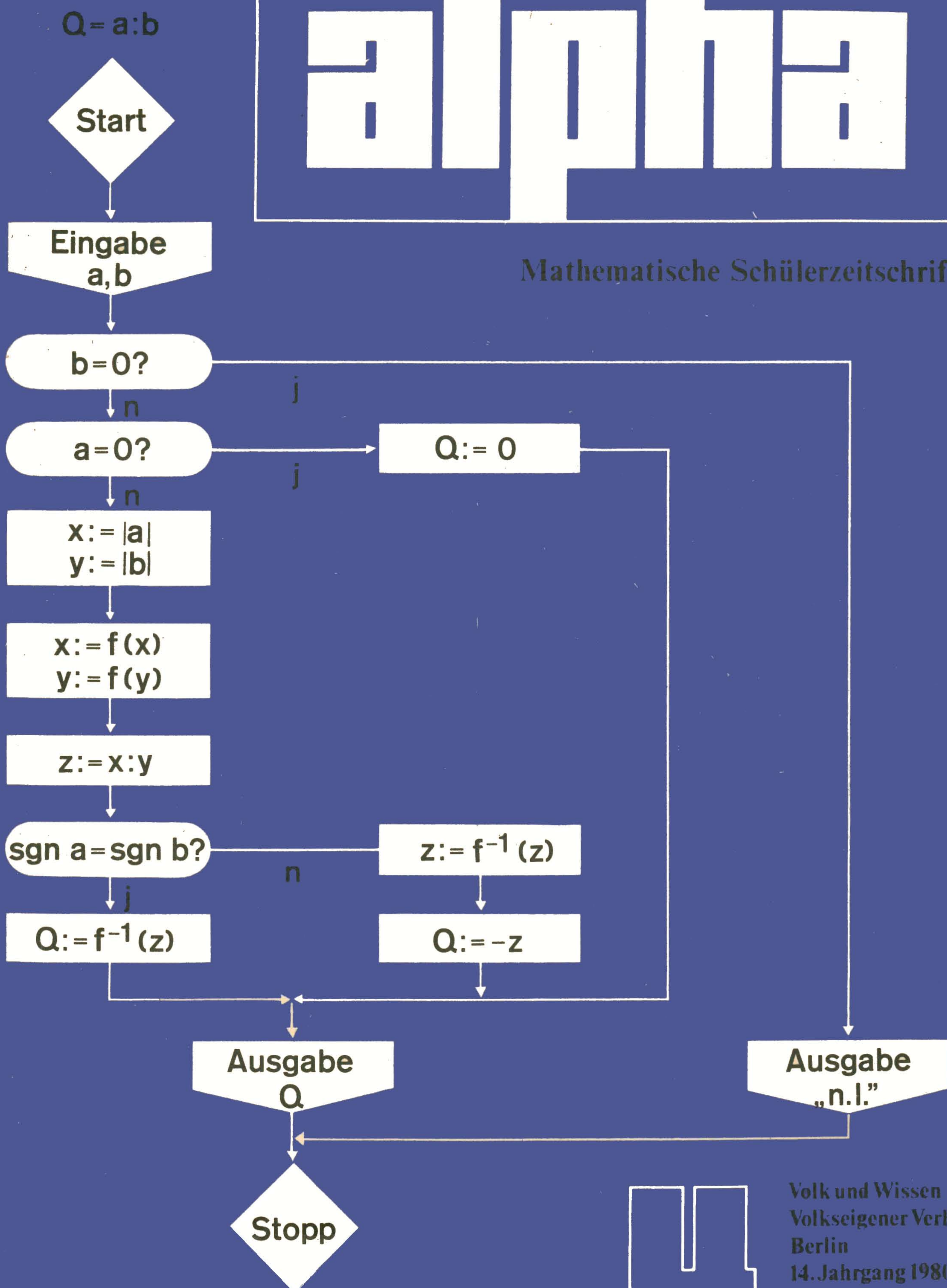
# alpha

Mathematische Schülerzeitschrift




4


Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
14. Jahrgang 1980
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

*Fotos bzw. Vignetten:* Briefmarken: Archiv J. Lehmann, Leipzig (S. 76); Zentralinstitut für Astrophysik, Potsdam-Babelsberg (S. 77); K. Maschkin, Moskau (S. 82, 87, 88, III. US.); J. Lehmann, Leipzig (S. 84).
Das Titelblatt wurde nach Vorlage von L. Flade, Halle, gestaltet.
*Titelblatt:* W. Fahr, Berlin
*Typographie:* H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395
*Redaktionsschluß:* 25. April 1980

alpha
# Mathematische Schülerzeitschrift

# Inhalt

73 Ohne Zirkel geht es auch [9]*
Konstruktionen mit beschränkten Mitteln
Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

77 Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Dierk-Ekkehard Liebscher [9]
Stellv. Direktor des Zentralinstituts für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften, Potsdam-Babelsberg

78 Geometrie pseudoeuklidisch [9]
Prof. Dr. D.-E. Liebscher

79 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [6]
*Zusammenstellung:* J. Lehmann/Th. Scholl

80 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Speziell für Klasse 5/6 · Das arithmetische Mittel [5]
Oberstudienrat K. Lehmann, V.L.d.V., Fachberater Mathematik im Stadtbezirk Berlin-Lichtenberg

82 Ein Programmablaufplan [8]
Dr. sc. nat. L. Flade, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle

83 Millionengewinne mit mathematischen Tricks? [7]
aus: Leipziger Volkszeitung

84 XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
4. Stufe (DDR-Olympiade) · Preisträger

85 Die Exhaustionsmethode
A. Halameisär, Moskau/C. P. Helmholz, Leipzig

87 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Programmiertes Life-Spiel [8]
Pionier- und Jugendakademie Erfurt

88 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
*Zusammenstellung:* J. Lehmann, Leipzig

90 XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben der 1. Stufe (Schulolympiade)

92 Lösungen [5]

*III. U.-Seite:* Mathematikaufgaben aus Freundesland [7]
9 Aufgaben aus der ČSSR

*IV. U.-Seite:* Zahlenzauber – Zauberzahlen [5]
aus: NBI, Berlin

*Innenteil:* Seiten I bis III und VI bis VIII: XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR – Aufgaben und Lösungen der Bezirksolympiade [7]
Seite IV/V: 1-2-3 Lustige Logelei [5]
*alpha*-Wandzeitung, *Zusammenstellung:* J. Lehmann, Leipzig

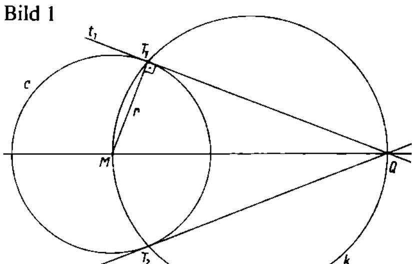
* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Ohne Zirkel geht es auch

## Konstruktionen mit beschränkten Mitteln

Aus der Schule ist es uns geläufig, für geometrische Konstruktionen auf dem Zeichenblatt außer einem Bleistift die Instrumente Zirkel und Lineal zu verwenden. Sollen z. B. an eine Kreislinie $c$ von einem außerhalb $c$ liegenden Punkt $Q$ die Tangenten konstruiert werden, dann gehen wir in folgender Weise vor: Ist $M$ der Mittelpunkt von $c$, so halbieren wir die Strecke $\overline{MQ}$ mittels Zirkel und Lineal, stechen anschließend mit dem Zirkel im Halbierungspunkt ein und schlagen um diesen Punkt einen Kreis mit $\overline{MQ}$ als Durchmesser. Dieser Hilfskreis $k$ schneidet $c$ in den Punkten $T_1$ und $T_2$. Die mit dem Lineal gezogenen Verbindungsgeraden $t_1=g(QT_1)$ und $t_2=g(QT_2)$ sind dann die gesuchten Tangenten an $c$. Der Satz des Thales läßt sich bei dieser Konstruktion verwenden, weil der Berührungsradius eines Kreises und die zugehörige Tangente aufeinander senkrecht stehen (Bild 1).

Bild 1

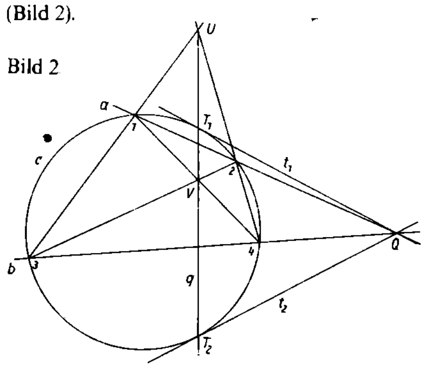



Im folgenden wird nun gezeigt, wie wir die Tangenten an den Kreis $c$ aus $Q$ auch dann konstruieren können, wenn wir den Zirkel einmal vergessen haben und die Kreislinie nur einer Schablone entnehmen. Der Kreismittelpunkt steht daher ebenfalls nicht zur Verfügung. Damit stellt sich uns die Aufgabe:

An eine Kreislinie $c$, deren Mittelpunkt nicht vorliegt, sind von einem außerhalb $c$ liegenden Punkt $Q$ unter alleiniger Verwendung des Lineals die Tangenten zu konstruieren.

Zunächst werde die Konstruktion rezeptmäßig ohne einen Beweis vorgeführt. Durch $Q$ sind zwei Geraden $a$ und $b$ zu legen, von denen lediglich gefordert wird, daß sie die Kreislinie $c$ in je zwei Punkten schneiden. Der Schnitt von $a$ mit $c$ liefert die Punkte 1 und 2. Der Schnitt von $b$ mit $c$ liefert die Punkte 3 und 4. Jetzt bietet es sich an, Verbindungsgeraden zu ziehen. Wir erhalten die Geraden $g_{13}=g(1,3)$, $g_{24}=g(2,4)$, $g_{14}=g(1,4)$, $g_{23}=g(2,3)$. Das Geradenpaar $(g_{13}, g_{24})$ schneidet sich im Punkt $U$. Das Geradenpaar $(g_{14}, g_{23})$ schneidet sich im Punkt $V$. Die Verbindungsgerade $q=g(U,V)$ schneidet $c$ in den Punkten $T_1$ und $T_2$. Es wird behauptet, daß die Verbindungsgeraden $t_1=g(QT_1)$ und $t_2=g(QT_2)$ die gesuchten Tangenten von $Q$ an $c$ sind (Bild 2).

Bild 2




Bei genauer Konstruktion finden wir diese Behauptung durch das Ergebnis zunächst rein anschaulich bestätigt. Der Mittelpunkt $M$ ist für diese Konstruktion entbehrlich. Mit den folgenden Ausführungen soll die Richtigkeit dieser Konstruktion bewiesen werden. Hierzu ist etwas weiter auszuholen. Vor allem sind noch einige grundlegende Begriffe einzuführen und Sätze zu beweisen.

### Pol - Polare, Potenz, Inversion

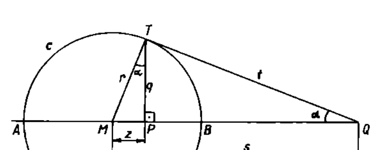
Hat der Kreis $c$ den Radius $r$ und setzt man für die Länge der Strecken $\overline{QT}$ und $\overline{QM}$ die Größen $t$ bzw. $s$, so folgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$s^2=r^2+t^2 \quad \text{oder} \quad s^2-r^2=t^2.$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$(s+r)(s-r)=t^2 \quad \text{oder}$$
$$m(AQ)\cdot m(BQ)=t^2 \tag{1}$$

Bild 3




Man bezeichnet das Produkt der Längen der Strecken $\overline{AQ}$ und $\overline{BQ}$ als die *Potenz* des Punktes $Q$ bezüglich der Kreislinie $c$ (Bild 3).

Das Lot $q$ auf $\overline{AB}$ durch $T$ heißt die *Polare* von $Q$ bezüglich $c$. Andererseits ist der Punkt $Q$ der Pol der Geraden $q$ bezüglich $c$. Der Lotfußpunkt von $q$ auf $\overline{AB}$ werde mit $P$ bezeichnet. Die Distanz $MP$ sei $z$. Dann gilt auf Grund der Ähnlichkeit der zugeordneten Dreiecke die Proportion $z:r=r:s$. Daraus folgt für den Abstand der Polaren vom Kreismittelpunkt:

$$z=\frac{r^2}{s} \tag{2}$$

Von den Punkten $P$ und $Q$ sagt man, sie liegen *invers* bezüglich der Kreislinie $c$. Die durch den Kreis vermittelte Punktverwandtschaft, welche $P$ in $Q$ überführt, bezeichnet man als *Kreisinversion*. Diese geometrische Verwandtschaft ist *involutorisch*, denn sie führt auch den Punkt $Q$ in den Punkt $P$ zurück.

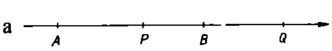
### Doppelverhältnis

Weiterhin ist der Begriff des *Doppelverhältnisses* von vier Punkten, die auf einer Geraden liegen, von Interesse. Auf einer orientierten Geraden $g$ sind die vier Punkte $A$, $B$, $P$, $Q$ willkürlich vorgegeben. Dann versteht man unter dem *Doppelverhältnis* dieser vier Punkte den Ausdruck

$$DV(A,B;P,Q)=\frac{m(AP)}{m(AQ)}:\frac{m(BP)}{m(BQ)} \tag{3}$$

In (3) bedeutet z. B. $m(AP)$ die Länge der von $A$ nach $P$ führenden orientierten Strecke. Die Längen gehen als vorzeichenbehaftete Größen in den Ausdruck auf der rechten Seite von (3) ein. Man bezeichnet $A$ und $B$ als die *Grundpunkte* und $P$ und $Q$ als die *Folgepunkte* des Punktequadrupels. Offenbar ist das Doppelverhältnis des Punktequadrupels negativ, wenn sich die Grundpunkte und Folgepunkte gegenseitig trennen (Bild 4a).

Bild 4a




Liegt keine gegenseitige Trennung von Grundpunkten und Folgepunkten vor, so ist das Doppelverhältnis des Quadrupels eine positive Zahl (Bild 4b und 4c). Fallen zwei Punkte zusammen, so sind gesonderte Überlegungen erforderlich, die wir noch zurückstellen.

Bild 4b

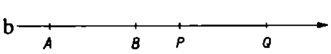



Bild 4c




### Harmonische Lage eines Punktequadrupels

Als Anwendung soll das Doppelverhältnis $DV(A,B;P,Q)$ für das auf dem Durchmesser von $c$ liegende Punktequadrupel $(A,B;P,Q)$ bestimmt werden. Schließt entsprechend Bild

3 die Tangente $t$ mit dem Durchmesser $s$ den Winkel $\alpha$ ein, so findet sich dieser Winkel zwischen dem Berührungsradius und der Polaren wieder. Damit erhält man

$$\begin{aligned} m(AP)&=r(1+\sin\alpha),\\ m(AQ)&=r\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right),\\ m(BP)&=r(\sin\alpha-1),\\ m(BQ)&=r\left(\frac{1}{\sin\alpha}-1\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (4) in (3) findet man

$$DV(A,B;P,Q)=\frac{r(1+\sin\alpha)}{r(\sin\alpha-1)} : \frac{r\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)}{r\left(\frac{1}{\sin\alpha}-1\right)}=-1 \tag{5}$$

Gilt, wie hier, für ein Punktequadrupel $DV(A,B;P,Q)=-1$, so sagt man, die vier Punkte liegen *harmonisch* oder sie bilden einen *harmonischen Punktwurf*. Punktequadrupel in harmonischer Lage treten in vielen geometrischen Beziehungen auf.

**Invarianz des Doppelverhältnisses bei Zentralprojektion**

Es gilt der Satz: Unterwirft man ein Quadrupel von Punkten, das auf einer Geraden liegt, einer *Zentralprojektion*, so bleibt das Doppelverhältnis ungeändert.

Diese bemerkenswerte Eigenschaft soll bewiesen werden. Gemäß Bild 5 gehen bei der Zentralprojektion $A$ in $A'$, $B$ in $B'$, $P$ in $P'$ und $Q$ in $Q'$ über. Nach unserem Satz besteht die Gleichung

$$DV(A,B;P,Q)=DV(A',B';P',Q') \tag{6}$$

Bild 5

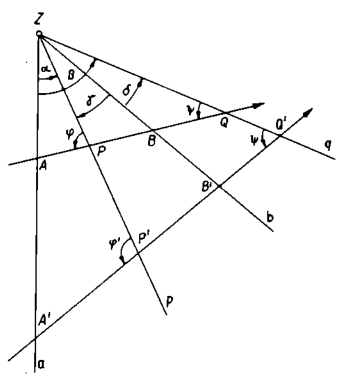


Bild 5 leistet uns Hilfe bei Aufstellung der geometrischen Beziehungen. Durch Anwendung des Sinus-Satzes der ebenen Trigonometrie auf die Teildreiecke des Dreiecks $\triangle ZAQ$ ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{m(AP)}{m(ZA)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\phi},\quad \frac{m(AQ)}{m(ZA)}=\frac{\sin\beta}{\sin\psi},\\ &\frac{m(BP)}{m(ZB)}=\frac{\sin\gamma}{\sin(180-\phi)}=\frac{\sin\gamma}{\sin\phi},\\ &\frac{m(BQ)}{m(ZB)}=\frac{\sin\delta}{\sin\psi}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei ist zu beachten, daß den Winkelgrößen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ eine der jeweils gegenüberliegenden Seite entsprechende Orientierung aufzuprägen ist. Setzt man die mittels des Sinus-Satzes aufgestellten Beziehungen (7) in (3) ein, ergibt sich

$$DV(A,B;P,Q)=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}:\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} \tag{8}$$

Es sei vermerkt, daß in dem vorliegenden Beispiel allein dem Winkel $\gamma$ eine negative Orientierung zuzuordnen ist. Folglich ergibt sich hier für das Doppelverhältnis dieser vier Punkte eine negative Zahl. Wendet man den Sinus-Satz der ebenen Trigonometrie auf die Teildreiecke des Dreiecks $\triangle ZA'Q'$ an, so resultieren folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{m(A'P')}{m(ZA')}=\frac{\sin\alpha}{\sin\phi'},\quad \frac{m(A'Q')}{m(ZA')}=\frac{\sin\beta}{\sin\psi'},\\ &\frac{m(B'P')}{m(ZB')}=\frac{\sin\gamma}{\sin(180-\phi')}=\frac{\sin\gamma}{\sin\phi'},\\ &\frac{m(B'P')}{m(ZB')}=\frac{\sin\delta}{\sin\psi'}. \end{aligned} \tag{9}$$

Setzt man (9) in (3) ein, so ergibt sich

$$DV(A',B';P',Q')=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}:\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} \tag{10}$$

Aus (8) und (10) folgt die Bestätigung unseres Satzes, der formelmäßig gefaßt wird durch die Gleichung

$$DV(A,B;P,Q)=DV(A',B';P',Q'). \tag{6}$$

**Doppelverhältnis eines Vierstrahles**

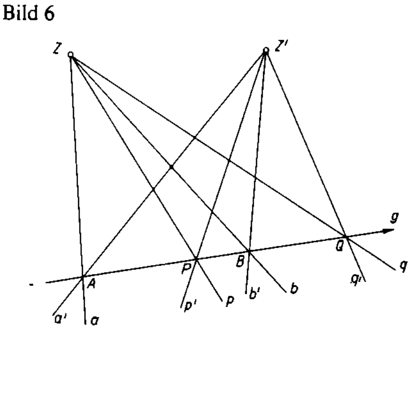
Aus Bild 5 und den Ergebnissen (8) und (10) erkennen wir, daß man auch von vier sich in einem Punkt schneidenden Geraden das Doppelverhältnis bilden kann. Nach der von uns bewiesenen Gleichung (8) resultiert für das Doppelverhältnis der vier Geraden $a,b;p,q$:

$$DV(a,b;p,q)=\frac{\sin\sphericalangle ap}{\sin\sphericalangle aq}:\frac{\sin\sphericalangle bp}{\sin\sphericalangle bq}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}:\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} \tag{11}$$

Aus (11) folgt der Satz: Das Doppelverhältnis von vier Geraden eines Büschels ist gleich dem Doppelverhältnis der Sinus der von den entsprechenden Geradenpaaren eingeschlossenen orientierten Winkel.

Auch hier kann man zeigen, daß das Doppelverhältnis von vier sich in einem Punkt schneidenden Geraden bei Zentralprojektion ungeändert bleibt. Zu Bild 5 läßt sich ein duales Gegenstück anführen. In Bild 6 sind zwei sich perspektiv zugeordnete Vierstrahlen mit den Punkten $Z$ bzw. $Z'$ als Träger dargestellt.

Bild 6



Offenbar gilt

$$DV(A,B;P,Q)=DV(a,b;p,q) \text{ und}$$
$$DV(A,B;P,Q)=DV(a',b';p',q').$$

Daraus kann man schließen:

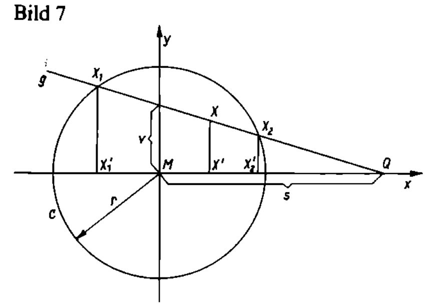
$$DV(a,b;p,q)=DV(a',b';p',q). \tag{12}$$

**Zugang zur Polaren über harmonisches Punktequadrupel**

Für die folgenden analytischen Untersuchungen werde der Mittelpunkt $M$ des Kreises $c$ in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt (Bild 7). Die Gleichung für $c$ lautet dann

$$x^2+y^2=r^2. \tag{13}$$

Bild 7



Der feste Punkt $Q$ liege auf der $x$-Achse im Abstand $s$ vom Ursprung. Eine Gerade allgemeiner Lage durch $Q$ hat dann die Gleichung

$$\frac{x}{s}+\frac{y}{v}=1. \tag{14}$$

Von der Geraden $g$ werde gefordert, daß sie $c$ in den beiden reellen Punkten $X_1$ und $X_2$ schneidet. Zu den drei Punkten $X_1$, $X_2$ und $Q$ suchen wir jetzt einen vierten Punkt $X$, so daß gilt

$$DV(X_1,X_2,X,Q)=-1. \tag{15}$$

Die Rechnung läßt sich dadurch vereinfachen, daß wir die vier Punkte $X_1$, $X_2$, $X$ und $Q$ auf die $x$-Achse senkrecht projizieren. Wir erhalten dann die vier Punkte $X_1'$, $X_2'$, $X'$, $Q$ mit den Koordinaten $x_1$, $x_2$, $z$ und $s$. Da sich bei Parallelprojektion (Sonderfall der Zentralprojektion) das Doppelverhältnis der vier Punkte nicht ändert, können wir die Forderung (15) auch umschreiben in

$$\frac{-x_1+z}{-x_1+s}:\frac{-x_2+z}{-x_2+s}=-1 \text{ oder}$$

$$\frac{-x_1+z}{-x_1+s}=\frac{-x_2+z}{x_2-s}. \tag{16}$$

Aus der Proportion (16) folgt die Gleichung

$$2x_1x_2+2zs-(x_1+x_2)(z+s)=0. \tag{17}$$

Um den Wert für $z$ aus (17) berechnen zu können, fehlen uns noch die Abszissenwerte $x_1$ und $x_2$ der Schnittpunkte von $g$ mit $c$. Zunächst lösen wir Gleichung (14) nach $y$ auf:

$$y=\left(1-\frac{x}{s}\right)v. \tag{18}$$

Setzt man (18) in (13) ein, so folgt weiter:

$$x^2(s^2+v^2)-2xsv^2+(v^2-r^2)s^2=0. \tag{19}$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln

$$x_1=\frac{v^2s-W}{v^2+s^2},\quad x_2=\frac{v^2s+W}{v^2+s^2}\ \text{mit}$$

$$W=s\sqrt{r^2(s^2+v^2)-v^2s^2} \tag{20}$$

Führt man diese Werte aus (20) für $x_1$ und $x_2$ in (17) ein, so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung für die Abszisse $z$ des Punktes $X$

$$z=\frac{r^2}{s}. \tag{21}$$

An dem Ergebnis (21) ist bemerkenswert, daß $z$ unabhängig von $v$, d. h. für jede Gerade des Büschels durch $Q$ gleich ist. Durchläuft also $g$ das Büschel von Geraden durch $Q$, so bewegt sich der vierte harmonische Punkt $X$ auf einer Geraden parallel zur $y$-Achse im Abstand $z=r^2/s$. Rückblickend auf das Ergebnis (2) stellen wir fest, daß diese Gerade identisch ist mit der Polaren $q$ des Punktes $Q$ bezüglich $c$. Ist also $X$ ein Punkt der Polaren $q$ von $Q$ bezüglich $c$, dann erfüllt das Punktequadrupel $(X_1,X_2;X,Q)$ die Forderung (15).

**Konstruktiver Zugang zur Polaren q mittels Lineal**

Gemäß Bild 8 ist zunächst wieder der Kreis $c$ mit dem außerhalb $c$ liegenden Punkt $Q$ vorgegeben. Von $Q$ werden zwei Sekanten $s_x$ und $s_y$ gezogen, die $c$ in den Punktepaaren $(X_1,X_2)$ bzw. $(Y_1,Y_2)$ schneiden sollen. Wir ziehen fünf weitere Verbindungsgeraden. Die Geraden $a=g(X_1,Y_1)$ und $b=g(X_2,Y_2)$ schneiden sich in dem Punkt $Z_1$. Die Geraden $d=g(X_1,Y_2)$ und $e=g(X_2,Y_1)$ schneiden sich im Punkt $Z_2$. Die Verbindungsgerade $f=g(Z_1,Z_2)$ schneidet $s_x$ im Punkt $X$ und $s_y$ im Punkt $Y$. Wegen der perspektiven Zuordnung der Punktepaare $(X_1,Y_1)$, $(X_2,Y_2)$, $(X,Y)$, $(Q,Q)$ mit $Z_1$ als Perspektivitätszentrum gilt

$$DV(X_1,X_2;X,Q)=DV(Y_1,Y_2;Y,Q)$$
$$=\frac{m(Y_1,Y)}{m(Y_1,Q)}:\frac{m(Y_2,Y)}{m(Y_2,Q)}. \tag{22}$$

Wegen der perspektiven Zuordnung der Punktepaare $(X_1,Y_2)$, $(X_2,Y_1)$, $(X,Y)$ und $(Q,Q)$ mit $Z_2$ als Perspektivitätszentrum gilt

$$DV(X_1,X_2;X,Q)=DV(Y_2,Y_1;Y,Q)$$
$$=\frac{m(Y_2,Y)}{m(Y_2,Q)}:\frac{m(Y_1,Y)}{m(Y_1,Q)}. \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt

$$DV(X_1,X_2;X,Q)=\frac{1}{DV(X_1,X_2;X,Q)} \tag{24}$$

oder

$$(DV(X_1,X_2;X,Q))^2=1. \tag{25}$$

Da sich die Paare von Grundpunkten $(X_1,X_2)$ und Folgepunkten $(X,Q)$ nach Konstruktion gegenseitig trennen, gilt weiterhin

$$DV(X_1,X_2;X,Q)<0. \tag{26}$$

Aus (25) und (26) folgt

$$DV(X_1,X_2;X,Q)=-1 \tag{27}$$

d. h. das Punktequadrupel $(X_1,X_2;X,Q)$ bildet einen harmonischen Wurf. Die gleiche Aussage gilt für das Punktequadrupel $(Y_1,Y_2;Y,Q)$. Mit (2), (21) und (27) ist gezeigt, daß die Verbindungsgerade $f=g(Z_1Z_2)$ identisch ist mit der Polaren $q$ von $Q$ bezüglich $c$. $Z_1$ und $Z_2$ sind nach Konstruktion gleichfalls Punkte dieser Polaren. Diese Polare schneidet, wie oben festgestellt, den Kreis $c$ in den Berührungspunkten $T_1$ und $T_2$ der Tangente aus $Q$ an $c$. Damit ist der Nachweis der Richtigkeit der Tangentenkonstruktion gemäß Bild (2) erbracht.

**Verallgemeinerung**

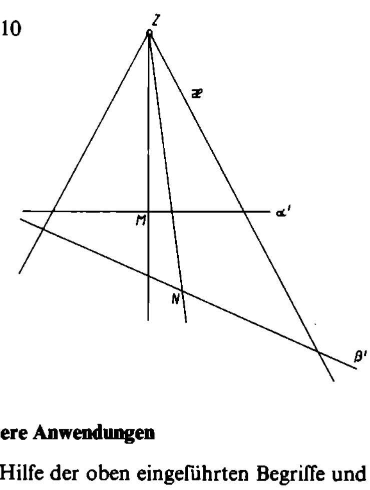
Die Tangentenkonstruktion nach Bild 2 kommt im Vergleich mit der Konstruktion nach Bild 1 mit einfacherem Zeichengerät und weniger Vorgaben aus. Dafür ist die theoretische Begründung der zweiten Konstruktion wesentlich aufwendiger als die Begründung der ersten Konstruktion. Trotzdem hat die zweite Konstruktion noch eine grundsätzliche Überlegenheit gegenüber der ersten Konstruktion. Sie ist nämlich verallgemeinerungsfähig und läßt sich auf beliebige Kegelschnitte übertragen.

Bild 9 demonstriert die Übertragung der Tangentenkonstruktion auf die Parabel. Sie läßt sich auch bei Ellipse und Hyperbel in analoger Weise anwenden. Als Begründung der Übertragbarkeit dieser Konstruktion vom Kreis auf beliebige Kegelschnitte ist zunächst anzuführen, daß sich jeder Kegelschnitt durch Zentralprojektion aus einem Kreis erzeugen läßt. Am einfachsten kann dies mit dem scharf begrenzten Lichtkegel einer Taschenlampe demonstriert werden. Richtet man die Taschenlampe senkrecht auf eine Hauswand, so entsteht ein Kreis als Lichtfleck.

Neigt man die Achse der Taschenlampe ein wenig gegen die Hauswand, so entsteht zunächst eine Ellipse. Bei weiterer Neigung der Taschenlampe wird der beleuchtete Teil der Hauswand von einer Parabel und schließlich von einem Hyperbelast begrenzt. Die von uns in Bild 2 zur Konstruktion benutzten Geraden gehen bei Zentralprojektion wieder in Geraden über. Schnittpunkte von Geraden bilden sich auf Schnittpunkte von Geraden ab. Doppelverhältnisse von den auf Geraden liegenden Punktequadrupeln bleiben ungeändert. Also geht ein harmonischer Punktwurf wieder in einen solchen Wurf über. Eine berührende Gerade geht wieder in eine berührende Gerade (Tangente) über. Alle *Konstruktionsschritte* sind damit *projektiv-invariant.*

Hingegen wird bei der ersten Konstruktion mit einem rechten Winkel gearbeitet. Dieser ist nicht projektiv invariant. Auch der Kreismittelpunkt geht bei Zentralprojektion nicht in den Mittelpunkt des Kegelschnittes über. Bild 10 veranschaulicht, wie ein Drehkegel $\kappa$ von zwei projizierenden Ebenen geschnitten wird. Der Schnitt von $\kappa$ mit der Ebene $\alpha$ liefert einen Kreis, dessen Mittelpunkt in $M$ liegt. Der Schnitt von $\kappa$ mit $\beta$ liefert eine Ellipse, deren Mittelpunkt in $N$ liegt. $M$ und $N$ liegen nicht auf einem Projektionsstrahl durch $Z$. Folglich können Mittelpunkte von Kegelschnitten nicht projektiv invariant in Tangentenkonstruktionen einbezogen werden.

