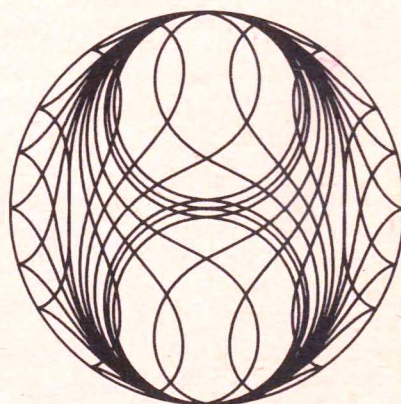
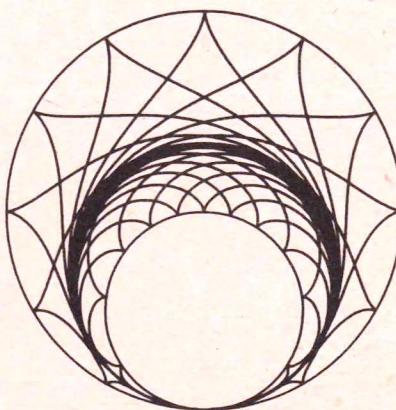
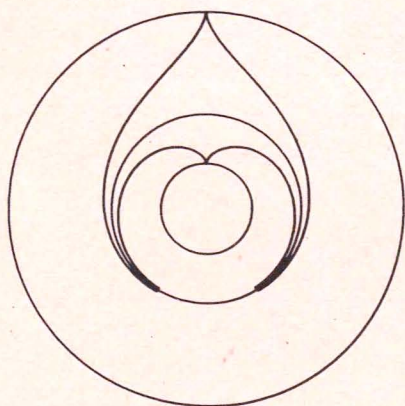
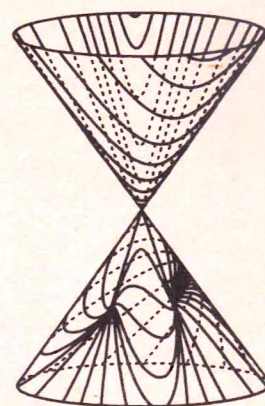
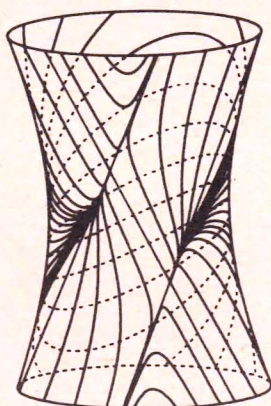
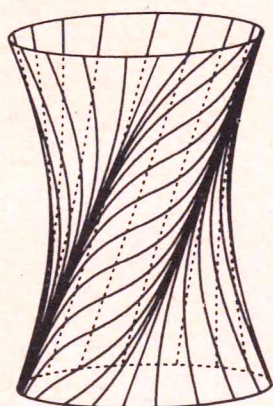


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



Z

**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395**

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213

Anschrift der Redaktion:

7027 Leipzig, PSF 14

Redaktion:

OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr.

W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat.

J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent

Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto E. Schröder, Dresden (S. 28); Vignette R. Grapendin, Berlin (S. 31); W. Schmidt, Greifswald (S. 32); ADN/ZB (S. 33); M. Ffolkes, aus Magazin (S. 48)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr nach einer Vorlage aus: *Elemente der Mathematik*, Birkhäuser-Verlag Basel, Autor: U. Pinkall, Freiburg i. Br.



Gesamtherstellung: INTERDRUCK. Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 19. Dezember 1984

Auslieferungstermin: 20. April 1985



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Ohne Zirkel geht es auch [8]¹⁾
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 28 Keine Scheu vor Stöchiometrieaufgaben [9]
Dr. V. Winzer, Sektion Chemie/Biologie der Pädagogischen Hochschule *Karl Liebknecht* Potsdam
- 29 Eine Aufgabe, mitgeteilt von Adolf P. Juschewitsch, Moskau
- 30 Daten unserer Schulgeschichte – Gleiches Recht auf Bildung für alle Kinder des Volkes [5]
C. Friedrich, Karl-Marx-Universität Leipzig, aus DLZ
- 31 Ausgewählte Aufgaben aus Rechenbuch, Teil 1, 1945
Verlag Volk und Wissen M. B. H. [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 32 Chancen für Denkfaule? – Taschenrechner und/oder Mathematik? [7]
Dr. W. Schmidt/Dr. L. Wenzel, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 35 Ein Besuch in der Knobelwerkstatt – Unsere Umwelt als Ideenlieferant [5]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 38 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Physik · Chemie
- 40 Hundert Jahre *Nullmeridian* und *Greenwich-Zeit* [7]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 42 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Klasse 5/6
Zentralsymmetrie [5]
Dr. E. Quaisser/Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Karl Liebknecht* Potsdam
- 43 Rechenbäume [5]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der M.-Luther-Universität Halle/Wittenberg
- 44 XXIV. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [5]
Aufgaben der Kreisolympiade (14. November 1984)
- 46 Problemkomponist und Knobelmeister Sam Loyd [7]
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 46 Lösungen [5]

III. U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb 1983/84 – Abzeichen in Gold [5]

IV. U.-Seite: In freien Stunden · *alpha*-heiter

Kryptarithmetik [5]

Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

¹⁾ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Ohne Zirkel geht es auch

In Heft 4 (1980) wurde in einem Beitrag mit dem gleichen Titel die Konstruktion der Tangenten an eine Kreislinie c von einem außerhalb c liegenden Punkt Q unter alleiniger Verwendung von Bleistift und Lineal gezeigt und begründet. Wie Bild 1 nochmals vor Augen führt, ist nicht einmal die Vorgabe des Kreismittelpunktes für diese Tangentenkonstruktion erforderlich. Man legt durch Q zwei die Kreislinie c getrennt reell schneidende sonst beliebige Geraden a und b . Die so erhaltenen Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 werden durch Verbinden untereinander zu einem vollständigen Vierseit ergänzt. Dies liefert die Schnittpunkte U und V . Die Verbindungsgerade $q = g(U, V)$ ist die Polare des Punktes Q bezüglich der Kreislinie c . q schneidet c in den Punkten T_1 und T_2 . Dies sind die Berührungspunkte der Tangenten t_1 bzw. t_2 aus Q an c . Die Zuordnung von Pol Q und Polare q bezüglich der Kreislinie ist umkehrbar eindeutig. Liegt Q außerhalb c , schneidet a die Kreislinie c getrennt reell. Ist $Q \in c$, dann ist die zugehörige Polare q Tangente an c in Q . Liegt Q im Inneren von c , so hat q mit c keinen Punkt gemeinsam. Der Sonderfall, daß Q Mittelpunkt von c ist, werde hier nicht erörtert.

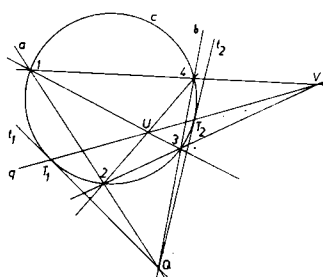


Bild 1

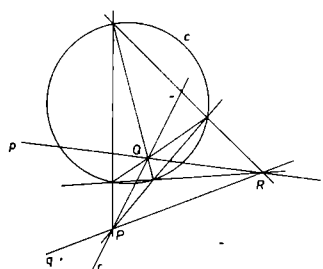


Bild 2

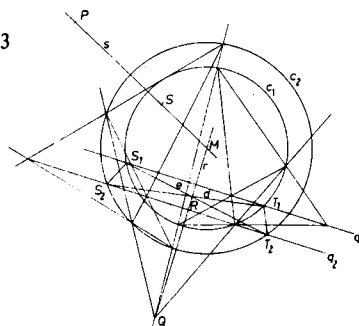
Bild 2 zeigt nochmals zusammenfassend, wie zu einem außerhalb c liegenden Punkt P die Polare p bezüglich c und für einen innerhalb von c liegenden Punkt Q die außerhalb c liegende Polare q konstruierbar ist.

Hier stellen wir uns die Aufgabe, mit Bleistift und Lineal lösbare Grundaufgaben zu behandeln, wenn außer der Kreislinie c noch deren Mittelpunkt M gegeben ist. Einleitend dazu knüpfen wir an die in Heft 4 (1980) gestellte Aufgabe. Sie lautet:

Gegeben sind zwei konzentrische Kreislinien c_1 und c_2 . Man konstruiere den gemeinsamen Mittelpunkt M dieser Kreislinien unter alleiniger Verwendung von Lineal und Zeichenstift.

Wir gehen von der Vorstellung aus, daß die beiden Kreislinien mittels einer Ringschablone gezeichnet vorliegen. Nun verwenden wir die Eigenschaft, daß jede durch die Mitte M einer Kreislinie c gehende Gerade auch Symmetrieachse von c ist. Denkt man sich in Abbildung 1 den durch Q gehenden Kreisdurchmesser eingezeichnet, so muß dieser auf Grund seiner Eigenschaft, Symmetrieachse von c zu sein, den von den Tangenten t_1 und t_2 aufgespannten Winkel halbieren. Folglich liegen auch T_1 und T_2 symmetrisch zum Kreisdurchmesser durch Q . Daher steht die Verbindungsgerade $q = g(T_1 T_2)$ senkrecht auf dem Kreisdurchmesser durch Q . Diese Überlegung liefert uns den Einstieg für die konstruktive Bestimmung von M in vorliegender Aufgabe. Nimmt man einen Punkt Q außerhalb c_1 und c_2 an und konstruiert die Polaren q_1 bezüglich c_1 und q_2 bezüglich c_2 gemäß Abbildung 2, so müssen q_1 und q_2 zueinander parallel sein, denn beide stehen senkrecht auf dem (noch nicht gefundenen) Durchmesser $r = g(QM)$ (vgl. Bild 3).

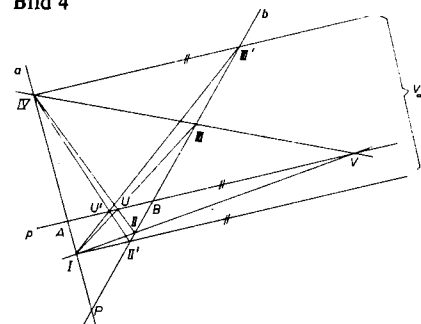
Bild 3



Ein zweiter Punkt R des Durchmessers r ist leicht zu finden. q_1 schneidet c_1 in den Punkten S_1 und T_1 , die symmetrisch bezüglich r liegen. q_2 schneidet c_2 in den Punkten S_2 und T_2 , die symmetrisch bezüglich r liegen. Folglich ist das durch Verbinden der Punkte $S_1-T_1-T_2-S_2-S_1$ in der genannten Reihenfolge erzeugte Trapez ein gleichseitiges. Damit müssen sich die Diagonalen dieses Trapezes $d = g(S_1 T_2)$ und $e = g(S_2 T_1)$ in einem Punkt R schneiden, der auf dem gesuchten Durchmesser r liegt. Die Verbindungsgerade $r = g(QR)$ stellt eine Symmetrieachse für c_1 und c_2 dar. – Eine völlig analoge Konstruktion für einen zweiten außerhalb c_1 und c_2 liegenden Punkt P führt auf die Polaren p_1 bezüglich c_1 und p_2 bezüglich c_2 . Damit steht wieder ein gleichseitiges Trapez zur Verfügung. Der Schnittpunkt S der Diagonalen dieses Trapezes ist ein Punkt der durch P

gehenden Symmetriegeraden s von c_1 und c_2 . Folglich liegt im Schnittpunkt von r mit $s = g(SP)$ der den Kreislinien c_1 und c_2 gemeinsame Mittelpunkt M . In Abbildung 3 wurde nur die Konstruktion von r lückenlos vorgeführt, um nicht das Bild von Konstruktionslinien zu überlasten. Die Vorgabe zweier konzentrischer Kreislinien ist für konstruktive Belange offenbar äquivalent mit der Vorgabe einer Kreislinie einschließlich ihres Mittelpunktes M . Den Ausführungen der Grundkonstruktionen bei vorgegebener Kreislinie c samt Mittelpunkt M unter alleiniger Verwendung des Lineals werde eine ergänzende Betrachtung zum Doppelverhältnis am vollständigen Vierseit vorangestellt (vgl. Bild 4).

Bild 4



Werden die Grundpunkte mit A, B und die Folgepunkte mit U, V bezeichnet, so gilt für das Doppelverhältnis dieser vier auf der Geraden p liegenden Punkte laut Definition:

$$DV(AB \cdot UV) = \frac{\overline{AU}}{\overline{AV}} : \frac{\overline{BU}}{\overline{BV}} \quad (1)$$

Der Geraden p ist eine Orientierung aufgeprägt. Folglich gehen die Strecken $\overline{AU}$, $\overline{AV}$, $\overline{BU}$, $\overline{BV}$ als vorzeichenbehaftete Größen in die Formel (1) ein. In Abbildung 4 werden die Grundpunkte von den Folgepunkten getrennt. Die vier Punkte befinden sich nach Teil 1, Heft 4 (1980), in harmonischer Lage. Folglich gilt in dieser Figur

$$DV(AB \cdot UV) = -1 \quad (2)$$

In einem ebenen Bewegungsablauf stellen wir uns vor, daß sich der Punkt V auf der fest angenommenen Geraden p stetig nach rechts verschiebt. Die von P ausgehenden Geraden a und b sowie die auf a liegenden Punkte I und IV ändern ihre Lage hierbei nicht. Je weiter sich der Punkt V nach rechts verschiebt, desto mehr nähert sich das Viereck $I-II-III-IV$ der Gestalt eines Trapezes. Am Wert des Doppelverhältnisses $DV(AB \cdot UV)$ ändert sich bei diesem Vorgang nichts. Wir fragen, welcher Ausdruck sich für das Doppelverhältnis ergibt, wenn der Punkt V über alle Schranken nach rechts herausrückt und damit die Gegenseiten $(I-II)$ und $(III-IV)$ des Vierecks auf je einer Geraden parallel zu p liegen. Symbolisch beschreiben wir den auf p im Unendlichen liegenden Punkt mit V_∞ und den Vorgang des Herausrückens von V ins Unendliche mit $\lim_{V \rightarrow V_\infty}$.

Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir von (1) aus und nehmen eine identische

Umformung des Doppelbruches vor. Offenbar gilt

$$DV(AB \cdot UV) = \frac{\overline{AU}}{\overline{AV}} \cdot \frac{\overline{BU}}{\overline{BV}} = \frac{\overline{AU}}{\overline{AV}} \cdot \frac{\overline{BV}}{\overline{BU}} = \frac{\overline{AU} \cdot \overline{BV}}{(\overline{AB} + \overline{BV}) \overline{BU}} = \frac{\overline{AU}}{\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{BV}} + 1\right) \overline{BU}} \quad (3)$$

Wegen $\lim_{v \rightarrow v_0} \frac{\overline{AB}}{\overline{BV}} = 0$ (der Nenner des Bruches wächst über alle Grenzen!) ergibt sich aus (3) mit (2)

$$\lim_{v \rightarrow v_0} DV(AB \cdot UV) = \frac{\overline{AU}}{\overline{BU}} = -1 \quad (4)$$

Aus (4) folgt für den Grenzfall des Trapezes $\overline{AU} = -\overline{BU}$ und $|\overline{AU}| = |\overline{BU}|$; d. h. U ist der Halbierungspunkt der auf der Seitenparallelen liegenden Strecke $\overline{AB}$.

Diese Feststellung hilft uns beim Einstieg in eine Reihe von Grundkonstruktionen, die bei Vorgabe einer Kreislinie samt Mittelpunkt allein mit dem Lineal ausführbar sind.

Wenden wir uns nun den konkreten Aufgabenstellungen zu.

1. Vorgabe der Kreislinie c samt dem Mittelpunkt M und einer c nicht reell schneidenden Geraden g .

Konstruktion des Poles G von g bezüglich c sowie des bezüglich c inversen Punktes G^* von G .

2. Vorgabe von c samt M , einer Geraden g und eines Punktes $P \notin g$.

Konstruktion der zu g parallelen Geraden h durch P .

3. Vorgabe von c samt M und einer auf der Geraden g liegenden Strecke $\overline{AB}$.

Konstruktion des Halbierungspunktes C von $\overline{AB}$.

4. Vorgabe von c samt M und einer auf der Geraden g liegenden Strecke $\overline{AB}$.

Konstruktion des Punktes C auf g derart, daß B Halbierungspunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist.

5. Vorgabe von c samt M , einer Geraden g und eines Punktes P .

Konstruktion des Lotes l von P auf g .

6. Vorgabe von c samt M und zweier sich im Punkt Z schneidender Geraden a und b .

Konstruktion der Winkelhalbierenden u und v zu den von a und b aufgespannten Winkeln.

7. Vorgabe von c samt M , einer auf der Geraden h liegenden Strecke $\overline{AB}$, einer Geraden g und eines Punktes $D \in g$.

Konstruktion der Punkte $A'', B'' \in g$ derart, daß $\overline{A''D} = \overline{DB''} = \overline{AB}$ gilt.

8. Vorgabe von c samt M und eines Durchmessers d .

Konstruktion des Lotes e von d in M .

9. Vorgabe von c samt M , einer zweiten Kreislinie k durch deren Mittelpunkt N und einen Punkt $A \in k$ sowie einer Geraden g .

Konstruktion der Schnittpunkte von g mit k .

10. Vorgabe von c samt M , einer zweiten Kreislinie k durch deren Mittelpunkt N und einen Punkt $A \in k$ sowie einer dritten Kreislinie l durch deren Mittelpunkt O und einen Punkt $B \in l$.

Konstruktion der Schnittpunkte von k und l .

Zur Beschreibung der ausschließlich mit dem Lineal durchzuführenden Konstruktionen werde eine abkürzende Symbolik vereinbart. Es bedeuten:

$(AB) = g$; g ist die durch Verbinden der Punkte A und B erzeugte Gerade.

$a \times b = P$; P ist der im Schnittpunkt der Geraden a und b liegende Punkt.

$(AB) \times (CD) = P$; P ist der Schnittpunkt der durch Verbinden von A und B bzw. C und D erzeugten Geraden.

$a \parallel b$; die Geraden a und b liegen zueinander parallel.

$a \perp b$; die Geraden a und b stehen aufeinander senkrecht.

In runde Klammern gesetzte Punktepaare symbolisieren das Verbinden dieser Punkte mit dem Lineal. Zwei mit $\times$ verknüpfte Symbole für Geraden beschreiben die Erzeugung eines Punktes durch den Schnitt zweier Geraden.

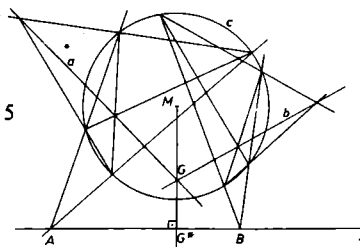
Bei Rückverweisung auf eine bereits behandelte Grundaufgabe wird die Nummer der Aufgabe in eckige Klammern gesetzt.

Bei den folgenden Beschreibungen geht es um die prinzipielle Ausführbarkeit der Konstruktion unter Beschränkung auf das Lineal. Es geht nicht um die Übersichtlichkeit der Konstruktion und der Belastbarkeit des Zeichenblattes mit Konstruktionslinien. Auch Fragen der Zeichengenauigkeiten infolge „schleifender Schnitte“ und „wackliger Verbindungen“ sind hier nicht Gegenstand der Erörterung.

Lösung zu 1.

Da die Polaren der Punkte einer Geraden g bezüglich der Kreislinie c sämtlich durch den Pol G von g gehen, genügt es, von zwei Punkten $A, B \in g$ die Polaren a bzw. b bezüglich c aufzusuchen. Ihr Schnittpunkt $S = a \times b$ ist daher identisch mit dem Pol G von g in bezug auf c . Die Verbindungsgerade (GM) ist das Lot von M auf g , denn die Polare g eines Punktes G bezüglich c steht senkrecht auf dem durch G gehenden Kreisdurchmesser. Der Schnittpunkt $G^* = (MG) \times g$ liegt invers zu G . Diese – auch analytisch faßbare – quadratische Punktverwandtschaft heißt Kreisinvolution. Zur Lösung von Aufgabe (10) werden wir diese Punkttransformation benötigen (vgl. Bild 5).

Bild 5



Lösung zu 2.

Bestimmung des Poles G von g nach [1]. $(MG) \times g = G^*$. Bestimmung der Polaren g^* von G^* nach Abbildung 2. g^* schneidet c in den Punkten S und T . $(PT) \times g = V$, $(UW) \times (ZV) = Q$. Nach den vorangestell-

$(PT) \times (MG) = Z$, $(ZS) \times g = U$; $(UP) \times (MG) = W$, $(VW) \times (ZS) = Q$. Die Punkte P und Q sind nach Konstruktion symmetrisch bezüglich (MG) . Folglich liegt (PQ) senkrecht zu (GM) und damit parallel zu g (vgl. Bild 6).

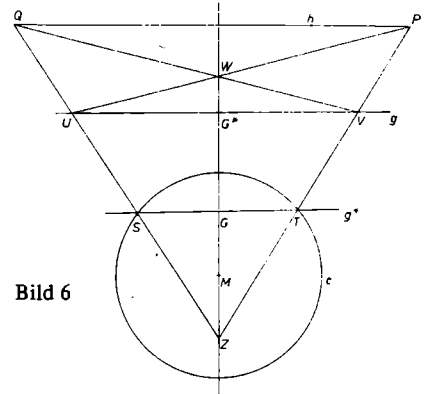
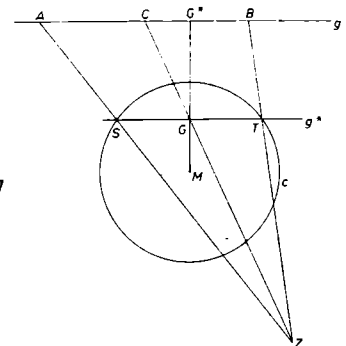


Bild 6

Lösung zu 3.

Bestimmung des Poles G von g nach [1]. $(MG) \times g = G^*$. Bestimmung der Polaren g^* von G^* bezüglich c . g^* schneidet c in den Punkten S und T . G ist Halbierungspunkt der Strecke $\overline{ST}$. Ferner ist $g^* \parallel g$. $(AS) \times (BT) = Z$. $(ZG) \times g = C$. Wegen $g^* \parallel g$ ist C Halbierungspunkt von $\overline{AB}$ (vgl. Bild 7).

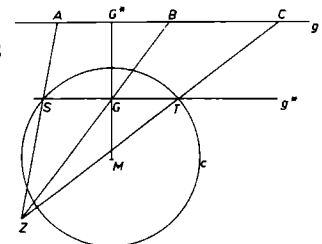
Bild 7



Lösung zu 4.

Bestimmung des Poles G von g nach [1]. $(MG) \times g = G^*$. Bestimmung der Polaren g^* von G^* bezüglich c . g^* schneidet c in den Punkten S und T . $(AS) \times (BG) = Z$. $(ZT) \times g = C$. Wegen $g \parallel g^*$ erfüllt C die gestellte Forderung bezüglich A und B (vgl. Bild 8).

Bild 8

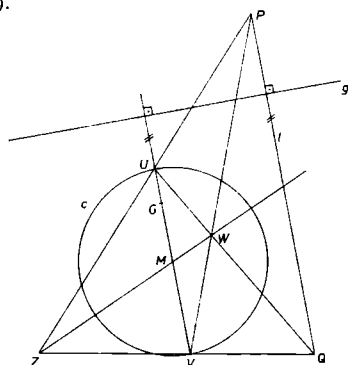


Lösung zu 5.

Bestimmung des Poles G von g nach [1]. (MG) schneidet c in den Punkten U und V . Ferner gilt $(MG) \perp g$. Annahme eines Punktes Z auf (UP) . $(ZM) \times (VP) = W$. $(UW) \times (ZV) = Q$. Nach den vorangestell-

ten Untersuchungen stellt das Viereit ($UVQP$) ein Trapez dar mit $(UV) \parallel (QP)$, denn M ist Halbierungspunkt von UV , W ist Schnittpunkt der Diagonalen des Viereits ($UVQP$), und die Verbindungsgeraden (UP), (VQ) und (WM) schneiden sich in einem Punkt Z . Wegen $(UV) \perp g$, $(UV) \parallel (PQ)$ ist (PQ) Lot l von P auf g (vgl. Bild 9).

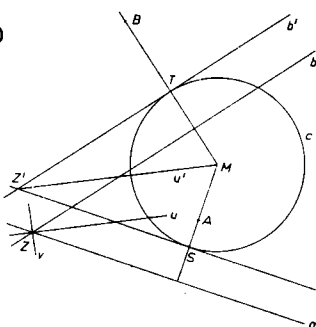
Bild 9



Lösung zu 6.

Bestimmung der Pole A von a und B von b bezüglich c nach [1]. $(MA) \times c = S$, $(MB) \times c = T$ (Auswahl der Schnittpunkte S und T beliebig). Parallele a' zu a durch S und b' zu b durch T nach [2]. $a' \times b' = Z'$. $(Z'M) = u'$. Nach Konstruktion ist u' Winkelhalbierende zu einem der von a' und b' aufgespannten Winkel. Parallele zu u' durch Z nach [2] liefert die gesuchte Winkelhalbierende u . Das Lot von u in Z nach [5] führt auf die zweite Winkelhalbierende v (vgl. Bild 10).

