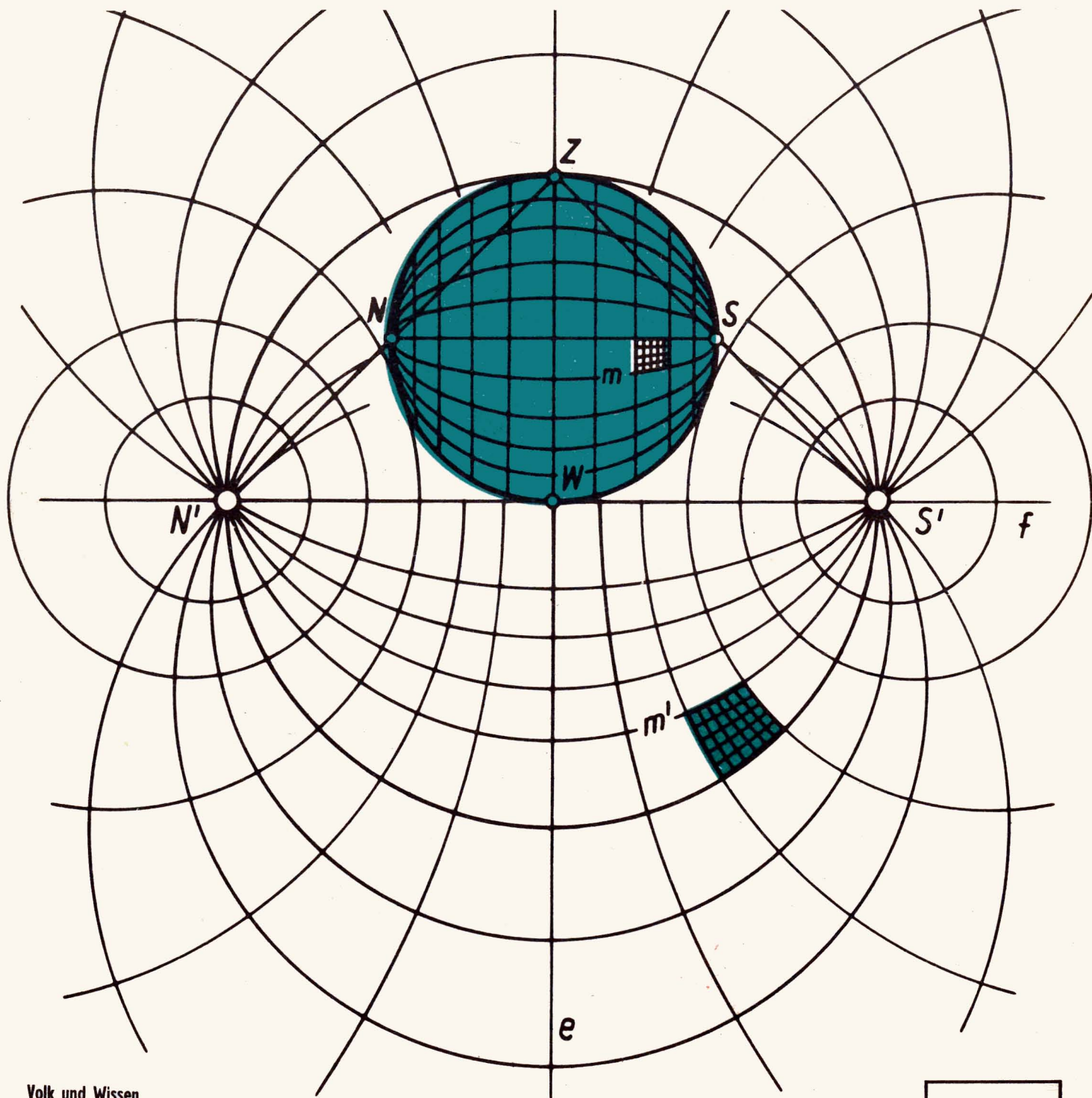




Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);  
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent  
Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil.  
E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann  
(Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof.  
Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger  
H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger,  
Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan);  
Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer  
des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent  
Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger  
Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Ober-  
lehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr.  
habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schrö-  
der (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze  
(Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze  
(Leipzig); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger  
(Döbeln); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin  
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.  
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des  
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-  
rates der Deutschen Demokratischen Repu-  
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626 Erschei-  
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,- M.  
Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonne-  
ment zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für  
die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-  
handel und der Deutschen Post entgegen-  
genommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik  
und Westberlin erfolgt über den Buchhandel;  
für das sozialistische Ausland über das  
jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für  
alle übrigen Länder über: Buchexport Volks-  
eigener Außenhandelsbetrieb der DDR  
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Zentralbild (Steinberg), Berlin (S. 97);  
Jürgen Ludwig, Arnstadt (6 Fotos); J. Leh-  
mann, Leipzig (10 Fotos); DLZ-Graphik  
(S. 120); Vignetten: W. Tilman, Moskau  
(S. 114), K. Moschkin, Moskau (S. 110);  
Ornament aus: Matematički List, Beograd  
(S. 115); Utschitel'skaja gaseta, Moskau  
(S. 115)

Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei

der Deutschen Demokratischen Republik,  
(Rollenoffsetdruck)

Redaktionsschluß: 9. August 1974

---

**alpha**

## Mathematische Schülerzeitschrift

---

### Inhalt

- 97 XVI. Internationale Mathematikolympiade  
1974 in Erfurt/Berlin [5]\*  
StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
- 100 Mathematikolympiaden in der DRV [7]  
Hoang Chung, Chefredakteur der vietnamesischen Schülerzeitschrift *Mathematik  
und Jugend*, Hanoi
- 100 Aus der Arbeit eines Diplommathematikers [7]  
Dipl.-Math. M. Peregudow, Rechenzentrum des Mosprojekt, Moskau
- 102 Wer löst mit? – *alpha*-Wettbewerb [5]  
Autorenkollektiv
- 104 Eine Aufgabe von  
Prof. Dr. rer. nat. habil. Helmut Bausch [10]  
Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg
- 105 Kerstin Bachmann berichtet aus dem Leben einer AG [9]  
Kerstin Bachmann, EOS *August-Hermann Francke*, Halle
- 106 Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen [6]  
Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS, Döbeln
- 108 Über Ungleichungen [10]  
Dipl.-Math. H.-D. Gronau, Sektion Mathematik an der Universität Rostock
- 110 Die stereographische Projektion, Teil 2 [9]  
Dr. E. Schröder, Dresden
- 112 Vorfahrt beachten! [5]  
W. Träger, Döbeln
- 113 Eine Aufgabe von Dozent Dr. E. Schröder [10]  
Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 114 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]  
StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 116 Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade (XIII. OJM) [10]  
Autorenkollektiv des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker  
der DDR
- 120 25 Jahre RGW [7]  
StR Th. Scholl, Ministerium für Volksbildung, Berlin
- III./IV. Umschlagseite Leseprobe aus:  
I. S. Sominski – Die Methode der vollständigen Induktion [8]  
(VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften)

\* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# XVI. Internationale Mathematikolympiade 1974 in Erfurt/Berlin



## Aufgaben 1. Tag

1. Drei Spieler  $A, B, C$  spielen folgendes Spiel: auf genau drei Spielkarten ist je eine ganze Zahl geschrieben. Für diese drei Zahlen  $p, q, r$  gilt  $0 < p < q < r$ . Diese drei Karten werden gemischt und so verteilt, daß jeder der drei Spieler eine Karte erhält. Jeder bekommt dann genau so viele Kugeln zugeteilt, wie die Zahl auf der erhaltenen Karte angibt. Danach werden die Karten wieder eingesammelt; die zugeordneten Kugeln bleiben bei den Spielern. Dieser Spielverlauf (Mischen und Verteilen der Karten, Zuteilen von Kugeln, Einsammeln der Karten) wird mindestens zweimal durchgeführt. Nach dem letzten Mal hat insgesamt

| $A$ | $B$ | $C$ |
|-----|-----|-----|
| 20  | 10  | 9   |

Kugeln.  $B$  weiß noch, daß er beim letzten Mal  $r$  Kugeln bekommen hat. Wer hatte beim ersten Mal  $q$  Kugeln erhalten?

(USA, 5 Punkte)

2. Es seien  $A, B, C$  die Ecken eines Dreiecks. Die Größen seiner Innenwinkel bei  $A, B$  bzw.  $C$  seien  $\alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$ . Man zeige, daß es

dann und nur dann auf der Strecke  $\overline{AB}$  einen Punkt  $D$  gibt, für den  $\overline{CD}$  das geometrische Mittel von  $\overline{AD}$  und  $\overline{BD}$  ist, wenn

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

gilt. (Finnland, 6 Punkte)

3. Man zeige, daß für keine natürliche Zahl  $n$  die Zahl

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

durch 5 teilbar ist.

(SR Rumänien, 8 Punkte)

## 2. Tag

4. Wir zerschneiden ein Schachbrett von  $8 \times 8$  Feldern so in  $p$  Rechtecke, daß kein Feld zerstört wird. Für jede solche Zerschneidung sollen folgende Bedingungen gelten:

- (1) Jedes Rechteck enthält ebenso viele weiße wie schwarze Felder.
- (2) Ist  $a_i$  die Anzahl der weißen Felder im  $i$ -ten Rechteck, so gelte  $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ .

Es ist der maximale Wert von  $p$  zu finden, für den eine solche Zerschneidung möglich

ist und für diesen Wert  $p$  sollen alle Folgen  $a_1, a_2, \dots, a_p$  ermittelt werden, für die eine derartige Zerlegung existiert.

(VR Bulgarien, 6 Punkte)

5. Es seien  $a, b, c, d$  beliebige positive reelle Variable. Welchen Wertebereich hat dann die Summe

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}?$$

(Niederlande, 7 Punkte)

6. Es sei  $P(x)$  ein nicht konstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, und es gebe genau  $n(P)$  ganze Zahlen  $k$ , für die

$$[P(k)]^2 = 1 \text{ ausfällt.}$$

Man zeige, daß dann

$$n(P) - \deg(P) \leq 2$$

gilt, wenn  $\deg(P)$  den Grad des Polynoms  $P(x)$  bezeichnet. (Schweden, 8 Punkte)

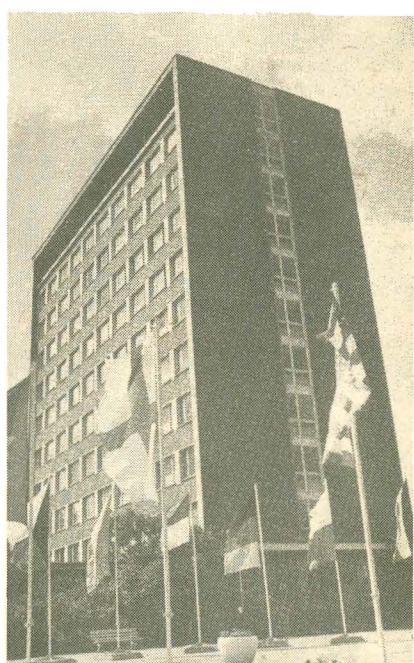
Prof. Dr. W. Engel eröffnete am 7. Juli die XVI. IMO



Eröffnung der XVI. IMO in der Päd. Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ in Erfurt



Das Studentenwohnhochhaus der PH Erfurt



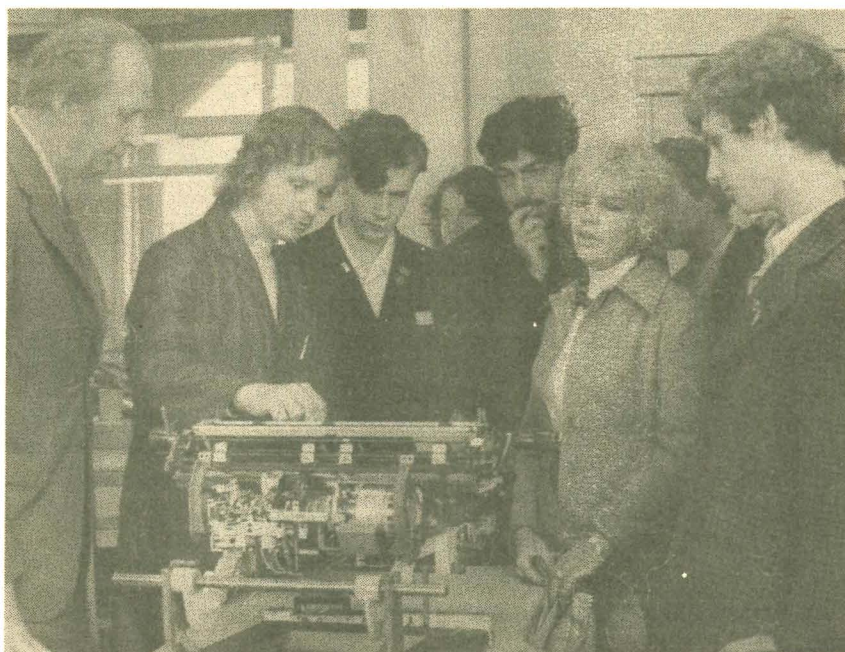
Präsident der Internationalen Jury:  
Prof. Dr. Wolfgang Engel  
Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der DDR;

Stellvertreter des Präsidenten:  
Prof. Dr. Helmut Bausch  
Vorsitzender des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR;

Leiter des Organisationskomitees:  
Oberstudienrat Herbert Titze  
Sekretär des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR;

Mitarbeiter der Jury: Prof. Dr. Gerhard Geise, Prof. Dr. Udo Pirl,  
Dozent Dr. Ludwig Stammeler;  
Dolmetscher der Jury und Koordinatoren:  
Prof. Dr. Georg Wintgen,  
Dozent Dr. Kurt Rosenbaum,  
Helmut Schreiber;

Koordinatoren: Dr. Ingeborg Bartsch,  
Dr. Klaus-Dieter Drews, Diplom-  
mathematiker Karl Germer,  
Dr. Walter Harnau, Dr. Uwe Küchler,  
Dr. Rolf Lüders, Diplommathematiker  
Bernd Kummer, Dr. Monika Noack,  
Dr. Manfred Rehm, Dr. Günter Riedewald,  
Diplommathematiker Peter Rudolph,  
Diplommathematiker Günter Schiemann,  
Dozent Dr. Eberhard Schröder,  
Dr. Hans-Ulrich Schwarz, Dr. Gottfried  
Seifert, Dr. Gerhard Sommerfeld,  
Dr. Klaus Zacharias.



Während die Jury die Schülerlösungen korrigierte, unternahmen die Mannschaften Exkursionen durch das Thüringer Land. Es wurden u. a. besucht: Erfurt, Weimar, Eisenach, Suhl, Oberhof, Ilmenau: Unser Foto: sowj. Teilnehmer besuchten einen Produktionsbereich des VEB Kombinat Büromaschinenwerk Sömmerda (links: Chefredakteur *alpha*)

Wettbewerbsatmosphäre



## Bilanz der Erfolge

| Teilnehmerland                                           | erreichte Gesamtpunktzahl | 1. Preis | 2. Preis | 3. Preis | Diplom |
|----------------------------------------------------------|---------------------------|----------|----------|----------|--------|
| Volksrepublik Bulgarien                                  | 171                       | –        | 1        | 4        |        |
| Republik Finnland                                        | 111                       | –        | –        | 1        |        |
| Republik Frankreich                                      | 194                       | 1        | 1        | 3        |        |
| Vereinigtes Königreich von Großbritannien und Nordirland | 188                       | –        | 1        | 3        |        |
| Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien           | 216                       | 2        | 1        | 2        |        |
| Republik Kuba                                            | 65*                       | –        | –        | –        |        |
| Mongolische Volksrepublik                                | 60                        | –        | –        | –        |        |
| Königreich der Niederlande                               | 112                       | –        | –        | 1        |        |
| Republik Österreich                                      | 212                       | 1        | 1        | 4        |        |
| Volksrepublik Polen                                      | 138                       | –        | –        | 2        |        |
| Tschechoslowakische Sozialistische Republik              | 158                       | –        | –        | 2        |        |
| Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken               | 256                       | 2        | 3        | 2        |        |
| Sozialistische Republik Rumänien                         | 199                       | 1        | 1        | 3        |        |
| Königreich Schweden                                      | 187                       | 1        | 1        | –        | 1      |
| Ungarische Volksrepublik                                 | 237                       | 1        | 3        | 3        | 1      |
| Vereinigte Staaten von Amerika                           | 243                       | –        | 5        | 3        | 1      |
| Demokratische Republik Vietnam                           | 146*                      | 1        | 1        | 2        |        |
| Deutsche Demokratische Republik                          | 236                       | –        | 5        | 2        |        |
|                                                          |                           | 10       | 24       | 37       | 3      |

\* Die Republik Kuba delegierte 7 Schüler, die Demokratische Republik Vietnam 5 Schüler



Die beiden einzigen Mädchen der XVI. IMO:  
Alena Vencovská (ČSSR) – sie erhielt einen  
3. Preis; Sarah-Maria Duyos (Rep. Kuba)



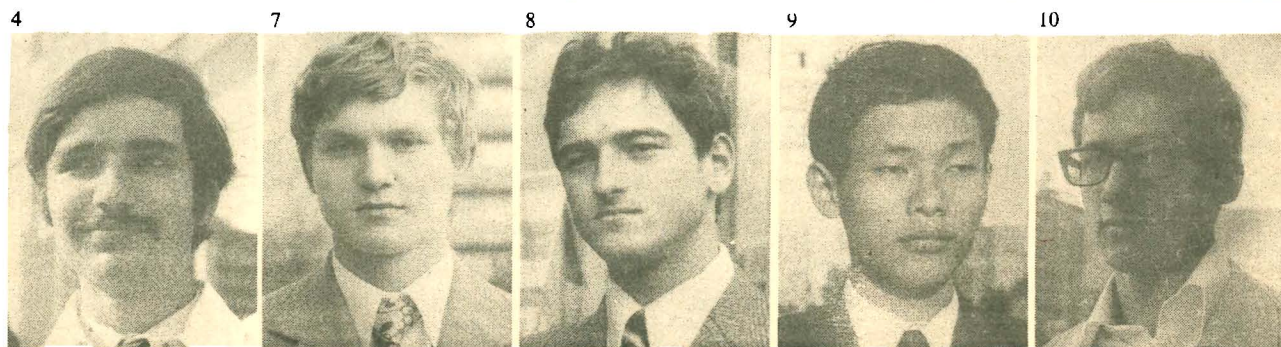


Alle Teilnehmer der XVI. IMO besuchten Weimar. Feierlichen Abschluß bildete der gemeinsame Besuch der *Mahn- und Gedenkstätte Buchenwald*. Unser Foto: amerikanische und britische Teilnehmer im Gespräch mit einem ehemaligen Buchenwaldhäftling, der aus seinem Erleben berichtet.

Die Teilnehmer der XVI. IMO waren vier Tage Gast der Hauptstadt der DDR. Aus dem Programm: Seenrundfahrt gemeinsam mit Berliner FDJlern; Besuch von Potsdam; Stadtrundfahrt. Ihren feierlichen Abschluß fand die IMO am 15. Juli in der Kongreßhalle. Unser Foto: Staatssekretär W. Lorenz (Min. für Volksbildung) zeichnet mit einem 1. Preis aus: Michael Steiner (links) und Alexander Grigorjan

#### Einen 1. Preis erhielten:

- 1 Herbert Sinwel (Linz), Republik Österreich
- 2 Jean-Christophe Yoccoz (Gif sur Yvette), Republik Frankreich
- 3 János Kollár (Budapest), Ungarische Volksrepublik
- 4 Adrian Ocneanu (Bukarest), Sozialistische Republik Rumänien
- 5 Michael Steiner (Solna), Königreich Schweden
- 6 Alexander Grigorjan (Baku), Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken
- 7 Dmitri Tjukawkin (Irkutsk), Union der Sozialistischen Sowjetrepubliken
- 8 Jožef B. Varga (Novi Itebej), Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien
- 9 Hoàng-Lê Minh (Hanoi), Demokratische Republik Vietnam
- 10 Miodrag Žiwković (Kovin), Sozialistische Föderative Republik Jugoslawien



## Mathematik-olympiaden in der DRV

Seit dem Jahre 1962 werden in unserem Lande Mathematikolympiaden durchgeführt. Zweck dieser Wettbewerbe ist, die Schüler für die Mathematik – nicht nur für die Schulmathematik – zu interessieren, mathematische Begabungen zu finden und weiterzuentwickeln. Für die Klassen 4, 5, 6, 8 und 9 gibt es nur Kreis- und Bezirksolympiaden.\*

Für die Klassen 7 und 10 wird die Endstufe auf Landesebene durchgeführt.

Der Wettbewerb für Klasse 10 findet in einer Bezirks- und einer Landesebene statt; für Olympiadeklasse 7 gibt es eine Kreis- und Bezirksstufe. Die Endstufe (Landesausscheid) bestreitet je eine Mannschaft (10 bis 15 Schüler) aus jedem Bezirk.

Die Endrunde wird im April eines jeden Jahres durchgeführt.

Klassenstufe 7:

1. Klausur – 2 Aufgaben – Arithmetik/Algebra – 2 Stunden Arbeitszeit
2. Klausur – 2 Aufgaben – Geometrie – 2 Stunden Arbeitszeit

Klassenstufe 10: wie Klasse 7 (3 Aufgaben – 3 Stunden Arbeitszeit). Zahlreiche der gestellten Aufgaben unterscheiden sich von denen der Lehrbücher der Schule. Eine zentrale Kommission bewertet die Lösungen, vergibt Preise an Schüler und Mannschaften. Die besten Lösungen sowie eine Analyse der Ergebnisse des Landeswettbewerbs werden in der Zeitschrift „Mathematik und Jugend“ sowie in der Zeitschrift des Ministeriums für Volksbildung „Die 3. Stufe“ veröffentlicht.

Für die *alpha*-Leser haben wir einige Aufgaben der Klassenstufe 7 ausgewählt:

▲ 1 ▲ In dem abgebildeten Schema für das schriftliche Verfahren der Division sind die Sternchen so durch Grundziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht.

$$\begin{array}{r}
 * * * * * : * = * 0 8 0 * \\
 * * * \\
 \hline
 0 * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

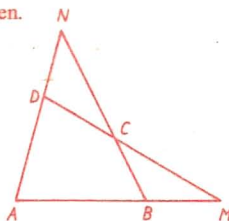
▲ 2 ▲ a) Die algebraische Summe  $(x^2 - yz)(y - xyz) - (y^2 - xz)(x - xyz)$  ist als Produkt darzustellen.

b) Es ist zu beweisen, daß sich die Gleichung

$$\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$$

in die äquivalente Gleichung  $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  überführen läßt, wenn  $x + y, yz \neq 1, xz \neq 1, x \neq 0, y \neq 0$  und  $z \neq 0$  gilt.

▲ 3 ▲ Die abgebildete Figur stellt ein konvexes Viereck  $ABCD$  dar. Die Geraden  $AB$  und  $CD$  schneiden einander im Punkte  $M$ , die Geraden  $BC$  und  $AD$  schneiden einander im Punkte  $N$ . Es ist zu beweisen, daß die Umkreise der Dreiecke  $\triangle AMD$ ,  $\triangle BMC$ ,  $\triangle ABN$  und  $\triangle DCN$  einen Punkt  $P$  gemeinsam haben.



▲ 4 ▲ Gegeben seien zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  und den Radien  $r_1$  und  $r_2$  mit  $r_1 < r_2$ . Die Schnittpunkte dieser Kreise seien  $A$  und  $B$  und der Schnittpunkt der Geraden  $M_1M_2$  und  $AB$  liege zwischen  $M_1$  und  $M_2$ . Eine durch  $A$  gehende Gerade  $g$  schneide  $k_1$  in  $P$  und  $k_2$  in  $Q$ . Wie muß die Gerade  $g$  verlaufen, damit

- a)  $Q$  zwischen  $A$  und  $P$  oder  $P$  zwischen  $A$  und  $Q$  liegt,
- b)  $AP = AQ$  gilt,
- c) die Strecke  $PQ$  zu einer gegebenen Strecke  $\overline{CD} = m$  kongruent ist,
- d) die Strecke  $PQ$  eine maximale Länge besitzt?

Hoang Chung

\* In der DRV hat die allgemeinbildende Schule drei Stufen:

die erste Stufe (Klasse 1 bis 4), die zweite Stufe (Klasse 5 bis 7) und die dritte Stufe (Klasse 8 bis 10).

