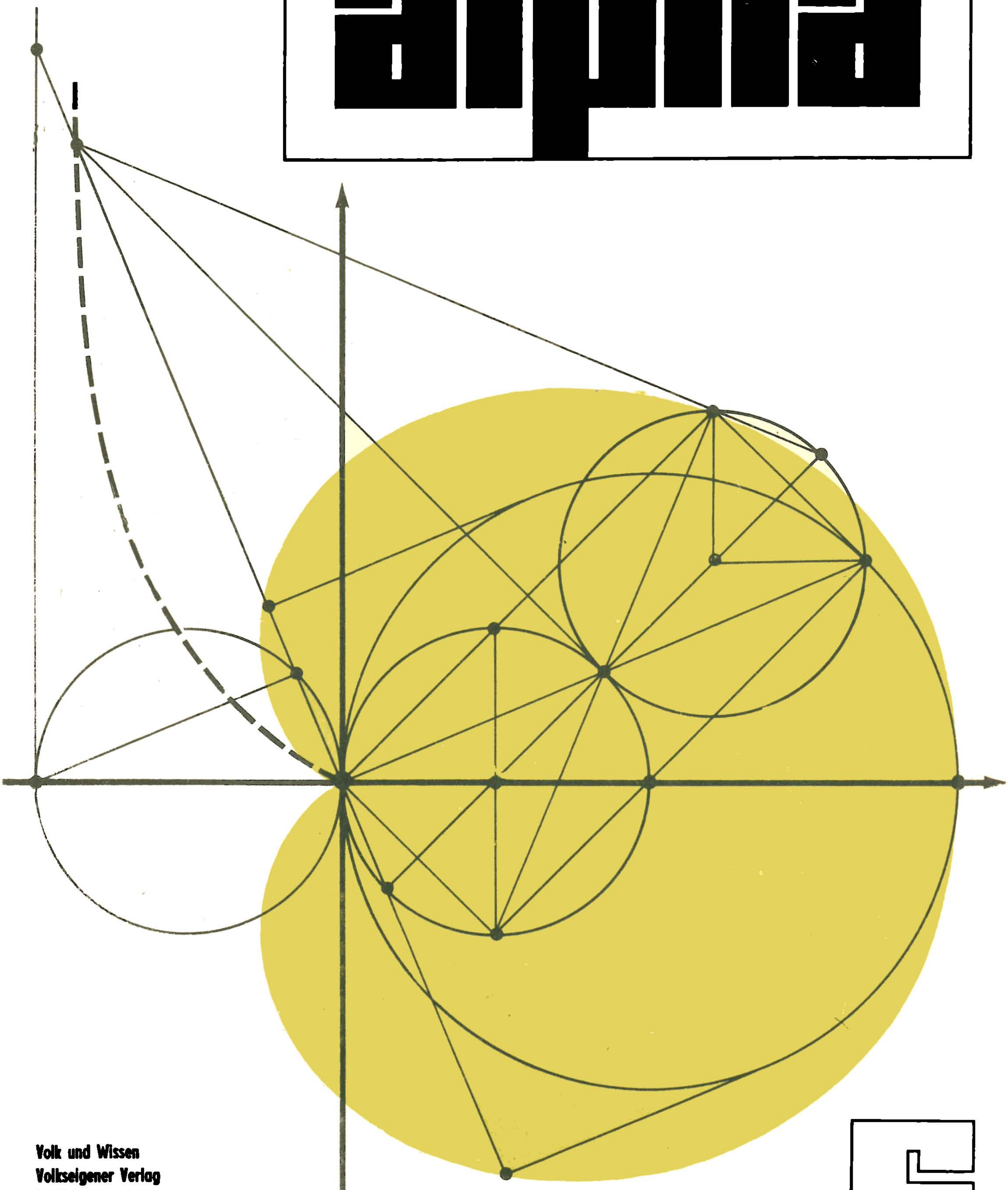
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
9. Jahrgang 1975
Preis 0,50 M
Index 31059

6

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Christa Günther/Uwe Seemann, Güstrow (S. 123/124); *Vignetten:* F. Fricke, Magdeburg (S. 126); W. Moese, L. Worabjow, G. Reisig, L. Rauwolf (S. 127/128); J. Lehmann, Leipzig (S. 135 u. 138)
Typographie: H. Tracksdorf

Satz: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik
Rollenoffsetdruck: GG Interdruck, Leipzig
Redaktionsschluß: 22. September 1975

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen

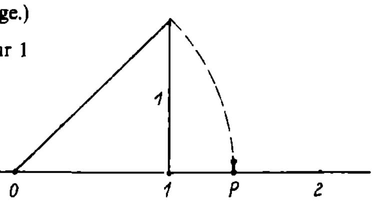
1. *Wir formulieren die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen*

Bei der Behandlung von Quadratwurzeln und bei Kreisberechnungen habt ihr in der 7. Klasse erstmalig mit reellen Zahlen gearbeitet. In der 9. Klasse sind eure Kenntnisse über reelle Zahlen vertieft worden. Unter anderem habt ihr folgende Definition kennengelernt (vgl. Lehrbuch 9. Klasse, Seite 21):
Eine reelle Zahl ist ein unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode.

Worin liegt nun eigentlich die wesentlich neue Qualität des Bereiches der reellen Zahlen im Vergleich zum Bereich der rationalen Zahlen? Zu jeder rationalen Zahl gibt es genau einen Punkt auf der Zahlengeraden. Die Menge der rationalen Zahlen ist durch die Ordnungsrelation $<$ dicht geordnet. Das heißt bekanntlich, daß zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen noch mindestens eine weitere rationale Zahl liegt. Hieraus folgt dann, daß zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen noch unendlich viele andere rationale Zahlen liegen. Folglich liegen auch auf der Zahlengeraden zwischen je zwei verschiedenen Bildpunkten rationaler Zahlen noch unendlich viele andere Bildpunkte von rationalen Zahlen.
Und doch gibt es auf der Zahlengeraden noch Punkte, die nicht Bildpunkte von rationalen Zahlen sind.

Der in der Figur 1 markierte Punkt P ist z. B. nicht Bildpunkt einer rationalen Zahl, und zwar deswegen nicht, weil es keine rationale Zahl x gibt, die der Gleichung $x^2=2$ genügt.[1]
(Haben wir also nur die rationalen Zahlen zur Verfügung, so hat die Strecke OP keine Länge.)

Figur 1



Die Menge der reellen Zahlen läßt sich jedoch so auf die Zahlengerade abbilden, daß es nicht nur zu jeder reellen Zahl genau einen Punkt auf der Zahlengeraden gibt, sondern darüber hinaus auch *jeder Punkt der Zahlengeraden Bildpunkt genau einer reellen Zahl ist* (vgl. Lehrbuch Klasse 9, Seite 21).

Durch diese markante Eigenschaft unterscheidet sich die Menge der reellen Zahlen grundlegend von der Menge der rationalen Zahlen.

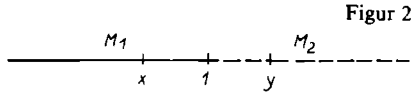
Wir wollen uns zunächst das Ziel setzen, diesen grundlegenden Unterschied noch auf eine andere Art zu beschreiben, ohne uns dabei auf die Zahlengerade beziehen zu müssen. Dazu betrachten wir einige Beispiele (Beispiel 1 bis 3).[2]

Beispiel 1:

$M_1=\{x|x<1 \text{ und } x \text{ rational}\}$ [3]
und $M_2=\{y|y>1 \text{ und } y \text{ rational}\}$
sind zwei Mengen mit folgenden Eigenschaften:

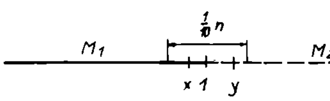
a) Beide Mengen sind nicht leer, d. h., sie enthalten jede wenigstens ein Element.
b) Für jedes Element x aus M_1 und jedes Element y aus M_2 gilt $x\leqq y$ (hier sogar $x<y$). (Figur 2)

Figur 2



c) Die Mengen M_1 und M_2 „kommen sich beliebig nahe". Das soll folgendes bedeuten: Zu jeder natürlichen Zahl n (und sei sie noch so groß gewählt) gibt es stets ein Element x aus M_1 und ein Element y aus M_2 derart, daß $y-x<\frac{1}{10^n}$ ist. (Figur 3)

Figur 3



Wir geben zunächst einige Erläuterungen zu den genannten Eigenschaften.

Zu (a): M_1 enthält z. B. die Zahl $\frac{3}{4}$, denn $\frac{3}{4}$ ist eine rationale Zahl, und es gilt $\frac{3}{4}<1$. Ebenso sind die Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{7}{11}, 0, -\frac{3}{7}, -19$ u. a. Elemente von M_1. Demgegenüber enthält M_2 z. B. die Zahlen $2, \frac{5}{4}$ und $2{,}35$; denn alle diese Zahlen sind rational und größer als 1.

Zu (b): Da jede Zahl aus M_1 kleiner als 1 und jede Zahl aus M_2 größer als 1 ist, gilt $x\leqq y$ für jedes $x\in M_1$ und jedes $y\in M_2$.

Zu (c): Schließlich sei beispielsweise die natürliche Zahl $n=3$ vorgegeben. Gibt es Zahlen x aus M_1 und y aus M_2, so daß $y-x<\frac{1}{10^3}$ ist?

Ja! Wir wählen z. B. $x=1-\frac{1}{10000}$ und $y=1+\frac{1}{10000}$.

Beide Zahlen sind rational. Ferner gilt $x<1$ und $y>1$. Also ist $x\in M_1$ und $y\in M_2$. Außerdem ist

$$y-x=1+\frac{1}{10000}-(1-\frac{1}{10000})=$$
$$=\frac{2}{10000}<\frac{10}{10000}=\frac{1}{1000}, \text{ also } y-x<\frac{1}{1000}.$$

Aufgabe 1:
Es sei $n=5$ vorgegeben. Bestimme Zahlen $x\in M_1$ und $y\in M_2$ mit $y-x<\frac{1}{10^5}$!

(*) Es gibt nun genau eine rationale Zahl s, die zwischen beiden Mengen liegt in dem Sinne, daß für jede Zahl $x\in M_1$ und für jede Zahl $y\in M_2$ gilt $x\leqq s\leqq y$.
Diese Zahl s ist die Zahl 1.

Betrachten wir noch ein anderes Paar von Mengen M_1, M_2 (*Beispiel 2*):
$M_1=\{x|x \text{ rational und } x>0 \text{ und } x^2\leqq 9\}$
$M_2=\{y|y \text{ rational und } y>0 \text{ und } y^2>9\}$.
Auch diese beiden Mengen haben die Eigenschaften (a), (b) und (c).

Aufgabe 2:
Gib Zahlen an, die zu M_1 bzw. M_2 gehören!
Eigenschaft (b) kann wie folgt nachgewiesen werden:
Aus $x\in M_1$ und $y\in M_2$ folgt $x^2\leqq 9$ und $9<y^2$, also $x^2<y^2$. Gäbe es nun ein $x\in M_1$ und ein $y\in M_2$ mit $x>y$, so wäre $x^2>y^2$ im Widerspruch zu $x^2<y^2$.
Also muß stets $x\leqq y$ gelten.
Überzeugen wir uns noch von der Gültigkeit der Eigenschaft (c)!

Es sei z. B. die Zahl $\frac{1}{100}$ vorgegeben. Die Zahlen $x=3$ und $y=3{,}001$ leisten das Verlangte. Es ist nämlich 3 eine positive rationale Zahl mit $3^2=9\leqq 9$; ebenso ist $3{,}001$ eine positive rationale Zahl und $3{,}001^2=$ $=9{,}006001>9$. Schließlich gilt $y-x=$ $=3{,}001-3=0{,}001<0{,}01$.

In gleicher Weise findet man zu jeder natürlichen Zahl n Zahlen $x\in M_1$ und $y\in M_2$ mit[4] $y-x<\frac{1}{10^n}$.

Auch hier gibt es wieder genau eine Zahl, die zwischen beiden Mengen liegt, nämlich die Zahl 3. Für jedes $x\in M_1$ und jedes $y\in M_2$ gilt also $x\leqq 3\leqq y$.

Es gibt allerdings Mengen M_1 und M_2 rationaler Zahlen, die zwar die Bedingungen (a), (b) und (c), aber *nicht* die Bedingung (*) erfüllen.
Dazu ein Beispiel (*Beispiel 3*):
$M_1=\{x|x \text{ positiv rational und } x^2<2\}$
$M_2=\{y|y \text{ positiv rational und } y^2>2\}$.

Aufgabe 3:
Zeige, daß M_1 und M_2 die Eigenschaften (a) und (b) haben!

Wir wollen auch (c) überprüfen. Ist $\frac{1}{10}$ (also $n=1$) vorgegeben, so leisten die Zahlen $x=1{,}41$ und $y=1{,}42$ das Verlangte, denn beide Zahlen sind positiv rational, es ist $x^2=1{,}9881<2$, $y^2=2{,}0164>2$ und schließlich $y-x=1{,}42-1{,}41=0{,}01<0{,}1$.

Ist $\frac{1}{100}$ vorgegeben, so betrachten wir die Zahlen

	a	a^2
	1,410	1,988100
	1,411	1,990921
	1,412	1,993744
Zahlen	1,413	1,996569
aus M_1	$\boxed{1{,}414}$	1,999396
	$\boxed{1{,}415}$	2,002225
	1,416	2,005056
Zahlen	1,417	2,007889
aus M_2	1,418	2,010724
	1,419	2,013561
	1,420	2,016400

Wir wählen also $x=1{,}414$ und $y=1{,}415$. Dann ist $x \in M_1$, $y \in M_2$ und $y-x=1{,}415-1{,}414=0{,}001<0{,}01$. Entsprechend verfahren wir, wenn die Zahl $\frac{1}{1000}$ vorgegeben ist. Dazu berechnen wir die Quadrate der Zahlen
1,4140; 1,4141; ...; 1,4149; 1,4150.
Wieder finden wir zwei Zahlen derart, daß das Quadrat der einen noch kleiner und das Quadrat der anderen schon größer als 2 ist. Die eine gehört zu M_1, die andere zu M_2, und ihre Differenz ist kleiner als $\frac{1}{1000}$.
Wenn man für eine beliebige natürliche Zahl n schon Zahlen $x \in M_1$ und $y \in M_2$ mit $y-x<\frac{1}{10^n}$ gefunden hat, so erhält man auf die gleiche Weise wie oben für die natürliche Zahl $n+1$ ebenfalls ein $x \in M_1$ und ein $y \in M_2$ mit $y-x<\frac{1}{10^{n+1}}$.
Wie steht es nun mit der Bedingung (*)?
Gäbe es eine rationale Zahl c zwischen den Mengen M_1 und M_2, so wären folgende Fälle möglich:
(1) $c^2=2$ (2) $c^2<2$ (3) $c^2>2$.
Wie wir bereits wissen, kann Fall (1) nicht eintreten, da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist.
Im Fall (2) würde die Zahl c zu M_1 gehören. Wir zeigen, daß es zu jeder Zahl aus M_1 eine noch größere gibt, die ebenfalls zu M_1 gehört.
Es sei x eine beliebige Zahl aus M_1. Wenn wir zeigen können, daß es eine positive Zahl z gibt, für die $(x+z)^2<2$ gilt, so sind wir fertig. Wegen $z>0$ ist nämlich $x+z>x$ und wegen $(x+z)^2<2$ ist $x+z \in M_1$.
Wie finden wir aber eine solche Zahl z?

Aufgabe 4:
Gib für die Zahlen $x=1$; 1,4; 1,41; 1,414 (Zahlen aus M_1) jeweils ein positives z an, so daß $(x+z)^2<2$ gilt! Sicher muß z der Ungleichung $0<z<1$ genügen. Wenn diese Abschätzung für z auch noch viel zu grob ist, so hilft sie uns jedoch schon, unsere weiteren Überlegungen zu vereinfachen. Es ist
$(x+z)^2=x^2+2xz+z^2=x^2+z(2x+z)$.

Wegen $1{,}5 \in M_2$ und $0<z<1$ gilt gewiß
$$2x+z<2\cdot 1{,}5+1=4 \text{ und damit}$$
$$(x+z)^2<x^2+4z.$$
Wählen wir z nun so, daß
i) $x^2+4z<2$ gilt,
so ist natürlich auch $(x+z)^2<2$. Die Ungleichung i) ist für $z<\frac{1}{4}(2-x^2)$ erfüllt.
Folglich erhalten wir
$$(x+z)^2<x^2+4z<x^2+4\cdot\frac{1}{4}(2-x^2)=2.$$
Die Zahl $x+z$ mit $0<z<\frac{1}{4}(2-x^2)$ ist also größer als x und gehört auch noch zu M_1. Somit finden wir zu jeder Zahl $x \in M_1$ – also auch zu c – eine noch größere Zahl in M_1. Das ist aber ein Widerspruch zu der Bedingung (*), denn für jede Zahl $x \in M_1$ müßte $x \leq c$ gelten.

Aufgabe 5:
Zeige analog, daß auch Fall (3) nicht eintreten kann! Damit erhalten wir: Es gibt keine rationale Zahl, die zwischen den Mengen M_1 und M_2 liegt.
Daß es bei diesem Beispiel, wie auch bei vielen anderen keine rationale Zahl gibt, die zwischen beiden Mengen liegt, ist der entscheidende Mangel des Bereichs der rationalen Zahlen und der Grund dafür, diesen Zahlenbereich zum Bereich der reellen Zahlen zu erweitern. Im Bereich der reellen Zahlen gilt nun der folgende Satz 1: Sind M_1 und M_2 Mengen reeller Zahlen mit den Eigenschaften a) bis c), so gibt es stets genau eine reelle Zahl, die zwischen beiden Mengen liegt.
In diesem Satz wird die wichtige Eigenschaft des Bereiches der reellen Zahlen formuliert, die – wie wir an Beispielen gesehen haben – im Bereich der rationalen Zahlen nicht gilt. Weiter oben hatten wir die wichtigste Eigenschaft der reellen Zahlen unter Zuhilfenahme der Zahlengeraden formuliert. Mit dem Satz 1 haben wir eine von der Zahlengeraden unabhängige rein arithmetische Beschreibung der wichtigsten Eigenschaft der reellen Zahlen erhalten. Zahlreiche mathematische Fragestellungen gehen auf diesen wichtigen Satz zurück. Einige dieser Probleme werden bereits in der Schule behandelt.
In einem 2. Teil (Heft 1/76) sollen einige Beispiele dargelegt werden, bei denen der Satz 1 angewendet wird.

H. Lemke/W. Stoye

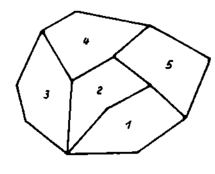
[1] Diese Behauptung wurde im Unterricht der 9. Klasse bewiesen (vgl. Lehrbuch Klasse 9, Seite 12)
[2] Die hierbei verwendeten Skizzen (Figur 2 und 3) dienen nur zur Veranschaulichung des betreffenden Sachverhalts.
[3] Lies: M_1 ist die Menge aller x, für die gilt: $x<1$ und x rational.
[4] Man wähle etwa $x=3$ und $y=3+\frac{1}{10^{n+1}}$.

Eine Aufgabe von Prof. em. Dr. Dr. h. c. Helmut Heinrich

Sektion Mathematik
der Technischen Universität Dresden

▲1423 a) Bei einer Uhr seien (z. B. infolge schlechter Beleuchtungsverhältnisse) der große und der kleine Zeiger leicht zu verwechseln. Wie oft innerhalb von 12 Stunden und zu welchen Zeiten liefert die Vertauschung der beiden Zeiger eine korrekte Zeigerstellung?
Anmerkung: Da der große Zeiger in einer Stunde, der kleine Zeiger in 12 Stunden einen Umlauf vollführt und gefordert werden muß, daß zur Zeit 0 h 0 min beide Zeiger in Nullrichtung zeigen, heißt eine Zeigerstellung korrekt, wenn die Maßzahlen α und β der in Grad gemessenen Winkel, die die beiden Zeiger zur Zeit s h m min mit der Nullrichtung einschließen, der Relation
$\alpha=6\,m$ (großer Zeiger)
$\beta=30\,s+\frac{1}{2}m$ (kleiner Zeiger)
$s \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$
$0 \leq m<60$ genügen. (1)

▲1423 b) Die Maschen eines einen einfach zusammenhängenden flächenhaften Bereich B bedeckenden Netzpolygons N (Bild 1) seien sämtlich Vielecke gleicher Eckenzahl n, und N sei so beschaffen, daß jede Kante (n-Eck-Seite) entweder ganz dem Rande von B angehört oder zwei benachbarten Maschen gemeinsam ist. Es seien:
r die Anzahl der auf dem Rand von B liegenden Kanten (Maschenseiten)
[= Anzahl der auf dem Rand von B liegenden Knoten (Maschenecken)]
s die Anzahl der im Innern von B liegenden Kanten.
p die Anzahl der im Innern von B liegenden Knoten.
Dann gilt stets die Relation.
$$r-(n-2)s+np=n.$$



$n=5$, $r=9$, $s=8$, $p=4$

$r-(n-2)s+np=9-3\cdot 8+5\cdot 4=5$

VIII. Internationale Physikolympiade

7. bis 17. Juli 1975 (Güstrow/Berlin)

Theoretische Aufgaben,
1. Klausur (9. Juli)

1. An eine vertikale Achse A ist unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ein seitlicher Arm angesetzt.

Die Anordnung kann um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Auf dem Arm befindet sich ein verschiebbarer Körper mit dem Gewicht $G=m\cdot g$. Die Verschiebung erfolgt unter Reibung mit dem Haftreibungskoeffizienten μ.
($\mu=\tan\beta$; β: Reibungswinkel)
a) Für welche Winkel α befindet sich der Körper bei $\omega=0$ in Ruhe und bei welchen Winkeln α befindet er sich in Bewegung?
b) Die Anordnung rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.
(Während einer Rotationsbewegung ändert sich der Winkel α nicht.)
Für welche Lagen befindet sich der Körper relativ zum Arm in Ruhe?
Benutzen Sie bei der Rechnung die folgenden Beziehungen:
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\alpha\cdot\sin\beta$

Prof. Dr. Kremp, Päd. Hochschule Güstrow

2. Für eine dicke Glaslinse (Brechzahl n) in Luft mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 und dem Scheitelabstand d ist die Brennweite f der Linse durch folgenden Ausdruck gegeben

$$f=\frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}$$

Anmerkung: $r_i>0$ bedeutet: Krümmungsmittelpunkt M_i liegt rechts vom Flächenscheitel S_i; $r_i<0$ bedeutet: Krümmungsmittelpunkt M_i liegt links vom Flächenscheitel $S_i\cdot(i=1,2)$.
Für bestimmte Anwendungen ist die Unabhängigkeit der Brennweite von der Wellenlänge λ erwünscht.
a) Für wieviel verschiedene Wellenlängen kann man dieselbe Brennweite erreichen?
b) Stellen Sie eine Beziehung zwischen r_i, d und den Brechzahlen auf, für die die geforderte Wellenlängenunabhängigkeit erfüllbar ist, und diskutieren Sie diese!
Zeichnen Sie eine mögliche Linsenform! Geben Sie die Lage der Krümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 an!
c) Zeigen Sie, daß sich für eine Plankonvexlinse eine bestimmte Brennweite nur für eine Wellenlänge erreichen läßt!
d) Geben Sie für 2 weitere Fälle Bedingungen für die Parameter der dicken Linse an, für die man eine bestimmte Brennweite nur mit einer Wellenlänge realisieren kann! Berücksichtigen Sie dabei den physikalischen und den geometrischen Sachverhalt!

