Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

XVI. INTERNATIONALE MATHEMATIK-OLYMPIADE 1974

OJM DDR

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv: Volkssternwarte Hartha (S. 56); J. Lehmann, Leipzig (S. 53, 59, 62, 63); H. Pelka, Leipzig (S. 72);
Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig;
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 10. März 1974

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mathematik-Olympiaden in der DDR

Für viele Schüler nimmt die Mathematik seit langem einen wichtigen Platz auch in der außerschulischen Tätigkeit ein. Dabei geht es nicht nur um die ständig wachsende Bedeutung dieser Wissenschaft für unsere gesamte Volkswirtschaft, nicht nur darum, daß wir dringend Spitzenleistungen auf diesem Gebiet brauchen, die immer mehr unmittelbar produktionswirksam werden. Für uns geht es auch darum, daß zu einer allseitig entwickelten sozialistischen Persönlichkeit gute, solide Kenntnisse und Fertigkeiten in der Mathematik gehören. Diese tragen dazu bei, das Verständnis der Schüler für die Gesetzmäßigkeiten in Natur und Gesellschaft zu erhöhen. Sie sollen lernen, Definitionen zu erfassen, Beweise zu führen sowie die mathematische Terminologie und Symbolik zu verstehen. Durch die geforderte exakte Ausdrucksweise werden die Lernenden veranlaßt, über den jeweiligen Sachverhalt gründlicher nachzudenken und ihn damit gedanklich besser zu beherrschen.

Ein entscheidender Anstoß auf diesem Gebiet war der Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrats der DDR vom 17. Dezember 1962 *Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR*. Heute gibt es in vielen Schulen, Kreisen und Bezirken eine vielseitige, interessante außerunterrichtliche mathematische Tätigkeit. Charakteristisch ist dabei die sehr enge und fruchtbare Zusammenarbeit von Fachwissenschaftlern – also Mathematikern aus Universitäten, Hoch- und Fachschulen sowie der Akademie der Wissenschaften der DDR – Pädagogen und der FDJ.

Auch die *Mathematische Gesellschaft der DDR* sieht einen nicht unwesentlichen Teil ihrer Aufgaben darin, mathematisch talentierte und interessierte Schüler zu fördern und zu betreuen.

Zahlreiche Mitglieder der *Mathematischen Gesellschaft der DDR* arbeiten daran mit, außerunterrichtliche Veranstaltungen inhaltlich zu gestalten. Die Gesellschaft ist zusammen mit dem Ministerium für Volksbildung und dem Zentralrat der FDJ sowie dem Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen Träger der *Olympiaden Junger Mathematiker*.

Zu den Haupttagungen der Gesellschaft und zu den Tagungen ihrer *Sektion Schulmathematik* werden seit 1968 jeweils etwa 50 Schüler eingeladen, die sich bei der 4. Stufe der Mathematik-Olympiade (Olympiadeklassen 10 bis 12) ausgezeichnet haben. Diese Schüler besuchen sowohl angemessene Vorträge des allgemeinen Tagungsprogramms als auch spezielle, nur für sie durchgeführte Veranstaltungen.

In Berlin hat sich eine *Mathematische Schülergesellschaft* konstituiert, die von Mathematikern der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität geleitet und betreut wird.

Generell kommt es darauf an, viele Schüler anzuregen, sich mit der Mathematik zu beschäftigen. Das muß durchaus nicht immer in festen Organisationsformen, z. B. Zirkeln und Arbeitsgemeinschaften, geschehen. Mathematische Knobelaufgaben an der Wandzeitung, interessante FDJ- bzw. Pionierveranstaltungen mit mathematischen Aufgaben, Wettbewerbe im Herstellen geeigneter Knobelaufgaben und nicht zuletzt die systematische Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, (vor allem für Schüler der Klassen 5 bis 10) mit der Zeitschrift *Wurzel* (herausgegeben von der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena) sowie mit den Aufgaben von *Wissenschaft und Fortschritt* (die letzten beiden vor allem für Schüler der Erweiterten Oberschulen) sind dafür geeignet. Talente und Leistungsmöglichkeiten auf dem Gebiet der Mathematik werden häufig erst dabei entdeckt. Wenn sich die mathematische Begabung auch bei Olympiaden bestätigt, werden die Schüler in Kreisklubs, Bezirksklubs, auf zentralen Lehrgängen oder individuell weitergefördert.

Die *Olympiaden Junger Mathematiker* zeigen, daß sich diese Formen des Förderns mathematisch besonders talentierter Schüler bewährt haben. Erfolge erzielen in diesem Wettbewerb – besonders in höheren Stufen und höheren Olympiadeklassen – auf die Dauer nur solche Schüler, die fleißig, ausdauernd und zielstrebig ihr mathematisches Wissen und Können festigen, ergänzen und vertiefen, d. h., die sich auch außerhalb des Unterrichts mit der Mathematik befassen. Die Erfahrungen beweisen, daß diese Schüler nicht einseitige Spezialisten sind, sondern sich auch für viele andere Dinge interessieren – z. B. für Naturwissenschaften und Musik. Viele *Junge Mathematiker* vermitteln ihr Wissen ihren Mitschülern, vor allem den jüngeren, und tragen dazu bei, das mathematische Niveau ihrer Schulen zu heben.

Die Olympiade-Aufgaben werden aus den Gebieten der Mathematik entnommen, die auch in der Schule behandelt werden. Besonders beachtet werden die Bereiche, aus denen die Aufgaben der Internationalen Mathematik-Olympiaden gestellt werden. Daher wurden z. B. nur wenige Aufgaben aus der Analytischen Geometrie, der Differentialrechnung und der Integralrechnung ausgegeben. Die Schüler können jedoch beim Lösen der gestellten Aufgaben Methoden der sogenannten *Höheren Mathematik* benutzen, wenn sie richtig begründet werden.

Folgende Themen stehen bei den Aufgaben im Vordergrund: *Arithmetik, Gleichungen, Ungleichungen, Funktionen (insbesondere trigonometrische Funktionen), logisch-kombinatorische Aufgaben, Geometrie der Ebene, Geometrie des Raumes sowie geometrische Konstruktionen.* Es gibt aber auch Aufgaben aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, über *algebraische Strukturen* u. a., bei denen Begriffe, die nicht zum Schulstoff gehören, in der Aufgabenstellung erläutert werden.

Aus den *Olympiaden Junger Mathematiker* sind zahlreiche Studenten mit ausgezeichneten Leistungen hervorgegangen.

Aus Anlaß der *X. Olympiade Junger Mathematiker* im April 1971 haben erfolgreiche Teilnehmer früherer Internationaler Mathematik-Olympiaden auf einem Kolloquium über ihre gegenwärtigen Arbeiten berichtet. Neun dieser Vorträge sind in den Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR veröffentlicht worden.

Erfolgreichster Teilnehmer aller bisherigen Internationalen Mathematik-Olympiaden ist *Wolfgang Burmeister*. Er errang drei 1. Preise sowie zwei 2. Preise und wurde schon als Schüler der 8. Klasse Preisträger. Im Rahmen der wissenschaftlich-praktischen Arbeit für die Schüler der Abiturstufe verfaßte er eine Arbeit aus dem Gebiet der numerischen Mathematik unter dem Titel *Inversionsfreie Verfahren zur Lösung nichtlinearer Operationsgleichungen.* Diese Arbeit erschien kürzlich in der *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.* Zwei weitere Arbeiten, die er als Student schrieb – er legte 1971 das Abitur ab – sind im Druck. Seit Februar dieses Jahres ist er Forschungsstudent.

Durch die Mathematik-Olympiaden und die damit verbundenen Fördermaßnahmen wird erreicht, daß sich mathematisch begabte junge Menschen frühzeitig an die Front der mathematischen Forschung führen lassen. Aus der Geschichte der Mathematik ist bekannt, daß viele bedeutende mathematische Entdeckungen und Erfindungen von den

Mathematikern vorwiegend im dritten Lebensjahrzehnt (oder früher) gemacht wurden. In den späteren Lebensjahren wurden sie von ihnen vor allem weiterentwickelt.

Man muß sich jedoch grundsätzlich darüber im klaren sein, daß bei den Olympiaden jene Schüler hervorgetreten sind, die eine gute Kombinationsfähigkeit besitzen und imstande sind, ein Problem schnell zu lösen. Das sind zwar für den Mathematiker wertvolle Eigenschaften, es wäre aber verfehlt, zu glauben, daß nur der ein guter Mathematiker werden kann, der über diese Eigenschaften verfügt. Es gibt zahlreiche mathematische Probleme, die nur durch ein tiefgründiges Umdenken zu lösen sind. Mathematiker, die solche Probleme gelöst haben, hätten vielleicht niemals zu Preisträgern einer Olympiade gehört. Umgekehrt gibt es unter den Gewinnern der traditionsreichen ungarischen und sowjetischen Wettbewerbe neben international bekannt gewordenen Mathematikern auch solche, die später auf diesem Gebiet nicht hervorgetreten sind.

Ein Prüfstein für die Qualität unserer *Jungen Mathematiker* sind auch die jährlichen Internationalen Mathematik-Olympiaden (Abk IMO). Bei der I. Internationalen Mathematik-Olympiade, die 1959 auf Einladung der Mathematischen Gesellschaft (Societatea de Stiinte Matematice di Republica Socialista Romania) und des Ministeriums für Bildungswesen der Sozialistischen Republik Rumänien in Bukarest durchgeführt wurde, belegte die Mannschaft der DDR unter den sieben Teilnehmerländern den letzten Platz.

In den folgenden Jahren bekundeten weitere Länder ihr Interesse an den Mathematik-Olympiaden, so daß 1973 zur XV. IMO schon 16 Teilnehmerländer zu verzeichnen waren. Wir können stolz darauf, sein, daß sich die Mannschaften unserer Republik allmählich immer weiter nach vorn gekämpft haben und seit 1966 zur Spitzengruppe in der inoffiziellen Länderwertung gehören. Im Jahre 1965 wurde die VII. IMO in der DDR durchgeführt. In der Zeit vom 4. 7. bis 17. 7. 1974 wird die DDR erneut Gastgeber für die Teilnehmer einer IMO sein.

Im folgenden soll am Beispiel dieser XVI. IMO der Ablauf einer solchen Olympiade dargestellt werden:

Der Delegationsleiter der DDR konnte 1973 der Jury der XV. IMO mitteilen, daß die DDR zur XVI. IMO einladen wird. Die Olympiade wird vom Ministerium für Volksbildung und der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Zusammenarbeit mit dem Ministerium für das Hoch- und Fachschulwesen und dem Zentralrat der FDJ durchgeführt.

Die Einladungen des Ministers für Volksbildung der DDR wurden am Ende des Jahres 1973 an alle Länder gesandt, die bisher an Internationalen Mathematik-Olympiaden teilgenommen haben.

Die Länder, die ihre Teilnahme an der XVI. IMO zugesagt haben, wurden aufgefordert, bis zum 1. 4. 1974 drei bis fünf Aufgaben mit Lösungen an den *Präsidenten der Jury* der XVI. IMO einzusenden. Das Gastgeberland reicht traditionsgemäß keine Aufgabe ein. Der Präsident wählt mit drei Beratern (Hochschullehrer, die der Aufgabenkommission des ZKOJM angehören) 6 Aufgaben und 6 Ersatzaufgaben aus, die zusammen mit ihren Lösungen in den vier Verhandlungssprachen deutsch, russisch, englisch und französisch am 4. 7. den *Mitgliedern der Jury* als Vorschlag übergeben werden. Die *Jury* besteht aus den *Delegationsleitern* der Teilnehmerländer und dem vom Veranstalterland berufenen Präsidenten. Sie wird am 5. 7. in Weimar das erste Mal zusammentreten. In den folgenden dreitägigen Verhandlungen legt sie die 6 Wettbewerbsaufgaben und die Bewertungsgrundsätze (ein Punktsystem, bei dem ein Teilnehmer im allgemeinen maximal 40 Punkte erreichen kann) endgültig fest. Dabei muß beachtet werden, daß nur solche Aufgaben gestellt werden, deren Stoffgebiete im Schulunterricht aller Teilnehmerländer grundsätzlich behandelt werden. Weiter prüft die Jury, ob alle Teilnehmer dem *Reglement* entsprechen, d. h., Schüler von allgemeinbildenden Schulen, Berufsschulen oder Spezialschulen sind und das Höchstalter von 20 Jahren nicht überschritten haben. Die festgelegten Aufgaben werden dann von den jeweiligen Delegationsleitern in die Landessprache der Schüler übersetzt und vervielfältigt.

Vom 6. 7. ab versammeln sich die Teilnehmer in Erfurt. Jede Mannschaft besteht aus 8 Schülern, die in den meisten Ländern auf Grund ihrer Ergebnisse bei den nationalen Mathematik-Olympiaden ausgewählt werden. Am 8. 7. findet die offizielle Eröffnung in der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* statt. Danach beginnt die erste Klausur, in der 3 Aufgaben in vier Stunden zu bearbeiten sind. In den ersten 30 Minuten können die Schüler schriftlich Fragen zum Aufgabentext an die Jury stellen. Diese entscheidet, ob bzw. wie eine Frage schriftlich beantwortet wird. Am nächsten Tag (9. 7.) wird die zweite Klausur unter denselben Bedingungen geschrieben.

Die Delegationsleiter nehmen zusammen mit ihren Stellvertretern eine erste Korrektur vor. Danach erfolgt eine zweite Prüfung der Arbeiten durch *Koordinatoren*, die für ein *einheitliche Beurteilung aller Schüler* zu sorgen haben und für jede Aufgabe jedes Schülers zusammen mit dem Delegationsleiter eine Bewertung festsetzen.

Diese Koordinierung für die Teilnehmer aus den Gastländern erfolgt durch Gruppen von je drei sprachkundigen (für russisch, englisch, französisch) Mathematikern aus der DDR. Bei der Koordinierung der Lösungen der Schüler aus der DDR wirken Delegationsleiter aus anderen Ländern (in der Regel diejenigen, die die Aufgaben vorgeschlagen haben) mit. Sollten sich Delegationsleiter und Koordinatoren nicht einigen können, so muß die Jury (mit einfacher Stimmenmehrheit) über die Bewertung entscheiden. Daß alle Personen, die Kenntnis der Wettbewerbsaufgaben haben, verpflichtet sind, diese bis zum Beginn der Klausur geheimzuhalten, versteht sich von selbst. Um die Kontaktmöglichkeiten der Jurymitglieder mit den Schülern bis zum Ende der Korrektur (bewertet wird das, was der Schüler geschrieben hat. Der Korrektor soll sich nicht von ihm erläutern lassen, was der Schüler gemeint hat) einzuschränken, wird die Jury nicht am selben Ort wie die Schüler untergebracht.

Am 11. 7. wird die Bewertung abgeschlossen, und am 12. 7. tritt die Jury zusammen, um über die Verteilung der Preise zu entscheiden. Entsprechend den erreichten Punktzahlen werden (meist mehrere) 1., 2. und 3. *Preise* sowie *Diplome für die ausgezeichnete Lösung von Aufgaben* vergeben. Preise und Diplome sind nicht mit Geld- oder Sachwerten verbunden. Die Übergabe der Urkunden durch den Präsidenten der Jury an die Preisträger erfolgt auf einer festlichen Veranstaltung am 15. 7. 1974 in der *Kongreßhalle* in Berlin. Außer dieser offiziellen Wertung gibt es eine inoffizielle Länderwertung, bei der die von allen Schülern einer Delegation erreichten Punkte zusammengezählt werden (vgl. Tabelle). In ihr spiegeln sich die Güte des mathematischen Schulunterrichts, die Intensität der außerunterrichtlichen Förderung in Mathematik sowie die Qualität und die Möglichkeiten des Auswahlverfahrens für die IMO-Teilnehmer wider.

Vom 6. bis zum 9. 7. werden die Wettbewerbsteilnehmer mit der Stadt Erfurt und ihren Menschen bekannt gemacht. Nach den Klausuren haben sie Gelegenheit, sich bei Sport und Spiel zu erholen. Während die Jury die Schülerarbeiten korrigiert und bewertet, unternehmen die Schüler Exkursionen nach Eisenach, Ruhla, Jena, Ilmenau, Kahla, Oberhof und Suhl. Der 12. 7. dient einer Exkursion nach Weimar und Buchenwald. In der *Nationalen Mahn- und Gedenkstätte* ist eine Ehrung der Opfer des Faschismus vorgesehen.

Am 13. 7. werden die Teilnehmer und die Jury nach Berlin fahren. Die Tage in Berlin sind mit Stadtbesichtigungen, einem Ausflug nach Potsdam (dabei Besichtigung der *Gedenkstätte Cecilienhof*) und der Abschlußfeier ausgefüllt. Für alle Teilnehmer ist eine solche internationale Veranstaltung ein großes Erlebnis. Es gibt ihnen die Möglichkeit, einen Einblick in das Leben in unserem sozialistischen Staat zu bekommen und sich mit den Errungenschaften unseres Bildungssystems vertraut zu machen.

H. Bausch/W. Engel/H. Titze

IMO-Teilnehmer zu Gast an der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“

Als im September 1953 die ersten Studenten am *Pädagogischen Institut Erfurt* immatrikuliert wurden, ahnten wohl nur wenige, daß hier eine der größten Stätten für die Ausbildung von Fachlehrern ihre verantwortungsvolle Tätigkeit aufgenommen hatte. Anstelle des Gebäudekomplexes, der heute die *Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer* repräsentiert, gab es damals lediglich ein Lehrgebäude, anstelle der mehr als 3400 Studierenden, die heute an der Hochschule ausgebildet werden, gab es 1953 460 Studenten. Das ist gewiß eine beeindruckende Bilanz, auf die die 430 Hochschullehrer und wissenschaftlichen Mitarbeiter dieser Hochschule mit Recht stolz sind.
Auf Beschluß des Ministerrates der DDR erhielt das *Pädagogische Institut Erfurt* mit Wirkung vom 1. September 1969 den Status einer *Pädagogischen Hochschule*. Gleichzeitig wurde das *Pädagogische Institut Mühlhausen* mit der neugegründeten Hochschule vereinigt. Das war ein Höhepunkt in der Geschichte dieser jungen Lehrerbildungsstätte, Ergebnis einer zielstrebigen, beharrlichen und erfolgreichen Bildungs- und Erziehungsarbeit.
Heute bildet die *Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer Erfurt/Mühlhausen* in einem vierjährigen Studium Diplomlehrer für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule aus. Die Spezialisierung auf bestimmte Wissenschaftsdisziplinen (in Erfurt sind es Mathematik, Physik, Polytechnik, Deutsch, Russisch, Kunstwissenschaft) hatte u. a. eine Konzentration wissenschaftlicher Kräfte zur Folge, die eine gute wissenschaftliche Ausbildung der Studierenden garantiert und beachtenswerte Forschungsleistungen bringt.
Eine der größten Sektionen der Pädagogischen Hochschule ist die Sektion Mathematik/Physik mit etwa 750 Direktstudenten. Im Fach Mathematik stehen in den ersten beiden Jahren die klassischen Disziplinen Analysis, Algebra und Geometrie im Vordergrund. Sie werden in einem zusammenhängenden Kurs vermittelt.
Für Studenten mit dem Hauptfach Mathematik wird die Ausbildung vom 3. Studienjahr an mit Lehrveranstaltungen zur Numerischen Mathematik und Rechentechnik, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik und zur Geschichte der Mathematik fortgesetzt.
Die Pädagogische Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* ist ein internationaler Treffpunkt. In jedem Jahr werden an dieser Hochschule mehr als 400 Wissenschaftler, Pädagogen und Studenten aus sozialistischen und nichtsozialistischen Ländern begrüßt.
Während Deutschlehrer aus Frankreich, Italien, Großbritannien, Finnland und anderen nichtsozialistischen Ländern schon seit 15 Jahren zu mehrwöchigen internationalen Sommerkursen nach Erfurt kommen, weilten im Studienjahr 1972/73 erstmalig pädagogische Kader aus der Demokratischen Republik Vietnam an unserer Hochschule. Hier eigneten sie sich Wissen an, das dem tapferen vietnamesischen Volk bei der sozialistischen Weiterentwicklung seines Schulwesens zugute kommen wird.
Auch Assessoren, Inspektoren und Fachlehrer aus der Republik Kuba, wo schrittweise die Lehrpläne und Lehrbücher unseres Mathematikunterrichts eingeführt werden, zählen seit einigen Jahren zu gern gesehenen Gästen unserer Hochschule.
Besonders enge Verbindungen bestehen zwischen der *Pädagogischen Hochschule Dr. Theodor Neubauer* und sieben gleichartigen Einrichtungen der Lehrerbildung in der UdSSR und den sozialistischen Bruderländern. Der Austausch von Wissenschaftlern zwischen den Partnerhochschulen und die Durchführung von Studentenpraktika im Ausland sind inzwischen zu guten Traditionen geworden, die eine wesentliche Bereicherung einiger Ausbildungsprogramme darstellen.
So erhalten beispielsweise alle Studenten, die Russisch als Hauptfach studieren, die Möglichkeit, ein Sprachpraktikum in Moskau, Iwanowo, Rjasan oder Vilnius zu absolvieren. Ausgewählte Studenten der Sektion Polytechnik, Mathematik/Physik und Chemie/Biologie fahren nach Katowice (VR Polen), Eger (Ungarische VR), Banska Bystrica und Ostrava (ČSSR), um an befreundeten Einrichtungen spezielle Untersuchungen durchzuführen und den Erfahrungsaustausch mit den Kommilitonen zu pflegen.
Die Mitarbeiter und Studenten der *Pädagogischen Hochschule Dr. Theodor Neubauer* freuen sich, auch die Teilnehmer der XVI. Internationalen Mathematik-Olympiade in Erfurt zu wissen und heißen sie herzlich willkommen. *S. Bär*

IMO-Teilnehmer stellen Aufgaben

Alexander Torgasev, Beograd, Teilnehmer der VII. und VIII. IMO

▲1230▲ Ein kluger Mann, der ein Objekt aus der Entfernung kleiner als ein Meter sehen kann, und der eine Schrittlänge von einem Meter hat, machte folgende Wette: Wenn es ein Objekt in der Entfernung von d Metern gibt ($d>1$) und wenn ihm nach jedem Schritt gesagt wird: „Du kommst näher an das Objekt“ oder: „Du kommst nicht näher an das Objekt“, kann er das Objekt nach einer endlichen Zahl von Schritten erreichen, noch genauer, deren Zahl wird kleiner als $(\frac{3}{2}d+7)$ sein. (Es wird angenommen, daß er das Objekt erreichen wird, wenn er es sieht, d. h. seine Entfernung beträgt weniger als ein Meter von ihm.)
Gewann der kluge Mann die Wette?

Hans-Dieter Gronau, Rostock, Teilnehmer der XI. IMO

▲1231▲ Es seien a und b zwei reelle Zahlen.
a) Man beweise, daß dann stets die Ungleichung

$$a^4+b^4 \geqq a^3b+ab^3 \qquad (1)$$

erfüllt ist.
b) Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Christoph Bandt, Greifswald, Teilnehmer der IX. und X. IMO

▲1232▲ Eine Tafel Schokolade besteht aus 5 Reihen zu je 20 Stück. Wie muß man brechen, um mit möglichst wenig Brüchen die ganze Tafel in einzelne Stücke zu zerlegen?
Dabei darf man jeweils nur einen Teil der Schokolade auf einmal brechen und nur an einer geraden Linie entlang. Ist es günstiger, zuerst in Reihen zu je 20 Stück oder in Spalten zu 5 Stück zu brechen?

