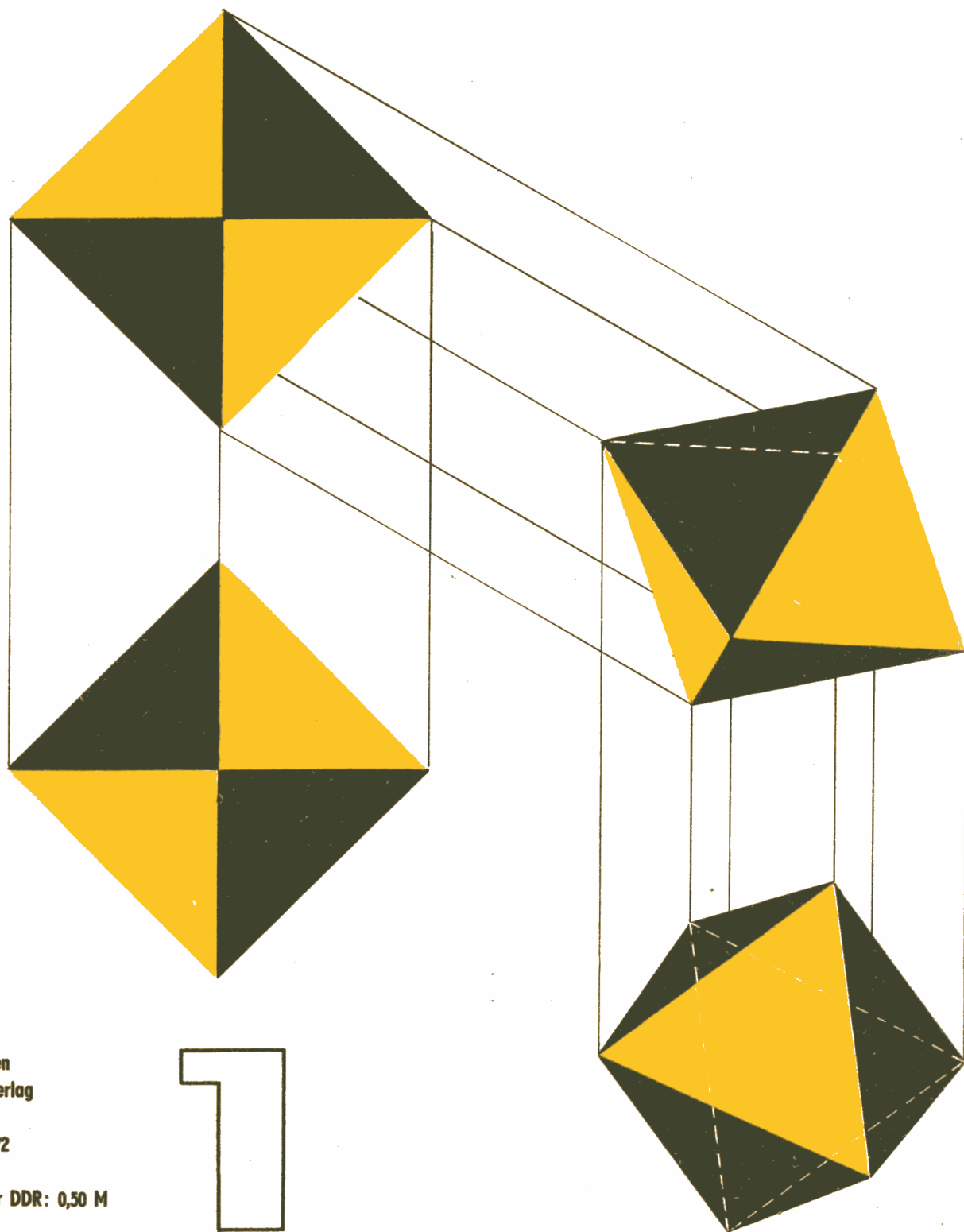


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,- M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31 059**

1

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent
Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil.
E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann
(Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof.
Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger
H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger,
Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan);
Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer
des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent
Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger
Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Ober-
lehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr.
habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schrö-
der (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze
(Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze
(Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger
(Döbeln); W. Unze (Leipzig); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,- M,
Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonne-
ment zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für
die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik
und Westberlin erfolgt über den Buchhandel;
für das sozialistische Ausland über das
jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für
alle übrigen Länder über den Deutschen
Buch-Export und -Import GmbH, DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 3); Ersttags-
brief, eingesandt von Mathematikfachlehrer
P. Nüchterlein, Burg (S. 4); Zentralbild ADN
(S. 7); Graphiken: Parteihochschule „Karl
Marx“ beim ZK der SED (S. 11);
Technische Zeichnungen: G. Gruß, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)

Redaktionsschluß: 22. November 1971

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Über zwei Operationen mit Zahlen (7)*
Akademienmitglied Prof. Dr. Kirill Tschimow, Moskau
- 3 Eine Aufgabe von stud. math. W. Burmeister (8)
Technische Universität Dresden
- 3 *alpha* stellt vor: Ursula Baier
EOS „Ernst Schneller“, Meißen (8)
- 4 Ramanujan — das mathematische Genie Indiens, Teil 2 (9)
Prof. Dr. Dr.-Ing. V. Lewin
Lehrstuhlleiter am Lenin-Pädagogischen Institut Moskau
- 7 Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug? (8)
W. Träger, Schloßbergoberschule Döbeln
- 9 Der VEB Verlag für Verkehrswesen stellt Bücher vor (5)
- 10 FDGB-Urlauber-Olympiade 1972 (5)
W. Träger, Schloßbergoberschule Döbeln
- 11 Graphiken zur Direktive des VIII. Parteitages der SED (5)
Parteihochschule „Karl Marx“ beim ZK der SED
- 12 XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Aufgaben der Kreisolympiade
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
- 14 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)
Aufgaben und Wettbewerbsbedingungen
- 17 *alpha*-Abzeichen in Gold für drei- bzw. vierjährige Teilnahme
am Wettbewerb (5)
- 18 In freien Stunden, *alpha* heiter (5)
StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig/OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 20 aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht (8)
Kryptarithmetik
- 20 Geometrisches Kreuzworträtsel aus der sowjetischen
Schülerzeitschrift *Quant* 5/70 (9)
StR J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig/NPT OStR Dr. R. Lüders, Berlin
- 21 Lösungen

III./IV. Umschlagseite: Wissen, wo . . .

Inhaltsverzeichnis der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* 1967/71
OL H. Herzog, V. L. d. V., 22. OS Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über zwei Operationen mit Zahlen

Die Addition und Multiplikation von Zahlen genügen einer Reihe von Gesetzen, von denen wir hier an folgende erinnern:

1. Kommutatives Gesetz der Addition: $a + b = b + a$.
2. Assoziatives Gesetz der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Kommutatives Gesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$.
4. Assoziatives Gesetz der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
5. Distributives Gesetz der Multiplikation bezüglich der Addition: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Hier sind a, b, c beliebige Zahlen. Es ist nun interessant, daß diese Gesetze auch in einigen anderen Fällen erfüllt sind, in denen man unter der „Addition“ und „Multiplikation“ gewisse andere Operationen mit Zahlen versteht, die von der uns so vertrauten gewöhnlichen Addition und Multiplikation verschieden sind. Um Verwechslungen mit diesen zu vermeiden, werden wir die nun einzuführenden Operationen durch Anführungszeichen hervorheben.

Unter der „Summe“ zweier Zahlen a, b wollen wir ihr Maximum: $\max(a, b)$ verstehen, d. h. die größte der Zahlen a und b , wenn $a \neq b$ und eine beliebige von ihnen, wenn $a = b$. Diese Operation der „Addition“, die beliebigen Zahlen a, b ihre „Summe“ zuordnet, werden wir mit $\oplus$ bezeichnen, so daß

$$a \oplus b = \max(a, b). \text{ So haben wir z. B.}$$

$$(-3) \oplus 2 = 2, \quad 0 \oplus (-\sqrt{2}) = 0, \quad \pi \oplus \pi = \pi.$$

Es sei schon hier vermerkt, daß die „Addition“ offensichtlich kommutativ ist:

$$a \oplus b = b \oplus a, \text{ denn } \max(a, b) = \max(b, a).$$

Unter der „Multiplikation“ zweier Zahlen a, b wollen wir nun noch ihr Minimum: $\min(a, b)$ verstehen, d. h. die kleinste der Zahlen a und b , wenn $a \neq b$ und eine beliebige von ihnen, wenn $a = b$. Die Operation der „Multiplikation“, die zwei beliebigen Zahlen a, b ihr Produkt $\min(a, b)$ zuordnet, werden wir mit $\otimes$ bezeichnen, so daß

$$a \otimes b = \min(a, b). \text{ So gilt z. B.}$$

$$(-3) \otimes 2 = -3, \quad 0 \otimes (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \quad \pi \otimes \pi = \pi.$$

Auch die Kommutativität der „Multiplikation“ ist offensichtlich, denn

$$\min(a, b) = \min(b, a).$$

Gehen wir nun dazu über, für die eben definierten „Addition“ und „Multiplikation“ die Gültigkeit der anderen Gesetze zu überprüfen.

Um die Assoziativität der „Addition“

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad (1)$$

zu zeigen, müssen wir die Richtigkeit der Gleichung

$$\max(\max(a, b), c) = \max(a, \max(b, c))$$

überprüfen. Dazu haben wir in der linken Spalte der Tabelle 1 alle möglichen Reihenfolgen der Zahlen a, b, c in bezug auf ihre Größe gebracht. Die übrigen Spalten enthalten die entsprechenden Zahlen $a \oplus b$, $(a \oplus b) \oplus c$, $b \oplus c$ und $a \oplus (b \oplus c)$. Aus der Tabelle geht nun klar hervor, daß immer die Gleichung (1) besteht.

Wir können jetzt also von der „Summe“ $a \oplus b \oplus c$ dreier beliebiger Zahlen a, b, c sprechen, diese gleich $a \oplus (b \oplus c)$ oder was dasselbe ist gleich $(a \oplus b) \oplus c$ setzen. Eine genaue Betrachtung der Tabelle 1 zeigt übrigens noch, daß immer

$$a \oplus b \oplus c = \max(a, b, c) \text{ ist.}$$

	Tabelle 1				Tabelle 2			
	$\max(a, b)$	$\max(\max(a, b), c)$	$\max(b, c)$	$\max(a, \max(b, c))$	$\max(a, b)$	$\min(\max(a, b), c)$	$\min(a, c)$	$\min(b, c)$
$a \leq b \leq c$	b	c	c	c	b	b	a	b
$a \leq c \leq b$	b	b	b	b	b	c	a	c
$b \leq a \leq c$	a	c	c	c	a	a	a	b
$b \leq c \leq a$	a	a	c	a	a	c	c	b
$c \leq a \leq b$	b	b	b	b	b	c	c	c
$c \leq b \leq a$	a	a	b	a	a	c	c	c

Von der Assoziativität der „Multiplikation“, d. h. von der Gültigkeit der Gleichung

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

oder, was dasselbe ist, der Gleichung $\min(\min(a, b), c) = \min(a, \min(b, c))$ bitten wir euch selbst zu überzeugen — es genügt, eine entsprechende Tabelle ähnlich der Tab. 1 anzufertigen.

Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, daß die „Multiplikation“ bezüglich der „Addition“ distributiv ist, d. h.

$$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c), \quad (2)$$

was man auch in der Form

$$\min(\max(a, b), c) = \max(\min(a, c), \min(b, c))$$

schreiben kann. Es genügt, die Tabelle 2 aufzustellen,

aus der ersichtlich ist, daß die Gleichung (2) wirklich für beliebige Zahlen a, b, c erfüllt ist.

Bei den Zahlen ist die gewöhnliche Addition bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation bekanntlich nicht distributiv: die Gleichung

$$(a \cdot b) + c = (a + c)(b + c)$$

ist nicht für alle Zahlen erfüllt. Für die oben eingeführten abstrakte „Addition“ und „Multiplikation“ ist dieses distributive Gesetz jedoch erfüllt:

$$(a \otimes b) \oplus c = (a \oplus c) \otimes (b \oplus c).$$

Überzeugt euch bitte selber davon, indem ihr zeigt, daß für beliebige Zahlen a, b, c die Gleichung

$$\max(\min(a, b), c) = \min(\max(a, c), \max(b, c))$$

erfüllt ist.

Es ist interessant, daß die „Addition“ und „Multiplikation“ auch andere Eigenschaften haben, die wir bei den gewöhnlichen Operationen vermissen:

$$a \oplus a = a \text{ und } a \otimes a = a,$$

$$a \otimes (a \oplus b) = a \text{ und } a \oplus (a \otimes b) = a.$$

Diese Relationen sind eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Operationen $\oplus$ und $\otimes$.

Es ist euch allen bekannt, daß man jeder Zahl a eine entgegengesetzte Zahl, d. h. die Zahl $-a$ zuordnen kann. Wir werden diese entgegengesetzte Zahl mit $\bar{a}$ bezeichnen, z. B.

$$\overline{2,5} = -2,5, \quad \overline{-\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \bar{0} = 0.$$

Interessant ist nun, daß die „Addition“ und „Multiplikation“ mit der Operation, die einer Zahl ihre entgegengesetzte zuordnet, auf folgende Art und Weise verknüpft sind:

$$\overline{a \oplus b} = \bar{a} \otimes \bar{b}, \quad \overline{a \otimes b} = \bar{a} \oplus \bar{b}$$

(Bezüglich der gewöhnlichen arithmetischen Operationen sind diese Formeln falsch!) Versucht, diese Formeln selbst zu beweisen! Und versucht zum Schluß, folgende Aufgaben zu lösen:

Aufgaben:

▲ 1 ▲ Zeigt, daß für beliebige Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$), $a_1 \oplus \dots \oplus a_n = \max(a_1, \dots, a_n)$ und $a_1 \otimes \dots \otimes a_n = \min(a_1, \dots, a_n)$.

▲ 2 ▲ Sind für beliebige Zahlen a, b, c die Gleichungen

$$c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b) \text{ und}$$

$$c \oplus (a \otimes b) = (c \oplus a) \otimes (c \oplus b) \text{ erfüllt?}$$

▲ 3 ▲ Beweist, daß für beliebige Zahlen a, b, c die Gleichung

$$\min[\min(a, c), \min(\max(a, b), c)] = \min(a, c)$$

besteht und schreibt sie mit Hilfe der Operationen $\oplus$ und $\otimes$! Wie kann man sich dann gleich unmittelbar von ihrer Gültigkeit überzeugen?

▲ 4 ▲ Es seien a, b, c beliebige Zahlen. Vereinfacht den Ausdruck

$$\min\{a, -\max[\min(a, b), \max(a, c)]\}.$$

▲ 5 ▲ Ist für beliebige Zahlen a, b, c die Gleichung $(a \oplus b) \otimes (a \oplus b \oplus c) = a \otimes [c \otimes (c \oplus b)]$ erfüllt?

▲ 6 ▲ Kann man zu zwei gegebenen Zahlen a, b eine dritte Zahl x so bestimmen, daß

$$\max[\min(a, \max(a, b), x)] = b \text{ ist?}$$

Kirill Tschimov

(aus der sowj. Schülerzeitschrift „Quant“ 8/70)

Nationalpreis der DDR III. Klasse für Wissenschaft und Technik



Für seine beispielhaften wissenschaftlichen Leistungen zum Aufbau neuer Theorien zur Entwicklung neuer Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

An das Kollektiv „Wahrscheinlichkeitstheorie“

Prof. Dr. rer. nat. habil. Klaus Matthes

Stellvertreter des Leiters des Institutskomplexes Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Prof. Dr. rer. nat. habil. Johannes Kerstan

Ordentlicher Professor für Mathematik (Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik) an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Prof. Dr. rer. nat. habil. Kurt Nawrotzki

Hochschuldozent für das Fachgebiet Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Dr. rer. habil. Joseph Mecke

Hochschuldozent für Wahrscheinlichkeitstheorie an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Prof. Dr. rer. nat. Dr. sc. techn. Dieter König

Ordentlicher Professor für das Fachgebiet mathematische Methoden der Operationsforschung an der Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg

Eine Aufgabe von stud. math. W. Burmeister

Sektion Mathematik an der Technischen
Universität Dresden

▲ 809 Für welche natürlichen Zahlen n lassen sich unter Verwendung sämtlicher Elemente der Menge

$$M = \{n, n+1, n+3, n+5\}$$

zwei Produkte (zu je 2 Faktoren) bilden, die sich um genau 1 unterscheiden?

Wir nehmen an, es gibt überhaupt ein n , für das das Verlangte möglich ist. Wir müssen mit dieser Annahme beginnen, obwohl es denkbar wäre, daß überhaupt kein n Lösung dieser Aufgabe ist. Ein Beispiel dafür ist die vierte Aufgabe der XII. IMO in Ungarn, nach der die vorliegende Aufgabe gestaltet wurde:

XII. IMO — 4. Aufgabe: Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft:

Die Menge

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

läßt sich in zwei elementfremde nicht leere Teilmengen so zerlegen, daß das Produkt aller Elemente der einen Teilmenge gleich dem Produkt aller Elemente der anderen Teilmenge ist.

Diese Aufgabe besitzt keine Lösung, der Beweis hierfür ist recht schwierig.

Wir wenden uns nun wieder unserem Problem zu. Wenn die Zerlegung der Menge M in zwei Produkte, die sich um genau 1 unterscheiden, möglich ist, so ist das eine der Produkte geradzahlig, das andere ungeradzahlig. Die beiden Faktoren des ungeradzahliges Produktes sind notwendig ungerade Zahlen. Daraus folgt:

Wenn die Aufgabe für ein n lösbar ist, so muß

$$M = \{n, n+1, n+3, n+5\}$$

mindestens zwei ungerade Zahlen enthalten. Ist n ungerade, so ist n die einzige ungerade Zahl aus M , während $n+1, n+3, n+5$ gerade Zahlen sind. Daraus folgt:

Für ungerade n ist die Aufgabe nicht lösbar.

Wir betrachten also nur gerade Zahlen n .

Zunächst sei $n=0$, dann ist $M = \{0, 1, 3, 5\}$. In diesem Fall sieht man, daß das eine der Produkte Null ist, während das andere Produkt mindestens gleich 3 ist. Daher ist die Aufgabe für $n=0$ unlösbar. Für $n=2$ ist $M = \{2, 3, 5, 7\}$. Aus dieser Menge können die Produkte $2 \cdot 7 = 14$ und $3 \cdot 5 = 15$ gebildet werden. Sie unterscheiden sich um genau 1.

Wir haben also eine Lösung der Aufgabe gefunden.

Ergebnis: Für $n=2$ ist die Aufgabe lösbar.

Wir überlegen: Ist damit die uns gestellte Aufgabe vollständig gelöst? Wir haben bewiesen, daß die Aufgabe Lösungen hat, aber wir haben möglicherweise noch nicht alle Lösungen gefunden. Daher versuchen wir, aus einem allgemeinen Ansatz alle Lösungen dieser Aufgabe zu gewinnen. Wir betrachten dasjenige der beiden Produkte, das n als Faktor enthält. Der zweite Faktor ist entweder gleich $n+1$, dann gilt

$$n \cdot (n+1) = (n+3) \cdot (n+5) \pm 1$$

$$n^2 + n = n^2 + 8n + 15 \pm 1$$

$$7n = -15 \pm 1,$$

$$n = -2 \text{ oder } n = -\frac{16}{7},$$

oder er ist gleich $n+3$, dann gilt

$$n \cdot (n+3) = (n+1) \cdot (n+5) \pm 1$$

$$n^2 + 3n = n^2 + 6n + 5 \pm 1$$

$$3n = -5 \pm 1,$$

$$n = -2 \text{ oder } n = -\frac{4}{3}, \text{ oder er}$$

ist schließlich gleich $n+5$, dann gilt

$$n \cdot (n+5) = (n+1) \cdot (n+3) \pm 1$$

$$n^2 + 5n = n^2 + 4n + 3 \pm 1$$

$$n = 3 \pm 1, n = 2 \text{ oder } n = 4$$

Die einzigen Lösungen der Aufgaben sind $n=2$ und $n=4$, die übrigen Werte sind negativ. Außer $n=2$ gibt es also noch die zweite Lösung $n=4$. Für $n=4$ ist nämlich $M = \{4, 5, 7, 9\}$, und die beiden Produkte $4 \cdot 9 = 36$ und $5 \cdot 7 = 35$ leisten das Gewünschte.

Man versuche, die gleiche Aufgabe für die Menge $N = \{n, n+1, n+2, n+6\}$ zu lösen!

W. Burmeister



Wir stellen vor: Ursula Baier

EOS Ernst Schneller, Meißen

Ursula Baier erhielt auf der X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR in Klassenstufe 10 einen 3. Preis und wurde damit einzige Preisträgerin. Wir möchten sie unseren *alpha*-Lesern vorstellen (siehe Foto auf dieser Seite unten).

Sie schrieb in einem Brief:

Werte Mitarbeiter von *alpha*!

Heute möchte ich meinen Dank für die Herausgabe der Zeitschrift *alpha* aussprechen.

Nachdem ich an einigen Kreisolympiaden gut abgeschnitten hatte, wurde mein Interesse an der Mathematik geweckt. Ich habe es daher begrüßt, daß 1967 die *alpha* erschien. Durch sie konnte ich meine Kenntnisse erweitern, bekam Übung im Lösen von Aufgaben und wurde zum Selbststudium angeregt. Nur dadurch konnte ich auf der X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR einen Preis erringen. Deshalb gebührt allen Mitarbeitern der *alpha* mein besonderer Dank.

Um das nächste Heft genauso interessant gestalten zu können, sende ich drei Aufgaben:

▲ 8▲ 844 Es ist folgender Satz zu beweisen: Fällt man von einem inneren Punkt P eines Dreiecks ABC die Lote l_a , l_b und l_c auf die Seiten a , b und c , so ist die Summe der Längen dieser Lote größer oder gleich der Länge der kürzesten Höhe und kleiner oder gleich der Länge der längsten Höhe des Dreiecks.

