

**Mathematische
Schüler-
zeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin**

**3. Jahrgang 1969
Preis 0,50 M
Index 31059**

2

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. L. Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); OL K. Krüger, V. L. d. V. (Bad Doberan); StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Leipzig); OL Dr. H. Lohse (Leipzig); NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL H. Pätzold (Waren); Prof. Dr. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); StR G. Schulze (Herzberg/Elster); OL H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); Dr. W. Walsch (Halle)

Aufgabengruppe:

NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL Th. Scholl (Berlin); OL H. Schulze (Leipzig): Kl. 5 und 6; W. Träger (Döbeln): Kl. 7 und 8; StR G. Schulze (Herzberg/Elster): Kl. 9 und 10

Gutachtergruppe:

NPT H. Kästner; Dr. R. Hofmann; OL H. Schulze (alle Leipzig)

Redaktion:

StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postcheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich Einzelheft
0,50 M, im Abonnement zweimonatlich
(1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Staatl. Math. Phys. Salon, Dresden-Zwinger (S. 25/27); Archiv: Urania-Verlag/Verlag Die Wirtschaft (S. 34); B.-M. Prawitz, Leipzig (S. 35 oben); S. Müller, Leipzig (S. 35 unten); N. Naumann, Leipzig (S. 36);
Typographie: H. Tracksdorf

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollensetdruck)

Redaktionsschluß: 31. Januar 1969



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon (8)*
DRESDEN-ZWINGER, Direktor H. Grötzsch, Dresden
- 28 Zweiermenge und geordnete Paare (6)
Dr. H. Tiede, Sektion Mathematik, Universität Rostock
- 30 Der Eulersche Polyedersatz (8)
Dipl.-Math. Dr. rer. nat. H. Günther, Sektion Mathematik, Bereich Geometrie
Technische Universität Dresden
- 32 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung Teil 2 (7)
J. Frommann, Klement-Gottwald-Schule (EOS), Berlin-Treptow
- 34 Werk der Millionen (5)
Urania-Verlag und Verlag Die Wirtschaft
- 35 Spezialklassen (8)
an mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten
von Universitäten und Hochschulen
- 36 *alpha*-Wettbewerb 1968 (5)
Auswertung – Statistik – Preisträger
- 38 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)
Autorenkollektiv
- 40 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)
Oberlehrer H. Pätzold, OS Waren/Müritz
- 42 VIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (7)
Aufgaben der Bezirksolympiade (8./9. 2. 1969)
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
- 43 Eine Aufgabe von
Prof. Dr. rer. nat. habil. Karl Manteuffel (5)
Dekan der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
des Wissenschaftlichen Rates TH Otto von Guericke Magdeburg
- 44 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (10)
Lösungen zu den Aufgaben der Bezirksolympiade 1968 (Fortsetzung)
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
- 45 Lösungen (5)
- 48 Mit Zirkel und Zeichendreieck (5)
Zusammenstellung: Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig
- III./IV. Umschlagseite: Wissen, wo ... (5)

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgabe für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon

Dresden — Zwinger



Der Staatliche Mathematisch-Physikalische Salon ist mit seinen zahlreichen, z. T. recht verschiedenartigen Sammlungen aus den umfangreichen Beständen der 1560 gegründeten Dresdner Kunstkammer hervorgegangen. Durch das stetige Anwachsen sämtlicher Sammlungen — die Kunstkammer beanspruchte zur Unterbringung im Dresdner Schloß sieben Räume — wurden die Bestände nach und nach aufgeteilt und als selbständige Abteilungen weitergeführt. Dabei entstand auch 1728 das „Königliche Cabinet der mathematischen und physikalischen Instrumente“, das mit der Fertigstellung des Zwingers als „Mathematisch-Physikalischer Salon“ in den oberen nordwestlichen Pavillon des Zwingers einzog.

Später kamen laufend weitere wertvolle Ausstellungsstücke dazu, wie z. B. aus dem Nachlaß der Brühl'schen Bibliothek, aus der Werkstatt des Reichsgrafen Löser im Jahre 1768 und auch aus der von Andreas Gärtner gegründeten Dresdner Modellkammer.

Der Staatl. Math.-Phys. Salon besitzt durch eine jahrhundertelange Sammeltätigkeit und der dadurch entstandenen Reichhaltigkeit an wertvollen Instrumenten, Apparaten und wissenschaftlichem Arbeitsgerät aus den Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie, Chronometrie, Geodäsie, Globographie, Rechentechnik usw. einen hervorragenden Sammlungsbestand, so daß er bei dieser Geschlossenheit und Vollkommenheit auch international zu den bedeutendsten Museen zählt. Mit seinen Exponaten aus dem 13. bis 19. Jahrhundert beschäftigt er sich mit der historischen und technischen Entwicklung dieser naturwissenschaftlichen Gebiete und versucht, diese in seinen Ausstellungen auch darzustellen und gegenständlich zu belegen.

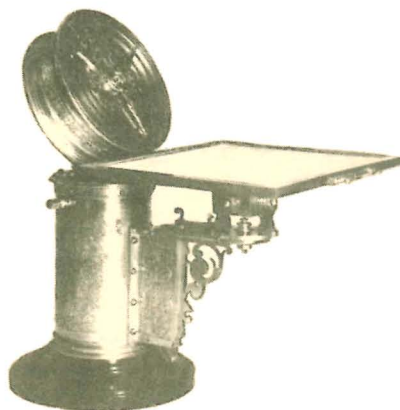
Ein Rundgang durch die einzelnen Ausstellungsräume gibt schnell einen Überblick über die wichtigsten Sammlungen. Sie beginnen mit den Erd- und Himmelsgloben aus dem 13. bis 19. Jahrhundert und damit mit dem Glanzstück persisch-arabischer Instrumentenkunst, mit dem bekannten Arabischen Himmelsglobus aus dem Jahre 1279. Dazu kommen berühmte Erdgloben von Schöner, Mercator und Prätorius und die beiden prachtvollen großen vergoldeten Globusuhren von Reinhold-Roll (Abb.) und Jost

Bürgi; technische und kunsthandwerkliche Meisterleistungen des 16. Jahrhunderts. In den Wandnischen stehen neben anderen Erd- und Himmelsgloben auch etliche Arbeiten aus der Amsterdamer Werkstatt von Guiljelmus Blaeu (1571 bis 1638) und ein von dem Italiener Vincenzo Coronelli (1650 bis 1718) gebautes interessantes Globuspaar mit der seltenen horizontalen Polachsenlagerung. Die Reichhaltigkeit dieser in zehn Vitrinen und Schränken untergebrachten Sammlung mit über 60 Globen, unterschiedlich in Alter, Größe und Ausführung, gibt einen umfassenden Einblick in das geographische und astronomische Wissen dieser Jahrhunderte.



Die geodätischen Instrumente für Längen- und Winkelmessungen beginnen mit den Schrittzählern um 1580 und zeigen die Entwicklung vom einfachen Faden- und Lochdiopter bis zum Theodoliten des ausgehenden 19. Jahrhunderts. Ein Prachtstück Dresdner Arbeit von Christoph Trechsler ist der große für den Wagen bestimmte Wegmesser mit Reißbisch um 1584, der für die im 16. Jahr-

hundert durchgeführten sächsischen Landesvermessungen ein unentbehrliches Hilfsmittel war (Abb.) Diese Art von Wegmesser hat kurz nach 1700 bei der damaligen erneuten säch-



sischen Landesvermessung mit der Verwendung des „Geometrischen Wagens“ durch Adam Friedrich Zürner eine bedeutende Rolle gespielt. Hinzu kommen kleine und mittlere am Mann oder am Pferd zu tragende deutsche und englische Schrittzähler des 16. bis 18. Jahrhunderts.

Die aus der Sammlung der Geschützaufsätze ausgestellten artilleristischen Hilfsinstrumente dienten zur Einstellung der Geschützrohre und gleichzeitig als Kalibermaße zum Messen der Stein-, Eisen- und Bleikugeln. Diese frühen Geschützaufsätze des 16. Jahrhunderts waren z. T. aus Eisen gefertigt; sie wurden später zu hervorragend gearbeiteten ziselierten und vergoldeten Meisterwerken, die über ihre nüchterne Zweckbestimmung hinaus kleine technische Kunstwerke darstellen. In dieser wohl einmaligen Sammlung befinden sich seltene Arbeiten aus der Werkstatt von Christoph Schißler, Augsburg, um 1576, sowie Dresdner Stücke von Christoph Trechsler, um 1614, von Viktor Stark, um 1635 und von Zacharias Boyling, um 1675.

In der Sammlung der Maße und Gewichte spiegelt sich in den verschiedenen Unterteilungen auf den zahlreichen Ausstellungsstücken die verhängnisvolle politische Zerrissenheit Deutschlands in den vergangenen Jahrhunderten wider. Silberne Maßstäbe für „Stangen, Lachter, Klafter, Schritt, Ellen und

Schuch“, Anschlagmaßstäbe mit 6 verschiedenen Zolleinteilungen und seltene, mit 1576 und 1584 signierte Stücke mit „Meilen- und Rutteneinteilung“ des Dresdner Christoph Trechsler führen in der Entwicklung der Längenmaße bis zur sächsischen Normalkelle mit 24 Dresdner Zoll und bis zum Eich-Normalmeter für die sächsischen Maße. Zahlreiche Gewichtssätze, u. a. die Kölnisch-Erfurtische Mark (um 1579) und das herrliche Einsatzgewicht für 50 Mark von Conrad Moß aus der bekannten Nürnberger Rotgießerfamilie (um 1590) führen über andere verschiedenartige Schüsselsätze bis zu den Glasgewichten der Königl. Sächs. Normalgewichte aus der Friedrichsthaler Glashütte (um 1810). Über 50 verschiedene Gold- und Münzwagen sind ausgestellt, die neben frühen Gewichtssätzen des 17. und 18. Jahrhunderts auch Münzgewichte für Taler, Dukaten und zahlreiche andere in- und ausländische Münzen zeigen.

Der größte Teil der Bogengalerie wird von der Sammlung der astronomischen Hilfsinstrumente beansprucht. Diese beginnen mit ein- und mehrzügigen Handfernrohren aus Pappe, Holz oder Metall und zeigen die Entwicklung dieser einfachen astronomischen Beobachtungsinstrumente. An frühe italienische Erzeugnisse des 17. Jahrhunderts schließen sich englische Stücke von J. Dolland (1706 bis 1761) und von J. Ramsden (1735 bis 1800) an, die bis zu den Arbeiten Georg Reichenbachs (1772 bis 1826) und Joseph Fraunhofers (1787 bis 1826) weitergeführt werden. Dazu kommen deutsche und englische Tischfernrohre (Abb.), ein großes Spiegelteleskop von Georg Hearne (um 1790),

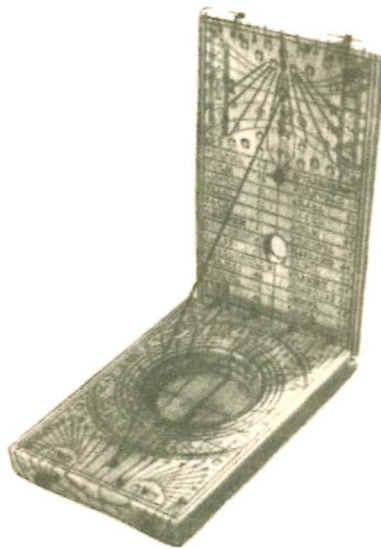


Passageinstrumente von J. Bird und J. Cary, sowie Voll- und Halbkreisgeräte von Chapot, Lenoir und Troughton aus der Zeit um 1660 bis 1790. Ein einmaliges Prachtstück sächsischen Instrumentenbaues ist das in der Mitte des Ausstellungsraumes freistehende Spiegelfernrohr der beiden Mechaniker Merklein und Zimmer aus der Löser-Werkstatt in

Schloß Reinhartz in der Dübener Heide aus dem Jahre 1742.

Die Sammlung der Rechenhilfsmittel gibt einen allgemeinen Überblick über die Entwicklung der Rechentechnik vom Handabakus über die Rechenpfennige und die Anfänge der mechanischen Rechenmaschine bis zu den ersten Rechenschiebern. Sie beschäftigt sich ausführlich mit dem Annaberger Adam Ries (1492 bis 1559), dem bedeutendsten deutschen Rechenmeister des 16. Jh., mit dem Rechnen auf den Linien und leitet von den Kerbhölzern und Zählstöcken zu den Schränken mit den Rechenmaschinen über. Unter diesen befinden sich u. a. die erste im Original erhaltene Sprossenrad-Räderrechenmaschine des französischen Mathematikers Blaise Pascal (um 1642), verschiedenartige Rechentrommeln und -scheiben, hölzerne japanische und russische Rechenbretter, sowie Arithmometer von Burkhardt, der um 1878 in Glashütte Rechenmaschinen baute und als Begründer dieser Fabrikation in Deutschland gilt.

Im oberen Ausstellungsraum ist jetzt die reichhaltige Uhrensammlung untergebracht, die durch ihre Kostbarkeiten zu den größten und bedeutendsten Sammlungen auf dem



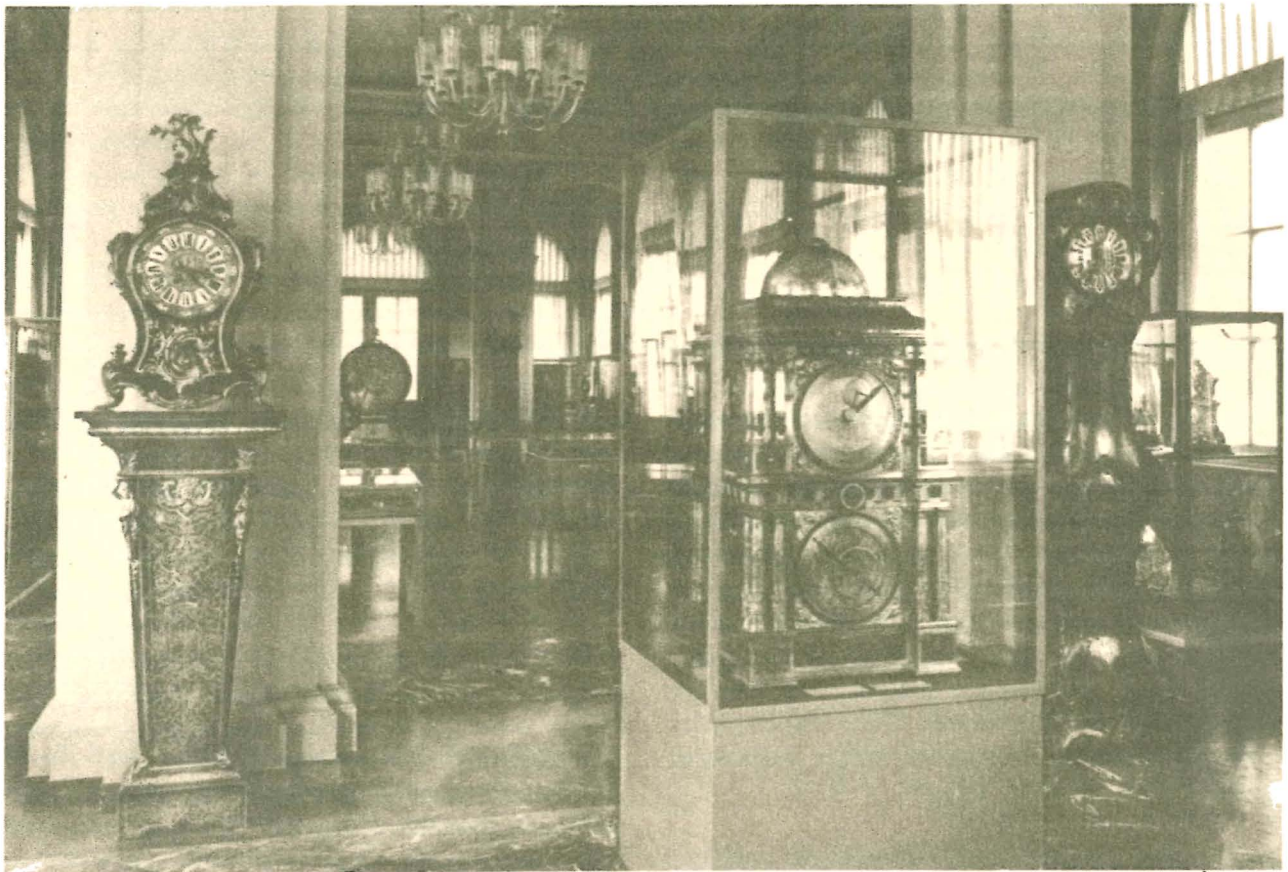
Gebiete der Chronometrie gehört (Abb. S. 27). Zahlreiche Sonnen- und Nachtuhren – unterschiedlich in Größe, Konstruktion und Material – zeigen die Entwicklung dieser Zeitmesser von den frühen Stücken des 16. Jahrhunderts bis zu den späten Rädersonnenuhren um 1760. Andere tragbare, in der Form recht unterschiedliche Sonnenuhren aus Holz, Messing oder Elfenbein von den Augsburger Meistern Hölderich, Graßl und Schrettegger, aber auch von Bernier und Langlois, geben einen Einblick in die Vielzahl deutscher und französischer Reise- und Taschensonnenuhren (Abb.). Dazu kommen die großen und schweren Sonnenuhren auf Marmor- und Steinplatten, die so beliebten Öluhren und die bekannte Mittagskanone. Seltene Stunden-

gläser und Kanzelsanduhren aus der Zeit um 1675 bis 1750 geben einen Einblick in die vielseitige Verwendung dieser interessanten Zeitmesser.

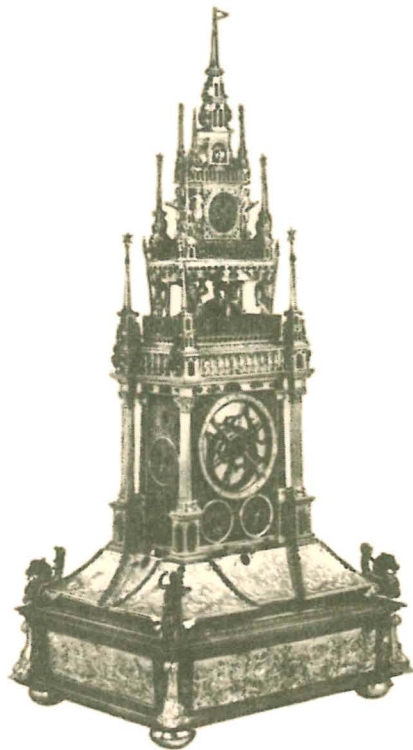
Die umfangreiche Taschenuhrsammlung mit erlesenen Hals- und Formenuhren ist in über 10 großen Ausstellungs vitrinen untergebracht. Die Darstellung beginnt mit der deutschen Taschenuhr und wird über die 1668 gegründete Dresdner Kleinuhrmacher-Innung bis zu den schweizerischen, englischen und französischen Kleinuhren weitergeführt. Das Prachtstück der Schweizer Sammlung ist eine ovale vergoldete Einzeiger-Halsuhr mit getriebenen Zifferblatt und Gehäusedeckel von J. B. Duboule (um 1630). Bei einer russischen Holztaschenuhr sind sämtliche Teile, wie z. B. Zahnräder, Zeiger, Verstiftungen und Verschraubungen, einschließlich Gehäuse und Zifferblatt – mit Ausnahme der Aufzugsfeder und der Unruhe – aus Buchsbaumholz geschnitten; eine handwerkliche Meisterleistung von M. S. Bronnikow aus der Zeit um 1850. In der Sammlung der englischen Taschenuhren sind neben uhrentechnisch sehr interessanten Werken von Tallans, Graham und Earnshaw auch englische Seechronometer von Mudge und Parkinson. Eine achteckige Einzeiger-Halsuhr mit einem herrlichen Bergkristallgehäuse und mit feinen figürlichen und ornamentalen Gravuren auf dem Zifferblatt und auf der Platine gehört mit einer seltenen Totenkopf-Halsuhr in aufklappbarem Silbergehäuse – beide aus der Zeit um 1650 – zu den Prachtstücken der französischen Taschenuhren.

Glanzstücke deutscher Handwerksmeister sind die kostbaren, oft einmaligen großen astronomischen Kunst- und Automatenuhren aus der Zeit von 1650 bis 1750. In diesen mechanischen Räderuhren mit ihrem enormen Formenreichtum und den vielseitigen astronomischen Angaben spiegelt sich auch die rasche Entwicklung der Mathematik, Astronomie und Technik dieser Zeit wider. In einer Sondervitrine steht die berühmte und kostbarste Uhr des Staatl. Math.-Phys. Salons, die 1,35 m große astronomische Kunstuhr von Eberhard Baldewein und Hans Bucher, gebaut von 1563 bis 1567. Die Zeiger der sechs Planetenlaufscheiben geben entsprechend des an der Uhr zur Darstellung gebrachten ptolemäischen Systems die Umdrehung von Venus, Merkur, Mars, Saturn, Jupiter und Mond um die Erde an; die beiden anderen Scheiben sind als Astrolabium und für Kalenderberechnungen ausgebildet.

