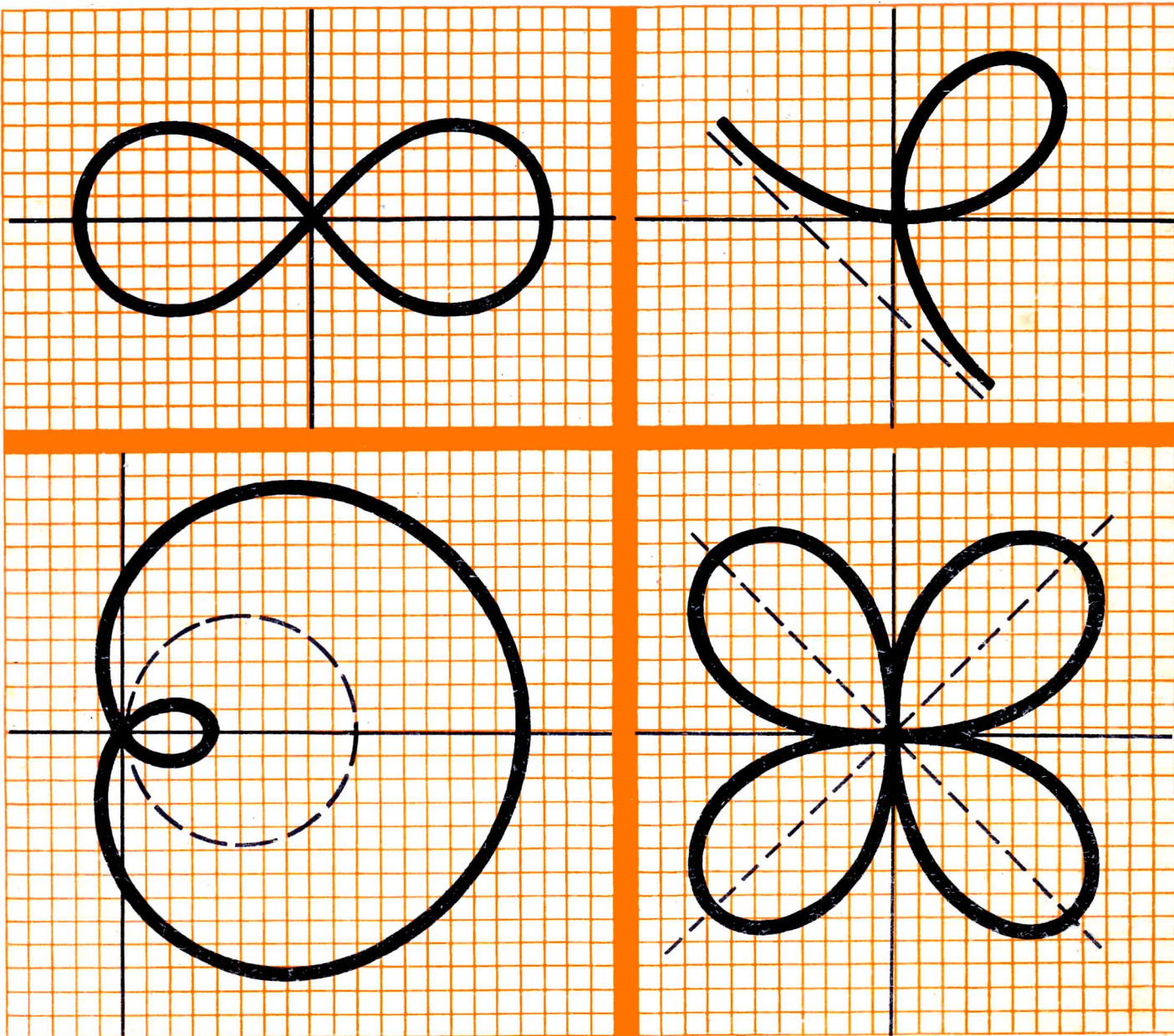


alpha



Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent
Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil.
E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann
(Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof.
Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger
H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger,
Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan);
Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer
des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent
Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger
Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Ober-
lehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr.
habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schrö-
der (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze
(Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze
(Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger
(Döbeln); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,- M,
Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonne-
ment zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für
die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik
und Westberlin erfolgt über den Buchhandel;
für das sozialistische Ausland über das
jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für
alle übrigen Länder über den Deutschen
Buch-Export und -Import GmbH, DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten: K.-G. Guckuk, Leipzig
(S. 11 [2 ×], S. 14, S. 16); J. Lehmann, Leip-
zig (S. 2, S. 14); J. Piehler, Eigenfoto (S. 6);
Colloquium Mathematicum, Bd. 1, 1948,
Wrocław (S. 8); B. Krötenheerdt, Eigenfoto
(S. 10); W. Fricke, Berlin (S. 12); *Post card*,
pictorial math., Yeshiva University New
York (S. 17); Briefmarken: H. Decker, Köln
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)

Redaktionsschluss: 27. November 1973

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 1 Elementare Grundzüge der klassischen und modernen Variations-
rechnung (10)*
Prof. Dr. R. Klötzler, Karl-Marx-Universität Leipzig,
Sektion Mathematik
 - 2 Eine Aufgabe von
Prof. Dr. R. Klötzler, Karl-Marx-Universität Leipzig (10)
 - 3 Ist eine Landkarte eine mathematisch genau verkleinerte Abbildung
eines Teiles der Erdoberfläche? (6)
Dr. K. Sandner, Rat des Bezirkes Magdeburg, Abt. Volksbildung
 - 6 Mathematik und Chemie (8)
Prof. Dr. J. Piehler, Technische Hochschule für Chemie *Carl Schorlemmer*, Leuna-
Merseburg, Sektion Mathematik und Rechentechnik
 - 7 Leser schreiben an *alpha* (5)
 - 8 Mathematik im Schottischen Kaffee · Stefan Banach ·
StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
 - 9 Hugos Steinhaus: 2 × 100 Aufgaben (6)
 - 10 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Wir bauen eine „Unruhe mit regelmäßigen Polyedern“ (5)
Birgit Krötenheerdt, Dr.-Kurt-Fischer-Oberschule Halle
 - 11 Inhalt einer Übung des Mathematikzirkels des Moskauer Palastes
der Pioniere und Schüler (8)
Dr. V. Trostnikow, Ingenieurhochschule für Transport- und Verkehrswesen, Moskau
 - 12 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)
Aufgaben, Wettbewerbsbedingungen
 - 14 Preisträger des Physik-Wettbewerbs 1973
alpha-Wettbewerb · Abzeichen in Gold
 - 16 In freien Stunden, *alpha*-heiter (5)
StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig/OL H. Pätzold, VH Waren/Müritz
 - 18 XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (5)
Aufgaben der Kreisolympiade
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
Inhaltsverzeichnis 1967 bis 1973
 - 20 Lösungen (5)
- III./IV. Umschlagseite: Wissen, wo ...
Inhaltsverzeichnis 1967 bis 1973
StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Elementare Grundzüge der klassischen und modernen Variationsrechnung

Was ist eigentlich Variationsrechnung?

Zur inhaltlichen Klärung dieser Frage gehen wir einleitend von den bekannten *Extremwertaufgaben* der Analysis aus. Diese sind, ganz allgemein charakterisiert, an die Zielsetzung geknüpft, zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ ihren größten oder kleinsten Wert bezüglich aller x einer vorgegebenen Teilmenge M des Definitionsbereiches von $f(x)$ zu bestimmen, also $\text{Max}_M f(x)$ bzw. $\text{Min}_M f(x)$ zu berechnen. Damit verbindet sich zugleich die Aufgabe, solche $x = x_{\text{Max}}$ bzw. $x = x_{\text{Min}}$ aus M (sog. Extremstellen) zu ermitteln, für die $f(x_{\text{Max}}) = \text{Max}_M f(x)$ und $f(x_{\text{Min}}) = \text{Min}_M f(x)$ gilt. Ist zum Beispiel $f(x)$ eine stetige Funktion und M ein Intervall $[a, b]$ der x -Achse, so existieren stets $\text{Max}_{[a, b]} f(x)$ und $\text{Min}_{[a, b]} f(x)$, und ihre zugeordneten Extremstellen liegen entweder im Innern von $[a, b]$ oder auf dem Rande dieses Intervalls. Ist $f(x)$ darüber hinaus differenzierbar, muß in jeder im Innern von $[a, b]$ liegenden Extremstelle x_0 notwendig für die erste Ableitung $f'(x_0) = 0$ gelten. Diese Gleichung bildet zugleich eine Berechnungsgrundlage zur Ermittlung von x_0 . Ob umgekehrt eine Lösung dieser Gleichung $f'(x) = 0$ tatsächlich eine Extremstelle von $f(x)$ darstellt, bedarf freilich jedesmal noch zusätzlicher Untersuchungen.

Mit den oben skizzierten Extremwertaufgaben und ihrer Lösungsmethode erfaßt man aber bei weitem nicht die vielseitigen Formen von *Optimierungsproblemen*, die heute von Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie gestellt werden. Die Ursache dafür liegt darin, daß viele technische und ökonomische Vorgänge gar nicht bloß durch einen Parameter x , also durch die Festlegung einer Variablen x , eindeutig bestimmt werden, sondern zu ihrer Beschreibung anderer mathematischer Größen bzw. Hilfsmittel bedürfen, z. B. mehrerer unabhängiger Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ oder auch Funktionen $x(t)$. Faßt man solche in gewissen Grenzen noch als frei wählbaren Größen wiederum in der Kurzbezeichnung x zusammen, so nennt man eine ihnen eindeutig zugeordnete Zahl $f(x)$ ein *Funktional* von x . Stellt z. B. x eine ebene Kurve dar, so ist deren Länge $L = f(x)$ ein Funktional

der Kurve x ; genauso ist der Energieverbrauch einer Maschine (pro Arbeitsgang) ein Funktional ihrer Steuerung x , der landwirtschaftliche Ertrag einer Anbaufläche ein Funktional ihrer Bearbeitung (einschließlich Bewässerung, Düngung und dergleichen). Von diesem allgemeinen Standpunkt aus versteht man heute unter *Optimierungstheorie* jenes Teilgebiet der Mathematik, das die Lösbarkeit und Lösungsmethoden verallgemeinerter Extremwertaufgaben des Typs

$f(x) \rightarrow \text{Min (Max) auf } M$

(gelesen: man minimiere bzw. maximiere $f(x)$ bezüglich aller x von M) erörtert, wobei $f(x)$ ein vorgegebenes Funktional bezüglich aller Elemente x einer Menge M (dem *zulässigen Bereich*) ist. Nach dem Vorbild klassischer Extremwertaufgaben der Differentialrechnung sind in diesem Jahrhundert sehr leistungsfähige Methoden entwickelt worden, die zur Beschreibung und Bestimmung von Lösungen solcher allgemeiner Optimierungsprobleme dienen. Die Weiterentwicklung dieser Theorie ist gegenwärtig noch stark im Gange.

Einen für die Anwendung wichtigen Sonderfall der Optimierungstheorie umfaßt nun die *Variationsrechnung*, nämlich solche Optimierungsprobleme — *Variationsprobleme* genannt —, wo $f(x)$ durch ein Integral dargestellt wird und x eine Funktion (oder mehrere Funktionen) verkörpert. Zurückgreifend auf ein obiges Beispiel stellt die Aufgabe

$$f(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt \rightarrow \text{Min auf } M \quad (1)$$

ein Variationsproblem dar, wenn wir unter M die Gesamtheit aller im t -Intervall $[a, b]$ stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $x(t)$ verstehen*, die den vorgegebenen Randbedingungen $x(a) = c_1$ und $x(b) = c_2$ genügen.

Die Ableitung der Funktion $x(t)$ nach t ist hier mit $\dot{x}(t)$ bezeichnet. Unter Beachtung, daß dieses $f(x)$ das Funktional der Bogenlänge einer ebenen Kurve in der rechtwinkligen kartesischen Darstellung $y = x(t)$ beschreibt, wird durch die Aufgabe (1) analytisch die Frage nach der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte $P_1(a, c_1)$ und $P_2(b, c_2)$ ausgedrückt. Die Lösung dieser

Aufgabe ist offenbar geometrisch die Strecke P_1P_2 , analytisch dargestellt die Funktion

$$x_0(t) = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{b - a} (t - a) \text{ für } a \leq t \leq b.$$

Anfänge der Variationsrechnung gehen bis auf das Altertum zurück.

Durch *Pappus von Alexandria* ist uns überliefert, daß bereits im 2. Jhdt. v. u. Z. durch *Zenodoros* das sog. (spezielle) isoperimetrische Problem gelöst wurde; d. h. er wies nach, daß allein der Kreis unter allen geschlossenen Kurven gleicher Länge den größten Flächeninhalt einschließt. Einen systematischen Aufbau erfuhr die Variationsrechnung jedoch erst mit der Entwicklung der Differential- und Integralrechnung. Fast alle der namhaften Begründer der Analysis haben in Beispielen und Theorie wesentliche Beiträge zur Variationsrechnung geliefert. Hervorzuheben sind *I. Newtons* Untersuchungen zur Rotationsfläche kleinsten Widerstands (1686), die zahlreichen Beiträge der Brüder *Johann und Jacob Bernoulli* (1667 bis 1748 bzw. 1654 bis 1705) und die theoretische Fundierung der *klassischen Variationsrechnung* durch *L. Euler* (1707 bis 1783) — der übrigens auch den Namen für diese Disziplin prägte — und *J. L. Lagrange* (1736 bis 1813).

Die große Bedeutung der Variationsrechnung wurde besonders dadurch herausgestellt, daß zahlreiche Naturgesetze in einfacher Weise als Variationsprobleme zu formulieren sind. Hierzu zählt das berühmte *Fermatsche Prinzip*, nach dem in einem optisch durchlässigen Medium mit ortsabhängigem Brechungsindex n ein zwei Punkte verbindender Lichtstrahl gerade die Eigenschaft besitzt, eine minimale *optische Weglänge* aufzuweisen. Im ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem formuliert, heißt das genauer: Die Bahnkurve $y = x_0(t)$ eines Lichtstrahls von $P_1(a, c_1)$ nach $P_2(b, c_2)$ ist eine Lösung des Variationsproblems:

$$\text{optische Weglänge} \\ f(x) = \int_a^b n(t, x(t)) \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt \rightarrow \text{Min}$$

auf M im Sinne von Aufgabe (1).

Mit dem *Hamilton-Prinzip* wurden die Bewegungsgesetze der Mechanik in verwandter Weise aus einem Variationsproblem deduzierbar. Ähnliches gelang später für die Elektrodynamik und Quantentheorie. Heute nehmen auch zunehmend ökonomische Fragestellungen den Einsatz der Variationsrechnung in Anspruch, das gleiche gilt für die moderne Regelungs- und Steuerungstechnik.

Einige Aspekte zur Lösungstechnik von Variationsproblemen

a) Die klassische Methode von Euler und Lagrange

Wir studieren Variationsprobleme des Typs

$$f(x) = \int_a^b r(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \text{Min auf } M; \quad (2)$$

der zulässige Bereich M habe hier die gleiche

Bedeutung wie im Beispiel (1). Der Integrand r ist abhängig von der Integrationsvariablen t sowie von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$. Es wird angenommen, für die Funktion $x = x_0(t)$ werde das Minimum von $f(x)$ erzielt. Dann muß offenbar für alle $x(t)$ aus M die Relation gelten $f(x) \geq f(x_0)$. Insbesondere gilt das gleiche auch für $x(t) = x_0(t) + \varepsilon h(t)$, wo $h(t)$ eine willkürliche stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, die den Randbedingungen $h(a) = h(b) = 0$ genügt; ε ist ein zusätzlicher willkürlicher Parameter. Für $\varepsilon = 0$ ist $x(t) = x_0(t)$, für $\varepsilon \neq 0$ ist $x(t)$ eine bezüglich x_0 abgeänderte (varierte) Funktion aus M . Nach voranstehenden Bemerkungen muß also für alle ε

$$f(x_0 + \varepsilon h) \geq f(x_0)$$

sein. Bei festgewähltem $h(t)$ ist $f(x_0 + \varepsilon h)$ eine Funktion von ε allein, $\Phi(\varepsilon)$ genannt, und $\Phi(\varepsilon)$ hat für $\varepsilon = 0$ sein Minimum $\Phi(0) = f(x_0)$. Folglich muß nach den Ergebnissen der Differentialrechnung für alle im obigen Sinne frei wählbaren $h(t)$

$$\Phi'(0) = 0 \quad (3)$$

sein. Diese Bedingung (3) bildet zugleich eine rechnerische Grundlage zur Bestimmung von $x_0(t)$; mit Mitteln der höheren Analysis können aus (3) darüber hinaus äquivalente Bedingungen abgeleitet werden, die die Berechnung von x_0 vereinfachen. Allerdings ist umgekehrt im allgemeinen nicht jede zu M gehörende Lösung x_0 der Bedingung (3) zugleich eine Lösung des Variationsproblems (2). Wenn jedoch das Funktional $f(x)$ von (2) konvex ist, d. h. wenn für beliebige Funktionen x_1 und x_2 aus M und beliebige Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ stets $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ gilt, dann ist jede zu M gehörende Lösung von (3) in der Tat eine Lösung von (2). Zum Verständnis dieser Ausführungen erproben wir diese Methode an dem einfachen Beispiel

$$f(x) = \int_a^b \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{Min auf } M. \quad (4)$$

$$\text{Hier ist } \Phi(\varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon h) = \int_a^b (\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{h})^2 dt =$$

$$= \int_a^b \dot{x}_0^2 dt + 2\varepsilon \int_a^b \dot{x}_0 \dot{h} dt + \varepsilon^2 \int_a^b \dot{h}^2 dt.$$

Somit lautet die Bedingung (3) jetzt

$$\Phi'(0) = 2 \int_a^b \dot{x}_0 \dot{h} dt = 0 \quad (5)$$

für alle stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $h(t)$ mit $h(a) = h(b) = 0$. Man bestätigt leicht, daß jede Funktion $x_0(t)$ mit $\dot{x}_0(t) = \text{const.} = A$ die Bedingung (5) erfüllt, denn

$$\int_a^b A \dot{h} dt = A \int_a^b \dot{h} dt = A [h(b) - h(a)] = 0.$$

Erfüllt $x_0(t)$ außerdem noch die Randbedingungen $x_0(a) = c_1, x_0(b) = c_2$ neben $\dot{x}_0(t) = \text{const.}$, so kann $y = x_0(t)$ wegen des konstanten Anstiegs offenbar nur die Gleichung

einer Geraden in demselben Sinne wie die Lösung von Problem (1) sein. Es läßt sich sogar zeigen, daß diese Funktion $x_0(t)$ die einzige Lösung von (5) aus dem zulässigen Bereich M ist und zugleich das gestellte Variationsproblem (4) löst.

b) Das Pontrjaginsche Maximumprinzip

In vielen Anwendungen der Variationsrechnung treten Optimierungsaufgaben nicht in der einfachen Form von Problem (2) auf, sondern unter Hinzunahme weiterer Nebenbedingungen, etwa in der Gestalt $\alpha \leq \dot{x}(t) \leq \beta$ (d. h. hier unter Anstiegsbeschränkungen der Kurven $y = x(t)$). Mit $U = [\alpha, \beta]$ und Einführung zusätzlicher Funktionen $u(t) = \dot{x}(t)$ zu $x(t)$ aus M tritt jetzt an die Stelle des Variationsproblems (2) die allgemeinere Fragestellung

$$\int_a^b r(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \text{Min} \quad (6)$$

bezüglich aller $x(t)$ aus M unter den Nebenbedingungen $\dot{x} = u$ und $u(t)$ aus U für alle t von $[a, b]$.

Für solche und noch allgemeinere Variationsprobleme ähnlichen Typs ist in den Jahren 1958 bis 1960 durch eine Gruppe sowjetischer Mathematiker unter Leitung des berühmten Mitglieds der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften und Leninpreisträgers Prof. Dr. L. S. Pontrjagin ein grundlegend neues Lösungsprinzip geschaffen worden. Mit ihm ist zugleich eine Neuorientierung der gegenwärtigen Forschung auf dem Gebiete der Variationsrechnung gegeben worden.

An Aufgabe (6) erläutert, basiert dieses neue Lösungsprinzip — Pontrjaginsches Maximumprinzip genannt — auf der Grundidee, die Minimierung des in (6) beschriebenen Funktionals auf eine Schar gewöhnlicher Extremwertaufgaben einer zugeordneten Funktion — der Pontrjagischen Funktion — zurückzuführen. Genauer formuliert lautet das Pontrjaginsche Maximumprinzip: Ist $x_0(t), u_0(t)$ mit $\dot{x}_0 = u_0, x_0$ aus $M, u_0(t)$ aus U eine Lösung des Variationsproblems (6), so gibt es eine (durch hier nicht näher beschriebene Zusatzbedingungen definierte) Funktion $y(t)$, mit der die Pontrjagische Funktion

$$H^*(t, x, u, y) = -r(t, x, u) + y u \text{ der folgenden Bedingung genügt (bezüglich aller } v \text{ aus } U)$$

$$\text{Max}_v H^*(t, x_0, v, y) = H^*(t, x_0, u_0, y) \text{ für alle } t \text{ aus } [a, b].$$

Dieses Maximumprinzip kann wiederum als eine Berechnungsgrundlage für x_0 und u_0 angesehen werden.

* D. h. $x(t)$ ist eine im ganzen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, für die eine Zerlegung von $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle angebar ist, in denen die Ableitung $\dot{x}(t)$ existiert und stetig ist.

R. Klötzler

Eine Aufgabe von Prof. Dr. R. Klötzler

Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Eine Optimierungsaufgabe zu einem Produktionsmodell

▲ 1164 ▲ Ein Produktionsbetrieb hat die Auflage, eine konstante (zeitunabhängige) Produktion von x Mengeneinheiten/Monat einer leicht verderblichen Ware aufzunehmen. Der Bedarf im j -ten Monat beträgt b_j Mengeneinheiten ($b_j > 0$). Der Erlös für verkaufte Ware beträgt k_1 M/Mengeneinheit. Nicht-absetzbare Ware kann wegen ihrer Verderblichkeit nicht mehr im darauffolgenden Monat zum Verkauf angeboten werden; d. h. diese Ware muß als Verlust von k_0 M/Mengeneinheit verbucht werden.

Frage 1:

Wie groß ist (unter Einbeziehung der Verluste) der Gesamtertrag $K(x)$ des Betriebes in n Monaten?

Frage 2:

Wie ist x zu wählen, damit K maximal wird?

Frage 3:

Wie lautet eine Lösung von Aufgabe 2 unter der zusätzlichen Kapazitätsbeschränkung $0 \leq x \leq C$ (mit $C > 0$)?

Hinweise: Man benutze zur Beschreibung von $K(x)$ die Symbole

$\sum_{i=1}^n$ des Summenzeichens,

$\text{Min}(a, b)$ als kleinste der Zahlen a und b ,

$$c_+ = \begin{cases} c & \text{wenn } c \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } c < 0. \end{cases}$$

Man denke sich außerdem die Numerierung der b_j (nötigenfalls nach Umnummerierung) so ausgeführt, daß $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$ ist.



Ist eine Landkarte eine mathematisch genau verkleinerte Abbildung eines Teiles der Erdoberfläche?

Jeder Schüler muß im Laufe seiner Schulzeit mit einer Landkarte umgehen. Schon in der Unterstufe erfährt er, daß eine Landkarte die verkleinerte Abbildung eines Teiles der Erdoberfläche ist. Es scheint, als sei dies eine einfache Sache, denn es leuchtet jedem ein, daß man die Erdoberfläche nicht in Originalgröße abbilden kann.

Da außerdem gesagt wird, daß die Verkleinerung mit Hilfe eines bestimmten Maßstabes erfolgt, ergeben sich vorerst keine Probleme, noch dazu, wo die in der Unterstufe verwendeten Karten Teile der Erdoberfläche darstellen, die verhältnismäßig klein sind.

Aber wir wollen einmal etwas genauer hinschauen und zuerst ein Problem untersuchen, das auch mathematisch recht interessant ist. Wir wissen, daß die Erde der Kugelgestalt sehr nahekommt. In den Atlanten und als Wandkarten haben wir Karten, auf denen die ganze Erde dargestellt ist. Es ergibt sich für uns das Problem zu untersuchen, ob es möglich ist, die dreidimensionale Oberfläche der Erde, d. h. eine der Kugeloberfläche ähnliche Fläche, überhaupt auf eine zweidimensionale, also ebene Fläche zu übertragen.

Dazu sollten wir wissen, welche Forderungen an die Genauigkeit der Abbildung gestellt werden müssen. Im Idealfalle müßten drei Forderungen berücksichtigt werden.

Die Karte müßte *längentreu* sein, d. h. alle Entfernungen müßten in einer dem Kartenmaßstab entsprechenden Verkleinerung auf die Karte übertragen werden.

Die Karte müßte *winkeltreu* sein, d. h. daß alle auf der Erdoberfläche zwischen bestimmten Punkten gemessenen Winkel die gleiche Größe haben müssen wie die Winkel zwischen den gleichen Punkten auf der Karte.

