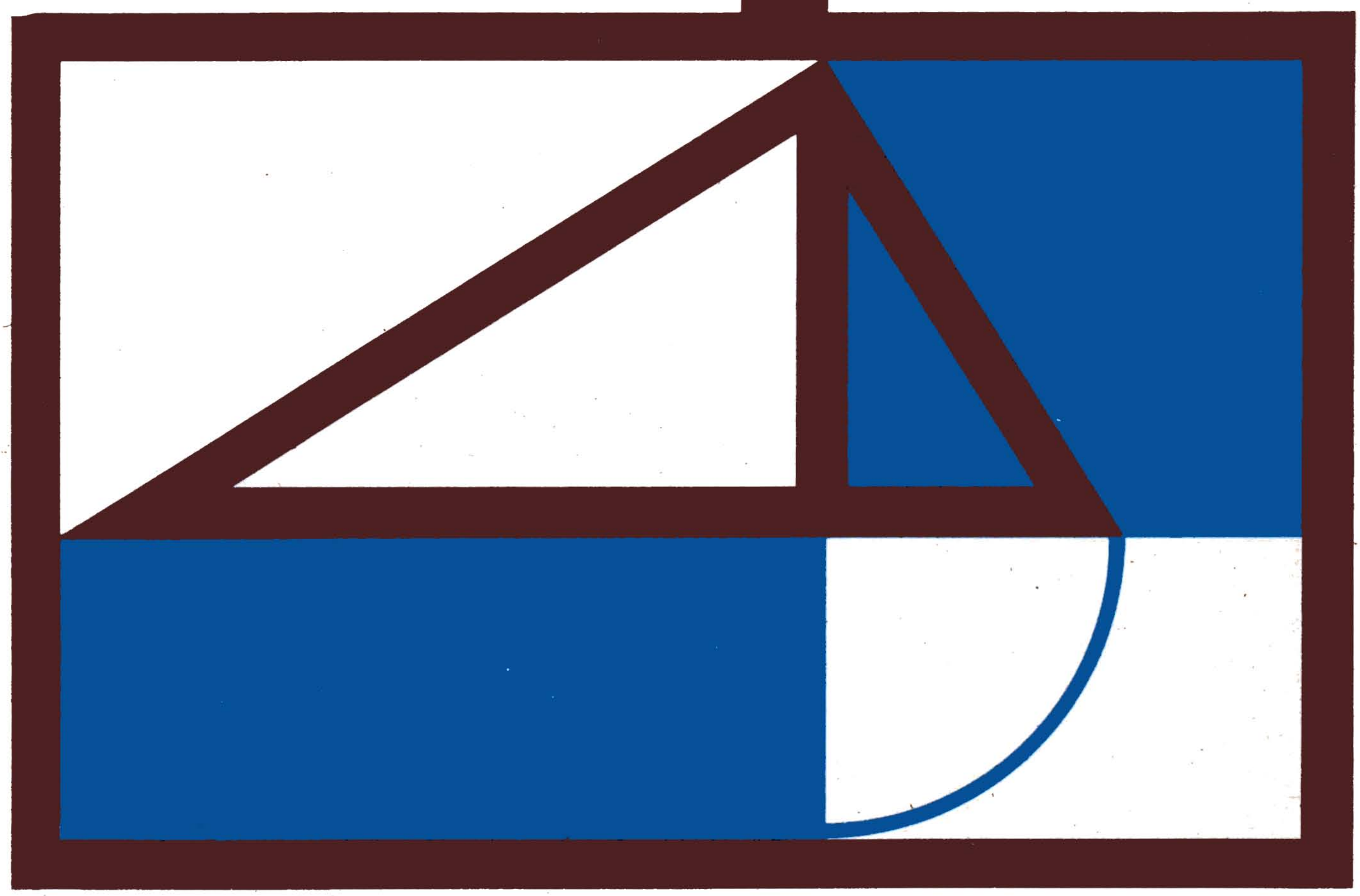
Mathematische Schüler-zeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Zentralbild (S. 1); Zentralbild/Nowosti (S. 3); Archiv VEB Polytechnik, Karl-Marx-Stadt (S. 6/7); F. Fricke, Berlin, aus „Zeit im Bild" 42/68 (S. 14 oben); Hochschulbildstelle der Technischen Universität Dresden (S. 16); Vignetten: H.-J. Jordan, H. Tracksdorf (beide Leipzig);
Typographie: H. Tracksdorf

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 2. Dezember 1968

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Die „Mathematischen Manuskripte“ von Karl Marx

„Ich bin bei der Ausarbeitung der ökonomischen principles / Grundsätze / so verdammt aufgehalten mit Rechnungsfehlern, daß ich aus despair / Verzweiflung / wieder mich drangesetzt habe, rasch die Algebra durchzuschlagen. Arithmetik blieb mir immer fremd. Auf dem algebraischen Umweg aber schieße ich mich rasch wieder ein.“

So erwähnte Marx zum erstenmal am 11. Januar 1858 in einem Brief an Engels, daß er Mathematik treibe.

Erstmalig nach dem Gymnasium wandte sich Marx mit fast 30 Jahren wieder der Mathematik zu. Eins seiner Hefte aus dem Jahre 1846 mit Notizen zur politischen Ökonomie enthält sieben zusammenhängende Seiten mit mathematischen Zeichen. Es sind Lösungen von Gleichungen ersten Grades, Berechnungen von Prozentverhältnissen und Newtonschen Binomialkoeffizienten. Weitere Jahre danach entstanden in den Vorarbeiten „Zur Kritik der politischen Ökonomie“ verschiedene Seiten mit geometrischen Zeichnungen, algebraische Berechnungen zur Abstrahierung des Begriffs der Potenz und des Logarithmus.

Zwischen diesen Studien lagen große Unterbrechungen von mehreren Monaten, ja sogar Jahren. Die Mathematik half Marx, wenn er keine Kraft mehr zu etwas anderem hatte. Systematisch konnte er sich mit der Mathematik aber erst ab 1878, also in seinen letzten fünf Lebensjahren, befassen.

Die erste Bekanntschaft mit der Analysis bereitete Marx ein rein ästhetisches Vergnügen. Voller Begeisterung löste er ein Beispiel nach dem anderen, füllte er Manuskriptseiten mit der Ausrechnung von Differentialgleichungen. Seine Bibliothek wuchs um mathematische Werke, und bald schon sah er sich verpflichtet, Engels von seinem neuen Steckenpferd zu berichten und ihm vorzuschlagen, sich ebenfalls an den Freuden der Erkenntnis zu laben. Ein für Marxsche Manuskripte ungewöhnlich schmaler Papierstreifen enthält die Beilage (Marx nannte sie „Appendix“) zu einem Brief an Engels, dessen Datum nur ungefähr angegeben werden kann (Ende 1865 bis Anfang 1866). Sie beginnt so:

„Appendix. Du hast mich während meines letzten Aufenthaltes in Manchester einmal nach Erklärung des Differentialkalküls gefragt. Im folgenden Beispiel wird Dir die Sache ganz klar werden. Der ganze Differentialkalkül entsprang zunächst aus der Aufgabe, Tangenten durch einen beliebigen Punkt einer beliebigen Kurve zu ziehn. Daran will ich Dir daher die Sache exemplifizieren.“

An diese Einleitung schließt sich die älteste Handschrift von Marx zur höheren Mathematik an. Die jüngste Ausarbeitung ist in seinen letzten Lebensjahren entstanden, genauer gesagt, begonnen worden, weil ihn der Tod hinderte, die große Arbeit zu vollenden, nämlich die Differentialrechnung zu begründen, ihre Natur und Dialektik zu enthüllen. Gleichsam im Vorgefühl des nahenden Endes wollte er die wichtigsten Teile seiner Aufzeichnungen sauber abschreiben und an Engels schicken. Solche Reinschriften sollte es drei geben, aber Engels erhielt nur zwei. Die dritte und letzte konnte Marx nicht mehr beenden.

Marx war schon über 60 Jahre alt, krank und matt, durch die tödliche Krankheit seiner Frau gebrochen, als er diese Manuskripte niederschrieb. Er schrieb sie in der feurigen, kraftvollen Sprache eines Mannes, der um den Wert eines geschliffenen Wortes und scharfen Gedankens wußte. Engels antwortete ihm jungenhaft triumphierend: „Gestern also endlich hab’ ich mir die Courage gefaßt, auch ohne Hülfsbücher Deine mathematischen Manuskripte durchzustudieren, und war froh zu sehn, daß ich die Bücher nicht nötig hatte.“

Mit Unterbrechung, in Minuten von Stunden, die dem „Kapital“ galten, suchte Marx schon in jenem Frühjahr 1865 herauszufinden, wieso es in der Differentialmethode so sonderbar zugeht, daß sie strenggenommen die Mathematik durchweg verletzt, die Resultate aber immer richtig sind.

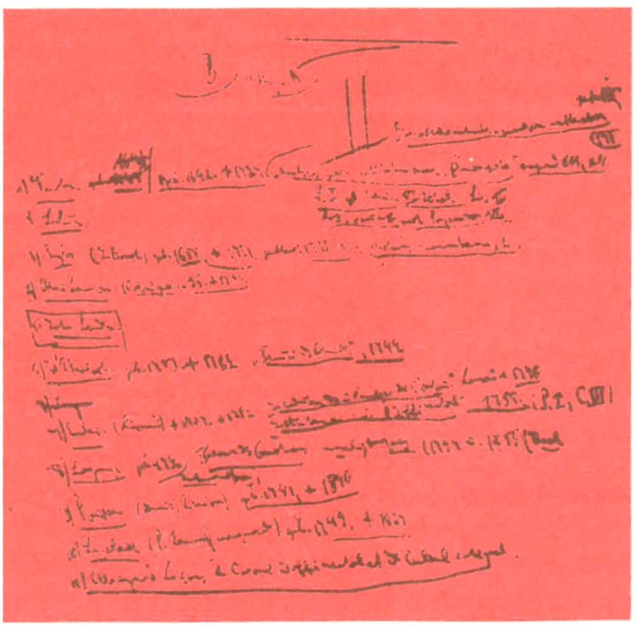
Doch kam der Zeitpunkt, da es sich Marx erlauben konnte, eine Sache in Angriff zu nehmen, die ihn schon lange beschäftigte. Allerdings ergab sich das nicht ganz so, wie er es sich gewünscht hätte, einfach, weil er sehr krank war. „Nach 1870 trat wieder eine Pause ein, bedingt hauptsächlich durch Krankheitszustände. Wie gewöhnlich füllte Marx diese Zeit durch Studien aus; Agronomie ..., Geologie und Physiologie und namentlich selbständige mathematische Arbeiten, bilden den Inhalt der zahlreichen Auszugshefte aus dieser Zeit.“

Diese Worte aus Engels' Vorwort zum zweiten Band des „Kapital" sind wohl bekannt. Nicht jedermann weiß jedoch, wie tapfer damals der kranke Marx mit der Aufgabe rang, die Differentialrechnung zu begründen.

Das Schicksal der Handschriften

ist dramatisch. Ihr Weg zu den Menschen war nicht einfach. Engels konnte seine Absicht, sie zusammen mit seinen zuletzt entstandenen Werken herauszugeben, nicht verwirklichen — seine „Dialektik der Natur" erschien erst viele Jahre nach seinem Tode, erst in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts. Die von Marx hinterlassenen Manuskripte gerieten in das Archiv der deutschen Sozialdemokratie.

Sorgen und Nöte hatte die junge Sowjetunion in den 20er Jahren genug — sie waren sehr groß und dringlich. Und dennoch schrieb Lenin einen kurzen Brief an den Direktor des Marx-Engels-Instituts: „Genosse Rjasanow! ... Könnten wir nicht bei den Scheidemann und Co. die Briefe von Marx und Engels kaufen (das ist doch so eine käufliche Bande)? Oder Fotokopien kaufen?" Daraufhin fuhr Rjasanow nach Berlin und konnte tatsächlich erreichen, daß Zehntausende Seiten Marxscher Manuskripte fotokopiert wurden. Etwa 1000 von ihnen waren Arbeiten zur Mathematik. In das Moskauer Marx-Engels-Institut gelangten die Fotokopien der „Mathematischen Manuskripte" im Jahre 1925. Anfang der dreißiger Jahre begann im Institut für Marxismus-Leninismus beim Zentralkomitee der KPdSU Ernst Kolman zu arbeiten. Die Fotokopien der „Mathematischen Manuskripte" fesselten seine Aufmerksamkeit. Er war es, der Sofja Alexandrowna Janowskaja, die er von der Kommunistischen Akademie her kannte, dafür gewann, sich dieser Handschriften anzunehmen. Man kann sich schwerlich jemanden vorstellen, der die Aufgabe, Marxens Handschriften für den Druck vorzubereiten, hätte besser lösen können als Sofja Janowskaja. Über ihre Beharrlichkeit und Hartnäckigkeit entstanden an der Moskauer Universität wahre Legenden.



Ein von Karl Marx in ein Heft eingelegter Zettel. Er enthält Notizen über berühmte Mathematiker und Literaturhinweise

Natürlich reichten hier Beharrlichkeit und Hartnäckigkeit allein bei weitem nicht aus. Erforderlich war eine selten anzutreffende Verbindung von Wissen, Interesse und Können. Man muß selbstverständlich die Mathematik beherrschen, ihre Geschichte, die Sprachen Deutsch, Englisch und Französisch.

Bald nach dem Kriege meldete sich bei Sofja Alexandrowna Janowskaja der Doktorand Konstantin Alexejewitsch Rybnikow. Übrigens waren sie alte Bekannte, denn gerade unter Janowskajas Betreuung hatte Rybnikow im Jahre 1941, fünf Tage nach Kriegsausbruch, seine Kandidatendissertation zur Geschichte der Variationsrechnung verteidigt. Seine Doktordissertation über Marxens mathematisches Erbe verteidigte Rybnikow genau 13 Jahre später, am 25. Juni 1954.

Das nächste Jahrzehnt war durch eine ebenso mühselige wie aufwendige Arbeit erfüllt. Eine Frage nach der anderen, die auf den Rändern der Handschriften angemerkt waren, wurde gelöst. Es mußte bis zu Ende geklärt werden, welche Quellen Marx benutzt hatte. Das war manchmal eine schier unlösbare Aufgabe, weil die Bücher schon lange nicht mehr im Umlauf waren. 1966 fuhr Rybnikow nach London, um, wie er sagte, „den Löwen in der Wüste zu jagen". Aufs genaueste musterte er die Bestände des Britischen Museums und anderer großer Bibliotheken.

Der deutsche Mathematiker Wußing (Leipzig) durchforschte die Bibliotheksbestände der DDR, um in ihnen sämtliche in Deutschland herausgegebenen mathematischen Werke zu ermitteln, die Marx benutzt haben konnte. So gelang es, Marxens Handschriften fast in allen Fällen mit der von ihm benutzten Literatur zu vergleichen und die selbständigen Niederschriften von den Konspekten zu trennen.

Die Handschriften liegen in dem strengen Gebäude am Sowjetskaja-Platz, und sie scheinen die Wärme vieler Hände zu bewahren, die sie sorgsam wie eine Stafette durch die langen Jahre trugen. Marxens Handschriften waren und sind in den richtigen Händen.

Aus Nedelja 10/68

Lew Danowitsch Landau

geb.: 22. 1. 1908 in Baku · gest.: 1. 4. 1968 in Moskau

Landaus letzte Worte: Ich hatte ein gutes Leben. Mir ist alles gelungen.

Etappen seines Lebens

Aufnahme des Physikstudiums mit 14 Jahren in Leningrad, Veröffentlichung seiner ersten Arbeiten über die *Theorie der Metalle* mit 18 Jahren, erfolgreiche Verteidigung seiner Doktorarbeit mit 19 Jahren, anschließend Studienaufenthalte in Kopenhagen (bei Niels Bohr), Göttingen (bei Max Born), England und der Schweiz, Arbeit als Wissenschaftler in Charkow, ab 1937 als Lehrer und Forscher an der Universität Moskau.

Wichtigste wissenschaftliche Arbeiten

Über Quantentheorie und Kernphysik, Physik der kosmischen Strahlungen, Kolloidchemie, Theorie des Diamagnetismus freier Metallelektronen, Theorien über Zustandsänderungen in festen Körpern, Theorie des „superfluiden" Heliums (für letztere erhielt er den Nobelpreis)

Bedeutende Auszeichnungen

Akademiemitglied (seit 1946), Staatspreis der Sowjetunion (1946), Auszeichnung mit der Max-Planck-Medaille (1960), Nobelpreis für Physik (1962), Auszeichnung mit dem Leninorden (Januar 1968)

Worte an einen Mathematikstudenten

Ein junger Mathematikstudent kam zu Landau und behauptete, er habe den Beweis für den großen Fermatschen Satz gefunden. Dieser Satz stammt von dem berühmten französischen Mathematiker Fermat (1601 bis 1665) und lautet:

Es gibt für keinen ganzzahligen Exponenten $n > 2$ ganze, von Null verschiedene Zahlen x, y, z, die der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ genügen.

Obwohl sich seit 300 Jahren Mathematiker der ganzen Welt bemühen, einen allgemeinen Beweis für diesen Satz zu finden, gilt er heute noch als unbewiesen. Landau hörte den jungen Gast geduldig an, lächelte dann und bat ihn, eine nicht allzu schwierige mathematische Aufgabe zu lösen, die er ihm diktierte. Der Student vermochte jedoch nicht, die Lösung zu erbringen. Daraufhin riet ihm der große Gelehrte:

Bevor Sie an den Grundlagen der Wissenschaft rütteln, müssen Sie studieren.

Landaus Vermächtnis an die Jugend

Mit Wißbegier beginnt die Erkenntnis der Welt. Gerade das ist eines der markantesten und bedeutsamsten Kennzeichen der Jugend, in dem sich die Persönlichkeit formt und das Wissen besonders rasch und nachhaltig zunimmt. Ohne Wißbegier kann sich meiner Meinung nach der Mensch nicht normal entwickeln. — Ein Wissenschaftler ohne Wißbegier ist ein kläglicher und unfruchtbarer Mensch ... Ich meine, daß die allgemeine Wißbegier heute besonders notwendig ist in einer Gesellschaft, die die schöpferische Entwicklung der Persönlichkeit anstrebt. Ein Mensch, der heute nicht ständig die Ereignisse in der Wissenschaft verfolgt, läuft Gefahr, in kurzer Zeit hinter dem Leben zurückzubleiben und viele neue Erscheinungen nicht zu verstehen.

B. Zimmermann

Was bedeutet eigentlich „x"?

Die Algebra wurde von den Arabern begründet. Als sie die Unbekannte (Variable) bezeichnen mußten, taten sie dies mit dem arabischen Wort „schei", das im Arabischen „etwas" (nicht Bekanntes) bedeutet. Der Kürze wegen verwendete man in Schriftstücken usw. nur den ersten Buchstaben des Wortes — das „sch". Von den Arabern lernten ihre Nachbarn und Rivalen, die Spanier, die Algebra kennen. Sie begannen ebenfalls die unbekannte Größe „sch" zu nennen. Daraus ergab sich eine merkwürdige Verwechslung: Die Spanier selbst hatten auch einen Buchstaben, der den Lautwert „sch" hatte; geschrieben wurde er jedoch „x". Für die Spanier war soweit also alles klar — sie schrieben einfach die Unbekannte (Variable) als „x", sprachen es aber wie „sch" aus. Doch sie vermittelten die Wissenschaft der Algebra ihren nördlichen Nachbarn, den Franzosen. Die Franzosen schrieben nun für die Unbekannte (Variable) auch „x". Nur wurde dieser Buchstabe bei ihnen nicht als „sch", sondern als „iks" gesprochen. Auf diese Weise ging der eigentliche Sinn des arabischen Wortes „schei" — „etwas" (nicht Bekanntes) verloren. Von den Franzosen kam die Bezeichnung „x" schließlich zu uns.

Aus: Po sv'etu 11/67 entnommen und im Russischunterricht übersetzt von Kl. 10 der 22. OS, Leipzig.

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

EDV Teil 1

Wir beginnen in diesem Heft eine Artikelserie, in der wir uns mit *Rechentechnik* beschäftigen wollen, also mit einem Gebiet der Mathematik, das in der letzten Zeit einen unerhörten Aufschwung genommen hat und immer größere Bedeutung gewinnt. Der Grund dafür dürfte allgemein bekannt sein: Wissenschaft und Technik haben sich so stürmisch entwickelt, daß die anfallenden Probleme einerseits immer komplizierter werden, andrerseits in so kurzer Zeit gelöst werden müssen, daß die Bewältigung heute gar nicht mehr anders möglich ist als *elektronisch.* Man denke etwa an die Überwachung eines modernen Produktionsprozesses, bei dem die Meßgrößen sofort ausgewertet werden müssen, um in den Vorgang eingreifen zu können. Ein menschlicher Rechner würde vielleicht Tage oder Wochen für eine solche Arbeit benötigen. Die Ergebnisse wären dann überholt und wertlos, die Produktion inzwischen fehlgesteuert, was erhebliche Material- und Zeitverluste bedeuten könnte. Um sich eine Vorstellung vom rechnerischen Umfang der auftretenden Probleme zu machen, sei erwähnt, daß etwa die Lösung eines Systems von 40 Gleichungen mit 40 Unbekannten mit drei- bis vierstelligen Koeffizienten durchaus keine Seltenheit ist. Der Leser möge sich ausmalen, wie lange ein Mensch damit zu tun hätte, abgesehen von den immer wieder durch die eintönige und ermüdende Tätigkeit auftretenden Rechenfehlern. Schon bei einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten wie

$$\begin{aligned} 0{,}371\,x - 0{,}986\,y &= 1{,}352 \\ 0{,}846\,x + 1{,}249\,y &= -0{,}941 \end{aligned}$$

empfindet man Unbehagen. Man würde eine ganze Weile daran rechnen; und wenn die Aufgabe einem praktischen Problem entspringt, wird man nicht erwarten können, daß sie — wie meistens in den Schulbüchern — ganzzahlig aufgeht. Man stelle sich dasselbe nun mit 40 Gleichungen und 40 Unbekannten vor. Ein elektronischer Digitalrechner würde für diese Aufgabe je nach Größenklasse wenige Stunden oder sogar nur einige Minuten brauchen.

