen und zu beweisen, daß

$$\tan 3u + \tan 3v + \tan 3w = \tan 3u \tan 3v \tan 3w$$

gilt, wenn $x + y + z = xyz$ ist.

Nun gilt für alle u, v, w , für die (5) erfüllt ist,

$$\tan(u + v + w) = \frac{\tan(u + v) + \tan w}{1 - \tan(u + v) \tan w}$$

$$= \frac{\frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} + \tan w}{1 - \frac{(\tan u + \tan v) \tan w}{1 - \tan u \tan v}}$$

$$= \frac{\tan u + \tan v + \tan w - \tan u \tan v \tan w}{1 - \tan u \tan v - \tan u \tan w - \tan v \tan w}$$

$$= \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}$$

Wegen (1) ist

$$x + y + z - xyz = 0 \quad \text{und wegen (2)}$$

$$1 - xy - yz - xz > 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0;$$

daraus folgt wegen (7)

$$\tan(u + v + w) = 0. \quad (8)$$

Da wegen (5) $|u + v + w| < \frac{\pi}{2}$ ist, folgt $u + v + w = 0$ und daher $3u + 3v + 3w = 0$, also auch

$$\tan(3u + 3v + 3w) = 0. \quad (9)$$

Andererseits gilt wegen (7)

$$\tan(3u + 3v + 3w) = \frac{\tan 3u + \tan 3v + \tan 3w - \tan 3u \tan 3v \tan 3w}{1 - \tan 3u \tan 3v - \tan 3u \tan 3w - \tan 3v \tan 3w}$$

also wegen (9)

$$\tan 3u + \tan 3v + \tan 3w = \tan 3u \tan 3v \tan 3w,$$

womit die Richtigkeit der Gleichung (6) und damit auch der Gleichung (3) bewiesen ist.

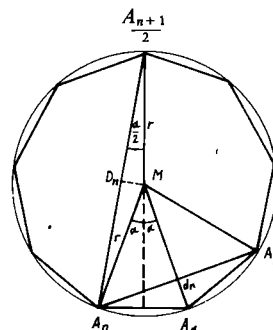
$$\text{▲ 6 ▲ } S = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18}$$

$$= Z_1^3 + Z_2^3 + Z_3^3$$

$$= 9[9^2 - 3 \cdot 11] + 3 \cdot \frac{1}{3} = 9 \cdot 48 + 1$$

$$= 433.$$

▲ 7 ▲ Es gibt nur ein regelmäßiges n -Eck, für das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich das regelmäßige 9-Eck.



Ausführliche Lösungen zu Aufg. 6 und 7 siehe Heft 3/79.

Lösungen zu: Lineare Optimierungen

$$1. x \geq 1; 2. x \leq \frac{2}{3}; 3. x \in [-1, 2]; 4. x = 2;$$

$$5. \text{ Viereck mit den Eckpunkten } (0; 3),$$

$$(6; 3), (4; 5), (2; 6); 6. L = \emptyset;$$

$$7. \text{ Sechseck mit den Eckpunkten } (2; 2),$$

$$(4; 1), (8; 3), (7; 5), (6; 6), (3; 5);$$

$$8. P_{\min}(4; 4), z_{\min} = 24; P_{\max}(8; 20),$$

$$z_{\max} = 96; 9. P_{\min}(5; 5), z_{\min} = 105,$$

$$x_3 = 70, (x_1, x_2, x_3)_{\min} = (5; 5; 70);$$

$$P_{\max}(15; 25), z_{\max} = 155, x_3 = 0,$$

$$(x_1, x_2, x_3)_{\max} = (15; 25; 0).$$

Lösungen zu: Drunter und drüber

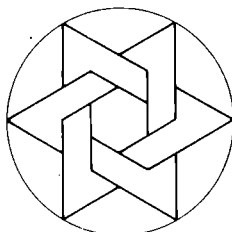
▲ 1 ▲ Da das Dreieck $A_7 I_7 P$ gleichschenkelig ist, gilt: $\overline{A_7 I_7} = \overline{I_7 P}$. Aus dem Quadrat $A_2 A_4 A_6 A_8$ sieht man, daß $\overline{A_8 I_7} = \overline{I_7 M}$.

Daraus folgt:

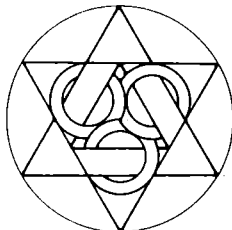
$$\frac{d}{2} = \overline{M A_7} = \overline{I_7 M} + \overline{A_7 I_7} = \overline{A_8 I_7} + \overline{I_7 P} = \overline{A_8 P}.$$

Einfacher erkennt man die Gleichheit durch eine Drehung von $A_8 I_7$ um I_7 .