Die Karte müßte *flächentreu* sein, d. h. daß die Flächen der Territorien nach der Verkleinerung auf der Karte eine dem Maßstab entsprechende Fläche einnehmen müssen.

Um eine Antwort auf unsere Frage zu finden, führen wir zuerst einen kleinen Versuch durch. Wir nehmen einen kugelhähnlichen Körper, z. B. eine Apfelsine, und versuchen, nachdem wir sie durch einen Schnitt halbiert

und das Innere herausgenommen haben, die Schalenhälften plattzudrücken, d. h. sie zu verebnen. Der Versuch wird immer scheitern, denn es bilden sich immer an einer Stelle Falten, oder aber die Apfelsinenschale reißt an den Rändern wegen der zu starken Verzerrung auf.

Wir kommen nach diesem Versuch zu dem Schluß, daß die zweidimensionale Abbildung der dreidimensionalen Kugeloberfläche nicht möglich ist, ohne Verzerrungen in Kauf zu nehmen.

Gauß hat mathematisch nachgewiesen, daß eine längentreue Abbildung der Kugeloberfläche auf einer Ebene nicht möglich ist. Eine längen-, winkel- und flächentreue Verkleinerung der Erdoberfläche ist nur mit Hilfe eines Globus möglich. Der Globus ist jedoch sehr unhandlich und deshalb nicht überall einsetzbar. So müßte z. B. ein Globus, auf dem die Alpenländer in der Größe eingetragen sind, wie sie im Schulatlas auf Seite 43 abgebildet sind, einen Durchmesser von mehr als 5 m haben.

Für die Darstellung der Insel Rügen oder des Erzgebirges im Maßstab 1 : 500 000 (S. 4) benötigte man einen Globus von über 25 m Durchmesser, d. h. in der Höhe eines fünfstöckigen Hauses. Alle Karten, auf denen große Gebiete der Erde dargestellt sind, können diesen Teil der Erdoberfläche immer nur annäherungsweise wiedergeben. Es gibt immer Verzerrungen der Längen, der Flächen oder der Winkel.

Karten werden aber für die unterschiedlichsten Zwecke verwendet. Deshalb haben Kar-

tographen und Mathematiker, darunter auch Gauß, versucht, solche Lösungen für die Karten zu finden, daß sie wenigstens für die jeweils vorgesehenen Zwecke hinreichend genau sind.

Gauß hat bewiesen, daß längentreue Abbildungen der Erdoberfläche nur auf Karten möglich sind, die sehr kleine Gebiete abbilden, Gebiete, bei denen die Krümmung der Erdoberfläche durch ihre Kugelgestalt noch keine Rolle spielt. Diese Karten erhält man dadurch, daß im Gelände die Entfernungen und Winkel zwischen den auf die Karte einzutragenden Punkten gemessen und diese im entsprechenden Maßstab verkleinert auf die Karte übertragen werden. Aber dieses Verfahren kann für die Abbildung der gesamten Erdoberfläche nicht verwendet werden.

Auf Seekarten ist wiederum die Flächentreue unwichtig, dafür aber muß gefordert werden, daß eine Seekarte winkeltreu ist, damit der zu steuernde Kurs genau festgelegt werden kann. Diese Winkeltreue kann man unter anderem dadurch erzielen, daß man die Kugeloberfläche auf einem Zylindermantel abbildet. Diese Karte ist dann allerdings weder flächen- noch längentreu, weil z. B. der Nordpol nicht als ein Punkt, sondern als gerade Linie abgebildet wird, deren Länge der des Äquators entspricht. (Bild 1).

Bild 2
Kegelentwurf

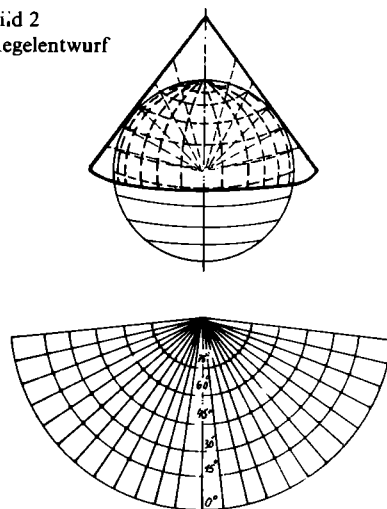
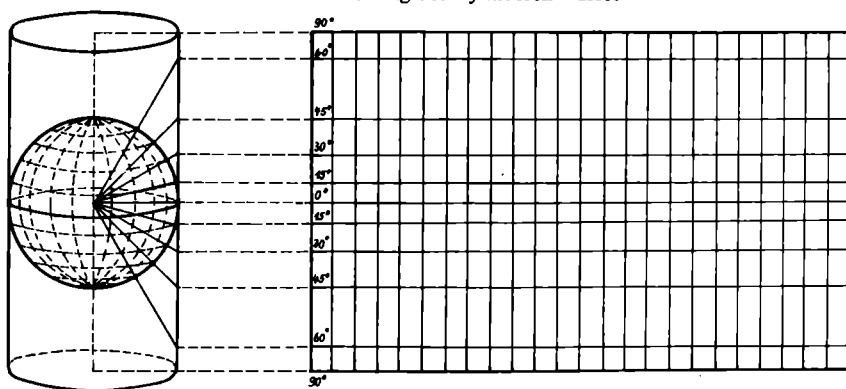


Bild 1 Entstehung des Zylinderentwurfes



Es gibt noch sehr viele andere Lösungsmöglichkeiten. In unseren Atlanten sind u. a. mehrere Arten der Kegelentwürfe benutzt worden, deren Entstehung vereinfacht so dargestellt werden kann, daß man über die Erdkugel einen Kegel stülpt, das Abbild der Erdoberfläche auf den Kegelmantel überträgt und diesen dann aufschneidet und verebnet.

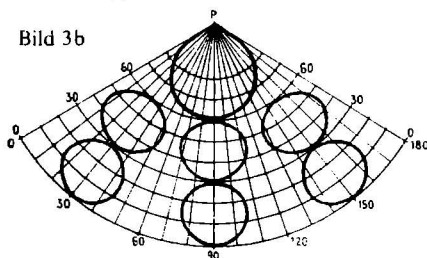
Nachstehende Skizzen zeigen, wie stark bei den verschiedenen Kartenentwürfen bestimmte Flächen verzerrt werden können.



Bild 3a

Dieser Kreis ($\varnothing$ – 30 Meridiankreise, Maßstab 1:400 Mill.) kann nur auf dem Globus maßstäblich und unverzerrt wiedergegeben werden. Wie derselbe Kreis, bei gleichem Maßstab, in verschiedenen Kartennetzentwürfen abgebildet wird, zeigen die folgenden Darstellungen.

Bild 3b



Einfacher Kegelentwurf

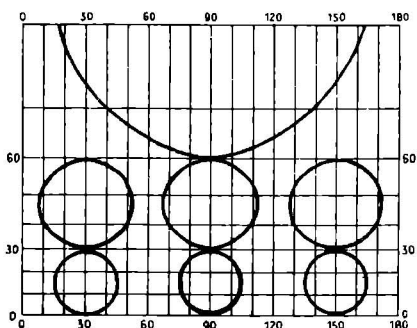


Bild 3c: Winkeltreuer Zylinderentwurf (Mercatorentwurf)

Auch durch den Vergleich der Atlaskarten 90, 92 und 82 könnt ihr sehen, wie z. B. die Fläche Grönlands unterschiedlich dargestellt werden mußte. Diese Karten sind nicht flächentreu. Wenn man jedoch Karten von kleineren Teilen der Erdoberfläche zeichnen will, läßt sich eine wesentlich größere Genauigkeit erzielen.

Man verwendet z. B. bei den meisten amtlichen Karten, in denen die Gebiete eines Landes dargestellt werden, die sogenannte Polyederprojektion. (Ein Polyeder ist ein allseitig von Ebenen begrenzter Körper.)

Zu diesem Zwecke wird das Gradnetz der Erde in viele noch kleinere Flächen unterteilt, so daß auf der einzelnen Fläche nur ein sehr kleines Territorium abzubilden ist. Dadurch kann die Krümmung der Kugeloberfläche vernachlässigt werden, weil sie einen sehr kleinen Wert besitzt. Wir können annehmen, daß diese kleine Fläche fast eben ist. Allerdings kann man die so erhaltenen Karten kleiner Gebiete nicht zu einer Weltkarte zusammensetzen, sondern kann sie entweder nur zu Längengreisstreifen oder Breitenkreisstreifen zusammenlegen. Zwischen den einzelnen Streifen gibt es immer wieder Lücken, die man berücksichtigen muß, wenn man ein größeres Gebiet abbilden will.

Die einzelnen Blätter einer solchen Karte haben sehr unterschiedliche Gestalt. Während die Blätter, auf welchen von Längen- und Breitenkreisen begrenzte Gebiete in Äquatornähe abgebildet werden, fast quadratisch sind, haben die Karten, die Gebiete in Polnähe abbilden, trapezförmige Gestalt und werden immer länglicher und spitzer.

Die Karte, die den Streifen mit dem Nordpol aufnimmt, ist ein Dreieck. Um das zu verstehen, braucht man sich nur die Gestalt der einzelnen Felder des Gradnetzes auf dem Globus einmal genau anzusehen. Mit der Verebnung der Kugeloberfläche hängt aber noch ein zweites Problem zusammen.

Wir können auf dem Globus zeigen, daß alle Meridiane in Nord-Süd-Richtung und alle

Breitenkreise senkrecht dazu in Ost-West-Richtung verlaufen.

In der Unterstufe haben wir gelernt, daß auf einer Landkarte Norden immer oben, Süden unten, Westen am linken Rand und Osten

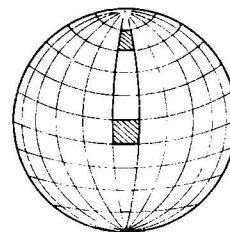
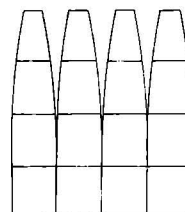


Bild 4



am rechten Rand ist. Wenn wir die Neigung der Erdachse vernachlässigen, d. h. wenn wir den Globus so hinstellen, daß die Erdachse senkrecht nach oben zeigt, stimmt diese Behauptung immer. Und auf Karten, auf denen sehr kleine Gebiete wie der Heimatkreis oder ein Bezirk der DDR abgebildet sind, stimmt das auch. Aber sehen wir uns doch einmal im Atlas auf Seite 48/49 die Karte der Sowjetunion an.

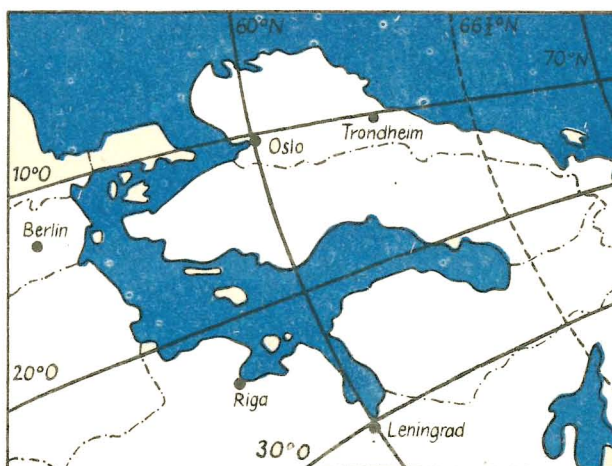
Wenn unsere Behauptung über die Himmelsrichtungen, daß Norden auf der Karte immer oben, Süden immer unten, Westen links und Osten rechts liegt, den Tatsachen entspricht, müßte nach dieser Karte Leningrad östlich von Riga und Berlin westnordwestlich von Leningrad liegen.

Bild 5

Ausschnitt aus der Atlaskarte 48/49 Sowjetunion – ohne Eintragung des Gradnetzes

Bild 6

Ausschnitt aus der Atlaskarte 48/49 – mit der Eintragung des Gradnetzes. Erst das Gradnetz ermöglicht eine genaue Angabe der Himmelsrichtungen zwischen den einzelnen Orten



Prüfen wir den gleichen Sachverhalt jedoch auf dem Globus nach, so stellen wir etwas ganz anderes fest!

Es stellt sich heraus, daß hier westlich von Leningrad Oslo liegt, und daß wir Riga nicht in westlicher, sondern in südwestlicher Richtung zu suchen haben. Westnordwestlich von Leningrad wird nicht Berlin, sondern Trondheim in Norwegen zu finden sein, weil Berlin südwestlich von Leningrad liegt. Wo liegt der Fehler? Auf dem Globus haben wir festgestellt, daß die Lage eines Ortes durch seine Lage im Gradnetz bestimmt wird. Das Gradnetz der Atlaskarte wurde jedoch bei unserer ersten Feststellung nicht berücksichtigt.

Wir haben gesagt, daß alle Breitenkreise immer von Westen nach Osten verlaufen. Auf der Karte sind diese Breitenkreise aber als Kurven eingetragen. Diese enden, weil es sich bei dieser Karte um einen Kegelentwurf handelt, an den oberen Rändern der Karte. Von Leningrad aus gesehen wäre also z. B. Westen am linken oberen Kartenrand.

Wie wenig die Behauptung von den Himmelsrichtungen zu halten ist, zeigt sich auch auf den Karten 90 und 91, auf denen das Nordpolargebiet und die Antarktis abgebildet sind. Auf Karte 90 ist z. B. Norden in der Mitte, denn dort ist der Nordpol eingetragen, und alle Meridiane laufen darauf zu. Süden ist auf dieser Karte an allen Kartenrändern zu suchen, denn alle Meridiane laufen vom Nordpol aus nach dem Süden, wie wir auf dem Globus nachprüfen können.

Wo auf dieser Karte Osten oder Westen ist, kann man nicht sagen. Es läßt sich nur eine Aussage darüber machen, ob ein Ort östlicher oder westlicher von einem anderen Ort liegt. So befindet sich z. B. München östlicher als Paris, und Nome in Alaska ist östlicher als Anadyr im Fernen Osten der Sowjetunion, obwohl Nome auf dieser Karte weiter links liegt als Anadyr.

Dabei wird das Kuriosum noch größer, wenn man einmal die geographischen Längen beider Orte bestimmt. Anadyr liegt nämlich auf etwa 175° östlicher Länge und ist trotzdem westlich von Nome, das 175° westlicher Länge ausweist. Überlegt einmal wie das kommt! Seht euch dazu das Gradnetz der Karte 90 genau an!

Wir wollen uns nun Gedanken über ein weiteres Problem machen. Im Unterricht haben wir gelernt, daß die Entfernungen auf der Erdoberfläche mit Hilfe eines Maßstabes auf die Karten übertragen werden. Dieser Maßstab wird als Maßstabsleiste oder als Zahlenverhältnis an den Rand der Karte gedruckt.

Wir haben bisher diese Maßstäbe benutzt, um auf den Kreis-, Bezirks- oder DDR-Karten Entfernungen dadurch festzustellen, daß wir zwei Orte mit einer Linie verbunden haben. Dann maßen wir die Länge der Strecke

und rechneten mit Hilfe des Maßstabes die richtige Entfernung aus.

Auf diesen Karten waren jedoch nur verhältnismäßig kleine Teile der Erdoberfläche dargestellt, bei denen die Verzerrungen von Längen oder Winkeln so gering sind, daß man sie vernachlässigen kann.

Nun wollen wir aber einmal sehen, ob man mit dem eben genannten Verfahren auch auf anderen Karten Entfernungen richtig messen kann. Zu diesem Zwecke nehmen wir wieder die Atlaskarte S. 48/49 Sowjetunion. Wir wissen, daß dies eine Karte ist, die als Kegelentwurf hergestellt wurde, bei der also eine Längentreue nicht vorhanden ist und deren Breitenkreise auf dem Kegelmantel entsprechend als Kurven eingetragen sind.

Nach unserem Verfahren verbinden wir also zwei Orte, Leningrad und Kap Oljutorski im Fernen Osten, die auf dem gleichen Breitenkreis liegen, durch eine Gerade. Die Messung der Entfernung zwischen beiden Orten ergibt nach dieser Methode 6 320 km. Überprüfen wir aber mit Hilfe eines Fadens, der auf dem Globus von Ort zu Ort gespannt wird, die Entfernung, so stellt sich heraus, daß wir offensichtlich einen großen Fehler gemacht haben, denn auf dem Globus messen wir eine Entfernung von 7 780 km, die auch der wirklichen entspricht. Wo liegt der Fehler?

Wir haben auf dem Globus den Faden genau auf dem 60. Breitengrad Nord gespannt. Aber auf der Karte sind wir mit unserer Linie nicht der Kurve des Breitenkreises gefolgt, sondern haben die Sehne dieses Bogens gemessen. Und diese ist natürlich kürzer. Dem wahren Weg auf der Erdoberfläche entspricht aber der Verlauf des 60. Breitengrades. Um die kürzere Strecke bewältigen zu können, müßten wir von Leningrad nach Kap Oljutorski einen Tunnel bauen. Man kann diesen Sachverhalt wieder mit einem kleinen Versuch veranschaulichen. Dazu durchbohren wir einen Apfel mit einer geraden Nadel. Mit einem Zwirnsfaden messen wir die äußere Entfernung auf der Apfeloberfläche zwischen den beiden Punkten. Die innere Entfernung können wir an der Nadel ablesen, wenn wir die beiden Punkte markieren, an denen die Nadel die Apfelhaut durchstößt. Sie wird immer kürzer sein als die Fadenzlänge.

Wenn man also bei so großen Gebieten die West-Ost-Entfernung zweier Orte annähernd genau feststellen will, muß man immer auf dem Breitenkreis messen.

Aufgabe: 1. Miß auf der Karte 48/49 die richtige Entfernung zwischen Moskau und Petropawlowsk (Halbinsel Kamtschatka), und ermittle den Fehler, der entstanden wäre, wenn du die beiden Orte mit einer Geraden verbunden und diese Strecke gemessen hättest!

2. Suche auf dem Globus den kürzesten Flugweg von Moskau nach Vancouver an der Westküste Kanadas. Er geht nicht in die Ost-West-Richtung!

Benutze dazu wieder ein Stück Bindfaden! Verfolge diese Strecke auch auf den Atlas-karten 90 und 93! Mit der maßstabgerechten Verkleinerung hängt aber auch noch ein anderes Problem zusammen.

Auf der Karte der Sowjetunion sind die Eisenbahnen als 0,25 mm dicke schwarze Linien dargestellt. Wenn man die Dicke des Striches mit dem Maßstab der Karte einfach umrechnet, ergibt sich eine Breite der Eisenbahnlinie von 5 km!

Eigentlich dürfte eine Eisenbahnlinie, die etwa 20 m breit ist, nur als 0,001 mm starker Strich gezeichnet werden. Dieser ließe sich nur mit einem guten Mikroskop auf der Karte erkennen. Ein Menschenhaar hat die Dicke von 0,07 bis 0,17 mm!

Man kann also schon aus zeichnerischen Gründen nicht alles, was an Zeichen in einer Karte verwendet wird, in dem richtigen Größenverhältnis darstellen, das dem Kartenmaßstab entspricht. Wichtige Fakten, z. B. Hauptstädte oder Flüsse, werden oftmals größer oder stärker gezeichnet, andere, weniger wichtige läßt man dafür ganz weg, um die Karte nicht zu überladen. Diese Arbeit des Kartenzeichners nennt man „Generalisieren“.

Aufgabe: Auf der Karte 28 des Atlas ist die Elbe bei Magdeburg als 0,5 mm starker blauer Strich eingetragen (Maßstab 1:500 000). Welcher Breite entspräche das in der Natur? (Die Elbe ist bei Magdeburg zwischen 150 bis 200 m breit.)

Wir haben am Anfang gesagt, daß es scheinbar keine Probleme bei der verkleinerten Darstellung der Erdoberfläche auf der Landkarte gibt. Ihr werdet erkannt haben, daß das in Wirklichkeit nicht so ist. Dabei konnte eine Reihe von Problemen, die z. B. mit der Darstellung des Gradnetzes auf einer ebenen Karte zusammenhängen, nur angedeutet werden, weil zu deren Verständnis größere mathematische Kenntnisse vorausgesetzt werden müssen. Für den Kartographen ist es sehr schwierig, den Anforderungen der Praxis an die Karte immer Rechnung zu tragen. Nur durch die Auswahl einer für eine bestimmte Karte besonders geeigneten Darstellungsart ist es möglich, die verschiedenartigen Schwächen der Landkarte weitestgehend auszugleichen. Deshalb trägt der Kartograph eine sehr große Verantwortung. Er muß nicht nur über ein sehr gutes geographisches Wissen verfügen und gut zeichnen können, er muß auch anwendungsbereite mathematische Kenntnisse haben, um brauchbare Kartenentwürfe anfertigen zu können.

In der Schule muß manches, was sich im Leben als sehr kompliziert darstellt, vereinfacht werden. Deshalb ist es aber nicht falsch. Wir müssen aber immer wieder überprüfen, ob das, was wir einmal gelernt haben, dem für uns neuesten Stand immer noch entspricht.

K. Sandner

Mathematik und Chemie



Viele Leser werden bei dieser Überschrift denken, daß Mathematik und Chemie nur wenig miteinander zu tun haben, weil in der Mathematik gerechnet und in der Chemie experimentiert wird. Das wäre jedoch ein recht leichtfertiges und oberflächliches Urteil, denn in der Chemie wird ebenfalls gerechnet und – das ist vielleicht noch etwas erstaunlicher – in der Mathematik wird experimentiert!

Beginnen wir mit dem Rechnen in der Chemie. Vielleicht gehen wir zunächst davon aus, warum überhaupt in der Chemie gerechnet werden muß: Experimente kosten Geld und Zeit, besonders, wenn sie kompliziert sind, und man muß daher die Frage stellen, ob man nicht das Ergebnis des Experiments ausrechnen und damit auf seine Durchführung verzichten kann. Das ist in vielen Fällen tatsächlich möglich. Will man ein Experiment rechnerisch durchführen, so muß man sich erst einmal die entsprechenden mathematischen Formeln überlegen, nach denen gearbeitet werden soll. Die Formeln müssen natürlich den chemischen Vorgang widerspiegeln, d. h. nachbilden oder modellieren; sie müssen letzten Endes das gleiche oder wenigstens ein näherungsweise Ergebnis des Versuchs liefern. Das Aufstellen dieser Berechnungsformeln, des sogenannten Modells, ist oft die schwierigste Arbeit bei der Anwendung mathematischer Methoden in der Chemie. Bei komplizierten Modellen kann natürlich dann auch die Lösungsmethode Schwierigkeiten bereiten.

Es ist aber auch noch ein weiterer Gesichtspunkt zu berücksichtigen.

Chemische Experimente werden nicht nur durchgeführt, um festzustellen, wie irgendwelche Stoffe miteinander reagieren, sondern in der Praxis kommt es insbesondere darauf an, die Bedingungen, unter denen die Reaktion stattfindet, so zu wählen, daß das gewünschte Produkt in möglichst großer Menge entsteht, oder auch, daß irgendein Vorgang möglichst billig abläuft. Man sucht also, die entsprechenden Prozesse in diesem Sinne bestmöglich oder optimal durchzuführen. Eine Optimierung ist meist auch durch Versuche möglich, doch braucht man hierzu im allgemeinen längere Versuchsreihen. Die

Mathematik stellt dagegen Optimierungsmethoden zur Verfügung, die auf das entsprechende Modell angewendet werden können und dann die Optimallösung liefern, ohne daß chemische Versuche durchgeführt werden müssen. Gerade in dieser Ausnutzung von Optimierungsmethoden liegt die besondere Bedeutung der Mathematik für die Chemie, und hierin liegt auch das hauptsächlichste Einsatzgebiet des Mathematikers in der chemischen Industrie, der mit seinen Kenntnissen und Methoden unter Benutzung von Rechenautomaten die Chemiker und Verfahrenstechniker (das sind Ingenieure, die die chemischen Verfahren in großtechnische Maßstäbe umsetzen) wirkungsvoll unterstützen kann.

Um das Gesagte etwas besser zu veranschaulichen, sollen zwei einfache Beispiele solcher Optimierungsprobleme folgen.

Nehmen wir an, wir hätten drei Gase mit bestimmten Heizwerten und Schwefelgehalten und sollen daraus ein Gas mischen, welches einen minimalen Heizwert nicht unterschreitet, einen maximalen Schwefelgehalt nicht überschreitet und dabei noch möglichst billig wird. Es seien p_1, p_2, p_3 die Preise pro m^3 der Gase, s_1, s_2, s_3 die Schwefelgehalte in g Schwefel pro m^3 der Gase und h_1, h_2, h_3 die Heizwerte in kcal pro m^3 . Die geforderte Menge Mischgas sei m , dessen minimaler Heizwert h und maximaler Schwefelgehalt s . Gesucht sind dann solche Mengen x_1, x_2, x_3 der vorhandenen Gase m^3 , daß die geforderten Bedingungen erfüllt sind.

