Mathematische

alpha

Schülerzeitschrift

1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: G. Wildenhain, Rostock, Eigenfoto (S. 2); Torsten Tock, Leipzig (S. 5); W. Aschmanow, Moskau (S. 7); Archiv: Mönchguter Heimatmuseum; Archiv: Universität Greifswald, Bibliothek (S. 12); Briefmarken: P. Schreiber, Stralsund (S. 13)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage des Originalbuches (siehe S. 11/13, Archiv: W. Träger, Döbeln)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 13. Oktober 1986

Auslieferungstermin: 15. Februar 1987

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

1 Einige Bemerkungen über Extremalprobleme, Teil 1 [9][1]
Prof. Dr. G. Wildenhain, Sektion Mathematik der *W.-Pieck*-Universität Rostock

2 Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Wildenhain, Rostock [9]

3 *alpha*-Porträt: Stephan Werner, Klasse 10, OS Roßlau [8]
Mathematikfachlehrer E. Timm, OS Roßlau

4 Die Mathematik als Produktivkraft, Teil 1 [8]
Gedanken nach dem XI. Parteitag der SED
Prof. Dr. G. Laßner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig

5 Sprachecke [7]
H. Begander/Dr. C.-P. Helmholz/J. Lehmann (alle Leipzig)

6 Rund um den SR 1: Die Speichertasten $\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$, $\boxed{\text{MX}}$ [7]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *M.-Luther*-Universität Halle/Wittenberg

8 Das Horner-Schema – Wir berechnen Funktionswerte und Nullstellen von Polynomen mit dem SR 1 [9]
Dipl.-Math. Uta Schmidt/Dr. W. Schmidt, Greifswald
E.-M.-Arndt-Universität, Greifswald

9 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
speziell für Klasse 5/7
Hexahex – ein geometrisches Puzzle [5]
Diplomlehrer Ch. Werge, Sektion Mathematik der *Karl-Marx*-Universität Leipzig

11 Im Mönchguter Heimatmuseum entdeckt [5]
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

11 Vor 270 Jahren: Das erste Mathematiklexikon in deutscher Sprache [5]
Dr. J. Buhrow, *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald/J. Lehmann, Leipzig

12 Christopher Hansteen – Pionier der Erforschung des Erdmagnetismus [8]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

14 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik · Naturwissenschaften und Technik

16 *alpha*-Wettbewerb 1985/86 [5]
Preisträger und vorbildliche Leistungen

17 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Mini-BASIC für *alpha*-Leser, Teil 3 [6]
Dr. L. Flade/Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der *M.-Luther*-Universität Halle

19 Komplexe Übungen · Preisausschreiben [5]
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

20 In freien Stunden · *alpha-heiter* [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

22 Lösungen [5]

IV. U.-Seite: aufgepaßt – mitgemacht:
Alle Teile haben den gleichen Flächeninhalt [8]
aus: Pythagoras, Groningen

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Einige Bemerkungen über Extremalprobleme

Teil 1

Seit eh und je sind Extremalprobleme in Mathematik, Physik oder Technik Gegenstand mathematischer Betrachtung gewesen. Bereits im Altertum formulierte man eine Vielzahl solcher Fragestellungen, die noch heute lehrreich und interessant sind. Auch im täglichen Leben entstehen immer wieder Probleme, die auf die Ermittlung von in gewissem Sinne *besten* oder *optimalen* Lösungen hinauslaufen. Im folgenden sollen an Hand von charakteristischen Beispielen verschiedene Typen solcher Problemstellungen vorgestellt werden. Eine tiefergehende Beschreibung der allgemeinen Lösungsmethoden übersteigt natürlich die Möglichkeiten dieses Artikels, schon deshalb, weil er im wesentlichen auch für Leser ohne Kenntnisse über Differential- und Integralrechnung verständlich sein soll. Unser Ziel besteht darin, einen Eindruck davon zu vermitteln, welche Rolle Extremalprobleme für die Entwicklung und für die Anwendung der Mathematik von der Antike bis zur Gegenwart gespielt haben. Wir beginnen mit der Formulierung einiger sehr einfacher Beispiele von Extremalaufgaben, von denen zwar die teilweise auf der Hand liegende Lösung auch ohne eine allgemeine Theorie gefunden werden kann, wobei aber jede Aufgabe einen speziellen Problemtyp repräsentiert.

Beispiel 1
Gesucht ist ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt, wenn die Längen a und b zweier Seiten vorgegeben sind.

Beispiel 2
Es sind diejenigen Punkte in der xy-Ebene gesucht, in denen die Funktion

$$z = f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 2$$

ihren kleinsten Wert annimmt.

Beispiel 3
Gesucht ist ein Rechteck gegebenen Inhalts, für das die Summe der Seitenlängen minimal wird.

Beispiel 4
Gegeben seien zwei Punkte A und B im Raum. Gesucht ist unter allen A und B verbindenden Kurven diejenige mit der kleinsten Länge.

Das Bedürfnis, allgemeine Methoden zu entwickeln, die es gestatten, Extremwertaufgaben in weitgehend einheitlicher Weise zu behandeln, war eine der ersten Motivationen für die Entwicklung der Differentialrechnung. Insbesondere war es *P. Fermat* (1601 bis 1665), der noch vor *Newton* und *Leibniz* wichtige Schritte in dieser Richtung unternahm.

Die einfachsten Extremalaufgaben (vgl. Beispiel 1) stellen sich so dar, daß von einer Funktion f, die von einer Variablen x abhängt ($y = f(x)$), Extremwerte (Maxima oder Minima) zu bestimmen sind. Dabei geht es in der Regel um relative Extrema. Die Funktion f besitzt bei $x = x_0$ ein relatives Minimum, wenn $f(x_0)$ kleiner als alle *benachbarten* Werte $f(x)$ ist, d. h., wenn $f(x) - f(x_0) > 0$ für $|x - x_0| < \varepsilon$ und ein geeignet gewähltes $\varepsilon > 0$ gilt (Bild 1).

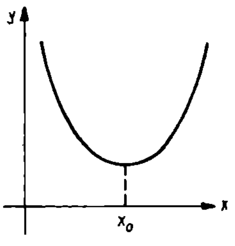


Bild 1

Betrachtet man nun den sogenannten Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, der offenbar den Anstieg der durch die Kurvenpunkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ verlaufenden Sekante darstellt, und läßt die Variable x im Sinne wachsender x das Intervall $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ durchlaufen, so gilt unter der Annahme eines relativen Minimums in x_0 die Ungleichung

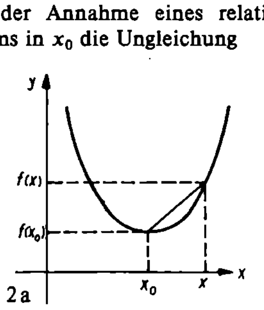


Bild 2a

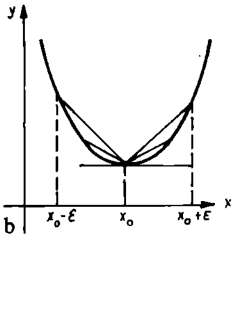


Bild 2b

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und}$$
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ für } x > x_0. \text{ (Bld. 2a, b)} \quad (1)$$

Nehmen wir nun ferner an, daß die Funktion f im Punkt x_0 differenzierbar ist, d. h., daß der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

(Anstieg der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ in x_0)

existiert, so folgt unter Beachtung von (1) die Gleichung $f'(x_0) = 0$. $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt x_0. Nähern wir uns der Stelle x_0 nämlich von links, so erhalten wir $f'(x_0) \leqq 0$, bei Annäherung von rechts hingegen $f'(x_0) \geqq 0$. Entsprechende Überlegungen gelten für den Fall eines relativen Maximums. Besitzt also eine überall innerhalb eines Intervalls differenzierbare Funktion f in einem inneren Punkt x_0 des Intervalls ein relatives Extremum, so gilt dort notwendig $f'(x_0) = 0$. Der erste Schritt zur Lösung von Extremwertaufgaben vom Typ der Aufgabe 1 besteht also in der Ermittlung derjenigen Stellen, in denen die Ableitung f' der jeweiligen Funktion f verschwindet. Um zu entscheiden, ob tatsächlich ein Extremwert vorliegt, müssen zusätzliche Überlegungen angestellt werden. Wir wollen diese Methode auf das Beispiel 1 anwenden. Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt $f(\alpha) = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$, wenn α den Winkel zwischen den gegebenen Dreiecksseiten bezeichnet. Aus der Ableitungsdefinition folgt durch elementare Überlegung $f'(\alpha) = \frac{1}{2} ab \cos\alpha$ und aus $f'(\alpha) = 0$ schließlich $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d. h., das gesuchte Dreieck erhält man, wenn die gegebenen Seiten einen rechten Winkel einschließen. Die vorliegende Aufgabe läßt sich allerdings ohne Benutzung der Differentialrechnung einfacher lösen, denn die Funktion $f(\alpha) = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$ nimmt wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ihren größten Wert offensichtlich bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ an.

Das skizzierte Schema der Behandlung von Extremalaufgaben zieht sich in mehr oder weniger verallgemeinerter Form wie ein roter Faden auch durch die anderen Problemtypen, wie sie durch die Beispiele 2 bis 4 repräsentiert werden. In Beispiel 2 etwa hängt die Funktion f nicht nur von einer, sondern von 2 Variablen x und y ab. Die als Extremstellen in Frage kommenden Punkte ermittelt man in diesem Falle durch Nullsetzen der sogenannten partiellen Ableitungen, d. h. man bildet die Ableitungen der Funktion f bezüglich x bzw. y und betrachtet dabei y bzw. x als Konstante. Die Begründung für diese Vorgehensweise ist der obigen völlig analog. Entsprechend sind die Überlegungen bei Funktionen von mehr als zwei Variablen. Im vorliegenden Fall findet man die gesuchte Extremstelle bei $x = -2$, $y = 1$.

Auch hier kann man mittels der Umformung

$$x^2 + xy + y^2 + 3x + 2 = \left(\frac{x}{2}+y\right)^2 + 3\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 - 1$$

die Lösung auf direktem Weg finden, denn der rechts stehende Ausdruck ist ersichtlich $\geqq -1$ und der minimale Wert -1 wird genau dann angenommen, wenn die in Klammern stehenden Größen verschwinden. Dies ergibt die Werte $x=-2$, $y=1$.

In Beispiel 3 liegt eine weitere Besonderheit vor. Gesucht ist ein Extremwert für eine Funktion von zwei Variablen, wobei noch eine zusätzliche Bedingung vorgegeben ist, die zwischen den Variablen bestehen soll.

Bezeichnen wir nämlich die Seitenlängen mit x und y, so ist ein Minimum der Funktion $f(x,y) = 2x + 2y$ unter der Bedingung $x \cdot y = F$ gesucht (F vorgegebener Rechteckinhalt). Man spricht daher von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung. In vielen Fällen läßt sich eine solche Aufgabe auf eine gewöhnliche Extremwertaufgabe für eine Funktion einer Variablen zurückführen, indem man die zweite Variable mit Hilfe der Nebenbedingung eliminiert. In unserem Falle ergibt sich eine gewöhnliche Extremwertaufgabe für die Funktion $g(x) = 2\left(x + \frac{F}{x}\right)$ mit der Lösung $x = \sqrt{F}$ und damit $y = \sqrt{F}$. Wie zu erwarten war, wird also das Minimum im Falle des Quadrats erreicht. Fragen wir analog nach den Abmessungen eines Quaders gegebenen Volumens V mit minimaler Oberfläche, so führt die Berücksichtigung der Nebenbedingung entsprechend zu einer gewöhnlichen Extremwertaufgabe vom Typ des Beispiels 2 und als Lösung erhält man den Würfel mit den Kantenlängen $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Hat man es mit einer Funktion von mehr als zwei Variablen und mehreren Nebenbedingungen zu tun, so kann unter Umständen in analoger Weise mit Hilfe dieser Nebenbedingungen die Anzahl der Variablen reduziert werden. Es gibt aber auch Methoden, die es gestatten, solche Probleme selbst dann zu lösen, wenn die oben erwähnte Reduktion nicht unmittelbar möglich ist (Methode der *Lagrangeschen Multiplikatoren*).

Im Vergleich zu den Beispielen 1 bis 3 ist die Aufgabe aus Beispiel 4, ungeachtet ihrer sofort erkennbaren Lösung, nämlich der Verbindungsstrecke, von grundsätzlich anderer Natur.

Während man in den ersten Fällen bestimmte Werte einer oder mehrerer Variabler zu ermitteln hat, für die eine gegebene Funktion dieser Variablen ein Maximum oder Minimum annimmt, hängt die fragliche Kurvenlänge in Beispiel 4 vom Gesamtverlauf der Kurve ab. An die Stelle variabler Parameter tritt also jetzt eine variable Kurve.

Die folgenden, wesentlich anspruchsvolleren Beispiele 5 bis 7 liefern weitere Problemstellungen dieser Art. Man spricht in diesen Fällen von Variationsproblemen. Die in den Beispielen 5 bis 7 formulierten Probleme haben in der historischen Entwicklung der Mathematik bis hin zur Gegenwart eine bedeutende Rolle gespielt.

Beispiel 5

Ein Massenpunkt gleite reibungslos längs einer gewissen Kurve, die einen Punkt A mit einem tiefer gelegenen Punkt B verbindet. Für welche derartige Kurve wird die Laufzeit am kürzesten, falls der Massenpunkt lediglich unter dem Einfluß der Schwerkraft steht? *(Problem der Brachystochrone)* (Bild 3.)

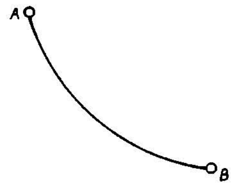


Bild 3

Beispiel 6

Gesucht ist diejenige Kurve gegebener Länge in der Ebene, welche einen maximalen Flächeninhalt einschließt. Entsprechend ist im Raum nach derjenigen geschlossenen Fläche gegebenen Inhalts gefragt, welche ein maximales Volumen einschließt *(Isoperimetrisches Problem)*.

Beispiel 7

Gegeben sei eine geschlossene Kurve L im Raum. Gesucht ist die von L begrenzte Fläche kleinstmöglichen Inhalts *(Plateausches Problem)*.

Die Aufgabe aus Beispiel 5 war im Jahre 1696 von *Johann Bernoulli* (1667 bis 1748) in der wissenschaftlichen Zeitschrift *Acta Eruditorum* in der Absicht gestellt worden, die großen Mathematiker der damaligen Zeit zum Wettbewerb herauszufordern. Der Erfolg war durchschlagend.

Es wurden verschiedene Lösungsmethoden vorgelegt. Die Lösung selbst erwies sich überraschend als Zykloide, in diesem Zusammenhang als Brachystochrone bezeichnet. Das Bedeutungsvolle dieser Untersuchung bestand darin, daß im Zusammenhang damit allgemeine Methoden entwickelt wurden, die zur Entstehung einer ganz neuen mathematischen Disziplin, nämlich der Variationsrechnung führten, insbesondere durch *Leonhard Euler* (1707 bis 1783). Dieser Vorgang hat durchaus exemplarischen Charakter. Allgemeine mathematische Methoden und Theorien entstehen in der Regel aus der Beschäftigung mit konkreten Problemen. Diese liefern den entscheidenden Antrieb für die Entwicklung der Wissenschaft. Das kann über Jahrtausende durch die gesamte Entwicklung der Mathematik bis zur Gegenwart verfolgt und durch die vielfältigsten Beispiele belegt werden.

G. Wildenhain

Dieser Beitrag wird in Heft 2/87 fortgesetzt.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Wildenhain

Sektion Mathematik der W.-Pieck-Universität Rostock

Leiter des Wissenschaftsbereiches Analysis

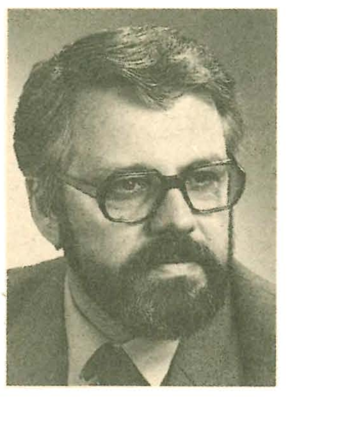
▲2749▲ Man beweise durch elementare geometrische Überlegungen, daß der Kreis unter allen geschlossenen Kurven mit vorgeschriebener Länge den größten Flächeninhalt einschließt.

Anleitung: Man führe die Betrachtung auf konvexe Gebiete zurück und benutze den Satz von Thales.

Ein Gebiet G heißt konvex, wenn alle Punkte der Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte von G ganz innerhalb G oder auf dem Rand von G liegen.

Kurzbiographie

Günther Wildenhain, geboren am 9. 10. 1937 in Beerwalde (Kreis Hainichen), Schulbesuch in Beerwalde und Mittweida, 1955 Abitur in Mittweida, 1955 bis 1960 Mathematikstudium an der TU Dresden, insbesondere bei den Professoren K. Maruhn, M. Landsberg und P. H. Müller, danach wissenschaftlicher Assistent am damaligen *Institut für Reine Mathematik* der TU Dresden, 1965 bis 1971 wiss. Mitarbeiter am *Institut für Reine Mathematik* der Akademie der Wissenschaften in Berlin.



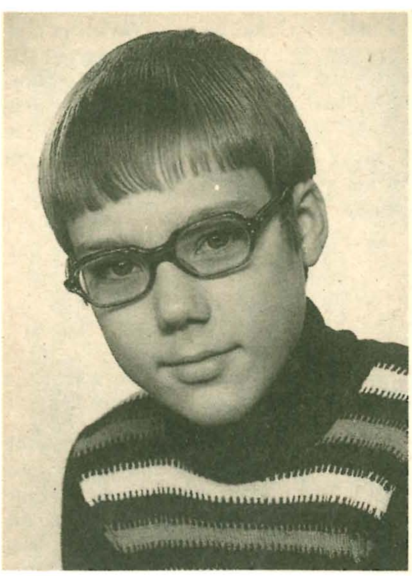
1964 Promotion, 1968 Habilitation, 1971 Berufung zum Hochschuldozenten und 1973 zum ordentl. Professor für Analysis an die Sektion Mathematik der Universität Rostock. Längere Auslandsaufenthalte in Moskau, Leningrad, Lima (Peru) und Santa Clara (Kuba), Forschungstätigkeit in der Potentialtheorie, der Funktionalanalysis und der Theorie partieller Differentialgleichungen, bisher etwa 80 wissenschaftliche Publikationen, darunter drei Bücher. Vorsitzender der Bezirkssektion Nord der Mathematischen Gesellschaft der DDR.

alpha-Porträt: Stephan Werner

Klasse 10, OS Roßlau

Zielstrebige Arbeit auf mathematischem Gebiet zahlt sich aus.

Der Schüler *Stephan Werner*, als zweites Kind einer kinderreichen Familie am 15.9. 1969 in Neustrelitz geboren, besucht die Roßlauer *Ernst-Thälmann*-OS seit der 4. Klasse. Bereits seit der 5. Klasse ist er Mitglied einer außerschulischen mathematischen Arbeitsgemeinschaft an unserer Schule und löste seit dieser Zeit auch regelmäßig die Wettbewerbsaufgaben unserer mathematischen Schülerzeitschrift. Dadurch erweiterte er systematisch sein mathematisches Wissen, vertiefte es auch durch selbständige Arbeit, so daß er nun im 10. Schuljahr in der Lage ist, eine wissenschaftliche Jahresarbeit anzufertigen, wie sie sonst von Schülern der 11. bzw. 12. Klassen der EOS erstellt werden. Die anläßlich der MMM 1986 vorgelegte Arbeit über die verschiedenen Formen der Ableitungen in der Differentialrechnung bringt recht deutlich zum Ausdruck, daß ihm Ausdauer und Zielstrebigkeit – beides sehr wichtige Charaktereigenschaften für die Mathematik – in jeder Weise eigen sind. In dieser Arbeit zeigt er, daß er die Worte unseres Volksbildungsministers auf der Erfurter Volksbildungskonferenz richtig verstanden hat, sich persönlich ein elementares Verständnis für Probleme der Informatik anzueignen, wie entsprechende Denk-, Arbeits- und Betrachtungsweisen. Die Entwicklung elementarer mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten, wie er sie sich



im Unterricht, in der Arbeitsgemeinschaft oder jetzt im fakultativen Kurs (R) *Praktische Mathematik*, aneignen konnte. Dadurch war er auch in der Lage, zielstrebig seine Leistungen in den Schul-, Kreis-, Bezirksolympiaden systematisch zu steigern und zu verbessern. War der Schüler in der 5. Klasse in der Kreisolympiade 1980/81 noch Sechster, so belegte er ein Jahr später 1981/82 in der Kreisolympiade den 3. und in der Klassenstufe 7 1982/83 in der Kreisolympiade den 2. Platz. Viermal nacheinander belegte er in der Mathematik-Bezirksolympiade mit entweder voller oder einer Punktzahl von 38 Punkten immer den ersten Platz. Seit 1983/84 arbeitet der Schüler Stephan Werner auch im Korrespondenzzirkel der *Martin-Luther*-Universität Halle-Wittenberg erfolgreich mit, bekam als Frühstarter 1985 in der DDR-Mathematikolympiade 1985 in Erfurt einen dritten und 1986 einen zweiten Preis.

E. Timm

Stephan Werner sandte der *alpha* drei Aufgaben (mit Lösungen), bearbeitet von unserem Aufgabenexperten Dr. Fregin, Leipzig:

▲1▲ Man löse die Gleichung

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

im Bereich der reellen Zahlen.

▲2▲ Es ist folgender Satz zu beweisen: *Für jedes Dreieck ABC gilt: Die Flächeninhalte des Dreiecks ABC und seines Inkreises verhalten sich wie ihre Umfänge.*

▲3▲ Es ist folgender Satz zu beweisen: *In jedem Sehnenviereck ist die Summe der Produkte der Längen der gegenüberliegenden Seiten gleich dem Produkt aus den Längen der Diagonalen.*

Lösungen

▲1▲ Durch geeignete äquivalente Umformungen erreicht man auf beiden Seiten der Gleichung solche Summen, die sich als Binome der Form $(a+b)^2$ schreiben lassen.

Man addiert auf beiden Seiten der Gleichung $4x^2 + 400x + 1$ und erhält

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 10\,000 + 400x + 4x^2;$$
$$(x^2+1)^2 = (2x+100)^2;$$
$$x^2 + 1 = \pm(2x+100).$$

Nun nimmt man eine Fallunterscheidung vor:

1. Fall: $x^2 + 1 = 2x + 100;$
$x^2 - 2x - 99 = 0;$
$x_1 = 11;\ x_2 = -9.$

2. Fall: $x^2 + 1 = -2x - 100;$
$x^2 + 2x + 101 = 0.$

Diese quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen, da die Diskriminante negativ ist. Es gilt $L = \{11; -9\}$.

▲2▲ Es sei A_D die Bezeichnung für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und A_I die für den Flächeninhalt des Inkreises von ABC. Wir bezeichnen die Umfänge entsprechend mit u_D bzw. u_I. Für den Radius ϱ des Inkreises des Dreiecks ABC gilt die Beziehung $\varrho = \frac{A_D}{s}$, wobei $s = \frac{u_D}{2}$ ist.

Daraus folgt

$A_D = \varrho \cdot s$ bzw. $A_D = \frac{\varrho}{2} \cdot u_D$.