Bild 10



Lösung zu 7.

Bestimmung der Pole G von g und H von h bezüglich c nach [1]. $(MG) \times c = S$, $(MH) \times c = T$ (Auswahl der Punkte wieder beliebig). Parallelen g' zu g durch S und h' zu h durch T nach [2]. $g' \times h' = Z'$,

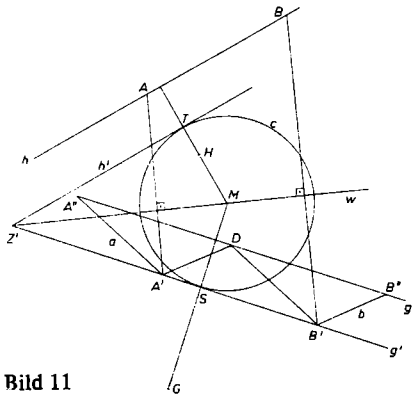


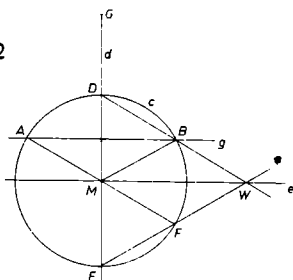
Bild 11

$(Z'M) = w$. Lote von A auf w und von B auf w nach [5]. Die Lote schneiden g' in A' bzw. B' . Einzeichnen der Verbindungsgeraden ($A'D$) und ($B'D$). Konstruktion der Parallelen a zu ($B'D$) durch A' und b zu ($A'D$) durch B' nach [2]. $a \times g = A''$, $b \times g = B''$. Nach Konstruktion gilt $A''D = DB'' = AB$ (vgl. Abb. 11).

Lösung zu 8.

Annahme von G auf d außerhalb c . Konstruktion der Polaren g von G bezüglich c nach Abb. 2. c schneidet g in A und B und d in den Punkten D und E . (AM) schneidet c in F . $(DB) \times (EF) = W$. Wegen $B, F \in c$ und $(BF) \parallel (DE)$ ist das Viereck $MFWB$ ein Drachenviereck, in dem $(BF) \perp (MW)$ gilt. Daher ist $(MW) = e$ das Lot von d in M (vgl. Bild 12).

Bild 12



Lösung zu 9.

Die Lösung sei dem Leser überlassen. Man überlege sich bei jedem Schritt, welche der unter Punkt 1 bis 8 gebotenen Grundkonstruktionen zum Einsatz gelangen. Die Lösung des Autors einschließlich Bild 13 veröffentlichen wir in Heft 3/85.

Lösung zu 10.

Da die Kreislinien k und l selbst mit unseren Mitteln nicht gezeichnet werden können, muß diese Aufgabenstellung durch geeignete Transformationen in eine für uns ausführbare Konstruktion umgesetzt werden. Mit Translationen und zentrischen Streckungen allein kommt man hierbei nicht aus. Man muß die in [1] konstruktiv behandelte Kreisinvolution zum Einsatz bringen. Eine Gerade allgemeiner Lage geht bei der Inversion an c in eine Kreislinie durch den Mittelpunkt M von c über. Schneidet die Gerade den Kreis c , so geht auch der Bildkreis g^* von g durch diese Schnittpunkte. Die Punkte des Kreises c sind Fixpunkte der Abbildung. Eine Gerade d durch den Mittelpunkt M von c geht daher in sich über, denn die Punkte M und die Schnittpunkte von d mit c sind auch Punkte von d^* . Zwei sich in $P \neq M$ schneidende Geraden g und h gehen in zwei sich in M und den Bildpunkt P^* von P schneidende Kreislinien g^* und h^* über.

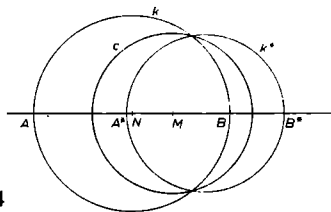
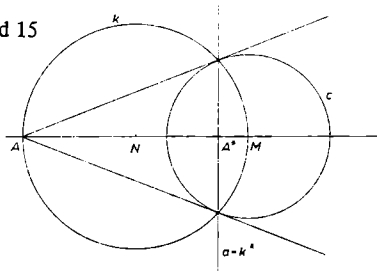


Bild 14

Ein Kreis wird in einen Kreis transformiert, sofern er nicht durch den Mittelpunkt M von c geht. Schneidet der Kreis k den Kreis c reell, so geht auch k^* durch diese Schnittpunkte (vgl. Bild 14).

Geht der Kreis k durch den Mittelpunkt M des Inversionskreises c , so ist das Bild k^* von k eine Gerade. Diese ist identisch mit der Polaren des auf k liegenden Gegenpunktes A von M (vgl. Bild 15). Liegt A außerhalb von c , ist k^* die Verbindungsgerade der Schnittpunkte von c und k .

Bild 15



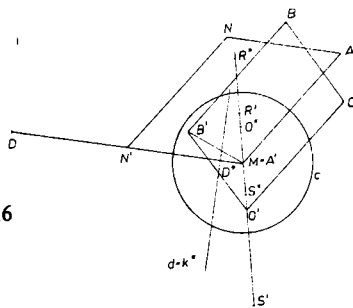
Konstruktiv besteht folgende Möglichkeit, die Schnittpunkte der Kreislinien k und l allein mit dem Lineal zu ermitteln:

Ausführung der durch das Punktepaar $A \rightarrow M = A'$ bestimmten Translation. Entsprechend erhält man N' aus N , O' aus O und B' aus B . Strecke $\overline{NA} = \overline{N'A'}$ auf $(N'A')$ über N' hinaus abtragen. Dies gibt den Gegenpunkt D von A' auf k' .

Verbinden von O' mit M . Abtragen der Strecke $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ von O' nach beiden Seiten auf $(O'M)$. Es ergeben sich die Punkte R' und S' als Endpunkte des durch M gehenden Durchmessers von l' .

Inversion von k' und l' an c . Gemäß Bild 15 ergibt sich für k'' eine Gerade, nämlich die Polare d von D bezüglich c und für l'' entsprechend Bild 14 ein Kreis. Sein durch M gehender Durchmesser ist festgelegt durch die Bildpunkte R'' und S'' von R' bzw. S' .

Bild 16



Damit ist die Aufgabe 10 auf die Aufgabe 9 zurückgeführt, bei welcher ein Kreis mit einer Geraden zum Schnitt zu bringen ist. Durch eine Translation ist O'' (Halbierungspunkt der Strecke $R''S''$) nach M zu überführen. Anschließend ist l''' durch zentrische Streckung (Stauchung) mit c zur Deckung zu bringen. $k'' = d$ ist den gleichen Transformationen zu unterwerfen.

Die Schnittpunkte der Geraden k'' mit der Kreislinie c sind in das ursprüngliche Bild zurückzuführen. Man erhält sie, ohne daß die Kreislinien k und l gezeichnet vorliegen.

Mit Hilfe der hier – unter Beschränkung auf das Lineal – vorgeführten Grundkonstruktionen lassen sich alle mit Zirkel und Lineal lösbaren Dreiecksaufgaben konstruktiv lösen.

Konstruktionen, die mit dem Lineal allein ausführbar sind, werden lineare Konstruktionen oder Konstruktionen ersten Grades genannt. Hingegen heißen Konstruktionen, die nur unter dem Einsatz von Zirkel und Lineal ausführbar sind, Konstruktionen zweiten Grades. Es läßt sich allgemein zeigen, daß alle Konstruktionen zweiten Grades mit dem Lineal allein ausführbar sind, wenn in der Zeichenebene eine feste Kreislinie mit ihrem Mittelpunkt vorgegeben ist. Solche Konstruktionen nennt man nach ihren Entdeckern Jean-Victor Poncelet (1788 bis 1867) und Jakob Steiner (1796 bis 1863) *Poncelet-Steinersche Konstruktionen*.
E. Schröder



Dozent Dr. sc. nat. Eberhard Schröder, geb. 1920 in Leipzig als Lehrersohn, Schulabschluß 1939 mit Abitur. Nach Tätigkeit als Lehrer und in der Industriepraxis Mathematikstudium an der damaligen TH Dresden von 1952 bis 1957. Assistent am Institut für Geometrie, Promotion A 1962, Hochschuldozent 1970, Promotion B 1977, seit 1962 vorwiegend in der Mathematikausbildung von künftigen Diplomingenieuren an der TU Dresden tätig.

Publizistische Wirksamkeit:

Lehrbuch „Darstellende Geometrie“ für Lehrer (1974); Monographie „Dürer – Kunst und Geometrie“ (1980); Monographie „Mathematik im Reich der Töne“ (1982); Mitarbeit an „Kleine Enzyklopädie Mathematik“ (1979). Außer einer Reihe wissenschaftlicher Publikationen in Fachzeitschriften erschienen von Dr. Schröder seit 1967 mehr als 25 Aufsätze in der Schülerzeitschrift *alpha* mit vorwiegend geometrischem Inhalt. Durch geschickte Themenwahl und anschauliche Behandlung mathematischer Probleme verstand er es, die Schüler zur außerschulischen Beschäftigung mit Mathematik anzuregen. Bei Mathematikolympiaden war er als Koordinator und Mitglied der Jury eingesetzt. Zur Zeit arbeitet Dr. Schröder an der Transkription des ältesten vollständig überlieferten deutschsprachigen Rechenbuches aus dem Jahre 1483. – Mit der Freude an mathematischen und mathematikhistorischen Fragestellungen verknüpft sich bei Dr. Schröder die Fähigkeit, die angeschnittene Problematik leicht verständlich darzustellen und für die pädagogische Arbeit zu erschließen.

Keine Scheu vor Stöchiometrieaufgaben!

Schülern wie Erwachsenen bereitet die Lösung von Sachaufgaben aus dem chemischen Teilgebiet Stöchiometrie oft Schwierigkeiten. Am Lösungsweg von zwei Aufgaben soll gezeigt werden, daß bei Berücksichtigung des modernen Molkonzepts¹⁾ größenrichtige Überlegungen zum gewünschten Ziel führen. Zunächst werden die für beide Aufgaben benötigten Größen und ihre Einheiten mit Namen und Symbol vorgestellt sowie Beziehungen dieser Größen zu anderen Größen (a). Es folgen dann mathematische Ansätze, die Grundlage für die Lösung dieser Aufgaben sind (b).

a)

Größe ²⁾	Einheit ²⁾		Beziehungen zu anderen Größen
Name	Symbol	Name	Symbol
Stoffmenge	n	Mol	mol
			$n = \frac{m}{M}, n = c \cdot v$
Molare Masse (Molmasse)	M	Kilogramm je Mol	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
			$M = \frac{m}{n}$
Stoffmengenkonzentration (Molarität)	c	Mol je Kubikmeter (Mol je Liter)	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ ($\text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$)
			$c = \frac{n}{v}, c = \frac{w \cdot \rho_L}{M}$ ρ_L Dichte der Lösung
Dichte (griech. Buchstabe „Rho“ ρ)	ρ	Kilogramm je Kubikmeter	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)
			$\rho = \frac{m}{v}$
Stöchiometriezahl (griech. Buchstabe „Ny“ ν)	ν	Stöchiometriezahlen sind die stöchiometrischen Faktoren innerhalb von Reaktionsgleichungen bzw. Atomzahlen innerhalb von Substanzformeln. Sie geben keine Stoffmengen an, sind aber der Stoffmenge jeweils proportional (Einheit-Name: Eins, Einheit-Symbol: 1).	
Masseanteil (-gehalt, -bruch, Masseprozent)	w	Der Masseanteil w_B des Stoffes B in einer Mischung ist der Quotient aus der Masse des Stoffes B und der Summe der Massen aller Komponenten der Mischung (Einheit-Name: Eins oder Prozent, Einheit-Symbol: 1 oder %, Beziehung zu anderen Größen: $w_B = \frac{m_B}{\sum m_i}$). Masseanteil $\cdot 100$ = Masseprozent.	

b) – Das Verhältnis der Stöchiometriezahlen läßt sich als Verhältnis von Stoffmengen auffassen. Zum Beispiel gilt für ein ternäres System der Stoffe A, B und C:

$$\nu_A : \nu_B : \nu_C = n_A : n_B : n_C.$$

– Wird eine Lösung verdünnt, so wird ihr lediglich Lösungsmittel zugesetzt. Hierbei bleibt die Stoffmenge n bzw. die Masse m an Gelöstem konstant. Daher gilt (Index 1 bedeutet vor dem Verdünnen, Index 2 nach dem Verdünnen): $n_1 = n_2$ bzw. $m_1 = m_2$.

– Ist die Zusammensetzung der Lösung L durch den Massenanteil w an Gelöstem gekennzeichnet, gilt:

$$w_1 \cdot m_{L,1} = w_2 \cdot m_{L,2}.$$

Entwickelt aus:

$$m_1 = m_2 \text{ und } w_1 = \frac{m_1}{m_{L,1}} \text{ sowie } w_2 = \frac{m_2}{m_{L,2}},$$

wobei m Masse des Gelösten bedeutet und m_L Masse der Lösung.

– Ist die Zusammensetzung der Lösung L durch die Stoffmengenkonzentration c an Gelöstem gekennzeichnet, gilt:

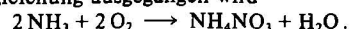
$$c_1 \cdot v_1 = c_2 \cdot v_2.$$

Entwickelt aus: $n_1 = n_2$ und $c_1 = \frac{n_1}{v_1}$ sowie $c_2 = \frac{n_2}{v_2}$.

Die beiden stöchiometrischen Beispiele, die jetzt in Teilschritten durchgerechnet werden, befassen sich inhaltlich mit einfachen chemischen Reaktionen und Verdünnen von Lösungen.

Aufgabe

▲1▲ Es sollen 20 t Ammoniumnitrat (Düngemittel, Sprengstoff) hergestellt werden. Berechnen Sie, wieviel Kilogramm Ammoniak und Sauerstoff hierzu verbraucht werden, wenn von folgender Reaktionsgleichung ausgegangen wird



Gegeben: 20 t Endprodukt NH_4NO_3

Gesucht: Massen der Ausgangsprodukte Ammoniak und Sauerstoff

Lösungsweg: Zuerst wird ein Stoffmengen-Stöchiometriezahlen-Verhältnis der gegebenen und gesuchten Stoffe entsprechend der Reaktionsgleichung aufgestellt. Dann wird eine Beziehung zwischen der gesuchten Größe mit der entsprechenden Stoffmengengröße (aus dem Stoffmengen-Stöchiometriezahlen-Verhältnis) formuliert. Diese beiden Größengleichungen kombiniert und nach der gesuchten Größe aufgelöst, ergeben die Endgleichung für die Ausrechnung.

Berechnung der benötigten Masse an Ammoniak:

1. Teilschritt: Aufstellen eines Stoffmengen-Stöchiometriezahlen-Verhältnisses (siehe Zusammenstellung b))

$$\frac{n_{\text{NH}_3}}{n_{\text{NH}_4\text{NO}_3}} = \frac{\nu_{\text{NH}_3}}{\nu_{\text{NH}_4\text{NO}_3}} = \frac{2}{1},$$

daraus folgt

$$n_{\text{NH}_3} = 2n_{\text{NH}_4\text{NO}_3} \quad (1)$$

2. Teilschritt: Herstellen einer Beziehung zwischen gesuchter Größe m_{NH_3} und der ihr entsprechenden Stoffmengengröße n_{NH_3} (siehe Zusammenstellung a)):

$$m_{\text{NH}_3} = n_{\text{NH}_3} \cdot M_{\text{NH}_3} \quad (2)$$

3. Teilschritt: Kombinieren der beiden Teilschritte (1) und (2) zu einer Gleichung, die nach der gesuchten Größe m_{NH_3} auflösen ist:

$$m_{\text{NH}_3} = 2n_{\text{NH}_4\text{NO}_3} \cdot M_{\text{NH}_3} \quad (3)$$

4. Teilschritt: Die in Gleichung (3) nichtgegebene Stoffmengengröße $n_{\text{NH}_4\text{NO}_3}$ läßt sich berechnen nach Einführung des Quotienten

$$\frac{m_{\text{NH}_4\text{NO}_3}}{M_{\text{NH}_4\text{NO}_3}} \quad (\text{siehe Zusammenstellung a)}),$$

da der Zahlenwert für $m_{\text{NH}_4\text{NO}_3}$ im Aufgabentext gegeben ist. Aus Gleichung (3) wird dann

$$m_{\text{NH}_3} = 2m_{\text{NH}_4\text{NO}_3} \cdot \frac{M_{\text{NH}_3}}{M_{\text{NH}_4\text{NO}_3}} \quad (4)$$

5. Teilschritt: Einsetzen der Zahlenwerte und Einheiten für jedes Größensymbol. Hierbei darauf achten, daß nur sich entsprechende Einheiten verwendet werden (in dieser Aufgabe Umrechnung der Einheit Tonne in Kilogramm). Rechnerische Lösung der Größengleichung (4):

$$m_{\text{NH}_3} = 2 \cdot 20\,000 \cdot \frac{0,017}{0,080} \cdot \frac{\text{kg mol}^{-1}}{\text{kg mol}^{-1}}$$

$$m_{\text{NH}_3} = 8\,500 \text{ kg NH}_3$$

Analog erfolgt die Berechnung der benötigten Masse an Sauerstoff:

$$m_{\text{O}_2} = 2n_{\text{NH}_4\text{NO}_3} \cdot M_{\text{O}_2} \parallel n_{\text{NH}_4\text{NO}_3} = \frac{m_{\text{NH}_4\text{NO}_3}}{M_{\text{NH}_4\text{NO}_3}}$$

$$m_{\text{O}_2} = 2m_{\text{NH}_4\text{NO}_3} \cdot \frac{M_{\text{O}_2}}{M_{\text{NH}_4\text{NO}_3}}$$

$$m_{\text{O}_2} = 2 \cdot 20\,000 \cdot \frac{0,032}{0,080} \cdot \frac{\text{kg mol}^{-1}}{\text{kg mol}^{-1}}$$

$$m_{\text{O}_2} = 16\,000 \text{ kg Sauerstoff.}$$

Ergebnis: Für die Herstellung von 20 t Ammoniumnitrat werden 8 500 kg Ammoniak und 16 000 kg Sauerstoff verbraucht.

Aufgabe

▲2▲ Es werden 10 l Salzsäure der Stoffmengenkonzentration $1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ benötigt. Wieviel cm^3 Salzsäure

($w_{\text{HCl}} = 36\%$, $\rho_{\text{HCl}} = 1,184 \text{ g cm}^{-3}$) sind hierzu abzumessen und dann mit Wasser auf 10 l aufzufüllen?

Gegeben: $v_2 = 10 \text{ l}$, $c_2 = 1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$, $w_1 = 36\%$, $\rho_1 = 1,184 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

Gesucht: v_1

Lösungsweg: Bei dieser Aufgabe muß von der grundlegenden Überlegung ausgegangen werden, daß bei der Verdünnung einer Lösung die Stoffmenge bzw. die Masse an Gelöstem konstant bleibt. Entsprechend der Forderung im Aufgabentext nach Herstellung einer Lösung bestimmter Stoffmengenkonzentration kann von dem mathematischen Ansatz $c_1 \cdot v_1 = c_2 \cdot v_2$ ausgegangen werden. Diese Größengleichung wird nach der gesuchten Größe aufgelöst. Befindet sich in der Größengleichung eine nichtgegebene Größe, so muß eine Beziehung gesucht werden, die diese Größe mit weiteren im Aufgabentext enthaltenen Größen verbindet. Eine derartige Beziehung erlaubt, die nichtgegebene Größe in der Größengleichung zu substituieren. Eine Lösung der Gleichung ist jetzt möglich.

1. Teilschritt: Formulierung des mathematischen Ansatzes

$$c_1 \cdot v_1 = c_2 \cdot v_2$$

und Auflösung der Gleichung nach der gesuchten Größe v_1 :

$$v_1 = \frac{c_2 \cdot v_2}{c_1} \quad (1)$$

2. Teilschritt: Für die Substitution der nichtgegebenen Größe c_1 wird die Beziehung $c_1 = \frac{w_1 \cdot \rho_1}{M_1}$ (2)

genützt, die sie mit den im Aufgabentext gegebenen Größen w_1 und ρ_1 verbindet.

3. Teilschritt: Einführung des Quotienten der Gleichung (2) in die Gleichung (1). Es ergibt sich

$$v_1 = \frac{c_2 \cdot v_2 \cdot M_1}{w_1 \cdot \rho_1} \quad (3)$$

4. Teilschritt: Einsetzen der Zahlenwerte und Einheiten für jedes Größensymbol. Im Hinblick auf die Forderung nur sich entsprechende Einheiten zu benutzen, ist für die Dichte ρ_1 die Einheit $\text{kg} \cdot \text{l}^{-1}$ zu wählen. Rechnerische Lösung der Größengleichung (3)

$$v_1 = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0,0365}{0,36 \cdot 1,184} \cdot \frac{\text{mol} \cdot \text{l} \cdot \text{kg} \cdot \text{l}}{1 \cdot 1 \cdot \text{mol} \cdot \text{kg}}$$

$$v_1 = 0,8563 \text{ l}$$

$$v_1 = 856,3 \text{ cm}^3$$

Ergebnis: Um 10 l Salzsäure mit der Stoffmengenkonzentration $1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ herzustellen, müssen $856,3 \text{ cm}^3$ 36%ige Salzsäure ($\rho_{\text{HCl}} = 1,184 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) mit Wasser auf dieses Volumen aufgefüllt werden.

Die Durchrechnung der beiden Beispiele dürfte gezeigt haben, daß es bei der Vielfalt der stöchiometrischen Aufgaben schwierig ist, einen alle Möglichkeiten berücksichtigenden und in alle Einzelheiten gehenden Lösungsalgorithmus aufzustellen. Einige allgemeine Hinweise seien jedoch zum Schluß zusammengefaßt:

Eine Aufgabe mitgeteilt von Prof. Dr. Adolf P. Juschekewitsch

Institut für Geschichte
der Wissenschaften der UdSSR

▲2459▲ Aus einem Münchner Rechenbuch aus der Mitte des 15. Jh., herausgegeben von Kurt Vogel, München, 1954:

Ein Bauer starb und hinterließ seinen 3 Söhnen 9 Fässer mit einem Inhalt von 1 bis 9 Urnen Wein (altes Regensburger Maß) mit dem Wunsch, den Wein sowie die Fässer derart aufzuteilen, daß jeder gleich viel Fässer und gleich viel Wein erhält.

Wieviel Möglichkeiten (verschiedene) gibt es, um den Wunsch zu erfüllen?

Hinweis: Benutze die magischen Quadrate mit 9 Feldern!

Kurzbiografie

von Prof. Dr. A. P. Juschekewitsch

Geboren 1906 in Odessa – 1929 Studium der Mathematik an der Moskauer Universität beendet – 1940 Dr. der Mathematik – ab 1940 ordtl. Prof. an der Technischen Hochschule Nikolai Baumann – ab 1941 Leiter des Lehrstuhls dieser TH – ab 1945 Mitarbeiter am Institut für Geschichte der Wissenschaften an der Akademie der Wissenschaften der UdSSR – seit 1958 Mitglied der Leopoldina, Halle – seit 1960 Mitglied der Internationalen Akademie der Geschichte der Wissenschaften, Paris – 1983 Preis der Akademie der Wissenschaften Frankreichs.

1. Wenn erforderlich, chemische Gleichung bzw. Formel aufstellen.
2. Gegebene und gesuchte Größen der Stoffe ermitteln.
3. Von der gesuchten Größe die Definitionsgleichung ermitteln.
4. Für nicht gegebene Größen, die zur Berechnung erforderlich sind, Gleichungen suchen, in denen diese Größen mit gegebenen Größen verbunden sind.
5. Gleichungen nach 3. und 4. zu einer Gleichung kombinieren, die nach der gesuchten Größe aufzulösen ist.
6. Für jedes Größensymbol Zahlenwert und Einheit einsetzen. Hierbei darauf achten, daß sich die Einheiten entsprechen.
7. Die gesuchte Größe berechnen.

V. Winzer

1) G. Rübisch „Elementare Stöchiometrie
größenrichtig und SI-gerecht“
„Anorganikum“

Beide Titel: VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften, Berlin, 1983

Daten unserer Schulgeschichte

Gleiches Recht auf Bildung für alle Kinder des Volkes

Die katastrophale Lage des deutschen Schulwesens nach der Zerschlagung des Faschismus resultierte aus dem jahrzehntelangen Mißbrauch der Schule als Mittel der Verherrlichung von Militarismus, Chauvinismus und Antikommunismus. „Wo sollen bei dieser Jugend nach solchen Erlebnissen neue Ideale herkommen?“ Diese Frage stellte Otto Grotewohl auf dem 1. Parlament der FDJ am 8. Juni 1946. Seine Antwort war trotz allem optimistisch. „Die andere Welt steht noch vor euch. Ihr müßt sie erst selbst schaffen, selbst gestalten und ihr selbst einen richtigen Inhalt geben.“ Es war außerordentlich wichtig, neben der Schaffung neuer Produktions- und Eigentumsverhältnissen vor allem neue Menschen im Geiste der Demokratie, der Völkerfreundschaft und des Friedens heranzubilden.