Dann kann man die Problemstellung formelmäßig sofort folgendermaßen formulieren:

Es sind solche Werte $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ zu finden, daß

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 \geq hm$$

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 \leq sm$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = m$$

gilt und

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$$

möglichst klein wird.

Eine solche Problemform nennt man ein lineares Optimalproblem, weil eine lineare Funktion zu optimieren, d. h. möglichst klein – oder in anderen Fällen auch möglichst groß – werden soll und lineare Un-

gleichungen oder Gleichungen dabei einzuhalten sind. Die Mathematiker haben eine ganze Reihe von Lösungsverfahren für solche Aufgaben entwickelt, von denen das bekannteste und gebräuchlichste die sogenannte Simplexmethode ist.

In den letzten Jahren sind viele weitere Anwendungen hinzugekommen. Heutzutage rechnet man die Produktionspläne großer chemischer Kombinate, wie etwa im VEB Leuna-Werke, mit Hilfe solcher linearer Optimalprobleme aus. Diese haben einige hundert Nebenbedingungen und Variable und können nur mittels Rechenautomaten gelöst werden; aber es handelt sich genau um denselben Problemtyp wie oben bei dem Mischungsproblem:

Eine lineare Funktion – z. B. der Gewinn – ist möglichst groß zu machen, wobei gewisse Nebenbedingungen, die von der Leistungsfähigkeit der einzelnen Anlagen bestimmt werden, einzuhalten sind. Die Variablen sind dabei die Produktmengen, die in den verschiedenen Anlagen produziert und dann verkauft oder in anderen Anlagen weiterverarbeitet werden.

Diese linearen Optimalprobleme sind vom mathematischen Standpunkt als die einfachsten Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen anzusehen; ihre Lösung macht keine prinzipiellen Schwierigkeiten, wenn sie auch bei großen Problemen langwierig werden kann. Es gibt aber auch viele Aufgabenstellungen in der Praxis der chemischen Industrie, wo die Nebenbedingungen oder auch die zu maximierenden oder minimierenden Funktionen nicht mehr linear von den Variablen abhängen. Das ist fast immer dann der Fall, wenn es um Probleme geht, die sich mit der günstigsten Konstruktion oder dem optimalen Betrieb chemischer Anlagen befassen. Hier spielen vor allem die Fragen nach möglichst großen Ausbeuten oder hohen Umsätzen bei chemischen Reaktionen eine Rolle. Ausbeuten und Umsätze hängen aber von einer ganzen Reihe physikalischer Größen ab, wie etwa Temperatur und Druck, unter denen die Reaktion abläuft oder auch von der Reaktionszeit. Diese Abhängigkeiten sind im allgemeinen recht verwickelt und enthalten oft Exponentialfunktionen oder Logarithmen.

Manchmal ist es möglich, solche Abhängigkeiten durch quadratische Funktionen angenähert wiederzugeben, aber auch dann ist das entstehende Optimierungsproblem nicht linear. Solche Aufgabenstellungen sind eine Grundlage für die schon erwähnte Planung der Produktion. Wenn man nämlich die einzelnen Anlagen nicht optimal betreibt, so schätzt man vielleicht die Leistungsfähigkeit nicht richtig ein und hat schon eine falsche Problemstellung bei der Planung. Dann kann man natürlich auch keinen richtigen Plan ausrechnen.

Die Probleme zur Maximierung der Ausbeute bzw. des Umsatzes können unter Umständen so kompliziert sein, daß man keine direkte Lösungsmethode benutzen kann. Dann kann man Simulationsverfahren anwenden, über die wir später noch einiges sagen werden. Anderenfalls ist eines der gebräuchlichsten Verfahren die Gradientenmethode. Um eine gewisse Vorstellung von dieser Methode zu vermitteln, wollen wir die Lösung eines Optimalproblems mit der Besteigung eines Berges vergleichen. Einen Berg kann man ja als geometrische Veranschaulichung einer Funktion mit zwei Veränderlichen betrachten, und die Spitze entspricht dem gesuchten größten Funktionswert.

Nun kann die Besteigung des Berges – jedenfalls theoretisch – so geschehen, daß man immer in der Richtung des steilsten Anstiegs geht. Diese Richtung kann man berechnen, und man nennt sie Gradient. Nun kann es aber sein, daß die Verfolgung der steilsten Richtung beim Erklettern des Berges nicht immer möglich ist, weil man an einen Zaun oder zu steilen Abhang kommt. Dann geht man eben an dem Zaun oder dem Abhang entlang, bis es wieder möglich wird, die Gradientenrichtung weiterzuverfolgen. Zaun oder Abhang entsprechen aber den Nebenbedingungen in unserem Optimalproblem, die man nicht verletzen darf, und es gibt Methoden, die genau dem Entlanggehen am Zaun oder Abhang entsprechen. Wenn auch unser Beispiel einem Problem mit nur zwei Variablen entspricht, so läßt sich das Verfahren doch im Prinzip auch auf Optimierungen mit mehr Variablen anwenden, und es ist damit eine sehr allgemeine Methode gefunden.

Zu Beginn erwähnten wir, daß die Mathematik auch mit Experimenten arbeitet. Gemeint ist hier der verhältnismäßig junge Zweig mathematischer Verfahren, die unter dem Begriff „Simulation“ bekannt sind. Es kommt nämlich immer häufiger vor, daß wichtige Aufgaben auf solch komplizierte Modelle führen, daß es keine Lösungsverfahren gibt oder die bekannten Verfahren mit einem viel zu hohen Rechenaufwand verbunden sind. Wir sahen, daß eine Optimierungsaufgabe immer darin besteht, gewisse Größen $x_1, \dots, x_n$ so zu bestimmen, daß eine Zielfunktion einen größten oder kleinsten Wert annimmt und gewisse Nebenbedingungen erfüllt werden. Wenn es nun kein brauchbares Verfahren gibt, die gesuchten optimalen Werte auszurechnen, so kann man vielleicht durch Probieren solche finden. Man sucht sich Werte aus, die den Nebenbedingungen genügen, setzt sie in die Zielfunktion ein und wiederholt das mehrere Male. Die Werte, die zum größten Wert der Zielfunktion führen, betrachtet man als Näherungslösung der Aufgabe. Vielfach gibt es dann auch Möglichkeiten zur

Abschätzung, wie weit der gefundene Wert vom wirklichen Optimalwert entfernt ist. Ob man die „Versuchswerte“ willkürlich oder systematisch bestimmt, hängt von dem Problem ab; man kennt beide Möglichkeiten. Was wir soeben beschrieben haben, ist aber gerade die Simulation oder experimentelle Mathematik. Sicher haben viele unbewußt bereits solche Gedanken ausgenutzt, indem sie z. B. durch Probieren einen Näherungswert für die Nullstelle einer Gleichung gefunden haben, den sie dann durch ein anderes Verfahren verbessern konnten. Auch bei Simulationsverfahren ist es oft möglich, anschließend die gefundene Näherungslösung noch durch andere Methoden zu verbessern. Wesentlich bei dem genannten Experimentieren ist, daß man das Modell des Prozesses benutzt und damit die Experimente auf der Rechenmaschine und nicht im chemischen Sinne durchführt. Dadurch kann trotz des Experimentierens viel Zeit und Aufwand eingespart werden. Interessant ist noch, daß die Simulationsverfahren bei kleinen und einfachen Problemen wesentlich mehr Aufwand als direkte mathematische Verfahren erfordern, aber bei komplizierten Problemen – und darin liegt gerade ihre Stärke – noch Lösungen ermöglichen, wo die direkten Verfahren schon längst versagen.

Aus all dem Gesagten wird deutlich, welche vielgestaltige und interessante Aufgaben ein Mathematiker in der Praxis zu lösen hat. Gerade die Forschungen auf Gebieten, wo verschiedene Wissenschaften – in unserem Fall eben Mathematik und Chemie – zusammentreffen, sind ja außerordentlich bedeutungsvoll und für die weitere Entwicklung der Volkswirtschaft unumgänglich notwendig.

J. Piehler

Aus dem VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie:

Chem.-Ing. H. Fiedler

Chemisches Rechnen

auf elementarer Grundlage in Form einer Aufgabensammlung

367 S., 27 Bilder, zahlreiche Übungsbeispiele, 400 Aufgaben mit Lösungen, 218 Aufgaben zum Selbststudium, Halbleinen 13,00 M

Autorenkollektiv

Tabellenbuch Chemie

485 S., 2 Bilder, Halbleinen 16,20 M

Rauscher/Voigt/Wilke

Chemische Tabellen und Rechentafeln für die analytische Praxis

337 S., 3 Bilder, 7 Beilagen, Plasteinband 19,50 M

Leser schreiben an alpha

● Unsere Oberschule mit ca. 200 Schülern (Klasse 1 bis 8) beteiligt sich schon seit vielen Jahren am *alpha*-Wettbewerb. Die Lösung dieser Aufgaben hat uns sehr geholfen, unser mathematisches Wissen zu erweitern. Im letzten Schuljahr beteiligten sich besonders die Mitglieder unseres Mathematikzirkels, die auch sämtlich Mitglieder des *Kreisclubs Jünger Mathematiker* sind.

Mathematikzirkel der OS Zatzke,
Krs. Wittstock

● Im vergangenen Jahr habe ich mich erstmals am Wettbewerb beteiligt. Die Aufgaben halfen mir in der Schule. Sie haben mir viel Spaß gemacht. Mit Stolz trage ich das erworbene *alpha*-Abzeichen.

Henry Albrecht, Wittenberge

● Ich habe den Wunsch, einmal Mathematik zu studieren. Schon allein deshalb beteilige ich mich an den jährlichen Wettbewerben. ... In den Heften 5/72 und 6/72 waren Aufgaben enthalten, die im Lehrplan des Mathematikunterrichts erst später behandelt werden ...

Elke Köhler, Staßfurt

● Hiermit sende ich der Redaktion 21 Antwortkarten. ... Bemerken möchte ich noch, daß ich während meiner Lehrerlaufbahn, die mit der Ausbildung auf einem „Königlichen Preußischen Lehrerseminar“ begann, keinerlei Qualifikation für den Mathematikunterricht erworben habe.

Karl Krause, Rentner (72 Jahre), Mansfeld

● Mir macht das Lösen der *alpha*-Aufgaben immer viel Spaß. ... Doch die Aufgabe W 5*1007 konnte ich ohne die Hilfe meines Vaters nicht lösen. Ich finde, diese Aufgabe ist für die 5. Klasse zu schwer. (Zu dieser Aufgabe gingen 520 Lösungen ein, davon 490 richtig gelöst, d. Red.)

Gindra Schümichen, Berlin

● Ich abonniere schon seit dem 6. Schuljahr eure Zeitschrift. Leider habe ich damals kein Interesse für die Aufgaben gezeigt. Seit dem 7. Schuljahr arbeite ich mit *alpha*. Sie hat gewiß auch einen großen Anteil, daß ich in der 8. Klasse erstmalig die Note 1 in Mathematik erhielt. Am *alpha*-Wettbewerb 1972/73 nahm ich erstmals teil, und ich freue mich über jede Karte, die mir meine richtige Lösung bestätigt. Eines steht für mich fest: Mein späterer Beruf muß im Zusammenhang mit Mathematik stehen. Natürlich werde ich *alpha* treu bleiben, denn *alpha* ist einfach große Klasse.

Elke Peckstein

● Als ungarischer Wissenschaftler möchte ich der Zeitschrift *alpha* gratulieren. *alpha* ist eine gute Zeitschrift, die ich ab sofort abonnieren werde.

János Ágoston, Budapest

Mathematik im Schottischen Kaffee



Heute weiß man in der ganzen Welt, daß es in Lwow (Ukrainische SSR) ein Kaffee gab, in dem der Zahlkellner seinen Gästen ein Buch zur aktiven mathematischen Mitarbeit empfahl. Und darüber soll in diesem Beitrag berichtet werden.

S. Banach, der bekannteste polnische Mathematiker, war ein unermüdlicher Arbeiter, der oft nachts, tagelang über einem Problem saß.

Berühmt wurden seine „Séances“ – seine Sitzungen. Er lud seine Anhänger in das Schottische Kaffee ein, um mit ihnen bei einer Tasse Kaffee wissenschaftliche Konversationen und Diskussionen zu führen. Damit entfachte er einen Meinungsstreit über mathematische Ideen und Probleme, die die Jugend genauso wie das Alter ansprachen. Die Wahl der Themen war stets interessant, meist kurios. Die Freiheit der Diskussionen in einem Kaffee gestattete es, zwanglos – fern von der oft strengen, engbegrenzten Thematik und Atmosphäre des Hörsaales – von einem Problem in das andere überzuwechseln. Banach verstand es, durch diese Diskussionen die Hemmungen seiner Schüler abzubauen, war stets bestrebt, einen engen Kontakt zu schaffen, der den Willen beim jungen Menschen weckte, seine eigenen Gedanken zu äußern und zu vertreten. Banach demonstrierte, daß er nicht zu den pedantischen Wissenschaftlern seiner Zeit gehörte, die Angst um den Nimbus ihrer Würde hatten, wenn sie mit der Jugend an einem Tische saßen, wenn ihnen ein Fehler unterlief oder das von ihnen gestellte Problem in einer Sackgasse endete.

Viele angesehene Bürger der Stadt zweifelten, daß man in einem Kaffee seriös arbeiten könne. Diese Tischrunde ließ sich, das zeigte sich immer wieder – weder durch die Unruhe an den Nachbartischen noch durch die Musik oder das Auf und Ab der Hauptstraße – von ihren Gesprächen abbringen. Der Disput wurde oft sehr heiß. Man schrieb auf die weißen Marmorplatten der Tische und auf Servietten, erregte damit immer wieder den Mißmut der Kellner, die mit ihren Tüchern versuchten, die mathematischen Probleme zu löschen. Mehrfach kam es zu heftigen Auseinandersetzungen mit dem Bedienungs-

personal. Banach beendete den Streit der beiden Parteien, den mathematisch Interessierten und den Kellnern, indem er ein großes dickes Buch beschaffte, in dem alle Probleme festgehalten, begonnene Lösungen vervollständigt wurden. Für besonders elegante oder originelle Lösungen setzten Teilnehmer an der Tischrunde Preise aus. Sie lagen zwischen einer guten Tasse Mokka und einer lebenden Gans.

Beim Zahlen nahm der Kellner das Schottische Buch an sich und brachte es wieder, wenn Mathematiker im Kaffee erschienen.

Neben den Eintragungen von Banach finden wir die Handschriften vieler bekannter Mathematiker wie Ulan und Mazur. Der zweite Weltkrieg machte dieser Tischrunde nach zehn Jahren ein Ende. Das Buch, ein originelles Dokument einer außerordentlichen Persönlichkeit, wurde 1941 geschlossen und der Ehefrau Banachs überreicht. Ein gern gesehener Gast der Gesprächsrunde war der bekannte, im Jahre 1971 verstorbene Mathematiker H. Steinhaus. Der Urania-Verlag gab 2×100 Aufgaben von ihm heraus. Eine Auswahl von Problemen soll unsere Leser anregen, dieses Buch zu erwerben und einmal die Methode Banach auszuprobieren.

Viel Freude und Erfolg
wünscht J. Lehmann

Stefan Banach

30. 3. 1892 bis 31. 8. 1945

Stefan Banach ist geboren und aufgewachsen in Kraków. Nach Ablegung des Abiturs (1910) war er Student am Polytechnikum in Lwow. In den Jahren des ersten Weltkrieges kehrte er in seine Heimatstadt zurück und studierte dort Mathematik und veröffentlichte bereits 1919 seine ersten Forschungsergebnisse. 1920 wurde er Assistent an der Mathematischen Fakultät der Universität Lwow und erwarb im gleichen Jahr den Doktorgrad. 1922 wurde er außerordentlicher, 1927 ordentlicher Professor, 1924 korrespondierendes Mitglied der Polnischen Akademie der Wissenschaften.

Gemeinsam mit H. Steinhaus gründete er 1929 die Zeitschrift *Studia Mathematica* und arbeitete an ihr bis 1941 aktiv mit. Er ist einer der Initiatoren der *Mathematischen Biographien*, erstmals 1931 herausgegeben. Die Preisträger der XIV. IMO – Toruń 1972 – erhielten englischsprachige Ausgaben dieser wertvollen Fachbücher.

Während der nazistischen Okkupation ruhte die Professur Banachs. Die Faschisten setzten ihn als Tierpfleger für Versuchstiere am Institut zur Bekämpfung von Typhus ein. Sein Gesundheitszustand erlaubte es nicht, den ihm nach Ende des zweiten Weltkrieges angebotenen Lehrstuhl an der Universität Kraków zu übernehmen. Banach veröffentlichte über 60 wissenschaftliche Arbeiten, insbesondere auf dem Gebiet der Funktionalanalysis, der Theorie der reellen Funktionen und der Maßtheorie.



Internationales mathematisches Zentrum „Stefan Banach“

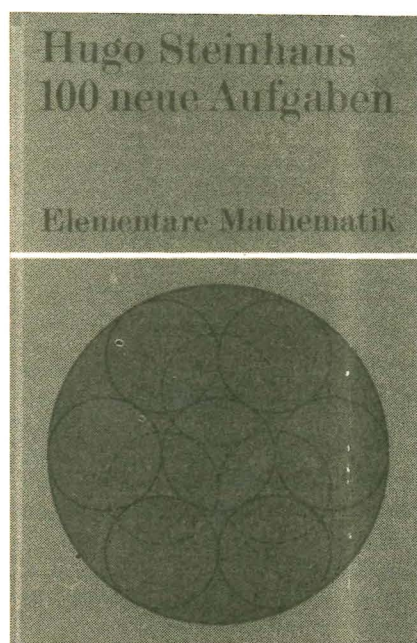
Anfang 1972 wurde in Warschau das internationale mathematische Zentrum gegründet. Es ist das Ergebnis des Grundsatzabkommens über multilaterale Zusammenarbeit der Akademien sozialistischer Länder (vom Dezember 1971). Es erhielt den Namen *Stefan Banach*. In seinem Sinne nahmen von Januar bis Juli 1973 in einem ersten Semester 15 Nachwuchswissenschaftler aus acht sozialistischen Ländern teil. Namhafte polnische und ausländische Wissenschaftler sprachen zu Grundlagenproblemen der Mathematik, wie *Die Theorie der Modelle*, *Die Theorie der Rekursion* und einige angewandte Probleme der Logik. Zur Ausbildung der jungen Spezialisten gehörten außer Vorlesungen, Kolloquien, Symposien und Gesprächen im kleinen Kreis auch praktische Übungen, verbunden mit angewandter Forschungsarbeit.

So werden die progressiven Ideen Banachs in diesem jungen Zentrum fortgesetzt.

Hugo Steinhaus

2 × 100 Aufgaben

Die beiden Bücher des polnischen Wissenschaftlers enthalten viele interessante Probleme und unterhaltsame Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie mit den dazugehörigen ausführlichen Lösungen. Leser ab etwa 14 Jahren erlernen bei der Beschäftigung mit den originellen Aufgaben, bei deren Auswahl – insbesondere im 2. Band – der Autor sich davon leiten ließ, die Verbindung der Mathematik zur Wirklichkeit darzustellen, ein gründliches Vorgehen. Aber auch mathematische Tricks und eine Einführung in die Bearbeitungsmethoden mathematischer Aufgaben werden ihm durch die beiden Sammlungen geboten, die gleichzeitig den Weg von der Schulmathematik zur höheren Mathematik ebnen.



Proportionen

Die Zahlen A, B, C, p, q, r seien durch die Beziehungen

$$A:B=p, B:C=q, C:A=r$$

miteinander verknüpft.

Man schreibe die folgende fortlaufende Proportion auf:

$$A:B:C=\square:\square:\square$$

Dabei sollen in den Leerstellen $\square$ Ausdrücke in p, q, r so eingesetzt werden, daß diese durch zyklische Vertauschung der Buchstaben p, q, r auseinander hervorgehen. (Das ist so zu verstehen: Aus dem ersten Ausdruck $\square$ wird der zweite und aus dem zweiten der dritte Ausdruck erhalten, wenn man p durch q, q durch r, r durch p ersetzt.)

Teilbarkeit von Zahlen

Die Zahl $3^{105} + 4^{105}$

ist teilbar durch 13, 49, 181 und 379, aber nicht durch 5 und durch 11. Wie beweist man das?

Dreiecke

In der Ebene seien $3n$ Punkte (n sei eine natürliche Zahl) gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Ecken nimmt) n Dreiecke bilden, die keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

Die Diagonale eines Ziegelsteins

Mit Hilfe eines Lineals soll die Raumdiagonale eines Ziegelsteins, der die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds (Quaders) hat, gemessen werden, d. h. der Abstand der am weitesten auseinander liegenden Ecken. Man gebe ein praktisches Verfahren zur Messung dieser Diagonale an, das sich z. B. in einem Betrieb anwenden läßt. Den Lehrsatz des Pythagoras wollen wir nicht benutzen!

Verschnüren von Päckchen

Ein Karton in Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds (Quaders) wird im allgemeinen über Kreuz verschnürt: Im Mittelpunkt N der Deckfläche sowie im Mittelpunkt P der Grundfläche überschneidet sich der Bindfaden jeweils in einem rechten Winkel. Man zeige: Wenn man die Schnur in N und in P fest zusammenklebt, läßt sie sich nicht mehr verschieben.

Drei Läufer

Drei Läufer, A, B, C trainieren systematisch auf der 200-m-Strecke. Nach jedem Lauf notieren sie die Reihenfolge, in der sie das Ziel passieren. Am Ende der Saison stellen sie fest, daß A in den meisten Trainingsläufen B geschlagen hat, daß B meistens C besiegt hat und daß in fast allen Läufen C vor A lag.

Wie ist das möglich?

Eine Ungleichung

Man beweise, daß für $a > b > c > 0$ die Beziehung gilt:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} > 0.$$

Umkreis und Inkreis

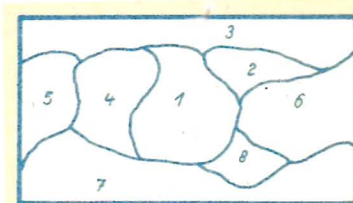
Für ein gleichseitiges Dreieck ist der Radius des Umkreises gleich dem Durchmesser des Inkreises. Der Flächeninhalt des Umkreises ist folglich viermal so groß wie der des Inkreises. Man zeige, daß für andere Dreiecke das Verhältnis dieser Flächeninhalte stets größer als vier ist.

Heureka!

Gegeben sei eine Kugel vom Durchmesser 1. Wir zeichnen auf der Kugeloberfläche einen Kreis, der diese Fläche im Verhältnis 1:9 zerlegt. Wie groß ist der Kreisumfang?

Färbung einer Landkarte

Das Bild zeigt acht Länder; es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die Namen dieser Länder. Wie können wir diese Landkarte mit den vier Farben Rot, Blau, Gelb und Grün farbig gestalten, so daß für jedes Paar benachbarter Länder die Färbungen verschieden sind?



Ein Kuchen für drei

Zwei Brüder, Lutz und Bernd, haben den Weihnachtskuchen bereits in zwei Teile A und B zerlegt. Beide betrachten die Teilung als gerecht. Da erscheint überraschend Dr. Abrakadabra, um am Fest teilzunehmen. Er verbirgt seine Zweifel an der angeblichen Gleichheit $A=B$ nicht und benutzt eine Methode, die jedem $\frac{1}{3}$ des Kuchens sichert und zugleich $A=B$ nicht außer acht läßt. In der Tat erreicht die Methode, ausgehend von der ersten Teilung, eine gerechte Zerlegung in drei gleiche Teile. Worin besteht der Trick?

Mathematische Literatur aus dem Urania-Verlag

H. Steinhaus
100 Aufgaben

179 S., 131 Abb., Pappband, cellophaniert 8,50 M

H. Steinhaus
100 neue Aufgaben

176 S., 97 zweifarbige Zeichnungen, Pappband, cellophaniert 8,50 M

Leonhard A. Rastrigin
Zahl oder Wappen

Ein Buch über den Zufall
300 S., 80 Zeichnungen, Ganzgewebe 9,80 M



Wir bauen eine „Unruhe“ mit regelmäßigen Polyedern

Liebe *alpha*-Leser der 5. und 6. Klassen! Mein Name ist *Birgit Krötenheerdt*. Ich besuche zur Zeit eine 9. Klasse der *Dr.-Kurt-Fischer-Oberschule* in Halle. Seit mehreren Jahren gehöre ich zu den Lesern der Schülerzeitschrift *alpha*. Mit diesem Beitrag möchte ich Euch eine Anleitung zum Basteln einer Unruhe mit regelmäßigen Polyedern geben. Eine solche Unruhe kann, wenn sie frei beweglich aufgehängt ist, ein schöner Zimmerschmuck sein. Auch Eurem Mathematiklehrer könnt Ihr damit vielleicht eine Freude bereiten.

Sicher ist Euch bekannt, daß ein Würfel als *regelmäßiger Körper* oder auch als *regelmäßiges Polyeder* bezeichnet wird. Die Begrenzungsflächen sind regelmäßige Vielecke, und an jeder Ecke stoßen gleich viele Kanten zusammen. Es kann bewiesen werden, daß es genau 5 Arten regelmäßiger Polyeder gibt.