Nun bildet man das Verhältnis $\frac{A_D}{A_I}$ und erhält

$$\frac{A_D}{A_I} = \frac{\varrho \cdot u_D}{2 \cdot \pi \cdot \varrho^2} = \frac{u_D}{2\pi\varrho} = \frac{u_D}{u_I},$$

q. e. d.

▲3▲ Man wählt auf $\overline{AC}$ den Punkt P derart, daß $\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle CBD$.
Da $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CDB$ (Peripheriewinkel über demselben Bogen $\overset{\frown}{CB}$) gilt:
$\triangle ABP \sim \triangle BCD$ (Hauptähnlichkeitssatz). Es folgt nun

$l(\overline{AP}) : a = c : f$ bzw. $l(\overline{AP}) = \frac{a \cdot c}{f}$.

Da wegen
$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle DBC$ auch $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle PBC$
gilt und als Peripheriewinkel über demselben Bogen $\overset{\frown}{AB}$ auch
$\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle ADB$
ist, gilt auch $\triangle PBC \sim \triangle ABD$.
Es folgt nun

$d : f = l(\overline{CP}) : b$ bzw. $l(\overline{CP}) = \frac{b \cdot d}{f}$.

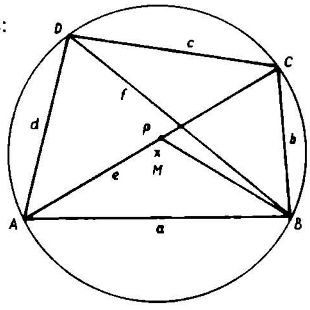
Also gilt wegen $l(\overline{AP}) + l(\overline{PC}) = e$ die Beziehung

$$e = \frac{a \cdot c}{f} + \frac{b \cdot d}{f},$$
$$e = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{f}$$

bzw. $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$, q. e. d.

Anmerkung: Das Symbol $l(\overline{AP})$ bedeutet *Länge der Strecke* $\overline{AP}$!

Skizze:



Lebensweisheiten

Während die Menschen lehren, lernen sie.
Seneca d. J.

Der gebildete Mensch birgt in sich immer Reichtum. *Phaedrus*

Talent haben ist das beste, das zweite, etwas lernen. *Epicharm*

Nichts kann ohne Beispiel richtig gelernt oder gelehrt werden. *Columella*

Mehr Menschen werden durch Übung tüchtig als von Natur. *Stobaios*

Die Mathematik als Produktivkraft

Gedanken nach dem XI. Parteitag der SED

Teil 1

Festvortrag auf der Abschlußveranstaltung der XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR in Erfurt, 3. Mai 1986

Die Mathematiker unseres Landes haben auf ihrem Kongreß in Rostock zu Beginn des Jahres 1986, im Vorfeld des XI. Parteitages, ihre erzielten Ergebnisse vorgelegt, damit ihre Leistungsfähigkeit unter Beweis gestellt, so wie Ihr, der Nachwuchs, jetzt hier auf Eurer Mathematikolympiade, und über die Entwicklungstendenzen der Mathematik beraten (1).

Mit großer Freude habe ich deshalb das Angebot des *Zentralen Komitees für die Olympiade Junger Mathematiker der DDR* angenommen, auf dieser festlichen Abschlußveranstaltung der Jubiläumsolympiade, nach dem XI. Parteitag der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands mit einigen Gedanken zu umreißen, wie die Wissenschaft Mathematik als Produktivkraft die künftige Entwicklung mit prägen wird. Es ist mir deswegen eine große Freude, weil es auch eine große Herausforderung ist:

Was können und was sollen wir Mathematiker unserem Nachwuchs als Orientierung sagen, in einem Moment, in dem unsere gesamte Gesellschaft weit in die Zukunft reichende Aufgaben in Angriff nimmt, in einem Moment, in dem gerade durch den Parteitag Maßstäbe gesetzt worden sind, wie eine Zukunftspolitik immer eine Politik für die Jugend, für den Nachwuchs ist? Auch deshalb wurden die Probleme der Jugend und der Schule auf dem Parteitag mit einer so großen Aufmerksamkeit behandelt.

Heute steht die Menschheit an einem Wendepunkt ihrer Entwicklung. Dieser Einsicht kann sich niemand, der über die Probleme unserer Tage nachdenkt, entziehen. Sei er ein Sozialist oder ein Bourgeois, Arbeiter oder Kapitalist, sei er Kommunist, Sozialdemokrat, Grüner oder aus dem konservativen Lager der kapitalistischen Welt, sei er älter oder so jung wie Ihr, liebe Mathematikolympioniken.

Man kommt zu dieser Einsicht, egal welche der großen Probleme der Welt man zum Ausgangspunkt seines Denkens nimmt. Sei es die Arbeitslosigkeit und der Sozialabbau in den Ländern des Kapitals, die Umweltbelastungen oder die Kernenergie, der Hunger in der dritten Welt oder die Frage von Krieg und Frieden. An einem Wendepunkt sind es immer weniger Parameter, die den gesamten Verlauf charakterisieren. Sagen wir es einmal mathematischer: Die Entwicklung ist an einem Sattelpunkt angekommen. Der eine Parameter, der über den weiteren Ablauf entscheidet, ist die Frage von Krieg und Frieden, die identisch geworden ist mit Untergang oder Weiterentwicklung der Menschheit. In dieser Problematik kulminieren auch alle mit dem wissenschaftlich-technischen Fortschritt und den Wissenschaften verbundenen Fragen. Erich Honecker formulierte dazu: *Nichts kann wichtiger sein, als zu verhindern, daß die Völker einem nuklearen Inferno ausgeliefert, die Flammen eines atomaren Krieges entfacht werden, in dem es weder Sieger noch Besiegte gäbe, der aber die menschliche Zivilisation auf unserem Erdball vernichten würde.*

Diese Feststellung ist eine fundamentale Formel, auf deren Basis eine Koalition der Vernunft in der definierten Breite und die Politik des Dialogs möglich und notwendig sind.

In dieser Periode der historischen Wende für die Zivilisation auf der Erde hat der XI. Parteitag der SED für uns in der DDR weit in die Zukunft reichende Aufgaben beschlossen.

Wir können uns dabei auf ein Fundament stützen, daß durch hohe Leistungen gelegt wurde und mit der auch wir schon in unserem Lande den Nachweis geführt haben: *Der Sozialismus ist kein Irrtum der Geschichte, sondern die Zukunft der Menschheit,* wie es im Rechenschaftsbericht des Zentralkomitees heißt.

Für die Zukunft gilt es, in historisch kurzer Zeit eine Schlacht zu gewinnen, nicht mit Säbeln und Raketen, sondern mit Arbeitsproduktivität.

In 15 Jahren soll die Welt kernwaffenfrei sein mit einer reduzierten konventionellen Rüstung in Europa vom Atlantik bis zum Ural.

In dieser Schlacht um die Arbeitsproduktivität kann nichts einfach oder billig sein, weil es die Klassenschlacht ist und weil Kapital in Arbeitsproduktivität zu verwandeln das einzige ist, was der Kapitalismus noch bewältigt. Ansonsten kann er keines der sozialen Probleme mehr lösen.

Auch deshalb wurden die Beschlüsse über die gemeinsame Verantwortung der Wissenschaftseinrichtungen und der Kombinate für eine weitgesteckte Grundlagenforschung gefaßt, damit nicht nur die personellen Voraussetzungen sondern auch die materiellen Bedingungen für eine richtig dimensionierte Forschung gesichert werden können.

Wir können morgen nur so produzieren, wie wir heute forschen. Im bevorstehenden Zeitabschnitt sind von der Grundlagenforschung (zu der auch immer die Mathematik gehört) Impulse zu erwarten, die zu Spitzenleistungen in Wissenschaft und Technik führen ... Dem entspricht die *Konzeption zur langfristigen Entwicklung der naturwissenschaftlichen, mathematischen und technischen Grundlagenforschung im Bereich der Akademie der Wissenschaften der DDR und des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen für den Zeitraum 1986 bis 1990 und darüber hinaus bis zum Jahre 2000.*

Die erarbeiteten Kenntnisse über die Rolle der Grundlagenforschung im Sozialismus sind im Rechenschaftsbericht an den XI. Parteitag eingeflossen und zum Beschluß erhoben worden.

Von grundsätzlicher Bedeutung ist, daß dort nichts von der mancherorts noch anzutreffenden Einteilung der Resultate der Grundlagenforschung in brauchbare und unbrauchbare zu finden ist.

Vielmehr ist die Bewertung der Grundlagenforschung gekennzeichnet durch solche Sätze wie:

Die Wissenschaft hat das belebende Feuer zu sein.

Es darf keine Kurzsichtigkeit geben. Nicht sofort verwendbare Ergebnisse sind ein Potential, das an die Reaktionsfähigkeit und Flexibilität der Volkswirtschaft hohe Anforderungen stellt.

Philosophie und Mathematik, also die Wissenschaften über die allgemeinsten Zusammenhänge, bilden in ihrer Polarität Eckpfeiler für die Wissenschaftsentwicklung.

Die lebendige Entwicklung der Wissenschaft Mathematik verläuft unendlich vielfältig verzahnt mit der Entwicklung der anderen Wissenschaften und der Gesellschaft. Auf jeder neuen Entwicklungsetappe der Produktivkräfte werden neue Fragen gestellt, deren Beantwortung immer auch eine neue Mathematik benötigt.

Auf die Woche genau vor 300 Jahren, am 19. Mai 1686 faßte die *Royal Society* in London den Beschluß über die Veröffentlichung von Newtons *Principia*, den Mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaft. Fragestellungen, die letztlich zu Newtons Principia und der Schaffung der Differential- und Integralgleichung führten, waren etwa folgende:

- Was ist π für eine Zahl (Quadratur des Kreises)?
- Warum bewegen sich die Planeten nach den Keplerschen Gesetzen (also auf Ellipsen)?
- Warum hängt die Schwingungsdauer des Pendels nur von der Länge ab?

Das Wesen schon drei solcher Fragestellungen reichte in fast alle Gebiete der damaligen Produktivkräfte. Zu ihrer vollständigen Beantwortung benötigte man die neue Mathematik, die Infinitesimalrechnung, die an der Schwelle zum Zeitalter des Kapitalismus entstand und entstehen mußte.

Im 20. Jahrhundert, an der Schwelle zum Zeitalter des Kommunismus, stellen sich neue mathematische Fragen, aber ebenso verknüpft mit unseren heutigen Produktivkräften und technischen Möglichkeiten:

- Was ist die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α für eine Zahl?
- Warum hat das Photon als einziges Elementarteilchen die Masse Null?
- Warum zeigen die verschiedensten Gase beim Phasenübergang gasförmig – flüssig das gleiche kritische Verhalten?

Die Beantwortung solcher Fragestellungen erfordert das gesamte Spektrum unserer heutigen Mathematik. Dabei geht es natürlich nicht nur um die bloße Antwort auf solche Fragen, sondern um die Schaffung und Nutzung von Techniken und Technologien, denen solche physikalischen Effekte zugrunde liegen. Die mathematische Fassung der naturwissenschaftlichen Gesetzmäßigkeiten ist dabei im allgemeinen überhaupt erst die Voraussetzung für deren weitgehende praktische Nutzung.

Beispielsweise kann mit der Formulierung *Jedes Energieniveau kann höchstens durch ein Elektron besetzt werden* das Pauli-Prinzip bereits klar umrissen werden. Aber erst die Mathematisierung dieses Prinzips im Rahmen der Quantentheorie durch die nichtkommutative Algebra (Antikommutatorrelationen) ermöglicht den Aufbau der Theorie des Halbleiters mit allen praktischen Anwendungen in der heutigen Schlüsseltechnologie Mikroelektronik.

Die Formulierung der Gesetzmäßigkeiten der Quantentheorie mittels der nichtkommutativen Algebra und Analysis, sowie die Geometrisierung der Physik, die mit der Relativitätstheorie zu Beginn unseres Jahrhunderts eine prinzipiell neue Qualität erreichte und zur heutigen Eichfeldtheorie führte, sind die grundsätzlichsten Züge der mathematischen Naturbeschreibung unserer Zeit. Es ist ein qualitativer Sprung, der nur mit der Schaffung der Infinitesimalrechnung vor 300 Jahren vergleichbar ist. Mit dieser neuen Mathematik kann die Beantwortung solcher Fragestellungen wie die o. g. angegangen werden.

Hinzu kommt ein zweiter Aspekt. Bis zu unserem Jahrhundert erfolgte die Mathematisierung aller Gebiete fast ausschließlich über die Physik, ja man kann sogar sagen über die Mechanik. Solche Gebiete, wie die Kombinatorik, die elementare Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik spielten eine Sonderrolle.

Durch die Entwicklung der Kybernetik und Informatik in unserer Zeit und der mathematischen Fassung solcher Begriffe wie Steuerung, Strategie, Information, System, Kompliziertheit, künstliche Intelligenz u. a. hat sich eine dialektische Polarität zwischen der Physik und Mechanik auf der einen Seite sowie Informatik und Kybernetik auf der anderen Seite herausgebildet.

Die ständig voranschreitende Mathematisierung der Natur-, Technik- und Gesellschaftswissenschaften vollzieht sich in dieser Polarität über Problemkreise der Physik und Mechanik einerseits sowie der Informatik und Kybernetik andererseits. Das gilt also auch für die Chemie und Biologie. Dabei ist wohl gegenwärtig bei der Mathematisierung der Biologie – mehr als in jeder anderen Naturwissenschaft – ein besonders starker Einzug mathematischer Theorien und Begriffe über die Informatik und Kybernetik zu beobachten. Dieser hält den molekular-physikalischen Einflüssen, also der Physikalisierung, schon die Waage.

Wir können davon ausgehen, daß die praktische Wirksamkeit der gesamten heutigen Mathematik entlang der beiden Linien Physik – Mechanik und Informatik – Kybernetik verfolgt werden kann und auf diese Weise auch die Weiterentwicklung ihres Begriffs- und Theoriensystem geschieht. Die Mathematik liegt im Spannungsfeld dieser beiden Pole. *G. Laßner*

Die erfolgreiche DDR-Mannschaft, IMO 1986, Warschau, siehe *alpha* 6/86.

▲1▲ An eight-digit integer has the following properties:

(I) The integer is written, in base ten, with two ones, two twos, two threes, and two fours.

(II) The two ones are separated by one integer, the two twos by two integers, the two threes by three integers, and the two fours by four integers.

What is the integer?

aus: mathematical pie, London

▲2▲ Братья Алеша и Боря родились в августе. В школе начинают учиться с семи лет. Номер класса, в котором учится сейчас старший брат Борис, равен возрасту Алеши. В какой класс перейдет Алеша, когда Борис окончит среднюю школу?

aus: Quant, Moskau

▲3▲ Il s'agit de compléter la grille à l'aide des nombres ci-dessous, de sorte que chaque série verticale ou horizontale de 5 nombres totalise 84 points.

5 – 14 – 15 – 16 – 20 – 22 – 27 – 28 – 29

aus: Maximath, Belgien

	3		2	
1		4		6
	11		25	
30		26		9
	12		23	

Rund um den SR 1

Die Speichertasten
$\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$, $\boxed{\text{M+}}$

Das Tastenfeld des Schulrechners SR 1 enthält im oberen Teil drei rote Tasten, nämlich die Tasten $\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$, $\boxed{\text{M+}}$. Das „M“ deutet auf den Anfangsbuchstaben des englischen Wortes memory (Gedächtnis) hin. Die Buchstabenkombination MR kommt von den englischen Wörtern memory recall (recall – Aufruf). Der Rechner ist, wie wir gleich sehen werden, in der Lage, sich gewisse Zahlen zu merken, ohne die Rechnung zu beeinflussen, und diese gespeicherte Zahl nach Druck auf die Taste $\boxed{\text{MR}}$ wieder in der Anzeige erscheinen zu lassen (d. h., der Speicherinhalt wird in das Eingaberegister X übertragen).

1. Betätige nacheinander folgende Tasten, beobachte die Anzeige und fülle die Leerstellen aus!

5,32 $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ 3
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$
▼ ▼ ▼
... ...

Nach Betätigung der Taste $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ wird die Zahl der Anzeige (d. h. der Inhalt des Eingaberegisters X) in den Speicher M übertragen. Symbolisch wird das durch X→M auf der Taste zum Ausdruck gebracht. Um den Benutzer des SR 1 darauf hinzuweisen, daß der Speicher belegt ist, erscheint in der Anzeige ein M. Der Speicherinhalt kann nun beliebig oft in die Rechnung einbezogen werden. Auf diese Weise läßt sich z. B. leicht folgende Wertetabelle vervollständigen:

x	$5{,}32 \cdot x + 3$
4	24,28
3	18,96
2,5	
2	
1,5	

Man braucht den Faktor 5,32 nun nicht ständig neu einzutasten.

2. Betätige die Tasten des SR 1 in angegebener Reihenfolge und fülle die Leerstellen aus!

Tastenfolge	Anzeige	Speicherinhalt
$\boxed{2}$	2.	0
$\boxed{\text{X}\to\text{M}}$	M 2.	2
$\boxed{+}$	M 2.	2
$\boxed{3}$		2
$\boxed{\text{X}\to\text{M}}$		
$\boxed{=}$		
$\boxed{+}$		
$\boxed{\text{MR}}$		
$\boxed{=}$		
$\boxed{0}$		
$\boxed{\text{X}\to\text{M}}$		

Wie aus Aufgabe 2. ersichtlich, bleibt der alte Speicherinhalt nur so lange im Speicher, bis er durch einen neuen Zahlenwert ersetzt (man sagt auch „überschrieben“) wird.
Um den Speicherinhalt zu löschen, gibt man mit der Taste $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ eine Null in den Speicher. Danach verschwindet auch das M in der Anzeige.

3. Frank erhält die Aufgabe, das Volumen, die Mantelfläche und die Oberfläche eines geraden Kreiszylinders mit dem Radius $r = 0{,}623$ m und der Höhe $h = 2{,}276$ m zu berechnen. Dazu nutzt er seinen SR 1 und tippt den Zahlenwert des Radius nur einmal in den SR 1 ein. Geht das überhaupt?

4. Welcher Term wird durch den jeweiligen Rechenablaufplan ermittelt?

a) 4 $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

b) 4 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ 5 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

c) 4 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ $\boxed{=}$ 5 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

d) a $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ $\boxed{\times}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

e) 0,5 $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
$(a + b > 0)$

f) a $\boxed{-}$ b $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ c $\boxed{+}$ d $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
$(b \geqq 0)$

Anja und Ines sollen den Wert des Terms
$(27{,}759 + 4{,}732 - 39{,}717)$
$\times (7{,}274 - 0{,}739 + 1{,}983)$
mit dem SR 1 ermitteln.
Ines wählt folgenden Weg:

(1) 27,759 $\boxed{+}$ 4,732 $\boxed{-}$ 39,717 $\boxed{=}$
▼
−7.226

(2) 7,274 $\boxed{-}$ 0,739 $\boxed{+}$ 1,983 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 7,226 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$
▼
−61,551 068

Anja nutzt den Speicher und rechnet nach folgendem Rechenablaufplan:
27,759 $\boxed{+}$ 4,732 $\boxed{-}$ 39,717 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ 7,274 $\boxed{-}$ 0,739 $\boxed{+}$ 1,983 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

Als Resultat erhält auch Anja den Wert −61,551 068. Beide Wege sind möglich. Der Weg von Anja ist jedoch rationeller, da sie das Zwischenergebnis nicht notieren und erneut in den SR 1 eingeben muß.

5. Berechne unter Nutzung des Speichers folgende Terme! Gib jeweils einen Rechenablaufplan an!

a) $(3{,}27 + \sqrt{9{,}71}) \cdot (5{,}28^2 - 4{,}81)$
b) $(2{,}2^3 - 4{,}2^2) \cdot (4{,}32^2 - 0{,}87^2)$
c) $\dfrac{4{,}82 - \sqrt[4]{8{,}2}}{2{,}7 - 5{,}8^2}$
d) $\dfrac{4{,}7^2 - 4{,}2}{\sqrt{4{,}7 - 4{,}2}}$

Neben den Tasten $\boxed{\text{MR}}$ und $\boxed{\text{X}\to\text{M}}$ gibt es noch eine weitere Speichertaste $\boxed{\text{M+}}$. Zunächst wollen wir erkunden, was die Taste $\boxed{\text{M+}}$ leistet, indem wir folgenden Rechenablaufplan abarbeiten und die jeweiligen Leerstellen ausfüllen.

5 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3
▼ ▼
20 a

$\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MR}}$
▼ ▼
−27 b

Für a erhält man den Wert 9 und für b den Wert 6. Das Zeichen + auf der Taste $\boxed{\text{M+}}$ weist darauf hin, daß es sich um einen „rechnenden“ Speicher handelt. Beim Betätigen der Taste $\boxed{\text{M+}}$ wird zum bisherigen Speicherinhalt die Zahl addiert, die sich in der Anzeige (X-Register) des Rechners befindet. Betrachten wir nochmals unser obiges Beispiel: Beim erstmaligen Betätigen der Taste $\boxed{\text{M+}}$ gelangt die Zahl 5 in den Speicher. Nachdem man die Taste $\boxed{\text{M+}}$ erneut betätigt hat, wird zum Speicherinhalt 5 die Zahl 4 addiert. Der Druck auf die Taste $\boxed{\text{MR}}$ zeigt den Speicherinhalt 9 an. Beim erneuten Drücken der Taste $\boxed{\text{M+}}$ nach obigem Rechenablaufplan wird zum Speicherinhalt 9 die Zahl −3 addiert und man erhält als neuen Speicherinhalt 6.

6. Im Speicher des SR 1 sei die Zahl $x_1 = 21{,}73$. Die Anzeige des SR 1 zeigt die Zahl $x_2 = 17{,}321$.
Wie könnte man vorgehen, um den Speicherinhalt so zu verändern, daß in ihm die Zahl $x_1 - x_2$ gespeichert wird?

7. Betätige die Tasten des SR 1 in angegebener Reihenfolge und fülle die Leerstellen aus!

Tastenfolge	Anzeige	Speicherinhalt
$\boxed{2}$	2.	0
$\boxed{+}$	2.	0
$\boxed{3}$	3.	0
$\boxed{=}$	5.	0
$\boxed{\text{M+}}$	M 5.	5
$\boxed{-}$		
$\boxed{7}$		

$\boxed{=}$
$\boxed{\text{M+}}$
$\boxed{\text{MR}}$
$\boxed{0}$
$\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$

Es gibt auch Taschenrechner mit den Tasten $\boxed{\text{M}-}$, $\boxed{\text{M}\times}$, $\boxed{\text{M}\div}$. Mit Hilfe der Taste $\boxed{\text{M}-}$ wird vom Inhalt des Speichers die Zahl, die sich in der Anzeige befindet, subtrahiert. Beim Betätigen der Taste $\boxed{\text{M}\times}$ (bzw. $\boxed{\text{M}\div}$) wird der bisherige Speicherinhalt mit der Zahl in der Anzeige multipliziert (bzw. durch die Zahl in der Anzeige dividiert).

8. Berechne mit dem SR 1!

a) $(13{,}29 + 4{,}27)^2 + \sqrt{4{,}3^2 - 7{,}9} - (8{,}23^2 + 0{,}32)$

b) $\dfrac{2{,}8 \cdot 4{,}9}{3{,}7 \cdot 0{,}3 + 4{,}2 \cdot 0{,}41 - 3{,}9 \cdot 0{,}7}$

c) $\dfrac{7{,}4 + 9{,}3}{(2{,}9 - 7{,}03) \cdot (-7{,}8)^2}$

Oft empfiehlt es sich, die Rechnung mit dem Nenner zu beginnen. Seinen Wert gibt man in den Speicher. Nachdem der Zähler berechnet wurde, dividiert man diesen durch den Speicherinhalt.