▲2▲

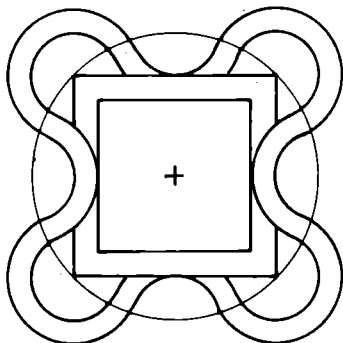


▲3▲



▲4▲ In die Grundfigur werden acht Kreise mit dem Radius $r = \overline{A_k I_k}$, deren Mittelpunkte A_k ($k = 1, \dots, 8$) sind, eingezeichnet. Sie stellen die Innenkreise dar. Der Radius der dazugehörigen Außenkreise ergibt sich durch Verbindung zweier benachbarter Punkte A_k und A_{k+1} ($k = 1, \dots, 7$) als Abstand von A_k zum Innenkreis um A_{k+1} . Danach verbindet man die sich überschneidenden Kreistrümpfe parallel zu den Verbindungsgeraden der Mittelpunkte.

▲5▲



Lösungen zum Kryptogramm:

Flocke + Flocke = Schnee, Heft 6/78

$$\begin{aligned} 218\,350 + 218\,350 &= 436\,700 \\ 219\,350 + 219\,350 &= 438\,700 \\ 416\,350 + 416\,350 &= 832\,700 \\ 481\,650 + 481\,650 &= 963\,300 \end{aligned}$$

Lösungen zu: Kryptarithmetik

Heft 6/78, S. 123

$$\begin{aligned} 6 \cdot 1035 &= 6210; 6 \cdot 7539 = 45234; \\ 4 \cdot 1329 &= 5316; 4 \cdot 1302 = 5208; \\ 6 \cdot 1063 &= 6378 \end{aligned}$$

Lösungen zu: 10 Jahre Jugendobjekt

Klub Junger Mathematiker Dresden, Heft 6/78

▲1▲ Grundbereich der Variablen sei die Menge der natürlichen Zahlen.

1. Wenn $a = 1$, so lautet das Ergebnis der Berechnung des Terms 8.
2. $2a = 2b$, wenn $a = b$; z. B. $a = 3, b = 3$.
3. $y = 0$, x beliebig
4. $x = 7$

5. $4a < 7a + 7b$ ist eine wahre Aussage, wenn $a = 1, b = 2$.

6. Wenn $a = 1, b = 0$, so lautet das Ergebnis der Berechnung des Terms 3.

7. Ergebnis 84

8. $11 = 13$ ist eine falsche Aussage.

▲2▲ 1 2 3 4 5 6

AFA A AFA AF
- W F - F -

▲3▲ Die Negationen der Aussagen lauten:

1. 29 ist keine Primzahl.
2. 5 ist nicht größer als 9.
3. Nicht alle durch 10 teilbaren Zahlen sind gerade.
4. Es gibt keine rechtwinkligen Dreiecke.
5. $25 + 31 \neq 65$

1 2 3 4 5

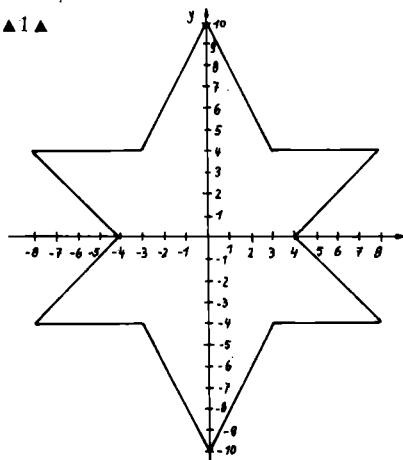
Aussage W F W W F
Negation F W F F W

▲4▲

A	AF	Bemerkungen
e/a/	WW er/n	
ex	er	
1. e	F	
2.	er	für $a = 0$
3. ex	W	
4. ex	W	für $m = 0$
5. a	W	
6.	er	allgemeingültig
7.	er	für $t < 2$
8. ex	W	
9. e	F	
10. ex	F	$x = 0$ und $x = 2$ erfüllen die Gleichung $x + x = x \cdot x$
11. a	W	

Lösungen zu: Winterliche Knocheien, Heft 6/78

▲1▲

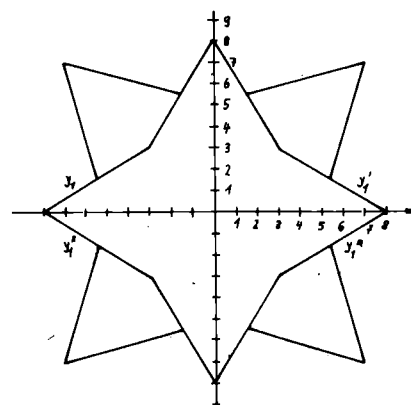


▲2▲

Spiegeln an der y -Achse bedeutet in den Formeln x durch $-x$ zu ersetzen und y zu belassen. Die gespiegelten Funktionen sind also