(In der Tabelle und im folgenden Text wird das Wort *regelmäßig* mit *r.* abgekürzt.)

In Bild 1 sind diese Polyeder der Reihe nach von links nach rechts zu sehen. Für alle *r.* Polyeder und auch für viele andere Polyeder gilt die Formel $E - K + F = 2$, die von dem Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) erkannt und bewiesen wurde.

Beim Basteln unserer Unruhe wollen wir die *r.* Polyeder weder als massive Körper, noch als Flächenmodelle aus den Netzen, sondern als Kantenmodelle bauen. Dazu benötigen wir etwa 20 Trinkröhrchen (möglichst von gleicher Farbe), Garn, eine große Stopfnadel, Nähseide für die Aufhängung und 4 Stäbe, welche in die Trinkröhrchen passen (z. B. Mikadostäbe).

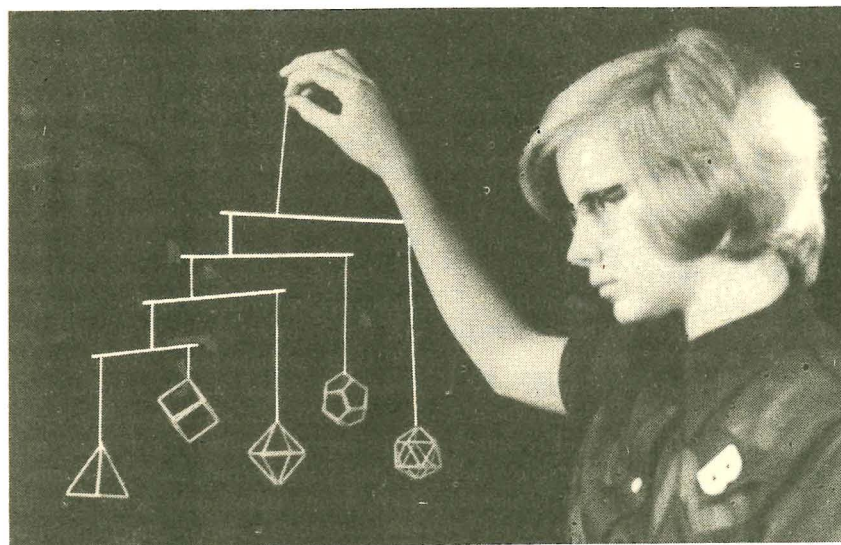
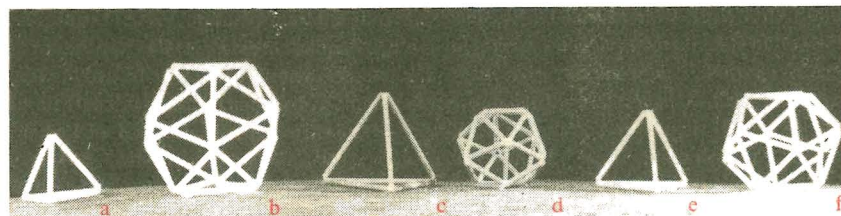
Wie lang müssen nun die Kanten der verschiedenen *r.* Polyeder gewählt werden, damit die Unruhe ein gefälliges Aussehen erhält? Offensichtlich wäre es ungünstig, für alle 5 Polyeder dieselbe Kantenlänge zu wählen, weil dann z. B. das Tetraeder gegenüber dem Ikosaeder viel zu klein wirken würde (vgl. Bild 2a, b).

Ein etwas gefälligeres Aussehen wäre gewährleistet, wenn wir die Kantenlängen so wäh-

len, daß alle 5 Polyeder gleiche Volumina haben (vgl. Bild 2c, d). Würden wir für die einzelnen Polyeder Kantenlängen verwenden, mit denen die umbeschriebenen Kugeln gleiche Größe besitzen, so bekommen z. B. das Tetraeder und das Ikosaeder das Aussehen des Bildes 2e, f (als umbeschriebene Kugel eines *r.* Polyeders wird diejenige Kugel bezeichnet, auf deren Oberfläche die Ecken des *r.* Polyeders liegen). Um ein noch gefälligeres Aussehen der Unruhe zu erreichen, wählen wir die Kantenlängen so, daß für jedes *r.* Polyeder die gedachte Kugelfläche durch die Kantenmittelpunkte einen Radius von 2 cm erhält. Die erforderlichen Berechnungen können erst mit den Kenntnissen der 8. und 9. Klassen ausgeführt werden.

In der folgenden Tabelle sind die errechneten Werte für die Kantenlängen (auf eine Stelle nach dem Komma genau) angegeben.

Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder
5,6 cm	2,8 cm	4,0 cm
Dodekaeder	Ikosaeder	
1,5 cm	2,4 cm	



Der Wert für das Oktaeder ist ein exakter Wert, während die anderen Werte nur Näherungen darstellen.

Wir bauen zuerst das *r.* Tetraeder; dazu schneiden wir 6 Röhrchen der Länge 5,6 cm von den großen Trinkröhrchen ab. Mit Nadel und Garn (doppelt etwa 1 m lang) werden zunächst 3 Röhrchen zu einer geschlossenen Kette aufgefädelt. Mit einem Röhrchen dieser Kette und mit zwei weiteren Röhrchen wird eine zweite geschlossene Kette hinzugefügt. Mit dem 6. Röhrchen wird nun das *r.* Tetraeder vollendet; durch jedes Röhrchen sollte das Garn mindestens zweimal hindurchgezogen werden.

Beim *r.* Hexaeder (dem Würfel) benötigen wir 12 Röhrchen der Länge 2,8 cm. Wir beginnen mit einer geschlossenen Kette aus 4 Röhrchen. Mit einem Röhrchen dieser Kette und mit 3 weiteren Röhrchen wird eine zweite geschlossene Kette hinzugefügt. Mit den restlichen 5 Röhrchen wird das *r.* Hexaeder vollendet; es ist darauf zu achten, daß an jeder Ecke 3 Röhrchen zusammenstoßen.

Beim *r.* Oktaeder benötigen wir 12 Röhrchen der Länge 4,0 cm, und wir beginnen mit einer geschlossenen Kette aus 3 Röhrchen; an

Name	Begrenzungsflächen	Kanten an jeder Ecke	Ecken <i>E</i>	Kanten <i>K</i>	Flächen <i>F</i>
<i>r.</i> Tetraeder	<i>r.</i> 3-Ecke	3	4	6	4
<i>r.</i> Hexaeder (Würfel)	<i>r.</i> 4-Ecke	3	8	12	6
<i>r.</i> Oktaeder	<i>r.</i> 3-Ecke	4	6	12	8
<i>r.</i> Dodekaeder	<i>r.</i> 5-Ecke	3	20	30	12
<i>r.</i> Ikosaeder	<i>r.</i> 3-Ecke	5	12	30	20

Inhalt einer Übung des Mathematik-Zirkels des Moskauer Palastes der Pioniere und Schüler

Thema: Wahrscheinlichkeit · Grundbegriffe und einfachste Berechnungen

■ *Frage des Lehrers an alle:* Neben meinem Haus halten zwei Autobusse — Nr. 77 und Nr. 174. Der erste fährt dreimal so häufig wie der zweite. Ich setze mich in den zuerst abfahrenden Bus. Welche Chance habe ich, daß es Nr. 174 ist?

▲ *Die sofortige Antwort vieler Zirkelteilnehmer:* 25 %!

jeder Ecke müssen 4 Röhrchen zusammenstoßen.

Beim r. Dodekaeder benötigen wir 30 Röhrchen der Länge 1,5 cm, und wir beginnen mit einer geschlossenen Kette aus 5 Röhrchen; an jeder Ecke müssen 3 Röhrchen zusammenstoßen.

Beim r. Ikosaeder benötigen wir 30 Röhrchen der Länge 2,4 cm, und wir beginnen mit einer geschlossenen Kette aus 3 Röhrchen; an jeder Ecke müssen 5 Röhrchen zusammenstoßen.

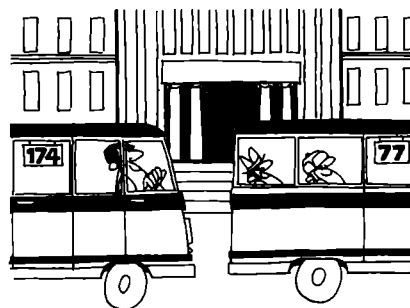
Während die Kantenmodelle des Tetraeders, des Oktaeders und des Ikosaeders sehr stabile Form besitzen, können die Kantenmodelle des Hexaeders und des Dodekaeders leicht verformt werden. Deshalb sollte bei ihnen das Garn besonders straff gezogen werden.

Zum Aufhängen der Polyeder verwenden wir 4 Trinkröhrchen von etwa 20 cm, 17 cm, 14 cm und 10 cm Länge. Durch eingeschobene Stäbe verhindern wir ein leichtes Verbiegen dieser Röhrchen. Entsprechend dem Bild 1 werden die Polyeder mit Nähseide aufgehängt. Dazu brauchen wir etwas Geduld, um Gleichgewicht der Röhrchen mit den Stäben zu erreichen. Ich hoffe, ihr habt Spaß beim Basteln, und die Unruhe gelingt euch genauso wie mir. Wer noch mehr über regelmäßige Polyeder lesen möchte, dem empfehle ich: *alpha*-Heft 1, 1969 (*Fernsehfußball-Reguläre Polyeder* von Dr. E. Schröder), *alpha*-Heft 2, 1969 (*Der Eulersche Polyedersatz* von Dr. H. Günther), die *Kleine Enzyklopädie der Mathematik* und das Buchlein *Reguläre und halbreuläre Polyeder* von T. Roman (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin).

B. Krötenheerdt

■ *Lehrer:* Richtig. In Bruchteilen der Eins ausgedrückt ist dies 0,25. Wer kann die Antwort begründen?

▲ *Zirkelteilnehmer A:* Wir nehmen an, daß auf der Strecke vier Autobusse verschiedener Nummern verkehren, Nr. 75, Nr. 76, Nr. 77 und Nr. 174, die in einheitlichen Zeitabständen fahren, wobei die ersten drei die gleiche Fahrtroute haben. Dann ist klar, daß die Chance, mit der Nr. 174 zu fahren, 0,25 ist.



■ *Lehrer:* Eine sehr gute Erklärung. Verallgemeinern wir sie! In der Antwort von A war von vier Autobussen die Rede, die in gleichen Zeitabständen fahren, d. h., die in dieser Hinsicht gleichberechtigt sind. Die Chance, in einem von den gleichberechtigten Bussen zu fahren, erhielten wir, indem wir Eins durch die Anzahl der gleichberechtigten Busse dividierten. Warum?

▲ *Viele:* Na das ist klar!

■ *Lehrer:* In der Mathematik muß man alles begründen. Oder etwa nicht alles?

▲ *Zirkelteilnehmer B:* Außer Axiomen und Definitionen alles.

■ *Lehrer:* Und was liegt hier vor — ein Satz, ein Axiom oder eine Definition?

▲ *B:* Natürlich eine Definition.

■ *Lehrer:* Stimmt. Schreiben wir also eine allgemeinere Definition auf, indem wir das Wort „Chance“ durch das wissenschaftlichere Wort Wahrscheinlichkeit ersetzen: „Wenn wir es mit ... gleichberechtigten Varianten zu tun haben, dann ist bei zufälliger Auswahl die Wahrscheinlichkeit dafür, eine von ihnen auszuwählen, definitionsgemäß ...“

Achtet darauf, daß in dieser Definition die Termini „gleichberechtigt“ und „zufällig“ vorkommen. Diese definieren wir an dieser

Stelle nicht, sondern verlassen uns auf unser Sprachgefühl.

Jetzt werden wir eine Aufgabe über die Gewinnwahrscheinlichkeit im *Sportlotto* lösen. In diesem Spiel erhält derjenige eine Prämie, der von sechs „Glückszahlen“ (insgesamt sind es 49 Zahlen) drei, vier, fünf oder alle sechs Zahlen errät.

Beginnen wir mit dem günstigsten Fall — wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, alle sechs Glückszahlen zu erraten? Wie muß man bei der Lösung vorgehen?

▲ *Zirkelteilnehmer C:* Von 49 Nummern kann man sechs auf so viele Weisen auswählen, wie es Kombinationen von 49 Elementen zur *k*-ten Klasse gibt. Alle diese Varianten kann man als gleichberechtigt ansehen. Jedoch führt nur eine von ihnen zum Gewinnen. Deshalb wird die Antwort durch den Ausdruck $\frac{1}{\binom{49}{6}}$ gegeben.

■ *Lehrer:* Richtig. Wir rechnen das nicht aus, sondern führen es dann auf der Maschine gleich für alle Möglichkeiten aus. Jetzt verallgemeinern wir die Lösung auf den Fall eines beliebigen Spieles dieser Art (es heißt *Genuesische Lotterie*). Hier ist die Aufgabenstellung: „Unter *n* Zahlen gibt es *m* Glückszahlen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, *k* dieser Glückszahlen zu erraten, wenn man *m* Zahlen auswählt?“

▲ *C:* (An die Tafel gehend) Insgesamt gibt es $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten der Auswahl. Wieviel

von ihnen enthalten *k* Glückszahlen? Dazu müssen *k* von unseren *m* Zahlen zu den *m* Glückszahlen und die übrigen *m-k* zu den *n-m* Nichtglückszahlen gehören. Das bedeutet nach den Formeln der Kombinatorik, daß es

$$\binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{m-k}$$

solcher Möglichkeiten gibt. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, *k* dieser Zahlen zu erraten, gleich

$$\frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{n-m}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

■ *Lehrer:* Die Aufgabe ist richtig gelöst. Die erhaltene Formel übersetzen wir jetzt in die Programmsprache, und beim nächsten Besuch im elektronischen Rechenzentrum rechnen wir die Gewinnchancen im *Sportlotto* durch, indem wir die konkreten Zahlen für *k*, *m* und *n* einsetzen. Und das ist das Programm:

$P = \Pi(i = m - k + 1, m, i) / \Pi(i = 1, k, i) \times$
 $\times \Pi(i = n - m - m + k + 1, n - m, i) /$
 $\Pi(i = 1, m - k, i) / (\Pi(i = n - m + 1, n, i) /$
 $\Pi(i = 1, m, i)).$

(Es wurde die Eingabesprache der Maschine „MIR - 1“ benutzt.)

Π ist das Zeichen der Multiplikation

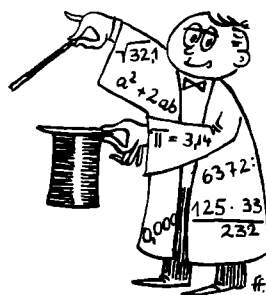
$\Pi(i = a, b, i)$ bedeutet $\prod_{i=a}^b i$.

W. Trostnikov

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1974



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1973/74 läuft von Heft 5/73 bis Heft 2/74. Zwischen dem 1. und 10. September 1974 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/74 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1973/74 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

▲ 5 ▲ 1165 Längs einer 234 m langen Straße sollen die beiderseitigen 1,50 m breiten Fußgängerwege mit quadratischen Platten ausgelegt werden.

- a) Wieviel Platten werden benötigt, wenn jede Platte eine Seitenlänge von 25 cm besitzt?
b) Wieviel Arbeitsstunden benötigen sechs Arbeiter zum Verlegen der Platten, wenn jeder von ihnen in einer Arbeitsstunde 24 Platten verlegt?

Elsemarie Anger, Oschatz Kl. 8

▲ 5 ▲ 1166 Kerstin kaufte in einem Schreibwarengeschäft einen Radiergummi zu 20 Pf. ein Lineal zu 80 Pf. einen Tuschkasten und einen Zirkel, der zweimal so teuer war wie der Tuschkasten. Insgesamt hatte sie genau 10 M zu bezahlen. Wie teuer waren Tuschkasten und Zirkel?

Frank Deutsch, Falkensee, Kl. 7

W 5 ■ 1167 In einer Schule sind mehr als 20, aber weniger als 30 Lehrer tätig. In der Mittelstufe unterrichten doppelt soviel Lehrer wie in der Unterstufe und genausoviel Lehrer wie in der Oberstufe. Wieviel Lehrer sind an dieser Schule tätig, wenn jeder von ihnen in genau einer dieser drei Stufen unterrichtet?

Anke Mentkowski, Eichwalde, Kl. 8

W 5 ■ 1168 Ein Lehrer wußte, daß sein Kollege Müller im Jahre 1973 gerade 46 Jahre alt geworden war. Er kannte aber dessen genaues Geburtsdatum nicht. Auf eine Anfrage hin erhielt er folgende Antwort: „Die Monatszahl meines Geburtsdatums ist dreimal so groß wie die Tageszahl. Das Produkt aus Monats- und Tageszahl ist gleich der Zahl, die den beiden letzten Stellen meines Geburtsjahres entspricht.“ Wann wurde der Kollege Müller geboren?

Heiko Tennert, Döbeln, Kl. 7

W 5*1169 Multipliziert man eine zweistellige natürliche Zahl, deren Quersumme 12 beträgt, mit 2 und subtrahiert man von diesem Produkt 12, so erhält man als Ergebnis wiederum eine zweistellige natürliche Zahl, bei der die Grundziffern in umgekehrter Reihenfolge angeordnet sind wie bei der ursprünglichen Zahl. Wie heißt die ursprüngliche Zahl? Wieviel Lösungen besitzt diese Aufgabe?

Eberhard Gralle, Görlitz

W 5*1170 Auf einer Radrennveranstaltung starteten vier Tandems. Uns ist über den Verlauf folgendes bekannt:

- a) Lutz erkämpfte zusammen mit seinem Partner den 1. Platz.
b) Klaus und sein Partner kamen auf den 2. Platz.
c) Manfred und dessen Partner Dirk waren schneller als Bernd und dessen Partner.
d) Holger errang mit seinem Partner den 2. Platz.
e) Steffen erkämpfte mit seinem Partner einen der ersten drei Plätze.
f) Norbert hatte Bernd zum Tandempartner. Welche Sportler fuhren zusammen auf einem Tandem? Welchen Platz erkämpften sie?

Henry Albrecht, Wittenberge, Kl. 8

▲ 6 ▲ 1171 Es ist nachzuweisen, daß jede dreistellige natürliche Zahl, deren Hunderterstelle um 4 kleiner ist als deren Einerstelle, um 396 kleiner ist als diejenige dreistellige Zahl, die man erhält, wenn man die Grundziffern der gegebenen Zahl in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt.

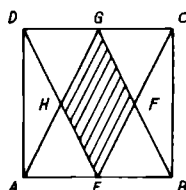
Johanna Determann, Leutenthal, K. 8

▲ 6 ▲ 1172 Es ist zu beweisen, daß die Summe aus sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 7 teilbar ist!

Hagen Peters, Lübbenau

	Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5	W 5=346
30	150	R
	Prädikat:	S
	Lösung:	

W 6 ■ 1173 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $AB=a$ dar. Der Mittelpunkt G der Seite CD wurde mit den Punkten A und B , der Mittelpunkt E der Seite AB mit den Punkten C und D verbunden und die entstandenen Schnittpunkte mit H und F bezeichnet. Es ist der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ durch den Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ auszudrücken.



W 6 ■ 1174 Es sind zwölf zweistellige natürliche Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

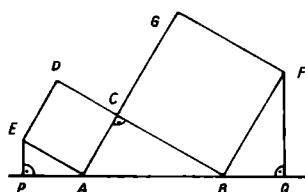
- An der ersten Stelle kommt die Grundziffer 2 genau viermal, die Grundziffer 3 genau fünfmal, die Grundziffer 4 genau zweimal und die Grundziffer 5 genau einmal vor.
- An der zweiten Stelle kommt die Grundziffer 2 genau einmal, die Grundziffer 3 genau zweimal, die Grundziffer 4 genau zweimal, die Grundziffer 5 genau dreimal und die Grundziffer 6 genau viermal vor.
- Die zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen sollen sämtlich verschieden voneinander sein.
- Für genau zehn der zu ermittelnden Zahlen ist die Ziffer der ersten Stelle kleiner als die der zweiten.

W 6 ■ 1175 Zwischen zwei Orten A und B verkehren zwei Autobusse, die auf der Fahrt von A nach B bzw. von B nach A genau einmal im Orte C jeweils 10 Minuten halten. Beide Autobusse fahren zum gleichen Zeitpunkt in A bzw. B ab, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Sie erreichen die Endstation B und A zum gleichen Zeitpunkt nach $1\frac{1}{2}$ Stunden. Die Entfernung der Orte A und C beträgt $\frac{4}{5}$ der Entfernung der Orte B und C .

Es ist nachzuweisen, daß sich die Autobusse bei konstanter Geschwindigkeit im Orte C treffen.

Albrecht Opitz, Meißen

W 6 ■ 1176 Über den Katheten AC und BC eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB wurden die Quadrate $ACDE$ und $BFGC$ konstruiert. Von den Eckpunkten E und F dieser Quadrate wurden die Lote EP und FQ auf die Gerade AB gefällt. Es ist zu beweisen, daß $PA=BQ$ gilt!



▲ 7 ■ 1177 In einem Produktionsbetrieb sind genau 45 % aller Beschäftigten Frauen, die übrigen sind Männer. Es arbeiten in diesem Werk 82 Männer mehr als Frauen. Wie groß ist die Anzahl aller Betriebsangehörigen?

Sch.

▲ 7 ■ 1178 Gegeben seien drei beliebige von Null verschiedene Grundziffern. Durch unterschiedliche Anordnung dieser Grundziffern lassen sich sechs verschiedene dreistellige Zahlen bilden. Es ist zu beweisen, daß die Summe dieser sechs Zahlen stets durch 37 teilbar ist.

Dipl.-Ing. Martin Walter, Meiningen

W 7 ■ 1179 Wie alt ist Angela, wenn ihre Mutter 30 Jahre, ihre Großmutter 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter viermal und die Großmutter achtmal so alt wie Angela sein wird?

Sch.

W 7 ■ 1180 In dem Schema

$$\begin{array}{c} \text{VIER} \\ + \text{EINS} \\ \hline \text{FÜNF} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Grundziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischen System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Ferner darf die Ziffer 0 nicht am Anfang einer Zahl stehen. Zeige, daß die Aufgabe keine Lösung besitzt!

T.

W 7 ■ 1181 Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ mit $AB > BC$ und $\angle BAD < 90^\circ$. Schlage um A mit AD als Radius einen Kreis; sein Schnittpunkt mit der Geraden CD sei E . Schlage um C mit CD als Radius einen weiteren Kreis; sein Schnittpunkt mit der Geraden AD sei F . Ziehe die Verbindungsgeraden BE , BF und EF ! Weise nach, daß das Dreieck BFE gleichschenkelig ist!

Sch.

W 7 ■ 1182 Es ist die kleinste mehrstellige natürliche Zahl z zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzt:

- Die Zahl z beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 4.
- Streich man diese Grundziffer 4 und fügt man sie rechts hinter der letzten Grundziffer an, so erhält man eine natürliche Zahl z' , die gleich dem vierten Teil von z ist.

Volker Zillmann, Dresden

W 8 ■ 1183 Gegeben sei ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit der Basis $AB=3$ cm, dessen Umfang 13 cm beträgt. Eine Gerade g , die zu der Geraden AB parallel ist, schneide AC in einem inneren Punkt D und BC in einem inneren Punkt E so, daß der Umfang des Vierecks $ABED$ gleich 7,4 cm ist. Es ist die Länge der Strecke AD zu ermitteln.

Sch.

W 8 ■ 1184 In den arabischen Erzählungen von den tausendundein Nächten, die vor vielen hundert Jahren gesammelt worden

sind, finden wir in der 458ten Nacht das folgende Rätsel:

Eine fliegende Taubenschar kam zu einem hohen Baume, und ein Teil von ihnen setzte sich auf den Baum, ein anderer darunter. Da sprachen die auf dem Baume zu denen, die unten waren: „Wenn eine von euch herauffliegt, so seid ihr ein Drittel von uns allen; und wenn eine von uns hinabfliegt, so werden wir euch an Zahl gleich sein.“ Wieviel Tauben setzten sich auf den Baum und wieviel darunter?

L.

W 8 ■ 1185 Es sei $A_1B_1C_1$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $A_1B_1=5$ cm und den Katheten $B_1C_1=3$ cm, $A_1C_1=4$ cm. Es sind die Maßzahlen (in cm) der Längen der Seiten aller dem Dreieck $A_1B_1C_1$ ähnlichen Dreiecke ABC anzugeben, wobei diese Maßzahlen natürliche Zahlen sein sollen und außerdem auch die Maßzahl der Höhe CD dieser Dreiecke eine natürliche Zahl sein soll.

T.