Kampf um die Schulreform

Auf dieser Grundlage wurde, als eine Maßnahme der antifaschistisch-demokratischen Schulreform, die Ausarbeitung des Gesetzes zur Demokratisierung der deutschen Schule in Angriff genommen. Am 29. September 1945 fand die erste Sitzung der Kommission statt, die bis zum Februar 1946 eine Denkschrift über eine

antifaschistisch-demokratische Einheitsschule verfassen sollte. Der von der Zentralverwaltung vorgelegte Entwurf wurde durch Vertreter aller Provinzen und Länder beraten, geändert, ergänzt und als gemeinsamer Gesetzentwurf den Blockparteien zur Stellungnahme vorgelegt. Bei der endgültigen Fassung hatte man auch Gedanken fortschrittlicher bürgerlicher Pädagogen beachtet.

Außerdem gingen seit 1945 Vorschläge und Anregungen interessierter Bürger ein. Vor allem die Hinweise von Mitgliedern der KPD und SPD, des FDGB und anderer fortschrittlicher Kräfte, die eine Grundschule anstrebten, die sich über die gesamte Zeit des obligatorisch allgemeinbildenden Unterrichts erstrecken sollte, fanden Beachtung. Mit reaktionären und revisionistischen Ansichten, die zum Beispiel den Bildungsdualismus und Bildungsprivilegien beibehalten wollten, setzte man sich konsequent auseinander.

Mitte Mai war die Arbeit am Gesetzentwurf abgeschlossen, und nach Zustimmung der SMAD (Sowjetische Militäradministration Deutschlands) wurde das Gesetz, das zum erstenmal in der Geschichte des deutschen Schulwesens gleiches Recht auf Bildung für alle garantierte, am 22. Mai in der Provinz Sachsen, am 23. Mai im Land

Mecklenburg, am 31. Mai in der Provinz Mark Brandenburg und im Land Sachsen und am 2. Juni 1946 im Land Thüringen angenommen. Zehn Tage später, am 12. Juni 1946, trat das Gesetz in Kraft und war damit im Gebiet der Sowjetischen Besatzungszone gültig. Aus diesem Anlaß werden heute am 12. Juni in der DDR alle Lehrer und Erzieher gewürdigt.

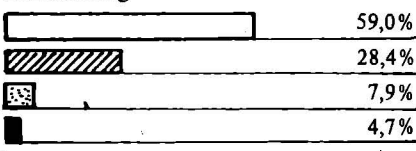
Die antifaschistisch-demokratische Schulreform stellt in unserer Geschichte ein Stück härtesten Klassenkampfes dar. In Berlin behinderten die westlichen Besatzungsmächte, unterstützt von reaktionären und revisionistischen Kräften, die antifaschistisch-demokratische Schulreform, und erst 1948 konnte ein ähnliches Gesetz verabschiedet werden. Doch sie verhinderten nicht, daß mit der Inkraftsetzung des Gesetzes in der Sowjetischen Besatzungszone endgültig mit allen reaktionären Gedanken und Ideen gebrochen wurde und daß die Schule nun die Jugendlichen zu selbständig denkenden und bewußt handelnden Menschen erzog, die für das freundschaftliche Zusammenleben mit allen Völkern eintraten.

Die neue Schule

Jedem Kind wurde von nun an zugesichert, daß es unabhängig von Besitz, Glauben oder Abstammung nur entsprechend seinen Fähigkeiten ausgebildet wurde (§ 1). Der § 2 sicherte die Weltlichkeit der Schule und propagierte die demokratische Einheitsschule. Ihr Aufbau und ihre Gliederung wurden im § 3 fixiert: In der nichtobligatorischen Vorstufe (Kindergarten) wurden die Kinder bis zur Schulreife geführt. Die obligatorische Grundstufe (Grundschule) umfaßte acht Klassen, in denen die

Bild 1

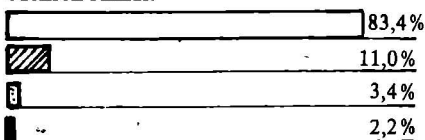
Zustand der Schulgebäude im Herbst 1945 Brandenburg



Sachsen



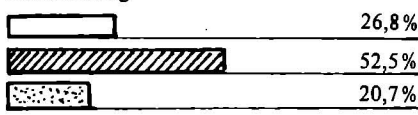
Sachsen-Anhalt



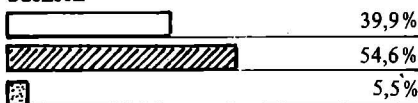
unbeschädigt leicht beschädigt schwer besch. zerstört

Bild 2

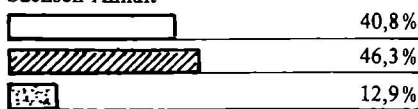
Ausrüstung der Schulen mit Inventar im Herbst 1945 Brandenburg



Sachsen



Sachsen-Anhalt



vorhanden teilweise vorhanden nicht vorhanden

Bild 3

Die Liquidierung der einklassigen Landschulen Brandenburg



Mecklenburg



insgesamt



Die Prozentzahl gibt den Anteil der einklassigen Schulen an der Gesamtzahl der Grundschulen an.

Fächer Deutsch, Geschichte, Heimatkunde, Geographie, Biologie, Physik, Chemie, Mathematik, Kunst- und Werkunterricht, Musik, Leibesübungen und ab Klasse 5 Fremdsprachenunterricht erteilt wurden. Außerdem hatten alle Schüler ab Klasse 7 die Möglichkeit, zusätzliche Kurse für eine zweite Fremdsprache und naturwissenschaftliche Disziplinen zu belegen.

Um die Unterschiede in der Ausbildung zwischen Land- und Stadtschulen beseitigen zu können, wurden für Landkinder nichtvollstufige Schulen ausgebaut und Internatsschulen sowie Schulheime eingerichtet. Nach Absolvierung der Grundschule hatten die Jugendlichen die Möglichkeit, sich systematisch in der Oberstufe weiterzubilden. Dafür gab es Berufs-, Fach- und Oberschulen, die nach dem Erwerb des Abiturs die Aufnahme eines Studiums ermöglichten.

Der § 4 enthielt die Forderung nach Wissenschaftlichkeit und Systematik des Unterrichts. Durch die im § 5 zugesicherte Schulgeldfreiheit sowie Gewährung von Stipendien und Beihilfen ermöglichte das Gesetz auch Kindern minderbemittelter Eltern den Hochschulbesuch. Auch der § 6 verdeutlichte den demokratischen Charakter des Schulgesetzes. Alle Parteien und Organisationen wurden zur Unterstützung herangezogen. Außerdem wurden Elternausschüsse gebildet, die den Schulleitungen beratend zur Seite stehen sollten. Schließlich ordnete der § 7 die Neuregelung der Lehrerausbildung an.

Es war Wirklichkeit geworden! Die Jugend hatte wieder ein Ideal: „Ein neues Ideal einer neuen Zeit, ein Ideal, das so viel Kraft entwickelt...“ Sie war für die schweren Aufgaben ihres täglichen Lebens gewappnet und konnte nun „... so vorwärts stürmen, wie es die Jugend nun einmal tun muß.“

Heute wissen wir, daß die antifaschistisch-demokratische Schulreform auf dem Boden der DDR die bis dahin bedeutendste revolutionäre Umgestaltung in der deutschen Schulgeschichte war. Mit ihr wurde die innere Umformung einer ganzen Generation in Angriff genommen und garantiert, daß in unseren Schulen die Erziehung zum Frieden und zur Völkerverständigung oberstes Prinzip war und ist.

Claudia Friedrich

JUNI

10

Dienstag

11

Mittwoch

12 Tag des Lehrers

13

Freitag

Am 12. Juni 1946 wurde das Gesetz zur Demokratisierung der deutschen Schule auf dem gesamten Gebiet der späteren DDR wirksam

Ausgewählte Aufgaben aus Rechenbuch (Teil 1)

Volk und Wissen Verlagsgesellschaft M. B. H.
Berlin/Leipzig · 1945

▲1▲ Ein Kaufmann konnte eine Ware, die ihn 143 RM gekostet hatte, mit 213 RM verkaufen; wie groß war sein Verdienst?

▲2▲ Eine Straße von 740 Meter (m) Länge soll gepflastert werden; es wird zugleich an fünf Stellen begonnen, und die fünf Gruppen bringen an einem Tag fertig 47, 35, 51, 46, 53 m, am nächsten Tag ist die Gesamtleistung 37 m größer. Wieviel m sind dann noch zu pflastern?

▲3▲ Ein Mann raucht an einem Tag 4 Zigarren. Wieviel sind das: a) in einer Woche; b) in einem Jahr; c) während 30 Jahren?

▲4▲ Eine Firma beschäftigt 7 Angestellte, einer erhielt im Monat 90 RM, zwei 140 RM, einer 150 RM, zwei 180 RM und der letzte, der Geschäftsleiter, 425 RM. Wieviel Gehalt hatte die Firma im Monat zu bezahlen?

▲5▲ Eine 1. Klasse hat 48 Schüler; der 12. Teil ist vom Turnen befreit, wieviel sind das?

▲6▲ Wieviel verdient ein Arbeiter an einem Tag, wenn er an jedem Sonnabend 42 RM ausgezahlt bekommt?

▲7▲ Ein Landmann braucht, um ein Feld mit Roggen zu besäen, 159 kg. Er erntet 2253 kg; wievielfältig war die Ernte?

▲8▲ Auf einem Grundstück sind durch das Haus 78 qm bebaut, der Hof ist 1 a 13 qm groß, der Garten hat 4 a 81 qm. Wie groß ist das ganze Grundstück?

▲9▲ Ein Kaufmann versendet drei Kisten mit Waren. Die gesamte Ware wog 2 dz, die gepackten Kisten wogen einzeln 1,43 dz und 1,28 dz und 84 kg. Wieviel betrug zusammen in den drei Fällen die Verpackung (Tara)?

▲10▲ Für 1 km Fahrt in einem Personen- oder Eilzug bezahlt man in der dritten Klasse 4 Rpf, in der zweiten 5,8 Rpf und in der ersten 8,7 Rpf. Welches sind die Fahrpreise in den verschiedenen drei Klassen für die Linien: Berlin – Magdeburg 142 km; Berlin – Brandenburg 62 km?

▲11▲ In einem Wintermonat brennen in einem Dorfortshaus am Abend und in der Nacht 8 Lampen, und zwar $6\frac{1}{4}$ Std. lang.

Wieviel Petroleum haben im Monat alle zusammen verbraucht, und wieviel kostet das Petroleum? (Eine Lampe verbraucht in 10 Std. $\frac{1}{2}$ l Petroleum; 1 l kostet 29 Rpf.)

Aus der Bibliothek
von Neulehrer J. Lehmann,
jetzt Chefredakteur
der Schülerzeitschrift *alpha*

Tägliche Lebensmittelration für Kinder unter 15 Jahren in der sowjetischen Besatzungszone (Ende Dezember 1945)



Kartoffeln 300 g



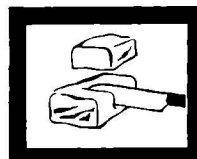
Nährmittel 10 g



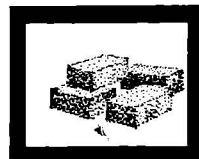
Brot 200 g



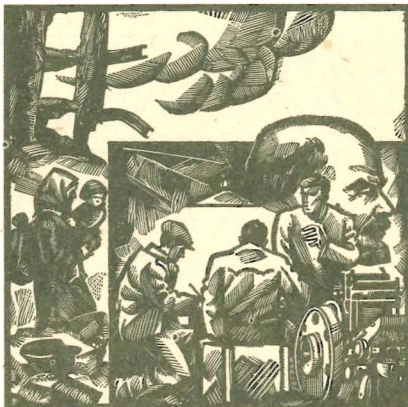
Fleisch 15 g



Fett 10 g



Zucker 25 g



Chancen für Denkfaule?

Taschenrechner $\frac{\text{und}}{\text{oder}}$ Mathematik

„Eine Zwei in Mathe ist mir automatisch sicher, denn wir bekommen ja bald den Taschenrechner SR 1, der kann für mich rechnen“, hörte ich unlängst im Bus einen Jungen prahlen. Dessen Freund kontierte jedoch sehr selbstbewußt: „Mein Mathelehrer wird sich noch wundern. Mein Vater hat sich aus Moskau einen programmierbaren Taschenrechner Электроника БЗ-34 mitgebracht. Da wird es nun Einsen hagen, ohne daß ich mich sehr anstrengen muß.“

Nun, ein Taschenrechner ist zweifellos ein sehr nützliches Hilfsmittel für die verschiedensten Zwecke und kann dem Benutzer die Rechenarbeit sehr erleichtern. Blind vertrauen sollte man einem Taschenrechner aber nicht! Eingabefehler (Drücke einer falschen Ziffern- oder Operationstaste) können z. B. vorkommen, ihr erkennt sie häufig durch eine Überschlagsrechnung. Deshalb steht auch ganz zu Anfang in der Bedienungsanleitung des neuen Schulrechners SR 1: „Man muß seinen Taschenrechner, seine Vorzüge und Grenzen genau kennen. Nicht alle Taschenrechner arbeiten völlig gleich. Es ist zweckmäßig, die Bedienungsanleitung genau zu lesen, die Beispiele nachzurechnen und ähnliche Aufgaben selbständig zu lösen. Wie jeder andere Taschenrechner führt auch der Schulrechner SR 1 nur die Befehle aus, die man ihm eingibt – und zwar in einer spezifischen, durch seine Konstruktion festgelegten Art und Weise. *Vertippen* von Zahlen, Operationsbefehlen oder Funktionstasten bzw. Nichtbeachten der eingebauten Automaten führt zu falschen Resultaten. Deshalb sind Kontrollen sehr wichtig.“ Um Programme für programmierbare Rechner schreiben zu können, muß man die zu lösenden Aufgaben gut durchdenken und analysieren, dazu sind gute Mathematikkenntnisse unbedingt notwendig. Auf einige Tücken beim Umgang mit Taschenrechnern wollen wir hier hinweisen.

1. Rechengenauigkeit

Wir betrachten zuerst einige einfache Rechnungen, die wir mit dem Taschenrechner „konkret 600“ (Bild 1) und dem Mikrorechner SR 1 (Bild 2) vom VEB Mikroelektronik Mühlhausen durchführten. Die exakten Ergebnisse dieser Aufgaben erhält man durch schriftliches Ausrechnen oder aus mathematischen Grundbeziehungen. Ihr könnt diese und ähnliche Aufga-

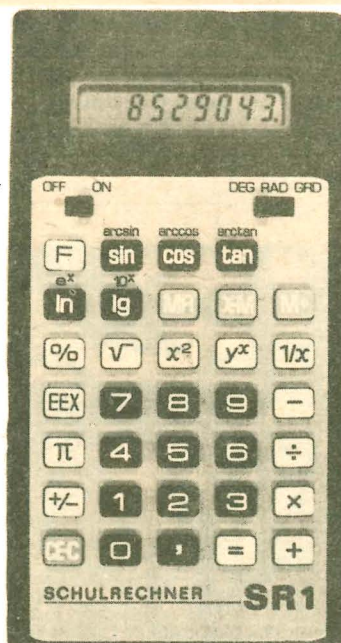
ben auch mit Hilfe anderer Rechnertypen lösen und die erhaltenen Resultate mit unseren Ergebnissen vergleichen.

Die Aufgabe H ist mit dem „konkret 600“ eigentlich nicht lösbar. Es wurde statt dessen $10 \cdot 10^{\log 234,568}$ berechnet. Die Argumente bei den Aufgaben I und J sollen als Winkelmaß mit normaler Gradeinteilung verstanden werden, der SR 1 ist dazu auf DEG einzustellen.

Bild 1



Bild 2:



Das folgende Beispiel K, mit dem SR 1 gerechnet, zeigt euch, daß die Genauigkeit des Resultates auch davon abhängen kann, wie ihr die Rechnung organisiert. Offenbar ist

$$\begin{aligned} & \left((98\,765\,432)^{\frac{1}{16}} \right)^{16} = 98\,765\,432 \\ & = \left(\left(\left(\left(\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{98\,765\,432}}}} \right)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Die linksstehende Aufgabe realisieren wir durch die Tastenfolge

$$1 \div 16 = x - m \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4$$

$$\boxed{3} \boxed{2} \boxed{y^x} \boxed{MR} \boxed{=} \boxed{y^x} \boxed{1} \boxed{6} \boxed{=}$$

und erhalten das Ergebnis 98 763 700.

In dem rechtsstehenden Lösungsweg ist die Tastenfolge

9	8	7	6	5	4	3	2	✓	✓	✓	✓
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$\boxed{x^2} \quad \boxed{x^2} \quad \boxed{x^2}$$

einzugeben, als Ergebnis wird 98 765 428
angezeigt.

In jedem Rechner sind nur endlich viele Dezimalzahlen (und intern nur endlich viele Dualzahlen) darstellbar, die Anzahl dieser Zahlen hängt vom jeweiligen Rechnermodell ab. Dezimalzahlen können in der Regel sowohl mit Dezimalkomma (häufig verwendet man dafür einen Dezimalpunkt) in der Festkommastreibeise als auch in der Exponentialschreibweise (Gleitkommadarstellung) im Rechner dargestellt werden. Beim „konkret 600“ sind eine 7stellige Mantisse mit Komma, ein zweistelliger Exponent und Vorzeichenstellen für Mantisse und Exponent vorgesehen. Der Schulrechner SR 1 kann Dezimalzahlen mit 8 Ziffern und Vorzeichen darstellen. In der Exponentialschreibweise werden eine 5stellige Mantisse, ein 2stelliger Exponent und Vorzeichen für Mantisse und Exponent angezeigt. So bedeutet die Anzeige $-2.0462 - 12$ die Dezimalzahl $-2,0462 \cdot 10^{-12}$ und 1.801 die Zahl $1.8 \cdot 10^1$ (= 18), die Eingabe kann durch die Tastenfolgen

2, 0 4 6 2 +/- EEX +/- 1 2
bzw.

1	,	8	EEX	1
---	---	---	-----	---

erfolgen. Es muß an dieser Stelle vermerkt werden, daß in der Exponentialdarstellung die Mantisse zwar nur mit 5 Stellen angezeigt wird, für die weitere Rechnung stehen aber mehr Stellen im SR 1 zur Verfügung. Ihr erkennt das etwa, wenn ihr im Beispiel D das Resultat durch 10 dividiert, dann wird als Ergebnis 24 000 656 mit 8 gültigen Stellen ausgegeben.

Die endlich vielen **Maschinenzahlen** sind in der Menge der reellen Zahlen mit unterschiedlichen Abständen verteilt. Es kann nun passieren, daß bereits das Resultat solch einfacher Operationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

	Aufgabe	Ergebnisanzeige konkret 600	Ergebnis- anzeige SR1	exaktes Ergebnis
A	29^4	707 280	707 281.	707 281
B	71^5	$1.804\,228 \cdot 10^9$	$1.8042 \cdot 10^9$	1 804 228 351
C	$2\,000\,001 \cdot 99$	$1.980\,001 \cdot 10^8$	$1.9800 \cdot 10^8$	198 000 099
D	$3\,000\,082 \cdot 80$	$2.400\,065 \cdot 10^8$	$2.4000 \cdot 10^8$	240 006 560
E	$10 + 10^{-7}$	10.	10.	10.000 000 1
F	$\sqrt{1\,234\,567^2}$	1 234 566	1 234 567.	1 234 567
G	$e^{\ln 466}$	465.9999	465.99998	466
H	$10^{\lg 12\,345\,678}$	12 345 680	12 345 675.	12 345 678
I	$\arcsin(\sin 80)$	80.000 01	80.000 002	80
J	$\arctan(\tan 1)$	$9.999\,459 \cdot 10^{-1}$	1.	1

Tabelle 1

keine Maschinenzahl ist, obwohl beide an der Operation beteiligten Größen Maschinenzahlen sind (vergleiche Beispiele B, C, D). In solchen Fällen zeigt der Taschenrechner einen Wert an, der näherungsweise mit dem exakten Ergebnis übereinstimmt, oder er zeigt eine Überschreitung des für ihn erlaubten Zahlenbereiches an. Näherungswerte werden in den Rechnern meist nach den euch bekannten Regeln für das Runden von Zahlen gebildet, es kann aber auch vorkommen, daß bei der Anzeige einfach Ziffern abgeschnitten werden und unberücksichtigt bleiben. Unser Beispiel D zeigt, daß der „konkret 600“ und der SR 1 bei der Anzeige nicht runden. Das Beispiel E veranlaßt euch sicher nachzudenken, was bei Addition und Subtraktion von Zahlen unterschiedlicher Größenordnung passieren kann.

Anstelle der Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ werden im Rechner Ersatzoperationen $\oplus$, $\ominus$, $\odot$, $\oslash$ ausgeführt. Für diese Operationen gelten Assoziativ- und Distributivgesetze nicht, und es können wie bei Aufgabe E Fälle auftreten, bei denen etwa $x \oplus y = x$ ist, obwohl y von Null verschieden ist. Überlegt euch dazu weitere Beispiele!

Andere Fehler treten bei der Benutzung von Taschenrechnern auf, die mit Tasten für Funktionen wie $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, e^x , x^y , $\lg$ oder $\ln$ ausgestattet sind. Die Werte dieser Funktionen werden im Rechner mit Hilfe von Näherungsformeln berechnet. In der Bedienungsanleitung des SR1 ist deshalb auch auf die Genauigkeit der Funktionswerte hingewiesen. Die größten Fehler sind zu erwarten, wenn die Funktion y^x aufgerufen wird. (Vergleiche Beispiele G, H, I, J, K.)

2. Die harmonische Reihe

Im ersten Teil habt ihr gesehen, daß man schon bei recht einfachen Aufgaben mit einem Taschenrechner Fehler begehen kann. Für den praktischen Gebrauch sind

die auftretenden Ungenauigkeiten nicht problematisch, sofern nur eine geringe Zahl von Berechnungen durchgeführt wird. Jedoch wollen wir jetzt an einem Beispiel demonstrieren, daß man zu unsinnigen Aussagen gelangen kann, wenn man den Taschenrechner formal benutzt und das mathematische Problem nicht vorher gründlich durchdenkt.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Summe der Kehrwerte aller natürlichen Zahlen zu ermitteln. Die Mathematiker sprechen dann von einer sogenannten *unendlichen Reihe*, in unserer Aufgabe ist es die *harmonische Reihe*. Ihr könnt euch das Wesen der harmonischen Reihe etwa so klar machen: Betrachtet die Zahlen

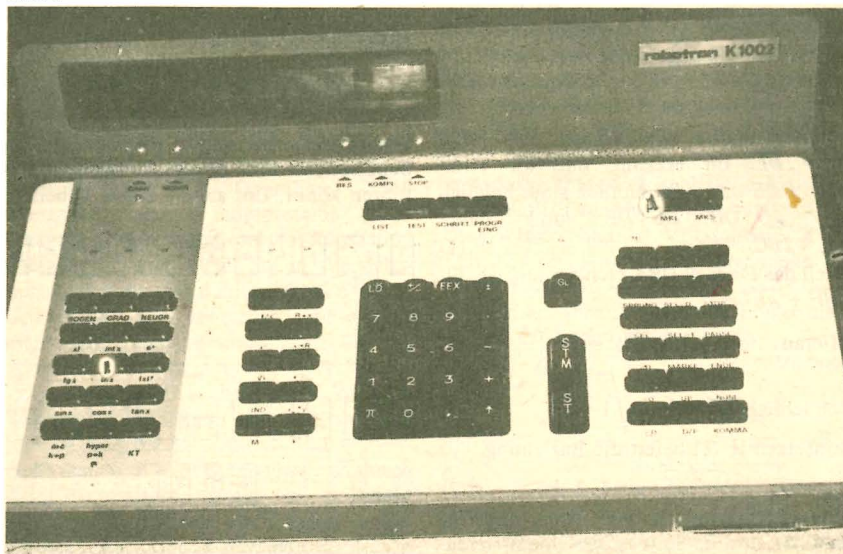
$$a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{1}{2}, a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \dots!$$

Es ist $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$

L. Euler (1707 bis 1783) soll z. B.

Bild 3



$a_{1\,000} = 7,48\dots$, $a_{1\,000\,000} = 14,39\dots$ berechnet haben.

Wir fragen nun, ob die Zahlen a_n für *sehr große* natürliche Zahlen n auch *sehr groß* sind, oder ob es eine Zahl b gibt, so daß immer $a_n \leq b$ gilt. Durch eine geschickte Zusammenfassung gewisser Summanden kann man zeigen, daß das erste der Fall ist. Die Mathematiker nennen eine derartige unendliche Reihe *divergent*.