## Aus der Arbeit eines Diplom-mathematikers

von M. Peregudow

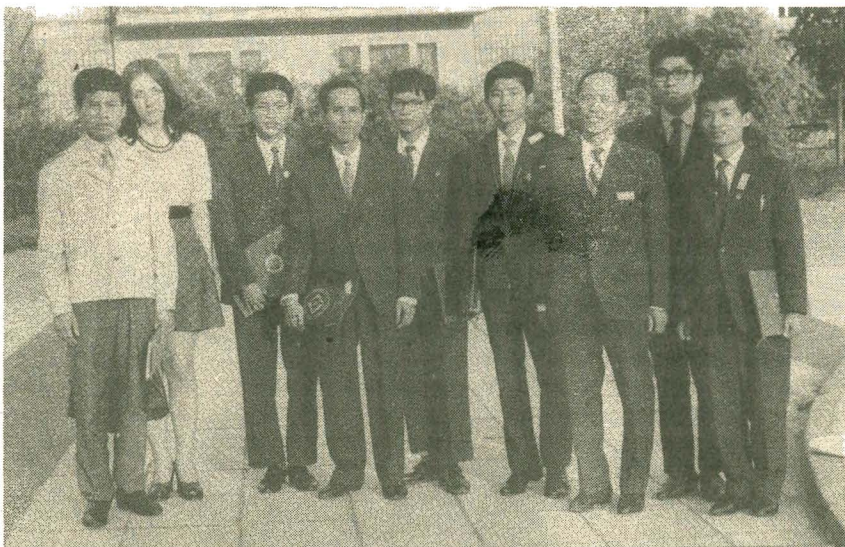
Ich absolvierte die Fakultät für Rechen-technik und Kybernetik an der Lomonossow-Universität Moskau und bin jetzt 25 Jahre alt. Nach dem Grundstudium (zwei Studienjahre) stand ich vor der Frage, mich für eine spezielle Fachrichtung zu entscheiden. Die moderne Mathematik ist so breit, daß man die Wahl für die engere Fachrichtung erst dann treffen kann, wenn man sich einen Überblick über das Ganze verschafft hat. Dafür stehen die beiden ersten Studienjahre zur Verfügung.

Ich wurde mit den Gesellschaftswissenschaften vertraut gemacht, studierte die wichtigsten Gegenstände der klassischen Mathematik und erhielt einen Einblick in eine Vielzahl mathematischer Methoden als hauptsächliches Forschungsinstrument verschiedenster Gebiete von Wissenschaft und Technik.

Nach dem Erklimmen dieser ersten Stufe der langen Treppe des Wissens war es mir möglich, mich für das Fachgebiet Rechen-technik und in diesem für die spezielle Fachrichtung Systemprogrammierung für EDVA zu entscheiden.

Schon während meiner Mittelschulzeit wurde ich im Rahmen der praktischen Tätigkeit in einem Rechenzentrum ausgebildet. Die dort stationierte EDVA wurde für wissenschaftliche Analysen verwendet. Eine derartige Anlage ersetzt mehrere hundert mit Rechen-

Mannschaft der DRV zur XVI. IMO



An einem der großen Moskauer Plätze, auf dem acht Straßen zusammenstoßen, schaltet eine EDVA die Ampeln so, daß die Summe der Wartezeiten für alle Kraftfahrzeuge minimiert wird. Nicht allen ist bekannt, daß eine gerade vom Werk gelieferte EDVA nur eine große Menge besonders komplizierter, besonders exakter, besonders zuverlässiger Geräte ist, die von sich aus auch nicht die allereinfachsten Aufgaben lösen kann. Um die Anlage arbeiten zu lassen, muß man zunächst das Programm zur Lösung der vorliegenden Aufgaben aufstellen. Das Programm muß in der Sprache der Maschine verfaßt sein, deren Alphabet aus nur zwei Zeichen besteht, aus Ö und L. So sieht das Maschinenwort zum Lösen der Aufgabe 2+2 beim Elektronenrechner MINSK 32 folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{l} \text{OOOLLOOOOOLLOOLLOOLLOLO} \\ \text{LOOLLOOLLLOL} \end{array} \quad (1)$$

Der langsamste Schüler wird diese Aufgabe schneller lösen, als man einen solchen Maschinenbefehl aufschreiben kann.

Um ein Programm für eine Aufgabe aus dem Ingenieurwesen in Maschinensprache aufzuschreiben, benötigt ein Programmierer Monate oder sogar Jahre; ein solches Programm besteht gewöhnlich aus mehreren zehntausend Maschinenworten.

Man braucht allerdings jetzt keine kilometerlangen Reihen aus Nullen und Einsen: Viele Nutzer der EDV kennen den Code der Maschinensprache gar nicht, d. h., die Befehlstabelle für diese oder jene konkrete Anlage. Der Systemprogrammierer hat für den betreffenden Maschinentyp ein Übersetzungsprogramm, welches die Daten und Voraussetzungen der gestellten Aufgabe aus der natürlichen Sprache (des Menschen) in die Maschinensprache überträgt.

In der natürlichen Sprache sieht der Befehl zur Lösung der oben erwähnten Aufgabe so aus:  $X := 2 + 2$  (2)

Um aber ein derartiges Übersetzungsprogramm (zur Übertragung der Worte der Form (2) in Maschinenworte der Form (1)) herzustellen, müßte der Systemprogrammierer Zehntausende von Maschinenworten zusammenstellen, und dabei darf ihm nicht ein einziger Fehler unterlaufen! Das ist aber für einen Menschen kaum möglich.

Man kann das Programm auch zunächst für eine andere EDVA, die bereits *das Übersetzen gelernt hat*, erarbeiten. Dieser Weg ist aber langwierig und schwer; schwierig ist dabei vor allem das Feststellen und Beseitigen der unvermeidlich auftretenden Fehler.

In der Praxis verfährt man folgendermaßen: Man verfaßt das Programm in einer Symbolsprache (Programmiersprache), die nach ihren Vorteilen und Möglichkeiten zwischen den Formen (1) und (2) steht. In dieser Sprache sieht die Aufgabe, 2 und 2 zu addieren, so aus:  $AD + 2; + 2$  (3)

Die Sprache der Form (1) ist die *Maschinensprache*, die Sprache der Form (2) – die *algorithmische Sprache*. Natürlich gibt es davon verschiedene Arten, die der Sprache der gewöhnlichen Mathematik mehr oder weniger nahestehen. Alle, die die EDV anwenden, z. B. Ingenieure, Operateure, Wissenschaftler, verwenden derartige algorithmische Sprachen.

Für uns Systemprogrammierer genügt das allerdings nicht: Wir entwickeln und vervollkommen neue Sprachen und sichern das Verständnis zwischen Mensch und Computer.

Bereits während meines Studiums begann ich, in einem Rechenzentrum zu arbeiten. Parallel zum Studium der theoretischen Grundlagen an der Universität, erwarb ich dort praktische Fähigkeiten und Fertigkeiten. Je weiter ich vorankam, mit um so verantwortungsvolleren Aufgaben wurde ich vertraut gemacht. Nach vierjähriger Arbeit im Rechenzentrum (also ein Jahr nach Abschluß meines Studiums) verdreifachte sich mein Gehalt. In der gleichen Zeit erhöhte sich die Zahl der Mitarbeiter im Rechenzentrum von 30 auf 60, und eine neue MINSK 32 kam zum Einsatz. In ein bis zwei Jahren werden wir eine moderne Anlage ES 1040, die in der DDR entwickelt wird, erhalten.

Über diese Anlage und damit über ESER (Einheitliches System *Elektronischer Rechenanlagen*) insgesamt gibt es einiges hinzuzufügen. Während es früher viele verschiedene Typen und Größen von Rechenanlagen gab, schafft die sozialistische Staatengemeinschaft jetzt diese einheitlich aufgebaute Reihe. Sie besteht aus Anlagen verschiedener Größenordnung (und damit unterschiedlicher Kosten), von der kleinen ES 1010 bis zur Riesenanlage (nicht der Ausdehnung, sondern der Leistung nach) ES 1050. Darüber hinaus werden noch weitere Varianten entwickelt mit einer Leistung von Millionen Operationen pro Sekunde.

Das *Einheitliche System Elektronischer Rechenanlagen* sichert jedem Programm einen größeren Wert: nach einem solchen Programm kann jetzt nicht nur ein einzelner Typ, sondern jeder Vertreter der gesamten Reihe arbeiten. Damit ist auch eine größere ökonomische Effektivität der EDVA gewährleistet. So wird z. B. beim Anfall

großer, die Leistung der Maschine übersteigender Datenmengen, nicht mehr die Anlage als Ganzes unbrauchbar, sondern es ist möglich, die Zentraleinheit, das Herz der Rechenanlage, auszutauschen. Beispielsweise kann an Stelle der Zentraleinheit von ES 1020 die von ES 1040 treten, die etwa 100mal schneller arbeitet. Die Peripheriegeräte (Speicher, Drucker usw.) können weiterverwendet werden, müssen nötigenfalls nur ergänzt werden. Bisher mußte man mit der Zentraleinheit auch alle anderen Geräte ersetzen, jetzt dagegen ist das nicht mehr notwendig.

Der Einsatz des Einheitlichen Systems ist auch für die Programmierer von Vorteil: statt einer ganzen Anzahl von Maschinensprachen haben sie dieselbe Befehlstafel (und damit die gleiche Maschinensprache); es kann natürlich sein, daß beim Übergang zu einer größeren Anlage einige ergänzende Elemente der Maschinensprache zu erlernen sind.

Ich arbeite im Rechenzentrum mit einigen jungen Spezialisten der Rechentechnik zusammen. Sie nutzen die Möglichkeit der algorithmischen Sprachen, die von uns Systemprogrammierern vorbereitet werden. Unser Rechenzentrum bedient ein großes Bauprojektierungsbüro, das Tausende von Mitarbeitern beschäftigt, die viele der in Moskau zu bauenden Gebäude entwerfen. Meine Kollegen Programmierer erleichtern die Arbeit der Projektanten sehr. Jetzt kann eine EDVA Zeichnungen mit den verschiedenen Ansichten des zukünftigen Bauwerks in einigen Minuten herstellen, die Festigkeit der Elemente der Baukonstruktion berechnen und die optimale Reihenfolge und Verteilung der Arbeiten an die einzelnen Projektanten-Kollektive feststellen.

Für die modernen Computer ist es nicht unbedingt erforderlich, daß ein Bauingenieur immer am Bedienpult steht: Es gibt sehr große EDVA, die mit Tausenden (!) gewöhnlicher elektrischer Schreibmaschinen verbunden sind, mit deren Hilfe eine Aufgabe gestellt werden kann, deren Lösung nach kurzer Zeit von der gleichen Maschine ausgedruckt wird.

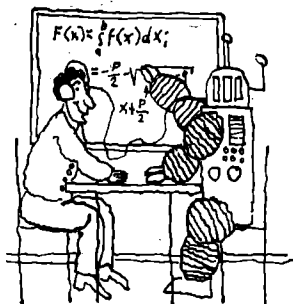
Des weiteren kann ein Bauingenieur an einem Bildschirmanzeigergerät mit einem Lichtstift eine Zeichnung anfertigen, wonach die EDVA sofort beispielsweise die schwächsten Teile der Konstruktion oder die größte Tragfähigkeit einzelner Bauelemente berechnet.

Mir gefällt meine Arbeit. Ich meine, daß in 10 bis 20 Jahren jeder Diplomingenieur die EDV täglich bei seiner Tätigkeit benutzen wird. Und obwohl die EDV niemals einen Menschen voll wird ersetzen können, ist sie doch in der Lage, ihn von monotoner, zeitraubender Arbeit zu entlasten, und sie wird auf den verschiedensten Gebieten ein nicht mehr wegzudenkendes Instrument menschlicher Tätigkeit sein. *M. Peregudow*

# Wer löst mit?

## alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 5. Januar 1975



### Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*

7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W\* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W\*10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1974/75 läuft von Heft 5/74 bis Heft 2/75. Zwischen dem 1. und 10. September 1975 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/75 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/74 bis 2/75) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1974/75 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

▲ 5▲1252 In einer Gesellschaft von 23 Personen sind 15 Erwachsene mehr als Kinder und fünf Männer mehr als Frauen anwesend. Wieviel Frauen, Männer und Kinder sind es? *Sch.*

▲ 5▲1253 Ein Aquarium besitzt folgende Innenmaße: Länge 4,8 dm, Breite 25 cm, Höhe 220 mm. Es ist bis zur inneren Höhe von 17 cm mit Wasser gefüllt. Prüfe und begründe, ob man einen Ziegelstein mit den Kantenlängen 3 dm, 20 cm, 100 mm in das Aquarium legen kann, ohne daß Wasser überläuft! *Claudia Steiber, (Kl. 7), Lienz (Österreich)*

W 5■1254 Die Zahlen 100 und 90 wurden durch dieselbe natürliche Zahl dividiert. Im ersten Falle erhielt man 4, im zweiten Falle 18 als Rest. Wie lautet der Divisor?

*Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen*

W 5■1255 Eine Hausfrau hat für die Wintermonate vorgesorgt und Obst eingeweckt. Ein Regal in ihrem Keller ist gefüllt mit Weckgläsern. Wir finden dort Gläser mit Pflaumen, mit Birnen und mit Kirschen. Es sind zusammen mehr als 40, aber weniger als 60 Gläser. Die Anzahl der Gläser mit Pflaumen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Gläser mit Birnen, aber nur halb so groß wie die Anzahl der Gläser mit Kirschen. Wieviel Gläser jeder Sorte sind es? *Sch.*

W 5\*1256 Von vier Schülern mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe ist folgendes bekannt:

- a) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.
- b) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.
- c) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.
- d) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.

e) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Nachname.

Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Nachnamen? Ordne die Schüler nach ihrem Alter; beginne dabei mit dem jüngsten Schüler!

*Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden, Mathematikfachlehrer*

W 5\*1257 Die Schüler einer 5. Klasse wollen die Kosten für die Ausschmückung ihres Klassenraumes selbst aufbringen. Wenn jeder Schüler dieser Klasse 80 Pf gibt, dann fehlen 1,50 M am notwendigen Gesamtbetrag. Gibt hingegen jeder 90 Pf, so bleiben 1,50 M übrig. Welcher Geldbetrag wurde für die Ausschmückung des Klassenraumes ausgegeben? *Sch.*

▲ 6▲1258 Der Schulgarten muß gejätet werden. Peter meint:

„Wenn ich den Schulgarten allein jäte, brauche ich dafür 4 Stunden.“ Sein jüngerer Bruder Klaus erwidert: „Ich würde für diese Arbeit 6 Stunden benötigen.“ Ihre Schwester Gerda sagt daraufhin: „Ich schaffe es bereits in 3 Stunden.“ Nach wieviel Stunden würde der Schulgarten gejätet sein, wenn die drei Geschwister diese Arbeit gemeinsam verrichten? *Angela Graizarek, Kl. 8, Erfurt*

▲ 6▲1259 Es ist der folgende Satz zu beweisen: „Wenn in einem Trapez *ABCD* der Schenkel *AD* gleich der kleineren Grundseite *CD* ist, dann halbiert die Diagonale *AC* den Winkel  $\angle BAD = \alpha$ .“ *Sch.*

W 6■1260 Auf einem Päckchen des Waschmittels *Spee* findet man den Aufdruck „Jetzt 278 g/1,45 M“. Wieviel Gramm dieses Waschmittels würde ein Päckchen zum Preise von 2,00 M enthalten, wenn die Verpackungskosten nicht teurer werden?

*Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg, Clara-Zetkin-OS*

|                                                   |  |         |
|---------------------------------------------------|--|---------|
| Steffi Sorg, 5316 Stützerbach, Schliuser Str. 128 |  | W 5*346 |
| Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5   |  |         |
| Prädikat:                                         |  | 5       |
| Lösung:                                           |  |         |

W 6 ■ 1261 Eine Klassenarbeit im Fach Mathematik hatte in einer 6. Klasse folgendes Ergebnis:

Die Hälfte der Anzahl der Schüler dieser Klasse löste nur einen Teil der gestellten Aufgaben, genau 12 Schüler lösten alle Aufgaben, der 14. Teil der Anzahl der Schüler löste keine der gestellten Aufgaben. Wieviel Schüler gehören dieser Klasse an? Sch.

W 6\*1262 Herr Anton Amsel, der in diesem Jahrhundert geboren wurde, stellte an seinem Geburtstag im Jahre 1974 folgendes fest:

a) Die beiden letzten Ziffern des Geburtsjahres seiner Schwester Berta bilden eine Zahl, die das Alter von Herrn Anton Amsel in vollen Jahren angibt.

b) Herr Anton Amsel ist 8 Jahre älter als seine Schwester.

In welchem Jahre wurde Herr Anton Amsel geboren, in welchem seine Schwester Berta? Wie alt sind beide an ihrem Geburtstag im Jahre 1974? Oberlehrer Ing. Karl Koch, Schmalkalden, Mathematikfachlehrer

W 6\*1263 Vier Freunde mit den Vornamen Bernd, Dieter, Frank, Lutz und den Familiennamen Bär, Dachs, Fuchs, Löwe unterhalten sich. Der Schüler mit dem Familiennamen Bär stellt fest:

„Unsere Vornamen haben die gleichen Anfangsbuchstaben wie unsere Familiennamen. Aber bei keinem von uns stimmt der Anfangsbuchstabe des Vornamens mit dem Anfangsbuchstaben des Familiennamens überein.“

Frank erwidert: „Tatsächlich, du hast recht. Das ist mir noch gar nicht aufgefallen.“ Der Schüler mit dem Familiennamen Dachs ergänzt die Bemerkungen seiner beiden Freunde: „Die Feststellung unseres Freundes Bär wäre nicht richtig, wenn ich den Vornamen unseres Freundes Fuchs erhalten hätte, was meine Eltern ursprünglich beabsichtigten.“ Wie heißen die vier Freunde mit Vor- und Familiennamen?

Oberlehrer Ing. Karl Koch, Schmalkalden, Mathematikfachlehrer

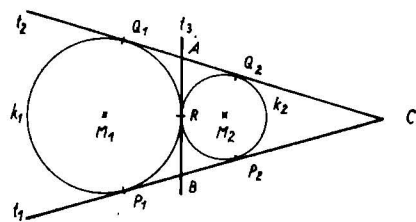
▲ 7 ▲ 1264 Gegeben sei folgende Aussage: „Jedes konvexe Viereck, das drei rechte Winkel hat, ist ein Sehnenviereck.“

Prüfe und begründe, ob diese Aussage wahr oder falsch ist! Bilde die Umkehrung zur gegebenen Aussage, und prüfe, ob diese Umkehrung wahr oder falsch ist! T.

▲ 7 ▲ 1265 Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck  $ABC$  mit seinen Höhen  $AQ = h_a$  und  $BR = h_b$ ; verbinde den Mittelpunkt  $P$  der Seite  $AB$  mit den Fußpunkten  $Q$  und  $R$  der beiden Höhen, und verbinde  $R$  mit  $Q$ ! Beweise, daß das Dreieck  $PQR$  gleichschenkelig ist!

W 7 ■ 1266 Die abgebildete Figur stellt zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$  und den Radien  $r_1$  und  $r_2$  dar, wobei

$r_1 > r_2$  ist. Die beiden Kreise berühren sich von außen in dem Punkte  $R$ . Von den Tangenten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$ , die beiden Kreisen gemeinsam sind, wird ein Dreieck  $ABC$  bestimmt. Es ist nachzuweisen, daß dieses Dreieck gleichschenkelig ist. T.



W 7 ■ 1267 Die Teilnehmer an einem Keramik-Zirkel stellten Figuren, Teller, Schüsseln und Vasen her, insgesamt 120 Gegenstände. Es wurden sechsmal soviel Gegenstände wie Teller hergestellt. Die Summe aus den Anzahlen der hergestellten Figuren und Teller ist gleich der Summe aus den Anzahlen der hergestellten Schüsseln und Vasen. Es wurden zehn Vasen mehr als Schüsseln hergestellt. Wieviel Figuren, Teller, Schüsseln und Vasen wurden von den Zirkelteilnehmern hergestellt? Schülerin Karin Eickhoff, Berlin

W 7\*1268 Es sind alle durch 19 teilbaren vierstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die um 4653 größer sind als ihre Quersummen. Schüler Dittmar Kurtz, Kl. 9 Friedrichsrode

W 7\*1269 Zeichne drei Kreise  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  mit den Mittelpunkten  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  und dem gleichen Radius  $r$ , die sich in einem Punkt  $P$  schneiden! Bezeichne die übrigen Schnittpunkte, in denen sich die Kreise paarweise schneiden, mit  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Es ist nachzuweisen, daß der Umkreis des Dreiecks  $ABC$  ebenfalls den Radius  $r$  hat! Sch.

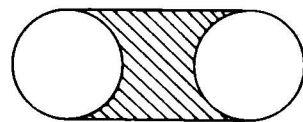
▲ 8 ▲ 1270 Man beweise, daß, wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen gleich einer geraden Zahl ist, die Differenz ihrer Quadrate durch 4 teilbar ist. Sch.

▲ 8 ▲ 1271 Es sind die Längen der Schenkel  $AC$  aller stumpfwinkligen, gleichschenkligen Dreiecke  $ABC$  mit der Basis  $AB = 10$  cm anzugeben, deren Schenkel ganzzahlig sind. Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen

W 8 ■ 1272 Durch einen 134 m langen Tunnel der Sebnitztal-Bahn fährt ein 80 m langer Eisenbahnzug mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Wie lange dauert die Durchfahrt des Zuges durch den Tunnel, d. h., wieviel Zeit vergeht von dem Zeitpunkt an, in dem die Lokomotive des Zuges in den Tunnel einfährt, bis zu dem Zeitpunkt, in dem der letzte Wagen des Zuges den Tunnel verläßt? Oberlehrer B. Hille, Lichtenhain

W 8 ■ 1273 Die Abbildung zeigt zwei kongruente Kreisscheiben, deren Mittelpunkte einen Abstand haben, der genau gleich dem halben Umfang einer der Kreisscheiben ist. Man entscheide, ob der Flächeninhalt des schraffierten Flächenstückes größer, kleiner oder gleich dem Flächeninhalt einer der Kreisscheiben ist.

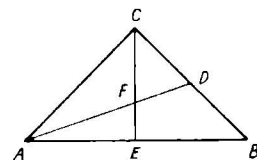
H. Eichelbaum, Kreiskabinett f. Weiterbildung, Sebnitz



W 8\*1274 Ein Fahrzeug legt die erste Hälfte einer Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_1$  zurück, dagegen die zweite Hälfte dieser Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_2$ , wobei  $v_1 \neq v_2$  sei. Man beweise, daß dann die Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte Strecke stets kleiner als das arithmetische Mittel  $\frac{v_1 + v_2}{2}$  der beiden Geschwindigkeiten ist.

Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz

W 8\*1275 Es sei  $ABC$  ein gleichschenklighrechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten  $\overline{CA}$  und  $\overline{CB}$  die Länge  $a$  haben. Ferner sei  $F$  der Schnittpunkt der von dem Punkt  $C$  ausgehenden Höhe  $\overline{CE}$  mit der von dem Punkt  $A$  ausgehenden Seitenhalbierenden  $\overline{AD}$ . Man berechne die Länge der Strecke  $\overline{FD}$  (vgl. die Abb.). Dittmar Kurtz, OS Keula, Kl. 9



▲ 9 ▲ 1276 Man untersuche, ob es eine positive reelle Zahl  $a$  gibt, so daß für alle natürlichen Zahlen  $n$  die Gleichung

$$a^n + a^n = a^{n+1}$$

erfüllt ist. Bejahendenfalls gebe man alle diese positiven reellen Zahlen  $a$  an.

Volker Zillmann, Dresden

▲ 9 ▲ 1277 Es sind alle natürlichen Zahlen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  zu ermitteln, für die das Gleichungssystem

$$xy^2z^3 = 384, \quad (1)$$

$$x^2y^3z = 1152 \quad (2)$$

erfüllt ist. Herwig Grattias,

EOS „Ernst Schneller“, Sömmerda, Kl. 12

W 9 ■ 1278 Man ermittle alle reellen Zahlen  $x$ , für die die beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0 \quad (1)$$

und  $3x^4 - x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0 \quad (2)$  erfüllt sind.