Man könnte die Liste der Beispiele für die Anwendung des elektronischen Rechnens beliebig fortsetzen; und es gibt heute nur noch wenige Arbeitsgebiete, die sich *nicht* elektronischer Rechen- und Datenverarbeitungsanlagen bedienen. Die weitere Entwicklung ist in ihrem Umfang und in ihrer Geschwindigkeit noch nicht abzusehen, aber eines steht fest: Mancher Jugendliche oder Erwachsene, der heute glaubt, weit davon entfernt zu sein, wird sich in seiner Ausbildung oder im Beruf früher oder später damit zu befassen haben. Vielen wird das nicht leichtfallen, weil das Denken in den zahlreichen neuen Begriffen und deren Zusammenhängen ungewohnt ist, da es oft stark von der Denkweise der bisherigen Schulmathematik abweicht. Wir empfehlen deshalb dem Leser, diese Artikelfolge gründlich durchzuarbeiten, auch was die Anwendungsbeispiele und die Übungen betrifft, um sich damit eine Grundlage für ein späteres umfangreicheres Studium dieser mathematischen Gebiete zu schaffen. Wir werden den Stoff so darbieten, daß ihn bereits Schüler der achten, eventuell auch schon der siebenten Klasse verstehen können.

1. Kodierung von Informationen — Zahlensysteme — binäre Systeme

1.1. Der Begriff Kodierung

Bei jeder, auch der einfachsten mathematisch zu lösenden Aufgabe geht es darum, bestimmte *Informationen* zu verarbeiten.

Beispiel: Ein Physiker soll ausrechnen, welches Volumen 50 g Sauerstoff bei einer Temperatur von 20 °C und einem Druck von 3 at einnehmen. Hier sind es zunächst die vier Informationen:

1. Sauerstoff 2. 50 g 3. 20 °C 4. 3 at.

Das genügt zur Lösung der Aufgabe noch nicht, denn der Physiker muß außerdem noch darüber *informiert* sein, wie sich abgeschlossene Gasmengen bei Druck- und Temperaturveränderungen verhalten, er muß also die Zustandsgleichung der Gase kennen.

Wenn schon diese einfache Aufgabe, die jeder ältere Schüler in wenigen Minuten müßte lösen können, mehrere Einzelinformationen enthält, so kann man sich vorstellen, wie viele bei den schwierigen Problemen der modernen Wissenschaft und Technik auftreten können. Die Informationen sind im einfachsten Fall Zahlenangaben. Es können aber auch Zusammenhänge zwischen bestimmten Größen sein, die in mathematischen Formeln darzustellen sind. Es können einschränkende Bedingungen sein, die oft in Ungleichungen ausgedrückt

werden. Wenn man zum Beispiel einen Produktionsprozeß optimieren, das heißt möglichst günstig gestalten will, so muß man berücksichtigen, daß jede Maschine eine bestimmte Höchstleistung hat, etwa eine gewisse Stückzahl pro Stunde nicht überschreiten kann. Man könnte schreiben: $P \leqq 50\,h^{-1}$,
wobei in dieser Ungleichung P ein Maß für das Leistungsvermögen der Maschine ist und h^{-1} nichts anderes bedeutet als Stück pro Stunde. In der Praxis sind natürlich viele Informationen wesentlich komplizierter. Eins ist allen gemein: Um sie im Rahmen des zu lösenden Problems verarbeiten zu können, müssen sie in eine möglichst handliche, verständliche Form gebracht werden. Man muß sie, wie man sagt, *verschlüsseln.* Bei diesem Ausdruck denkt der Leser vielleicht an eine Geheimschrift oder Geheimsprache, nicht aber daran, daß, wenn uns ein Freund einen Brief schreibt, dies eigentlich auch schon eine Verschlüsselung von Informationen ist, denn nur der des Lesens Kundige kann damit etwas anfangen. Wenn wir das Symbol „7" lesen, so ist dies bereits eine Verschlüsselung der Zahl 7. Einem, der dieses Symbol nicht kennt, etwa einem Analphabeten, müßte man sieben Finger entgegenstrecken oder man müßte die sieben Gegenstände, die man meint, unmittelbar vor ihn hinlegen.

Der Begriff Verschlüsselung ist also sehr dehnbar und die Form der Verschlüsselung sehr verschieden, je nach dem Zweck, dem sie dient, oder *für wen* sie bestimmt ist. Man spricht mit einem in eine Sache Eingeweihten über diese Sache anders als mit einem Unbefangenen. Insbesondere verwendet man andere Symbole: Fremdwörter, Abkürzungen usw. (Wenn wir heute etwa sagen: „Die Schüler der EOS gehen zum UTP ins WSSB", so versteht das sicher nicht jeder.)

Ein gemeinsames Merkmal aller Verschlüsselungen ist es, daß eine Anzahl vorher festgesetzter *Symbole* verwendet wird, für die in bestimmten Zusammenstellungen bestimmte Bedeutungen verabredet sind. Wir unterscheiden drei Arten von Symbolen:

1. Ziffern 2. Buchstaben 3. Sonderzeichen.

Zu letzteren gehören auch die aus der Schulmathematik bekannten Zeichen wie $+$, $-$, $<$, $=$ usw. Wir werden in diesem Lehrgang noch weitere solcher Zeichen kennenlernen. Wird eine Information durch derartige aneinandergereihte Symbole dargestellt, so spricht man von der *Kodierung* der Information.

Von den drei genannten Arten der Informationssymbole kommt für unsere Belange verständlicherweise den *Ziffern* die größte Bedeutung zu. Wenn wir auch bei der Kodierung von Rechenaufgaben auf Buchstaben und die übrigen Zeichen, die Sonderzeichen, nicht verzichten können, so sind sie doch nur Beiwerk. Wir werden uns also im folgenden näher mit dem Problem befassen, wie man die in der Rechentechnik wichtigsten Informationen, die *Zahlen**, kodieren, das heißt, durch Ziffern darstellen kann.

1.2. Das Dezimalsystem

Im Schulunterricht werden Zahlen — zunächst ganze, später gebrochene und schließlich beliebig reelle Zahlen — in dem bekannten *Dezimalsystem* dargestellt. Da uns dieses System sehr geläufig ist, denken wir kaum noch daran, daß es sich um eine Kodierung, nämlich um die Verschlüsselung einer Summe handelt. Als Informationssymbole werden die Ziffern 0 bis 9 und als Sonderzeichen wird das Komma verwendet. Schon in den ersten Schuljahren lernt man, daß 2783 2 Tausender, 7 Hunderter, 8 Zehner und 3 Einer bedeutet. Später schreibt man:

$$2783 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1.$$

Setzt man $10 = 10^1$ und $1 = 10^0$, so erkennt man noch besser, daß es sich um eine Zerlegung der Zahl nach fallenden Potenzen von 10 handelt. Jede Ziffer hat eine bestimmte *Position*, einen bestimmten Stellenwert. Dieser beträgt, wenn man von links nach rechts fortschreitet, jeweils ein Zehntel des vorigen. Setzt man dieses Prinzip über die Einer hinaus fort, so erhält man die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. Den Übergang von den Einern zu den Zehnteln kennzeichnen wir durch ein *Komma.* Also:

$$14{,}795 = 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000}.$$

Vereinbart man noch die Schreibweise:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1},\ \frac{1}{100} = 10^{-2},\ \frac{1}{1000} = 10^{-3} \text{ usw.},$$

so wird die Darstellung noch übersichtlicher:
14,795 ist also eine Kodierung** für die Summe

$$1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Wie man im Dezimalsystem rechnet, also die vier Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ausführt, weiß jeder. Es ist auch bekannt, wie man beim schriftlichen Rechnen den Zehnersprung beziehungsweise den Sprung in die nächsthöhere Zehnerpotenz bewältigt. Uns geht es darum, wie man die Rechenprozesse *technisch* realisieren kann. Mit diesem Problem werden wir uns im nächsten Heft befassen.

J. Frormann

* Es sei betont, daß wir zwischen Zahlen und Ziffern unterscheiden müssen: Ziffern sind Zeichen, Symbole, die in bestimmter Reihenfolge zusammengestellt, eine Zahl darstellen. Natürlich kann eine Zahl auch manchmal durch eine Ziffer dargestellt werden. Auch dann müssen wir den Unterschied beibehalten. 2 ist zum Beispiel eine gerade Zahl, aber niemals eine gerade Ziffer. Andererseits hat die Ziffer 2, also das Symbol „2", links unten eine Ecke. Die natürliche Zahl 2 dagegen hat sicher eine ganze Reihe mathematischer Eigenschaften, aber eine Ecke hat sie nicht!

** Streng genommen müßte man sagen: eine kürzere Form der Kodierung; denn die Schreibweise $1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ usw. stellt selbst schon eine Kodierung dar (siehe 1.1).

Messegold für Präzisions-Reißzeuge

Aus dem VEB Polytechnik berichtet

Ein Blick in den Messekatalog

Genauigkeit, Zuverlässigkeit und vorbildlicher Fleiß der Arbeiterschaft ließen für unsere Erzeugnisse den Begriff Präzision entstehen, und wir erzielten damit Spitzenleistungen der Feinmechanik, die auch zur Weltgeltung der Fabrikmarke führten.

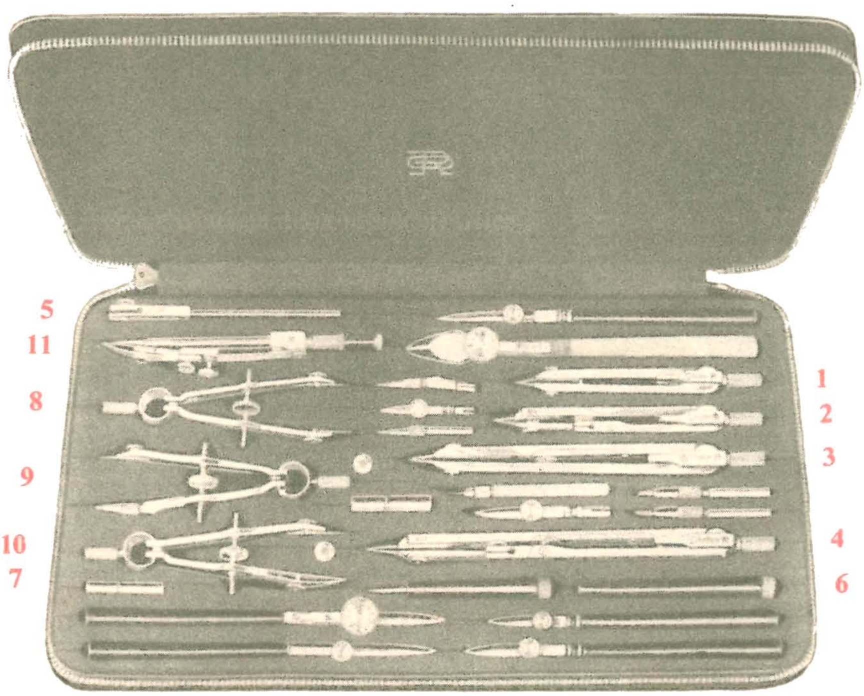
Der Ursprung unseres Betriebes geht bis zum Jahre 1870 zurück, als Uhrmachermeister *Emil Oscar Richter* in seiner kleinen Werkstatt die Herstellung mathematischer Geräte betrieb und sich besonders mit der Verbesserung der damals noch sehr mangelhaft gefertigten Zeicheninstrumente befaßte. Die dabei geglückten wertvollen Erfindungen ließen ein neues Zirkelsystem entstehen, das in aller Welt als „Flachsystem" bekannt wurde. Als einige der markantesten Erfindungen waren zu nennen: der erste *Nullenzirkel*, der sich schnell zu einem Hauptinstrument herausbildete und ohne den ein modernes Reißzeug kaum noch denkbar ist; das *Kreuzscharnier* an den Reißfedern und die *Geradeführung* der Zirkel.

Unser Prinzip: nur bestes Material auf modernsten Maschinen von erstklassigen Facharbeitern verarbeiten zu lassen, festigte den guten Ruf der Marke „Original Richter" und ließ den Betrieb schon in kurzer Zeit zur bekanntesten Reißzeugfabrik heranwachsen.

Um die Möglichkeiten der sich rapid entwickelnden neuen Technik in der Deutschen Demokratischen Republik auszuschöpfen, wurden der VEB Präzisions-Reißzeugwerk Richter und die Betriebsabteilung Labor- und Prüfgerätebau des VEB Buchungsmaschinenwerk Karl-Marx-Stadt zu einem Betrieb zusammengelegt, der den Namen VEB Polytechnik Karl-Marx-Stadt trägt.

Auf Grund neuer Einrichtungen wird die Fertigung nach dem heutigen Stand der Technik durchgeführt, und damit bieten wir auch die Gewähr für eine gleichbleibende Güte unserer Erzeugnisse.

Wir stellen vor: **Leonardo XI** in schwarzer Reißverschlußtasche, mit dunkelblauem oder rotem Samt gefüttert



1 Handzirkel mit Geradeführung, Schenkellänge 85 mm
2 Handzirkel mit Haarschraube, mit Geradeführung, Schenkellänge 125 mm
3 Einsatzzirkel mit Geradeführung und Kreuzscharnier, Schenkellänge 90 mm
4 Einsatzzirkel mit Haarschraube, mit Geradeführung und Kreuzscharnier, Schenkellänge 140 mm
5 Verlängerungsstange
6 Einsatzheft
7 Bleibüchse
8 Ringfeder-Teilzirkel
9 Ringfederzirkel mit festem Bleihalter
10 Ringfederzirkel mit fester Reißfeder
11 Nullenzirkel mit Kreuzscharnier

Kopiernadelhalter, Zentrierzwecke (2 Stück), Reißfeder mit Kreuzscharnier, Reißfeder mit Kreuzscharnier, Reißfeder mit Kreuzscharnier, Reißfeder mit Kreuzscharnier und Teilscheibe, Katasterfeder, Reißfeder, schwedische Form, mit Teilscheibe, Schraubenzieher

Verschiedene Aufgaben der Konstruktion – verschiedene Zirkelarten

VEB Polytechnik stellt folgende Instrumente her:

Hand- und Einsatzzirkel
Dieser Zirkel ist das am meisten verwendete Instrument des Konstrukteurs. Es besteht aus zwei Schenkeln, von denen der eine eine Spitze und der andere eine Aufnahme zur Befestigung der Zirkeleinsätze besitzt. Beide Schenkel werden durch die Griffklemme gehalten und durch eine Zugschraube so weit zusammengepreßt, daß sich die beiden Schenkel zügig bewegen. Mit einem Schraubenzieher kann jeder leicht den Gang des Zirkels an der Zugschraube regulieren. Es ist ratsam, ab und zu einen kleinen Tropfen Öl in die Bohrung am Gelenk zu geben.

Der Nullenzirkel
Er unterscheidet sich von allen anderen Instrumenten hauptsächlich dadurch, daß die Zentrierspitze auf dem Papier feststeht und der bewegliche Zirkeleinsatz durch sein eigenes Gewicht auf dem Papier aufliegt und um erstere als Drehachse herumgeführt wird. Durch diesen Vorteil wird ein sehr schnelles und sauberes Arbeiten und Ziehen von sehr kleinen Kreisen ermöglicht. Das Zweifedersystem am Nullenzirkel bewirkt, daß sich beim Öffnen und Schließen des Nullenzirkels der Einsatz parallel zur Zentrierspitze verschiebt.

Der Ringfeder-Teilzirkel
Er wird, wie schon sein Name besagt, in der Hauptsache zum Teilen von Strecken sowie deren Übertragung benötigt. Er besitzt eine Gewindespindel, damit eine beliebige Öffnung fest eingestellt werden kann.
Als Sonderinstrumente werden folgende Zirkel hergestellt:

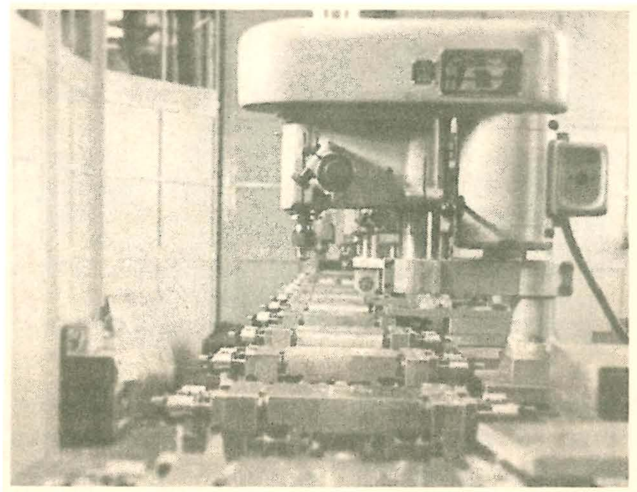
Der Reduktionszirkel
Dieser Zirkel dient dazu, eine gegebene Strecke in einem bestimmten Maßstab zu übertragen bzw. eine Strecke in gleiche Teile zu teilen. Er besitzt zwei Schenkel und einen Schieber. Der eine Schenkel trägt auf einer Seite eine Skala für die Teilung des Kreises und auf der anderen eine für die Teilung von Strecken. Als wichtigste Sondermaße sind die Beziehungen des *goldenen Schnittes* sowie die Bestimmung der Seitenverhältnisse von Papierformaten nach der Beziehung *Wurzel aus 2* angegeben.

Der Stabzirkel
Ihn nimmt der Konstrukteur, um größere Kreise zu ziehen. Er besteht aus einem 1 m langen Holzstab, auf dem sich zwei Schieber in einer beliebigen Entfernung einstellen lassen.

Ein Blick in den Fertigungsablauf

Als Werkstoff wird ein hochlegiertes, kaltgewalztes Neusilber, welches in Stangen und Blöcken geliefert wird, verwendet. Die Stanzerei verformt die Zirkel-Schenkel kalt aus Stangen. Das heißt, daß ein Stempel die Zirkelköpfe unter hohem Druck in eine Form preßt, die der des endgültigen Kopfes gleicht. Andere Teile werden gestanzt, geprägt und gebogen.
In den Vorfertigungen wird maschinell gefräst, gebohrt, gesenkt und gewindegeschnitten. Der Automatensaal stellt mittels Langdreh- und Revolverdrehautomaten Drehteile her (siehe Foto). Dabei müssen die Maße der Zeichnungen, die Passungen und Toleranzen genauestens eingehalten werden. Die in diesem Zustand fertig bearbeiteten Teile übernimmt die Abteilung Oberfläche. Auf Läppmaschinen wird flach geläppt, und die Rundungen werden an Schleifscheiben mit der Hand bearbeitet. Die Polierer geben anschließend den Teilen die glänzende Oberfläche. In der Verchromerei wird ein Teil der Instrumente dekorativ verchromt. Die Montage fügt die fertiggestellten Werkstücke zusammen, paßt sie ein und montiert sie. Nach einer Gütekontrolle stellt die Packerei die Etuis zusammen.

A. Hanisch



Taktstraße für die Fertigung von Zirkelteilen
(ökonomischer Nutzen 62000 M jährlich)

In Vorbereitung des 20. Jahrestages der DDR wurde die von einer Arbeitsgruppe entwickelte und unter Einbeziehung der Jugendlichen gebaute Taktstraße dem Jugendkollektiv als Jugendobjekt übergeben. Dieses Kollektiv ist verantwortlich für die Bedienung, Wartung, Pflege und Kontrolle der Taktstraße. Es hat sich vor Inbetriebnahme der Taktstraße zu Einrichtern qualifiziert. Vorher erfolgte die Bearbeitung der Zirkelschenkel nach dem Werkstattprinzip. Für die Durchführung der erforderlichen Arbeitsgänge waren jeweils 8 bis 10 Arbeitskräfte erforderlich.

Von einer Werbetafel auf der XI. MMM in Leipzig entnommen

Spieglein, Spieglein an der Wand, ...

Vielleicht lest ihr später einmal den Roman „Jessy und Morgana“ von *Alexander Grin*, der mit folgenden Worten beginnt:
„Es gibt eine altüberlieferte Art des Wahrsagens, das Orakeln aus Spiegeln. Man blickt in einen von zwei Kerzen flankierten Spiegel, dem ein zweiter Spiegel so gegenübergestellt ist, daß er sich darin reflektiert und die Kerzen einen endlosen strahlenden Korridor bilden.

