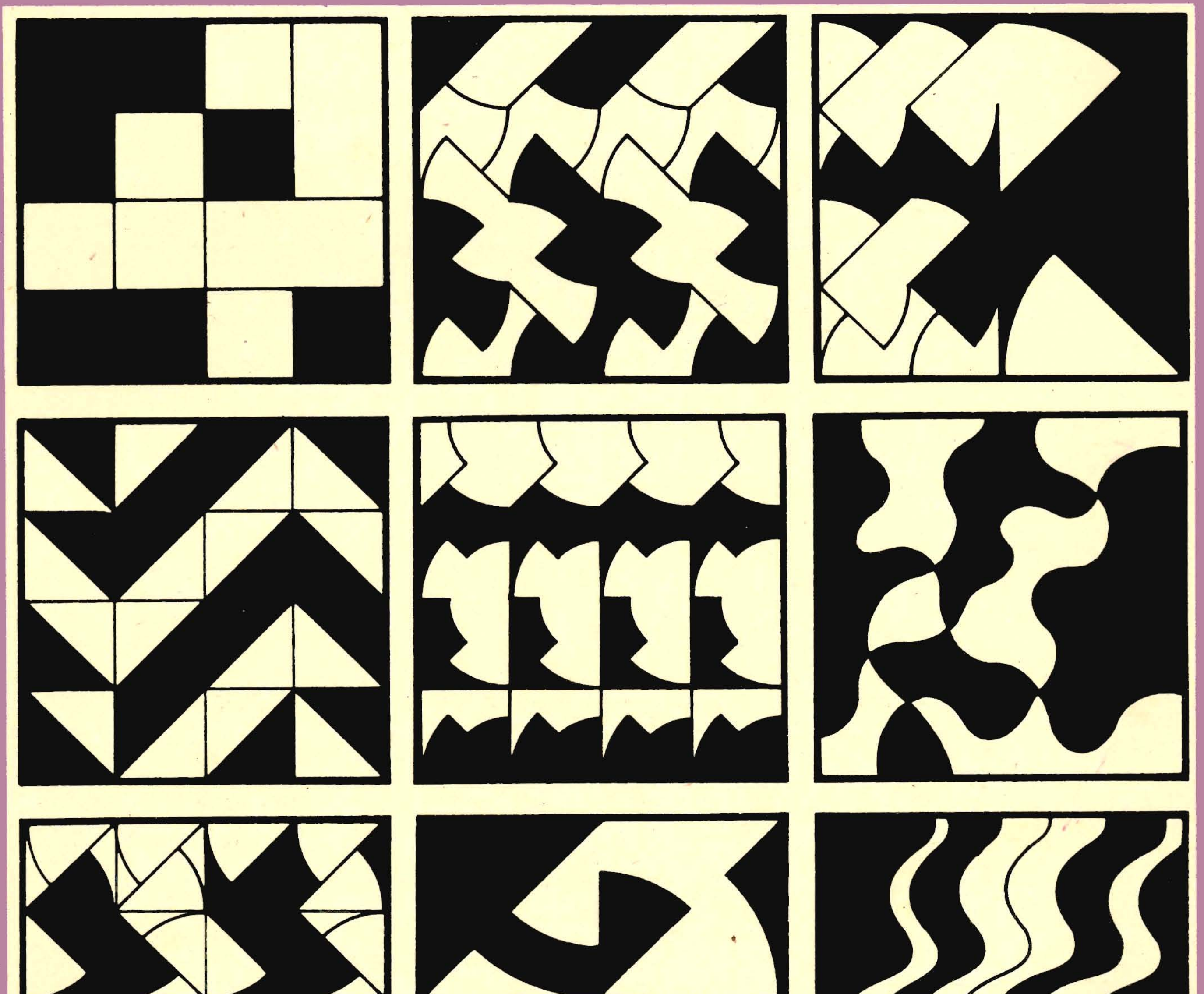
alpha

3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Mathematische Schülerzeitschrift



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto J. Perelman (S. 51); Galina Mamina, Moskau (S. 55); H. Teske, Leipzig (S. 58, 59); Fotoabtlg. Inst. f. Biophysik, Leipzig (S. 63); B. Stankowitsch, *Jesch* Beograd (S. 67); Fotos Bezirkskabinett f. AUT, Cottbus (III. U.-Seite)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: Reproduktion aus dem ungar. Kinderbuch: Lantos Ferenc, *Épitsunk egyutt!*, gestaltet von W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 25. Februar 1985
Auslieferungstermin: 12. Juni 1985

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

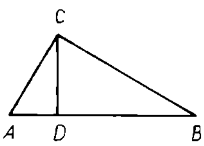
Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Pythagoras – Müssen es immer Quadrate sein?

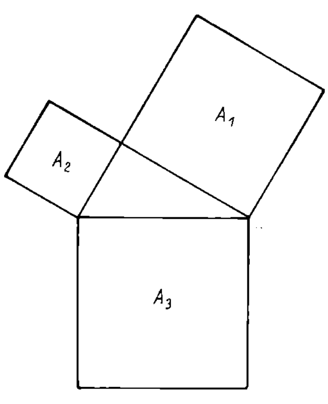
Der Fußpunkt der Höhe auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC sei D. Die Dreiecke ABC, ADC und BDC sind einander ähnlich (Bild 1), und wegen der Verhältnisgleichheit entsprechender Seiten in solchen Dreiecken gilt
$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$ und $\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BD}$
(Kathetensatz).

Bild 1



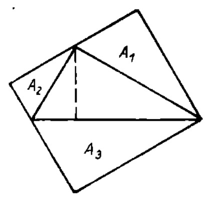
Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man den bekannten Satz des Pythagoras
$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}\,(\overline{AD} + \overline{BD})$
$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$,
oder mit anderen Bezeichnungen
$a^2 + b^2 = c^2$.
Der Satz besagt, daß die Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zusammen ebenso groß sind wie der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse (Bild 2). Aus dem Mathematikunterricht wissen wir, daß auch die Umkehrung dieses Satzes gilt. Wenn also zwischen den Seiten eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ besteht, dann ist das Dreieck rechtwinklig, und c ist Hypotenuse.

Bild 2



Aber auch für die Flächeninhalte der Dreiecke im Bild 1 gilt die im Satz des Pythagoras ausgesprochene Beziehung zwischen den Flächeninhalten der Quadrate über den Katheten und der Hypotenuse (Bild 3).
Man klappe einfach die Dreiecke nach innen. Das Dreieck ABC ist ja aus den beiden anderen Dreiecken zusammengesetzt.

Bild 3



Bezeichnen wir einmal die Flächeninhalte der Figuren über den Katheten mit A_1 und mit A_2 und den der Figur über der Hypotenuse mit A_3, so gilt auch hier die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3$.
Gilt diese Beziehung für jegliche Figuren, die wir über Katheten und Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zeichnen, oder ist sie an bestimmte Bedingungen gebunden?
Gewiß wird man den Figuren bestimmte Bedingungen auferlegen müssen, denn bei willkürlich konstruierten Figuren dürfte für ihre Flächeninhalte kaum die Gleichung $A_1 + A_2 = A_3$ erfüllt sein (Bild 4).

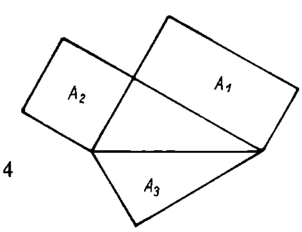


Bild 4

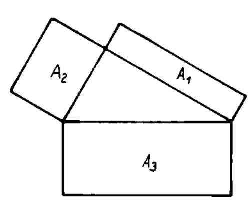


Bild 5

Andererseits wird man es immer so einrichten können, daß für ein Tripel von Figuren diese Beziehung erfüllt ist (Bild 5).
Die Figuren seien Rechtecke mit den Flächeninhalten
$A_1 = by$; $A_2 = ax$; $A_3 = cz$.
Dann ist die Beziehung erfüllt, wenn man z so wählt, daß gilt
$$z = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Betrachten wir die Bilder 2 und 3 näher, so erkennen wir, daß die über Katheten und Hypotenuse konstruierten Figuren immer einander ähnlich waren. Bei den rechtwinkligen Dreiecken ergab sich das aufgrund ihrer Entstehung; Quadrate dagegen sind stets einander ähnlich. Es liegt die Vermutung nahe, daß immer dann, wenn die Figuren über Katheten und Hypotenuse ähnliche Figuren sind, für ihre Flächeninhalte die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3$ gilt.
Wir wollen unsere Vermutung an weiteren einfachen Beispielen überprüfen. Gleichseitige Dreiecke (Bild 6) und auch Halbkreise (Bild 7) sind untereinander immer ähnlich.

Bild 6

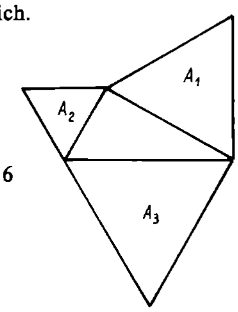
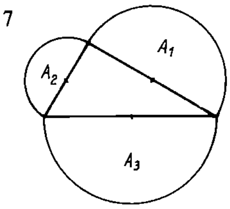


Bild 7



Die Rechnung bestätigt unsere Vermutung für diese Fälle.
$$A_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \qquad A_1 = \frac{\pi}{8}a^2$$
$$A_2 = \frac{b^2}{4}\sqrt{3} \qquad A_2 = \frac{\pi}{8}b^2$$
$$A_3 = \frac{c^2}{4}\sqrt{3} \qquad A_3 = \frac{\pi}{8}c^2$$
Mit $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt sich dann
$A_1 + A_2 = A_3$.
Wir wollen unsere Vermutung bestätigen. Wenn die Figuren ähnlich sind, dann verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Quadrate entsprechender Strecken. Das wissen wir aus dem Mathematikunterricht. Also gilt
$A_1 : A_2 : A_3 = a^2 : b^2 : c^2$,
denn die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks waren für die Figuren einander entsprechende Strecken. Aus dieser fortlaufenden Proportion bilden wir die beiden Verhältnisgleichungen
$A_1 : A_3 = a^2 : c^2$ und $A_2 : A_3 = b^2 : c^2$
und hieraus
$$A_1 = \frac{a^2}{c^2}A_3 \text{ und } A_2 = \frac{b^2}{c^2}A_3.$$
Dann ist $A_1 + A_2 = \frac{A_3}{c^2}(a^2 + b^2)$.
Da im rechtwinkligen Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, erhalten wir hieraus
$A_1 + A_2 = A_3$.
Also haben wir gefunden:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist und die Figuren über den Katheten und der Hypotenuse sind ähnlich, dann gilt für ihre Flächeninhalte $A_1 + A_2 = A_3$.
Oder in Kurzform:
V_1: Das Dreieck ist rechtwinklig, d.h. $a^2 + b^2 = c^2$.
V_2: Die Figuren sind ähnlich, d.h. $A_1 : A_2 : A_3 = a^2 : b^2 : c^2$.
B: $A_1 + A_2 = A_3$

Von diesem Satz kann man auch eine wahre Umkehrung bilden:
Wenn für die Flächeninhalte der Figuren über den Seiten eines Dreiecks gilt $A_1 + A_2 = A_3$ und diese Figuren einander ähnlich sind, dann gilt für die Seiten des Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$, und das Dreieck ist rechtwinklig.

V_1: $A_1 + A_2 = A_3$
V_2: Die Figuren sind ähnlich.
B: $a^2 + b^2 = c^2$

Zum Beweis bilden wir aus V_1 die Gleichung

$\frac{A_1}{A_3} + \frac{A_2}{A_3} = 1$, aus V_2 hingegen folgt

$\frac{A_1}{A_3} = \frac{a^2}{c^2}$ und $\frac{A_2}{A_3} = \frac{b^2}{c^2}$.

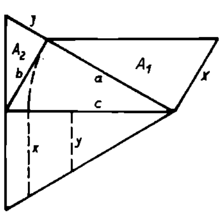
Hieraus erhält man $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

und schließlich $a^2 + b^2 = c^2$.

Wie könnte man nun solche Tripel von ähnlichen Figuren konstruieren? Im Falle der Quadrate, Halbkreise und gleichseitigen Dreiecke war das ja sehr einfach.

Die Figuren sollen zum Beispiel rechtwinklige Dreiecke sein, und der Flächeninhalt des Dreiecks über der Hypotenuse soll $A_3 = \frac{1}{2} cz$ sein.

Wie im Bild 8 angedeutet, ermitteln wir dann die fehlenden Katheten der beiden anderen Dreiecke.

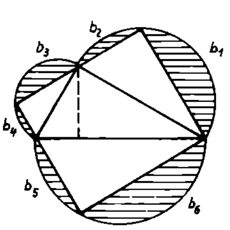
Bild 8


Aus $x : a = z : c$ folgt $x = \frac{az}{c}$,

und aus $y : b = z : c$ folgt $y = \frac{bz}{c}$.

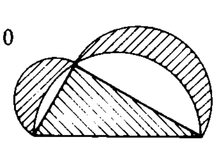
Dieses Tripel von Dreiecken erfüllt unsere Bedingung, und es gilt demnach auch die Beziehung zwischen den Flächeninhalten. Überzeugt euch durch eine Rechnung!

Es sind aber auch interessante Kombinationen von Figurentripeln möglich, wie sie uns das Bild 9 zeigt. In ihm sind die Bilder 3 und 7 kombiniert worden.

Bild 9


Für die Flächeninhalte der Dreiecke gelte
$A_3 = A_1 + A_2$,
für die Flächeninhalte der Halbkreise
$B_3 = B_1 + B_2$.
Dann ist $B_3 - A_3 = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2)$.
Somit gilt auch für die Flächeninhalte b_i der sechs entstehenden Kreissegmente die Beziehung
$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_5 + b_6$.

Berühmt sind die sogenannten „Möndchen des Hippokrates“. Sie entstehen, wenn man den Halbkreis über der Hypotenuse in die Halbkreise über den Katheten hineinzeichnet (Bild 10). Ihren gemeinsamen Flächeninhalt können wir leicht bestimmen.

Bild 10


Es ist $A_M = A_1 + A_2 + A_{Dr} - A_3$
A_M, A_{Dr} sind die Flächeninhalte der Möndchen bzw. des Dreiecks.
Wegen $A_1 + A_2 = A_3$ ist also $A_M = A_{Dr}$.
Hippokrates zeigte mit diesem Beispiel, daß auch nicht geradlinig begrenzte Figuren quadrierbar sind.

Auch Kreissektoren und Kreissegmente sind ähnlich, wenn sie durch zentrische Streckung auseinander hervorgehen, d. h., wenn sie gleiche Öffnungswinkel haben. Die Bilder 11a, b und 12a, b zeigen die jeweils gleichen Flächeninhalte. Wer gern rechnet, mag die Beziehung zwischen ihnen bestätigen.

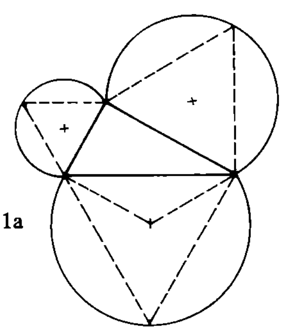
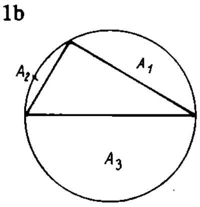


Bild 11a

Bild 11b


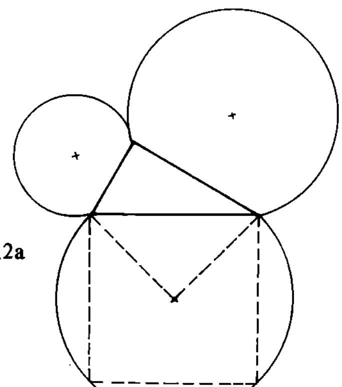
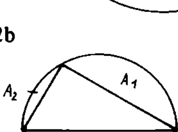


Bild 12a

Bild 12b


Eine Aufgabe von Prof. Florentin Smarandache

Lycée Sidi El Hassan Lyoussi, Sefrou, Marokko

▲ 2577 ▲ Lösen Sie die Gleichung
$x^3 - 3y = 2$
im Bereich der natürlichen Zahlen!

In den Bildern 13 bis 16 wird am Beispiel des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks nochmals der Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten von Möndchen und dem des Dreiecks veranschaulicht.

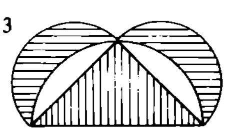
Bild 13


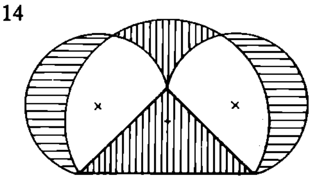
Bild 14


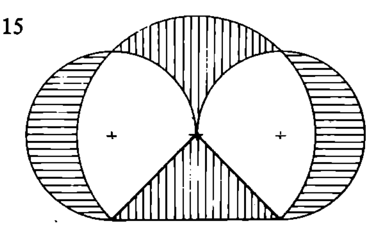
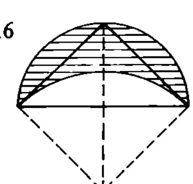
Bild 15


Bild 16


Wer zeigt, daß auch der Flächeninhalt des Möndchens im Bild 16 gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ist?

Anmerkung: Hippokrates von Chios war ein griechischer Mathematiker und lebte um 440 v. u. Z.

W. Jungk

Wissenschaftlerporträt Jakow Perelman

Bis zum letzten Atemzug arbeitete er und starb im schwersten Blockade-Monat am 16. März 1942 in Leningrad

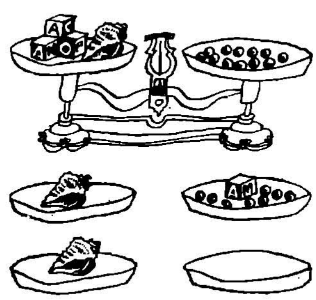
Jakow Perelman im Jahre 1935

Die Wissenschaft kommt so schnell voran, daß ihre Bücher nicht Schritt halten. Erstaunlich, daß es trotzdem populärwissenschaftliche Bücher gibt, die sich ungewöhnlich lange behaupten. Eines davon, das ständige Wiederauflagen erlebte, ist das bekannte Buch von *Michael Faraday* „Die Geschichte der Kerze".
Es wurde vor 150 Jahren geschrieben. Seit mehr als 100 Jahren erfreut sich das Buch von *Kliment Timirjasew* „Das Leben der Pflanzen" ungebrochener Beliebtheit, obwohl heute jeder Schüler über Pflanzen vieles weiß, was der Autor dieses Buches nicht wußte.
Zu diesen von der Zeit nicht totzukriegenden populären Ausgaben kann man auch die Bücher von *Jakow Perelman* zählen.
Jakow Perelman wurde 1882 in einer Familie geboren, der sowohl die Wissenschaft als auch die Literatur recht fremd waren. Sein Vater war Buchhalter, die Mutter Lehrerin. Und obwohl Physik und Mathematik dann zu den Hauptthemen seiner Bücher gehörten, hatte er anfangs nur wenig damit zu tun. Nach der Realschule besuchte Perelman die Forsthochschule in Petersburg und beendete sie als Diplomforstwirt. Er beschäftigte sich jedoch weder mit der Untersuchung noch der Aufforstung von Wäldern. Perelmans Bekannte waren von seiner Fähigkeit, physikalische und mathematische Fehler sofort festzustellen, beinahe blitzartig physikalische Erscheinungen analysieren zu können, beeindruckt.
Schon als Student begann Perelman in Zeitschriften Aufgaben und Rätsel sowie Mitteilungen über wichtige wissenschaftliche Entdeckungen zu veröffentlichen. Anfangs war das nur ein Nebenverdienst für einen bedürftigen Studenten. Perelman merkte aber bald, daß diese Arbeit seine wahre Berufung ist. Er wurde zum Literaten, zu einem ganz besonderen.
Der Erfolg des ersten Buches „Unterhaltsame Physik" war überwältigend. Der Titel des Buches war nicht zufällig gewählt. Perelman war davon überzeugt, daß populärwissenschaftlich nicht heißt, die Anfangsgründe durchzukauen, sondern unterhaltsam dem Leser den wissenschaftlichen Gehalt nahezubringen. Er schuf eine ganze Buchreihe: Anregend legte er Arithmetik, Algebra, Geometrie, Mechanik und Astronomie dar.
Diese Bücher haben noch eine seltene und schöne Besonderheit, sie wurden in enger Zusammenarbeit zwischen dem Autor und Leser geschaffen. Seine Bücher blieben die einzigen, in denen die Privatadresse des Autors angegeben ist. Post kam von Schülern und Akademiemitgliedern, Seeleuten und Arbeitern, Buchhaltern und Pädagogen. Die einen stellten Fragen oder baten um Rat, andere teilten schwer erklärbare Tatsachen mit, stritten... Und noch eine Besonderheit zeichnete diesen Autor aus: er beantwortete alle Briefe selbst.
Zu seinen Briefpartnern gehörten der große Denker und „Vater" der Raumfahrt, *Konstantin Ziolkowski*, genauso wie der künftige Chefkonstrukteur von Raumschiffen, *Sergej Koroljow*. Die Bücher Perelmans brachten *Konstantin Feoktistow* und *Boris Jegorow*, die beiden sowjetischen Kosmonauten, der eine Wissenschaftler, der andere Arzt, zum Raumflug. Es ist natürlich nicht möglich zu ermitteln, wie viele junge Leser der Bücher Perelmans Physiker, Mathematiker, Ingenieure, Konstrukteure geworden sind. Die letzte große Tat *Jakow Perelmans* wurde das von ihm gegründete *Haus der unterhaltsamen Wissenschaft* in Leningrad. Im früheren Palast der Grafen Scheremetjew bauten jeden Tag Hunderte von Kindern ungewöhnliche Maschinen, Modelle phantastischer Flugapparate, erdachten und lösten Denksportaufgaben und gaben auch kleine Heftchen heraus, die die Phantasie ihrer jungen Leser weckten und die Logik entwickelten.
Der Krieg, die Blockade von Leningrad bedeutete das Ende für diese wunderbare Einrichtung. Der Krieg brachte auch *Jakow Perelman* den Tod. Wie alle Leningrader ertrug er standhaft den Hunger. Bis zum letzten Atemzug arbeitete er und starb im schwersten Blockade-Monat, am 16. März 1942.
Seine Bücher aber leben weiter. Sie strahlen Klarheit und Frische des Gedankens aus, Humor, Erfindertum dieses bemerkenswerten Autors.
Mehr als 400mal wurden die Bücher Perelmans in der UdSSR verlegt. Immer neue Generationen von Kindern lesen sie ebenso begeistert wie ihre Väter, Großväter und Urgroßväter... Schon lange tragen sie nicht mehr die Privatadresse des Autors. Bis heute aber erhalten die Verlage Zuschriften, die an *Jakow Perelman* gerichtet sind.