Manfred Freitag, Schwarzeiche

W 9 ■ 1279 Es sei  $ABCDEFGH$  ein Würfel mit der Kantenlänge  $a=6$  cm, wobei die Eckpunkte  $E, F, G, H$  senkrecht über den Punkten  $A, B, C$  bzw.  $D$  liegen. Man ermittle den Abstand des Eckpunktes  $B$  von der Raumdiagonale  $\overline{AG}$ .

*Anleitung zur Lösung:* Man beachte, daß das aus der Kante  $\overline{AB}$ , der Flächendiagonale  $\overline{BG}$  und aus der Raumdiagonale  $\overline{AG}$  gebildete Dreieck rechtwinklig ist, und ermittle die Länge der von  $B$  ausgehenden Höhe dieses Dreiecks. *Volker Zillmann, Dresden*

W 9\*1280 Man beweise, ohne dies zu berechnen, daß die Zahl

$z=5^7 \cdot 7^5 + 1$  nicht gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

*U. Möckel, Techn. Rechnerin, Dresden*

W 9\*1281 Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  reelle Zahlen ( $n \geq 2$ ) und  $b_1, b_2, \dots, b_n$   $n$  positive reelle Zahlen mit

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1. \end{aligned}$$

Man beweise, daß dann stets

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq 1 \text{ gilt.}$$

*Peter Surján, Budapest, UVR*

▲ 10/12 ▲ 1282 Man beweise, daß man durch die Multiplikation einer beliebigen von Null verschiedenen natürlichen Zahl, die kleiner als 100 ist, mit der Zahl 99 stets eine natürliche Zahl erhält, deren Quersumme gleich 18 ist.

*Dr. Gerhard Hesse, Radebeul*

▲ 10/12 ▲ 1283 Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen  $x$  und  $y$  zu ermitteln, für die die Gleichung  $1! + 2! + 3! + \dots + x! = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + y^3$  erfüllt ist. *Anleitung zur Lösung:*

Es gilt  $1! = 1$  und  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  für alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $n > 1$ .

Ferner gilt

$$1^3 + 2^3 + \dots + y^3 = \left[ \frac{y(y+1)}{2} \right]^2.$$

*A. D. Osmanow, Demurlo, Georgische SSR, UdSSR*

W 10/12 ■ 1284 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (1)$$

$$x^6 + y^6 = 1 \quad (2)$$

zu ermitteln. *L.*

W 10/12 ■ 1285 Am 26. März 1974 wurde in der UdSSR der Satellit *Kosmos 637* gestartet, der eine Kreisbahn mit einem konstanten Abstand von 35 600 km von der Erdoberfläche beschreibt.

Man berechne mit Hilfe des 3. Keplerschen Gesetzes die Umlaufzeit (in h und min) dieses Satelliten, wobei die Umlaufzeit des Mondes mit 27,32 d und der Radius seiner kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde mit 384 400 km gegeben sind.

*Anleitung:* Nach dem 3. Keplerschen Gesetz verhalten sich die Quadrate der Umlauf-

## Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Helmut Bausch



▲ 1219 ▲ Es hat sich erwiesen, daß sich viele biologische Wachstumsprozesse näherungsweise durch Funktionen der Gestalt

$$y = \alpha x^{\beta} e^{-\gamma x}, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$\text{bzw. } \ln y = \bar{\alpha} + \beta \ln x - \gamma x \quad (\bar{\alpha} = \ln \alpha) \quad (2)$$

beschreiben lassen. Dabei sind  $\alpha, \beta, \gamma$  gewisse positive Konstanten; z. B. kann durch (1) die Abhängigkeit eines landwirtschaftlichen Ertrags  $y$  von der dem Boden zugeführten Menge  $x$  einer bestimmten Düngersorte dargestellt werden. Die Kenntnis einer solchen funktionalen Abhängigkeit bietet viele Vorteile, vor allem für Optimierungsprobleme. Damit man mit der Funktion (1) arbeiten kann, muß man zunächst die Werte der Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  bzw.  $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$  ermitteln.

Man geht dabei von Versuchsergebnissen aus, die eine Wertetabelle  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) liefern ( $x_i > 0, y_i > 0$ ).  $n$  ist die Anzahl der durchgeführten Messungen. Die Differenzen

$$\bar{\alpha} + \beta \ln x_i - \gamma x_i - \ln y_i$$

sind im allgemeinen verschieden von Null, denn sonst würden sich die Meßergebnisse durch (2) und damit (1) exakt darstellen lassen. Man bildet nun die Summe  $S$  der Quadrate dieser Differenzen, d. h.

$$S(\bar{\alpha}, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^n (\bar{\alpha} + \beta \ln x_i - \gamma x_i - \ln y_i)^2 \quad (3)$$

und errechnet  $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$  so, daß die Summe  $S$  minimal wird (das ist die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate).  $S$  ist eine Funktion von drei unabhängigen Variablen ( $\bar{\alpha}, \beta, \gamma$ ), denn die  $x_i$  und  $y_i$  haben ja fest vorgegebene Werte. Wir haben damit ein Extremwertproblem für eine Funktion von drei unabhängigen Variablen erhalten, das wir hier nicht weiter behandeln wollen. Es sei nur noch folgendes erwähnt:

Für die Existenz genau eines Minimums der Funktion (3) ist notwendig, daß die Determinante dritter Ordnung

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n \ln x_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i & \sum_{i=1}^n \ln^2 x_i & \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

verschieden von Null ist.

Daraus abgeleitet möchte ich folgende Aufgabe stellen:

*Aufgabe:* Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen, von denen mindestens drei paarweise verschieden sind. Man beweise, daß die Determinante (4) einen positiven Wert hat.

Für die Beweisführung wünsche ich viel Erfolg!

*Unser Foto oben:* Prof. Dr. Bausch, seit 1967 Delegationsleiter der DDR-Mannschaft an Internationalen Mathematikolympiaden, wurde im April 1974 zum Vorsitzenden des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker berufen.

zeiten von Satelliten auf Kreisbahnen wie die dritten Potenzen ihrer Bahnradien. Bei der Ermittlung des Radius der Umlaufbahn von *Kosmos 637* ist zu beachten, daß der Erdradius rund 6370 km beträgt. *L.*

W 10/12\*1286 Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-8)(x-10) \\ (x-11)(x-12) = 14400 \end{aligned}$$

*Ralph Lehmann, EOS „Diesterweg“, Strausberg*

Träger eines 1. Preises bei der DDR-Olympiade und eines 2. Preises bei der XVI. Internationalen Mathematik-Olympiade 1974

W 10/12\*1287 Man beweise den folgenden Satz: In jedem konvexen Sehnenviereck ist das Produkt der Längen der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Längen je zweier Gegenseiten.

Es gilt also für ein Sehnenviereck  $ABCD$  mit den Seitenlängen  $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{CD}=c, \overline{DA}=d$  und den Längen der Diagonalen  $\overline{AC}=e, \overline{BD}=f$  stets  $ef=ac+bd$ .

*Bemerkung:* Dieser Satz wird auch der *Ptolemäische Satz* genannt, nach dem griechischen Mathematiker und Astronomen *Klaudios Ptolemaios von Alexandria*, um 125 u. Z.

*Mathematikfachlehrer B. Herrmann, Alt-Töplitz*

# Kerstin Bachmann

## berichtet aus dem Leben einer AG



Unsere AG Mathematik der EOS August-Hermann-Francke Halle behandelt das Rechnen mit Resten. Alle haben sich gut vorbereitet und die Artikel in *alpha* (3/69 bis 2/70) studiert.

Anfangs erörtert jemand die Ringstruktur (s. *alpha* 5/69) und wiederholt deren Eigenschaft an den Beispielen der Menge der ganzen Zahlen und der Menge der Restklassen modulo  $m$ . Danach erhalten wir die *Aufgabe des Tages*:

Beim Verkauf von Weihnachtsstollen zu 12 M oder 17 M je Stück wurden innerhalb kurzer Zeit für mehr als 10 Stollen je Sorte 478 M eingenommen. Ermittle die Anzahl der verkauften Stollen je Sorte!

Selbständig versucht jeder, eine Lösung zu finden. Dabei ergeben sich mehrere Lösungswege, die wir anschließend diskutieren:

a) Offenbar gilt für die Einnahme von 478 M, wenn  $x$  und  $y$  die Anzahl der Stollen je Sorte bedeuten

$$17x + 12y = 478, \quad x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Man kann eine Tabelle aufstellen, wobei  $x > 10$ ,  $y > 10$  beachtet wird. Beginnend mit  $x = 11$  ergibt sich

| $x$ | $17x$ | $y$ | $12y$ | $17x + 12y$   |
|-----|-------|-----|-------|---------------|
| 11  | 187   | 24  | 288   | 475           |
| 12  | 204   | 23  | 276   | 480           |
| 13  | 221   | 21  | 252   | 473           |
| 14  | 238   | 20  | 240   | 478 (Lösung). |

Setzt man die Tabelle weiter fort, so erkennt man, daß es keine weitere Lösung gibt.

b) Ich erinnere mich an eine Aufgabe aus *alpha* 1/69, bei der auch das Problem auftritt, ganzzahlige Lösungen einer linearen Gleichung mit mehreren Variablen zu ermitteln. Ähnlich gehe ich hier vor und versuche, durch geeignete Teilbarkeitsbeziehungen eine Lösung zu erhalten:

Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} 12y &= 478 - 17x \\ &= 12 \cdot 39 + 10 - 12x - 5x \end{aligned}$$

und daraus

$$y = 39 - x + \frac{5(2-x)}{12}. \quad (2)$$

Wenn wir annehmen, daß die Aufgabe eine Lösung hat, so ist  $y$  ganzzahlig. Daher gilt

$$12/(2-x),$$

also  $2-x = 12t, \quad t \in \mathbb{G},$

$$x = 2 - 12t, \quad t \in \mathbb{G},$$

und (nach Einsetzen in (2))

$$y = 37 + 17t, \quad t \in \mathbb{G}.$$

Wegen der Forderung  $x > 10$ ,  $y > 10$  muß  $t = -1$ , also  $x = 14$ ,  $y = 20$  sein. Diese (einzige) Lösung der Aufgabe bestätigt sich durch Einsetzen in (1).

Bei der Besprechung ergeben sich weitere Lösungswege. Vielleicht findet ihr noch andere Vorschläge zur Behandlung der Aufgabe?

Der AG-Leiter, Herr Kermer, faßt die Diskussion zusammen und zeigt einen neuen Lösungsweg. Wir erfahren hierbei, daß die lineare Gleichung

$$ax + my = b \text{ mit der zusätzlichen Forderung } x \in \mathbb{G}, y \in \mathbb{G} \quad (3)$$

als diophantische Gleichung bezeichnet wird.

Betrachtet man die diophantische Gleichung (3) nach dem Modul  $m$ , so entsteht die lineare Kongruenz

$$ax \equiv b(m). \quad (4)$$

Falls nun (3) überhaupt eine Lösung  $(x_0, y_0)$  besitzt, so ist  $x_0$  offenbar Lösung von (4). Sogleich ergibt sich die Frage: Wie kann man die Existenz von Lösungen für (3) oder auch (4) feststellen?

Gemeinsam behandeln wir den nachstehenden Satz, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (3) angibt.

Satz: Die lineare Kongruenz  $ax \equiv b(m)$  ist lösbar genau dann, wenn  $(a, m) | b$ .

Beweis: 1) Wenn  $ax \equiv b(m)$  lösbar ist, so gilt  $(a, m) | b$ . Denn für die (n. V. existierende) Lösung  $x_0$  von (4) gilt notwendig  $ax_0 - t_0m = b$  für ein gewisses  $t_0 \in \mathbb{G}$ . (5) Ist nun  $d = (a, m)$ , so folgt  $d | (ax_0 - t_0m)$  und somit aus (5)  $d | b$ .

2) Wenn  $(a, m) | b$ , so ist  $ax \equiv b(m)$  lösbar. Wegen  $d = (a, m)$  gelten die Beziehungen  $a = da_0$ ,  $m = dm_0$ ,  $b = db_0$  mit  $a_0, m_0, b_0 \in \mathbb{N}$ ,  $(a_0, m_0) = 1$ .

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus kann man ganze Zahlen  $x', y'$  finden, für die gilt  $a_0x' + m_0y' = 1$ .

Nach Multiplikation mit  $b_0$  folgt

$$a_0(x'b_0) + m_0(y'b_0) = b_0.$$

Somit ist  $x_0 = x'b_0$ ,  $y_0 = y'b_0$  eine (ganzzahlige)

Lösung der Gleichung

$$a_0x + m_0y = b_0 \quad (\text{und damit von } a_0x \equiv b(m_0))$$

oder  $(da_0)x + (dm_0)y \equiv db_0$ , d. h. von  $ax + my = b$  und damit von  $ax \equiv b(m)$ , w. z. b. w.

Nun lösen wir die diophantische Gleichung (1) mit Hilfe einer Zahlenkongruenz. Zunächst überprüfen wir, ob (1) eine (ganzzahlige) Lösung besitzt.

Wegen  $(12, 17) = 1$  und  $1/478$  finden wir die Existenz einer Lösung von (1) bestätigt.

Wir betrachten nun (1) nach dem Modul 12 und erhalten  $5x \equiv 10(12)$  bzw.  $x \equiv 2(12)$  oder  $x = 2 + 12t$ ,  $t \in \mathbb{G}$ . (6a)

Setzen wir (6a) in (1) ein, so ergibt sich

$$y = 37 - 17t, \quad t \in \mathbb{G}. \quad (6b)$$

Wegen der Positivität von  $x$  und  $y$  muß  $t \in \{0, 1, 2\}$  sein. Von diesen Werten für  $t$  kommt jedoch wegen der Forderung  $x > 10$ ,  $y > 10$  nur  $t = 1$  (mit  $x = 14$ ,  $y = 20$ ) in Frage.

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in (1) überzeugen wir uns von der Richtigkeit der erhaltenen Lösung.

Es sind also 20 Stollen zu 12 M und 14 Stollen zu 17 M verkauft worden.

Wir lösen noch einige Kongruenzen nach diesem Verfahren. Dann besprechen wir die *Hausaufgabe*. Sie besteht im Kennenlernen der Bruchdarstellung von Kongruenzen und fordert das Studium von Abschnitt 4.7. in *Lehmann, E.: Übungen für Junge Mathematiker* (Mathematische Schülerbücherei, Nr. 36).

# Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen

## Wir wiederholen

Im Mathematikunterricht der Klasse 6 erarbeiteten wir uns die Begriffe „ist Teiler von“, Primzahl und Primfaktorzerlegung:

**Definition 1:** Die von 0 verschiedene natürliche Zahl  $t$  heißt Teiler der natürlichen Zahl  $n$ , falls mit einer geeigneten natürlichen Zahl  $k$  die Gleichung  $n = kt$  gilt.

Wir erinnern uns, daß für „ $t$  ist Teiler von  $n$ “ das Zeichen  $t|n$  und für „ $t$  ist nicht Teiler von  $n$ “ das Zeichen  $t \nmid n$  verwendet wird.

**Definition 2:** Besitzt die natürliche Zahl  $p$  genau zwei Teiler, so heißt  $p$  Primzahl.

Die Menge der Teiler einer Primzahl  $p$  ist  $\{1, p\}$ . Wir wissen, daß mittels des „Siebes des Eratosthenes“ die Primzahlen in der Menge der natürlichen Zahlen bestimmt werden können. Der Größe nach geordnet, beginnt die Folge der Primzahlen mit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Wie bereits Euklid beweisen konnte, gibt es unendlich viele Primzahlen. Weiterhin lernten wir im Unterricht den folgenden Satz kennen:

**Satz 1' (Existenzsatz der Primfaktorzerlegung):** Jede natürliche Zahl  $n > 1$  läßt sich auf mindestens eine Weise als Produkt von Primfaktoren darstellen:  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ . Hierbei sind  $p_1, p_2, \dots$  und  $p_r$  nicht notwendig voneinander verschiedene Primzahlen. Für  $r=1$  soll insbesondere die angegebene Formel  $n=p_1$  bedeuten.

Mittels des Potenzbegriffes lassen sich die Teilprodukte gleicher Primfaktoren in einer Primfaktorzerlegung jeweils zu einer Potenz zusammenfassen:

**Definition 3:** Die Potenz  $a^n$  (gelesen „ $a$  hoch  $n$ “) ist für jede reelle Zahl  $a$  und für jede natürliche Zahl  $n$  erklärt durch

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \\ a^n = a^{n-1} \cdot a \quad \text{für } n > 0.$$

$a$  heißt Basis und  $n$  Exponent der Potenz  $a^n$ . Aus Definition 3 ergibt sich schrittweise:

$$a^0 = 1 \\ a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \\ \dots$$

Mittels Definition 3 kann dem Satz 1' die folgende Fassung gegeben werden:

**Satz 1'' (Existenzsatz der Primfaktorzerlegung):** Jede natürliche Zahl  $n > 1$  läßt sich auf mindestens eine Weise als Produkt von Potenzen, deren Basen paarweise voneinander verschiedene Primzahlen sind, darstellen:

$$n = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \dots \cdot q_s^{n_s}.$$

Dabei sind  $q_1, q_2, \dots$  und  $q_s$   $s$  paarweise voneinander verschiedene Primzahlen und  $n_1, n_2, \dots$  und  $n_s$  sind  $s$  von 0 verschiedene natürliche Zahlen.

Bei manchen Betrachtungen, bei denen die Primfaktorzerlegungen mehrerer natürlicher Zahlen eine Rolle spielen, ist es von Vorteil, für die in der Darstellung  $n = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \dots \cdot q_s^{n_s}$  von Satz 1'' vorkommenden Exponenten  $n_1, n_2, \dots$  und  $n_s$  die Forderung  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_s \neq 0$  fallen zu lassen. Solche Darstellungen wollen wir „Primfaktorzerlegung im erweiterten Sinne“ nennen. Man kann ja für mehrere natürliche Zahlen stets Primfaktorzerlegungen im erweiterten Sinn angeben, in denen durchweg formal dieselben Primfaktoren auftreten. Dies sei am Beispiel von Primfaktorzerlegungen im erweiterten Sinn von 12 und 50 gezeigt:

$$12 = 2^2 \cdot 3^1 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \\ 50 = 2^1 \cdot 5^2 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2$$

**Wir betrachten Primfaktorzerlegungen der natürlichen Zahl 700.** Um eine Primfaktorzerlegung von 700 zu erhalten, prüfen wir zunächst, ob die kleinste Primzahl 2 Teiler von 700 ist. Wenn  $700 = 2 \cdot 350$  ist dies der Fall. Der andere Faktor gestattet wiederum, die kleinste Primzahl 2 als Faktor abzuspalten:

$700 = 2 \cdot 2 \cdot 175$ . Für den Faktor 175 als ungerade Zahl gilt jedoch  $2 \nmid 175$ . Auch für die auf 2 folgende Primzahl 3 gilt  $3 \nmid 175$ , denn die Quersumme  $1+7+5=13$  von 175 ist nicht durch 3 teilbar. Hingegen gilt für die auf 3 folgende Primzahl:  $5|175$ . Damit ergibt sich  $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 35$ . Der Faktor 35 kann natürlich die Primzahlen 2 und 3 nicht zu Teilern haben, denn sonst müßte wegen  $5 \cdot 35 = 175$  im Gegensatz zu unseren obigen Feststellungen  $2|175$  oder  $3|175$  gelten. Jedoch gilt  $5|35$ . Damit ergibt sich  $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ . Der Faktor 7 ist selbst Primzahl. Also ist

(1)  $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1$   
eine Primfaktorzerlegung von 700. Durch

das eben angewandte systematische Verfahren wird für jede natürliche Zahl  $n > 1$  eine besondere Primfaktorzerlegung, eine normierte Primfaktorzerlegung erhalten. Für das Definieren des Begriffes „normierte Primfaktorzerlegung“ bieten sich zwei Möglichkeiten an:

**Definition 4':** Eine Primfaktorzerlegung  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$  der natürlichen Zahl  $n > 1$ , in der  $p_1, p_2, \dots$  und  $p_r$  den Ungleichungen  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$  genügende Primzahlen sind, heißt normierte Primfaktorzerlegung von  $n$ .

**Definition 4'':** Eine Primfaktorzerlegung  $n = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \dots \cdot q_s^{n_s}$  der natürlichen Zahl  $n$ , in der  $n_1, n_2, \dots$  und  $n_s$  von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind und  $q_1, q_2, \dots$  und  $q_r$  den Ungleichungen  $q_1 < q_2 < \dots < q_s$  genügende Primzahlen sind, heißt normierte Primfaktorzerlegung.

Unter Beachtung von Definition 3 sind die Definitionen 4' und 4'' äquivalent, d. h. aus jeder von beiden folgt die andere. Durch ein zweckmäßigeres Vorgehen als das oben angewandte erhält man u. U. wesentlich schneller eine Primfaktorzerlegung:

So überblickt man sofort, daß 700 als Produkt  $7 \cdot 10 \cdot 10$  darstellbar ist. Mit  $10 = 2 \cdot 5$  ergibt sich damit schließlich:

$$(2) \quad 700 = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$$

Die jetzt für 700 erhaltene Primfaktorzerlegung (2) unterscheidet sich von der Zerlegung (1). Allerdings kommen in beiden Zerlegungen die gleichen Primfaktoren vor, und jeder Primfaktor kommt jeweils gleich oft vor. Auf Grund dieser Feststellung können wir durch Umordnen (Anwenden des Kommutations- und Assoziationsgesetzes der Multiplikation) die Zerlegung (2) in die Zerlegung (1) überführen:  $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ . Das Betrachten weiterer analoger Beispiele läßt uns die Gültigkeit des folgenden Satzes vermuten:

**Satz 2 (Eindeutigkeitssatz der Primfaktorzerlegung):** Jede natürliche Zahl  $n > 1$  besitzt höchstens eine normierte Primfaktorzerlegung.

Dieser Unitätssatz der Primfaktorzerlegung ist eine wahre Aussage. Doch wollen wir den Beweis des Unitätssatzes 2 zunächst zurückstellen. Vorerst wollen wir zeigen, welche wertvollen Erkenntnisse aus dem Unitätssatz der Primfaktorzerlegung erschlossen werden können.

Daß sich übrigens Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Primfaktorzerlegung zu einem Satz zusammenfassen lassen, überblicken wir sofort:

**Satz 3 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Primfaktorzerlegung):**

Jede natürliche Zahl  $n > 1$  besitzt genau eine normierte Primfaktorzerlegung.

**Wir betrachten Primfaktorzerlegungen des Produktes zweier natürlicher Zahlen.**

Um die normierte Primfaktorzerlegung von

108 · 126 anzugeben, ist es nicht nötig, dieses Produkt zu berechnen. Vielmehr ist es einfacher, zunächst die normierten Primfaktorzerlegungen der Faktoren aufzustellen:

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Durch Multiplizieren der rechten und linken Seiten beider Gleichungen ergibt sich eine Primfaktorzerlegung von 108 · 126:

$$108 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Durch Umordnen erhalten wir die normierte Primfaktorzerlegung von 108 · 126:

$$(3) \quad 108 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^1$$

Um zu erkennen, wie diese Primfaktorzerlegung aus den Primfaktorzerlegungen von 108 und 126 entsteht, stützen wir uns auf geeignete normierte Primfaktorzerlegungen im erweiterten Sinn:

$$108 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^0$$

$$126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

Aus diesen beiden Darstellungen folgt die Formel (3) auf Grund des folgenden, mittels Definition 3 leicht zu beweisenden Satzes:

**Satz 4:** Ist  $a$  eine reelle Zahl und sind  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen, so gilt  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ . Allgemein gilt:

**Satz 5:** Haben die natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$  die normierten Primfaktorzerlegungen im erweiterten Sinn

$$m = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \dots \cdot q_s^{m_s} \text{ und}$$

$$n = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \dots \cdot q_s^{n_s}$$

mit  $m_1 + n_1 > 0$ ,  $m_2 + n_2 > 0$ , ... und  $m_s + n_s > 0$ , so besitzt das Produkt  $mn$  die normierte Primfaktorzerlegung

$$mn = q_1^{m_1+n_1} \cdot q_2^{m_2+n_2} \cdot \dots \cdot q_s^{m_s+n_s}.$$

Mittels der bereitgestellten Sätze lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

**Aufgabe 1:** Zeige, daß in der normierten Primfaktorzerlegung von 217 · 1342 der Primfaktor 3 nicht vorkommt!

**Aufgabe 2:** Zeige, daß die normierte Primfaktorzerlegung von 1324 · 5114 den Primfaktor 2 genau dreimal enthält!

**Wir betrachten die normierte Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl.**

Die Zahlen 0, 1, 4, 9, 16, 25, ... sind laut folgender Definition die Quadratzahlen.