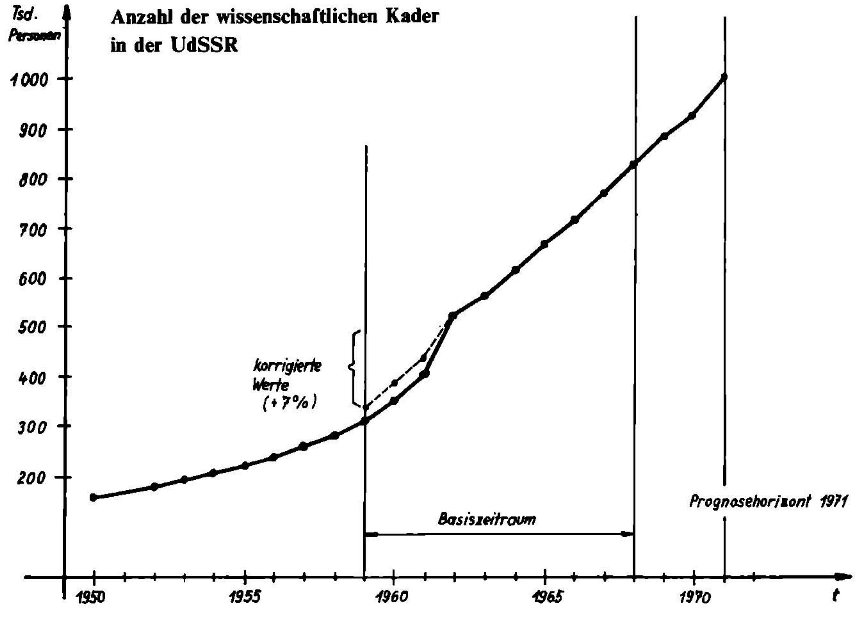
Mathematik in der Gesellschaftsprognostik

Jedem Teilnehmer an Mathematik-Olympiaden – und das kann für *alpha*-Leser fast als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt werden – begegnet früher oder später, bewußt oder unbewußt, der vielzitierte Ausspruch von *Karl Marx*:
Eine Wissenschaft ist erst dann als entwickelt anzusehen, wenn sie dahin gelangt ist, sich der Mathematik bedienen zu können.

Marx, der sich selbst eingehend mit mathematischen Theorien und ihrer Anwendung vor allem in der Ökonomie befaßte, charakterisierte hier das Verhältnis einzelner Wissenschaften zur Mathematik in allgemeiner Weise. Er spricht davon, daß sich die Wissenschaften „der Mathematik bedienen" und sieht im Grad der Nutzung mathematischer Erkenntnisse ein Kriterium für die Bestimmung des Entwicklungsstandes von Wissenschaften. Nun gibt es viele, die die obige Aussage dahingehend ausgedeutet wissen wollen, daß niedriger Entwicklungsstand einer Wissenschaft gleichbedeutend mit „Unexaktheit" dieser Wissenschaft wäre und man einmal einem Mathematiker die Probleme dieser Wissenschaft vorlegen sollte, wodurch auch diese Wissenschaft auf den Weg „größerer Exaktheit" geführt werden könne.
Als Mathematiker an einem gesellschaftswissenschaftlichen Institut mußte ich mir auf die Frage nach dem Verhältnis der Gesellschaftsprognostik zur Mathematik, ausgehend von obiger allgemeiner Aussage, eine konkrete, spezifische Antwort suchen. Dabei zeigte es sich, daß die eben zitierte Auffassung von der Mathematik als dem Allheilmittel jeglicher Wissenschaftsentwicklung schon oberflächlicher Überprüfung nicht standhielt. Einige wichtige Aspekte der Beziehung von Gesellschaftsprognostik und Mathematik, behandelt am konkreten Beispiel, sollen Gegenstand dieses Artikels sein.
Die *Gesellschaftsprognostik* hat als relativ selbständige Wissenschaftsdisziplin im Marxismus-Leninismus die wissenschaftliche Voraussicht gesellschaftlicher Entwicklungsprozesse zu ihrem Gegenstand. Nun werden einige bei der Verbindung von „Voraussicht" und „wissenschaftlich" bedenklich den Kopf schütteln und fragen, auf welcher Basis ein derartiges Vorwegnehmen gesellschaftlicher Prozesse in wissenschaftlicher Weise möglich sei. Die gesellschaftliche Entwicklung hat im Sozialismus dem Horoskop, der Sterndeuterei und dem Lesen aus dem Kaffeesatz ein Ende bereitet, aber es weckt der Begriff der Voraussicht doch noch zu leicht Erinnerungen an derartige „Informationsquellen". Nun vollzieht sich die gesellschaftliche Entwicklung, wie die Naturprozesse auch, nicht regellos, nicht spontan. Sie vollzieht sich nach objektiven Gesetzen, unabhängig vom Wollen und Wünschen der Menschen. Hierin liegt die Basis der Möglichkeit aber auch gleichzeitig die Ursache der Notwendigkeit wissenschaftlicher Voraussicht im Sozialismus. Derartige Gesetze und die Bedingungen, unter denen sie wirken, können erkannt und im Handeln der Menschen bewußt genutzt werden. Die zukünftige Entwicklung der Gesellschaft basiert auf dem Heute und dem Gestern, wo die Voraussetzungen der morgigen Entwicklung geschaffen werden. Die Analyse der Gesetzmäßigkeiten der gesellschaftlichen Entwicklung in Vergangenheit und Gegenwart gestattet es, auf Grundzüge und Möglichkeiten künftiger Entwicklung zu schließen und darauf aufbauend den zu beschreitenden Entwicklungsweg zu planen.
In der Prognose- und Planungstätigkeit begegnen uns auf Schritt und Tritt Größenangaben, Mengenbestimmungen, Kapazitäten, kurz verschiedenste Quantitäten. Neben der qualitativen Angabe der Grundrichtung von Produktions- und Gestaltungsprozessen werden ganz konkrete quantitative Ziele bestimmt. So heißt es nicht schlechthin, Wohnhäuser sind zu errichten, sondern es wird ausgewiesen, welche Wohnungstypen in welchem Zeitraum mit wieviel Arbeitskräften und materiellen Mitteln errichtet werden müssen. Für die Planung der Entwicklung von Mechanisierung und Automatisierung muß neben der zukünftigen Struktur auch die Größenordnung des Wachstums der Elektroenergieerzeugung bestimmt werden. Auch für die Entwicklung von Wissenschaft und Technik sind Zahlenangaben notwendig. Welche Leistungsparameter muß ein technologisches Verfahren erreichen, das zu einem zukünftigen Zeitpunkt die heute benutzten Verfahren ablösen wird?
Auf derartige Fragen müssen *Prognostiker* Antwort geben. Zu diesem Zweck entstand im Prozeß des Prognostizierens eine Vielzahl von Prognosemethoden, von denen bis heute in der Literatur schon weit über hundert beschrieben wurden. Diese Vielfalt hat ihre Ursache einerseits darin, daß die verwendeten Methoden dem speziellen, konkret zu untersuchenden Prozeß entsprechen müssen, ihm „auf den Leib geschneidert" werden müssen; andererseits können und müssen gesellschaftliche Prozesse auf Grund ihres komplexen Charakters von verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden. Solche Verfahrensgruppen sind zum Beispiel die Zeitreihenforschung, die Strukturforschung, die Invarianzenforschung, die Grenz- und Schwellenwertforschung, die Substitutionsanalyse und die Strategische Analyse. Im Rahmen dieser Verfahren, in denen zumeist mehrere spezielle Methoden aus unterschiedlichen Wissenschaftsdisziplinen zusammenwirken, finden bereits heute in starkem Maße mathematische Begriffsbildungen und Theorien ihre Anwendung, vor allem Begriffsbildungen, theoretische Zusammenhänge und Prüf- und Schätzverfahren der mathematischen Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Beispiele für derartige Methoden sind die Regressions- und Korrelationsanalyse, die Theorie der Zufallsprozesse, die Monte-Carlo-Methode und die Methode der kleinsten Quadrate.
Einer dieser Methodenkomplexe, die *Extrapolationsmethoden*, soll hier Gegenstand näherer Betrachtung sein. Die Probleme, die bei der Nutzung dieser Methoden entstehen, werden uns Anhaltspunkte für die Untersuchung des Verhältnisses von Mathematik und Gesellschaftsprognostik liefern.
Das Grundprinzip dieser Methoden steckt schon in ihrem Namen – Extrapolation. Die älteste Hypothese über die Zukunft ist es, sich die Zukunft als eine direkte und geradlinige Fortsetzung der Gegenwart und Vergangenheit vorzustellen. Alle Extrapolationsverfahren basieren auf der Annahme, daß die in einem bestimmten Zeitraum beobachteten Entwicklungstendenzen unveränderlich oder wenigstens relativ stabil sind und also auf einen bestimmten künftigen Zeitraum, den Prognosezeitraum, ausgedehnt, extrapoliert werden können.

Anzahl der wissenschaftlichen Kader in der UdSSR (in Tsd.)

1950	162,5	1958	284,0	1966	712,4	Korrigierte Werte	
1951	—	1959	310,0	1967	770,0	(+7%)	
1952	179,1	1960	354,2	1968	822,9	1959	331,7
1953	191,9	1961	404,1	1969	883,4	1960	379,0
1954	210,2	1962	524,5	1970	927,7	1961	432,4
1955	223,9	1963	566,0	1971	1002,9		
1956	239,9	1964	612,0				
1957	261,6	1965	664,6				



Die Nutzung dieses Methodenkomplexes soll an einem konkreten Beispiel dargestellt werden. Für die Prognose und Planung von Wissenschaft und Technik ist es wichtig, Aussagen über gegenwärtige und zukünftige Entwicklungstendenzen der Struktur und der Anzahl wissenschaftlicher Kader zu erhalten. Ausgangspunkt ist die Messung der zu prognostizierenden Größe, hier der Anzahl der wissenschaftlichen Kader. Nach festgelegten Kriterien wird dieser Wert in jedem Jahr von der *Staatlichen Zentralverwaltung für Statistik* erfaßt. Für die nachfolgenden Berechnungen wollen wir die Tabelle der Anzahl der wissenschaftlichen Kader in der Sowjetunion für den Zeitraum von 1950 bis 1971 zugrunde legen, s. Seite 52.

Eine solche funktionale Zuordnung von Beobachtungsdaten zu Zeitintervallen wird als *dynamische Reihe* oder *Zeitreihe* bezeichnet. Derartige Zeitreihen werden nun mathematischen Untersuchungs-, Näherungs- und Prüfverfahren unterworfen. Der Gedankengang kann dabei etwa wie folgt umrissen werden: Wir lösen uns vom konkreten Gegenstand und betrachten die Menge der Beobachtungsdaten als Zahlenmenge. Aufgabe ist es nun, innerhalb dieser Zahlenmenge einen Zusammenhang zu finden, der gestattet, auf künftige Beobachtungsdaten zu schließen. Die einfachste Form der mathematischen Behandlung von Zeitreihen ist der Versuch, die Zeitreihenwerte durch eine Funktion der Zeit möglichst gut anzunähern. Dieser so ermittelte funktionale Zusammenhang wird auch für den nachfolgenden Zeitraum als gültig angesehen und gestattet durch die Berechnung von Funktionswerten für zukünftige Werte der Zeitvariablen die Bestimmung von Prognosedaten.

Wir wollen diesen Prozeß an unserem konkreten Beispiel demonstrieren. Um die erhaltenen Ergebnisse überprüfen und bewerten zu können, versetzen wir uns in das Jahr 1969 zurück und legen nur die Werte von 1950 bis 1968 zugrunde. Eine von uns an Hand unserer Berechnungen aufgestellte Prognose für 1971 kann dann an den realen Werten getestet werden.

Die graphische Darstellung läßt erkennen, daß das Wachstumsverhalten der statistischen Reihe etwa ab 1959 trotz des Sprunges von 1961 zu 1962 der Berechnung zugrunde gelegt werden sollte; die früheren Werte beschreiben den Prozeß des Erreichens dieses Wachstumstempos, der 1959 abgeschlossen wurde. Dann fragen wir uns nach den Ursachen des Sprunges von 1961 zu 1962 und stellen fest, daß diesem Sprung in der Zeitreihe kein echter Sprung in der Zunahme der Anzahl der wissenschaftlichen Kader entspricht. Seit 1962 wurde der Berechnung dieser Größe in der UdSSR eine neue Methode zugrunde gelegt, die einen größeren Bereich von Personen erfaßt. Mit einem Korrekturfaktor von 7 % lassen sich die Werte von 1959 bis 1961 vergleichbar machen. Die korrigierte Zeitreihe ist Basis unserer Berechnungen.

Die nächste Frage ist, was wollen wir unter möglichst guter Annäherung einer Funktion an Zeitreihenwerte verstehen? Das in der Praxis meistverwendete Kriterium ist die Summe der Quadrate der Differenzen der berechneten von den gemessenen Werten. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die gegebenen Zeitreihenwerte für die Zeitpunkte $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Als Näherung soll die Funktion $y=f(t)$ verwendet werden. Mit $y_i=f(t_i)$ ergibt sich dann als Summe der Differenzenquadrate

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2.$$

Die Auswahl der günstigsten Funktion aus der Schar der Funktionen eines Typs erfordert die Lösung eines Extremwertproblems. Nehmen wir an, wir wollen unsere Zeitreihe möglichst gut durch eine Gerade annähern. Wir können von der Geradengleichung $y=a+bt$ ausgehen. Es sind Werte a_0 und b_0 so zu bestimmen, daß die Gerade $y=a_0+b_0t$ beste Näherung im Sinne obigen Kriteriums ist, d. h. daß S als Funktion von a und b ein Minimum annimmt. Notwendige Bedingung dafür ist die Gültigkeit der Gleichungen $\frac{\partial S}{\partial a}=0$; $\frac{\partial S}{\partial b}=0$;

woraus sich das folgende Gleichungssystem für a und b ergibt:

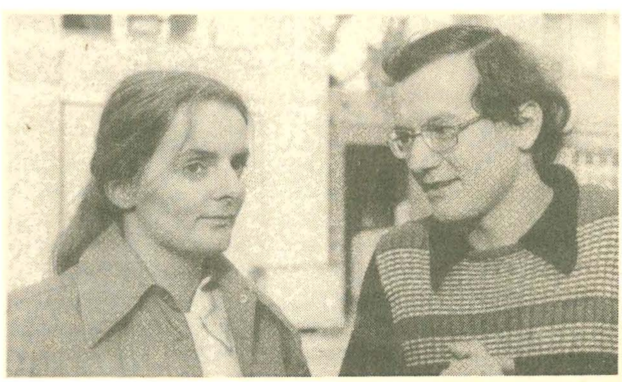
$$\sum_{i=1}^{n}x_i-na-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)b=0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_it_i-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)a-\left(\sum t_i^2\right)b=0.$$

Diese Bedingungen sind zugleich auch hinreichend, denn S kann durch die Wahl genügend entfernt verlaufender Geraden beliebig vergrößert werden, ein endliches Maximum kann also nicht existieren. Die Berechnung des Gleichungssystems (1) liefert für $n=10$ und $t_{1958+i}=i$ $(i=1, \ldots, n)$ als beste Näherung die Gerade $y=280{,}7+54{,}7t$.

Die Abbildung zeigt, daß diese Gerade vor allem die Werte für 1964 bis 1969 sehr gut annähert. Für 1971 erhalten wir einen Prognosewert $y_{1971}=991{,}8$ Tsd, der den realen Wert um 11,1 Tsd verfehlt. Bezogen auf den Zuwachs von 180,0 Tsd Menschen von 1968 bis 1971 ist das ein Fehler von 6,2 %. Für 1975 erhalten wir $y_{1975}=1\,210{,}6$ Tsd. Analog zur Näherung durch Geraden kann die Zeitreihe durch andere Funktionstypen approximiert werden. *B. Noack*

Dieser Beitrag wird mit einem 2. Teil in Heft 4/74 abgeschlossen.



Monika und Bernd Noack, jetzt beide Dipl.-Mathematiker, sind ehemalige erfolgreiche IMO-Teilnehmer

Wir bestimmen die geografischen Koordinaten unseres Heimatortes

Dieser Beitrag soll vor allem den Schülern der unteren Klassenstufen einen Einblick in die Astronomie geben, er ist aber auch als Ergänzung des Astronomieunterrichts in den 10. Klassen gedacht sowie für Arbeitsgemeinschaften verwendbar.

Die Erde besitzt eine kugelähnliche Gestalt. Wie bereits aus dem Geografieunterricht bekannt ist, kann man jedem Ort auf der Erde Koordinaten zuordnen. Es sind dies die *geografische Länge* (mit dem griechischen Buchstaben λ bezeichnet) und die *geografische Breite* (φ). Das Koordinatensystem der Erde ist aus Längen- und Breitenkreisen aufgebaut: 180 Längenkreise (Meridiane) – jeweils östlicher und westlicher Länge – sowie je 90 Breitenkreisen auf der Nord- und Südhalbkugel. Der Äquator ist der längste Breitenkreis (etwa 40000 km). Die Pole besitzen die geografische Breite 90°. (Bild 1)

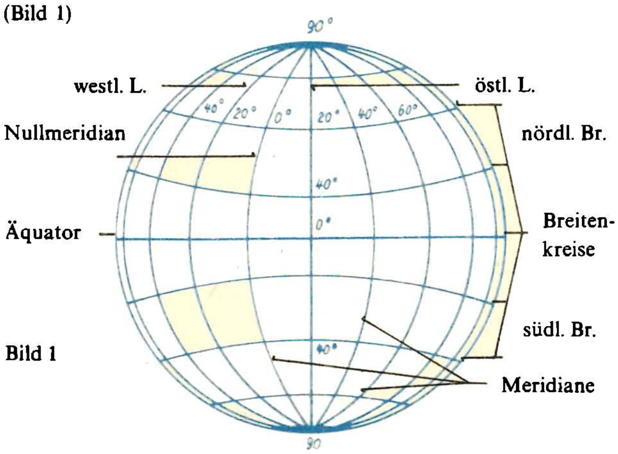


Bild 1

Wenn wir die Sterne, die sich in unterschiedlichen Entfernungen von der Erde befinden, auf eine gedachte Kugel mit der Erde als Mittelpunkt projizieren, erhalten wir die scheinbare Himmelskugel (Bild 2). Das Bild eines Sterns auf der scheinbaren Himmelskugel entsteht an der Stelle, an der der Strahl Erde – Stern die Himmelskugel schneidet.

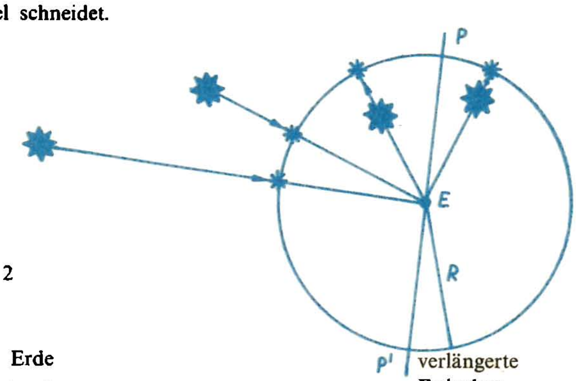


Bild 2

E Erde
R Radius der scheinbaren Himmelskugel
wahre Position des Sterns
Ort des Sterns auf der scheinbaren Himmelskugel

Die Erde rotiert um eine Gerade, *Erdachse* genannt. *Die Erdachse* schneidet die Erdoberfläche im Erdnord- und -südpol, die Himmelskugel ebenfalls in zwei Punkten, dem Himmelsnordpol P und dem -südpol P'. Die Ebene, die durch den Erdmittelpunkt verläuft und auf der Erdachse senkrecht steht, heißt *Äquatorebene*. Sie schneidet die Erdoberfläche im Erdäquator und die Himmelskugel im Himmelsäquator.

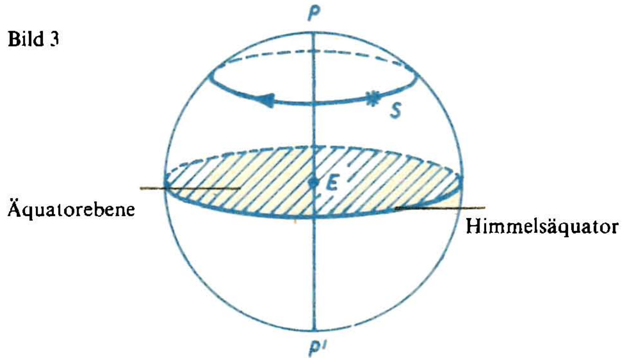
Die Erde dreht sich in 23 h 56 min = 1 Sterntag = 24 Sternstunden einmal um die Erdachse.

Diese Rotationsdauer kann wie folgt ermittelt werden: Ein Fernrohr wird auf einen Fixstern fest eingestellt. Jeweils nach einem Sterntag ist der Stern wiederum im Fernrohr zu sehen. Erstreckt sich die Messung über mehrere Tage, dann läßt sich die Rotationsdauer der Erde recht genau ermitteln.

Die verschiedenen Tageszeiten sind eine Folge der Rotation der Erde. Genau genommen müßte jeder Ort eine eigene Ortszeit besitzen. Zweckmäßigerweise werden aber mehrere Orte zu bestimmten Zeitzonen zusammengefaßt. Wir kennen z. B. die Mitteleuropäische Zeit (MEZ), die Osteuropäische Zeit (OEZ – Moskauer Zeit) und die Weltzeit (Greenwicher Zeit).

Weiterhin ergibt sich aus der Rotation der Erde die scheinbare tägliche Rotation der Himmelskugel. Da die Himmelskugel in Wirklichkeit feststeht, rotiert sie für einen Beobachter auf der Erde, der die Erdrotation nicht wahrnimmt, scheinbar entgegengesetzt zur Drehrichtung der Erde. Jeder Fixstern bewegt sich mit der Himmelskugel in 23 h 56 min scheinbar auf einem Parallelkreis zum Himmelsäquator (Bild 3).

Bild 3



Wählt man auf der Erdoberfläche einen beliebigen Beobachtungspunkt B, so ist die dazugehörige Horizontebene diejenige Ebene, deren sämtlich durch B verlaufende Geraden Tangenten an der Erdkugel sind. Das bedeutet: Eine Gerade, welche senkrecht auf der Horizontebene steht und durch den Punkt B geht, verläuft durch den Erdmittelpunkt. Der Strahl Erdmittelpunkt – Beobachtungspunkt schneidet dann die Himmelskugel in einem Punkt, der *Zenit* genannt wird. Zu jedem Beobachtungsort gehört auf der Himmelskugel weiterhin ein (Himmels-)meridian. Dies ist derjenige Kreis auf der Himmelskugel, der durch Nordpunkt (Himmelsnordpol P), Südpunkt (Himmelssüdpol P') und durch das Zenit Z des Beobachtungsortes verläuft. (Alle Orte der Erde gleicher geografischer Länge haben ein und denselben Himmelsmeridian, jedoch nicht den gleichen Zenit.) Wenn von B aus ein Stern S betrachtet wird, dann schließt der Strahl BS mit der Horizontebene einen Winkel ein, den man Erhebungswinkel bzw. in der Astronomie Höhe (h) nennt. Sie wird von 0 bis 90° gemessen. (Sterne, die sich unter der Horizontebene befinden, also unsichtbar sind, haben negative Höhe.)

