Mathematische
Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31 059

alpha

5

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: J. A. Gurwitsch, Eigenfoto (S. 99); Originalskizzen von F. W. A. Fröbel (S. 103); Bildstelle Vobi, Rat des Bezirks Cottbus (S. 104); Lothar Otto, Leipzig (S. 106); B. Ehrenburg, Moskau (S. 108); E. Walter, Tallinn (S. 108); J. Lehmann, Eigenfoto (S. 109); Fotos aus Urania (S. 111)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: Autor H. Goehre, Bad Berka, gestaltet von H. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN(EDV) 128–ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 28. Juni 1982
Auslieferungstermin: 21. Oktober 1982

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Chemische Reaktionen – mathematisch berechnet

Die Ähnlichkeit zwischen der Formelsprache der Chemie und der Formelsprache der Mathematik ist nicht nur äußerlich. Es gibt einen inneren Zusammenhang, über den wir hier sprechen wollen. Genauer: Es wird eine Methode entwickelt, mit der man die möglichen Reaktionen zwischen gegebenen chemischen Verbindungen mathematisch ausrechnen kann.

Wir verwenden die übliche chemische Symbolik, z. B.
H = Wasserstoff, C = Kohlenstoff,
N = Stickstoff, O = Sauerstoff,
S = Schwefel, Cl = Chlor.

Es empfiehlt sich, die auftretenden Berechnungen mit Papier und Bleistift mitzumachen.

Ein Beispiel

Die chemische Reaktion

$$4C_6H_8O_7 + 8H_2O \rightleftarrows 3C_6H_{12}O_6 + 6H_2CO_3$$

Zitronen-säure	Wasser	Trauben-zucker	Kohlen-säure

eignet sich besonders gut, um unsere Methode zu erläutern. (Sie besitzt allerdings kaum praktische Bedeutung.) Die Faktoren 4, 8, 3, 6 in der Reaktionsgleichung heißen stöchiometrische Zahlen. Es seien auch negative sowie gebrochene stöchiometrische Zahlen zugelassen. Solche treten z. B. auf, wenn wir $6H_2CO_3$ mit minus auf die linke Seite bringen und das Ganze durch 3 dividieren:

$$-2H_2CO_3 + \frac{4}{3}C_6H_8O_7 + \frac{8}{3}H_2O \rightleftarrows C_6H_{12}O_6.$$

Nun wollen wir diese Reaktionsgleichung vorübergehend „vergessen" und fragen: Gibt es eine chemische Reaktion mit Kohlensäure, Zitronensäure, Wasser auf der linken Seite und Traubenzucker auf der rechten Seite, d. h. eine Reaktion der Form

$$x_1H_2CO_3 + x_2C_6H_8O_7 + x_3H_2O \rightleftarrows C_6H_{12}O_6?$$

Die Aufgabe besteht gerade darin, die unbekannten stöchiometrischen Zahlen x_1, x_2, x_3 zu berechnen. Wir zählen die verschiedenen Atomsorten auf beiden Seiten der Reaktionsgleichung ab:

H-Atome: links $2x_1 + 8x_2 + 2x_3$, rechts 12.
C-Atome: links $x_1 + 6x_2$, rechts 6.
O-Atome: links $3x_1 + 7x_2 + x_3$, rechts 6.

Entscheidend ist, daß die Atomzahlen links und rechts übereinstimmen müssen, d. h. es gelten die Bedingungen

$$\begin{aligned} G_1&: 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 12,\\ G_2&: x_1 + 6x_2 = 6,\\ G_3&: 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 6. \end{aligned}$$

Damit ist unser chemisches Problem auf ein mathematisches Problem zurückgeführt, nämlich auf ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen G_1, G_2, G_3 und drei Unbekannten x_1, x_2, x_3. Es gibt verschiedene Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme. Wir wählen das sogenannte Gaußsche Verfahren aus. In unserem Beispiel läuft es wie folgt ab: Im ersten Schritt addiert man geeignete Vielfache von G_1 zu G_2 bzw. G_3, so daß sich dort die Glieder mit x_1 wegheben:

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ mal G_1 plus G_2 ergibt

G_2': $2x_2 - x_3 = 0.$

$\left(-\frac{3}{2}\right)$ mal G_1 plus G_3 ergibt

G_3': $-5x_2 - 2x_3 = -12.$

Im zweiten Schritt addiert man ein geeignetes Vielfaches von G_2' zu G_3', so daß sich dort das Glied mit x_2 weghebt:

$\frac{5}{2}$ mal G_2' plus G_3' ergibt

G_3'': $-\frac{9}{2}x_3 = -12.$

Aus dem sogenannten gestaffelten Gleichungssystem

$$\begin{aligned} G_1&: 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 12,\\ G_2'&: \quad 2x_2 - x_3 = 0,\\ G_3''&: \quad -\frac{9}{2}x_3 = -12 \end{aligned}$$

kann man nun „von unten nach oben" die

Lösung ausrechnen. Es ergibt sich, genau wie es sein muß,

$$x_3 = \frac{8}{3},\ x_2 = \frac{4}{3},\ x_1 = -2,$$

und das Problem des Chemikers ist gelöst.

Rechnen mit Matrizen

Der Mathematiker ist noch nicht zufrieden: er will die Rechnung noch eleganter gestalten. Startpunkt ist für ihn jetzt das Zahlenschema, welches die Zusammensetzung der gegebenen chemischen Verbindungen erfaßt:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} H_2CO_3 & C_6H_8O_7 & H_2O & C_6H_{12}O_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ C \\ O \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 1 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right). \end{array}$$

Ein derartiges Zahlenschema heißt Matrix (Mehrzahl: Matrizen). Eine Matrix besteht aus Zeilen (nebeneinanderstehende Zahlen) und Spalten (untereinanderstehende Zahlen). Der vertikale Strich vor der letzten Spalte dient nur zur Erhöhung der Übersichtlichkeit und könnte auch weggelassen werden. Das „Rezept" für das Gaußsche Verfahren lautet nun wie folgt:

Im ersten Schritt addiert man geeignete Vielfache der 1. Zeile zur 2. bzw. 3. Zeile, so daß sich dort in der 1. Spalte jeweils eine Null ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 1 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -12 \end{array}\right).$$

Im zweiten Schritt addiert man ein geeignetes Vielfaches der neuen 2. Zeile zur neuen 3. Zeile, so daß sich dort in der 2. Spalte eine Null ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -12 \end{array}\right).$$

Die letzte Matrix könnte nun in das gestaffelte Gleichungssystem G_1, G_2', G_3'' zurückverwandelt werden. Besser ist es, auch das endgültige Ausrechnen von x_3, x_2, x_1 mit Matrizen abzuwickeln:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 0 & \frac{20}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 0 & \frac{20}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

Das Ziel ist ein charakteristisches Muster aus Nullen und Einsen links vom vertikalen Strich. Man erzeugt dieses Muster, indem man (von unten nach oben) geeignete Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert bzw. indem man eine Zeile mit einem geeigneten Faktor durchmultipliziert. Nach jedem Schritt ist es prinzipiell möglich, in das entsprechende Gleichungssystem zurückzuverwandeln. Wenn man nach dem letzten Schritt zurückverwandelt, so steht die Lösung da:

$$1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=-2,$$
$$0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3=\frac{4}{3},$$
$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3=\frac{8}{3}$$

oder $x_1=-2,\ x_2=\frac{4}{3},\ x_3=\frac{8}{3}$.

Die Lösung kann also direkt rechts vom vertikalen Strich abgelesen werden. Das Verfahren in der neuen erweiterten Form heißt Gauß-Jordan-Verfahren. Wer mitgerechnet hat, wird bemerken, daß rein rechnerisch dasselbe passiert ist wie oben, als wir mit Gleichungssystemen arbeiteten. In der neuen Form wird aber Schreibarbeit eingespart.

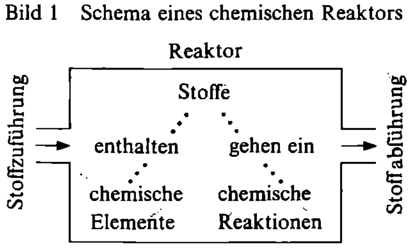
Schlüsselstoffe und Nichtschlüsselstoffe

„Rezepte" zum Lösen bestimmter Aufgaben sind die eine Seite der Wissenschaft; nützliche allgemeine Begriffe sind die andere Seite. Bevor wir weitere Beispiele betrachten, wollen wir uns begriffliche Klarheit verschaffen. Stellen wir uns einen „chemischen Reaktor" vor, d. h. irgendeine (künstliche oder natürliche) Art von Behälter. Der Reaktor enthält chemische Stoffe, welche bestimmte chemische Reaktionen eingehen. Auf der linken Seite einer Reaktionsgleichung stehen die „Ausgangsstoffe" und auf der rechten Seite die „Endstoffe". Diese Begriffe sind relativ, da wir ja auch negative stöchiometrische Zahlen zulassen und da ein Endstoff in einer nächsten Reaktion wieder Ausgangsstoff sein kann. Nicht mehr so relativ sind die Begriffe

Schlüsselstoffe = minimale Anzahl von Ausgangsstoffen,

Nichtschlüsselstoffe = restliche Stoffe.

Bild 1 Schema eines chemischen Reaktors



Damit ist folgendes gemeint:

1. Es gibt keine Reaktion, in der nur Schlüsselstoffe auftreten.
2. Jeder Nichtschlüsselstoff ist einziger Endstoff in einer Reaktion mit Schlüsselstoffen als Ausgangsstoffen.

Die unter 2. angesprochenen Reaktionen nennt man auch Schlüsselreaktionen, denn aus ihnen lassen sich alle nur möglichen Reaktionen zusammensetzen.

Nochmals das erste Beispiel

In unserem Demonstrationsbeispiel kann man H_2CO_3, $C_6H_8O_7$, H_2O als Schlüsselstoffe nehmen und $C_6H_{12}O_6$ als Nichtschlüsselstoff. Beweis:

1. Der Ansatz

$$x_1H_2CO_3+x_2C_6H_8O_7+x_3H_2O\rightleftarrows 0 \quad \text{(Zahl Null)}$$

liefert nach dem Gauß-Jordan-Verfahren $x_1=x_2=x_3=0$. Folglich gibt es keine Reaktion zwischen H_2CO_3, $C_6H_8O_7$, H_2O.

2. Wir hatten oben ausgerechnet

$$-2H_2CO_3+\frac{4}{3}C_6H_8O_7+\frac{8}{3}H_2O\rightleftarrows C_6H_{12}O_6.$$

Was passiert nun, wenn wir den Nichtschlüsselstoff $C_6H_{12}O_6$ durch C_2H_5OH (Ethylalkohol) ersetzen?

Bei Weglassen der Zwischenschritte erhalten wir nach dem Gauß-Jordan-Verfahren

$$\begin{array}{c} \\ H \\ C \\ O \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} H_2CO_3 & C_6H_8O_7 & H_2O & C_2H_5OH \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{21}{2} \end{array}\right) \rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

und können die gesuchte Reaktionsgleichung ablesen:

$$-2H_2CO_3+\frac{2}{3}C_6H_8O_7+\frac{7}{3}H_2O\rightleftarrows C_2H_5OH$$

oder

$$2C_6H_8O_7+7H_2O\rightleftarrows 3C_2H_5OH+6H_2CO_3.$$

Links vom vertikalen Strich hat sich die Rechnung offenbar nicht geändert; nur rechts vom Strich treten neue Zahlen auf. Man kann Doppelarbeit vermeiden und die Rechnung für $C_6H_{12}O_6$ und für C_2H_5OH gemeinsam in einem Zuge durchführen: Das Gauß-Jordan-Verfahren wird auf die Zusammensetzungs-Matrix

$$\begin{array}{c} \\ H \\ C \\ O \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} H_2CO_3 & C_6H_8O_7 & H_2O & C_6H_{12}O_6 & C_2H_5OH \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 8 & 2 & 12 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

angewendet und liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

Links vom Strich in der Zusammensetzungs-Matrix stehen die Schlüsselstoffe und rechts vom Strich die Nichtschlüsselstoffe. Anstatt zwei kann man natürlich auch drei, vier, ... Nichtschlüsselstoffe betrachten.

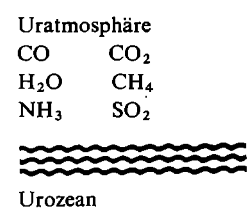
Schlüsselstoffe in der Uratmosphäre der Erde

Vor einigen Milliarden Jahren bestand die Erdatmosphäre hauptsächlich aus

CO Kohlenmonoxid	CO_2 Kohlendioxid	H_2O Wasser
CH_4 Methan	NH_3 Ammoniak	SO_2 Schwefeldioxid

Welche dieser Stoffe sind als Schlüsselstoffe auszuwählen, wenn man als Nichtschlüsselstoffe alle übrigen aus C, O, H, N, S zusammengesetzten Verbindungen annimmt?

Bild 2
Die Uratmosphäre der Erde als chemischer Reaktor



Antwort: Jede der Kombinationen

$CO_2, H_2O, CH_4, NH_3, SO_2$
$CO, H_2O, CH_4, NH_3, SO_2$
$CO, CO_2, CH_4, NH_3, SO_2$
$CO, CO_2, H_2O, NH_3, SO_2$

kommt in Frage.

Beweis:

1. Auf NH_3 und SO_2 kann man als Lieferanten von N bzw. S nicht verzichten. Auf je einen der Stoffe CO, CO_2, H_2O, CH_4 kann man verzichten, denn es gilt

$$4CO-3CO_2+2H_2O-CH_4\rightleftarrows 0 \quad \text{(Zahl Null).}$$

Auf je zwei Stoffe kann man aber nicht verzichten, denn es gibt keine Reaktion zwischen je dreien der Stoffe. (Dies ist natürlich nachzurechnen!)

2. Das Gauß-Jordan-Verfahren „klappt" für jede der obigen Kombinationen und für jeden anderen aus C, O, H, N, S bestehenden Nichtschlüsselstoff. Das bedeutet, daß beispielsweise die Zusammensetzungs-Matrix

$$\begin{array}{c} \\ C \\ O \\ H \\ N \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} CO_2 & H_2O & CH_4 & NH_3 & SO_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

in das charakteristische Muster aus Nullen und Einsen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

überführt wird.

Beispiel mit praktischer Bedeutung

Das folgende Beispiel entstammt einer Chemievorlesung an der Karl-Marx-Universität Leipzig. Bei der sogenannten Synthesegasgewinnung enthält der Reaktor die Stoffe $C, H_2, CO, CO_2, H_2O, CH_4, C_2H_6$ (Ethan). Durch geschickte Anordnung erreichen wir, daß das Gauß-Verfahren schon fertig ist, ehe es begonnen hat!

$$\begin{array}{c} \\ O \\ H \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C & H_2 & CO & CO_2 & H_2O & CH_4 & C_2H_6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Die Fortsetzung zum Gauß-Jordan-Verfahren erfordert nur noch zwei Rechenschritte und liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir lesen die vier Schlüsselreaktionen ab:

R_1: $-C+2CO \rightleftarrows CO_2$

R_2: $-C+H_2+CO \rightleftarrows H_2O$

R_3: $C+2H_2 \rightleftarrows CH_4$

R_4: $2C+3H_2 \rightleftarrows C_2H_6$.

Andere mögliche Reaktionen, also „Nichtschlüsselreaktionen", sind z. B.

R_1+R_3: $2CO+2H_2 \rightleftarrows CO_2+CH_4$,

R_2+R_3: $CO+3H_2 \rightleftarrows H_2O+CH_4$.

Aufgaben für den Leser

▲1▲ Man berechne Schlüsselreaktionen zwischen den Stoffen $CO, CO_2, H_2O, CH_3OH, C_2H_5OH$.

Hinweis: Wie in allen unseren Beispielen, so gilt auch hier Anzahl Schlüsselstoffe = Anzahl der beteiligten chemischen Elemente.

▲2▲ Man berechne Schlüsselreaktionen zwischen den Stoffen (Te = Tellurium) $Te_2, TeO_2, TeOCl_2, TeCl_2, TeCl_4$.

Dies ist ein Beispiel aus der anorganischen Chemie! *R. Schimming*

Eine Aufgabe aus der Abschlußprüfung Kl. 10 (1981)

Aus Natriumchloridlösung würden auf elektrochemischem Wege Natriumhydroxid, Wasserstoff und Chlor hergestellt. Für die Stoffumwandlung bei diesem technischen Prozeß kann zusammenfassend folgende chemische Gleichung angegeben werden:

$2NaCl+2H_2O \rightarrow 2NaOH+H_2+Cl_2$.

In unserer Republik werden jährlich 750000 t Natriumchlorid für die Produktion von Natriumhydroxid, Wasserstoff und Chlor verbraucht.

Berechnen Sie das Volumen des Chlors, das bei der Umsetzung dieser Masse an Natriumchlorid entsteht!

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Jakob A. Gurwitsch und Dozent Dr. H.-J. Binder

Wissenschaftl. Inst. f. Gummi- und Latexwaren, Moskau/TH Leuna-Merseburg

▲2237▲ Man lasse Kaliumpermanganat und Salzsäure miteinander reagieren.

a) Stellen Sie die Reaktionsgleichung mit zunächst unbestimmten Koeffizienten x_i auf!

b) Berechnen Sie die unbestimmten Koeffizienten x_i durch Aufstellung und Lösung eines linearen Gleichungssystems!

Beachten Sie, daß die Lösungen x_i nur ganzzahlig sein können!

c) Geben Sie die Reaktionsgleichung an!

Prof. Dr. sc. techn. Jakob A. Gurwitsch, Moskau

Lösung:

a) Die Reaktionsgleichung lautet

$x_1KMnO_4+x_2HCl$
$=x_3KCl+x_4MnCl_2+x_5Cl_2+x_6H_2O$

b) Daraus folgt das Gleichungssystem

K: $x_1 = x_3$ (1)
Mn: $x_1 = x_4$ (2)
O: $4x_1 = x_6$ (3)
H: $x_2 = 2x_6$ (4)
Cl: $x_2 = x_3+2x_4+2x_5$ (5)

das sind 5 Gleichungen für 6 Unbekannte.

Wegen (1) und (2) folgt $x_3=x_4=x_1$ (6)
und wegen (3) und (4) $8x_1=x_2=2x_6$. (7)

Aus (4) und (5) folgt

$2x_6=x_3+2x_4+2x_5$,

also wegen (6) und (7)

$8x_1=3x_1+2x_5$

und damit

$5x_1=2x_5$.

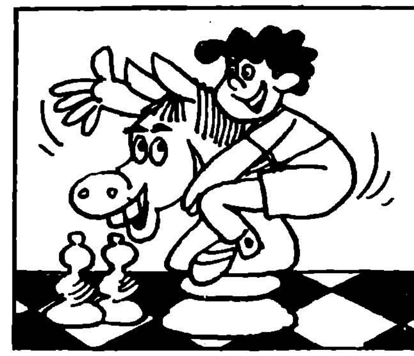
Eine Variable ist also frei wählbar, z. B. $x_5=5$.

Damit ergeben sich $5x_1=10$,

also $x_1=2$ $x_4=2$
$x_2=16$ $x_6=8$.
$x_3=2$

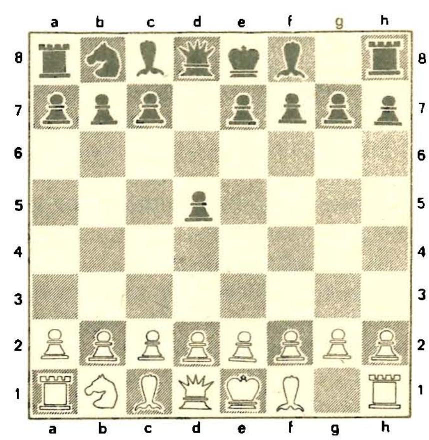
c) Die Reaktionsgleichung lautet damit

$2KMnO_4+16HCl$
$=2KCl+2MnCl_2+5Cl_2+8H_2O$.



Geheimnisvolles Verschwinden

Im Schachspiel bewegt sich der Bauer nur vorwärts. Ausgenommen den Schlagfall, geht er von seinem ursprünglichen Standfeld (für weiße Bauern – die 2. Reihe, für schwarze Bauern – die 7. Reihe) aus um ein oder zwei freie Felder auf seiner Linie vor sowie in der Folge um je ein freies Feld. Beim Schlagen bewegt er sich auf ein solches Feld vorwärts, das in der Diagonale an sein eigenes angrenzt. Jeder Bauer, der die letzte Reihe (für Weiß die 8., für Schwarz die 1.) erreicht hat, ist sofort – als Bestandteil des gleichen Zuges – in eine Figur gleicher Farbe (außer dem König) nach Wahl des Spielers zu verwandeln.