**Definition 5:** Eine natürliche Zahl  $n$  heißt Quadratzahl, falls es eine natürliche Zahl  $m$  gibt, so daß  $n = m^2$  gilt. Wir wollen zunächst die normierte Primfaktorzerlegung der Quadratzahl  $509^2$  ermitteln. Wegen  $509 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$  ergibt sich nach Definition 3 und Satz 5:

$$509^2 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1)^2 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1)$$

$$(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^2$$

Die Exponenten 6, 4 und 2 der normierten Primfaktorzerlegung von  $509^2$  sind sämtlich gerade Zahlen. Dies gilt allgemein:

**Satz 6:** Die Exponenten der normierten Primfaktorzerlegung einer von 0 und 1 ver-

schiedenen Quadratzahl sind sämtlich gerade Zahlen.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist wahr:

**Satz 7:** Besitzt die normierte Primfaktorzerlegung einer von 0 und 1 verschiedenen natürlichen Zahl nur gerade Exponenten, so ist die natürliche Zahl Quadratzahl.

Dieser Satz wird durch die Feststellung bewiesen, daß  $n = q_1^{2n_1} \cdot q_2^{2n_2} \cdot \dots \cdot q_s^{2n_s}$ , wobei  $n_1, n_2, \dots$  und  $n_s$  sämtlich von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind und  $q_1, q_2, \dots$  und  $q_s$  den Ungleichungen  $q_1 < q_2 < \dots < q_s$  genügende Primzahlen sind, das Quadrat der natürlichen Zahl  $m = q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \dots \cdot q_s^{n_s}$  ist.

Wir wollen unsere Kenntnisse anwenden, indem wir die folgende Aussage beweisen:

Es gibt keine gebrochene Zahl  $x$ , die der Gleichung  $x^2 = 11$  genügt.

Indirekter Beweis: Angenommen, es gäbe eine gebrochene Zahl  $x$ , für die  $x^2 = 11$  gilt. Da  $x$  eine gebrochene Zahl ist, gibt es zwei geeignete natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  mit  $n \neq 0$ , so daß gilt

$$x = \frac{m}{n}. \text{ Durch Einsetzen von } x = \frac{m}{n}$$

$$\text{in } x^2 = 11 \text{ ergibt sich: } \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 11$$

Hieraus folgt schrittweise

$$\frac{m^2}{n^2} = 11 \text{ und } m^2 = 11n^2.$$

Da  $n^2$  Quadratzahl ist, enthält  $n^2$  den Primfaktor 11 entweder überhaupt nicht oder in einer geraden Anzahl. Die natürliche Zahl  $11n^2$  enthält demnach den Primfaktor 11 in einer ungeraden Anzahl und kann also nach Satz 6 keine Quadratzahl sein. Also kann die Gleichung  $m^2 = 11n^2$  nicht gelten. Da sich ein Widerspruch ergeben hat, ist die Annahme, die zu beweisende Aussage sei falsch, selbst falsch.

Wiederum lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

**Aufgabe 3:** Beweise indirekt; Es gibt keine gebrochene Zahl  $x$ , die der Gleichung  $x^2 = \frac{25}{8}$

genügt.

**Aufgabe 4:** Beweise: Die normierte Primfaktorzerlegung einer von 0 und 1 verschiedenen Kubikzahl (darstellbar als Potenz mit Exponent 3, deren Basis eine natürliche Zahl ist) besitzt nur durch 3 teilbare Exponenten.

**Aufgabe 5:** Beweise indirekt: Es gibt keine gebrochene Zahl  $x$ , die der Gleichung  $x^3 = 4$  genügt.

**Aufgabe 6:** Gib die normierte Primfaktorzerlegung von  $10^n$  an, wobei  $n$  eine von 0 verschiedene natürliche Zahl ist!

**Wir betrachten die sämtlichen Teiler einer natürlichen Zahl und ihre normierten Primfaktorzerlegungen.**

Als Beispiel orientieren wir uns an der natürlichen Zahl  $n = 540$ . Diese besitzt die normierte Primfaktorzerlegung  $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ . Gemäß Definition 1 heißt eine natürliche Zahl  $t \neq 0$  genau dann Teiler der natürlichen Zahl  $n$ , falls mit einer geeigneten natürlichen Zahl  $k$   $tk = n = 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$  gilt. Nach Satz 5 ergibt sich für die nach Satz 3 vorhandene und eindeutig bestimmte normierte Primfaktorzerlegung jedes von 1 verschiedenen Teilers  $t$  von  $n$ , daß erstens in dieser Primfaktorzerlegung höchstens die Primfaktoren 2, 3 und 5 vorkommen, und daß zweitens diese Primfaktoren in der angegebenen Reihenfolge höchstens zwei-, drei- oder einmal vorkommen. Als Teiler von  $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$  kommen damit höchstens die folgenden Zahlen in Frage:

$$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1 \quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2$$

$$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 5 \quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 10$$

$$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3 \quad 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6$$

$$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15 \quad 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$$

$$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 9 \quad 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 18$$

$$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 45 \quad 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$$

$$2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 27 \quad 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 54$$

$$2^0 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 135 \quad 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 270$$

$$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4$$

$$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20$$

$$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$$

$$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 36$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180$$

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 108$$

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540$$

Hiernach besitzt die natürliche Zahl 540 höchstens 24 Teiler. Die normierten Primfaktorenzerlegungen (im erweiterten Sinn) der als Teiler von 540 in Frage kommenden Zahlen haben die Gestalt  $t = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ , wobei  $x, y$  und  $z$  den Ungleichungen  $x \leq 2$ ,  $y \leq 3$  und  $z \leq 1$  genügende natürliche Zahlen sind. Da unabhängig voneinander für die Wahl der Zahl  $x$  drei Möglichkeiten, nämlich 0, 1 und 2, für die Wahl der Zahl  $y$  vier Möglichkeiten und für die Wahl von  $z$  zwei Möglichkeiten bestehen, ergibt sich 24 als das Produkt  $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ .

Da diese als Teiler von 540 in Frage kommenden 24 Zahlen voneinander verschiedene Primfaktorzerlegungen (im nichterweiterten Sinn) besitzen, müssen diese 24 Zahlen nach Satz 2 (Unitätssatz der Primfaktorzerlegung) voneinander verschieden sein.

Daß umgekehrt diese 24 Zahlen auch Teiler von 540 sind, folgt daraus, daß in jedem Falle gemäß  $tk = n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$  zum jeweiligen  $t = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$  das zugehörige  $k$  als  $k = 2^{2-x} \cdot 3^{3-y} \cdot 5^{1-z}$  angegeben werden kann. Denn dann gilt gemäß Satz 5:

$$tk = (2^x \cdot 3^y \cdot 5^z) (2^{2-x} \cdot 3^{3-y} \cdot 5^{1-z})$$

$$= 2^{x+2-x} \cdot 3^{y+3-y} \cdot 5^{z+1-z} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$$

(In Heft 6/74 erscheint Teil 2, d. Red.)

W. Träger



# Über Ungleichungen

Ungleichungen stellen ein interessantes Gebiet der Mathematik dar, das mathematischen Arbeitsgemeinschaften ein breites Betätigungsfeld bietet. Dieser Bericht soll einige Anregungen zur Beschäftigung mit Ungleichungen geben.

Wir wollen folgende bekannte Tatsache zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen machen:

Das Quadrat einer reellen Zahl ist stets nichtnegativ. Somit gilt für jede reelle Zahl  $x$  die Ungleichung

$$x^2 \geq 0.$$

Wir können  $x = \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}$  setzen, wobei  $a_1$  und  $a_2$  nichtnegative reelle Zahlen sind, und erhalten so die Ungleichungen

$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0,$$

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$$

(1)

und  $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2},$

wobei Gleichheit jeweils genau dann eintritt, wenn  $a_1 = a_2$  ist. Die letztere Ungleichung wird Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel genannt, da man allgemein einen Ausdruck  $A$  der Form

$A = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  als arithmetisches und einen Ausdruck  $G$  der Form

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

als geometrisches Mittel bezeichnet, wobei  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nichtnegative reelle Zahlen sind.

Wir wollen nun unsere grundlegende Ungleichung (1) verallgemeinern und formulieren deshalb folgenden Satz:

Ist  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl und sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nichtnegative reelle Zahlen, so gilt stets die Ungleichung

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (2)$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  ist.

Den Beweis werden wir durch vollständige Induktion führen. (Über vollst. Induktion siehe u. a. „alpha“ 1967 Heft 2 und 3) Für  $n=2$  ist die zu beweisende Ungleichung gerade (1), die wir bereits bewiesen haben.

Wir werden nun den Induktionsschritt von  $n$  auf  $n+1$  durchführen. Der Einfachheit halber setzen wir  $g = \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}$ . Der Ausdruck

$$B = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + [n-1]g)$$

hat genau  $2n$  Summanden, wenn wir für  $(n-1)g$  die Darstellung  $g + g + \dots + g$  wählen. Wir können zweimal unsere Induktionsannahme und anschließend die Ungleichung

(1) anwenden und erhalten

$$B \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + n\sqrt[n]{a_{n+1} g^{n-1}} \geq 2n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n+1} g^{n-1}},$$

d. h.  $B \geq 2n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n+1} g^{n-1}} = 2ng.$

Subtrahieren wir beiderseits  $(n-1)g$ , so bekommen wir schließlich

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = B - (n-1)g \geq 2ng$$

$$- (n-1)g = (n+1)g.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Gleichheit tritt sicher genau dann ein, wenn  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  und  $a_{n+1} = g$ , d. h. wenn  $a_1 = \dots = a_n = a_{n+1}$  ist.

Wir werden nun einige ehemalige Olympiade-Aufgaben unter Verwendung der Ungleichung (2) elegant lösen.

**Aufgabe (2. Olympiade/12. Klasse/2. Stufe)**

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen  $a$  und  $b$  stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ ist.}$$

Da auch  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{b}{a}$  positiv sind, ist nach (1)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{ba}} = 2. \text{ Diese Aufgabe können}$$

wir leicht verallgemeinern:

Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  positive reelle Zahlen, so ist stets

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Dieses Ergebnis kann man auch so formulieren: Ist das Produkt von  $n$  positiven Zahlen gleich 1, so ist ihre Summe nicht kleiner als  $n$ .

Der Beweis verläuft analog zu obigem, nur wird hier die Ungleichung (2) angewandt.

Oftmals muß man vor der Anwendung der Ungleichung (2) den zu beweisenden Ausdruck umformen, wie etwa in folgendem Beispiel.

**Aufgabe (4/12/2):** Es ist zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen  $a$  und  $c$  die Ungleichung  $a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geq 0$  richtig ist.

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Zum Beweis verwenden wir wieder (2) und erhalten

$$a^4 + 3c^4 = |a|^4 + |c|^4 + |c|^4 + |c|^4 \geq 4\sqrt[4]{|a|^4 |c|^4} = 4|a||c|^3 \geq 4ac^3.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $|a| = |c|$  ist und  $a$  und  $c$  gleiche Vorzeichen haben, d. h. wenn  $a = c$  ist. Diese Aufgabe können wir etwa wie folgt verallgemeinern:

Man beweise für nichtnegative Zahlen  $a$  und  $b$  und natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  die Ungleichung:

$$ma^{m+n} - (m+n)a^m b^n + nb^{m+n} \geq 0!$$

Aus (2) folgt sofort die Behauptung

$$ma^{m+n} + nb^{m+n} \geq (m+n)a^m \sqrt[n]{a^{m(n+1)} b^{n(m+1)}} = (m+n)a^m b^n.$$

**Aufgabe (7/12/2):** Beweisen Sie, daß für alle nichtnegativen Zahlen  $a, b, c$ :

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 \sqrt{bc} + b^2 \sqrt{ac} + c^2 \sqrt{ab}$$

gilt! Zunächst ist

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{6}(4a^3 + b^3 + c^3) +$$

$$+ \frac{1}{6}(a^3 + 4b^3 + c^3) + \frac{1}{6}(a^3 + b^3 + 4c^3).$$

Wendet man auf jede der drei Klammern (2) an, erhält man:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{6}\sqrt[3]{4a^3 b^3 c^3} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{a^3 b^3 c^3}$$

$$+ \frac{1}{6}\sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} = a^2 \sqrt{bc} + b^2 \sqrt{ac} + c^2 \sqrt{ab}$$

und damit ist die Behauptung bereits bewiesen. Gleichheit tritt dabei genau dann ein, wenn  $a = b = c$  ist.

Mit dem gleichen Beweisverfahren können wir folgende Verallgemeinerung beweisen:

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n \geq a_1^{n-1} \sqrt[n]{a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$+ a_2^{n-1} \sqrt[n]{a_1 \dots a_{n-1}}$$

$$+ a_3^{n-1} \sqrt[n]{a_1 \dots a_{n-2} a_n}$$

$$+ \dots + a_n^{n-1} \sqrt[n]{a_1 \dots a_{n-1}}$$

seien dabei nichtnegative reelle Zahlen.

Bei einer Reihe von Aufgaben muß neben der Anwendung von (2) noch eine Hilfsungleichung bewiesen werden, wie etwa in folgendem Beispiel:

**Aufgabe (3/12/4):** Beweisen Sie, daß für alle positiven ganzzahligen Zahlen  $a$  und  $b$  stets

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[2]{a^a b^b} \text{ ist!}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Nach (1) ist  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ . Wenn wir gezeigt haben, daß

$$\sqrt{ab} \geq \sqrt[2]{a^a b^b} \text{ ist, haben wir den geforderten Beweis erbracht.}$$

O. B. d. A. sei  $a \geq b$  und somit ist  $a^{a-b} \geq b^{a-b}$ , d. h.  $a^{a-b} b^{b-a} \geq 1$ . Schließlich ist  $a^{a+b} b^{a+b} = a^{2b} a^{a-b} b^{a-b} b^{2a} \geq a^{2b} b^{2a}$  und damit ist auch die Behauptung bewiesen.

Mittels der Ungleichung (2) kann man auch Unmöglichkeitsbeweise erbringen, wie etwa in folgendem Beispiel.

**Aufgabe (Vorolympiade 1960 Berlin/Leipzig):** Man beweise, daß die Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz$$

keine positiven Lösungen haben kann!

Den Beweis führen wir indirekt, d. h. wir nehmen an, daß die gegebene Gleichung positive Lösungen hat. Dann ist aber nach (2)  $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} = 3xyz$ , und damit  $2xyz \geq 3xyz$ .

Wegen  $x > 0$ ,  $y > 0$  und  $z > 0$  ist auch  $xyz > 0$  und somit würde folgen  $2 \geq 3$ , was den gesuchten Widerspruch darstellt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

**Aufgabe (1/12/4):** Es seien  $u$ ,  $v$  und  $w$  beliebige gewählte positive Zahlen, kleiner als 1. Man soll zeigen, daß unter den Zahlen  $u(1-v)$ ,  $v(1-w)$  und  $w(1-u)$  stets mindestens ein Wert nicht größer als  $\frac{1}{4}$  vorkommt.

Den Beweis führen wir ebenfalls indirekt, d. h. wir nehmen an, es sei  $u(1-v) > \frac{1}{4}$ .

$$v(1-w) > \frac{1}{4} \text{ und } w(1-u) > \frac{1}{4}.$$

Wegen  $0 < u < 1$ ,  $0 < v < 1$  und  $0 < w < 1$  ist nach (1)

$$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} < \sqrt{u(1-v)} = \frac{u+1-v}{2}$$

und analog

$$\frac{1}{2} < \frac{v+1-w}{2} \text{ und } \frac{1}{2} < \frac{w+1-u}{2}.$$

Addieren wir diese drei Ungleichungen, so erhalten wir den Widerspruch  $\frac{3}{2} < \frac{3}{2}$ .

Wir wollen nun einige einfache Extremalaufgaben betrachten, die wir mit der Ungleichung (2) lösen werden.

**Aufgabe:** Unter allen Quadern mit dem Volumen  $V$  bestimme man denjenigen, der die kleinste Oberfläche  $O$  hat.

**Lösung:** Die Längen der drei senkrecht aufeinanderstehenden Kanten seien  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Dann ist  $V = abc$  und  $O = 2(ab + bc + ca)$ .

Nach (2) gilt  $\frac{0}{2} = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3\sqrt[3]{V^2}$ , d. h.  $0 \geq 6\sqrt[3]{V^2}$ .  $V$  ist eine Konstante, d. h.  $O$  wird minimal, wenn Gleichheit eintritt. Das ist aber genau dann der Fall, wenn  $ab = bc = ca$ , d. h.  $a = b = c$  ist. Der Würfel ist also der gesuchte Quader. Ganz analog könnte man sich eine Oberfläche oder eine Kantensumme vorgeben und den Quader mit maximalem Volumen suchen.

Etwas komplizierter wird die Lösung, wenn wir unter alle Quadern mit der Kantensumme  $k$  denjenigen bestimmen wollen, der die kleinste Oberfläche hat.

Es ist  $k = 4(a + b + c)$  und  $O = 2(ab + bc + ca)$

$$\text{und ferner } \left(\frac{k}{4}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$+ 2ab + 2bc + 2ca.$$

Nach (1) folgt

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = ab, \quad \frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac, \quad \frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc.$$

Somit erhalten wir:

$$\left(\frac{k}{4}\right)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = \frac{O}{2},$$

$$\text{d. h. } O \leq \frac{k^2}{24}.$$

Die Oberfläche  $O$  wird also maximal, wenn

$$O = \frac{k^2}{24} \text{ ist, d. h. wenn } a = b = c \text{ ist.}$$

Natürlich brauchen wir uns nicht auf einen Quader zu beschränken.

**Aufgabe:** Man bestimme unter allen Dreiecken mit dem Umfang  $u$  dasjenige mit dem größten Flächeninhalt  $A$ .

**Lösung:** Die Seiten des Dreiecks seien  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Dann ist  $u = a + b + c$  und nach der Heronischen Dreiecksformel

$$A = \sqrt{\frac{u}{2} \left(\frac{u}{2} - a\right) \left(\frac{u}{2} - b\right) \left(\frac{u}{2} - c\right)}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung ist

$$\frac{u}{2} - a > 0, \quad \frac{u}{2} - b > 0 \text{ und } \frac{u}{2} - c > 0.$$

Nach (2) folgt somit

$$\sqrt{\frac{u}{2} \left(\frac{u}{2} - a\right) \left(\frac{u}{2} - b\right) \left(\frac{u}{2} - c\right)} \leq$$

$$\frac{\frac{u}{2} - a + \frac{u}{2} - b + \frac{u}{2} - c}{3} = \frac{u}{6} \text{ und weiter}$$

$$A \leq \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \frac{u^3}{6^3}} = \frac{u^2}{36} \sqrt{3}. A \text{ wird also ma-}$$

ximal, wenn  $a = b = c$  ist.

Wir wollen nunmehr eine weitere wichtige Ungleichung betrachten. Ist  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl und sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  positive reelle Zahlen, so wird der Ausdruck

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

als harmonisches Mittel bezeichnet.

Das harmonische Mittel von  $n$  positiven Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ist stets nicht größer als ihr geometrisches Mittel, d. h.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (3)$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn

$a_1 = a_2 = \dots = a_n$  ist. Wenden wir die Ungleichung (2) auf die positiven Zahlen

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n} \text{ an, so erhalten wir sofort (3),}$$

wovon sich der Leser überzeugen kann.

Es sei noch bemerkt, daß natürlich auch das harmonische Mittel stets nicht größer als

das arithmetische ist. Auch hier tritt genau dann Gleichheit ein, wenn  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  ist. Die Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (4)$$

folgt aus den Ungleichungen (2) und (3) wegen der Transitivität. Mit der Ungleichung (4) läßt sich die

**Aufgabe (6/10/3):** Man beweise für positive reelle  $a, b, c$  die Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c},$$

recht kurz lösen, denn nach (4) ist

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

woraus wir sofort die gewünschte Beziehung erhalten. Formen wir die Ungleichung (4) um, so bekommen wir folgende interessante Ungleichung

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2. \text{ Ist uns}$$

eine der beiden Summen bekannt, so erhalten wir sofort eine Abschätzung für die andere.

Wählen wir eine reelle Zahl  $x$  mit  $x \neq \frac{\pi}{2} m$ ,

wobei  $m$  eine ganze Zahl ist, dann ist  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  und  $\sin^2 x > 0$  und  $\cos^2 x > 0$  und somit folgt aus

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) \left( \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) \geq 2^2$$

schließlich

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 4.$$

Die Reihe der Aufgaben, zu deren Lösung man die Ungleichung (2) anwenden kann, könnte man beliebig fortsetzen, aber sicher reichen schon diese wenigen Beispiele aus, um Nützlichkeit und Vielfalt der Anwendungsbereiche zu demonstrieren.

H.-D. Gronau (Kurzbiographie siehe S. 118)



Autorenkollektiv, 183 Seiten, zahlreiche Abb., Preis 9,80 M

Aus dem Inhalt:

Immer und überall: Sicherheit!  
Der Mensch im Straßenverkehr  
Der gesunde und der kranke Verkehrsteilnehmer  
Technik und Verkehrssicherheit



Transpress

VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin

Dieses Buch ist Grundlage für den Artikel auf Seite 112

# Die stereographische Projektion

## Teil 2

E. Schröder



### 6. Erzeugung von Paaren sich ergänzender Kreisbüschel durch stereographische Projektion

Für die folgenden Untersuchungen stellen wir uns die Kugelfläche  $\kappa$  mit einem Netz von Längen- und Breitenkreisen überzogen vor. Ferner wird  $\kappa$  so auf  $\pi$  gelegt, daß sich  $\kappa$  und  $\pi$  in einem Punkt  $W$  des Äquators berühren. Der diametral gegenüberliegende Äquatorpunkt  $Z$  ist das Projektionszentrum. Damit ist die stereographische Projektion von  $\kappa$  auf  $\pi$  festgelegt. In der Kartographie bezeichnet man den hier vorliegenden Abbildungsvorgang als einen querachsigen, transversalen oder äquatorständigen Kartentwurf. (siehe Titelblatt)

Zunächst fragen wir nach dem Bild der Meridiankreise. Sie stellen auf  $\kappa$  eine Schar von Großkreisen dar, die sich sämtlich in  $N$  und  $S$  schneiden. Folglich gehen die Bildkreise der Meridiane durch die Bildpunkte  $N'$  und  $S'$ . Ein Sonderfall ist der durch  $Z$  (und  $W$ ) gehende Meridian. Dieser bildet sich auf die Verbindungsgerade  $f=f(N'S')$  ab. Aus Gründen der Symmetrie liegen die Mitten der Bildkreise auf der Symmetrale  $e$  der Strecke  $N'S'$ . Die Menge der den Meridianen zugeordneten Bildkreise bilden in  $\pi$  ein

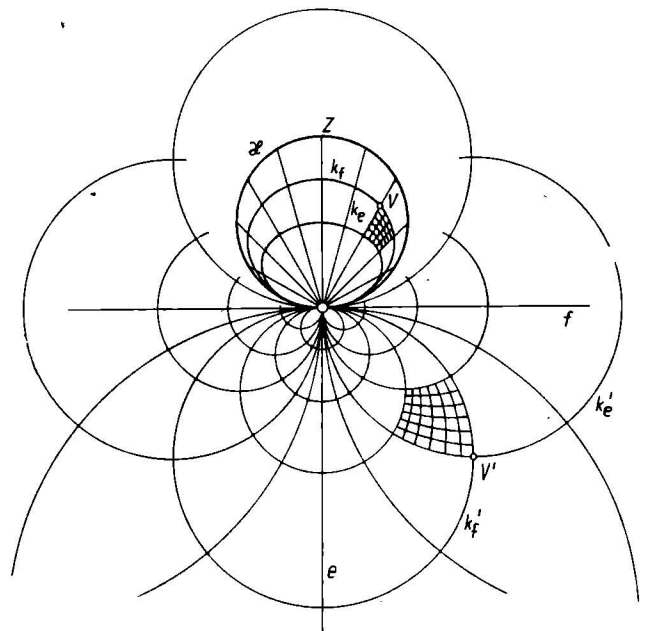
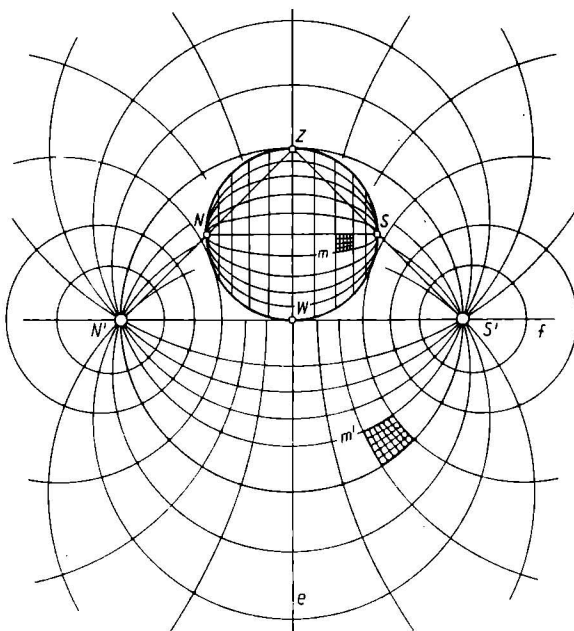
elliptisches Kreisbüschel. Zu dem Bild  $m'$  eines Meridiankreises  $m$  allgemeiner Lage findet man den Mittelpunkt, indem man das Lot von  $Z$  auf die Ebene durch  $m$  fällt und dieses Lot mit der Bildebene  $\pi$  schneidet. Dieser auf  $e$  liegende Schnittpunkt ist der Mittelpunkt von  $m'$ . Nun sind noch die Bilder der Schar von Breitenkreisen zu ermitteln. Auf Grund der Kreistreue der Abbildung müssen diese eine zweite Schar von Kreisen in  $\pi$  ergeben. Wegen der Winkeltreue schneidet das Bild jedes Breitenkreises jeden Kreis des vorliegenden elliptischen Büschels senkrecht, denn das Gradnetz auf  $\kappa$  bildet ein orthogonales Netz. Da ferner je zwei Breitenkreise auf  $\kappa$  keinen Punkt gemeinsam haben, dürfen sich auch je zwei Bildkreise der zweiten Schar in  $\pi$  nicht schneiden.