Bild 10



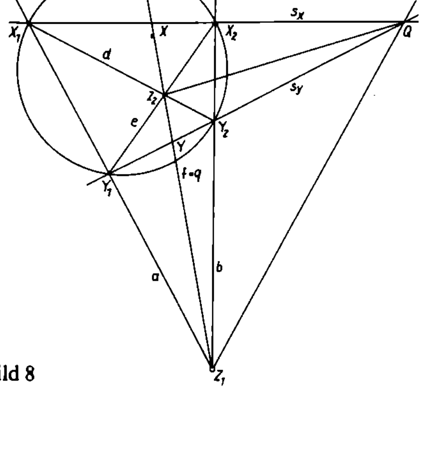
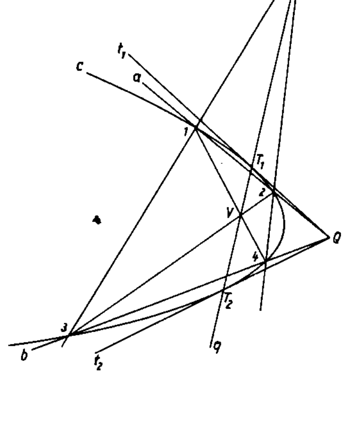




Bild 8

Bild 9




**Weitere Anwendungen**

Mit Hilfe der oben eingeführten Begriffe und bewiesenen Sätze läßt sich nun auch folgende Aufgabe allein mit Hilfe des Lineals durch Schneiden und Verbinden lösen.

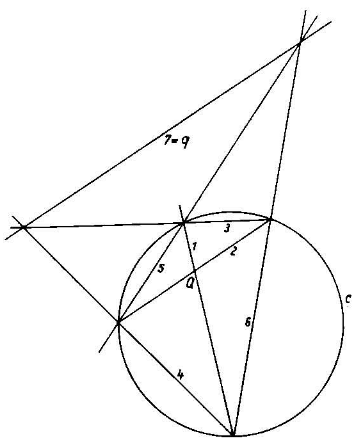
**Aufgabe**

Gegeben ist eine Kreislinie $c$ und ein auf $c$ liegender Punkt $T$. Man konstruiere die Tangente an $c$ in $T$ allein mittels des Lineals.

Als Vorbetrachtung konstruieren wir die Polare $q$ von einem Punkt $Q$, der im Inneren

des Bezugskreises $c$ liegt. Hierzu wird $Q$ mit zwei Geraden 1 und 2 angegittert. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit $c$ lassen sich so miteinander verbinden, daß ein vollständiges Vierseit entsteht.
Die dritte, außerhalb $c$ liegende Diagonale $q$ des vollständigen Vierseits ist bereits die gesuchte Polare von $Q$ bezüglich $c$ (Bild 11).

Bild 11

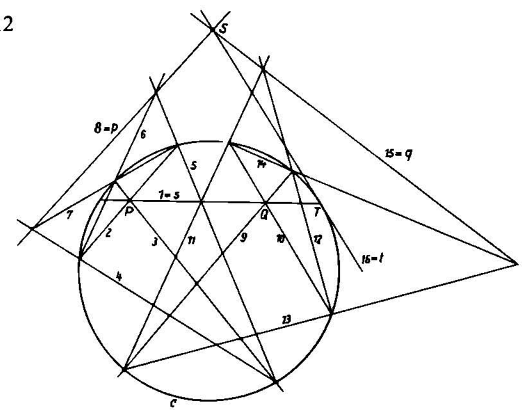



Nun gehen wir an die Lösung der gestellten Aufgabe. Hierzu legen wir durch $T$ eine beliebige Kreissehne $s$. Auf dieser Sehne werden zwei Punkte $P$ und $Q$ willkürlich angenommen. Nach dem oben geschilderten Verfahren bestimmen wir die Polaren $p$ und $q$ von $P$ bzw. $Q$ bezüglich $c$. Diese schneiden sich im Punkt $S$. Die Verbindungsgerade von $S$ mit $T$ ist bereits die gesuchte Tangente $t$ (Bild 12).
Zur Begründung der Konstruktion ist die Tatsache anzuführen, daß die Polare $x$ für jeden Punkt $X \in s$ durch $S$ geht. Da $T \in s$ gilt, wird auch die Tangente $t$ an $c$ in $T$ durch $S$ gehen, denn $t$ ist die Polare von $T$ bezüglich $c$.

**Ausblick**

Ein wesentlich größeres Feld geometrischer Konstruktionen in der Zeichenebene beherrscht man mit dem Lineal allein, wenn außer der Kreislinie $c$ auch deren Mittelpunkt $M$ vorgegeben ist. Zum Beispiel kann man dann durch Schneiden und Verbinden Strecken halbieren, das Lot von einem Punkt auf eine Gerade fällen, Parallelen zu einer Geraden durch einen vorgegebenen Punkt zeichnen und Winkel halbieren. Äquivalent mit der Vorgabe einer Kreislinie und ihres Mittelpunktes ist die Vorgabe von zwei konzentrischen Kreislinien ohne deren gemeinsamen Mittelpunkt. Als Einstimmung auf diese weiterführende Problematik stellen wir uns folgende *Aufgabe:*

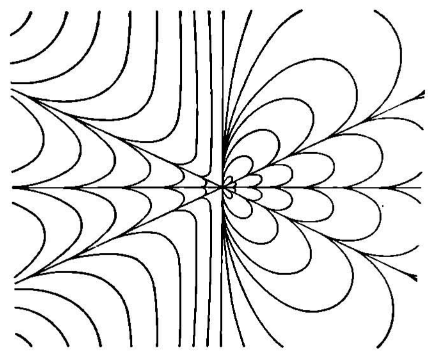
Bild 12




**Schöne Kurve**

Gegeben sind zwei konzentrische Kreislinien $c_1$ und $c_2$. Man konstruiere den gemeinsamen Mittelpunkt dieser Kreislinien unter alleiniger Verwendung des Lineals.

*Eberhard Schröder*



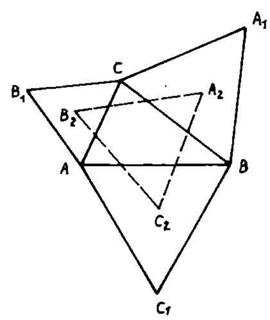
$p \frac{d\theta}{dp} = \mathrm{tg}\ 4\ \mathrm{arc\ tg} \sin\theta$

## Mathematik und Mathematiker auf Briefmarken


# Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat.
# Dierck-Ekkehard Liebscher

*Stellvertreter des Direktors des Zentralinstituts für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR, Potsdam-Babelsberg*

▲1994▲ Über den Seiten eines Dreiecks $ABC$ werden nach außen gleichseitige Dreiecke $AB_1C$, $A_1BC$ und $ABC_1$ errichtet. Beweise, daß das Dreieck $A_2B_2C_2$ aus den Mittelpunkten dieser Dreiecke gleichseitig ist!




**Kurzbiographie**

Dierck-Ekkehard Liebscher
geb. 6.8.1940 in Dresden
Besuch der Albert-Einstein-OS in Neuenhagen, anschließend Besuch der OS Carl von Ossietzky, Berlin-Pankow
1957 bis 1962: Studium der Physik an der Humboldt-Universität Berlin
1966: Promotion zum Dr.rer.nat. an der Humboldt-Universität Berlin
1973: Promotion zum Dr.sc.nat. an der Akademie der Wissenschaften der DDR
1979: Ernennung zum Professor für theoretische Physik

Bücher
1967 (zus. mit E. Kreisel und H.-J. Treder): *Zur Quantengeometrodynamik*, Akademie-Verlag Berlin
1971 (zusammen mit H.-H. v. Borzeszkowski, U. Kasper, E. Kreisel und H.-J. Treder): *Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip*, Akademieverlag Berlin 1971, Atomizdat Moskau 1973
1973: *Theoretische Physik*, Akademie-Verlag Berlin 1973
1977: *Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal*, Akademie-Verlag Berlin 1977, Vieweg-Verl. Braunschw. 1978, Izd. Mir Moskau 1980

**Historisch wertvolle Bücher in den Bibliotheken des ZIAP**

Copernicus: *De revolutionibus orbium coelestium* (1543); Alphonsinische Tafeln (1483); Rudolphische Tafeln v. Kepler (1626), Hauptwerke v. Archimedes (1544), Tycho Brahe, Galilei, Kepler, Hevelius; Sternatlanten v. Doppelmayr, Bode u. Schiller.

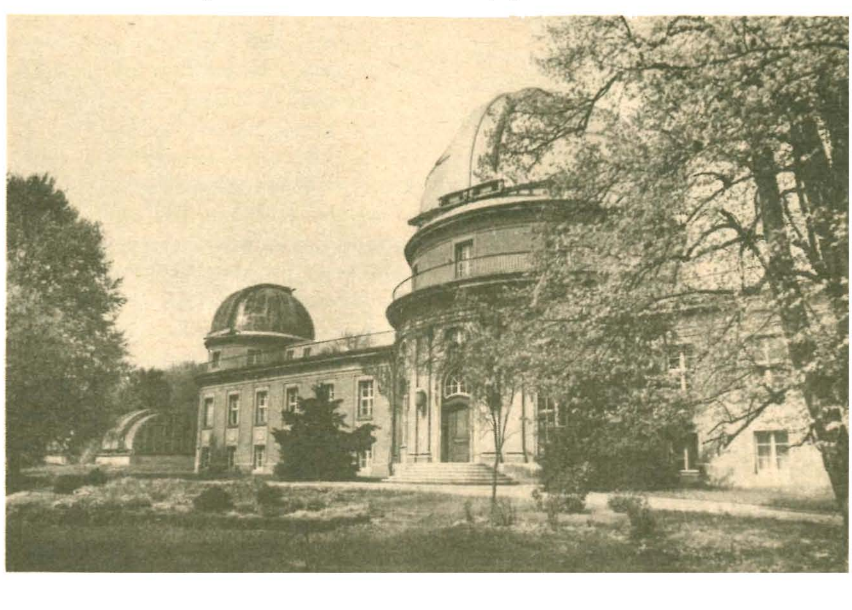
**Das Zentralinstitut für Astrophysik**

Zwei Schwerpunkte kennzeichnen die Arbeit des Zentralinstituts für Astrophysik. Der eine ist die Erforschung der kosmischen Magnetfelder, in Sonderheit die Magnetfelder der Sterne. Das theoretische Hinterland hierzu ist die Magnetohydrodynamik, für deren mathematische Theorie die magnetischen Sterne eindrucksvolle „Modelle" liefern. Die zweite, noch umfassendere Aufgabenstellung des Instituts ist die Erforschung der Struktur und der Entwicklung der Metagalaxis, d.h., des den astronomischen Beobachtungen zugänglichen Teil des Kosmos in seiner Gesamtheit. Diese kosmologische Fragestellung verbindet die Astrophysik mit der relativistischen Gravitationstheorie als einer der vorderen Fronten der physikalischen Grundlagenforschung. Mit diesen astronomischen und theoretisch-physikalischen Arbeiten schließt das ZIAP an die großen Traditionen der Relativitätstheorie, relativistischen Astrophysik und Kosmologie in Berlin und Potsdam an, die für immer mit den Namen von *Albert Einstein* und *Karl Schwarzschild* verbunden sind.

Andromeda-Nebel, aufgenommen mit dem 2-m-Teleskop des Karl-Schwarzschild-Observatoriums des ZI Astrophysik

Das Zentralinstitut für Astrophysik hat anläßlich des 100. Geburtstages von Albert Einstein die Patenschaft über den Mathe-Physik-Zirkel der OS *Albert Einstein* in Caputh übernommen. Alle Abteilungen des Instituts tragen dazu bei. Geometrie, Astronomie (Bau einer Sternuhr) und Arbeit mit Rechenautomaten sind die Gebiete, mit denen die Schüler der Klassen 7/8 bisher vertraut gemacht wurden.

Sternwarte Babelsberg des Zentralinstituts für Astrophysik

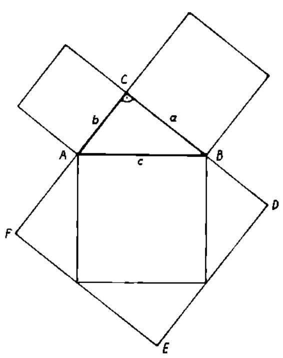


# Geometrie pseudoeuklidisch

Auf Grund unserer täglichen praktischen Erfahrungen sind wir es gewohnt, die axiomatisch aufgebaute (euklidische) Geometrie in unserer Vorstellung mit den auf einem Blatt Papier zeichenbaren ebenen Figuren zu verbinden. Zwei Figuren werden als kongruent angesehen, wenn die eine Bild der anderen bei einer Bewegung ist, die dem Bewegen gewöhnlicher Papierschnipsel entspricht.

In unserer Umwelt spielen rechte Winkel eine besondere Rolle. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß sich auch eine Reihe von Sätzen der Geometrie auf rechte Winkel beziehen; einer der wichtigsten davon ist der Satz des Pythagoras (Bild 1).

Bild 1




*Der Satz des Pythagoras*

Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$:

$A_\triangle = \frac{a \cdot b}{2}$

Flächeninhalt des Quadrats $CDEF$:

$A_\square = (a+b)^2$

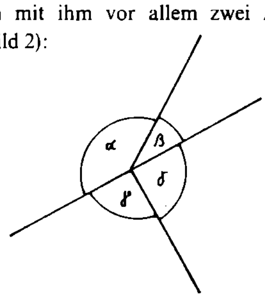
Es ist $A_\square = c^2 + 4 \cdot A_\triangle$,

d.h. $(a+b)^2 = c^2 + 2 \cdot ab$,

also $a^2 + b^2 = c^2$

Der Begriff „rechter Winkel" scheint dabei kaum Probleme in sich zu bergen. Wir verbinden mit ihm vor allem zwei Aussagen (vgl. Bild 2):

Bild 2




Die Teilung des gestreckten Winkels.
$\gamma$ und $\delta$ sind rechte Winkel, $\alpha$ und $\beta$ nicht.

a) Zwei rechte Winkel ergänzen einander stets zu einem gestreckten Winkel.

b) Ein Winkel ist genau dann ein rechter, wenn er zu seinem Nebenwinkel kongruent ist.

Durch die in diesen Aussagen festgehaltenen Eigenschaften wird aus der Menge aller Winkel eine Klasse von Winkeln, eben die Klasse der rechten Winkel, besonders herausgehoben. Es ist jedoch durchaus möglich, anstatt der üblichen auch eine andere Klasse von Winkeln durch Angeben entsprechender Eigenschaften hervorzuheben und ihr den Namen *rechter Winkel* zu geben.

Dies hat seinen Grund darin, daß der Begriff „kongruent" und der Begriff „rechter Winkel" nicht beide abgeleitet sind, sondern einer axiomatisch gesetzt werden muß, um den anderen finden zu können. Haben wir festgesetzt, was kongruent sein soll, leiten wir aus der Eigenschaft $b$ den rechten Winkel ab.

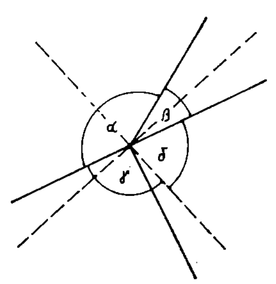
Umgekehrt bestimmen wir mit $b$ den Kongruenzbegriff, wenn wir die Klasse der rechten Winkel festlegen.

*Definition 1:* In der Ebene seien zwei Geraden $e$ und $f$ gegeben, die (im üblichen Sinne) senkrecht aufeinander stehen. Ein Winkel heißt genau dann *rechter Winkel*, wenn er durch eine der beiden durch seinen Scheitel verlaufenden Parallelen zu $e$ bzw. $f$ (im üblichen Sinne) halbiert wird.

Legt man der Geometrie diese Definition des Begriffs *rechter Winkel* zugrunde, so ist es üblich, von *pseudoeuklidischer Geometrie* zu sprechen.

(Um die Schreibweise zu vereinfachen, wollen wir die im Sinne pseudoeuklidischer Geometrie benutzten Begriffswörter kursiv drukken. Nicht kursiv gedruckte Begriffswörter beziehen sich auf die gewöhnlich euklidische Geometrie.)

Bild 3




Pseudoeuklidisch *rechte Winkel*

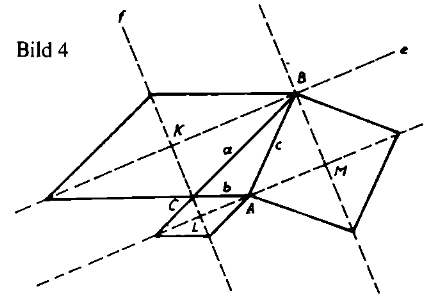
In Bild 3 sind nach dieser Definition $\alpha$ und $\beta$ rechte Winkel, $\delta$ und $\gamma$ aber nicht.

Den Begriff „Flächeninhalt" benutzen wir wie gewohnt.

Das dürfen wir, weil wir entweder zeigen können, daß *kongruente* Dreiecke immer flächengleich sind, oder weil wir mit dieser Maßgabe einen zum Satz des Pythagoras analogen Satz beweisen können. Dies wollen wir im folgenden tun.

Ein *rechtwinkliges Dreieck* entsteht, wenn zwei Strahlen, die einen *rechten Winkel* bilden, von einer Geraden in genau zwei Punkten geschnitten werden (Bild 4).

Bild 4




Der *Satz des Pythagoras* in der pseudoeuklidischen Geometrie
$c^2 = a^2 + b^2$

Rhomben, deren Diagonalen zu $e$ bzw. $f$ parallel sind, sind in der pseudoeuklidischen Geometrie *Quadrate*, denn alle ihre Winkel sind *rechte Winkel*. In Bild 4 sind über allen drei Seiten des *rechtwinkligen Dreiecks ABC Quadrate* gezeichnet worden.

Benutzen wir die Begriffe *Kathete und Hypotenuse* analog zu den entsprechenden Begriffen in der üblichen euklidischen Geometrie, so können wir den pseudoeuklidischen Satz des Pythagoras wie folgt formulieren:

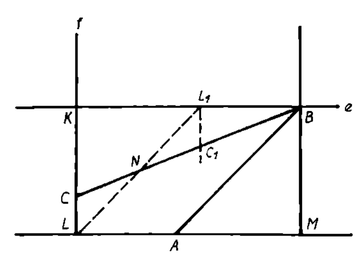
*Satz:* In jedem *rechtwinkligen Dreieck* unterscheiden sich die Flächeninhalte der *Kathetenquadrate* genau um den Flächeninhalt des *Hypotenusenquadrats.*

*Beweis:* Im *rechtwinkligen Dreieck ABC* sei o.B.d.A. $\sphericalangle ACB$ der *rechte Winkel* und $\overline{CA} < \overline{CB}$. (Die Zeichen $<$, $\cong$, und $>$ werden im Sinne der üblichen euklidischen Geometrie gebraucht.)

Die Diagonalschnittpunkte der *Quadrate* über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$ seien $M$, $K$ bzw. $L$. Das Viereck $BKLM$ ist in der üblichen Geometrie ein Rechteck.

Wir stellen (innerhalb der üblichen Geometrie), eine Beziehung zwischen den Flächeninhalten der Teildreiecke $\triangle ACL$, $\triangle CBK$ und $\triangle BAM$ des Vierecks $BKLM$ her (vgl. Bild 5):

Bild 5




Zum Beweis des pseudoeuklidischen Analogons des Satzes des Pythagoras

Durch den Punkt $L_1$ auf der Strecke $\overline{KB}$, für den $\overline{L_1B} \cong \overline{AL}$ gilt, zeichnen wir eine Parallele zu $BM$. Diese schneidet die Strecke $\overline{CB}$ in einem Punkt $C_1$.

Da die Parallele zu $e$ durch $C$ den Winkel $\sphericalangle ACB$ voraussetzungsgemäß halbiert, ist $\sphericalangle LCA \cong \sphericalangle KCB$ und somit $\triangle CBK \sim \triangle CAL$.

Zusammen mit $\overline{L_1B} \cong \overline{AL}$ folgt daraus

$$\triangle CLA \cong \triangle C_1L_1B. \qquad (1)$$

Es gilt also

$$A_{KCC_1L} = A_{KCB} - A_{CLA}. \qquad (2)$$

Weiterhin ist

$$\triangle AMB \cong \triangle L_1KL. \qquad (3)$$

Ist $N$ der Schnittpunkt von $\overline{LL_1}$ mit $\overline{CB}$, so gilt $\triangle LNC \cong \triangle L_1NC_1$. (4)

Aus (3) und (4) folgt

$$A_{KCC_1L} = A_{AMB}, \qquad (5)$$

was zusammen mit (2)

$A_{AMB} = A_{KCB} - A_{CLA}$ ergibt. (6)

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (6) mit dem Faktor 4, so erhält man die Behauptung des Satzes.

Wir definieren nun den Begriff *Länge einer Strecke* in der pseudoeuklidischen Geometrie.

*Definition 2:* Bezüglich einer festgelegten Einheit ist die Maßzahl der *Länge einer Strecke* gleich der Wurzel aus der Maßzahl des Flächeninhalts des *Quadrats* über dieser Strecke. Damit können wir den Satz des Pythagoras auch wie folgt formulieren.

*Satz:* Bei jedem *rechtwinkligen* Dreieck ist der Betrag der Differenz aus den Quadraten der Kathetenmaßzahlen gleich dem Quadrat der Hypotenusenmaßzahl.

Auch zu den übrigen grundlegenden Sätzen der ebenen euklidischen Geometrie (z.B. Satz des Thales, Peripheriewinkelsatz, Sätze über die Schnittpunkte der Höhen, Mittelsenkrechten bzw. Winkelhalbierenden eines Dreiecks, Satz vom Feuerbach-Kreis) lassen sich in der pseudoeuklidischen Geometrie analoge Sätze formulieren und beweisen. Dies hat seinen tieferen Grund darin, daß euklidische und pseudoeuklidische Geometrie der Ebene Zwillingstöchter der projektiven Geometrie sind, die allerdings über den heutigen Schulstoff hinausgeht.

Die pseudoeuklidische Geometrie findet ihre Anwendung als Geometrie der schnellen Bewegungen in der Relativitätstheorie. Die festen Richtungen $e$ und $f$ kennzeichnen die Lage der Bewegungslinien von Lichtsignalen in ebenen Raum-Zeit-Diagrammen.

**Aufgaben**

▲1▲ Welche Strecken haben die Länge Null?

▲2▲ Unter welchen Bedingungen haben zwei Strecken die gleiche Länge? Welche Form hat ein pseudoeuklidischer *Kreis*?

▲3▲ Beweise, daß sich die pseudoeuklidischen Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden!

▲4▲ Versuche, weitere von der üblichen euklidischen Geometrie abweichende Tatsachen in der pseudoeuklidischen Geometrie zu finden!

▲5▲ Formuliere und beweise einige der am Schluß des Artikels genannten Sätze der pseudoeuklidischen Geometrie!

*D.-E. Liebscher*

# Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Im Heft 2/79 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma7 ■1863 Zwei Fußballmannschaften $A$ und $B$ trugen ein Freundschaftsspiel aus. Insgesamt wurden 13 Tore geschossen. Das erste Spiel verlief unentschieden. Im zweiten Spiel fielen mehr Tore als im ersten Spiel, und zwar erzielte Mannschaft $A$ im zweiten Spiel doppelt soviel Tore wie Mannschaft $B$. Es sind die Ergebnisse beider Spiele zu ermitteln.

Im Heft 5/79 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, im ersten Spiel schoß jede der beiden Mannschaften $x$ Tore; es fielen somit $2x$ Tore. Im zweiten Spiel habe Mannschaft $B$ $y$ Tore, also Mannschaft $A$ $2y$ Tore geschossen; es fielen somit $3y$ Tore. Nun gilt

$$2x + 3y = 13,$$
$$3y = 12 + 1 - 2x,$$
$$y = 4 - \frac{2x-1}{3}.$$

Nur für $x_1 = 2, y_1 = 3$ und $x_2 = 5, y_2 = 1$ besitzt diese Gleichung positive ganzzahlige Lösungen.

| Spiele | Torverhältnis | Anzahl der Tore |
|---|---|---|
| 1. Spiel | 2 : 2 | 4 |
| 2. Spiel | 6 : 3 | 9 |

Die zweite Lösung entfällt (5 : 5, 2 : 1), da in diesem Fall im zweiten Spiel weniger Tore fielen als im ersten.

Wir stellen nun die Lösung von *Andreas Israel* aus Karl-Marx-Stadt vor, der Schüler der Klasse 7 der *Heinrich-Heine*-Oberschule ist. Andreas löste diese Aufgabe wie folgt:

Wenn im zweiten Spiel mehr Tore als im ersten Spiel gefallen sind, können im ersten Spiel höchstens 6 Tore gefallen sein. Da das erste Spiel unentschieden ausfiel, kommen nur die Torverhältnisse 0 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 3 in Betracht. Im ersten Spiel können also 0, 2, 4 oder 6 Tore gefallen sein; im zweiten Spiel 13, 11, 9 oder 7 Tore. Da im zweiten Spiel die Mannschaft $A$ doppelt so viele Tore wie die Mannschaft $B$ schoß, muß die Anzahl der Tore ($2n + n = 3n$) des zweiten Spiels eine durch 3 teilbare natürliche Zahl sein. Das trifft nur zu für $n = 3$, also $3n = 9$. Das erste Spiel endete 2 : 2, das zweite Spiel endete 6 : 3 bei einem Sieg der Mannschaft $A$.

Wir stellen nun die Lösung von *Axel Schulz* aus Potsdam vor, der Schüler der Klasse 6a der OS 9 ist. Axel löste diese Aufgabe wie folgt:

| | Anzahl | der Tore im |
|---|---|---|
| Mannschaft | 1. Spiel | 2. Spiel |
| $A$ | $x$ | $2y$ |
| $B$ | $x$ | $y$ |

Nun gilt $2x + 3y = 13$ und $2x < 3y$. Daraus folgt weiter $7 \leqq 3y \leqq 13$, also $y = 3$ oder $y = 4$. Wegen $3 \cdot 4 = 12$ und $13 - 12 = 1$ entfällt $y = 4$ als Lösung, da im unentschiedenen ersten Spiel nicht genau 1 Tor gefallen sein kann. Für $y = 3$ erhalten wir $2x + 9 = 13$, also $x = 2$. Das erste Spiel endete 2 : 2, das zweite Spiel endete 6 : 3 für Mannschaft $A$.

# Ferientermine des Schuljahres 1980/81

Es stehen für die Erholung und Freizeitbeschäftigung der Schüler insgesamt 96 unterrichtsfreie Werktage (davon 23 Sonnabende) zur Verfügung.

Herbstferien:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 18. Oktober 1980
Erster Unterrichtstag:
Montag, 27. Oktober 1980

Ferien zum Jahreswechsel:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 20. Dezember 1980
Erster Unterrichtstag:
Montag, 5. Januar 1981

Winterferien:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 7. Februar 1981
Erster Unterrichtstag:
Montag, 2. März 1981

Unterrichtsfreie Tage:
Sonnabend, 18. April 1981;
Sonnabend, 2. Mai 1981

Frühjahrsferien:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 9. Mai 1981
Erster Unterrichtstag:
Montag, 18. Mai 1981

Unterrichtsfreier Tag:
Sonnabend, 6. Juni 1981

Sommerferien:
Erster Ferientag:
Sonnabend, 4. Juli 1981
Erster Unterrichtstag:
Dienstag, 1. September 1981

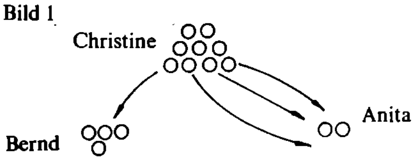

# Das arithmetische Mittel

Anita, Bernd und Christine waren fleißig beim Suchen nach den Ostereiern, die ihre Eltern im Garten versteckt hatten.

Christine, die älteste von den dreien, hatte 9 Eier gefunden, Bernd hatte 4 aufgespürt, aber die kleine Anita hatte nur 2 entdeckt und war natürlich traurig.

Christine tröstete sie und schlug vor, ihren Geschwistern so viele ihrer Ostereier abzugeben, daß alle gleich viel besaßen. Und das tat sie dann auch: Bernd gab sie ein Osterei und an Anita 3 Eier. Jetzt hatte jeder gleich viel, und alle waren zufrieden (Bild 1).

Bild 1




Was die drei Geschwister hierbei taten, ist ein Vorgang, der sich in ganz anderen Zusammenhängen häufig abspielt, manchmal in wirklicher Ausführung, manchmal in Gedanken. Die drei hatten nämlich von den Anzahlen der Ostereier, also von 9, 2 und 4 den *Durchschnitt* gebildet.

Diesem Begriff begegnen wir an vielen Stellen. Wir erfahren, daß das Durchschnittsalter einer Fußballmannschaft 23 Jahre beträgt, wir hören, daß die durchschnittliche Körpergröße der Menschen allmählich zunimmt, wir lesen, daß die Durchschnittstemperatur des Monats August unter der üblichen lag. Um die Qualität einer Ernte einzuschätzen, berechnet man den durchschnittlichen Hektarertrag, die ständige Verbesserung unserer Lebensbedingungen zeigt sich unter anderem an dem steigenden Durchschnittsverdienst der Werktätigen, der Lehrer gibt den Zensurendurchschnitt einer Klassenarbeit an, und als Ergebnis einer Spendenaktion wird bekanntgegeben, daß jeder Schüler der Schule durchschnittlich 2,50 M Solidaritätsspenden eingebracht hat.

Aber auch dort, wo nicht vom *Durchschnitt* die Rede ist, bedeuten Zahlenangaben oft einen durchschnittlichen Wert. Angaben über z. B. die Geschwindigkeit von Schiffen, die Leistungen von Betrieben, die Ausgaben des Staates für jeden Schüler, die Menge der von einem Haushalt verbrauchten Energie und vieles andere mehr sind Durchschnittswerte, ohne daß das in jedem Falle extra betont wird.

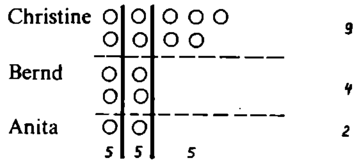
Wir wollen jetzt sehen, wozu man solche Angaben benötigt, wie man sie berechnet und was sich daraus an Interessantem ergibt. Nehmen wir einmal an, zwei Brigaden einer Klasse haben Altstoffe gesammelt, und wir wollen wissen, welche der beiden Brigaden die bessere Leistung erreicht hat.

Die vier Mitglieder der Brigade I haben 15 kg, 12 kg, 20 kg und 9 kg Altpapier zusammengebracht. Die fünf Mitglieder der Brigade II haben 11 kg, 13 kg, 10 kg, 17 kg und 14 kg gesammelt. Die beste Einzelleistung hat ein Schüler der Brigade I vollbracht. Das sagt aber noch nichts über die Leistung der gesamten Brigade aus. Brigade I hat insgesamt 56 kg, Brigade II 65 kg, also mehr, gesammelt, aber auch das ist noch nicht zum Vergleich geeignet, denn Brigade II besteht ja auch aus 5 Schülern, einem mehr als Brigade I. Die bisherigen Betrachtungen reichen also noch nicht aus, um die Frage zu entscheiden.

Hier bildet man nun für jede Brigade das *durchschnittliche* Sammelergebnis, d. h., man nimmt an, jedes Mitglied der Brigade hätte die gleiche Menge gesammelt und auf diese Weise die gleiche Gesamtleistung erreicht. Es könnte also, wie bei dem Beispiel des Ostereiersuchens der Schüler mit dem höchsten Sammelergebnis an den mit dem schlechtesten Sammelergebnis etwas abgeben, und alle müßten ihre Papiermengen so ausgleichen, bis jeder gleich viel hat. Das ist natürlich sehr umständlich, selbst wenn man es nur in Gedanken ausführt. Man benutzt daher ein anderes Verfahren.