Zu den bekanntesten süddeutschen Kostbarkeiten des 16. Jh. gehören die Tafelaufsatz-Automatenuhr „Die verkehrte Welt“, eine fast 80 cm hohe turmförmige vergoldete Tischuhr (Abb.) mit zwölf Zifferblättern für Zeit- und Kalenderrechnungen und mehreren übereinander angeordneten Automatengruppen



von Paulus Schuster und die bekannte Kugellauf-Kunstuhr „Hottentottentanz“ von Mattheus Rougell Augsburg. Weitere weltberühmte Uhrenkostbarkeiten sind u. a. die



Weltzeituhr mit 360 Zifferblättern von Andreas Gärtner, die die Zeitunterschiede zwischen Dresden und den auf den einzelnen Zifferblättern aufgetragenen Orten angibt, und die mit vergoldeten Schnitzereien überreich verzierte astronomisch-geographische Kunstuhr des Prager Jesuitenpaters Johannes Klein.

Dieser kurze Rundgang durch die einzelnen Ausstellungsräume mit der Betrachtung einiger größerer Sammlungen und der Besprechung schöner und interessanter Gegenstände deutet zwar die umfangreiche Museumsarbeit des Staatl. Math.-Phys. Salons an, doch ist damit keinesfalls die Aufgabenstellung dieses Instituts erschöpft.

Regelmäßige Vortrags- und Filmveranstaltungen über aktuelle Probleme aus der Welt der Naturwissenschaften, laufend neue Sonderausstellungen und eine enge fruchtbare Zusammenarbeit mit den Schulen und gesellschaftlichen Organisationen machen dieses Museum zu einer wahren Bildungs- und Lehrstätte aller Werktätigen. Dazu gehört auch eine jahrelange sehr enge Zusammenarbeit mit der Fernsehakademie des Deutschen Fernsehfunks, mit der DEFA und mit zahlreichen Wissenschaftlern und Museen des In- und Auslandes. Wie schon aus der Institutsbezeichnung hervorgeht, ist der Staatl. Math.-Phys. Salon, der dem Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen unterstellt ist, nicht nur ein Museum, sondern auch eine Forschungsstelle. Einige ihm seit Jahren über-

tragene wissenschaftliche Arbeiten sind für die Museumsarbeit in der DDR von großer nationaler und internationaler Bedeutung. Dazu gehören Erfassung, Inventarisierung und wissenschaftliche Bearbeitung der im Weltmaßstab bedeutenden Instrumente und Apparate, zu der vor einigen Jahren die ganze Welt aufgerufen wurde und der sich die Deutsche Demokratische Republik auch sofort anschloß. Den Auftrag über die durchzuführende Landesinventarisierung und die damit verbundene Auswertung wurde der Forschungsstelle übertragen, in der für alle technischen und wissenschaftlichen Unterlagen ein Landesarchiv errichtet werden soll. Die Forschungsergebnisse erscheinen in der neuen Schriftenreihe des Instituts, in den „Veröffentlichungen des Staatl. Math.-Phys. Salons“, die seit Jahren von dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften in Berlin herausgegeben werden.

Dieser gestraffte Bericht über Sammlungen, Forschungsarbeiten und Aufgabenstellungen kann nur einen kleinen Überblick über den Staatl. Math.-Phys. Salon geben. In einer Sonderausstellung in diesem Jahr zum 20. Geburtstag unserer DDR wird – gleichzeitig mit dem Dank für die großzügige Förderung aller museumstechnischer und wissenschaftlicher Belange – ausführlich über die rasche Entwicklung berichtet, und gleichzeitig werden die künftigen Aufgaben dieses Museums behandelt und dargestellt.

H. Gröttsch

Zweiermengen und geordnete Paare

$$\{a,b\}=\{b,a\}$$
$$(a,b)\neq(b,a)$$

In den bisher erschienenen Beiträgen über Mengenlehre haben wir lediglich Mengen kennengelernt, deren Elemente nur aus einzelnen Objekten bestehen, aber selbst keine Mengen sind. Man spricht in diesen Fällen von sogenannten Urelementen oder Individuen, die zu Mengen zusammengefaßt wurden. Nun kann man aber auch Mengen bilden, deren Elemente selbst wieder Mengen darstellen. Das wollen wir einmal tun. $K_1, K_2, K_3, \dots, K_{10}$ seien die Mengen der Schüler der zehn Klassen einer Landschule. Diese Mengen kann man nun wieder zu einer neuen Menge zusammenfassen.

$$K = \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_{10}\}$$

Die Elemente dieser Menge K sind nicht etwa einzelne Schüler, sondern Mengen von Schülern.

Natürlich können wir auch aus allen Schülern der Landschule eine Menge bilden, die wir mit L bezeichnen wollen. Die Menge K ist aber nicht etwa gleich der Menge L , denn K enthält als Elemente Mengen von Schülern, während die Elemente der Menge L einzelne Schüler, also Urelemente sind.

Um den Unterschied zwischen Mengen, deren Elemente wiederum Mengen sind, und Mengen, deren Elemente Urelemente sind, zu verdeutlichen, wollen wir noch ein weiteres Beispiel etwas ausführlicher betrachten.

Wir erinnern uns an die sechs befreundeten Schüler Achim, Bernd, Christine, Detlef, Elke und Frank (*alpha* 3/67, S. 74). Diese sechs Schüler wollen ein Schachturnier durchführen, bei dem jeder Schüler gegen jeden Schüler spielen soll. Betrachten wir jetzt einmal die auftretenden Mengen.

Die Menge der sechs befreundeten Schüler war schon mit S bezeichnet worden.

$$S = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Da jeder Schüler mit jedem Schüler eine Partie spielen soll, müssen wir aus den sechs Schülern alle möglichen Schülerpaare bilden. Die Reihenfolge der Schüler ist bei diesen zu bildenden Schülerpaaren beliebig, da es ja dasselbe bedeutet, ob Schüler a gegen Schüler b oder Schüler b gegen Schüler a spielt. Mengentheoretisch bedeutet das, daß aus der Menge S alle möglichen Teilmengen gebildet werden müssen, die jeweils nur

aus zwei Elementen bestehen. Insgesamt gibt es $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ solcher Teilmengen.

$$\begin{aligned} Z_1 = \{a, b\}, Z_2 = \{a, c\}, Z_3 = \{a, d\}, Z_4 = \{a, e\}, Z_5 = \{a, f\}, \\ Z_6 = \{b, c\}, Z_7 = \{b, d\}, Z_8 = \{b, e\}, Z_9 = \{b, f\}, \\ Z_{10} = \{c, d\}, Z_{11} = \{c, e\}, Z_{12} = \{c, f\}, \\ Z_{13} = \{d, e\}, Z_{14} = \{d, f\}, \\ Z_{15} = \{e, f\}. \end{aligned}$$

Solche Mengen, die nur zwei Elemente besitzen, pflegt man auch als Zweiermengen zu bezeichnen. Die Elemente dieser Zweiermengen sind wiederum einzelne Schüler, also Urelemente.

Für die 15 auszutragenden Spiele sind 5 Spielrunden notwendig. Nehmen wir an, die 5 Spielrunden werden folgendermaßen festgelegt:

1. Spielrunde: $Z_3 = \{a, d\}, Z_8 = \{b, e\}, Z_{12} = \{c, f\}$
2. Spielrunde: $Z_4 = \{a, e\}, Z_6 = \{b, c\}, Z_{14} = \{d, f\}$
3. Spielrunde: $Z_5 = \{a, f\}, Z_7 = \{b, d\}, Z_{11} = \{c, e\}$
4. Spielrunde: $Z_1 = \{a, b\}, Z_{10} = \{c, d\}, Z_{15} = \{e, f\}$
5. Spielrunde: $Z_2 = \{a, c\}, Z_9 = \{b, f\}, Z_{13} = \{d, e\}$

Die drei Schülerpaare, die gleichzeitig die erste Schachpartie austragen (die Zweiermengen Z_3, Z_8 und Z_{12}), wollen wir jetzt zu einer Menge zusammenfassen und mit Z_1 bezeichnen. Z_1 ist demnach die Menge der Schülerpaare der ersten Spielrunde.

$$Z_1 = \{Z_3, Z_8, Z_{12}\}$$

Die Elemente dieser Menge sind allerdings keine einzelnen Schüler, sondern wieder Mengen von Schülern, in unserem Falle speziell Zweiermengen. Die Menge Z_1 kann man auch in der Form

$$Z_1 = \left\{ \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\} \right\} \text{ schreiben.}$$

Aus dieser Schreibweise erkennt man sofort, daß die Elemente der Menge Z_1 wieder Mengen sind.

Die Menge Z_1 ist nicht gleich der Menge S , denn S enthält als Element ja nur einzelne Schüler. Zwischen Z_3, Z_8, Z_{12} einerseits und Z_1 andererseits bestehen nicht etwa Teilmengenbeziehungen, sondern Elementbeziehungen. Es gilt:

$$Z_3 \in Z_1, Z_8 \in Z_1, Z_{12} \in Z_1.$$

Genauso kann man die Schülerpaare der 2. bis 5. Spielrunde jeweils zu Mengen Z_{II} bis Z_V und alle Schülerpaare (Zweiermengen Z_1 bis Z_{15}) zu einer Menge Z zusammenfassen. Z_1 bis Z_V sind dann Teil-

mengen von Z . Zu beachten ist aber, daß nicht etwa Z_1 bis Z_{15} Teilmengen von Z , sondern Elemente von Z sind. Wir wollen damit dieses Beispiel abschließen. Bei unseren sechs Freunden möchten wir aber noch etwas verweilen.

Nehmen wir einmal an, unsere Schüler a, b, c, d, e, f sind nicht nur befreundet, sondern sie gehen auch in dieselbe Klasse und bilden eine Schülerbrigade. Diese Brigade will zur Verbesserung ihrer schulischen Leistungen Schülerpatenschaften einrichten. Zu diesem Zweck sollen aus dieser Brigade drei Schülerpaare derart gebildet werden, daß jeweils ein leistungsstärkerer Schüler die Patenschaft über einen leistungsschwächeren Schüler übernimmt. Die Schüler mit den besseren Leistungen seien a, b, c , und die Schüler mit den schwächeren Leistungen seien d, e, f . In einer Brigadesitzung werden die Schülerpaare für die Patenschaften festgelegt und an die Tafel geschrieben. Es wird vereinbart, daß der Pate, der die Patenschaft über einen leistungsschwächeren Schüler übernimmt, jeweils an die erste Stelle gesetzt wird.

$a, d \quad b, e \quad c, f$

Durch diese Vereinbarung kann man der Aufstellung entnehmen, wer jeweils der Pate ist. Die Reihenfolge der Schüler dieser Paare ist nicht mehr beliebig. Man darf deshalb diese Paare auch nicht als einfache Zweiermenge auffassen, bei denen ja die Reihenfolge der Elemente beliebig ist. Es handelt sich in diesem Falle um sogenannte geordnete Paare. Das drückt man auch in der Schreibung dieser Paare aus, indem man zur Unterscheidung von einer einfachen Zweiermenge das geordnete Paar in runde Klammern setzt. (Für die Schreibweise eines geordneten Paares sind auch eckige Klammern gebräuchlich.)

$(a, d) \quad (b, e) \quad (c, f)$

Eine Vertauschung der Elemente ist also bei den geordneten Paaren ohne neue Vereinbarung des Zusammenhangs nicht zulässig. Für unser Beispiel würde eine Vertauschung der Elemente der geordneten Paare bedeuten, daß nicht a, b, c , sondern d, e, f die Paten wären, was unserer Vereinbarung widerspräche. Wir können jetzt diese geordneten Paare wieder zu einer Menge P_1 zusammenfassen. P_1 ist dann eine Menge von geordneten Paaren, die in unserem Beispiel Patenschaften darstellen.

$$P_1 = \left\{ (a, d), (b, e), (c, f) \right\}$$

Unter der angegebenen Voraussetzung, daß die leistungsstärkeren Schüler a, b, c die Paten sein sollen, können selbstverständlich auch andere Zusammenstellungen von Patenschaften erfolgen, zum Beispiel $(a, d), (b, f), (c, e)$. Es ergeben sich dann entsprechend andere Mengen von Patenschaften. Insgesamt sind sechs Mengen P_1 bis P_{V1} von Patenschaften möglich. Versucht es einmal, die vier fehlenden Möglichkeiten

anzugeben! Die Mengen P_1 bis P_{V1} sind alle untereinander verschieden, denn sie enthalten alle verschiedene geordnete Paare als Elemente.

Zur Herausarbeitung des Unterschiedes dieser Mengen von geordneten Paaren zu den im vorangegangenen Beispiel betrachteten Mengen von Zweiermengen wollen wir zwei entsprechende Mengen vergleichen.

$$P_1 = \left\{ (a, d), (b, e), (c, f) \right\} \quad Z_1 = \left\{ \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\} \right\}$$

P_1 ist eine Menge von geordneten Paaren, bei denen die Elemente innerhalb der geordneten Paare nicht vertauscht werden dürfen, während die Menge Z_1 als Elemente Zweiermengen enthält. Die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Zweiermengen ist natürlich beliebig. Bezogen auf unser Beispiel des Schachturiers bedeutet eine Vertauschung der Elemente innerhalb der Zweiermenge ja lediglich, daß z. B. nicht der Schüler a gegen den Schüler d spielt, sondern d gegen a spielt, und das ist dasselbe. Es ist also z. B.

$$P_1 = \left\{ (a, d), (b, e), (c, f) \right\} \neq \left\{ (d, a), (e, b), (f, c) \right\}$$

$$Z_1 = \left\{ \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\} \right\} = \left\{ \{d, a\}, \{e, b\}, \{f, c\} \right\}$$

Natürlich würde auch schon die Vertauschung der Elemente nur eines geordneten Paares bei der Menge P_1 zu einer anderen Menge führen. Die Reihenfolge der geordneten Paare bzw. der Zweiermengen ist allerdings bei den Mengen P_1 bzw. Z_1 wieder beliebig. Fassen wir jetzt einmal das Wichtigste über das geordnete Paar zusammen.

Eine Zusammenstellung von zwei Objekten in bestimmter Reihenfolge nennt man ein geordnetes Paar.

Zur Unterscheidung von einer Zweiermenge, die ja auch zwei Objekte enthält, deren Reihenfolge aber beliebig ist, setzt man ein geordnetes Paar in runde Klammern.

In dem geordneten Paar (a, b) heißt a das erste und b das zweite Element des geordneten Paares.

Im Gegensatz zu einer Zweiermenge, bei der die beiden Elemente immer wohlunterschieden sein müssen, kann man auch geordnete Paare bilden, die als erstes und zweites Element ein und dasselbe Element besitzen.

Beispiele für geordnete Paare:

$$(3, 4), (4, 3), (3, 3), (a, b), (b, a), (a, a)$$

Zwei geordnete Paare sind dann und nur dann gleich, wenn ihre beiden ersten und ihre beiden zweiten Elemente gleich sind.

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2), \text{ dann und nur dann, wenn } a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2.$$

$$(3, 4) = (3, 4), (3, 4) \neq (4, 3)$$

$$(a, b) = (a, b), (a, b) \neq (b, a), \text{ wenn } a \neq b$$

In einem der nächsten Hefte werden wir etwas mehr über die Bedeutung der geordneten Paare erfahren.

H. Tiede

Der Eulersche Polyedersatz

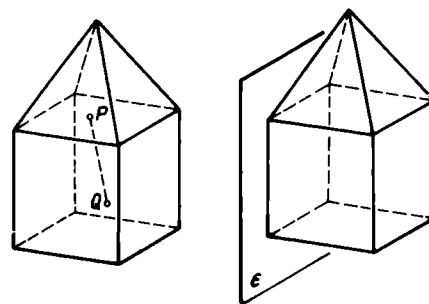


Abb. 1a und b

Leonhard Euler (1707 bis 1783) war Professor in Petersburg und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin. (Genauer über das Leben Leonhard Eulers kann in „alpha“ Jahrgang 1967 Heft 4 nachgelesen werden.)

Seinen „Polyedersatz“ hat Euler 1752 gefunden. Er lautet:

„Bei jedem konvexen Polyeder im dreidimensionalen Raum ist die Summe aus der Zahl E der Ecken und der Zahl F der Flächen um zwei größer als die Zahl K der Kanten.“

$$\text{Also: } E + F = K + 2 \quad (1)$$

Bevor wir einen Beweis für diesen Satz angeben, wollen wir für solche Leser, die den in Heft 1 (Jahrgang 1968) dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz über die regulären Polyeder nicht gelesen haben, erklären, was unter dem Begriff „Polyeder“ und was unter der Eigenschaft „konvex“ zu verstehen ist:

Das Wort „Polyeder“ kennzeichnet entweder einen durch Ebenenstücke begrenzten massiven Körper endlicher Größe, oder nur die aus Ebenenstücken zusammengesetzte Oberfläche eines solchen Körpers (vgl. Rudolf Boreis, Darstellende Geometrie Bd. I, S. 117). Die Eigenschaft „konvex“, die einem Polyeder zukommen kann, läßt sich ebenfalls auf verschiedene Art erklären:

Ein Polyeder (hierbei aufgefaßt als massiver Körper) ist konvex, wenn die (geradlinige) Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte P, Q des Polyeders stets ganz dem Polyeder angehört. (Vgl. z. B. Kurt Reidemeister, Topologie der Polyeder, Leipzig 1953, S. 13.) Es ist klar, daß bei dieser Definition vorausgesetzt wird, daß das Polyeder ein massiver Körper ist (s. Abb. 1a). Die zweite Erklärung der Eigenschaft „konvex“ benutzt die Tatsache, daß eine Ebene den dreidimensionalen Raum in zwei dreidimensionale Teile teilt, die wir Halbräume nennen. Die Ebene selbst gehöre keinem der beiden Halbräume an. Hiermit kann man definieren:

Ein Polyeder ist konvex, wenn es bei Teilung des Raumes durch eine Ebene ϵ , welche irgendeine (Seiten-) Fläche des Polyeders enthält, stets einen der beiden Halbräume ganz meidet (vgl. auch R. Boreis, Darstellende Geometrie Bd. I, S. 119). Es ist offensichtlich, daß diese zweite Definition die Zugrundelegung beider Erklärungen des Begriffes „Polyeder“ erlaubt. (Siehe Abb. 1b.) (Das in Abb. 2 dargestellte Polyeder ist nicht konvex, was aus der Anwendung der genannten Konvexitätskriterien ersichtlich ist.) Dem Beweis des Eulerschen Polyedersatzes schicken wir eine Betrachtung über ein beliebiges ebenes Maschennetz $\mathfrak{N}$ voraus. Zunächst seien die Begriffe „Masche“ und „Maschennetz“ in einer für unsere Gedanken-gänge zweckmäßigen Art und Weise definiert (siehe Abb. 3a):

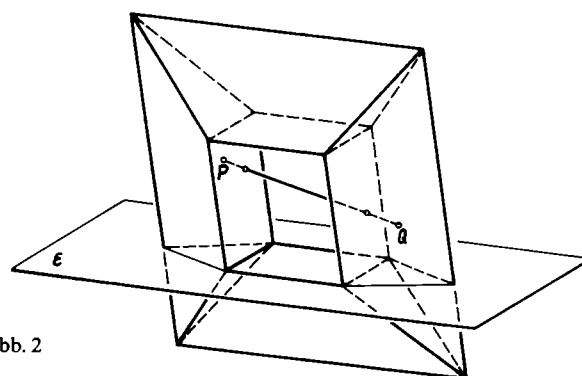


Abb. 2

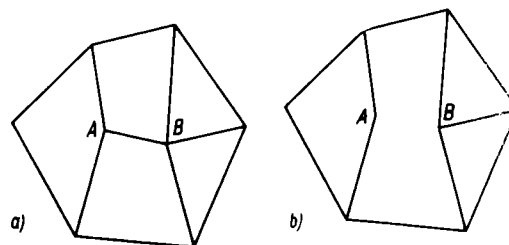
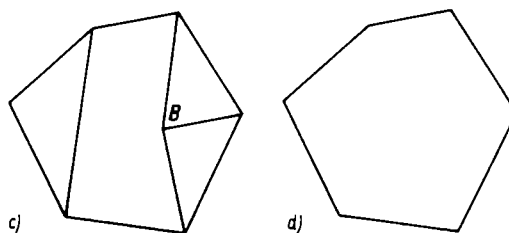


Abb. 3



Eine Masche sei ein geschlossenes Polygon, das sich nicht selbst schneidet; ein Maschennetz bestehe aus n Maschen ($n \geq 1$), wobei für $n > 1$ jede Masche des Netzes mit mindestens einer anderen Masche des Netzes mindestens eine Seite gemeinsam hat und jeder Punkt innerhalb der äußeren Umrandung des gesamten Netzes, der kein Eckpunkt einer Masche („Knotenpunkt“ oder „Knoten“) ist und der auch keiner Seite einer Masche angehört, von einer und nur einer Masche des Netzes umschlossen wird.

In $\mathfrak{N}$ sei E die Zahl der Knotenpunkte, K die Zahl der Seiten (Verbindungsstrecken je zweier Knotenpunkte) und F die Zahl der Maschen. Hiernach stellen wir fest:

$$E - K + F = 1. \quad (2)$$

Wir behaupten, daß diese Beziehung für alle ebenen Maschennetze endlicher Größe gilt und beweisen unsere Behauptung, indem wir ein beliebiges Netz, z. B. das Netz $\mathfrak{N}$ auf noch zu erklärende Art schrittweise vereinfachen. Wir zeigen dann, daß nach jedem solchen Schritt der Zahlenwert von

$$E - K + F \quad (3)$$

unverändert geblieben ist. Haben wir schließlich nach endlich vielen Schritten das Netz zu einem einmaschigen Netz (Abb. 3d) vereinfacht, so ist dann unmittelbar zu erkennen, daß der konstant gebliebene Zahlenwert des Ausdruckes (3) gleich eins ist.