▲ 9▲ 845 Man verwandelt einen reinperiodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch, indem man in den Zähler die Periode und in den Nenner soviel Neunen schreibt, wie die Periode Stellen hat. Diese Aussage ist zu beweisen!

▲ 10/12▲ 846 In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien h_a , h_b und h_c die drei Höhen, r der Radius seines Umkreises und A sein Flächeninhalt. Beweise, daß zwischen diesen Größen die Beziehung

$$A = \sqrt{\frac{r}{2} \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c} \text{ gilt!}$$

Ramanujan —

das mathematische Genie Indiens

Teil 2

Die sechste Klasse war die letzte Klasse der Mittelschule. Als Sechzehnjähriger bestand *Ramanujan* nach Beendigung der Schule die Aufnahmeprüfungen für die Universität Madras. Im Januar 1904 wurde er in das erste Studienjahr des an der Universität angeschlossenen Kumbakonam College aufgenommen. Für seine ersten Erfolge erhielt er ein Sonderstipendium, das für die in Englisch und Mathematik besten Studenten vorgesehen war. Bald ließen jedoch seine Ergebnisse immer mehr zu wünschen übrig, da er seine gesamte Zeit für eigene mathematische Untersuchungen verwendete, deren Ergebnisse er regelmäßig in seine Notizbücher eintrug.

Er hörte auf, Hausaufgaben anzufertigen, versäumte einen großen Teil des Unterrichts und mußte schließlich im ersten Studienjahr verbleiben. Im Leben *Ramanujans* begann ein fast zehn Jahre währender Abschnitt von Mißerfolgen. Im Jahre 1905 wanderte er durch Zentralindien, kehrte dann nach Kumbakonam zurück, wollte das Studium im College fortsetzen, wurde aber nicht zugelassen, fuhr nach Madras, wurde dort 1906 an der Universität immatrikuliert, erkrankte aber und fuhr wieder nach Hause nach Kumbakonam zurück. 1907 versuchte er, die Prüfungen für die beiden ersten Studienjahre der Universität extern abzulegen, fiel aber durch. Danach hatte er bis 1909 keine bestimmte Beschäftigung, wenn man davon absieht, daß er sich die ganze Zeit unermüdlich mit Mathematik befaßte und dabei immer neue Seiten seiner Notizbücher füllte. 1909 heiratete *Ramanujan*, und er versuchte, Arbeit zu finden. 1910 wandte er sich diesbezüglich an den indischen Mathematiker *Ramaswamy Aiyar*, den Begründer der Indischen Mathematischen Gesellschaft. *Ramaswamy Aiyar* sah sich die Notizbücher *Ramanujans* an und überzeugte sich davon, daß er es mit einem Menschen ungewöhnlicher Begabung zu tun hatte, obwohl er bei weitem nicht die ganze Größe dieses Talents erkannte. Er schickte *Ramanujan* zu *Seshu Aiyar*, der zu dieser Zeit Lehrer am Kumbakonam College war und *Ramanujan* schon kannte, als dieser noch Student war. *Seshu Aiyar* vermittelte *Ramanujan* für einige Monate Arbeit. Endlich, im Dezember 1910,

hatte *Ramanujan* etwas Glück: er wurde dem einflußreichen Beamten *Ramachandra Rao* vorgestellt, der im Leben *Ramanujans* eine wichtige Rolle spielte. Er war der erste, der in *Ramanujan* das mathematische Genie erkannte. Er machte seinen ganzen Einfluß geltend, um *Ramanujan* das Leben zu erleichtern und dessen wissenschaftliche Laufbahn sicherzustellen.

Ramachandra Rao half *Ramanujan* zunächst aus persönlichen Mitteln. Als er aber sah, daß *Ramanujan* diese Lage bedrückte, vermittelte er ihm eine Arbeit in der Postverwaltung von Madras. Das Monatsgehalt betrug 30 Rupien. *Ramanujan* arbeitete dort vom Februar 1912 bis zum Mai 1913, als sich sein Schicksal endlich durch die Einmischung von *Hardy* endgültig entschied.

Im Jahre 1911 wurden im „Journal of the Indian Mathematical Society“ (Zeitschrift der Indischen Mathematischen Gesellschaft) von *Seshu Aiyar* die ersten Aufgaben *Ramanujans* veröffentlicht. Der erste eigene Beitrag *Ramanujans* erschien etwas später im gleichen Jahr. Bald darauf wurde *Ramanujan* als Mathematiker bekannt, zumindest in seiner Heimat. Betrachtet man jedoch diesen Lebensabschnitt *Ramanujans*, so kann man sich nicht des Eindrucks erwehren, daß die Menschen seiner Umgebung bei noch so gutem Verhältnis zu ihm auch jetzt keine richtige Vorstellung hatten, welche Ausbildung *Ramanujan* für die wissenschaftliche Arbeit auf dem Gebiet der Mathematik benötigte. Sie glaubten, alles für ihn getan zu haben, worauf er Anspruch hatte.

Anfang 1913 empfahlen die *Ramanujan* nahestehenden indischen Mathematiker nachdrücklich, ein kompetenteres und strengeres Urteil über seine in den Notizbüchern niedergeschriebenen Ergebnisse einzuholen. Sie empfahlen, diese in das mathematische Zentrum des Britischen Imperiums — die Universität Cambridge — zu schicken.

Bis zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts konnte diese Universität nicht zu den größten mathematischen Zentren der Welt gezählt werden. Anfang dieses Jahrhunderts wurde jedoch das Niveau der mathematischen Forschungen und der Lehre durch die jungen Mathematiker *Hardy* und *Littlewood* angehoben. Dank seiner Energie und ungewöhnlich hohen wissenschaftlichen Produktivität wurde *Hardy* (1877 bis 1947) schon in jungen Jahren zu einem bekannten Gelehrten, der an der Spitze einer großen mathematischen Schule stand. *Hardy* war nur 9 Jahre älter als *Ramanujan*, aber er konnte an die gesamte tausendjährige mathematische Weltkultur anknüpfen, während *Ramanujan* lediglich über zwei alte elementare Lehrbücher und sein großes mathematisches Talent verfügen konnte.

Seinen ersten Brief an *Hardy* schrieb *Ramanujan* am

16. Januar 1913. Über die darin mitgeteilten Sätze und Formeln urteilte *Hardy*: „Es genügt, einen Blick darauf zu werfen, um zu sehen, daß sie nur von einem Mathematiker allerhöchsten Ranges stammen konnten. Sie müssen richtig sein, denn wären sie falsch, so könnte niemand so viel Phantasie haben, sie zu erfinden“. Über eine zahlentheoretische Formel von *Ramanujan*, die sich als nicht korrekt erwiesen hat, schrieb *Hardy*: „Das Hauptglied wurde erstmalig 1908 von *E. Landau* gefunden. *Ramanujan* hatte keinen so mächtigen Apparat zur Verfügung, wie er von *Landau* angewendet wurde. *Ramanujan* hat niemals ein französisches oder deutsches Buch gelesen, seine Englisch-Kenntnisse waren so unbedeutend, daß er nicht einmal eine elementare Prüfung bestehen konnte. Erstaunlich ist allein schon, daß er überhaupt in der Lage war, solche Aufgaben zu stellen, für deren Lösung im Laufe eines Jahrhunderts die Anstrengungen der besten Mathematiker Europas vonnöten waren und die bis heute keine vollständige Lösung erhalten haben.“

Ramanujan hat auch viele richtige und neue zahlentheoretische Sätze aufgestellt, die bis heute von Mathematikern bewundert werden. Einige von ihnen sind sehr tieflegend, obwohl sie sich mit elementaren Tatsachen der Zahlentheorie befassen. Betrachten wir ein verhältnismäßig einfaches Ergebnis von *Ramanujan*, das aber seine Schöpferkraft im richtigen Licht zeigt. Es handelt sich um einen Satz aus der elementaren Zahlentheorie, der ihn von Kindesalter an interessierte. Um über die ganzen Zahlen nachzudenken, braucht man keinerlei Kenntnisse, nur Interesse. Um aber in die Geheimnisse der natürlichen Zahlenreihe einzudringen, muß man noch über eine gewisse Spezifik im Denken verfügen und über die unerklärbare Kraft der Intuition, die alle großen Mathematiker besitzen und die in ganz besonderem Maße auch *Ramanujan* besaß.

Wieviele natürliche Zahlen unter den ersten hundert sind Potenzen der Zahl 2?

Man kann sie abzählen: $1 = 2^0$, 2, 4, 8, 16, 32, 64, insgesamt also 7. Aber wieviel solcher Zahlen gibt es unter den ersten tausend? Wir zählen weiter: zu den schon angeführten kommen die Zahlen 128, 256 und 512 hinzu, insgesamt gibt es also 10 solcher Zahlen. Wir stellen jetzt eine allgemeinere Frage: wieviel Potenzen der Zahl 2 gibt es unter den ersten n natürlichen Zahlen? Auch auf diese Frage kann man leicht antworten, man muß nur den Logarithmus anwenden. Es gibt nämlich genau so viele Potenzen wie es Exponenten $k \geq 0$ gibt, für die $2^k \leq n$ gilt. Diese Ungleichung logarithmieren wir mit der Basis 10 und erhalten

$$k \log 2 \leq \log n, \text{ d. h. } k \leq \frac{\log n}{\log 2}.$$

Wie viele nichtnegative ganzzahlige Exponenten k genügen dieser Ungleichung? Die Anzahl der positiven ganzzahligen k , die dieser Ungleichung genügen, ist gleich dem ganzzahligen Anteil des Bruches $\frac{\log n}{\log 2}$,

der so bezeichnet wird: $\left[\frac{\log n}{\log 2} \right]$. Berücksichtigt man noch den Exponenten $k=0$, so erhält man die endgültige Antwort auf die uns interessierende Frage:

$$\left[\frac{\log n}{\log 2} \right] + 1.$$

Wegen $\log 2 = 0,30103$ ergeben sich für $n=100$ und $n=1000$ die schon oben erhaltenen Resultate

$$\left[\frac{\log 100}{\log 2} \right] + 1 = \left[\frac{2}{0,30103} \right] + 1 = [6,6...] + 1 = 6 + 1 = 7,$$

$$\left[\frac{\log 1000}{\log 2} \right] + 1 = \left[\frac{3}{0,30103} \right] + 1 = [9,9...] + 1 = 9 + 1 = 10.$$

Analog löst man die entsprechende Aufgabe für Potenzen der Zahl 3. *Ramanujan* stellte sich eine dem Anschein nach nur wenig schwierigere Frage:

Wieviele natürliche Zahlen unter den ersten n sind Produkte von Potenzen der Zahl 2 und Potenzen der Zahl 3, d. h. wieviel können in der Form $2^k \cdot 3^l$ (mit nichtnegativen Exponenten k und l) geschrieben werden?

Wir gehen an dieses Problem empirisch heran und schreiben für $n=100$ alle solche Zahlen auf: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 81, 96 — insgesamt 20 Zahlen. Für $n=1000$ wäre es schon ermüdend, alle diese Zahlen zu notieren. Man braucht eine allgemeine Formel, aber trotz aller Anstrengungen gelingt es nicht, eine solche Formel aufzustellen. Eine exakte Formel der Art, wie sie oben für einfachere Aufgaben hergeleitet wurden, gibt es für die Aufgabe *Ramanujans* nicht. Dafür hat *Ramanujan* eine Näherungsformel gefunden, aber auch das war eine erstklassige Leistung. Bei den beiden vorangehenden Aufgaben hätte man als Näherungsformeln $\frac{\log n}{\log 2}$ und $\frac{\log n}{\log 3}$ wählen können; für $n=100$ bzw. $n=1000$ ergibt die

Ersttagsbrief, eingesandt vom Mathematikfachlehrer P. Nüchterlein, Burg



erstere 6,6 (anstelle der exakten Anzahl 7) bzw. 9,9 (anstelle 10). Die Näherungsformel *Ramanujans* für die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leq n$, welche die Form $2^k 3^l$ (mit nichtnegativen ganzzahligen Exponenten k, l) haben, lautet

$$\frac{\log 2n \cdot \log 3n}{2 \log 2 \cdot \log 3}.$$

Das war ein glänzendes Ergebnis (eines der ersten *Ramanujans*), um so mehr, da der Beweis dieser Formel trotz ihrer Einfachheit sehr kompliziert ist. Überprüfen wir diese Formel für $n=100$: Wir wissen, daß die exakte Anzahl 20 ist; die Formel *Ramanujans* ergibt

$$\frac{\log 200 \cdot \log 300}{2 \log 2 \cdot \log 3} = \frac{2,30103 \cdot 2,47712}{2 \cdot 0,30103 \cdot 0,47712} = \frac{5,67792...}{0,28725...} = 19,75...$$

In Wirklichkeit ist die Formel *Ramanujans* eine asymptotische Formel, d. h. wenn man die exakte Lösung der Aufgabe mit $R(n)$ bezeichnet (so daß z. B. $R(100)=20$), so ist

$$R(n) - \frac{\log 2n \cdot \log 3n}{2 \log 2 \cdot \log 3} = d(n)$$

eine Größe, die für $n \rightarrow \infty$ bedeutend langsamer anwächst als $R(n)$. $R(n)$ selbst hat, wie aus dem Resultat *Ramanujans* ersichtlich ist, die Größenordnung $\log^2 n$. *Ramanujan* nahm offensichtlich an, daß die Differenz $d(n)$ für alle n beschränkt ist, da er überhaupt ein nahezu mystisches Talent besaß, für die kompliziertesten Funktionen Näherungsausdrücke mit beschränktem Fehler anzugeben. In diesem Fall allerdings konnte die Beschränktheit des Fehlers $d(n)$ wegen der Kompliziertheit der Funktion $R(n)$ nicht nachgewiesen werden, obwohl $R(n)$ scheinbar so leicht zu bestimmen ist (in Wirklichkeit gehört diese Aufgabe zu den sehr schwierigen Aufgaben, welche die Bestimmung der Anzahl der in einer Figur — hier einfach im Dreieck — enthaltenen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten zum Inhalt haben). Es gibt Gründe anzunehmen, daß $d(n)$ mit n unbeschränkt anwächst. Das schärfste, was *Hardy* und einige andere Mathematiker in dieser Richtung beweisen konnten, ist, daß $d(n)$ langsamer anwächst als $\frac{\log n}{\log \log n}$. Auch dieses

Resultat zeigt jedoch, wie gut die Näherungsformel *Ramanujans* für $R(n)$ ist.

Kehren wir nun zu *Ramanujans* Biographie zurück. In dem Briefwechsel, der sich zwischen *Ramanujan* und *Hardy* angebahnt hatte, entstand vor *Hardy* ein immer klareres Bild von dem urwüchsigen Talent *Ramanujans*. Am 27. Februar 1913 schrieb *Ramanujan* an *Hardy*:

„In Ihnen habe ich einen Freund gefunden, der meine Arbeiten aufmerksam und verständnisvoll verfolgt. Das ist für mich ein Anreiz, meine Untersuchungen fortzusetzen ... An vielen Stellen Ihres Briefes weisen Sie darauf hin, daß exakte Beweise nötig sind, und Sie

bitten mich, meine Beweismethoden mitzuteilen ... Ich möchte Ihnen dazu folgendes sagen: Überprüfen Sie meine Resultate, und wenn sie mit Ihren übereinstimmen, so müssen Sie zumindest zugeben, daß meine Erörterungen ein Körnchen Wahrheit enthalten. Um mein Gehirn zu erhalten, brauche ich etwas zu essen, und das ist meine große Sorge. Ein Brief von Ihnen mit einer positiven Einschätzung meiner Arbeit genügt, und mir wird von der Universität oder von der Regierung ein Stipendium zuerkannt ...“ *Hardy* unternahm daraufhin energische Schritte, um *Ramanujan* ein Stipendium zu verschaffen, und er lud ihn ein, nach Cambridge zu kommen. Die Einladung wurde *Ramanujan* durch den Sekretär der Organisation indischer Studenten in London übergeben, aber *Ramanujan* lehnte es, obwohl die Finanzfrage gelöst war, kategorisch ab, Indien zu verlassen. Der Hauptgrund dafür waren kastenbedingte Vorurteile, besonders seine Mutter war dagegen. So blieb nur übrig, sich in Indien um ein Stipendium für *Ramanujan* zu bemühen. Ab 1. Mai 1913 erhielt er von der Universität Madras ein auf zwei Jahre befristetes Sonderstipendium in Höhe von 75 Rupien monatlich. Von diesem Tage an wurde *Ramanujan*, wie *Hardy* schrieb, zum Berufsmathematiker.

Der Briefwechsel allein genügte *Hardy* nicht. Hartnäckig verfolgte er weiter das Ziel, *Ramanujan*, für dessen wissenschaftliche Tätigkeit er sich in gewissem Maße verantwortlich fühlte, zur Reise nach Cambridge zu bewegen, sowohl in *Ramanujans* Interesse als auch im Interesse der Mathematik. Das briefliche Drängen *Hardys* blieb ergebnislos, der Einfluß der Mutter überwog offensichtlich die Meinung *Hardys* und den Rat vieler Freunde *Ramanujans*. Bis Ende 1913 änderte sich daran nichts. Anfang 1914 jedoch kam auf Einladung der Universität ein Schüler *Hardys* als Gastdozent nach Madras. Dieser hatte den Auftrag, an der Universität noch einen Vorstoß zu unternehmen, und er überreichte ein diesbezügliches Memorandum. Die Notwendigkeit für *Ramanujan*, nach Cambridge zu fahren, wurde in den Intelligenzkreisen von Madras in breitem Maße und nachdrücklich diskutiert, so daß die Mutter schließlich doch nachgab.

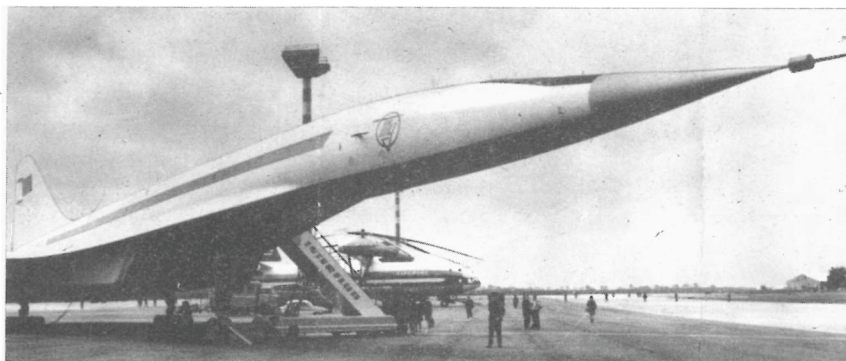
Die ersten Monate des Aufenthalts *Ramanujans* in Cambridge wurden dazu verwendet, die wesentlichsten Lücken in den mathematischen Kenntnissen zu schließen. *Hardy*, *Littlewood* und die anderen Cambridger Mathematiker waren über die Tiefe seiner Kenntnisse auf einigen Gebieten und die völlige Unkenntnis auf anderen Gebieten erstaunt.

V. Lewin

Dieser Beitrag wird in Heft 2/71 (Teil 3) abgeschlossen, d. Red.)

Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug?