Es ist nämlich $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Daher lassen sich immer aufeinanderfolgende Reihenglieder so zusammenfassen, daß ihre Summe größer als $\frac{1}{2}$ ist. So erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \dots \end{aligned}$$

Also ist $a_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}$ für jede natürliche Zahl k . Folglich gibt es beliebig große Zahlen a_n .

Berechnet man die Zahlen a_n auf einem Taschenrechner, so verändern sie sich von einem gewissen Index n ab nicht mehr. Wir haben diese Zahlen mit einem Computer KRS 4200 und mit dem Tischrechner K 1002 (siehe Bild 3) ermittelt. Die Rechenanlage KRS 4200 liefert uns nach 43 Minuten für b den Wert 14,0174. Mit Hilfe des Tischrechners K 1002 ergab sich $b \leq 26$. Hierzu mußten wir uns aber schon eines Tricks bedienen, denn der Tischrechner hätte sonst mehr als 100 Jahre benötigt, um dieses Resultat gemäß der Vorschrift $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$ zu erhalten.

Das Experimentieren mit dem Rechner könnte uns also zu dem Trugschluß verleiten, daß die harmonische Reihe einen endlichen Wert (≤ 26) besitzt.

Aufgabe:

Begründe das Auftreten dieser Erscheinung! Stelle dir einen Rechner vor, der nur Zahlen mit zweistelliger Mantisse und zweistelligem Exponenten darstellen und verarbeiten kann! Wie sehen bei diesem fiktiven Rechner die Zahlen a_n aus?

3. Berechnung der Zahl 2π

Wir zeigen euch nun, daß auch das Umgekehrte eintreten kann:

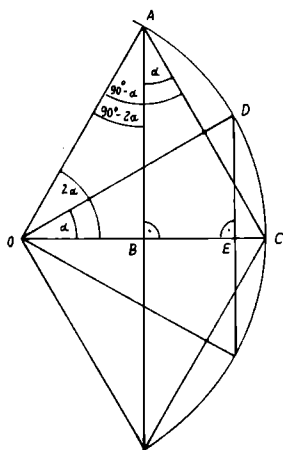
Bei einem Verfahren zur Berechnung der Zahl 2π liefert der Rechner als Ergebnis entweder Null oder keinen endlichen Wert. Dazu betrachten wir folgendes Problem. Der Umfang U eines Kreises vom Radius 1 ist bekanntlich $U = 2\pi$. Der Umfang soll näherungsweise durch den Umfang einbeschriebener regelmäßiger n -Ecke ermittelt werden. Ist n sehr groß, so kann man auf diesem Wege eine sehr gute Näherung für die Zahl 2π erwarten. Übrigens ist diese Methode zur Ermittlung des Umfangs eines Kreises vom Radius 1 sehr alt. Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) schätzte für $n = 96$ ab:

$$6\frac{20}{71} < 2\pi < 6\frac{20}{70},$$

d. h. $6.28169 < 2\pi < 6.28572$.

Wir wollen mit dem Rechner die Umfänge von n -Ecken, bei denen $n = 2^m$ (allgemeiner $n = k \cdot 2^m$ mit natürlichen Zahlen k und m) ist, berechnen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Seitenlängen s_n und s_{2n} des einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecks und des $2n$ -Ecks?

Bild 4



In Bild 4 ist $s_n = 2AB$, $s_{2n} = AC$ und $s_{2n} = 2DE$. Ihr erkennt, daß die Dreiecke ODE und ABC ähnlich sind. Folglich ist $AC : OD = BC : DE$ und daher $s_{2n}^2 = 2BC$. (1)

Weil das Dreieck OBA rechtwinklig ist, gilt $OB^2 + AB^2 = 1^2$.

Hieraus folgt $(1 - BC)^2 = 1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$ und

$$\text{schließlich } BC = 1 - \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}.$$

Einsetzen in (1) liefert die Beziehung

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}; n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Der jeweils ermittelte Wert für s_n wird hier benutzt, um die Seite s_{2n} des interessieren-

Ecken	Umfang			
	KRS 4200	konkret 600	K 1002	SR 1
4	5.65685	5.656854	5.656854249	5.6568542
8	6.12293	6.122935	6.122934918	6.1229349
16	6.24289	6.242891	6.242890305	6.2428904
32	6.27308	6.273101	6.273096982	6.2730979
64	6.28055	6.280679	6.280662315	6.2806634
128	6.28242	6.282700	6.282554528	6.2825576
256	6.28490	6.283222	6.283027667	6.2830661
512	6.28490	6.285307	6.283146471	6.2832226
2048	6.32456	6.312359	6.283189236	6.2857254
8192	8.00000	6.853918	6.283215937	6.3454959
16384	0	7.327145	6.283429547	6.5536
262144	0	82.89719	6.313263539	26.2144
1048576	0	331.5887	8.122234770	104.8576

Tabelle 2

den regelmäßigen $2n$ -Ecks zu berechnen. Ihr erhaltet also einen Zahlenwert für s_{2n} , indem ihr das Ergebnis der vorangegangenen Rechnung in die rechte Seite der Formel (2) einsetzt. Man nennt (2) eine *Rekursionsformel*. Nach dieser Formel könnt ihr gut mit einem Rechner die Seitenlängen s_n und gemäß $U_n = n \cdot s_n$ auch die Umfänge von regelmäßigen n -Ecken, die dem Einheitskreis einbeschrieben sind und für die $n = k \cdot 2^m$ ist, ermitteln. Wir fanden (die besten Näherungen sind jeweils unterstrichen):

Beim KRS 4200 tritt der in Beispiel E ange deutete Effekt auf. Die Zahlen s_n^2 werden so klein, daß im Rechner der Radikand der inneren Wurzel von Formel (2) den Wert 4 annimmt, womit für das 16384eck die Seitenlänge 0 folgt. Bei den anderen Rechnern sind die beim Wurzelziehen auftretenden Fehler größer. Bei ihnen nehmen die Seitenlängen für große n einen konstanten Wert an. Damit erhält man beliebig große Zahlenwerte für den Umfang der einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecke.

Ihr könnt nun auch versuchen, die Zahl 2π von oben anzunähern. Berechnet dazu die Umfänge regelmäßiger n -Ecke, welche dem Einheitskreis umschrieben sind! Beweist, daß zwischen den Seiten s_n und s_{2n} des entsprechenden n -Ecks bzw. $2n$ -Ecks die Beziehung

$$s_{2n} = \frac{2}{s_n} (\sqrt{4 + s_n^2} - 2) \quad (3)$$

besteht!

Wir wollen noch zeigen, wie ihr mit dem Schulrechner SR 1 die Rechnungen durchführen könnt. Um andere als in Tabelle 2

angegebene Zahlenwerte zu erhalten, betrachten wir regelmäßige $3 \cdot 2^m$ -Ecke ($m \in \mathbb{N}$), welche den Einheitskreis als Inkreis bzw. Umkreis besitzen. Überlegt euch, daß die Seite des dem Einheitskreis eingeschriebenen Dreiecks $s_3 = \sqrt{3}$ und die des umschriebenen Dreiecks $s_3 = 2\sqrt{3}$ ist! Wir benutzen den Speicher des SR 1 und können so vorgehen:

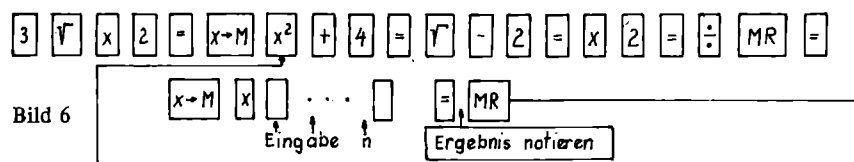
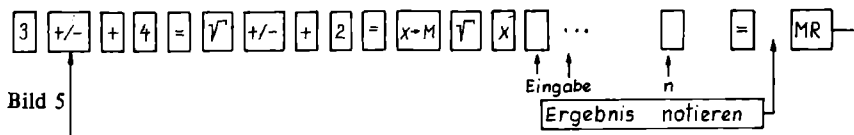
A) Berechnung eines Näherungswertes nach Formel (2); Tastenfolge (s. Bild 5).

Den Speicher benutzen wir, um den Wert $2 - \sqrt{4 - s_n^2}$, also s_{2n}^2 , aufzubewahren, denn dieser Wert wird ja gemäß Formel (2) wieder benötigt, um s_{4n} zu ermitteln, usw. Will man den Umfang des jeweiligen regelmäßigen n -Ecks bestimmen, ist das zugehörige n in den Rechner einzugeben, wenn man im Ablaufplan (Tastenfolge) an die

Stelle $\boxed{\dots} \boxed{n}$ gelangt. Das Ergebnis der

Multiplikation ist nach dem Drücken der Taste $\boxed{=}$ zu notieren. Dann ist die Rechnung an der Stelle fortzusetzen, die euch der Pfeil angibt, d. h. bei $\boxed{+/-}$. Jetzt könnt ihr ganz automatisch die aufgeschriebenen Befehle ausführen. Ihr müßt dazu die entsprechenden Tasten des SR 1 betätigen, bei einem programmierbaren Rechner würde die Befehlsfolge vom Rechner selbständig abgearbeitet werden, ohne daß von außen Eingriffe zu erfolgen haben. Allerdings muß einem programmierbaren Rechner die auszuführende Befehlsfolge vorher irgendwie mitgeteilt werden (man spricht von der Programmeingabe).

Fortsetzung auf S. 40



Ein Besuch in der Knobel-Werkstatt

Unsere Umwelt als Ideenlieferant

Liebe Freunde!

In Heft 1/85 haben wir euch mit dem Anliegen unserer Beitragsserie, dem *Eigenbau* von mathematischen Knobelaufgaben, vertraut gemacht und einige typische Klassen von Knobelaufgaben vorgestellt.

Heute wollen wir nun die naheliegendste *Methode zur Ideenfindung* für mathematische Problemaufgaben demonstrieren, nämlich das *Beobachten der Umwelt aus mathematischer Sicht*.

Schaut euch einmal aufmerksam in eurer Wohnung, eurer Schule, eurem Wohnort, im Ferienlager, im Urlaubsort, bei Sport und Spiel, in der Natur oder in anderen Bereichen eurer Umwelt um, und ihr werdet merken, in welch reicher Fülle unsere Umwelt Ideen für mathematische Problemaufgaben, insbesondere auch für Knobelaufgaben verschenkt! Und wie könnte es auch anders sein, denn letztlich ist ja das Gebäude der Mathematik, obwohl es heute mehr denn je durch rein innermathematische Abstraktion wächst, eine Widerspiegelung von Verhältnissen der objektiven Realität. Das *Ablezen* von mathematischen Problemen aus der Umwelt erfordert natürlich einen geschulten *mathematischen Blick*, und so wollen wir es einmal am Beispiel von Beobachtungen in der Stadt Leipzig, die mit etwa 570 000 Einwohnern die zweitgrößte Stadt in unserer Republik ist, demonstrieren. Ähnliche Ideen werdet ihr sicher auch in eurem Wohnort oder in anderen Umweltbereichen finden können.

Die Stadt Leipzig, deren Gründung im Jahre 1165 erfolgte, und die in ihrem Stadtwappen einen Löwen (Idee für Aufgabe 1) führt, ist eine bedeutende Industriestadt mit wichtigen Betrieben vor allem des Schwermaschinen- und Anlagenbaus sowie der Elektrotechnik/Elektronik. 1980 haben sich hier mehr als zwanzig Kombinate und Betriebe zur Kooperationsgemeinschaft *Anwendung der Robotertechnik* im Maschinenbau vereint. Die moderne Robotertechnik liefert uns die Idee für Aufgabe 2: Doch Leipzig ist darüber hinaus nicht nur eine Stadt der Wissenschaft, des Buches, der Kongresse, der Museen, der Musik und des Sports, vor allem ist Leipzig Messestadt, eine Stadt des weltoffenen Handels. Das Doppel-M als Symbol für *Muster-Messe* (Idee für Aufgabe 3) ist nicht nur an den Eingängen zum Gelände der Technischen Messe zu sehen, sondern auch an den zahlreichen Messehäusern der Innenstadt.

Obwohl die Stadt Leipzig eine Fläche von etwa 145 km² einnimmt und vor allem durch das Neubaugebiet Leipzig-Grünau von Tag zu Tag wächst, so ist der eigentliche Stadtkern (die Innenstadt) nur 0,455 km² groß. Das Areal des Stadtkerns befindet sich innerhalb der ehemaligen Stadtmauern und ist heute vom sogenannten *Ring* umgeben (Idee für Aufgabe 4). Der Straßenverkehr auf dem Ring, besonders zur Messezeit, ist faszinierend, und die schnittigen Autos liefern uns die Idee für Aufgabe 5.

Am nördlichen Abschnitt des Rings befindet sich der Leipziger Hauptbahnhof, der größte Kopfbahnhof Europas. Charakteristisch für den Bahnhofsvorplatz (Platz der Republik) sind neben den Interhotels *Stadt Leipzig* und *Astoria* sowie dem 95,5 m hohen Turm-Wohnhochhaus (1972 fertiggestellt) die 4spurigen Gleisanlagen für den Straßenbahnverkehr. Halten hier mehrere Straßenbahnen gleichzeitig, so ist das Umsteigen in eine andere Bahn schon manchmal ein Problem (Idee für Aufgabe 6). Bemerkte sei, daß hier entgegen sonst üblichen Regelungen das Überqueren der Straßenbahngleise notwendig und erlaubt ist.

In Leipzig befindet sich auch der älteste erhaltene deutsche Personenbahnhof, der Bayerische Bahnhof, dessen Mittelportikus (Idee für Aufgabe 7) aus der Frühzeit des Eisenbahnverkehrs stammt.

Einer der schönsten Plätze von Leipzig ist der am Ostrand des Stadtkerns gelegene etwa 40 000 m² große *Karl-Marx-Platz*. Er ist umgeben von imposanten Gebäuden, von denen die meisten großartige Zeugen unserer sozialistischen Baukunst sind: dem 142,5 m hohen Universitätshochhaus (1973 übergeben) und dem Hauptgebäude der Karl-Marx-Universität (1971 übergeben), dem Kroch-Hochhaus und dem Franz-Mehring-Haus, dem Opernhaus (1960 übergeben), dem Hauptpostamt (1964 übergeben), dem Interhotel *Am Ring* (1965 übergeben), dem 60 m hohen Versicherungshochhaus und dem prächtigen *Neuen Gewandhaus* (1981 übergeben). Diese faszinierenden Gebäude sowie auch das im Südosten der Stadt gelegene, von 1898 bis 1913 erbaute, 91 m hohe monumentale Völkerschlachtdenkmal liefern uns die Idee zu Aufgabe 8.

Geht man vom Karl-Marx-Platz aus durch die Grimmaische Straße in Richtung Markt, so kommt man am Eingang des berühmten *Auerbachs Keller* vorbei, der in

einer der zahlreichen Passagen, die als überdachte Ladenstraßen typisch für Leipzig sind, liegt. Dieses Passagensystem liefert uns die Idee für Aufgabe 9.

An der Ostseite des Leipziger Marktes, dem zentralen Punkt der Innenstadt, befindet sich das sehr reizvolle *Alte Rathaus*, das eine mathematische Besonderheit aufzuweisen hat: Der Turm teilt die Vorderfront des Rathauses im Verhältnis des Goldenen Schnittes, d. h., das Verhältnis von Gesamtlänge und längerem Teilabschnitt ist gleich dem Verhältnis von längerem und kürzerem Teilabschnitt (Idee für Aufgabe 10).

Der Rathauerturm selbst besteht aus einem Unterteil mit quadratischem und einem Oberteil mit achteckigem Querschnitt (Idee für Aufgabe 11). Auch die Rathausuhr ist sehenswert (Idee für Aufgabe 12). Geht man vom Markt aus in Richtung Thomaskirche, die als Wirkungsstätte Johann Sebastian Bachs und des Thomanerchors weltberühmt ist, so gelangt man wieder auf den Ring. Hier, am Dittrichring 21, befindet sich das Haus der Deutsch-Sowjetischen Freundschaft. Es trägt durch vielfältige interessante Veranstaltungen mit dazu bei, die Freundschaft zwischen unseren Völkern weiter zu vertiefen und das Land Lenins noch besser kennenzulernen. Die Aufgabe 13 möge auch diesem Ziele dienen. Geht man in nördlicher Richtung weiter, über den Friedrich-Engels-Platz und durch die Dr.-Kurt-Fischer-Straße, so gelangt man zur Leipziger Kongreßhalle (Idee für Aufgabe 14), neben der sich der Eingang zum Leipziger Zoo befindet, der besonders durch seine Löwenzucht berühmt wurde. Und auch in einem Zoologischen Garten läßt sich manch mathematisches Problem entdecken (Idee für Aufgabe 15). An das Zoogelände schließt sich das Rosental an, ein beliebtes Naherholungsgebiet für die Leipziger. Auch hier kann man bei einem Spaziergang Ideen für Knobelaufgaben finden (siehe Aufgabe 16 und Aufgabe 17).

Wir wollen unsere kleine Stadtbesichtigung beenden, obwohl wir viele Sehenswürdigkeiten von Leipzig nicht erwähnen konnten und auch viele sofort ins Auge fallende *ernsthafte* mathematische Probleme außer Acht gelassen haben (etwa Flächen- und Volumenberechnungen an Gebäuden, Höhenbestimmungen mittels Trigonometrie, Geschwindigkeitsprobleme im Straßenverkehr u. a.). Erwähnt sei noch, daß die *Leipziger Volkszeitung*, kurz LVZ (Idee für Aufgabe 18), durch zahlreiche Aktivitäten wesentlich zur Verbreitung mathematischen Wissens beiträgt. Und schließlich ist auch der Redaktionssitz unserer *alpha* in Leipzig (Idee für Aufgabe 19).

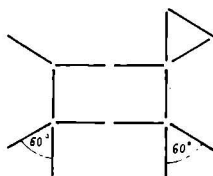
Sicher könnt ihr nun auch alle Fragen der Aufgabe 20 beantworten.

R. Mildner

Knobel- Wandzeitung

▲ 1 ▲ Der Leipziger Löwe

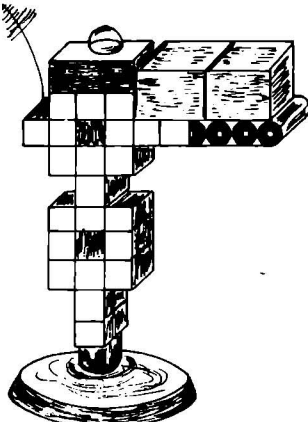
Bild 1



Legt in der Löwen-Figur 6 Hölzchen so um, daß 6 gleichseitige Dreiecke entstehen!

▲ 2 ▲ Transport-Roboter Robbi

Bild 2



Unser frei erfundener Roboter *Robbi* wird einsatzbereit, wenn in seine leeren Speicherkästchen die natürlichen Zahlen von 2 bis 23 derart eingespeichert werden, daß die Zahlensumme in jeder waagerechten und senkrechten Kästchenreihe 35 beträgt. Stellt die Einsatzbereitschaft des Roboters her!

▲ 3 ▲ Muster-Messe

Bild 3



Legt im Messe-Symbol 6 Hölzchen so um, daß 5 kongruente gleichseitige Dreiecke und 4 kongruente Parallelogramme entstehen!

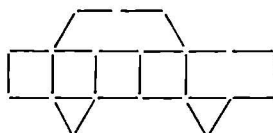
▲ 4 ▲ Leipziger Promenaden-Ring

Zeichnet ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem für den Bereich $-5 \leq x \leq 15$ und $-14 \leq y \leq 12$! Zeichnet sodann um den Punkt $M_1(3, -3)$ den Kreis K_1 , auf dem der Punkt $P_1(0, -10)$ liegt; um $M_2(10, 2)$ den Kreis K_2 , auf dem $P_2(10, 0)$ liegt; um $M_3(4, 6)$ den Kreis K_3 , auf dem $P_3(8, 2)$ liegt; um $M_4(1, 1)$ den Kreis K_4 , auf dem $P_4(0, 2)$ liegt; um $M_5(-1, -1)$ den Kreis K_5 , auf dem $P_5(0, 0)$ liegt und um $M_6(6, -6)$ den Kreis K_6 , auf dem $P_6(0, -2)$ liegt! Verbindet nun mit einem Farbstift – jeweils entlang des

kürzeren der beiden Peripherieabschnitte – P_1 mit P_2 auf K_1 , P_2 mit P_3 auf K_2 , P_3 mit P_4 auf K_3 , P_4 mit P_5 auf K_4 , P_5 mit P_6 auf K_5 und P_6 mit P_1 auf K_6 ! Der entstehende geschlossene Weg gibt nun (in etwa) die Gestalt des Leipziger Rings wieder, der den Stadtkern umschließt.

▲ 5 ▲ Auto-Geometrie

Bild 4

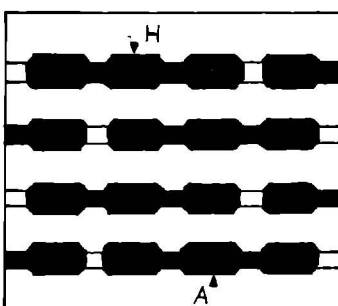


Die Auto-Figur sei aus gleich langen Hölzchen gelegt:

- Wie viele Dreiecke, Vierecke, Fünfecke bzw. Sechsecke enthält die Figur?
- Wie groß ist der Flächeninhalt der Auto-Figur (1 LE = 1 Hölzchenlänge)?
- Legt in der Figur 11 Hölzchen so um, daß 12 kongruente Dreiecke entstehen!

▲ 6 ▲ Problem am Hauptbahnhof

Bild 5



Die Gleisanlagen sind voller Straßenbahnen, und man will vom Punkt A zum Punkt H gelangen. Welche und wie viele verschiedene Wege von A nach H sind (innerhalb des Bildes) möglich? Welcher Weg ist der kürzeste, welcher der längste, und welche Wege sind gleich lang?

▲ 7 ▲ Der Bayerische Bahnhof

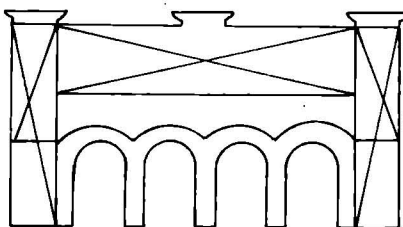


Bild 6

Zeichnet die Bahnhofsfigur in einem Zuge, aber so, daß jede Linie nur genau einmal gezogen wird!

▲ 8 ▲ Leipziger Silhouetten

Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, das doppelt so lang wie breit ist, in der oben angegebenen Weise, und legt dann jeweils aus den 7 Teilen die abgebildeten Leipziger Gebäude-Silhouetten zusammen!

Völkerschlachtdenkmal

Uni-Riese

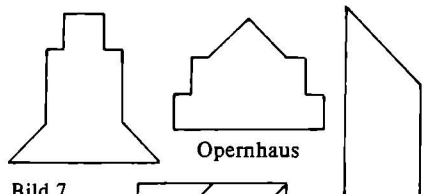
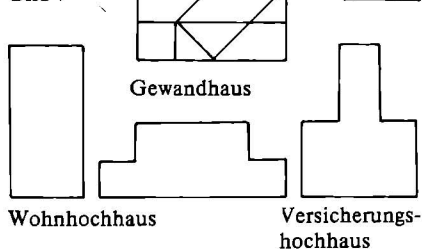


Bild 7



▲ 9 ▲ Leipziger Passagen

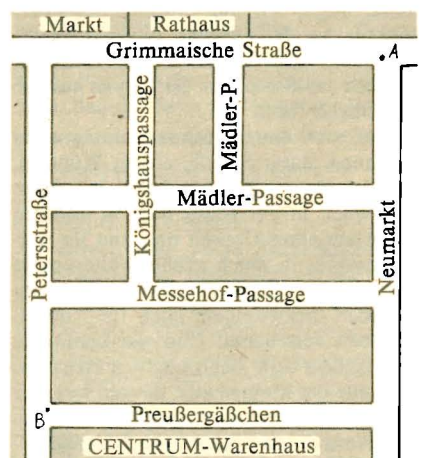
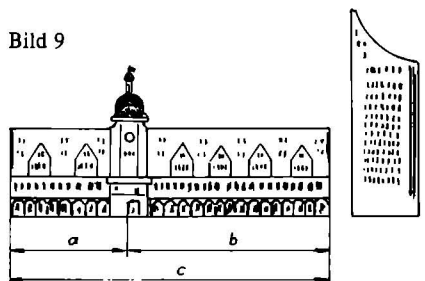


Bild 8

Astrid, die sich im Punkt A befindet, hat sich mit ihrer Freundin Brigitte, die am Punkt B wartet, zu einem gemeinsamen Besuch des *Centrum-Warenhauses* verabredet. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann Astrid zu ihrer wartenden Freundin Brigitte gelangen, ohne dabei Umwege zu machen?