Die genannte Vereinfachung des Netzes erfolgt durch zwei Arten von Einzelschritten:

1. Weglassen einer Seite (z. B. AB) im Inneren des Netzes (siehe Abb. 3b). Dabei vermindern sich K und F je um eins. Dies wirkt sich aber auf den Zahlenwert von (3) nicht aus, da in (3) K und F verschiedene Vorzeichen haben.

2. Weglassen eines Knotens, von dem nur zwei Seiten ausgehen (z. B. A in Abb. 3b) und Ersetzen dieser beiden Seiten durch eine Seite. (Siehe Abb. 3c.)

Dabei vermindern sich E und K je um eins. Auch diese Veränderung wirkt sich offenbar auf den Zahlenwert von (3) nicht aus. Durch wiederholte Ausführung der unter 1. und 2. genannten Einzelschritte reduzieren wir das Netz so weit, daß nur noch dessen ursprüngliche äußere Umrandung und die von dieser gebildete Masche vorhanden sind (siehe Abb. 3d). Aus dem so vereinfachten Netz liest man sofort ab: $E = K$, $F = 1$, also $E - K + F = 1$. Nach den vorangegangenen Ausführungen muß diese Gleichung (2) auch für das ursprüngliche Netz $\mathfrak{N}$ gültig sein, was zunächst zu beweisen war.

Wir kommen nun zum Beweis des Eulerschen Satzes.

Hierzu projizieren wir durch Parallel- oder Zentralprojektion (Zentrum außerhalb des Polyeders) die Ecken und Kanten eines konvexen Polyeders derart auf eine Ebene π , daß niemals zwei verschiedene Eckpunkte auf ein und denselben Punkt von π abgebildet werden und daß kein Eckpunkt auf das Bild einer Kante projiziert wird, die nicht von diesem Eckpunkt ausgeht. Eine Projektion, die diesen Bedingungen genügt, kann man immer finden. Fällt nämlich die Projektion eines Eckpunktes A auf das Bild einer Kante k , die nicht von diesem Eckpunkt ausgeht, so liegt (falls eine Zentralprojektion gewählt wurde) das Projektionszentrum in der Verbindungsebene von A mit k , oder es verlaufen (bei Parallelprojektion) die Projektionsstrahlen parallel zu dieser Ebene.

Wir denken uns nun alle möglichen Verbindungsebenen der Kanten mit den Ecken des Polyeders gelegt (dazu gehören auch die Ebenen, in welchen die Polyederflächen liegen). Es sind dies endlich viele Ebenen. Wählt man nun als Projektionszentrum irgendeinen Punkt außerhalb des Polyeders, der in keiner dieser Ebenen liegt, so hat man eine Zentralprojektion, die den gestellten Forderungen genügt. Gibt man aber einer Parallelprojektion den Vorzug, so muß man noch zeigen, daß immer parallele Projektionsstrahlen existieren, die zu keiner der Verbindungsebenen der Ecken mit den Kanten des Polyeders parallel sind. Die hierzu erforderlichen Betrachtungen wollen wir jedoch übergehen.

Hinsichtlich der Projektion existiert auf dem Polyeder ein Umrißpolygon $\mathcal{U}$ (in Abb. 4 ist dies das Polygon $ABCD$). Es teilt die Oberfläche des Polyeders in zwei Teile, deren Projektionen in der Bildebene π zwei Netze $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ mit demselben Randpolygon $\mathcal{U}'$ sind. (In Abb. 4 ist $\mathcal{U}'$ das Polygon $A'B'C'D'$.)

Für $\mathfrak{N}_1$ gilt $E_1 - K_1 + F_1 = 1$, und für $\mathfrak{N}_2$ gilt entsprechend $E_2 - K_2 + F_2 = 1$. Die Addition ergibt

$$E_1 + E_2 - (K_1 + K_2) + F_1 + F_2 = 2 \quad (4)$$

$F_1 + F_2$ ist gleich der Anzahl F der Flächen des Polyeders. In $E_1 + E_2$ und $K_1 + K_2$ treten die Ecken bzw. Seiten von $\mathcal{U}'$ doppelt gezählt auf. Sei n die Zahl der Ecken bzw. Seiten des Randpolygons $\mathcal{U}'$, so sind also $E_1 + E_2$ und $K_1 + K_2$ je um n größer als die Zahl E der Polyederecken bzw. als die Zahl K der Polyederkanten.

$$E_1 + E_2 = E + n, \quad K_1 + K_2 = K + n.$$

Aus (4) folgt hiernach $E + n - (K + n) + F = 2$, also

$$E - K + F = 2.$$

Wir haben hiermit die Gleichung (1) und damit den Eulerschen Polyedersatz für konvexe Polyeder nachgewiesen. Wesentlich dabei

war, daß die Projektion des Polyeders auf π genau zwei einfach übereinanderliegende Netze mit gleichem Randpolygon ergibt. Das ist bei konvexen Polyedern immer der Fall. Daher gilt der Eulersche Polyedersatz sicher für konvexe Polyeder.

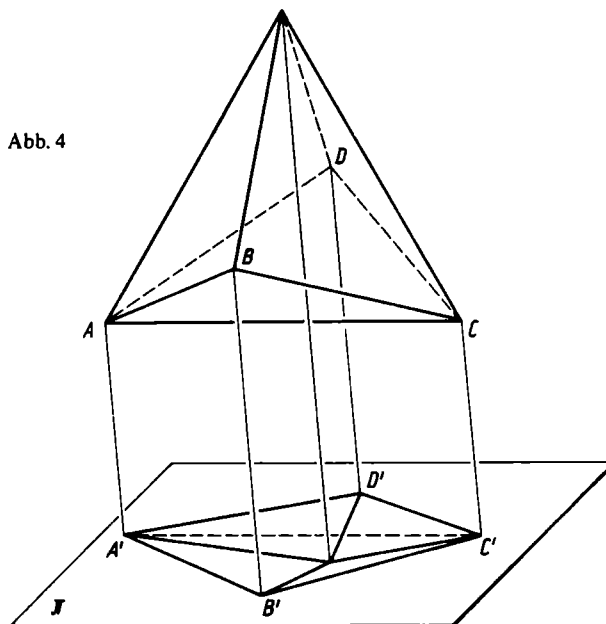


Abb. 4

Es gibt auch viele nicht konvexe Polyeder, für die ebenfalls $E - K + F = 2$ gilt. Unmittelbar klar ist die Aussage:

Für ein nichtkonvexes Polyeder gilt die Gleichung (1), wenn es ein konvexes Polyeder gibt, das dieselbe Eckenzahl, dieselbe Kantenanzahl und dieselbe Flächenzahl hat wie das nichtkonvexe Polyeder.

Abb. 5 gibt hierzu ein einfaches Beispiel.

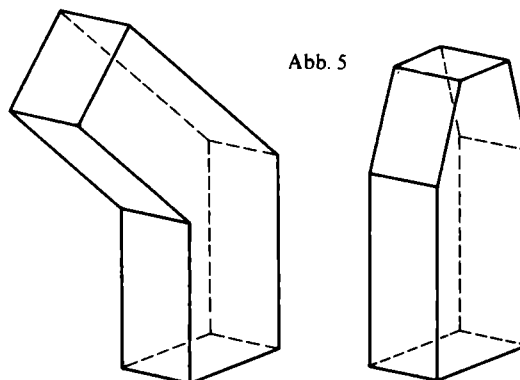


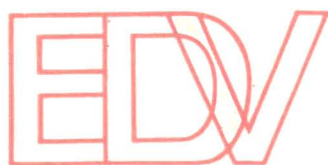
Abb. 5

Es gibt aber auch viele nichtkonvexe Polyeder, für die die Gleichung (1) nicht gilt. (Abb. 2 zeigt ein solches Polyeder.) Daher gilt für nichtkonvexe Polyeder die Gleichung (1) nicht allgemein. Hieraus erkennt man, daß der Eulersche Polyedersatz allgemein nur für konvexe Polyeder gilt.

Aufgabe: Man suche noch verschiedene nichtkonvexe Polyeder, für die nicht gilt

$$E - K + F = 2.$$

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung



Teil 2

Das Rechnen im Dezimalsystem finden wir zum Beispiel technisch realisiert bei einer *einfachen Hand-rechenmaschine*, wie sie gelegentlich in Büros für bescheidene Ansprüche verwendet wird. Die zehn Ziffern sind in der Regel auf Walzen aufgetragen. Eine solche Walze kann dann *zehn verschiedene Zustände*, nämlich zehn Drehstellungen einnehmen. Das Rechnen mit der Maschine ist weiter nichts als ein sinnvolles mechanisches Zusammenspiel mehrerer Walzen. An diesem Prinzip ändert sich wenig, wenn die Maschine, statt mit der Hand, elektrisch betrieben wird, etwa an der Kasse unseres Lebensmittelkonsums.

Eine Hand- oder Tischrechenmaschine arbeitet – vom Standpunkt der modernen Rechentechnik gesehen – im „Schneckentempo“. Will man höhere Rechengeschwindigkeiten erzielen, so muß man weitestgehend auf mechanisch bewegte Teile verzichten, denn dies würde bei der Vielzahl der zu verarbeitenden Informationen erstens einen erheblichen Materialaufwand bedeuten, die Anlage müßte ungebührlich groß sein, zweitens müßte der Automat zwangsläufig sehr langsam arbeiten, da bei jeder Bewegung die Trägheit des betreffenden Massestücks hemmend wirkt. Es geht also darum, mechanisch bewegte *Schaltelemente* wie zum Beispiel Walzen durch andere Schaltelemente zu ersetzen, die den höheren Anforderungen genügen. Als solche eignen sich je nach dem Grad dieser Anforderungen:

- pneumatische, also mit Luftdruck betriebene Vorrichtungen (man spricht scherzhaft von „Pustelogik“),
- elektromagnetische Relais,
- Elektronenröhren,
- Schaltelemente aus Halbleitern.

Über die Wirkungsweise solcher Schaltelemente hört ihr später mehr.

Für uns ist zunächst folgendes wichtig: Welcher Art das Schaltelement auch sei, es muß in der Lage sein, sämtliche beim Rechnen verwendeten Ziffern physikalisch zu realisieren, das heißt, es muß so viele stabile Zustände annehmen können, wie es Ziffern gibt, für das Rechnen im *Dezimalsystem* also zehn verschiedene

Zustände. Das ist eine ziemlich hohe Zahl. Man müßte bei einem elektrischen Schaltelement diese zehn Zustände etwa durch zehn verschiedene Stromstärken oder zehn verschiedene Spannungen realisieren. Eine solche Vorrichtung wäre nicht nur kompliziert, sondern, wie man sich vorstellen kann, auch recht störanfällig. Es ergibt sich also die Frage, ob man Zahlen auch mit weniger als zehn Ziffern darstellen kann. *Überlege, vom prinzipiellen Aufbau des Dezimalsystems ausgehend, wie man die natürlichen Zahlen (etwa von 0 bis 30) mit nur fünf Ziffern darstellen kann!*

1.3. Das Fünfersystem

Es geht also darum, das Dezimalsystem durch ein neues Zahlensystem, in diesem Fall das Fünfersystem, zu ersetzen. Das Fünfersystem hat rechentechnisch keine Bedeutung. Wir behandeln es dennoch, um dem Leser Gelegenheit zum Üben einiger in der Rechentechnik immer wiederkehrenden Verfahren zu geben. Das ist einmal die Umkodierung von einem System in ein anderes und zum zweiten das Rechnen in anderen Systemen. Die Ziffern unseres neuen Systems, des Fünfersystems, müssen wir streng von denen des Dezimalsystems unterscheiden, etwa durch einen Querstrich:

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}.$$

Die Zahlen 0 bis 4 darzustellen macht keine Schwierigkeiten. Wir setzen

$$\begin{array}{lll} 0 = \bar{0} & 3 = \bar{3} & 4 = \bar{4}, \\ 1 = \bar{1} & 2 = \bar{2} & \end{array}$$

wobei also jeweils dieselbe Zahl links vom Gleichheitszeichen in der alten Dezimal-, rechts in der neuen Kodierung geschrieben wird. Wie nun weiter? Wenn in der Dezimalschreibweise, angelangt bei der Zahl 9, alle Ziffern verbraucht sind, fangen wir bekanntlich wieder mit 0 an, markieren aber den Übergang durch eine 1 in der zweiten Stelle (10), beim nächsten Zehnerüberlauf durch eine 2 in der zweiten Stelle (20) usw., bis auch in der zweiten Stelle, der Zehnerstelle, alle Ziffern verbraucht sind, so daß wir eine neue Stelle (die Hunderter) „eröffnen“ müssen usw. Übertragen wir dieses Prinzip auf das Fünfersystem, so ergibt sich

$$\begin{array}{lll}
5 = \overline{10} & 24 = \overline{44} & 75 = \overline{300} \\
6 = \overline{11} & 25 = \overline{100} & \\
7 = \overline{12} & 26 = \overline{101} & \\
8 = \overline{13} & & \\
9 = \overline{14} & 124 = \overline{444} & \\
10 = \overline{20} & 125 = \overline{1000} & \\
11 = \overline{21} & 49 = \overline{144} & \text{usw.} \\
& 50 = \overline{200} &
\end{array}$$

Die Darstellung läßt sich beliebig fortsetzen. Man erkennt leicht, daß die neue Schreibweise auch wieder eine kodierte Summe ist, diesmal nach Potenzen von 5 geordnet:

$$\overline{243} = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0.$$

(rechts vom Gleichheitszeichen verwenden wir die Ziffern aus dem Dezimalsystem.) Den Dezimalbrüchen im alten System entsprechen die Fünferbrüche:

$$\begin{aligned}
0,40\overline{3} &= 4 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{25} + 3 \cdot \frac{1}{125} \\
&= 4 \cdot 5^{-1} + 0 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-3}
\end{aligned}$$

Nun zur Umkodierung vom Dezimalsystem in das Fünfersystem: Wir üben es zunächst mit ganzen Zahlen. Am einfachsten ist die Lösung, wenn die gegebene Dezimalzahl eine reine Potenz von 5 ist, z. B.

$$3125 = 5^5 = \overline{100000}.$$

In allen anderen Fällen suchen wir die nächstkleinere Fünferpotenz, stellen fest, wie oft diese in der Zahl enthalten ist (es kann höchstens viermal sein), machen dasselbe mit dem Rest usw. Beispiel: Gegeben die Dezimalzahl 8579. Die nächstkleinere Fünferpotenz, nämlich 3125, ist zweimal enthalten. Der Rest ist 2329. Darin ist 625 = 5⁴ dreimal enthalten. Rest 454. Darin ist 125 = 5³ auch wieder dreimal enthalten. Rest 79. Fahren wir so fort, so ergibt sich:
 $8579 = 2 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0$.
Also ist $8579 = \overline{233304}$.

Aufgabe: Stelle die im Dezimalsystem gegebenen Zahlen 634, 8172 und 94651 im Fünfersystem dar! Weniger aufwendig ist der umgekehrte Vorgang. Ist uns eine Zahl im Fünfersystem gegeben, so liefert uns das unmittelbar eine nach Potenzen von 5 geordnete Summe, die nur ausgerechnet zu werden braucht.

Aufgabe: Schreibe $\overline{432103}$ im Dezimalsystem!

Das Umkodieren *gebrochener* Zahlen heben wir uns zweckmäßigerweise auf, bis wir das schriftliche Rechnen im Fünfersystem bis zur Division gelernt haben — eine Aufgabe, mit der wir uns sogleich befassen wollen. Das Wesen des schriftlichen Rechnens besteht bekanntlich darin, daß die auszuführende Operation in eine Anzahl einfacher immer wiederkehrender *Einzeloperationen* aufgelöst wird. Die benötigten Einzeloperationen zusammengestellt, bilden das *Einsundeins* und das *Einmaleins*.

Für das Dezimalsystem also:

$$\begin{array}{llll}
0 + 0 = 0 & 1 + 1 = 2 & 0 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \\
0 + 1 = 1 & 1 + 2 = 3 & 0 \cdot 1 = 0 & 1 \cdot 2 = 2 \\
& & 0 \cdot 2 = 0 &
\end{array}$$

$$0 + 9 = 9 \quad 9 + 9 = 18 \quad 0 \cdot 9 = 0 \quad 9 \cdot 9 = 81.$$

Es sind also alle Kombinationen der Zahlen 0 bis 9 zu je zweien, jeweils durch Pluszeichen und Malzeichen verknüpft, wobei wegen der Vertauschbarkeit der Summanden bzw. Faktoren von den Operationen $a + b$ und $b + a$ bzw. $a \cdot b$ und $b \cdot a$ jeweils nur eine aufgeführt zu werden braucht. Mehr benötigt man nicht, denn die Subtraktion und die Division werden bekanntlich auf die Addition bzw. die Multiplikation zurückgeführt. Das Entsprechende sieht im Fünfersystem, tabellarisch zusammengefaßt, so aus:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

•	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Der Leser möge diese Aufstellung bei den folgenden Übungen benutzen.

Wir wollen nun die vier Grundoperationen am Beispiel der (in Dezimalschreibweise gegebenen) Zahlen 182 und 14 üben.

Umkodierung:

$$182 = \overline{1212} \quad 14 = \overline{28}$$

(Prüfe die Ergebnisse nach!)

Die vier Rechenoperationen werden jetzt kommentarlos aufgeschrieben. Der Leser mache sich jeden einzelnen Rechenschritt klar und vergewissere sich insbesondere, daß die Rechenverfahren sich wirklich *nur* durch die Anzahl der verwendeten Ziffern von denen im Dezimalsystem unterscheiden. Wir empfehlen auch, zur Übung die Ergebnisse in das Dezimalsystem umzukodieren und durch dezimale Rechnung die Probe zu machen!

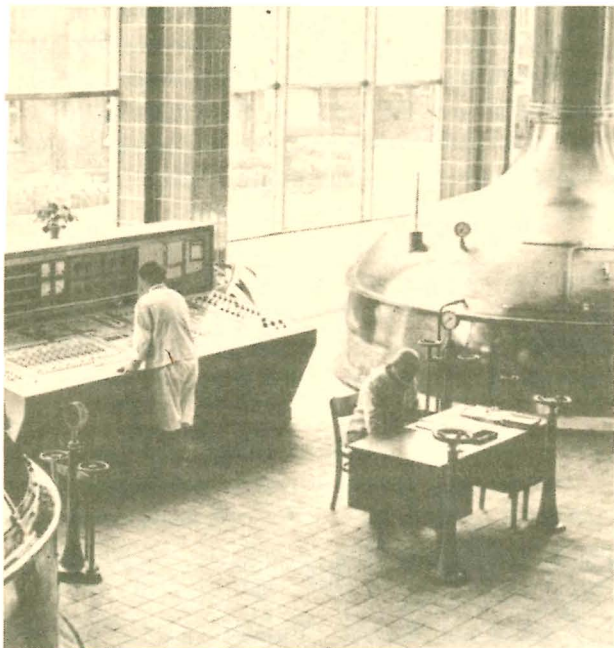
$$\begin{array}{r}
\overline{1212} \\
+ \overline{24} \\
\hline
\overline{1241}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
\overline{1212} \\
- \overline{24} \\
\hline
\overline{1133}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\overline{1212} \cdot \overline{24} \\
\overline{2424} \\
\overline{10403} \\
\overline{40143}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
\overline{1212} : \overline{24} = \overline{23} \\
\overline{103} \\
\overline{132} \\
\overline{132} \\
\hline
\overline{0}
\end{array}$$

J. Frommann

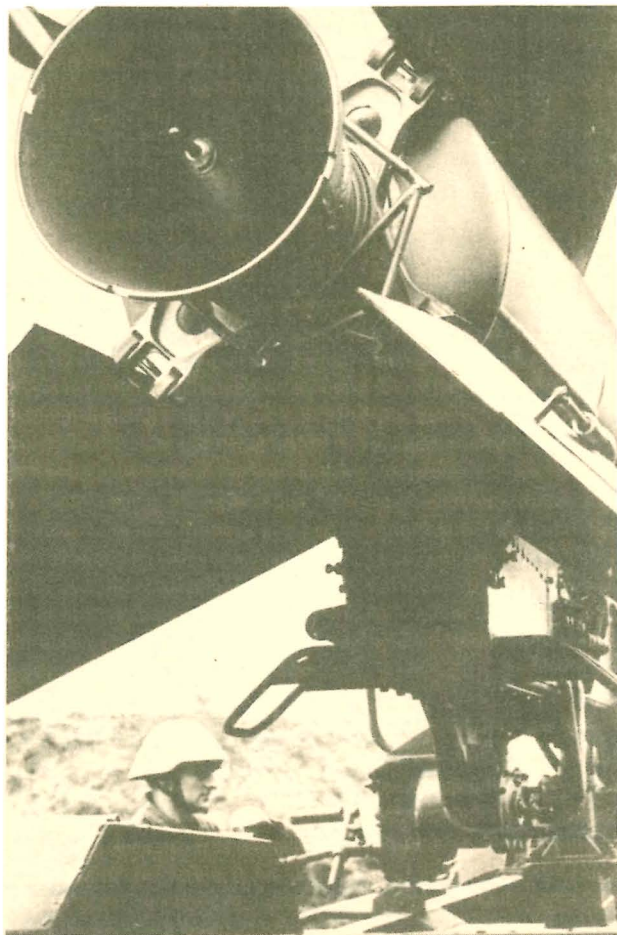
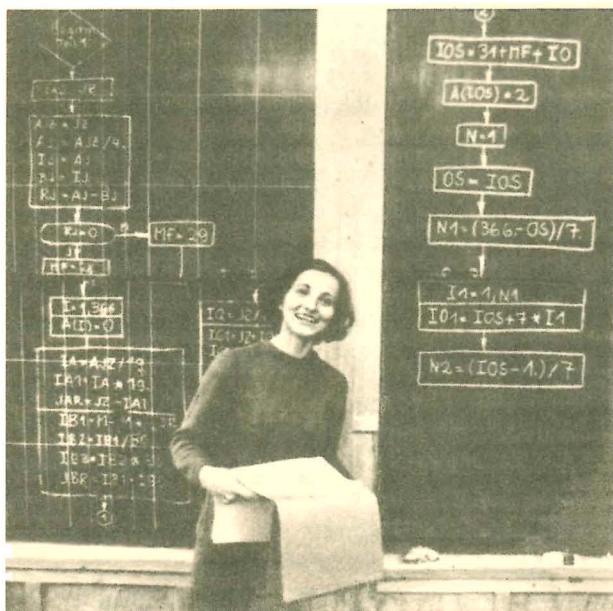
Werk der Millionen

Ein Buch, entstanden in kollektiver Zusammenarbeit zwischen dem Urania-Verlag und dem Verlag Die Wirtschaft



In breitem Maße wird die Elektronik zur Steuerung von Produktionsprozessen eingesetzt. Modernes Sudhaus.