Teil 2



Nachdem Klaus sich die Aufgabentexte notiert hat (siehe Heft 6/71, S. 130/132) urteilt er: „Jetzt verstehe ich auch, warum ein Überschallflugzeug ein weit nach vorn ragendes Staurohr besitzt (siehe Foto oben). Die Spitze des Staurohrs soll die Spitze des mit dem Flugzeug „mitfliegenden“ Schallkegels sein – und alle anderen Teile des Flugzeuges sollen sich möglichst innerhalb dieses Kegels befinden.“ Steffen ergänzt die Betrachtungen in einer anderen Richtung: „Wegen der großen Stärke der Druckwellen, die ein Überschallflugzeug bildet, breiten sich diese Druckwellen selbst, zumindest in Flugzeugnähe, mit größerer Geschwindigkeit aus. Mit wachsender Entfernung nimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit bis zur normalen Schallgeschwindigkeit ab. Deshalb hat, abweichend von unserer Überlegung, die Kopfwelle eines Überschallflugzeuges keine Kegelgestalt, sie umschließt vielmehr den von uns ermittelten Kegel.“ (Bild 11)

Bereits an einem der nächsten Tage haben beide Brüder wieder Zeit und Muße, um sich erneut über das Problem der Bestimmung der Geschwindigkeit eines Überschallflugzeuges zu unterhalten. Klaus legt zunächst seinem Bruder einen Zettel vor, auf dem er beide Aufgaben gelöst hat (siehe Heft 6/72, S. 132 unten)

1. Aufgabe

$$c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 340 \cdot \frac{1000}{3600} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 340 \cdot 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 1200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2. Aufgabe

a) Jagdflugzeug Suchoi III: $v = 2300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 $= 2300 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{2300 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \approx 640 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Panzer T 54:

$$v = 56 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{56 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \approx 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) $\frac{v}{c} \approx \frac{640 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 1,9$ $\frac{v}{c} \approx \frac{16 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 0,048$

„Du hast die beiden Aufgaben gelöst“, kommentiert Steffen. „Insbesondere hast du richtig erkannt, daß der Quotient $\frac{v}{c}$ eine

unbenannte Zahl ist. Dieser Quotient ist ein brauchbares Maß für die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers. Nach dem Physiker *Mach* nennt man diesen Quotienten die *Machsche Zahl* des in Luft bewegten Körpers.“ Steffen holt die Skizze (Bild 12), die auf der Wiese angefertigt worden ist, wieder hervor und sagt: „Wir müssen für verschiedene Werte von v zu dem Dreieck FQP , wie wir es hier gezeichnet haben, jeweils ein maßstabgetreues Bild, also ein ähnliches Dreieck $F'Q'P'$ zeichnen, bei dem jedesmal die Bildseite $F'Q'$ 1 dm lang ist – Überlege dir, wie du ein solches Bilddreieck für ein Flugzeug, das mit doppelter Schallgeschwindigkeit fliegt, zeichnen kannst!“ Klaus überlegt und spricht: „Da bei Original- und Bilddreieck die Verhältnisse entsprechend der Seiten gleich sind, gilt allgemein: $\frac{Q'P'}{Q'F'} = \frac{QP}{QF}$. Da laut unserer Zeich-

nung (Bild 12) $\overline{QP} = vt$ und $\overline{QF} = ct$ und laut Festsetzung $\frac{Q'P'}{Q'F'} = 1$ dm gelten, ergibt sich hieraus $Q'P' = \frac{v}{c}$ dm. – Wegen $v = 2c$ muß jetzt speziell $\frac{Q'P'}{Q'F'} = 2$ dm gelten.“ Nach dieser Betrachtung zeichnet Steffen das gesuchte Bilddreieck in einer für das Folgende geeigneten Lage:

Steffen errichtet im Punkt Q' auf $\overline{F'Q'}$ noch die Senkrechte. „Den halben Öffnungswinkel des durch unsere vereinfachende Annahme erhaltenen Schallkegels bezeichne ich mit α . Da Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich groß sind, tritt in meiner Zeichnung der Winkel α zweimal auf.“ Abschließend schlägt Steffen noch um Q' einen Kreisbogen mit dem Radius 1 dm. „Zeichne für verschiedene Werte $\frac{v}{c}$ mit $v > c$ derartige Bild-

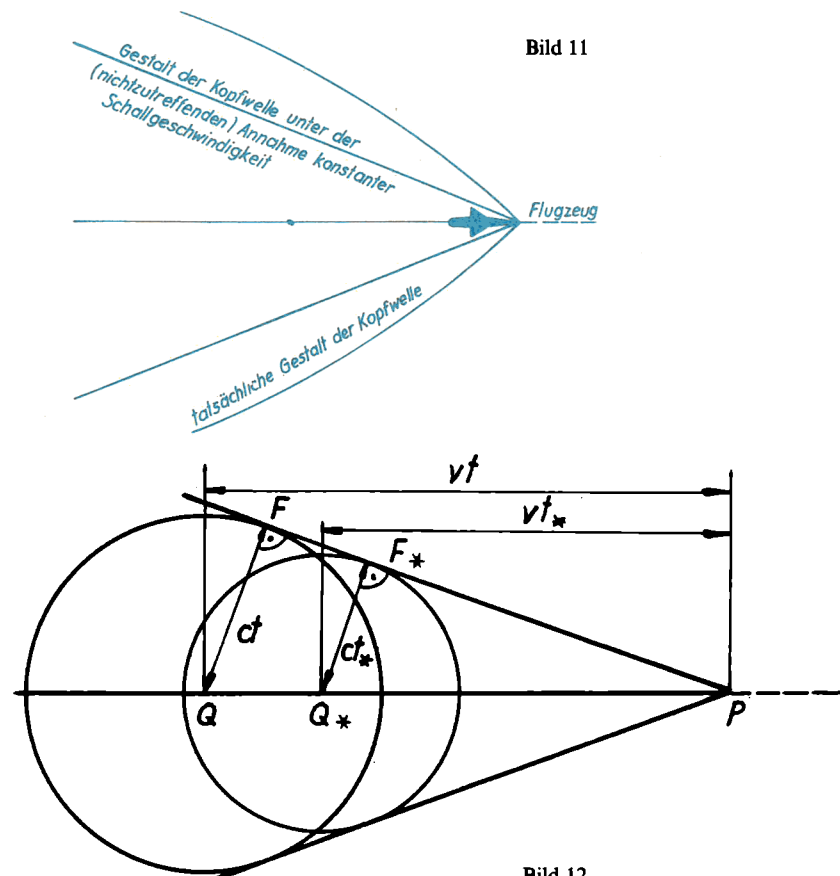


Bild 11

Bild 12

Eckpunkte F' und Q' haben. Dem Schnittpunkt der jeweiligen Strecke $Q'P'$ mit dem gezeichneten Kreisbogen hast du als Kote die jeweilige Zahl $\frac{v}{c}$ zuzuordnen. Danach

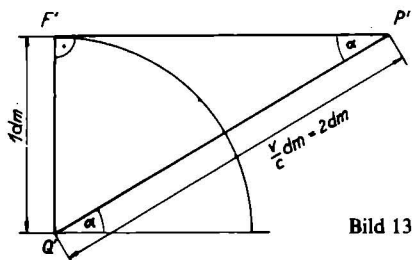
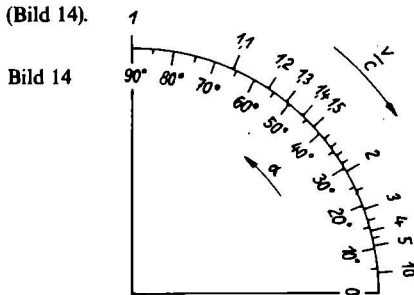


Bild 13

hast du diesen Kreisbogen noch ein zweites Mal zu kotieren, indem du seinen Punkten neben den Zahlen $\frac{v}{c}$ noch die Maßzahlen der in Grad gemessenen, jeweils zugehörigen Winkel α zuordnest.“ Nach dieser Anweisung zeichnet Klaus das abgebildete Nomogramm (Bild 14).



Als Klaus seinem Bruder dieses Nomogramm vorlegt, fragt ihn dieser: „Welche Maßzahl $\frac{v}{c}$ gehört laut Nomogramm zu $\alpha = 35^\circ$?“ Klaus antwortet nach einem Blick auf das Nomogramm: „ $\frac{v}{c} \approx 1,7$ “. Wie soll ich nun mit diesem Nomogramm die Geschwindigkeit eines Überschallflugzeuges bestimmen?“, fragt Klaus. Steffen erklärt: „Bei einem geradlinig-gleichförmig, horizontal und senkrecht über dich hinwegfliegenden Überschallflugzeug mißt du im Moment des Hörbarwerdens des Knalles den Erhebungswinkel α_* (Winkel, den der Sehstrahl Auge-Flugzeug mit der Waagerechten bildet), unter dem das Flugzeug erscheint. Am Nomogramm liest

du zu diesem Erhebungswinkel α_* die zugehörige Machzahl $\frac{v_*}{c}$ ab. — Natürlich kannst du zum Messen des Winkels α_* gleich dein auf ein Stück Pappe aufgeklebtes Nomogramm verwenden. So kannst du gleichzeitig mit α_* die zugehörige Machzahl $\frac{v_*}{c}$ ablesen.“ (Bild 15)

Klaus erwidert: „Natürlich ist die so ermittelte Machzahl $\frac{v_*}{c}$ zu klein: Der Winkel α_* ist größer als der halbe Öffnungswinkel α des durch unsere vereinfachende Betrachtung erhaltenen Kegels ($\alpha_* > \alpha$) und deshalb ist die tatsächliche Fluggeschwindigkeit v des Flugzeuges sicher noch größer als die durch das Nomogramm ermittelte v_* . Es gilt also $v > v_*$.“ (siehe Bild 15)

Anschließend unterhalten sich beide noch darüber, wie die Fluggeschwindigkeit eines geradlinig-gleichförmig und horizontal fliegenden Überschallflugzeuges zu ermitteln ist, das seitlich am Beobachter vorbeifliegt. Da Klaus sich sehr interessiert an diesen Überlegungen zeigt, stellt ihm Steffen abschließend noch drei Aufgaben:

▲ **Aufgabe:** Von einem Überschallflugzeug, das einen geradlinigen und horizontalen Kurs mit konstanter Geschwindigkeit bei Windstille und der konstanten Lufttemperatur 18°C einhält, hörst du den Knall seiner Kopfzelle 8 s danach, als sich das Flugzeug direkt über dir befand. Du siehst in diesem Moment das Flugzeug unter dem Erhebungswinkel $\alpha_* = 50^\circ$. Schätze die Geschwindigkeit und die Flughöhe des Flugzeuges ab!

▲ **Aufgabe:** Von einem Schnellboot, welches einen geradlinigen Kurs mit der Geschwindigkeit $43 \text{ kn (Knoten)} \approx 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ steuert,

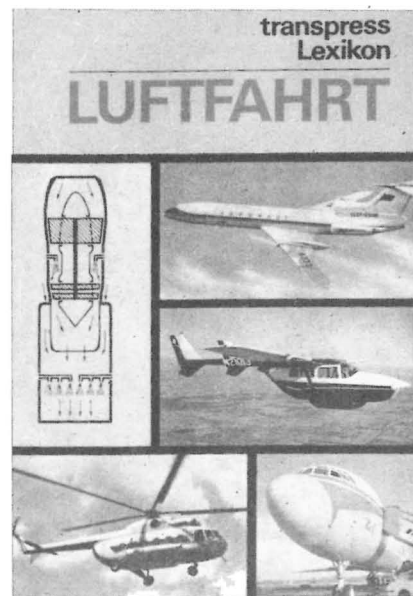
ertönt vom Passieren der Stelle A der Fahrtroute an für 3 s die Schiffssirene. An welchen Stellen der Umgebung ist bei Windstille 5 s nach dem Ertönen der Sirene das Sirenengeheul zu hören?

▲ **Aufgabe:** Der geradlinige und horizontale Kurs eines Flugzeuges führt direkt über deinen Standort hinweg. Du siehst zu einem bestimmten Zeitpunkt das Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit unter dem Höhenwinkel $\beta = 80^\circ$. 9 s danach hörst du die Motorengeräusche dieser Maschine gerade aus dieser Richtung kommen. Zu diesem

zweiten Zeitpunkt siehst du die Maschine nun unter dem Höhenwinkel $\gamma = 50^\circ$. Ermittle unter der Annahme von Windstille Fluggeschwindigkeit und Flughöhe dieses Flugzeuges! (Bild 16)

Diese Unterhaltung beendet Klaus mit den Worten: „Du hast dich ja schon gut auf den Ehrendienst bei den Luftstreitkräften unserer Volksarmee vorbereitet.“ Klaus löst auch diese drei Aufgaben. Wer von den *alpha*-Lesern kann das auch?

W. Träger



HEINZ A. F. SCHMIDT

transpress-Lexikon Luftfahrt

Das populärwissenschaftliche Lexikon enthält die wichtigsten Stichwörter aus der Aerodynamik und Flugmechanik, über Luftfahrzeuge, Flugzeugbau, Triebwerke, Flughäfen, Flugnavigation und -meteorologie, Militärflughäfen, Kunstflug, Segelflug-, Fallschirm- und Flugmodellsport sowie über die Geschichte der Luftfahrt.

2. Auflage, 420 Seiten,
508 Abbildungen, 33 Tabellen,
Leinen 24,— M
Sonderpreis für die DDR 18,— M

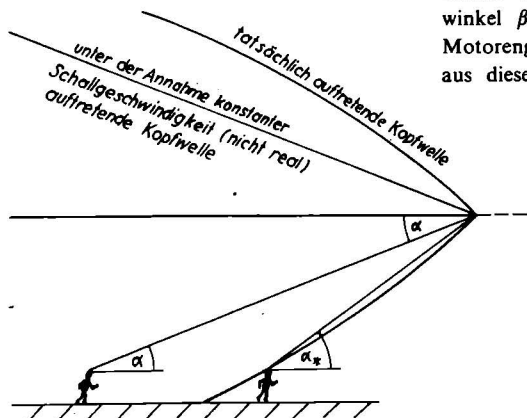


Bild 15

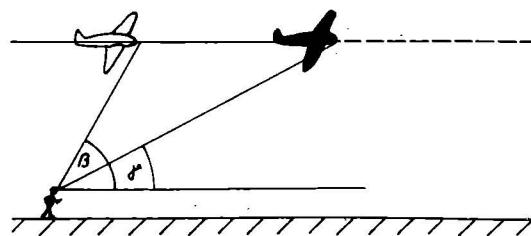
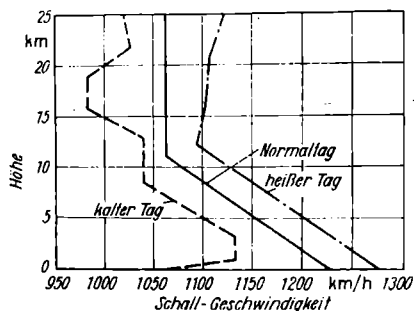


Bild 16

Aus dem „Lexikon der Luftfahrt“ entnehmen wir für den Beitrag: „Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug“ folgende Begriffe (leicht gekürzt):

Schallgeschwindigkeit: Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls beim Durchgang durch feste Körper, Flüssigkeiten oder Gase. In der Luft bildet die S. einen wichtigen Grenzwert der Aerodynamik. Bei Annäherung an die S. ändert sich z. B. das Bild der Stromlinien bei der Umströmung fester Körper vollständig. Der Luftwiderstand unter-



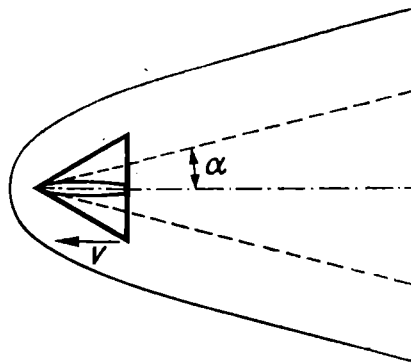
Die Schallgeschwindigkeit im Verhältnis zu Druck, Dichte und Temperatur der Luft (schematische Darstellung)

liegt nicht mehr den Gesetzen der Unterschallströmung. Er steigt ganz erheblich an, und es müssen die Gesetze der Gasdynamik zur Anwendung kommen. In der Luft wird die S. i. allg. mit dem Durchschnittswert 333 m/s (etwa 1200 km/h) angegeben. Sie ist aber stark abhängig von Druck, Dichte und Temperatur der Luft und damit von der Flughöhe. Bei Flugzeugen, deren Geschwindigkeit nahe oder über der S. liegt, wird die erzielte Höchstgeschwindigkeit statt oder neben der Angabe in km/h in Mach ($\rightarrow$ Machzahl) gemessen.

Schallmauer: bildhafte Bezeichnung für die starke Zunahme des Luftwiderstandes, die sich bei Erreichen der Schallgeschwindigkeit ergibt. Die Luft vor einem Körper, der Schallgeschwindigkeit und mehr erreicht, wird zusammendrückbar (kompressibel). Dadurch entsteht eine Stauung komprimierter Luft, die ein starkes Ansteigen des Luftwiderstandes bewirkt. Gleichzeitig ergibt sich dabei eine Änderung des Auftriebs und eine Verlängerung des Angriffspunktes der Luftkraft. Dadurch treten Verdichtungsstöße auf, die z. B. ein Flugzeug so stark beanspruchen, daß bei den ersten Versuchen, die S. zu durchbrechen, Tragflügel und Leitwerkteile wegbrachen. Beim Flug mit Schallgeschwindigkeit in Bodennähe können auf der Erde Gebäudeschäden angerichtet werden. Beim „Durchbrechen der S.“, d. h. beim Übergang zur Überschallgeschwindigkeit wie auch umgekehrt, und während des ganzen Überschallfluges gibt es auf der Erde einen bandförmigen Bereich, in dem die vom Flugzeug ausgehenden Verdichtungsstöße so

ankommen, daß ein starker Knall hörbar ist. Ein mit Überschallgeschwindigkeit fliegendes Flugzeug ruft also im ganzen überflogenen Gebiet eine Stoßwelle, d. h. eine sich fortpflanzende Folge von Überschallknallen, hervor. $\rightarrow$ Kopfwelle.

Kopfwelle: kegelförmiger Verdichtungsstoß, der von einem mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Körper ausgeht; entsteht als Einhüllende sämtlicher von dem Körper K zu früheren Zeitpunkten ausgesandten Kugeln (Huygensches Prinzip); der halbe Öffnungswinkel α , Machscher Winkel, ergibt



Abgehobene Kopfwelle vor einem mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Flugzeug

sich aus $\sin \alpha = v/c$, wobei c die Schallgeschwindigkeit und v die Geschwindigkeit des Körpers bedeuten; das Auftreffen einer K. auf das Ohr wird als Knall empfunden ...

Mach, Ernst: Physiker und Philosoph, geb. 18. Febr. 1838 Tufany bei Brno, gest. 19. Febr. 1916 Haar bei München, Professor der Physik in Graz (ab 1864), Prag (ab 1867) sowie Philosophie in Wien (1895–1901). Er wurde als Physiker besonders bekannt durch seine Arbeiten über Strömungs- und Wärmelehre ($\rightarrow$ Machzahl, $\rightarrow$ Kopfwelle)...

Machzahl, Mach, Machsche Zahl, Abkürzung M : nach dem Physiker E. Mach benannte Kennzahl, die das Verhältnis der Geschwindigkeit v eines Körpers zur Schallgeschwindigkeit c des umgebenden Mediums angibt. In M wird die Geschwindigkeit schneller Flugzeuge und schneller Strömungen in Windkanälen angegeben, die man mit dem $\rightarrow$ Machmeter ermittelt. Ist die M kleiner als 1, so ist die Geschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Entspr. gilt für M größer als 1 (Überschallflugzeuge). In Bodennähe beträgt die Schallgeschwindigkeit etwa 340 m/s. $M=0,5$ ist dann z. B. eine Geschwindigkeit von 170 m/s oder etwa 600 km/h...

HEINZ MIELKE

transpress-Lexikon Raumfahrt

Die stürmische Entwicklung der Raumfahrt in den letzten Jahren erforderte die Herausgabe dieses Lexikons, das sowohl dem Fachmann als auch dem Laien das ihn interessierende Material bietet. Das Lexikon enthält etwa 1200 Stichwörter und Synonyme sowie zahlreiches Bildmaterial. Übersichten über Grenzwissenschaften der Raumfahrt, Fakten aus der Raketen- und Raumfahrtgeschichte sowie Biographien der Kosmonauten und Astronauten ermöglichen eine umfassende Information.

2. unveränderte Auflage, 376 Seiten,
440 Abbildungen, 20 Tabellen,
Leinen 18,60 M

transpress-Lexikon Eisenbahn

Erstmalig erscheint ein Nachschlagewerk, das kurz, einfach und prägnant den umfangreichen Wissensstoff aller Gebiete des Eisen-

bahnwesens in einem zweibändigen Lexikon zusammenfaßt. Damit wird allen Eisenbahnern, den Freunden der Eisenbahn und den Modelleisenbahnern ein Buch in die Hand gegeben, das sowohl auf den Fachgebieten der Maschinenwirtschaft, der Wagenwirtschaft, der Fahrdynamik, der Bremstechnik, des Betriebs- und Verkehrsdienstes als auch über Bahnanlagen, Sicherungs- und Fernmeldeanlagen Auskunft gibt.

1. Auflage, 2 Bände mit insgesamt
864 Seiten, 800 Abbildungen,
15 Tabellen, Lederin 46,— M
Erscheint voraussichtlich im
Dezember 1971



transpress

VEB Verlag für Verkehrswesen
DDR — 108 Berlin

FDGB-Urlauber-Olympiade 1972



Bild 1



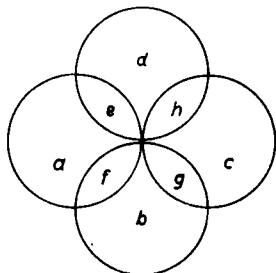
In Vorbereitung der Olympischen Spiele 1972 veranstaltet der Feriendienst des Freien Deutschen Gewerkschaftsbundes in der Zeit vom 12. 2. 1971 bis zum 1. 9. 1972 in den Urlaubsorten eine Urlauberolympiade. Jeder Urlauber hat damit die Gelegenheit, durch seine Teilnahme an dieser Massensportaktion seinen Körper durch sportliche Betätigung zu kräftigen und damit gleichzeitig seine Verbundenheit mit der Olympiademannschaft der DDR zu den Olympischen Spielen 1972 zu bekunden.

Ob wohl jeder *alpha*-Leser zusammen mit seinen Eltern die Möglichkeit nutzen wird, sich an der „FDGB-Urlauber-Olympiade 1971 bis 1972“, die unter dem obigen Symbol steht, zu beteiligen?

Darüber hinaus können sich *alpha*-Leser an dem folgenden mathematischen Wettbewerb beteiligen, für dessen Sieger Buchpreise, gestiftet vom Zentralvorstand der Gewerkschaft Unterricht und Erziehung, zur Verfügung stehen:

Problem: Die in die Felder des Symbols der „FDGB-Urlauber-Olympiade 1971 bis 1972“ eingesetzten Buchstaben $a, b, \dots, g$ und h bedeuten ganze Zahlen, für die gilt:

Bild 2



a) Die Summen s der jeweils in einem Kreise stehenden Zahlen sind einander gleich: $a+f+e=b+g+f=c+h+g=d+e+h=s$



b) Die Summen t der in kongruenten Feldern stehenden Zahlen sind ebenfalls einander gleich: $a+b+c+d=e+f+g+h=t$.

▲ 1 ▲ (Für Schüler der Klassen 5 und 6): Gib eine spezielle Lösung an, bei der alle acht Zahlen $a, b, \dots, g$ und h natürliche Zahlen und voneinander verschieden sind!

▲ 2 ▲ (Für Schüler der Klassen 7 und 8): Zeige, daß $s = \frac{3}{4}t$ gilt!

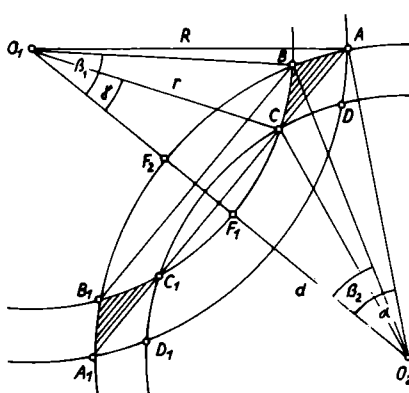
▲ 3 ▲ (Für Schüler der Klassen 9 und 10): Sind α, β, ϵ und σ beliebige ganze Zahlen, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch $a=\sigma+\alpha, b=\sigma+\beta, c=\sigma-\alpha, d=\sigma-\beta, e=\sigma+\epsilon, f=\sigma-\alpha-\epsilon, g=\sigma+\alpha-\beta+\epsilon$ und $h=\sigma+\beta-\epsilon$.