Auch die drei Geschwister hätten eine andere Möglichkeit des *Ausgleichens* gehabt. Sie hätten nämlich alle gefundenen Ostereier zusammenlegen und in drei gleiche Teile aufteilen können (Bild 2). Dann wären auch auf diese Weise auf jeden 5 Ostereier gekommen. Entsprechend verfahren wir bei dem Beispiel der beiden Brigaden. Wir addieren die von jeder Brigade gesammelten Einzelmengen und dividieren diese Summe durch die Anzahl der Mitglieder.

Bild 2




Für die Brigade I erhalten wir 56 kg : 4 = 14 kg und sagen, daß in dieser Brigade jeder durchschnittlich 14 kg gesammelt hat. Auf die gleiche Weise erfahren wir, daß in Brigade II jeder durchschnittlich 13 kg gesammelt hat (65 kg : 5). Jetzt wissen wir, daß Brigade I das bessere Ergebnis erreicht hat (Bild 3).

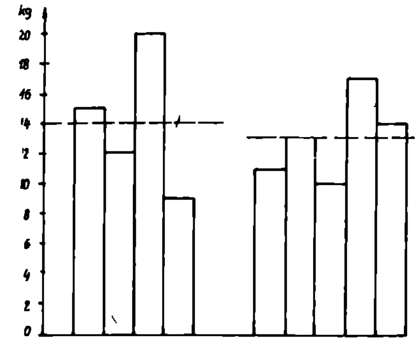



Bild 3

Wollte man zum Beispiel im Jahre 1990 prüfen, ob die zu dieser Zeit lebenden Menschen im Durchschnitt größer sind als die, die 1980 lebten, dann müßte man eigentlich zu beiden Zeitpunkten die Größen aller dann lebenden Menschen messen und diese Summe durch ihre Anzahl dividieren. Das ist nun allerdings weder zweckmäßig (so könnte z. B. zu einem der beiden Zeitpunkte die Zahl der noch nicht erwachsenen Personen beträchtlich größer sein) noch notwendig. Man würde sich also darauf beschränken, die Körpergröße von einer hinreichend großen Zahl von Personen, etwa von 5000, zu ermitteln, hieraus die Durchschnittswerte zu berechnen und diese zu vergleichen.

Wenn der Lehrer den Durchschnitt einer Klassenarbeit errechnet, dann addiert er die erreichten Zensuren und dividiert diese Summe durch die Anzahl der Schüler, die diese Arbeit mitgeschrieben haben.

Angenommen, in einer Arbeit wurden 7 Einsen, 11 Zweien, 8 Dreien, 3 Vieren und 1 Fünf geschrieben, so wäre zu rechnen:

$1+1+1+1+1+1+1+2+\ldots+4+4+4+5=70$, und diese Zahl wäre durch die Anzahl der Schüler $7+11+8+3+1=30$ zu dividieren, was den Durchschnitt $2,\overline{3}$ ergibt. Es ist allerdings praktischer, statt die 30 Summanden einzeln zu addieren, vereinfacht zu rechnen:

$7\cdot 1+11\cdot 2+8\cdot 3+3\cdot 4+1\cdot 5=30.$

In der Mathematik nennt man das, was wir hier als *Durchschnitt* bezeichnet haben, *arithmetisches Mittel.*

Das arithmetische Mittel der Zahlen 5 und 9 ist also 7, weil $(5+9):2=14:2=7$ ist.

Man legt demnach fest:

Unter dem arithmetischen Mittel $m_a$ von $n$ Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ versteht man

$$m_a=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Aus all dem bisher Gesagten ergibt sich folgendes:

Das arithmetische Mittel verschiedener Zahlen liegt stets zwischen der größten und der kleinsten dieser Zahlen, ist also größer als die kleinste und kleiner als die größte von ihnen. Diese Erkenntnis kann zum Beispiel für eine

Kontrolle genutzt werden. Sie findet auch bei der Lösung der Aufgabe 6 (siehe unten) Anwendung.

Das arithmetische Mittel mehrerer Zahlen ist stets eindeutig bestimmt. Umgekehrt kann man im allgemeinen aus dem arithmetischen Mittel keine Rückschlüsse auf die Zahlen ziehen, aus denen es gebildet wurde. Der Durchschnitt von 1,7 bei einer Klassenarbeit schließt nicht aus, daß eine ungenügende Leistung dabei war.

In einem Teich mit einer durchschnittlichen Tiefe von einem halben Meter kann ein Erwachsener ertrinken. Ein Autofahrer, der eine Stunde mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ gefahren ist, hat gewiß nicht zu jedem Zeitpunkt innerhalb dieser Stunde diese Geschwindigkeit eingehalten. Er hat wahrscheinlich einmal anhalten müssen, und es ist aus dem Mittel nicht ersichtlich, daß er nicht die zulässige Höchstgeschwindigkeit auch einmal überschritten hat.

Sind allerdings das arithmetische Mittel von $n$ Zahlen und $n-1$ dieser Zahlen (d. h. alle bis auf eine) bekannt, dann läßt sie sich aus diesen Angaben errechnen.

Das arithmetische Mittel von sechs Zahlen, von denen fünf 17; 28; 21; 30 und 19 lauten, sei 25. Dann kann man die sechste Zahl auf folgende Weise finden:

Wenn das arithmetische Mittel von sechs Zahlen 25 beträgt, dann muß die Summe dieser sechs Zahlen 150 betragen. Die Summe der fünf bekannten Zahlen lautet 115. Demnach ist die fehlende Zahl die Zahl 35.

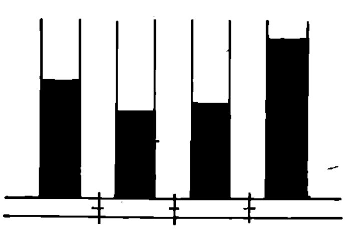
**Aufgaben (I)**

▲1▲ Berechne das arithmetische Mittel der Zahlen 76; 78, 82 und 84!

▲2▲ Eine LPG hat auf einem 25 ha großen Feld 850 dt Weizen geerntet. Bei einer zweiten LPG wurden 1023 dt Weizen von einem 31 ha großen Feld geerntet.
Welche der beiden LPG hatte den besseren Hektarertrag?

▲3▲ Die vier Schüler einer Brigade $A$ spendeten als Solidaritätsbeitrag 2,50 M, 1,75 M, 3,25 M und 3,50 M. Die fünf Schüler einer Brigade $B$ gaben 2 M, 2 M, 2,75 M, 4,25 M und 3 M.
Welche Brigade hatte das bessere (Durchschnitts)ergebnis?

▲4▲ In vier zylindrischen Gefäßen mit gleichem Durchmesser steht die Wassersäule 15 cm, 12 cm, 13,5 cm bzw. 21,5 cm hoch.

Bild 4


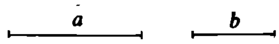
Wie hoch würde die Wassersäule in jedem dieser Gefäße stehen, wenn man die Gefäße unten verbindet, so daß sich die Höhe des Wasserspiegels ausgleicht und in allen vier Gefäßen gleich ist? (Bild 4)

▲5▲ Das arithmetische Mittel von 75 und einer Zahl $x$ ist 81.
Wie lautet die Zahl $x$?

▲6▲ Von den Zahlen 621, 915, 438 und 530 ist das arithmetische Mittel errechnet worden. Es ist eine der folgenden Zahlen:
a) 916, b) 626, c) 420 und d) 530.
Ermittle die richtige Zahl, ohne das arithmetische Mittel auszurechnen!

▲7▲ Eine fünfköpfige Schiffsbesatzung hat ein Durchschnittsalter von 28 Jahren. Der Steuermann ist 31 Jahre alt, der Maschinist 28 Jahre, der Mechaniker 23 Jahre und der jüngste Matrose 19 Jahre alt.
Wie alt ist der Kapitän?

▲8▲ Das Bild zeigt zwei Strecken $a$ und $b$. Konstruiere das arithmetische Mittel ihrer Maßzahlen, ohne die Strecken zu messen! (Bild 5)

Bild 5



▲9▲ Eine Folge von Zahlen sei so beschaffen, daß jedes Glied (außer dem ersten und letzten) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder ist.
a) Wie ist die Folge 3; 7; ... weiterzuführen, damit sie diese Eigenschaft hat?
b) Gib die ersten 10 Glieder einer solchen Folge an, die mit der Zahl 0,5 beginnt!

Wenden wir uns jetzt der Frage zu, wie sich eine Veränderung der Ausgangswerte auf das arithmetische Mittel auswirkt.

a) Wenn einer der Ausgangswerte um eine bestimmte Zahl vergrößert, ein anderer um die gleiche Zahl verkleinert wird und alle anderen Werte unverändert bleiben, ändert sich das arithmetische Mittel nicht. Es leuchtet ein, daß die Summe der Ausgangszahlen dabei keine Veränderung erfährt. Diese Gesetzmäßigkeit wurde im übrigen ausgenutzt, als in unserem ersten Beispiel Christine an ihre Geschwister Ostereier abgab.

b) Wenn jede der Ausgangszahlen um die gleiche Zahl vergrößert wird, dann vergrößert sich auch das arithmetische Mittel um diese Zahl. Das sei am Beispiel dreier Zahlen $a$, $b$ und $c$ gezeigt. Das arithmetische Mittel $m_1$ dieser Zahlen ist

$$m_1 = \frac{a+b+c}{3}.$$

Wird nun jede dieser Zahlen um $n$ vergrößert, dann erhält man als arithmetisches Mittel $m_2$ dieser neuen Zahlen

$$m_2 = \frac{a+n+b+n+c+n}{3} = \frac{a+b+c+n+n+n}{3}$$
$$= \frac{a+b+c}{3} + \frac{3n}{3} = m_1 + n.$$

Der Gedankengang läßt sich leicht auf jede andere Anzahl von Ausgangszahlen übertragen. Entsprechendes gilt auch bei Subtraktion der gleichen Zahl von allen Ausgangswerten.

Diese Tatsache läßt sich bei manchen Aufgaben zu einer vorteilhaften Berechnung des arithmetischen Mittels ausnutzen. Es sei zum Beispiel das arithmetische Mittel der Zahlen 64011; 64029 und 64020 gesucht. Dann ermittelt man im Kopf das Mittel der Zahlen 11; 29 und 20, das ist 20, und addiert dazu 64000. Man erhält so recht einfach den Wert 64020.

c) Wird jede der Ausgangszahlen mit einer bestimmten Zahl $n$ multipliziert, so wird auch das arithmetische Mittel dieser Zahlen $n$-mal so groß. Auf einen Beweis sei hier verzichtet.

Als Beispiel seien die vier Zahlen 11; 16; 17 und 20 herangezogen, deren arithmetisches Mittel 16 beträgt, während man als entsprechenden Wert für die 10mal so großen Zahlen 110; 160; 170 und 200 auch das Zehnfache davon, nämlich 160 erhält. Auch bei Division aller Ausgangswerte durch die gleiche Zahl erhält man einen entsprechend veränderten Wert. Hieraus ergeben sich ebenfalls bisweilen Rechenvorteile.

Daß man in all diesen Fällen vom arithmetischen Mittel und nicht einfach vom Mittel spricht, hat seinen Grund darin, daß es auch Mittelwerte anderer Art gibt. In der Mathematik spielt z. B. noch das *geometrische Mittel* eine Rolle.

Das geometrische Mittel $m_g$ zweier positiver Zahlen $a$ und $b$ ist definiert als Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Zahlen, es gilt also

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}.$$

So ist zum Beispiel das geometrische Mittel der Zahlen 2 und 8 die Zahl 4, weil $\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$ ist.

Beide Mittelwerte lassen sich geometrisch veranschaulichen. Nimmt man zum Beispiel ein Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$, so ist das arithmetische Mittel $m_a$ beider Maßzahlen $a$ und $b$ die Länge der Seiten eines Quadrats, das den gleichen Umfang hat wie das Rechteck. Es gilt dann nämlich

$$4m_a = 2a + 2b, \text{ also } m_a = \frac{a+b}{2}.$$

Diese Quadratseite ist leicht zu konstruieren. Man konstruiert zunächst eine Strecke der Länge $2a + 2b$ und teilt diese (z. B. mit Hilfe der Mittelsenkrechten) in vier gleiche Teile (Bild 6).

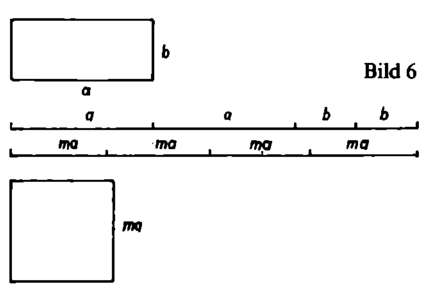


Bild 6

Das geometrische Mittel von $a$ und $b$ erhält man als Seitenlänge eines Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das Rechteck mit den Seiten $a$ und $b$. Es gilt nämlich dann

$$m_g^2 = a \cdot b,$$

und für positive Zahlen $a$ und $b$ folgt daraus

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}.$$

Die Seite eines solchen Quadrats läßt sich z. B. unter Benutzung des Höhensatzes oder des Kathetensatzes konstruieren (Bild 7).

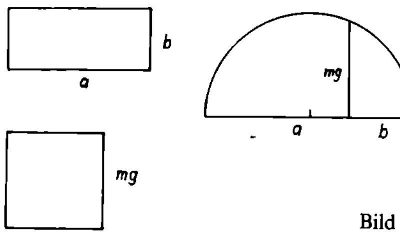



Bild 7

Bildet man von mehreren Zahlenpaaren sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel, so fällt auf, das letzteres stets kleiner ist als das erstere, falls die Zahlen voneinander verschieden sind. So ist z. B. das arithmetische Mittel der Zahlen 2 und 18 die Zahl $\frac{2+18}{2} = 10$, das geometrische Mittel die Zahl $\sqrt{2 \cdot 18} = 6$.

Es läßt sich beweisen, daß das in jedem Falle so ist.

Da das Quadrat einer von Null verschiedenen Zahl stets positiv ist, muß gelten

$(a-b)^2 \quad > 0$, d. h.

$a^2 - 2ab + b^2 > 0$. Durch Addition von $4ab$ auf beiden Seiten erhält man daraus

$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$ und nach Anwendung der ersten binomischen Formel

$(a+b)^2 \quad > 4ab$. Für positive Zahlen $a$ und $b$ folgt

$a+b \quad > 2\sqrt{ab}$ und nach Division durch 2

$\frac{a+b}{2} \quad > \sqrt{ab}$, d. h. also, daß in jedem Falle das arithmetische Mittel von $a$ und $b$ (mit $a \neq b$) größer ist als das geometrische Mittel dieser beiden Zahlen.

**Aufgaben (II)**

▲10▲ Ermittle (im Kopf) das arithmetische Mittel der Zahlen 2023; 2029; 2021; 2027!

▲11▲ Berechne von den Zahlen 3 und 27 das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel!

▲12▲ Das geometrische Mittel aus 6 und einer Zahl $x$ sei 18. Ermittle $x$!

▲13▲ Bilde eine Folge von Zahlen, die mit 2 und 6 beginnt und in der jedes Glied (außer dem ersten und dem letzten) geometrisches Mittel seiner Nachbarglieder ist!

▲14▲ Setze zwischen die Zahlen 1 und 64 zwei Zahlen $x$ und $y$ so ein, daß diese vier Zahlen eine Folge bilden, in der $x$ und $y$

a) arithmetisches Mittel,

b) geometrisches Mittel ihrer Nachbarglieder sind!

▲15▲ Von drei Zahlen $a$, $b$ und $c$ ist bekannt:

(1) $b$ ist dreimal so groß wie $a$.

(2) $c$ ist um 8 kleiner als $b$.

(3) Das arithmetische Mittel der drei Zahlen ist 30.

Ermittle $a$, $b$ und $c$!

▲16▲ Von drei zweistelligen natürlichen Zahlen $a$, $b$ und $c$ sei bekannt:

(1) $a$ wird weder größer noch kleiner, wenn man seine Ziffern vertauscht.

(2) $b$ ist um 44 größer als $a$.

(3) $a$ ist das arithmetische Mittel von $b$ und $c$.

▲17▲ Von zwei positiven Zahlen $a$ und $b$ ist bekannt:

(1) Ihre Differenz beträgt 70.

(2) Die Differenz aus dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel beider Zahlen ist 25.

Wie lauten die beiden Zahlen?

▲18▲ In dem folgenden Kryptogramm stellt jeder Buchstabe eine der Grundziffern (von 0 bis 9) dar, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern, und wie üblich ist Null als erste Stelle nicht zugelassen.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, daß die Zahlen $ABC$ und $DA$ das arithmetische Mittel $DE$ haben!

*K. Lehmann*

# Ein Programmablaufplan

Das Titelbild der *alpha* 4/80 zeigt die Vorschrift bzw. den Algorithmus für die Division rationaler Zahlen in Form einer graphischen Darstellung. Solche Darstellungen nennt man auch *Programmablaufpläne* oder *Flußbilder*. Sie stellen eine notwendige Grundlage für die programmtechnische Aufbereitung des Verfahrens für Rechenautomaten, also für die Programmierung des Verfahrens dar. Rechenautomaten können nämlich nur das leisten, worauf sie eingestellt, programmiert sind. Schleicht sich ein Fehler in das Programm ein, so liefern sie die unsinnigsten Ergebnisse.

Zunächst ist sehr wichtig zu wissen, welche elementaren Operationen die Rechenmaschine überhaupt ausführen kann, denn nur solche dürfen in einem Programmablaufplan vorkommen. Weiterhin muß man sehr genau durchdenken, welche Operation die Maschine in welcher Reihenfolge verrichten soll.

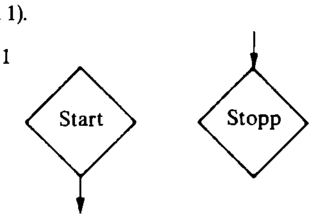
Wir wollen uns nun etwas näher mit dem *Aufbau* von Programmablaufplänen beschäftigen, um das Titelbild zu verstehen.

Programmablaufpläne setzen sich aus einzelnen Bausteinen, auch Sinnbilder genannt, zusammen.

Die *Verbindungslinien* zwischen den einzelnen Kästchen des Programms nennt man *Programmlinien*. Die Pfeilrichtung gibt jeweils die Richtung an, in der das Programm abzuarbeiten ist.

*Organisationskästchen* dienen der Beschreibung von Anfang und Ende des Programms (Bild 1).

Bild 1




*Ein-* und *Ausgabekästchen* werden verwendet, um die Größen, die in die Rechnung eingehen (in unserem Beispiel Dividend $a$ und Divisor $b$) und die Größen, die nach Ablauf der Rechnung als Ergebnis zur Verfügung stehen (in unserem Falle der Quotient $Q$), zu erfassen (Bild 2).

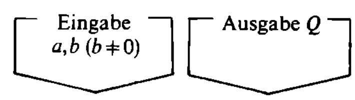
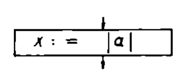


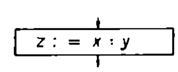

Bild 2

In *Operationskästchen* werden die auszuführenden Operationen genau beschrieben. Das kann mit Hilfe von Formeln oder auch durch Worte geschehen. Häufig wird dabei die *Ergibtanweisung* (Symbol „:=“) verwendet. Sie besagt, daß aus bekannten Größen auf der rechten Seite der Anweisung die links stehende Größe zu berechnen ist.

Hier einige Beispiele:




bedeutet, daß von einer beliebigen Zahl $a$ der absolute Betrag zu bilden ist. Das Ergebnis wird mit $x$ bezeichnet.




bedeutet, daß $x$ durch $y$ zu dividieren ist und man das Ergebnis mit $z$ bezeichnet.

Das Symbol $f(x)$ bedeutet in unserem konkreten Beispiel den Übergang von der rationalen Zahl $x$ ($x \geqq 0$) zur entsprechenden gebrochenen Zahl (Beispiel: $f(+2) = 2$).

Das Symbol $f^{-1}(x)$ bedeutet demnach den Übergang von einer gebrochenen Zahl zu der entsprechenden rationalen Zahl (Beispiel: $f^{-1}(0{,}2) = +0{,}2$).

$\boxed{z := f^{-1}(z)}$

bedeutet, daß zur gebrochenen Zahl $z$ die entsprechende rationale Zahl anzugeben ist und diese Zahl der neue Wert von $z$ ist.

*Achtung:* Das Ergibtzeichen darf nicht mit dem Gleichheitszeichen verwechselt werden.

*Fragekästchen* (auch *Alternativkästchen* genannt) werden verwandt, wenn eine Entscheidung zu treffen ist. Zu dem Kästchen führt stets genau ein Pfeil hin, und zwei Pfeile führen davon weg. Die Kästchen enthalten solche Fragen, die man nur mit „ja" (Symbol: j) oder „nein" (Symbol: n) beantworten kann.

Beispiele:

Ist $a$ gleich Null?

Symbol: ( $a = 0$ ? ) j n

Stimmen die Vorzeichen von $a$ und $b$ überein?

Symbol: ( sgn $a$ = sgn $b$ ? ) j n

Nun sind alle Symbole des Flußbildes für die Division rationaler Zahlen erklärt, und ihr könnt das Titelbild verstehen.

Das Titelbild stellt allerdings keinen Programmablaufplan für eine EDV-Anlage dar. (Dort würde z. B. die hier verwendete Funktion $f$ gar nicht benötigt!) Das Flußbild auf dem Titelblatt widerspiegelt lediglich das in der Schule behandelte Vorgehen bei der Division rationaler Zahlen.

Hier nun noch einige Aufgaben zur eigenen Kontrolle:

▲1▲ Löse folgende Divisionsaufgaben!
a) $(-3{,}2):(-0{,}8)$, b) $(-4{,}2):7$, c) $3{,}6:(-1{,}2)$
Zeichne jeweils den Weg im Programmablaufplan des Titelblattes ein!

▲2▲ Versuche, einen Programmablauf für das in der Schule behandelte Verfahren der Multiplikation rationaler Zahlen zu entwerfen!

▲3▲ Was bedeutet ?

a) $\boxed{x := b \cdot 7}$ b) $\boxed{x := k + 1}$

*L. Flade*

# Millionengewinne mit mathematischen Tricks?

Mein Großvater war verspielt. Vor und nach dem Ernst kam der Spiel-Spaß. Eines der Spielchen ging so: Wenn mit der Münze ermittelt worden war, wer anfängt, mußte der erste eine beliebige Zahl von 1 bis 10 nennen. Der zweite suchte sich ebenfalls eine dieser Zahlen heraus und addierte sie laut dazu. So ging es abwechselnd weiter. Wer zuerst die 100 erreichte, war Sieger. Großvater gewann immer ... bis er mir sein Geheimnis verriet. Aber vielleicht kommst du ohne Hilfe darauf.

Immer, wenn ich einen Lottoschein ankreuze, frage ich mich, ob es nicht auch für dieses Spiel eine geheimnisvolle Methode gibt, die einen Gewinn garantiert. Wer könnte das besser wissen als einer jener Mathematiker, die sich mit dem *Zufall* beschäftigen und sich deshalb *Stochastiker* nennen. Rein zufällig – wie man so sagt – komme ich mit Prof. Dr. *Hans-Joachim Girlich* ins Gespräch, der dieses Fachgebiet an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität vertritt. Er winkt lächelnd ab, als ich meine Gedanken vortrage. Lotto ist ein absolut faires Spiel, versichert er mir. Kein Spieler – auch nicht ein Mathematiker – kann einen Fünfer voraussagen. Jeder hat die gleichen Chancen.

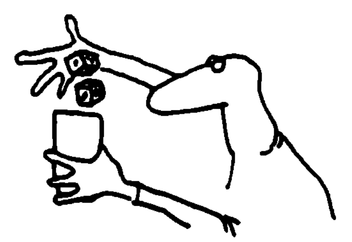
Aber, so erfahre ich, mit der Untersuchung von Glücksspielen begann die Entwicklung wichtiger mathematischer Methoden, die heute unter dem Begriff *Stochastik* zusammengefaßt werden. Dazu gehören die mathematische Statistik und die Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie helfen, mit möglichst großer Sicherheit Voraussagen über beliebige zufallsbedingte Massenerscheinungen in Natur und Gesellschaft, in Wissenschaft und Wirtschaft, in Medizin und Technik zu treffen. Seit langem wird beispielsweise aus Statistiken der Lebenserwartung der individuelle Versicherungsbeitrag abgeleitet. Die Wahrscheinlichkeitstheorie erlaubt es, Wetterprognosen zu errechnen. Ohne zu wissen, wann der einzelne Kunde ins Kaufhaus geht, kann eine solche Minimalbesetzung der Kassen ermittelt werden, die niemals Schlangen entstehen läßt. Das bringt dem Käufer Zeitgewinn, dem Handel erhöhten Umsatz. Mathematiker stellen *Stichprobenpläne* auf, um eine optimale Gütekontrolle in der Großproduktion zu gewährleisten.

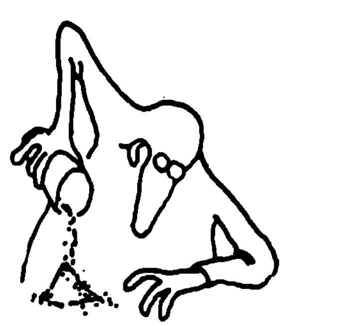
Nicht jedes Stück kann auf Herz und Nieren überprüft werden. Dann wäre es unbezahlbar. *Stochastik* ist auch im Spiel, wenn über Investitionen entschieden wird oder wenn für ein neues Produkt die Absatzchancen auf dem Weltmarkt abzuschätzen sind.

So tragen „mathematische Tricks" dazu bei, den Zufall zu beherrschen und Millionengewinne für uns alle zu sichern.

Zurück zu meinem Großvater. Hast du inzwischen durchschaut, wie er den Zufall ausschaltete? Ganz einfach: Derjenige wird Sieger, der die Zahl 89 erreicht oder – noch besser – vorher die strategischen Zahlen 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 und 1 in Anspruch nimmt. Stimmt's?

*aus: LVZ v. 9./10.2.80*





# XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 4. Stufe (DDR-Olympiade)

5

## Preisträger

**Einen ersten Preis erhielten:**

*In Olympiadeklasse 10:* Jörg Pietschmann, EOS *J. J. Winkelmann* (Kl. 9), Stendal (1); John Matzke, EOS *G. E. Lessing*, Erfurt (2); Jochen Lattermann, EOS *Pestalozzi* (Kl. 9), Dresden (3); Steffen Deutschmann, EOS *F. Schiller*, Bautzen (4). In Klassenstufe 11/12 wurden keine ersten Preise vergeben.

**Einen zweiten Preis erhielten:**

*In Olympiadeklasse 10:* Christoph Zimmermann, EOS *Friedrich Engels*, Karl-Marx-Stadt; Martin Arnold, *Goethe-Schule* (EOS), Ilmenau; Ralf Hortig, 13. OS Cottbus; Hagen Mrowetz, EOS *A. Puschkin*, Prenzlau; Thorsten Eidner, EOS *F. Heckert* (Kl. 9), Zeulenroda; Volkmar Heinrich, EOS *H. Matern*, Templin; Horst Schulze, Spezialsch. f. Elektronische Industrie *M. A. Nexö*, Dresden; Karsten Petzold, BBS *E. Schneller* (1. Lehrjahr), Lauchhammer-West; Jürgen Anders, EOS *A. Ladwig* (Kl. 9), Ludwigsfelde; Georg Schreckenbach, EOS 4 (Kl. 9), Potsdam.

*In Olympiadeklasse 11/12:* Erasmus Scholz, Spezialsch. f. Elektronische Industrie *M. A. Nexö*, Dresden (5); Andrean Goede, Spezialschule f. Math./Phys. der Humboldt-Universität zu Berlin (Kl. 11) (6); Peter Zienicke, EOS *O. v. Guericke* (Kl. 10), Magdeburg (7); Bodo Heise, *F.-J.-Curie-Schule* (Kl. 10), Görlitz (8); Meik Hellmund, EOS *Henfling* (Kl. 11), Meiningen (9); Norbert Münch, Erw. Goethe-OS Bad Doberan; Grit Werner, Spezialkl. d. Martin-Luther-Univ. Halle (Kl. 11); Bernd Kichheim, F.-Schiller-EOS Weimar (Kl. 10).

21 Schüler erhielten einen 3. Preis, 42 Schüler eine Anerkennungsurkunde für gute Leistungen. An der XIX. OJM nahmen 180 Schüler, davon 27 Mädchen, teil. 45 Schüler waren „Frühstarter", d. h., starteten in einer höheren Klassenstufe.

Die Aufgaben und Lösungen der Olympiadeklasse 10 sowie die Aufgaben zur Olympiadeklasse 11/12 veröffentlichen wir in Heft 5/80, d. Red.

1

6

2

7

3

8

4

9

# XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## der Bezirksolympiade (9./10. Februar 1980)

## Aufgaben

### Olympiadeklasse 7

1. Ermittle alle geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die zweite Zahl $y$ ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl $x$.
(2) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfaehen der zweiten Zahl beträgt 1680.

2. Von den drei Kreisen $k_1$, $k_2$, $k_3$ mit dem gleichen Radius $r$, aber verschiedenen Mittelpunkten $M_1$, $M_2$ bzw. $M_3$ werde vorausgesetzt:
$k_2$ und $k_3$ schneiden sich in einem Punkt $P$ und einem Punkt $A \neq P$.
$k_3$ und $k_1$ schneiden sich in $P$ und einem Punkt $B \neq P$.
$k_1$ und $k_2$ schneiden sich in $P$ und einem Punkt $C \neq P$.
Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Der Umkreis des Dreiecks $ABC$ hat $r$ als Radius!

3. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a = 5{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm, $e = 4{,}5$ cm, $f = 6{,}0$ cm! Dabei seien $a$ bzw. $c$ die Längen der Seiten $AB$ bzw. $CD$; $e$ bzw. $f$ die Längen der Diagonalen $AC$ bzw. $BD$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Birgit und Frank erhalten folgende Informationen über die Schüler einer Schulklasse: Die Anzahl aller Schüler dieser Klasse ist kleiner als 40. Genau 60% dieser Schüler nehmen an der AG „Bildende Kunst" teil, genau $66\frac{2}{3}\%$ aller Schüler der Klasse gehen regelmäßig zum Schwimmen, genau 50% aller Schüler der Klasse sind Leser der Kinderbibliothek.
Birgit nennt eine natürliche Zahl $x$ und meint: Aus den Informationen folgt, daß mindestens $x$ Schüler dieser Klasse sowohl an der AG „Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen; dagegen folgt nicht, daß mehr als $x$ Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben.
Frank nennt eine natürliche Zahl $y$ und meint: Aus den Informationen folgt, daß mindestens $y$ Schüler dieser Klasse an allen drei Formen der Freizeitbeschäftigung (AG „Bildende Kunst", Schwimmen, Kinderbibliothek) teilnehmen.
a) Zeige, daß aus den gegebenen Informationen die Anzahl aller Schüler der Klasse eindeutig ermittelt werden kann, und gib diese Anzahl an!
b) Ermittle eine natürliche Zahl $x$ so, daß Birgits Aussagen wahr sind!
c) Beweise, daß Franks Aussagen für jede natürliche Zahl $y > 0$ falsch sind!

5. Cathrin geht einkaufen. Sie hat genau 18 Geldstücke, und zwar nur Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke, bei sich. Von dem Gesamtbetrag dieses Geldes gibt sie genau die Hälfte aus. Nach dem Einkauf stellt sie fest, daß sie jetzt wieder ausschließlich Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke bei sich hat, und zwar soviel Zweimarkstücke, wie sie vor dem Einkauf Fünfzigpfennigstücke besaß, und soviel Fünfzigpfennigstücke, wie sie vorher Zweimarkstücke hatte.
Welchen Geldbetrag besaß Cathrin noch nach dem Einkauf?