Auf allen Gebieten des gesellschaftlichen Lebens ist die Gleichberechtigung der Frau verwirklicht. Dozentin bei der Ausbildung für Datenverarbeitung.



Unsere NVA, ausgerüstet mit modernsten Waffen, ist ein zuverlässiger Schutz unserer sozialistischen Errungenschaften.

Der repräsentativ gestaltete Band würdigt in Bild und Text den nicht leichten, aber erfolgreichen Weg, der von dem in 20 Jahren Geschaffenen ausgeht und mit der Zukunft verbindet: der Meisterung der wissenschaftlich-technischen Revolution im entwickelten gesellschaftlichen System des Sozialismus. Der großformatige Titel, aus dem wir einige Fotos entnahmen, wurde zu Ehren des 20. Jahrestages der Deutschen Demokratischen Republik herausgegeben. Es beantwortet – insbesondere unseren jungen Lesern – die Frage: „Wer sind die Menschen, die das geschaffen haben?“

Redaktion alpha

Spezialklassen

an mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten von Universitäten und Hochschulen

Spezialklassen an mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten und Hochschulen sind Bestandteil des einheitlichen sozialistischen Bildungssystems. Sie wurden 1964 gegründet. Es sind allgemeinbildende Einrichtungen zur Förderung besonders begabter und leistungsstarker Schüler.

In einer zweijährigen Ausbildung, die mit dem Abitur abschließt, wird das Ziel verfolgt, die Absolventen durch Anwendung hochschulgemäßer Formen des Lehrens und Lernens zu befähigen, während des Studiums in den Studienkollektiven zu den fachlich und gesellschaftlich besten Studenten zu gehören. Bei entsprechenden Leistungen sollen sie im Fachstudium besonders gefördert werden, um sich zu wissenschaftlichen Spitzenkräften für das Hochschulwesen oder für die Volkswirtschaft zu entwickeln.

Spezialklassen bestehen z.Z. an folgenden Universitäten und Hochschulen:

- in Berlin und Halle je eine Klasse mit der besonderen Betonung der Fächer Mathematik und Physik;
- in Magdeburg und Karl-Marx-Stadt je eine Klasse mit Ausbildungsschwerpunkt Mathematik, Physik und Technik;
- in Merseburg werden jährlich zwei Klassen gebildet, die auf ein Studium der Chemie bzw. der chemischen Verfahrenstechnik vorbereiten.

Als allgemeinbildende Institution liegt der Ausbildung in den Spezialklassen in allen Fächern das Bildungs- und Erziehungsziel der Erweiterten Oberschule zugrunde. Wichtige Voraussetzung für eine hohe Intensität des Unterrichts, der von Angehörigen des Lehrkörpers der betreffenden Universitäten oder Hochschulen erteilt wird, ist die niedrige Klassenfrequenz von etwa 15 Schülern. Für den Fremdsprachenunterricht wird jede Klasse noch in zwei Gruppen geteilt.

Die besondere Betonung des Ausbildungsprozesses findet u. a. in der Stundentafel Berücksichtigung, die für die jeweiligen Schwerpunktfächer eine höhere Stundenzahl als die der Erweiterten Oberschule vorsieht. Dadurch können in diesen Fächern über den Lehrplan der EOS hinaus vertiefte und erweiterte Kenntnisse vermittelt werden. In allen Klassen werden naturwissenschaftliche Praktika durchgeführt.

Die Ausbildung ermöglicht dem Absolventen, eine von ihm gewünschte Studieneinrichtung zu wählen. Es wird angestrebt, daß sie ein Diplom-Studium in den Fachrichtungen Mathematik, Physik, Technik, Chemie oder chemische Verfahrenstechnik aufnehmen. Um eine optimale Förderung auch im Hochschulstudium zu gewährleisten, ist es zweckmäßig, daß der Absolvent sein Studium an der Hochschule aufnimmt, zu der seine Spezialklasse gehört.

Für die Aufnahme in eine Spezialklasse können sich Schüler der Klasse 10 der Oberschulen (einschließlich der Vorbereitungsklassen) mit hervorragenden Leistungen in den betreffenden Schwerpunktfächern bewerben. Vorbildliches gesellschaftliches Verhalten und ein Leistungsdurchschnitt von mindestens 2,0 in der 9. Klasse sind weitere Voraussetzungen, die der Bewerber erfüllen muß.

Für die Aufnahme in die Spezialklassen werden Eignungsprüfungen durchgeführt. Sie gliedern sich in eine schriftliche Fachklausur, in eine Deutscharbeit und in ein mündliches Aufnahmegespräch. Eine Zulassung ist nicht davon abhängig, welche Fremdsprachen der Schüler bisher erlernt hat.

Die Schüler der Spezialklassen wohnen mietfrei in Studentenheimen. Sie werden dort von Lehrern und Erziehern betreut. Die Ferienregelung unterscheidet sich im wesentlichen nicht von der EOS.

Zwischen den Ferien können die Schüler in regelmäßigen Abständen über das Wochenende zu ihren Eltern nach Hause fahren. Die Freizeit ist so bemessen, daß im Rahmen der schulischen Anforderungen auch außerschulischen Interessen nachgegangen werden kann. Neben der FDJ-Arbeit haben die Schüler die Möglichkeit, an Arbeitsgemeinschaften z. B. in Physik oder Mathematik, am fakultativen Sport, an kulturellen Veranstaltungen u. a. teilzunehmen.

Weitere Auskünfte erteilen die Leiter der Spezialklassen W. Ziemann, Humboldt-Universität Berlin, 102 Berlin, Burgstr. 26; W. Gille, Martin-Luther-Universität Halle, 402 Halle, Frankeplatz 1, Institut für Methodik des math.-nat. Unterrichts; R. Weber, Technische Hochschule Magdeburg, 301 Magdeburg, Boleslaw-Bierut-Platz 5; Dr. R. Müller, Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt,

901 Karl-Marx-Stadt, Straße der Nationen 62; Dr. Zimmermann, Technische Hochschule für Chemie „Carl Schorlemmer“, 42 Merseburg, Geusaer Straße.

Die nächsten Bewerbungen (Studienbeginn Sept. 1970) werden über den Direktor der OS bzw. EOS bis 31. 1. 1970 entgegengenommen.

Der *alpha*-Club, 29. OS Leipzig (88 Teilnehmer – 5 Arbeitsgemeinschaften), betreute im Rahmen der „Jungpionierfeste“ sowie der „Bastelstube des Weihnachtsmannes“ (Dez. 68) insgesamt 1800 Pioniere. 82 AG-Teilnehmer führten in 284 Stunden mit interessierten Pionieren (in Begleitung ihrer Lehrer oder Eltern – siehe Foto) mathematische Wettbewerbe (gestaffelt nach Schuljahren 1 bis 8) durch, korrigierten über 10 000 Aufgaben, werteten aus (siehe unteres Foto) und bastelten mit Pionieren mathematische Modelle.



alpha-Wettbewerb 1968



Das sind sie, die 14 022 Lösungen, eingesandt im Jahre 1968. Ich gratuliere im Namen des Redaktionskollegiums allen Jungen Mathematikern. Der Aufgabengruppe und den Korrektoren danke ich recht herzlich für die geleistete Arbeit.

J. Lehmann, Chefredakteur

Fakten

40 Lösungen wurden 1968 von Schülern der Klassen 11/12 eingesandt. Von 60 gestellten Wettbewerbsaufgaben wurden bei folgenden 15 Lösungen mehr als 20% der Einsendungen als „falsch gelöst“ bewertet.

W(6) 317 [65% falsch]; W(7) 182 [60%]; W(8) 327 [44%]; W(8) 137 [43%]; W(8) 186 [40%]; W(9) 190 [39%]; W(8) 218 [35%]; W(8) 278 [34%]; W(8) 328 [33%]; W(7) 243 [31%]; W(9) 280 [30%]; W(8) 203 [26%]; W(9) 191 [26%]; W(7) 275 [26%]; W(9) 189 [22%].

Von 14 022 Lösungen wurden 1854 (rund 13%) als „falsch gelöst“ bewertet. Anerkennungsurkunden (bei mehr als 7 Antwortkarten pro Jahr) erhielten 800 Wettbewerbsteilnehmer. 20 Karten sandte die Post als „unzustellbar“ zurück. Bei 17 richtigen Lösungen fehlte die Angabe der Personalien.

Buchprämien

Wir danken den nachfolgenden Verlagen, welche uns Bücher im Gesamtwert von 1000 M für die Auszeichnung unserer besten Teilnehmer am alpha-Wettbewerb zur Verfügung stellten. Redaktion alpha

B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig
Der Kinderbuchverlag, Berlin
Deutscher Militärverlag, Berlin
VEB Fachbuchverlag, Leipzig
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
Urania-Verlag, Leipzig, Jena, Berlin

Alle Schulen des Kreises Schmalkalden (608), OS Rüditz (1281), Kalinin-OS Tröglitz (4908), POS Erleben (5101), OS Parkentin (2561), EOS Worbis (562), OS Zaatze (1931), Comenius-OS Burg (327), OS Altentreptow (202), ZOS Greiz-Pohlitz (66), J.-Brinkmann-OS Goldberg (2862), OS Markersbach und Gottleuba (8302), A.-Dürer-OS Aue (94), OS Heinrich Schliemann Neubukow (2567), OS I Teterow, OS Ebersbrunn (9507), E.-M.-Arndt-OS Greifswald (22), Kinderkurheim Max Hannemann Dahme (7962), OS Lauter (9406), OS Bergwitz (4401), POS Saßnitz (2355), POS VI Arnstadt (521), OS V Oelsnitz (9156), E.-Schneller-OS Waldenburg (9613), POS Alt-Töplitz (1501), OS VIII Hoyerswerda (77), Diesterweg-OS Spremberg (759), OS Andershof/Stralsund (23)

Berlin	291	Erfurt	1489
Frankfurt	410	Suhl	2473
Potsdam	619	Gera	364
Neubrandenb.	624	Leipzig	915
Rostock	1343	Cottbus	715
Schwerin	296	Dresden	1421
Magdeburg	590	K.-M.-Stadt	1680
Halle	792	zusammen	14022

Klassenstufe 5					Klassenstufe 6				Klassenstufe 7			
Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt
1	172 173	109 114	149 141	258 255	177 178	176 175	161 152	337 327	182 183	76 123	59 105	135 228
2	197 210	123 135	198 220	321 355	199 213	172 154	140 122	312 276	201 216	149 141	101 94	250 235
3	233 234	75 87	79 96	154 183	238 239	143 142	137 139	280 281	243 244	118 133	67 86	185 219
4	264 265	52 30	81 47	133 77	269 270	110 102	130 108	240 210	274 275	133 92	155 62	288 154
5	312 313	38 34	46 28	84 62	317 318	69 94	82 132	151 226	322 323	74 112	38 87	112 199
zus.		797	1085	1882		1337	1303	2640		1151	854	2005
Klassenstufe 8					Klassenstufe 9				Klassenstufe 10/12			
1	186 187	222 137	167 80	389 217	190 191	156 270	72 137	228 407	194 195	280 208	144 93	424 301
2	203 218	121 171	60 79	181 250	205 220	284 189	156 89	440 278	207 222	166 165	48 56	214 221
3	248 249	179 182	81 94	260 276	253 254	170 122	38 37	208 159	258 259	191 228	61 86	252 314
4	277 278	292 90	152 51	354 141	280 281	110 116	47 42	157 158	282 283	241 217	93 42	334 259
5	327 328	81 124	62 80	143 204	332 333	166 62	84 12	250 74	338 339	177 152	40 33	217 185
zus.		1509	906	2415		1645	714	2359		2025	696	2721

Preisträger

Vorbildliche Leistungen

Klassenstufe 5/6*

Pawel Kröger 7031 Leipzig [52 Antwortkarten]; **Christoph Scheurer** 9611 Glauchau-Gesau [42]; **Sabine Anders** 75 Cottbus [40]; **Ole-André Strzalla** 22 Greifswald [30]; **Jörg Hutschenreiter** 8020 Dresden [26]; **Uwe Quasthoff** 7022 Leipzig [24]; **Ralph Lehmann** 1273 Petershagen [24]; **Gerd Falk** 1532 Kleinmachnow [22]; **Angelika Kirchhoff** 701 Leipzig [21]; **Kerstin Bachmann** 402 Halle [20]; **Bernd Mathiszik** 50 Erfurt [20]; **Regina Müller** 8027 Dresden [19]; **Bernd Zaddach** 75 Cottbus [19]
Karin Scheller 328 Genthin; **Matthias Scharnbeck** 94 Aue; **Martina Wiechmann** 4417 Zschornowitz; **Gisela Köhler** 926 Hainichen; **Elke Warbende** 26 Güstrow; **Eckhard Schadow** 14 Oranienburg; **Heike Jurack** 8502 Burkau; **Hans-Jochen Rodner** 3014 Magdeburg; **Christina Feige** 57 Mühlhausen; **Hans-Jürgen Förster** 1532 Kleinmachnow; **Elke Schneider** 50 Erfurt; **Roswitha Schlötte** 90 Karl-Marx-Stadt; **Viktoria Weise** 48 Naumburg; **Hans-Georg Meyer** 50 Erfurt; **Bernd Georgi** 8709 Herrnhut; **Jan-Michael Keller** 23 Stralsund; **Bettina Zabel** 57 Mühlhausen; **Karin Weyh** 6081 Fambach; **Ute Strey** 608 Schmalkalden; **Lutz Püffeld** 1422 Hennigsdorf; **Frank Benkert** 7031 Leipzig

Klassenstufe 6/7*

Albrecht Heß 8027 Dresden [44 Antwortkarten]; **Burkhard Dähn** 222 Wolgast [42]; **Ulf Brüstel** 7401 Ziegelheim [41]; **Claus-Detlef Bauermeister** 8019 Dresden [35]; **Ehrenfried Zschech** 86 Bautzen [33]; **Frank Ihlenburg** 22 Greifswald [31]; **Angela Rohrbeck** 2302 Franzburg [29]; **Ute Winkler** 153 Teltow [25]; **Rolf Böllmann** 5505 Ilfeld [24]; **Hans-Gert Gräbe** 50 Erfurt [23]; **Frank Baumgartl** 9412 Schneeberg [22]; **Paul Ortlepp** 60 Suhl [21]; **Helge Rüllicke** 18 Brandenburg [21]; **Udo Winkler** 829 Kamenz [21]
Stefan Schulze 5211 Oberwillingen; **Volker Gumbert** 4255 Klostermansfeld; **Ralf Suchert** 8302 Bad Gottleuba; **Stefan Katzschnmann** 925 Mittweida; **Rainer Zwerck** 24 Wismar; **Astrid Dabel** 2321 Elmenhorst; **Eberhard Manske** 6088 Steinbach-Hallenberg; **Wolfgang Schinkothe** 4731 Sachsenburg; **Christian Höfl** 222 Wolgast; **Jörg**

Mannl 8255 Nossen; **Bernd Klipps** 2052 Boddin; **Herwig Gratias** 523 Sömmerda; **Mario Ziller** 1035 Berlin; **Bernd Singer** 99 Plauen; **Bernd Kutnick** 205 Teterow; **Gerd Hantsche** 8142 Radeberg; **Gerd Petzold** 9501 Cunersdorf; **Axel Mesing** 222 Wolgast; **Ulrich Tetzlaff** 1553 Friesack; **Andreas Stern** 22 Greifswald; **Monika Seiler** 53 Weimar

Klassenstufe 7/8*

Steffen Oswald 8027 Dresden [37 Antwortkarten]; **Harald Herrmann** 9301 Hammerunterwiesenthal [35]; **Ralf Hein** 9611 Remse [29]; **Wolfgang Zahl** 532 Apolda [28]; **Lutz Ranke** 59 Eisenach [29]; **Peter Schmidt** 532 Apolda [27]; **Elke Wiemann** 8245 Glashütte [27]; **Ingolf Kunath** 825 Meißen [26]; **Gunteram Pausch** 7206 Lobstädt [25]; **Beate Weise** 48 Naumburg [24]; **Jürgen Zabel** 57 Mühlhausen [24]; **Gernot Spiewok** 22 Greifswald [24]; **Harald Hertel** 402 Halle [23]
Manfred Riemer 9306 Elterlein; **Peter Mathé** 29 Wittenberge; **Klaus-Jürgen Kreul** 88 Zittau; **Ursula Baier** 825 Meißen; **Bärbel Schulz** 75 Cottbus; **Reinhard Liesigk** 44 Bitterfeld; **Michael Hoffmann** 238 Barth; **Carmen Hauptmann** 8245 Glashütte; **Wolfgang Jensche** 8038 Dresden; **Andreas Heß** 794 Jessen; **Andreas Juhl** 425 Eisleben; **Albrecht Tanzer** 7202 Böhlen; **Joachim Selle** 5401 Großfurra; **Helga Daweritz** 7291 Neußen; **Hans-Herbert Luchtmann** 2405 Neukloster; **Gabriele Winter** 5401 Großfurra; **Antje-Christine Keller** 23 Stralsund; **Klaus Pannenberg** 2031 Duvier; **Joachim Stranz** 128 Bernau; **Beate Stephan** 1502 Potsdam-Babelsberg; **Wilfried Steudel** 652 Eisenberg; **Manfred Knörger** 402 Halle; **Jörg Lehnert** 2034 Tutow; **Achim Bischoff** 128 Bernau

Klassenstufe 8/9*

Harald Englisch 7022 Leipzig [32 Antwortkarten]; **Gerd Wöhl** 55 Nordhausen [28]; **Frank Täubner** 754 Calau [25]; **Jürgen Voigt** 9533 Wilkau-Haßlau [26]; **Heinz Marbes** 128 Bernau [26]; **Dietmar Wegner** 3601 Dardesheim [26]; **Jürgen Scheffer** 795 Bad Liebenwerda [26]; **Bernd Hofmann** 8808 Niederoderwitz [25]; **Rainer Staudte** 9501 Culitzsch [24]; **Frank Panzer** 50 Erfurt [24]; **Wilfried Kröger** 25 Rostock [23]; **Eckhard Blatt** 25 Rostock [23]; **Michael Chares** 9533 Wilkau-Haßlau [22]; **Wolfgang Riedel** 90 Karl-Marx-Stadt [22]
Claudia Asser 22 Greifswald; **Felicita Bartusch** 79 Falkenberg; **Regina Oberwinter** 1503 Potsdam-Bornstedt; **Josef Kaufhold** 5601 Silberhausen; **Petra Schönwälder** 703 Leipzig; **Friedemann Hagert** 9406 Lauter; **Hans-Peter Falken** 37 Wernigerode; **Renate Reckziegel** 5808 Tabarz; **Frank-Uwe Simon** 801 Dresden; **Ulf Briesenick** 171 Luckenwalde; **Reinhard Uhle** 961 Glauchau; **Ulrich Golle** 962 Werdau; **Roswitha Thommes** 3602 Badersleben; **Thomas Winkler** 9933 Bad

Elster; **Hans-Jürgen Mehls** 5603 Dingelstädt; **Hans-Dieter Sparing** 65 Gera; **Frank Kretschmar** 7043 Leipzig; **Georg Burkhardt** 6085 Oberschöna; **Dietmar Lein** 521 Arnstadt; **Klaus-Dieter Kunze** 23 Stralsund; **Hartmut Munk** 6081 Herges-Hallenberg; **Renate Zimmermann** 8036 Dresden; **Detlev Bage** 3223 Seehausen; **Petra Wußing** 7022 Leipzig; **Detlev Karl** 608 Schmalkalden; **Dieter Recknagel** 6088 Steinbach-Hallenberg.