Aufgaben aus Büchern von Jakow Perelman

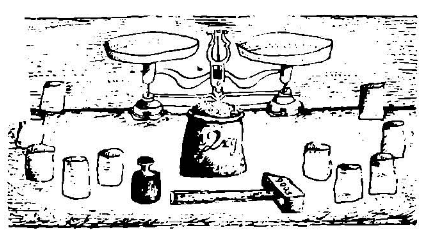
Muschel und Glasperlen

Das Bild zeigt euch, daß drei Spielzeugwürfel und eine Muschel ebenso schwer sind wie 12 Perlen und daß weiterhin eine Muschel so schwer ist wie ein Würfel und acht Perlen.
Wieviel Perlen muß man auf die freie Wägeschale legen, um sie mit der Muschel in der anderen Schale auszuwägen?



Mit Wägestück und Hammer

Es sind 2 kg Streuzucker in 200-Gramm-Tüten abzuwägen.
Doch sind nur ein 500-Gramm-Wägestück und ein Hammer, der 900 g wiegt, vorhanden.



Wie macht man es, alle 10 Tüten zu 200 g unter Verwendung dieses Wägestücks und des Hammers abzuwägen?

Von Ensk nach Ixograd

Stromabwärts schafft ein Dampfer 20 km/h, gegen die Strömung nur 15 km/h. Um von der Anlegestelle der Stadt Ensk zur Anlegestelle in Ixograd zu gelangen, braucht er 5 Stunden weniger als für den Rückweg.
Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen Städten?

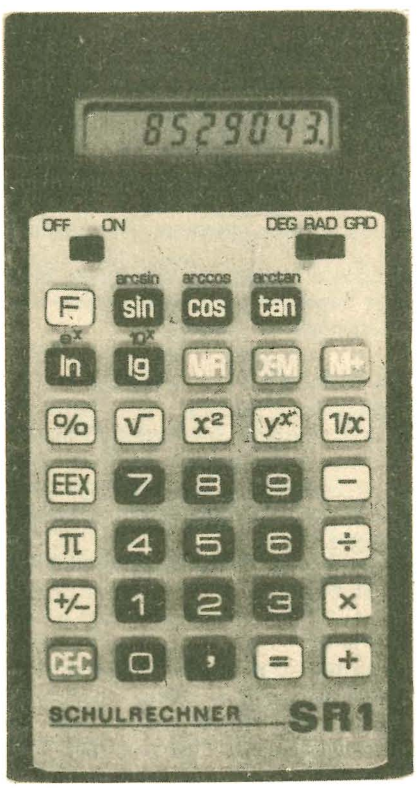
Antworten

1 Muschel ≙ 9 Perlen;
2 000 g − (4 × 400) g = 400 g,
400 g − 200 g = 200 g;
Die Entfernung von Ensk nach Ixograd beträgt 300 km.

Helfer in der Tasche

2316 : 52,8271 = ? Ein Druck auf die Taste: 43,841135. Mit elektronischer Eile bekamen wir ein Resultat, das mit Papier und Bleistift ein paar Minuten gekostet hätte – von möglichen Rechenfehlern ganz zu s hweigen.
Es ist also möglich geworden, auch geistige Leistungen des Menschen einem Automaten zu übertragen, und die Mikroelektronik macht bisher Ungeahntes möglich. Das ist eine der Voraussetzungen dafür, bei der Erfüllung unserer Pläne die Arbeitsproduktivität ohne Mehrbelastung des Menschen erheblich zu steigern. Das kommt uns allen zugute.
Doch wie funktioniert denn nun dieses Wunderwerk in der Westentasche, das mit kleinen, relativ schwachen Batterien über ein Jahr arbeitsbereit ist? Wir wollen bei unseren Betrachtungen hier davon absehen, daß es ganz verschiedene Typen von Taschenrechnern gibt – mit verschiedenen Anzeigen (Leuchtdioden, Flüssigkeitskristallen) – mit verschiedenen Rechenvorgängen (z. B. mit der Umgekehrten polnischen Notation) – mit verschiedener

Bild 1



Leistungsfähigkeit: einfache, wissenschaftliche oder programmierbare Rechner. Denn ihnen allen sind einige einfache Gesetzmäßigkeiten gemeinsam, die wir im folgenden betrachten wollen.
Im Grunde genommen machen wir uns das Zahlenrechnen besonders schwer, weil wir uns auf eine Zahlendarstellung zur Basis 10 (entsprechend der Zahl unserer Finger) geeinigt haben. Konsequenterweise mußten wir deshalb in den ersten Schuljahren die Grundbeziehungen der Addition und das kleine Einmaleins auswendig lernen; kompliziertere Rechnungen waren darauf zurückzuführen, wobei es ohne Fehler nicht abging. Wie wir in dem Beitrag „Wie rechnet der Computer?“ (*technikus* 2/1983) sahen, hat der gewissermaßen nur zwei Finger, d. h., nur zwei verschiedene Ziffern, nämlich 0 ≙ Strom aus, 1 ≙ Strom ein.
Die binäre Zahlendarstellung heißt z. B. für 9: 9 ≙ 1001.
Genau genommen verwendet der Taschenrechner sogar einen *BCD*-Code, auf den wir aber hier nicht eingehen können. Damit tritt bereits die erste Aufgabe auf: Die eingetippte Zahl muß in eine Binärzahl umkodiert werden. Aber es geht noch weiter:
Zum Rechnen brauchen wir
- das Gedächtnis, um uns die an der Rechnung beteiligten Zahlen (Operanden) und Zwischenergebnisse zu merken;
- Papier und Bleistift für Teil- und Endergebnisse.

Der Rechner hat hierfür Register, die sich die jeweils anfallenden Binärzahlen bis zum nächsten Rechenschritt merken können; wir haben ein Akkumulatorregister – kurz Akkumulator. Viele Rechner haben noch einen einfachen Speicher (M wie memory, englisch = Gedächtnis), um Zwischenergebnisse längere Zeit aufzubewahren.
Für die Anzeige sind die Binärziffern dann wieder in Ziffern zur Basis 10 umzuwandeln, und zur Ziffernanzeige hat sich eine 7-Segmentanzeige bewährt (Bild 1).
Nun zum Rechnen selbst: Die vier Grundrechenarten (+, −, ×, :) lassen sich auf die Addition zurückführen, und bei Binärziffern ist die Addition einfach. Wir wollen den Vorgang an einem einfachen Beispiel studieren.

Beispiel: 1983 + 201 = 2184
1. Schritt: 1983 eintasten – Anzeigeregister
2. Schritt: Operationstaste + – Weiche für die weitere Rechnung gestellt
3. Schritt: 201 eintasten – Zahl 1983 ins Operandenregister, 201 ins Anzeigenregister
4. Schritt: = eintasten – Beide Ziffern werden stellenweise in das Addierwerk eingeschoben, das Ergebnis kommt in den Akkumulator und von dort zur Anzeige (vgl. Bild 2).
Bei dieser einfachen Addition können unter Beachtung der Ziffernbewegung, der Teilsummen- und Übertragsbildung 200 bis 400 Operationen nötig werden! Damit alles wohlgeordnet nach Rechenschritten

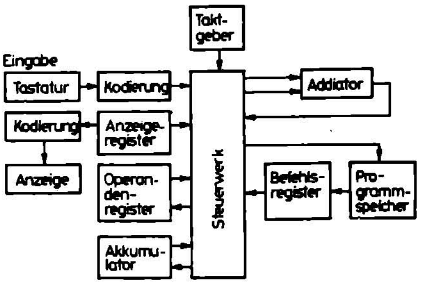


Bild 2

erfolgen kann, ist ein Taktgeber nötig, der in regelmäßigen Zeitabständen durch je einen Impuls die nächste Operation startet. Diese Zeitabstände sind je nach der verwendeten elektronischen Technologie verschieden; sie betragen etwa 4 µs ($= 4 \cdot 10^{-6}$ s); dann würde die Addition etwa 400 · 4 µs = 1,6 ms erfordern.
Komplizierte Rechenoperationen, wie z. B. $\sqrt{x}$ müssen mittels eines Rechenprogrammes abgearbeitet werden (vgl. Beitrag „Wie rechnet der Computer“ – technikus 2/83). Für diese Rechenprogramme braucht der Rechner einen Programmspeicher (ROM); die Rechenzeit wird dabei etwa 10mal so groß. Bei einigen Funktionen, wie z. B. sin *x*, beträgt die Rechenzeit fast eine Sekunde.

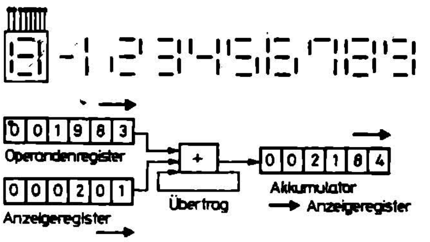


Bild 3

Bild 3 zeigt den Aufbau des Taschenrechners als Blockschaltbild, bei dem das Steuerwerk (Mikroprozessor) als zentrale Einheit auffällt. Je nach der getippten Operationstaste stellt er für die Rechnung die richtige Weiche. In dem geöffneten Taschenrechner – aber bitte nicht experimentieren! – fällt die Tastatur mit ihrem Netz von Kontaktstreifen und die Anzeigevorrichtung auf; alles übrige ist in einem sehr stark integrierten Schaltkreis untergebracht. Sein Inneres besteht aus einem etwa 5 × 5 mm² großen Halbleiter-Chip mit etwa 10000 Transistoren und den zugehörigen Widerständen und Kondensatoren. Bei diesem mikroskopisch kleinen Wunderwerk kommt es auf größte Präzision und Material-Reinheit (vergleiche technikus 8/83, „Kontrollierte Dreckeffekte“) an.
Hinzu kommt als Taktgeber eine kleine Quarzuhr, die bei manchen Rechnern eine sehr zuverlässige Zeitangabe mit Datum und Stoppuhr ermöglicht. Damit ist dieses Wunderwerk, das kaum elektrische Energie verbraucht, in der Lage, uns anstrengende Leistungen des Denkapparates abzunehmen und uns dabei an Schnelligkeit und Zuverlässigkeit beträchtlich zu übertreffen.
In diesem Beitrag wollen wir die Arbeitsweise des elektronischen Taschenrechners

zeigen, die in vielem an den freiprogrammierbaren Mikrorechner erinnert. Um die Fähigkeiten des Rechners richtig zu nutzen, sollte man die Gebrauchsanweisung gut studieren; dann ist oft der einfache Rechner (sofern er, wie unser SR 1, einen zusätzlichen Speicher M besitzt) durchaus nicht den komfortableren und entsprechend teureren Rechnern unterlegen.
Und wer es nicht glaubt, kann sich durch einen Versuch davon überzeugen: ein wenig kann unser Taschenrechner auch schreiben. Wer die 38317 eingibt und den Rechner um 180° dreht, kann lesen, was er seinem Mathehelfer entgegenbringen sollte. 7353 müßte er evtl. auf sich beziehen, wenn er nicht kontrolliert hat. Die 3504 sollte man nie verlieren, das Gedächtnis möglichst nicht wie ein 8315 sein, über ein 807 in Mathe freuen wir uns immer.
Es liegt an uns, den Rechner gut zu nutzen – aber ihm auch nicht blindlings zu vertrauen, die Bequemlichkeit der Einstellung verleitet oft zur Sorglosigkeit. Man sollte sich stets die Frage stellen: Kann das angezeigte Ergebnis stimmen? Das ist oft mit einer einfachen Überschlagsrechnung nachzuprüfen.
Neben der Erhöhung der Sicherheit betreiben wir zugleich ein geistiges Training, das uns auch zu neuen, schöpferischen Leistungen befähigt. Schöpferisch Neues zu schaffen, wie es auch für den Aufbau unserer Gesellschaftsordnung erforderlich ist, bleibt Angelegenheit des Menschen.

K. Göldner, aus: technikus 1/84

Lösungen

Es bedeuten:

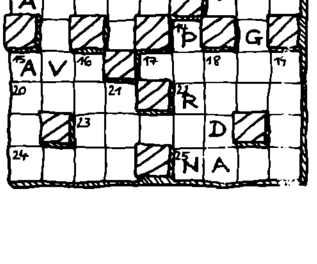
38317 ≙ LIEBE	8315 ≙ SIEB
7353 ≙ ESEL	807 ≙ LOB
3504 ≙ hOSE	

Heiteres zum Taschenrechner

1. Für den Bau eines Kremls (Burgstadt) wurden 46 207 Pud eines Baumaterials sowie 169 Pud eines anderen Materials geliefert. Was für Materialien sind es? Die Antwort gibt der Taschenrechner.
(1 Pud = 16 kg)

Dipl.-Ing. L. Kryshanowski, Leningrad

2. Löse unter Verwendung des Taschenrechners das folgende Rätsel!
Bis auf ein paar bereits in der Figur angegebenen Buchstaben ergeben sich alle anderen, indem du die Aufgaben löst und dann den Taschenrechner jeweils um 180° drehst.



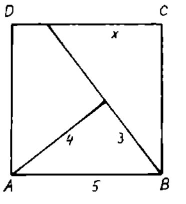
Waagerecht: 1. $85^2 + 90$, 4. $17 \cdot 3 \cdot (10^2 + 1)$, 7. $(11 \cdot 17)^2 + 87 \cdot 4$, 8. $3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$, 10. $61^2 - 2^3$, 12. $95 \cdot 19 + 3 \cdot 4$, 13. $16 \cdot 52 - 5^2$, 15. $15^2 : 75$, 17. $23 \cdot (23 \cdot 60 - 1)$, 20. $75^2 - 29 \cdot 3$, 22. $3 \cdot 3 \cdot 17$, 23. $40^2 + 3 \cdot 5 \cdot 7$, 24. $43 \cdot 19 \cdot 9$, 25. $(19^2 + 5^2 - 1^2) : 11$.
Senkrecht: 1. $(10^2 + 1^2) \cdot (3^2 - 2^2)$, 2. $42^2 + 3^2$, 3. $(13 \cdot 9 + 2) \cdot (9^2 \cdot 4 - 2) - 1$, 4. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, 5. $17^2 \cdot 5^2 - 9^2 - 9$, 6. $3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 - 1$, 9. $52 \cdot 61 - 2$, 11. $(50 \cdot 17 + 1) \cdot 6 + 1$, 14. $6^2 - 5^2$, 15. $7^3 + 5 \cdot 9$, 16. $11 \cdot 17 \cdot 19$, 18. $18^2 - 17^2 + 2$, 19. $3 \cdot 31 \cdot 41$, 21. $25^2 + 9^2 - 1^2$.

Aus: Rätselspaß mit π, Magazin, Berlin

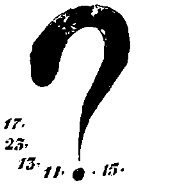
▲1▲ Un bassin circulaire est entouré d'une grille placée à 50 cm du bord; la longueur de cette grille est 22 m.
Quel est le diamètre du bassin?

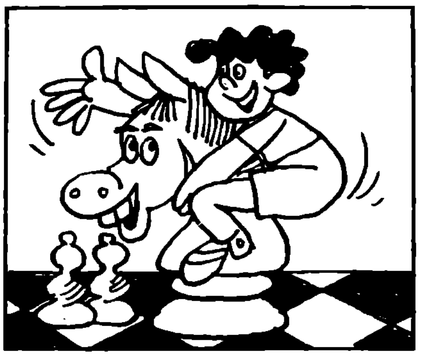
▲2▲ Use each of the nine digits, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 exactly once to form prime numbers whose sum is as small as possible.

▲3▲ In a square of base 5 position a 3-4-5 triangle as shown below. Determine the distance x.



▲4▲ Какое число нужно поставить вместо знака «?» в последовательности 17, 23, 13, 11, ?, 15?



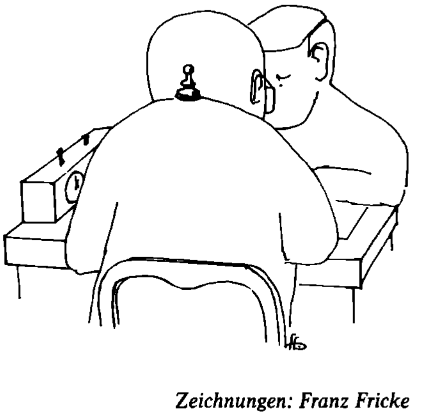


Schnelles Bauernmatt

In Serienzugproblemen führt eine Partei (Weiß oder Schwarz) alle ihre Züge nacheinander aus. Die andere Partei zieht danach entweder einmal (Serienzughilfsmatt bzw. Serienzughilfspatt), oder sie ist matt bzw. patt.
Eine Aufgabe des finnischen Problemkomponisten *E. Bonsdorff* aus *Uusi Suomi* 1960 lautet wie folgt:
Wie groß ist die Anzahl der kürzesten, ausschließlich mit Bauernzügen durchgeführten und mit Matt endenden Serienzugpartien? Weiß und Schwarz befinden sich in der Partieanfangsstellung – es zieht nur Weiß!
Eine der möglichen Lösungen sei gegeben: 1. e4, 2. e5, 3. g4, 4. g5, 5. g6, 6. e6, 7. e:f7 matt.

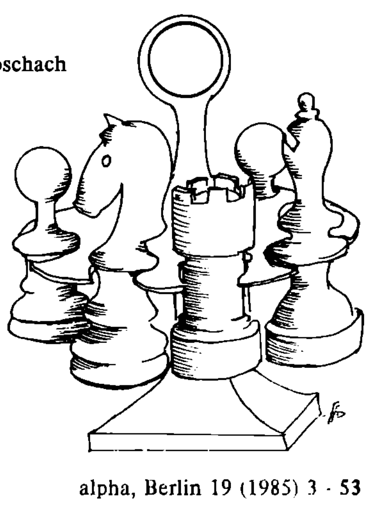
H. Rüdiger

Der Falschspieler



Zeichnungen: Franz Fricke

Büroschach



Überall Zuordnungen

In den Sommerferien hat Anja in der Flaschenannahme der Kaufhalle *Zum guten Einkauf* gearbeitet. In der Annahmestelle konnte man Bier- und Brauseflaschen (Flaschenpfand 0,30 M), Milchflaschen (Flaschenpfand 0,20 M) und Kondensmilchflaschen (Flaschenpfand 0,05 M) abgeben.

„Um die Kunden möglichst wenig warten zu lassen, kommt es u. a. darauf an, an der Kasse flink zu arbeiten", erzählt Anja ihrem jüngeren Bruder Uwe. „Um das zu erreichen, habe ich mir am ersten Tag gleich drei Tabellen angefertigt. Durch die Tabellen *ordnete* ich jeweils der Anzahl der Flaschen einer Sorte den Geldbetrag *zu*, den ich auszahlen mußte." Für Brause- und Bierflaschen zeigte sie Uwe folgende Tabelle (Tabelle 1):

Tabelle 1

Anzahl der Flaschen	Flaschenpfand in M
1	0,30
2	0,60
3	0,90
4	1,20
5	1,50
6	1,80
7	2,10
8	2,40
9	2,70
10	3,00

„Bei mir hättest du aber trotz deiner Tabelle rechnen müssen", meint Uwe, „denn ich gehe immer erst zur Annahmestelle, wenn es sich lohnt, z. B. kannst du den Betrag für 14 Bierflaschen deiner Tabelle nicht entnehmen. Du müßtest also $14 \cdot 0{,}30$ rechnen." „Denkste!" meint Anja. „Ich tippe erst den Betrag für 10 Flaschen und dann den für 4 Flaschen in die Kasse. Beide Male kann ich meine Zuordnungstabelle nutzen."

▲1▲ Begründe das Vorgehen von Anja!

„Die Idee mit der Tabelle war ganz schön pfiffig." Anja wehrt ab. „Das war doch nicht meine Idee. Solche Zuordnungstabellen findet man sehr oft, um sich die Arbeit zu erleichtern. Schon *Adam Ries* hat vor über 400 Jahren solche Zuordnungstabellen angefertigt. Damals änderte sich mit den steigenden oder fallenden Kornpreisen nicht der Preis des Brotes, sondern sein Gewicht. Um die Bevölkerung vor Übervorteilung zu schützen und den Bäckern die Berechnung des Brotgewichtes zu erleichtern, entwarf *Adam Ries* im Auftrag der Stadt Annaberg 1533 ein Tabellenwerk, aus dem man sofort ablesen konnte, wieviel Brote man aus einem Scheffel Mehl in Abhängigkeit vom Getreidepreis backen durfte. Das war auch eine Zuordnungstabelle." Sie könnte so wie in Tabelle 2 ausgesehen haben.

Tabelle 2

Preis eines Scheffels Korn in Groschen	Anzahl der Brote auf einen Scheffel[1]
.	.
.	.
.	.
20	40
21	42
22	44
23	46
.	.
.	.
.	.

[1] altes deutsches Hohlmaß für Schüttgüter (besonders Getreide) unterschiedlicher Beträge zwischen 23 und 233 l; z. B. in Sachsen 104 l.

„Ist die Quadrattafel ebenfalls eine Zuordnungstabelle?" fragt Uwe. Anja bestätigt das. „Aber bei dieser Tabelle kann man doch nicht das Quadrat von 14 dadurch ermitteln, daß man zum Quadrat von 10 das Quadrat von 4 addiert", wirft Uwe ein. „Das stimmt. Aber das Quadrat von 14 kann man ermitteln, indem man 14 als Produkt $2 \cdot 7$ schreibt und dann rechnet: $2^2 = 4$, $7^2 \triangleq 49$, $4 \cdot 49 = 196$. Es ist nämlich $2^2 \cdot 7^2$ dasselbe wie 14^2."

▲2▲ Gilt immer $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$ $(a, b \in N)$?

