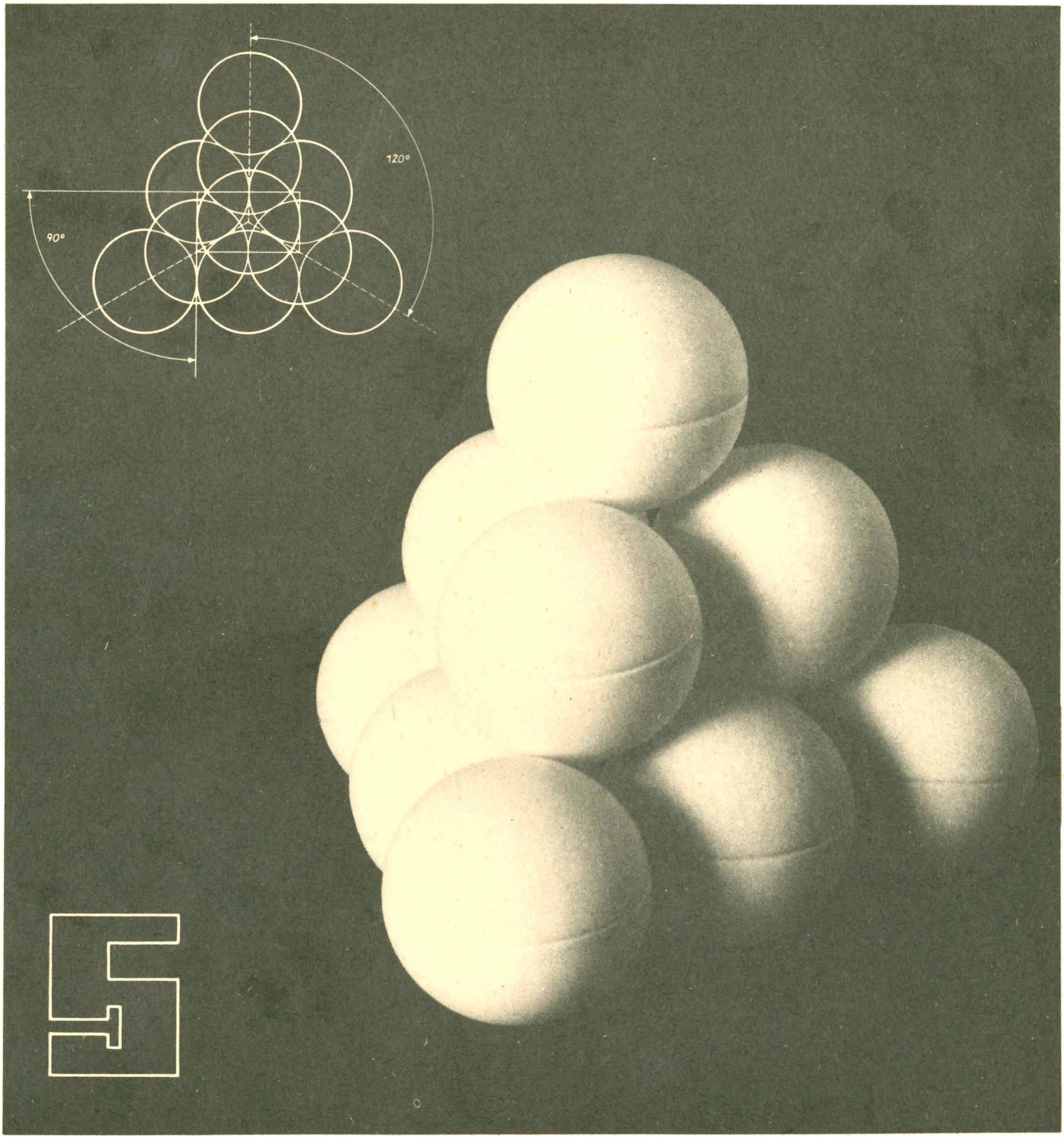
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31 059



Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Päd. Hochschule Potsdam (S. 97); W. Rodionow, APN, Moskau (S. 105); R. Ladewig, Bildstelle der W.-Pieck-Univ. Rostock (S. 120); W. Berger, Hartha (S. 111)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin (nach Motivauswahl von J. Lehmann, Leipzig). Es zeigt eine dichteste Kugelpackung im Raum. Durch das Aneinanderreihen und Aufeinanderpacken bilden sich die wichtigsten Winkel 120° und 90°.
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 27. Juni 1979

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

alpha stellt vor: Prof. em. Dr. Dr. h. c.

Wilhelm Hauser

Prof. Hauser gehört zu den Aktivisten der ersten Stunde. Er hat entscheidenden Anteil an der Entwicklung der 1948 gegründeten *Brandenburgischen Hochschule*, der jetzigen Pädagogischen Hochschule *Karl Liebknecht* Potsdam, zu einer angesehenen Bildungsstätte. In verschiedensten Funktionen hat er als Hochschullehrer mit hohem Engagement und großem Optimismus wichtige Beiträge zur demokratischen Umgestaltung des Hochschulwesens geleistet.

In der Person von Prof. Dr. Hauser verehren und schätzen wir einen Menschen, der sein Leben in den Dienst der jungen Generation gestellt und stets seine ganze Kraft und seine Fähigkeiten im Kampf um Frieden und Sozialismus eingesetzt hat. Er war nach der 1907 mit *summa cum laude* an der Universität Erlangen abgelegten Doktorprüfung und dem 1908 mit Auszeichnung bestandenen Staatsexamen an verschiedenen höheren Schulen im Lande Baden ab 1912 als Professor tätig. Bereits vor 1914 hat Prof. Hauser Vorträge gegen Militarismus und Krieg gehalten; insbesondere charakterisierte er die Rolle der deutschen Rüstungsfirmen Krupp und Thyssen bei ihrer Zusammenarbeit mit französischen und englischen Rüstungsfirmen während des Krieges. Nach 1918 wurde er Mitglied der *Deutschen Friedensgesellschaft* und ab 1922 Mitglied der SPD, für die er häufig als Referent auftrat.
Von den Faschisten wurde er 1933 aus politischen Gründen aus dem Lehrdienst entlassen und vorübergehend verhaftet. Im Jahre 1938 wurde Prof. Hauser in das KZ Dachau eingeliefert. Durch Vermittlung ausländischer Freunde konnte seine Entlassung erwirkt werden.
Prof. Hauser ging in die Emigration. Der Weg führte ihn über Paris, wo er an der illegalen Arbeit gegen den deutschen Faschismus teilnahm, nach London. Bis 1946 war er als Lehrkraft an der *Royal Grammar School* Newcastle on Tyne sehr erfolgreich tätig.
Nach seiner Rückkehr 1946 in die damalige sowjetische Besatzungszone hatte Prof. Hauser wesentlichen Anteil am Aufbau der damaligen Vorstudienanstalten, der späteren Arbeiter-und-Bauern-Fakultäten. Bei der Gründung der damaligen *Brandenburgischen Landeshochschule* im Jahr 1948 wurde er als Professor für Mathematik berufen.
Bis zu seiner Emeritierung 1956 förderte er unermüdlich die wissenschaftliche und pädagogisch-methodische Ausbildung der Studenten. Seine ausgezeichnete Lehrtätigkeit verband er auf das engste mit der Erziehung zur bewußten Parteinahme für die neue Gesellschaftsordnung.
Für seine Leistungen erhielt er hohe Auszeichnungen, so

1953 (zum 70. Geburtstag) Verleihung eines Ehrendoktortitels,
1963 Vaterländischer Verdienstorden in Silber,
1974 Vaterländischer Verdienstorden in Gold,
1978 Ehrenspange zum Vaterländischen Verdienstorden in Gold.

Deutsche Volkszeitung,
Düsseldorf vom 19. 8. 1976:

Aus gleichem Grund entlassen

(Aus einem Brief von Prof. Dr. Dr. h. c. W. Hauser nach Endingen)

...Herr Faller (Sonderschullehrer in Endingen, d. Red.) wurde auf Anweisung der staatlichen Behörden in Freiburg (BRD) aus politischen Gründen aus dem Schuldienst entlassen, obwohl die Gemeinde, die Eltern der Kinder und weitere Kreise der Bevölkerung von Endingen sich für das Verbleiben von Herrn Faller in seiner Dienststellung einsetzten, da Herr Faller nicht nur ein tüchtiger und zuverlässiger Lehrer war, sondern sich für die Weiterentwicklung physisch und psychisch Zurückgebliebener eingesetzt hat. Als alter Kollege von ihm möchte ich ihm meine Sympathie und Hochachtung für seine fortschrittliche Einstellung aussprechen.
Ich habe in Endingen in der alten Volksschule in den Jahren 1889 bis 1893 den ersten Unterricht erhalten und bin dann später selbst Lehrer geworden. Aber im Jahre 1933 bin ich nach meiner ersten Verhaftung aus dem gleichen Grund aus dem Schuldienst entlassen worden, wie es jetzt nach mehr als 40 Jahren wieder bei Herrn Faller der Fall ist. Wenige Jahre darauf mußte ich meine Heimat verlassen...

Eine Aufgabe von Prof. em. Dr. Dr. h. c.

Wilhelm Hauser

Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

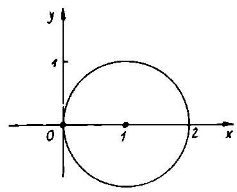
▲1880▲ Die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y bez. eines kartesischen Koordinatensystems der Gleichung

(1) $Ax^2+Bxy+y^2=0$ mit $A \neq 0$

genügen, heißt eine (ebene) algebraische Kurve 2. Ordnung, ein Kegelschnitt. Zum Beispiel beschreibt die Gleichung

$$x^2-2x+y^2=0$$

den Kreis um den Punkt mit den Koordinaten $x=1$, $y=0$, der durch den Koordinatenursprung geht (siehe Bild).



In dem Buch „Integrale algebraischer Funktionen und ebene algebraische Kurven" von Prof. Hauser und Burau (Berlin 1958) wird u. a. die Frage untersucht, wann eine algebraische Kurve in Geraden zerfällt.
Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Koeffizienten A, B in der Gleichung (1), daß die durch (1) beschriebene Punktmenge zwei Geraden mit den Gleichungen $y=ax$ und $y=bx$ $(a, b \neq 0)$ sind.

Trotz all dessen, was ich und meine Familie erlebt haben, wäre ich gerne nach dem Krieg in meine alte Heimat zurückgekehrt, um erneut als Erzieher an der Heranbildung einer neuen Generation mitzuwirken. Aber die damaligen Behörden in Freiburg haben meinem Wunsche nicht entsprochen, und so mußte ich mit meiner Frau, die in Karlsruhe geboren ist, und meinen Söhnen und ihren Familien hier in der DDR eine neue Heimat schaffen, um daran mitzuarbeiten, daß wenigstens in diesem Teil des ehemaligen Deutschen Reiches eine Jugend herangezogen wird, die verhindern wird, daß eine solche Katastrophe wie in den Jahren 1933 bis 1945 nochmals über Europa und besonders über Deutschland hereinbrechen kann.
Sagen Sie bitte Herrn Faller, daß auch er durch seine politische Einstellung und seine berufliche Tätigkeit dazu beiträgt, daß auch in der BRD dieses hohe Ziel erreicht wird...

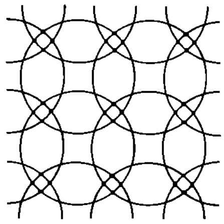
Ein Gitter-Puzzle

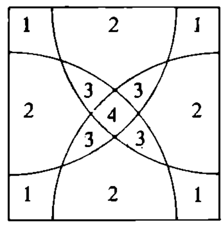
Ein Puzzle-Spiel kommt im allgemeinen dadurch zustande, daß man ein auf Pappe gemaltes Bild willkürlich in Stücke schneidet. Der Spieler soll dann aus den durcheinandergebrachten Pappstücken das Bild wieder zusammensetzen. Wir wollen uns hier mit einem weniger willkürlichen Puzzle-Spiel beschäftigen, das mit der Gitterpunktslehre zusammenhängt und bei dem die einzelnen Puzzlestücke gradlinige oder kreisbogenförmige Ränder haben.

Wir betrachten in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Diejenigen Punkte der Ebene, deren beide Koordinaten ganze Zahlen sind, nennen wir Gitterpunkte. Wir bezeichnen sie in einer beliebigen Reihenfolge mit Q_1, Q_2, Q_3, ... t sei eine beliebig gewählte, positive reelle Zahl. Unter $A(t, P)$ wollen wir die Anzahl der Gitterpunkte verstehen, die im Innern oder auf dem Rand des Kreises um P mit dem Radius t liegen. Die (ebene) Gitterpunktlehre befaßt sich hauptsächlich mit dem Studium von $A(t, P)$, vor allem für $t \to \infty$. Wir wollen aber jetzt t festhalten und P in der Ebene wandern lassen; dann ändert sich $A(t, P)$ je nach der Lage von P. Um dies etwas genauer zu untersuchen, schlagen wir um jeden Gitterpunkt Q_i den vollen Kreisbogen S_i mit dem Radius t. Diese Kreisbögen S_i, $i=1, 2, \dots$, zerlegen die ganze Ebene in unendlich viele Teilgebiete. Jedes derartige Teilgebiet wird von Kreisbogenstücken begrenzt; es liegt im Innern von endlich vielen unter den Kreisbögen S_i und außerhalb der übrigen. Es sei F ein solches Teilgebiet, das etwa im Innern von S_{i_1}, S_{i_2}, ..., S_{i_k} liege; P sei ein innerer Punkt von F. Dann haben die Gitterpunkte Q_{i_1}, Q_{i_2}, ..., Q_{i_k} eine Entfernung von P, die kleiner als t ist, während die Entfernung aller übrigen Gitterpunkte von P größer als t ist.

Demnach hat für alle Punkte P im Innern von F die Zahl $A(t, P)$ den gleichen Wert, nämlich k. Wir wollen deshalb die entstandenen Teilgebiete – eines davon war F – die Konstanzgebiete von $A(t, P)$ nennen. (In Bild 1 sind die Konstanzgebiete für den Fall $t=0{,}798\ldots$ in einem Teil der Ebene gezeichnet.)

Wir betrachten nun das Einheitsquadrat E; es ist dies das Quadrat, dessen 4 Ecken die Gitterpunkte mit den Koordinaten $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=1$, $y_2=0$; $x_3=1$, $y_3=1$; $x_4=0$, $y_4=1$ sind. Wir suchen die Konstanzgebiete heraus, die ganz oder teilweise im Innern von E liegen; dies seien etwa die Gebiete F_1, ..., F_l; mit G_i bezeichnen wir den Teil von F_i, der im Innern von E liegt. Das ganze Einheitsquadrat zerlegt sich so lückenlos in die Gebiete G_1, ..., G_l, die nur an ihren Rändern zusammenstoßen können. Für alle Punkte im Innern von G_i hat $A(t, P)$ den gleichen Wert, den wir a_i nennen. (In Bild 2 sind die Gebiete G_i wieder für $t=0{,}798\ldots$ gezeichnet, es ist $l=13$, in jedes G_i ist der Wert a_i eingeschrieben.)





Jetzt kann unser Puzzle beginnen! Wir schneiden uns Pappstückchen der Form der Gebiete G_i, und zwar für jedes i gerade a_i Stück; danach haben wir genau $a_1+a_2+\ldots+a_l$ Puzzle-Stücke, wobei höchstens l verschiedene Formen auftreten können. Wir behaupten nun: Unsere sämtlichen Puzzle-Stücke können lückenlos und ohne Überlappung so aneinander gelegt werden, daß eine volle Kreisscheibe vom Radius t entsteht! Versucht es einmal!

Wir wollen uns der Mühe unterziehen, unsere Behauptung in allen Einzelheiten zu beweisen!

1. Es sei K_i die Kreisscheibe um Q_i vom Radius t, also das Innere des Kreisbogens S_i. Die Numerierung der Gitterpunkte war zunächst beliebig; jetzt denken wir sie uns so gewählt, daß die Kreisscheiben K_1, K_2, ..., K_r Punkte aus dem Innern von E enthalten, während K_{r+1}, K_{r+2}, ... höchstens Randpunkte mit E gemeinsam haben. Es sei nun D_i der Teil von K_i, der in E liegt (d. h. der Durchschnitt von K_i und E), $i=1, 2, \dots, r$. Bei der Zerlegung von E in die Teilgebiete G_1, ..., G_l mußten wir nun gerade die Randbögen S_1, ..., S_r der Kreisscheiben K_1, ..., K_r und die Ränder von E konstruieren, um die Ränder von G_1, ..., G_l zu erhalten. Jedes Gebiet D_j zerlegt sich demnach lückenlos und ohne Überlappung in gewisse unter den Gebieten G_1, G_2, ..., G_l; dabei kommt das Gebiet G_i in genau a_i Gebieten D_j vor, da es im Innern von a_i unter den Kreisscheiben K_1, ..., K_r liegt. Deshalb kann man aus unseren Puzzle-Stücken zunächst jedes der Gebiete D_1, ..., D_r zusammenlegen, ohne daß etwas fehlt oder übrigbleibt. Wir denken uns dies ausgeführt und brauchen also nur noch die Gebiete D_1, ..., D_r zu einer Kreisscheibe vom Radius t zusammenzufügen. (Im Beispiel von Bild 2 sind die D_j die Viertelkreisscheiben um die Eckpunkte von E, es ist $r=4$.)

2. Wir denken uns das Gebiet D_j an seinem richtigen Platz im Einheitsquadrat E. Jetzt machen wir diejenige Parallelverschiebung (=Translation) T_j, die gerade den Gitterpunkt Q_j in den Nullpunkt O (das ist auch ein Gitterpunkt!) überführt. Durch T_j wird das Gebiet D_j in ein dazu kongruentes Gebiet D'_j überführt. Bevor wir zeigen, daß die Gebiete D'_j, $j=1, \dots, r$, den Kreis K um O vom Radius t lückenlos und ohne Überlappung erfüllen, bemerken wir noch folgendes:

Ist T eine Parallelverschiebung, so erhält man die Koordinaten x', y' des Bildpunktes eines Punktes mit den Koordinaten x, y bekanntlich durch Formeln der Gestalt

(1) $x'=x+a,\ y'=y+b.$

Hierin sind a, b feste, nur von T abhängige, reelle Zahlen. Genau dann, wenn T einen Gitterpunkt in einen Gitterpunkt überführt, sind a und b ganze Zahlen. Dies ist bei den oben erwähten Translationen T_j aber immer der Fall.

3. a) Es sei P'_j ein beliebiger Punkt von D'_j; dann gibt es genau einen Punkt P_j im Innern von D_j, der bei der Parallelverschiebung T_j auf P'_j abgebildet wird. Da P_j in D_j und D_j in K_j liegt, liegt P_j in K_j, und folglich ist $\overline{Q_jP_j}<t$; dabei bezeichnet $\overline{Q_jP_j}$ die Entfernung beider Punkte. Bei der Parallelverschiebung T_j geht Q_j in O und P_j in P'_j über, also ist auch $\overline{Q_jP_j}=\overline{OP'_j}<t$; demnach liegt P'_j in K, und da P'_j beliebig war, liegt das ganze Gebiet D'_j in K und dies für alle $j=1, 2, \dots, r$.

b) Um zu zeigen, daß sich die Gebiete D'_1, ..., D'_r nicht überlappen, machen wir einen indirekten Beweis. Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt P', der sowohl im Innern von D'_i als auch im Innern von D'_j liegt, $i \neq j$. Dann gibt es einen P_i in D_i, der bei T_i auf P' abgebildet wird; ebenso gibt es einen Punkt P_j in D_j, der bei T_j auf P' abgebildet wird. Dabei ist $P_j \neq P_i$. Nach dem, was wir am Ende von Abschnitt 2. sagten, können sich die Koordinaten von P_i und P_j nur um eine ganze Zahl unterscheiden; also können P_i und P_j nicht beide im Innern von E liegen, und dies ist der gewünschte Widerspruch. Also: die Gebiete D'_1, ..., D'_r überlappen sich nicht.

c) Nun bleibt bloß noch zu zeigen, daß die Gebiete D'_1, ..., D'_r den Kreis K lückenlos erfüllen. Dazu sei $\overline{P'}$ ein beliebiger Punkt im Innern von K, er habe die Koordinaten $\overline{x'}$, $\overline{y'}$. Dann gibt es ganze Zahlen n, m und reelle Zahlen $\bar{x}$, $\bar{y}$ mit $0 \leqq \bar{x} < 1$, $0 \leqq \bar{y} < 1$, so daß

(2) $\overline{x'}=\bar{x}+n,\ \overline{y'}=\bar{y}+m.$

n ist der ganze, $\bar{x}$ der gebrochene Teil von $\overline{x'}$ und ähnlich für m, $\bar{y}$, $\overline{y'}$. Der Punkt $\bar{P}$ mit den Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ liegt offenbar in E oder auf dem Rand von E. Der Punkt Q mit den Koordinaten $-n$, $-m$ ist ein Gitterpunkt. Es gilt nun:

(3) $n^2+m^2 \leqq (n+\bar{x})^2+(m+\bar{y})^2 = \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 < t^2$.

Der Nullpunkt hat also von Q eine Entfernung, die kleiner als t ist, und deshalb enthält die Kreisscheibe um Q vom Radius t auch Punkte aus dem Innern von E; d. h. Q ist einer der Punkte $Q_1, \ldots, Q_r$, etwa $Q=Q_i$. Die Ungleichung (3) zeigt außerdem $\overline{PQ_i}<t$, weswegen $\bar{P}$ im Innern von K_i liegt und dann auch im Innern oder auf dem Rand von D_i. Bei der Parallelverschiebung T_i geht nun $\bar{P}$ gerade in $\bar{P}'$ über, wie man auch aus (2) sieht; also $\bar{P}'$ liegt im Innern oder auf dem Rand von D_i'. Ganz K wird also durch die Gebiete $D_1', \ldots, D_r'$ lückenlos überdeckt. Damit ist unser Beweis vollständig fertig.

Wir schließen noch einige Bemerkungen an!

1) In dem gezeichneten Beispiel sieht alles noch recht einfach aus, besonders die Gebiete D_i sind unkompliziert (Viertelkreisscheiben!). Wenn man aber t größer wählt, entstehen sehr viele Gebiete D_i und erst recht viele G_i.

2) Wir hatten a_i Puzzlestücke der Gestalt G_i, diese liefern zusammengelegt eine Fläche vom Inhalt: a_i (Inhalt G_i); sämtliche Puzzlestücke ergeben eine Kreisscheibe vom Inhalt πt^2; daraus folgt:

(4) $\sum_{i=1}^{l} a_i \text{ (Inhalt } G_i) = \pi t^2$.

3) Man kann die folgende Grenzwertbeziehung beweisen:

(5) $\lim_{t\to\infty} \frac{A(t, P)}{\pi t^2} = 1$.

(Vergleiche hierzu den Artikel: Gitterpunkte, M. Günther, *alpha* 3/1973.)

