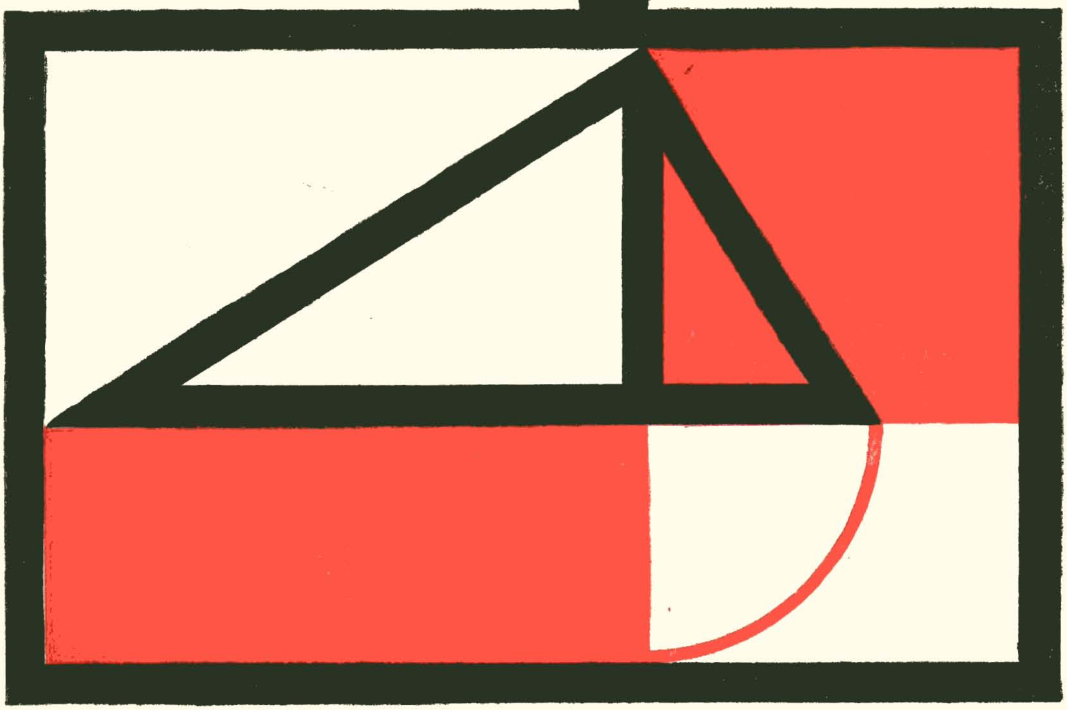
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968 Heft 5

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. L. Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); OL K. Krüger, V.L.d.V. (Bad Doberan); StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Leipzig); OL H. Lohse (Leipzig); NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL H. Pätzold (Waren); Prof. Dr. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); StR G. Schulze (Herzberg/Elster); OL H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); D. Uhlich (Erfurt); Dr. W. Walsch (Halle)

Aufgabengruppe:
NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL Th. Scholl (Berlin); OL H. Schulze (Leipzig): Kl. 5 und 6; W. Träger (Döbeln): Kl. 7 und 8; StR G. Schulze (Herzberg/Elster): Kl. 9 und 10

Gutachtergruppe:
NPT H. Kästner; Dr. R. Hofmann; OL H. Schulze (alle Leipzig)

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Archiv: Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden (S. 131, 143); Bildstelle: TH Chemie, Merseburg (S. 146); Zündholzschachteletiketten: Archiv G. König, Schalkau/Thür. (S. 149); Vignetten: H.-J. Jordan, CH. Loff, Leipzig

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß 1. 8. 1968

Fünf 1. Preise
Drei 2. Preise

Anerkennung und Glückwünsche

Karl Dietzel
Stellv. Minister für Volksbildung

Liebe junge Freunde!
... Es erfüllt uns mit berechtigtem Stolz, daß unsere Jungen Mathematiker das beste Ergebnis unter 12 teilnehmenden Ländern erringen konnten. Es sind die Früchte der weit vorausschauenden kontinuierlichen Bildungspolitik von Partei und Regierung, der schöpferischen Arbeit unserer Lehrer und Ihres eigenen Fleißes und Talents. Vor Ihrer Abfahrt haben Sie anläßlich des 75. Geburtstages unseres hochverehrten Staatsratsvorsitzenden gelobt, Ihre ganze Kraft beim Wettbewerb zu Ehren unseres Arbeiter-und-Bauern-Staates einzusetzen. Sie haben dieses Gelöbnis in jeder Weise vorbildlich erfüllt und einen sehr wertvollen Beitrag zur allseitigen Vorbereitung des 20. Jahrestages unserer Republik geleistet.

Dr. Günter Jahn
Erster Sekretär des Zentralrates der FDJ

Im Namen aller FDJ-Mitglieder beglückwünsche ich Euch zu dem großen Erfolg, den Ihr für unsere Republik errungen habt. Er wird alle Schüler beflügeln, sich noch intensiver mit den mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern zu beschäftigen.

Johannes Lehmann
Chefredakteur von *alpha*

Im Auftrage des Redaktionskollegiums und stellvertretend für 93000 *alpha*-Leser beglückwünsche ich unsere Mannschaft zu ihrem großen Erfolg. Den vier Abiturienten Ch. Band, J. Fritz, H.-J. Roos und U. Zähle wünschen wir viel Erfolg bei dem für sie beginnenden Mathematikstudium. W. Burmeister, A. Felgenhauer, J. Gärtner und S. Heinrich werden gleich hunderttausender Schüler unserer Republik alle Kraft einsetzen, bei der VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR sehr gut abzuschneiden. Wer wird sich eine Fahrkarte zur XI. IMO nach Bukarest erkämpfen?
Von Wolfgang Burmeister wird in Heft 6/68 ein Erlebnisbericht über die X. IMO veröffentlicht.

DDR-Mannschaft - X. IMO 1968

Stefan Heinrich — **1. Preis**
Spezialklasse, Klasse 11, Humboldt-Universität Berlin
Artur-Becker-Medaille in Gold

Wolfgang Burmeister — **1. Preis**
EOS Dresden-Süd, Klasse 9
Artur-Becker-Medaille in Silber

Jürgen Gärtner — **1. Preis**
BBS-Rafena-Werke, Klasse 11, Radeberg (Bez. Dresd.)
Artur-Becker-Medaille in Silber

Ulrich Zähle — **1. Preis**
Arbeiter-und-Bauern-Fakultät, Klasse 12, Halle
Artur-Becker-Medaille in Silber

Christoph Band — **1. Preis**
EOS Greifswald, Klasse 12
Anerkennungsschreiben des ersten Sekretärs des Zentralrats der FDJ

Andreas Felgenhauer — **2. Preis**
EOS Zerbst, Klasse 10
Artur-Becker-Medaille in Bronze

Joachim Fritz — **2. Preis**
EOS Cottbus, Klasse 12
Artur-Becker-Medaille in Bronze

Hans-Görg Roos — **2. Preis**
Spezialklasse, Klasse 12, TH Magdeburg
Artur-Becker-Medaille in Bronze

Alle Teilnehmer erhielten eine Ehrenurkunde des Ministeriums für Volksbildung und der Mathematischen Gesellschaft der DDR, eine Geldprämie und einen Bücherscheck.

Delegationsleiter: Dr. Helmut Bausch, Akademie der Wissenschaften, Berlin
stellv. Delegationsleiter und päd. Betreuer: OStR Herbert Titze, Ministerium für Volksbildung, Berlin

Aufgaben der X. IMO

Erster Klausurtag

1. Man beweise, daß genau ein Dreieck existiert, bei dem die Maßzahlen der Seitenlängen aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind und einer der Winkel doppelt so groß wie einer der beiden anderen ist.
(Rumänien, 6 Punkte)+

2. Es sei $p(x)$ das Produkt aller Ziffern der im Dezimalsystem gegebenen Zahl x. Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen x, für die

$$p(x) = x^2 - 10x - 22 \text{ gilt.}$$

(ČSSR, 7 Punkte)

3. Für die reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 0$ sei folgendes Gleichungssystem mit den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben:

$$\begin{aligned} a x_1^2 + b x_1 + c &= x_2 \\ a x_2^2 + b x_2 + c &= x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a x_{n-1}^2 + b x_{n-1} + c &= x_n \\ a x_n^2 + b x_n + c &= x_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Ferner sei $\triangle = (b-1)^2 - 4ac$.
Man beweise, daß das System (1) im Bereich der reellen Zahlen für

a) $\triangle <$ keine Lösung,
b) $\triangle = 0$ genau eine Lösung,
c) $\triangle > 0$ mehr als eine Lösung hat.

(Bulgarien, 7 Punkte)

+ bedeutet: Teilnehmerland, aus dem der Aufgabenvorschlag stammt, erreichbare Höchstpunktzahl.

Zweiter Klausurtag

4. Man beweise: Für jedes Tetraeder gibt es einen solchen Eckpunkt, daß sich aus den drei Strecken, deren Längen gleich denen der von ihm ausgehenden Kanten sind, ein Dreieck konstruieren läßt.
(Polen, 5 Punkte)

5. Es seien $a > 0$ eine reelle Zahl und f eine relle, für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für jedes reelle x der Bedingung

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

genügt.

a) Man beweise: Die Funktion f ist periodisch, d. h., es gibt eine solche reelle Zahl $b > 0$, daß für jedes x

$$f(x+b) = f(x)$$

gilt.

b) Für $a = 1$ gebe man ein Beispiel einer solchen Funktion

$$f(x) \; (f \neq \text{const.}) \text{ an.}$$

(DDR, 7 Punkte)

6. Es sei $[x]$ die größte Zahl, die nicht größer als x ist. Man berechne für jede beliebige positive ganze Zahl n die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right].$$

(Die Richtigkeit der erhaltenen Formel ist zu beweisen.)
(England, 8 Punkte)

Preise	VIII. IMO 1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	IX. IMO 1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	Dipl.	X. IMO 1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	Dipl.	Gesamtpktz.
VR Bulgarien	—	1	3	1	—	1	1	—	3	1	—	204
CSSR	—	1	2	—	1	3	—	2	4	—	—	248
DDR	3	3	—	3	3	1	—	5	3	—	—	304
Frankreich	nicht teilgenommen			—	—	—	—**	nicht teilgenommen			—	—
Großbritannien	nicht teilgenommen			1	2	4	1	3	2	2	1	263
Italien	nicht teilgenommen			—	1	1	-***	—	—	1	—	132
SFR Jugoslawien	—	2	1	—	—	3	—	—	—	3	1	179
Mongolische VR	—	—	—*	—	—	1	—	—	—	—*	—	74
VR Polen	1	4	1	—	—	1	—	2	3	2	—	262
SR Rumänien	1	1	2	1	1	4	—	1	1	2	—	208
Schweden	nicht teilgenommen			—	—	2	—	1	2	5	—	256
UdSSR	5	1	1	3	3	2	1	5	1	2	—	298
Ungarische VR	3	2	1	2	3	3	—	3	3	2	2	291

* Es wurde an je einen mongolischen Schüler ein Sonderpreis vergeben.
** Die französische Mannschaft bestand nur aus fünf Schülern. Diesen konnten wegen verspäteter Anreise nur die Aufgaben des zweiten Wettbewerbes gestellt werden.
*** Die italienische Mannschaft bestand nur aus sechs Schülern.

Berufsbild

Ingenieur für Programmierung

Studenten beim Praktikum am elektronischen Kleinrechenautomaten SER 2c

Seit September 1966 werden an der Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik in Dresden Ingenieure der Fachrichtung *Programmierung für elektronische Datenverarbeitungsanlagen* (im folgenden kurz als *Ingenieure für Programmierung* bezeichnet) in einem dreijährigen Direktstudium ausgebildet. Bewerber für das Studium in dieser Fachrichtung sollen — neben dem Abschluß der 10. Kl. — folgende Voraussetzungen erfüllen:

□ Abschluß als *Facharbeiter für Datenverarbeitung* bzw. *Technischer Rechner* (siehe H. 3/68, 4/68)

□ oder Abschluß als *Facharbeiter* für *Elektrotechnik/Elektronik* bzw. *der Feingerätetechnik* (z.B. Elektro-, Funk-, Büromaschinen-, Fein-, Meß- und Regelungsmechaniker). Sie müssen dann aber Kenntnisse in der Mathematik besitzen, die denen der Facharbeiter für Datenverarbeitung entsprechen.

□ Sie müssen die gesellschaftliche Reife für die Aufnahme eines Studiums besitzen und tatkräftig am Aufbau des Sozialismus mitgearbeitet haben.

Welche theor. Kenntnisse werden erworben?

□ Allgemeine und fachrichtungsspezifische Kenntnisse der russischen und englischen Sprache. Hierdurch soll der Absolvent die Fähigkeit erwerben, die Entwicklung seines Fachgebietes an Hand der internationalen Literatur zu verfolgen und auszuwerten sowie internationale Programmierungssprachen zu verstehen.

□ Ein fundiertes Wissen in mathematischen Fächern wie Differential- und Integralrechnung, Lineare Algebra, Praktische Analysis, Differentialgleichungen, Lineare Optimierung/Verfahren der Operationsforschung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Informationstheorie. Besonderer Wert wird auf numerische Verfahren der Mathematik und Verfahren der Operationsforschung gelegt.

□ Umfassende Kenntnisse über Erfassung und Darstellung von Informationsflüssen (Flußbildtechnik, Programmablaufplanung), der Programmierung in Maschinensprachen, sowie in internat. Programmiersprachen, im wesentlichen vermittelt durch das sich über die gesamte Ausbildungszeit erstreckende Fach: Programmierung und Programmiersprachen.

□ Kenntnisse der Informationsdarstellung und -verarbeitung sowie Aufbau, Wirkungsweise und Einsatzmöglichkeiten elektronischer Datenverarbeitungsanlagen einschließlich peripherer Geräte und Anlagen. Sie werden besonders in solchen technischen Fächern wie Bauelemente der Informationstechnik, Elektronische Rechentechnik, Elektronische Regelungs- und Analogrechentechnik, Elektronische Datenverarbeitung vermittelt.

□ Allgemeine Kenntnisse im Fach Betriebsökonomie, aber auch spezielle auf dem Gebiete der Planung, Organisation und Lenkung von Verwaltungs-, Leitungs- und Produktionsprozessen mittels der elektronischen Datenverarbeitung sowie der Betriebe der elektronischen Datenverarbeitung (Organisations- und Rechenzentrum).

Welche prakt. Fertigkeiten werden erworben?

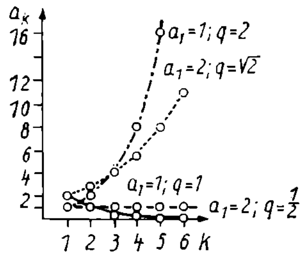
Ab dem zweiten Studienhalbjahr wird in Verbindung mit dem Fach Programmierung und Programmiersprachen ein Praktikum an elektronischen Rechnern und Datenverarbeitungsanlagen, welche die Ingenieurschule besitzt, durchgeführt. Während des ersten bis fünften Studienhalbjahres sind die Studenten an der Schule in Dresden, das 6. Studienhalbjahr enthält ein Praktikum im späteren Einsatzbetrieb oder einem anderen, hierfür geeigneten Rechenzentrum (in dieser Zeit ist außerdem die Ingenieur-Hausarbeit anzufertigen).

Nach Abschluß des Studiums kann der Einsatz des *Ingenieurs für Programmierung* in Organisations- und Rechenzentren, in Betrieben der VVB Maschinelles Rechnen, aber auch in Industriebetrieben oder Instituten erfolgen, die über kein Rechenzentrum verfügen, aber ihre Probleme bereits aufbereitet und programmiert in ein Rechenzentrum zur maschinellen Bearbeitung geben.

W. Leupold

Elementare Zahlenfolgen

3. Teil



Wir beginnen wieder mit der Besprechung der Aufgaben aus dem letzten Heft (4/68). Seid ihr mit den Aufgaben zurechtgekommen? Wir werden sehen!

Lösungen

289 a) Da es sich um eine endliche arithmetische Folge 1. Ordnung mit $d = -3$ handelt, lautet die rekursive Darstellung

$$a_k = a_{k-1} - 3 \text{ für } 1 < k \leqq 6 \text{ mit } a_1 = 7.$$

b)
$$k = 3\quad a_3 = \frac{2}{3} \cdot a_2^2 \cdot a_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2 = +3$$
$$k = 4\quad a_4 = \frac{2}{3} \cdot a_3^2 \cdot a_2 = \frac{2}{3} \cdot 3^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -9$$
$$k = 5\quad a_5 = \frac{2}{3} \cdot a_4^2 \cdot a_3 = \frac{2}{3} \cdot (-9)^2 \cdot 3 = +162\,.$$

Die drei gesuchten Glieder sind: $+3$; -9; $+162$.

290 Betrachtet man jeweils Dreiergruppen, so erkennt man, daß das jeweils dritte Glied der Quotient aus den beiden unmittelbar vorangehenden Gliedern ist.
Als einfaches Bildungsgesetz bietet sich hier die rekursive Darstellung

$a_k = \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}$ für $k > 2$ mit $a_1 = 8$ und $a_2 = 4$ an.

291 a) Zwischen den beiden gegebenen Gliedern $a_{23} = 0$ und $a_{89} = 15$ liegen $89 - 23 = 66$ konstante Differenzen d.

$$66\,d = 15$$
$$d = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}.$$

Aus $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$ folgt für $k = 23$

$$a_{23} = a_1 + (23 - 1) \cdot d$$
$$0 = a_1 + 22 \cdot \frac{5}{22}.$$
$$a_1 = -5\text{, damit für } k = 100$$
$$a_{100} = a_1 + 99 \cdot d = -5 + \frac{45}{2}$$
$$a_{100} = 17\frac{1}{2}\,.$$

b) Nein.
Wegen $k \in \{1; 2; \ldots\}$ ist z. B. a_1, d, a_k zur Berechnung von k nicht frei wählbar.
Des weiteren muß $d \neq 0$ beachtet werden.

292 $a_3 = 17$; $a_4 = 71$; $a_5 = 142$
Möglicher Rechenweg:

$$\begin{array}{ccccccccc}
-60 & & -25 & & 17 & & 71 & & 142 \\
 & 35 & & 42 & & 54 & & 71 & \\
 & & 7 & & 12 & & 17 & & \\
 & & & 5 & & 5 & & 5 &
\end{array}$$

293 In 25 m Tiefe: 10 °C. Hinzu kommen je 100 m 3 °C,
also für 2300 m: 69 °C,
insgesamt 79 °C in 2325 m Tiefe.

Die Folge 10 °C, 13 °C, 16 °C, ..., 100 °C hat $n = 31$ Glieder, da

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$
$$100\,°C = 10\,°C + (n - 1) \cdot 3\,°C\,.$$

Dem 1. Glied dieser Folge entsprechen 25 m, jedem der 30 weiteren 100 m, also erhält man 3025 m.

Wir wenden uns nun den **geometrischen Folgen** zu.
Sicher kennt ihr die „Weizenkorn-Legende", die sich um die Erfindung des Schachspiels rankt. Ein indischer Weiser erbat danach von seinem Fürsten als Belohnung für die Erfindung des Spiels auf den 64 Feldern eine Anzahl Weizenkörner, und zwar

für das 1. Feld 1 Weizenkorn,
für das 2. Feld 2 Weizenkörner,
für das 3. Feld 4 Weizenkörner,
für das 4. Feld 8 Weizenkörner usw.