„Es gibt auch Zuordnungen, bei denen gar keine Zahlen auftreten", erklärt Anja. „Zum Beispiel gibt es an der Schule einen Aushang, aus dem hervorgeht, wer die einzelnen Arbeitsgemeinschaften leitet." Anja zeichnet zur Illustration folgende Tabelle:

Tabelle 3

AG Sport	Frau Feurig
AG Foto	Herr Auge
AG Schach	Herr Schwarz
AG Modellbau	Herr Bahn
AG Schießen	Herr Treffkorn
AG Biologie	Frau Specht

Anschließend gibt Anja noch ein weiteres Beispiel. Sie fertigt eine Tabelle an, aus der hervorgehen soll, welche der Zeitschriften *Junge Welt*, *alpha* und *Jugend und Technik* von welchen Schülern ihrer Klasse abonniert sind.

Tabelle 4

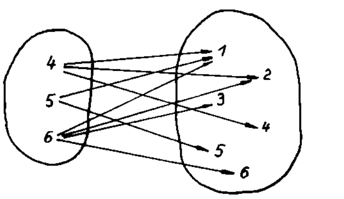
Zeitschriften	Abonnenten
Junge Welt	Anja, Martin Irene, Dirk, Sven, Michael, Klaus
alpha	Anja, Sven
Jugend und Technik	Ute, Dirk

„Siehst du den Unterschied zwischen beiden Zuordnungen?" fragt Anja. „Bei der Zuordnung ‚AG ... leitet ...' ist jeder Arbeitsgemeinschaft *genau ein* Leiter zugeordnet. In der anderen Tabelle, die die Zuordnung ‚... wird abonniert von ...' widerspiegelt, stehen bei jeder der Zeitschriften mehrere Schülernamen. „Das stimmt!" bestätigt Anja Uwes Antwort. „Man kann also z. B. *nicht* von *dem* Schüler sprechen, der in Anjas Klasse die *alpha* abonniert hat, aber von *dem* Leiter der AG Foto", fährt Anja fort.

Sie erläutert Uwe auch, daß man solche Zuordnungen, wie sie durch die Tabellen 1, 2 und 3 dargestellt werden, *eindeutige Zuordnungen* nennt. Die Zuordnung, die durch die Tabelle 4 dargestellt wird, ist dagegen *nicht eindeutig*.

Anja erklärt weiter, daß man zuweilen auch Pfeilbilder verwendet, um Zuordnungen anzugeben. Sie zeichnet zwei solche Darstellungen auf (vgl. Bild 1).

Bild 1



Der Pfeil bedeutet die Zuordnung *wird geteilt von*.

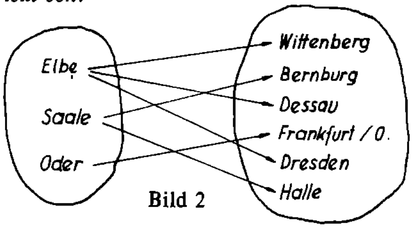


Bild 2

Der Pfeil bedeutet *fließt durch*.

▲3▲ M sei die Menge der Schriftsteller Arkadi Gaidar, Alex Wedding, Max Zimmering.

N sei die Menge der Bücher *Ede und Unku*, *Timur und sein Trupp*, *Die Feuertaufe*, *Buttje Pieter und sein Held*.

Stelle die Zuordnung *schrieb das Buch* in einem Pfeildiagramm dar!

O sei die Menge der Städte Moskau, Budapest, Bukarest, Havanna. P sei die Menge der Länder Sowjetunion, Kuba, Ungarn, Rumänien.

Stelle die Zuordnung *ist Hauptstadt von* in einem Pfeildiagramm dar!

Woran erkennt man im Pfeilbild, ob eine Zuordnung eindeutig ist?

„Stimmt es, daß man Zuordnungen auch in einem Koordinatensystem darstellen kann?" fragt Uwe seine große Schwester.

„Ja, das geht auch!“ Anja gibt dazu gleich folgendes Beispiel:
Im Physikunterricht sei für eine Schraubenfeder die Verlängerung bei verschiedenen Kräften gemessen und hierfür eine Zuordnungstafel aufgestellt worden.

Kraft F in N	50	100	150	200	250
Längenänderung s in cm	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5

Diese Zuordnung ist eindeutig.
Nach der Durchführung des Versuchs sollten die jeweiligen Zahlenpaare in einem Koordinatensystem dargestellt werden.

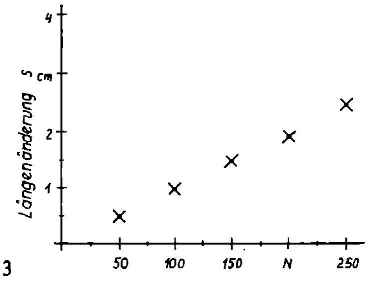


Bild 3

Es entstand folgendes Bild 3:
Das Bild 4 zeigt die Zuordnung x *wird geteilt von* y für $x = 4, 5, 6$.

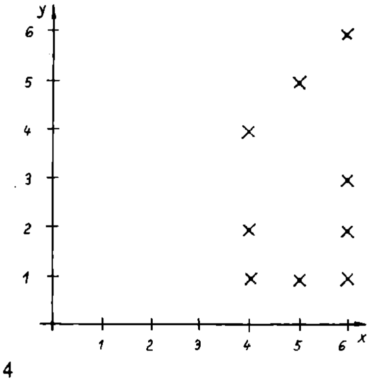


Bild 4

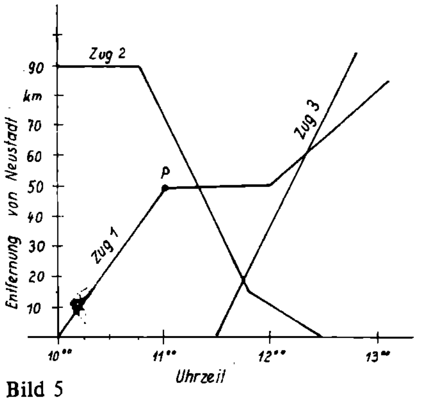


Bild 5

Das Bild 5 stellt einen stark vereinfachten graphischen Fahrplan dar. In ihm werden die Uhrzeit und die Entfernung vom Bahnhof Neustadt auf der Strecke Neustadt – A-Dorf festgehalten. Der eingezeichnete Punkt P bedeutet, daß der Zug 1 sich um 11.00 Uhr genau 50 km von Neustadt entfernt befindet.
Die hier dargestellten Zuordnungen für die einzelnen Züge sind eindeutig. Jeder Uhrzeit ist genau eine Entfernung des jeweiligen Zuges vom Bahnhof Neustadt zugeordnet. (Übrigens gilt für den Zug 3 auch das Umgekehrte: Jeder Entfernung vom Bahnhof Neustadt ist genau eine Uhrzeit zugeordnet. Solche Zuordnungen nennt man in der Mathematik eineindeutige bzw. umkehrbar eindeutige Zuordnungen.)

▲4▲ Betrachte Bild 4 und beantworte folgende Fragen!
a) Um wieviel Uhr durchfährt Zug 1 die 40-km-Marke?
b) Wie lange hält Zug 1 an der 50-km-Marke?
c) Um wieviel Uhr überholt Zug 3 den Zug 1?
d) An welcher Entfernungsmarke kreuzen sich die Züge 2 und 3?

Ihren Vortrag schließt Anja mit der Bemerkung, daß man *eindeutige Zuordnungen* auch *Funktionen* nennt und Darstellungen von Funktionen im Koordinatensystem als *graphische Darstellung* einer Funktion bzw. *Graph* einer Funktion bezeichnet. „Nun hoffe ich nur, daß du gut aufgepaßt hast, denn dann kannst du folgende Aufgaben schnell lösen.“ Uwe brummte der Kopf. Beim Lösen der Aufgaben merkte er jedoch, daß er vieles verstanden hat. Versucht selbst einmal, folgende Aufgaben zu lösen!

▲5▲ Welche der Zuordnungen sind eindeutig?
a) Geldübermittlungssendungen bei der *Deutschen Post*

Postanweisungen	Mark
bis 10 M	0,20
über 10 bis 25 M	0,30
über 25 bis 100 M	0,40
über 100 bis 250 M	0,60
über 250 bis 500 M	0,80
über 500 bis 750 M	1,00
über 750 bis 1000 M (Höchstbetrag)	1,20

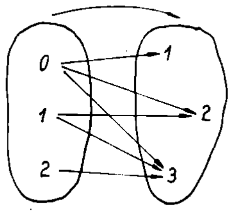


Bild 6a

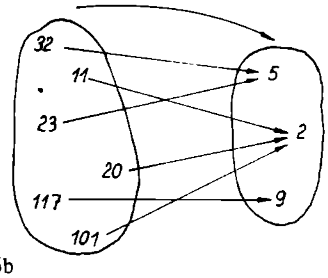


Bild 6b

b) ist kleiner als
c) hat die Quersumme.

▲6▲ Welche der folgenden Zeichnungen sind Darstellungen eindeutiger Zuordnungen $x \curvearrowright y$, also Graphen von Funktionen?

Bild 7a

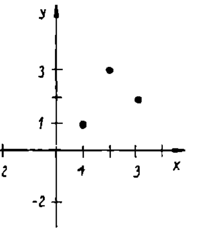


Bild 7b

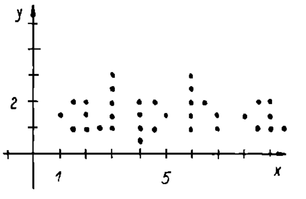
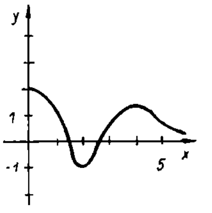


Bild 7c

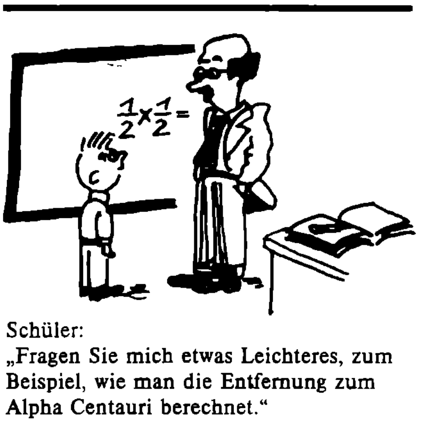


L. Flade

Spaß mit Brüchen

a) Welcher gemeine Bruch hat den doppelten Wert, wenn man im Zähler und Nenner jeweils 2 addiert?
b) Bei welchen gemeinen Brüchen wird der Wert verdoppelt, wenn man im Zähler und Nenner jeweils 3 addiert?
c) Bei welchen gemeinen Brüchen wird der Wert verdreifacht, wenn man im Zähler und Nenner jeweils 3 addiert?
d) Suche Paare ganzzahliger Werte von m und n, so daß $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$!
e) Beweise, daß $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 2$ immer eine vollständige Quadratzahl ist, wenn $p \cdot q = m^2$ gilt!
f) Beweise, daß der Wert des Bruches $\frac{2}{m+n}$ immer zwischen $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ liegt, außer wenn $m = n$!

Aus: Mathematics in school, Großbritannien



Schüler:
„Fragen Sie mich etwas Leichteres, zum Beispiel, wie man die Entfernung zum Alpha Centauri berechnet.“

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (9./10. Februar 1985)

Olympiadeklasse 7

240731 Bei der Friedensfahrt ergab sich auf einer Etappe folgende Rennsituation: Genau 14 Fahrer, darunter jedoch kein DDR-Fahrer, waren hinter das Hauptfeld zurückgefallen. Genau 90% der nicht zurückgefallenen Fahrer bildeten das Hauptfeld; darin fuhren einige, aber nicht alle DDR-Fahrer. Die Fahrer vor dem Hauptfeld bildeten eine Spitzengruppe; sie umfaßte genau ein Zwölftel aller Fahrer der Etappe. In der Spitzengruppe war die tschechoslowakische Mannschaft als einzige am schwächsten vertreten, die sowjetische Mannschaft als einzige am stärksten. Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln läßt, welche Mannschaften insgesamt in der Spitzengruppe fuhren und mit wieviel Fahrern sie dort vertreten waren! Wenn dies zutrifft, gib diese Anzahlen an!

240732 a) Es sei M die Menge aller derjenigen Zahlen x, die die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) haben:

(1) x ist eine sechsstellige natürliche Zahl.
(2) x hat die Quersumme 29.
(3) x ist durch 11 teilbar.

Ermittle das größte Element der Menge M!
b) Es sei M' die Menge aller derjenigen Zahlen x, die außer den Eigenschaften (1), (2), (3) auch noch die folgende Eigenschaft (4) haben:

(4) Keine zwei Ziffern von x sind einander gleich.

Ermittle das größte Element der Menge M'!

240733 Konstruiere zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen: Die Seite AB hat die Länge $c = 5$ cm, die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe des Dreiecks ABC hat die Länge $h_b = 4{,}5$ cm, der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe $\beta = 35°$.
Gefordert wird eine Zeichnung (Konstruktion der beiden Dreiecke) und eine Konstruktionsbeschreibung hierzu. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

240734 Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Dreieck a und b die Längen zweier Seiten sowie h_a und h_b die Längen der zugehörigen Höhen sind, dann gilt
$$a : b = h_b : h_a.$$

240735 In dem Schema 43□1□5□ ist jede der Leerstellen □ so mit einer Ziffer auszufüllen, daß die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.
Gib an, wieviel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

240736 Ein Viereck $ABCD$ habe folgende Eigenschaften:

(1) $AB \parallel DC$ und $AD \nparallel BC$,
(2) $\overline{AD} = \overline{BC} = 3 \cdot \overline{DC} = a$, wobei a eine gegebene Länge ist,
(3) $\sphericalangle \overline{BAD} = 60°$.

Ermittle den Umfang u dieses Vierecks in Abhängigkeit von a!

Olympiadeklasse 8

240831 Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren sechste Potenz in ihrer dekadischen Ziffernndarstellung genau je einmal die Ziffern 2, 4, 5, genau je zweimal die Ziffern 8, 9 und keine weitere Ziffer enthält!

240832 Um die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps zu ermitteln, wurden zwei Reifen getestet. Dabei wurde festgestellt, daß der Reifen auf dem Hinterrad nach 15000 gefahrenen Kilometern und der Reifen auf dem Vorderrad nach 25000 gefahrenen Kilometern nicht mehr die erforderliche Profiltiefe hatte und damit abgenutzt war.
a) Es soll nun erreicht werden, daß zwei solche Reifen gleichzeitig abgenutzt sind, indem man sie nach einer bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer gegeneinander austauscht.
Ermittle diese Kilometerzahl!
b) Nach wieviel Kilometern sind unter den Voraussetzungen der Teilaufgabe a) beide Reifen abgenutzt?
Es werde angenommen, daß sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad die Abnutzung jeweils proportional zur Fahrstrecke ist.

240833 Konstruiere ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (I) bis (V) erfüllt!

(I) Die Seite AB hat die Länge $a = 7{,}0$ cm.
(II) C liegt auf der Mittelsenkrechten p der Strecke AB.
(III) D liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke AC.
(IV) A liegt auf der Mittelsenkrechten r der Strecke BD.
(V) Die Geraden p und q schneiden sich in einem Punkt S, der auf der Strecke AB liegt.

Beschreibe deine Konstruktion! Beweise, daß jedes Viereck, das die geforderten Eigenschaften hat, nach deiner Beschreibung konstruiert werden kann! Beweise, daß jedes Viereck, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat!
Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann „nicht überschlagen", wenn die Strecken AB und CD sich nicht schneiden und die Strecken AD und BC sich nicht schneiden.

240834 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. In diesem Dreieck sei CS die Seitenhalbierende von AB, CW die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ und CH die Höhe auf AB.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\sphericalangle SCW} = \overline{\sphericalangle WCH}$ gilt!

240835 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB; deren Länge sei 3 cm, der Umfang des Dreiecks betrage 13 cm. Eine Parallele zu AB schneide die Strecke AC in einem Punkt D zwischen A und C sowie die Strecke BC in einem Punkt E. Der Umfang des Vierecks $ABED$ betrage 7,4 cm.
Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Länge!

240836 Zwei Motorradfahrer unternehmen eine Fahrt, auf der beide die gleiche Entfernung zurücklegen. Sie starten gleichzeitig und kommen gleichzeitig am Ziel an. Dabei benötigt A doppelt so viel Zeit zum Fahren wie B zum Rasten. B dagegen fuhr dreimal so lange, wie A rastete.
Welcher der beiden Fahrer hatte die längere Rastzeit?

Olympiadeklasse 9

240931 Beweisen Sie, daß es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!

(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.
(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

240932 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.
Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

240933 Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.
a) Beweisen Sie, daß die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!
b) Ermitteln Sie den Abstand $\overline{MN}$ zwischen M und N!

c) Beweisen Sie, daß für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand $\overline{XY}$ zwischen X und Y die Ungleichung $\overline{XY} \geqq \overline{MN}$ erfüllt!

240934 Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren., Anke meint: „Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden.“ Bernd fragt: „Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?“
a) Beweisen Sie Ankes Aussage!
b) Beantworten Sie Bernds Frage!

240935 Beweisen Sie, daß für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

240936 Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie, daß es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

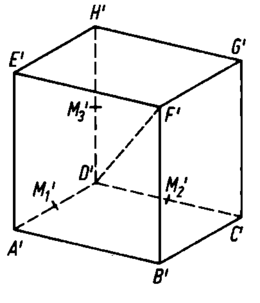
Olympiadeklasse 10

241031 In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$: „Die Kurve c mit der Gleichung $y = \cos x$ hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte.“ Bernd behauptet dagegen: „Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve c genau 10 Schnittpunkte hat.“
Untersuchen Sie sowohl für Anne als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

241032 Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen (1) gelten!

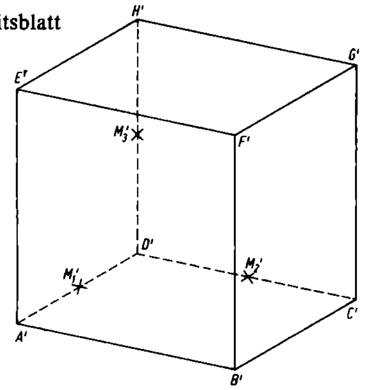
$$2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) \qquad (1)$$

241033 Das Bild und das Arbeitsblatt zeigen das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines



Würfels $ABCDEFGH$ in schräger Parallelprojektion sowie die Bilder M_1', M_2', M_3' der Mittelpunkt M_1, M_2, M_3 der Würfelkanten DA, DC bzw. DH.
Ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche $M_1M_2M_3$ sei, habe als Seitenkanten Strecken M_1N_1, M_2N_2 und M_3N_3, die parallel zu DF verlaufen. Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ des Prismas liege so weit außerhalb des Würfels, daß das Prisma in seinem Innern den Punkt F enthält.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Bilder der Schnittlinien, die die Oberfläche des Prismas mit der Oberfläche des Würfels hat! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, daß eine nach Ihrer Beschreibung durchgeführte Konstruktion die Bilder aller genannten Schnittlinien ergibt!

Arbeitsblatt



241034 Jemand sucht natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Er findet z. B., daß sowohl jede der Zahlen 89 und 90 als auch ihr Produkt 8010 diese Eigenschaft hat.
a) Bestätigen Sie, daß sich jede der Zahlen 89, 90 und 8010 als Summe von jeweils zwei Quadratzahlen darstellen läßt!
b) Beweisen Sie den folgenden allgemeinen Satz!
Wenn s und t jeweils eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist, sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen zu lassen, dann hat auch stets die Zahl $s \cdot t$ diese Eigenschaft.

241035 a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC, verlängern Sie AC über C hinaus bis zu demjenigen Punkt C', für den $\overline{AC'} = 3 \cdot \overline{AC}$ ist, und konstruieren Sie auf BC' denjenigen Punkt Y, für den $\overline{BY} = 2 \cdot \overline{C'Y}$ gilt! Der Schnittpunkt von AY mit BC sei X.
b) Beweisen Sie, daß die in a) verlangte Konstruktion für jedes Dreieck ABC auf denselben Wert des Verhältnisses $\overline{BX} : \overline{CX}$ führt!
Ermitteln Sie diesen Wert!

241036 Man ermittle für jede Funktion f, die die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, die Funktionswerte $f(0)$, $f(-1)$ und $f\left(\frac{3}{7}\right)$.
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 2$.
(3) Für alle reellen Zahlen a und b gilt $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$.

Olympiadeklassen 11/12

241231 Man ermittle die ersten sechs Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_6$ von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:
(1) Es gilt $a_1 = -\frac{5}{2}$.
(2) Es gilt $a_5 = 3$.
(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.
(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.
(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

241232 Man beweise: Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:
a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.
b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Von den nachstehenden Aufgaben 241233A und 241233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

241233A Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:
(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt
$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$.

241233B Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geqq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung
$$x(x+1)(x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1) = (x+n)(x+n+1)(x+n+2) \cdot \ldots \cdot (x+2n-1).$$

241234 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leqq z \leqq 5$, die die Bedingung erfüllen, daß die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.
Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man – für die betreffende Gerade und die Parabel – die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

241235 Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver natürlicher Zahlen, für die
$a^b + b^c = abc$
gilt.

241236 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n \qquad (1)$$

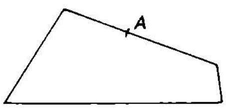
gilt.

Mathe-Quiz

alpha stellt zu dem auf der III. Umschlagseite dieses Heftes geschildertem Mathe-Quiz einige Aufgaben vor:

▲1▲ Auf einer Wiese weiden Kühe, Schafe und Gänse. Es gibt mehr Schafe als Gänse. Die Schafe und die Gänse haben zusammen 100 Köpfe und Beine. Ihre Anzahl ist dreimal so groß wie die der Kühe. Wieviel Kühe weiden auf der Wiese?

▲2▲ Das gegebene Viereck ist so in ein flächengleiches Dreieck umzuwandeln, daß eine Ecke im Punkt A liegt!



▲3▲ Ein Band von 25 m Länge und 0,1 mm Dicke wird fest auf ein Papprohr aufgerollt. Man erhält eine Rolle mit einem Durchmesser von 1 dm.
Wie groß ist der Durchmesser des Rohres?

▲4▲ Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 25 cm. Es ist so in drei Teile zu zerschneiden, daß man aus diesen Teilen ein Quadrat zusammensetzen kann.

▲5▲ Bei einem mathematischen Turnier wurden 30 Fragen gestellt. Für jede richtige Antwort wurden 7 Punkte vergeben, bei jeder falschen Antwort wurden 12 Punkte abgezogen.
Wieviel richtige Antworten hatte ein Teilnehmer gegeben, wenn er am Ende 77 Punkte erhielt?