$$y_1' = -\frac{3}{5}(x-8) \quad \text{für } 3 \leq x \leq 8$$

$$y_2' = -\frac{5}{3}x - 8 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3$$



$$y_3' = \frac{11}{3}(x-7) + 7 \quad \text{für } \frac{11}{2} \leq x \leq 7$$

$$y_4' = \frac{3}{11}(x-7) + 7 \quad \text{für } \frac{3}{2} \leq x \leq 7.$$

Eine Spiegelung an der x -Achse heißt, in den Formeln y durch $-y$ zu ersetzen und x zu lassen. Wir erhalten als Spiegelbilder der Funktionen y_i bzw. y_i' ($i = 1, 2, 3, 4$) die Funktionen y_i'' bzw. y_i''' :

$$y_1'' = -\frac{3}{5}(x+8) \quad \text{für } -8 \leq x \leq 3,$$

$$y_2'' = -\frac{5}{3}x + 8 \quad \text{für } -3 \leq x \leq 0,$$

$$y_3'' = \frac{11}{3}(x+7) + 7 \quad \text{für } -7 \leq x \leq -\frac{11}{2},$$

$$y_4'' = \frac{3}{11}(x+7) + 7 \quad \text{für } -7 \leq x \leq -\frac{3}{2},$$

$$y_1''' = -\frac{3}{5}(x-8) \quad \text{für } 3 \leq x \leq 8,$$

$$y_2''' = -\frac{5}{3}x + 8 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3,$$

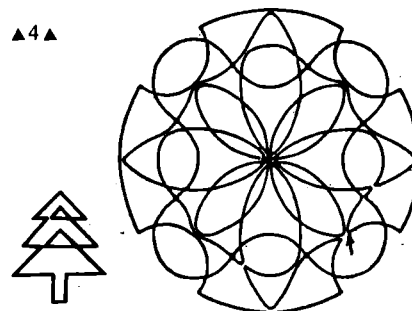
$$y_3''' = -\frac{11}{3}(x-7) - 7 \quad \text{für } \frac{11}{2} \leq x \leq 7,$$

$$y_4''' = -\frac{3}{11}(x-7) - 7 \quad \text{für } \frac{3}{2} \leq x \leq 7.$$

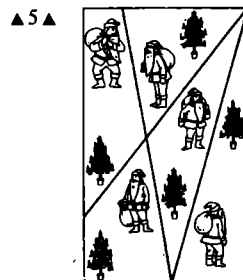
▲3▲ Vom Autor gefundene Lösungen:

$$\begin{aligned} 218\,350 + 218\,350 &= 436\,700; \\ 219\,350 + 219\,350 &= 438\,700; \\ 416\,350 + 416\,350 &= 832\,700 \end{aligned}$$

▲4▲



▲5▲





XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufg. 5/6, DDR-Ausscheid:

5. Um zu zeigen, daß der Term (1) eine reelle Zahl definiert, benutzt man, daß die Funktion $\lg x$ für alle $x > 0$ reelle Werte annimmt, und daß $\lg x = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 1$ ist. Daher reicht es, die Ungleichungen $5\sqrt{2} - 7 > 0$, $3 - 2\sqrt{2} > 0$, $3 - 2\sqrt{2} \neq 1$ (2)

zu beweisen, etwa so:

$$50 > 49 \rightarrow \sqrt{50} > \sqrt{49} \rightarrow 5\sqrt{2} - 7 > 0$$

$$9 > 8 \rightarrow \sqrt{9} > \sqrt{8} \rightarrow 3 - 2\sqrt{2} > 0.$$

Wäre $3 - 2\sqrt{2} = 1$, so wäre $\sqrt{2} = 1$ oder $2 = 1$.

Um nun zu zeigen, daß (1) sogar rational ist, stellten die meisten Schüler fest, daß

$$5\sqrt{2} - 7 = (\sqrt{2} - 1)^3$$

$$3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

bzw. $(5\sqrt{2} - 7)^2 = (3 - 2\sqrt{2})^3$ gilt. (4)

Benutzt man z. B. (4), so erhält man

$$\lg(5\sqrt{2} - 7) = \lg[(3 - 2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}]$$

$$\lg(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{\lg(3 - 2\sqrt{2})}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \lg(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}$$

Das Kürzen der Logarithmen ist nach (2)

erlaubt. Da $\frac{3}{2}$ eine rationale Zahl ist, ist alles gezeigt.