W 8 ■ 1186 Drei Ruderer fahren auf drei verschiedenen Strecken mit der gleichen konstanten Eigengeschwindigkeit von $12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ nach einem 1 km entfernten Punkt und kehren von dort ohne Aufenthalt sofort wieder zurück. Der erste rudert auf einem Fluß zunächst 1 km stromabwärts und dann wieder zurück, der zweite rudert auf diesem Fluß zunächst 1 km stromaufwärts und dann wieder zurück, und der dritte rudert in einem stehenden Gewässer.

a) Welcher der drei Ruderer kehrt zuerst zu dem Ausgangspunkt zurück und welcher zuletzt? Dabei wird vorausgesetzt, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses konstant ist und $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ beträgt.

b) Man beweise, daß man die gleiche Reihenfolge für das Eintreffen der Ruderer für jede Eigengeschwindigkeit v und jede Strömungsgeschwindigkeit des Flusses u erhält, falls $u < v$ gilt.

L.

W 9 ■ 1187 Die Gedenkmünze, die 1971 von der Staatsbank der DDR anlässlich des hundertsten Geburtstages von Karl Liebknecht und Rosa Luxemburg herausgegeben wurde, besteht aus einer Silber-Kupfer-Legierung. Sie hat eine Masse von 20,9 g und ein Volumen von 2123 mm^3 .

Aus wieviel Teilen Silber und aus wieviel Teilen Kupfer (bezogen auf eine Masse von 1000) besteht die Legierung, aus der die Gedenkmünze angefertigt worden ist?

Als bekannt wird dabei vorausgesetzt, daß die Dichte des Silbers $10,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ und die Dichte des Kupfers $8,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt.

L.

W 9 ■ 1188 Gegeben seien zwei Dreiecke, von denen die Seiten des einen 9 cm, 12 cm und 15 cm lang sind und die des anderen 7 cm, 15 cm und 20 cm. Man untersuche, ob sich diese beiden Dreiecke zu einem rechtwinkligen Dreieck zusammenlegen lassen, und führe bejahendenfalls die Konstruktion aus.

T.

W 9*1189 Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen x zu ermitteln, für die die Gleichung

$$x^{x-2} \cdot x^{x-3} + x^{x-4} = 21$$

erfüllt ist. Herwig Gratias, Sömmerda EOS „Ernst Schneller“, Kl. 12

W 9*1190 Für ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$ und den Diagonalen $\overline{AC}=e$, $\overline{BD}=f$ gelte $c+d+e=b+c+f=c+d+f$.

Es ist zu beweisen, daß dann dieses Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist. Sch.

W 10/12 ■ 1191 Es sind alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{x+y}{1-xy}=3, \quad (1) \quad \frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3} \quad (2)$$

zu ermitteln. Dipl.-Ing. Fritz Rueß, Leuna

W 10/12 ■ 1192 Zeichnen Sie ein Dreieck ABC , legen Sie auf $\overline{AC}$ einen inneren Punkt D und auf $\overline{BC}$ einen inneren Punkt E so fest, daß $\overline{DC}=\frac{1}{3} \cdot \overline{AC}$ und $\overline{EC}=\frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ gilt, und

verbinden Sie D mit E ! Weisen Sie nach, daß der Flächeninhalt des Dreiecks ABC genau sechsmal so groß ist wie der des Dreiecks DEC ! Sch.

W 10/12 ■ 1193 Man ermittle ohne Benutzung einer Logarithmentafel und ohne Kenntnis des Wertes für $\lg 2$ die Anzahl der Stellen der Zahl 2^{100} .

Dr. Gerhard Hesse, Radebeul

W 10/12 ■ 1194 Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Man beweise, daß sich dann der Bruch

$$\frac{1+n^2+n^7}{1+n+n^8}$$

stets kürzen läßt, d. h., daß der Zähler $1+n^2+n^7$ und der Nenner $1+n+n^8$ stets einen von 1 und -1 verschiedenen ganzzahligen Teiler haben.

Aus der math. Schülerzeitschrift der DRV „Mathematik und Jugend“



Das sind sie, die 12000 Lösungen des α -Wettbewerbs, die mit jedem Heft eingeht. Das ist sie, die fleißige Redaktionsassistentin (Bild links), die alle Briefe öffnet, die Lösungen sortiert und an die Korrektoren weiterleitet. Alle Wettbewerbsteilnehmer können sie bei dieser aufwendigen Arbeit unterstützen, indem sie die Wettbewerbsbedingungen gewissenhaft einhalten.

Preisträger des Physik-Wettbewerbs 1973

Im Physikwettbewerb 1973 gingen 510 Lösungen (davon 203 Mädchen) ein. Es wurden 36 Lösungen mit falsch gelöst bewertet.

P 6 ■ 1085	51	P 9 ■ 1090	61
P 6 ■ 1086	63	P 9 ■ 1091	28
P 7 ■ 1087	81	P 10/12 ■ 1092	24
P 8 ■ 1088	112	P 10/12 ■ 1093	20
P 8 ■ 1089	50		

Preisträger:

Für vorbildliche Leistungen erhielten eine Urkunde, das α -Abzeichen und eine Buchprämie:

Meinhard Mende, Lunzenau; Angelika Müller, Greifswald; Angelika Konieczny, Schulzendorf; Thomas Müller, Krems (Österreich); Eckhard Liebscher, Ilmenau; Wilfried Carl, Halle; Gudrun Billig, Coswig; Bertold Möbius, Dresden; Annette Damnik, Luckenwalde; Michael Weicker, Mügeln; Annette Blödner, Wiederitzsch; Dittmar Kurzt, Friedrichrode; Manfred Seidler, Cottbus; Irene Schwaß, Wismar; Dagmar Klatte, Görlitz; Bärbel Groß, Rodewisch.

α -Wettbewerb

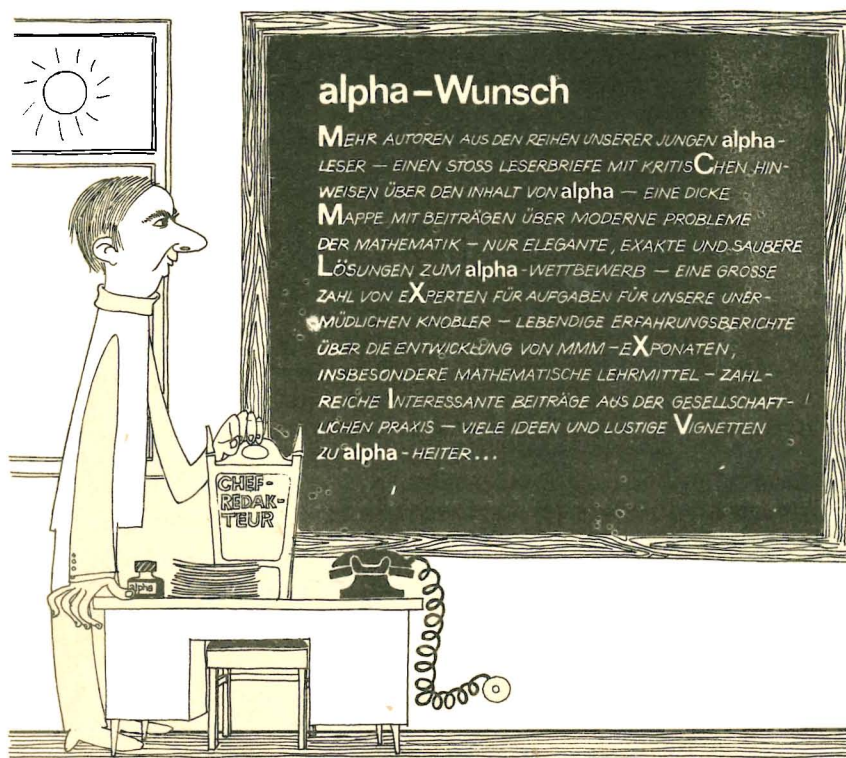
Abzeichen in Gold

Für sechsjährige Teilnahme

Kerstin Bachmann, Halle; Ralph Lehmann, Petershagen; Jörg Hutschenreiter, Dresden; Uwe Lewandowski, Leipzig; Harald Herrmann, Hammerunterwiesenthal; Christina Feige, Mühlhausen; Lutz Pfiffeld, Hennigsdorf; Angela Rohrbeck, Franzburg; Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Eckhard Schadow, Oranienburg; Karin Fischer, Dresden; Gerlinde Koch, Trusetal; Bernd Heymann, Leipzig; Ehrenfried Zschech, Bautzen; Bettina Zabel, Mühlhausen; Henrik Frank, Greifswald; Wolfgang Richter, Pirna; Peter Linhart, Waldheim; Christian Endter, Eberhard Eff, Reiner Nothnagel, Eberhard Manske, alle Steinbach-Hallenberg; Annegret Kirsten, Leuna; Ute Winkler, Teltow.

Für fünfjährige Teilnahme

Kirsten Helbig, Frankfurt; Ines und Ute Greiner, Wurzen; Astrid Rösel, Teterow; Karl-Heinz Hering, Erfurt; Andreas Schlosser, Zwickau; Detlef Poppe, Mühlhausen; Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blossfeld, Halle; Bärbel Rahnefeld, Karl-Marx-Stadt; Wolfgang Kögler, Wiesenberg; Regina Hiltenbrandt, Stützerbach; Ullrich Tetzlaff, Friesack; Sibylle Rohrbeck, Franzburg; Norbert Köppe, Glienecke; Ullrich Bittner,



Greifswald; **Lothar Jenning**, Gülzowshof; **Regina Rau**, Schneeberg; **Marina Schulz**, Görlitz; **Brigitte Hildenbrandt**, Stützerbach; **Michael Schnelle**, Calau; **Norbert Littig**, Lichtenberg; **Martin Ermrach**, Elbingerode; **Sigrid Straßburger**, Zella-Mehlis; **Rüdiger Blach**, Calau; **Reiner Lindemann**, Cottbus; **Wolfgang Herrmann**, Elterlein; **Barbara Recknagel**, Steinbach-Hallenberg; **Sabine Mamerow**, Altentreptow; **Hans-Peter Tams**, Ribnitz-Damgarten.

Für vierjährige Teilnahme

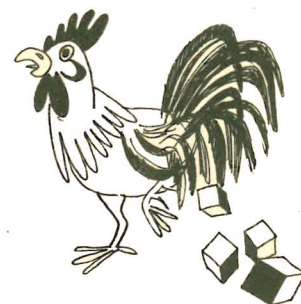
Angelika Müller, Greifswald; **Andreas Näther**, Mittweida; **Birgit Kühnstedt**, Erfurt; **Ralf Weber**, Bischofswerda; **Uwe Risch**, Burg; **Olaf Richter**, Pirna; **Hermann Tenor**, Dessau; **Dirk Sprengel**, Potsdam; **Jens-Uwe Richter**, Kemptau; **Sven-Thorsten Freitag**, Zwickau; **Rainer Gutsche**, Herzberg; **Arndt Petzold**, Karl-Marx-Stadt; **Bernd Derlich**, Teterow; **Lars Luther**, Güstrow; **Ulrike Bandemer**, Freiberg; **Birgit Krötenheerdt**, Halle; **Torsten Waldeck**, Karl-Marx-Stadt; **Ilona Drews**, Wöbbelin; **Ulli Riedel**, Flöha; **Jörg Schubert**, Pfaffroda; **Giesbert Löwe**, Schleiz; **Astrid Schulz**, Rotta; **Reinhold Albrecht**, Reuden; **Barbara Pahl**, Neuenhofe; **Manfred Zmeck**, Rüditz; **Andrea Gerlach**, Säuritz; **Marlies Dergel**, Annegret Wobst, Doris Kuban, Ulrike Gnauch, Elke Sturm, Matthias Sturm, Matthias Vincentini, Ingo Puppe, Holger Jurack, alle Burkau, Hilstrut Manske, Bettina Zimmermann, Falk Bahner, Hansjürgen Kiehm, Elke Gernoth, Sabine Kämpf, Birgit Recknagel, Gabriele Raumschüssel, Armin Endter, alle Steinbach-Hallenberg; **Heidrun Weichler**, Fambach; **Beate Esch**, Thaldorf; **Werner Weber**, Dingelstädt; **Bernd Redlich**, Wernburg; **Sabine Steinert**, Dresden; **Falk Bachmann**, Halle; **Horst Kohlschmidt**, Dresden; **Manfred Seidler**, Cottbus; **Matthias Liehm**, Ludwigsfelde; **Annelie Günther**, Bernterode; **Norman Bitterlich**, Karl-Marx-Stadt; **Hellfried Schumacher**, Ahlbeck; **Andreas Hochhaus**, Mühlhausen; **Gina Jahnke**, Dresden; **Gerd Köhler**, Hainichen; **Wilfried Carl**, Halle; **Andreas Neubert**, Schwarzenberg; **Achim Bobeth**, Dresden; **Angela Bagola**, Spremberg; **Ulf Hutschenreiter**, Dresden; **Gisela Gottlieb**, Halle; **Peter Herrlich**, Radebeul; **Udo Grunert**, Wurgwitz; **Jutta Becker**, Lübbethen; **Birgit Lorenz**, Pirna-Copitz; **Birgit Weiß**, Bernau; **Fred Rempel**, Cottbus; **Heidrun Scheinhardt**, Bad Dürrenberg; **Manfred Lehrmann**, Walbeck; **Andreas Gröschke**, Cottbus; **Wolfram Ulrici**, Leipzig; **Katrin Gote**, Berlin; **Ingrid Hauenschild**, Karl-Marx-Stadt; **Thomas Rehm**, Bernau; **Astrid Binder**, Halle-Neustadt; **Caroline Oelsnitz**, Teterow; **Pia-Gabriela Preußner**, Greifswald; **Stephan Fleischmann**, Zella-Mehlis; **Dietmar Kochrian**,

Schipkau; **Beate Brandtner**, Schildau; **Christine Frenzel**, Groitzsch; **Gerd Reif**, Silbach; **Uwe Haufe**, Oberlichtenau; **Thorsten Langrock**, Weimar; **Jens Walther**, Benndorf; **Marianne Bomberg**, Mühlhausen; **Gudrun Möller**, Dresden; **Claudia Heuer**, Magdeburg; **Michael Huhn**, Teterow; **Kerstin Müller**, Brandis; **Hans-Dirk Dunker**, Zwenkau; **Ulli Klaus**, Erfurt.

Für dreijährige Teilnahme

Thomas Maiwald, Olbersdorf; **Uwe Schäfer**, Cottbus; **Jan Müller**, Berlin; **Uwe Szgzska**, Brohm; **Dietmar Gröger**, Hecklingen; **Frank Schulze**, Himmelsberg; **Jürgen Sommerschuh**, Bischofswerda; **Rainer Seifert**, Pinnau; **Marid Helbig**, Frankfurt; **Andreas Illing**, Gersdorf; **Sabine Schröder**, Bernau; **Eva Gerstner**, Dresden; **Ingo Buttig**, Großharthau; **Manuela Lehmert**, Worbis; **Elke Seidel**, Dresden; **Thomas Kischel**, Greifswald; **Uwe Heiber**, Ilmenau; **Thies Luther**, Güstrow; **Gundula Hanke**, Frankenheim; **Meinhard Mende**, Lützenau; **Andreas Wenzel**, Dorfchemnitz; **Frank Müller**, Cottbus; **Barbara Wolf**, Köthen; **Sigrun Herbst**, Halberstadt; **Karl Krause**, Mansfeld (Rentner); **Marcus Kasner**, Tempin; **Ingo Fietze**, Cottbus; **Frank Burgkhardt**, Frankfurt; **Volker Lerche**, Schmalkalden; **Elke Witt**, Uthausen; **Lew Dimenstein**, Leningrad (UdSSR); **Lutz Thorwarth**, Schmalkalden; **Ulv Krabisch**, Leipzig; **Reiner Stein**, Roßdorf; **Michael Heymann**, Karl-Marx-Stadt; **Hanspeter Herzel**, Güstrow; **Thomas Jakob**, Gera; **Heidi Bruhn**, Warin; **Andreas Börner**, Schkortitz; **Gerd Oberwinter**, Potsdam; **Eckhard Kantz**, Greifswald; **Sabine Pohl**, Jena; **Uwe Prochnow**, Berlin; **Norbert Strecker**, Lauchhammer; **Heidrun Heller**, Schwallungen; **Rita Rempel**, Cottbus; **Wulf Henze**, Milow; **Wolfram Flämig**, Dresden; **Mathias Hofmokel**, Karl-Marx-Stadt; **Frank Schulz**, Goßwitz; **Achim Günther**, Geisa; **Steffen Würtenberger**, Karl-Marx-Stadt; **Astrid Richter**, Zerpenschleuse; **Silvia König**, Forst; **Michael Meisel**, Bad Langensalza; **Helfried Schmidt**, Dresden; **Dieter Hess**, Schwallungen; **Dagmar Müller**, Eilenburg; **Karin Landler**, Staaken; **Enzio Schnabel**, Potsdam; **Hannelore Oelschläger**, Schmalkalden; **Uwe Rauner**, Gersdorf; **Uwe Heidrich**, Olbersdorf; **Uwe Westphal**, Dresden; **Wolfgang Seeber**, Gehren; **Klaus Plotze**, Gräfendorf; **Klaus Schulze**, Brandis; **Uwe Schwennicke**, Jena; **Uwe Gruschke**, Greppin; **Marina Tischer**, Eisleben; **Carola Fechtner**, Neubrandenburg; **Angela Franke**, Karl-Marx-Stadt; **Karine Hauffe**, Goldbach; **Frank Mehner**, Döbeln; **Günter Richter**, Dingelstädt; **Kirsten Liebmann**, Karl-Marx-Stadt; **Klaus Richter**, Dingelstädt; **Thomas Kuhl**, Zepernick; **Birgit Sieger**, Eilenburg; **Klaus-Peter Erler**, Königs Wusterhausen; **Kerstin Reisner**, Cottbus; **Dieter Stühr**, Gü-

strow; **Elke Zießler**, Erfurt; **Rita Klingl**, Schleusingerneundorf; **Norbert Haak**, Torgelow; **Ulrich Pahner**, Neuburg; **Frank Mulsow**, Parchim; **Herbert Franke**, Mittweida; **Frank Höse**, Malischkendorf; **Gabriele Schröter**, Ilmenau; **Steffi Müller**, Döbeln; **Angelika Richter**, Neukirch; **Egbert Eulitzer**, Cottbus; **Peter Ölke**, Linstow; **Renate Baus**, Berlin; **Kerstin Gehrisch**, Cottbus; **Bernd Krauß**, Zella-Mehlis; **Thomas Guse**, Mühlhausen; **Andreas Weinreich**, Demmin; **Andreas Renz**, Hoyerswerda; **Uta Stopp**, Dresden; **Jens Erb**, Glauchau-Gesau; **Petra Westphal**, Berlin; **Borwin Wegener**, Berlin; **Heide-Rose Bartel**, Rostock; **Klaus Brinckmann**, Güstrow; **Heike Werner**, Waldheim; **Matthias Angrick**, Mühlhausen; **André Otto**, Berlin; **Karin Poser**, Kleinmachnow; **Klaus Conrad**, Dresden; **Ralf Kalesky**, Potsdam; **Monika Brandt**, Dessau; **Klaus-Dieter Eickhoff**, Berlin; **Wolfgang Baier**, Pfaffendorf; **Dietlinde Pargelow**, Teterow; **Wolfram Werner**, Dresden; **Cornelia Drechsler**, Karl-Marx-Stadt; **Uta Hegemann**, Greifswald; **Petra Weißbecker**, Gehren; **Hans-Günter Reglin**, Berlin; **Andreas Ohm**, Ahlbeck; **Mariana Kloper**, Borsdorf; **Bärbel Schröder**, Teterow; **Holger Vogel**, Ziegenhain; **Udo Funk**, Gnoien; **Karin Neumann**, Reichenbach; **Birgit Graizarek**, Erfurt; **Lutz Bohmhammel**, Zehdenick; **Manuela Schütte**, Böhrgen; **Jörg Hasemann**, Uebingen; **Roland Kaschner**, Lauchhammer-Mitte; **Ralf Wegel**, Dresden; **Wolfgang Peinelt**, Burgstädt; **Jürgen Kelber**, Suhl; **Silvia Glatzel**, Riesa; **Joachim Ernst**, Döbeln; **Stephan Kaiser**, Niederschmalkalden; **Andreas Bergmann**, Karl-Marx-Stadt; **Rolf Corand**, Teterow; **Anke Jahn**, Eilenburg; **Heike Kwauka**, Dresden; **Volkmar Schulz**, Greiz-Pohlitz; **Udo Töpfer**, Reuden; **Steffen Salomon**, Ringethal; **Dieter Herrmann**, Prisannewitz; **Wolfgang Henkel**, Erfurt; **Annelie Gilberg**, Teterow; **Karin Bomberg**, Mühlhausen; **Martina Kurtschick**, Kleinopitz; **Heidemarie Hendzlik**, Wilh.-Pieck-Stadt Guben; **Bettina Göbel**, Schmalkalden; **Angela Weigert**, Kirchberg; **Friedbert Röde**, Wingerode; **Ulf Meißner**, Herzberg; **Frank Engelmann**, Ellrich; **Uwe Bormann**, Magdeburg; **Jörg Bork**, Strausberg; **Bernd Wernder**, Dorfchemnitz; **Jens Burghardt**, Frankfurt; **Monika Kurch**, Cottbus; **Eberhardt Ohm**, Ahlbeck; **Gudrun Drews**, Wöbbelin; **Gesine Lamm**, Ilseburg; **Susanne Osterwald**, Halle; **Uwe Schoen**, Reichenbach; **Siegfried Weiß**, Neusalza-Spremberg; **Heidi Günther**, Sohland; **Eva-Maria Lüderitz**, Gräfendorf; **Hans-Jürgen Weißbecker**, Gehren; **Berthold Wettengel**, Oelsnitz; **Birgit Holze**, Ascherode; **Klaus Schlegel**, Dresden; **Sigrun Below**, Seelow; **Carola Zimmermann**, Döbeln; **Ingo Melzer**, Oberlungwitz; **Ulrike König**, Lübbenu; **Detlef Fuchs**, Neukloster; **Cornelia Güntzel**, Cottbus; **Gunter Klemm**, Karl-Marx-Stadt; **Peter Hahn**, Nauendorf.



Scholastizismus

„Ein Nest“, sagte die Waldohreule, die im Ruf großer Gelehrsamkeit steht, „ist ein halbkugelförmiges Gebilde, dessen Radius mit r , dessen Umfang mit $2\pi r$ und dessen Oberfläche mit $4\pi r^2 : 2$ ausgedrückt wird. Die Dimensionen sind verschieden und entsprechen den Körperformen der jeweiligen Nestbenutzer beziehungsweise deren Eiern.“

Keiner widersprach; denn es war klar ausgedrückt, mathematisch definiert und demnach unantastbar.

Aber der Webervogel kümmerte sich nicht darum. Er sammelte Grashalme, baute und flocht ein großartiges, birnenförmiges Kunstwerk mit windgeschütztem Eingang, Vorzimmer, Brutnische und Kinderzimmer.

„Mein Nest!“ sagte er dann mit berechtigtem Stolz. „Alles andere als das“, widersprach die Waldohreule und verwies auf mehrere Lehrbücher und auf die von ihr selbst aufgestellten Grundsätze des Nestbaues. Es war wirklich alles andere als ein Nest nach klassischer Definition; aber es war ungemein praktisch.

aus: Kurt Kauter „Also sprach der Marabu“, Eulenspiegelverlag

Trugschluß

Unser Leser, Stefan Böhm, Eisenach, teilte uns den folgenden Trugschluß mit, den er in einem alten Mathematik-Lehrbuch gefunden hatte. Gleichzeitig bat er uns, den Fehler in diesem Trugschluß nachzuweisen.

Jemand schließt wie folgt:

Für alle natürlichen Zahlen n gilt bekanntlich

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1. \text{ Daraus folgt} \quad (1)$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2, \quad (2)$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1), \quad (3)$$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2 = n^2 - n(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2, \quad (4)$$

$$\left[n+1 - \frac{1}{2}(2n+1) \right]^2 = \left[n - \frac{1}{2}(2n+1) \right]^2. \quad (5)$$

Aus (5) folgt weiter, wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel zieht,

$$n+1 - \frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1), \quad (6)$$

$$\text{also} \quad n+1 = n, \quad (7)$$

d. h., jede natürliche Zahl ist gleich ihrem Nachfolger. Wo steckt der Fehler?

$$1974 = M C M L X X I V$$

$$M + C = M L X + X \cdot I V$$

$$M - C M - L - X = X \cdot I V$$

$$M C - M L = X + X \cdot I V$$

Ing. H. Decker, Köln

Silbenrätsel

al - bel - bra - der - dif - e - ex - fe - fer - ge - in
ka - läu - mul - nent - ok - on - pa - pli - po - ra
renz - ta - ter - ti - ti - vall - yard.

1. Körper
 2. Teil des Rechenstabes
 3. Längeneinheit
 4. Rechenoperation
 5. Bezeichnung für den Graph einer quadratischen Funktion
 6. Bereich
 7. mathematische Disziplin
 8. Unterschied zweier Zahlen
 9. Begriff aus der Potenzrechnung
- Der erste Buchstabe eines jeden Wortes (von oben nach unten gelesen) ergibt eine Form des Wettkampfes. Diese Form hat sich auch in der Mathematik durchgesetzt.