Jedem $k \in \{1; 2; \ldots; 64\}$ ist genau ein a_k zugeordnet. Also liegt hier für die Anzahl der Weizenkörner je weiteres Feld die endliche Folge

$$1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots;\ a_{64}\ (f_{10})\ \text{vor.}$$

Das ist eine *geometrische* Folge. Warum?
Eine arithmetische Folge ist es auf keinen Fall. Das erkennt ihr leicht daran, daß ihr

alle möglichen Differenzenfolgen bilden könnt und doch nicht zu konstanten Differenzen gelangt. Aber eine Konstanz läßt sich auch hier erreichen! Dividiert einmal jeweils zwei benachbarte Glieder! Dann erhaltet ihr

$$\frac{2}{1} = 2; \quad \frac{4}{2} = 2; \quad \frac{8}{4} = 2; \text{ usf.}$$

Hieraus ergibt sich ein konstanter Quotient $q = 2$. Auch die uns aus dem vorigen Heft bekannten Folgen

$f_2 = 2; 2{,}8; 4; 5{,}6; 8; 11; 16; 22$ (Folge der Blendenzahlen)

und $f_6 = -2; +4; -8; +16; -32; \ldots; +256; -512$

sind geometrische Folgen.

Hierfür erhält man als konstante Quotienten (rechnet nach!)

$q \approx 1{,}4$ (Der exakte Wert für nicht gerundete Blendenzahlen ist übrigens $q = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$).

bzw. $q = -2$.

Bei allen diesen Zahlenfolgen erweist sich also die *Quotientenfolge* als *konstant*.

Wir definieren: *Eine Folge, deren Quotientenfolge aus gleichen Gliedern $q \neq 0$ besteht, heißt geometrische Folge.*

$q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ $(a_k \neq 0)$ ist der *Quotient* der Folge.

Die *rekursive Darstellung* für geometrische Folgen ergibt sich unmittelbar aus der Definition.

Denn aus $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ folgt $a_{k+1} = a_k \cdot q$

oder $a_k = a_{k-1} \cdot q$.

Das heißt: Wir erhalten jedes Glied a_k $(k > 1)$ der geometrischen Folge, indem wir den unmittelbaren Vorgänger mit der Konstanten q multiplizieren.

So ist $a_k = a_{k-1} \cdot \sqrt{2}$ die rekursive Darstellung der Folge der Blendenzahlen.

Die allgemein *independente Darstellung* für geometrische Folgen kann man aus der rekursiven Darstellung entwickeln:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot q &&= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q &&= a_1 \cdot q^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q &&= a_1 \cdot q^3 \\
&\ \ \vdots && \ \ \vdots
\end{aligned}$$

Das führt zu der Vermutung

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \qquad k \in \{1; 2; \ldots\} \text{ und } q \neq 0,$$

die sich beispielsweise mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion auch bestätigen läßt. Die independente Darstellung der Folge der Blendenzahlen ist also

$$a_k = 2 \cdot \sqrt{2}^{\,k-1} \text{ oder, da } 2 = \sqrt{2}^{\,2},$$

$$a_k = \sqrt{2}^{\,k+1}.$$

Beachte, daß die unabhängige Variable k in der independenten Darstellung geometrischer Folgen stets im Exponenten steht. Solche Funktionen heißen Exponentialfunktionen. Die geometrischen Folgen bilden eine Teilmenge der Menge der Exponentialfunktionen, ihre Punktfolgen liegen auf Exponentialkurven. Die auf Seite 132 stehende Abbildung zeigt die graphische Darstellung der geometrischen Folgen

f_6, f_{10},

$f_{11} = 1; 1; 1; 1; \ldots$ $(q = 1)$

und $f_{12} = 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots \left(q = \frac{1}{2}\right)$.

Die gestrichelten Linien sind Exponentialkurven.

Wir ersehen aus der Zeichnung, wie q das Verhalten der geometrischen Folge, z. B. ihr Wachsen oder Fallen, wesentlich beeinflußt. Für $q = 1$ erhalten wir konstante Folgen, sie liegen auf sogenannten „ausgearteten Exponentialkurven", das sind Parallelen zur k-Achse.

Da wir jetzt die independente Darstellung der geometrischen Folgen allgemein kennen, ist es relativ einfach, den Wert eines bestimmten Gliedes einer bestimmten Folge auszurechnen. Ich kann mir vorstellen, daß ihr interessiert seid zu wissen, wieviel Weizenkörner auf das letzte Feld des Schachbretts hätten gelegt werden müssen, wenn man der Bitte des indischen Weisen nachgekommen wäre.

Das Anfangsglied der betreffenden Folge f_{10} ist $a_1 = 1$, der Quotient $q = 2$. Für das letzte Feld ist $k = 64$.

Aus $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ folgt hier $a_{64} = 2^{63}$.

Das ist eine sehr große Zahl, die man mittels Logarithmen näherungsweise bestimmen kann. Es ergibt sich eine Zahl von etwa 9,18 Trillionen Weizenkörnern, das sind rund 460 Milliarden Tonnen.

Allein auf das *letzte* Feld hätten also 460 Milliarden Tonnen Weizenkörner gelegt werden müssen! Kannst du dir diese Masse Weizen vorstellen? Wohl kaum. Es wird vielleicht ein wenig anschaulicher, wenn du weißt, daß diese Masse Weizen über 1600 Weltweizenernten des Jahres 1964 entspricht(!).

Geometrische Folgen begegnen uns in der Praxis recht häufig. So spielen sie zum Beispiel für Zwecke der Normung und Standardisierung eine bedeutende Rolle. Die Vereinheitlichung der Erzeugnisse nach Abmessung, Masse, Drehzahl, Leistung usw. ist ja eine wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung der modernen Industrie.

Bei der Stufung von Größen der eben genannten Art erweisen sich geometrische Zahlenfolgen meist als sehr vorteilhaft. Das soll an folgender Aufgabe verdeutlicht werden (entnommen dem Lehrbuch „Analysis" aus dem Fachbuchverlag Leipzig):

Es sollen Rohre in sechs verschiedenen Größen gefertigt werden. Der Durchmesser des kleinsten Rohres soll 20 mm, der des größten Rohres 200 mm betragen. Zwischen 20 mm und 200 mm sind vier Glieder (Rohrweiten) zwischenzuschalten, zu interpolieren. Bei Zugrundelegung *arithmetischer Stufung* folgt aus

$$a_6 = a_1 \cdot (6-1)\,d \qquad d = \frac{a_6 - a_1}{5} = \frac{180\text{ mm}}{5} = 36\text{ mm};$$

für *geometrische Stufung* folgt aus

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} \qquad q = \sqrt[5]{\frac{a_6}{a_1}} = \sqrt[5]{\frac{200\text{ mm}}{20\text{ mm}}} \approx 1{,}585\,.$$

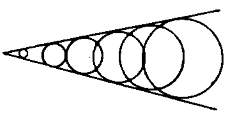
Danach betragen die Rohrweiten bei

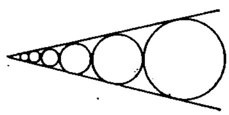
arithmetischer Stufung

20 56 92 128 164 200 mm

geometrischer Stufung

20 31,7 50,2 79,6 126,2 200 mm





Bei arithmetischer Stufung ist der prozentuale Zuwachs des Durchmessers sehr unausgeglichen: Vom 1. zum 2. Rohr beträgt er $\frac{36}{20} \cdot 100\% = 180\%$, vom 5. zum 6. Rohr viel weniger, nämlich $\frac{36}{164} \cdot 100\% = 22\%$ (vgl. Abbildung links).

Bei geometrischer Stufung dagegen ist der prozentuale Zuwachs des Durchmessers von Rohrweite zu Rohrweite derselbe. Es ergibt sich als Zuwachs vom 1. zum 2. Rohr $\frac{11{,}7}{20} \cdot 100\% = 58{,}5\%$ und vom 5. zum 6. Rohr $\frac{73{,}8}{126{,}2} \cdot 100\% = 58{,}5\%$.

Diese Gleichmäßigkeit des Zuwachses wird an der rechten Abbildung deutlich. Man wird also der geometrischen Stufung den Vorzug geben. Der konstante Quotient q wird in der Technik übrigens als Stufensprung bezeichnet. Eine Vielzahl weiterer Beispiele könnte angeführt werden. Interessant ist, daß auch die gebräuchlichen Geldmünzen und -scheine in grober Näherung eine geometrische Folge bilden, die an das Dezimalsystem angepaßt ist.

Zum Schluß noch etwas zum Namen „geometrische Folge". Ihren Namen verdanken Folgen dieser Struktur der Eigenschaft, daß *jedes* Glied a_k $(k > 1)$ bis auf das Vorzeichen das *geometrische Mittel* seiner beiden Nachbarglieder ist.

Aus $a_k = a_{k-1} \cdot q \quad (k > 1)$

und $a_{k+1} = a_k \cdot q$ folgt, indem ich die erste Gleichung durch die 2. dividiere, die Proportion

$$a_k : a_{k+1} = a_{k-1} : a_k\,,$$
damit $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$
oder $|a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot_k a_{+1}}$ $(k > 1)$.

Bei der Folge 1; 2; 4; 8; 16; ... gilt z. B. für das 3. Glied:

$$a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_4} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4\,.$$

Das wär's für heute.

In einem abschließenden Artikel sollen einige weitere Grundbegriffe zum Gebiet der elementaren Zahlenfolgen erläutert werden, wie „wachsende" und „fallende" Folge, „oszillierende" und „alternierende Folge". H. Lohse

Hier noch einige Aufgaben

294 Von einer geometrischen Folge sind die Glieder $a_3 = 6$ und $a_6 = \frac{81}{4}$ gegeben. Berechne a_1 und q!

295 a) Zur geometrischen Folge $f_{12} = 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \left(q = \frac{1}{2}\right)$ ist die independente und die rekursive Darstellung anzugeben!

b) Die Folgen $a_k = 2\,k$ und $a_k = 2_k$ sind in *einem* k, a_k-Koordinatensystem graphisch darzustellen! Vergleiche die beiden Punktfolgen!

296 Beim Dreh-, Bohr- und Schleifdurchmesser 100 mm betragen die Schnittgeschwindigkeiten v

$$3{,}5 \;\; 4{,}4 \;\; 5{,}7 \;\; 6{,}9 \;\; 8{,}8 \;\; 11 \;\; 14 \;\; 18 \;\; 22\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

und die Umdrehungen (Drehzahlen) n

$$11 \;\; 14 \;\; 18 \;\; 22 \;\; 28 \;\; 36 \;\; 45 \;\; 56 \;\; 71\text{ min}^{-1}.$$

Untersuche, ob diese endlichen Folgen geometrische Folgen sind!

297 Die Zunahme der Erdbevölkerung entspricht etwa einer geometrischen Folge. 1945 lebten 2,13 Milliarden Menschen auf der Erde, 1965 bereits 3,20 Milliarden. Wieviel werden es im Jahre 1985 sein?

Übe sinnvoll!

Eine kleine Lektion zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen

Ein altes Sprichwort heißt: „Übung macht den Meister“. Es will damit wohl nicht sagen, daß lediglich das Üben zur Meisterschaft führt, wohl aber, daß es ohne Üben keine Meisterschaft gibt. In etwas mathematischer Ausdrucksweise könnte man sagen: Übung ist zwar nicht hinreichend, aber unbedingt notwendig dafür, daß man sich auf einem bestimmten Gebiet als Meister fühlen kann.

Wir nehmen an, es will sich jemand im Dividieren gebrochener Zahlen üben. Er kennt also den Satz (die Rechenregel):

Man dividiert zwei gebrochene Zahlen, indem man den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multipliziert.

Mit Variablen ausgedrückt:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ (b, c, d sind natürliche Zahlen verschieden von 0).

Will man nun an Zahlen üben, so muß man sich das Zahlenmaterial recht vielseitig aussuchen, nach Möglichkeit so, daß alle denkbaren Aufgabentypen auftreten. Überlege dir beim Ermitteln der folgenden Quotienten, nach welchen Gesichtspunkten die Zahlen ausgesucht wurden, worin also der Unterschied von Fall zu Fall liegt:

1.a) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{7}{5}$ c) $\frac{3}{2} : \frac{7}{5}$ d) $\frac{3}{2} : \frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{7} : \frac{3}{2}$

2.a) $\frac{3}{8} : \frac{9}{11}$ b) $\frac{2}{5} : \frac{14}{15}$ c) $\frac{8}{33} : \frac{11}{4}$ d) $\frac{12}{25} : \frac{4}{5}$ e) $\frac{3}{6} : \frac{9}{2}$

3.a) $\frac{11}{12} : 5$ b) $1 : \frac{3}{4}$ c) $3\frac{3}{4} : 4\frac{4}{3}$ d) $10 : 2$ e) $0 : \frac{4}{5}$

4.a) $\frac{8}{9} : \frac{8}{9}$ b) $\frac{8}{9} : \frac{9}{8}$ c) $\frac{8}{13} : \frac{1}{7}$ d) $7 : \frac{1}{7}$ e) $\frac{5}{3} : \frac{5}{7}$

Ganz gewiß muß man solche und noch einige andere Aufgaben lösen, um Sicherheit im Dividieren gebrochener Zahlen zu erreichen. Um aber sinnvoll zu üben, darf man sich nicht mit den Schritten

Reziprokes bilden
Kürzen, soweit möglich
Ausmultiplizieren

begnügen. Oder anders gesagt: Selbst wenn du mit Hilfe dieser drei Schritte in allen 20 Fällen den richtigen Quotienten gefunden hast, dann ist damit noch nicht gesagt, daß du diese Rechenoperation wirklich beherrschst. „Was gehört denn aber sonst noch dazu?“ fragst du vielleicht. Nun — wollen wir sehen!

1. Wichtig ist, daß man beim Üben nicht den Zusammenhang mit anderen Rechenoperationen vergißt. Bei der Division gebrochener Zahlen ist das insbesondere die Multiplikation. Beim Ermitteln des Quotienten $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ darf man eben nicht nur an das „Multiplizieren mit dem Reziproken“ denken, sondern auch daran, welche Eigenschaft denn diese gesuchte Zahl haben muß: Ihr Produkt mit $\frac{5}{7}$ muß $\frac{2}{3}$ heißen. Bekanntlich kann man diesen Zusammenhang ja auch so schreiben:

Dividend : Divisor = Quotient
Dividend = Divisor · Quotient

Aus diesem Zusammenhang heraus ist ja die Regel

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

überhaupt erst entstanden. Und wenn dich dein Lehrer bei der Aufgabe $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$ als Probe zum Errechnen des Produkts $\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7}$ auffordert, dann sollst du damit nicht nur deinen gefundenen Quotienten überprüfen, sondern eben an diesen Zusammenhang denken. Mit anderen Worten daran, daß Multiplikation und Division zueinander Umkehroperationen sind.

2. Nun ist es gewiß langweilig, immer den gefundenen Quotienten mit dem gegebenen Divisor zu multiplizieren und die Übereinstimmung dieses Produkts mit dem gegebenen Dividenden zu überprüfen. Deshalb überlegen wir zum sinnvollen Üben folgendes: Bei jeder Rechenoperation geht es um 3 Zahlen;

zwei davon sind gegeben, die dritte ist gesucht. Bezeichnen wir einmal die gegebenen Zahlen mit a und b, die gesuchte mit x, so hatten unsere 20 Divisionsaufgaben sämtlich die Form

$$a : b = x$$

Das muß doch aber wohl nicht so sein. Was passiert eigentlich bei

$$x : a = b \quad \text{oder} \quad a : x = b?$$

In Zahlen:

$$x : \frac{3}{4} = \frac{7}{5} \quad \text{oder} \quad \frac{4}{13} : x = \frac{5}{12}$$

In Worten:

Bestimme eine Zahl, die mit $\frac{3}{4}$ als Divisor den Quotienten $\frac{7}{5}$ ergibt!

(Rechts formuliere selbst!)

Zunächst stutzt man, fängt dann vielleicht sogar an mit Probieren. Wer aber darin geübt ist, die Rechenoperationen im Zusammenhang zu sehen, der hat im linken Fall mit $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{20}$ sofort und ganz leicht die gesuchte Zahl. Und rechts ist es auch nicht viel schwieriger: Gesucht ist eine Zahl, die mit $\frac{5}{12}$ das Produkt $\frac{4}{13}$ ergibt. Das aber ist der Quotient aus $\frac{4}{13}$ und $\frac{5}{12}$. Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man die beiden Zeilen

Dividend : Divisor = Quotient

Dividend = Divisor · Quotient

fortsetzt zu

Dividend = Quotient · Divisor

Dividend : Quotient = Divisor

Und nun überprüfe die beiden Ergebnisse. Dann bilde selbst derartige Aufgaben und löse sie!

3. Zwei Zahlen gegeben — eine dritte gesucht. Wenn man nun eine Rechenoperation wie das Dividieren gebrochener Zahlen übt, dann muß man sich auch die beiden Fragen beantworten:

Gibt es zu zwei Zahlen aus dem betreffenden Bereich — gleichgültig welche es sind — stets eine dritte? (Frage nach der Existenz)

Wenn es eine dritte Zahl gibt, gibt es nur eine einzige? (Frage nach der Eindeutigkeit)

Für unsere 3 Fälle

1. $a : b = x$ 2. $x : a = b$ 3. $a : x = b$

wollen wir hier die Antworten nur für den 2. Fall durchdenken. (Für die anderen beiden sollst du es selbst tun.)

Die für a gegebene Zahl ist gewiß der Divisor, muß als solcher also verschieden von Null sein. Daran ändert auch nichts, daß wir den gesuchten Dividenden durch Multiplikation der beiden gegebenen Zahlen finden und eine Multiplikation mit 0 stets möglich ist. Da die Einschränkung „Divisor ungleich Null" bei der Division die einzige ist, die Multiplikation zweier gebrochener Zahlen aber stets zu genau einem Produkt führt, können wir für Existenz und Eindeutigkeit sagen:

Wenn $a \neq 0$ und b beliebig gegeben sind, so gibt es stets genau eine Zahl x, so daß gilt:

$$x : a = b.$$

4. Zum sinnvollen Üben gehört auch das Bilden von solchen Aufgaben, für die man das Lösen üben will. Nun ist es kinderleicht und übt daher wenig, wenn man einfach 2 Zahlen hinschreibt, das Divisionszeichen dazwischensetzt und den Quotienten bestimmt. Das wird aber sofort anders, wenn man sich für die 3 Zahlen in $a : b = c$ gewisse Bedingungen setzt, etwa so:

a) $c = 5$; $c = \frac{3}{4}$; $c = 1$; $c = 0$

b) $a < 1$ und $c > 1$; $b < 1$ und $c < 1$

c) $a > b > c$; $a > 1$ und $b = \frac{1}{2}a$ und $c > 1$

d) $a < b < c$; $a < 1 < b < 2 < c$

Na, hast du jeweils eine gelöste Divisionsaufgabe gefunden, bei der die gebrochenen Zahlen den gestellten Bedingungen genügen? Bei c) und d) dürfte das nicht mehr ganz so leicht sein. Vielleicht hast du vorhin die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit für überflüssig und die Antwort für selbstverständlich gehalten. Wie steht es aber damit bei den genannten und anderen derartigen Aufgaben? Gibt es mehr als ein Zahlenpaar mit dem Quotienten $\frac{3}{4}$? Gibt es überhaupt drei Zahlen a, b, c, die die Bedingungen $a < 1 < b < 2 < c$ und $a : b = c$ erfüllen? Versuche diese Fragen bei allen zehn Aufgaben zu beantworten. An der letzten wirst du sicher am ehesten verstehen, daß der Mathematiker die Frage nach der Existenz einer Lösung oft eher zu beantworten versucht, als er an das Suchen der Lösung herangeht.