Eine etwas andere Möglichkeit für diesen Beweis ist, zunächst die Annahme zu machen, daß zwei ganze Zahlen p , q ($q \neq 0$) existieren, mit denen

$$\lg(5\sqrt{2} - 7) = \frac{p}{q}$$

$$\lg(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{p}{4}$$

Hieraus folgt

$$q \cdot \lg(5\sqrt{2} - 7) = p \cdot \lg(3 - 2\sqrt{2})$$

$$\lg(5\sqrt{2} - 7)^q = \lg(3 - 2\sqrt{2})^p.$$

Damit erhält man

$$(5\sqrt{2} - 7)^q = (3 - 2\sqrt{2})^p. \quad (7)$$

Zur Begründung für diesen Schritt kann z. B. die strenge Monotonie der Funktion $\lg x$ ($x > 0$) oder die nach (2) erlaubte Umformung von (6) in

$$\lg \left[\frac{(5\sqrt{2} - 7)^q}{(3 - 2\sqrt{2})^p} \right] = 0$$

herangezogen werden, wenn jetzt die bereits genannte Tatsache benutzt wird, daß $\lg x = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 1$ ist. Durch Probieren (vgl. (3), (4)) findet man, daß $p = 3$, $q = 2$ in (7) möglich ist. Durch Logarithmieren der so entstehenden Beziehung (4) ergibt sich, daß tatsächlich

$$\lg(5\sqrt{2} - 7) = \frac{3}{2} \cdot \lg(3 - 2\sqrt{2})$$

Damit ist wieder alles gezeigt.

Bemerkungen: Die Bewertung der Lösungen zeigt, daß die Aufgabe als für die 4. Stufe der Olympiade sehr leicht einzustufen ist:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	5	9	10	4	6	22	37

Nur zwei Schüler unternahmen keinen Lösungsversuch. Ursachen für Punktabzüge waren oft nur Fehlen oder Unvollständigkeit des Beweises von (2) und mangelhafte Begründung einzelner Schritte, z. B. von (6) nach (7).

Dipl.-Math. G. Seifert,

Zentralinstitut für Math. und Mechanik der Akademie d. Wissenschaften der DDR

6. Angenommen, es gibt eine Lösung (x, y) , dann folgt mit

$$z = x + y \text{ aus (1)} \quad (3)$$

$$xy = 2 + 3\sqrt{2} - z \text{ bzw. mit} \quad (4)$$

$$z^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ aus (2)} \quad (5)$$

$$z^2 - 2xy = 6. \quad (5)$$

Aus (4) und (5) ergibt sich für z eine quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z - 10 - 6\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen

$$z_1 = 2 + \sqrt{2} \quad (6)$$

$$z_2 = -4 - \sqrt{2}. \quad (7)$$

Setzt man nun (6) bzw. (7) in (3) und (4) ein, so erhält man die folgenden Gleichungssysteme

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 2 + \sqrt{2} \\ xy &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} (6')$$

$$\left. \begin{aligned} x + y &= -4 - \sqrt{2} \\ xy &= 6 + 4\sqrt{2} \end{aligned} \right\} (7')$$

In beiden kann man nach dem Einsetzungsverfahren etwa y eliminieren und erhält eine quadratische Gleichung für x . Diese hat im Falle (7') keine reellen Lösungen und im Falle (6') die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Die zugehörigen y -Werte sind $y_1 = \sqrt{2}$ und $y_2 = 2$. Hat das Gleichungssystem (1), (2) Lösungen, so können das höchstens $(2, \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, 2)$ sein. Wie man durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt, sind dies tatsächlich Lösungen.

Bemerkungen: Die hier angegebene Lösung mittels einer Substitution (3) wurde im Prinzip von etwa einem Drittel der Schüler gewählt. Wiederum ein Drittel der Schüler wählte das Einsetzungsverfahren. Dieses führt auf eine Gleichung 4. Grades. Durch Ablesen von Lösungen und Polynomdivision fanden die Schüler auch auf diesem Wege meistens zum Ziel.

Die restlichen Schüler fanden zwar meist noch die Lösungen, konnten aber nicht exakt zeigen, daß diese Lösungen die einzigen sind. Insgesamt war das Ergebnis bei dieser, einer 4. Stufe angemessenen Aufgabe gut.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	8	7	7	20	7	5	8	31

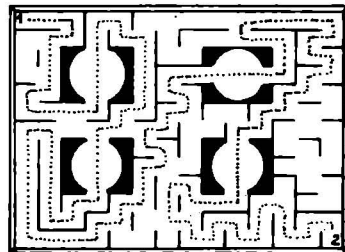
Dr. H.-J. Sprengel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht“, Potsdam

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“, Heft 10/78, veröffentlicht.

Lösungen zu: Labyrinth, Heft 6/78:



Eisbude, Geisterbahn, Luftschaukel, Karussell.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/78

Ma 5 ■ 1766 Die Anzahl der Antwortkarten muß durch 12 teilbar sein; deshalb gilt $20 < 12 \cdot n < 30$, also $n = 2$. Der Schüler erhielt somit 24 Antwortkarten. Das Prädikat „Sehr gut gelöst“ trugen $24 : 12 = 2$ Karten, das Prädikat „Gut gelöst“ hatten $24 : 2 = 12$ Karten, das Prädikat „Gelöst“ hatten $24 : 6 = 4$ Karten. Genau $24 - 2 - 12 - 4 = 6$ Karten trugen den Vermerk „Nicht gelöst“.

