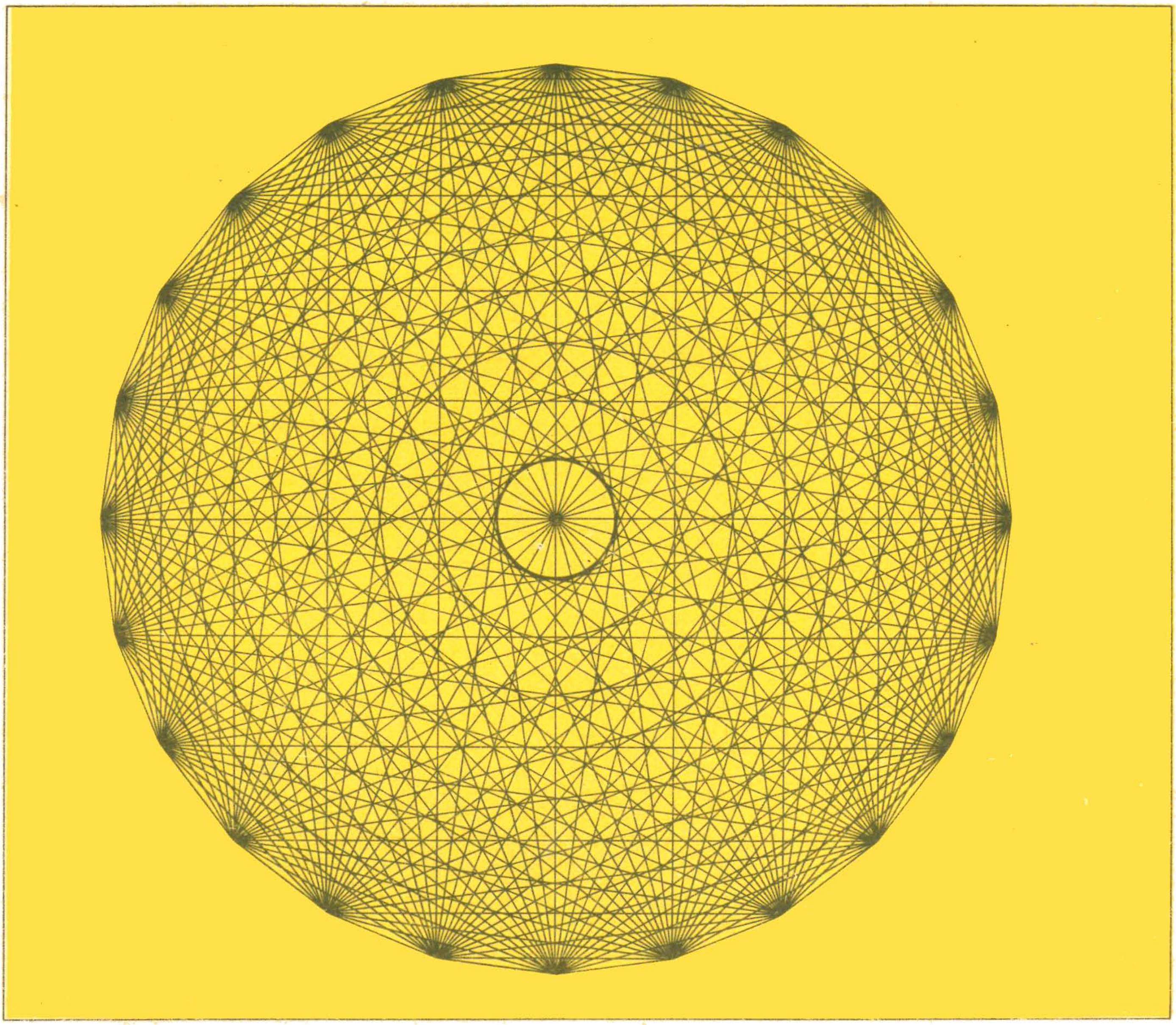
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
8. Jahrgang 1974
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31059