Und was das junge Mädchen (nur junge Mädchen pflegen auf solche Weise das Schicksal zu befragen) in der Tiefe dieses Korridors erblickt, das geht in Erfüllung. ...“ Daß man weder mit zwei parallelen Spiegeln noch auf andere Weise wahrsagen kann, soll uns hier nicht weiter interessieren. Vielmehr sollt ihr durch das Lesen des folgenden Beitrags selbst die Erklärung dafür finden, warum bei der oben beschriebenen Vorrichtung die Spiegelbilder beider Kerzen einen endlosen Korridor bilden.

Wir wiederholen: Achsensymmetrie (Klasse 6)

1. Bei einer Spiegelung wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P′ zugeordnet und umgekehrt.
2. Zu jeder Spiegelung gehört eine Gerade s, Symmetrieachse genannt, die genau die Punkte der Ebene enthält, die bei der Spiegelung auf sich abgebildet werden.
3. Die Symmetrieachse ist Mittelsenkrechte zur Verbindungsstrecke jedes Original- und Bildpunktpaares der Spiegelung (Abb. 1).
4. Bei einer Spiegelung ist jede Originalpunktmenge M zu ihrer Bildpunktmenge M′ kongruent. Insbesondere sind also Original- und Bildstrecke gleich lang sowie Original- und Bildwinkel gleich groß (Abb. 2).

Wir wenden an:

■ 1. Beispiel Eine Gruppe Kinder hat folgende Spielregeln vereinbart: Jeder Mitspieler soll möglichst schnell vom punktförmigen Mal A aus zu einer von ihm zu wählenden Stelle einer genügend langen geradlinigen Mauer laufen und von da aus weiter zu einem zweiten punktförmigen Mal B (Abb. 3).

Analysis und Beweis: Wann gewinnt man das Spiel? Am günstigsten ist für jeden Mitspieler der kürzeste unter den zulässigen Wegen von A nach B. (Unter einem Weg wird eine Anfangs- und Endpunkt verbindende Kurve verstanden, die eine Länge besitzt. Wer später Mathematik studiert, wird mit dem Begriff der Kurve auch lernen, daß nicht jede Kurve eine Länge besitzt.) Um den oben bezeichneten Weg zu finden, wird ein beliebiger zulässiger Weg $\widehat{AP}\widehat{PB}$ betrachtet (Abb. 4).
Der Teilweg $\widehat{PB}$ wird an der Geraden m (Mauer) gespiegelt. Wegen der 4. Eigenschaft einer Spiegelung ist der zulässige Weg $\widehat{AP}\widehat{PB}$ gleich lang mit dem Ersatzweg $\widehat{AP}\widehat{PB'}$. Da jeder von A nach B′ führende Weg notwendig die Gerade m mindestens einmal durchsetzt, sind alle Ersatzwege von A nach B′ zulässige. (Diesen Schluß können wir Schüler nur anschaulich erfassen.)
Unter den Ersatzwegen ist der kürzeste die Strecke $\overline{AB'}$, deren Schnittpunkt mit m mit Q bezeichnet werden möge. Durch Spiegelung der Strecke $\overline{QB'}$ an m entsteht die Bildstrecke $\overline{QB}$. Der damit erhaltene Streckenzug $\overline{AQ}\overline{QB}$ ist der gesuchte kürzeste Weg. Es gewinnt also derjenige das Spiel, der diesen Streckenzug $\overline{AQ}\overline{QB}$ mit größter Geschwindigkeit durchläuft.

Konstruktion: Vom Punkte B aus wird das Lot auf m gefällt und über seinen Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Durch den Endpunkt B′ der Verlängerung und durch A wird die Gerade g bestimmt, die m im Punkte Q schneidet. Abschließend wird noch die Strecke $\overline{QB}$ gezeichnet. Damit ist der kürzeste Streckenzug $\overline{AQ}\overline{QB}$ konstruiert (Abb. 5).

Determination: Der Punkt B′ ist stets vorhanden und auch eindeutig bestimmt. Da die Punkte A und B′ auf verschiedenen Seiten der Geraden m liegen, schneidet die Strecke $\overline{AB'}$ stets m, und zwar in genau einem Punkte Q. Damit existiert also im Falle einer genügend langen Mauer (idealisiert durch eine Gerade m) genau ein kürzester Weg, der die folgende Eigenschaft besitzt: Die Strecken $\overline{BQ}$, $\overline{B'Q}$ und $\overline{AQ}$ bilden mit m gleiche Winkel, wie sich mittels Scheitelwinkelsatz und der 4. Eigenschaft der Spiegelung ergibt.

Zusätzliche Bemerkung: Dieser kürzeste Weg fällt zusammen mit dem Weg, den ein Lichtstrahl nimmt, der vom Punkte A zum Punkte B gelangt, wobei er an einem jetzt die Mauer ersetzenden Spiegel reflektiert wird.

■ 2. Beispiel In welcher Richtung muß eine bei P auf dem rechteckigen Billardfeld ABCD liegende Billardkugel gestoßen werden, damit sie unter Anstoßen an den Banden a, b und c zum Punkte Q gelangt?

Bemerkung: Eine Billardkugel wird an den Banden nach dem gleichen Gesetz reflektiert wie ein Lichtstrahl am ebenen Spiegel.

Analysis: Angenommen, $\overline{PRSTQ}$ sei der gesuchte Streckenzug. Die Billardfläche und die Strecke $\overline{PR}$ werden an a gespiegelt. Der Bildpunkt P′ von P liegt mit den Punkten R und S in einer Geraden, denn aus $\sphericalangle$ BRS = $\sphericalangle$ PRA und $\sphericalangle$ PRA = $\sphericalangle$ ARP′ folgt $\sphericalangle$ ARP′ = $\sphericalangle$ BRS (Abb. 6).

Nunmehr werden die Ausgangsbillardfläche und der Streckenzug $\overline{STQ}$ nochmals an b gespiegelt. Der jetzt erhaltene Bildpunkt T″ von T liegt ebenfalls auf der Geraden durch die Punkte P′, R und S. Die zuletzt erhaltene „Billardfläche" und die Strecke $\overline{T''Q''}$ werden nochmals an c″ gespiegelt. Nunmehr liegt der neue Bildpunkt Q‴ von Q″ mit den Punkten P′, R, S und T″ in einer Geraden.

Bemerkungen zur Konstruktion: Die Punkte P′ und Q‴ sind sets konstruierbar, da sie durch Spiegelungen gegebener Punkte an gegebenen Geraden entstanden sind. Damit ist auch der Punkt R als Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte P′ und Q‴ mit der Seite (Bande) a konstruierbar. Schließlich ist damit auch die Strecke $\overline{PR}$ konstruierbar, die die gesuchte Richtung festlegt.

Beweis:

$\sphericalangle D''T''Q''' = \sphericalangle Q''T''D''$	(laut 4. Eigenschaft der Spiegelung)
$\sphericalangle C\ T''S = \sphericalangle D''T''Q'''$	(nach dem Scheitelwinkelsatz)
$\sphericalangle C\ T''S = \sphericalangle Q''T''D''$	(nach dem Grundsatz der Drittengleichheit)
$\sphericalangle D\ T\ Q = \sphericalangle Q''T''D''$	(laut 4. Eigenschaft der Spiegelung)
$\sphericalangle S\ T\ C = \sphericalangle C\ T''S$	(laut 4. Eigenschaft der Spiegelung)
$\sphericalangle D\ T\ Q = \sphericalangle S\ T\ C$	(nach dem Grundsatz der Drittengleichheit)

Durch weitere analoge Schlüsse ergibt sich, daß der durch Konstruktion gefundene Streckenzug $\overline{PRSTQ}$ Lösung ist.

Determination: Die Punkte P′ und Q‴ sind stets vorhanden und auch eindeutig bestimmt. Die Aufgabe hat keine Lösung, falls die Strecke $\overline{P'Q'''}$ auch nur eine der Strecken a, b und c″ nicht in einem inneren Punkte schneidet; ansonsten existiert genau eine Lösung. Bei dieser sind die Strecken $\overline{PR}$ und $\overline{ST}$ sowie auch $\overline{RS}$ und $\overline{TQ}$ jeweils parallel.

Wir erarbeiten selbständig:

▲ 1. Aufgabe Welches ist der kürzeste Weg, der von einem Punkte A, der zwischen den Schenkeln eines Winkels α liegt, zu einem Punkt des anderen Schenkels und wiederum zum Punkte A führt (Abb. 7)?

▲ 2. Aufgabe In welcher Richtung muß eine bei P auf dem rechteckigen Billardfeld ABCD liegende Kugel gestoßen werden, damit sie 1. ... zur Bande a, von dort zur Bande c und dann nach einem gegebenen Punkte Q rollt? 2. ... zur Bande a, von dort zur Bande c, nochmals zur Bande a und dann nach einem gegebenen Punkte Q rollt?

▲ 3. Aufgabe Es ist zu beweisen, daß für die als erstes Beispiel betrachtete Aufgabe auch im Falle eines geraden, beiderseits begrenzten Mauerstückes $\overline{RS}$ (idealisiert durch eine Strecke) stets unter den zulässigen Wegen ein kürzester existiert (Abb. 8).

W. Träger

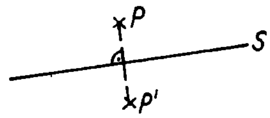
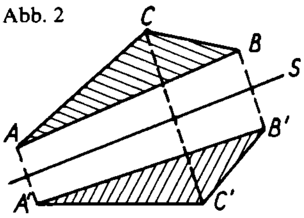


Abb. 1

Abb. 2


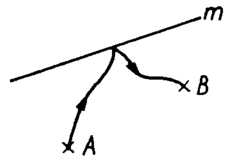


Abb. 3

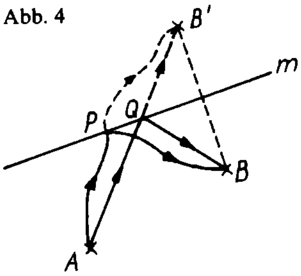
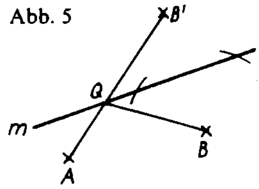
Abb. 4


Abb. 5


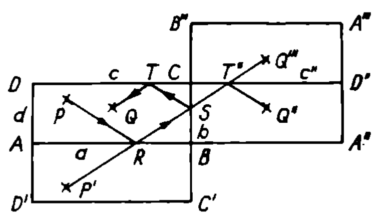


Abb. 6

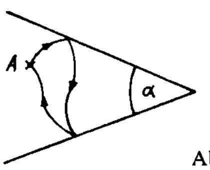


Abb. 7

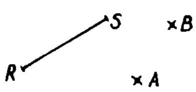


Abb. 8

Wer löst mit? alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 14. 4. 1969

Für die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gelten folgende Bedingungen:

1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 5. bis 12. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr zu richten an:
Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, Postfach 14
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für Klasse 7 geeignet).
4. Von dem Teilnehmer sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung. Schüler der 11./12. Klassen lösen die Aufgaben, welche mit W 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12. (Wir kommen damit einem vielfach geäußerten Wunsch bisheriger Teilnehmer und Schüler der Klassen 11/12 nach.)
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem auf dieser Seite angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert. Besonders freuen wir uns natürlich über saubere, übersichtliche Gestaltung.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis!) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst“ oder „gut gelöst“.
Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
8. Der Jahreswettbewerb 1969 läuft nur vom Februar bis August 1969, also in den Heften 1 bis 3. Wir kommen damit einem Wunsch unserer Leser nach und gleichen den Wettbewerbsrhythmus dem Schuljahresrhythmus an.
9. In Heft 4 werden die Aufgaben der Schulstufe der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR veröffentlicht. In diesem Heft läuft kein *alpha*-Wettbewerb, um allen Schülern Gelegenheit zu geben, sich intensiv mit der Schulolympiade zu befassen.
10. Der *alpha*-Wettbewerb 1969/70 beginnt mit Heft 5/69 und endet mit Heft 3/70.
11. Zwischen dem 25. August und 10. September 1969 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 1 bis 3/69 erworbenen Karten an die Redaktion einzusenden. Eine Jury wertet diese Karten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung. Wer mindestens 4 Antwortkarten (durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 1 bis 3/69) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde.
Wer seine Karten zurückerhalten möchte, der lege einen vorschriftsmäßig frankierten Umschlag mit Adresse bei.
Aussicht auf Anerkennungsurkunde, Preise und namentliche Veröffentlichung haben also Teilnehmer, die im Laufe der Monate Februar bis August 1969 regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitgearbeitet haben.

30	Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5 150	30 — W5•346
	Prädikat:	10
	Lösung:	

Schüler stellen Aufgaben für den Schüler

5 ■ 344 Axel, Bernd, Dieter und Erwin sammeln fleißig Briefmarken. Bernd, Dieter und Erwin haben zusammen bereits 108 Briefmarken gesammelt; davon besitzt Erwin dreimal soviel, Dieter dagegen nur zweimal soviel Marken wie Bernd. Axel schließlich besitzt acht Briefmarken mehr als die Hälfte der Anzahl von Erwin. Wieviel Briefmarken hat jeder der Freunde bisher gesammelt?

Martina Krauß, Schwarzenberg

▲ 345 In der Aufgabe

$$\begin{array}{r} *\,3\,7\,2\,* \\ +\quad 3\,*\,0\,1 \\ +\quad 4\,*\,5 \\ \hline 3\,8\,*\,*\,4 \end{array}$$

sind die Sternchen durch Ziffern zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Wieviele Lösungen gibt es?

Angelika Müller, Stolpen

W 5 ■ 346 In dem nachstehenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß die waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Gleiche Buchstaben bedeuten dabei gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben hingegen verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{rcrcr} abbc & : & de & = & ea \\ - & & \cdot & & \div \\ fdg & + & hf & = & fgc \\ \hline heaf & - & eid & = & hiab \end{array}$$

(Zum Lösen dieser Aufgabe verweisen wir auf den Artikel „Wir lösen ein Zahlenrätsel“ in alpha, Heft 3/1968)

Bernd Kutnik, Teterow, Kl. 6

W 5 ■ 347 In einem Abteil eines D-Zuges, der von Leipzig nach Berlin fährt, sitzen vier Herren mit den Familiennamen Krause, Müller, Schulze und Lehmann. Die Wohnorte dieser vier Reisenden sind Leipzig, Berlin, Erfurt und Schwerin. Aus den folgenden Aussagen ist zu ermitteln, in welchem Ort jeder der vier Herren wohnt.

a) Herr Lehmann war schon öfter besuchsweise in Leipzig.
b) Herr Müller ist älter als der Herr aus Leipzig.
c) Herr Lehmann kehrt von einem Besuch der IGA zurück.
d) Herr Krause wird am Endbahnhof von seiner Gattin, die nicht mit verreist war, abgeholt.

Alfred Schultz, OS Lassan, Krs. Wolgast, Kl. 8

6 ▲ 348 Zum Anfertigen seiner Hausaufgaben hatte ein Schüler die Zeit von insgesamt 90 Minuten geplant, und zwar für die Aufgaben in den Fächern Mathematik 30 Minuten, Russisch 20 Minuten, Deutsch und Physik je 15 Minuten, Geschichte 10 Minuten. Beim Lösen der Mathematikaufgaben überschritt er die geplante Zeit um 12 Minuten. Wieviel Minuten muß dieser Schüler beim Lösen der übrigen Aufgaben von der für jedes weitere Fach vorgesehenen Zeit einsparen, damit er die Gesamtzeit von

90 Minuten einhält und die für die übrigen Fächer benötigten Zeiten im gleichen Verhältnis stehen wie die ursprünglich geplanten?

Paul Ortlepp, Suhl, Kl. 7

▲ 349 Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ von der Länge 25 mm. Es ist unter alleiniger Benutzung eines Zirkels ein Punkt P so zu konstruieren, daß P auf der Geraden AB liegt und daß $\overline{AP} = 5 \cdot \overline{AB}$ gilt!

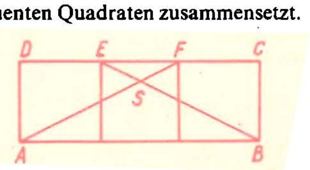
Thomas Bauer, EOS Schkeuditz, K. 10

W 6 ■ 350 Jeder Buchstabe des nachstehenden Schemas bedeutet eine Ziffer; gleiche Buchstaben bedeuten immer gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind Zahlen zu finden, die die waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben richtig lösen.

(c a + b a) : f − g = d
\+ − + · +
(b + f) · f + a = b c
(c b : h) · d − a = b e

Yvonne Kruber, Stolpen, Kl. 7

W 6 ■ 351 Die nachstehend abgebildete Figur stellt ein Rechteck dar, das sich aus drei kongruenten Quadraten zusammensetzt.

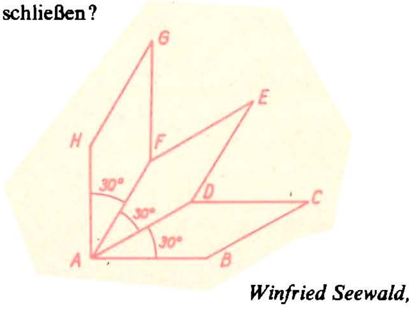


Den wievielten Teil des Flächeninhalts des Rechtecks ABCD nimmt

a) der Flächeninhalt des Dreiecks SFE,
b) der Flächeninhalt des Dreiecks ABS,
c) der Flächeninhalt des Vierecks ASED ein?

Prof. Dr. N. Tschajkovskij, Lvov (UdSSR)

7 ▲ 352 Die nachstehend abgebildete Figur stellt drei fächerförmig angeordnete einander kongruente Rhomben dar, deren spitze Winkel sämtlich 30° betragen. Wie groß ist der Winkel α, den die Geraden BC und HG einschließen?



Winfried Seewald, Otto-Grotewohl-OS, Dresden, Kl. 8

▲ 353 Eine Obstplantage hat einen Bestand von 480 Obstbäumen; 20% des Bestandes sind Apfel-, 30% des Bestandes Birnbäume. Die übrigen Bäume sind Pflaumen- und Kirschbäume. Mit wieviel Apfel-, Birn-, Pflaumen- und Kirschbäumen ist die Obstplantage bepflanzt, wenn sich die Anzahl der Pflaumenbäume zur Anzahl der Kirschbäume wie 1 : 3 verhält?

Joachim Selle, POS Großfurra, Kl. 8

W 7 ■ 354 Auf einer Hochzeitsfeier wurden für die Gäste Getränke bereitgestellt, und zwar Weinbrand für 17,50 M je Flasche, Sekt für 18,00 M je Flasche und Wein für 9,20 M je Flasche. Die Unkosten für diese Getränke beliefen sich auf 198,00 M; es waren insgesamt 16 Flaschen. Wieviel Flaschen Weinbrand, Sekt bzw. Wein wurden bereitgestellt?

Norbert Schmidt, Dresden

W 7 ■ 355 In dem nachstehenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß die waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind. Gleiche Buchstaben bedeuten dabei gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben hingegen verschiedene Ziffern.

i a g : d a = c e
− · +
b f + b f = d m h
h h e − c m e = d h m

Helmut Walther, Langeneichstädt, Kl. 6

8 ▲ 356 Vier große landwirtschaftliche Kooperationsgemeinschaften, die wir mit A, B, C und D bezeichnen wollen, besitzen zusammen 120 Mähdrescher. Wenn die Kooperationsgemeinschaft A von der Kooperationsgemeinschaft C 4 Mähdrescher ausleiht und wenn ferner die Kooperationsgemeinschaft D von der Kooperationsgemeinschaft C 6 Mähdrescher ausleiht, so verfügen alle vier Kooperationsgemeinschaften über die gleiche Anzahl von Mähdreschern. Wieviel Mähdrescher besitzt jede der vier Kooperationsgemeinschaften?

Friedhelm Leichsenring, OS Culitzsch, Kl. 10

▲ 357 Bei einem 100-m-Lauf starten sechs Sportler, die wir mit A, B, C, D, E und F bezeichnen wollen. Drei Zuschauer, Egon, Karl und Horst, machen über das Ergebnis je drei Aussagen:

Egon: 1. B kommt unmittelbar vor E ins Ziel.
2. D wird Letzter sein.
3. F wird besser als C abschneiden.

Karl: 1. B wird A übertreffen.
2. D wird auf Platz 3 kommen.
3. F wird D übertreffen.

Horst: 1. A kommt auf Platz 2.
2. E kommt auf Platz 5.
3. B kommt auf Platz 4.

Nun wissen wir, daß jeder dieser drei Zuschauer genau eine falsche Vermutung ausgesprochen hat und daß B nicht auf Platz 4 kam. In welcher Reihenfolge kamen die Sportler durchs Ziel?

Peter Enskonatus, stud. math. Berlin

W 8 ■ 358 Kürzlich unternahm ich eine Reise ins Land der Automaten. Die Automaten in diesem Land können sprechen und auf jede Frage eine Antwort geben. Sie haben aber noch eine andere merkwürdige Eigenschaft: Wenn sie einwandfrei funktionieren, geben sie nur richtige Antworten; wenn sie aber beschädigt sind, geben sie nur falsche Antworten.