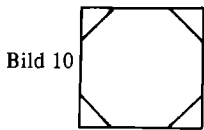
▲ 10 ▲ Der Goldene Schnitt

Bild 9



Der Turm des Leipziger Alten Rathauses teilt dieses im Verhältnis des Goldenen Schnittes, d. h., es gilt $c : b = b : a$ (vgl. das Bild). In welcher Höhe liegt diejenige Horizontalebene, die das 142,5 m hohe Universitätshochhaus im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt, wobei der längere Teilabschnitt der untere Abschnitt des Hochhauses sei?

▲ 11 ▲ Der Rathausturm



Das Bild zeigt den Rathausturm (ohne das kupferne Helmdach) in der Draufsicht. Wieviel Prozent der Quadratfläche beansprucht das einbeschriebene regelmäßige Achteck?

▲ 12 ▲ Die Rathausuhr

Peter befand sich zwischen acht und neun Uhr auf dem Leipziger Markt und sah auf die Rathausuhr. Der große Zeiger war 7 Minutenteilstriche hinter dem kleinen Zeiger. Wie spät war es zu diesem Zeitpunkt?

▲ 13 ▲ In Freundesland

Es gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Der längste Strom in Europa ist die Wolga mit einer Länge von 3 531 km.
 - (2) Der Amur ist 16 km länger als die Lena.
 - (3) Der Jenissei ist 324 km kürzer als der Amur.
 - (4) Der Ural(fluß) ist 227 km länger als der Dnepr.
 - (5) Die Lena ist 456 km kürzer als die doppelte Länge des Ural.
 - (6) Die Wolga ist 1 330 km länger als der Dnepr.
 - (7) Die Summe der Längen von Amur, Wolga, Dnepr und Dnestr beträgt 11 500 km.
- Wie lang ist jeder der genannten sieben Flüsse?

▲ 14 ▲ Kongreßhalle in Zahlen

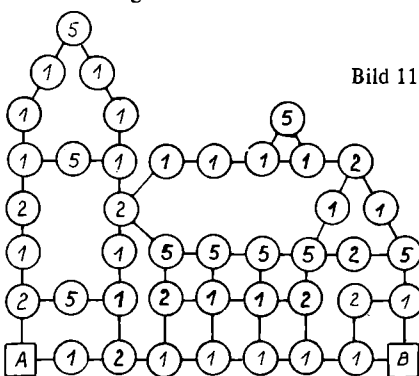


Bild 11

Die Kongreßhalle am Leipziger Zoo faßt (etwa) 4 000 Gäste. Findet nun mindestens vier verschiedene Wege von A nach B, bei denen das Produkt der dabei überquerten Zahlen jeweils 4 000 beträgt!

▲ 15 ▲ Zoo-Logisches

Am Eingang zum *Neuen Vogelhaus* des Leipziger Zoo bestaunen Viola und ihre Eltern drei farbenpr채chtige Kakadus, n채mlich einen Rosenkakadu, einen Molukkenkakadu und einen Inka-Kakadu. Aus der Unterhaltung ihrer Eltern entnimmt Viola folgende Aussagen: 1. Das linke Tier ist ein Rosenkakadu, 2. Das mittlere Tier

ist kein Rosenkakadu, 3. Das rechte Tier ist kein Molukkenkakadu. Viola, die 鰂ter als ihre Eltern in den Zoo geht und die Papageien genau kennt, merkt, daß nur eine Aussage ihrer Eltern wahr ist und die beiden anderen falsch sind. Stolz nennt sie jedes Tier beim richtigen Namen. Wit ihr auch, wie der linke, der mittlere bzw. der rechte Kakadu heißt?

▲ 16 ▲ Ein Spaziergang

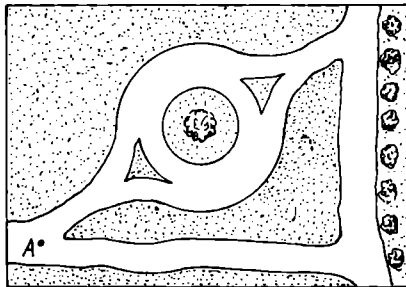


Bild 12

Im Leipziger Rosental befindet sich das abgebildete Wegesystem, welches einmal – ausgehend vom Punkt A und wieder dort endend – so durchwandert werden soll, daß man zwischendurch jedes Wegst체ck des Systems genau zweimal durchl채uft. Welche Wanderroute k鰰nnte man dazu ausw채hlen?

▲ 17 ▲ Auf dem Spielplatz

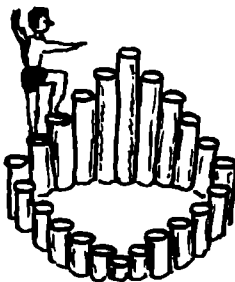


Bild 13

Wieviel Meter Stammholz wurden zum Bau der abgebildeten Kletteranlage ben鰖tigt, wenn angenommen wird, daß jeder Stamm 15 cm k체rzer als sein l채ngerer Nachbarstamm ist, daß die L채nge des sichtbaren Teils des l채ngsten Stammes 1,85 m betr채gt und daß jeder Stamm 65 cm tief im Erdboden verankert ist? Von Schnittverlusten sei abgesehen.

▲ 18 ▲ Mit der LVZ

$$L + V + Z = L \cdot V \cdot Z$$

Bild 14

Ersetzt die Buchstaben L, V und Z so durch verschiedene einstellige nat체rliche Zahlen, daß eine wahre Gleichung entsteht!

▲ 19 ▲ Fragen zur Stadt Leipzig

1. In welchem Jahr begeht die Stadt Leipzig ihre 825-Jahr-Feier?

2. Wieviel Prozent des gesamten Stadtgebietes nimmt der Leipziger Stadtkern ein?

3. Am Leipziger Hauptbahnhof werden an 26 Bahnsteigen und 5 Auenbahnsteigen t채glich (etwa) 265 ankommende und (etwa) ebenso viele abfahrende Fernz체ge abgefertigt. Zur Messezeit kommen am Tag noch (etwa) 55 ankommende oder abfahrende Sonderz체ge hinzu. Wie viele Zugankunfte und Zugabfahrten finden insgesamt (etwa) w채hrend einer 7t채gigen Messe auf dem Leipziger Hauptbahnhof statt?

4. Um wieviel Meter ist das Universit채ts-hochhaus (Uni-Riese) h鰖her als
 - a) das Wohnhochhaus am Hauptbahnhof,
 - b) das V鰖lkerschlachtdenkmal,
 - c) das Versicherungs-Hochhaus am Karl-Marx-Platz?

5. Die Orgel im *Großen Saal* des Leipziger *Gewandhauses* hat 6 650 Orgelpfeifen, von denen die gr鰖te 9,5 m und die kleinste 8 mm mit. Nimmt man die L채nge der kleinsten Orgelpfeife als L채ngeneinheit, ließe sich dann die L채nge der gr鰖ten Orgelpfeife durch eine ganzzahlige Anzahl von L채ngeneinheiten ausdr체cken?

6. Wie viele Jahre betrug die Bauzeit f체r das Leipziger V鰖lkerschlachtdenkmal?

7. F체r den Bau des Leipziger V鰖lkerschlachtdenkmals waren 12 500 m³ Beuchaer Granitporphyr zu brechen und in 26 500 Bl鰖cke unterschiedlicher Gr鰖e zu hauen. Wie gr鰖 w채re das durchschnittliche Volumen eines solchen Granitblockes?

8. Im Jahre 1983 verzeichnete der Leipziger Zoo 1 246 500 Besucher, darunter 1 316 Dauerkarteninhaber. Wieviel Prozent der Besucher waren Inhaber einer Dauerkarte?

9. Der Tierbestand des Leipziger Zoo betrug am 31. 12. 1983:

133 Arten S채ugetiere (Affen, Raubtiere, Huftiere u. a.) mit 1 036 Individuen, 213 Arten V鰖gel mit 627 Individuen, 93 Arten Kriechtiere mit 213 Individuen, 15 Arten Lurche mit 45 Individuen, 248 Arten Fische mit (etwa) 3 000 Individuen und 22 Arten Wirbellose mit (etwa) 500 Individuen. Wie viele Tierarten mit wie vielen Individuen waren das insgesamt?

▲ 20 ▲ alpha-Arithmetik

- (1) $a + l + p - h - a = a$
- (2) $a + l \cdot p - h - a = l$
- (3) $a \cdot l \cdot p - h + a = p$
- (4) $a + l \cdot p - h + a = h$
- (5) $a - l - p + h + a = a$

Bild 15

Ermittelt alle nichttrivialen L鰖sungen des vorgelegten Gleichungssystems!

alpha-Wettbewerb Wer löst mit?

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1985



Mathematik

Alle Aufgaben der Klassenstufen 5 bis 7 wurden von *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*, zusammengestellt.

Ma 5 ■ 2550 Die Summe zweier natürlicher Zahlen a und b beträgt 8. Multipliziert man den Vorgänger von a mit dem Nachfolger von b , so erhält man
a) 0, b) 12, c) 16.

Gib für jede Aufgabe alle Lösungen an!

Ma 5 ■ 2551 Ein Paket wurde verschnürt. Von allen sechs Seiten des Paketes sieht die Verschnürung so aus, wie es das Bild zeigt. Die längere Seite des Paketes ist 40 cm, die kürzere 25 cm lang. Das Paket ist 25 cm hoch. Wieviel Zentimeter Schnur wurde gebraucht, wenn für die Knoten auch noch 10 cm Schnur benötigt wurden?



Ma 5 ■ 2552 Ulf hat einen Holzwürfel mit der Kantenlänge 20 cm. Parallel zu einer Seitenfläche wird der Würfel zersägt. Der erste Teilkörper hat nun ein Volumen von 5600 cm^3 .

a) Gib die kürzere Kantenlänge des zweiten Teilkörpers an!
b) Welche Oberfläche hat der erste Teilkörper?

Ma 5 ■ 2553 Im *alpha*-Wettbewerb 1980/81 wurden insgesamt rund 93 000 Lösungen eingesandt und begutachtet. Die meisten Einsendungen waren zu den Aufgaben aus Heft 5; dort waren es 7 000 mehr als zu den Aufgaben aus Heft 2. Bei Heft 1 waren es 2 000 mehr als bei Heft 6, und bei Heft 2 waren 4 000 weniger als bei Heft 6. Wie viele Einsendungen zu den Aufgaben jedes dieser vier Hefte gab es jeweils?

Ma 5 ■ 2554 Anke, Bernd, Christian und Dirk sind Schüler ein und derselben Klasse. Jeder von diesen vier Schülern ist entweder 10 Jahre oder 11 Jahre alt. Auf einem Pionernachmittag sollen Gäste das Alter jedes dieser vier Schüler auf einen Tipzetteln schreiben. Gib alle Möglichkeiten an, die getippt werden könnten! Fertige dazu eine Tabelle an!

Ma 5 ■ 2555 Aus den neun Grundziffern 1 bis 9 sollen drei dreistellige ungerade Zahlen so gebildet werden, daß die Summe aus diesen drei Zahlen möglichst groß wird.

a) Gib ein Beispiel für diese drei Zahlen an!
b) Wie lautet die Summe?
c) Gib alle Möglichkeiten für den größten dieser drei Summanden an!

Ma 6 ■ 2556 Untersuche, für welche Grundziffern a, b, c sich aus dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} 1981 \\ + a b a b \\ + 1982 \\ + a a c c \\ \hline 8888 \end{array}$$

eine richtig gelöste Additionsaufgabe ergibt!

Ma 6 ■ 2557 Frank hat ein Aquarium. Es ist innen 0,9 m lang und 30 cm breit. Alle 14 Tage erneuert er einen Teil des Aquariumwassers. Wie viele 6-Liter-Kannen voll Wasser hat er dem Aquarium entnommen, wenn der Wasserspiegel um 2 dm gesunken ist?

Ma 6 ■ 2558 Von drei Holzkisten A, B und C weiß man, daß Kiste B doppelt und Kiste C dreimal so schwer ist wie Kiste A . Legt man in Kiste B noch 15 kg und in Kiste C halb so viel Altpapier, dann sind beide Kisten gleich schwer. Wieviel Kilogramm Altpapier muß man nun in Kiste A legen, damit diese auch so schwer wie die beiden anderen wird?

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1984/85 läuft von Heft 5/1984 bis Heft 2/1985. Zwischen dem 1. und 10. September 1985 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/85 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1984/85 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

	Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 Kersting-OS, Klasse 7	Ma 7 1369
30	150	
	Prädikat:	
	Lösung:	

Ma 6 ■ 2559 Jens baut aus Baukastenwürfeln eine quadratische Umzäunung. Betrachtet er eine Außenseite dieses Zaunes, so liegen sechs Würfel nebeneinander in einer Reihe. Mache dir eine Skizze!

- Aus wieviel Würfeln besteht dieser Zaun?
- Wieviel Würfelflächen sind insgesamt sichtbar?
- Aus wieviel Würfeln würde solch ein Zaun bestehen, wenn 156 Würfelflächen zu sehen wären?

Ma 6 ■ 2560 Aus den neun Grundziffern 1 bis 9 sollen drei dreistellige gerade Zahlen so gebildet werden, daß ihre Summe möglichst groß wird.

- Wie lautet die Summe? Gib dazu ein Beispiel an!
- Wie lauten die drei Zahlen, wenn jede durch 3, aber nicht durch 7 teilbar sein soll? Weise nach, daß nur eine Lösung existiert!

Ma 7 ■ 2561 Ein oben offener Pappkarton faßt ein Volumen von 144 dm^3 . Die eine Grundkante ist doppelt so lang wie die andere. Der Karton ist 2 dm hoch.

- Berechne die Länge der beiden Grundkanten!
- Zeichne das Netz (die Oberfläche) dieses Kartons!
- Berechne seine Oberfläche!

Ma 7 ■ 2562 Von fünf Körpern A, B, C, D, E weiß man, daß sie zusammen 44 kg ergeben. Die Körper A, B, C sind mit den Körpern D und E im Gleichgewicht. A, B, C, E ergeben zusammen 36 kg; A und B sind mit C und E im Gleichgewicht. Ferner sind A und D zusammen im Gleichgewicht mit E. Welche Masse hat jeder der fünf Körper?

Ma 7 ■ 2563 Vermindert man die Summe der Größen zweier Außenwinkel eines Dreiecks um 180° , so erhält man die Winkelgröße desjenigen Innenwinkels, der nicht Nebenwinkel dieser Außenwinkel ist. Führe den Nachweis für die Wahrheit dieser Aussage!

Ma 7 ■ 2564 Gesucht ist eine vierstellige natürliche Zahl z. Faßt man ihre Grundziffern als Zahlen auf, so soll gelten:

- Sowohl die Summe aus den ersten beiden als auch die aus den letzten beiden Zahlen beträgt 10.
- Die dritte Zahl ist viermal so groß wie die vierte.
- Die zweite Zahl ist gleich der Summe aus der ersten und dritten Zahl.

Ma 8 ■ 2565 Von drei Lehrern einer Schule mit den Familiennamen Schröter, Voigt und Müller, die jeweils genau zwei der Fächer Biologie, Chemie, Geschichte, Englisch, Russisch bzw. Deutsch unterrichten, sei folgendes bekannt:

- Herr Voigt ist mit dem Geschichtslehrer verwandt.
- Herr Schröter, der Deutschlehrer und der Russischlehrer fahren oft mit dem Auto in die Schule.
- Herr Schröter ist kein Geschichtslehrer.

(4) In der Freizeit spielen Herr Müller, der Chemielehrer und der Biologielehrer Fußball.

(5) Herr Schröter und der Chemielehrer haben einen Garten.

(6) Herr Voigt hilft dem Deutschlehrer beim Hausbau.

Welche Fächer unterrichtet jeder dieser drei Lehrer?

Schülerin P. Hahn, Nordhausen

Ma 8 ■ 2566 Stellt man in einer dreistelligen natürlichen Zahl mit der Quersumme 9 die dritte Grundziffer an den Anfang, so nimmt die Zahl um 135 zu. Wie heißt die Zahl?

Sch.

Ma 8 ■ 2567 Es ist zu beweisen, daß die Maßzahl der Diagonalenlänge c in einem Quadrat mit der Seitenlänge b stets dann eine natürliche Zahl ist, wenn b die Diagonalenlänge eines Quadrates mit der Seitenlänge a und die Maßzahl von a eine natürliche Zahl ist!

Schwartz, Ilmenau

Ma 8 ■ 2568 Gegeben sei ein Kreis k , dessen Durchmesser 18 cm lang ist. Parallel zu einem Durchmesser sei eine Sehne im Abstand von 3 cm gezeichnet. Es ist die Länge s dieser Sehne zu berechnen.

Schüler M. Hanke, Gräfenhainichen

Ma 9 ■ 2569 Für welche natürliche Zahl n ergibt die Summe $1 + 2 + 3 + \dots + n$ aus den ersten von Null verschiedenen n natürlichen Zahlen eine dreistellige natürliche Zahl mit gleichen Ziffern?

Sch.

Ma 9 ■ 2570 Folgender Satz ist zu beweisen:

Multipliziert man das Quadrat der Summe der reziproken Werte zweier positiver reeller Zahlen mit deren Produkt, so erhält man eine Zahl, welche niemals kleiner als 4 ist.

Student A. Fittke, Berlin

Ma 9 ■ 2571 Ein Schwimmbecken hat vier Wasserzuführungen verschiedener Leistungen. Die erste Zuführung füllt das Becken allein in genau einem Tag, die zweite würde allein 2 Tage, die dritte allein 3 Tage und die vierte allein 6 Tage benötigen, um das Becken zu füllen. In welcher Zeit würde das Becken gefüllt, wenn alle Zuführungen gleichzeitig laufen?

Schüler K. Pickert, Plauen

Ma 9 ■ 2572 In einem regelmäßigen Sechseck $ABCDEF$ sind A, C, E miteinander verbunden. Es ist zu beweisen, daß jede Höhe des Dreiecks ACE zu zwei Sechseckseiten parallel ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■ 2573 Man denke sich drei von Null und untereinander verschiedene Grundziffern und bilde daraus alle möglichen dreistelligen natürlichen Zahlen. Es ist zu beweisen, daß die Summe aller dieser Zahlen stets durch 74 teilbar ist.

J. Grundmann, z. Z. NVA

Ma 10/12 ■ 2574 ABC sei ein beliebiges Dreieck. Die Maßzahlen der Seitenlängen a, b, c seien in der angegebenen Reihenfolge die einzigen Glieder einer geometri-

schen Zahlenfolge mit dem Quotienten $q = \frac{4}{3}$. Wie groß ist der größte Winkel in diesem Dreieck?

Ch. Bittner, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 2575 Zeichnen Sie ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 6 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ und $c = 5 \text{ cm}$. Legen Sie auf $\overline{AC}$ einen inneren Punkt D so fest, daß $\overline{AD}$ die Länge $e = 1 \text{ cm}$ hat. Durch den Punkt D ist eine Gerade g zu zeichnen, die die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt E so schneidet, daß die Gerade g die Fläche des Dreiecks ABC halbiert. Welche Länge muß $\overline{BE}$ besitzen?

Sch.

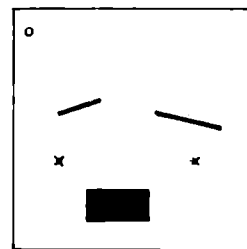
Ma 10/12 ■ 2576 Einem Kreis mit einem Radius der Länge 3,5 cm werde ein regelmäßiges Zehneck einbeschrieben.

- Welche Länge hat die Seite des Zehnecks?
- Um wieviel Prozent ist die Länge des Zehneckumfangs kleiner als die des Kreisumfangs?
- Um wieviel Prozent ist der Flächeninhalt des Zehnecks kleiner als der des Kreises?

Schülerin P. Hahn, Nordhausen

Physik

Ph 6 ■ 176 Das Bild stellt im Grundriß zwei punktförmige Lichtquellen dar. Male alle Schattengebiete mit Bleistift aus! Alle Lichtgebiete bleiben weiß, die Halbschatten zeichnet man am besten grau und die Kernschatten schwarz.

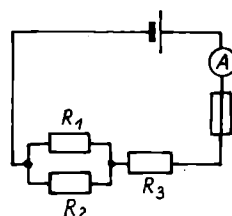


Ph 7 ■ 177 Otto von Guericke benutzte für seinen Versuch mit den Magdeburger Halbkugeln zwei Halbkugeln mit je 57,5 cm Durchmesser. Berechne die gesamte Druckkraft, mit der diese bei normalem Luftdruck von 1013 mbar zusammengepreßt werden!

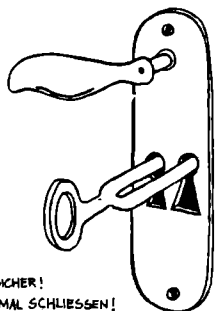
Ph 8 ■ 178 Drei elektrische Geräte sind nach dem folgenden Schaltbild zusammengeschaltet.

Es liegt eine Spannung von 50 V an, und die Geräte haben folgende Daten: $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $R_3 = 150 \Omega$. Das Amperemeter hat einen Widerstand von 1Ω . Reicht zur Absicherung eine 250-mA-Sicherung, oder ist eine von 300 mA nötig?

K. Seliger, Greiz



Ph 9 ■ 179 Die Schwerpunkte zweier Körper mit gleicher Masse seien 1 Meter voneinander entfernt. Berechnen Sie die Masse der beiden Körper, wenn sie sich mit einer Kraft von einem Newton anziehen!



SICHER IST SICHER!
...IMMER ZWEIMAL SCHLIESSEN!

Ph 10/12 ■ 180 Auf einem Sportplatz trainiert ein Hammerwerfer und erreicht bei einem Wurf eine Wurfweite von 57,83 Meter. Im Augenblick des Abwurfs hatte der Bahnkreis des Wurfhammers einen Durchmesser von 4 Metern, und die Umlauffrequenz des Hammers auf der Kreisbahn betrug $f = 1,9$ Umläufe pro Sekunde. Wie groß war der Abwurfwinkel? Der Luftwiderstand ist nicht zu berücksichtigen.

Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie

Ch 7 ■ 141 Für die Herstellung von 67 kg Kupfer(II)-oxid, welches einen Reinheitsgrad von 97% besitzen soll, verwendet man 195,6 kg Silberoxid und 62,3 kg Kupfer. Berechne

a) mengenmäßig, b) prozentmäßig den Unterschied zwischen den eingesetzten Mengen an Ausgangsstoffen gegenüber den stöchiometrischen Mengen!

Ch 8 ■ 142 Ein zylindrischer Tank, welcher einen Durchmesser von 1,5 m und eine Länge von 5,5 m besitzt, soll mit 46,3%iger Schwefelsäure ($\rho = 1,360 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1}$) gefüllt werden. Diese Säure ist durch Mischen einer 89,2%igen ($\rho = 1,810 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1}$) Schwefelsäure mit einer 38%igen ($\rho = 1,285 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1}$) Schwefelsäure herzustellen. Wieviel Tonnen der stärkeren und der schwächeren Säure müssen zu diesem Zweck ausgewogen werden?

Ch 9 ■ 143 In einem Behälter mit einem Fassungsvermögen von 100 m³ wird Abwasser zur Reinigung aufbewahrt. Der Säuregehalt des Abwassers entspricht einer 5%igen Schwefelsäure ($\rho_{\text{H}_2\text{SO}_4} = 1,031,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

a) Wieviel Tonnen Magnesia müssen in dem Behälter verrührt werden, um das Abwasser zu reinigen?
b) Wieviel Tonnen Salz müssen aus dem Behälter abgesaugt werden?

Ch 10/12 ■ 144 1,3 t Schwefelkohlenstoff sollen vollständig zu Tetrachlormethan umgesetzt werden. Die Reaktion verläuft stufenweise.

1. Stufe: Schwefelkohlenstoff + Dischwefeldichlorid $\rightarrow$ Tetrachlormethan + Schwefel.

(Dabei werden nur 58% Schwefelkohlenstoff umgesetzt.)

2. Stufe: Schwefelkohlenstoff + Chlor $\rightarrow$ Tetrachlormethan + Dischwefeldichlorid.

Zu berechnen ist

a) die Gesamtmasse des entstehenden Tetrachlormethans in Tonnen,
b) die Masse des in der 1. Stufe nicht umgesetzten Schwefelkohlenstoffs in Tonnen,
c) die Menge Chlor in Tonnen, die benötigt wird, um den in der 1. Stufe nicht umgesetzten Schwefelkohlenstoff zu chlorieren.

Fortsetzung von S. 34

B) Berechnung nach Formel (3);

Tastenfolge (s. Bild 6)

Wir erhielten damit als untere bzw. obere Schranken für den Umfang des Einheitskreises

n	untere Schranke	obere Schranke
6	6.	6.928 203 2
12	6.211 657 2	6.430 780 5
24	6.265 257 3	6.319 319
48	6.278 700 9	6.292 169 2
96	6.282 068 6	6.285 415 4
192	6.282 919 5	6.283 709
384	6.283 183 5	6.283 127 4
12 288	6.385 032 1	6.084 502 2
49 152	6.951 142 5	0

Tabelle 3

Ihr bemerkt, daß für $n \geq 384$ etwas nicht stimmen kann, weil die untere Schranke größer als die obere Schranke ist. Nehmen wir nämlich an, daß wir exakt gerechnet haben, müßte z. B. $6.283 18 < 2\pi < 6.283 13$ sein, schließlich gar $6.95 < 2\pi < 0$, was ganz offensichtlich falsch ist. Übrigens ist die Seitenlänge des umbeschriebenen 98 304 ecks nach der Rekursionsformel (3) nicht berechenbar, da hierzu eine Division durch 0 auszuführen wäre. Der SR 1 gibt uns dies durch den Buchstaben E (error) auf seiner Anzeigevorrichtung an.