Ma 5 ■ 1767 Angenommen, in dieser Gemeinde gab es am dritten Tag nach Eröffnung der Bibliothek $2 \cdot n$ Leser; dann haben n Leser je ein Buch und n Leser je zwei Bücher ausgeliehen.

Somit haben $2 \cdot n$ Leser jeweils 3 Bücher ausgeliehen. Insgesamt waren $360 - 360 : 3 = 360 - 120 = 240$ Bücher ausgeliehen.

Deshalb gilt

$$3 \cdot 2n = 240, \\ 2n = 80.$$

Am dritten Tag nach Eröffnung der Bibliothek gab es in dieser Gemeinde bereits 80 Leser.

Ma 5 ■ 1768 Da Petra und Frank im Jahre 1976 zusammen 28 Jahre, Birgit und Frank zusammen 26 Jahre alt waren, muß Birgit 2 Jahre jünger sein als Petra. Da Petra und Birgit zusammen 32 Jahre alt waren und Birgit 2 Jahre jünger ist als Petra, war Birgit $(32 - 2) : 2 = 15$ Jahre alt. Somit war Petra 17 Jahre und Frank 11 Jahre alt.

Ma 5 ■ 1769 Angenommen, Hans ist gegenwärtig n Jahre alt; dann ist sein Freund Peter $(n + 6)$ Jahre alt, der Vater von Peter ist somit $(2n + 6)$ Jahre alt. Nun gilt

$$n + (n + 6) + (2n + 6) = 76, \\ 4n + 12 = 76, \\ 4n = 64, \\ n = 16.$$

Hans ist gegenwärtig 16, Peter 22, der Vater von Hans 38 Jahre alt.

Ma 5 ■ 1770 Die Anzahl der Briefmarken muß sowohl durch 3 als auch durch 4 und somit durch 12 teilbar sein. Zwischen 450 und 460 ist nur die Zahl 456 = $12 \cdot 38$ durch 12 teilbar. Somit besitzt Ulrike gegenwärtig 456 Briefmarken. Aus $456 - \frac{456}{3} - \frac{456}{4} = 456 - 152 - 114 = 190$ folgt, daß 190 Marken zum Tauschen vorgesehen sind.

Ma 5 ■ 1771 Aus $(81 - 2 - 2 + 1) : 3 = 78 : 3 = 26$ und $26 : 2 = 13$ folgt, daß jeder dieser drei Klassen 13 Jungen angehören.

Klasse Jungen Mädchen Schüler

5a	13	15	28
5b	13	15	28
5c	13	12	25

Ma 6 ■ 1772 Die zweistellige natürliche Zahl läßt sich in der Form $10a + b$ darstellen; ihre Quersumme beträgt $a + b$.

Nun gilt

$$[(10a + b) + (a + b)] \cdot 5 = 150, \\ (11a + 2b) \cdot 5 = 150, \\ 11a + 2b = 30, \\ 11a = 30 - 2b, \\ 11a = 2 \cdot (15 - b).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung muß wegen $11 \cdot a$ ebenfalls durch 11 teilbar sein. Wegen $0 \leq b \leq 9$ trifft das nur für $b = 4$ zu. Somit gilt $11a = 2 \cdot 11$, also $a = 2$. Die Zahl lautet 24.

Ma 6 ■ 1773 Angenommen, den Klassen 6a und 6b gehören zusammen n Schüler an; dann gilt

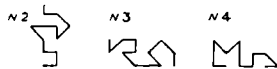
$$\frac{n}{8} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + 3 = n, \\ \frac{3n}{24} + \frac{8n}{24} + \frac{12n}{24} + \frac{72}{24} = \frac{24n}{24}, \\ 23n + 72 = 24n, \\ n = 72.$$

Aus $72 - 2 = 70$ und $70 : 2 = 35$ folgt, daß der Klasse 6a genau 37 Schüler, der Klasse 6b genau 35 Schüler angehören.

Lösungen zu alpha-heiter, Heft 1/79

Psychologischer Test

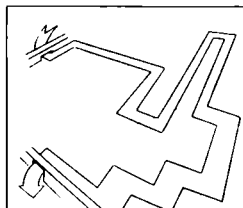
Umkehrungen



Unterhaltsames
Legespiel



Wer findet den Weg?



Kleinschachbrett 5 x 5

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

0	3	2	3	2
3	4	1	2	3
2	1	4	3	2
3	2	3	2	3
2	3	2	3	4

Studentenhobbys

Mischa ist Gewichtheber und lernt tanzen. Tisha spielt Fußball und stickt als Hobby. Grisca boxt und lernt Kunstpfeifen, und Eduard spielt Schach und singt im Chor.