6. Es sei $ABCD$ ein Quadrat der Seitenlänge 6 cm und $E$ der Mittelpunkt der Seite $AD$. Auf $CE$ sei ein Punkt $F$ so gelegen, daß die Fläche der Dreiecke $AFE$ und $BCF$ inhaltsgleich sind.
Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks $ABF$!

### Olympiadeklasse 8

1. Klaus erzählt: „Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück."
Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wieviel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur in der DDR gültige Münzen, d. h. Münzen zu 1, 5, 10, 20 und 50 Pf, sowie zu 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

2. Gegeben seien ein Punkt $M$ sowie ein Kreis $k$ mit $M$ als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat:
(1) Die Eckpunkte $A$ und $D$ liegen auf der Kreislinie $k$.
(2) Die Quadratseite $BC$ berührt den Kreis $k$ in einem Punkt $P$, der zwischen $B$ und $C$ liegt.
Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis $k$) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenem $k$) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

3. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a$. Eine Parallele zu $AB$ schneide die Seiten $BC$ und $AD$ in den Punkten $E$ bzw. $F$, eine Parallele zu $BC$ schneide $AB$ und $EF$ in den Punkten $G$ bzw. $H$, und eine Parallele zu $AB$ schneide die Strecken $BE$ bzw. $GH$ in den Punkten $J$ bzw. $K$.
a) Ermittle den Umfang des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von $a$ unter der Bedingung, daß die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander flächeninhaltsgleich sind!
b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von $a$ unter der Bedingung, daß die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander umfangsgleich sind!

4. Beweise, daß das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die 3. Potenz der mittleren Zahl ergibt!

5. Es sei $EG$ ein Durchmesser eines Kreises $k$. Die in $E$ und $G$ an $k$ gelegten Tangenten seien $t$ bzw. $t'$. Auf $t$ sei eine Strecke $AB$ so gelegen, daß $E$ ihr Mittelpunkt ist. Die von $A$ und $B$ aus an $k$ gelegten (und von $t$ verschiedenen) Tangenten mögen $t'$ in $D$ bzw. $C$ schneiden. Der Radius von $k$ sei $r$; die Längen von $AB$ bzw. $CD$ seien $a$ bzw. $c$.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung

$$r^2 = \frac{ac}{4} \text{ gilt!}$$

6. Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.
a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!
b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!

**Olympiadeklasse 9**

1. Beim Lösen einer Gleichung der Form

$$ax-6=bx-4$$

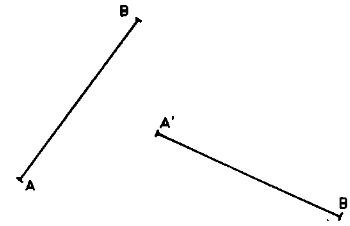
mit gegebenen natürlichen Zahlen $a$ und $b$ stellt Matthias fest:
(1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl $x$ als Lösung.
(2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man – zur Durchführung der Probe – jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung $x$ einsetzt.
Ermitteln Sie alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

2. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, für das $\overline{AB}=a\sqrt{2}$ und $\overline{BC}=a$ gilt. Es sei $F$ der Mittelpunkt der Seite $CD$.
Beweisen Sie, daß die Strecken $AC$ und $BF$ senkrecht zueinander verlaufen!

3. Von $n$ Kartons ($n$ eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, daß ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:
Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls $n\geqq 2$ ist); die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls $n\geqq 3$ ist):
die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls $n\geqq 4$ ist);
...
die ersten $n-1$ Kartons können nebeneinander in den $n$-ten gelegt werden.
Beweisen Sie, daß es möglich ist, derartige $n$ Kartons so ineinanderzulegen, daß folgende Forderungen erfüllt sind:
(1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Kartons (wobei auch 0 als gerade Anzahl zugelassen ist).
(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.
(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

4. a) Beweisen Sie, daß es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, daß sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!
b) Beweisen Sie, daß es für eine geeignete natürliche Zahl $n\geqq 3$ im Zahlensystem mit der Basis $n$ eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, daß sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

5. Auf dem Arbeitsblatt sind zwei zueinander kongruente Strecken $AB$ und $A'B'$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt $Z$ der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Drehung um $Z$, die $A$ in $A'$ und $B$ in $B'$ überführt.

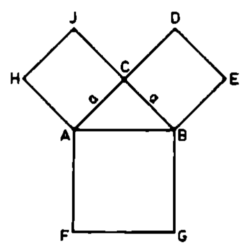



Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes $Z$ (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt $Z$ existiert!

6. Für geeignete natürliche Zahlen $n$ gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit $n$ Ecken und weniger als $n$ Flächen. Zum Beispiel ist für $n=8$ ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.
Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl $N$ die Eigenschaft hat, daß es für jede natürliche Zahl $n\geqq N$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit $n$ Ecken gibt, der von weniger als $n$ ebenen Flächen begrenzt wird! Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl $N$ mit dieser Eigenschaft!

**Olympiadeklasse 10**

1. Das Bild zeigt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit gegebener Kathetenlänge $a$, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $BCDE$, $ABGF$, $ACJH$ gezeichnet sind.




a) Zeigen Sie, daß es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ und $J$ liegen! Ermitteln Sie (zu gegebenem $a$) den Durchmesser dieses Kreises!
b) Beweisen Sie: Jeder Kreis, der die Punkte $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ und $J$ in seiner Fläche oder auf seinem Rande enthält und einen anderen Mittelpunkt als der in a) genannte Kreis hat, hat einen größeren Radius als dieser Kreis!

2. Ermitteln Sie alle Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, für die erstens in der Gleichung

$$2^{\sqrt{1+x-3y}}+3^{\sqrt{2x-4y+1}}=2 \qquad (1)$$

der Term auf der linken Seite (als reelle Zahl) definiert ist und zweitens diese Gleichung (1) erfüllt ist!

3. Jeder Würfel besitzt sowohl eine Umkugel (d.h. eine Kugel, auf der sämtliche Eckpunkte des Würfels liegen) als auch eine Inkugel d.h. eine Kugel, die jede Seitenfläche des Würfels berührt). Ebenso besitzt jedes reguläre Oktaeder (siehe „Tabellen und Formeln", S. 33) sowohl eine Umkugel als auch eine Inkugel.
Von einem Würfel und einem regulären Oktaeder werde nun vorausgesetzt, daß die Umkugeln dieser beiden Körper denselben Radius haben.
Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung das Verhältnis $r_1:r_2$, wobei $r_1$ der Radius der Inkugel des Würfels und $r_2$ der Radius der Inkugel des Oktaeders ist!

4. Sind $A$, $B$, $C$ drei verschiedene Punkte auf einer Kreislinie vom Radius $r$ und hat $\sphericalangle ACB$ die Größe $\gamma$, so gilt

$$\sin\gamma=\frac{\overline{AB}}{2r}.$$

5. Von einer Funktion $f$, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen erklärt ist, sei vorausgesetzt, daß folgendes gilt:
(1) Es ist $f(1)=1$.
(2) Für jedes $x\neq 0$ ist $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$.
(3) Für alle $x_1, x_2$ mit $x_2\neq 0, x_1\neq 0, x_1+x_2\neq 0$ ist $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.
Beweisen Sie, daß für jede Funktion $f$, die diese Voraussetzungen erfüllt,

$$f\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7}\text{ gilt!}$$

6. Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen $a$, $b$ und $c$

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2} \qquad (1)$$
$$\geqq 2\sqrt{a^2+b^2}\text{ gilt!}$$

# Lösungen

**Olympiadeklasse 7**

1. Angenommen, für ein Paar $(x;y)$ natürlicher Zahlen seien die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt

$$y=3x-1 \qquad (1)$$

und $6x\cdot 4y=1680$, also

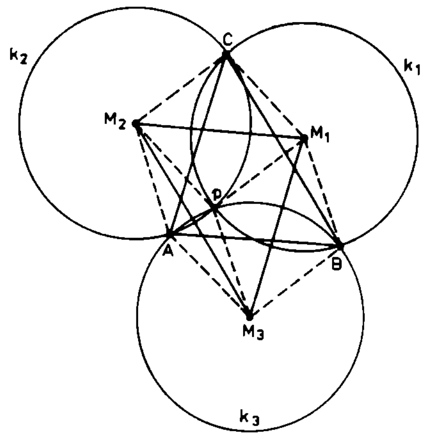
$$xy=70. \qquad (2)$$

Wie man (bei Beachtung von $70=1\cdot 2\cdot 5\cdot 7$) durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle erkennt, wird (2) nur von folgenden Zahlenpaaren erfüllt:
(1;70), (2;35), (5;14), (7;10), (10;7), (14;5), (35:2), (70;1). Von diesen Zahlenpaaren erfüllt aber nur (5;14) auch die Bedingung (1). Daher kann nur das geordnete Paar (5;14) alle gestellten Bedingungen erfüllen.
Es erfüllt diese Bedingungen tatsächlich; denn es gilt $14=3\cdot 5-1$
und $6\cdot 5\cdot 4\cdot 14=30\cdot 56=1680$.

2. Nach Voraussetzung gilt

$$\overline{PM_1}=\overline{PM_2}=\overline{PM_3}=\overline{AM_2}=\overline{AM_3}=\overline{BM_3}$$
$$=\overline{BM_1}=\overline{CM_1}=\overline{CM_2}=r. \qquad (1)$$

Daher sind $PM_2AM_3$, $PM_3BM_1$, $PM_1CM_2$ Rhomben. Also gilt
$BM_3\parallel M_1P\parallel CM_2$, $CM_1\parallel M_2P\parallel AM_3$, $AM_2\parallel M_3P\parallel BM_1$.
Hiernach und wegen (1) sind $BCM_2M_3$, $CAM_3M_1$, $ABM_1M_2$ Parallelogramme, also gilt $\overline{BC}=\overline{M_2M_3}$, $\overline{CA}=\overline{M_3M_1}$, $\overline{AB}=\overline{M_1M_2}$.
Folglich ist $\triangle ABC\cong\triangle M_1M_2M_3$ (Kongruenzsatz sss).




Nun hat $\triangle M_1M_2M_3$ wegen (1) den Kreis um $P$ mit $r$ als Umkreis. Also hat das zu $\triangle M_1M_2M_3$ kongruente Dreieck $ABC$ ebenfalls $r$ als Umkreisradius, w. z. b. w.

3. I. Angenommen, $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Dann schneidet die Parallele durch $C$ zu $BD$ die Verlängerung von $AB$ über $B$ hinaus in einem Punkt $E$, für den $BE \parallel DC$ und $BD \parallel EC$ gilt. Also ist $BECD$ ein Parallelogramm; daher gilt $\overline{EC} = \overline{BD}$ und $\overline{BE} = \overline{DC}$. Somit hat $\triangle AEC$ die Seitenlängen $\overline{AC} = e$, $\overline{EC} = f$ und $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = a + c$.

II. Daher entspricht $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

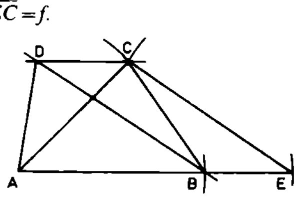
(1) Man konstruiert eine Strecke $AB$ der Länge $a$.

(2) Man verlängert $AB$ über $B$ hinaus um $c$; der erhaltene Endpunkt sei $E$.

(3) Man konstruiert den Kreis um $A$ mit $e$ und den Kreis um $E$ mit $f$. Schneiden sie sich, so sei $C$ einer ihrer Schnittpunkte.

(4) Man konstruiert die Parallele durch $C$ zu $AB$ und die Parallele durch $B$ zu $EC$. Schneiden sie sich, so sei $D$ ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach (1) und (3) ist $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} = e$. Nach (2) und (3) ist ferner $\overline{BE} = c$, $\overline{EC} = f$, und da $BECD$ nach (4) ein Parallelogramm ist, folgt auch $\overline{DC} = \overline{BE} = c$ und $\overline{BD} = \overline{EC} = f$.




IV. Da für die gegebenen $a$, $c$, $e$, $f$ je zwei der Längen $e, f, a+c$ eine größere Summe als die dritte dieser Längen haben, ergibt sich bei den Konstruktionsschritten (1) bis (3) ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck $AEC$; insbesondere wird $AB \nparallel EC$. Hiernach ist auch Konstruktionsschritt (4) eindeutig ausführbar. Daher ist $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

4. a) Da $60\% = \frac{3}{5}$, $66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ und $50\% = \frac{1}{2}$ gilt, muß die gesuchte Anzahl $z$ durch 2, 3 und 5, wegen der paarweisen Teilerfremdheit dieser Zahlen also durch $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ teilbar sein. Wegen $0 < z < 40$ folgt somit $z = 30$.

b) Daher und wegen $\frac{3}{5} \cdot 30 = 18$, $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$, $\frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ nehmen genau 18 Schüler an der AG „Bildende Kunst" teil, genau 20 der Schüler gehen regelmäßig zum Schwimmen und genau 15 der Schüler sind Leser der Kinderbibliothek.

Hiernach folgt, daß mindestens 8 Schüler dieser Klasse sowohl an der AG „Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen. Wären es nämlich weniger als 8, so gäbe es unter den 20 regelmäßig zum Schwimmen gehenden Schülern mehr als 12, die nicht an der AG „Bildende Kunst" teilnehmen. Diese Schüler und die 18 Teilnehmer der AG wären zusammen bereits mehr als 30 Schüler.

Dagegen folgt nicht, daß mindestens 9 Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben. Denn nach den Informationen ist z. B. folgende Verteilung möglich: Von den 18 Teilnehmern der AG „Bildende Kunst" gehen genau 8 zum Schwimmen, genau die anderen 10 sind Leser der Kinderbibliothek; die übrigen 12 Schüler der Klasse gehen sämtlich zum Schwimmen, genau 5 von ihnen sind außerdem Leser der Kinderbibliothek. Damit ist bewiesen, daß Birgits Aussagen für die Zahl $x = 8$ wahr sind.

c) Wie das ebengenannte Beispiel zeigt, besteht nach den Informationen auch die Möglichkeit, daß kein Schüler der Klasse alle drei Freizeitbeschäftigungen ausübt. Für keine natürliche Zahl $y > 0$ kann daher Franks Aussage wahr sein.

5. Bezeichnet man die Anzahl der Zweimarkstücke, die Cathrin vor dem Einkauf besaß, mit $x$, so hatte sie zur gleichen Zeit $(18 - x)$ Fünfzigpfennigstücke. Der Geldbetrag, den sie vor dem Einkauf besaß, betrug somit $(2x + (18 - x) \cdot 0{,}5)$ Mark $= (1{,}5x + 9)$ Mark. Da sie davon genau die Hälfte ausgab, hatte sie nach dem Einkauf noch $(0{,}7x + 4{,}5)$ Mark.

Laut Aufgabe setzte sich dieser Betrag aus $(18 - x)$ Zweimarkstücken und $x$ Fünfzigpfennigstücken zusammen. Daher gilt
$0{,}75x + 4{,}5 = 2(18 - x) + 0{,}5x = 36 - 1{,}5x$,
woraus man $2{,}25x = 31{,}5$, also $x = 14$ erhält.

Folglich hatte Cathrin vor dem Einkauf genau 14 Zweimarkstücke und genau 4 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 30 Mark, bei sich. Nach dem Einkauf besaß sie genau 4 Zweimarkstücke und genau 14 Fünfzigpfennigstücke, das sind zusammen 15 Mark.

6. Das Lot von $F$ auf $CB$ habe die Länge von $x$ cm, das Lot von $F$ auf $AD$ hat dann die Länge $(6 - x)$ cm. Da die Flächeninhalte der Dreiecke $AFE$ und $BCF$ gleich sind und $E$ Mittelpunkt von $AD$ ist, gilt $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (6 - x)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6x, \text{ also}$$

$$9 - \frac{3}{2}x = 3x, \text{ woraus}$$

$$x = 2 \text{ folgt.}$$

Für die Flächeninhalte $A_{ABF}$, $A_{ECD}$, $A_{BCF}$, $A_{ABCD}$ der Dreiecke $ABF$, $ECD$, $BCF$ bzw. des Quadrates $ABCD$ gilt

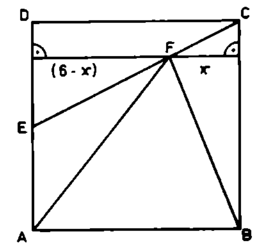
$A_{ABF} = A_{ABCD} - A_{ECD} - 2A_{BCF}$ und

$A_{ABCD} = 36\ \text{cm}^2$, $A_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\ \text{cm}^2 = 9\ \text{cm}^2$,

$$A_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6\ \text{cm}^2 = 6\ \text{cm}^2.$$

Folglich ist

$A_{ABF} = 36\ \text{cm}^2 - 9\ \text{cm}^2 - 12\ \text{cm}^2 = 15\ \text{cm}^2$.




**Olympiadeklasse 8**

1. Die Differenz zwischen der Summe der Werte der ersten beiden Münzen und dem Wert der dritten Münze beträgt genau 7,00 M. Deshalb ist der Wert der dritten Münze größer als 7 M, also 10 M oder 20 M.

Wäre die dritte Münze eine Münze zu 20 M gewesen, dann müßte die Summe der Werte der beiden anderen Münzen genau 13 Mark betragen haben, das ist mit den angegebenen Münzwerten jedoch nicht möglich.

Also war die dritte Münze eine Münze zu 10 M, und die Summe der Werte der beiden anderen Münzen betrug genau 3 M. Das ist bei den angegebenen Münzsorten nur möglich, wenn Klaus eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich hatte.

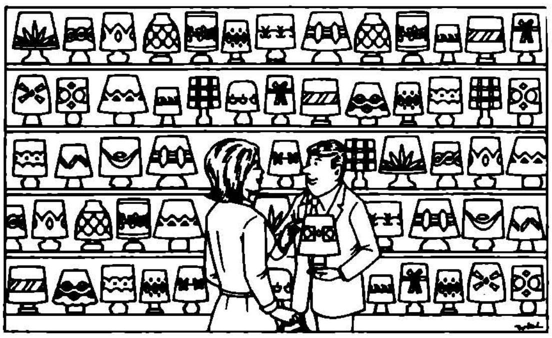
Klaus hatte also bei diesem Einkauf eine 10-Mark-Münze, eine 2-Mark-Münze und eine 1-Mark-Münze bei sich.

2. I. Angenommen, ein Quadrat $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Dann liegt $M$ wegen $\overline{MA} = \overline{MD}$ auf der Mittelsenkrechten $m$ von $AD$. Ferner berührt die Gerade $t$ durch $B$, $C$ den Kreis $k$ in $P$, also ist $t$ senkrecht zur Geraden durch $M$, $P$. Diese steht somit wegen $AD \parallel BC$ auch auf $AD$ senkrecht und ist daher die Gerade $m$; damit ist gezeigt, daß $m$ durch $P$ geht. Da $m$ auch Mittelsenkrechte von $BC$ ist, ist folglich $P$ der Mittelpunkt von $BC$. Wendet man auf $ABCD$ eine beliebige zentrische Streckung mit dem Zentrum $P$ an, so entsteht ein Quadrat $A'B'C'D'$, dessen Ecken $B'$, $C'$ auf $t$ liegen und dessen Seite $B'C'$ den Mittelpunkt $P$ hat.

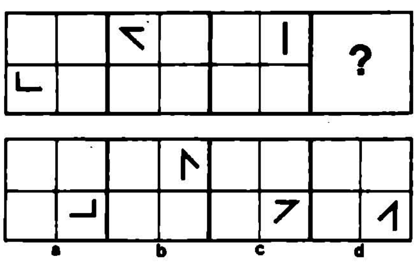
Fortsetzung auf Seite VI

# 1-2-3
# Lustige Logelei
## alpha-Wandzeitung

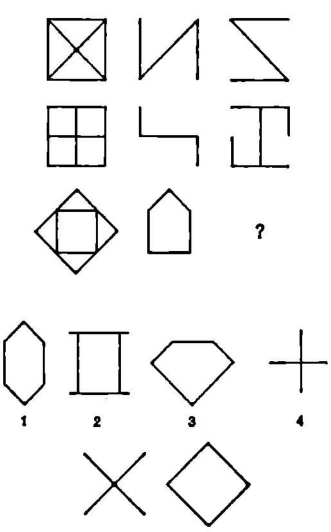
1. Eine der vielen Lampen steht in vier Exemplaren auf den Regalen. Wer findet sie am schnellsten?



2. a) Welches der Bilder a bis d gehört logischerweise an Stelle des Quadrats mit dem Fragezeichen?



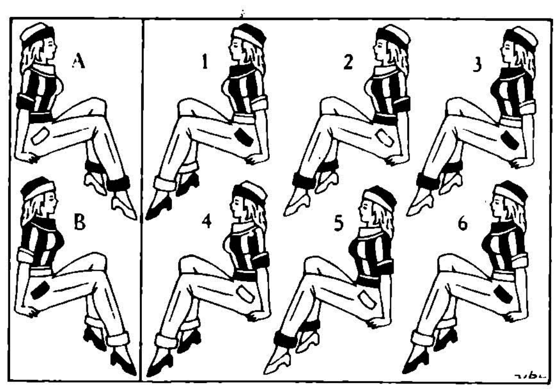

b) Welche der Figuren 1 bis 6 gehört logischerweise an die Stelle des Fragezeichens?



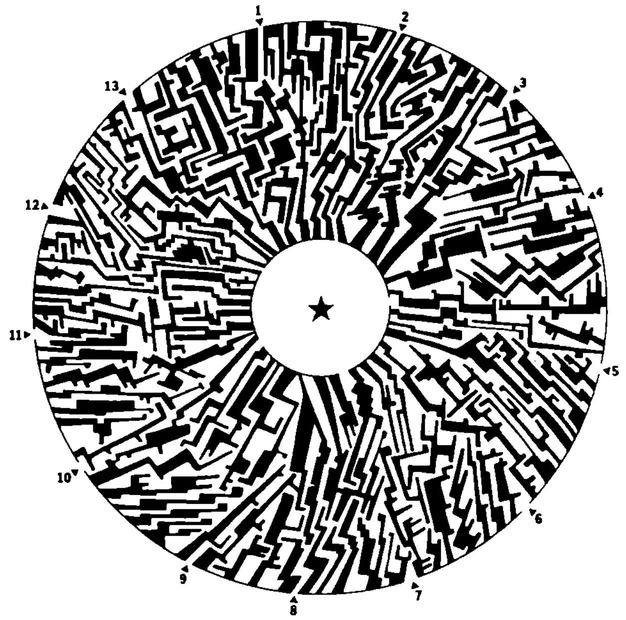

3. Durch welchen Ausgang findet das Eichhörnchen aus seinem Bau heraus?


4. Vexierbild, entstanden um 1900: Wo steckt der Rattenfänger von Hameln?

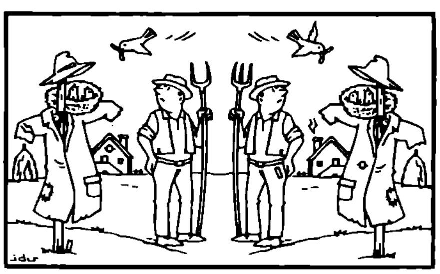
5. Welche zwei der 6 Mädchen sehen ihr Spiegelbild?



6. Starte von einer Zahl aus und erreiche den Stern in der Mitte des Irrgartens, ohne unterwegs eine der eingezeichneten Linien zu kreuzen!

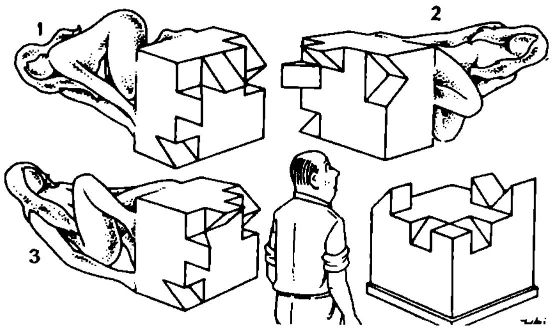



7. Die rechte Hälfte des Bildes ist Spiegelbild der linken bis auf fünf Details, die sich einen anderen Platz gesucht haben.
Wo sind sie wiederzufinden?

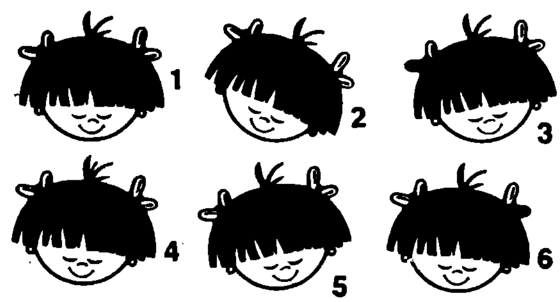


8. Eines der acht Bilder wurde aus je einer Einzelheit der anderen sieben zusammengestellt. Welches?


9. Welches der drei Denkmäler paßt auf den neuen Sockel?



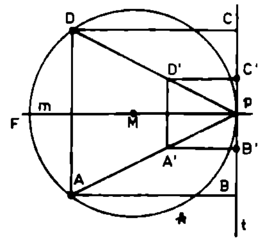

10. Die sechs Kinderköpfe sehen einander sehr ähnlich. Aber nur zwei sind vollkommen gleich. Welche sind es?




Diese lustigen Knobeleien stammen aus:

Füles

*Budapest*

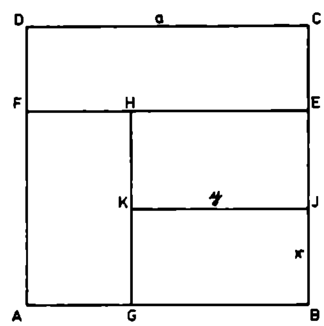



II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Quadrat mit den Eigenschaften (1), (2), wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(3) Man zieht durch $M$ eine Gerade, die $m$ genannt sei. Einen ihrer Schnittpunkte mit $k$ bezeichne man mit $P$.
(4) Man konstruiert die Senkrechte $t$ in $P$ auf $m$.
(5) Auf $t$ wählt man einen beliebigen Punkt $B' \neq P$ und verlängert die Strecke $B'P$ über $P$ hinaus um ihre eigene Länge bis $C'$.
(6) Auf $B'C'$ errichtet man das Quadrat $A'B'C'D'$ (nach der Seite von $t$ hin, auf der $k$ liegt).
(7) Die Strahlen aus $P$ durch $A'$ bzw. durch $D'$ schneiden $k$ in $A$ bzw. $D$.
(8) Man fällt die Lote $AB$ bzw. $DC$ von $A$ bzw. $D$ auf $t$.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ ein Quadrat mit den Eigenschaften (1) und (2) ist:
Nach Konstruktion liegen $A$ und $D$ auf $k$, also ist (1) erfüllt. Ferner berührt die Gerade $t$, auf der $B$ und $C$ liegen, den Kreis $k$ in $P$. Nach Konstruktion ist $m$ die Mittelsenkrechte von $B'C'$ und damit auch von $A'D'$. Daher liegen die Geraden durch $P$, $A'$ bzw. durch $P$, $B'$ symmetrisch zu $m$; dasselbe gilt für $k$ und folglich für $A$ und $D$. Somit ist $AD \perp m$, also $AD \parallel A'D'$. Da nach Konstruktion auch $AB \parallel A'B'$ und $DC \parallel D'C'$ ist, geht $ABCD$ aus $A'B'C'D'$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $P$ hervor. Folglich ist auch $ABCD$ ein Quadrat, und die Seite $BC$ wird von $k$ in ihrem Mittelpunkt $P$ berührt, so daß (2) insgesamt erfüllt ist.

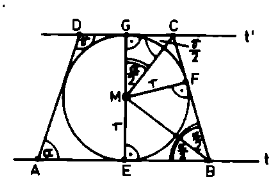
IV. Konstruktionsschritt (3) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Schritte (5) und (6) führen zwar nicht zu einem eindeutig bestimmten Quadrat $A'B'C'D'$, aber je zwei der Quadrate, die entstehen können, gehen auseinander durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $P$ hervor. Daher sind die in (7) konstruierten Strahlen für alle in (5), (6) zu erhaltenden Quadrate dieselben, d. h. durch ($k$ und) $P$ eindeutig bestimmt; dasselbe gilt somit für $A$, $D$ und nach (8) für $B$, $C$. Also gibt es (zu $k$) bis auf Kongruenz genau ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften.

3. a) Nach Voraussetzung hat jedes der vier genannten Rechtecke den Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}$.
Daraus folgt $\overline{DF} = \frac{a^2}{4} : \overline{CD} = \frac{a}{4}$, $\overline{AF} = \frac{3a}{4}$, $\overline{FH} = \frac{a^2}{4} : \overline{AF} = \frac{a^2}{4} : \frac{3a}{4} = \frac{a}{3}$, $\overline{EH} = \frac{2a}{3}$, $\overline{EJ} = \frac{a^2}{4} : \overline{EH} = \frac{a^2}{4} : \frac{2a}{3} = \frac{3a}{8}$.
Also ist der gesuchte Umfang $2\overline{EH} = 2\overline{EJ} = \frac{4a}{3} + \frac{3a}{4} = \frac{25a}{12}$.
b) Wir setzen $\overline{BJ} = x$, $\overline{KJ} = y$. Da die Rechtecke $GBJK$ und $KJEH$ umfangsgleich sind, ist $2(x+y) = 2(\overline{JE} + y)$, also $\overline{JE} = x$. Da $AGHF$, $GBJK$ und $FECD$ umfangsgleich sind, ist die Summe der halben Umfänge von $AGHF$ und $GBJK$ gleich dem Umfang von $FECD$, also $\overline{FA} + \overline{AG} + \overline{GB} + \overline{BJ} = 2(\overline{CD} + \overline{CE})$,
d. h. $3x + a = 2(a + a - 2x)$.
Daraus folgt
$$x = \frac{3}{7}a.$$
Da $AGHF$ und $GBJK$ umfangsgleich sind, gilt $\overline{FA} + \overline{AG} = \overline{GB} + \overline{BJ}$, d. h.
$$\frac{6}{7}a + a - y = y + \frac{3}{7}a.$$
Daraus folgt
$$y = \frac{5}{7}a.$$
Also ist der gesuchte Flächeninhalt
$$xy = \frac{15a^2}{49}.$$




4. Ist $x$ die mittlere der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so lauten sie $x-1$, $x$ und $x+1$. Bildet man daher ihr Produkt und vermehrt es um die mittlere Zahl, so erhält man $(x-1) \cdot x \cdot (x+1) + x = x^3 - x + x = x^3$, w. z. b. w.

5. Der Mittelpunkt von $k$ sei $M$. Bei Spiegelung an der Geraden durch $E$, $G$ geht $k$ in sich über. Ebenso $t$ und $t'$, und die Punkte $A$, $B$ werden miteinander vertauscht. Das gilt folglich ebenfalls für die von $A$ und $B$ an $k$ gelegten Tangenten und somit auch für $D$ und $C$.




Daher ist $G$ der Mittelpunkt der Strecke $CD$. Ferner folgt, daß im Trapez $ABCD$ die Innenwinkel bei $A$ und $B$ beide dieselbe Größe $\alpha$ und die Innenwinkel bei $C$ und $D$ beide die Größe $\gamma = 180° - \alpha$ haben (Gegenwinkel) an geschnittenen Parallelen).