Prof. Dr. Klebe, Päd. Hochschule Potsdam

3. Lösen Sie folgende ebene ionenoptische Aufgabe:
Aus einem Punkt Q tritt ein in der Zeichenebene divergierendes Strahlenbündel von einfach positiv geladenen Ionen (Ladung $+e$) gleicher konstanter Masse m aus. Sie wurden durch die Spannung U beschleunigt. In einem homogenen Magnetfeld der Induktion B, welches die Zeichenebene senkrecht von hinten nach vorn durchsetzt, werden die Ionen abgelenkt.
Die Begrenzung des Magnetfeldes soll so beschaffen sein, daß die ursprünglich divergierenden Ionen sich als konvergierende Strahlen im Punkte A ($\overline{QA}=2a$) schneiden. Der Verlauf der Ionenbahnen sei symmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechten auf $\overline{QA}$.
Von den möglichen Magnetfeldbegrenzungen ist der Typ zu betrachten, bei dem ein zusammenhängendes Magnetfeld in der Umgebung der Mittelsenkrechten wirkt und sich die Punkte Q und A im feldfreien Bereich befinden.
a) Geben Sie den Krümmungsradius R der Teilchenbahnen im Magnetfeld als Funktion der Spannung U und der Induktion B an!
b) Geben Sie charakteristische Eigenschaften der Teilchenbahnen in der oben beschriebenen Anordnung an!
c) Gewinnen Sie die Magnetfeldbegrenzungen durch geometrische Konstruktionen für die Fälle

$$R<a, \qquad R=a, \qquad R>a!$$

d) Geben Sie die allgemeine Gleichung für die Magnetfeldbegrenzung an!

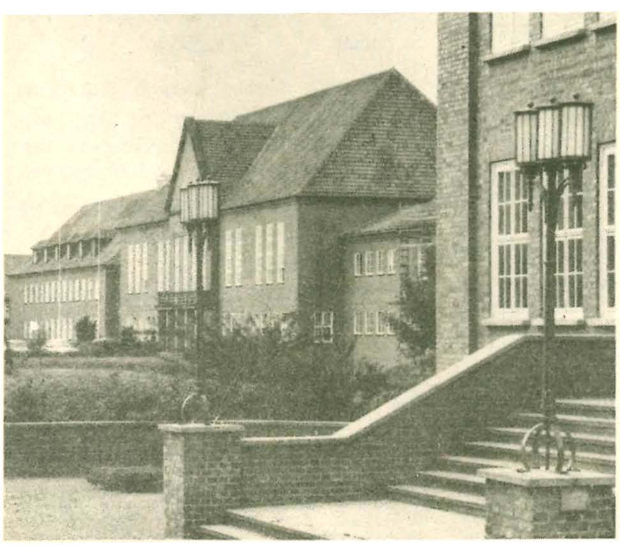
Prof. Dr. Bernhard,
Humboldt-Universität zu Berlin

Experimentelle Aufgabe,
2. Klausur (11. Juli)

4. Aus Platzgründen müssen wir auf die Veröffentlichung des Textes der Aufgabe 4 sowie der Lösungen verzichten. Allen interessierten *Jungen Physikern* empfehlen wir, sich an ihren Physiklehrer zu wenden, der

links: Päd. Hochschule „Liselotte Herrmann",

rechts: Delegation der DDR (v. l. n. r.): Volker Fritzsche – 1. Preis (Kl. 12, Spezialkl. der Martin-Luther-Universität Halle); Prof. Dr. Wendt (Delegationsleiter, PH Güstrow); Martin Hanke – 2. Preis (Kl. 12, EOS „Heinrich Hertz", Berlin); Jörg Bergmann – 1. Preis (Kl. 12, Spezial-OS „M. A. Nexö" Dresden); Matthias Wagner – 1. Preis (Kl. 12, Spezialschule „Carl Zeiss" Jena); Udo Walta (Päd. Betreuer, PH Güstrow); Hans-Georg Martin – 3. Preis (Kl. 11, Spezialschule „Carl Zeiss" Jena)

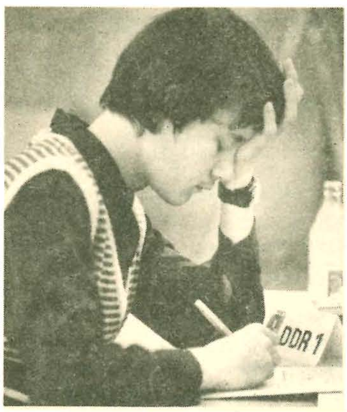


sicher das umfassende Material über die VIII. IPO aus Heft 10/75, Zeitschrift „Physik in der Schule", zur Verfügung stellt.

Ergebnisse der VIII. IPO

Land	Gesamtpunktzahl	Preis 1.	Preis 2.	Preis 3.	Anerkennungsurkunden
VR Bulgarien	109	–	–	–	3
DDR	186	3	1	1	–
Bundesrepublik Deutschland	97	–	–	–	1
Rep. Frankreich	144	–	1	2	2
VR Polen	164	–	1	4	–
SR Rumänien	135	1	1	–	1
ČSSR	146	1	1	1	1
Ungarische VR	169	1	2	1	1
UdSSR	176	1	2	2	–
	zus.	7	9	11	9

Punktespiegel: 1. Preis – 50 bis 39 Punkte, 2. Pr. – 38 bis 34 P., 3. Pr. – 33 bis 28 P., Anerkennung – 27 bis 22 P.



Wettbewerbsatmosphäre

Aus dem Programm: Exkursionen nach Rostock, Schwerin, Berlin und Potsdam.
Unser Foto: Kranzniederlegung am Denkmal zu Ehren der Häftlinge des KZ Sachsenhausen (Muess bei Schwerin)

Extremwertaufgaben, die jeder lösen kann

Wir wollen unter allen Rechtecken mit demselben Umfang $U = 20$ cm das flächengrößte ermitteln (Bild 1).

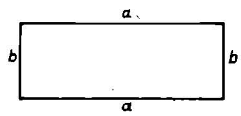


Bild 1

Sprecht eine Vermutung aus, wie wohl die Seitenlängen a und b des Rechteckes zu wählen sind!

Wir wissen, daß $U = 2(a+b) = 20$, also $a+b = 10$ ist. Der Flächeninhalt A des Rechtecks ergibt sich aus $A = a \cdot b$. Daher können wir die obige Frage auch so formulieren:

Welches von allen Paaren $(a; b)$ positiver Zahlen der Summe 10 hat das größte Produkt? Solche Paare sind z. B.

$$(1; 9); (8; 2); (5; 5); (\frac{7}{2}; \frac{13}{2}); (9{,}9; 0{,}1)$$

mit den dazugehörigen Produkten

$$9; 16; 25; \frac{91}{4}; 0{,}99.$$

Ihr habt natürlich längst gemerkt, daß das größte Produkt vermutlich für $a = b = 5$ auftritt. Wir wollen nun beweisen, daß das Produkt zweier positiver Zahlen a, b der konstanten Summe s stets für $a = b = \frac{s}{2}$ maximal wird.

Für $a = b = \frac{s}{2}$ ergibt sich als Produkt $a \cdot b = \frac{s^2}{4}$.

Für jede andere Wahl von a und b mit $a + b = 5$ ergibt sich ein kleineres Produkt; denn nehmen wir etwa $a = \frac{s}{2} + d$ mit $0 < d < \frac{s}{2}$, so bleibt für den zweiten Faktor $b = \frac{s}{2} - d$, und als Produkt erhalten wir $a \cdot b = (\frac{s}{2} + d)(\frac{s}{2} - d) = \frac{s^{2^2}}{4} - d^2$, welches wegen $d^2 > 0$ stets kleiner ist als $\frac{s^2}{4}$.

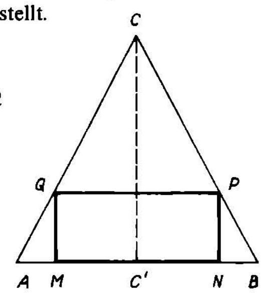
Wir erhalten also als Resultat den

Satz: Unter allen Paaren positiver Zahlen a, b mit konstanter Summe s ist das Paar $(\frac{s}{2}; \frac{s}{2})$ dasjenige mit dem größten Produkt.

Mit Hilfe dieses Satzes lösen wir einige Aufgaben aus der Geometrie bzw. aus der Physik.

Beispiel 1: In ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ soll ein Rechteck $MNPQ$ von maximalem Inhalt so gelegt werden, wie in Bild 2 dargestellt.

Bild 2



Wir bezeichnen mit c die Länge der Basis AB des Dreiecks, mit h die Länge seiner Höhe CC' und mit x bzw. y die gesuchten Längen der Seiten $MN = QP$ bzw. $MQ = NP$ des Rechtecks.

Was weißt du über die Längen der Strecken AC' und AM? Wenn du diese Frage beantwortet hast, findest du wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AMQ$ und $\triangle AC'C$ (Begründung?) die Proportion:

$$y : (\frac{c}{2} - \frac{x}{2}) = h : \frac{c}{2},$$

die wir nach y auflösen und erhalten

$$y = \frac{h}{c}(c - x)$$

Rechne das nach!

Der Inhalt A des Rechtecks $MNPQ$ ergibt sich dann zu

$$A = xy = \frac{h}{c}x(c - x).$$

Da $\frac{h}{c}$ eine Konstante ist, hängt die Größe von A allein von dem Produkt $x(c-x)$ ab. Erfüllen die Faktoren des Produktes die Voraussetzungen des obigen Satzes? Ja, denn es ist $x > 0$ und $c - x > 0$ wegen $c > x$ und $x + (c - x) = c$, c konstant. Nach unserem Satz hat demnach das Rechteck $MNPQ$ maximalen Flächeninhalt für

$$x = c - x = \frac{c}{2},$$

woraus sich $y = \frac{h}{2}$ und als maximaler Flächeninhalt $A_{max} = \frac{1}{4}hc$ ergeben.

Das nächste Beispiel verlangt Kenntnisse aus der Körperberechnung und dem Rechnen mit Wurzeln. Wer das nicht kann, liest gleich bei Beispiel 3 weiter.

Beispiel 2: Welcher unter allen geraden Kreiskegeln konstanter Oberfläche A hat das größte Volumen V?

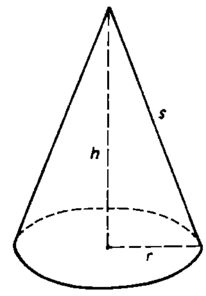
Wir bezeichnen mit r die Länge des Grundkreisradius des Kegels und mit h seine Höhe. Die Formeln für Volumen V und Oberfläche A eines Kreiskegels könnt ihr dem „Tafelwerk" entnehmen:

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h \qquad A = \pi r(r+s)$$

Dabei bezeichnet s die Länge einer Mantellinie; nach dem Satz des *Pythagoras* gilt $s^2 = r^2 + h^2$ oder $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ (Bild 3).

Wir lösen nun die Formel für die Oberfläche A nach h auf und setzen den erhaltenen Ausdruck in die Formel für das Volumen V ein:

Bild 3



$$\pi r(r+\sqrt{r^2+h^2})=A$$
$$r+\sqrt{r^2+h^2}=\frac{A}{\pi r}$$
$$\sqrt{r^2+h^2}=\frac{A}{\pi r}-r=\frac{A-\pi r^2}{\pi r}$$
$$r^2+h^2=\frac{(A-\pi r^2)^2}{\pi^2 r^2}$$
$$h=\sqrt{\frac{(A-\pi r^2)^2}{\pi^2 r^2}-r^2}=$$
$$=\frac{1}{\pi r}\sqrt{A(A-2\pi r^2)}$$

Also: $$V=\frac{\pi}{3}r^2\cdot\frac{1}{\pi r}\sqrt{A(A-2\pi r^2)}=$$
$$=\frac{\sqrt{A}}{3}\sqrt{r^2(A-2\pi r^2)}.$$
$$V=\frac{\sqrt{A}}{3}\sqrt{2\pi r^2\left(\frac{A}{2\pi}-r^2\right)}=\frac{\sqrt{2\pi A}}{3}\sqrt{r^2\left(\frac{A}{2\pi}-r^2\right)}$$

Wer hat bemerkt, mit welchem Ziel die Umformungen in V vorgenommen wurden? Ganz recht, auf den letzten Ausdruck können wir unseren Satz anwenden, denn wegen der Konstanz von $\frac{\sqrt{2\pi A}}{3}$ hängt V allein vom Produkt $r^2(\frac{A}{2\pi}-r^2)$ ab, und zwar ist V um so größer, je größer dieses Produkt ist. Da die Radiuslänge r die Ungleichung $r^2<\frac{A}{2\pi}$ erfüllt (Begründung?), sind beide Faktoren des Produktes positiv und haben die konstante Summe $\frac{A}{2\pi}$. Also nimmt das Volumen V seinen größten Wert an für $r^2=\frac{A}{2\pi}-r^2=\frac{A}{4\pi}$, woraus $r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ folgt. Das maximale Volumen beträgt dann $V_{max}=\frac{A}{12}\sqrt{\frac{2A}{\pi}}$. Rechne das nach!

Aus dem Ansatz
$$V_{max}=\frac{A}{12}\sqrt{\frac{2A}{\pi}}=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{A}{4\pi}\cdot h$$
ergibt sich
$$h=\sqrt{\frac{2A}{\pi}}=2r\sqrt{2}.$$

Wir erhalten also das Resultat:
Von allen geraden Kreisregeln konstanter Oberfläche besitzt derjenige das maximale Volumen, für dessen Radiuslänge r und Höhenlänge h die Proportion
$$h:2r=\sqrt{2}:1 \text{ gilt.}$$

Beispiel 3: Die Leistung N einer Turbine hängt von der Zahl n der Umdrehungen ab; es gilt $N=\alpha n-\beta n^2$, wo α, β positive Konstanten sind. Bei welcher Umdrehungszahl erreicht die Turbine maximale Leistung? Forme zunächst den Ausdruck für N so um, daß unser Satz anwendbar ist, und prüfe, ob alle Voraussetzungen erfüllt sind!

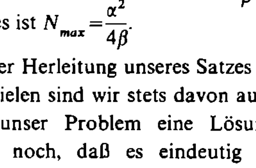
Sicher hast du N umgeformt zu $N=\beta n(\frac{\alpha}{\beta}-n)$, worin $n(\frac{\alpha}{\beta}-n)$ für $0<n<\frac{\alpha}{\beta}$ ein Produkt aus zwei positiven Faktoren mit konstanter Summe $\frac{\alpha}{\beta}$ ist. Die Turbine erreicht also ihre maximale Leistung N_{max} für $n=\frac{\alpha}{\beta}-n=\frac{\alpha}{2\beta}$, und es ist $N_{max}=\frac{\alpha^2}{4\beta}$.

Bei der Herleitung unseres Satzes und in den Beispielen sind wir stets davon ausgegangen, daß unser Problem eine Lösung besitzt, mehr noch, daß es eindeutig lösbar ist. Dieses Vorgehen legt uns der „gesunde Menschenverstand" nahe, und diese Annahme ist auch bei den nachfolgenden Aufgaben gerechtfertigt. Bei schwierigen Extremwertaufgaben ist es notwendig, Untersuchungen zur Existenz und gegebenenfalls zur Eindeutigkeit von Lösungen zu machen, doch muß man sich dazu in der Differentialrechnung auskennen.

Wenn es dir bis hierher Spaß gemacht hat, kannst du deine Kräfte noch an den folgenden Aufgaben messen.

▲1▲ Welches von allen Dreiecken mit einer gemeinsamen Seite AB und gemeinsamem Umkreis, dessen Mittelpunkt M auf dieser gemeinsamen Seite liegt, hat den größten Flächeninhalt (Bild 4)?

Bild 4



▲2▲ Für welchen Wert von x aus dem Intervall $-3<x<4$ nimmt die Funktion mit der Gleichung $y=f(x)=(x-4)^4(x^2+6x+9)^2$ ihren maximalen Funktionswert an?

▲3▲ Wir wollen nun die am Anfang gestellte Frage in dem Sinne umkehren, daß wir nach demjenigen unter allen Paaren positiver Zahlen a, b mit konstantem Produkt fragen, das die kleinste Summe hat.

a) Beweise zunächst den Satz: Die Summe zweier positiver Zahlen, deren Produkt 1 ist, ist nicht kleiner als 2. Wann tritt das Gleichheitszeichen ein?

Anleitung: Es ist also zu zeigen, daß für positive Zahlen c, d mit $cd=1$ stets $c+d\geqq 2$ gilt. Wegen $cd=1$ kannst du $d=\frac{1}{c}$ setzen; sodann benutze die Ungleichung $(c-1)^2\geqq 0$.

b) Nun können wir zur ursprünglichen Fragestellung zurückkehren. Vielleicht versuchst du erst einmal, aus der Betrachtung konkreter Beispiele eine Vermutung zu formulieren.

Anleitung für den Beweis: Es ist zweckmäßig, das konstante Produkt ab der Zahlen a, b mit p^2 zu bezeichnen: $ab=p^2$.

Um deine Vermutung zu beweisen, daß $a+b$ minimal wird für $a=b=p$, setze $a=pc$ mit $0<c<p$. Wie ist dann b zu setzen? Nun kannst du den unter a) bewiesenen Satz anwenden.

c) Welches unter allen Rechtecken konstanten Flächeninhalts hat den kleinsten Umfang?

▲4▲ Die in Aufgabe 3a) bewiesene Ungleichung $c+d\geqq 2$ für positive Zahlen c, d mit $c\cdot d=1$, die im Zusammenhang mit Aufgabe 3 den Charakter eines Hilfssatzes hat, ist außerordentlich wichtig und vielseitig anwendbar. Davon wollen wir uns sogleich überzeugen!

a) Zeige: Das geometrische Mittel $G=\sqrt{ab}$ zweier positiver Zahlen a, b ist nicht größer als ihr arithmetisches Mittel
$$A=\frac{a+b}{2}:\sqrt{ab}\leqq\frac{a+b}{2}.$$
Wann tritt das Gleichheitszeichen ein?

Anleitung: Es gilt $\frac{a}{G}\cdot\frac{b}{G}=1$.

b) Den Satz aus Aufgabe 3a) kann man auf n positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ausdehnen und zeigen: Wenn $a_1 a_2\cdot\ldots\quad a_n=1$, dann $a_1+a_2+\ldots+a_n\geqq n$. Wenn du die Methode der vollständigen Induktion beherrschst, kannst du den Beweis versuchen.

Die Beweisidee wird deutlich, wenn wir hier unter Benutzung der Gültigkeit des Satzes für $n=2$ zeigen, daß er auch für $n=3$ gilt: Seien a_1, a_2, a_3 drei positive Zahlen mit $a_1a_2a_3=1$. Sind alle $a_i=1\,(i=1, 2, 3)$, so ist $a_1+a_2+a_3=3$. Sind nicht alle Faktoren gleich 1, so muß es solche geben, die kleiner als 1, und solche, die größer als 1 sind. Sei etwa $a_1>1$, $a_2<1$, so formen wir die zu untersuchende Summe um: $a_1+a_2+a_3=$
$=(a_1a_2+a_3)+1+a_1-a_1a_2+a_2-1$
$=(a_1a_2+a_3)+1+(a_1-1)(1-a_2)$.

Wegen $(a_1a_2)a_3=1$ gilt nach Aufgabe 3a): $a_1a_2+a_3\geqq 2$, folglich $a_1+a_2+a_3\geqq 2+1+$ $+(a_1-1)(1-a_2)$, mithin $a_1+a_2+a_3>3$, da der letzte Summand $(a_1-1)(1-a_2)$ wegen $a_1>1$ und $a_2<1$ gewiß positiv ist.

c) Mit dem eben gewonnenen Ergebnis kannst du die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel gleichfalls auf drei (bzw. auf n) positive Zahlen ausdehnen. Der Beweis verläuft ebenso wie in 4a).

d) Nun kannst du sogar untersuchen, welcher von allen Quadern mit den Kantenlängen a, b, c bei konstanter Summe $a+b+c=s$ größtes Volumen hat.

Wie zu erwarten war, tritt dies für $a=b=c=\frac{s}{3}$ ein, das maximale Volumen ist $V_{max}=(\frac{s}{3})^3$.

Die Ungleichungen, die in den Aufgaben 4a) bis 4c) untersucht wurden, gestatten noch viele wichtige Folgerungen. Vielleicht findest du einige davon? *J. Hronik/H. Kästner*

Wer löst mit alpha-Wettbewerb

Na, sagen Sie schon,
wie haben Sie es gemacht?

Letzter Einsendetermin: 8. März 1976

Ma 5 ▪ 1424 Aus einem Draht von jeweils 120 cm Länge soll einmal das Kantenmodell eines Würfels, zum anderen das Kantenmodell eines Quaders mit einer Länge von $a = 15$ cm und einer Breite von $b = 10$ cm hergestellt werden. Um wieviel Kubikzentimeter unterscheiden sich die Rauminhalte dieser beiden Körper?

Mathematikfachlehrer A. Weninger, Knittelfeld/Österreich

Ma 5 ▪ 1425 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 25$ cm und $b = 16$ cm. Ein zu diesem Rechteck flächengleiches Rechteck $A'B'C'D'$ habe die Seitenlänge $a' = 40$ cm. Um wieviel Zentimeter ist der Umfang u' des Rechtecks $A'B'C'D'$ größer als der des Rechtecks $ABCD$?

Mathematiklehrer Gerold Friedel, Choren

Ma 5 ▪ 1426 Welche natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, f, g, h, j, k erfüllen sämtliche der nachstehenden Gleichungen?