5. Zum Schluß kehren wir noch einmal zu den 20 Aufgaben 1a) bis 4e) zurück. Wenn man sinnvoll übt, dann ermittelt man nicht blindlings jeden einzelnen Quotienten; auch wenn sie alle richtig sind, so ist das nur der halbe Ertrag. Vielmehr überprüft man, ob und welche Veränderungen sich im Quotienten dadurch ergeben, daß Dividend und Divisor in bestimmter Weise geändert werden. Mit anderen Worten: Man versucht, Gesetzmäßigkeiten (für das Dividieren gebrochener Zahlen) zu erkennen und nach Möglichkeit auch zu beweisen.

Einige Beispiele:

4b) und 4d) Sind Dividend und Divisor zueinander reziprok, so stehen in Zähler und Nenner des Quotienten Quadratzahlen:

$$\frac{m}{n} : \frac{n}{m} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m^2}{n^2}$$

3b) Ist der Dividend 1, so sind Divisor und Quotient zueinander reziprok:

$$1 : \frac{m}{n} = 1 \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$$

1a) und 1c) Wird von Dividend und Divisor das Reziproke genommen, so ergibt sich auch das Reziproke des Quotienten:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}; \quad \frac{n}{m} : \frac{q}{p} = \frac{n \cdot p}{m \cdot q}$$

2d) läßt vermuten, daß man den Quotienten auch ermitteln kann, indem man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividiert, sofern die Division jeweils ausführbar ist. Bilde selbst derartige Beispiele, überprüfe an ihnen die Vermutung und versuche einen allgemeinen Nachweis.

1d) und 1e) zeigen, daß die Division gebrochener Zahlen nicht kommutativ ist. Ist sie assoziativ, d. h. gilt z. B.

$$\left(\frac{2}{3} : \frac{4}{5}\right) : \frac{6}{7} = \frac{2}{3} : \left(\frac{4}{5} : \frac{6}{7}\right)\ ?$$

Wie steht es überhaupt, wenn mehr als zwei Zahlen gegeben sind und noch andere Rechenoperationen ins Spiel kommen? Versuche dich an den Aufgaben

a) $\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right) : \frac{7}{6}$ und $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} : \frac{7}{6}$

b) $\frac{27}{4} : \frac{9}{6} - 1\frac{1}{2}$ und $\frac{27}{4} : \left(\frac{9}{6} - 1\frac{1}{2}\right)$

c) Setze in $\frac{21}{20} : \frac{7}{5} : \frac{5}{12} : \frac{5}{9}$ Klammern, so daß sich 1 ergibt.

d) Suche nach je einem Paar gebrochener Zahlen, für das gilt:

$a : b = a + b \qquad c : d = c - d$
$e : f = e \cdot f$

Das war unsere kleine Lektion des Dividierens gebrochener Zahlen. Versuche, auch in anderen Übungen gleiche oder ähnliche Wege zu gehen, dann wirst du sicher gute Erfolge haben!

G. Pietzsch

Was verbirgt sich hinter: MBZ 8?

Mathematikfachlehrer *Günter Horn* aus Schönbach, Kreis Löbau, hatte eine Idee: „Im Jahre 1964 wurden wir uns in der Fachkommission Mathematik klar darüber, daß wir die besten Schüler fördern müßten. Aus Gründen der schlechten Verkehrsverbindungen zur Kreisstadt war eine Konzentration in Form eines Zirkels nicht angebracht. Deshalb beschloß die Fachkommission, für die Klassen 8, 9 und 10 Korrespondenzzirkel einzurichten. Am Ende des Schuljahres wurden an alle Schulen Rundschreiben geschickt, in denen die Mathematiklehrer gebeten wurden, die besten Schüler für den Mathematischen Briefzirkel (MBZ) zu werben. Das Ergebnis war begeisternd. Mehr als 120 Teilnehmer schickten die Lösungen der ersten Aufgaben ein, die den Lehrern mit dem ersten Rundschreiben zugegangen waren. Obwohl in den folgenden Briefen höhere Anforderungen gestellt wurden, blieben bis zum Ende der ersten Serie 60 Teilnehmer bestehen. Die Briefzirkel sind so beliebt geworden, daß wir jetzt beschlossen haben, einen Zirkel auch für die 7. Klassen einzurichten."

Wie schätzen die Schüler den MBZ ein?

Rosemarie Freude aus Obercunnersdorf:

„... Wie bei jeder Olympiade, so zeigte es sich auch diesmal, daß nur durch ständiges Training gute Leistungen erzielt werden können. Daher begrüße ich es, daß ich ab Mai dieses Jahres (1967 d. Red.) durch den MBZ 8 Gelegenheit erhielt, systematisch für die kommenden Olympiaden trainieren zu können ..."
Besonders begrüßten es die Schüler, daß in einer Rangliste die besten Schüler genannt werden. Tilmann Weidner aus Rennersdorf meint dazu:

„... Mir gefällt es sehr, daß nach jeder Folge eine Einzel- und Gesamtwertung erscheint, so daß man ständig über seinen Platz informiert ist, was natürlich einen Ansporn bedeutet ..."

Hier einige Aufgabenbeispiele für die 8. Klasse:

303 Zerlegt die Zahl 45 so in vier Summanden, daß alle Resultate gleich sind, wenn ihr zum ersten Summanden 2 addiert, vom zweiten 2 subtrahiert, den dritten mit 2 multipliziert und den vierten Summanden durch 2 dividiert!

304 Für welche x gilt: $|x| > 2x$?

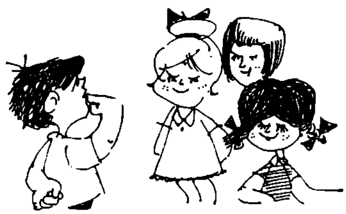
305 In einem Werk sind 35% aller Beschäftigten Frauen, die übrigen sind Männer. Es arbeiten in diesem Werk 252 Männer mehr als Frauen. Bestimme die Gesamtzahl der Beschäftigten!

306 Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie Inge jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt. Wie alt ist jeder?

307 In der Fußballoberliga spielen 14 Mannschaften in Hin- und Rückspielen um den Titel eines Fußballmeisters der DDR. Wieviel Spiele sind notwendig?

Eine Knobelgeschichte

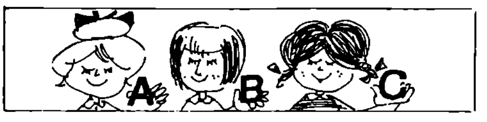
3. Teil



Und wieder ist Mathematikzirkel. Mehrere Schüler behaupten, die letzte Knobelaufgabe gelöst zu haben. Einer von diesen wird vorübergehend aus dem Klassenzimmer geschickt. Indessen werden drei Zirkelteilnehmer bestimmt, die sich für alle sichtbar nebeneinander aufstellen und denen in gemeinsamer Absprache jeweils ein laut Knobelaufgabe zulässiger Vor- sowie auch Zuname zugesprochen wird. Danach ruft man den erfolgreichen Knobler ins Zimmer zurück. Zunächst nennen ihm die drei Mitspielerinnen ihre neuen Vornamen. Mit einem „Dankeschön" ergreift der Knobler ein Stück Kreide, das er bei seinen ersten drei Fragen jeweils sichtbar hochhält. Es ergibt sich das folgende Frage-Antwortspiel:

Natürlich bekunden die Zirkelteilnehmer an dieser eleganten Lösung großes Interesse. Und so wird sie besprochen. „Eine Vorbemerkung muß ich allerdings machen", sagt der Zirkelleiter. „Es gibt Fragen, auf die die Mädchen unseres Spieles bei Beachtung der ihnen auferlegten Spielregeln nicht antworten können." — „Nun zu den Fragen. Sie haben die Gestalt: Frage an X: „Wie antwortet Y auf die Frage, ob er Weiß heißt?" Dabei sind für X und Y verschiedene Vornamen der Mädchen einzusetzen."

Um zu erkennen, welche Informationen aus der Beantwortung einer solchen Frage erhalten werden, werden alle möglichen Fälle in Betracht gezogen und anschließend wird eine Auswertung vorgenommen. Die erhaltenen



	Antwort:		
1. Frage an Annette: „Ist das ein Stück Kreide?"	„Ja".		
2. Frage an Beate: „Ist das ein Stück Kreide?"		„Nein".	
3. Frage an Christa: „Ist das ein Stück Kreide?"			„Ja".
4. Frage an Beate: „Heißt Christa Unsinn?"		„Ja".	

Nach diesem Gespräch erklärt der Knobler: „Meine drei Mitspielerinnen heißen Annette Unsinn, Beate Schwarz und Christa Weiß." Die Zirkelteilnehmer zollen der Leistung des Knoblers den nötigen Beifall. Bei der anschließenden Diskussion wird erörtert, daß der Knobler auch damit rechnen mußte, auf seine drei ersten Fragen zweimal die Antwort „Nein" und einmal die Antwort „Ja" zu erhalten. Desgleichen wird mit bemerkt, daß er gegebenenfalls auch mit insgesamt drei Fragen und den zugehörigen Antworten auskommt.

Die letzte Feststellung nimmt der Zirkelleiter zum Anlaß, zu erklären, daß sich die gestellte Aufgabe in jedem Falle mit nur zwei Fragen und den dazugehörigen Antworten lösen läßt.

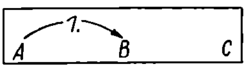
Antworten hängen zum einen davon ab, welchen der Namen Schwarz, Unsinn und Weiß die befragte Person X hat. Weiterhin kann in jedem der drei zu betrachtenden Fälle die Person Y zwei verschiedene Nachnamen haben. Also sind insgesamt sechs Fälle zu betrachten. Die entsprechend aufgestellte Tabelle wird um die Antworten von X ergänzt:

X	Y	Antwort von X
S	U	—
S	W	„Nein".
U	S	„Ja" oder „Nein".
U	W	„Ja" oder „Nein".
W	S	„Ja".
W	U	—

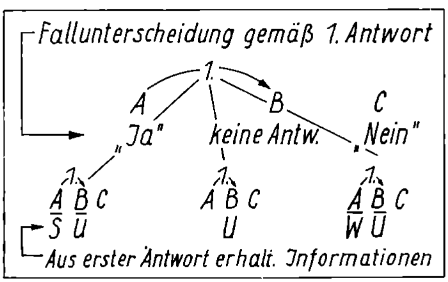
Dabei bedeuten die Buchstaben S, U und W Abkürzungen für die Namen Schwarz, Unsinn und Weiß. Ein Strich bedeutet, daß die befragte Person X nicht antworten kann. Die nunmehr vorgenommene Auswertung ergibt:

Antwort von X über Y	erhaltene Informationen
„Ja"	X heißt nicht Schwarz und Y heißt nicht Unsinn
—	Y heißt Unsinn
„Nein"	X heißt nicht Weiß und Y heißt nicht Unsinn

Nach dieser Analyse wird die zulässige Frage erstmals an Annette über Beate gerichtet. Dies wird in der angegebenen Weise symbolisch an der Tafel fixiert:



Je nach der erhaltenen Antwort sind drei Fälle zu unterscheiden. Die mit der Antwort jeweils erhaltenen Informationen werden ebenfalls symbolisch fixiert, wobei z. B. ein unter A aufgeschriebenes W bedeutet „Annette heißt Weiß" und ein unter A aufgeschriebenes $\overline{W}$ bedeutet hingegen „Annette heißt nicht Weiß".



Falls auf die erste Frage die Antwort „Ja" erteilt wird, entscheidet man sich im Zirkel dafür, die zweite Frage an Beate über Christa zu richten. Die erhaltenen Antworten bedingen eine weitere Fallunterscheidung und führen zu weiteren Informationen. Anschließend lassen sich aus den aus der ersten und zweiten Antwort erhaltenen Informationen die Nachnamen von Annette, Beate und Christa festlegen (siehe Abb. unten).

Das teilweise abgedruckte Lösungsschema bringt u. a. zum Ausdruck, daß mit der Antwort „Ja" auf die erste Frage die Informationen „Annette heißt nicht Schwarz" und „Beate heißt nicht Unsinn" erhalten werden, daß mit der Antwort „Ja" auf die zweite Frage zusätzlich die Informationen „Beate heißt nicht Schwarz" und „Christa heißt nicht Unsinn" erhalten werden und daß gemäß dieser Informationen sich die Namen der so antwortenden Mädchen ergeben als Annette Unsinn, Beate Weiß und Christa Schwarz.

Auch in den verbleibenden sechs Fällen ergibt sich, daß bei geeignet gestellter zweiter Frage entweder die Nachnamen von Annette, Beate und Christa personell festgelegt werden, oder daß die betreffende Antwortmöglichkeit nicht eintreten kann. Zur weiteren Beschäftigung stellt der Zirkelleiter noch zwei Aufgabenvarianten:

4. a''') wie a; b''') wie b;

c''') Welche Informationen erhält ein Fragender über die Zuordnung von Vor- und Zunamen der drei Mädchen durch die Beantwortung einer Frage des Typs:

Frage an X: „Steht bei alphabetischer Ordnung der Zuname von Y vor dem von Z? Dabei sind für X, Y und Z jeweils verschiedene der Vornamen Annette, Beate und Christa einzusetzen.

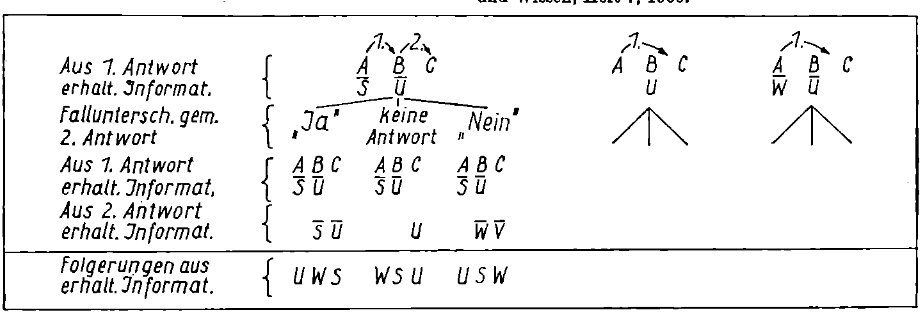
5. a'''') wie a, jedoch ist der Name Unsinn durch Grau zu ersetzen.

b'''') wie b, jedoch ist der Name Unsinn durch Grau zu ersetzen.

c'''') wie c'''.

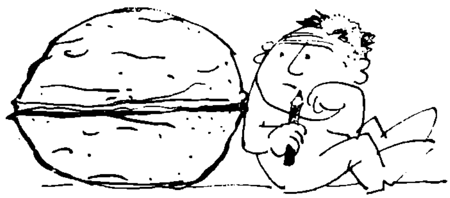
W. Träger

In diese Knobelgeschichte sind zwei bekannte Knobelaufgaben eingearbeitet worden:
1. 60. Aufgabe aus Rupassow, Mathematische Denkaufgaben, Volk und Wissen, 1965.
2. 46. Aufgabe aus der Artikelserie „Wer findet die Lösungen?" von Prof. Karl aus der Fachzeitschrift „Mathematik in der Schule" für Lehrer, Verlag Volk und Wissen, Heft 7, 1966.



Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

*letzter Einsendetermin 31. Dezember 1968**



*Mit Heft 5 endet der *alpha*-Wettbewerb des Jahres 1968. Am 10. Januar 1969 gehen die letzten Antwortkarten an die Teilnehmer, so daß jeder, der bis zum 31. 1. 1969 seine bis dahin erhaltenen Karten geschlossen einsendet, von der Jury eingestuft wird. Die Namen der Preisträger und weiterer aktiver Teilnehmer werden in Heft 2/69 veröffentlicht. Wer im Jahre 1968 mindestens 7 Karten erwarb und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde. Wer seine Karten als Beleg zurückhaben möchte, lege ein frankiertes Kuvert mit seiner Adresse bei.

5 **309** Ein Vater ist viermal so alt wie sein Sohn. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter des Vaters und das seines Sohnes (in ganzen Zahlen) angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die größer als 50, aber kleiner als 60 ist. Ermittle das Lebensalter von Vater und Sohn! OL Th. Scholl, Berlin

310 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 121, ihre Differenz beträgt 45. Wie lauten die Zahlen? OL Th. Scholl, Berlin

311 In dem Wort **alpha** sind die Buchstaben so durch Grundziffern zu ersetzen, daß man eine fünfstellige Zahl erhält, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

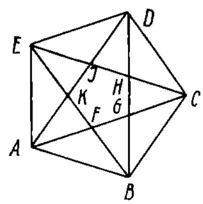
a) Gleichen Buchstaben entsprechen gleiche Ziffern, und verschiedenen Buchstaben entsprechen verschiedene Ziffern.

b) Die Quersumme dieser fünfstelligen Zahl ist eine Primzahl.

c) Die aus den Ziffern *a, h, l, p, al* und *aph* bestehenden Zahlen sind ebenfalls Primzahlen. Ing. H. Decker, Köln

W(5)312 Die Schüler der Klassen 5a, 5b und 5c einer Oberschule sammelten fleißig gebrauchte Flaschen, die sie zur Sammelstelle brachten. Der Erlös dafür wurde dem Solidaritätskonto *Hilfe für Vietnam* zugeführt. Die Schüler der Klassen 5a und 5b sammelten zusammen 790 Flaschen; die Schüler der Klassen 5b und 5c brachten es zusammen auf 970 Flaschen, und die Schüler der Klassen 5a und 5c trugen insgesamt 920 Flaschen zusammen. Wieviel Flaschen wurden je Klasse gesammelt? Welcher Geldbetrag konnte dem Solidaritätskonto gutgeschrieben werden, wenn für jede abgelieferte Flasche 0,05 M bezahlt wurde? OL Th. Scholl, Berlin

W(5)313 In einem regelmäßigen Fünfeck sind alle Diagonalen gezeichnet. Wieviel verschiedene gleichschenklige Dreiecke sind in der so entstandenen Figur vorhanden? Dabei gelten zwei Dreiecke als verschieden, wenn sie in mindestens einem Eckpunkt nicht übereinstimmen. Doz. L. M. Lopowok, Lugansk



314 Es ist eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus um sich selbst zu verlängern. Zur 6
Konstruktion dürfen nur ein Lineal und ein Zeichendreieck verwendet werden; dabei darf das Lineal nicht zum Messen, sondern nur zum Zeichnen von Geraden benutzt werden. Dr. G. Hesse, Radebeul

315 Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen ist $3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$; der größte gemeinsame Teiler dieser Zahlen ist 45. Eine der beiden Zahlen, deren k. g. V. und g. g. T. gegeben sind, lautet 4725. Wie heißt die zweite dieser Zahlen? H. Buders, Zanzibar Town

316 In einem Dreieck ABC ist ein Außenwinkel in A um 29°, ein Außenwinkel in B um 49° kleiner als ein Außenwinkel in C. Es ist die Größe der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC zu berechnen!

Martina Schumann, 24. OS Leipzig

W(6)317 In die Kästchen des abgebildeten Quadrates sind neun Zahlen so eingetragen worden, daß das Produkt der drei Zahlen jeder Zeile und jeder Spalte stets 270 beträgt. Auf welche Weise und wie oft lassen sich die eingetragenen neun Zahlen umstellen, wenn dabei die gegebene Eigenschaft erhalten bleiben soll?

1	10	27
15	9	2
18	3	5

Dr. G. Hesse, Radebeul

W(6)318 In der folgenden Aufgabe ist jedes Sternchen durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht. Dabei ist zu beachten, daß am Anfang einer Zahl nicht die Ziffer 0 stehen darf.

```
2 * * : * * = * *
* 7
-----
* 1 *
* * *
-----
    0
```

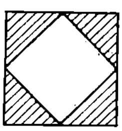
W. Klonner, Torgau

7

319 Einem gegebenen spitzen Winkel α mit dem Scheitelpunkt S ist ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 so einbeschrieben, daß die Schenkel des Winkels α Tangenten an den Kreis k_1 sind. Es soll ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 konstruiert werden, der den Kreis k_1 und die Schenkel des Winkels α berührt und dessen Mittelpunkt M_2 zwischen S und M_1 liegt. Die Konstruktion ist zu begründen!