Berührt $k$ die Gerade durch $B$, $C$ in $F$, so gilt $\triangle BEM \cong \triangle BFM$ (ssw), also $\overline{\sphericalangle EBM} = \overline{\sphericalangle FBM} = \frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\overline{\sphericalangle GCM} = \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, also $\overline{\sphericalangle GMC} = \frac{\alpha}{2}$ (Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck $CGM$). Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke $BME$ und $MCG$ einander ähnlich, und es folgt
$$\overline{BE} : \overline{EM} = \overline{MG} : \overline{GC}, \text{ also}$$
$$\frac{a}{2} : r = r : \frac{c}{2} \text{ und somit}$$
$$r^2 = \frac{ac}{4}, \text{ w. z. b. w.}$$

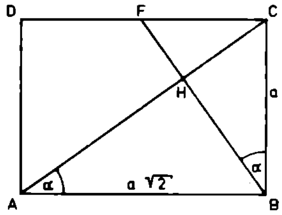
6. a) Bei einer Geschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ legte der Taxifahrer in 10 Minuten einen Weg von $30 \cdot \frac{1}{6}\,\text{km} = 5\,\text{km}$ zurück. Für diese Strecke hätte er mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{5}{50}\,\text{h} = \frac{1}{10}\,\text{h} = 6\,\text{min}$ benötigt.
Für je 5 km benötigte der Taxifahrer daher 4 min mehr, als er bei einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gebraucht hätte. Da er genau 10 min zu spät kam, hatte er wegen $\frac{5}{4} \cdot 10 = 12{,}5$ insgesamt eine Strecke von 12,5 km zurückgelegt.
b) Für die Weglänge 12,5 km wird bei einer Geschwindigkeit von $30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Zeit von $\frac{12{,}5}{30}\,\text{h} = \frac{5}{12}\,\text{h} = 25\,\text{min}$ benötigt.

**Olympiadeklasse 9**

1. Angenommen, für ein Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen gelten (1) und (2). Dann ist die Lösung $x$ (siehe (1)) nach (2) gleich der Zahl $ax - 6$, d. h. es gilt
$$ax - 6 = x.$$
Daraus folgt
$$ax - x = 6,$$
$$x(a-1) = 6. \qquad (3)$$
Da $a - 1$ eine ganze Zahl ist, ist die natürliche Zahl $x$ ein Teiler von 6, d. h. eine der Zahlen 1, 2, 3, 6.
Ebenso folgt aus (1), (2), daß
$$bx - 4 = x,$$
$$x(b-1) = 4 \qquad (4)$$
gilt, also $x$ ein Teiler von 4 ist, d. h. eine der Zahlen 1, 2, 4. Somit kann $x$ nur eine der Zahlen 1; 2 sein.
Ist $x = 1$, so folgt aus (3), (4), daß $a = 7$ und $b = 5$ gilt.
Ist $x = 2$, so folgt aus (3), (4), daß $a = 4$ und $b = 3$ gilt.
Also können nur die Paare (4;3) und (7;5) die Bedingungen (1), (2) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn die Gleichung $4x - 6 = 3x - 4$ hat die Zahl 2 als Lösung, beim Einsetzen von 2 in $4x - 6$ bzw. $3x - 4$ ergibt sich ebenfalls 2; die Gleichung $7x - 6 = 5x - 4$ hat die Zahl 1 als Lösung, beim Einsetzen von 1 in $7x - 6$ bzw. $5x - 4$ ergibt sich ebenfalls 1.

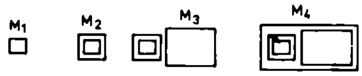
Daher erfüllen genau die Paare (4;3) und (7;5) die Bedingungen (1), (2).

2. Der Schnittpunkt der Strecken $AC$ und $BF$ sei $H$ genannt.




Wegen $\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a}$ gilt $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{BC}}$.
Daher stimmen die Dreiecke $ABC$ und $BCF$ im Verhältnis zweier Seiten und in der Größe des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels überein und sind somit ähnlich.
Sei nun $\alpha$ die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB$, dann gilt
$\overline{\sphericalangle FBC} = \alpha$, also $\overline{\sphericalangle ABH} = 90^\circ - \alpha$
und somit wegen des Satzes über die Winkelsumme, angewendet auf das Dreieck $ABH$,
$\overline{\sphericalangle AHB} = 90^\circ$, w. z. b. w.

3. Für den ersten Karton sind die Forderungen (1), (2) und (3) erfüllt. Wir beweisen nun: Hat man die Forderungen (1), (2) und (3) durch eine Anordnung $A$ der Menge $M_k$ aus den ersten $k$ Kartons erfüllt ($k$ sei eine beliebige der Zahlen 1, 2, ..., $n-1$), so kann man (1), (2) und (3) auch für die Menge $M_{k+1}$ aus den ersten $k+1$ Kartons erfüllen. Ist dies bewiesen, dann ist daraus ersichtlich, wie man die Forderungen (1), (2) und (3) für die gesamte Menge der $n$ Kartons schrittweise durch Hinzunehmen des zweiten, dritten, ... Kartons erfüllen kann.
In der Anordnung $A$ gibt es, da sie (2) erfüllt, entweder genau einen oder genau zwei Kartons, die in keinem anderen Karton der Menge $M_k$ enthalten sind.
a) Gibt es genau einen solchen, so lege man den $(k+1)$-ten Karton einfach daneben. Dann bleiben (1) und (3) erfüllt, da der neue Karton die gerade Anzahl von 0 Kartons enthält und die Anordnung der übrigen unverändert bleibt. Ferner ist auch (2) erfüllt, da nun genau zwei Kartons in keinem anderen der Menge $M_{k+1}$ enthalten sind.
b) Gab es aber in $A$ genau zwei Kartons $K$ und $K'$, die in keinem anderen Karton der Menge $M_k$ enthalten waren, so lege man die gesamte Anordnung $A$ unverändert in den $(k+1)$-ten Karton hinein. Hierdurch wird, da (2) für $A$ galt, (3) für den $(k+1)$-ten Karton erfüllt, und für die übrigen Kartons bleibt (3) gültig, da $A$ unverändert geblieben war.
Ferner wird (2) erfüllt, da nun genau der neue Karton in keinem anderen der Menge $M_{k-1}$ enthalten ist. Schließlich bleibt (1) aus folgendem Grunde erfüllt: Alle Kartons der früheren Anordnung $A$ erfüllen (1); zu zeigen ist noch, daß auch der $(k+1)$-te Karton eine gerade Anzahl Kartons enthält. Dies ergibt sich wie folgt: Der Karton $K$ enthält in der Anordnung $A$ eine gerade Anzahl $g$ von Kartons, der Karton $K'$ eine gerade Anzahl $g'$. Daher enthält der $(k+1)$-te Karton in der neuen Anordnung genau diese $g+g'$ Kartons zusammen mit $K$ und $K'$, d. h. genau $g+g'+2$ Kartons, und dies ist eine gerade Anzahl.
Anordnung der Menge $M_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$)




4. a) Alle Mengen aus je drei unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, daß jede dieser drei Zahlen durch eine Ziffer des dekadischen Zahlensystems dargestellt wird, lauten
$\{0;1;2\}$, $\{1;2;3\}$, $\{2;3;4\}$, $\{3;4;5\}$, $\{4;5;6\}$, $\{5;6;7\}$, $\{6;7;8\}$, $\{7;8;9\}$.
Jede im dekadischen Zahlensystem dreistellige Zahl, deren Ziffern in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen aus einer dieser Mengen darstellen, hat also eine der Quersummen
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24
und ist folglich durch 3 teilbar. Daher ist keine dieser dreistelligen Zahlen eine Primzahl.
b) Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels. Für $n=3$ gilt z. B.: Die Primzahl 11 (dekadisch geschrieben) hat im 3-adischen Zahlensystem wegen

$$11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2$$

die Ziffern 1, 0, 2, die in der Reihenfolge 0, 1, 2 drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen.

5. I. Angenommen, ein Punkt $Z$ habe die verlangte Eigenschaft. Dann ist $\overline{ZA} = \overline{ZA'}$ und $\overline{ZB} = \overline{ZB'}$, also liegt $Z$ sowohl auf der Mittelsenkrechten von $AA'$ als auch auf der Mittelsenkrechten von $BB'$.
II. Daher kann ein Punkt $Z$ nur dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: Man konstruiert die Mittelsenkrechte von $AA'$ und die Mittelsenkrechte von $BB'$. Da auf dem Arbeitsblatt $AA'$ und $BB'$ nicht zueinander parallel sind, sind auch diese beiden Mittelsenkrechten nicht zueinander parallel; sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der $Z$ genannt sei.
III. Beweis, daß der so konstruierte Punkt $Z$ die verlangte Eigenschaft hat:
Nach Konstruktion liegt $Z$ auf den Mittelsenkrechten von $AA'$ und von $BB'$, also gilt

$$\overline{ZA} = \overline{ZA'} \quad (1)$$

und $\overline{ZB} = \overline{ZB'}$. (2)

Ferner gilt nach Voraussetzung $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
Daher ist $\triangle ZAB \cong \triangle ZA'B'$ (Kongruenzsatz sss), also

$$\overline{\sphericalangle AZB} = \overline{\sphericalangle A'ZB'}. \quad (3)$$

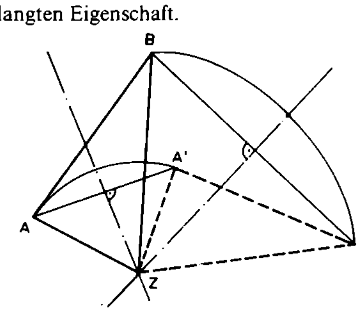
Die Ausführung der Konstruktion auf dem Arbeitsblatt ergibt ferner: Die Strahlen aus $Z$ durch $A$, $B$, $A'$ und $B'$ sind so gelegen, daß

$$\sphericalangle AZA' \text{ und } \sphericalangle BZB' \quad (4)$$

gleichen Drehsinn haben und daß $\overline{\sphericalangle AZA'} = \overline{\sphericalangle AZB} + \overline{\sphericalangle BZA'}$ sowie
$\overline{\sphericalangle BZB'} = \overline{\sphericalangle BZA'} + \overline{\sphericalangle A'ZB'}$ gilt,
woraus wegen (3) auch

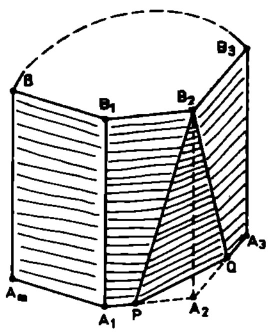
$$\overline{\sphericalangle AZA'} = \overline{\sphericalangle BZB'} \text{ folgt.} \quad (5)$$

Wegen (1) gibt es eine Drehung um $Z$, die $A$ in $A'$ überführt. Wegen (2), (4) und (5) führt diese Drehung auch $B$ in $B'$ über.
IV. Alle Konstruktionsschritte aus II sind bei der vorgegebenen Lage von $A$, $B$, $A'$ und $B'$ auf dem Arbeitsblatt eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt $Z$ mit der verlangten Eigenschaft.




6. Jeder ebenflächig begrenzte Körper hat mindestens vier Ecken. Ist die Eckenzahl $n \leqq 5$, so gibt es nur folgende Fälle:
1. Der Körper hat genau 4 Ecken $A$, $B$, $C$, $D$. In diesem Fall hat der Körper die Flächen der Dreiecke $ABC$, $ABD$, $ACD$, $BCD$ als Begrenzungsflächen. Ihre Anzahl beträgt 4.
2. Der Körper hat genau 5 Ecken $A, B, C, D, E$, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Auch in diesem Fall muß jede ebene Fläche aus der Begrenzung des Körpers eine der Flächen der Dreiecke $ABC$, $ABD$, $ABE$, $ACD$, $ACE$, $ADE$, $BCD$, $BCE$, $BDE$, $CDE$ sein.
Auf folgende Weise kann man ermitteln, wie viele dieser Dreiecksflächen (mindestens) in der Begrenzung des Körpers vorkommen:
Jede Ecke des Körpers muß Ecke von mindestens 3 ebenen Begrenzungsflächen sein. Zählt man auf diese Weise die Flächen auf, wobei sich eine Anzahl $\geqq 15$ ergibt, so tritt jede Fläche in dieser Aufzählung genau dreimal auf, nämlich für jede ihrer Ecken genau einmal. Daher ist die Anzahl der Flächen (jede genau einmal gezählt) $\geqq 5$.
3. Der Körper hat genau 5 Ecken $A, B, C, D, E$, von denen vier, o. B. d. A. etwa $A$, $B$, $C$, $D$, in einer gemeinsamen Ebene liegen. In diesem Fall ist die Fläche des Vierecks $ABCD$ eine der Begrenzungsflächen des Körpers. An jeder ihrer vier Kanten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ muß sich eine weitere Fläche anschließen, wofür nur die Flächen der Dreiecke $ABE$ bzw. $BCE$ bzw. $CDE$ bzw. $DAE$ möglich sind. Damit sind 5 Flächen aus der Begrenzung des Körpers ermittelt.
Mithin gibt es für $n \leqq 5$ keinen Körper mit $n$ Ecken und weniger als $n$ Flächen.
Für jedes gerade $n \geqq 6$, also $n = 2m$ mit ganzem $m \geqq 3$, gibt es einen Körper mit $n$ Ecken und weniger als $n$ Flächen, nämlich z. B. ein Prisma mit $m$-eckiger Grund- und Deckfläche; denn wegen $m > 2$ gilt $2m > m+2$, also ist die Eckenzahl $n = 2m$ größer als die Zahl $m+2$ der Flächen.

Auch für jedes ungerade $n \geqq 6$, also $n=2m+1$ mit $m \geqq 3$, gibt es einen Körper mit $n$ Ecken und weniger als $n$ Flächen. Um einen solchen zu erhalten, wähle man z. B. ein Prisma mit $m$-eckiger Grundfläche $A_1A_2A_3...A_m$ und $m$-eckiger Deckfläche $B_1B_2B_3...B_m$.
Ferner wähle man auf den Strecken $A_1A_2$ und $A_2A_3$ je einen Punkt $P$ bzw. $Q$ so, daß $A_1PQA_3...A$ ein $(m+1)$-Eck wird. Dann kann man von dem Prisma das Tetraeder $B_2PQA_2$ abschneiden und erhält einen Restkörper mit $n=2m+1$ Ecken und $(m+2)+1$ Flächen, der wegen $m>2$, also $2m+1>m+3$ die geforderte Eigenschaft hat.
Damit ist gezeigt, daß die Zahl $N=6$ die in der Aufgabe genannte Eigenschaft hat und daß sie die kleinste natürliche Zahl $N$ mit dieser Eigenschaft ist.




**Olympiadeklasse 10**

1. a) Es sei $M$ der Mittelpunkt der Strecke $AB$. Die Gerade $g$ durch $C$ und $M$ ist Symmetrieachse der gesamten Figur, also gilt $\overline{MD}=\overline{MJ}, \overline{ME}=\overline{MH}, \overline{MG}=\overline{MF}$. (1)
Ferner ist $CM$ zugleich Höhe in $ABC$, also hat $\triangle BCM$ bei $B$ bzw. $M$ Winkel von 45° bzw. 90° und ist daher ebenfalls gleichschenklig mit $\overline{MB}=\overline{MC}$. Also liegt $M$ auf der Mittelsenkrechten von $BC$; diese ist zugleich die Mittelsenkrechte von $DE$, hiernach gilt

$$\overline{MD}=\overline{ME}. \qquad (2)$$

$\triangle BCD$ ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\sphericalangle DBC=45°$, also ist $\sphericalangle DBM=90°=\sphericalangle GBM$; ferner gilt $\overline{BD}=a\sqrt{2}=\overline{BG}$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist somit $\triangle DBM \cong \triangle GBM$, also $\overline{MD}=\overline{MG}$. (3)
Aus (1), (2), (3) folgt, daß der Kreis $k$ um $M$ durch $D$ auch durch $E, F, G, H, J$ geht.
Sein Durchmesser ist nach dem Satz des Pythagoras

$$2\overline{MG}=2\sqrt{\overline{MB}^2+\overline{MG}^2} =2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2+(a\sqrt{2})^2} =\sqrt{4\left(\frac{a^2}{2}+2a^2\right)}=a\sqrt{10}.$$

b) Zu zeigen ist, daß für jeden Punkt $M' \neq M$ jeder Kreis um $M'$, der in seiner Fläche oder auf seinem Rande di• Punkte $D, E, F, G, H, J$ enthält, einen größeren Radius als $k$ hat. O.B.d.A. liege $M'$ auf $g$ oder in derjenigen durch $g$ begrenzten Halbebene, die $A$ enthält. Das Lot von $M'$ auf $g$ habe den Fußpunkt $L$. Ist $L=M$ (also $M'$ nicht auf $g$ gelegen), so gilt $\overline{M'D}>\overline{MD}$ (siehe Bild a). Ist $L \neq M$ und liegt $L$ auf dem Strahl aus $M$ durch $C$, so gilt $\overline{M'G} \geqq \overline{LG}>\overline{MG}$ (siehe Bild b). Liegt $L$ auf der Verlängerung von $CM$ über $M$ hinaus, so gilt $\overline{M'D} \geqq \overline{LD}>\overline{MD}$ (siehe Bild c).
Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

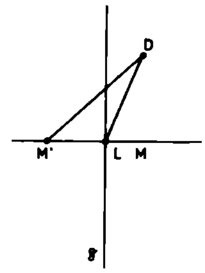



Bild a

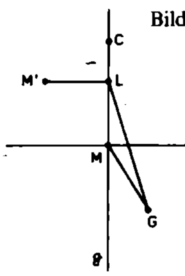



Bild b

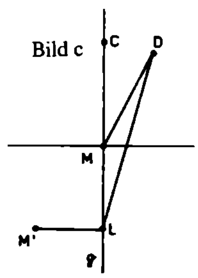



Bild c

2. Der genannte Term ist genau dann definiert, wenn die Ungleichungen

$$1+x-3y \geqq 0 \qquad (2)$$
und
$$2x-4y+1 \geqq 0 \qquad (3)$$

gelten. Ist dies der Fall, so gelten die Ungleichungen

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} \geqq 1 \qquad (4)$$
und
$$3^{\sqrt{2x-4y+1}} \geqq 1. \qquad (5)$$

Also kann (1) nur dann erfüllt werden, wenn sowohl in (4) als auch in (5) das Gleichheitszeichen steht. Dies trifft nur dann zu, wenn

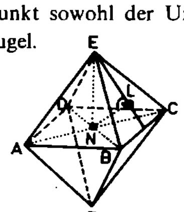
$$1+x-3y=0 \qquad (6)$$
und
$$2x-4y+1=0 \qquad (7)$$

gelten. Das Gleichungssystem (6), (7) hat genau das Paar

$$(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \text{ als Lösung.}$$

Umgekehrt folgt für dieses Paar aus (6), (7) auch (2), (3) und (1). Daher hat genau dieses Paar alle verlangten Eigenschaften.

3. Der Mittelpunkt $M$ eines Würfels, d. i. der Schnittpunkt seiner Körperdiagonalen, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und (da er auch Schnittpunkt der Verbindungsstrecken je zweier gegenüberliegender Seitenflächen-Mittelpunkte ist) zu allen Seitenflächen gleichen Abstand. Er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.




Ist $a$ die Kantenlänge des Würfels, also $a\sqrt{3}$ seine Körperdiagonalenlänge, so ist die Entfernung von $M$ zu den Ecken, d. h. der Umkugelradius $r=\frac{a}{2}\sqrt{3}$; der Abstand von $M$ zu den Seitenflächen, d. h. der Inkugelradius, ist $r_1=\frac{a}{2}=\frac{r}{\sqrt{3}}$. Weiter sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Oktaeder (siehe Bild).
Sein Mittelpunkt $N$, d, i. der Schnittpunkt von $AC$, $BD$ und $EF$, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und zu allen Seitenflächen gleichen Abstand; er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.
Ist $b$ die Kantenlänge des Oktaeders, also $\overline{BD}=b\sqrt{2}$, so ist der Umkugelradius $r=\overline{NB} =\frac{b}{2}\sqrt{2}=\frac{b}{\sqrt{2}}$. Ferner folgt: $BCEN$ ist eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche $BCE$; für ihre Spitze $N$ gilt $\overline{NB}=\overline{NC}=\overline{NE}$. also handelt es sich um eine gerade Pyramide. Der Fußpunkt $L$ des Lotes von $N$ auf die Fläche $BCE$ ist folglich deren Schwerpunkt. Hiernach gilt $\overline{LE}=\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{3}=\frac{b}{\sqrt{3}}$. Daraus und aus $\overline{NE}=\frac{b}{\sqrt{2}}$ folgt nach dem Satz des Pythagoras, daß der Inkugelradius

$$r_2=\overline{NL}=\sqrt{\overline{NE}^2-\overline{LE}^2}=\sqrt{\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{3}}=\frac{b}{\sqrt{6}}=\frac{r}{\sqrt{3}}$$

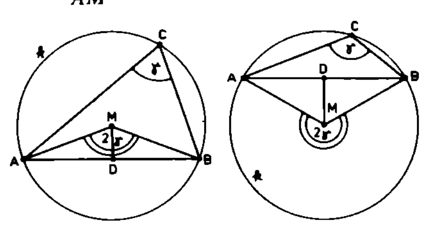
ist. Somit gilt $r_1 : r_2 = 1:1$.

4. Ist $M$ der Mittelpunkt von $k$, so gilt nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel

$$\sphericalangle AMB=2\gamma.$$

Ferner gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:
1. Es gilt $2\gamma \neq 180°$.
In dem gleichschenkligen Dreieck $ABM$ ist die Höhe $MD$ zugleich Winkel- und Seitenhalbierende. Daher ist $\triangle ADM$ bei $D$ rechtwinklig; es gilt $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ und
$\sphericalangle AMD=\gamma$ im Falle $2\gamma<180°$ bzw.
$\sphericalangle AMD=180°-\gamma$ im Falle $2\gamma>180°$.
Wegen $\sin(180°-\gamma)=\sin\gamma$ folgt in beiden Fällen somit

$$\sin\gamma=\frac{\overline{AD}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AB}}{2r}, \text{ w.z.b.w.}$$




2. Es gilt $2\gamma=180°$. Dann ist $\overline{AB}=2r$,

$$\sin\gamma=\sin 90°=1=\frac{\overline{AB}}{2r}, \text{ w.z.b.w.}$$

5. Aus (1) und (3) folgt
$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=1+1=2,$
$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=2+1=3,$
$f(5)=f(3+2)=f(3)+f(2)=3+2=5,$
$f(7)=f(5+2)=f(5)+f(2)=5+2=7.$

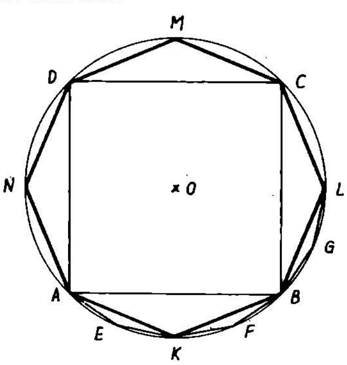
Fortsetzung auf Seite 96.

# Die Exhaustionsmethode

Bekanntlich bestimmt man den Flächeninhalt $A$ eines Kreises mit dem Radius $r$ nach der Formel $A=r^2\cdot\pi$. Dabei wissen wir, daß die exakte Definition des Flächeninhalts krummlinig begrenzter ebener Figuren und auch seine Berechnung einige Probleme aufwerfen, die eigentlich nur mit den Mitteln der Integralrechnung gelöst werden können.

Wir können aber den Flächeninhalt eines Kreises *annähernd* ermitteln, indem wir in den Kreis ein regelmäßiges Vieleck einbeschreiben und dessen Flächeninhalt als Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises nehmen. Je mehr Seiten das einbeschriebene regelmäßige Vieleck besitzt, desto genauer ist der so erhaltene Wert (siehe Bild 1). Füllt man die Kreissegmente, die zwischen dem Kreis und dem einbeschriebenen regelmäßigen Vieleck verbleiben, durch gleichschenklige Dreiecke (z. B. $\triangle KFB$ im Bild 1) aus, so wird der Kreis schrittweise *ausgeschöpft*. *Ausschöpfen* heißt auf lateinisch *exhaurire* – deshalb bezeichnet man dieses Verfahren als *Exhaustionsmethode*.

Bild 1




Der Flächeninhalt des Achtecks $AKBLMDN$ kommt dem Flächeninhalt des Kreises näher als der des Quadrats $ABCD$. Wird im folgenden Schritt ein Sechszehneck $AEKFBGL\ldots$ konstruiert, so ist sein Flächeninhalt ein noch besserer Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises; ein Zweiunddreißigeck liefert einen noch besseren usw.

Das Verfahren des Ausschöpfens war bereits einige Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung bekannt und wurde von den Mathematikern seitdem verwendet; die obengenannte Bezeichnung wurde dagegen erst im Mittelalter eingeführt. 1651 erläuterte der belgische Mathematiker *Taquet* die Exhaustionsmethode folgendermaßen:

*Man sagt, eine bestimmte Größe (z. B. ein Flächeninhalt, ein Volumen) wird durch eine Folge einbeschriebener Größen ausgeschöpft, wenn sich die einbeschriebenen Größen ab einem bestimmten Schritt von der ursprünglich betrachteten nur um einen Wert unterscheiden, der kleiner als eine beliebig gewählte Konstante ist.*

Als theoretische Grundlage dieser Methode kann ein Satz von *Eudoxos* (etwa 408 bis 355 v. u. Z.) dienen, der besagt:

Wenn man von einer Größe die Hälfte oder mehr als die Hälfte wegnimmt und diesen Vorgang hinreichend oft wiederholt, dann kann man stets zu einer Größe gelangen, die kleiner ist als irgendeine Größe derselben Art.

Einer der ersten, die dieses Verfahren angewendet haben, war *Antiphon* (5. Jh. v. u. Z.), der auch versuchte, das Problem der Quadratur des Kreises zu lösen. Auf Grund von Überlegungen zum Ausschöpfen des Kreises mittels einbeschriebener Vielecke behauptete er: Wenn man ein Vieleck konstruieren kann, das dem Kreis flächengleich ist, so bedeutet dies, daß man auch ein entsprechendes Quadrat konstruieren kann. *Antiphon* berücksichtigte aber nicht, daß alle dem Kreis einbeschriebenen Vielecke nur Näherungswerte für den Flächeninhalt des Kreises liefern – auch wenn sie dem Kreis noch so nahe kommen.

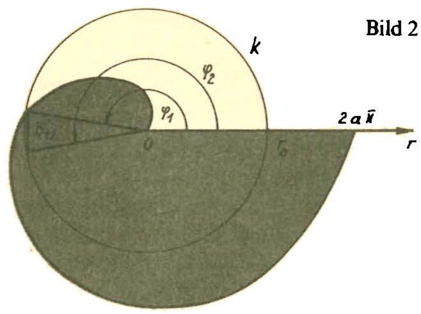
Der berühmte Mathematikhistoriker *Hankel* bemerkte, daß *Antiphon* der erste war, der sich beim Versuch, den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Figuren durch Ausschöpfen mit regelmäßigen Vielecken wachsender Seitenzahl zu bestimmen, auf dem richtigen Weg befand. Die Vorgehensweise *Antiphons* ergänzte dessen Zeitgenosse *Brison*, indem er zusätzlich umbeschriebene Vielecke in die Betrachtung einbezog. Dadurch wurde die Exhaustionsmethode ein mathematisch zuverlässiges Verfahren. Jedoch war sie keine universale, d. h. auf alle Probleme der Flächeninhalts- bzw. Volumenberechnung anwendbare Methode wie beispielsweise die Integralrechnung. Sie wurde nur als ein bequemes Verfahren zur Lösung gewisser derartiger Probleme verwendet – z. B. mehrmals von *Euklid* in seinen *Elementen* sowie in einer Reihe von Werken des *Archimedes*. Der bekannte deutsche Mathematikhistoriker *H. G. Zeuthen* weist in der *Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter* darauf hin, daß *Archimedes* später diese Methode weniger als ein Beweisverfahren ansah, sondern vielmehr als *Hilfsmittel* zum Entdecken von mathematischen Sätzen einschließlich ihrer Beweise.

In einer der Arbeiten von *Archimedes*, die man erst in unserem Jahrhundert entdeckte, wurde die Fläche als *Summe von Strecken* und das Volumen als *Summe von Flächen* betrachtet. Das ist aber ein Ansatzpunkt für unsere heutige Integralrechnung!

Abschließend soll die Anwendung der Exhaustionsmethode an einem Beispiel demonstriert werden:

Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, die von dem durch die Ungleichung $0\leqq\phi\leqq 2\pi$ bestimmten Stück der Spirale mit der Gleichung $r=a\cdot\phi$ (in Polarkoordinaten – siehe *alpha* 5/1977) und der Verbindungsstrecke von Anfangs- und Endpunkt dieses Spiralenstücks begrenzt wird (Bild 2).

Bild 2

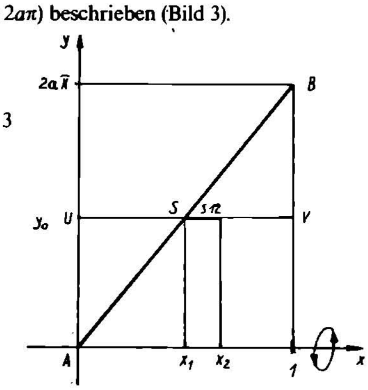



Setzen wir $\frac{\phi}{2\pi}=x$ und $r \hat{=} y$, so erhalten wir $y=r=a\cdot 2\pi x$ und

| | | |
|---|---|---|
| $r=a\cdot\phi$<br>$0\leqq\phi\leqq 2\pi$<br>$a$ konstant<br>(*) | geht über in | $y=2a\pi\cdot x$<br>$0\leqq x\leqq 1$<br>$0\leqq y=2a\pi$<br>$a$ konstant<br>(**) |

Fassen wir $x$ und $y$ als Koordinaten von Punkten in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem auf, so wird durch (**) die Strecke mit den Endpunkten $A(0;0)$ und $B(1;2a\pi)$ beschrieben (Bild 3).

Bild 3



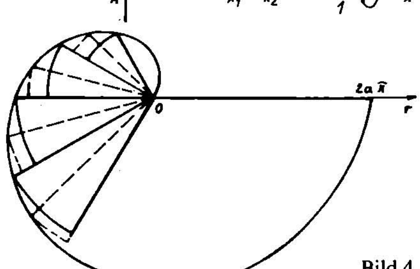



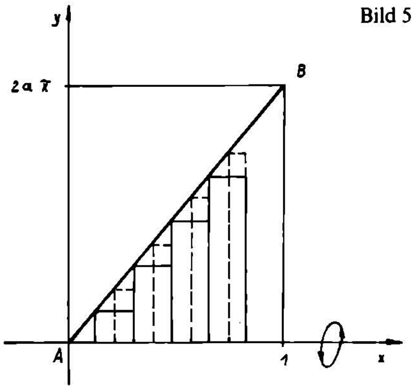

Bild 4

In der nachfolgenden Tabelle werden für beide Auffassungen einige Begriffe einschließlich ihrer mathematischen Beschreibung gegenübergestellt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Spiralenstück | $r=a\cdot\phi$<br>$0\leqq\phi\leqq 2\pi$ | $y=2a\pi\cdot x$<br>$0\leqq x\leqq 1$<br>$0\leqq y\leqq 2a\pi$ | Strecke $\overline{AB}$;<br>$A(0;0)$; $B(1;2a\pi)$ |
| Kreis $k$ um $P$ | $r=r_0$<br>$0\leqq\phi\leqq 2\pi$ | $y=y_0=r_0$<br>$0\leqq x\leqq 1$ | Strecke $s=\overline{UV}$<br>$U(0;y_0)$; $V(1;y_0)$ |
| Maßzahl des Flächeninhalts von $k$ | $\pi r_0{}^2$ | $\pi y_0{}^2\cdot 1$ | Maßzahl des Volumens des bei Rotation der Strecke $s$ um die $x$-Achse entstehenden Kreiszylinders |
| Kreisbogen $b_{12}$ (Teil von $k$) | $r=r_0$<br>$\phi_1\leqq\phi\leqq\phi_2$ | $y=y_0$<br>$x_1\leqq x\leqq x_2$ | Strecke $s_{12}$ (Teilstrecke von $s$) |
| Maßzahl des Flächeninhalts des durch $b_{12}$ bestimmten Sektors von $k$ | $\pi r_0{}^2\dfrac{\phi_2-\phi_1}{2\pi}$ | $\pi y_0{}^2(x_2-x_1)$ | Maßzahl des Volumens des bei Rotation von $s_{12}$ um die $x$-Achse entstehenden Kreiszylinders |

Schöpft man nun die uns interessierende Fläche durch eine Folge von aus Kreissektoren zusammengesetzten Flächen gemäß Bild 4 aus, so entspricht dem eine Ausschöpfung des Kegels, der bei Rotation der Strecke $\overline{AB}$ um die $x$-Achse entsteht. Der Kegel wird dabei durch eine Folge von aus Kreiszylindern zusammengesetzten Körpern ausgeschöpft (Bild 5).