2

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 30, S. 32, S. 41); ADN-Bilderdienst (S. 25/26); Vignetten aus NBI (S. 25/26); J. Lehmann, Leipzig (S. 35); Handelshochschule Leipzig (S. 35); S. Rosenhain, Leipzig (S. 35);
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

alpha

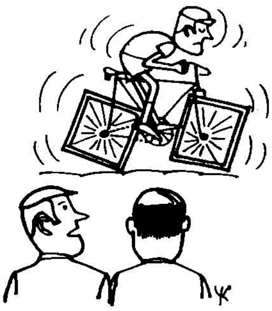
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 25. Januar 1974

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Aufgaben für Freunde der Friedensfahrt



Er ist ein Individualist!

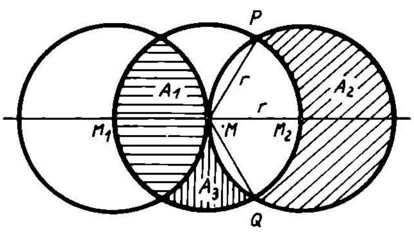
Vignetten: Józef Kaczmarczyk

Klasse 5

Der Fahrer, der als erster, zweiter oder dritter das Ziel einer Etappe der Friedensfahrt erreicht, erhält eine Zeitgutschrift von 30 s, 20 s oder 10 s. Am Ende einer Friedensfahrt hat ein Fahrer insgesamt 80 s Zeitgutschrift erhalten, weil er wiederholt vordere Plätze an den Etappenzielen belegte.
Welche Möglichkeiten bestehen für seine Erst-, Zweit- und Drittplazierungen bei den einzelnen Etappen?

Klasse 6

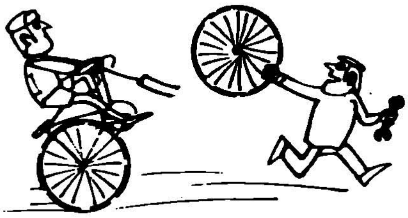
Das Symbol der 25. Friedensfahrt bestand aus drei konzentrischen Kreisen mit dem Radius r, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen und voneinander den Abstand r haben.



Zeige, daß die Figur $\sphericalangle QMP = 120^\circ$ gilt!

Klasse 7

Bei einer Etappe fallen aus der Spitzengruppe, die mit 48 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Geschwindigkeit fährt, zwei Fahrer infolge Reifenschadens aus. Nach 1 min 15 s Wartezeit ist der Reifenschaden durch Radwechsel behoben, die beiden Fahrer starten wieder und die davongeeilte Spitzengruppe befindet sich in diesem Zeitpunkt bereits 24 km vor dem Etappenziel.
Welche Geschwindigkeit müßten beide Fahrer mindestens vorlegen, um zur Spitzengruppe spätestens am Ziel aufzuschließen?



Radwechsel, ohne anzuhalten

16. Etappe der 26. Internat. Friedensfahrt: Der sprintstarke Waleri Lichetschow siegt in Berlin

Klasse 8

Der bei der Friedensfahrt 1967 auf der 174 km langen Etappe von Kutno nach Poznan aufgestellte Streckenrekord von 48,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ widerstand bei den folgenden fünf Friedensfahrten den Anstürmen. Erst 1973 beim 26. *course de la paix* wurde dieser Rekord innerhalb 48 h gleich zweimal überboten: Auf der 10. Etappe von Nieporet nach Wloclawek legte der Belgier René Dillen durchschnittlich je Stunde 100 m mehr zurück als der Sieger der Rekordetappe von 1967. Bei der 11. — 150 km langen — Etappe von Torun nach Poznan siegte der sowjetische Fahrer *Waleri Lichetschow* mit der phantastischen Durchschnittsgeschwindigkeit von 49,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erzielte bei der 26. Friedensfahrt der Sieger der 10. Etappe?

b) Die voraussichtliche Ankunft der Friedensfahrer am Ziel der 11. Etappe der 26. Friedensfahrt berechnete man durch Zugrundelegen der am Tage vorher erreichten neuen Spitzengeschwindigkeit. Wieviel Minuten früher als erwartet fuhr der Etappensieger im Stadion von Poznan ein?

