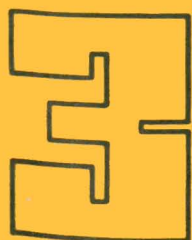
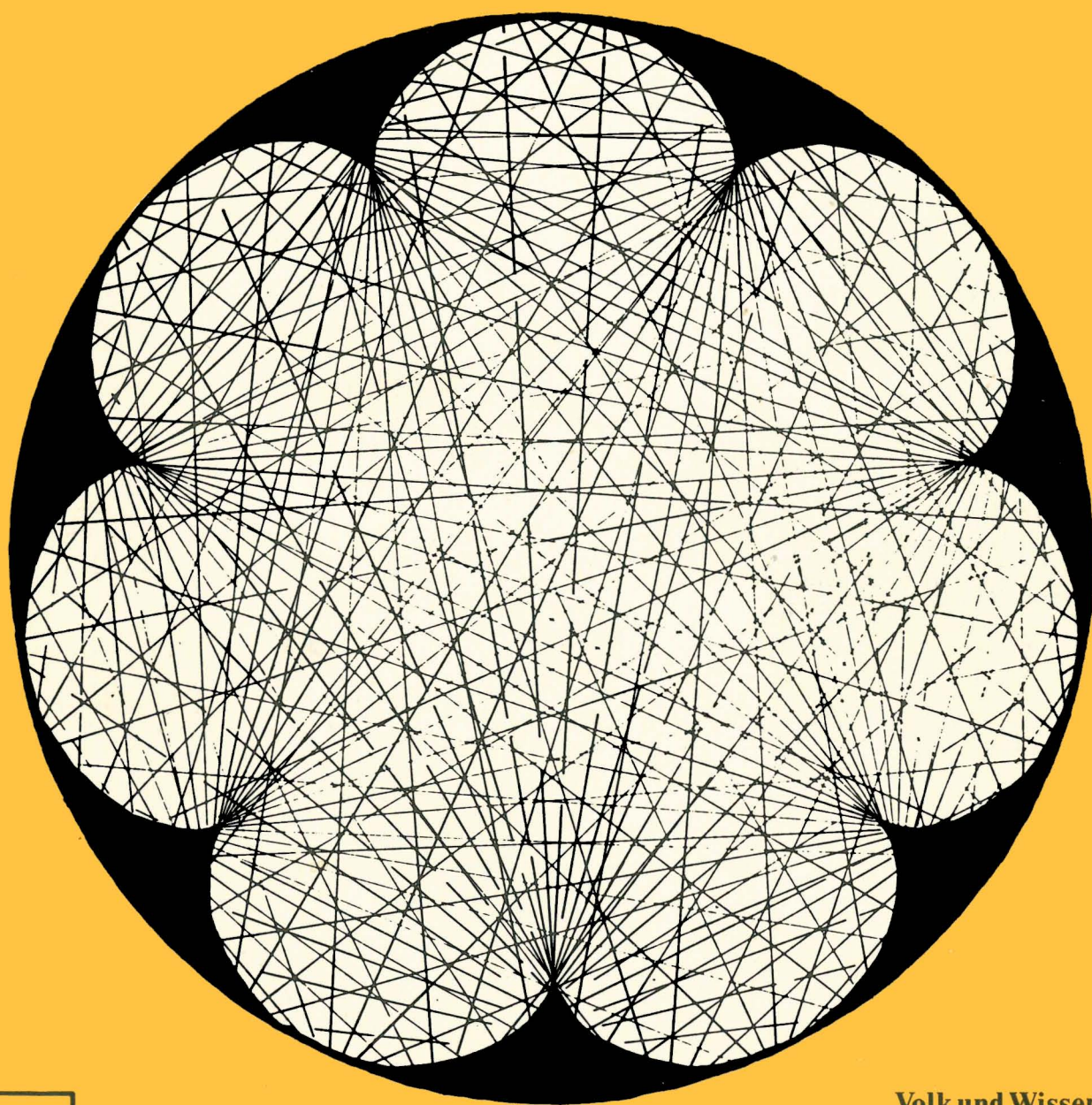


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
20. Jahrgang 1986
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395**

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213

Anschrift der Redaktion:

7027 Leipzig, PSF 14

Redaktion:

OSTR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr.

W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat.

J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent

Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Natio-

nalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Stu-

dienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberleh-

rer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstu-

dienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig);

Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leip-

zig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Mü-

ritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam);

Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifs-

wald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dres-

den); Dozent Dr. rer. nat. W. Schmidt

(Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze

(Herzberg/Elster); Dozent Dr. rer. nat.

H. Schulze (Berlin); W. Träger (Döbeln);

Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV

(Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathema-

tik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg.

Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545

des Presseamtes beim Vorsitzenden des

Ministerrates der Deutschen Demokrati-

schcn Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzel-

heft 0,50 M, im Abonnement zweimonat-

lich 0,50 M. Bestellungen werden in der

DDR von der Deutschen Post und dem

Buchhandel entgegengenommen. Der Be-

zug für die Bundesrepublik Deutschland

und Berlin (West) erfolgt über den Buch-

handel; für das sozialistische Ausland über

das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und

für alle übrigen Länder über: Buchexport

Volkseigener Außenhandelsbetrieb der

DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto H.-J. Voß, Dresden (S. 53);

VEB Mantissa, Dresden (S. 55); Vignetten:

R. Jäger aus *technikus* (S. 58/59)

Titelbild: Graphiken aus *Lapok*, Budapest

gestaltet von H. Fahr, Berlin

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphi-

scher Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der aus-*

gezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 17. Februar 1986

Auslieferungstermin: 20. April 1986

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 **Gleichungen und komplexe Zahlen [9]***
Dr. H. Pieper, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR
- 50 **Einiges über regelmäßige und halbre regelmäßige Polyeder [8]**
Dr. H. Martini/Dr. S. Schneider, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Karl Friedrich Wilhelm Wander*, Dresden
- 52 **Das Springer-Problem [8]**
Michael Nitsche, Schüler der Kl. 12 an der Spezialschule physik.-techn. Richtung *M. A. Nexö*, Dresden
- 52 **Eine Aufgabe von Prof. Dr. H.-J. Voß [9]**
Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule *Karl Friedrich Wilhelm Wander*, Dresden
- 54 **Eine Aufgabe aus der Praxis [9]**
StR H. Giendarz, Bezirkskabinett für Unterricht und Weiterbildung Dresden/
Pat.-Ing. Ing. Ch. Knüpfer, Leiter der Forschung und Entwicklung im
VEB Mantissa, Dresden
- 56 **aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht**
speziell für Klasse 5/6
Sternchenaufgaben [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin
- 57 **Flächen und nochmals Flächen [5]**
Dr. L. Flade/Dr. H. Knopf, *Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg*
- 58 **Physik – auf die Spitze getrieben [8]**
Dr. D. Wrobel, aus *technikus* 1/81
- 59 **Zur Berechnung algebraischer Produkte mit dem**
Schultaschenrechner SR 1 [7]
Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln
- 60 **Sprachecke [8]**
Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann/H. Begander, alle Leipzig
- 61 **alpha-Spiele-Magazin 1986 [5]**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 63 **Computer – Algorithmus – Algorithmische Spiele, Teil 1 [8]**
Akademienmitglied A. P. Jerschow, Moskau: aus *Quant*, für *alpha* bearbeitet von
Dr. C.-P. Helmholz, KMU Leipzig
- 64 **In freien Stunden · alpha-heiter [5]**
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 66 **Der Herzberger Quader [5]**
OSTR G. Schulze, Herzberg
- 68 **XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR**
Lösungen zu den Aufgaben der Kreisolympiade, Teil 1 [5]
- 69 **Lösungen [5]**
- III. **U.-Seite: Auf den Spuren von Mathematikern [7]**
Ehrenfried Walter von Tschirnhaus – ein sächsischer
Mathematiker
Dipl.-Math. D. Bauke, Rat des Bezirkes Gera
- IV. **U.-Seite: Ein rundes Dutzend (geometrische Probleme) [8]**
Dipl.-Lehrer Ch. Werge, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Gleichungen und komplexe Zahlen

Eine Anregung zur Beschäftigung
mit komplexen Zahlen

Teil 1

Vor 500 Jahren, im Sommersemester 1486, hielt an der im Jahre 1409 eröffneten Universität zu Leipzig *Johannes Widmann* (geboren um 1460 in Eger, heute: Cheb/ČSSR) eine Algebra-Vorlesung in lateinischer Sprache. Es ist die älteste bekannte Vorlesung über die Gleichungslehre an einer deutschen Universität.

Ihre Vorlage, die sog. *Dresdner lateinische Algebra*, steht im Codex C80 der Landesbibliothek Dresden. Eine Leipziger Handschrift – Codex Lips. 1470 – ist das Kollegienheft eines Hörers dieser Vorlesung. Durch diese Handschriften sind wir ziemlich genau über den von Widmann vorgetragenen algebraischen Stoff unterrichtet. Widmann gelang es, eine ziemlich geschlossene Darstellung des algebraischen Wissens seiner Zeit zu geben.

Zur Algebra von al-Hwarizmi bis Vieta

Jene Zeit gehört zu der Periode des Übergangs von einer Wortalgebra (d. h.: ein algebraischer Text enthält keine Symbole, alles wird in ausführlichen Worten dargestellt) zu einer *symbolischen Algebra* (die sich einer Zeichensprache, einer Formelsprache bedient).

Als im 9. Jahrhundert der in Bagdad im *Haus der Weisheit* (eine Art Akademie nach antikem Vorbild) wirkende Mathematiker und Astronom *al-Hwarizmi* in einem seiner mathematischen Werke die Auflösung linearer und quadratischer Gleichungen (mit Zahlenkoeffizienten) lehrte, stellte er seine Überlegungen in Worten, ohne Symbole und Formeln, dar; die Beweise gab er geometrisch, durch Figuren.

Die von ihm verwendete Bezeichnung „al-ğabr“ für eine bestimmte Umformung quadratischer Gleichungen wurde später auf die Lehre von den Gleichungen ausgedehnt. So sprach im 11. Jahrhundert der persische Dichter und Wissenschaftler *al-Hayyām* (seit 1074 Leiter der Sternwarte in Isfahan) von den *Lösungsverfahren der Algebra* und von den Büchern und den Gepflogenheiten der *Algebraiker*. Al-Hwarizmis Schrift wurde im 12. Jahrhundert unter dem Titel *Algebra et Almucabala* ins Lateinische übersetzt. Allmählich verlor sich die zweite Hälfte des Titels (auch *almucabala* bezeichnet und eine bestimmte Vorschrift beim Lösen von Gleichungen), und man sprach von *Algebra* (so auch Widmann in seinem 1489 erschienenen deutschsprachigen Rechenbuch). Neben den Namen *Alge-*

bra et Almucabala und *Algebra* (entstanden also aus gewissen Rechenvorschriften beim Lösen von Gleichungen) waren zeitweise auch andere üblich, wie *Ars rei et census*, *Arte della cosa* bzw. *Coß* (entstanden aus den Namen *res* und *census* für die ersten Potenzen der Unbekannten bzw. aus der italienischen Bezeichnung *cosa* für die Unbekannte; *ars* bzw. *arte* heißt *Kunst*).

Einen festen Platz innerhalb des mathematischen Unterrichts besaß die Algebra in Italien bereits seit dem 13. Jahrhundert (insbesondere durch eine Schrift von *Leonardo von Pisa*), im Deutschen Reich erst seit der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts.

Den Gelehrten vor 1450 war es nicht möglich gewesen, ihr algebraisches Wissen in prägnanter Form mitzuteilen. Es fehlten Rechensymbole, die Schreibweisen für die algebraische Unbekannte und für ihre Potenzen waren umständlich. Ab Mitte des 15. Jahrhunderts waren Algebraiker, wie *Regiomontanus* in Wien, *Widmann* in Leipzig, *Paciolo* in Venedig, *Chuquet* in Lyon, *Schreyber* und *Rudolff* in Wien, *Stifel* in Wittenberg, bestrebt, in ihren algebraischen Schriften eine algebraische Symbolik einzuführen. So finden wir in Widmanns Algebravorlesung die Zeichen + und –, ferner Symbole für die Unbekannte und einige ihrer Potenzen.

Als etwa 750 Jahre nach *al-Hwarizmis* Niederschrift seines algebraischen Werkes *Rafael Bombelli* in Bologna in seinem italienisch geschriebenen Buch mit dem Titel *L'algebra* (1572) die Lösung von bestimmten Gleichungen (mit einer Unbekannten) ersten, zweiten, dritten und vierten Grades (mit positiven Zahlenkoeffizienten) durch *Auflösungsformeln* und im Anschluß an *Diophants Arithmetika* (3. Jh.) die Lösung gewisser unbestimmter Gleichungen (mit zwei oder mehr Unbekannten) in gebrochenen und natürlichen Zahlen lehrte, konnte er in seiner Darstellung schon eine symbolische Ausdrucksweise verwenden. Die Potenzen $x, x^2, x^3, \dots$ der Unbekannten x bezeichnete er mit $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$. Die Operationen + und – wurden durch Abkürzen der Wörter *piu* und *meno* durch $p.$ und $m.$ gekennzeichnet. Für das Polynom $2x^2 - 20x + 22$ schrieb Bombelli also $2\frac{2}{2} m. 20\frac{1}{2} p. 22$. Er verwendete die Abkürzung $R. q.$ für Quadratwurzel (*radice quadrata*) und $R. c.$ für Kubikwurzel (*radice cubica*).

Für $\sqrt{6 + \sqrt{3}} - 10$ schrieb er $R. q. [6 p. R. q. 3] m. 10$.

Die Koeffizienten der algebraischen Gleichungen waren auch im 16. Jahrhundert stets konkrete positive Zahlen. Erst der geniale Mathematiker *Vieta* konnte das symbolische Rechnen der zeitgenössischen Algebra mit der Verwendung von Buchstabenkoeffizienten in Verbindung bringen. Für Vietas Entwurf der *Neuen Algebra* (von 1591), der *symbolischen Algebra* und damit für die Entstehung einer mathematischen Formelsprache war auch seine Aneignung des Werkes von Diophant wichtig gewesen. Wenige Jahrzehnte nach Vieta identifizierte *Descartes* die *symbolische Algebra* mit der erstmalig von ihm als symbolische Wissenschaft gedeuteten Geometrie. Erst seit *Descartes* ist es übrigens üblich, für bekannte Größen die ersten Buchstaben, für die unbekannten Größen die letzten Buchstaben des Alphabets zu verwenden.

Quadratische Gleichungen

Bis zum Ende des 15. Jahrhunderts war Algebra im wesentlichen die Lehre von den algebraischen Gleichungen bis zum Grad 2.

Quadratische Gleichungen schreibt man heute meist in der Normalform

$$x^2 + px + q = 0. \quad (1)$$

Angenommen, x ist eine Lösung von (1).

Dann gilt $x^2 + px = -q$,

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

(quadratische Ergänzung), also

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Hieraus folgt, vorausgesetzt $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist nicht negativ,

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (2)$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $x + \frac{p}{2} \geq 0$.

$$\text{Dann ist } \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2}$$

und aus (2) folgt

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (3)$$

2. Fall: $x + \frac{p}{2} \leq 0$.

$$\text{Dann ist } \left|x + \frac{p}{2}\right| = -\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

und aus (2) folgt

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (4)$$

Ist also x eine Lösung von (1), so muß x notwendig von einer der Formen (3) und (4) sein. Durch Einsetzen von (3) bzw. (4) in (1) ist zu bestätigen, daß (3) und (4) der Gleichung (1) tatsächlich genügen. Aus den Lösungsformeln (3) und (4) erkennt man:

I. Ist p positiv und q negativ (somit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$), so gibt es genau eine positive Lösung (3).

II. Ist p negativ und q positiv und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, so gibt es zwei positive Lösungen.

III. Sind p und q beide negativ
 (somit $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$), so gibt
 es genau eine positive Lösung (3).
 IV. Sind p und q beide positiv
 und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$, so gibt es zwei

negative Lösungen.
 Bis ins 16. Jahrhundert setzte man bei der Betrachtung der Gleichungen positive Koeffizienten voraus und suchte positive Lösungen. Die quadratischen Gleichungen konnte man daher gar nicht in der Normalform (1) schreiben, denn eine positive Zahl kann nicht = 0 werden.

Neben den drei Gleichungstypen $x^2 = px$, $x^2 = q$, $x = q$ (lineare Gleichung) (mit positiven p, q), die jeweils genau eine positive Lösung besitzen ($x = p$, $x = \sqrt{q}$, $x = q$) hat man noch die folgenden drei Typen quadratischer Gleichungen zu unterscheiden (worin p, q positive Zahlen bedeuten):

- (I) $x^2 + px = q$.
- (II) $x^2 + q = px$.
- (III) $px + q = x^2$.

Die Gleichung (I) hat die positive

$$\text{Lösung } x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

Die Gleichung (III) hat die positive

$$\text{Lösung } x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}.$$

Die Gleichung (II) hat für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$

die positive Lösung $x = \frac{p}{2}$, und für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ die zwei positiven Lösungen

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$ und jede positive Zahl x ist

(wie man sich überlegen kann) stets $x^2 + q > px$. Es ist für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$ also die Auf-

gabe, $x^2 + q = px$ in positiven Zahlen zu lösen, sinnlos. Das wußten die Algebraiker, und somit hatten sie bei der Betrachtung quadratischer Gleichungen keinen Grund, den zugrundegelegten Bereich positiver Zahlen (natürliche Zahlen, Brüche, positive irrationale Zahlen) in irgendeiner Weise zu erweitern. Eine Erweiterung wurde erst bei der Untersuchung kubischer Gleichungen notwendig.

Widman trug in seiner Algebravorlesung natürlich über die eben angegebenen sechs Formen von Gleichungen vor. Daß jede andere Gleichung bis zum Grad 2 durch die Umformungen *al-ğabr* und *almukabalah* auf eine dieser 6 Normalformen gebracht werden kann, hatten die europäischen Mathematiker von al-Hwarizmi gelernt. Widmann gab auch Lösungsregeln für 18 kubische und biquadratische Gleichungen mit positiven Koeffizienten an. Dies waren jedoch nur solche Formen von Gleichungen 3. und 4. Grades, die auf Gleichungen vom Grad 2 zurückführbar sind oder darin bestehen, die dritte oder vierte Wurzel aus einer positiven Zahl zu ziehen.

Kubische Gleichungen

Was die kubischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten betrifft, so lassen sich die zusammengesetzten Gleichungen 3. Grades, die kein von x freies Glied enthalten (also die 5 Typen $x^3 + rx^2 = px$, $x^3 + px = rx^2$, $x^3 = rx^2 + px$, $x^3 = px$, $x^3 = rx^2$) auf quadratische Gleichungen zurückführen, indem man die Gleichung durch die Unbekannte x dividiert. Außer der Gleichung $x^3 = q$ hat man dann noch folgende 13 Typen kubischer Gleichungen mit positiven Koeffizienten zu unterscheiden:

- (1) $x^3 + px = q$, (7) $x^3 + rx^2 + px = q$,
- (2) $x^3 + q = px$, (8) $x^3 + rx^2 + q = px$,
- (3) $q + px = x^3$, (9) $x^3 + px + q = rx^2$,
- (4) $x^3 + rx^2 = q$, (10) $rx^2 + px + q = x^3$,
- (5) $x^3 + q = rx^2$, (11) $x^3 + rx^2 = px + q$,
- (6) $q + rx^2 = x^3$, (12) $x^3 + px = rx^2 + q$,
- (13) $x^3 + q = rx^2 + px$.

Diese insgesamt 25 Typen linearer, quadratischer und kubischer Gleichungen mit positiven Koeffizienten hatte bereits (natürlich noch in Worten ausgedrückt) *al-Hayyam* unterschieden. Für mehrere dieser Gleichungen konnte er die positiven Lösungen durch geometrische Konstruktionen mit Hilfe der Kegelschnitte (Kreis, Parabel, Hyperbel) angeben. *Al-Hayyam* bemühte sich auch, jedoch erfolglos, eine rechnerische Regel zur Lösung kubischer Gleichungen zu finden. Noch am Ende des 15. Jahrhunderts mußte *Pacioli* seine algebraischen Ausführungen mit der Bemerkung beenden, daß die rechnerische (algebraische) Lösung für kubische Gleichungen beim derzeitigen Stand der Wissenschaft genauso unmöglich wäre wie die Quadratur des Kreises. Anfang des 16. Jahrhunderts wurde endlich das ersehnte Lösungsverfahren gefunden. Dieses gelang einem Gelehrten an einer der größten und berühmtesten Universitäten jener Zeit, der 1119 gegründeten (ober)italienischen Universität Bologna. *Scipione del Ferro*, der seit 1496 (bis 1525) an der mathematischen Fakultät Geometrie und Arithmetik lehrte, entdeckte eine Methode zur Lösung von Gleichungen der Form $x^3 + px = q$ (p, q positiv). Er teilte sein Verfahren seinem Freund *Antonio Fior* mit. Dieser nutzte seine Kenntnisse, um 1535 dem Rechenmeister *Niccolo Tartaglia* (1499 bis 1557) in Venedig 30 Wettaufgaben, die auf kubische Gleichungen der angegebenen Form hinauslaufen, zu stellen. Tartaglia fand die Lösungen und überdies eine Methode zur Auflösung von Gleichungen der Form $x^3 = px + q$.

Im März 1539 teilte Tartaglia dem Privatgelehrten *Geronimo Cardano* (1501 bis 1576) in Mailand auf dessen Wunsch die Auflösungsregeln mit. In seinem im Jahre 1545 in Nürnberg erschienenen Buch (in lateinischer Sprache) mit dem Titel *ars magna sive de regulis algebraicis* (Die große Kunst oder über die algebraischen Regeln) veröffentlichte Cardano, der seit 1543 Professor der Medizin in Padua war, die Lösungsmethoden für kubische Gleichungen.

H. Pieper

Einiges über regelmäßige und halbregelmäßige Polyeder

In diesem Beitrag wird dargestellt, wie man halbregelmäßige Polyeder aus regelmäßigen erzeugen kann.

Ein konvexes Polyeder heißt *regelmäßig*, wenn es von regelmäßigen und kongruenten n -Ecken begrenzt wird und in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammenstoßen. Es läßt sich zeigen, daß nur fünf solche Körper, auch *platonische Körper* genannt, existieren. (Überlege, wie dieser Beweis über die Summe der Flächenwinkel der in einer Polyederecke zusammenstoßenden Polygonecken, die ja kleiner als 360° sein muß, zu führen ist! Die Bezeichnung platonische Körper geht auf den griechischen Gelehrten *Platon* zurück.)

Die folgende Übersicht stellt sie mit e ... Anzahl der Ecken, f ... Anzahl der Flächen, k ... Anzahl der Kanten, n ... Eckenzahl eines begrenzenden n -Ecks und p ... Anzahl der in einer Körperecke zusammenstoßenden n -Ecke vor.

Tabelle

Bezeichnung	e	f	k	n	p
regelmäßiges Tetraeder	4	4	6	3	3
regelmäßiges Oktaeder	6	8	12	3	4
regelmäßiges Hexaeder (Würfel)	8	6	12	4	3
regelmäßiges Ikosaeder	12	20	30	3	5
regelmäßiges Pentagondodekaeder	20	12	30	5	3

Die Bezeichnungen für die Körper kommen aus dem Griechischen und drücken die Anzahl der Flächen des jeweiligen Polyeders aus (tetra ... vier). Beim Pentagondodekaeder wird neben der Flächenzahl (dodeka ... zwölf) auch die Gestalt der Seitenflächen (Pentagon Fünfeck) beschrieben.