Während eines vollen scheinbaren Umlaufes um die Erde, also während 23 h 56 min, durchwandert ein Stern auf der scheinbaren Himmelskugel zweimal den Meridian des Beobachtungsortes. Diese beiden Zeitpunkte sind für alle Orte auf der Erde gleicher geografischer Länge gleich. Der Vorgang selbst wird Meridiandurchgang oder *Kulmination* genannt. Man spricht von oberer bzw. unterer Kulmination (Bild 4). Bei der oberen Kulmination erreicht

der Stern seine maximale, bei der unteren Kulmination seine minimale Höhe. Wenn sich die Himmelskugel nach 12 Sternstunden $\left(\frac{1}{2}\text{ Sterntag}\right)$ um die Achse PP' (scheinbar) um 180° gedreht hat, geht der Stern in der Stellung S' abermals durch den Meridian.
Aus Symmetriegründen gilt (Bild 4):

$$\alpha = \sphericalangle SEP = \sphericalangle PES'$$

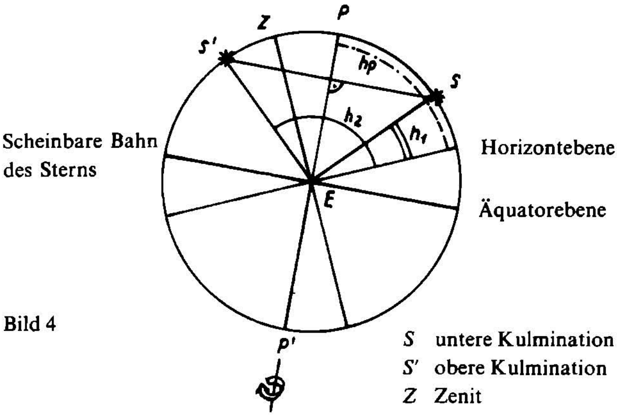


Bild 4

S untere Kulmination
S' obere Kulmination
Z Zenit

Der geübte Mathematiker kann aus der Zeichnung heraus sofort erkennen, daß sich die Polhöhe h_p, d. h., die Höhe des Himmelspols P, aus dem arithmetischen Mittel der beiden Kulminationshöhen h_1 und h_2 ergibt:

$$h_p = h_1 + \alpha$$
$$h_p = h_2 - \alpha$$
$$2h_p = h_1 + h_2$$
$$h_p = \frac{h_1 + h_2}{2} \qquad (1)$$

Die Formel gilt auch in dem allgemeinen Fall, wenn h_1 und h_2 zwei beliebige Höhen sind, die im Abstand von 12 Sternstunden gemessen werden.
Um nun endlich auf die geografischen Koordinaten zurückzukommen, zeigen wir anhand der nächsten Abbildung, daß die Polhöhe gleich der geografischen Breite ist:

$$\sphericalangle QBP = 90° + \varphi$$
$$\sphericalangle QBP = 90° + h_p$$
$$h_p = \varphi \quad \text{beide zum Himmelsnordpol} \qquad (2)$$

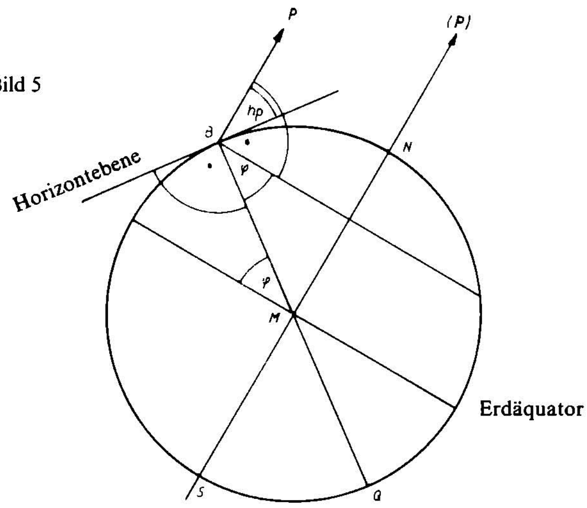


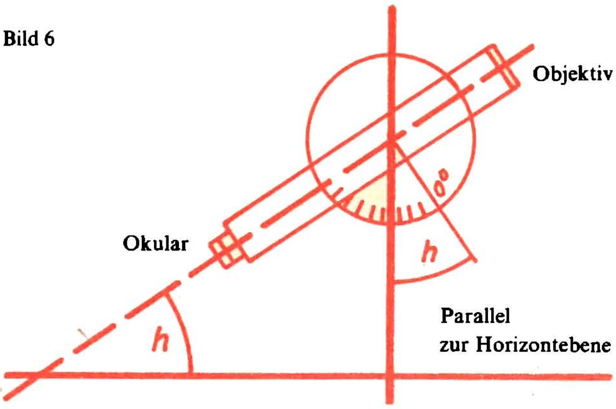
Bild 5

B Beobachtungsort
N Erdnordpol
S Erdsüdpol

Die beiden von *B* und *N* ausgehenden Strahlen sind praktisch parallel, da die Größe der Erde den kosmischen Entfernungen gegenüber verschwindend klein ist.

Aus (1) und (2) folgt, daß wir die geografische Breite aus zwei Höhenmessungen eines beliebigen Sternes im Abstand von 12 Sternstunden ermitteln können. Wir haben der Einfachheit halber die Messung am Polarstern vorgenommen, einem Stern, der in der Nähe des Himmelspols zu finden ist.

Bild 6



Die Höhenmessungen führten wir in der Volkssternwarte Hartha durch. Wir verwendeten dazu einen Theodoliten; das Prinzip eines solchen Gerätes zeigt Bild 6. Die Messungen wurden in einer Nacht in den Wintermonaten durchgeführt, damit der Stern nach 12 Sternstunden $\left(\frac{1}{2}\text{ Sterntag}\right)$ noch sichtbar war. Sie ergab:

15. 12. 1972 17^h30^m MEZ (obere Kulmination des Polarsterns)
$h_1 = 51°42'00''$

16. 12. 1972 05^h28^m MEZ (untere Kulmination des Polarsterns)
$h_2 = 50°30'42''$

Die geografische Breite des Beobachtungsortes Hartha beträgt somit gemäß Formel (1) und (2)

$$h_p = \frac{102°12'42''}{2} = 51°06'21''.$$

Es fehlt nun noch die geografische Länge der Sternwarte Hartha, um den Ort im Koordinatennetz der Erde genau festlegen zu können. Für die Schüler der unteren Klassenstufen wollen wir hier eine vereinfachte Darstellung geben:

Wir haben für einen bestimmten Stern die Kulminationszeit t_1 in Hartha ermittelt. Wir nehmen nun an, daß eine Schülergruppe in Greenwich (Nullmeridian) denselben Stern beobachtet und uns dessen Kulminationszeit t_2 am gleichen Tag für Greenwich mitteilt. (Dieser Wert kann auch aus einem Sternkalender entnommen werden.) Um die Zeitdifferenz zwischen Greenwicher Zeit und MEZ auszuschalten, haben wir vorher unsere Uhr nach Greenwicher Zeit umgestellt, d. h., nach unserem Zeitzeichen eine Stunde zurück. Die Berechnung der Länge beruht auf der Beziehung:

23 h 56 min $\triangleq$ 360° (Rotationsdauer der Erde) (eine volle Umdrehung)

$$t_2 - t_1 \triangleq \lambda$$

Nun können wir die geografische Länge aus folgender Proportion berechnen:

$$\frac{\lambda}{360°} = \frac{t_2 - t_1}{23\text{ h }56\text{ min}},$$

also
$$\lambda = \frac{360°\,(t_2 - t_1)}{23\text{ h }56\text{ min}}.$$

Die Messung führten wir wie folgt aus: Zuerst stellten wir den Theodoliten genau auf die Nord-Süd-Richtung ein. Wir suchten den Stern α Andromedae (Bild 7) auf, dessen Kulminationszeit vorher von uns abgeschätzt wurde, und ermittelten nun die genaue Zeit seines Meridiandurchgangs. Wir erhielten somit für t_1 den Zeitpunkt $16^h37^m07^s$ (Greenwicher Zeit). Die Zeit t_2 für Greenwich ermittelten wir nach dem Sternkalender für diesen Tag zu $17^h28^m57^s$ Greenwicher Zeit. Demnach ergibt sich eine Zeitdifferenz von

51min 50s. Diesen Wert können wir in die obige Gleichung einsetzen:

$$\lambda = \frac{360^\circ \cdot (51\text{min } 50\text{s})}{23\text{h } 56\text{min}}$$

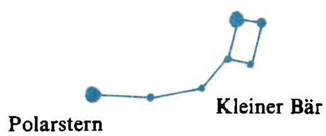
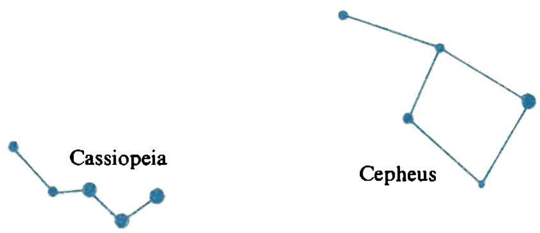
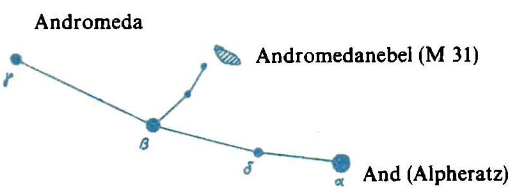


Bild 7





Das Sternbild Andromeda mit Nachbarsternbildern. – Sterngruppen, die sich auf begrenzten Flächen der scheinbaren Himmelskugel befinden, werden willkürlich und ohne Berücksichtigung der wahren Entfernungen der Sterne zu Sternbildern zusammengefaßt. Die Sterne eines Sternbildes werden – meistens nach ihrer Helligkeit – mit α, β, γ, ... bezeichnet.

Bevor wir weiterrechnen, müssen wir die Zeitangabe ins Dezimalsystem übertragen (Tafelwerk S. 31):

$$\lambda = \frac{360^\circ \cdot 0{,}8639\text{h}}{23{,}9333\text{h}} = 12{,}99^\circ.$$

Durch Umrechnen erhielten wir für die geografische Länge von Hartha

$\lambda = 12°59'24''$.

Schüler der 10. Klasse werden wissen, wie man auf einem einfacheren Wege zum Ergebnis gelangen kann, den wir hier der Vollständigkeit halber mit anführen.

Mit Hilfe eines Sternzeitchronometers* ermittelten wir die Sternzeit Greenwich zum Zeitpunkt der Kulmination von α Andromedae in Hartha. Sie betrug $23^h15^m00^s$ Sternzeit. Aus dem Kalender entnahmen wir die Sternzeit für die Kulmination in Greenwich: $00^h06^m59^s$ Sternzeit. Die Zeitdifferenz beträgt somit 51 min 59 s Sternzeit. Für die Rotationsdauer der Erde müssen wir jetzt 24 Sternstunden ansetzen. Es ergibt sich damit

$\lambda = \frac{360^\circ \cdot 0{,}86639\text{h}}{24\text{h}}$. Dies führt zum gleichen Ergebnis wie oben. Nun kennen wir die geografischen Koordinaten:

$\varphi = 51°06'21''$ n. Br.

$\lambda = 12°59'24''$ ö. L. unseres Beobachtungsortes Hartha.

Wir empfehlen den Lesern, die im Anhang angegebenen Aufgaben zu lösen.

Zum Abschluß möchten wir uns bei Herrn *Busch*, V. L. d. V., Leiter der Bruno-H. Bürgel Sternwarte Hartha und Herrn *Träger*, Mathematikfachlehrer an der Schloßberg-OS Döbeln, für ihre Hilfe und Unterstützung bedanken.

Lutz Müller, Dieter Neumann, Holger Pietzsch

Aufgaben (ab Kl. 7):

▲1▲a) Berechne den Abstand a zweier benachbarter Längenkreise mit der Längendifferenz 1° auf der Erdoberfläche am Äquator, wenn der Erdradius in Äquatornähe 6378,4 km beträgt.

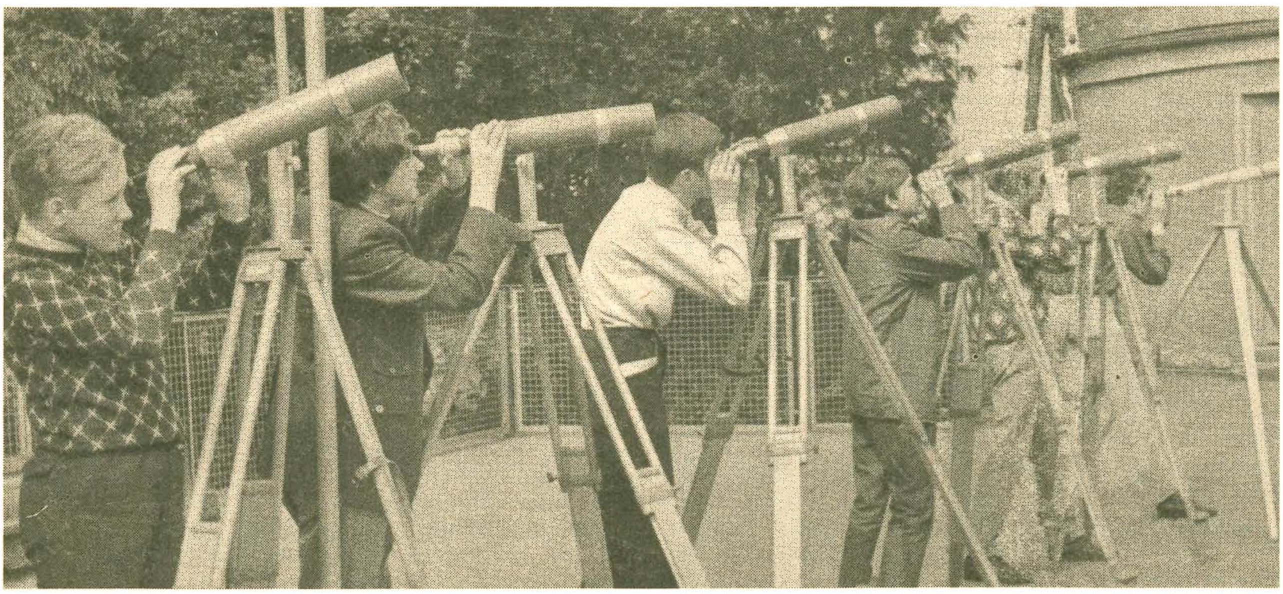
b) Für Kl. 10: Man gebe eine Formel zur Berechnung des Abstandes zweier benachbarter Längenkreise, gemessen längs eines Breitenkreises, in Abhängigkeit von der geografischen Breite an. Für die Erde wird Kugelgestalt angenommen ($R = 6371$ km).

c) Für 10. Kl.: Die Differenz zur wahren geografischen Länge der Sternwarte Hartha (12°57'52'') betrug bei unserer Messung 1'32''. Wieviel km Entfernung macht dieser Fehler auf der Erdoberfläche aus? ($\varphi = 51°06'21''$)

▲2▲ Die MEZ geht vom 15. Längenkreis (Görlitz) als Bezugsmeridian aus. Ermittle die Ortszeiten für Leipzig, Döbeln, Berlin und Dresden, wenn es in Görlitz 12^h00^m ist. Beachte: Eine Längendifferenz von 15° entspricht einer Zeitdifferenz von 1 h.

Leipzig	$\lambda = 12{,}4°$	Berlin	$\lambda = 13{,}4°$
Döbeln	$\lambda = 13{,}1°$	Dresden	$\lambda = 13{,}7°$
Bratislava	$\lambda = 17{,}1°$	Warschau	$\lambda = 21{,}1°$
Krakow	$\lambda = 19{,}9°$		

* Def. der Sternzeit s. Brockhaus abc Astronomie o. ä.



20

3	+	2	−	4	=1
×		×		−	
5	×	1	+	3	=8
−		+		+	
6	+	3	−	4	=5
=9		=5		=5	

Zusammenstellung dieses Ferienheftes: Studienrat J. Lehmann, Verd. Lehrer des Volkes, Leipzig

12

Mathematik-Quiz im Ferienlager

3. Ist die gedachte Zahl größer als 896? – Nein.
Wir merken, daß die gesuchte Zahl zum Intervall 768 bis 896 gehört. Wir fügen zu 768 die Hälfte dieses Intervalls, d. h. 64 und fragen:
4. Ist sie größer als 832. – Ja.
Die gesuchte Zahl gehört zum Intervall 832 bis 896. Wir fragen jetzt:
5. Ist sie größer als 864? – Nein.
Die gesuchte Zahl gehört also zum Intervall 832 bis 864.
6. Ist sie größer als 848? – Ja.
7. Ist sie größer als 856? – Ja.
8. Ist sie größer als 860? – Nein.
9. Ist sie größer als 858? – Ja.
Folglich kann die gesuchte Zahl nur 859 oder 860 sein. Wir fragen:
10. Ist sie größer als 859? – Ja.
Die gedachte Zahl ist 860.

12 Man legt zwei Scheiben Brot in den Brotröster und röstet in 30 s ihre eine Seite. Dann dreht man die eine Scheibe um, die zweite nimmt man aber heraus und legt an ihrer Stelle eine dritte ein. So wird in der zweiten halben Minute die erste Scheibe vollständig geröstet und die dritte zur Hälfte. Jetzt nimmt man die erste Scheibe heraus, legt die zweite halbfertige ein und wendet die dritte. Sie werden in der folgenden halben Minute fertig.

10

7 Von neun Münzen, die auf den ersten Blick nicht zu unterscheiden sind, weiß man, daß sich unter ihnen eine falsche befindet, die leichter als die anderen ist.
Wie kann man mit Hilfe von nicht mehr als zwei Wägungen auf einer Tafelwaage ohne Wägestücke die falsche Münze herausfinden?

8 Sagt, wieviel Katzen sind im Zimmer, wenn in jeder der vier Ecken eine Katze sitzt, jeder Katze gegenüber 3 Katzen sitzen und auf dem Schwanz jeder Katze eine Katze sitzt?

9 In einem quadratischen Klubraum sollen
3 10 Sessel so an den Wänden aufgestellt werden, daß an jeder Wand dieselbe Anzahl Sessel steht.

10 Rolf und Monika gehen angeln. Gemeinsam angeln sie 14 Fische. Rolf angelt zwei Fische mehr als Monika.
Wieviel Fische fängt jeder?

11 Marie-Luise hat sich irgendeine natürliche Zahl zwischen 1 und 1 000 ausgedacht. Um die gedachte Zahl zu erraten, stellt Knut Fragen. Marie-Luise antwortet ihrem Bruder auf alle Fragen nur mit „ja" oder „nein". Nur zehn Fragen genügen, um die von ihr gedachte Zahl zu ermitteln.
Überlegt, welche Fragen Knut stellen muß!

Lösungen

1 Man nimmt zwei beliebige Ringe und legt auf jede Schale einen Ring. Wenn Gleichgewicht eintritt, ist der dritte Ring der gesuchte.

2 Die Zahlen heißen 24 und 1.

3 2 m (Nach 3 Schnitten ist der Balken in 4 Teile zersägt.)

4 20mal (Im Zehner 50 bis 59 erscheint die Ziffer 5 elfmal, in den übrigen 9 Zehnern je einmal.)

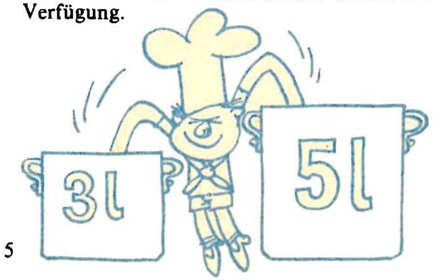
5 4 Partien

6 Es genügen zwei Träger. Der erste kehrte nach dem ersten Tag um und der zweite nach dem zweiten Tag. Dann hatte der Forscher für vier übrige Tage gerade einen Nahrungsvorrat und Wasser für vier Tage.

7 Wir legen je drei Münzen auf die Waagschalen. Tritt Gleichgewicht ein, dann befindet sich die falsche Münze unter den drei übrigen. Tritt kein Gleichgewicht ein, dann 8

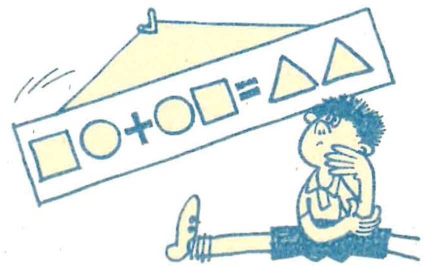
vor lauter Freude ihrer kleinen Schwester eine Tüte Bonbons.

17 Der Lehrling soll 4 Liter abmessen. Es stehen ihm aber nur diese beiden Gefäße zur Verfügung.



5

18 Ersetze die geometrischen Figuren durch Ziffern. Gleiche Figuren bedeuten immer gleiche Ziffern.
Wieviel Lösungen gibt es?



1 Von drei Ringen, die äußerlich gleich aussehen, möge ein Ring schwerer sein als die beiden anderen.
Wie findet man diesen mit Hilfe einer einzigen Wägung auf einer gewöhnlichen doppelschaligen Waage?

2 Zwei Zahlen sollen multipliziert das Produkt 24 ergeben. Dividiert man die größere Zahl durch die kleinere, so erhält man ebenfalls 24. Wie heißen die beiden Zahlen?

3 Ein Balken wurde in drei Minuten in Stücke zu je $\frac{1}{2}$ m Länge zersägt, wobei jeder Schnitt 1 Minute dauerte. Wie lang war der Balken?

4 Es werden nacheinander alle Zahlen von 1 bis 99 aufgeschrieben.
Wie oft wird die Ziffer 5 geschrieben?

5 Drei Schüler trugen ein Schachturnier aus, wobei insgesamt 6 Spiele durchgeführt wurden.
Wieviel Partien spielte jeder einzelne?

6 Wieviel Gepäckträger muß ein Forscher, der einen sechstägigen Marsch durch die Wüste antreten will, bei sich haben, wenn jeder von ihnen nur einen Nahrungsvorrat und Wasser für vier Tage für eine Person mitführen kann?

13 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$ (6 Fahrer)

14 Der Abstand zwischen zwei Bäumen beträgt jeweils 20 m.

15 Wenn der Ball das letzte Mal einen Meter hoch springt, so sprang er das vorletzte Mal zwei Meter und davor vier Meter hoch. Damit er aber vier Meter hoch springt, muß er von acht Metern herunterfallen.

16 $\frac{6}{0{,}8}=\frac{6}{\frac{8}{10}}=\frac{60}{8}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$

Annerose erhält ab sofort 7,50 M Taschengeld.