In unserem Aufgabendiagramm ist die Partieanfangsstellung noch fast erhalten, nur der weiße Springer g1 und der schwarze Springer g8 sind vom Brett verschwunden, und der schwarze Bauer d7 ist nach d5 gelangt.

Welche kürzeste Zugfolge führte aus der Partieanfangsstellung zu dem abgebildeten Stellungsdiagramm? Gibt es dabei unterschiedliche Zugreihenfolgen?

H. Rüdiger

Anmerkung: Die Züge der gesuchten Zugfolge sind zwar bei weitem nicht die besten, aber nach den Spielregeln durchaus machbar!

Konstruktionen mit einem Spiegellineal

Geometrische Konstruktionen können mit verschiedenen Zeichengeräten ausgeführt werden. Oft verwendet man Zirkel, Lineal und Zeichendreiecke.
Wir wollen im folgenden Konstruktionen mit einem Spiegellineal ausführen. Es besteht aus einem ebenen Metall- oder Glasspiegel, der gerade Kanten hat und senkrecht auf der Zeichenebene steht.

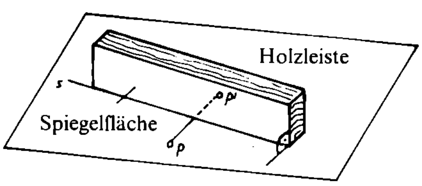


Bild 1 Zeichenebene

Ein Spiegellineal können wir sehr einfach anfertigen. Dazu benötigen wir einen rechteckigen ebenen Spiegel, etwa 20 cm lang und 4 cm breit. Auf der Rückseite dieses Spiegels befestigen wir als Stütze eine quaderförmige Holzleiste. Steht ein Spiegel mit diesen Maßen nicht zur Verfügung, können wir uns auch mit einem rechteckigen Taschenspiegel behelfen, den wir jeweils senkrecht auf die Zeichenebene stellen.
Aus dem Physikunterricht wissen wir, daß ein ebener Spiegel einen Gegenstand so abbildet, daß sein Spiegelbild symmetrisch zur Ebene des Spiegels erscheint. Steht der Spiegel senkrecht auf der Zeichenebene, so liegen ein Punkt P der Zeichenebene und sein Spiegelbild P' symmetrisch bezüglich der unteren Spiegelkante s. Insbesondere liegt P' wieder in der Zeichenebene. Der Spiegel unseres Lineals bildet also jede Figur F der Zeichenebene so ab, daß die im Spiegel erkennbare Bildfigur F' in dieser Zeichenebene und symmetrisch zu s liegt.

Aufgaben

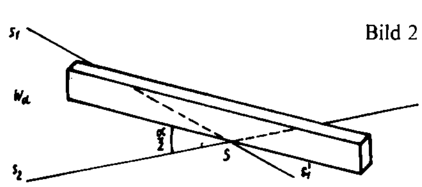
▲1▲ Zeichne einen beliebigen Kreis k mit dem Mittelpunkt M! Lege das Spiegellineal so auf die Zeichenebene, daß die Spiegelkante s
a) durch M geht,
b) nicht durch M geht, aber k schneidet,
c) den Kreis k nicht schneidet!
Beobachte jeweils die Bildfigur im Spiegel!

▲2▲ Zeichne ein Quadrat!
Wie muß man das Spiegellineal auf das Quadrat legen, damit die nicht überdeckte Restfigur durch die im Spiegel erscheinende Bildfigur zu einem vollständigen Quadrat ergänzt wird?

▲3▲ Zeichne eine Gerade g!
Wie muß man das Spiegellineal auf die Gerade legen, damit die im Spiegel erkennbare Bildgerade g'
a) „ohne Knick", also in gleicher Richtung weiterläuft,
b) unter einem Winkel von 90° weiterläuft?

Die Aufgaben zeigen, daß das Spiegellineal nützlich sein kann, um die Symmetrieeigenschaften einer Figur aufzufinden und zu untersuchen. Das Spiegellineal ist als Zeicheninstrument aber vor allem zum Ausführen bestimmter geometrischer Konstruktionen geeignet.
Mit ihm können verschiedene Grundkonstruktionen ausgeführt werden. Die erste Grundkonstruktion K_1 entspricht der üblichen Verwendung eines Lineals zum Ziehen von Geraden. Sie ergibt sich daraus, daß unser Spiegel eben und die Spiegelkante s gerade ist.
K_1: Man kann mit dem Spiegellineal die Gerade konstruieren, die durch zwei verschiedene Punkte hindurchgeht.
Dazu legt man die Spiegelkante s an die beiden Punkte P und Q an und zieht längs dieser Kante die Gerade PQ.
Eine zweite Grundkonstruktion K_2 beruht auf der Spiegelwirkung des Lineals.
K_2: Man kann mit dem Spiegellineal einen beliebig vorgegebenen Winkel halbieren.

Bild 2

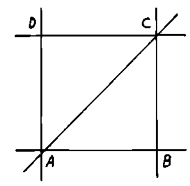


Dazu stellt man das Spiegellineal so auf die Zeichenebene, daß seine Kante s durch den Scheitel S des gegebenen Winkels $\sphericalangle(s_1, s_2)$ geht und dreht das Spiegellineal solange um S bis das Spiegelbild von s_2 mit dem Schenkel s_1' des Nebenwinkels $\sphericalangle(s_2, s_1')$ und daher auch mit s_1 in einer Geraden liegt. Die Spiegelkante s ist dann Symmetrieachse zu s_1, s_2 und gibt die Winkelhalbierende w_α von $\sphericalangle(s_1, s_2)$ an.
Die nächsten Konstruktionen sollen mit dem Spiegellineal als endliche Folge der Grundkonstruktion K_1 und K_2 ausgeführt werden.
In Aufgabe 3 haben wir bereits festgestellt:
Eine Senkrechte h zu einer Geraden g im Punkte $P \in g$ konstruiert man, indem man das Spiegellineal so auf P stellt, daß das Spiegelbild von g ohne Knick im Spiegel weiterläuft. Nach der Grundkonstruktion K_2 haben wir dann einen gestreckten Winkel halbiert und dadurch eine Senkrechte konstruiert.

▲4▲ Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P, der nicht auf g liegt.
a) Konstruiere das Lot l von P auf g!
b) Konstruiere die Parallele h von g durch P!

▲5▲ Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ über der gegebenen Seite AB!
Hinweis: Errichte in A und B die Senkrechten zur Strecke $\overline{AB}$! Halbiere den rechten Winkel $\sphericalangle DAB$! Die Winkelhalbierende schneidet die in B errichtete Senkrechte von $\overline{AB}$ in C. Die Senkrechte in C zu $\overline{BC}$ liefert den Punkt D. Begründe die Konstruktion!

Bild 3



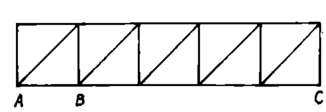
▲6▲ Konstruiere die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AB}$! Fälle dazu vom Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates $ABCD$ das Lot auf $\overline{AB}$!

▲7▲ Konstruiere über einer Strecke $\overline{AB}$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck!

Mit den Ergebnissen der Aufgaben 5 und 6 läßt sich zu jeder gegebenen Strecke ein ganzzahliges Vielfaches davon konstruieren. Außerdem ist es möglich, eine Strecke in eine natürliche Anzahl von Teilen zu zerlegen.

▲8▲ Verfünffache eine gegebene Strecke $\overline{AB}$!

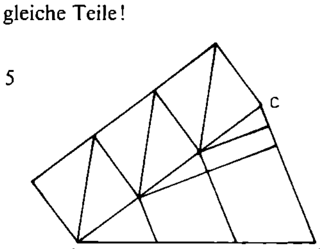
Bild 4



Hinweis: Setze fünf Quadrate aneinander!

▲9▲ Teile eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile!

Bild 5



Hinweis: Trage auf dem Hilfsstrahl dreimal die gleiche Strecke ab (siehe Aufgabe 8)! Verbinde den Punkt C mit B, und zeichne Parallelen durch die Teilpunkte (siehe Aufgabe 4b)!

Konstruktionen, die wir üblicherweise mit dem Zirkel ausführen, sind mit dem Spiegellineal nicht so einfach zu bewältigen. Ein Kreis läßt sich mit dem Spiegellineal nur „punktweise" konstruieren. Ist der Durchmesser $\overline{AB}$ des Kreises gegeben, so zeichnen wir von Punkt A aus beliebig viele Strahlen und fällen von Punkt B das Lot auf jeden Strahl. Die Schnittpunkte liegen nach der Umkehrung des Satz des Thales auf einem Kreis.

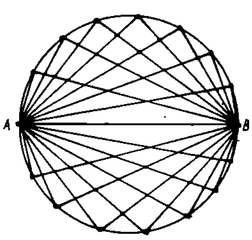


Bild 6

Zur Lösung der folgenden Aufgabe würde man üblicherweise den Zirkel benutzen. Sie ist aber auch mit dem Spiegellineal lösbar.

▲10▲ Eine Strecke $\overline{AB}$ ist auf einer Geraden g von einem Punkt C aus abzutragen.

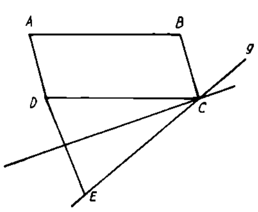


Bild 7

Hinweis: Konstruiere das Parallelogramm $ABCD$ durch zweimaliges Zeichnen von Parallelen! Halbiere den Winkel $\sphericalangle(CD, g)$, und fälle das Lot von D auf die Winkelhalbierende! Die Verlängerung des Lotes schneidet g in E.
Konstruiere auch die zweite Lösung der Aufgabe! Trage $\overline{AB}$ an C auf der Halbgeraden ab, die E nicht enthält!

▲11▲ Ein gegebener Winkel α ist an eine Gerade g im Punkt P anzutragen!

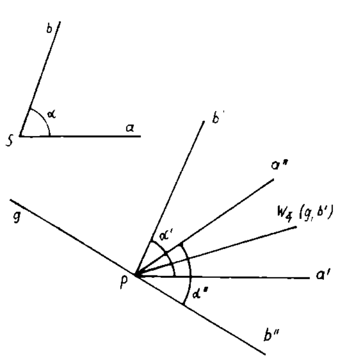


Bild 8

Hinweis: Führe mit dem Spiegellineal folgende Konstruktion aus:

- Verschiebung $\overrightarrow{SP}$
- Konstruktion der Winkelhalbierenden $w_{\sphericalangle(g,b)}$
- Spiegelung des Winkels $\sphericalangle(a', b')$ an $w_{\sphericalangle(g,b')}$

Begründe die Konstruktion, und führe sie mit dem Spiegellineal aus!
Beachte, daß es weitere Lösungen gibt, entsprechend der möglichen Lagen des einen Schenkels auf der Geraden und des anderen Schenkels in der jeweiligen Halbebene.

Auf Schwierigkeiten stößt man, wenn mit dem Spiegellineal unter Verwendung der Grundkonstruktionen K_1 und K_2 Schnittpunkte von Kreis und Geraden oder Schnittpunkte zweier Kreise ermittelt werden sollen.

▲12▲ Gegeben sind eine Gerade g und von einem Kreis k der Mittelpunkt M und ein beliebiger Kreispunkt P, der nicht auf g liegt. Die Schnittpunkte von g und k sind zu konstruieren! Diese Aufgabe ist mit den Grundkonstruktionen K_1 und K_2 nicht lösbar. Sie wird erst ausführbar, wenn wir eine weitere Grundkonstruktion K_3 für das Spiegellineal einführen:
K_3: Man kann das Spiegellineal so an den Endpunkt Q einer gegebenen Strecke $\overline{PQ}$ legen, daß das Spiegelbild P' des Punktes P auf eine gegebene Gerade g fällt.
Dazu stellt man das Spiegellineal mit der Kante s auf Q und bewegt es so, daß s weiterhin auf Q liegt und der Spiegelpunkt von P auf dem Rande des Spiegels seitlich oder oben mit der gegebenen Geraden g durch Peilung zur Deckung kommt. Hat man diese Lage des Spiegellineals erreicht, muß der Punkt P' konstruiert werden. Dabei ist zu beachten, daß die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q}$ wiederum symmetrisch zur Spiegelkante s sind und daß auf Grund der Peilung P' auf g liegt. Das gleichschenklige Dreieck PQP' wird konstruiert, indem man entlang der Spiegelkante s eine Gerade h zieht und von P aus das Lot l auf h fällt. Der Schnittpunkt des Lotes l mit der Geraden g ist der gesuchte Spiegelpunkt P' von P. Da die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q}$ kongruent sind und P' auf g liegt, hat man mit dieser Konstruktion einen Schnittpunkt des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ und der Geraden g konstruiert.

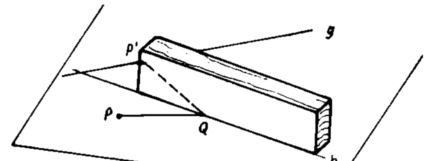


Bild 9

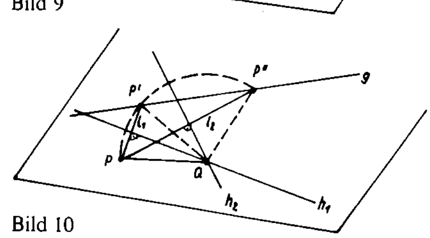


Bild 10

Die Grundkonstruktion K_3 hat je nach der Lage von g und $\overline{PQ}$ zwei, genau eine oder keine Lösung, je nachdem ob die Entfernung des Punktes Q von der Geraden g kleiner, gleich oder größer ist als die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.
Da die Längen der Strecken $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q}$ und $\overline{P''Q}$ gleich sind, läßt sich mit der Grundkonstruktion K_3 auch Aufgabe 12 lösen. Vergleicht man die Genauigkeit der Grundkonstruktionen K_1, K_2 und K_3 miteinander, so erkennt man leicht, daß bei der Grundkonstruktion K_3 auf Grund der Lagebestimmung des Spiegellineals durch Peilung größere Ungenauigkeiten auftreten können.

▲13▲ Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, wenn die Seite $\overline{AB}$ gegeben ist!

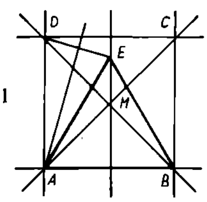


Bild 11

Hinweis: Konstruiere das Quadrat $ABCD$, den Schnittpunkt M der Diagonalen und die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$, die durch M geht! Mit Hilfe von K_3 läßt sich dann die Strecke $\overline{AD}$ so um A drehen, daß der Spiegelpunkt E von D auf die Mittelsenkrechte fällt. Das Dreieck ABE ist nach der ausgeführten Konstruktion gleichseitig.
Als letztes zeigen wir, daß mit dem Spiegellineal auch die Konstruktion der Schnittpunkte zweier Kreise zwar kompliziert, aber grundsätzlich möglich ist.

▲14▲ Von zwei Kreisen k_1, k_2 sind die Mittelpunkte M_1, M_2 und je ein weiterer Kreispunkt P_1, P_2 gegeben. Konstruiere mit dem Spiegellineal die Schnittpunkte Q_1, Q_2 der beiden Kreise!

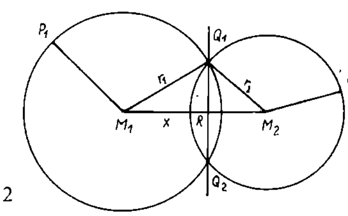


Bild 12

An Hand der Planfigur überlegen wir uns eine Möglichkeit für die Konstruktion.
Da wir mit dem Spiegellineal keine Kreise zeichnen können, ist es erforderlich, die Verbindungsgerade Q_1Q_2 der Schnittpunkte zu konstruieren. Die folgenden Rechnungen ergeben eine Orientierung für diese Konstruktion.
Gegeben sind $|\overline{P_1M_1}| = r_1$, $|\overline{P_2M_2}| = r_2$, $|\overline{M_1M_2}| = a$, gesucht sei $|\overline{M_1R}| = x$.
Nach dem Satz des Pythagoras erhält man für die rechtwinkligen Dreiecke M_1RQ_1 und RM_2Q_1

$r_1^2 = x^2 + h^2, h^2 = r_2^2 - (a-x)^2$
und weiter
$r_1^2 = x^2 + r_2^2 - (a-x)^2$
$r_1^2 = x^2 + r^2 - a^2 + 2ax - x^2$
$x = \frac{r_1^2 + a^2 - r_2^2}{2a}$. Wir setzen für

$$r_1^2 + a^2 = b^2. \qquad (1)$$

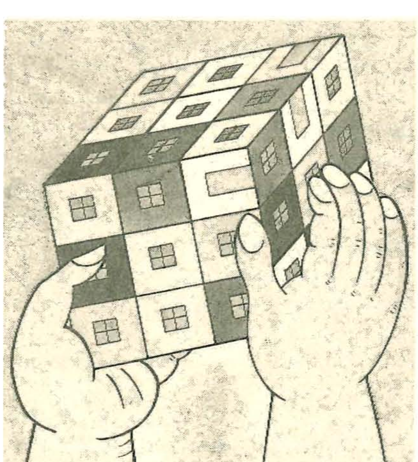
Dann ist

$$x = \frac{b^2 - r_2^2}{2a} = \frac{(b+r_2)\cdot(b-r_2)}{2a} \text{ und}$$

$$\frac{x}{b-r_2} = \frac{b+r_2}{2a}. \qquad (2)$$

Auf Grund der Gleichungen (1) und (2) kann man Strecken der Länge b und x nach dem Satz des Pythagoras bzw. nach dem Strahlensatz mit dem Spiegellineal konstruieren.
Trägt man dann von M_1 eine Strecke der Länge x auf dem Strahl M_1M_2 ab, so erhält man R. In R kann man leicht die Senkrechte zu M_1M_2 errichten. Abschließend kann man von M_1 aus eine Strecke der Länge r_1 mit Hilfe der Grundkonstruktion K_3 so drehen, daß ihr Endpunkt auf dieser Senkrechten liegt. Damit erhält man die Schnittpunkte Q_1, Q_2 der Kreise k_1, k_2.
Mit dieser Aufgabe erhält man ein recht erstaunliches Resultat. Man kann mit dem Spiegellineal Kreise nur punktweise konstruieren. Ansonsten sind jedoch alle mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen, die darauf beruhen, Schnittpunkte von zwei Geraden oder von Kreis und Geraden oder von zwei Kreisen zu ermitteln, mit dem Spiegellineal lösbar.
Beim praktischen Ausführen bestimmter Konstruktionen stellt man fest, daß es Aufgaben gibt, die mit dem Spiegellineal einfacher als mit Zirkel und Lineal lösbar sind (siehe z. B. Aufgabe 15).
Andere Aufgaben erfordern jedoch mit dem Spiegellineal erheblich mehr Aufwand als mit Zirkel und Lineal!

▲15▲ Konstruiere ein regelmäßiges Achteck
a) mit dem Spiegellineal,
b) mit Zirkel und Lineal! *U. Sonnemann*



Für Spezialisten: Anspruchsvolle Olympiadeaufgaben

▲1▲ Zehn Spieler begannen zu spielen, jeder mit derselben Geldsumme. Jeder warf der Reihe nach fünf Würfel. Bei jedem Spielerwechsel bezahlte der Spieler, der eben gewürfelt hatte, jedem der neun Mitspieler $1/n$ der Geldsumme, die jener Mitspieler in dem Augenblick besaß, wobei n die geworfene Augensumme bezeichnet. Alle Spieler würfelten und zahlten reihum. Beim zehnten Wurf zeigten die Würfel die Augensumme 12. Als alles bezahlt war, stellte man fest, daß jeder Spieler genau die Summe besaß, die er zu Beginn hatte.
Man bestimme, wenn möglich, die Augensumme der Würfel bei jedem Wurf.
Internationaler Wettbewerb zwischen Großbritannien, Niederlande, Belgien, Jugoslawien, Luxemburg in Luxemburg (10./11. Juli 1980)

▲2▲ Zwei Kreise berühren sich (außen oder innen) im Punkt P. Eine Gerade berührt den einen Kreis in A und schneidet den anderen in B und C.
Man beweise, daß die Gerade PA eine der Winkelhalbierenden des Winkels BPC ist.
Internationaler Wettbewerb zwischen Großbritannien, Niederlande, Belgien, Jugoslawien, Luxemburg in Luxemburg (10./11. Juli 1980)

▲3▲ Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind durch $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ definiert. Man beweise: $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.
Internationaler Wettbewerb zwischen Großbritannien, Schweden, Finnland und Ungarn auf den Åland-Inseln, Finnland (29.6. bis 4.7.1980) – siehe Teilnehmerplakette

▲4▲ x_1 und x_2 seien die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0,$$

wobei $p \neq 0$ ein reller Parameter ist.
Beweise die Ungleichung $x_1^4 + x_2^4 \geqq 2 + \sqrt{2}$!
3. Stufe der Mathematikolympiade, VR Bulgarien (18./19.4.1980)

▲5▲ Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung über der Menge der reellen Zahlen als Grundbereich an:

$$\sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}}\,!$$

3. Stufe der Mathematikolympiade, VR Bulgarien (18./19.4.1980)

▲6▲ Gegeben ist die (arithmetische) Zahlenfolge 0, 5, 10, 15, 20, ...
Die wievielte Zahl in der gegebenen Folge ist die kleinste, deren Quersumme 45 ist?
Ergänzende Aufgabe: Man bestimme die kleinste Zahl, deren Quersumme 27 beträgt und die durch 36 teilbar ist.
Olympiadeaufgabe aus der SR Rumänien (Klassenstufe 7)

▲7▲ Ermitteln Sie, welche Ziffer rechts neben dem Komma bei der Dezimalentwicklung der Zahl $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}$ steht!
Vorbemerkung: Bei der Lösung derartiger Aufgaben sollte man versuchen, die reziproke Zahl $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ zu nutzen.
Ergänzende Aufgabe: Man bestimme alle reellen Zahlen x, für die $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x = a \geqq 2$ gilt.
Hinweis: Die Substitution $y = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x$ führt auf die quadratische Gleichung $y^2 - ay + 1 = 0$.
Olympiadeaufgabe aus der SR Rumänien (Klassenstufe 7)

Für die Bereitstellung von Olympiadeaufgaben, aus denen wir eine kleine Auswahl trafen, danken wir den Mitgliedern der Olympiadekomitees P. Kenderov, Sofia; J. Reiman, Budapest; Th. Mühlgassner, Eisenstadt (Österreich); Gazeta Matematiča, Bukarest; für ihre Bearbeitung W. Moldenhauer, Erfurt.