OL Th. Scholl, Berlin

320 Ein Junge schneidet die vier Ecken eines quadratischen Stück Papier so ab, daß jeder der geraden Schnitte durch die Mitten zweier benachbarter Quadratseiten verläuft.



a) Beweise, daß das nach Abschneiden der vier Ecken verbleibende Papierstück wiederum die Gestalt eines Quadrates hat!

b) Wie oft muß der Junge diese Tätigkeit am jeweils verbleibenden quadratischen Papierstück wiederholen, damit das schließlich entstandene quadratische Reststück einen Flächeninhalt besitzt, der weniger als ein Tausendstel der Ausgangsfläche beträgt?

W. Träger, Döbeln

321 Gegeben sind eine Gerade g und eine Strecke $\overline{AB}$, deren Verlängerung senkrecht auf g steht. Für welchen Punkt P der Geraden g ist der Winkel $\sphericalangle APB$ am größten? (Anleitung: Betrachte den Kreis durch die Punkte A, B und P!).

W(7)322 Gegeben sind zwei regelmäßige Vielecke. Die Anzahl der Seiten des zweiten Vielecks ist doppelt so groß wie die des ersten. Jeder Innenwinkel des ersten Vielecks ist um 10° kleiner als jeder des zweiten. Ermittle die Anzahl der Seiten des ersten regelmäßigen Vielecks!

Ing. H. Decker, Köln

W(7)323 Die rationale Zahl $\frac{77}{65}$ ist als Summe zweier positiver rationaler Zahlen mit den Nennern 5 und 13 darzustellen!

Ing. H. Decker, Köln

324 Faltgeometrie 8

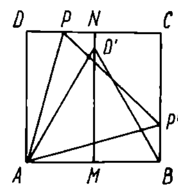
Ein quadratisches Blatt Papier mit den Ecken A, B, C, D soll mehrmals so gefaltet werden, daß ein gleichseitiges Dreieck entsteht, von dem eine Ecke mit einer Ecke des Quadrates zusammenfällt und die beiden anderen Ecken auf den Seiten des Quadrates liegen. Dabei darf aber nur nach den folgenden drei Methoden gefaltet werden:

a) Es wird längs einer bekannten Strecke gefaltet;

b) es wird so gefaltet, daß zwei bereits bekannte Punkte auf eine bekannte Strecke zu liegen kommen;

c) es wird so gefaltet, daß ein Punkt fest bleibt und ein anderer Punkt auf eine bekannte Strecke zu liegen kommt.

Nach jeder durchgeführten Faltung wird das Papierblatt wieder entfaltet.



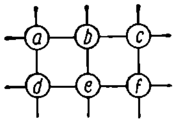
Durchführung der Faltungen (vgl. Abbildung): Wir falten zunächst so, daß die Strecke $\overline{AD}$ mit der Strecke $\overline{BC}$ zusammenfällt und erhalten die Faltkante $\overline{MN}$. Dann falten wir so, daß der Punkt A fest bleibt und Punkt D auf einen Punkt D' der Strecke $\overline{MN}$ zu liegen kommt. Wir erhalten die Faltkante $\overline{AP}$, wobei P auf $\overline{DN}$ liegt. Endlich falten wir längs der Strecke $\overline{AC}$, so daß der Punkt P auf einen Punkt P' der Strecke $\overline{BC}$ zu liegen kommt.

Wir behaupten nun, daß dann das *Dreieck $AP'P$ gleichseitig* ist und daher die verlangten Eigenschaften hat, weil P' auf der Quadratseite $\overline{BC}$ und P auf der Quadratseite $\overline{CD}$ liegt.

Aufgabe: Die Faltung ist durchzuführen, und die obige Behauptung ist zu beweisen.

Prof. Dr. N. Tschajkovskyj, Lwow

325 Es ist zu beweisen: Sind a, b, c, d, e und f beliebige natürliche Zahlen mit der Eigenschaft, daß $abc = def$ und $ad = be = cf$ gilt, so ist das Produkt der sechs Zahlen $abcdef = p$



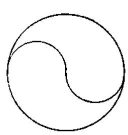
die sechste Potenz einer natürlichen Zahl. (In der obenstehenden Figur sind also die Produkte der jeweils auf parallelen Geraden stehenden Zahlen einander gleich.)

W. Träger, Döbeln

326 Bestimme zu $p = 6^6$ die natürlichen Zahlen a, b, c, d, e und f so, daß sie den Bedingungen der Aufgabe 326 genügen, daß sie sämtlich voneinander verschieden sind und a jeweils die kleinste sowie f die zweitkleinste dieser sechs Zahlen sind.

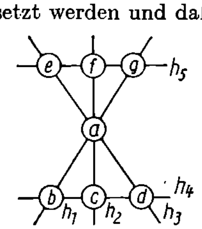
W. Träger, Döbeln

W(8)327 Die untenstehend abgebildete Kreisscheibe, die bereits durch zwei Halbkreise in zwei Gebiete zerlegt wurde, ist durch drei Geraden so weiter zu zerlegen, daß *acht* einander paarweise inhaltsgleiche *Gebiete* entstehen. (Konstruktion und Beweis!)



Dr. E. Schröder, Dresden

W(8)328 Die in den Kreisen stehenden Buchstaben $a, b, \ldots, g$ sind so durch die Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ zu ersetzen, daß für verschiedene Buchstaben verschiedene Zahlen eingesetzt werden und daß die Summen der



auf jeder markierten Geraden $h_1\ h_2 \ldots, h_5$ stehenden Zahlen sämtlich gleich sind.

Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?

W. Träger, Döbeln

329 Drei Brüder wollen eine Anzahl Äpfel zu gleichen Teilen unter sich verteilen. Da sich die Anzahl der Äpfel nicht durch drei teilen läßt, schlägt der eine vor, fünf Äpfel der Schwester abzugeben, wodurch eine gleichmäßige Verteilung der Äpfel unter den drei Brüdern möglich sein würde. Dazu macht der zweite den Vorschlag, daß jeder von ihnen der Schwester außerdem noch den neunten Teil der Anzahl seiner Äpfel abgeben sollte, weil dann die Schwester ebensoviele Äpfel wie jeder der drei Brüder haben würde. 9

Wieviel Äpfel waren es im ganzen?

StR. G. Schulze, Herzberg

330 Es ist folgender Satz zu beweisen:
Für alle Dreiecke ABC mit dem Winkel $\sphericalangle BCA = \gamma = 60°$ und den Seiten $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab\,.$$

Anleitung: Benutze eine der Höhen h_a bzw. h_b als Hilfslinien und wende den pythagoreischen Lehrsatz an!

W. Träger, Döbeln

331 Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$, die kürzer als 500 cm ist und die folgenden Eigenschaften hat: Trägt man auf $\overline{AB}$, von einem Endpunkt beginnend, wiederholt

eine	Strecke	von	2 cm	Länge,	(1)
,,	,,	,,	3 cm	,,	(2)
,,	,,	,,	4 cm	,,	(3)
,,	,,	,,	5 cm	,,	(4)
,,	,,	,,	6 cm	,,	(5)

ab, so verbleibt jeweils eine Reststrecke von 1 cm Länge.

Trägt man jedoch eine Strecke von 7 cm Länge ab, so verbleibt keine Reststrecke. (6)

a) Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$?

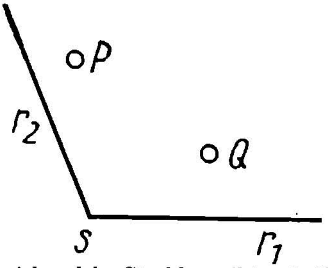
b) Welche der obigen Bedingungen (1), (2), (3), (4), (5), (6) sind überflüssig, so daß die Länge der Strecke $\overline{AB}$ auch dann noch eindeutig bestimmt ist, wenn diese Bedingungen gestrichen werden?

Dr. E. Schröder, Dresden

W(9)332 Das Urlauberschiff des FDGB *Fritz Heckert* hat Kabinen für je zwei, drei und vier Personen. Sind alle 159 Kabinen voll belegt, so kann das Schiff 379 Fahrgäste befördern. Die Anzahl der Kabinen für zwei Personen ist achtmal so groß wie die der Kabinen für vier Personen. Wieviel 2-Personen-, 3-Personen- und 4-Personen-Kabinen hat das Urlauberschiff?

OStR Dr. R. Lüders, Berlin

W(9)333 Es seien r_1 und r_2 zwei auf der Zeichenebene senkrecht stehende Spiegel, die sich in der Geraden s schneiden. Die Punkte P und Q liegen in der Zeichenebene. Wir fassen Q als Lichtquelle auf und fragen nach sämtlichen von Q ausgehenden Lichtstrahlen, die P treffen.



a) Wieviele solche Strahlen gibt es? (Reflexionsgesetz anwenden!)

10 b) Führe die Konstruktion dieser Strahlen durch!

Dr. E. Schröder, Dresden

334 In der Theorie der fastperiodischen Funktionen spielt ein kombinatorischer Hilfssatz eine Rolle, dem man nach dem bedeutenden Mathematiker *Hermann Weyl* (1885 bis 1955) etwa die folgende Fassung geben kann: Eine Schulklasse bestehe aus einer bestimmten Anzahl n von Jungen und einer bestimmten Anzahl m von Mädchen, wobei $n \leqq m$ sei (z. B. $n = 12$, $m = 14$). Jeder Junge sei mit einer bestimmten Anzahl von Klassenkameradinnen befreundet, wobei natürlich mehrere Jungen mit demselben Mädchen und mehrere Mädchen mit demselben Jungen befreundet sein können (also ein Junge mehrere Freundinnen haben kann). Ein Spaßvogel der Klasse wirft nun die Frage auf, ob es bei der augenblicklichen Verteilung der Freundschaften möglich ist, jeden Jungen mit einem ihm befreundeten Mädchen zu verheiraten. Nach kurzer Überlegung erkennen die Schüler, daß hierfür sicher *notwendig* ist, daß je k Jungen ($1 \leqq k \leqq n$) stets insgesamt mit mindestens k Mädchen befreundet sind; denn gäbe es eine Gruppe von k (z. B. 7) Jungen, die insgesamt mit weniger als k Mädchen (z. B. nur 5 Mädchen) befreundet sind, so könnten nicht alle Jungen dieser Gruppe eine ihnen befreundete Klassenkameradin heiraten. Zeige, daß die genannte Bedingung auch *hinreichend* ist, d. h., sind je k Jungen ($1 \leqq k \leqq n$) der Klasse stets insgesamt mit mindestens k Klassenkameradinnen befreundet, so kann jeder Junge der Klasse eine ihm befreundete Klassenkameradin heiraten!

Prof. Dr. G. Asser, Greifswald

335 Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle ACB = 90°$ zu konstruieren, von dem s_c und h_c bekannt sind. (s_c Länge der Seitenhalbierenden von $\overline{AB}$, h_c Länge der Höhe auf $\overline{AB}$.)
Wieviele Lösungen hat diese Aufgabe?

StR. G. Schulze, Herzberg

336 Wie heißt die Gleichung der quadratischen Funktion, deren Kurve durch den Punkt P_1 (1; 2) geht und in den Punkten mit den Abszissen $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$ die x-Achse schneidet?

StR. G. Schulze, Herzberg

337 Es ist zu beweisen, daß es keine ganze Zahl n gibt, für die die Zahl

$$n^2 - n + 13 \text{ durch 289 teilbar ist.}$$

Doz. L. M. Lopowok, Lugansk

W(10/12)338 Der neue sowjetische Personenkraftwagen SIL 114 des Moskauer *Lichatschow-Automobilwerkes* erreicht nach dem Start in 13,5 s die Geschwindigkeit von 100 km/h.

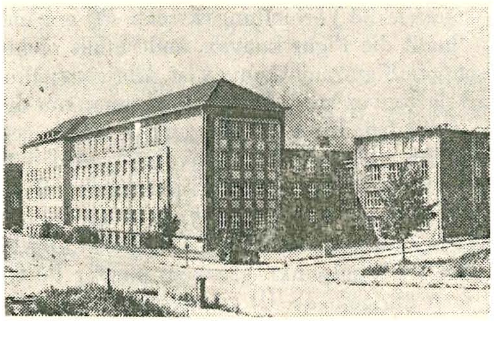
a) Wieviel Meter hat der Kraftwagen in dieser Zeit zurückgelegt, wenn man eine konstante Beschleunigung annimmt?

b) Wieviel Sekunden nach dem Start hat der Wagen eine Entfernung von 4 km zurückgelegt, wenn er bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit von 190 km/h mit konstanter Beschleunigung weiterfährt und dann die Höchstgeschwindigkeit beibehält?

OStR. Dr. R. Lüders, Berlin

W(10/12)339 Streicht man von einer natürlichen Zahl (in dekadischer Darstellung) die letzten drei Ziffern weg, so erhält man die dritte Wurzel aus dieser Zahl. Wie lautet diese Zahl?

Doz. L. M. Lopowok, Lugansk



An der Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik (8019 Dresden, Elisenstr. 25) werden für den Einsatz in Betrieben, die elektronische Datenverarbeitungsmaschinen entwickeln, produzieren oder einsetzen, Ingenieure für Programmierung (siehe S. 131), Ing. f. elektronische Datenverarbeitungsanlagen, Ing. d. Elektrofeinwerktechnik, Ingenieurökonomen der Elektrotechnik/Datenverarbeitung ausgebildet.
Die Schule verfügt über viele modern aufgebaute und ausgestattete Labors. Im Studienjahr 1968/69 studieren: etwa 1400 Studenten im Direktstudium, 2000 Studenten im Abendstudium (davon 1200 in 32 Außenstellen), 300 Studenten im Fernstudium (nur in der Fachrichtung Elektronische Datenverarbeitungsanlagen), 150 Ingenieure und Ingenieur-Ökonomen im postgradualen Studium, d.h., zur weiteren Vervollkommnung ihrer Kenntnisse.

Was ist ein Viereck?

Wähle beliebig vier Punkte A, B, C, D in der Ebene. Sie sollen die Ecken eines Vierecks werden. Dazu dürfen sie natürlich nicht alle auf einer Geraden liegen, etwa so wie in Abb. 1. Wie steht es, wenn die Punkte so liegen wie in den Abbildungen 2 oder 3? Dabei ist immer in der Reihenfolge A-B-C-D zu verbinden. Auch die in diesem Fall entstehenden Figuren bezeichnen wir *nicht* als Viereck. Wenn also die vier Punkte A, B, C, D die Ecken eines Vierecks werden sollen, so dürfen nie drei von ihnen auf einer Geraden liegen. Das Entsprechende muß von fünf Punkten A, B, C, D, E verlangt werden, die ein Fünfeck bilden sollen, usw.
Wenn wir die Ecken A, B, C, D dieser Forderung entsprechend so wählen, daß es nie durch drei dieser Punkte eine Gerade gibt, so kann die Figur von Abb. 4 entstehen.

Wir wählen jetzt einen Punkt E außerhalb des Vierecks wie in Abb. 5 und denken uns den Punkt C wie durch ein Gummiband geradlinig zu Punkt E hin gezogen, während die Punkte A, B, D fest an ihrem Platze bleiben. Der Punkt C gerät dabei schließlich auf die Diagonale BD, so daß in diesem Augenblick das Viereck $ABCD$ aufgehört hat zu existieren (Abb. 6). Ziehen wir Punkt C weiter, so kommt er, nachdem zwischendurch $ABCD$ ein eingeknicktes Viereck gebildet hat, (Abb. 7) auf die Strecke AB zu liegen (Abb. 8). Wieder ist der Viereckscharakter der Figur verloren gegangen. Wir lassen uns aber dadurch nicht beirren und ziehen weiter. Jetzt kommt Punkt C auf die andere Seite der Geraden AB zu liegen, es entsteht wieder ein Viereck, aber eines, das ihr vielleicht nicht gewohnt seid, als Viereck zu betrachten (Abb. 9).

Wir stellen noch einmal drei charakteristische Lagen des Punktes C zusammen (Abb. 4, 7, 9). Abb. 4 stellt ein euch wohlvertrautes Beispiel eines Vierecks dar. Dabei kann Punkt C noch beliebig bewegt werden, sofern er nicht eine der Geraden DB, DA, AB überschreitet oder auf einer dieser Geraden liegt. Das Viereck von Abb. 4 heißt „konvexes" Viereck. Ihr habt vielleicht einmal von einer Konvexlinse — im Gegensatz zu einer Konkavlinse — gehört. Nun, wir haben es hier nicht mit einem Körper, also einem dreidimensionalen, sondern mit einem zweidimensionalen Gebilde, mit einer Fläche, zu tun. Aber die Unterscheidung konvex — nichtkonvex können wir sowohl bei Körpern als auch bei beliebigen Flächen machen. Man muß dazu nur wissen, was unter dem Inneren des Körpers oder der Fläche zu verstehen ist. Wir zeichnen eine beliebige Fläche (Abb. 10) und wählen zwei Punkte P, Q im Inneren der Figur. Wenn bei jeder Lage der Punkte P und Q im Inneren die Verbindungsstrecke PQ nur aus inneren Punkten der Figur besteht, dann heißt die Figur konvex, andernfalls nichtkonvex. Ihr seht, daß die in Abb. 11 gezeichnete Figur nichtkonvex ist. Übrigens: Man kann diese Figur leicht „abrunden", so daß sie konvex wird. Dazu braucht man nur die Punkte A und B durch eine Strecke zu verbinden. Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf Körper übertragen. Die Figur von Abb. 4 stellt also ein konvexes Viereck dar. Aber auch die Figuren von Abb. 7 und 9 stellen Vierecke dar; sie wären nach unserer Definition als nichtkonvex zu bezeichnen. Bei Abb. 9 braucht ihr nur durch den Schnittpunkt der Strecken AB und CD, den wir mit S bezeichnen wollen, eine Strecke PQ wie in Abb. 12 zu legen. Dann enthält PQ den Punkt S, der ein Randpunkt, also kein innerer Punkt der Figur ist. Dieses Viereck bezeichnet man übrigens als Überschlagviereck.

Würden wir in Abb.4 die Eckpunkte in der Reihenfolge *A-C-B-D* verbinden, so entstünde natürlich wieder ein nichtkonvexes Viereck. Ihr seht daran, daß es für die Entscheidung, ob ein Viereck, das nur durch seine Eckpunkte gegeben ist, konvex oder nichtkonvex ist, von ausschlaggebender Bedeutung ist, wie der Linienzug, der die Punkte verbindet, verläuft.

Wir wollen noch einmal zu den Figuren der Abb. 4 und 7 zurückkehren. Euch ist der Satz bekannt, daß die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Daraus kann man leicht die Winkelsumme im Viereck berechnen. Ihr braucht nur eine Diagonale zu ziehen, die das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, und die Winkelsumme für diese beiden Dreiecke zu bilden. Durch Addition findet ihr für die Winkelsumme des Vierecks 360°.

In Abb. 12 ist das Viereck *ABCD* schon in zwei Dreiecke zerlegt. Die Winkelsumme setzt sich aus den Winkeln bei *A*, *B*, *C*, *D* zusammen. Sie muß, wie ihr aus Abb. 12 leicht erkennt, kleiner als 360° sein, da die — um die Winkel bei *S* vergrößerte — Winkelsumme der beiden Dreiecke *ASD* und *CBS* zusammen schon 360° beträgt. Ihr seht daraus, daß man bei der Formulierung des Satzes: „Im Viereck ist die Winkelsumme 360°", vorsichtig sein muß. Wir wollen daher sicherheitshalber den Satz so formulieren: „In jedem konvexen Viereck beträgt die Winkelsumme 360°".