▲6▲ Auf der Hypotenuse AB des Dreiecks ABC werden zwei Punkte K und M so festgelegt, daß $\overline{AK} = \overline{AC}$ und $\overline{BM} = \overline{BC}$.
Beweise, daß $\overline{\sphericalangle MCK} = 45°$!

▲7▲ Beweise: Wenn keine der natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ durch 5 teilbar ist, dann läßt sich n^2+1 durch 5 ohne Rest teilen.

▲8▲ Zerschneide ein Rechteck mit den Seitenlängen 16 cm und 9 cm so in zwei Teile, daß man daraus ein Quadrat zusammensetzen kann.

▲9▲ Ein Schüler hat ein Buch in drei Tagen durchgelesen. Am ersten Tag las er 0,2 des ganzen Buches und 16 Seiten dazu. Am zweiten Tag las er 0,75 der restlichen Seiten und die letzten 30 Seiten.
Wieviel Seiten hat das Buch?

▲10▲ Beweise den Satz: Wenn zwei natürliche Zahlen bei der Division durch eine dritte Zahl denselben Divisionsrest ergeben, dann läßt sich die Differenz dieser Zahlen ohne Rest durch die dritte Zahl teilen.

▲11▲ Zeichne den Graph der Funktionen
$y = \frac{|x|}{x}$, $y = |x| - x$.

„Poisson gab augenblicklich die Lösung" Umfüllaufgabe

Am 16. Dezember 1850 trug der französische Physiker und Astronom François Arago in einer Sitzung der Pariser Akademie der Wissenschaften die Biographie seines Landsmannes Siméon-Denis Poisson (1781 bis 1840) vor. Er berichtete auch über die Jugendjahre Poissons:
„Eines Tages versammelte sich die Familie, um den Beruf zu wählen, den man ihn ergreifen lassen wollte. Man dachte anfänglich daran, ihn Notar werden zu lassen, legte diesen Plan aber einstimmig beiseite, weil er zu große geistige Anstrengung erfordere. ... Die Chirurgie erhielt den Vorzug vor dem Notariat, und Poisson begab sich zu einem Onkel ..., welcher in Fontainebleau (Stadt südöstlich von Paris) diese Kunst ausübte. ... Auf einer seiner Reisen nach Fontainebleau erzählte ihm sein Freund Vanneau von mehreren Aufgaben, welche er auf der (dortigen) Zentralschule hatte vorlegen hören, zum Beispiel die folgende:

▲1▲ *Es hat jemand ein Gefäß voll Wein, welches zwölf Maß hält. Er will die Hälfte davon, also sechs Maß verschenken, hat aber, um diese sechs Maß abzumessen, nur zwei Gefäße, das eine zu acht, das andere zu fünf Maß. Wie hat er zu verfahren, um in das Gefäß, welches acht Maß hält, sechs Maß zu schütten?*
Poisson gab augenblicklich die Lösung dieser Frage, und noch anderer, welche man ihm vorlegte. Er hatte seinen wahrhaften Beruf gefunden."
Mit 17 Jahren bestand Poisson glänzend die Prüfung zur Aufnahme in die Pariser Polytechnische Schule. Später sollte er an dieser 1794 gegründeten Schule, die sich mehr und mehr zum wissenschaftlichen Lehrzentrum Europas entwickelte, seine Wirkungsstätte als hervorragender Mathematiker finden.

▲2▲ Das älteste Beispiel für eine Umfüllaufgabe stammt aus den „Annales Stadenses" (13. Jh.): *Der Inhalt zweier mit Wein gefüllter Krüge von 5 und 3 Maß soll halbiert werden, wobei noch ein leerer Krug von 8 Maß zur Verfügung steht.*

H. Pieper

Johannes von Gmunden

Johannes von Gmunden wurde um 1384 in Gmunden (Traunsee) geboren und starb am 23. 2. 1442. In jenem Frühstadium der europäischen Universitäten, als diese fast völlig der Kirche unterstellt, von Geistlichen betrieben und auf die Ausbildung von Theologen gerichtet waren (die freilich auch in juristischen, medizinischen und anderen für die Kirche nützlichen Kenntnissen unterwiesen wurden), war *Johannes von Gmunden* einer der ersten Magister, die sich auf mathematische Lehrveranstaltungen spezialisierten. Er lehrte ab 1412 an der 1365 gegründeten Wiener Universität Arithmetik, Kalenderrechnung, Optik, Astronomie und deren mathematische Hilfsmittel. Ein von ihm verfaßtes Werk *Tractatus de minutiis physicis* beschäftigte sich mit der Arithmetik auf der Grundlage sexagesimal (d. h. in einem Positionssystem mit der Basis 60) dargestellter Zahlen, wie sie heute noch in der Winkelmessung und zum Teil in der Zeitunterteilung verwendet werden. Johannes von Gmunden kritisierte die Unzulänglichkeit der um 1260 auf Befehl Alfons X. von Kastilien berechneten astronomischen Tabellen, der sogenannten alfonsinischen Tafeln. Deren Neubearbeitung wurde dann von seinem Schüler *Georg Peurbach* (1423 bis 1461) und dessen Schüler, dem berühmten Mathematiker *Regiomontanus* (1436 bis 1476), durchgeführt.

So erfüllte *J. von Gmunden* eine der wesentlichsten Bedingungen, die heute an die erfolgreiche Tätigkeit eines Wissenschaftlers gestellt werden: Er verstand es, erfolgreiche Schüler heranzubilden, die die von ihm gewiesene Richtung weiterführten. (Ein Bild von *Johannes von Gmunden* ist nicht überliefert. Zum als Markenmotiv gewählten Astrolabium vgl. *alpha* 1983, Heft 3.)

P. Schreiber

Silbenrätsel, Klasse 8 (Seite 10):
1. Funktion, 2. Umkehrung, 3. Nullstelle, 4. Kathete, 5. Tangente, 6. Isobare, 7. Operation, 8. Nebenwinkel, 9. Seitenhalbierende, 10. Wertetabelle, 11. Exponent, 12. Rauminhalt, 13. Thales, 14. Elle. Lösungswort: *Funktionswerte*.

Silbenrätsel, Klasse 9 (Seite 11):
1. Grundriß, 2. Lösung, 3. Euklid, 4. irrational, 5. Cavalieri, 6. Hyperbel, 7. Umkehrfunktion, 8. Normalform, 9. Giga, 10. Speicher, 11. Scheitelpunkt, 12. Ypsilon, 13. Symmetrie, 14. Tangente, 15. Exponentialgleichung, 16. Menge. Lösungswort: *Gleichungssystem*.

Rätselstern, Klasse 9 (Seite 12):
1. Parabel, 2. negativ, 3. Einheit, 4. Viertel, 5. relativ, 6. digital, 7. Basis, 8. Binom, 9. Monat, 10. Basel, 11. Sehne, 12. Eniac, 13. Potenz, 14. Knoten, 15. Beweis, 16. Ziffer, 17. Nenner, 18. Vektor.

Silbenrätsel, Klasse 10 (Seite 14):
1. windschief, 2. Intervall, 3. Nonius, 4. Kosinus, 5. Eintafelprojektion, 6. Logarithmus, 7. Funktionswerte, 8. ungerade, 9. Numerus, 10. Kathete, 11. Trigonometrie, 12. Ikosaeder, 13. orthogonal, 14. Nullstelle. Lösungswort: Winkelfunktion.

Diese neun Fachrätsel stammen aus der Feder von Diplomlehrer *Lutz Clausnitzer*, OS Obercunnersdorf. Sie wurden an der dortigen Oberschule im Unterricht und in der außerunterrichtlichen Tätigkeit eingesetzt.

16

Silbenrätsel ab Klasse 10

de – der – e – ein – fel – funk – ga – ge – go – go – i – jek – in – ka – ko – ko – le – lo – me – me – mus – nal – ni – no – no – nu – null – nus – on – ons – or – pro – ra – rith – rus – sa – schief – si – stel – ta – te – te – ter – the – tho – ti – ti – tri – trie – un – us – vall – wer – wind

1. Lagebeziehungen zweier Geraden im Raum,
2. Strecke auf der Zahlengeraden,
3. Hilfsskale, z. B. eines Meßschiebers,
4. Winkelfunktion,
5. zeichnerische Darstellung auf einer Projektionstafel,
6. diejenige gesuchte Zahl c, mit der eine gegebene Zahl a potenziert werden muß, um eine ebenfalls geg. Zahl b darzustellen,
7. Elemente des Wertebereichs einer Funktion,
8. Eigenschaft aller nicht ohne Rest durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen,
9. Bezeichnung der Zahl b (siehe 6.),
10. Seite im rechtwinkligen Dreieck,
11. Dreiecksberechnung als mathematische Disziplin,
12. regelmäßiger Polyeder (Zwanzigflächner),
13. senkrecht,
14. die Abszisse der Punkte, in denen eine Kurve die Abszissenachse schneidet.

Die Anfangsbuchstaben der 14 Begriffe verkörpern in gegebener Reihenfolge Funktionen eines bestimmten Typs.

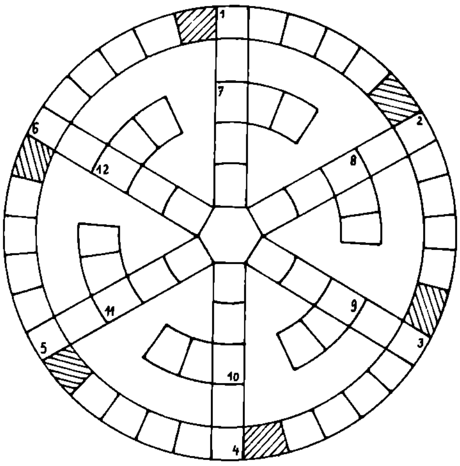
14

Im Uhrzeigersinn:
1. Einheit der Masse,
2. $\frac{1}{1000}$ Vorsatz für Einheiten,
3. Teil eines Dreiecks,
4. bei Edelsteinen noch übliche Masseeinheit,
5. Teil eines jeden Meßgerätes,
6. Zahlwort (g. g. T. v. 42 u. 78),
7. griechischer Buchstabe,
8. Verneinung,
9. Meßgerät der Zeit,
10. Zahlwort (kleinste zweistellige Primzahl),
11. griechischer Buchstabe,
12. kurze Sprechweise für ein Gleichheitszeichen.

Radial (gemeinsamer Endbuchstabe):
1. geometrisches Grundelement,
2. Einheit der Zeit,
3. Einheit der Zeit,
4. durch gleichen Abstand von einem Punkt M gekennzeichnete Punktmenge der Ebene (Mehrzahl),
5. Position einer Grundziffer in einer Dezimalzahl,
6. Veranschaulichung eines geometrischen Sachverhalts.

3

Kreisrätsel ab Klasse 6



Lösungen

Kreisrätsel Klasse 6 (Seite 2):
Im Uhrzeigersinn: 1. Gramm, 2. Milli, 3. Seite, 4. Karat, 5. Skale, 6. sechs, 7. rho, 8. nie, 9. Uhr, 10. elf, 11. eta, 12. ist.
Radial: 1. Gerade, 2. Minute, 3. Stunde, 4. Kreise, 5. Stelle, 6. Skizze.

Silbenrätsel, Klasse 6 (Seite 4):
1. proportional, 2. Außenwinkel, 3. Rhombus, 4. Arithmetik, 5. Lichtjahr, 6. Liter, 7. Einheit, 8. Lineal, 9. Ordinate, 10. Gamma, 11. Rechteck, 12. Abbildung, 13. Multiplikation, 14. Million. Lösungswort: *Parallelogramm.*

Silbenrätsel, Klasse 7 (Seite 5):
1. Geometrie, 2. Lösung, 3. Element, 4. Inkreis, 5. Computer, 6. Hexaeder, 7. Umklappung, 8. Nenner, 9 Gleichung, 10. Sekante, 11. Läufer, 12. Erweitern, 13. Höhe, 14. Rißachse, 15. Exponent. Lösungswort: *Gleichungslehre.*

Kreisrätsel, Klasse 7 (Seite 6):
Im Uhrzeigersinn: 1. Zunge, 2. Waage, 3. Alpha, 4. Sehne, 5. Meter, 6. Menge, 7. Rad, 8. rot, 9. Hub, 10. mal, 11. Tag, 12. Dyn. Radial: 1. Zirkel, 2. Wurzel, 3. Achtel, 4. Symbol, 5. Mittel, 6. Modell.

Doppelkreuze, Klasse 8 (Seite 8):
1. Deka, 2. Null, 3. Punkt, 4. Radius, 5. Gerade, 6. Kreis, 7. Ries, 8. Tera, 9. Kegel, 10. Gesetz, 11. Stunde, 12. Kugel, 13. Bild, 14. Mega, 15. Meile, 16. Lineal, 17. falsch, 18. Glied.

Silbenrätsel ab Klasse 6

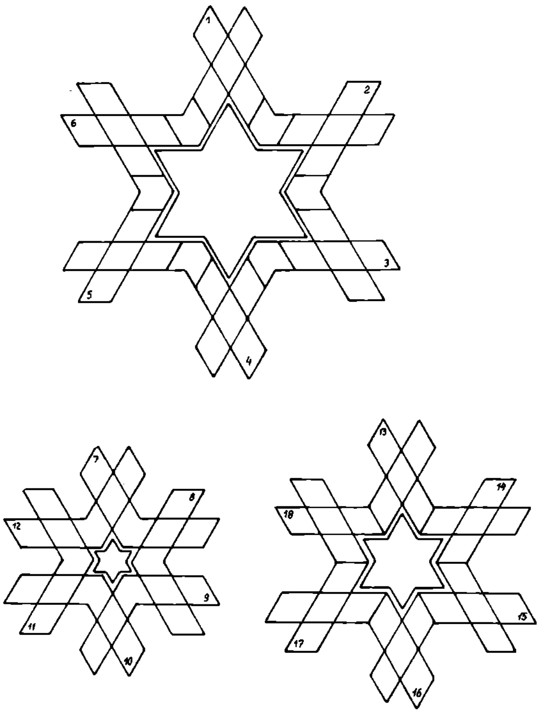
a – ab – al – au – bil – bus – di – dung – eck – ein – gam – heit – jahr – ka – kel – li – li – li – licht – ma – me – mil – mul – na – nal – ne – o – on – on – or – pli – por – pro – recht – rhom – rith – ßen – te – ter – ti – ti – ti – tik – win

1. verhältnisgleich,
2. Nebenwinkel des Innenwinkels eines Dreiecks,
3. Viereck, dessen Seiten gleich lang sind,
4. Teilgebiet der Mathematik,
5. in der Astronomie verwendete Längeneinheit,
6. Volumeneinheit,
7. Bestandteil einer physikalischen Größe,
8. Hilfsgerät zum Zeichnen,
9. Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems,
10. griech. Buchstabe,
11. Viereck, dessen Innenwinkel rechte Winkel sind,
12. Zuordnung,
13. Grundrechenoperation,
14. Zahlwort (10^6).

Die Anfangsbuchstaben der 14 Begriffe liefern in gegebener Reihenfolge die Bezeichnung einer Figur.

1. graphische Darstellung einer quadratischen Funktion,
2. Eigenschaft von Zahlen $x < 0$,
3. Bestandteil einer physikalischen Größe,
4. Teil eines Ganzen,
5. soviel wie „verhältnismäßig“,
6. mit Hilfe von Ziffern dargestellt,
7. Seite eines gleichschenkligen Dreiecks,
8. zweigliedriger Term,
9. Einheit der Zeit,
10. Geburtsort des Mathematikers *Leonhard Euler* (1707 bis 1783),
11. Strecke, deren Randpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen,
12. erster programmgesteuerter elektronischer Rechner (USA 1946),
13. Term mit einem Exponenten,
14. veraltete, nur in der Seefahrt zulässige Geschwindigkeitseinheit,
15. Beleg für die Allgemeingültigkeit einer Aussage,
16. Zahlzeichen,
17. Teil eines Bruches,
18. gerichtete physikalische Größe.

Rätselstern ab Klasse 9



12

Silbenrätsel ab Klasse 7

ach – chung – com – der – e – e – er – ex – fer – ge – glei – he – he – hö – in – kan – klap – kreis – läu – le – lö – me – ment – nen – nent – ner – o – po – pu – pung – riß – se – se – sung – te – ter – tem – trie – um – wei – xa

1. Teilgebiet der Mathematik,
2. Element der Lösungsmenge einer Gleichung oder Ungleichung,
3. in einer Menge vertretenes Objekt,
4. alle Seiten eines Dreiecks berührender Kreis,
5. engl. Bezeichnung für elektronische Rechner,
6. Würfel,
7. Methode zur Bestimmung der wahren Länge einer in senkrechter Ein- oder Zweitafelprojektion gegebenen Strecke,
8. Teil eines Bruches,
9. zwei durch Gleichheitszeichen verbundene Terme,
10. eine Gerade, die einen Kreis schneidet,
11. Teil des Rechenstabes,
12. Multiplikation von Zähler und Nenner mit derselben Zahl,
13. Lot vom Eckpunkt eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite,
14. durch Grund- und Aufrißebene erzeugte Schnittgerade,
15. Hochzahl.

Die Anfangsbuchstaben der 15 Begriffe ergeben in vorgelegter Reihenfolge ein Teilgebiet der Mathematik.

5

Silbenrätsel ab Klasse 8

ba – bel – ben – bie – de – el – ex – funk – gen – hal – halt – i – in – ka – keh – kel – le – le – le – les – ne – nent – null – o – on – on – pe – po – ra – raum – re – ren – rung – sei – so – stel – ta – tan – te – te – te – ten – tha – the – ti – ti – um – wer – win

1. eindeutige Abbildung,
2. durch Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung eines Satzes entstehende Aussage,
3. Element des Definitionsbereiches, dem der Funktionswert Null zugeordnet wird,
4. Seite eines rechtwinkligen Dreiecks,
5. einen Kreis berührende Gerade,
6. Orte gleichen Luftdruckes verbindende Linie,
7. Verfahren, Rechenart,
8. Supplementwinkel,
9. Gerade durch den Eckpunkt eines Dreiecks und den Mittelpunkt der Gegenseite,
10. Darstellungsform für Funktionen,
11. Teil einer Potenz,
12. Volumen,
13. griechischer Philosoph und Mathematiker (um 624 bis 547 v. u. Z.),
14. alte deutsche Längeneinheit.

Die Anfangsbuchstaben der 14 Begriffe ergeben der Reihe nach gelesen die Elemente der Menge des Wertevorrates.

10

Im Uhrzeigersinn:

1. Teil des Rechenstabes,
2. Meßgerät für die Masse eines Körpers,
3. griechischer Buchstabe,
4. Strecke, deren Randpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen,
5. Einheit der Länge,
6. Zusammenfassung von Objekten mit gemeinsamer Eigenschaft,
7. Teil eines Wagens,
8. eine Farbe,
9. Kolbenweg (zum Beispiel bei Pumpen oder Verbrennungsmotoren),
10. kurze Sprechweise für das Operationszeichen der Multiplikation,
11. Einheit der Zeit,
12. veraltete Krafteinheit.

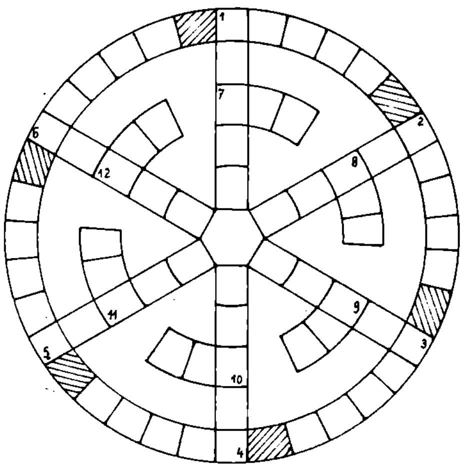
Radial (gemeinsamer Endbuchstabe):

1. Zeichengerät,
2. Operationszeichen für das Radizieren,
3. Teil eines Ganzen,
4. Zeichen (z. B. für eine Variable oder ein chem. Element,
5. Durchschnittswert,
6. maßstabgerechtes Abbild eines Körpers.

7

Kreisrätsel

ab Klasse 7



6

Silbenrätsel

ab Klasse 9

al – bel – ca – cher – chung – e – eu – ex – form – funk – ga – ge – gen – gi – glei – grund – hy – ir – kehr – klid – li – lon – lö – mal – me – men – nal – nen – nor – o – on – per – po – punkt – ra – ri – riß – schei – si – spei – sung – sym – tan – te – tel – ti – ti – ti – trie – um – va – yp

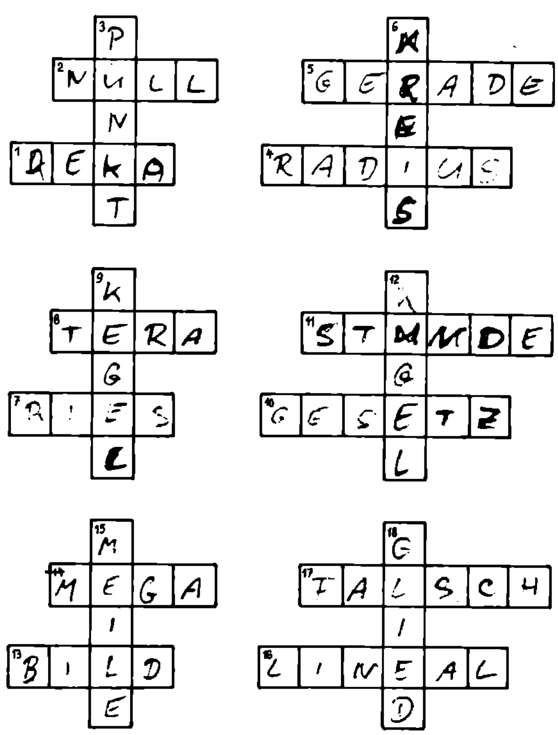
1. senkrechte Parallelprojektion auf eine waagerechte Projektionstafel,
2. jede Zahl, die eine Gleichung erfüllt,
3. griechischer Mathematiker (um 300 v. u. Z., faßte math. Wissen seiner Zeit im Werk *Elemente* zusammen), 4. nicht rational,
5. italienischer Mathematiker (gest. 1647), 6. Graph von Potenzfunktionen mit negativen Exponenten,
7. durch Vertauschen des Wertebereiches mit dem Definitionsbereich einer Funktion entstehende Abbildung, 8. Gestalt einer quadratischen Gleichung, 9. 10^9 (Vorsatz für Einheiten),
10. Einrichtung elektronischer Rechner zum Aufbewahren von Zahlen oder Befehlen,
11. markanter Punkt einer Parabel, 12. vorletzter Buchstabe des Alphabets, 13. Eigenschaft mancher Figuren und der Graphen mancher Potenzfunktionen, 14. Gerade, die eine Kurve berührt,
15. Bestimmungsgleichung, in der die Variable Exponent ist, 16. Zusammenfassung von Objekten.