Russisch für Mathematiker?

Für den thematischen Sammler ist es häufig besonders lehrreich, Zusammenhänge solcher Briefmarken mit seinem Sammelgebiet aufzudecken, die auf den ersten Blick anscheinend keinerlei Bezüge dazu aufweisen (vgl. den philatelistischen Beitrag in *alpha* 1981, Heft 3, S. 54 bis 55). In diesem Sinne wollen wir hier die 1979 in der DDR anläßlich des *IV. Internationalen Kongresses der Lehrkräfte für russische Sprache und Literatur* in Berlin erschienene Briefmarke zum Anlaß nehmen, um etwas über die russische Sprache als internationale Vermittlerin mathematischen Wissens auszusagen.

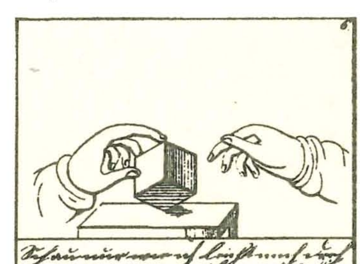
Der erste westeuropäische Mathematiker, der sich für die russische Sprache interessierte, wenn er es auch nicht zu ihrer völligen Beherrschung brachte, scheint *G. W. Leibniz* (1646 bis 1716) gewesen zu sein. Eine nennenswerte Pflege der Mathematik in russischer Sprache gab es zu dieser Zeit noch nicht. Am Beginn eines wissenschaftlichen Lebens in Rußland stehen erst die Gründung der Petersburger Akademie 1725 und der Moskauer Universität 1755. Dort hatten jedoch bis ins 19. Jahrhundert Ausländer, insbesondere Schweizer und Deutsche wie *Daniel* und *Nikolaus Bernoulli*, *Leonhard Euler*, *Christian Goldbach* und *J. Ch. M. Bartels* (vormals Lehrer von Gauß) die führenden Positionen in der Mathematik inne. Freilich lernten sie alle die russische Sprache zu meistern, und vor allem Euler verfaßte nicht nur einige Lehrbücher, sondern auch einen kleinen Teil seiner wissenschaftlichen Aufsätze in russischer Sprache. Die Ergebnisse des ersten bedeutenden russischen Mathematikers, *N. I. Lobatschewski*, von denen in Westeuropa zunächst nur „Kostproben" in Deutsch und Französisch erschienen, veranlaßten *C. F. Gauß* noch im Alter von über 60 Jahren, Russisch zu lernen, um weitere Arbeiten Lobatschewskis lesen zu können. Um die Mitte des 19. Jahrhunderts wurde in Berlin eine Zeitschrift „Archiv für wissenschaftliche Kunde von Rußland" gegründet, in der nur deutsche Übersetzungen von wichtigen Arbeiten russischer Gelehrter erschienen. Insbesondere auf dem Gebiet der Mathematik rückte Rußland in der zweiten Hälfte des 19. Jh. zu den führenden Nationen auf. Deutscher Einfluß spielte jedoch nach wie vor eine mannigfache Rolle in der russischen Mathematik, und Deutsch blieb die wichtigste Fremdsprache in Rußland, die von vielen russischen Mathematikern ausgezeichnet beherrscht wurde, während es umgekehrt stets nur vereinzelte deutsche Mathematiker gab (um 1900 z. B. *Friedrich Engel* und *Heinrich Liebmann*), deren russische Sprachkenntnisse ausreichten, um russische Arbeiten im Original zu lesen und an ihrer Übersetzung und Herausgabe in deutscher Sprache mitwirken zu können. In den Jahren zwischen 1922 und 1933 wirkten verschiedene namhafte sowjetische Mathematiker, u. a. der Topologe *P. S. Alexandroff* und der Mathematikhistoriker *W. W. Struve*, zeitweise in Deutschland. Die berühmte Göttinger Algebraikerin *Emmy Noether* lehrte 1928/29 als Gast an der Moskauer Universität. All dies trug dazu bei, daß die Sprachbrücke zwischen deutschen und sowjetischen Mathematikern nicht abriß. Man muß dabei berücksichtigen, daß zum Verstehen mathematischer Texte in einer fremden Sprache gewöhnliche Sprachkenntnisse im allgemeinen nicht ausreichen, es ist nötig, die Fachausdrücke zu kennen. (In der belletristischen Literatur kommt es auch jetzt noch vor, daß Mengenlehre – schon fast ein Wort der Umgangssprache – mit „Theorie der Vielheiten" übersetzt wird.) Inzwischen hatte die sowjetische Mathematik Weltgeltung erreicht. Erste Projekte, bestimmte Werke auch in den USA zu übersetzen, wurden in Angriff genommen, aber erst nach dem 2. Weltkrieg zum Abschluß gebracht. (Heute besteht ein hoher Anteil der Produktion der meist multinationalen Verlagskonzerne, die den kapitalistischen Weltmarkt auf dem Gebiet der mathematischen Fachliteratur beherrschen, aus Übersetzungen aus dem Russischen.)

In den ersten Jahren nach der Befreiung vom Faschismus erhielt auch die wiedererstehende Lehre und Forschung auf mathematischem Gebiet bei uns vielfache Hilfe durch die Sowjetunion, teils durch sowjetische Gastprofessoren wie *B. W. Gnedenko* und *L. A. Kaloujnine*, vor allem aber durch die Bereitstellung von Fachliteratur zur Übersetzung ins Deutsche, wobei auch die Übersetzungen selbst anfangs kaum ohne sowjetische Hilfe zustande kamen. Dieser Unterstützung ist es zu danken, daß Verlage der DDR etwa ab 1950 rund zwei Jahrzehnte lang eine führende Rolle bei der Erschließung sowjetischer mathematischer Fachliteratur nicht nur für Benutzer der DDR, sondern auch für solche in Westeuropa und den USA spielen konnten.
Heute verstehen alle Mathematiker der DDR die russische Sprache wenigstens so gut, daß sie die neueste sowjetische Fachliteratur ohne Probleme in der Originalsprache lesen können. Viele von ihnen haben ein Studium in der Sowjetunion oder einen längeren Studienaufenthalt dort aufzuweisen. Daher erscheinen bei uns nur noch wenig Übersetzungen aus dem Russischen. Dafür gibt es verschiedene mehrsprachige Fachwörterbücher und seit 1978 das Lehrbuch „Russisch für Mathematiker" (VEB Verlag Enzyklopädie). Wer Fremdsprachen beherrscht, braucht nicht die drei bis fünf Jahre zu warten, die es im allgemeinen dauert, bis neue Ergebnisse der Wissenschaft in Übersetzungen erscheinen oder in lehrbuchmäßige Darstellungen einfließen. Russisch ist eine Weltsprache der Wissenschaft geworden.
Die hübsche quadratische Marke mit dem kyrillischen Alphabet verdient daher sehr wohl einen Platz in der mathematischen Briefmarkensammlung.

P. Schreiber

Fröbel-Zitate

„Der Würfel ist der reine Gegensatz zur Kugel, ersetzt die Mannigfaltigkeit ihrer Bewegung durch seine Form, durch die Verschiedenartigkeit seiner Glieder, seiner Eigenschaften und besonders seiner Anschauungsweisen."



„Das Spiel ist nicht Spielerei, es hat hohen Ernste und tiefe Bedeutung..."

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

15 Jahre mathematische Mannschaftswettbewerbe im Bezirk Cottbus

In *alpha* (Heft 3/1967) berichteten wir über einen erstmalig im Bezirk Cottbus durchgeführten mathematischen Mannschaftswettbewerb.
Er wird in jedem Jahr für eine Klassenstufe ausgeschrieben. Je drei Schüler bilden eine Mannschaft und lösen in kollektiver Zusammenarbeit zehn Aufgaben. Im Oktober wurde ein Kreisausscheid durchgeführt. Zum Bezirksausscheid, der in diesem Jahr im Mai durch den Kreis Senftenberg ausgerichtet wurde, delegierte jeder Kreis seine beste Mannschaft, die aus *einer* Schule kommen mußte. Der Sieger wurde durch einen Pokal geehrt, den der Vorsitzende der Bezirkssektion der Mathematischen Gesellschaft der DDR gestiftet hatte.
Der Gedanke, durch gemeinsame Arbeit Freude an der Bewältigung mathematischer Probleme zu erzeugen, hat sich bewährt. Im Schuljahr 1981/82 fand nunmehr der 15. Mannschaftswettbewerb statt.
Welche Anforderungen gestellt wurden, zeigen die Aufgaben, die beim Kreisausscheid 1981/82 der Klasse 5 zu lösen waren.

M. Mäthner/G. Schulze

15. Mannschaftswettbewerb

Klasse 5

Kreisausscheid – Schuljahr 1981/82

Arbeitszeit 120 Minuten

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu begründen. Der Lösungsweg muß deutlich erkennbar sein.
Hinweis: Arbeite nach folgenden Regeln:
1. Lies alle Aufgaben sorgfältig durch!
2. Wähle eine Aufgabe aus, von der du meinst, daß du sie lösen kannst!
3. Teile deinem Mannschaftskapitän mit, welche Aufgabe du bearbeitest!
4. Kommst du mit der Lösung nicht zurecht oder bist du unsicher, ob dein Lösungsweg richtig ist, so hole Rat und Hilfe bei deinen Mannschaftskameraden ein!
5. Entwirf die Lösung so, daß sie übersichtlich und jeder Schritt treffend begründet ist!
6. Übergib deinem Mannschaftskapitän den Entwurf deiner Lösung zur Kontrolle!
7. Fertige nach nochmaliger Kontrolle jedes einzelnen Lösungsschrittes die Reinschrift an! Schreibe gut lesbar! Achte auf einwandfreie Rechtschreibung und Grammatik!
8. Frage bei deinem Mannschaftskapitän nach, welche Aufgaben noch zu lösen sind! Wähle eine neue Aufgabe aus und berücksichtige bei ihrer Lösung die Hinweise 1 bis 7!

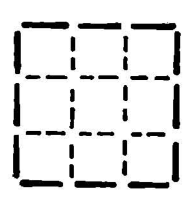
Zusatz für den Mannschaftskapitän
- Überwache die oben gegebenen Hinweise!
- Vermeide Doppelarbeit!
- Dulde keinen Leerlauf in deiner Mannschaft!
- Lege besonderen Wert auf eine sorgfältige und kritische Kontrolle der Lösungen!

Aufgaben

▲1▲ Auf dem X. Parteitag der SED wurde berichtet bzw. beschlossen: Die industrielle Warenproduktion in der DDR betrug in den Jahren von 1976 bis 1980 insgesamt 1,625 Billionen Mark. 1985 soll diese Produktion 0,471 Billionen Mark größer sein als in den angegebenen Jahren.
a) Schreibe die Ziffer der Zahl 1,625 Billionen!
b) Um wieviel Milliarden Mark soll 1985 die industrielle Warenproduktion 2 Billionen überschreiten?

▲2▲ Wenn man die Zahl 12345679 mit einer einstelligen Zahl multipliziert, erhält man ein Produkt, in dem nur die Grundziffer 1 auftritt.
Wie heißt diese einstellige Zahl?

▲3▲ In dem Bild wird mit 12 Hölzchen eine Fläche umrandet, die einen Inhalt von 9 Flächeneinheiten hat.
Ordne die 12 Hölzchen so an, daß eine Fläche mit dem Inhalt von 5 Flächeneinheiten umrandet wird! Zeichne zwei Beispiele!



▲4▲ Gegeben sind die beiden Ungleichungen
(1) $2024 \leqq x < 2027$
(2) $250 < y \leqq 253$.
a) Gib alle Zahlen x bzw. y an, die die gegebenen Ungleichungen erfüllen!
b) Berechne 1. die größte Differenz $x-y$,
2. den kleinsten Quotienten $x:y$!

▲5▲ Aus 4 kg Weizenmehl werden 10 kleine Brote gebacken.
a) Wieviel kleine Brote können aus 40 dt Mehl gebacken werden?
b) Wieviel große Brote, die doppelt so schwer sind wie die kleinen, erhält man aus 4 t Mehl?

▲6▲ Es gibt Zahlenfolgen, die eine bestimmte gleichbleibende Differenz haben, so z. B.
20, 40, 60, 80 Differenz 20,
2, 9, 16, 23 Differenz 7.
Vervollständige das nebenstehende Schema so, daß in jeder waagerechten Zeile und in jeder senkrechten Spalte Zahlenfolgen entstehen, die eine bestimmte gleichbleibende Differenz haben!

```
7      13
        ..
     .. 23
    25..
```

▲7▲ Zeichne ein Rechteck, das 10 cm lang und 4 cm breit ist!
Zerlege das Rechteck in
a) 7 Quadrate, b) 13 Quadrate!

▲8▲ In der Subtraktionsaufgabe ist jedes Zeichen * durch eine Grundziffer zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Gib alle Lösungen an!

```
  * * * * 7
−   * * * *
-----------
          *
```

▲9▲ In der Gleichung $a \cdot 1b = cd8$ sind die Zeichen a, b, c und d so durch Grundziffern zu ersetzen, daß richtig gelöste Multiplikationsaufgaben entstehen. Gib alle Möglichkeiten an!

▲10▲ Ines kauft 3 Stück Obstkuchen und 2 Stück Streuselkuchen und bezahlt 1,90 M. Frank bezahlt 2,70 M und erhält dafür 2 Stück Streuselkuchen und 5 Stück Obstkuchen. Wieviel kostet ein Stück Streuselkuchen, wieviel ein Stück Obstkuchen?

Bei kollektiver Zusammenarbeit

Zum Titelblatt

Der dargestellte Scherenschnitt wurde von *Horst Goehre*, Bad Berka, geschaffen. Wir fanden ihn im Rahmen einer Ausstellung über volkstümliches Schaffen im Freilichtmuseum Schwerin-Mueß, d. Red.

Wer knobelt mit?

Aufgabe 1

Gegeben seien 12 Hölzchen. Jedes Hölzchen sei eine Längeneinheit lang.
Umrande mit diesen 12 Hölzchen eine Fläche mit einem Inhalt von a) 9, b) 8, c) 7, d) 6, e) 5, f) 4, g) 3 Flächeneinheiten! Gib für die Fälle a, b, c, d, g je ein Beispiel, für die Fälle e und f mindestens zwei Beispiele an!

Aufgabe 2

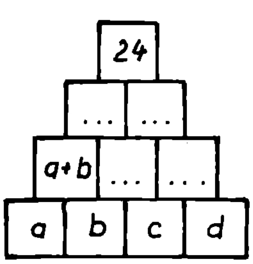
Wenn man einen Würfel mit der Kantenlänge von 30 cm in 27 kleine Würfel mit einer Kantenlänge von 10 cm zersägen will, so sind sechs Schnitte notwendig.
Ingrid behauptet, daß man bei einem Würfel mit der Kantenlänge von 40 cm, den man in 64 Würfel zersägen will, ebenfalls mit sechs Schnitten auskommt, wenn man die zersägten Teile nach jedem Schnitt neu anordnet.
Hat Ingrid recht? Wenn ja, wie muß man es anstellen?

Aufgabe 3

Aus 27 kleinen zueinander kongruenten Würfeln, die schwarz oder weiß gefärbt sind, wird ein größerer Würfel zusammengesetzt.
Wieviel schwarze bzw. weiße kleine Würfel müssen es sein, wenn die Quadrate der Oberfläche des großen Würfels wie ein Schachbrett gefärbt sein sollen?

Aufgabe 4

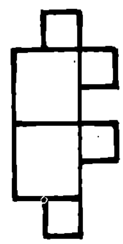
Trage in die leeren Felder bzw. für die Variablen natürliche Zahlen in das Schema ein, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind!



(1) Jedes Feld von der zweiten Schicht an enthält die Summe der Zahlen, die in den beiden unmittelbar darunter stehenden befindlichen Feldern stehen.
(2) *a*, *b*, *c*, *d*, sind vier verschiedene natürliche Zahlen.
(3) Vertauscht man gleichzeitig *a* mit *b* und *c* mit *d* so bleiben alle weiteren Eintragungen richtig.

Aufgabe 5

Gegeben sind quadratische Plättchen. Vier dieser Plättchen haben die Seitenlänge 1 cm, die beiden restlichen die Seitenlänge 2 cm. Die sechs Plättchen sollen so zu Figuren zusammengesetzt werden, daß die Seiten aller Plättchen zueinander parallel oder senkrecht verlaufen und aneinanderstoßende Plättchen mindestens eine gemeinsame Ecke haben.
Das Beispiel zeigt eine Figur mit einem Umfang von 20 cm.



Welche Umfänge könnten die zusammengesetzten Figuren noch haben? Zeichne für jeden Fall zwei Beispiele!

Aufgabe 6

Bei einem Würfelspiel gilt die folgende Regel: Wenn man eine gerade Zahl würfelt, dann bekommt man so viele Pluspunkte, wie die gewürfelte Augenzahl anzeigt. Würfelt man dagegen eine ungerade Zahl, so gibt es entsprechend viele Minuspunkte. Frank würfelt nun fünfmal hintereinander mit einem Würfel.
Dabei sind zwei Augenzahlen gleich, alle anderen voneinander verschieden. Am Ende heben sich Pluspunkte und Minuspunkte gegeneinander auf.
Welche Augenzahlen hat Frank gewürfelt?

G. Schulze

Unser Buchtip

B. Noack/H. Titze

Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR in den Klassen 5 bis 8

184 Seiten, 38 Abb., Pappband
Preis: DDR 6,40 M, Ausland 8,90 M
Bestellangaben: 707624 8/002196
Olympiade-Aufg. 5 bis 8

Verlag Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Bestellungen nimmt jede Buchhandlung entgegen.

Gute Grundkenntnisse gefragt

Sieben Geometrieaufgaben auf einen Streich

Wir betrachten Flächen

▲1▲ Ergänze die folgende Tabelle!

a	5 cm	9 mm			
b	7 cm		16 m		
A		108 mm²	400 m²	49 cm²	81 cm²

Dabei sind *a* und *b* die Seitenlängen und *A* der Flächeninhalt eines Rechtecks.

▲2▲ Lege aus a) 24,
b) 11 Einheitsquadraten ein Rechteck!
Wieviel verschiedene Rechtecke lassen sich jeweils aus diesen Einheitsquadraten legen?

▲3▲ Lege aus 16 gleich langen Stäbchen die Begrenzung eines Rechtecks, ohne dabei ein Stäbchen zu zerbrechen!
a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?
b) Berechne für jeden dieser Fälle die Anzahl der Quadrate, deren Seitenlänge gleich einer Stäbchenlänge ist und die das Rechteck ausfüllen!
c) In welchem Fall ist diese Anzahl (also der Flächeninhalt) am größten?

▲4▲ Eine Glasscheibe ist 150 cm lang und 120 cm breit. Wieviel quadratische Glasscheiben lassen sich daraus gewinnen, wenn die Seitenlänge jeder dieser Scheiben 30 cm beträgt?

▲5▲ Ermittle die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt sich von dem eines Rechtecks mit den Seitenlängen
a) 16 cm und 4 cm, b) 16 cm und 5 cm möglichst wenig unterscheidet!

▲6▲ Ein Fußballplatz ist mindestens 90 m, höchstens 120 m lang und mindestens 45 m, höchstens 90 m breit. Wie groß ist mindestens und wie groß ist höchstens die Fläche eines Fußballplatzes?