17 Erst drei Liter in den 5-Liter-Topf, dann nochmals 3 Liter hinzu. Da der Topf aber nur 5 Liter faßt, bleibt 1 Liter im 3-Liter-Topf übrig. Den Inhalt des 5-Liter-Topfes ausgießen, den verbleibenden 1 Liter hinein und nun 3 Liter dazu.

18 Es gibt 16 Lösungen, z. B. $15 \div 51 = 66, \ldots$

19

12 In einem Brotröster können gleichzeitig zwei Scheiben Brot einseitig geröstet werden. Das Rösten jeder Seite dauert 30 Sekunden. Drei Scheiben beiderseitig zu rösten dauert danach 2 Minuten.
Überlegt, wie man diese Menge in nur $1\frac{1}{2}$ Minuten rösten kann!

13 Auf einer Radrennbahn findet ein Rennen statt. Ein Fahrer fährt so, daß ein Drittel des Feldes vor ihm und die Hälfte der Teilnehmer hinter ihm ist.
Wieviel Fahrer nehmen am Rennen teil?

14 Längs eines Feldweges von 400 m Länge wollen Junge Pioniere an beiden Seiten Obstbäume anpflanzen. Von der GPG erhalten sie kostenlos 42 Stück.
In welchen Abständen werden die Bäume gepflanzt?

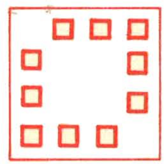
15 Wenn ich einen Ball fallen lasse (ohne zu werfen), springt er nur bis zur halben Fallhöhe. Ich lasse einen Ball zur Erde fallen und dreimal springen. Das dritte Mal springt er einen Meter hoch.
Von welcher Höhe habe ich den Ball fallen lassen?

16 Bisher hast du 6 Mark Taschengeld erhalten. Ab sofort bekommst du nur noch den 0,8. Teil deines Taschengeldes. Annerose ärgert sich zunächst, dann aber schenkte sie

befindet sich die falsche Münze unter den drei Münzen, die weniger wiegen. Auf diesem Wege finden wir drei Münzen heraus, unter denen sich die falsche Münze befindet. Nun arbeiten wir wie in Aufgabe 1.

8 4 Katzen.

9



10 Rolf angelt 8 Fische, Monika 6.

11 1. Wir nehmen an, Marie-Luise hat sich 860 gedacht. Wir fragen:
Ist die gedachte Zahl größer als 512 ($2^9 = 512$)?
– Ja.
Folglich gehört die gesuchte Zahl zu dem Intervall 512 bis 1 024 (2^{10}). Wir nehmen die Hälfte dieses Intervalls, fügen sie zu 512 hinzu und fragen:
2. Ist die gedachte Zahl größer als 768? – Ja.
Wir merken uns, daß die gesuchte Zahl zum Intervall 768 bis 1 024 gehört. Wir fügen zu 768 die Hälfte des Intervalls, d. h. 128, hinzu und fragen:

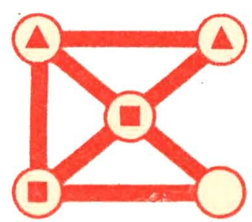
19 Wie müssen die Figuren im letzten Quadrat angeordnet werden?

20 Kryptarithmetische Aufgabe

3	+		−		= 1
×		×		−	
	×		+		= 8
−		+		+	
	+		−		= 5
= 9		= 5		= 5	

Ein feines Spiel

Jeder der zwei Spieler erhält zwei gleiche Steine. Sie werden abwechselnd gesetzt. Beim Ziehen versuchen die beiden Spieler, ihre Steine in solche Stellung zu bringen, daß der andere seine Steine nicht mehr bewegen kann. Auf unserer Zeichnung kann der Spieler mit den dreieckigen Steinen nicht mehr weiter. Versucht es auch einmal!



XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (8. bis 10. 4. 1974)

Klassenstufe 10 **Aufgaben**

1. In einem Ornament sind ein gleichseitiges Dreieck ABC, darin ein Halbkreis k_1 (mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1) und ein Kreis k_2 (mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2) so gezeichnet, daß sie den folgenden Bedingungen genügen:
(1) M_1 liegt auf der Strecke AB,
(2) k_1 berührt jede der Strecken AC und BC,
(3) k_2 berührt k_1 von außen sowie jede der Strecken AC und BC.
Man zeige, daß $r_1 > r_2$ gilt und ermittle das Verhältnis $r_1 : r_2$.

2. Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $s_a = 6$ cm, $s_b = 8$ cm! Dabei seien s_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und s_b die der Seitenhalbierenden von AC.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen s_a, s_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

3A. a) Beweisen Sie, daß man zu gegebenem reellem x_o die Zahl $x_o^2 + x_o + 1$ nach der folgenden Methode grafisch ermitteln kann: Man konstruiert in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O dasjenige Quadrat $OPEQ$, für das E die Koordinaten (1; 1) hat und Q, E auf einer Parallelen q zur x-Achse liegen. Auf q zeichnet man einen Punkt X so, daß die gerichtete Strecke EX die Länge x_o hat, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von x_o. Im Punkt X errichtet man auf der Geraden durch P und X die Senkrechte; sie schneidet die y-Achse in einem Punkt Y. Dann hat Y die zu ermittelnde Zahl $x_o^2 + x_o + 1$ als Ordinate.
b) Beweisen Sie mit diesem grafischen Verfahren, daß die durch $f(x) = x^2 + x + 1$ für alle reellen x definierte Funktion f keine reelle Nullstelle hat!

3B. Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare (x, y), die die Gleichung $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen.

4. Man untersuche, ob die Zahl
$x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$
positiv, negativ oder gleich Null ist.

5. Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare (x, y), die die folgende Gleichung erfüllen!
$\big|\,|x| + \big||y| - 3\big| - 3\,\big| = 1.$

6. Ein reguläres Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C und D und der Kantenlänge a werde durch sechs paarweise voneinander verschiedene Ebenen geschnitten, wobei jede der Ebenen von dem Tetraeder genau eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthalte.
a) Wieviel Teilkörper entstehen insgesamt, wenn man sich alle Schnitte gleichzeitig ausgeführt denkt?
b) Berechnen Sie die Volumina der einzelnen Teilkörper unter Verwendung der Kantenlänge a!

Klassenstufe 11/12

1. Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gegeben. Dann wird durch
$c_n = |\mathfrak{x} - n\mathfrak{y}|$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ (1)
eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß die Folge (1)
a) streng monoton steigend,
b) streng monoton fallend ist.
c) Für den Fall, daß die Folge (1) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_o gibt, so daß die Folge (1) die Monotonieintervalle
$1 \leqq n \leqq n_o$ und $n_o < n$ besitzt.

2. Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.
(So ist z. B. $[\pi] = 3$; $[0{,}7] = 0$; $[5] = 5$; $[-0{,}7] = -1$)
a) Man zeige, daß es zwei rationale Zahlen a, b derart gibt, daß die Zahlen $c_n = an + b - [an + b]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und daß alle $c_n \neq 0$ sind.
b) Man beweise, daß für je zwei rationale Zahlen a, b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt.

3. Es seien n_1, n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge M_1 aus $2n_1$ voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge M_2 aus $2n_2$ voneinander und von jedem der Punkte aus M_1 verschiedenen Punkten so gelegen, daß es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.
Man beweise, daß dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert:
Zerlegt g die Ebene in die Halbebene H und K (wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde), so liegen sowohl in H als auch in K jeweils genau die Hälfte aller Punkte aus M_1 und genau die Hälfte aller Punkte aus M_2.

Die Aufgaben 4, 5, 6A und 6B siehe Heft 4/74, S. I

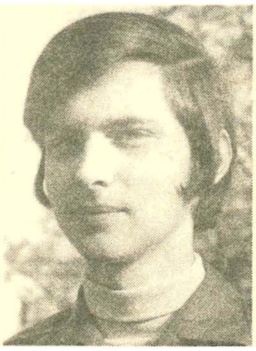
(Von den Aufgaben 10/3A und 10/3B bzw. 12/6A und 12/6B war jeweils genau eine auszuwählen und zu lösen.)

Preisträger · Einen ersten Preis erhielten

Reiner Lindemann,
C.-Blechen-OS,
Cottbus (Kl. 10)

Thomas Hoffmann,
EOS Geschwister Scholl
Apolda (Kl. 10)

Ralph Lehmann,
EOS Diesterweg
Strausberg (Kl. 11)



Reinhard Schuster,
Thomas-EOS Leipzig,
volle Punktzahl (Kl. 12)

Hans-Gert Gräbe,
ABF Walter Ulbricht,
Halle (Kl. 12)

Rückblick auf die XV. IMO

Die Teilnehmerländer der XV. IMO überreichten der DDR-Mannschaft in Moskau für die *alpha*-Leser je eine Aufgabe. *Albrecht Heß* (IMO-Teilnehmer der XV. IMO) und *Wolfgang Burmeister* (Forschungsstudent an der TU Dresden, erfolgreichster IMO-Teilnehmer der DDR) übernahmen die Bearbeitung.

VR Bulgarien

Es ist zu beweisen, daß

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}(2k+1)} = n^2$$ gilt für alle natürlichen n mit $n \geqq 1$.

CSSR

Gegeben sind ein Kreis k um S mit dem Radius r und zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q, die nicht auf dem Kreis liegen.
Konstruiere zwei parallele Geraden p und q durch P bzw. Q, die k in X bzw. Y so schneiden, daß $\sphericalangle YSX = 90°$!

DDR

Für kein natürliches $n = 1, 2, \ldots$ und natürliches m mit $m > n$ gilt:
$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m}$ ist eine natürliche Zahl.

Republik Finnland

Gegeben sei die Umfangslinie einer Ellipse. Man konstruiere mit Zirkel und Lineal die Brennpunkte.

Frankreich

Es sei p eine ungerade Primzahl. Man zeige, daß die Aussagen

(A) $1^p + 2^p + \ldots + q^p$ ist durch p^2 teilbar
(B) q oder $q+1$ ist durch p teilbar
äquivalent sind.

Großbritannien

Zwei feste Kreise werden von einem variablen Kreis in P und Q berührt, man zeige, daß zwei Punkte R_1 und R_2 existieren, so daß die Gerade PQ stets durch R_1 oder R_2 verläuft.

SFR Jugoslawien

Es seien p und q ungerade teilerfremde Zahlen und es sei

$$\frac{p-1}{2} = p^* \text{ und } \frac{q-1}{2} = q^*.$$

Man zeige:

$$p^* q^* = \left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{p^* q}{p}\right] + \left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{q^* p}{q}\right],$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner als x ist.

Republik Kuba

Man ermittle drei reelle Zahlen, die die folgenden Eigenschaften haben:
a) Ihre Summe ist gleich 35.
b) Die Summe ihrer Quadrate ist gleich 525.
c) Diese drei Zahlen bilden eine geometrische Folge, d. h., sie sind von der Form a, aq, aq^2, wobei a und q von Null verschiedene reelle Zahlen sind.
Hinweis zur Lösung: Man beachte, daß das

Bei den Internationalen Mathematik-Olympiaden von Schülern der DDR errungene Preise

IMO	1959 I.	1960 II.	1961 III.	1962 IV.	1963 V.	1964 VI.	1965 VII.	1966 VIII.	1967 IX.	1968 X.	1969 XI.	1970 XII.	1971 XIII.	1972 XIV.	1973 XV.
1. Preis	—	—	—	—	—	—	—	3	3	5	—	1	1	1	—
2. Preis	—	—	—	1	—	1	2	3	3	3	4	2	1	3	3
3. Preis	—	—	1	—	3	2	3	—	1	—	4	4	4	4	4

Bei den Internationalen Mathematik-Olympiaden von den teilnehmenden Mannschaften erzielte Gesamtpunktzahlen

IMO	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.
VR Bulgarien	131	175	108	196	145	198	93	238	159	204	189	145	39	120	96
ČSSR	192	257	159	212	151	194	159	215	159	248	170	150	55	130	149
DDR	40	38	146	153	140	196	175	280	257	304	240	221	142	239	188
SFR Jugoslawien	—	—	—	—	162	155	137	224	136	179	181	209	71	136	137
Mongolische VR	—	—	—	—	—	169	63	88	87	74	120	78	26	48	64
VR Polen	122	—	230	212	134	209	178	269	101	262	119	105	118	160	174
SR Rumänien	249	248	197	257	191	213	222	257	214	208	219	208	110	206	131
UdSSR	(111)	—	—	263	271	269	281	293	275	298	231	221	205	270	254
Ungarische VR	233	248	270	289	234	253	244	281	251	291	247	233	255	263	215
Republik Finnland	—	—	—	—	—	—	62	—	—	—	—	—	—	—	86
Frankreich	—	—	—	—	—	—	—	—	(41)	—	119	141	38	—	153
Großbritannien	—	—	—	—	—	—	—	—	231	263	193	180	110	179	164
Italien	—	—	—	—	—	—	—	—	(110)	132	—	—	—	—	—
Schweden	—	—	—	—	—	—	—	—	135	256	104	110	(43)	60	99
Belgien	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	57	—	—	—	—
Niederlande	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	51	87	48	51	96
Österreich	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	104	(82)	136	144
Kuba	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(9)	(14)	(42)

Zahlen in Klammern: Mannschaft hatte weniger als 8 Teilnehmer oder hatte nicht am gesamten Wettbewerb teilgenommen.

Polynom q^4+q^2+1 sich in zwei Faktoren zerlegen läßt, von denen der eine gleich q^2+q+1 ist.

Mongolische Volksrepublik

Drei parallel geschaltete Widerstände haben einen Gesamtwiderstand von $\frac{1}{7}\,\Omega$. Der erste Widerstand ist doppelt so groß wie der zweite, dieser wiederum ist doppelt so groß wie der dritte.
Wie groß sind die drei Widerstände?

Niederlande

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck A, B, C. Man zeige, daß es drei Punkte A_1, B_1, C_1 mit der Eigenschaft gibt, daß

(1) $A_1 \in AB;\quad B_1 \in BC;\quad C_1 \in CA$

(2) $A_1B_1 \perp AB;\quad B_1C_1 \perp BC;\quad C_1A_1 \perp CA$

gilt.

Österreich

Es seien a und b zwei teilerfremde natürliche Zahlen, und t sei Teiler von a^2+b^2. Man beweise, daß sich t in der Form x^2+y^2 mit natürlichen Zahlen x, y darstellen läßt.

VR Polen

Es sei $p_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades und es gelte

$p_n(1)=r^1$

$p_n(2)=r^2$

$p_n(n)=r^n$, dabei sei r eine reelle Zahl.

Es ist $p_n(n+1)$ zu berechnen.

SR Rumänien

Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1. ε_i seien reelle Zahlen aus dem Intervall $[-1;1]$ $(i=1,\ldots,n)$.
Für welche ε_i $(i=1,\ldots,n)$ nimmt der Ausdruck

$$E=\left|\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n}\right|+\left|\varepsilon_2-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n}{n}\right|+\ldots+\left|\varepsilon_n-\frac{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1}}{n}\right|$$

sein Maximum an?

Schweden

Es seien a, b, c paarweise teilerfremde natürliche Zahlen.
Man gebe eine Lösung der Gleichung $x^a+y^b=z^c$ in natürlichen Zahlen an!

Sowjetunion

Es seien n und m natürliche Zahlen, die beide nicht kleiner als 2 sind. Es ist zu beweisen, daß n^m nicht in Form einer Summe

$$\frac{n^m-1}{k_1}+\frac{n^m-1}{k_2}+\ldots+\frac{n^m-1}{k_p}$$

darstellbar ist,
wobei $k_i|m$ und $k_i<m$ gelten soll.

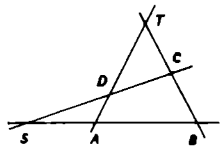
Ungarische VR

Es sei $\{a_n\}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit der Eigenschaft $a_{m-n} \leqq a_m+a_n$. Dann existiert $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Werner Mögling

Sektion Mathematik/Physik
der Pädagogischen Hochschule Erfurt/Mühlhausen

▲1228▲ Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$ so, daß sich die durch die gegenüberliegenden Seiten AB und CD bestimmten Geraden im Punkt S, die durch die gegenüberliegenden Seiten BC und DA bestimmten Geraden im Punkt T schneiden (siehe Bild).



Es ist zu beweisen, daß die Umkreise der Dreiecke ADS, BCS, ABT, CDT durch einen gemeinsamen Punkt P verlaufen.
Danach ist zu untersuchen, ob dieser Sachverhalt auch für nichtkonvexe Vierecke gilt (für Schüler ab Klasse 7).
Außerdem wird nach der geometrischen Bedeutung von P gefragt, die man erkennt, wenn zum Beweis ähnliche Dreiecke und damit Ähnlichkeitstransformationen verwendet werden (für Schüler ab Klasse 9).

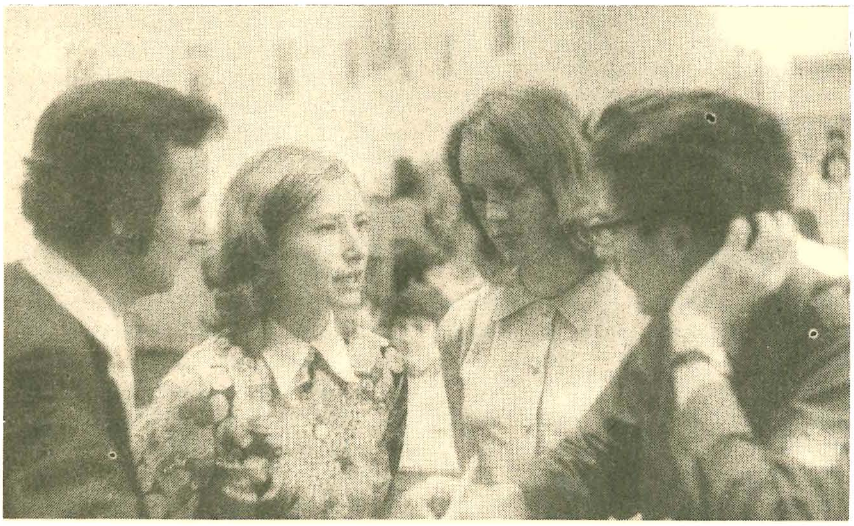
Mathematik in Erfurt

Mit der Gründung des Lehrstuhls Mathematik im Jahre 1957 begann am damaligen *Pädagogischen Institut* in Erfurt die Ausbildung von Lehrern für das Fach Mathematik. Seitdem haben mehr als 2000 Absolventen das Mathematikstudium in Erfurt erfolgreich beendet.
An unserer Hochschule werden jährlich etwa 600 Studenten immatrikuliert, die in vier Jahren als Lehrer in zwei Unterrichtsfächern, einem Haupt- und einem Nebenfach, ausgebildet werden. Mathematik als Hauptfach ist mit Physik oder Kunsterziehung, Mathematik als Nebenfach mit Physik oder Chemie gekoppelt.
In den ersten beiden Studienjahren, dem sogenannten *Grundstudium*, erfolgt in Mathematik eine Ausbildung in den Disziplinen Analysis, Algebra, Geometrie und numerische Mathematik, die in einem zusammenhängenden Kurs vermittelt werden. Hier erwirbt der Student die für einen guten Mathematikunterricht notwendigen Fachkenntnisse und die Voraussetzungen zur selbständigen Beschäftigung mit mathematischen Problemen. Während die Ausbildung im Nebenfach im wesentlichen nach den ersten beiden Studienjahren abgeschlossen ist, beginnt für Studenten mit dem Hauptfach Mathematik nach dem Grundstudium das sogenannte *Fachstudium*.
Hier wird der Unterricht in numerischer Mathematik, verbunden mit einer Ausbildung an Rechenautomaten, fortgesetzt; daneben werden Wahrscheinlichkeitsrechnung, Grundlagen und Geschichte der Mathematik gelehrt. Außerdem erhält der Student eine vertiefte Ausbildung nach Wahl in Algebra, Analysis oder Geometrie, die ihn speziell auf die Anfertigung der Diplomarbeit vorbereitet. Die Thematik wird so gewählt, daß der Student die Möglichkeit hat, mit seiner Arbeit einen Beitrag zur mathematischen Forschung zu leisten. Außer Haupt- und Nebenfach umfaßt das Studium noch die Fächer Marxismus-Leninismus, Pädagogik, Psychologie und Methodik. Auch Sport und Fremdsprachen sind Bestandteile der Ausbildung.

Wegen des hohen Bedarfs sind vor allem in den Kombinationen Mathematik/Physik und Physik/Mathematik die Voraussetzungen für die Zulassung zum Studium günstig.
Für Absolventen der 10. Klasse der Oberschule besteht die Möglichkeit, unmittelbar nach Beendigung der Schulzeit einen einjährigen Vorbereitungslehrgang in der Fachkombination Physik/Mathematik zu besuchen und daran anschließend mit dem Studium zu beginnen.
Oft wird von Schülern die Frage nach der Vorbereitung auf das Mathematikstudium an unserer Hochschule gestellt. Die Voraussetzung dazu ist die sichere Beherrschung des im Schulunterricht vermittelten Wissens nicht nur der Abiturstufe, sondern aller Klassen, und die Fähigkeit zur selbständigen Bearbeitung angemessener Aufgaben und Probleme des Schulunterrichts, wie sie bei den mathematischen Olympiaden und in der Zeitschrift *alpha* gestellt werden. Auch auf die bereits jetzt in ansehnlicher Zahl vorliegenden Bände der *Mathematischen Schülerbücherei* sei in diesem Zusammenhang hingewiesen (siehe 4. Umschlagseite, d. Red.). *W. Mögling*

Mathematische Schülergesellschaft

Am 5. Juli 1973 lud die *Mathematische Schülergesellschaft* (MSG) der Humboldt-Universität zu einem Kolloquium ein. Zwei Ziele hatte die von über 100 Jugendlichen sowie zahlreichen Wissenschaftlern und Vertretern der demokratischen Öffentlichkeit besuchte Veranstaltung im *Weierstraß*-Saal der Universität:
Die *Jungen Mathematiker* legten Rechenschaft ab über die in den letzten drei Jahren geleistete außerunterrichtliche Arbeit. Zum zweiten wollten sie die in den Zirkeln diskutierten Probleme, die besonders interessant waren, vor einem großen Kreis durch ihre besten Vertreter vortragen, zur Diskussion stellen, verteidigen.



Leitungskollektiv der MSG

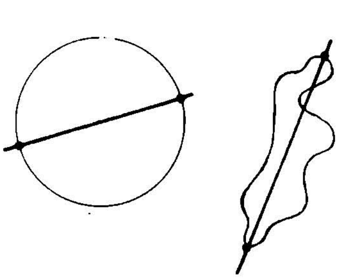
Stellvertretend für die zahlreichen Beiträge wollen wir unseren Lesern zwei vorstellen. Zum ersten schreibt Dipl.-Math. *Manfred Brandt*, ehemaliger Teilnehmer der VI. und VII. IMO, jetzt Assistent an der Humboldt-Universität: „Ich betreue eine Gruppe von Schülern der EOS *Heinrich Hertz*. Wir treffen uns alle zwei Wochen und lösen gemeinsam mathematische Probleme. Zu den *Jungen Mathematikern* gehört auch *Christian*, der in der AG wie im Kolloquium mit seinen Problemen eine ungewohnte geometrische Fragestellung anreißt.