Bild 5




Die Maßzahl des Volumens des Kegels können wir berechnen:

$$V=\frac{1}{3}\cdot(2a\pi)^2\cdot\pi\cdot 1;\quad V=\frac{4}{3}a^2\cdot\pi^3.$$

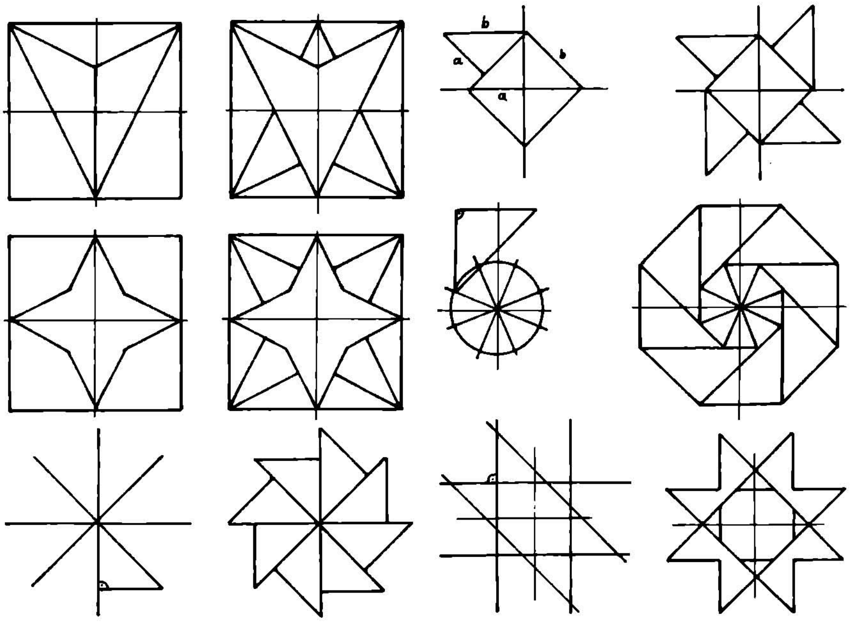
Diese ist nach unseren Überlegungen gleichzeitig die Maßzahl des Flächeninhalts der uns interessierenden Fläche:

$$A=\frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

Es sei betont, daß wir uns beim Ausschöpfen hier der Anschauung bedient haben. Die exakten Beweise lassen sich jedoch mit den Mitteln der 11./12. Klasse führen. Erst dadurch sind wir zu unserem Vergleich berechtigt.

*A. Halameisär/C. P. Helmholz*

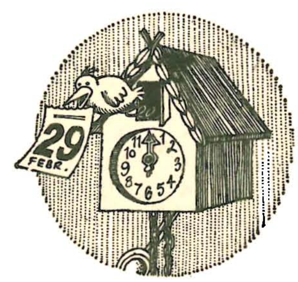
## Mit Zirkel und Zeichendreieck




# Seit wann gibt es die Schalttage?

Geschaltet wurde auf die verschiedenste Weise schon im Altertum. Kein Kalenderversuch kam daran vorbei, weil die Erde sich während eines Umlaufs um die Sonne (also in einem Jahr) eben leider nicht genau 365mal um die eigene Achse dreht, sondern fast eine Vierteldrehung mehr macht – genau 365,2422 Sonnentage ist das Jahr lang.

Da die Dezimalstellen einigermaßen genau einen Vierteltag ausmachen, wurde auch schon im 3. Jahrhundert v. u. Z. die Idee geboren, aller vier Jahre einen Tag einzu„schalten". Darauf basiert auch der Julianische Kalender, geschaffen von Julius Caesar im Jahre 46 v. u. Z.




Allerdings hatte sich die „kleine" Ungenauigkeit von 0,0078 Tagen jährlich im 16. Jahrhundert schon auf zehn Tage ausgewachsen, was Papst Gregor XIII. 1582 zu erneuter Kalenderreform veranlaßte: Die zehn Tage wurden gestrichen, und aller 400 Jahre sollte auf drei Tage verzichtet werden, und zwar auf die Schalttage in den Jahren 1700, 1800, 1900 (den nicht durch 400 teilbaren vollen Jahrhundertzahlen). 1600 war also Schaltjahr, 2000 wird auch Schaltjahr sein.

Es bleibt immer noch ein winziger Fehler, der aber erst im Jahre 4905 wieder einen Tag ausmachen wird – vorausgesetzt, daß sich weder Bahn- noch Drehgeschwindigkeit der Erde ändern.

Ebenfalls schon seit Caesar liegt der Schalttag am Ende des Februars, allerdings war der ursprünglich 29 Tage lang und demzufolge der 30. Februar Schalttag. Seit Kaiser Augustus durfte der ihm zu Ehren August genannte Monat natürlich nicht kürzer als ein anderer sein, er erhielt einen 31. Tag auf Kosten des Februars.

*R. Möbius, aus: LVZ v. 28.2.80*

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

# Programmiertes Life-Spiel

Im Rahmen der Pionier- und Jugendakademie Erfurt finden im Haus der Jungen Pioniere Otto Grotewohl Mathematikzirkel statt Für die Teilnehmer dieser Zirkel werden in den Herbst- und Frühjahrsferien Sonderkurse Numerik durchgeführt. Der dritte Numerik-Kurs erhielt in diesem Jahr die Aufgabe, das Life-Spiel aus *alpha* 3/79 und 4/79 zu programmieren. Dazu stehen uns die programmierbaren Kleinrechner Cellatron SER 2c und 2d zur Verfügung. Es wurde nach zwei Methoden vorgegangen.

Die Schüler *Gudrun Mögling*, EOS *Heinrich Mann*, und *Sylvia Hauptmann*, 42. OS, arbeiteten nach der ersten Methode am Rechner SER 2c. Die zweite Methode wurde von mir, *Dietmar Deimling*, EOS *G. E. Lessing*, für den Rechner SER 2d entwickelt.

Beide Programme sind fertiggestellt.

Der SER 2c ist ein programmierbarer Kleinrechner. Programme könnnen über einen bestimmten Code eingegeben werden. Die kleinsten Elemente eines Programms nennt man Befehle.

Der Rechner SER 2c führt an arithmetischen Befehlen nur die vier Grundrechenoperationen aus.

Eingaben erfolgen über einen Lochbandleser oder die Funktionstastatur. Ein Programm wird im Normalfall (codiert) auf ein Lochband gestanzt und dann in den Rechner eingegeben. Der Rechner kann Zahlen über einen Lochbandstanzer oder über die Schreibmaschine ausgeben. Im Hauptspeicher kann man 127 verschiedene Zahlen und 381 Befehle speichern. Die Rechengeschwindigkeit ist im Vergleich zu modernen Großrechnern sehr gering (400 Additionen je 1 s).

Der SER 2d verfügt über einen zweiten Lochbandleser und einen unwesentlich erweiterten Befehlsumfang.

Bei der ersten Methode arbeitet der Rechner SER 2c beim Life-Spiel auf einer Fläche von 6 mal 6 Feldern. Jedem Feld wird eine bestimmte Adresse zugeordnet. So hat z. B. das Feld in der Zeile 2, Spalte 5 die Adresse (2, 5). Die zu bearbeitende Figur wird in den Hauptspeicher eingegeben. Es entspricht ein Speicherplatz einem Feld. In einem Speicherplatz kann eine 1 oder eine 0 stehen, was bedeutet, daß das Feld belegt ist oder nicht. Der Rechner überprüft nun jedes einzelne Feld daraufhin, ob es in der folgenden Generation belegt sein wird oder nicht. Wenn ja, so speichert er die Adresse dieses Feldes ab. Nach und nach erhält er die Adressen aller Felder, die in der nächsten Generation belegt sein werden. Die Fläche, in der das ursprüngliche Feld ist, wird dabei nicht verändert. Die vom Rechner auf diese Weise entwickelten Adressen gibt er an die Schreibmaschine aus. Die Fläche wird mit der neuen Figur überschrieben. Nun kann der Rechner an dieser Figur die Rechnungen zur folgenden Generation fortsetzen.

Im folgenden soll die zweite Methode näher beschrieben werden. Hier arbeitet der Rechner auf einer Fläche von 8 mal 6 Feldern. Die Adressen der Felder spielen nur bei der Eingabe der Anfangsfigur eine Rolle. Beim eigentlichen Rechenvorgang arbeitet der SER 2d ohne die Adressen. Das Prinzip unterscheidet sich von dem der 1. Methode grundsätzlich. Bei der 1. Methode wurde die Figur nicht verändert und die neue Figur parallel zur alten errechnet. Bei meiner Methode wird die Fläche während des Rechnens direkt verändert.

Das Programm besteht aus mehreren Teilprogrammen, die aufeinanderfolgend abgearbeitet werden:

*Teilprogramm I:* Die Fläche, in die die Figur eingegeben werden soll, wird gelöscht, denn es könnten noch aus vorhergehenden Rechnungen Zahlen enthalten sein.

*Teilprogramm II:* Die Ausgangsfigur wird über die Zehnertastatur eingegeben. Man gibt der Reihe nach die Adressen der Felder ein, die belegt sein sollen.

*Teilprogramm III:* Die Figur wird mit der Nummer der Generation durch die Schreibmaschine ausgegeben. Das erfolgt zeilen- und spaltenweise. Dabei entspricht 1 einem Stein und 0 bedeutet, daß das Feld unbelegt ist.

*Teilprogramm IV:* Der Rechner nimmt direkte Veränderungen an der Figur vor. Es wird jedes Feld einzeln bearbeitet. *Als Nachbar eines Feldes sieht der Rechner ein Feld an, dessen Inhalt größer bzw. gleich 1 ist.*

So werden z. B. 2 und 1 als Nachbarn angesehen, 0 und $-1$ jedoch nicht.

Durch Zählen der Nachbarn kann der Rechner bestimmen, wie das Feld in der folgenden Generation belegt ist. Stellt der Rechner fest, daß ein Stein stirbt oder geboren wird, so wird das entsprechende Feld mit 2 bzw. $-1$ belegt.

Die alte Figur wird dadurch jedoch nicht beeinflußt, denn der Inhalt der entsprechenden Felder war vor der Veränderung 1 bzw. 0.

Am Ende dieses Teilprogramms ist das Gesamtfeld folgendermaßen aufgebaut:

Eine 1 oder 0 steht dort, wo in der Ausgangsfigur eine 1 oder 0 stand und sich nichts verändert hat.

Eine $-1$ steht dort, wo in der Ausgangsfigur eine 0 stand und ein Stein geboren wurde.

Eine 2 steht dort, wo in der Ausgangsfigur eine 1 stand und der Stein stirbt.

*Teilprogramm V:* Überall da, wo eine $-1$ steht (neuer Stein), wird diese durch eine 1 ersetzt. Der neue Stein wurde geboren. Überall dort, wo eine 2 steht (Stein stirbt), wird das entsprechende Feld gelöscht (mit 0 belegt).

Nach Abarbeitung auch dieses Teilprogramms liegt die auf die Ausgangsfigur folgende Generation vollständig vor.

*Teilprogramm VI:* Es erfolgt nun noch die Überprüfung der „Fläche“. Bei folgenden Bedingungen druckt der Rechner jeweils einen entsprechenden Text gesondert aus und bleibt selbständig stehen:

1. Figur ist ausgestorben (keine „Steine“ mehr enthalten),
2. Figur läuft über (da Fläche begrenzt),
3. Figur ist konstant (Weiterrechnen sinnlos).

Es existiert allerdings keine Abbruchbedingung dafür, wenn die Figur periodisch ist. Wenn die Bedingungen 1 bis 3 nicht zutreffen, beginnt der nächste Zyklus mit dem Teilprogramm III.

Ein Zyklus dauert etwa 6 Minuten. Die Handhabung des Programms ist sehr einfach. Außer der Eingabe der Anfangsfigur werden alle anderen Schritte vom Rechner ausgeführt.

Zur Zeit arbeite ich an der Programmierung einer Fläche von 28mal 24 Feldern.

Dieses Programm wird gegenüber dem hier beschriebenen wesentlich komplizierter.

Die Berechnung einer Generation wird knapp 90 min dauern.

*Dietmar Deimling*


## Sport frei!

In der Gleichung

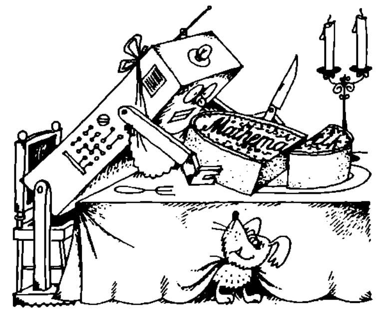
**O + L + Y + M + P + I + A + D + E = 1980**

stellen die Buchstaben aufeinanderfolgende natürliche Zahlen dar, die zu ermitteln sind.

(Lösung s. Heft 5/80.)

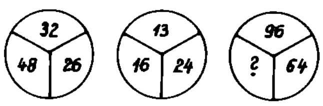
# In freien Stunden · alpha-heiter

**Unterhaltungsmathematik international**

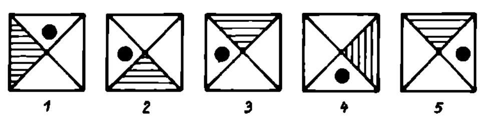


## Prüfe deinen Verstand!

a) Ersetze das Fragezeichen durch die richtige Zahl!




b) Welche der Figuren durchbricht eine bestimmte Gesetzmäßigkeit?




c) Welche Zahl verletzt eine bestimmte Gesetzmäßigkeit?

625 361 256 197 144

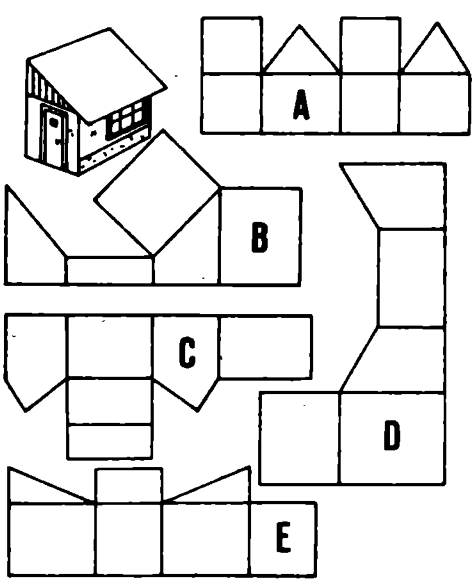
d) Bestimme die fehlenden Buchstaben!

| | | | |
|---|---|---|---|
| *D* | *H* | *L* | |
| *W* | *S* | *O* | |

*aus: Information Bulletin, Educational Research Center, Universität Addis Abeba (Äthiopien)*

## Modell einer Datsche

Welches der fünf Netze gehört zu dem Modell (links oben)? *aus: Füles, Budapest*




## Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern. (Bei a) und b) ist die größte Summe zu finden.)

a)
```
 PETER
   IST
    ZU
 -----
 HAUSE
```

b)
```
   WO
  IST
 SEIN
 ----
 BALL?
```
O < T < L

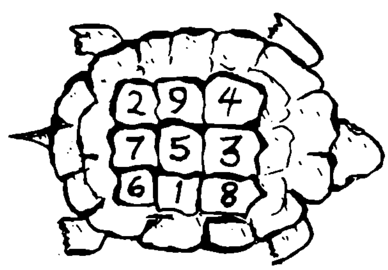
c)
```
  WANN
 KOMMT
 -----
 VATER?
```
W < O

*Dirigent J. Pěnčík, Praha*

## Magisches Quadrat

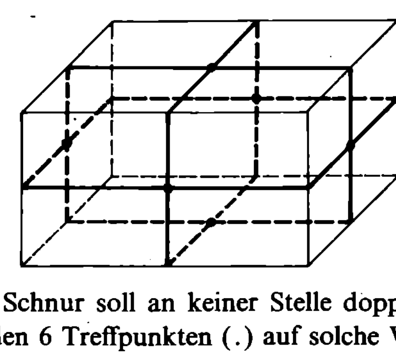
Das Bild zeigt eine Schildkröte mit einem magischen Quadrat. Es stammt aus dem alten China (2000 v. u. Z.). In das danebenstehende magische Quadrat sind die Zahlen −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4 so einzutragen, daß die Summe waagerecht, senkrecht und diagonal stets 0 beträgt.

*aus: Mathematical log, Oklahoma*

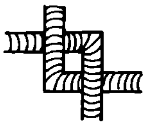



## Verschnürung eines Pakets

Ein quaderförmiges Paket ist mit einem einzigen Bindfaden (stark gezeichnet) auf die folgende Weise zu verschnüren:



Die Schnur soll an keiner Stelle doppelt liegen und an den 6 Treffpunkten (.) auf solche Weise gekreuzt werden:



Auf wie viele Arten ist eine solche Verschnürung möglich? (Der Abschlußknoten ist in obiger Skizze nicht erkenntlich gemacht.)

*Mitgeteilt von Prof. Dr. K. Biermann, Humboldt-Universität zu Berlin*

**Zerlegungsproblem**

Gegeben sei ein u-förmiges Stück Blech (Bild 1 a). Es ist a) in vier rechtwinklige Dreiecke und ein Quadrat zu zerlegen. Die fünf Teile sollen das Quadrat (Bild 2) voll bedecken. Es ist (Bild 1 b) b) in vier form- und flächengleiche Teile zu zerlegen. Diese vier Teile sollen das Rechteck (Bild 3) voll bedecken.

*aus: Matematički List, Beograd*

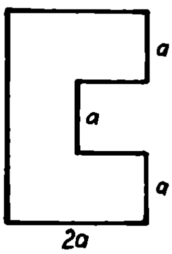



Bild 1 a

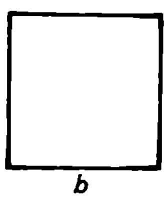



Bild 2

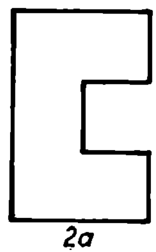



Bild 1 b

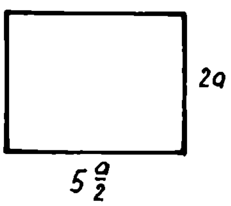


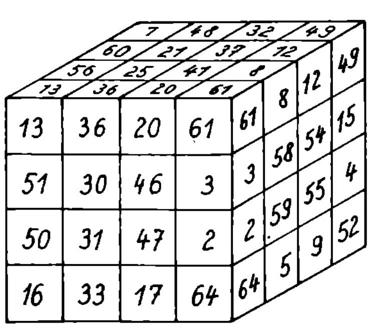

Bild 3

**52mal Summe 130**

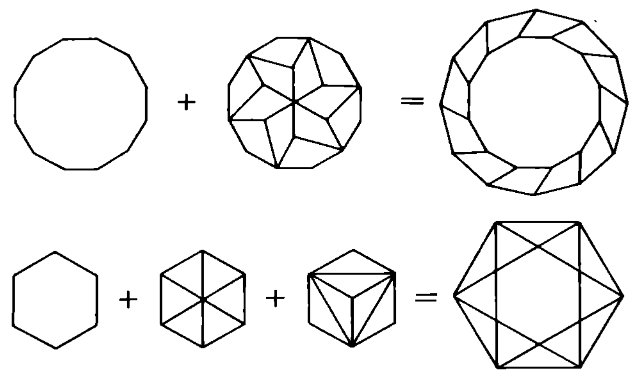
Ein Würfel mit 4 dm Kantenlänge ist aus 64 je 1 $dm^3$ großen Würfeln zusammengesetzt, wobei jedem Würfel eine der Zahlen 1 bis 64 zugeordnet ist. Die Zusammensetzung besteht darin, daß die Zahlen von je vier Würfeln, die nebeneinander, übereinander oder hintereinander liegen, die Summe 130 bilden; ebenfalls bilden die Zahlen der Würfel in den vier Raumdiagonalen die Summe 130.

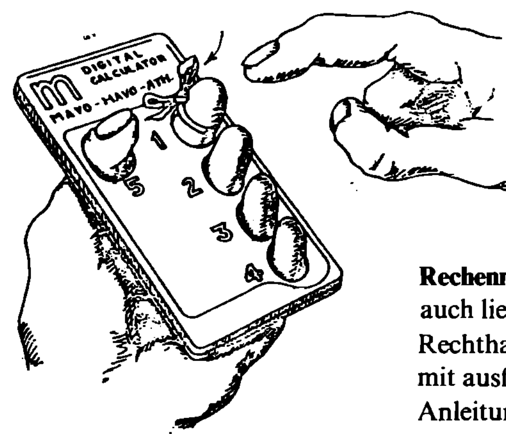
Ordne den verdeckten Würfeln die entsprechenden Zahlen zu!

*Schuldirektor H. Förg, Schwaz (Österreich)*




**Mach's mal nach!** *aus: Pythagoras, Utrecht (Niederlande)*




**Rechenmaschine** auch lieferbar als Rechthandmodell mit ausführlicher Anleitung (296 S.)

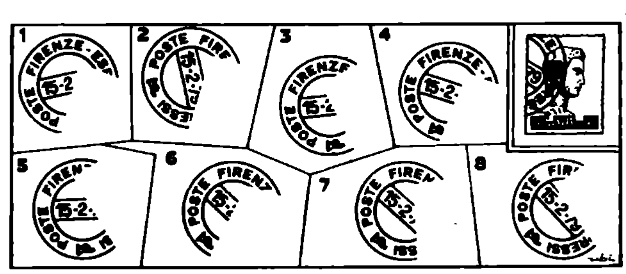
**Euklides (von Alexandria)**

Euklid hat in Alexandrien Mathematik gelehrt (um 300 v.u.Z.). Er war ein Zeitgenosse von König Ptolemeios, dem er zu sagen wagte, daß es für Könige keinen besonders bequemen Weg zur Geometrie gebe. Dies und die Anekdote über den praktischen „Nutzen" der Mathematik sind so ziemlich alles, was über sein Leben bekannt ist. E. ist bekannt geworden als der Autor der „Elemente", jenes bemerkenswerten Lehrbuches, das über 2000 Jahre lang eine Grundlage für den Geometrieunterricht in Schulen und Hochschulen war.

Ein Schüler fragte Euklid: „Was kann ich verdienen, wenn ich diese Dinge lerne?" E. rief seinen Sklaven und sagte: „Gib ihm 3 Obolen; der arme Mann muß Geld verdienen mit dem, was er lernt."

**Aus einer Briefmappe**

Von welchem der acht Umschläge ist die Briefmarke (oben rechts) abgelöst?



# XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

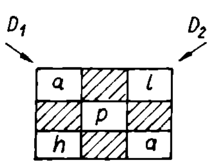
## 1. Stufe (Schulolympiade)

*Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1980*

*Achtung:* Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1980 veröffentlicht.
*Anmerkung:* $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet $AB$ die Strecke mit den Endpunkten $A$ und $B$, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke $AB$ bedeutet.

### Olympiadeklasse 5

200511 Ralph, ein eifriger Leser der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft seinen Mitschülern folgende Aufgabe:
In der abgebildeten Figur sind für $a$, $h$, $l$, $p$ natürliche Zahlen so einzutragen, daß sich in jeder der beiden Diagonalen $D_1$, $D_2$ die Summe 135 ergibt. Dabei soll die Zahl $p$ das Dreifache der Zahl $a$ sein, und die Zahl $h$ soll das Fünffache der Zahl $l$ sein.




Ermittle alle derartigen Eintragungen, und erkläre, wie man sie finden kann! Überprüfe dabei auch, ob alle geforderten Bedingungen erfüllt sind!

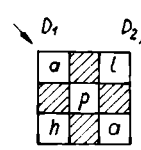
200512 Zum Transport einer bestimmten Menge Schotter hätte ein LKW mit 5 t Ladefähigkeit genau 105 vollbeladene Fuhren durchführen müssen. Nach 35 dieser Fuhren wurde er durch einen anderen LKW mit 7 t Ladefähigkeit abgelöst.
Stelle fest, wieviel vollbeladene Fuhren dieser zweite LKW noch durchzuführen hat, um die restliche Schottermenge abzutransportieren!

200513 Annegret, Heidi, Katrin, Lore, Petra und Ruth bewohnen im Pionierlager gemeinsam ein Zelt und beschließen, die Reihenfolge für ihren Ordnungsdienst nach ihrem Alter festzulegen, beginnend mit dem ältesten Mädchen. Alle sechs Mädchen sind im gleichen Jahr geboren, jedes an einem anderen Tag. Katrin ist älter als die fünf anderen Mädchen. Heidi hat einen Monat nach Annegret Geburtstag, sie ist aber älter als Petra. Lore ist jünger als Annegret. Ruth ist älter als Heidi und hat einen Tag später Geburtstag als Lore.
In welcher Reihenfolge müssen die sechs Pioniere ihren Ordnungsdienst versehen, wenn sie ihren Beschluß verwirklichen wollen?

200514 Von den sieben Schülern Annette, Beate, Christine, Dieter, Frank, Gerd und Hans hatte jeder in mindestens einem der beiden Fächer Mathematik und Russisch die Note 1. Auf die Frage, wer in genau einem dieser beiden Fächer die Note 1 hat, meldeten sich von diesen Schülern nur Annette, Christine, Frank, Gerd und Hans. In Mathematik hatten von ihnen nur Beate, Christine, Dieter und Frank die Note 1.
Ermittle aus diesen Angaben alle diejenigen der sieben Schüler, die
a) in Mathematik und in Russisch,
b) in Mathematik, aber nicht in Russisch,
c) in Russisch, aber nicht in Mathematik
die Note 1 hatten!

### Olympiadeklasse 6

200611 Petra, eine eifrige Leserin der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft ihren Mitschülern folgende Aufgabe:
In der abgebildeten Figur sind für $a$, $h$, $l$, $p$ natürliche Zahlen so einzutragen, daß sich in jeder der beiden Diagonalen $D_1$, $D_2$ die Summe 80 ergibt. Dabei soll die Zahl $a$ doppelt so groß wie die Zahl $p$ sein; für $l$ soll eine Primzahl eingetragen werden und für $h$ eine Primzahl, die größer als das Zehnfache von $l$ ist.

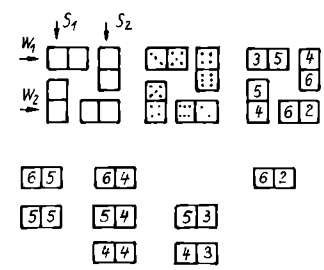



Ermittle alle Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Gib an, wie du sie gefunden hast!

200612 Aus dem Wirtschaftsbuch eines Erholungsheimes war ersichtlich, daß man für 25 Urlauber, die 14 Tage lang versorgt wurden, insgesamt 21 kg Butter verbraucht hatte. Berechne, wieviel kg Butter für 30 Personen, die 6 Tage lang versorgt werden sollen, insgesamt bereitgestellt werden müssen, wenn je Person und Tag eine gleichgroße Buttermenge wie im angegebenen Beispiel verbraucht werden soll!

200613 Ermittle aus der Menge aller natürlichen Zahlen von 20 bis 39 alle diejenigen, die durch das Produkt ihrer beiden Ziffern teilbar sind!

200614 Klaus spielt mit Dominosteinen. Er legt jeweils vier Dominosteine so zusammen, wie es das Bild *A* 614*a* zeigt. Dabei entstehen zwei waagerechte Streifen $W_1$, $W_2$ und zwei senkrechte Streifen $S_1$, $S_2$. Jeder dieser vier Streifen enthält drei Zahlenfelder. Diese sollen für jeden der vier Streifen dieselbe Summe ergeben; in Bild *A* 614*b* z. B. ist diese Summe 12. Die sonst übliche Regel, daß benachbarte Steine nur mit gleichlautenden Zahlenfeldern aneinanderstoßen dürfen, braucht nicht befolgt zu werden. Anstelle der üblichen Punktsymbole seien die Dominosteine einfacher mit Zahlenzeichen wiedergegeben; siehe Bild *A* 614*c*.
Nachdem Klaus mehrmals Steine in der genannten Weise zusammengelegt hat, verbleiben ihm noch die acht in Bild *A* 614*d* abgebildeten Steine. Er will vier von diesen Steinen in der beschriebenen Art zusammenlegen, wobei in jedem der vier Streifen $W_1$, $W_2$, $S_1$, $S_2$ die Summe 13 entsteht.
Gib mindestens fünf Möglichkeiten hierfür an! Dabei sollen keine zwei der anzugebenden Möglichkeiten dieselben vier Steine enthalten. Eine Begründung für die anzugebenden Möglichkeiten wird nicht verlangt.



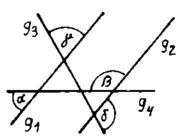

### Olympiadeklasse 7

200711 Anläßlich der Siegerehrung eines Mathematikwettbewerbs beglückwünschte jeder Preisträger jeden anderen mit einem Händedruck. Insgesamt wurden dabei 91 Händedrücke ausgeführt, und zwar bei jedem der Glückwünsche genau einer.
Ermittle aus dieser Angabe die Anzahl der Preisträger des Wettbewerbs!

200712 Aus einem alten ägyptischen Rechenbuch (1700 v. u. Z.) stammt folgende Aufgabe:

Ein Wanderer stellt fest, daß ein Hirt 70 Schafe auf die Weide führt. Er fragt den Hirten: „Sind die Schafe, die du hier führst, deine sämtlichen Schafe?“ – „Nein“, antwortet der Hirt, „ich führe nur zwei Drittel von einem Drittel der gesamten Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide.“
Ermittle die Stückzahl der gesamten Herde, die diesem Hirten anvertraut war!

200713 Vier Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$, $g_4$ mögen sich so schneiden, wie es aus Bild $A713$ ersichtlich ist. Für die Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der dort angegebenen Winkel gelte $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 70°$.
Ermittle aus diesen gegebenen Größen die Winkelgröße $\delta$!



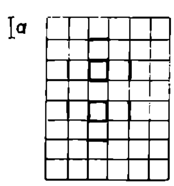

200714 Beweise folgenden Satz:
Ist $M$ der Mittelpunkt der Seite $AB$ eines Dreiecks $ABC$ und gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$, so ist das Dreieck $ABC$ rechtwinklig.

**Olympiadeklasse 8**

200811 Im Bild sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß alle waagerecht und senkrecht zu lesenden Aufgaben richtig gerechnet sind. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

$$\begin{array}{ccccc} aac & - & de & = & ffe \\ : & & + & & - \\ gb & \cdot & gf & = & dba \\ \hline he & + & ig & = & kgf \end{array}$$

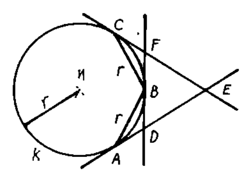
200812 Ulrike fertigt gern Strickarbeiten an.