Beispiel:

Es sei der Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 R_2 zu ermitteln.

Es gilt $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Lösung in Form eines Rechenablaufplanes:

R_1 $\boxed{+}$ R_2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ R_1 $\boxed{\times}$ R_2
$\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

Verwendet man zur Berechnung von R die Formel

$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$,

so kann man auf die Nutzung des Speichers verzichten:

R_1 $\boxed{1/\text{x}}$ $\boxed{+}$ R_2 $\boxed{1/\text{x}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1/\text{x}}$.

9. Stelle zur Berechnung folgender Terme einen Rechenablaufplan auf!

a) $(\sqrt{a^3} + a) \cdot (1 - a)$

b) $(a + b) : \sqrt{c + d}$

c) $(a^2 + b) \cdot \dfrac{1}{(a + b)^2}$

10. Welchen Term kann man jeweils mit nachstehenden Rechenablaufplänen berechnen?

a) $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ $\boxed{\times}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\text{y}^\text{x}}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
$(a \cdot b > 0); (a > 0)$

b) a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$ c $\boxed{+}$ d
$\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{M+}}$ e $\boxed{+}$ f $\boxed{\text{x}^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{MR}}$

c) a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\text{x}^2}$ $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ $\boxed{\div}$ 3
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{M+}}$ $\boxed{\text{MR}}$

Lösungen

1. 5,32 $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ 3
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ 3
▼ ▼
24,28 5,32
$\boxed{=}$
▼
18,96

2.

Tastenfolge	Anzeige	Speicherinhalt
$\boxed{3}$	M 3.	2
$\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$	M 3.	3
$\boxed{=}$	M 5.	3
$\boxed{+}$	M 5.	3
$\boxed{\text{MR}}$	M 3.	3
$\boxed{=}$	M 8.	3
$\boxed{0}$	M 0.	3
$\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$	0.	0

3. Ja!
Hier eine Möglichkeit:

$\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 0,623 $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ $\boxed{\text{x}^2}$ $\boxed{\times}$ 2,276 $\boxed{=}$
▼
V

2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 2,276
$\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\text{x}^2}$ $\boxed{=}$
▼ ▼
M 0

4.

a) $(4 + 3^2) + 4 = 4 + 3^2 + 4$

b) $(5 - 2) : (4 + 3)$

c) $(5 - 2) \cdot 3$

d) $(a \cdot b + a^2) \cdot a$

e) $\sqrt{a + b}$

f) $(c + d)^2 \cdot (a - \sqrt{b})$

5.

a) 3,27 $\boxed{+}$ 9,71 $\boxed{\sqrt{\ }}$
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ 5,28 $\boxed{\text{x}^2}$ $\boxed{-}$ 4,81
$\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
147.31682

b) 2,2 $\boxed{\text{y}^\text{x}}$ 3 $\boxed{-}$ 4,2 $\boxed{\text{x}^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ 4,32 $\boxed{\text{x}^2}$ $\boxed{-}$ 0,87 $\boxed{\text{x}^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
125.19526

c) 4,82 $\boxed{-}$ 8,2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$
$\boxed{=}$ $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ 2,7 $\boxed{-}$ 5,8 $\boxed{\text{x}^2}$
$\boxed{=}$ $\boxed{1/\text{x}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
1.0109-01

d) 0,5 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ 4,7 $\boxed{\text{x}^2}$
$\boxed{-}$ 4,2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$
25.300281

6. Mit Hilfe der Taste $\boxed{+/-}$ bildet man in der Anzeige $-x_2 = -17{,}321$.
Nun betätigt man die Taste $\boxed{\text{M+}}$.
Der neue Speicherinhalt ist
$21{,}73 + (-17{,}321) = 4{,}409$.

7.

Tastenfolge	Anzeige	Speicherinhalt
$\boxed{-}$	M 5.	5
$\boxed{7}$	M 7.	5
$\boxed{=}$	M −2.	5
$\boxed{\text{M+}}$	M −2.	3
$\boxed{\text{MR}}$	M 3.	3
$\boxed{0}$	M 0.	3
$\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$	0.	0

8.

a) 243,554 93

b) 134,509 8

c) −0,066 462

9.

a) a $\boxed{\text{y}^\text{x}}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{+}$ a $\boxed{=}$
$\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ 1 $\boxed{-}$ a $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

b) c $\boxed{+}$ d $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ a $\boxed{+}$ b
$\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

c) a $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\text{x}^2}$ $\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ a $\boxed{\text{x}^2}$
$\boxed{+}$ b $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

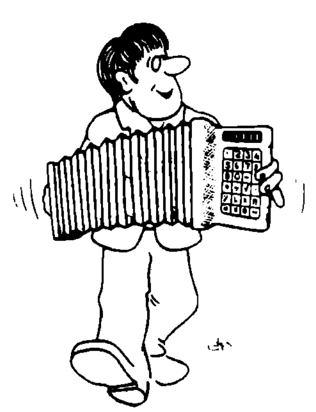
10.

a) $(a \cdot b)^a$

b) $(a + b) - (c + d) + (e + f^2)$

c) $(a + b)^2 + \dfrac{(a + b)^2}{3} + \sqrt{\dfrac{(a + b)^2}{3}}$

L. Flade



Kryptarithmetik

Welche Operationszeichen sind für $\ast$ einzusetzen, damit folgende Identitäten erfüllt werden?

$95 \ast 5 = 9 \ast 5 \ast 5$
$63 \ast 3 = 6 \ast 3 \ast 3$
$(2 \ast 7) \ast 2 \ast 16 = 272 \ast 16$
$2^3 \ast 4 = 34 \ast 2$
$2^{8 \ast 1} = 128$
$95 \ast 4^2 = 9 \ast (5 \ast 4) \ast 2$
$4^3 \ast 2 = 34 \ast 2$
$5^{6 \ast 2} = 625$

Dr. W. Schmidt, Greifswald

Das Horner-Schema

Wir berechnen Funktionswerte und Nullstellen von Polynomen mit dem SR 1

Lehrerstudenten der Fachkombination Mathematik/Geographie haben sich an der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität Greifswald im Rahmen eines Jugendobjekts mit Anwendungsmöglichkeiten von Taschenrechnern in der Schule beschäftigt. Dem zusammengestellten Material entstammt dieser Beitrag, er wurde für den Schulrechner SR 1 aktualisiert.

Gefragt sei nach dem Wert des Polynoms
$p(x) = 4{,}57x^4 + 3{,}27x^3 - 2{,}28x^2$
$+ 1{,}8x - 2{,}3$
an der Stelle $x = 2{,}53$.
Zu berechnen ist also
$p(2{,}53) = 4{,}57 \cdot (2{,}53)^4 + 3{,}27 \cdot (2{,}53)^3$
$- 2{,}28 \cdot (2{,}53)^2 + 1{,}8 \cdot 2{,}53 - 2{,}3$.
Mit dem Schulrechner SR 1 könnt ihr diesen Funktionswert schnell ermitteln. Aber in welcher Reihenfolge soll man die Rechenoperationen ausführen? Wer sich die Aufgabe nicht sehr gründlich ansieht, könnte vielleicht folgenden Rechenweg beschreiten, der auf dem SR 1 durch die Tastenfolge

$\boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{,}$
$\boxed{5}\ \boxed{7}$
$\boxed{=}\ \boxed{X\to M}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}$
$\boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{7}$
$\boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}$
$\boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}$
$\boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$
$\boxed{M+}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR}$

gekennzeichnet ist.
Auf dem SR 1 werden dabei nacheinander angezeigt:

2.53	2.
4.	6.4009
40.9715	2.28
4.57	14.594052
187.23976	−14.594052
2.53	2.53
3.	1.8
16.1943	4.554
3.27	2.3
52.955361	−2.3
2.53	227.85506

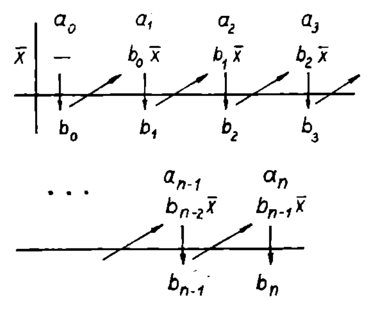
Das Ergebnis ist $p(2{,}53) = 227{,}855\,06$.
Weil die Funktionstaste $\boxed{y^x}$ benutzt wurde, sind die Zahlen $(2{,}53)^4$, $(2{,}53)^3$, $(2{,}53)^2$ umständlich (im SR 1 mit Hilfe der Logarithmusfunktion) und nur näherungsweise berechnet worden. Daher ist unser Vorgehen nicht sehr günstig. Etwas besser wäre es, die Zahlen
$A = (2{,}53)^2$, $B = (2{,}53)^3 = A \cdot 2{,}53$,
$C = (2{,}53)^4 = B \cdot 2{,}53$
zu berechnen und zu notieren, dabei kann man den Speicher des SR 1 gut einsetzen. Nun können die Werte A, B, C benutzt werden, um $p(2{,}53)$ als Summe von Produkten zu erhalten. Bei einem derartigen Vorgehen sind sieben Multiplikationen und vier Additionen durchzuführen. Umständlich ist vor allem das wiederholte Eingeben (und Aufschreiben) von Zahlen. Wir finden
$A = 6{,}4009$; $B = 16{,}194\,277$;
$C = 40{,}971\,521$ und $p(2{,}53) = 227{,}855\,08$.
Nun wollen wir die Rechnung so organisieren:
$p(x) = \big(((4{,}57x + 3{,}27)x - 2{,}28)x$
$+ 1{,}8\big)x - 2{,}3$.
Für unser Zahlenbeispiel mit $x = 2{,}53$ ist beim SR 1 die Tastenfolge

$\boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{X\to M}\ \boxed{\times}$
$\boxed{4}\ \boxed{,}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$
$\boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{7}$
$\boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}$
$\boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}$
$\boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{8}$
$\boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{MR}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

zu betätigen.
Wir beobachten im Anzeigefenster

2.53	35.245213
4.57	2.53
11.5621	89.170389
3.27	1.8
14.8321	90.970389
2.53	2.53
37.525213	230.15508
2.28	227.85508

und finden wieder $p = 227{,}855\,08$. Bei diesem Rechenablauf sind aber nur vier Multiplikationen und vier Additionen notwendig. Hat das Polynom die allgemeine Form
$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$
mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, so kann es in der Form
$p(x) = \big(\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3\big)\ldots$
$+ a_{n-1})x + a_n$
geschrieben werden. Rechnet man ohne Schulrechner, so ist es günstig, sich die Zwischenergebnisse in folgendem Schema zu notieren:



Dabei ist $b_0 = a_0$ und $b_j = b_{j-1}\bar{x} + a_j$ für $j = 1, \ldots, n$.
Offenbar gilt $p(\bar{x}) = b_n$. Dieses Schema wird *Horner-Schema* genannt. (William George Horner, 1768 bis 1837; das Schema soll aber schon Euler bekannt gewesen sein.)
Für das Polynom
$q(x) = b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ ist
$q(x) \cdot (x - \bar{x})$
$= (b_0x^{n-1} + \ldots + b_{n-1})(x - \bar{x})$
$= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x - b_0\bar{x}x^{n-1}$
$- \ldots - b_{n-2}\bar{x}x - b_{n-1}\bar{x}$
$= b_0x^n + (b_1 - b_0\bar{x})x^{n-1} + \ldots$
$+ (b_{n-1} - b_{n-2}\bar{x})x - b_{n-1}\bar{x}$
$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$
$- b_{n-1}\bar{x} - a_n$
$= p(x) - b_n = p(x) - p(\bar{x})$.
Mithin gilt
$p(x) = q(x) \cdot (x - \bar{x}) + p(\bar{x})$.
Mit dem Horner-Schema kann also das Abspalten eines Linearfaktors (hier: $(x - \bar{x})$) realisiert werden. Für Schüler höherer Klassen sei bemerkt, daß die Beziehung $p'(\bar{x}) = q(\bar{x})$ besteht. Somit können die Werte der Ableitungen eines Polynoms durch wiederholtes Anwenden des Horner-Schemas gewonnen werden. Man spricht dann vom *vollständigen Horner-Schema*. Für die Berechnung eines Polynomwertes geben wir einen prinzipiellen Ablaufplan an:
1. Notiere auf einem Blatt Papier den Hilfswert $i = 0$!
2. Eingabe der Zahl $\bar{x}$ in den SR 1;
3. Taste $\boxed{X\to M}$ betätigen;
4. Eingabe des Koeffizienten a_i in den SR 1;
5. Prüfe, ob $i = n$ ist! Wenn ja, lies $p(\bar{x})$ am SR 1 ab! Stop. Wenn nicht, addiere zu dem *alten* Wert i eine 1 und notiere diese Zahl anstelle von i $(i = i + 1)$!
6. Tasten $\boxed{\times}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{+}$ auf dem SR 1 betätigen!
7. Mache weiter bei 4!

Wir zählen die durchzuführenden Rechenoperationen für die Bestimmung des Funktionswertes eines Polynoms n-ten Grades nach dem Horner-Schema: Erforderlich sind n Multiplikationen und n Additionen. Daher ist dieser Rechenweg besonders für Polynome höheren Grades sehr effektiv.
Wir wollen jetzt Nullstellen von Polynomen bestimmen, d. h., wir suchen eine Zahl $\bar{x}$ (oder mehrere Zahlen), so daß $p(\bar{x}) = 0$ ist. Es werde vorausgesetzt, daß wir zwei Zahlen x_l und x_r mit
$x_l < x_r$ und $p(x_l) \cdot p(x_r) < 0$ kennen.
Das Polynom p habe also bei x_l und x_r Funktionswerte unterschiedlichen Vorzeichens. Man kann beweisen, daß es dann eine Zahl $\bar{x}$ zwischen x_l und x_r gibt, die eine Nullstelle des Polynoms p ist. Das wollen wir ausnutzen und durch fortlaufende Intervallhalbierung versuchen, eine Nullstelle in ein vorgegeben kleines Intervall *einzufangen*. (Manche nennen dieses Verfahren auch *Löwenfangmethode*!) Wir wollen folgendermaßen vorgehen:
1. Gegeben seien x_l und x_r mit
$x_l < x_r$ und $p(x_l) \cdot p(x_r) \leqq 0$.
2. Falls $p(x_l) = 0$ oder $p(x_r) = 0$ ist, haben wir eine Nullstelle und sind fertig.
3. Andernfalls bilde $x_m = \frac{1}{2}(x_l + x_r)$!

4. Sollte $p(x_m) = 0$ sein, stoppe, dann ist x_m eine Nullstelle! Wenn $p(x_l) \cdot p(x_m) < 0$ ist, setze $x_r = x_m$, im anderen Fall setze $x_l = x_m$!

5. Rechne mit den neuen Zahlen x_l und x_r bei 3. weiter!

Um nicht *ewig* rechnen zu müssen, sollte man noch testen, ob eine vorgegebene Genauigkeit bereits erreicht ist. Dazu kann man z. B. untersuchen, ob $x_r - x_l$ kleiner als die gewählte Genauigkeitsschranke ist.

Bei diesem Verfahren sind immer wieder die Werte des Polynoms an den Stellen x_l und x_r bzw. an den Stellen x_m zu berechnen. Das kann günstig mit dem SR 1 nach dem Horner-Schema geschehen. Als Beispiel betrachten wir das Polynom

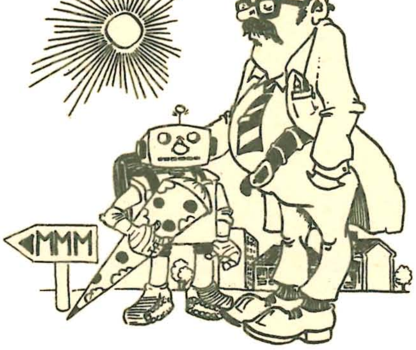
$p(x) = 3x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

Es ist leicht zu sehen,
daß $p(0) < 0$ und $p(1) > 0$ ist.
Wir finden

x_l	$p(x_l)$	x_r	$p(x_r)$
0	−1	1	1
0,5	−0,375	1	1
0,5	−0,375	0,75	0,078125
0,625	−0,18945	0,75	0,078125
0,6875	−0,068115	0,75	0,078125
0,6875	−0,068115	0,71875	0,0016174
0,703125	−0,034061	0,71875	0,0016174
0,7109375	−0,016429	0,71875	0,0016174
0,7184	−0,0074583	0,71875	0,0016174
0,7167969	−0,0029335	0,71875	0,0016174
0,71777	−0,0006694	0,71875	0,0016174
0,71777	−0,0006694	0,71826	0,00047318

0,718 ist der auf drei Stellen gerundete Wert der Nullstelle des Polynoms zwischen 0 und 1. Zeichnet die berechneten Näherungen in das Intervall [0, 1] ein, wählt dazu einen großen Maßstab! Ihr erkennt, daß sich die Punkte x_m nur langsam einer Nullstelle nähern. Es sind deshalb günstigere Verfahren ersonnen worden, bei denen der Rechenvorgang nicht so oft wiederholt werden muß.

W. Schmidt



„...und dann paß schön auf!"

Klappoth

HEXAHEX – ein geometrisches Puzzle

Wer von euch puzzelte nicht gern, denn erst die rechte Kombination von Farbe und Form, Geduld und Geschick, Teil und Ganzem führt zum Ziel.

Wie wär's, erfinden wir doch gemeinsam ein geometrisches Puzzle:

Zeichne einen Kreis und darin einen Durchmesser. Trage den Radius von den Endpunkten des Durchmessers auf dem Kreis ab. Ohne HEXerei sind die Eckpunkte eines Sechsecks entstanden, noch dazu eines regulären (regelmäßigen). Diese Konstruktionen haben sicher schon mesopotamische Mathematiker vor über dreieinhalbtausend Jahren gekannt, und sie leiteten daraus eine erste, große Näherung für $\pi = 3$ ab. Verschiedene Darstellungen, z. B. von Jagdwagen, zeigen Räder mit sechs Speichen.

Das Sechseck, das man griechisch HEXAgramm nennt, wollen wir nun in möglichst einfache Teile zerlegen. Dazu zeichnen wir diejenigen Diagonalen und Verbindungsstrecken der Seitenmitten, die parallel zu Sechseckseiten verlaufen. Die entstandenen 24 gleichseitigen Dreiecke wollen wir Elementardreiecke nennen und ihnen den Flächeninhalt 1 zuordnen. Entlang ihrer Seiten wird uns eine interessante Zerlegung einfallen. Wer Spaß an Zahlenspielereien hat, ahnt, was wir tun sollten:

Sechs HEXAHEX-Teile entstehen, darunter natürlich ein Sechseck – vom Flächeninhalt 6, zwei Trapeze mit den Flächeninhalten 5 und 3 und zwei Parallelogramme (4 und 2). Bleiben noch vier Flächeneinheiten übrig; ein Dreieck beschließt den Figurenreigen.

Assyrischer Herrscher auf der Löwenjagd (9. Jh. v. u. Z.)

Nun rasch ans Zerlegen! Zeichenkarton und ein Kreis mit $r = 6$ cm sind empfehlenswert. Aber erst überlegen, dann schneiden!

▲ 1 ▲ Legt diese Figuren nach (Bild 1 und 2)!

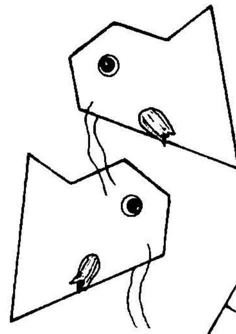


Bild 1 a

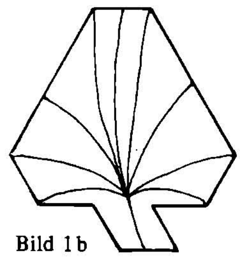


Bild 1 b

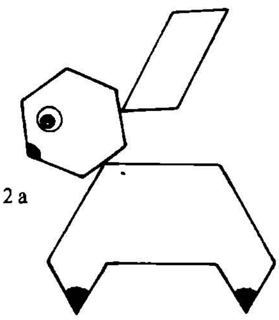


Bild 2 a

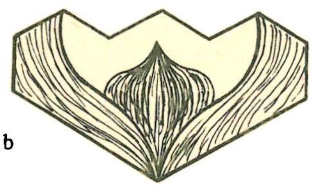


Bild 2 b

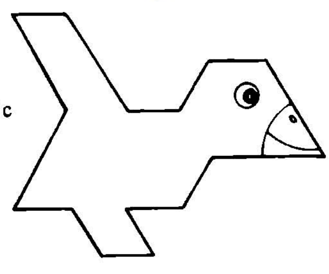


Bild 2 c

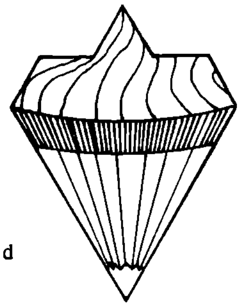


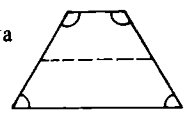
Bild 2 d

Wenn eure Puzzle-Leidenschaft etwas nachläßt und ihr euch anhand der lustigen Figuren mit allen Teilen vertraut gemacht habt, wollen wir ein ernsthaftes mathematisches Problem lösen. Wieviel und welche *konvexe Figuren* können mit unseren sechs Teilen gelegt werden?

Ein konvexes Vieleck hat nur Innenwinkel, die kleiner als 180° sind. Zur Verdeutlichung legen wir die beiden Trapeze aneinander.

Oben ist eine konvexe Figur entstanden, die untere ist nicht konvex, weil ein Innenwinkel größer als 180° ist.

Bild 3 a



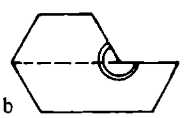


Bild 3 b

Findet ihr noch eine weitere, aus den beiden Trapezen bestehende, konvexe Figur? Doch zurück zu allen sechs Teilen. Sicher habt ihr schon festgestellt, daß unser Ausgangssechseck zu den konvexen Figuren gehört. Wie aber können wir *alle* finden? Selbst wenn uns nach Stunden emsiger Puzzelei gar keine Figuren mehr gelingen, müssen wir nicht jede mögliche gefunden haben.

Deshalb wollen wir einen systematischen Weg beschreiten, der einem Vorschlag chinesischer Mathematiker aus dem Jahr 1940 folgt. Betrachten wir dazu als erstes die Außenwinkel möglicher konvexer Figuren. Wegen der gleichseitigen Elementardreiecke können nur Innenwinkel von 60° und 120° auftreten. Die folgende Gleichung gibt uns direkt an, welche dieser Winkel in verschiedenen Vielecken vorkommen können. Dazu müssen wir nur wissen, daß die Winkelsumme in einem Dreieck 180°, in einem Viereck $2 \cdot 180°$, in einem Fünfeck $3 \cdot 180°$ und allgemein in einem n-Eck $(n-2) \cdot 180°$ beträgt, was wir uns mit Hilfe von Zerlegungen in Dreiecke klarmachen können.

Wenn a die Anzahl der 60°-Innenwinkel ist, dann ist $(n-a)$ die Anzahl der 120°-Innenwinkel.

$$a \cdot 60° + (n-a) \cdot 120°$$
$$= (n-2) \cdot 180° : 60°$$
$$a + 2(n-a) = 3(n-2)$$
$$6 = n + a.$$

Wie wir nun ablesen, kann die Eckenzahl n höchstens sechs sein ($a \geqq 0$). In diesem Fall ist $a = 0$ und die Sechsecke haben also sechs Innenwinkel von 120°. Analog schließen wir: Die Lösungsfünfecke haben vier, die Vierecke zwei und die Dreiecke keine Innenwinkel von 120°.