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch Meuselwitz

Füllrätsel

In jedes der 49 Felder des nebenstehenden Schemas ist eine der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, daß in jeder Zeile siebenstellige Zahlen entstehen, die die folgenden Eigenschaften haben:

- Eine Potenz von 2, deren Quersumme gleich 26 ist.
- Eine Potenz von 9, deren Quersumme gleich 45 ist.
- Eine Potenz von 2, deren Quersumme gleich 41 ist.

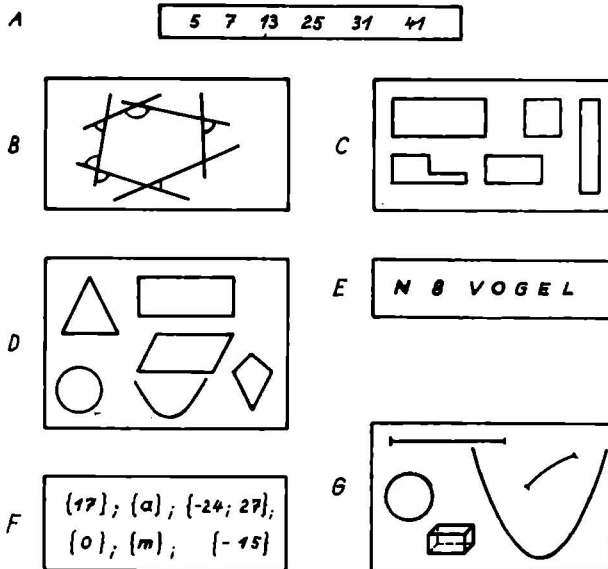
a						
b						
c						
d						
e						
f						
g						

- Eine siebenstellige Zahl, die aus lauter gleichen Grundziffern besteht.
- Ein Teiler der Zahl 3 593 970, dessen Quersumme gleich 45 ist.
- Ein Vielfaches der Zahl 893 615, dessen Quersumme gleich 27 ist.
- Eine siebenstellige Zahl, bei der jede Grundziffer um 1 größer als die folgende ist und die die Quersumme 42 hat. Ferner sollen die Summe der Zahlen der ersten Spalte, die Summe der Zahlen der letzten Spalte, die Summe der Zahlen der einen Diagonale und die Summe der Zahlen der anderen Diagonale sämtlich gleich 40 sein.

Elfriede Krawietz, EOS „Georgius Agricola“,
Glauchau, 12. Klasse

Fremdkörper

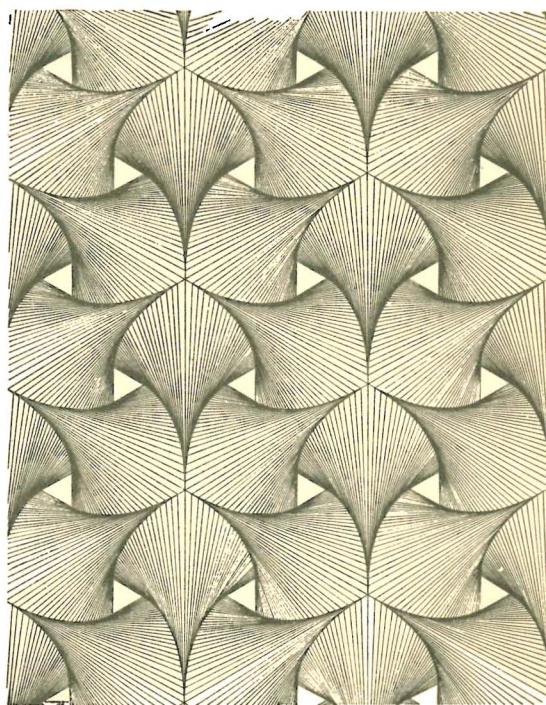
In den folgenden Bildern ist jeweils eine Menge von Objekten mit einer gemeinsamen Eigenschaft dargestellt, wobei in jede Menge ein Fremdkörper geraten ist, der eigentlich nicht dort hinein gehört. Suche diesen Fremdkörper, und streiche ihn heraus!



Bezeichne die restlichen Elemente mit einem gemeinsamen Namen! Die Anfangsbuchstaben dieser Begriffe ergeben den Namen einer bestimmten Linie!

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Vom 12er- ins 10er-System



Mathematische Themen, gezeichnet von Rutherford Boyd

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR



Aufgaben der Kreisolympiade

(21. 11. 1973)

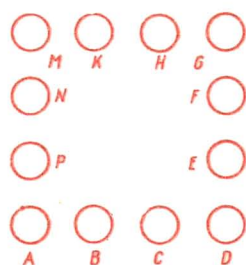
Olympiadeklasse 5

1. Eine Fischereigenossenschaft hatte an einem Tage nur Hechte, Barsche und Plötzen gefangen. Davon waren insgesamt 125 Plötzen. Ferner waren es doppelt soviel Barsche wie Hechte; die Anzahl der Hechte betrug ein Fünftel der Anzahl der Plötzen.

Stelle fest, wieviel Fische die Fischereigenossenschaft an diesem Tage insgesamt gefangen hatte!

2. Zeichne zwei Geraden g_1 und g_2 , die einander in einem Punkte S schneiden! Wähle einen Punkt T , der auf keiner der beiden Geraden liegt! Konstruiere die bei der Verschiebung ST entstehenden Bilder g'_1 und g'_2 der beiden Geraden!

3. In die 12 Felder $A, B, C, D, E, F, G, H, K, M, N, P$ der nebenstehenden Figur sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 12, jede genau in eines der Felder, so eingetragen werden, daß die Summe der in den Feldern A, B, C, D stehenden Zahlen 22 beträgt, ebenso die Summe der in den Feldern D, E, F, G stehenden Zahlen, gleichfalls die Summe der in den Feldern G, H, K, M stehenden Zahlen und auch die Summe der in den Feldern M, N, P, A stehenden Zahlen.

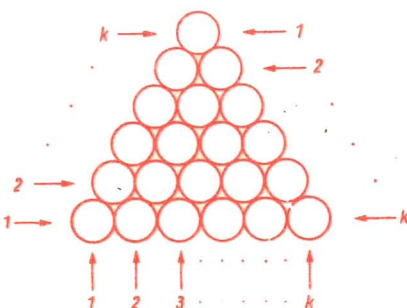


a) Gib eine derartige Eintragung von Zahlen an!

b) Untersuche, welche Zahlen bei jeder derartigen Eintragung in den Feldern A, D, G und M stehen!

4. Im Centrum-Warenhaus sind zu Dekorationszwecken gleichgroße Konservenbüchsen zu einer „Pyramide“ aufgeschichtet worden. In jeder Schicht sind die Büchsen so „im Dreieck“ angeordnet, wie die Abb. zeigt. Die dort mit k bezeichnete Anzahl der Büchsen längs einer jeden „Seitenkante des Drei-

ecks“ beträgt für die unterste Schicht 9. In jeder weiteren Schicht ist die entsprechende Anzahl k um 1 kleiner als in der unmittelbar darunterliegenden Schicht. Die oberste Schicht besteht aus einer Büchse.



Ermittle die Anzahl aller in der „Pyramide“ enthaltenen Büchsen!

Olympiadeklasse 6

1. Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.

Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann? Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1:2 dar!

2. Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, daß der größte zuunterst, darauf der nächstgrößere usw., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d. h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).

Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d. h. nicht verdeckt) sind!

3. Klaus hat gehört, daß in einer 6. Klasse von allen Schülern eine Mathematik-Klassenarbeit geschrieben wurde, bei der kein Schüler die Note „5“ bekam. Ein Sechstel der Klasse schrieb eine „1“, ein Drittel eine „2“ und nur ein Neuntel eine „4“. Über die Anzahl der Schüler dieser Klasse wußte Klaus

nur, daß sie größer als 10, aber kleiner als 40 war. Er fragt sich, wieviel Schüler insgesamt bei der erwähnten Klassenarbeit eine „3“ geschrieben hatten.

Stelle fest, ob diese Anzahl mit den in der Aufgabe enthaltenen Angaben eindeutig zu ermitteln ist!

Wenn das nicht der Fall ist, dann ermittle alle mit den Angaben vereinbaren Antworten auf Klaus' Frage!

4. Werner schreibt $50 \cdot 0 \cdot 05$ an die Tafel und will danach für jedes der Zeichen $\cdot$ eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so eintragen, daß eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.

Gib sämtliche Möglichkeiten einer derartigen Eintragung (also alle so erhältlichen durch 9 teilbaren Zahlen) an!

Olympiadeklasse 7

1. Die 36 Schüler einer 7. Klasse nehmen am außerunterrichtlichen Sport teil, und zwar jeder in genau einer der Sektionen Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Judo und Schach. Über die Teilnahme der Schüler dieser Klasse an diesen Sektionen ist weiter bekannt:

- (1) Mehr als die Hälfte betreibt Leichtathletik.
- (2) Es gehören mehr der Sektion Schwimmen als der Sektion Tischtennis an.
- (3) Die Summe aus der Anzahl der Mitglieder der Sektion Schach und der Sektion Judo beträgt genau ein Neuntel aller Schüler.
- (4) In der Sektion Tischtennis befinden sich doppelt so viele Schüler wie in der Sektion Schach.
- (5) Die Anzahl der Sektionsmitglieder Schach ist größer als das Doppelte, jedoch kleiner als das Vierfache der Anzahl der Sektionsmitglieder Judo.

Ermittle für jede der genannten Sektionen die Anzahl der Schüler der erwähnten Klasse, die Mitglieder dieser Sektion sind!

2. Karl sucht drei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c für die folgendes gilt: $(a, b) = 4$ (lies: Der ggT der Zahlen a und b ist 4), $(a, c) = 6$, $(b, c) = 14$.

Er behauptet nach einigem Probieren, daß es sogar mehr als eine Möglichkeit gibt, drei solche Zahlen anzugeben.

Ist diese Behauptung richtig?

Gibt es eine Möglichkeit der Wahl dreier solcher Zahlen a, b, c , bei der, verglichen mit allen übrigen Möglichkeiten, a am kleinsten und zugleich b am kleinsten und zugleich c am kleinsten ist? Wenn ja, dann gib für diesen Fall die Zahlen a, b, c an!

3. Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Beweise folgenden Satz:

Schneidet eine Gerade g den einen und eine andere Gerade h den anderen Schenkel des

gegebenen Winkels jeweils unter einem Winkel von 90° , jedoch nicht in S , so hat einer der von g und h gebildeten Schnittwinkel die Größe α . (Fallunterscheidung)

4. Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, in dem die Größe β des Innenwinkels BCA kleiner ist als jede der Größen der beiden anderen Innenwinkel.

Konstruiere alle Punkte P auf den Seiten AC und BC , so daß $\angle BPA = 2\gamma$ gilt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion; ermittle die Anzahl der Punkte P mit der verlangten Eigenschaft!

Olympiadeklasse 8

1. In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben a, b, c und das Zeichen $*$ durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste und in üblicher Weise geschriebene Multiplikationsaufgabe entsteht.

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \cdot b \ a \ c \\ * * * b \\ * * a \\ * * * * \\ * * * * * \end{array}$$

Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. An die Ziffern, die für die Zeichen $*$ zu setzen sind, werden keine Gleichheits- oder Verschiedenheitsforderungen gestellt.

2. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $a = 2,5$ cm und $\alpha = 50^\circ$. Dabei sei ρ der Inkreisradius und α die Größe des Winkels BAC .

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

3. Man ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft:

Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, so erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

4. Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden. Zwei voneinander verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 durch A bzw. B seien so gelegen, daß g_1 den Kreis k_1 in einem von A verschiedenen Punkte C und den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkte D schneidet, daß ferner g_2 den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkte E und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkte F schneidet und daß dabei A zwischen C und D sowie B zwischen E und F liegt.

Beweise, daß dann $\overline{CD} = \overline{EF}$ gilt!

Olympiadeklasse 9

1. Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minuten- und der Stundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

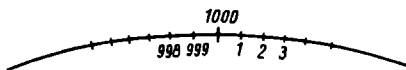
2. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC , in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkte D .

Beweisen Sie, daß D die Seite BC im Verhältnis 1:2 teilt!

3. Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $\overline{AD} = \overline{BC}$; $\overline{AB} > \overline{CD}$) soll folgende Eigenschaften haben:

Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen. Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt, und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

4. Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleichlange Teilbögen zerlegt und jeden der Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchstrichen werden. Dabei sind bei wiederholten „Umläufen“ auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist solange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchstrichen werden müßten, die bereits gestrichen sind.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle (im dekadischen Zahlensystem) dreistelligen Primzahlen mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Schreibt man jede Ziffer der dreistelligen Primzahl einzeln, so bezeichnet jede eine Primzahl.
- (2) Die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern der dreistelligen Primzahl bezeichnen (in dieser Reihenfolge) je eine zweistellige Primzahl.

2. Bei den XX. Olympischen Sommerspielen schnitten die Sportler unserer Republik hervorragend ab. In der inoffiziellen Länderwertung, bei der für den 1. bis 6. Platz 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben wurden, belegten sie 480 Punkten hinter der UdSSR und den USA den dritten Platz. Dabei errangen sie 22 vierte, 22 fünfte und 23 sechste Plätze. Für den 1., den 2. und den 3. Platz

wurden wie üblich Gold-, Silber- bzw. Bronzemedallien vergeben. Die größte Differenz der Anzahlen der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- bzw. Bronzemedallien betrug dabei 3.

Zeigen Sie, daß diese Angaben hinreichend sind, die genaue Anzahl der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- und Bronzemedallien zu ermitteln!

3. Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm habe einen Inkreis mit dem Radius ρ .

Man berechne diesen Inkreisradius ρ .

4. Konstruieren Sie ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ aus $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm und $\alpha = 70^\circ$!

Dabei seien a die Länge der Seite AB , b die der Seite BC , c die der Seite CD und α die Größe des Winkels $\angle BAD$.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es seien a_0 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0$; $q \neq 0$; $q \neq 1$. Ferner sei $\{a_i\}$ eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 \cdot q^i$ ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) gilt.

a) Man beweise, daß die Folgen

$$\{b_i\} \text{ mit } b_i = a_{i+1} - a_i \text{ und} \\ \{c_i\} \text{ mit } c_i = b_{i+1} - b_i$$

ebenfalls geometrische Folgen sind.

b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0$; $q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen $\{a_i\}$ und $\{c_i\}$ die Eigenschaft haben, daß $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt.

2. Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen. Dabei mußte jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten. Schüler A meint, daß es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmt. Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, daß es sogar acht solcher Schüler geben müsse.

Man überprüfe für jede dieser Meinungen, ob sie richtig ist.

3. In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD . Der Schnittpunkt von AF mit DE sei G , der von BF mit CE sei H genannt.

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Vierecks $EHFG$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist.

4. Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$y^3 + x^2 + y + 1 = 0 \quad (2)$$

Lösungen



Hinweis für unsere Leser

Ab Heft 1/74 veröffentlichen wir vorrangig die Lösungen des *alpha*-Wettbewerbs (jeweils im übernächsten Heft nach Erscheinen der Aufgaben). Soweit dann noch Platz ist, bauen wir in die fünf Seiten noch weitere Lösungen zu gegebenen Aufgaben, gestellt außerhalb des Wettbewerbs, ein. Die Lösungen zu *alpha*-Heiter werden (wie bisher) am Ende des jeweiligen Heftes veröffentlicht.

Red. *alpha*

▲ 5▲1095 Teller A enthalte 22, Teller B 14 und Teller C 12 Nüsse. Die folgende Tabelle veranschaulicht dann die einzelnen Schritte zur Umverteilung der Nüsse:

A	B	C
22	14	12
22 - 14 = 8	14 + 14 = 28	12
8	28 - 12 = 16	12 + 12 = 24
8 + 8 = 16	16	24 - 8 = 16

▲ 5▲1096 Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist und die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt Primzahl.

Unter vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen befinden sich genau zwei gerade und genau zwei ungerade Zahlen. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets gerade. Die Summe zweier gerader Zahlen ist ebenfalls stets gerade. Die kleinstmögliche Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lautet $0 + 1 + 2 + 3 = 6$, das heißt, sie ist größer als die kleinste Primzahl 2.

W 5▲1097 $1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ dm}^2$; da das Becken $1000\,000 \text{ l} = 1\,000\,000 \text{ dm}^3$ Wasser enthält, beträgt die Wasserhöhe im Becken genau $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$. Denn $1\,000\,000 \text{ dm}^2 \cdot 1 \text{ dm} = 1\,000\,000 \text{ dm}^3$. Bei einer Wasserhöhe von 10 cm kann kein Schwimmwettkampf ausgetragen werden.

W 5▲1098 Die nachfolgende Tabelle gibt Auskunft darüber, wie das Getränk mit Hilfe der beiden Eimer umzufüllen ist:

Faß	Eimer	Eimer
16 l	11 l	6 l
16	0	0
10	0	6
10	6	0

4	6	6
4	11	1
15	0	1
15	1	0
9	1	6
9	7	0
3	7	6
3	11	2
14	0	2
14	2	0
8	2	6

W 5▲1099 Die Großmutter habe n Enkel; der Vorrat beträgt dann entweder $(2 \cdot n + 4)$ Würstchen oder $(3 \cdot n - 1)$ Würstchen. Die Gleichung $2 \cdot n + 4 = 3 \cdot n - 1$ wird nur für $n = 5$ erfüllt. Die Großmutter hat somit 5 Enkel, und es sind $2 \cdot 5 + 4 = 14$ Würstchen vorrätig.

W 5▲1100 Der Arbeitsgemeinschaft gehören m Mädchen, also $3 \cdot m$ Jungen an. An dem Tag, als Ursula fehlte, waren $(3 \cdot m + 1)$ Jungen und $(m - 1)$ Mädchen anwesend, und es gilt $4 \cdot (m - 1) = 3 \cdot m + 1$. Nur für $m = 5$ wird diese Gleichung erfüllt.

An der Arbeitsgemeinschaft nehmen somit regelmäßig 5 Mädchen und 15 Jungen teil.

▲ 6▲1101 Die zu ermittelnde Zahl lautet $z = 4 \cdot 17 \cdot 29 + 1 = 1973$.

▲ 6▲1102 Es seien a und b die Seitenlängen eines Rechtecks (gemessen in cm); entsprechend den gestellten Bedingungen gilt dann

$$\begin{aligned} 2(a+b) &= ab, \\ 2a+2b &= ab, \\ 2a &= ab-2b, \\ 2a &= b(a-2), \quad b = \frac{2a}{a-2} = 2 + \frac{4}{a-2}. \end{aligned}$$

b ist nur dann ganzzahlig, wenn 4 ein Vielfaches von $a-2$ ist. Das trifft zu für $a_1 = 3$ oder $a_2 = 4$ oder $a_3 = 6$. Die Aufgabe besitzt genau drei Lösungen, nämlich

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \text{ cm}, \quad b_1 = 6 \text{ cm}; \\ a_2 &= 4 \text{ cm}, \quad b_2 = 4 \text{ cm}; \\ a_3 &= 6 \text{ cm}, \quad b_3 = 3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

W 6▲1103 Das Pferd möge x Säcke tragen. Dann trägt das Maultier $(x+2)$ Säcke. Denn würde es einen Sack abgeben, so hätte es noch $(x+1)$ Säcke und das Pferd auch $(x+1)$ Säcke zu tragen. Nimmt aber das Maultier dem Pferd einen Sack ab, so hat das Maultier $(x+3)$ Säcke, das Pferd $(x-1)$ Säcke zu tragen. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} x+3 &= 2 \cdot (x-1), \\ x+3 &= 2x-2, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Das Pferd trug 5 Säcke, das Maultier 7 Säcke.

W 6▲1104 Es seien $a = 5 \text{ cm}$ und $b = 2 \text{ cm}$ und c die Längen der Seiten eines Dreiecks; dann gilt

$$a+b > c \text{ und } b+c > a.$$

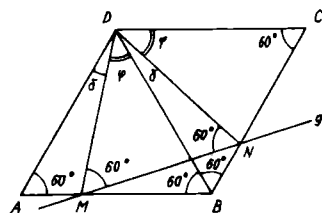
Aus $5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 7 \text{ cm} > c$ und $2 \text{ cm} + c > 5 \text{ cm}$, also $c > 3 \text{ cm}$, folgt $c = 4 \text{ cm}$ oder $c = 5 \text{ cm}$ oder $c = 6 \text{ cm}$.

W 6▲1105 Die Zahl 10^{1973} ist eine natürliche Zahl mit 1974 Grundziffern, deren erste Grundziffer von links gerechnet 1 ist und deren übrige Grundziffern sämtlich 0 sind.

Die Zahl $10^{1973} + 2$ läßt sich demnach wie folgt schreiben: 1000...0002, wobei die Grundziffer 0 genau 1972 mal vorkommt. Die Quersumme dieser Zahl beträgt 3, d. h. sie ist durch 3 teilbar.

W 6▲1106 Aus der Abbildung wird folgendes ersichtlich:

$\triangle AMD \cong \triangle BND$ ($\overline{AD} = \overline{BD}$, $\overline{AM} = \overline{BN}$, $\sphericalangle DAM = \sphericalangle DBN = 60^\circ$), also $\overline{MD} = \overline{ND}$, $\sphericalangle ADM = \sphericalangle BDN = \delta$.
 $\triangle MBD \cong \triangle NCD$ ($\overline{MB} = \overline{NC}$, $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\sphericalangle MBD = \sphericalangle NCD = 60^\circ$), also $\sphericalangle BDM = \sphericalangle CDN = \varphi$.



Nun gilt aber $\sphericalangle ADC = 2 \cdot \delta + 2 \cdot \varphi = 120^\circ$, also $\delta + \varphi = 60^\circ$, d. h. $\sphericalangle MDN = 60^\circ$.

Wegen $\overline{MD} = \overline{ND}$ gilt $\sphericalangle DMN = \sphericalangle DNM = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$. Dreieck MND ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig, und es gilt $\overline{MN} = \overline{MD} = \overline{ND}$.

▲ 7▲1107 Es seien $x \text{ kg}$ Süßwasser mit $80 \text{ kg } 5\%$ igem Meerwasser zu mischen, dann gilt

$$\begin{aligned} (x+80) \cdot \frac{2}{100} &= 80 \cdot \frac{5}{100} \\ (x+80) \cdot 2 &= 80 \cdot 5, \\ 2x+160 &= 400, \\ 2x &= 240, \\ x &= 120. \end{aligned}$$

Es sind 120 kg Süßwasser dem Meerwasser hinzuzufügen, um eine Mischung mit einem Salzgehalt von 2% zu erhalten.

▲ 7▲1108 Es sei x die Eigengeschwindigkeit des Schiffes (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) und y die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$). Fährt das Schiff flussabwärts, so addieren sich die Geschwindigkeiten; im anderen Falle ist die tatsächliche Geschwindigkeit gleich der Differenz aus x und y .

Deshalb gilt wegen $v = \frac{s}{t}$

$$x+y = \frac{s}{48} \text{ und } x-y = \frac{s}{72}.$$

Subtrahieren wir die zweite von der ersten

$$\text{Gleichung, so erhalten wir } 2y = \frac{s}{48} - \frac{s}{72} \\ = \frac{3s - 2s}{144} = \frac{s}{144}, \text{ also } y = \frac{s}{288}.$$

Ein Floß würde also in 288 Stunden von Kiew nach Dnepropetrowsk treiben, d. h. es benötigt sechsmal soviel Zeit wie das Schiff.

W 7 ■ 1109 Es seien x Münzen zu 3 Kopeken; dann sind es $(20 - x)$ Münzen zu 1 Kopeke, und es gilt

$$\begin{aligned} 3x + (20 - x) \cdot 1 &= 47, \\ 3x + 20 - x &= 47, \\ 2x + 20 &= 47, \\ 2x &= 27 \\ x &= \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Im Bereich der natürlichen Zahlen ist die Division $27:2$ nicht ausführbar; der Schüler hat sich verzählt.

Diese Feststellung trifft auch für den Betrag von 49 Kopeken ($29:2$), nicht aber für den Betrag von 48 Kopeken ($28:2=14$) zu. Im letzten Falle besitzt der Schüler 14 Münzen zu 3 Kopeken und 6 Münzen zu 1 Kopeke. Der Gesamtbetrag sei gleich $2n$ Kopeken, wobei n eine natürliche Zahl ist; dann gilt

$$\begin{aligned} 3x + (20 - x) \cdot 1 &= 2n, \\ 2x &= 2n - 20, \\ x &= n - 10. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist lösbar für alle $n \geq 10$, also $2n \geq 20$. Aus $20 \cdot 3$ Kopeken = 60 Kopeken folgt weiter $2n \leq 60$.

Es lassen sich nur Geldbeträge bilden, die geradzahlig sind und gleich oder größer als 20 Kopeken, aber gleich oder kleiner als 60 Kopeken sind.