▲7▲ a) Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist dreimal so groß wie der eines anderen. Beide haben dieselbe Breite.
Was kannst du über die Längen der beiden Rechtecke aussagen?
b) Länge und Breite eines Rechtecks sind jeweils dreimal so groß wie Länge und Breite eines anderen Rechtecks. Was weißt du über die Flächeninhalte der beiden Rechtecke?

M. Rehm

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 10. Januar 1983

Mathematik

Ma5 ■ 2238 Bernd, ein fleißiger Leser der Schülerzeitschrift *alpha*, sagt zu seinem Freund Fritz: „Denke dir eine dreistellige natürliche Zahl! Multipliziere die Zahl, die der ersten Grundziffer (von links gerechnet) entspricht, mit 2, addiere zu diesem Produkt 3, multipliziere die so erhaltene Summe mit 5, addiere nun die Zahl, die der zweiten Grundziffer entspricht, multipliziere diese Summe schließlich mit 10! Addiere noch die Zahl, die der dritten Grundziffer entspricht! Nenne mir das Endergebnis!" Nach kurzem Überlegen konnte Bernd dem verblüfften Fritz die von ihm gedachte Zahl nennen. Wie ist das möglich?

Schüler Christian Eisele, Mölkau

Ma5 ■ 2239 Eine Pioniergruppe sammelte insgesamt 600 Flaschen. Die Pioniere dieser Gruppe bildeten drei Brigaden. Jeder Pionier gehörte genau einer dieser Brigaden an. Jede dieser drei Brigaden sammelte die gleiche Anzahl an Flaschen. Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 40 Flaschen mit Ausnahme von zwei Pionieren, von denen jeder nur 20 Flaschen mitbrachte. Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 40 Flaschen. Jeder Pionier der Brigade C sammelte genau 32 Flaschen mit Ausnahme eines Pioniers, der nur 8 Flaschen mitbrachte. Wie viele Pioniere gehören dieser Pioniergruppe an?

Schüler Claus Janke, Ilmenau

Ma5 ■ 2240 In der Divisionsaufgabe

$**8816 : 4 = 1*2**4$

sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine richtig gelöste Aufgabe erhält!

Schülerin Antje Giehm, Parchim

Ma5 ■ 2241 Eine Mutter sagt zu ihren vier Kindern: „Auf dem Tisch stehen zwei Schalen mit je zehn Äpfeln. Nehmt euch aus der einen Schale eine Anzahl Äpfel heraus und aus der anderen zwei Äpfel weniger, als in der ersten übrig bleiben! Dann teilt die entnommenen Äpfel zu gleichen Teilen unter euch auf! Verteilt schließlich die verbliebenen Äpfel gleichmäßig auf beide Schalen! Morgen dürft ihr euch wieder Äpfel nehmen. Verfahrt bei der Aufteilung genauso wie heute! Übermorgen dürft ihr euch die restlichen Äpfel teilen."
Wie viele Äpfel erhielten die vier Kinder an jedem der drei Tage?

Schülerin Norma Koenig, Eberswalde-Finow

Ma5 ■ 2242 Steffi besitzt ein Fotoalbum, das mehr als 87, aber weniger als 103 Fotos enthält. Der dritte Teil der Fotos umfaßt Steffis Entwicklung vom ersten bis zum zehnten Lebensjahr. Der vierte Teil der Fotos zeigt Bilder vom Schulanfang. Die restlichen Fotos weisen verschiedene Motive auf. Wie viele Fotos weisen solche verschiedenen Motive auf?

Schüler Claus Janke, Ilmenau

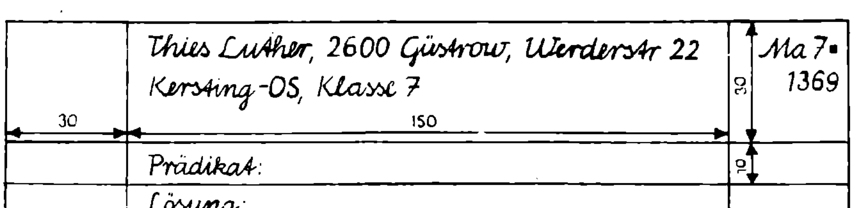
Ma5 ■ 2243 Bert, Mario, Peter, Olaf, Rolf und Uwe waren die erfolgreichsten Teilnehmer an einem Schulsportfest. Ermittle, wer von ihnen eine Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaille erkämpfte und wer von ihnen den vierten, fünften bzw. sechsten Platz belegte! Von diesen sechs Besten ist uns folgendes bekannt:

(1) Peter errang nicht die Goldmedaille; Olaf konnte Uwe im sportlichen Wettkampf wieder nicht schlagen.

(2) Rolf freute sich über eine der drei vergebenen Medaillen.

(3) Mario und Rolf waren beide besser als Uwe, aber es gelang ihnen nicht, Peter zu schlagen.

Lehrerin R. Bricks, Saalfeld, OS II



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. **Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.**

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1982/83 läuft von Heft 5/1982 bis Heft 2/1983. Zwischen dem 1. und 10. September 1983 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/83 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/82 bis 2/83) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1982/83 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma5 ■ 2244 Zwei Orte A und B sind durch eine 100 km lange Straße miteinander verbunden. Zum gleichen Zeitpunkt fahren zwei Fahrzeuge, das eine von A, das andere von B los und einander entgegen. Diese beiden Fahrzeuge treffen sich, nachdem das aus A abgefahrene Fahrzeug zwei Drittel des Weges zurückgelegt hat, den das aus B abgefahrene Fahrzeug bis dahin zurückgelegt hat. Beide Fahrzeuge fahren mit konstanter Geschwindigkeit, das schnellere mit einer mittleren Geschwindigkeit von $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach wieviel Minuten Fahrzeit treffen sich beide Fahrzeuge?

b) Mit welcher mittleren Geschwindigkeit fährt das langsamere Fahrzeug?

Studentin M. Staskowiak, Damsdorf

Ma6 ■ 2245 Anläßlich eines Appells einer Schule wurden Birgit, Doris und Frank für ihre erfolgreiche Teilnahme an der Kreisolympiade in Mathematik, Russisch bzw. Physik ausgezeichnet. Teilnehmer dieses Appells machten anschließend folgende Aussagen:

(1) Birgit war weder an der Mathematik- noch an der Physik-Olympiade beteiligt.

(2) Frank oder Birgit hatten an der Russisch-Olympiade teilgenommen.

(3) An der Mathematik-Olympiade nahm wieder kein Mädchen unserer Schule teil.

Jeder der drei ausgezeichneten Schüler nahm an genau einer der genannten Olympiaden teil. Außerdem war genau eine der drei Aussagen falsch; genau zwei Aussagen waren also wahr. An welcher der genannten Olympiaden nahmen Birgit, Doris bzw. Frank teil?

Lehrerin R. Bricks, Saalfeld

Ma6 ■ 2246 Drei Freunde A, B und C sind gegenwärtig zusammen (in ganzen Zahlen) 100 Jahre alt. Das Lebensalter a von A ist durch 17, das Lebensalter b von B durch 9, das Lebensalter c von C durch 15 teilbar. Wie alt ist jeder dieser drei Freunde gegenwärtig, wenn jeder älter als 25 Jahre ist?

Schülerin Simone Stelter, Silmersdorf

Ma6 ■ 2247 Auf einem Hof sind Gänse, Enten, Puten und Hühner. Insgesamt sind es 16 Tiere. Es sind ebensoviel Gänse wie Enten auf dem Hof. Hühner sind es so viele wie Puten und Enten zusammen, jedoch mehr Enten als Puten. Wie viele Tiere jeder Art sind auf dem Hof?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma6 ■ 2248 In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ habe die Diagonale $\overline{AC}$ die gleiche Länge wie die Seite $\overline{BC}$. Der Winkel $\sphericalangle ADC$ habe die Größe 100°, der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 20°. Welche Größe haben die von der Diagonalen $\overline{AC}$ bei A und C erzeugten Winkel?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma7 ■ 2249 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die jeweils 12mal so groß sind wie ihre Quersumme.

Schülerin C. Münster, Anklam

Ma7 ■ 2250 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 90. Addiert man $\frac{1}{4}$ des ersten und $\frac{3}{4}$ des zweiten Summanden, so erhält man 30. Um welche beiden natürlichen Zahlen handelt es sich?

Schülerin S. Stelter, Silmersdorf

Ma7 ■ 2251 Bei einem Quadrat $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten mit E, F, G, H bezeichnet. Verbindet man diese vier Punkte nacheinander, so entsteht ein Viereck $EFGH$, dessen Flächeninhalt 50 cm² beträgt. Welche Seitenlänge hat das Quadrat $ABCD$? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma7 ■ 2252 Zerlege ein Quadrat durch das Einzeichnen von Verbindungsstrecken so, daß a) 10, b) 11 und c) 12 gleichschenklige, aber nicht rechtwinklige Dreiecke entstehen, die sich nicht überdecken sollen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma8 ■ 2253 Zwei Schwestern haben zusammen sieben Kinder. Die eine hat doppelt so viele Jungen wie die andere. Beide haben gleich viele Mädchen. Wieviel Kinder hat jede Schwester, und wieviel davon sind Mädchen, wieviel Jungen?

Schüler R. Mayer, Belleben, Kl. 6

Ma8 ■ 2254 In unserem Jahrzehnt (1980 bis 1989) gilt, wenn durch $\overline{abcd}$ die Jahreszahl dargestellt wird,

$$a + \overline{bc} + d = \overline{ab} + \overline{cd}.$$

Hierbei sollen $\overline{bc}$, $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ zweistellige und a, d einstellige natürliche Zahlen sein. Nach wieviel Jahren (nach 1989) würde diese Bedingung zum ersten Male wieder gelten?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma8 ■ 2255 Es ist zu beweisen, daß der halbe Umfang eines beliebigen Dreiecks stets größer ist als jede seiner Seiten!

Schülerin S. Stelter, Silmersdorf

Ma8 ■ 2256 Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Umkreises eines beliebigen Quadrats doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Inkreises dieses Quadrats!

Offiziersschüler R. Pratsch, Dresden

Ma9 ■ 2257 Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

(1) $y = x + 20$,

(2) $y^2 + x^2 = 1882$.

Schüler St. Gliwa, Staßfurt, Kl. 10

Ma9 ■ 2258 Mit zwei voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen wurden die folgenden Rechenoperationen ausgeführt:

a) Die Zahlen wurden addiert,

b) die kleinere Zahl wurde von der größeren subtrahiert,

c) die Zahlen wurden miteinander multipliziert und

d) die größere Zahl wurde durch die kleinere dividiert.

Die erhaltenen Ergebnisse wurden addiert; es ergab sich 243.

Wie heißen die beiden Zahlen?

Schülerin S. Stelter, Silmersdorf

Ma9 ■ 2259 Man ermittle alle Primzahlen p, die sich in der Form $a^4 - b^4 = 5p$ darstellen lassen! *stud. math. A. Fittke, Berlin*

Ma9 ■ 2260 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem (1 Einheit ≙ 1 cm) sind drei Geraden durch die Gleichungen

(1) $y = x + 1$,

(2) $x + y = 4$,

(3) $y = 0$.

gegeben. Diese drei Geraden schneiden einander in den Punkten A, B und C. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

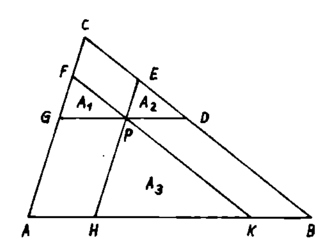
Fr.

Ma10/12 ■ 2261 In einem Dreieck ABC sei die Seite $\overline{AB}$ 3 cm lang. Der Winkel $\sphericalangle AMB$ habe die Größe 35°, wobei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC ist. Wie lang ist der Umkreisradius?

Schüler F. Hübler, Karl-Marx-Stadt

Ma10/12 ■ 2262 Durch einen beliebigen inneren Punkt P eines Dreiecks ABC wurden die Parallelen zu den Dreiecksseiten gezeichnet. Es seien A der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, A_1, A_2 bzw. A_3 die Flächeninhalte der Dreiecke GPF, PDE bzw. HKP. Es ist nachzuweisen, daß stets

$\sqrt{A} = \sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3}$ gilt. *Sch.*



Ma10/12 ■ 2263 Ein Würfel soll so in sechs Pyramiden zerlegt werden, daß sich deren Volumina wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 verhalten. Wie muß die Zerlegung erfolgen?

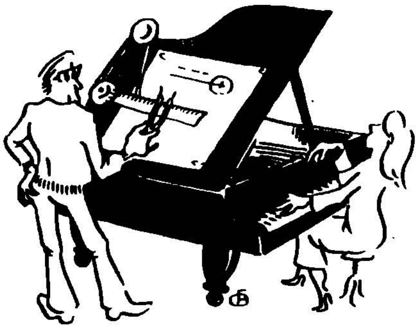
Schülerin A. Meyer, Silberstraße

Ma10/12 ■ 2264 Man zeichne ein Kantenmodell der Zerlegung des Würfels in sechs Pyramiden (Aufgabe Ma10/12 ■ 2263) im Grund-, Auf- und Kreuzriß sowie in einem geeigneten Schrägbild! *Fr.*

Physik

Ph6 ■ 121 Bei der Buntmetallsammlung erhält Dirk einen quaderförmigen Körper aus Metall. Er möchte gern feststellen, aus welchem Stoff er besteht. Deshalb mißt er die

Länge seiner Kanten mit 2,5 cm, 4 cm und 9,5 cm und bestimmt die Masse des Körpers mit 256 g. Aus welchem Metall ist der Körper?
Vergleiche mit der Tabelle in deinem Physiklehrbuch!

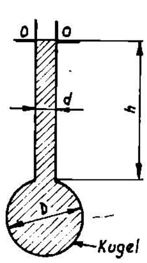


Ph7 ▪ 122 Von einer 1,50 m hohen Rampe sollen Holzkisten mit einem Gewicht von 25 kp (≈ 250 N) auf einem schrägen Holzbrett nach unten gleiten. Wie groß ist die Länge des Brettes zu wählen, damit die Kisten gerade hinabgleiten? (Die Haftreibung ist nicht zu berücksichtigen.)

Ph8 ▪ 123 Die Dichte der Luft beträgt bei 0 °C und einem Luftdruck von 760 Torr (0,1013 MPa) $0{,}00129\ \frac{g}{cm^3}$. Berechne die Dichte der Luft bei 27 °C und 745 Torr (0,0993 MPa)!

Ph9 ▪ 124 Ein Quecksilberthermometer habe die skizzierte Gestalt mit den Maßen $D = 8{,}0$ mm (Durchmesser der Kugel), $d = 0{,}078$ mm (Durchmesser der Kapillare). Der Nullpunkt der in °C geeichten Skale liege bei $h = 20$ mm. Der Anzeigebereich gehe bis +50 °C. Wie groß ist der Skalenabstand der 50-°C-Marke von der Nullmarke, wenn Quecksilber einen räumlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten von $\beta = 18{,}0 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$ hat?

Ing. A. Körner, Leipzig

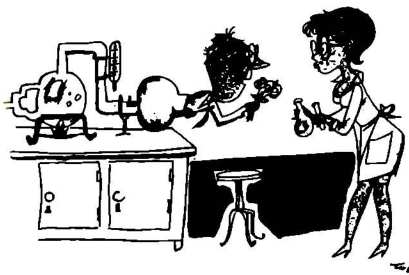


Ph10/12 ▪ 125 Ein frei fallender Körper legt während der letzten Sekunde drei Viertel seiner gesamten Fallstrecke zurück. Berechnen Sie, wie lange und aus welcher Höhe der Körper fiel!

Chemie

Ch7 ▪ 97 Eine Sauerstoffanlage verbraucht täglich 1 560 000 m^3 Luft zur Erzeugung von Sauerstoff. Ein Mensch atmet in einer Minute etwa 30 l Luft. Wie lange könnte ein Mensch leben, ehe die Tagesleistung verbraucht ist?

Ch8 ▪ 98 Zur Erhöhung der Bodenfruchtbarkeit setzt eine LPG 90 kg Kalksteinmehl, das 90% Kalziumkarbonat enthält, ein. Da noch Vorräte von Kalziumhydroxid im Lager vorhanden sind, will die LPG diese aufbrauchen.
a) Wieviel Kilogramm Kalziumoxid enthält das Kalksteinmehl?
b) Wieviel Kilogramm Kalziumhydroxid müssen eingesetzt werden, um den Boden mit der gleichen Menge Kalziumoxid zu düngen, die im Kalksteinmehl enthalten ist?



Ch9 ▪ 99 Ein Liter Leitungswasser wurde chemisch analysiert. Als Bestandteile wurden 192 mg Kalziumhydrogenkarbonat und 92 mg Kalziumsulfat ermittelt. Wieviel Gramm Kalziumoxid sind in 5 200 ml Leitungswasser enthalten?

Ch10/12 ▪ 100 Beim Vermischen von gebranntem Gips ($CaSO_4 \cdot \frac{1}{2}H_2O$) mit Wasser bildet sich bei vollständiger Hydratation das Dihydrat $CaSO_4 \cdot 2H_2O$. Wieviel Prozent des Wassers werden nicht gebunden, wenn als Ausgangsstoffe 2 kg gebrannter Gips und 0,75 l Wasser eingesetzt werden?

Ältester erfolgreicher *alpha*-Wettbewerbsteilnehmer: Dipl.-Ing Oertel, Zschornewitz, 79 Jahre (Bild links), daneben der Chefred. der *alpha*.

Die Vielfachen der 9

Der Naturwissenschaftler *Alexander von Humboldt* (1769 bis 1859) hat mit dem größten Teil der Naturforscher und mit weiteren hervorragenden Geistern seiner Zeit Kontakt gehabt. Neben den persönlichen Begegnungen sind außerordentlich viele briefliche Verbindungen nachweisbar. Humboldt hat fast 50 000 Briefe geschrieben. Er korrespondierte auch mit Mathematikern, darunter Dirichlet, Eisenstein, Gauß und Jacobi.

Die Alexander-von-Humboldt-Forschungsstelle der Akademie der Wissenschaften der DDR hat bisher über 16 000 Briefe von und an Humboldt erfaßt, darunter die folgende kurze Anfrage an den Direktor der Berliner Sternwarte, den Königlichen Astronomen *J. F. Encke*, die der Gelehrte wahrscheinlich im Sommer 1848 schrieb.

Humboldt wohnte nach seiner großen amerikanischen Forschungsreise (von 1799 bis 1804) und nach über 20 Jahren Aufenthalt in Paris von 1827 an in seiner Geburtsstadt Berlin. Er war dort Kammerherr des preußischen Königs (seit 1840 Friedrich Wilhelm IV.). „Für jede Frage des wißbegierigen Monarchen hatte er aus seiner umfassenden Bildung entweder sogleich eine belehrende Antwort bereit, oder kannte doch die Wege, sie bald herbeizuschaffen“, berichtete der Humboldt-Biograph *A. Dove*.
„Lachen Sie nicht, mein theurer Freund und College, über meine arithmetische Unwissenheit“;, schrieb Humboldt an einem Sonntag aus Potsdam an Encke. „Ich soll dem König erklären, warum *nur* in allen Multiplen von 9 die einzelnen Ziffern des Products in der Summe immer 9 geben. $4 \times 9 = 36$. $9 \times 9 = 81$. Und nur bei 9. Da Sie [mit] mir Nachsicht haben, frage ich Sie [...].“ (Zentrales Archiv der AdW der DDR. Nachlaß Encke)

Ein Antwortbrief Enckes auf die Humboldtsche Frage ist nicht bekannt. Vielleicht hat der Sternwartendirektor sie bei einer Begegnung der Gelehrten in der Akademie mündlich beantwortet. Wie muß die Antwort lauten?

H. Pieper

16 Jahre alpha-Wettbewerb

Eingegangene Lösungen pro Wettbewerbsjahr

1967	5100		
1968	14100		
1969	12400		
1970	25400		
1971	44800		
1972	39500		
1973	44300		
1974	58800		
1975	87400	davon	
1976	97500	9400 Ph	6600 Ch
1977	104000	5400 Ph	4400 Ch
1978	94600	3600 Ph	3600 Ch
1979	94600	6700 Ph	3000 Ch
1980	94700	4200 Ph	2900 Ch
1981	89400	4300 Ph	3600 Ch
1982	95000	4400 Ph	3700 Ch
zus.	1101000	38000 Ph	27800 Ch

Aufgabengruppe
Wissenschaftlich-organisatorische Leitung: Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV Leipzig;

Verantwortliche Aufgabenredakteure:
Oberstudienrat Th. Scholl, Berlin (Mathematik, Klasse 5, 6, 7),
Oberlehrer Dr. W. Fregin, Leipzig (Mathematik, Klasse 8 bis 10/12),
Mathematikfachlehrer H. Begander, Leipzig (Physik, Klasse 6 bis 10/12),
Diplom-Lehrer Christa Reuter, Erfurt (Chemie, Klasse 7 bis 10/12).