Klassenstufe 9/10*

Wolfgang Köhler 58 Gotha [22 Antwortkarten]; **Helmut Meister** 8021 Dresden [22]; **Eckart Scholz** 5304 Blankenheim [20]; **Rainer Wolf** 117 Berlin [18]; **Rolf Stephan** 809 Dresden [18]; **Reinhard Wobst** 806 Dresden [18]; **Frank Müller** 798 Finsterwalde [17]; **Arnulf Möbius** 7124 Holzhausen [17]; **Thomas Bauer** 7022 Leipzig [18]; **Bernd Oldenburger** 7261 Merkwitz [18]; **Thomas Kühn** 5812 Waltershausen [17]; **Hans-Jürgen Grundmann** 6508 Weida [17]; **Claus Lange** 97 Auerbach [17]
Jürgen Dubslaff 50 Erfurt; **Bernd Platzer** 4204 Bad Lauchstädt; **Gert Keller** 8023 Dresden; **Thomas Ullrich** 50 Erfurt; **Hans-Dieter Lucas** 354 Osterburg; **Karl-Heinz Breitmoser** 20 Neubrandenburg; **Rolf Sommer** 993 Adorf; **Dietmar Tanzer** 7202 Böhlen; **Joachim Winkler** 9101 Herrenhaide; **Steffi Lorenz** 703 Leipzig; **Gudrun Bohn** 7022 Leipzig; **Uwe-Peter Sandberg** 28 Ludwigslust; **Karin Götte** 7908 Prettin; **Elke Hauptmann** 8245 Glashütte; **Klaus Ditze** 36 Halberstadt; **Annerose Mattig** 50 Erfurt; **Siegfried Kropf** 3251 Hakeborn; **Dietmar Soyka** 759 Spremberg; **Rolf Osterloh** 3253 Egeln; **Thomas Naumann** 8020 Dresden; **Gerhard Spens** 5034 Erfurt-Hochheim; **Beate Täubner** 754 Calau; **Günter Brehmer** 3253 Egeln; **Jörg Büchner** 75 Cottbus; **Uwe Treß** 703 Leipzig

Klassenstufe 10/12*

Peter Oswald 8027 Dresden; **Rainer Richter** 2253 Seebad Bansin; **Monika Günther** 6056 Schleusingen; **Ludwig Paditz** 826 Lommatzsch; **Wolfgang Kernchen** 402 Halle; **Christoph Clauß** 9163 Gornsdorf; **Ulrike Albrecht** 1242 Bad Saarow; **Fred Mütze** 7702 Bernsdorf; **Matthias Schulz** 8020 Dresden; **Rainer Gutjahr** 5807 Ohrdruf
Eberhard Diezel 53 Weimar; **Holger Gürgens** 432 Aschersleben; **Karl Paul** 1544 Elstal; **Thomas Martin** 703 Leipzig; **Thomas Näther** 25 Rostock; **Eberhard Paschkowski** 402 Halle; **Maria-Ilona Pink** 102 Berlin; **Andreas Murr** 523 Sömmerda; **Manfred Schurz** 825 Meißen; **Herbert Zinke** 4371 Libehna; **Günter Schmidt** 77 Hoyerswerda; **Christian Philipp** 8506 Ohorn; **Helmut Krügener** 354 Osterburg; **Werner Berndt** 402 Halle

* Die Preisträger wurden **fett gedruckt** angegeben; die Reihenfolge wurde entsprechend Kartenzahl und Prädikat festgelegt.

Wer löst mit? **alpha** -Wettbewerb

letzter Einsendetermin 14. Juni 1969



5 ▲ 367 Ist die Summe zweier natürlicher Zahlen kleiner als 13, dann ist ihr Produkt nicht größer als 36. Begründe diese Aussage mit Hilfe einer Tabelle!

OL Th. Scholl, Berlin

▲ 368 Ein Schüler las am ersten Tag genau 27 Seiten eines ausgeliehenen Buches; am zweiten Tag las er sechs Seiten weniger als am ersten. Er hatte nun noch drei Viertel der Seitenzahl des Buches zu lesen.

Wieviel Seiten enthält dieses Buch?

▲ 369 Eine Strecke $\overline{AB}$ ist 72 m lang. Durch die Punkte C und D wird sie in drei Teilstrecken geteilt. Die Teilstrecke CD ist doppelt so lang wie die Teilstrecke AC . Die Teilstrecke DB dagegen besitzt die dreifache Länge der Teilstrecke CD . Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

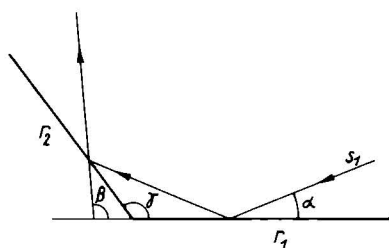
W 5 ■ 370 Ein Junger Pionier einer Zeltbelegung kauft Schrippen zu 5 Pf je Stück und Knüppel zu 8 Pf je Stück ein; er hat dafür insgesamt 72 Pf zu bezahlen. Jeder Junge Pionier seines Zeltes erhält entweder genau eine Schrippe oder genau einen Knüppel. Mit wieviel Jungen Pionieren ist das Zelt belegt?

W. Träger, Döbeln

W 5 ■ 371 Es seien a und b natürliche Zahlen, und es gelte $a < b$. Entscheide, welcher der beiden Brüche $\frac{2a}{b}$ und $\frac{2b}{a}$ dann größer ist. Begründe deine Entscheidung!

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

6 ▲ 372 Ein Lichtstrahl s_1 werde an den Spiegeln r_1 und r_2 nacheinander so reflektiert, daß der Strahl vor der Reflexion mit

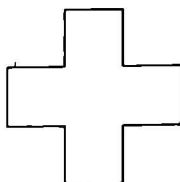


der Ebene von r_1 den Winkel α und nach der Reflexion an r_2 mit der Ebene von r_1 den Winkel β einschließt. (Der Lichtstrahl verlaufe in einer Ebene senkrecht zu r_1 und r_2 .)

Es ist der Winkel γ , unter dem die beiden Spiegel gegeneinander geneigt sind, durch die Winkel α und β auszudrücken!

Dr. E. Schröder, Dresden

▲ 373 Die nachstehend abgebildete Kreuzfigur ist ein geschlossener Streckenzug. Die Strecken sind dabei einander kongruent; je zwei benachbarte Strecken stehen aufeinander senkrecht. Verwandle diese Kreuzfigur durch Einzeichnen von vier Strecken



unter alleiniger Benutzung von Bleistift und Lineal (ohne Maßeinteilung) in ein flächengleiches Quadrat! Dr. E. Schröder, Dresden

▲ 374 Ersetze jede Leerstelle durch eine Ziffer, so daß du stets eine wahre Aussage erhältst. Beachte dabei, daß es mehrere Möglichkeiten geben kann.

- a) $3 \mid 8327\Box$ (lies: 3 ist Teiler von $8327\Box$),
- b) $3 \nmid 84\Box72$ (lies: 3 ist nicht Teiler von $84\Box72$),
- c) $9 \mid 23\Box58$,
- d) $4 \nmid 587\Box6$.

W 6 ■ 375 Vier Freunde, und zwar Axel, Bernd, Ernst und Fred, sind entweder Abonnent des Jugendmagazins „Neues Leben“ oder der Zeitung „Junge Welt“. Von diesen Freunden wissen wir:

- a) Der 19jährige ist nicht Abonnent der „Jungen Welt“, aber der 16jährige und Ernst haben die „Junge Welt“ abonniert.
- b) Axel und der 17jährige sind Abonnent von „Neues Leben“, Bernd dagegen nicht.
- c) Der 20jährige, der 19jährige und Bernd waren kürzlich Gäste auf der Geburtstagsfeier von Fred.

Es ist herauszufinden, wie alt jeder der vier Freunde ist und welche Zeitung bzw. Zeitschrift er abonniert hat.

OL Th. Scholl, Berlin

W 6 ■ 376 Ein Mathematiklehrer wurde nach seinem Geburtstag gefragt; seine Antwort lautete scherzhaft: „Dividiere ich die Zahl meines Geburtsjahres durch 71, durch

41 bzw. durch 43, so erhalte ich jeweils als Rest mein gegenwärtiges Alter in vollen Jahren, die Zahl des Tages, an dem ich geboren wurde, bzw. die Zahl meines Geburtsmonats.“ Wann wurde dieser Lehrer geboren, wenn er zum Zeitpunkt der Fragestellung 25 Jahre alt war, das heißt, seinen 25. Geburtstag bereits gefeiert hatte, und wenn die Frage im Jahre 1968 an ihn gerichtet wurde?

R. Richter, Schkölen

7 ▲ 377 Vier befreundete Ehemänner mit den Vornamen Klaus, Franz, Willi und Hans betraten ein Blumengeschäft, um anlässlich des Internationalen Frauentages für ihre Ehefrauen Tulpen zu kaufen. Die Art ihrer Bestellung war etwas ungewöhnlich; fast wäre die Verkäuferin in Verlegenheit geraten. Franz sagte nämlich, er wolle ein Viertel der von allen vier Ehemännern zusammen bestellten Tulpen kaufen. Willi meinte, daß er zwei weniger als ein Drittel aller von ihnen gewünschten Blumen kaufe, während Klaus sechs weniger als die Hälfte all dieser Tulpen verlangte. Hans dagegen bestellte drei mehr als die Hälfte der von Franz gekauften Blumen. Die Verkäuferin überlegte, rechnete und übergab kurz darauf jedem der vier Ehemänner die jeweils gewünschte Anzahl Tulpen. Wieviel Tulpen kaufte jeder dieser vier Ehemänner?

H. Scholz, Niedergurig, Krs. Bautzen

▲ 378 Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren aus den Stücken $a + b$, $b + c$ und $a + c$. Die Konstruktion ist zu beschreiben.

A. Möbius, EOS Leibniz, Leipzig, Kl. 10

▲ 379 Bestimme alle rationalen Zahlen x , die die Gleichung $|x| = \frac{x}{2} + 2$ erfüllen! (Löse die Aufgabe mit einer geeigneten Fallunterscheidung!)

W. Träger, Döbeln

W 7 ■ 380 Jeder Innenwinkel eines einem Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks wird durch die Diagonalen in untereinander kongruente Winkel zerlegt. Von jeder Ecke eines Sechsecks aus lassen sich drei Diagonalen ziehen; sie zerlegen den Innenwinkel α_i in vier untereinander kongruente Winkel α_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Es ist zu beweisen, daß jeder dieser Winkel $\alpha_i = 30^\circ$ beträgt.

F. Görnert, Ribnitz-Damgarten

W 7 ■ 381 Auf einer Faschingsfeier werden von vier vorhandenen Hüten, nämlich zwei schwarzen, einem weißen und einem grünen Hut, drei Hüte drei sich im Kreise gegenüberstehenden Personen aufgesetzt. Diese drei Personen sehen zunächst alle vier Hüte. Keiner der drei kann aber sehen, welche Farbe der ihm aufgesetzte und der nicht verwendete Hut besitzt. Jede der drei Personen sieht die seinen Mitspielern aufgesetzten Hüte. Nun werden alle drei nach der Farbe des ihnen aufgesetzten Hutes befragt. Da der erste aus den ihm sichtbaren Hüten nicht schließen kann, welche Farbe sein Hut hat, sagt er: „Ich weiß nicht, welche Farbe mein Hut hat.“ Dasselbe gilt für den zweiten. Erst aus diesen beiden Antworten kann der dritte schließen, welche Farbe sein Hut hat. Es ist zu entscheiden und zu begründen, welche Farbe der Hut der dritten Person hat.

W. Träger, Döbeln

8 ■ 382 Eine gegebene Strecke AB , deren Länge 11 cm beträgt, ist zu halbieren. Bei der Ausführung dieser Konstruktion sollen nur ein Lineal und ein Zeichendreieck benutzt werden.

Dr. G. Hesse, Radebeul

■ 383 Es seien m und n zwei ganze, einander teilerfremde Zahlen, d. h. der größte gemeinsame Teiler der Zahlen m und n sei gleich 1. Es ist zu beweisen, daß dann niemals gleichzeitig

$$4|(m+n) \text{ und } 4|(m-n)$$

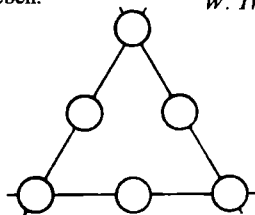
gilt, d. h., daß die Zahlen $m+n$ und $m-n$ nicht den gemeinsamen Teiler 4 haben.

Ferner sind zwei Zahlen m und n anzugeben, die den obigen Bedingungen genügen, und es ist zu zeigen, daß die Zahlen $m+n$ und $m-n$ nicht den größten gemeinsamen Teiler 4 haben.

W. Träger, Döbeln

W 8 ■ 384 In die markierten Kreise, die in der beigegefügten Figur auf den Ecken und Seitenmitten eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind, sind voneinander verschiedene natürliche Zahlen einzusetzen, so daß die Produkte der drei jeweils auf einer der gezeichneten Geraden gelegenen Zahlen sämtlich gleich 30 sind. Alle zulässigen Belegungen, die nicht durch eine Spiegelung oder Drehung auseinander hervorgehen, sind anzugeben.

W. Träger, Döbeln



W 8 ■ 385 Ordne die folgenden drei Zahlen:

$$a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{301}{501}, \quad c = \frac{3001}{5001}$$

Beginne mit der kleinsten Zahl!

OSIR. Dr. R. Lüders, Berlin

9 ■ 386 Um wieviel Millimeter würde sich der Meeresspiegel heben, wenn alle Eismassen und Gletscher der Arktis und Antarktis, die ein Gesamtvolumen von 28,8 Millionen km^3 haben, abtauen würden? Der Radius der Erde beträgt $R = 6370 \text{ km}$; 70,8% der Oberfläche der Erde sind vom Meer bedeckt. Die Dichte des Eises beträgt $0,9 \text{ g cm}^{-3}$.

OSIR Dr. R. Lüders, Berlin

■ 387 Es ist der folgende Satz zu beweisen: Wenn die Summe von vier beliebigen natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist das Produkt aus diesen vier Zahlen eine gerade Zahl. StR G. Schule, Herzberg/Elster

■ 388 Der berühmte Berliner Mathematiker Jakob Steiner (1796 bis 1863) untersuchte gewisse Konstruktionen, die sich nur mit dem Lineal allein ausführen lassen.

Gegeben seien zwei parallele Geraden g und h und auf h zwei voneinander verschiedene Punkte A und B .

Jakob Steiner fand heraus, daß die Strecke AB allein mit Hilfe eines Lineals halbiert werden kann. Gib die Konstruktion an!

Dr. E. Hameister, Möser b. Burg

W 9 ■ 389 Bei den Europameisterschaften der Ruderinnen in Berlin-Grünau im August 1968 erhielten sechs Länder insgesamt 15 Medaillen. Keines dieser Länder ging ohne Medaille aus den Kämpfen hervor. Jedes Land erhielt nicht mehr als 5 Medaillen, da in 5 Sparten gekämpft wurde.

Die DDR erhielt mehr Medaillen als jedes der anderen fünf Länder, die UdSSR und Rumänien erhielten die gleiche Anzahl von Medaillen und mehr Medaillen als jedes der noch nicht erwähnten Länder. Die Niederlande erhielt mehr Medaillen als jedes der nun noch übrigen beiden Länder.

Wieviel Medaillen erhielten die DDR, die UdSSR und Rumänien?

OSIR Dr. R. Lüders, Berlin

W 9 ■ 390 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \text{ erfüllt ist.}$$

StR G. Schulze, Herzberg/Elster

10 ■ 391 Welche der folgenden fünf Bedingungen ist der Bedingung

$$x^2 - x - 6 < 0 \text{ äquivalent?}$$

- (1) $x > -2$; (2) $x < 3$; (3) $x > 3$ und $x < -2$; (4) $-2 < x < 3$; (5) $x > 3$ oder $x < -2$.

(Zwei derartige Bedingungen heißen einander äquivalent, wenn sie die gleichen Erfüllungsmengen besitzen, d. h. in der vorliegenden Aufgabe, wenn die Ungleichungen dieselben Lösungsmengen haben).

StR G. Schulze, Herzberg/Elster

■ 392 Aus vier reellen Zahlen a, b, c und d lassen sich bekanntlich sechs Summen von je zwei Zahlen bilden, und zwar $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$.

a) Es sollen nun vier Zahlen angegeben werden, bei denen diese Summen (jedoch nicht notwendig in der angegebenen Reihenfolge) gleich 12, 15, 17, 17, 19 bzw. 22 sind. b) Sind in dem vorliegenden Fall die Zahlen a, b, c, d (abgesehen von der Reihenfolge) eindeutig durch die Angabe der obigen Summen bestimmt?

c) Es sind diejenigen Bedingungen anzugeben, denen die vier Zahlen a, b, c und d genügen müssen, damit sie durch die Angabe der obigen Summen von je zwei Zahlen (abgesehen von der Reihenfolge) eindeutig bestimmt sind.

W. Burmeister, EOS Dresden-Süd, Kl. 10

W 10/12 ■ 393 Von 66 Mitgliedern einer Bezirkssektion der Mathematischen Gesellschaft korrespondiert jeder mit jedem. Jeder Briefwechsel zwischen je zwei Wissenschaftlern dieser Bezirkssektion betrifft jeweils genau eine der Disziplinen Analysis, Zahlentheorie, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Für eine Schulung „olympiaverdächtig“ Mathematik-Kandidaten sollen von diesen 66 Mathematikern drei Wissenschaftler gewonnen werden, die alle über das gleiche Teilgebiet korrespondieren. Die Sekretärin der Bezirkssektion erhält den Auftrag, eine solche Dreiergruppe aus der Kartei ausfindig zu machen. Ihr erster Versuch scheitert, da der beliebig herausgesuchte Mathematiker Müller zwar mit den Mathematikern Schulze und Lehmann über Analysis in Briefwechsel steht, beide aber untereinander über Geometrie korrespondieren. Wer kann ihr helfen? Gibt es überhaupt eine solche Dreiergruppe unter den 66 Mathematikern?

M. Rehm, Berlin

W 10/12 ■ 394 Am 26. Oktober 1968 startete das sowjetische Raumschiff „Sojus 3“ und wurde auf eine Erdumlaufbahn gebracht, deren Apogäum (größter Abstand von der Erdoberfläche) 225 km betrug. Wie groß ist der Flächeninhalt des Gebietes der Erde, das der Kosmonaut Oberst Georgi Beregowoi aus einer Entfernung von 225 km überblicken konnte?

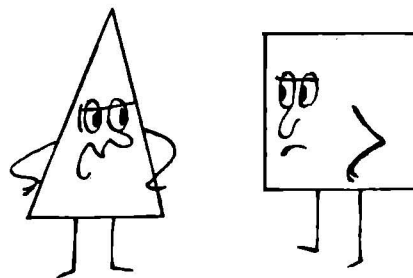
Dabei sei angenommen, daß dieses Gebiet die Gestalt einer Kugelkappe (mit dem Radius 6370 km) hat; die Lichtbrechung (sphärische Refraktion) soll nicht berücksichtigt werden.

G. Grunewald, Luckenwalde

An unsere Wettbewerbsteilnehmer

- ☐ Jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einsenden!
- ☐ Adresse deutlich schreiben (möglichst Druckschrift)!
- ☐ Nummer der Wettbewerbsaufgabe nicht vergessen!
- ☐ Im Lösungstext deutlich schreiben!
- ☐ Endergebnisse hervorheben (unterstreichen, farbig kennzeichnen)!

In freien Stunden **alpha** heiter

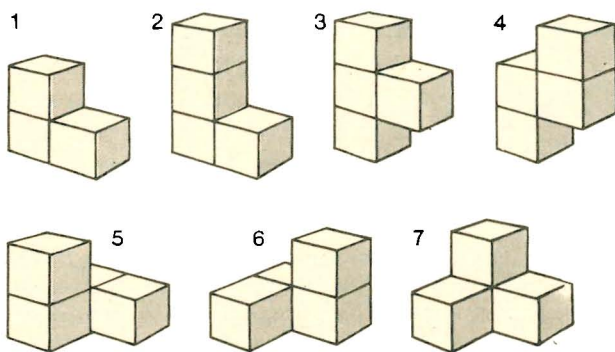


„Denken Sie bloß nicht, mir fehlt eine Ecke!“

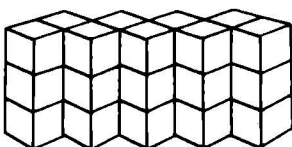
Aus: Zeit im Bild 42/68

Der Soma-Würfel

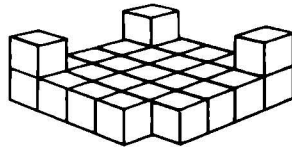
Der dänische Schriftsteller *Piet Hein* hat den Soma-Würfel erfunden. Baut Euch die sieben Teile aus Kinderbausteinen oder laßt Euch von einem Tischler die sieben Teile herstellen. Günstige Größe: 5 cm Kantenlänge eines kleinen Würfels. Man kann nun aus den sieben Teilen einen großen Würfel bauen (3^3 Würfel). Bis jetzt sind dafür mehr als 230 verschiedene Lösungen bekannt. Wenn Ihr den Würfel habt, könnt Ihr versuchen, die „Mauer“ oder das „Schloß“ zu bauen. Es müssen immer alle sieben Teile verwendet werden. Entwickelt neue Soma-Figuren und findet einen treffenden Namen dafür! Sendet eine Skizze an die Redaktion! Die besten Figuren werden in einer späteren Ausgabe veröffentlicht. Viel Spaß beim Knobeln und Bauen wünscht *alpha*-heiter!