Vielleicht überlegt ihr euch einmal, wie groß die Winkelsumme im konvexen Fünfeck, im konvexen Siebeneck, im konvexen 100-Eck ist. Der Beweis kann übrigens auch auf anderem Wege geführt werden, als er hier für das Viereck angedeutet wurde. L. Görke

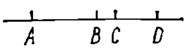


Abb. 1

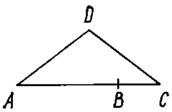


Abb. 2

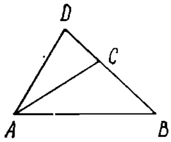


Abb. 3

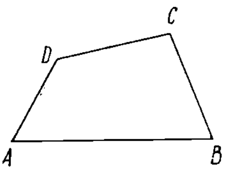


Abb. 4

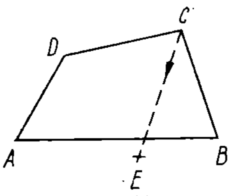


Abb. 5

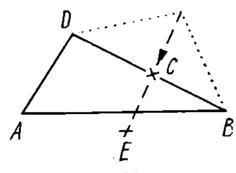


Abb. 6

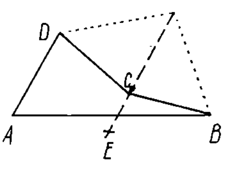


Abb. 7

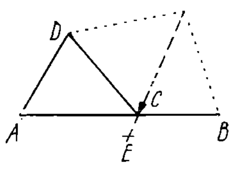


Abb. 8

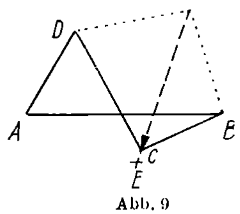


Abb. 9

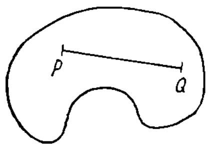


Abb. 10

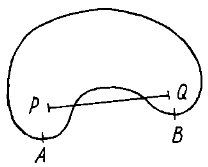


Abb. 11

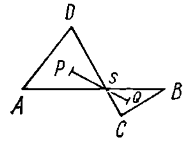


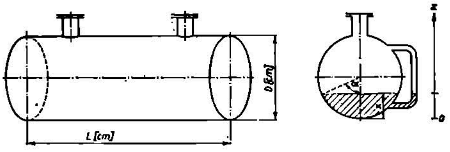
Abb. 12

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Herbert Dallmann

Direktor des Instituts für Mathematik
der Technischen Hochschule für Chemie Carl Schorlemmer, Leuna-Merseburg

287 In der chemischen Industrie werden zum Aufbewahren von Flüssigkeiten vielfach Lagertanks verwendet, die die Form von liegenden Kreiszylindern haben.



Zum Beobachten der Flüssigkeitshöhe wird ein kommunizierendes Standrohr angebracht. Für einen solchen Lagertank ($L = 500$ cm, $D = 200$ cm) soll das Standrohr mit einer Skala versehen werden, die das Ablesen des Flüssigkeitsvolumens in Litern gestattet.

a) Stelle eine Formel auf, die den Zusammenhang zwischen dem Flüssigkeitsvolumen V und dem Winkel α (s. Skizze) darstellt!

b) Rechne für die Standhöhen $x = 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160$ cm den Flüssigkeitsinhalt V in Litern aus!

Als im Jahre 1954 die Technische Hochschule für Chemie „Carl Schorlemmer" gegründet wurde, wählte man mit Vorbedacht als Standort Merseburg, nicht weit entfernt von den beiden Chemiegiganten Leuna und Buna.
Die engste Verbindung von Wissenschaft und Produktion war von Anfang an der Leitgedanke der Hochschule. An ihr studieren zur Zeit 2500 Direktstudenten in folgenden drei Fakultäten:

Stoffwirtschaft (Ausbildung zu Diplomchemikern)
Verfahrenstechnik (Ausbildung zu Diplomingenieuren)
Ing.-Ökonomie (Ausbildung zu Diplomingenieurökon.)

Mit der Gründung der Hochschule nahm das Institut für Mathematik seine Tätigkeit auf und entwickelte eine intensive mathematische Ausbildung in den einzelnen Fakultäten. Die gründliche Wissensaneignung in Mathematik ist für technische und ökonomische Berufe von großer Bedeutung, weil dieses Fach über die besten Hilfsmittel verfügt, immer tiefer die Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge in Natur und Gesellschaft zu erfassen.
Ab Herbst 1965 beginnt in Zusammenarbeit mit der Universität Halle die Ausbildung von Diplommathematikern mit verfahrenstechnischen Grundkenntnissen, die für einen Einsatz in verfahrenstechnischen Bereichen der chemischen Industrie und des Apparatebaus geeignet sind. Das Studium umfaßt neben einer intensiven Ausbildung in den Grundlagen der Mathematik, in Rechentechnik, in Datenverarbeitung, in modernen angewandten mathematischen Disziplinen noch die Aneignung von Wissen und Fertigkeiten in verschiedenen verfahrenstechnischen Fächern. Diese so ausgebildeten Mathematiker werden später in der Lage sein, verfahrenstechnische Probleme mit mathematischen Methoden zu behandeln, insbesondere die Modellierung und Optimierung chemischer Prozesse durchzuführen.
In der Forschung beschäftigen sich die Mitarbeiter des Institutes für Mathematik vorwiegend mit mathematischen Methoden der Optimierung bei der Projektierung und Steuerung chemisch-technologischer Prozesse. In der modernen chemisch-technologischen Produktion wird ein komplizierter Komplex von Apparaten angewandt. Man ist dabei interessiert, nicht nur für den einzelnen Apparat, sondern für die Gesamtheit der sich wechselseitig beeinflussenden Apparate eine optimale Arbeitsweise zu berechnen.
Eine Möglichkeit zur Annäherung an eine optimale Arbeitsweise besteht gewissermaßen in einer unmittelbaren künstlichen Störung der Prozesse, d. h., man versucht, durch direkte Änderung der steuerlosen Einflußgrößen (etwa Temperatur, Druck u. a.) eine Verbesserung zu erreichen.
Eine andere Methode benutzt in starkem Maße die Mathematik. Sie setzt aber die Kenntnis des mathematischen Modells, d. h., die Gesamtheit aller mathematischen Beziehungen, die den Prozeß hinreichend genau beschreiben, voraus.

Die Bestimmung des mathematischen Modells eines Prozesses ist eine der wichtigsten und kompliziertesten Aufgaben bei der Steuerung chemisch-technologischer Prozesse; hier ist die Mitarbeit der Mathematiker zweckmäßig.
Ausgehend von diesem Modell versucht man nun mit mathematischen Methoden — unter starker Einbeziehung der elektronischen Rechentechnik — eine optimale Arbeitsweise zu errechnen; dabei stehen vor den Mathematikern große Aufgaben bei der Anwendung bekannter und der Entwicklung neuer Optimierungsmethoden. Hierzu haben naturgemäß die an der Technischen Hochschule für Chemie ausgebildeten Mathematiker einen wesentlichen Beitrag zu leisten.


1967

ДЕКАБРЬ

16

СУББОТА

№ 293 (13063)

Орган Центрального Комитета ВЛКСМ

ПРОЛЕТАРИИ ВСЕХ СТРАН, СОЕДИНЯЙТЕСЬ!

КОМСОМОЛЬСКАЯ ПРАВДА

СТАРТУЕТ ОЛИМПИАДА!

Задачи по математике

1. (7—10). Какое наибольшее число веревочек, соединяющих соседние узлы волейбольной сетки, можно разорвать так, чтобы сетка не распалась на куски, если размеры сетки м $\times$ п ячеек?

2. (8—10). Доказать, что для любого n существует n последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат целого числа, большего единицы.

3. (8—10). Точки К и Р симметричны основанию Н высоты ВН треугольника АВС относительно прямых АВ и ВС. Доказать, что точки пересечения прямой КР со сторонами АВ и ВС (или их продолжениями) — основания высот треугольника АВС.

4. (7—9). На одной из двух равных окружностей даны 50 точек, на другой — несколько дуг, сумма длин которых меньше, чем $\frac{1}{50}$ длины окружности. Доказать, что можно наложить эти окружности одна на другую, так, что ни одна из данных точек не окажется ни на одной из данных дуг.

5. (7—10). Натуральные числа Х и У таковы, что $X^{yx} = У^{xy}$. Доказать, что $X = У$.

6. (7—9). Доказать, что если сумма двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, равна половине его периметра, то этот четырехугольник — параллелограмм.

7. х и у — целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + x = 3y^2 + y$$

а) (7—10). Доказать, что х — у и 2х + + 2у + 1 — полные квадраты.

б) (7—10). Найти хотя бы одно решение этого уравнения в натуральных числах.

в) (8—10). Доказать, что это уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

г) (9—10). Пусть (x_n, y_n) — эти решения, занумерованные в порядке возрастания x_n. Выразить x_{n+1} и y_{n+1} через x_n и y_n.

д) (10). Найти пределы последовательностей

$$\frac{x_n}{y_n} \text{ и } \frac{x_n+1}{x_n}$$

8. (8—9). Дана окружность и на ней точка А. Произвольная окружность с центром в точке А пересекается с данной окружностью в точках К и Р и касается диаметра данной окружности в точке Н. Найти геометрическое место точек пересечения отрезков КР и АН.

9. (8—10). Доказать, что $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1967}$ можно представить в виде $a\sqrt{3} - b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, причем $3a^2 - 2b^2 = 1$.

10. (8—10). Восстановить выпуклый четырехугольник, если известны четыре точки — основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей четырехугольника на его стороны.

11. (10). Доказать, что для любого n

$$\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \cdots \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = C_n \sin nx,$$

где C_n некоторая постоянная, и найти C_n.

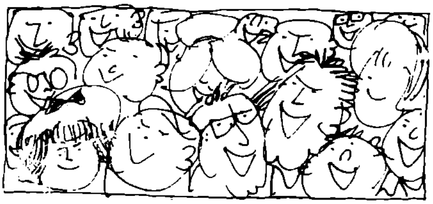
12. (10). Из трех стержней нужно изготовить жесткую пространственную конструкцию так, чтобы стержни не соприкасались между собой, а были только связаны нитками, прикрепленными и их концам.

а) Какое наименьшее число К нитей для этого необходимо (каждая нить связывает два конца стержней)?

б) При каком соотношении между a и l можно изготовить такую конструкцию, в которой все стержни имеют длину a, а все К нитей — длину l?

13. (8—10). —

In freien Stunden
alpha heiter



Rätselfreunde hergeschaut!