Die Beziehung (5) besagt, grob gesprochen: für große t gibt es annähernd so viele Gitterpunkte in einem Kreis, wie sein Flächeninhalt beträgt. Es ist interessant, daß der Quotient $A(t, P)/\pi t^2$ auch für endliche t immer wieder den Wert 1 annimmt, wenn man P geeignet wählt. Wir wollen das beweisen! Es sei N eine beliebige natürliche Zahl, $N \geqq 1$, außerdem sei t so gewählt, daß $\pi t^2 = N$ gilt. Mit diesem Wert von t denken wir uns die G_i, $i=1, 2, \ldots, l$ konstruiert. Für P in G_i hat $A(t, P)$ den Wert a_i. Für zwei Gebiete G_{i_1} G_{i_2}, die längs eines Kreisbogenstückes aneinanderstoßen, gilt $a_{i_1}=a_{i_2}\pm 1$; denn wenn P ein Kreisbogenstück von S_i überschreitet, ist in $A(t, P)$ der Gitterpunkt Q_i nicht mehr zu berücksichtigen bzw. gerade neu zu berücksichtigen. Nehmen wir nun an: „alle a_i sind größer als N“, $a_i > N$, dann folgt:

(6) $\sum_{i=1}^{l} a_i \text{ (Inhalt } G_i) > N \sum_{i=1}^{n} \text{(Inhalt } G_i) = N$

wenn man

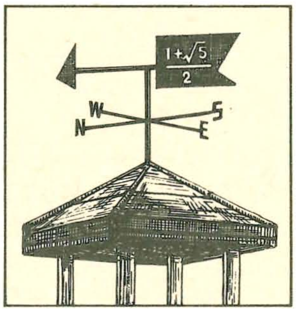
(7) $\sum_{i=1}^{l} \text{(Inhalt } G_i) = 1$

beachtet, was aus der Tatsache folgt, daß die sämtlichen G_i das Einheitsquadrat E lückenlos und ohne Überlappung überdecken. Aus der Gleichung (4) ergibt sich dann $\pi t^2 > N$, was ein Widerspruch zur Wahl von t ist. Ebenso führt die Annahme: „alle a_i sind kleiner als N“ zu einem Widerspruch. Demnach gibt es also entweder mindestens ein a_i mit $a_i = N$ oder es gibt mindestens ein a_i, etwa a_1, mit $a_1 > N$ und gleichzeitig mindestens ein a_i, etwa a_l, mit $a_l < N$. Im letzten Fall lassen wir P von G_1 nach G_l wandern; dabei gehe P von einem Gebiet G_i immer nur über ein Kreisbogenstück in ein Nachbargebiet, die zugehörigen Werte a_i unterscheiden sich bei einem solchen Gebietswechsel immer nur um ± 1; da $a_1 > N$, $a_l < N$, muß für eines der durchwanderten Gebiete G_i auch $a_i = N$ sein. Es gibt also stets Punkte P mit $A(t, P) = N$, was zu beweisen war. (In unseren Zeichnungen Bild 1 und 2 ist t so gewählt, daß $N=2$.)

P. Günther

Eine mathematische Wetterfahne

Die Wetterfahne auf meinem neuen Haus sollte ein persönliches und doch nicht zu auffälliges Erkennungszeichen sein. Nach vielem Nachdenken und angeregten Diskussionen entstand ein Entwurf, der das Werk des Mathematikers (ich selbst) und des Architekten des Hauses (D. A. Adams/Ely) verband. Gebaut wurde die Wetterfahne von einer Schlosserei des Ortes. Mit ihr sollten die Schüler und Studenten des angrenzenden Städtischen Colleges an die Mathematik erinnert werden.



Die Grundfigur ist ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen 13 Zoll bzw. 21 Zoll. In diesem Rechteck wird die Diagonale $\overline{BD}$ gezeichnet und das Lot von A auf $\overline{BD}$ gefällt. Der Lotfußpunkt O wird üblicherweise als *Goldenes Zentrum* oder *Auge* des Rechtecks bezeichnet. (Bild 1)

Bild 1

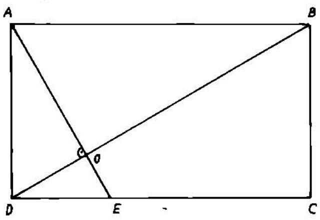
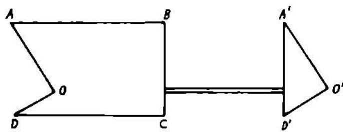


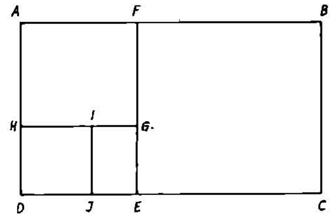
Bild 2



Das Dreieck AOD wird parallel zu den längeren Rechteckseiten so weit verschoben, daß sein Bild $A'O'D'$ eine *Pfeilspitze* bildet, die die Windrichtung anzeigt. (Bild 2)

Warum wurde aber nun gerade der Punkt O derart hervorgehoben? Wenn ein Rechteck so beschaffen ist, daß man von ihm durch eine Parallele zu seiner kürzeren Seite ein Quadrat so *abschneiden* kann, daß das verbleibende Rechteck zum ursprünglichen ähnlich ist, so spricht man von einem *Goldenen Rechteck*. Bild 3 zeigt eine Folge von Quadraten, die in ein *Goldenes Rechteck eingenistet* sind. Zeichnet man die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ ein, so sieht man, daß $ABCD$, $AFED$, $EGHD$, $GIJE$ usw. sämtlich ähnliche Dreiecke sind. Die Punkte C, F, H, J usw. liegen alle auf einer *gleichwinkligen Spirale*, deren Pol der Punkt O von Bild 1 ist.

Bild 3



Veranschauliche dir die letzte Behauptung, indem du in einer maßstäblichen Zeichnung die Folge der ähnlichen Rechtecke fortsetzt! Benutze dabei $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ als Hilfslinien! Weise nach, daß $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ aufeinander senkrecht stehen!

Das *Auge* eines Rechtecks hat übrigens auch künstlerische Bedeutung: In der klassischen griechischen Architektur tritt es häufig in Erscheinung, und in einem Gemälde wird das *Auge* für eine dominierende Stelle gehalten, an der oft eine bedeutsame Einzelheit angeordnet wird.

Da $ABCD$ und $AFED$ ähnliche Rechtecke sind, gilt $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$. Wählt man $\overline{AD}$ als Längeneinheit, so hat die Länge von $\overline{AD}$ die Maßzahl 1; die Maßzahl der Länge von $\overline{AB}$ sei mit x bezeichnet. Es gilt dann $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$. Dies führt auf die quadratische Gleichung $x^2-x-1=0$. Deren (hier nur interessierende) positive Lösung ist $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

Das Seitenverhältnis des Ausgangsrechtecks, nämlich 21 : 13, liegt sehr nahe bei 1,618. Daher wurde auf meiner Wetterfahne $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aus der Stahlplatte des Hinterteils des Pfeils selbst herausgeschnitten, so daß dieser Term in der Silhouette zu lesen ist.

Der Architekt und ich hoffen, daß der Wind nicht so stark sein wird, daß er das Ganze von dem pyramidenförmigen Dach fegt, auf dem die Wetterfahne montiert ist.

A. E. Lawrance

Ist 11 111 111 111 eine Primzahl?

(Mit einem unveröffentlichten Manuskript von C. G. J. Jacobi)

Teil 1: Primzahlen

Die Zahlen 1, 2, 3, 4 heißen natürliche Zahlen. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist eine natürliche Zahl. Es gibt also natürliche Zahlen, die sich als Produkt wenigstens zweier Zahlen, die größer als 1 sind, darstellen lassen. (Man spricht von *zusammengesetzten Zahlen.*) Zum Beispiel sind 10, 1001, 5031943 solche Zahlen; es ist nämlich $10=2\cdot 5$, $1001=7\cdot 11\cdot 13$, $5031943=7\cdot 449\cdot 1601$. Aber es existieren auch von 1 verschiedene natürliche Zahlen, die kein solches Produkt sind, beispielsweise 2, 5, 7, 11, 13, 449, 1601. Solche Zahlen heißen *Primzahlen.* Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Auch die Zahlen 3041977, $2^{61}-1$; $2^{19937}-1$ sind Primzahlen. Die größte bekannte Primzahl ist (gegenwärtig) die 6553ziffrige Zahl $2^{21701}-1$.

Schon der griechische Mathematiker *Euklid* (um 300 v. u. Z.) konnte beweisen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Ist eine natürliche Zahl keine Primzahl, so kann man sie (schrittweise) in ein Produkt zerlegen, in dem alle Faktoren Primzahlen sind. Das kann sicher auf verschiedenen Wegen geschehen. Überdies kann man die Primzahlfaktoren noch in beliebiger Reihenfolge schreiben. Doch abgesehen von dieser Willkür in der Anordnung führen verschiedene Wege der Zerlegung immer zur gleichen Produktzerlegung der Zahl in Primzahlen. Jede natürliche Zahl ist also (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Beispiele sind die eingangs angegebenen Produkte, weitere Beispiele sind $17=17$, $222=2\cdot 3\cdot 37$, $10121804=2\cdot 2\cdot 7\cdot 11\cdot 59\cdot 557$, $18021851=223\cdot 77347$. (Würde übrigens die Zahl 1 als Primzahl angesehen werden, so würde die Eindeutigkeit verloren gehen. So hätte z. B. 18 die verschiedenen Zerlegungen $2\cdot 3\cdot 3$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 3$, $1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 3$.) Die Primzahlen sind nicht nur (im beschriebenen Sinne) die Bausteine für den multiplikaten Aufbau der natürlichen Zahlen. Für sie gelten viele (zahlentheoretische) Gesetzmäßigkeiten, die für zusammengesetzte Zahlen falsch sein können. Als einige Kostproben sollen die folgenden Aussagen (ohne Beweis) dienen.

A 1: (nach Wilson, 1741 bis 1793):
Ist p eine Primzahl, so ist die Zahl $(p-1)!+1$ durch p teilbar.
(Für eine natürliche Zahl n bezeichnet hier $n!$ das Produkt $1234\ldots n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.)
Gilt umgekehrt für eine natürliche Zahl m, daß $(m-1)!-1$ durch m teilbar ist, so muß m eine Primzahl sein!

A 2: (nach Fermat, 1601 bis 1665):
Jede Primzahl p der Form $4k+1$ ist eine Summe zweier Quadratzahlen.
Beispiele sind $5=1^2+2^2$, $13=2^2+3^2$, $17=1^2+4^2$, $29=2^2+5^2$, $37=1^2+6^2$, $41=4^2+5^2$.
Die Umkehrung ist nicht richtig; die Summe zweier Quadrate braucht keine Primzahl zu sein:

$$1^2+3^2=10,\quad 3^2+9^2=90,\quad 2^2+11^2=125.$$

Nicht jede natürliche Zahl ist als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, z. B. 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 1001, 21, 77.

A 3 (nach Fermat):
Ist p eine Primzahl, so ist für jede natürliche Zahl a die Zahl a^p-a durch p teilbar.

Fermatscher Satz

Die Aussage A 3 wurde zuerst von *Fermat* im Jahre 1640 ausgesprochen. *Fermat* hat jedoch keinen Beweis veröffentlicht.
Der erste bekannte Beweis stammt von *Leibniz* (1646 bis 1716). Später gab *Euler* (1707 bis 1783) mehrere Beweise (und verallgemeinerte die Aussage). Wir brauchen den folgenden Spezialfall des Fermatschen Satzes.
Satz 1: Ist p eine Primzahl, so ist 2^p-2 durch p teilbar. (Dieses bedeutet, daß 2^p bei der Division durch p den Rest 2 läßt. Beispiele: siehe Tabelle 1.)
Beweis: Nach dem binomialen Lehrsatz ist

$$2^p=(1+1)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}, \text{ also}$$

wegen $\binom{p}{0}=\binom{p}{p}=1$

$$2^p-2 \quad =\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\ldots+\binom{p}{p-1}.$$

Die Zahlen $\binom{p}{k}=\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ $(0<k<p)$ sind ganze Zahlen. Da p nicht den Nenner teilt, muß p den Quotienten teilen, d. h. jede Zahl $\binom{p}{k}$ ist ein Vielfaches von p und damit auch die Summe $\binom{p}{1}+\ldots+\binom{p}{p-1}=2^p-2$.

Der bewiesene Satz läßt sich auch so formulieren:
Ist für eine natürliche Zahl n die Differenz 2^n-2 nicht durch n teilbar, so kann n keine Primzahl sein.

Ist n eine Primzahl?

Es ist im allgemeinen, insbesondere für große Zahlen, nicht leicht, von einer Zahl n nachzuweisen, daß sie eine Primzahl ist oder (falls sie keine Primzahl ist) ihre Zerlegung in Primzahlen anzugeben.
Satz 2: Ist eine Zahl n nicht Vielfaches einer Primzahl p, für die $p^2\leqq n$ ist, so ist n eine Primzahl.
Beweis: Wäre n keine Primzahl, so ließe sich n in (sagen wir $r\geqq 2$) Primzahlen zerlegen: $n=p_1\ldots p_r$.
Da n nicht Vielfaches einer Primzahl p ist, für die $p^2\leqq n$ ist, müßte $p_1{}^2>n$, $p_2{}^2>n$, ..., $p_r{}^2>n$ also $n^2=p_1{}^2p_2{}^2\ldots p_r{}^2>n\cdot n\cdot\ldots\cdot n=n^r$ sein. Wegen $r\geqq 2$ ist dies aber unmöglich.
Das in Tabelle 2 angegebene „Programm" (basierend auf diesem Satz) ermöglicht es, die Primzahlzerlegung einer ungeraden Zahl n prinzipiell zu finden. Dabei denken wir uns zwei „Speicher" I und II gegeben. Durch „[I]" wird die Zahl bezeichnet, die sich im Speicher I befindet. Analog „[II]".
Der Befehl „Speichere eine Größe in einem Speicher!" bedeutet, daß ein evtl. schon vorhandener Inhalt dieses Speichers gelöscht und durch die neue Größe ersetzt wird.
$\mathrm{FRAC}\left(\dfrac{n}{m}\right)$ bedeutet für einen Bruch $\dfrac{n}{m}$ den gebrochenen Teil dieser Zahl. So ist $\mathrm{FRAC}\left(\dfrac{8}{7}\right)=\dfrac{1}{7}$ $\left(\text{da } \dfrac{8}{7}=1+\dfrac{1}{7}\right)$, $\mathrm{FRAC}\left(\dfrac{100}{5}\right)=0$ $\left(\text{da } \dfrac{100}{5}=20\right)$. Es ist $\mathrm{FRAC}\left(\dfrac{n}{m}\right)=0$, falls m ein Teiler von n ist. Sonst ist $\mathrm{FRAC}\left(\dfrac{n}{m}\right)>0$.
Die „angezeigten" Zahlen sind die gesuchten Primfaktoren von n.
Die in Tabelle 3 durchgerechneten Zahlenbeispiele werden das Verständnis der Tabelle 2 erleichtern. (Die Anzeige der Primfaktoren erfolgt in den Schritten 08 bzw. 04.)
Man kann den Befehl 09 natürlich auch ersetzen durch 09*:
„Speichere die auf [II] folgende Primzahl im Speicher II!" und so in Tabelle 3 einige Zeilen einsparen.
Für größere Zahlen n wird man den in Tabelle 2 gegebenen „Algorithmus" mittels Computer anwenden können, um die multiplikative Zerlegung in Primzahlen zu finden. Als es jedoch elektronische Rechner noch nicht gab, war es im allgemeinen eine mühevolle Arbeit, diese Zerlegung zu bekommen. Auch nur die Entscheidung, ob eine gegebene Zahl n Primzahl ist oder nicht, ist ebenso mühevoll. Immerhin erkannte 1876 Lucas (mittels eines besseren als in den Tabellen 2 und 3 beschriebenen Verfahrens), daß $2^{127}-1=170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$ eine Primzahl ist. Erst 75 Jahre später

mit dem Erscheinen elektronischer Rechenanlagen fand man größere Primzahlen, nämlich die 44ziffrige Zahl $\frac{1}{17}(2^{148}+1)$.

1971 wies Tuckerman mittels Computer nach, daß die 6002ziffrige Zahl $2^{19937}-1$ eine Primzahl ist.

Im folgenden sollen nun (zunächst ohne Computer) Beispiele natürlicher Zahlen, die als Ziffern nur die 1 enthalten, betrachtet werden:

11 ist eine Primzahl.
111 ist keine Primzahl ($111 = 3 \cdot 37$).
1111 ist keine Primzahl (da $1111 = 11 \cdot 101$).
111111 ist keine Primzahl
(da $111111 = 111 \cdot 1001 = 11 \cdot 10101$).
1111111 ist keine Primzahl
(da $1111111 = 11 \cdot 1010101$).
11111111 ist keine Primzahl
(da z. B. $11111111 = 111 \cdot 1001001$).
1111111111 ist keine Primzahl
(da z. B. $1111111111 = 11 \cdot 101010101$).

Für die 5ziffrige Zahl 11111 findet man analog zu Tabelle 3 nach 20 Zeilen (bzw. nach 12 Zeilen, wenn man den Schritt 09 durch den Schritt 09* ersetzt) als Primteiler 41. Es ist $11111 = 41 \cdot 271$ also keine Primzahl. Für die 7ziffrige Zahl 1111111 muß man bereits 119 (bzw. 51) Zeilen aufschreiben, um die Primzahl 239 als Teiler zu finden. Es ist $1111111 = 239 \cdot 4649$ also auch keine Primzahl.

Tabelle 1

n	2^n	2^n-2	2^n-2 durch n teilbar?
1	2	0	ja
2	4	2	ja
3	8	6	ja
4	16	14	nein
5	32	30	ja
6	64	62	nein
7	128	126	ja
8	256	254	nein
9	512	510	nein
10	1024	1022	nein
11	2048	2046	ja
12	4096	4094	nein
13	8192	8190	ja
14	16384	16382	nein
15	32768	32766	nein

Ist nun die 11ziffrige Zahl 11111111111 eine Primzahl? Um dieses zu entscheiden, werden wir nicht den Satz 2, sondern gemäß einer (vom Rechenkünstler und Schnellrechner *Z. Dase* [1824 bis 1861] angeregten) Untersuchung des berühmten Mathematikers *Carl Gustav Jacob Jacobi* (10. 11. 1804 bis 18. 2. 1851) den Satz 1 benutzen.

H. Pieper

Tabelle 2

Schritt	Befehl
01	Speichere n im Speicher I Gehe zu Schritt 02.
02	Speichere 3 im Speicher II. Gehe zu Schritt 03.
03	Verzweigung: Ist schon $[II] > \sqrt{[I]}$? Nein: Ist $[II] \leqq \sqrt{[I]}$, so gehe zu Schritt 05. Ja: Ist $[II] > \sqrt{[I]}$, so gehe zu Schritt 04.
04	Zeige [I] an. Ende.
05	Dividiere [I] durch [II]. Gehe zu Schritt 06.
06	Verzweigung: Ist $\mathrm{FRAC}\left(\frac{[I]}{[II]}\right) = a = 0$? Nein: Ist $a > 0$, so gehe zu Schritt 09. Ja: Ist $a = 0$, so gehe zu Schritt 07.
07	Speichere $\frac{[I]}{[II]}$ im Speicher I. Gehe zu Schritt 08.
08	Zeige [II] an und gehe zu Schritt 05.
09	Addiere 2 zur Zahl im Speicher II. Gehe zu Schritt 03.

Tabelle 3 (Zahlenbeispiele zur Tabelle 2)

01	02	03	04	05	06	07	08	09
111	3	$3 > \sqrt{111}$ nein	—	$\frac{111}{3} = 37$	ja	37	$\boxed{3}$	—
37	3	$3 > \sqrt{37}$ nein	—	$\frac{37}{3} = 12\frac{1}{3}$	nein	—	—	5
37	5	$5 > \sqrt{37}$ nein	—	$\frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}$	nein	—	—	7
37	7	$7 > \sqrt{37}$ ja	$\boxed{37}$	—	—	—	—	—
Ergebnis: $111 = 3 \cdot 37$								
1001	3	$3 > \sqrt{1001}$ nein	—	$\frac{1001}{3} = 333\frac{2}{3}$	nein	—	—	5
1001	5	$5 > \sqrt{1001}$ nein	—	$\frac{1001}{5} = 200\frac{1}{5}$	nein	—	—	7
1001	7	$7 > \sqrt{1001}$ nein	—	$\frac{1001}{7} = 143$	ja	143	$\boxed{7}$	—
143	7	$7 > \sqrt{143}$ nein	—	$\frac{143}{7} = 20\frac{3}{7}$	nein	—	—	9
143	9	$9 > \sqrt{143}$ nein	—	$\frac{143}{9} = 15\frac{8}{9}$	nein	—	—	11
143	11	$11 > \sqrt{143}$ nein	—	$\frac{143}{11} = 13$	ja	13	$\boxed{11}$	—
13	11	$11 > \sqrt{13}$ ja	$\boxed{13}$					
Ergebnis: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$								

Wir arbeiten mit Mengen

Teil 2:

Abbildungen

Um den Begriff „Abbildung" zu erfassen, muß man zunächst wissen, was unter der *Kreuzmenge* (dem Kreuzprodukt) zweier Mengen zu verstehen ist.

Seien A und B beliebige Mengen.

Die Kreuzmenge AXB (gesprochen: „A Kreuz B") ist die Menge aller geordneten Paare $[a; b]$ mit $a \in A$ und $b \in B$. In Zeichen: $AXB \underset{Def}{=} \{[a; b]; a \in A \wedge b \in B\}$.

Beispiel: Seien

$A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1; 2\}$, so ist

$AXB = \{[a; 1], [a; 2], [b; 1], [b; 2], [c; 1], [c; 2]\}$.

Es werden also *alle* Elemente der Menge A mit *allen* Elementen der Menge B so zu Paaren zusammengestellt, daß an erster Stelle stets ein Element aus der Menge A, an der zweiten Stelle stets ein Element aus der Menge B steht.

Wenn wir die Mengen BXA bilden, so erhalten wir

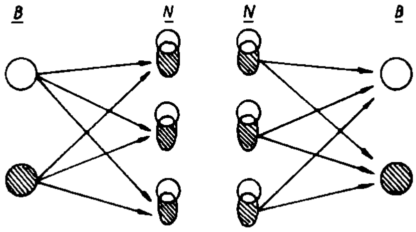
$BXA = \{[1; a], [1; b], [1; c], [2; a], [2; b], [2; c]\}$.

Das ist eine andere Menge als AXB. Es gilt folglich allgemein: $AXB \neq BXA$; d. h., die Bildung der Kreuzmenge ist nicht kommutativ.

Wir erkennen aber sicher leicht, daß AXB genau so viele geordnete Paare (das sind die Elemente der Menge) enthält wie BXA. Die Kreuzmengenbildung ist eine mengentheoretische Grundlage für die Multiplikation von natürlichen Zahlen. $3 \cdot 2 = 6$, denn die Kreuzmenge aus einer Dreiermenge und einer Zweiermenge ist eine Sechsermenge. Weil AXB genauso viele Elemente (nicht dieselben!) enthält wie BXA, gilt für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen das Kommutativgesetz.

Eine anschauliche Darstellung des Sachverhalts ergibt sich z. B., wenn man drei verschiedenfarbige Bälle und zwei verschiedenfarbige Netze betrachtet und alle Möglichkeiten ausprobiert, genau einen bestimmten Ball in genau ein bestimmtes Netz zu stecken. Man wählt zuerst einen Ball aus, etwa den weißen, und kann diesen nun in das weiße, dann in das schwarze und schließlich in das rote Netz stecken; ebenso verfährt man mit dem schwarzen Ball. Wir erhalten insgesamt 6 Möglichkeiten, d. h. 6 geordnete Paare [Ball; Netz]. Wenn B die Menge der Bälle und N die Menge der Netze bezeichnet, so haben wir die Menge BXN gebildet. Die Bildung der Menge NXB führt auch auf eine Menge von 6 geordneten Paaren. Man wählt aber zuerst ein Netz aus, um damit einen Ball zu transportieren.

Bild 1



$NXB \neq BXN$, aber NXB enthält die gleiche Anzahl von Elementen wie BXN. Deshalb gilt $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ und allgemein für alle natürlichen Zahlen a, b: $a \cdot b = b \cdot a$!