Christian Horn

Über die Zerlegung von Figuren

Bei einem Kreis spricht man ganz selbstverständlich von seinem Durchmesser. Es ist der maximale Abstand, den zwei Punkte des Kreises miteinander haben können. Beim Kreis gibt es aber beliebig viele solcher Punktpaare: auf jeder Geraden durch den Mittelpunkt befinden sich zwei solcher, diametral gegenüber liegender Punkte. Der Begriff Durchmesser läßt sich jedoch auf beliebige Figuren erweitern, und sogar sinnvoll! Auch hier gibt es ja wenigstens zwei Punkte, die maximalen Abstand voneinander haben.
Um mit dem Begriff des Durchmessers besser arbeiten zu können, wollen wir ihn schnell noch exakt definieren. (*Hinweis:* unter $\varrho[A, B]$ versteht man den Abstand der Punkte A und B, also eine [reelle] Zahl.)

Bild 1



Definition: Der Durchmesser d einer Figur F ist eine solche reelle Zahl, daß für alle Punkte $M, N \in F$ gilt:

$$\varrho(M, N) \leq d$$

und (mindestens) zwei Punkte A und B in F existieren mit $\varrho(A, B) = d$. Wir wollen jetzt Zerlegungen von Figuren betrachten. Nehmen wir zum Beispiel den Kreis. Wie man sich auch anstellt, bei jeder Zerlegung des Kreises in zwei Teile befinden sich in wenigstens einem dieser Teile zwei gegenüberliegende Punkte mit dem Abstand d. Dieser Teil hat dann offensichtlich den Durchmesser d. Wenn man sich ungeschickt anstellt, haben sogar beide Teile den Durchmesser d.

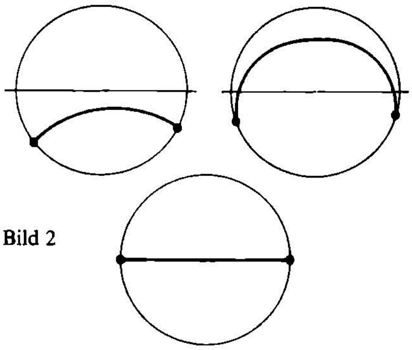


Bild 2

Der Ungeschicklichkeit sind aber dadurch Grenzen gesetzt, daß der Durchmesser einer Figur durch Zerlegung nicht größer werden kann. Wir wollen daher nur solche Zerlegungen betrachten, bei denen alle Teilfiguren einen Durchmesser kleiner als d haben.
Beim Kreis reicht offensichtlich eine Zerlegung in drei Teile schon aus. Bei Rechteck und Quadrat klappt es sogar mit einer Zerlegung in zwei Teilfiguren.

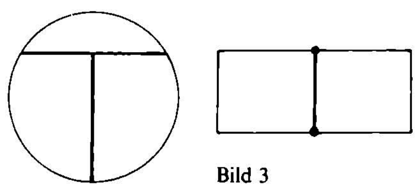
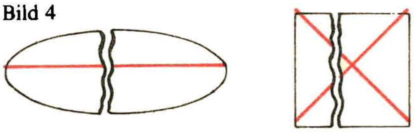


Bild 3

Man schreibt dafür a(Quadrat) = 2.
$a(F)$ gibt allgemein die minimale Anzahl von Teilfiguren an, in die man eine Figur F vom Durchmesser d zerlegen muß, damit alle Teilfiguren einen Durchmesser kleiner als d haben.
Wie durch die Schreibweise angedeutet, ist diese Anzahl eine Funktion der Figur (zu jeder Figur gibt es eben genau eine minimale Anzahl von Teilfiguren); genauer gesagt eine Funktion von charakteristischen Parametern dieser Figur, denn $a(F)$ ist z. B. völlig unabhängig von der Größe der Figur F.
Jetzt möchte man $a(F)$ für möglichst umfassende Klassen von Figuren bestimmen oder abschätzen.

Wir hatten vorhin schon mit derartigen Überlegungen angefangen. Für Quadrate gilt ebenso wie z. B. für Rechtecke, Drachenvierecke, Parallelogramme, Ellipsen $a(F)=2$. Alle diese Figuren haben eins gemeinsam, sie besitzen jeweils nur ein bis zwei innere Strecken (d. h., Strecken, die zwei Punkte aus F – in diesem Falle Randpunkte – verbinden, wobei diese Strecken jedoch nicht vollständig in F verlaufen müssen, da wir nicht die Konvexität von F gefordert haben) von der Länge des Durchmessers dieser Figur. Unter diesen Umständen ist es einfach, alle diese Strecken der Länge d durch eine Zerlegungslinie zu schneiden, wodurch automatisch die beiden Teilfiguren dann einen kleineren Durchmesser haben.

Bild 4



Nun kann die Zerlegungslinie bei komplizierteren Figuren auch etwas krumm werden (muß sie aber nicht!).
Zerteilt man solch eine innere Strecke von der Länge des Durchmessers jedoch zweimal (oder allgemein: in gerader Anzahl) durch eine Zerlegungslinie, so liegen Anfangs- und Endpunkt dieser inneren Strecke in ein und derselben Teilfigur. Diese Teilfigur hat dann wieder den Durchmesser d. Das wollen wir aber nicht. So muß man also versuchen, alle inneren Strecken von der Länge d des Durchmessers der Gesamtfigur durch eine Zerlegungslinie so zu schneiden, daß die Anzahl der Schnittpunkte ungerade wird. So kann man sehr leicht alle n-Ecke zerlegen. Komplizierter wird es schon bei Figuren, die unendlich viele solcher inneren Strecken besitzen. Das sind Figuren wie der Kreis oder solche, deren Rand zumindest teilweise einem Kreisbogen entspricht.
Hier kommt man meist mit einer Zerlegung in zwei Teile nicht mehr aus.
Aber gibt es auch noch Figuren, die man selbst mit einer Zerlegung in drei Teile nicht dazu bringen kann, daß alle Teilfiguren einen kleineren Durchmesser haben? Man möchte meinen nein. Doch ein richtiger Mathematiker verläßt sich in solchen Fragen nicht auf sein Gefühl. Man müßte die Vermutung also beweisen. Vielleicht ist dazu der unten abgedruckte Satz eine Hilfe. Aus dem Bild ist ersichtlich, daß man ein regelmäßiges Sechseck, bei dem der Abstand der jeweils parallelen Geraden gleich d ist, in Teilfiguren mit einem Durchmesser jeweils kleiner als d (wegen der Dreiecksungleichung) zerlegen kann.

Christian Horn beim Vortrag

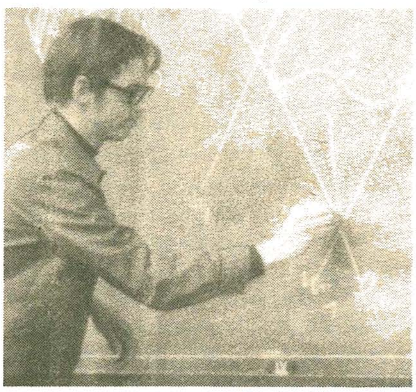
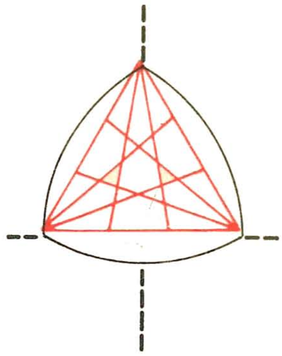


Bild 5



Renteaux-Dreieck
drei Bögen von Kreisen mit dem Radius d

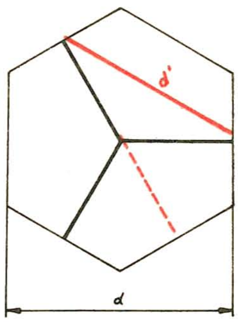


Bild 6

Es genügt also folgenden Satz zu beweisen (für Leute, die nachschlagen wollen: er wurde 1920 von *Pal* aufgestellt: Über ein elementares Variationsproblem, Danske Videnskab, Selkab., Math,-Fy. Meddel. 3, No. 2 (1920); allerdings ungarisch):
Satz: Jede ebene Figur mit dem Durchmesser d kann in ein regelmäßiges Sechseck eingeschlossen werden, bei dem der Abstand der gegenüberliegenden Seiten gleich d ist.
Der Beweis läßt sich aber auch führen, ohne die Bibliotheken unnötig zu strapazieren.

Michael Happ/Gerd Arnold

Eine Aufgabe mit verschiedenen Lösungen

Aufgabe: Auf einer 300 m langen kreisförmigen Aschenbahn laufen zwei Läufer (A und B) vom selben Punkt ab. Laufen sie in gleicher Richtung, kommt der eine (B) eine halbe Minute später beim Start an als der andere (A); laufen sie in entgegengesetzter Richtung, begegnen sie einander nach 20 Sekunden.
Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Läufer!

1. Lösung: Es seien mit v_A, v_B die Geschwindigkeiten der Läufer und mit t_A, t_B die Zeiten für je eine Umrundung der Aschenbahn durch die Läufer bezeichnet. Dann folgt unmittelbar

$v_A+v_B=\frac{300}{20}=15$ bzw. $v_B=15-v_A$

denn sie begegnen einander nach 20 Sekunden, und weiter $t_B=t_A+30$; denn B benötigt 30 Sekunden mehr als A. Weiter erhalten wir

$t_A=\frac{300}{v_A}$ und $t_B=t_A+30=\frac{300}{v_B}$ woraus sofort

$t_A=\frac{300}{15-v_A}-30$ folgt.

Wir müssen also folgende Gleichung lösen:

$$\frac{300}{v_A}=\frac{300}{15-v_A}-30$$

Es ergibt sich

$v_A{}^2+5v_A-150=0$ woraus wir die Werte

$v_{A1}=-30$ (entfällt, da $v<0$ nicht sinnvoll) und $v_{A2}=10$ erhalten.
Mit $v_A=10$ ergibt sich für $v_B=5$.
Antwort: Die Geschwindigkeiten der beiden Läufer betragen

$$10\frac{m}{s}(A) \text{ und } 5\frac{m}{s}(B).$$

2. Lösung: Laut Aufgabenstellung ist A der schnellere Läufer. Wenn A die 300 m gelaufen ist, dann muß B in 30 s noch eine bestimmte Strecke x zurücklegen, um ebenfalls 300 m gelaufen zu sein. Beide Läufer legen in 20 s zusammen 300 m zurück. Daraus folgt, daß sie in 30 s genau 450 m zurücklegen. Davon läuft B x Meter; A läuft in dieser Zeit $(450-x)$ Meter.
Nun gilt für den Weg von A: $450-x=300+(150-x)$ und für den Weg von B: $x=(300-x)-2(150-x)$.
Betrachten wir den Term $150-x$.
Fall 1: $150-x>0$
Es gilt $\frac{300+y}{v_A}=\frac{(300-x)-2y}{v_B}$,
wobei zur Vereinfachung $y=150-x$ gesetzt wurde. Daraus ergibt sich ein Widerspruch, da A nicht mehr als 300 m gelaufen sein kann, wenn B in der gleichen Zeit weniger als $(300-x)$ m läuft; denn laut Voraussetzung laufen A 300 m und B $(300-x)$ m in der gleichen Zeit, d. h. Fall 1 ist nicht zutreffend.
Fall 2: $150-x<0$
Auch hier ergibt sich ein Widerspruch, analog Fall 1. Dann ist nur noch $150-x=0$ möglich, also $x=150$. Daraus folgt für

$$v_B=\frac{150}{30}=5$$

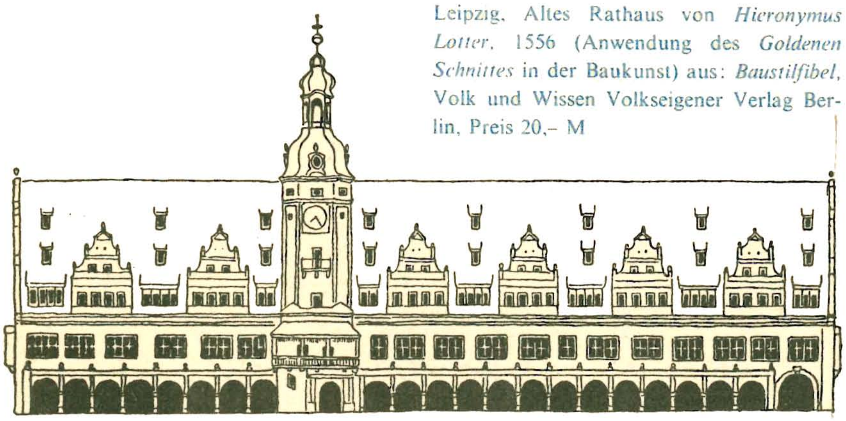
$$v_B=5$$

Und für v_A dann $\frac{300}{30}=v_A=10$
Antwort: Die Geschwindigkeiten der beiden Läufer betragen

$$5\frac{m}{s}(B) \text{ und } 10\frac{m}{s}(A).$$

Der Goldene Schnitt und die Zahl τ

In diesem Beitrag will ich euch mit einer sehr interessanten Zahl oder besser mit einem Teilungsverhältnis, das vielfältige und verblüffende Eigenschaften besitzt, bekannt machen. Schon der bekannte Astronom und Mathematiker *Johannes Kepler* (1541 bis 1630) beschrieb es mit Worten großer Begeisterung: „Unter den stetigen Proportionen existiert eine einzige ausgezeichnete Art, die göttliche Proportion, wobei von den drei Größen die zwei kleineren zusammen die größere ergeben, oder wo ein Ganzes so in zwei Teile zerlegt wird, daß zwischen den Teilen und dem Ganzen eine stetige Proportion entsteht.



Leipzig, Altes Rathaus von *Hieronymus Lotter*, 1556 (Anwendung des *Goldenen Schnittes* in der Baukunst) aus: *Baustilfibel*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, Preis 20,– M

Eine Eigentümlichkeit dieser Proportion besteht darin, daß aus dem größeren Teil und dem Ganzen wieder eine gleiche Proportion gebildet werden kann; was vorher der größere Teil war, wird dabei der kleinere; was vorher das Ganze war, wird der größere Teil, und die Summe beider spielt nun die Rolle des Ganzen. Das geht unendlich weiter, immer bleibt die göttliche Proportion bestehen."

Vielleicht wird seine Begeisterung und die vieler anderer Mathematiker für die Problematik des *Goldenen Schnittes* auch uns ergreifen, wenn wir uns etwas mit einigen Eigenschaften dieser Teilung bekannt machen. So will ich in Form kurzer Denkanstöße einige Eigenschaften der stetigen Teilung und der Zahl τ aufzeigen, die euch zu selbständigem Nachdenken und Weitersuchen anregen sollen.

Eine Strecke a heißt nach dem *Goldenen Schnitt* – oder stetig – geteilt, wenn ihr großer Abschnitt x mittlere Proportionale der Gesamtstrecke und des verbleibenden Abschnittes ist.

$$a : x = x : (a-x) \qquad (1)$$

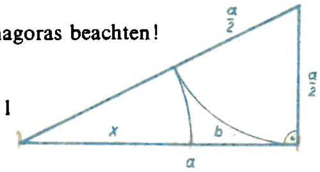
Für $b=(a-x)$ gilt:

$$a : x = x : b. \qquad (2)$$

Die nachfolgenden Konstruktionen beschreibt und beweist ihr bitte selbst!

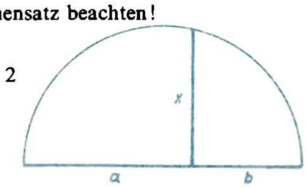
Pythagoras beachten!

Bild 1



Höhensatz beachten!

Bild 2



Beim *Goldenen Schnitt* sind a, x und b Glieder einer geometrischen Folge, wobei x geometrisches Mittel von a und b ist. Wir wollen nun die Länge der Strecke x aus Gleichung (1) gleich eins setzen, und die Größe von a ermitteln. Es gilt:

$$a : 1 = 1 : (a-1) \qquad (3)$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Uns soll aber nur der positive Wert $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ interessieren. Mit ihm haben wir eine wichtige algebraische Zahl mit erstaunlichen Eigenschaften gefunden. Sie wird τ (nach dem griechischen Wort $\tau o\mu\eta$ – „Schnitt") genannt.

Die erste Eigenschaft finden wir, wenn wir Gleichung (3) mit $a=\tau$ durch τ dividieren. Es bleibt:

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}. \qquad (4)$$

Für das τ im Nenner können wir nach Beziehung (4) die ganze linke Seite einsetzen:

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\tau}}.$$

Wenn wir das fortführen, erkennen wir, daß wir einen Kettenbruch gefunden haben, in dem nur die Zahl 1 periodisch wiederkehrt.

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Die Näherungswerte dieses Kettenbruches haben überraschende Eigenschaften. So erhalten wir:

$$\tau_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2; \quad \tau_2 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2};$$

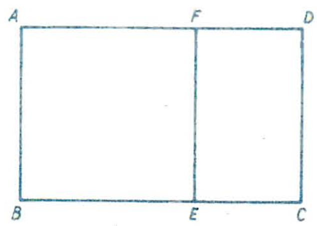
$$\tau_3 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}} = \frac{5}{3}$$

Wenn ihr genau hinseht und mit der Folge der ***Fibonaccischen Zahlen*** vertraut seid, erkennt ihr, daß jeder Näherungswert der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonaccischer Zahlen ist. Für die geschulteren Leser unter euch können wir auf dieser Erkenntnis aufbauend die Zahl τ auch definieren als:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \tau; \quad f(i) \text{ – Fibonaccische Zahlen.} \qquad (5)$$

Weiterhin sei kurz erwähnt, daß in expliziten Formeln für die Fibonaccischen Zahlen die Zahl τ eine wesentliche Rolle spielt. Doch nun wieder zu anschaulicheren geometrischen Sachverhalten zurück. Als erstes sei ein Rechteck gegeben, in dem sich die Seiten wie $\tau : 1$ verhalten (goldenes Rechteck).

Bild 3



Zeichnet das Quadrat $ABEF$ ein, und untersucht das verbleibende Rechteck $FECD$! Wir stellen fest:

Wird von einem goldenen Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge der kürzeren Rechteckseite abgetrennt, so verbleibt wieder ein goldenes Rechteck (die Seiten verhalten sich wie $\tau : 1$). Der Beweis ergibt sich aus Gleichung (4).

Damit sind aber die bemerkenswerten Eigenschaften des stetigen Teilungsverhältnisses noch keineswegs erschöpft. Vielleicht habt ihr schon einmal etwas über die Konstruktion eines regelmäßigen Zehn- oder Fünfecks allein mit Zirkel und Lineal gehört. Dabei nutzt man die Tatsache aus, daß die Seite eines regelmäßigen Zehnecks gleich dem großen Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius ist. Um diesen Sachverhalt zu beweisen, betrachten wir das Bestimmungsdreieck $\triangle AMB$ eines Zehnecks:

Der Winkel $\sphericalangle BMA$ ist $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ groß. Aus dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck und der Tatsache, daß es sich bei den Winkeln $\sphericalangle MBA$ und $\sphericalangle MAB$ um Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks handelt, folgt weiter, daß $\sphericalangle MAB$ und $\sphericalangle ABM$ beide 72° groß sind. Zeichnet nun die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle MAB$. Sie teilt $\sphericalangle MAB$ in zwei Winkel mit einer Größe von je 36° und hat mit der Seite MB den Punkt D gemeinsam. Daß es sich bei den Dreiecken $\triangle ABM$ und $\triangle ABD$ um zwei ähnliche Dreiecke handelt, habt ihr sicher schon erkannt. (Führt bitte den Beweis selbständig!) Es gilt darum:

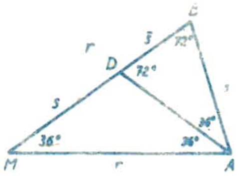
$$\overline{MA} : \overline{BA} = \overline{BA} : \overline{BD}$$

oder anders geschrieben:

$$r : s = s : \bar{s} \qquad (6)$$

s ist dabei der größere Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius. $\bar{s}$ ist die Differenz von r und s.

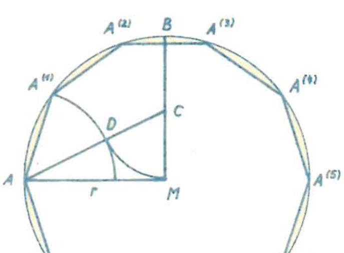
Bild 4



Da wir die Konstruktion des *Goldenen Schnittes* bereits kennen, kann jetzt jeder von euch ein regelmäßiges Zehneck in einem Kreis konstruieren:

Zeichnet einen Kreis mit dem Radius r um M und teilt r stetig! (Errichtet auf dem Radius AM im Punkt M die Senkrechte BM!) Halbiert BM und verbindet den entstandenen Punkt C mit A. Auf dieser Strecke AC tragt ihr schließlich die Länge der Strecke MC ab. Die auf AC verbleibende Strecke AD ist dann der größere Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius und ist damit die gesuchte Länge einer Zehneckseite mit dem Umkreisradius r. Den Beweis dieser Konstruktion habt ihr sicher schon selbst geführt, als ihr die Konstruktion von Bild 1 bewiesen habt.) Zur Konstruktion eines regelmäßigen Zehnecks braucht ihr nun nur die Länge des größeren Abstandes des nach dem *Goldenen Schnitt* geteilten Umkreisradius in den Zirkel zu nehmen und diese von einem festen Punkt beginnend auf der Kreisperipherie abzutragen. (Bild 5)

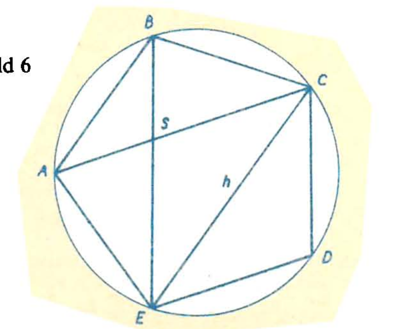
Bild 5



Mit dieser Konstruktion haben wir auch eine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks gefunden. Dazu verbinden wir nur jeden zweiten der 10 auf der Kreisperipherie konstruierten Punkte (Bild 6). Doch betrachten wir das konstruierte Fünfeck etwas näher. Durch die Anwendung der Ähnlichkeitssätze erhalten wir:

$$\overline{EC} : \overline{AB} = \overline{ES} : \overline{SB} \qquad (7)$$

Bild 6



Da weiter gilt:

$\overline{ES} = \overline{DC}$ (Gegenseiten eines Rhombus) (7a)

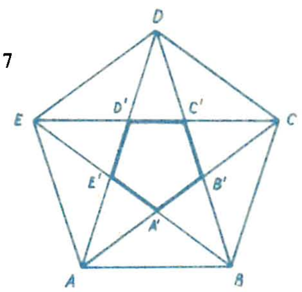
und $\overline{DC} = \overline{AB}$ (Seiten eines regelmäßigen Fünfecks), können wir die Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\overline{EC} : \overline{ES} = \overline{ES} : \overline{SB} = \tau : 1 \qquad (8)$$

Im regelmäßigen Fünfeck teilen sich also die Diagonalen stetig. Betrachten wir noch die Beziehung (7a), so stellen wir fest, daß die Seite eines Fünfecks gleich dem größeren Abschnitt einer nach dem *Goldenen Schnitt* geteilten Diagonale dieses Fünfecks ist.