Faßt man die Mittelpunkte der Seitenflächen eines platonischen Körpers und nur diese als Eckpunkte eines konvexen Polyeders auf, so läßt sich jedem solchen Polyeder ein wiederum platonisches Polyeder zuordnen. Dieser als *Dualität* bezeichnete Zusammenhang zwischen zwei Polyedern ordnet also jeder Seitenfläche des Ausgangspolyeders einen Eckpunkt des entsprechend dualen Körpers zu und umgekehrt.

Die Pfeile in obiger Tabelle und Bild 1 (Dualität Tetraeder – Tetraeder sowie Oktaeder – Hexaeder) verdeutlichen dies.

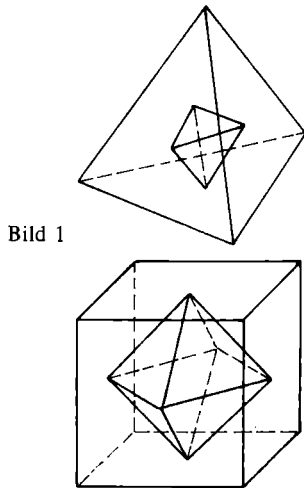


Bild 1

Demnach entspricht bei genauerem Hinschauen einer Polyederfläche mit n Ecken am dualen Körper eine Polyederecke mit $p = n$ in ihr zusammenstoßenden Seitenflächen, kurz Eckfigur genannt, und umgekehrt (vgl. hierzu die beiden rechten Spalten der Tabelle 1, und zeichne die Zuordnungspfeile ein).

Indem man z. B. in geeigneter Weise die Ecken (oder besser Eckpyramiden) der platonischen Körper abschneidet, gewinnt man halbbregelmäßige konvexe Polyeder. So läßt sich aus dem regelmäßigen Tetraeder das abgestumpfte Tetraeder erzeugen, ein Polyeder, das von durchweg regelmäßigen n -Ecken, die aber nicht mehr zueinander kongruent sind, begrenzt wird (siehe Bild 2).

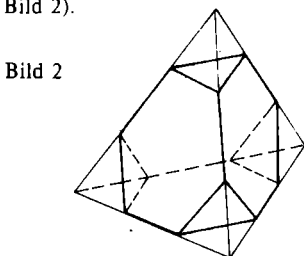


Bild 2

Halbbregelmäßige Polyeder dieser Art, also mit regelmäßigen (aber nicht kongruenten) n -Ecken und kongruenten Eckenfiguren (die aber nicht regelmäßig sind, d. h., es stoßen unterschiedliche n -Ecke in den Polyederecken zusammen) heißen *eckengleich halbbregelmäßig* oder *archimedisch*. Man kann sich leicht überlegen, daß neben den aus platonischen Körpern erzeugten archimedischen Polyedern unter anderem auch alle geraden Prismen mit quadratischen Mantelflächen und regelmäßigen n -Ecken als Grund- und Deckflächen (siehe Aufgabe 2) archimedisch sind. Allerdings ist zu beachten, daß für $n = 4$ der Würfel entsteht, der zwar auch Eigenschaften eines archimedischen Körpers besitzt, nach Definition jedoch platonisch und damit nicht archimedisch ist.

Wir wollen nun einen archimedischen Körper konstruieren, der durch Abschneiden von Ecken (bzw. Eckpyramiden) eines

Würfels bzw. eines regelmäßigen Oktaeders entsteht. Verlaufen die entsprechenden Schnittflächen durch die Kantenmittelpunkte des platonischen Körpers, so erhält man in beiden Fällen das archimedische Mittelkristall (Bild 3).

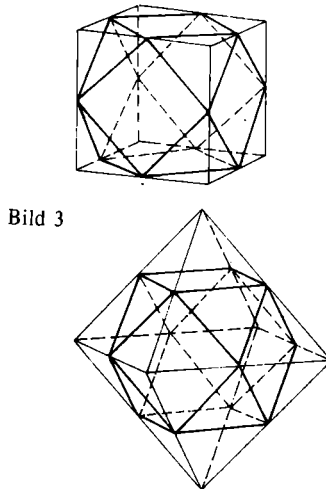


Bild 3

Also läßt sich, indem man jedem Eckpunkt dieser platonischen Körper geeignet eine Seitenfläche zuordnet, ein halbbregelmäßiges Polyeder finden mit

$$e = 12, f = 14, k = 24, n_1 = 3, n_2 = 4 \text{ und } p = 4.$$

Aufgabe sei es nun, ein Polyeder zu finden, das auf dualen Wege aus Würfel und Oktaeder erzeugt werden kann und somit zum Mittelkristall dual sein muß. Duales Vorgehen würde bedeuten, jeder Seitenfläche des jeweiligen platonischen Körpers geeignet einen Eckpunkt zuzuordnen (oder besser: jeder Seitenfläche geeignet eine Pyramide aufzusetzen). Das Resultat müßte, ausgehend von den Werten des Mittelkristalls bei Anwendung der Dualität, ein Polyeder mit

$$e = 14, f = 12, k = 24, n = 4, p_1 = 3 \text{ und } p_2 = 4$$

sein. Dieses Polyeder existiert tatsächlich, es handelt sich um das Rhombendodekaeder (Bild 4).

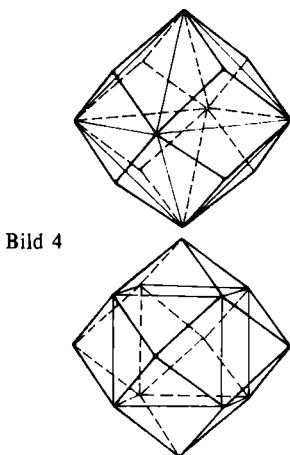
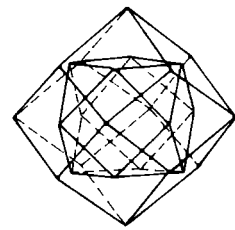


Bild 4

Eine andere Möglichkeit, dieses Polyeder aus platonischen Körpern zu konstruieren, findet ihr in der *alpha* 2/1982. Bild 5 zeigt die Dualität Rhombendodekaeder – Mittelkristall.

Bild 5



Körper wie das Rhombendodekaeder heißen *flächengleich halbbregelmäßig* bzw. *dual-archimedisch*. Sie besitzen (vgl. Definition der archimedischen Polyeder) kongruente, nicht regelmäßige n -Ecke als Seitenflächen und regelmäßige, aber nicht kongruente Eckenfiguren. Geht man also von platonischen Körpern aus, so lassen sich archimedische Körper durch Abschneiden von Eckpyramiden, dual-archimedische Polyeder hingegen durch Aufsetzen von Pyramiden auf die Seitenflächen gewinnen. (Es sei bemerkt, daß auch halbbregelmäßige Polyeder existieren, die sich so nicht erzeugen lassen. Man denke nur an die erwähnten Prismen.)

Eine wesentliche Eigenschaft der platonischen Polyeder ist die Tatsache, daß alle Eckpunkte auf einer Kugel (der sogenannten Umkugel) liegen und alle Seitenflächen eine weitere Kugel (die Inkugel) berühren.

Die archimedischen Körper besitzen nur noch eine Umkugel. Mit der Dualität folgt, daß die dual-archimedischen Polyeder lediglich eine Inkugel besitzen.

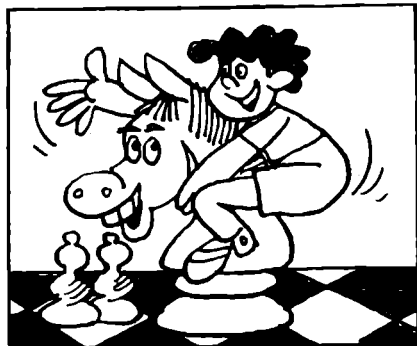
In der Natur treten uns neben platonischen insbesondere auch flächengleich halbbregelmäßige Körper entgegen. Die Kristalle von Substanzen werden von ebenen Flächen begrenzt, die zumindest durch ihre Neigungen gegeneinander für solche Polyeder typisch sind. So kristallisiert z. B. der Diamant in der Form des dual-archimedischen Pyramidenoktaeders. Doch mehr über diese Körper erfahrt ihr in dem Büchlein *Reguläre und halbbregelmäßige Polyeder* von Tiberiu Roman (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968).

Aufgaben

▲ 1 ▲ Durch Abschneiden der Ecken des Würfels bzw. des regelmäßigen Oktaeders erhält man wie gezeigt das Mittelkristall. Welche beiden weiteren archimedischen Körper lassen sich noch auf diese Weise aus Würfel bzw. regelmäßigem Oktaeder konstruieren? Gib e, f, k, n_1, n_2 und p der gefundenen Polyeder an! (Beachte die Definition der archimedischen Körper!)

▲ 2 ▲ Versuche, allein durch die Dualität die zu den im Text erwähnten Prismen dualen (flächengleich halbbregelmäßigen) Polyeder zu beschreiben!

(Lösungen siehe III. Umschlagseite!)
H. Martini/S. Schneider

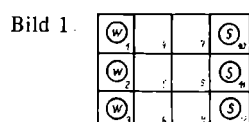


Das Springer-Problem

Die Aufgabe beim Springer-Problem besteht darin, die auf einem Schachbrett mit $m \times n$ Feldern aufgestellten weißen und schwarzen Springer in möglichst wenig Zügen auszutauschen. Dabei dürfen sich die Springer nicht schlagen, und auf jedem Feld darf nie mehr als ein Springer stehen. Es wird nicht verlangt, daß immer abwechselnd ein weißer und ein schwarzer Springer gezogen werden.

Das Springer-Problem wurde 1958 von *Henry E. Dudeney* formuliert und von *Robert F. Parkin* und *Ted Roth* diskutiert. Parkin und Roth gaben jeweils für 3 schwarze und 3 weiße Springer auf einem 3×4 -Feld eine Lösung an. Roth zeigte durch Angabe einer 18-Zug-Lösung, daß Parkins 26-Zug-Lösung nicht minimal ist. *Harold Reiter* veröffentlichte 1983 eine Lösung in 16 Zügen und zeigte, daß sie minimal ist. Dabei verwendete er graphentheoretische Mittel.

Ich möchte im folgenden die Grundidee bei der Verwendung der Graphentheorie zur Lösung des Springer-Problems erläutern und für alle Felder bis zum 5×5 -Feld Lösungen angeben. Da mir nur sehr begrenzte Beweismittel zur Verfügung stehen, kann ich nicht bei allen Lösungen beweisen, daß sie minimal sind.

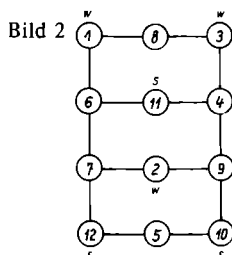


Betrachtet man die Aufstellung von 3 weißen (w) und 3 schwarzen (s) Springern auf einem 3×4 -Feld (Bild 1) und versucht, durch Probieren eine Lösung zu finden, verliert man trotz des relativ kleinen Feldes schnell die Übersicht.

Wesentlich anschaulicher stellt dagegen ein Graph das Problem dar, in dem die einzelnen Felder die Knotenpunkte sind und zwei Knotenpunkte x und y genau dann durch eine Kante (x, y) verbunden sind, wenn man von x nach y (bzw. von y nach x) in einem Springerzug gelangen kann (Bild 2).

Außerdem wird durch w bzw. s gekennzeichnet, wo die weißen bzw. schwarzen Springer stehen. Ein Springerzug auf dem Brett von Feld x nach Feld y wird nun durch den Zug des Springers auf dem Graphen von Feld x entlang der Kante (x, y)

nach Feld y veranschaulicht. Der Einfachheit halber wird für jeden Zug nur das Start- und das Zielfeld angegeben.



Die Lösung von H. Reiter ist folgende:

1-6, 6-7, 11-6, 6-1, 3-4, 4-11, 10-9, 9-4, 4-3, 2-9, 9-10, 7-6, 12-7, 7-2, 6-7, 7-12.

Es gibt noch mehrere andere Lösungen in 16 Zügen, aber keine, die den Austausch in weniger als 16 Zügen schafft.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß *J. J. Gik* das Problem des Springer austausches ebenfalls behandelt. Er verlangt dabei, daß immer abwechselnd ein weißer und ein schwarzer Springer gezogen werden. Für das 3×4 -Feld mit der Aufstellung wie oben gibt es eine Lösung in 22 Zügen an. Dies ist jedoch nicht die Minimallösung, da der Austausch unter den geforderten Bedingungen in 18 Zügen zu schaffen ist (1-6, 10-9, 6-7, 9-4, 2-9, 11-6, 9-10, 6-1, 7-6, 4-9, 3-4, 12-7, 4-11, 7-2, 6-7, 9-4, 7-12, 4-3).

Das ist vermutlich auch die Mindestzugzahl.

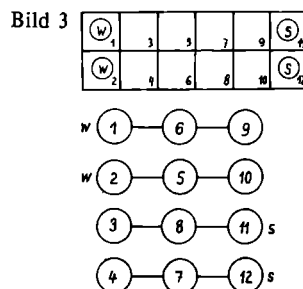
Es stellt sich nun die Frage nach der Verallgemeinerung des Problems auf beliebige Felder. Außerdem wurde bis jetzt stillschweigend vorausgesetzt, daß die Springer auf den gegenüberliegenden Grundlinien des Brettes angeordnet werden.

Grundsätzlich lassen sich die Springer beliebig aufstellen, es müssen nur gleich viel weiße und schwarze sein, und mindestens ein Feld muß selbstverständlich frei bleiben. Da sich aber der Graph für die Zugmöglichkeiten für das gleiche $m \times n$ -Feld bei unterschiedlicher Aufstellung nicht ändert, sollen die Springer in Zukunft auf den beiden kürzeren (bei quadratischen Feldern auf zwei beliebig gegenüberliegenden) Grundlinien angeordnet werden, so daß auf einer Grundlinie nur gleichfarbige Springer stehen. Was die Verallgemeinerung auf beliebige Felder betrifft, so erkennt man, daß der Graph für größere Felder sehr schnell unübersichtliche Formen annimmt. Deshalb soll kein größeres als das 5×5 -Feld untersucht werden.

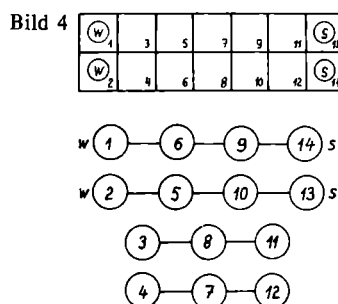
Es werden also im folgenden alle $m \times n$ -Felder betrachtet, für die $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \leq 5$ und trivialerweise $m, n > 0$ gilt. Man erkennt, daß Felder, für die $m < 3$ oder $n < 3$ gilt, für das Springer-Problem ungeeignet sind. Auf einem $1 \times n$ -Feld könnte überhaupt kein Springerzug ausgeführt werden, der Graph bestünde aus n isolierten Knotenpunkten. Auf einem $2 \times n$ -Feld mit $n \geq 2$ werden laut Aufgabenstellung je zwei weiße und schwarze Springer auf den gegenüberliegenden Grundlinien aufgestellt. Durch einfache

Beispiele lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

- n ist gerade (Beispiel $n = 6$, siehe Bild 3), dann kann ein Springer von einer Grundlinie niemals auf die gegenüberliegende gelangen, sondern nur auf die Reihe, die direkt vor der gegenüberliegenden Grundlinie liegt. Die Aufgabe ist dann unlösbar.



- n ist ungerade (Beispiel $n = 7$, siehe Bild 4), dann kann ein Springer von einer Grundlinie auf genau eine Art und Weise auf die gegenüberliegende gelangen. Da jedoch dort laut Voraussetzung auch ein Springer steht, müßten irgendwann einmal diese beiden Springer gemeinsam auf einem Feld stehen, was die Aufgabenstellung verbietet. Die Aufgabe ist auch dann unlösbar.



Es müssen jetzt also noch das 3×3 -Feld, das 3×5 -, das 4×4 -, das 4×5 - und das 5×5 -Feld betrachtet werden.

Zunächst sei jedoch ein Satz vorangestellt, der zum Beweis der Minimalität einiger Zugfolgen dienen soll:

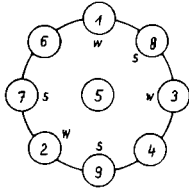
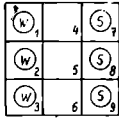
(I) Zu einem Feld F mit je n weißen und schwarzen Springern sei k eine natürliche Zahl ($k > 0$) derart, daß jeder Springer mindestens k Züge benötigt, um die gegenüberliegende Grundlinie zu erreichen. Dann ist $z = 2kn$ eine untere Schranke für die Lösung der Aufgabe auf F , d. h. in weniger als $2kn$ Zügen läßt sich die Aufgabe auf F sicher nicht lösen.

Die Gültigkeit des Satzes ist offensichtlich, denn wenn ein beliebiger Springer mindestens k Züge braucht, so brauchen $2n$ Springer insgesamt mindestens $2kn$ Züge, um die gegenüberliegende Grundlinie zu erreichen.

Das 3×3 -Feld. Aufstellung und Graph siehe Bild 5. Interessant ist der isolierte Knotenpunkt 5 in der Mitte, er kann von keinem Feld aus erreicht werden.

Eine untere Schranke für die Zugzahl ist laut (I) $z = 6$. Betrachtet man jedoch die Aufstellung, so sieht man, daß die Springer in den Ecken in einem Zug jeweils nur das Mittelfeld der gegenüberliegenden Grundlinie erreichen. Es müßten dann zwei weiße bzw. zwei schwarze Springer auf einem Feld stehen. Demzufolge müssen mindestens ein weißer und ein schwarzer Springer zweimal bewegt werden. Die Mindestzugzahl beträgt demnach 8.

Bild 5



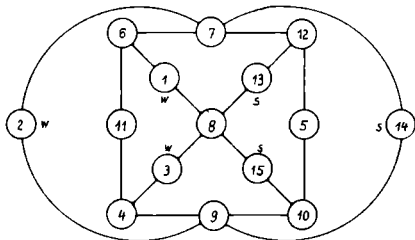
Eine Lösung dafür ist: 9-4, 1-6, 8-1, 2-9, 7-2, 3-8, 4-3, 6-7.

Das 3x5-Feld. Aufstellung und Graph siehe Bild 6.

Ohne Beweis soll eine (vermutlich minimale) Lösung in 14 Zügen angegeben werden (z ist hier 12):

14-7, 2-9, 7-2, 9-14, 15-10, 1-8, 8-15, 13-8, 8-1, 3-8, 8-13, 10-9, 9-4, 4-3.

Bild 6



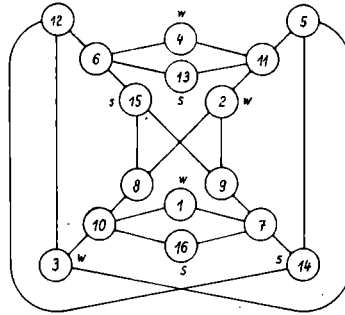
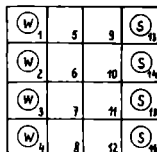
Das 4x4-Feld. Aufstellung und Graph siehe Bild 7.

Wegen (I) ist $z = 16$.

Eine Lösung in 16 Zügen, und also eine minimale, ist:

16-7, 1-10, 7-1, 10-16, 13-11, 4-6, 11-4, 6-13, 15-8, 2-9, 8-2, 9-15, 14-12, 3-5, 12-3, 5-14.

Bild 7



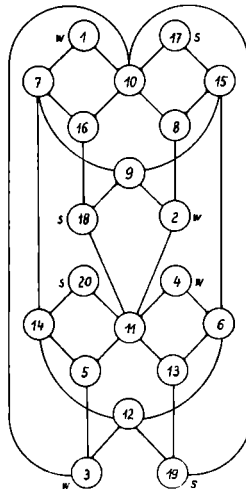
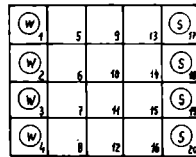
Das 4x5-Feld.

Aufstellung und Graph siehe Bild 8.

Hier ist $z = 16$, eine minimale Lösung ist:

18-9, 4-11, 11-18, 20-11, 11-4, 2-11, 11-20, 9-2, 19-12, 1-10, 10-19, 17-10, 10-1, 3-10, 10-17, 12-3.

Bild 8



Das 5x5-Feld.

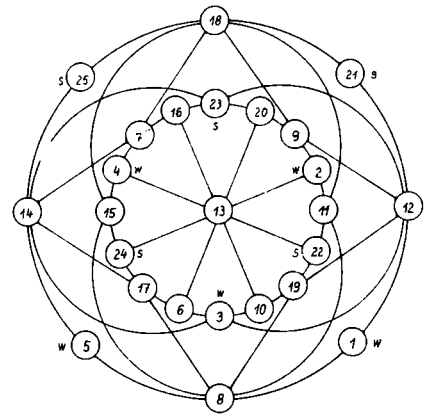
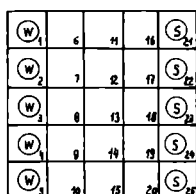
Aufstellung und Graph siehe Bild 9.

Es ergibt sich wegen (I) $z = 20$.

Eine vermutlich minimale Lösung ist:

2-11, 22-13, 13-2, 11-22, 4-15, 24-13, 13-4, 15-24, 3-14, 21-12, 12-3, 1-12, 12-21, 23-12, 12-1, 14-23, 25-14, 14-17, 5-14, 14-25, 17-14, 14-5 (22 Züge).

Bild 9



Zum Abschluß sei noch bemerkt, daß Harold Reiter in der schon mehrfach erwähnten Veröffentlichung das Springer-Problem für je 10 weiße und schwarze Springer auf einem 5x5-Feld behandelt.

Die weißen Springer stehen hierbei auf den Feldern 1 bis 10, die schwarzen auf den Feldern 16 bis 25 (vgl. Bild 9).

H. Reiter beweist, daß $z = 32$ eine untere Schranke ist und vermutet, daß die von ihm angegebene 36-Zug-Lösung minimal ist

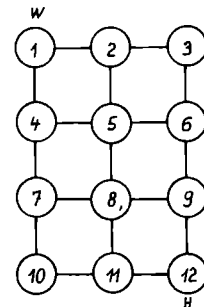
(23-14, 1-12, 12-23, 21-12, 12-1, 3-12, 12-21, 14-3, 2-11, 22-13, 13-2, 11-22, 24-15, 4-13, 13-24, 15-4, 17-14, 8-17, 5-8, 14-5, 18-11, 9-18, 20-9, 25-14, 18-25, 7-18, 16-7, 6-13, 13-20, 10-13, 13-16, 19-10, 8-19, 11-8, 3-6, 14-3).

Schüler M. Nitsche

Eine Aufgabe von Prof. Dr. H.-J. Voß

▲ 2606 ▲ Auf dem abgebildeten Graphen spielen zwei Spieler mit zwei Steinen, einen Wolf W und einen Hasen H darstellend, das folgende Spiel:

Beginnend mit W werden beide Steine abwechselnd gezogen (ein Zug besteht im Übergang auf ein benachbartes Feld).



W gewinnt, wenn er nach spätestens 20 Zügen auf ein von H besetztes Feld gelangt, andernfalls hat H gewonnen.

In welcher der zwei Ausgangsstellungen a) und b) gewinnt W, und wieviel Züge benötigt er im ungünstigsten Fall, um H zu fangen?

- a) W auf Feld 1, H auf Feld 12;
 b) W auf Feld 1, H auf Feld 3.
 Man untersuche dasselbe auf dem Graphen des Bildes 2 des nebenstehenden Beitrags von M. Nitsche mit der Ausgangsstellung: W auf Feld 1 und H auf Feld 10.