Im Arbeitsblatt Nr. 5 wollen wir nun das Bilden von Kreuzmengen üben.

Arbeitsblatt 5

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$M = \{1, 2, 3, 4\}$ $P = \{5, 7, 9\}$ $R = \{a\}$

$N = \{2, 3\}$ $Q = \{x, y, z\}$ $S = \{b, c\}$

Man bilde folgende Mengen:

Teilmengen von Kreuzmengen

Eine Familie mit vier Kindern (Vater: V, Mutter: M, Inge: I, Gisela: G, Peter: P, und Horst: H) teilt sich am Wochenende in bestimmte Arbeiten. Diese seien: fegen: f, wischen: w, bohnern: b, einkaufen: e, heizen: h, Fenster putzen: p, umgraben: u, und kochen: k.

Die Menge der Familienmitglieder wollen wir mit

$M_1 = \{V, M, I, G, P, H\}$

und die Menge der zu erledigenden Arbeiten mit

$M_2 = \{f, w, b, e, h, p, u, k\}$ bezeichnen.

Wenn wir die Kreuzmenge $M_1 X M_2$ bilden würden, dann würde das in der Praxis bedeuten, daß jeder alles macht, und das ist natürlich unmöglich. Deshalb werden wir jedem Familienmitglied eine Arbeit (genau eine oder mehr!) zuordnen.

Eine solche Zuordnung nennt man auch Abbildung. Es ist nur etwas ungewohnt zu sagen: „Peter wird auf das Bohnern abgebildet." Wir sagen besser: „Dem Peter wird das Bohnern zugeordnet" oder „Peter bohnert". Alle diese verschiedenen Ausdrucksweisen spiegeln ein und denselben Sachverhalt wider.

Lösungen siehe S. 116

$MXN = \{[1; 2], [1; 3], [2; 2], [2; 3], [3; 2], [3; 3], [4; 2], [4; 3]\}$

NXM

MXP

PXM

NXP

PXN

MXM

NXN

PXP

QXR

RXQ

QXS

SXQ

RXS

SXR

QXQ

RXR

SXS

Wenn wir sagen „Peter übernimmt das Bohnern“, so bilden wir in Gedanken das geordnete Paar $[P; b]$. Auf diese Weise läßt sich die Zuordnung (das ist die Abbildung F_1) als Menge geordneter Paare schreiben und anschaulich als Pfeildarstellung wie folgt skizzieren:

$F_1 = \{[V; h], [V; u], [M; f], [M; k], [I; w], [G; p], [P; b], [H; e]\}$

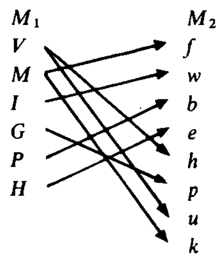


Bild 2

Wir erkennen, daß F_1 eine Teilmenge (sogar eine echte Teilmenge) der Kreuzmenge $M_1 X M_2$ ist; geschrieben: $F_1 \subseteqq M_1 X M_2$, sogar $F_1 \subset M_1 X M_2$. Nun können wir den Begriff „Abbildung“ allgemein definieren:

Seien A und B beliebige Mengen.

Jede Teilmenge F der Kreuzmenge $A X B$ heißt eine Abbildung aus A in B.

Nach Definition ist also die Kreuzmenge selbst eine Abbildung, denn jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

Kehren wir zu unserem Beispiel zurück.

Ein Familienmitglied (ein Element der Menge M_1), das an der Abbildung beteiligt ist (dem mindestens eine Arbeit zugeordnet wird; von dem mindestens ein Pfeil ausgeht), heißt ein *Urbild*. Wir stellen fest, daß alle Familienmitglieder an der Abbildung beteiligt, also alle Elemente der Menge M_1 Urbilder sind. Die Menge aller Urbilder heißt *Vorbereich* der Abbildung.

Für unser Beispiel gilt demnach:

$$Vb = \{V, M, I, G, P, H\} = M_1.$$

Eine Arbeit, die erledigt wird, also ein Element der Menge M_2, das an der Abbildung beteiligt ist (zu dem mindestens ein Pfeil hinführt), heißt ein *Bild*. Wir stellen fest, daß alle Arbeiten erledigt werden (an der Abbildung beteiligt sind), d. h. alle Elemente der Menge M_2 Bilder sind. Die Menge aller Bilder heißt *Nachbereich* der Abbildung. Für unser Beispiel gilt demnach:

$$Nb = \{f, w, b, e, h, p, u, k\} = M_2.$$

Wenn nun $Vb = M_1$ und $Nb = M_2$ gilt, dann heißt diese besondere Abbildung eine Abbildung *von* M_1 *auf* M_2.

An einem anderen Wochenende kann eine ganz andere Abbildung F_2 vorliegen.

Es kann sein, daß Horst krank im Bett liegt und Vater einem Nachbarn beim Bauen hilft; außerdem können Mutter und Inge schon am Donnerstag abend gefegt und gewischt haben. Fenster sollen auch nicht geputzt werden, und der Garten soll bereits fertig umgegraben sein.

Unter diesen Bedingungen könnte die Abbildung F_2 wie folgt aussehen:

$F_2 = \{[M; k], [I; e], [G; e], [P; b], [P; h]\}$.

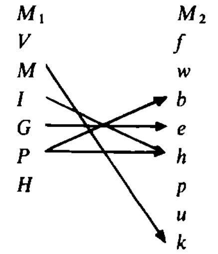


Bild 3

Es gilt: $Vb = \{M, I, G, P\}$; $Vb \subset M_1$

$Nb = \{b, e, h, k\}$; $Nb \subset M_2$

Wenn gilt: $Vb \subset M_1$ und $Nb \subset M_2$, dann liegt eine Abbildung *aus* M_1 *in* M_2 vor.

Es sollte besonders beachtet werden, daß bei dieser Abbildung F_2 die Elemente V und H der Menge M_1 *keine* Urbilder und die Elemente f, w und p der Menge M_2 *keine* Bilder sind. Demnach gehören die genannten Elemente nicht zum Vorbereich bzw. Nachbereich der Abbildung, *wohl aber* zur Menge M_1 bzw. M_2.

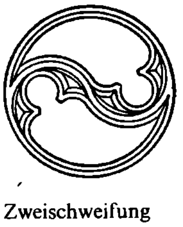
Für unser Beispiel heißt das etwa, daß Horst an dem betreffenden Wochenende keine Arbeit im Haushalt verrichtet, weil er krank ist, wohl ist er aber ein Mitglied der Familie.

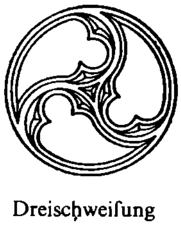
Fenster werden an dem betreffenden Wochenende nicht geputzt; das Fensterputzen gehört aber zur Menge der Arbeiten im Haushalt.

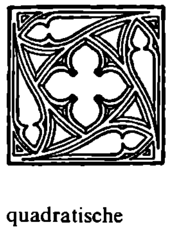
W. Fregin

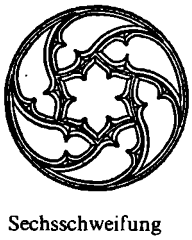
(Dieser Beitrag wird mit einem 3. Teil: Wir arbeiten mit Mengen-Funktionen-Relationen in Heft 6/79 abgeschlossen, d. Red.)

Gotisches Maßwerk


Zweischweifung (Fischblase)


Dreischweifung


quadratische Fensteröffnung


Sechsschweifung

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Isomorphe Graphen

Unter einem *Graph* wollen wir eine Figur verstehen, die aus einer endlichen Anzahl von Punkten (Knotenpunkten) und Linien (Kanten) besteht, wobei eine Linie immer genau zwei Punkte verbindet. Die Kanten eines Graphen müssen nicht geradlinig sein und dürfen sich kreuzen – s. Bild 1. (Näheres zur Definition eines Graphen und über interessante Eigenschaften findet ihr in *alpha* 4/72; 6/72; 1/73; 2/73 und 4/73.)

Wir wollen im folgenden nur *schlichte* Graphen untersuchen, d. h. solche, bei denen je zwei Knotenpunkte durch höchstens eine Kante verbunden sind.

Man kann z. B. einen elektrischen Schaltplan als Graph auffassen. Soll in der elektronischen Industrie für eine solche Schaltung eine Leiterplatte entwickelt werden, so müssen die im Schaltplan vorgesehenen leitenden Verbindungen auch auf der Leiterplatte vorhanden sein, sie dürfen sich jedoch nicht kreuzen. Bild 1 zeigt eine mögliche Lösung eines derartigen Problems. Die wesentlichen Eigenschaften des Graphen bleiben bei solch einer Veränderung erhalten. Man sagt, die dargestellten Graphen haben die gleiche Struktur, sie sind *isomorph*.

Definition 1: Zwei Graphen G_1 und G_2 sind *isomorph*, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung ϕ von der Menge der Knotenpunkte von G_1 auf die Menge der Knotenpunkte von G_2 gibt, die folgende Eigenschaft hat: Zwei Knotenpunkte A und B sind in G_1 genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Bildpunkte $\phi(A)$ und $\phi(B)$ in G_2 ebenfalls durch eine Kante verbunden sind.

Beispiel: Bildet man die Menge der Knotenpunkte des Graphen G_I, in Bild 5 nach der Vorschrift $A \to 1$, $B \to 6$, $C \to 4$, $D \to 2$, $E \to 7$, $F \to 5$, $G \to 3$ eineindeutig auf die Menge der Knotenpunkte des Graphen G_{II}, ab, so sind – wie man sich leicht überzeugt – zwei Knotenpunkte in G_I, genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es auch die entsprechenden Bildpunkte in G_{II}, sind (z. B.

B und *D* in $G_{I'}$, 6 und 2 in $G_{II'}$). Folglich sind die Graphen $G_{I'}$ und $G_{II'}$ isomorph.

– Aus Definition 1 folgt unmittelbar, daß zwei isomorphe Graphen die gleiche Anzahl von Knotenpunkten bzw. Kanten haben müssen. Ist die Bedingung aber auch hinreichend für die Isomorphie zweier Graphen?

▲1▲ Welche der Graphen in Bild 2 sind isomorph?

– Die Anzahl der von einem Knotenpunkt eines Graphen ausgehenden Kanten wird als *Grad* (oder *Valenz*) dieses Knotenpunktes bezeichnet (vgl. alpha 6/72). Aus Definition 1 folgt, daß zwei isomorphe Graphen die gleiche Anzahl von Knotenpunkten eines vorgegebenen Grades haben müssen.

Aber selbst diese Bedingung ist noch nicht hinreichend dafür, daß zwei Graphen isomorph sind (Bild 3).

– Die beiden Graphen in Bild 3 haben eine unterschiedliche Anzahl von „Vierecken", d.h. von Teilgraphen, die aus vier durch 4 Kanten zu einem geschlossenen Ring verbundenen Knotenpunkten bestehen. Isomorphe Graphen müssen jedoch auch die gleiche Anzahl ringförmiger Teilgraphen mit gleicher Knotenzahl besitzen.

Die drei angegebenen Kriterien erlauben lediglich, gegebenenfalls festzustellen, daß zwei vorliegende Graphen *nicht* isomorph sind. Zum Nachweis der Isomorphie muß auf die Definition zurückgegriffen werden. Besonders bei unübersichtlichen Graphen wird dies mitunter erleichtert, wenn man statt des gegebenen Graphen den zu ihm *komplementären* Graphen untersucht.

Definition 2: Zwei Graphen *G* und *G'* mit *denselben* Knotenpunkten sind *komplementär* zueinander, wenn in *G'* genau die Knotenpunkte jeweils durch eine Kante verbunden sind, die dies in *G* nicht sind.

Wie man sich leicht überzeugt, gibt es zu jedem Graphen genau einen komplementären Graphen.

▲2▲ Zeichne zu den Graphen in Bild 4 jeweils den komplementären Graphen!

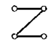
Es gilt nun

Satz 1:

Zwei Graphen sind genau dann isomorph, wenn ihre Komplemente (d.h. die zu ihnen komplementären Graphen) isomorph sind.

▲3▲ Beweise diesen Satz!

Wir haben bereits erkannt, daß die in ▲2▲ gezeichneten Graphen isomorph sind (vgl. ▲1▲, Bild 5). Da diese zu den Graphen in Bild 4 komplementär sind, sind nach Satz 1 auch die Graphen in Bild 4 isomorph.

Betrachtet man den Graph , so stellt man fest, daß er zu seinem Komplement  isomorph ist.

▲4▲ Bezeichne die Knotenpunkte der beiden Graphen, und gib eine Abbildung, wie sie in Definition 1 gefordert wird, an!

Definition 3: Ein Graph, der zu seinem komplementären Graphen isomorph ist, heißt *selbstkomplementär.*

Alle selbstkomplementären Graphen mit vier Knotenpunkten sind zueinander isomorph.

▲5▲ Die selbstkomplementären Graphen mit 5 Knotenpunkten lassen sich in zwei Klassen einteilen, wobei zwei dieser Graphen genau dann zu derselben Klasse gehören, wenn sie isomorph sind.

Zeichne aus jeder dieser Klassen einen Vertreter!

Satz 2:

Selbstkomplementäre Graphen existieren nur für Knotenpunktanzahlen *n*, die sich in der Form $n=4a$ oder $n=4a+1$ ($a \in N$) darstellen lassen.

Beweis: Addiert man die Anzahl der Kanten eines Graphen und seines Komplements, so erhält man die Anzahl aller Kanten, die man erhält, wenn man jeden Knotenpunkt mit jedem verbindet. Wenn die Anzahl der Knotenpunkte *n* ist, so sind insgesamt $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten möglich. Da isomorphe Graphen die gleiche Anzahl von Kanten haben, entfallen auf den Graphen und sein Komplement jeweils die Hälfte – bezeichnen wir sie mit *m*.

Es gilt dann $\frac{n(n-1)}{2}=2m$, d.h. $n(n-1)=4m$.

Hieraus folgt, daß entweder *n* oder $n-1$ durch 4 teilbar sein muß, w.z.b.w.

Betrachtet man den Graph  und sein Komplement  etwas genauer, so kann man eine Möglichkeit für die Konstruktion von selbstkomplementären Graphen erkennen. Ordnet man nämlich die Knotenpunkte eines Graphen gleichmäßig auf den Kanten eines Quadrats (bei $n=4a$) bzw. bei $n=4a+1$ $n-1$ Punkte auf den Eckpunkten eines Quadrats und den verbleibenden in dessen Mitte an, erhält man zwei zueinander komplementäre und isomorphe (d.h. selbstkomplementäre) Graphen, wenn man die Punkte wie folgt verbindet:

Den einen Graph erhält man, wenn man alle waagerechten Verbindungen einzeichnet und alle Verbindungen, die schräg von links unten nach rechts oben verlaufen. Der andere Graph entsteht durch Einzeichnen aller senkrechten und aller von links oben nach rechts unten verlaufenden Verbindungen.

Nr. 2 und 5 in Bild 6 wurden nach dieser Beschreibung konstruiert, die anderen auf ähnliche Art. Dabei sind keine zwei der angegebenen Graphen isomorph.

▲6▲ Konstruiere die Komplemente zu den Graphen in Bild 6!

M. Birnbaum, J. Dolecek, P. Offel

Bild 1

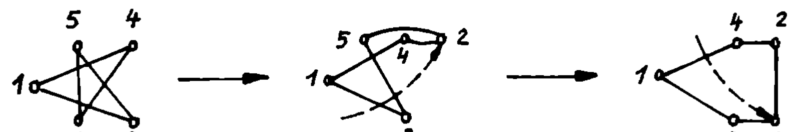


Bild 2

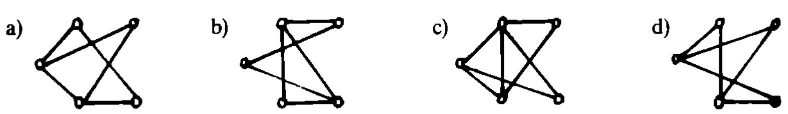


Bild 3

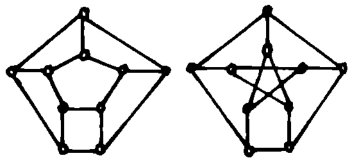


Bild 4

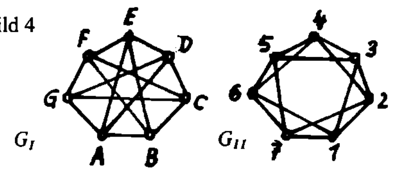


Bild 5

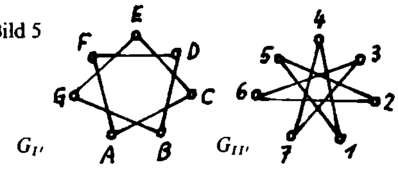
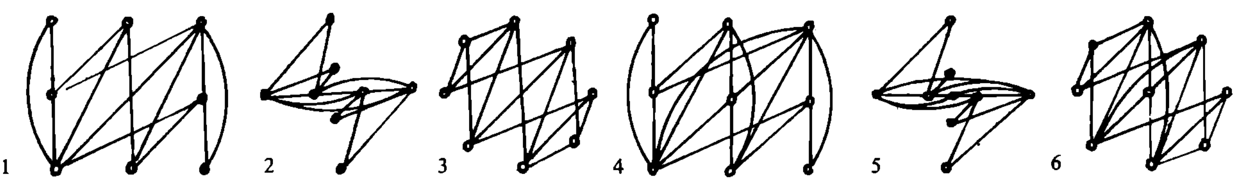
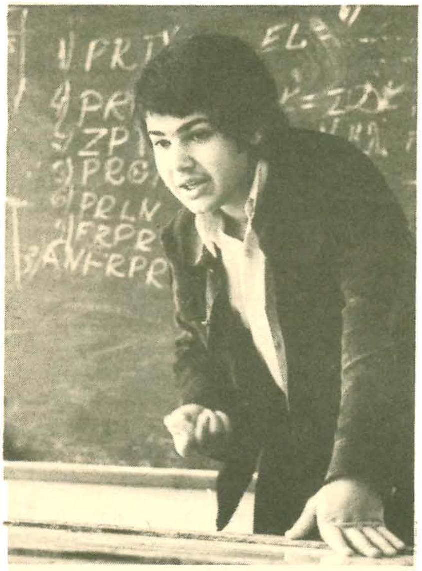


Bild 6



David und Goliath



David heißt er nur – der vierzehnjährige David Arutjunjan –, und ein Goliath ist er keineswegs, auch wenn er bereits das dritte Jahr erfolgreich an der Fakultät für Technische Kybernetik der Jerewaner Polytechnischen Hochschule *Karl Marx* studiert. Er komponierte nicht, spielte nicht hervorragend Klavier, schrieb keine Verse, löste keine komplizierten arithmetischen Aufgaben, konnte weder blitzschnell dreistellige Zahlen addieren noch multiplizieren, und er hatte auch kein besonders gutes Gedächtnis.

„Deshalb", sagten die Eltern – der Vater ist Biologe, die Mutter Sprachwissenschaftlerin –, „versuchten wir, Davids Gedächtnis von Kindheit an zu trainieren." Alle Übungen mit ihm bauten sie auf Spielsituationen und auf den Interessen des Kindes auf. Sie bemühten sich, den Jungen nicht zu überfordern, sondern ihm mehr zu zeigen und zu erzählen. In der Schulzeit begann David armenisch und russisch lesen zu lernen und löste schnell einfache arithmetische Aufgaben. Als die Lehrerin den Eltern mitten im Schuljahr mitteilte, daß sich das Kind in der ersten Klasse langweile, weil es den ganzen Lehrstoff schon kannte, stimmten die Eltern der Versetzung in die nächsthöhere Klasse zu. Das Risiko war nicht allzu groß. Sollte die Sache schiefgehen, konnte David nochmal die Klasse durchlaufen. Darauf bereiteten sie ihn vor, um ein psychologisches Trauma zu vermeiden...

Der Junge bewältigte innerhalb von zwei Jahren den Lehrstoff von vier Klassen. Freilich lernte er auch öfter sonntags und in den Ferien. Doch nicht mehr als zwei, drei Stunden täglich. Mathematik fiel ihm leicht. Die Fächer der zehnten Klasse mit erweitertem Mathematikunterricht schloß er mit „gut" und „ausgezeichnet" ab. Und da spielten Zugeständnisse der Lehrer wegen des nicht alltäglichen Falls keine Rolle? „Nein", sagten die Eltern, „bei den Abschlußexamina prüften die Lehrer David oft sogar länger als üblich."

Blieb ihm da noch Zeit für altersgemäße Jugendspiele? „Natürlich war er nicht seltener draußen als andere Kinder. Wir machten mit ihm viele Ausflüge, besuchten Museen, Sternwarten und Ausstellungen. In den Ferien versuchten wir viel zu reisen, um ihm auch andere Städte zu zeigen. Körperlich entwickelte er sich gut und verfügt auch über ein ausreichend stabiles Nervensystem.

Auf Überforderungen achten wir genau. Und nicht nur wir, auch der Schularzt hätte sie niemals geduldet." Eine Klasse ist ein Kollektiv, in dem sich Freunde finden. Oft fürs ganze Leben. Hat David Freunde? „Er ist ein geselliger Mensch. Doch sein nicht alltäglicher Lernrhythmus brachte es mit sich, daß er oft die Freunde wechselte. In jedem neuen Kollektiv fand er ziemlich schnell Anschluß. Aber das Fehlen fester Freunde beunruhigte uns. Er fand sie zum Glück in der 9. und 10. Klasse, in denen er jeweils ein volles Schuljahr blieb und auch jetzt an der Hochschule."

Als ich nach Jerewan kam, befürchtete ich, einen Bücherwurm anzutreffen, der nichts kennt außer Schreibtisch und Bibliothek. Meine Befürchtungen waren unbegründet. Von den Studenten seines Studienjahres unterschied sich David kaum. Natürlich sah er ein wenig jünger aus als die anderen. Er ist mitteilsam und wißbegierig. Er versäumt keine Exkursionen und Praktika. Seine Interessengebiete sind umfangreich: Theater, die Geschichte Armeniens, in der er sich gut auskennt, Sport. David lernt gut, bestätigten seine Kameraden. Und ohne jede Bevorzugung. Natürlich macht ihm sein Schulalter manchmal zu schaffen. Er sagt bisweilen etwas recht Naives, Kindliches. Aber was das Studium anbelangt, passiert ihm das nicht. Wir haben bisher keine Lücken in seinem schulischen Wissen bemerkt, war die Ansicht der Dozenten. Und sein Dekan, Georgi Akondshanjan, meinte: „Ich bin Prüfer im Fach ‚Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik'. Davids Antworten waren ausgezeichnet. An ihnen beeindruckte der Forschergeist. Bisher habe ich noch keinerlei negative Momente seines zügigen Bildungsweges wahrgenommen, und er ist immerhin schon im 3. Studienjahr. Viele nennen derartige Kinder ‚Wunderkinder'. Auf David trifft das jedoch nicht zu. Ich würde sagen, er besitzt überdurchschnittliche Fähigkeiten."

A. Simonjan (aus Freie Welt 2/79)

Ein Blick in das Rechenzentrum der Fakultät für Technische Kybernetik der Jerewaner Polytechnischen Hochschule Karl Marx

Zweifarbige Illustrationen
von Gisela Wongel
192 Seiten · Pappband mit Folie
etwa 4,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin
Bestellangaben: 630 659 0/Scholtyssek
Für Leser von 11 Jahren an

Im Reich der Zahlen und Gleichungen geht es zwar logisch und nach strengen Gesetzmäßigkeiten zu, aber – auch diese Welt hat ihre Romantik. Das Buch vermittelt dem, der in ihr „Zahlenlabyrinth" eindringt, interessante Begegnungen und erstaunliche Entdeckungen. Er kann in die Geheimnisse magischer Quadrate eindringen und lernt verblüffende Tricks mit Karten und Würfeln kennen, die auf mathematischen Gesetzmäßigkeiten beruhen.