Verantwortliche Korrektoren der eingehenden Lösungen:
Oberstudienrat J. Lehmann, Leipzig (Klassenstufe 5, 6, 7), Diplom-Lehrer Math./Ph. Christine Döhler/Diplom-Physiker Christian Döhler (Klasse 8, 9, 10/12) (alle Leipzig). Unsere Anerkennung sprechen wir der Redaktionssekretärin Rosemarie Schubert aus, welche die Briefe öffnet, die Lösungen sortiert, die Statistik erarbeitet und die fleißigen Helfer – Schreiber der Antwortkarten – betreut.

Fleißige Helfer
Unser Dank gilt den 7 Erwachsenen und den 11 Schülern der 29. OS Leipzig für das Schreiben der über 90000 Karten pro Wettbewerbsjahr, dem Postamt 7027 Leipzig für die gewissenhafte Bearbeitung der Tausende von eingehenden Briefen und Päckchen, dem Hauptpostamt Leipzig für das Abstempeln und Sortieren der Antwortkarten, dem VEB Präwema, Markneukirchen, für die pünktliche Belieferung mit Abzeichen und der Druckerei Gersöne, Leipzig, für die Anfertigung der geschmackvoll gestalteten Urkunden.

Vorbildliche Hilfe
Für den Wettbewerb stellt der Verlag Volk und Wissen, Berlin – er ist der Herausgeber der *alpha* – jährlich rund 28000 Mark zur Verfügung. Damit ist gewährleistet, daß sich alle interessierten *alpha*-Leser außerunterrichtlich durch das Einsenden von Lösungen bewähren können.

Das sind sie, die 5100 Lösungen zu den vier Heften des Jahrgangs 1967.

Zahlen und Fakten zum alpha-Wettbewerb Heft 6/81

Zum *alpha*-Wettbewerb des Heftes 6/1981 gingen insgesamt 26332 Lösungen ein. Davon entfielen 105 Lösungen auf folgende Länder: UdSSR, Rumänien, Österreich und die BRD; alle übrigen kamen aus der DDR.

Aufgaben

▲1▲ Nimmt man an, daß jede Lösung aus nur einem A4-Bogen besteht und ein Bogen eine Masse von rd. 4,3 g hat, wieviel Kilogramm an Papier wurden dabei verbraucht?

▲2▲ Jeder Teilnehmer, der eine richtige Lösung eingesandt hatte, bekam eine Antwortkarte mit einer Beurteilung seiner Lösung. Eine solche Karte hat eine Masse von 4,4 g. Welche Masse an Papier wurde für die Antwortkarten verwendet?

▲3▲ Welche Masse an Papier wurde insgesamt verbraucht? (Siehe Aufgabe 1 und 2).

▲4▲ Wie hoch waren die Post- und Schreibgebühren insgesamt, wenn für jede Antwortkarte 0,05 M an Porto und 0,04 M an Schreibgebühren ausgegeben wurden?

▲5▲ Wieviel Stunden waren zum Schreiben dieser Antwortkarten notwendig, wenn ein Schüler für 90 Adressen eine Stunde braucht?

▲6▲ a) Wie lang wäre ein Band, wenn man alle 26332 Lösungsblätter mit den Schmalseiten bzw. mit den Breitseiten aneinanderlegen würde? Ein Blatt A4 ist 21,0 cm breit und 29,8 cm lang.
b) Welche Fläche würden alle diese Blätter einnehmen?

▲7▲ Eine Antwortkarte hat eine Stärke von 0,36 mm. Wie hoch wäre der „Kartenturm", wenn man alle Antwortkarten aufeinanderlegen würde?

▲8▲ Die DDR-Beteiligung am alpha-Wettbewerb gliederte sich wie folgt:
(Heft 6/81)

	Jungen	Mädchen	gesamt
Klasse 5	3151	4064	7215
Klasse 6	2307	3022	5329
Klasse 7	2304	2732	5036
Klasse 8	1084	965	2049
Klasse 9	1418	1142	2560
Klasse 10/12	2481	1557	4038

a) Berechne den Anteil der Jungen und Mädchen für jede Klassenstufe in Prozent, und stelle das Ergebnis in einem Säulendiagramm dar!
b) Wie groß war der prozentuale Anteil der Jungen und Mädchen insgesamt?

Das sind sie, die 26332 Lösungen zu Heft 6/81. Chefredakteur und Redaktionsassistentin (sie bilden die „Redaktion alpha") übergeben die 36 Bündel (Lösungen zu den 36 Aufgaben dieses Heftes) dem Altstoffhandel.

Sind Mausefallenbeweise nötig?

Teil 2

5. Was sind Mausefallenbeweise?

Nachdem sich das Schopenhauersche Konzept einer anschaulichen Mathematik so verlockend anbietet, wollen wir es einmal genauer betrachten, uns insbesondere den „sich zuziehenden Schlingen“ der traditionellen mathematischen Beweise zuwenden. Sehen wir uns unseren Beweis à la Schopenhauer noch einmal kritisch an. Scheinbar gibt es dort nichts Unanschauliches. (Wir lassen einmal beiseite, weshalb wir auf die Idee des Umklappens kamen, denn vielleicht wäre es im Sinne Schopenhauers auch ohne den „vom Himmel gefallenen Schritt“ zu einem Beweis gekommen.) Aber, woher wissen wir eigentlich, daß der Eckpunkt P auf der Seite QS liegt. Woran erkennen wir die Kongruenz der Dreiecke CPQ und CAB und der anderen Figuren? Obwohl das spezielle Fragen zu unserem Beweis sind, so ist doch klar, daß alle anschaulichen Begründungen ähnliche Fragen aufwerfen.

Kein Zweifel, obwohl ein in der ebenen Geometrie Geübter derartige Sachverhalte schnell als zutreffend ansehen wird, so bedürfen diese Sachverhalte doch einer weiteren Begründung. Und diese ist dann, obwohl sie nicht schwer und kompliziert sein muß, eben nicht mehr so anschaulich und einsichtig. Da muß formaler argumentiert werden, um Geometrie zu der Kunst werden zu lassen, aus falschen Figuren richtige Schlüsse zu ziehen (wie es G. Polya einmal ausdrückte). Versucht einmal zu begründen, warum bei der Spiegelung des Hypotenusenquadrates P auf QS zu liegen kommt!

Schopenhauer bleibt im intuitiven Erfassen mathematischer Zusammenhänge stecken. Solche Zusammenhänge gewissermaßen vor dem geistigen Auge zu sehen, ist wünschenswert und zeigt die schöpferischen Fähigkeiten eines Mathematikers, aber diese Einfälle und Einsichten müssen auf jeden Fall logisch hieb- und stichfest abgesichert werden. Kein Mathematiker hat sich jemals dieser Arbeit entzogen, denn es ist nur zu gut bekannt, wie schnell sich Einfälle als unbrauchbar bei näherer Prüfung erweisen, Einsichten als nicht allgemein gültig und häufig der Wunsch Vater des Gedankens ist. Viele Mathematiker haben berichtet, daß nach langen und intensiven Vorarbeiten blitzartig die Lösung erschien. C. F. Gauß gab an, morgens im Bett, noch vor dem Aufstehen, schlagartig erkannt zu haben, wie das reguläre 17-Eck zu konstruieren sei. Eine solche persönliche Erkenntnis kann übrigens anderen nur glaubhaft und nachvollziehbar gemacht werden, wenn sie sich in der Form eines Beweises niederschreiben läßt.

Nachdem uns Schopenhauer angeregt hat, kritisch Beweisverfahren durchzumustern, müssen wir doch zugeben, daß die vermeintliche Schwäche der Griechen, Anschaulichkeit durch formal-logische Schlüsse zu ersetzen, ihre Stärke war. Sie haben doch mehr gesehen als Schopenhauer! (Ganz abgesehen davon, daß der von Schopenhauer kritisierte Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes mehr aussagt als Schopenhauers Beweis, also dementsprechend beanspruchen darf, komplizierter und unanschaulicher zu sein. Schopenhauer kritisierte vermutlich den Beweis, der aus $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ [p und q Projektionen von a und b auf c, also $p + q = c$] folgert: $a^2 + b^2 = pc + qc = (p + q)c = c^2$. Bei Schopenhauer erscheinen die zusätzlichen Informationen $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$ gar nicht.)

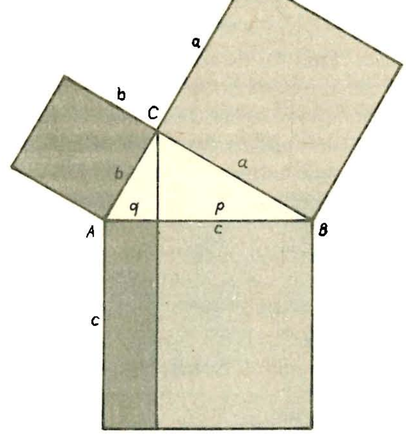


Bild 7
Die weiterreichenden Aussagen Euklids beim Satz des Pythagoras

Auch die Kritik an den indirekten Beweisen müssen wir zurückweisen, denn wie sich in den kritischen Anmerkungen zum Schopenhauerschen Beweise andeutete, brauchen direkte Beweise nicht einsichtiger als indirekte Beweise zu sein; das Ziehen von Linien usw. (also bei uns das Umklappen des Quadrates) wird in beiden Beweisarten häufig erst am Ende des Beweises, nämlich durch den Erfolg, einsichtig werden. Lassen wir schließlich Sherlock Holmes mit einer bemerkenswerten Äußerung zum indirekten Beweis gegenüber seinem wackeren Mitarbeiter Dr. Watson abschließen: Wenn man alles ausgeschlossen hat, so muß das, was übrig bleibt, und wenn es noch so unwahrscheinlich ist, die Wahrheit sein.

Am Ende drängt sich anstelle der Frage, ob Mausefallenbeweise nötig seien, die Frage auf, was überhaupt als Mausefallenbeweis zu bezeichnen sei. Eine Antwort wird zweifelsohne die Feststellung enthalten müssen, daß die Entscheidung darüber, was ein Mausefallenbeweis sei, ziemlich subjektiv ist, d. h. von Erfahrung, Können und Geschmack eines jeden Mathematikers abhängen wird. Gerade subjektive Ausdeutungen vermeidet aber die Mathematik durch ihre logische Methode bei der Widerspiegelung objektiv realer Gesetze. Hier liegt gewiß ein Grund, weshalb künstlerisch begabte Personen häufig der Mathematik gegenüber Ablehnung zeigen: das Aufspüren objektiv vorhandener Gesetze widerspricht scheinbar der schöpferischen Phantasie, mit der es im Kunstwerk offenbar möglich ist, aus dem Nichts eine eigene Welt zu schaffen. Aber ebensowenig wie die „eigenen Welten“ nicht ohne Bezug auf die Realität entworfen werden können, so wenig kommt die Mathematik ohne Phantasie aus. Die unumgängliche Kontrolle der Phantasie, – wie es der Maler F. Goya einmal in seiner Radierung „Die schlafende Vernunft gebiert Ungeheuer“ plastisch ausdrückte – mißfällt Schopenhauer. Logische Kontrolle und Absicherung eines Beweises ist aber für die Mathematik vergleichbar mit dem, was die Naturwissenschaftler mit dem Experiment tun. „Mausefallenbeweise“ sind und bleiben folglich unverzichtbarer Bestandteil der Mathematik.

R. Thiele

Unser Buchtip

R. Thiele

Mathematische Beweise

176 Seiten, zahlreiche Abbildungen
Bestell-Nr. 6659193 Preis 8,60 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig

Ein Kulturschatz unserer Heimat

Das Fröbelzimmer in Schweina

Wenn wir an Gedenktagen historisch bedeutsame Persönlichkeiten besonders würdigen, so nicht allein aus Achtung vor ihren Leistungen, die sie für den gesellschaftlichen Fortschritt erbracht haben, sondern vor allem darum, um uns mit ihrem Leben und Wirken eingehender zu beschäftigen, um ihr Anliegen und ihre Ideen tiefer zu verstehen und zu prüfen, ob und wie wir es für gegenwärtige Aufgaben besser und umfassender nutzen können.

So war auch der 200. Geburtstag von Friedrich Fröbel am 21. April 1982 Anlaß, seine pädagogischen Gedanken weiter zu erschließen und sie insbesondere einer breiten Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Friedrich Fröbel ist bekanntlich als ***Begründer des Kindergartens*** in die Geschichte eingegangen. Sein Anliegen, eine allseitige und harmonische Menschenbildung durch eine bewußte und planmäßige Vorschulerziehung einzuleiten, ist nicht nur von Interesse für Pädagogen, sondern für alle Eltern, berührt jede Familie, so daß davon ausgehend sich Gelegenheit bot und bietet, Traditionsbewußtsein, aber auch Stolz auf unsere Errungenschaften in der Vorschulerziehung bei vielen Menschen zu wecken und zu fördern.

Lenken wir unsere Schritte nach Schweina, von Bad Liebenstein bequem zu erreichen.

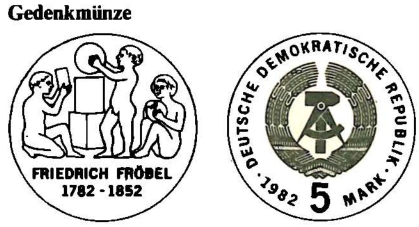
Gedenkstein im Fröbel-Kindergarten Mühlhausen

Fröbel hatte, von vielen als „alter Narr" verlacht, hier nach der schwersten Enttäuschung seines Lebens Neues schaffen wollen; schwer hatte ihn der Schlag des Verbotes seiner Kindergärten in Preußen getroffen – zu einer Zeit, da Amerika und England sich bereits weit seinen Ideen geöffnet hatten, ja wo sogar „the kindergarten" in den Wortschatz aufgenommen worden war.

Hatte er im Revolutionsjahr 1848 noch gehofft, sein Lebenswerk durch Schaffung der Fröbel-Schule zu krönen, so war die Zeit – sprich die gesellschaftlichen Umstände – dafür noch nicht reif genug, die Fortschrittsfeinde triumphierten wieder im Jahre 1851, als er – fast siebzigjährig – hierher nach Schweina kam. Ein glücklicher Umstand begünstigte sein Wirken: Herzog Bernhard der II. von Meiningen schloß sich seinen Ideen auf und stellte ihm das Schloß Marienthal – bis 1833 Wenigenschweina – für die erste deutsche Kindergärtnerinnenschule zur Verfügung. „Kommt, laßt uns unseren Kindern leben" – dieses Motto anderen Menschen zu vermitteln, war Fröbel in diesen Räumen nur ein knappes Jahr noch vergönnt.

Am 21. Juni 1852 starb er in einem Zimmer des Schlosses, das jetzt liebevoll als Fröbelgedenkstätte eingerichtet ist (montags bis freitags von 9 bis 16 Uhr geöffnet). Das jetzige Klubhaus des VEB Wälzkörperwerk beherbergt neben Originalzeugnissen, wie den bekannten „Spielgaben" Würfel, Kugel und Säule, Gastgeschenke aus aller Welt.

Gedenkmünze



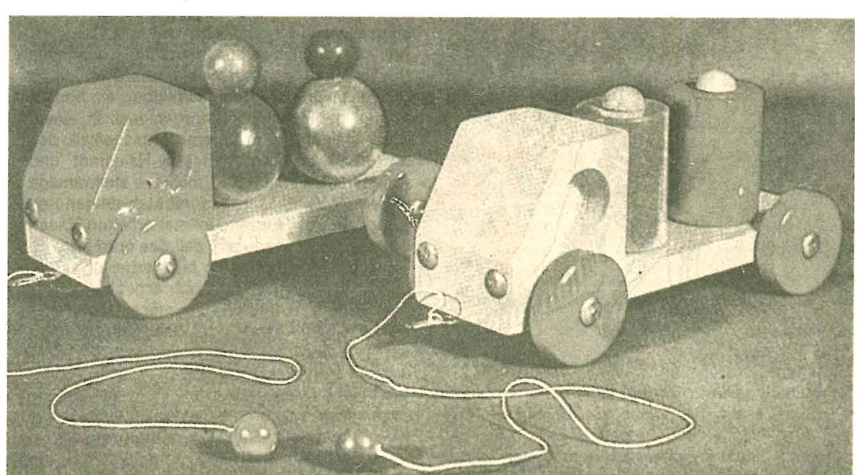
Emission: 200. Geburtstag 1982 – Masse: 12,2 g – Durchmesser: 29 mm – Legierung: Neusilber-Auflage 60000 – Gestalter: Rommel/Dorfstecher

Besonders aufgeschlossen gegenüber Fröbels Methoden sind Japaner, deren „Early Childhood Education Association" schon manches Zeugnis nationaler traditioneller wie auch moderner Vorschulerziehung beisteuerte. Ein Gedenkstein im Vorgarten zeigt die Grundbestandteile der Spielgaben in einer Form, die auch an anderen Fröbelgedenkstätten zu finden ist (unser Bild).

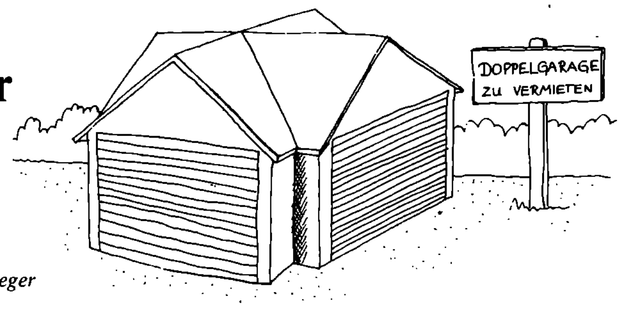
Wer mehr über Leben und Wirken von Fröbel erfahren will, der greife zu der im Urania-Verlag erschienenen Biographie (Preis: 8,80 M, Bestell-Nr. 653 7268, Autoren: R. Bolt/W. Eichler).

- Etwa 664400 Kinder im Alter von 3 bis 6 Jahren werden in den 12000 Kindergärten der DDR betreut.
- In den Jahren 1976 bis 1980 entstanden 91 122 neue Kindergartenplätze, das waren über 12000 mehr als geplant. Für die Schaffung eines einzigen Kindergartenplatzes gibt der Staat 8000 bis 10000 Mark aus.
- Allein im Jahre 1980 wurde 1 Milliarde aus dem Staatshaushalt für Kindergärten ausgegeben; Investitionen sind in dieser Summe nicht enthalten.
- 35 Pfennige täglich zahlen die Eltern lediglich als Kostenanteil für das Mittagessen. Der Besuch des Kindergartens ist kostenlos.
- Über 54000 Kindergärtnerinnen betreuen und erziehen die Kinder.
- Jedes Jahr verlassen 1700 Absolventen die 17 pädagogischen Fachschulen der DDR.

Die von Fröbel entwickelte Reihenfolge der Spielzeuge ging von den Entwicklungsstufen des Kindes aus. Beginnen sollte das von den Eltern oder Kindergärtnern geleitete Spiel, als Teil der Erziehung, mit dem Ball, gefolgt von Kugel und Würfel. Daran schlossen sich verschieden geteilte Würfel an, in Baukästen zusammengestellt. Weitere Spiel- bzw. Bauelemente waren Legetäfelchen, -hölzchen, Stäbchen und Buntpapier. – Das hier abgebildete Spielzeug aus sowjetischer Produktion wurde in Anlehnung an Fröbels Spielmaterialien entwickelt.



In freien Stunden · alpha-heiter



Aus Eulenspiegel: Frank Steger

In der AG Mathematik

In der Liste der AGs Mathematik gibt es in der achten Klasse 25% Mädchen. Am 10. Februar wurde Uta krank und bat ihren Bruder Thomas, Schüler der neunten Klasse, für sie die Zusammenkunft der AG zu besuchen; deshalb nahmen an diesem Tage nur noch 20% Mädchen teil.
Wie viele Teilnehmer waren an diesem Tag in der Liste der AG eingetragen?

A. Halameisär, Literat, Moskau

Rechengesetze und Lehrsätze gesucht

a) Welche Rechengesetze behandeln diese Mathematiklehrer in ihrem Unterricht?

DR. STEVE T. GITZ, SIBIU

ASTA J. GESSOV, ZEITZ

b) Welche Lehrsätze lehren diese Hochschullehrer?