Mauer



Schloß



Wer ist der Täter?

Sieben Schüler stehen im Verdacht, einen vorbereiteten Tafeltext verändert zu haben. Täter ist derjenige, von dem sich mit absoluter Sicherheit sagen läßt, wie er mit Vor- und Zunamen heißt. Einer heißt mit Zunamen Schulze, zwei heißen Meier und vier heißen

Lehmann. Einer hört auf den Vornamen Franz, einer auf Fritz, einer auf Karl und vier haben den Vornamen Johannes. Wer ist der Täter?

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

Bitte richtig verschieben!

Die folgenden Wörter sind in geeigneter Weise gegeneinander zu verschieben. Geschieht das richtig, so erhält man in zwei Senkrechten die Namen von zwei Linien, die man als „Kegelschnitte“ bezeichnet.

PROZENTSATZ
PARALLELE
GRUNDLINIE
ABSZISSE
BILDPUNKT
GLEICHSETZUNGSVERFAHREN
OBERFLÄCHE

OST R K.-H. Lehmann, V.L.d.V. Berlin

Magische Quadrate

1	2	3	4
2			
3			
4			

5	6	7	8
6			
7			
8			

1. norweg. Mathematiker
2. griech. Buchstabe
3. engl. Universitätsstadt
4. Gegenteil von „kurz“

5. Nebenfluß der Loire
6. Dreieckstransversale
7. Moralbegriff
8. Schiffstau

OL H. Herzog, V. L. d. V. Leipzig

Was bedeutet das?

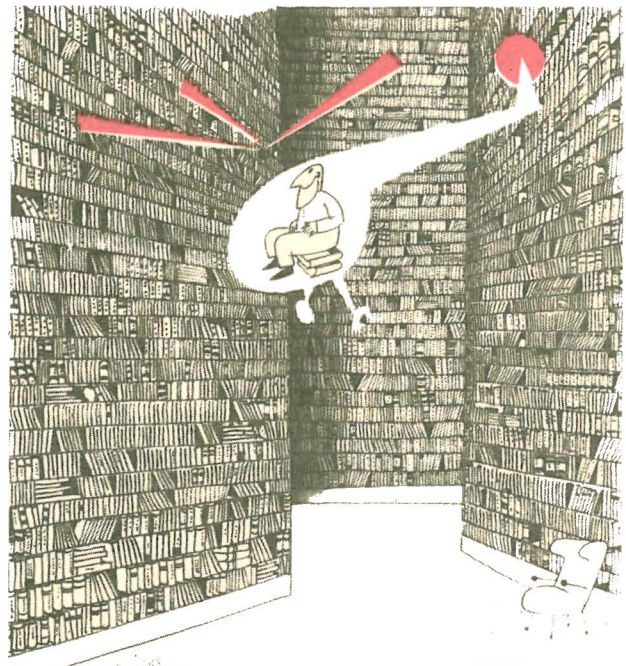


Totgesagter Gelehrter

Felix Klein (1849 bis 1925) pflegte in seiner Vorlesung über Gruppentheorie folgende Geschichte seinen Zuhörern zum besten zu geben:

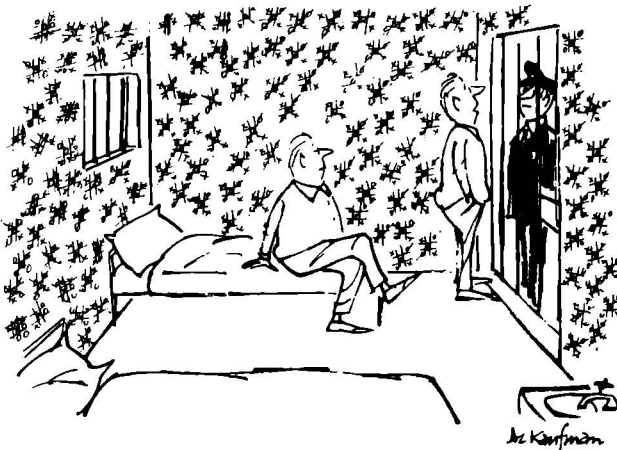
Auf dem denkwürdigen Pariser Mathematikerkongreß im Jahre 1900 wurde in einer schlichten Feierstunde aller bedeutenden Mathematiker gedacht, die in den letzten zehn Jahren das Zeitliche gesegnet hatten. U. a. wurde der Gruppentheoretiker *Camille Jordan* (1838 bis 1922), Professor an der École Polytechnique, gest. am 7. 11. 1898, genannt. Da erhob sich in den letzten Reihen eine hagere Gestalt, um der Versammlung zu verkünden, daß an der Angabe seines Todesdatums wenigstens die Jahreszahl nicht stimmen könne, da er noch am Leben sei. (Jordan starb am 20. Januar 1922 in Mailand.)

Mitgeteilt von M. Otto, Köthen



Mein Großvater hatte viele Bücher. Leider war er so vergeßlich, daß er meist stundenlang das Buch suchte, auf dem er gerade saß.

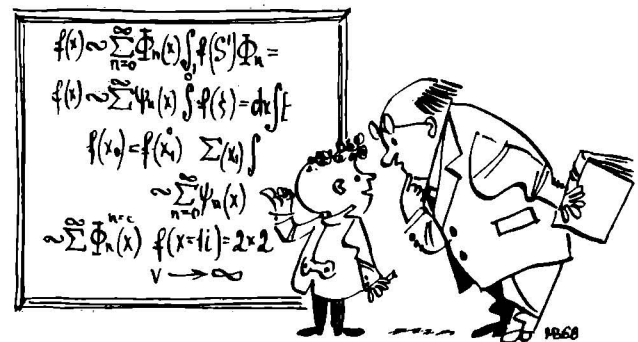
Aus: Im siebenten Himmel v. Vladimír Fuka, Praha



„Any chance of being moved to a new cell?“

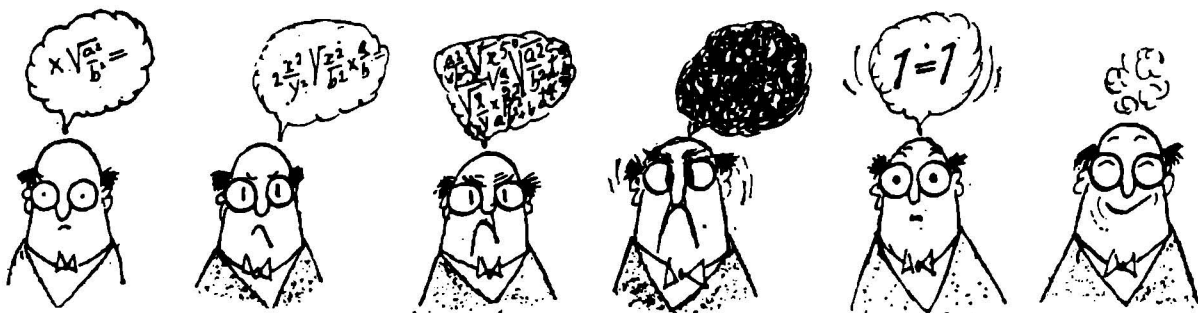
(Besteht irgendeine Möglichkeit, in eine neue Zelle umgesetzt zu werden?)

Aus: Recreational mathematics magazine 13/63, Kent (Ohio)



Glauben Sie mir nun, daß $2 \times 2 = 4$ ist?

W. Malachow, Moskau



Aus: „The Teacher“

VIII. Olympiade

Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (8./9. 2. 1969)

Klassenstufe 7

1. Gesucht sind natürliche Zahlen, die beim Teilen durch 7 den Rest 4, beim Teilen durch 4 den Rest 3 und beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.

a) Ermittle die kleinste derartige natürliche Zahl!

b) Wie kann man aus der in a) gesuchten Zahl weitere natürliche Zahlen erhalten, die den gleichen Bedingungen genügen?

2. Gegeben sei eine positive ganze Zahl n . Man denke sich alle Darstellungen von n als Summe von genau zwei voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden gebildet. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, wie z. B. $9 = 4 + 5$ und $9 = 5 + 4$, als nicht verschieden angesehen werden.

Ermittle

a) für $n = 7$ b) für $n = 10$

c) für beliebiges (positives ganzzahliges) n die Anzahl dieser Darstellungen!

3. Beweise folgenden Satz:

Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks ΔABC das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung und verbindet den Fußpunkt des Lotes mit den Seitenmitten der anderen beiden Seiten, so ist die Summe der Längen dieser Verbindungsstrecken gleich der halben Summe der Längen der beiden Seiten.

4. Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet, deren jede für 4 Glühlampen vorgesehen ist. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, daß einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele nur eine einzige enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich genau 2 Glühlampen. Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln!

5. Gegeben seien in einer Ebene drei Geraden g_1, g_2 und g_3 , die sich in einem Punkt S schneiden mögen, sowie ein Punkt $A \notin S$ auf der Geraden g_1 .

Konstruiere ein Dreieck ΔABC , in dem die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c auf g_1, g_2 bzw. g_3 liegen!

6. Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren.

Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag?

(Der 30. 4. 1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre).

Klassenstufe 8

1. Beweise folgenden Satz:

Jedes Dreieck ΔABC läßt sich in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen.

2. Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.

Beweise, daß in jedem Falle (d. h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

3. Es ist zu beweisen:

Läßt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei Division durch 9 den Rest r , so läßt auch die Zahl selbst bei Division durch 9 den Rest r .

4. Von einem Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ ($b < a$) ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden. Löse die Aufgabe durch Konstruktion!

Bemerkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

5. Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: „Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig.“

a) Ist die Behauptung wahr?

b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

6. Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:

$$(1) d > c$$

$$(2) a + b = c + d$$

$$(3) a + d < b + c$$

Ordne die Zahlen der Größe nach (beginne mit der größten Zahl)!

Klassenstufe 9

1. Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.

„Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 5 und quadrierst sie. Das wäre in deinem Falle 64. Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17. Die so gebildete Zahl, hier also 1764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42.“

Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

2. Konstruieren Sie ein Dreieck ΔABC aus $a, b + c$ und a ! Dabei sind a, b, c die Längen der Dreiecksseiten und α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$.

3. Geben Sie alle Zahlentripel (a, b, c) an, die die Gleichungen

$$a + b + c = s_1 \quad a - b + c = s_3$$

$$a + b - c = s_2 \quad a - b - c = s_4$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, daß die Mengen der vier Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

4. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ΔABC .

Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

5. Es ist zu beweisen, daß für jede ungerade Zahl n die Zahl

$$n^{12} - n^8 - n^4 + 1$$

durch 512 teilbar ist.

6. Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a , vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c .

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, daß zur Angabe dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht!

Klassenstufe 10

1. Im Dreieck ΔABC sei $AB = 18$ cm. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so daß ein Trapez

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil.

Karl Manteuffel

Dekan der Fakultät für Mathematik und
Naturwissenschaften des Wissenschaftlichen
Rates der TH Magdeburg

Der Schulausflug

1. 395 Die Oberschule Grüntal führt ihren Wandertag durch. Da der Direktor verhindert ist, leitet ein Mathematiklehrer den Ausflug. Am nächsten Tage erkundigt sich der Direktor danach, wieviel Schüler teilgenommen haben. Die Antwort des Mathe-

matiklehrers lautet: „Ganz gleich, ob die Schülerinnen und Schüler zu zweit, zu dritt, zu viert, zu fünft oder zu sechst angetreten waren, immer mußte der letzte allein stehen; beim Antreten in Siebener-Reihen dagegen gab es keinen Rest. Die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften ist die Anzahl der Teilnehmer am Ausflug.“

Fragen: a) Wie groß ist die Anzahl der Teilnehmer am Ausflug?

b) Welche anderen natürlichen Zahlen haben dieselben Eigenschaften?

Die Technische Hochschule „Otto von Guericke“ wurde im Jahre 1953 als Hochschule für Schwermaschinenbau in Magdeburg gegründet. In einem bedeutenden Industriezentrum unserer Republik gelegen, vermochten sich Lehre und Forschung schnell zu entwickeln. So wurde in kurzer Zeit aus der Spezialhochschule eine Hochschule mit polytechnischem Charakter. Bereits 1961 konn-

ten daher dieser Hochschule der Status einer Technischen Hochschule und der verpflichtende Name Otto von Guericke verliehen werden.

Als die VI. Wissenschaftliche Jahreskonferenz der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Magdeburg stattfand (10. bis 15. 2. 1969), waren es fast auf den Tag genau 15 Jahre, daß im Jahre 1954 das Institut für Mathematik und Mechanik mit 1 Oberassistenten und 2 Assistenten seine Tätigkeit aufnahm. Aus diesen Anfängen entwickelten sich die Gebiete Mathematik, Mechanik, Rechentchnik und Datenverarbeitung, in denen heute 12 Professoren und Dozenten, 70 wissenschaftliche Mitarbeiter und zahlreiche technische Kräfte, Arbeiter und Angestellte beschäftigt sind. Alle Studenten der TH erhalten in diesen Fächern eine Grundausbildung, und mehr als 400 Studenten sind für eine Fachausbildung auf diesen Gebieten immatrikuliert.

$ABDE$ entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreiecks $\triangle ABC$ ist.

Berechnen Sie die Länge der Seite DE des Trapezes!

2. Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der Quadrate der beiden letzten Zahlen ist. Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?

b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n . Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:

α) für $n = 3$!

β) für beliebiges positives ganzes n !

3. Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6 \cdot ab$ stets

$$\lg(a + b) - \lg(a - b) = \frac{1}{2} \lg 2 \text{ gilt!}$$

4. Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0; 8)$. Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q !

5. Beweisen Sie folgende Behauptung:

Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

6. Beweisen Sie die folgende Behauptung: Wenn p und q Primzahlen sind ($p > 3, q > 3$), dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.

Klassenstufe 11/12

1. Man ermittle alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x-2a)(x+a)}$$

erfüllen! Dabei sei a eine reelle Zahl.

(Fallunterscheidung!)

2. a) Untersuchen Sie, ob die Zahlenfolge $a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$

streng monoton fallend ist!

b) Beweisen Sie, daß alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind!

3. Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ε und g die Gerade, die diese Strecke enthält.

a) Von einem Punkt Q auf g , der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ε , die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.

Beweisen Sie: Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q .

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g , die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.

Beweisen Sie: Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2 , die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

4. Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden. Während im Jahre 1950 noch 92 760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13 777 im Jahre 1966 zurück.

a) Um wieviel Prozent nahm jährlich die

Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit gut entspricht)?

b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte Halbwertszeit, d. h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?

c) Mit wieviel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

5. Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.

(2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3:4.

(3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3 .

(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.

(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.

(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

Es sei bekannt, daß von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.

Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

6. Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner

sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.

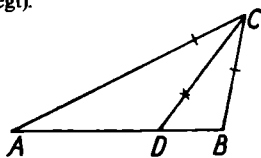
VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der Bezirksolympiade 1968 Fortsetzung

Klassenstufe 10

1. Die zu beweisende Aussage besteht in mehreren Teilaussagen, von denen jede einzelne durch jeweils geeignete Wahl der Bezeichnungen auf folgende Behauptung zurückgeführt werden kann:

Schneidet in einem Dreieck $\triangle ABC$ die Halbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Seite AB im Punkt D , so ist $\overline{AD} < \overline{AC}$. Beweis: Es ist $\sphericalangle ADC > \sphericalangle DCB^*$ (Satz über Außenwinkel im Dreieck $\triangle DBC$), also $\sphericalangle ADC > \sphericalangle ACD$ (da CD den Winkel $\sphericalangle ACB$ halbiert, also $\overline{AC} > \overline{AD}$ (da dem größeren Winkel im Dreieck $\triangle ADC$ die größere Seite gegenüberliegt).



* $\sphericalangle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

2. Setzt man $\log_b c = x$ und $\log_a c = y$, so gilt nach der Definition des Logarithmus: $b^x = c$ und $a^y = c$. Folglich ist $b^x = a^y$ und (nach Logarithmieren) $\log_a b^x = \log_a a^y$. Nach Anwendung des Gesetzes über das Logarithmieren einer Potenz erhält man

$$x \cdot \log_a b = y \cdot \log_a a$$

und wegen $\log_a a = 1$ endlich $x \log_a b = y$, d. h.

$$\log_a b \cdot \log_a c = \log_a c, \text{ w. z. b. w.}$$

Anderer Lösungsweg: Es sei $b = a^x$ und $c = b^y$.

Dann ist $c = (a^x)^y = a^{xy}$ und man erhält nach der Definition des Logarithmus:

$$xy = \log_a c \text{ oder } \log_a b \cdot \log_a c = \log_a c.$$

3. Es sei a die Maßzahl der Länge der Grundkante und h die der Höhe der Pyramide (in cm). Dann ist die Maßzahl des Volumens (in cm^3) $V_p = \frac{1}{3} a^2 h$ und die des Oberflächeninhaltes (in cm^2)

$$O_p = a^2 + 2a \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe sind a, h natürlich und ungleich 0, ferner soll gelten:

$$V_p = O_p, \text{ also}$$

$$\frac{1}{3} a^2 h = a \left(a + 2 \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} \right).$$

Da $a \neq 0$ gilt, kann durch a dividiert werden, und man erhält

$$\frac{1}{3} ah = a + 2 \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}, \text{ daraus folgt}$$

$$ah - 3a = 6 \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$$

und nach Quadrieren beider Seiten

$$a^2 h^2 - 6a^2 h + 9a^2 = 9a^2 + 36h^2 \text{ und weiter}$$

$$a^2 h^2 - 6a^2 h = 36h^2. \text{ Wegen } h \neq 0$$

kann durch h dividiert werden, und es folgt

$$a^2 (h - 6) = 36h$$

$$a^2 = \frac{36h}{h - 6} \text{ sowie}$$

$$a = 6 \sqrt{\frac{h}{h - 6}}.$$

Da a eine natürliche Zahl sein soll, muß

$\frac{h}{h - 6}$ das Quadrat einer natürlichen Zahl

oder das Quadrat von $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{6}$

sein. Das heißt, es muß gelten $h > 6$, da sonst der Nenner nicht positiv würde. Die Substitution $h - 6 = m$ (m natürlich) liefert

$$\frac{h}{h - 6} = \frac{m + 6}{m} = 1 + \frac{6}{m}.$$

Daher muß (m und folglich auch) $\frac{6}{m}$ ein positiver Teiler von 6, d. h. eine der Zahlen 1, 2, 3, 6 sein, und zwar so, daß $1 + \frac{6}{m}$

Quadratzahl wird. Von den Zahlen 2, 3, 4, 7 ist aber nur 4 Quadratzahl, was auf $\frac{6}{m} = 3$,

$m = 2, h = 8, a = 12$ führt. Umgekehrt ergibt sich aus $a = 12, h = 8$ in der Tat

$$V_p = O_p = 384.$$

Aus $\frac{h}{h - 6} = \frac{1}{4}$ bzw. $\frac{h}{h - 6} = \frac{1}{9}$ bzw.

$\frac{h}{h - 6} = \frac{1}{36}$ ergeben sich keine weiteren Lösungen.

4. Die Gleichung (*) ist äquivalent mit

$$2(a_1^2 - a_2^2) = a_3^2.$$

Daraus folgt, daß a_3^2 und damit auch a_3 durch 2 teilbar ist, also

$$a_3 = 2a' \text{ (a' ganz). Somit ist}$$

$$a_1^2 - a_2^2 = (a_1 - a_2) \cdot (a_1 + a_2) = 2a'^2,$$

und es sind wegen $a_3 \leq 10$ nur die Werte

$$a' = 1; 2; 3; 4; 5 \text{ möglich.}$$

Also sind folgende Faktorzerlegungen zu prüfen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 &= 2 \\ 1 \cdot 8 &= 2 \cdot 4 = 8 \\ 1 \cdot 18 &= 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 18 \\ 1 \cdot 32 &= 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8 = 32 \\ 1 \cdot 50 &= 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10 = 50. \end{aligned}$$

Dabei ist $p = a_1 - a_2$ jeweils der kleinere und $q = a_1 + a_2$ der größere Faktor, und wegen $a_1 = \frac{q+p}{2}$ scheiden alle Fälle mit

$q + p$ ungerade aus.

Es bleiben also genau die drei Fälle

$$p \cdot q = 2 \cdot 4 \quad p \cdot q = 2 \cdot 16$$

$$p \cdot q = 4 \cdot 8$$

übrig. Sie ergeben genau die Lösungstriplet: $(a_1, a_2, a_3) = (3, 1, 4)$ bzw. $(9, 7, 8)$ bzw. $(6, 2, 8)$. Die Probe erweist die Richtigkeit der Lösungen.