Zeige dies oder gib eine andere Darstellung der allgemeinen Lösung an!

Lösungen sind bis zum 30. März 1972 unter dem Kennwort „FDGB-Urlauber-Olympiade“ an die Redaktion unserer Zeitschrift einzusenden.

W. Träger

Bild 4 zum nachstehenden Artikel



Die fünf olympischen Ringe

Aus: Középiskolai Matematikai Lapok
(Mathematische Schülerzeitschrift der Ungarischen VR)

Problem: Betrachtet wird das bekannte Symbol der Olympischen Spiele auf einem Plakat in einfarbigem Druck.

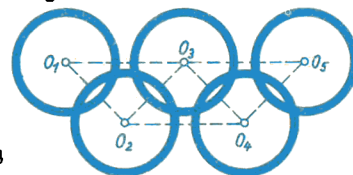


Bild 3

In der Zeichnung 3 sind u. a. zusätzlich die Zentren der fünf Ringe eingezeichnet. Die Zentren dreier sich schneidender Ringe sind jeweils die Eckpunkte eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 24 cm. Der innere und äußere Durchmesser eines Ringes beträgt 18 cm bzw. 22 cm.

▲ 4 ▲ (Für Schüler der Klasse 6): Diese Olympischen Ringe überdecken sich in acht kongruenten Kreisbogenvierecken. (Ein Kreisbogenviereck ist eine von vier Kreisbögen begrenzte Fläche.)

Zeige, daß der Flächeninhalt des Kreisbogenvierecks $ABCD$ (siehe Bild 4) darstellbar ist durch

$$A \square = (\cap AF_2A_1 - \cap BF_2B_1) - (\cap BF_1B_1 - \cap CF_1C_1).$$

In dieser Formel bedeutet z. B. $\cap AF_2A_1$ den Flächeninhalt des Kreissegmentes, das begrenzt wird von der Sehne $\overline{AA_1}$ und dem Kreisbogen von A über F_2 nach A_1 des Kreises mit Radius 11 cm um O_2 .

▲ 5 ▲ (Für Schüler der Klasse 10): Stelle unter Benutzung der Zeichnung 4 die folgenden Formeln auf!

$$\cos \alpha = \frac{d}{2R}; \quad \cos \beta_2 = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2dR};$$

$$\cos \beta_1 = \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2dr}; \quad \cos \gamma = \frac{d}{2r}$$

▲ 6 ▲ (Für Schüler der Klasse 7): Berechne den Flächeninhalt $A_{\odot}$ eines der in Zeichnung 3 sichtbaren Kreisringe!

▲ 7 ▲ (Für Schüler der Klasse 10): Zeige unter Benutzung der Ergebnisse der Teilaufgaben 4 und 5, daß für den Flächeninhalt des Kreisbogenvierecks $ABCD$ des Bildes 2 gilt $A \square \approx 4,54 \text{ cm}^2$!

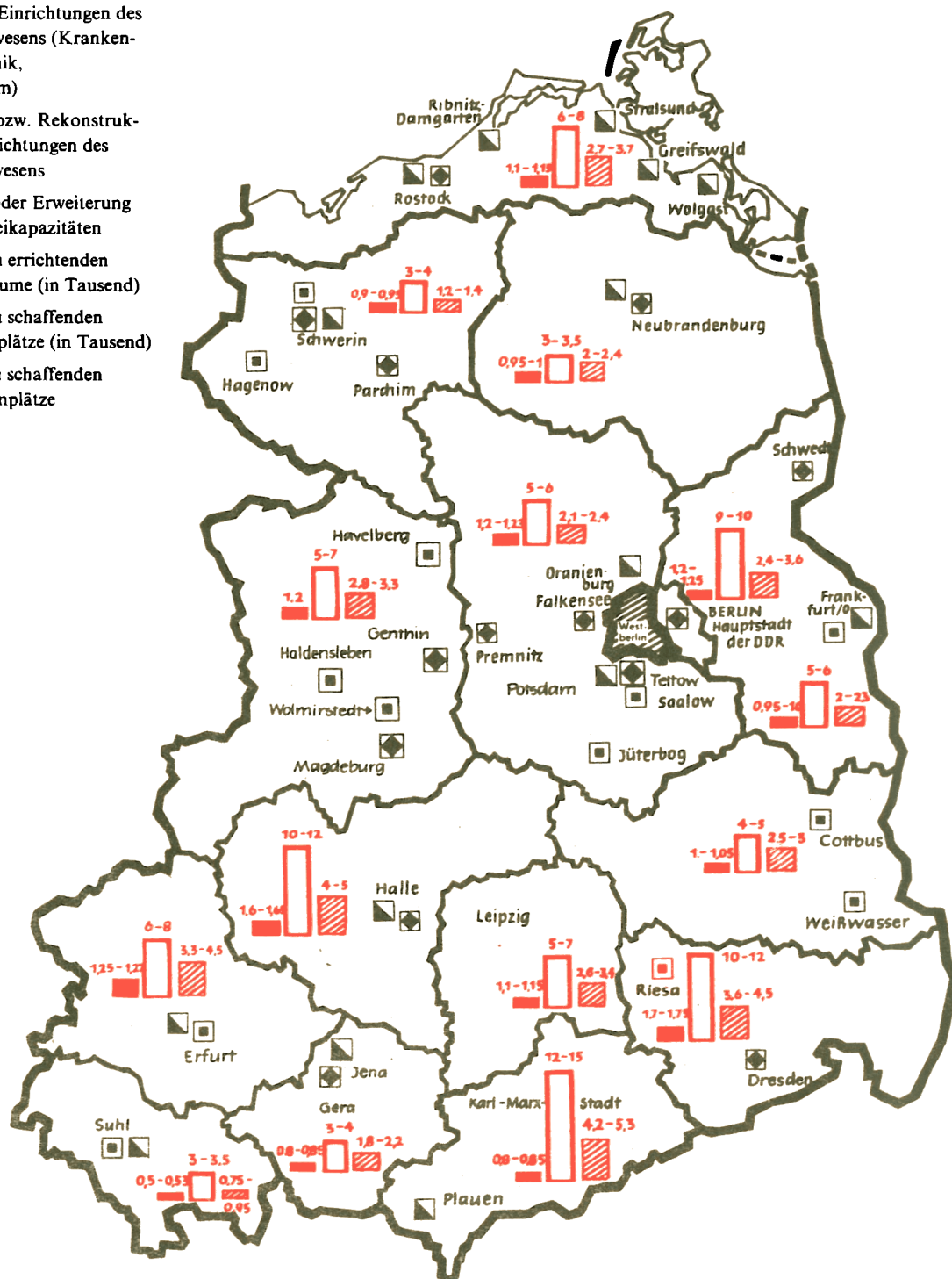
▲ 8 ▲ (Für Schüler der Klasse 7): Berechne den Flächeninhalt der von den fünf Olympischen Ringen begrenzten Fläche (in Bild 3 schwarz gedruckt)! Benutze dabei die Ergebnisse der Teilaufgaben 6 und 7!

Tóttay Emöke

Hauptvorhaben auf den Gebieten der Volksbildung, des Gesundheitswesens u. a. von 1971–1975

Diese Graphik wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitag der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975“, herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx“ beim ZK der SED, erschienen im Verlag Die Wirtschaft, Berlin. Preis der Mappe 6,20 M, geblockt, einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.

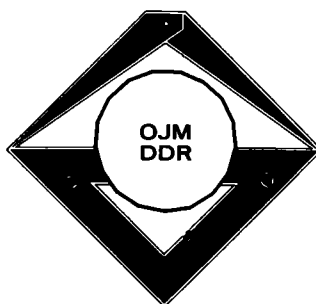
- Neubau von Einrichtungen des Gesundheitswesens (Krankenhaus, Poliklinik, Ambulatorium)
- Erweiterung bzw. Rekonstruktion von Einrichtungen des Gesundheitswesens
- Einrichtung oder Erweiterung von Wäschereikapazitäten
- Anzahl der zu errichtenden Unterrichtsräume (in Tausend)
- Anzahl der zu schaffenden Kindergartenplätze (in Tausend)
- Anzahl der zu schaffenden Kinderkrippenplätze (in Tausend)



XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

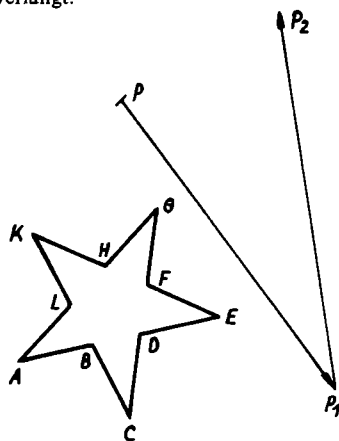
2. Stufe (Kreisolympiade)

(24. November 1971)



Olympiadeklasse 5

1. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind eine Sternfigur $ABCDEFGHKL$ und zwei Verschiebungs Pfeile $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ abgebildet. Auf die Sternfigur sollen nacheinander die Verschiebungen $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ angewendet werden. Konstruiere auf dem Arbeitsblatt, unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck, die dabei entstehende Sternfigur $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2K_2L_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



2. Bernd hat an Monika insgesamt 21 Mark an Beiträgen abzurechnen. Er hat 8 Zweimarkstücke und 6 Fünfmarsstücke und kein weiteres Geld bei sich. In Monikas Kasse befinden sich genau 20,— Mark, und zwar in Form von 10 Zweimarsstücken. Sie behauptet, daß es unter diesen Umständen 3 verschiedene Möglichkeiten gibt, den angegebenen Betrag abzurechnen.

Dabei sollen keine Möglichkeiten gezählt werden, bei denen ein Geldstück einmal zwischen Bernd und Monika hin- und ein gleichwertiges später wieder zurückgegeben wird. Auch sollen Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, in der Geldstücke gegeben werden, nicht als verschieden gelten. Ebenso soll es nicht darauf ankommen, welches Fünfmars- oder welches Zweimarsstück gegeben wird. Stelle fest, ob Monikas Behauptung richtig ist.

Anmerkung: Eine Untersuchung, ob diese 3 Möglichkeiten, falls es sie gibt, die einzigen sind, ist nicht erforderlich.

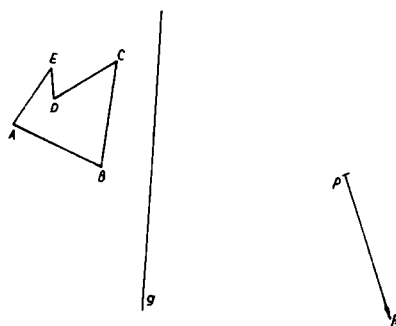
3. Am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“ beteiligten sich 1970 von einer Oberschule insgesamt 216 Schüler. Das waren dreimal so viele wie im Jahr 1969. Im Jahr 1969 gab es an derselben Schule doppelt so viele Teilnehmer am alpha-Wettbewerb wie im Jahr 1968. Berechne jeweils die Anzahl aller Schüler dieser Oberschule, die am alpha-Wettbewerb der Jahre 1968 und 1969 teilgenommen haben!

4. Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z , von denen jede alle folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

- (1) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
- (2) Subtrahiert man die Einerziffer der Zahl von ihrer Zehnerziffer, so erhält man 4.
- (3) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine neue zweistellige Zahl z_1 , deren Dreifaches kleiner ist als z .

Olympiadeklasse 6

1. Das auf dem beiliegenden Arbeitsblatt abgebildete Fünfeck $ABCDE$ soll an der Geraden g gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck, $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungs Pfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



2. Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen.

Außerdem ist bekannt:

- (1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gute Bücher.
- (2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleichviele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.
- (3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennispielerin. Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?
3. Von dem berühmten Mathematiker *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) stammt folgende Aufgabe:

Zerlege die Zahl 25 so in zwei Summanden, daß der größere Summand 49 mal so groß ist wie der kleinere Summand.

Hinweis: Die Summanden brauchen nicht natürliche Zahlen zu sein.

4. Wenn man ein Drittel von Rainers Spargeld zu einem Fünftel dieses Spargeldes addiert, dann ist die Summe genau 7 Mark mehr als die Hälfte seines Spargeldes. Wieviel Mark hat Rainer hiernach insgesamt gespart?

Olympiadeklasse 7

1. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

2. Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:

- (1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.
- (2) Keine Partie endete unentschieden (remis).

(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.

(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}$ ihrer Spiele.

(5) Claudia gewann genau ein Spiel.

Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

3. Beweise folgenden Satz: In jedem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht.

4. Konstruiere ein konvexes Viereck $ABCD$ aus $\overline{BC}=3,5$ cm; $\overline{CD}=3,5$ cm; $\overline{AC}=5$ cm, $\sphericalangle DAB=75^\circ$ und $\sphericalangle ABC=120^\circ$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!

Anmerkung: $\sphericalangle ABC$ bedeutet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Olympiadeklasse 8

1. Beweise den folgenden Satz:

Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ durch 6 teilbar.

2. Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a , auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei

liege C zwischen A und D und D zwischen C und B . Über AC , AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.

Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

3. Beweise, daß für jedes Dreieck $\triangle ABC$ der folgende Satz gilt: Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB .

4. In einer Ebene ε seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.
a) Beweise, daß dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!

b) Beweise, daß es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!
c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

Olympiadeklasse 9

1. Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.

Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

2. Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b ($b \neq 0$) mit folgender Eigenschaft: Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer

geeigneten natürlichen Zahl n ($n \neq 0$) und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n , so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

3. Eine Kreislinie sei in 30 gleichgroße Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet. Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

4. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b , so daß die Gleichungen

(1) $a + b = p_2$ und $a - b = p_1$
gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

Olympiadeklasse 10

1. Fünf Schüler A, B, C, D, E spielen folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z. B. der Schüler A , verläßt den Raum. Nun werden auf ein Blatt Papier genau 10 Vierecke gezeichnet. Die Zeichnung wird versteckt, und A wird herangerufen.

Jeder der Schüler B, C, D, E macht über die gezeichneten Vierecke genau eine Aussage. Von diesen Aussagen ist genau eine falsch. Sie lauten:

- (1) Auf der Zeichnung ist nicht nur ein Quadrat.
- (2) Es sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate auf der Zeichnung.
- (3) Man sieht unter den Vierecken auf der Zeichnung genau ein Parallelogramm.
- (4) Auf der Zeichnung gibt es genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.

A soll nun feststellen, welche Aussage falsch ist. Außerdem soll er die genaue Anzahl der Quadrate, Rechtecke und Trapeze angeben. Wie kann das geschehen?

2. Zwei Autos starteten gleichzeitig und fahren auf derselben Straße von A nach B . Das erste Auto benötigte für diese Strecke 4 Stunden, das zweite 3 Stunden.

Beide fahren während der ganzen Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

a) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start war das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite?

b) Welche Strecke, ausgedrückt in Bruchteilen der gesamten Entfernung von A nach B , legte jedes Auto bis zu dem in a) gesuchten Zeitpunkt zurück?

3. Es seien u und v reelle Zahlen mit $0 < v < u$. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k mit $k > -\frac{v}{u}$, für die (*) $\frac{u+kv}{v+ku} < 1$ gilt!

4. Unter allen gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABC$ ist bei gegebener Schenkellänge $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ die Basislänge $\overline{AB} = c$ derjenigen Dreiecke zu ermitteln, für die das Verhältnis der Flächeninhalte von In- und Umkreis 1:4 beträgt.

Olympiadeklasse 11/12

1. Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a bzw. b . Gesucht ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Volumen gleich der Summe der Würfelvolumina und dessen Höhenlänge gleich der Summe der Längen der Würfelkanten ist.

a) Man berechne die Seitenlänge c der quadratischen Grundfläche eines solchen Prismas.

b) Man gebe eine Konstruktion für eine Strecke der in a) ermittelten Länge c an.

2. Beweisen Sie, daß für keine ganze Zahl n die Zahl $7n+3$ Quadrat einer ganzen Zahl sein kann!

3. Klaus bemerkt, daß die beiden Zeiger seiner Taschenuhr zwischen 6 Uhr und 7 Uhr zu genau zwei Zeitpunkten einen Winkel von 110° bilden.

Ermitteln Sie die Anzahl der Minuten, die vom ersten bis zum zweiten der genannten Zeitpunkte vergangen sind!

4. Man betrachte in einer mit einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene die Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Es ist zu beweisen, daß keine Kreislinie dieser Schar mehr als einen Punkt (x, y) mit rationalen Zahlen x, y als Koordinaten enthält.

(Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufe 5 bis 10 werden in Heft 3/72 veröffentlicht, d. Red.)

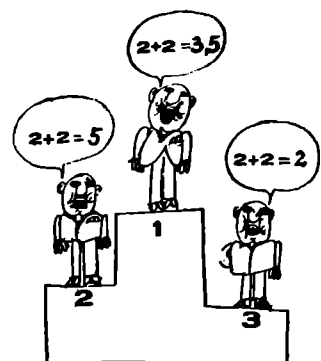
Vorbildliche Hilfe

Ende Oktober wurden 100 Päckchen mit Buchprämien für die Preisträger des Wettbewerbs 1970/71 versandt.

Wir danken den Verlagen, welche uns Bücher im Wert von 1 500 M zur Verfügung stellten. Das ist ein echtes Zeichen der Anerkennung für die vielen Tausend aktiven Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb.

Einen wertvollen Beitrag zur weiteren Qualifizierung unserer Leser leisteten:

- VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- VEB Fachbuchverlag, Leipzig
- Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
- Transpress, VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin
- VEB Verlag Technik, Berlin
- Sportverlag, Berlin
- Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin
- BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig
- Der Kinderbuchverlag, Berlin
- Verlag Die Wirtschaft, Berlin
- Deutscher Militärverlag, Berlin.

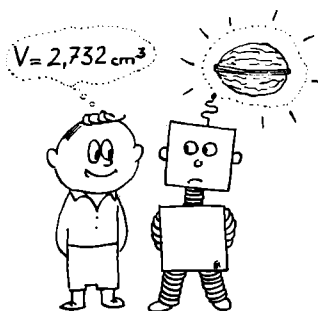


Mit dieser Vignette des polnischen Zeichners Szpilki (Warschau) wünscht die Redaktion *alpha* allen Teilnehmern der Bezirksolympiade (5./6. Februar) viel Erfolg.

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1972



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7077 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorge-setzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit * versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgaben-gruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgeben.

Der Jahreswettbewerb 1971/72 läuft von Heft 5/71 bis Heft 2/72. Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 5/72 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/71 bis 2/72) erhalten hat und diese ein-sendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1971/72 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Post-sendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

5 ▲ 847 Ein Grundstück hat die Form eines Rechtecks; es sei 60 m breit und dreimal so lang. Das Grundstück soll eingezäunt werden. Vier laufende Meter des Zaunes kosten 16,60 M; ferner beträgt der Arbeitslohn für die Aufstellung dieses Zaunes 210,— M. Wie teuer wird die Einzäunung dieses Grund-stücks?

Astrid Richter, Zerpenschleuse, Kl. 5b

5 ▲ 848 Der Trog eines Schiffshebewerkes, der die Form eines Quaders hat, ist innen 87 m lang und 13 m breit und besitzt eine Wassertiefe von 2,5 m. Die Stahlkonstruktion des Troges hat eine Masse von 1600 t. Die Masse des leeren Troges und der Stahlträger, auf denen er ruht, ist gleich der Masse seiner Wasserfüllung. Welche Last wird bei einem Aufzug des gefüllten Troges gehoben? Wie-viel Tonnen wiegen die Stahlträger?

Britta K., Plauen

W 5 ■ 849 Die Schüler einer Klasse sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik genau 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem genau ein Schreibheft. Gib die größtmögliche Anzahl von Heften an, die aus dem gesammelten Altpapier herge-stellt werden kann!

W 5 ■ 850 Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, daß die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Ziffern dieser Zahl, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer ist als die ursprüngliche. Wie lautet die Zahl z im Dezimalsystem?

* 5 * 851 Ein 8 cm langes Matchboxauto vom Typ *Rolls Royce* (Baujahr 1906) wird im Maßstab 1:55, ein Modell vom Typ *Daimler* (Baujahr 1911) im Maßstab 1:45 hergestellt. Der *Rolls Royce* ist in Wirklichkeit 62 cm

länger als der *Daimler*. Welche Länge besitzt das Matchboxauto vom Typ *Daimler*?

Annegret Kirsten,
August-Bebel-OS Leuna, Kl. 6c

* 5 * 852 Während einer Vorstellung im „Theater der Jungen Welt“ in Leipzig blieben einige Plätze frei. Alfred zählte 17, Annerose dagegen 16 freie Plätze. Heinz sagte, Alfred habe sich auf jeden Fall verzählt. Wie konnte Heinz seine Aussage begründen, wenn er wußte, daß es im Theater insgesamt 520 Plätze gibt und in dieser Vorstellung 68 Mädchen mehr als Jungen anwesend waren? Wieviel Jungen und wieviel Mädchen nah-men an der Vorstellung teil, wenn die An-gabe von Annerose richtig ist?

6 ▲ 853 Ein Parallelogramm $ABCD$ wird durch seine Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, die sich in M schneiden, in vier Teildreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$ und $\triangle DAM$ zerlegt. Es ist zu beweisen, daß diese vier Teil-dreiecke untereinander flächengleich sind!

Peter-Michael Anders
u. Detlef Snaga, Bernau, Kl. 7b

6 ▲ 854 Beweise, daß die hintereinander ausgeführten Spiegelungen eines Dreiecks ABC an zwei zueinander parallelen Geraden ($g_1 \parallel g_2$) durch eine Verschiebung des Dreiecks ABC um den doppelten Abstand der Geraden g_1 und g_2 dargestellt werden kann.