Ich sah einen Mechaniker, der vor fünf Automaten stand und vermutete, daß einige von diesen Automaten beschädigt sind, weil sie einander widersprechende Antworten gaben. Auf seine Frage, welche der Automaten beschädigt sind, erhielt er von fünf Automaten die folgenden Antworten:

1. Automat: Mindestens zwei von den fünf Automaten funktionieren einwandfrei.
2. Automat: Mindestens drei von den fünf Automaten funktionieren einwandfrei.
3. Automat: Ich funktioniere einwandfrei.
4. Automat: Mindestens zwei von den fünf Automaten sind beschädigt.
5. Automat: Mindestens drei von den fünf Automaten sind beschädigt.

Nun erkannte der Mechaniker sofort an einem gerissenen Kabel, daß der 5. Automat beschädigt ist, also eine falsche Auskunft gegeben hat. Da der Mechaniker die Logik gut beherrschte, — er hatte nämlich als Schüler fleißig die Zeitschrift *alpha* gelesen —, fand er sehr schnell ohne die technische Überprüfung der anderen Automaten, welche Automaten einwandfrei funktionierten und welche beschädigt waren. Wie hat der Mechaniker das Ergebnis gefunden? Welche Automaten funktionierten, welche waren beschädigt?

Pawel Kröger, 55. OS, Leipzig, Kl. 5

W 8 ■ 359 In dem Schema

VIER
\+ EINS
FUENF

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Ferner darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer Zahl stehen. Untersuche, wieviel Lösungen diese Aufgabe hat!

Wolfgang Kernchen, EOS Ammendorf, Kl. 12

9 ▲ 360 Es sind alle Primzahlen p und q anzugeben, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Differenz der beiden Zahlen $q - p$ ist größer als Null und kleiner als 10.
2. Die Summe der beiden Zahlen ist gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.
3. Addiert man zu dieser natürlichen Zahl die Summe der beiden Primzahlen, so erhält man 42.

Arnulf Möbius, EOS Leibniz, Leipzig, Kl. 10

▲ 361 Es ist der folgende Satz zu beweisen: In jedem Dreieck ist das Produkt der Längen zweier Seiten gleich dem Produkt der Länge der zu der dritten Seite gehörenden Höhe und des Durchmessers des Umkreises des Dreiecks.

Ludwig Paditz, EOS „Ernst Schneller", Lommatzsch, Kl. 11

W 9 ■ 362 In einer Physik-Arbeitsgemeinschaft werden Bernd und Klaus beauftragt, für einen Versuch einen Widerstand von 167 Ω zusammenzustellen. Es waren nur Widerstände von je 17 Ω, 21 Ω und 28 Ω vorhanden. Nach einigem Überlegen gelang es Bernd, den geforderten Widerstand zusammenzustellen; er schaltete alle Widerstände in Reihe. Auch Klaus hatte eine Lösung gefunden; er wollte auch nur Widerstände in Reihe schalten, aber er benötigte einen Widerstand mehr als Bernd. Wieviel Widerstände jeder der drei Sorten verwendete Bernd und wieviel Klaus?

W 9 ■ 363 In einer Schule werden von den Schülern u. a. auch die Zeitschriften „Wissenschaft und Fortschritt" und „Jugend und Technik" gelesen. Die Anzahl derjenigen Schüler, die „Wissenschaft und Fortschritt" lesen, ist um 22 größer als die Anzahl derjenigen, die „Jugend und Technik" lesen. Das Sechsfache der Anzahl der Schüler, die *nur* „Jugend und Technik" lesen, ist gleich dem 25fachen der Anzahl der Schüler, die beide Zeitschriften lesen. Ferner ist die Anzahl der Schüler, die „Wissenschaft und Fortschritt" lesen, durch die Anzahl derjenigen, die beide Zeitschriften lesen, teilbar.
Wieviel Schüler lesen beide Zeitschriften?

Peter Enskonatus, stud. math. Berlin

10 ▲ 364 Es sind alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

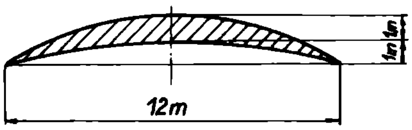
$$(a-b)y + (a-c)z = a - c, \quad (1)$$
$$(a-b)x + (b-c)z = b - c, \quad (2)$$
$$(a-c)x + (b-c)y = 0 \quad (3)$$

anzugeben.
Dabei sind a, b, c reelle Zahlen mit $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$.

W 10/12 ■ 365 Bei einem mathematischen Schülerwettbewerb wurden zwei Aufgaben, die wir mit A und B bezeichnen wollen, gestellt. Die Anzahl der Teilnehmer dieses Wettbewerbs lag zwischen 20 und 40. Die Anzahl der Schüler, die nur eine Aufgabe lösten, ist um 1 kleiner als das Doppelte der der Anzahl der Schüler, die beide Aufgaben lösten. Subtrahiert man von der Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe B lösten, die Anzahl der Schüler, die beide Aufgaben lösten, so erhält man das Vierfache der Anzahl der Schüler, die nur die Aufgabe A lösten. Jeder der teilnehmenden Schüler löste mindestens eine Aufgabe. Wieviel Schüler nahmen an dem Wettbewerb teil?

Stefan Heinrich, Spezialklasse, Humboldt-Universität zu Berlin

W 10/12 ■ 366 Es soll der Flächeninhalt (in m²) des in der untenstehenden Abbildung schraffierten, von zwei Kreisbögen begrenzten Flächenstückes berechnet werden. Die Maße sind der Abbildung zu entnehmen.

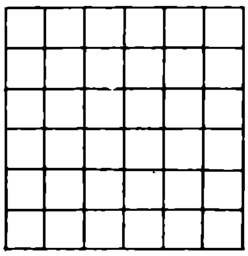


Friedrich Leichsenring, OS Culitzsch, Kl. 10

VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (17./18. 12. 1968)

■ 5 ■ 1. Kreuze 6 der 36 Felder des gegebenen quadratischen Netzes so an, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein angekreuztes Feld und in jeder der Diagonalen höchstens ein angekreuztes Feld liegt!



2. In einem Lagerraum befinden sich dreimal so viel Kilogramm Weizen wie in einem zweiten. Nachdem aus dem ersten 85000 kg und aus dem zweiten 5000 kg entnommen wurden, waren die Bestände gleich.
Wieviel Tonnen Weizen befanden sich vor der Entnahme in dem ersten und wieviel in dem zweiten Lagerraum?

3. Heinz fragt Gerd: „Wieviel Jahre bist du alt?" Gerd antwortet: „Meine Schwester ist viermal so alt wie mein Bruder. Ich bin mehr als doppelt, aber weniger als viermal so alt wie meine Schwester. Zusammen sind wir drei Geschwister 17 Jahre alt. Berechne, wieviel Jahre Gerd alt ist! (Alle Altersangaben sollen in vollen Jahren erfolgen.)

4. Ermittle zwei natürliche Zahlen a und b, die gleichzeitig folgenden beiden Bedingungen genügen:
(1) Die Differenz a — b der beiden natürlichen Zahlen beträgt 3.
(2) Das Produkt dieser beiden natürlichen Zahlen beträgt 180!

■ 6 ■ 1. In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: $20 < n < 40$. Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

2. Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:
Im „Gorki"-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge. Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt $\frac{3}{10}$ und die der kürzesten $\frac{3}{14}$ von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen. Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

3. Über die Seite CD eines Quadrates ABCD mit $\overline{AB} = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck Δ DCE so zu konstruieren, daß das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben. Der Punkt E des Dreiecks Δ DCE sei dabei außerhalb des Quadrates ABCD gelegen.
Verbinde E mit A und mit B!
Berechne die Größe des Winkels ∢ AEB!

4. Drei Freunde bereiten sich auf die „Kleine Friedensfahrt" vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie S. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.
a) Nach wieviel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie S wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, daß Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?
b) Wieviel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

■ 7 ■ 1. Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau 9,27 M bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt 2,36 M ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, daß sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, der sie der Verkäuferin geben kann, beträgt 4 M. Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wieviel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte.

2. Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.
a) Man berechne alle Zahlen x, für die die

Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!

b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

3. Konstruiere ein Dreieck Δ ABC aus $r = 3$ cm, $c = 5{,}5$ cm und $h_c = 3$ cm! Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

4. Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck ABCDE ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

■ 8 ■ 1. a) Beweise folgende Aussage: Wenn in einem Drachenviereck ABCD zwei gegenüberliegende Innenwinkel je 90° groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch einen Umkreis.

b) Zeige, daß diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!

2. Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet. Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

3. Beweise folgenden Satz: Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d. h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks Δ ABC ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.

4. Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 km/h größere Geschwindigkeit als der Lkw hatte.

a) Berechne v_1 und v_2!

b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

■ 9 ■ 1. Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.

a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!

b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

2. Von einem Dreieck Δ ABC seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

3. Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die $x^3 - y^3 = 999$ ist!

4. Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:
(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.
(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.

B sagt:
(1) x ist eine gerade Zahl.
(2) x ist eine Primzahl.
(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.

C sagt:
(1) x ist irrational.
(2) x ist kleiner als 6.
(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

D sagt:
(1) x ist größer als 20.
(2) x ist eine positive Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
(3) x ist nicht kleiner als 10.

Ermitteln Sie x!

■ 10 ■ 1. Eine arithmetische Zahlenfolge ist eine Folge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ von Zahlen, bei der die sämtlichen Differenzen $a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ einander gleich sind. Zeigen Sie, daß es genau eine arithmetische Zahlenfolge gibt, bei der für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die Summe $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ der ersten n Glieder $n^2 + 5n$ beträgt!

2. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die der Bedingung

$$\log_2\left(\log_2(\log_2 x)\right) = 0 \text{ genügen!}$$

3. Verbindet man einen beliebigen, im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt mit je einem Punkt der drei Dreieckseiten, dann ist die Summe der Längen dieser drei Verbindungsstrecken stets größer oder gleich der Höhenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks. Beweisen Sie diese Aussage!

4. Ein Kraftwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Straße von A nach B. Ein zweiter Kraftwagen fährt auf der gleichen Straße ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit von B nach A. Beide Kraftwagen beginnen diese Fahrt zur gleichen Zeit in A bzw. in B. An einer bestimmten Stelle der Straße begegnen sie einander. Nach der Begegnung habe der erste noch genau 2 h bis nach B zu fahren, der zweite noch genau $\frac{9}{8}$ h bis nach A. Die Entfernung zwischen A und B beträgt (auf der Straße gemessen) 210 km. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit der Kraftwagen!

■ 11/12, 1. Tag ■

1. Geben Sie alle Primzahlen p an, für die sowohl $p + 10$ als auch $p + 14$ Primzahlen sind!

2. In einer dreiseitigen Pyramide sei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a, die Spitze S liege in der Höhe h über dem Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks. Welchen Wert hat der Quotient $\frac{h}{a}$, wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander 90° beträgt?

3. Man gebe zwölf reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_6$, $b_1, \ldots, b_6$ so an, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$x^{12} + 1 = (x^2 + a_1x + b_1) \cdot (x^2 + a_2x + b_2) \cdot (x^2 + a_3x + b_3) \cdot (x^2 + a_4x + b_4) \cdot (x^2 + a_5x + b_5) \cdot (x^2 + a_6x + b_6)$$

gilt!

■ 11/12, 2. Tag ■

4. Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$|x + 1| \cdot |x - 2| \cdot |x + 3| \cdot |x - 4| = |x - 1| \cdot |x + 2| \cdot |x - 3| \cdot |x + 4|$$

erfüllt ist.

5. Man beweise $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

6. Ein Trapez ABCD, dessen Grundseiten die Längen a und b $(a > b)$ haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, haben einen Inkreis. Berechnen Sie aus den Größen a, b und α den Durchmesser d dieses Inkreises!

Die Lösungen zu den vorliegenden Aufgaben veröffentlichen wir in Heft 4/69, d. Red.

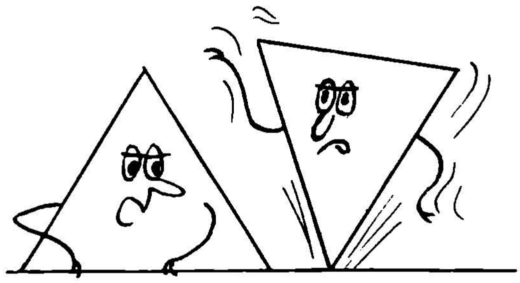
Zitiert . . .

. . . Ich bin eifriger Leser der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* seit ihrer Gründung, und ich glaube, daß sie mir half, bei der letzten Olympiade in der 2. Stufe (Kreisolympiade) den 1. und in der Bezirksolympiade den 3. Preis zu erringen.

Bernd Hofmann, 8808 Niederoderwitz

Erfolgreicher Teilnehmer (11. Platz) des *alpha*-Wettbewerbs 1967, Kl. 7/8

In freien Stunden alpha heiter



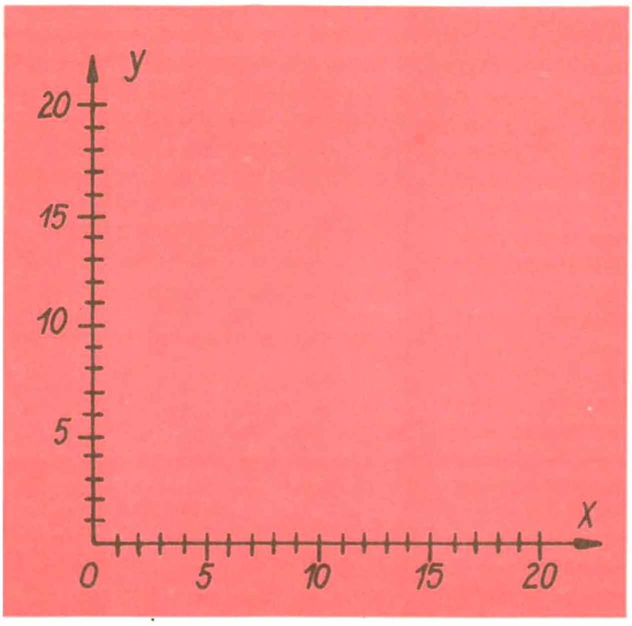
„An der Basis bleiben, Kollege!“
Aus: Zeit im Bild 42/68

Ein „Kunstwerk“

Wenn man die folgenden 14 Funktionen in dem gegebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem grafisch darstellt, so entsteht ein „Kunstwerk“!

OStR Rolf Lüders, Berlin

Funktion	Definitionsbereich	Zuordnungsvorschrift
f_1	$4 \leqq x \leqq 8$	$y = \frac{x}{2} + 11$
f_2	$8 \leqq x \leqq 9$	$y = 2x - 1$
f_3	$9 \leqq x \leqq 10$	$y = -7x + 80$
f_4	$10 \leqq x \leqq 16$	$y = 10$
f_5	$16 \leqq x \leqq 18$	$y = x - 6$
f_6	$4 \leqq x \leqq 5$	$y = -2x + 21$
f_7	$5 \leqq x \leqq 8$	$y = \frac{x}{3} + \frac{28}{3}$
f_8	$8 \leqq x \leqq 10$	$y = -6x + 60$
f_9	$11 \leqq x \leqq 15$	$y = 6$
f_{10}	$16 \leqq x \leqq 18$	$y = 6x - 96$
f_{11}	$\frac{9}{2} \leqq x \leqq 7$	$y = \frac{2}{5}x + \frac{51}{5}$
f_{12}	$11 \leqq x \leqq 12$	$y = -6x + 72$
f_{13}	$14 \leqq x \leqq 15$	$y = 6x - 84$
f_{14}	$x = 8$	$y = 14$



Ein magischer Turm aus Spielwürfeln

Bildet man bei einem regulären Spielwürfel die Summe der Punkte, die sich auf je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen befinden, erhält man immer 7 Punkte. Dabei kann man zwei richtige Arten von Würfeln unterscheiden (siehe Abb. 1ab). Der Würfel aus Abb. 1a wird manchmal als rechtsdrehend, der Würfel aus Abb. 1b als linksdrehend bezeichnet.

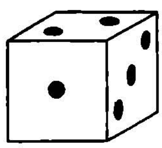


Abb. 1a

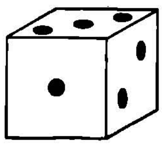


Abb. 1b

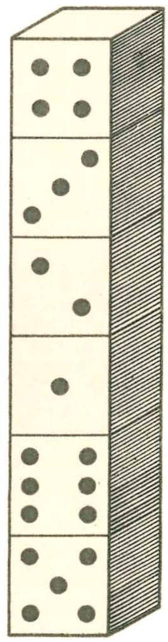


Abb. 2

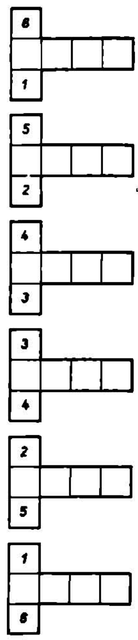


Abb. 3

▲ Aufgabe 1 Aus sechs regulären rechtsdrehenden gleichartigen Würfeln soll ein sechsstöckiger magischer Turm (Abb. 2) mit folgenden Eigenschaften gebaut werden:

a) In jeder Himmelsrichtung hat der Turm bei den verschiedenen Stockwerken auch eine unterschiedliche Anzahl von Punkten.

b) Die Anzahl der Punkte auf den Oberseiten der Würfel bezeichnet das jeweilige Stockwerk, d. h. auf den Oberseiten der Würfel ist von unten nach oben die Anzahl der Punkte gleich 1, 2, ..., 6.

Den magischen Turm braucht man selbstverständlich nicht in Wirklichkeit aufzubauen; es genügt (für die Lösung der Aufgabe), die entsprechende Anzahl von

Punkten in das Netz des Würfelturms einzutragen (siehe Abb. 3).

▲ Aufgabe 2 Es soll die Anzahl aller verschiedenen magischen Türme bestimmt werden, die den Bedingungen der Aufgabe 1 entsprechen. Dabei werden zwei Türme, die nach einer Seitendrehung das gleiche Bild (Verteilung der Punkte) bieten, nicht als verschieden betrachtet.

Milan Koman, Praha
Aus: Matematika ve Škole (ČSSR), Nr. 6, 67/68

Silbenrätsel

ab, ab, ad, be, bi, bus, chung, de, de, der, di, e, e, e, eu, fi, ge, glei, gra, i, ko, la, le, le, ler, les, pez, phie, ment, mo, ne, nen, ner, ni, no, nom, on, on, on, ra, re, rhom, ri, sa, se, szis, tha, ti, ti, ti, tra, un, va

Die Anfangsbuchstaben der Wörter von oben nach unten gelesen ergeben ein Wort, welches ein modernes Arbeitsgebiet der Verwaltung bezeichnet, in dem auch mathematisches Wissen verlangt werden muß.

1. Erklärung, Festlegung
2. Koordinate
3. griech. Mathematiker
4. Bestandteil einer Menge
5. Anwendungsgebiet der Mathematik
6. Zahlsymbol
7. geom. Grundbegriff
8. konvexes Viereck mit vier gleich langen Seiten
9. Rechenoperation
10. Beziehung zwischen math. Objekten
11. Term, der aus zwei Summanden besteht
12. Mathematiker des 18 Jhdt., geboren in Basel
13. Polyeder mit 20 Flächen
14. konvexes Viereck mit mindestens 2 parallelen Seiten
15. Relation
16. Teil eines Bruches
17. geom. Grundbegriff

OL H. Herzog, V.L.d.V., Leipzig

Bitte richtig zuordnen!

Eine Zeitschrift hat als Preisausschreiben acht Fotos veröffentlicht. Es sind 4 Väter und 4 Söhne. Die Aufgabe besteht darin, die Söhne richtig ihren Vätern zuzuordnen. Einige Einsender haben alles richtig, einige haben zwei richtige Zuordnungen gefunden, einige nur eine richtige Zuordnung und einige haben alles falsch. Wie kommt es, daß kein Einsender drei richtige Zuordnungen gefunden hat?

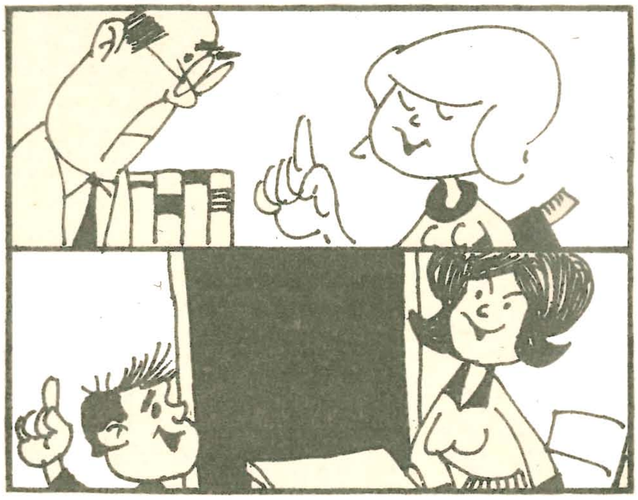
OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Klugheit und Witz

GAUSS, der berühmte Mathematiker, hatte schon als Schüler seine Lehrer mit Klugheit und Witz hereingelegt. Einmal sagte sein Rechenlehrer: „Gauß, ich stelle zwei Fragen. Beantwortest du die erste richtig, sei dir die zweite erlassen. Also: Wieviel Nadeln hat eine Weihnachtstanne?“ — Gauß sagte ohne zu zögern: „67 534.“ — „Wie bist du so rasch auf diese Zahl gekommen?“ — Gauß lächelte überlegen: „Herr Lehrer, das ist bereits die zweite Frage.“

In der Buchhandlung

Sabine in der Buchhandlung: „Kann man bei Ihnen eigentlich jedes Buch bekommen, das in der Schule gebraucht wird?“
Verkäufer: „Natürlich!“
Sabine: „Dann geben Sie mir bitte das Lösungsheft Mathematik für die 7. Klasse!“



Ein viel gebrauchtes Wort

Lehrerin: „Welche drei Wörter brauchst du, lieber Steffen, am häufigsten im Mathematikunterricht?“
Steffen: „Ich weiß nicht!“
Lehrerin: „Richtig, mein Sohn!“

Kommst Du beim Studium nicht weiter —
Entspanne Dich mit *alpha*-heiter! *H. Pätzold*

Die Redaktion *alpha* dankt mit diesen Orchideen allen Lesern für die zahlreichen Neujahrswünsche und Gratulationen anläßlich des zweijährigen Bestehens der mathematischen Schülerzeitschrift.