5. Es sei a eine reelle Zahl, für die die Gleichung reelle Lösungen, etwa die Zahlen x_1 und x_2 , hat. (Dabei sei entweder der $x_1 \neq x_2$, oder aber $x_1 = x_2$ sei die einzige Lösung der Gleichung.) Dann gilt

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

und nach dem Satz des Vieta:

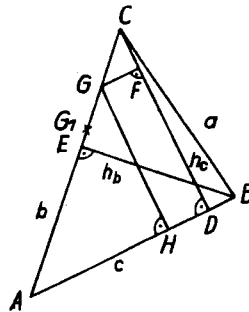
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (-a)^2 - 2(a - 2) \\ &= a^2 - 2a + 4 \\ &= (a - 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

Die Summe nimmt mithin für $a = 1$ und nur für dieses a ihren kleinsten Wert an, falls die Gleichung $x^2 + ax + a - 2 = 0$ für $a = 1$ Lösungen besitzt.

Da dies in der Tat der Fall ist ($x^2 + x - 1 = 0$, hat die Lösung $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$) ist

$a = 1$ und nur dies der gesuchte Wert.

6. (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck der geforderten Art (Abb.) mit $\overline{CD} = h$ und $\overline{BE} = h_b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$.



Auf CD trage man von D aus h_b mit dem Endpunkt F ab.

Dann gilt: $\overline{CF} = h_c - h_b$.

Die auf CD in F errichtete Senkrechte schneide AC in G . Der Fußpunkt des von G auf AB gefällten Lotes sei H .

Dann gilt: $\overline{GH} = h_b$ und es ist

$$\triangle GHA \cong \triangle BEA;$$

denn $\sphericalangle GHA \cong \sphericalangle BEA$ als rechte Winkel,

$$\sphericalangle GAH \cong \sphericalangle EAB$$

$$\overline{GH} = \overline{EB} = h_b.$$

Daraus folgt: $\overline{AG} = \overline{AB}$ (1)

und damit $\overline{CG} = b - c$.

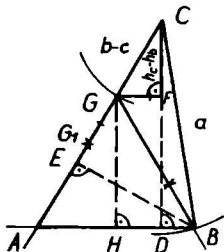
Weiterhin ist $\angle BAC \cong \angle FGC$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und $\angle FGA = 180^\circ - \alpha$, wenn $\angle CAB = \alpha$ ist. Nun ist wegen (I) das Dreieck $\triangle AGB$ gleichschenkelig und daher

$$\angle AGB = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \text{ Also ist } GB$$

die Winkelhalbierende des Winkels $\angle FGA$. (II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ höchstens dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion entstehen kann:

Das Teildreieck $\triangle FGC$ wird aus $b - c$, $h_c - h_b$ und dem rechten Winkel bei F konstruiert, und das Teildreieck $\triangle CGB$ danach aus a , $b - c$ und

$$\angle CGB = \angle CGF + \frac{1}{2} \angle FGA: (\text{Abb.})$$



Man zeichnet $\overline{CF} = h_c - h_b$.

Punkt G liegt:

1. Auf dem Kreisbogen mit $b - c$ um C ,
 2. auf der Senkrechten, errichtet auf CF in F .
- Punkt B liegt:

1. Auf dem Kreisbogen mit a um C ,
2. auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle G_1GF$, wobei G_1 ein Punkt auf der Verlängerung von CG über G hinaus ist.

Punkt A liegt:

1. Auf der Verlängerung von CG über G hinaus
2. auf der Parallelen durch B zu GF .

(III) Weiter gilt: Wird ein Dreieck $\triangle ABC$ durch diese Konstruktion gewonnen, so entspricht es den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion ist $\overline{CB} = a$. Ferner ist $\angle AGB = \angle BGF$ (nach Konstruktion) $= \angle ABG$ (Wechselwinkel), also $\triangle ABG$. Aus dem gleichen Grunde ist $\overline{BE} = \overline{GH} = h_b$. Das Viereck $GHDF$ ist nach Konstruktion ein Rechteck, und daher ist auch $\overline{GH} = \overline{FD} = h_b$. Also ist $\overline{CF} = h_c - h_b$.

(IV) Durch die gegebenen Stücke ist das Dreieck $\triangle ABC$ eindeutig (bis auf Kongruenz) bestimmt, da die gegebenen Stücke die Bedingungen $b - c > h_c - h_b$ und $a > b - c$ erfüllen. Ist (mindestens) eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein Dreieck $\triangle ABC$, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Schulolympiade 1969/70

Auf Wunsch zahlreicher Leser veröffentlichen wir in Heft 4/69 die Aufgaben (Kl. 5 bis 12) der 1. Stufe (Schulstufe) der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR.

Lösungen



▲ 336 Die Gleichung einer quadratischen Funktion ist $y = ax^2 + bx + c$. Auf Grund der gegebenen Bedingungen erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$a + b + c = 2, \quad (1)$$

$$a - b + c = 0, \quad (2)$$

$$9a + 3b + c = 0. \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Subtraktion $2b = 2$, also $b = 1$.

Daher folgt aus (1) $a + c = 1$

und aus (3) $9a + c = -3$. Hieraus erhält man

$$8a = -4, \text{ also } a = -\frac{1}{2} \text{ und } c = \frac{3}{2}.$$

Die Probe bestätigt, daß $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

die gesuchte Gleichung der quadratischen Funktion ist.

▲ 337 Die Aufgabe wird durch eine Umformung des Terms $n^2 - n + 13$ gelöst. Zu diesem Zweck wählen wir zwei Faktoren so, daß ihre Differenz 17 beträgt und ihr Produkt mit $n^2 - n$ beginnt. Solche Faktoren sind $n + 8$ und $n - 9$; denn es gilt

$$(n + 8) - (n - 9) = 17 \text{ und } (n + 8)(n - 9)$$

$$= n^2 - n - 72. \text{ Wir erhalten daher}$$

$$z = n^2 - n + 13 = (n + 8)(n - 9) + 85.$$

Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. $n + 8$ ist durch 17 teilbar.

Dann ist auch $n - 9$ durch 17 teilbar; also ist $(n + 8)(n - 9)$ durch $17^2 = 289$ teilbar. Die Zahl $85 = 5 \cdot 17$ ist aber nicht durch 17^2 teilbar; folglich ist auch die Zahl z nicht durch 17^2 teilbar.

2. $n + 8$ ist nicht durch 17 teilbar.

Dann ist auch $n - 9$ nicht durch 17 teilbar; also ist auch $(n + 8)(n - 9)$ nicht durch 17 teilbar. Daher ist auch z nicht durch 17 teilbar und schon gar nicht durch 17^2 teilbar. Damit haben wir bewiesen, daß die Zahl $z = n^2 - n + 13$, wo n eine beliebige ganze (nicht notwendig positive) Zahl ist, in keinem Falle durch 289 teilbar ist.

W 10/12 ■ 338 a) Es seien s der Weg (in m), $t = 13,5$ s die Zeit bis zur Erreichung der Geschwindigkeit $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} =$

$$= \frac{100000}{3600} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{250}{9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ und } b \text{ die}$$

konstante Beschleunigung. Dann gilt $v = bt$,

$$\text{also } b = \frac{v}{t} = \frac{250}{9 \cdot 13,5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 2,058 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Ferner erhält man

$$s = \frac{b}{2} t^2 = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{250 \cdot 13,5}{2 \cdot 9} \text{ m} = 187,5 \text{ m}.$$

Der SIL 114 hat also bis zur Erreichung der Geschwindigkeit von 100 km/h einen Weg von $187,5 \text{ m}$ zurückgelegt.

b) Ist s_1 der Weg und t_1 die Zeit bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit

$$v_1 = 190 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{475}{9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ so gilt}$$

$$t_1 = \frac{v_1}{b} = \frac{475}{9} \cdot \frac{9 \cdot 13,5}{250} = 25,65 \text{ s}$$

$$\text{und } s_1 = \frac{v_1 \cdot t_1}{2} = \frac{475 \cdot 25,65 \text{ m}}{2 \cdot 9} \approx 676,9 \text{ m}.$$

Die verbleibende Strecke von

$$4000 \text{ m} - 676,9 \text{ m} = 3323,1 \text{ m} \text{ wird mit der}$$

$$\text{Höchstgeschwindigkeit } v_1 = \frac{475}{9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{zurückgelegt, wofür die Zeit } t_2 = \frac{3323,1 \cdot 9}{475} \text{ s}$$

$$\approx 62,96 \text{ s benötigt wird. Nun ist}$$

$$t_1 + t_2 \approx 88,61 \text{ s;}$$

der SIL 114 hat also in rund $88,6 \text{ s}$, d. h. 1 min $28,6 \text{ s}$, nach dem Start eine Entfernung von 4 km zurückgelegt.

Zum Vergleich verweisen wir auf die Aufgabe 189 in Heft 1/1968, S. 18 und die Lösung dieser Aufgabe in Heft 3, S. 90. Der SIL 114 hat also mit $2,06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ eine weit höhere Beschleunigung als der kleinere Moskwitsch (mit $1,39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) und auch eine sehr hohe Höchstgeschwindigkeit (190 km/h ; Moskwitsch 120 km/h).

W 10/12 ■ 339 Wir bezeichnen die gesuchte Zahl, die nach den Voraussetzungen der Aufgabe nicht kleiner als 1000 ist, mit $1000a + b$, wobei a und b natürliche Zahlen mit $a > 0$ und $0 \leq b \leq 999$ sind. Dann gilt

$$\sqrt[3]{1000a + b} = a, \text{ also}$$

$$1000a + b = a^3,$$

$$\text{d. h. } a^3 - 1000a = a(a^2 - 1000) = b.$$

Daher gilt

$$0 \leq a(a^2 - 1000) < 1000.$$

Daraus folgt einerseits

$$a^2 \geq 1000, \text{ also } a > 31$$

und andererseits

$$a^2 - 1000 < \frac{1000}{a} < \frac{1000}{31} < 33.$$

Daher ist $a = 32$.

Wir überprüfen das Ergebnis und erhalten

$$32^3 = 32768,$$

$$\text{also } \sqrt[3]{32768} = 32.$$

Lösung der Aufgabe von Dr. W. Rautenberg

▲ 308 Wir nehmen an, wir hätten einen Quader Q aus endlich vielen paarweise verschiedenen Würfeln zusammengesetzt. Die Grundfläche dieses Quaders ist ein aus Quadraten zusammengesetztes Rechteck, wobei das kleinste Quadrat offenbar keine Seite mit

der Kante des Grundrechtecks gemeinsam haben kann. Folglich ist der kleinste auf der Grundfläche aufsitzen Würfel W_1 von allen Seiten von Würfeln umgeben, die ihn überragen. Auf W_1 sitzt nun wiederum ein kleinster Würfel W_2 auf, der von größeren Würfeln allseitig umgeben ist, daher kann W_2 noch nicht an die Deckfläche des Quaders anstoßen und das Verfahren kann fortgesetzt werden. Wir erhalten auf diese Weise eine unendliche Folge $W_1, W_2, W_3, \dots$ von Würfeln, was der Annahme widerspricht, daß Q aus endlich vielen Würfeln aufgebaut ist.

Lösungen zu: Mexiko 68

▲ 340 Gemäß Aufgabenstellung sollen die fünf natürlichen Zahlen, a, b, c, d und e den folgenden mit I, II und III benannten Gleichungen genügen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & abc = de \\ \text{II} & ab = be \\ \text{III} & ce = bd. \end{array}$$

Durch Multiplikation der linken und rechten Seiten von II und III ergibt sich die Gleichung $acde = b^2de$. Beide Seiten dieser Gleichung werden durch de dividiert:

$$\text{IV} \quad ac = b^2.$$

Gemäß Gleichung IV ist b die mittlere Proportionale ($a : b = b : c$) zu a und c oder das geometrische Mittel ($b = \sqrt{ac}$) der Zahlen a und c . Durch Multiplikation beider Seiten von IV mit b folgt weiter:

$$\text{V} \quad abc = b^3.$$

Laut Gleichung I kann in V abc durch de ersetzt werden: $de = b^3$. Diese letzte Gleichung stellen wir nach d um:

$$\text{VI} \quad d = \frac{b^3}{e}.$$

In Gleichung II ersetzen wir nunmehr die Zahl d gemäß Gleichung VI durch $\frac{b^3}{e}$ und erhalten:

$$\text{VII} \quad a \cdot \frac{b^3}{e} = be.$$

Beide Seiten dieser letzten Gleichung multiplizieren wir mit $\frac{e}{b^3}$ und erhalten:

$$\text{VIII} \quad a = \frac{e^2}{b^2} = \left(\frac{e}{b}\right)^2.$$

Laut Gleichung VII muß $\frac{e^2}{b^2}$ und damit auch $\frac{e}{b}$ eine natürliche Zahl sein und a ist eine Quadratzahl:

$$\text{IX} \quad a = m^2.$$

(Zunächst ist $\frac{e}{b}$ als Quotient zweier natürlicher Zahlen eine rationale Zahl. Da weiterhin ihr Quadrat eine natürliche Zahl ist, ist $\frac{e}{b}$ selbst eine natürliche Zahl.)

Da bei der Ersetzung $a \rightarrow c, c \rightarrow a, d \rightarrow e, e \rightarrow d, b \rightarrow b$ unsere Aufgabe in sich überführt wird, gilt analog zu VII auch

$$\text{X} \quad c = \left(\frac{d}{b}\right)^2 \text{ und}$$

$$\text{XI} \quad c = n^2.$$

In IV wird nunmehr gemäß IIX bzw. X a durch m^2 und c durch n^2 ersetzt:

$$b^2 = m^2 n^2.$$

Hieraus erfolgt durch Radizieren beider Seiten

$$\text{XII} \quad b = mn.$$

Jetzt wird in VII a und b gemäß IIX und XI durch m^2 bzw. mn ersetzt:

$$m^2 = \frac{e^2}{m^2 n^2}.$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit $m^2 n^2$ folgt $e^2 = m^4 n^2$.

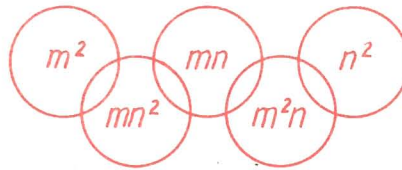
Durch Radizieren beider Seiten ergibt sich

$$\text{XIII} \quad e = m^2 n.$$

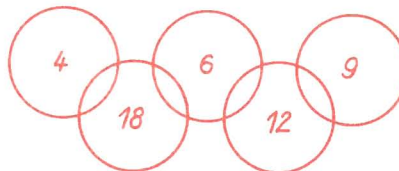
Analog folgt auch IX mittels X und XI

$$\text{XIV} \quad d = n^2 m.$$

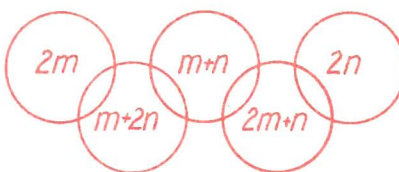
Durch ein Ersetzen der natürlichen Zahlen a, b, c, d und e gemäß den Gleichungen IIX, X, XI, XII und XIII ergibt sich:



Diese für eine Lösung notwendigen Bedingungen sind auch hinreichend: Man bestätigt leicht, daß bei beliebiger Wahl der natürlichen Zahlen m und n durch $a = m^2, b = mn, c = n^2, d = mn^2$ und $e = m^2 n$ stets eine Lösung der gestellten Aufgabe gegeben ist. Damit haben wir alle Lösungen der Aufgabe 1 gefunden. Zum Abschluß setzen wir speziell $m = 2$ und $n = 3$ und erhalten damit die spezielle Lösung:



▲ 341 Der Lösungsweg ist völlig analog zu dem von Aufgabe 340. Im Lösungsweg von Aufgabe 340 ist jede Multiplikation zu ersetzen durch eine Addition, jede Division durch eine Subtraktion und ein Potenzieren mit den Exponenten 2 oder 3 durch ein Multiplizieren mit 2 oder 3. Schließlich ist ein Radizieren (mit dem Exponenten 2) zu ersetzen durch eine Division mit dem Divisor 2. Durch diese Ersetzungen von Rechenoperationen geht der Lösungsweg der Aufgabe 340 in den der Aufgabe 341 über, und wir erhalten schließlich für Aufgabe 341 die Lösung:



▲ 342 Ein formaler Zusammenhang ist uns bekannt: Durch die Ersetzungsvorschriften der Operationen, durch die der Lösungsweg der Aufgabe 340 in den der Aufgabe 341 überführt wird, geht auch die Lösung der Aufgabe 340 in die der Aufgabe 341 über. Diesen Zusammenhang können wir unter Benutzung der Gesetze der Potenz- und Logarithmenrechnung tiefer fassen: Ist a', b', c', d' und e' eine Lösung der Aufgabe 341, so ist $a = 2^{a'}, b = 2^{b'}, c = 2^{c'}, d = 2^{d'}$ und $e = 2^{e'}$ eine Lösung der Aufgabe 340. Denn es gilt:

$$\begin{array}{l} abc = 2^{a'} \cdot 2^{b'} \cdot 2^{c'} = 2^{a'+b'+c'} \\ de = 2^{d'} \cdot 2^{e'} = 2^{d'+e'} \end{array}$$

Wegen $a' + b' + c' + d' + e'$ folgt $abc = de$. Analog ergibt sich $ad = be$ und $bd = ce$. Umgekehrt gilt für jede Lösung a, b, c, d und e der Aufgabe 340, bei der diese fünf Zahlen sämtlich Potenzen mit der Basis 2 und jeweils einer natürlichen Zahl als Exponenten sind, daß diese Exponenten eine Lösung der Aufgabe 341 sind.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. phil. habil. H. Beckert

▲ 343 1. Außer dem Hausverwalter wohnen noch drei Personen im Hause. Das Produkt der Alter dieser Personen beträgt 1 296. Folglich muß man alle möglichen Zerlegungen der Zahl 1 296 in ein Produkt von drei Faktoren aufschreiben. Zu beachten ist, daß auch der Faktor 1 zugelassen werden muß. Man findet 42 Möglichkeiten, die Zahl 1 296 in ein Produkt von drei Faktoren zu zerlegen.

2. Die Summe der Alter der drei Personen ist gleich der Hausnummer. Aber auch nach dieser Angabe kann der Versicherungsangestellte die drei Alter noch nicht ermitteln. Das heißt, daß es unter den Zerlegungen von 1 296 mindestens zwei Zerlegungen geben muß, bei denen die Summe der Faktoren gleich ist. Bestimmt man nun zu jeder der obigen Zerlegungen von 1 296 die Summe der Faktoren, so zeigt sich, daß tatsächlich zu den Zerlegungen $1 \cdot 18 \cdot 72$ und $2 \cdot 8 \cdot 81$ die gleiche Faktorsumme 91 gehört. Da andere derartige Fälle nicht auftreten, kommen für die weitere Untersuchung also nur noch diese beiden Möglichkeiten in Frage.

3. Schließlich fügt der Hausverwalter den bisherigen Informationen noch hinzu, daß er der Älteste sei, und meint, diese Angaben dürften nun (zur eindeutigen Lösung der Aufgabe) genügen. Wäre nun der Hausverwalter jünger als 72 Jahre, so käme keine der beiden Möglichkeiten in Frage, d. h. es gäbe keine Lösung. Wäre er aber älter als 81 Jahre, so könnte der Versicherungsagent noch immer nicht zwischen den beiden Möglichkeiten (1, 18, 72) und (2, 8, 81) entscheiden. Da ihm die Angabe des Hausverwalters aber genügt, muß dessen Alter folglich zwischen 72 und 81 liegen, und da dieser der älteste Hausbewohner ist, so sind die drei anderen Personen 1 Jahr, 18 und 72 Jahre alt.

1 344 Angenommen, Bernd besitze x Briefmarken; dann besitzt Dieter $2 \cdot x$ und Erwin $3 \cdot x$ Briefmarken.

Aus $x + 2x + 3x = 108$ folgt $6x = 108$, also $x = 18$.

Bernd besitzt demnach 18, Dieter 36 und Erwin 54 Briefmarken.

Aus $54 : 2 = 27$ und $27 + 8 = 35$ folgt, daß Axel 35 Briefmarken gesammelt hat.

1 345 Die Aufgabe besitzt genau sechs Lösungen:

33 728	33 728	33 728
+ 3 801	+ 3 801	+ 3 801
+ 475	+ 485	+ 495
<u>38 004</u>	<u>38 014</u>	<u>38 024</u>
33 728	33 728	33 728
+ 3 901	+ 3 901	+ 3 901
+ 475	+ 485	+ 495
<u>38 104</u>	<u>38 114</u>	<u>38 124</u>

W 5 346 Aus $ea + fgc = hiab$ folgt $h = 1$ und $f = 9$ und $i = 0$. Aus $abbc - fdg = heaf$ und $h = 1$ folgt $a = 2$.

Aus $de \cdot 19 = e0d$ und $e \neq 9$ und $43 \cdot 19 = 817$ folgt $d = 3$.

Aus $3e \cdot 19 = e03$ folgt $e = 7$.

Aus $1729 - 703 = 102b$ folgt $b = 6$.

Aus $266c : 37 = 72$ folgt $c = 4$.

Aus $2664 - 93g = 1729$ folgt $g = 5$.