Volker Zillmann, 801 Dresden

W 6 ■ 855 Aus einem Papierstreifen von 4 cm Breite soll ein Trapez mit einem Flä-cheninhalt von 20 cm^2 herausgeschnitten werden. Eine der parallelen Grundseiten des Trapezes soll 7 cm lang werden. Wie lang muß die zweite parallele Grundseite gewählt werden?

Mathematikfachlehrer Karl-Heinz Gentzsch,
Meuselwitz

30	Steffi Sorg, 5316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5	W 5 ■ 346
150	Prädikat:	30
	Lösung:	30

W 6 ■ 856 Von 27 eingesandten Aufgaben im „alpha-Wettbewerb“ erhielt der dritte Teil dieser Aufgaben das Prädikat „gut gelöst“. Die restlichen Aufgaben teilen sich in $\frac{7}{9}$ „sehr gut gelöster“ Aufgaben und zu gleichen Teilen in „gelöste“ und „nicht gelöste“ Aufgaben. Wieviel nicht gelöste, gelöste, gut gelöste bzw. sehr gut gelöste Aufgaben befanden sich unter den 27 eingesandten Aufgaben? *Gernot Förster, Forst, Kl. 8*

6 857 Bei einem 800-m-Lauf starteten sechs Läufer A, B, C, D, E und F. Vor dem Start wurden von drei Personen drei Tips m, n und p für die voraussichtliche Platzierung der Läufer gegeben.

Tip	1.	2.	3.	4.	5.	6. Platz
m	E	F	C	D	B	A
n	B	A	E	F	C	D
p	B	F	E	D	C	A

Nach Beendigung des Laufes stellte sich heraus, daß vom Tip m genau drei der sechs Angaben, vom Tip n keine der Angaben richtig waren. Auch vom Tip p waren genau drei der sechs Angaben richtig, jedoch keine zwei benachbarten der obigen Tabelle. In welcher Reihenfolge liefen die Läufer durchs Ziel? *Bernd Heymann, Leipzig, Kl. 8*

6 858 Gesucht sind alle durch 8 und 9 teilbaren natürlichen Zahlen, die aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern bestehen. (Die Reihenfolge dieser Ziffern ist beliebig.) *H.-Ulrich Frömmner, Neustrelitz, Kl. 7*

7 ■ 859 In einem Internat wohnen insgesamt 41 Schüler, darunter 23 Jungen. Jeder Junge liest regelmäßig entweder die „Junge Welt“ oder die „Trommel“ zum Stückpreis von 0,15 M bzw. 0,10 M. Die Jungen müssen für jede neu erscheinende Zeitung zusammen 2,70 M zahlen. Jedes der Mädchen liest entweder die Zeitschrift „Frösi“ zum Preise von 0,70 M oder „alpha“ zum Preise von 0,50 M. Zusammen müssen die Mädchen 0,40 M weniger zahlen als das Vierfache des Betrages, den die Jungen aufbringen. Wieviele dieser vier Zeitungen bzw. Zeitschriften werden regelmäßig bezogen? *Steffen Mai, POS Prießnitz, Kl. 7*

7 ■ 860 Ein gerades dreiseitiges Prisma ist ein Körper, der von zwei in parallelen Ebenen liegenden kongruenten Dreiecksflächen (Grund- bzw. Deckfläche) und von Rechtecksflächen (Seitenflächen) begrenzt wird. Es sind alle geraden dreiseitigen Prismen zu bestimmen, deren fünf Begrenzungsflächen jeweils gleichen Umfang haben! Es ist ferner das Netz eines solchen geraden dreiseitigen Prismas mit umfangsgleichen Begrenzungsflächen zu zeichnen! *T.*

W 7 ■ 861 Ein Lichtspieltheater verfügt über insgesamt 507 Sitzplätze. Es werden folgende Eintrittspreise erhoben:

Parkett: 0,75 M, Sperrsitz: 1,00 M, Loge: 1,25 M.

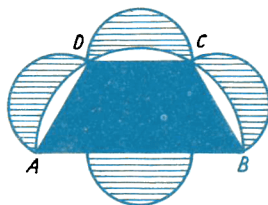
Sind alle Plätze ausverkauft, so beträgt die Gesamteinnahme 464,25 M. Die Einnahmen aus den Sperrsitz- und Logenplätzen ergeben zusammen 312,00 M. Wieviel Plätze entfallen auf das Parkett, den Sperrsitz und die Logen? *Ingolf Kunath, Meißen, Kl. 10*

W 7 ■ 862 Zeichne ein regelmäßiges Sechseck ABCDEF mit der Seite $\overline{AB} = a$ und ziehe die Diagonalen $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$. Wie verhält sich der Flächeninhalt A_1 des Dreiecks AEF zum Flächeninhalt A_2 des Rechtecks ABDE? *Wolfgang Huschmann, OS Oelsnitz, Kl. 7b*

7 863 Herr Müller fragt Herrn Schulz, welche Zahlen er beim Spiel „6 aus 49“ getippt habe. Herr Schulz antwortet: „Die Summe der getippten Zahlen lautet 175. Die zweite Zahl ist um 5 größer als die erste, die fünfte um zwei größer als die vierte. Die dritte Zahl ist eine Primzahl, die größer als 20 aber kleiner als 30 ist. Die sechste Zahl ist dreimal so groß wie die erste. Die Summe aus der ersten und zweiten Zahl ist gleich der vierten Zahl.“ Welche Zahlen hat Herr Schulz getippt? *Uwe Briese, OS Stargard, Kl. 6*

7 864 Zeichne einen Winkel $\alpha = 88^\circ$ mit seinem Scheitelpunkt S und konstruiere die Halbierungslinie w_α dieses Winkels! Beschreibe um S einen Kreis k_1 mit einem (beliebigen) Radius r_1 ! Seine Schnittpunkte mit den Schenkeln des Winkels α seien A und B, sein Schnittpunkt mit w_α sei M. Konstruiere nun um M einen Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \overline{AM} = \overline{BM}$, und errichte in B zur Geraden SB die Senkrechte, die den Kreis k_2 in C schneidet! Verbinde schließlich C mit A! Bestimme die Größe des Winkels $\gamma = \angle ACB$ durch Messung und durch Rechnung! *Mathematikfachlehrer W. Unze, Leipzig*

8 ■ 865 Es ist zu entscheiden, ob der Flächeninhalt des in der beigefügten Abbildung schwarz gefärbten Trapezes ABCD größer, kleiner oder gleich der Summe der Flächeninhalte der drei schraffierten Mondsicheln und des schraffierten Halbkreises ist.



Dabei gilt für die Grundseiten des Trapezes $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ und für die Schenkel $\overline{BC} = \overline{AD} = \overline{CD}$. Ferner sind die Mondsicheln jeweils durch den Halbkreis über AB als Durchmesser und die Halbkreise über den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ begrenzt, während der Durchmesser des Halbkreises unterhalb der

Seite $\overline{AB}$ gleich der Seite $\overline{CD}$ ist. Erst schätzen, dann rechnen!

Aus der sowjetischen populärwissenschaftlichen physikalisch-mathematischen Zeitschrift „Quant“, 1971, Heft 5

8 ■ 866 Bei dem ersten internationalen Testflug von Sofia nach Moskau (Entfernung 1900 km) legte das neue sowjetische Überschall-Passagierflugzeug Tu 144 diese Strecke in nur 1 h 11 min zurück. Die Maschine erreichte die Höchstgeschwindigkeit nach 18 min, flog dann mit dieser Höchstgeschwindigkeit weiter und verringerte wieder die Geschwindigkeit 17 min vor der Landung.

Wie groß war die Höchstgeschwindigkeit (in km/h) der Tu 144 bei diesem Flug, wenn man annimmt, daß die Geschwindigkeit während der ersten 18 min linear bis zur Höchstgeschwindigkeit zunahm und 17 min vor der Landung wieder linear abnahm? Wir nehmen also an, daß die mittlere Geschwindigkeit während der ersten 18 min und während der letzten 17 min halb so groß wie die Höchstgeschwindigkeit war. (Diese Annahme trifft zwar nur annähernd zu, sie reicht aber aus, um einen Näherungswert für die Höchstgeschwindigkeit zu bestimmen. Dabei vernachlässigen wir auch die Verlängerung des Flugweges, die durch die Steigung des Flugzeuges bis zu einer Höhe von etwa 16000 m entsteht.) *L.*

W 8 ■ 867 Jeder der drei Pioniere Sabine, Elke und Werner spielt mit genau einem der Sportgeräte Ball, Sprungseil und Kreisel. Welches Sportgerät hat Sabine, wenn von den folgenden drei Aussagen genau eine wahr ist?

- (1) Sabine hat den Kreisel nicht.
- (2) Werner hat den Ball, und Elke hat das Sprungseil.
- (3) Wenn Werner den Ball hat, so hat Sabine das Sprungseil. *T.*

W 8 ■ 868 Es sind die Größen der Winkel (im Gradmaß) aller gleichschenkligen Dreiecke anzugeben, die die folgenden Eigenschaften haben:

1. Die Maßzahlen der Größen der Winkel (im Gradmaß) des Dreiecks sind ganzzahlig.
2. Der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ist n-mal so groß wie die beiden anderen Winkel zusammen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. *Sch.*

8 869 Ein Radfahrer stellte am Ende einer Fahrt fest, daß der Kilometerzähler seines Fahrrades eine zurückgelegte Entfernung von 50 km anzeigte. Andererseits wußte er, daß sein Kilometerzähler eine zu geringe Entfernung anzeigte, weil er für einen Reifen von 26 Zoll Durchmesser konstruiert war, während sein Fahrrad einen Reifen von 28 Zoll Durchmesser hatte.

Welche Entfernung hat der Radfahrer tatsächlich zurückgelegt?

Schüler Thomas Wolf, Schleiz

* 8 * 870 a) Es seien in der Ebene 5 Punkte gegeben, von denen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Wieviele verschiedene Dreiecke gibt es, die jeweils drei der gegebenen 5 Punkte als Eckpunkte besitzen?

(Dabei gelten jeweils zwei Dreiecke als verschieden, wenn sie sich in mindestens einem Eckpunkt unterscheiden.)

b) Es seien in der Ebene n Punkte mit $n \geq 3$ gegeben, von denen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Wieviele verschiedene Dreiecke gibt es, die jeweils drei der gegebenen n Punkte als Eckpunkte besitzen? *T.*

9 $\blacktriangle$ 871 Die im Bau befindliche sibirische Erdöl-Fernleitung Aleksandrowskoje-Anshero-Sudshensk wird eine Länge von 850 km haben. Bei diesem Bau werden erstmalig Rohre mit einem äußeren Durchmesser von 1220 mm verlegt. Die Wandstärke der Rohre beträgt 15 mm.

Wieviele Tonnen Stahl werden für diese Fernleitung benötigt, wenn die Dichte des verwendeten Stahls $7,85 \text{ g cm}^{-3}$ beträgt? *L.*

W 9 $\blacksquare$ 872 Es sind alle reellen Zahlen anzugeben, für die die folgende Bedingung erfüllt ist:

Die Differenz aus der vierten und zweiten Potenz dieser Zahl ist 72 mal so groß wie die Summe aus der zweiten Potenz der Zahl und der Zahl selbst. *Sch.*

W 9 $\blacksquare$ 873 Ein Quader habe eine Höhe von 12 cm Länge, eine Raumdiagonale von 13 cm Länge und ein Volumen von 144 cm^3 . Es sind die Längen der Grundkanten zu berechnen. *G. Schlieper, Berlin*

* 9 * 874 Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$a(a+1) + \frac{b^2}{a} \geq 2b + a^2. \quad (1)$$

Welcher Bedingung müssen die reellen Zahlen a und b genügen, damit in (1) das Gleichheitszeichen gilt?

Ingolf Kunath, EOS Meißen, Klasse 11

* 9 * 875 Es sei ABC ein Dreieck, dessen Seite $\overline{AC}$ durch den Punkt E im Verhältnis $\overline{AE}:\overline{EC}=p:q$ und dessen Seite $\overline{BC}$ durch den Punkt D im Verhältnis $\overline{BD}:\overline{DC}=r:s$ geteilt ist. Dabei sind p, q, r, s positive reelle Zahlen.

Es ist das Verhältnis zu ermitteln, in dem die Strecke $\overline{AD}$ durch die Gerade BE geteilt wird.

Rüdiger Nützmann, stud. math. Trittelwitz

10 $\blacktriangle$ 876 Im Innern eines Kreises mit dem Radius r mögen 17 verschiedene Punkte liegen.

Man beweise, daß es unter diesen 17 Punkten stets zwei Punkte gibt, deren Abstand kleiner als $\frac{2}{3}r$ ist. *Hans-Dietrich Gronau, stud. math. Neustrelitz*

W 10 $\blacksquare$ 877 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x+y+xy=19, \quad (1)$$

$$y+z+yz=11, \quad (2)$$

$$z+x+zx=14 \quad (3)$$

zu ermitteln. *L.*

W 10 $\blacksquare$ 878 Das Volumen eines Kegels stumpfes mit den Grundkreisradien r_1 und r_2 , wobei $r_1 \neq r_2$ sei, und der Höhe h wird einmal nach der genauen Formel

$$V = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

und einmal nach der Näherungsformel

$$V' = \frac{\pi}{2} h (r_1^2 + r_2^2) \text{ berechnet.}$$

Es ist zu entscheiden, ob der Näherungswert V' größer oder kleiner als der genaue Wert V ist. *Herwig Gratias, EOS Sömmerda, Kl. 10*

* 10/12 * 879 In einem Spielwarengeschäft gibt es vier Sorten bunter Glaskugeln, die zum Verkauf angeboten werden. Eine Kugel von der ersten Sorte wiegt 1g und kostet

4 Pf, der zweiten Sorte 4g und 9 Pf, der dritten Sorte 8g und 12 Pf, der vierten Sorte 10g und 18 Pf.

Es sollen alle Möglichkeiten angegeben werden, die bestehen, um für 10 M genau 100 Kugeln zu kaufen, die zusammen genau 500 g wiegen.

Hans-Dieter Hornschuh, Mathematiklehrer, Kleintobel, Kr. Ravensburg (BRD)

* 10/12 * 880 Man beweise den folgenden Satz:

Es sei $P_1 P_2 \dots P_{2n}$ ein Tangentenvieleck mit gerader Eckenzahl ($2n \geq 4$), d. h., alle Seiten dieses Vielecks sind Tangenten eines Kreises, und die Berührungspunkte $T_1, T_2, \dots, T_{2n}$ sind sämtlich innere Punkte der Seiten $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{2n} P_1$. Ferner mögen diese Seiten die Längen $s_1, s_2, \dots, s_{2n}$ haben. Dann gilt stets

$$s_1 + s_3 + \dots + s_{2n-1} = s_2 + s_4 + \dots + s_{2n}.$$

Albrecht Böttcher, EOS „Johannes R. Becher“ Annaberg-Buchholz, Kl. 11

Fünf Jahre Mathematische Schülerzeitschrift alpha — fünf Jahre alpha-Wettbewerb

Seit der Gründung der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* (1967) gingen in der Redaktion über

100 000 Lösungen

ein, wurden bearbeitet und jeder Teilnehmer erhielt eine Antwort.

In diesem Jahre hat (für den Wettbewerb 1970/71) die Redaktion versandt:

2120 Abzeichen in Silber (dazu Urkunden)

210 Abzeichen in Gold

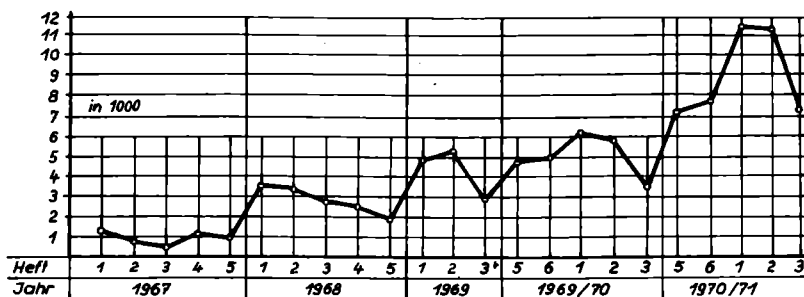
(für dreijährige Mitarbeit)

45 Abzeichen in Gold

(für vierjährige Mitarbeit).

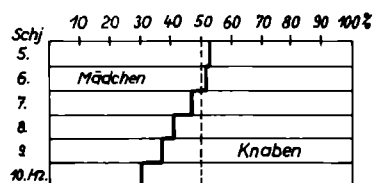
Die nachfolgenden drei Graphiken sollen dem Leser die Erfolge unserer kontinuierlichen, systematischen außerunterrichtlichen Arbeit zeigen (1967/71):

5 Jahre alpha-Wettbewerb (absolut)

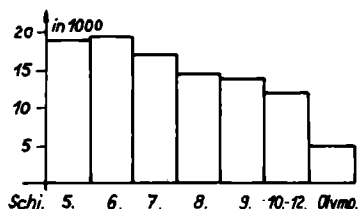


* umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr

Beteiligung aufgeschlüsselt nach Mädchen und Jungen



Beteiligung — aufgeschlüsselt nach Schuljahren



Abzeichen in Gold für dreijährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb

Klassenstufe 5: Kirsten Helbig, 1321 Schöneberg (75); Astrid Rösel, 205 Teterow (60; aus Klasse 4); Guido Gerald Blossfeld, 402 Halle (29); Detlef Poppe, 57 Mühlhausen (22); Heidi Wegener, 1157 Berlin; Gabriele Biebl, 754 Calau;

Klassenstufe 6: Bärbel Anders, 75 Cottbus (43); Claus Scheffler, 88 Zittau (26); Ines Greiner, 725 Wurzen (21); Ute Wittat, 9507 Ebersbrunn; Ullrich Bittner, 22 Greifswald; Carsten Schmidt, 1901 Dessow; Thomas Bergunde, 22 Greifswald; Petra Zimmermann, 8036 Dresden; Gerlinde Koch, 6081 Trusetal;

Klassenstufe 7: Reiner Lindemann, 75 Cottbus (81); Detlef Snaga, 128 Bernau (55); Karl-Heinz Hering, 50 Erfurt (51); Frank Klowe, 128 Bernau (42); Hans-Peter Tams, 2851 Domsuhl (40); Sibylle Rohrbeck, 2302 Franzburg (39); Michael Schnelle, 754 Calau (37); Brigitte Hildebrandt, 6316 Stützerbach (31); Bärbel Rahnefeld, 901 Karl-Marx-Stadt (27); Christoph Schmidt, 821 Freital (26); Andrea Schädlich, 9501 Culitzsch (25); Lothar Jennig, 2031 Gülzowshof (25); Thomas Rudolph, 92 Freiberg (20); Ute Greiner, 725 Wurzen; Birgit Bartels, 2567 Neubukow; Joh.-Ebh. Albrecht, 1281 Lobetal; Matthias Albrecht, 1281 Lobetal; Harald Anders, 8502 Buckau; Sabine Skierlo, 205 Teterow; Sabine Mamerow, 202 Altentretow; Rüdiger Blach, 754 Calau; Norbert Ziegler, 6051 Heidersbach; Margit Birnbaum, 22 Greifswald; Barbara Wettengel, 992 Oelsnitz; Beate Reiher, 99 Plauen; Eva Clauß, 9501 Culitzsch; Karl-Heinz Schmidt, 3257 Hecklingen; Burkhard Graupmann, 128 Bernau; Helga Herchert, 6427 Lichte; Uwe Löser, 6801 Goßwitz; Christine Röhnert, 8122 Radebeul; Elke Kantiem, 1195 Berlin; Andreas Möckel, 57 Mühlhausen; Ingo Reidat, 57 Mühlhausen; Dietmar Marohn, 53 Weimar; Norbert Kunze, 90 Karl-Marx-Stadt; Margit Gneuß, 8501 Leppersdorf; Helma Walthert, 102 Berlin; Dietmar Ihll, 9335 Kurort Seiffen; Günter Dähne, 46 Wittenberg; Angelika Goebel, 7904 Elsterwerda; Judith Seyfahrt, 53 Weimar, Uwe Lehnert, 2034 Tutow; Ulrich König, 6405 Schalkau; Detlef Walz, 755 Lübben; Jürgen Lutz, 6316 Stützerbach; Dietmar Braasch, 2601 Karow; Jutta Storch, 6081 Tambach; Detlef Heymel, 6081 Fambach; Brigitte Linß, 6081 Springstille; Christine Wilhelm, 6081 Springstille; Armin Endter, Frank Jäger, beide 6088 Steinbach-H., Monika Tschirschke, 755 Lübben;

Klassenstufe 8: Gernot Förster, 757 Forst (81); Andreas Schlosser, 95 Zwickau (79); Thomas Wolf, 655 Schleiz (54); Wolfgang Kögler, 9529 Wiesenburg (45); Irene Hanske, 8507

Putzkau (41); Stefan Pfeifer, 74 Altenburg (40); Hans-Ulrich Ihme, 8717 Oppach (36); Andreas Popp, 95 Zwickau (28); Regina Hildenbrandt, 6316 Stützerbach (27); Joachim Krautz, 75 Cottbus (25); Christine Feige, 57 Mühlhausen (24); Christian Hofmann, 7404 Meuselwitz (24); Bernd Heurich, 9402 Bernsbach (24); Uwe Beck, 154 Falkensee (23); Norbert Lüttig, 8501 Lichtenberg (21); Konstanze Zimmer, 8501 Hauswalde (20); Angela Petzold, 115 Berlin-Mahlsdorf (20); Uwe Quasthoff, 7022 Leipzig; Gerald Gebauer, 8501 Frankenthal; Rolf Schubert, 9402 Bernsbach; Frank Leopold, 8514 Pulsnitz; Andreas Buder, 8211 Cunersdorf; Astrid Dabel, 2321 Elmenhorst; Jörg Wehage, 1802 Kirchmöser; Gerhard Schramm, 4731 Voigtstedt; Andree Scheibel, 6051 Heidersbach; Birgit Starke, 703 Leipzig; Jürgen Beator, 1711 Woltersdorf; Manuela Quandt, 1162 Berlin; Andreas Schneider, 8512 Großbrohrsorf; Eberhard Scharf, 5701 Lengenfeld; Ingo Richter, 532 Apolda; Clemens Schlechte, 808 Dresden; Friedegard Ruthenberg, 1291 Blumberg; Irmtraud Albrecht, 111 Berlin; Petra Steinke, 1291 Blumberg; Bernd Bielg, Regine Katzer, Gabriele Granck, Heike Jurack, Martina Hoste, Rainer Schwierz, Carola Wotzsch, Reiner Wagner alle OS Buckau, 8502 Buckau; Thomas Brüderle, 6082 Breitung; Rainer Möller, 6081 Mittelstille; Roswitha Peter, 6081 Breitenbach; Christian Endter, Manfred Wabe, Andreas Reitzig, alle 6088 Steinbach-H.;