Fernsehfußball — reguläre Polyeder

Der Titel eines aus dem Englischen in mehrere Sprachen übersetzten modernen Geometriebuches lautet „Unvergängliche Geometrie". Zwei Tatsachen mögen den Verfasser, H. S. M. Coxeter, dazu bewogen haben, seinem Buch diesen Titel zu geben.
Erstens ist die Geometrie die älteste Wissenschaft, in der sich der Mensch um eine exakte Begründung seiner Aussagen mit viel Erfolg bemüht. Zweitens gelangt man in der Geometrie auch in jüngster Zeit immer wieder zu neuen Begriffsbildungen und Erkenntnissen, die mit zur Formung unseres Weltbildes beitragen.
Selbst im praktischen Leben des Alltags finden geometrische Formen und Ideen nutzbringende Anwendungen. Bauformen, die dem Geometer in der abstrakten Vorstellung längst geläufig sind, für deren praktische Auswertung jedoch früher die technischen Voraussetzungen fehlten, werden bei modernen Bauten in zunehmendem Maße verwendet. Verfolgen wir am Bildschirm des Fernsehgerätes oder in einem Sportstadion das Spielgeschehen beim Fußball, so bleibt keine Zeit, um über die Karte von schwarzen Fünfeck- und weißen Sechseckfeldern nachzudenken, die den Ball scheinbar überzieht. Bei genauerer Betrachtung gewinnt man den Eindruck, ein Geometer habe beim Entwurf dieses Balles Pate gestanden. An Hand des vorliegenden Fotos wollen wir den Ball nun einmal mit den Augen eines Geometers betrachten.

Zunächst erkennen wir, daß die Oberfläche des kugelförmigen Balles lückenlos von regelmäßigen Fünfeck- und Sechseckfeldern bedeckt ist. Die Seiten dieser Felder stellen Großkreisbogen auf der Kugel dar. Man bezeichnet diese Felder als sphärische Fünfecke und Sechsecke. Wie man weiter leicht erkennt, grenzt jedes sphärische Fünfeck mit jeder seiner fünf Seiten an je ein Sechseck. Jedes sphärische Sechseck hat drei seiner Seiten mit je einem Sechseck und die übrigen drei Seiten mit je einem Fünfeck gemein. Ferner gibt es Punkte auf dem Ball, in denen die Ecken von je zwei Sechsecken mit einem Fünfeck zusammentreffen. Diese Punkte wollen wir als Eckpunkte bezeichnen.

Nun denken wir uns die sphärischen Felder auf dem Ball in ebene Polygone übergeführt, wobei die Lage der Eckpunkte unverändert bleiben soll. Auf diese Weise entsteht ein Vielflächner, wofür man in der Geometrie auch Polyeder* sagt. Diese Transformation ist möglich, da die Eckpunkte von jedem der sphärischen Vielecke auf je einem Kleinkreis der Kugel liegen.
An dem vom Fußball hergeleiteten Polyeder nehmen wir nun in Gedanken eine Abzählung seiner Ecken, Flächen und Kanten vor. Dieser Körper besitzt 12 regelmäßige Fünfecke und 20 regelmäßige Sechsecke als Begrenzungsflächen. Somit können wir sehr einfach auf die Kanten- und Eckenzahl schließen. Da nämlich in jede Polyederkante genau zwei Polygonseiten fallen, hat der Körper

$$\frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90 \text{ Kanten.}$$

Da weiterhin in jeder Polyederecke genau drei Polygonecken zusammentreffen, hat der Körper $\frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{3} = 60$ Ecken.
Zusammenfassend halten wir fest: Das aus dem Fußball ableitbare Polyeder besitzt 32 Flächen, 90 Kanten und 60 Ecken. Wir bezeichnen im folgenden die Anzahl der Ecken mit E, die der Flächen mit F und die der Kanten mit K.
Als metrische Besonderheit dieses Polyeders sei herausgestellt, daß sämtliche Kanten gleich lang sind und alle Eckpunkte auf einer Kugel liegen. Polyeder dieser Art sind ein alter Gegenstand mathematischer, technischer, künstlerischer und philosophischer Betrachtungen. Schon in der Antike richtete sich das Augenmerk von Mathematikern und Philosophen auf Polyeder, die sich durch gewisse Regelmäßigkeiten auszeichnen.
Wir wollen nun jene konvexen** Polyeder betrachten, die nur eine Art von regelmäßigen kongruenten Polygonen als Begrenzungsflächen besitzen. Zunächst ist leicht einzusehen, daß nur regelmäßige Dreiecke, Vierecke und Fünfecke als Begrenzungsflächen dieser regelmäßigen Polyeder in Betracht kommen. Das regelmäßige Sechseck scheidet bereits aus, denn an diesem Polygon beträgt der Innenwinkel 120°. Da in einer Polyederecke die Ecken von mindestens drei Polygonen zusammentreffen, ergäbe sich eine Winkelsumme von 360°, die einem Vollwinkel entspricht. Folglich kommen regelmäßige Sechsecke und alle weiteren regelmäßigen Polygone mit einer noch größeren Eckenzahl für den Aufbau regelmäßiger konvexer Polyeder nicht in Betracht.

* Unter dem Wort „Polyeder" versteht man sowohl einen durch ebene Flächenstücke begrenzten endlichen Körper als auch die Gesamtheit der diesen Körper begrenzenden Polygone.

** Ein Polyeder heißt konvex, wenn es ganz auf einer Seite von jeder durch ein Begrenzungspolygon festgelegten Ebene liegt.

Aufbau von Polyedern aus regelmäßigen kongruenten Dreiecken

Im regelmäßigen Dreieck mißt der Innenwinkel 60°. Wir haben daher die Fälle zu untersuchen, bei denen in einer Polyederecke drei, vier oder fünf Dreiecke zusammentreffen. Die dabei entstehenden Summen von Kantenwinkeln sind kleiner als der Vollwinkel.
a) Fügt man drei Dreiecke zu einer Raumecke zusammen, so erhält man eine dreiseitige Pyramide mit einer offenen Basisfläche. Diese kann man durch ein viertes Dreieck abschließen. Den so entstehenden konvexen Körper bezeichnet man als regelmäßiges Vierflach oder Tetraeder. Durch Abzählen ermitteln wir die folgenden Zahlen: F = 4, K = 6, E = 4. (Abb. 1)
b) Fügt man vier Dreiecke zu einer Raumecke derart zusammen, daß die vier freien Dreieckseiten in einer Ebene liegen, erhält man eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Zwei derartige Pyramiden lassen sich mit ihren offenen Grundflächen derart aneinandersetzen, daß ein geschlossener konvexer Körper entsteht. Dieser wird von acht regelmäßigen kongruenten Dreiecken begrenzt. In jeder Ecke des so konstruierten Körpers treffen sich vier Kanten. Da sich keine Ecke und Fläche des Körpers vor der anderen auszeichnen läßt, liegt ein regelmäßiges Polyeder vor. Entsprechend der Flächenzahl bezeichnet man den Körper als regelmäßigen Achtflächner oder Oktaeder. Durch Abzählen ermitteln wir F = 8, K = 12, E = 6. (Abb. 2)
c) Wir fügen fünf Dreiecke zu einer fünfseitigen Pyramide derart zusammen, daß die

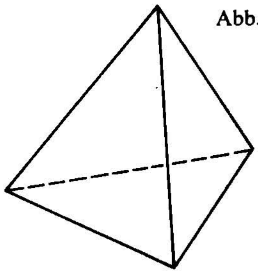


Abb. 1

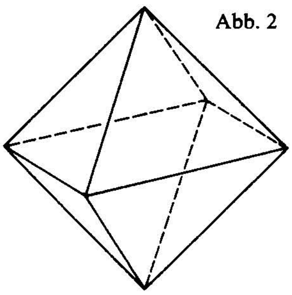


Abb. 2

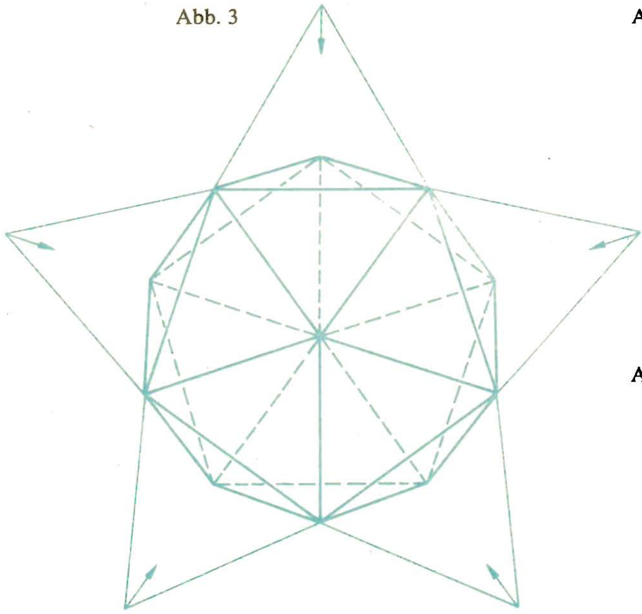


Abb. 3

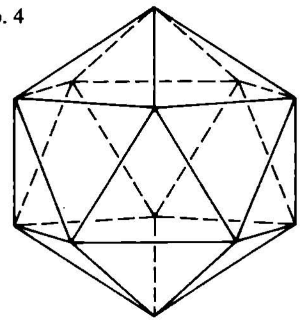


Abb. 4

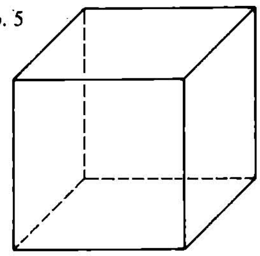


Abb. 5

fünf freien Dreieckseiten in einer Ebene liegen. Dann bildet die Basis der Pyramide ein regelmäßiges Fünfeck. Zum Aufbau des entsprechenden regelmäßigen Polyeders stellen wir zwei derartige Pyramiden bereit und heften an die fünf Kanten der offenen Basis noch je ein regelmäßiges Dreieck. Auf diese Art verbrauchen wir insgesamt 20 kongruente Dreiecke. Die angehefteten Dreiecke werden nun so gerichtet, daß der Umriß dieser Konfiguration bei einer Projektion senkrecht zur Basisebene der Pyramide ein regelmäßiges Zehneck ergibt. Bei dieser Stellung der Dreiecke kann man die beiden Pyramiden mit ihren offenen Basen so zusammenführen, daß sich die angehefteten Dreiecke mit ihren Seiten ineinander verzahnen. Es entsteht auf diese Weise ein Polyeder, von dessen Eckpunkten je fünf Körperkanten ausgehen. Die Seitenflächen sind kongruente regelmäßige Dreiecke. Man bezeichnet dieses regelmäßige Polyeder, dessen Existenz wir jetzt nachgewiesen haben, als Ikosaeder.

Wir wollen hier die Ecken- und Kantenzahl aus der Flächenzahl erschließen. (Abb. 3)

Da jede Polyederkante zugleich die Seite von zwei Dreiecken ist, gilt

$$K = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30.$$

Da in jeder Polyederecke fünf Ecken von Seitenflächen liegen, gilt

$$E = \frac{20 \cdot 3}{5} = 12.$$

Wir halten fest: F = 20, K = 30, E = 12. (Abb. 4)

Aufbau eines regelmäßigen Polyeders aus regelmäßigen kongruenten Vierecken (Quadraten)

Fügt man drei Quadrate zu einer Raumecke zusammen, so steht jede Fläche senkrecht auf den beiden anderen. Die Kanten bilden ein orthogonales Dreibein. Zwei derartige Raumecken lassen sich zu einem geschlossenen Polyeder zusammenfügen, dessen Form uns durch das Spielen mit Würfeln am besten vertraut ist. Dieser Körper heißt Würfel oder Hexaeder. Auf Grund unserer Vertrautheit mit diesem Polyeder können wir die Flächen-, Kanten- und Eckenzahl unserer Vorstellung entnehmen. Es gilt F = 6, K = 12, E = 8. (Abb. 5). Legt man vier Quadrate mit ihren Ecken aneinander, ergibt sich eine Winkelsumme von 360°. Wir können also sicher kein weiteres regelmäßiges Polyeder aus Quadraten aufbauen.

Aufbau eines regelmäßigen Polyeders aus regelmäßigen kongruenten Fünfecken

Wie die Abb. 6 zeigt, beträgt beim regelmäßigen Fünfeck die Größe des Innenwinkels 108°. Es besteht also Aussicht auf Erfolg für unser Vorhaben, wenn sich in den Polyederecken drei Seitenflächen treffen. Die Summe der Kantenwinkel beträgt dann 324°.

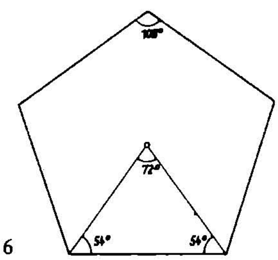


Abb. 6

Für den Aufbau des Körpers gehen wir vom regelmäßigen Fünfeck aus, an dessen fünf Seiten zunächst je ein weiteres Fünfeck geheftet wird. (Abb. 7). Die angehefteten Fünfecke werden nun paarweise so miteinander verknüpft, daß eine „Schale“ aus sechs regelmäßigen Fünfecken entsteht. Projiziert man diese „Schale“ senkrecht auf die Ausgangsebene, ergibt sich als scheinbarer Umriß ein regelmäßiges Zehneck. Zwei derartige Schalen lassen sich daher ineinander verzahnt so zusammenfügen, daß ein geschlossenes konvexes Polyeder entsteht. Der in dieser Weise konstruierte Körper besteht aus 12 kongruenten regelmäßigen Fünfecken. Aus diesen Eigenschaften leitet sich die wieder dem Griechischen entlehnte Bezeichnung „Pentagondodekaeder“ ab. Von jeder Körperecke gehen drei Körperkanten aus. Nach den gleichen Überlegungen wie oben folgt:

$$K = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30, E = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20. \text{ (Abb. 8)}$$

Mit diesen fünf Körpern sind bereits alle möglichen Fälle von regelmäßigen konvexen Polyedern erfaßt. Sie waren schon in der Antike bekannt und werden nach dem griechischen Philosophen Platon, 427–347 v.u.Z., als platonische Körper bezeichnet.

Nun wollen wir die soeben ermittelten Flächen-, Kanten- und Eckenzahlen der von uns betrachteten Körper in einer Tabelle zusammenstellen und weitere Betrachtungen daran anknüpfen.

Polyeder	Flächen F	Kanten K	Ecken E	E + F — K	m	n
1. Tetraeder	4	6	4	2	3	3
2. Oktaeder	8	12	6	2	3	4
3. Ikosaeder	20	30	12	2	3	5
4. Hexaeder (Würfel)	6	12	8	2	4	3
5. Pentagondodekaeder	12	30	20	2	5	3
6. „Fußballkörper“	32	90	60	2	—	—

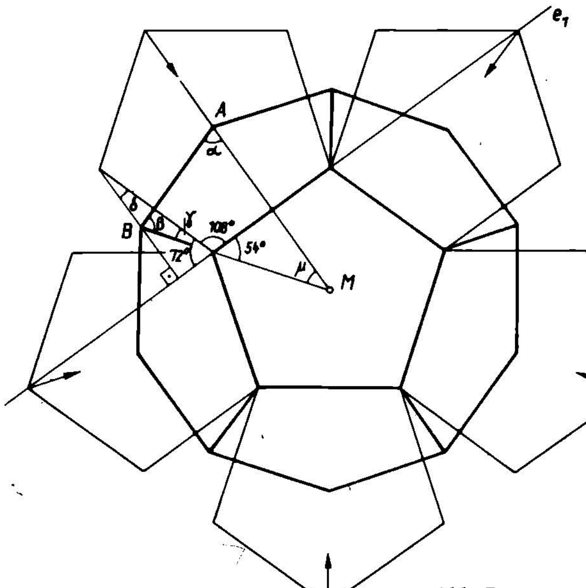


Abb. 7

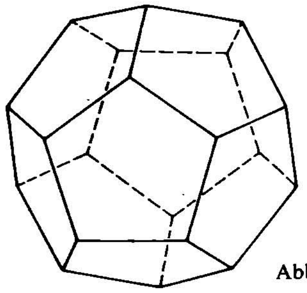


Abb. 8

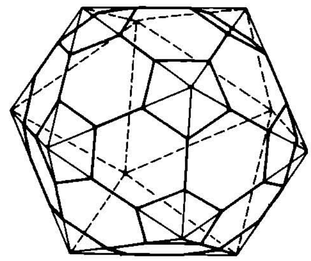


Abb. 9

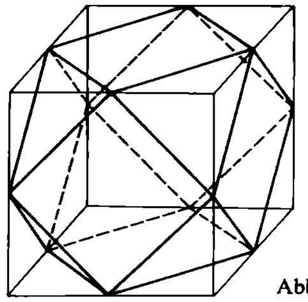


Abb. 10

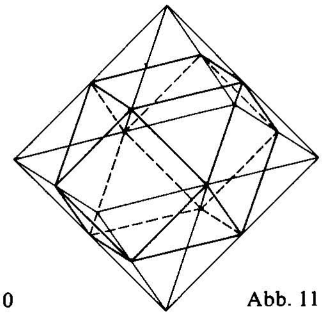


Abb. 11

Abb. 7: Die im Text aufgestellte Behauptung ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß das Dreieck ABM gleichschenklig ist und für den Scheitelwinkel $\mu = 36°$ gilt.

Da [MA] das Lot auf eine Seite des Basisfünfecks darstellt, gilt $\mu = 36°$. Ferner folgt aus der Figur leicht $\gamma = 18°$ und $\delta = 18°$. Damit gilt $\beta = 72°$. Aus $\alpha = 180° - \mu - \beta$ folgt $\alpha = 72°$, was zu beweisen war.

Wir stellen uns zunächst die elementare Rechenaufgabe, für jeden Körper die Zahl $E + F - K$ zu bestimmen. In allen Fällen erhalten wir zwei als Ergebnis. Dies wirft die Frage auf, ob hier ein Zufall oder eine allgemeine Gesetzmäßigkeit zugrunde liegt. Mit dieser Problemstellung wird sich ein Aufsatz im nächsten Heft beschäftigen. Ferner läßt sich an der Tabelle eine eigenartige Wechselbeziehung zwischen den Zahlen von Oktaeder und Hexaeder sowie zwischen Ikosaeder und Pentagondodekaeder feststellen. Körper 2 und 4 stimmen in der Kantenzahl überein, während der Eckenzahl des einen die Flächenzahl des anderen wechselseitig entspricht. Über die Körper 3 und 5 läßt sich die gleiche Aussage machen. Hier kann gleichfalls die Frage nach einer tiefer liegenden Gesetzmäßigkeit aufgeworfen werden.

In der Tat liegt diesem Sachverhalt ein wichtiges Prinzip der Geometrie, das sogenannte Dualitätsprinzip, zugrunde. Man sagt: Oktaeder und Hexaeder bzw. Ikosaeder und Pentagondodekaeder sind sich dual entsprechende Körper. Z. B. hätten wir mit Hilfe des Dualitätsprinzips aus der Existenz des Ikosaeders sofort auf die Existenz des dazu dualen Pentagondodekaeders schließen können. Beim Tetraeder stimmt die Eckenzahl mit der Flächenzahl überein, d. h. das Tetraeder geht bei einer Dualisierung in sich selbst über. Das Dualitätsprinzip dokumentiert sich in einer weiteren Relation von Zahlen. Bedeuten m die Anzahl der Seiten einer Begrenzungsfläche und n die Anzahl der von einer Ecke ausgehenden Kanten, so gilt die analoge Wechselbeziehung zwischen den sich dual entsprechenden platonischen Körpern (Vgl. Tabelle). Das Dualitätsprinzip ist für die projektive Geometrie von fundamentaler Bedeutung.