Es sind 20 mathematische Begriffe zu suchen, deren Buchstabenzahl stets um 1 zunimmt. Die Anfangsbuchstaben sind der Reihe nach dem Alphabet entnommen (I und J als ein Buchstabe gewertet).

```
                   .
                  . .
                 . . .
                . . . .
               . . . . .
              . . . . . .
             . . . . . . .
            . . . . . . . .
           . . . . . . . . .
          . . . . . . . . . .
         . . . . . . . . . . .
        . . . . . . . . . . . .
       . . . . . . . . . . . . .
      . . . . . . . . . . . . . .
     . . . . . . . . . . . . . . .
    . . . . . . . . . . . . . . . .
   . . . . . . . . . . . . . . . . .
  . . . . . . . . . . . . . . . . . .
 . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

1 Abkürzung eines Flächenmaßes
2 lat. zweifach
3 Abkürzung für eine Winkelfunktion
4 bei Euklid ergänzende planimetrische Sätze
5 geometrisches Grundgebilde 2. Stufe
6 Abweichung vom wahren Wert
7 Mathematiker und Physiker, lebte 1564 bis 1642
8 Kegelschnitt
9 Instrument zum Aufzeichnen einer Integralkurve
10 Bestandteil eines logarithmischen Wertes
11 Bezeichnung bestimmter Exponenten
12 Teil der Kegeloberfläche
13 ein Endpunkt der kleinen Achse einer Ellipse
14 Rechtwinkligkeit
15 Stellenwertsystem
16 Flächenmaß
17 Forderung der Mathematik nach Einhaltung in gewissen Grenzen
18 Näherungskurve 2. Ordnung
19 beiderseits begrenzte Teile einer Tangente
20 Verfahren der Darstellenden Geometrie

W. Weber, Mathematikfachlehrer, EOS Schkeuditz, Bez. Leipzig

Spiel mit zwei Ringscheiben

Das Spiel besteht aus zwei Ringscheiben unterschiedlicher Größe. Die größere Ringscheibe hat vier Vertiefungen (oder kreisförmige Ausschnitte bzw. entsprechende Markierungen), die kleinere zwei, wie es die Abb. 1 zeigt. In den Vertiefungen bzw. Markierungen befinden sich Spielmarken, die mit den Zahlen 1 bis 5 bezeichnet sind. Jede Ringscheibe ist für sich drehbar. Die große Ringscheibe G ist um M_1 drehbar; die Drehung hat um ganzzahlige Vielfache von 90° zu erfolgen, im positiven Drehsinn (+) oder im negativen Drehsinn (—). Die kleine Ringscheibe K ist um M_2 drehbar; die Drehung erfolgt um ganzzahlige Vielfache von 180°. Die Überdeckung beider Ringscheiben ist aus der Abb. 1 ersichtlich.

Wenn sich eine Ringscheibe dreht, bewegen sich gleichzeitig die Spielmarken mit den Zahlen, die in den Vertiefungen bzw. Markierungen liegen. Wir können also durch Drehen der beiden Ringscheiben aus der ursprünglichen Anordnung der Spielmarken schrittweise eine neue Anordnung in der Reihenfolge der Zahlen 1 bis 5 erhalten. Die Spielmarken werden dabei aus den Vertiefungen bzw. Markierungen von einer Ringscheibe auf die andere übernommen.

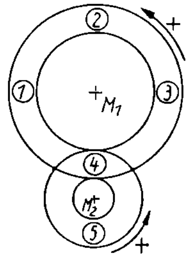


Abb. 1

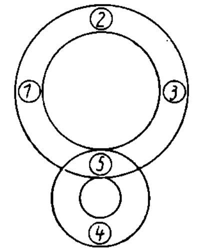


Abb. 2

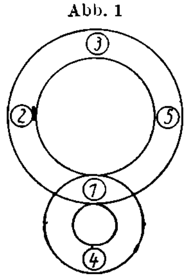


Abb. 3

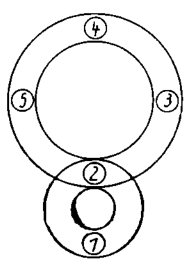


Abb. 4

Drehen wir z. B. die kleine Ringscheibe im positiven Drehsinn um 180° (wir bezeichnen die Drehung mit $K + 180°$), so erhalten wir die Anordnung, wie sie die Abb. 2 zeigt. Wenn wir nun die große Ringscheibe im positiven Drehsinn um 90° drehen (wir bezeichnen diese Drehung mit $G + 90°$), entsteht die in Abb. 3 gezeigte Anordnung. Wir können auf diese Weise aus der ursprünglichen Anordnung der Zahlen 1 bis 5 nach Abb. 1 die Lage der Spielmarken 1 und 4 austauschen, wenn wir folgende Drehungen ausführen:

$$K + 180°;\ G + 90°;\ K + 180°;$$
$$G - 90°;\ K + 180°.$$

Die anderen Spielmarken bleiben dabei auf ihren ursprünglichen Plätzen. Am besten überzeugen wir uns davon, indem wir die beiden Ringscheiben ausschneiden, drehbar machen (evtl. mit Reißzwecken auf einer festen Unterlage) und nun die genannten fünf Ringdrehungen ausführen.

Eure Aufgabe besteht nun darin, die Reihenfolge der Ringdrehungen (Operationen) herauszufinden, um aus der ursprünglichen Anordnung der fünf Spielmarken nach Abb. 1 eine Anordnung der Spielmarken zu schaffen, wie sie die Abb. 4 zeigt. Uns gelang das mit weniger als 10 Ringdrehungen (Operationen). Wir sind neugierig, wieviel Ringdrehungen (Operationen) ihr dazu braucht. Die beste Lösung dieser Aufgabe wird veröffentlicht.

Milau Koman, Prag

Entnommen aus der tschechischen Zeitschrift für Schüler und Studenten „*rozhledy matematicko-fyzikalni*" (d. i. Mathematisch-physikalische Umschau) 5/67, übersetzt von O. Langer, Döbeln, für unsere *alpha*-Leser bearbeitet von W. Unze, Leipzig.

Welche Antworten kann man in Prüfungen hören?

Küsimus: «Millega võrdub $a^3 - a^3$?»
Vastus: «Ühega.»
Küsimus: «Aga millega võrdub 27 — 27?»
Vastus: «Muidugi nulliga.»
Küsimus: «Aga millega võrdub $3^3 - 3^3$?»
Vastus: «Ühega.»
Küsimus: «Kuid $3^3 = 27$. Kumb vastus siis õige on?»
Vastus: «Mõlemad, oleneb ainult sellest, kuidas võtta.»

Frage: „Wieviel ist $a^3 - a^3$?"
Antwort: „Eins"
Frage: „Aber wieviel ist 27 — 27?"
Antwort: „Selbstverständlich Null."
Frage: „Aber wieviel ist $3^3 - 3^3$?"
Antwort: „Eins"
Frage: „Wir wissen ja, daß $3^3 = 27$ ist. Welche Antwort ist denn richtig?"
Antwort: „Beide, es hängt davon ab, wie man es nimmt!"

Aus: „Matematika ja kaasaeg" (Tallinn 1966), übersandt von Prof. Prinits, Tartu

Sauna

„Gibt es etwas Anstrengenderes als eine Mathematikarbeit?" stöhnt Gerd nach einer Mathematikstunde. „Doch, die Sauna", sagte Rolf. „Wieso?" möchte Gerd wissen. „Man schwitzt länger", meint Rolf.

Aus: „Die Trommel" 15/68

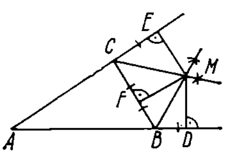
Zündholzschachteletiketten aus der Sowjetunion, eingesandt von Mathematikfachlehrer Günther König, Schalkau/Thüringen

VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der Bezirksolympiade

7 1. Die Lösung läuft auf die Frage hinaus: „Wieviel Schnittpunkte können 6 Geraden maximal haben, wenn keine von ihnen zu einer anderen parallel verläuft?" Dabei ist am Schluß die Anzahl der Eckpunkte des Sechsecks zu subtrahieren. Jede Gerade kann mit den übrigen 5 Geraden höchstens 5 Schnittpunkte haben. Bei 6 Geraden erhält man also höchstens $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Schnittpunkte, da zu jedem Schnittpunkt in diesem Falle genau 2 Geraden gehören. Da die Ecken des Sechsecks 6 dieser Schnittpunkte darstellen, können also höchstens 9 neue Schnittpunkte entstehen.

2. Die Dreiecke $\triangle\, CFM$ und $\triangle\, CME$ sind kongruent; denn sie stimmen in der Seite CM und in 2 Winkeln laut Konstruktion überein. Daher gilt $\overline{ME} = \overline{MF}$. Ebenso sind die Dreiecke $\triangle\, MFB$ und $\triangle\, MDB$ kongruent, woraus $\overline{MF} = \overline{MD}$ folgt. Mithin gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = MF$.



3. Jeder Angler aß $\frac{7}{3}$ Fische. Daher gab der erste $\frac{2}{3}$ Fische, der zweite $\frac{5}{3}$ Fische an den dritten. Falls die vom dritten Angler verzehrten Fische also „bezahlt" werden sollen, müßte der erste 2 und der zweite 5 Pfennige bekommen.

4. (I) Angenommen, a sei eine Zahl, wie sie in der Aufgabenstellung gesucht ist. Dann erfüllt $x = 11$ die Gleichung

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = x - \frac{3}{4}$, das heißt: Dann gilt die Gleichung

$\frac{11}{2} + \frac{11}{3} + a = 11 - \frac{3}{4}$. Hieraus folgt

$$a = 11 - \frac{3}{4} - \frac{11}{2} - \frac{11}{3} = \frac{13}{12}.$$

Also hat höchstens die Zahl $a = \frac{13}{12}$ die verlangte Eigenschaft.

(II) Ist $x = 11$ und $a = \frac{13}{12}$, so ist

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a = \frac{11}{2} + \frac{11}{3} + \frac{13}{12} = \frac{123}{12} = \frac{41}{4}$$

und $x - \frac{3}{4} = 11 - \frac{3}{4} = \frac{41}{4}$,

so daß im Fall $a = \frac{13}{12}$ die Zahl $x = 11$ der Gleichung (1) genügt.

5. Nach Voraussetzung haben die beiden gegebenen Zahlen n, m die Form $n = 5n' + 3$ und $m = 5m' + 3$ (n', m' ganz).

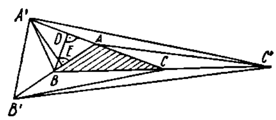
Daher gilt:

$$n \cdot m = (5n' + 3)(5m' + 3) = 25n'm' + 15n' + 15m' + 9 = 5\,[5n'm' + 3\,(n' + m') + 1] + 4,$$

d. h., $n \cdot m$ läßt bei Division durch 5 den Rest 4.

6. Zum Beweise verwendet man den Satz, daß Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Behauptung: Es ist I ($\triangle\, A'B'C'$) $= 7 \cdot$ I ($\triangle\, ABC$), wenn I ($\triangle\, A'B'C'$) den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle\, A'B'C'$ und I ($\triangle\, ABC$) den des Dreiecks $\triangle\, ABC$ bezeichnet.



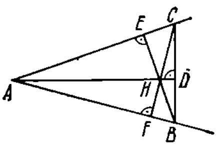
Beweis: (vgl. Abb.) Es seien D der Fußpunkt des Lotes von B auf $A'C$ (bzw. die Verlängerung dieser Strecke) und E der Fußpunkt des Lotes von A' auf AB' (bzw. die Verlängerung). Dann gilt: $\triangle\, ABC$ ist flächengleich $\triangle\, AA'B$; denn es gilt $\overline{AC} = \overline{AA'}$ und $\overline{BD} = \overline{BD}$ (als gemeinsame Höhe).

$\triangle\, BAA'$ ist flächengleich $\triangle\, B'BA'$; denn BA' ist Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle\, B'AA'$ und es gilt: $\overline{BA} = \overline{B'B}$ sowie $\overline{A'E} = \overline{A'E}$. Daraus folgt, daß $\triangle\, B'BA'$ auch

flächengleich $\triangle ABC$ ist. Entsprechend beweist man, daß die Dreiecke $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ alle flächengleich dem Dreieck $\triangle ABC$ sind.
Das Dreieck $\triangle ABC$ liegt ganz im Innern des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ (die Winkel $\sphericalangle A'CC'$, $\sphericalangle B'BC'$ und $\sphericalangle B'AA'$ sind als Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ sämtlich kleiner 180°). Daher erhält man den Flächeninhalt der sieben zu $\triangle ABC$ flächengleichen Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle AA'B$, $\triangle B'BA'$, $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ addiert.
Mithin gilt: $I(\triangle A'B'C') = 7 \cdot I(\triangle ABC)$.

8 1. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei das verlangte Dreieck (vgl. Abb.), die Punkte D, E und F seien die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C; H sei der Höhenschnittpunkt. Dann ist $\triangle ABE$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, dem rechten Winkel $\sphericalangle AEB$ und dem Winkel $\sphericalangle BAE \cong \sphericalangle BAC$. Die Höhe durch C geht durch den Mittelpunkt H der Seite EB und steht senkrecht auf AB.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



Man konstruiert zunächst das Teildreieck $\triangle ABE$, halbiert die Seite EB (Halbierungspunkt sei H) und fällt von H auf AB das Lot. Sein Fußpunkt sei F. Die Verlängerung dieses Lotes über H hinaus schneidet die Verlängerung der Seite AE über E hinaus im Punkt C. $\triangle ABC$ ist das verlangte Dreieck.
(III) Der Beweis, daß ein so konstruiertes Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe genügt (also die Umkehrung von (I)), ergibt sich leicht aus (II); die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe aus (I).

2. Wir nehmen 0 (mit der Quersumme 0) unter die zu berücksichtigenden Zahlen auf, schließen 1000 vorläufig aus und fassen jeweils die beiden Zahlen a und $999 - a$ $(0 \leqq a \leqq 499)$ zu einem Paar zusammen. Es sei $a = \alpha \cdot 10^2 + \beta \cdot 10 + \gamma$ (*) mit ganzen Zahlen α, β, γ, für die $0 \leqq \alpha, \beta, \gamma \leqq 9$ gilt. Dann ist die Quersumme von $a : \alpha + \beta + \gamma$. Ferner ist $999 - a = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 - \alpha \cdot 10^2 - \beta \cdot 10 - \gamma = (9 - \alpha) \cdot 10^2 + (9 - \beta) \cdot 10 + (9 - \gamma)$, und wegen (*) gilt auch $0 \leqq 9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma \leqq 9$ und $9 - \alpha, 9 - \beta, 9 - \gamma$ sind ganz.
Daher ist die Quersumme dieser Zahl $(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma)$ und die Summe beider Quersummen dann $(9 - \alpha) + (9 - \beta) + (9 - \gamma) + \alpha + \beta + \gamma = 27$.
Es gibt genau 500 solcher Paare, also ist die Summe der Quersummen der hiermit erfaßten Zahlen $500 \cdot 27 = 13500$. Dazu ist noch die Quersumme 1 von 1000 zu addieren. Die gesuchte Summe beträgt mithin 13501.

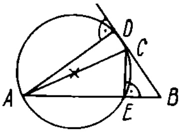
3. (I) Angenommen, x sei eine Zahl mit der genannten Eigenschaft, dann gilt $\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$;
hieraus folgt $a^2 + ax = b^2 - bx$
also $(a + b)\,x = b^2 - a^2$.
Da a und b positiv sind, ist $a + b \neq 0$, und es folgt weiter
$x = \frac{b^2 - a^2}{a + b} = b - a$, und $b - a$ ist ganz.
Somit kann höchstens die Zahl $x = b - a$ die genannte Eigenschaft haben.
(II) Durch Umkehrung dieser Schlüsse folgt, daß sie tatsächlich diese Eigenschaft besitzt. Aus $x = b - a$ folgt $(a + b)\,x = b^2 - a^2$, hieraus $a\,(a + x) = b\,(b - x)$. Da ferner $a \neq 0$ gilt und mithin auch $b - x\,(= a) \neq 0$ ausfällt, ergibt sich weiter $\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$, w.z.b.w.

4. *1. Lösungsweg*: (I) Ist a gerade, so ist a^2 gerade, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ ungerade. Ist a ungerade, so ist a^2 ungerade, also $a^2 - a$ gerade und folglich $a^2 - a + 1$ ungerade. Daher ist der Zähler stets ungerade, also kann der Bruch nicht durch 2 gekürzt werden. (Entsprechend könnte man den Beweis auch durch alleinige Untersuchung des Nenners führen.)
(II) Ist a durch 3 teilbar, so auch a^2, also auch $a^2 - a$; folglich ist dann $a^2 - a + 1$ nicht durch 3 teilbar. (Ähnlich folgt: auch $a^2 + a - a$. nicht.) Läßt a bei Division durch 3 den Rest 1, so auch a^2; folglich ist dann $a^2 - a$ durch 3 teilbar, also $a^2 - a + 1$ nicht. (Ähnlich: auch $a^2 + a - 1$ nicht.)
Läßt a bei Division durch 3 den Rest 2, so läßt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1; folglich ist dann $a^2 + a$ durch 3 teilbar, also $a^2 + a - 1$ nicht. Daher ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$, $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar, somit kann der Bruch nicht durch 3 gekürzt werden.

2. Lösungsweg: (I) Von den beiden Zahlen $a - 1$, a ist stets eine gerade. Daher ist $a^2 - a = (a - 1)\,a$ stets gerade usw. wie 1. Lösungsweg. (II) Von den drei Zahlen $a - 1$, a, $a + 1$ ist stets eine durch 3 teilbar, also auch stets (mindestens) eine der beiden Zahlen $a^2 - a = (a - 1)\,a$ und $a^2 + a = a\,(a + 1)$.

Folglich ist von den beiden Zahlen $a^2 - a + 1$ und $a^2 + a - 1$ stets (mindestens) eine nicht durch 3 teilbar usw.

5. In dem Dreieck $\triangle ABC$ seien (O.B.d.A.) A und C die in der Aufgabe genannten Eckpunkte und D und E die zugehörigen Höhenfußpunkte (siehe Abb.). Da A, E, C nicht auf derselben Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis durch diese drei Punkte. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales ist wegen des rechten Winkels bei E die Seite AC ein Durchmesser des Kreises, und es liegen auf diesem Kreis die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke, die AC zur Hypotenuse haben, mithin auch der Punkt D. Folglich ist das Viereck $AECD$ ein Sehnenviereck.



Falls das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig ist, entartet das Sehnenviereck zu einem Dreieck, da in diesem Falle zwei Höhenfußpunkte mit dem Scheitelpunkt des rechten Winkels zusammenfallen. Da jedes Dreieck aber einen Umkreis besitzt, gilt die Behauptung auch in diesem Falle.

6. (I) Da die Zahl zweistellig sein soll, muß sie größer sein als 9. Daraus folgt, daß ihr um 9 vermindertes Doppeltes größer sein muß als sie selbst. Wegen der 2. Bedingung besagt dies, daß bei Umstellung der Ziffern aus der Zahl eine größere Zahl entstehen soll. Daher muß ihre erste Ziffer kleiner sein als ihre zweite.

(II) Ferner soll das um 9 verminderte Doppelte wieder zweistellig, also höchstens 99 sein. Daraus ergibt sich, daß die Zahl höchstens 54 betragen kann. Wegen der 1. Bedingung verbleiben hiernach noch genau die folgenden Möglichkeiten: 14, 25, 36 und 47. Von diesen erfüllt nur die Zahl 36 alle Bedingungen der Aufgabe.

9

1. Es sei x die erste und y die letzte Ziffer einer derartigen Quadratzahl z, dann gilt

$$z = 1000\,x + 100\,x + 10\,y + y = 1100\,x + 11\,y = 11\,(100\,x + y)$$

mit $1 \leqq x \leqq 9$ und $0 \leqq y \leqq 9$.

Daraus folgt $11 \mid z$ und, da z Quadratzahl und 11 Primzahl ist, sogar $11^2 \mid z$.

Somit muß gelten $11 \mid 100\,x + y$.

Nun ist aber $100\,x + y = 99 + x + y$, und somit $11 \mid x + y$. Wegen der Einschränkung für x und y kommt nur $1 \leqq x + y \leqq 18$ und damit $x + y = 11$ in Frage.

Daraus folgt $100\,x + y = 99\,x + x + y = 11(9\,x + 1)$ und somit $z = 11^2\,(9\,x + 1)$.

Da z Quadratzahl ist, muß auch $9\,x + 1$ Quadratzahl sein. Wegen $1 \leqq x \leqq 9$ ist dies (wie man z. B. durch Berechnung der Zahlen $9\,x + 1$ für $x = 1, \ldots, 9$ feststellen kann) nur für $x = 7$ der Fall. Umgekehrt führt $x = 7$ in der Tat wegen $9 \cdot 7 + 1 = 64$ auf die Quadratzahl $z = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$. Diese ist somit die einzige vierstellige Quadratzahl mit den geforderten Bedingungen.

2. Es seien Q, R, S, T die Reflexionspunkte an den Seiten AB, BC, CD, DA. Sie bilden das Viereck $QRST$. Nach dem Reflexionssatz gilt, wenn die Reflexionswinkel die in der Abbildung angegebenen Größen haben:

$\alpha_1 = \alpha_2$; $\quad \beta_1 = \beta_2$; $\quad \gamma_1 = \gamma_2$; $\quad \delta_1 = \delta_2$ (1)

Es sei U der Schnittpunkt der Verlängerung von AB über B hinaus und SR über R hinaus. Dann gilt für die Größen der auftretenden Winkel:

$\varphi_u = 90° - \varphi_R = 90° - \beta_2 = 90° - \beta_1$ (nach (1))

und weiterhin $\alpha_2 = 90° - \beta_1$ sowie

$\alpha_1 = 90° - \beta_1$ (nach (1)).

Daraus folgt $\alpha_1 = \varphi_u$ und damit $TQ \parallel SR$ (2)

Es sei V der Schnittpunkt der Verlängerungen von BC über C hinaus und TS über S hinaus. Dann kann analog gezeigt werden, daß $TS \parallel QR$ gilt (3)

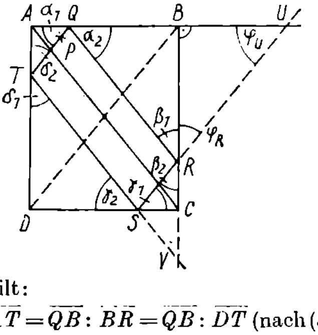