Kurzbiografie

Geboren am 10. 2. 1938 in Brehna, Kreis Bitterfeld

– Schulbesuch in Brehna und Bitterfeld, 1956 Abitur an der Oberschule II in Bitterfeld

– 1956 bis 1961 Mathematikstudium an der Technischen Universität Dresden, insbesondere bei den Professoren Heinrich Landsberg, Lehmann, Opitz und Wentzel
 – 1962 Beginn der Tätigkeit an der Technischen Hochschule Ilmenau als Assistent bei Prof. H. Sachs, seitdem Forschung auf dem Gebiet der Graphentheorie

– 1966 Promotion zum Dr. rer. nat.

– 1972 Promotion zum Dr. sc. nat.

– 1979 Ernennung zum Hochschuldozenten für *Mathematische Methoden der Operationsforschung* an die Technische Hochschule Ilmenau, Auszeichnung mit der Verdienstmedaille der DDR

– 1979/80 zehnmönatiges Zusatzstudium an der Lenin-Universität Kischinow

– 1983 Berufung zum ordentlichen Professor für Algebra an die Pädagogische Hochschule K. F. W. Wander Dresden, etwa 50 Publikationen, darunter das gemeinsam mit Dozent Dr. rer. nat. habil. Hansjoachim Walther von der TH Ilmenau geschriebene Buch *Über Kreise in Graphen* (VEB DVW Berlin 1974). Gegenwärtig Arbeit an einem zweiten Buch über Graphentheorie.

Seit 1966 Mitglied der National-Demokratischen Partei Deutschlands, Mitarbeit in verschiedenen verantwortlichen Funktionen seiner Partei, gegenwärtig Mitglied der Kreisvorstände Dresden-Stadt der NDPD und der DSF.

Lebensweisheiten der Römer

Lang ist der Weg durch Belehrungen, kurz und wirksam durch Beispiele.

Seneca d. J.

Nichts kann ohne Beispiel richtig gelernt oder gelehrt werden.

Columella

Eine Aufgabe aus der Praxis



Der VEB MANTISSA Dresden fertigt neben anderen Erzeugnissen auch geometrische Körpermodelle für den Mathematikunterricht an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR. Ein beträchtlicher Anteil wird exportiert. Zur Fertigung der Körpermodelle wird PVC-h-Tafelmaterial verwendet.

Die Herstellung von Pyramidenmodellen erfolgt nun so, daß zunächst Grund- und Seitenflächen zugeschnitten werden. Das Fügen an den Körperkanten wird durch sogenannte Gehrungsschrägen ermöglicht. Hierbei werden die Zuschnitte längs der Kanten durch Fräsen zueinander passend abgeschrägt. Dazu ist unter anderem erforderlich, die Größe des jeweiligen Winkels zwischen zwei benachbarten Seitenflächen zu kennen.

Aufgaben

Die Aufgabe, die Schnittwinkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen einer Pyramide zu bestimmen, ist für den Fall

- ▲ 1 ▲ einer geraden quadratischen Pyramide;
- ▲ 2 ▲ einer geraden rechteckigen Pyramide;
- ▲ 3 ▲ einer geraden dreieckigen Pyramide, deren Grundfläche von einem gleichseitigen Dreieck gebildet wird

durchzuführen.

Die Abmessungen sind wie folgt:

- Kantenlänge der Grundfläche bei quadratischer und dreieckiger Pyramide $a = 160$ mm
- Kantenlänge der Grundfläche bei der rechteckigen Pyramide $a = 160$ mm; $b = 240$ mm
- Seitenkantenlänge bei allen drei Pyramiden $s = 240$ mm.

Lösungen

- ▲ 1 ▲ Gerade quadratische Pyramide

Die Gerade SC ist Schnittgerade der beiden Ebenen, in denen die benachbarten Seitenflächen SBC bzw. SDC liegen (Bild 1). Die gesuchte Größe des Winkels zwischen den beiden Seitenflächen wird dadurch bestimmt, daß der Scheitelpunkt auf der Schnittgeraden SC liegt und die beiden Schenkel in jeweils einer der beiden Ebenen liegen und senkrecht auf SC stehen. E ist in Bild 1 so gewählt, daß die Schenkel des Schnittwinkels durch B bzw.

D verlaufen. DBE ist ein gleichschenkliges Dreieck.

Aus Bild 2 entnimmt man $\sin \frac{\delta}{2} = \frac{e}{2y}$. (1)

Ferner ist $e = a\sqrt{2}$. Für y findet man unter Verwendung von Bild 1 zunächst

$\sin \alpha = \frac{y}{a}$, also $y = a \cdot \sin \alpha$.

Bild 1

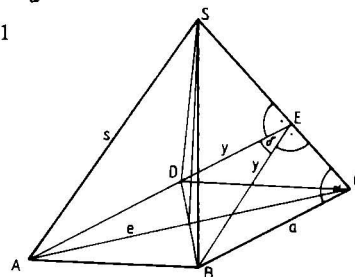
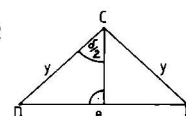


Bild 2



Setzen wir in (1) die gefundenen Terme für e und y ein, so ergibt sich:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot a \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sin \alpha} \quad (2)$$

α läßt sich aus dem gleichschenkligen Dreieck BCS mit der Schenkellänge s und der Basislänge a ermitteln.

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{s}$$

Aus (2) ergibt sich hiermit:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot s}{2 \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{s}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \quad (3)$$

Setzt man in (3) für s und a die gegebenen Werte ein, so ist

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{240 \text{ mm}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{240^2 - 80^2} \text{ mm}} = \frac{240}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{80^2 \cdot (3^2 - 1^2)}} = \frac{3}{4}$$

und damit schließlich $\frac{\delta}{2} = 48,6^\circ$,

also $\delta = 97,2^\circ$

(denn offenbar ist $0^\circ < \frac{\delta}{2} < 90^\circ$).

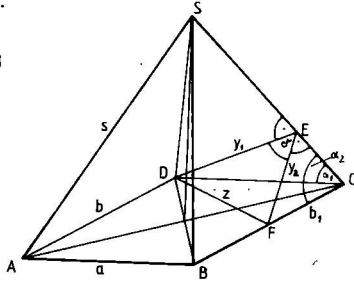


▲ 2 ▲ Gerade rechteckige Pyramide

Wegen 1. betrachten wir nur solche Pyramiden, deren Grundfläche rechteckig, aber nicht quadratisch ist.

Wir versuchen, wie unter 1. zu verfahren. Wie man sich überlegen kann, gibt es auf SC keinen Punkt, der Scheitelpunkt des gesuchten Schnittwinkels ist und dessen Schenkel durch B und D gehen (Bild 3). δ liegt vielmehr in dem Dreieck DFE mit $F \neq B$.

Bild 3



Nach dem Kosinussatz gilt:

$$\cos \delta = \frac{y_1^2 + y_2^2 - z^2}{2y_1y_2} \quad (1)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck FCE ergibt sich

$$y_2 = b_1 \cdot \sin \alpha_2 \quad (2.1)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck DCE folgt

$$y_1 = a \cdot \sin \alpha_1 \quad (2.2)$$

b_1 läßt sich berechnen, indem wir ausnutzen, daß die Strecke EC zu beiden rechtwinkligen Dreiecken gehört:

$$EC = b_1 \cdot \cos \alpha_2 = a \cdot \cos \alpha_1,$$

$$\text{also } b_1 = a \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \quad (3)$$

Aus den gleichschenkligen Dreiecken ABS bzw. BCS findet man

$$\cos \alpha_1 = \frac{a}{2 \cdot s}$$

$$\text{bzw. } \cos \alpha_2 = \frac{b}{2 \cdot s};$$

das liefert, in (3) eingesetzt

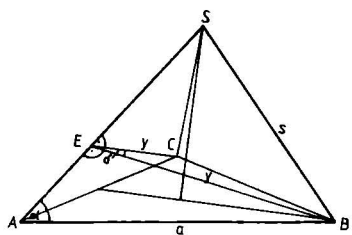
$$b_1 = a \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b}$$

Weiter gilt

$$\sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{s}$$

$$\text{und } \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{s}$$

Bild 4



Nach Einsetzen in (2.1) und (2.2) erhalten wir

$$y_1 = \frac{a \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{s}$$

$$\text{und } y_2 = \frac{a^2 \sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{bs} \quad (4)$$

z ist leicht aus dem rechtwinkligen Dreieck DFC zu bestimmen:

$$z^2 = a^2 + b_1^2 = a^2 + \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 \quad (5)$$

Unter Verwendung von (4) und (5) folgt aus (1):

$$\cos \delta = \frac{a \cdot b}{4 \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \quad (6)$$

Aus (6) ist ablesbar, daß $\delta > 90^\circ$ ist.

Setzt man die gegebenen Werte für a , b und s ein, so ergibt sich:

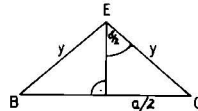
$$\begin{aligned} \cos \delta &= \frac{160 \text{ mm} \cdot 240 \text{ mm}}{4 \sqrt{(240^2 - 80^2) \text{ mm}^2} \cdot \sqrt{(240^2 - 120^2) \text{ mm}^2}} \\ &= \frac{160 \cdot 240}{4 \sqrt{80^2 \cdot (3^2 - 1) \cdot 240^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)}} \\ &= \frac{160 \cdot 240}{4 \cdot 80 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 240 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}} \\ \cos \delta &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{6}} \approx -0,2041 \\ \delta &= 180^\circ - 78,2^\circ = 101,8^\circ \end{aligned}$$

▲ 3 ▲ Gerade dreieckige Pyramide

Das Vorgehen kann wie unter ▲ 1 ▲ erfolgen.

Wir betrachten das gleichschenklige Dreieck BCE (Bild 5).

Bild 5



Es gilt

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{a}{2y} \quad (1)$$

Für y findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABE:

$$\sin \alpha = \frac{y}{a}, \text{ also } y = a \cdot \sin \alpha$$

Setzen wir das in (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\delta}{2} &= \frac{a}{2 \cdot a \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha} \quad (2) \end{aligned}$$

$\sin \alpha$ bestimmen wir schließlich aus dem gleichschenkligen Dreieck ABS:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{s}$$

Damit ist

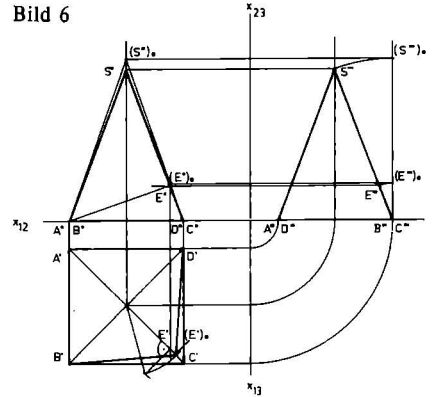
$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{s}{2 \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

und für die gegebenen Werte folgt:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\delta}{2} &= \frac{240 \text{ mm}}{2 \sqrt{240^2 - 80^2} \text{ mm}} \\ &= \frac{240}{2 \cdot 80 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{4 \cdot \sqrt{2}} \approx 0,5303 \\ \frac{\delta}{2} &= 32,0^\circ \\ \delta &= 64,0^\circ \end{aligned}$$

Abschließend wird am Beispiel der quadratischen Pyramide angegeben, wie durch Mittel der darstellenden Geometrie der Schnittwinkel zweier Seitenflächen konstruktiv ermittelt werden kann (Bild 6).

Bild 6

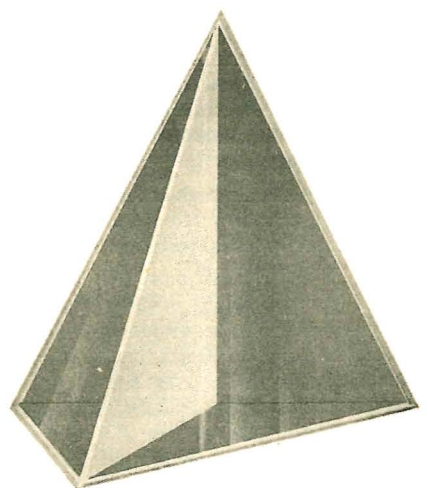


Beschreibung: Neben Grund- und Aufrißebene wird eine dritte Rißebe (Kreuzrißebe) benutzt, die auf jeder der beiden erstgenannten Ebenen senkrecht steht. Die gegebenen Längen der Pyramide werden im Maßstab 1:4 dargestellt.

In der Grundrißebe kann das Quadrat $A'B'C'D'$ unmittelbar gezeichnet werden, in der Aufrißebe zunächst das Dreieck $B''C''(S'')_0$, das eine Seitenfläche in wahrer Größe darstellt. Aus dem Kreuzriß entnimmt man den Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Aufrißebe und kann damit den Aufriß $B''C''S''$ der betrachteten Seitenflächen angeben. Der Aufriß E'' des Scheitelpunktes E wird aus dem rechtwinkligen Dreieck $B''C''(E'')_0$ mit Hilfe des Kreuzrisses E'' gewonnen. Damit ist auch E' auf $S'C'$ bestimmt. Als Grundaufgabe der darstellenden Geometrie bleibt noch übrig, das Dreieck $B'E'D'$ in die Grundrißebe zu drehen, um die wahre Größe des gesuchten Schnittwinkels mit dem Scheitel in $(E')_0$ entnehmen zu können.

H. Giendarz/Ch. Knüpfer

Rechteckige Pyramide mit Einlege teilen





„Sternenaufgaben“

aus dem Lehrbuch Mathematik,
Klasse 5

Aufgaben

▲ 1 ▲ Fülle die leeren Felder so aus, daß die Summen der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte, von links oben nach rechts unten sowie von rechts oben nach links unten gleich sind!

13	8	12	1
	11	7	
3			15
16			

▲ 2 ▲ Von den 34 Schülern einer Klasse können 14 Schüler radfahren, 25 Schüler schwimmen und 9 Schüler beides. Wieviel Schüler der Klasse können weder radfahren noch schwimmen?

▲ 3 ▲ Bei den folgenden Aufgaben sind Grundziffern durch * ersetzt. Versuche, die Aufgaben wiederherzustellen!

$$\begin{array}{r} \text{a) } 5162 \cdot *** \\ 15486 \\ ***2 \\ ***2* \\ \hline *****4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{b) } 4*0* \cdot *** \\ 86*6 \\ 17*** \\ *****7 \\ \hline ***** \end{array}$$

▲ 4 ▲ Auf einem Motorschiff fahren 100 Personen. 10 von ihnen sprechen weder Deutsch noch Russisch. 75 Personen sprechen Deutsch und 83 Russisch. Wieviel Personen sprechen sowohl Deutsch als auch Russisch?

▲ 5 ▲ Ein Hotel hat 30 Ein- und Zweibettzimmer mit zusammen 50 Betten. Wieviel Einbettzimmer und wieviel Zweibettzimmer hat das Hotel?

▲ 6 ▲ Wie lange braucht ein 500 m langer Zug zur Durchfahrt durch einen 500 m langen Tunnel mit einer Geschwindigkeit von 60 km pro Stunde?

▲ 7 ▲ Im Empfangsraum eines Gästehauses soll der Fußboden mit einem Steinmosaik verziert werden. Der Raum ist 12,30 m breit und 10,40 m lang. Das Mosaik soll in der Mitte des Raumes so liegen, daß an jeder Seite ein Streifen von 1,20 m keine Mosaikverzierung erhält. Wieviel Quadratmeter Mosaikfläche sind zu gestalten?

▲ 8 ▲ Sabines Aquarium ist 60 cm lang, 30 cm breit und 35 cm hoch. Der Wasserspiegel ist 7 cm vom oberen Rand entfernt. Sabine möchte die Jungfische aus ihrem Anzuchtbecken (Maße 20 cm, 12 cm, 15 cm) in das Aquarium geben. Um wieviel Zentimeter steigt der Wasserspiegel, wenn sie das Wasser mit hineingießt?

▲ 9 ▲ Ein Behälter für Regenwasser ist 1,2 m hoch und hat ein Fassungsvermögen von 0,2 m³. Wie viele Gießkannen mit 8 l Fassungsvermögen kann man aus ihm schöpfen, wenn er voll ist, aber $\frac{1}{5}$ seines

Inhalts zurückbleiben soll?

▲ 10 ▲ Eine Schachtel enthält Kugeln verschiedener Farbe. Dabei haben Kugeln der gleichen Farbe auch die gleiche Masse.

- a) 2 rote und 2 grüne Kugeln wiegen zusammen 18 g,
2 rote und 5 grüne Kugeln wiegen zusammen 30 g,
2 grüne und 3 schwarze Kugeln wiegen zusammen 29 g.

Wieviel wiegt eine schwarze Kugel?

- b) 3 gelbe und 5 blaue Kugeln wiegen zusammen 58 g,
3 gelbe und 5 weiße Kugeln wiegen zusammen 58 g,
5 blaue und 6 weiße Kugeln wiegen zusammen 88 g.

Wieviel wiegt eine gelbe Kugel?

Zusammenstellung:
J. Lehmann/Th. Scholl

Lösungen

▲ 1 ▲ Wegen $13 + 8 + 12 + 1 = 34$ beträgt die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte, von links oben nach rechts unten sowie von rechts oben nach links unten stets 34. Wegen $13 + 3 + 16 = 32$ und $34 - 32 = 2$ ist in das leere Feld der ersten Spalte 2 einzutragen. Wegen $2 + 11 + 7 = 20$ und $34 - 20 = 14$ ist in das leere Feld der zweiten Zeile 14 einzutragen. Wegen $1 + 14 + 15 = 30$ und $34 - 30 = 4$ ist in das leere Feld der letzten Spalte 4 einzutragen. Wegen $13 + 11 + 4 = 28$ und $34 - 28 = 6$ (gerechnet von links oben nach rechts unten) ist in das leere Feld 6 einzutragen. Wegen $3 + 6 + 15 = 24$ und $34 - 24 = 10$ ist in das leere Feld der dritten Zeile 10 einzutragen. Wegen $8 + 11 + 10 = 29$ und $34 - 29 = 5$ ist in das leere Feld der zweiten Spalte 5 einzutragen. Wegen $16 + 5 + 4 = 25$ und $34 - 25 = 9$ ist in das leere Feld der vierten Zeile 9 einzutragen. (LB Kl. 5, S. 10, Aufg. 7)

▲ 2 ▲ Wegen $14 + 25 - 9 = 30$ können 30 Schüler radfahren oder schwimmen. Wegen $34 - 30 = 4$ können 4 Schüler weder radfahren noch schwimmen. (LB Kl. 5, S. 11, Aufg. 20)

▲ 3 ▲ a) Die erste Grundziffer des zweiten Faktors ist 3, denn $5162 \cdot 3 = 15486$. Die zweite Grundziffer des zweiten Faktors könnte 1 oder 6 sein. Wegen $5162 \cdot 6 > 30000$ entfällt 6, denn das zweite Teilprodukt ist nur vierstellig. Da das Produkt auf die Grundziffer 4 endet, lautet das dritte Teilprodukt $***24$. Die dritte

Grundziffer des zweiten Faktors könnte 7 oder 2 sein. Wegen $62 \cdot 7 = 434$ entfällt 7, da das dritte Teilprodukt auf die Ziffernfolge 24, nicht aber auf 34 endet. Wir erhalten somit folgende Lösung:

$$\begin{array}{r} 5162 \cdot 312 \\ 15486 \\ 5162 \\ \hline 10324 \\ 1610544 \end{array}$$

b) Wegen $2 \cdot 4 = 8$ ist die erste Grundziffer des zweiten Faktors 2. Die vierte Grundziffer des ersten Faktors könnte 3 oder 8 sein. Da das dritte Teilprodukt auf die Grundziffer 7 endet, entfällt 8. Wegen $4303 \cdot 2 = 8606$ lautet der erste Faktor 4303. Die zweite Grundziffer des zweiten Faktors ist somit 4, denn $4303 \cdot 4 = 17212$. Von den Vielfachen von 3 endet nur $9 \cdot 3 = 27$ auf die Grundziffer 7. Deshalb ist die dritte Grundziffer des zweiten Faktors 9. Wir erhalten somit folgende Lösung:

$$\begin{array}{r} 4303 \cdot 249 \\ 8606 \\ 17212 \\ \hline 38727 \\ 1071447 \end{array}$$

(LB Kl. 5, S. 18, Aufg. 25)

▲ 4 ▲ $100 - 10 = 90$
90 Personen sprechen Deutsch oder Russisch oder beide Sprachen.
 $75 + 83 - 90 = 68$

68 Personen sprechen sowohl Deutsch als auch Russisch.
(LB Kl. 5, S. 43, Aufg. 29)

▲ 5 ▲ Angenommen, die 50 Betten sind nur auf Zweibettzimmer verteilt. Wegen $50 : 2 = 25$ hätte das Hotel dann 25 Zweibettzimmer. Da das Hotel über 30 Zimmer insgesamt verfügt, müßten aus 5 Zweibettzimmern je ein Bett herausgenommen werden. Es verbleiben dann 20 Zweibett- und $5 + 5 = 10$ Einbettzimmer.
(LB Kl. 5, S. 43, Aufg. 31)

▲ 6 ▲ Von der Einfahrt der Lokomotive in den Tunnel bis zur Ausfahrt des letzten Waggons aus dem Tunnel hat der Zug $500 \text{ m} + 500 \text{ m} = 1000 \text{ m}$, also 1 km zurückgelegt. Da die Geschwindigkeit 60 km pro Stunde, also 60 km pro 60 min beträgt, benötigt der Zug zur Durchfahrt durch den Tunnel 1 min.

(LB Kl. 5, S. 91, Aufg. 20)

▲ 7 ▲ Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 1,20 \text{ m} = 2,40 \text{ m}; \\ 12,30 \text{ m} - 2,40 \text{ m} = 9,90 \text{ m}; \\ 10,40 \text{ m} - 2,40 \text{ m} = 8,00 \text{ m}; \\ 9,90 \text{ m} \cdot 8,00 \text{ m} = 79,20 \text{ m}^2. \end{array}$$

Es sind 79,20 m² Mosaikfläche zu gestalten.

(LB Kl. 5, S. 108, Aufg. 15)

▲ 8 ▲ Das Wasser aus dem Anzuchtbecken hat ein Volumen von $20 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 3600 \text{ cm}^3$. Aus $60 \cdot 30 \cdot x \text{ cm}^2 = 3600 \text{ cm}^3$ folgt $x = 2 \text{ cm}$. Der Wasserspiegel steigt um 2 cm.
(LB Kl. 5, S. 124, Aufg. 226)

▲ 9 ▲ $0,2 \text{ m}^3 = 200 \text{ l}$; $200 \text{ l} : 5 = 40 \text{ l}$;
 $200 \text{ l} - 40 \text{ l} = 160 \text{ l}$; $160 : 8 = 20$.
Man kann 20 Gießkannen mit 8 l Fas-

sungsvermögen aus dem Behälter für Regenwasser schöpfen, wenn $\frac{1}{5}$ seines Inhalts zurückbleiben soll.
(LB Kl. 5, S. 124, Aufg. 25)

▲ 10 ▲ a) 3 grüne Kugeln wiegen zusammen $30\text{ g} - 18\text{ g} = 12\text{ g}$, eine grüne Kugel wiegt somit $12\text{ g} : 3 = 4\text{ g}$, 2 grüne Kugeln also $2 \cdot 4\text{ g} = 8\text{ g}$.

3 schwarze Kugeln wiegen zusammen $29\text{ g} - 8\text{ g} = 21\text{ g}$, 1 schwarze Kugel wiegt somit $21\text{ g} : 3 = 7\text{ g}$.