Leseprobe

Wie können wir uns beim großen Einmaleins das Kopfrechnen erleichtern?

Im Bereich von 11 bis 19 addieren wir zunächst zur ersten Zahl die Einer der zweiten Zahl, fügen dem Ergebnis eine Null hinzu, multiplizieren noch die Einer beider Zahlen und addieren die so erhaltenen beiden Ergebnisse. Am Beispiel $13 \cdot 14$ sieht das dann so aus:

$13 + 4 = 17$; eine Null anhängen ergibt 170
$3 \cdot 4 = 12$; addiert zu 170 ergibt 182.
$13 \cdot 14 = 182$

Zum besseren Verständnis noch eine solche Aufgabe im Kurzverfahren des Kopfrechnens:

$17 \cdot 18$
$17 + 8 = 25$; Null anhängen ergibt 250,
$7 \cdot 8 = 56$; addiert zu 250 ergibt 306,
$17 \cdot 18 = 306$.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch andere zweistellige Zahlen mit gleichem Zehner multiplizieren, also Aufgaben wie $23 \cdot 24$, $33 \cdot 39$, $42 \cdot 49$ usw. lösen. In solchen Fällen, wo sich die Faktoren im gleichen Zehnerbereich befinden, muß man aber vor dem Anhängen der Null die Summe noch mit der an der Zehnerstelle stehenden Zahl multiplizieren. An Beispielen wird das verständlicher.

$23 \cdot 24$
$23 + 4 = 27$, mal 2 (20er Bereich) ergibt 54; Null anhängen ergibt 540, plus 3 mal 4 (12) ergibt 552,
$23 \cdot 24 = 552$.

$33 \cdot 39$
$33 + 9 = 42$, mal 3 ergibt 126; Null anhängen ergibt 1260,
plus 3 mal 9 ergibt 1287
$33 \cdot 39 = 1287$.

Natürlich sind wir damit auch gleich in der Lage, die Quadratzahlen blitzschnell und sogar im Kopf auszurechnen. Bitte sehr:

44^2
$44 + 4 = 48$, mal 4 ergibt 192, Null anhängen ergibt 1920,
plus 4 mal 4 ergibt 1936
$44^2 = 1936$.

Noch einfacher wird die Sache bei Zahlen, deren letzte Ziffer 5 ist, z. B. $33 \cdot 35$ oder 35^2. Hier multiplizieren wir die Zehnerstelle (3) nur mit der nächsthöheren Zahl (4) und hängen 25 an.

35^2
$3 \cdot 4 = 12$; 25 anhängen ergibt 1225,
$35^2 = 1225$.

Diese Methode läßt sich für die Multiplikation von zwei zweistelligen Zahlen aus verschiedenen Zehnerbereichen (also zum Beispiel $17 \cdot 24$) leider nicht benutzen. Aber hier hat uns der Mathematiker Ferrol einen anderen Weg gewiesen, der ebenso rasch zum Ziel führt.

$22 \cdot 13$ ergeben auf einen Blick 286 (2 Hunderter, 8 Zehner, 6 Einer). Die Einer finden wir durch Multiplikation der Einer $(2 \cdot 3)$; die Hunderter durch Multiplikation der Zehner $(2 \cdot 1)$; die Zehner erhalten wir aus der Addition der Produkte der beiden äußeren und der beiden inneren Glieder (also $2 \cdot 3$ plus $2 \cdot 1 = 8$).

Wenn sich jedoch bei der Ermittlung der Einer oder Zehner zweiziffrige Zahlen ergeben, so übertragen wir die ersten Ziffern (die Zehner) dieser Zahlen jeweils auf die nächste Stufe, also von den Einern auf die Zehner und entsprechend von den Zehnern auf die Hunderter usw. Dazu ein Beispiel:

$27 \cdot 36$
Zuerst die Einer; $7 \cdot 6 = 42$, also 2, die 4 Zehner werden auf die Zehner übertragen. Jetzt die Zehner: $(2 \cdot 6) + (7 \cdot 3) = 33$, plus 4 (Übertrag) ergibt 37; also 7, die 3 Zehner werden auf die Hunderter übertragen. Nun die Hunderter: $(2 \cdot 3) + 3$ (Übertrag) $= 9$. Somit erhalten wir als Resultat 972.

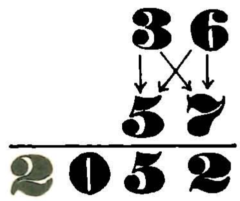
Diese Art, vorteilhaft zu rechnen, ist auch als „Multiplikation über Kreuz" bekannt und läßt überdies eine vereinfachte Darstellung des oben beschriebenen Verfahrens zur Multiplikation zweistelliger Zahlen aus verschiedenen Zehnerbereichen zu. Hier gilt der folgende Weg:

- Die Einer des Produkts ergeben sich durch Multiplikation der Einer der beiden Faktoren.
- Die Zehner des Produkts erhält man aus dem Überschuß plus Einer mal Zehner plus Zehner mal Einer.
- Die Hunderter des Produktes ergeben sich aus dem Zehnerüberschuß plus Zehner mal Zehner.

Machen wir uns das an einem Beispiel klar:

$36 \cdot 57 =$

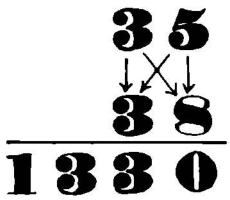
Rechengang:
Einer: $6 \cdot 7 = 4\underline{2}$
Zehner: $4 + (6 \cdot 5) + (3 \cdot 7) = 5\underline{5}$
Hunderter: $5 + (3 \cdot 5) = \underline{20}$.



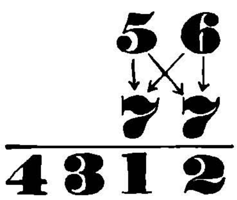
(Angeschrieben werden nur die unterstrichenen Ziffern.)

Man kann das Verfahren noch vereinfachen, wenn in einer Spalte oder Zeile des „Über-Kreuz-Schemas" zwei gleiche Ziffern stehen.

Einer: $5 \cdot 8 = 40$
Zehner: $4 + 3(5 + 8) = 4\underline{3}$
Hunderter: $4 + 3(3 \cdot 3) = \underline{13}$;



Einer: $6 \cdot 7 = 42$
Zehner: $4 + 7(6 + 5) = 8\underline{1}$
Hunderter: $8 + (5 \cdot 7) = \underline{43}$.



Das alles sieht zunächst recht kompliziert aus. Aber mit ein wenig Übung beherrschen wir die Sache spielend und werden bald merken, daß uns solche Rechenkniffe von großem Vorteil sind.

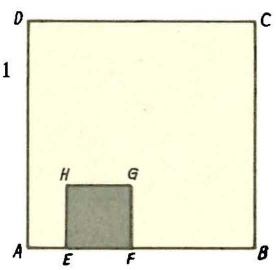
Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierigkeitsgrad

Wir stellen unseren Lesern Aufgaben ähnlichen Inhalts für Schüler der Klassen 4 bis 10 vor. Diese Aufgaben wurden von Klassenstufe zu Klassenstufe variiert und im Schwierigkeitsgrad erhöht. Wir empfehlen allen interessierten Lesern, mit der Lösung der Aufgabe für Klasse 4 zu beginnen und bei Erfolg von Klassenstufe zu Klassenstufe voranzuschreiten, soweit es zu schaffen ist.

Klasse 4

Aus einem Quadrat *ABCD* mit einem Flächeninhalt von 121 cm² schneidet Stefan ein kleineres Quadrat *EFGH*, wie aus der Abbildung ersichtlich, heraus. Das verbliebene Achteck *AEHGFBCD* hat einen Flächeninhalt von 85 cm². Welche Seitenlänge hat das Quadrat *EFGH*?

Bild 1



Klasse 5

Aus einem Quadrat *ABCD* mit einem Flächeninhalt von 144 cm² schneidet Stefan ein kleineres Quadrat *EFGH* mit einem Flächeninhalt von 25 cm², wie aus der Abbildung ersichtlich, heraus. Welche Länge hat der Umfang des verbliebenen Achtecks *AEHGFBCD*?
(Zeichnung wie für Kl. 4)

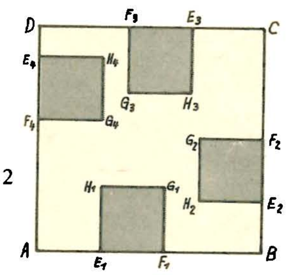
Klasse 6

Aus einem Quadrat *ABCD* mit dem Flächeninhalt von 625 cm² schneidet Stefan ein kleineres Quadrat *EFGH*, wie aus der Abbildung ersichtlich, heraus. Der Umfang des verbliebenen Achtecks *AEHGFBCD* ist 108 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat dieses Achteck?
(Zeichnung wie für Kl. 4)

Klasse 7

Aus einem Quadrat *ABCD* schneidet Stefan vier kleinere kongruente Quadrate $E_1F_1G_1H_1$, $E_2F_2G_2H_2$, $E_3F_3G_3H_3$ und $E_4F_4G_4H_4$, wie aus der Abbildung ersichtlich, heraus, deren Flächeninhalt jeweils 25 cm² beträgt. Der Umfang des verbliebenen 20-Ecks beträgt 172 cm. Wie groß war in diesem Fall der Flächeninhalt des Quadrates *ABCD*?

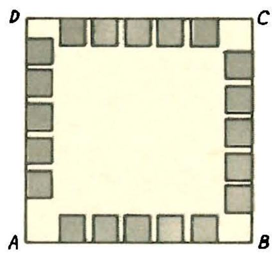
Bild 2



Klasse 8

Aus einem Quadrat *ABCD* mit einem Flächeninhalt von 961 cm² schneidet Stefan, wie aus der Abbildung ersichtlich, an allen vier Seiten jeweils mehrere, aber stets gleichviele kongruente Quadrate heraus. Das verbliebene *n*-Eck hat einen Umfang von 212 cm Länge. Die Maßzahl der kleineren Quadratseiten (gemessen in cm) ist eine natürliche Zahl. Welche Länge haben die Seiten der kleineren kongruenten Quadrate? Wie viele kleinere Quadrate insgesamt hat Stefan ausgeschnitten?

Bild 3



(Die Anzahl der Quadrate braucht nicht mit der Lösung übereinzustimmen.)

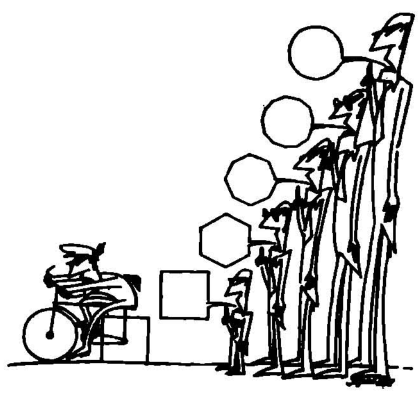
Klasse 9

Aus einem Quadrat *ABCD* schneidet Stefan, wie aus der Abbildung ersichtlich, an allen vier Seiten jeweils ein kleineres Quadrat $E_1F_1G_1H_1$, $E_2F_2G_2H_2$, $E_3F_3G_3H_3$, $E_4F_4G_4H_4$ heraus, die untereinander kongruent sind. Das verbliebene 20-Eck hat einen Umfang von 204 cm und einen Flächeninhalt von 969 cm². Welchen Flächeninhalt hat jedes der kleineren herausgeschnittenen Quadrate?
(Zeichnung wie für Kl. 7)

Klasse 10

Aus einem Quadrat *ABCD* schneidet Stefan, wie aus der Abbildung ersichtlich, an allen vier Seiten jeweils mehrere, aber stets gleichviele kongruente Quadrate heraus. Der Flächeninhalt des verbliebenen *n*-Ecks beträgt $88\frac{8}{9}\,\%$ des Flächeninhalts des Quadrates *ABCD*. Der Umfang des verbliebenen *n*-Ecks beträgt $166\frac{2}{3}\,\%$ des Umfangs des Quadrates *ABCD*. Die Seite des Quadrates *ABCD* ist um 66 cm länger als die Seite eines der kleineren herausgeschnittenen Quadrate. Wie viele kongruente kleinere Quadrate wurden insgesamt aus dem großen Quadrat *ABCD* herausgeschnitten? Welche Seitenlänge hat jedes dieser kleineren Quadrate?
(Zeichnung wie für Kl. 8)

H.-J. Kerber/Th. Scholl



Die letzten 30 Jahre haben Gewicht

Zwischen dem VII. und VIII. Pädagogischen Kongreß – Zahlen

Mit der fortschreitenden gesellschaftlichen Entwicklung haben sich in unserer Republik die Bedingungen für die sozialistische Bildung und Erziehung der jungen Generation immer günstiger gestaltet. Davon zeugen die Leistungen in der Volksbildung zwischen dem VII. und VIII. Pädagogischen Kongreß. Sie waren möglich, weil die Partei der Arbeiterklasse und unsere Regierung dem Bildungswesen und seiner weiteren Entwicklung stets größte Aufmerksamkeit und Unterstützung angedeihen ließen, weil die Werktätigen durch ihre unermüdliche Arbeit dafür die entscheidenden Voraussetzungen schufen.

Steigende Anzahl von Pädagogen

Im Schulwesen der DDR sind 400000 Pädagogen tätig. Gegenwärtig arbeiten an den nahezu 6000 allgemeinbildenden Schulen (Oberschulen, erweiterte Oberschulen, Sonderschulen) über 200000 Lehrer und Horterzieher. Die Hälfte davon hat erst in den vergangenen zehn Jahren die Tätigkeit in der Schule aufgenommen. Etwa ein Drittel aller Lehrer ist jünger als 30 Jahre. Zwischen dem VII. und VIII. Pädagogischen Kongreß ist die Anzahl der Pädagogen kontinuierlich gestiegen. Im Schuljahr 1970/71 waren es zum Beispiel 144000 Lehrer und Horterzieher. 1978/79 nahmen 8200 Absolventen der Hoch- und Fachschulen ihre pädagogische Tätigkeit auf.

Sinkende Klassenfrequenzen

An den allgemeinbildenden Schulen der DDR lernen im Schuljahr 1978/79 insgesamt rund 2,6 Millionen Schüler, die in 107400 Klassen erfaßt sind.

Der Anteil der Mädchen an der Gesamtschülerzahl beträgt 49 Prozent. Im Interesse einer effektiven Bildungs- und Erziehungsarbeit konnte die durchschnittliche Klassenstärke der Schüler im Republikmaßstab von 26,8 Schüler je Klasse im Schuljahr 1970/71 auf 24,2 Schüler je Klasse im Schuljahr 1977/78 gesenkt werden.

Der VIII. Parteitag der SED hatte der Volksbildung die Aufgabe gestellt, den Aufbau der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule im wesentlichen abzuschließen und 90 Prozent aller Schüler der 8. Klassen zur 9. und 10. Klasse weiterzuführen. Der IX. Parteitag der SED konnte 1976 feststellen, daß dieses Ziel erreicht wurde.

Erhöhte finanzielle Aufwendungen

Die Ausgaben des Staatshaushaltes für die Volksbildung betrugen 1977 etwa 6,6 Mrd. Mark. Im Jahre 1971 waren es 4,3 Mrd. Mark. Die Ausgaben der örtlichen Haushalte – der Räte der Bezirke, Kreise, Städte und Gemeinden – für die Einrichtung der Volksbildung stiegen von 3,7 Mrd. Mark auf 6,9 Mrd. Mark 1978. Insgesamt wurden von 1970 bis 1978 dafür 48,1 Mrd. Mark ausgegeben. 1972 betrugen die Mittel, die zur weiteren Entwicklung der außerunterrichtlichen Tätigkeit zusätzlich bereitgestellt wurden, 10 Millionen Mark, 1978 stiegen die Ausgaben auf nahezu 54 Millionen Mark.

Kontinuierlicher Zuwachs an Unterrichtsräumen

Gegenwärtig gibt es in den allgemeinbildenden Schulen unserer Republik etwa 113000 Unterrichtsräume. In der Zeit zwischen dem VII. und VIII. Pädagogischen Kongreß entstanden 23400 Unterrichtsräume und etwa 1000 Turnhallen. Im Vergleich zu 1945 sind bis heute über die Hälfte des Gesamtbestandes an Unterrichtsräumen in der DDR neu errichtet worden. Besonders in den ehemals rückständigen Gebieten hat sich die Unterrichtsraumkapazität bemerkenswert verändert. Zum Beispiel sind im Bezirk Rostock 71,4 Prozent, im Bezirk Neubrandenburg 66,9 Prozent und im Bezirk Cottbus 66,6 Prozent aller Unterrichtsräume nach 1945 errichtet worden.

Bessere Bedingungen in den Schulhorten

Mehr als drei Viertel aller Schüler der 1. bis 4. Klasse besuchen nach dem Unterricht den Schulhort.

Standen 1970/71 etwa 608000 Hortplätze zur Verfügung, so sind es in diesem Schuljahr 755000. Von 1000 Schülern der Klassenstufen 1 bis 4 besuchen somit 809 Schüler den Hort. 1971 entfielen auf 1000 Schüler der Unterstufe 513 Hortplätze.

Allein 1978 wurden zusätzlich zu den in den Haushaltsplänen der örtlichen Räte enthaltenen finanziellen Mittel aus dem zentralen Staatshaushalt für die Ausgestaltung von Schulhorten 6,8 Millionen Mark bereitgestellt; seit 1973 insgesamt 42,2 Millionen Mark.

Höheres Niveau im polytechnischen Unterricht

Bei der weiteren inhaltlichen Ausgestaltung unserer Oberschule und der Vorbereitung der jungen Generation auf die Arbeit leistet der polytechnische Unterricht seit nunmehr 20 Jahren einen wesentlichen Beitrag.

Im Schuljahr 1970/71 waren 784000 Schüler der Klassen 7 bis 10 am polytechnischen Unterricht beteiligt. Damals waren rund 25500 Werktätige als hauptamtliche und nebenamtliche Betreuer eingesetzt. In den darauffolgenden Jahren stieg die Zahl der am polytechnischen Unterricht teilnehmenden Schüler kontinuierlich an. Damit wuchs der Bedarf an Betrieben, an Betreuern, an modernen Arbeitsplätzen für die Schüler, an höheren materiellen und finanziellen Mitteln.

Im Schuljahr 1977/78 nahmen mehr als 1 Million Schüler der Klassen 7 bis 10 am polytechnischen Unterricht teil. Das erfolgte in rund 5200 Betrieben unterschiedlicher Größe. Etwa 33000 Betreuer, davon 8000 hauptamtliche, größtenteils mit der pädagogischen Qualifikation eines Lehrmeisters oder Ingenieur-Pädagogen, unterrichten die Schüler.

Die Schüler schaffen im Rahmen ihres polytechnischen Unterrichts durch die produktive Arbeit erhebliche materielle Werte. So betrug die Jahresproduktion der Schüler 1976/77 beispielsweise im VEB Schwermaschinenbau „Ernst Thälmann“ Magdeburg 3500 Stück Gasherde oder im VEB Berliner Bremsenwerk 65000 Stück Bremszylinder für Mähdrescher und Anhänger und 40000 Stück Bedienungsventile für das Allradgetriebe des LKW W 50. Diese produktive Arbeit war eng mit dem Lernen verbunden und bedeutsam für die Erziehung der Schüler.

Größeres Angebot an naturwissenschaftlich-technischen Arbeitsgemeinschaften

Insgesamt gab es im Schuljahr 1972/73 etwa 20000 naturwissenschaftlich-technische Arbeitsgemeinschaften mit 260000 Schülern an unseren Schulen. Von den 20000 Leitern der Arbeitsgemeinschaften waren 14600 Pädagogen.

Im Schuljahr 1977/78 bestanden an unseren Oberschulen in den Klassen 1 bis 10 insgesamt etwa 23000 Arbeitsgemeinschaften des Bereichs Naturwissenschaft und Technik mit 283000 Teilnehmern. Davon arbeiteten rund 6600 Arbeitsgemeinschaften mit über 80000 Schülern der Klassen 9 und 10 auf der Grundlage von Rahmenprogrammen. Die Leiter dieser Arbeitsgemeinschaften sind zu 85 Prozent Pädagogen. Von den insgesamt 32 Rahmenprogrammen werden allein für den Bereich Mathematik, Naturwissenschaft und Technik 15 Programme angeboten.

Durch die Einführung der Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen im Schuljahr 1970/71 wurde erreicht, daß sich entsprechend den gesellschaftlichen Bedürfnissen ein wesentlich größerer Teil der Schüler der 9. und 10. Klassen zusätzlich naturwissenschaftlich-technische Kenntnisse aneignet.

Immer mehr Jungen und Mädchen nehmen auch an den naturwissenschaftlich-technischen Arbeitsgemeinschaften in den außerschulischen Einrichtungen – Häuser der Jungen Pioniere und Stationen Junger Techniker – teil. Gegenüber 1975/76 ist die Anzahl dieser Arbeitsgemeinschaften im Schuljahr 1977/78 um 471 und die der teilnehmenden Schüler um 4780 gestiegen.

Von den insgesamt in den außerschulischen Einrichtungen im Schuljahr 1977/78 bestehenden 6800 Arbeitsgemeinschaften aller Art sind allein 3370 im Bereich Naturwissenschaft und Technik angelagert. Etwa 38700 Schüler nehmen daran teil. Seit dem Schuljahr 1974/75 bestehen darüber hinaus auch praktisch-produktive Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen, in denen die Schüler – im Vergleich zu allen anderen Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen – stärker produktiv tätig sein können. Damit wurden den Schülern der 9. und 10. Klassen zusätzliche Möglichkeiten erschlossen, in betrieblichen und gesellschaftlichen Einrichtungen entsprechend ihren Interessen praktisch tätig zu sein.

Im Schuljahr 1974/75 arbeiteten auf der Grundlage von drei zur Verfügung stehenden Rahmenprogrammen 6100 Schüler in 617 Arbeitsgemeinschaften. 1977/78 wurde das Angebot auf sechs Rahmenprogramme erweitert. In 1570 Arbeitsgemeinschaften waren 19000 Schüler tätig. Die Mehrzahl dieser Arbeitsgemeinschaftsleiter – rund 54 Prozent – kommt aus betrieblichen und gesellschaftlichen Einrichtungen. Die Schüler können jetzt zwischen folgenden sechs Rahmenprogrammen wählen:

Bauwesen, Kfz-Technik, Kochen–Servieren –Pflegen, Funktechnischer Gerätebau, Technische Instandsetzung, Tierproduktion/Futterproduktion.

Vielfältigere kulturell-künstlerische Betätigung der Schüler

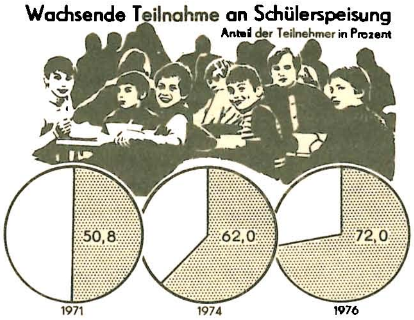
Die Schüler haben in den allgemeinbildenden Schulen vielfältige Möglichkeiten, sich kulturell-künstlerisch zu betätigen. Im Schuljahr 1972/73 waren 369000 Schüler der Klassen 1 bis 10 in rund 17900 kulturell-künstlerischen Arbeitsgemeinschaften erfaßt.