Klassenstufe 9: Hans-Gert Gräbe, 50 Erfurt (56); Ulf Brüstel, 7401 Ziegelheim (39); Bernd Hanke, 8708 Großschweidnitz (35); Yvonne Kruber, 835 Stolpen (35); Hanne Heinold, 15 Potsdam (32); Andreas Stern, 22 Greifswald (29); Peter Ullrich, 8213 Bannewitz (28); Reinhard Schuster, 703 Leipzig (25); Uwe Stitz, 801 Dresden (24); Volker Boos, 4601 Dabrun (22); Wolfram Ortweiler, 532 Apolda (21); Gerd Hantsche, 8142 Radeberg; Hubert Janik, 215 Strasburg; Volker Lippoldt, 7022 Leipzig; Peter Linhart, 7305 Waldheim; Peter-Michael Schmidt, 65 Gera; Helmar Bittner, 22 Greifswald; Roland Damm, 759 Spremberg; Reinhard Krüger, 2221 Buddenhagen; Angelika Tollgreve, 2731 Wendorf; Jürgen Koch, 5301 Weimar; Wolfgang Lehmann, 2723 Warin; Martin Ermrich, 3703 Elbingerode; Uta Preußner, 22 Greifswald; Regina Dittrich, 95 Zwickau; Reiner Lindner, 9291 Frankenau; Annegret Boden, 8512 Großbrohrsorf; Christian Engelmann, 9103 Limbach-Oberfrohna; Hans-Jürgen Reinsch, 171 Luckenwalde; Walter Tockhorn, 20 Neubrandenburg; Silvia Boden, 85 Bischofswerda; Uwe Löbus, 801 Dresden; Elke Wolf, 6081 Fambach; Rita Koch, 6081 Trusetal; Lothar Bombel, 1281 Danewitz; Anita Paul (29), 608 Schmalkalden; Gerti Häfner, 6088 Steinbach-H. ohne Angabe der Klassenstufe; Peter Recknagel, Rainer Nothnagel, Annelie Häfner, Eberhard Eff, Bernd

Schneeschildt, Gerlind Endter, Barbara Recknagel, Gerlinde Müller, Harald Recknagel, alle OS Steinbach-Hallenberg (6088); Manuela Terne, 795 Bad Liebenwerda; Georga Dux, 6087 OS Seligenthal;

Klassenstufe 10/12: Albrecht Böttcher, 9314 Neudorf (36); Jörg Vogel, 55 Nordhausen (31); Michael Hoffmann, 238 Barth (30); Knut Taeger, 402 Halle (27); Karl-Heinz Breitmoser, 20 Neubrandenburg (20); Volker Warstat, 323 Oschersleben (20); Andreas Heß, 794 Jessen; Winfried Helwig, 3018 Magdeburg; Stefan Ackermann, 725 Wurzen; Thomas Schwan, 8019 Dresden; Rolf Sommer, 993 Adorf; Ralf Hein, 9611 Remse; Ottmar Langer, 73 Döbeln; Klaus Fiedler, 801 Dresden; Carmen Hauptmann, 8245 Glashütte; Klaus Pohl, 66 Greiz; Wolfgang Herrmann, 9306 Elterlein; Sabine Dittrich, 9402 Bernsbach; Hans-Jürgen Weinberger, 222 Wolgast; Marlies Eberlein, 8231 Niederaufandorf; Bettina Belitz, 68 Saalfeld; Karl Heym, 6202 Bad Liebenstein; Claus Opitz, 36 Halberstadt; Rüdiger Nützmann, 2031 Trittelwitz; Detlef Hantke, 42 Merseburg; Bernd Ahrens, 301 Magdeburg; Volker Drenk, 2043 Neukalen; Gerhard E. Zinn, 6051 Marisfeld; Marina Schulz, 89 Görlitz; Petra Hoyer, 7027 Leipzig, Ute Reisner, 75 Cottbus.

Abzeichen in Gold für vierjährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb

Klassenstufe 6: Annegret Kirsten, 422 Leuna (52); Eckhard Schadow, 14 Oranienburg (28);

Klassenstufe 7: Sabine Anders, 75 Cottbus (81); Kerstin Bachmann, 402 Halle (54); Wolfgang Richter, 83 Pirna (44); Joh.-Chr. Albrecht, 1281 Lobetal (24);

Klassenstufe 8: Bernd Mathiszik, 50 Erfurt (64); Ralf Lehmann, 1273 Petershagen (58); Christoph Scheurer, 9611 Glauchau-G. (30); Bettina Zabel, 57 Mühlhausen (29); Lutz Puffeld, 1422 Hennigsdorf (25); Gisela Köhler, 926 Hainichen (24); Uwe Lewandowski, 705 Leipzig (23); Hans-Jürgen Förster, 1532 Kleinmachnow (20); Karin Fischer, 8036 Dresden; Elke Schneider, 50 Erfurt; Hans-Georg Meyer, 50 Erfurt; Hans-Jochen Rodner, 3014 Magdeburg; Edda Günther, 6506 Ronneburg; Bernd Heymann, 7027 Leipzig;

Klassenstufe 9: Ehrenfried Zchesch, 86 Bautzen (48); Herwig Gratias, 523 Sömmerda (38); Angela Rohrbeck, 2302 Franzburg (31); Claus-Detlev Bauermeister, 8019 Dresden; Andreas Meyer, 50 Erfurt; Andreas Eichner, 9271 Falken; Renate Köhler, 66 Greiz-Pohlitz; Monika Seiler, 53 Weimar;

Klassenstufe 10/12: siehe Seite 24.

Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien.

In freien Stunden **alpha** heiter

aus: Wochenpost 2/71 (R. Schwalme)



Gute Ratschläge

Man sollte dem h...en, der mit seiner J... eine Lan...se m....!

Wer sich beim Ernte:...atz verspätet, sollte sich ...ge im Waldre.... abschneiden, umam zu übern:...en!

Einem W... ..achmann sollte man nie erzählen, dieser Vogel sei ein Vi....raß!

In die leeren Felder sind Zahlwörter einzusetzen, damit die Ratschläge, wenn überhaupt, einen Sinn bekommen.

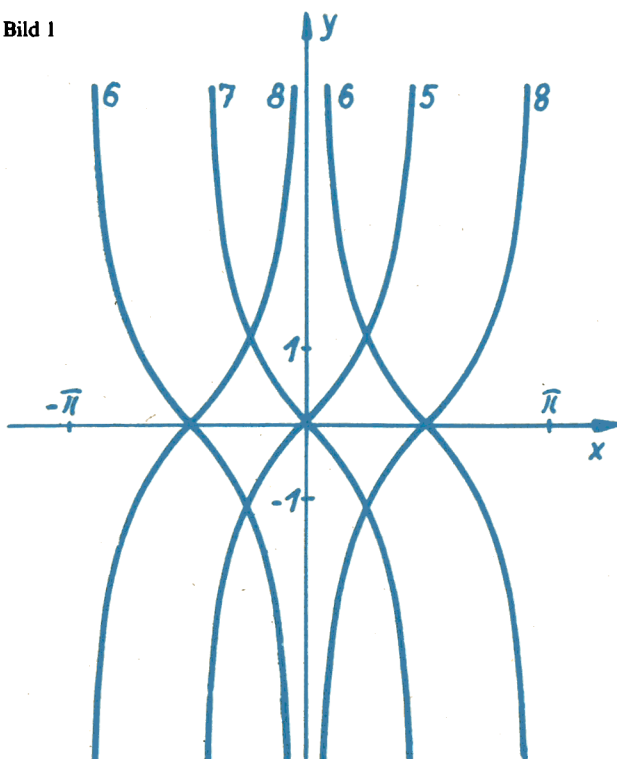
Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Hier funktioniert alles!

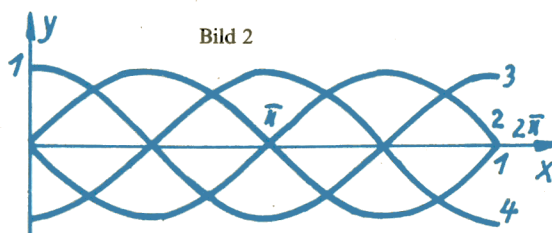
Gegeben sind die acht Winkelfunktionen, die auf den beiden Zeichnungen dargestellt sind.

a) Stelle die Funktionsgleichungen für alle acht Funktionen auf!

Bild 1



b) Schreibe jede der Funktionsgleichungen von a) als Sinusfunktionen, wobei für $y = a \cdot \sin(x+c)$ gelte $a > 0$.



Wolfgang Riedel, Spezialklasse Math. der TH Karl-Marx-Stadt

Mehr als ein Problem!

Johannes Lehmann
Leipzig
Lochmannstr. 4

Welchen Beruf übt dieser Herr aus?

Oberlehrer H. Pätzold, Volkshochschule Waren/Müritz

Der Mathematiker und der Löwe

Frage: Wie fängt ein Mathematiker einen Löwen?

Antwort: Zuerst definiert er, was es heißt einen Löwen gefangen zu haben. Definition: Wenn der Löwe durch ein Gitter von mir getrennt ist!

Dann setzt sich der Mathematiker einfach in einen Käfig und hat laut Definition den Löwen gefangen.

aus: Churgin „Formeln und was dann?“

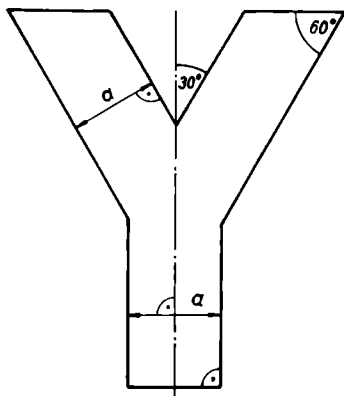


Geschickt aufgebaut
F. Kuritz (Wochenpost 11/71)

Der Buchstabe Ypsilon

Die Fläche des abgebildeten Buchstaben Y ist geeignet, in Teilflächen zerlegt zu werden. Diese Teilflächen sind zu einem Rechteck zusammenzulegen!

Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS Döbeln



Formel

Wir fanden uns
über mathematische Formeln gebeugt,
mit zerwühlten Haaren,
angeknabbertem Bleistift.

Es war nicht die Zeit
zu tanzen,
kein Kerzenlicht
spann Schatten um uns.

Wir fanden uns
über mathematische Formeln gebeugt
und begannen uns zu lieben.

Petra Heinrich, Teilnehmerin des 1. Zentralen
Poetenseminars der FDJ, Schwerin, August 1971

Silbenrätsel

Aus den Silben
al-chen-dert-eck-ei-ein-er-ex-ge-ge-grund-hen-hö-hun-
li-men-mon-ne-nent-ner-neun-new - o - on - pe-po-ra-
re-satz-tern-ti-ton-wei-wert-zwei
sollen Wörter der folgenden Bedeutung gebildet werden:

1. französischer Mathematiker (1746 bis 1818),
2. 6-17, 3. englischer Mathematiker und Physiker, Mitbegründer der Differentialrechnung (1643 bis 1727),
4. in der Prozentrechnung benutzte Größe, 5. Menge, die aus genau einem Element besteht, 6. ein spezielles Vieleck, 7. Zeichengerät, 8. Teil einer Potenz, 9. Name eines Lehrsatzes über das rechtwinklige Dreieck, 10. Oberbegriff zu Addition und Division, 11. Multiplizieren des Zählers und des Nenners eines Bruches mit der gleichen Zahl.

Die ersten Buchstaben ergeben, von oben nach unten gelesen, den Namen eines wichtigen Teilgebietes der Mathematik, die vorletzten Buchstaben, in entsprechender Reihenfolge, den Namen seines Begründers.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin

Magisches Quadrat

Der richtige Umgang mit 1 waag. ist in der Schule sehr wichtig

4 waag. ist ein altes engl. Längenmaß

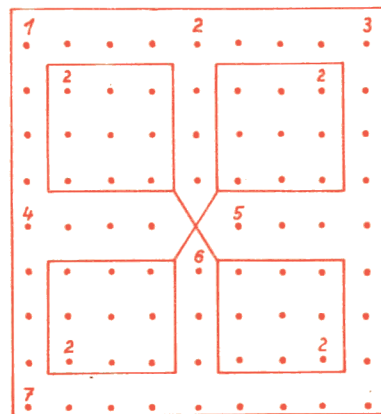
5 waag. ist die lat. Bezeichnung für Fläche

7 waag. ist ein Begriff aus einem jungen Teilgebiet der Mathematik, das von einem Hallenser Mathematiker begründet wurde

1 senkr. ist ein wichtiger Begriff der Mathematik, wird mit lim abgekürzt

3 senkr. ist die Vermessungskunde

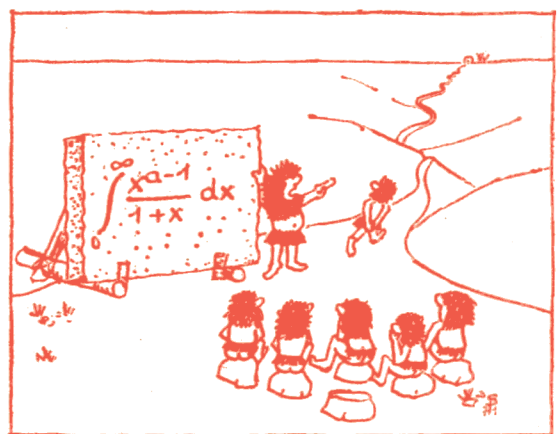
Die Stereometrie beschäftigt sich mit 6 senkr.



In die mittleren 4 Felder sind die Zahlen 1 bis 9 so einzusetzen, daß die Summen der Spalten und Zeilen stets 15 ergeben.

Mathematikfachlehrer W. Weber, EOS Schkeuditz bei Leipzig

„Marsch in die Ecke! In meiner Stunde gibt es keine Vorsagerei.“



aus: DLZ 4/71 (G. Sprengel, Dessau)



Kryptarithmetik

In den folgenden beiden Aufgaben sind jeweils die Sternchen durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht. Dabei darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer der Zahlen stehen.

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{array}{r} **4 \cdot *8* \\ ***8 \\ 5**2 \\ ***8 \\ \hline *1*4** \end{array} \quad \text{b) } \begin{array}{r} **4 \cdot *8* \\ ***8 \\ 5**2 \\ ***8 \\ \hline *8*4** \end{array} \end{array}$$

Lösung:

a) In der Multiplikationsaufgabe (siehe oben) bezeichnen wir den ersten Faktor mit x , den zweiten Faktor mit y und das Produkt in der 5. Zeile mit z .

Dann folgt aus der 3. Zeile

$$5002 \leq 8x \leq 5992,$$

$$625 \frac{2}{8} \leq x \leq 749.$$

Da aber x auf 4 endet, erhalten wir

$$634 \leq x \leq 744. \quad (1)$$

Da an der letzten Stelle in der 2. und 4. Zeile die Ziffer 8 steht und da x auf 4 endet, können die erste und die letzte Ziffer von y nur die Ziffern 2 oder 7 sein. Daher ist y gleich 282, 287, 782 oder 787.

Wir stellen noch fest, daß die zweite Ziffer in der 2. Zeile nur gleich 4, 5 oder 6 sein kann, da sonst in der 5. Zeile an der zweiten Stelle nicht die Ziffer 1 stehen könnte. Jetzt untersuchen wir die einzelnen Fälle.

1. $y=282$

Dann ist wegen (1)

$$1268 \leq 2x \leq 1488, \quad (2)$$

also steht in der 5. Zeile an der ersten Stelle die Ziffer 2. Daher ist z mindestens gleich 210408, und wir erhalten die Ungleichung

$$y = \frac{z}{x} = \frac{210408}{x}.$$

Nun ist aber $x \leq 744$, also $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{744}$; daraus

folgt

$$y \geq \frac{210408}{744} = 282 \frac{600}{744}$$

im Widerspruch zu $y=282$, so daß dieser Fall ausscheidet.

2. $y=287$

Wie oben erhalten wir dann $z \geq 210408$ und

$$x = \frac{z}{y} \geq \frac{210408}{287} = 733 \frac{37}{287}.$$

Wegen (1) kann daher x nur gleich 734 oder 744 sein. Wir erhalten für $z=xy$

210658 oder 213528.

In beiden Fällen steht an der 4. Stelle von z nicht die Ziffer 4. Daher scheidet auch dieser Fall aus.

3. $y=782$

Wegen (1) gilt $4438 \leq 7x \leq 5208$.

Da an der 2. Stelle von $7x$ nur die Ziffern 4, 5 oder 6 stehen können, folgt

$$4438 \leq 7x \leq 4698,$$

$$\text{also} \quad 634 \leq x \leq 671 \frac{1}{7}.$$

x kann also nur gleich 634, 644, 654 oder 664 sein.

Wir erhalten für $z=xy$

495788, 503608, 511428 oder 519248.

Nur für $z=511428$ und $x=654$ ist die Bedingung erfüllt, daß an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht. Wir erhalten daher die

Lösung:

$$\begin{array}{r} 654 \cdot 782 \\ 4578 \\ 5232 \\ \hline 511428 \end{array}$$

4. $y=787$

Wie oben kann x nur eine der Zahlen 634, 644, 654, 664 sein.

Wir erhalten für z

498958, 506828, 514698 oder 522568.

Da hier in keinem Falle an der 4. Stelle von z die Ziffer 4 steht, erhalten wir keine weitere Lösung. Die gestellte Aufgabe hat also nur die unter Ziffer 3 angegebene Lösung.

J. Lehmann/R. Lüders

(Die Lösung zu Aufgabe b) veröffentlichen wir in Heft 2/72, Red. *alpha*.)

Geometrisches Kreuzworträtsel

Die entsprechend den Bedingungen bestimmte Zahl schreibt so (horizontal oder vertikal), daß jedes Kästchen eine Ziffer bekommt (Diese Ziffer kann keine Null sein, die links einer Zahl steht). Das Komma in einem Zehnerbruch wird weggelassen. Wenn die Zahl ein Annäherungswert ist, so wird wie gewöhnlich auf — oder abgerundet, und zwar so, daß genausoviel Ziffern wie freie Kästchen zur Verfügung stehen.

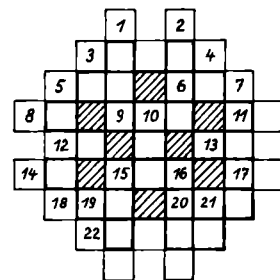
«Geometrisches» Krossword

Bestimmend nach der Bedingung, dass die Zahl ein Annäherungswert ist, so wird wie gewöhnlich auf — oder abgerundet, und zwar so, dass genausoviel Ziffern wie freie Kästchen zur Verfügung stehen.

gewöhnlichen Regeln, lassend soviel Ziffern, soviel Ziffern, soviel Ziffern, soviel Ziffern.

По горизонтали:

1. Verhältnis der Fläche des Kreises zum Quadrat des Radius.
2. Volumen eines прямоугольного параллелепипеда, у которого площади трех граней соответственно равны 24, 28 и 42.
3. Площадь параллелограмма, у которого между сторонами 17 и 26 заключен угол в 30° .
4. Наименьшая из медиан прямоугольного треугольника, у которого катеты равны 10 и 24.
5. Величина внешнего угла правильного 60-угольника в минутах.
6. Площадь трапеции, у которой основания равны 5 и 19, а углы при меньшем основании по 135° .
7. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 100 и 150.
8. Периметр ромба, диагонали которого равны 24 и 32.
9. Количество параллелограммов, которые образуются в результате пересечения четырех параллельных прямых тремя параллельными секущими.
10. Площадь прямоугольника, у которого периметр равен 84, а длина больше ширины на 4.
11. Число диагоналей выпуклого 15-угольника.
12. Площадь ромба, у которого периметр 144, а угол равен 150° .
13. Объем куба, у которого объем в куб. м и площадь поверхности в кв. м выражаются одним числом.
14. Сумма углов треугольника в минутах.



По вертикали:

1. Расстояние между двумя концентрическими окружностями, длины которых отличаются на 20.
2. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 520.
3. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна 12.

(Die Fortsetzung und den deutschen Text zu diesem aus der sowjetischen Schülerzeitschrift *Quandt* (5/70) entnommenen Rätsel findet der Leser auf Seite 24).

Lösungen

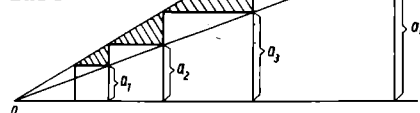


Lösungen der Aufgaben zum Beitrag „Albrecht Dürer“ (alpha 4/71 S. 80)

1 In der Figur 1 sind die schraffierten Dreiecke ähnlich und ähnlich gelegen. Ein Dreieck läßt sich in das andere durch zentrische Streckung oder Stauchung mit O als Zentrum überführen. Für die Katheten der Dreiecke gelten daher die folgenden Proportionen:

$$\frac{a_1}{a_2 - a_1} = \frac{a_2}{a_3 - a_2} = \frac{a_3}{a_4 - a_3} = \frac{a_4}{a_5 - a_4} = \dots$$

Bild 1



Nach Anwendung der Sätze über korrespondierende Addition und Subtraktion in Proportionen erhält man:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_4}{a_5} = \dots$$

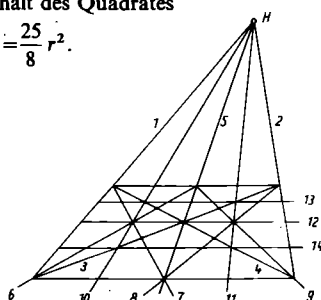
Damit ist gezeigt, daß die Folge der Seiten der dargestellten Quadrate eine geometrische Folge bildet.