Die Mittelpunkte der Kreise dieser Schar liegen auf der Verbindungsgeraden  $f=f(N'S')$ . Sie ergeben sich wieder als Bilder der zu den Breitenkreisen gehörigen Spitzen von Tangentialkegeln. Man kann sich also konstruktiv sehr leicht den Mittelpunkt und einen weiteren auf  $f$  liegenden Kreispunkt zur Konstruktion eines Kreises aus dem zweiten Büschel verschaffen. Die Menge der so konstruierten Kreise bildet ein hyper-

bolisches Kreisbüschel. Diesem gehören auch die Bilder der Punkte  $N$  und  $S$  an. Dies sind die Nullkreise des hyperbolischen Büschels. Da sie zugleich auch die Trägerpunkte des vorliegenden elliptischen Büschels darstellen, liegt hier ein Paar sich ergänzender Kreisbüschel vor. Der Äquator bildet sich auf die Symmetrale  $e$  ab. Dies ist die Zentrale des elliptischen Kreisbüschels.

Das Bild dieses Paares sich ergänzender Kreisbüschel läßt auch eine physikalische Interpretation zu. Bringt man in  $N'$  und  $S'$  je eine elektrische Punktladung an, die dem Betrag nach gleich sind und entgegengesetztes Vorzeichen besitzen, so entsteht in einer Ebene durch  $N'$  und  $S'$  ein Netz von Linien. Die Kraftlinien decken sich mit den Kreislinien des elliptischen, die Äquipotentiallinien mit den Kreislinien des hyperbolischen Büschels. Aus der Dichte der Feldlinien kann auf die relative Stärke des Feldes in einem Punkt geschlossen werden.

Die stereographische Projektion soll den Zugang zu einem weiteren Paar sich ergänzender Kreisbüschel öffnen, das gleichfalls wegen der physikalischen Anwendbarkeit von Interesse ist. Die sich in  $W$  senkrecht schneidenden Geraden  $e$  und  $f$  machen wir zu Trägern von je einem Ebenenbüschel  $\{e\}$  und  $\{f\}$ . Diese schneiden die Kugelfläche  $\kappa$  nach je einer Schar von Kreisen  $\{k_e\}$  und  $\{k_f\}$ . Die Kreise der Schar  $\{k_e\}$  besitzen  $e$  als gemeinsame Tangente in  $W$ . Die Kreise der Schar  $\{k_f\}$  besitzen  $f$  als gemeinsame Tangente in  $W$ . Da sich  $e$  und  $f$  senkrecht schneiden, schneidet auch jeder Kreis der einen Schar jeden der anderen senkrecht in  $W$ . Offenbar schneidet auch jeder Kreis der einen Schar jeden Kreis der anderen auf  $\kappa$  in einem von  $W$  verschiedenen Punkt. Uns interessiert der Schnittwinkel von je einem Kreis aus  $\{k_e\}$  und  $\{k_f\}$  in dem von  $W$  verschiedenen Punkt  $V$ . Die Spitze  $E$  des



Tangentialkegels an  $\kappa$  in  $k_e$  liegt auf  $f$ . Die Spitze  $F$  des Tangentialkegels an  $\kappa$  in  $k_f$  liegt auf  $e$ . Legt man durch  $E$ ,  $F$  und den Mittelpunkt von  $\kappa$  eine Ebene  $\sigma$ , so muß der zweite Schnittpunkt  $V$  von  $k_e$  und  $k_f$  symmetrisch zu  $W$  bezüglich  $\sigma$  liegen. Wegen der bestehenden Symmetrie müssen sich  $k_e$  und  $k_f$  in  $V$  gleichfalls senkrecht schneiden. (s. Abb.).

Diese Feststellungen helfen weiter zur Beschreibung der in  $\pi$  liegenden Bilder von  $\{k_e\}$  und  $\{k_f\}$ . Wegen der Kreistreue der Projektion stellt  $\{k'_e\}$  ein Büschel von Kreisen dar, die  $e$  in  $W$  berühren. Entsprechendes gilt für  $\{k'_f\}$ . Wegen der Winkeltreue der Abbildung schneidet jeder Kreis des einen Büschels jeden Kreis des anderen Büschels in  $W$  und in je einem von  $W$  verschiedenen Punkt  $V'$  senkrecht. Jedes Kreisbüschel stellt für sich ein parabolisches dar. Auf Grund der besonderen Lageverhältnisse handelt es sich hier um ein Paar sich ergänzender parabolischer Kreisbüschel. Bei einem Dipol bilden die Scharen von Kraftlinien und Äquipotentiallinien ein Paar sich ergänzender parabolischer Kreisbüschel.

Die hier unter völligem Verzicht auf Mittel der Analysis abgehandelte stereographische Projektion wurde bereits von dem griechischen Astronomen Hipparch von Nikaia (190–125 v. Ztr.) zur bildhaften Darstellung der Himmelskugel angewandt. Um 160 n. Ztr. übernahm sie Claudius Ptolemäus bei Aufstellung von Erd- und Himmelskarten für seinen berühmten Almagest. Als Entdecker der Kreistreue ist Jordanus Nemorarius (um 1250) zu nennen. Die Bezeichnung „stereographische Projektion“ geht auf den Franzosen François d'Aiguillon (1613) zurück.

Abbildungen, bei denen die Schnittwinkel von Kurven erhalten bleiben, bezeichnet man als „konforme Abbildungen“. Diese spielen in der Funktionentheorie eine wichtige Rolle und lassen vielfältige Anwendungen zu. Konforme Abbildungen haben die Eigenschaft, im Kleinen ähnlich zu sein. Die stereographische Projektion findet – unter günstiger Anpassung des Punktes  $W$  an die Lage des abzubildenden Kugelausschnittes – in den amtlichen Kartenwerken der Niederlande sowie der Volksrepubliken Polen, Ungarn und Rumänien Anwendung. Auch in der Kristallographie bedient man sich dieser Abbildungsart.

Die Mehrzahl der gebräuchlichsten kartographischen Abbildungen lassen sich nicht, wie hier, auf eine Zentral- oder Parallelprojektion zurückführen. Man kann dafür lediglich Abbildungsgleichungen angeben. Eigenschaften solcher Abbildungen können nur mit den Mitteln der Analysis erschlossen werden. Man spricht dann auch von einem Kartenentwurf und nicht von einer Projektion. Am bekanntesten ist wohl der Mercator-Entwurf, benannt nach dem Geographen

Gerhard Mercator, 1512–1594. Dieser besitzt gleichfalls die Eigenschaft der Winkeltreue und führt Kugelloxodromen (Linien fester Himmelsrichtung) in Geraden über. Karten dieser Art finden in der Seefahrt vielfältig Anwendung und werden deshalb auch Seekarten genannt.

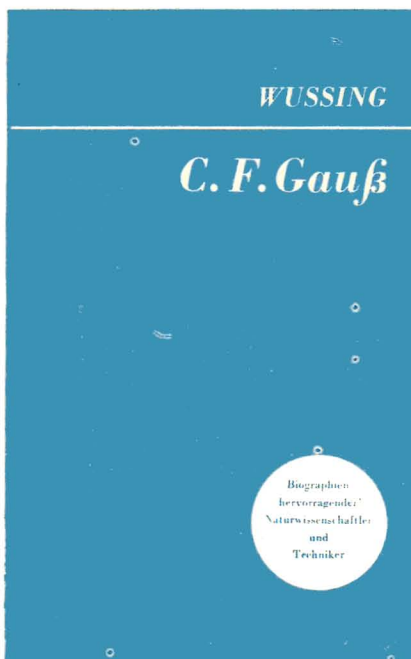
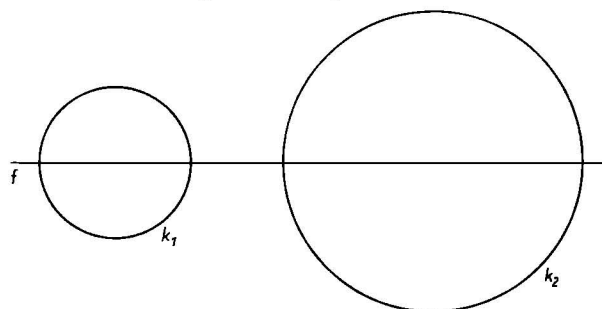
Eine andere für Anwendungen wichtige und auch exakt erfüllbare Forderung ist die der Flächentreue. Als Beispiele dafür sind der Lambertsche Zylinderentwurf, der Entwurf von Mollweide und der Entwurf von Stab-Werner zu nennen. Nach dem flächentreuen Entwurf des Franzosen Rigobert Bonne sind die amtlichen Kartenwerke Frankreichs, der Schweiz, Belgiens, Schottlands und Irlands angelegt. Eine gleichzeitige globale Erfüllung der Forderungen von Flächentreue und Winkeltreue ist jedoch nicht möglich, da dies äquivalent mit der Forderung einer längentreuen Abbildung ist.

## Eine Aufgabe von Dozent Dr. Eberhard Schröder

▲1288▲ Gegeben sind zwei sich nicht schneidende Kreise  $k_1$  und  $k_2$  derart, daß kein Kreis den anderen umschließt.

Man konstruiere zwei sich senkrecht schneidende Kreise  $c_1$  und  $c_2$ , so daß sich die Kreispaaire  $c_1$  und  $k_1$ ,  $c_1$  und  $k_2$ ,  $c_2$  und  $k_1$  sowie  $c_2$  und  $k_2$  senkrecht schneiden.

Anleitung: Man betrachte die gegebenen Kreise  $k_1$  und  $k_2$  als Elemente eines hyperbolischen Kreisbüschels und die gesuchten Kreise  $c_1$  und  $c_2$  als Elemente des dazu ergänzenden elliptischen Kreisbüschels.



LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER  
VERLAGSGESELLSCHAFT  
1974

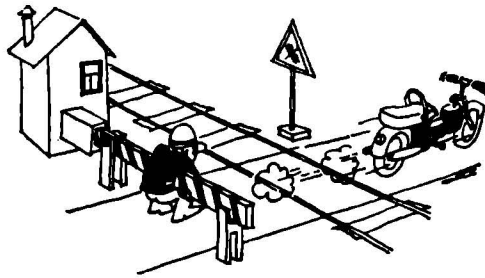
Mit Carl Friedrich Gauß tritt uns einer der bedeutendsten Naturforscher und Mathematiker entgegen, den die Menschheit je hervorgebracht hat. Sein Wirken hat die von ihm berührten mathematischen und naturwissenschaftlichen Fachrichtungen weitgehend geformt. Vieles, was er erforscht und publiziert hat, ist erst lange nach seinem Tode in voller Tragweite deutlich geworden.

Das von Prof. Dr. H. Wussing verfaßte Büchlein stellt sich die Aufgabe, Leben und Wirken von Gauß einem möglichst großen Kreis von Schülern, Studenten, Lehrern, Ingenieuren, Naturwissenschaftlern und Mathematikern nahezubringen.

Am 4. Mai 1977 feiern wir den 200. Geburtstag des großen Wissenschaftlers. Mitte dieses Jahres wurde aus diesem Anlaß vom Teubner-Verlag ein Heft in der Reihe „Biographien hervorragender Naturwissenschaftler und Techniker“ herausgegeben. Jetzt sollten die interessierten *alpha*-Leser dieses Buch kaufen, um sich langfristig und intensiv, sei es für die Arbeit in den Arbeitsgemeinschaften, Spezialistenlagern oder für Wandzeitungen vorzubereiten. (Preis 4,70 M, Bestell-Nr. 665 700 8)

# Vorfahrt beachten!

## Teil 1



Noch immer verlieren täglich in unserer Republik im Durchschnitt 6 Menschen an den Folgen eines Verkehrsunfalles ihr Leben, werden 126 Menschen zum Teil erheblich verletzt und verursachen 139 Verkehrsunfälle einen hohen volkswirtschaftlichen Schaden.

### Aufgabe 1:

Ein Motorrollerfahrer beachtete an einer Straßenkreuzung in Berlin nicht die Vorfahrt eines Pkw und stieß mit diesem zusammen. Die Folgen: Fahrer und Beifahrer des Motorrollers mußten mit Knochenbrüchen in einem Krankenhaus stationär behandelt werden. An den Fahrzeugen entstand Sachschaden. Und dies waren die Kosten:

|                                                                             |          |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------|
| Schadenskosten an den Fahrzeugen                                            | 1 290 M  |
| Krankengeld, Lohnausgleich, Schmerzensgeld, Schadenersatz für Lohnausgleich | 28 620 M |
| bis zum Zeitpunkt der Kostenuntersuchung an den Soziusfahrer gezahlte Rente | 3 840 M  |
| Kosten für medizinische Hilfe und Betreuung                                 | 4 620 M  |
| volkswirtschaftlicher Verlust durch Ausfall im Produktionsprozeß            | 38 500 M |

Berechne den Gesamtschaden dieses Unfalles!

Oft ist der volkswirtschaftliche Schaden eines Verkehrsunfalles um ein Vielfaches größer als in dem betrachteten Beispiel. Denken wir hier etwa an einen Verkehrsunfall in der morgendlichen Berufsspitzenzeit, durch den Hunderte Werktätige verspätet ihren Arbeitsplatz erreichen.

Selbstverständlich kann ein Verkehrsunfall nicht nur an dem Faktor Geld gemessen werden, denn es geht hier vor allem um Leben und Gesundheit der von Verkehrsunfällen betroffenen Menschen.

Die hauptsächlichen Unfallursachen können wir der folgenden Aufgabe entnehmen:

### Aufgabe 2:

1971 ereigneten sich in der DDR 50 861 Verkehrsunfälle, bei denen folgende Ursachen besonders häufig auftraten:

| Ursache                                      | Verkehrsunfälle |
|----------------------------------------------|-----------------|
| überhöhte bzw. unangemessene Geschwindigkeit | 13 500          |
| Nichtbeachten der Vorfahrt                   | 7 300           |
| Fahren unter Alkoholeinfluß                  | 3 900           |
| falsches Verhalten beim Überholen            | 3 500           |
| von Fußgängern verursacht                    | 7 800           |

Veranschauliche diesen Sachverhalt durch ein Streckendiagramm!

Bei einem Verkehrsunfall ist jeder zur Leistung der Ersten Hilfe bei Verletzten und gegebenenfalls zur Einleitung weiterer Maßnahmen verpflichtet (Benachrichtigung des DRK; Benachrichtigung der VP außer bei Verkehrsunfällen ohne Personenschaden und mit Sachschaden unter 300 M).

Kenntnisse in der Ersten Hilfe sollte man schon als Schüler in einem DRK-Lehrgang erwerben.

Die Verhütung von Verkehrsunfällen ist eine bedeutende gesellschaftliche Aufgabe. Um trotz des ständig wachsenden Straßenverkehrs Ordnung und Sicherheit auf unseren Straßen zu erhöhen, sind Maßnahmen zum Neu- und Ausbau des Straßennetzes und zur Verbesserung der Verkehrsorganisation und Verkehrstechnik erforderlich.

Doch der entscheidende Faktor bei der Gewährleistung einer Ordnung und Sicherheit im Straßenverkehr ist und bleibt der Verkehrsteilnehmer selbst mit seinem bewußten, disziplinierten, verkehrsgerechten und vorschriftsgemäßen Verhalten.

An 11% der 50 861 Verkehrsunfälle des Jahres 1971 waren Bürger im Alter von über 60 Jahren ursächlich beteiligt. Bei einem Teil der älteren Bürger hat die Leistungsfähigkeit so nachgelassen, daß ihre Straßenverkehrstauglichkeit sogar als Fußgänger sehr ernst in Frage gestellt sein kann. Ältere Bürger, die sich dem Überqueren einer verkehrsreichen Straße allein nicht mehr gewachsen fühlen, sollten einen anderen Bürger um Hilfeleistung bitten. Jedoch auch an 9,7% der Verkehrsunfälle des Jahres 1971 waren Kinder ursächlich beteiligt. Im Kindesalter liegen die meisten Fußgängerunfälle bei den 5- und 6jährigen, die meisten Fahrradunfälle bei den 10- bis 15jährigen.

Wir schützen unsere eigene Gesundheit und helfen Verkehrsunfälle vermeiden, wenn wir die Verkehrsvorschriften und die sich aus ihrem Nichteinhalten ergebenden Gefahren kennen, wenn wir uns Fertigkeiten im verkehrsgerechten Verhalten aneignen und wenn wir uns stets bewußt verkehrsgerecht verhalten.

Im Beitrag „Achtung Kreuzung – Vorfahrt beachten!“ (alpha 5/70) wurden die Regeln der Vorfahrt an Kreuzungen und Einmündungen durch vorfahrtregelnde Verkehrsschilder erläutert. Im jetzigen Beitrag sollen die Begriffe Reaktionszeit, Bremsweg, Anhalteweg, Sicherheitsabstand u. a. erläutert und ihre Bedeutung für das Einschätzen von Verkehrssituationen betrachtet werden.

Das Tachometer eines Autos oder Motorrades gestattet die Maßzahl der in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  (gelesen: Kilometer pro Stunde) gemessenen Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  abzulesen. Bei konstanter Geschwindigkeit  $v$  besteht zwischen Fahrzeit  $t$ , Fahrweg  $s$  und  $v$  die Beziehung:  $s = v \cdot t$

Bei konstanter Geschwindigkeit  $v$  besteht zwischen Fahrzeit  $t$ , Fahrweg  $s$  und  $v$  die Beziehung:  $s = v \cdot t$

### Aufgabe 3:

Auf der Autobahn beträgt für einen Lkw die zulässige Höchstgeschwindigkeit  $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Ein

Lkw passiert 8.15 Uhr auf der Autobahn das abgebildete Hinweiszeichen:



Wann kann dieser Lkw bei Weiterfahrt auf der Autobahn und Einhalten der Autobahnordnung frühestens die erste Dresdener Autobahnabfahrt erreichen?

So wie Längen mit Maßeinheiten wie Kilometer (km), Meter (m), Millimeter (mm) u. a. angegeben werden können, lassen sich auch Geschwindigkeiten in verschiedenen Einheiten angeben! Zur Übung wollen wir die folgende Aufgabe gemeinsam lösen.

### Aufgabe 4:



Rechne die gemäß abgebildetem Verbotsschilder zulässige Höchstgeschwindigkeit in die Maßeinheit  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  (Meter pro Sekunde)!

$$\text{Lösung: } 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{30}{1} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = \frac{25 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 8 \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

In der Tabelle (rechts) sind in den beiden ersten Spalten verschiedene Geschwindigkeiten jeweils in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  und in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  angegeben. Die folgende Aufgabe sollst du unter Verwendung der Tabelle I und der Formel I lösen!

#### Aufgabe 5:

Die beiden abgebildeten Gebotszeichen stehen an einer Straße in einem gewissen Abstand  $s$ . Kraftfahrzeuge, die nicht verkehrswidrig gefahren werden und keine Panne haben, benötigen zum Durchfahren dieses Streckenabschnittes höchstens 41 s. Wie groß ist der Abstand beider Verkehrszeichen?



Im Interesse der Verkehrssicherheit ist es für jeden Verkehrsteilnehmer, ganz gleich ob Kraftfahrer, Radfahrer oder Fußgänger, wichtig, über das Zumhaltenbringen eines Kraftfahrzeuges Bescheid zu wissen.

Bei jedem Fahrer verstreicht eine gewisse Zeit vom Wahrnehmen eines optischen, akustischen oder taktilen Signals, also der Aufforderung zu einer Reaktion, bis zum Beginn der Antworthandlung. Im Durchschnitt beträgt diese Zeitspanne 0,78 s. An diese erste Zeitspanne schließt sich eine zweite an, nach der erst die gewünschte Reaktion erreicht wird. In dieser zweiten Zeitspanne kann z. B. bei einem Autofahrer das Umsetzen des rechten Fußes vom Gas- auf das Bremspedal und das Betätigen des Bremspedals bis zum Eintritt der gewünschten Bremswirkung erfolgen. Beide Zeitspannen wollen wir (vereinfachend) unter dem Begriff *Reaktionszeit*  $t_R$  zusammenfassen. Der normale Mittelwert der Reaktionszeit beträgt etwa 1 s. Die normale durchschnittliche Reaktionszeit kann bei Schreck- und Störreizen unterboten, ja aber auch erheblich, nämlich bis zu 40 s überschritten werden. Es gibt auch Beispiele dafür, daß es infolge Schreckstarre zu überhaupt keiner reaktiven Bewegung kommt. Während der Reaktionszeit rollt das Fahrzeug mit der gleichen Geschwindigkeit weiter! Den Weg, den das Fahrzeug in der Reaktionszeit zurücklegt, wollen wir als *Reaktionsweg*  $s_R$  bezeichnen. Gemäß Formel I gilt:

$$\text{II. } s_R = v \cdot t_R$$

#### Aufgabe 6:

a) Gib mittels Tabelle I den Reaktionsweg für  $v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  (zulässige Höchstgeschwindigkeit für Pkw und Kräder außerhalb geschlossener Ortschaften) und  $t_R = 1 \text{ s}$  an!

b) Ein Fahrer fährt entgegen den Bestimmungen des § 5 StVO (Straßenverkehrsordnung) nach Alkoholgenuß mit seinem Pkw.