Die Anfangsbuchstaben der 16 Begriffe bezeichnen in gegebener Reihenfolge einen für viele Sachaufgaben geeigneten Lösungsansatz.

11

Doppelkreuze

ab Klasse 8



8

1. 10^1 (Vorsatz für Einheiten),
2. Zahlwort (diese Zahl darf niemals Divisor sein),
3. geometrisches Grundelement,
4. halber Durchmesser eines Kreises,
5. geometrisches Grundelement,
6. ebene Figur,
7. dt. Rechenmeister (um 1492 bis 1559),
8. 10^{12} (Vorsatz für Einheiten),
9. Körper,
10. allgemeingültige Aussage,
11. Zeiteinheit,
12. Körper,
13. einem Original zugeordnetes Objekt,
14. 10^6 (Vorsatz für Einheiten),
15. veraltete, nur noch in der Seefahrt erlaubte Längeneinheit,
16. Zeichengerät,
17. Wahrheitswert einer Aussage,
18. Teil einer Folge.

9

Dr. T. Rother
Jahrgang 1946

Im Jahr 1946 wurde ich als letztes von fünf Kindern in einem kleinen Dorf bei Leipzig geboren. Auch wenn ich meinem Elternhaus sehr, sehr viel verdanke – mit Mathematik hatten sie beruflich (meine Mutter war Krankenschwester, mein Vater Pfarrer) nichts zu tun und wohl auch sonst wenig im Sinn. Sicher war es in dieser Zeit sehr schwierig, die Brotration so unter sieben Menschen zu verteilen, daß zumindest alle hinterher weniger Hunger hatten. Aber das war wohl am wenigsten ein mathematisches Problem.

Ich selbst kann mich an diese schweren Jahre nicht mehr erinnern. Als dann meine Eltern 1950 in das Erzgebirge verzogen, gab es wieder genug zu essen.

Mit fünf Jahren wurde ich sehr schwer krank und war es noch, als die mit mir gleichaltrigen Kinder in die Schule kamen. So fand für mich der Schulanfang im Krankenhaus und ohne Zuckertüte statt. Lesen, Schreiben und Rechnen habe ich so im Bett erlernt. Erst kurz vor Ende des ersten Schuljahres durfte ich normal die Schule besuchen und wieder meinen Lieblingsbeschäftigungen nachgehen: Das waren damals das Fußballspielen und das Basteln mit allem, was mir in die Finger kam. Während mir der Fußball außer Spaß nur eine gute Sportzensur gebracht hat, sehe ich heute in meiner *Bastelleidenschaft* von damals einen wesentlichen Impuls für meine persönliche Entwicklung. Die Beschäftigung mit mechanischem bzw. elektrischem Spielzeug ist ja wohl nichts anderes als spielerisch angewandte Physik, und in jedem physikalischen Problem steckt oft ein mathematisches. Es war damit für mich noch bis zur 11. Klasse der Erweiterten Oberschule *unerschütterliche* Absicht, Physiker oder Mathematiker zu werden.

Im Jahre 1959 kam ich mit meinen Eltern in die Messestadt und bin seitdem *Leipziger*. Hier nahm ich in der achten Klasse auch erstmals an der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* teil, allerdings ohne durchschlagenden Erfolg. Aber ein Freund und Klassenkamerad von mir belegte fast regelmäßig vordere Plätze, was mich möglicherweise *gewurmt*, auf jeden Fall aber auch in meinem Ehrgeiz angestachelt hat. So habe ich dann mit teilweise verbissenem Eifer versucht, zu Hause Olympiadeaufgaben zu lösen. Diesbezüglich entwickelte sich außerdem innerhalb von fünf befreundeten Klassenkameraden (wir nannten uns bescheiden *Boßschaft*) ein Wettbewerb, und es war bei uns geradezu Mode, in Mathe *vorn* zu sein. Auch wenn sich unser Ehrgeiz auf dieses Fach beschränkte (sicher auch ein Ergebnis des ausgezeichneten Unterrichts unseres Mathematik- und Physiklehrers), so hat uns dieser Wettbewerb sicher gefördert und angespornt.

Wesentlich beeinflußt durch meinen älteren Bruder, der bereits Arzt geworden war, habe ich mich entgegen meinen früheren Absichten in der 11. Klasse für das Medizinstudium entschieden. Damit glaubte ich endgültig, daß die Mathematik für mich nur noch Hobby-Wert haben würde. Vielleicht hat das mit zu der nötigen Unbefangenheit beim Herangehen an ein mathematisches Problem geführt (es gab ja für mich keinerlei Erfolgszwang mehr), mit der ich in der 12. Klasse erst- und *altershalber* letztmalig relativ erfolgreich an der Mathematikolympiade teilnahm. Ich weiß noch, daß ich bei der Bezirksolympiade bereits eine Stunde vor dem Abgabetermin *am Ende mit meinem Latein* war und darum Kaffeetrinken gegangen bin. Ich war überzeugt, daß weitere Bemühungen sowieso fruchtlos seien. Irgendwelche Hoffnungen auf einen vorderen Platz hatte ich natürlich erst recht nicht. Zu meiner Freude und Überraschung wurde ich zweiter in meiner Klassenstufe, was gleichbedeutend war mit einer Fahrkarte nach Berlin zur DDR-Olympiade. Auch wenn dort keine Lorbeeren für mich zu holen waren, denke ich noch sehr gern an die Tage am Werbellinsee zurück. Außerdem war es in meinen Augen ein ganz würdiger Abschluß meiner Karriere als *Junger* Hobby-*Mathematiker*.

Ich studierte dann von 1966 bis 1972 Medizin an der Karl-Marx-Universität und absolvierte bis 1977 meine Facharztausbildung an einer großen Betriebspoliklinik.

Ich hatte jedoch zu früh der Mathematik ade gesagt. Schon die Arbeit an meiner Dissertation zum *Dr. med.* brachte mich zu ihr zurück. Ich promovierte über ein Thema zur *computergestützten Diagnose* und mußte mich intensiv mit Fragen der Formalen Logik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Rechentechnik beschäftigen. Ich bin überzeugt, daß ich diese Probleme ohne *Olympiade-Training* nie auch nur einigermaßen bewältigt hätte. Angeregt durch diese Arbeit am Institut für Biophysik der Universität Leipzig habe ich nach Abschluß meiner Facharztausbildung eine Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent an dieser Einrichtung begonnen. Selbstverständlich habe ich an diesem Institut in erster Linie medizinische Probleme zu bearbeiten, aber natürlich immer im Zusammenhang mit der speziellen wissenschaftlichen Zielstellung dieses Instituts. Das bedeutet aber stets Berührung mit der Mathematik, so daß spätestens hier meine frühere Begeisterung für diese Wissenschaft sich unmittelbar vorteilhaft auf meine Tätigkeit auswirkt – wie ich glaube, ganz sicher auch ein Erfolg der Olympiadebewegung und besonders derer, die sie ins Leben gerufen haben.

Seminaraufgabe: Ein Teilchen mit der Dichte $\varrho_T = 1{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ bewegt sich im Wasser in einer Zentrifuge mit der Geschwindigkeit v nach außen.

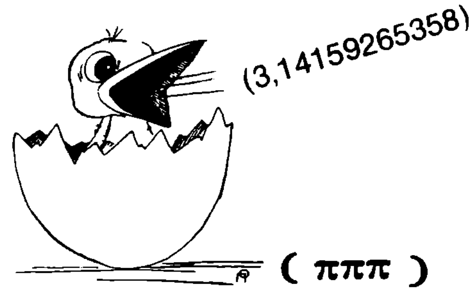
Welche Dichte ϱ_T müßte ein geometrisch identisches Teilchen haben, damit es unter sonst gleichen Bedingungen mit der gleichen Geschwindigkeit v nach innen wandert?

Die Formel für die Teilchengeschwindigkeit v lautet:

$$v = \frac{8\pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot r^2}{9\eta}\,(\varrho_T - \varrho_{H_2O}).$$

Dr. Rother mit Medizinstudenten beim biophysikalischen Praktikum

In freien Stunden · alpha-heiter



Aus: Sputnik, Moskau

Zahlenquadrat

Setze in die leeren Felder natürliche Zahlen so ein, daß wahre Aussagen entstehen!

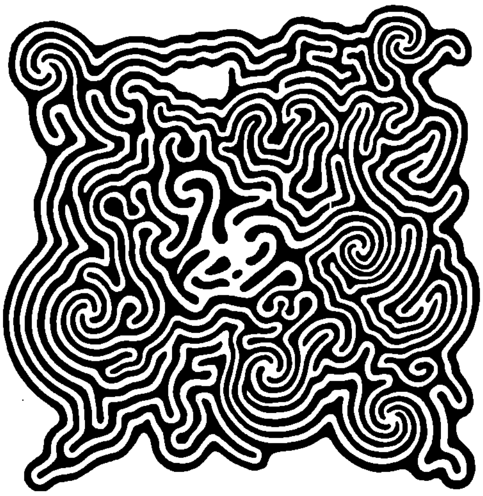
Kathrein Scholz, Groitzsch (Kl. 7)

Beachte: Es ist in der angegebenen Reihenfolge zu rechnen und nicht nach der Regel: Punktrechnung vor Strichrechnung.

8	:		+		=7
−		+		:	
	−	6	·		=5
·		:		·	
	−		+	4	=
=		=		=	

Labyrinth

Finde ohne Umwege einen Ausweg aus dem Labyrinth! Starte im mittleren weißen Feld, umschiffe die Inseln, und versuche, in das weiße Feld oben zu kommen! *Magazin, Berlin*



Rationalisiertes Lineal

Ein Stab von 20 cm Länge soll zur Messung der Längen von 1 mm bis 200 mm benutzt werden.
Es ist eine möglichst geringe Anzahl von Teilstrichen festzustellen, die die Messung der Längen von 1 mm bis 200 mm in *einer* Ablesung ermöglichen.

Dr. W. Lorenz, Leipzig

Eine interessante Beziehung

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \text{ und } \left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4+3}{9}=\frac{7}{9}.$$

$$\text{Aber auch } \left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{1+6}{9}=\frac{7}{9}.$$

Die Summe ist die gleiche, wenn man den ersten Term quadriert und den zweiten addiert und wenn man den zweiten Term quadriert und den ersten addiert.
Hier ist ein weiteres Beispiel für den Fall, wo $0{,}12 + 0{,}88 = 1$. Dann ist

$0{,}12^2 + 0{,}88 = 0{,}0144 + 0{,}88 = 0{,}8944$

bzw. $0{,}88^2 + 0{,}12 = 0{,}7744 + 0{,}12 = 0{,}8944$.

Die beiden Summen sind wiederum gleich.
Versuche, ähnliche Beziehungen mit anderen Zahlen herzustellen! Erhältst du stets die gleichen Summen? Kannst du dies begründen?

Zahlenpaare und Zahlentripel gesucht

- Zu ermitteln sind alle Zahlenpaare (a, b) natürlicher Zahlen a, b, die die Gleichung $ab + a + b + 1 = 1985$ erfüllen!
- Zu ermitteln sind alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b, c, die die Gleichung $abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 1985$ erfüllen!

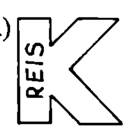
Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Was soll das bedeuten?

a) E N D
E
N
D

b) R

c) REIS REIS REIS REIS K REIS REIS REIS REIS

d) 

Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz

Gleichungen gesucht

$$\begin{array}{rcl} AB \times BC &=& DEF \\ + \quad\;\; + && : \\ \underline{GCC : BC} &=& \underline{E} \\ GDE - CF &=& GBF \end{array}$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Aus der Kreislehre

In einen gegebenen Kreis (Mittelpunkt M_0, Radius R) sind sechs Kreise gleicher Größe so einzuzeichnen, daß sie den gegebenen Kreis von innen und einander paarweise berühren. Man ermittle den Radius r dieser 6 Kreise! *Dr. G. Hesse, Radebeul*

Aus der Praxis

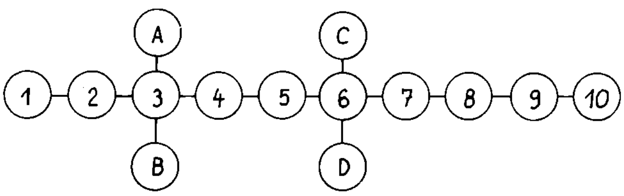
- Beim Picknick konnte man 14 Fahrräder zählen. Die kleinen Kinder kamen auf Dreirädern und die größeren Kinder auf Zweirädern. Fred stellte fest, daß die Anzahl der Räder 38 betrug.
Wieviel kleine Kinder kamen auf Dreirädern?
- „Guten Tag! Wie spät ist es?"
„Ganz einfach! Addiere ein Viertel der Zeit von Mittag bis jetzt zur Hälfte der Zeit von jetzt bis Mittag!"
- Ein Glas Pfirsiche kostet 2,45 M. Der Inhalt kostet 1,85 M mehr als das Konservenglas. Wieviel kosten die Pfirsiche?

Aus: The Australian Mathematics Teacher

Schiebespiel

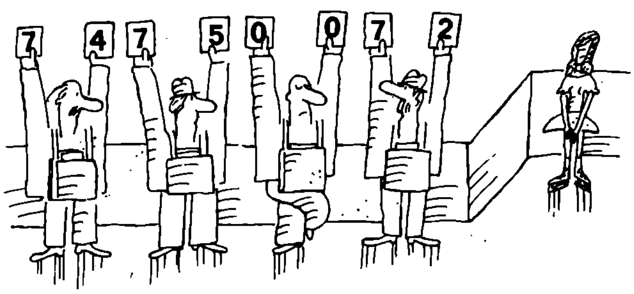
Auf die Felder 1 bis 10 sind neun Steine, mit 1 bis 9 numeriert, in beliebiger Ordnung zu setzen. Es bleibt ein Feld leer. Die Steine sollen durch Verschieben in die geordnete Folge von 1 bis 9 gebracht werden. Die Felder A, B, C, D können vorübergehend benutzt werden.

Oberlehrer O. Chromy, Coswig



„Er will unbedingt Architekt werden!"

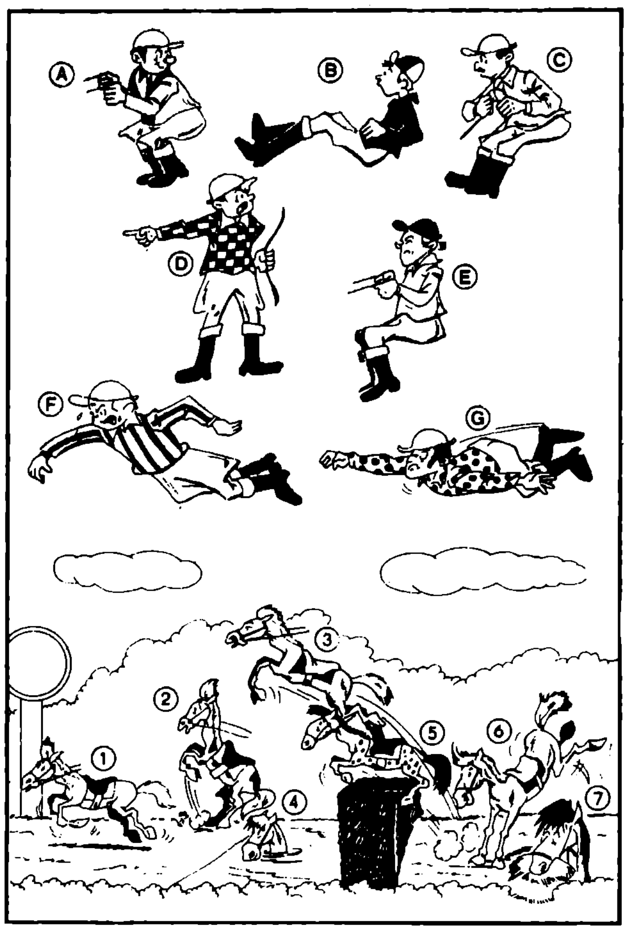
W. Moese, aus Wochenpost



Lothar Otto, aus: Eulenspiegel

Gute Beobachtungsgabe gefragt

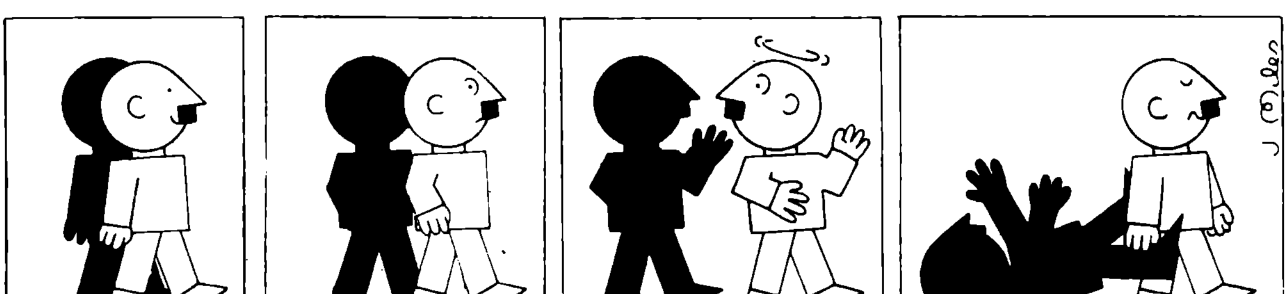
Ordne die Reiter den Rennpferden zu!



Aus: Füles, Budapest

Ohne Worte

Aus: Füles, Budapest



XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

240521 Aus (2) und (3) folgt, daß die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra ist. Nach (1) ist also Ruth die Volleyballspielerin und somit die Tischtennisspielerin nicht Ruth. Nach (4) ist sie auch nicht Marion. Also ist Petra die Tischtennisspielerin. Nochmals wegen (1) verbleibt daher für Marion die Sportart Schwimmen. Damit ist bewiesen, daß die Verteilung der Sportarten durch (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist.

240522 Wegen $4320:3=1440$ wurden auf der ersten Maschine 1440 Teile hergestellt. Auf der zweiten Maschine wurden 864 Teile produziert; denn es ist $4320:5=864$. Wegen
$4320-1440-864=2016$ und
$2016:2=1008$ wurden auf der dritten und auf der vierten Maschine je 1008 Teile angefertigt.

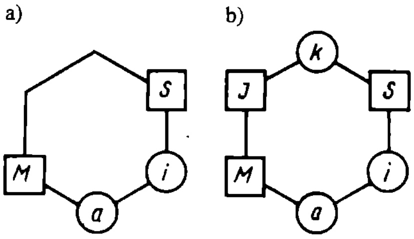
240523 Wegen $75^2=5625$ beträgt der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrates $5625\,\text{mm}^2$.
Die beiden abgeschnittenen Dreiecke lassen sich zu einem Quadrat zusammensetzen, das die gleiche Seitenlänge wie die beiden abgeschnittenen Quadrate hat. Wegen $13^2=169$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates $169\,\text{mm}^2$.
Wegen $5625-3\cdot169=5625-507=5118$ beträgt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche daher $5118\,\text{mm}^2$, das sind $51{,}18\,\text{cm}^2$.

240524 Wenn die gesuchte Zahl x lautet, so ist $10\cdot x$ die durch Anhängen der Ziffer 0 gebildete Zahl. Die Summe beträgt folglich $11\cdot x$; nach Peters Angabe gilt also $11\cdot x=3058$. Wegen $3058:11=278$ folgt hieraus $x=278$.
Damit ist bewiesen, daß man aus Peters Angaben die von ihm als erste aufgeschriebene Zahl eindeutig ermitteln kann. Sie lautet 278.

Olympiadeklasse 6

240621 Wegen (3) sitzen Michael (M), Agnes (a) und Ines (i) in der Reihenfolge nebeneinander, die in Bild a) gezeigt wird. Wegen (2) sitzt Steffen (S) einem Jungen, also weder Ines noch Agnes, gegenüber; damit verbleibt für ihn nach Bild a) nur der Platz rechts neben Ines. Für Jörg (J) und Kerstin (k) sind nur die in Bild a) noch freigelassenen Plätze möglich. Da sie einander benachbart sind, ist Kerstin nach (1) nicht Jörgs Schwester.
Da sie nach (4) auch nicht Steffens Schwester ist, muß
Kerstin Michaels Schwester (*)
sein und sitzt wegen (1) nicht neben ihm. Wie Bild a) zeigt, ergibt sich damit die Sitzordnung in Bild b).

a) b)



Weiter folgt aus Bild (a oder b): Ines ist wegen (1) nicht Steffens Schwester und nach (*) nicht Michaels Schwester. Also ist
Ines Jörgs Schwester, (**)
und als drittes zusammengehöriges Geschwisterpaar verbleiben
Agnes und Steffen. (***)
Damit ist bewiesen, daß man die zusammengehörenden Geschwisterpaare und die Sitzordnung eindeutig aus den Angaben ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Bild b) angegeben.

240622 Anzahl der Würfel mit 0 rot angestrichenen Flächen: 6
Anzahl der Würfel mit 1 rot angestrichenen Fläche: 22
Anzahl der Würfel mit 2 rot angestrichenen Flächen: 24
Anzahl der Würfel mit 3 rot angestrichenen Flächen: 8
Anzahl der Würfel mit 4 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 5 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 6 rot angestrichenen Flächen: 0.

240623 Da eine Stunde das Sechsfache von 10 Minuten ist, legt jeder Fahrer in einer Stunde das Sechsfache der von ihm in 10 Minuten gefahrenen Weglänge zurück. Daraus folgt:
Rainer fährt wegen $6\cdot9=54$ in einer Stunde 54 km,
Jürgen fährt wegen $6\cdot8=48$ in einer Stunde 48 km,
Frank fährt wegen $6\cdot6=36$ in einer Stunde 36 km.
Somit betragen nach einer Stunde wegen $54-48=6$ bzw. $54-36=18$ bzw. $48-36=12$ die Wegelängen zwischen Rainer und Jürgen 6 km, zwischen Rainer und Frank 18 km, zwischen Jürgen und Frank 12 km.