Untersucht nun das Seitenverhältnis der beiden Fünfecke $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ im Bild 7!

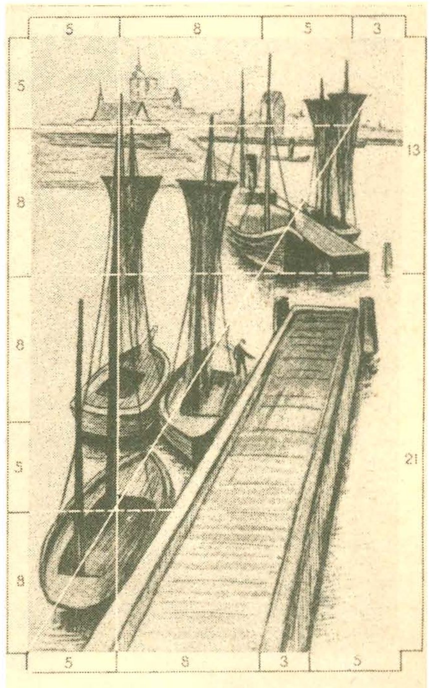
Bild 7



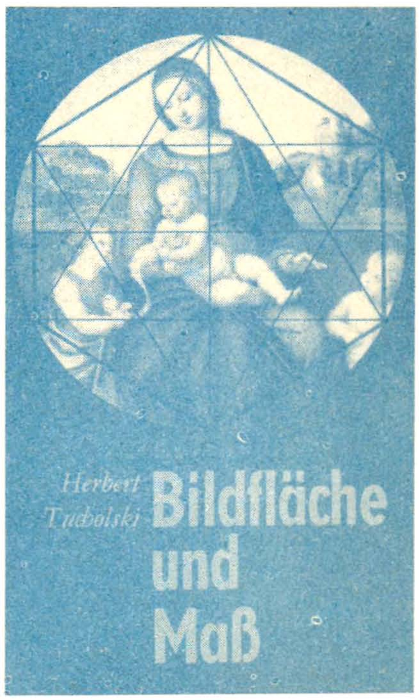
Wird der *Goldene Schnitt* in der bildenden Kunst oder in der Gestaltung unserer Umwelt angewandt, so vermittelt er ein ästhetisches Gefühl der Ausgewogenheit und der Vollkommenheit. Darum finden wir seine praktische Anwendung sehr häufig im täglichen Leben. So stehen die Seiten von vielen, besonders älteren Tischen, Türen, Bilderrahmen und Büchern im Verhältnis $\tau : 1$. Die stetige Teilung fand schon im Altertum vor allem in der Kunst und in der Ästhetik ihre Anwendung. Sie galt als Ideal, das es anzustreben galt (finden sich in alten Bildern Horizontalen, so teilen diese die eine Bildseite häufig stetig). So wurde im Mittelalter versucht, das Verhältnis des *Goldenen Schnittes* auch in den Proportionen des menschlichen Körpers und in denen der Natur überhaupt wiederzufinden.

Zum Schluß sei nur noch erwähnt, daß unsere kleine Aufzählung der Eigenschaften des *Goldenen Schnittes* nicht vollständig ist und nur die einfachsten dieser Eigenschaften enthält. So werdet ihr beim selbständigen Weitersuchen sicher noch andere interessante Sachverhalte erkennen und untersuchen können.

Ch. Meinel

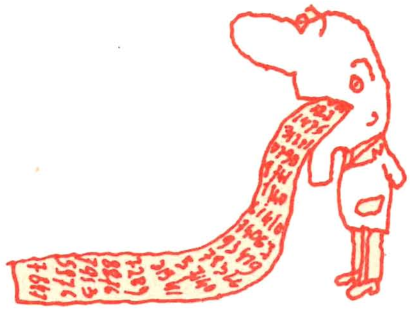


Radierung von *Herbert Tucholski: Stralsund* (Anwendung des *Goldenen Schnittes* in der bildenden Kunst) aus: *Bildfläche und Maß*, VEB Verlag die Kunst, Dresden Preis 4,50 M



In freien Stunden alpha heiter

international



Avoine, Paris

логическая задача

Das Damespiel

Zwei Schüler, A und B, beschließen, unter folgenden Bedingungen einen Wettkampf im Damespiel auszutragen.

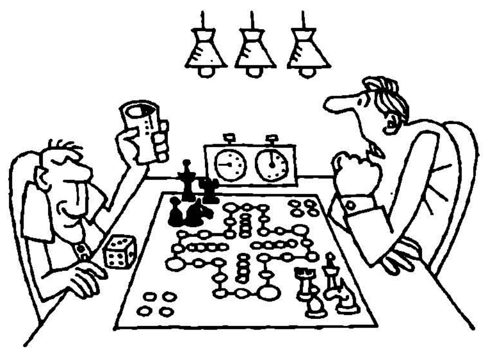
a) Es sollen zehn Partien gespielt werden (die unentschiedenen sollen nicht gezählt werden).

b) Nach jeder Partie soll dem Sieger ein Punkt zuerkannt werden, und wenn er dabei mehr als eine Dame „weggenommen hat", bekommt er nicht einen, sondern zwei Punkte.

c) Sieger ist derjenige, der die meisten Punkte hat.

Wann war das Turnier zu Ende, wenn man weiß, daß die Schüler zusammen 13 Punkte erworben haben? Der Sieger war B, obwohl er weniger Partien gewonnen hatte als A. Wieviel Partien gewann jeder Teilnehmer des Damespiels?

K. A. Rupassow, Tamtow (UdSSR)



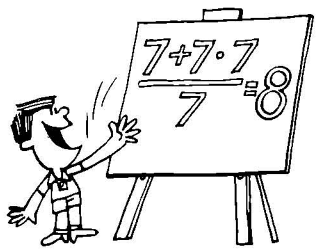
Wer löst diese anspruchsvolle kryptarithmetische Aufgabe?

```
SOPHAO  | TET
 HPOA   | VUI
  UPUO
   O
```

Toán học và tuổi trẻ, 7/8/1972, Hanoi (DRV)

Aritmetica

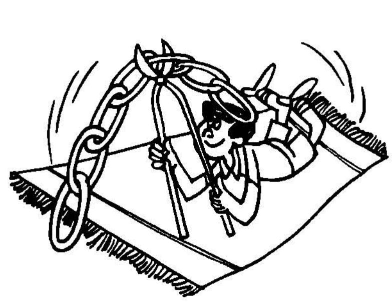
Stellt die Zahlen 1, 2, 3, . . . , 8, 9, 10 zusammen, indem ihr für jede 4mal die Ziffer 7 verwendet! Zum Beispiel



Eugen Rusu, Bukarest

Third eastern african regional contest

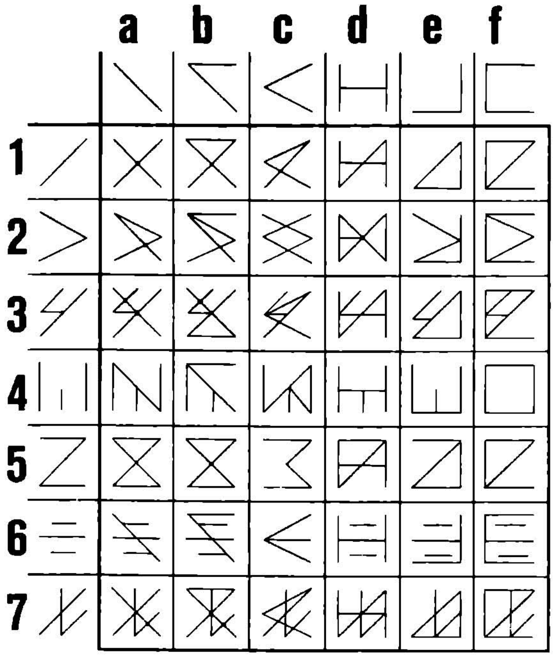
Wenn von einer aus sieben Gliedern bestehenden offenen Kette das dritte Glied genau in der Mitte durchgezwickt wird, verbleiben zwei einzelne halbe Glieder, zwei zusammenhängende und nochmals vier zusammenhängende Glieder. Nun ist es möglich, ein Kettenglied (die beiden Hälften des geteilten Gliedes), zwei Kettenglieder, drei $(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ oder vier oder fünf $(4+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$ oder sechs $(2+4)$ oder sieben (aller) Kettenglieder als Wägestücke zu benutzen.



Welche zwei Glieder einer aus 23 Gliedern bestehenden offenen Kette sind in der Mitte durchzuzwicken, damit 1 oder 2 oder 3 oder 4 oder . . . 22 oder 23 Glieder dieser Kette als Wägestücke benutzt werden können?

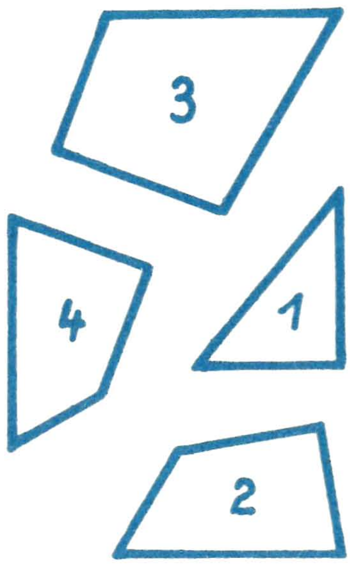
H. Bartel, Mbeya, Tansania

Neun falsche Felder



Auf der vorliegenden Verknüpfungstabelle wird jeweils ein Zeichen der ersten Spalte (senkrecht) mit der ersten Zeile zusammengesetzt (waagerecht). Bei der Verknüpfung von Zeichen sind dem Zeichner 9 Fehler unterlaufen. So ist z. B. die Figur 3 b falsch. Findest du die Fehler?

Pi, 1/72, Wien



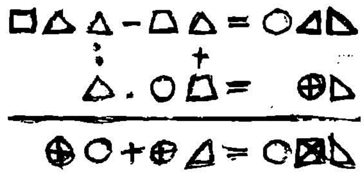
Twee legpuzzles in een

Übertrage die vier vorgegebenen Figuren auf ein Stück Papier und schneide sie aus! Es ist möglich, aus den vier Figuren ein Quadrat zu legen. Man kann aber auch aus ihnen ein gleichseitiges Dreieck zusammensetzen.

Pythagoras-Festival, Groningen (Niederlande)

Занимателна МАТЕМАТИКА

Ersetze die geometrischen Figuren durch Ziffern so, daß wahre Aussagen entstehen!

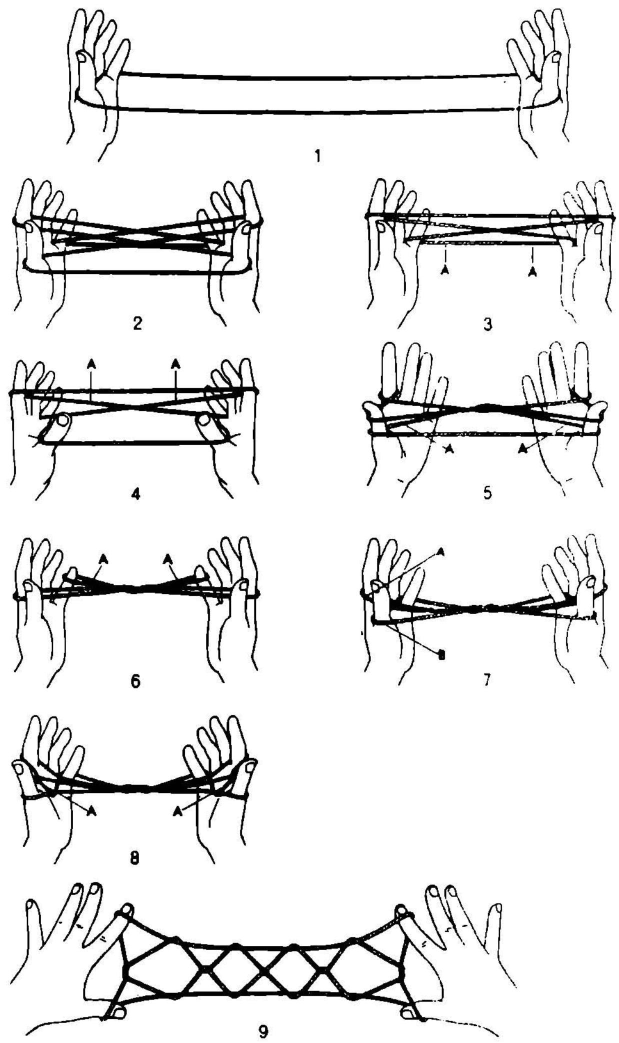


Математика, 4/71, Sofia

String figures and how to make them

Der Leser möge ein zwei Meter langes Stück weiche Schnur nehmen, die Enden verknoten und sehen, ob er die Figur, die sogenannte *Jakobsleiter*, meistern kann.

Caroline Furness Jayne, London



Lösungen

▲5▲1165 a) Es ist eine rechteckige Bodenfläche von 234 m Länge und 1,5 m + 1,5 m = 3 m Breite mit Platten auszulegen.

3 m = 300 cm; 234 m = 23 400 cm.

Aus 300 : 25 = 12 und 23 400 : 25 = 936 und $12 \cdot 936 = 11\,232$ folgt, daß 11 232 Platten benötigt werden.

b) In einer Arbeitsstunde verlegen die sechs Arbeiter zusammen $6 \cdot 24$ Platten, also 144 Platten. Aus 11 232 : 144 = 78 folgt, daß die Arbeit von den sechs Arbeitern in 78 Arbeitsstunden geschafft wird.

▲5▲1166 Aus 80 Pf + 20 Pf = 100 Pf = 1 M und 10 M − 1 M = 9 M folgt, daß für den Tuschkasten und den Zirkel zusammen 9 M zu zahlen sind. Der Tuschkasten möge x M kosten; dann gilt

$$x + 2x = 9,\ 3x = 9,\ x = 3.$$

Der Tuschkasten kostet 3 M, der Zirkel $2 \cdot 3$ M = 6 M.

W 5 ■ 1167 Es seien x Lehrer in der Unterstufe tätig; dann unterrichten $2 \cdot x$ Lehrer in der Mittelstufe und $2 \cdot x$ Lehrer in der Oberstufe. Insgesamt sind an der Schule $x + 2 \cdot x + 2 \cdot x = 5 \cdot x$ Lehrer tätig. Aus $20 < 5 \cdot x < 30$ folgt $x = 5$. In der Unterstufe sind somit 5, in der Mittel- und Oberstufe jeweils 10 Lehrer tätig, d. h., an der Schule unterrichten insgesamt 25 Lehrer.

W 5 ■ 1168 Aus 1974 − 46 = 1927 folgt, daß der Kollege Müller im Jahre 1927 geboren wurde. Es sei x die Tageszahl seines Geburtstages; dann gilt

$$x \cdot 3x = 27,\ 3x^2 = 27$$
$$x^2 = 9,\ x = 3.$$

Die Geburt fiel auf den 3. September 1927.

W 5*1169 Es sei z die ursprüngliche zweistellige natürliche Zahl. Da ihre Quersumme 12 betragen soll, gibt es genau sieben solcher Zahlen.

z	$2 \cdot z$	$2 \cdot z - 12$
39	78	66
48	96	84
57	114	102
66	132	120
75	150	138
84	168	156
93	186	174

Es entfallen alle Zahlen $z > 48$, da in diesen Fällen $2 \cdot z - 12$ eine dreistellige Zahl ergibt. Auch $z = 39$ erfüllt nicht die Bedingungen der Aufgabe, da $66 \neq 93$ ist. Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung, und zwar $z = 48$ und somit $2 \cdot z - 12 = 84$.

W 5*1170 Aus b) und d) folgt:
Holger und Klaus errangen den 2. Platz.
Aus c) und f) folgt:
Das Tandem mit den Fahrern Dirk und Manfred war schneller als das Tandem mit den Fahrern Bernd und Norbert. Für Lutz verbleibt nur noch Steffen als Partner.
Aus a) folgt:
Lutz und Steffen errangen den 1. Platz. Somit kamen Dirk und Manfred auf den 3. Platz, Bernd und Norbert auf den 4. Platz.

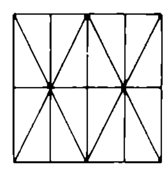
▲6▲1171 Es sei z eine dreistellige natürliche Zahl, deren Hunderterstelle um 4 kleiner ist als deren Einerstelle; diese Zahl läßt sich darstellen durch $z = 100 \cdot a + 10 \cdot b + (a + 4)$. Durch Anordnung der Grundziffern in umgekehrter Reihenfolge erhält man die Zahl $z' = 100 \cdot (a + 4) + 10 \cdot b + a$. Nun soll gelten $z' - z = 396$, also

$$101a + 10b + 400 - (101a + 10b + 4) = 396.$$

Das trifft stets zu, womit der geforderte Nachweis erbracht ist.

▲6▲1172 Es sei n eine beliebige natürliche Zahl; dann gilt $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) = 7n + 21 = 7(n+3)$. Dieses Produkt ist stets durch 7 teilbar; daher ist auch die Summe von sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 7 teilbar.

W 6 ■ 1173 Die Geraden HF znd EG sind Symmetrieachsen des Quadrats $ABCD$. Wir zeichnen durch H und F weiterhin je eine Parallele zu EG. Auf diese Weise wird das Quadrat in 16 flächengleiche rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks beträgt somit $A_1 = \frac{1}{16}a^2$. Für den Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ gilt deshalb $A_2 = 4 \cdot A_1 = \frac{1}{4}a^2$.

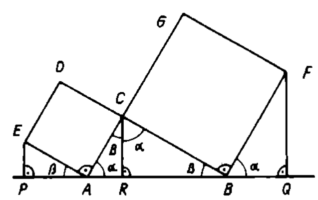


W 6 ■ 1174 Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ die Grundziffern, die an der ersten Stelle der zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen stehen. Aus a) folgt dann $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 3$, $a_7 = 3$, $a_8 = 3$, $a_9 = 3$, $a_{10} = 4$, $a_{11} = 4$ und $a_{12} = 5$.

Da alle zu ermittelnden zweistelligen Zahlen sämtlich verschieden voneinander sein sollen und da an ihrer zweiten Stelle nur fünf verschiedene Grundziffern (2, 3, 4, 5, 6) auftreten, lauten fünf der gesuchten Zahlen 32, 33, 34, 35, 36. Da an der ersten Stelle die Grundziffer 2 genau viermal auftritt und da in den restlichen sieben gesuchten Zahlen an der zweiten Stelle die Grundziffer 3 nur noch genau einmal, die Grundziffer 4 nur noch genau einmal vorkommt, lauten vier weitere der gesuchten Zahlen 23, 24, 25, 26. In den drei noch zu bestimmenden Zahlen kommt an der zweiten Stelle die Grundziffer 5 noch genau einmal, die Grundziffer 6 noch genau zweimal vor. Da unter den ermittelten Zahlen bereits die Zahlen 32 und 33 sind und für genau zehn der gesuchten Zahlen die Ziffer der ersten Stelle kleiner ist als die der zweiten, lauten die restlichen drei Zahlen 45, 46, 56. Als Lösung erhält man die zweistelligen Zahlen 23, 24, 25, 26, 32, 33, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

W 6*1175 Aus $1\frac{1}{2}$ h = 90 min und 90 min − 10 min = 80 min folgt, daß auf jeden Autobus für die Fahrt von A nach B bzw. von B nach A eine reine Fahrzeit von 80 min kommt. Aus $\overline{AC} = \frac{4}{5}\,\overline{BC}$ folgt $\overline{AC} = \frac{4}{9} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \frac{5}{9} \cdot \overline{AB}$. Der Autobus, der von A nach B fährt, erreicht den Ort C nach einer Zeit von $\frac{4}{9} \cdot 80\ \text{min} = 35\frac{5}{9}$ min; er fährt in C nach $35\frac{5}{9}$ min + 10 min = $45\frac{5}{9}$ min wieder ab. Der Autobus, der von B nach A fährt, erreicht den Ort C nach $\frac{5}{9} \cdot 80\ \text{min} = 44\frac{4}{9}$ min; er kommt in C also $44\frac{4}{9}$ min − $35\frac{5}{9}$ min = $8\frac{8}{9}$ min später an, als der andere Autobus (Gegenbus). Da der Aufenthalt in C aber 10 min, also länger als $8\frac{8}{9}$ min dauert, treffen sich beide Autobusse in C.

W 6*1176 Wir fällen von C das Lot $\overline{CR}$ auf die Gerade AB.



Aus $\sphericalangle ACR = 90° - \alpha$ und $\sphericalangle ABC = \beta = 90° - \alpha$ folgt $\sphericalangle ACR = \beta$. Aus $\sphericalangle BCR = 90° - \beta$ und $\sphericalangle BAC = \alpha = 90° - \beta$ folgt $\sphericalangle BCR = \alpha$. Ferner gilt $\sphericalangle PAE = 90° - \alpha = \beta$ und $\sphericalangle QBF = 90° - \beta = \alpha$, $\overline{AE} = \overline{AC}$ und $\overline{BC} = \overline{BF}$. Daraus folgt $\triangle PAE \cong \triangle ARC$ und $\triangle BQF \cong \triangle RBC$ und somit $\overline{PA} = \overline{RC}$ bzw. $\overline{BQ} = \overline{RC}$, also auch $\overline{PA} = \overline{BQ}$.

▲7▲1177 Aus 100 % − 45 % = 55 % folgt, daß in diesem Betrieb 55 % aller Beschäftigten Männer sind. Der Betrieb beschäftigt also 10 % mehr Männer als Frauen. Nun gilt $P : p = G : 100$ bzw. $82 : 10 = G : 100$, also

$G=820$. Die Zahl aller Betriebsangehörigen beträgt 820 Personen.

▲7▲1178 Es seien a, b und c die von Null verschiedenen Grundziffern. Für die Summe der möglichen dreistelligen Zahlen gilt

$$\begin{aligned}\text{dann}\quad &100a+10b+c\\ &+100a+10c+b\\ &+100b+10a+c\\ &+100b+10c+a\\ &+100c+10a+b\\ &+100c+10b+a\\ \hline &s=222a+222b+222c=\end{aligned}$$

$=2\cdot 3\cdot 37(a+b+c)$, d. h. alle derart gebildeten Summen sind stets durch 37 teilbar.

W 7 ■ 1179 Angela sei n Jahre alt; in x Jahren sei ihre Mutter viermal, ihre Großmutter achtmal so alt wie Angela; dann gilt

$$n+x=(30+x):4$$

und $\quad n+x=(62+x):8.$

Durch Gleichsetzen erhalten wir daraus

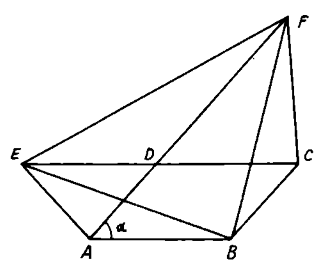
$$\frac{30+x}{4}=\frac{62+x}{8},$$
$$8(30+x)=4(62+x),$$
$$2(30+x)=62+x,$$
$$60+2x=62+x,$$
$$x=2.$$

Aus $n+2=(30+2):4$ folgt $n=6$

Angela ist 6 Jahre alt; in zwei Jahren wird sie 8 Jahre, ihre Mutter 32 Jahre und ihre Großmutter 64 Jahre alt sein.