2 Bezeichnet man mit r den Radius des Kreises in der Aufgabenstellung, so ist die Länge d einer Diagonalen des zugeordneten Quadrates gleich $\frac{5}{2}r$. Daraus folgt für die

Länge der Quadratseite $s = \frac{5\sqrt{2}}{4}r$. Somit ist der Inhalt des Quadrates

$$A_4 = \frac{25}{8}r^2.$$

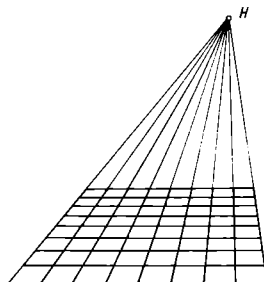
Bild 2



Da für den Kreisinhalt $A_k = \pi r^2$ gilt, wird mittels der vorgelegten Konstruktion die transzendente Zahl π durch den Bruch $\frac{25}{8}$ approximiert.

3 Bild 2 zeigt durch die den Geraden beigefügten Zahlen, in welcher Reihenfolge konstruktiv vorzugehen ist, um das zentralperspektive Bild des Schachbrettes schrittweise zu vervollständigen. Zentralperspektives Bild des Schachfeldes in Figur 3.

Bild 3



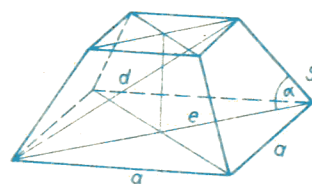
W 10/12 ■ 753 Zunächst liegt es nahe, das Volumen der beiden Pyramiden so zu berechnen, daß man den Flächeninhalt der Grundfläche BED der Pyramide $ABED$ ermittelt sowie die Länge der zugehörigen Höhe. Diese Rechnung ist aber sehr umständlich. Man kommt auf die folgende Weise schneller zum Ziel:

Man wählt als Grundfläche der Pyramide $ABED$ das rechtwinklige Dreieck ABD , dessen Flächeninhalt $\frac{a^2}{2}$ beträgt; dann ist die Länge der zugehörigen Höhe $\overline{AE} = a$. Das Volumen dieser Pyramide beträgt daher

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Ebenso groß ist auch das Volumen der Pyramide $GCFH$. Man erhält daher das gesuchte Volumen des Restkörpers, da das Volumen des Würfels a^3 beträgt,

$$V = a^3 - 2 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{2}{3}a^3.$$



*10/12*754 Für alle reellen x gilt

$$\begin{aligned} f[g[h(x)]] &= f[g(x+1)] \\ &= f[3(x+1)-5] = f(3x-2) \\ &= (3x-2)^2 + 3x-2+1 \\ &= 9x^2 - 9x + 3 \quad \text{und} \\ f(2x) &= 4x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Wegen (6) und (7) ist daher die Gleichung (4) für eine reelle Zahl x genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} 9x^2 - 9x + 3 &= 4x^2 + 2x + 1, \\ 5x^2 - 11x + 2 &= 0, \\ x^2 - \frac{11}{5}x + \frac{2}{5} &= 0. \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{1}{5}$,

d. h. die Gleichung (4) ist nur dann erfüllt, wenn $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{5}$.

Andererseits gilt wegen $x_1 = 2$

$$h(x_1) = 3, \quad g[h(x_1)] = g(3) = 4$$

und wegen $x_2 = \frac{1}{5}$

$$h(x_2) = \frac{6}{5}, \quad g[h(x_2)] = g\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{7}{5}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} [g[h(x_1)] + h(x_1) + x_1] [g[h(x_2)] + h(x_2) + x_2] \\ = (4 + 3 + 2) \left(-\frac{7}{5} + \frac{6}{5} + \frac{1}{5}\right) = 9 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

*10/12*755 1. Da es 10 Möglichkeiten für die Wahl des Koeffizienten a und jeweils je 10 Möglichkeiten für die Wahl von b, c und d gibt, existieren insgesamt

$10^4 = 10000$ verschiedene Gleichungssysteme der obigen Art.

2. Ist nun (x, y) eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), so gilt

$$ax + b = cx + d, \quad \text{also}$$

$$x(a - c) = d - b. \quad (3)$$

Fall a): Es sei $a - c \neq 0$; dann hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{d - b}{a - c} \quad \text{und} \quad y = a \frac{d - b}{a - c} + b = \frac{ad - bc}{a - c}.$$

In diesem Fall haben wir für die Wahl von a genau 10 Möglichkeiten. Dann haben wir aber für die Wahl von c wegen $c \neq a$ nur noch 9 Möglichkeiten. Ferner können wir noch b und d beliebig wählen (je 10 Möglichkeiten.)

Wir erhalten also insgesamt $10 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ verschiedene Gleichungssysteme, die genau eine reelle Lösung haben.

Fall b): Es sei $a - c = 0$ und $d - b \neq 0$, also $a = c$ und $b \neq d$. Dann hat die Gleichung (3) und damit auch das gegebene Gleichungssystem keine reelle Lösung.

In diesem Fall haben wir für die Wahl von a genau 10 Möglichkeiten; dann ist c eindeutig bestimmt. Für die Wahl von b haben wir dann noch 10 Möglichkeiten und wegen $d \neq b$ nur noch 9 Möglichkeiten für die Wahl von d . Wir erhalten also insgesamt $10 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 9 = 900$ verschiedene Gleichungssysteme, die keine Lösung haben.

Fall c): Es sei $a - c = 0$ und $d - b = 0$, also $a = c$ und $b = d$. Dann hat die Gleichung (3) und damit auch das gegebene Gleichungssystem unendlich viele reelle Lösungen; das Gleichungssystem ist nämlich für alle reellen x und alle y mit $y = ax + b$ erfüllt.

In diesem Fall haben wir für die Wahl von a genau 10 Möglichkeiten; dann ist c eindeutig bestimmt. Weiter haben wir für die Wahl von b noch 10 Möglichkeiten; dann ist auch d eindeutig bestimmt.

Wir erhalten also insgesamt $10 \cdot 10 = 100$ verschiedene Gleichungssysteme, die unendlich viele Lösungen haben.

Zusammenfassung: Die Anzahl der Gleichungssysteme der obigen Art mit

- a) genau einer reellen Lösung beträgt also 9000, d. s. 90%,
 b) keiner reellen Lösung beträgt 900, d. s. 9%,
 c) unendlich vielen reellen Lösungen beträgt 100, d. s. 1%.

Wir erkennen, daß die Gleichungssysteme mit genau einer Lösung weitaus häufiger vorkommen (90% der Fälle) als die Gleichungssysteme mit keiner oder unendlich vielen Lösungen.

*10/12*756 Da in der angeführten Gleichung die Winkel α , 2α und 3α vorkommen und da $0^\circ \leq \alpha < 30^\circ$ gilt, liegt es nahe, das Additionstheorem für die Tangensfunktion anzuwenden, das wir in dem Tafelwerk, 7.—12. Klasse, auf S. 61, Zeile 5 v. u. finden.

Es gilt nämlich für alle Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha < 30^\circ$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha} \quad (1)$$

Dabei ist der Nenner auf der rechten Seite dieser Gleichung für alle Winkel mit $0^\circ \leq \alpha < 30^\circ$ von Null verschieden; denn es gilt für diese Winkel $\tan \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\tan 2\alpha < \sqrt{3}, \text{ also } \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha < 1.$$

Wir können daher auf beiden Seiten der Gleichung (1) mit $1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha$ multiplizieren und erhalten $\tan 3\alpha - \tan 3\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha = \tan 2\alpha + \tan \alpha$. Daraus folgt $\tan \alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan 3\alpha = \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha$, womit die Behauptung bewiesen ist.

*10/12*757 Wir untersuchen die folgenden $n+1$ natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= 22, \\ a_3 &= 222, \\ &\dots \\ a_{n+1} &= \underbrace{222 \dots 2}_{n+1 \text{ Grundziffern}} \end{aligned}$$

Diese $n+1$ natürlichen Zahlen können bei der Division durch n nur die Reste 0, 1, 2, ..., $n-1$ lassen. Es sind also höchstens n verschiedene Reste möglich. Daher gibt es unter diesen $n+1$ verschiedenen Zahlen mindestens zwei Zahlen, die den gleichen Rest bei der Division durch n lassen. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist daher durch n teilbar und hat die Form

$$z = 222 \dots 2000 \dots 0,$$

womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung: Zum Beweis haben wir ein interessantes mathematisches Prinzip angewandt, nämlich das sog. „Schubfachprinzip von Dirichlet“ (benannt nach dem deutschen Mathematiker Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805 bis 1859): Wenn man $n+1$ Gegenstände auf n Schubfächer verteilt, so befinden sich mindestens zwei dieser Gegenstände in einem Schubfach. Wenn also $n+1$ natürliche Zahlen bei der Division durch n höchstens n verschiedene Reste lassen, so gibt es mindestens zwei dieser Zahlen, die den gleichen Rest bei der Division durch n lassen.

Lösungen zu: Mathematische Kurzweil aus der VR Bulgarien (Heft 6/71):

Klassentreffen

Angenommen, es waren n Personen anwesend; jede dieser n Personen überreichte an $(n-1)$ Personen je ein Foto. Es wurden insgesamt $n(n-1)$ Fotos ausgetauscht; daher gilt $n(n-1) = 552$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Wegen $n^2 > 552$, also $n \geq 24$ und wegen $(n-1)^2 < 552$, also $n-1 \leq 23$ und damit $n \leq 24$ gilt $n = 24$. Es waren 24 Personen anwesend.

Probe: $24 \cdot 23 = 552$.

Tischrunde

Da keiner der beiden Brüder Peter heißt, lauten ihre Vornamen Walter und Bernd. Herr Stein heißt dann entweder Walter oder Peter. Da Herr Ismer aber Wein, Peter hingegen Bier trank, muß Herr Stein mit Vornamen Peter und Herr Ismer folglich Walter heißen. Da Peter Stein Bier, Walter Ismer Wein und Bernd Neumann Kaffee trank, hat Walter Neumann Tee getrunken.

Auf einer Bank

Es seien A, B, C und D die vier Bankplätze in dieser Reihenfolge. Da Wilma und Ingo nicht am Rande der Bank saßen, könnten sie zwei unterschiedliche Sitzordnungen gehabt haben.

1. Fall: Wilma saß auf Platz B, Ingo auf Platz C. Da rechts von Ingo das Kind mit dem Familiennamen Starke saß und dies der Familienname eines der beiden Mädchen ist, müßte Lena Starke auf Platz D gesessen haben. Folglich trägt Wilma den Familiennamen Weiß. Peter hat in diesem Fall auf Platz A gesessen. Da aber die Schüler mit dem Familiennamen Sander und Weiß nicht nebeneinander saßen, kann weder Peter noch Ingo den Familiennamen Sander haben. Das steht im Widerspruch zum Aufgabentext. Folglich scheidet dieser Fall aus.

2. Fall: Wilma saß auf Platz C, Ingo auf Platz B. Dann hat Wilma den Familiennamen Starke, da sie rechts von Ingo sitzt. Da die Mädchen nicht nebeneinander saßen, nahm Lena Weiß Platz A ein. Da die Kinder mit den Familiennamen Sander und Weiß nicht nebeneinander saßen, nahm Peter Sander Platz D ein.

Platz A	Platz B	Platz C	Platz D
Lena	Ingo	Wilma	Peter
Weiß	Hauß	Starke	Sander

Wettlauf der Igel

Die Geschwindigkeit des zweiten Igels sei $x \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Zum Zurücklegen von 100 cm Weglänge auf dem Rücken der ersten Schildkröte benötigt der Igel die Zeit $\frac{100}{x}$ s. In dieser Zeit legt die erste Schildkröte den Weg von

$\frac{600}{x}$ cm zurück, und zwar in der Gegenrichtung zum Igel.

Zum Zurücklegen von 50 cm Weglänge auf dem Rücken der zweiten Schildkröte benötigt der Igel die Zeit $\frac{50}{x}$ s. In dieser Zeit

legt die zweite Schildkröte den Weg von $\frac{900}{x}$ cm zurück, und zwar in der Laufrichtung

des Igels. Aus $\frac{900}{x}$ cm $- \frac{600}{x}$ cm $= \frac{300}{x}$ cm

folgt, daß der zweite Igel $\frac{300}{x}$ cm Weglänge

einspart. Der Igel, der keine Hindernisse zu überwinden hatte, lief demnach schneller.

Lösungen zu: Aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht (Heft 6/71)

▲1▲ Udo behält 1 Pf, 2 Pf, 3 Pf oder 4 Pf übrig. Aus $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ und $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ folgt, daß Udo 8 Pf oder 16 Pf oder 24 Pf oder 32 Pf bei sich gehabt haben könnte.

▲2▲ Angenommen, Klaus erhalte wöchentlich n Mark Taschengeld; dann spart er in jeder Woche $\frac{1}{2}n$ Mark. Nach acht Wochen

hat er $4n$ Mark gespart. Folglich gilt $11 < 4 \cdot n < 17$. Nur $n=3$ oder $n=4$ genügen dieser Ungleichung. Klaus erhält entweder 3 M oder 4 M Taschengeld.

▲3▲ Die Aussage „Klaus ist nicht so groß wie Bernd“ läßt sich durch die Aussage „Klaus ist kleiner als Bernd“ ersetzen. Da Bernd kleiner als Uwe ist, gilt folgende Beziehung: Klaus ist der Kleinste, ihm folgen mit zunehmender Größe zunächst Bernd, danach Uwe.

Die Aussage „Uwe ist größer als Klaus“ wird nicht benötigt.

▲4▲ Wir fertigen folgende Tabelle an:

n	$4 \cdot n$	$4 \cdot n - 2$
1	4	2
2	8	6
3	12	10
4	16	14

Nur $n=3$ genügt der Ungleichung.

▲5▲ Aus $3 \cdot 3 = 9 < 11$ und $3 \cdot 4 = 12 > 11$ folgt, daß die erste Ungleichung für $x=4, 5, 6, 7, \dots$ erfüllt wird.

Aus $7 \cdot 6 = 42 > 40$ und $7 \cdot 5 = 35 < 40$ folgt, daß die zweite Ungleichung für $x=5, 4, 3, 2, 1, 0$ erfüllt wird.

Beide Ungleichungen werden demnach nur durch die Zahlen 4 oder 5 erfüllt.

▲6▲ Nach Peters Aussage läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

Anzahl der	Brüder	Schwester	Jungen	Mädchen
1	1	2	1	
2	2	3	2	
3	3	4	3	
4	4	5	4	

Nach Marions Aussage läßt sich folgende Tabelle aufstellen: Anzahl der

Brüder	Schwestern	Jungen	Mädchen
2	1	2	2
4	2	4	3
6	3	6	4
8	4	8	5

Durch Vergleich beider Tabellen stellen wir fest, daß zur Familie vier Jungen und drei Mädchen gehören.

▲ 7 ▲ Anzahl der
grünen gelben roten blauen
Buntstifte

	grünen	gelben	roten	blauen	insges.
1	2	2	5		10
1	3	3	4		11 > 10
1	2	2	9		14
1	3	3	7		14
1	4	4	5		14
2	3	3	6		14
2	4	4	5		15 > 14

▲ 8 ▲ Es seien a_1 und a_2 die Seitenlängen der Quadrate und A_1 und A_2 die zugehörigen Flächeninhalte; dann läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

a_1	a_2	A_1	A_2	$A_2 - A_1$
1	2	1	4	3
2	3	4	9	5
3	4	9	16	7
4	5	16	25	9
5	6	25	36	11

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß das kleinere Quadrat eine Seitenlänge von 4 cm, das größere von 5 cm besitzt.

5 ▲ 775 Für die Variablen $a, b, c, \dots, i, j$ dürfen nur die Zahlen 1, 2, 3, ..., 9, 10 eingesetzt werden; aus $e + e = f$ und $f + f = g$ und $g + g = j$ folgt deshalb $e = 1$ und damit $f = 2, g = 4$ und $j = 8$. Denn für $e \geq 2$ wird $j \geq 16$, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Aus (3) folgt $1 + 2 = a$, also $a = 3$.

Aus (1) folgt $3 + 3 = b$, also $b = 6$.

Nur die Zahlen 5, 7, 9 und 10 sind noch nicht vergeben.

Aus (7) folgt $h = 5$ und damit $c = 10$. Denn für $h > 5$ wird $c > 10$, was den Bedingungen widerspricht.

Aus (4) folgt $4 + 5 = d$, also $d = 9$.

Aus (5) folgt $i - 2 = 5$, also $i = 7$.

Wir überzeugen uns noch davon, daß unter diesen Voraussetzungen auch die Gleichung (2) erfüllt ist; denn es gilt $10 - 9 = 1$. Für $a = 3, b = 6, c = 10, \dots, j = 8$ sind also alle gegebenen Gleichungen erfüllt.

W 5 ■ 776 Aus b) folgt: Adelheid und Sonja wohnen nicht in Görlitz. Aus c) folgt: Carola und Renate wohnen nicht in Görlitz. Folglich ist Görlitz der Wohnort von Helga.

Aus a) folgt: Carola wohnt weder in Jena noch in Merseburg.

Aus d) folgt: Carola wohnt nicht in Berlin. Folglich wohnt Carola in Rostock, da Görlitz der Wohnort von Helga ist.

Aus a) folgt: Sonja wohnt weder in Jena noch in Merseburg. Da Sonja auch nicht in Görlitz (Helga) oder Rostock (Carola) wohnen kann, ist ihr Heimatort Berlin.

Aus e) folgt: Adelheid wohnt nicht in Merseburg. Folglich wohnt Adelheid in Jena und Renate in Merseburg.

W 5 ■ 777 Wegen $1000 : 50 = 20$ enthält jede Tüte 20 Bonbon.

Aus $80 : 20 = 4$ folgt, daß ein Bonbon 4 Pf kostet.

Aus $500 : 4 = 125$ folgt, daß auf 1 kg genau 125 Bonbon kommen.

Aus $1000 : 125 = 8$ folgt, daß ein Bonbon 8 g wiegt.

*5*778 Auf Grund der vorgegebenen Quersummen könnte der erste Summand 514 oder 523 oder 532 oder 541 und der zweite Summand 122 oder 221 sein. Nun sind folgende Kombinationen möglich:

a) 514	b) 523	c) 532	d) 541
+ 122	+ 122	+ 122	+ 122
+ *6*	+ *6*	+ *6*	+ *6*
<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>
e) 514	f) 523	g) 532	h) 541
+ 221	+ 221	+ 221	+ 221
+ *6*	+ *6*	+ *6*	+ *6*
<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>	<u>1000</u>

Da die Addition der Einer in jeder Aufgabe gleich 10 ist, muß in jedem Fall ein Zehner übertragen werden. In den Aufgaben b), c), d), f), g), h) ist die Summe der Zehner dann aber stets größer als 100 und kleiner als 200, was der Voraussetzung widerspricht.

Es gibt demnach genau zwei Lösungen:

a) 514	e) 514
+ 122	+ 221
+ 364	+ 265
<u>1000</u>	<u>1000</u>

*5*779 a) Vorrundenspiele

In jeder der sechs Gruppen sind $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Spiele auszutragen. Insgesamt sind also $6 \cdot 15 = 90$ Spiele durchzuführen. Dafür stehen sechs Tischtennisplatten zur Verfügung; an jeder Platte werden demnach $90 : 6 = 15$ Spiele ausgetragen. Dazu wird eine Zeit von $15 \cdot 15$ Minuten, also 225 Minuten benötigt. Es schließt sich eine Pause von 60 Minuten an.

b) Zwischenrundenspiele

In jeder der zwei Gruppen sind $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Spiele auszutragen. Insgesamt sind also $2 \cdot 15 = 30$ Spiele durchzuführen. An jeder der sechs Platten werden demnach $30 : 6 = 5$ Spiele ausgetragen. Die Spielzeit beträgt also $5 \cdot 15$ Minuten = 75 Minuten. Es schließt sich eine Pause von 15 Minuten an.

c) Endrundenspiele

Da genau vier Spieler in die Endrunde kommen, kann nur an zwei Platten gespielt werden. Es sind $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Spiele, an jeder der

beiden Platten also drei Spiele auszutragen, wofür voraussichtlich 45 Minuten benötigt werden.

Aus $225 + 60 + 75 + 15 + 45$ Minuten = 420 Minuten = 7 Stunden folgt, daß die Sporthalle von 8.30 Uhr bis 15.30 Uhr besetzt sein wird.

6 ▲ 780 Von jedem der n Eckpunkte eines n -Ecks lassen sich $n - 3$ Diagonalen ziehen, das sind $n(n - 3)$ Diagonalen. Dabei wurde jede Diagonale doppelt gezählt. Ein n -Eck besitzt demnach $\frac{1}{2} n(n - 3)$ Diagonalen. Nun

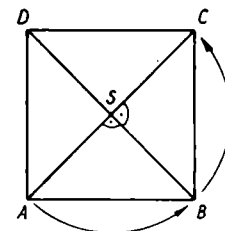
soll gelten $2n = \frac{1}{2} n(n - 3)$. Durch Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned} 4n &= n(n - 3), \\ 4 &= n - 3, \quad (\text{da } n \neq 0) \\ n &= 7. \end{aligned}$$

Ein konvexes Siebeneck besitzt genau 14 Diagonalen.