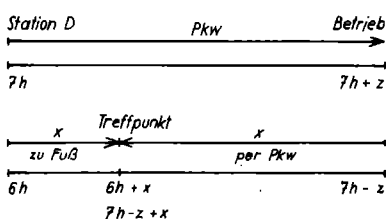
W 7 ■ 1110 Der Preis für 1 kg Äpfel möge im Juli x Mark betragen; dann beträgt er im September $\left(x - \frac{1}{5}x\right) = \frac{4}{5}x$ Mark. Im November beträgt der Preis $\frac{4}{5}x + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{24}{25}x$ Mark.

Da $\frac{24}{25}x < x$, sind die Äpfel im November billiger als im Juli.

Aus $x - \frac{24}{25}x = \frac{1}{25}x = \frac{4}{100}x$ folgt, daß der Preis für die Äpfel im November um 4% niedriger ist als im Juli.

W 7*1111 Angenommen, der Kraftwagen benötige z Stunden für die Fahrt von D bis in den Betrieb und der Direktor sei von D aus x Stunden zu Fuß gegangen, bis er auf den ihm entgegenkommenden Kraftwagen traf, dann gilt, wie aus der Skizze hervorgeht, folgendes:

$$6h + x = 7h - z + x, \text{ also } z = 1h.$$



Andererseits gilt aber auch

$$6h + x + x = 7h + z - \frac{12}{60}h.$$

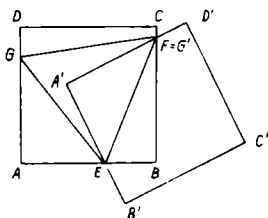
Für $z = 1h$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} 6h + 2x &= 8h - \frac{12}{60}h, \\ 2x &= 2h - \frac{12}{60}h, \\ x &= \frac{54}{60}h. \end{aligned}$$

Der Direktor begegnete dem Kraftwagen um 6.54 Uhr.

Probe: Von 7.00 Uhr bis 8.00 Uhr sind 60 Minuten vergangen. Von 6.00 Uhr bis 7.48 Uhr (12 Minuten vor 8.00 Uhr) sind 108 Minuten, also $2 \cdot 54$ Minuten vergangen.

W 7*1112 Angenommen der innere Punkt G von $\overline{AD}$ sei ein weiterer Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks EFG . Drehen wir $\overline{EG}$ um E als Drehzentrum im mathematisch negativen Sinn um 60° , so fällt der Bildpunkt G' von G mit dem Eckpunkt F des Dreiecks zusammen. Der Punkt F liegt nun aber entweder auf $\overline{BC}$ oder auf $\overline{CD}$.



Wir drehen deshalb das Quadrat $ABCD$ um E als Drehpunkt im mathematisch negativen Sinn um 60° . Da G' auf dem Bild $A'D'$ von $\overline{AD}$ liegt, ist der Schnittpunkt von $A'D'$ mit $\overline{BC}$ oder mit $\overline{CD}$ der gesuchte Eckpunkt F des zu konstruierenden gleichseitigen Dreiecks EFG . Aus der Seite $\overline{EF}$ ist die Konstruktion nun möglich.

▲ 8 ▲ 1113 Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, und es sei n die Anzahl der Elemente von M . Da die Zahl 0 durch 7 (und auch durch 11) teilbar ist, gehört sie nicht der Menge M an.

Ferner sei M_5 die Menge aller natürlichen Zahlen a mit $0 < a \leq 1973$, die durch 5 teilbar sind. Wegen $\frac{1973}{5} = 394\frac{3}{5}$ enthält die

Menge M_5 genau 394 Elemente:

$$M_5 = \{1 \cdot 5, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, \dots, 394 \cdot 5\}.$$

Von den Zahlen der Menge M_5 sind

$$\text{wegen } \frac{394}{7} = 56\frac{2}{7} \text{ genau 56 Zahlen durch}$$

$$7 \text{ teilbar, wegen } \frac{394}{11} = 35\frac{9}{11} \text{ genau 35 Zahlen}$$

$$\text{durch 11 teilbar, wegen } \frac{394}{77} = 5\frac{9}{77} \text{ genau}$$

5 Zahlen durch 7 und 11 teilbar. Also sind von den Zahlen der Menge M_5 genau $56 + 35 - 5 = 86$ Zahlen durch 7 oder durch 11 teilbar.

Nun besteht die Menge M , deren Anzahl der

Elemente wir ermitteln wollen, aus allen Zahlen von M_5 , die nicht durch 7 oder 11 teilbar sind. Die gesuchte Anzahl der Elemente von M ist daher gleich $n = 394 - 86 = 308$.

▲ 8 ▲ 1114 Es sei x eine dreistellige Zahl, die die geforderten Eigenschaften hat. Dann gilt

$$x^2 = 1000a + x,$$

wobei a eine dreistellige natürliche Zahl ist.

Daraus folgt

$$x^2 - x = 1000a,$$

$$x(x - 1) = 8 \cdot 125 \cdot a.$$

Daher ist entweder x oder $x - 1$ ein Vielfaches von 125; denn wenn x durch 5 teilbar ist, kann nicht $x - 1$ durch 5 teilbar sein, daher ist x durch 125 teilbar. Entsprechendes gilt, wenn $x - 1$ durch 5 teilbar ist.

Nun sei x ein Vielfaches von 125. Dann ist wegen $x < 8 \cdot 125 = 1000$ $x - 1$ gerade, also x ungerade. Da x eine dreistellige Zahl ist, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

$$x = 125, 375, 625, 875; \text{ also}$$

$$x - 1 = 124, 374, 624, 874.$$

Von den Zahlen der zweiten Zeile ist aber nur 624 durch 8 teilbar; wir erhalten daher die erste Lösung: $x = 625$.

Diese Zahl hat die geforderten Eigenschaften; denn es gilt

$$x^2 = 625^2 = 390625.$$

Es sei $x - 1$ ein Vielfaches von 125. Dann ist x ein Vielfaches von 8, und wir erhalten die Möglichkeiten:

$$x - 1 = 125, 375, 625, 875; \text{ also}$$

$$x = 126, 376, 626, 876.$$

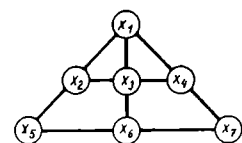
Von diesen Zahlen ist aber nur 376 durch 8 teilbar; wir erhalten die zweite Lösung: $x = 376$.

Diese Zahl hat die geforderten Eigenschaften; denn es gilt

$$x^2 = 376^2 = 141376.$$

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft; es gibt also nur zwei Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, nämlich $x = 625$ und $x = 376$.

W 8 ■ 1115 Wir bezeichnen die einzutragenden Zahlen wie in der Abbildung 1 mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. Dann gilt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$.



Ferner gilt

$$x_1 + x_2 + x_5 = x_1 + x_3 + x_6 = x_1 + x_4 + x_7$$

$$= x_2 + x_3 + x_4 = x_5 + x_6 + x_7 = s, \quad (2)$$

da nach Voraussetzung alle diese Summen gleich sind.

Aus (1) und (2) folgt

$$x_1 + (x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7) = 28,$$

$$x_1 + 2s = 28; \quad (3)$$

$$3s = (x_1 + x_2 + x_5) + (x_1 + x_3 + x_6)$$

$$+ (x_1 + x_4 + x_7), \quad (4)$$

$$3s = 28 + 2x_1.$$

Aus (3) folgt

$$4s = 56 - 2x_1.$$

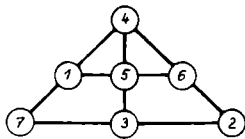
Aus (4) und (5) folgt durch Addition

$$7s = 84, \text{ also } s = 12.$$

Ferner folgt aus (3)

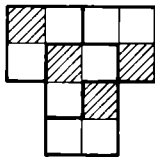
$$x_1 = 28 - 2s = 28 - 24 = 4.$$

Nun können wir für x_2 eine der Zahlen 1, 2, 3, 5, 6, 7 wählen, z. B. $x_2 = 1$. Dann wird $x_5 = 7$. Ferner können wir x_3 so wählen, daß $x_3 + x_4 = 11$ ist, z. B. $x_3 = 5, x_4 = 6$. Dann wird $x_6 = 3, x_7 = 2$, und es sind alle Gleichungen (2) erfüllt. Damit haben wir eine Lösung gefunden (siehe Abb. 2).



Weitere Lösungen erhalten wir, indem wir für x_2 eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 7 wählen und dann x_3 und x_4 so bestimmen, daß die Gleichung $x_2 + x_3 + x_4 = 12$ erfüllt ist.

W 8 ■ 1116 Die Abbildung zeigt die Lösung. Jede der kongruenten Teilfiguren besteht aus drei Quadraten, von denen genau ein Quadrat schraffiert ist.



Wir erhalten diese Lösung leicht durch die folgende Überlegung. Da die Figur 12 Quadrate enthält, enthält jede der vier kongruenten Teilfiguren genau drei Quadrate, von denen genau ein Quadrat schraffiert ist.

Man erhält daher zunächst die Teilfigur oben links, dann die Teilfigur oben rechts, dann die untere Teilfigur und schließlich die zwischen diesen drei Teilfiguren liegende mittlere Teilfigur.

W 8*1117 Wenn mit jedem Lastkraftwagen nicht mehr als 7 Steine befördert würden, so könnten insgesamt höchstens $7 \cdot 7 = 49$ Steine befördert werden. Da aber 50 Steine zu transportieren sind, müssen mit einem der Lastkraftwagen mindestens 8 Steine befördert werden.

Nun haben aber die 8 leichtesten Steine die Massen 370 kg, 372 kg, 374 kg, 376 kg, 378 kg, 380 kg, 382 kg, 384 kg, insgesamt also die Masse 3016 kg, das sind aber mehr als 3000 kg, also mehr als 3 t. Daher kann keiner der Lastkraftwagen mit mehr als 7 Steinen beladen werden.

Aus diesem Grunde ist es nicht möglich, die 50 Steine mit sieben Dreitonnern zu befördern.

W 8*1118 Zunächst erhält jeder der Seeräuber 3 Piaster und 3 Dublonen. Dann hat jeder Seeräuber zu erklären, dem wievielen Teil des Fasses Wein nach seiner Ansicht

1 Piaster entspricht. Derjenige, der den größten Teil nennt (es sei der Anteil a), erhält den letzten Piaster, während jeder der beiden anderen den Anteil a an Wein erhält. Dabei gilt nach Voraussetzung $a < \frac{1}{4}$,

$$\text{also } 2a < \frac{1}{2}.$$

Nun erklärt jeder Seeräuber, dem wievielen Teil des Fasses Wein nach seiner Ansicht 1 Dublone entspricht. Derjenige, der den größten Teil nennt (es sei der Anteil b), erhält die letzte Dublone, während jeder der beiden anderen den Anteil b an Wein erhält. Dabei gilt wieder $b < \frac{1}{4}$, also $2b < \frac{1}{2}$.

Wegen $2a + 2b < 1$ bleibt noch ein Rest an Wein übrig, der zu gleichen Teilen an die drei Seeräuber verteilt wird.

Damit wurde die Beute so geteilt, daß jeder einen Anteil erhält, der nach seiner Ansicht keinen geringeren Wert hat als der Anteil der beiden anderen. Denn jeder erhält 3 Piaster, 3 Dublonen und den gleichen Anteil an dem restlichen Wein. Ferner erhält einer der Seeräuber 1 Piaster und jeder der beiden anderen den Anteil a an Wein. Nach Ansicht des ersten hat 1 Piaster denselben Wert wie der Anteil a an Wein, und nach Ansicht der beiden anderen hat der Anteil a an Wein keinen geringeren Wert als 1 Piaster. Entsprechendes gilt für den Wert von 1 Dublone und von dem Anteil b an Wein.

▲ 9 ■ 1119 Um den Term

$$t = (a^2 + b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 - (b^2 + c^2)^3$$

in Faktoren zu zerlegen, setzen wir $a^2 + b^2 = x$ und $c^2 - a^2 = y$. Dann gilt

$$b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 - a^2) = x + y, \text{ also } t = x^3 + y^3 - (x + y)^3.$$

$$\text{Wegen } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{und } (x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$$

$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$\text{folgt } t = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$- (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2)$$

$$= (x + y)3xy.$$

Durch Einsetzen der Terme für $x, y, x + y$ erhalten wir

$$t = -3(a^2 + b^2)(c^2 - a^2)(b^2 + c^2), \text{ womit die Faktorenerlegung durchgeführt wurde.}$$

▲ 9 ■ 1120 Es sei $z = 10a + b$ eine zweistellige natürliche Zahl, wobei a und b natürliche Zahlen mit $1 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ sind. Dann gilt

$$z^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 20a(5a + b) + b^2.$$

Nach Voraussetzung soll z^2 eine ungerade Anzahl von Zehnern enthalten. Da aber die Zahl $20a(5a + b)$ durch 20 teilbar ist, also eine gerade Anzahl von Zehnern enthält, muß b^2 eine ungerade Anzahl von Zehnern enthalten.

Nun kann aber wegen $0 \leq b \leq 9$ die Zahl b^2 nur gleich

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 \text{ oder } 81 \text{ sein.}$$

Von diesen Zahlen haben nur die Zahlen 16 und 36 eine ungerade Anzahl von Zehnern, und beide Zahlen enden auf 6. Daher endet auch die Zahl z^2 in jedem Falle auf die Ziffer 6.

W 9 ■ 1121 Da die Brigaden von Wolodja und Wasja nur 2 m bzw. 1 m lange Holzstämmen in $\frac{1}{2}$ m lange Stämme zu zersägen

hatten, können sie nur eine gerade Anzahl von Stämmen fertiggestellt haben. Also kann nur die Brigade von Petja (mit Kostja) eine ungerade Anzahl von Stämmen fertiggestellt haben. Da aber nur der Brigadier Galkin mit Komkow eine ungerade Anzahl von $\frac{1}{2}$ -m-Stämmen fertiggestellt hat (nämlich 27), lautet der Vorname von Galkin Petja. Daher lautet der Vorname von Komkow Kostja.

W 9 ■ 1122 Es seien a und b mit $a > b$ die Längen zweier anliegender Seiten des Rechtecks und damit auch die Längen der Seiten der beiden gleichseitigen Dreiecke. Da der Flächeninhalt des Rechtecks gleich ab ist und der Flächeninhalt der beiden Dreiecke gleich $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ bzw. $\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$, folgt

$$ab = 2\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3} - \frac{b^2}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}(a^2 - b^2). \quad (1)$$

Da der Umfang des Rechtecks gleich $2(a + b)$ und der Umfang des größeren gleichseitigen Dreiecks gleich $3a$ ist, erhalten wir das gesuchte Verhältnis.

$$q = \frac{2(a + b)}{3a} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{b}{a}\right). \quad (2)$$

Um q zu ermitteln, müssen wir also zunächst $x = \frac{b}{a}$ bestimmen.

Nun folgt aus (1)

$$\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ also } \frac{a - b}{b} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Wegen $x = \frac{b}{a} \neq 0$ erhalten wir daher

$$\frac{1}{x} - x = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \\ x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot x - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung, nämlich

$$x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Wegen (2) folgt daher

$$q = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{2}{9}(3 + \sqrt{3}).$$

Das gesuchte Verhältnis der Umfänge beträgt daher

$$q = \frac{2}{9}(3 + \sqrt{3}) \approx 1,052,$$

d. h., der Umfang des Rechtecks ist nur wenig größer als der Umfang des größeren der beiden gleichseitigen Dreiecke.

W 9*1123 Es sei p eine Primzahl, die größer als 3 ist. Dann läßt sich p stets in der Form

$6m+1$ oder $6m-1$ darstellen, wobei m eine natürliche Zahl ist. Wäre nämlich p gleich $6m$, $6m+2$, $6m+3$ oder $6m+4$, so wäre p wegen $p>3$ nicht Primzahl, da alle diese Zahlen durch 2 oder durch 3 teilbar sind. Es sei nun $p=6m+1$. Dann gilt $p^2=36m^2+12m+1$. Ist nun $m=2k$ eine gerade Zahl, so erhält man $p^2=36\cdot 4k^2+12\cdot 2k+1=24(6k^2+k)+1$. Ist aber $m=2k+1$ eine ungerade Zahl, so erhält man

$$p^2=36(2k+1)^2+12(2k+1)+1=36(4k^2+4k+1)+24k+12+1=24(6k^2+7k+2)+1.$$

In beiden Fällen läßt also p^2 bei der Division durch 24 den Rest 1.

Es sei $p=6m-1$.

Dann gilt analog wie oben

für $m=2k$ $p^2=24(6k^2-k)+1$;

für $m=2k+1$ $p^2=24(6k^2+5k+1)+1$,

d. h., auch in diesen beiden Fällen läßt p^2 bei der Division durch 24 den Rest 1.

Die in der Aufgabe formulierte Behauptung ist also für alle Primzahlen, die größer als 3 sind, richtig.

W 9*1124 Die Anzahl der Zuschauer, die mit Autobussen abgefahren sind, sei gleich x . Dann gilt $x>150$. Ferner ist x durch 6 teilbar, weil sich in jedem der 6 Autobusse gleichviel Personen befanden. Aber auch 15% von x ,

d. s. $0,15x=\frac{3}{20}x$, ist eine ganze Zahl, da genau 15% mehr Personen als x zu Fuß gingen. x ist also nicht nur durch 6, sondern auch durch 20 teilbar, daher ist x durch 60 teilbar.

Nun gilt nach Voraussetzung einerseits $x>150$ und andererseits, da die Gesamtzahl der Zuschauer $x+1,15x=2,15x$ betrug und nicht größer als 400 war,

$$2,15x \leq 400, \\ x \leq \frac{400}{2,15} = 186 \frac{10}{215}$$

Aus $150 < x \leq 186$ folgt nun, weil x durch 60 teilbar ist, $x=180$. Daraus folgt weiter $2,15x=2,15\cdot 180=387$. Es waren also genau 387 Zuschauer in dem Kino.

Wir überzeugen uns noch davon, daß damit alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: 180 Zuschauer, das sind mehr als 150, fuhr mit 6 Autobussen nach Hause (30 in jedem Autobus); $180\cdot 1,15=207$ Zuschauer gingen zu Fuß; insgesamt waren also $180+207=387$ Zuschauer in dem Kino, d. s. nicht mehr als 400.

▲ 10/12 ▲ 1125 Wir bezeichnen die zu berechnende Zahl mit x und erhalten

$$x = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{a}}, \quad (1)$$

wobei $a=2+\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Nun gilt

$$\sqrt{2+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{a}} = \sqrt{4-a} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}. \quad (2)$$

Ferner gilt

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{4-2-\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad (3)$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1. \quad (4)$$

Aus (1), (2), (3), (4) folgt $x=1$, und x ist eine rationale Zahl.

▲ 10/12 ▲ 1126 Wegen $x>y$ sind die Ungleichungen

$$\frac{x^4-y^4}{4y^3} > x-y > \frac{x^4-y^4}{4x^3} \quad (1)$$

genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{x^4-y^4}{4y^3(x-y)} > 1 > \frac{x^4-y^4}{4x^3(x-y)} \quad (2)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &= \frac{x^4-y^4}{4y^3(x-y)} = \frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{4y^3(x-y)} \\ &= \frac{(x^2+y^2)(x+y)}{4y^3} = \frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{4y^3} \\ &\frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1 \right) > \frac{1}{4} (1+1+1+1) = 1; \quad (3) \end{aligned}$$

denn aus $x>y>0$ folgt $\frac{x}{y} > 1, \frac{x^2}{y^2} > 1$

und $\frac{x^3}{y^3} > 1$. Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} &\frac{x^4-y^4}{4x^3(x-y)} = \frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{4x^3} \\ &\frac{1}{4} \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3} \right) < \frac{1}{4} (1+1+1+1) = 1; \quad (4) \end{aligned}$$

denn aus $x>y>0$ folgt $\frac{y}{x} < 1, \frac{y^2}{x^2} < 1$

und $\frac{y^3}{x^3} < 1$.

Aus (3) und (4) folgen die Ungleichungen (2), womit gleichzeitig die Ungleichungen (1) bewiesen sind.

W 10/12 ■ 1127 Wir untersuchen die folgenden Fälle:

1. Fall: $x \geq 3$.

Dann gilt $|2x-3|=2x-3$,

$|x-3|=x-3, |4x-1|=4x-1$,

also $2x-3+x-3-4x+1=0$,

$$-x-5=0,$$

$$x=-5,$$

d. h., in diesem Fall hat die Gleichung wegen $x \geq 3$ keine Lösung.

2. Fall: $\frac{3}{2} \leq x < 3$.

Dann gilt $|2x-3|=2x-3$,

$|x-3|=3-x, |4x-1|=4x-1$,

also $2x-3+3-x-4x+1=0$,

$$-3x+1=0,$$

$$x=\frac{1}{3},$$

d. h., auch in diesem Fall hat die Gleichung wegen $x \geq \frac{3}{2}$ keine Lösung.

3. Fall: $\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{2}$.

Dann gilt $|2x-3|=3-2x$,

$|x-3|=3-x, |4x-1|=4x-1$,

also $3-2x+3-x-4x+1=0$,

$$-7x+7=0,$$

$$x=1.$$

In diesem Falle hat also die Gleichung die Lösung $x=1$.

4. Fall: $x < \frac{1}{4}$.

Dann gilt $|2x-3|=3-2x$,

$|x-3|=3-x, |4x-1|=1-4x$,

also $3-2x+3-x-1+4x=0$,

$$x+5=0,$$

$$x=-5.$$

In diesem Falle hat also die Gleichung die Lösung $x=-5$. Die gegebene Gleichung hat also genau zwei Lösungen, nämlich $x=1$ und $x=-5$.

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß das tatsächlich Lösungen der Gleichung $|2x-3|+|x-3|-|4x-1|=0$ sind;

wir erhalten nämlich

$$\text{für } x=1: |2-3|+|1-3|-|4-1|$$

$$=1+2-3=0;$$

$$\text{für } x=-5: |-10-3|+|-5-3|-|-20-1|$$

$$=13+8-21=0.$$

W 10/12 ■ 1128

Aus $\log_{14} 7=a$ folgt $14^a=7$, (1)

aus $\log_{14} 5=b$ folgt $14^b=5$, (2)

aus $\log_{35} 28=z$ folgt $35^z=28$. (3)

Aus (1) und (2) folgt weiter

$$14^a \cdot 14^b = 7 \cdot 5, \text{ also } 14^{a+b} = 35. \quad (4)$$

Aus (4) und (3) folgt wegen (1)

$$14^{(a+b)z} = 28 = 4 \cdot 7 = 4 \cdot 14^a. \quad (5)$$

Nun gilt wegen (1)

$$2 \cdot 14^a = 14, \text{ also } 2 = 14^{1-a},$$

$$\text{daher } 4 = (14^{1-a})^2 = 14^{2-2a} \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt

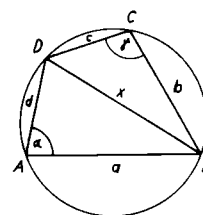
$$14^{(a+b)z} = 14^{2-2a} \cdot 14^a = 14^{2-a},$$

also $(a+b)z=2-a$ und wegen $a+b \neq 0$

$$z = \frac{2-a}{a+b}.$$

$$\text{Daher gilt } \log_{35} 28 = \frac{2-a}{a+b}.$$

W 10/12*1129 Wir bezeichnen die zu berechnende Länge der Diagonale $\overline{BD}$ mit x , ferner die Winkel $\sphericalangle DAB=\alpha$ und $\sphericalangle BCD=\gamma$ (vgl. die Abb.).



Dann gilt, weil $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, $\alpha+\gamma=180^\circ$, also $\gamma=180^\circ-\alpha$.

Nach dem Kosinussatz gilt in dem Dreieck ABD

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha \quad (1)$$

und in dem Dreieck CDB

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos (180^\circ - \alpha),$$

$$x^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha,$$

$$2(ad+bc) \cos \alpha = a^2 + d^2 - b^2 - c^2,$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)} \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt weiter

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)},$$

$$x^2 = \frac{(a^2 + d^2)(ad + bc) - (a^2 + d^2)ad}{ad + bc}$$

$$+ \frac{(b^2 + c^2)ad}{ad + bc}$$

$$x^2 = \frac{(a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad}{ad + bc},$$

$$x = \sqrt{\frac{(a^2 + d^2)bc + (b^2 + c^2)ad}{ad + bc}}$$

W 10/12*1130 Um zu beweisen, daß

$$z = (10^{1973} + 10^{1972} + \dots + 10 + 1)(10^{1974} + 5)$$

+ 1 gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist, setzen wir

$$x = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{1972} + 10^{1973}.$$

Dann gilt

$$10x = 10 + 10^2 + \dots + 10^{1972} + 10^{1973}$$

$$+ 10^{1974}, \text{ also } 9x = 10^{1974} - 1, \text{ d. h.}$$

$$x = \frac{10^{1974} - 1}{9}. \text{ Daraus folgt}$$

$$z = \frac{10^{1974} - 1}{9} (10^{1974} + 5) + 1,$$

$$z = \frac{1}{9} [(10^{1974})^2 + 5 \cdot 10^{1974} - 10^{1974} - 5 + 9],$$

$$z = \frac{1}{9} [(10^{1974})^2 + 4 \cdot 10^{1974} + 4]$$

$$= \left(\frac{10^{1974} + 2}{3} \right)^2.$$

$10^{1974} + 2$ ist durch 3 teilbar, weil die Quersumme 3 beträgt. Daher ist $\frac{10^{1974} + 2}{3}$ eine

natürliche Zahl, und z ist gleich dem Quadrat dieser natürlichen Zahl, w. z. b. w.