Abschließend wollen wir versuchen, unser „Fußballpolyeder", das ja den Anstoß für unsere Betrachtungen gab, aus einem der platonischen Körper herzuleiten. Hierzu gehen wir vom Ikosaeder aus. Zunächst teilen wir sämtliche Kanten des Ikosaeders in drei gleiche Teile. Durch je fünf Teilungspunkte, die einem Eckpunkt benachbart sind, legen wir eine Schnittebene. Auf diese Weise schneiden wir von dem Körper 12 fünfseitige Pyramiden ab. Die dabei an dem Körper entstehenden Schnittflächen sind regelmäßige Fünfecke. Die zwanzig regelmäßigen Dreiecke des Ikosaeders werden durch Abschneiden der Pyramiden in zwanzig regelmäßige Sechsecke übergeführt (Abb. 9). Der „Fußballkörper" ist also ein abgestumpftes Polyeder, das sich in einer analogen Weise auch aus dem Pentagondodekaeder herleiten läßt. Die Ecken dieses Körpers — als Kantendreibeine aufgefaßt — sind untereinander deckungsgleich (äquivalent), während die Seitenflächen regelmäßige Fünfecke und Sechsecke darstellen. Man rechnet diesen Körper deshalb zu den halbregelmäßigen Polyedern. Aus der Bezeichnung „archimedische Körper" ist zu folgern, daß auch diese schon in der Antike Gegenstand der Betrachtung waren.

Durch Abstumpfen der regelmäßigen Polyeder gelangt man auf mathematische Körper, die in der Kristallographie eine wichtige Rolle spielen. Teilt man z. B. die Kanten des Hexaeders in zwei gleiche Teile und legt durch je drei einem Eckpunkt benachbarte Halbierungspunkte eine Schnittebene, so ergibt sich als abgestumpfter Würfel ein Kristall, dessen Seitenflächen 6 Quadrate und 8 gleichseitige Dreiecke darstellen (Abb. 10). Die 12 Ecken — als Kantenvierbeine aufgefaßt — sind äquivalent. Der gleiche Körper entsteht, indem man vom Oktaeder 6 Pyramiden mit quadratischer Basisfläche abschneidet. Die Schnittebenen müssen durch je vier einem Eckpunkt benachbarte Halbierungspunkte der Kanten des Oktaeders gelegt werden. Auf Grund der zweifachen Erzeugungsweise bezeichnet man den entstehenden Restkörper auch als Mittelkristall (Abb. 11).

Wenn in den Lehrmittelsammlungen von Schulen die platonischen Körper manchmal in einer verstaubten Ecke einen Dornröschenschlaf führen, weil sie vermeintlich mit moderner Mathematik nicht viel zu tun haben, so ist dies ein bedauerlicher Irrtum. Mit Untersuchungen an diesen Körpern lassen sich wichtige Anregungen für gruppentheoretische und topologische Begriffsbildungen geben. Für die Kristallographie bilden die platonischen Körper gleichfalls den Ausgangspunkt der geometrischen Untersuchungen. Auch die Frage nach der Konstruierbarkeit von regelmäßigen Polygonen mit Zirkel und Lineal ist hierbei von Interesse. Diese Fragestellung führt dann wieder in die Gefilde der Algebra. Abzählende Methoden, wie sie hier geübt wurden, spielen in der Mechanik und Getriebelehre (z. B. Grublersche Zwanglaufbedingung) eine wichtige Rolle. Zunächst ging es vor allem darum, mit den regulären konvexen Polyedern und einigen einfachen Untersuchungsmethoden vertraut zu werden. Solltet Ihr einmal im Sportstadion neben einem Mathematiker stehen, der keinerlei Anteilnahme am Spielgeschehen zeigt, dann übt Nachsicht mit ihm; er denkt vielleicht gerade über das duale Gegenstück des „Fußballpolyeders" nach!

E. Schröder

Aufgaben zu diesem Beitrag findet der interessierte Leser auf Seite 23, d. Red.

Eine Aufgabe von Nationalpreisträger Prof. Dr. phil. habil.
Herbert Beckert

Direktor des Mathematischen Instituts
Karl-Marx-Universität Leipzig

Liebe alpha-Leser!
Zur Lösung dieser Aufgabe sind zwei Nüsse zu knacken. Ihr braucht keine großen mathematischen Vorkenntnisse. Hoffentlich habt Ihr viel Freude. Ich wünsche viel Erfolg.

■ 343 Ein schlauer Versicherungsvertreter spricht in einem Hause vor und trifft dort den Hausverwalter an. Der Versicherungsvertreter erkundigt sich bei diesem, ob außer ihm noch mehr Personen im Hause wohnten. „Ja, außer mir noch 3“, entgegnet dieser. Der Versicherungsvertreter erkundigt sich daraufhin nach deren Alter und erhält folgende Antwort: „Wenn Sie die Alter der 3 außer mir im Haus wohnenden Personen miteinander multiplizieren, dann ergibt sich die Zahl 1296, und wenn Sie die drei Alter addieren, dann ergibt sich unsere Hausnummer“. Der Versicherungsvertreter geht hinaus, sieht sich die Hausnummer an und erklärt nach einigem Nachdenken dem Hausverwalter, daß er so das Alter der 3 Personen nicht bestimmen könne. „Ja,“ entgegnet dieser, „wenn ich Ihnen aber sage, daß ich der Älteste im Haus bin, dann sollte es genügen“. Darauf entgegnete der Versicherungsvertreter lächelnd: „Vielen Dank! Ich kenne jetzt das Alter der 3 Personen.“
Frage: Wie ist das genaue Alter der drei Personen?

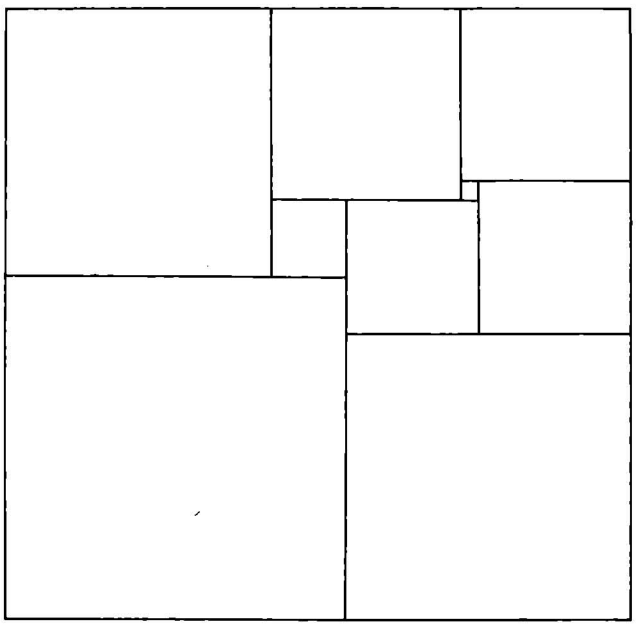
Mathematikerpersönlichkeiten der Universität Leipzig

Johannes Regiomontanus	1436 bis 1476
Gottfried Wilhelm Leibniz	1646 bis 1716
Karl Mollweide	1774 bis 1825
August Ferdinand Möbius	1790 bis 1868
Hermann Hankel	1839 bis 1873
Sophus Lie	1842 bis 1899
Felix Klein	1849 bis 1925
Otto Hölder	1859 bis 1937
Wilhelm Blaschke	1885 bis 1962
B. L. van der Waerden	geb. 1903

Ein unlösbares Problem

▲ 308 Die Figur zeigt, daß man aus neun paarweise verschiedenen Quadraten ein Rechteck zusammensetzen kann. Das Seitenverhältnis dieser neun Quadrate beträgt 1 : 4 : 7 : 8 : 9 : 10 : 14 : 15 : 18. Daraus ergibt sich, daß das Seitenverhältnis des Rechtecks 32 : 33 ist.
Die Mathematiker haben bewiesen, — und dies war durchaus keineswegs ganz einfach — daß man mit weniger als neun paarweise verschiedenen Quadraten, in welchem Seitenverhältnis sie auch immer stehen mögen, kein Rechteck zusammensetzen kann.
Es ist offenbar möglich, ein analoges Problem im Raum zu betrachten, d. h. die Aufgabe, aus paarweise verschiedenen Würfeln einen Quader zusammenzusetzen.
Eure Aufgabe besteht nun darin nachzuweisen, daß dieses Problem unlösbar ist; mit anderen Worten, man kann aus endlich vielen paarweise verschiedenen Würfeln (ihre Anzahl soll natürlich mindestens zwei betragen) keinen Quader zusammensetzen.
Hinweis: Man beachte, daß bei einer Zusammensetzung eines Rechtecks aus paarweise verschiedenen Quadraten das kleinste Quadrat nicht am Rande des Rechtecks liegen kann.

Dr. W. Rautenberg, Berlin



Lösungen

285 Lösung der arithmetischen Aufgabe aus Vietnam

Es seien x die Anzahl der stehenden Büffel, y die Anzahl der liegenden Büffel und z die Anzahl der alten Büffel. Dann gilt:

$$x + y + z = 100, \qquad (1)$$

$$5x + 3y + \frac{z}{3} = 100. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt

$$15x + 9y + z = 300$$

und hieraus in Verbindung mit (1) durch Subtraktion

$$14x + 8y = 200,$$

$$4y = 100 - 7x,$$

$$y = 25 - \frac{7x}{4}. \qquad (3)$$

Da x und y natürliche Zahlen sind, ist diese Gleichung nun erfüllt für $x = 0$, $x = 4$, $x = 8$ und $x = 12$. Man erhält daher die folgenden vier Lösungen

x	y	z
0	25	75
4	18	78
8	11	81
12	4	84

und überzeugt sich leicht davon, daß in allen vier Fällen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

286 Lösung der geometrischen Aufgabe aus Vietnam

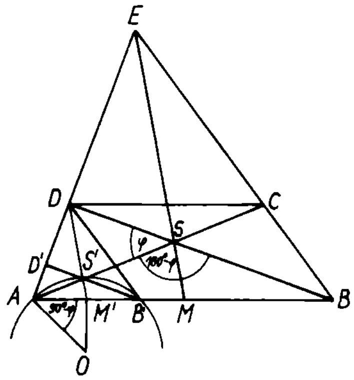
1. *Wir nehmen zunächst an, daß* $\alpha + \beta < 180°$ *gilt.*

Es seien nun ABCD das gesuchte Trapez, S der Schnittpunkt seiner Diagonalen und E der Schnittpunkt der Geraden AD und BC (s. Abb.). Dann schneiden sich die Geraden AB und ES in dem *Mittelpunkt* M der Seite $\overline{AB}$.

Wir stellen zunächst fest, daß man aus den gegebenen Stücken zunächst noch nicht ein Teildreieck der Figur konstruieren kann. Wir können aber statt dessen diesen Teildreiecken ähnliche Dreiecke konstruieren und dadurch zum Ziel gelangen.

Es seien daher B′ der Schnittpunkt der Parallelen durch D zu CB mit AB und M′ der Schnittpunkt der Parallelen durch D zu EM mit AB. Dann ist M′ Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB'}$. Ferner sei S′ der Schnittpunkt der Parallelen durch B′ zu BD mit DM′. Dann gilt $\Delta AB'D \sim \Delta ABE$, $\Delta AM'D \sim \Delta AME$, $\Delta AM'S' \sim \Delta AMS$;

also liegt der Punkt S′ auf der Geraden AS, und es gilt ferner wegen $\sphericalangle BSA = 180° - \phi$ auch $\sphericalangle B'S'A = 180° - \phi$.



Nun läßt sich das Dreieck AB′D aus AD = d, $\sphericalangle DAB' = \alpha$ und $\sphericalangle AB'D = \beta$ leicht konstruieren. Ferner erhält man M′ als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB'}$. Der Punkt S′ liegt nun einerseits im Innern des Dreiecks AB′D auf $\overline{DM'}$, andererseits auf dem Kreisbogen mit der Sehne $\overline{AB'}$ und dem zugehörigen Peripheriewinkel $180° - \phi$, der $\sphericalangle B'S'A = 180° - \phi$ gilt. Dieser Kreisbogen läßt sich konstruieren, indem man an die Dreiecksseiten AB′ in A nun außen den Winkel $90° - \phi$ anträgt und seinen freien Schenkel mit den Mittelsenkrechten auf $\overline{AB'}$ zum Schnitt bringt. Der Schnittpunkt O ist dann der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius $\overline{OA}$, und der Punkt S′ ist der Schnittpunkt des im Innern des Dreiecks AB′D liegenden Bogens dieses Kreises mit $\overline{DM'}$. Nun zeichnet man die Parallele durch D zu AB, die AS′ im Punkte C schneidet, ferner zeichnet man die Parallele durch C zu DB′, die AB′ in B schneidet. ABCD ist dann das Trapez mit den verlangten Eigenschaften.

2. *Gilt nun* $\alpha + \beta > 180°$, so verläuft die Konstruktion ganz analog, nur mit dem Unterschied, daß jetzt der Punkt D das Ähnlichkeitszentrum der entsprechenden Dreiecke ist.

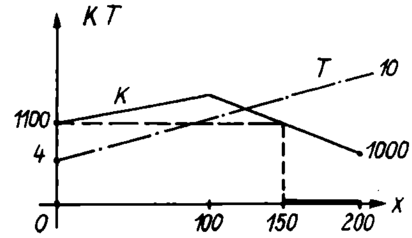
3. *Gilt aber* $\alpha + \beta = 180°$, so ist das gesuchte Trapez ein Parallelogramm, und die obige Konstruktion ist *nicht* durchführbar. Man kommt aber leicht zum Ziel, wenn man beachtet, daß dann S einerseits auf der durch den Mittelpunkt von $\overline{AD}$ parallel zu AB gehenden Mittellinie des Parallelogramms ABCD liegt und andererseits auf dem Kreisbogen mit der Sehne $\overline{AD}$ und dem zugehörigen Peripheriewinkel ϕ, weil $\sphericalangle ASD = \phi$ gilt. Dieser Kreisbogen läßt sich leicht konstruieren (vgl. unter 1) und damit auch der Punkt S, mit dessen Hilfe man dann wie unter 1 die Punkte C und B erhält.

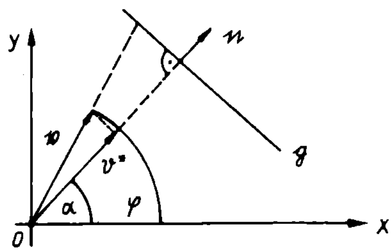
Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. R. Klötzler

■ 298a Zunächst ist $T(x) = x\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{50}\right) + 4$ für $0 \leq x \leq 200$

$$K(x) = \begin{cases} x + 1100 & \text{für } 0 \leq x \leq 100 \\ -2x + 1400 & \text{für } 100 \leq x \leq 200. \end{cases}$$

Aus der graphischen (aber nicht maßgerechten) Darstellung entnehmen wir die Antwort $x_0 = 0$ oder $150 \leq x_0 \leq 200$.





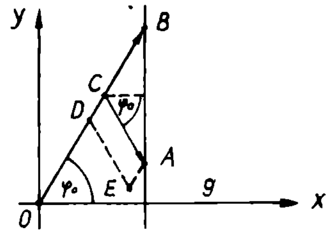
▲ 298b Wir berechnen zunächst diejenige Fahrtroute, auf der man von O am schnellsten eine Gerade g erreicht, deren Normale 𝔫 mit der x-Achse den Winkel α mit $O \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ einschließt. Diese Route ist geradlinig und durch den Anstiegswinkel ϕ gekennzeichnet, für den die Komponente v* des Geschwindigkeitsvektors 𝔳 in Richtung 𝔫 maximal ist. $v^* = v_0(1 - \cos\phi)\cos(\phi - \alpha) \to$ Max wird durch $\phi_{\text{Max}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ für $\alpha > O$ und $\phi_{\text{Max}} = \pm\frac{\pi}{3}$ für $\alpha = O$ (im Sinne des absoluten Maximums) gelöst.

Fall 1 Ist $\phi = \arctan\frac{y_0}{x_0} \geq \frac{\pi}{3}$, so legen wir durch $A(x_0, y_0)$ eine Gerade g mit der Normalen 𝔫, deren Anstiegswinkel α gerade der Relation $\phi = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ genügt.

Somit stellt nach den vorangegangenen Betrachtungen die Strecke $\overline{OA}$ die günstigste Route von O nach g und damit erst recht von O nach A dar. Die Fahrzeit beträgt

$T = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{v_0(1 - \cos\phi)}$. Außerdem ist die Lösung eindeutig.

Fall 2 Ist $\phi = \arctan\frac{y_0}{x_0} < \frac{\pi}{3}$, so legen wir durch A eine Parallele g zur y-Achse und nach vorangegangenen Betrachtungen liefert die Strecke $\overline{OB}$ eine zeitlich günstige Route von O nach g, wenn $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ gewählt wird. Die Fahrzeit beträgt $T = \frac{4}{v_0} \cdot x_0$. Da aber entsprechend der Geschwindigkeitsverteilung die Strecke $\overline{AC}$ genau so schnell wie die von $\overline{CB}$ durchfahren werden kann, ist auch der Streckenzug $\overline{OCA}$ eine optimale Fahrtroute von O nach g und damit von O nach A (das Segelboot „kreuzt"). Diese optimale Fartroute ist nicht eindeutig, denn offenbar bedingt auch der Streckenzug $\overline{ODEA}$ die gleiche Fahrzeit, wenn $\overline{DE} \parallel \overline{CA}$ und $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$ sind.

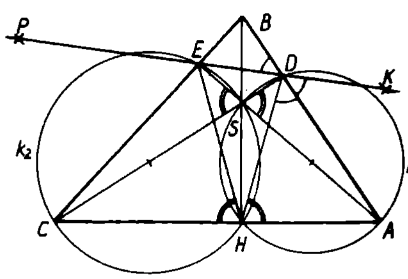


Lösungen zu den ausgewählten Aufgaben der Allunionsfernolympiade

▲ 299 (3.) Wir setzen zunächst voraus, daß das Dreieck ABC spitzwinklig ist, so daß die Fußpunkte der drei Höhen dieses Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks liegen.
Es seien E bzw. D die Fußpunkte der zu A bzw. C gehörenden Höhen des Dreiecks ABC. Ferner sei S der Höhenschnittpunkt. Wir werden zeigen, daß dann die Punkte K, P, D und E auf einer Geraden liegen, womit die Behauptung bewiesen ist. Nun geht der Kreis k_1 mit $\overline{AS}$ als Durchmesser nach der Umkehrung des Satzes des Thales durch die Punkte H und D und der Kreis k_2 mit $\overline{CS}$ als Durchmesser durch die Punkte H und E. (vgl. die Abbildung!) Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt daher

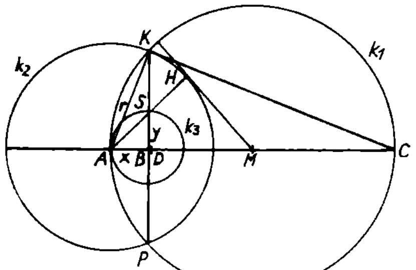
$\sphericalangle$ DSA = $\sphericalangle$ DHA und
$\sphericalangle$ CSE = $\sphericalangle$ CHE.

Nun sind aber die Winkel $\sphericalangle$ DSA und $\sphericalangle$ CSE als Scheitelwinkel gleich groß, so daß $\sphericalangle$ DHA = $\sphericalangle$ CHE gilt.
Analog erhält man $\sphericalangle$ ADH = $\sphericalangle$ EDB.



Da nach Voraussetzung die Punkte H und K bezüglich der Geraden AD symmetrisch liegen, gilt ferner $\sphericalangle$ KDA = $\sphericalangle$ ADH = $\sphericalangle$ EDB.
Daraus folgt $\sphericalangle$ KDA + $\sphericalangle$ ADE
= $\sphericalangle$ EDB + $\sphericalangle$ ADE = 180°,
d. h die Punkte K, D und E liegen auf einer Geraden. Analog beweist man, daß auch die Punkte P, D und E auf einer Geraden liegen. Daraus folgt aber, daß die Punkte D und E auf der Geraden KP liegen, womit die Behauptung bewiesen ist. Der obige Beweis gilt auch für den Fall, daß das Dreieck ABC rechtwinklig oder stumpfwinklig ist; jedoch liegen dann zwei Höhenfußpunkte auf den Verlängerungen der entsprechenden Seiten bzw. fallen mit zwei Eckpunkten des Dreiecks zusammen.

▲ 300 (8.) Der gegebene Kreis k_1 habe den Mittelpunkt M und den Radius $\overline{MA} = a$. Der Kreis k_2 um A habe den Radius $\overline{AK} = \overline{AH} = r$. Der Schnittpunkt der Geraden KP und AH sei S, der Schnittpunkt der Geraden KP und AM sei B (vgl. die Abbildung).