Aus (2) und (3) folgt, daß das Viereck $QRST$ ein Parallelogramm ist. Damit gilt

$\overline{QR} = \overline{TS}$ (4)

Also ist $\triangle QRB \cong \triangle TSD$ (sww).

Daraus folgt: $\overline{BR} = \overline{DT}$ (5)

Weiterhin gilt $\triangle QAT \sim \triangle BQR$; denn sie stimmen in den Winkeln überein.



Also gilt:

$\overline{AQ} : \overline{AT} = \overline{QB} : \overline{BR} = \overline{QB} : \overline{DT}$ (nach (5) (6)).

Aus (6) und der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt damit $TQ \parallel DB$ (7)

Die Billardkugel kann also höchstens dann den vorgeschriebenen Verlauf nehmen, wenn sie von P aus parallel zur Diagonalen DB des Billardtisches $ABCD$ gegen die Seite AB gestoßen wird. Umgekehrt, wenn die Kugel in dieser Richtung gestoßen wird und (*Fall 1:*) P innerhalb des Dreiecks $\triangle ABD$ liegt, so trifft sie nach je genau einmaliger Reflexion an AB, BC, CD, DA wieder in P ein, falls sie weit genug rollt.

Beweis: Nach Vorraussetzung schneidet die Parallele durch P zu DB die Seite AB in einem inneren Punkte Q. Wegen des Reflexionsgesetzes einerseits und der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle BAC$ andererseits folgt, daß die Kugel dann parallel zu AC weiterläuft, und die Parallele durch Q zu AC wiederum schneidet die Seite BC in einem inneren Punkte R. So schließt man weiter und erhält innere Punkte S, T, Q_1 auf den Seiten CD, DA, AB als weitere Bahnpunkte (zugleich als Reflexionspunkte in dieser Reihenfolge), für die $QR \parallel TS \parallel AC$ und $SR \parallel TQ_1 \parallel DB$ gilt.

Nun folgt einerseits

$\overline{BR} : \overline{DS} = \overline{BC} : \overline{DC} = \overline{DA} : \overline{DC} = \overline{DT} : \overline{DS}$,

also $\overline{BR} = \overline{DT}$, daher

$\triangle QRB \cong \triangle TSD$, folglich $\overline{BQ} = \overline{DS}$

und somit $\overline{AQ} = \overline{CS}$. (8)

Andererseits folgt

$$\overline{AQ_1} : \overline{AT} = \overline{AB} : \overline{AD} = \overline{CD} : \overline{AD} = \overline{CS} : \overline{AT}, \text{ also } \overline{AQ_1} = \overline{CS}. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) ergibt sich $Q = Q_1$, also fällt die Bahn der Kugel nach der Reflexion bei T (nämlich die Parallele durch Q_1 zu DB) mit der Parallelen durch Q zu DB zusammen, und somit verläuft sie durch P.

(*Fall 2:*) Liegt P auf der Diagonalen DB oder innerhalb des Dreiecks $\triangle BCD$, so schneidet die Parallele durch P zu DB die Seite AB nicht in einem inneren Punkte. Daher kann die Aufgabe in diesem Falle keine Lösung haben.

3. Die vorgegebene Zahl enthält $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ Ziffern, also insgesamt 192 Ziffern. Genau 92 davon sollen in der zu bildenden Zahl enthalten bleiben. Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.

Vor der ersten in der Zahl auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedenen Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedenen Ziffern. Streichen wir diese, so sind insgesamt 84 Ziffern $(8 + 4 \cdot 19 = 84)$ entfernt. Es sind noch 16 Ziffern zu streichen.

Die Zahl beginnt dann so:

999995051525354555657585960 ....

Es ist nun nicht mehr möglich, die 19 Ziffern vor der nächsten (ursprünglich sechsten) Neun zu streichen, da dann mehr als 100 Ziffern entfielen.

Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit 5 Neunen beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist diejenige größer, die an der sechsten Stelle die größere Zahl enthält. In unserem Fall kommt die Acht dafür nicht in Frage, da dann noch 17 Ziffern zu streichen wären. An der sechsten Stelle kann also höchstens eine Sieben stehen. Das ist auch erreichbar, wenn man die nächsten 15 Ziffern streicht. Entsprechend zeigt man, daß als letzte Ziffer die auf die Sieben folgende Fünf entfernt werden muß.

Die Zahl lautet also

999997859606162 .... 979899100.

4. Wegen $3 \cdot \frac{1}{4} < 1$ muß mindestens eine der Zahlen a, b, c kleiner als 4 sein. Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen dies für die Zahl a zutrifft.

1. Fall: $a = 2$. Es muß gelten

$\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, also $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$.

Ähnlich wie eben zeigt man, daß mindestens eine der Zahlen b, c kleiner als 5 sein muß. Daraus folgt: Für $\frac{1}{2}$ gibt es nur die folgenden beiden Zerlegungen in zwei Stammbrüche

(1) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ und (2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

2. Fall: $a = 3$. Nach Voraussetzung gilt

$\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, also $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$.

Mindestens eine der Zahlen b, c muß kleiner als 4 sein, und daraus folgt: Für $\frac{2}{3}$ gibt es wieder nur zwei Zerlegungen in zwei Stammbrüche

(3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ und (4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Im Sinne der Aufgabe sind nun in den aus (1), (2), (3) und (4) resultierenden Zerlegungen der Zahl 1 noch alle verschiedenartigen Vertauschungen der Summanden zulässig, wobei jedoch die aus (2) und die aus (4) gewonnenen Zerlegungen miteinander übereinstimmen. Somit erhalten wir, daß genau folgende 10 Tripel die geforderten Bedingungen erfüllen:

(2,4,4), (4,2,4), (4,4,2), (2,3,6), (2,6,3),
(3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2), (3,3,3).

5. Das von C auf AB gefällte Lot habe die Länge h_c. Dabei kann folgendes auftreten:

1. Fall: Das Lot fällt nicht mit der Seitenhalbierenden zusammen. Die Länge der Verbindungsstrecke vom Fußpunkt des Lotes zum Halbierungspunkt der Seite AB sei x.

1.1. Das Lot liegt innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$.

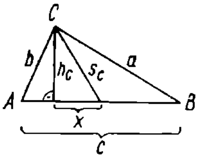


Fig. 1

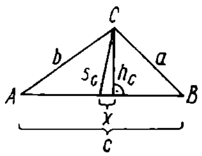


Fig. 2

Zu Fig. 1: Das Lot liegt zwischen AC und Seitenhalbierender.

Zu Fig. 2: Das Lot liegt zwischen BC und Seitenhalbierender.
Durch Anwendung des Satzes des Pythagoras ergibt sich: $h_c^2 = s_c^2 - x^2$ und

Zu Fig. 1:

$$b^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 = s_c^2 - x^2 + \frac{c^2}{4} - cx + x^2$$

also $b^2 = s_c^2 + \frac{c^2}{4} - cx$ sowie

$$a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2$$

$a^2 = s_c^2 + \frac{c^2}{4} + cx$. Mithin erhält man:

$$b^2 + a^2 = 2\,s_c^2 + \frac{c^2}{2}.$$

Zu Fig. 2

$$b^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2 = s_c^2 - x^2 + \frac{c^2}{4} + cx + x^2$$

$$b^2 = s_c^2 + \frac{c^2}{4} + cx \qquad a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2$$

$$a^2 = s_c^2 + \frac{c^2}{4} - cx. \qquad b^2 + a^2 = 2\,s_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

woraus in beiden Fällen $2\,s_c^2 = b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}$,

also $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2}$ folgt.

1.2. Das Lot liegt nicht innerhalb des Dreiecks.

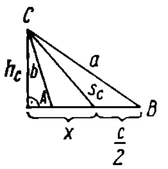


Fig. 3

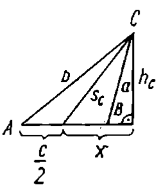


Fig. 4

Zu Fig. 3: Die Seite AC fällt entweder mit dem Lot zusammen, oder sie liegt zwischen dem Lot und Seite BC.

Zu Fig. 4

Die Seite $\overline{BC}$ fällt entweder mit dem Lot zusammen, oder sie liegt zwischen dem Lot und der Seite AC.

Es gilt für beide Fig.: $h_c^2 = s_c^2 - x^2$

Weiter zu Fig. 3

$$b^2 = h_c^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = s_c^2 - cx + \frac{c^2}{4}$$

$$a^2 = h_c^2 + \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 = s_c^2 + cx + \frac{c^2}{4}.$$

Weiter zu Fig. 4:

$$b^2 = h_c^2 + \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 = s_c^2 + cx + \frac{c^2}{4}$$

$$a^2 = h_c^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = s_c^2 - cx + \frac{c^2}{4}.$$

Daraus ergibt sich in beiden Fällen

$a^2 + b^2 = 2 s_c^2 + \frac{c^2}{2}$ also $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

2. *Fall*: Das Lot fällt mit der Seitenhalbierenden zusammen. Dann ist $x = 0$ und $a = b$ und man erhält für $a \neq c$

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\,a^2 - c^2}$$

bzw. für $a = b = c$

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3\,a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Für alle Dreiecke gilt mithin

$$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2}$$

6. Angenommen, die reelle Zahl x erfülle die Ungleichung

$$(*)\ \frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}.$$

Dann gilt $x \neq \frac{1}{2}$. Wegen

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{9 - 12 + (2x-1)}{3\,(2x-1)}$$

$$= \frac{2x-4}{3\,(2x-1)} = \frac{x-2}{3\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$ ist (*) genau

dann erfüllt, wenn $\frac{x-2}{3\left(x - \frac{1}{2}\right)} > 0$ ist.

Dies gilt genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle zutrifft:

(1) $x - 2 > 0$ und $x - \frac{1}{2} > 0$.

Hierfür ist $x > 2$ notwendig und hinreichend.

(2) $x - 2 < 0$ und $x - \frac{1}{2} < 0$.

Hierfür ist $x < \frac{1}{2}$ notwendig und hinreichend.

Daher sind genau diejenigen reellen Zahlen x Lösung von (*), die einem der beiden Intervalle $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $(2, +\infty)$ angehören.

Die Lösungen zu Klassenstufe 10 veröffentlichen wir in Heft 1/69, die Redaktion.

Lösungen

W(5)233 $36:3=12$; zwölf Schüler erhielten die Note ‚Zwei' oder ‚Vier'. $12:3=4$; $2\cdot 4=8$; acht Schüler erhielten die Note ‚Zwei' und vier Schüler die Note ‚Vier'. $36-12=24$; es erhielten 24 Schüler die Noten ‚Eins', ‚Drei' oder ‚Fünf'. Die Ermittlung der Anzahl dieser Noten, wird aus der nachstehenden Tabelle deutlich:

Note 1	Note 3	Note 5	Summe
3	7 oder 8	1	11 oder 12
6	13 oder 14 od. 15 od. 16 oder 17	2	21 oder 22 od. 23 od. 24 oder 25

Aus $6+16+2=24$ folgt, daß sechs Schüler die Note ‚Eins', 16 Schüler die Note ‚Drei' und zwei Schüler die Note ‚Fünf' erhielten.

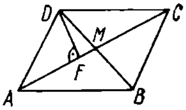
W(5)234 Die ursprüngliche Zahl ist um 27 größer als diejenige Zahl, die man durch Vertauschen der beiden Ziffern erhält. Deshalb muß die Anzahl der Zehner der gesuchten Zahl größer als die ihrer Einer sein. Von allen Zahlen, die diese Bedingung erfüllen, besitzen nur die Zahlen 94, 85 und 76 die geforderte Quersumme 13. Die dritte der gestellten Bedingungen erfüllt allein die Zahl 85; denn es gilt $85-58=27$. Die ursprüngliche Zahl lautet also 85.

W(6)238 Uwe verlor im zweiten Spiel drei mehr als ein Viertel der ihm nach dem ersten Spiel verbliebenen Murmeln. Wir rechnen $21+3=24$ und $24\cdot\frac{4}{3}=32$; Uwe besaß vor dem zweiten Spiel 32 Murmeln. Im ersten Spiel verlor Uwe zwei mehr als ein Drittel seiner Murmeln. Wir rechnen $32+2=34$ und $\frac{3}{2}\cdot 34=51$; Uwe besaß vor dem ersten Spiel 51 Murmeln.

W(6)239 $56\cdot 2=112$; in zwei Tagen sollten ursprünglich 112 ha abgeerntet sein. $112-40=72$; zwei Tage vor dem gestellten Plantermin waren bereits 72 ha mehr als vorgesehen geschafft. $64-56=8$ und $72:8=9$; in neun Arbeitstagen wurden diese über den Plan hinausgehenden 72 ha abgeerntet. Die Ernte sollte demnach ursprünglich in 11 Tagen beendet sein.

W(7)243 Es gilt der Satz: Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander. Danach gilt: $\overline{AM}=\overline{MC}$; $\overline{BM}=\overline{MD}$.

Aus $\overline{AM}=\overline{MC}$ und $\overline{BM}=\overline{MD}$ und $\sphericalangle AMD=\sphericalangle BMC$ u. $\sphericalangle AMB=\sphericalangle CMD$ folgt $\triangle AMD\cong\triangle BMC$ und $\triangle ABM\cong\triangle CDM$.



Es sei $\overline{DF}$ Höhe des Dreiecks ACD zur Seite $\overline{AC}$; dann ist $\overline{DF}$ auch Höhe des Dreiecks AMD zur Seite $\overline{AM}$ und des Dreiecks MCD zur Seite $\overline{MC}$.
Aus $\overline{AM}=\overline{MC}$ folgt dann, daß die Dreiecke AMD und MCD flächengleich sind. Aus der zuvor nachgewiesenen Kongruenz zweier Paare von Teildreiecken folgt die Flächengleichheit aller vier Teildreiecke.

W(7)244 Von den vier gegebenen Zahlen sind genau zwei gerade und genau zwei ungerade. Ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen ist gerade, wenn wenigstens ein Faktor gerade ist; ein Produkt aus zwei ungeraden natürlichen Zahlen ist stets ungerade. Von den sechs Produkten sind genau fünf gerade und ein Produkt ungerade. Deshalb ist die Summe dieser Produkte ungerade.

W(8)248 Es ist $\sphericalangle DFC=\alpha+\beta$ als Außenwinkel des Dreiecks ABF. Daher ist der gesuchte Winkel

$$\sphericalangle FDE=\sphericalangle DFC+\sphericalangle FCD$$
$$=\alpha+\beta+\gamma$$

als Außenwinkel des Dreiecks CDF.

W(8)249 Bezeichnet man die zweite Zahl mit n, so ergibt sich $(n-1)\,n+n\,(n+1)=n^2-n+n^2+n=2\,n^2$, w.z.b.w.

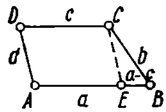
W(9)253 Bezeichnet man die Längen der Katheten mit a und b und die Länge der Hypotenuse mit c, so gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras $c^2=a^2+b^2$.
Daraus folgt $\frac{\pi}{8}c^2=\frac{\pi}{8}a^2+\frac{\pi}{8}b^2$.
Bezeichnet man mit A den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC, so beträgt die Summe der Flächeninhalte der *Möndchen*

$$A+\frac{\pi}{8}a^2+\frac{\pi}{8}b^2-\frac{\pi}{8}c^2=A\,,$$

da $\frac{\pi}{8}c^2=\frac{\pi}{8}a^2+\frac{\pi}{8}b^2$ ist.

Die Summe der Flächeninhalte der *Möndchen* ist also gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, w.z.b.w.

W(9)254 1. *Analyse*: Angenommen, $ABCD$ sei das zu konstruierende Trapez. Zeichnet man durch C eine Parallele zu AD und führt für die Längen der Seiten Variable, wie in der Skizze angegeben, ein, so ist $\overline{CE} = d$, $\overline{EB} = a - c$ und $\overline{BC} = b$. Damit sind das Dreieck EBC konstruierbar und also auch das Trapez $ABCD$.



2. *Konstruktionsbeschreibung*: Ich zeichne das Dreieck EBC, verlängere $\overline{EB}$ bis A. Um A bzw. C zeichne ich Kreise mit den entsprechenden Radien. Ihr Schnittpunkt ist D. $ABCD$ ist das zu konstruierende Trapez.
3. *Beweis*: Da das Trapez nach Konstruktion die geforderten Abmessungen hat, ist es das gesuchte.
4. *Diskussion*: Die Konstruktion ist immer durchführbar, wenn ein Dreieck aus den Seiten a—c, b und d konstruiert werden kann, d. h., wenn für diese Seiten die Dreiecksungleichungen erfüllt sind.

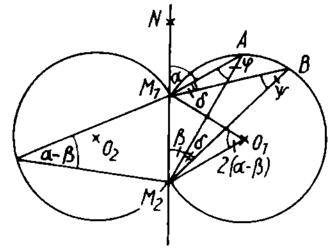
W(10/12)258 Die Fläche kann durch Überdecken von zwei Kreissektoren mit dem Radius a und dem Zentriwinkel 120° erzeugt werden. Das Drachenviereck M_1BM_2C, das sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken mit der Seite der Länge a zusammensetzt, wird dabei doppelt überdeckt. Somit erhält man für den gesuchten Flächeninhalt

$$A = \frac{2\pi}{3} a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, a^2$$
$$= \frac{1}{6} a^2 (4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 1{,}23\, a^2 .$$

W(10/12)259 Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien $a - 1$, a und $a + 1$.
(1) $a - 1 + a + a + 1 = 3a$, w.z.b.w.
(2) Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets eine durch 2 teilbar. Entweder ist a teilbar, oder a läßt den Rest 1; dann ist $a + 1$ durch 2 teilbar.
Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist auch stets eine durch 3 teilbar.
1. Fall: a ist durch 3 teilbar.
2. Fall: a läßt bei Division durch 3 den Rest 1, dann ist $a - 1$ durch 3 teilbar.
3. Fall: a läßt bei Division durch 3 den Rest 2, dann ist $a + 1$ durch 3 teilbar.
Nun sind Zahlen, die durch 2 und 3 teilbar sind, auch durch 6 teilbar. Daher ist das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 6 teilbar, w.z.b.w.

260a Lösung der Aufgabe von NPT Prof. Dr. phil. habil. H. Reichardt

Es seien M_1 der Drehpunkt des ersten Zeigers und M_2 der Drehpunkt des zweiten Zeigers. Ferner sei A der Schnittpunkt der den Zeigerstellungen zu einem bestimmten Zeitpunkt entsprechenden Geraden, und es sei B der Schnittpunkt zu einem späteren Zeitpunkt. N sei ein Punkt der Geraden M_1M_2, der oberhalb von M_1 liegt (vgl. Abb.). Wir setzen
$\sphericalangle NM_1A = \alpha$, $\sphericalangle NM_2A = \beta$,
$\sphericalangle M_2AM_1 = \varphi$, $\sphericalangle M_2BM_1 = \psi$.
Nun gilt $\sphericalangle AM_1B = \sphericalangle AM_2B = \delta$,
da die beiden Zeiger in der gleichen Zeit stets um den gleichen Winkel vorrücken.



Wir nehmen zunächst an, daß die Winkel α, β und δ sämtlich kleiner als 90° sind und daß $0 < \alpha - \beta < 90°$ gilt. Nun gilt nach dem Satz über die Außenwinkel des Dreiecks

$$\varphi + \beta = \alpha\,, \text{ d. h.,}$$
$$\varphi = \alpha - \beta\,,$$
$$\psi + \beta + \delta = \alpha + \delta\,, \text{ d. h.,}$$
$$\psi = \alpha - \beta\,,$$

also $\varphi = \psi$, d. h., die von den den Zeigerstellungen entsprechenden Geraden gebildeten Winkel sind zu jedem Zeitpunkt gleich groß. Analog beweist man die Gleichheit dieser Winkel für den Fall, daß die Winkel α, β und σ nicht kleiner als 90° sind. Im Falle $\alpha = 0°$*) erhält man den Schnittpunkt M_2 und im Falle $\beta = 0°$ den Schnittpunkt M_1.
Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegen daher alle diese Schnittpunkte auf *einem der beiden Kreisbögen*, die zu den Sehnen $\overline{M_1M_2}$ gehören, deren Mittelpunkte 0_1 und 0_2 so liegen daß

$$\sphericalangle M_1 0_1 M_2 = \sphericalangle M_1 0_2 M_2 = 2(\alpha - \beta)$$

gilt, und deren Punkte jeweils auf derselben Seite der Geraden M_1M_2 liegen wie ihr Mittelpunkt 0_1 bzw. 0_2 (vgl. Abb.).
Im Falle $\alpha - \beta = 90°$ liegen beide Kreisbögen auf demselben Kreis, der zu M_1M_2 als Durchmesser gehört.
Die Fälle $\alpha - \beta > 90°$ und $\alpha - \beta < 90°$ lassen sich durch eine geeignete Umbenennung der Winkel auf die obigen Fälle zurückführen.
Ferner ergibt sich aus der obigen Untersuchung, daß auch jeder Punkt der beiden Kreisbögen Schnittpunkt der den Zeiger-

*) Da nach der Voraussetzung der Aufgabe die durch die Zeiger verlaufenden Geraden einander schneiden, ist stets $\alpha \neq \beta$, d. h., in diesem Falle $\beta \neq 0$.