Wenn wir uns solche Figuren aufzeichnen, fällt vielleicht auf: Jede läßt sich in ein Parallelogramm mit zwei 60°- und zwei 120°-Innenwinkeln so einbeschreiben, daß mindestens zwei ihrer Seiten auf Parallelogrammseiten liegen.

Zwei Beispiele dafür:

Bild 4 a

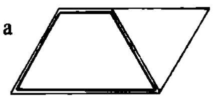
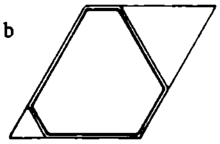


Bild 4 b



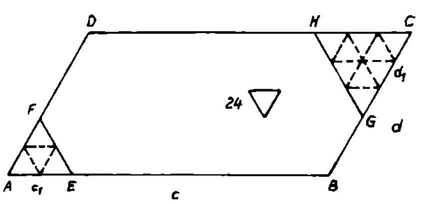
Für den Flächeninhalt dieser Parallelogramme $ABCD$, die wir uns wiederum aus Elementardreiecken vom Flächeninhalt 1 zusammengesetzt denken können, gilt

$$A = 2 \cdot c \cdot d,$$

wobei c und d die Anzahl der Dreiecke auf $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ ist. Diese Fläche setzt sich zusammen aus der untersuchten Figur (Flächeninhalt $A_F = 24$) und höchstens zwei gleichseitigen Dreiecken AEF und CHG:

$$a = A_F + A_{AEF} + A_{CHG}$$
$$2 \cdot c \cdot d = 24 + c_1^2 + d_1^2.$$

Bild 5



Dabei gelten die Ungleichungen $c \leqq c$, $c_1 \leqq d$, $d_1 \leqq c$ und $d_1 \leqq d$. Außerdem wollen wir noch o.B.d.A. $c \leqq d$ sowie $c_1 \leqq d_1$ setzen und beachten, daß c und d größer gleich zwei sein müssen, da sonst z.B. das dreieckige Teil nicht passen würde (*). Nun können wir die *Diophantische Gleichung* mit Nebenbedingungen systematisch lösen:

d	c	c_1	d_1	
2	6	0	0	(1)
2	7	2	0	(2)
2	8	2	2	(3)
3	4	0	0	(4)
3	7	3	3	(5)
4	4	2	2	(6)
4	5	4	0	(7)
4	7	4	4	(8)
5	5	5	1	(9)
6	8	6	6	(10)
7	7	7	5	(11)
12	13	12	12	(12)

Die Bilder 6a und 6b veranschaulichen zwei der errechneten Lösungen.

Beim Kontrollieren der rechnerischen Lösungen müssen wir leider feststellen, daß einige auf dieselben Figuren führen. (Das zu verhindern hätte die Zahl unserer Bedingungen weiter erhöht.) So ist das bei (9) entstehende Trapez kongruent zu demjenigen bei (7). Die rechnerische Lösung (12) widerspricht der Bedingung (*).

Bild 6 a

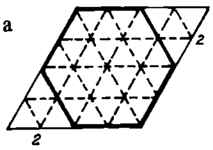
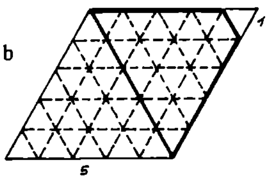


Bild 6 b



▲2▲ Prüfe, ob jede der fünf unterschiedlichen Figuren (1/3/10), (4/5/8), (2/11), (7/9) und (6) mit unseren HEXAHEX-Teilen gelegt werden kann! (Beachte, daß die rechnerische Lösung nur eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für eine Puzzle-Lösung ist, denn wir haben in die Rechnung die Form der Einzelteile nicht einbezogen!)

Sind alle fünf Figuren ausgelegt, ist unsere eingangs gestellte Aufgabe *vollständig* gelöst. Wir könnten beweisen, daß die *Diophantische Gleichung* keine weiteren Lösungen besitzt. Also gibt es auch keine weiteren konvexen HEXAHEX-Vielecke.

▲3▲ Carsten hat das sechseckige Teil verloren. Welche konvexen Figuren kann er mit dem Rest legen?

▲4▲ Welches Teil muß fortgelassen werden, um ein (konvexes) Fünfeck zu ermöglichen?

▲5▲ Ebenso kann man ein Teil gewissermaßen verdoppeln. Auf diese Weise entstehen Loch-Hexas. Puzzle symmetrische, konvexe Figuren, die ein Loch in Form des sechseckigen oder dreieckigen Teils haben!

▲6▲ Bilde weitere lustige Figuren aus allen sechs Teilen und schicke sie an die *alpha*!

Ch. Werge

Eine harte Nuß

Welchen Bedingungen müssen drei Zahlen x, y und z genügen, damit sich folgende Summe bilden läßt:

$$x^2 + y^2 = z^3\,?$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Im Mönchguter Heimatmuseum entdeckt

Wer in seinem Urlaub auf die Insel Rügen fährt, wird vielleicht auch das *Mönchguter Heimatmuseum* in Göhren besuchen. Man kann dort sehr Interessantes über das Leben der Bewohner der Halbinsel Mönchgut erfahren. Mit Exponaten und Texttafeln wird der Besucher aber auch darauf hingewiesen, daß sich zwei Mathematiker bei der Erforschung, Vermessung und kartografischen Darstellung der Insel Rügen und der kleineren Nachbarinseln (Hiddensee, Vilm) sehr verdient gemacht haben: *E. Lubinus* (1565 bis 1621) und *F. v. Hagenow* (1797 bis 1865). Beide Wissenschaftler sind heute kaum noch bekannt. Die erwähnten Landkarten, die sie durch Anwendung mathematischer Methoden schufen, sind jedoch wertvolle Zeitdokumente, aus denen die Geographen ablesen können, wie sich die Gestalt der Inseln Rügen und Hiddensee in einem längeren Zeitabschnitt verändert hat.

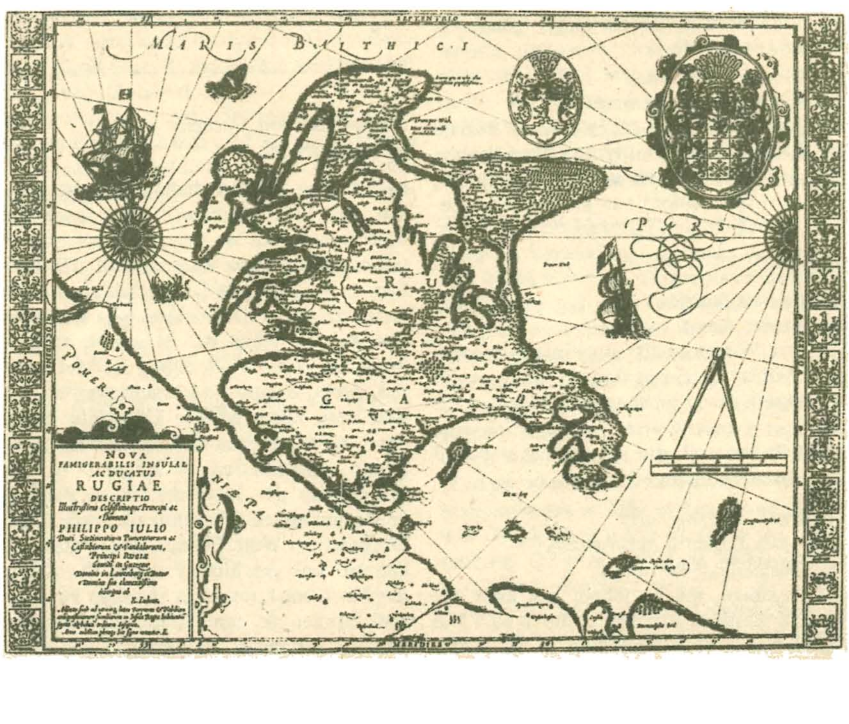
Aus dem Leben der beiden Mathematiker gibt es einiges zu berichten, was uns heute ungewöhnlich erscheint:

Eilhardus Lubinus (in deutscher Form: *Eiland Lubin*) wurde am 24. 3. 1565 in Westerstade (Oldenburg) geboren. Er studierte von 1588 bis 1594 an sieben Universitäten, nämlich in Leipzig, Köln, Helmstedt, Straßburg, Jena, Marburg und Rostock. 1595 wurde *Lubinus* Professor für Dichtkunst in Rostock! Im Jahre 1605 erhielt er in Rostock die Professur für Theologie und Mathematik, gleichzeitig wurde er zum Consistorialassessor ernannt. Zu seiner Zeit rühmt man ihn als *einen Gelehrten, Dichter und ausgezeichneten Mathematiker, der Disputen sehr zugetan, in der Forschung streng, im freien Vortrag sicher und beim Beurteilen scharf war, der unerschrocken für die Wahrheit eintrat.* Er starb am 2. 6. 1621 in Rostock. In der Sammlung historischer Karten, die 1981 von der *Ernst-Moritz-Arndt*-Universität Greifswald herausgegeben wurden, sind drei Karten von *E. Lubinus* enthalten (siehe Bild).

Friedrich von Hagenow lebte ca. 200 Jahre später: er wurde am 19. 1. 1797 in Langenfelde bei Loitz geboren. Bereits 1809 bis 1812 lernte er angewandte Mathematik und Technologie in Greifswald. Danach arbeitete er auf dem Justizamt Dargun, war er Freiwilliger bei den Gardeschützen und wirkte er auf einem Pachtgut auf der Insel Rügen. 1823 kehrte er nach Loitz zurück. *F. v. Hagenow* beschäftigte sich mit Altertumskunde und konstruierte Maschinen und Instrumente für die Universität Greifswald. In dieser Zeit fertigte er nach trigonometrischen Vermessungen Spezialkarten von Rügen und Vorpommern an.

1830 promovierte v. Hagenow und siedelte nach Greifswald über, wo er die erste Kreideschlemmfabrik Deutschlands eröffnete. An der Landwirtschaftlichen Akademie in Eldena, eine der Universität Greifswald angegliederte, aber relativ selbständige Einrichtung, hielt *F. v. Hagenow* als Dozent von 1835 bis 1838 Vorlesungen zur angewandten Mathematik. Nachdem er seine Fabrik verkauft hatte, beschäftigte er sich als nicht unvermögender Privatgelehrter vorwiegend mit Geologie und Paläontologie. Er war auch literarisch tätig. Erwähnenswert ist sein Briefwechsel mit *A. v. Humboldt.*

Uta und Werner Schmidt



quaestio mathematica historica

Vor 270 Jahren: Das erste Mathematiklexikon in deutscher Sprache

Im Jahre 1716 wurde in Leipzig das erste *Mathematiklexikon in deutscher Sprache* gedruckt. Der Verfasser war *Christian Wolff*, Mathematikprofessor in Halle und führender Gelehrter der Aufklärungsbewegung des 18. Jahrhunderts. Über seine Absicht beim Abfassen des Wörterbuches sagt er selbst im Vorwort:

... Ich habe bey mir von Jugend auf eine unersättliche Begierde die Wahrheit gewiß zu erkennen und anderen zu dienen gefunden ... Dabei erwachte bey mir die Liebe zur Mathematick und sonderlich eine Lust zur Algebra, um zu sehen, was doch die Ursache sey, warum man in der Mathematick so große Gewißheit habe und nach was vor Regeln man daselbst denke, wenn man verborgene Wahrheiten zum Vorschein bringen will; damit ich mich desto sicherer bemühen möchte auch außerhalb der Mathematick dergleichen Gewißheit zu suchen ... So bin ich empfindlich genug überführet worden, daß es ohne die Mathematick in unserem Verstande nicht recht helle werden könne ... Da man von mir begehret, daß ich ein mathematisches Lexicon verfertigen möchte, so habe ich mich dieser verdrießlichen Arbeit, als die mehr Mühe als Verstand erfordert, nicht entziehen wollen, weil ich verspüret, es könne auch dadurch ein vielleicht nicht geringes zur Aufnahme der Mathematick beygetragen werden ...

Halle, dem 1. Maij 1716

Das Unternehmen konnte nur gelingen, weil das Lexikon in deutscher Sprache abgefaßt war. Der Erfolg stellte sich dann auch ein, denn in schneller Folge kamen weitere Auflagen auf den Markt, wie bei allen Büchern von Christian Wolff, die er bis zu seiner Vertreibung aus Halle durch den Preußischen König 1723 geschrieben hat.

Das Titelblatt dieser *alpha* zeigt einen Kupferstich aus dem zweiten Teil des Mathematiklexikons aus dem Jahre 1742.

Mathematikfachlehrer *W. Träger*, Döbeln, stellte drei Bände des Lexikons zur Verfügung, herzlichen Dank dafür.

Aber gab es nun vorher keine mathematischen Wörterbücher?

Doch, es gab sie, aber nicht in deutsch. Die ersten sind schon über 300 Jahre alt. 1668 gab der italienische Mönch *Geronimo Vitale* ein solches in lateinisch in Paris heraus. Wenige Jahre später kam 1680 ein englisches Lexikon von *Joseph Moxon* auf den Markt mit einer 2. Auflage 1692. In Paris folgte dann 1690 ein französisches Lexikon von *Jaques Ozanam*, das schon ein Jahr später in Holland nachgedruckt wurde. Zehn Jahre nach dem Druck aus Leipzig gab es dann noch eine englische Ausgabe von *Edmund Stone*, Mitglied der *Royal Society* in London.

Um nun unseren Lesern einen Eindruck von Inhalt und Form der Leipziger Ausgabe mit insgesamt 1548 Seiten zu geben, haben wir zwei fundamentale mathematische Begriffe original herausgegriffen: Algebra und Arithmetica. Danach wollen wir sehen, was Christian Wolff unter einer Kubikzahl und unter Mathematik verstanden hat.

J. Buhrow/J. Lehmann

Mathematisches Lexicon

darinnen die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunstwörter erklärt und zur Historie der mathematischen Wissenschaften dienliche Nachrichten ertheilt, Auff Begehren heraus gegeben von Christian Wolffen, Leipzig 1716

Algebra,
Ist eine Wissenschafft die Auffgaben in der Mathematick durch Gleichungen aufzulösen. Unter den Alten hat *Diophantus* Exempel aus der Rechen-Kunst oder von Zahlen durch dieselbe gerechnet; aber keine Regeln dazu gesetzet; ...

Algebra numerosa, die gemeine oder alte Algebra, oder die Algebra in Zahlen,
Ist diejenige in welcher man mit Zahlen rechnet. Diese allein ist den Alten bekandt gewesen, daher man sie auch die alte nennet. Sie war Anfangs bloß eine Regel der Rechen-Kunst, als wie die Regel detri; ...

Algebra philosophica,
Wird von dem berühmten Robert Hooke genennet der Weg die in der Natur verborgene Wahrheiten zu entdecken; ...

Algebra Speciosa, die neuere Algebra,
Ist diejenige, in welcher man mit Buchstaben rechnet. Diese haben wir dem *Vieta* zu dancken: *Harriot* in Engelland und *Cartesius* in Frankreich haben sie in einen besseren Stand gebracht.

Arithmetica die Rechen-Kunst,
Ist die Wissenschaft der Zahlen. Es sind verschiedene Arten derselben, die wir nach einander vornehmen wollen.

Arithmetica binaria sive dyadica, di Rechnung mit Eines und Null
Ist eine Wissenschafft alle Zahlen mit 1 und 0 zu schreiben, und mit diesen beyden Ziffern zu rechnen. Der Herr von Leibniz hat sie zu dem Ende erdacht, damit man dadurch die Gesetze der progressionum desto leichter entdecken und Regeln sie zu nummerin finden kann; ...

Arithmetica calculatoria, die Rechnung auf den Linien,
Ist eine Kunst mit Rechen-Pfennigen zu rechnen. Dieselbe hat A. 1550. Adam Riese in seiner Rechnung nach der Länge auf den Linien und der Feder beschrieben ...

Arithmetica decimalis, die Decimal Rechnung,
Ist eine Art der Rechnung, in der man keine andere Brüche gebrauchet als zehenhundert-tausend-theilige und so weiter. *Johannes Regiomontanus* hat sie zuerst zur Ausrechnung der *Tabularum Sinuum* gebraucht ...

Arithmetica divinatoria, die Wahrsage-Rechen-Kunst,
Ist eine Kunst durch Rechnung verschiedenes zu errathen, als z. E. was einer vor eine Zahl im Sinne hat, wie viel er Geld im Beutel hat, und so weiter.

Arithmetica fluxionum,
Wird von den Engelländern die Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibniz genennet ...

Arithmetica infinitorum, die Rechnung des unendlichen,
Ist eine Kunst unendliche Reihen Brüche zu summiren oder auch ihre Verhältnisse gegen andere zu finden. Z. E. man findet, daß $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ und so weiter unendlich fort 1 sey ...

Arithmetica practica, die Rechen-Kunst,
Ist eine Wissenschafft aus einigen gegebenen Zahlen andere zu finden, von denen in Ansehung der gegebenen eine Eigenschafft bekannt gemacht wird, als wenn ich eine Zahl finden soll, die so groß ist wie 6, 3 und 10 zusammengenommen ...

Arithmetica Sexagenaria, oder auch Logistica Sexagenaria, die Sexagesimal-Rechnung,
Ist diejenige, welche lehret, wie man mit sechzigtheiligen Brüchen rechnen soll. Die Alten haben sich sonderlich in der Astronomie ihrer bedienet, und hat sie auch zur Zeit darinnen ihren Nutzen, ob wohl zu wünschen wäre, daß man die Decimal-Rechnung auch in der Astronomie und Chronologie einführete. ...

Arithmetica Speciosa sive literalis, die Buchstaben-Rechen-Kunst,
Ist diejenige, welche an statt der Ziffern sich der Buchstaben im rechnen bedienet. Diese hat Franciscus Vieta zuerst erfunden...

Arithmetica surdorum sive irrationalium, item in comensurabilium, die Irrational-Rechen-Kunst,
Ist diejenige, welche die Rechnung mit Irrational-Zahlen lehret. Ozanam hat dieselbe ausführlich abgehandelt: allein nach der alten Weise. Nachdem der Herr von Leibniz und der Herr Newton gewiesen, wie man die Irrational-Grössen als Rational-Grössen vorstellen kan: so kan man diese Rechen-Kunst über die massen erleichtern...

Arithmetica theoretica vel speculativa, die erwegende Rechen-Kunst oder Zahl-Wissenschafft,
Ist diejenige, welche die Eigenschafften der Zahlen betrachtet. Diese ist aus dem Buche der *Elementorum Euclides* und des *Boethii* Arithmetica zu holen. ...

Arithmetica tetractica, die Tetractische Rechnung,
Ist diejenige Rechen-Kunst, welche nur mit 1, 2, 3 und 0 rechnet. Man zehlet nemlich nur biß 4, als wie wir insgemein biß 10 zehlen. *Weigel*, vor dem Professor Mettheseos zu Jena hat sie erdacht und beschrieben.

Arithmologia,
Bedeutet so viel als Arithmetica.

Arithmeticum Complementum
Wird genennet die Zahl, welche man zu einem Logarithmus hinzu thun muß, damit 100 000 000 heraus kommet. Z. E. der Logarithmus von 26 ist 14 497 33, sein Complementum arithmeticum 8 58 502 67.

Mathematica seu Mathesis – die Mathematick

M. ist eine Wissenschaft alles auszumessen, was sich ausmessen läßt. Insgesamt beschreibet man sie per scientiam quantitatum, durch eine Wissenschaft der Größen. ... Da nun alle Dinge sich ausmessen lassen in allem demjenigen, was sie endliches an sich haben, das ist, was sie sind: so ist nichts in der Welt, dabey die Mathematick nicht könnte angebracht werden. Ja, weil man keine genaue Erkentniß haben kann, als wenn man die Eigenschaften der Dinge auszumessen vermögend ist. So bringet uns die Mathematick zu der vervollkommensten Erkentniß aller möglichen Dinge in der Welt. Da nun ferner diese Erkentniß uns geschickt machet, die Kräfte der Natur nach unserem Gefallen zu unserem Nutzen in dem Grade anzuwenden, den wir verlangen. So erlangen wir durch die Mathematick die Herrschaft über die Natur. ... Das Vornehmste, was man an ihr rühmen kann, ist dieses: sie zeiget uns nicht allein, wie weit man durch rechten Gebrauch der Vernunft kommen kann, sondern hilft uns auch, wenn man sie mit Ernst betreibet, zu rechtem Gebrauch derselben. Daher macht sie uns zum Nachdenken geschickt, im Fleiße unermüdet und flößet und unvermerkt die Liebe zu gründlicher Erkenntniß ein.

Unter dem Buchstaben C finden wir bei Wolff eine schöne Anregung für den Leser, indem er sich an zwei Beweisen zur Berechnung von Kubikzahlen versuchen kann. Im Text heißt es:

Cubus seu (oder) numerus cubicus, das ist eine Cubic-Zahl.

Es ist eine Cörper-Zahl, die drey gleiche Seiten hat, das ist, das Product aus der Quadratzahl in die Wurtzel. Wenn man z.E. 9 als Quadrat von 3 durch seine Wurtzel 3 multipliziert, so kommet die Cubic-Zahl 27 heraus. Die Benennung ist aus der Geometrie entnommen, weil man daselbst den Inhalt eines Cubi oder Würffels findet.

Aufgaben

Und nun zwei Aufgaben, zu denen der Leser *den Beweis finden* sollte:

▲1▲ Die Cubic-Zahlen werden in einer beständigen Ordnung durch die bloße Addition der ungeraden Zahlen gefunden, denn wenn man die erste ungerade Zahl 1 nimmet, so hat man die Cubic-Zahl 1. Addiert man die zwey folgenden ungeraden Zahlen 3 und 5, so hat man 8 die Cubic-Zahl von 2. Addiert man die drey folgenden ungeraden Zahlen 7, 9, 11, so bekommt man 27 die Cubic-Zahl von 3, und so fort.

▲2▲ Man kann aber, wenn die Quadratzahlen bereits vorhanden sind, noch bequemer dazu kommen (zu den Cubic-Zahlen), wenn man zu der nächst vorhergehenden Cubic-Zahl das Quadrat der dazugehörigen Wurtzel 3 mal, die nächst vorhergehende Wurtzel 2 mal und die gegenwärtige Wurtzel 1 mal addieret z.E. 99 856 ist die Quadratzahl und 31 554 496 die Cubic-Zahl von 316.

Addieret man:

$$\begin{array}{r} 31\,554\,496 \\ 299\,568 \\ 632 \\ 317 \\ \hline \end{array}$$

so ist 31 855 013 Cubic-Zahl von 317!

Das sollte der alpha-Leser beweisen.

Christopher Hansteen – Pionier der Erforschung des Erdmagnetismus

Die norwegische Post würdigte 1984 den 200. Geburtstag des heute außerhalb Norwegens kaum bekannten Physikers, Mathematikers und Astronomen *Christopher Hansteen* durch die Ausgabe der beiden abgebildeten Briefmarken. Hansteen wurde am 26. 9. 1784 in Christiania (Oslo) geboren. Er studierte in Kopenhagen und wurde dort ein Schüler von *Hans Christian Oerstedt* (1777 bis 1851), der 1820 die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes entdeckte und damit ein neues, sich bald stürmisch entwickelndes Gebiet von Physik und Technik begründete. Nach einigen Jahren als Lehrer an der *Gelehrten Schule zu Seeland* wurde Hansteen 1815 Professor für Astronomie und angewandte Mathematik und Direktor der Sternwarte in seiner Heimatstadt, wo er am 11. 4. 1873 starb.