240624 Ist k, w bzw. p das Gewicht einer Kugel, eines Würfels bzw. der Pyramide, so folgt aus (1) und (2), daß jede Kugel das Gewicht k und jeder Würfel das Gewicht w hat. Aus (3) und (4) folgt ferner

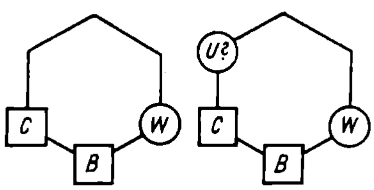
$$p+5w=14k \qquad (5)$$
und
$$w+8k=p. \qquad (6)$$

Wegen (6) besagt (5)
$$w+8k+5w=14k,$$
also $6w=6k$
und folglich $w=k$.
Hiernach ergibt sich aus (6)
$$9k=p.$$
Damit ist bewiesen, daß man Rolfs Frage eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann. Die Antwort lautet: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.

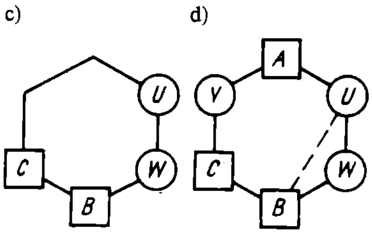
Olympiadeklasse 7

240721 Nach (4) ist Ulrikes Mann nicht Christian. Aus (4) folgt auch, daß Ulrikes Mann nicht neben seiner Frau sitzt; er ist wegen (3) also auch nicht Anton. Daher gilt:
Ulrikes Mann ist Bernd, (*)
und man erhält Bild a). Hiernach kann Ulrike wegen (1) nur entweder links von Christian oder rechts von Waltraud sitzen. Säße sie links von Christian (Bild b), so blieben für Vera nur solche Plätze übrig, die jeweils einer Frau benachbart wären, im Widerspruch gegen (2). Also sitzt Ulrike rechts von Waltraud (Bild c). Nach (2) müssen dann die Plätze von Anton und Vera so angeordnet sein, wie in Bild d) angegeben.

a) b)



c) d)



Wegen (*) ist Antons Frau nicht Ulrike; daher folgt aus Bild d) und (3):
Antons Frau ist Vera, (**)
und es verbleibt als drittes Ehepaar:
Christians Frau ist Waltraud. (***)
Damit ist bewiesen, daß man die Ehepartner und die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Bild d) angegeben.

240722 a) Sind a und b die in Metern angegebene Länge bzw. Breite des Gartens, so gilt

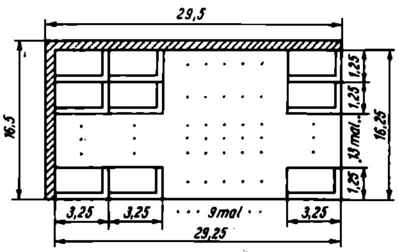
$a = 13 + b$ (1)

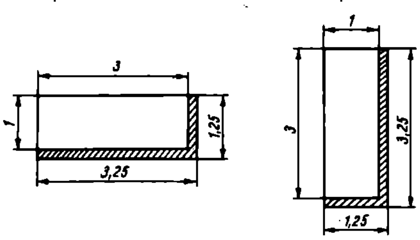
sowie, weil der halbe Umfang
$92\,\text{m} : 2 = 46\,\text{m}$ beträgt,

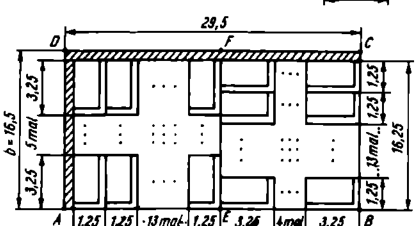
$a + b = 46.$ (2)

Setzt man a aus (1) in (2) ein,
so folgt $13 + 2b = 46$,
$2b = 33$, $b = 16{,}5$ und damit aus (1)
$a = 29{,}5$.
Der Flächeninhalt des Gartens beträgt folglich
$16{,}5\,\text{m} \cdot 29{,}5\,\text{m} = 486{,}75\,\text{m}^2$.

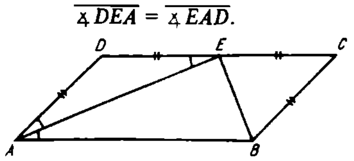
b) Legt man zunächst längs zweier benachbarter Seiten des Gartens einen Weg von 25 cm Breite an (in Bild a) schraffiert), so verbleibt ein Rechteck von 29,25 m Länge und 16,25 m Breite. Wenn man dieses Rechteck in Teilrechtecke mit den Seitenlängen 3,25 m und 1,25 m aufteilen kann (Bild b), so erhält man eine Anordnung von Beeten, die den geforderten Bedingungen genügt. Eine Möglichkeit hierzu zeigt Bild a), wie sich wegen $29{,}25 : 3{,}25 = 9$ und $16{,}25 : 1{,}25 = 13$ bestätigen läßt. Bei dieser Aufteilung ist die Anzahl der Beete $9 \cdot 13 = 117$.







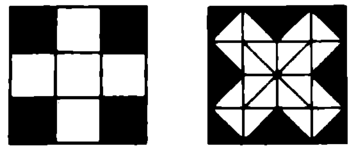
240723 Da im Parallelogramm $ABCD$ die gegenüberliegenden Seiten AB und CD zueinander parallel sind und da E auf CD liegt, gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\sphericalangle BAE = \sphericalangle DEA$.
Da AE nach Voraussetzung den Winkel $\sphericalangle BAD$ halbiert, gilt
$\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD$. Daher folgt
$\sphericalangle DEA = \sphericalangle EAD$.



Nach Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken folgt hieraus
$\overline{AD} = \overline{ED}$.
Analog erhält man $\overline{BC} = \overline{EC}$.
Da nach Voraussetzung AD und BC gegenüberliegende Seiten eines Parallelogrammes sind, gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$. Also ist $\overline{ED} = \overline{EC}$.
Da E nach Voraussetzung auch auf der Seite CD liegt, ist damit E als Mittelpunkt von CD nachgewiesen.

240724 *Variante 1:*
Die Quadratfläche kann in genau 9 kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ aufgeteilt werden (Bild a); davon sind 4 Quadrate Abfall, die restlichen 5 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Folglich beträgt hier der Abfall $\frac{4}{9}a^2$.

Variante 1 Variante 2



Variante 2:
Die Quadratfläche kann in genau 32 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge $\frac{a}{4}$ aufgeteilt werden (z. B. wie in Bild b); davon sind 12 Dreiecke Abfall, die restlichen 20 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Wegen $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ beträgt demnach hier der Abfall $\frac{3}{8}a^2$.

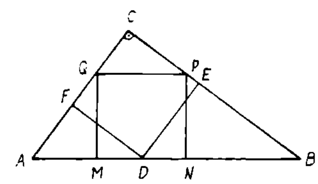
Vergleich: Wegen $4 \cdot 8 > 3 \cdot 9$ gilt $\frac{4}{9} > \frac{3}{8}$.
Folglich ist der Abfall bei Variante 2 kleiner als bei Variante 1.
Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufen 8 bis 10 werden in Heft 4/85 veröffentlicht.

Zum Titelblatt

In dem ungarischen Kinderbuch von *Ferenc Lántos* „Gestalten wir gemeinsam!“ werden auf 24 Seiten zahlreiche Schwarzweiß-Zeichnungen dargeboten. Man kann diese Zeichnungen, mit jeweils gleichen Mustern versehen, bunt ausfüllen. Nicht nur für Kinder, sondern auch für Erwachsene ist das ein aufregendes Spiel mit der Fläche und ihrer Gestaltung. Man kann sogar mit nur einer Farbe eine jeweils konstruierte Zeichnung auf zahlreiche verschiedene Weisen ausfüllen und so immer neue Möglichkeiten und immer neue Formen schaffen. Auf der *alpha*-Titelseite dieses Heftes haben wir die IV. Umschlagseite dieses besonders das räumliche Vorstellungsvermögen fördernden Buchs wiedergegeben.

Wir lösen gemeinsam ein geometrisches Problem

Die nachstehende Zeichnung stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC dar, dem (wie aus der Zeichnung ersichtlich) zwei Quadrate $MNPQ$ und $DECF$ einbeschrieben wurden. Es sei A_1 der Flächeninhalt des Quadrates $DECF$ und A_2 der Flächeninhalt des Quadrates $MNPQ$. Wir wollen nun untersuchen, welche der drei Beziehungen $A_1 < A_2$, $A_1 = A_2$ oder $A_1 > A_2$ stets für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck zutrifft.



Es habe $\overline{BC}$ die Seitenlänge a, $\overline{AC}$ die Seitenlänge b, $\overline{AB}$ die Seitenlänge c, $\overline{CE} = \overline{DE}$ die Seitenlänge x, also $\overline{EB}$ die Seitenlänge $a - x$. Wegen $DE \parallel AC$ gilt $\sphericalangle BDE \cong \sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BED \cong \sphericalangle BCA$. Daraus folgt $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Somit gilt auch
$\overline{DE} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{BC}$ bzw. $x : (a - x) = b : a$,

also $x = \frac{ab}{a+b}$. (1)

Es habe $\overline{NP} = \overline{QP}$ die Seitenlänge y, $\overline{BP}$ die Länge z, also $\overline{CP}$ die Länge $a - z$. Wegen $\triangle ABC \sim \triangle QPC \sim \triangle BPN$ gilt
$\overline{CP} : \overline{QP} = \overline{CB} : \overline{AB}$ bzw. $(a - z) : y = a : c$,
also $z = \frac{a(c - y)}{c}$. Ferner gilt
$\overline{NP} : \overline{BP} = \overline{AC} : \overline{AB}$ bzw. $y : z = b : c$,

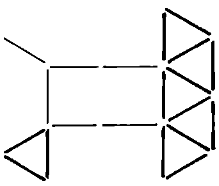
also $z = \frac{cy}{b}$. (2)

Aus (1) und (2) erhalten wir durch Gleichsetzen
$$\frac{cy}{b} = \frac{a(c - y)}{c}, \quad y = \frac{abc}{ab + c^2}.$$
Nun gilt $A_1 = x^2$ und $A_2 = y^2$ und somit $A_1 > A_2$ genau dann, wenn $x^2 > y^2$ bzw. $x > y$ oder $x - y > 0$.
Aus $x - y = \frac{ab}{a+b} - \frac{abc}{ab + c^2}$ erhalten wir durch schrittweises äquivalentes Umformen
$$x - y = \frac{ab(ab + c^2) - abc(a + b)}{(a + b)(ab + c^2)}$$
$$= \frac{ab(ab + c^2 - ac - bc)}{(a + b)(ab + c^2)},$$
$$x - y = \frac{ab(c - a)(c - b)}{(a + b)(ab + c^2)} > 0, \text{ denn}$$
$c - a > 0$ und $c - b > 0$.
In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck gilt deshalb für die Flächeninhalte A_1 und A_2 der dem Dreieck einbeschriebenen Quadrate $A_1 > A_2$. *Th. Scholl*

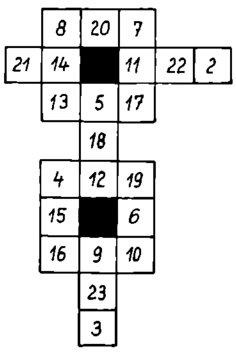
Lösungen

Lösungen zu: Knobel-Wandzeitung
Heft 2/85

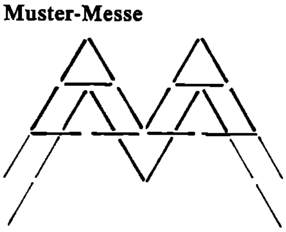
▲ 1 ▲ Der Leipziger Löwe



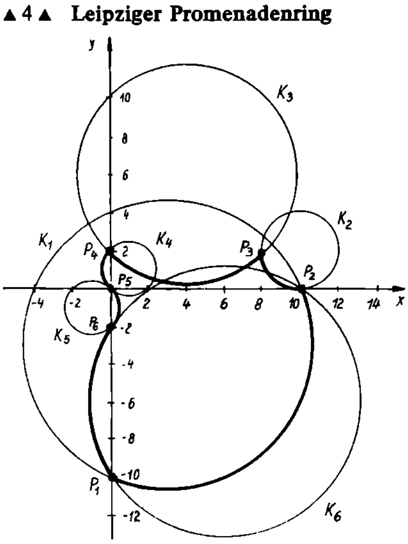
▲ 2 ▲ Transport-Roboter Robbi
Das Bild zeigt eine mögliche Eintragung.



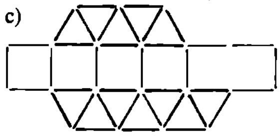
▲ 3 ▲ Muster-Messe



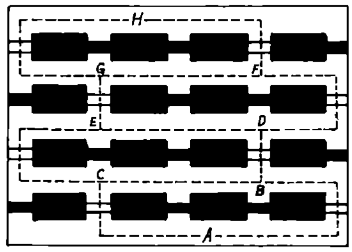
▲ 4 ▲ Leipziger Promenadenring



▲ 5 ▲ Auto-Geometrie
a) Die Figur enthält 2 Dreiecke, 16 Vierecke (4 Quadrate, 11 Rechtecke und 1 Trapez), 1 Fünfeck und 6 Sechsecke (1 konvexes und 5 konkave).
b) Der Flächeninhalt A der Auto-Figur beträgt:
$$A = \left(6 + \sqrt{3} + \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)\,\text{LE}^2 \approx 9{,}03\,\text{LE}^2.$$
c)

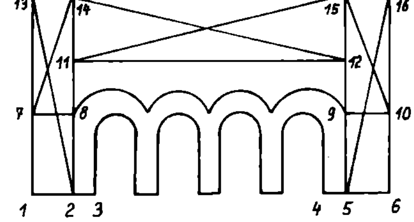


▲ 6 ▲ Problem am Hauptbahnhof

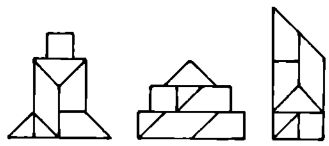


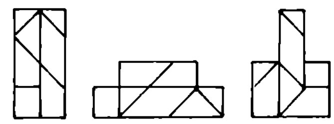
Man kann auf 16 Wegen von A nach H gelangen. (In jedem Falle sind 4 Gleisüberschreitungen nötig, die bei den in Klammern beigefügten Wegelängen nicht berücksichtigt sind. 1 LE ≈ 1 Wagenlänge): 1. A–C–E–G–H (6 LE), 2. A–C–E–G–F–H (7 LE), 3. A–C–E–D–F–G–H (12 LE), 4. A–C–E–D–F–H (9 LE), 5. A–C–B–D–E–G–H (8 LE), 6. A–C–B–D–E–G–F–H (9 LE), 7. A–C–B–D–F–G–H (10 LE), 8. A–C–B–D–F–H (7 LE), 9. A–B–C–E–G–H (9 LE), 10. A–B–C–E–G–F–H (10 LE), 11. A–B–C–E–D–F–G–H (15 LE), 12. A–B–C–E–D–F–H (12 LE), 13. A–B–D–E–G–H (7 LE), 14. A–B–D–E–G–F–H (8 LE), 15. A–B–D–F–G–H (9 LE), 16. A–B–D–F–H (6 LE).
Die Wege 1 und 16 sind gleich lang und die kürzesten, am längsten ist Weg 11. Gleich lang sind die Wege 2, 8 und 13 (7 LE), 5 und 14 (8 LE), 4, 6, 9 und 15 (9 LE), 7 und 10 (10 LE) sowie 3 und 12 (12 LE).

▲ 7 ▲ Der Bayerische Bahnhof
Eine Möglichkeit wäre:
2–3–4–5–9–8–2–13–14–7–8–11–14–12–11–15–12–9–10–15–16–5–6–10–16–22–21–20–19–18–17–13–7–1–2.

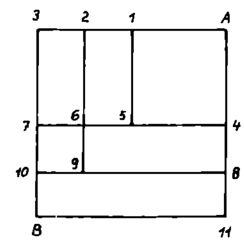


▲ 8 ▲ Leipziger Silhouetten



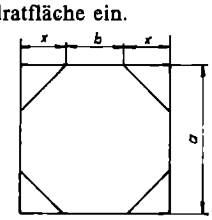


▲ 9 ▲ Leipziger Passagen
Astrid kann auf 9 Wegen zu Brigitte gelangen:
1. A–1–2–3–7–10–B, 2. A–1–2–6–7–10–B,
3. A–1–2–6–9–10–B, 4. A–1–5–6–7–10–B,
5. A–1–5–6–9–10–B, 6. A–4–5–6–7–10–B,
7. A–4–5–6–9–10–B, 8. A–4–8–9–10–B,
9. A–4–8–11–B.



▲ 10 ▲ Der Goldene Schnitt
Sei a die Höhe des oberen und b die des unteren Teilabschnittes des Uni-Riesen bei der Teilung der Gesamthöhe $H = 142{,}5$ m. Dann muß gelten:
$$H : b = b : a \qquad (1)$$
und
$$a + b = H. \qquad (2)$$
Setzt man aus (2) $a = H - b$ in (1) ein, so erhält man die quadratische Gleichung $b^2 + Hb - H^2 = 0$ mit der Lösung
$b = \frac{H}{2}(\sqrt{5} - 1)$. (Der negative Lösungswert entfällt.) Mit $H = 142{,}5$ m ergeben sich $b \approx 88{,}07$ m und $a \approx 54{,}43$ m. Der Teilungspunkt liegt also in einer Höhe von $b \approx 88{,}07$ m, und es gilt in der Tat
$142{,}5\text{ m} : 88{,}07\text{ m} \approx 88{,}07\text{ m} : 54{,}43\text{ m} \approx 1{,}618$.

▲ 11 ▲ Der Rathausturm
Seien A_1 der Flächeninhalt des Quadrats und A_2 derjenige des regelmäßigen Achtecks, dann gelten mit den Bezeichnungen des Bildes: $A_1 = a^2$ und wegen $b + 2x = a$, $b^2 = 2x^2$, $x = a\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$:
$$A_2 = a^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 2a^2(\sqrt{2} - 1).$$
Also gilt $A_2/A_1 = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}828$. Die Achteckfläche nimmt folglich 82,8 % der Quadratfläche ein.



▲ 12 ▲ Die Rathausuhr
Um 8.00 Uhr befindet sich der große Zeiger 40 Minutenteilstriche hinter dem kleinen Zeiger. Demnach wurden durch den großen Zeiger bis zum gesuchten Zeitpunkt $40 - 7 = 33$ Minutenteilstriche aufgeholt. Jede Minute aber holt der große

Zeiger gegenüber dem kleinen Zeiger $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ Teilstriche auf. Für das Aufholen von 33 Teilstrichen benötigt der große Zeiger folglich

$33 : \frac{11}{12} = 33 \cdot \frac{12}{11} = 36$ Minuten. Also war es zum gesuchten Zeitpunkt genau 8.36 Uhr.

▲ 13 ▲ Kongreßhalle in Zahlen

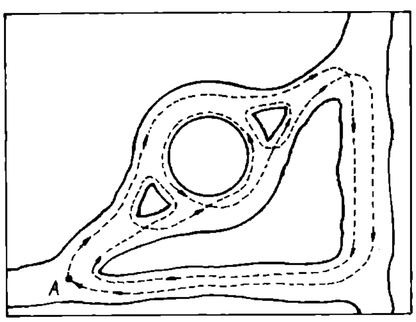
Es ist $4000 = 2^5 \cdot 5^3$. Folglich ist jeder Weg, der 5 Zweien und 3 Fünfen (und beliebig viele Einsen) enthält, ein gesuchter, z. B.
1. A–1–2–1–1–2–5–2–1–1–1–1–2–5–2–5–1–B, 2. A–1–2–1–5–2–1–2–1–5–1–2–5–2–1–1–1–1–1–B, 3. A–2–1–2–1–5–1–2–1–1–1–5–1–2–1–5–1–2–1–B, 4. A–2–1–2–1–1–1–5–1–1–1–2–1–1–1–5–1–2–1–5–2–1–1–B.

▲ 14 ▲ Zoo-Logisches

Fallunterscheidungen: Die Aussagen 1 bzw. 2 können nicht als wahr angenommen werden, da sich in beiden Fällen ein Widerspruch zu den jeweiligen beiden anderen negierten Aussagen ergibt. Ist die Aussage 3 wahr, dann wären die Aussagen 1 und 2 falsch, und es ergibt sich die Lösung:
Links: Molukkenkakadu,
Mitte: Rosenkakadu,
Rechts: Inka-Kakadu.

▲ 15 ▲ Ein Spaziergang

Das Bild zeigt eine mögliche Wanderroute.



▲ 16 ▲ Auf dem Spielplatz

Wegen der Symmetrie der Anlage ergibt sich für die Länge L der 22 sichtbaren Stämme:

$$L = (1{,}85 + 2(1{,}7 + 1{,}55 + 1{,}4 + 1{,}25 + 1{,}1 + 0{,}95 + 0{,}8 + 0{,}65 + 0{,}5 + 0{,}35) + 0{,}2)\,\text{m} = 22{,}55\,\text{m}.$$

Da jeder Stamm 0,65 m tief im Erdboden verankert ist, kommen noch
$22 \cdot 0{,}65\,\text{m} = 14{,}3\,\text{m}$ hinzu. Also wurden zum Bau der Anlage 36,85 m Stammholz benötigt.

▲ 17 ▲ Mit der LVZ

Durch Fallunterscheidung erhält man 6 mögliche Lösungstripel, die sich als Permutationen (wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes für Addition und Multiplikation) eines einzigen Tripels ergeben:

L	1	1	2	2	3	3
V	2	3	1	3	1	2
Z	3	2	3	1	2	1

▲ 18 ▲ alpha-Arithmetik

Aus (2) und (4) folgt $h = l + 2a$, und aus (1) oder (5) $h = l + p - a$, woraus $p = 3a$ folgt. Nun ergeben sich aus (2) $l = \frac{2a}{3a-2}$ und aus (3) $l = \frac{4a}{3a^2-1}$, woraus sich die kubische Gleichung $6a^3 - 12a^2 + 6a = 0$ ergibt, welche die Lösungen $a_1 = 0$ (entfällt), $a_2 = a_3 = 1$ hat. Also ist $a = 1$, womit $l = 2$, $p = 3$ und $h = 4$ folgen.