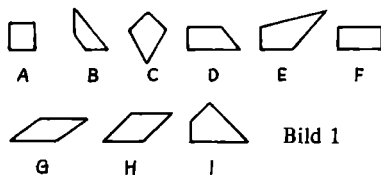
b) 3 gelbe und 5 blaue Kugeln wiegen zusammen genausoviel Gramm wie 3 gelbe und 5 weiße Kugeln. Deshalb besitzen die blauen und die weißen Kugeln die gleiche Masse.

11 blaue Kugeln wiegen somit 88 g , 1 blaue Kugel 8 g , 5 blaue Kugeln $5 \cdot 8\text{ g} = 40\text{ g}$.

3 gelbe Kugeln wiegen $58\text{ g} - 40\text{ g} = 18\text{ g}$, eine gelbe Kugel wiegt $18\text{ g} : 3 = 6\text{ g}$.
(LB Kl. 5, S. 128, Aufg. 53)

Flächen und nochmals Flächen

▲ 1 ▲ Welche der Figuren des Bildes 1 sind Trapeze?

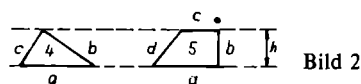
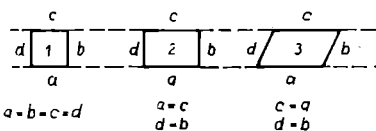


▲ 2 ▲ Mit welcher bzw. welchen der folgenden Formeln kann man die Fläche der einzelnen Figuren aus Bild 2 ermitteln?

a) $A = a^2$ b) $A = a \cdot b$

c) $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ d) $A = a \cdot h$

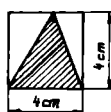
e) $A = \frac{a \cdot h}{2}$



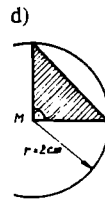
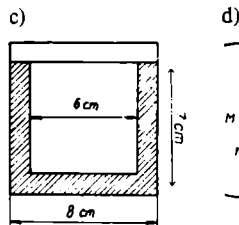
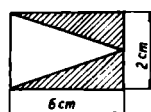
▲ 3 ▲ Der Flächeninhalt eines Rechtecks soll 16 m^2 und der Umfang desselben Rechtecks 16 m betragen. Ermittle die Seitenlängen a und b eines solchen Rechtecks!

▲ 4 ▲ Ermittle jeweils den Flächeninhalt der schraffierten Fläche (Bild 3)!

Bild 3 a)

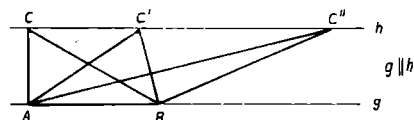


b)



▲ 5 ▲ Welches der Dreiecke ($\triangle ABC$; $\triangle ABC'$; $\triangle ABC''$) hat den größten Flächeninhalt (Bild 4)?

Bild 4



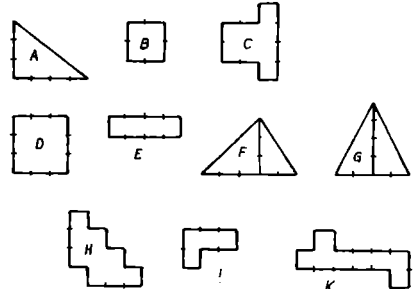
▲ 6 ▲ Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b betrage 36 cm^2 .

a) Gib drei mögliche Seitenlängen für ein Rechteck mit solchem Flächeninhalt an!

b) Versuche, Seitenlängen a und b zu ermitteln, wobei ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 36 cm^2 den kleinsten Umfang hat.

▲ 7 ▲ Welche Flächen (Bild 5) haben den gleichen Flächeninhalt?

Bild 5



▲ 8 ▲ Eine Fläche ist aus x Quadraten mit je 1 dm^2 Flächeninhalt zusammengesetzt. Dieselbe Fläche kann man mit 400 Quadraten (Flächeninhalt jeweils 1 cm^2) bedecken. Ermittle x !

▲ 9 ▲ Der Umfang eines Rechtecks beträgt 20 cm .

Kann der Flächeninhalt dieses Rechtecks

a) 30 cm^2 b) 25 cm^2 c) 10 cm^2

betragen?

▲ 10 ▲ Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 144 cm^2 .

Kann der Umfang dieses Rechtecks

a) 290 cm b) $1152,5\text{ cm}$ c) 10 cm

d) 48 cm betragen?

▲ 11 ▲ Wie verändert sich der Umfang bzw. der Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn man die Seitenlängen

a) halbiert b) verdreifacht?

▲ 12 ▲ Der Umfang des Rechtecks $ABCD$ beträgt 42 cm . Ermittle den Flächeninhalt

des Rechtecks, wenn bekannt ist, daß die Länge der einen Rechtecksseite halb so groß ist wie die der anderen!

▲ 13 ▲ Die Familien Paul, Schmidt und Schnurpfeil bestimmen die Flächen ihrer rechteckigen Gärten. Für Länge und Breite werden folgende Werte ermittelt:

	Länge	Breite
Schnurpfeil	12,2 m	41,6 m
Paul	23,7 m	11,8 m
Schmidt	31,7 m	21,6 m

Als Flächeninhalt werden nachstehende Werte angegeben:

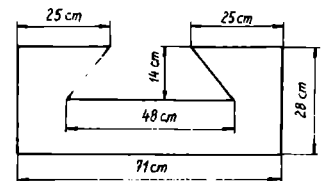
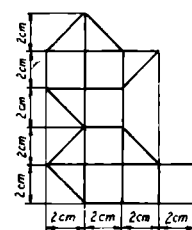
Schnurpfeil: 508 m^2 ; Schmidt $648,72\text{ m}^2$;

Paul: $279,66\text{ m}^2$.

Was sagst du dazu?

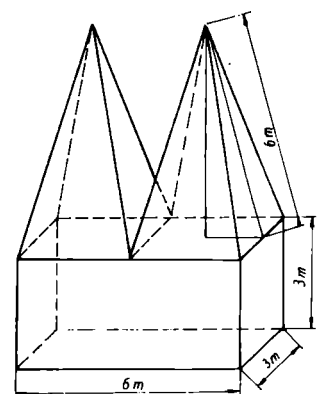
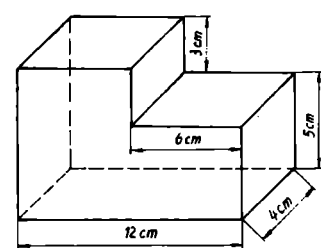
▲ 14 ▲ Ermittle den Flächeninhalt der Figuren (Bild 6)!

Bild 6



▲ 15 ▲ Ermittle die Oberfläche der Körper (Bild 7)!

Bild 7

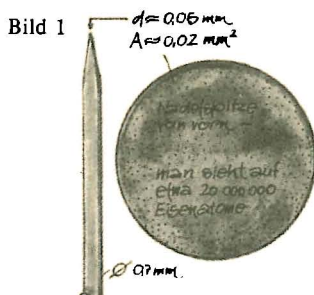


L. Flade/H. Knopf

Physik – auf die Spitze getrieben

Verlieren kann man sie schnell, sie wiederzufinden ist mühsam. Manche liegen lange auf dem Teppich, bis sie uns daran erinnern, daß man besser Hausschuhe anziehen sollte: **Stecknadeln**

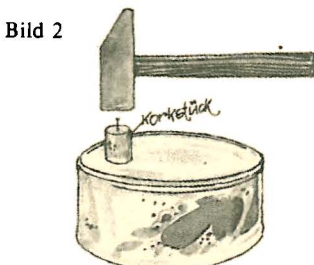
Wenn man sich die kleinen glänzenden Dinger unter einer guten Lupe betrachtet, wird man enttäuscht. Die gefürchtete Spitze ist gar nicht spitz, eher sieht sie wie ein winziger Stumpf aus. Dessen Durchmesser dürfte kaum kleiner als 0,05 mm sein. Die zugehörige Kreisfläche besitzt dann einen Inhalt von rund 0,002 mm². Auf ihr befinden sich nicht weniger als 20 Millionen Eisenatome (Bild 1).



Freilich, zum Stechen langt dieser Stumpf allemal. Wenn nur eine Kraft von 0,1 kg (etwa 1 N) auf die Nadel wirkt, entsteht unter der Spitze ein Druck von

$$p = \frac{0,1 \text{ kp}}{0,00002 \text{ cm}^2} = 5000 \text{ at} \quad (\approx 500 \text{ MPa}).$$

Damit kann man nicht nur Papier durchstoßen, sondern sogar das Blech einer Konservendose. Der Trick dabei: Die Nadel wird durch einen Korken gesteckt. Der verhindert, daß sie sich bei dem erforderlichen Schlag mit einem Hammer seitlich wegbiegt (Bild 2).

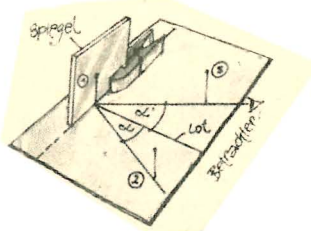


Befindet sich das Loch etwa in der Mitte des Dosenbodens, können wir aus der Konservendose eine Lochkamera basteln. Dazu bekleben wir die große Öffnung mit

Transparentpapier. Besonders gute Abbildungen erzeugt die Lochkamera von sehr hellen Objekten (z. B. Lampen und Fenstern).

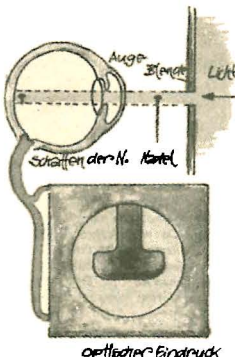
Bleiben wir noch etwas in der Optik. Mit Hilfe von Stecknadeln läßt sich das wichtige Reflexionsgesetz (Physiklehrbuch Kl. 6, S. 95 bis 96) bestätigen. Entsprechend Bild 3 stellen wir einen kleinen Spiegel auf ein Stück Pappe, dazu die Nadeln (1) und (2). Mit Nadel (3) visieren wir das Spiegelbild von (2) so an, daß es sich mit (1) deckt. An der gefundenen Stelle wird Nadel (3) in die Pappunterlage gesteckt. Nun haben wir drei Einstichstellen. Sie markieren den Strahlenverlauf (2) – (1) – (3). Wenn wir ihn mit einem Bleistift nachzeichnen, ergänzen wir auch das Einfallslot. Dadurch lassen sich Einfallswinkel α und Reflexionswinkel α' messen und vergleichen.

Bild 3



Noch einmal zurück zu unserer Lochkamera. Sie ergab umgekehrte, seitenvertauschte Bilder. Auch das Auge kann nichts anderes. Daß uns die Welt nicht nur auf dem Kopf zu stehen scheint, ist Gewohnheitssache. Im Bewußtsein wird das verkehrte Netzhautbild auf die Füße gestellt, ohne daß wir es noch bemerken würden. Wenn es gelänge, auf der Netzhaut ein aufrechtes Bild hervorzurufen, müßten wir es demnach verkehrt herum sehen! Die Nadel verhilft uns zu diesem Erlebnis. Zunächst stechen wir mit ihr ein Loch in eine Postkarte. Durch die kleine Öffnung sehen wir die Umgebung aufrecht. Nun schieben wir die Stecknadel mit der Kuppe von unten her zwischen Auge und Lochblende. Wir sehen freilich etwas anderes: Die Nadel wandert von oben her ins Bild, mit der Kuppe nach unten (Bild 4).

Bild 4



Aufgrund der geringen Entfernung (Gegenstandsweite) der Nadel vom Auge wird das Objekt nicht mehr reell von der Augenlinse auf der Netzhaut abgebildet. Das vom Loch kommende Licht wirft jedoch einen aufrechten Nadelschatten auf die Netzhaut. Unser aufs Umdrehen der optischen

Eindrücke programmiertes Bewußtsein täuscht sich diesmal: Wir sehen die Nadel bzw. ihren Schatten verkehrt.

„Eine Nadel in einem Heuhaufen suchen“ ist eine sprichwörtlich mühevoll Arbeit. Als man diesen Vergleich erdachte, wußte man noch nichts von starken Magneten. Solch ein Gerät erleichtert die Suche beträchtlich, wenn die Nadel aus Stahl besteht. Es ist freilich nur zum Teil richtig, wenn man meint, daß der Magnet die Nadel anzieht. Auch umgekehrt wirkt die Anziehungskraft, von der Nadel zum Magneten. Die Nadel wird nämlich im Magnetfeld selbst zu einem Magneten mit Nord- und Südpol. Deshalb kann man an sie noch eine zweite anhängen, vielleicht sogar noch eine dritte. Welche Länge die Nadelmagnetkette erhält, hängt vor allem von der Stärke des Dauermagneten ab.

Streicht man mit dem Pol eines Magneten mehrmals in gleicher Richtung über eine Nadel aus gehärtetem Stahl, wird sie dauerhaft magnetisiert. Sie ist jetzt als „Kompaßnadel“ zu verwenden. Damit sie sich leicht drehen kann, lassen wir sie auf Wasser schwimmen. Als Schwimmweste erhält sie ein Stück Kork oder Schaumpolystyrol. Die Nadel dreht sich sogleich in Nord-Süd-Richtung, wenn kein Magnet oder ein größeres Eisenstück in der Nähe ist. Parallel zur schwimmenden Nadel, in möglichst geringem Abstand, legen wir einen Metalllöffel über das Gefäß. Nun drücken wir die Kontakte einer Flachbatterie 2 s bis 3 s lang auf den Löffel (Bild 5). So stellen wir einen Kurzschluß her, ein starker elektrischer Strom fließt durch den Löffel. Die Nadel beginnt sich zu drehen und versucht, sich senkrecht zum Löffel zu stellen. Die Drehrichtung hängt von der Stromrichtung ab (Batteriepole vertauschen!).

Bild 5

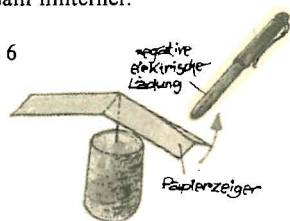


Dieses Experiment wurde (mit anderen Geräten) erstmals 1820 von dem dänischen Forscher Oersted durchgeführt. Seitdem weiß man, daß elektrischer Strom und Magnetfeld untrennbar miteinander zusammenhängen. So begann die Erforschung elektromagnetischer Erscheinungen, ohne

die unsere gesamte moderne Technik nicht existieren würde.

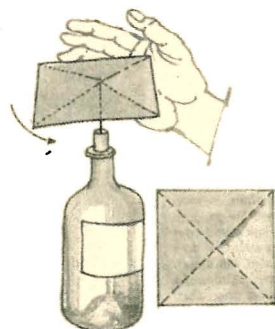
Magnetische Felder wirken durch Kräfte nur auf wenige Stoffe ein. Ein Stück Papier läßt sich mit einem Magneten nicht anheben. Mit Hilfe unserer Stecknadel können wir jedoch auch eine Art Kompaß für elektrische Felder bauen. Die Nadel hat hierbei die wichtige Funktion, die Reibung beim Drehen des Zeigers gering zu halten. Die „Kompaßnadel“ besteht aus einem etwas gewinkelten Papierstreifen (längs und quer falten). Entsprechend Bild 6 hält sie sich leicht beweglich auf dem „Spitzenlager“. Kommen wir mit einem elektrisch geladenen Körper, z. B. einem an Tuch geriebenen Plaststab, in die Nähe, so richtet sich der Papierzeiger aus. Er dreht sich bei einer Bewegung des geladenen Körpers folgsam hinterher.

Bild 6



Ganz anders, fast wie durch Zauberei, wird die Drehung des Papierblattes in Bild 7 erzeugt. Es besteht aus besonders leichtem Papier (z. B. Geschenkpapier). Entlang der Diagonalen wird das Papierquadrat gefaltet und dann auf der Nadelspitze drehbar abgelegt. Beschwörend führen wir eine Hand seitlich heran. Das Papier gehorcht. Es beginnt sich zu drehen, linksherum vor der rechten Hand, entgegengesetzt, wenn sich die linke Hand nähert.

Bild 7



Ursache dieses Effekts ist die an der warmen Handfläche entstehende Wärmeströmung der Luft. Sie erfolgt sowohl nach oben, als auch vom Handballen zu den Fingern hin, die eine etwas geringere Temperatur haben. So entsteht immer eine gleichartige Drehrichtung, je nach der benutzten Hand.

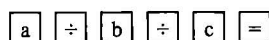
Fast könnte man über alledem die Stecknadel vergessen. Um sie und damit anzustellende Experimente ging es heute. Sorgen wir zum Schluß dafür, daß die physikalisch weniger Interessierten nicht nachträglich an unsere Versuche dadurch erinnert werden, daß sie mit einer vergessenen Nadel unverhofft Bekanntschaft schließen!

D. Wrobel
aus: technikus 1/81

Zum Berechnen algebraischer Produkte mit dem Schulrechner SR 1

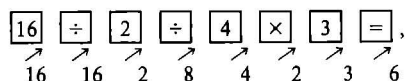
Im Bereich Q_+ der gebrochenen Zahlen werden Divisionsaufgaben auf Multiplikationsaufgaben zurückgeführt. Deshalb sollen Aufgaben mit gebrochenen oder rationalen Zahlen, in denen nur Multiplikations- und Divisionszeichen auftreten, *algebraische Produkte* genannt werden. Mit dem Schulrechner SR 1 haben wir gelernt,

Aufgaben des Typs $\frac{a}{b \cdot c}$ zu lösen (dabei sind a , b und c Dezimalbrüche), indem wir den Ablaufplan



aufstellen und danach die Tasten des SR 1 betätigen. Von der Richtigkeit dieses Vorgehens überzeugten wir uns im Unterricht an einfachen Beispielen. In dem vorliegenden Beitrag soll diese Folge von Rechenoperationen begründet und weitere Ablaufpläne sollen aufgestellt werden.

Führt man bei zusammengesetzten Aufgaben nur Multiplikationen und Divisionen (keine Additionen oder Subtraktionen!) aus, so wird die Vorrangautomatik des SR 1 („Punktrechnung vor Strichrechnung“) nicht wirksam. Andererseits besitzt der SR 1 keine Klammertasten, er löst derartige Aufgaben von „links nach rechts“, wie das folgende Beispiel zeigt:



womit auf dem SR 1 die Aufgabe $(16:2):4 \cdot 3$ realisiert wird.

Mit der Festsetzung *Algebraischer Produkte, die von links nach rechts zu lösen sind, werden klammerfrei geschrieben* lautet diese Aufgabe $16:2:4 \cdot 3$.

Der eingangs erwähnte Aufgabentyp $\frac{a}{b \cdot c}$

mit $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a, b, c \in Q$ läßt sich, indem der Bruchstrich durch ein Divisionszeichen ersetzt wird, umformen zu $a:(b \cdot c)$. Hier ist zunächst $b \cdot c$ zu berechnen und danach ist a durch das Produkt $b \cdot c$ zu dividieren. Die Klammer darf nach der getroffenen Festsetzung *nicht* weggelassen werden. Nach dem angegebenen Ablaufplan muß gelten:

$$a:(b \cdot c) = a:b:c.$$

Dieses Beispiel veranlaßt uns, Regeln für das Auflösen von Klammern in algebraischen Produkten zu suchen.

Es seien a , b , c beliebige gebrochene Zahlen, aber $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Es gibt dann natürliche Zahlen a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , so daß

$$a = \frac{a_1}{a_2}, b = \frac{b_1}{b_2}, c = \frac{c_1}{c_2} \text{ ist.}$$

Erinnert werden soll noch an die Multiplikation und Division in Q_+ . Es ist

$$a \cdot b = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2} \text{ und}$$

$$a:b = \frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1}.$$

(Eigentlich ist $a \cdot b$ die Menge von Brüchen, die auf dem Zahlenstrahl den gleichen Punkt darstellen, weil wir die Brüche durch Erweitern und Kürzen verändern können!)

Analoges gilt für $a:b$.)

Es gelten nun folgende Formeln:

- (1) $a:(b:c) = a:b:c$
- (2) $a:(b \cdot c) = a:b \cdot c$
- (3) $a:(b:c) = a:b \cdot c$
- (4) $a:(b \cdot c) = a:b:c$

Beweis:

$$(1) \text{ Es ist } a:(b:c) = \frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1 \cdot c_2}{b_2 \cdot c_1} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} = a:b:c,$$

$$(2) a:(b \cdot c) = \frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1 \cdot c_1}{b_2 \cdot c_2} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_2}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_1} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} = a:b \cdot c,$$

$$(3) a:(b:c) = \frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1 \cdot c_2}{b_2 \cdot c_1} = \frac{a_1 \cdot b_2 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_1 \cdot c_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} = a:b \cdot c,$$

$$(4) a:(b \cdot c) = \frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1 \cdot c_1}{b_2 \cdot c_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_2 \cdot b_1 \cdot c_1} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1} \cdot \frac{c_2}{c_1} = a:b:c.$$

Unsere Überlegungen fassen wir zu zwei Regeln zusammen:

1. In algebraischen Produkten darf eine Klammer, vor der ein Multiplikationszeichen steht, weggelassen werden.
2. In algebraischen Produkten darf eine Klammer, vor der ein Divisionszeichen steht, nur weggelassen werden, wenn gleichzeitig in der Klammer die Divisionszeichen durch Multiplikationszeichen und umgekehrt die Multiplikationszeichen durch Divisionszeichen ersetzt werden.

Diese Regeln bleiben richtig, wenn a , b , c rationale Zahlen mit $b \neq 0$, $c \neq 0$ sind, da

60 · alpha, Berlin 20 (1986) 3

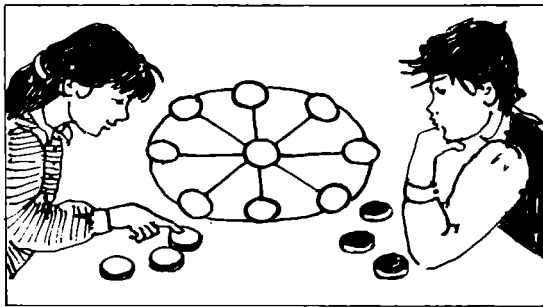
Spiel mit Hölzchen

Spiel doch einmal mit einem Partner folgendes Spiel: Man legt drei Häufchen von Streichhölzern auf den Tisch (mit z. B. 12, 10 und 7 Streichhölzern). Die Partner nehmen abwechselnd eine beliebige Anzahl von Streichhölzern weg, aber immer nur von einem Häufchen. Man kann auch ein ganzes Häufchen auf einmal wegnehmen. Gewonnen hat der, der als letzter noch Streichhölzer wegnehmen kann.

Kleine Mühle

Zeichnet euch eine runde Mühle! Gespielt wird mit drei weißen und drei schwarzen Steinen. Zuerst werden (abwechselnd) die sechs Steine gesetzt, dann wird gezogen. Springen ist nicht erlaubt. Drei Steine (gleicher Farbe) auf einem der Durchmesser bilden eine Mühle. Gewonnen hat, wer die erste Mühle bildet.