Silbenrätsel

1. Gerade, 2. Rotation, 3. Definition,
4. Monat, 5. Descartes,
6. Datenverarbeitung;
7. Monotonie – Geronimo Cardano

Ein Rechentrick

Die drei frei gewählten Zahlen bezeichnen wir mit a , b und c und führen die verlangten Additionen algebraisch durch.

a	b	c
$a +$	$b +$	c (Summe der 3 Zahlen)
$a +$	$2b +$	$2c$ (Summe der letzten 2a +
$2a +$	$3b +$	$4c$ 3 Zahlen) usw.
$4a +$	$6b +$	$7c$
$7a +$	$11b +$	$13c$

$16a + 24b + 28c$ (Summe aller 8 Zahlen)

Das Ergebnis ist das Vierfache der 7. Zahl:

$$16a + 24b + 28c = 4 \cdot (4a + 6b + 7c).$$

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 1661 Eine sechsstellige natürliche Zahl beginnt mit der Ziffer 2. Streicht man diese Ziffer und hängt man sie hinter den verbleibenden fünf Ziffern an, so erhält man eine Zahl, die dreimal so groß ist wie die ursprüngliche Zahl. Um welche Zahl handelt es sich?

Im Heft 1/1978 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Die gesuchte sechsstellige natürliche Zahl läßt sich in der Form $z_1 = 2 \cdot 100000 + x = 200000 + x$ darstellen. Die Zahl z_2 hat dann die Form $z_2 = 10x + 2$, und es gilt $3 \cdot z_1 = z_2$. Wir erhalten somit folgende Gleichung:

$$3 \cdot (200000 + x) = 10x + 2, \\ 600000 + 3x = 10x + 2, \\ 7x = 599998, \\ x = 85714.$$

Die ursprüngliche Zahl lautet somit

$$z_1 = 200000 + 85714 = 285714.$$

$$\text{Probe: } z_2 = 857142 = 3 \cdot 285714.$$

Wir stellen nun die Lösung von Silvia Schneider aus Goldberg vor, die jetzt Schülerin der Klasse 8a der John-Brinckmann-Oberschule ist. Silvia löste diese Aufgabe wie folgt: Die gesuchte Zahl läßt sich darstellen durch $2xyzvw = 2 \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + v \cdot 10 + w$.

Die durch Streichen der Ziffer 2 und durch Anhängen erhaltene Zahl läßt sich darstellen durch

$$xyzvw2 = x \cdot 10^5 + y \cdot 10^4 + z \cdot 10^3 + v \cdot 10^2 + w \cdot 10 + 2.$$

Nun gilt

$$3(2 \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + v \cdot 10 + w) = x \cdot 10^5 + y \cdot 10^4 + z \cdot 10^3 + v \cdot 10^2 + w \cdot 10 + 2,$$

$$600000 + 30000x + 3000y + 300z + 30v + 3w = 100000x + 10000y + 1000z + 100v + 10w + 2,$$

$$70000x + 7000y + 700z + 70v + 7w = 599998, \\ 10000x + 1000y + 100z + 10v + w = 85714.$$

Daraus folgt, daß die gesuchte Zahl 285714 heißt.

Wir stellen nun die Lösung von Götz Kluttig aus Wilhelm-Pieck-Stadt Guben vor, der jetzt Schüler der Klasse 8b der Pestalozzi-Oberschule ist. Götz geht bei der Lösung der Aufgabe schrittweise vor:

Es seien $z_1 = \overline{2xyzab}$ und $z_2 = \overline{xyzab2}$, und es gilt $3 \cdot \overline{2xyzab} = \overline{xyzab2}$ mit $1 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y, z, a, b \leq 9$.

Das Produkt $3 \cdot b$ endet auf die Ziffer 2; deshalb gilt $b = 4$.

Das Produkt $3 \cdot a$ endet auf die Ziffer $b - 1 = 4 - 1 = 3$; deshalb gilt $a = 1$.

Das Produkt $3 \cdot z$ endet auf die Ziffer 1; deshalb gilt $z = 7$.

Das Produkt $3 \cdot y$ endet auf die Ziffer $z - 2 = 7 - 2 = 5$; deshalb gilt $y = 5$.

Das Produkt $3 \cdot x$ endet auf die Ziffer $y - 1 = 5 - 1 = 4$; deshalb gilt $x = 8$.

Es handelt sich somit um die Zahl 285714.