Tabelle I: Bremsweg  $s_B$  in m

| $v$ in                       |                             | $a$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |
|------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ | $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ | 1                                    | 1,3 | 2   | 2,5 | 2,9 | 3,9 | 4,7 | 5   | 5,4 | 5,9 | 6,4 |  |
| 10                           | 2,78                        | 3,9                                  | 3,0 | 1,9 | 1,6 | 1,3 | 1,0 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,6 |  |
| 20                           | 5,56                        | 15                                   | 12  | 7,7 | 6,2 | 5,3 | 4,0 | 3,3 | 3,1 | 2,9 | 2,6 | 2,4 |  |
| 30                           | 8,33                        | 35                                   | 27  | 17  | 14  | 12  | 8,9 | 7,4 | 6,9 | 6,4 | 5,9 | 5,4 |  |
| 40                           | 11,1                        | 62                                   | 47  | 31  | 25  | 21  | 16  | 13  | 12  | 11  | 10  | 9,6 |  |
| 50                           | 13,9                        | 97                                   | 74  | 48  | 39  | 33  | 25  | 21  | 19  | 18  | 16  | 15  |  |
| 60                           | 16,7                        | 140                                  | 110 | 69  | 56  | 48  | 36  | 30  | 28  | 26  | 24  | 22  |  |
| 70                           | 19,4                        | 190                                  | 140 | 94  | 76  | 65  | 48  | 40  | 38  | 35  | 32  | 29  |  |
| 80                           | 22,2                        | 250                                  | 190 | 120 | 99  | 85  | 62  | 52  | 49  | 46  | 42  | 39  |  |
| 90                           | 25                          | 310                                  | 240 | 160 | 120 | 110 | 80  | 66  | 62  | 58  | 53  | 49  |  |
| 100                          | 27,8                        | 390                                  | 300 | 190 | 150 | 130 | 99  | 82  | 77  | 72  | 65  | 60  |  |

Wie groß ist der Reaktionsweg für  $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und  $t_R = 3 \text{ s}$ ?

Als *Bremsweg*  $s_B$  wird die Strecke bezeichnet, die ein Fahrzeug vom Wirksamwerden der Bremsen bis zum Stillstand durchfährt. Der Bremsweg ist abhängig von der Fahrgeschwindigkeit  $v$  (bei Einleiten des Bremsvorganges) und von der Bremsverzögerung  $a$ . Unter der Annahme, daß das Abbremsen mit der konstanten Bremsverzögerung  $a$  geschieht, gilt die Formel:

$$\text{III. } s_B = \frac{v^2}{2a}$$

#### Aufgabe 7:

Berechne mittels Formel III und Tabelle I den Bremsweg eines Fahrzeuges für  $v = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und  $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ !

Die schon mehrfach benutzte Tabelle I gestattet auch, für bestimmte Geschwindigkeiten und Bremsverzögerungen den zugehörigen Bremsweg abzulesen.

#### Aufgabe 8:

Ergänze so, daß wahre Aussagen entstehen!

a) Bei gleicher Bremsverzögerung  $a$  gilt: Je größer die Fahrgeschwindigkeit  $v$  ist, desto ..... ist der Bremsweg  $s_B$ .

b) Bei gleicher Geschwindigkeit  $v$  gilt: Je größer die Bremsverzögerung  $a$  ist, desto ..... ist der Bremsweg  $s_B$ .

Der *Anhalteweg*  $s_A$  eines Fahrzeuges setzt sich additiv aus Reaktionsweg  $s_R$  und Bremsweg  $s_B$  zusammen:

$$\text{IV } s_A = s_R + s_B$$

#### Aufgabe 9:

Ermittle unter Benutzung von Tabelle I den Anhalteweg eines Fahrzeuges, dessen Fahrer mit der Reaktionszeit  $t_R = 1 \text{ s}$  reagiert, das mit der Geschwindigkeit  $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  fährt und das mit der Bremsverzögerung  $a = 5,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  abgebremst wird!

Ein Fahrer kann nur dann einen Zusammenstoß mit einem Hindernis vermeiden, wenn er dies in einem Abstand ausmacht, der nicht kleiner als sein Anhalteweg ist; z. B. begren-

zen parkende Fahrzeuge, Nebel, starker Regen und Schneetreiben gegebenenfalls erheblich die Sichtweite.

#### Aufgabe 10:

Bei Antritt einer Fahrt hat der Fahrer eines Kraftfahrzeuges die vorgeschriebene Bremsprobe durchzuführen, um u. a. festzustellen, ob die Betriebsbremse die nach § 47 StVZO (Straßenverkehrszeichensatz) vorgeschriebene Bremsverzögerung zu erreichen gestattet. Diese beträgt für einen Pkw mit Höchstgeschwindigkeit über  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$   $5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Bei einer Bremsprobe bringt ein Fahrer seinen Pkw (mit der Höchstgeschwindigkeit  $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ) beim Fahren auf trockener normalgriffiger Straße mit der Geschwindigkeit  $v = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  bei maximaler Betätigung des

Bremspedals nach 8 m Bremsweg zum Stehen. Prüfe mittels Tabelle I, ob dieser Pkw verkehrssicher ist!

Jedem Fahrradfahrer sei empfohlen, auch mit seinem Fahrrad Bremsproben durchzuführen, und zwar einerseits mit der Betriebsbremse (Rücktrittbremse) sowie auch mit der Handbremse.

Mutet man den Reifen zu, das Fahrzeug stärker zu beschleunigen oder stärker durch Bremsen zu verzögern, als es die Haftreibung zwischen Reifen und Straßendecke zuläßt, so tritt in zunehmendem Maße ein Gleiten auf. Dabei bricht das Fahrzeug häufig aus der Spur aus, und seine Lenkfähigkeit ist zumindest stark begrenzt. Zwei Extremfälle seien hier besonders genannt:

a) Beim Anfahren auf vereister Fahrbahn mit zu großer Beschleunigung drehen sich die Antriebsräder, und das Fahrzeug bleibt auf der Stelle stehen.

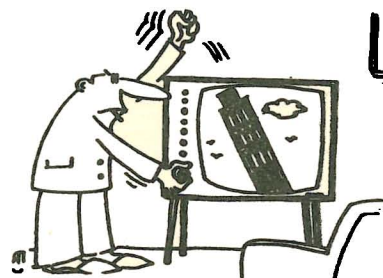
b) Wird ein Fahrzeug auf schlüpfrig nasser oder vereister Fahrbahn mit zu großer Verzögerung abgebremst, so blockieren die Räder, und das Fahrzeug rutscht als Schlitten weiter.

In Heft 6/74 bieten wir eine Reihe von Aufgaben zur Übung und Vertiefung.

W. Träger

## Bildungslücke

W. Tilman, Moskau



## Fremdkörper

Olaf sollte eine Menge von Brüchen in echte und unechte einteilen. Er schrieb als Lösung:

$$\begin{array}{l} \text{A (echte Brüche)} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{17}{36} \\ \text{B (unechte Brüche)} \quad \frac{19}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{28}{5} \end{array}$$

Wie man sieht, hatte er in jede der beiden Teilmengen einen Bruch eingeordnet, der eigentlich in die andere gehörte. In den folgenden Fällen ist eine Menge natürlicher Zahlen nach einem bestimmten Merkmal in zwei Teilmengen A und B zerlegt worden. Auch hier ist jeweils ein Element in die falsche Menge geraten.

Finde bei den folgenden drei Aufgaben diese *Fremdkörper* heraus! Überlege dazu, nach welchem Merkmal die Einteilung erfolgt sein könnte! Als Hilfe und zur Kontrolle sei hinzugefügt, daß die Summe der sechs falschen eingeordneten Zahlen 80 beträgt.

|       |   |   |    |    |    |    |
|-------|---|---|----|----|----|----|
| ▲ 1 ▲ | A | 2 | 3  | 5  | 9  | 11 |
|       | B | 4 | 8  | 28 | 47 | 60 |
| ▲ 2 ▲ | A | 2 | 3  | 5  | 9  | 11 |
|       | B | 7 | 8  | 22 | 36 | 45 |
| ▲ 3 ▲ | A | 2 | 3  | 5  | 9  | 11 |
|       | B | 4 | 16 | 17 | 23 | 44 |

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV Berlin

## Rätselpyramide

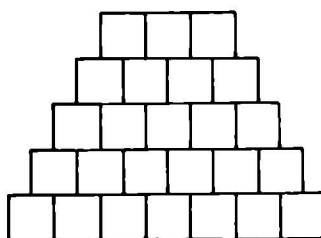
In jedes Feld der Figur ist ein Buchstabe so einzusetzen, daß in den Zeilen Wortbilder mit folgender Bedeutung entstehen:

1. Zeile: Operationszeichen
2. Zeile: Seite einer Gleichung
3. Zeile: Gesamtheit von Objekten
4. Zeile: Geometrischer Grundbegriff
5. Zeile: Spezielle Abbildung

Zwischen den Buchstaben der Zeilen besteht folgender Zusammenhang:

Werden von den Buchstaben einer Zeile zwei geeignete Buchstaben weggelassen und werden drei geeignete andere Buchstaben hinzugenommen, so werden die Buchstaben in der darunterstehenden Zeile erhalten.

Werden von den insgesamt weggelassenen acht Buchstaben wiederum zwei geeignete Buchstaben gestrichen, so bilden die sechs verbleibenden Buchstaben bei geeigneter Anordnung das Wortbild eines mathematischen Begriffes. Welcher Begriff ist das?



Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS Döbeln

## Kilogramm oder Meter?

In der Molkerei verlangte Hagen ein halbes Kilo Milch.

„Mein Junge“, belehrte ihn die Verkäuferin, „die Milch wird nicht gewogen, sie wird gemessen!“

„So“, überlegte der Kleine, „dann geben Sie mir bitte einen halben Meter!“

## Bedeutende Mathematiker gesucht!

Trage in das obige Schema die Namen von acht bedeutenden Mathematikern ein. Zur Erleichterung können die Lebensdaten dieser Mathematiker dienen. Reiht man die Buchstaben auf der gestrichelten Linie aneinander, so erhält man einen Begriff, mit dem jeder alpha-Leser bereits gearbeitet hat.

(ei ein Buchstabe, ü = ue)

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Altenburg

|   |  |  |  |  |  |                         |
|---|--|--|--|--|--|-------------------------|
| 1 |  |  |  |  |  | 1646 bis 1716           |
| 2 |  |  |  |  |  | 1643 bis 1727           |
| 3 |  |  |  |  |  | 1839 bis 1873           |
| 4 |  |  |  |  |  | 1704 bis 1752           |
| 5 |  |  |  |  |  | 1552 bis 1632           |
| 6 |  |  |  |  |  | 1471 bis 1528           |
| 7 |  |  |  |  |  | 1845 bis 1918           |
| 8 |  |  |  |  |  | um 624 bis 547 v. u. Z. |

Gespiegeltes!

Das links stehende Gebilde ist rechts unter den fünf Vertretern einmal gespiegelt vorhanden. Welches ist es?

Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

|   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|---|------|------|------|------|------|
| a | FE   | EF   | FF   | FF   | EF   |
| b | ad   | ba   | da   | ba   | ab   |
| c |      |      |      |      |      |
| d | USPE | U2dE | U29E | US9E | EP2U |
| e |      |      |      |      |      |

Die Zahl 10000 gesucht

Jede Ziffer soll neunmal verwendet werden! Ergänze das folgende Schema!

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1 | 1111+1-(111+1)                      |
| 2 |                                     |
| 3 |                                     |
| 4 | 4^4 · 4 - 4 · 4 + 4 + 4 + 4 - 4 · 4 |
| 5 |                                     |
| 6 | 6! + 6 · 6 · 6 + 66 - (6+6)/6       |
| 7 |                                     |
| 8 |                                     |
| 9 | 999 999 / 999                       |

Dr. Ch. Lange, Fachlehrer für Musik, IfL Leipzig

„Tierische“ Mathematik

E B E R  
E N T E  
G A N S  
R A B E  
T I E R E

Gleichen Buchstaben entsprechen gleiche Ziffern. Jedoch beachte: Die Ziffer „3“, die fehlt, na ja! Dafür sind all die andern da!

O. Splatt, Fachlehrer für Russisch, OS Regis-Breitingen

Gastronomisches Rätsel

Stellt der Koch auf jeden Tisch eine Portion leckeren Fisch, so fehlt einer Portion Fisch ein Tisch.

Stellt der Koch auf jeden Tisch zwei Portionen Fisch, so bleibt ein Tisch ohne Fisch.

Wieviel Tische?  
Wieviel Fische?

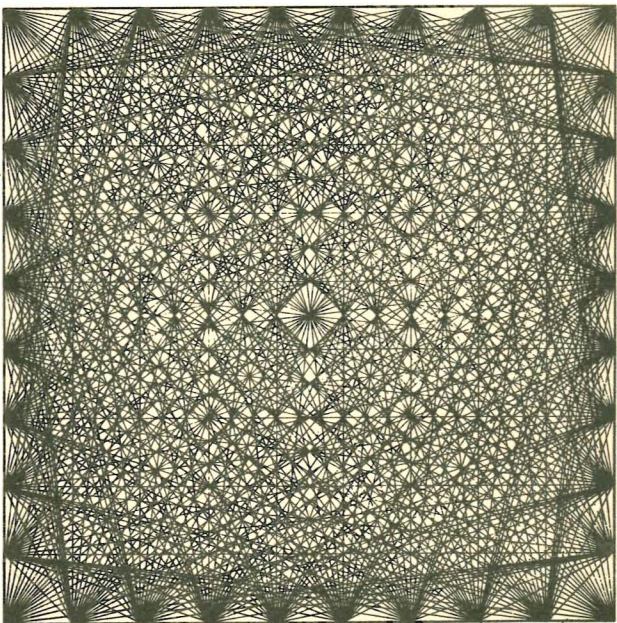
Mathematikfachlehrer  
Bottke, Cölpin

Kryptarithmetik

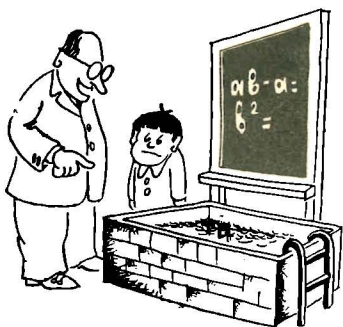
$$\begin{array}{r} \triangle \bullet \triangle \blacktriangle : \triangle \blacklozenge = \blacktriangle \blacksquare \\ \square \ominus \square + \square \times \square = \square \square \blacktriangle \\ \hline \blacklozenge \triangle \circ - \blacklozenge \blacklozenge \bullet = \blacklozenge \bullet \circ \end{array}$$

aus: Matematički List, Beograd

Geometrisches Ornament



Dušan V. Slavič, Beograd



Wenn du die Aufgabe nicht löst, gehst du baden

Utschitelskaja gaseta, Moskau

# Lösungen



## XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

### Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade

#### Olympiadeklasse 10

1. Lösung des Schülers *Norbert Schieweck*, Magdeburg (bearbeitet):

Der Halbkreis  $k_1$  erfüllt genau dann Bedingung (2), wenn sein Mittelpunkt  $M_1$  auf der Winkelhalbierenden des Winkels  $\angle ACB$  liegt. Wegen (1) ist  $M_1$  dann der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ . Wir berechnen nun  $r_1$ :

Es gilt  $\angle ACM_1 = 30^\circ$  und damit  $r_1 : \overline{M_1C} = \sin 30^\circ$ , d. h.

(4)  $2r_1 = \overline{M_1C}$ . Da  $M_1C$  Höhe im gleichseitigen Dreieck  $ABC$  ist, gilt

(5)  $\overline{M_1C} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$  mit  $a = \overline{AB}$ .

Aus (4) und (5) folgt

(6)  $r_1 = \frac{a}{4}\sqrt{3}$ .

Wegen (3) muß auch der Mittelpunkt des Kreises  $k_2$  auf der Winkelhalbierenden des Winkels  $\angle ACB$  liegen. Da der Kreis  $k_2$  den Halbkreis  $k_1$  von außen berührt, gilt  $\overline{CM_2} = \overline{CM_1} - r_1 - r_2$  und wegen (4) und (5)

(7)  $\overline{CM_2} = \frac{a}{4}\sqrt{3} - r_2$ .

Es folgt nun wie oben  $2r_2 = \overline{CM_2}$  und mit (7)

(8)  $r_2 = \frac{a}{12}\sqrt{3}$ . Aus (6) und (8) folgt

$r_1 : r_2 = 3 : 1$  und  $r_1 > r_2$ .

Anmerkung: Auch ohne Anwendung der Trigonometrie war diese Aufgabe sehr leicht zu lösen. Das spiegelt sich auch in den erreichten Punktzahlen wider:

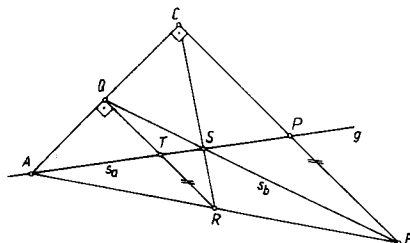
|   |   |   |   |   |    |    |        |
|---|---|---|---|---|----|----|--------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | Punkte |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 7 | 36 | 53 | Anzahl |

Aber obwohl – oder vielleicht sogar gerade weil – diese Aufgabe so leicht war, zeigte sie besonders deutlich eine Schwäche unserer Schüler auf: Ungenaue Formulierungen und umständliche Lösungswege. Das war bei etwa der Hälfte aller Schüler zu verzeichnen! Dr. H.-Jürgen Sprengel, Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam

2. (I) Es werde angenommen, daß das in Bild 1 dargestellte Dreieck  $ABC$  die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.  $P$ ,  $Q$  und  $R$  sind die Halbierungspunkte der Dreieck-

seiten  $BC$  bzw.  $CA$  bzw.  $AB$ .  $S$  ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden. Es gilt  $\overline{SA} : \overline{SP} = \overline{SB} : \overline{SQ} = 2 : 1$ .

Nach den Strahlensätzen ist  $QR$  parallel  $BC$ . Ferner schneiden sich  $QR$  und die Seitenhalbierende  $AP$  im gemeinsamen Halbierungspunkt  $T$ . Wegen  $\angle ACB = 90^\circ$  und  $BC \parallel QR$  gilt auch  $\angle AQT = 90^\circ$ .



(II) Ein Dreieck  $ABC$  genügt den Bedingungen der Aufgabe, wenn es in folgender Weise konstruiert werden kann:

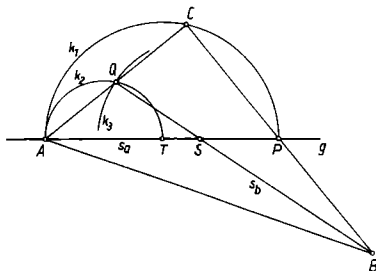
(1) Man konstruiert auf einer Geraden  $g$  vier Punkte  $A$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $P$  in dieser Anordnung, so daß  $\overline{AT} = \frac{1}{2}s_a$ ,  $\overline{TS} = \frac{1}{6}s_a$ ,  $\overline{SP} = \frac{1}{3}s_a$  gibt.

(2) Man schlägt je einen Halbkreis  $k_1$  über  $\overline{AP}$  und  $k_2$  über  $\overline{AT}$  derart, daß  $k_1$  und  $k_2$  der gleichen Halbebene bezüglich  $g$  angehören.

(3) Man schlägt den Kreis  $k_3$  um  $S$  mit  $\frac{1}{3}s_b$  als Radius. Dieser schneidet  $k_2$  in  $Q$ .

(4) Man verbindet  $A$  mit  $Q$  und verlängert  $AQ$  über  $Q$  hinaus bis zum Schnitt mit  $k_1$ . Man erhält  $C$ .

(5) Man verbindet  $C$  mit  $P$  und verlängert  $CP$  über  $P$  hinaus. Man verbindet  $Q$  mit  $S$  und verlängert  $QS$  über  $S$  hinaus. Die Geraden  $(CP)$  und  $(QS)$  schneiden sich in  $B$ .



(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Dreieck  $ABC$  den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist  $AP$  die von  $A$  ausgehende Seitenhalbierende in  $\triangle ABC$  mit der vorgegebenen Länge  $s_a$ . Wegen  $\overline{AS} = \frac{2}{3}s_a$  ist  $S$  der Schwerpunkt von  $\triangle ABC$ . Wegen  $BC \parallel QT$ ,  $2\overline{AT} = \overline{AP}$  und  $\gamma = 90^\circ$  liegen  $C$  auf dem Halbkreis  $k_1$  über  $\overline{AP}$ ,  $Q$  auf dem Halbkreis  $k_2$  über  $\overline{AT}$ , und  $Q$  ist Halbierungspunkt der Seite  $AC$ . Auf Grund der Umkehrbarkeit des Satzes über das Teilungsverhältnis von Seitenhalbierenden im Dreieck schneiden sich die Geraden  $(QS)$  und  $(CP)$  in  $B$  derart, daß  $\overline{PC} = \overline{PB}$  und  $\overline{BS} = 2\overline{SQ}$  gilt. Also stellen  $AP$  und  $BQ$  die Seitenhalbierenden bezüglich

der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  dar.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1) und (2) ergeben bis auf Kongruenz eindeutig  $A$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $P$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ . Unter (3) ergibt sich der Punkt  $Q$  genau dann, wenn die Ungleichungen

$$\frac{2}{3}s_a < \frac{1}{2}s_a + \frac{1}{3}s_b \text{ und } \frac{1}{3}s_b < \frac{2}{3}s_a$$

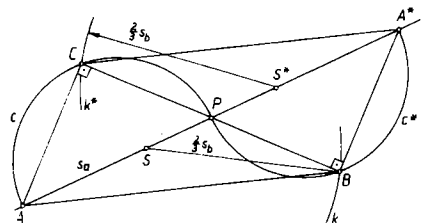
erfüllt sind.

Es muß also  $s_a < 2s_b$  und  $s_b < 2s_a$  (\*) gelten. Mit  $s_a = 6$  cm und  $s_b = 8$  cm wird (\*) befriedigt. Daher existiert auch der Schnittpunkt  $Q$ . Damit führt (4) auf  $C$ . Wegen  $\overline{PC} \neq \overline{QS}$  liefert (5) den dritten Eckpunkt  $B$  des Dreiecks  $ABC$ .

Aufgabe 2 war 99 Schülern der Klassenstufe 10 zur DDR-Mathematikolympiade gestellt worden. Hierbei konnten maximal 7 Punkte erreicht werden. Es ergab sich der folgende Punktespiegel:

|    |    |   |   |    |    |    |   |         |
|----|----|---|---|----|----|----|---|---------|
| 0  | 1  | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7 | Punkte  |
| 31 | 11 | 6 | 7 | 11 | 11 | 14 | 8 | Schüler |

Etwa ein Drittel der Schüler wußte mit der Aufgabe so gut wie nichts anzufangen. Bei Lösungsansätzen wurden vielfach arithmetische Hilfsmittel herangezogen. Dies führte in der Regel auf umständliche algebraische Ausdrücke, deren konstruktive Umsetzung wegen der damit verbundenen Zeichenungenauigkeiten (schleifende Schnitte, Verbindung dicht benachbart liegender Punkte) unbefriedigende Lösungen ergab. Zum Beispiel besaßen die mit den errechneten Größen konstruierten Dreiecke auf Grund der Zeichenungenauigkeiten bei  $C$  keinen rechten Winkel, wodurch beim Schüler Zweifel über die Richtigkeit seiner Lösung entstanden. Auch die Existenzaussage fanden die Schüler nach dieser Methode nicht. Zu guten Lösungen führte vorwiegend die Grundidee, das Dreieck  $ABC$  zu einem Parallelogramm zu ergänzen; z. B. ergeben sich durch zentrische Spiegelung des Dreiecks  $ABC$  samt Schwerpunkt  $S$  an  $P$  die Punkte  $A^*$  und  $S^*$ .



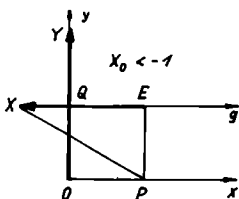
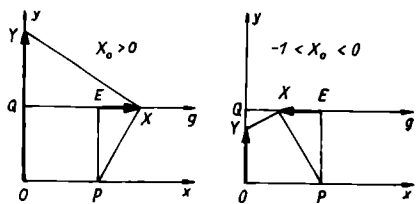
An der Figur wurde dann richtig erkannt, daß der Punkt  $C$  einerseits auf dem Halbkreis des Thales über  $\overline{AP}$  liegt. Andererseits muß  $\overline{CS^*} = \frac{2s_b}{3}$  gelten.  $B$  erhält man dann durch

Spiegelung von  $C$  an  $P$ . Auch die an  $P$  zentrisch gespiegelte Konstruktion findet sich bei einigen Teilnehmern. Die volle Punktzahl wurde nur an jene Teilnehmer vergeben, die auch die Existenzaussage richtig gefunden und formuliert hatten.