Bild 13



8

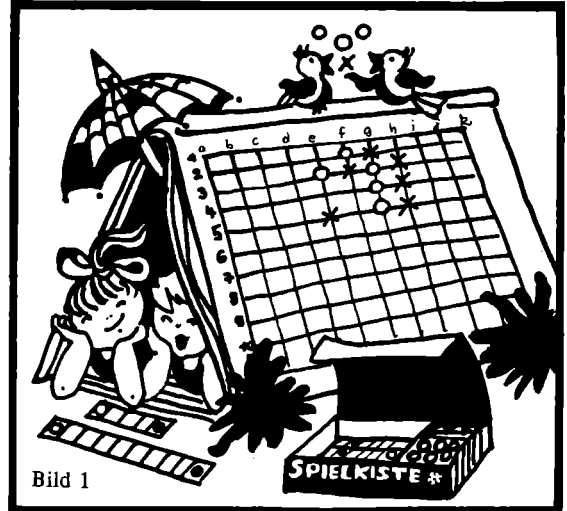


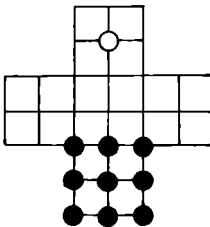
Bild 1

1

Neun Schafe und ein Wolf

Spielsteine nach Bild 10 auslegen. Ein Mitspieler übernimmt die „Schafe“, der andere den „Wolf“. Die Spielsteine sind nur auf den Linien zu bewegen, wobei der „Wolf“ nach rechts oder links rücken kann. Er kann auch über ein „Schaf“ springen, wenn der dahinterliegende Kreuzungspunkt frei ist. Die „Schafe“ dürfen nach rechts, links oder geradeaus geschoben werden. Sie müssen den „Wolf“ geschickt umzingeln, so daß er nicht mehr springen kann, oder schnell den Stall (das gegenüberliegende markierte Feld) erreichen. Dort darf der „Wolf“ kein „Schaf“ mehr fassen. Nach dem Spiel tauschen die Mitspieler ihre Rollen.

Bild 10



Sprungspiel

Fertige dir nach dem abgebildeten Muster eine Spieltafel und 16 durchnummerierte Pappscheiben! Mit jedem Stein darf man jeden anderen Stein in waagerechter oder senkrechter Richtung überspringen, wenn in dieser Richtung hinter ihm ein freies Feld ist (wie beim Damespiel) und

6

Alle acht

Für dieses Einmannspiel werden acht kleine Spielsteine und ein großer aufgelegt. Mit allen Steinen kann nach rechts, links und diagonal gesprungen werden. Nur der große Spielstein wird nicht übersprungen, kann aber mit gerückt werden. Er soll am Schluß, möglichst nach acht Zügen, allein übrig bleiben.

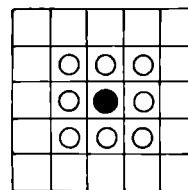


Bild 5

Vier Richtige

Bei diesem Spiel müssen vier Spielsteine einer Farbe eine waagerechte, senkrechte oder diagonale Linie ergeben. Zwei Spieler erhalten je 15 Steine, setzen diese abwechselnd und versuchen, so viel wie möglich gleichfarbige Linien aufzubauen. Im Spiel werden zwei verschiedene Farben eingesetzt.

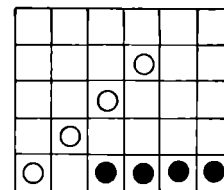


Bild 6

3

Japanisches Damespiel

Das auf der Titelseite gezeigte Damespiel ist 1 000 Jahre alt und stammt aus Japan. Man nehme Papier mit einem Quadrat (10×10), auf das die beiden Spieler Punkte oder Kreuzchen zeichnen. Die Mitspieler setzen immer abwechselnd ihr Zeichen auf einen Schnittpunkt der Linien. Ziel ist, Fünferketten zu bilden, d. h. jeweils fünf Kreuzchen (oder Kreise, bei einem dritten Mitspieler kleine Dreiecke) waagrecht, senkrecht oder diagonal in eine geschlossene Reihe zu setzen. Wem es zuerst gelingt, der ist Sieger. Jeder wird natürlich alles versuchen, um den Gegner bei der Kettenbildung zu behindern. Drei „Geheimtips“, die zum Sieg führen können:

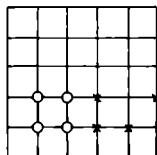


Bild 2

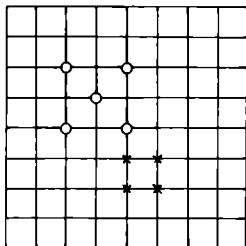


Bild 4

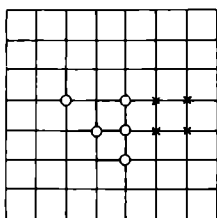


Bild 3

2

ihn dann vom Brett nehmen. Gilt diese Bedingung für mehrere Steine, so darf man beliebig viele Steine überspringen und entfernen. Auf diese Weise wird das Brett bald leer sein.

Aufgabe: Mit max. 8 Zügen ist das Brett so zu räumen, daß nur Stein 1 übrigbleibt.

Das ist nicht leicht zu schaffen!

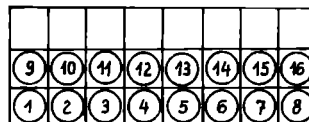


Bild 11

Schiebespiel

Baue dir nach der untenstehenden Vorlage ein Spiel (siehe Bild 12a)! Verschiebe dann die 10 Bausteine so, daß Bild 12b entsteht!

Leicht wird es nicht sein!

Bild 12a

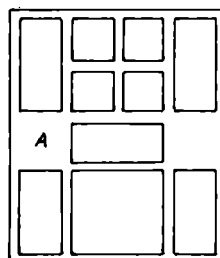
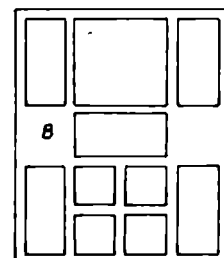


Bild 12b



7

Groschenspiel

Zeichne zwei Bahnen mit je 10 bzw. 5 Feldern! Besetze die linken Enden beider Bahnen, die rechten dein Gegner mit je einer Münze! Beide ziehen nun abwechselnd nach Belieben eine ihrer Münzen so viele Felder vorwärts oder rückwärts, wie du es oder dein Gegner für günstig hältst. Züge sind nur bis zur gegnerischen Münze erlaubt. Gesprungen werden darf nicht. Versuche, deinen Gegner in seine Ecke zu treiben!

Varianten: Ändere die Bahnlänge und die Anzahl der Bahnen!

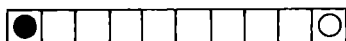
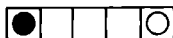


Bild 7



Schiebespiel

Jeder der beiden Spieler bekommt drei Knöpfe gleicher Farbe. Diese werden in Grundstellung aufgestellt. Es wird abwechselnd gezogen. Bei jedem Zug darf der Spieler einen seiner Knöpfe um ein Feld entlang der weißen Li-

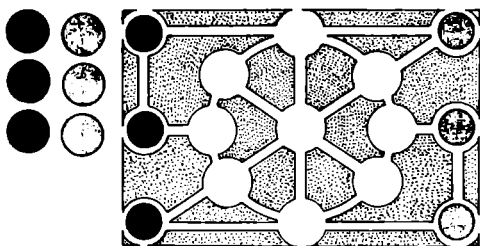


Bild 8

4

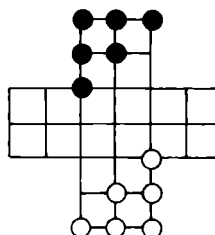
nien weiterziehen, natürlich immer nur auf freie Felder. Sieger ist, wer mit seinen Knöpfen die Grundstellung des Gegners zuerst besetzt hat.

Eins-zwei-drei

Zwei Spieler erhalten je sechs Spielsteine in einheitlicher Farbe. Diese können nach rechts, links und nur vorwärts bis zum nächsten Kreuzungspunkt geschoben werden, um die gegenüberliegende Seite zu erreichen. Ist ein Kreuzungspunkt hinter einem Spielstein frei, muß er vom Gegner übersprungen werden. Jeder Spieler versucht, soviel Steine wie möglich vom Gegner zu bekommen und die eigenen mit Geschick übers Spielfeld zu bringen.

Das Spiel ist beendet, wenn einer der Mitspieler alle seine noch vorhandenen Spielsteine ins gegenüberliegende Feld gebracht und zuerst die Dreierreihe, dann die Zweierreihe usw. aufgebaut hat. Zuletzt werden die Spielsteine ausgezählt und der Sieger wird ermittelt.

Bild 9



5

Computer – Algorithmus – Algorithmische Spiele

Teil 1

Um Aufgaben einer bestimmten Art lösen zu können, benötigt ein Computer ein Programm. Beim Aufstellen solch eines Programms ist ein erster wichtiger Schritt das Auffinden bzw. Formulieren eines entsprechenden *Algorithmus*.

Das Wort *Algorithmus* ist aus dem Namen des großen mittelalterlichen Gelehrten *Al-Hwarizmi* abgeleitet, aber die große Bedeutung dieses Begriffs wurde erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts im Zusammenhang mit der Entwicklung der Rechen-technik und der Informatik deutlich. Auch in der Mathematik spielt dieser Begriff eine wesentliche Rolle: Die mathematische Algorithmentheorie grenzt an eines der grundlegenden Gebiete der Mathematik an – an die mathematische Logik. Aber auch im alltäglichen Leben begegnet man Algorithmen, etwa unter solchen Bezeichnungen wie *Vorschrift*, *Rezept* oder *allgemeines Lösungsverfahren*.

Genauer kann man sagen:

Ein Algorithmus ist eine verständliche und exakte Vorschrift für den Ausführenden, eine endliche Folge von Tätigkeiten auszuüben, die auf das Erreichen eines festgelegten Ziels oder auf die Lösung einer gestellten Aufgabe gerichtet sind.

Der *Ausführende* des Algorithmus kann ein Mensch oder eine Maschine (Computer, Taschenrechner, Roboter) sein. Er muß fähig sein, die Vorschrift zu verstehen und die in ihr angewiesenen Tätigkeiten auszuführen.

Beispiele für Algorithmen sind nicht nur viele der geläufigen mathematischen Verfahren, wie z. B. das schriftliche Multiplizieren von (endlichen) Dezimalbrüchen oder der Euklidische Algorithmus für die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen, sondern auch Kochrezepte, Hinweise für den Durchgangsverkehr durch eine bestimmte Stadt, viele Bedienungsanleitungen, Anleitungen für die Benutzung eines öffentlichen Telefons im Selbstwählfernverkehr und auch gewisse militärische Vorschriften. Jedoch ist nicht jede Vorschrift ein Algorithmus. Oft ist eine Vorschrift zu ungenau und auch nicht verständlich genug, aus ihr geht nicht immer die konkrete Reihenfolge der Handlungen hervor. Dies trifft etwa zu auf den üblichen Befehl an einen Kundschafter:

„Handeln Sie je nach Lage der Dinge!“

Ein Algorithmus muß alle Situationen vor-

treten können, und für jede dieser Situationen anweisen, was zu tun ist.

Betrachten wir einige Beispiele von Aufgaben und Algorithmen für deren Lösung:

Bestimmung des Restes bei Division natürlicher Zahlen

Aufgabe: Gegeben sind zwei natürliche Zahlen x und y , gesucht ist der Rest bei Division von x durch y .

Erster Algorithmus:

(Ausführende: Schüler ab Klasse 3)

- Schreibe die Divisionsaufgabe $x : y$ auf!
- Dividiere schriftlich bis zur Einerstelle!
- Nimm die letzte beim schriftlichen Dividieren auftretende Differenz als Lösung der Aufgabe!

9734 : 37 = 263

74

233

222

114

111

3 Rest 3

Zweiter Algorithmus:

(Ausführende: Schüler ab Klasse 1)

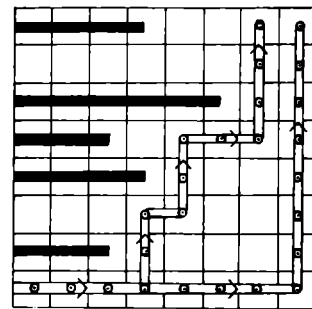
- Vergleich x und y !
- Wenn $x < y$, dann nimm x als Lösung der Aufgabe!
- Sonst subtrahiere y von x , und merke dir die Differenz!
- Wenn die Differenz kleiner als y ist, so nimm sie als Lösung!
- Sonst subtrahiere von der Differenz nochmals y , und wiederhole das solange, wie die nächstfolgende Differenz nicht kleiner als y ist!
- Nimm die letzte Differenz als Lösung!

Diskussion: Der erste Algorithmus läßt sich kürzer aufschreiben und führt schneller zum Ziel als der zweite. Er setzt jedoch voraus, daß der Ausführende das schriftliche Dividieren beherrscht, und kann deshalb von Schülern der Klassen 1 und 2 noch nicht ausgeführt werden. Aus demselben Grund ist der zweite Algorithmus als Grundlage für ein Computerprogramm geeigneter als der erste.

Der vorsichtige Roboter

Aufgabe: In der linken unteren Ecke eines Schachbrettes steht ein kleiner Roboter. Auf dem Schachbrett sind über einige Felder Gruben ausgehoben worden. Die Gru-

ben gehen vom linken Rand des Schachbretts aus und erstrecken sich zusammenhängend über höchstens 7 Felder. Der Roboter kann von einem beliebigen Feld zu jedem Nachbarfeld, auf dem sich keine Grube befindet, übergehen, d. h. nach oben, nach unten, nach rechts und nach links, aber nicht diagonal.



Wie gelangt der Roboter in die 8. Horizontale, ohne in eine Grube zu fallen?

Erster Algorithmus:

(für einen sehuntüchtigen Roboter)

- Gehe nach rechts, nach rechts, nach rechts, nach oben, nach oben, nach rechts, nach oben, nach oben, nach rechts, nach rechts, nach oben, nach oben, nach oben! Halt!

Zweiter Algorithmus:

(für einen sehuntüchtigen Roboter, der zählen kann)

- Gehe 7mal nach rechts, dann 7mal nach oben! Halt!

Dritter Algorithmus:

(für einen sehtüchtigen Roboter)

- Sieh nach oben!
- Wenn oben ein freies Feld ist, so tue einen Schritt nach oben, und führe dann wieder das erste Kommando aus!
- Sonst tue einen Schritt nach rechts, und führe dann wieder das erste Kommando aus!

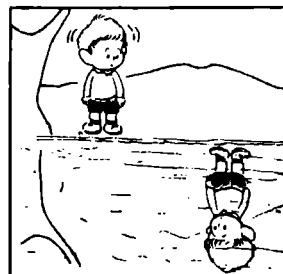
Diskussion: Der erste Algorithmus ist einfach und gibt (bezüglich der Anzahl der vom Roboter zu gehenden Schritte) eine optimale Lösung der Aufgabe, aber er ist speziell auf die gegebene Lage der Gruben auf dem Schachbrett zugeschnitten – bei einer anderen Lage der Gruben kann der Roboter in eine von ihnen hineinfallen.

Der zweite Algorithmus ist universell in dem Sinne, daß er für ein beliebiges System von Gruben (das den Bedingungen der Aufgabe entspricht) tauglich ist, aber er liefert nicht immer die Lösung mit der kleinsten Anzahl von Schritten des Roboters. Der zweite Algorithmus kann leicht umgeschrieben werden für einen Roboter, der nicht zählen kann: Man braucht nur die Anweisungen *nach rechts* und *nach oben* je siebenmal zu wiederholen.

Der dritte Algorithmus ermöglicht es, die achte Horizontale bei einem beliebigen (der Aufgabe entsprechenden) Grubensystem mit einer optimalen Schrittzahl des Roboters zu erreichen, aber nach Erreichen der 8. Horizontale geht der Roboter evtl. noch nach rechts, nämlich solange er noch nicht in der rechten oberen Ecke des Bretts angelangt ist.

Fortsetzung siehe Seite 69!

In freien Stunden · alpha-heiter



Aus: Trommel, Berlin

Mathematik-Lyrik

In Parchim Edes Schwester wohnt.
Sie liebt den kleinen Klaus.
Doch Anke Label hat ihn satt
und zog aus seinem Haus.

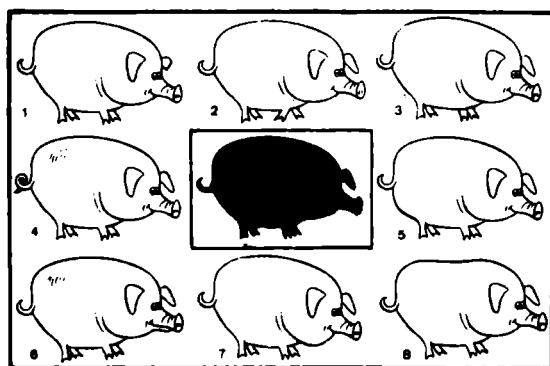
In diesem Verslein sind die Nachnamen von sechs bedeutenden Mathematikern vergangener Zeit versteckt. Wer findet diese Namen?

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik
der Karl-Marx-Universität Leipzig

Exakt beobachten!

Welches Schwein hat sich im Schattenriß verewigt?

Aus: Troll, Berlin



Grand mit Vieren

Vier Freunde treffen sich monatlich zu ihrem Skat-
abend. Ihre Spielergebnisse rechnen sie stets mit
 $\frac{1}{4}$ Pf je Punkt ab. Ein Beispiel dafür sieht so aus (re-
lative Differenz mit jedem anderen Spieler):

Jürgen	Jochen	Dieter	Helmut
+ 50	- 42	+ 110	- 14
+ 92	- 92	+ 60	- 64
- 60	- 152	+ 152	+ 28
+ 64	- 28	+ 124	- 124
+ 96 : 4	- 272 : 4	+ 336 : 4	- 160 : 4
+ 24	- 68	+ 84	- 40 (Pf)

Dieter meint: „Warum so umständlich? Bildet die
Summe aus den vier Ergebnissen und subtrahiert
jeweils ihren 4. Teil von jedem einzelnen Ergebnis!“
Also:

$$S = +50 - 42 + 110 - 14 = 104; \frac{1}{4} S = +26.$$

Und somit:

$$+ 50 - 26 = +24, -42 - 26 = -68,$$

$$+ 110 - 26 = +84, -14 - 26 = -40.$$

Zeige, daß diese Kurzrechnung immer gilt!

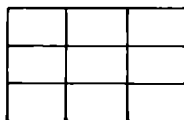
Ing. A. Körner, Leipzig

Rund um die Zahl 1986

1. Wie oft wird jede der Ziffern 1, 9, 8 und 6 ange-
schrieben, wenn man alle Zahlen von 1 bis 1986
aufschreibt?

2. Bilde die Summe aller natürlichen Zahlen von 1
bis 1986!

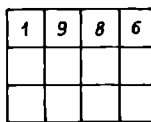
3. a) Schreibe die Zahlen 450, 529, 583, 608, 662,
716, 741, 795 und 874 so in ein Dreierquadrat, daß
ein magisches Quadrat entsteht! (Die waagerechten,
senkrechten und diagonalen Dreiergruppen ergeben
stets die gleiche Summe.)



b) Bilde aus den Zahlen 1, 9, 8 und 6 ein lateini-
sches Quadrat! (Schreibe in die freien Kästchen
eines Viererquadrates die Zahlen 1, 9, 8 und 6 so,
daß in keiner Zeile, in keiner Spalte und in keiner
Diagonale zwei gleiche Zahlen stehen!)

Suche alle Möglichkeiten!

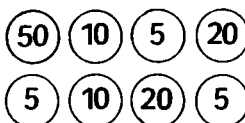
Schuldirektor H. Förg, Schwaz (Österreich)



Münzen vertauschen

Lege die Münzen durch zweimaliges Vertauschen
so, daß in der oberen Reihe 0,55 Mark zusammen-
kommen und in der unteren 0,70 Mark! Bei einem
Vertauschen darfst du zwei Münzen auswechseln,
die gemeinsam Nachbarn in waagerechter oder
senkrechter Richtung sind.

Aus: ND



Tiddlyball

Tiddlyball ist ein Spiel für drei Spieler. In jeder Runde erhält der Gewinner a Punkte, der Zweite b Punkte und der Verlierer c Punkte, wobei $a > b > c$ positive ganze Zahlen sind.

Ein Spiel besteht aus mehreren Runden.

Xavier, Yvonne und Zachary spielen Tiddlyball und der Endstand lautet: Xavier 20 Punkte, Yvonne 10 Punkte, Zachary 9 Punkte.

Yvonne gewann die zweite Runde.

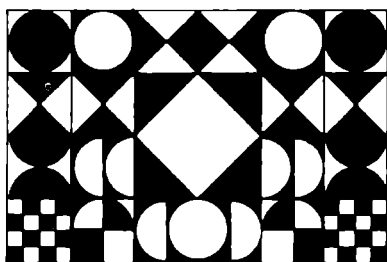
Wer gewann die erste Runde und, wieviel Punkte erhielt Zachary in der letzten Runde?

Aus: *Parabola*, math. Schülerzeitschrift der Universität von New South Wales

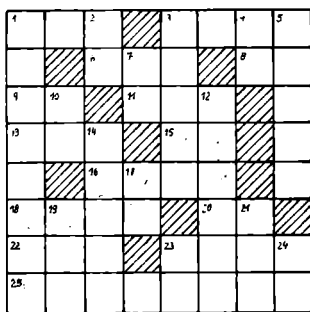
Schwarz oder Weiß?

Du sollst entscheiden, welche der beiden Farben – Schwarz oder Weiß – innerhalb des Rechtecks die größere Fläche einnimmt. Aber bitte, rate nicht nur, sondern begründe (sich selbst gegenüber) deine Antwort!

Aus einer Knobelseite des ND, Berlin



Kreuzzahlrätsel



Dr. L. Flade

Waagrecht:

Löse im Kopf!

1. 11^2
3. $4^2 \cdot 10^2 + 9^2$
6. 14^2
8. $9^3 : 9$
9. $3(\sqrt{64} + \sqrt{16})$
11. $30^2 + 3^4$
13. $19^2 + 40$
15. $\sqrt{121}$
16. $967 \cdot 3$
18. $80^2 + 6^2$
20. $\sqrt{361}$
22. $25^2 + 13^2$
23. $30^2 + 43 \cdot 4$
25. $8765 \cdot 10^4 + 4321$

Senkrecht:

Löse mit Taschenrechner!

1. $[(128\,624 + 99\,999) \cdot 3 + 2] \cdot 18$
2. $\sqrt{14\,641}$
3. $10 \cdot \sqrt{2\,825\,761}$
4. $2200 : 5^2$
5. $1\,099\,989 : 99$
7. $\frac{40\,986}{23 \cdot 18}$
10. $\sqrt{3721} - 1$
12. $3 + 10^2 \cdot \sqrt{1\,234\,321}$
14. $234\,574 : (399 : 21)$
17. $27^2 - 211 \cdot 3$
19. $110\,334 : 222$
21. $9^2 \cdot 12$
23. $\sqrt{38\,416}$
24. $1785 : (5 \cdot 17)$

Kryptarithmetik

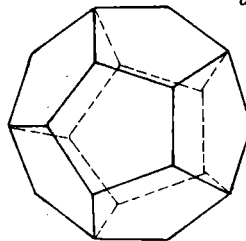
$$\begin{array}{r} \text{A B C D E} \\ + \text{B C D E} \\ + \text{C D E} \\ + \text{D E} \\ + \text{E} \\ \hline \text{A A A A A} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{D V Ě} \\ \text{D V Ě} \\ \text{D V Ě} \\ \text{Č T Y Ř I} \\ \hline \text{D E S E T} \end{array}$$

Aus der math. Schülerzeitschrift *Rozhledy*, Prag

Ein merkwürdiger Dodekaeder

Was kann nicht stimmen an dieser Darstellung eines Dodekaeders (des von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzten regulären Polyeders)?

Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald



Ein fast unverlierbares Spiel

Wer zuerst 100 sagt, ist Sieger! Zwei Spielpartner A und B sagen abwechselnd eine Zahl von 1 bis 10 und addieren sie zur vorher vom anderen Spielpartner genannten Zahl. Beispiel: A beginnt mit 6; B: $6 + 8 = 14$; A: $14 + 1 = 15$; B: $15 + 10 = 25$ usw. Wer zuerst 100 sagt, ist Sieger.