Wissen wo

Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1978

Heft 1

- 1 Das arithmetisch-geometrische Mittel, Teil I (H. Pieper)
- 3 Das macht Pythagoras verlegen, Teil 2 (E. Schröder)
- 6 Zwei Aufgaben aus der mathematischen Fernolympiade 1976 – Mongolische Volksrepublik (P. Altanzog/R. Lüders)
- 7 Niels Henrik Abel – Porträt eines Mathematikers (H. Pieper)
- 8 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (Autorenkollektiv)
- 11 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen
- 11 Eine Aufgabe von Leninpreisträger Wladimir Boltjanski, Moskau
- 12 Berufsbild: Facharbeiter für Eisenbahntechnik (G. Klemm/R. Wiegand)
- 13 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt: AG Mathematik Strausberg – Talentsuche Mathematik im Bezirk Neubrandenburg
- 14 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 16 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der Kreisolympiade
- 18 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – Der richtige Dreh ist zu finden! (H. Reichenbach)
- 18 Lösungen
- 23 *alpha*-Wettbewerb – Abzeichen in Gold
- III. U.-Seite: Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1977
- IV. U.-Seite: Gut gedacht ist halb gelöst (J. Lehmann/E. Quaisser)

Heft 2

- 25 Eigenschaften von Verknüpfungen, Teil I (J. Lehmann)
- 27 Das arithmetisch-geometrische Mittel, Teil 2 (H. Pieper)
- 30 Studenten technischer und ökonomischer Fachrichtungen im Wettstreit – DDR-Studentenkonferenz „Mathematik und Praxis“ in Leipzig
- 31 Vier Aufgaben aus Moskau (A. Halameisár/R. Lüders)
- 31 Eine Aufgabe von Sh. B. Linkowski, Moskau
- 32 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
- 35 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen
- 36 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – Ein bewegliches Mühlespiel (H. George/G. Maiwald) – 1–2–3 Logelei (aus der ungarischen Zeitschrift *Füles*)
- 37 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Wendt, Güstrow
- 38 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 40 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der Bezirksolympiade
- 42 Lösungen
- 47 Leser fragen – *alpha* antwortet zu einem zahlentheoretischen Problem (R. Lüders)
- 48 $1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 = (1 + 9 \cdot 7 - 8) (1 + 9 + 7 - 8)$ – Kryptarithmetik von *alpha*-Lesern
- III. U.-Seite: Bücher aus dem BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig
- IV. U.-Seite: Gauß und die technische Revolution (R. Thiele)

Heft 3

- 49 Über Punktspiegelungen in der euklidischen Ebene (E. Böhne)
- 52 Eine Prüfungsfrage (W. Moldenhauer)
- 53 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt – Mathematischer Schülerwettbewerb im Kreis Delitzsch
- 54 Schulolympiaden in der Sowjetunion (L. Dimenstein/Th. Scholl)
- 56 Pendel und Erdbeschleunigung (W. Träger)
- 57 Seltsame Produkte (F. Dušek)
- 58 Eigenschaften von Verknüpfungen, Teil 2 (J. Lehmann)
- 59 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Molnár, Budapest
- 60 Ein Stück Wissenschaftsgeschichte – Mathematik im alten Indien (H. K. Singh)
- I. bis VIII.: XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Lösungen zu den Aufgaben der Kreis- und Bezirksolympiade

- 61 *alpha*-Spielmagazin: Würfeleien (J. Lehmann)
- 63 Preisträger der XVII. OJM, DDR-Olympiade
- 64 Ein Blick in die Praxis – Aufgaben aus dem VEB Maschinen- und Apparatebau Grimma (Autorenkollektiv)
- 66 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 68 Lösungen
- III. U.-Seite: Bücher aus der Ungarischen Volksrepublik (in deutscher Sprache)
- IV. U.-Seite: Bücher aus Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin

Heft 4

- 73 Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebespielen (J. Flachsmeyer)
- 76 Eine Aufgabe von Prof. Dr. K. R. Biermann, Berlin
- 77 Wir konstruieren unendlich viele irrationale Punkte (G. Vetter)
- 80 Ein rationalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen, Teil 1 (F. Franke)
- 82 Gute Grundkenntnisse gefragt (Autorenkollektiv der M.-Luther-Universität, Halle)
- 84 XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der Schulolympiade
- 87 Zahlenzauber – Zaubersätze (J. Lehmann)
- 88 Aufgaben aus Freundsland: 20 Aufgaben (mit Lösungen) aus der Ungarischen Volksrepublik
- 90 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 92 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben der DDR-Olympiade
- 93 Lösungen
- III. U.-Seite: Ein Flächenbelegungsspiel (R. Thiele)
- IV. U.-Seite: Optische Täuschung (Zusammenstellung: J. Lehmann)