Im Schuljahr 1977/78 arbeiteten 538000 Schüler der Klassen 1 bis 10 in 31600 kulturell-künstlerischen Arbeitsgemeinschaften. Hinzu kommen noch 45000 Schüler, die in 3500 Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen erfaßt sind (Klassen 9 und 10). Gegenwärtig gibt es 5916 Chöre, 1990 Singegruppen, 2805 Instrumentalgruppen und Schülerorchester, 1611 Tanzgruppen, 9241 Arbeitsgemeinschaften für Malen, Zeichnen, Textilgestaltung, Keramik, Plastik und Dekoratives Gestalten sowie rund 3200 Arbeitsgemeinschaften für Darstellendes Spiel, Kabarett und Puppenspiel. Darüber hinaus sind etwa 100000 Schüler aktiv in künstlerischen Kollektiven außerhalb der Schule tätig, in den Pionierhäusern, Musikschulen, Theatern, Museen und Kulturhäusern. Hunderttausende von Schülern stellen auch jährlich in den Ausstellungen „Galerie der Freundschaft“ in Schulen, Kreisen und Bezirken aus.

Wirksame Maßnahmen für die Schüler- und Kinderspeisung

Der IX. Parteitag der SED konnte feststellen, daß sich die Qualität der Schüler- und Kinderspeisung ständig erhöht hat. Unser Staat stellte für die Schüler- und Kinderspeisung in den Jahren von 1971 bis 1975 nicht weniger als 1,7 Mrd. Mark zur Verfügung. Betrug der Zuschuß aus dem Staatshaushalt im Jahre 1971 dafür 275 Millionen Mark, so stieg er im Jahre 1975 auf 405 Millionen Mark und im Jahre 1977 auf insgesamt 595 Millionen Mark an.

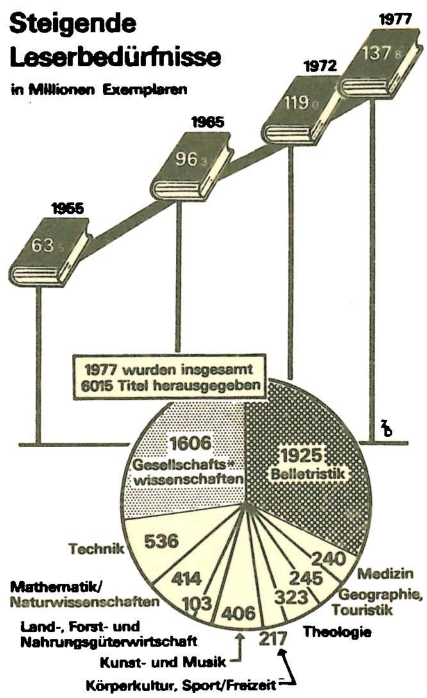
Wachsende Teilnahme an Schülerspeisung



Zu Beginn des Fünfjahrplanzeitraumes 1976 bis 1980 trat die neue Verordnung über die Schüler- und Kinderspeisung in Kraft. Mit ihr wurden wesentliche Voraussetzungen geschaffen, um die Qualität des Essens weiter zu erhöhen und die Bedingungen der Esseneinnahme zu verbessern. Im Ergebnis der vielfältigen Initiative zur Durchsetzung der Verordnung entsprechen nun die Speisepläne und die Zusammensetzung der täglichen Gerichte besser den ernährungsphysiologischen Anforderungen. Für den höheren Naturalwert werden je Portion 20 bzw. 40 Pfennige mehr aufgewendet. Die Kostenbeteiligung der Eltern dagegen ist seit vielen Jahren konstant geblieben. Sie beträgt je Portion Schülerspeisung 0,55 M und je Portion Kinderspeisung 0,35 M. Kostenlos werden über 10 Prozent aller Schüler und Kinder mit Mittagessen und Trinkmilch versorgt. Dabei werden vorwiegend Kinder aus kinderreichen und solchen Familien berücksichtigt, deren Einkommen eine staatliche Unterstützung rechtfertigt.

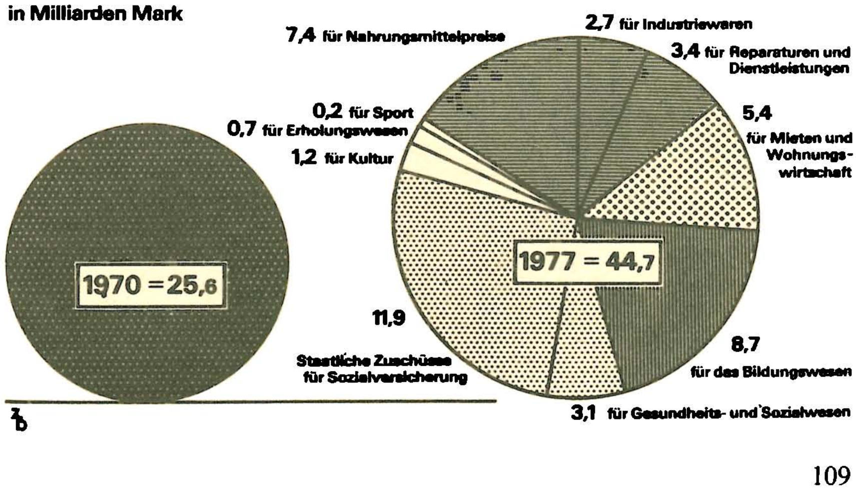
Für diese Maßnahmen wurden im Jahre 1976 aus dem Staatshaushalt zusätzlich 183 Millionen zur Verfügung gestellt. In die Speiseproduktion für die Schülerspeisung sind gegenwärtig rund 6500 Betriebe und Einrichtungen einbezogen. Die Hälfte aller Portionen – eine Million täglich – werden in rund 3000 Schulküchen hergestellt, weitere 235000 Portionen in Gaststätten und 350000 Portionen in Großküchen. In den Jahren von 1976 bis 1978 stieg die Zahl der Teilnehmer an der Schülerspeisung um 7 Prozent.

Gegenwärtig nehmen rund 2 Millionen Schüler daran teil. *F. Jurgeleit*

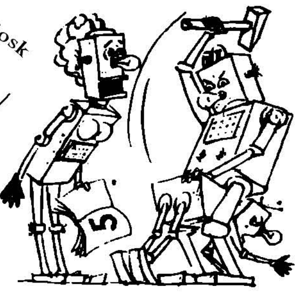


Aufwendungen aus gesellschaftlichen Fonds

in Milliarden Mark



Wer löst mit?
alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1980

Mathematik

Ma 5 ■1881 Ines, Jens und Angela sind junge Philatelisten. Ines hat bereits doppelt soviel Briefmarken wie Jens gesammelt. Jens besitzt 37 Briefmarken mehr als Angela, die bereits zwei Briefmarkenalben mit je 350 Briefmarken angelegt hat. Wieviel Briefmarken haben diese drei Schüler zusammen bereits gesammelt?

Schülerin Marion Freiwald, Schlieben

Ma 5 ■1882 Jemand kauft 30 Flaschen *Astoria*, die Flasche zu 0,95 M einschließlich 30 Pf Pfand. Nachdem sämtliche Flaschen dieses Fruchtsaftgetränkes ausgetrunken waren, bringt der Kunde die leeren Flaschen zurück in die Kaufhalle und erwirbt allein vom Pfandgeld erneut weitere Flaschen *Astoria*. Das wird solange wiederholt, bis das Pfandgeld für den Kauf von genau einer Flasche *Astoria* nicht mehr ausreicht. Wie viele Flaschen *Astoria* hat dieser Kunde auf diese Weise insgesamt erworben? Welcher Restbetrag verbleibt ihm? *Sch.*

Ma 5 ■1883 Thomas und Simone kauften sich Speiseeis. Thomas kaufte zwei Kugeln Fruchteis und eine Kugel Schokoladeneis, Simone dagegen eine Kugel Fruchteis und zwei Kugeln Schokoladeneis. Beide hatten zusammen 1,35 M zu bezahlen. Wieviel Mark mußte jeder einzelne von ihnen bezahlen, wenn eine Kugel Schokoladeneis um 5 Pf teurer ist als eine Kugel Fruchteis?

Schülerin Angelika Drauschke, Neustrelitz, Kl. 5

Ma 5 ■1884 Ein Urgroßvater wurde am 21. 9. 1975 von seinen beiden Urenkeln, die Zwillinge sind, zum Geburtstag besucht. Er staunte, als er feststellte: „Wenn ich die Zahlen, die das Lebensalter von jedem von uns dreien angeben, miteinander multipliziere, so erhalte ich als Produkt eine Zahl, die gleich der Jahreszahl des Jahres ist, in dem wir gerade leben."
Wie alt ist jeder von ihnen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■1885 In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

$$\begin{array}{ccccc} ab & - & c & = & d \\ : & & \cdot & & + \\ e & \cdot & f & = & ah \\ \hline b & + & ba & = & bf \end{array}$$

Schüler Bernd Leifheit, Fritz-Weineck-OS, Kl. 5 b, Struth

Ma 5 ■1886 Uwe sagt zu Peter: „Denke dir eine zweistellige natürliche Zahl. Multipliziere die Zahl, die der ersten Ziffer der gedachten Zahl entspricht, mit 5; addiere zu diesem Produkt 6; multipliziere die so erhaltene Summe mit 2; subtrahiere von diesem Produkt 1; addiere schließlich die Zahl, die der zweiten Ziffer der gedachten Zahl entspricht, und nenne mir das Ergebnis!" Aus diesem Ergebnis konnte Uwe die Zahl ermitteln, die Peter sich gedacht hatte. Wie ist das möglich?
Gib dafür eine Begründung!

Schüler Mario Köppen, Berlin

Ma 6 ■1887 Die Summe zweier Primzahlen ist viermal so groß wie ihre Differenz. Wie lauten diese Primzahlen?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 6 ■1888 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die viermal so groß wie ihre zugehörige Quersumme sind.

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1979/80 läuft von Heft 5/79 bis Heft 2/80. Zwischen dem 1. und 10. September 1980 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/80 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1979/80 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1889 Während der XVII. Mathematik-Bezirksolympiade in Suhl saßen in einem Klausurraum weniger als 25, aber mehr als 15 Teilnehmer aus den Klassen 7 bis 12. Über die Teilnehmer ist folgendes bekannt:

(1) Die Anzahl aller sich im Raum befindenden Teilnehmer ist eine Primzahl, und von jeder Klassenstufe war mehr als ein Teilnehmer im Raum.

(2) Die Anzahl der Teilnehmer aus der 12. und 7. Klasse, aber auch die Anzahl der Teilnehmer aus der 10. und 8. Klasse war gleich.

(3) Aus der 11. Klasse war ein Schüler mehr anwesend als Schüler aus der 10. Klasse.

(4) Die Anzahl der Teilnehmer aus der Klasse 9 war um 3 größer als die Anzahl der Teilnehmer aus der Klasse 12.

Wieviel Teilnehmer aus jeder Klasse saßen im Raum?

Mathematikfachlehrer Rolf Langbein, Lichte

Ma 6 ▪1890 Ermittle alle zweistelligen Primzahlen, die sich in der dekadischen Schreibweise in der Form $\overline{ab}$ und $\overline{ba}$ darstellen lassen und deren Differenz gleich einer Quadratzahl ist.

Schülerin Heike Reichstein, Kl. 7, Königs Wusterhausen

Ma 6 ▪1891 Gesucht sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen:

a) Jede dieser Zahlen z ist um 54 größer als die zugehörige Quersumme.

b) Multipliziert man eine solche Zahl z mit 7, so ist das erhaltene Produkt um 396 größer als die Zahl z.

Schülerin Angelika Drauschke, Neustrelitz, Kl. 5

Ma 7 ▪1892 In einem Wohnhaus wohnen 12 Familien mit insgesamt 41 Personen. Es sind Familien mit drei, vier und fünf Personen, und zwar am meisten Familien mit drei, am wenigsten Familien mit fünf Personen. Wie viele Familien mit drei, vier bzw. fünf Personen wohnen in diesem Haus?

Schüler Burkhard Riedel, Karl-Marx-Stadt

Ma 7 ▪1893 In einer Schule werden die Unterrichtsfächer Biologie, Geographie, Englisch, Französisch, Geschichte und Mathematik von den Lehrern Morosow, Wassiljew und Tokarew unterrichtet. Jeder von ihnen unterrichtet genau zwei Fächer.

Uns ist folgendes bekannt:

(1) Der Englischlehrer und der Französischlehrer sind miteinander verwandt.

(2) Herr Morosow ist der jüngste dieser drei Lehrer.

(3) Herr Tokarew, der Biologielehrer und der Französischlehrer haben einen gemeinsamen Schulweg.

(4) Der Biologielehrer ist älter als der Mathematiklehrer.

(5) In der Freizeit spielen der Geographielehrer, der Mathematiklehrer und Herr Morosow häufig Skat.

Welche zwei Fächer unterrichtet jeder dieser drei Lehrer?

Schülerin Cornelia Bogdal, Weimar, Kl. 6

Ma 7 ▪1894 Es ist ein Rechteck $ABCD$ zu konstruieren, dessen Diagonale $\overline{AC}=5$ cm und dessen Seite $\overline{AB}=4$ cm lang ist. Dieses Rechteck ist in ein flächengleiches Viereck mit vier gleichlangen Seiten zu verwandeln. Die Konstruktion ist zu begründen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ▪1895 Drei 7. Klassen einer Schule gehören zusammen 89 Schüler an. In Klasse 7a sind zwei Jungen mehr als Mädchen. In Klasse 7b sind sieben Jungen weniger als Mädchen. In Klasse 7c sind zwei Mädchen mehr als Jungen. Jede Klasse hat höchstens 30 Schüler. Wieviel Jungen sind insgesamt in diesen drei Klassen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 8 ▪1896 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit dem Umfang $u=28$ cm. Die Längen der Seiten a und b verhalten sich wie 4:3. Zu ermitteln sind der Flächeninhalt und die Länge der Diagonalen dieses Rechtecks.

Schüler Uwe Wollert, Edderitz, Kl. 8

Ma 8 ▪1897 In einem Dreieck ABC schneidet die Mittelsenkrechte m_c die Seite $\overline{AB}$ in E und die Seite $\overline{AC}$ in D. Die Seite $\overline{AB}$ ist 6 cm, die Strecke $\overline{AD}$ ist 5 cm lang. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks AED zu berechnen.

Schüler Uwe Schwarz, Rochlitz, Kl. 8

Ma 8 ▪1898 Die folgenden drei wahren Aussagen sind durch eine Aussageform zu ersetzen, welche die Struktur der Aussagen zum Ausdruck bringt.

Es ist zu zeigen, daß wir für jede Belegung der Variablen in dieser Aussageform mit natürlichen Zahlen wahre Aussagen erhalten.

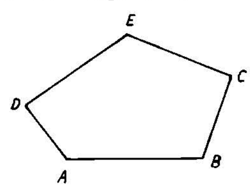
(1) $2\cdot 3+3\cdot 3+1=4\cdot 4$

(2) $2\cdot 4+4\cdot 4+1=5\cdot 5$

(3) $2\cdot 5+5\cdot 5+1=6\cdot 6$

Schüler Markus Schulz, Ndr.-Seifersdorf, Kl. 8

Ma 8 ▪1899 Das abgebildete Fünfeck $ABCDE$ ist unter alleiniger Verwendung von Lineal und Zeichendreieck in ein flächengleiches Dreieck umzuwandeln. Die Konstruktion ist zu begründen.



Bemerkung: Die Konstruktion ist natürlich allein mit Zirkel und Lineal ausführbar; der Einsatz des Zeichendreiecks vereinfacht das Verfahren. *Fr.*

Ma 9 ▪1900 Reinhard macht sich im Obstladen einen Spaß. Er sucht sich zwei Pampelmusen aus, legt sie nacheinander einzeln auf die Waagschale und ermittelt die Differenz ihrer Massen.

Als Ergebnis erhält er 25 g. Er sagt zur Verkäuferin: „25 g; das macht nach Preisliste genau 10 Pf." „Das möchtest du wohl", antwortet die Verkäuferin und legt beide Pampelmusen zugleich auf die Waagschale. „Ich bekomme 3,30 M", sagt sie. Wie groß ist die Masse einer jeden Pampelmuse?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪1901 Es ist ein Trapez $ABCD$ zu konstruieren, von dem folgendes bekannt ist: Die Diagonale $\overline{DB}$ ist 4 cm lang; die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ beträgt 90°; $\overline{AD}:\overline{DB}:\overline{BC}=1:2:3$.

Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen. Ist die Konstruktion eindeutig?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ▪1902 Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung

$$4x^x-6x^{x+1}+2x^{x+2}=0$$

für $x\neq 0$ im Bereich der rationalen Zahlen!

Schüler Torsten Siebert, Görlitz, Kl. 10

Ma 9 ▪1903 Von einem Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c und den Innenwinkelgrößen α, β, γ sei folgendes bekannt:

(1) $\gamma-\beta=\alpha$,

(2) $a=5$ cm,

(3) $h_c=\frac{c}{2}$.

Man berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks und konstruiere es!

Schüler Alexander Schmidt, Berlin, Kl. 7

Ma 10/12 ▪1904 Es ist zu untersuchen, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Die Entscheidungen sind zu begründen!

(1) Für alle natürlichen Zahlen a ist die natürliche Zahl $z=a^2+a+17$ eine ungerade Zahl.

(2) Für jedes $a\in N$ ist $z=a^2+a+17$ eine Primzahl.

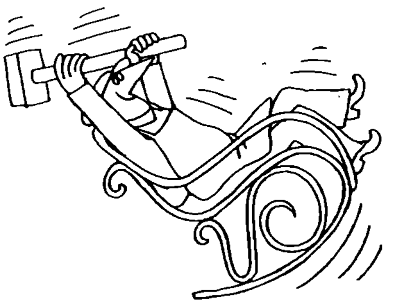
(3) Es gibt keine natürliche Zahl a derart, daß die natürliche Zahl $z=a^2+a+17$ durch 3 teilbar ist. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 10/12 ▪1905 Welche natürlichen Zahlen a, b erfüllen die beiden Gleichungen

(1) $(a-2)(b+4)=1978$,

(2) $(a+1)(b+1)+1=1979$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 10/12 ▪1906 Es ist zu beweisen, daß der Term $\sin x + \cos x$ niemals den Wert 1,5 annehmen kann.

Schüler Torsten Siebert, Görlitz, Kl. 10

Ma 10/12 ▪1907 Die Gletscher der Eiszeit brachten große Gesteinsmassen mit. Als das Völkerschlachtdenkmal gebaut wurde (1903), trug die Bevölkerung hundert der fast rundgeschliffenen Steine von den umliegenden Feldern zusammen. Man errichtete daraus eine gerade quadratische Pyramide, deren Grundkante 5 m und deren Seitenkante 6,1 m lang ist. Die Zwischenräume (etwa 45%) wurden mit Beton gefüllt, um der Pyramide einen besseren Halt zu geben. Es ist die Masse des Gesteins zu berechnen, wenn dessen Dichte 2,6 $g \cdot cm^{-3}$ beträgt. *L.*

Physik

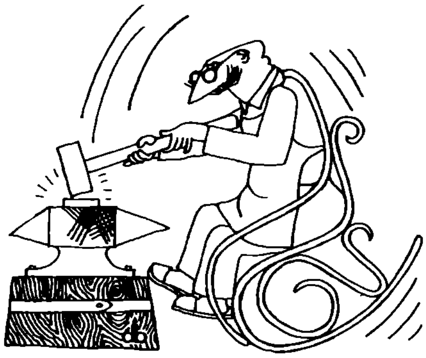
Ph 6 ▪61 Zur Markierung von Wanderwegen werden 100 Blechtafeln von 15 cm Länge und 6 cm Breite benötigt und mit einer Lackschicht überzogen. Wie dick (in mm) ist diese Schicht, wenn man zum Lackieren 67,5 cm^3 Lack braucht?

Ph 7 ▪62 Auf einer Landstraße werden an einem bestimmten Punkt A die folgenden Verkehrsteilnehmer beobachtet. Sie bewegen sich alle in der gleichen Richtung und mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit:

- ein Fußgänger mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 4\,\frac{km}{h}$
- 20 Sekunden später ein Radahrer mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 18\,\frac{km}{h}$
- 0 Sekunden nach dem Fußgänger ein PKW mit einer Geschwindigkeit von $v_3 = 54\,\frac{km}{h}$.

a) Nach welchen Zeiten, vom Zeitpunkt des Vorbeifahrens am Punkt A gerechnet, überholt der Radfahrer den Fußgänger bzw. der Autofahrer den Radfahrer und den Fußgänger?

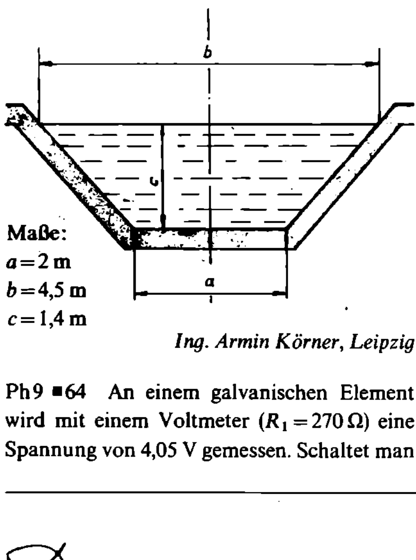
b) Wie groß sind im Augenblick des Überholens die entsprechenden Abstände vom Punkt A?



Anmerkung: Löse beide Aufgaben mit Hilfe eines entsprechenden Diagramms! Wähle einen geeigneten Maßstab!

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 8 ▪63 Eine LPG hat auf einer Fläche von 4 Hektar Gemüse angebaut. Infolge großer Trockenheit soll diese Fläche künstlich beregnet werden, wozu das Wasser eines in unmittelbarer Nähe liegenden Kanals genutzt werden soll. Der Kanal hat den skizzierten Querschnitt. Das Wasser im Kanal hat eine Strömungsgeschwindigkeit von 0,1 $\frac{m}{s}$. Welche Wassermenge in l pro Quadratmeter Beregnungsfläche und pro Stunde steht auf Grund des dem Kanal ständig zulaufenden Wassers zur Verfügung? (Der Wasserzulauf ist der Strömungsgeschwindigkeit im Kanal direkt proportional.)



Maße:
$a = 2$ m
$b = 4{,}5$ m
$c = 1{,}4$ m

Ing. Armin Körner, Leipzig

Ph 9 ▪64 An einem galvanischen Element wird mit einem Voltmeter ($R_1 = 270\,\Omega$) eine Spannung von 4,05 V gemessen. Schaltet man dem Voltmeter einen Widerstand von 135 Ω parallel, fällt die Spannung auf 3,375 V. Berechnen Sie die Leërlaufspannung U_L des Elements und den Innenwiderstand R_B der Spannungsquelle!

Schüler Jürgen Gräfenstein, Dresden, Kl. 8

Ph 10/12 ▪65 Die kinetische Energie eines α-Teilchens, das durch radioaktiven Zerfall aus einem Atomkern des Radiums abgestrahlt wird, beträgt $7{,}648 \cdot 10^{-13}$ J. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des α-Teilchens! (Relative Atommasse des α-Teilchens beträgt $A_r \approx 4{,}0015$.)

Chemie

Ch 7 ▪49 75 ml eines Ga gemisches, welches Kohlendioxid enthält, wird von Kalilauge absorbiert. Das Volumen nach der Absorption beträgt nur noch 68,2 ml. Wieviel Prozent Kohlendioxid enthält das Gasgemisch?