In die Wissenschaftsgeschichte ist Hansteen eingegangen als Pionier der Erforschung des Erdmagnetismus, den er erstmals exakt als gerichtete Größe (Vektor) begriff und demzufolge an jedem Ort durch drei Meßgrößen *Deklination* (Neigung gegen die Nordrichtung), *Inklination* (Neigung gegen die Horizontale) und *Intensität* definierte, während die Seefahrt sich zuvor stets nur mit der Deklination (auch als Mißweisung des Kompaß bezeichnet) beschäftigt hatte. Diese Größen mit hoher Präzision zu messen, warf damals neue physikalisch-technische und auch mathematische Probleme auf. In diesem Zusammenhang trat Hansteen mit Gauß in Verbindung, der wohl hauptsächlich durch Hansteen zu seiner eigenen Beschäftigung mit dem Erdmagnetismus und den sich anschließenden theoretischen Untersuchungen über Vektorfelder inspiriert worden ist. In den Jahren 1828 bis 1830 unternahm Hansteen eine vom norwegischen Staat finanzierte Forschungsreise durch Sibirien, um den Erdmagnetismus rund um den Erdball zu messen. Seine *Reiseerinnerungen an Sibirien* kann man mit etwas Glück noch heute in deutscher Übersetzung (Leipzig 1865) in Bibliotheken aufstöbern. Begleitet wurde er auf dieser Reise von dem deutschen Gelehrten *Georg Adolph Erman* (1806 bis 1877), dem späteren Herausgeber der Zeitschrift *Archiv für wissenschaftliche Kunde von Rußland* (1841 bis 1856), das eine bedeutende Rolle für die Weiterführung der von Euler angebahnten deutsch-russischen wissenschaftlichen Kontakte gespielt hat. Hansteen, der in der Erkenntnis der Notwendigkeit friedlicher internationaler Zusammenarbeit weit fortgeschritten war, hat sich engagiert für die Vereinheitlichung der Maßeinheiten und die Standardisierung der Meßmethoden eingesetzt.

P. Schreiber

Kuriose Identitäten

Man überzeuge sich mit Hilfe des Schulrechners SR 1, ob folgende *kuriose* Identitäten richtig sind:

$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$;
$\sqrt{121} = 12 - 1$;
$\sqrt{6724} = 6 + 72 + 4$;
$\sqrt{144} = 14 - \sqrt{4}$;
$\sqrt{324} = (4+2)\cdot 3$;
$\sqrt{256} = 2\cdot 5 + 6$;
$\sqrt{4356} = 4\cdot 3\cdot 5 + 6$;
$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = -\sqrt{4} + 9$;
$\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9$;
$\sqrt{1936} = -1 + 9 + 36$;
$\sqrt{11881} = 118 - 8 - 1$.

Man überzeuge sich mit Hilfe des Schulrechners SR 1, daß
$\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2$ und
$\sqrt[3]{12167} = 12 + \sqrt{16} + 7$ ist!

Dr. W. Schmidt, Greifswald

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1987

Mathematik

Ma 5 ■ 2750 Von drei Männern mit den Familiennamen Siewert, Müller und Schmidt, die den Beruf eines Drehers, Arztes bzw. Bäckers ausüben und die in Suhl, Weimar bzw. Eberswalde wohnen, ist folgendes bekannt:
(1) Herr Siewert und der Arzt verbringen ihren Urlaub an der Ostsee.
(2) Der Bäcker, der Dreher und Herr Schmidt betreiben aktiven Sport.
(3) Der Dreher wohnt in Weimar.
(4) Herr Siewert ist mit dem Bäcker, der in Eberswalde wohnt, befreundet.
Ordne den Namen den jeweiligen Beruf und Wohnort zu!

Schüler Christian Korner, Berlin

Ma 5 ■ 2751 Der Kraftstoffvorrat einer Tankstelle reicht für 64 Tage, wenn täglich 2 400 Liter verkauft werden. Für wie viele Tage würde dieser Vorrat reichen, wenn täglich nur 1 600 Liter verkauft werden?

Schüler J. Galuba, Erfurt

Ma 5 ■ 2752 Barbara ist doppelt so alt wie ihre Schwester Ingrid. Barbaras Mutter ist dreimal so alt wie ihre Tochter. Barbaras Vater ist siebenmal so alt wie Ingrid. Die vier Familienmitglieder sind zusammen (in ganzen Zahlen) 96 Jahre alt. Ermittle das Lebensalter jedes dieser Familienmitglieder!

Schülerin Jana Markwardt, Weimar

Ma 5 ■ 2753 Aus einem 1,20 m langen Draht wurde ein Rechteck gebogen, dessen eine Seite doppelt so lang ist wie die andere.
a) Wie lang und breit ist dieses Rechteck?
b) In dieses Rechteck sollen rechteckige Plättchen nebeneinander gelegt werden, die 11 cm lang und 7 cm breit sind. Wie viele solcher Plättchen passen höchstens in dieses Rechteck hinein?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2754 Ein Schüler kauft für seine Wandergruppe Brötchen für 5 Pf und Hörnchen für 8 Pf je Stück, wofür er insgesamt 0,72 M bezahlen muß. Wie viele Schüler gehören zu dieser Wandergruppe, wenn jeder entweder genau ein Brötchen oder genau ein Hörnchen erhält?

Schülerin Nannett König, Klein Krams

Ma 5 ■ 2755 Ein Autobus befördert insgesamt 42 Personen. Es sind doppelt so viele Männer wie Frauen und doppelt so viele Frauen wie Kinder. Wie viele Männer, Frauen bzw. Kinder fahren mit diesem Bus?

Schüler Sebastian Brenn, Brotterode

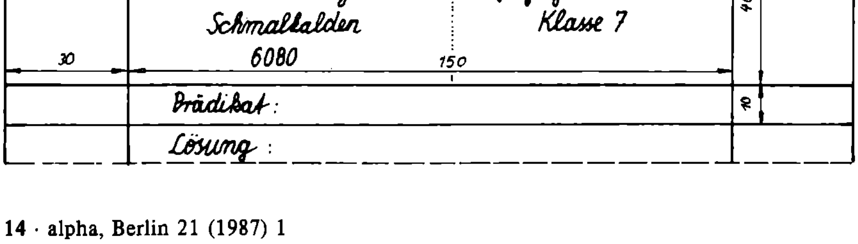
Ma 6 ■ 2756 Beim Kohlehandel wurden früher Briketts mit der Schaufel in Säcke gefüllt und abgewogen. Jeweils 3 Arbeiter schafften so in 8 Stunden 960 Säcke. Eine moderne Maschine füllt und wiegt jetzt in 2 Stunden die gleiche Anzahl Säcke. An der Maschine arbeiten 2 Arbeiter. Wieviel Arbeiter von damals werden jetzt durch einen Arbeiter ersetzt?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2757 Eine Hausgemeinschaft will eine rechteckige Sandkiste für die Kinder bauen. Als Umrandung sollen 84 würfelförmige Steine benutzt werden, die eine Kantenlänge von 20 cm haben. Wie breit wird die Sandfläche, wenn sie eine Länge von 5 m haben soll?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2758 Vier Schüler mit den Nachnamen Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben (in anderer Reihenfolge) die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef. Diese vier Schüler trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgendes ist bekannt:
(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann, als zweiten Christian und danach den Schüler Erdbach begrüßen. Bernd traf als Letzter ein.



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1986/87 läuft von Heft 5/1986 bis Heft 2/1987. Zwischen dem 1. und 10. September 1987 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/86 bis 2/87 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/87 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/1986 bis 2/87) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1986/87 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind ein Geschenk mit, und zwar Schüler Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Schüler Giebler ein Buch.
Welche vollständigen Namen haben diese vier Geburtstagsgäste?

Ma 6 ■ 2759. Auf einem Parkplatz waren doppelt so viele Pkw wie Motorräder mit Beiwagen und dreimal so viele Mopeds wie Pkw abgestellt. Diese Kraftfahrzeuge hatten zusammen 322 Räder. Wie viele Pkw, Motorräder mit Beiwagen bzw. Mopeds parkten dort?

Schülerin Heike Engel, Brotterode

Ma 6 ■ 2760 Ein Flugzeug, das mit konstanter Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2 100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt.
a) Wieviel Kilometer legt das Flugzeug in der Stunde zurück?
b) Um wieviel Uhr wird es in B landen?

Ma 7 ■ 2761 Auf welche Grundziffer endet die Zahl 12^{100}?

Schüler J. Galuba, Erfurt

Ma 7 ■ 2762 Drei Abraumbagger eines Braunkohlentagebaues bewegen zusammen täglich 36 000 m³ Abraum. Dabei schafft der zweite Bagger 1 000 m³ weniger als der dritte, der erste 3 000 m³ weniger als das Doppelte des zweiten Baggers. Welche Abraummenge wird täglich von jedem der drei Bagger bewegt?

Schüler J. Galuba, Erfurt

Ma 7 ■ 2763 Von einer Familie ist folgendes bekannt: Der Vater ist doppelt so alt wie seine Tochter Claudia. Der Sohn Klaus ist 31 Jahre jünger als seine Mutter. Claudia ist doppelt so alt wie ihr Bruder Klaus. Alle vier zusammen sind 127 Jahre alt. Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Schüler Sven Höhnemann, Bad Frankenhausen

Ma 7 ■ 2764 Multipliziert man eine zweistellige natürliche Zahl, deren Quersumme 9 beträgt, mit 2 und subtrahiert man von diesem Produkt 9, so erhält man als Ergebnis eine weitere zweistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 9, aber mit umgekehrter Ziffernfolge. Wie heißen diese beiden Zahlen?

Diplomlandwirt Hartmut Boettcher, Weimar

Ma 8 ■ 2765 Die folgende Behauptung ist zu beweisen: Man erhält das Quadrat einer um 0,5 vermehrten natürlichen Zahl, wenn man das Produkt aus der betreffenden natürlichen Zahl und deren Nachfolger bildet und 0,25 addiert.

Bernd Dethloff, Waren (Müritz)

Ma 8 ■ 2766 Mike, Thomas, Reiko und René haben auf dem Hof Fußball gespielt und eine Fensterscheibe eingeschlagen. Als der Vorfall untersucht wurde, machten die Jungen folgende Aussagen:
Mike: „Das Fenster hat Thomas oder Reiko eingeschlagen."
René: „Reiko hat es getan."
Thomas: „Ich habe das Fenster nicht eingeschlagen."
Reiko: „Ich auch nicht."
Ihr Lehrer, der die Jungen gut kannte, sagte: „Drei von ihnen sprechen immer die Wahrheit."
Wer hat das Fenster eingeschlagen?

Jan Unger, Grobitz

Ma 8 ■ 2767 Weise nach, daß für alle Primzahlen p der Wert des Terms $p^2 + 2$ genau einmal gleich einer Primzahl ist!

Sch.

Ma 8 ■ 2768 Es ist zu beweisen, daß in jedem gleichschenkligen Trapez die Differenz der Quadrate über der Diagonalen und über einer der nichtparallelen Seiten flächengleich dem Rechteck aus den beiden parallelen Seiten ist.

H.-D. Schwabe, Sondershausen

Ma 9 ■ 2769 Wie alt ist Herr Müller und wie alt ist seine Frau (Altersangabe in vollen Jahren), wenn Herr Müller doppelt so alt ist wie seine Frau war, als er so alt war, wie seine Frau heute ist? Herr Müller wird mit seiner Frau zusammen 108 Jahre alt sein, wenn seine Frau so alt sein wird, wie Herr Müller heute ist. *H. Laabs, Berlin*

Ma 9 ■ 2770 Zwei Primzahlen p und $p + 2$ nennt man Primzahlzwillinge.
Beispiel: 11 und 13.
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn zwei Primzahlzwillinge $(p_1, p_1 + 2)$ und $p_2, p_2 + 2)$ die gleichen Endziffern haben, so ist die Differenz $p_2 - p_1$ stets durch 30 teilbar.
Beispiel: (29; 31) und (2999; 3001).

J. Suck, Essen, BRD

Ma 9 ■ 2771 Für welche natürlichen Zahlen a, b, c gilt das folgende Gleichungssystem
(1) $a^3 + b^3 = c^3 + 1$
(2) $b^2 - a^2 = a + b$
(3) $2a^3 - 6a = c^3 - 4a^2$?

F. Pampel, Zeulenroda

Ma 9 ■ 2772 Es ist nachzuweisen, daß $4^7 > 5^6 > 6^5 > 7^4 > 8^3 > 9^2 > 10^1$ gilt.

Nach Quant, Moskau

Ma 10/12 ■ 2773 Es sind alle geordneten Paare höchstens zweistelliger natürlicher Zahlen $(a; b)$ zu ermitteln, für die gilt $b : a = \overline{a,b}$ (a Komma b ist als Dezimalzahl aufzufassen)!

Dr. H. Englisch, Karl-Marx-Univ. Leipzig

Ma 10/12 ■ 2774 Wie groß ist $\cot 3x$, wenn $-\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$?
Es sei $x \in P$ und $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ch. Bittner, Mühlhausen

Ma 10/12 ■ 2775 Welche reellen Zahlen erfüllen die Gleichung
$$\sqrt{2 - x} + \sqrt{x - 3} = 1\,?$$

B. Dethloff, Waren (Müritz)

Ma 10/12 ■ 2776 Es seien h_a, h_b, h_c die Längen der Höhen eines Dreiecks und ϱ die Länge des Radius des Inkreises dieses Dreiecks; dann gilt
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho}.$$
Diese Aussage ist zu beweisen! *Sch.*

Naturwissenschaft und Technik

Na/Te 6 ■ 380 Fritz und Werner, die in zwei Orten wohnen, die 42 km voneinander entfernt liegen, fahren einander mit dem Fahrrad entgegen. Sie verließen ihre Heimatorte zur gleichen Zeit und treffen sich nach 2 h.
Welche Geschwindigkeit hatte jeder, wenn Fritz mit seinem Rennrad in einer Stunde 3 km mehr zurücklegte als Werner mit seinem Tourenrad? (Die Bewegung sei stets gleichförmig.)

Na/Te 6 ■ 381 In einem Meßgerätewerk konnte durch technische Verbesserungen die Produktion von täglich 40 Geräten auf täglich 60 Geräte erhöht werden. Auf wieviel Prozent stieg die Produktion?

Na/Te 7 ■ 382 Welche Terme kann man jeweils mit folgendem Rechenablaufplan ermitteln?

a) $7 \boxed{-} 3 \boxed{\times} 5 \boxed{=}$
b) $3 \boxed{+} 4 = \boxed{\times} 6 \boxed{=}$
c) $6 \boxed{-} 3 \boxed{=} \boxed{\div} 4 \boxed{=}$

Na/Te 8 ■ 383 Peter schätzt die Länge einer Strecke auf 60 cm.
Die Messung ergibt einen Wert von 57 mm. Berechne den absoluten, relativen und prozentualen Fehler!

Na/Te 8 ■ 384 Es soll der Wandquerschnitt (A_R) eines Gasrohres mit dem Taschenrechner berechnet werden, dessen Außendurchmesser (d_a) und Innendurchmesser (d_i) jeweils durch Messung ermittelt wurden.
$d_a = 13{,}1$; $d_i = 11{,}2$ (Angaben in mm)

Na/Te 9 ■ 385 Ein Flugzeug benötigt für eine 50 km lange Prüfstrecke mit Wind und gegen Wind zusammen eine Flugzeit von 9,5 min. Die Windgeschwindigkeit betrage $8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs!

Na/Te 9 ■ 386 Wasser wurde gleichmäßig erhitzt. Es ergaben sich folgende Meßwerte:

Zeit t in min	0	2	3	6	8
Temperatur ϑ in °C	20	35	42,5	65	80

Für die Zahlenwerte x der Zeit t und die Zahlenwerte y der Temperatur ϑ besteht eine Funktion $y = f(x)$.

a) Entscheiden Sie mit der graphischen Darstellung, ob die Funktion linear ist!

b) Geben Sie eine Gleichung für die Funktion an!

c) Welche Temperatur hat das Wasser nach 16 min?

Na/Te 10/12 ■ 387 Stimmgabeln führen harmonische Schwingungen aus. Diese Eigenschaft wird experimentell genutzt, um sehr kurze Zeiten zu messen. Dazu werden die Schwingungen einer Stimmgabel z. B. auf einer berußten Glasplatte aufgezeichnet und die Anzahl der Schwingungen gezählt. In welcher Zeit führt eine Stimmgabel mit der Frequenz $f = 440$ Hz 25 Schwingungen aus?

Na/Te 10/12 ■ 388 Ein Schüler schleudert einen Pendelkörper ($m = 100$ g), der an einem Faden von 1 m Länge befestigt ist, mit der Hand schnell im Kreis herum. Er sieht zunächst nicht ein, warum ihn der Lehrer scharf zurechtweist und ihn leichtsinnig nennt.

a) Berechnen Sie die Kraft, mit der der Pendelfaden gestrafft wird, wenn das Herausschleudern 2mal je Sekunde in horizontaler Ebene geschieht!

b) Mit welcher Kraft wird der Faden bei der Bewegung in einer vertikalen Ebene gespannt?

alpha-Wettbewerb 1985/86

Preisträger

Matthias List, Hans-Joachim Rudolph, beide Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Evelyn Peter, Bad Liebenstein; Michael Henning, Jan Schwate, Marcus Markardt, Ute Partsch, alle Bad Salzungen; Dörte Malzahn, Thomas Nitsche, Frank Wagner, Oliver Maspfuhl, Katja Geißler, alle Berlin; Stephan Schrameier, Blankenfelde; Ingrid und Ulrich Voigt, Böhlen; Heike Engel, Torsten Peter, beide Brotterode; Thomas Reißner, Silvio Löffler, beide Cottbus; Simone Eyning, Dingsleben; Matthias Overmann, Ulf Simon, Leonhard Karsch, alle Dresden; André Kratzert, Dürröhrsdorf; Thomas Gerlach, Erfurt; Katharina Hildebrandt, Jana Reinhardt, beide Fambach; Rüdiger Belch, Freiberg; Nadine Koch, Gehofen; Janett Weise, Gräfenhainichen; Thilo Kuessner, Greifswald; Frank Schneegaß, Großbodungen; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Stefan Schimmer, Kathrin Wiedow, Jörn Pamperin, Alois Belter, alle Hagenow; Thomas Schimank, Halle; Antje Stehfest, Havelberg; Mathias Hascher, Heinrichsort; Tom Werner, Falko Bilz, alle Hennigsdorf; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Jan Krüger, Hohendodeleben; Henry Wiesjahn, Holzendorf; Bert Frenzel, Horka; Steffen Kowalick, Hoyerswerda; Dirk Hübel, Ilmenau; Michael Oehme, Jena; Markus Glück, Jößnitz; Nico Schmidt, Jüdenberg; Astrid Mirle, Kleindehsa; Sebastian Langer, Klietz; Elke Finck, Königswalde; Reinhard Priber, Karl-Marx-Stadt; Horst Huber, Krems (Österreich); Marco Rogozia, Ladeburg; Patrick Fladerer, Martin Schreiter, beide Leinefelde; Torsten Schreiber, Andre Gärtner, beide Leipzig; Tino Holzmüller, Cornelia Seidel, beide Lössau, Daniel Wetstein, Stat. Jg. Naturf. u. Techn., beide Lübz; Anke Harnisch, Lützen; Antje Richter, Lubmin; Karen Gustavs, Neuruppin; Ronny Berger, Christian Zschalig, beide Oberhermsdorf; Christian Haller, Mario Müller, beide Oelsnitz; Jana Wetzel, Oranienburg; Carola Sachs, Dörte Schappler, beide Parchim; Felix Kraenz, Picher; Sebastian Clauß, Possendorf; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Remo Brandt, Rostock; Elke Jacobs, Saurasen; Matthias Kittner, Schmalkalden; Reiner Möwald, Sömmerda; Axel Bichler, Sondershausen; Sina Wilhelm, Steinbach-Hallenberg; Thomas Lotze, Suhl; Anja Tippe, Teterow; Silvano Storch, Jörg Steinbach, beide Trusetal; Una Brock, Stralsund; Martin Heise, Velten; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Jan Bergmann, Unterbreizbach; Mario Pofahl, Ueckermünde; Claudia Nehring, Weimar; Sven Langer, Weißwasser; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; Karin Kurtz, Wittenburg; Ronald Peters, Wismar; Konstanze Reimann, Ute Pfitzenreuter, beide Worbis; Mathias Goltzsche, Zschopau; Diana Michler, Zschortau; Thomas Wimmer, Zwickau

Vorbildliche Leistung

Beatrice List, Altenburg; Silvia Freitag, Bad Liebenstein; Andreas Henning, Bad Salzungen; Marion Döring, Bernburg; Olaf Neumann, Cornelia Hauke, Sandra Neumann, Claudia Schmäu, Jana Schüßler, Christian Frauendorf, Christiane Tänzer, Olaf Leubner, alle Berlin; Verena Konow, Boizenburg; Heidi Pfannstiel, Roberto Rohmeiß, beide Breitungen; Christina Ruhl, Susann Dreyer, Cottbus; Simone Knaak, Dietlas; Hans Wirth, Dresden; Birgit Klappach, Ebersdorf; Steffen Siebert, Eberswalde; Stefan Seifert, Dresden; Jens Tschammer, Friedrichsthal; Roland Popp, Gotha; Stefan Heiber, Heyda; Olaf Schmidt, Hohenebra; Petra Seifert, Silke Pietsch, beide Horka; Berit Stein, Jena; Claudia Vörkel, Hohenlubast; Christian Dorschner, Katja Wurziger, beide Karl-Marx-Stadt; Manuela Winkler, Hoyerswerda; Marcus Waclawczyk, Kichheilingen; Carsten Blech, Klein-Rodensleben; Tonja Schmidt, Königsee; Johannes Nendwich, Krems (Österreich); Sandra Köchel, Lössau; Torsten Westphal, Neuruppin; Mario Martens, Oelsnitz; Olaf Hintze, Oranienbaum; Jürgen Nicolai, Ortrand; Jan Fricke, Pasewalk; Christin Schütze, Radis; Ralph Schlosser, Roßdorf; Andreas Burchert, Rostock; Ralf Fröhlich, Rudolstadt; Björn Ansorge, Saßnitz; Rebekka Kirchner, Enrico Rommel, beide Schwallungen; Werner Burghardt, Silkerode; Maik Freitag, Verchen; Jörn Weichert, Waltersdorf; Christine Storandt, Wernshausen; Birgit Schneeberger, Anja Hebestreit, Christiane Lehmert, alle Worbis; Marco Treichel, Unterbreizbach; Eva Starke, Zwinige

Abzeichen in Gold

Für neunzehnjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für achtzehnjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle

Für siebzehnjährige Teilnahme
Ullrich Riedel, Flöha

Für sechzehnjährige Teilnahme
Rainer Seifert, Dessau; Ursula Märker, Greifswald; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Aßmus, Oranienburg

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Andreas Fittke, Berlin; Kurt Oertel, Gräfenhainichen; Bengt Nölting, Greifswald; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Lothar Gruber, Wien (Österreich); Katrin Richter, Wittenberg-P.