Setzt man $\overline{AB} = x$ und $\overline{BS} = y$, so folgt wegen $\overline{MH} = \sqrt{a^2 - r^2}$ aus der Ähnlichkeit der Dreicke ABS und AMH

$$x : y = r : \sqrt{a^2 - r^2}, \qquad (1)$$

also
$$x^2 (a^2 - r^2) = r^2 y^2,$$
$$a^2x^2 - r^2x^2 = r^2y^2,$$
$$r^2 (x^2 + y^2) = a^2x^2. \qquad (2)$$

Bezeichnet man den zweiten Schnittpunkt des Kreises k_1 mit der Geraden AM mit C, so gilt $\overline{AC} = 2a$, und das Dreieck ACK ist rechtwinklig. Aus dem Satz des Euklid folgt daher

$r^2 = 2ax$. Aus (2) und (3) folgt $\qquad (3)$
$$2ax(x^2 + y^2) = a^2x^2.$$

Wegen $a \neq 0$ und $x \neq 0$ folgt hieraus

$$x^2 + y^2 = \frac{ax}{2}, \text{ also}$$

$$x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16} + y^2 = \frac{a^2}{16},$$

d. h.
$$\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \qquad (4)$$

Daher liegen alle Punkte S auf einem Kreis k_3, der den gegebenen Kreis k_1 im Punkt A von innen berührt und dessen Mittelpunkt D von A den Abstand $\frac{a}{4}$ hat. Da nach der Aufgabenstellung der Berührungspunkt H auch in der durch den Punkt P bestimmten Halbebene (bezüglich der Geraden AM) liegen kann, sind auch alle Punkte des Kreises um D mit Ausnahme des Punktes A Schnittpunkte der Geraden KP und AH.
Der gesuchte geometrische Ort ist daher der Kreis k_3 um D als Mittelpunkt mit dem Radius $\frac{a}{4}$ mit Ausnahme des Punktes A.

▲ 301 (9.) Wir beweisen mit Hilfe der *vollständigen Induktion* (vgl. *alpha*, 1967, Heft 3, S. 69), daß die obige Behauptung sogar für *beliebige* ungerade natürliche Zahlen $2n + 1$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ als Exponenten richtig ist, woraus dann die Richtigkeit für
$2n + 1 = 1967$
als Spezialfall folgt. Wir behaupten also

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n+1} = a\sqrt{3} - b\sqrt{2},$$

wobei a und b ganze Zahlen mit
$3a^2 - 2b^2 = 1$ sind.

1. Induktionsanfang:
Für $n = 0$ ist $2n + 1 = 1$. Ferner gilt

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^1 = 1 \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot \sqrt{2}$$

und $3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 3 - 2 = 1;$
Die Behauptung ist also für $n = 0$ richtig.

2. Induktionsschritt;
Wir nehmen an, daß die Behauptung für $n = k$ richtig ist, d. h.

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2k+1} = a\sqrt{3} - b\sqrt{2}$ mit
$3a^2 - 2b^2 = 1.$

Dann folgt

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2k+3} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2k+1}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2\\ &= (a\sqrt{3} - b\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{6} + 2)\\ &= (a\sqrt{3} - b\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{6})\\ &= 5a\sqrt{3} - 2a\sqrt{18} - 5b\sqrt{2} + 2b\sqrt{12}\\ &= 5a\sqrt{3} - 6a\sqrt{2} - 5b\sqrt{2} + 4b\sqrt{3}\\ &= (5a + 4b)\sqrt{3} - (6a + 5b)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Setzen wir $5a + 4b = a'$, $6a + 5b = b'$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}3a'^2 - 2b'^2 &= 3(5a + 4b)^2 - 2(6a + 5b)^2\\ &= 3(25a^2 + 40ab + 16b^2) - 2(36a^2 + 60ab + 25b^2)\\ &= 75a^2 + 120ab + 48b^2 - 72a^2 - 120ab - 50b^2\\ &= 3a^2 - 2b^2 = 1,\end{aligned}$$

d. h. die Behauptung ist unter der obigen Annahme auch für $n = k + 1$ richtig, da dann der Exponent gleich $2(k + 1) + 1 = 2k + 3$ ist.
Wegen 1 und 2 ist daher die Behauptung für *alle* natürlichen Zahlen n richtig, also für alle ungeraden natürlichen Exponenten $2n + 1$, womit die Behauptung auch für den Spezialfall $n = 983$, d. h. $2n + 1 = 1967$ bewiesen ist.

▲ 302 (10.) Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 die vier gegebenen Fußpunkte der von dem Schnittpunkt S der Diagonalen des konvexen Vierecks ABCD auf die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ bzw. $\overline{DA}$ gefällten Lote. Mit den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 sind auch die Winkel

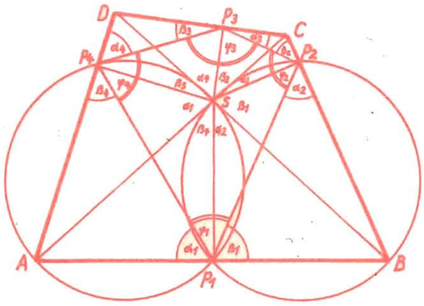
$\sphericalangle P_4P_1P_2 = \phi_1$, $\sphericalangle P_1P_2P_3 = \phi_2$,
$\sphericalangle P_2P_3P_4 = \phi_3$, $\sphericalangle P_3P_4P_1 = \phi_4$

des Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ bekannt (vgl. die Abbildung). Wir versuchen daher, die Winkel $\sphericalangle P_3SP_1$ und $\sphericalangle P_4SP_2$ aus diesen Winkeln zu ermitteln.
Wir setzen zunächst

$\sphericalangle AP_1P_4 = \alpha_1$, $\sphericalangle P_2P_1B = \beta_1$,
$\sphericalangle BP_2P_1 = \alpha_2$, $\sphericalangle P_3P_2C = \beta_2$,
$\sphericalangle CP_3P_2 = \alpha_3$, $\sphericalangle P_4P_3D = \beta_3$,
$\sphericalangle DP_4P_3 = \alpha_4$, $\sphericalangle P_1P_4A = \beta_4$.

Dann gilt

$\alpha_1 + \beta_1 = 180° - \phi_1, \alpha_2 + \beta_2 = 180° - \phi_2;$
$\alpha_3 + \beta_3 = 180° - \phi_3, \alpha_4 + \beta_4 = 180° - \phi_4.$
Wegen $\sphericalangle SP_1B = \sphericalangle BP_2S = 90°$ ist das Viereck SP_1BP_2 ein Sehnenviereck. Dasselbe gilt für die Vierecke SP_2CP_3, SP_3DP_4, SP_4AP_1.
Daher folgt aus dem Peripheriewinkelsatz (vgl. die Abbildung)



$\sphericalangle ASP_4 = \alpha_1$, $\sphericalangle P_1SA = \beta_4$, $\sphericalangle BSP_1 = \alpha_2$, $\sphericalangle P_2SB = \beta_1$, $\sphericalangle CSP_2 = \alpha_3$, $\sphericalangle P_3SC = \beta_2$, $\sphericalangle DSP_3 = \alpha_4$, $\sphericalangle P_4SD = \beta_3$.
Aus dem Scheitelwinkelsatz folgt, da S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ist,

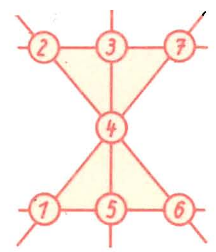
$\alpha_1 + \beta_3 = \alpha_3 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_4 = \alpha_4 + \beta_2. \quad (2)$

Aus (1) und (2) folgt daher

$$\alpha_1 + \beta_3 = \alpha_3 + \beta_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3}{2}$$
$$= \frac{180° - \phi_1 + 180° - \phi_3}{2}$$
$$= 180° - \frac{\phi_1 + \phi_3}{2}, \quad (3)$$
$$\alpha_2 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_3 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2$$
$$= 180° - \frac{\phi_1 + \phi_3}{2} + 180° - \phi_2$$
$$= 360° - \frac{\phi_1 + \phi_3}{2} - \phi_2 \text{ und analog} \quad (4)$$
$$\alpha_3 + \beta_2 + \alpha_4 + \beta_3 = \beta_2 + \alpha_4 + \alpha_3 + \beta_3$$
$$= 360° - \frac{\phi_2 + \phi_4}{2} - \phi_3. \quad (5)$$

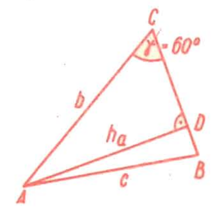
Nun läßt sich das Viereck ABCD mit Hilfe der bekannten Winkel ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 leicht konstruieren. Wir nehmen dabei zunächst an, daß die in (4) und (5) angegebenen Winkelsummen (wie in der Abbildung) nicht größer als 180° sind. Wir konstruieren über $\overline{P_1P_3}$ als Sehne denjenigen Kreisbogen, der zu dem Peripheriewinkel $360° - \frac{\phi_1 + \phi_3}{2} - \phi_2$ (4) gehört, und über $\overline{P_2P_4}$ als Sehne denjenigen Kreisbogen, der zu dem Peripheriewinkel $360° - \frac{\phi_2 + \phi_4}{2} - \phi_3$ (5) gehört. Diese beiden Kreisbögen schneiden sich im Innern des Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ im Punkt S, dem Schnittpunkt der Diagonalen des zu konstruierenden Vierecks ABCD. Wir verbinden S mit P_1, P_2, P_3, P_4, errichten in diesen Punkten die Senkrechten auf $\overline{SP_1}$, $\overline{SP_2}$, $\overline{SP_3}$, $\overline{SP_4}$, die sich in den Eckpunkten A, B, C, D des zu konstruierenden Vierecks ABCD schneiden. Ist eine der in (4) und (5) angegebenen Winkelsummen größer als 180°, so führen wir die obige Konstruktion mit den entsprechenden Supplementwinkeln durch.

W 8 ▪ 328 Aus $b + a + g = c + a + f = d + a + e$ folgt $b + g = c + f = d + e \quad (1)$
Also ist
$S = b + c + d + e + f + g = 3(b + g) \quad (2)$
durch 3 teilbar. Aus
$b + c + d = e + f + g \quad (3)$
folgt, daß S sich auch in der Form
$S = 2(b + c + d)$ schreiben läßt und damit auch durch 2 teilbar ist.
Mithin ist S sogar durch $2 \cdot 3 = 6$ teilbar.
Leicht errechenbar ist auch
$S^* = a + b + c + d + e + f + g \quad (4)$
Es gilt:
$S^* = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$
Wegen (2) und (4) gilt
$S = S^* - a = 28 - a$. Wegen $1 \leq a \leq 7$. (5)
ergibt sich, da S durch 6 teilbar ist
$S = 24. \quad (6)$
Aus (5) und (6) folgt $\underline{a = 4}$.
Aus (1), (2) und (6) ergibt sich jetzt, daß jede der Summen $b + g$, $c + f$ und $d + e$ gleich 8 sein muß. Mithin sind die Summanden 1 und 7 oder 2 und 6 oder 3 und 5.
Aus (3), (2) und (6) folgt analog, daß die Summen $b + c + d$ und $e + f + g$ jeweils gleich zwölf sind. Die Summanden sind daher 1, 6, 5 oder 7, 2, 3. Daher lassen sich die Zahlen 1, 2, ..., 7 *auf zwölffache Weise* in die 7 Kreise einsetzen. Alle zwölf Anordnungen werden leicht als Lösungen erkannt. Eine der zwölf möglichen Belegungen sei angegeben:



▲ 329 Nimmt man an, daß es a Äpfel sind, so erhält jeder Bruder zunächst $\frac{a-5}{3}$ Äpfel, von denen er noch $\frac{a-5}{27}$ seiner Schwester abgibt. Da nun jeder die gleiche Anzahl Äpfel hat, erhält man die Gleichung $\frac{a-5}{3} - \frac{a-5}{27} = \frac{a}{4}$ mit der Lösung $a = 32$. Die Probe bestätigt, daß es im ganzen 32 Äpfel waren.

▲ 330 *Voraussetzung:* $\gamma = 60°$
Behauptung: $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.
Beweis: 1. Fall:
Die Höhe h_a mit dem Fußpunkt D liege im Innern des Dreiecks ABC. Für die rechtwinkligen Dreiecke ABD und ADC gilt
$c^2 = h_a^2 + \overline{BD}^2$,
$b^2 = h_a^2 + \overline{CD}^2$. Durch Subtraktion folgt
$c^2 - b^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$. Mittels
$\overline{BD} = a - \overline{CD}$ ergibt sich
$c^2 - b^2 = (a - \overline{CD})^2 - \overline{CD}^2$. Daraus folgt
$c^2 = a^2 + b^2 - 2a\overline{CD}$.
Da das Dreieck ADC mit den Winkeln 30°, 90° und 60° durch Spiegelung an AD zu einem gleichschenkligen Dreieck ergänzt wird, gilt $\overline{CD} = \frac{b}{2}$. Daher gilt
$c^2 = a^2 + b^2 - ab$ w.z.b.w.



2. Fall: Die Höhe h_b mit dem Fußpunkt E liege im Innern des Dreiecks ABC. Durch Vertauschen der Bezeichnungen A mit B, a mit b, h_a mit h_b und D mit E geht der obige Beweis in den jetzigen über.
Da in dem Dreieck ABC $\gamma = 60°$ und mindestens einer der Winkel α oder β ein spitzer Winkel ist, liegt stets mindestens eine der Höhen h_a bzw. h_b im Innern des Dreiecks ABC. Ein weiterer Fall braucht also nicht betrachtet zu werden.
Bemerkung: Wir haben den Satz hier *elementargeometrisch* bewiesen. Noch einfacher ist der Beweis, wenn man den *Kosinussatz* der ebenen Trigonometrie anwendet, der aber erst in der 10. Klasse behandelt wird. Nach diesem Satz gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Daraus folgt hier wegen $\cos\gamma = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab, \text{ w.z.b.w.}$$

▲ 331a Es sei x die Maßzahl der Länge der Strecke $\overline{AB}$ (in cm). Dann ist wegen (6) x eine der Zahlen 7, 14, 21, ..., 497.
Wegen (4) ist x eine der Zahlen
21, $21 + 7 \cdot 5 = 21 + 35 = 56$,
$21 + 2 \cdot 35 = 91$, und so fort.
Wegen (3) ist x eine der Zahlen
21, $21 + 7 \cdot 5 \cdot 4 = 21 + 140 = 161$,
$21 + 2 \cdot 140 = 301$, $21 + 3 \cdot 140 = 441$.
Da von diesen Zahlen nur die Zahl 301 bei der Division durch 3 den Rest 1 läßt, folgt wegen (2)
$\underline{x = 301}$.
Man überzeugt sich leicht davon, daß dann auch die Bedingungen (1) und (5) erfüllt sind.
Die Strecke $\overline{AB}$ ist also 301 cm lang.

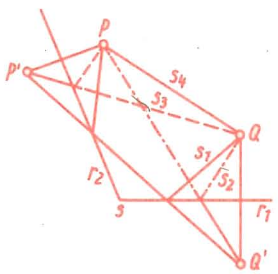
b Da bereits durch die Bedingungen (2), (3), (4) und (6) die Zahl x eindeutig bestimmt ist, sind die Bedingungen (1) und (5) überflüssig. Man kann aber auch die Bedingungen (1) und (2) streichen, da die Zahl x bereits durch die Bedingungen (3), (4), (5) und (6) eindeutig bestimmt ist.

W 9 ▪ 332 Es seien x die Anzahl der Kabinen für drei Personen und y die Anzahl der Kabinen für vier Personen;
dann ist 8y die Anzahl der Kabinen für zwei Personen, und man erhält die Gleichungen

$$8y + x + y = 159,$$
also
$$9y + x = 159, \quad (1)$$

$$16y + 3x + 4y = 379,$$
also $$20y + 3x = 379, \qquad (2)$$
Aus (1) folgt $27y + 3x = 477$
und daher aus (3) und (2) durch Substraktion
$$7y = 98, \text{ d. h. } y = 14.$$
Ferner erhält man aus (1)
$x = 159 - 9y = 159 - 126 = 33$ und
$8y = 112.$
Das Urlauberschiff hat also 112 Kabinen für zwei Personen, 33 Kabinen für 3 Personen und 14 Kabinen für vier Personen.

W 9 ▪ 333 Es gibt genau vier solche Strahlen, nämlich die in der Abbildung gezeichneten Strahlen s_1, s_2, s_3, s_4. Der Strahl s_1 erreicht nach Reflexion an r_1 *und* r_2 den Punkt P, der Strahl s_2 erreicht nach Reflexion an r_1, der Strahl s_3 nach Reflexion an r_2 den Punkt P. Der Strahl s_4 erreicht den Punkt P direkt (ohne Reflexion).

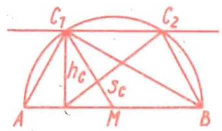


Aus der Abbildung ist das *Konstruktionsverfahren* ersichtlich. Man spiegelt Q an r_1 und erhält Q'; ferner spiegelt man P an r_2 und erhält P'. Man verbindet Q' mit P' bzw. Q' mit P bzw. P' mit Q und erhält jeweils die gesuchten Punkte auf den Spiegelungsgeraden als Schnittpunkte mit r_1 bzw. r_2.

▲ 334 Wir beweisen die Behauptung mit Hilfe der *vollständigen Induktion* und verweisen auf den Artikel von *W. Stoye* (*alpha*, 1. Jahrgang 1967, Heft 2, S. 37 und Heft 3, S. 69), in dem dieses Verfahren begründet wird.

1. Induktionsanfang:
Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr; denn dann ist nach Voraussetzung der einzige Junge mit mindestens einem Mädchen der Klasse befreundet, und er kann dieses Mädchen heiraten.
2. Induktionsschritt:
Wir nehmen an, die Behauptung sei für $n = r$ wahr, wobei r eine von Null verschiedene natürliche Zahl sei. Wir wollen zeigen, daß die Behauptung dann auch für $n = r + 1$ wahr ist. Wir bezeichnen die $r + 1$ Jungen mit $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$. Nach Voraussetzung ist jeder dieser Jungen mit mindestens einem Mädchen der Klasse befreundet, und es gibt in der Klasse mindestens $r + 1$ Mädchen $b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}$, von denen jedes mit mindestens einem der Jungen befreundet ist. Es können nur die folgenden beiden Fälle auftreten:
a) Es gibt unter den obigen Mädchen ein Mädchen, das wir (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) mit b_{r+1} bezeichnen können und das *nur* mit *einem* Jungen a_{r+1} befreundet ist.
b) Jedes der obigen Mädchen ist mit mindestens je zwei Jungen befreundet.
Fall a) In diesem Fall kann der Junge a_{r+1} das Mädchen b_{r+1} heiraten. Es verbleiben die r Jungen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, von denen nach Voraussetzung je k mit mindestens k der Mädchen $b_1, b_2, \ldots, b_r$ befreundet sind. Daher kann nach unserer Annahme jeder dieser Jungen eins dieser r Mädchen heiraten. Da aber auch der Junge a_{r+1} das Mädchen b_{r+1} heiraten kann, ist die Behauptung unter der obigen Annahme auch für $n = r + 1$ wahr.
Fall b) In diesem Fall ist das Mädchen b_{r+1} mit mindestens zwei Jungen befreundet. Das Mädchen kann einen dieser Jungen, den wir (ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit) mit a_{r+1} bezeichnen, heiraten. Es verbleiben wieder r Jungen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, für die dieselben Voraussetzungen wie im Fall a) zutreffen. Daher kann nach unserer Annahme jeder dieser r Jungen eines der verbleibenden r Mädchen heiraten. Da aber auch der Junge a_{r+1} das Mädchen b_{r+1} heiraten kann, ist auch in diesem Falle die Behauptung für $n = r + 1$ wahr.
Damit haben wir folgendes gezeigt:
1. Die Behauptung ist für $n = 1$ wahr;
2. wenn die Behauptung für $n = r$ wahr ist, so ist sie auch für $n = r + 1$ wahr.
Daher ist die Behauptung für *alle* von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n wahr, womit der Satz bewiesen ist.

▪ 335 *1. Analysis:* Die Punkte A und B sind wegen des *Satzes des Thales* durch $s_c = \frac{1}{2}c$ bestimmt. Der Punkt C liegt aus demselben Grunde auf dem Kreis mit dem Radius s_c um den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und auf der Parallelen zu AB im Abstand h_c.
2. Konstruktionsbeschreibung: Ich zeichne eine Gerade und um einen beliebigen Punkt M dieser Geraden einen Kreis mit dem Radius s_c. Seine Schnittpunkte mit der Geraden sind die Punkte A und B. Jetzt konstruiere ich zu AB eine Parallele im Abstand h_c. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis sind die Punkte C_1 und C_2. Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 sind dann die gesuchten Dreiecke.



Beweis: Wegen des *Satzes des Thales* ist $\sphericalangle ACB = 90°$ und $s_c = r = \frac{1}{2}c$. Wegen der Parallelenkonstruktion hat h_c die geforderte Länge.
Diskussion: Ist $h_c < s_c$, so gibt es genau zwei Dreiecke; ist $h_c = s_c$, so gibt es genau ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck; ist $h_c > s_c$, so gibt es kein Dreieck, das den gegebenen Bedingungen entspricht.