▲ 19 ▲ Fragen zur Stadt Leipzig

1. Im Jahre 1990. 2. $\frac{0{,}455\,\text{km}^2}{145\,\text{km}^2} \approx 0{,}003$: Der Stadtkern nimmt 0,3 % des Stadtgebietes ein. 3. $(265 + 265 + 55) \cdot 7 = 4095$ Zugankünfte oder -abfahrten. 4. a) 47 m, b) 51,5 m, c) 82,5 m. 5. Nein, denn 9,5 m $= 9500\,\text{mm} = 1187{,}5 \cdot 8\,\text{mm} = 1187{,}5$ LE. 6. 16 Jahre (von 1898 bis 1913). 7. Durchschnittliches Volumen eines Granitblocks: $\frac{12\,500\,\text{m}^3}{26\,500} = 0{,}471\,698\,1\,\text{m}^3 = 471{,}6981\,\text{dm}^3 = 471\,698{,}1\,\text{cm}^3$. 8. 1983 waren etwa 0,1 % der Zoobesucher Inhaber einer Dauerkarte. 9. Der Tierbestand des Leipziger Zoo betrug am 31. 12. 1983: 724 Arten mit 5421 Individuen.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Juschkewitsch
Heft 2/85

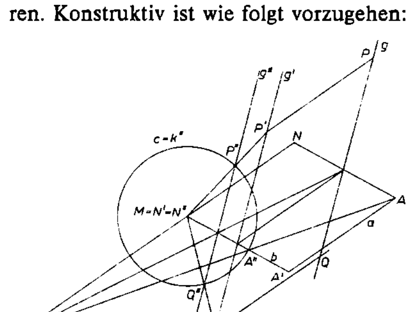
▲ 2459 ▲

	A	B	C
A	8	1	6
B	3	5	7
C	4	9	2

Es gibt 12 Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 9
Ohne Zirkel geht es auch
Heft 2/84

Da der Kreis k selbst nicht gezeichnet werden kann, muß die Aufgabenstellung durch geeignete Transformation in eine solche Lage übergeführt werden, daß sich der transformierte Kreis k'' mit der vorgegebenen Kreislinie c deckt. Die Gerade g muß den entsprechenden Transformationen mit unterworfen werden. Die so erhaltenen Schnittpunkte von c mit g'' sind wieder in die ursprüngliche Vorgabe zurückzuführen. Konstruktiv ist wie folgt vorzugehen:



Verbindungsgerade (NM) zeichnen. Parallele zu (NM) durch A nach [2] ergibt die Gerade a. Parallele zu (AN) durch M ergibt die Gerade b. Setze $a \cdot b = A'$ und $M = N'$. Die Translation, welche (AN) in $(A'N')$ überführt, wende man auf g an. Dabei geht g in g' über.
Ausführung einer zentrischen Streckung bzw. Stauchung mit M als Zentrum, welche A' in $A'' \in c$ überführt. Anwendung der gleichen zentrischen Transformation auf $g' \to g''$. g'' schneidet $c = k''$ entsprechend vorliegender Annahme in den Punkten P'' und Q''.
Mittels zugeordneter Umkehrtransformationen geht P'' in $P' \in g'$ und Q'' in $Q' \in g'$ und anschließend P' in $P \in g$ und Q' in $Q \in g$ über. P und Q sind die Schnittpunkte von g mit dem durch Mittelpunkt M und Kurvenpunkt A gegebenen Kreis k (vgl. Bild 13).
Bild 13

Lösungen zu: Sprachecke

▲ 1 ▲ Ein rundes Bassin wird von einem Gitter umgeben, das 50 cm vom Rand entfernt angebracht ist; die Länge dieses Gitters beträgt 22 m. Wie groß ist der Durchmesser des Bassins?

Lösung: Der Radius des äußeren Kreises ist $r = u : 2\pi = 22\,\text{m} : 6{,}28 \approx 3{,}5\,\text{m}$. Dann ist der Radius des Bassins
$3{,}5\,\text{m} - 0{,}5\,\text{m} = 3\,\text{m}$ und der Durchmesser $3\,\text{m} \cdot 2 = 6\,\text{m}$.

▲ 2 ▲ Benutze jede der 9 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau einmal, um Primzahlen zu bilden, deren Summe so klein wie möglich ist!

Lösung: Beachte, daß 4, 6 und 8 nur an der Zehnerstelle stehen können! Deshalb ist eine der 3 möglichen Lösungen:
$2 + 3 + 41 + 5 + 67 + 89 = 207$.

▲ 3 ▲ Zeichne in ein Quadrat mit der Seite 5 ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 wie im Bild ein!
Bestimme die Entfernung x!

***Lösung:* Da $\triangle ABF \sim \triangle BCE$, gilt**
$x : 5 = 3 : 4$ und $x = \frac{15}{4}$.

▲ 4 ▲ Welche Zahl ist anstelle des Fragezeichens in der Folge 17, 23, 13, 11, ?, 15 einzusetzen?

Lösung: Ab der 2. Zahl ist jede gleich der Summe aus der doppelten Anzahl der Zehner und der dreifachen Anzahl der Einer der vorhergehenden Zahl ($23 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2$, $13 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$ usw.). Anstelle des Fragezeichens ist demnach 5 einzusetzen: $5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1$. Es ist allerdings zu bemerken, daß es auch andere Bildungsgesetze für die vorgegebene Folge gibt. Dann ist das Fragezeichen jeweils anders zu ersetzen.

Lösung zu: Schnelles Bauernmatt

Weiß zieht seinen e- und seinen g-Bauern auf die 6. Reihe und anschließend folgt 7. e:f7 matt oder 7. g:f7 matt. Es gibt 40 verschiedene Zugfolgen, die der gestellten Anforderung entsprechen.
Man kann hierfür auch eine Formel entwickeln. Sie lautet:

$$\frac{6!\,(\text{Anzahl der Züge})}{3!\,(\text{Anzahl der Züge des e-Bauern}) \cdot 3!\,(\text{g-Bauer})} \cdot 2\,(7.\ \text{e:f7 oder g:f7 matt}) = 40$$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Smarandache

▲2577▲ Man formt um zu $x^3 - 2 = 3y$. Dann ist $x^3 - 2$ durch 3 teilbar, d. h. $x^3 = 3n + 2$ $(n \in N)$.
Es sei
$x = 3k + r, r = 0, 1, 2$ $(k \in N)$.
$x = 3k \quad \to x^3 = (3k)^3$
$\quad = 3n \quad \neq 3n + 2$
$x = 3k + 1 \to x^3 = (3k + 1)^3$
$\quad = 3n + 1 \neq 3n + 2$
$x = 3k + 2 \to x^3 = (3k + 2)^3 = 3n + 2$
Daraus folgt
$x = 3k + 2$ $(k \in N)$ und

$$y = \frac{x^3 - 2}{3} = \frac{(3k + 2)^3 - 2}{3}$$
$$= 9k^3 + 18k^2 + 12k + 2.$$

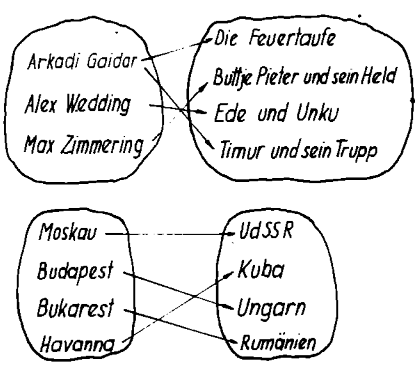
Die Lösung der Gleichung ist
$x = 3k + 2$,
$y = 9k^3 + 18k^2 + 12k + 2$ $(k \in N)$.

Lösungen zu: Überall Zuordnungen

▲1▲ Wegen des Distributivgesetzes gilt:
$(a + b) \cdot 0{,}30 = a \cdot 0{,}30 + b \cdot 0{,}30$

▲2▲ $a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b$
wegen der Definition der Potenz.
$a \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$
wegen des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Multiplikation.
$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^2$
wegen der Definition der Potenz.
Also gilt stets $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

▲3▲



Geht von jedem Element der ersten Menge genau ein Pfeil aus, so ist die Zuordnung eindeutig. Das ist bei der Zuordnung *ist Hauptstadt von* der Fall.
Gehen von mindestens einem Element der ersten Menge zwei oder mehr Zuordnungspfeile aus, so ist die Zuordnung nicht eindeutig. Das ist bei der Zuordnung *schrieb das Buch* der Fall.

▲4▲ a) 10.45 b) 60 Minuten
c) 12.15 d) 20 km

▲5▲ a) eindeutige Zuordnung;
b) nicht eindeutige Zuordnung;
c) eindeutige Zuordnung.

▲6▲ a) Graph einer Funktion;
b) kein Graph einer Funktion;
c) Graph einer Funktion.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Zahlenquadrat

8	:	4	+	5	= 7
−		+		:	
7	−	6	·	5	= 5
·		:		·	
5	−	2	+	4	= 7
= 5		= 5		= 4	

Labyrinth
Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Rationalisiertes Lineal
Auf dem Lineal sind die Teilstriche für 0; 2; 4; 6; 9; 11; 16; 19; 20 cm anzugeben, ferner die mm-Striche 0,1 bis 0,9; 15,1 bis 15,9; 18,1 bis 18,9; 19,1 bis 19,9. Die Anzahl der Teilstriche beträgt 9 + 36 = 45.
Eine andere fast gleich gute Lösung lautet: Angabe der Teilstriche für 0; 1; 2; 3; 5; 7; 10; 13; 16; 20 cm, ferner der Teilstriche für 0,1 bis 3,9 mm. Die Anzahl der Teilstriche beträgt 10 + 36 = 46.

Eine interessante Beziehung
Wenn die Summe zweier ungleicher Zahlen 1 beträgt, dann gilt:
$$(1 - a)^2 + a = a^2 + (1 - a).$$

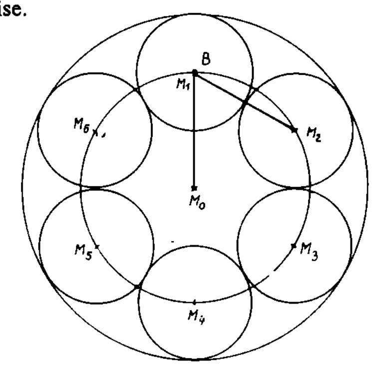
Zahlenpaare und Zahlentripel gesucht
● Durch äquivalentes Umformen der gegebenen Gleichung erhält man schrittweise
$ab + a + b + 1 \quad = 1985$
$a(b + 1) + (b + 1) = 1985$
(1) $\quad (a + 1)(b + 1) \quad = 1 \cdot 1985$
bzw.
(2) $\quad (a + 1)(b + 1) \quad = 5 \cdot 397$
Gleichung (1) wird durch die Zahlenpaare (0, 1984); (1984, 0), Gleichung (2) durch die Zahlenpaare (4, 396); (396, 4) erfüllt.
● Durch äquivalentes Umformen der gegebenen Gleichung erhält man schrittweise
$abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$
$= 1985$
$ab(c + 1) + a(c + 1) + b(c + 1) + (c + 1)$
$= 1985$
$a(b + 1)(c + 1) + (b + 1)(c + 1) = 1985$
$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 1 \cdot 5 \cdot 397$
Diese Gleichung wird durch folgende Zahlentripel (a, b, c) erfüllt:
(0, 4, 396); (4, 0, 396); (396, 0, 4);
(0, 396, 4); (4, 396, 0); (396, 4, 0).
Wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Multiplikation genügt die Probe für das Zahlentripel (0, 4, 396):
$0 + 0 + 0 + 4 \cdot 396 + 0 + 4 + 396 + 1$
$= 1985$
$1584 + 4 + 396 + 1 = 1985$
$1985 = 1985$

Was soll das bedeuten?
a) T aus END– tausend; b) ein r – Einer; c) um k Reis – Umkreis;
d) in k Reis – Inkreis

Gleichung gesucht

$$\begin{array}{ccccc} 32 & \times & 24 & = & 768 \\ + & & + & & : \\ 144 & : & 24 & = & 6 \\ \hline 176 & - & 48 & = & 128 \end{array}$$

Aus der Kreislehre
Die mit Radius r geschlagenen 6 Kreise haben die Mittelpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_6$. Sie sind Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks. Da die Verbindungsgerade der Mittelpunkte von zwei sich berührenden Kreisen durch den Berührungspunkt geht, ist die Seitenlänge des Sechsecks gleich $2r$. Da das Bestimmungsdreieck $M_0M_1M_2$ gleichseitig ist, folgt $M_0M_1 = 2r$. Die Berührung der beiden Kreise um M_0 und M_1 im Punkte B gibt $M_0M_1 = R - r$. Somit besteht die Gleichung $R - r = 2r$, also $r = \frac{R}{3}$.
Damit ergibt sich die Konstruktion der 6 dem gegebenen Kreis einbeschriebenen Kreise.



Man schlägt um M_0 mit Radius $\frac{2}{3}R$ den Kreis und bestimmt auf seinem Umfang mit Hilfe des Stechzirkels im gegenseitigen Abstand $\frac{2}{3}R$ die 6 Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_6$, um die man mit Radius $\frac{1}{3}R$ die gesuchten 6 Kreise schlägt.

Aus der Praxis
● Die Anzahl der Dreiräder sei x Stück, die der Zweiräder y Stück. Dann gilt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} x + y = 14 & x = 14 - y \\ \underline{3x + 2y = 38} & x = 14 - 4 = 10 \\ 3(14 - y) + 2y = 38 & \\ y = 4 & \end{array}$$

Es kamen 10 kleine Kinder auf Dreirädern.
■ Es sei x die Uhrzeit bzw. die Anzahl der Stunden von Mitternacht an gerechnet. Dann gilt

$$\frac{x + 12}{4} + \frac{12 - x}{2} = x,$$
$$x + 12 + 24 - 2x = 4x,$$
$$x = 7\frac{1}{5}.$$

Es ist 7 Uhr und 12 Minuten.
▲ Der Preis für den Inhalt eines Glases Pfirsiche sei x M, für das Glas selbst y M. Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} x + y = 2{,}45 & \\ \underline{x = y + 1{,}85} & \\ y + y + 1{,}85 = 2{,}45 & x = 0{,}3 + 1{,}85 \\ y = 0{,}3 & x = 2{,}15 \end{array}$$

Die Pfirsiche kosten 2,15 M.

Schiebespiel
Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Gute Beobachtungsgabe gefragt
A–1; B–2; C–5; D–7; E–3; F–4; G–6.

Lösungen zu:
Physik-Wettbewerb
Heft 5/84

Ph 6 ■ 161 Die Läufer treffen sich in x Tagen. Also legt der erste Läufer in x Tagen $28 \cdot x\,\text{km}$, der zweite $24 \cdot x\,\text{km}$ zurück. Da die Entfernung $\overline{AB} = 260\,\text{km}$ beträgt, erhalten wir folgende Gleichung:

$$28x + 24x = 260,$$
$$x = 5.$$

Die Läufer treffen sich in 5 Tagen.

Ph 7 ■ 162 Die Größe der Resultierenden ist wegen der Parallelität durch die Summe der Komponenten gegeben:

$$F_1 + F_2 = 100N + 150N = 250N$$

und ist ihnen parallel gerichtet. Mit P bezeichnen wir den gesuchten Angriffspunkt. $\overline{AP} = x\,\text{cm}$, $\overline{PB} = (80 - x)\,\text{cm}$, wenn A und B die Punkte bezeichnen, in denen die Kräfte F_1 und F_2 wirken.
Nach dem Momentensatz gilt:

$$F_1 x - F_2(80 - x) = 0,$$
$$100x - 150(80 - x) = 0,$$
$$x = 48.$$

Der Angriffspunkt der Resultierenden ist 48 cm vom Punkt A entfernt.

Ph 8 ■ 163 Den Radius des Querschnitts der Zugstange bezeichnen wir mit r, dann wird der Inhalt des Querschnitts πr^2. Für die Belastung gilt:

$$12\,000 \cdot \pi r^2 = 150\,800,$$
$$r^2 = \frac{1\,508}{120\pi}.$$

Als Lösung der rein quadratischen Gleichung erhalten wir $r_1 = 2$, $r_2 = -2$ (nicht brauchbar). Der Durchmesser der Zugstange ist dann 4 cm.

Ph 9 ■ 164 Den Querschnitt des Buchenholzes kennzeichnen wir mit $A\ \text{cm}^2$ und den des Fichtenholzes mit $A_1\ \text{cm}^2$. Zwischen beiden besteht nachstehende Gleichung:

$$A + \frac{1}{5}A = A_1 \quad \left(\frac{1}{5}A \mathrel{\hat{=}} 20\,\%\ \text{von}\ A\right).$$

Zwischen den Belastungen besteht folgende Beziehung:

$$A_1 \cdot 850 = A \cdot 1\,000 + 2\,000.$$

Als Lösung des Systems $\frac{6}{5}A = A_1$

$$850\,A_1 - 1\,000\,A = 2\,000$$

erhalten wir $A = 100\,\text{cm}^2$; die ursprüngliche Belastung ist also 100 000 N. Der Querschnitt des Buchenholzes betrug $100\,\text{cm}^2$, und die ursprüngliche Belastung war 100 kN.

Ph 10/12 ■ 165 Beide Pumpen leeren den Tankwagen in 3,75 h. Mit der zweiten Pumpe würde der Tankwagen in x h und mit der ersten in $(x - 4)$ h geleert. In 1 h erfolgt mit der ersten Pumpe $\frac{1}{x-4}$ der Leerung, mit der zweiten Pumpe $\frac{1}{x}$ und mit beiden Pumpen $\frac{1}{3{,}75}$ der Leerung. Wir erhalten somit die Gleichung

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3{,}75}$$

und nach der Umformung

$$x^2 - 11{,}5x + 15 = 0.$$

$$x_1 = 10, \qquad x_2 = \frac{3}{2}\ \text{(wird nicht gerecht).}$$

Mit der ersten Pumpe wird der Tankwagen in 6 h und mit der zweiten in 10 h geleert.

Lösungen zu:
alpha-Wettbewerb
Heft 6/84

Ma 5 ■ 2493 $35:5 = 7$; im Jahre 1984 ist Susanne 7 Jahre alt, sie wurde also im Jahre 1977 geboren. $35 - 5 = 30$; $30:5 = 6$; im Jahre 1979 war Stefan 6 Jahre alt, er wurde also im Jahre 1973 geboren. $1977 - 5 = 1972$; Mathias wurde im Jahre 1972 geboren.

Ma 5 ■ 2494 Das Taschengeld von Katrin könnte 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 oder 91 Pf betragen. Weil das Taschengeld durch $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ teilbar ist, kann es nur 64 Pf betragen; denn alle anderen möglichen Beträge sind nicht durch 8 teilbar. $64:2 = 32$, $32:2 = 16$, $16:2 = 8$. Katrin behält von ihrem Taschengeld 8 Pf übrig.

Ma 5 ■ 2495 Wir rechnen $24 - 11 + 8 + 4 = 25$; $25 - 5 = 20$; $20 - 13 = 7$. Bei der zweiten Station stiegen 7 Jungen aus.

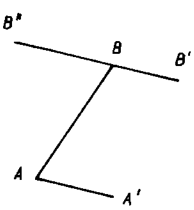
Ma 5 ■ 2496

A	B	C
g	g, r	r, w, w
g	g, w	r, w, w
g	r, r	g, w, w
g	r, w	g, r, w
g	w, w	g, r, r

Aus der Tabelle geht folgendes hervor: Für den Fall, daß in Schachtel A eine grüne Kugel liegt, gibt es fünf verschiedene Möglichkeiten für die Farbverteilungen. Da in Schachtel A aber auch eine weiße bzw. eine rote Kugel liegen könnte, gibt es insgesamt $5 \cdot 3 = 15$ verschiedene Möglichkeiten für die vorgesehene Verteilung der Kugeln.

Ma 5 ■ 2497 $31 - 7 = 24$; es gehören 24 Schüler dieser Klasse wenigstens einer AG an. $24 - 5 = 19$; $19 - (2 + 4) = 13$. Es gehören 13 Schüler noch anderen Arbeitsgemeinschaften an.

Ma 5 ■ 2498 Die Punkte B, B' und B'' liegen auf einer Geraden.

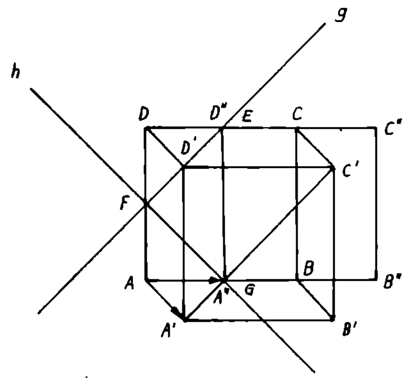


Ma 6 ■ 2499 a) Wegen $9 + 9 = 18$ und $18 < 20$ ist die Zahl nicht zwei-, sondern dreistellig; sie lautet 299, ihre Quersumme beträgt 20.
b) Damit die Zahl möglichst klein ist, muß die erste Grundziffer 1 sein. Da die Zahl durch 5 teilbar ist, muß die dritte Grundziffer 0 oder 5 sein. Es entfällt 0, da sich in diesem Fall die erste Grundziffer um 5 erhöht. Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 195 und hat die Quersumme 15.

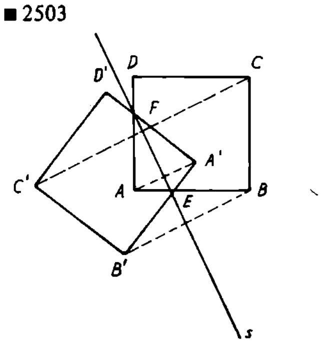
Ma 6 ■ 2500 Die zweite Grundziffer ist ein Vielfaches von 3 und gleich oder größer als 4. Die zweite Grundziffer könnte somit 6 oder 9 sein. Es entfällt 9, da die vierte Grundziffer dann 10 wäre, was nicht möglich ist. Entsprechend den geforderten Eigenschaften gibt es zwei solche Zahlen; sie lauten 26 270 und 26 271.

Ma 6 ■ 2501 Das Aquarium sei x dm breit, also $3 \cdot x$ dm lang. Für das Volumen des ausgeschöpften Wassers gilt somit $3 \cdot x \cdot x \cdot 1 = 9 \cdot 3$, also $x = 3$, denn $10\,\text{cm} = 1\,\text{dm}$. Das Aquarium ist 9 dm lang und 3 dm breit bzw. 90 cm lang und 30 cm breit.