(1) $b : h = k$, (5) $a + j + e = 16$,
(2) $e - j = k$, (6) $d + a = 6$,
(3) $a + c = e$, (7) $b = e + c$,
(4) $f + d = f$, (8) $j = g : j$,
(9) $f = (c + g) : h$,
(10) $a + j = 9$.

Schüler Matthias Rogall, Dresden

Ma 5 ▪ 1427 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{V I E R} \\ +\,\text{V I E R} \\ \hline \text{A C H T} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Additionsaufgabe erhält, deren Summe so groß wie nur möglich sein soll. Gleiche Buchstaben bedeuten dabei gleiche Grundziffern, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern.

Schülerin Uta Eimecke, OS Domersleben (Kl. 7)

Ma 5 ▪ 1428 Für die im dekadischen System dargestellte natürliche Zahl $\overline{abaacd}$ sollten die folgenden Bedingungen erfüllt sein:
$a + b = 2$; $2a = c$; $3a + b + c + d = 16$.
Um welche Zahl handelt es sich?

Schüler Matthias Rogall, Dresden

Ma 5 ▪ 1429 Von den 26 Schülern einer 5. Klasse erzielten in der letzten Klassenarbeit im Fach Mathematik genau so viele Schüler die Note 1 wie die Note 3. Die Note 2 erreichten doppelt so viele Schüler wie die Note 1. Zwei Schüler erhielten die Note 4, kein Schüler die Note 5. Wieviel Schüler erhielten die Note 1 bzw. 2?

Schülerin Sabine Moldauer, OS Sondershausen

Ma 6 ▪ 1430 In einer Klassenarbeit im Fach Mathematik wurden von den Schülern einer sechsten Klasse folgende Ergebnisse erzielt: Der dritte Teil der Schüler dieser Klasse erhielt die Note 1 oder die Note 5. Fünf Schüler mehr als der dritte Teil der Schüler erhielten die Note 3 oder die Note 4. Der sechste Teil der Schüler erreichte die Note 2. Die Anzahl der Schüler, die die Note 4 erhielten, ist gleich dem vierten Teil der Anzahl der Schüler, die die Note 3 erzielten. In der Klassenarbeit wurde der Zensurendurchschnitt 2,4 erreicht. Wieviel Schüler erhielten jeweils die Noten 1, 2, 3, 4 bzw. 5?

Schüler Andreas Kasparek, Gräfenhainichen

Ma 6 ▪ 1431 Ein Quader mit den Kantenlängen a, b, c besitze eine Oberfläche $A_0 = 286\ \text{cm}^2$. Eine der aus den Kantenlängen a und b gebildete Rechteckfläche betrage $A_1 = 63\ \text{cm}^2$; eine der aus den Kantenlängen b und c gebildete Rechteckfläche betrage $A_2 = 35\ \text{cm}^2$. Es ist das Volumen dieses Quaders zu berechnen.

Schülerin Gabi Kutschbach, Karl-Marx-Stadt (Kl. 7)

30	Thies Luther, 26 Güstrow, Werderstr. 22 Kersting-OS, Klasse 7 150	30	Ma 7 ▪ 1369
	Prädikat:	10	
	Lösung:		

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 197 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1975/76 läuft von Heft 5/75 bis Heft 2/76. Zwischen dem 1. und 10. September 1976 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/76 veröffentlicht. Wer mindestens 8 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/75 bis 2/76) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1975/76 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪ 1432 Ein Schüler, der sich am *alpha*-Wettbewerb beteiligt, hat auf Grund von eingesandten Lösungen mehr als 20, aber weniger als 45 Antwortkarten erhalten. $\frac{3}{8}$ dieser Karten trugen das Prädikat „gut gelöst". Die Anzahl der Karten mit dem Prädikat „gelöst" war gleich dem dritten Teil der Anzahl der Karten mit dem Prädikat „gut gelöst". Die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben war gleich der Hälfte der Anzahl der Karten mit dem Prädikat „gelöst". Wieviel der eingesandten Aufgaben waren „sehr gut gelöst", „gut gelöst", „gelöst" bzw. „nicht gelöst"?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 6 ▪ 1433 Ein Radrennfahrer trainierte an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Am ersten Tag legte er $\frac{4}{15}$, am zweiten Tag $\frac{2}{5}$ der gesamten Trainingsstrecke und am dritten Tag 100 km zurück.
Wieviel Kilometer legte der Radrennfahrer am ersten und zweiten Tag jeweils zurück?

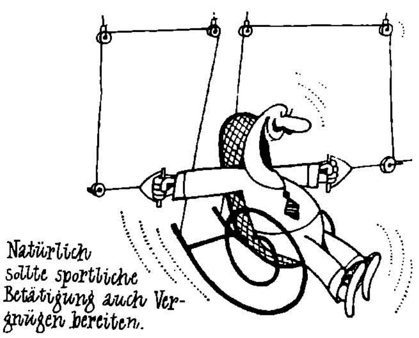
Schülerin Elisabeth Clemens, Prerow

Ma 6 ▪ 1434 Hans hat sich ein Buch gekauft. Von Bernd nach dem Preis befragt, antwortete Hans scherzhaft: „Das Buch kostete 1,50 M und noch $\frac{3}{8}$ seines Preises."
Wie teuer war das Buch?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ph 6 ▪ 1435 Aus 40 kg Messing sollen genau vier Wägestücke so hergestellt werden, daß damit jede Masse von 1 kg bis 40 kg (mit ganzzahliger Maßzahl) auf einer gleicharmigen Balkenwaage ermittelt werden kann. Welche Maßzahlen müssen diese vier Wägestücke besitzen?

Schüler Klaus Meier, Osternienburg



Ma 7 ▪ 1436 Vier *Junge Pioniere*, und zwar Axel, Bernd, Ernst und Franz, die bei der Verschönerung des Vorgartens ihres Wohnblocks mitgeholfen hatten, erhielten einen Korb mit Äpfeln als Belohnung. Axel erhielt den vierten Teil der Anzahl dieser Äpfel. Bern erhielt zwei weniger als ein Drittel, Ernst sechs weniger als die Hälfte der Anzahl aller Äpfel. Franz erhielt drei Äpfel mehr als die Hälfte der Anzahl der Äpfel, die Axel erhalten hatte. Wieviel Äpfel erhielt jeder dieser Jungen Pioniere? *Sch.*

Ma 7 ▪ 1437 Mit welcher Ziffer endet das Produkt

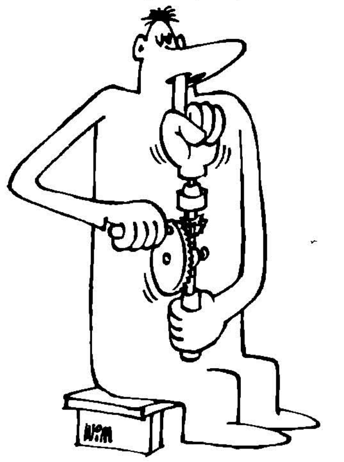
$$1973^{1973} \cdot 1974^{1974} \cdot 1975^{1975}?$$

Dabei bedeutet z. B. 1975^{1975} ein Produkt aus 1975 Faktoren, von denen jeder gleich 1975 ist.

Oberlehrer Ing. Karl Koch, Schmalkalden

Ma 7 ▪ 1438 Es ist ein Dreieck ABC aus der Seite $\overline{AB}=c=6$ cm, dem Innenwinkel $\sphericalangle ABC=\gamma=40°$ und der Seitenhalbierenden $\overline{CD}=s_c=8$ cm zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen und zu beschreiben.

Schüler Andreas Kasparek, Gräfenhainichen



Ma 7 ▪ 1439 Zeichne ein Dreieck ABC aus $\overline{AB}=c=4$ cm, $\overline{BC}=a=6$ cm und $\overline{AC}=b=9$ cm! Verwandle durch eine geeignete Konstruktion das gezeichnete Dreieck ABC in ein flächengleiches Rechteck $ABEF$, das die Seite $\overline{AB}$ mit dem Dreieck ABC gemeinsam hat.

Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz

Ph 7 ▪ 1440 Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Raumschiffes, das sich in gleichförmiger Kreisbewegung um die Erde bewegt und dabei einen Weg von 42 600 km in 1,5 Stunden zurücklegt?

Ch 7 ▪ 1441 Zur Herstellung von 1 t Zucker werden 120 m³ Wasser benötigt. Eine Zuckerfabrik produziert pro Jahr 1 022 t Weißzucker. Um die Größe der benötigten Wassermenge zu veranschaulichen, ist zu berechnen, wieviel Tankwagen mit 3 t Fassungsvermögen nötig wären, um die genannte Wassermenge bereitzustellen. *L. L.*

Ma 8 ▪ 1442 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen z anzugeben, die $\frac{2}{9}$ mal so groß sind wie diejenige zweistellige natürliche Zahl, die durch Vertauschung der Ziffern der Zahl z entsteht.

Mathematikfachlehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 8 ▪ 1443 Zur Einzäunung einer Weidefläche, die die Form eines Rechtecks haben soll, mit einem Elektrozaun stehen 1 120 m Leitungsdraht zur Verfügung. Der Zaun soll so angelegt werden, daß er aus zwei parallel geführten Leitungsdrähten besteht, daß also seine Gesamtlänge 560 m beträgt.
a) Wie groß ist der Flächeninhalt der maximalen Rechtecksfläche, die durch diesen Zaun begrenzt werden kann?
b) Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

Mathematikfachlehrer Hans-Joachim Hellwig, Heiligengrabe

Ma 8 ▪ 1444 Im Juni 1937 gelang es dem sowjetischen Flieger *Valeri Tschkalow* als erstem Flieger der Welt, in einem Non-Stop-Flug von Moskau ($\varphi=56°$ N) über den Nordpol ($\varphi=90°$ N) nach Seattle (USA, $\varphi=48°$ N) zu fliegen. Er benötigte mit seiner ANT-25 für diesen Flug 63 h 25 min.
Im Juni 1975 wurde dieser Non-Stop-Flug von einer IL-62 M wiederholt. Diese sowjetische Maschine benötigte für den Flug nur 10 h 54 min.
a) Man berechne die Länge der zurückgelegten Flugstrecke und beachte dabei, daß in beiden Fällen die tatsächlich zurückgelegte Flugstrecke um 12,27 % länger war als die Luftlinie Moskau–Nordpol–Seattle.
b) Man berechne die mittleren Geschwindigkeiten (in $km \cdot h^{-1}$) der ANT-25 und der IL-62-M auf ihrem Flug von Moskau nach Seattle.
Hinweis zur Lösung: Bei der Berechnung der Länge der Luftlinie Moskau-Nordpol-Seattle beachte man, daß ein Meridian vom Äquator ($\varphi=0°$ N) bis zum Nordpol ($\varphi=90°$ N) rund 10 000 km lang ist. *L.*

Ma 8 ▪ 1445 a) Wieviel Meter Stahlrohre, die die Form eines Hohlzylinders mit dem inneren Durchmesser 270 mm und der Wandstärke 6 mm haben, können aus 3 000 t Stahl (Dichte 7,85 $g \cdot cm^{-3}$) hergestellt werden?
b) Nach einem neuen, in der UdSSR entwickelten Verfahren ist es möglich, solche für Bewässerungsanlagen bestimmten Stahlrohre auch mit einer Wandstärke von nur 1,8 mm herzustellen. Wieviel Meter Stahlrohre von dieser Wandstärke können aus 3 000 t Stahl angefertigt werden? *L.*

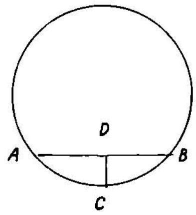
Ph 8 ▪ 1446 In Halle werden die alten Häuser modernisiert. Ein Lastaufzug befördert 60 Mauerziegel (1 Mauerzigel hat ein Gewicht von 3,5 kp) in 25 Sekunden 20 m hoch. Berechne die erforderliche Arbeit in kpm! *L. L.*

Ch 8 ■ 1447 Es sollen 1000 g 10%ige Salzsäure durch Zusatz von 25%iger Salzsäure auf den Gehalt von 12,5 % gebracht werden. Wieviel 25%ige Salzsäure ist erforderlich?

Dipl.-Chemiker G. Brandes, Magdeburg

Ma 9 ■ 1448 Auf Grund neuerer Untersuchungen gelangten kanadische Astronomen zu der Erkenntnis, daß *Barnards Stern* im Sternbild des Schlangenträgers, der von der Erde etwa 6 Lichtjahre entfernt ist, von fünf Planeten umgeben sein müsse. Diese Planeten umkreisen den Stern mit Umlaufzeiten von 2,4, 2,9, 3,8, 11 bzw. 26 Jahren. Der innerste Planet hat einen Abstand von 0,95 AE von dem Zentralgestirn. Dabei ist 1 AE (Astronomische Einheit) gleich der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne und beträgt rund 150 Millionen km.
Man berechne mit Hilfe des *3. Keplerschen Gesetzes*, nach dem sich die Quadrate der Umlaufzeiten von Planeten wie die dritten Potenzen ihrer Abstände von dem Zentralgestirn verhalten, die Abstände der übrigen vier Planeten von Barnards Stern in AE und in Millionen km. *L.*

Ma 9 ■ 1449 Der innere Durchmesser eines Rohres, das die Form eines Hohlzylinders hat, kann auf die folgende Weise ermittelt werden:
Man lege ein Brett $\overline{AB}$, dessen Länge b bekannt, aber kleiner als der innere Durchmesser des Rohres ist, in das Rohr und messe den Abstand $\overline{CD}=a$ des Mittelpunktes D der Strecke $\overline{AB}$ von der inneren Rohrwandung (vgl. die Abb., in der das Rohr im Querschnitt gezeigt ist).



Man berechne nun den inneren Durchmesser d eines Rohres für den Fall, daß $b=1200$ mm und $a=200$ mm ist.

Mathematikfachlehrer Friedrich Bier, Klausdorf

Ma 9 ■ 1450 Es sind alle reellen Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

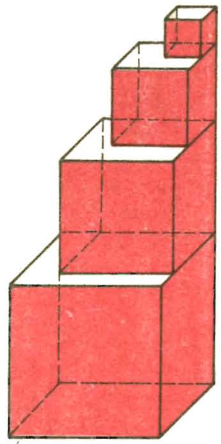
$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=\frac{13}{5}, \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=13 \qquad (2)$$

zu ermitteln.

Schüler Roland Schlesinger, OS III Saßnitz (Kl. 9)

Ma 9 ■ 1451 Von den abgebildeten vier Würfeln habe der erste eine Kantenlänge von 1 cm, der zweite von 2 cm, der dritte von 3 cm und der vierte von 4 cm.
a) Man berechne den Oberflächeninhalt des aus diesen vier Würfeln zusammengesetzten Körpers.
b) Man berechne den Oberflächeninhalt eines Körpers, der aus n solchen Würfeln zusammengesetzt ist, wobei der erste eine Kantenlänge von 1 cm hat und die Kantenlänge jedes der folgenden Würfel jeweils um 1 cm größer als die des vorhergehenden Würfels ist. *Sch.*



Ph 9 ■ 1452 Ein Ölheizgerät, eingesetzt zum Trocknen von Zementfertigteilen, hat eine Leistung von 80000 kcal $\cdot$ h^{-1}.
Wie groß ist der Verbrauch von Heizöl (Heizwert 10000 kcal $\cdot$ kg^{-1}) in einer Schicht (8 h) bei einem Wirkungsgrad von 0,6? *L. L.*

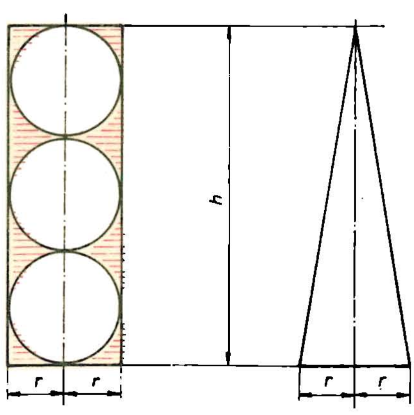
Ch 9 ■ 1453 Berechnen Sie die Masse Phosphorpentaxid in 20 g 60 %iger o-Phosphorsäure! *G. Brandes*

Ma 10/12 ■ 1454 Man beweise, daß die Summe

$$s=1+2+3+\ldots+n$$

aller natürlichen Zahlen, die nicht größer als eine natürliche Zahl n sind, genau dann durch die Anzahl n ihrer Summanden teilbar ist, wenn n eine ungerade Zahl ist. *Sch.*

Ma 10/12 ■ 1455 Gegeben sei ein gerader Kreiszylinder mit dem Radius r, dessen Höhe n mal so groß wie sein Durchmesser ist. Dabei sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$. Ferner sei ein gerader Kreiskegel gegeben, dessen Radius und dessen Höhe ebenso groß wie der Radius bzw. die Höhe des Zylinders ist.



In den Zylinder seien n Kugeln mit dem Radius r so gelegt, daß sie übereinander liegen und ihre Gesamthöhe gleich der Höhe des Zylinders ist (vgl. die Abb., in der ein Zylinder mit drei Kugeln im Längsschnitt dargestellt ist). Nun sei der freie Raum zwischen den Kugeln und dem Zylindermantel mit Wasser ausgefüllt. Man entscheide, ob das Volumen der Wassermenge kleiner, größer oder ebenso groß wie das Volumen des Kegels ist.

Ing. Armin Körner, Leipzig

Ma 10/12 ■ 1456 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=720$$

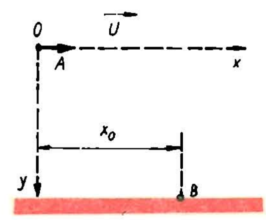
zu ermitteln. *Schüler Frank Pohl, EOS „DSF", Neugersdorf (Kl. 11)*

Ma 10/12 ■ 1457 Einem Würfel mit der Kantenlänge a sei eine Kugel einbeschrieben. Ferner sei ε eine Ebene, die durch eine der Würfelkanten sowie durch den Mittelpunkt einer der quadratischen Begrenzungsflächen des Würfels geht, die mit dieser Würfelkante keinen Punkt gemeinsam hat. Man berechne den Flächeninhalt des Kreises, in dem sich die Ebene ε und die Kugel schneiden.

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Ph 10/12 ■ 1458 Ein Flugzeug A fliegt in einer Höhe $h=4000$ m mit einer Horizontalgeschwindigkeit $v=500$ km h^{-1}. In welcher waagerecht gemessenen Entfernung x_0 (siehe Bild) vom Punkt B muß ein beliebiger Körper aus dem Flugzeug abgeworfen werden, damit er im freien Fall in B auftrifft? (Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.)

Prof. Dr. V. Hajko, TH Košice (ČSSR)



Ch 10/12 ■ 1459 Wieviel g 95 %iges Natriumkarbonat sind zur Herstellung von 10 l 0,2 normaler Lösung erforderlich?

G. Brandes

„Immer nur Spalt-Tabletten.
Warum bekomme ich nicht auch mal
Dioxphenylactanolisaopropyaminsulfat
wie die Schulzen?"

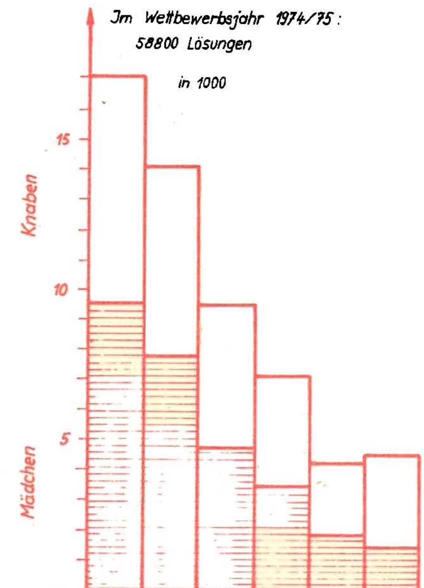
alpha-Wettbewerb 1974/75 Preisträger

Bodo Heise, Görlitz; **Andrea Dreyer,** Cottbus; **Frank Lohmeyer,** Zittau; **Jens Schumann,** Coswig; **Harry Höfer,** Dorndorf; **Jörg Pöhland,** Klingenthal; **Peter-Alexander Pöhler,** Dresden; **Jürgen Anders,** Dahlewitz; **Frank Herzel,** Güstrow; **Falk und Karsten Breuer,** Radebeul; **Esther Wolf,** Hoyerswerda; **Frank Eisenhaber, Bettina Dähn,** beide Güstrow; **Rolf Kamieth,** Kakerbeck; **Gerd Birnbaum,** Spitzkunnersdorf; **Jens Peter Mönch,** Berlin; **Klaus-Dieter Beck,** Potsdam; **Frank Meurer,** Dietzhausen; **Olaf Racke,** Neubrandenburg; **Marion Breitschuh,** Berlin; **Peter Dittrich,** Rudolstadt; **Franz Sander,** Görlsdorf; **Alois Weninger,** Knittelfeld (Österreich); **Eva Gerstner,** Dresden; **Ullrich Scherf,** Eisenach; **Almut Beckmann,** Steinbach-Hallenberg; **Cornelia Krümmling,** Neuenhofe; **Andreas Hempler,** Rüdnitz; **Heike Ender,** Lössau; **Thomas Wingeß,** Fambach; **Friedel Messerschmidt, Bettina Römhild,** beide Trusetal; **Jürgen Wage,** Mittelstille; **Heinz-Olaf Müller,** Schmalkalden; **Birgit Thomas,** Zittau; **Henry Ribbe,** Thaldorf; **Martina Schmidt, Yvonne Pforr, Andrea Thränhardt,** alle Rotta; **Stefan Gondlach,** Zittau; **Bärbel Kiel,** Niederorschel; **Manuela Lehmert,** Worbis; **Iris Reinhold,** Wingerode.