ACHIM DESSER, THALE

ULI K. VADERIE, CALI

Fachlehrer D. Knape, Jessen

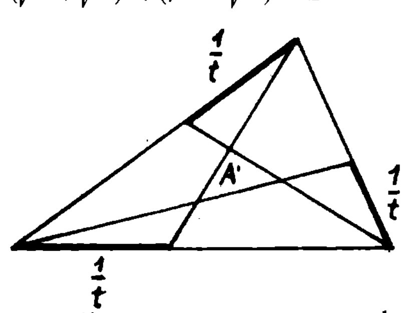
Hirntest: $\mathbf{n=1;\quad x=2;\quad \frac{A}{A'}=?}$

- Berechne n in der folgenden Gleichung ($x \in N$):

$$n=\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$$

- Berechne x in der folgenden Gleichung:

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2^x$$



- Gefragt: $\frac{A'}{A}$; Teilverhältnis konstant $\frac{1}{t}$.

S. Tunn, Barth

Analyse eines Rechentricks

Zwei einstellige Zahlen werden untereinander an die Tafel geschrieben. Dazu kommt jeweils die Summe der beiden letzten Zahlen, bis 10 Zahlen erreicht sind. Wenn man den Trick kennt, ist man nun in der Lage, mit geringem Rechenaufwand sofort die Summe dieser 10 Zahlen zu nennen.
Man braucht nur die siebente Zahl mit 11 zu multiplizieren. Erhöht wird der Effekt, wenn man bis zur letzten Zahl der Tafel den Rücken kehrt. Zuerst einmal ein Zahlenbeispiel:

3		
7		
10		
17		
27		
44		
71	$71\cdot 11=781$	
115		
186		
+301		
781		

Nehmen wir die beiden allgemeinen Zahlen a und b, dann ergibt sich:

a	
b	
$a+b$	
$a+2b$	
$2a+3b$	
$3a+5b$	
$5a+8b$	die 7. Zahl
$8a+13b$	
$13a+21b$	
$21a+34b$	
$55a+88b=11(5a+8b)$	

Diese Klammer entspricht gerade der 7. Zahl. Der Trick ist also entschleiert! Wer sich schon näher mit Folgen beschäftigt hat, erkennt sicher eine Fibonacci-Folge (siehe Heft 6/81).

AG-Leiter Mathematik Benno-Kunze-Obsieger, Bonn

Holzweg

Mit welcher Manipulierung (z. B. Hölzchen versetzen) kann man in jeder Zeile die angegebene Summe erhalten?

VII − II = VIII

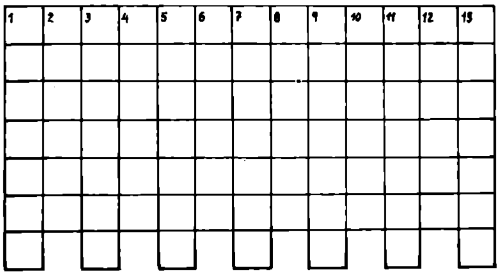
X + III = VIII

IV + II = VIII

Füles, Budapest

Füllrätsel

In die Figur sind senkrecht abwechselnd Wörter mit sieben und sechs Buchstaben folgender Bedeutung einzutragen:



1. Begriff aus der Logarithmenrechnung; 2. Begriff aus der Mengenlehre; 3. ein Viereck; 4. ein System von $m \cdot n$ Elementen, die in einem Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnet sind; 5. Teilgebiet der Mathematik; 6. Zeichengerät; 7. Vielgliedriger Ausdruck; 8. Begriff aus der darstellenden Geometrie; 9. Deutscher Mathematiker, auf den der Integralbegriff zurückgeht; 10. Rechenbrett; 11. tschech. Mathematiker, vervollständigte u. a. die Infinitesimalrechnung; 12. Mathematiker des Altertums; 13. deutscher Mathematiker, Begründer der Infinitesimalrechnung.

Bei richtiger Lösung ergeben die Buchstaben der ersten Zeile den Namen des Graphen der Funktion $y=x^2$.

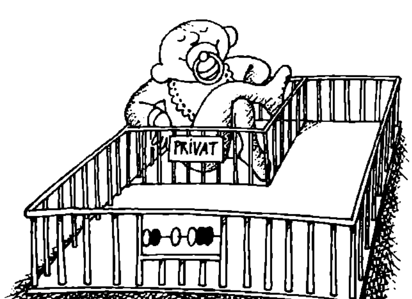
Diplom-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Kombiniere!

Die Zahlen 1 bis 9 sollen in ihrer geordneten Reihenfolge so durch die vier Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ verbunden werden, daß sich als Ergebnis 100 ergibt. Dabei können auch mehrere Ziffern zu einer Zahl zusammengefaßt werden.

Wieviel Lösungen findest du?

Aus Matematicko Fisički List, Beograd



Aus Magazin: Hans-Jürgen Starke

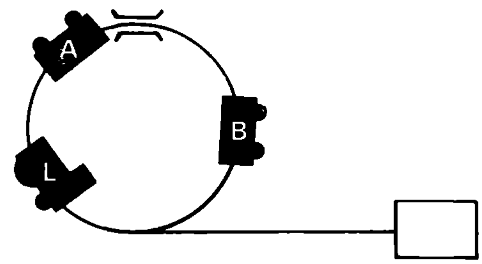
Zahlenleiste

Die vorliegende Zahlenleiste soll in vier deckungsgleiche Teile zerlegt sein, deren Summe jeweils 35 beträgt. *Schülerin Christiane Krause, Berlin (Kl. 8)*

2	9	16	7	12	6	4	11
8	15	10	3	13	7	3	14

Lokomotion

Auf den Schienen befinden sich zwei Waggons A und B, sowie die Lokomotive L. Oben ist eine Brücke, und rechts im Bild befindet sich der Bahnhof. Die Lokomotive darf über die Brücke fahren, die Waggons jedoch nicht, da sie zu schwer sind.



Wie kann man die Positionen der beiden Waggons vertauschen und anschließend mit der Lokomotive zum Bahnhof fahren?

Prof. Pierre Berloquin, Paris

Aus Elternhaus und Schule: Lothar Otto

Dialoge

- Ein Lehrer fragt einen seiner Schüler:

„Wieviel ist fünf plus eins?"

Der Schüler schweigt.

„Na schön", fährt der Lehrer fort, „ich will dir mit einem Beispiel helfen. Angenommen, ich gebe dir erst fünf Äpfel und nach einer Weile noch einen. Wieviel Äpfel hast du dann?"

„Sieben."

„Wieso das?"

„Weil ich noch einen in der Tasche habe."

Aus der Zeitschrift Tschajan (Kasan)

- „Als Drucksache braucht man auf eine Karte doch bloß eine Fünf-Pfennig-Marke zu kleben!" – „Ja." – „Was macht man denn nun, wenn man nur eine Postkarte mit einer Zehn-Pfennig-Marke hat?" – „Man klebt eine Fünf-Pfennig-Marke drüber!"

Lesereinsendung: H. Wiegandt, Borna

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ aus positiven ganzen Zahlen a, b, die die Eigenschaft haben, daß von den folgenden vier Aussagen (1), (2), (3), (4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!

Die Aussagen lauten:

(1) $b \mid (a+1)$,

(2) $a=2b+5$,

(3) $3 \mid (a+b)$,

(4) $a+7b$ ist eine Primzahl.

2. *Definition:* Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X, Y aus M gilt: Der Abstand $\overline{XY}$ zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $\overline{XY} \leqq d$.

(2) Es gibt zwei Punkte P, Q aus M, deren Abstand $\overline{PQ}=d$ beträgt.

Aufgabe: Untersuchen Sie, ab man jede Vierecksfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, daß jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat! Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

Von den nachstehenden Aufgaben 3A und 3B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3A. In einem Mathematikzirkel wird über nichtkonstante Funktionen diskutiert, die für alle reellen Zahlen definiert sind und deren Funktionswerte wieder reelle Zahlen sind. Sind f und g zwei solche Funktionen, so kann man eine Funktion F für alle reellen x durch

$$F(x)=f[g(x)]$$

definieren.

Die Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob derartige Funktionen f, g, F periodisch sind. (Bekanntlich heißt eine Funktion ϕ genau dann periodisch, wenn eine reelle Zahl $p>0$ so existiert, daß für alle x die Gleichung

$\phi(x+p)=\phi(x)$ gilt.)

Jens behauptet:

Ist g eine periodische Funktion (und f periodisch oder nicht), so ist auch stets die – wie oben erklärte – Funktion F periodisch.

Dirk behauptet:

Ist f eine periodische Funktion (und g periodisch oder nicht), so ist auch stets F periodisch.

Christa behauptet:

Sind beide Funktionen f und g nicht periodisch, so ist auch stets F nicht periodisch.

Untersuchen Sie für jeden dieser drei Schüler, ob er damit eine wahre oder eine falsche Aussage gemacht hat!

3B. Beweisen Sie, daß man auf der Oberfläche einer Kugel, die den Radius r hat, 12 Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ so verteilen kann, daß für je zwei dieser Punkte ihr Abstand voneinander größer als r ist! Dabei wird als Abstand zwischen zwei Punkten die Länge ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke bezeichnet (nicht etwa ein Bogen auf der Kugeloberfläche).

4. Mehrere Personen spielen ein Spiel mit drei Würfeln, auf deren Seitenflächen anstelle der üblichen Zahlen Buchstaben stehen. Auf jedem Feld steht genau ein Buchstabe; jeder Buchstabe kommt nur einmal vor. Nach jedem Wurf muß der Spieler versuchen, aus den drei Buchstaben, die oben liegen, ein Wort zu bilden.

Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel derart möglich ist, daß mit den so beschrifteten Würfeln im Laufe des Spiels auf diese Weise die Wörter AUF, BEI, BEN, CUP, GER, ICH, IDA, IST, MAN, NOT, TOR, ZUG gebildet werden können! Wenn dies der Fall ist, so untersuchen Sie, ob die Verteilung der Buchstaben auf die Würfel aus den genannten Angaben eindeutig hervorgeht, d. h., ob für jeden der drei Würfel (bis auf die Reihenfolge) eindeutig folgt, welche Buchstaben auf ihm stehen! Ist auch dies der Fall, so ermitteln Sie diese Verteilung!

5. Ermitteln Sie alle Mengen $\{a, b, c\}$ aus positiven ganzen Zahlen a, b, c, die jeweils zusammen mit der Zahl

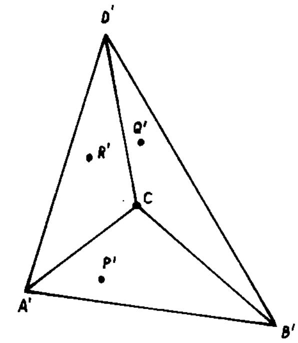
$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ die Gleichung

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=2s$$

erfüllen!

6. Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$, ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABD, ein Punkt Q auf der Fläche des Dreiecks BCD und ein Punkt R auf der Fläche des Dreiecks ACD seien so im Raum gelegen, daß sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D', P', Q' bzw. R' haben (siehe Bild). Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.

Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, daß eine Figur die gesuchte Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!



Die Aufgaben für Klassenstufen 11/12 veröffentlichen wir im Heft 6/82.

An der OJM nahmen teil: 144 Jungen, 17 Mädchen, 80 Korrektoren, Koordinatoren und Betreuer – Wir sagen Dankeschön an alle die Pionierleiter, FDJ-Sekretäre, AG-Leiter, Fachberater Mathematik und Wissenschaftler, welche den Zehntausenden *Junger Mathematiker* mit Rat und Tat zur Seite stehen.

Preisträger

Einen ersten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Oliver Geupel, *EOS Romain Rolland* Dresden (1)

In Olympiadeklasse 11/12:

Ralf Hortig, I. EOS *Dr.-Theodor-Neubauer* Cottbus (2); Jochen Lattermann (Kl. 11), Pestalozzischule (EOS) Dresden (3); Bodo Heise, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt (4); Ulrich Vollmer (Kl. 11), EOS *Heinrich Hertz* Berlin (5); Matthias Hübner (Kl. 10), EOS *Alexander Humboldt* Leipzig (6); Karin Gröger (Kl. 10), EOS *Heinrich Hertz* Berlin (7); Alexander Schmidt (Kl. 10), EOS *Heinrich Hertz* Berlin (8)

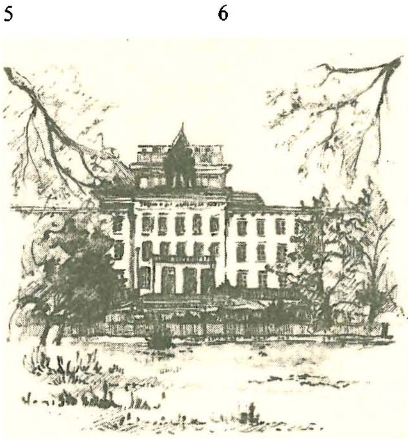
20 Schüler erhielten einen 2. Preis, 21 Schüler erhielten einen 3. Preis.

Es wurden 25 Anerkennungsurkunden vergeben, und an zwei Schüler wurde eine Urkunde für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe überreicht.

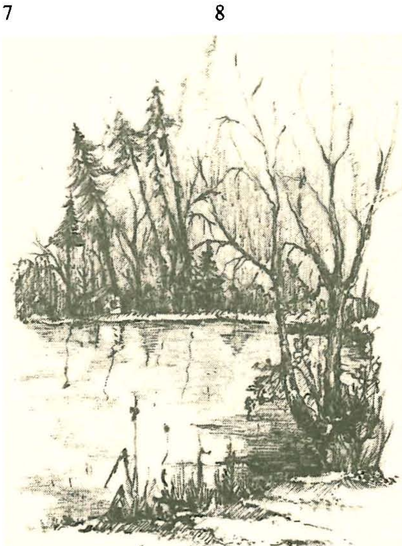
Stellvertretend für alle Bezirksmannschaften stellen wir die seit Jahren erfolgreiche Mannschaft und ihre Betreuer aus Neubrandenburg vor.

1 2 3 4

5 6 7 8



Seit zwei Jahrzehnten vorbildlicher Gastgeber der *Olympiaden Junger Mathematiker*, DDR-Ausscheid: Die Jugendhochschule *Wilhelm Pieck* in der Nähe des Bogensees.
Die herrliche Landschaft um den Bogensee bei Berlin-Wandlitz bot vor, zwischen und nach den zwei 4stündigen Klausuren ausgezeichnete Möglichkeiten der Entspannung.



Die Zeichnungen auf dieser Seite stammen von Mathematikfachlehrer Dieter Grupe vom Haus der Jungen Pioniere Tangerhütte, einem der Betreuer der Magdeburger Mannschaft.

Aus dem Rahmenprogramm der OJM

Eröffnung mit anschließendem Kulturprogramm des Erich-Weinert-Ensembles der Nationalen Volksarmee; Forum mit Elke Schilling und Jutta Resch-Treuwerth: Unter vier Augen; Forum mit Vertretern der Gesellschaft für Weltraumforschung und Raumfahrt der DDR: Lösung von Problemen der Weltraumforschung mit Hilfe mathematischer Methoden; Vortrag von Prof. Dr. H. Ahrens, Akademie der Wissenschaften der DDR: Einführung in Probleme der mathematischen Statistik; Vortrag von Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV, Chefredakteur der *alpha*: Logische Spiele (mit Colordias und Ausstellung von 70 Exponaten); Besuch der Hauptstadt der DDR, insbesondere des Freizeitzentrums in Berlin-Lichtenberg; Feierlicher Abschluß der OJM im Zentralrat der FDJ.

Olympiade-Kryptogramm

Die Buchstaben in dem Wort OLYMPIADE sind so durch Ziffern 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$O \cdot YY \cdot YYIA = OOOOOO$$
$$L \cdot YY \cdot YYIA = LLLLLL$$
$$Y \cdot YY \cdot YYIA = YYYYYY$$
$$M \cdot YY \cdot YYIA = MMMMMM$$
$$P \cdot YY \cdot YYIA = PPPPPP$$
$$I \cdot YY \cdot YYIA = IIIIII$$
$$A \cdot YY \cdot YYIA = AAAAAA$$
$$D \cdot YY \cdot YYIA = DDDDDD$$
$$E \cdot YY \cdot YYIA = EEEEEE$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Путешествие по цифрам.

▲1▲ Начиная с цифры 1 в верхнем левом углу проведите ломаную линию в нижний правый угол с цифрой 9. При этом двигаться от цифри к цифре можно только либо вправо, либо вниз; сумма цифр, переуркнутых ломаной, должна равняться 100.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

Найдите маршруты, содержащие наименьшее и наибольшее количество „поворотов“.

Два квадрата.

▲2▲ Квадрат, изображенный на рисунке слева, обладает удивительным свойством: суммы чисел по вертикалям, горизонталям и диагоналям одинаковы и равны 15.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

А сможете ли вы разместить цифры от 1 до 9 так, чтобы все эти суммы были различны?

Pat's Pattern

▲3▲ Our pal Pat likes to sit around, ogling the following pattern of numbers. What is the next row? What is the middle number in the 17th row? What is the sum of the numbers in the 21st row?

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
31 33 35 37 39 41

Sly Old Fox

▲4▲ A sly old fox ate 100 Valentine candies in five days, each day eating six more than the day before.
How many candies did he eat on the fifth day?

▲5▲ Un marchand a mélangé trois qualités de café de la façon suivante: 11 kg à 14 f le kg, 10 kg à 19,05 F le kg et 4 kg à 17 F le kg.
A combien revient le kilogramm de mélange?

▲6▲ Un camion transporte 60 cartons contenant des bouteilles d'huile. La masse du chargement est de 1320 kg. Sachant que chaque bouteille d'huile a une masse de 1,4 kg (verre compris) et que la masse de chaque carton vide est de 1 kg, calcule:
a) le nombre de bouteilles d'huile transportées,
b) le nombre de bouteilles par carton.

H. Begander/C. P. Helmholz/J. Lehmann

Lösungen

Lösungen zu: Chemische Reaktionen mathematisch ausgerechnet

▲1▲ $3CO + 2H_2O \rightleftarrows CH_3OH + 2CO_2$,
$6CO + 3H_2O \rightleftarrows C_2H_5OH + 4CO_2$.

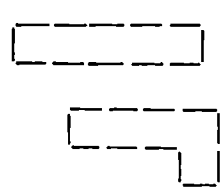
▲2▲ $Te_2 + 4TeOCl_2 \rightleftarrows 2TeO_2 + 4TeCl_2$,
$TeO_2 + TeCl_4 \rightleftarrows 2TeOCl_2$.

Lösungen zu: 15 Jahre mathematische Mannschaftswettbewerbe im Bezirk Cottbus

▲1▲ a) 1,625 Billionen = 1626000000000
b) Wegen 1,625 Bill. M + 0,471 Bill. M = 2,096 Bill. M werden die 2 Bill. M um 96 Mrd. M überschritten.

▲2▲ Da nur das Produkt $9 \cdot 9 = 81$ auf 1 endet, kommt nur die einstellige Zahl 9 in Frage. Die Probe $9 \cdot 12345679 = 111111111$ bestätigt dies.

▲3▲ Folgende Lösungen sind möglich:



▲4▲ a) $L(x) = 2024, 2025, 2026$
$L(y) = 251, 252, 253$
b) Größte Differenz $2026 - 251 = 1775$
Kleinster Quotient $2024 : 253 = 8$

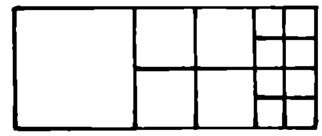
▲5▲ a) 10000 kleine Brote, da $4000000\,g : 400\,g = 10000$
b) 5000 große Brote, da 40 dt = 4 t und große Brote doppelt so schwer als kleine Brote sind.

▲6▲ Das untenstehende Schema erfüllt die geforderten Bedingungen:

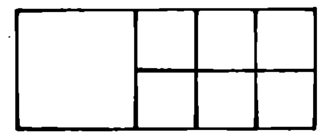
7	10	13
12	15	18
17	20	23
22	25	28

▲7▲ Zeichnungen in verkleinertem Maßstab

a)



b)



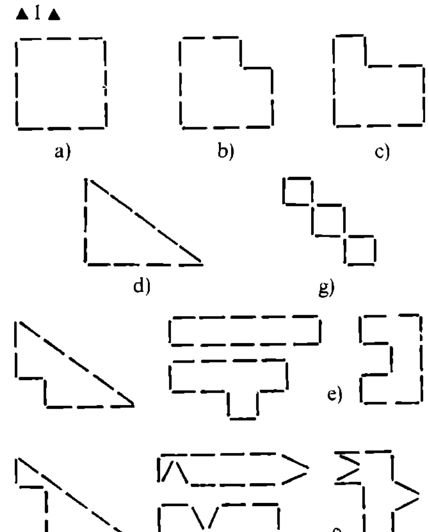
▲8▲ $\begin{array}{r} 10007 \\ -\ 9999 \\ \hline 8 \end{array}$ und $\begin{array}{r} 10007 \\ -\ 9998 \\ \hline 9 \end{array}$

▲9▲ Wegen $9 \cdot 19 = 171$ muß $c = 1$ sein.
Folgende Grundaufgaben enden auf 8: $1 \cdot 8 = 8 \cdot 1 = 8$; $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8$; $2 \cdot 9 = 9 \cdot 2 = 18$; $3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 18$; $4 \cdot 7 = 7 \cdot 4 = 28$; $6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 48$.
Drei Fälle ergeben ein dreistelliges Produkt.
Somit sind Lösungen $9 \cdot 12 = 108$; $6 \cdot 18 = 108$; $8 \cdot 16 = 128$.