Aufgaben zu: Fernsehfußball — reguläre Polyeder

1. Konstruiere ein Oktaeder durch geeignetes Abstumpfen der Ecken eines Tetraeders!
2. Konstruiere das „Fußballpolyeder“ durch geeignetes Abstumpfen der Ecken des Pentagondodekaeders!
3. Beschreibe einem Pentagondodekaeder einen Würfel derart ein, daß sämtliche Würfelkanten in den Seitenflächen des Pentagondodekaeders liegen!
4. Bestimme die Anzahl und Lage der Symmetrieebenen eines Würfels!
5. Bestimme die Anzahl und Lage der Symmetrieebenen eines Oktaeders!
6. Beschreibe einem Würfel ein Tetraeder derart ein, daß sämtliche Tetraederkanten in den Seitenflächen des Würfels liegen!
7. Auf wieviel verschiedene Arten kann das Netz eines Würfels dargestellt werden? (Netzentwürfe, die sich durch Bewegung oder Spiegelung ineinander überführen lassen, zählen als eine Lösung)
8. Auf wieviel verschiedene Arten kann das Netz eines Oktaeders dargestellt werden? (Netzentwürfe, die sich durch Bewegung oder Spiegelung ineinander überführen lassen, zählen als eine Lösung)
9. Bezüglich des aus dem Fußball abgeleiteten Polyeders kann man eine Kugel konstruieren, die sämtliche sechsseitigen Begrenzungsflächen berührt und eine zweite, die sämtliche fünfseitigen Begrenzungsflächen berührt. Welche der Kugeln tritt nicht aus der Oberfläche des Polyeders heraus?

Lösungen zu alpha — heiter

Magisches Quadrat (4/68)

21
$(1-3+5)\cdot 7 \quad \widehat{-1}+3\cdot 5+7$
$(1+2)(3+4) \quad 1+(2+3)\cdot 4$
$-2+3+4\cdot 5 \quad 2^{3!}:4+5$
$3(4+5)-6 \quad 3(-4+5+6) \quad \sqrt{3^{\sqrt{4}}}\cdot 5+6$
$-3^{\sqrt{4}}+5\cdot 6$

$4 \cdot 5 - 6 + 7 \qquad (\sqrt{4} - 5 + 6) \cdot 7 - \sqrt{4} + 5 \cdot 6 - 7$

$4! - 4 + \frac{4}{4}$

$(4+3)(2+1) \qquad 4(3+2)+1 \qquad 4 \cdot 3! - 2 - 1$

$5 \cdot 4 + 3 - 2$

$(6+5-4) \cdot 3 \qquad -6 + (5+4)3$

$(6+5-4) \cdot 3 \qquad -6 + (5+4)3$

$7 - 6 + 5 \cdot 4 \qquad 7(6 - 5 + \sqrt{4})$

$7 + 5 \cdot 3 - 1 \qquad 7(5-3+1) \qquad 7! : 5! : \sqrt{3+1}$

36

$1^3 + 5 \cdot 7 \qquad (1+3)! + 5 + 7$

$(1+2+3)^{\sqrt{4}}$

$2 \cdot 3 : 4 \cdot 5!$

$(-3+4+5) \cdot 6 \qquad (3!)^{\sqrt{4}}(-5+6) \qquad 3\sqrt{4} \cdot 5 + 6$

$\sqrt{4}(5+6+7)$

$4 + 4(4+4) \qquad \sqrt{4} \cdot \sqrt{4^4} + 4 \qquad 4! + \sqrt{4^4} - 4$

$4 \cdot 3^2 \cdot 1$

$5! : 4 + 3 \cdot 2$

$6(5+4-3) \qquad 6 + 5\sqrt{4} \cdot 3$

$(7+6+5) \cdot \sqrt{4}$

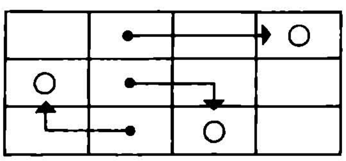
$7 + 5 + (3+1)!$

Auf weitere Lösungen zu dieser Aufgabe muß aus Platzgründen verzichtet werden.

Rätselfreunde hergeschaut! (5/68)

A – BI – COS – DATA – EBENE – FEHLER – GALILEI – HYPERBEL – INTEGRAPH – KENNZIFFER – LOGARITHMUS – MANTELFLÄCHE – NEBENSCHEITEL – ORTHOGONALITÄT – POSITIONSSYSTEM – QUADRATKILOMETER – RECHENGENAUIGKEIT – SCHMIEGUNGSPARABEL – TANGENTENABSCHNITTE – UMKLAPPUNGSVERFAHREN

Krümel revanchiert sich ... (6/68)



Wer schoß die 12? (6/68)

Krümel: 7, 11, *12*, 10, 8; Flax: 5, 7, 9, 9, 10

Der junge Hirt (6/68)

73 Schafe (1. Horde); 75 Schafe (2. Horde), ..., 95 Schafe (12. Horde)

Without a word (6/68)

waagerecht: $8 : 2 + 3 = 7;\ 7 - 6 \cdot 2 = -5;$
$1 - 2 + 4 = 3$

senkrecht: $8 - 7 \cdot 1 = 7;\ 2 + 6 : 2 = 5;$
$3 : 2 \cdot 4 = 6$

Aus Mame Mamu Ka (6/68)

waagerecht: $4 \cdot 9 : 3 + 20 = 32;$
$8 : 2 + 32 - 6 = 30;\ 6 \cdot 2 + 12 : 2 = 18;$
$18 - 13 + 47 + 28 = 80;$

senkrecht: $4 + 8 + 6 = 18;\ 9 + 2 + 2 = 13;$
$3 + 32 + 12 = 47;\ 20 + 6 + 2 = 28;$
$32 + 30 + 18 = 80$

Aus sowj. Unterhaltungsbuch (6/68)

$22 + 2 = 24;\ 3^3 - 3 = 24$

Lösungen zu Aufgaben von Ing. H. Decker (6/68)

1. A, B, C kommen als Einer vor, können also nur die Werte 1, 4, 5, 6 oder 9 haben. AC kann dann nur 16, 49 oder 64 sein, B nur 1, 4 oder 9. Für ABC, ACB, BCA lassen sich daraus nur die Quadratzahlen 196, 169 und 961 bilden. ABCB lautet also *1969*.

2. Da B nur 1, 4 oder 9 sein kann, erhält man als Quadratzahl für A + 2B + C bzw. A + B + C nur 25 bzw. 16 bei B = 9. ABCB lautet also *1969*.

Bemerkung:
Die Quadratwurzeln $\sqrt{1+9+6+9}$, $\sqrt{1+9+6}$, $\sqrt{9}$ bilden das pythagoreische Tripel: 5, 4, 3.

3. Aus der Multiplikation ergibt sich, daß A nur 1 sein kann.
Eingesetzt:

1 BCB = 11 · 1 CB + 110
= 1 CB0 + 1 CB + 110
1 BCB – 1 CB = 1 CB0 + 110
1 B00 – 100 = 1 CB0 + 110
1 B00 = 1 CB0 + 210. Daraus
B = 9 und C = 6.

Die Zahl ABCB lautet also *1969*.

Ein „Kunstwerk“ (1/69)

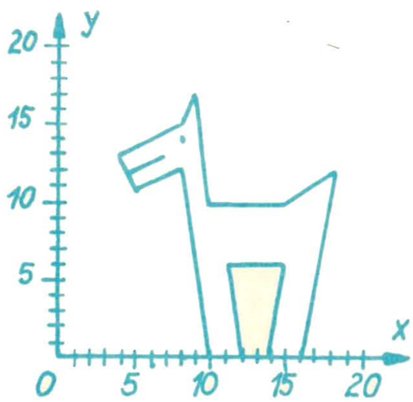
Da alle Funktionen lineare Funktionen sind, wird jede dieser Funktionen durch eine Strecke dargestellt, die durch ihren Anfangspunkt und ihren Endpunkt eindeutig bestimmt ist. Man erhält z. B. für die Funktion f_1 mit dem Definitionsbereich $4 \leq x \leq 8$ und der Zuordnungsvorschrift $y = \frac{x}{2} + 11$ den Anfangspunkt der entsprechenden Strecke mit den Koordinaten

$x = 4; \quad y = 2 + 11 = 13$

und den Endpunkt mit den Koordinaten

$x = 8; \quad y = 4 + 11 = 15.$

Die graphische Darstellung der gegebenen vierzehn Funktionen ergibt das folgende Bild:



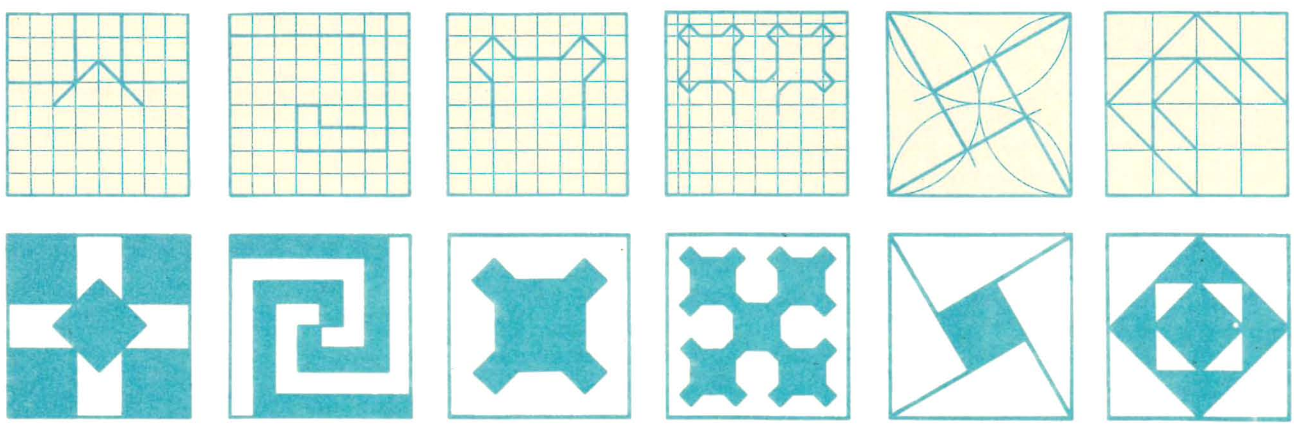
Silbenrätsel (1/69)

Definition, Abszisse, Thales, Element, Nomographie, Variable, Ebene, Rhombus, Addition, Relation, Binom, Euler, Ikosaeder, Trapez, Ungleichung, Nenner, Gerade
DATENVERARBEITUNG

Bitte richtig zuordnen! (1/69)

Drei richtige Zuordnungen sind unmöglich, denn wer 3 richtige Zuordnungen hat, hat automatisch auch die 4. Zuordnung richtig.

Mit Zirkel und Zeichendreieck



Literatur

Das Geld

Heinz Joswig

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin, 1968, 250 Seiten, 32 Schwarz- und 8 Farbtafeln, 50 Zeichnungen im Text, Anhang: Die Währungen der Welt.

Dieses Buch behandelt die Geschichte des Geldes von seiner Entstehung bis zur Gegenwart. Es beschränkt sich dabei nicht auf die ökonomische Funktion des Geldes, sondern der Autor zeigt auch Beziehungen des Geldes zu anderen gesellschaftlichen Erscheinungen wie persönliche Macht, Bildung und Kultur. Wie oft war das Geld schon tiefere Ursache für soziale Katastrophen und politische Machtkämpfe. Krisen, Kriege, Inflationen — all diese Erscheinungen ergründet der Autor im Zusammenhang mit der Macht Geld. Und er weist eindrucksvoll nach, daß sich der wirkliche Wert des Geldes nur im friedlichen Handel und Aufbau offenbaren kann.

Grundfragen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung

N. N. Vorobjoff
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 84 Seiten, 6,80 M

Die Spieltheorie ist einer der wesentlichsten Aspekte der Operationsforschung. Das Büchlein gibt eine populäre Einführung in Begriffe, die in der ökonomisch-theoretischen Literatur heute bereits eine beträchtliche Rolle spielen. Ausführlich werden u. a. die Rolle des Zufalls im Spiel und Fragen der Spielstrategie behandelt, wobei der Autor nur Kenntnisse der Elementarmathematik voraussetzt. Der Erläuterung dienen Beispiele aus dem Militärwesen und dem täglichen Leben.

Zur Geschichte des Flugzeugs

Günter Meyer

Verlag Volk und Wissen Berlin, 96 Seiten, illustriert, 1,80 M

In der Reihe „Bücher für den Schüler“ ist dieses Bändchen für die Klassen 8 bis 12 gedacht. Es versucht, einen Bogen von den Ideen Leonardo da Vincis bis zum Überschall-Luftverkehr zu schlagen.

Digitale Rechenautomaten

R. Deresin, R. Eyraud

Allgemeine Grundlagen, Grobstruktur, Mathematische und organisatorische Elemente
Fachkunde für Datenverarbeiter

Verlag Die Wirtschaft, 96 Seiten, 3,— M

Um die Datenverarbeitungsanlagen zweckmäßig einzusetzen und richtig zu bedienen, werden in zunehmendem Maße *Facharbeiter für Datenverarbeitung* ausgebildet. Damit für die Ausbildung in diesem Lehrberuf schnell geeignetes Lehrmaterial zur Verfügung steht, hat sich der Verlag „Die Wirtschaft“ entschlossen, eine „Fachkunde für Datenverarbeiter“ herauszugeben. In einem 2. Teil wird auf die Feinstruktur und die technische Realisierung der Grund- und Hauptfunktionen eingegangen. Der interessierte Leser von *alpha* erhält mit diesen beiden Heften eine Information über Digitale Rechenautomaten und einen Einblick in Teilgebiete der Ausbildung der Facharbeiter für Datenverarbeitung.

Rund um die Mathematik

Autorenkollektiv

Der Kinderbuchverlag Berlin
Mit mehrfarbigen Illustrationen von Rudolf Schultz-Debowski, etwa 160 Seiten, Pappband mit Folie, etwa 17,50 M

Vom Durchschnitt, der manchmal leer ist — Ein Reinfall beim Toto — Archimedes und die Sandkörner — Hamiltons Reise auf dem Dodekaeder — Diebstähle aus dem verschlossenen Tresor? — Warum springt die Modelleisenbahn aus den Schienen? — Die widerspenstigen Handschuhe — Thales und die Pyramiden — Der Käfer und die Schallplatte: ein Kriminalroman? — Nein, ganz einfach Mathematik, spannender als ein Kriminalroman, denn man muß mitdenken, mitkombinieren und ist, am Ende angekommen, selbst der Held des Buches, der die verzwickten mathematischen Probleme des Alltags gelöst und dabei eine Menge Interessantes gelernt hat.

Bahnbrecher des Atomzeitalters

Friedrich Herneck

Buchverlag „Der Morgen“, Berlin 1968, 501 Seiten, 11,50 M

In dem vorliegenden Werk wird mit sachkundiger Hand ein Einblick in das geistige Laboratorium großer Naturforscher der letzten hundert Jahre gegeben (Maxwell, Heinrich Hertz, Röntgen, Marie und Pierre Curie, Planck, Einstein, Laue, Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Born, Otto Hahn und Lise Meitner). Über die wissenschaftsgeschichtliche Aufgabe hinaus hat das Buch, das die aufrechte antimilitaristische und später antifaschistische Haltung der Mehrzahl der Pioniere des Atomzeitalters ins Licht gestellt, auch ein gesellschaftliches Anliegen: es will unter Hinweis auf das Vorbild der humanistisch gesinnten großen Forscher dazu aufrufen, die Bemühungen um den Fortschritt der naturwissenschaftlich-technischen Erkenntnis fest zu verbinden mit dem Kampf um den sozialen Aufstieg der Menschheit und um die friedliche Nutzung der Errungenschaften der Naturwissenschaft.

Meyers Jugendlexikon

Autorenkollektiv

VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 896 Seiten, etwa 7500 Stichwörter 1220 Abb., Leinen 28,— M

Ein Wissensspeicher von Pädagogen, Fachwissenschaftlern und Lexikographen unter Berücksichtigung der neuesten Schullehrpläne entwickelt. Ein Nachschlagewerk, das zum Blättern einlädt und somit den Bildungshunger der Jugendlichen weckt und gleichzeitig befriedigt.
Wortgut, Stil, Form und Bebilderung sind den Bedürfnissen der jugendlichen Benutzer angepaßt.
Ein größerer Raum wurde den Fragen der Jugendbewegung, des Militärwesens, des Sports, der Mode, des Benehmens und der Beziehung zwischen Jungen und Mädchen gewidmet. Zahlreiche Berufsbilder helfen dem Jugendlichen, leichter den geeigneten Beruf zu finden.

Forscher — Funker — Ingenieure

Walter Konrad

VEB Fachbuchverlag, 179 Seiten, 100 Abbildungen, 10,80 M

Dieses Buch, das wir unseren technisch-physikalisch interessierten Lesern aller Berufe empfehlen, berichtet in erzählender Form von den entscheidenden Etappen in acht Jahrzehnten drahtloser Nachrichtentechnik. Der Autor zeigt, daß die großen wissenschaftlich-technischen Entdeckungen von Faraday, Maxwell, Hertz, Nipkow und Hulsmeyer, um nur einige zu nennen, entscheidend von ihrer jeweiligen gesellschaftlichen Umwelt beeinflußt werden und nicht Zufallsergebnisse oder geniale Eingebungen, sondern Resultate harter und zielstrebiger Arbeit sind.

Jagdflugzeuge und Jagdbomber

Karl-Heinz Eyermann

Deutscher Militärverlag, 160 Seiten, Abbildungen, 6,50 M

Einen umfassenden Einblick über alle im Einsatz stehenden Jagd- und Jagdbomberflugzeuge mit Strahltriebwerk gibt dieses Typenbuch.

In Kürze im Buchhandel:

ALFRÉD RÉNYI

Briefe über die Wahrscheinlichkeit

ca. 100 Seiten · Broschur · 7,80 M

(Vertrieb nur in der DDR und den anderen sozialistischen Ländern, mit Ausnahme der VR Ungarn, gestattet)

Leseprobe: ... Ein Onkel von mir — ein recht verschrobener alter Hagestolz — war nämlich gestorben und hatte mir sein Gut in Toulouse vermacht, unter der Bedingung, daß ich die Geschichte eines vor 300 Jahren um dieses Gut geführten Prozesses veröffentlichen müsse. Zu diesem Zweck fuhr ich also im Januar dieses Jahres nach Toulouse und durchstöberte im Stadtarchiv die Aktenbündel des Gerichts aus den Jahren 1660 bis 1670. Wie schon gesagt, habe ich mehrere Jahre meines Lebens dem Studium von Pascals Manuskripten gewidmet, so daß ich seine Handschrift buchstäblich besser als meine eigene kenne. Es braucht Sie also nicht zu wundern, daß ich, als mir am Abend des 17. Januar beim Blättern in den Akten, die unter anderem auch Fermats Unterschriften tragen, ein Brief mit Pascals Handschrift unter die Hände kam, sie sogleich als die seine erkannte. Sie können sich vorstellen, in welches Feuer der Begeisterung mich das versetzte! Ich verließ das Archiv nicht vor dem nächsten Morgen. Ohne etwas gegessen oder getrunken zu haben, suchte ich weiter, bis ich noch drei weitere Briefe gefunden hatte. Später habe ich herausbekommen, daß diese Briefe nach Fermats Tod aus Versehen unter die in seiner Wohnung gefundenen offiziellen Gerichtsakten geraten sind und so — am 17. Januar des Jahres 1665 — ins Archiv gebracht worden waren, wo sich während der folgenden 301 Jahre niemand mehr um sie gekümmert hat ...

In diesen Tagen erscheinen nun Pascals Briefe an Fermat, welche die Entstehungsgeschichte und die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung dem interessierten Laien nahebringen.

Das Büchlein aus der Feder des weltbekannten ungarischen Mathematikers Professor Dr. Alfréd Rényi ist verständlich für Schüler ab 10. Klasse.

Noch lieferbar:

ALFRÉD RÉNYI

Dialoge über Mathematik

1967 · 123 Seiten · Broschur · 9,60 M

(Vertrieb nur in der DDR und den europäischen Volksdemokratien, mit Ausnahme der VR Ungarn, gestattet)

Geeignet für Schüler ab 10. Klasse.

Das neue Gesamtverzeichnis MATHEMATISCHE SCHÜLERBÜCHEREI erscheint voraussichtlich im Mai. Es wird auf Anforderung vom Verlag kostenlos abgegeben.

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
108 Berlin — Postfach 1216

Für uns geschrieben!

Liebe Freunde,

heute möchte ich Euch mit zwei Büchern aus dem Sportverlag bekannt machen, die Ihr unbedingt lesen solltet. Ich entdeckte sie bei einem Einkaufsbummel vor Weihnachten und mich haben beide Bücher so begeistert, daß ich sie jedem empfehlen möchte. Von „Freunden und Begegnungen" erzählt das eine Buch, das nur einem Thema gewidmet ist: der deutsch-sowjetischen Sportfreundschaft. In Erzählungen, kurzen Berichten, in Reportagen und Geschichten spiegelt sich lehrreich und lebendig und voll menschlicher Wärme diese enge Freundschaft wider.
In dem Buch „Als Boxtrainer in Guinea" erzählt der Autor, der zwei Jahre als Trainer in Guinea lebte und arbeitete, wie er diese Aufgabe mit Elan bewältigte. Er schreibt über spannende Wettkämpfe, über Siege und Niederlagen, erste Auslandsstarts und Bewährungsproben für den Trainer und seine Schützlinge und macht den Leser mit Problemen und Details des Boxsports bekannt, denen ich als Mädchen bisher nur wenig Beachtung schenkte. Episoden aus dem Alltag sowie ein Fototeil ergänzen aufschlußreich das Bild.

Viele Grüße Eure Sabine

SPORTVERLAG
108 Berlin
Neustädtische Kirchstraße 15