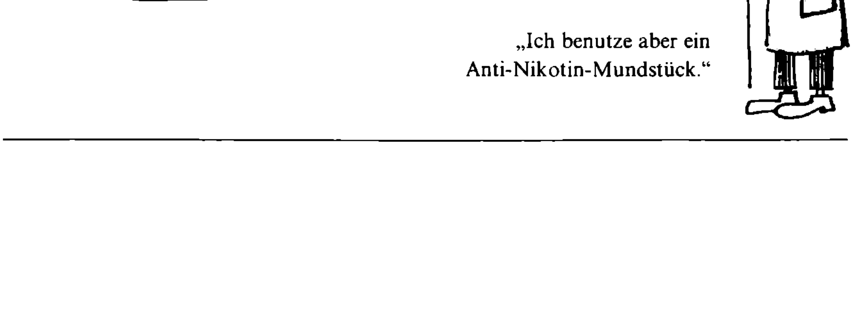
Ch 8 ▪50 1 kg Holz besteht aus 48% Kohlenstoff, 8% Wasserstoff und 44% Sauerstoff. Berechne die Masse an Sauerstoff, die für die Verbrennung der angegebenen Menge Holz noch zu liefern ist!

Ch 9 ▪51 Kommt trockener Chlorwasserstoff von 35 °C und 791 Torr mit Natronlauge in Verbindung, wird er absorbiert. Wieviel Liter Chlorwasserstoff werden unter den gegebenen Bedingungen von 310 ml 15%iger Natronlauge absorbiert?
$\left(\varrho_{NaOH} = 1{,}153\,\frac{g}{ml}\right)$

Ch 10/12 ▪52 Ein kugelförmiger Luftballon von 8 m Durchmesser soll bei 18 °C und 750 Torr mit Wasserstoffgas gefüllt werden, welches aus Zink und 80%iger Schwefelsäure hergestellt wird!

a) Welches Volumen (in m^3) Wasserstoffgas kann der Luftballon aufnehmen?

b) Wie teuer kommt die Füllung, wenn 1 kg Zink 7,44 M und 1 kg Schwefelsäure 6,50 M kostet?



XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Aufgaben der Klassenstufen 11/12

1. Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß zu den Polynomen

$$f(x)=x^{12}-x^{11}+3x^{10}+11x^3-x^2+23x+30,$$
$$g(x)=x^3+2x+a$$

ein Polynom $h(x)$ so existiert, daß für alle reellen x die Gleichung $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ gilt.

2. Im Staat Wegedonien gibt es ein Straßennetz. An jeder Kreuzung und an jeder Einmündung von Straßen dieses Netzes steht ein Verkehrsposten. Die Länge eines jeden Straßenabschnittes zwischen je zwei benachbarten dieser Posten ist kleiner als 100 km. Jeder Verkehrsposten läßt sich von jedem anderen auf einem Gesamtweg innerhalb des Netzes erreichen, der kürzer als 100 km ist. Ferner gilt für jeden Straßenabschnitt zwischen zwei benachbarten Verkehrsposten: Wird genau dieser Straßenabschnitt gesperrt, so ist immer noch jeder Verkehrsposten von jedem anderen aus auf einem Gesamtweg erreichbar, der sich nur aus ungesperrten Straßenabschnitten des Netzes zusammensetzt.
Man beweise, daß dies auf einem Weg erfolgen kann, der kürzer als 300 km ist.

3. a) In einer Ebene sei $P_1P_2\ldots P_n$ ein beliebiges ebenes konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage (1):
Sind im Innern oder auf dem Rande von E Punkte $Q_1, \ldots, Q_n$ so gelegen, daß $Q_1Q_2\ldots Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i $(i=1, \ldots, n)$ eine Ecke von E. (1)
b) Gibt es nicht-konvexe n-Ecke E, für welche die Aussage (1) falsch ist?
c) Ist für jedes nicht-konvexe n-Eck E die Aussage (1) falsch?

4. Man beweise, daß für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit $m>n$ die durch

$$s(m,n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|i-j|$$

definierte Summe $s(m,n)$ den Wert

$$s(m,n)=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}mn(m-n)$$

hat.

5. Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Man zeige, daß es zu jeder der n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $a_j=n!+j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ eine Primzahl p_j gibt, die die Zahl a_j, aber keine weitere Zahl a_k $(k\neq j)$ dieser n Zahlen teilt.

6A. Es sei $A_1A_2A_3A_4A_5$ ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge s. Um jeden Punkt A_i $(i=1, 2, \ldots, 5)$ sei die Kugel K_i mit dem Radius $\frac{s}{2}$ und dem Mittelpunkt A_i gelegt. Dann gibt es in der Menge derjenigen Kugeln K', die die Eigenschaft haben, jede der fünf Kugeln K_i zu berühren, genau zwei Kugeln K'_1 und K'_2 mit dem Radius $\frac{s}{2}$.

Man untersuche, ob K'_1 und K'_2 einander schneiden, berühren oder ob sie keinen Punkt gemeinsam haben.

6B. a) Es sei M die Menge aller Tripel (x, y, z) von reellen Zahlen, für die die folgenden Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind:

$$55x+z\leqq 54, \quad (1) \qquad 55x-4z\geqq 4, \quad (3)$$
$$55y+z\leqq 54, \quad (2) \qquad 55y-4z\geqq 4, \quad (4)$$
$$z\geqq -1. \quad (5)$$

Man untersuche, ob für den Ausdruck

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \qquad (6)$$

ein Tripel $(x_0, y_0, z_0)\in M$ mit der Eigenschaft existiert, daß für alle Tripel $(x, y, z)\in M$ die Ungleichung $f(x_0, y_0, z_0)\geqq f(x, y, z)$ gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_0, y_0, z_0)$.
b) Es sei M' die Menge aller Tripel (x, y, z) von ganzen Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind. Man untersuche, ob für den Ausdruck (6) ein Tripel $f(x_1, y_1, z_1)\in M'$ mit der Eigenschaft existiert, daß für alle Tripel $(x, y, z)\in M'$ die Ungleichung $f(x_1, y_1, z_1)\geqq f(x, y, z)$ gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_1, y_1, z_1)$.

(Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufen 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule" veröffentlicht, d. Red.)

Die Jensensche Ungleichung

Die abgebildete Ungleichung stellt die Jensensche Ungleichung dar. Der dänische Mathematiker Jensen lebte 1859 bis 1925. Wir wollen die Ungleichung erläutern.
Eine Funktion f heißt konvex (konkav), wenn für beliebige $x_1, x_2\in D$ die Ungleichung

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\underset{(>)}{<}\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] \text{ gilt,}$$

wobei D den Definitionsbereich von f bezeichnet. Man veranschauliche sich den Sachverhalt grafisch.
Sei $f(x)=\ln x$ mit $x>0$. Für $x_1, x_2>0$ ist $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geqslant 0$ genau dann, wenn $\frac{1}{2}(x_1+x_2)\geqslant\sqrt{x_1x_2}$ ist.
Hieraus folgt:

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqq\ln\sqrt{x_1x_2}=\frac{1}{2}[\ln x_1+\ln x_2],$$

d. h., $f(x)$ ist konkav. Damit gilt dann auch nach der abgebildeten Ungleichung: Für $x_1, x_2, \ldots, x_n>0$ ist

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\geqq\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n)=\ln\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

und infolge der Monotonie der Logarithmusfunktion

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Wir haben damit die Ungleichung vom arithmetischen-geometrischen Mittel erhalten.
Entsprechend kann man mit $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ die Ungleichung

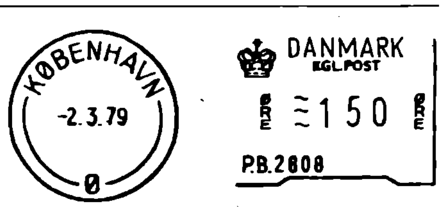
$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)(x_1+x_2+\ldots+x_n)\geqq n^2$$

beweisen. (Bitte selber ausführen!)

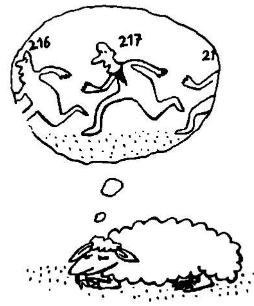
▲Aufgabe▲ Man zeige, daß die Funktion $y=\sin x$ in $[0, \pi]$ konkav ist und beweise dann folgenden Satz:
Unter allen einem Kreis einbeschriebenen Dreiecken hat das gleichseitige den größten Flächeninhalt.

W. Moldenhauer

$$\varphi\left(\frac{\sum a_\nu x_\nu}{\sum a_\nu}\right)\leqq\frac{\sum a_\nu\varphi(x_\nu)}{\sum a_\nu}$$

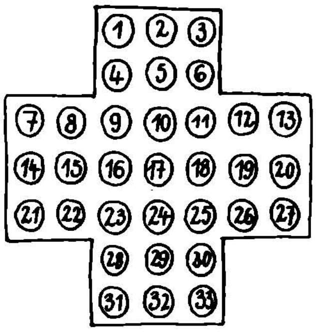


In freien Stunden alpha heiter

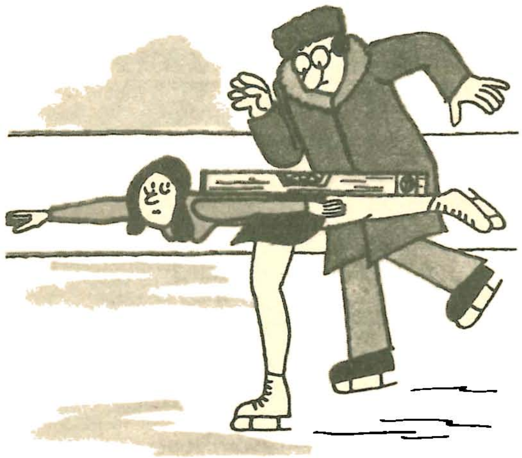


Die letzte Spielmarke

Das ist ein altes Unterhaltungsspiel, mit dem sich die Kinder schon zu Beginn des 18. Jahrhunderts die Zeit vertrieben.
Sie nannten es „Bandwurm“ oder „Einsiedler“.
Fertigt euch ein Spielbrett an (siehe Bild)! Legt in jeden Kreis eine Spielmarke – ein Kreis bleibt frei, gleichgültig welcher!



Die Aufgabe besteht nun darin, alle Spielmarken zu schlagen, und zwar bei jedem Zug eine. Zum Schluß muß eine Marke übrigbleiben – in demjenigen Kreis, der zu Beginn des Spiels frei war. Das bedeutet also, daß man mit 31 Zügen die Aufgabe gelöst haben muß! Dazu gehört schon ein wenig Nachdenken.
Man schlägt eine Marke, indem man über sie auf einen freien Kreis springt – nach rechts, links, rückwärts oder vorwärts.



Silbenrätsel

Aus den Silben
a – acht – be – ben – bie – bild – de – der – di – e – ei – fel – ge – gel – go – hal – ke – kel – kel – kör – le – les – lig – ma – ma – man – na – ne – ner – netz – paar – per – qua – recht – ren – schaft – schei – schei – sek – sen – send – sie – spit – sti – tau – tel – tel – tel – tha – the – tik – tor – win – win – wink – wis – ze – zwei – zun

sind Wörter der nachstehend angegebenen Bedeutung zu bilden. Danach entnehme man jedem Wort einige seiner Buchstaben, und zwar so, wie es die in Klammern angegebene Reihenfolge bezeichnet. (Fehlt diese Angabe, so ist das gesamte Wort zu übernehmen.)
Als Lösung erhält man einen Ausspruch von Karl Marx.

1. ein Stellenwert (1; 2; 3; 4)
2. Oberbegriff zu Mathematik, Physik, Philosophie
3. der Basis gegenüberliegender Eckpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks (3; 1; 4)
4. ein Teil eines Kreises (2; 6; 1; 4)
5. Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte eines Vierecks (1; 3; 6; 6)
6. griechischer Mathematiker (Satz der Kreislehre) (3; 4; 6)
7. Bezeichnung für zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitelpunkt und paarweise auf der gleichen Gerade liegenden Schenkeln (9; 5; 18; 12; 8; 5; 2; 3)
8. Bezeichnung für ein spezielles Dreieck (2; 8; 5; 6; 7; 3; 9; 2; 10; 5)
9. Ergebnis der Aufgabe $251 \cdot 8$ (6; 10; 1; 7; 8; 3; 14; 3; 10)
10. von zwei Strahlen begrenzter Teil der Ebene (1; 5; 3; 3)
11. eine einstellige Primzahl (1; 2; 3)
12. Linie, die eine Figur (z. B. eine Strecke) in zwei gleichgroße Teile zerlegt (10; 2; 1; 5; 9)
13. ein Teil der Oberfläche eines geometrischen Körpers (3; 2; 5; 7; 8; 3; 9)
14. deutscher Mathematiker des Mittelalters (3; 1; 2)
15. ein Teil des Winkels (1; 5; 2; 3)
16. ein spezielles Prisma (4; 5; 6)

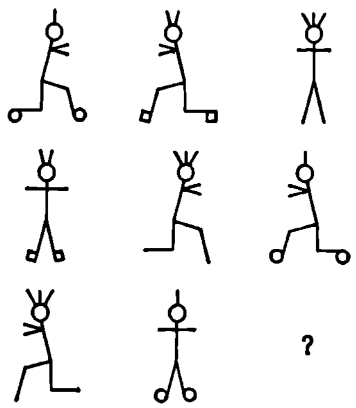
17. eine Wissenschaft
18. Fläche, auf die eine Figur projiziert wird (1; 5; 4; 2; 5; 8; 5; 8)
19. ein Teil des Rechenstabs (1; 2)
20 eine zur Herstellung räumlicher Gebilde vorbereitete Fläche (1; 2; 7; 7; 5; 7)

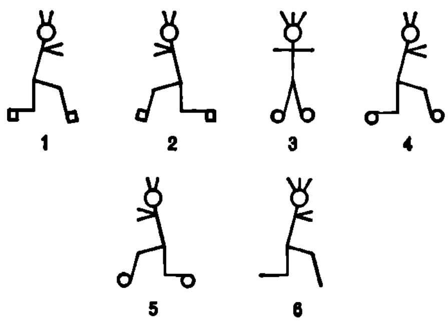
OStR K.-H. Lehmann, Berlin

Unterhaltsame Logik

Welche der sechs Figuren muß logischerweise an Stelle des Fragezeichens gesetzt werden?

Aus: Füles 4/79, Budapest





Kryptarithmetik

a)
$$\begin{array}{ccc} aa + aa & = & bb \\ + \quad\; + & & + \\ ad + ad & = & ef \\ \hline bh + bh & = & mn \end{array}$$

Schüler Rainer Budziat, Krakow (Kl. 5)

b)
$$\begin{array}{r} ABC \\ -CBA \\ \hline DBA : A = AA \end{array}$$

Aus: NBI 15/79

c) In nachfolgendem Gleichungssystem sind die Buchstaben so durch die Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

(1)	$\alpha \cdot \alpha = PE$	(5)	$D \cdot \alpha = UD$
(2)	$P \cdot \alpha = RT$	(6)	$U \cdot \alpha = KO$
(3)	$R \cdot \alpha = OK$	(7)	$K \cdot \alpha = TR$
(4)	$O \cdot \alpha = OU$	(8)	$T \cdot \alpha = EP$

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

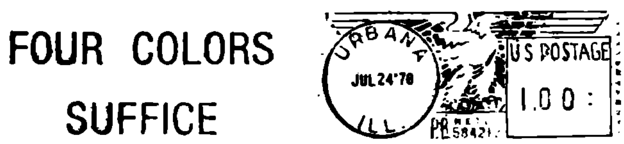
Fröhliche Mathematik

- In einer Familie sind sechs Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester. Wieviel Kinder hat diese Familie?
- Die Kinder von Herrn Müller bezahlen für einen Zirkusbesuch zusammen 7 Mark. Der Eintritt kostet für Personen ab 14 Jahre 3 Mark, unter 14 Jahre 2 Mark. Wieviel Kinder hat Herr Müller? Wieviel davon sind jünger als 14 Jahre?
- Ein Hotel hat 70 Ein- und Zweibettzimmer mit zusammen 99 Betten. Wieviel Einbett- und wieviel Zweibettzimmer sind es?
- Ein Holzwürfel mit der Kantenlänge 1 cm hat eine Masse von 0,8 g. Welche Masse hat ein Würfel mit der Kantenlänge 2 cm?
- Wieviel Minuten sind es bis 8 Uhr, wenn es vor 50 Minuten genau viermal soviel Minuten nach 5 Uhr war?

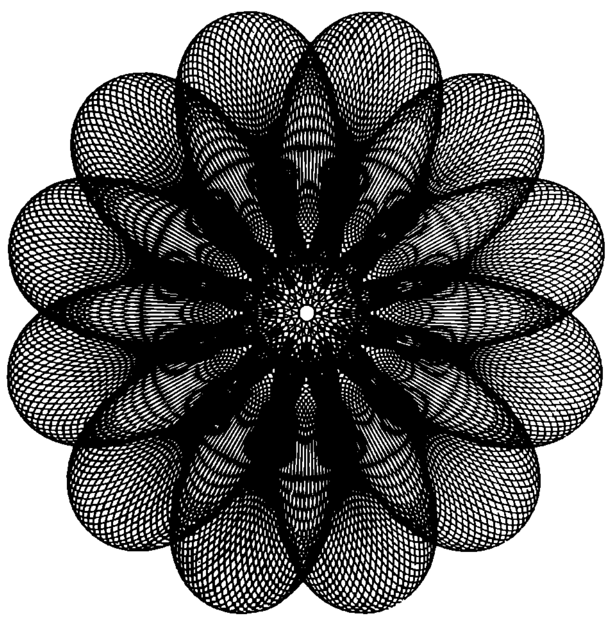
Aus: Pionierkalender 1979

Vierfarbproblem

Aus Anlaß der Lösung des Vierfarbproblems (siehe alpha 5/78) gab die Universität von Illinois einen Sonderstempel heraus.



Aus: Pythagoras 3/79, Niederlande



Lösungen

Lösungen zu: Wir arbeiten mit Mengen, Seite 102

Arbeitsblatt 5

$NXM = \{[2;1],[2;2],[2;3],[2;4],[3;1],[3;2],[3;3],[3;4]\}$
$MXP = \{[1;5],[1;7],[1;9],[2;5],[2;7],[2;9],[3;5],[3;7],[3;9],[4;5],[4;7],[4;9]\}$
$PXM = \{[5;1],[5;2],[5;3],[5;4],[7;1],[7;2],[7;3],[7;4],[9;1],[9;2],[9;3],[9;4]\}$
$NXP = \{[2;5],[2;7],[2;9],[3;5],[3;7],[3;9]\}$
$PXN = \{[5;2],[5;3],[7;2],[7;3],[9;2],[9;3]\}$
$MXM = \{[1;1],[1;2],[1;3],[1,4];[2;1],[2;2],[2;3],[2;4],[3;1],[3;2],[3;3],[3;4],[4;1],[4;2],[4;3],[4;4]\}$
$NXN = \{[2;2],[2;3],[3;2],[3;3]\}$
$PXP = \{[5;5],[5;7],[5;9],[7;5],[7;7],[7;9],[9;5],[9;7],[9;9]\}$
$QXR = \{[x;a],[y;a],[z;a]\}$
$RXQ = \{[a;x],[a;y],[a;z]\}$
$QXS = \{[x;b],[x;c],[y;b],[y;c],[z;b],[z;c]\}$
$SXQ = \{[b;x],[b;y],[b;z],[c;x],[c;y],[c;z]\}$
$RXS = \{[a;b],[a;c]\}$
$SXR = \{[b;a],[c;a]\}$
$QXQ = \{[x;x],[x;y],[x;z],[y;x],[y;y],[y;z],[z;x],[z;y],[z;z]\}$
$RXR = \{[a;a]\}$
$SXS = \{[b;b],[b;c],[c;b],[c;c]\}$

Lösungen zu: Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierigkeitsgrad, Seite 107

Klasse 4: Wir rechnen $121\text{ cm}^2 - 85\text{ cm}^2 = 36\text{ cm}^2$. Wegen $6\text{ cm}\cdot 6\text{ cm} = 36\text{ cm}^2$ hat das Quadrat $EFGH$ die Seitenlänge 6 cm.

Klasse 5: Wegen $12\text{ cm}\cdot 12\text{ cm} = 144\text{ cm}^2$ und $5\text{ cm}\cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2$ hat das Quadrat $ABCD$ die Seitenlänge 12 cm, das Quadrat $EFGH$ die Seitenlänge 5 cm. Wegen $\overline{HG} = \overline{EF}$ hat das verbliebene Achteck $AEHGFBCD$ einen Umfang von der Länge $4\cdot 12\text{ cm} + 2\cdot 5\text{ cm} = 48\text{ cm} + 10\text{ cm} = 58\text{ cm}$.

Klasse 6: Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und b die Länge von $\overline{EF}$; der Flächeninhalt des Achtecks $AEHGFBCD$ beträgt dann $a^2 - b^2$. Für den Umfang dieses Achtecks gilt $4a + 2b = 108\text{ cm}$. Wegen $25\text{ cm}\cdot 25\text{ cm} = 625\text{ cm}^2$ gilt $a = 25\text{ cm}$. Durch Einsetzen erhalten wir somit $4\cdot 25\text{ cm} + 2b = 108\text{ cm}$, $2b = 8\text{ cm}$, also $b = 4\text{ cm}$. Daraus folgt $a^2 - b^2 = 625\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 = 609\text{ cm}^2$.

Klasse 7: Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und b die Länge von $\overline{E_1F_1}$. Wegen $5\text{ cm}\cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2$ gilt $b = 5\text{ cm}$. Der Umfang des verbliebenen 20-Ecks beträgt $4a + 8b = 172\text{ cm}$, $4a + 40\text{ cm} = 172\text{ cm}$, $4a = 132\text{ cm}$, also $a = 33\text{ cm}$. Der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ beträgt somit $a^2 = 1089\text{ cm}^2$.

Klasse 8: Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und b die Länge eines der kleineren Quadrate. Nun gilt $a = \sqrt{961\text{ cm}^2} = 31\text{ cm}$. Für den Umfang des verbliebenen n-Ecks gilt $4a + 4n\cdot 2b = 212\text{ cm}$, also
$8bn = 212\text{ cm} - 124\text{ cm} = 88\text{ cm} = 11\cdot 8\text{ cm}$
und somit $bn = 11\text{ cm}$.
Wegen $n > 1$ und da n und b natürliche Zahlen sind, existiert genau eine Lösung, nämlich $n = 11$ und $b = 1\text{ cm}$. Die Länge der Seiten der kleineren Quadrate beträgt 1 cm; Stefan hat insgesamt 44 kleinere kongruente Quadrate herausgeschnitten.

Klasse 9: Es sei a die Länge von $\overline{AB}$ und b die Länge von $\overline{E_1F_1}$; dann gilt $a^2 - 4b^2 = 969\text{ cm}^2$ und $4a + 8b = 204\text{ cm}$. Durch Umformen erhalten wir $(a+2b)(a-2b) = 969\text{ cm}^2$ und $a = 51\text{ cm} - 2b$. Durch Einsetzen finden wir die Lösung $a = 35\text{ cm}$ und $b = 8\text{ cm}$. Jedes herausgeschnittene kleinere Quadrat hat einen Flächeninhalt von 64 cm^2.