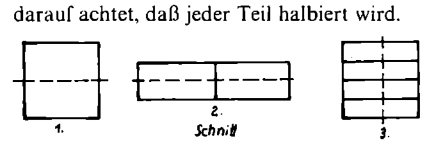
▲10▲ Da man für zwei Stück Obstkuchen 0,80 M (2,70 M − 1,90 M) bezahlen muß, kostet ein Stück Obstkuchen 0,40 M.
Ein Stück Streuselkuchen kostet dann 0,35 M.
Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Preise.

Lösungen zu: Wer knobelt mit?

▲1▲



▲2▲ Es muß folgendes Prinzip erkannt werden: Die Anzahl der Schnitte verringert sich, wenn man bei jeder neuen Anordnung darauf achtet, daß jeder Teil halbiert wird.

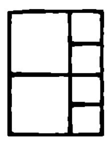


Skizze für die ersten drei Schnitte.

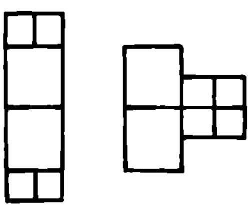
▲3▲ 1. Fall: Die Würfel an den Ecken sind schwarz gefärbt. Dann benötigt man: 14 schwarz gefärbte Würfel, 12 weiß gefärbte Würfel, 1 Würfel im Innern kann beliebig gefärbt sein.
2. Fall: Die Würfel an den Ecken sind weiß gefärbt. Dann benötigt man analog: 14 weiß, 12 schwarz und einen beliebig gefärbten Würfel.

▲4▲ Es ist die Gleichung zu lösen $a+3b+3c+d=24$. Durch systematisches Probieren erhält man als Lösung
$(a, b, c, d)=(1, 2, 4, 5)$.
Durch geeignetes Vertauschen dieser Zahlen erhält man weitere Lösungen, z. B. (1, 4, 2, 5).

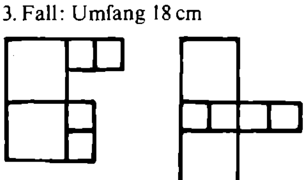
▲5▲ Es sind Figuren mit 14, 16, 18, 20, 22 cm Umfang möglich.
1. Fall: Umfang 14 cm (Bei Ausschluß von Drehung und Spiegelung gibt es genau eine Lösung.)



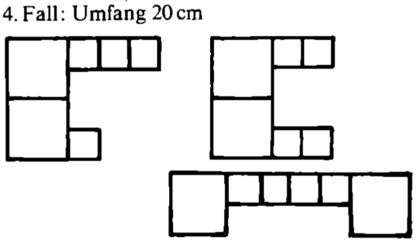
2. Fall: Umfang 16 cm



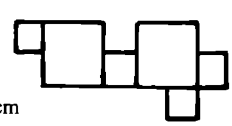
3. Fall: Umfang 18 cm



4. Fall: Umfang 20 cm



5. Fall: Umfang 22 cm



▲6▲ Durch systematisches Probieren erhält man folgendes Ergebnis: Frank würfelt 2, 2, 3, 4, 5, denn $2+2+4=3+5$.

Lösung zu: Die Vielfachen der 9

Jede natürliche Zahl
$n=a_0+10a_1+10^2a_2+\ldots+10^ka_k$
ist modulo 9 zu ihrer Quersumme
$Q(n)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_k$ kongruent.
Dies folgt sofort aus $10\equiv 1 \pmod 9$, $10^2\equiv 1 \pmod 9$, ..., $10^k\equiv 1 \pmod 9$.
Insbesondere ist eine Zahl n durch 9 teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme $Q(n)$ durch 9 teilbar ist.
Eine zweistellige Zahl $10\leqq n=a_0+10a_1\leqq 90$ $(0\leqq a_0\leqq 9,\ 0\leqq a_1\leqq 9)$ ist also dann und nur dann durch 9 teilbar, wenn a_0+a_1 durch 9 teilbar ist. Wegen $1<a_0+a_1<18$ ist dies für $Q(n)=a_0+a_1=9$ (und nur dafür) der Fall.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

In der AG Mathematik

Man kann die Voraussetzung, wie in der Aufgabe, in Tabellenform erfassen:

	Anzahl der Mitglieder	darunter Mädchen	Jungen
laut Liste	x	$0{,}25x$	$0{,}75x$
Teilnehmer am 10. Februar	x	$0{,}25x-1$	$0{,}75x-1$

Laut Voraussetzung ist am 10. Februar der Anteil der Mädchen 20% oder 0,2 von der Gesamtzahl, also
$$0{,}25x-1=0{,}2x.$$
Daraus erhält man, daß $x=20$ ist, d. h. laut Liste waren in der Arbeitsgemeinschaft 20 Schüler, darunter 5 Mädchen, d. h. 20% der Gesamtzahl.

Rechengesetze und Lehrsätze gesucht

Distributivgesetz, Assoziativgesetz; Thales/Archimedes, Euklid/Cavalieri

Hirntest: $n=1$; $x=2$; $\frac{A}{A'}=?$

Man zerlegt die dritte Wurzel und die Quadratwurzel aus der Gleichung
$$n=\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}} \text{ in}$$
$$n=\frac{\sqrt[3]{1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{1+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}}.$$
Dann ist
$$n=\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}},$$
$$n=\frac{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}},$$
$$n=\frac{2-1}{1},\ x=1.$$
Durch Umformen erhält man
$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2^x,$$
$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1,$$
$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^x+\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^x=1,$$
$$\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)^x+\left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)^x=1,$$
$$\left(\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}\right)^x+\left(\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}\right)^x=1.$$
Nun ist $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ bzw.
$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$,
also $\cos^x 15^\circ+\sin^x 15^\circ=1$, und $x=2$.

Gefragt: $\frac{A'}{A}$

$f=\frac{t-1}{t^2-t+1}$; $\frac{A'}{A}=1-3f$

für $t=3$ wird $A'=\frac{1}{7}A$

Holzweg

VII + I = VIII
XI − III = VIII
V + III = VIII

Füllrätsel

1. Numerus; 2. Objekt; 3. Rhombus; 4. Matrix; 5. Algebra; 6. Lineal; 7. Polynom; 8. Aufriß; 9. Riemann, 10. Abakus; 11. Bolzano; 12. Euklid; 13. Leibniz; Normalparabel.

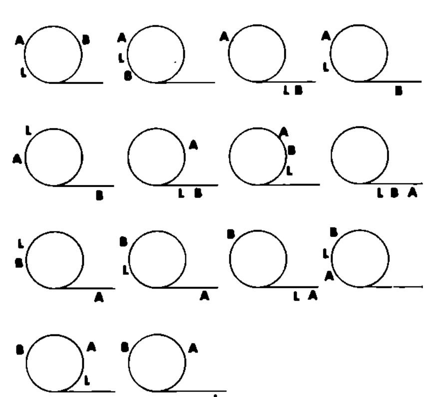
Kombiniere!

Jeweils eine der Lösungsmöglichkeiten:
1 + 2 · 34 − 56 + 78 + 9 = 100
1 · 23 − 4 − 56 : 7 + 89 = 100
1 + 234 − 56 − 7 − 8 · 9 = 100
1 · 234 + 5 − 67 − 8 · 9 = 100
1 + 234 · 5 · 6 : 78 + 9 = 100
1 + 234 · 5 : 6 − 7 − 89 = 100
12 + 3 · 45 + 6 · 7 − 89 = 100
12 + 3 + 4 − 56 : 7 + 89 = 100
123 + 4 − 5 + 67 − 89 = 100
123 + 45 − 67 + 8 − 9 = 100

Zahlenleiste

2	9	16	7	12	6	4	11
8	15	10	3	13	7	3	14

Lokomotion



Lösungen zu: alpha-Sprachecke

Reise durch die Ziffern

▲1▲ Beginnt bei der Ziffer 1 in der linken oberen Ecke, und führt eine Zick-Zack-Linie in die rechte untere Ecke mit der Ziffer 9! Dabei kann man sich von Ziffer zu Ziffer nur entweder nach rechts oder nach unten bewegen. Die Summe der Zahlen, die durch die von der Linie durchschnittenen Ziffern dargestellt werden, soll 100 sein.
Findet die Wege, die die kleinste bzw. die größte Anzahl von Richtungsänderungen erfordern!

Lösung:

1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2	2 2 2 2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3 3 3 3	3 3 3 3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4 4 4 4	4 4 4 4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5 5 5 5	5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6	6 6 6 6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7 7 7	7 7 7 7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8 8 8	8 8 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9 9 9 9	9 9 9 9 9 9 9 9 9

Der Weg auf der linken Zeichnung enthält insgesamt nur 4 Richtungsänderungen; auf dem zweiten Weg wird die Richtung 11mal geändert.

Zwei Quadrate

▲2▲ Das Quadrat im linken Bild besitzt eine erstaunliche Eigenschaft: Die Summe der Zahlen in jeder Senkrechten, jeder Waagerechten und jeder Diagonalen ist gleich 15. Könnt ihr die Zahlen von 1 bis 9 so verteilen, daß alle diese Summen voneinander verschieden sind?

Lösung:

1	5	3
2	7	6
4	8	9

Es gibt auch andere Lösungen.

Pat's Muster

▲3▲ Unser Freund Pat liebt es, sich mit dem folgenden Zahlenmuster zu beschäftigen. Wie heißt die nächste Reihe? Wie lautet die mittlere Zahl der 17. Reihe?
Wie groß ist die Summe der 21. Reihe?
Lösung: Da es sich um die Folge der ungeraden Zahlen handelt, ergibt sich für die folgende Reihe 43; 45; 47; 49; 51; 53; 55. Die Anzahl m der Glieder jeder Reihe stimmt mit der Nummer der Reihe überein. Demzufolge hat die 17. Reihe auch 17 Glieder, und das letzte Glied dieser Reihe ist das Glied mit der Nummer $n'=\frac{m(m+1)}{2}$ als Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n'. Das mittlere Glied der 17. Reihe hat dann die Nummer $n=\frac{m(m+1)}{2}-8$ mit $m=17$, also $n=\frac{17\cdot 18}{2}-8=145$. Für das n-te Glied der Folge der ungeraden Zahlen gilt nun $a_n=a+2(n-1)=1+2\cdot 144=289$. Das mittlere Glied der 17. Reihe heißt 289.
Für die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis n gilt $s_n=n^2$.
Dann gilt für die
1. Reihe $s_1=1^2$,
2. Reihe $s_2=3^2-2^2$,
3. Reihe $s_3=6^2-3^2$,
4. Reihe $s_4=10^2-6^2$,

. . .

.

n-te Reihe $s_n=\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2-\left[\frac{n}{2}(n-1)\right]^2$.
Für $n=21$ ergibt sich dann die Summe der 21ten Reihe $s_n=231^2-230^2=9261$.

Der schlaue Fuchs

▲4▲ Ein schlauer Fuchs aß 100 Zuckerplätzchen in 5 Tagen, jeden Tag 6 mehr als am vorhergehenden. Wieviel Zuckerplätzchen verschlang er am 5. Tag?
Lösung: Wenn er am fünften Tag x Zuckerplätzchen aß, waren es am vierten $x-6$, am dritten $x-12$, am zweiten $x-18$ und am ersten $x-24$. Dann gilt die Gleichung

$$x+x-6+x-12+x-18+x-24=100,$$
$$x=32.$$

Der Fuchs verschlang am 5. Tag 32 Zuckerplätzchen.

▲5▲ Ein Händler hat drei Sorten Kaffee auf folgende Weise gemischt: 11 kg zu 14 F das kg, 10 kg zu 19,05 F das kg und 4 kg zu 17 F das kg. Wieviel kostet ein Kilogramm der Mischung?
Lösung: Der Gesamtpreis der Mischung beträgt
$11\cdot 14\,\mathrm{F}+10\cdot 19{,}05\,\mathrm{F}+4\cdot 17\,\mathrm{F}=412{,}5\,\mathrm{F}$.
Dann kostet 1 kg dieser Mischung
$412{,}5\,\mathrm{F}:(11+10+4)=412{,}5\,\mathrm{F}:25=16{,}5\,\mathrm{F}$.

▲6▲ Ein Lastwagen transportiert 60 Kartons mit Ölflaschen. Die Masse der Ladung beträgt 1320 kg. Jede Ölflasche hat eine Masse von 1,4 kg (einschließlich Glas), und die Masse jedes leeren Kartons beträgt 1 kg. Berechne
a) die Anzahl der transportierten Ölflaschen,
b) die Anzahl der Flaschen in jedem Karton!
Lösung: a) Die Anzahl der Ölflaschen sei x, dann gilt die Gleichung

$$1320=60+1{,}4x,$$
$$x=900.$$

Die Anzahl der transportierten Ölflaschen beträgt 900.
b) $900:60=15$.
In jedem Karton befinden sich 15 Flaschen.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Müller-Pfeiffer, Heft 4/82

Auf $[A, B]$ werden zum Zeitpunkt $t=0$ jeweils im Abstand von 1 cm die Punkte $P_0=A, P_1, \ldots, P_{100}=B$ markiert. Wenn das Band gedehnt wird, entfernt sich der Punkt P_{n+1} vom Punkt P_n, $n=0, 1, \ldots, 99$, mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm\,sec^{-1}}$. (Das stellt auch der Käfer fest, wenn er sich im Punkt P_n aufhält.) Der Käfer, der sich zum Zeitpunkt $t=0$ bei A befindet, wird also den Punkt P_1 erreichen. (Die Geschwindigkeit des Punktes P_1 wird aus der Sicht des Käfers bei der Annäherung an diesen Punkt immer kleiner und wird schließlich Null in dem Moment, in dem der Käfer den Punkt P_1 erreicht.) Aus dem gleichen Grund wird auch der Punkt P_2 erreicht. Wenn der Punkt P_n, $1\leqq n<100$, erreicht ist, wird der Punkt P_{n+1} für große n schon weit entfernt sein, aber auch P_{n+1} wird erreicht werden. Damit ist nachgewiesen, daß auch der Punkt $P_{100}=B$ nach einer endlichen Zeit erreicht wird.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Wanderung des Käfers von A nach B sehr lange dauert. Der Punkt P_n sei nach der Zeit von t_n sec erreicht. Zu diesem Zeitpunkt ist P_{n+1} um $\left(1+\frac{t_n}{2}\right)$ cm von P_n entfernt. Die Laufzeit des Käfers von P_n nach P_{n+1} ist daher größer als $\left(1+\frac{t_n}{2}\right)$ sec. Also gilt

$$t_{n+1}>t_n+\left(1+\frac{t_n}{2}\right)=1+\frac{3}{2}t_n.$$

Diese Abschätzung wird im folgenden wiederholt benutzt.

$$t_{100}>1+\frac{3}{2}t_{99}>1+\frac{3}{2}\left(1+\frac{3}{2}\right)t_{98}$$
$$=1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2 t_{98}>\ldots>1+\frac{3}{100}\ldots+\left(\frac{3}{2}\right)^{99}t_1$$
$$t_1>1+\frac{3}{2}+\ldots+\left(\frac{3}{2}\right)^{99}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1}{\frac{3}{2}-1}=$$
$$=2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{100}-1\right]>8\cdot 10^{17}\ [\mathrm{sec}].$$

Wenn man t_{100} in Jahren ausdrückt, so ergibt eine einfache Umrechnung
$t_{100}>2\cdot 10^{10}$ [Jahre].
Natürlich kann man t_{100} auch genau angeben. Man muß dazu eine Differentialgleichung lösen und erhält dann
$t_{100}=2(e^{50}-1)$ sec, $e=2,718\ldots$.
Die obige Abschätzung, die man auch in der Form
$t_{100}>2(2{,}25^{50}-1)$
schreiben kann, ist demnach gar nicht so schlecht. Es gilt also sogar
$t_{100}>3\cdot 10^{14}$ [Jahre].
Um eine gewisse Vorstellung von der Zeitdauer t_{100} zu bekommen, weisen wir darauf hin, daß seit dem Urknall (Entstehung unserer Welt) etwa „nur" $11\cdot 10^9$ Jahre verstrichen sind.

Lösungen zu: Sieben Geometrieaufgaben auf einen Streich

Wir betrachten Flächen

▲1▲ (1) 35 cm²; (2) 12 mm; (3) 25 m; (4) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm und 49 cm, 7 cm und 7 cm; (5) es gibt verschiedene Möglichkeiten: 1 cm und 81 cm, 3 cm und 27 cm, 9 cm und 9 cm.

▲2▲ a) Es gibt vier verschiedene Rechtecke.
b) Es gibt genau ein solches Rechteck.

▲3▲ a) Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten; die Seitenlängen können 1 cm und 7 cm, 2 cm und 6 cm, 3 cm und 5 cm, 4 cm und 4 cm sein.
b) Die Anzahl der Quadrate, die das jeweilige Rechteck ausfüllen, ist dann 7 bzw. 12 bzw. 15 bzw. 16.
c) Der Flächeninhalt ist am größten, wenn das Rechteck ein Quadrat ist.

▲4▲ 20 Glasscheiben.

▲5▲ Die Seitenlängen des Quadrats sind a) 8 cm, b) 9 cm.

▲6▲ Die Fläche des Fußballplatzes hat eine Größe von mindestens $4050\,m^2$ und höchstens $10800\,m^2$.

▲7▲ a) Die Länge des einen Rechtecks ist dreimal so groß wie die des anderen.
b) Der Flächeninhalt des einen Rechtecks ist neunmal so groß wie der des anderen.

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb, Heft 6/81 (Statistik)

▲1▲ $26332 \cdot 4{,}3\,g = 113227{,}6\,g \approx 113000\,g = 113\,kg$
Es wurden 113 kg Papier verbraucht.

▲2▲ $26332 \cdot 4{,}4\,g = 115860{,}8\,g \approx 116000\,g = 116\,kg$
Für die Antwortkarten wurden 116 kg Papier verwendet.

▲3▲ $113\,kg + 116\,kg = 229\,kg$
Insgesamt wurden 229 kg Papier verbraucht.

▲4▲ $26332 \cdot 0{,}09\,M = 2369{,}88\,M$
Die Post- und Schreibgebühren betrugen insgesamt 2369,88 M.

▲5▲ $26332 : 90 = 292{,}57 \approx 290$
Zum Schreiben der Antwortkarten waren rd. 290 Stunden notwendig.

▲6▲ a) $26332 \cdot 21{,}0\,cm = 552972\,cm \approx$
$\approx 553000\,cm = 5530\,m = 5{,}53\,km$
$26332 \cdot 29{,}8\,cm = 784693{,}6\,cm \approx 785000\,cm = 7850\,m = 7{,}85\,km$
Das Band wäre 5,53 km bzw. 7,85 km lang.
b) $26332 \cdot 29{,}8\,cm \cdot 21{,}0\,cm = 16478565\,cm^2 \approx 16500000\,cm^2 = 1650\,m^2 = 0{,}165\,ha$
Die Blätter würden eine Fläche von $1650\,m^2$ einnehmen.

▲7▲ $26332 \cdot 0{,}36\,mm = 9479{,}52\,mm \approx 9500\,mm = 9{,}5\,m$.
Der „Kartenturm" wäre 9,5 m hoch.

▲8▲ a) Klasse 5
$3151 : 7215 = x : 100$
$x \approx 43{,}7$
$100\% - 43{,}7\% = 56{,}3\%$
Es sind 43,7% Jungen und 56,3% Mädchen.
Klasse 6
Es sind 43,3% Jungen und 56,7% Mädchen.
Klasse 7
Es sind 45,8% Jungen und 54,2% Mädchen.
Klasse 8
Es sind 52,9% Jungen und 47,1% Mädchen.
Klasse 9
Es sind 55,4% Jungen und 44,6% Mädchen.
Klasse 10/12
Es sind 61,4% Jungen und 38,6% Mädchen.
b) Gesamtzahl der Jungen 12745, Gesamtzahl der Mädchen 13482.
$12745 : 26227 = x : 100$
$x \approx 48{,}6.$
$100\% - 48{,}6\% = 51{,}4\%$
Der Anteil der Jungen betrug 48,6% und der der Mädchen 51,4%.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/82

Ma5 ▪2179 Das rechteckige Stück Papier hat einen Flächeninhalt von $90 \cdot 45\,cm^2 = 4050\,cm^2$. Aus $4050\,cm^2 - 3650\,cm^2 = 400\,cm^2$ und $400\,cm^2 : 4 = 100\,cm^2$ folgt, daß jedes der vier ausgeschnittenen Quadrate einen Flächeninhalt von $100\,cm^2$ hat und somit eine Seitenlänge von 10 cm besitzt. Der oben offene Karton hat deshalb ein Volumen von $(90-20) \cdot (45-20) \cdot 10\,cm^3 = 17500\,cm^3$.