Wir erhalten also $2664 : 37 = 72$

$$\begin{array}{r} - \\ 935 + 19 = 954 \\ 1729 - 703 = 1026 \end{array}$$

und stellen fest, daß alle waagrecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

W 5 347 Aus d) folgt: Herr Krause wohnt in Berlin.

Aus a) und c) folgt: Herr Lehmann wohnt weder in Leipzig noch in Erfurt; also wohnt Herr Lehmann in Schwerin.

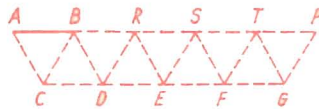
Aus b) folgt: Herr Müller wohnt nicht in Leipzig, also wohnt er in Erfurt. Daher wohnt Herr Schulze in Leipzig.

1 348 Zur Lösung der Mathematikaufgaben wurden 42 Minuten benötigt, zum Lösen der übrigen Aufgaben verbleiben noch 48 Minuten.

Aus $20 : 15 : 15 : 10 = 4 : 3 : 3 : 2$ und $48 : 12 = 4$ und $4 \cdot 4 = 16$ und $3 \cdot 4 = 12$ und $2 \cdot 4 = 8$ folgt, daß für das Lösen der Aufgaben im Fach Russisch 16 Minuten, Deutsch und Physik je 12 Minuten, Geschichte 8 Minuten zur Verfügung stehen.

1 349 Wir schlagen um die Punkte A und B mit dem Radius $r = \overline{AB}$ je einen Kreisbogen; die Kreisbögen schneiden sich im Punkt C . Durch die Punkte A, B und C ist ein gleichseitiges Dreieck bestimmt. Nun schlagen wir um die Punkte B und C mit dem Radius $r = \overline{AB} = \overline{BC}$ je einen Kreisbogen; die Kreisbögen schneiden sich im Punkte D . Durch die Punkte B, C und D ist wiederum ein

gleichseitiges Dreieck derselben Seitenlänge bestimmt. Diese Konstruktion ist fortzusetzen, bis wir die Lage des Punktes P ermittelt haben.



Aus $\angle ABR = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ folgt, daß die Punkte A, B und R auf einer Geraden liegen; ferner gilt $\overline{AB} = \overline{BR}$.

Weitere entsprechende Überlegungen führen schließlich zum Nachweis, daß der Punkt P ebenfalls auf der Geraden AB liegt und daß $AP = 5 \cdot \overline{AB}$ gilt.

W 6 350 Aus $ba - f = h$ folgt $b = 1$;

aus $ca + b = cb$ folgt $a = 0$.

Aus $f + f = d$ folgt, daß d eine gerade Zahl ist, also entweder $d = 2$ oder $d = 4$ oder $d = 6$ oder $d = 8$.

Aus $d = 2$ und $f + f = d$ folgt $f = 1$; das ist nicht möglich, da die Ziffer 1 bereits für b vergeben ist.

Aus $d = 4$ folgt $f = 2$ und wegen $10 - f = h$ ferner $h = 8$,

aus $d = 6$ folgt $f = 3$ und somit $h = 7$,

aus $d = 8$ folgt $f = 4$ und somit $h = 6$.

Der dritten Zeile entnehmen wir, daß $\frac{10c+1}{h} \cdot d$ eine ganze Zahl ist; das ist aber,

weil d eine gerade Zahl ist, nur möglich, wenn $h = 7$ ist; also gilt $d = 6, f = 3, h = 7$.

Die zweite Zeile lautet nun $(1+3) \cdot 3 + 0 = 1c$, also $c = 2$. Aus $d + bc = be$, also $6 + 12 = 1e$, folgt $e = 8$.

Die erste Zeile lautet nun $(20+10) : 3 - g = 6$, also $g = 4$. Wir erhalten daher

$$\begin{array}{r} (20+10) : 3 - 4 = 6 \\ + \quad - \quad + \quad \cdot \quad + \\ (1+3) \cdot 3 + 0 = 12 \\ (21 : 7) \cdot 6 + 0 = 18 \end{array}$$

und stellen fest, daß alle waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

W 6 351 Aus der nachstehenden Zeichnung ist unmittelbar folgendes abzulesen:

Der Flächeninhalt eines der drei Quadrate beträgt $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des Rechtecks

$ABCD$.

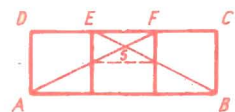
Der Flächeninhalt des Dreiecks SFE ist gleich $\frac{1}{4}$ des Flächeninhalts eines halben Quadrates,

also gleich $\frac{1}{24}$ des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.

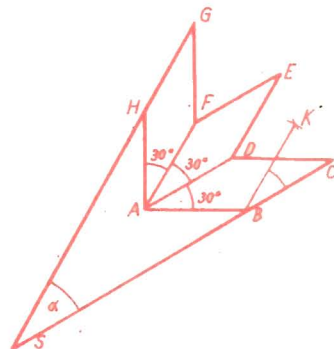
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte eines Quadrates und des Dreiecks SFE , also gleich

$\frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$ des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.

Der Flächeninhalt des Vierecks $ASED$ ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt eines Quadrates und dem Flächeninhalt des Dreiecks SFE , also gleich $\frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$ des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.



1 352 Es sei K ein Punkt, der auf derselben Seite der Geraden AB liegt wie F , und es sei $BK \parallel AF$. Dann gilt auch $BK \parallel HG$, $BC \parallel AD$ und wegen $\angle FAD = 30^\circ$ auch $\angle KBC = 30^\circ$. Daher schneiden die Geraden BC und HG einander, und es gilt $\alpha = \angle KBC = 30^\circ$.



alpha-beiter-Lösungen 2/69

Wer ist der Täter?

Der Täter ist Johannes Lehmann.

Bitte richtig verschieben! (2/69)

Proz Entsatz
pAral Lele
gRundLinie
Absz Isse
Bild Punkt
gLeich Setzungsverfahren
oberflÄch E

Magische Quadrate

1. Abel 2. Beta 3. Eton 4. Lang
5. Cher 6. Höhe 7. Ehre 8. Reep

Was bedeutet das?

K an te → Kante
in De x → Index
L im es → Limes
Kreis um Fan G → Kreisumfang

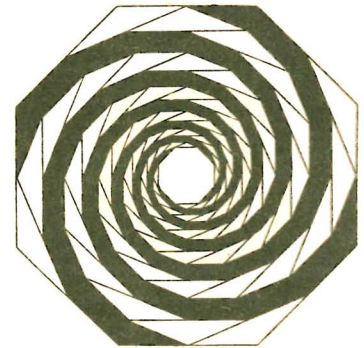
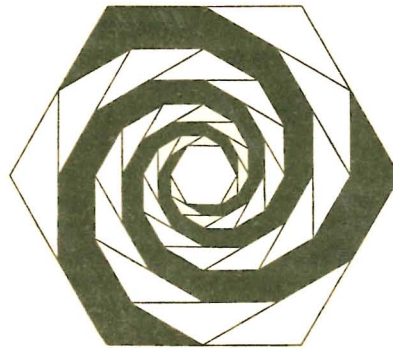
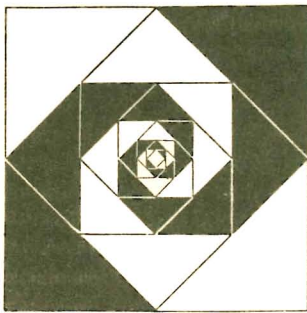
Schlagwortübersicht

A alpha (Zeitschrift alpha)
alpha-Wettbewerb
Ähnlichkeitslehre
Astronautik
B Berichte
Berufe
Beweise
Biographien
D Determinanten
F Fernsehen
Funktionen
G Geschichte der Mathematik
Geometrie, analytische
Geometrie, darstellende

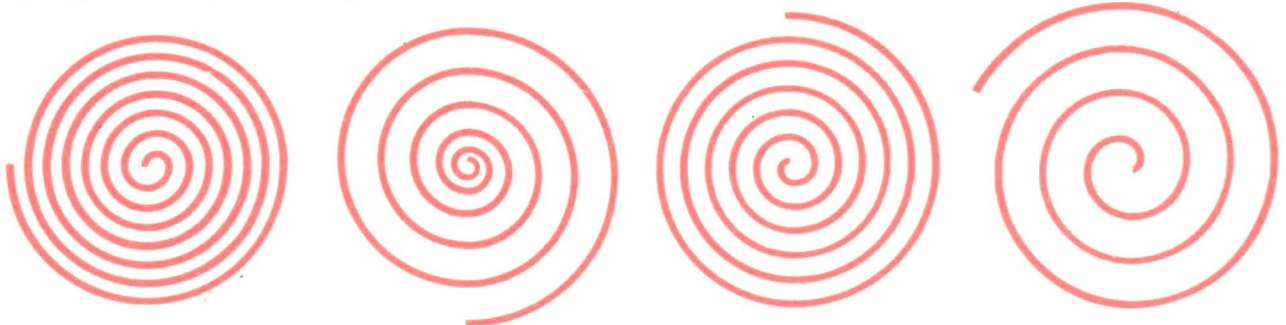
Gleichungen
Gruppentheorie
I Infinitesimalrechnung
K Kombinatorik
Kryptarithmetik
Kybernetik
L Literatur
Logarithmen
Logik
M Mathematikunterricht
Mengenlehre
N Nomographie
Normung
O Olympiade-Aufgabe
Optimierung
P Philosophie
Planimetrie
Potenzen
Programmierung

Prüfungen
R Rechenhilfsmittel
Relationen
S Sport und Mathematik
Statistik
Stereometrie
T Trigonometrie
U Ungleichungen
Unterhaltung
V Vektorrechnung
W Wahrscheinlichkeitsrechnung
Wandzeitung
Z Zahlbereiche
Zahlenfolgen
Zahlentheorie
Zeitschriften
Ziffernsysteme
Zirkel (Arbeitsgemein-
schaften)

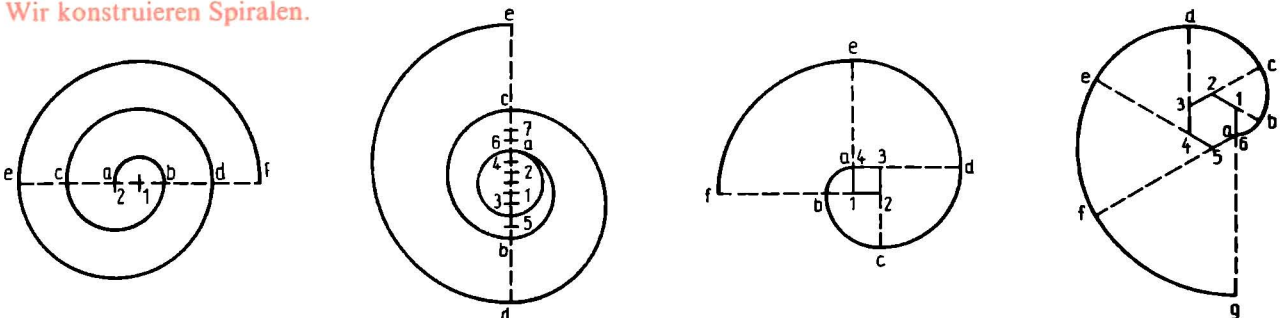
Mit Zirkel und Zeichendreieck



Mathemagica; aus:
Pythagoras 2 – 68/69, Groningen



Wir konstruieren Spiralen.



Wissen, wo...

Eine Anleitung zum Selbststudium

alpha (Zeitschrift alpha)

- 2/67 Wissen, wo... (Eine Anleitung zum Selbststudium) H. Herzog/J. Lehmann
1/68 Wissen, wo... Inhaltsverzeichnis f. d. Jahrgang 1967 H. Herzog/J. Lehmann
6/68 alpha berichtet J. Lehmann

alpha-Wettbewerb

- 1/67, 4/67, 1/68 Bedingungen u. Hinweise Redaktion
6/67 Information zum alpha-Wettbewerb/Vorstellung der Jury
2/68 alpha-Wettbewerb 1967; Auswertung, Preisträger, Statistik Redaktion

Ähnlichkeitslehre

- 4/67 Guter Mond, du gehst so stille... L. Görke

Berichte

- 1/67 Bericht über die VIII. IMO 1966 J. Lehmann
1/67 Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten S. Günther
1/67 Internat. Mathematiker-Kongreß 1966 (Moskau) D. Ziegler
2/67 alpha berichtet aus aller Welt
2/67 Mathem. Leistungsvergleich Praha-Neubrandenburg J. Lehmann
3/67 Mathem. Mannschaftswettbewerb M. Mäthner/G. Schulze
3/67 Schwankt der Fernsehturm? W. Zill
3/67 Der Berliner Fernsehturm W. Zill
3/67 Mathematische Wettbewerbe in England
4/67 Auf den Spuren Roald Amundsens S. Meier
4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien S. Bodurow
5/67 Nowosibirsk W. Friedrich
5/67 Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR O. Prints
5/67 Aus der Sowjetunion berichtet
5/67 Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk) H. Werner
6/67 Als Diplommathematiker in Dubna G. Laßner
6/67 Als Mathematiklehrer in Tansania H. Büchel
6/67 Ernährung und Leistungsfähigkeit W. Kraak
1/68 50 Jahre Rote Armee
1/68 Dresden in Zahlen W. Weidauer
1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb der USA 1967
3/68 Die Aufgabenkommission d. Zentralen Komitees f. die OJM d. DDR H. Karl
3/68 Junge Mathematiker erlebten Jahrestagung in Rostock H. Titze
6/68 Grüße aus der Demokratischen Republik Vietnam Nguyen lam Sohn/H. Tang
6/68 Allunions-Fernolympiade R. Lüders/J. Lehmann

Berufe

- 3/67 Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium W. Zill
6/67 Als Diplommathematiker in Dubna G. Laßner
6/67 Als Mathematiklehrer in Tansania H. Büchel
2/68 Elektronische Datenverarbeitung — eine Perspektive
2/68 Berufsbild: Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur J. Pönisch
3/68 Berufsbild: Facharbeiter für Datenverarbeitung Ch. Papendorf
4/68 Berufsbild: Mathematisch-technischer Assistent G. Paulin
5/68 Berufsbild: Ingenieur für Programmierung W. Leupold
6/68 Berufsbild: Diplom-Mathematiker (Rechentechnik u. Datenverarbeitung) J. Löttsch/G. Seifert

Beweise

- 2/67, 3/67 Beweise durch vollständige Induktion (1, 2) W. Stoye

Biographien

- 2/67 Gottfr. Wilh. Leibniz als Mathematiker (zum 250. Todestag) W. Purkert
4/67 Leonard Euler 1707 bis 1783 H. Bernhardt
4/67 Gaspard Monge 1746 bis 1818 E. Schröder
5/67 A. J. Chintschin H. Bernhardt
5/67 Aus der Jugend A. J. Chintschins A. Artsov/Muromzewa
1/68 Gedenktage (G. Cantor — H. A. Lorentz — D. Hilbert — E. Landau)
4/68 August Ferdinand Möbius 1790 bis 1868 H. Wußing

Geometrie, darstellende

- 6/67 Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen E. Schröder
1/68 Abstand zweier Punkte im Raum E. Schröder
2/68 Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen E. Schröder
4/68 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur E. Schröder

Geschichte der Mathematik

- 6/68 Der mathematische Wettstreit in der Antike M. Otto
6/68 „Mathematische Manuskripte“ von Karl Marx R. Sperl

Literatur

- 4/68 Formen u. Formeln, Fr. v. Krbek, Eine Buchbesprechung W. Arnold

Logik

- 2/68 Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage M. Rehm

Mengenlehre

- 1/67 Mit Mengen fängt es an! (1) u. Aufgaben dazu W. Walsch/H. Lohse
2/67 Wir operieren mit Mengen (2) W. Walsch
3/67 Wir untersuchen Abbildungen (3) W. Walsch
4/67 Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre W. Walsch

Olympiadaufgaben

- 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO H. Bausch
1/67 VI. OJM der DDR: Aufgaben d. Kreisolympiade
2/67 VI. OJM, Aufgaben d. Bezirksolympiade
3/67 VI. OJM, Aufgaben d. DDR-Olympiade
3/67 Preisträger der VI. OJM

- 4/67 Aufgaben der MO, Schulstufe Sofia 1967
 4/67 Lösungen zur Kreisolympiade 1966
 5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiaden Tbilissi 1967 J. Petrakow
 5/67 VI. OJM, Lösungen zur Bezirksolympiade
 5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit R. Höppner
 6/67 Heiße Tage in Cetinje, IX. IMO 1967 H. Bausch
 6/67 VI. OJM, Lösungen zur DDR-Olympiade
 1/68 VII. OJM der DDR, Aufgaben der Kreisolympiade (6./7. 12. 1967)
 2/68 VII. OJM d. DDR, Aufgaben der Bezirksolympiade (20./21. 1. 1968)
 3/68 Aufgaben der VII. OJM, DDR-Stufe (15./19. 4. 1968)
 3/68 Preisträger d. VII. OJM
 4/68 VII. OJM d. DDR, Lösungen zu den Aufgaben d. Kreisolympiade
 5/68 Fünf 1. Preise — Drei 2. Preise, X. IMO, Preisträger
 5/68 Aufgaben der X. IMO
 5/68 VII. OJM, Lösungen zu den Aufgaben d. Bezirksolympiade
 6/68 X. IMO — Bericht — Lösungen W. Burmeister
 6/68 Allunions-Fernolympiade R. Lüders/J. Lehmann
 6/68 VII. OJM, Lösungen zu den Aufgaben d. DDR-Olympiade

Planimetrie

- 1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat H. Wiesemann
 5/68 Was ist ein Viereck? L. Görke
 6/68 Mit Zirkel und Zeichendreieck J. Lehmann

Ungleichungen

- 1/68 Eine schwierige Hausaufgabe R. Lüders
 2/68 Der Lucassche Turm J. Frormann

Unterhaltung

- 1/68 Hinter die Kulissen geschaut W. Träger
 3/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel Th. Scholl
 3/68, 4/68, 5/68 Eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil W. Träger
 4/68 Lösungen zum Zahlenrätsel (3/68) Th. Scholl
 6/68 Schön ist so ein Ring(e)spiel J. Frormann

Zahlenbereiche

- 5/68 Übe sinnvoll, Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen G. Pietzsch

Zahlenfolgen

- 6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums A. A. Kolosow
 3/68, 4/68, 5/68, 6/68 Elementare Zahlenfolgen 1., 2., 3., 4. Teil H. Lohse

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)

- 1/67 Eine Arbeitsgemeinschaft erlebte die Deutsche Bücherei AG 29. OS Leipzig
 5/67 Mathematischer Wettbewerb W. Werner
 5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? G. Horn

Zusammenstellung: Oberlehrer H. Herzog, V.L.d.V., 22. OS Leipzig

Für Schüler erweiterter Oberschulen

DR. RER. POL. G. BEYRODT

Tabellenbuch Metall

Dritte, überarbeitete Auflage · Format 16,7 × 24,0 cm, 456 Seiten, 1335 Abbildungen, Halbgewebereinband, Preis 6,- M

GRUNDLAGEN

Grundwerte
 Standards und Normen
 Staatliche Standards in der Deutschen Demokratischen Republik und deren Grundlagen
 Mathematik
 Runden von Zahlen
 Regeln für das Runden
 Kennzeichnung letzter Stellen
 Arithmetik
 Analytische Geometrie
 Geometrie
 Satzgruppe des Pythagoras
 Umfang, Flächeninhalt und Schwerpunkt wichtiger Flächen
 Simpsonsche Regel
 Grafische Darstellungen
 Stereometrie

Oberfläche, Volumen (Rauminhalt) und Schwerpunkt wichtiger Körper
 Guldinsche Regel
 Differentialrechnung, Formeln
 Integralrechnung, Formeln
 Goniometrie
 Winkelfunktionen
 Formeln zur Dreiecksberechnung
 Zahlenwerte
 Anleitung zum Gebrauch der Tafel 1.2.9.1.
 Potenzen, Wurzeln, Werte zur Kreisberechnung, Kehrwerte, Primfaktoren
 Natürliche Werte der Winkelfunktionen
 Vierstellige Logarithmen
 Vorzugszahlen, Vorzugsmaße und das Rechnen mit Vorzugszahlen
 Bogen, Stichmaß, Sehnen und Flächeninhalt beim Kreisabschnitt, Halbmesser $r = 1$
 Mittelpunktswinkel und Sehnen bei

Kreisteilung in Potenzen des Umfanges
 Umrechnungen bei Winkeln
 Häufig vorkommende Konstanten
 Physik, Technik und Chemie
 Physikalisch-technische Einheiten und ihre Kurzzeichen
 Grundeinheiten
 Tafel der gesetzlichen Einheiten
 Gesetzliche Vorsätze und Kurzzeichen für Grund- und abgeleitete Einheiten
 Normzustand und verwandte Begriffe
 Wichtige Formelzeichen aus Physik und Technik
 Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper
 Grundbegriffe
 Kraftwirkung an ruhenden Körpern
 Kraftwirkung an bewegten Massepunkten usw.

Weitere 251 Abschnitte bringen Fakten, Formeln und Werte der Fachgebiete Werkstoffe, Halbzeug, Prüftechnik, Gütesicherung, Fertigungstechnik, Verbindungen bei Werkstücken. Der Anhang Elektrotechnik umfaßt weitere III Positionen



VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

Das Buch ist z. Z. noch durch jede Buchhandlung erhältlich bzw. bestellbar