stellungen zu einem bestimmten Zeitpunkt entsprechenden Geraden ist. Bei einem vollen Umlauf des Zeigers mit dem Drehpunkt M_2 *durchläuft* daher *der Schnittpunkt* der entsprechenden Geraden *zunächst den Kreisbogen um O_1 von M_1 bis M_2, dann den Kreisbogen um O_2 von M_2 bis M_1*.

260b Wir teilen das Zifferblatt der Uhr so in 60 Teile ein, daß jeder Stellung eines Zeigers einer reellen Zahl entspricht, die größer oder gleich Null und kleiner als 60 ist. Dann entspricht der Zeigerstellung x des kleinen Zeigers die Zeit $\frac{x}{5}$ Stunden und der Zeigerstellung y des großen Zeigers die Zeit $\frac{y}{60}$ Stunden. Bei einer möglichen Stellung der beiden Zeiger ist $\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m$ eine nichtnegative *ganze* Zahl; denn die Differenz der von den beiden Zeigern angezeigten Zeit ergibt stets eine volle Stundenzahl. Aus der Vertauschung der Zeiger soll wieder eine mögliche Stellung hervorgehen, d. h., auch die Zahl $\frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n$ ist ein nichtnegative ganze Zahl.
Wir erhalten daher die Gleichungen

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m, \quad (1) \qquad \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n, \quad (2)$$

wobei m und n ganze Zahlen mit $0 \leqq m < 12$ und $0 \leqq n < 12$ sind. Aus (1) und (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} 12\,x - \quad y &= 60\,m\,, \\ -\,x + 12\,y &= 60\,n\,, \\ 144\,x - 12\,y &= 60 \cdot 12\,m\,, \\ 143\,x &= 60\,(12\,m + n)\,. \\ x &= \frac{60\,(12\,m + n)}{143}. \quad (3) \end{aligned}$$

Für $m = 0,1,2,\ldots,11$ und $n = 0,1,2,\ldots,11$ ergeben sich 144 verschiedene Werte für x mit $0 \leqq x \leqq 60$. Da aber $x < 60$ gelten soll, scheidet der Fall $m = n = 11$ aus, und wir erhalten 143 *verschiedene Zeigerstellungen* entsprechend der Gleichung (3).

Setzen wir *zum Beispiel* $m = 4$, $n = 9$, so erhalten wir wegen (3)

$$x = \frac{60\,(12 \cdot 4 + 9)}{143} = \frac{3420}{143} \approx 23{,}916,$$

d. h. $\frac{x}{5} \approx 4{,}783$, also die Uhrzeit 4.47 Uhr (vgl. Abb.) bzw. bei Vertauschung der Zeiger 9.24 Uhr.

Diese Aufgabe und weitere interessante Aufgaben über Uhrzeigerstellungen finden wir auch in dem schönen Buch von *J. I. Perelman, Unterhaltsame Algebra*, Berlin, Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1965 (Mathematische Schülerbibliothek).

261 Wir wählen die Teilstrecke $\overline{AB}$ als Einheit; die Strecke $\overline{AD}$ enthält dann genau $1 + 3 + 4 = 8$ Einheiten. Aus $168 : 8 = 21$ folgt:

$$\overline{AB} = 21\,m; \quad \overline{BC} = 63\,m; \quad \overline{CD} = 84\,m.$$

Probe: $21 + 63 + 84 = 168$.

262 Aus $8 \cdot 12 = 96$ und $96 : (12 + 4) = 6$ folgt, daß Fritz die erste Hälfte des Buches in acht Tagen, die zweite Hälfte in sechs Tagen gelesen hatte. Die Leihfrist betrug demnach 14 Tage.

263 Es sind genau 16 Dreiecke zu finden, und zwar
$\triangle\,\underline{ABC}$; $\triangle\,AGD$; $\triangle\,BCJ$; $\triangle\,CEJ$;
$\triangle\,ABJ$; $\triangle\,AFG$; $\triangle\,\underline{BEF}$; $\triangle\,\underline{DFE}$;
$\triangle\,\underline{ACD}$; $\triangle\,AFH$; $\triangle\,CDG$; $\triangle\,FHG$;
$\triangle\,\underline{AFD}$; $\triangle\,\underline{BCE}$; $\triangle\,\underline{CEH}$; $\triangle\,EHJ$.
Die unterstrichenen Dreiecke sind rechtwinklig.

W(5)264 Die Zahl 24 läßt sich als Produkt dreier natürlicher Zahlen wie folgt schreiben:

Produkt	Summe	Produkt	Summe
$1 \cdot 1 \cdot 24$	26	$1 \cdot 4 \cdot 6$	11
$1 \cdot 2 \cdot 12$	15	$2 \cdot 2 \cdot 6$	10
$1 \cdot 3 \cdot 8$	12	$2 \cdot 3 \cdot 4$	9

Nur die Summe 11 ist eine Primzahl; folglich sind die Kinder von Frau Lehmann ein, vier und sechs Jahre alt.

W(5)265 $(1 + 3 \cdot 5) : (7 + 9) = 1$; $13 \cdot 5 - 7 \cdot 9 = 2$; $[(1 + 3) \cdot 5 + 7] : 9 = 3$; $(1 + 3) \cdot 5 - (7 + 9) = 4$; $1 + [3 \cdot (5 + 7)] : 9 = 5$; $13 - 5 + 7 - 9 = 6$; $1 + 3 + 5 + 7 - 9 = 7$; $(13 \cdot 5 + 7) : 9 = 8$; $[13 - (5 + 7)] \cdot 9 = 9$; $13 - (5 + 7) + 9 = 10$.

266 Aus $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ folgt, daß der Tourist am ersten Tag $\frac{1}{6}$ des Weges mehr zurücklegte als am zweiten Tag.
Da $6 \cdot 12 = 72$ ist, betrug die Gesamtlänge des Wanderweges 72 km. Am ersten Tag wurden 36 km, am zweiten 24 km und am dritten 12 km zurückgelegt.

267 Der Zeichnung entnehmen wir:
$\sphericalangle\,ACD = 180° - 50° = 130°$.
Aus $\sphericalangle\,ACD = 130°$ und $\sphericalangle\,ACE = \sphericalangle\,ECD$ folgt $\sphericalangle\,ACE = 65°$.
Ferner gilt: $\sphericalangle\,ABC = 180° - 70° - 50° = 60°$. Aus $\sphericalangle\,ABC = 60°$ und $\sphericalangle\,ABE = \sphericalangle\,EBC$ folgt $\sphericalangle\,EBC = 30°$.

Für das Dreieck BCE gilt dann:

$\sphericalangle\, BEC = 180° - 30° - 115° = 35°.$

268 Steffen nimmt einen beliebigen Schlüssel; mit ihm versucht er, ein Schloß nach dem anderen zu öffnen. Er muß im ungünstigsten Fall vier Proben machen. Waren diese vier Proben vergebens, so muß der Schlüssel zu dem fünften Schloß passen, eine weitere Probe erübrigt sich also. Mit dem zweiten Schlüssel braucht Steffen nur noch drei Proben zu machen; für den dritten Schlüssel reichen zwei Versuche. Es sind zwei Schlösser mit Schlüsseln übrig geblieben. Mit einem einzigen Schließversuch kommt Steffen jetzt aus.
Da $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ ist, sind im ungünstigsten Fall zehn Proben zu machen, um für jedes Schloß den passenden Schlüssel herauszufinden. In der Praxis ist die Anzahl der Proben meist kleiner.

W(6)269 Für echte Brüche $\frac{a}{b}$ gilt $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a < b$. Für $a + b = 7$ erhalten wir die Brüche $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$.

Nur der Bruch $\frac{3}{4}$ erfüllt die gestellten Bedingungen: $\frac{3+1}{4-3} = 4$.

W(6)270 Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist mindestens eine durch 2 und genau eine durch 3 teilbar. Für $a = 0$ erhalten wir die Zahlen 0, 1, 2; nur 2 ist Primzahl. Für $a = 1$ erhalten wir die Zahlen 1, 2, 3; nur 2 und 3 sind Primzahlen. Für alle weiteren Belegungen ($a = 2,3,4, \ldots$) erhalten wir unter den drei Zahlen mindestens eine, die durch 2, und genau eine Zahl, die durch 3 teilbar ist. Unter den drei Zahlen sind also stets mindestens zwei zusammengesetzte Zahlen zu finden. Die Primzahl 2 ist demnach bestimmt Teiler einer dieser drei Zahlen; das trifft auch für die Primzahl 3 zu.

271a $110 \cdot 25 = 2750$; $h_1 = \frac{3500}{2750} \approx 1,27$; das Wasser steht im Becken rund 1,27 m hoch.

b $h_2 = \frac{3500 + 2000}{2750} = \frac{5500}{2750} = 2,00$; das Wasser steigt auf 2 m Höhe an.

272 Es sei s die Maßzahl (in km) der gesamten Fahrstrecke und s_1, s_2 seien die Maßzahlen der beiden Teilstrecken, dann gilt $s_1 + s_2 = 243$. Nehmen wir weiter an, der Zug benötige zum Durchfahren der ersten Teilstrecke x Stunden, dann gilt
$27\,x + (8 - x) \cdot 36 = 243$, also $x = 5$.
Die erste Teilstrecke wird in 5 Stunden, die zweite in 3 Stunden durchfahren.
$(27 \cdot 5 + 36 \cdot 3 = 135 + 108 = 243)$

273 Es sei x eine Lösung der gegebenen Gleichung; dann gilt

$$mx + 2\,m + 3\,m - 7 = 2\,x + 6 + m^2 + m - 18, \quad (1)$$

$$x\,(m - 2) = m^2 - 4\,m - 5. \quad (2)$$

Für alle rationalen Zahlen m, für die $m \neq 2$ ist, hat daher die gegebene Gleichung eine Lösung in x, und zwar

$$x = \frac{m^2 - 4m - 5}{m - 2}.$$

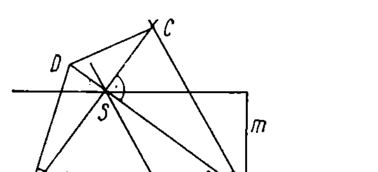
Für $m = 2$ hat die gegebene Gleichung keine Lösung, da in diesem Falle aus der Gleichung (2) $x \cdot 0 = 4 - 8 - 5 = -9$ folgt, was nicht möglich ist.

W(7)274 Es gibt fünf verschiedene Möglichkeiten, die Zahl 30 als Produkt von drei Faktoren zu schreiben; sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

a	b	c	a + b + c
1	1	30	32
1	2	15	18
1	3	10	14
1	5	6	12
2	3	5	10

Dabei gilt $a \cdot b \cdot c = 30$ und $a \leqq b \leqq c$.
Die Summe $a + b + c$ ist nur für die Zahlentripel (1,1,30) und (1,5,6) durch 4 teilbar. Die drei gesuchten Zahlen sind entweder 1, 1 und 30 oder 1, 5 und 6.
Im Zusatz wird gefordert, daß es eine kleinste Zahl im Zahlentripel gibt und daß sie Teiler der beiden anderen Zahlen ist. Nur das Zahlentripel (1,5,6) erfüllt diese Bedingung, denn es gilt $1 < 5 < 6$ und $1 \mid 5$ und $1 \mid 6$. In diesem Fall sind 1, 5 und 6 die gesuchten Zahlen.

W(7)275 Wir konstruieren den Winkel $\beta = 60°$ mit seinem Scheitelpunkt B. Danach zeichnen wir zu dem einen Schenkel des Winkels β eine Parallele im Abstande $m = 35$ mm



und zu dem anderen Schenkel eine Parallele im Abstande $n = 25$ mm so, daß der

Schnittpunkt S dieser beiden Parallelen ein innerer Punkt des Winkels β ist. Wir verbinden die Punkte B und S. Nun konstruieren wir in S die Senkrechte zu $\overline{BS}$; sie schneidet den einen Schenkel des Winkels β in A, den anderen Schenkel in C. In A tragen wir dann an $\overline{AB}$ den Winkel $\alpha = 75°$ an; sein freier Schenkel schneidet die verlängerte Strecke $\overline{BS}$ im Punkte D. Verbinden wir schließlich C mit D, so erhalten wir das zu konstruierende Viereck $ABCD$.

276a $115 \cdot 989 = 113735$

b $327 \cdot 413 = 135051$

Umfassende Lösungen bringen wir in H. 6/68.

W(8)277 Wegen des zweiten Satzes der Aufgabe kann Petja *nicht* Schüler der 4. oder 6. Klasse sein. Wegen des dritten Satzes können Wasja und Kolja *nicht* Schüler der 5. Klasse sein. Wegen des vierten Satzes können Kolja und Stepa nicht Schüler der 6. oder 7. Klasse sein.
Wir erhalten folgende Tabelle, in der wir jeweils ein F eingetragen haben, wenn die betreffende Aussage falsch ist:

x ist Schüler der	4.	5.	6.	7.	Klasse
Wasja		F			
Kolja		F	F	F	
Petja	F		F		
Stepa			F	F	

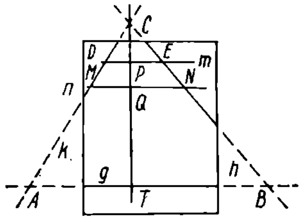
Aus der Tabelle wird ersichtlich, daß *Wasja* Schüler der 6. *Klasse* ist, da die anderen Jungen nicht Schüler dieser Klasse sind.
Also ist Wasja nicht Schüler der 4., 5. und 7. Klasse. Daher ist *Petja* Schüler der 7. *Klasse*. Die Tabelle zeigt jetzt das folgende Bild, wobei wir für wahre Aussagen ein W eingetragen haben.

x ist Schüler der	4.	5.	6.	7. Klasse
Wasja	F	F	W	F
Kolja		F	F	F
Petja	F		F	W
Stepa			F	F

Daraus folgt weiter: *Kolja* ist Schüler der 4. *Klasse*; Stepa ist nicht Schüler der 4. Klasse, also ist *Stepa* Schüler der 5. *Klasse*. Damit ist die Aufgabe gelöst. Vervollständige die Tabelle!

W(8)278 Wir zeichnen zur Geraden g zwei Parallelen m und n so, daß sie die Geraden k und h in den Punkten D und E bzw. M und N schneiden und daß diese Punkte auf dem Zeichenblatt liegen. Wir halbieren die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{MN}$; die Halbierungspunkte seien P und Q. Die Gerade PQ schneidet die Gerade g im Punkt T so, daß $\overline{AT} = \overline{BT}$ gilt.

Beweis: $\triangle ABC \sim \triangle MNC \sim \triangle DEC$.
Die Strecke $\overline{PC}$ ist Seitenhalbierende des Dreiecks DEC, die Strecke $\overline{QC}$ ist Seitenhalbierende des Dreiecks MNC.



Aus der Ähnlichkeitslage der Dreiecke folgt, daß die Strecke $\overline{TC}$ Seitenhalbierende des Dreiecks ABC sein muß.

279 1. *Fall*: Die natürliche Zahl z sei gerade, d. h., $z = 2m$. Dann gilt $2m + (2m)^2 = 2m(2m+1)$, also ist die Summe eine gerade Zahl.
2. *Fall*: Die natürliche Zahl z sei ungerade, d. h., $z = 2m + 1$. Jetzt gilt $(2m+1) + (2m+1)^2 = 2m + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4m^2 + 6m + 2 = 2(2m^2 + 3m + 1)$; also ist auch in diesem Falle die Summe eein gerade Zahl. Die Behauptung ist also in jedem Falle richtig.

W(9)280 Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn entweder

$2x - 3 > 0$ und $3x + 7 > 0$ oder (1)

$2x - 3 < 0$ und $3x + 7 < 0$ gilt. (2)

Der Fall (1) trifft genau dann zu, wenn

$x > \frac{3}{2}$ *und* $x > -\frac{7}{3}$, d. h., wenn $x > \frac{3}{2}$ gilt.

Der Fall (2) trifft genau dann zu, wenn

$x < \frac{3}{2}$ *und* $x < -\frac{7}{3}$, d. h., wenn $x < -\frac{7}{3}$ gilt.

Die Ungleichung ist also genau dann erfüllt, wenn entweder $x < -\frac{7}{3}$ oder $x > \frac{3}{2}$ gilt.

281a Es seien x der erste Faktor und y der zweite Faktor.
Dann gilt wegen Zeile 2

$$7x < 910, \text{ d. h., } x < 130.$$

In der Zeile 3 steht $8x$ oder $9x$; daher gilt

$$9x \geqq 1000, \text{ d. h., } x > 111.$$

Wegen Zeile 4 endet ein Vielfaches von x auf Null, also ist x eine der Zahlen 115, 120, 125. Wegen Zeile 2 ist der Zehner von $7x$ Null also gilt $x = 115$. Wegen Zeile 5 gilt

$$xy \geqq 100000, \text{ d.h., } y \geqq \frac{100000}{x} = \frac{100000}{115} > 800.$$

Daher kann in der Zeile 4 nur $8x$ und in der. Zeile 3 nur $9x$ stehen, und wir erhalten genau eine Lösung, nämlich $115 \cdot 897 = 103155$.

281b Es seien x der erste Faktor und y der zweite Faktor. Dann gilt wegen Zeile 4
$7\,x > 10000$, d. h., $x > 1400$.
Nun kann in Zeile 5 nur ein ungerades Vielfaches von x stehen, da das Vielfache auf 5 endet. Wäre $y \geqq 3700$, so wäre $xy > 5000000$, was der Zeile 6 widerspricht.
Daher gilt $1700 < y < 1800$.
Wegen Zeile 6 gilt ferner $xy > 4000000$,

also $$x > \frac{4000000}{y} > \frac{4000000}{1800} > 2000;$$

ferner gilt $$x < \frac{5000000}{y} < \frac{5000000}{1700} < 2942\,.$$

Daher kann in Zeile 2 nur $2\,x$ stehen, und es gilt

$$2\,x \geqq 5000, \text{ d. h., } x \geqq 2500\,.$$

Wegen Zeile 5 endet x auf 5, daher endet wegen Zeile 4 $7\,x$ auf 55. Das ist aber nur möglich, wenn x auf 65 endet. x ist daher eine der Zahlen 2565, 2665, 2765, 2865.
Wir erhalten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 2 & * & 6 & 5 & \cdot\,1 & 7 & * & 2 \\ \hline
 & & & & & 5 & * & 3 & 0 \\
 & & & & * & 5 & * & * & \\
 & & * & * & * & 5 & 5 & & \\
 & & 2 & * & 6 & 5 & & & \\ \hline
 & & 4 & * & * & 2 & * & * & 0
\end{array}$$

Nun muß die Summe aus dem Hunderter in Zeile 2 und dem Zehner in Zeile 3 mindestens 15 betragen, da sonst in Zeile 6 der Tausender nicht gleich 2 sein könnte. Daher beträgt der Hunderter in Zeile 2 mindestens 6. Das ist aber nur möglich; wenn $x = 2865$, also $2\,x = 5730$ ist. Daraus folgt aber, daß $3\,x$ in Zeile 3 steht, da sonst der Zehner in Zeile 3 nicht mindestens 8 betragen würde oder die Zahl fünfstellig wäre. Es gibt daher wieder genau eine Lösung, nämlich:

$$2865 \cdot 1732 = 4962180.$$

W(10)282 Zur Abkürzung bezeichnen wir die vier Personen mit w, k, p, s, die vier Sportgemeinschaften mit A, D, L, S und die vier Sportarten mit α (Schach), β (Schwimmen), γ (Tennis), δ (Fußball). Da jede der vier Personen genau einer Sportgemeinschaft angehört und genau eine Sportart aktiv betreibt, können wir z. B. schreiben:

$w = D$, wenn w der Sportgemeinschaft D angehört,
$w \neq D$, wenn das nicht der Fall ist;
$w = \alpha$, wenn w die Sportart α betreibt,
$w \neq \alpha$, wenn das nicht der Fall ist, usw.

Dann folgt aus den Bedingungen der Aufgabe:

a) $\alpha = S$, $\quad p \neq \alpha$, also $\quad p \neq S$;
b) $\gamma \neq D$, $\quad w \neq D$,
c) $p \neq \delta$, $\quad k \neq \delta$;
d) $\alpha \neq A$, $\quad \gamma \neq A$;
e) $k \neq D$, $\quad p \neq D$; $\quad$ f) $\delta \neq D$.

	A	D	L	S	α	β	γ	δ
w		$\boxed{\text{F}}$						
k		$\boxed{\text{F}}$						$\boxed{\text{F}}$
p		$\boxed{\text{F}}$		$\boxed{\text{F}}$	$\boxed{\text{F}}$			$\boxed{\text{F}}$
s	F	W	F	F				
α	$\boxed{\text{F}}$	F	F	$\boxed{\text{W}}$				
β	F	W	F	F				
γ	$\boxed{\text{F}}$	$\boxed{\text{F}}$	W	F				
δ	W	$\boxed{\text{F}}$	F	F				

Tabelle 1

	α	β	γ	δ
w	F	F	F	W
k	W	F	F	$\boxed{\text{F}}$
p	$\boxed{\text{F}}$	F	W	$\boxed{\text{F}}$
s	F	$\boxed{\text{W}}$	F	F

Tabelle 2

Wir erhalten die umrahmten Angaben der Tabelle 1.
Dabei bedeutet „F“, daß die betreffende Aussage nicht zutrifft, dagegen „W“, daß sie zutrifft. Aus den umrahmten Angaben der Tabelle erhalten wir sofort die nicht umrahmten Angaben. Es gilt also
$\alpha = S$, $\beta = D$, $\gamma = L$, $\delta = A$, also $s = D = \beta$. Wir können daher die Tabelle 1 weiter ausfüllen und erhalten $w = \delta = A$,
$k = \alpha = S$, $p = \gamma = L$ (siehe Tabelle 2).
Daher erhalten wir das folgende Ergebnis, das mit den Bedingungen a) bis f) der Aufgabe im Einklang steht:
Wladimirow ist Mitglied von *Avantgarde* und Fußballspieler, Koslow ist Mitglied von *Spartak* und Schachspieler, Petrow ist Mitglied von *Lokomotive* und Tennisspieler, Stepanow ist Mitglied von *Dynamo* und Schwimmer.

W(10/12)283a Da im *dekadischen Positionssystem* gerechnet werden soll, gilt $(10^4 \cdot W + 10^3 \cdot O + 10^2 \cdot C + 10 \cdot H + E) \cdot 4 = 10^4 \cdot M + 10^3 \cdot O + 10^2 \cdot N + 10 \cdot A + T$.
Dabei sind die Buchstaben jeweils durch eine natürliche Zahl, die kleiner als 10 ist, zu ersetzen. Ferner ist $W \neq 0$, $\quad M \neq 0$. Wegen $4 \cdot W < 10$ ist W gleich 1 oder 2.
Ferner ist O gleich 0, 3, 6 oder 9, da sonst ein Widerspruch zur 2. Spalte auftreten würde.
Setzt man jetzt die zugelassenen Zahlen für W und O ein, so erhält man durch systematisches Probieren, wenn man alle Fälle ausscheidet, in denen sich eine Zahl wiederholt, die folgenden Lösungen:

$$\begin{array}{r} 13274 \\ +\,13274 \\ +\,13274 \\ +\,13274 \\ \hline 53096 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13407 \\ +\,13407 \\ +\,13407 \\ +\,13407 \\ \hline 53628 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19863 \\ +\,19863 \\ +\,19863 \\ +\,19863 \\ \hline 79452 \end{array}$$

Ferner erhalten wir für die Aufgaben d, c und b die folgenden Lösungen:

d) 8-adisch $\qquad$ c) 7-adisch $\qquad$ b) 6-adisch

$$\begin{array}{r} 2315 \\ 2315 \\ +\,2315 \\ \hline 7147 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1621 \\ +\,1621 \\ \hline 3542 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2342 \\ +\,2342 \\ \hline 5014 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2153 \\ +\,2153 \\ \hline 4350 \end{array}$$

Umfassende Lösungswege veröffentlichen wir in H. 6/68