Vorbildliche Leistungen

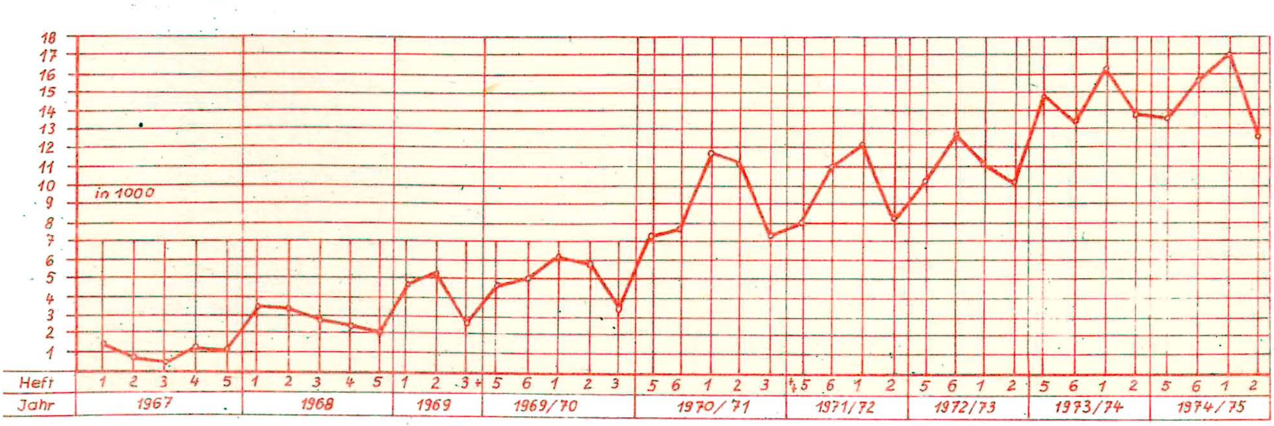
Reiner Burkhardt, Voigtsdorf; Carsten Rähder, Zittau; Undine Nathan, Hoyerswerda; Gabriele Orgis, Bernsbach; Margrit Weibrecht, Bad Salzungen; Steffen Pankow, Zittau; Thomas Mittelbach, Plessa; Eckart Möbius, Schwerin; Thomas Hartwig, Dresden (Kl. 3); Birgit Lang, Karl-Marx-Stadt; Karola Näther, Leipzig; Uwe Zscherpel, Meerane; Ulrike Baumann, Radebeul; Frauke und Burkhard Maess, Bad Doberan; Claudia Steiber, Lienz (Österreich); Kerstin Zirnstein, Pirna; Uwe Krebs, Dresden; Udo Schmidt, Schulzendorf; Roderich Winkler, Schwerin; Hans Georg Lobert, Roßleben; Stefan Schuster, Meißen; Christine Schober, Rostock; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Gundula Göllner, Dresden; Annelie Meyer, Silberstraße; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Wilfried Rentsch, Dresden; Volker Beyes, Berlin; Christian Buchta, Felixdorf (Österreich); Bernd Hanke, Großschweidnitz; Uwe Kintzel, Erfurt; Klaus Baumgart, Dresden; Wolfgang Stein; Rudolstadt; Axel Haubeiß, Ringleben; Michael Rehm, Torgau; Gunter Rothämel, Knut Enter, Frank Wurschi, Annette Recknagel, Petra Recknagel, Sabine Munk, Birgit Hoffmann, alle Steinbach-Hallenberg; Cornelia Brauer, Volker Thiele, Erika Trautvetter, Doris Trautvetter, alle Neuenhofe; Silke Zimpel, Dingelstädt; Frank Jeschek, Kloster; Silvio Schmidt, Thomas Gerth, Sabine Eberhardt, Dietmar Müller, Ines Rieger, alle Schmalkalden; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Elke Herrlich, Bad Gottleuba; Holger Hanisch, Lobenstein; Frank Kunze, Greußen; Matthias Kasparek, Bodo Pfuhl, beide Rotta; Frank Höpfner, Wolgast; Gerald Sommer, Ines Grigoleit, Gabriele Schubert, alle Zittau; Marion Sölter, Westgreußen; Uwe Heverhagen, Clingen; Kerstin Fritze, Niederorschel; Doris Warschun, Marita Freyer, Sylvia Müller, alle Rüdigershagen; Kirsten Rosenow, Altentreptow; Dietmar Glanz, Kefferhausen; Thomas Merscher, Berlin; Monika Wehling, Wingerode; Iris Abt, Elke Hüfner, Birgit Weyh, Wolfgang Hensel, alle Fambach; Kerstin Weisheit, Annette Rennhack, Beate Engelhaupt, Sybille Wiegand, alle Roßdorf; Elke Specht, Jörg Voigtberger, beide Mittelstille; Bernd Müller-Lustig, Ernstthal; Petra Biehain, Horka; Dorit Grunert, Lössau; Bernd Kasch, Bernd Bethke, Carola Frank, Marion Buckmann, Silvia Heidrich, alle Stralsund; Steffi Krauß, Berlingerode; Falk Neumann, Hoyerswerda; Thomas Bienek, Schwepnitz; Christel Mitzenheim, Jena; Susanne Zöllner, Halle; Guntram Türke, Auerbach; Gunter Rothämel, Steinbach-Hallenberg; Grit Schulze, Cottbus; Uwe Haberlandt, Leipzig; Elke Pfannschmidt, Wiederstedt; Jörg Butter, Freiberg; Manuela Marpert, Markersdorf; Uwe Feldberg, Worbis; Ina Spanaus, Schleusingen; Anne-Kathrin Endtricht, Görlitz; Heike Arnold, Grimma; Simone Hansche, Klausdorf; Jana Michaelis, Bad Salzungen; Ute Jentzsch, Coswig; Gunter Fix, Mittelbach; Mario Binkowski, Demmin; Angelika Radtke, Mittweida; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Henri Koch, Arnstadt.

Hinweis: Die Namen der Teilnehmer am Wettbewerb, die das Abzeichen in Gold für drei- oder mehrjährige Teilnahme erhielten, veröffentlichen wir in Heft 1/76. d. Red.



Kl.	5	6	7	8	9	10/12
Kn in %	44	45	50	52	56	67
Mä in %	56	55	50	48	44	33

Entwicklung des alpha-Wettbewerbs



Zufall und Wahrscheinlichkeit

Teil 2

Der Fehler der in Übung 5 dargestellten „Lösung" bestand darin, daß wir nicht beachtet haben, daß das benutzte Additionsgesetz nur für einander ausschließende Ereignisse gilt. Wenn eines der Elementarereignisse A_{11}, A_{13}, A_{22}, A_{31}, A_{15}, A_{24}, A_{33}, A_{42}, A_{51} eintritt, so treten aber sowohl A als auch B ein. Also schließen A und B einander nicht aus.

Durch dieses Beispiel werden wir auf eine neue Definition geführt:

Unter dem *Durchschnitt* $A \cap B$ zweier Ereignisse A und B versteht man die Vereinigung aller Elementarereignisse E_1, E_2, ..., E_v mit folgender Eigenschaft: Tritt E_i (i 1, 2, ..., v) ein, so auch A und B.

Allgemein gilt das Additionsgesetz für Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Daraus erhält man das Additionsgesetz für einander ausschließende Ereignisse, wenn man bedenkt, daß sich zwei Ereignisse genau dann ausschließen, wenn $A \cap B = U$, also $P(A \cap B) = 0$.

Im Beispiel ist $A \cap B = A_{11} \cup A_{13} \cup A_{22} \cup A_{31} \cup A_{15} \cup A_{24} \cup A_{33} \cup A_{42} \cup A_{51}$ und somit

$$P(A \cup B) = \frac{16}{36} + \frac{21}{36} - \frac{9}{36} = \frac{5}{6}.$$

Übung 6: Man beweise: Sind A und B zufällige Ereignisse, so gilt

$$P(A \cap B) \leqq P(A) \leqq P(A \cup B) \leqq P(A) + P(B)$$

Unter welchen Bedingungen gelten die einzelnen Gleichheitszeichen?

3. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unter der *bedingten Wahrscheinlichkeit* $P(A/B)$ verstehen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis A eintritt, wenn das Ereignis B eingetreten ist. Wir wollen uns diesen Begriff wieder am Beispiel des einmaligen Würfelns klarmachen.

Seien A: Gerade Augenzahl würfeln
und B : Mindestens 5 Augen würfeln.
Damit ist $A \cap B$: Genau 6 Augen würfeln.
Offenbar sind

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3} \text{ und } P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

$P(A/B)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine gerade Zahl erzielt zu haben, wenn die Augenzahl mindestens 5 beträgt. Es gilt $P(A/B) = \frac{1}{2}$, denn mögliche Fälle sind jetzt 5 und 6, aber günstig ist nur die 6. Ferner ist $P(B/A) = \frac{1}{3}$, wovon der Leser sich selbst leicht überzeugt. Allgemein gilt: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Löst man diese Gleichung nach $P(A \cap B)$ auf, so erhält man eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts der Ereignisse A und B aus der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A/B)$ von A bezüglich B und der Wahrscheinlichkeit von B (Multiplikationsgesetz für Wahrscheinlichkeiten):

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

■ *Übung 7*: In einem Bekleidungswerk erweisen sich 96 % der Anzüge als tragbar. Von jeweils 4 dieser Anzüge sind im Mittel 3 erste Wahl. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Anzug dieses Werkes zur ersten Wahl gehört?

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt

$$P(A/B) = P(A).$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn aus ihr folgt auch

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B),$$

d. h., man kann die Variablen, die für die Ereignisse stehen, vertauschen.

Für unabhängige Ereignisse A und B hat das Multiplikationsgesetz die einfache Form:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Beispiel: Schütze 1 erzielt 80 % Treffer, Schütze 2 70 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens ein Schuß im Ziel landet, wenn beide gleichzeitig schießen?

Seien A: Schütze 1 trifft und B: Schütze 2 trifft.

Gesucht ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Da A und B unabhänge Ereignisse sind, ist

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$ und

$P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94.$

Schließlich wollen wir noch den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit angeben und mit Hilfe der bereits bekannten Gesetze beweisen:

Die Ereignisse A_1, A_2, ..., A_n schließen einander aus, und es sei $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$. (Unter diesen Bedingungen bilden $A_{1},_{2}$, ..., A_n ein vollständiges Ereignissystem.) Dann gilt für jedes zufällige Ereignis B:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Beweis: Auf Grund der Voraussetzung gilt

$$B = B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n),$$

und die Ereignisse $(B \cap A_1)$, $(B \cap A_2)$, ..., $(B \cap A_n)$ schließen einander aus. Folglich ist

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n).$$

Wendet man noch auf jeden Summanden das Multiplikationsgesetz an, so erhält man die Behauptung.

Beispiel: In einem VEB werden an drei Maschinen die gleichen Werkstücke produziert.

Maschine	Tagesproduktion	Ausschußanteil
1	263 Stück	$\frac{1}{25}$
2	526 Stück	$\frac{1}{50}$
3	789 Stück	$\frac{1}{25}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein willkürlich gewähltes Werkstück fehlerhaft ist?
Seien A: Werkstück fehlerhaft
und B_i : Werkstück an Maschine i produziert.
Lösung:

$$P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)+P(A/B_3)\cdot P(B_3)$$
$$=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{50}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{25}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1+1+3}{150}=\frac{1}{30}.$$

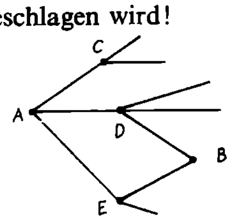
Damit möchten wir unseren kurzen Ausflug in die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung beenden. Wer noch weiter in sie eindringen will, sei auf die beiden Literaturangaben am Ende dieses Beitrages verwiesen. Aus diesen Büchern entnahmen auch wir zahlreiche Anregungen und Beispiele.
Zur Übung fügen wir noch einige Aufgaben an, die mit den Mitteln unserer beiden Beiträge gelöst werden können.

4. Übungsaufgaben

▪ *Übung 8:* In einer Stadt langjährig durchgeführte Beobachtungen ergaben, daß von 100000 Kindern, die das 10. Lebensjahr erreichten, im Mittel 82277 das 40. und 37977 das 70. Lebensjahr erreichen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein 40jähriger das 70. Lebensjahr erreicht?

▪ *Übung 9:* Jemand schreibt an 6 Personen Briefe und dazu 6 Umschläge. In jeden Briefumschlag legt er auf gut Glück einen Brief. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens ein Brief in den richtigen Umschlag kommt?

▪ *Übung 10:* Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man von A nach B gelangt, wenn an jeder Kreuzung jede Richtung mit gleicher Wahrscheinlichkeit eingeschlagen wird!



▪ *Übung 11:* Ein Schütze erzielt 80% Treffer, ein zweiter 40 %. Jeder gibt genau einen Schuß auf eine Zielscheibe ab. Es wird danach genau ein Treffer festgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er vom ersten Schützen stammt?

▪ *Übung 12:* 15 Urnen von 3 unterschiedlichen Typen sind wie folgt mit schwarzen und weißen Kugeln gefüllt:

Typ	Anzahl	schwarze K.	weiße K.
I	2	10	5
II	6	8	2
III	7	10	6

a) Eine Kugel wird willkürlich gezogen. Sie ist schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus einer Urne vom Typ I stammt?
b) Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, bei zwei Ziehungen zweimal weiß zu ziehen, wenn man die zuerst gezogene Kugel vor dem zweiten Zug zurücklegt.

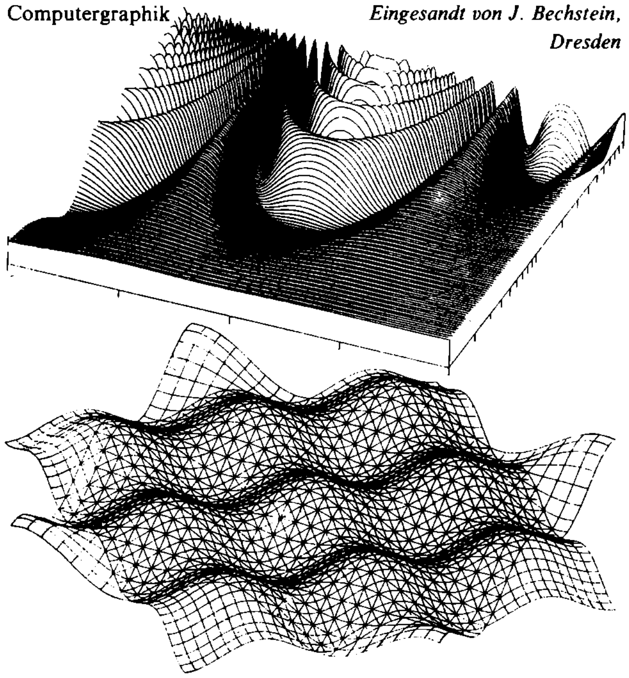
Literaturhinweise
Gert Maibaum: **Wahrscheinlichkeitsrechnung**
besonders geeignet für den fakultativen Unterricht an EOS, 223 Seiten, zahlreiche Abb. und Aufgaben Preis 7,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

B. W. Gnedenko/A. J. Chintschin: **Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung**
174 Seiten, 18 Abb. Preis 4,50 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

E. B. Dynkin/W. A. Uspenski:
Mathematische Unterhaltungen, Teil 3
Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung
84 Seiten, 32 Abb. Preis 4,10 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

A. Renyi: **Briefe über die Wahrscheinlichkeit**
94 Seiten Preis 7,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Computergraphik *Eingesandt von J. Bechstein, Dresden*



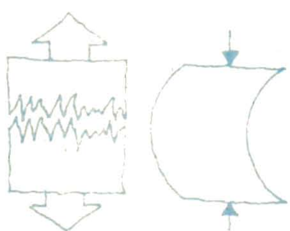
Mit Papier selbst gestaltet

Anregung zur eigenschöpferischen Arbeit

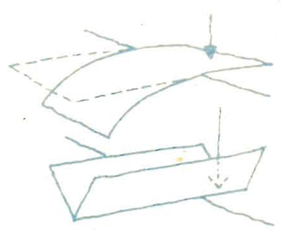
alpha-Wandzeitung

Die Texte zu dieser Wandzeitung wurden dem oben gezeigten Heft, Herausgeber: Zentralhaus für Kulturarbeit der DDR, Leipzig (Autor: B. Sikora) entnommen.

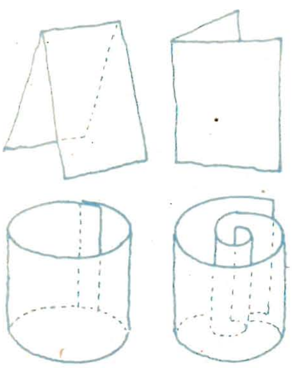
Wesentliche Papiereigenschaften



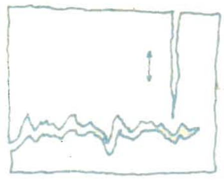
Zugwiderstand ist größer als Druckwiderstand



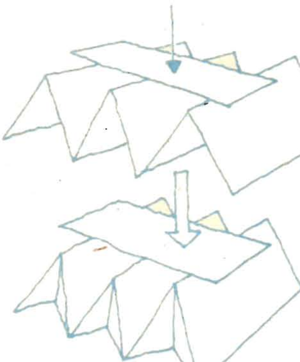
Biegung durch Eigengewicht
Stabilisierung durch Faltung



Faltung und Rollenform ermöglichen ein Aufstellen



Riss längs der Faser ist glatter als quer zur Faser



Doppelfaltung widersteht einer Flächenbelastung besser als einfache Faltung

Papier ist gut geeignet zum Biegen, Verdrehen, Einschneiden und Löchern

Papiere, Kartons, Pappen, Folien – eine Übersicht

Velourpapier
Samtige Oberfläche in verschiedenen Farben. Dekorationspapier mit vielfältiger Verwendungsmöglichkeit.

Buntpapier
Verschiedenfarbige, glänzende oder matte Oberfläche, rauhe oder gummierte Rückseite. In Blockform erhältlich.
Für Applikationen, Collagen, Silhouettenschnitte und ausgeschnittene Schrift nutzbar.

Scherenschnittpapier
Rauhes, schwarzdurchgefärbtes Material für Silhouetten und Bildschnitte, in Blockform im Handel.

Seidenpapier
Je nach Art unterschiedlich dünn, durchscheinend und weich, geringe räumliche Stabilität, weiß, gelblich eingefärbt oder bedruckt.

Werkmappen
Verschiedene Restpapiere und Karton meist im Format A 5, in Mappen abgepackt, vielseitig nutzbar.

Ein Hinweis: Es lohnt sich, für farbige Papierarbeiten geeignetes Material zu sammeln. Mit einer Palette verschiedener Papiere läßt sich leichter und phantasievoller arbeiten.
Die nachfolgend genannten Papiere und Pappen dienen vorwiegend als Hüll- und Packmaterial. Sie sind aber auch zu dekorativen Zwecken nutzbar.

Kreppapier
Dekorations- und Einwickelpapier, in Rollen und verschiedenen Farben im Handel (meist 0,5 m breit und 5 m lang). Fein gefältelte Oberfläche, vielfältig verformbares Material, zum Zusammenlegen und Knüllen gut geeignet. Exakte räumliche Formen sind nicht möglich. Reißfestigkeit quer zur Faser gering.

Pergamentpapier
Wird zum Einpacken fettiger Waren benutzt. Zu gestalterischen Zwecken ist das als „Echt Pergamentpapier" erhältliche Material nutzbar, relativ weiß und durchscheinend, für Knitterpapiere und Transparentschnitte geeignet.

Packpapier
Naturfarbig oder gefärbt, rauhe und glatte Seite. Nachbehandelte Papiere sind auf beiden Seiten geglättet und imprägniert. Wird in Rollen oder Bogen gehandelt und kann für Dekorations- und Faltarbeiten verwendet werden.

Pappe
Kräftiges naturfarbiges, eingefärbtes oder kaschiertes Material. Wird Pappe geklebt, muß dies auf Vorder- und Rückseite erfolgen, damit keine Flächenkrümmungen entstehen. Nutzbar für Buchumschläge, Behälter und Grundkörper, als Unterlage für Papierarbeiten sehr gut geeignet.

Wellpappe
Durch gewellte Pappeinlage verstärktes Material, quer zur Wellung gut biegbar, in Wellenrichtung relativ stabil.
Für räumliche Formen als eigenständiges und als Grundmaterial nutzbar.

Zeitungspapier
Holzhaltiges Papier mit großen Harzanteilen, rauh, saugfähig, vergilbt leicht, billig und gut zu verarbeiten, geringe optische Wirkung der Oberfläche.
Geeignet für Saaldekorationen (Säulenumwicklung u. ä.), aber nicht für feingliedrige, stabile Formen. Wird in Rollen geliefert, Restware in Druckereien.

Plakatkarton
Kartonmaterial mit Kreide-Kaseinbeschichtung in Plakatformaten. Beschichtung sehr empfindlich.
Kann für Tischaufsteller verwendet werden.

Schreib- und Zeichenpapier, Zeichenkarton
Mehr oder weniger holzhaltig bzw. holzfrei, verschiedene Bleichungsgrade, gut geschlossene Oberfläche, Vorderseite glatter und dichter als Rückseite. Unterschiedliche Qualität ist zu beachten. Im Format A 5 bis A 1 in Blattform im Einzelhandel, größere Formate und Zeichenkartonrollen (1,57 m breit, 55 m lang, hadernhaltiger, weißer und holzfreier Karton vom VEB Feinpapierfabriken Neu Kaliß) im Fachhandel erhältlich.
Rollenkarton ist geeignet für Faltleuchten und großformatige, anspruchvolle Dekorationsarbeiten.

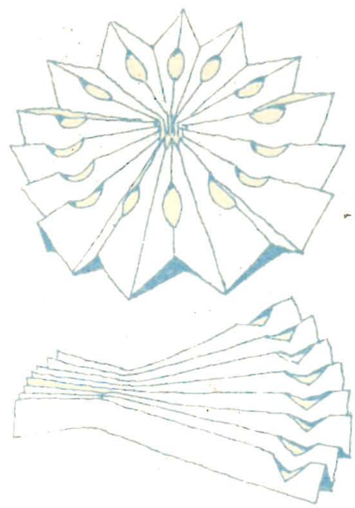
Tapeten
Tapetenreste können auf der Rückseite mit wasserfester Plakatfarbe (Nerchau-Plakatfarbe) eingewalzt, getrocknet und gegebenenfals mit PVAC-Bindemittel farblos lackiert werden.
Aus dem eingefärbten Papier lassen sich großflächige Dekorationen und Schriften ausschneiden, die mit Tapetenkleister aufgeklebt werden können.

Kunstdruckpapier und -karton
Entsteht durch ein- oder beidseitige Beschichtung hochgradig gebleichter Papiere und Kartons mit Kreide und Kaolin unter Druck und Wärmeeinwirkung, wird für Halbtondruck verwendet und ist im Fachhandel in Standardgrößen erhältlich. Zerstörung der Oberfläche bei Bearbeitung mit spitzen Gegenständen und Punktklebung. Schmierflecke entstehen leicht.
Auf dem matt oder glänzend weißen Papier stehen Striche mit Skribent und Reißfeder sehr brillant, für Federzeichnungen ist es jedoch weniger geeignet

Folien
Klarsichtfolien als Schutz- und Veredlungsschicht für repräsentative Arbeiten, gefärbte Folien für Durchleuchtebilder, Collagen und mehrschichtige Bildschnitte sind im Einzelhandel erhältlich. Holz- und Metallfolien können als Untergrund von dekorativen Arbeiten und für Behälter und Verpackungen benutzt werden. Gold- und Silberfolien aber nur sparsam einsetzen, ebenso die bunten Folien. Sie wirken schnell kitschig.