Wir hoffen, daß ihr noch viel Freude mit eurem Taschenrechner und an der Mathematik haben werdet. Wir empfehlen euch als Literatur:

1. Kreul, Was kann mein elektronischer Taschenrechner? Leipzig, 1981
2. Kreul, Programmierbare Taschenrechner, Leipzig 1980
3. Schumny, Taschenrechner Handbuch, Teubner-Verlag, 1978
4. Hirschfeld, Computer für die Westentasche, alpha 6, 1981

W. Schmidt/L. Wenzel



Hundert Jahre Nullmeridian und Greenwich-Zeit

Die Beschreibung von Punkten der Erdoberfläche durch geographische Koordinaten (Länge und Breite) geht schon auf die Antike zurück. Während jedoch die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes durch Beobachtung der Mittagshöhe der Sonne keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, ist die Bestimmung der geographischen Länge prinzipiell schwieriger, da infolge der Erdumdrehung alle auf einem Breitenkreis liegenden Punkte der Erde in gewissem Sinne gleichberechtigt sind. So weist die Karte der sich um das Mittelmeer gruppierenden damals bekannten Welt des griechischen Geographen, Astronomen und Mathematikers *Klaudios Ptolemaios* (um 80 bis um 160) zwar relativ genaue Breitenwerte auf, jedoch eine erhebliche Vergrößerung der Längendifferenzen gegenüber der Wirklichkeit. (Das so ins Mittelalter falsch überlieferte Weltbild täuschte dem Kolumbus und seinen Zeitgenossen eine viel zu geringe Entfernung vor Europa in Richtung Westen nach China und Indien vor, ermutigte somit wesentlich zur Fahrt des Kolumbus und bestärkte ihn in seinem Glauben, Teile von Indien entdeckt zu haben.)

Mit zunehmender Hochseeschifffahrt wurde das Problem der Längenbestimmung immer wichtiger. Eine erste Methode bestand darin, bestimmte astronomische Ereignisse, z. B. die Position des Mondes relativ zu benachbarten Sternen, deren Eintreten für einen bestimmten Ort der Erde (im folgenden als *Eichort* bezeichnet) im voraus bekannt war, am Ort unbekannter Länge zu beobachten und aus der Zeitdifferenz auf die Längendifferenz zum Eichort zu schließen. (Eine Stunde Zeitdifferenz entspricht 15° Längendifferenz.) Man kann heute einschätzen, daß dieser Anwendungsbereich der Astronomie ihr nächst der unwissenschaftlichen Astrologie über mehr als 1000 Jahre hin als stärkstes Motiv gedient hat. (Dies bezieht sich auf die *mathematische* oder *Positionsastronomie*, die sich nur mit den Bewegungsabläufen auf der gedachten *Himmelskugel*, aber nicht mit der physikalischen Beschaffenheit der Himmelskörper, ihren tatsächlichen Entfernungen usw. beschäftigt.)

Zur Förderung der britischen Seefahrt wurde 1675 das *Königliche Observatorium* in Greenwich nahe London gegründet, dessen erstes Gebäude der bedeutende Architekt und Mathematiker *Christopher Wren* (1632 bis 1723) entwarf. Nach dem ersten Direktor dieses Observatoriums, *John Flamsteed* (1646 bis 1719), wird dieses Gebäude als *Flamsteed House* (Flamsteed-Haus) bezeichnet.



Eine britische Briefmarke (Bild), die 1975 zum 300. Jahrestag der Eröffnung erschien, zeigt dieses traditionsreiche Gebäude mit dem charakteristischen achteckigen Turm, dessen hohe Fenster möglichst ungehinderte astronomische Beobachtung ermöglichen sollten. Das Observatorium von Greenwich spielte als wissenschaftliches Zentrum für Fragen der Positionsastronomie, der Längenbestimmung auf See und der damit zusammenhängenden Zeitmessung über Jahrhunderte eine bedeutende Rolle. Es diente allen britischen Schiffen als Eichort im oben beschriebenen Sinn. Ein entscheidender Fortschritt in der eigentlichen Kernfrage der exakten und zugleich praktikablen Längenbestimmung konnte jedoch zunächst nicht erzielt werden. Noch 1752 waren nur von rund 150 Orten der Erde die geographischen Längen relativ zum Greenwich-Meridian einigermaßen genau bekannt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß astronomische Messungen auf schwankenden Schiffen und bei häufig ungünstigen Wetterverhältnissen nur mit geringer Genauigkeit und oft gar nicht ausführbar waren.

Der berühmte britische Entdecker *James Cook* (1728 bis 1779) bemerkte anlässlich seiner ersten Reise, daß kleine Inseln gar nicht erst in die Karten eingetragen werden sollten, da sie auf Grund der ungenauen Positionsangaben meist nicht wiedergefunden werden konnten. Es kam jedoch infolge der ungenügend entwickelten kartographischen und navigatorischen Methoden auch zu spektakulären Mißerfolgen und Schiffskatastrophen der britischen Seekriegsflotte. Daher setzte das britische Parlament 1714 den für damalige Zeiten ungeheuren Preis von 20 000 Pfund Sterling für Fortschritte in der Längenbestimmung aus, die eine praktische Genauigkeit von mindestens 0,5 Grad garantieren würden. Daraufhin erfaßte weite Teile der britischen Bevölkerung ein regelrechtes *Längenfieber*. Wie zeitgenössische Literatur und Graphik eindrucksvoll dokumentieren, wurde sogar unter Gefängnisinsassen, Geistlichen, Schulkindern und Glücksrittern aller Art über diese Frage eifrigst nachgedacht und diskutiert. Teile des Prei-

ses wurden später an den deutschen Astronomen *Tobias Mayer* (1723 bis 1763) für seine sehr präzisen Tafeln der Mondbewegung, an *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) für seine Theorie der Mondbewegung und an den britischen Uhrmacher *John Harrison* (1693 bis 1796) vergeben, der ab 1735 durch wesentliche konstruktive Verbesserungen an den mechanischen Uhren eine solche Ganggenauigkeit erreichte, daß seine *Chronometer* (Time Keeper) erstmals das *Mitnehmen der Ortszeit des Eichortes* auf längeren Schiffsreisen und damit einen von astronomischen Beobachtungen unabhängigen Vergleich mit der jeweiligen Ortszeit ermöglichten. Eines seiner Chronometer soll in 161 Tagen nur um 5 s von der wahren Greenwich-Zeit abgewichen sein. *James Cook*, der noch auf seiner ersten Reise auf die *Mondmethode* geschworen hatte, nahm auf seiner zweiten Reise 1772 bis 1775 im Auftrag der britischen Regierung erstmals vier Chronometer mit, um sie im praktischen Gebrauch zu erproben, und erzielte damit hervorragende Ergebnisse. (Nach der Erfindung der drahtlosen Telegraphie bzw. des Funks wurde es möglich, jederzeit an jedem Ort den Vergleich mit der Greenwich-Zeit durchzuführen. Damit blieb die Methode der Zeitdifferenzen bis zur Einführung der Satellitennavigation Sieger im Kampf um höchste Genauigkeit, und auch heute hat sie ihre

praktische Bedeutung noch nicht ganz verloren.)

Es ist nun weiter zu bemerken, daß bis in die zweite Hälfte des 19. Jh. jeder Ort seine eigene Ortszeit hatte. Mit der Entwicklung eines großräumigen Verkehrswesens, insbesondere der Eisenbahnen, wurde diese Situation immer unerträglicher. Es wurden viele uns heute kurios und umständlich erscheinende Techniken entwickelt, Beziehungen zwischen verschiedenen lokalen Zeitrechnungen herzustellen bzw. eine Landeszeit durch optische und andere Signale möglichst schnell und genau zu übertragen. Um 1870 tauchte erstmals in den USA der Vorschlag auf, die Erde in Zeitzonen von je 15 Grad des Erdumfanges einzuteilen und in jeder dieser Zonen eine einheitliche Zeit festzulegen, so daß sich die Zeiten verschiedener Zonen nur um volle Stunden voneinander unterscheiden. Wo aber sollte man eine solche international einheitliche Zeit- und Längenmessung beginnen? Dies war unter den damaligen politischen Verhältnissen vor allem eine Prestigefrage für die Großmächte. Im Oktober 1884 trat in Washington eine *Internationale Konferenz zur Fixierung eines einheitlichen Nullmeridians* zusammen, an der Vertreter aus 25 Ländern (bezeichnenderweise meist Diplomaten, aber nur wenige wissenschaftlich-technische Spezialisten) teilnahmen. Zu diesem Zeitpunkt gab es

Der weiße Kreidestreifen im Park von Greenwich (im Hintergrund das alte Königliche Observatorium) markiert den Nullmeridian



Nullmeridiane u. a. durch Greenwich, Paris, Pulkowo bei Petersburg, Neapel, Cadix, Stockholm, Lissabon, Kopenhagen, Rio de Janeiro. Insbesondere die Franzosen, die sich mit den großen Gradmessungsexpeditionen des 18. Jh. und dem 1795 gegründeten Pariser Längenbüro große Verdienste um die Erforschung der geometrischen Gestalt der Erde und ihre Vermessung erworben hatten, kämpften in Washington erbittert um ihren ebenfalls traditionsreichen Pariser Meridian, der 1672 von dem berühmten Astronomen G. D. Cassini (1625 bis 1712) fixiert worden war. Daß schließlich doch der Nullmeridian von Greenwich von allen Teilnehmern akzeptiert wurde, bewirkte die Statistik: Es konnte nachgewiesen werden, daß zu diesem Zeitpunkt 65% aller Schiffe, die die Weltmeere befuhren, Seekarten auf der Basis des Greenwich-Meridians benutzten.

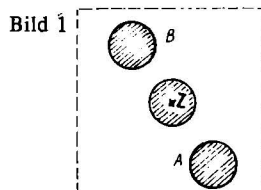


Zum 100. Jahrestag dieser internationalen Vereinbarung gab die britische Post 1984 vier Sondermarken heraus, die den Verlauf unseres Nullmeridians über die Erdkugel, quer durch Frankreich und Großbritannien, durch das Gelände des alten Observatoriums von Greenwich und schließlich durch die Mittellinie des dort befindlichen Zenitteleskops zur Bestimmung des Mittagsthroughgangs der Sonne zeigen. (Zwei davon zeigen wir im Bild.) Es bleibt zu erwähnen, daß die astronomischen Aufgaben des Observatoriums von Greenwich heute zum größten Teil in einem modernen, an einem günstigeren Ort gelegenen Institut durchgeführt werden, während ein Teil des alten Flamsteed House heute das nationale britische Meeresmuseum beherbergt, in dem viele wichtige Sachzeugen der hier skizzierten Entwicklung, u. a. die von Cook mitgeführten Chronometer, aufbewahrt werden.

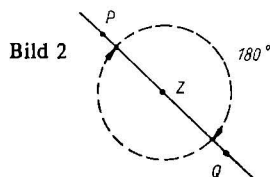
P. Schreiber

Zentral-symmetrie

Zwei Jungen E und J sitzen an einem kleinen Tisch mit quadratischer Tischplatte und warten auf ihre Bestellung. Auf dem Tisch liegt ein großer Stapel mit kreisförmigen Untersetzern (Bierdeckel), so daß alle diese Untersetzer ausreichen würden, um mehr als die ganze Tischfläche zu bedecken. Um sich die Wartezeit zu verkürzen, spielen die Jungen E und J das folgende Spiel: Abwechselnd legt jeder einen Untersetzer auf den Tisch, ohne daß dieser einen anderen überdeckt. Wer zuerst keinen Platz mehr auf dem Tisch findet, hat das Spiel verloren. E legt den ersten Untersetzer auf den Mittelpunkt Z des Tisches. Danach legt J einen Untersetzer A. Als nun E einen Untersetzer B so legt, daß er dem Bild 1 von A bei der Drehung um den Punkt Z mit 180° entspricht, gibt J nach kurzem Überlegen das Spiel als verloren auf.



Der Junge E hat die Zentralsymmetrie des Quadrats für eine Gewinnstrategie genutzt. Er kann immer bei einem Zug von J einen dazu bezüglich Z zentralsymmetrisch liegenden Platz zum Legen eines Untersetzers finden. Der Junge J steht schließlich einmal vor der Situation, keinen Platz mehr zu finden, um den nächsten Untersetzer auf die Tischplatte zu legen. Der springende Punkt bei diesem Spiel war also der Punkt Z. Man nennt eine ebene Figur F symmetrisch bezüglich des Punktes Z und Z ein Symmetriezentrum der Figur F, wenn bei der Drehung der Ebene um Z mit 180° die Figur auf sich abgebildet wird.



Bei der Drehung um Z mit 180° ist leicht einsichtig: Der Punkt Q ist das Bild des Punktes P ($P \neq Z$) dann und nur dann, wenn Z der Mittelpunkt von PQ ist (Bild 2). Des-

halb ist die Bezeichnung *Spiegelung* an Z für diese Abbildung durchaus treffend. Man prüfe einmal selbst die Figur F in dem Bild 3 auf eine derartige Symmetrie. Außer Quadraten, Rechtecken und Kreisen, bei denen eine Zentralsymmetrie offensichtlich vorliegt, gibt es eine Fülle weiterer zentralsymmetrischer Figuren. Ein Dreieck ABC dagegen kann nicht zentralsymmetrisch sein. Denn wäre eine Ecke Symmetriezentrum, etwa A, so wäre A Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$. Und gäbe es ein von den Ecken verschiedenes Symmetriezentrum, so müßte die Anzahl der Ecken gerade sein, da Ecken in Ecken übergehen müssen. In jedem Falle ergibt sich also ein Widerspruch!

Aufgabe 1

Ein regelmäßiges n-Eck ($n \geq 3$) ist zentralsymmetrisch dann und nur dann, wenn n gerade ist. (Das Symmetriezentrum ist dann der Mittelpunkt des Umkreises des n-Ecks.)

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Vierecke zentralsymmetrisch sind. Nach dem Ergebnis der Aufgabe 1 gilt dies wenigstens für das Quadrat; auch für ein Rechteck ist dies leicht einsichtig.

Aufgabe 2

Ein nicht überschlagenes¹⁾ Viereck ABCD ist zentralsymmetrisch genau dann, wenn es ein Parallelogramm ist.

Im Heft 4/1984 der alpha haben wir die Axialsymmetrie betrachtet. Damit ergibt sich die naheliegende Frage, ob die eine Art der Symmetrie die andere zur Folge haben könnte.

Die Frage läßt sich leicht beantworten. Unsere eingangs betrachtete (zentralsymmetrische) Figur (Bild 3) sowie ein (axialsymmetrisches) regelmäßiges Dreieck (vgl. Aufg. 1) zeigen, daß ein solcher Schluß in keiner von beiden Richtungen gilt. Bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist aber die folgende Eigenschaft 1.

Bild 3

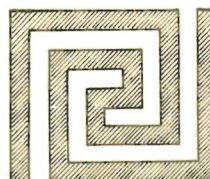
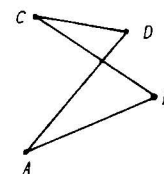


Bild 4



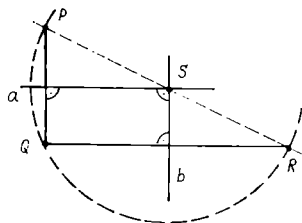
Eigenschaft 1

Besitzt eine Figur F zwei Symmetrieachsen a und b, die senkrecht zueinander sind, dann ist ihr Schnittpunkt S ein Symmetriezentrum von F.

Zum Beweis betrachten wir einen beliebigen Punkt P, der nicht auf den Geraden a und b liegt (Bild 5). Es sei Q das Bild von P bei der Spiegelung an der Geraden a und R das Bild von Q bei der Spiegelung an b. Dann ist a die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ und b die Mittelsenkrechte von $\overline{QR}$.

Wegen $a \perp b$ ist $\triangle PQR$ ein rechter Winkel. Da in jedem rechtwinkligen Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises (dann auch Thaleskreis genannt) mit dem Mittelpunkt der Hypotenuse zusammenfällt, muß S (als Schnittpunkt von a und b und damit Mittelpunkt des Umkreises) der Mittelpunkt von $\overline{PR}$ sein. Der Punkt P hat also bei der Nacheinanderausführung der Geradenspiegelungen an a und b das gleiche Bild wie bei der Punktspiegelung an S . Dies gilt – wie man leicht erkennt – auch für die übrigen Lagen von P (d. h., wenn P auf a oder b liegt).

Bild 5



Nach Voraussetzung wird die Figur F bei jeder der Spiegelungen an a bzw. b , also auch bei der Nacheinanderausführung der Spiegelungen an a und b auf sich abgebildet. Diese Nacheinanderausführung ist aber, wie sich zeigte, gleich der Spiegelung an S . Also ist S ein Symmetriezentrum von F , was zu zeigen war.

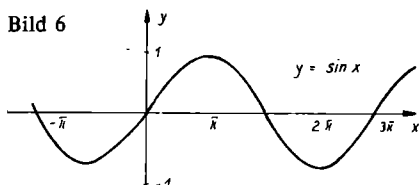
Hinsichtlich der Vierecke ist bekannt (vgl. *alpha* Heft 3/1984), daß für ein Rhombus bzw. für ein Rechteck charakteristisch ist, daß die beiden Diagonalen zueinander senkrechte Symmetrieachsen bzw. die Mittelsenkrechten zweier aufeinanderfolgender Seiten zueinander senkrechte Symmetrieachsen des Vierecks sind. Damit ergibt sich folgende Übersicht über zentralsymmetrische Vierecke:

Die folgenden Überlegungen sind etwas schwieriger. Man darf sie auch überspringen, sollte aber die Aufgaben 3, 4 und 5 als Abschluß des Artikels noch lösen.

Aufgabe 3

Man bestimme die Symmetriezentren des Graphen der Sinusfunktion (Bild 6)! Übrigens liegen in dieser Figur die Symmetriezentren nicht auf den Symmetrieachsen.

Bild 6



Während eine Figur F mehrere, aber endlich viele Symmetrieachsen haben kann (siehe regelmäßiges n -Eck), ist dies bezüglich der Anzahl der Symmetriezentren anders:

Eigenschaft 2

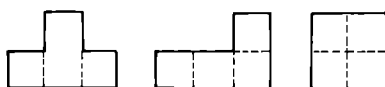
Hat eine Figur F (wenigstens) zwei Symmetriezentren, dann besitzt sie unendlich viele.

Sind nämlich Z_1 und Z_2 zwei Symmetriezentren der Figur F , dann wird F sowohl bei der Spiegelung an Z_1 als auch an Z_2 auf sich abgebildet. Es sei Z_3 das Bild von Z_1 bei der Spiegelung an Z_2 . Nun geht die bzgl. Z_1 symmetrische Figur F bei der Spiegelung an Z_2 in eine Figur F' über, die zum Bild Z_3 von Z_1 symmetrisch sein muß. Wegen $F = F'$ ist also die Figur F bzgl. eines weiteren Punktes Z_3 symmetrisch. Auf diese Weise kann man mit Z_1 und Z_3 ein weiteres Zentrum Z_4 finden usw. (Man veranschauliche sich diesen Sachverhalt anhand der Figur in Bild 6!) Der Nachweis, daß diese so gefundene Zentren alle voneinander verschieden sind, macht einige Mühe, kann aber mit der Methode der vollständigen Induktion erbracht werden.

Aufgabe 4

Das Bild 7 zeigt drei Figuren, die jeweils aus 4 Einheitsquadraten zusammengesetzt sind. Von diesen Figuren stehen jeweils 8 zur Verfügung. Man soll nun mit einem Teil dieser Figuren ein 8×8 -Felder-Schachbrett so überdecken, daß eine zentralsymmetrische Parkettierung entsteht.

Bild 7



Aufgabe 5

Das Bild 8 zeigt ein Tapeten- (oder Wand-) Muster. Man bestimme seine Symmetriezentren. (Es enthält übrigens keine Symmetrieachsen!)

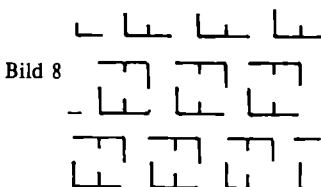
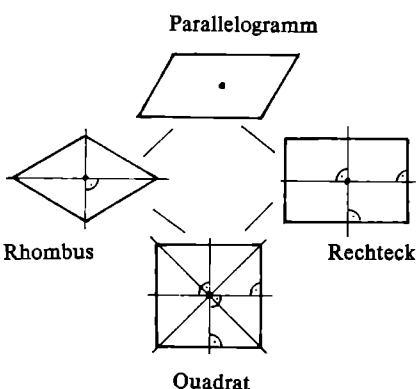


Bild 8

E. Quaisser/H.-J. Sprengel

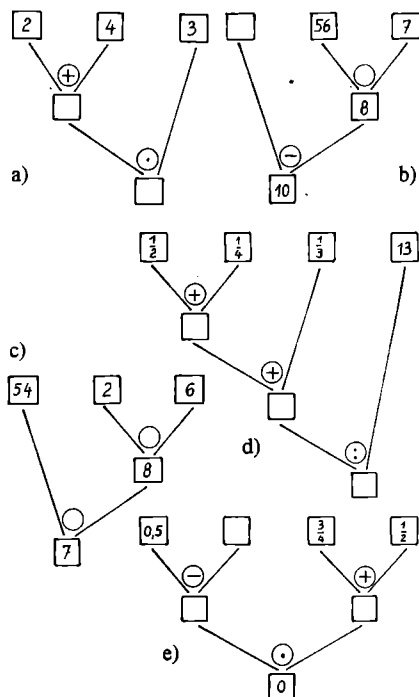
¹⁾ Ein Viereck heißt *überschlagen*, wenn sich zwei seiner gegenüberliegenden Seiten schneiden (siehe Bild 4).

Übersicht



Rechenbäume

▲ 1 ▲ Fülle die Leerstellen aus! Gib jeweils den zu berechnenden Term an!



▲ 2 ▲ Stelle für folgende Terme einen Rechenbaum auf! Berechne jeweils den Wert des Terms!

a) $2 + 3 \cdot 4$; b) $43 - 9 : \left(\frac{1}{4}\right)$ L. Flade

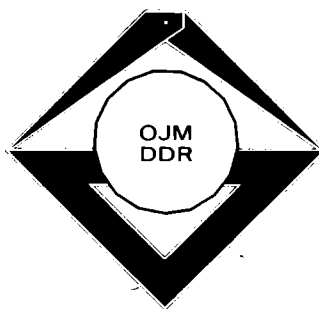
Verleihung der Ehrenplakette der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR · 1984

In Anerkennung hervorragender wissenschaftlich-pädagogischer Leistungen, die sich durch einen hohen Grad theoretischer Verallgemeinerung und Praxiswirksamkeit auszeichnen, und für besondere Verdienste bei der Entwicklung der marxistisch-leninistischen Pädagogik wurde die Ehrenplakette auf einem Festakt an 13 Kollektive bzw. Einzelpersonen verliehen.

Im September dieses Jahres wird der Schultaschenrechner in Klasse 7 eingeführt. Das Forschungskollektiv zur Leitung der Untersuchungen für die Einführung elektronischer Taschenrechner in die allgemeinbildende Schule erhielt die Ehrenplakette. Ihm gehören an: Prof. Dr. sc. paed. Werner Walsch als Leiter, Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg, Dr. paed. Dieter Amberg, Institut für berufliche Entwicklung, Berlin, Ingenieurökonom Rolf Bergt, VEB Mikroelektronik Mühlhausen, Dr. paed. Lothar Flade, Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg, Waldemar Herrmann, Joliot-Curie-OS Merseburg, Oberlehrer Kurt Paul, Ernst-Schneller-Oberschule (EOS) Meißen.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade



Olympiadeklasse 5

240521 Harald will an der Wandzeitung über die rege Freizeitbeschäftigung der Pioniere Marion, Petra und Ruth berichten.

Ihm ist bekannt:

- (1) Jedes der drei Mädchen betreibt genau eine der Sportarten Schwimmen, Tischtennis, Volleyball. Jede dieser drei Sportarten wird von einem der drei Mädchen betrieben.
- (2) Marion liest in ihrer Freizeit außerdem gern Abenteuerbücher, die Volleyballspieler aber nicht.
- (3) Die Volleyballspielerin beschäftigt sich dagegen gern mit Mathematik, sie hat bei der letzten Mathematik-Olympiade mehr Aufgaben richtig gelöst als Petra.
- (4) In der Russisch-Olympiade hat Marion besser abgeschnitten als die Tischtennispielerin.