Klasse 10: Es sei a die Maßzahl der Seitenlänge von $\overline{AB}$ und b die Maßzahl der Seitenlänge eines kleineren Quadrates, das herausgeschnitten wurde; dann gilt

$$a^2 - 4n\cdot b^2 = \frac{8}{9}\cdot a^2 \text{ und } 4a + 4n\cdot 2b = \frac{20}{3}\cdot a.$$

Daraus folgt weiter

$$4nb^2 = \frac{1}{9}a^2 \text{ und } 8bn = \frac{8}{3}a,$$
$$36nb^2 = a^2 \text{ und } n = \frac{a}{3b}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\frac{36ab^2}{3b} = a^2,\ a = 12b, \text{ also } n = 4.$$

Aus dem Quadrat $ABCD$ wurden insgesamt 16 kongruente kleinere Quadrate herausgeschnitten.

Wegen $a - b = 66$ und $a = 12b$ gilt $11b = 66$, also $b = 6$. Diese kleineren Quadrate haben die Seitenlänge 6 cm.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/79 (Fortsetzung)

Ma 10/12 ■1848 Es sei a die Anzahl der Goldmedaillen und b die Anzahl der sechsten Plätze. Dann ist die Anzahl der Silbermedaillen $a + b$.
Nach der Punktetabelle gilt dann
$7a + 5(a+b) + 4a + 3a + 2a + b = 75$ bzw.
$21a + 6b = 75$; also $7a + 2b = 25$.
Diese diophantische Gleichung mit zwei Variablen hat im Bereich der natürlichen Zahlen nur eine Lösung, und zwar das Paar $[3; 2]$.
Damit gilt: Die UdSSR errang 3 Goldmedaillen, 5 Silbermedaillen, 3 Bronzemedaillen, 3 vierte Plätze, 3 fünfte Plätze und 2 sechste Plätze.

Ma 10/12 ■1849 Es ist $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ und $\tan\beta = \frac{1}{7}$. Aus der in diesem Fall gültigen Beziehung
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$ erhält man dann
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}.$$
Es ist $\tan 26{,}5° < 0{,}5 < \tan 26{,}6°$.
Wegen $0° < \alpha < 45°$ und $0° < \beta < 45°$ gilt stets
$26{,}5° < \alpha + \beta < 26{,}6°$, w. z. b. w.

Ph 6 ■51
Geg.: Umlaufbahn: $s = 2\,400\,000$ km
Umlaufzeit: $t = 40\,000$ min
Ges.: Geschwindigkeit v
Man nimmt die Gleichung für die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers und rechnet in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um.

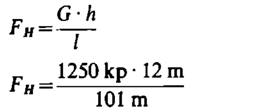
$$v = \frac{s}{t}$$
$$v = \frac{2\,400\,000\text{ km}}{40\,000\text{ min}}$$
$$v = 60\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 3600\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Mond umkreist die Erde mit einer Geschwindigkeit von $3600\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ph 7 ■52 Geg.: $G = 1250$ kp Ges.: F_H
$h = 12$ m
$l = 101$ m
Die Berechnung erfolgt nach der Gleichung für die geneigte Ebene.

$$F_H\cdot l = G\cdot h$$
$$F_H = \frac{G\cdot h}{l}$$
$$F_H = \frac{1250\text{ kp}\cdot 12\text{ m}}{101\text{ m}}$$
$$F_H \approx 148{,}5\text{ kp} \approx 1460\text{ N}$$

Der Motor muß eine Kraft von 148,5 kp (1460 N) aufbringen.



Ph 8 ■53 Geg.: $I = 2{,}3\,A$ Ges.: Q
$t = 0{,}25\text{ h} = 900\text{ s}$
Man verwendet die Gleichung

$$I = \frac{Q}{t}.$$
$$Q = I\cdot t$$
$$Q = 2{,}3\,A\cdot 900\text{ s}$$
$$Q = 2070\,As$$
$$Q = 2070\,C$$

Die Ladung beträgt 2070 C.

Ph9 ▪54

Geg.: $m = 75$ kg Ges.: Belastungen
$a = 1{,}8\ \mathrm{ms}^{-2}$ aufwärts F_a
$g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ abwärts F_u

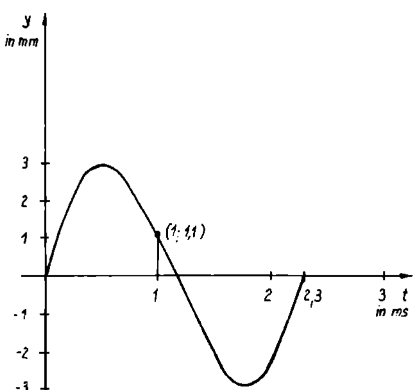
Die Belastung setzt sich in beiden Fällen aus der Summe zweier Kräfte zusammen, die einmal entgegengesetzt und einmal gleichgerichtet sind. Dabei ist F_G die Gewichtskraft der Person.

$F_a = F_G + F$ mit $F = m \cdot a$
$F_a = m \cdot g + m \cdot a$
$F_a = m(g+a)$
$F_a = 75\ \mathrm{kg}\ (9{,}81 + 1{,}8)\ \mathrm{ms}^{-2}$
$F_a \approx 870{,}8$ N
$F_a \approx 88{,}8$ kp
$F_u = F_G - F$
$F_u = m \cdot g - m \cdot a$
$F_u = m(g-a)$
$F_u = 75\ \mathrm{kg}\ (9{,}81 - 1{,}8)\ \mathrm{ms}^{-2}$
$F_u \approx 600{,}8$ N
$F_u \approx 61{,}2$ kp

Die Belastung des Fahrstuhlbodens beträgt 88,8 kp bzw. 61,2 kp.

Ph10/12 ▪55

Geg.: $y_{max} = 3$ mm Ges.: y
$f = 440\ \mathrm{s}^{-1}$
a) $t = 0{,}001$ s
$y = y_{max} \cdot \sin \omega \cdot t$
$y = y_{max} \cdot \sin 2\pi f \cdot t$
$y = 3\ \mathrm{mm} \cdot \sin 2 \cdot 3{,}14 \cdot 440 \cdot 0{,}001$
$y \approx 3\ \mathrm{mm}\ \sin 2{,}76$
$y \approx 3\ \mathrm{mm}\ \sin 158°$
$y = 3\ \mathrm{mm}\ \sin 22°$
$y = 3\ \mathrm{mm}\ 0{,}3746$
$y \approx 1{,}12$ mm



Die Elongation beträgt 1,12 mm.

b) $\frac{1}{440}\ \mathrm{s} = 0{,}0023$ s

Ch7 ▪41 95% von 1,2t ≙ 1,14 t

a) 1,14 t m
CuC + C → Cu + CO
79,5 g 63,5 g

$$m = \frac{1{,}14\ \mathrm{t} \cdot 63{,}5\ \mathrm{g}}{79{,}5\ \mathrm{g}} = 0{,}91\ \mathrm{t} = 910\ \mathrm{kg}$$

b) 1,14 t m
CuO + C → Cu + CO
79,5 g 28 g

$$m = \frac{1{,}14\ \mathrm{t} \cdot 28\ \mathrm{g}}{79{,}5\ \mathrm{g}} = 0{,}4\ \mathrm{t} = 400\ \mathrm{kg}$$

400 kg ≙ 100%
$x = 98{,}5\%$

$$x = \frac{400\ \mathrm{kg} \cdot 98{,}5\%}{100\%} = 394\ \mathrm{kg}$$

Bei einem Gasverlust von 1,5% erhält man 394 kg Kohlenmonoxid.

Ch8 ▪42 $H_2SO_4 + BaCl_2 \rightarrow BaSO_4 + 2\,HCl$

14,15 g
− 13,92 g
0,23 g Bariumsulfat wurden gewonnen.

$M_{BaSO_4} : M_s = 0{,}23\ \mathrm{g} : x$
$233 : 32 = 0{,}23\ \mathrm{g} : x$

$$x = \frac{32 \cdot 0{,}23\ \mathrm{g}}{233}$$

$x = 0{,}023$ g

In 0,57 g der ursprünglichen Substanz sind 5,6% Schwefel enthalten.
In 0,57 g Substanz sind 0,032% Schwefel
In 100 g Substanz sind x% Schwefel

$$x = \frac{100\ \mathrm{g} \cdot 0{,}032\%}{0{,}57\ \mathrm{g}} = 5{,}6\%$$

Ch9 ▪43 $2\,Al \rightarrow 3\,H_2$

$\frac{2}{3} Al \rightarrow H_2$

Gegeben:
0,07 g Einwaage 750 Torr ≙ 0,987 atm
77,4 ml Wasserstoff 25 °C ≙ 298 °K
25 °C Gastemperatur $M = \frac{2}{3} \cdot 27\ \mathrm{g} = 18\ \mathrm{g}$
750 Torr Gasdruck

$v \cdot p = m \cdot R \cdot T$

$$v \cdot p = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

$$m = \frac{v \cdot p \cdot M}{R \cdot T}$$

$$m = \frac{0{,}0774\ \mathrm{l} \cdot 0{,}987\ \mathrm{atm} \cdot 18\ \mathrm{g}}{0{,}082 \cdot \frac{\mathrm{l} \cdot \mathrm{atm}}{\mathrm{Grad}} \cdot 298 \cdot {}^\circ\mathrm{K}} = 0{,}056\ \mathrm{g}$$

0,07 g ≙ 100%
0,056 g ≙ x
$x = 80\%$

Das Aluminiumpulver enthält 80% Aluminium.

Ch10/12 ▪44

25 kg · 0,82 $V \cdot 1{,}509\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{l}^{-1} \cdot 0{,}99$

$4\,NO_2 + 2\,H_2O + O_2 \rightarrow 4\,HNO_3$
184 g 252 g

$$V = \frac{25\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}82 \cdot 252\ \mathrm{g}}{184\ \mathrm{g} \cdot 1{,}509\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{l}^{-1} \cdot 0{,}99} = 18{,}8\ \mathrm{l}$$

25 kg · 0,82 $V \cdot 1{,}509\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{l}^{-1} \cdot 0{,}99$

$NaNO_3 + H_2SO_4 \rightarrow NaHSO_4 + HNO_3$
85 g 63 g

$$V = \frac{25\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}82 \cdot 63\ \mathrm{g}}{85\ \mathrm{g} \cdot 1{,}509\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{l}^{-1} \cdot 0{,}99} = 10{,}2\ \mathrm{l}$$

Aus Stickstoffdioxid entsteht das größere Volumen Salpetersäure.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 2/79

Ma5 ▪1851 Angenommen, aus der Ungarischen Volksrepublik kamen n Pioniere; dann waren es $4 \cdot n$ Pioniere aus der Sowjetunion. Aus der DDR und aus der VR Polen kamen jeweils $2 \cdot n$ Pioniere. Insgesamt waren es somit $9 \cdot n$ Pioniere. Nun gilt $1990 < 9 \cdot n < 2000$.

Von den Zahlen zwischen 1990 und 2000 ist nur die Zahl 1998 ein Vielfaches von 9, denn $9 \cdot 222 = 1998$.

In diesem Durchgang verbrachten 1998 Junge Pioniere ihre Ferien in Artek. Aus der Sowjetunion kamen 888, aus der VR Polen 444, aus der DDR 444, aus der Ungarischen Volksrepublik 222 Junge Pioniere.

Ma5 ▪1852 Angenommen, anfangs waren es n Kinder; dann erhielt jedes Kind $(48:n)$ Murmeln. Danach waren es $(n-1)$ Kinder, und jedes Kind erhielt $[50:(n-1)]$ Murmeln. Wir stellen eine Tabelle auf:

n	$48:n$	$50:(n-1)$
1	48	n.l.
2	24	50
3	16	25
4	12	n.l.
6	8	10
8	6	n.l.
12	4	n.l.
16	3	n.l.
24	2	n.l.
48	1	n.l.

Nur für $n = 6$ existiert eine Lösung. Es spielten anfangs 6 Kinder mit Murmeln, jedes Kind erhielt 8 Murmeln, 2 Murmeln blieben übrig. Danach spielten 5 Kinder mit Murmeln, jedes Kind erhielt 10 Murmeln, also zwei Murmeln mehr als zuvor, und es blieb keine Murmel übrig.

Ma5 ▪1853 Angenommen, dieser Schüler hat n Punkte erreicht; dann gilt

$(n+10) \cdot 2 = 100 - 10,$
$(n+10) \cdot 2 = 90,$
$n + 10 = 45,$
$n = 35.$

Dieser Schüler erreichte auf der Kreisolympiade Junger Mathematiker 35 Punkte.

Ma5 ▪1854 Angenommen, Antje schaffte eine Weite von x Metern; die Wurfweiten der sechs Schüler sind in der nachfolgenden Tabelle erfaßt:

Name	Weite in m
Antje	x
Bernd	$x+16$
Peter	$x+14$
Birgit	$x+3$
Jochen	$x+16$
Dieter	$x+9$
zus.	$6x+58$

Nun gilt $6x + 58 = 148$, $6x = 90$, $x = 15$.

Antje warf den Ball 15 m, Bernd 31 m, Peter 29 m, Birgit 18 m, Jochen 31 m, Dieter 24 m weit.

Ma5 ▪1855 Angenommen, die Schüler der Klasse 5b hatten eine Einnahme von x Mark; die Schüler der Klasse 5c haben dann

$(x+7)$ Mark eingenommen; zusammen sind das $(2x+7)$ Mark.
Nun gilt

$61<2x+7<65,$
$54<2x<58,$
$27<x<29$, also $x=28$.

Insgesamt wurden 30 M + 28 M + 35 M, also 93 M auf das Solidaritätskonto überwiesen.

Ma 5 ■1856 In Heft 2/1979 ist uns ein Fehler unterlaufen. Die Wettbewerbsaufgabe Ma 5 ■1856 auf Seite 34 muß wie folgt lauten: Hans hatte im Garten Äpfel gepflückt und in drei Spankörbe gelegt. Beim Auszählen der Äpfel stellt er fest, daß sich im zweiten Korb ein Apfel weniger als im ersten befand und daß der dritte Korb drei Äpfel mehr enthielt als der zweite. Wieviel Äpfel enthielt jeder dieser drei Körbe?

Lösung: Angenommen, der erste Korb enthielt n Äpfel; dann enthielt der zweite Korb $(n-1)$ Äpfel, der dritte Korb $(n+2)$ Äpfel. Zusammen sind es $(3n+1)$ Äpfel. Nun gilt

$3n+1=67,$
$3n=66$, also $n=22$.

Der erste Korb enthielt 22, der zweite 21, der dritte 24 Äpfel.
(Alle Einsender erhielten eine Antwortkarte: sehr gut gelöst.)

Ma 6 ■1857 a) $60\text{ min}\cdot\frac{2}{5}=24\text{ min}$; die Uhrzeit lautet somit 7.24 Uhr.
b) Für den großen Zeiger gilt:
$1\text{ h}\mathrel{\widehat{=}}360°$; $1\text{ min}\mathrel{\widehat{=}}6°$; $24\text{ min}\mathrel{\widehat{=}}144°$.
Für den kleinen Zeiger gilt:
$12\text{ h}\mathrel{\widehat{=}}360°$; $1\text{ h}\mathrel{\widehat{=}}30°$; $1\text{ min}\mathrel{\widehat{=}}\frac{1}{2}°$;
$24\text{ min}\mathrel{\widehat{=}}12°$; $7\text{ h }24\text{ min}\mathrel{\widehat{=}}222°$.
Nun gilt ferner $222°-144°=78°$; beide Zeiger bilden um 7.24 Uhr einen Winkel von 78°.

Ma 6 ■1858 Angenommen, Ulrike spendete x Mark; dann haben Katrin $2x$ Mark, Evelyn $(2x-2)$ Mark und Susanne $(4x-4)$ Mark gespendet. Zusammen sind das $(9x-6)$ Mark.
Nun gilt

$20<9x-6<30,$
$26<9x<36$, also $x=3$.

Es spendeten Ulrike 3 M, Katrin 6 M, Evelyn 4 M und Susanne 8 M.
Zusammen spendeten sie 21 M.

Ma 6 ■1859 Angenommen, Heidrun ist n Jahre alt; dann ist ihre Mutter $3n$ Jahre und ihr Vater $(3n+6)$ Jahre alt. Ferner ist Katja $(n-8)$ Jahre, Gabi $3\cdot(n-8)$ Jahre alt. Nun gilt

$$\begin{aligned} n+3n+(3n+6)+(n-8)&\\ +3\cdot(n-8)&=95,\\ 11n-26&=95,\\ 11n&=121,\\ n&=11. \end{aligned}$$

Heidrun ist 11, ihre Mutter 33, ihr Vater 39, ihre Schwester Katja 3 und ihre Schwester Gabi 9 Jahre alt.

Ma 6 ■1860 Angenommen, das Buch umfaßt n Seiten; nach dem ersten Tag hat Rolf noch $(n-12)$ Seiten zu lesen. Davon liest er am zweiten Tag $\frac{n-12}{4}$ Seiten. Nun gilt

$$\begin{aligned} 12+\frac{n-12}{4}+57&=n,\\ \frac{n-12}{4}+69&=n,\\ n-12+276&=4n,\\ 264&=3n,\\ n&=88. \end{aligned}$$

Dieses Buch umfaßt 88 Seiten.

Ma 6 ■1861 Von 21 Uhr bis 5 Uhr sind 8 Stunden. Nun gilt

$$v=\frac{s}{t}=\frac{560\text{ km}}{8\text{ h}}=70\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ferner gilt

$$t=\frac{s}{v}=\frac{(560-420)\text{ km}}{70\frac{\text{km}}{\text{h}}}=2\text{ h},\ \text{d. h.,}$$

der Gegenzug ist um 1 Uhr in Warschau abgefahren, da er nach 2 Stunden also um 3 Uhr in Kutno auf den Zug Berlin–Warschau traf.

Ma 7 ■1862 Es seien a, b, c bzw. d die Zahlen, die das Lebensalter von Axel, Bernd, Christian bzw. Dieter angeben; dann gilt:

$$a<b, \quad (1)$$
$$b+d<a+c, \quad (2)$$
$$a+b=c+d. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt durch Addition

$$a+2b+d<a+2c+d,$$
$$2b<2c,$$
$$b<c. \quad (4)$$

Aus (1) und (4) folgt

$$a<b<c. \quad (5)$$

Aus (3) folgt durch Umformen

$$c=a+b-d. \quad (6)$$

Durch Einsetzen von (6) in (2) erhalten wir

$$b+d<a+a+b-d,$$
$$2d<2a,$$
$$d<a. \quad (7)$$

Aus (5) und (7) folgt

$$d<a<b<c.$$

Dieter ist der Jüngste.

Ma 7 ■1863 Angenommen, im ersten Spiel schoß jede der beiden Mannschaften x Tore; es fielen somit $2x$ Tore. Im zweiten Spiel habe Mannschaft B y Tore, also Mannschaft A $2y$ Tore geschossen; es fielen somit $3y$ Tore. Nun gilt

$$\begin{aligned} 2x+3y&=13,\\ 3y&=12+1-2x,\\ y&=4-\frac{2x-1}{3}. \end{aligned}$$

Nur für $x_1=2$, $y_1=3$ und $x_2=5$, $y_2=1$ besitzt diese Gleichung positive ganzzahlige Lösungen.

Spiele	Torverhältnis	Anzahl der Tore
1. Spiel	2:2	4
2. Spiel	6:3	9

Die zweite Lösung entfällt (5:5; 2:1), da in diesem Fall im zweiten Spiel weniger Tore fielen als im ersten.

Ma 7 ■1864 $1\text{ Jahr}\mathrel{\widehat{=}}365\cdot24\cdot60$ Minuten $=525600$ Minuten;
$525600:124\approx4239$.
Im Jahre 1977 wurden in dieser Klinik 4239 Kinder geboren.
$(100-55):100=x:4239,$

$$x=\frac{4239\cdot45}{100}\approx1908.$$

Im Jahre 1977 wurden in dieser Klinik 1908 Knaben geboren.

Ma 7 ■1865 Es sei A_3 bzw. A_4 der Flächeninhalt des Dreiecks BCS bzw. DAS; dann gilt

$$A_{ABCD}=A_1+A_2+A_3+A_4,$$
$$\frac{1}{2}\cdot h(a+c)=A_1+A_2+A_3+A_4. \quad (1)$$

Aus $c<a$ folgt $2a>a+c$, also $a>\frac{1}{2}\cdot(a+c)$. (2)

Wegen (2) gilt
$a\cdot h>A_1+A_2+A_3+A_4$. Ferner gilt (3)

$$A_1+A_4=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h,$$

also $A_4=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h-A_1$ und (4)

$$A_1+A_3=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h,$$

also $A_3=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h-A_1$. (5)

Setzen wir (4) und (5) in (3) ein, so erhalten wir

$$a\cdot h>A_1+A_2+\frac{1}{2}\cdot a\cdot h-A_1+\frac{1}{2}\cdot a\cdot h-A_1,$$
$$a\cdot h>a\cdot h+A_2-A_1,$$
$$A_1>A_2.$$

Ma 8 ■1866 Die durch z^2-z dargestellte Zahl muß laut Aufgabe als Endziffer eine Null haben. Folglich müssen die Zahl z und ihr Quadrat z^2 die gleiche Endziffer haben. Das ist nur für die Endziffern 0, 1, 5 und 6 möglich.
Für alle natürlichen Zazlen z mit den Endziffern 0, 1, 5, 6 ist die Differenz z^2-z ein ganzzahliges Vielfaches von 10.

Ma 8 ■1867 Belegt man in x^2+x+11 die Variable x mit den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, so erhält man stets eine Primzahl. Für $x=10$ ergibt sich jedoch $121=11^2$, also keine Primzahl. Die Aussage ist falsch. Um zu beweisen, daß eine Aussage falsch ist, bedarf es nur eines Gegenbeispiels.

Ma 8 ■1868 a) Falls das Dreieck ABC existiert, müssen folgende Dreiecksungleichungen erfüllt sein:
(1) $a+b>c$, d. h. $15\text{ cm}+8\text{ cm}>c$,
(2) $a+c>b$, d. h. $15\text{ cm}+c>8\text{ cm}$,
(3) $b+c>a$, d. h. $8\text{ cm}+c>15\text{ cm}$.
Aus (1) und (3) folgt $7\text{ cm}<c<23\text{ cm}$.

b) Falls das Dreieck ABC spitzwinklig ist, müssen folgende Ungleichungen erfüllt sein:
(1) $a^2+b^2>c^2$, d. h. $225\text{ cm}^2+64\text{ cm}^2>c^2$

(2) $a^2+c^2>b^2$, d. h. $225\,\text{cm}^2+c^2>64\,\text{cm}^2$
(3) $b^2+c^2>a^2$, d. h. $64\,\text{cm}^2+c^2>225\,\text{cm}^2$
Aus (1) und (3) folgt $\sqrt{161}\,\text{cm}^2<c<17\,\text{cm}$.

c) Falls das Dreieck ABC rechtwinklig ist, so muß nach dem Satz des Pythagoras gelten $a^2+b^2=c^2$, falls c die Hypotenuse ist. In diesem Falle ist $c=17$ cm. Falls a Hypotenuse ist, gilt $b^2+c^2=a^2$. Dann ergibt sich für $c=\sqrt{161}\,\text{cm}\approx 12{,}69$ cm. Wegen $b<a$ kann b nicht Hypotenuse sein.

d) Falls das Dreieck ABC stumpfwinklig ist, muß eine der Beziehungen gelten

(1) $a^2+b^2<c^2$, d. h. $225\,\text{cm}^2+64\,\text{cm}^2<c^2$; $c^2>289\,\text{cm}^2$,
(2) $a^2+c^2<b^2$, d. h. $225\,\text{cm}^2+c^2<64\,\text{cm}^2$; entfällt,
(3) $b^2+c^2<a^2$, d. h. $64\,\text{cm}^2+c^2<225\,\text{cm}^2$; $c^2<161\,\text{cm}^2$.