Transparentpapier
Verhältnismäßig gut durchsichtig, relativ fest, dichte Oberfläche. Empfindlich gegenüber Feuchtigkeit (verzieht sich unregelmäßig) und Bruch, reißt leicht ein. Verwendung zum Überpausen und Korrigieren von Entwürfen, Untergrund für Zeichnungen bei Lichtpaus-Vervielfältigung. Für bestimmte Faltarbeiten (Effekt der durchscheinenden Faltung) geeignet.

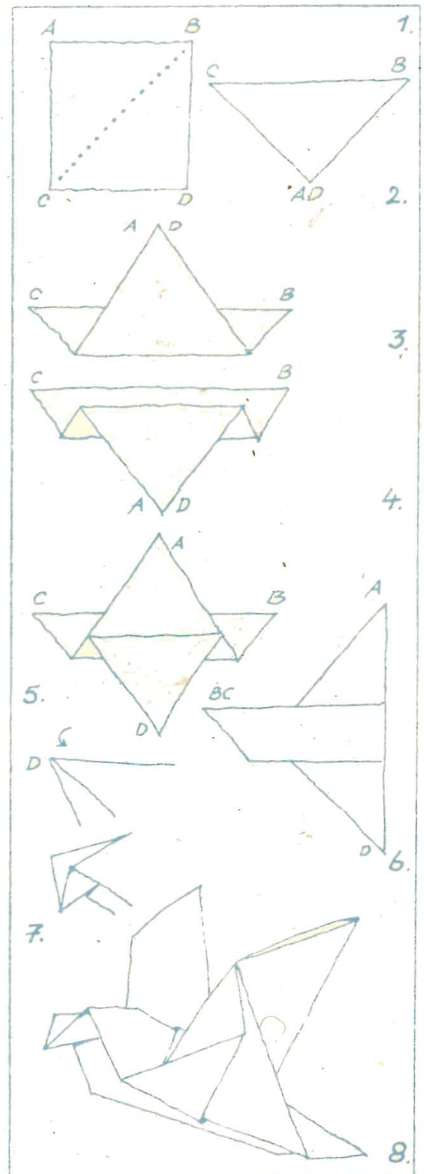
Büttenpapier
Handgeschöpftes Büttenpapier ist unterschiedlich dick, weiß, gelblich oder braun. Relativ festes Material mit dichter Oberfläche und typischem, gewelltem Rand.
Wird für künstlerische Schriftgestaltung und Federzeichnungen verwendet.

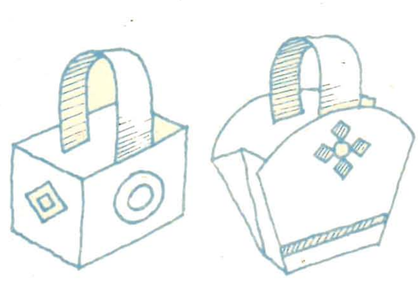


Papierstreifen gefältelt
und eingeschnitten, dann aufgefächert

Pappe und Karton, gefaltet, gesteckt – eingeschnittene und geklebte Kegel

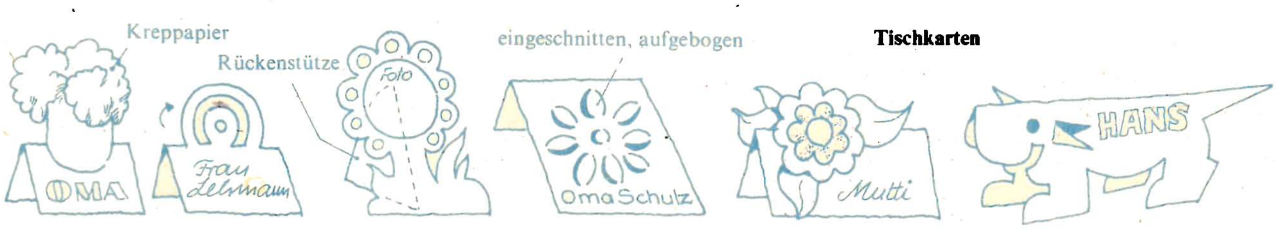
Wir falten eine „Taube“





Farbflächen sind aufgeklebt

Tischkarten



Mädchen meistern Mathematik

alpha stellt vor: Sabine Anders, Cottbus

Ich heiße Sabine Anders, bin 17 Jahre alt und besuche die 12. Klasse der EOS „A. Becker", Cottbus. Meine Mutter (ohne Beruf), mein Vater (Elektriker) und meine Schwester (16 Jahre alt) gehören zur Familie.

Durch meinen Vater, damals selbst Liebhaber von Unterhaltungsmathematik, wurde ich bereits in frühester Kindheit durch logische Denkschulung mit der Mathematik bekannt und vertraut gemacht. Dank meiner guten Konzentrationsfähigkeit hatte ich erste Erfolgserlebnisse, die meine Freude an mathematischen Knobeleien weckten und meine Kombinationsfähigkeit forderten. Vom ersten Schultage an folgte ich dem Mathematikunterricht mit großer Aufnahmebereitschaft. In guter Mitarbeit und gewissenhaftem Anfertigen von Hausaufgaben machte sich mein Interesse für die Mathematik bemerkbar. Auch in anderen Fächern folgte ich dem Unterricht aufmerksam, so daß ich nie größere Schwierigkeiten hatte. Da meine Eltern das Ziel hatten, uns eine möglichst breite Allgemeinbildung zukommen zu lassen, gingen sie mit uns beiden Geschwistern in die Bezirksmusikschule. Seit dieser Zeit hatten unsere Mitbewohner oft Grund, sich bei uns wegen Lärms, verursacht durch mehr oder weniger qualifiziertes Klavierspiel, zu beschweren.

Bis zum vollendeten 3. Schuljahr wachte unsere Mutter streng darauf, daß wir gewissenhaft und einwandfrei unsere Pflichten (Hausaufgaben, Klavierüben) erfüllten. Bis zu meinem Eintritt in den Matheklub beschäftigte sich mein Vater mit uns außerunterrichtlich, indem er uns ständig Knobelaufgaben – selbsterdachte oder aus der Literatur gewählte – stellte. So gelang es mir, bei ABC-Olympiaden, Kreis- und Bezirksolympiaden, Preise zu erringen, wodurch ich mir meine Mitarbeit im Kreis- und Bezirksklub Cottbus verdiente. Auch in der Musikschule stellten sich bald Erfolge ein; so erhielt ich beim DDR-Ausscheid in der Fachgruppe Klavier das Prädikat sehr gut.

Übergebührende Anerkennung meiner Leistungen führte zur Überheblichkeit, die sich darin äußerte, daß ich glaubte, nichts mehr tun zu müssen, um erfolgreich zu sein. Meinen Eltern habe ich es zu verdanken, daß ich diese Krise rechtzeitig überwinden konnte. Die kontinuierliche und intensive Förderung im Kreis- und Bezirksklub ermöglichte mir die Teilnahme an den letzten drei DDR-Olympiaden. Mein Wunsch ist es, nach dem Abitur Mathematik zu studieren. Doch kann ich mir mein Leben nicht mehr ohne die Beschäftigung mit der Musik vorstellen. Mit Kerstin Bachmann (Halle, siehe alpha-Heft 3/72), deren Hobby neben der Mathematik auch Musik, das Violinenspiel ist, haben wir bei der Siegerehrung der DDR-Olympiade 1974 zusammengespielt. Wenn es auch viel Arbeit kostete, es hat uns (und den Zuhörern, d. Red.) große Freude bereitet.

Ein anderes Hobby von mir ist das Lesen. Erst kürzlich studierte ich das Buch „Spiel mit dem Unendlichen" von der ungarischen Mathematikerin Rosza Peter geschrieben. Ich kann es jedem sehr empfehlen, auch denen, die sich nicht unbedingt intensiv mit Mathematik beschäftigen.

Seit Gründung der Zeitschrift „alpha" nehme ich am alpha-Wettbewerb teil. Alle Leser möchte ich herzlich grüßen und zum Schluß eine Aufgabe stellen, deren Lösung Ihr im Heft 1/76 findet:

▲1▲

(1) $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3 = (a+b+c+d+e)^2$

(2) $ace = a+b+c+d+e$

(3) $bce = 2(a+b+c+d+e)$

(4) $b+c=e$

(5) $d = a+c$

Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen des obigen Gleichungssystems.

Sabine Anders

alpha stellt vor: Dr. Monika Noack, Berlin

Von Beginn meiner Schulzeit an, das war im Jahre 1953, nahm ich am Schulleben, insbesondere auch an allem, was an Außerschulischem geboten wurde, mit viel Freude teil. Ich war ein aktiver und begeisterter Pionier, was bei dem abwechslungsreichen Pionierleben, das es an meiner Schule gab, nicht schwer war. In der 8. Klasse nahm ich an der 1. Berliner Mathematik-Olympiade teil. Von 1961 bis 1965 besuchte ich die EOS „Heinrich Hertz", die damals allerdings noch nicht Spezialschule für Mathematik war. In meiner Freizeit trieb ich viel Sport, war in einem Chor und zeitweilig in noch anderen Arbeitsgemeinschaften, ich las viel, besuchte regelmäßig Theater und Konzerte, nahm an Mathematikzirkeln und Spezialistenlagern Junger Mathematiker teil und bemühte mich als FDJ-Leitungsmitglied um eine gute FDJ-Arbeit in meiner Klasse und Schule. Als Schülerin der 11. Klasse gehörte ich zu jenen acht Jungen Mathematikern, die zur VI. Internationalen Mathematik-Olympiade nach Moskau delegiert wurden, und erhielt dort einen dritten Preis, was mir bei der VII. IMO in Berlin, an der ich auch teilnahm, leider nicht gelang.

Meine Entscheidung für ein Mathematikstudium stand schon lange vor dem Abitur fest, und so nutzte ich die den sechs weiteren IMO-Kandidaten und mir gebotene Möglichkeit, statt des UTP eine spezielle Betreuung durch einige Mitarbeiter der Humboldt-Universität zu erhalten. Darüber hinaus besuchte ich beispielsweise noch die Vorlesung „Lineare Algebra" des 1. Studienjahres. Später im Studium nahm ich dann auch viele Möglichkeiten wahr, fakultativ Lehrveranstaltungen zu besuchen. Mir hat das Studium der Mathematik immer viel Spaß gemacht, und auf Grund der relativ guten Vorbereitung durch Mathematikzirkel und ähnliche Veranstaltungen fiel es mir auch – vor allem zu Beginn des Studiums – leichter als manchem anderen. Der Übergang von der Schule zur Universität bringt für jeden Schwierigkeiten mit sich. Statt der gewohnten Schulstunden sind Vorlesungen, Übungen und Seminare zu besuchen, und von ganz entscheidender Bedeutung wird ein umfangreiches Selbststudium. Man muß sehr fleißig, beharrlich und kontinuierlich arbeiten und sich an tagtägliches Ringen um das Verständnis des Stoffes gewöhnen. Aber die Freude an der Beschäftigung mit der Mathematik hat das bei mir nicht gemindert. – Seit dem Abschluß meines Forschungsstudiums bin ich Assistent am Bereich Mathematische Optimierung der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität und als solcher an der Ausbildung der künftigen Diplom-Mathematiker beteiligt.

Meine Verbindung zur Mathematik-Olympiade ist nie abgerissen; ich bin Mitglied des Bezirkskomitees für die Olympiaden Junger Mathematiker Berlin, unterrichte in den Berliner Spezialistenlagern und bei der Vorbereitung unserer IMO-Kandidaten, bin als Koordinator bei der Berliner- und DDR-Olympiade tätig und nicht zuletzt Sekretär der Mathematischen Schülergesellschaft bei der Humboldt-Universität zu Berlin. Seit dem vergangenen Jahr betreue ich im Rahmen der MSG vier Junge Mathematiker, was mir viel Freude bereitet, und ich hoffe, daß diese vier, die in Berlin bisher sehr erfolgreich waren, bei künftigen Olympiaden auch wieder ein Wort mitzureden haben.

Aus meiner Arbeit in der MSG

Alle Pioniere und FDJ-ler der Mathematischen Schülergesellschaft bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universtität zu Berlin (MSG) kommen wöchentlich einmal in ihren Zirkeln (Klassenstufe 7 bis 12) zusammen. Sie werden von Mitarbeitern und Forschungsstudenten der Sektion Mathematik betreut. Die Teilnehmer lernen teils direkt im Unterricht, teils durch Selbststudium ausgewählte, altersangemessene Kapitel der Mathematik kennen, die oft über den Schulstoff hinausgehen. Daneben werden natürlich auch Aufgaben gelöst, die Olympiadecharakter haben, denn das gute Abschneiden unserer Berliner IMO-Teilnehmer in diesem Jahr ist uns Verpflichtung, alles zu tun, damit wir auch zu künftigen Internationalen Mathematik-Olympiaden Teilnehmer aus Berlin delegieren können, die unsere Republik würdig vertreten. – Die Besten jeder Klassenstufe erhalten neben den Zirkeln eine Spezialbetreuung durch Mitarbeiter der Sektion Mathematik. Die Spezialgruppe der Klasse 9 leite ich seit einem Jahr. Ihr gehören vier Schüler an. Bisher beschäftigten wir uns vor allem mit Geometrie. Die Schüler halten Vorträge über kleine Kapitel, und wir lösen Aufgaben, die wir meist sowjetischen Aufgabensammlungen, die für unsere Zwecke besonders gut geeignet sind, entnehmen. Einige davon werde ich aufschreiben:

▲Aufgabe▲ Die Mitten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ und $\overline{ED}$ des konvexen Fünfecks $ABCDE$ seien durch Strecken verbunden. Die Mitten H und K dieser Strecken seien von neuem miteinander verbunden. Man beweise, daß die Strecke $\overline{HK}$ parallel zur Strecke $\overline{AE}$ ist und daß die Länge von $\overline{HK}$ gleich einem Viertel der Länge von $\overline{AE}$ ist.

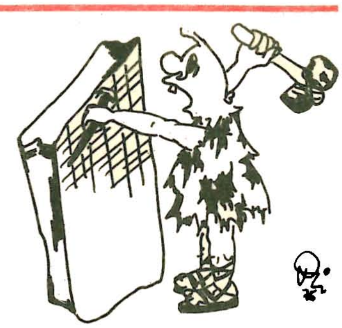
▲Aufgabe▲ Es sei eine der Diagonalen eines gegebenen Sehnenvierecks Durchmesser des Umkreises. Man beweise, daß die Längen der Projektionen der einander gegenüberliegenden Seiten auf die andere Diagonale gleich sind.

s. auch S. 138 *Monika Noack*

alpha stellt vor: die sechs Teilnehmerinnen der XVII. IMO

Land	Dem. Rep. Vietnam	Niederlande	Mongolische VR	SR Rumänien	SR Rumänien	Sowjetunion
Name Vorname	**Phan Vu Diem Hang**	**Geldof** **Susan**	**Zotondambon** **Sarantujaa**	**Draghicescu** **Ivana**	**Nastase** **Ileana**	**Howanowa** **Tatjana**
Schule	Mathematik-Schule der Universität Hanoi	Goese-Lyceum Driewegen	1. Schule Ulan Bator (Kl. 10)	Lic. „M. Viteacul Bukarest	M. Viteaculu Lic. Bukarest	444. Schule Moskau (Kl. 9)
Beruf des Vaters	Maschinen-Ingenieur	Arzt	Ingenieur	Ingenieur	Rechtsanwalt	Ingenieur
Beruf der Mutter	Arbeiterin	Hausfrau	Hochschullehrerin	Ingenieur	Ökonom	Chemielehrerin
Hobbys	Musik	leichte Musik, Sport	Literatur	Zeichnen	Musik	Sport
Berufswunsch	Mathematiklehrerin	Mathematik in technischer Richtung	Ökonomiestudium	Physikstudium	Ingenieur	Mathematikstudium
Wer weckte das Interesse für die Mathematik?	Durch eigene Beschäftigung mit der Mathematik	Durch den Mathematiklehrer wurde Interesse geweckt	Mathematiklehrer in Kl. 7	Freund des Vaters von Beruf Ingenieur	ganze Familie, insbesondere großer Bruder	Mathematiklehrerin in Klasse 4

In freien Stunden alpha heiter



Was soll man machen, wenn es keine karierten Blöcke gibt?

D. Fink, stud. math. an der TH „Otto v. Guericke", Magdeburg

Diophant

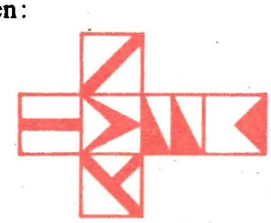
Wenn man die Buchstaben im Namen des griechischen Mathematikers DIOPHANT in geeigneter Weise durch Ziffern von 0 bis 9 ersetzt und von der so entstandenen Zahl das $3n$-fache ($n = 3, 4, \ldots, 27$) bildet, erhält man neunstellige Zahlen, in denen sich jeweils eine Ziffernfolge dreimal wiederholt.
Von den möglichen 25 Gleichungen seien zur Erleichterung einige angegeben.

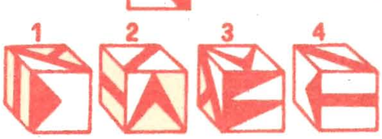
3 · 4 · DIOPHANT = DI RDI RDI R
3 · 7 · DIOPHANT = I HTI HTI HT
3 · 10 · DIOPHANT = ONEONEONE
3 · 11 · DIOPHANT = PENPENPEN
3 · 16 · DIOPHANT = HTI HTI HTI
3 · 17 · DIOPHANT = AI TAI TAI T
3 · 19 · DIOPHANT = NEONEONEO
3 · 25 · DIOPHANT = TAI TAI TAI

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Ungarische Würfeleien

Aus der ungarischen Rätselzeitschrift „Fules" ausgeschnitten:





Welcher Würfel gehört zu dem dargestellten Netz?

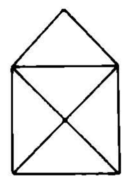
IMO-Spielerei

Auf der Rundfahrt der Freundschaft (Burgas–Tirnowo–Sofia) wurde auch viel geknobelt. *M. Marczinek* errechnete $2^{100} = 1267650600228229401496703205{*}{*}{*}$ und fragt alle *alpha*-Leser:
Wie heißen die letzten 3 Ziffern von 2^{100} in Dezimalschreibweise?

Das Haus vom Nikolaus

Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Haus zu zeichnen, ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Strecke zweimal zu durchfahren?
(*Hinweis:* Die Diagonalen sind je eine Kante, ihr Schnittpunkt zählt nicht als Knoten.)

Dr. G. Maeß, Sektion Numerische Mathematik an der Universität Rostock



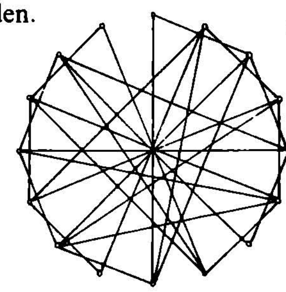
Heitere Interpretation einer Olympiadeaufgabe

An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander. Es ist zu beweisen, daß es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.
Wie originell ein Schüler der Klasse 9 diese Aufgabe löste, findest du auf Seite 144.

In einem Zug

Die Figur soll ohne abzusetzen nachgezogen werden. Dabei ist die Verbindung zweier Punkte stets eine Strecke, und keine Verbindung darf zweimal benutzt werden.

Oberlehrer Dipl.-Math.-Lehrer K. Becker, Lübtheen



Kryptarithmetik

```
  M A T H E
+ A L P H A
-----------
S P A S S
```

H. Oehl, München

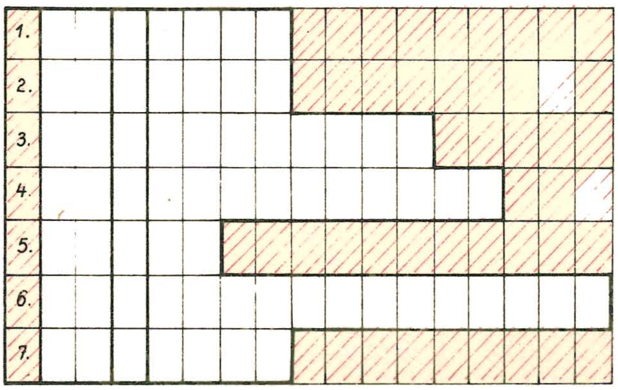
Die Rufnummer

Willst du mich heute noch erreichen,
dann wähle so vier Zahlenzeichen:
Die hintere Zahl aus zwei Ziffern
kann die vordere schnell liefern,
wenn man davon ganz ungeniert
genau ein Zehntel subtrahiert.
Von den vier Ziffern dann – summiert,
fühl'n Mystiker sich attackiert.

Mathematikfachlehrer W. Zehrer, Kreisvolkshochschule Netzschkau

Füllrätsel

Die dritten Buchstaben der Wortbilder der durch die angegebenen Eigenschaften bestimmten mathematischen Begriffe ergeben in der festgelegten Reihenfolge gelesen das Wortbild des gesuchten Begriffes.



1. Zeile: Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet.
2. Zeile: Viereck mit vier Symmetrieachsen.
3. Zeile: Menge der gemeinsamen Punkte einer Trapezfläche und der Mittelparallelen ihrer Grundseiten.
4. Zeile: Viereck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen.
5. Zeile: Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt gleichweit entfernt sind.
6. Zeile: Menge aller Punkte, deren jeder von zwei gegebenen Punkten jeweils gleichen Abstand hat.
7. Zeile: Vieleck bestimmter Eckenzahl, das bei jeder Lage seiner Eckpunkte einen Inkreis hat.