Lösungen zu alpha-heiter

Trugschluß

Bis zur Gleichung (5) sind alle Schlußfolgerungen richtig. Denn in der Gleichung (5) steht in der eckigen Klammer auf der linken Seite der Term

$$n + 1 - \frac{1}{2}(2n + 1) = n + 1 - n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

und auf der rechten Seite

$$n - \frac{1}{2}(2n + 1) = n - n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Tatsächlich gilt $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$, weil $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. (8)

Aber aus der Gleichung (8) folgt nicht

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2};$$

denn aus der Gleichheit der Quadrate zweier rationaler Zahlen folgt die Gleichheit dieser Zahlen nicht, wenn sie ein verschiedenes Vorzeichen haben. Daher ist auch der Schluß von (5) auf (6) falsch, und es gilt nicht $n + 1 = n$.

Dr. R. Lüders, Berlin

Silbenrätsel

1. Oktaeder
 2. Läufer
 3. Yard
 4. Multiplikation
 5. Parabel
 6. Intervall
 7. Algebra
 8. Differenz
 9. Exponent
- Lösungswort: Olympiade

Füllrätsel

Wir bezeichnen die siebenstelligen Zahlen in der 1., 2. usw. Zeile des Schemas der Reihe nach mit a, b, c, d, e, f, g .

Nun gilt wegen $2^{10} = 1024$

$$2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024 = 1\,048\,576 \text{ mit}$$

der Quersumme $q = 31$,

$$2^{21} = 2\,097\,152 \text{ mit } q = 26,$$

$$q = 25,$$

$$2^{23} = 8\,388\,608 \text{ mit } q = 41,$$

ferner ist $2^{24} > 10^7$ und $2^{19} < 10^6$.

Daher erhalten wir $a = 2\,097\,152$ und

$c = 8\,388\,608$. Ferner ist $9^6 < 10^6$,

$$9^7 = 4\,782\,969, 9^8 > 10^7, \text{ also } b = 4\,782\,969 \text{ mit}$$

$$2^{22} = 4\,194\,304 \text{ mit } q = 25.$$

Die Zahl $3\,593\,970$ hat nur die folgenden

Teiler, die siebenstelligen Zahlen sind:

$$3\,593\,970 : 2 = 1\,796\,985 \text{ mit } q = 45 \text{ und}$$

$$3\,593\,970 : 3 = 1\,197\,990 \text{ mit } q = 36.$$

Daher ist $e = 1\,796\,985$.

Da f ein Vielfaches der nicht durch 9 teilbaren Zahl $893\,615$ ist und wegen der Quersumme 27 durch 9 teilbar ist, kann nur $f = 893\,615 \cdot 9 = 8\,042\,535$ sein; denn

$893\,615 \cdot 18$ ist bereits eine achtstellige Zahl.

Wäre die erste Grundziffer der Zahl g kleiner

als 9, so wäre ihre Quersumme kleiner als

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 42. \text{ Das widerspricht}$$

aber der Voraussetzung, wonach die Quersumme gleich 42 ist. Daher ist $g = 9\,876\,543$. Nach Voraussetzung besteht die Zahl d aus lauter gleichen Grundziffern. Bezeichnen wir diese mit x , so gilt für die Summe in der ersten Spalte

$$2 + 4 + 8 + x + 1 + 8 + 9 = 40,$$

$$x + 32 = 40,$$

$$x = 8.$$

Also ist $d = 8\,888\,888$.

a	2	0	9	7	1	5	2
b	4	7	8	2	9	6	9
c	8	3	8	8	6	0	8
d	8	8	8	8	8	8	8
e	1	7	9	6	9	8	5
f	8	0	4	2	5	3	5
g	9	8	7	6	5	4	3

Damit haben wir die vollständige Lösung erhalten (vgl. das Schema!). Wir überzeugen uns noch davon, daß die Summen in der ersten Spalte, in der letzten Spalte und in den beiden Diagonalen jeweils gleich 40 sind.

Fremdkörper

- A Primzahlen
 - B Außenwinkel
 - C Rechtecke
 - D axialsymmetrische Figuren
 - E Buchstaben
 - F Einermengen
 - G Linien
- P A R A B E L

Schwungvolle Kurven (Titelblatt)

1. Die Lemniskate von Bernoulli

$$x^2 + y^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

2. Das Folium von René Descartes

(1596 bis 1650)

$$x^2 + y^3 = 3axy$$

3. Die Schnecke von Étienne Pascal (17. Jh.),

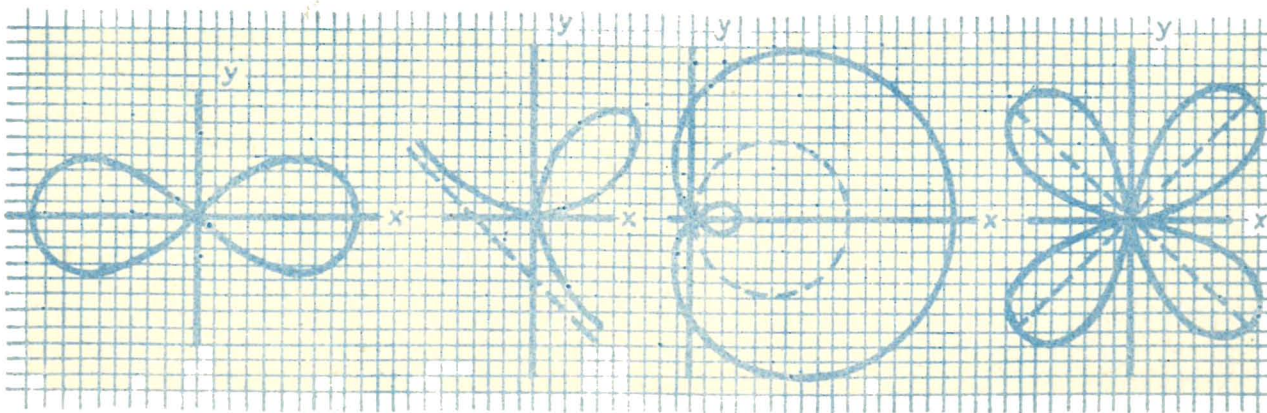
Vater von Blaise Pascal

$$(x^2 + y^2 + ax^2)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

4. Die Rose von Guido Grandi, Mönch und

Professor in Pisa (1671 bis 1742)

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 x^2 y$$





Inhaltsverzeichnis 1967 bis 1973

(leicht gekürzt)

alpha (Zeitschrift alpha)

2/67, 1/68 Wissen wo (eine Anleitung zum Selbststudium) (H. Herzog/J. Lehmann) • 6/68, 6/69 *alpha* berichtet (J. Lehmann) • 5/69 An die Leser der Zeitschrift *alpha* (A. Markuschewitsch) • 6/71 Wie entsteht die Zeitschrift *alpha*? (H. Jüttner/P. Dreßler, J. Lehmann)

Ähnlichkeitslehre

4/67 Guter Mond, du gehst so stille ... (L. Görke)

Aufgaben

5/67 Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR (O. Prints) • 6/68 Grüße aus der Demokratischen Republik Vietnam (H. Tang/Nguyen lam Son) • 6/69, 1/70 Prüfungsaufgaben aus Island (G. O. Gestsson) • 1/70, 4/70 Prüfungsaufgaben aus Tansania (W. Büchel) • 3/72 Mathematik und Sport (Th. Scholl) • 5/72 Mathematik und Russisch (OS Döbeln) • 1/73 Einige Aufgaben aus Abschluß- und Reifeprüfungen (G. Püffeld) Über eine Aufgabe der XII. IMO (H.-D. Gronau/W. Harnau) Probleme – XII. IMO

Berichte

1/67 Internat. Mathematikerkongreß 1966 (Moskau) (D. Ziegler) • 2/67, 3/69 *alpha* berichtet aus aller Welt • 5/67 Nowosibirsk (W. Friedrich) • 5/67 Aus der Sowjetunion berichtet • 6/68 Junge Mathematiker erlebten Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft in Rostock (H. Titze) • 1/71 Die Mathematik ist schön (R. Peter) • 1/71 IV. Internat. Physikolympiade • 1/71 Taugen Mädchen für die Mathematik? • 2/71 10 Jahre Weltraumflug (W. Träger) • 2/72 *alpha* international (Red.) • 3/72 Mathematikstudenten im Forschungsstudium (O. Krötenheerdt) • 4/72 Technische Universität Dresden (R. Sonnemann) • 1/73 Festival-Initiative (K. Bachmann) • 6/73 Solidarität in Aktion (DRV) • 6/73 Sei stolz auf Deine Organisation, Junger Pionier! • 6/73 Aus der Zentralschule der Pionierorganisation E. Thälmann berichtet (I. Koch)

Berufe

3/67 Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium (W. Zill) • 6/67 Als Diplommathematiker in Dubna (G. Laßner) • 6/67 Als

Mathematiklehrer in Tansania (H. Büchel) • 2/68 Elektronische Datenverarbeitung – eine Perspektive • 2/68 Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur (J. Pönisch) • 3/68 Facharbeiter für Datenverarbeitung (Ch. Papendorf) • 4/68 Mathematisch-technischer Assistent (G. Paulin) • 5/68 Ingenieur für Programmierung (W. Léupold) • 6/68 Diplom-Mathematiker (Rechentechnik und Datenverarbeitung) (J. Löttsch/G. Seifert) • 2/69 Spezialklassen an mathematischen Fakultäten • 3/69 Ulrich Zähle berichtet (U. Zähle) • 4/69 Vom IMO-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten (H. Ernst) • 5/69 Hochbauzeichner – ein Beruf für Mädchen • 6/69 Diplom-Mathematiker (H. Girlich) • 1/70 Diplomlehrer für Mathematik (R. Mildner) • 5/70 Bauingenieur (W. Wittig) • 6/70 Hochschulingenieur (G. Burucker) • 1/71 Vermessungsfacharbeiter und Kartographiefacharbeiter • 5/72 Studienmöglichkeiten an der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar (D. Schwaab) • 1/73 Geophysiker (R. Rösler) Statistiker (E. Blüher/R. Schröter) • 4/73 Diplomlehrer für Physik (M. Wurlitzer)

Beweise

2/67, 3/67 Beweise durch vollständige Induktion (W. Stoye) • 1/69 Spiegeln, Spiegeln an der Wand (W. Träger) • 4/69 Mathematikprobleme – selbst gemacht (Nazla H. A. Khedre) • 4/71 Ein interessanter geometrischer Beweis (E. Schröder)

Biographien

2/67 Gottfr. Wilh. Leibniz als Mathematiker (W. Purkert) • 4/67 Leonhard Euler 1707 bis 1783 (H. Bernhardt) • 4/67 Gaspard Monge 1746 bis 1818 (E. Schröder) • 5/67 A. J. Chintschin (H. Bernhardt) • 5/67 Aus der Jugend A. J. Chintschins (A. Artisow/Murumzowa) • 4/68 August Ferdinand Möbius 1790 bis 1868 (H. Wußing) • 1/69 Lew Danilowitsch Landau (B. Zimmermann) • 4/69 Evariste Galois (E. Hertel/O. Stamford) • 5/69 Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhner (J. Gronitz) • 6/69 Michael Stifel (J. Schwarz) • 6/69 Alexander Ossipowitsch Gelfond (H. Boll) • 1/70 Mathematik in der Familie W. I. Lenins (G. N. Wolkow) • 3/70 Janos Bolyai (I. Reimann) • 4/70 Auf den Spuren Jakob Steiners (E. Schröder) • 5/70 Leninpreisträger Lew Semjonowitsch Pontrjagin • 6/70, 2/71, 4/71 Albrecht Dürer (E. Schröder) • 6/70 Die Leninpreisträger Jurij Rezanov und Jurij Prochorov • 1/71, 4/71 Der Weg eines Talents – Olga A. Ladyshenskaja (J. Senkewitsch) • 5/71, 1/72, 2/72 Ramanujan – das mathematische Genie Indiens (V. Lewin) • 6/71 Johannes Kepler (Th. Riedrich) • 5/72, 6/72, 1/73 Nicolaus Copernicus (H. Wußing) • 5/73 A. Ljapunow (L. Boll) • 6/73 Über den Schöpfer einer neuen Geometrie/N. J. Lobatschewski (A. Halameisär/B. A. Rosenfeld)

Funktionen

6/70, 2/71, 4/71 Was ist eine Funktion? (A. N. Kolmogorow) • 2/73 Funktionen und ihre graphische Darstellung (Leseprobe)

Geometrie, darstellende

6/67 Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen (E. Schröder) • 1/68 Abstand zweier Punkte im Raum (E. Schröder) • 2/68 Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen (E. Schröder) • 4/68 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur (E. Schröder) • 1/70 Auch ein Schlußlicht hat es in sich (E. Schröder) • 5/70 Ein kleiner Dreh führt zum Ziel (E. Schröder) • 5/72, 6/72 Darstellende Geometrie und Architekturausbildung (E. Kühn)

Geschichte der Mathematik

6/68 Der mathematische Wettstreit in der Antike (M. Otto) • 6/68 *Mathematische Manuskripte* von Karl Marx (R. Sperl) • 1/69 Was bedeutet eigentlich „x“? (Aus „Po sv'etu“ 11/67) • 1/70 Über die Anfänge der Mathematik aus: *Die Mathematik in der Antike* (H. Wußing) • 6/69 bis 5/70 Mathematik-Kalender (W. Heinig/J. Lehmann) • 3/71 Geschichte der Mathematik der Tschechoslowakei (O. Langer) • 2/73 In alten Mathematikbüchern geblättert (J. Lehmann)

Gleichungen/Ungleichungen

1/68 Eine schwierige Hausaufgabe (R. Lüders) • 2/68 Der Lucassche Turm (J. Frommann) • 6/69 Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen (W. Träger) • 4/70 Einige Ungleichungen für Fakultäten (V. I. Lewin) • 6/70 Über Gleichungen mit absoluten Beträgen (W. Träger) • 2/72 Zwei Beweise einer Ungleichung von Cauchy (W. Dziadek) • 5/72 Diophantische Gleichungen (H. Menzer) • 1/73 Ungleichungen im Bereich der nat. Zahlen (J. Lehmann) • 4/73 Ein Verfahren zur Abspaltung linearer und quadratischer Polynome (H. Butzke)

Graphentheorie

3/71 Über die Ramseyschen Zahlen (J. Sedláček) • 4/72 Der Graph (J. I. Churgin) • 6/72, 1/73, 2/73, 4/73 Aus der Graphentheorie (W. Voß)

Kombinatorik

6/71 Geometrische Kombinatorik (L. Lovasz/J. Pelikan) • 6/71, 2/72, 3/72 Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es? (W. Türke)

Literatur

4/68 Formen und Formeln, Fr. v. Krbek, Eine Buchbesprechung (W. Arnold) • 6/70 *Quant* – eine neue physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift • 6/70 Jugend und Mathematik – eine mathematische Schülerzeitschrift der Demokratischen Republik Vietnam • 4/72, 5/73 Formeln – was dann? (J. I. Churgin) • 5/72 Sammelbildserie: Berühmte Mathematiker (Red.) • 6/72 Menschen messen Zeit und Raum (E. Padelt)

● 5/73 *alpha* zu Gast bei *Quant* ● 5/73 Der Repetitor (aus: Moskauer Komsomolze) ● 6/73 Mathematische Schülerzeitschrift der DRV (H. Chung)

Logik

2/68 Notwendig oder hinreichend – das ist hier die Frage (M. Rehm) ● 3/70 Mathematische Logik für Anfänger (Leseprobe) ● 5/70 Achtung Kreuzung – Vorfahrt beachten! (W. Träger) ● 5/72, 6/72, 1/73, 2/73 Kleine Worte – Große Wirkung (L. Flade)

Mengenlehre

1/67 Mit Mengen fängt es an(1) (W. Walsch/H. Lohse) ● 2/67 Wir operieren mit Mengen (2) (W. Walsch) ● 3/67 Wir untersuchen Abbildungen (3) (W. Walsch) ● 4/67 Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre (W. Walsch) ● 2/69 Zweiermengen und geordnete Paare (H. Tiede)

Nomographie

2/70, 3/70, 4/70, 5/70 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (W. Träger)

Olympiaden – Olympiadeaufgaben

1/67 VIII. IMO 1966 (J. Lehmann) ● 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO (H. Bausch) ● 1/67 bis 6/67 VI. OJM der DDR ● 2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha-Neubrandenburg (J. Lehmann) ● 3/67 Mathematischer Mannschaftswettbewerb (M. Mäthner/G. Schulze) ● 3/67 Mathematische Wettbewerbe in England ● 4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien (S. Bodurow) ● 5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiade Tblissi 1967 (J. Petrakow) ● 5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit (R. Höppner) ● 6/67 IX. IMO 1967 (H. Bausch) ● 1/68 bis 6/68, 2/69 VII. OJM der DDR ● 1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb USA 1967 ● 5/68, 6/68, X. IMO 1968 (H. Bausch/W. Burmeister) ● 6/68 Allunions-Fernolympiade (R. Lüders/J. Lehmann) ● 1/69 bis 3/69, 6/69, 2/70 VIII. OJM der DDR ● 3/69 Concursul de matematica (SR Rumänien) ● 5/69, 1/70 XI. IMO 1969 (H. Bausch/J. Lehmann) ● 5/69 Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968 (G. Ulbricht) ● 1/70 bis 4/70 IX. OJM der DDR ● 2/70 Mathematikolympiaden in der ČSSR (O. Langer/St. Horák) ● 3/70 Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn (I. Reimann/M. Walter) ● 4/70 Mathematische Wettbewerbe in Schweden ● 5/70 XII. IMO 1970 (H. Bausch/J. Lehmann) ● 1/71 bis 4/71 X. OJM der DDR ● 2/71 10 Jahre Olympiade Junger Mathematiker der DDR ● 2/71 Mathematikolympiaden in der MVR ● 2/71 Österreichische Mathematikolympiade ● 5/71 Concursul de inmatematica (SR Rumänien) ● 5/71 XIII. IMO 1971 (J. Lehmann) ● 1/72 bis 5/72 XI. OJM der DDR ● 1/72 FDGB-Urlauber-Olympiade 1972 (W. Träger) ● 3/72 Mathematikolympiaden in der VR Polen (S.

Straszewicz) ● 3/72 Rückblick auf die XIII. IMO (Red.) ● 3/72 Mathematikolympiade in der Republik Kuba (L. J. Davidson) ● 5/72 XIV. IMO 1972 (J. Lehmann) ● 1/73 bis 5/73 XII. OJM der DDR ● Mathematikolympiaden in den Niederlanden (A. v. Tooren) ● 4/73 II. Physikolympiade des Bezirkes Leipzig ● 5/73 XV. IMO 1973 (J. Lehmann)

Planimetrie

1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat (H. Wiesemann) ● 5/68 Was ist ein Viereck? (L. Görke) ● 6/68, 1/69, 3/69, 5/69, 6/72 Mit Zirkel und Zeichendreieck (J. Lehmann) ● 1/69 Spiegeln, Spiegeln an der Wand (W. Träger) ● 3/69 Mit Bleistift und Lineal (E. Schröder) ● 3/69 Bange machen gilt nicht! Modell eines geom. Extremwertproblems (Th. Scholl) ● 5/69 Übe sinnvoll – überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck (G. Pietzsch) ● 6/69 Kleine geometrische Exkursion (Th. Scholl) ● 2/70 Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe? (H. Titze) ● 3/70, 4/70 Ornamente (R. Bittner) ● 2/72 Arbeitsblatt Geometrie (H. Herzog) ● 3/72 Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises (E. Schröder) ● 3/73 Spiegelung am Kreis (Ch. Meinel) ● 4/73 Eine interessante, aber schwierige Aufgabe (R. Lüders) ● 6/73 Heronsches Dreieck 1973/74 (F. Klar/H. Decker)

Stereometrie

1/69 Fernsehfußball – reguläre Polyeder (E. Schröder) ● 2/69 Der Eulersche Polyedersatz (H. Günther) ● 5/71 Durch die Welt der Tetraeder (G. Geise)

Unterhaltung

3/68, 4/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel (Th. Scholl) ● 3/68, 4/68, 5/68 Eine Knobelschichte 1., 2., 3. Teil (W. Träger) ● 6/68 Schön ist so ein Ring(elspiel) (J. Frormann) ● 3/69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? (W. Unze) ● 4/69 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf (W. Träger) ● 1/71 Wir spielen mit optimaler Strategie (W. Träger) ● 3/71 Wirklichkeit und Täuschung (J. Sedláček) ● 1/72 Kryptarithmetik (J. Lehmann/R. Lüders) ● 1/72 Geometrisches Kreuzworträtsel aus *Quant* ● 2/72 Ein mathematisches Kreuzworträtsel (Ch. Riehl) ● 3/72 Mathe-Quiz im Ferienlager (J. Lehmann/W. Träger) ● 3/73 *alpha*-Spiel-Magazin (J. Lehmann) ● 6/73 Mit Zirkel, Pinsel und Schere (J. Lehmann)

Verbindung zur Praxis

3/67 Schwankt der Fernsehturm? (W. Zill) ● 3/67 Der Berliner Fernsehturm (W. Zill) ● 4/67 Auf den Spuren Roald Amundsens (S. Meier) ● 5/67 Erfahrungsaustausch mit sowj. Wissenschaftlern (Bratsk) (H. Werner) ● 1/68 50 Jahre Rote Armee ● 1/68 Dresden in Zahlen (W. Weidauer) ● 1/69 Messegold

für Präzisionsreißzeuge (A. Hanisch) ● 2/69 Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden – Zwinger (H. Grötzsch) ● 3/69 Mathematische Modelle aus der DDR (W. Glaß) ● 4/69 Multicurve (E. Schröder) ● 4/69 Aus der VAR berichtet ● 6/69 Mathematik und Musik (Ch. Lange) ● 6/69 Rund um das Schachbrett (K. Kannenberg) ● 1/69 bis 6/70 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung (J. Frormann) ● 4/71 Waffen aus Suhl (E. Hoffmann) ● 6/71, 1/72 Wie schnell fliegt ein Überschallflugzeug? (W. Träger) ● 3/72 Fluidkompaß Sport 3 (Red.) ● 4/72 Die Rechenmaschine – ein Souvenir aus der Sowjetunion (A. Mertens) ● 6/72, 2/73 Mathematik im Reich der Töne (E. Schröder) ● 2/73 Über die Bedeutung der Mathematik für den Markscheider (H. Meixner) ● 2/73 Gut gedacht ist halb gelöst (J. Lehmann/W. Unze) ● 3/73 Mit Karte und Kompaß ● 4/73 Herstellung eines Rechenstabes (A. Ewert) ● 5/73, 6/73 Millionen auf der Bleistiftspitze (A. Halameisär)

Zahlenbereiche

5/68 Übe sinnvoll – Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen (G. Pietzsch) ● 1/72 Über zwei Operationen mit Zahlen (K. Tschimow) ● 1/73 Einige Fragen und Aufgaben ungewohnter Art (G. Pietzsch) ● 4/73 Mathematik und Physik (E. Mittmann) ● 5/73 Primzahlen (A. D. Bendukidse)

Zahlenfolgen

6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums (A. A. Kolosow) ● 3/68, 4/68, 5/68, 6/68, Elementare Zahlenfolgen (H. Lohse)

Zahlentheorie

3/69, 4/69, 5/69, 1/70, 2/70 Rechnen mit Resten (G. Lorenz) ● 5/70 Freitag der 13. (T. Bailey/G. Hofmann) ● 4/71 Die Teilbarkeit durch 7 (E. Naumann) ● 2/72, 3/72 Die Arithmetik der Binominalkoeffizienten (D. B. Fuchs) ● 3/73 Gitterpunkte (M. Günther)

Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)

5/67 Mathematischer Wettbewerb (W. Werner) ● 5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? (G. Horn) ● 3/69 Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA“ (W. Träger) ● 2/72 Über eine mathematisch-physikalische Schule in Kiew (L. A. Kaloujine) ● 4/73 Arbeitspläne Mathematik (Kl. 7/8)/(D. Klöpfel) ● 4/72 Über unsere Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* (AG Math. Lübben) ● 4/72 Mathematik frei Haus (Korrespondenzzirkel) (R. Bergmann) ● 5/72 Mathematikern über die Schultern geschaut (H. Bode) ● 3/73 Ein Mathematikzentrum in Aktion (W. Henker) ● 5/73 Mathematik im Moskauer Pionierpalast auf den Leninbergen (V. Trostnikow) ● 6/73 Rechenzentrum *alpha* begeisterte in der Berliner Wuhlheide (E. Zschech)