In der Mitte eines kleinen Deckchens möchte sie ein Muster erhalten, das im Bild zur größeren Deutlichkeit auf quadratisch angeordneten Gitterlinien gezeichnet wurde. Ulrike will bei der Herstellung dieses Musters den Stoff bei jedem Nadelstich genau in einem Kreuzungspunkt von Gitterlinien durchstechen und dann den Faden so weiterführen, daß der Stoff beim nächsten Mal in einem Kreuzungspunkt durchstochen wird, der von dem vorangehenden mindestens den im Bild angegebenen Abstand $a$ hat. Auf diese Weise soll das Muster mit einem einzigen Faden hergestellt werden, und dieser soll so kurz wie möglich sein.
Zeichne eine Möglichkeit für die zu durchstechenden Kreuzungspunkte und ihre Reihenfolge sowie für den Verlauf des Fadens auf Vorder- und Rückseite des Deckchens! Begründe, daß eine kürzere Fadenführung nicht möglich ist!

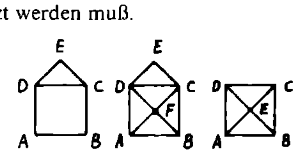
200813 Ein Vater, der von seinen Söhnen Fritz und Heinz begleitet wurde, kaufte sich im Warenhaus einen Anzug, der mit einem Schild folgenden Inhalts versehen war: „Im Preis um 20% herabgesetzt.“
Auf dem Heimweg sagte Heinz: „Vati, da hast du 25% des von dir gezahlten Preises eingespart.“ Fritz, der diese Bemerkung bezweifelte, fragte den Vater: „Stimmt das?“
Dieser erklärte ihm darauf: „Das stimmt. Wäre der Preis des Anzugs nur um 10% herabgesetzt worden, dann hätte ich allerdings nur $11\frac{1}{9}$% des von mir gezahlten Preises eingespart.“
Beweise, daß diese Aussagen unabhängig von dem speziellen Wert des Preises vor der Preisherabsetzung wahr sind!

200814 Gegeben sei ein Kreis $k$ mit dem Radius $r$. $AB$ und $BC$ seien zwei Sehnen der Länge $r$. In $A$, $B$ und $C$ seien die Tangenten an den Kreis gelegt. Diese ergeben Schnittpunkte $D$, $E$ und $F$, wie im Bild angegeben.
Beweise aus diesen Voraussetzungen, daß das Dreieck $DEF$ gleichseitig ist!




**Olympiadeklasse 9**

200911 Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren, ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!
„In einem Zuge“ soll bedeuten, daß beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muß.




Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

200912 Zwei Personen, $A$ und $B$, spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:
Zunächst wird eine ganze Zahl $Z$ vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl $Z$ zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.
Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.
Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl $Z = 12$ lautete, ergab sich:
Die von $A$ gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Die von $B$ gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.
Zeigen Sie, daß für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler $A$ als auch der Spieler $B$ einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

200913 a) Kann der Bruch $\frac{1711}{3421}$ durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?
b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl $n$ der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+3}{28n+5}$ zueinander teilerfremd sind!
*Hinweis:* Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

200914 Gegeben seien ein Kreis $k_1$ mit dem Mittelpunkt $M_1$ und dem Radius $r_1 = 4{,}5$ cm sowie ein Kreis $k_2$ mit dem Mittelpunkt $M_2$ und dem Radius $r_2 = 2{,}5$ cm. Es sei $\overline{M_1M_2} = 7$ cm.
Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise $k_1$ und $k_2$! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

**Olympiadeklasse 10**

201011 a) Geben Sie ein Paar $(x, y)$ reeller Zahlen an, das die folgenden Ungleichungen (1), (2) und (3) erfüllt!

$$10y - x \leqq 100, \quad (1)$$
$$5y - 5x > 0, \quad (2)$$
$$y + x \geqq 21. \quad (3)$$

b) Beweisen Sie, daß es mehr als zehn verschiedene derartige Paare $(x, y)$ gibt!

201012 Beweisen Sie, daß

$$\frac{x^4 + 4y^4}{x^2 - 2xy + 2y^2}$$

für alle ganzen Zahlen $x$, $y$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$
a) (als reelle Zahl) definiert ist und sogar
b) eine ganze Zahl ist!

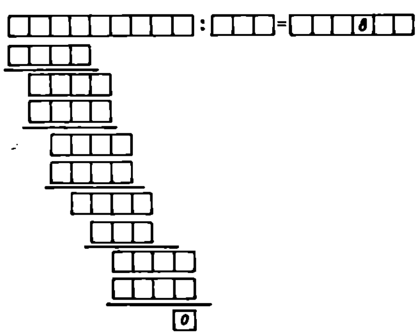
201013 Gegeben seien die Seitenlängen $a = \overline{BC} = 15$ cm, $b = \overline{AC} = 14$ cm, $c = \overline{AB} = 13$ cm eines Dreiecks $ABC$.
Berechnen Sie die Länge $h_b$ der durch $B$ ver-

laufenden Höhe und den Flächeninhalt $F$ dieses Dreiecks!

201014 Ein Würfelkörper ganz aus Glas
(10 Zentimeter Kantenmaß),
drin viele Punkte eingeschlossen,
Der Franz probiert schon unverdrossen,
sie allesamt genau zu zählen.
Der Peter sagt: „Mußt dich nicht quälen!
's sind 26 mehr als 100,
und wenn es dich vielleicht auch wundert,
ich sag' dir, daß es nicht gelingt,
daß man sie so drin unterbringt,
daß nicht ein Pärchen existier'
des Abstand kleiner ist als vier."
(Er meint natürlich Zentimeter.)
„Und dies beweis mir mal!" sagt Peter:
„Und ich verlange dann auch nicht
die Lösung dafür als Gedicht."

**Olympiadeklasse 11/12**

201211 In dem folgenden Schema ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas die erste Ziffer 0 erhalten.



Beweisen Sie, daß es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

201212 Vier Personen $A$, $B$, $C$, $D$ machen je zwei Aussagen über eine im dekadischen Positionssystem geschriebene nichtnegative ganze Zahl $x$.
Es ist bekannt, daß
(1) von $A$, $B$, $C$ genau einer zwei falsche Aussagen macht, während bei jedem der beiden anderen genau eine Aussage falsch ist,
(2) $D$ zwei wahre Aussagen macht.
Die von $A$, $B$, $C$, $D$ gemachten Aussagen lauten:
($A$1) Die letzte Ziffer der dekadischen Darstellung von $x$ ist gerade.
($A$2) $x$ ist Quadratzahl.
($B$1) Die Ziffer 9 ist in der dekadischen Darstellung von $x$ mindestens einmal vorhanden.
($B$2) $x$ ist vierstellig.
($C$1) $x$ ist durch 10 teilbar.
($C$2) $x$ läßt bei Division durch 3 den Rest 1.
($D$1) In der dekadischen Darstellung von $x$ ist, falls $x$ aus mehr als einer Ziffer besteht, von links beginnend, jede Ziffer um 1 kleiner als die jeweils rechts nachfolgende Ziffer.
($D$2) Die Anzahl der geraden Ziffern in der dekadischen Darstellung von $x$ ist nicht größer als 2.
Man ermittle alle Zahlen $x$, die dieses System von Bedingungen erfüllen!

201213 Eine gerade Pyramide $K_1$ mit quadratischer Grundfläche werde durch einen zu ihrer Grundfläche parallelen ebenen Schnitt in eine Teilpyramide $K_2$ und einen Pyramidenstumpf $K_3$ zerlegt. Die Kantenlängen der Grundflächen von $K_1$ und $K_2$ seien $a_1$ bzw. $a_2$, die Volumina von $K_2$ bzw. $K_3$ seien $V_2$ bzw. $V_3$.
Man ermittle $a_1 : a_2$ so, daß $V_2 : V_3 = 2:3$ gilt!

201214 In einem rechtwinkligen kartesischen $x,y$-Koordinatensystem seien gegeben: Die Punkte $M$ (0;0), $F_1$ (2;0), $F_2$ (−2;0), $A$(4;0), $B(0;2\sqrt{3})$, die Gerade $g$ mit der Gleichung $x=-8$,
der Kreis $k_1$ um $M$ durch $A$, der Kreis $k_2$ um $M$ durch $B$.
Unter der „Ellipse mit Brennpunkten $F_1$, $F_2$ und halber Hauptachsenlänge $\overline{MA}$" versteht man die Menge $E_1$ aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, für die $\overline{F_1P}+\overline{F_2P}=2\overline{MA}$ gilt.
Unter der „Ellipse mit Brennpunkt $F_2$, Leitlinie $g$ und Exzentrizität $\frac{1}{2}$" versteht man die Menge $E_2$ aller Punkte $P(x;y)$ mit folgender Eigenschaft: Ist $Q$ der Fußpunkt des Lotes von $P$ auf $g$, so gilt $\overline{F_2P}=\frac{1}{2}\overline{PQ}$.
Unter der „Ellipse durch $A$ mit Hauptscheitelkreis $k_1$ und Nebenscheitelkreis $k_2$" versteht man die Menge $E_3$ aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, die durch folgende Konstruktion erhalten werden können: Man zeichne einen beliebigen von $M$ ausgehenden Strahl. Er schneidet $k_1$ bzw. $k_2$ in je einem Punkt $R_1$ bzw. $R_2$. Die Parallele durch $R_1$ zur $y$-Achse und die Parallele durch $R_2$ zur $x$-Achse schneiden sich in $P$.
Beweisen Sie, daß die drei Punktmengen $E_1$, $E_2$, $E_3$ einander gleich sind!

# Lösungen

**Lösungen zu: Gute Grundkenntnisse gefragt (Heft 3/80):**

**Klasse 5**

▲1▲ a) 15 ist Lösung der Ungleichung, denn es gilt $25+15>20-15$.
b) Nur die Zahl 7 erfüllt die Gleichung.

▲2▲ a) $72:9<88:8$
b)

| $a-2$ | $a-1$ | $a$ | $a+1$ |
|---|---|---|---|
| 297 | 298 | 299 | 300 |
| 4599 | 4600 | 4601 | 4602 |
| 229 | 230 | 231 | 232 |
| 7900 | 7901 | 7902 | 7903 |

▲3▲ a) Die Gleichung ist wahr.
b) Die Ungleichung ist falsch.

▲4▲ a) Die Summe der Zahlen 37 und 65 ist mit 8 zu multiplizieren, und zu diesem Produkt ist die Zahl 17 zu addieren.
b) $(37+65)\cdot(8+17)$

▲5▲
a) $12\text{ mm}\cdot 50000 = 600000\text{ mm} = 600\text{ m}$
Die Strecke ist im Gelände 600 m lang.
b) $1{,}4\text{ km} = 1400000\text{ mm}$, $140000\text{ mm} : 25000 = 56\text{ mm}$.

▲6▲ $110\text{ kg}-68\text{ kg}=42\text{ kg}$;
$42\text{ kg}=42000\text{ g}$; $42000:600\text{ g}=70$.
Das Mastschwein muß noch 70 Tage gefüttert werden.

**Klasse 6**

▲1▲ $t=2$

▲2▲ $g=\frac{4}{5}$

▲3▲

| $a$ | $a\cdot 10$ | $a\cdot 100$ | $a\cdot 1000$ |
|---|---|---|---|
| 17 | 170 | 1700 | 17000 |
| 34 | 340 | 3400 | 34000 |
| 825 | 8250 | 82500 | 825000 |
| 742 | 7240 | 72400 | 724000 |

▲4▲ Die ČSSR ist dichter besiedelt.

▲5▲ $\frac{3\text{ m}}{200\text{ m}}$
$\frac{240\text{ m}^2}{144\text{ M}}$ $\frac{3{,}60\text{ m}^2}{216\text{ M}}$

▲6▲

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | 8 cm | 5,7 cm | – | 5 cm |
| $\overline{BC}$ | 3 cm | 4,5 cm | – | 5 cm |
| $\overline{CD}$ | 8 cm | 5,7 cm | – | 5 cm |
| $\overline{DA}$ | 3 cm | 4,5 cm | – | 5 cm |
| $\sphericalangle DAB$ | 60 | 90 | – | 105 |
| $\sphericalangle ABC$ | 120 | 90 | – | 75 |
| $\sphericalangle BCD$ | 60 | 90 | – | 105 |
| $\sphericalangle CDA$ | 120 | 90 | – | 75 |
| $\overline{AM}$ | – | – | 7 cm | – |
| $\overline{MC}$ | – | – | 7 cm | – |
| $\overline{BM}$ | – | – | 6 cm | – |
| $\overline{MD}$ | – | – | 6 cm | – |
| $\sphericalangle AMB$ | – | – | 100 | – |
| $\sphericalangle BMC$ | – | – | 80 | – |
| $\sphericalangle CMD$ | – | – | 100 | – |
| $\sphericalangle AMD$ | – | – | 80 | – |

▲7▲ Es gibt 6 Möglichkeiten, auf kürzestem Wege zum Ziel ($G$) zu kommen:
$(a,b,e)$, $(a,k,f)$, $(d,e,l)$, $(d,m,g)$, $(i,e,f)$, $(i,h,g)$.

**Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/79 (Fortsetzung):**

Ph9 ▪69 Geg.:

Masse des Triebwagens $m_T = 16\,\mathrm{t} = 16000\,\mathrm{kg}$

Masse des Anhängers $m_A = 8\,\mathrm{t} = 8000\,\mathrm{kg}$

Konstante $k = 60\frac{Vs}{\mathrm{m}}$

Geschwindigkeit $v = 50\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{50\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s}}$

Reibungskoeffizient $\mu_0 = 0{,}2$

Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Ges.: a) Bremswiderstand $R$
b) Wärmemenge $Q$
c) Verzögerung $a$

a). Man vergleicht die mechanische mit der elektrischen Leistung.

$$P_{mech} \geqq P_{elektrisch}$$
$$F_R \cdot v \geqq \frac{U^2}{R}$$
$$\mu_0 \cdot F_N \cdot v \geqq \frac{(kv)^2}{R}$$
$$\mu_0 m_T \cdot g \cdot v \geqq \frac{k^2 v^2}{R}$$
$$R \geqq \frac{k^2 v}{\mu_0 \cdot m_T \cdot g}$$
$$R \geqq \frac{60^2 V^2 s^2 \cdot 50\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2}{0{,}2 \cdot \mathrm{m}^2 \cdot 16000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}6\,\mathrm{s}}$$
$$R \geqq 1{,}59\,\Omega$$

Der Bremswiderstand muß mindestens 1,59 Ω betragen.

b) Die kinetische Energie wird in Wärmeenergie umgewandelt.

$$Q = \frac{1}{2}(m_T + m_A)v^2$$
$$Q = \frac{1}{2}(16000 + 8000)\,\mathrm{kg} \cdot \frac{50^2 \cdot \mathrm{m}^2}{3{,}6 \cdot \mathrm{s}^2}$$
$$Q \approx 2{,}315 \cdot 10^6\,\mathrm{Ws}$$
$$Q = 0{,}643\,\mathrm{kWh}$$

Beim Bremsen wird eine Wärmemenge von 0,643 kWh (≈ 553 kcal) frei.

c) Die Bremsverzögerung berechnet man nach der Formel $F = ma$, also

$$F_R = m \cdot (-a)$$
$$F_R = (m_T + m_A)(-a)$$
$$a = -\frac{F_R}{m_T + m_A}$$
$$a = -\frac{\mu_0 \cdot m_T \cdot g}{m_T + m_A}$$
$$a = -\frac{0{,}2 \cdot 16000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m}}{(16000 + 8000)\,\mathrm{kg\,s}^2}$$
$$a \approx -1{,}31\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Die auftretende Bremsverzögerung hat den Wert $1{,}31\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Ph10/12 ▪70 Geg.: $r = 6370\,\mathrm{km}$
$h = 750\,\mathrm{m} = 0{,}75\,\mathrm{km}$
$T_0 = 24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s}$

Ges.: Differenz der Schwingungsdauer $\Delta T$

Aus dem Gravitationsgesetz in der Form $mg = \gamma \cdot \frac{Mm}{r^2}$ folgt

$$g_0 = \frac{\gamma \cdot M}{r^2} \text{ und } g = \frac{\gamma \cdot M}{(r+h)^2}. \qquad (1)$$

Die Pendeluhr kann man als ein mathematisches Pendel betrachten.

Aus der Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ergibt sich $\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{g_0}{g}$. (2)

(1) in (2) eingesetzt, liefert

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{(r+h)^2}{r^2}$$
$$\frac{T}{T_0} = \frac{r+h}{r}$$
$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{h}{r}$$
$$\Delta T = T - T_0 = \frac{h}{r} \cdot T_0$$
$$\Delta T = \frac{0{,}75\,\mathrm{km}}{6370\,\mathrm{km}} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s}$$
$$\Delta T \approx 10{,}2\,\mathrm{s}$$

Da $\Delta T > 0$, geht die Uhr täglich 10,2 s nach.

Ch7 ▪53

220 g − 192,6 g = 27,4 g Wasser sind entzogen

220 g Kohle ≙ 27,4 Wasser
100 g = $m$

$$m = \frac{27{,}4\,\mathrm{g} \cdot 100\,\mathrm{g}}{220\,\mathrm{g}}$$
$$m = 12{,}5\,\mathrm{g}$$

Die Kohle besitzt nach 2 Tagen noch eine Feuchtigkeit von 12,5%.

Ch8 ▪54 a) 10 kg ≙ 11%ig
35 kg ≙ $x$

$$\frac{10\,\mathrm{kg}}{35\,\mathrm{kg}} = \frac{x}{11\%}$$
$$x = \frac{10\,\mathrm{kg} \cdot 11\%}{35\,\mathrm{kg}}$$
$$x = 3{,}14\%$$

Die neue Lösung ist 3,14%ig

b) 10 kg · 0,11

$$NaOH + HCl \rightarrow NaCl + H_2O$$

0,04 kg 0,0585 kg

$$m = \frac{10\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}0585\,\mathrm{kg}}{0{,}04\,\mathrm{kg}}$$
$$m = 1{,}6\,\mathrm{kg}$$

Es entstehen 1,6 kg Kochsalz.

Ch9 ▪55 500 ml ≙ 40%
(500 − $x$) ml ≙ 32%

$$\frac{500\,\mathrm{ml}}{(500 - x)\,\mathrm{ml}} = \frac{40\%}{32\%}$$
$$x = 100\,\mathrm{ml}$$

Es wurden 100 ml Flüssigkeit, d. h. 40 ml Alkohol und 60 ml Wasser entnommen.

Ch10/12 ▪56

Zimmer = 10 m · 5 m · 4 m = 200 m³

$\frac{200000}{5000} = 40\,\mathrm{l}$ $H_2S$ sind zu vernichten (Schwefelwasserstoff)

bei 0° und 760 Torr sind das:

$$\frac{V_0 \cdot p_0}{T_0} = \frac{V_1 \cdot p_1}{T_1}$$
$$V_0 = \frac{V_1 \cdot p_1 \cdot T_0}{T_1 \cdot p_0}$$
$$V_0 = \frac{40\,\mathrm{l} \cdot 780\,\mathrm{Torr} \cdot 273\,{}^\circ\mathrm{K}}{293\,{}^\circ\mathrm{K} \cdot 760\,\mathrm{Torr}} = 38{,}3\,\mathrm{l}$$
$$m = M \cdot n$$
$$m = M \cdot \frac{v}{Vm}$$
$$m = \frac{34\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \cdot 38{,}3\,\mathrm{l}}{22{,}4\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{mol}}} = 58{,}1\,\mathrm{g}$$

Schwefelwasserstoff sind zu vernichten.

Laut Gleichung sind für 38,3 l Schwefelwasserstoff auch 38,3 Chlor erforderlich

$$m_2 = M \cdot \frac{V}{Vm}$$
$$m_2 = \frac{71\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \cdot 38{,}3\,\mathrm{l}}{22{,}4\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{mol}}} = 121{,}4\,\mathrm{g}$$
$$\frac{121{,}4\,\mathrm{g}}{0{,}3} = 405\,\mathrm{g}$$

Zur Reinigung sind 405 g 30%iger Chlorkalk erforderlich.

**Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/80:**

Ma5 ▪1937 Angenommen, die gesuchte Zahl sei $n$; dann gilt $n \cdot 7 + 9 = n \cdot 9 + 7$. Nur wenn man für $n = 1$ setzt, erhält man eine wahre Aussage.
Die gesuchte Zahl ist die Zahl 1.

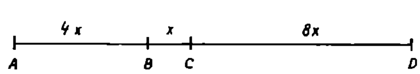
Ma5 ▪1938 Aus $L = 38 : 19$ folgt $L = 2$.
Aus $N = 4 \cdot L$ und $L = 2$ folgt $N = 8$.
Aus $R \cdot L = 18$ und $L = 2$ folgt $R = 9$.
Aus $E + R + L = 16$ und $R + L = 9 + 2 = 11$ folgt $E = 5$.
Aus $L + I = 81 : R$ und $L = 2$ und $R = 9$ folgt $2 + I = 81 : 9$, $2 + I = 9$, also $I = 7$.
Durch Einsetzen erhalten wir aus ($f$) schließlich $B + 5 + 9 + 2 + 7 + 8 = 34$, $B + 31 = 34$, also $B = 3$. Das Wort *BERLIN* entspricht somit der Zahl 359278.

Ma5 ▪1939 Wegen $9999 + 9999 = 19998$ gilt $A = 1$. Aus $OTTO + 1NN1 = 1NTON$ folgt $N = 0$ und somit $0 = 9$ und $T = 8$.
Wir erhalten $9889 + 1001 = 10890$.

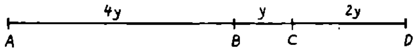
Ma5 ▪1940 Es läßt sich unmittelbar ablesen, daß $A = 1$ gilt. Aus $CA + CB = 150$ und $A = 1$ folgt $B = 9$ und somit $C = 7$.
Die Jahreszahl für *ABCB* lautet 1979.

Ma5 ▪1941 Der erste Summand könnte 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 oder 999 sein. Der zweite Summand sei $x$, die Summe also $10 \cdot x$; dann gilt $9x = 111$ oder $9x = 222$ und so weiter bis $9x = 999$. Nur die Zahlen 333, 666 und 999 sind ohne Rest durch 9 teilbar. Daraus folgt weiter:
$x_1 = 333 : 9 = 37$, $x_2 = 666 : 9 = 74$, $x_3 = 999 : 9 = 111$.
Die drei Aufgaben lauten somit
$333 + 37 = 370$, $666 + 74 = 740$, $999 + 111 = 1110$.

Ma5 ▪1942 a) Es sei $\overline{BC} = x$ cm, also $\overline{AB} = 4 \cdot x$ cm und $\overline{CD} = 2 \cdot 4 \cdot x$ cm $= 8x$ cm. Wir rechnen nur mit den Maßzahlen der Streckenlängen; dann gilt
$4x + x + 8x = 91$, also $13x = 91$ und somit $x = 7$. Folglich gilt:
$\overline{AB} = 28$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm, $\overline{CD} = 56$ cm.



b) $4y+y+2y=91$, also $7y=91$ und somit $y=13$. Folglich gilt:
$\overline{AB}=52$ cm, $\overline{BC}=13$ cm, $\overline{CD}=26$ cm.




Ma 6 ■1943 Die Quersumme der sechs Zahlen 1, 5, 6, 7, 8, 9 lautet 36. Da die gesuchten Zahlen durch 9 teilbar sein sollen, muß ihre Quersumme 27 betragen, denn $1+5+6+7=19>18$.
Deshalb entfallen die Ziffern 1 und 8 wegen $1+8=9$. Die gesuchten Zahlen sind gerade, da sie durch 8 teilbar sein sollen; sie enden demnach auf die Ziffer 6. Die letzten beiden Ziffern der gesuchten Zahlen könnten 56, 76 oder 96 lauten. Von den möglichen Zahlen 7956, 9756, 5976, 9576, 5796, 7596 sind nur die Zahlen 5976, 9576 durch 8 teilbar. Die Zahl 5976 ist aber nicht durch 7 teilbar. Es gibt genau eine solche Zahl, sie lautet 9576.

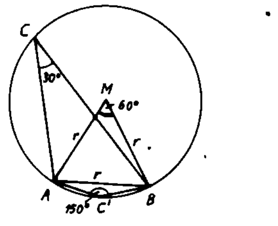
Ma 6 ■1944 Im Dreieck $ABD$ gilt $\sphericalangle BAD=180°-40°-70°=70°$ und $\sphericalangle BAC=70°:2=35°$.
Ferner gilt $\sphericalangle EBD=180°-40°=140°$ als Nebenwinkel, also $\sphericalangle CBD=140°:2=70°$ und somit $\sphericalangle ABC=40°+70°=110°$. Im Dreieck $ABC$ gilt deshalb $\sphericalangle ACB=180°-35°-110°=35°$. Aus $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BDA=70°$ folgt $\overline{AB}=\overline{BD}$; aus $\sphericalangle BAC=\sphericalangle BCA=35°$ folgt $\overline{AB}=\overline{BC}$, d. h., die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ sind gleichschenklig.

Ma 6 ■1945 Im Dreieck $DBC$ gilt $\sphericalangle CDB=90°-20°=70°$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt für das Dreieck $AFD$ ferner $\sphericalangle DAF+\sphericalangle DFA=\sphericalangle CDB$, also $\sphericalangle DFA=70°-10°=60°$. Daraus folgt $\sphericalangle AFB=180°-60°=120°$ (als Nebenwinkel).

Ma 6 ■1946 Addieren wir die drei gegebenen Gleichungen, so erhalten wir $2a+2b+2c=186$ bzw. $a+b+c=93$.
Aus $a+b=90$ und $a+b+c=93$ folgt $c=3$.
Aus $a+c=75$ und $c=3$ folgt $a=72$.
Aus $a+b=90$ und $a=72$ folgt $b=18$.
Somit gilt $a\cdot b\cdot c=72\cdot 18\cdot 3=3888$.

Ma 6 ■1947 Die zu ermittelnden natürlichen Zahlen lassen sich darstellen durch $n=10a+b$. Ihre Quersumme lautet $a+b$. Nun gilt $10a+b-(a+b)=9$, $9a=9$, also $a=1$.
Wegen $0\leqq b\leqq 9$ erhalten wir folgende Zahlen, die die gestellte Bedingung erfüllen: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Ma 7 ■1948 Aus $\overline{AB}=\overline{AM}=\overline{BM}=r$ folgt, daß das Dreieck $ABM$ gleichseitig und somit gleichwinklig ist. Deshalb gilt $\sphericalangle AMB=60°$.




*Fallunterscheidung:*
1. Liegen $C$ und $M$ auf der gleichen Seite der Geraden $AB$, so gilt $\sphericalangle ACB=30°$.
2. Liegen $C'$ und $M$ auf verschiedenen Seiten der Geraden $AB$, so gilt $\sphericalangle AC'B=150°$.

*Begründung:*
Zu 1. Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zum gleichen Kreisbogen gehörende Zentriwinkel.
Zu 2. Viereck $AC'BC$ ist ein Sehnenviereck. Im Sehnenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Winkel stets 180°.

Ma 7 ■1949 Für die Maßzahlen der Seitenlängen des Dreiecks gelte ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit $a<b<c$.
Aus $a:c=3:5$ folgt $a=\frac{3c}{5}$. Ferner gilt $b=c-3$.
Aus $a+b+c=36$ erhalten wir durch Einsetzen $\frac{3c}{5}+(c-3)+c=36$ bzw. $\frac{13c}{5}=39$ und somit $c=15$, also $a=9$ und $b=12$.
Die Dreieckseiten sind 9 cm, 12 cm und 15 cm lang.

Ma 7 ■1950 Angenommen, es sind $a$ 2-Bett- und $b$ 3-Bett-Zimmer;
dann gilt $2a+3b=41$ bzw. $3b=39+2-2a$, $b=13-\frac{2}{3}\cdot(a-1)$ mit $4<a<10$.
Nur für $a=7$ wird $b=13-\frac{2}{3}\cdot 6=9$ ganzzahlig.
Das Ferienheim verfügt somit über sieben 2-Bett- und neun 3-Bett-Zimmer.
*Probe:* $7\cdot 2+9\cdot 3=41$.

Ma 7 ■1951 Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien $n$, $n+1$ und $n+2$; dann gilt
$n\cdot(n+1)(n+2)=n+(n+1)+(n+2)$,
$n\cdot(n+1)(n+2)=3n+3$,
$n\cdot(n+1)(n+2)=3\cdot(n+1)$, $\quad |:(n+1)$
$n\cdot(n+2)=3$.
Nur für $n=1$ wird diese Gleichung erfüllt. Es existiert genau ein solches Zahlentripel, und zwar (1,2,3).
*Probe:* $1\cdot 2\cdot 3=1+2+3=6$.

Ma 8 ■1952 $x$ sei die Anzahl der leeren Limonaden- und $y$ die Anzahl der leeren Milchflaschen. Dann ist $30x$ das Pfand für die Limonadenflaschen in Pfennigen und $20y$ das Pfand für die Milchflaschen in Pfennigen. Es gilt nun
$$30x+20y=350 \text{ bzw.}$$
$$3x+2y=35.$$
Stellt man die Gleichung nach $y$ um, so erhält man
$$2y=35-3x$$
$$2y=34+1-3x$$
$$y=17-\frac{3x-1}{2}.$$
$x$ und $y$ müssen natürliche Zahlen sein. Damit $y$ eine natürliche Zahl wird, muß $x$ ungerade sein. Wir setzen für $x$ nacheinander die Zahlen 1, 3, 5, 7, ... ein und stellen eine Wertetabelle auf:

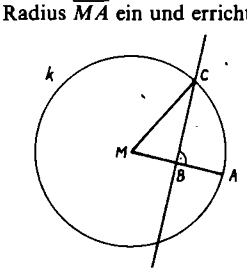
| x | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 16 | 13 | 10 | 7 | 4 | 1 | – |

Aus der Wertetabelle lassen sich die 6 Lösungen ablesen. Es gibt keine weiteren Möglichkeiten.

Ma 8 ■1953 Bezeichnet man die Fassungsvermögen der drei Kessel (in l) mit $x$, $y$ bzw. $z$, so kann man nach dem Aufgabentext die folgenden Gleichungen aufstellen:
(1) $\quad x+y+z=1440$
(2) $\quad z=x+\frac{1}{5}\cdot y$
(3) $\quad z=y+\frac{1}{3}\cdot x$.
Setzt man (2) und (3) gleich, so erhält man
(4) $\quad x=\frac{6}{5}y$.
(4) und (2) in (1): $\frac{12}{5}y+x=1440 \quad (5)$
(4) und (3) in (1): $\frac{16}{5}y+\frac{1}{3}x=1440 \quad (6)$
Setzt man (4) in (5) ein, so erhält man
$$\frac{12}{5}y+\frac{6}{5}y=1440,$$
$$\frac{18}{5}y=1440,$$
$$y=\frac{1440\cdot 5}{18},$$
(7) $\quad y=400$.
Setzt man (7) in (4) ein, so erhält man
$$x=\frac{6}{5}\cdot 400$$
$$x=480.$$
Durch Einsetzen folgt weiter: $z=560$.
Die drei Kessel haben Fassungsvermögen von 480 l, 400 l bzw. 560 l.

Ma 8 ■1954 Man formt den Term $\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$ wie folgt um:
$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}=\frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x+1}$$
$$=\frac{(x^2+1)(x+1)}{x+1}$$
$$=x^2+1.$$
$(x+1\neq 0$ wegen $|x|\neq 1!)$
Für die kleinste Primzahl 2 würde $x^2+1=2$ bzw. $|x|=1$ gelten, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.
Die nächstgrößere Primzahl ist 3, und es gilt:
$$x^2+1=3$$
$$x^2=2$$
$$x_1=\sqrt{2};\ x_2=-\sqrt{2}.$$
Die einzigen reellen Zahlen, für die $p$ so klein wie möglich ist, sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

Ma 8 ■1955 Man zeichnet einen Kreis $k$ mit dem Mittelpunkt $M$ und einem Radius der Länge 2 cm. Man zeichnet einen beliebigen Radius $\overline{MA}$ ein und errichtet die Mittel-



senkrechte auf $\overline{MA}$. Diese schneidet den Kreis in $C$.
Im rechtwinkligen Dreieck $MBC$ gilt nun nach dem Satz des Pythagoras
$\overline{BC}^2=\overline{MC}^2-\overline{MB}^2$
$\overline{BC}^2=(2\text{ cm})^2-(1\text{ cm})^2$ ($B$ halbiert $\overline{MA}$)
$\overline{BC}^2=3\text{ cm}^2$
$\overline{BC}=\sqrt{3}\text{ cm}$.