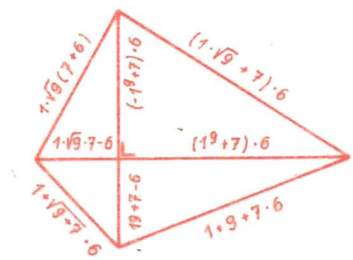
Irmgard Träger, Wilhelm-Pieck-OS Döbeln

1976

$$\begin{aligned}
1976 &= 197\cdot 6+19\cdot 7\cdot 6+1\cdot 9-7-6\\
&=(1^9\cdot 76)(-1+\sqrt{9}\cdot 7-6)\\
&=19(7-6)(1-9)(-7-6)\\
&=(1+97+6)\cdot 19(7-6)\\
&=(1+97+6)\cdot 19^{7-6}\\
&=19(7+6)(1\cdot 9-7+6)\\
&=\sqrt{19\cdot 76}(1+9+7\cdot 6)\\
&=(1+97+6)(19+76):(1-9+7+6)\\
19+76 &= 1\cdot 9+76+1\cdot 9+7-6\\
19-76 &= 1-97+6-1\cdot 9+7\cdot 6\\
19\cdot 76 &= [1-\sqrt{9}(7+6)]\cdot(1+\sqrt{9}-7\cdot 6)\\
19:76 &= (19+7-6):(1+\sqrt{9}+76)\\
19^{76} &= (19^{7-6})1^9\cdot 76\\
\sqrt[19]{76} &= \underline{\sqrt{1\cdot 9\cdot 7\cdot 6-1-\sqrt{9}-7-6}} \quad \sqrt{19\cdot 76(-1\cdot 9+7+6)}\\
\frac{1}{9}+\frac{7}{6} &= \frac{1+9+7+6}{19-7+6}\\
\frac{1}{9}-\frac{7}{6} &= \frac{19(-7+6)}{19-7+6}\\
\frac{1}{9}\cdot\frac{7}{6} &= \frac{1-9+7-6}{(1-\sqrt{9}-7)\cdot 6}\\
\frac{1}{9}:\frac{7}{6} &= \frac{\sqrt{1\cdot 9}+7-6}{1-9-7-6}
\end{aligned}$$

$$1+9+7+6=\frac{1\cdot 9+7+6}{1}+\frac{1+9-7+6}{9}+\frac{1-9+7-6}{7}+\frac{19-7-6}{6}$$

$$\frac{19+76}{19-76}=\frac{1\cdot 9+7-6}{-19+7+6}=\frac{(1+9)(7-6)}{(1-9+7)\cdot 6}$$



$A=(1^9\cdot 7\cdot 6)^{(19-7):6}$

Ing. H. Decker, Köln

Dynamische Schönheit

H. Baravalle, New York

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

● Einen interessanten geometrischen Trugschluß sandte uns *Ralf Schulze*, Mitglied der *Mathematischen Schülergesellschaft* (MSG) bei der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin.
Er liefert einen „Beweis", daß ein rechter Winkel gleich einem stumpfen ist. Dabei benutzt er eine Skizze, die durch folgende Konstruktion erhalten wurde (Bild 1): Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr zwei Punkte A und B. In A wird zu g die Senkrechte s errichtet, auf der D ein beliebiger Punkt ($\neq A$) ist. Weiterhin wird in B ein stumpfer Winkel an g angetragen, so daß der freie Schenkel s in der gleichen Halbebene wie D liegt. Um B wird ein Kreis mit $\overline{AD}$ geschlagen, der s in C schneidet. G sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu AB und CD.

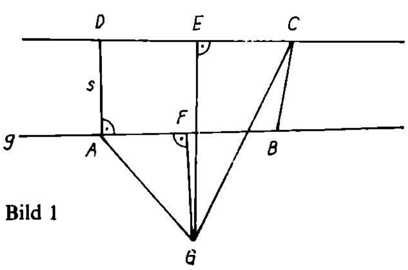


Bild 1

Nun ist $\overline{\sphericalangle DAB} = 90°$ und $\overline{\sphericalangle ABC} > 90°$.
Außerdem gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$ (1)
und, wenn die Mittelpunkte von AB bzw. DC mit E bzw. F bezeichnet werden,

$\overline{DE} = \overline{CE}$, $\overline{\sphericalangle DEG} = \overline{\sphericalangle CEG}$ (2)

sowie $\overline{AF} = \overline{BF}$, $\overline{\sphericalangle AFG} = \overline{\sphericalangle BFG}$ (3)

Aus den Kongruenzsätzen gewinnt man

$\triangle DEG \cong \triangle CEG$ (4)

und $\triangle AFG \cong \triangle BFG$ (5)

Daraus folgt weiter

$\overline{DG} = \overline{CG}$ (6)

und $\overline{AG} = \overline{BG}$ (7)

Aus (1), (6) und (7) erhält man

$\triangle ADG \cong \triangle BCG$ und daraus (8)

$\overline{\sphericalangle DAG} = \overline{\sphericalangle CBG}$ (9)

Außerdem gilt wegen (5)

$\overline{\sphericalangle FAG} \cong \overline{\sphericalangle FBG}$. (10)

Aus (9) und (10) folgt schließlich

$90° + \overline{\sphericalangle FAG} = \overline{\sphericalangle DAG} = \overline{\sphericalangle CBG}$
$= \overline{\sphericalangle CBF} + \overline{\sphericalangle FBG}$,

also $90° = \overline{\sphericalangle CBF}$.

Habt Ihr, liebe *alpha*-Leser, den Trugschluß in diesem „Beweis" gefunden? Wenn nicht, so führt einmal die Konstruktion der angegebenen Figur exakt durch. Dann werdet Ihr feststellen, daß in der angegebenen Skizze (Bild 1) „manipuliert" wurde. Die richtigen Lagebeziehungen der einzelnen Punkte zeigt Bild 2. Es kann also von (9) nicht auf (10) und somit auf die Behauptung geschlossen werden.

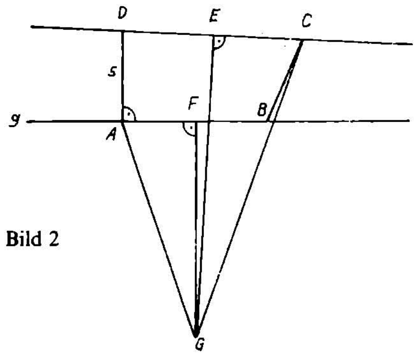
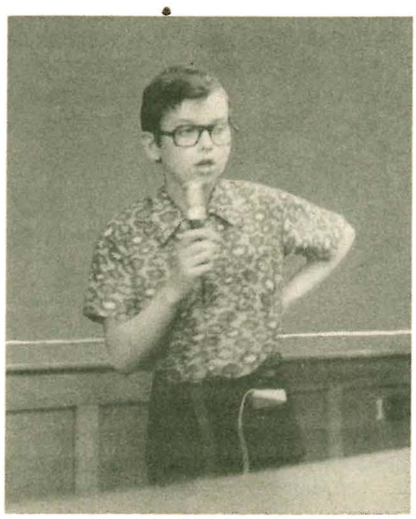


Bild 2

● Die Berliner MSG besteht seit etwa drei Jahren. In ihr arbeiten die besten *Jungen Mathematiker* von der 7. Klasse an in Gruppen von etwa 12 Mitgliedern zusammen. Außer der Zirkeltätigkeit werden Selbststudium, Einzelkonsultationen und Kurzlehrgänge in den Schulferien durchgeführt. Alljährlich findet ein Schülerkolloquium statt, auf dem MSG-Mitglieder Vorträge über mathematische Probleme halten, mit denen sie sich im Selbststudium beschäftigt haben.
So sprach *Gerald Görner* (siehe Foto) über die *Codierung von Nachrichten.* Dabei führte er u. a. aus:
„Wenn man eine Nachricht übermittelt, dann kann es doch einmal passieren, daß sie verfälscht wird, so z. B. auch beim Transport einer Dualzahl in einem Elektronenrechner. Deshalb fügt ein elektronischer Rechner einer eingegebenen Dualzahl, z. B. LLOL oder LOLO, eine Prüfstelle hinzu, durch deren Wert die Anzahl der L in der neuen Dualzahl immer ungerade wird. In unserem Beispiel erhalten wir also LLOLO bzw. LOLOL. Ist nun die Anzahl der L in einer transportierten Dualzahl gerade, z. B. LOOLO, kann man nur sagen, daß die Nachricht verfälscht ist. Es ist aber von Bedeutung, die verfälschte Stelle zu ermitteln. Mit einer solchen Methode, die das für vierstellige Dualzahlen ermöglicht, wollen wir uns nachfolgend beschäftigen.
Dabei transportieren wir unsere vierstellige Dualzahl als siebenstellige Nachricht mit 3 Kontrollstellen. Die Dualzahl steht auf den Stellen 3, 5, 6 und 7. Die Kontrollstellen 1, 2 und 4 werden so belegt, daß die Summe der L auf den Stellen 1, 3, 5 und 7, auf den Stellen 2, 3, 6, 7 und 4, 5, 6, 7 jeweils ungerade wird. Die Dualzahl LLOL wird somit als OLLLLOL übertragen. Wäre stattdessen die die Nachricht OLLLOOL angekommen, so könnte man den Fehler durch folgende Überlegungen finden:

(1) Die Summe der L auf 1, 3, 5, 7 ist 2, also liegt ein Fehler vor.
(2) Die Summe der L auf 2, 3, 6, 7 ist 3, also kein Fehler.
(3) Die Summe der L auf 4, 5, 6, 7 ist 2, also liegt ein Fehler vor.

Wegen (1) und (3) muß der Fehler auf 5 oder 7 sein. Er liegt aber wegen (2) auf Stelle 5. Man überlegt sich leicht, daß diese Methode immer zum Ziel führt, wenn nicht mehr als eine Stelle verfälscht übertragen wird."



● Der Schüler *Clemens Jaunich* schrieb im Auftrage der AG 7 des Klubs der *Jungen Mathematiker Cottbus* an *alpha*:
„Wir sind 12 Mitglieder des Kreisklubs und gehören zu den eifrigen Lesern von *alpha*. Wir befaßten uns unter Anleitung unseres AG-Leiters, Herrn *Kohlstock*, mit der Lösung von Gleichungen mit absoluten Beträgen. Dabei lösten wir u. a. folgende Aufgabe:

$$|9-x| - |0{,}5x+1| = 12."$$

Im nächsten Heft veröffentlichen wir die Lösung. Dann könnt Ihr sie mit Eurer eigenen vergleichen.

Fortsetzung von Seite 135

▲Aufgabe▲ Man beweise, daß die Fläche eines Quadrates, das innerhalb eines Dreiecks liegt, höchstens gleich der Hälfte der Fläche des Dreiecks ist.
Die vier Schüler meiner Spezialgruppe grüßen alle alpha-Leser. In Heft 1 geben sie die Lösungen zu den zwei folgenden Aufgaben, die ebenfalls einer von uns durchgearbeiteten Broschüre entnommen sind:
▲Aufgabe▲ Kann man acht Strecken in der Ebene so lagern, daß jede von ihnen mit genau drei anderen dieser Strecken Schnittpunkte hat?
Beantworte die gleiche Frage für sieben Strecken!
▲Aufgabe▲ Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ABC werde von dem Kreis, dessen Durchmesser die längere Kathete ist, im Verhältnis 1 : 3 geteilt. Man bestimme die Winkel des Dreiecks!

M. Noack

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 5/74 (Nachtrag):

W 9 ■ 1281 Für alle $i=1, 2, \ldots, n$ gilt, da das Quadrat einer reellen Zahl stets größer oder gleich Null ist,

$$(a_i-b_i)^2 \geqq 0,$$

also $a_i^2-2a_ib_i+b_i^2 \geqq 0$,

$$a_i^2 \geqq 2a_ib_i-b_i^2=b_i(2a_i-b_i).$$

Daraus folgt wegen $b_i>0$

$\frac{a_i^2}{b_i} \geqq 2a_i-b_i$. Daher gilt

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}$$
$$\geqq (2a_1-b_1)+(2a_2-b_2)+\ldots+(2a_n-b_n)$$
$$\geqq 2(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$
$$\geqq 2-1=1, \text{ w. z. b. w.}$$

▲ 10/12 ▲ 1282 Es soll bewiesen werden, daß das Produkt $z=99n$ stets die Quersumme 18 hat, wenn n eine natürliche Zahl mit $0<n<100$ ist. Dann läßt sich n in der Form $n=10a+b$ darstellen, wobei a und b natürliche Zahlen mit $0 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ sind und nicht beide gleich Null sind.
Für das Produkt erhält man

$$z=99n=(100-1)(10a+b)=$$
$$=a \cdot 10^3+b \cdot 10^2-a \cdot 10-b.$$

Um z dekadisch darzustellen, ist die rechte Seite so umzuformen, daß die Faktoren bei den Potenzen von 10 einstellige natürliche Zahlen sind. Dabei sind die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

1. $b \neq 0$. Dann gilt
$z=a \cdot 10^3+(b-1) \cdot 10^2+(9-a) \cdot 10+(10-b)$, das ist eine natürliche Zahl, die die Grundziffern
$a, b-1, 9-a, 10-b$,
also die Quersumme
$a+b-1+9-a+10-b=18$ hat.

2. $b=0$. Dann ist nach Voraussetzung $a \neq 0$, und es gilt
$z=a \cdot 10^3-a \cdot 10=(a-1) \cdot 10^3+9 \cdot 10^2+(10-a) \cdot 10+0$, das ist eine natürliche Zahl, die die Grundziffern
$a-1, 9, 10-a, 0$,
also die Quersumme
$a-1+9+10-a=18$ hat.

In jedem Falle hat also die Zahl z die Quersumme 18, w. z. b. w.

▲ 10/12 ▲ 1283 Die Gleichung

$$1!+2!+\ldots+x!=1^3+2^3+\ldots+y^3 \quad (1)$$

hat für
$x=1$ die Lösung $y=1$; denn $1!=1^3$;
$x=2$ keine Lösung; denn $1!+2!=3$ und $1^3<3$, $1^3+2^3>3$;
$x=3$ die Lösung $y=2$; denn $1!+2!+3!=9$ und $1^3+2^3=9$.
Für $x=4$ gilt $1!+2!+3!+4!=1+2+6+24=33$.
Andererseits gilt

$$1^3+2^3+\ldots+y^3=\left[\frac{y(y+1)}{2}\right]^2=z^2,$$

wobei $z=\frac{y(y+1)}{2}$ eine natürliche Zahl ist.
Die rechte Seite der Gleichung (1) ist also gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl. Nun endet das Quadrat einer natürlichen Zahl niemals auf die Grundziffer 3, weil die Zahlen $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 9^2$ nicht auf die Grundziffer 3 enden. Da jedoch die linke Seite der Gleichung (1) im Falle $x=4$ gleich 33 ist, ergibt sich ein Widerspruch; daher hat in diesem Falle die Gleichung keine Lösung.
Für $x \geqq 5$ endet die Summe

$$1!+2!+3!+4!+5!+\ldots+x!=$$
$$=33+5!+6!+\ldots+x!$$

ebenfalls auf die Grundziffer 3; denn die Summanden $5!=120$, $6!=720$ usw. sind jeweils Vielfache von 10. Da aber auch in diesem Falle auf der rechten Seite der Gleichung (1) das Quadrat einer natürlichen Zahl steht, ergibt sich ein Widerspruch, d. h. die Gleichung hat auch für $x \geqq 5$ keine Lösung.
Daher hat die gegebene Gleichung genau zwei Lösungen, nämlich

$$x=1, y=1 \text{ und } x=3, y=2.$$

W 10/12 ■ 1284 Angenommen, es sei (x, y) eine Lösung des Gleichungssystems

$$x^2+y^2=1, \quad (1)$$
$$x^6+y^6=1. \quad (2)$$

Dann gilt wegen (1)

$$y^2=1-x^2 \quad (3)$$
$$y^6=(1-x^2)^3=1-3x^2+3x^4-x^6,$$

also wegen (2)

$$x^6+1-3x^2+3x^4-x^6=1,$$
$$3x^4-3x^2=0,$$
$$x^2(x^2-1)=0. \quad (4)$$

Die Gleichung (4) ist genau dann erfüllt, wenn entweder
$x^2=0$, d. h. $x=0$ oder
$x^2-1=0$, d. h. $x^2=1$,
also $x=1$ oder $x=-1$.
Aus der Gleichung (3) erhalten wir die zugehörigen Werte für y:

$$x_1=0, \quad y_1=1;$$
$$x_2=0, \quad y_2=-1;$$
$$x_3=1, \quad y_3=0;$$
$$x_4=-1, \quad y_4=0.$$

Für diese Werte sind aber auch, wie die Probe bestätigt, die Gleichungen (1) und (2) erfüllt.
Das gegebene Gleichungssystem hat also genau vier reelle Lösungen, nämlich
$(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

W 10/12 ■ 1285 Es seien
$a_1=384\,400$ km der Radius der Umlaufbahn des Mondes,
$T_1=27{,}32$ d $=655{,}68$ h $\approx 39\,340$ min die Umlaufzeit des Mondes,
$a_2=35\,600$ km $+6\,370$ km $=41\,970$ km der Radius der Umlaufbahn von „Kosmos 637“,
T_2 die gesuchte Umlaufzeit dieses Satelliten (in min).
Dann gilt nach dem 3. Keplerschen Gesetz

$$T_2^2 : T_1^2 a_2^3 : a_1^3,$$
$$T_2=\sqrt{\frac{a_2^3 \cdot T_1^2}{a_1^3}}.$$

Setzen wir die obigen Werte ein, so erhalten wir (am besten durch logarithmische Rechnung) $T_2=1\,419$ min $=23$ h 39 min, das sind fast 24 h.
Es handelt sich also um einen „Synchronsatelliten“ oder „quasistationären Satelliten“, d. h. um einen Raumflugkörper, der auf seiner kreisförmigen Umlaufbahn, die gegenüber dem Äquator nur um 0,25° geneigt ist, in nahezu 24 h die Erde umfliegt, also in derselben Zeit, die die Erde für die Drehung um ihre Achse benötigt. Ein solcher Satellit macht also auf einen Beobachter den Eindruck, als ob er fest über einem bestimmten Ort der Erde stehe.

W 10/12*1286 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-8)(x-10) \cdot (x-11)(x-12)=14\,400. \quad (1)$$

Da das arithmetische Mittel von $x-1$ und $x-12$, von $x-2$ und $x-11$, von $x-3$ und $x-10$, von $x-5$ und $x-8$ jeweils gleich $x-\frac{13}{2}$ ist, empfiehlt sich die Substitution $x-\frac{13}{2}=t$, also $x=t+\frac{13}{2}$. Dann ist t eine Lösung der Gleichung

$$(t+\frac{11}{2})(t+\frac{9}{2})(t+\frac{7}{2})(t+\frac{3}{2})(t-\frac{3}{2})(t-\frac{7}{2})(t-\frac{9}{2})(t-\frac{11}{2})=14\,400, \quad (2)$$

$$(t^2-\frac{121}{4})(t^2-\frac{81}{4})(t^2-\frac{49}{4})(t^2-\frac{9}{4})=14\,400. \quad (3)$$

In dieser Gleichung ist das arithmetische Mittel von $t^2-\frac{121}{4}$ und $t^2-\frac{9}{4}$, von $t^2-\frac{81}{4}$ und $t^2-\frac{49}{4}$ jeweils gleich $t^2-\frac{65}{4}$. Man setzt daher $t^2-\frac{65}{4}=z$, also $t^2=z+\frac{65}{4}$ und erhält

$$(z-\frac{56}{4})(z-\frac{16}{4})(z+\frac{16}{4})(z+\frac{56}{4})=14\,400,$$
$$(z-14)(z-4)(z+4)(z+14)=14\,400, \quad (4)$$
$$(z^2-196)(z^2-16)=14\,400,$$
$$z^4-212z^2-11\,264=0. \quad (5)$$

Diese quadratische Gleichung für z^2 hat genau eine nicht negative Lösung, nämlich
$z^2=106+\sqrt{11\,236+11\,264}=106+\sqrt{22\,500}$
$=106+150$,
$z^2=256$. Diese Gleichung hat die Lösungen:
a) $z_1=16$. Dann ist $t^2=16+\frac{65}{4}=\frac{129}{4}$,
also $t_1=\frac{1}{2}\sqrt{129}$, $t_2=-\frac{1}{2}\sqrt{129}$

und $x_1 = \frac{13+\sqrt{129}}{2}$, $x_2 = \frac{13-\sqrt{129}}{2}$.

b) $z_3 = -16$. Dann ist $t^2 = -16 + \frac{65}{4} = \frac{1}{4}$,

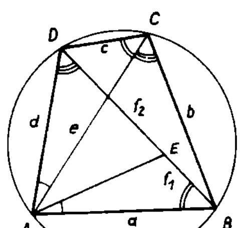
also $t_3 = \frac{1}{2}$, $t_4 = -\frac{1}{2}$

und $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 7$, $x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 6$.

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sein. Die Probe bestätigt, daß das tatsächliche Lösungen sind.
Die gegebene Gleichung hat also genau vier reelle Lösungen, nämlich

$$x_1 = \frac{13+\sqrt{129}}{2},\ x_2 = \frac{13-\sqrt{129}}{2},$$
$$x_3 = 7,\ x_4 = 6.$$

W 10/12*1287 Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Bezeichnungen. Ferner sei der Punkt E auf der Diagonale $\overline{BD}$ so gewählt, daß $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAB$ gilt (vgl. die Abb.). Das ist immer möglich, weil das Sehnenviereck $ABCD$ konvex ist und daher $\sphericalangle DAC < \sphericalangle DAB$ ist.