Für vierzehnjährige Teilnahme
Andreas Gude, Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolfhart Umlauft, Freital; Andrea Fiehring, Jena; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhnert, Radebeul; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Ralf Becker, Wolmirstedt; Torsten Löwe, Schleiz

Für dreizehnjährige Teilnahme
Dieter Koch, Arnstadt; Annett Körner, Dresden; Bernd Dübe, Forst; Matthias Weser, Großenhain; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-N.; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Diana Semper, Leipzig; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Jörg Pöhland, Klingenthal; Jana Walter, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegried Kretschmann, Schlagsdorf; Bernd Hartwig, Thaldorf; Sylvia Glomb, Weißenfels

Für zwölfjährige Teilnahme
Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Karsten Schlutter, Babelsberg; Heike Lüpke, Berlin; Harry Höfer, Dorndorf; Carolin Engel, Ingolf Körner, Jörn Wittig, Karl-Heinz Jünger, alle Dresden; Thomas Mittelbach, Dirk-Thomas Orban, beide Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Angela Illing, Gersdorf; Michael Katzer, Greußen; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Marko Hanke, Thomas Mader, Jens Pönisch, Andreas Hengst, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Per Witte, Königs Wusterhausen; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Claudia Trochold, Reichenbach; Maike Weide, Steinigtwolmsdorf; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzburg, Thal; Gudrun Thäter, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Eva Maria Wabbel, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand

Für elfjährige Teilnahme
Frank Baumgart, Aschersleben; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Marc Schewe, Berlin; Werner König, Berlingerode; Tilman Völzke, Böhlen; Petra Sarodnick, Dallgow; Stefan Edelmann, Dresden; Reinhard Weißnicht, Eberswalde; Thomas Pigorsch, Eisleben; Volker Georgy, Erfurt; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-N.; Karsten Milek, Hohen-Neuendorf; Ralf Häntsch, Köthen; Jörg Drechsel, Leinefelde; Lutz Hübschmann, Lößnitz; Uwe Würker, Mülsen; Manfred Hille, Ina Köhler, beide Riesa; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Karl Oertel, Zeitz; Thorsten Eidner, Zeulenroda; Siegfried Obst, Eberswalde

Für zehnjährige Teilnahme
Jens Fache, Altenburg; Andreas Jock, Blankenfelde; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarodnick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kichner, Dermbach; Heiko Richter, Dietlas; Heike und Lutz Lauter, Titus Ziegler, Catherin Engel, alle Dresden; Siegfried Obst, Eberswalde; Britta und Achmed Schulz, Greifswald; Bettina Weser, Großenhain; Michael Schulze, Halberstadt; Dany Lindenberg, Frank Siebert, beide Halle; Claus Janke, Ilmenau; Heike

Schinke, Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Sabine Oestreich, Oschersleben; Frank Berndt, Radeburg; Jürgen Schmalisch, Reuden; Kurt Schulze, Schernberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Christina Fuhrmann, Zepernick; Frank Pampel, Zeulenroda

Für neunjährige Teilnahme
Eckhard Heinrich, Aschersleben; Steffen Hoffmann, Babelsberg; Heike Eckardt, Bad Liebenstein; Jan-Martin Hertzsch, Beelitz; Kerstin Kantiem, Andris Möller, Susanne Krüger, Thomas Böhme, alle Berlin; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Kerstin Urban, Pedro Thiele, Gerald Eichler, Ines Lauter, alle Dresden; Una Heinecke, Eisenberg; Lars Mönch, Erfurt; Jens Wackernagel, Falkenberg; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintsche, Gräfenhainichen; Birgit Seifert, Hagenow; Uwe Prochno, Halle; Thomas Weiß, Jena; Andreas Paukert, Karbow; Andreas Niepel, Ricarda Ramm, beide Karl-Marx-Stadt; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Andreas Helbig, Langenleuba-N.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Sabine Pohlmann, Uta Mersiowsky, beide Langewiesen; Andreas Eifler, Ralf Laue, Petra Polster, alle Leipzig; Jens Grundmann, Limbach-O.; Holger Schinke, Leuna; Anke Misch, Magdeburg; Norbert Fuchs, Meiningen; Sven Saar, Mühlhausen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Erhard Zilinske, Stralsund; Irene Michallik, Waren; Stefan Thätei, Margret Boettcher, beide Weimar; Agnes Jorzick, Wismar; Erika Schreiber, Zella-Mehlis; Mathias Goltzsche, Zschopau; Carmen Meikies, Schlagsdorf

Für achtjährige Teilnahme
Anka Sommer, Augsdorf; Steffen Padelt, Beate und Stefan Müller, Norbert Dorn, Jens Prochno, Reinhard Wegener, Bert Minske, alle Berlin; Christian Sitz, Calau; Ramona Blank, Clingen; Andreas Stenzel, Manfred Roßius, alle Cottbus; Uwe Martin, Crossen; Bert Kühne, Dahme; Stefan Mattausch, Michael Nitsche, Helmut und Carsten Schreiber, Rolf Dach, Jens Fuchs, alle Dresden; Barbara Tschada, Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Henry Mäder, Frohburg; Ingolf Thurm, Gößnitz; Karsten Sonnemann, Grabow; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Henning Salz, Halle; Uta und Jutta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Thomas Benusch, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilsenburg; Carla Umlauf, Andreas Israel, beide Karl-Marx-Stadt; Heiko Witte, Friedhelm Reichert, beide Königs Wusterhausen; Petra Gollewsky, Bernd Fucke, beide Leipzig; Michael Seidel, Leuna; Michael Simang, Mittelherwigsdorf; Anja Voß, Neustadt; Irma Goßmann, Oranienburg; Hellmut Schenk, Pirna; Katja Uhlemann, Prausitz; Ronald Kaiser, Schleid; Winfried Ullrich, Babette Müller, beide Schmalkalden; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Matthias Herrmann, Schwerin; Delia Wolfert, Söllichau; Mike Selig, Stauchitz; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Uta Michallik, Waren; Claudia Tiersch, Weimar; Horst Rißmann, Wesenberg; Ralph Bock, Wolfen; Sebastian Horbach, Karl-Marx-Stadt

Für siebenjährige Teilnahme
Ralf und Wolfgang Beukert, Beatrice List, alle Altenburg; Annegerte Schädlich, Auerbach; Matthias Röder, Yvonne Selke, Matthias Tittel, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-Jürgen Schwerin, Blumberg; Peter Sitz, Calau; Yvonne Sachse, Dresden; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Jörg Simon, Engelsdorf; Ulrich und Peter Wenschuh, Falkenstein; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Volker Pohlers, Greifswald; Karsten Seliger, Greiz; Maik Thiele, Kai Streubel, Ragna Siol, alle Grimma; Jörg Blaurock, Guben; Christina Schmerling, Antje Hüttig, beide Halle-N.; Fortsetzung siehe Heft 2/87

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mini-BASIC für alpha-Leser Teil 3

Es wird verzweigt

Mit dem Computer haben wir bis jetzt immer etwas ausgerechnet. Nun soll uns der Computer helfen, Zahlen auf Teilbarkeit zu untersuchen. Wir wollen mit seiner Hilfe feststellen, ob eine natürliche Zahl n (z.B. 357983) Vielfaches einer natürlichen Zahl t (z.B. 17) ist ($t \neq 0$) bzw. ob gilt: t/n.
Zunächst vereinfachen wir die Aufgabe, indem wir uns das Ziel stellen, ein BASIC-Programm zu schreiben, mit dem ein Computer von einer natürlichen Zahl a entscheiden kann, ob sie durch 7 teilbar ist oder nicht.
Ohne Computer könnte man wie folgt vorgehen: Man dividiert die Zahl a durch 7. Ist das Ergebnis eine natürliche Zahl, so gilt $7 \mid a$, ansonsten gilt $7 \nmid a$.
Bevor wir an das Programmieren gehen, wollen wir folgende Aufgabe lösen.

▲18▲ Vervollständige die Tabelle! (Der Quotient $a:7$ ist – falls er keine natürliche Zahl ist – auf Zehntel zu runden!)

a	$a:7$	$a:7$	$7/a$
9	1,2	1	Nein
14			
23			
21			
84			
95			

Für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl a durch 7 gilt: Wenn $[a:7] = a:7$, so $7/a$, sonst $7 \nmid a$.

Eine BASIC-nahe Formulierung wäre:
Wenn $\underbrace{[a:7]=a:7}_{\text{Bedingung}}$, so $\underbrace{\text{drucke } 7/a}_{\text{Anweisung 1}}$,
sonst $\underbrace{\text{drucke } 7\nmid a}_{\text{Anweisung 2}}$!

In BASIC kann man den Sachverhalt so notieren:
IF INT (A/7) = A/7 THEN PRINT „7/“; A:ELSE PRINT „7 KEIN TEILER VON“; A (if –, then (engl.) – wenn –, dann; else (engl.) – sonst) IF ... THEN ... ELSE ruft eine *Programmverzweigung* hervor.
Wenn die Bedingung nach dem IF erfüllt ist, so wird die Anweisung 1 ausgeführt und die Anweisung 2 übersprungen. Ist die Bedingung nach dem IF nicht erfüllt, so wird die Anweisung 1 übersprungen und die Anweisung 2 ausgeführt. In jedem Fall setzt der Computer die Arbeit mit der nächsten Programmzeile fort.
Allgemein hat in BASIC eine *Programmverzweigung* mit Hilfe von IF ... THEN ... ELSE folgenden Aufbau:

IF $\boxed{\text{Bedingung}}$ THEN $\boxed{\text{Anweisung 1}}$:
ELSE $\boxed{\text{Anweisung 2}}$

Bei den Bedingungen treten oft Vergleiche auf, wobei in BASIC z.T. andere Symbole Verwendung finden als üblich.

Übliche Darstellung	=	<	>	≦	≧	≠
BASIC-Darstellung	=	<	>	<=	>=	<>

Nach diesen langen Vorbetrachtungen wollen wir nun ein BASIC-Programm zur Untersuchung der Teilbarkeit einer natürlichen Zahl a durch 7 vorstellen.

Programm 4

```
10 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE ZAHL EIN!“; A
20 IF INT (A/7) = A/7 THEN PRINT „7/“; A:ELSE PRINT „7 KEIN TEILER VON“;A
30 END
```

▲19▲ Verändere Programm 4 so, daß man die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl a durch eine beliebig wählbare natürliche Zahl t ($t \neq 0$) feststellen kann.

Problem + Computer = Lösung?

Um dem Leser erste Vorstellungen von der Programmiersprache BASIC und dem Programmieren zu vermitteln, haben wir bisher recht überschaubare Beispiele gewählt. Dabei konnte man allerdings schon feststellen, daß der Computer *selbst* sehr wenig kann. Im wesentlichen kann er Zahlen addieren, multiplizieren, dividieren, subtrahieren und Zahlen vergleichen. Außerdem kann er die Werte einiger Funktionen selbst ermitteln.
(Auf die Möglichkeit, den Computer zur Lösung nichtnumerischer Probleme einzusetzen, wird hier nicht eingegangen.)
Wenn wir also einen Kleincomputer zum Lösen eines Problems nutzen wollen, so müssen wir zunächst einmal selbst einen Lösungsweg entwerfen. Haben wir einen Lösungsweg gefunden, muß man ihn – falls er überhaupt mit einem Kleincomputer realisierbar ist – computergerecht aufbereiten; d. h., er ist so weit in einzelne Schritte aufzugliedern, daß der Computer sie ausführen kann. Diese Schrittfolge ist nun noch in eine Programmiersprache zu übersetzen. Um das Vorgehen zu verdeutlichen, betrachten wir einige Beispiele.

Aufgabenbeispiel 1

Es sollen alle Teiler einer natürlichen Zahl n ($n > 1$) mit einem Kleincomputer ermittelt werden.

Lösungsetappen:

1. Feststellen der Eingabe- und Ausgabedaten

Eingabe: Natürliche Zahl n ($n > 1$)
Ausgabe: Alle Teiler von n

2. Problemanalyse

Eine natürliche Zahl t ist Teiler einer natürlichen Zahl n, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, so daß gilt: $t \cdot x = n$ bzw. $x = n : t \, (t \neq 0)$.
Als Teiler kommen dabei nur Zahlen von 1 bis n in Frage. Indem wir alle Quotienten $n : t$ bilden, können wir die Teiler von n finden. Wenn der Quotient $n : t$ eine natürliche Zahl ist, so ist t ein Teiler von n.
Für $n = 9$ könnte man sich folgende Tabelle anlegen, um alle Teiler von 9 zu ermitteln.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9 : t$	9	4,5	3	2,25	1,8	1,5	1,2...	1,25	1
$t/9$	Ja	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Ja

Für größere Zahlen n liefert dieses Vorgehen prinzipiell auch alle Teiler, kann aber sehr arbeitsaufwendig sein.

3. Lösungsplan

(1) Eingabe von n.
(2) 1 ist stets Teiler von n.
(3) Für alle natürlichen Zahlen t mit $2 \leqq t \leqq n$ ist zu untersuchen, ob der Quotient $n : t$ eine natürliche Zahl ist. (Das ist der Fall, wenn $[n : t] = n : t$.)
Ist $n : t$ eine natürliche Zahl, so ist t Teiler von n.
(Ausgabe von t!)

4. BASIC-Programm

Programm 5

```
10 CLS
20 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE
   ZAHL EIN!“; N
30 PRINT „TEILER SIND: 1“;[1])
40 FOR T = 2 TO N
50 IF INT (N/T) = N/T THEN PRINT
   T;[1])
60 NEXT T
70 END
```

Im Programm 5 wurde in Zeile 50 die Anweisung IF...THEN verwendet. Auch diese Anweisung ruft eine *Programmverzweigung* hervor. Wenn die Bedingung hinter IF erfüllt ist, so wird die Anweisung, die auf THEN folgt, ausgeführt.
Ist die Bedingung hinter IF nicht erfüllt, wird die Anweisung hinter THEN übersprungen. In jedem Fall setzt der Computer die Arbeit mit der folgenden Programmzeile fort.

▲20▲ Überlege, ob im Programm 5 die Variable T unbedingt alle Zahlen von 2 bis n durchlaufen muß, um alle Teiler von n zu ermitteln!

Aufgabenbeispiel 2

Ermittle alle Paare $[x; y]$ mit $x \in N$ und $y \in N$, die die Gleichung $2x + 3y = 57$ erfüllen!

Lösungsetappen

1. Feststellen der Eingabe- und Ausgabedaten

Eingabe: Natürliche Zahlen x; y
Ausgabe: Alle geordneten Paare $[x; y]$, die die Gleichung $2x + 3y = 57$ erfüllen.

2. Problemanalyse

Für x kommen nur natürliche Zahlen von 0 bis 28 und für y nur natürliche Zahlen von 0 bis 19 in Frage.
Das sind insgesamt 580 geordnete Paare $[x; y]$, von denen man entscheiden muß, ob sie die Gleichung $2x + 3y = 57$ erfüllen.

3. Lösungsplan

Für $x = 0$ bis $x = 28$ ist jeweils zu untersuchen, ob es ein y mit $y = 0$ bis 19 gibt, so daß $[x; y]$ die Gleichung $2x + 3y = 57$ erfüllt.
Ist das der Fall, so ist das Zahlenpaar $[x; y]$ eine Lösung der Gleichung.

4. BASIC-Programm

Programm 6

```
10 CLS
   20 FOR X = 0 TO 28
   30 FOR Y = 0 TO 19
   40 IF 2 * X + 3 * Y = 57 THEN
      PRINT“ („; X; „; „; Y; „)“
   50 NEXT Y
   60 NEXT X
70 END
```

Im Programm 6 wird die „Eingabe“ aller möglichen Zahlenpaare $[x; y]$ mit Laufanweisungen realisiert. Dazu müssen sogar zwei Schleifen ineinander geschachtelt werden. Die Schleife mit den X-Werten ist die äußere, die mit den Y-Werten die innere Programmschleife. Der Computer beginnt mit dem ersten X-Wert und arbeitet damit alle Y-Werte (innere Schleife) ab. Dann wird mit dem nächsten X-Wert die innere Schleife erneut durchlaufen usw.
Der KC 85/1 hat die 580 Fälle in wenigen Sekunden durchgerechnet.

Lösung: (0; 19), (3; 17), (6; 15), (9; 13), (12; 11), (15; 9), (18; 7), (21; 5), (24; 3), (27; 1)

▲21▲ a) Ermittle alle natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:
- n läßt bei der Division durch 3 den Rest 2.
- n^2 läßt bei der Division durch 11 den Rest 1.
- Es gilt $50 \leqq n \leqq 150$.

b) Entwickle zur Ermittlung dieser Zahlen ein BASIC-Programm!

▲22▲ Wieviel natürliche Zahlen von 1 bis 1986 sind durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar?
Erarbeite zur Lösung der Aufgabe ein BASIC-Programm!

▲23▲ Entwickle ein BASIC-Programm für ein Zahlenratespiel! Es soll eine natürliche Zahl erraten werden. Diese Zahl gibt ein Mitspieler dem Computer ein. Nach der Zahleneingabe ist der Bildschirm zu löschen. Ein anderer Spieler soll diese Zahl erraten. Auf den eingegebenen Tip soll der Computer eine der folgenden Informationen geben: Treffer; Tip war zu klein; Tip war zu groß. (Verbessere zusätzlich das Programm so, daß man nach einem Treffer erfährt, wieviel Tips nötig waren!)

[1]) Das Semikolon am Ende der Programmzeile ist nicht erforderlich; er gibt aber einen übersichtlicheren Ausdruck auf dem Bildschirm.

L. Flade/M. Pruzina

Drehsymmetrie

Eine Figur heißt drehsymmetrisch mit dem Winkel φ, wenn sie bei einer Drehung um φ in sich übergeht. Wie groß ist jeweils φ?

Bild 1

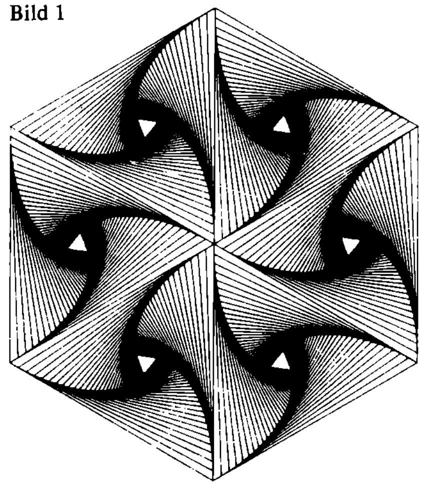
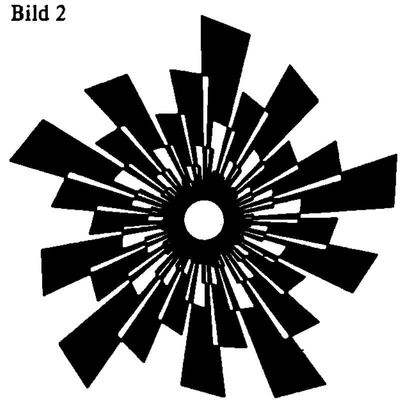


Bild 2



Komplexe Übungen

Preisausschreiben

Die neuen Lehrbücher für Mathematik ab Klassenstufe 5 enthalten nach größeren Stoffabschnitten sogenannte *Komplexe Übungen*. Sie orientieren auf eine systematische Entwicklung des Könnens der Schüler im Anwenden ihres mathematischen Wissens. Beim Lösen von Aufgaben komplexen Charakters muß der Schüler zunehmend selbständig entscheiden, welches von ihm erworbene Wissen und Können einzusetzen ist. Es geht also unter anderem um die Befähigung der Schüler zum inner- und außermathematischen Anwenden des erworbenen mathematischen *Instrumentariums* als das entscheidende Kriterium für den Lernerfolg.
Wie Schüler auf solche umfassenden Aufgabenstellungen vorbereitet werden können, sollen die nachfolgenden vier Beispiele für Aufgaben komplexen Charakters andeuten.
Die Redaktion der Schülerzeitschrift *alpha* ist an weiteren Aufgaben komplexen Charakters (in der anschließend angegebenen Form) sehr interessiert und fordert ihre Leser auf, eigene Aufgaben dieser Art einschließlich der Lösungen einzusenden. Für die besten Einsendungen sind Preise ausgeschrieben.

Aufgabe 1, Klassenstufe 5

In der Landwirtschaft werden oft pflanzliche Erzeugnisse auf sogenannte Getreideeinheiten (GE) umgerechnet; dann ist ihr Wert besser vergleichbar. Dem Getreide selbst wird also 1 GE zugrunde gelegt. 1 dt GE wird mit 40 M berechnet. Für Kartoffeln und für Zuckerrüben gelten jeweils 0,25 GE, für Zuckerrübenblatt gilt 0,10 GE, für Ölfrüchte 2 GE, für Feldfutter 0,12 GE. Durch umfassende Meliorationen (Bodenverbesserung durch vielfältige Maßnahmen) konnte im Kreis Röbel (Bezirk Neubrandenburg) die Marktproduktion um 17 dt GE je ha gesteigert werden.
a) Wieviel dt GE wurden im Kreis Röbel (landwirtschaftliche Nutzfläche 30 562 ha) mehr geerntet? Runde sinnvoll!
b) Wieviel Millionen Mark Nutzen hat dadurch jährlich die Volkswirtschaft? Runde sinnvoll!
c) Runde die landwirtschaftliche Nutzfläche auf km^2! Wie lang wäre dann eine Seite eines Rechtecks, dessen andere Seite 18 km lang wäre?
d) Gib für Zuckerrüben und Zuckerrübenblatt die GE in Form eines gemeinen Bruches an!
e) Wieviel dt Kartoffeln haben den gleichen Wert wie 2,5 dt Ölfrüchte?
f) 7,5 dt Getreide nehmen etwa einen Raum von 1 m^3 ein. Wieviel Kubikmeter Raum wird für 3 000 dt Getreide benötigt?
g) Wie hoch ist ein quaderförmiger Lagerraum dann gefüllt, wenn seine Grundseiten 20 m und 5 m lang sind?

Aufgabe 2, Klassenstufe 6

a) Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 12$ cm und $\overline{BC} = 10$ cm! Lege einen inneren Punkt E auf $\overline{AB}$ derart fest, daß er 8 cm von A entfernt ist und einen inneren Punkt F auf $\overline{CD}$, der von D 4 cm entfernt ist! Verbinde F mit A und E, E mit C!
b) Welchen Flächeninhalt besitzen die entstandenen Dreiecke AEF und EBC?
c) Zeige, daß die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{EC}$ gleichlang sind!
d) Zeige, daß die Winkel $\sphericalangle AFE$ und $\sphericalangle CEF$ gleichgroß sind!
e) Zeige, daß die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{EC}$ parallel zueinander verlaufen!
f) Weise nach, daß der Streckenzug $AFEC$ länger als 30 cm, aber kürzer als 42 cm ist!
g) Beweise, daß die Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle EAF$ und $\sphericalangle ECB$ genau 90° beträgt!