Dozent Dr. E. Schröder, TU Dresden

3 A. 1. Lösung (Vorschlag der Aufgabenkommission)

a) Nach Konstruktion haben die gerichteten Strecken  $QE$ ,  $EX$  die Längen 1 bzw.  $x_0$ ; also hat die gerichtete Strecke  $QX$  die Länge  $1+x_0$ . Für  $x_0 \neq 0$ ,  $-1$  zeigen wir, daß das Dreieck  $EPX$  zum Dreieck  $QXY$  gleichsinnig ähnlich ist. Ist nämlich  $x_0 > 0$  oder  $x_0 < -1$ ,



so liegt  $E$  zwischen  $Q$  und  $X$  oder  $Q$  zwischen  $X$  und  $E$ , also in beiden Fällen  $Q$  zwischen  $O$  und  $Y$ ; es gilt  $\angle EPX = 90^\circ - \angle EXP = \angle QXY$ ; die Dreiecke stimmen also in den rechten Winkeln bei  $E$  bzw.  $Q$  und in den spitzen Winkeln bei  $P$  bzw.  $X$  überein; beim Umlauf der Dreiecke  $EPX$  und  $QXY$  in der angegebenen Reihenfolge der Ecken werden die Strecken  $QE$  und  $QX$  in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, und die Dreiecke liegen auf verschiedenen Seiten von  $q$ , woraus die gleichsinnige Ähnlichkeit folgt. Ist aber  $-1 < x_0 < 0$ , so liegt  $X$  zwischen  $Q$  und  $E$  und daher  $Y$  auf dem Strahl aus  $Q$  durch  $O$ ; es gilt  $\angle EPX = 90^\circ - \angle EXP = 180^\circ - 90^\circ - \angle EXP = \angle QXY$ ; die Dreiecke stimmen also wieder in den oben erwähnten Winkeln überein.

Bei dem angegebenen Umlaufsinn werden  $QE$  und  $QX$  in gleicher Richtung durchlaufen, und die Dreiecke liegen auf derselben Seite von  $q$ . Somit gilt, wenn  $x_0 \neq 0$ ,  $-1$  ist, für die Länge  $q_0$  der gerichteten Strecke  $QY$  die Proportion  $1 : x_0 = (1+x_0) : q_0$ , also ist (1)  $q_0 = (x_0+1)x_0$ . Für  $x_0 = 0$  oder  $x_0 = -1$  gilt  $X=E$  oder  $X=Q$  und daher in beiden Fällen  $Y=Q$ , also  $q_0 = 0$ , d. h. ebenfalls (1). Daher hat in jedem Falle  $Y$  die Ordinate  $1+q_0 = x_0^2 + x_0 + 1$ , w. z. b. w.

b) Angenommen,  $x_0$  wäre eine reelle Nullstelle von  $f$ . Dann führte das mit dem entsprechenden Punkt  $X$  ausgeführte Verfahren auf  $Y=O$ , also  $\angle PXO = 90^\circ$ . Daher läge nach der Umkehrung des Satzes von Thales  $X$  auf dem Kreis mit  $OP$  als Durchmesser. Das ist aber ein Widerspruch, da dieser Kreis keinen Punkt mit  $q$  gemeinsam hat.

2. Lösung: a) Nach Konstruktion hat die Strecke  $QE$  die Länge 1 und die Strecke  $EX$  die Länge  $|x_0|$ . – Fallunterscheidung:

(1)  $x_0 > 0$ . Dann hat die Strecke  $QX$  die Länge

$1+|x_0|$ , d. h.  $1+x_0$ . Wegen  $\angle EPX = 90^\circ - \angle EXP = \angle QXY$  und  $\angle XEP = \angle YQX = 90^\circ$  sind die Dreiecke  $EPX$  und  $QXY$  einander ähnlich. Hieraus ergibt sich die Proportion  $\overline{EP} : \overline{EX} = \overline{QX} : \overline{QY}$  und wegen  $\overline{EX} = |x_0| = x_0$  daher  $1 : x_0 = (1+x_0) : \overline{QY}$ . Also ist  $\overline{QY} = (1+x_0)x_0 = x_0^2 + x_0$ . Für die Ordinate des Punktes  $Y$  ergibt sich folglich  $x_0^2 + x_0 + 1$ .

(2)  $x_0 < -1$ . Dann hat die Strecke  $QX$  die Länge  $|x_0| - 1$ , d. h.  $-x_0 - 1$ . Aus den gleichen Gründen wie im Fall (1) sind die Dreiecke  $EPX$  und  $QXY$  einander ähnlich. Hieraus ergibt sich die Proportion  $\overline{EP} : \overline{EX} = \overline{QX} : \overline{QY}$  und wegen  $\overline{EX} = |x_0| = -x_0$  daher  $1 : (-x_0 - 1) = -x_0 : \overline{QY}$ . Also ist  $\overline{QY} = (-x_0 - 1)(-x_0) = x_0^2 + x_0$ . Für die Ordinate des Punktes  $Y$  ergibt sich folglich  $x_0^2 + x_0 + 1$ .

(3)  $-1 < x_0 < 0$ . Dann hat die Strecke  $QX$  die Länge  $1 - |x_0|$ , d. h.  $1+x_0$ . Aus den gleichen Gründen wie im Fall (1) sind die Dreiecke  $EPX$  und  $QXY$  einander ähnlich. Hieraus ergibt sich die Proportion  $\overline{EP} : \overline{EX} = \overline{QX} : \overline{QY}$  und wegen  $\overline{EX} = |x_0| = -x_0$  daher  $1 : (-x_0) = (1+x_0) : \overline{QY}$ . Also ist  $\overline{QY} = (1+x_0)(-x_0) = -x_0^2 - x_0$ . Für die Ordinate des Punktes  $Y$  ergibt sich folglich  $1 - (-x_0^2 - x_0) = x_0^2 + x_0 + 1$ .

(4) Für  $x_0 = 0$  oder  $x_0 = -1$  gilt  $X=E$  oder  $X=Q$  und daher in beiden Fällen  $Y=Q$ , also  $\overline{QY} = 0$ . Die Ordinate von  $Y$  ist also in beiden Fällen gleich 1. Andererseits ergibt  $x_0^2 + x_0 + 1$  sowohl für  $x_0 = 0$  als auch für auch für  $x_0 = -1$  gleich 1.

b) Wie bei 1. Lösung.

Bemerkungen: Der Schwierigkeitsgrad dieser von 48 % der Schüler bearbeiteten Wahlaufgabe war der DDR-Stufe durchaus angemessen. Obwohl den Schülern der Begriff „Länge einer gerichteten Strecke“ nicht bekannt war, wurde der Aufgabentext von kaum einem Schüler mißverstanden. Die Hauptschwierigkeit bestand vor allem darin, eine vollständige Fallunterscheidung vorzunehmen, d. h. alle Fälle zu erkennen und jeden dieser Fälle zu diskutieren. Viele Schüler erkannten nicht, daß der „Fall“  $x_0 < 0$  nicht „mit einem Schlag“ erledigt werden kann, sondern in drei Teilfälle (die Fälle (2), (3), (4) entsprechend der 2. Lösung) zerfällt. Eine weitere Schwierigkeit bestand für viele Schüler in der Verwendung von Bezeichnungen. Sie arbeiteten zwar im allgemeinen mit den Beträgen von  $x_0$ , beachteten dies jedoch in der Schreibweise nicht. Eine Lösung entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission wurde von keinem Schüler geliefert, da den Schülern ein Operieren mit negativen Längen gerichteter Strecken völlig ungewohnt war und ihnen auch nicht bekannt sein konnte, daß die (den Schülern bekannten) Ähnlichkeitssätze im Falle gleichsinniger Ähnlichkeit von Dreiecken auch hinsichtlich der Längen gewisser gerichteter Strecken als Dreiecksseiten gelten. Beim

Teil b) hatten die meisten Schüler Schwierigkeiten bei der Führung und Formulierung des indirekten Beweises. Eine recht elegante vektorielle Lösung lieferte der Schüler Thomas Hoffmann (Erfurt). Fast ebenso elegant waren die Lösungen der Schüler Friedhelm und Norbert Schieweck (Magdeburg), die sich auf den Kalkül der Analytischen Geometrie stützten. Eine sehr übersichtliche und vollständige Lösung im Sinne des zweiten Lösungsweges legte der Schüler Karl-Heinz Wenzlaff (Neubrandenburg) vor.

Verteilung der Punkstufen:

|   |   |   |   |    |   |   |   |        |
|---|---|---|---|----|---|---|---|--------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6 | 7 | Punkte |
| 2 | 3 | 6 | 9 | 13 | 4 | 5 | 5 | Anzahl |

Dr. M. Rehm, Humboldt-Universität Berlin

3 B 1. Lösung: Sei  $(x, y)$  ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Dann gilt

$$\begin{aligned} y^3 &= (x+2)^4 - x^4 = \\ &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 - x^4 \\ &= 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \\ &= 8[(x+1)^3 + (x+1)]. \end{aligned}$$

Folglich ist  $y$  eine gerade Zahl, und mit

$$y = 2u, \quad x+1 = v$$

erhalten wir für die ganzen Zahlen  $u$  und  $v$

$$u^3 = v^3 + v. \quad (1)$$

Wäre  $v > 0$ , so folgte aus (1) zunächst  $u^3 > v^3$ , also  $u > v$ , und hieraus wegen der Ganzzahligkeit von  $u$  und  $v$

$$u \geq v+1, \text{ und hieraus}$$

$u^3 \geq (v+1)^3 = v^3 + 3v^2 + 3v + 1 > v^3 + v$  im Widerspruch zu (1).

Wäre  $v < 0$ , so folgte aus (1) zunächst  $u^3 < v^3$ , also  $u < v$ . Wegen der Ganzzahligkeit von  $u$  und  $v$  wäre also  $u \leq v-1$ , und damit  $u^3 \leq (v-1)^3 = v^3 - 3v^2 + 3v - 1 < v^3 + v$  im Widerspruch zu (1).

Daher kann nur für  $v=0$ , d. h.  $x = -1$  ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften existieren. Aus (1) folgt hierfür  $u=0$ , also  $y=0$ .

Die Probe zeigt, daß das Zahlenpaar  $(-1, 0)$  tatsächlich die Gleichung

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3$$

erfüllt. Also hat genau dieses Zahlenpaar die verlangten Eigenschaften.

2. Lösung: Wie in der 1. Lösung finden wir

$$y^3 = 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

Wegen  $(2x+2)^3 = 8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$

$$= y^3 - 8x - 8$$

und  $(2x+3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

$$= y^3 + 12x^2 + 18x + 11 \text{ erhalten wir}$$

$$(2x+2)^3 < y^3 < (2x+3)^3$$

für alle ganzzahligen  $x$  mit  $x > -1$ .

Entsprechend erhalten wir für alle ganzzahligen  $x$  mit  $x < -1$

$$(2x+1)^3 < y^3 < (2x+2)^3.$$

Folglich gibt es für  $x \neq -1$  kein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Weiter schließen wir wie in der 1. Lösung.

Bemerkungen: Von 52 Schülern, die die Wahlaufgabe bearbeitet haben, konnten nur 2 keinen Punkt erreichen. Das zeigt, daß die Aufgabe verständlich war. Dennoch konnten nur 6 Schüler die volle Punktzahl erreichen.

Folgende Fehler traten gehäuft auf:

1. Unzulässige Verallgemeinerungen. Aus der Tatsache, daß es für  $x=0$  und  $x=1$  jeweils kein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften gibt, wird geschlossen, daß es für alle ganzen Zahlen  $x$  mit  $x \geq 0$  kein geeignetes Zahlenpaar gibt. Wir bemerken, daß zwei oder mehrere Beispiele nicht die allgemeine Tatsache beweisen, daß

$$8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

für ganzzahlige  $x$  mit  $x \geq 0$  keine Kubikzahl ist. In der 2. Lösung haben wir den Beweis dafür geliefert. Entsprechendes gilt für alle ganzen Zahlen  $x$  mit  $x \leq -2$ .

2. Vorzeichenfehler. Einige Schüler begannen die Lösung unter Verwendung der binomischen Formel  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  mit

$$\begin{aligned}(x+2)^4 - x^4 &= [(x+2)^2 + x^2] \\ &\cdot [(x+2)^2 - x^2] \\ &= [(x+2)^2 + x^2] \\ &\cdot [(x+2) + x] \\ &\cdot [(x+2) - x].\end{aligned}$$

Dabei traten Unsicherheiten in der Anwendung auf.

3. Keine ausdrückliche Kennzeichnung der Probe. Viele Schüler fanden durch systematisches Probieren oder (wie in der ersten und zweiten Lösung dargestellt) durch zwingende Überlegungen, daß  $(-1, 0)$  ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften ist. Aber es fehlte die Probe oder wenigstens der Hinweis darauf, daß dieses Zahlenpaar der Ausgangsgleichung

$$y^3 = (x+2)^4 - x^4 \text{ genügt.}$$

Ergebnisspiegel

|   |   |   |    |    |   |   |   |         |
|---|---|---|----|----|---|---|---|---------|
| 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | Punkte  |
| 2 | 5 | 1 | 12 | 16 | 6 | 4 | 6 | Schüler |

Dr. K. Rosenbaum, Päd. Hochschule  
Dr. Theodor Neubauer, Erfurt

4. 1. Lösung: (Vorschlag der Aufgabenkommission): Für die gesuchte Zahl  $x$  gilt  $(x+\sqrt{2})^2 = 4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} - 2\sqrt{16-7} = 2$ , also (1)  $x(x+2\sqrt{2})=0$ . Wegen  $\sqrt{4+\sqrt{7}} > \sqrt{4-\sqrt{7}}$ , also  $x+2\sqrt{2} = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} + \sqrt{2} > \sqrt{2} > 0$ , folgt aus (1), daß  $x=0$  ist.

2. Lösung: Für die gesuchte Zahl  $x$  gilt  $(x+\sqrt{2})^2 = 2$  (Siehe 1. Lösung.) Durch Radizieren erhält man als dazu äquivalente Gleichung (2)  $|x+\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ . Wegen  $\sqrt{4+\sqrt{7}} > \sqrt{4-\sqrt{7}}$  gilt  $x+\sqrt{2} > 0$ . Also ist  $|x+\sqrt{2}| = x+\sqrt{2}$ . Mithin ist die Gleichung (2) äquivalent mit  $x+\sqrt{2} = \sqrt{2}$  bzw. mit  $x=0$ . Die gesuchte Zahl  $x$  ist also gleich Null.

3. Lösung: Die gesuchte Zahl  $x$  ist genau dann positiv, negativ oder gleich Null, wenn  $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$  größer, kleiner oder gleich  $\sqrt{2}$  ist. Wegen  $\sqrt{4+\sqrt{7}} > \sqrt{4-\sqrt{7}}$ , d. h. wegen  $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} > 0$  ist  $x$  genau dann positiv, negativ oder gleich Null, wenn  $(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2$  größer, kleiner oder gleich 2 ist. Es ist  $(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2 = 2$ . (Siehe 1. Lösung.) Also ist  $x=0$ .

4. Lösung: Die Zahl  $x$  ist entweder positiv, negativ oder gleich Null. Angenommen, die

Zahl  $x$  sei positiv. Dann gilt  $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} > \sqrt{2}$ . Daraus folgt durch Quadrieren  $4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} - 2\sqrt{16-7} > 2$ , d. h.  $2 > 2$ . Widerspruch. Entsprechend führt auch die Annahme, die Zahl  $x$  sei negativ, auf einen Widerspruch. Also ist  $x=0$ .

Bemerkungen: Die Aufgabe ist für die DDR-Stufe als leicht zu bezeichnen. Fast die Hälfte aller Schüler erreichte die volle Punktzahl. Die einzige Schwierigkeit dieser Aufgabe bestand in dem exakten Begründen der Äquivalenz von Gleichungen im Zusammenhang mit dem Umformen durch Potenzieren bzw. Radizieren. Der Lösungsweg der Aufgabenkommission wurde von nur wenigen Schülern beschritten, wobei hier einige dieser Schüler zu untersuchen vergaßen, daß  $x = -2\sqrt{2}$  keine Lösung ist. Am häufigsten wurde mit den Wurzeln ohne Benutzung der Variablen  $x$  gearbeitet (etwa im Sinne der 3. Lösung), wobei allerdings zum Teil der Fehler gemacht wurde, aus der Wahrheit einer aus einer Behauptung abgeleiteten Aussage auf die Wahrheit der Behauptung zu schließen. Die meisten derjenigen Schüler, die eine Lösung etwa im Sinne der 4. Lösung lieferten, hatten erhebliche Schwierigkeiten bei der Formulierung des Widerspruchsbeweises. – Eine sehr rationell formulierte Lösung legte der Schüler Klaus Göring (Schwerin) vor.

Verteilung der Punkstufen:

|   |   |   |    |    |   |    |
|---|---|---|----|----|---|----|
| 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5 | 6  |
| 7 | 7 | 7 | 12 | 15 | 6 | 45 |

Dr. M. Rehm, Humboldt-Universität Berlin

Die Lösungen zu Aufgabe 5 und 6 folgen in Heft 6/74; die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufe 11/12 erscheinen in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“.

alpha stellt vor: H.-D. Gronau

1957 wurde ich in die 3. Oberschule Neustrelitz eingeschult, die ich 8 Jahre lang besuchte. Während der 6. Klasse hatte ich die erste Berührung mit den Mathematik-Olympiaden. Der dritte Platz im Kreismaßstab war mir Ansporn, mich mehr mit der Mathematik zu beschäftigen. Von 1965 bis zum Abitur 1969 besuchte ich die EOS „Friedrich Engels“ Neubrandenburg. Während dieser Zeit konnte ich bei Mathematik-Olympiaden gute Ergebnisse erzielen, deren Höhepunkt ein 3. Preis bei der XI. Internationalen Mathematik-Olympiade 1969 in der SR Rumänien war.

Im gleichen Jahr begann ich ein Mathematik-Studium an der Universität Rostock, das ich 1973 erfolgreich abschloß. Seitdem bin ich hier an der Sektion Mathematik als wissenschaftlicher Assistent tätig.

Auch heute noch bin ich eng mit den Mathematik-Olympiaden verbunden. So betreue ich einige Schüler durch Korrespondenz, leite eine Arbeitsgemeinschaft im Pionierhaus Rostock und korrigiere bei den Olympiaden mit.

## Lösungen zu

### Mathematikolympiaden in der DRV

▲ 1 ▲ Aus  $** : ** = 8$  folgt, daß der Divisor 10, 11 oder 12 sein könnte, denn  $8 \cdot 13 = 104$  ist bereits dreistellig. Aus  $*** : ** = *$  folgt, daß die erste und die letzte Stelle des Quotienten 9 sein muß.

Wegen  $9 \cdot 10 = 90 < 100$  und  $9 \cdot 11 = 99 < 100$  ist der Divisor somit gleich 12, denn  $9 \cdot 12 = 108$ . Aus  $12 \cdot 90809 = 1\,089\,708$  folgt die vollständige Lösung:

$$1\,089\,708 : 12 = 90\,809$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ 097 \\ 96 \\ 108 \\ 108 \\ 0 \end{array}$$

▲ 2 ▲ a)  $(x^2 - yz)(y - xyz) - (y^2 - xz)(x - xyz) = x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z - xy^2 + xy^3z + x^2z - x^2yz^2 - x^2y^2z - x^2yz^2 - xyz - xyz = x(xy - x^2yz - xy^2z + xz + yz - xyz^2) - y(xy - x^2yz - xy^2z + xz + yz - xyz^2) = (x - y)(xy - x^2yz - xy^2z + xz + yz - xyz^2) = (x - y)[xy + xz + yz - xyz(x + y + z)].$

Wir addieren zu diesem Term  $x^2y^2z - x^2y^2z$  und  $xyz - xyz$  und erhalten

$$\begin{aligned}x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z - xy^2 + xy^3z - x^2z - x^2yz^2 + x^2y^2z - x^2yz^2 + xyz - xyz \\ = x(xy - x^2yz - xy^2z + xz + yz - xyz^2) - y(xy - x^2yz - xy^2z + xz + yz - xyz^2) \\ = (x - y)(xy - x^2yz - xy^2z + xz + yz - xyz^2) \\ = (x - y)[xy + xz + yz - xyz(x + y + z)].\end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)},$$

$$y(1 - xz)(x^2 - yz) = x(1 - yz)(y^2 - xz),$$

$$(x^2 - yz)(y - xyz) - (y^2 - xz)(x - xyz) = 0.$$

Nach dem Ergebnis von 2a) läßt sich die linke Seite dieser Gleichung in Produktform darstellen:

$$(x - y)[xy + xz + yz - xyz(x + y + z)] = 0$$

Wegen der Bedingung  $x \neq y$ , also  $x - y \neq 0$ , kann  $x - y = 0$  nicht zutreffen. Deshalb gilt

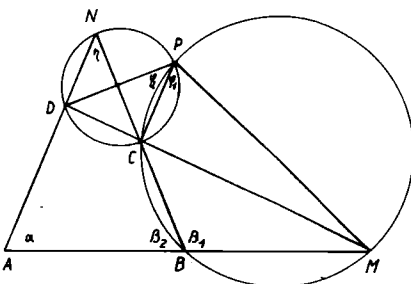
$$xy + xz + yz - xyz(x + y + z) = 0,$$

$$xy + xz + yz = xyz(x + y + z),$$

$$x + y + z = \frac{xy + xz + yz}{xyz},$$

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

▲ 3 ▲ Die Umkreise der Dreiecke  $\triangle DCN$  und  $\triangle BMC$  haben die Punkte  $C$  und  $P$  gemeinsam. Wir verbinden  $P$  mit  $D, C$  und  $M$ . Der Abbildung ist nun folgendes zu entnehmen:



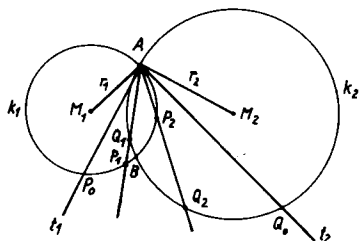
Das Viereck  $BMPC$  ist ein Sehnenviereck; deshalb gilt  $\beta_1 + \varphi_1 = 180^\circ$ . Ferner gilt  $\beta_1 + \beta_2 = 180^\circ$  als Nebenwinkel. Daraus folgt

$\varphi_1 = \beta_2$ . Zwei Peripheriewinkel über demselben Bogen sind kongruent; deshalb gilt  $\varphi_2 = \eta$ . Aus  $\varphi_1 = \beta_2$  und  $\varphi_2 = \eta$  folgt durch Addition

$\varphi_1 + \varphi_2 = \beta_2 + \eta$ ,  $\varphi_1 + \varphi_2 + \alpha = \beta_2 + \eta + \alpha$ . Für die Summe der Innenwinkel des Dreiecks  $ABN$  gilt  $\alpha + \beta_2 + \eta = 180^\circ$ . Somit gilt auch  $\varphi_1 + \varphi_2 + \alpha = 180^\circ$ , d. h. Viereck  $AMPD$  ist ein Sehnenviereck. Der Punkt  $P$  liegt somit auf dem Umkreis des Dreiecks  $AMD$ .

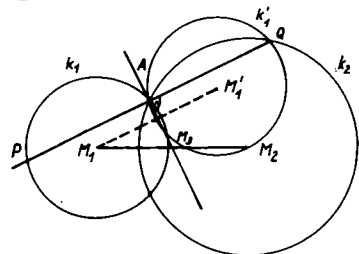
Der Beweis, daß der Umkreis des Dreiecks  $ABN$  ebenfalls durch  $P$  geht, erfolgt in analoger Weise.

▲ 1 ▲ a) Es sei  $t_1$  die in  $A$  an  $k_1$  und  $t_2$  die in  $A$  an  $k_2$  gezogene Tangente. Alle Geraden  $P_i Q_i$ , die durch  $A$  und durch das Innere des Winkels  $\angle P_0 A Q_0$  gehen, erfüllen die gestellte Bedingung.



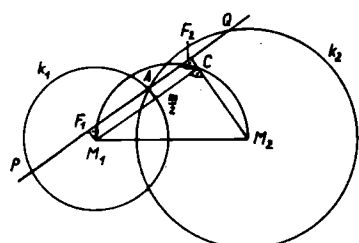
b) Es sei  $M_3$  der Mittelpunkt der Strecke  $M_1 M_2$ . Die Senkrechte zu  $AM_3$  durch  $A$  schneide  $k_1$  in  $P$  und  $k_2$  in  $Q$ . Dann gilt  $\overline{AP} = \overline{AQ}$ .