Wir schreiben zur Abkürzung $\overline{BE} = f_1$, $\overline{ED} = f_2$; dann ist $f_1 + f_2 = f$. Nun gilt

$\sphericalangle EAB = \sphericalangle DAC$,
$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACD$ (als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AD}$),

also $\triangle ABE \sim \triangle ACD$. Daraus folgt
$f_1 : a = c : e$,

also $f_1 e = ac$. Ferner gilt (1)
$\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB$,
$\sphericalangle EDA = \sphericalangle BCA$ (als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{AB}$),

also $\triangle EDA \sim \triangle BCA$. Daraus folgt
$f_2 : d = b : e$,

also $f_2 e = bd$. (2)

Aus (1) und (2) folgt weiter

$f_1 e + f_2 e = ac + bd$,
$e(f_1 + f_2) = ac + bd$,
$ef = ac + bd$, w. z. b. w.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. H. Bausch (3/75)

▲1219▲ *Beweis:*
Wir setzen zur Abkürzung der Schreibweise $x_i = a_i$, $\ln x_i = b_i$, dann ist

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum\limits_i b_i & \sum\limits_i a_i \\ \sum\limits_i b_i & \sum\limits_i b_i^2 & \sum\limits_i a_i b_i \\ \sum\limits_i a_i & \sum\limits_i a_i b_i & \sum\limits_i a_i^2 \end{vmatrix}$$

$$= n\sum_i a_i^2 \sum_i h_i^2 + 2\sum_i a_i \sum_i b_i \sum_i a_i b_i -$$
$$-(\sum_i a_i)^2 \sum_i b_i^2 - \sum_i a_i^2 (\sum_i b_i)^2 - n(\sum_i a_i b_i)^2$$
$$= n\sum_{i,j} a_i^2 b_j^2 + 2\sum_{i,j,k} a_i b_k a_j b_j - \sum_{i,j,k} a_i a_k b_j^2$$
$$- \sum_{i,j,k} a_i^2 b_j b_k - n\sum_{i,j} a_i b_i a_j b_j \quad (1 \leqq i, j, k \leqq n)$$
$$= \sum_{i,j,k} (a_i^2 b_j^2 + 2a_i a_j b_j b_k - a_i a_k b_j^2 - a_i^2 b_j b_k$$
$$- a_i a_j b_i b_j)$$
$$= \sum_{i,j,k} (a_i^2 b_j^2 + a_i a_j b_j b_k + a_i a_k b_i b_j - a_i a_k b_j^2$$
$$- a_i^2 b_j b_k - a_i a_j b_i b_j)$$
$$= \sum_{i,j,k} a_i b_j (a_i b_j + a_j b_k + a_k b_i - a_k b_j - a_i b_k$$
$$- a_j b_i)$$
$$= \sum_{i,j,k} a_i b_j \Delta_{ijk} \text{ mit } \Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

Der Wert der Summe hängt nicht von der Anordnung der Indizes ab, da diese sämtlich und unabhängig voneinander von 1 bis n variieren. Insgesamt gibt es sechs verschiedene Anordnungen der Indizes i, j, k und folglich sechs zu oben analoge Darstellungen der Summe. Bei einer Vertauschung zweier Indizes ändert die Determinante Δ_{ijk} lediglich das Vorzeichen. Folglich gilt

$$D = \frac{1}{6}\sum_{i,j,k} (a_i b_j - a_j b_i - a_i b_k - a_k b_j + a_k b_i + a_j b_k)\Delta_{ijk}$$
$$= \frac{1}{6}\sum_{i,j,k} \Delta_{ijk}^2 \geqq 0$$

Wir zeigen nun, daß wenigstens eine der Determinanten Δ_{ijk} verschieden von Null ist. Daraus folgt dann $D > 0$.
Laut Voraussetzung sind mindestens drei der a_i paarweise verschieden, das seien a_p, a_q, a_r. Es gilt

$$\Delta_{pqr} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_p & a_q & a_r \\ b_p & b_q & b_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_p & a_q - a_p & a_r - a_p \\ b_p & b_q - b_p & b_r - b_p \end{vmatrix} =$$
$$= (a_q - a_p)(b_r - b_p) - (a_r - a_p)(b_q - b_p)$$
$$= (x_q - x_p)\ln\frac{x_r}{x_p} - (x_r - x_q)\ln\frac{x_q}{x_p}$$

Angenommen, es wäre $\Delta_{pqr} = 0$.
Das hieße ($x_p > 0$)
$(\overline{x_q} - 1)\ln \overline{x_r} = (\overline{x_r} - 1)\ln \overline{x_q}$ mit
$\overline{x_q} = \frac{x_q}{x_p} \neq 1$, $\overline{x_r} = \frac{x_r}{x_p} \neq 1$, $x_q \neq \overline{x_r}$,

also $\frac{\ln \overline{x_r}}{\overline{x_r} - 1} = \frac{\ln \overline{x_q}}{\overline{x_q} - 1}$

Diese Gleichheit kann aber nicht erfüllt sein, da $\overline{x_r} \neq \overline{x_q}$ gilt und $b^{(x)} = \frac{\ln x}{x-1}$ im gesamten Definitionsbereich eine streng monoton fallende Funktion ist. Folglich ist $\Delta_{pqr} \neq 0$ und damit $D > 0$.

Bemerkung: Es gibt eine wesentlich kürzere Beweismöglichkeit, die aber einige spezielle Kenntnisse voraussetzt:
Wir definieren drei Vektoren im n-dimensionalen Raum
$\mathfrak{a} = \{1, 1, \dots, 1\}$; $\mathfrak{b} = \{\ln x_1, \ln x_2, \dots, \ln x_n\}$;
$\mathfrak{c} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Dann lassen sich die Elemente der Determinante D als Skalarprodukte dieser Vektoren darstellen, nämlich

$$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{aa} & \mathfrak{ab} & \mathfrak{ac} \\ \mathfrak{ba} & \mathfrak{bb} & \mathfrak{bc} \\ \mathfrak{ca} & \mathfrak{cb} & \mathfrak{cc} \end{vmatrix}$$

Das ist aber die Gramsche Determinante dritter Ordnung (s. z. B. W. J. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. III, 1, Kap. I, § 2). Ihr Wert ist nach einem bekannten Satz positiv, falls die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ linear unabhängig sind, und gleich Null, falls die Vektoren linear abhängig sind.
Die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind aber linear unabhängig, denn oben wurde gezeigt, daß $\Delta_{pqr} \neq 0$ ist, und folglich ist der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \ln x_1 & \ln x_2 & & \ln x_n \end{pmatrix}$ gleich 3.

Lösung der „Fußballaufgabe" – AG's im Blickpunkt (5/75)

a) Wir nehmen an, die Mannschaften A und B belegen die ersten beiden Plätze, Mannschaft C gewinnt jedes Heimspiel und gestaltet jedes Auswärtsspiel unentschieden. C holt dann insgesamt $4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12$ Punkte. A und B holen gegen C einen, gegen D und E jeweils höchstens 4 Punkte. Das sind zusammen höchstens 9 für jede Mannschaft. Außerdem spielen A und B noch zweimal gegeneinander. Dabei werden genau 4 Punkte vergeben, von denen die eine Mannschaft höchstens 2 bekommt. Diese hätte dann in der gesamten Aufstiegsrunde maximal $9 + 2 = 11$ Punkte, wäre also im Widerspruch zur Annahme hinter C plaziert. Also war die Annahme falsch, die Behauptung ist somit bewiesen (indirekter Beweis).
b) Angenommen, Mannschaft C gewinnt alle Heimspiele mit 1 : 0 und erreicht in den Auswärtsspielen jeweils ein 0 : 0. Weiterhin spielen A gegen B 2 : 0 und 0 : 1. In sämtlichen Spielen gegen D, E und F gewinnen A und B jeweils mit 2 : 0. Dann hätten A bzw. B jeweils 1 (gegen C) $+ 3 \cdot 4$ (gegen D, E und F) $+ 2$ (gegen B bzw. A) $= 15$ Punkte, C hätte $5 \cdot 2$ (aus Heimspielen) $+ 5 \cdot 1$ (aus Auswärtsspielen) $= 15$ Punkte. A hätte eine Tordifferenz von 12 (14 erzielte, 2 erhaltene Tore), B von 10 (13 erzielte und 1 erhaltenes Tor) und C von 5 (5 erzielte, kein erhaltenes Tor). Mannschaft C erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, wäre aber trotzdem nur Dritter. Die Behauptung ist also falsch (Angabe eines Gegenbeispiels genügt).

Lösungen zu: Extremwertaufgaben, die jeder lösen kann

▲1▲ Nach der Umkehrung des Thalessatzes sind alle in Frage kommenden Dreiecke rechtwinklig, und wir können die Aufgabenstellung auch so formulieren: Welches

unter allen rechtwinkligen Dreiecken vorgegebener Hypotenusenlänge d hat maximalen Flächeninhalt?
Bezeichnen wir die Kathetenlängen mit x bzw. y, so ist der Flächeninhalt A des Dreiecks $A=\frac{xy}{2}$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $y=\sqrt{d^2-x^2}$, und wir erhalten

$$A=\frac{x}{2}\sqrt{d^2-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2(d^2-x^2)}$$

Der Radikand $x^2(d^2-x^2)$ ist wegen $x \neq d$ ein Produkt aus zwei positiven Faktoren mit der konstanten Summe d^2, also nimmt er seinen größten Wert an, für $x^2=d^2-x^2=\frac{d^2}{2}$, woraus $x=\frac{d}{2}\sqrt{2}$ folgt. Daraus ergibt sich $y=\frac{d}{2}\sqrt{2}$ und $A_{max}=\frac{d^2}{4}$.
Das flächengrößte unter den rechtwinkligen Dreiecken fester Hypotenuse ist also das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

▲2▲ Es ist $f(x)=(x-4)^4[(x+3)^2]^2=[(4-x)(x+3)]^4$, und der Ausdruck $(4-x)(x+3)$ ist für $-3<x<4$ ein Produkt aus zwei positiven Faktoren konstanter Summe 7. Infolgedessen nimmt die Funktion $f(x)$ ihren größten Wert im Intervall $-3<x<4$ für $4-x=x+3=\frac{7}{2}$, also für $x=\frac{1}{2}$, an, und es ist $f(\frac{1}{2})=(\frac{7}{2})^8$.

▲3▲ a) Wegen $(c-1)^2 \geqq 0$, also $c^2-2c+1 \geqq 0$ gilt $c^2+1 \geqq 2c$, und nach Division der Ungleichung durch $c>0$ erhalten wir $c+\frac{1}{c} \geqq 2$, also $c+d \geqq 2$ für positive Zahlen c, d mit $cd=1$. Der Ausgangsungleichung $(c-1)^2 \geqq 0$ entnehmen wir auch, daß das Gleichheitszeichen eintritt genau dann, wenn $c=1$.
b) Sei $ab=p^2$. Für $a=b=p$ ist die Summe $a+b=2p$, und für jede andere Wahl von a und b ist diese Summe größer. Wählen wir etwa $a=pc$ und demzufolge $b=\frac{p}{c}$ mit $0<c<p$, dann ist

$$a+b=pc+\frac{p}{c}=p(c+\frac{1}{c}) \geqq 2p,$$

da nach Aufgabe 3a) gilt $c+\frac{1}{c} \geqq 2$. Das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn $c=1$, also $a=b=p$.
c) Sind a und b die Längen der Rechteckseiten, so soll $U=2(a+b)$ minimal werden bei konstantem Flächeninhalt $A=ab$. Die Lösung ergibt sich als unmittelbare Anwendung des Ergebnisses von Aufgabe 3b):
Unter allen flächengleichen Rechtecken hat das Quadrat kleinsten Umfang.

▲4▲ a) Sind a, b zwei positive Zahlen, $G=\sqrt{ab}$ ihr geometrisches, $A=\frac{a+b}{2}$ ihr arithmetisches Mittel, so gilt offenbar: $\frac{a}{G}\cdot\frac{b}{G}=\frac{ab}{G^2}=1$. Also ist nach Aufgabe 3a)

$$\frac{a}{G}+\frac{b}{G} \geqq 2,$$

woraus durch Multiplikation mit $\frac{G}{2}>0$ sofort die Behauptung folgt.
Du kannst die Behauptung auch unmittelbar, vom Ansatz $(a-b)^2 \geqq 0$ ausgehend, beweisen.
b) Zu zeigen ist: Für positive Zahlen a_1, a_2, ..., a_n mit $a_1a_2...a_n=1$ gilt $a_1+a_2+...+a_n \geqq n$.
Für $n=2$ ist der Satz durch Aufgabe 3a) bewiesen. Nun zeigen wir: Wenn der Satz für irgendeine natürliche Zahl $k \geqq 2$ gilt, dann ist er auch für die nachfolgende natürliche Zahl $k+1$ richtig.
Seien $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}$ $(k+1)$ positive Zahlen mit $a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_k\cdot a_{k+1}=1$. Sind alle $a_i=1$ $(i=1, 2, ..., k+1)$, so ist $a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}=k+1$. Sind nicht alle Faktoren gleich 1, so gibt es welche, die kleiner als 1, und andere, die größer als 1 sind. Da es auf die Bezeichnungsreihenfolge nicht ankommt, sei $a_1>1$, $a_{k+1}<1$. Wir formen die zu untersuchende Summe um:

$$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}=(a_1a_{k+1}+a_2+...+a_k)+1+a_1+a_{k+1}-a_1a_{k+1}-1$$
$$=(a_1a_{k+1}+a_2+...+a_k)+1+(a_1-1)(1-a_{k+1})$$

Wegen $(a_1a_{k+1})a_2...a_k=1$ gilt nach der Induktionsvoraussetzung $a_1a_{k+1}+a_2+...+a_k \geqq k$, folglich

$$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1} \geqq k+1+(a_1-1)(1-a_{k+1}),$$

also $a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}>k+1$, da der letzte Summand $(a_1-1)(1-a_{k+1})$ wegen $a_1>1$ und $a_{k+1}<1$ sicher positiv ist.
c) Sind a_1, a_2, ..., a_n n positive Zahlen, $G=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ ihr geometrisches, $A=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ ihr arithmetisches Mittel. Da offenbar $\frac{a_1}{G}\cdot\frac{a_2}{G}\cdot ...\cdot\frac{a_n}{G}=1$ gilt, folgt nach Aufgabe 3b) sofort

$$\frac{a_1}{G}+\frac{a_2}{G}+...+\frac{a_n}{G} \geqq n,$$

woraus durch Multiplikation mit $\frac{G}{n}>0$ sofort die Behauptung folgt. Wer den allgemeinen Beweis in Aufgabe 3b) nicht geführt hat, kann sich auf den in der Aufgabenstellung behandelten Fall $n=3$ stützen und die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel für diesen Fall beweisen.
d) Für die positiven Zahlen a, b, c (Seitenlängen!) gilt nach Aufgabe 4c):

$$\sqrt[3]{abc} \leqq \frac{a+b+c}{3}=\frac{s}{3}$$

Erheben wir diese Ungleichung in die dritte Potenz, so erhalten wir

$$V=abc \leqq (\frac{s}{3})^3,$$

und das Gleichheitszeichen tritt ein genau dann, wenn $a=b=c=\frac{s}{3}$. Also hat der Würfel unter allen Quadern gleicher Kantenlängensumme das größte Volumen.

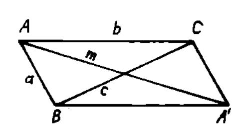
Lösungen zu: Aufgaben aus Freundesland (5/75)

Klasse 6

1. 35; 2. 40; 3. A: 12 Tage, B: 6 Tage, C: 4 Tage; 4. 9; 5. 85; 6. $\frac{1}{3}$;
7. Genau eine der Zahlen ist durch 3, und mindestens eine ist durch 2 teilbar.
8. Voraussetzung: a, b ungerade, $a-b=64$.
Angenommen, es existiere eine Zahl t mit t/a und $t/b \Rightarrow t/a-b$.
64 hat als Teiler nur Vielfache von 2. Da a und b ungerade sind, kann kein solches $t \neq 1$ existieren.
9. Ist die Summe durch 3 teilbar, so bezahlt man alles mit 3-Rubelscheinen.
Läßt die Summe bei Division durch 3 den Rest 1, wird mit 2 Fünfrubelscheinen und der Rest mit Dreirubelscheinen bezahlt. (Die kleinste auf diese Weise bezahlbare Summe ist 10 Rubel.)
Läßt die Summe bei Division durch 3 den Rest 2, wird mit 1 Fünfrubelschein und der Rest mit Dreirubelscheinen bezahlt.
(Die kleinste auf diese Weise im angegebenen Bereich bezahlbare Summe ist 8 Rubel.)
10. Der gesuchte Fehler ist die Summe der Reste bei der Division der Ausgangszahlen durch 5. Da sich bei der Addition der gerundeten Zahlen die Summe nicht verändert hat, muß die Summe der Reste durch 5 teilbar sein.
Die Restsumme kann nicht Null sein, da die Ausgangszahlen nicht durch 5 teilbar sind. Weiterhin kann die Summe nicht 5 sein, da in diesem Fall jeweils der Rest 1 bleiben würde, die Summe der gerundeten Zahlen also nicht mit der Summe der Ausgangszahlen übereinstimmen könnte. Entsprechendes gilt für die Summe 20. In Frage kommen also nur die Restsummen 15 oder 20.
11. 142 857
12. 315 789 473 684 210 526. Weitere Zahlen z_n sind $z_n=\sum_{i=0}^{n} 315\,789\,473\,684\,210\,526\cdot 10^{18i}$
13. Nein. Zum Beispiel erfüllen $A=\{1; 2\}$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$ die genannten Bedingungen.
14. $A_{10}=A_4=(A_1\cup A_2)\cap A_3$.
15. a) Im Parallelogramm $ABA'C$ gilt:

$$2m<a+b \Rightarrow m<\frac{a+b}{2}$$

b) $m+\frac{c}{2}>a$ und $m+\frac{c}{2}>b \Rightarrow m>\frac{a+b-c}{2}$



16. Beweisführung mittels Strahlensatz und Satz über Winkelsumme im Dreieck.

Fortsetzung: Siehe Heft 1/76, d. Red.

Lösungen zu alpha-heiter 6/75

Diophant

$D=1 \quad I=2 \quad 0=3 \quad P=4 \quad H=5 \quad A=6$
$N=7 \quad T=9 \quad R=8 \quad E=0$

Ungarische Würfeleien

Würfel Nr. 4 gehört zum vorgegebenen Netz

IMO-Spielerei

1. Lösung: $\varphi(125=(5-1)5^2=100=2^{100}$
$\equiv 1(125)$

2. Lösung: 3 Abschätzungen aus $2^7 \equiv 3(125)$

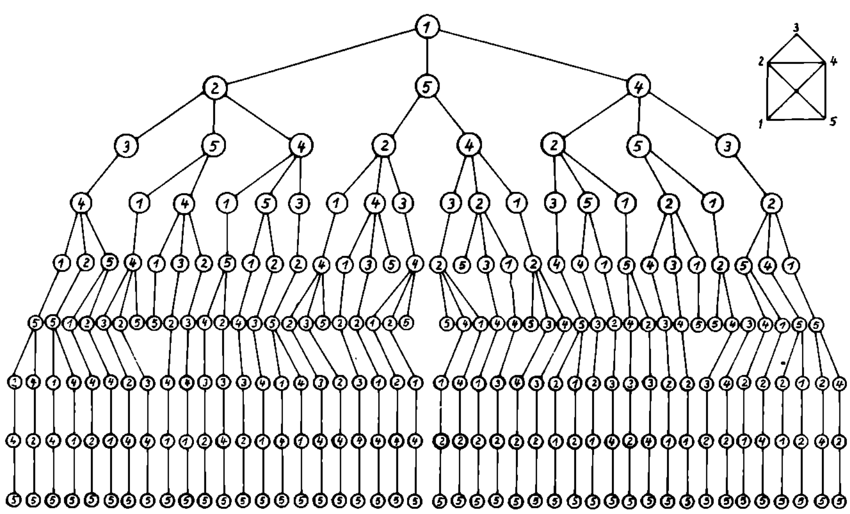
a) $2^{21} \equiv 27(125)$
$2^{23} \equiv 108 \equiv -17(125)$
$2^{25} \equiv -68=57 \equiv 2\cdot 5^2+7(125)$
$2^{50} \equiv 4\cdot 5^4+749 \equiv -1(5^3)$
$2^{100} \equiv 1(125)$

b) $2^{35} \equiv 243 \equiv -7(125)$
$2^{105} \equiv -343 \equiv 32(125)$
$2^{100} \equiv 1(125)$

c) $2^{21} \equiv 27 \equiv -98(125)$
$2^{20} \equiv -49 \equiv 1-2\cdot 5^2(125)$
$2^{40} \equiv 1-100+4\cdot 5^4 \equiv -99 \equiv 26$
$\equiv 5^2+1(125)$
$2^{80} \equiv 5^4+51 \equiv 51 \equiv 1+25^2(125)$
$2^{100} \equiv 2^{20}\cdot 2^{80} \equiv (1-2\cdot 5^2)(1+2\cdot 5^2)$
$\equiv 1(125)$
$2^{100} \equiv 1(125) \rightarrow 2^{100} \equiv 376(1\,000)$

Das Haus vom Nikolaus

Wir numerieren die Ecken („Knoten") wie im Bild angegeben (s. u.):
Beginnen bzw. aufhören kann man nur in einem Knoten mit ungerader Kantenzahl, also in 1 oder 5. Wir betrachten nur die Wege von 1 nach 5. Jeder Weg kann dann auch in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Eine auch für Schüler verständliche Lösungsmethode könnte der folgende „Entscheidungsbaum" sein. Wir beginnen bei 1 und haben drei Möglichkeiten zur Auswahl: 2, 4, 5. Von 5 kann man in zwei Richtungen weiterzeichnen, von 2 und 4 in jeweils drei Richtungen. Kommt ein Knoten zum zweiten Mal vor, so muß beachtet werden, daß eine (beim Startknoten) bzw. zwei Kanten bereits verbraucht sind. Den Ast 1 4 ... kann man erhalten, indem man im Ast 1 2 ... die Knoten 4 und 2 vertauscht. Das gleiche gilt für die Äste 1 5 4 ... und 1 5 2 ... (siehe beiliegender Graph, der Kniff ist Symmetrieachse). Als Lösung würde also auch der halbe Graph ausreichen.
Es ergeben sich 44 Möglichkeiten. Rechnet man die hinzu, die im Punkt 5 beginnen, so sind es insgesamt 88.



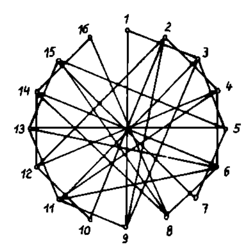
Heitere Interpretation einer Olympiadeaufgabe

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	x													
2		x												
3			x											
4				x										
5					x									
6						x								
7							x							
8								x						
9									x					
10										x				
11											x			
12												x		
13													x	
14														x

Jede Mannschaft muß 13mal gegen andere spielen. An einem Spieltag maximal 7 Spiele.
1. Fall: Das Spiel, wo die Mannschaft gegen sich selbst spielen muß, wird auf einen Tag gelegt (siehe Tabelle) und findet nicht statt wegen Unmöglichkeit. Daraus folgt: Alle Mannschaften haben nach jedem Spieltag die gleiche Anzahl von Spielen (bei keinem Ausfall).
2. Fall: Die Spiele, wo jede Mannschaft gegen sich selbst spielen muß, werden auf die ganze Halbserie verteilt. Daraus folgt: An 7 Spieltagen spielen je zwei Mannschaften nicht, da wenn eine gegen sich selbst spielen muß (unmöglich) eine zweite sofort mit pausieren muß (da sie alleine wäre $14-1=13$ $13:2=5$ Rest 1) Daraus folgt: 2 Mannschaften haben in jedem Falle die gleiche Anzahl von Spielen.
Anmerkung des Korrektors: Es geht in dieser Aufgabe um Spiele, die tatsächlich stattfinden und nicht um Spiele, die nicht stattfinden, weil sie gar keine Spiele sind! Daraus ergibt sich folgende Definition:
Wenn ein Spiel kein Spiel ist und an dem Tag stattfindet, an dem es nicht stattfindet, dann ist es das Spiel einer Mannschaft gegen sich selbst.