W 7 ■ 1180 Wir betrachten zunächst die Zehnerstellen. Es könnte gelten $E+N=N$ oder $1+E+N=10+N$, also $E=0$ *oder* $E=9$. Wegen $V+E=F$ schneidet $E=9$ aus; denn für $V=1$ wäre $F\geqq 10$.
Das widerspricht $0<F<10$.
Auch $E=0$ scheidet aus, weil in „EINS" die Grundziffer 0 nicht am Anfang stehen darf. Also hat die Aufgabe keine Lösung.

W 7*1181 Die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ADE$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also gilt $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ADE=\alpha$. Wegen $\overline{AD}=\overline{AE}$ gilt ferner $\sphericalangle AED=\alpha$. Daraus folgt $\sphericalangle EAD=180°-2\alpha$ und somit $\sphericalangle EAB=$ $=180°-\alpha$.



Aus $\overline{CD}=\overline{CF}$ folgt $\sphericalangle CDF=\sphericalangle CFD$. Nun gilt $\sphericalangle ADE=\sphericalangle CDF=\alpha$ als Scheitelwinkel, folglich $\sphericalangle DCF=180°-2\alpha$. Wegen $\sphericalangle BCD=$ α gilt schließlich $\sphericalangle BCF=180°-\alpha$. Ferner gilt $\overline{AE}=\overline{AD}=\overline{BC}$ und $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{CF}$. Die Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle CFB$ sind somit kongruent, und es gilt $\overline{BE}=\overline{BF}$, *d. h.*, das Dreieck BFE ist gleichschenklig.

W 7*1182 Die Zahl z läßt sich darstellen durch $z=4\cdot 10^k+x$, wobei k eine natürliche Zahl mit $k\geqq 1$ und x eine natürliche Zahl mit $x<10^k$ ist.
Für die Zahl z' gilt dann $z'=10\cdot x+4$. Wegen $4\cdot z'=z$ *gilt ferner*

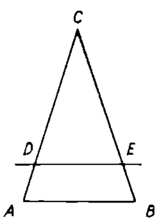
$$4(10x+4)=4\cdot 10^k+x,$$
$$40x+16=4\cdot 10^k+x,$$
$$39x=4\cdot 10^k-16,$$
$$3\cdot 13\cdot x=4(10^k-4).$$

Folglich muß 10^k-4 durch 39 teilbar sein. Nun ist $k=5$ die kleinste Zahl, für die 10^k-4 $=10^5-4=99\,996=2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 641$ durch 39 teilbar ist.
Aus $39x=4\cdot 2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 641$ folgt
$x=4\cdot 2^2\cdot 641=10\,256$ und somit $z=410\,256$.

W 8 ■ 1183 Aus $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{AB}=3$ cm und $\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}=13$ cm folgt $2\cdot\overline{AC}=10$ cm, also $\overline{AC}=5$ cm (vgl. die Abb.).
Nun sei $\overline{CD}=x$ cm, also $\overline{AD}=\overline{BE}=(5-x)$ cm.
Nach dem Strahlensatz gilt

$$\overline{DE}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{AC},$$

also $\quad \overline{DE}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{3\cdot x}{5}\text{ cm}=0{,}6x\text{ cm}.$



Da der Umfang des Vierecks $ABED$ gleich 7,4 cm ist, folgt

$$3+(5-x)+(5-x)+0{,}6x=7{,}4,$$
$$13-1{,}4x=7{,}4,$$
$$1{,}4x=5{,}6,$$
$$x=4.\ \text{Daraus folgt}$$
$$\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=(5-4)\text{ cm}=1\text{ cm}.$$

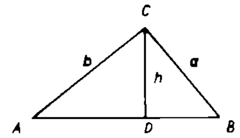
Die Länge der Strecke $\overline{AD}$ beträgt also 1 cm.

W 8 ■ 1184 Die Anzahl der Tauben, die sich auf den Baum setzen, sei x. Fliegt jetzt eine Taube hinab, so verbleiben auf dem Baum $x-1$ Tauben, und nach Voraussetzung befindet sich jetzt die gleiche Anzahl unter dem Baum, das sind $x-1$. Ursprünglich saßen also unter dem Baum $x-2$ Tauben, und die Gesamtzahl der Tauben betrug $x+x-2=2x-2$.
Wenn aber von den $x-2$ Tauben unter dem Baum eine auf den Baum fliegt, so verbleiben unter dem Baum $x-3$ Tauben, das sind nach Voraussetzung $\frac{1}{3}$ der insgesamt $2x-2$ Tauben. Daher gilt

$$x-3=\frac{1}{3}(2x-2),$$
$$3x-9=2x-2,$$
$$x=7.$$

Es setzten sich also 7 Tauben auf den Baum und $x-2=5$ Tauben darunter.

W 8*1185 Es sei ABC ein Dreieck, für das die gestellten Bedingungen erfüllt sind. Wir bezeichnen die Maßzahlen der Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ mit a, b, c und die Maßzahl der Höhe CD mit h (vgl. die Abb.).



Wegen $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$ gilt dann

$$a=3k,\ b=4k,\ c=5k, \qquad (1)$$

wobei k der zugehörige Ähnlichkeitsfaktor ist. Da nach Voraussetzung a, b, c natürliche von Null verschiedene Zahlen sind und da die Faktoren 3, 4 und 5 einander teilerfremd sind, ist auch k eine natürliche Zahl mit $k\neq 0$. Nun ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks ABC einerseits gleich ch und andererseits gleich ab. Daraus folgt

$$ch=ab,$$

also $\quad h=\dfrac{ab}{c}=\dfrac{3k\cdot 4k}{5k}=\dfrac{12k}{5}. \qquad (2)$

Da nach Voraussetzung h eine natürliche Zahl ist, gilt das auch für $\frac{12k}{5}$. Also ist k durch 5 teilbar, und es gilt $k=5n$, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Die Maßzahlen der Längen der Seiten aller Dreiecke ABC, die die verlangten Eigenschaften haben, sind daher wegen (1)
$a=15n$, $b=20n$, $c=25n$ mit $n=1, 2, 3, \ldots$.

W 8*1186 a) Der 1. Ruderer legt auf der Hinfahrt (stromabwärts) den 1 km langen Weg mit einer Geschwindigkeit von $(12+3)\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=15\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ zurück, da die Eigengeschwindigkeit sich um die Strömungsgeschwindigkeit erhöht. Er benötigt für diesen Weg eine Zeit von $\frac{1}{15}\text{ h}=4$ min.
Auf der Rückfahrt (stromaufwärts) legt er den 1 km langen Weg mit einer Geschwindigkeit von $(12-3)\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=9\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ zurück, da die Eigengeschwindigkeit sich um die Strömungsgeschwindigkeit vermindert. Er benötigt für die Rückfahrt eine Zeit von $\frac{1}{9}\text{ h}=6$ min 40 s.
Insgesamt benötigt er also die Zeit

$$t_1=10\text{ min }40\text{ s}.$$

Der 2. Ruderer benötigt für die Hinfahrt (stromaufwärts) eine Zeit von 6 min 40 s und für die Rückfahrt (stromabwärts) eine Zeit von 4 min, insgesamt also die Zeit

$t_2=10$ min 40 s, das ist die gleiche Zeit wie der 1. Ruderer.

Der 3. Ruderer fährt in einem stehenden Gewässer auf der Hinfahrt und auf der Rückfahrt mit derselben Geschwindigkeit von $12\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Er benötigt also die Gesamtzeit

$$t_3=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)\text{ h}=10\text{ min}.$$

Der 3. Ruderer, der in einem stehenden Gewässer fährt, kehrt also zuerst zurück, es folgen dann 40 s später der 1. und der 2. Ruderer gleichzeitig.

b) Im allgemeinen Fall erhält man, wenn

die Länge des Weges für die Hinfahrt gleich a ist, die Gesamtheit des 1. Ruderers

$$t_1=\frac{a}{v+u}+\frac{a}{v-u}, \qquad (1)$$

da die Geschwindigkeit stromabwärts $v+u$ und die Geschwindigkeit stromaufwärts $v-u$ beträgt. Die Gesamtzeit des 2. Ruderers beträgt

$$t_2=\frac{a}{v-u}+\frac{a}{v+u}. \qquad (2)$$

Es gilt also wieder $t_1=t_2$.
Die Gesamtzeit des 3. Ruderers beträgt

$$t_3=\frac{a}{v}+\frac{a}{v}=\frac{2a}{v}. \text{ Nun gilt} \qquad (3)$$

$$t_1=\frac{av-au+av+au}{v^2-u^2}=\frac{2av}{v^2-u^2}=\frac{2a}{v}\cdot\frac{1}{1-\frac{u^2}{v^2}}.$$

Nach Voraussetzung gilt $0<u<v$, also

$0<\frac{u^2}{v^2}<1$, *d. h.* $0<1-\frac{u^2}{v^2}<1$, also $\frac{1}{1-\frac{u^2}{v^2}}>1$.

Daraus folgt $t_1>\frac{2a}{v}$. Wegen (3) erhalten wir daher $t_1=t_2>t_3$.
Daher kehrt auch im allgemeinen Fall der 3. Ruderer zuerst zurück, und es folgen dann später der 1. und der 2. Ruderer gleichzeitig.

W 9 ■ 1187 Angenommen, die Legierung besteht aus x Teilen Silber und y Teilen Kupfer (bezogen auf die Masse 1000). Dann gilt

$$x+y=1000. \qquad (1)$$

Ferner beträgt die Maßzahl der Masse (in g) des Silbers $\frac{20{,}9x}{1000}$, also die Maßzahl des Volumens (in cm³) $\frac{20{,}9x}{1000\cdot 10{,}5}$, und die Maßzahl der Masse des Kupfers $\frac{20{,}9y}{1000}$, also die Maßzahl des Volumens $\frac{20{,}9y}{1000\cdot 8{,}92}$. Also gilt, da das Gesamtvolumen 2,123 cm³ beträgt

$$\frac{20{,}9x}{1000\cdot 10{,}5}+\frac{20{,}9y}{1000\cdot 8{,}92}=2{,}123 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $y=1000-x$, also (3)

$$\frac{20{,}9}{10{,}5}x+\frac{20{,}9}{8{,}92}(1000-x)=2123, \qquad (4)$$

$$1{,}9905x+2{,}3430(1000-x)=2123,$$
$$1{,}9905x+2343-2{,}3430x=2123,$$
$$0{,}3525x=\ 220,$$
$$x=\ 624{,}1.$$

Ferner erhält man wegen (3)

$$y=1000-624{,}1=375{,}9.$$

Rundet man nun diese Ergebnisse auf volle 5 Einheiten, so erhält man

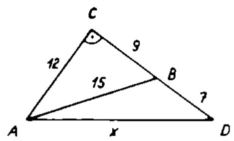
$$x\approx 625 \quad\text{und}\quad y\approx 375.$$

Die Legierung der Gedenkmünze besteht aus rund 625 Teilen Silber und rund 375 Teilen Kupfer.

W 9 ■ 1188 Es sei ABC das erste Dreieck mit den Seiten $\overline{AB}=15$ cm, $\overline{AC}=12$ cm und $\overline{BC}=9$ cm (vgl. die Abb.). Wegen $9^2+12^2=15^2$ ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras dieses Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C.
Verlängert man jetzt die Seite $\overline{CB}$ des Dreiecks ABC um 7 cm über B hinaus bis zum Punkt D, so erhält man das ebenfalls rechtwinklige Dreieck ADC. Bezeichnet man die Maßzahl der Länge der Seite $\overline{AD}$ mit x, so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2=(7+9)^2+12^2=16^2+12^2=256+144=400.$$

Daraus folgt $x=20$. Das Dreieck ADB hat also die geforderten Seitenlängen des zweiten Dreiecks, nämlich $\overline{BD}=7$ cm, $\overline{AB}=15$ cm, $\overline{AD}=20$ cm, und die Dreiecke ABC und ADB wurden, wie verlangt, zu einem rechtwinkligen Dreieck zusammengelegt.



W 9*1189 Wir setzen

$$f(x)=x^{x-2}+x^{x-3}+x^{x-4}$$

und untersuchen, für welche von Null verschiedene natürlichen Werte von x $f(x)=21$ ist.
Wir erhalten

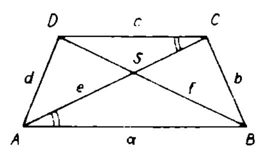
$$f(1)=1+1+1=3,$$
$$f(2)=2^0+2^{-1}+2^{-2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4},$$
$$f(3)=3^1+3^0+3^{-1}=3+1+\frac{1}{3}=\frac{13}{3},$$
$$f(4)=4^2+4^1+4^0=16+4+1=21.$$

Für alle weiteren natürlichen Zahlen x mit $x>4$ erhalten wir

$$f(x)=x^{x-4}(x^2+x+1).$$

Dabei gilt wegen $x>4$ und $x-4>0$
$x^{x-4}>1$ *und* $x^2+x+1>16+4+1=21$,
also $f(x)>21$.
Daher hat die Gleichung
$x^{x-2}+x^{x-3}+x^{x-4}=21$
nur eine natürliche Zahl als Lösung, nämlich $x=4$.

W 9*1190 Aus $c+d+e=c+d+f$ folgt $e=f$; aus $b+c+f=c+d+f$ folgt $b=d$. Daher gilt
$\triangle ACD\cong\triangle BCD$ $(\overline{BC}=\overline{AD}, \overline{AC}=\overline{BD}, \overline{CD}=\overline{CD})$.
Aus der Kongruenz dieser beiden Dreiecke folgt $\sphericalangle CDA=\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ACD=\sphericalangle CDB$, $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DBC$.



Aus der vorletzten Gleichung folgt, daß das Dreieck CDS gleichschenklig ist und $\overline{CS}=\overline{DS}$ gilt. Wegen $\overline{AC}=\overline{BD}$ gilt daher auch $\overline{AS}=\overline{BS}$, d. h. auch das Dreieck ABS ist gleichschenklig, und es gilt $\sphericalangle SAB=\sphericalangle SBA$. Wegen $\sphericalangle BSA=\sphericalangle CSD$ (Scheitelwinkel) gilt daher

$$2\cdot\sphericalangle SAB+\sphericalangle BSA=180°,$$
$$2\cdot\sphericalangle SCD+\sphericalangle BSA=180°,$$
also $\sphericalangle SAB=\sphericalangle SCD$.

Da diese Winkel Wechselwinkel an den geschnittenen Geraden AB und CD sind, folgt $AB\|CD$. Das Viereck $ABCD$ ist also ein Trapez und wegen $\overline{BC}=\overline{AD}$ ein gleichschenkliges Trapez, w. z. b. w.

W 10/12 ■ 1191 Es sei (x, y) eine reelle Lösung des Gleichungssystems

$$\frac{x+y}{1-xy}=3, \qquad (1)$$
$$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}. \text{ Dann gilt} \qquad (2)$$
$$x+y=3-3xy, \qquad (3)$$
$$3x-3y=1+xy. \text{ Aus (3) folgt} \qquad (4)$$
$$y+3xy=3-x,$$
$$y(1+3x)=3-x.$$

Wäre nun $1+3x=0$, d. h. $x=-\frac{1}{3}$, *so müßte* auch $3-x=0$, also $x=3$ sein, was zu einem Widerspruch führt. Daher gilt $1+3x\neq 0$, und wir erhalten

$$y=\frac{3-x}{1+3x}. \text{ Aus (4) folgt} \qquad (5)$$
$$3y+xy=3x-1,$$
$$y(3+x)=3x-1.$$

Auch hier gilt $3+x\neq 0$, da sonst ein Widerspruch entstehen würde. Daher erhalten wir

$$y=\frac{3x-1}{3+x}\cdot \text{ Aus (5) und (6) folgt} \qquad (6)$$
$$\frac{3-x}{1+3x}=\frac{3x-1}{3+x},$$
$$9-x^2=3x-1+9x^2-3x,$$
$$10x^2=10,$$
$$x^2=1.$$

Diese Gleichung hat genau zwei Lösungen, nämlich $x_1=1$; wegen (5) ist dann $y_1=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$; und $x_2=-1$; wegen (5) ist dann $y_2=\frac{3+1}{1-3}=-2$.
Das sind aber gleichzeitig auch Lösungen des Gleichungssystems (1), (2); denn es gilt

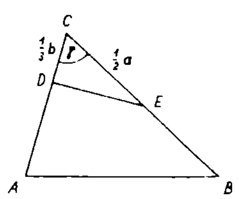
$$\frac{x_1+y_1}{1-x_1y_1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3;\quad \frac{x_1-y_1}{1+x_1y_1}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Ferner gilt·

$$\frac{x_2+y_2}{1-x_2y_2}=\frac{-1-2}{1-2}=3;\quad \frac{x_2-y_2}{1+x_2y_2}=\frac{-1+2}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau zwei reelle Lösungspaare, nämlich $(1,\frac{1}{2})$ und $(-1,-2)$.

W 10/12 ■ 1192 Es seien $\overline{AC}=b$ und damit $\overline{DC}=\frac{1}{3}\cdot b$, $\overline{BC}=a$ *und damit* $\overline{EC}=\frac{1}{2}\cdot a$, $\sphericalangle ACB=\gamma$. Dann gilt



$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin\gamma \text{ und}$$

$$A_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{12} \cdot ab \cdot \sin\gamma,$$

also $6 \cdot A_{DEC} = A_{ABC}$. w. z. b. w.

W 10/12*1193 1. Zunächst schätzen wir die Zahl 2^{100} nach unten ab. Wegen $2^{10} = 1\,024$ erhalten wir

$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1\,024^{10} > 1\,000^{10} = 10^{30}$.

Die Zahl 2^{100} hat also mindestens 31 Stellen, da sie größer als 10^{30} ist und diese Zahl bereits 31 Stellen hat.

2. Nun schätzen wir die Zahl 2^{100} nach oben ab und erhalten

$2^{100} = 1\,024^{10} < 1\,100^{10} = 11^{10} \cdot 100^{10}$
$= 11^{10} \cdot 10^{20}$.

Wegen $11^4 = 14\,641 < 15\,000 = 15 \cdot 10^3$
gilt $11^8 < 225 \cdot 10^6$,
$11^{10} < 225 \cdot 10^6 \cdot 121 = 27\,225 \cdot 10^6 < 2{,}8 \cdot 10^{10}$.

Daraus folgt
$2^{100} < 2{,}8 \cdot 10^{10} \cdot 10^{20} = 2{,}8 \cdot 10^{30}$.

Die Zahl 2^{100} ist also kleiner als eine 31stellige Zahl, sie hat also höchstens 31 Stellen. Da die Zahl 2^{100} höchstens 31 Stellen und wie oben nachgewiesen wurde auch mindestens 31 Stellen hat, hat sie genau 31 Stellen.

W 10/12*1194 Wir versuchen zunächst, die Polynome $n^7 + n^2 + 1$ und $n^8 + n + 1$ in Faktoren zu zerlegen, um festzustellen, ob sie einen gemeinsamen Teiler haben. Zu diesem Zwecke addieren wir zu dem ersten Polynom die Differenzen $n^6 - n^6, n^5 - n^5, n^4 - n^4, n^3 - n^3$ $n^2 - n^2$, $n - n$, die sämtlich gleich Null sind, und erhalten

$$\begin{aligned} n^7 + n^2 + 1 &= n^7 + n^6 - n^6 + n^5 - n^5 + n^4 - n^4 \\ &\quad + n^3 - n^3 + n^2 - n^2 + n - n + n^2 + 1 \\ &= n^5(n^2+n+1) - n^4(n^2+n+1) \\ &\quad + n^2(n^2+n+1) - n(n^2+n+1) \\ &\quad + (n^2+n+1) \\ &= (n^2+n+1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1). \end{aligned} \quad (1)$$

Zu dem zweiten Polynom addieren wir die Differenzen $n^7 - n^7$, $n^6 - n^6$, $n^5 - n^5$, $n^4 - n^4$, $n^3 - n^3$, $n^2 - n^2$, die sämtlich gleich Null sind, und erhalten

$$\begin{aligned} n^8 + n + 1 &= n^8 + n^7 - n^7 + n^6 - n^6 + n^5 - n^5 \\ &\quad + n^4 - n^4 + n^3 - n^3 + n^2 - n^2 + n + 1 \\ &= n^6(n^2+n+1) - n^5(n^2+n+1) \\ &\quad + n^3(n^2+n+1) - n^2(n^2+n+1) \\ &\quad + (n^2+n+1) \\ &= (n^2+n+1)(n^6 - n^5 + n^3 - n^2 + 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Wegen (1) und (2) ist also der Bruch

$$\frac{1 + n^2 + n^7}{1 + n + n^8}$$

stets durch $n^2 + n + 1$ kürzbar. Wegen $n \geqq 1$ gilt dabei $n^2 + n + 1 > 1$.

Man erhält z. B. für $n = 1$

$$\frac{1 + n^2 + n^7}{1 + n + n^8} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \text{ und für } n = 2$$

$$\frac{1 + n^2 + n^7}{1 + n + n^8} = \frac{1 + 4 + 128}{1 + 2 + 256} = \frac{133}{259}$$

$$= \frac{7 \cdot 19}{7 \cdot 37} = \frac{19}{37} \text{ usw.}$$

Lösungen zu „Mathematik und Sport“ (Heft 2/74)

Fußball

▲1▲ Die Mannschaft B erhält keinen Minuspunkt; somit gewinnt sie ihre Spiele gegen die Mannschaften D, A und C. Diese drei Mannschaften erhalten je zwei Minuspunkte aus ihren Spielen gegen die Mannschaft B. Die Mannschaft D erhält insgesamt drei Minuspunkte; deshalb muß sie bei genau einem ihrer Spiele gegen A und C ein Unentschieden erreichen und das andere gewinnen.

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

1. *Fall: D* spielt gegen C unentschieden.

Dann gewinnt D gegen A. Damit hat A aus den Spielen gegen B und D keinen Pluspunkt erzielt. Da A laut Punktestand insgesamt aber zwei Pluspunkte erhält, gewinnt A in diesem Fall das Spiel gegen C. Damit erhält C aus seinen drei Spielen genau einen Pluspunkt, und zwar aus dem Spiel gegen D.

2. *Fall: D* spielt gegen A unentschieden.

Dann gewinnt D gegen C. Da A aus den beiden Spielen gegen B und D nur einen Pluspunkt erhält, laut Punktestand aber insgesamt zwei Pluspunkte erhält, spielt in diesem Fall A auch gegen C unentschieden. Damit erhält C aus seinen drei Spielen genau einen Pluspunkt.

In beiden untersuchten Fällen werden die gestellten Bedingungen erfüllt, d. h. es können beide Fälle eintreten.

▲2▲ Jede der angeführten Mannschaften bestreitet genau vier Spiele. Aus dem Punktverhältnis 7 : 1 folgt, daß Mannschaft A einmal unentschieden spielt und drei Spiele gewinnt. Das Torverhältnis 3 : 0 von Mannschaft A besagt dann, daß die gewonnenen Spiele jeweils mit dem Torverhältnis 1 : 0 enden und das unentschiedene Spiel mit dem Torverhältnis 0 : 0 endet. Da B die einzige Mannschaft neben A ist, die kein Gegentor hinnimmt, spielten die Mannschaften A und B mit dem Torverhältnis 0 : 0 gegeneinander unentschieden.