Beweise, daß die Verteilung der drei Sportarten auf die drei Mädchen durch die Angaben (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist! Welches Mädchen betreibt welche Sportart?

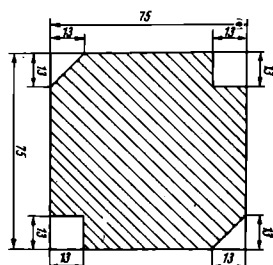
240522 In einem metallverarbeitenden VEB werden verschiedene Einzelteile produziert. Dazu werden vier Maschinen eingesetzt; mit jeder Maschine wird eine Sorte dieser Einzelteile hergestellt.

Die Ergebnisse einer Schicht waren folgende:

Es wurden insgesamt 4320 Teile hergestellt, und zwar auf der ersten Maschine ein Drittel der 4320 Teile, auf der zweiten Maschine ein Fünftel der 4320 Teile. Auf der dritten Maschine wurden ebenso viele Teile hergestellt wie auf der vierten Maschine.

Berechne für jede der vier Maschinen die Stückzahl der auf dieser Maschine hergestellten Teile!

240523 Die abgebildete schraffierte Fläche entsteht aus einem Quadrat, indem



man von ihm zwei Dreiecke und zwei Quadrate abschneidet.

Berechne aus den in Millimeter angegebenen Längen den in Quadratzentimeter gemessenen Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

240524 Peter berichtet: „Ich habe eine natürliche Zahl aufgeschrieben. Eine zweite natürliche Zahl habe ich aus der ersten durch Anhängen einer Ziffer 0 gebildet. Die Summe der beiden Zahlen beträgt 3058.“

Beweise, daß man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, welche Zahl Peter als erste Zahl aufgeschrieben hat! Gib diese Zahl an!

Olympiadeklasse 6

240621 Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:

- (1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.
- (2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.
- (3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.
- (4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.

Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

240622 Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm werden rot angestrichen. Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.

Wie viele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen? (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

240623 Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.

Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.

Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwi-

schen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

240624 Rita experimentiert mit einer Balkenwaage. (Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)

Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:

- (1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.
- (2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.
- (3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.
- (4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.

Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat:

„Wie viele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?“

Beweise, daß man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne daß ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?

Olympiadeklasse 7

240721 Drei Ehepaare sitzen zum Romméspiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:

- (1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.
- (2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.
- (3) Anton sitzt neben seiner Frau.
- (4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.

Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

240722 Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.

a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!

b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:

Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m.

Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.

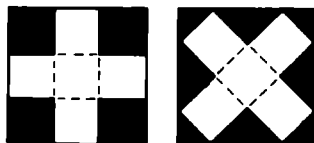
Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

240723 Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden

von $\angle BAD$ und $\angle CBA$ auf der Seite CD liegt.

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!

240724 Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in dem Bild zur Diskussion gestellt. Beide Netze sind so angeordnet, daß die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.



Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (im Bild schwarz) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

Olympiadeklasse 8

240821 Klaus berichtet über alle Tage seines Aufenthaltes im Ferienlager:

(1) An jedem Vormittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.

(2) An jedem Nachmittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.

(3) An genau sieben Tagen kam regnerisches Wetter vor.

(4) Wenn es nachmittags regnete, war es vormittags sonnig.

(5) An genau fünf Nachmittagen war es sonnig.

(6) An genau sechs Vormittagen war es sonnig.

Stelle fest, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, eindeutig ermitteln läßt! Ist dies der Fall, so gib diese Anzahl an! Gib ferner eine (nach den Angaben) mögliche Verteilung sonniger und regnerischer Vor- und Nachmittage an!

240822 Es sei ABC ein Dreieck; die Größe des Winkels $\angle BAC$ betrage 30° .

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC ist!

240823 Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen x , die die Ungleichung

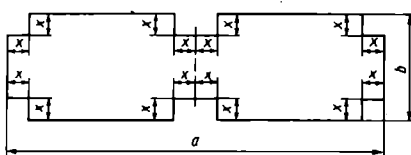
$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11}$$

erfüllen!

240824 Eine Blechtafel hat die im Bild ersichtliche Gestalt, wobei a , b und x gegebene Längen sind. Die Tafel soll längs der gestrichelten Linie in zwei Teile zerlegt werden, und aus jedem Teil soll dann ein oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe x hergestellt werden.

1. Berechne das Volumen eines solchen Kastens, wenn $a = 360$ mm, $b = 120$ mm, $x = 25$ mm gegeben sind!

2. Ermittle das Volumen eines solchen Kastens, dargestellt in Abhängigkeit von Variablen a , b und x , die (wegen ihrer Bedeutung als Längen) nur positive Werte annehmen können!



3. Es seien beliebige positive Werte a und b fest vorgegeben. Ermittle in Abhängigkeit von diesen a , b alle diejenigen Werte für die Variable x , mit denen es möglich wird, Kästen der genannten Art herzustellen!

Olympiadeklasse 9

240921 Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.

Anke behauptet: „Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden läßt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben.“

Bertold behauptet: „Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden läßt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben.“

Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

240922 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x mit $x \neq 5$, für die

$$\frac{x}{5-x} < 4$$

gilt.

240923 Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte E und F , die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite BC zwischen B und C liegen, gelte

$$\frac{BE}{EF} = \frac{FC}{BC}$$

Die Gerade durch A und E sei g , die Gerade durch D und F sei h , der Schnittpunkt von g und h sei S .

Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten A , B , C , D , E , F , S , die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck EFS gleichseitig ist!

240924 Beweisen Sie: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, wobei nur $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, so ist die Zahl

$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

Olympiadeklasse 10

241021 Ermitteln Sie alle diejenigen Quadrupel (a, b, c, d) von reellen Zahlen a ,

b , c , d , die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen!

$$a^2 + bc = 0, \quad (1)$$

$$ab + bd = 0, \quad (2)$$

$$ac + cd = 0, \quad (3)$$

$$bc + d^2 = 0. \quad (4)$$

241022 Von einem Dreieck ABC wird vorausgesetzt, daß es nicht stumpfwinklig ist und daß für die zu AB senkrechte Höhe CD die Gleichung

$$\overline{CD} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

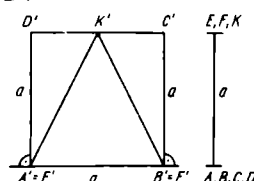
gilt.

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen die Größe γ des Innenwinkels $\angle ACB$ eindeutig bestimmt ist! Ermitteln Sie diese Winkelgröße γ !

241023 Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen z , für die folgendes gilt:

Streicht man aus der Zifferndarstellung von z die letzte Ziffer, so entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl, die ein Teiler von z ist.

241024 Das Bild stellt den Grundriß eines Körpers in senkrechter Eintafelprojektion sowie den dazugehörigen Höhenmaßstab dar. Dabei ist K' der Mittelpunkt von $C'D'$.



Zeigen Sie, daß es mindestens zwei ebene, flächig begrenzte Körper mit unterschiedlichem Volumen gibt, die diesen Grundriß, diesen Höhenmaßstab und genau die hierdurch festgelegten Punkte A , B , C , D , E , F , K als Eckpunkte haben!

Als Lösung genügt die Aufzählung von (mindestens zwei) Körpern der verlangten Art durch folgende Angaben: Jeweils eine Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion, eine Aufzählung seiner sämtlichen Seitenflächen (in der Schreibweise, daß $UV \dots Z$ dasjenige ebene Vieleck bezeichnet, das genau die Ecken U , $V, \dots, Z$ hat, die bei einer Umlaufung in dieser Reihenfolge erreicht werden) und eine Berechnung des Volumens des Körpers in Abhängigkeit von der gegebenen Länge a .

Olympiadeklassen 11/12

241221 Es sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, für die $a_1 = 2$

$$\text{und } a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ gilt.}$$

a) Berechnen Sie a_2 und a_3 , und beweisen Sie, daß $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt!

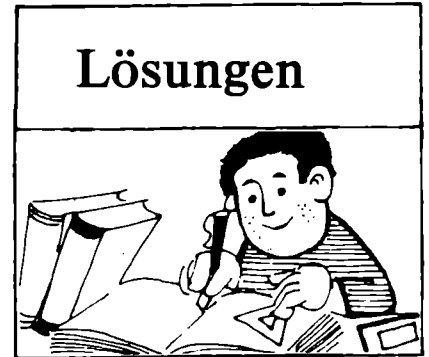
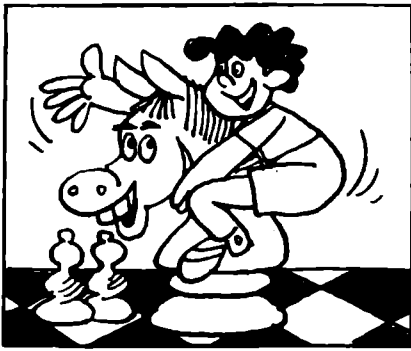
b) Beweisen Sie, daß die Folge (a_n) streng monoton fallend ist!

241222 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy, \quad (1)$$

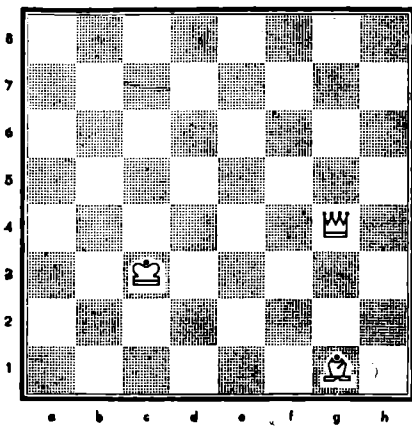
$$(x + y)^2 = 36. \quad (2)$$

(Fortsetzung: S. 48)



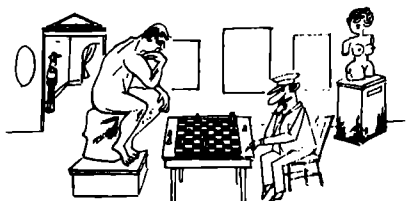
Problemkomponist und Knobelmeister

Samuel (Sam) Loyd (30.1.1841 bis 10.4.1911) zählt zu den berühmtesten aller Schachproblemkomponisten. Seine Schachaufgaben sind an Originalität, Phantasie und Witz unübertroffen und haben bis heute nichts von ihrem eigentümlichen Reiz eingebüßt. Loyd beschäftigte sich aber nicht nur mit Schachproblemen, sondern er war auch ein eifriger Erfinder von mathematischen Denkspielen, Rätseln und Gesellschaftsspielen. Davon konnte man sich schon im *alpha*-Heft 3/1983 überzeugen, als das Fünfehnernspiel vorgestellt wurde, welches er erfand. Unsere heutige Schachaufgabe stammt von ihm.



Zu dem abgebildeten Diagramm sind drei Fragen zu beantworten:

1. Auf welchem Feld muß der schwarze König gestellt werden, auf dem er patt ist?
2. Auf welchem Feld muß der schwarze König gestellt werden, auf dem er matt ist?
3. Auf welchem Feld muß der schwarze König gestellt werden, auf dem er in einem Zuge mattgesetzt werden kann? H. Rüdiger



▲1▲ Трудно поверить, что оранжевый резиновый „крендель“, охватывающий железное кольцо обеими своими „ушками“ (рисунок слева сверху), можно так деформировать, не разрезая и не склеивая, что он будет охватывать кольцо лишь одним ушком (как показано сверху справа). Но это действительно можно сделать, если разрешается „крендель“ сжимать, раздувать и растягивать. Как? Если не сообразите сами, посмотрите раздел „Ответы, указания, решения“.

Естественно возникает желание отцепить от кольца и второе ушко – ведь они равноправны! Однако отцепить оба ушка нельзя.

А теперь подумайте, можно ли распутать крендель с одним ушком, зацепленным за другое (рисунок внизу).

Bild 1a

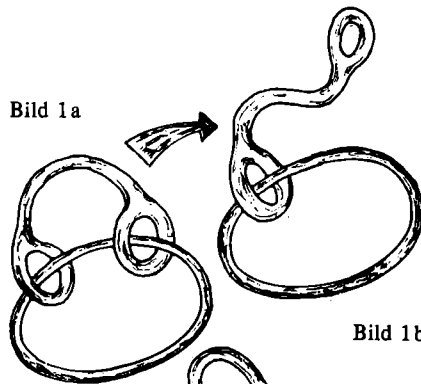


Bild 1b

Bild 2

A. II.

▲2▲ Determine all of the roots of the quartic equation $x^4 - 4x = 1$.

▲3▲ Un marchand a mélangé trois qualités de café de la façon suivante: 11 kg à 14 F le kg, 10 kg à 19,05 F le kg et 4 kg à 17 F le kg. A combien revient le kilogramme de mélange?

Lösungen

Lösungen zu: Für Köner
Heft 6/84, S. 137

● Aus (2) erhält man durch Radizieren

$$x + y = \sqrt{2}(x - y),$$

$$y = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot x = (\sqrt{2} - 1)^2 x. \quad (3)$$

In (1) eingesetzt, ergibt sich

$$\sqrt{x} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt{x} = x + x(\sqrt{2} - 1),$$

$$\sqrt{x} \cdot (2 - \sqrt{2}) = x \cdot \sqrt{2},$$

$$x(2 - \sqrt{2})^2 = 2x^2 \quad x \neq 0$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 = 2x,$$

$$x = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2} = 3 - 2\sqrt{2}. \quad (4)$$

Schließlich wird noch (4) in (3) eingesetzt.

$$y = (\sqrt{2} - 1)^2(3 - 2\sqrt{2})$$

$$y = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)(3 - 2\sqrt{2})$$

$$y = (3 - 2\sqrt{2})^2$$

$$y = 17 - 12\sqrt{2}.$$

■ Es gilt

$$21 + \sqrt{80} = 21 + 4\sqrt{5},$$

$$= 20 + 4\sqrt{5} + 1,$$

$$= (\sqrt{20} + 1)^2 = (2\sqrt{5} + 1)^2.$$

Dann ist

$$\sqrt{21 + \sqrt{80}} = (2\sqrt{5} + 1).$$

Weiterhin ist dann der Zähler

$$\sqrt{7 - (2\sqrt{5} + 1)}$$

$$= \sqrt{7 - 2\sqrt{5} - 1}$$

$$= \sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1} = \sqrt{5} - 1.$$

Für den Nenner gilt

$$\sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1$$

$$\text{und } \sqrt{7 + \sqrt{48}} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3 + 4\sqrt{3} + 4} = \sqrt{3} + 2.$$

Also ist $1 + (\sqrt{3} + 2) - (\sqrt{3} - 1) = 4$ und schließlich

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

(Die Aufgaben entstammen einem brasilianischen Schülerwettbewerb, Kl. 10 bis 12.)

Lösungen zu:

Spezialistenferienlager Mathematik
Heft 1/85

$$\Delta 1 \quad \sum_{i=385}^{409} n = 385 + 386 + \dots + 409$$

$$= \frac{25}{2} (385 + 409) = 9925; 9925 : 5 = 1985.$$

Die Summe lautet jeweils 1985.

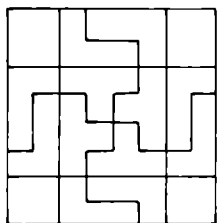
387	400	393	406	399
409	392	405	398	386
301	409	397	385	403
408	396	389	402	390
395	388	401	394	407

▲2▲ Aus einer Fülle von Material wählen wir aus

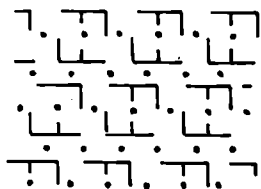
$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 9 + 8) \cdot 5 \\ 1 &= 1 + \sqrt{9} - 8 + 5 \\ 2 &= 1 + (9 - 8)^5 \\ 3 &= 1^9 \cdot 8 - 5 \\ 4 &= 1 - \sqrt[9]{8} + 5 \\ 5 &= 1 - 9 + 8 + 5 \\ 10 &= (1 + 9 - 8) \cdot 5 \\ 20 &= 1 + \sqrt{9} \cdot 8 - 5 \\ 116 &= -1 + 9 \cdot (8 + 5) \\ 150 &= (1 + 9) \cdot 8 \cdot 5! \end{aligned}$$

Lösungen zu: Zentralsymmetrie

Aufgabe 4: Eine mögliche Lösung:



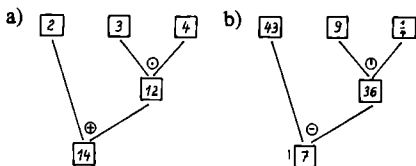
Aufgabe 5: Bei dem vorgegebenen Wandmuster liegen (bei unbegrenzter Ausdehnung) die Symmetriezentren so, wie im Bild angegeben:



Lösungen zu: Rechenbäume

- ▲1▲ a) $(2 + 4) \cdot 3$; b) $18 - 56 : 7$;
c) $54 : (2 + 6)$; d) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) : 13$;
e) $(0,5 - 0,5) \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)$

▲2▲



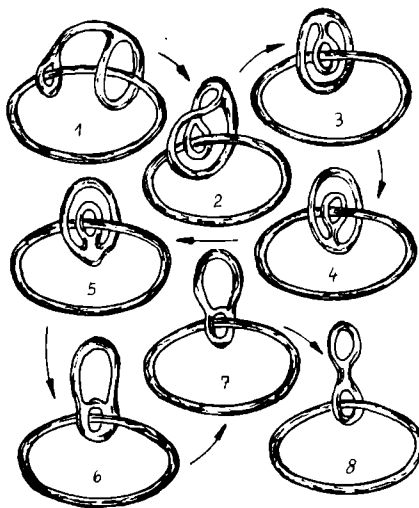
Lösungen zu:

Problemkomponist und Knobelmeister

- Auf dem Feld h1.
- Auf dem Feld e3.
- Auf dem Feld a8, und es erfolgt 1. Dc8 matt.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Es ist nur schwer vorstellbar, daß man die Gummibrezel, die den Eisenring mit ihren beiden Henkeln umschlingt (Bild 1a) so deformieren kann (ohne sie zu



zerschneiden oder aber zusammenzukleben), daß sie den Ring nur noch mit einem Henkel umfaßt (Bild 1b). Aber dies ist tatsächlich möglich, wenn es nur erlaubt ist, die Brezel beliebig stark zusammenzudrücken oder zu dehnen. Wie? Wenn ihr es nicht selbst schafft, so seht zu den Lösungen.

Natürlich entsteht der Wunsch, auch den zweiten Henkel vom Ring zu lösen, denn beide sind doch eigentlich gleichberechtigt. Aber das ist unmöglich! Überprüft jetzt, ob es möglich ist, eine Brezel zu entwirren, bei der ein Henkel in den anderen eingehakt ist (Bild 2)!

Lösung: Einen Henkel kann man so vom Ring ablösen, wie im Bild gezeigt wird. Auch die zweite Brezel läßt sich in die Form 8 bringen. (aus Quant 12/81)

▲2▲ Bestimme alle Wurzeln der Gleichung vierten Grades $x^4 - 4x = 1$!

Lösung: Man formt die Gleichung $x^4 - 4x = 1$ um in $x^4 = 4x + 1$ und ergänzt auf beiden Seiten $(+ 2x^2 + 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 1 &= 4x + 1 + 2x^2 + 1, \\ (x^2 + 1)^2 &= 2(x + 1)^2, \\ x^2 + 1 &= \pm \sqrt{2}(x + 1). \end{aligned}$$

Das ergibt die beiden quadratischen Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} &= 0 \\ \text{und } x^2 + \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2(2\sqrt{2} - 1)}$$

und

$$x_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-2(2\sqrt{2} + 1)}.$$

▲3▲ Ein Händler hat drei Sorten Kaffee auf folgende Weise gemischt: 11 kg zu 14 F das kg, 10 kg zu 19,05 F das kg und 4 kg zu 17 F das kg. Wieviel kostet ein Kilogramm der Mischung?

Lösung: Der Gesamtpreis der Mischung beträgt

$$11 \cdot 14 \text{ F} + 10 \cdot 19,05 \text{ F} + 4 \cdot 17 \text{ F} = 412,5 \text{ F}.$$

Dann kostet 1 kg dieser Mischung $412,5 \text{ F} : (11 + 10 + 4) = 412,5 \text{ F} : 25 = 16,5 \text{ F}$

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter
Kryptarithmetik, IV. Umschlagseite

- z. B. $2179 + 2179 = 4358$
- z. B. $3132 + 3732 = 6864$
- z. B. $42870 + 42837 = 85707$
- z. B. $7228 - 3614 = 3614$
- $531 : 9 = 59$
- $28^3 = 21952$; $\sqrt{50625} = 225$;
 $222 \cdot 222 = 49284$; $(43)^3 = 79507$
- $66 \cdot 111 = 7326$
- $8 \cdot 5 + 2 = 7$;
 $7 - 5 = 2$;
 $6 + 1 = 7$;
 $1 + 5 = 6$
- $99 + 1 = 100$
- $12 : 4 = 3$
- $98 - 89 = 9$
 $1 + 90 = 91$
- z. B. $172 + 60 + 34 + 513 + 35 = 814$
- 721
 $+ 212$

 933
- $3 \cdot 3 = 9$
 $4 \cdot 2 = 8$

 $7 - 6 = 1$
- $28 \cdot 7 = 196$; $28 : 4 = 7$;
 $7 + 7 = 14$; $196 : 14 = 14$
- $14 \cdot 6 : 7 = 12$; $8 \cdot 9 : 12 = 6$;
 $(11 + 5) : 4 = 4$; $(14 + 8) : 11 = 2$;
 $(6 + 9) : 5 = 3$; $7 + 12 - 4 = 15$
- $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$;
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$
- z. B. $286 + 923 = 1209$
- z. B. $4521 + 4521 + 4521 = 13563$
- $71568 + 71568 + 71568 = 214704$
- $16850 + 20640 = 37490$
- $82193 + 8364 = 90557$
- z. B. $37291 + 89250 = 126541$
- $111 \cdot 111 = 12321$
- z. B. $7425 + 3486 = 10911$
- $58015 + 65412 = 123427$
- $19845 + 628 = 20473$

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb

Heft 5/84, Fortsetzung

Ma 7 ■ 2475 Angenommen, es sind x Konserven Gänsefleisch, also $(50 - x)$ Konserven Schweinefleisch; dann gilt $5x + 3(50 - x) = 210$, $5x + 150 - 3x = 210$, $2x = 60$, $x = 30$. Es sind 30 Gänsefleisch- und 20 Schweinefleischkonserven.

Ma 7 ■ 2476 Es sei x die Anzahl der Schüler; dann gilt

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x,$$

$$14x + 7x + 4x + 84 = 28x, \text{ also } x = 28.$$

In der Schule des Pythagoras waren 28 Schüler.

$$\text{Ma 7 ■ 2477 } 200 \text{ t} \cdot \frac{80}{100} = 160 \text{ t};$$

$$300 \text{ t} \cdot \frac{90}{100} = 270 \text{ t}.$$

Die Erzeugung bester Qualität im ersten Halbjahr ist in Prozenten ausgedrückt

$$P = \frac{100 \cdot (160 + 270)}{200 + 300} \% = 86 \%.$$

Der Anteil von Erzeugnissen bester Qualität im ersten Halbjahr betrug 86%.

Ma 7 ■ 2478 Angenommen, der Student war zum Zeitpunkt der Befragung x Jahre alt; dann gilt
 $2 \cdot (x - 4) = x + 10$,
 $2x - 8 = x + 10$, $x = 18$.
 Zum Zeitpunkt der Befragung war der Fachschulstudent 18 Jahre alt.

Ma 8 ■ 2479 Angenommen, die Fabrik beschäftigte x Männer, also $(1440 - x)$ Frauen. Prämiiert wurden $\frac{x}{100} \cdot 18 \frac{3}{4}$
 $= \frac{75x}{400}$ Männer und $\frac{1440 - x}{100} \cdot 22 \frac{1}{2}$
 $= \frac{45(1440 - x)}{200}$ Frauen sowie 20% aller

Werkstätigen; das sind $\frac{1440}{100} \cdot 20 = 288$ Personen.

Nun gilt
 $\frac{75x}{100} + \frac{45(1440 - x)}{200} = 288$, also $x = 960$.
 In dieser Fabrik waren 960 Männer und 480 Frauen beschäftigt.

Ma 8 ■ 2480 Es sei x die Höhe der Knickstelle des Baumrumpfes; dann gilt
 $x + (x - 4,3) = 14,5$, $2x = 18,8$,
 also $x = 9,4$.

Der Baum wurde in einer Höhe von 9,4 m geknickt.

Ma 8 ■ 2481 Bei einer achttündigen Arbeitszeit werden in einer Stunde $\frac{x}{8}$ der Erzeugnisse und bei gleicher Arbeitsproduktivität werden in sieben Stunden $\frac{7}{8} \cdot x$ Erzeugnisse hergestellt. Darum gilt

$$p = \frac{100 \cdot \frac{7}{8} \cdot x}{x} \% = 87,5 \%$$

Die Produktion würde um 12,5% absinken.