In einem Zug

Zur Angabe einer Lösung numerieren wir die Punkte von 1 bis 16. Um ohne abzusetzen die Figur nachzeichnen zu können, muß der Streckenzug im Punkt 11 beginnen und im Punkt 6 enden oder umgekehrt, da in diesen beiden Punkten jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken aufeinandertreffen.



Eine der möglichen Lösungen ist
11, 3, 9, 1, 2, 5, 13, 11, 9, 2, 4, 11, 6, 4, 12, 2, 10, 12, 14, 6, 8, 14, 16, 8, 15, 5, 7, 15, 13, 6.

Kryptarithmetik

$43\,295+37\,093=80\,388$; $14\,082+49\,384=63\,466$; Dr. Paasche, München fand noch: $32\,084+29\,182=61\,266$ und $16\,592+64\,096=80\,688$

Die Rufnummer

Sie lautet 4036, denn $\frac{1}{10}$ von $40=36$, die Quersumme ist 13. Die vordere zweiziffrige Zahl muß eine volle Zehnerzahl sein, weil nur dann die hintere eine natürliche Zahl wird. Von den 9 Möglichkeiten 1009 2018 3027 ... hat nur 4036 die Quersumme 13.
Die Lösung ist eindeutig. (Die 7 als zweitmögliche Zahl ist in keinem Fall als Quersumme enthalten.)

Füllrätsel

Sekante, Quadrat, Mittellinie, Sehnenviereck, Kreis, Mittelsenkrechte, Dreieck, Kathete

Übung macht den Meister

Ungleichungen (aus den schriftlichen Abschlußprüfungen der Oberschulen)

1972 Gegeben ist die lineare Ungleichung

$$\frac{8(2x+1)}{5} < 3x+2$$

a) Löse diese Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen!
b) Gib folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:
1. Die Lösungsmenge L_1 obiger Ungleichung im Bereich der natürlichen Zahlen;
2. die Lösungsmenge L_2 obiger Ungleichung im Bereich der ganzen Zahlen mit $-4 < x < 1$;
3. die Menge M aller Elemente, die sowohl in L_1 als auch in L_2 vorkommen!

1973 Gegeben ist die Ungleichung

$$7(3x-2) < 3x+22 \qquad (x \in P)$$

a) Löse diese Ungleichung!
b) Gib die Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!

1974 Gegeben sind die folgenden Ungleichungen:

(1) $5x+5 < x+25 \qquad (x \in P)$
(2) $12x-(x-1) > 5x+13 \qquad (x \in P)$

a) Löse die Ungleichung (1)! Gib diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die natürliche Zahlen sind!
b) Löse die Ungleichung (2)! Gib diejenigen Elemente der Lösungsmenge an, die einstellige natürliche Zahlen sind!
c) Die unter a) angegebenen natürlichen Zahlen bilden die Menge M_1, die unter b) angegebenen natürlichen Zahlen die Menge M_2. Gib den Durchschnitt von M_1 und M_2 durch Aufzählen der Elemente an!

1975 Gegeben ist die Ungleichung

$$2x-(8-x) < 8(2x+3)-5x \qquad (x \in P)$$

a) Löse diese Ungleichung!
b) L sei die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung. Gib für jede der sechs Zahlen

$$-8;\ 3;\ 0;\ -\frac{1}{2};\ 5{,}2 \text{ an, ob sie}$$

zur Lösungsmenge L gehört oder nicht!

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1974/75

OS Ahlbeck, OS Altentreptow, AG Math. OS Altenweddingen, OS Alt-Töplitz, OS Asbach, AG Math. OS Bad Bebra, OS I Bad Brambach, AG Math. OS Bad Gottleuba, Th. Neubauer-OS Bad Salzungen, alpha-Club OS Baruth, alpha-Zirkel OS Bahratal, AG Math. (Kl. 9) OS Berndten, OS Bergwitz, Diesterweg-OS Berlin, AG Math. OS Berlingerode, OS Bernterode, OS Birkungen, Schiller-OS Bleicherode, F.-Weinert-OS Blumberg, OS Boddin, AG Math. (Kl. 5) OS Breddin, OS II Breitungen, OS Broderstorf, AG Math. OS Brohm, TOS Büttstedt, AG Math. OS Burkau OS Casekow, Klub Jg. Mathematiker (Haus der JP) Cottbus, OS Clingen, OS Deutschenbora, OS Kombinat Diedorf. OS Diesdorf, Käthe-Kollwitz-OS und Math.-AG (Kl. 5/6) OS Makarenko, beide Dingelstädt, OS Döllnitz, AG Math. 43. OS Dresden, M.-Poster-OS Drognitz, OS Dubna (UdSSR), OS Effelder, 31. OS Erfurt, OS Geschw. Scholl Eisenach, AG Math. OS Espenhain, OS Fambach, OS Floh, AG Math. (Kl. 6) Schiller-OS Freital, OS Friedeburg, OS V „H. Günther" Fürstenwalde, OS I H. Heine Gadebusch, E.-Hartsch-OS Gersdorf, K.-Gräpler-OS Gnoien, AG Math. (Kl. 5) OS Görlsdorf, J.-Brinckmann-OS Goldberg, AG Math. OS Gottleuba, Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen, Otto-Drews-OS Greifswald, „Juri Gagarin"-OS Greußen, EOS Karl-Marx Greußen, AG Math. (Kl. 5) 4. OS Grimma, AG Math. Großenhain, OS Großbodungen, Dr.-S.-Allende-OS Großweitzschen, OS Grüna, OS Güsen, OS II Hainichen, Diesterweg-OS I Halle, 12. OS Halle-Neustadt, OS

Kleines Mathematik-Sprachlexikon Teil 6

(Schluß)

Ebene Trigonometrie
Прямо линейная тригонометрия
Plane Trigonometry
trigonométrie plane

Definition der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck
Определение тригонометрических функций из прямоугольного треугольника
Definition of the Trigonometric functions in a right triangle
définitions des fonctions trigonométriques an triangle rectangle

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$

$\frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \text{Sinus des Winkels } \alpha$

$\frac{\text{противолежащий катет по отношению углу } \alpha}{\text{гипотенуза}}$
$= \text{синус угла } \alpha$

$\frac{\text{side opposite } \alpha}{\text{hypotenuse}} = \text{sine of the angle } \alpha$

$\frac{\text{côté opposé á} \ldots}{\text{hypoténuse}} = \text{sinus de l'angle} \ldots$

$\frac{b}{c} = \cos\alpha$

$\frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \text{Cosinus des Winkels } \alpha$

$\frac{\text{прилежащий катет по отношению к углу } \alpha}{\text{гипотенуза}}$
$= \text{косинус угла } \alpha$

$\frac{\text{side adjacent to } \alpha}{\text{hypotenuse}} = \text{cosine of the angle } \alpha$

$\frac{\text{côté adjacent á} \ldots}{\text{hypoténuse}} = \text{cosinus de l'angle} \ldots$

$\frac{a}{b} = \tan\alpha$

$\frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \text{Tangens des Winkels } \alpha$

$\frac{\text{противолежащий катет по отношению к углу } \alpha}{\text{прилежащий катет по отношению к углу } \alpha}$
$= \text{тангенс угла } \alpha$

$\frac{\text{side opposite } \alpha}{\text{side adjacent to } \alpha} = \text{tangent of the angle } \alpha$

$\frac{\text{coté opposé á} \ldots}{\text{coté adjacent á} \ldots} = \text{tangente de l'angle} \ldots$

$\frac{b}{a} = \cot\alpha$

$\frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Gegenkathete zu } \alpha} = \text{Cotangens des Winkels } \alpha$

$\frac{\text{прилежащий катет по отношению к углу } \alpha}{\text{противолежащий катет по отношению к углу } \alpha}$
$= \text{котангенс угла } \alpha$

$\frac{\text{side adjacent to } \alpha}{\text{side opposite } \alpha} = \text{cotangent of the angle } \alpha$

$\frac{\text{coté adjacent á} \ldots}{\text{coté opposéá} \ldots} = \text{cotangente de l'angle} \ldots$

Fundamentalsätze zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke
Основные теоремы для расчёта произвольных треугольников
Fundamental laws for solving oblique triangles
théorèmes fondamentals pour calculer des triangles scalènes

$\frac{a}{\sin\alpha} \quad \frac{b}{\sin\alpha} \quad \frac{c}{\sin\alpha}$
Sinussatz · теорема синусов
law of sines · thèorème de sinus

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
Cosinussatz · теорема косинусов
cosine law · theorème de cosinus

Hammerbrücke, OS Hangelsberg, Schule der „DSF" Heiligengrabe, AG Math. OS „Maxim Gorki" Heringsdorf, Goethe-OS Hohenleipisch, OS Horka, OS A. Becker Kamsdorf, C.-Zetkin-OS Kandelin, Pionierhaus „Juri Gagarin", E.-Thälmann-OS, AG Math. (Kl. 6) K.-Liebknecht-OS, alle Karl-Marx-Stadt, OS Klausdorf, EOS Kleinmachnow, Station Jg. Naturf. u. Techn. Köthen, OS Kriebitzsch, Schulkombinat Küllstedt, AG Math. OS Kuhfelde, Schulkombinat Lauscha, OS I und OS II, K.-Liebknecht-OS alle Leinefelde, W.-Pieck-OS, alpha-Club 29. OS, beide Leipzig, OS Lichte, AG Math. (Kl. 5) OS Lichtenhain, OS I Lobenstein, OS W. Wallstab Löderburg, OS Lössau, R.-Luxemburg-OS Ludwigsfelde, OS Lüderitz, OS Mittelstille, Kreis-AG Math Naundorf, 7. OS F. Weineck, AG Math. OS, beide Neubrandenburg, TOS Neuenhofe, OS Neukloster, alpha-Club 3. OS, J.-Nehru-OS, beide Neustrelitz, Th.-Neubauer-OS Niederorschel, OS Niedersalza, OS V Nordhausen, E.-Weinert-OS Oberschönau, OS Olbersdorf, Comeniusschule Oranienburg, OS Osternienburg, AG Math. (Kl. 4) 25. OS Potsdam-Bornstedt, Th.-Neubauer-OS Rackwitz, OS Radis, AG Math. OS I Raguhn, EOS Goethe (Kl. 9 B2) Reichenbach, Math-AG (Kl. 7) OS Rheinsberg, J.-Gagarin-OS Ribnitz-Damgarten, OS Roßdorf, Haus der JP Rostock, OS Rotta, OS Rüdnitz, OS Sachsendorf, W.-Pieck-OS Sangerhausen, OS Schernberg, OS Schlatkow, OS Schlottwitz, J. G. Seume-OS, K.-Marx-OS, beide Schmalkalden, J. R. Becher-OS Schneeberg, OS Schorssow, OS Schwepnitz, F.-Reuter-OS Siedenbollentin, OS „W. Seelenbinder" Sitzendorf, AG Math. Dr. R.-Sorge-OS Söllichau, AG Math. Geschw.-Scholl-OS Sondershausen, AG Math. (Kl. 9) EOS Stollberg, AG Math. OS Stolpen, W.-Heinze-OS Stralsund, OS Struth-Helmershof, AG Math. E.-Schneller-OS Stülpe, EOS Karl Marx Tangerhütte, OS Teistungen, OS II Teterow, alpha-Zirkel OS Treben, OS W. Pieck Trusetal, OS Viernau, OS Vitte, EOS Julius Fucik, Waldheim, Mathe.-Club Fr.-Engels-Schule Waren, OS Wedendorf, OS Weißenborn, OS Wernshausen, OS Wesenberg, Diesterweg-OS W.-Pieck-Stadt Guben, Karl-Marx-OS Wilkau-Haßlau, K.-Kollwitz-OS Wittenberg, OS Wörmlitz, OS Wohlmirstedt, E.-Schneller-OS Wolgast, EOS und Spezialistenlager Math. d. Kreises Worbis, OS Wredenhagen, OS Zaatzke, AG Math. (6. Kl.) OS Zahna, AG Math. OS „F. Schiller" Zella-Mehlis, Max-Lenk-OS Zepernick, OS Ziegelheim, AG Math. und Prof.-Dr.-W. Du-Bois-OS Zittau, AG „C. F. Gauß", Goethe-OS Zossen, alpha-Club OS Zschornewitz, OS Zurow.

Wir danken den Mitarbeitern der Zeitschrift „Posvetu" sowie der Sektion Mathematik des Verlages Volk und Wissen, die uns bei dieser kleinen Zusammenstellung vorbildlich unterstützten.
Wer sich sprachlich noch mehr weiterbilden dem empfehlen wir die Literatur, aus der wir unsere sechs Folgen des Kleinen Mathematiksprachlexikons entnahmen. (s. o.)

J. Lehmann

Einige Termini aus Sondergebieten der Mathematik

Kombinatorik · комбинаторика
theory of combinations · analyse combinatoire; Permutation · перестановка
permutation · permutation; *n* Fakultät (*n*!)
n факториал
factorial · faculté;
n Elemente zur *r*-ten Klasse ·
n элементы по *r*
n elements taken *r* at a time · *n* éléments de l'ordre *r*;
Variation · размещение
variation · variation;
Kombinationen mit Wiederholungen
сочетания с повторениями
combination with repetitions allowed
combinaisons complètes

Matrizen und Determinanten
матрицы и определители
matrices and determinants · matrices et déterminants; (*m*, *n*)-Matrix
матрица из *m* строк и *n* столбцов
m by *n* matrix · (*m*, *n*)-matrice; quadratische Matrix · квадратная матрица
square matrix · matrice carrée; Rang einer Matrix · ранг матрицы
rank of a matrix · rang d'une matrice;
Zeilen und Spalten einer Determinante
строки и столбцы определителя
rows and columns of a determinant
lignes et colonnes d'un déterminant;
Entwicklung einer Determinante nach den Unterdeterminanten der Elemente der ersten Spalte · разложение определителя по минорам элементов первого столбца
expansion of a determinant by the minors of the elements of the first column
développement d'un déterminant par les sonsdeterminants (déterminants inférieurs) des éléments de la première colonne

Vektorrechnung · векторное исчисление
vector calculus · calcul vectoriel; Betrag eines Vektors · модуль вектора
magnitude of a vector · module d'un vecteur;
Ortsvektor · радиус-вектор
position vector · vecteur de position;
Einheitsvektor · единичный вектор
unit vector · vecteur unité (unitaire);
Nullvektor · нулевой вектор
null vector · vecteur (de) zéro;
Vektorprodukt · векторное произведение
vector product · produit vectoriel (extérieur);
Skalarprodukt · скалярное произведение
scalar product · produit scalaire (intérieur);
Vektoralgebra · векторная алгебра
vector algebra · algèbre vectorielle;

Folgen und Reihen
последовательности и ряды
sequences and series · progressions et séries;

Zahlenfolge
числовая последовательность
number sequence · suite de nombres;
arithmetische (geometrische) Folge ·
арифметическая (геометрическая) прогрессия
arithmetic (geometric) progression ·
progression arithmétique (géométrique);
Anfangsglied · старший член
initial term · terme de départ; Endglied
последний член · final term · terme final;
konvergieren · сходиться
to converge · converger; Konvergenzkriterium · признак сходимости
test of convergence · caractère de convergence; divergieren · расходиться
to diverge · diverger;
Divergenz · расходимость · divergence
divergence; unendliche Reihe(n)
бесконечный ряд (бесконечные ряды)
infinite series · séries infinies;
Potenzreihe(n)
степенной ряд (степенные ряды)
power series · séries de puissances;
Fourier-Reihe(n) · ряд фурье (ряды фурье)
Fourier series · séries de Fourier

BÜCHER helfen beim Studieren

Christian Heermann
Das Einmaleins genügt nicht mehr
Mathematik im Alltag
144 Seiten, zahlr. farb. Illustrationen
Preis 3,00 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Christian Heermann
Von der Zahl zum Gesetz
Mathematik in unserem Leben
144 Seiten, zahlr. farb. Illustrationen
Preis 3,00 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Erna Padelt
Mit dem Meßrad um die Welt
Kleine Geschichte von der Kunst des Messens
144 Seiten, zahlr. farb. Illustrationen
Preis 3,00 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Manfred Rehm
Zahl, Menge, Gleichung
Mein kleines Lexikon
96 Seiten, zahlr. farb. Abb. und Illustr.
Preis 5,80 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Johannes Lehmann
Mathe mit Pfiff
128 Seiten, zahlr. farb. Abb. und Illstr.
Preis 4,50 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Jürgen Petigk
Mathematik in der Freizeit
168 Seiten, zahlr. farb. Abb.
Preis 8,80 M
Verlag Tribüne Berlin

W. Engel/U. Pirl
Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band 1
172 Seiten, zahlr. Abb. Preis 6,00 M
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

H. Pieper
Zahlen aus Primzahlen
167 Seiten Preis 6,70 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin

Johannes Gronitz
Praktische Mathematik
besonders geeignet für den fakultativen Unterricht an EOS
160 Seiten, zahlr. Abb. Preis 5,00 M
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Göttner/Fischer/Krieg
Was ist, was kann Statistik?
255 Seiten, zahlr. Abb. Preis 6,80 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

M. J. Wygodski
Elementarmathematik griffbereit
326 Seiten, 263 Abb., 15 Tab. Preis 12,50 M
Akademie-Verlag Berlin

Autorenkollektiv
Biographien bedeutender Mathematiker
etwa 544 S. mit etwa 346 Abb.
Preis: etwa 22,00 M
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Hans Kleffe
Energie – Kraftquell der Natur
Wie der Mensch die Naturkräfte beherrschen lernte
144 Seiten, zahlr. farb. Illustrationen
Preis 3,00 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

Peter Stache
Raumfahrt-Trägerraketen
150 Seiten, zahlr. Fotos und Abb.
Preis 16,80 M
transpress VEB Verlag für Verkehrswesen Berlin

Autorenkollektiv
Schiffe und Schiffahrt von morgen
240 Seiten, zahlr. Fotos und Abb.
Preis 25,00 M
VEB Verlag Technik Berlin

Heinz Neukirchen
Seefahrt gestern und heute
264 Seiten, zahlr. Fotos und Abb.
Preis 25,00 M
transpress VEB Verlag für Verkehrswesen Berlin

H. Belkner
Reelle Vektorräume
174 S., 49 Abb. Preis 9,50 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Bürger
Was ist – was soll Datenverarbeitung?
274 S., zahlr. Abb. Preis 5,80 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

K. N. Muchin
Unterhaltsame Kernphysik
293 S., zahlr. Abb. Preis 12,00 M
Verlag MIR, Moskau/
VEB Fachbuchverlag Leipzig

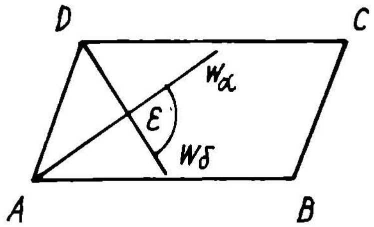
A. Krüger/G. Richter
Radiostrahlung und Ergebnisse radioastronomischer Forschung
216 S., zahlr. Abb. Preis 6,80 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

W. Strube
Wagnis und Furcht des Nicolaus Copernicus
221 S. Preis 5,60 M
Der Kinderbuchverlag Berlin

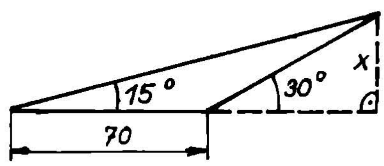
W. Engel/U. Pirl
Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band 2
173 Seiten, zahlr. Abb. Preis 6,00 M
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Gut gedacht ist halb gelöst

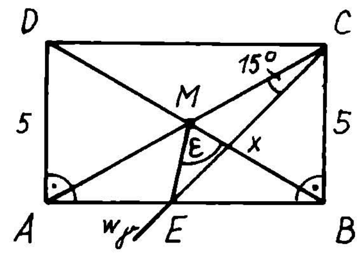
gesucht: ε



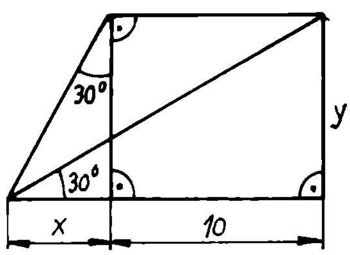
gesucht: x



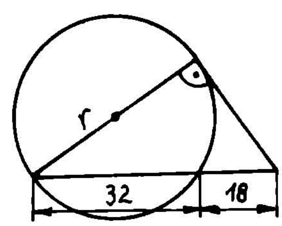
gesucht: x, ε



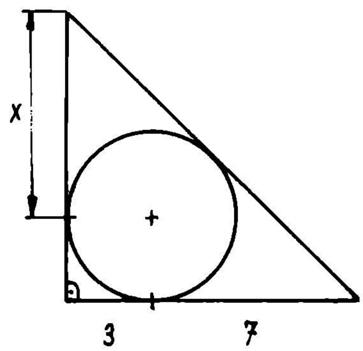
gesucht: x, y



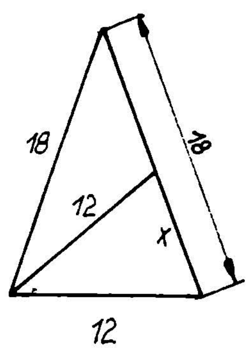
gesucht: r



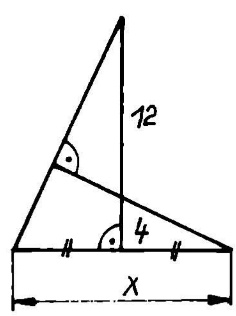
gesucht: x



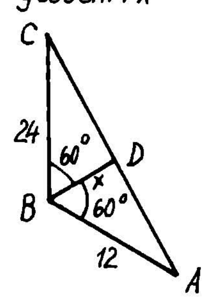
gesucht: x



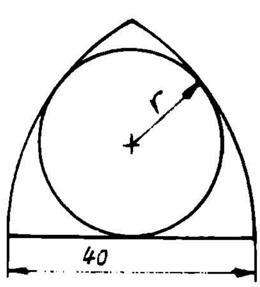
gesucht: x



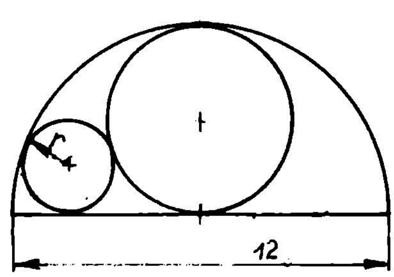
gesucht: x



gesucht: r



gesucht: r



gesucht: r