**Beweis:** Spiegeln wir  $k_1$  an  $AM_3$  als Symmetrieachse, dann schneidet das Bild  $k_1'$  von  $k_1$  den Kreis  $k_2$  in  $A$  und  $Q$ . Die Gerade  $AQ$  möge  $k_1$  in  $P$  schneiden. Aus den vorliegenden Symmetrieeigenschaften folgt dann  $\overline{AP} = \overline{AQ}$ .



c) Wir zeichnen über dem Durchmesser  $\overline{M_1 M_2}$  einen Halbkreis. Der Kreis um  $M_1$  mit dem Radius  $\frac{m}{2}$  schneide diesen Halbkreis in  $C$ .

Die durch  $A$  parallel zu  $CM_1$  verlaufende Gerade schneide  $k_1$  in  $P$  und  $k_2$  in  $Q$ . Die Gerade  $CM_2$  schneide  $PQ$  in  $F_2$ , die Parallele zu  $CF_2$  durch  $M_1$  schneide  $PQ$  in  $F_1$ . Auf Grund der Konstruktion ist das Viereck  $M_1 C F_2 F_1$  ein Rechteck mit  $\overline{F_1 F_2} = \overline{CM_1} =$



$= \frac{m}{2}$ . Da  $F_1$  die Strecke  $\overline{AP}$  und  $F_2$  die

Strecke  $\overline{AQ}$  halbiert, gilt  $\overline{PQ} = m$ . Die Aufgabe ist nur lösbar für  $m < 2 \cdot \overline{M_1 M_2}$ .

d) Aus der Abbildung zu 4c) folgt  $\overline{F_1 F_2} = \overline{CM_1} < \overline{M_1 M_2}$ . Gilt nun  $PQ \parallel M_1 M_2$ , so fällt  $C$  mit  $M_2$  zusammen, und die Strecke  $\overline{PQ}$  besitzt maximale Länge.

#### Lösungen zu: 25 Jahre RGW

▲ 1 ▲ Angenommen im Jahre 1975 werden  $x$  Autobusse hergestellt; dann gilt

$$(x - 5000) + x = 19000,$$

$$2x = 24000,$$

$$x = 12000.$$

Im Jahre 1975 sollen bereits 12000 Autobusse produziert werden.

▲ 2 ▲ Es sei  $x$  die Anzahl der von der UdSSR zur Verfügung gestellten Dokumentationen; dann gilt

$$x + (x - 20000) = 62000,$$

$$2x = 82000,$$

$$x = 41000.$$

Die UdSSR stellte den sozialistischen Bruderländern in den letzten 20 Jahren 41000 wissenschaftlich-technische Dokumentationen zur Verfügung.

▲ 3 ▲  $\frac{8,5 \cdot 1,5 \cdot 10^9}{10^3} = 85 \cdot 15 \cdot 10^4$

$$= 12750000$$

Durch diese Menge Erdgas könnten 12750000 t Steinkohle ersetzt werden.

▲ 4 ▲  $600000 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 3000000$

Die Jahresproduktion an Zement wird im Jahre 1975 in Kuba voraussichtlich 3 Millionen Tonnen betragen.

▲ 5 ▲

$$(100 + 25) : 100 = (x + 100) : (100 + 30),$$

$$125 : 100 = (x + 100) : 130,$$

$$100 \cdot (x + 100) = 125 \cdot 130,$$

$$x + 100 = 125 \cdot 1,3,$$

$$x = 125 \cdot 1,3 - 100$$

$$x = 62,5.$$

In den RGW-Ländern nahm die Arbeitsproduktivität von 1961 bis 1970 durchschnittlich um 62,5 % zu.

▲ 6 ▲  $\frac{150000 \cdot 4}{75 \cdot 120} \approx 67$

Bis zum Jahre 1975 werden im Containerverkehr Gütertransporte erreicht, die einer Transportleistung von 67 Güterzügen entsprechen, die aus vierachsigen Großgüterwagen bei einer Zuglänge von 120 Achsen zusammengestellt sind.

▲ 7 ▲  $m = V \cdot \rho; V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$

$$= \pi h \cdot (R^2 - r^2);$$

$$m = \pi h \rho \cdot (R^2 - r^2);$$

$$m = 3,14 \cdot 230 \cdot 10^5 \cdot (46^2 - 44,5^2)$$

$$= 7,85 \cdot 10^{-6} t;$$

$$m \approx 77000 t$$

Beim Bau des in der DDR befindlichen Leitungsabschnittes der Erdgasleitung Nordlicht mußten rund 77000 Tonnen Stahlrohre befördert werden.

#### Lösungen zu alpha-heiter 5/74

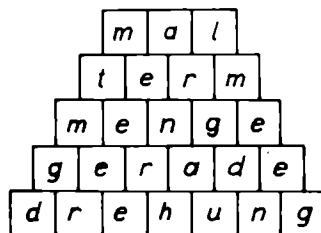
##### Fremdkörper

- ▲ 1 ▲ Einteilung in gerade und ungerade Zahlen; 2 und 47
- ▲ 2 ▲ Einteilung in Primzahlen und zusammenges. Z.; 9 und 7
- ▲ 3 ▲ Einteilung in einstellige und zweistellige Z.; 11 und 4

##### Rätselpyramide

Die weggelassenen Buchstaben sind:

$a, l, t, r, m, n, a, e,$   
werden von diesen wiederum die Buchstaben „a“ und „r“ gestrichen, so kommen die restlichen in „Mantel“ vor.



##### Bedeutende Mathematiker gesucht

- |           |           |
|-----------|-----------|
| 1 Leibniz | 5 Buerger |
| 2 Newton  | 6 Duerer  |
| 3 Hankel  | 7 Cantor  |
| 4 Cramer  | 8 Thales  |
- Lösungswort: LEHRBUCH

##### Gespiegeltes

a) 2; b) 3; c) 5; d) 4; e) 5.

##### Die Zahl 10000 gesucht

$$22^2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot$$

$$333 \cdot 3 - \frac{3}{3} + 3 - \frac{3}{3}$$

$$\frac{(5+5)^5 \cdot 5}{(5+5)(5+5) \cdot 5}$$

$$7! : 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 - (7+7)$$

$$8888 : 8 - \frac{888}{8}$$

(Es gibt z. T. mehrere Lösungen, wir bieten nur eine.)

##### „Tierische“ Mathematik

4 8 4 6  
4 1 2 4  
9 7 1 0  
6 7 8 4  
2 5 4 6 4

##### Gastronomisches Rätsel

- I.  $2(y-1) = x$   
II.  $y+1 = x$

$y = 3$  (Tische)

Wird dieser Wert in eine Gleichung eingesetzt, so folgt:  $x = 4$  (Fische)

##### Kryptarithmetik

$$1218 : 14 = 87$$

$$\begin{array}{r} - \quad x \quad + \\ 303 + 35 = 338 \\ 915 - 490 = 425 \end{array}$$

# 25 Jahre RGW



Die sozialistischen Länder begingen den 25. Jahrestag der erfolgreichen Tätigkeit des *Rates für Gegenseitige Wirtschaftshilfe* – der ersten internationalen Wirtschaftsorganisation sozialistischen Typs. Das Komplexprogramm für die weitere Vertiefung und Vervollkommen der Zusammenarbeit und Entwicklung der sozialistischen ökonomischen Integration der Mitgliedländer des RGW, das gegenwärtig realisiert wird, legte das Fundament für die gemeinsame Lösung der volkswirtschaftlichen Probleme des Aufbaus des Sozialismus und Kommunismus. In der 25jährigen Arbeitsperiode des RGW hat sich die große Lebenskraft der neuen Gesellschaftsordnung, des sozialistischen Internationalismus bewiesen. In dieser Zeit übertrafen die RGW-Mitgliedländer die entwickelten kapitalistischen Staaten beispielsweise im Tempo des Zuwachses der Industrieproduktion um das Dreifache. Mit jedem Jahr wächst die internationale Autorität der sozialistischen Staatengemeinschaft und damit ihr vielfältiger Einfluß auf die heutige Welt. Die Länder, die den RGW bilden, entwickeln ihre gegenseitigen Beziehungen im Geiste des sozialistischen Internationalismus und stärken die ökonomische Macht des Sozialismus insgesamt und jedes einzelnen sozialistischen Staates, sie fördern das Bestreben, die Überlegenheit über den Kapitalismus auf allen Gebieten des gesellschaftlichen Lebens zu erreichen. Dabei ist der Sinn der Tätigkeit der kommunistischen und Arbeiterparteien der RGW-Länder von dem Grundsatz bestimmt: *Alles für den Menschen, alles zum Wohle des Menschen*. Die folgenden Aufgaben sollen dazu beitragen, Einsichten in das Wesen der sozialistischen ökonomischen Integration zu vertiefen und die Überlegenheit gegenüber imperialistischen Wirtschaftsblöcken zu belegen.

▲1▲ Entsprechend dem RGW-Komplexprogramm werden die *Ikarus-Werke* in der Ungarischen Volksrepublik zu einer der größten Autobusfabriken der Welt ausgebaut. Wieviel Autobusse sollen im Jahre 1975 von den *Ikarus-Werken* hergestellt werden, wenn die Produktion gegenüber dem Jahr

1972 um 5000 Autobusse erhöht wird und in den beiden Jahren 1972 und 1975 zusammen 19 000 Autobusse produziert werden?

▲2▲ Angesichts des raschen wissenschaftlich-technischen Fortschritts erlangt der Austausch von Dokumentationen als eine wichtige Form der gegenseitigen Hilfe steigende Bedeutung. In den vergangenen 20 Jahren übergab die Sowjetunion den sozialistischen Bruderstaaten Dokumentationen; ihrerseits erhielt die Sowjetunion von ihren Partnern ebenfalls Dokumentationen. Insgesamt wurden 62 000 wissenschaftlich-technische Dokumentationen ausgetauscht. Die Anzahl der von der UdSSR zur Verfügung gestellten Dokumentationen war um 20 000 größer als die Anzahl der Dokumentationen, die an die UdSSR übergeben wurden. Wieviel Dokumentationen stellte die Sowjetunion den Bruderländern zur Verfügung?

▲3 Bis zum 31. Dezember 1975 werden über die Erdgasleitung *Nordlicht* 8,5 Milliarden Kubikmeter Erdgas in die DDR gelangen. Wieviel Tonnen Steinkohle könnten durch diese Menge Erdgas ersetzt werden, wenn ein Kubikmeter Erdgas im Heizwert 1,5 kg Steinkohle entspricht?

▲4▲ Einen bedeutenden Beitrag leisteten die RGW-Länder beim Ausbau der kubanischen Zementindustrie. Im Vorrevolutionenjahr 1958 produzierten die Zementfabriken Kubas nur 600 000 t Zement pro Jahr. Dank dem von der ČSSR gelieferten Zementwerk *Siguaney* sowie dem mit Hilfe der DDR errichteten Werk von *Nuevitas* konnten im Jahre 1971 in Kuba bereits  $\frac{5}{3}$  der Zementproduktion des Jahres 1958 erreicht werden. Die Produktion von Zement konnte im Jahre 1972 gegenüber dem Jahre 1971 um die Hälfte

erhöht werden. Im Jahre 1973 konnten  $\frac{4}{3}$  der Produktion des Jahres 1972 erreicht werden. Für das Jahr 1975 rechnet man mit einer Steigerung der Zementproduktion auf das  $\frac{1}{2}$ -fache gegenüber dem Jahre 1973.

Wieviel Tonnen Zement wird die Jahresproduktion 1975 in Kuba voraussichtlich betragen?

▲5▲ Eine wichtige Kennziffer für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt ist die Steigerung der Arbeitsproduktivität. Sie erhöhte sich in den RGW-Ländern von 1961 bis 1965 um 25 Prozent und von 1966 bis 1970 um 30 Prozent.

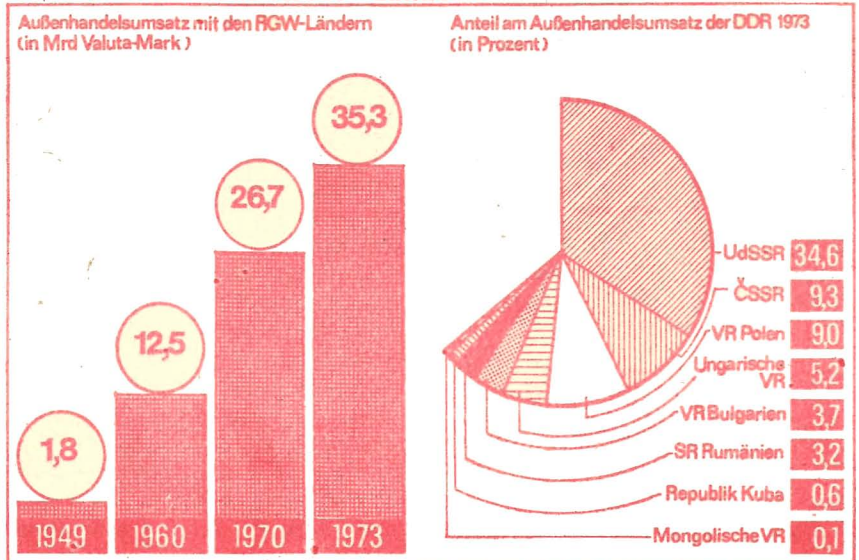
Um wieviel Prozent nahm die Arbeitsproduktivität von 1961 bis 1970 in den RGW-Ländern durchschnittlich zu?

▲6▲ Bis zum Jahre 1975 werden die Mitgliedländer des RGW den Containerverkehr einführen. Dabei sollen die Gütertransporte in Containern im Eisenbahn- und Seeverkehr zwischen den RGW-Ländern einen Umfang von etwa 150 000 Tonnen jährlich erreichen. Wieviel Güterzüge aus vierachsigen Großgüterwagen mit einer Tragfähigkeit von 75 t wären zur Beförderung der jährlich im Containerverkehr vorgesehenen Güter erforderlich, wenn die Zuglänge eines Güterzuges auf 120 Achsen beschränkt ist?

▲7▲ Das in der DDR befindliche Teilstück der Erdgasleitung *Nordlicht* hat eine Länge von 230 km. Die Erdgasleitung besteht aus Stahlrohren mit einem Außendurchmesser von 920 mm und einer Wandstärke von 1,5 cm.

Wieviel Tonnen Rohre müssen beim Bau dieses Leitungsabschnittes befördert werden?  
Th. Scholl

## Außenhandel mit den RGW-Ländern





## Leseprobe



§ 3. Es entsteht folgende Frage: *Eine Aussage sei in einigen speziellen Fällen richtig; alle Fälle können jedoch unmöglich untersucht werden; wie kann man erkennen, ob diese Aussage allgemein richtig ist?*

Diese Frage kann mit Hilfe einer besonderen Methode, der sogenannten *Methode der vollständigen Induktion* (Schluß von  $n$  auf  $n+1$ ) manchmal gelöst werden.

Diese Methode beruht auf dem *Prinzip der vollständigen Induktion*, das in folgendem besteht:

Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl  $n$  richtig, wenn sie

1. für  $n=1$  richtig ist und wenn
2. aus der Richtigkeit der Aussage für eine willkürliche natürliche Zahl  $n=k$  die Richtigkeit für  $n=k+1$  folgt.

*Beweis:* Wir nehmen an, die Aussage sei nicht für jede natürliche Zahl  $n$  richtig. Es würde dann eine natürliche Zahl  $m$  existieren mit der Eigenschaft, daß 1) die Aussage für  $n=m$  falsch, 2) für jedes  $n$ , das kleiner als  $m$  ist, die Aussage richtig ist. (Mit anderen Worten:  $m$  wäre die erste natürliche Zahl, für welche die Aussage falsch ist.)

Offenbar wäre  $m > 1$ , da für  $n=1$  die Aussage richtig ist (Bedingung 1). Folglich wäre  $m-1$  eine natürliche Zahl. Daraus ergäbe sich weiter, daß für die natürliche Zahl  $m-1$  die Aussage richtig, aber für die nachfolgende natürliche Zahl  $m$  falsch wäre. Dies widerspräche der Bedingung 2.

*Bemerkung.* Beim Beweis des Prinzips der vollständigen Induktion haben wir benutzt, daß in jeder Menge natürlicher Zahlen eine kleinste enthalten ist. Es ist leicht zu sehen,

daß diese Eigenschaft ihrerseits als Folgerung aus dem Prinzip der vollständigen Induktion abgeleitet werden kann. Somit sind beide Aussagen äquivalent. Jede von ihnen kann man als Axiom ansehen, welches die Folge der natürlichen Zahlen definiert; die andere ist dann ein Satz. Gewöhnlich nimmt man als Axiom das Prinzip der vollständigen Induktion selbst.

§ 4. Einen auf dem Prinzip der vollständigen Induktion beruhenden Beweis nennt man *Beweis durch vollständige Induktion*. Ein derartiger Beweis muß notwendigerweise aus zwei Teilen bestehen, aus dem Beweis der beiden voneinander unabhängigen Sätze:

*Satz 1.* Die Aussage ist für  $n=1$  richtig.  
*Satz 2.* Die Aussage ist für  $n=k+1$  richtig, wenn sie für  $n=k$  richtig ist, wobei  $k$  eine beliebige natürliche Zahl ist. Sind diese beiden Sätze bewiesen, so ist auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion die Aussage für jedes natürliche  $n$  richtig.

*Beispiel 1.* Man berechne die Summe  

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Wir wissen, daß

$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{3}{4}, S_4 = \frac{4}{5} \text{ ist.}$$

Jetzt wollen wir den Fehler, den wir im Beispiel 1 zuließen, nicht wiederholen und nicht gleich behaupten, für jedes natürliche  $n$  sei

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Wir sind vorsichtig und sagen, die betrachteten  $S_1, S_2, S_3, S_4$  würden die Vermutung nahelegen, daß die Beziehung  $S_n = \frac{n}{n+1}$

für jedes natürliche  $n$  gilt. Gleichzeitig wissen wir, daß diese Vermutung für  $n=1, 2, 3, 4$  richtig ist. Zum Beweis der Allgemeingültigkeit jener Vermutung wollen wir nun die Methode der vollständigen Induktion benutzen.

*Satz 1.* Für  $n=1$  ist die Vermutung richtig, da  $S_1 = \frac{1}{2}$  ist.

*Satz 2.* Wir nehmen an, die Vermutung sei für  $n=k$  richtig, d. h., es sei

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

wobei  $k$  eine natürliche Zahl ist. Wir zeigen, daß dann die Vermutung auch für  $n=k+1$  richtig ist, d. h., daß

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2} \text{ gilt.}$$

In der Tat ist

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

und folglich nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Damit sind beide Sätze bewiesen. Auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion gilt also, daß für jede natürliche Zahl  $n$

$$S_n = \frac{n}{n+1} \text{ ist.}$$

*Bemerkung 1.* Es ist notwendig, zu betonen, daß ein Beweis durch vollständige Induktion unbedingt den Beweis der beiden Sätze 1 und 2 verlangt.

Wir sahen schon, zu welchem Ergebnis die Nichtbeachtung des Satzes 2 führt. Nunmehr zeigen wir, daß auch Satz 1 niemals weggelassen werden darf. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

*Beispiel 2. Behauptung.* Jede natürliche Zahl ist der ihr folgenden natürlichen Zahl gleich. Wir „beweisen“ dies durch vollständige Induktion. Wir nehmen dazu an, es sei

$$k = k+1, \quad (1)$$

und beweisen, daß dann

$$k+1 = k+2 \text{ gilt.} \quad (2)$$

In der Tat erhalten wir, wenn wir auf jeder Seite der Gleichung (1) eine 1 addieren, die Gleichung (2). Hieraus folgt: Ist die Aussage für  $n=k$  richtig, so ist sie auch für  $n=k+1$  richtig, und die Behauptung wäre bewiesen.

*Folgerung.* Alle natürlichen Zahlen sind einander gleich. Wo ist hier aber der Fehler? Der Fehler liegt darin, daß der erste der für die Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion notwendigen Sätze hier nicht bewiesen wurde und auch gar nicht richtig ist, daß vielmehr nur der zweite Satz bewiesen wurde.

Die Sätze 1 und 2 haben beide ihre spezielle Bedeutung. Satz 1 schafft sozusagen die Basis für die Durchführung der vollständigen Induktion. Satz 2 liefert die Berechtigung der automatischen Ausdehnung (Verbreiterung) dieser Basis, die Berechtigung für den

Übergang von dem gegebenen speziellen Fall zu dem folgenden, von  $n$  auf  $n+1$  (daher die Bezeichnung „Schluß von  $n$  auf  $n+1$ “; d. Red.).

Ist Satz 1 nicht bewiesen, wohl aber Satz 2 (siehe Beispiel 2), so ist die Basis für die Anwendung der Induktion nicht geschaffen; daher ist es sinnlos, Satz 2 anwenden zu wollen, da eigentlich nichts zum Verbreitern vorhanden ist.

Wurde aber Satz 2 nicht bewiesen, sondern nur Satz 1 gezeigt, so fehlt die Berechtigung für eine Verallgemeinerung, obgleich die Basis für die Anwendung der Induktion vorhanden ist.

**Bemerkung 2.** Die vollständige Induktion wurde im vorstehenden für einfachste Fälle untersucht. In komplizierteren Fällen müssen die Formulierungen der Sätze 1 und 2 entsprechend geändert werden.

Bisweilen stützt sich der zweite Teil des Beweises auf die Richtigkeit der Aussage nicht nur für  $n=k$ , sondern auch für  $n=k-1$ . In diesem Falle muß die Aussage im ersten Teil für zwei aufeinanderfolgende Werte von  $n$  bewiesen werden (siehe später Aufgabe 18).

Manchmal kann man eine Aussage nicht für alle natürlichen  $n$ , wohl aber für alle ganzen  $n$ , die oberhalb einer gewissen ganzen Zahl  $m$  liegen, beweisen. In diesem Fall verifiziert man im ersten Teil des Beweises die Aussage für  $n=m+1$  und, wenn dies notwendig ist, auch für gewisse nachfolgende Werte von  $n$  (vgl. Aufgabe 24).

§ 5. Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir zur Klärung einer wesentlichen Seite der vollständigen Induktion noch einmal auf Beispiel 1 zurückkommen.

Als wir die Summe

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

für verschiedene Werte von  $n$  untersucht, berechneten wir

$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{3}{4}, S_4 = \frac{4}{5}, \dots$$

Dies führte uns zu der Vermutung, daß für jedes  $n$

$$S_n = \frac{n}{n+1} \text{ gilt.}$$

Zum Beweis dieser Vermutung benutzten wir die vollständige Induktion.

Wir hatten Glück und sprachen eine Vermutung aus, die sich dann auch bestätigte. Hätten wir eine sich als falsch erweisende Vermutung aufgestellt, so hätte sich der Fehler beim Beweis des Satzes 2 gezeigt.

**Beispiel 3.** Wir wissen, daß

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (1)$$

ist. Nehmen wir an, wir hätten

$$S_n = \frac{n+1}{3n+1} \text{ vermutet.} \quad (2)$$

Für  $n=1$  ist die Formel (2) richtig, da

$$S_1 = \frac{1}{2} \text{ ist. Nehmen wir an, die Formel (2)}$$

sei für  $n=k$  richtig, d. h., es gelte

$$S_k = \frac{k+1}{3k+1}.$$

Wir versuchen nun zu zeigen, daß die Formel (2) dann auch für  $n=k+1$  richtig ist, d. h., daß

$$S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4} \text{ gilt. Nun ist aber}$$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{k^3 + 4k^2 + 8k + 3}{(k+1)(k+2)(3k+1)} \end{aligned}$$

d. h., wir finden ein anderes als das erwartete Resultat. (Die beiden Ausdrücke für  $S_{k+1}$  sind nicht identisch; setzt man sie gleich, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für  $k$ , die keine reellen Lösungen hat; d. Red.). Also folgt aus der Richtigkeit der Formel (2) für  $n=k$  nicht die für  $n=k+1$ . Wir haben vielmehr gefunden, daß die Formel (2) falsch ist.

Daher gestattet die vollständige Induktion, die bei der Suche nach einem allgemeinen Gesetz entstehenden Vermutungen zu prüfen, falsche zu verwerfen und richtige zu bestätigen.

## Neuerscheinung

H. Pieper

## Zahlen aus Primzahlen

Mathematische Schülerbücherei, Band 81  
167 S., Broschur Preis: 6,70 M  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