Ferner gilt

$$p = \frac{100 \cdot \frac{x}{7}}{\frac{x}{8}} \% = 114,3 \%$$

Die Arbeitsproduktivität müßte um 14,3% ansteigen, damit die Produktion nicht absinkt.

Ma 8 ■ 2482 Möge bis zum Zusammenreffen der Zeiger der Stundenzeiger x Minutenteilstriche des Ziffernblattes weitergerückt sein; dann rückt der Minutenzeiger in der gleichen Zeit $(45 + x)$ Minutenteilstriche weiter. Da der Stundenzeiger in der gleichen Zeit $\frac{1}{12}$ der Bahn des Minutenzeigers zurücklegt, gilt:

$$x = \frac{45 + x}{12}, \text{ also } x = 4 \frac{1}{11}$$

Der Minutenzeiger erreicht den Stundenzeiger in $49 \frac{1}{11}$ min.

Ma 9 ■ 2483 Es sei x die Anzahl der 40-W- und y die der 75-W-Glühlampen; dann gilt
 $40x + 75y = 2500$ und $x + y = 45$,
 also $y = 45 - x$.

Durch Einsetzen erhalten wir
 $40x + 75 \cdot (45 - x) = 2500$,

$$8x + 15 \cdot (45 - x) = 500,$$

$$8x + 675 - 15x = 500,$$

$$7x = 175, \text{ also } x = 25 \text{ und somit } y = 20.$$

Für die Beleuchtung des Arbeitsplatzes sind 25 Glühlampen mit 40 Watt und 20 Glühlampen mit 75 Watt Leistung erforderlich.

Ma 9 ■ 2484 Ein konvexes n -Eck besitzt $\frac{1}{2}n(n - 3)$ Diagonalen.

Nun gilt

$$\frac{1}{2}n(n - 3) - 13 = \frac{1}{2}(n - 2)(n - 5),$$

$$n(n - 3) - 26 = (n - 2)(n - 5),$$

$$n^2 - 3n - 26 = n^2 - 5n - 2n + 10,$$

$$4n = 36, \text{ also } n = 9.$$

Ein konvexes 9eck hat 13 Diagonalen mehr als ein 7eck.

Ma 9 ■ 2485 Der kleinere Würfel habe die Kantenlänge x , der größere somit $x + 22$ cm. Nun gilt

$$6 \cdot (x + 22)^2 - 6x^2 = 19272,$$

$$(x + 22)^2 - x^2 = 3212,$$

$$x^2 + 44x + 484 - x^2 = 3212,$$

$$44x = 2728, \text{ also } x = 62.$$

Die Würfel haben die Kantenlängen 62 cm und 84 cm.

Ma 9 ■ 2486 Angenommen, vor Beginn der ersten Fahrt befanden sich x Liter Kraftstoff im Tank. Während der ersten Fahrt wurden $\frac{x \cdot 20}{100} = \frac{x}{5}$ Liter verbraucht.

Im Tank verblieb ein Rest von $\frac{4x}{5}$ Liter.

Während der zweiten Fahrt wurden $\frac{10 \cdot 4x}{100 \cdot 5} = \frac{2x}{25}$ verbraucht. Nun gilt

$$x - \frac{x}{5} - \frac{2x}{25} = 9, 25x - 5x - 2x = 225,$$

$$18x = 225, \text{ also } x = 12,5.$$

Vor Beginn der ersten Fahrt befanden sich 12,5 Liter Kraftstoff im Tank.

Ma 10/12 ■ 2487 Die Maßzahlen der Längen der Katheten seien x und $x + 2$; nach dem Satz des Pythagoras gilt dann

$$x^2 + (x + 2)^2 > 10^2,$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 100 > 0,$$

$$2x^2 + 4x - 96 > 0,$$

$$x^2 + 2x - 48 > 0,$$

$$(x + 8)(x - 6) > 0,$$

Fallunterscheidung:

a) $x + 8 > 0$ und $x - 6 > 0$ ergibt $x > -8$ und $x > 6$, also $x > 6$.

b) $x + 8 < 0$ und $x - 6 < 0$ ergibt $x < -8$ und $x < 6$; entfällt, da es kein Dreieck ergibt.

Die Katheten müssen länger als 6 cm bzw. 8 cm sein.

Ma 10/12 ■ 2488 Es sei $z = 100a + 10b + c$. Dann gilt $a^2 + b^2 + c^2 = 45$ und $a + b + c = 11$. Ferner gilt

$$100a + 10b + c - 198 = 100c + 10b + a,$$

$$99a - 99c = 198, a - c = 2, \text{ also } c = a - 2.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$a + b + (a - 2) = 11,$$

$$2a + b = 13 \text{ und somit } b = 13 - 2a.$$

Daraus folgt weiter

$$a^2 + (13 - 2a)^2 + (a - 2)^2 = 45,$$

$$a^2 + 169 - 52a + 4a^2 + a^2 - 4a + 4 - 45 = 0,$$

$$6a^2 - 56a + 128 = 0,$$

$$a^2 - \frac{28}{3}a + \frac{64}{3} = 0, a_1 = \frac{16}{3} \text{ (entfällt, da}$$

nicht ganzzahlig), $a_2 = 4$.

Daraus folgt $b = 13 - 8 = 5$ und $c = 4 - 2 = 2$. Die gesuchte Zahl ist 452.

Ma 10/12 ■ 2489 Ein konvexes n -Eck besitzt $\frac{1}{2}n(n - 3)$ Diagonalen.

Es gilt die Ungleichung

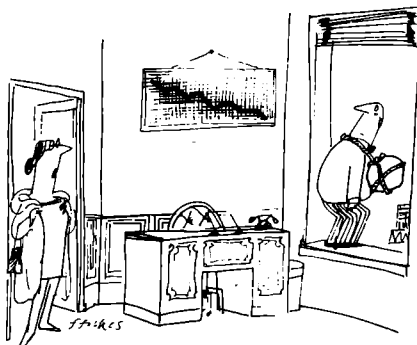
$$\frac{1}{2}(n - 3) \cdot n \geq 2n, \text{ und wegen } n \neq 0 \text{ gilt}$$

$$\frac{1}{2}(n - 3) \geq 2, n - 3 \geq 4, n \geq 7.$$

Die gesuchten n -Ecke haben mindestens 7 Seiten.

Ma 10/12 ■ 2490 Angenommen, der ursprüngliche Preis betrug x Mark. Nach der Steigerung um 10% betrug der Warenpreis $(x + \frac{10x}{100})$ M. Nach der Senkung um 10% betrug der Warenpreis nunmehr $(\frac{11x}{10} - \frac{11x}{10} \cdot \frac{10}{100})$ M. = $\frac{99x}{100}$ M.

Das entspricht 99% des ursprünglichen Preises. Der Warenpreis sank um 1% des ursprünglichen Wertes.



„Aber Herr Professor, es müßte doch noch eine andere Möglichkeit geben, die Gesetze des freien Falls zu studieren.“

Fortsetzung von S. 45:

241223 Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ gibt, so daß für

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gilt!

241224 a) Beweisen Sie, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen a, b, c und die Höhenlängen h_a, h_b, h_c die Ungleichung

$$3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4 \cdot (h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \quad (1)$$

gilt! b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!

Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklassen 5 bis 10 veröffentlichen wir im Heft 3/85, d. Red.

alpha-Wettbewerb 1983/84

Abzeichen in Gold

Für siebenjährige Teilnahme

Frank Schönherr, Anklam; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Heike Eckardt, Bad Liebenstein; Beate Weber, Bernburg; Holger Neye, Susanne Krüger, Kerstin Kantiem, Andris Möller, Berit Kleinbauer, alle Berlin; Peter Rößler, Bischofs-
werda; Uta Bolz, Andreas Heinze, beide Cottbus; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Wolfgang Tenor, Dessau; Ines Lauter, Heiko Ringel, Gerald Eichler, Pedro Thiele, Kerstin Urban, alle Dresden; Una Heinicke, Eisenberg; Stefan Nitzsche, Elsterwerda; Lars Mönch, Erfurt; Jens Wacker-
mann, Falkenberg; Jan-Martin Hertzsche, Gering-
swalde; Ingolf Hintzsche, Gräfenhainichen; Ulrike Brandenburg, Greifswald; Sonnfried
Lätsch, Görlitz; Birgit Seifert, Hagenow; Annett
Eichner, Halle-Neustadt; Heidrun Schmidt,
Hoyerswerda; Andreas Paukert, Karbow; Norbert
Neumann, Kleinmachnow; Andreas Helbig, Lan-
genleuba-N.; Frank Herzog, Langenwolschen-
dorf; Uta und Sabine Mersowsky, Langewiesen;
Solveig Woitek, Leinefelde; Ralf Laue, Petra Pol-
ster, beide Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Jens
Grundmann, Limbach-O.; Jörg Ladendorf, Lüb-
theen; Norbert Fuchs, Meiningen; Hagen Haber-
land, Mesekenhagen; Sven Saar, Mühlhausen;
Uwe Knispel, Neuburxdorf; Ralf Heidenreich,
Roßleben; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Frank
Zöllner, Sondershausen; Andreas Pypic, Sonne-
berg; Erhard Zilinske, Stralsund; Ralf Gössinger,
Unterbreizbach; Irene Michallik, Waren; Stefan
und Margret Boettcher, Thomas Weiß, Dirk Leh-
mann, alle Weimar; Annett Seidel, Agnes Jor-
zick, beide Wismar; Erika Schreiber, Kerstin Bar-
thelmes, beide Zella-Mehlis; Mathias Goltzsche,
Zschopau; Steffen Hoffmann, Potsdam; Uwe
Prochnow, Halle

Für sechsjährige Teilnahme

Anka Sommer, Augsdorf; Stefan und Beate Mül-
ler, Steffen Padelt, Jens Prochno, Reinhard We-
gener, Steffen Meißner, Norbert Dorn, Cornelia
Wolf, alle Berlin; Jörg Leine, Berlestadt; Heidrun
Boldt, Burg Stargard; Christian Sitz, Calau; Man-
fred Roßius, Jens Leberwurst, Andreas Stenzel,
alle Cottbus; Ramona Blank, Clingen; Uwe Mar-
tin, Crossen; Jörn Fache, Culitzsch; Bert Kühne,
Dahme; Christiane Nolte, Dingelstädt; Jens
Fuchs, Dahme; Rolf Dach, Oliver Geupel, Mi-
chael Nitzsche, Annegret Wustmann, Stefan Ma-
tausch, Helmut und Carsten Schreiber, Silke Rie-
chen, Thomas Hübner, Matthias Winkler, alle
Dresden; Steffen Patzschke, Droyßig; Bert
Minske, Eberswalde; Elke Sühnholz, Erfurt; Tho-
mas Nicklisch, Falkenberg; Annett Helbig,
Frankfurt/O.; Henry Mäder, Froburg; Ingolf
Thurm, Gößnitz; Karsten Sonnemann, Grabow;
Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Jutta und
Uta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Ho-
henstein-E.; Peter Hermann, Hoyerswerda; Clau-
dia Docter, Ilsenburg; Sebastian Horbach, Carla
Umlauf, beide Karl-Marx-Stadt; Friedhelm Rei-
chert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen;
Gert Künzelmann, Krina; Steffen Heyde, Lat-
dorf; Petra Gollewsky, Matthias Hübner, Bernd
Fucke, alle Leipzig; Glen Stachowski, Löbau; Ek-
kehard Ludwig, Lüthmannsdorf; Michael Seidel,
Leuna; Anja Voß, Neustadt; Thomas Engelhardt,
Niederschwarzenberg; Tibor Leitz, Parchim; Hel-
mut Schenk, Pirna; Katja Uhlemann Prausitz;
Klaus-Peter Lindner, Rackwitz; Irma Goßmann,
Rheinsberg; Sven Hader, Schlötheim; Winfried
Ullrich, Babette Müller, beide Schmalkalden;

Ronald Kaiser, Schleid; Ralf Stentzel, Schwar-
zenberg; Delia Wolfert, Söllichau; Susanne Krie-
ger, Sömmerda; Matthias Herrmann, Schwerin;
Heidi Böttger, Sondershausen; Bernd Urbanek,
Spremburg; Helmut Sauerbrei, Suhl; Armin Sin-
ger, Teichwolframsdorf; Silvia Reinwarth, Tel-
tow; Evelin Schott, Thalheim; Wolfram Fischer,
Torgau; Lars Brückner, Vacha; Uta Michallik,
Waren; Claudia Tiersch, Weimar; Horst Rib-
mann, Wesenberg; Klaus Michel, Wismar; Ralph
Bock, Wolfen; Anja Häfner, Achim Gratz, beide
Steinbach-Hallenberg; Mike Dröbler, Marion
Nemczak, Kerstin Kowaczek, alle Zschornewitz;
Annette Schubert, Schalkau; Mike Selig, Stau-
chitz

Für fünfjährige Teilnahme

Beatrice List, Wolfgang Beukert, Ralf Beukert,
alle Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach;
Geertje Maeß, Bad Doberan; Ines Tappe, Mat-
thias Tittel, R.-Birk Schulze, Clemens Thielecke,
Thorsten Brandt, Yvonne Selke, alle Berlin; Eber-
hard Balzer, Bernburg; Frank-Jürgen Schwerin,
Grit Giering, beide Blumberg; Peter Sitz, Calau;
Michael Enig, Crimmitschau; Andreas Donau-
bauer, Dahlen; Sebastian und Markus Vockrodt,
Dingelstädt; Michael Rühling, Bernd Miethig,
beide Dresden; Mario Thiel, Eilsleben; Matthias
Voigt, Eisenach; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt;
Martina Helms, Erfurt; Rainer Fabianski, Fal-
kensee; Peter und Ulrich Wenschuh, Falkenstein;
Ulf Winkler, Frankenberg; Frank und Udo
Schulte, Freienbessingen; Thomas Brahmman,
Freital; Ute Frank, Forst; Holger Groß, Gnoien;
Andreas Funk, Volker Pohl, beide Greifswald;
Karsten Seliger, Greiz; Ragna Siol, Maike Thiele,
beide Grimma; Jörg Blaurock, Guben; Beate
Thomas, Andrea Fiedler, beide Halle; Christina
Schmerling, Beate Kaczmarek, Antje Hüttig, alle
Halle-Neustadt; Ralf Schlenker, Horst; Heidi Ko-
narski, Hohenbuckow; Silke Umbreit, Ilmenau;
Ines Wagenknecht, Ivenack; Henrik Hodam, Kal-
tennordheim; Annette Maier, Volker Liebert,
Gert Reifarth, Michael Tix, Michael und Jürgen
Hoppe, Grit Lohse, alle Karl-Marx-Stadt, Ute
Studzinski, Kietz; Susan Hoffmann, Klingenthal;
Silke Winzek, Annette und Simone Kauert,
Kathleen Henrich, alle Langenweddingen; Ka-
rola Funke, Harald Röhrig, beide Leinefelde;
Uwe Werner, Michael Weber, beide Leipzig;
Frank Schönbach, André Gaertner, beide Lössau;
Frank-Thorsten Bötter, Mühlhausen; Janett
Eckart, Naundorf; Andreas Suchanow, Neubran-
denburg; Kathrin Massanek, Neusornitz; Antje
Flehsig, Obercrinitz; Michael Herrmann, Ober-
lichtenau; Henning Hetzer, Oettersdorf; Kai
Leitz, Michael Taeschner, beide Parchim; Steffen
Scheithauer, Parey; Jeanette Stahnke, Pasewalk;
Antje Reichel, Pirna; Dorit Grüke, Pritzwalk;
Andreas Jöstel, Radebeul; Nils Grotian, Ribnitz;
Lutz Marschner, Riesa; Beate Walter, Röbel;
Kerstin Gilden, Roitzsch; Michael Gräber, Elke
Haferkorn, Anne und Heiner Ruser, alle Ro-
stock; Astrid Grulke, Schernberg; Ronny
Henschke, Schierke; Achim Kröber, Schönbach;
Jörn Brückner, Schwarzenberg; Roland Drendl,
Senftenberg; Ute Hornawsky, Silbach; Jochen
Wetzel, Sömmerda; Bert Liebmann, Sondersha-
sen; Christina Schmidt, Katja Huhn, Kerstin
Reumschüssel, Antje Recknagel, Hosea Heckert,
Peter Motz, alle Steinbach-Hallenberg; Wolfram
Meyerhöfer, Strassburg; Uta Linz, Suhl; Gerald
Schumann, Teichwolframsdorf; Wolfgang Vogel,
Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Andreas
Heidtmann, Waren; Holger Nobach, Warne-
münde; Uwe Pillat, Waschow; Monika Rössler,
Volker Lehmann, Uta Langer, Johannes Thäter,
alle Weimar; Alexander Benz, Heike Eggert,
beide Weißwasser; Andrea Maas, Wilhelmsburg;
Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mario Kuhn,
Wintzingerode; Karin Junk, Wismar; Steffen
Pietz, Wittenberg; Marian Hackenberger, Zedlitz;
Pier Bierbach, Antje Schneider, beide Zeitz; Ute

Barthelmes, Angelika Weyh, beide Zella-Mehlis;
Uwe Schulz, Zeitz

Für vierjährige Teilnahme

Kathrin Christ, Ammern; Uwe Döbler, Arnstadt;
Thomas Heilfort, Bad Gottleuba; Ines Sobanski,
Bad Liebenstein; Marcus Markardt, Bad Salz-
ungen; Jürg Kasper, Bautzen; Tom Pfeifer, Ulrich
Krüger, Stefan Bading, Stefan Rödel, Sarah
Plietzsch, Lutz Döhler, alle Berlin; Steffen und
Christian Gering, Beuditz; Ralf Gröper, Biesen-
rode; Karsten Kühne, Blankenfelde; Matthias
Hentze, Bleicherode; Antje Hähnel, Blumberg;
Annett Sperling, Bräunrode; Matthias Koch, Dirk
Rohde, Antje Lück, alle Brieselang; Manuela
Herrmann, Thomas Jurke, beide Cottbus; Steffen
Eisenblätter, Delitzsch; Wolfgang Jäckel, De-
mitz-Thumitz; Petra Vollbrecht, Dessau; Mi-
chaela Ernst, Döbeln; AG Mathematik der POS
K. Niederkirchner, Domersleben; Annett Ger-
mann, Dörfel; Jens Haufe, Klaus-Horst Milde,
Jochen Pohl, Ulrich Hartung, alle Dresden; Jörn
Quedenau, Eberswalde; Jörg Simon, Engelsdorf;
Ulrike Rößner, Erfurt; Lutz Küch, Erlau; Kai
Mettke, Frankfurt/O.; Jörg Schneider, Freiberg;
Ingmar Hellhoff, Friedersdorf; Anke Zimmer-
mann, Geithain; Marko Schmidt, Gelmeroda;
Kristina Böttger, Görlitz; Berit Schönrock, God-
din; Andrea Rueß, Goldberg; Volker Bötter, Jana
Czichowski, Marie-Luise Funk, alle Greifswald;
Kai Streubel, Grimma; Katja Scholz, Marit
Strauch, beide Gröden; Sven Rudolph, Groß-
röhrsdorf; Antje Ohlhoff, Anja Grafe, beide Hal-
berstadt; Sylke Gonschorek, Harzgerode; Anja
Botzon, Havelberg; Birgit Bremer, Heiligenstadt;
Heike Scholz, Herrmannsdorf; Ines Menzel,
Hohndorf; Stefan Lippmann, Susanne Fischer,
Annett Herbst, alle Ilsenburg; Britta Fliegner,
Jarmen; Kathrin Kreuzel, Kändler, Gerd Rei-
farth, Jörg Lanckau, Katrin Holzhaus, Heiko
Frank, alle Karl-Marx-Stadt; Frank Müller, Klaf-
fenbach; Torsten Schütze, Klettenberg; Heike
Deumeland, Langenweddingen; Udo Woitek,
Solveig Willenberg, Sören Leukefeld, Kerstin
Wullig, alle Leinefelde; Petra Heiliger, Leuna;
Silke Perthel, Udo Wagner, Jörg Zimmermann,
Stefan Schmidt, Sandra Ernst, Katrin Görsch,
alle Lössau; Jens Neumann, Luckau; Thomas
Kitzmann, Reimo Zimmermann, beide Möhlau;
Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharowski,
Möser; Dirk Franke, Mülsen; Thomas Drobek,
Neubrandenburg; Steffen Ewert, Martina Schulz,
beide Neuhaus; Ralf Pönisch, Niederwiesa; Mar-
git John, Ndr.-Siefersdorf; Ingolf Wappler, Ol-
bernhau; Berit Bogs, Ottendorf-O.; Karsten Kat-
tner, Pasewalk; Ingo Schubert, Pfaffroda; Martina
Schenck, Pitschen-Pickel; Joachim Rothe, Pretz-
schendorf; Thomas Handke, Pulsnitz; Stefan
Jung, Dagmar und Birgit Lenz, alle Reichenbach;
Ines Barthel, Remse; Silke Bindig, Grit Marsch-
ner, Karen Jobst, alle Riesa; Grit Sündram, Ron-
neburg; Stephan Dittmann, Martin Wolff, beide
Rostock; Rainer Werner, Ruppertsgrün; Sven Un-
gelenk, Saalfeld; Thomas Habel, Schönewalde;
Andreas Otto, Seifersdorf; Kirsti und Olaf Knabe,
Steffen Jakob, alle Sondershausen; Kerstin Emm-
rich, Spremburg; Christiane Holland-Letz, Ge-
sine Pfeffer, Alexander Mönch, alle Steinbach-
Hallenberg; Olaf Otto, Stolpe; Heike Zilinske,
Stralsund; Claudia Schwartz, Suhl; Tanja Rein-
warth, Teltow; Peter Schmedemann, Templin;
Torsten Marx, Ueckermünde; Ina Gössinger, An-
drea Mieth, Sabine Fuß, Heidi Egle, Silvia Mül-
ler, Anke Siegmund, alle Unterbreizbach; Chri-
stiane Schröter, Karin Glock, Thomas Weber, alle
Vacha; Tom Boyks, Vietlütbe; Heike Bauer, Vit-
zenburg; Andrea Stolzenburg; Edith Boettcher,
Weimar; Frank Goth, Waltersdorf; Rainer
Schmidt, Wismar; Bertram Freihube, Jörg Stolle,
beide Wittenberg; Heintje Grosch, Wolfers-
tedt; Kristin Neumann, Zella-Mehlis; Bert Stallbaum,
Zschölkau; Annett Hellwig, Antje Sebastian,
beide Zschornewitz

17 ICH + BIN = LIEB 18 HAUS + HAUS + HAUS = STADT 19 TEMPO + TEMPO + TEMPO = HEKTIK

20 JUNGE + LEUTE = MATHE 21 MATHE + MEIN = HOBBY

1 VIER 2 HUH N 3 KATER 4 PAAR
 + VIER + HAH N + KATZE - EINS

 ACHT EIER TIERE EINS

22 KLEIN + VIETA = NEWTON 23 RRR · RRR = RADAR 24 FILM + KINO = SPASS

5 $\times 3 \times : 9 = 5 \times$
 $\begin{array}{r} \times \times \\ \times \times \\ \times \times \\ \times 1 \\ \hline 0 \end{array}$
 6 $(AX)^3 = \text{ALPHA}$
 $\sqrt{\text{ALPHA}} = \text{HHA}$
 $\text{PPP} \cdot \text{PPP} = \text{ALPHA}$
 $|(XY)^Y = \text{ALPHA}|$
 $X + Y = A$
 7 $\frac{6 \times \cdot \times \times \times}{\times \times}$
 $\frac{\times \times}{\times \times}$
 $\frac{\times \times}{\times \times \times 6}$

8 $a + b = c$ $d + 5 = e$
 $c - 5 = b$ $c > 6$
 $e + d = c$ $c < 8$
 9 $\begin{array}{r} \triangle \triangle + \bigcirc = \bigcirc \nabla \nabla \\ \triangle \square - \square \triangle = \triangle \\ \hline \bigcirc + \triangle \nabla = \triangle \bigcirc \end{array}$
 10 $ab : c = d$
 $- \cdot +$
 $b + a = d$
 $ae - c = f$

11 $\begin{array}{r} ICH \\ + \\ + \\ + \\ + \\ \hline WIR \end{array}$
 $\begin{array}{r} CH \\ D U \\ E R \\ I E \\ S S \end{array}$
 12 7 
 $+$ 
 $\hline$
 9 3 3
 13 $A \cdot A = B$
 $+$
 $C \cdot D = E$
 $\hline$
 $F - G = H$

14 $ab \cdot c = def$
 $:$  $:$
 g dg
 $=$ $=$
 $c + c = dg$
 15

14	x		:		12
+	A	+		+	
	x		:		6
:		:		-	
	+		:		4
2		3		15	
4	5	6	7	8	9
10	11	12			

 16 $\frac{1}{\bigcirc} + \frac{1}{\bigcirc} + \frac{1}{\bigcirc} = 1$
 $\frac{1}{\triangle} + \frac{1}{\bigcirc} + \frac{1}{\boxtimes} = 1$
 $\frac{1}{\triangle} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 1$

25 ALPHA + MATHE = HEITER 26 MATHE + IST = SCHÖN