Ma 9 ■1956 Aus (1) folgt $b=a+4$,
aus (2) folgt $c=b+4$,
durch Einsetzen von (1) in (2) erhält man $c=a+8$. Die drei Zahlen lassen sich folglich darstellen durch $a$, $a+4$, $a+8$. Nun gilt
$$(a+8)^2=(a+4)^2+a^2.$$
Durch äquivalentes Umformen erhält man
$$a^2-8a-48=0.$$
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen 12 und $-4$. Die gesuchten geordneten Tripel sind
$[-4;0;4]$ und $[12;16;20]$.

Ma 9 ■1957 Wegen $\overline{xxyy}=1000x+100x+10y+y=1100x+11y=11(100x+y)$ und $\overline{xx}^2=(10x+x)^2=(11x)^2=121x^2$ und $\overline{yy}^2=121y^2$ gilt
$$11(100x+y=121(x^2+y^2),$$
$$100x+y=11(x^2+y^2),$$
$$x+y=11(x^2+y^2)-99x,$$
$$\frac{x+y}{11}=x^2+y^2-9x.$$
Nun muß $x+y$ ein Vielfaches von 11 sein. Wegen $1\leqq x\leqq 9$ und $1\leqq y\leqq 9$ trifft das nur zu für $x+y=11$, also für $y=11-x$. Daraus folgt weiter
$$1=x^2+(11-x)^2-9x,$$
$$1=x^2+121-22x+x^2-9x,$$
$$2x^2-31x+120=0,$$
$$x^2-\frac{31}{2}x+60=0.$$
Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1=8$ und $x_2=7{,}5$. Die zweite Lösung entfällt, da sie nicht ganzzahlig ist. Es existiert somit genau eine Lösung, nämlich $8833=88^2+33^2$.

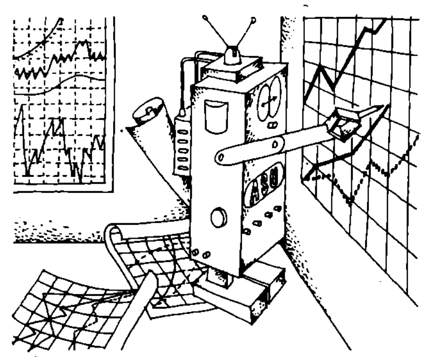
Ma 9 ■1958 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt
$a+a^2+a^3=31a$ bzw. $a(a^2+a-30)=0$.
Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist.
Fallunterscheidung:
1. $a=0$. Die Probe zeigt, daß 0 eine Lösung ist.
2. $a^2+a-30=0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen 5 und $-6$.
Die Zahlen 5, $-6$ und 0 erfüllen die geforderten Bedingungen.

Ma 9 ■1959 Bezeichnet man die Länge der Katheten mit $a$ bzw. $b$ und die der Hypotenuse mit $c$, so heißt die Behauptung $a+b\leqq c\cdot\sqrt{2}$.
*Beweis:*
Es gilt sicher $0\leqq(a-b)^2$, da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist. Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung $a^2+2ab+b^2$, so erhält man
$a^2+2ab+b^2\leqq 2a^2+2b^2$ bzw.
$a^2+2ab+b^2\leqq 2(a^2+b^2)$ und wegen $a^2+b^2=c^2$ (Satz des Pythagoras) $a^2+2ab+b^2\leqq 2c^2$. Zieht man auf beiden Seiten der Ungleichung die Wurzel, so ergibt sich $a+b\leqq\sqrt{2}\cdot c$, womit die Behauptung bewiesen ist. Es gilt $a+b=\sqrt{2}\cdot c$ genau dann, wenn das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig ist.

Ma 10/12 ■1960 Für $p=3$ ergibt sich $4^3-16=48$. Die Behauptung ist wahr. Primzahlen $p>3$ sind entweder in der Form $p=6k+1$ oder $p=6k-1$ $(k\in N)$ darstellbar.
Es sei $p=6k+1$. Dann gilt
$(6k+2)^3-4(6k+2)$
$=216k^3+216k^2+72k+8-24k-8$
$=216k^3+216k^2+48k$
$=24(9k^3+9k^2+2k)$.
Es ist nun noch zu untersuchen, ob der Term $9k^3+9k^2+2k$ stets durch 2 teilbar ist. Man zerlegt den Term wie folgt:
$9k(k+1)k+2k$. Der erste Summand ist auch stets durch 2 teilbar, da einer der Faktoren $k$ oder $k+1$ durch 2 teilbar ist. Es sei $p=6k-1$. Dann gilt
$$(6k)^3-4(6k)=216k^3-24k$$
$$=24(9k^3-k).$$
Man zerlegt: $9k^3-k=k(3k+1)(3k-1)$ und erkennt, daß wenigstens einer der Faktoren $k$, $3k+1$ oder $3k-1$ durch 2 teilbar ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ma 10/12 ■1961 Die Jahreszahl, die vor 1979 liegt und die größte Quersumme hat, ist 1899. Es gilt $1+8+9+9=27$ und $27\cdot 3=81$ und $1979-81=1898$. Deshalb wurde er nicht vor 1898 und auch nicht 1898 oder 1899 geboren. Es gilt
$3\cdot(1+8+9+8)=3\cdot 26\neq 1979-1898$
$3\cdot(1+8+9+9)=3\cdot 27\neq 1979-1899$.
Er wurde folglich im 20. Jahrhundert geboren, etwa im Jahr $\overline{19ab}$ mit $a$, $b\in N$ und $0\leqq a\leqq 7$ und $0\leqq b\leqq 9$ in dekadischer Schreibweise. Nun gilt
$1979-\overline{19ab}=3(1+9+a+b)$ bzw. $1979-(1900+10a+b)=3(1+9+a+b)$ bzw. $79-(10a+b)=30+3a+3b$ bzw. $49=13a+4b$.
Damit die Gleichung erfüllt wird, muß $a$ ungerade und kleiner als 4 sein. Es kann also nur entweder $a=3$ oder $a=1$ sein.
1. Fall: Es sei $a=3$, dann gilt
$$4b=49-39$$
$$b=\frac{10}{4}.$$
Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $b\in N$ gelten muß.
2. Fall: Es sei $a=1$, dann gilt
$$4b=49-13$$
$$b=9$$
*Probe:* $1979-1919=60$ und $60=3(1+9+1+9)$.
Wie die Probe zeigt, wurde der Mathematiker im Jahre 1919 geboren und war im Jahre 1979 60 Jahre alt.

Fortsetzung in *alpha* 5/80



**Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. D.-E. Liebscher (Heft 4/80):**

1. Der Winkel $B_1CB$ ist gleich dem Winkel $ACA_1$. Die Dreiecke $B_1BC$ und $AA_1C$ sind kongruent, insbesondere ist $B_1B=AA_1$. Der gleiche Schluß an den anderen Ecken führt auf $BB_1=AA_1=CC_1$.
2. Der Winkel $B_2CA_2$ ist gleich dem Winkel $B_1CB$. Weiterhin gilt für die Streckenverhältnisse
$$\frac{CB_2}{CB_1}=\frac{CA_2}{CB}=\frac{\text{Umkreisradius des gleichseitigen Dreiecks}}{\text{Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks}}=q.$$
Die Dreiecke $B_1BC$ und $B_2A_2C$ sind ähnlich. Das Verhältnis der Strecken $B_2A_2$ zu $B_1B$ ist gleich $q$. Analoges zeigen wir für die Strecken $B_2C_2$ und $C_2A_2$. Wegen dieser Ähnlichkeit und der unter 1. gefundenen Gleichheit der jeweiligen Bezugsstrecken ist der Satz bewiesen.

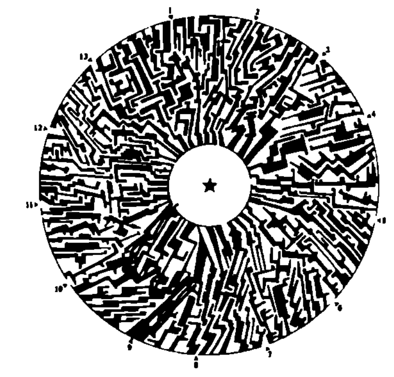
**Lösungen zu: Das arithmetische Mittel**

1. 80;
2. 1. LPG: 34 dt je Hektar;
 2. LPG: 33 dt je Hektar.
3. Brigade I: 2,75 M; Brigade II: 2,80 M;
4. 15,5 cm;
5. $x=87$;
6. b);
7. 39 Jahre;
9.a) 3; 7; 11; 15; 19; ...;
9.b) z. B. 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; ...;
10. 2025;
11. $m_g=9$; $m_a=15$;
12. $x=54$;
13. 2; 6; 18; 54; 162; ...;
14. a) 1; 4; 16; 64; b) 1; 22; 43; 64;
15. 14; 42; 34;
16. 55; 99; 11;
17. 72 und 2;
18. 103 und 91 haben als Mittel 97;
 105 und 91 haben als Mittel 98.

**Lösungen zu alpha-Wandzeitung:**
**1 – 2 – 3 Logelei:**

1. 1. Reihe: 6. Lampe; 2. Reihe: 10. Lampe; 5. Reihe: 4. und 8. Lampe sind gleiche Modelle.
2. a) Figur c; b) Figur 3
3. Durch Ausgang 7 kommt das Eichhörnchen ins Freie.

4. Stelle das Bild auf den Kopf! Der Rattenfänger ist dann in der rechten Hälfte des Bildes zu sehen.
5. Die Mädchen 2 und 6 sehen sich im Spiegel.
6.



7. Der Knopf an der Vogelscheuche ist zum Fenster des Hauses geworden; der Rauch des Hauses findet sich auf dem Ärmel der Vogelscheuche wieder; eine Zinke der Heugabel sitzt an dem Hut der Vogelscheuche; ein Flügel des Vogels bildet einen Teil des Strohhaufens; die Tasche des Mannes findet sich am Stamm des Stockes, der die Vogelscheuchen trägt, wieder.
8. Bild 3 erfüllt die Bedingungen.
9. Figur 3 paßt auf den Sockel.
10. Die Köpfe 1 und 5 sind gleich.

**Lösungen zu:**
**In freien Stunden · alpha-heiter:**

**Prüfe deinen Verstand!**

a) Zahl 52; b) Figur 3; c) Zahl 197; d) $\frac{P}{K}$

Wir danken Herrn Dr. Büchel, IfL Meiningen, für die Einsendung dieses Materials.

**Modell einer Datsche**

Aus dem Netz D wurde das Modell gebaut.

**Kryptarithmetik**

a) $69492 + 854 + 13 = 70359$;
b) $10 + 682 + 8763 = 9455$;
c) $7511 + 28449 = 35960$ oder
$6411 + 28559 = 34970$.

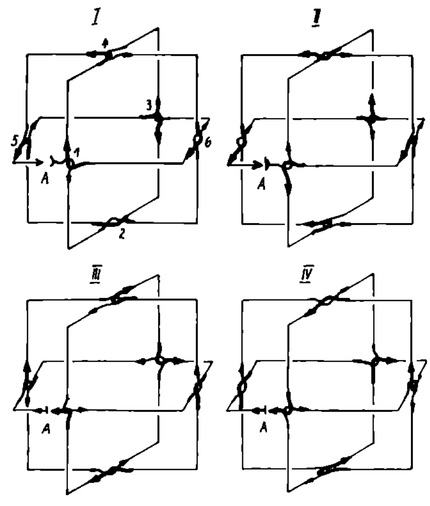
**Magisches Quadrat**

1, 2, −3; −4, 0, 4; 3, −2, −1.

**Verschnürung eines Pakets**

Die Abbildungen sind stark eingezeichnet, wenn der Treffpunkt erstmals berührt wird, gestrichelt, wenn die zweite Berührung erfolgt und die Kreuzung vollzogen wird.

Wenn an einem willkürlich gewählten Punkt $A$ begonnen wird, die Schnur zu legen, so kann dies in zwei Richtungen erfolgen (Skizze: I und II oder III und IV). Am ersten späteren Treffpunkt kann rechts (Skizze: I und III) oder links (Skizze: II und IV) abgebogen werden. Ordnet man den weiteren, zum verlangten Resultat führenden Abbiegungen ein r zu, wenn die Abbiegung nach rechts (in der Richtung des Vorgehens), ein l, wenn sie nach links erfolgt, so ergibt die Zusammenstellung dieser Buchstaben in einer Tabelle folgendes Bild:




| Fall | Abbiegung | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| I | r | r | r | r | l | r | r | l | l | r | r | l |
| II | l | r | l | l | l | l | l | l | r | l | r | r |
| III | r | l | l | r | r | l | l | r | l | l | l | l |
| IV | l | l | r | l | r | r | r | r | r | r | l | r |

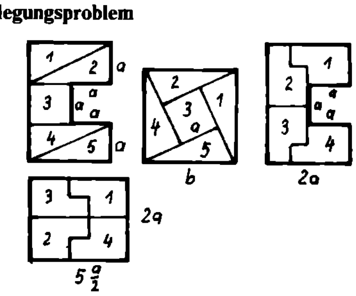
Berücksichtigen wir den Umstand, daß der Anfangspunkt $A$ beliebig gewählt werden kann, und lassen wir Fall II mit Biegung 3, Fall III mit Biegung 9 und Fall IV mit Biegung 6 beginnen, so ist sofort ersichtlich, daß sich Fall I und Fall III, Fall II und Fall IV entsprechen. Es gibt also zwei zu unterscheidende Arten der geforderten Verschnürung.

Numerieren wir die Kreuzungspunkte von 1 bis 6 (wie in der Skizze I eingezeichnet), so passiert sie die Schnur beim Legen in folgender Reihenfolge:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 6 | 3 | 4 | 6 | 1 | 4 | 5 | 3 | 2 | 5 |
| II | 1 | 4 | 6 | 3 | 2 | 6 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 |
| III | 5 | 2 | 3 | 5 | 4 | 1 | 6 | 4 | 3 | 6 | 2 | 1 |
| IV | 5 | 4 | 3 | 5 | 2 | 1 | 6 | 2 | 3 | 6 | 4 | 1 |

(Also I = III rückwärts; I = IV rückwärts.)

**Zerlegungsproblem**




**52mal Summe 130**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 45 | 29 | 52 |
| 57 | 24 | 40 | 9 |
| 53 | 28 | 44 | 5 |
| 16 | 33 | 17 | 64 |

1. Schicht (unten)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 62 | 19 | 35 | 14 |
| 7 | 42 | 26 | 55 |
| 11 | 38 | 22 | 59 |
| 50 | 31 | 47 | 2 |

2. Schicht

| | | | |
|---|---|---|---|
| 63 | 18 | 34 | 15 |
| 6 | 43 | 27 | 54 |
| 10 | 39 | 23 | 58 |
| 51 | 30 | 46 | 3 |

3. Schicht

**Aus einer Briefmappe**

Von Brief 5 ist die Marke abgelöst.

Fortsetzung von Seite VIII

Aus (2) folgt daher

$$f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7^2}\cdot f(7)=\frac{1}{7^2}\cdot 7=\frac{1}{7}.$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$f\left(\frac{2}{7}\right)=f\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{1}{7}\right)+f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7},$$

$$f\left(\frac{3}{7}\right)=f\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\right)=f\left(\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7},$$

$$f\left(\frac{5}{7}\right)=f\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\right)=f\left(\frac{3}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7},$$

w. z. b. w.

6. 1. Möglichkeit: geometrische Interpretation:

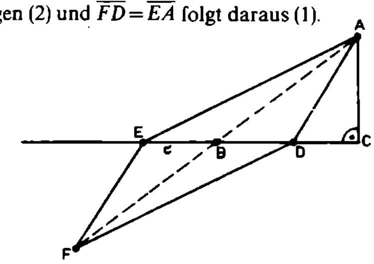
Da nur quadratische Terme in den Radikanden auftreten und bei Vertauschung von $(a+c)$ mit $(a-c)$ wieder (1) entsteht, kann man sich auf positive $a$, $b$, $c$ beschränken. Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit dem rechten Winkel bei $C$ (siehe Bild). $AC$ habe die Länge $a$. Man trägt nun auf der Geraden durch $B$ und $C$ von $B$ aus nach beiden Seiten je eine Strecke der Länge $c$ ab und erhält die Punkte $D$ und $E$. Ergänzt man das Dreieck $EDA$ zu dem Parallelogramm $EFDA$, so gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\begin{aligned}\overline{BA}&=\sqrt{a^2+b^2},\\ \overline{DA}&=\sqrt{(a-c)^2+b^2}\\ \overline{EA}&=\sqrt{(a+c)^2+b^2}.\end{aligned}\qquad(2)$$

Da $B$ der Diagonalenmittelpunkt des Parallelogramms $EFDA$ ist, gilt nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck $AFD$,

$$\overline{DA}+\overline{FD}\geqq 2\overline{BA}.$$

Wegen (2) und $\overline{FD}=\overline{EA}$ folgt daraus (1).




2. Möglichkeit: Es gilt

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2\\ &=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2\\ &\geqq a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2\\ &=(a^2+b^2-c^2)^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt (die Existenz der nachstehenden Wurzel sowie)

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2}\geqq a^2+b^2-c^2,$$

also

$$\begin{aligned}&a^2+2ac+c^2+b^2\\ &+2\cdot\sqrt{(a^2+c^2+b^2+2ac)(a^2+c^2+b^2-2ac)}\\ &+a^2-2ac+c^2+b^2\geqq 4a^2+4b^2,\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)^2=4(a^2+b^2).$$

(Diese beiden Wurzeln existieren wegen $(a\pm c)^2+b^2\geqq 0$.)

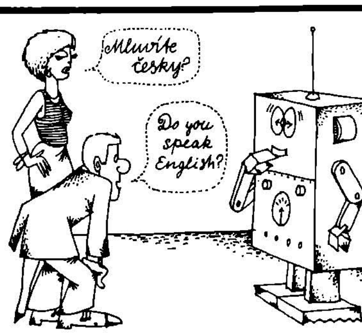
Wegen $(a^2+b^2)\geqq 0$ und $\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geqq 0$

folgt hieraus

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geqq 2\sqrt{a^2+b^2},$$

w. z. b. w.

# Mathematikaufgaben aus Freundesland




## 9 Aufgaben aus der ČSSR

Wir stellen einige Aufgaben vor, die der Zeitschrift *rozhledy* entnommen sind. Mit diesen und ähnlichen Aufgaben werden in der ČSSR die Schüler auf Mathematik-Olympiaden vorbereitet. Wir wünschen allen interessierten *alpha*-Lesern viel Erfolg beim Lösen dieser Aufgaben aus dem benachbarten Freundesland.

**Aufgaben**

▲1▲ Die in dekadischer Darstellung aufgeschriebene dreistellige natürliche Zahl $z = \overline{7xy}$ sei durch 44 teilbar. Gib alle Zahlen an, die diese Bedingung erfüllen!

▲2▲ Es sind alle geordneten Paare $[a;b]$ natürlicher Zahlen $a$ und $b$ zu ermitteln, die die Gleichung $a \cdot (b-1) = 12$ erfüllen.

▲3▲ Die Zahl 120 ist als Produkt aus zwei teilerfremden natürlichen Zahlen darzustellen. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben.

▲4▲ Welche geordneten Paare $[x;y]$ natürlicher Zahlen $x$ und $y$ erfüllen die Gleichung $2x + y^2 = 81$?

▲5▲ Drei Kreise $k_1$, $k_2$, $k_3$ mit den Radien $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 3$ cm, $r_3 = 10$ cm berühren einander paarweise von außen.
Berechne die Abstände $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_2M_3}$ der Mittelpunkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ dieser Kreise sowie den Flächeninhalt $A$ des von den Mittelpunkten gebildeten Dreiecks $M_1M_2M_3$!

▲6▲ Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich der zweiten Potenz ihrer Quersumme sind.

▲7▲ Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich der dritten Potenz ihrer Quersumme sind.

▲8▲ Es sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich der vierten Potenz ihrer Quersumme sind.

▲9▲ Es ist nachzuweisen, daß es keine fünfstellige natürliche Zahl gibt, die gleich der fünften Potenz ihrer Quersumme ist.

**Lösungen**

▲1▲ Aus der Aufgabenstellung folgt $700 \leqq 44 \cdot k \leqq 799$ für natürliche Zahlen $k$. Deshalb gilt $16 \leqq k \leqq 18$, also $k = 16$ oder $k = 17$ oder $k = 18$. Es existieren drei solche Zahlen; sie lauten $z_1 = 16 \cdot 44 = 704$, $z_2 = 17 \cdot 44 = 748$, $z_3 = 18 \cdot 44 = 792$.

▲2▲ Wegen $a \cdot (b-1) = 12$ gilt auch $a \cdot (b-1) = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 12 \cdot 1$. Daraus folgt weiter $a_1 = 1$ und $b_1 = 13$, $a_2 = 2$ und $b_2 = 7$, $a_3 = 3$ und $b_3 = 5$, $a_4 = 4$ und $b_4 = 4$, $a_5 = 6$ und $b_5 = 3$, $a_6 = 12$ und $b_6 = 2$.
Folgende geordneten Paare erfüllen die gegebene Gleichung:
$[1;13]$, $[2;7]$, $[3;5]$, $[4;4]$, $[6;3]$, $[12;2]$.

▲3▲ $120 = 2 \cdot 60$ (gemeinsamer Teiler 2),
$120 = 3 \cdot 40$,
$120 = 4 \cdot 30$ (gemeinsamer Teiler 2),
$120 = 5 \cdot 24$,
$120 = 6 \cdot 20$ (gemeinsamer Teiler 2),
$120 = 8 \cdot 15$,
$120 = 10 \cdot 12$ (gemeinsamer Teiler 2).

Wird die Kommutativität der Multiplikation nicht berücksichtigt, erhalten wir genau drei Möglichkeiten
$120 = 3 \cdot 40 = 5 \cdot 24 = 8 \cdot 15$.

▲4▲ Aus $2x + y^2 = 81$ erhalten wir $2x = 81 - y^2$. Nun muß $81 - y^2$ durch 2 teilbar sein. Das ist nur der Fall, wenn $y^2$ eine ungerade natürliche Zahl ist, die kleiner als 81 ist.
$y_1 = 1$, $y_1{}^2 = 1$, $2x_1 = 80$, $x_1 = 40$;
$y_2 = 3$, $y_2{}^2 = 9$, $2x_2 = 72$, $x_2 = 36$;
$y_3 = 5$, $y_3{}^2 = 25$, $2x_3 = 56$, $x_3 = 28$;
$y_4 = 7$, $y_4{}^2 = 49$, $2x_4 = 32$, $x_4 = 16$;
$y_5 = 9$, $y_5{}^2 = 81$, $2x_5 = 0$, $x_5 = 0$.
Die geordneten Paare $[40;1]$, $[36;3]$, $[28;5]$, $[16;7]$, $[0;9]$ erfüllen die gegebene Gleichung.

▲5▲ $\overline{M_1M_2} = (2+3)\text{ cm} = 5\text{ cm}$;
$\overline{M_1M_3} = (2+10)\text{ cm} = 12\text{ cm}$;
$\overline{M_2M_3} = (3+10)\text{ cm} = 13\text{ cm}$.
Die Maßzahlen 5, 12, 13 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel $[5;12;13]$, und es gilt $5^2 + 12^2 = 13^2$. Das Dreieck $M_1M_2M_3$ ist somit rechtwinklig; sein Flächeninhalt beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12\text{ cm}^2 = 30\text{ cm}^2$.

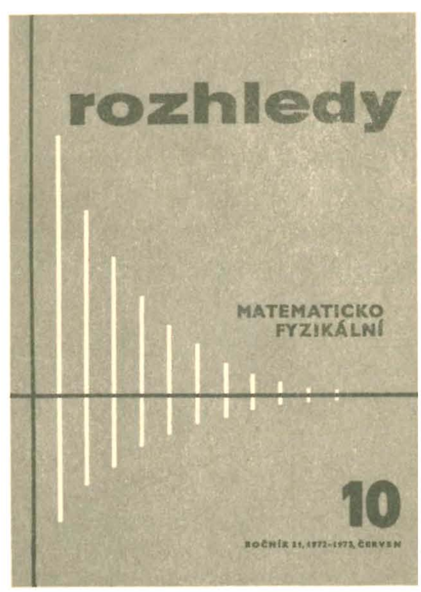
▲6▲ Aus $10a + b = (a+b)^2$ für $1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ folgt $10 \leqq (a+b)^2 \leqq 99$. Deshalb könnte $(a+b)^2$ gleich 16, 25, 36, 49, 64 oder 81 sein. Nur für $81 = (8+1)^2 = 9^2$ werden die gestellten Bedingungen erfüllt.

▲7▲ Aus $100a + 10b + c = (a+b+c)^3$ für $1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$, $0 \leqq c \leqq 9$ folgt $100 \leqq (a+b+c)^3 \leqq 999$. Deshalb könnte $(a+b+c)^3$ gleich $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$ sein. Nur für $512 = (5+1+2)^3 = 8^3$ werden die gestellten Bedingungen erfüllt.

▲8▲ Aus $(a+b+c+d)^4 = n^4$ folgt analog zu den vorangegangenen Aufgaben $1000 \leqq n^4 \leqq 9999$. Deshalb könnte $n^4$ gleich $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$, $9^4 = 6561$ sein. Nur für $2401 = (2+4+0+1)^4 = 7^4$ werden die gestellten Bedingungen erfüllt.

▲9▲ Aus $(a+b+c+d+e)^5 = n^5$ folgt analog zu den vorangegangenen Aufgaben $10000 \leqq n^5 \leqq 99999$. Wegen $6^5 = 7776 < 10000$ und $10^5 = 100000 > 99999$ könnte die Quersumme $q$ einer solchen fünfstelligen Zahl 7, 8 oder 9 sein. Wegen $a \neq 0$ muß $a$ wenigstens gleich 1 sein. Es endet $7^5$ auf die Ziffer 7, $8^5$ auf die Ziffer 8, $9^5$ auf die Ziffer 9.
Für die Quersumme $q = 7$ müßte $e = 7$ sein. Wegen $a + e \geqq 1 + 7 = 8$ ist dies nicht möglich. Für $q = 8$ müßte $e = 8$ sein. Wegen $a + e \geqq 1 + 8 = 9$ ist dies ebenfalls nicht möglich. Analog dazu entfällt auch $q = 9$.

*Übersetzt und bearbeitet von*
*O. Langer, Döbeln/Th. Scholl, Berlin*




Seit 14 Jahren besteht zwischen der tschechoslowakischen mathematischen Schülerzeitschrift (siehe Bild) und der *alpha* ein enger freundschaftlicher Kontakt.

# Zahlenzauber – Zauberzahlen

| | |
|---|---|
| $0 + 1 = 1$ | $1 \times 1 = 1$ |
| $1 + 3 = 4$ | $2 \times 2 = 4$ |
| $4 + 5 = 9$ | $3 \times 3 = 9$ |
| $9 + 7 = 16$ | $4 \times 4 = 16$ |
| $16 + 9 = 25$ | $5 \times 5 = 25$ |
| $25 + 11 = 36$ | $6 \times 6 = 36$ |
| $36 + 13 = 49$ | $7 \times 7 = 49$ |
| $49 + 15 = 64$ | $8 \times 8 = 64$ |
| $64 + 17 = 81$ | $9 \times 9 = 81$ |
| $81 + 19 = 100$ | $10 \times 10 = 100$ |

$133 = (1+3+3) \cdot (1^2+3^2+3^2)$
$315 = (3+1+5) \cdot (3^2+1^2+5^2)$
$803 = (8+0+3) \cdot (8^2+0^2+3^2)$
$63 = 6^2 + 6 \cdot 3 + 3^2$
$91 = 9^2 + 9 \cdot 1 + 1^2$

$1+3 = 2^2$
$1+3+5 = 3^2$
$1+3+5+7 = 4^2$
$1+3+5+7+9 = 5^2$
$1+3+5+7+9+11 = 6^2$
$1+3+5+7+9+11+13 = 7^2$

$9 \times 7 = 63$
$99 \times 77 = 7623$
$999 \times 777 = 776223$
$9999 \times 7777 = 77762223$
$99999 \times 77777 = 7777622223$

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$
$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$
$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$
$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$
$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$
$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$
$9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$
$54748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$
$92727 = 9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5$
$93084 = 9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5$

$1 : 1{,}61803\ldots = 0{,}61803\ldots$
$1 : 2{,}41421\ldots = 0{,}41421\ldots$
$1 : 3{,}30277\ldots = 0{,}30277\ldots$
$1 : 4{,}23607\ldots = 0{,}2360678$

Lassen sich diese Reihen fortführen?

In den nachstehenden Gleichungen werden jeweils alle zehn Ziffern verwendet:

$2 \times 3485 = 1 \times 6970$
$4 \times 1957 = 38 \times 206$
$7 \times 1406 = 38 \times 259$
$2 \times 4589 = 13 \times 706$
$5 \times 2968 = 40 \times 371$
$8 \times 1735 = 20 \times 694$
$3 \times 4158 = 6 \times 2079$
$6 \times 1485 = 30 \times 297$
$9 \times 2754 = 81 \times 306$

Die folgenden Gleichungen sind neue Typen von Umkehrprodukten, d. h., die linke und die rechte Seite verhalten sich zueinander wie Bild und Spiegelbild – bis auf das Multiplikationszeichen

$218 \times 9 = 981 \times 2$
$327 \times 8 = 872 \times 3$
$412 \times 7 = 721 \times 4$
$424 \times 7 = 742 \times 4$
$436 \times 7 = 763 \times 4$
$545 \times 6 = 654 \times 5$
$5 \times 295 = 59 \times 25$
$2 \times 8919 = 9 \times 1982$
$3 \times 7928 = 8 \times 2973$
$5 \times 5946 = 6 \times 4955$
$4 \times 2317 = 7 \times 1324$
$4 \times 4627 = 7 \times 2644$
$4 \times 6937 = 7 \times 3964$
$644 \times 1 = 14 \times 46$

Verblüffend ist die Ähnlichkeit dieser Gleichungen. Nur die Operationszeichen sind ausgetauscht, und bei der Abwandlung wurde eine 10 hinzugesetzt:

| | |
|---|---|
| $40 : 20 = 2$ | $40 - 20 = 2 \cdot 10$ |
| $45 : 15 = 3$ | $45 - 15 = 3 \cdot 10$ |
| $72 : 12 = 6$ | $72 - 12 = 6 \cdot 10$ |
| $121 : 11 = 11$ | $121 - 11 = 11 \cdot 10$ |

$$120 = (1^2 + 2^2 + 0^2)!$$

Das Ausrufungszeichen ! (lies: Fakultät) steht in der Mathematik für das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis zur angegebenen Zahl. Unser Beispiel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Macht mit euren Freunden, die besonders fix in Kopfrechnen sind, die Probe aufs Exempel. Sie möchten folgende Summanden, die ihr ihnen in gleichbleibendem Tempo nacheinander ansagt, addieren:

$$1000 + 40 + 10 + 1000 + 40 + 1000 + 10 = x.$$

Als Summe werden die meisten 5000 angeben. Ihr wißt das natürlich besser.

*aus: NBI, Berlin*