Aufgabe 3, Klassenstufe 7/8

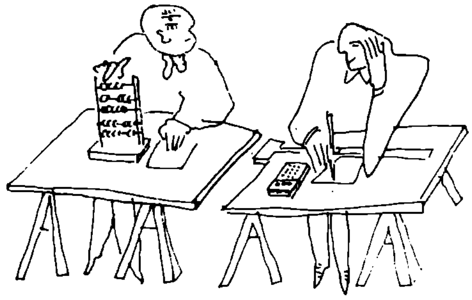
Eine LPG hat einen Weizenschlag von 68 ha. Die Ernte erfolgt durch Mähdrescher E 516. Der Kornbunker ist gegenüber den bisherigen Mähdreschern E 512 doppelt so groß und faßt mit 4,0 m^3 jetzt 31 dt Weizen.
a) Welche Fläche ist nach 1 250 m Fahrweg abgemäht bei einer Schnittbreite von 5,40 m? Der Kornbunker ist dann gefüllt.
b) Welcher Getreideertrag (in dt) wird vom gesamten Schlag geerntet?
c) Stelle eine Formel für den Gesamtertrag E (in t) auf! Es sei dabei A die Gesamtfläche (in ha), l die Länge des Fahrweges nach vollem Bunker (in m), F das Fassungsvermögen des Bunkers (in dt), b die wirksame Schnittbreite (in m).
d) Damit die Körnerverluste im Dreschwerk 1,5 % nicht überschreiten, darf der Durchlauf 5 kg je Sekunde nicht übersteigen. Welche Zeit benötigt dann ein Mähdrescher E 516 zur Füllung seines Kornbunkers?
e) Mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) darf dann der Mähdrescher höchstens fahren?
f) Wieviel dt Halmgetreide werden auf einem Hektar geschnitten, und wieviel t Stroh werden auf dem Schlag geerntet, wenn das Körner-Stroh-Verhältnis, also das Verhältnis von Korn zu Stroh, 1 : 0,75 beträgt?
g) In welcher Zeit ist der Schlag abgemäht, wenn 4 Mähdrescher E 516 zugleich arbeiten und das Umladen auf die Hänger jeweils 4 bis 5 min dauert? (Verwende 4,5 min!)
h) Der Gesamtertrag soll zunächst in einem Trockenraum mit einer rechteckigen Fläche von 16 m und 9 m Seitenlänge ausgebreitet werden. Welche Höhe hat das so gelagerte Korn?
i) Danach erfolgt die Lagerung in Silos, die die Form eines geraden Kreiszylinders haben (5,10 m lichter Durchmesser, 10 m Nutzhöhe). Sind zwei Silos dazu ausreichend?

Aufgabe 4, Klassenstufe 9/10

a) Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basis gleich 4 LE (Längeneinheiten, z. B. 4 cm). Die Länge seiner Schenkel sei mit x bezeichnet. Der Umfang y des gleichschenkligen Dreiecks soll als Funktion von x dargestellt werden: $y = f(x)$.
b) Geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an, wenn der Umfang des gleichschenkligen Dreiecks 30 LE nicht übersteigen soll!
c) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion im Definitionsbereich $-1 \leqq x \leqq +7$!
d) Eine Normalparabel sei in positiver Richtung um c auf der x-Achse verschoben. Wie lautet die Funktionsgleichung dieser Parabel, wenn sie mit der Funktion $y = f(x)$ aus Aufgabe a) einen gemeinsamen Punkt P_1 auf der y-Achse besitzt und welche Koordinaten hat ihr Scheitelpunkt P_0?
e) Welche Koordinaten hat ihr zweiter Schnittpunkt P_2 mit der Funktion $y = f(x)$?
f) Wie lauten m und n der linearen Funktion $y = g(x) = mx + n$, auf der die Punkte P_0 und P_2 liegen?
g) Durch P_2 sind die Parallelen zu den Koordinatenachsen zu zeichnen! Die Gerade $y = f(x)$ teilt das entstandene Rechteck in zwei Teilflächen. Zeigen Sie, daß sich deren Flächeninhalte wie 3 : 5 verhalten!
h) In jede der Teilflächen ist ein Quadrat so einzubeschreiben, daß ein Eckpunkt auf $f(x)$ und die anderen drei Eckpunkte auf den Rechteckseiten liegen. Berechnen Sie jeweils die Seitenlänge dieser beiden Quadrate!
i) Zeichnen Sie die Gerade, die durch P_1 und P_0 geht! Im Rechteck entsteht dadurch ein zweites Dreieck mit den Eckpunkten P_1, P_0, 0 (0 sei der Koordinatenursprung). Beweisen Sie, daß beide Dreiecke einander ähnlich sind!

Lösungen siehe Heft 2/87 *H.-J. Kerber*

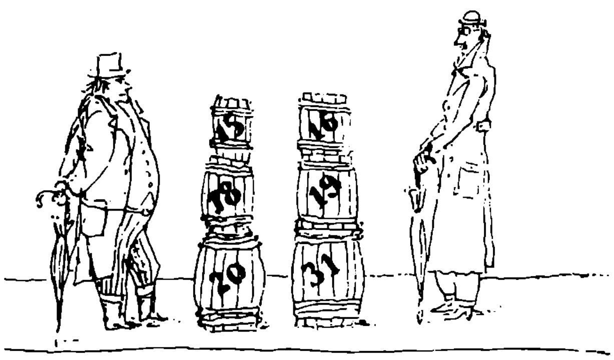
In freien Stunden · alpha heiter



Gerd Wessel

Kwaß – ein russisches Erfrischungsgetränk

Einem Laden wurden sechs Fässer Kwaß geliefert. Auf dem Bild ist gekennzeichnet, wieviel Liter in jedem Faß waren. Bereits am ersten Tag fanden sich zwei Käufer. Einer kaufte zwei Fässer, der andere drei, wobei der erste zweimal weniger Kwaß kaufte als der zweite. Es war nicht einmal nötig, die Fässer zu öffnen. Von den Fässern verblieb nur eins am Lager. Welches? *J. I. Perelman*



Gut kombinieren

In die leeren Felder sollt ihr die Zahlen von 1 bis 9 so einsetzen, daß die Aufgaben in den waagerechten und senkrechten Spalten richtig gelöst werden.

aus: NBI, Berlin

12	:		+		=	12
:	■	+	■	−	■	+
	+	5	−		=	
−	■	−	■	:	■	−
1	·		−	2	=	5
=	■	=	■	=	■	=
	·		·		=	10

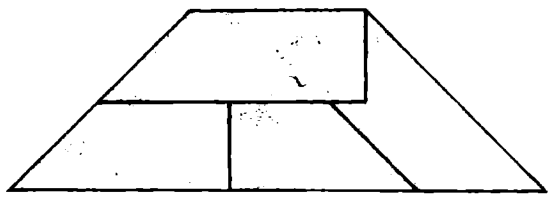
Persönliches

Der jugoslawische Geographieprofessor *Vladimir Zubic* vermag im Kopfrechnen die 37. Wurzel aus einer hundertstelligen Zahl in nur zwei Minuten und 17 Sekunden zu ermitteln. Dies stellte der Schnellrechner aus der bosnisch-herzegowinischen Hauptstadt Sarajevo kürzlich im Fernsehen unter Beweis (ADN).

Das T-Puzzle

Das Bild zeigt ein Trapez (Basiswinkel 45°). Fertige dir eine Schablone an, zerschneide diese und lege die vier Teile zu einem T zusammen, keine einfache Sache. Es gibt vier verschiedene Lösungen!

aus: Pythagoras, Gröningen



Wie alt bin ich?

Opa erzählt: „Meine Frau (Oma) ist 6 Jahre jünger als ich, meine Frau ist aber auch fünfmal so alt wie meine Enkelin. Meine Tochter ist halb so alt wie ich, mein Schwiegersohn ist 2 Jahre älter als meine Tochter.

Zusammen sind wir 238 Jahre alt.

Schülerin Claudia Schnelle, Schmölln

Verlorener Grand Hand

In einer Skatrunde spielte Paul als Hinterhandspieler Grand Hand und verlor, obwohl im Skat Herz Zehn und Karo Zehn lagen.

Nach dem Spiel legte Paul sein Blatt auf den Tisch und daneben den Skat.

Pauls Blatt: Kreuz – Bube, As, Zehn, König, Ober; Pik – Bube, König, Ober; Karo – Bube, As.

Skat: Herz – Zehn; Karo – Zehn.

Paul bemerkte dazu: „Bei der Kartenverteilung und der Spielweise meiner Gegner hatte ich mit Grand Hand keine Gewinnchance."

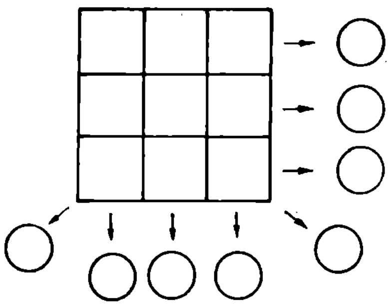
Ein vom Nachbartisch gerade Hinzugekommener, der Pauls Blatt und den Skat liegen sah, fragte: „Lag bei diesem Spiel im ersten Stich ein Bube?" Als Paul verneinte, urteilte der Hinzugekommene: „Dann liegt eindeutig fest, welche Karten der Vorderhandspieler hatte."

Kennst du das Blatt des Vorderhandspielers?

W. Träger, Döbeln

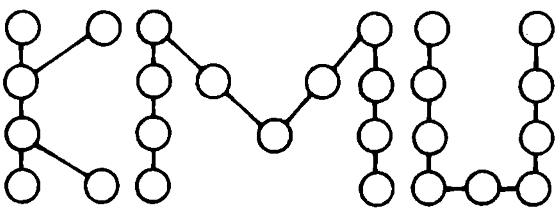
Anti-magisches Quadrat

Bilde mit den Ziffern 1 bis 9 ein anti-magisches Quadrat! Dies bedeutet, daß keine waagerechte, senkrechte oder diagonale Summe gleich ist. Finde bitte nur eine der möglichen Lösungen, denn durch weiteres Variieren dieser Lösung könntest du mühelos weitere erzeugen! *aus: Magazin, Berlin*



Gruß von der Karl-Marx-Universität

Im Jahre 1946 war die demokratische Neueröffnung der Leipziger Universität, der heutigen *Karl-Marx*-Universität (KMU).
Versucht doch nun einmal, die natürlichen Zahlen von 1 bis 26 so in die Kreisfelder der KMU-Figur einzutragen, daß die Zahlensumme auf jeder geraden Linie 46 beträgt! *Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig*



Alles Quadratzahlen

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern!

AB +	CD +	AEFC =	AEGD
+	+	+	+
FGD +	HGC +	AB =	AEGD
+	+	+	+
HGC +	FIB +	CD =	AEGD
AEGD +	AEGD +	AEGD =	KFBH

Ing. A. Körner, Leipzig

Additionsrätsel

Vor 2030 Jahren starb ein berühmter römischer Feldherr unter den Dolchen seiner politischen Feinde. Hinter den Fragezeichen verbergen sich seine drei Namen. Deren Buchstaben wiederum sind durch Zahlen zu ersetzen (nur gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, keine Null an erster Stelle), so entsteht eine einzige richtige Addition.

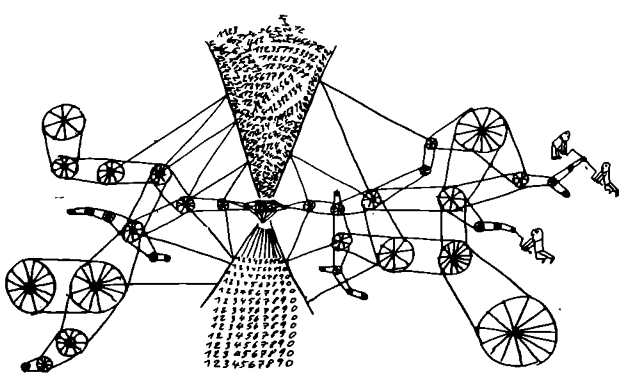
Philarithmos, ND, Berlin

```
    ? ? ? ? ?
+ ? ? ? ? ? ?
= ? ? ? ? ? ?
```

Ein altes Teilungsproblem

Ein reicher Mann verfügte in seinem Testament, daß all seine Goldmünzen gleichmäßig unter seine drei Kinder Peter, Paul und Mary verteilt werden sollen. Da eine Münze überzählig war, sollte diese sein treuer Diener erhalten. Gegen Mitternacht wachte Peter auf, versteckte seinen Haufen mit Goldmünzen und teilte die zwei übrigen Haufen in drei neue Haufen auf. Als er feststellte, daß eine Münze übrig war, entschied er, diese dem Diener zu geben. Später tat Paul das gleiche und gegen Morgen Mary ebenfalls. In jedem Falle blieb eine Münze für den Diener übrig.
Welches war die geringste ursprüngliche Anzahl von Goldmünzen?

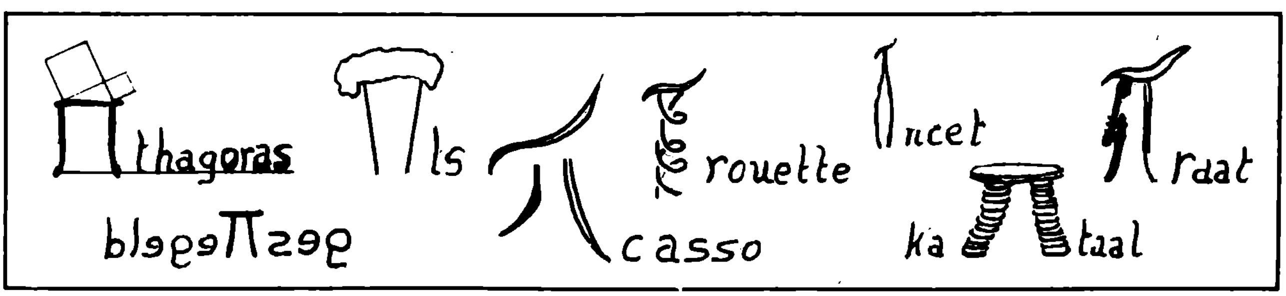
aus: The Australian Mathematics Teacher



aus: Urbanitäten von Gerd Wessel (Cartoons)

Heiteres π

aus: Pythagoras, Gröningen



Lösungen

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Eine achtstellige ganze Zahl hat folgende Eigenschaften:
(I) Die ganze Zahl wird, in der Basis 10, mit zwei Einsen, zwei Zweien, zwei Dreien und zwei Vieren geschrieben.
(II) Die zwei Einsen werden durch eine ganze Zahl, die zwei Zweien durch zwei ganze Zahlen, die zwei Dreien durch drei ganze Zahlen und die zwei Vieren durch vier ganze Zahlen getrennt.
Wie heißt die ganze Zahl?

Lösung: Die Zahl muß lauten: 41312432. Dabei ist eine 3 zwischen 1 und 1; 4 und 3 zwischen 2 und 2; 1, 2 und 4 zwischen 3 und 3 sowie 1, 3, 1, 2 zwischen 4 und 4.

▲2▲ Die Brüder Aljosha und Boris wurden beide im August geboren. In die Schule kamen sie mit sieben Jahren. Die Nummer der Klasse, in der jetzt der ältere Bruder Boris lernt, ist gleich dem Alter von Aljosha. In welche Klasse kommt Aljosha, wenn Boris die zehnklassige Oberschule beendet?

Lösung: Das Alter eines Schülers, der im August geboren ist und der mit 7 Jahren eingeschult wurde, ist um 6 größer als die Nummer der Klasse, in der er gerade lernt. Folglich ist Boris 6 Jahre älter als Aljosha. Wenn Boris die 10. Klasse beendet, dann schließt Aljosha die 4. Klasse ab und kommt in die fünfte.

▲3▲ Grille chiffrée-Zahlengitter:
Das Zahlengitter ist mit Hilfe untenstehender Zahlen zu vervollständigen, so daß jede senkrechte oder waagerechte Reihe von fünf Zahlen insgesamt 84 ergibt.

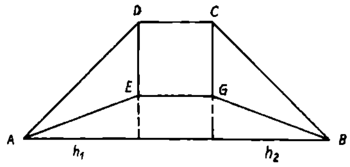
Lösung:

22	3	29	2	28
1		4		6
16	11	5	25	27
30		26		9
15	12	20	23	14

Lösungen zu: Alle Teile haben den gleichen Flächeninhalt

▲1▲ Für den Kreisumfang ist $u = 2\pi r = 2\pi$.
Da u in 10 gleiche Teile unterteilt ist, gilt $a = \frac{u}{10} = \frac{\pi}{5}$.

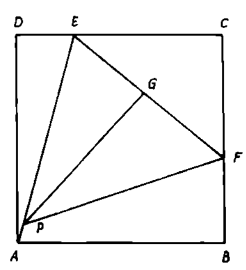
▲2▲ Wir bezeichnen die Punkte wie aus nebenstehender Skizze ersichtlich. Der Flächeninhalt des Quadrates $CDEG$ ist 1. Die Höhe h_1 des Dreiecks AED auf der Seite DE ist gleich 2, da $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$ wegen der Flächengleichheit gilt. Analog ist $h_2 = 2$. Damit gilt für die Fläche des Trapezes $ABGE$:
$\frac{2\cdot a}{2} + a + \frac{2\cdot a}{2} = 1$, also $1 = \frac{1}{3}$.



▲3▲ Die Eckpunkte der Dreiecke seien $A_1(1,0)$, $A_2(a_2,0)$, $A_3(a_3,0)$, ...
und $B_1(0,1)$, $B_2(0,b_2)$, $B_3(0,b_3)$, ...
$U(0,0)$ sei der Koordinatenursprung.
Für die Fläche des Dreiecks UA_1B_1 gilt:
$F(UA_1B_1) = \frac{1}{2}$.
Weiter ist $F(B_1UA_2) = 1 = \frac{1\cdot a_2}{2}$,
also $A_2(2,0)$. Ferner ist
$F(B_2UA_2) = \frac{3}{2} = \frac{2b_2}{2}$, also $B_2\left(0,\frac{3}{2}\right)$
und $F(B_2UA_3) = 2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{a_3}{2}$,
also $A_3\left(\frac{8}{3},0\right)$. Schließlich ist
$F(B_3UA_3) = \frac{5}{2} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}$ und damit
$B_3\left(0,\frac{15}{8}\right)$. Somit gilt $a = \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$.

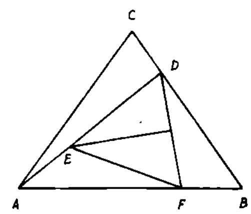
▲4▲ Es sei A_n die Fläche des n-ten Kreises mit dem Radius r_n.
Dann gilt $A_n = nA_1 = \pi r_n^2$:
Da $A_1 = \pi$ ist, folgt $r_n = \sqrt{n}$.
Mithin ist $a = r_5 - r_4 = \sqrt{5} - 2$.

▲5▲ Die Punktbezeichnung ist aus der Skizze entnehmbar. Da die Fläche des Dreiecks AED ein Fünftel der Fläche des Quadrates ist, muß
$\overline{DE} = \frac{2}{5}$ und somit $\overline{EC} = \frac{3}{5}$ sein. Damit muß $\overline{EC}\cdot\frac{\overline{CF}}{2} = \frac{1}{5}$ gelten, also ist $\overline{CF} = \frac{2}{3}$.
Mit dem Satz des Pythagoras folgt
$\overline{EF} = \frac{1}{15}\sqrt{181}$ und da $\overline{EG} = \overline{GF}$ ist,
(die Dreiecke PGE und PGF haben die gleiche Fläche und die gleiche Höhe, also auch die gleichgroße Grundseite)
ist $a = \frac{1}{30}\sqrt{181}$.



▲6▲ Die Punkte der Abszisse seien mit $U(0,0)$, $A_1(a_1,0)$, ..., $A_n(a_n,0)$, ... bezeichnet. Dann ist $a_1 = 1$ und wegen der Dreiecksflächenformel $\frac{a_n a_n}{2} = n\frac{1}{2}$.
(Man beachte die Flächengleichheit!)
Also ist $a_n = \sqrt{n}$
und damit $a = a_5 - a_4 = \sqrt{5} - 2$.
(Man beachte die Analogie zwischen Aufgabe 4 und 5!)

▲7▲ Wir bezeichnen die Punkte wie aus nebenstehender Skizze ersichtlich. Da die Fläche des Dreiecks ADC ein Fünftel der Gesamtfläche des Dreiecks ABC sein soll, folgt $\overline{CD} = \frac{1}{5}$.
(Flächenformel, gleiche Höhe!)
Der Kosinussatz im Dreieck ADC liefert
$\overline{AD} = \frac{1}{5}\sqrt{21}$. Nun gilt $\overline{AE} : \overline{ED} = 1:2$,
da die Fläche des Dreiecks AFE halb so groß sein soll, wie die Fläche des Dreiecks EFD. Folglich gilt
$a = \overline{ED} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{5}\sqrt{21} = \frac{2}{15}\sqrt{21}$.



Lösungen zu HEXAHEX – ein geometrisches Puzzle

▲1▲

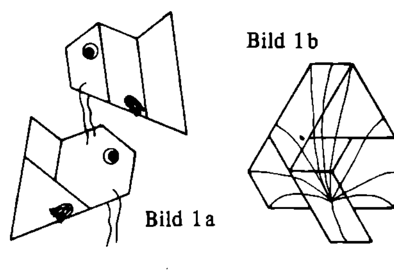


Bild 1a Bild 1b

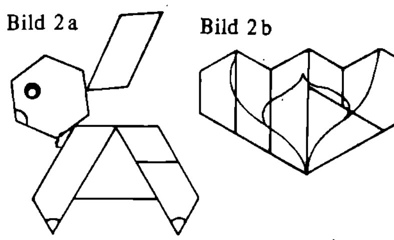


Bild 2a Bild 2b

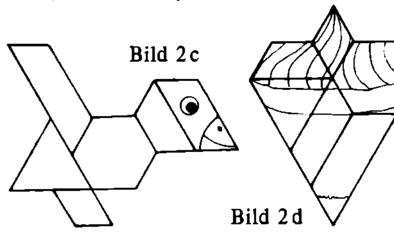
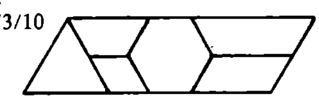
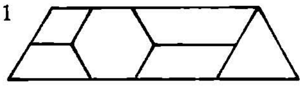


Bild 2c Bild 2d

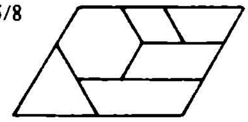
▲2▲
a) 1/3/10



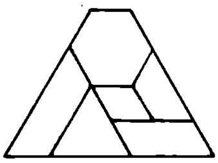
b) 2/11



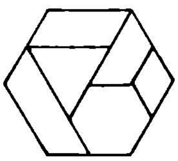
c) 4/5/8



d) 7/9



e) 6



▲3▲ Es gilt die Gleichung

$$2 \cdot c \cdot d = 18 + c_1^2 + d_1^2$$

mit den gleichen Nebenbedingungen wie vorn. Durch systematisches Probieren, bei $d = 2$ beginnend, entsteht die folgende Tabelle:

d	c	c_1	d_1	
2	5	1	1	(1)
3	3	0	0	(2)
3	6	3	3	(3)
5	5	4	4	(4)
9	10	9	9	(5)

Wir finden daraus zwei konvexe Figuren; die rechnerische Lösung (5) widerspricht auch (177).