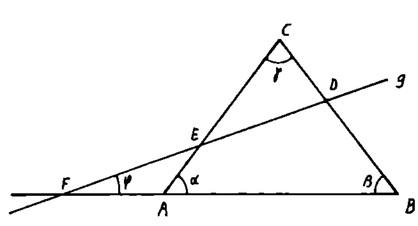
Ma 6 ■ 2502 Die Verschiebung parallel zur Geraden h könnte so erfolgen, daß entweder D' auf g oder B' auf g liegt; die Verschiebung parallel zur Geraden g könnte so erfolgen, daß entweder A'' auf h oder C'' auf h liegt. Somit gibt es vier Möglichkeiten zur Ausführung der Konstruktion. Zu b) gehören die Pfeile $\overrightarrow{AR}$ und $\overrightarrow{A'A''}$. Zum gleichen Ergebnis führt der Pfeil $\overrightarrow{AA''}$.



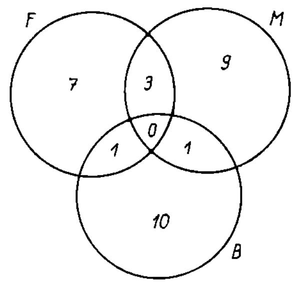
MA 6 ■ 2503



Ma 7 ■ 2504 Aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ und $\varphi < \alpha$ (Außenwinkelsatz) folgt $\varphi + \beta + \gamma < 180°$.



Ma 7 ■ 2505 $11 + 13 + 12 = 36$; $36 - 3 - 1 - 1 = 31$; $11 - 3 - 1 = 7$; $13 - 3 - 1 = 9$; $12 - 1 - 1 = 10$. Es handelt sich um insgesamt 31 Schüler. Es sind $7 + 9 + 10 = 26$ Schüler nur in einem Zirkel tätig.



Ma 7 ■ 2506 Winkel $\sphericalangle EBD$ hat die Größe $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 50° - 70° = 60°$. Winkel $\sphericalangle BAD$ hat die Größe 25°, Winkel $\sphericalangle BCE$ die Größe 35°. Deshalb hat Winkel $\sphericalangle BEF$ die Größe $180° - 35° - 60° = 85°$ und Winkel $\sphericalangle BDF$ die Größe $180° - 60° - 25° = 95°$. Somit hat Winkel $\sphericalangle EFD$ die Größe $360° - 85° - 95° - 60° = 120°$.

Ma 7 ■ 2507

A	B	C
b, r	b, b, r	r, w, w, w
b, r	b, b, w	r, r, w, w
b, r	b, r, r	b, w, w, w
b, r	b, w, w	b, r, r, w
b, r	r, r, w	b, b, w, w
b, r	r, w, w	b, b, r, w
b, r	b, r, w	b, r, w, w

Für den Fall, daß im Kasten A je eine blaue und eine rote Kugel liegen, gibt es 7 Möglichkeiten, wie aus der Tabelle hervorgeht. Nun könnten im Kasten A aber auch eine blaue und eine weiße oder eine rote und eine weiße Kugel liegen. Deshalb gibt es insgesamt $3 \cdot 7 = 21$ verschiedene Möglichkeiten für die Verteilung der Kugeln entsprechend der Vorschrift auf die drei Kästen.

Ma 8 ■ 2508 Da Mathias das Buch am 7. Tag noch liest, gilt für die Anzahl t der Tage, nach denen er das Buch ausgelesen hat, $t \geqq 7$. Wegen $7 \cdot 20 = 140$ und $140 < 342$ liest Mathias täglich mehr als 20 Seiten des Buches. Wegen $342 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$ ist unter den einschränkenden Bedingungen nur die Lösung $342 = 9 \cdot 38$ möglich. Mathias hat das Buch in 9 Tagen bei täglich 38 Seiten durchgelesen. Folglich wird er die letzte Seite des Buches am Donnerstag lesen.

Ma 8 ■ 2509 a) Für den Umfang des Quadrates gilt $u = 4 \cdot a = 4 \cdot 4{,}5\text{ cm} = 18\text{ cm}$. Der halbe Umfang des Rechtecks beträgt somit 9 cm. Da eine Rechteckseite 4,5 cm + 0,5 cm = 5 cm lang ist, hat die andere Rechteckseite die Länge 4 cm. Nun gilt $4{,}5^2 - 4 \cdot 5 = 0{,}25$. Der Flächeninhalt des Quadrates ist um 0,25 cm² größer als der des Rechtecks.
b) Das Quadrat habe die Seitenlänge x, das Rechteck die Seitenlängen a und b; aus $4x = 2a + 2b$ folgt $x = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$.

Ma 8 ■ 2510 $30 - 5 = 25$; wenigstens eines der Fächer Mathematik, Russisch, Deutsch war das Lieblingsfach von 25 Schülern. Nun gilt $x + y + 12 = 25$ und $x + 6 = y + 7$, also $x = 7$ und $y = 6$. 10 Schüler nannten Mathematik, 13 Schüler Russisch und 13 Schüler Deutsch als ihr Lieblingsfach.

Ma 8 ■ 2511 Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.
(1) Die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle DBC$ sind Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen; somit gilt $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle DBC$.
(2) Die Winkel $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle ACB$ haben beide als Peripheriewinkel über dem Durchmesser die Größe 90°; somit gilt $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle ACB$.
(3) Nach dem Außenwinkelsatz hat Winkel $\sphericalangle AEB$ die Größe $90° + \varphi$.
(4) Der Winkel $\sphericalangle BAC$ habe die Größe δ; dann hat der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe $90° - \delta$, der Winkel $\sphericalangle DAB$ die Größe $\varphi + \delta$. Nun gilt $90° - \delta + \varphi + \delta = 90° + \varphi$; folglich gilt für die Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle ABD$ $90° + \varphi$.

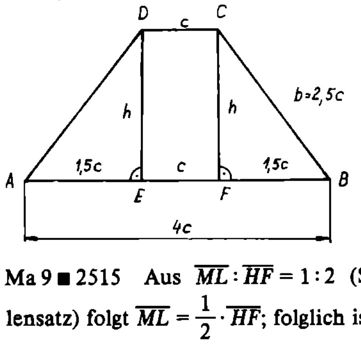
Ma 9 ■ 2512 Beispiel: Gegeben seien die Zahlen 8 und 9; dann gilt $7 \cdot 9 + 7 = 8 \cdot 10 - 10$, denn $70 = 70$.
Für die natürlichen Zahlen n und $n + 1$ gilt
$(n - 1) \cdot (n + 1) + (n - 1)$
$= n \cdot (n + 2) - (n + 2)$, denn
$n^2 - 1 + n - 1 = (n + 2) \cdot (n - 1)$,
$n^2 + n - 2 = n^2 + n - 2$
stellt eine Identität dar.

Ma 9 ■ 2513 Aus $ab(c - d) = 1984$ und $(a - 1) \cdot b \cdot (c + 1) = 1983$ folgt durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung
$ab(c - d) - b(a - 1)(c + 1) = 1$,
$b \cdot [a(c - d) - (a - 1)(c + 1)] = 1$,
also $b = 1$ und
$a(c - d) - (a - 1)(c + 1) = 1$,
also $d = \frac{c - a}{a}$.
Nun gilt $(a - 1) \cdot b \cdot (c + 1)$
$= 1 \cdot 3 \cdot 661$ und wegen $b = 1$
somit $(a - 1) \cdot (c + 1) = 3 \cdot 661$.
Die möglichen Belegungen sind aus der Tabelle ersichtlich:

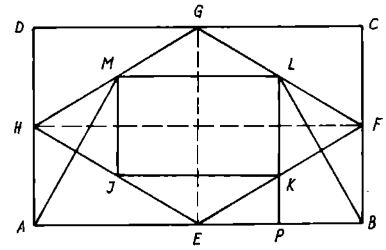
a	b	c	d
2	1	1982	990
4	1	660	164
662	1	2	negativ
1984	1	0	negativ

Somit existieren genau zwei solcher Quadrupel; sie lauten (2, 1, 1982, 990) und (4, 1, 660, 164).

Ma 9 ■ 2514 Aus $2b = 5c$ folgt $b = 2{,}5 \cdot c$; nach dem Satz des Pythagoras gilt $h^2 = (2{,}5 \cdot c)^2 - (1{,}5 \cdot c)^2 = 4c^2$, also $h = 2c$.
Ferner gilt $\frac{(4c + c) \cdot 2c}{2} = 20\text{ cm}^2$, also $c = 2$ cm. Daraus folgt $u = 2 \cdot 5c = 2 \cdot 10\text{ cm} = 20\text{ cm}$.



Ma 9 ■ 2515 Aus $\overline{ML} : \overline{HF} = 1 : 2$ (Strahlensatz) folgt $\overline{ML} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HF}$; folglich ist $\overline{ML}$ 10 cm lang. Analog dazu ist $\overline{KL}$ 8 cm lang, und $\overline{KP}$ ist 4 cm lang, also $\overline{LP}$ 12 cm lang. Wegen $\overline{BL}^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ ist $\overline{BL}$ 13 cm lang.
a) $A = \frac{20 + 10}{2} \cdot 12\text{ cm}^2 = 180\text{ cm}^2$
b) $u = (20 + 10 + 2 \cdot 13)\text{ cm} = 56\text{ cm}$.

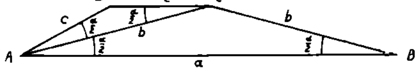


Ma 10/12 ■ 2516
a) $\sqrt{102} = \sqrt{100 + 2} \approx 10 + \frac{2}{20} = 10{,}1$;
$\sqrt{10{,}2} = \sqrt{9 + 1{,}2} \approx 3 + \frac{1{,}2}{6} = 3{,}2$;
$\sqrt{35{,}6} = \sqrt{36 - 0{,}4} \approx 6 - \frac{0{,}4}{12} = 5{,}97$.
b) Wir quadrieren die beiden Terme und erhalten
$a^2 + b$ und $\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$,
also $a^2 + b < a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$,
das heißt, der Näherungswert ist größer als der wahre Wert.

Ma 10/12 ■ 2517 Durch äquivalente Umformungen erhalten wir schrittweise
$\sqrt[x]{x + 77} = x - 1$, $x + 77$
$= (x - 1)^x$, $(x - 1)^x - (x - 1) = 78$,
$(x - 1) \cdot [(x - 1)^{x-1} - 1]$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$.
Nur $x = 4$ erfüllt diese Gleichung. Somit existiert genau eine Lösung.
Probe: $3 \cdot (3^3 - 1) = 78, 3 \cdot 26 = 78$.

Ma 10/12 ■ 2518 Der Winkel $\sphericalangle DAB$ habe die Größe α; nach Voraussetzung haben dann die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle CAB$ jeweils die Größe $\frac{1}{2} \cdot \alpha$. Wegen $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle DCA$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) hat Winkel $\sphericalangle DCA$ die Größe $\frac{1}{2} \cdot \alpha$. Wegen $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig, also hat Winkel $\sphericalangle CBA$ ebenfalls die Größe $\frac{1}{2} \cdot \alpha$.
Somit gilt $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, also $\overline{CD} : \overline{AC} = \overline{BC} : \overline{AB}$ bzw. $c : b = b : a$, $b^2 = a \cdot c$, $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Ma 10/12 ■ 2519 Es sei x die Maßzahl der Länge von $\overline{AD}$, y die Maßzahl der Länge von $\overline{BD}$, z die Maßzahl der Länge von $\overline{BC}$; dann gilt $(8{,}4 - x)^2 = x^2 + 4{,}2^2$, also $x = 3{,}15$, ferner $x \cdot y = 4{,}2^2$, also $y = 5{,}6$ und $z^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2$, also $z = 7$. Der Weg von C über A nach D ist also 8,4 km, der von C über B nach D aber 12,6 km lang und somit der längere von beiden.



Die Lösungen zum Physikwettbewerb veröffentlichen wir in Heft 4/85.

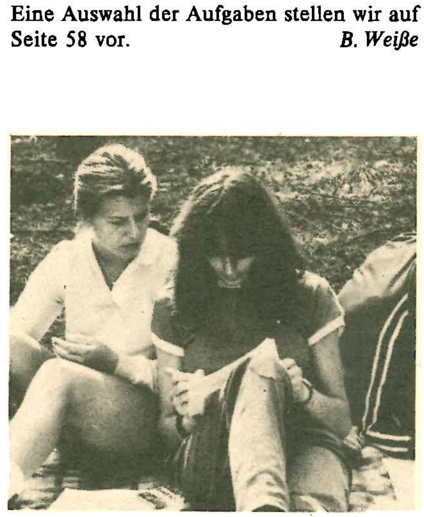
ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Ein mathematisches Ferienlager in der Volksrepublik Polen

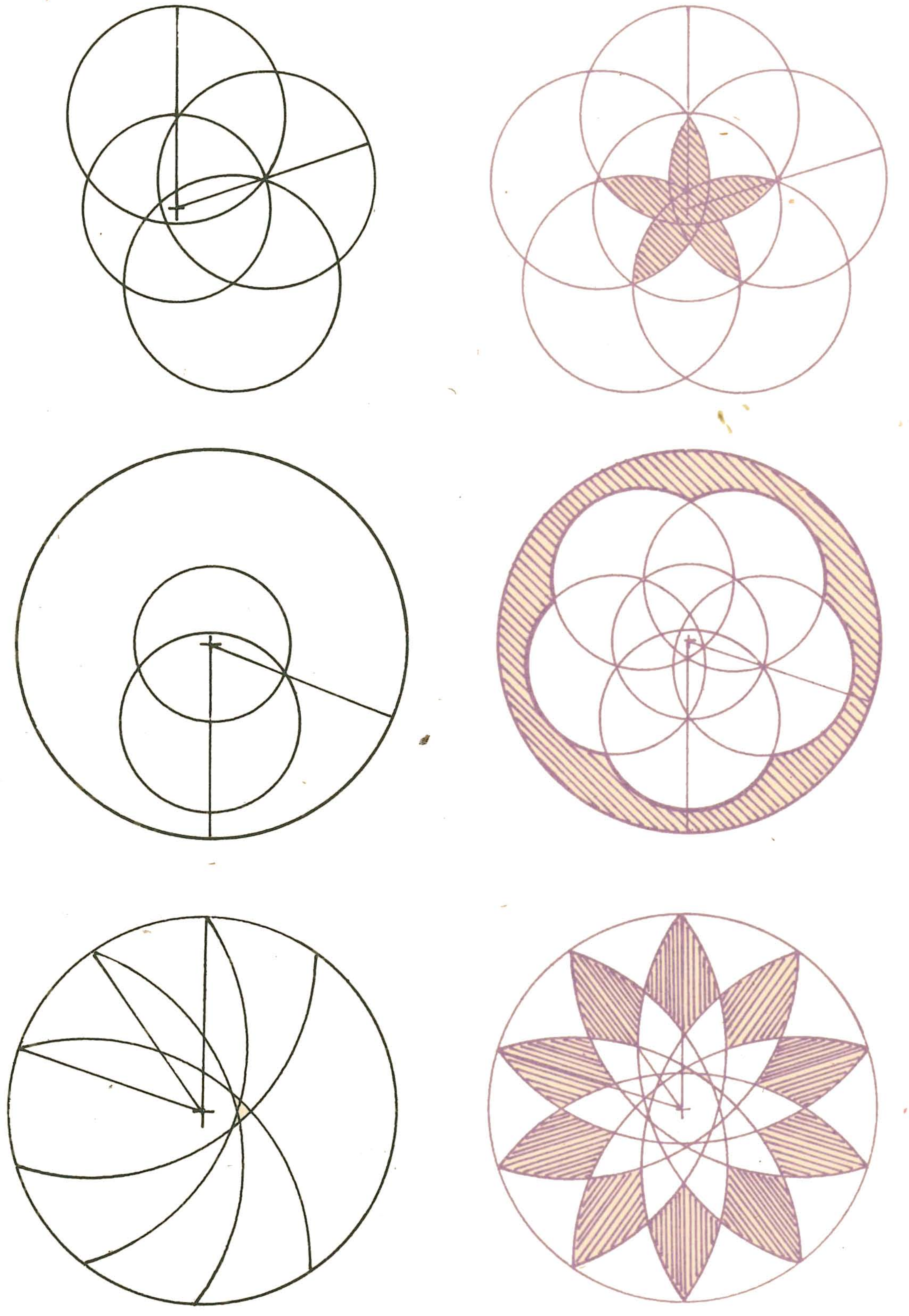
Vom 2. 8. bis 16. 8. 84 beteiligte sich eine Schülerdelegation des Bezirkes Cottbus von 11 Schülern der Klassenstufen 7 und 8 am Sommerlager des Klubs *Pythagoras* der Wojewodschaft Zielona Gora.
Das Kindererholungsheim *Wroniawy* bot durch seine großzügigen Räumlichkeiten und die weiträumige Parkanlage eine breite Palette für die mathematische und Freizeitgestaltung.
Unsere Schüler lebten sich schnell im Lager ein. Bei den zahlreichen gemeinsamen Veranstaltungen und Wettbewerben wurden anfängliche Hemmungen und Sprachschwierigkeiten schnell überwunden.
Die polnischen Schüler waren alle erstmalig in einem derartigen Lager. Für viele Kinder war es der erste Kontakt mit Problemen der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik.
Dieser Tatsache Rechnung tragend, war die inhaltliche Konzeption des Lagers vor allem darauf gerichtet, die Schüler in spielerischer Form an mathematische Aufgaben und Denkweisen heranzuführen.
Die Betreuung der Schüler erfolgte durch Studenten der Pädagogischen Hochschule Zielona Gora. Entsprechend dem Anliegen des Lagers waren das Studenten der Fachrichtungen Mathematik, Sport, Musik und Kunsterziehung, die gleichzeitig ein Praktikum absolvierten.
Die etwa 80 Kinder wurden in sieben Gruppen zu je 10 bis 12 Kindern eingeteilt, die untereinander während der gesamten Lagerzeit auf mathematischem und sportlichem Gebiet im Wettstreit standen. Der tägliche Appell und eine hervorragend gestaltete Wandzeitung gaben ständig Auskunft über den Stand der Kollektiv- und Einzelleistungen.
Folgende Formen der mathematischen Beschäftigung wurden praktiziert: Konsultationen – Stoffvermittlung motiviert durch Olympiadeaufgaben, Klausuren zur Bestenermittlung, Klausuren als Mannschaftswettbewerb zur Ermittlung der besten Gruppe, *Mathematisches Quiz* – ein publikumswirksamer mathematischer Wettbewerb, mathematische Vorträge (Jeder Schüler bereitete im Selbststudium einen Kurzvortrag über die Lösung einer Aufgabe, die Führung eines Beweises oder eine Darlegung zur mathematischen Theorie vor. Die Themen der Vorträge wurden an der Wandzeitung ausgehängt.), mathematischer Geländelauf (sieben Stationen waren anzulaufen, an denen jeweils eine sportliche Übung, Aufgaben zur *Ersten Hilfe*, Zeltbau oder ähnliches durchzuführen waren, aber auch jedesmal eine mathematische Aufgabe in der Gruppe gelöst werden mußte). Aus Zeitgründen konnte nicht durchgeführt werden: Wettspiel mit Scherzaufgaben, *internationaler Mannschaftswettbewerb* (je ein deutscher und polnischer Schüler lösen als Mannschaft gemeinsam eine Anzahl von Aufgaben, die in beiden Sprachen vorliegen).
Mehrere Exkursionen mit dem Bus, ein Singewettstreit, ein Lagerfeuer, ein Sportfest in fünf Disziplinen und Turniere im Fußball, Federball, Schach und Parteienball garantierten neben mathematischen Veranstaltungen für jeden Schüler viele Erlebnisse und gute Erholung.

Abschließend soll das *Mathematische Quiz* näher vorgestellt werden.

Zur Spielvorbereitung: Es werden zwei Mannschaften A und B gebildet (je 4 bis 6 Schüler). Eine Jury (3 bis 5 Schüler oder Pädagogen) bewertet die öffentlich an der Tafel gelösten Aufgaben mit 0 bis 5 Punkten. Beide Mannschaften erhalten 1 bis 2 Stunden vor Beginn des Wettbewerbes etwa 20 Aufgaben, die sie in dieser knappen Vorbereitungszeit bearbeiten.
Die Aufgaben müssen so ausgewählt sein, daß sie kurz und übersichtlich lösbar sind und keinen großen Schreibaufwand erfordern. Die kurze Vorbereitungszeit verlangt von den Mannschaften ein kollektives und konzentriertes Arbeiten.
Ein Verkürzen oder Weglassen der Vorbereitungszeit (bei leistungsstarken Schülern) verschärft die Wettbewerbsbedingungen.
Jede Mannschaft erhält Ziffernkarten zum Zusammenstellen der Zahlen 1 bis 20 (Aufgabennummern) sowie je eine rote und eine grüne Karte.
Die Jurymitglieder haben jeweils Karten mit den Zahlen 0 bis 5.
Spielregeln: Mannschaft A beginnt und stellt Mannschaft B eine Aufgabe (Nr. 1 bis 20). Mannschaft B hat zwei Möglichkeiten: Sie nimmt die Aufgabe an (grüne Karte) oder lehnt die Aufgabe ab (rote Karte). Im ersten Fall löst ein Schüler der Mannschaft B (die anderen können dabei helfen) die Aufgabe an der Tafel und bekommt die Lösung und deren Erläuterung von der Jury mit 0 bis 5 Punkten bewertet (Punktsumme aller Jurymitglieder).
Lehnt aber Mannschaft B die Aufgabe ab, muß Mannschaft A die von ihr selbst gestellte Aufgabe lösen, und Mannschaft B erhält −3 Punkte. Gelingt ihr das, wird die Lösung an der Tafel ebenfalls mit 0 bis 5 Punkten bewertet. Ist Mannschaft A aber nicht in der Lage, ihre eigene Aufgabe zu lösen, erhält sie 5 Minuspunkte.
Dann stellt Mannschaft B der Mannschaft A eine Aufgabe usw. Sieger ist die Mannschaft mit den meisten Punkten.
Unsere Cottbuser Delegation reiste mit vielen Eindrücken und Anregungen zurück. Vor allem die spielerischen Formen der mathematischen Beschäftigung sind in Schulwettbewerben (Ermittlung des Schulmeisters), aber auch in Spezialistenlagern der Kreisklubs anwendbar.
Eine Auswahl der Aufgaben stellen wir auf Seite 58 vor. *B. Weiße*



Mach's mal nach!



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 19 (1985) 3 · Seiten 49 bis 72