1. Fall: Wegen (1) und Dreiecksungleichung (1) gilt $17\,\text{cm}<c<23\,\text{cm}$, und $\sphericalangle ACB$ ist stumpf.

2. Fall: Wegen (3) und Dreiecksungleichung (3) gilt $7\,\text{cm}<c<\sqrt{161}\,\text{cm}$, und $\sphericalangle BAC$ ist stumpf.

Ma 8 ▪1869 Der erste Radfahrer legt in x Stunden $12x$ km zurück, der zweite $15x$ km. Wenn sich beide treffen, müssen sie zusammen die Gesamtstrecke von 63 km zurückgelegt haben; es gilt also:

$$\begin{aligned} 12x\,\text{km}+15x\,\text{km}&=63\,\text{km},\\ 12x+15x&=63,\\ 27x&=63,\\ x&=\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Die beiden Radfahrer treffen sich nach $\frac{7}{3}$ Stunden, das sind 2 Stunden 20 Minuten, also um 11.20 Uhr.

Der erste Fahrer hat dann $12\cdot\frac{7}{3}\,\text{km}=28\,\text{km}$, der zweite $15\cdot\frac{7}{3}\,\text{km}=35\,\text{km}$ zurückgelegt; sie treffen sich demnach 28 km vom Ort A entfernt.

Ma 9 ▪1870 Angenommen, Irina hat x Stück Negerküsse, y Stück Apfelkuchen und z Stück Bienenstich gekauft; dann gilt

$$\begin{aligned} x+y+z&=9 \quad\text{und}\\ 25x+35y+30z&=265. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 25 und subtrahieren sie danach von der zweiten:

$$\begin{aligned} 25x+35y+30z&=265\\ 25x+25y+25z&=225\\ \hline 10y+5z&=40,\\ 2y+z&=8,\\ 2y&=8-z,\\ y&=4-\frac{z}{2}. \end{aligned}$$

Nur wenn z mit 2 oder 4 oder 6 belegt wird, erhalten wir für y eine positive ganze Zahl, nämlich y gleich 3 oder 2 oder 1. Von den Tripeln (x, y, z), nämlich (4, 3, 2), (3, 2, 4), (2, 1, 6) erfüllt nur das erste Zahlentripel wegen $x>y>z$ die Bedingungen. Irina hat vier Negerküsse, 3 Stück Apfelkuchen und 2 Stück Bienenstich gekauft.

Ma 9 ▪1871 Die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ seien mit a, b, c bezeichnet. Für den Flächeninhalt dieses Dreiecks gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c\cdot h_c&=A,\\ \frac{1}{2}c\cdot 3&=12,\\ c&=8. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot a\cdot b&=A,\\ \frac{1}{2}\cdot a\cdot b&=12,\\ a\cdot b&=24,\\ b&=\frac{24}{a}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2+b^2=c^2;\ \text{also}$$
$$a^2+\left(\frac{24}{a}\right)^2=64,$$

$a^4-64a^2+576=0$.
Wir setzen $a^2=x$ und erhalten
$x^2-64x+576=0$.
$x_{1,2}=32\pm\sqrt{7\cdot 64}=32\pm 8\sqrt{7}=32\pm 21{,}17$
$x_1=53{,}17 \qquad x_2=10{,}83.$
$a_1=\sqrt{53{,}17}=7{,}29 \qquad a^2=\sqrt{10{,}83}=3{,}29.$
Daraus folgt weiter
$b_1=\frac{24}{7{,}29}=3{,}29, \qquad b_2=\frac{24}{3{,}29}=7{,}29.$

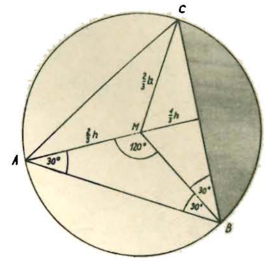
Die Längen der Seiten betragen entweder $a=7{,}29$ cm, $b=3{,}29$ cm, $c=8$ cm oder $a=3{,}29$ cm, $b=7{,}29$ cm, $c=8$ cm.
(Die Maßzahlen sind Näherungswerte!)

Ma 9 ▪1872 Es gilt
$$\triangle ABM\sim\triangle BCM\sim\triangle CAM.$$
(Begründung siehe Bild)
Weiter gilt

$A=\frac{1}{3}\pi r^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, und wegen

$r=\frac{2}{3}\cdot h=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$ gilt

$$A=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2-\frac{a^2}{12}\sqrt{3}=\frac{\pi a^2}{9}-\frac{a^2}{12}\sqrt{3},$$

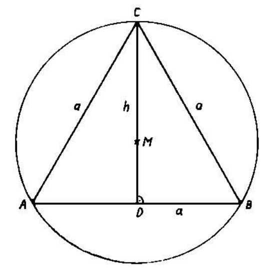


$$A=\left(\pi-\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)\text{cm}^2,$$
$A\approx 1{,}84\,\text{cm}^2$.

Der Flächeninhalt des schraffierten Flächenstückes beträgt etwa $1{,}84\,\text{cm}^2$.

Ma 9 ▪1873 Im gleichseitigen Dreieck fallen Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende und Höhe jeweils zusammen. Die Voraussetzungen seien durch die Skizze geben.

Behauptung: $r^2=\frac{1}{3}a^2$



Beweis: Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 schneiden, gilt $\overline{CM}:\overline{MD}=2:1$; es folgt $r=\frac{2}{3}\cdot h$. Da die Höhe im gleichseitigen Dreieck $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ beträgt, folgt weiter

$$r=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3},$$

$$r=\frac{a}{3}\sqrt{3},\ \text{also}\ r^2=\frac{a^2}{3},\ \text{w. z. b. w.}$$

Ma 10/12 ▪1874 136^n läßt bei jedem $n\in N$ und $n>0$ bei Division durch 10 den Rest 6;
5^n läßt bei jedem $n\in N$ und $n>0$ bei Division durch 10 den Rest 5;
11^n läßt bei jedem $n\in N$ und $n>0$ bei Division durch 10 den Rest 1,
$136^n-5^n-11^n$ läßt bei jedem $n\in N$ und $n>0$ bei Division durch 10 den Rest $(6-5-1)$, d.i. der Rest 0, und damit ist der Ausdruck $136^n-5^n-11^n$ bei jedem $n\in N$ und $n>0$ durch 10 teilbar, w. z. b. w.

Ma 10/12 ▪1875 Wir formen zunächst die Gleichung
$3\cos(\beta+\gamma)+6\sin\alpha=0$ wie folgt äquivalent um:
$3\cos(\beta+\gamma)+6\sin\alpha=0 \mid :3,$
$\cos(\beta+\gamma)+2\sin\alpha=0,$
und wegen $\cos(\beta+\gamma)=\cos(180°-\alpha)-\cos\alpha$ gilt $-\cos\alpha+2\sin\alpha=0,$

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha&=\cos\alpha,\\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}&=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ und $\tan\alpha=\frac{a}{b}$ gilt nun $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$. Laut Aufgabenstellung gilt die Beziehung $b=a+5$, also

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+5}&=\frac{1}{2},\\ 2a&=a+5,\\ a&=5.\ \text{Es folgt}\ b=10. \end{aligned}$$

Die Kathete a ist 5 cm und die Kathete b ist ist 10 cm lang. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt

$A=\frac{ab}{2}$, also $A=\frac{5\cdot 10}{2}\,\text{cm}^2$, $A=25\,\text{cm}^2$.

Der Flächeninhalt dieses Dreiecks beträgt $25\,\text{cm}^2$.

Lösungen zu alpha-heiter 5/79:

Die letzte Spielmarke

Angenommen, Kreis 1 bleibt am Anfang frei, dann springt man folgendermaßen (die Zahlen zeigen den Sprung von – bis):
9–1, 7–9, 10–8, 21–7, 7–9, 22–8, 8–10, 6–4, 1–9, 18–6, 3–11, 16–18, 18–6, 30–18, 27–25, 24–26, 28–30, 33–25, 18–30, 31–33, 33–25, 26–24, 20–18, 23–25, 25–11, 6–18, 9–11, 18–6, 13–11, 11–3, 3–1.

Silbenrätsel

1. Einer – Eine, 2. Wissenschaft – Wissenschaft, 3. Spitze – ist, 4. Sektor – erst, 5. Diagonale – dann, 6. Thales – als, 7. Scheitelwinkelpaar – wirklich, 8. rechtwinklig – entwickelt, 9. zweitausendacht – anzusehen, 10. Winkel – wenn, 11. sieben – sie, 12. Halbierende – dahin, 13. Kegelmantel – gelangt, 14. Stifel – ist, 15. Scheitel – sich, 16. Quader – der, 17. Mathematik – Mathematik, 18. Bildebene – bedienen, 19. Zunge – zu, 20. Körpernetz – können.

Eine Wissenschaft ist erst dann als wirklich entwickelt anzusehen, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können.

Unterhaltsame Logik

Figur 1 gehört an Stelle des Fragezeichens.

Kryptarithmetik

a) $11+11=22$; $17+17=34$; $28+28=56$;

b) Weil $AA\cdot A=DBA$, so endet A^2 mit der gleichen Ziffer wie A. Das ist für die Zahlen 1, 5 und 6 der Fall. Offensichtlich ist A ungleich 1, also muß A gleich 5 oder 6 sein. Wenn $A=5$ wäre, so folgte aus der letzten Säule, daß $C=0$ sein müßte. Das aber ist ausgeschlossen, weil C die erste Ziffer des Subtrahenden ist. Daher ist $A=6$. Es ergibt sich $A=6$, $B=9$, $C=2$ und $D=3$.

c) Wegen (1) $\alpha\cdot\alpha=PE$ scheiden für α zunächst die Ziffern 1, 2, 3, 5 und 6 aus, da das Produkt zweistellig und nach Voraussetzung $\alpha\neq E$ gilt.

Von den verbleibenden Ziffern 4, 7, 8 und 9 entfallen wegen (1) $\alpha\cdot\alpha=PE$ und (8) $\alpha\cdot T=EP$ die Ziffern 4, 7 und 8, da bei Vertauschen der Ziffern in $(4\cdot 4=)16$, $(7\cdot 7=)49$ und $(8\cdot 8=)64$ die zweistelligen Zahlen 61, 94 und 46 entstehen, die nicht als Produkte aus zwei einstelligen Faktoren darstellbar sind. Also gilt $\alpha=9$, woraus folgt:

$P=8$, $R=7$, $O=6$, $D=5$, $U=4$, $K=3$, $T=2$, $E=1$

100 Jahre Mathematisch-Physikalisches Seminar

Festkolloquium an der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Die altehrwürdige Rostocker Universität wurde vor 560 Jahren gegründet. In den Jahrhunderten ihres Bestehens haben namhafte Gelehrte der Alma mater Rostochiensis sich auch auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet ausgezeichnet. So wirkten z. B. an der „Leuchte des Nordens" – wie die Rostocker Universität genannt wurde – der Astronom Tycho de Brahe, der Universalgelehrte David Chyträus und der Mathematiker und Naturwissenschaftler Joachim Jungius. Nach dem Niedergang der Universität im 17./18. Jahrhundert kam es erst in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts für die Stadt Rostock aufgrund der aufstrebenden Schiffahrt zu einer stürmischen Aufwärtsentwicklung. Dieser wirtschaftliche Aufschwung war mit einer Belebung der Naturwissenschaften verbunden. Der großherzogliche „Landsherr" Friedrich Franz kam am 27. Februar 1879 zu der „gnädigsten Entschließung ..., ein mathematisch-physikalisches Seminarium zu Unserer Universität i, Rostock zu errichten".

Am 20. April 1979 wurde anläßlich der 100. Wiederkehr der Gründung des mathematisch-physikalischen Seminars eine Festveranstaltung in der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock durchgeführt. Nach der Eröffnungsrede durch Magnifizenz Prof. Dr. sc. phil. Brauer sprachen die Sektionsdirektoren Prof. Dr. sc. nat. Engel (siehe Foto) und Prof. Dr. sc. nat. Ulbricht über die Entwicklung der Sektionen Mathematik und Physik. Einige Gedanken seien aufgegriffen.

Die hohe Spezialisierung der Wissenschaftsdisziplinen, die u. a. zur Gründung selbständiger Sektionen Mathematik und Physik vor 10 Jahren führte, erfordert heute mehr denn je eine interdisziplinäre Zusammenarbeit. Deshalb kommt es in der Ausbildung darauf an, die Studenten zu befähigen, selbständig in die Wissenschaften einzudringen, ihre theoretischen Kenntnisse in enger Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern anderer Bereiche anzuwenden.

An der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock werden derzeitig Diplommathematiker in den Fachrichtungen Numerische Mathematik und Mathematische Kybernetik und Rechentechnik sowie Diplomlehrer für Mathematik und Physik ausgebildet. Die Sektion Mathematik ist ferner für die Mathematikausbildung der naturwissenschaftlichen, technischen, landwirtschaftlichen und ökonomischen Sektionen verantwortlich. Zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses können die besten Studenten, die sich u. a. als Schüler auf mathematischen Olympiaden auszeichneten und ihre sehr guten Leistungen in den ersten Studienjahren unter Beweis stellen, als Beststudenten ausgezeichnet werden. Sie genießen eine individuelle Förderung z. B. nach einem Sonderstudienplan.

Herr Prof. Dr. sc. nat. Burosch, Vorsitzender der Jury des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, wurde durch den Rektor mit der Ehrennadel der Wilhelm-Pieck-Universität ausgezeichnet.

FDJ-Vertreter beider Sektionen stellten u. a. Ergebnisse vor, die sie im Rahmen einer Preisaufgabe der FDJ erzielten.

Die Festveranstaltung klang mit zwei Fachvorträgen von Prof. Dr. habil. Berg über numerische Stabilität und Prof. Dr. sc. nat. Kelbg über die Entwicklung und die Perspektiven der Physik flüssiger Phasen aus.

Johanna und Wolfgang Moldenhauer

Fröhliche Mathematik

- Sieben Kinder sind in der Familie.
- Herr Müller hat drei Kinder. Davon sind zwei jünger als 14 Jahre.
- Das Hotel hat 29 Zweibett- und 41 Einbettzimmer.
- Die Masse des Holzwürfels mit der Kantenlänge 2 cm ist nicht doppelt, sondern achtmal so groß wie der andere Würfel. Sie beträgt also 6,4 g.
- Es sind 26 Minuten bis 8 Uhr. Es ist also gerade 7.34 Uhr.

Aufgaben aus der Praxis

Auf dieser Seite wurden Sachaufgaben aus Mathematiklehrbüchern der Jahre 1945 und 1952 sowie aus dem Jahre 1979 zusammengestellt. Aus ihnen soll ersichtlich werden, wie sich die gesellschaftlichen Verhältnisse in den letzten dreieinhalb Jahrzehnten grundlegend verändert haben.

1945

Aus einem Mathematiklehrbuch des Verlages Volk und Wissen, Verlagsgesellschaft m. b. H., Berlin/Leipzig:

- Ein Mann raucht an einem Tag 4 Zigarren. Wieviel sind das: a) in einer Woche; b) in einem Jahr; c) während 30 Jahren?
- Ein Kaufmann hat für 1754 Mark Waren verkauft und davon den 6. Teil verdient. Wie groß war sein Verdienst?
- Ein Landmann braucht, um ein Feld mit Roggen zu besäen, 159 kg. Er erntet 2253 kg; wie ...fältig war die Ernte?

...handschuhe von der 1. Sorte $5\frac{1}{2}$ Dtzd., ...der 2. Sorte $7\frac{3}{4}$ Dtzd., von der 3. Sorte ...Dtzd., von der 4. Sorte $4\frac{2}{3}$ Dtzd. Wieviel ... und Stck. sind das im ganzen?

... Mann mähen am 1. Tag 5 ha Sommer...ide; wieviel ha bringen in derselben Zeit ...dann fertig?

1952

Aus dem Mathematiklehrbuch des Verlages Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin:

- Das Nationale Komitee für den Neuaufbau der Hauptstadt Deutschlands berichtete am 15. April 1952, daß seit dem 2. 1. 1952 3228 t Stahl und Schrott für den Wiederaufbau Berlins geborgen wurden. Rund 19,05% entfallen davon auf Nutzstahl.
Wieviel t Nutzstahl konnten geborgen werden?
- In einem volkseigenen Gärtnereibetrieb wurden 240 Obstbäume gepflanzt, 12 davon sind nicht gekommen.
Wieviel Stück würden unter gleichen Bedingungen von 100 gepflanzten Bäumen nicht angewachsen sein?
- Beim Aufbau eines Neubauernhofes haben zwei Schulklassen eines Dorfes geholfen. In der einen Klasse beteiligten sich 36 von 40. In der anderen Klasse beteiligten sich 40 von 50.
Welche Klasse war aktiver?
- Beim Aufbau der Volkswerft Stralsund erfüllte der Nationalpreisträger Paul Sack die Tagesnorm von 600 vermauerten Ziegelsteinen um das Vierfache.
Wieviel Ziegelsteine vermauerte er täglich?
- Zum Bau eines Teilstücks eines Radioapparates war 0,80 m Schaltdraht nötig. Der Montagearbeiter Hempel ersann eine einfachere Konstruktion und kam nunmehr mit 0,67 m aus.
Wieviel Draht wurde bei 500 Geräten eingespart?
- Ein Bauer in Lindenthal lieferte im Erntemonat bereits 48,2 dz Getreide ab. Er hatte damit sein Ablieferungssoll bis auf 6,4 dz er-

...chen. Zu
...ze.
...?
...n. Außer
...Tag 20 Pf.
... Arbeits-
...?

...gen in al-
...Kl. 5 bis 8)

...huljahr

1. Im Jahre 1952 wurden auf einem volkseigenen Gut 2468 dz Zuckerrüben geerntet. Im Jahre 1955 sollen 3150 dz auf derselben Fläche geerntet werden.
Auf wieviel Prozent soll der Ernteertrag gesteigert werden? (Runde auf eine Dezimalstelle!)
2. Berechne:
$$(6x+2y)\cdot 3+(36x^2-24xy):6x$$
3. Berechne:
$$(-7{,}2m+5{,}9p-0{,}7r)-(-11{,}9m+8{,}6p+7{,}5r)$$
4. Löse folgende Gleichung und mache die Probe!
$$15x-23-5x=12x-17-4x$$
5. In einem Dreieck ist die Seite c 2 cm größer und die Seite a 1 cm kleiner als die Seite b. Die Summe der drei Seiten beträgt 19 cm. Berechne die Seite c!
6. Von einem Dreieck sind gegeben:
$$c=7\text{ cm},\ s_c=5{,}8\text{ cm und } a=4{,}5\text{ cm}.$$
Zeichne die Planfigur, konstruiere das Dreieck und beschreibe die Konstruktion!

1979

Aus einem Heft des alpha-Clubs der John-Schehr-OS, Leipzig, eingesetzt im Rahmen einer Wissensstraße auf dem Nationalen Jugendfestival in Berlin:

Klasse 4

In den Plattenwerken der DDR werden Großplatten für den Wohnungsbau produziert. Im Jahre 1975 wurden Großplatten für 58000 Wohnungen hergestellt. Die Anzahl der Wohnungen, für die im Jahre 1980 laut Plan Großplatten produziert werden sollen, ist um 16000 kleiner als die doppelte Anzahl des Jahres 1975.
Für wieviel Wohnungen sollen im Jahre 1980 Großplatten produziert werden?

Klasse 5

In der DDR werden täglich rund 690000 t Rohbraunkohle gefördert. Etwa der sechste Teil davon wird zu Briketts gepreßt. Wieviel Tonnen Briketts werden in der DDR in einem Jahr (365 Tage) etwa produziert?

Klasse 6

Im Jahre 1977 wurden von der Regierung der DDR aus gesellschaftlichen Fonds für den Sport, für das Erholungswesen und für die Kultur insgesamt 2,1 Mrd. Mark zur Verfügung gestellt. Dabei war der für die Kultur aufgewendete Betrag sechsmal so groß wie der für den Sport. Für das Erholungswesen wurde ein halb so großer Betrag bereitgestellt wie für den Sport und für die Kultur zusammengenommen.
Welche Aufwendungen aus gesellschaftlichen Fonds entfielen im Jahre 1977 auf den Sport, auf das Erholungswesen und auf die Kultur?

Klasse 7

Die Elektroenergie-Erzeugung der DDR ist von entscheidender Bedeutung für die Volkswirtschaft. An Elektroenergie wurden in der DDR erzeugt:

14,6 Mrd. kWh im Jahre 1948,
34,9 Mrd. kWh im Jahre 1958,
63,2 Mrd. kWh im Jahre 1968,
96,8 Mrd. kWh im Jahre 1978.

Um wieviel Prozent konnte die Erzeugung von Elektroenergie seit 1948 jeweils im Zeitraum von 10 Jahren gesteigert werden?
Um wieviel Prozent konnte die Erzeugung von Elektroenergie im Jahre 1978 gegenüber dem Jahr 1948 gesteigert werden?

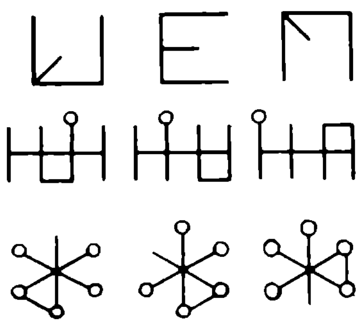
Unterhaltsame Psychologie

Die vier Probleme wurden aus dem Buch:
K. Platonow **Unterhaltsame Psychologie**
Verlag Progress Moskau/Urania-Verlag Leipzig ·
Jena · Berlin,
Preis 13,80 M, Bestell-Nr. 653 390 2 entnommen.

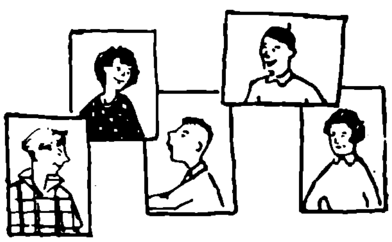
Problem 1
Auf der untenstehenden Zeichnung sind eine Reihe von Figuren aufgeführt, die sich innerhalb jeder Zeile nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit verändern? Wer findet sie?

6 10 14 18 22

10 12 11 13 12

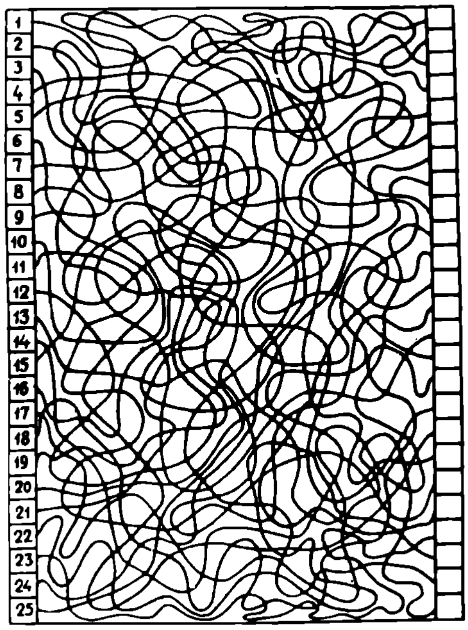


Problem 2
Präge dir diese Figur ein!



Identifiziere hier die Figuren aus der vorherigen Zeichnung!

Problem 3
Um jede dieser Linien von Anfang bis Ende mit dem Blick zu verfolgen, benötigt man Beständigkeit der Aufmerksamkeit.



Problem 4
Die verschiedenen Kombinationen der Lage der Augen, Lippen, Augenlider und Augenbrauen bestimmen den unterschiedlichen Ausdruck der Gesichter.
Erst einprägen, dann nachmachen!