Ma5 ▪2180 Damit der erste Summand möglichst groß wird, muß er 9 * * lauten. Da die für die Sternchen einzusetzenden Ziffern paarweise voneinander verschieden sein sollen, kann der dritte Summand nur 881 lauten. Damit der erste Summand möglichst groß wird, muß er 9 *7 lauten. Wegen 7 + * + 1 = 11 lautet der zweite Summand 193. Deshalb lautet der erste Summand 907. Die richtig gelöste Additionsaufgabe lautet deshalb

$$\begin{array}{r} 907 \\ +193 \\ +881 \\ \hline 1981. \end{array}$$

Ma5 ▪2181 Angenommen, in dem Verkaufsregal liegen a, b, c, d Stück Seife der Sorte A, B, C, D; dann gilt $d = 15$ und $b + c = 2 \cdot 15 = 30 = 20 + 10$, also $c = 20$ und $b = 10$, weil es von der Sorte B nur halb so viel sind wie von der Sorte C. Aus $b = 10$ folgt $a = 10 : 2 = 5$. Daraus folgt weiter $a + b + c + d = 5 + 10 + 20 + 15 = 50$. Im Verkaufsregal liegen 50 Stück Seife.

Ma5 ▪2182 Damit beide Zuckerdosen gleich schwer sind, genügt es, in die kleinere 200 g Zucker, in die größere keinen Zucker zu füllen. Somit ist die größere der beiden leeren Dosen um 200 g schwerer als die kleinere. Da die größere Dose doppelt so schwer ist wie die kleinere, hat die kleinere Dose ein Gewicht von 200 g, die größere von 400 g.

Ma5 ▪2183 Wegen $7+7+7=21$ und $21:3=7$ erhält jeder der drei Brüder 7 Fässer. Wegen $\left(7+\frac{7}{2}\right):3=\frac{21}{2}:3=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$ erhält jeder eine Weinmenge, die $3\frac{1}{2}$ Fässer füllt. Nun ist folgende Aufteilung möglich.

	Anzahl der vollen Fässer	halbvollen Fässer	leeren Fässer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

Ma5 ▪2184 Wir rechnen $1980 - 27 = 1953$. Angenommen, im Jahre 1953 war die Mutter von Jens n Jahre alt; dann wurde sie im Jahre 1980, also nach 27 Jahren, $10 \cdot n$ Jahre alt. Nun gilt $n + 27 = 10n$, $9n = 27$, also $n = 3$. Aus $1953 - 3 = 1950$ folgt, daß Jens' Mutter im Jahre 1950 geboren wurde und im Jahre 1981 somit ein Lebensalter von 31 Jahren erreichte.

Ma6 ▪2185 In $1\frac{1}{2}$ Stunden hat der PKW 90 km, in $3\frac{1}{2}$ Stunden hat der Radfahrer 42 km zurückgelegt. Zu Beginn der Rückfahrt des PKW ist er somit 48 km vom Radfahrer entfernt. Aus $s = v \cdot t$ und $s_1 + s_2 = s$ folgt nun
$12t + 60t = 48$, $72t = 48$, also $t = \frac{2}{3}$.
Der PKW trifft 40 min nach Abfahrt von der Gaststätte auf den Radfahrer.

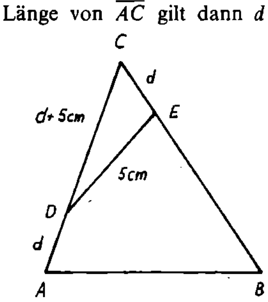
Ma6 ▪2186 Angenommen, es sind x Schafe, also $(x-2)$ Ziegen und $(x+11)$ Pferde; das sind zusammen $(3x+9)$ Tiere. Nun gilt $30 < 3x + 9 < 36$, $21 < 3x < 27$, $7 < x < 9$, also $x = 8$.
Auf dieser Weide grasen 8 Schafe, 6 Ziegen und 19 Pferde.

Ma6 ▪2187 Die beiden natürlichen Zahlen seien $2n$ und n mit $n > 0$. Dann gilt
$(2n+n)(2n-n) \cdot 2n \cdot n \cdot (2n:n) = 192,$
$3n \cdot n \cdot 2n^2 \cdot 2 = 192,$
$12n^4 = 192,$
$n^4 = 16$, also $n = 2$.
Es handelt sich um die Zahlen 4 und 2.

Ma6 ▪2188 Es sei n die von Fred gedachte natürliche Zahl; dann gilt $x = [(n \cdot 5 + 2) \cdot 4 + 3] \cdot 5 + 7$ für das von Fred errechnete Ergebnis. Daraus folgt weiter
$x = (5n+2) \cdot 20 + 15 + 7,$
$x = 100n + 40 + 22,$
$x = 100n + 62,$
$n = (x - 62) : 100.$
Vom Ergebnis x subtrahiert Fritz 62 und dividiert die Differenz durch 100. Beispiel für $n = 7$:
$x = [(7 \cdot 5 + 2) \cdot 4 + 3] \cdot 5 + 7$, $x = 762$, also $n = (762 - 62) : 100$, $n = 7$.

Ma6 ▪2189 Es sei z eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften und q ihre Quersumme; dann gilt $z : q = q + 1$, also $z = q \cdot (q+1)$, wobei q eine Primzahl ist. Ferner gilt $10 \leq q \cdot (q+1) \leq 99$. Das Produkt $q \cdot (q+1)$ könnte somit $3 \cdot 4 = 12$ oder $5 \cdot 6 = 30$ oder $7 \cdot 8 = 56$ lauten.
30 hat die Quersumme 3 und $30 : 3 = 10$ und $10 \neq 4$; 56 hat die Quersumme 11 und $56 : 11$ ist nicht lösbar im Bereich der natürlichen Zahlen. Somit entfallen diese beiden Möglichkeiten. Es existiert genau eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften; es ist die Zahl 12, und es gilt $12 : 3 = 4$.

Ma7 ▪2190 Es habe $\overline{AD}$ die Länge d; für die Länge von $\overline{AC}$ gilt dann $d + (d + 5\,cm)$



$=2d+5\,\text{cm}$. Ferner gilt für die Länge des Streckenzuges $\overline{ADEC}: d+5\,\text{cm}+d=2d+5\,\text{cm}$, was nicht möglich ist. Nach der Dreiecksungleichung gilt $\overline{DE}+\overline{CE}>\overline{CD}$ bzw. $5\,\text{cm}+d>(d+5\,\text{cm})$, was zum Widerspruch führt. Aus den angegebenen Längen läßt sich kein Dreieck DEC konstruieren.
Der Punkt E wäre ein innerer Punkt von $\overline{CD}$.

Ma7 ▪ 2191 a) Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Wegen $2+3+4=9$ und wegen $a \neq 0$ kann $a+b+c$ gleich 9, 18 oder 27 sein. Wegen $a+b=c$, also $a+b+c=2c$, gilt entweder $2c=9$, was nicht möglich ist, oder $2c=18$, also $c=9$, oder $2c=27$, was ebenfalls nicht möglich ist. Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus ihren letzten zwei Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist. Die Zahl 94 ist nicht durch 4 teilbar; folglich ist die Zahl z_1 auch nicht durch 4 teilbar.
b) Wegen $0 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$, $0 \leqq c \leqq 9$ kann $a+b+c$ gleich 0, 9, 18 oder 27 sein. Wegen $a+b=c$, also $a+b+c=2c$, gilt entweder $2c=0$ oder $2c=18$, also entweder $c=0$ oder $c=9$. Nach Lösung a) entfällt $c=9$. Für $c=0$ gilt $a=b=0$. Es existiert genau eine solche Zahl z_2, für die diese Behauptung nicht gilt; sie lautet 203040.

Ma7 ▪ 2192 Angenommen, das Enkelkind sei x Jahre, der Großvater y Jahre alt; dann gilt

$\left(x-\frac{5}{5}\right)\cdot 5=y$ und $(y+7^2-2\cdot 7):7=x$.

Daraus erhalten wir durch Umformen

$y=5(x-1)$ und $7x=y+35$.

Durch Einsetzen erhalten wir

$$7x=5(x-1)+35,$$
$$7x=5x-5+35,$$
$$2x=30,$$
$$x=15, \text{ also } y=5\cdot(15-1)=70.$$

Das Enkelkind ist 15 Jahre, der Großvater 70 Jahre alt.

Ma7 ▪ 2193 a) $3\cdot 5-2\cdot 7=1$
b) $7-5=2$
c) $2\cdot 5-7=3$
d) $2\cdot 7-2\cdot 5=4$
Der Betrag von 99 Uto läßt sich wie folgt bezahlen:
$19\cdot 5+4=19\cdot 5+(2\cdot 7-2\cdot 5)=99$.
Bei Division durch 5 läßt eine natürliche Zahl entweder den Rest 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4. Deshalb lassen sich alle zu untersuchenden Zahlen in der Form $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$ darstellen. Die Reste 1, 2, 3, 4 lassen sich entsprechend den Lösungen a) bis d) darstellen. Folglich läßt sich jede beliebige natürliche Zahl auf diese Weise darstellen.
Beispiel:
217 Uto $=(5\cdot 43+2)$ Uto $=(5\cdot 43+7-5)$ Uto.

Ma8 ▪ 2194 Wegen $30^3=27000>999$ gilt $b=1$ oder $b=2$. Wegen $10^1=10<100$ und $19^1=19<100$ entfällt $b=1$. Für $b=2$ erhalten wir:

$$100a+20+c=(20+c)^2,$$
$$100a=(20+c)^2-(20+c),$$
$$100a=(20+c)[(20+c)-1],$$
$$100a=(19+c)(20+c).$$

Wegen $1 \leqq a \leqq 9$ muß das Produkt $(19+c)(20+c)$ ein Vielfaches von 100 sein. Das trifft nur zu für $c=5$ und somit für $a=6$, denn es gilt $600=24\cdot 25$.
$\overline{abc}=(\overline{bc})^b$ wird für $a=6$, $b=2$ und $c=5$ in die wahre Aussage $625=25^2$ überführt.

Ma8 ▪ 2195 Es seien a und b zwei natürliche Zahlen mit $a>b$. Aus $a>b$ folgt

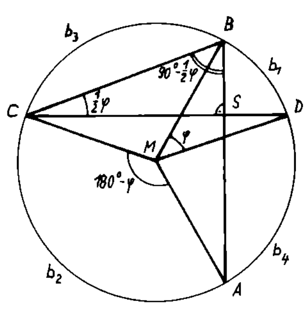
$$a-b>0,$$
$$(a-b)^2>0,$$
$$a^2-2ab+b^2>0,$$
$$a^2+b^2>2ab.$$

Ma8 ▪ 2196 Die Quadratseite $\overline{AB}$ habe die Länge a. Nach Voraussetzung hat $\overline{EF}$ die Länge $\frac{1}{3}a$; $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$ haben die Länge $\frac{2}{3}a$.
Die Dreiecke ABF und CDE sind kongruent ($\overline{AB}\cong\overline{CD}$; $\sphericalangle ECD \cong \sphericalangle ABF$; $\overline{BF}\cong\overline{CE}$). Daraus folgt $\overline{AF}\cong\overline{DE}$.
Wenn das Dreieck EFG gleichseitig wäre, dann müßten die Seiten $\overline{FG}$ und $\overline{EG}$ die Länge $\frac{1}{3}a$ haben.
Wegen $\overline{EF}:\overline{AD}=\overline{EG}:\overline{DG}$ müßte $\overline{DE}$ die Länge $\frac{4}{3}a$ haben. Nun gilt aber im rechtwinkligen Dreieck ECD nach dem Satz des Pythagoras für die Länge x der Strecke $\overline{DE}$

$$x^2=a^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{13}{9}a^2,$$

d. h. $x\approx 1{,}2a$.
Das steht im Widerspruch zu der Annahme, daß $\overline{DE}$ die Länge $\frac{4}{3}a$ hat; folglich ist das Dreieck $\triangle EFG$ nicht gleichseitig.

Ma8 ▪ 2197 Aus $b_1+b_2=b_3+b_4$ folgt $b_1+b_2=\frac{1}{2}\cdot u$. Zu dem halben Umfang eines Kreises gehört ein Zentriwinkel von der Größe 180°. Der Zentriwinkel $\sphericalangle BMD$ habe die Größe ϕ; dann hat der Zentriwinkel $\sphericalangle AMC$ die Größe $180°-\phi$. Somit hat der



Peripheriewinkel $\sphericalangle ABC$ die Größe $90°-\frac{1}{2}\phi$ und der Peripheriewinkel $\sphericalangle BCD$ die Größe $\frac{1}{2}\phi$. Im Dreieck BCS hat somit der Winkel $\sphericalangle BSC$ die Größe 90°, das heißt, die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ stehen aufeinander senkrecht.

Ma9 ▪ 2198

Anzahl der Wanderzirkusse	n	15
Standortzirkusse	$4n$	60
Tierzirkusse	$n-2$	13
Bühnenzirkusgruppen	$4n-10$	50
Insgesamt	$10n-12$	138

Nun gilt $130<10n-12<140$,

$$142<10n<152,$$
$$14{,}2<n<15{,}2,$$
$$n=15.$$

Ein „eigener Algorithmus“ zum Ordnen des Zauberwürfels

Im Rahmen des WPA-Unterrichtes an der Sektion Mathematik der Greifswalder Universität fertigten wir eine Arbeit über den Zauberwürfel an. Neben der Erläuterung verschiedener Algorithmen aus Zeitschriften und Büchern des In- und Auslandes und der mathematischen Betrachtung des Würfels erfolgte auch die Beschreibung eines von uns selbst entwickelten Algorithmus, den wir teilweise vorstellen wollen. Es wird nur der Aufbau der mittleren und unteren Ebene behandelt, da der Aufbau der oberen Ebene schon in der *alpha* 1/82 beschrieben wurde.
Bezeichnung der Ebenen:
Beim Blick auf den Würfel werden die einzelnen Ebenen wie folgt bezeichnet:

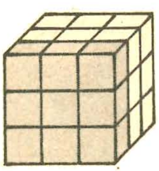


Bild 1
vordere Ebene $\overline{V}$

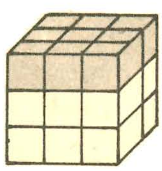


Bild 2
obere Ebene $\overline{O}$

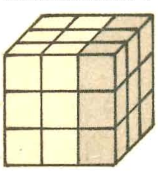


Bild 3
rechte Ebene $\overline{R}$

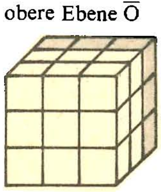


Bild 4
hintere Ebene $\overline{H}$

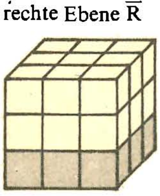


Bild 5
untere Ebene $\overline{U}$

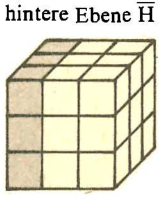


Bild 6
linke Ebene $\overline{L}$

Die Grundwürfeloperationen und ihre Bezeichnung

Voraussetzung: Der Uhrzeigersinn ist dadurch eindeutig bestimmt, daß man immer auf die zu drehende Ebene direkt sieht. Die Drehung von $\overline{V}$ um 90° im Uhrzeigersinn wird mit V bezeichnet. Die Drehung von $\overline{V}$ um 90° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn wird mit V′ bezeichnet. Die Wirkung von V wird durch V′ wieder aufgehoben. Dies gilt analog auch für die anderen Ebenen.

Unter richtiger Position eines Eck- oder Kantenwürfels versteht man, daß er sich an der richtigen Stelle ohne Beachtung der einzelnen Farbflächen befindet, d. h., er kann noch verdreht sein. Unter richtiger Orientierung versteht man, daß der Eck- oder Kantenwürfel in seiner richtigen Position auch richtig gedreht ist.

Algorithmus

Bei diesem Algorithmus wird zuerst die obere Ebene vollständig aufgebaut. Danach bringt man die anderen vier Eckwürfel ohne Beachtung ihrer Orientierung in die richtige Reihenfolge. Anschließend werden die Kantenwürfel der mittleren Ebene sowie die der unteren so miteinander vertauscht, daß sie an ihre richtigen Positionen gelangen und die richtigen Orientierungen besitzen. Zum Schluß erhalten die Eckwürfel der unteren Ebene ihre richtigen Positionen und Orientierungen.

Eckwürfel

Nachdem die obere Ebene geordnet worden ist, werden die vier Eckwürfel der unteren Ebene zuerst in ihre richtige Reihenfolge ohne Beachtung der Orientierung gebracht. Unter der richtigen Reihenfolge versteht man, daß die Eckwürfel der unteren Ebene durch eine Drehung dieser Ebene an ihre richtigen Positionen gelangen.
Meistens müssen dabei mindestens zwei Eckwürfel gegeneinander ausgetauscht werden. Dazu dreht man den ganzen Würfel so, daß sich die auszutauschenden Eckwürfel vorn unten befinden, und führt die Zugkombination (I) aus.

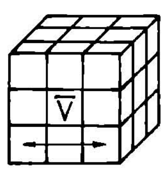


Bild 7
(I) V′RVR′VUV UU

Kantenwürfel

Die Zugkombination (II) bewirkt, daß die Kantenwürfel (vorn-links) und (unten-links) gegeneinander ausgetauscht werden, wobei die linken Flächen der beiden Kantenwürfel links bleiben. Weiterhin rücken die Eckwürfel der unteren Ebene um einen Platz entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn – von unten gesehen – weiter und ändern ihre Orientierung.
Die Zugkombination (III) ist der vorigen ähnlich. Bei dieser werden die Kantenwürfel (vorn-rechts) und (unten-rechts) gegeneinander ausgetauscht, wobei die rechten Flächen der beiden Kantenwürfel rechts bleiben.

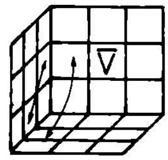


Bild 8
(II) LUL′U′LUUL′
U′LUUL′U′LUL′

Weiterhin rücken die Eckwürfel der unteren Ebene um einen Platz im Uhrzeigersinn – von unten gesehen – weiter und ändern ihre Orientierung.

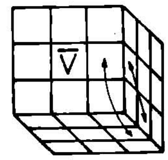


Bild 9
(III) R′U′RUR′UURUR′
UURUR′U′R

Mit Hilfe dieser beiden Zugkombinationen ist es nun möglich, die Kantenwürfel der mittleren und unteren Ebene an ihre richtigen Positionen mit richtigen Orientierungen zu bringen. Zuerst werden drei Kantenwürfel der mittleren Ebene an ihre richtigen Positionen mit richtigen Orientierungen gebracht. Sollte sich ein Kantenwürfel der mittleren Ebene in dieser mit falscher Orientierung oder an falscher Position befinden, bringt man ihn zuerst mit einer der beiden Zugkombinationen in die untere Ebene und danach an seine richtige Position mit richtiger Orientierung.
Die Stelle des vierten Kantenwürfels benötigt man zum „Rangieren“ der vier Kantenwürfel der unteren Ebene, damit diese durch das „Rangieren“ zwischen der mittleren und unteren Ebene an ihre richtigen Positionen mit richtiger Orientierung gelangen. Bei diesem Vorgang braucht man die Eckwürfel der unteren Ebene nicht zu beachten, da sie untereinander nicht die Reihenfolge ändern.

Eckwürfel

Es ist möglich, daß sich jetzt die Eckwürfel der unteren Ebene noch nicht an ihren richtigen Positionen befinden, sondern jeweils zwei Plätze zu weit sind. Sollte dies der Fall sein, wendet man zweimal die Zugkombination (II) oder zweimal die Zugkombination (III) an. Dadurch rücken die Eckwürfel der unteren Ebene um jeweils zwei Plätze – entgegengesetzt dem bzw. im Uhrzeigersinn – weiter und gelangen so an ihre richtigen Positionen, während die Kantenwürfel ihre Positionen behalten.
Die Eckwürfel können jetzt noch eine falsche Orientierung besitzen, entweder vier, drei oder zwei Eckwürfel. Diese kann man mit der Zugkombination (IV) richtigstellen. Dabei dreht man den Würfel so, daß zwei der zu drehenden Eckwürfel vorn unten sind. Weiterhin muß man beachten, daß bei Anwendung von (IV) die Eckwürfel wie folgt (siehe Bild) gedreht werden:

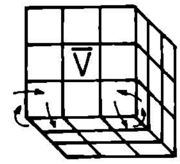


Bild 10
(IV)
VUUV′U′VU′V′
UUV′UUVUV′UVUU

Diese Zugkombination muß man meistens öfter anwenden. *A. Schulz*

Mit Zirkel und Zeichendreieck