Die Lösungsstrategie ist folgende: Um mit Sicherheit mit der nächsten Zahl auf 100 zu kommen, muß man auf 89 kommen, denn welche Zahl der andere Spielpartner auch sagt, man gelangt immer auf 100, denn die Summe der beiden gesagten Zahlen ist immer 11. Um aber mit Sicherheit an 89 zu kommen, muß man vorher auf 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 kommen. Die erste wichtige Zahl, auf die man kommen muß, ist also die 12.

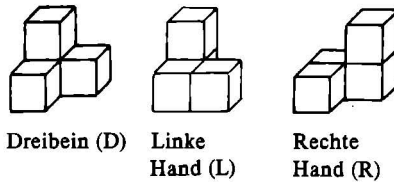
Beginnt man das Spiel selbst, so erreicht man das immer, wenn man mit 1 beginnt, im nächsten Schritt. Der „Gegner“ gewinnt also das Spiel nur in dem einen Fall (vorausgesetzt, beide Partner kennen den Lösungsalgorithmus), wenn er mit 1 beginnt. Deshalb nennen wir ein solches Spiel ein *fast unverlierbares Spiel*.

Dr. P. Knabe, TU Dresden



Aus: NBI, El Solami, Berlin

Der Herzberger Quader



Die Bausteine sind in schräger Parallelprojektion mit $\alpha = 45^\circ$ und $q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dargestellt. Auf kleinkariertem Papier können sie schon von Schülern der Klasse 4 nachgezeichnet werden. Es ist wichtig zu erkennen, daß die Bausteine *Linke Hand* und *Rechte Hand* nicht durch Schiebung oder Drehung ineinander überführt werden können. Die beiden Bausteine sind aber symmetrisch zueinander.

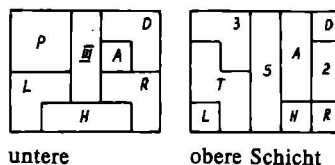
Wir setzen aus den Bausteinen Quader zusammen

Aus diesen 11 Bausteinen, einem Zwilling, zwei Drillingen und acht Vierlingen, zu deren Zusammenbau man insgesamt 40 Würfel benötigt, wollen wir nun einen (5, 4, 2)-Quader zusammensetzen. (5, 4, 2)-Quader bedeutet, der Quader ist 5 Würfel lang, 4 Würfel breit und 2 Würfel hoch, so daß für seine Zusammensetzung 40 Würfel ($5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$) gebraucht werden (vgl. Bild 5).

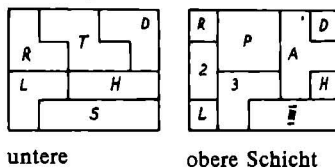
Im Bild 4 werden zwei solcher Zusammensetzungen angegeben. Dazu zeichnet man die beiden Schichten des Quaders und kennzeichnet die Bausteine mit den Abkürzungen ihrer Namen. Solche Darstellungen, die eine Zusammensetzung eindeutig festlegen, wollen wir eine „Lösung“ nennen. Setze den Quader mit Hilfe des Bildes 4 zusammen!

Bild 4

1. Lösung



2. Lösung



In dieser Form können die 11 Spielsteine (alle Würfel-Zwillinge, -Drillinge und -Vierlinge) am einfachsten in einem Pappkarton verpackt werden. In Zukunft wollen wir den (5, 4, 2)-Quader **HERZBERGER QUADER** nennen.

Aufgaben

▲ 1 ▲ Ermittle drei weitere Lösungen für den *Herzberger Quader*, die von den angegebenen verschieden sind! Lösungen heißen verschieden, wenn die

Körper nicht durch Schiebung, Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgehen können.

In den folgenden Aufgaben wollen wir den *Herzberger Quader* aus Teilquadern zusammensetzen. Dabei sollen stets die verschiedenen 11 Bausteine verwendet werden.

▲ 2 ▲ Setze den *Herzberger Quader* aus zwei (5, 2)-Quadern zusammen, so wie es die Bilder 5a, b, c zeigen!

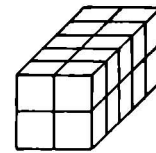


Bild 5a
(5, 2, 2)-Quader

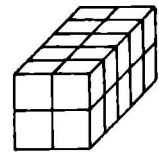
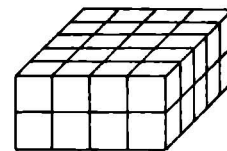


Bild 5b
(5, 2, 2)-Quader

Bild 5a + 5b = 5c



Herzberger Quader

Im Bild 6a und 6b werden zwei Lösungen dafür angegeben.

Setze die Teilquader zusammen und schiebe sie zum *Herzberger Quader* zusammen!

Bild 6a: 1. Lösung

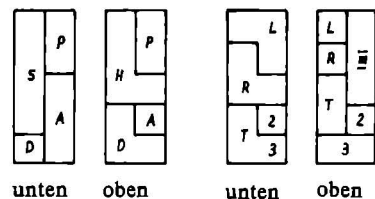
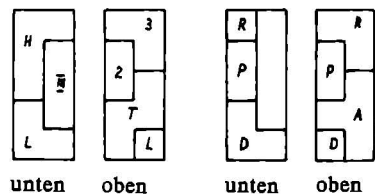


Bild 6b: 2. Lösung

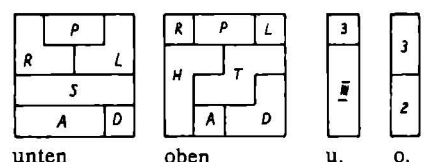


▲ 3 ▲ Setze den *Herzberger Quader* aus (1) einem (4, 4, 2)- und einem (4, 1, 2)-Quader (2) einem (4, 2, 2)- und zwei (3, 2, 2)-Quadern zusammen!

In den Bildern 7, 8 und 9 werden je eine Lösung angegeben.

Bild 7:

Eine Lösung für die Zusammensetzung des *Herzberger Quaders* aus einem (4, 4, 2)- und einem (4, 1, 2)-Quader



Wir setzen Würfelgruppen zusammen

Aus gleich großen handelsüblichen Würfeln aus Holz oder Plaste sollen Spielsteine so zusammengesetzt werden, daß die Flächen aller Würfel zueinander parallel oder senkrecht sind und aneinanderstoßende Würfel eine gemeinsame Fläche haben. Um alle Möglichkeiten zu erhalten, gehen wir systematisch vor.

Mit zwei Würfeln gibt es genau eine Möglichkeit (Bild 1).

Diesen Spielstein wollen wir Würfel-Zwilling nennen und für ihn die Abkürzung (2) einführen.



Bild 1
Würfelzwilling (2)

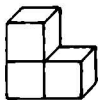


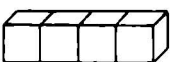
Bild 2a
Verzweigter Würfel-Drilling (3)



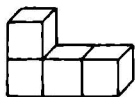
Bild 2b
Unverzweigter Würfel-Drilling (3)

Bei drei Würfeln hat man für eine Zusammensetzung unter den gegebenen Bedingungen genau zwei Möglichkeiten, die die Bilder 2a und 2b zeigen. Wir geben den Spielsteinen wieder Namen und führen auch Abkürzungen ein. Setzen wir nun Spielsteine aus vier Würfeln zusammen. Unser systematisches Vorgehen drückt sich darin aus, daß wir an die beiden Spielsteine aus drei Würfeln einen vierten ansetzen. Die Ergebnisse müssen auf „Übereinstimmung“ (Kongruenz) geprüft werden. Es ergeben sich weitere acht verschiedene Spielsteine, die das Bild 3 zeigt. Wir geben ihnen wieder Namen, die an der Anschauung orientiert sind und führen weitere Abkürzungen ein.

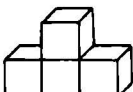
Bild 3



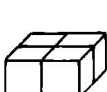
Stange (S)



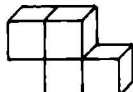
Haken (H)



Auto (A)



Platte (P)



Treppe (T)

Bild 8:
Grundriß des Herzberger Quaders,
zusammengesetzt aus einem (4,2,2)- und
zwei (3,2,2)-Quadern

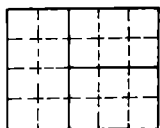
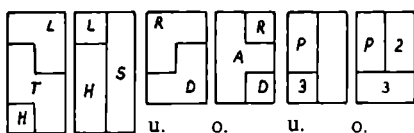


Bild 9:
Lösung für eine Zusammensetzung des
Herzberger Quaders aus einem (4,2,2)-
und zwei (2,2,2)-Quadern



unten oben

▲ 4 ▲ Versuche andere Lösungen zu finden!

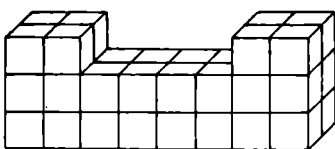
▲ 5 ▲ Ermittle weitere Möglichkeiten, den Herzberger Quader aus Teilquadern zusammenzusetzen!

▲ 6 ▲ Setze aus diesen Teilquadern Körper zusammen, und versuche diese auch „im Verbund“ zusammenzusetzen!

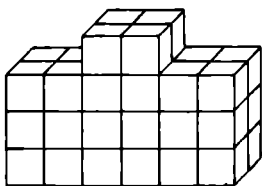
Aus den Teilquadern (4,2,2) und (3,2,2) können auch andere Körper zusammengesetzt werden.

Das Bild 10 zeigt einige Bauwerke.

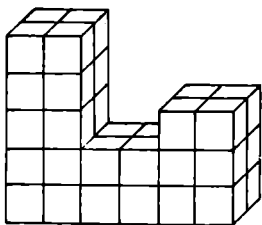
Bild 10:
Körper, zusammengesetzt aus einem
(4,2,2)- und zwei (3,2,2)-Quadern



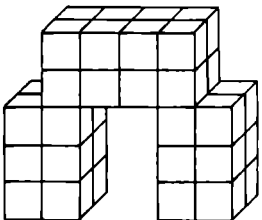
Bauwerk 1



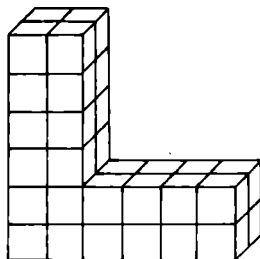
Bauwerk 2



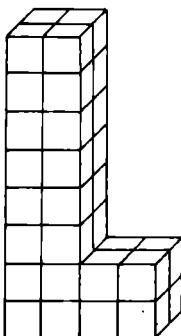
Bauwerk 3



Bauwerk 4

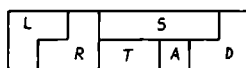


Bauwerk 5

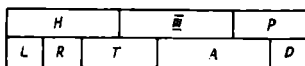


Bauwerk 6

Im Bild 11 ist eine Lösung für das Bauwerk 1 des Bildes 10 „im Verbund“ dargestellt.



untere Schicht



mittlere Schicht



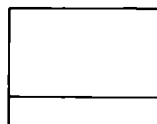
obere Schicht

Lösung zur Aufgabe ▲ 5 ▲

Es gibt noch weitere sechs Möglichkeiten, den Herzberger Quader aus Teilquadern zusammenzusetzen.



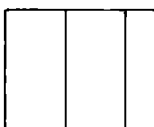
4. Fall



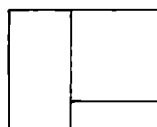
5. Fall

4. Fall: Zusammensetzung aus einem (4,3,2)- und einem (4,2,2)-Quader

5. Fall: Zusammensetzung aus einem (5,3,2)- und einem (5,1,2)-Quader



6. Fall

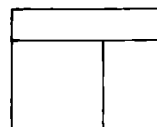


7. Fall

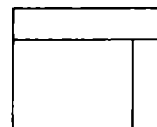
6. Fall: Zusammensetzung aus zwei (4,2,2)- und einem (4,1,2)-Quader

7. Fall: Zusammensetzung aus je einem (4,2,2)-, (3,3,2)- und (3,1,2)-Quader

7. Fall: Zusammensetzung aus je einem (4,2,2)-, (3,3,2)- und (3,1,2)-Quader



8. Fall



9. Fall

8. Fall: Zusammensetzung aus je einem (5,1,2)-, (3,3,2)- und (3,2,2)-Quader

9. Fall: Zusammensetzung aus je einem (5,1,2)-, (4,3,2)- und (3,1,2)-Quader

G. Schulze

Zahlen, Zahlen

Prüfe mit dem SR 1!

Weil der Schulrechner einfach zu bedienen ist und schnell rechnet, kann man ihn manchmal benutzen, um in der Presse oder in Büchern angegebene Zahlenwerte und die Ergebnisse von damit durchgeführten Berechnungen zu überprüfen. Druckfehler schleichen sich nämlich gelegentlich ein und ein Autor ist vor Rechenfehlern nicht gänzlich gefeit. Das kann (zum Glück selten) auch in der *alpha* passieren. Im Heft 1, 1986, S. 11 habt ihr erfahren, daß Bambus bis zu 40 cm pro Tag wachsen kann. Die Wachstumsgeschwindigkeit von Pilzen ist mit $2 \cdot 10^{-7}$ m/s angegeben, die von Bambus mit $4,5 \cdot 10^{-8}$ m/s. Berechnet, wievielfach Pilze schneller wachsen als Bambus!

Ihr kommt auf den Faktor 4,4 (gerundet), folglich müßten diese Pilze ungefähr 1,78 m je Tag wachsen. Bevor ihr euch aufmacht, diese Wunderpilze zu sammeln, laßt uns die Zahlenwerte mit dem Schulrechner überprüfen!

Wenn Bambus wirklich in 1 s um $4,5 \cdot 10^{-8}$ m wächst, so wird es an einem Tag (gleichmäßiges Wachstum wird hier angenommen) um $l = 4,5 \cdot 36 \cdot 24 \cdot 10^{-6}$ m größer. Aufmerksamkeit ist bei der Eingabe des letzten Faktors in den SR 1 geboten!

Ihr erhaltet als Ergebnis $l \approx 3,9$ mm. Setzen wir aber voraus, daß Bambus 40 cm pro Tag wächst, so ist die Wachstumsgeschwindigkeit

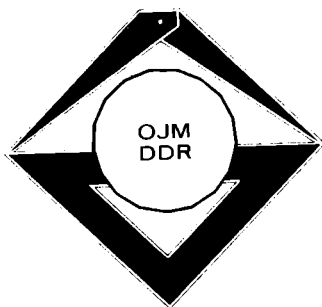
$$v = \frac{0,4}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ m/s.}$$

Welche Annahme richtig ist, kann die Mathematik nicht entscheiden! Herr Dr. Witt von der Sektion Biologie der Universität Greifswald hat mehrere Jahre in der SR Vietnam wissenschaftlich gearbeitet. Er versicherte uns, daß Bambus unter günstigen Bedingungen in der Tat 40 cm am Tag wachsen kann. Daher ist die Wachstumsgeschwindigkeit auf $4,6 \cdot 10^{-6}$ m/s zu korrigieren!

W. Schmidt

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der Kreisolympiade, Teil 1



Olympiadeklasse 5

250521 a) In einem (4×4) -Feldbrett sind insgesamt

$$16 + 9 + 4 + 1 = 30$$

Quadrate enthalten.

b) In einem (5×5) -Feldbrett sind insgesamt

$$25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$$

Quadrate enthalten.

c) In einem (8×8) -Feldbrett sind insgesamt

$$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$$

Quadrate enthalten.

250522 Als ersten begrüßt Franz freundlich denjenigen Kollegen, der als erster nach 8.00 Uhr in Knobelhausen abgefahren ist; als letzten denjenigen, der als letzter vor 12.00 Uhr in Knobelhausen abfährt. Also begrüßt er alle diejenigen Kollegen, die zu einer der folgenden Zeiten in Knobelhausen abfahren:

8.10, 8.25, 8.40, 8.55,
9.10, 9.25, 9.40, 9.55,
10.10, 10.25, 10.40, 10.55,
11.10, 11.25, 11.40, 11.55 Uhr.

Das sind insgesamt 16 Kollegen.

250523 a) Die folgenden Verteilungen erfüllen die Bedingungen (1) und (2):

030 121 212 303
3 3 2 2 1 1 0 0
030 121 212 303

b) Für jede Verteilung der geforderten Art gilt: Wenn auf einer Ecke genau x Damesteine liegen, dann nach (1) auf jeder Ecke. Wenn ferner auf einer Seite außer den $2 \cdot x$ Damesteinen, die auf beiden Endpunkten liegen, noch genau y Damesteine vorhanden sind, dann gilt das nach (2) auf jeder Seite mit derselben Anzahl y . Daher sind insgesamt $4 \cdot x + 4 \cdot y$ Damesteine verteilt, also ist

$$\begin{aligned} 4 \cdot x + 4 \cdot y &= 12, \\ 4 \cdot (x + y) &= 12, \\ x + y &= 3. \end{aligned}$$

Dies kann aber mit den Anzahlen x und y nur durch

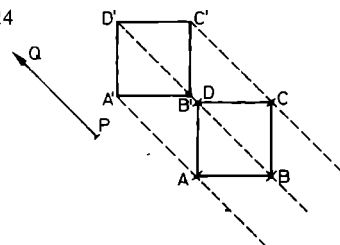
$$0 + 3 = 3, 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3$$

$$\text{oder } 3 + 0 = 3$$

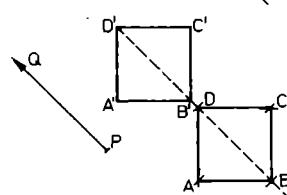
erfüllt werden. Daher kann es nur die vier in a) genannten Verteilungen geben.

250524

a)



b)



Olympiadeklasse 6

250621

3	•	•	•
2	•	•	•
1	•	•	•
a	b	c	

3	•	•	•
2	•	•	•
1	•	•	•
a	b	c	

3	•	•	•
2	•	•	•
1	•	•	•
a	b	c	

250622 I. Wenn vier Zahlen die geforderten Eigenschaften haben und dabei e das in (2) genannte Ergebnis ist, so ist

$$\begin{aligned} e - 4 &\text{ die erste Zahl,} \\ e - 3 &\text{ die zweite Zahl,} \\ e + 2 &\text{ die dritte Zahl,} \\ e + 1 &\text{ die vierte Zahl.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nach (1) gilt daher} \\ e - 4 + e - 3 + e + 2 + e + 1 &= 60, \\ 4e - 4 &= 60, \\ 4e &= 64, \\ e &= 16; \end{aligned}$$

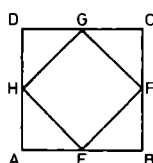
also lauten die vier gesuchten Zahlen: 12, 13, 18, 17.

II. Für die Zahlen gilt

$$\begin{aligned} 12 + 13 + 18 + 17 &= 60, \\ \text{also ist (1) erfüllt, und es gilt} \\ 12 + 4 &= 16, 13 + 3 = 16, 18 - 2 = 16, \\ 17 - 1 &= 16, \text{ also ist (2) erfüllt.} \end{aligned}$$

250623

a)



b) Die Strecken EG und FH zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenkelig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.

Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken, ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$. Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt 196 cm^2 . Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt 98 cm^2 .

250624 a) Die in den folgenden Tabellen genannten Verteilungen erfüllen alle gestellten Bedingungen; denn bei diesen Verteilungen bekommt jedes der drei Kinder genau 7 Flaschen und, soviel Limonade, wie in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Außerdem ist ersichtlich, daß jeweils 7 volle, 7 halbvoll und 7 leere Flaschen verteilt werden und daß für die Anzahlen der an Anke, Bernd und Claudia verteilten vollen Flaschen $3 \geq 3 \geq 1$ bzw. $3 \geq 2 \geq 2$ gilt.

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	2	3	2
C	2	3	2

b) Für jede Verteilung, die die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt: Da 21 Flaschen und der Inhalt von $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ Flaschen Limonade zu verteilen sind, bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von $\frac{7}{2}$

$= 3\frac{1}{2}$ Flaschen Limonade. Daher folgt weiter: Anke könnte höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müßte als Anke.

Also muß Anke genau 3 volle Flaschen erhalten. Als einzige Möglichkeiten, die restlichen 4 vollen Flaschen so zu verteilen, daß von ihnen Anke nicht weniger als Bernd und Bernd nicht weniger als Claudia bekommt, ergeben sich die Verteilungen gemäß $4 = 3 + 1$ und $4 = 2 + 2$ (Spalte „voll“ der obigen Tabellen).

Aus den Anzahlen der vollen und halbvollen Flaschen, die jedes Kind erhält, ergibt sich schließlich eindeutig, wieviel leere Flaschen es bekommen muß, um insgesamt 7 Flaschen zu erhalten (Spalte „leer“).

Damit ist gezeigt, daß nur die beiden in a) angegebenen Verteilungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Olympiadeklasse 7

250721 Wäre Kerstins erste und zweite Aussage falsch und die dritte wahr, dann hätten Birgit und Cornelia eine 2, was der Voraussetzung widerspricht, daß die drei Schülerinnen unterschiedliche Noten haben. Wäre Kerstins erste und dritte Aussage falsch und die zweite wahr, dann hätte Annett eine 1, Birgit und Cornelia keine 2, was der Voraussetzung widerspricht, daß die Note 2 erteilt wurde.

Damit bleibt nur noch die Möglichkeit: Kerstins zweite und dritte Aussagen sind falsch, und die erste Aussage ist wahr. Das führt auf die Notenverteilung: Birgit 2, Annett (daher keine 2 und auch) keine 1, also Annett 3; und folglich Cornelia 1. Damit sind die Noten eindeutig ermittelt.

250722 Für den ersten Quader gilt:

Seine längere Grundkante beträgt $a_1 = 12$ cm, seine kürzere Grundkante $b_1 = 6$ cm. Sein Volumen ist $V_1 = 216$ cm³; wegen $216 : (12 \cdot 6) = 3$ beträgt seine Höhe daher $h_1 = 3$ cm.

Für den zweiten Quader gilt:

Seine längere Grundkante beträgt $a_2 = 14$ cm, seine kürzere Grundkante $b_2 = 5$ cm und seine Höhe $h_2 = h_1 = 3$ cm. Der Oberflächeninhalt des ersten Quaders beträgt somit

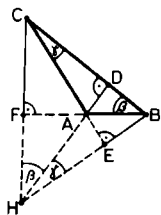
$$A_1 = 2(12 \cdot 6 \text{ cm}^2 + 12 \cdot 3 \text{ cm}^2 + 3 \cdot 6 \text{ cm}^2) = 252 \text{ cm}^2.$$

Der Oberflächeninhalt des zweiten Quaders beträgt

$$A_2 = 2(14 \cdot 5 \text{ cm}^2 + 14 \cdot 3 \text{ cm}^2 + 5 \cdot 3 \text{ cm}^2) = 254 \text{ cm}^2.$$

Die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader beträgt somit 2 cm².

250723 Es seien D , E bzw. F die Fußpunkte der zu A , B bzw. C gehörenden Höhen, ferner sei $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Da das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig ist, also bei B und C spitze Innenwinkel hat, liegt D auf der Seite BC , während E , F und H außerhalb des Dreiecks liegen (siehe Bild).



Hiernach gilt $\angle DCH = \angle FCB$. Ferner ist, da D und F Höhenfußpunkte sind, $\angle CDH = \angle CFB = 90^\circ$. Folglich stimmen die Dreiecke CDH und CFB in zwei Innenwinkeln überein; nach dem Innenwinkelsatz gilt daher auch $\angle DHC = \angle FBC$. Wegen der Lage von F ist hierbei $\angle FBC = \angle ABC = \beta$; damit ist

$$\angle DHC = \beta \quad (1)$$

bewiesen.