Heft 5

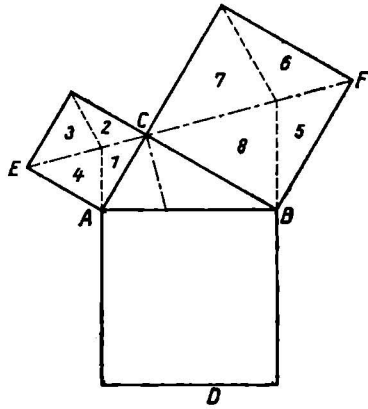
- 97 Der Vierfarbensatz (H. Pieper)
- 99 Eine Aufgabe von Dr. Z. A. Skopez, Jaroslawl
- 100 Er rechnete, wie andere atmen: *Leonard Euler*, der berühmteste Mathematiker des 18. Jahrhunderts (K. Reinhard)
- 102 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt: 10 Jahre Bezirksklub Mathematik Cottbus (G. Standke)
- 102 XI. ISTAM 1978, Beograd (J. Roßmann)
- 104 Ein rationalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen, Teil 2 (F. Franke)
- 107 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen
- 108 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
- 111 Bunte Basteleien (Zusammenstellung: J. Lehmann)
- 112 Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebespielen, Teil 2 (J. Flachsmeyer)
- 114 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 116 Lösungen
- 119 XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade (Kl. 10)
- III. U.-Seite: Rosetten-Graphik (U. Reiche)
- IV. U.-Seite: aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – Knebeleien speziell für Klasse 5/6 (Zusammenstellung: J. Lehmann/Th. Scholl!)

Heft 6

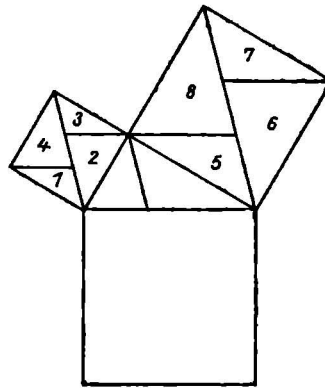
- 121 Lineare Optimierung, Teil I (E. Lehmann)
- 123 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt – Die Ernst-Thälmann-OS Roßlau berichtet – Zum 6. Male Mathematikolympiaden der Gehörlosenschulen der DDR – Mathematik und MMM
- 124 *Albert Einstein* 1879 bis 1966 (R. Thiele)
- 126 Es ist Winter – Geometrie der Schneeflocke (L. Cirmes)
- 127 Winterliche Knebeleien (Zusammenstellung: J. Lehmann)
- 128 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb
- 131 VI. Güstrower Physik-Wettbewerb (B. Träger/U. Walta)
- 132 Eine Aufgabe von Prof. Dr. W. Schäfer – Eine Aufgabe von Dr.-Ing. R. Thiele, beide Leipzig
- 132 *alpha*-Wettbewerb 1977/78: Preisträger, kollektive Beteiligung, Statistik
- 134 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht – 10 Jahre Jugendobjekt *Klub Junger Mathematiker Dresden* (A. Hilbert)
- 136 In freien Stunden · *alpha*-heiter
- 138 XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR: Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade
- 142 Lösungen, insbes. Lösungen zu der XVII. OJM – DDR-Olympiade
- III. U.-Seite: Das „mathematische Autorennen“ (L. Schmidt)
- IV. U.-Seite: Labyrinth (Zusammenstellung: J. Lehmann)

Mitgemacht und nachgedacht

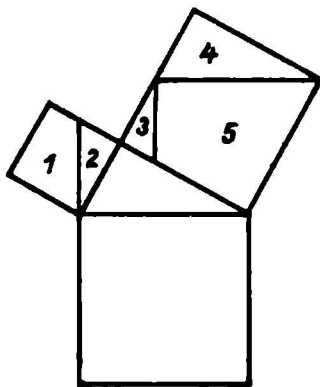
Zerschneide die einzelnen (numerierten) Teilflächen der jeweils beiden Kathetenquadrate und lege sie so auf das jeweilige Hypotenusenquadrat, daß es vollständig bedeckt ist!



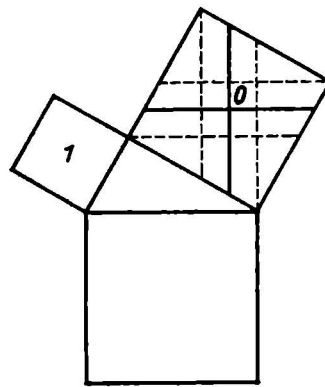
Zerlegungsbeweis von Epstein



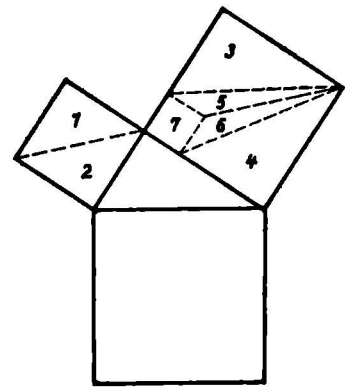
Zerlegungsbeweis von Nielsen



Zerlegungsbeweis von al-Nairizi



Schäufelradbeweis von Perigal



Zerlegungsbeweis von Gutheil

Es gilt $A_1 + A_2 = A_3$