Bild 3a
a) 1/4

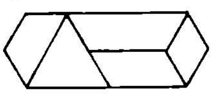
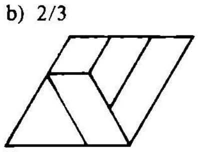
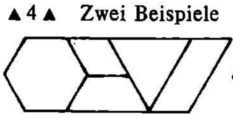
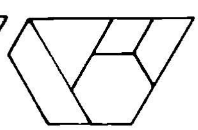


Bild 3b
b) 2/3

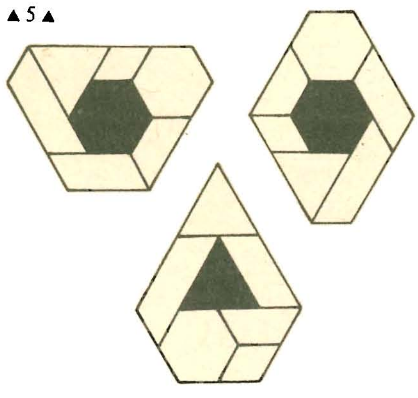


▲4▲ Zwei Beispiele





▲5▲



Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Kwaß – ein russisches Erfrischungsgetränk

Der zweite ein 16-Liter-, ein 19-Liter- und ein 31-Liter-Faß.
Es sind also

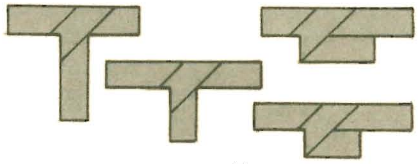
$$15 + 18 = 33;\ 16 + 19 + 31 = 66.$$

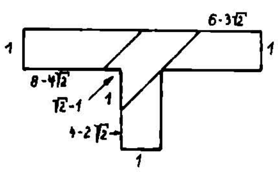
Das heißt, der zweite Käufer kaufte doppelt soviel Kwaß wie der erste. Übrig bleibt das 20-Liter-Faß.

Gut kombinieren

$$12 : 4 + 9 = 12$$
$$6 + 5 - 8 = 3$$
$$1 \cdot 7 - 2 = 5$$
$$1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$$

Das T-Puzzle





Wie alt bin ich?

Claudia ist 14 Jahre alt; Opa: x;

Oma: $x - 6$; Tochter: $\frac{x}{2}$;

Schwiegersohn: $\frac{x}{2} + 2$, Enkelin: $\frac{x-5}{5}$;

$$x + (x - 6) + \left(\frac{x-6}{5}\right) + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} + 2\right) = 238;\ x = 76.$$

Der Opa ist 76 Jahre alt.

Anti-magisches Quadrat

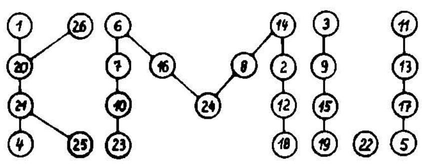
Eine der möglichen Lösungen:

7	6	3	→ 16
5	1	2	→ 8
8	4	9	→ 21
20	11	14	

Diagonalen: 12 und 17.

Gruß von der KMU

Eine mögliche Eintragung:



Alles Quadratzahlen

Aus den ersten beiden Spalten bzw. aus der zweiten und dritten Zeile folgt, daß die Zahl *AEGD* mit einer Eins beginnen muß. (Die Summe zweier dreistelliger Zahlen plus einer zweistelligen Zahl ist im vorliegenden Fall kleiner als 2000.) Also $A = 1$. Damit ergibt sich für $AB = 16$. (Einzige Quadratzahl im Bereich 10 bis 19.) Damit ist also $B = 6$.

Weiterhin folgt aus der ersten Zeile, daß $B + C = 10$ sein muß.

Damit ist $C = 4$.

Deshalb muß $CD = 49$ sein. Also: $D = 9$.

Aus der dritten Spalte folgt $F = G - 6$. Weil die Ziffer 9 schon belegt ist, bleibt für F nur noch die Ziffer 2; denn die Eins ist auch vergeben. Die rechte untere Schlußsumme muß als Endziffer eine 7 haben, denn $3 \cdot 9 = 27$. Also ist $H = 7$. $G = 8$. Damit ist die Zahl *HGC* im Bereich 704 bis 784 zu suchen. Es kommt nur die Zahl 784 in Frage. Also: $G = 8$.

Jetzt ergibt sich in der ersten Spalte schon die Gesamtsumme aus: $16 + 289 + 784 = 1089$. Also ist $E = 0$. Nun ist es leicht, $I = 5$ und $K = 3$ zu bestimmen.

Denn:

$$\begin{array}{ccccccc} 4^2 & + & 7^2 & + & 32^2 & = & 33^2 \\ + & & + & & + & & + \\ 17^2 & + & 28^2 & + & 4^2 & = & 33^2 \\ + & & + & & + & & + \\ 28^2 & + & 16^2 & + & 7^2 & = & 33^2 \\ \hline 33^2 & + & 33^2 & + & 33^2 & = & 3 \cdot 33^2 \end{array}$$

Verlorener Grand Hand

Hätte Paul den ersten Stich erhalten, so hätte er höchstens zwei Stiche mit Pik König und Pik Ober abzugeben brauchen. Dazu könnten seine Gegner maximal 36 Augen beisteuern. Also müssen sie noch einen dritten Stich auf den Herz Buben erhalten haben. Da der Herz Bube nicht im ersten Stich lag, mußte der Vorderhandspieler nacheinander Pik As und Pik Zehn ausspielen und sein Mitspieler darf kein Pik haben, so daß er Herz As und Herz König beisteuern kann. Andernfalls erhalten Pauls Gegner nicht zwei Pikstiche, auf jeden Fall mit den Pikstichen dann weniger als 43 Augen. Beim dritten Ausspielen muß der Vorderhandspieler Karo König auf den Tisch legen und der Mittelhandspieler muß mit dem Herz Buben stechen können. Das ist nur möglich, wenn der Mittelhandspieler kein Karo im Blatt hat. Mit diesem dritten Stich erhalten Pauls Gegner 17 Augen (1× As, 1× König, 1× Bube) und damit maximal 60 Augen. Da sie das Spiel gewonnen haben, müssen sie 60 Augen erreicht haben. Die Karten des Vorderhandspielers sind:
Pik: As, Zehn, Neun, Acht, Sieben,
Karo: König, Ober, Neun, Acht, Sieben.

Additionsrätsel

$$\begin{array}{r} \text{G A I U S} \\ +\ \text{J U L I U S} \\ \hline \text{C A E S A R} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 76081 \\ +\ 389081 \\ \hline 465162 \end{array}$$

Ein altes Teilungsproblem

Waren es am Anfang x Münzen, dann sieht die Verteilung so aus:

$$\frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{3} + 1.$$

Nachdem nun Peter das Drittel $\left(\frac{x-1}{3}\right)$ versteckt hatte, waren es nur noch

$$\frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{3} + 1 = \frac{2x+1}{3} \text{ Münzen.}$$

Diese verteilte er wie folgt:

$$\frac{\frac{2x+1}{3}-1}{3}+\frac{\frac{2x+1}{3}-1}{3}+\frac{\frac{2x+1}{3}-1}{3}$$
$$+1=\frac{2x-2}{9}+\frac{2x-2}{9}+\frac{2x-2}{9}+1.$$
Nun tat Paul das gleiche.
Er nahm das Drittel $\left(\frac{2x-2}{9}\right)$ weg und verteilte den Rest von $\frac{4x+5}{9}$ Münzen.

$$\frac{\frac{4x+5}{9}-1}{3}+\frac{\frac{4x+5}{9}-1}{3}+\frac{\frac{4x+5}{9}-1}{3}$$
$$+1=\frac{4x-4}{27}+\frac{4x-4}{27}+\frac{4x-4}{27}+1.$$
Schließlich versteckte Mary davon wieder das Drittel $\left(\text{also } \frac{4x-4}{27}\right)$ und verteilte den Rest von $\frac{8x+19}{27}$ Münzen in

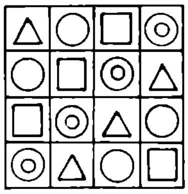
$$\frac{\frac{8x+19}{27}-1}{3}+\frac{\frac{8x+19}{27}-1}{3}$$
$$+\frac{\frac{8x+19}{27}-1}{3}+1=\frac{8x-8}{81}+\frac{8x-8}{81}$$
$$+\frac{8x-8}{81}+1.$$
Das heißt: $\frac{8x-8}{81}$ muß ganzzahlig sein.
Dann ist $8x-8=81a\ (a \in N)$
$$x=10a+\frac{a}{8}+1.$$
Für $b=0$ ist $x=1$ (auszuschließen).
Für $b=1$ ist $x=82$
und mit $a = 8b\ (b \in N)$
$$x=81b+1.$$
Für $b=2$ ist $x=163$.
Die geringste Anzahl von Goldmünzen beträgt 82.

Lösungen zu: Aufgaben für Arbeitsgemeinschaften Junger Mathematiker (Kl. 4 bis 6)
Heft 6/86

▲1▲ a) Nagel (kein Werkzeug); Linde (keine Blume); dunkel (keine Farbe); Gans (kein Säugetier); Würfel (keine ebene Figur); Gramm (keine Längeneinheit); 103 (keine zweistellige Zahl); 21 (keine gerade Zahl)
b) Ruderboot (kein Landfahrzeug); Auto (wird nicht mit Muskelkraft betrieben); 15 (keine gerade Zahl) oder 26 (kein Vielfaches von 3); 14 (keine Quadratzahl) oder 25 (keine gerade Zahl); Hund (kein Wildtier) oder Fasan (kein Säugetier).

▲2▲ a) Das erste Quadrat, denn bei diesem ist die schraffierte Fläche gleich zwei Drittel der Quadratfläche.
b) Das vierte Rechteck, denn bei diesem ist jedes Teilflächenstück gleich einem Achtel der Rechteckfläche.

▲3▲ a) Es fehlt ein Quadrat; denn dann tritt jede Figur dreimal auf.
b) In jeder waagerechten Zeile, aber auch in jeder senkrechten Spalte tritt jede der vier Figuren genau einmal auf.

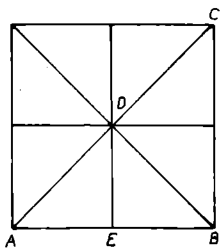


▲4▲

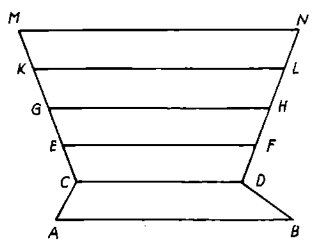
3		9
	6	
12		5

▲5▲ Das Würfelnetz a) gehört zum abgebildeten Würfel; denn die Summe der Augenzahlen zweier gegenüberliegender Würfelflächen muß 7 betragen.

▲6▲ a) 4 große Dreiecke (z. B. Dreieck ABC); 8 mittlere Dreiecke (z. B. Dreieck ABD); 8 kleine Dreiecke (z. B. Dreieck AED), also insgesamt 16 Dreiecke.



b) 5 Trapeze, die aus einer Teilfläche bestehen (z. B. Trapez $ABDC$), 3 Trapeze, die aus zwei Teilflächen bestehen (z. B. Trapez $CDHG$), 2 Trapeze, die aus drei Teilflächen bestehen (z. B. Trapez $CDLK$), 1 Trapez, das aus vier Teilflächen besteht (Trapez $CDNM$), also insgesamt 11 Trapeze.



▲7▲ a) $2\cdot(40+30)\,\text{cm}=140\,\text{cm}$;
$140\,\text{cm}:4=35\,\text{cm}$; das Quadrat hat eine Seitenlänge von 35 cm.
b) Der halbe Umfang des Rechtecks beträgt 9 cm. Für die Seitenlängen a und b des Rechtecks gilt somit $a+b=9\,\text{cm}$.
Daraus folgt

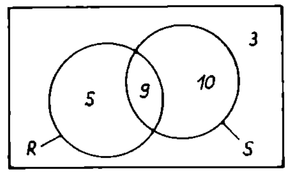
a	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
b	8 cm	7 cm	6 cm	5 cm.

▲8▲ Aus $b+2\cdot s=160\,\text{cm}$ folgt

b	$2s$	s
20	140	70
40	120	60
60	100	50

▲9▲ Kegel (Bild 1); Würfel (B. 2); Zehnpfennigstück, das aufrecht steht (B. 3); Pyramide (B. 4); Fußball (B. 5); leerer Blumentopf (B. 6).

▲10▲ $27-(14+19-9)=27-24=3$; drei Schüler können weder radfahren noch schwimmen (siehe auch Venndiagramm).



27 Schüler

▲11▲ Es seien u, r, b, a, w, h die ganzen Zahlen, die das Lebensalter von Ulf, Ria, Beate, Astrid, Werner, Heiko angeben; dann gilt $b<a<h$ und $h<r$ und $a<u<h$ und $w<b$, also $w<b<a<u<h<r$. Die Vornamen müssen deshalb folgende Reihenfolge erhalten: Werner, Beate, Astrid, Ulf, Heiko, Ria.

▲12▲ Aus dem Aufgabentext folgt:
Elke vor Astrid, aber Astrid vor Doris; Cilli ist am größten, Bärbel vor Elke, also die Reihenfolge Cilli, Bärbel, Elke, Astrid, Flora, Doris.

▲3▲ Die Siegerin und Renate trainieren in derselben Gruppe, also kann Renate nicht Siegerin sein. Da Renate nicht Dritte wurde, belegte Renate den 2. Platz.
Die Gewinnerin der Bronzemedaille ist Klassenkameradin von Ute, also wurde Ute nicht Dritte. Folglich belegte Ute den ersten, Renate den zweiten, Petra den dritten Platz.

▲14▲ Es lassen sich folgende zweifarbige Wimpel herstellen:
rot-gelb, rot-blau, rot-schwarz,
gelb-blau, gelb-schwarz,
blau-schwarz.
Dabei wird vorausgesetzt, daß z. B. die Wimpel rot-gelb und gelb-rot als gleichartig angesehen werden.

▲15▲
a) $3\cdot 4-48:6+16=12-8+16=20$
b) $(35-20)+(18-9)=15+9=24$;
$(35-20)-(18+9)=55-27=28$;
$24<28$.

▲16▲ Aus a) folgt $10 \leq x \leq 99$.
Aus b) ergeben sich für x die Zahlen 21, 42, 63, 84. Wegen c) entfallen die ungeraden Zahlen 21 und 63. Übrig bleiben die Zahlen 42 und 84.

▲17▲ Der Satz enthält die Zahlwörter eins, drei, zwei, neun, acht.
(*Ein S*eehund; Seehun*d rei*ßt; gan*z wei*t; Zäh*ne un*d; N*acht*)

▲18▲
2,40 M : 2 = 1,20 M;
120 Pf − 50 Pf = 70 Pf;
70 Pf : 2 = 35 Pf;
35 Pf + 50 Pf = 86 Pf.
Ein Radiergummi kostet 35 Pf, ein Kalender 85 Pf.

▲19▲
$1\cdot 50\,\text{M}+8\cdot 20\,\text{M}=210\,\text{M}<300\,\text{M}$
$2\cdot 50\,\text{M}+7\cdot 20\,\text{M}=240\,\text{M}<300\,\text{M}$
$3\cdot 50\,\text{M}+6\cdot 20\,\text{M}=270\,\text{M}<300\,\text{M}$
$4\cdot 50\,\text{M}+5\cdot 20\,\text{M}=300\,\text{M}$ (Lösung)
$5\cdot 50\,\text{M}+4\cdot 20\,\text{M}=330\,\text{M}<300\,\text{M}$

▲20▲ Jeder Bus hat
512 Plätze : 16 = 32 Plätze. Wegen
$5\cdot 32$ Personen = 160 Personen
werden fünf Busse benötigt.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Kubilius
Heft 5, S. 123

▲ 2721 ▲ Man bezeichne $N = p^4 - 5p^2 + 4 = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$. Ist $p = 2$, so ist $N = 0$; also N ist durch 360 teilbar. Wenn $p \neq 2$, so ist p ungerade. Daraus folgt, daß $p-1$ und $p+1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen sind und ihr Produkt durch 8 teilbar ist.
Wenn $p = 3$, so ist N nicht durch 3 teilbar.
Wenn $p = 5$, so ist N nicht durch 5 teilbar.
Wir werden zeigen, daß N durch 9 und durch 5 teilbar ist, falls $p \geqq 7$.
Eine Primzahl $p > 3$ kann die Gestalt $3k+1$ oder $3k+2$ haben. Im ersten Falle sind $p-1$ und $p+2$ durch 3 teilbar; im zweiten Falle sind $p-2$ und $p+1$ durch 3 teilbar. Jedenfalls ist N durch 9 teilbar.
Eine Primzahl $p > 5$ kann die Gestalt $5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ haben. Es ist leicht zu sehen, daß es in jedem Falle einen Faktor von N gibt, der durch 5 teilbar ist.
Antwort: N ist durch 360 teilbar, falls $p \neq 3$ und $p \neq 5$ ist.

Lösungen zu: Minimum-Wege-Strukturen
Heft 6/86

▲ 1 ▲ Nach Bild 5 gilt $\overline{SS_c} = x$, und die Weglänge l ist

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot d - x + 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2}.$$

Differenziert

$$\frac{dl}{dx} = -1 + 2x\left(x^2 + \frac{d^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

und $x = \frac{1}{6}\sqrt{6}\cdot d$. Dann ist

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot d - \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot d + 2\sqrt{\frac{6d^2}{36} + \frac{d^2}{4}},$$

$$l = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cdot d = 1{,}93\ldots d.$$

Die Mindestlänge beträgt $1{,}93\ldots d$.

▲ 2 ▲ In jedem der rechtwinkligen Dreiecke ΔAOD, ΔBCO, ΔABO und ΔDCO beträgt die Mindestlänge s nach ▲ 1 ▲ mit

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot d = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$$

$$s = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot d.$$

Die Gesamtlänge des Mindestweges ist dann

$$l = 2s = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\,(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cdot d,$$

$$l = (\sqrt{3} + 1)\,d = 2{,}73\ldots d.$$

Die Länge beider Wege beträgt 2,73...d.

▲ 3 ▲ Die Länge l_1 des durchgezogenen Weges ergibt sich aus dem Mindestweg s_1 in den beiden gleichschenkligen Dreiecken ΔADO und ΔBOC (siehe Bild 9).
Dann gilt für ΔADO nach Bild 14

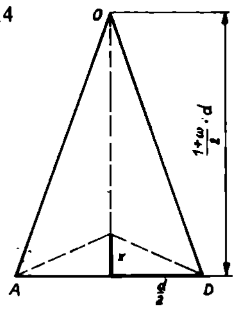
$$s_1 = \frac{(1+\omega)}{2} - x + 2\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}.$$

Man differenziert

$$\frac{ds_1}{dx} = -1 + 2x\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot d.$$

Bild 14



Dann ist

$$s_1 = \frac{(1+\omega)\cdot d}{2} - \frac{d}{6}\sqrt{3} + 2\sqrt{\frac{3d^2}{36} + \frac{d^2}{4}},$$

$$s_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} + \omega)\cdot d.$$

Schließlich ist

$$l_1 = 2\cdot s_1 = (1 + \sqrt{3} + \omega)\cdot d = (2{,}73 + \omega)\cdot d.$$

Die Weglänge l_2 des gestrichelten Weges folgt aus ΔAOB und ΔDCO im Bild 9. Nach analogen Rechnungen folgt

$$l_2 = \left[1 + (1+\omega)\sqrt{3}\right]\cdot d.$$

▲ 4 ▲ Den Mindestweg s_1 im ΔAOD (siehe Bild 15a) findet man mit Hilfe der Konstruktion von Bild 7 mit $\overline{AD} = d$ und $\overline{AO} = \frac{d}{2}\sqrt{3}$. Nach Bild 15b gilt dann mit dem Kosinussatz

$$s_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{d}{2}\times\frac{d}{2}\sqrt{3}\cdot\cos 150°,$$

$$s_1^2 = \frac{7}{4}d^2,$$

$$s_1 = \frac{d}{2}\sqrt{7}.$$

Bild 15a

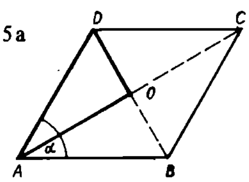
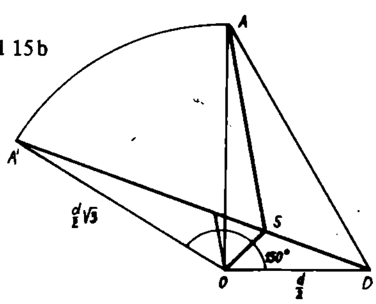


Bild 15b



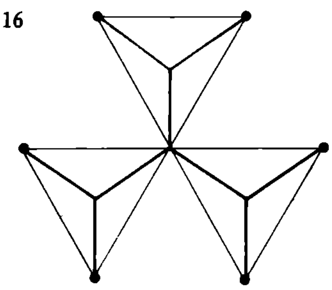
Die Mindestlänge im Viereck $ABCD$ ist schließlich

$$l = 2\cdot s_1 = \sqrt{7}\cdot d = 2{,}64\ldots d.$$

▲ 5 ▲ a) Man bestimmt den Mindestweg s der drei eingezeichneten gleichseitigen Dreiecke in Bild 16 nach Bild 4 mit $s = \sqrt{3}\times d$.
Dann ist der gesamte Mindestweg

$$l_a = 3\cdot s = 3\cdot\sqrt{3}\cdot d = 5{,}196\ldots d.$$

Bild 16



b) Man zerlegt das Sechseck in zwei Rhomben und bestimmt nach ▲ 4 ▲ deren Mindestwege (siehe Bild 17).
Dann ist der gesamte Mindestweg

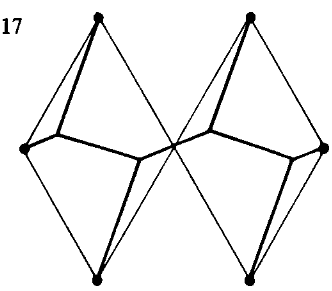
$$l_b = 2\cdot s \text{ mit } s = \frac{d}{2}\sqrt{7},$$

$$l_b = 2\cdot\sqrt{7}\cdot d,$$

$$l_b = 5{,}29\ldots d.$$

c) $l_c = 5d$.

Bild 17



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 5/86

Ma 5 ■ 2694 Mischa heißt nicht Gerassimow. Da Wolodja nicht in die 5. Klasse geht, heißt er ebenfalls nicht Gerassimow. Deshalb hat Petja den Familiennamen Gerassimow. Der Vater von Wolodja ist Ingenieur, also nicht Dreher. Deshalb hat Wolodja nicht den Familiennamen Iwanow; er heißt vielmehr Wolodja Semenow. Folglich hat Mischa den Familiennamen Iwanow.

Ma 5 ■ 2695 Es ist
$3 + 4 = 7$; $7\cdot 2 = 14$; $14 + 3 = 17$;
$17\cdot 2 = 34$; $34 + 3 = 37$; $37\cdot 2 = 74$.
Im Paket waren 74 Pralinen.

Ma 5 ■ 2696 Eine dreistellige Zahl kann nur bei einem Produkt aus 785 mit der 1 entstehen; eine vierstellige Zahl, deren erste Grundziffer 1 ist, ergibt sich nur aus $785\cdot 2$. Folglich ist der zweite Faktor der Aufgabe 121, und es gilt $785\cdot 121 = 94985$.

Ma 5 ■ 2697 In zwei Stunden klettert die Raupe $(10 - 4)$ cm $= 6$ cm hoch. Nach zehn Stunden ist sie $5\cdot 6$ cm $= 30$ cm hochgeklettert. Nach 11 Stunden ist die Raupe um 30 cm $+ 10$ cm $= 40$ cm hinaufgeklettert.

Ma 5 ■ 2698 Das Produkt einer einstelligen Zahl mit 63 ist nur dann zweistellig, wenn der Faktor eine 1 ist. Daher ist der zweite Faktor der Aufgabe 11, und es gilt $63\cdot 11 = 693$.

Fortsetzung folgt in Heft 2/87.

aufgepaßt – nachgedacht

Alle Teile haben den gleichen Flächeninhalt!

aus: Pythagoras, Groningen