Damit lautet der Ausgang der vier Spiele von Mannschaft A wie folgt:

Spiel	Punkte	Tore
A gegen B	1 : 1	0 : 0
A gegen C	2 : 0	1 : 0
A gegen D	2 : 0	1 : 0
A gegen E	2 : 0	1 : 0

Aus dem unentschiedenen Spiel gegen A erhält Mannschaft B einen Minuspunkt. Aus dem Punktverhältnis 6 : 2 von B folgt dann, daß B von den übrigen drei Spielen gegen C, D bzw. E zwei Spiele gewinnt und ein Spiel unentschieden spielt. Aus dem Torverhältnis 2 : 0 von B folgt schließlich, daß die gewonnenen Spiele jeweils 1 : 0 enden und das unentschiedene 0 : 0 ausfällt. Da C insgesamt nur drei Minuspunkte erhält, davon zwei aus dem Spiel gegen A, spielt B gegen C unentschieden. Damit ergibt sich weiterhin:

Spiel	Punkte	Tore
B gegen C	1 : 1	0 : 0
B gegen D	2 : 0	1 : 0
B gegen E	2 : 0	1 : 0

Aus den restlichen Punktverhältnissen der in der Aufgabe gegebenen Tabelle folgt, daß C gegen D und E, und daß auch D gegen E gewinnt. Da D insgesamt drei Gegentore erhält und in den Spielen gegen A und B bereits je ein Gegentor hinnehmen muß, kann das dritte Gegentor nur aus dem verlorenen Spiel gegen C stammen.

Das Torverhältnis des Spieles C gegen D ist also 1 : 0. Damit sich für C das Gesamttorverhältnis 5 : 2 ergibt, muß das Spiel C gegen E mit dem Torverhältnis 4 : 1 enden.

Wir erhalten deshalb:

Spiel	Punkte	Tore
C gegen D	2 : 0	1 : 0
C gegen E	2 : 0	4 : 1

Wegen des Gesamttorverhältnisses 4 : 3 für D muß das Spiel D gegen E mit 4 : 0 Toren enden:

Spiel	Punkte	Tore
D gegen E	2 : 0	4 : 0

▲3▲ Angenommen, zwei Mannschaften A und B tragen ein Spiel aus. Siegt Mannschaft A, so erhält sie aus diesem Spiel die Punktgutschrift 2 : 0, die Mannschaft B hingegen 0 : 2. Geht das Spiel unentschieden aus, erhält jede der beiden Mannschaften die Punktgutschrift 1 : 1, beide Mannschaften zusammen also 2 : 2. Jedes Spiel bringt also zur Summe der Plus- und Minuspunkte einer Mannschaft den Beitrag 2 und zur Summe der Pluspunkte aller Mannschaften ebenfalls den Beitrag 2. Da jede der Mannschaften $(n-1)$ Spiele austrägt, beträgt die Summe der Plus- und Minuspunkte jeder Mannschaft $2 \cdot (n-1)$.

Es werden insgesamt $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ Spiele ausgetragen; deshalb beträgt die Summe der Pluspunkte aller Mannschaften

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) = n \cdot (n-1)$.

Hinweis: Die Summe der Minuspunkte aller Mannschaften beträgt ebenfalls $n \cdot (n-1)$.

▲4▲ Entsprechend dem Punktverhältnis 4 : 4 könnte Mannschaft A

a) zwei Spiele gewonnen haben (4 Pluspunkte); dann hat sie die beiden übrigen Spiele verloren (4 Minuspunkte);

b) ein Spiel gewonnen haben (2 Pluspunkte); in diesem Falle gehen zwei weitere Spiele unentschieden aus (2 Pluspunkte, 2 Minuspunkte), und das vierte Spiel wird verloren (2 Minuspunkte);

c) keines der Spiele gewonnen haben; dann enden alle vier Spiele unentschieden (4 Pluspunkte und 4 Minuspunkte).

Auf Grund des Torverhältnisses 4 : 2 kann Fall c) nicht eintreten. Da Mannschaft A

nur zwei Gegentore erhält, können im Falle a) die beiden verlorenen Spiele jeweils nur mit dem Torverhältnis 0 : 1 enden. Die beiden gewonnenen Spiele müssen dann entweder beide 2 : 0 oder ein Spiel 3 : 0 und das andere 1 : 0 enden. Im Falle a) ergeben sich somit zwei mögliche Spielausgänge (2 : 0, 2 : 0, 0 : 1, 0 : 1), (3 : 0, 1 : 0, 0 : 1, 0 : 1).

Im Falle b) muß Mannschaft A in dem verlorenen Spiel mindestens ein Gegentor hinnehmen. Dann könnte sie in den beiden unentschiedenen Spielen insgesamt höchstens ein Gegentor erhalten. Aus diesen Überlegungen ergeben sich vier weitere mögliche Spielausgänge, nämlich (3 : 0, 0 : 0, 1 : 1, 0 : 1), (4 : 1, 0 : 0, 0 : 0, 0 : 1), (4 : 0, 0 : 0, 0 : 0, 0 : 2), (3 : 0, 0 : 0, 0 : 0, 1 : 2).

Insgesamt ergeben sich somit sechs Möglichkeiten für den Ausgang der Spiele der Mannschaft A.

Friedensfahrt

Klasse 5

Zahl der Plazierungen

1. Platz	2. Pl.	3. Pl.	1. Pl.	2. Pl.	3. Pl.
2	1	0	0	4	0
2	0	2	0	3	2
1	2	1	0	2	4
1	1	3	0	1	6
1	0	5	0	0	8

Für die Plazierung dieses Fahrers auf den ersten drei Plätzen gibt es 10 Möglichkeiten.

Klasse 6

Die Dreiecke MM_2P und MQM_2 sind gleichseitig. Mithin gilt $\sphericalangle QMM_2 = \sphericalangle M_2MP = 60°$. Hieraus folgt $\sphericalangle QMP = 120°$.

Klasse 7

Die letzten 24 km legt die Spitzengruppe in $\frac{1}{2}$ h zurück. Da die Spitzengruppe in 1 min 15 s den Vorsprung 1 km herausgefahren hat, dürften die zurückgefallenen Fahrer für 25 km höchstens $\frac{1}{2}$ h Zeit brauchen, d. h., sie müßten mindestens die Geschwindigkeit $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ vorlegen.

Klasse 8

a) $48{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 0{,}1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 48{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

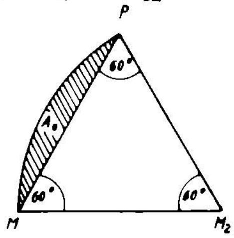
b) *W. Lichetschow* fährt nach 150 km: $49{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 3{,}012$ h ins Ziel. Ein Fahrer mit der Durchschnittsgeschwindigkeit $48{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte das Ziel nach 150 km: $48{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 3{,}106$ h erreicht. Mithin kam der Sieger 3,106 h $- 3{,}012$ h $= 0{,}094$ h $= \frac{94}{1000} \cdot 60$ min $\approx 5{,}6$ min früher ins Ziel als erwartet.

Klasse 9

Aus $\overline{PM} = \overline{PM_2} = \overline{MM_2} = r$ folgt, daß das Dreieck PMM_2 gleichseitig und damit auch gleichwinklig ist. Deshalb gilt $\sphericalangle PMM_2 = 60°$, also $\sphericalangle PMQ = 120°$.

Für den Flächeninhalt des Kreisabschnittes mit $\overline{PM}$ als Sehne gilt

$$A_0 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = \frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3}).$$



Deshalb gilt für die Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 folgendes:

$$A_1 = 2 \cdot A_{PMM_2} + 4 \cdot A_0 = 2 \cdot \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} + \frac{4}{6}\pi r^2 - r^2\sqrt{3} = \frac{1}{6}r^2(4\pi - 3\sqrt{3}),$$

$$A_2 = \pi \cdot r^2 - A_1 = \pi r^2 - \frac{1}{6}r^2(4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{1}{6}r^2(2\pi + 3\sqrt{3}),$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\pi r^2 - A_1 = \frac{1}{6}r^2(3\sqrt{3} - \pi).$$

Klasse 10

a) Beim Fahren mit der Geschwindigkeit $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ wird in 1 s der Weg 13,89 m zurückgelegt. Da der Umfang des Hinterrades $\pi \cdot 27 \cdot 25{,}4\ \text{mm} \approx 165$ cm beträgt, dreht sich bei dieser Geschwindigkeit das Hinterrad in 1 s rund 8,4 mal. Fahren mit größtem Gang bedeutet, daß die Kette über das Kettenblatt mit 48 Zähnen und über das Zahnrad mit 14 Zähnen am Hinterrad läuft. Das Kettenrad dreht sich also rund $8{,}4 \cdot \frac{14}{48} = 2{,}45 \approx 2{,}4$ mal in der Sekunde.

b) Jetzt macht das Hinterrad $2{,}45 \cdot \frac{46}{20} \approx 5{,}6$ Umdrehungen in der Sekunde. Die Fahrgeschwindigkeit beträgt rund $\frac{5{,}6}{8{,}4} \cdot 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 33\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Lösungen zu alpha-heiter — international

логическая задача

B gewann nicht mehr als 4 Partien. Konnte er weniger als 4 Partien gewinnen? Nein. Nehmen wir einmal an, daß er nur drei Partien gewann, so hatte er im günstigsten Fall 6 Punkte. Das ist weniger als die Hälfte von 13 Punkten. Daher gewann B vier und A sechs Partien.

Kryptarithmetik aus der DRV

In unserer mathematischen Schreibweise:

```
504210 : 686 = 735        504210 | 686
4802                             |-----
 2401                        2401 | 735
 2058                        3430
  3430                        000
  3430
```

Aritmetica

$\frac{77}{77} = 1$; $\frac{7}{7} + \frac{7}{7} = 2$; $\frac{7+7+7}{7} = 3$;

$\frac{77}{7} - 7 = 4$; $7 - \frac{7+7}{7} = 5$; $\frac{7 \cdot 7 - 7}{7} = 6$;

$7 + \frac{7-7}{7} = 7$; $7 + \frac{7+7}{7} = 9$; $\frac{77-7}{7} = 10$.

Third eastern african regional contest

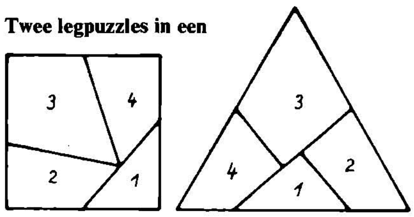
Von der aus 23 Gliedern bestehenden offenen Kette sind das vierte und das elfte Glied in der Mitte durchzuzwicken. Die beiden halben Glieder bilden dann jeweils ein Glied. Wir erhalten ferner drei zusammenhängende, sechs zusammenhängende und weitere zwölf zusammenhängende Glieder. Nun gilt $1 = 1$; $2 = 1 + 1$; $3 = 3$; $4 = 3 + 1$; $5 = 3 + 2 \cdot 1$; $6 = 6$; $7 = 6 + 1$; $8 = 6 + 2 \cdot 1$; $9 = 6 + 3$; $10 = 6 + 3 + 1$; $11 = 6 + 3 + 2 \cdot 1$; $12 = 12$; $13 = 12 + 1$; $14 = 12 + 2 \cdot 1$; $15 = 12 + 3$; $16 = 12 + 3 + 1$; $17 = 12 + 3 + 2 \cdot 1$; $18 = 12 + 6$; $19 = 12 + 6 + 1$; $20 = 12 + 6 + 2 \cdot 1$; $21 = 12 + 6 + 3$; $22 = 12 + 6 + 3 + 1$; $23 = 12 + 6 + 3 + 2 \cdot 1$.

Es können also 1 bis 23 Glieder dieser Kette als Wägestücke benutzt werden.

Neun falsche Felder

2d, 3b, 3e, 4b, 4c, 4f, 5c, 5d und 6c.

Twee legpuzzles in een



Занимателна МАТЕМАТИКА

```
244 - 54 = 190
  :    +    -
  4 ·  15 = 60
--------------
 61 + 69 = 130
```

Mathias Müller, Schüler der Klasse 9 der Friedrich-Engels-OS, Leipzig, Mitglied der Kulturgruppe dieser Schule, komponierte zu Ehren der XVI. IMO ein Klavierstück und trug es anläßlich der Abschlußfeier der Bezirksolympiade Leipzig vor (unser Foto).

Aus dem Bezirksklub Junger Mathematiker berichtet

Potsdam
Schloß Charlottenhof

Im Bezirk Potsdam gibt es einen *Klub Junger Mathematiker*. In jedem Jahr werden nach der DDR-Mathematik-Olympiade die Schüler der 12. Klassen aus dem Klub verabschiedet und neue talentierte Schüler ab Klasse 7 (zunächst als Kandidaten) aufgenommen. Wissenschaftliche Mitarbeiter der Pädagogischen Hochschule *Karl Liebknecht* Potsdam und Lehrer arbeiten mit den Schülern in drei Klubklassen. Da der Klub nur an etwa zehn Tagen im Jahr zusammenkommt, ist natürlich eine Beschränkung auf zwei (höchstens drei) Themen sinnvoll. Seit zwei Jahren schon heißt z. B. eines der Themen in der oberen Klubklasse: *Funktionen.*

Zur Zeit beschäftigen wir uns mit speziellen Eigenschaften von Funktionen, z. B. der Periodizität:

Wir betrachten Funktionen, deren Definitionsbereich und Wertevorrat Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind und verwenden als symbolische Schreibweise $y=f(x)$ Eine solche Funktion heißt periodisch, wenn eine Zahl $p_i \neq 0$ so existiert, daß für alle x des Definitionsbereiches

$$f(x+p_i)=f(x) \text{ gilt.} \qquad (1)$$

Gibt es eine Zahl p_i, so gibt es offensichtlich unendlich viele Zahlen p_i, für die (1) gilt. Jede solche Zahl p_i heißt eine Periode der Funktion; die kleinste dieser Zahlen nennen wir die kleinste oder primitive Periode p.

Wir lösen eine Aufgabe. (Sie hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der 5. Aufgabe der X. IMO siehe *alpha* 5/6/1968):

Es seien an und A positive reelle Zahlen und $f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte stetige Funktion, die für jedes reelle x der Bedingung

$$f(x+a)=\sqrt{A-[f(x)]^2} \text{ genügt.} \qquad (2)$$

a) Man beweise: Die Funktion $f(x)$ ist periodisch.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion an.

(Wenn einem Schüler der Begriff der Stetigkeit nicht bekannt ist, so kann er sich doch mit dieser Aufgabe beschäftigen. Es genügt dann im vorliegenden Fall, sich vorzustellen, daß die grafische Darstellung der Funktion $f(x)$ eine zusammenhängende Kurve ist.)

Wir beweisen zunächst die Periodizität:

Aus (2) kann man zunächst ablesen, daß $\sqrt{A} \geq f(x) \geq 0$ für alle x gelten muß. Beweist das!

Weiterhin erhält man aus (2) durch Quadrierung

$$[f(x+a)]^2=A-[f(x)]^2. \qquad (3)$$

Setzt man für x den Wert $x+a$ ein, so erhält man aus (3)

$$[f(x+2a)]^2=A-[f(x+a)]^2. \qquad (4)$$

Subtrahiert man die Gleichung (4) von der Gleichung (3), so ergibt sich

$$[f(x+2a)]^2=[f(x)]^2,$$

woraus wegen $f(x)>0$ für alle x

$$f(x+2a)=f(x) \text{ folgt.} \qquad (5)$$

Aus (5) ist ersichtlich, daß ein $p_i=2a$ existiert, damit ist die Periodizität gezeigt. (Man beachte, daß nicht gefordert war, die kleinste Periode zu ermitteln).

Bei der Lösung des Teiles b) kann man nun viel allgemeiner vorgehen, als mancher vielleicht glauben mag: Wir setzen zunächst $f(x)$ durch eine stetige Funktion $g(x)$ im Intervall $[0, a]$ fest. Daraus ergibt sich wegen (2) zwangsläufig, daß im Intervall $[a, 2a]$ die Funktion $f(x)$ die Funktionswerte $\sqrt{A-[g(x-a)]^2}$ haben muß. Damit ist $f(x)$ eine in jedem der Teilintervalle stetige Funktion, es muß noch die Stetigkeit an der Stelle $x_0=a$ gewährleistet sein, es muß also gelten

$$g(a)=\sqrt{A-[g(0)]^2},$$
$$[g(0)]^2+[g(a)]^2=A.$$

Wir fassen zusammen:

Für jede stetige Funktion $g(x)$, die für $0 \leq x \leq a$ den Bedingungen

$$0 \leq g(x) \leq \sqrt{A} \qquad (6)$$

und $$[g(0)]^2+[g(a)]^2=A \qquad (7)$$

genügt, ist die Funktion $f(x)$ mit der Periode $2a$ und mit

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \sqrt{A-[g(x-a)]^2} & \text{für } a \leq x \leq 2a, \end{cases}$$

eine Lösung des Aufgabenteiles b).

Zum Abschluß eine Aufgabe für unsere Leser:

▲1▲ Man setze in den obigen Ausführungen $g(x)$ zunächst als lineare Funktion $g(x)=mx$ an, ermittle $f(x)$ und zeichne das Bild der Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, 4a]$.

H.-J. Sprengel

Engel/Pirl

Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR (Eine Auswahl), Band 1

Volkseigener Verlag Volk und Wissen, Berlin
173 Seiten · Bestell-Nr. 00 21 70
Preis 6,– Mark

Mit dieser Auswahl wird eine Sammlung von Aufgaben zur Verfügung gestellt, die besonders zur Förderung begabter Schüler aber auch zur Bereicherung des Unterrichts und für Arbeitsgemeinschaften eingesetzt werden kann.

Der Band enthält Aufgaben aus den Olympiadeklassen 9 bis 12 zu den Stoffgebieten Arithmetik, Gleichungen, Ungleichungen, Funktionen und zu logisch-kombinatorischen Übungen (Auswahl aus den Olympiaden der DDR 1961/62 bis 1967/68 und aus den Vorolympiaden 1960 und 1961). Aufgabentexte und Lösungen wurden sorgfältig überarbeitet und im Hinblick auf den erreichten Stand in der Lehrplanentwicklung vereinheitlicht.

Mathematische Schülerbücherei

Gesamtverzeichnis

■ Band 1 Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie
* Band 2 Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik
● Band 3 Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I
* Band 4 Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene
* Band 5 Vysin, Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben
* Band 6 Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz
▲ Band 7 Varga, Mathematische Logik für Anfänger
■ Band 8 Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion
■ Band 9 Korowkin, Ungleichungen
■ Band 10 Gnedenko/Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
* Band 11 Lietzmann, Wo steckt der Fehler?
* Band 12 Lietzmann, Altes und Neues vom Kreis
* Band 13 Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich
* Band 14 Miller, Rechenvorteile
■ Band 15 Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben
■ Band 16 Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen
■ Band 17 Dubnow, Fehler in geometrischen Beweisen
■ Band 18 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I
■ Band 19 Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen
■ Band 20 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II
■ Band 21 Kurosch, Algebraische Gleichungen beliebigen Grades
■ Band 22 Gelfand, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen
■ Band 23 Schafarewitsch, Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades
● Band 24 Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik II
■ Band 25 Markuschewitsch, Rekursive Folgen
■ Band 26 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen III
● Band 27 Steinhaus, 100 Aufgaben
▲ Band 28 Perelman, Unterhaltsame Geometrie
▲ Band 29 Perelman, Unterhaltsame Algebra
▲ Band 30 Kolosow, Kreuz und quer durch die Mathematik
▲ Band 31 Teplow, Grundriß der Kybernetik
■ Band 32 Jaglom/Boltjanski, Konvexe Figuren
* Band 33 Belkner, Determinanten
○ Band 34 Autorenkollektiv, Rund um die Mathematik
○ Band 35 Schmidt, Kein Ärger mit der Algebra
* Band 36 Lehmann/Grosche/Kleinfeld, Übungen für junge Mathematiker I
* Band 37 Lehmann/Grosche/Kleinfeld, Übungen für junge Mathematiker II
* Band 38 Lehmann/Grosche/Kleinfeld, Übungen für junge Mathematiker III
* Band 39 Krysicke, Zahlen und Rechnen einst und jetzt
: Band 40 Sedláček, Einführung in die Graphentheorie
* Band 41 Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode
■ Band 42 Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen
■ Band 43 Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen
■ Band 44 Donath, Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks
■ Band 45 Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder
▲ Band 46 Autorenkollektiv, Kompendium der Mathematik
* Band 47 Lehmann, Lineare Optimierung für junge Mathematiker
* Band 48 Belkner, Matrizen
* Band 49 May, Differentialgleichungen
■ Band 50 Sobol, Die Monte-Carlo-Methode
* Band 51 Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik
■ Band 52 Worobjow, Teilbarkeitskriterien
● Band 53 Freyer-Gaebler-Möckel, Gut gedacht ist halb gelöst
● Band 54 Bürger/Wittmar, Was ist, was soll Datenverarbeitung?
○ Band 55 Cendrowski, Bande der unsichtbaren Hand
● Band 56 Göttner, Was ist, was soll Operationsforschung?
○ Band 57 Dege, EDV Maschinelles Rechnen
* Band 58 Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und graphische Darstellungen
■ Band 59 Kaloujnine, Primzahlzerlegung
■ Band 60 Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen?
■ Band 61 Boltjanski/Gochberg, Kombinatorische Geometrie
▲ Band 62 Varga, Mathematische Logik für Anfänger II
▲ Band 63 Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung
* Band 64 Wilenkin, Unterhaltsame Mengenlehre
* Band 65 Belkner, Metrische Räume
● Band 66 Jäckel, Mathematik heute
: Band 67 Sedláček, Keine Angst vor Mathematik
▲ Band 68 Stahl, Elektronische Datenverarbeitung
▲ Band 69 Gronitz, Praktische Mathematik
▲ Band 70 Hilbert, Matrizen in der Elektrotechnik und Ökonomie
▲ Band 71 Wissenspeicher Mathematik
● Band 72 Steinhaus, 100 neue Aufgaben
* Band 73 Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme
■ Band 74 Solodownikow, Lineare Ungleichungssysteme
■ Band 75 Golowina/Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie
○ Band 76 Rehm, Zahl, Menge, Gleichung
○ Band 77 Wundervolle Welt der Mathematik
● Band 78 Kordemski, Köpfchen, Köpfchen
● Band 79 Glade/Manteuffel, Am Anfang stand der Abacus
■ Band 80 Baschmakowa, Diophant und diophantische Gleichungen
■ Band 81 Pieper, Zahlen aus Primzahlen
● Band 82 Lehmann, Mathe mit Pfiff
● Band 83 Jäckel, Das Bild der modernen Mathematik
* Band 84 Belkner, Reelle Vektorräume
▲ Band 85 Schweizer, Elektronische Datenverarbeitung
▲ Band 86 Göttner, Fischer, Krieg, Was ist, was kann Statistik?

■ Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
* BSB B. G. Teubner, Leipzig
● Urania-Verlag, Leipzig
▲ Volk und Wissen, Volkseigener Verlag Berlin
○ Kinderbuchverlag Berlin
: VEB Fachbuchverlag Leipzig