W 6 ■ 781 Da die Dreiecke $\triangle ADE$ und $\triangle DBC$ in zwei Winkeln ($\angle EAD = \angle DBC = \alpha$ und $\angle ADE = \angle BDC = \beta$) übereinstimmen, müssen sie auch in ihrem dritten Winkel übereinstimmen, und es gilt demnach $\angle AED = \angle DCB$ bzw. $\varepsilon = \delta = 80^\circ$. Für den gestreckten Winkel $\angle ACP$ gilt ferner $2\gamma + \delta = 180^\circ$, also $2\gamma + 80^\circ = 180^\circ$ und damit $\gamma = 50^\circ$. Für den Außenwinkel $\angle PCB$ des Dreiecks ABC gilt $\gamma = 2\alpha$, also $2\alpha = 50^\circ$ und damit $\alpha = 25^\circ$. Für die Summe der Winkelgrößen des Dreiecks ADE gilt $\alpha + \beta + \varepsilon = 180^\circ$, also $25^\circ + \beta + 80^\circ = 180^\circ$ und damit $\beta = 75^\circ$.

W 6 ■ 782 Es sei $ABCD$ ein Rechteck, in dem die Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht stehen und sich im Punkte S schneiden.



Dann gilt $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}$ und $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle DSA = 90^\circ$. Drehen wir das Rechteck $ABCD$ um S als Drehzentrum im positiven Sinne um einen Drehwinkel von 90° , so wird deshalb A auf B , B auf C , C auf D und D auf A abgebildet. Damit wird aber zugleich auch $\overline{AB}$ auf $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ auf $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ auf $\overline{DA}$ und $\overline{DA}$ auf $\overline{AB}$ abgebildet. Folglich gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, und das Rechteck $ABCD$ ist somit ein Quadrat.

*6*783 Aus $\frac{4a+7}{4b} = \frac{3}{4}$ folgt $3b = 4a + 7$

$$= 3a + 6 + a + 1 \text{ bzw. } b = a + 2 + \frac{a+1}{3}.$$

Nur wenn $a + 1$ durch 3 teilbar ist, wird b ganzzahlig. Die folgende Tabelle enthält die möglichen Belegungen für a .

Die Brüche $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{13}$ und $\frac{11}{17}$ genügen den gestellten Bedingungen.

a	b
2	5
5	9
8	13
11	17

Abzeichen in Gold für vierjährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb

Klassenstufe 10/12: Jürgen Zabel, 57 Mühlhausen (38); Heinz Marbes, 128 Bernau (30); Jürgen Dubslaff, 50 Erfurt (29); Hans-Joachim Karl, 409 Halle-Neustadt (24); Johannes Blümlein, 6112 Heldburg (22); Harald Herrmann, 9301 Hammer-Unterswiesenthal (21); Ilona Boenigk, 402 Halle (21); Christian Philipp, 8506 Ohorn; Thomas Kuhn, 5812 Waltershausen; Elke Hauptmann, 801 Dresden; Gernot Spiewok, 22 Greifswald, Sigrid Straßburger, 606 Zella-Mehlis; Karin Krüger, 453 Roßlau; Jörg Lehnert, 2034 Tutow; Ingrid Preiß, 929 Rochlitz; Rainer Wilde, 1953 Fehrbellin; Frank Kretschmar, 7043 Leipzig; Peter Mohr, 87 Löbau; Annerose Lehmann, 7027 Leipzig; Renate Zimmermann, 8036 Dresden.

Fortsetzung zu Geometrisches Kreuzwörtertsel (Seite 20)

- Градусная величина угла между диагоналями трапеции, основания которой стягивают дуги окружности в 97° и 139° .
- Объем треугольной пирамиды, у которой боковые ребра взаимно перпендикулярны и равняются 37, 42, 54.
- Площадь треугольника, у которого угол между сторонами 312 и 232 равен 30° .
- Объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого выражаются последовательными нечетными числами.
- Площадь ромба с углом в 30° , описанного около окружности радиуса 24,5.
- Сумма внутренних углов выпуклого 42-угольника (в градусах).
- Диагональ прямоугольника, у которого длина равна 40, а ширина на 31 меньше.
- Площадь прямоугольной трапеции, у которой основания равны 4 и 6, а один из углов 45° .

Horizontal

- Verhältnis der Fläche des Kreises zum Quadrat seines Radius.
- Inhalt des rechteckigen Parallelepeds mit den Seitenflächen $a=24$, $b=28$ und $c=42$ (Flächeneinheiten).
- Fläche des Parallelogramms mit den Seitenlängen $a=17$ und $b=26$ und einem von ihnen eingeschlossenen Winkel $\alpha=30^\circ$.
- Kleinste Seitenhalbierende des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $a=10$ und $b=24$.
- Größe des Außenwinkels eines gleichseitigen Dreiecks in Minuten.
- Fläche des Trapezes mit den Grundlinien $a=15$ und $b=19$ und mit gleichen Winkeln $\alpha=135^\circ$ bei der Grundlinie a .
- Radius des Kreises, der dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $a=100$ und $b=150$ umschrieben ist.
- Umfang des Rhombus mit den Diagonalen $a=24$ und $b=32$.
- Anzahl der Parallelogramme, die man erhält, wenn vier parallele Geraden durch drei parallele Geraden geschnitten werden.
- Fläche des Rechtecks mit dem Umfang $u=84$ und den Seiten a und $b=4+a$.
- Anzahl der Diagonalen eines konvexen 15-Ecks.
- Fläche des Rhombus mit dem Umfang $u=144$ und dem Winkel $\alpha=150^\circ$.
- Inhalt des Würfels, dessen Inhalt (in m^3) gleich seiner Oberfläche (in m^2) ist.
- Winkelsumme eines Dreiecks in Minuten.

Vertikal

- Abstand zwischen zwei konzentrischen Kreisen, deren Umfänge sich um 20 unterscheiden.
- Umfang des regelmäßigen Sechsecks, das einem Kreis mit dem Radius $r=520$ einbeschrieben ist.
- Fläche des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $c=12$.
- Winkel (in Grad) zwischen den Diagonalen eines Trapezes, dessen durch die Grundlinien bestimmten Zentriwinkel des umschriebenen Kreises 97° und 139° betragen.
- Inhalt der dreiseitigen Pyramide mit paarweise senkrechten Seitenflächen $a=37$, $b=42$ und $c=54$.
- Fläche des Dreiecks mit den Seiten $a=312$, $b=232$ und dem Winkel $\alpha=30^\circ$ zwischen ihnen.
- Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepeds, dessen Dimensionen aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.
- Fläche des Rhombus mit dem Winkel $\alpha=30^\circ$, das einem Kreis mit dem Radius $r=24,5$ umschrieben ist.
- Summe der inneren Winkel (in Grad) eines konvexen 42-Ecks.
- Diagonale des Rechtecks mit den Seiten $a=40$ und $b=a-31$.
- Fläche des rechtwinkligen Trapezes mit den Grundlinien $a=6$ und $b=4$ und einem Winkel $\alpha=45^\circ$.

Lösung: horizontal: 3) 31416; 6) 221; 8) 13; 9) 360; 11) 84; 12) 90; 13) 80; 14) 18; 15) 437; 17) 90; 18) 648.
vertikal: 1) 3183; 2) 3120; 3) 36; 4) 62; 5) 13986; 7) 18096; 10) 693; 15) 4802; 16) 7200; 19) 41; 21) 10.

Lösungen zu alpha-heiter

Gute Ratschläge

Zahlwörter: elf, acht, drei, acht, eins, zwei, vier, eins, acht, acht, elf, elf

Hier funktioniert alles!

- a) $f(x)=\sin x$, $f(x)=-\sin x$, $f(x)=\cos x$,
 $f(x)=-\cos x$, $f(x)=\tan x$, $f(x)=\cot x$,
 $f(x)=-\tan x$, $f(x)=-\cot x$
 b) $f(x)=\sin x$, $f(x)=\sin(x+\pi)$,

$$f(x)=\sin x + \frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$f(x)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin x}$$

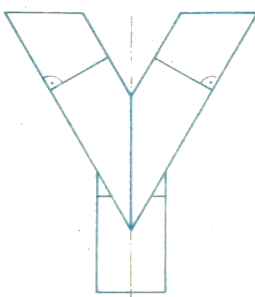
$$f(x)=\frac{\sin(x+\pi)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$f(x)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(x+\pi)}$$

Mehr als ein Problem!

Der Herr ist Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*.

Der Buchstabe Ypsilon



Silbenrätsel

1. M	on	G	e
2. E	inhundertzw	E	i
3. N	ewt	O	n
4. G	rundwe	R	t
5. E	inernen	G	e
6. N	eune	C	k
7. L	ine	A	l
8. E	xpone	N	t
9. H	öhensa	T	z
10. R	echenoperati	O	n
11. E	rweite	R	n

Magisches Quadrat

G L E I C H U N G															
R	2	7	6	E	4	9	2	E							
E	9	5	1	V	3	5	7	0							
N	4	3	8	A	8	1	6	D							
Z	0	L	L	*	A	R	E	A							
W	6	1	8	R	8	3	4	E							
E	7	5	3	A	1	5	9	S							
R	2	9	4	U	6	7	2	I							
T	E	I	L	M	E	N	G	E							

Wissen, wo ...

Inhaltsverzeichnis 1967–1971

alpha (Zeitschrift alpha)

- 2/67. 1/68 Wissen, wo (eine Anleitung zum Selbststudium) H. Herzog/J. Lehmann
 6/68, 6/69 alpha berichtet J. Lehmann
 5/69 An die Leser der Zeitschrift „alpha“ A. Markuschewitsch
 6/71 Wie entsteht die Zeitschrift alpha? H. Jüttner/P. Dreßler, J. Lehmann

alpha-Wettbewerb

- 1/67, 4/67, 1/68, 5/69, 5/70 Bedingungen und Hinweise Red.
 6/67 Vorstellung der Jury
 2/68, 2/69, 6/69, 6/70 Auswertung, Preisträger Statistik der Wettbewerbe 1967/70 Red.

- 4/69 Pioniere des alpha-Wettbewerbs E. Manske

Ähnlichkeitslehre

- 4/67 Guter Mond, du gehst so stille ... L. Görke

Aufgaben

- 5/67 Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR O. Prinits
 6/68 Grüße aus der Demokratischen Republik Vietnam H. Tang/Nguyen lam Son
 6/69, 1/70 Prüfungsaufgaben aus Island G. O. Gestsson
 1/70, 4/70 Prüfungsaufgaben aus Tanzania W. Büchel

Berichte

- 1/67 Internat. Mathematikerkongreß 1966 (Moskau) D. Ziegler
 2/67, 3/69 alpha berichtet aus aller Welt
 5/67 Nowosibirsk W. Friedrich
 5/67 Aus der Sowjetunion berichtet
 6/68 Junge Mathematiker erlebten Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft in Rostock H. Titze
 1/71 Die Mathematik ist schön R. Peter
 1/71 IV. Internat. Physikolympiade
 1/71 Taugen Mädchen für die Mathematik?
 2/71 10 Jahre Weltraumflug W. Träger

Berufe

- 3/67 Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium W. Zill
 6/67 Als Diplommathematiker in Dubna G. Laßner
 6/67 Als Mathematiklehrer in Tanzania H. Büchel
 2/68 Elektronische Datenverarbeitung — eine Perspektive
 2/68 Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur J. Pönisch
 3/68 Facharbeiter für Datenverarbeitung Ch. Papendorf
 4/68 Mathematisch-technischer Assistent G. Paulin
 5/68 Ingenieur für Programmierung W. Leupold
 6/68 Diplom-Mathematiker (Rechentechnik und Datenverarbeitung) J. Löttsch/G. Seifert
 2/69 Spezialklassen an mathematischen Fakultäten
 3/69 Ulrich Zählle berichtet U. Zählle
 4/69 Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten H. Ernst
 5/69 Hochbauzeichner — ein Beruf für Mädchen
 6/69 Diplom-Mathematiker H. Girlich
 1/70 Diplommlehrer für Mathematik R. Mildner
 5/70 Bauingenieur W. Wittig
 6/70 Hochschulingenieur G. Burucker
 1/71 Vermessungsfacharbeiter und Kartographiefacharbeiter

Beweise

- 2/67, 3/67 Beweise durch vollständige Induktion W. Stoye
 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand W. Träger
 4/69 Mathematikprobleme — selbst gemacht Nazla H. A. Khedre
 4/71 Ein interessanter geometrischer Beweis E. Schröder

Biographien

- 2/67 Gottfr. Wilh. Leibniz als Mathematiker W. Purkert
 4/67 Leonard Euler 1707 bis 1783 H. Bernhardt

- 4/67 Gaspard Monge 1746 bis 1818 E. Schröder
 5/67 A. J. Chintschin H. Bernhardt
 5/67 Aus der Jugend A. J. Chintschins A. Artisow/Muromzewa
 1/68 Gedenktage (G. Cantor — H. A. Lorentz — D. Hilbert — E. Landau)

- 4/68 August Ferdinand Möbius 1790 bis 1868 H. Wußing
 1/69 Lew Danowitsch Landau B. Zimmermann
 4/69 Evariste Galois E. Hertel/O. Stamford
 5/69 Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert J. Gronitz
 6/69 Michael Stifel J. Schwarz
 6/69 Alexander Ossipowitsch Gelfond H. Boll
 1/70 Mathematik in der Familie W. I. Lenins G. N. Wolkow
 3/70 Janos Bolyai I. Reimann
 4/70 Auf den Spuren Jakob Steiners E. Schröder
 5/70 Leninpreisträger Lew Semjonowitsch Pontrjagin

- 6/70, 2/71, 4/71 Albrecht Dürer E. Schröder
 6/70 Die Leninpreisträger Jurij Rezanov und Jurij Prochorov
 1/71, 4/71 Der Weg eines Talents —

- Olga A. Ladyschenskaja J. Senkjewitsch
 5/71 Ramanujan — das mathematische Genie V. Lewin
 Indiens Th. Riedrich
 6/71 Johannes Kepler

Funktionen

- 6/70, 2/71, 4/71 Was ist eine Funktion? A. N. Kolmogorow

Geometrie, darstellende

- 6/67 Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen E. Schröder
 1/68 Abstand zweier Punkte im Raum E. Schröder
 2/68 Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen E. Schröder
 4/68 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur E. Schröder
 1/70 Auch ein Schlußlicht hat es in sich E. Schröder
 5/70 Ein kleiner Dreh führt zum Ziel E. Schröder

Geschichte der Mathematik

- 6/68 Der mathematische Wettstreit in der Antike M. Otto
 6/68 „Mathematische Manuskripte“ von Karl Marx R. Sperl
 1/69 Die „mathematischen Manuskripte“ von Karl Marx Aus „Nedelja“ 10/68
 1/69 Was bedeutet eigentlich „x“? Aus „Po sv'etu“ 11/67
 1/70 Über die Anfänge der Mathematik, aus: „Die Mathematik in der Antike“ H. Wußing
 6/69 bis 5/70 Mathematik-Kalender W. Heinig/J. Lehmann
 3/71 Geschichte der Mathematik der Tschechoslowakei O. Langer

Gleichungen/Ungleichungen

- 1/68 Eine schwierige Hausaufgabe R. Lüders
 2/68 Der Lucassche Turm J. Frommann
 6/69 Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen W. Träger
 4/70 Einige Ungleichungen für Fakultäten V. I. Lewin
 6/70 Über Gleichungen mit absoluten Beträgen W. Träger

Graphentheorie

- 3/71 Über die Ramseyschen Zahlen J. Sedláček

Kombinatorik

- 6/71 Geometrische Kombinatorik L. Lovasz/J. Pelikan
 6/71 Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es? W. Türke

Literatur

- 4/68 Formen und Formeln, Fr. v. Krbek, Eine Buchbesprechung W. Arnold
 2/69 „Werk der Millionen“ Redaktion alpha
 6/70 Quant — eine neue physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift

6/70	<i>Jugend und Mathematik</i> — eine mathematische Schülerzeitschrift der Demokratischen Republik Vietnam		6/69	Kleine geometrische Exkursion	Th. Scholl
	Logik		2/70	Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe?	H. Titze
2/68	Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage	M. Rehm	3/70, 4/70	Ornamente	R. Bittner
2/70	Logisches Denken — spielend erlernt	G. Scholz		Relationen	
3/70	Mathematische Logik für Anfänger (Leseprobe)		6/70, 1/71, 2/71	Relationen	R. Herrmann
5/70	Achtung Kreuzung — Vorfahrt beachten!	W. Träger		Stereometrie	
	Mengenlehre		1/69	Fernsehfußball — reguläre Polyeder	E. Schröder
1/67	Mit Mengen fängt es an (1)	W. Walsch/H. Lohse	2/69	Der Eulersche Polyedersatz	H. Günther
2/67	Wir operieren mit Mengen (2)	W. Walsch	5/71	Durch die Welt der Tetraeder	G. Geise
3/67	Wir untersuchen Abbildungen (3)	W. Walsch		Unterhaltung	
4/67	Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre	W. Walsch	1/68	Hinter die Kulissen geschaut	W. Träger
2/69	Zweimengen und geordnete Paare	H. Tiede	3/68, 4/68	Wir lösen ein Zahlenrätsel	Th. Scholl
	Nomographie		3/68, 4/68, 5/68	eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil	W. Träger
2/70, 3/70, 4/70, 5/70	Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen	W. Träger	6/68	Schön ist so ein Ring(el)spiel	J. Frommann
	Olympiaden — Olympiadaufgaben		3/69	An welchem Wochentag wurde ich geboren?	W. Unze
1/67	VIII. IMO 1966	J. Lehmann	4/69	Wir stellen ein Zahlenrätsel auf	W. Träger
1/67	Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO	H. Bausch	1/71	Wir spielen mit optimaler Strategie	W. Träger
1/67 bis 6/67	VI. OJM der DDR		3/71	Wirklichkeit und Täuschung	J. Sedláček
2/67	Mathematischer Leistungsvergleich Praha—Neubrandenburg	J. Lehmann		Verbindung zur Praxis	
3/67	Mathematischer Mannschaftswettbewerb	M. Mäthner/G. Schulze	1/67	Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten	S. Günther
3/67	Mathematische Wettbewerbe in England		3/67	Schwankt der Fernsehturm?	W. Zill
4/67	Mathematikolympiaden in Bulgarien	S. Bodurow	3/67	Der Berliner Fernsehturm	W. Zill
5/67	Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiade Tbilissi 1967	J. Petrakow	4/67	Auf den Spuren Roald Amundsens	S. Meier
5/67	Eine vorbildliche Jahresarbeit	R. Höppner	5/67	Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk)	H. Werner
6/67	IX. IMO 1967	H. Bausch	6/67	Ernährung und Leistungsfähigkeit	W. Kraak
1/68 bis 6/68, 2/69	VII. OJM der DDR		1/68	50 Jahre Rote Armee	
1/68	18. Mathematischer Jahreswettbewerb der USA 1967		1/68	Dresden in Zahlen	W. Weidauer
3/68	Die Aufgabenkommission des Zentralen Komitees für die OJM der DDR	H. Karl	1/69	Messegold für Präzisionsreißzeuge	A. Hanisch
5/68, 6/68	X. IMO 1968	H. Bausch/W. Burmeister	2/69	Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden — Zwinger	H. Grötzsch
6/68	Allunions-Fernolympiade	R. Lüders/J. Lehmann	3/69	Mathematische Modelle aus der DDR	W. Glaß
1/69 bis 3/69, 6/69, 2/70	VIII. OJM der DDR		4/69	Multicurve	E. Schröder
3/69	Concursul de matematica, Etapa locala-22 martie 1968		4/69	Aus der VAR berichtet	
5/69, 1/70	XI. IMO 1969	H. Bausch/J. Lehmann	5/69	20 Jahre Entwicklung des Volkswesens in der DDR	J. Lehmann
5/69	Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968	G. Ulbricht	6/69	Mathematik und Musik	Ch. Lange
1/70 bis 4/70	IX. OJM der DDR		6/69	Rund um das Schachbrett	K. Kannenberg
2/70	Mathematikolympiaden in der ČSSR	O. Langer/St. Horák	1/69 bis 6/70	Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung	J. Frommann
3/70	Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn	I. Reimann/M. Walter	4/71	Waffen aus Suhl	E. Hoffmann
4/70	Mathematische Wettbewerbe in Schweden		6/71	Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug?	W. Träger
5/70	XII. IMO 1970	H. Bausch/J. Lehmann		Zahlenbereiche	
1/71 bis 4/71	X. OJM der DDR		5/68	Übe sinnvoll — Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen	G. Pietzsch
2/71	10 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR			Zahlenfolgen	
2/71	Mathematikolympiaden in der MVR		6/67	Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums	A. A. Kolosow
2/71	Österreichische Mathematikolympiade		3/68, 4/68, 5/68, 6/68	Elementare Zahlenfolgen	H. Lohse
5/71	Concursul de matematica (SR Rumänien)			Zahlentheorie	
	Planimetrie		3/69, 4/69, 5/69, 1/70, 2/70	Rechnen mit Resten	G. Lorenz
1/68, 2/68, 3/68	Nichts Einfacheres als ein Quadrat	H. Wiesemann	5/70	Freitag, der 13.	T. Bailey/G. Hofmann
5/68	Was ist ein Viereck?	L. Görke	4/71	Die Teilbarkeit durch 7	E. Naumann
6/68, 1/69, 2/69, 3/69, 5/69	Mit Zirkel und Zeichendreieck	J. Lehmann		Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)	
1/69	Spieglein, Spieglein an der Wand	W. Träger	1/67	Eine Arbeitsgemeinschaft erlebte die Deutsche Bücherei	AG 29. OS Leipzig
3/69	Mit Bleistift und Lineal	E. Schröder	5/67	Mathematischer Wettbewerb	W. Werner
3/69	Bange machen gilt nicht! — Modell eines geom. Extremwertproblems	Th. Scholl	5/68	Was verbirgt sich hinter: MBZ 8?	G. Horn
5/69	Übe sinnvoll — überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck	G. Pietzsch	3/69	Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA“	W. Träger
			5/70	Arbeitsgemeinschaften haben das Wort	