Entsprechend beweist man durch Betrachtung der Dreiecke BDH und BEC

$$\angle DHB = \gamma. \quad (2)$$

Schließlich gilt wegen der Lage von D zwischen B und C die Gleichung

$$\angle BHC = \angle DHB + \angle DHC$$

und somit nach (1) und (2)

$$\angle BHC = \beta + \gamma, \text{ w. z. b. w.}$$

250724 a) Aus den Ziffern 2, 7, 9 lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

$$279, 297, 729, 792, 927, 972.$$

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt 3996. Wegen $3996 = 36 \cdot 111$ ist diese Summe durch 111 teilbar.

b) Es seien a , b , c drei paarweise verschiedene Ziffern, unter denen sich nicht die Ziffer 0 befindet. Dann lassen sich genau die folgenden sechs dreistelligen Zahlen bilden, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten:

$$100a + 10b + c, 100a + 10c + b, 100b + 10a + c, 100b + 10c + a, 100c + 10a + b, 100c + 10b + a.$$

Die Summe dieser sechs Zahlen beträgt $222a + 222b + 222c$. (1)

Wegen $222 = 2 \cdot 111$ ist jede der drei Zahlen $222a$, $222b$, $222c$ durch 111 teilbar, mithin auch ihre in (1) genannte Summe, w. z. b. w. Fortsetzung erfolgt in Heft 4/86.

Fortsetzung von Seite 63.

Wir bemerken noch folgendes: Im dritten Algorithmus setzen wir voraus, daß bei Unmöglichkeit der Ausführung einer Anweisung (im vorliegenden Fall der Anweisung *Schritt nach rechts vom Feld h8 aus*) der Roboter die Arbeit einstellt. Wenn dies nicht zutrifft, läuft sich der Roboter tot. Er tritt auf dem Feld h8 hin und her und versucht erfolglos, das erste, zweite und dritte Kommando auszuführen, dann wieder das erste, zweite

Aufgaben

▲ 1 ▲ Beschreibt einen Algorithmus für das Kürzen von Brüchen $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$)!

▲ 2 ▲ Beschreibt einen Algorithmus für die Division und einen Algorithmus für die Addition zweier gebrochener Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$)! Ergebnis soll ein nicht kürzbarer Bruch sein!

▲ 3 ▲ Auf einem Schachbrett sind auf irgendwelchen Feldern Gruben gegraben, die nicht überschritten werden können. Beschreibt einen Algorithmus für den Marsch eines Roboters von der ersten Horizontalen zur letzten

a) unter der Voraussetzung, daß ein Weg existiert,

b) im allgemeinen Fall, wobei *Marsch unmöglich* ausgegeben wird, falls die Aufgabe keine Lösung hat!

▲ 4 ▲ Unser Roboter hat das Bergsteigen gelernt. Auf dem Schachbrett sind auf jeder der ersten sieben Horizontalen bis zu 7 Felder schraffiert, die zusammenhängend vom rechten Rand ausgehen. Sie bilden zusammen einen Berg.

Wie erklimmt der bergsteigende Roboter den vorliegenden Berg?

A. P. Jerschow, aus Quant 9, Moskau

Lösungen



Lösungen zu: Sprachecke

▲ 1 ▲ Die Zahl 16 ist die kleinste ganze Zahl größer als 1, die gleichzeitig eine Quadratzahl und eine 4. Potenz von zwei verschiedenen ganzen Zahlen ist: $16 = 4^2$ und $16 = 2^4$.

Kannst du die zwei kleinsten positiven ganzen Zahlen ermitteln, die gleichzeitig das Quadrat und die dritte Potenz von zwei verschiedenen ganzen Zahlen sind?

Überlege genau! Man kann eine einfache Regel finden, die zur richtigen Lösung führt.

Lösung: Um eine Quadratzahl und eine dritte Potenz zu sein, muß jede Zahl eine 6. Potenz sein. Eine Zahl ist $2^6 = 64 = 8^2 = 4^3$, und die andere Zahl ist $3^6 = 729 = 27^2 = 9^3$.

▲ 2 ▲ In einer Bibliothek sind drei Bände einer Enzyklopädie der Reihe nach aufgestellt.

Jeder Band hat eine Stärke von 8,6 cm, und zwar 8 cm für die Innenseiten und zweimal 3 mm für die beiden Einbände.

Ein schrecklicher kleiner Bücherwurm frißt einen Tunnel von der ersten Seite des ersten Bandes bis zur letzten Seite des dritten Bandes.

Wie lang ist dieser Tunnel?

Lösung: Die erste Seite des ersten Bandes ist laut Zeichnung ganz rechts und die letzte Seite des dritten Bandes links. Demzufolge ist der Tunnel $3 \text{ mm} + 8,6 \text{ cm} + 3 \text{ mm} = 9,2 \text{ cm}$ lang.

▲ 3 ▲ Man kann einen Würfel mit der Kantenlänge 1 cm nicht mit einem zusammenhängenden Streifen Papier von $1 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ bekleben, ohne Schnitte anzubringen.

Kann man aber den Würfel mit einem Papierstreifen von $1 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ doppelt bekleben?

Lösung: Bild 1a zeigt einen Streifen von $1 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$. Faltet man diesen Streifen längs der gestrichelten Linien, so erhält man einen doppelten zickzackförmigen Streifen, wie er im Bild 1b dargestellt ist.

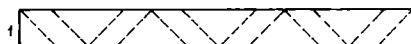


Bild 1a

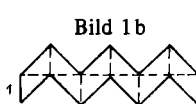
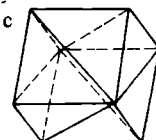


Bild 1b

Bild 1c



Mit diesem Streifen kann der Würfel wie in Bild 1c beklebt werden.

▲ 4 ▲ Drei Schulfreunde kauften 14 Piroggen, wobei Kolja halb so viele wie Witja und Shenja mehr als Kolja, aber weniger als Witja kaufte.

Wie viele Piroggen kaufte jeder?

Lösung: Kolja: 3; Witja: 6; Shenja: 5

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Mathematik-Lyrik

In der Reihenfolge des Textes waren versteckt: Archimedes (von Syrakus, etwa 287 bis 212 v.u.Z.), Lie (Sophus, 1842 bis 1899), Klein (Felix, 1849 bis 1925), Hankel (Hermann, 1839 bis 1873), Abel (Niels Henrik, 1802 bis 1829) und Gauss (Carl Friedrich, 1777 bis 1855).

Exakt beobachten!

Bild 3 ist identisch.

Grand mit Vieren

Sind a, b, c, d die 4 Ergebnisse der Spieler A, B, C, D, so ergibt sich z. B. für

$$A (a - b) + (a - c) + (a - d)$$

$$= 3a - b - c - d.$$

$$\text{Oder } 4a - a - b - c - d = 4a - S,$$

$$\text{mit } S = a + b + c + d.$$

$$A: (4a - S) : 4 = a - \frac{S}{4}.$$

Rund um die Zahl 1986

1.	1	9	8	6
als E	199	198	198	199
als Z	200	190	197	200
als H	200	187	200	200
als T	987	0	0	0

zus. 1586 575 595 599

$$2. 1 + 2 + \dots + 1985 + 1986 +$$

$$1986 + 1985 + \dots + 2 + 1$$

$$1987 + 1987 + \dots + 1987 + 1987$$

(1986 Summanden)

$$1987 \cdot 1986 : 2 = 1973091$$

3.

a) 583 874 529 b) 1986 od. 1986

608 662 716 8619 6891

795 450 741 6891 9168

9168 8619

Münzen vertauschen

Nach dem 1. Tausch:

oben - 50 10 20 20;

unten - 5 10 5 5.

Nach dem 2. Tausch:

oben - 5 10 20 20;

unten - 50 10 5 5.

Tiddy ball

1. Durch systematisches Probieren findet man $a = 8, b = 4$ und $c = 1$. Xavier gewann die erste Runde und Zachary erhielt in der letzten Runde 4 Punkte.

2. Vollständige Lösung mit ausführlichen Begründungen:

Im Spiel wurden insgesamt $20 + 10 + 9 = 39$ Punkte vergeben, davon $a + b + c$ in jeder Runde. Also ist $a + b + c = 13$, und es wurden 3 Runden gespielt. ($a + b + c = 3$ und 13 Runden verstößt gegen $a > b > c$.)

Aus $a + b + c = 13$ und $a > b > c$ ergeben sich genau folgende Möglichkeiten:

a	10	9	8	8	7	7	6	6
b	2	3	4	3	5	4	5	4
c	1	1	1	2	1	2	2	3

Xavier hat im günstigsten Falle zweimal gewonnen und ist einmal Zweiter geworden, also ist $20 \leq 2a + b < 3a$ und damit $a > 6$. Yvonne hat in der zweiten Runde a Punkte erhalten und hat in den beiden anderen Runden mindestens 2 Punkte erhalten, also ist $a + 2 \leq 10$ und damit $a \leq 8$.

Ist $a = 7$, so hat Yvonne in zwei Runden zusammen drei Punkte erhalten, also gilt $b = 2$ und $c = 1$. Dies ist aber nicht möglich, da $a + b + c$ nur 10 ergibt.

Ist $a = 8$, so hat Yvonne in zwei Runden zusammen zwei Punkte erhalten, also gilt $c = 1$ und es folgt $b = 4$.

Damit gewann Xavier die erste Runde, und Zachary erhielt in der letzten Runde 4 Punkte.

Schwarz oder Weiß?

In elf Rechtecken nehmen Schwarz und Weiß die gleiche Fläche ein. Nur im mittleren der unteren drei Rechtecke wird die Frage entschieden. Es besteht aus zwei Quadraten mit weißer Kreisfläche.

Im Quadrat ist die weiße Kreisfläche größer als die schwarze Restfläche. Also ist insgesamt die weiße Fläche größer.

Kreuzzahlrätsel

1	2	1		1	6	8	1
2		1	9	6		8	1
3	6		9	8	1		1
4	0	1		1	1		1
5		2	9	0	1		1
6	4	3	6		1	9	
7	9	4		1	0	7	2
8	7	6	5	4	3	2	1

Kryptarithmetik

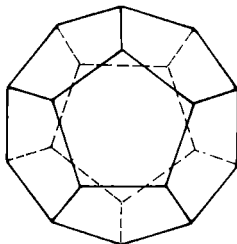
$$52487 + 2487 + 487 + 87 + 7 = 55555$$

$$365 + 365 + 365 + 29714 = 30809$$

(zwei + zwei + zwei + vier = zehn)

Ein merkwürdiger Dodekaeder

Es ist unmöglich, daß zwei verschiedene Fünfecke mehr als eine Kante gemeinsam haben. So könnte er aussehen:



Lösungen zu: Ein rundes Dutzend

Berechnungen mit dem SR 1 auf drei gültige Ziffern ($r = 1$)

$$\blacktriangle 1 \blacktriangle \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{(\sqrt{2}r)^2}{2} = \frac{r^2}{2}(\pi - 2)$$

$$\approx 0,571 \quad 18,2\%$$

$$\blacktriangle 2 \blacktriangle \frac{1}{2}\pi r^2 \approx 1,57 \quad 50\%$$

$$\blacktriangle 3 \blacktriangle \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}(\sqrt{3} + \pi)$$

$$\approx 1,22 \quad 38,8\%$$

$$\blacktriangle 4 \blacktriangle 2\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}r^2 \approx 1,57 \quad 50\%$$

$$\blacktriangle 5 \blacktriangle \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)r^2$$

$$\approx 0,285 \quad 9,08\%$$

$$\blacktriangle 6 \blacktriangle r^2 - \frac{\pi}{3}r^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$

$$= \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2 \approx 1,23 \quad 39,1\%$$

$$\blacktriangle 7 \blacktriangle \frac{1}{2}\pi(\sqrt{3}r)^2 - 3\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}r)^2$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)r^2 \approx 0,815 \quad 26,0\%$$

$$\blacktriangle 8 \blacktriangle \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}r)^2 - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(3\sqrt{3} - \pi)r^2 \approx 0,514 \quad 16,3\%$$

$$\blacktriangle 9 \blacktriangle \pi\left(\frac{r}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{\sqrt{3}r}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{4}r^2 \approx 0,785$$

$$25\%$$

$$\blacktriangle 10 \blacktriangle 6 \cdot \pi\left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\pi r^2 \approx 2,09$$

$$66\frac{2}{3}\%$$

$$\blacktriangle 11 \blacktriangle \frac{2}{3}(\sqrt{3}r)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6}\pi(\sqrt{3}r)^2$$

$$- (\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{8}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2 \approx 1,53 \quad 48,7\%$$

$$\blacktriangle 12 \blacktriangle \frac{1}{6}\pi r^2 + \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2 \approx 1,14 \quad 36,2\%$$

Lösung zu:

Ebene Figuren gleichen Umfangs mit größtem Flächeninhalt

Heft 1/86

Steiners Konstruktion beweist nur: Keine andere geschlossene ebene Kurve als der Kreis kann die geforderte Maximaleigenschaft haben. Er hat einen Beweis für den Satz „Unter allen ebenen Figuren von gleichem Umfang hat der Kreis den größten Inhalt“ nur unter der Voraussetzung gegeben, daß es überhaupt eine Figur gibt, die unter allen betrachteten den größtmöglichen Inhalt hat. Da diese Voraussetzung aber ihrerseits eines Beweises bedarf (und darin besteht – wie sich zeigte – die Hauptschwierigkeit), muß also Steiners Beweis ergänzt werden.

Steiner bewies nur: Eine geschlossene nicht kreisförmige Kurve kann nicht von allen ebenen geschlossenen Kurven den größten Flächeninhalt umgrenzen. Gezeigt werden muß überdies: Für den Kreis wird das Maximum des Flächeninhalts solcher Kurven wirklich erreicht. (Der Beweis gelang erst 1882.)

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 6/85

Ma 5 ■ 2608 Wir rechnen $21 + 3 = 24$;
 $24 : 3 = 8$, $2 \cdot 8 = 16$;
der AG gehörten anfangs 8 Jungen und
 $16 - 3 = 13$ Mädchen an.

Ma 5 ■ 2609 Der Vorgänger von 1985
lautet 1984. Die Hälfte von 1984 ist 992.
Wegen $31 \cdot 32 = 992$ lauten die beiden ge-
suchten Zahlen 31 und 32.

Ma 5 ■ 2610 Es sind insgesamt 11 Wege,
und zwar die folgenden:
 $ABCDE$, $ABDE$, $ACBDE$, $ACDE$, $BACDE$,
 $BCDE$, BDE , $CABDE$, $CBDE$, CDE , DE .

Ma 5 ■ 2611 $60 : 4 = 15$; es ist zu vermu-
ten, daß die vier aufeinanderfolgenden ger-
aden Zahlen 12, 14, 16, 18 lauten. Die
Probe $12 + 14 + 16 + 18 = 60$ bestätigt die
Vermutung.

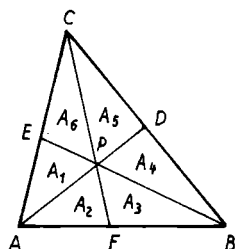
Ma 5 ■ 2612 $90 \text{ min} = 1\frac{1}{2} \text{ h}$; in $1\frac{1}{2} \text{ h}$ legt
der Trabant $(80 + 40) \text{ km} = 120 \text{ km}$ zurück.
In der gleichen Zeit legt das Moped $(60 + 30) \text{ km} = 90 \text{ km}$ zurück. $120 \text{ km} - 90 \text{ km} = 30 \text{ km}$. Für diesen Rückstand von 30 km benötigt das Moped 30 min; das sind mehr als 25 min. Deshalb wird der Mopedfahrer den Trabantfahrer nicht mehr auf dem Rastplatz C antreffen.

Ma 5 ■ 2613 Wegen $x \cdot y = 10$ gilt
 $10 : z = 70$, also $z = 7$ und somit $x = 2$ und
 $y = 5$.

Ma 6 ■ 2614 Das k.g.V. der Zahlen 36, 48
und 54 ist 432. Nun gilt $1000 \leq 432 \cdot z$
< 4000. Daraus folgt z gleich 3, 4, 5, 6, 7, 8
oder 9. Folgende vierstellige natürliche
Zahlen erfüllen die gestellten Bedingun-
gen: 1296, 1728, 2160, 2592, 3024, 3456
und 3888.

Ma 6 ■ 2615 Eine Zahl ist durch 24 teil-
bar, wenn sie durch 8 und durch 3 teilbar
ist. Die gesuchten vierstelligen natürlichen
Zahlen haben in der dekadischen Schreib-
weise die Form $\overline{x22y}$. Da 1000 durch 8
teilbar ist, braucht man nur die Zahl $\overline{22y}$
auf ihre Teilbarkeit durch 8 zu untersu-
chen. Nur $\overline{224}$ ist durch 8 teilbar. Die
Quersumme von $\overline{x224}$ ist $x + 2 + 2 + 4 = x + 8$. Nur für x gleich 1, 4 oder 7 ist die
Quersumme durch 3 teilbar. Die gesuchten
Zahlen sind 1224, 4224 und 7224.

Ma 6 ■ 2616 Jede Seitenhalbierende
eines Dreiecks zerlegt das Dreieck in zwei
flächengleiche Dreiecke. Darum gilt
 $A_{AFC} = A_{ABE}$ bzw. $A_1 + A_2 + A_6 = A_1 + A_5 + A_6$, also $A_2 = A_5$. Analog dazu gilt
 $A_1 = A_4$ und $A_3 = A_6$. Es gilt aber auch
 $A_2 = A_3$, also $A_2 = A_3 = A_5$ und wegen
 $A_4 = A_5$ auch $A_2 = A_3 = A_4$. Daraus folgt
schließlich $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6$.



= $18 \text{ cm}^2 : 6 = 3 \text{ cm}^2$. Folglich besitzt das
Viereck $AFPE$ einen Flächeninhalt von
 $2 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

Ma 6 ■ 2617 Angenommen, Annett ist
 n Jahre alt; dann ist Dorit $(n + 5)$ Jahre,
die Mutter $4 \cdot n$ Jahre, der Vater $(n + 4 \cdot n)$,
also $5 \cdot n$ Jahre alt, und es gilt $n + (n + 5) + 4n + 5n = 93$, $11n + 5 = 93$, $11n = 88$,
 $n = 8$. Annett ist 8, Dorit 13, die Mutter 32,
der Vater 40 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2618 Der Winkel CBD hat die
Größe $180^\circ - \beta = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, der
Winkel CBE somit die Größe $130^\circ : 2 = 65^\circ$. Nun gilt

$$\delta = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha + \beta + \frac{1}{2} \cdot \varphi \right) = 180^\circ - (30^\circ + 50^\circ + 65^\circ) = 35^\circ.$$

Ma 7 ■ 2619 Es soll gelten

$$\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt $17 \cdot \frac{1}{4} < 4 \cdot x$ und $3 \cdot x < 17 \cdot \frac{1}{3}$
bzw. $x \geq 5$ und $x \leq 5$, also $x = 5$. Die ge-
brochene Zahl $\frac{5}{17}$ erfüllt die Bedingungen.

Ma 7 ■ 2620 Angenommen, Paul ist
 $5x$ Jahre, sein Bruder Ralf $4y$ Jahre alt.
Dann ist seine Mutter $(5x + 20)$ Jahre alt.
Nun gilt $5x + (5x + 20) + 4y + 35 = 89$,
 $10x + 4y = 34$, $5x + 2y = 17$. Wegen der
einschränkenden Bedingung $5x > 4y$ exi-
stiert genau eine Lösung, nämlich $x = 3$
und $y = 1$. Paul ist 15 Jahre, sein Bruder
Ralf 4 Jahre, seine Mutter 35 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2621 Angenommen, es sind x
10-Pf-Münzen, also $(109 - x)$ 20-Pf-Mün-
zen; dann gilt $10x + 20 \cdot (109 - x) = 1330$,
also $x = 85$. Die Sparsbüchse enthält
85 Münzen zu 10 Pf und 24 Münzen zu
20 Pf.

Ma 7 ■ 2622 Angenommen, Herr Schulz
wurde im Jahre $19\overline{ab}$ geboren; dann gilt
 $1984 - (1900 + 10a + b) = 4 \cdot (1 + 9 + a + b)$,
 $84 - 10a - b = 40 + 4a + 4b$, $14a + 5b = 44$.

Diese Gleichung wird unter den einschrän-
kenden Bedingungen nur für $a = 1$ und
 $b = 6$ erfüllt. Herr Schulz wurde im Jahre
1916 geboren.

Ma 8 ■ 2623 Angenommen, es wurden
 x Tische und y Stühle geliefert; dann gilt

$$\begin{aligned} 113x + 51y &= 4190, \\ 51y &= 82 \cdot 51 + 8 - 102x - 11x, \\ y &= 82 - 2x - \frac{11x - 8}{51}. \end{aligned}$$

Nur für $x = 10$ und somit für $y = 60$ exi-
stiert eine positive ganzzahlige Lösung. Es
wurden 10 Tische und 60 Stühle geliefert.
Probe: $10 \cdot 113 \text{ M} = 1130 \text{ M}$;
 $60 : 51 \text{ M} = 3060 \text{ M}$; zusammen 4190 M.

Ma 8 ■ 2624 Es seien v, m, s, t die natür-
lichen Zahlen, die jeweils das Alter von
Vater, Mutter, Sohn und Tochter bedeuten.
Dann gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad & v + m + s + t = 111, \\ (2) \quad & m + s - 1 = v + t, \\ (3) \quad & v = 4t \quad \text{und} \\ (4) \quad & m - 1 = 4(t - 1). \end{aligned}$$

Aus (4) folgt (4)': $m = 4t - 3$ und
aus (2) folgt (2)': $s = v + t + 1 - m$.

Nun setzen wir (3) und (4)' in (2)' ein und
erhalten

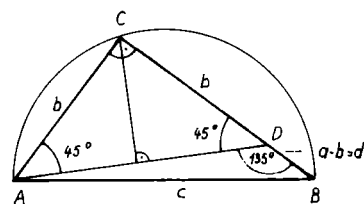
$$(2)'': s = 4t + t + 1 - 4t + 3 \text{ bzw. } s = t + 4.$$

Anschließend setzen wir (2)'', (3) und (4)'
in (1) ein. Wir erhalten

$$(1)': 4t + 4t - 3 + t + 4 + t = 111 \text{ bzw. } t = 11.$$

Durch weiteres Einsetzen folgen nun
 $s = 15$, $v = 44$ und $m = 41$. Der Vater ist
44 Jahre, die Mutter 41 Jahre, der Sohn
15 Jahre und die Tochter 11 Jahre alt.

Ma 8 ■ 2625 Aus $a - b = d$ folgt $a \geq b$.
Für $a = b$ erhalten wir ein gleichschenklig-
rechtwinkliges Dreieck. Wir zeichnen über
 $\overline{AB}$ als Durchmesser einen Halbkreis. Die
Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ schneidet diesen
Halbkreis (Thaleskreis) im Punkte C. Es
sei $a > b$. Wir nehmen an, das Dreieck
 ABC sei bereits konstruiert. Der Kreis um
C mit b als Radius schneidet $\overline{BC}$ in einem
inneren Punkt D. Das Dreieck ADC ist
dann gleichschenklilig und zugleich recht-
winklig. Der Winkel ADC hat deshalb die
Größe 45° ; somit hat der Winkel ADB die
Größe 135° als Nebenwinkel. Es läßt sich
also das Teildreieck ABD aus c, d und der
Winkelgröße 135° konstruieren. Die Mittel-
senkrechte von $\overline{AD}$ schneidet den Halb-
kreis über $\overline{AB}$ als Durchmesser im Punkte
C.



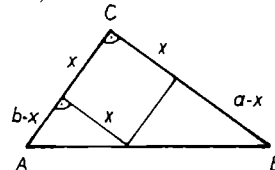
Ma 8 ■ 2626 Aus $\triangle ADF \sim \triangle ABC$ folgt
 $x : (b - x) = a : b$, also

$$x = \frac{ab}{a + b} \text{ und somit}$$

$$A_{DECF} = x^2 = \frac{a^2 b^2}{(a + b)^2}. \text{ Ferner gilt}$$

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2}. \text{ Daraus folgt weiter}$$

$$\begin{aligned} A_{DECF} : A_{ABC} &= \frac{2ab}{(a + b)^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{49} \\ &= \frac{24}{49} \approx 0,49. \end{aligned}$$



Der Flächeninhalt des Quadrates $DECF$ be-
trägt 49% des Flächeninhalts des Dreiecks
 ABC .

Ma 9 ■ 2627 Angenommen, es waren x
Pampelmusen zum Verkauf vorhanden.
Die erste Kundin verlangte

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2} \text{ Pampelmusen; es verblieb}$$

ein Rest von $x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$ Pampel-
musen.

Die zweite Kundin kaufte

$$\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4} \text{ Pampelmusen; es ver-}$$

blieb ein Rest von $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$ Pampelmusen.

Die dritte Kundin kaufte

$$\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}; \text{ es verblieb eine Pam-}$$

pelmuse. Nun gilt $\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8}$

+ 1 = x, also x = 15.

Die erste Kundin kaufte $7\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8$, die

zweite Kundin $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$, die dritte

Kundin $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ Pampelmusen.

Ma 9 ■ 2628 Angenommen, Anton, Bruno bzw. Christian hätten a, b bzw. c Mark bei sich und eine Chrysantheme kostet x Mark; dann gilt

$$(1) \quad a + b = 5x,$$

$$(2) \quad b + c = 6x,$$

$$(3) \quad a + c = 7x.$$

Wir subtrahieren (2) von (3) und erhalten

$$(4) \quad a - b = x.$$

Wir addieren (1) und (4) und erhalten

$$2a = 6x, \quad a = 3x, \text{ also } b = 2x \text{ und } c = 4x.$$

Wegen $a < 4$ und $c > 5$ gilt ferner $3x < 4$

$$\text{und } 4x > 5, \text{ also } x < \frac{4}{3} = 1,33 \text{ und } x > \frac{5}{4}$$

= 1,25. Da weder Ein- noch Fünf-Pfennig-Münzen dabei sind, gilt x = 1,30. Der Preis für eine Chrysantheme beträgt 1,30 M. Der Mutter wurden 9 Chrysanthemen überreicht.

Ma 9 ■ 2629

$$(1) \quad 2 = 1 \cdot 2; \quad 4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2;$$

$$6 = 1 \cdot 6; \quad 8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4;$$

$$10 = 1 \cdot 10; \quad 12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6;$$

$$14 = 1 \cdot 14; \quad 16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4;$$

$$18 = 1 \cdot 18.$$

Nur die Zahlen 2, 6, 10, 14, 18 besitzen genau zwei Teiler, sind folglich Primzahlen in M.

(2) Es entfallen alle vierstelligen Zahlen $ab00$ (Dezimalschreibweise) aus M, die auf zwei Grundziffern 00 enden; denn diese Zahlen sind Teiler von sich selbst, sie haben ferner die Teiler 1 und 10, also mindestens drei Teiler, sind also keine Primzahlen. Da die zu ermittelnde vierstellige Primzahl möglichst groß sein soll, zweimal die Grundziffer Null enthalten soll, müßten die beiden anderen Grundziffern 9 sein. Die Zahl 9090 = $1 \cdot 9090$ besitzt genau zwei Teiler, ist also Primzahl. 9090 = $2 \cdot 4545$ entfällt, da 4545 nicht Element von M ist, usw.

(3) 1230, 1302, 2130, 2310, 3102, 3210 sind Primzahlen; somit existieren sechs solcher Primzahlen.

Ma 9 ■ 2630 Nach Aufgabenstellung gilt

$$z = 10a + b \text{ und } a + b = 9, \text{ also}$$

$$z = 10a + 9 - a; \quad z = 9a + 9; \quad z = 9(a + 1).$$

$$z' = 10(9 - a) + a; \quad z = 90 - 9a;$$

$$z = 9(10 - a).$$

$$z^2 = 81(a + 1)^2;$$

$$(z')^2 = 81(10 - a)^2; \quad 3z = 3 \cdot 9(a + 1).$$

Daraus folgt

$$\frac{z^2 + (z')^2}{3z} = \frac{81(a + 1)^2 + 81(10 - a)^2}{3 \cdot 9 \cdot (a + 1)} = 73;$$

$$3[(a + 1)^2 + (10 - a)^2] = 73(a + 1),$$

$$3(a^2 + 2a + 1 + 100 - 20a + a^2) = 73a + 73,$$

$$3(2a^2 - 18a + 101) = 73a + 73,$$

$$6a^2 - 54a + 303 = 73a + 73,$$

$$6a^2 - 127a + 230 = 0,$$

$$a^2 - \frac{127}{6}a + \frac{115}{3} = 0,$$

$$a_{1,2} = \frac{127}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{127}{12}\right)^2 - \frac{115}{3}}.$$

$$a_1 = \frac{230}{12} \text{ entfällt; } a_2 = 2.$$

Es folgt b = 7. Das Zahlenpaar heißt (27; 72). Durch die Probe wird die Richtigkeit bestätigt.

Ma 10/12 ■ 2631 Angenommen, es sind x Schüler in genau einer, y Schüler in genau zwei und z Schüler in genau drei Arbeitsgemeinschaften tätig; dann gilt x + y + z = 26 - 6 = 20 und x + 2y + 3z = 25. Subtrahieren wir die erste von der zweiten Gleichung, so erhalten wir y + 2z = 5. Da x, y und z natürliche Zahlen sind, gibt es nur folgende Lösungen:

x	y	z
17	1	2
16	3	1
15	5	0

Jede dieser drei Lösungen steht im Widerspruch zu den Meinungen der drei Schüler, also sind alle drei Meinungen falsch.

Ma 10/12 ■ 2632

Es muß das Gleichungssystem

$$(1) \quad f(p) = p^2 + pp + q = 0$$

$$(2) \quad f(q) = q^2 + pq + q = 0$$

gelten. Wir formen noch um:

$$(1) \quad 2p^2 + q = 0$$

$$(2) \quad q(q + p + 1) = 0.$$

Wir unterscheiden die zwei Fälle q = 0 und q ≠ 0:

1. Fall: Es sei q ≠ 0.

Damit ist (2) erfüllt. Für (1) folgt $2p^2 = 0$, also p = 0. $f_1(x) = x^2$ ist somit eine Lösung, wie die Probe bestätigt.

2. Fall: Es sei q = 0. Aus (2) folgt nach Division durch q

$$(2') \quad q + p + 1 = 0,$$

$$q = -(p + 1).$$

Setzt man das in (1) ein, erhält man

$$(1') \quad 2p^2 - p - 1 = 0$$

mit den Lösungen $p_1 = 1, \quad q_1 = -2$ und

$$p_2 = -\frac{1}{2}, \quad q_2 = -\frac{1}{2}.$$

Daraus folgen die Lösungen

$$f_2(x) = x^2 + x - 2 \text{ und}$$

$$f_3(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Probe für $f_2(x)$:

$$(1) \quad f(p) = 1^2 + 1 \cdot 1 - 2 = 0;$$

$$f(p) = 0.$$

$$(2) \quad f(q) = (-2)^2 + 1(-2) - 2 = 0;$$

$$f(q) = 0.$$

Probe für $f_3(x)$ ist analog.

Ma 10/12 ■ 2633 Im Dreieck ABC gilt

$$\cos 60^\circ = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

also $a^2 + bc = b^2 + c^2$. Nun gilt

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2}bc \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4}bc \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{4}a^2 \cdot \sqrt{3},$$

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot (a^2 + bc)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot (b^2 + c^2) \text{ und}$$

$$A_3 + A_4 = \frac{1}{4}b^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{4}c^2 \cdot \sqrt{3}$$

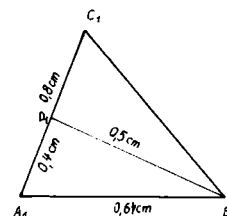
$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot (b^2 + c^2) \text{ und somit}$$

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4.$$

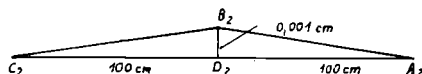
Ma 10/12 ■ 2634 Es ist möglich. Es sei $A_1B_1C_1$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $A_1B_1 \cong B_1C_1$ und A_1C_1 sei 0,8 cm lang. Die Höhe von B_1 auf A_1C_1 sei 0,5 cm lang. Dann hat die Seite $A_1B_1 \cong B_1C_1$ eine Länge von etwa 0,64 cm < 1 cm.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$

$$\text{beträgt } \frac{0,8 \cdot 0,5}{2} \text{ cm}^2, \text{ also } 0,2 \text{ cm}^2.$$



Es sei $A_2B_2C_2$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $A_2B_2 \cong B_2C_2$ und A_2C_2 sei 200 cm lang. Die Höhe von B_2 auf A_2C_2 sei 0,001 cm lang. Dann ist die Länge der Seite $A_2B_2 \cong B_2C_2$ sicher größer als 100 cm, da A_2B_2 Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $A_2B_2D_2$ ist (siehe Bild).



Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2B_2C_2$

$$\text{beträgt } \frac{200 \cdot 0,001}{2} \text{ cm}^2, \text{ d. s. } 0,1 \text{ cm}^2;$$

also gilt $A_1B_1C_1 > A_2B_2C_2$.

Ph 6 ■ 187 Die Masse des Trägers berechnet man nach der Gleichung

$$m = A \cdot l \cdot \rho. \text{ Dann ist}$$

$$A = \frac{m}{l \cdot \rho}.$$

Da nun die Maßzahl x der Masse gleich der Maßzahl der Länge ist, gilt

$$A = \frac{x \text{ kg} \cdot \text{m}^3}{x \text{ m} \cdot 750 \text{ kg}} = 0,0013 \text{ m}^2 \approx 13,33 \text{ cm}^2.$$

Der Querschnitt des Trägers beträgt etwa 13,33 cm².

Fortsetzung in Heft 4/86.

Maß und Spruchweisheit

- Siebenmal messen – einmal abschneiden.
- Besser einmal selber messen, als dreimal anders glauben.
- Gutes Maß braucht keinen Glauben.
- Mancher sucht ein pfennig und verbrennt darbey drey lichte.

Auf den Spuren von Mathematikern

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus ein sächsischer Mathematiker

„Der redliche alte Herr von Tschirnhausen ist ganz tot, seine merita (Verdienste) vergessen und seine Wissenschaften und Vermögen zu Staub.“

(Weck an Leibniz 2.4.1715)

Wer war dieser Ehrenfried Walter von Tschirnhaus?

Er wurde am 10. April 1651 in Kieflingswalde bei Görlitz (heute VR Polen) geboren. Wie es in jenen Jahren unter Adligen üblich war, bekam der junge Ehrenfried zuerst Privatunterricht. Mit 15 Jahren kam er in das Görlitzer Gymnasium. Dort interessierte er sich sehr für die Naturwissenschaften.

1668 begab sich der 17jährige Ehrenfried nach Leiden. Er wurde ein sehr guter Mathematiker und Physiker, studierte aber auch Philosophie und andere Wissenschaften. 1675 lernte E. W. v. Tschirnhaus in Paris den jungen G. W. Leibniz kennen. Beide wurden Freunde und arbeiteten gemeinsam an mathematischen Problemen. In dieser Zeit entwickelte Tschirnhaus u. a. seine Ideen der Gleichungstransformation.

Aufgabe

▲ 1 ▲ Ein Polynom $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ soll mittels einer Substitution $x = az + b$ so „transformiert“ werden, daß das Glied $a_{n-1} x^{n-1}$ verschwindet.

a) Wie sind a und b zu wählen?

b) Löse die Gleichung $y = x^2 - 2x - 8$ mittels solcher Transformation!

Tschirnhaus und Leibniz überlegten, wie in Deutschland eine Akademie nach dem Vorbild der Pariser Académie oder der englischen Royal Society gegründet werden könne. (Es gelang aber erst im Jahre 1700 durch Leibniz in Berlin, eine Akademie nach Tschirnhaus' Ideen zu gründen.)

In Paris wurden auch verschiedene physikalische und chemische Experimente unternommen und wissenschaftliche Literatur studiert.

1676 reiste Tschirnhaus nach Italien und kehrte 1679 über Paris in seine Heimat zurück. Der Wunsch seiner Eltern war es, Ehrenfried möge ein Hofamt in Dresden ausüben. Aber er ging nicht an den Hof August des Starken, sondern führte seine praktischen Versuche (Brennspiegel, Linsen u. a.) und theoretischen Untersuchungen (Algebra, Philosophie) weiter. Sein ganzes Leben blieb er mit Dresden und sei-

ner sächsischen Heimat verbunden. Er stellte sein Wissen in den Dienst des Herrschers, um so seinem Vaterland zu dienen. 1682 gelang es Tschirnhaus, Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften zu werden.

Im Jahre 1687 erscheint das philosophische Hauptwerk E. W. v. Tschirnhaus'. Darin legt er dar, daß die Erfahrung und das logische Schließen die wichtigsten Quellen für die menschliche Erkenntnistätigkeit sind. Dazu müssen aber beide zusammenwirken. Wer dies richtig handhabt, dem werden viele Entdeckungen gelingen und Geheimnisse sich offenbaren. Dieses Streben nach Wissen muß aber frei sein von Eitelkeit und Selbstsucht. Dazu gehört auch, daß man körperlich frei von Leiden ist. Mit diesem Werk bringt er die Ideen Spinozas nach Deutschland und wird neben Leibniz zum Begründer der Aufklärung in Mittel- und Osteuropa.

Im Jahre 1693 stirbt die Frau Tschirnhausens, die auch sein Gut verwaltet hatte. Mit geringer Unterstützung des Dresdner Hofes experimentiert Tschirnhaus weiter, berechnet die größten und stärksten damals bekannten Brenngläser (Linsen und Spiegel) und baute sie in eigens dafür errichteten Werkstätten. Diese optischen Geräte waren so stark, daß nasses Holz sofort entflammte, Metalle schmolzen usw. Mit diesen Geräten führte er umfangreiche Versuchsreihen zum Schmelzen von Sand, Glas u. a. Materialien durch.

Für die Mathematik und Physik ist wichtig, daß er hierbei die Brennpunkte von Linsen und Spiegeln entdeckte und außerdem auch berechnete. Denn der ideale Brennpunkt wird praktisch nicht erreicht, aber nun findet man die Stelle, wo es „am besten“ ist.

Aufgabe

▲ 2 ▲ Sei $y = mx$ ($m > 0, x \geq 0$) der einfallende Strahl auf eine optische Fläche ($y = 0$). Dann ist die y -Achse das Lot im Einfallspunkt. Reflexionsgesetz: Der Winkel zwischen Lot und einfallendem Strahl ist gleich dem Winkel zwischen Lot und reflektiertem Strahl.

a) Gib die Gleichung des reflektierten Strahls an!

Brechungsgesetz: Für den Winkel α' zwischen Lot und einfallendem Strahl und dem Winkel β' zwischen Lot und gebrochenem Strahl gilt:

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = n \quad (n = \text{Brechungszahl}).$$

b) Gib die Gleichung des gebrochenen Strahls an!

Das Jahr 1702 wird für Tschirnhaus eines der bedeutendsten. Er besucht Glasmanufakturen in Frankreich, heiratet zum zweiten Mal und kommt auch mit J. F. Böttger zusammen, als dessen Aufseher und wissenschaftlicher Berater er von König August eingesetzt wird. Auf Betreiben Tschirnhausens wird in Dresden ein Laboratorium errichtet, in dem nach der Rezeptur für das Porzellan geforscht wird. Die Schmelzversuche und das Wissen Tschirnhausens und die chemischen Kenntnisse Böttgers fügten sich ineinander.

So muß der Schluß gezogen werden, daß während dieser gemeinsamen Tätigkeit das Porzellan von Tschirnhaus und Böttger erfunden wurde.

Getreu seinen Vorstellungen und Erfahrungen von der wissenschaftlichen Forschung und Lehre schrieb er unter dem Einfluß der Lehren von Comenius ein Büchlein zur Umgestaltung des Schulunterrichts. Nach dieser Vorlage wurde der naturwissenschaftliche, insbesondere der Mathematikunterricht umgestaltet. Zu den ersten Schulen, die Tschirnhaus' Ideen in die Praxis einführten, gehörten die Franckeschen Stiftungen in Halle, die Fürstenschule St. Afra in Meißen sowie das Görlitzer Gymnasium. Tschirnhaus' Leben war ausgefüllt mit wissenschaftlicher Tätigkeit am Schreibtisch und im Labor. Für seine Forschungen setzte er sein ganzes Vermögen ein. Am 11. Oktober 1708 wird er durch den Tod aus seinem Schaffen gerissen. Zu Unrecht ist er einige Jahre darauf vergessen. Erst in der heutigen Zeit wird sein Wirken gewürdigt.

D. Bauke

Lösungen zu:

Einiges über regelmäßige und halbreghelmäßige Polyeder
(Siehe S. 50/51!)

▲ 1 ▲ Durch Abschneiden der Eckpyramiden des Würfels mit kleineren Pyramidenhöhen als bei der Konstruktion des Mittelkristalls entsteht der von regelmäßigen Drei- und Achtecken begrenzte abgestumpfte Würfel ($e = 24, f = 14, k = 36, n_1 = 3, n_2 = 8, p = 3$).

Schneidet man in geeigneter Weise die Eckpyramiden des platonischen Oktaeders ab, so liegt das von regelmäßigen Vier- und Sechsecken begrenzte abgestumpfte Oktaeder vor ($e = 24, f = 14, k = 36, n_1 = 4, n_2 = 6, p = 3$).

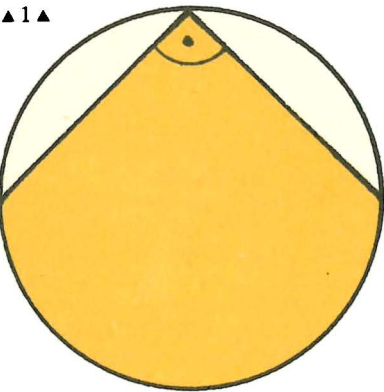
▲ 2 ▲ Es handelt sich um Doppelpyramiden. Beim quadratischen Prisma (Würfel!) entsteht das als Doppelpyramide interpretierbare platonische Oktaeder.

Ein rundes Dutzend

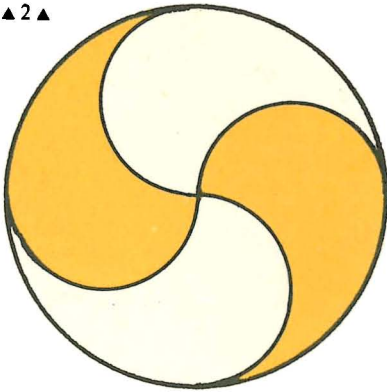
Berechne jeweils den Flächeninhalt der Figuren, die aus den farbigen Kreisen geschnitten wurden ($r = 1$)!
Wieviel Prozent des jeweiligen Kreises macht er aus?

Ch. Werge

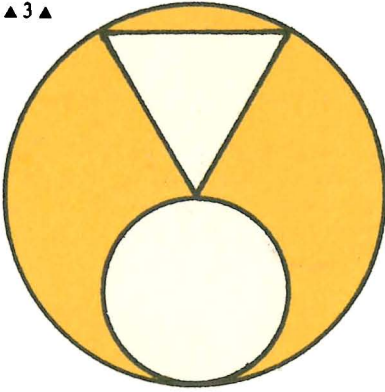
▲ 1 ▲



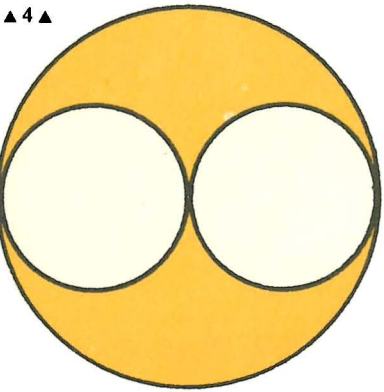
▲ 2 ▲



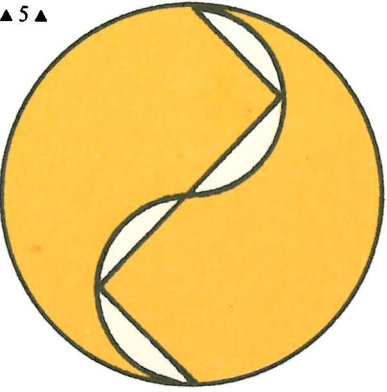
▲ 3 ▲



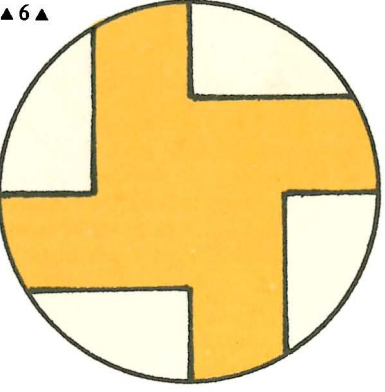
▲ 4 ▲



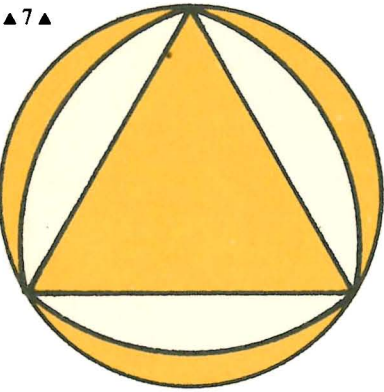
▲ 5 ▲



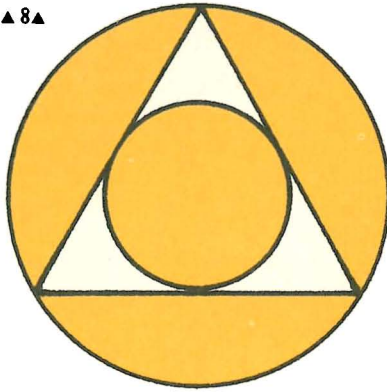
▲ 6 ▲



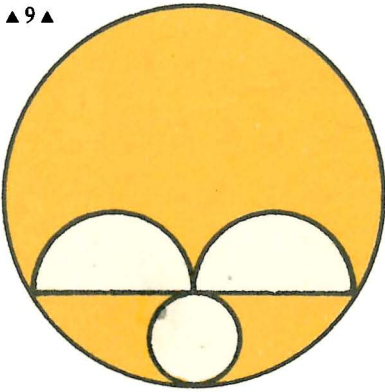
▲ 7 ▲



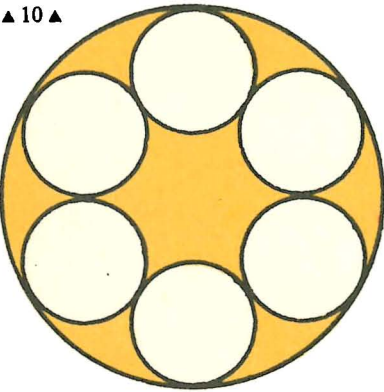
▲ 8 ▲



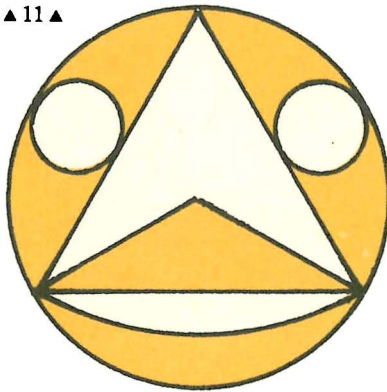
▲ 9 ▲



▲ 10 ▲



▲ 11 ▲



▲ 12 ▲