Klasse 9

Betrachte Text und Abbildung der Aufgabe für Klasse 6!
Zeige, daß die Flächeninhalte der in obiger Figur schraffierten Flächen gegeben sind durch

$$A_1 = r^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6}r^2(4\pi - 3\sqrt{3}),$$

$$A_2 = r^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{6}r^2(2\pi + 3\sqrt{3}) \text{ und}$$

$$A_3 = r^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}r^2(3\sqrt{3} - \pi)\,!$$

Klasse 10

Ein Rennrad ist mit 27er Rädern (27er Räder haben einen Durchmesser von 27 Zoll. 1 Zoll = 25,4 mm) ausgerüstet und besitzt eine Gangschaltung, die vorn aus zwei Kettenblättern mit 46 bzw. 48 Zähnen und am Hinterrad aus einer Zahnkranzkombination mit 14, 16, 18 und 20 Zähnen besteht.

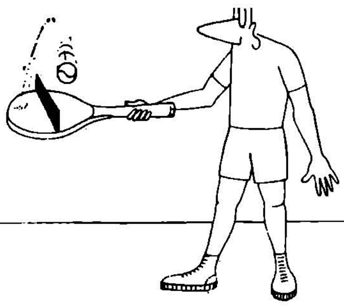
a) Wieviel Umdrehungen macht das Kettenrad in einer Sekunde, wenn der Fahrer mit größtem Gang mit der Geschwindigkeit 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

b) Wie groß ist die Fahrgeschwindigkeit, wenn sich das Kettenrad ebenso schnell wie bei a) dreht und wenn jedoch der kleinste Gang eingeschaltet ist?

W. Träger

Mit 150 km/h übers Netz

Von Klassesportlern geschlagene Pucks, Volleybälle, Tennisbälle, Tischtennisbälle usw. erreichen enorme Geschwindigkeiten. Schauen wir uns den weißen Zelluloidball mit seinem Umfang von 3,5 cm und seinem Gewicht von 2,4 bis 2,53 g etwas genauer an. Bei freiem Fall aus 0,3048 m Höhe auf die Tischtennisplatte muß er wieder zwischen 0,2032 und 0,2286 m hochspringen. Und wie steht es mit seiner Geschwindigkeit?

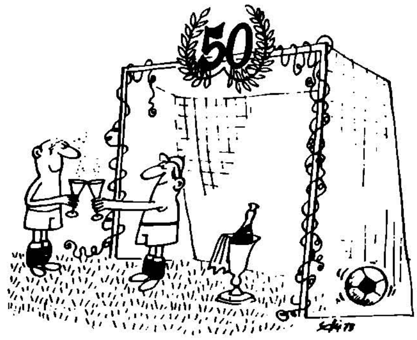


Messungen ergaben folgende Werte: Die Ballgeschwindigkeit bei einem Verteidigungsschlag mit Unterschnitt beträgt etwa 50 km/h nach dem Schlag. Beim Aufprall auf der Platte beträgt sie nur noch etwa 30 km/h. Ein normaler Treibschlag, der den Angriff vorbereitet, gibt dem Ball eine Geschwindigkeit von 70 km/h, beim Aufprall reduziert sie sich auf 50 km/h und danach wird der Ball durch die Eigenrotation wieder schneller und erreicht etwa 55 km/h. Schmetterbälle können nach dem Schlag bis zu 150 km/h erreichen. Noch beim Aufprall hat der Ball eine Geschwindigkeit von 100 km/h. Dem Gegner bleibt bei einem solchen Schmetterball auf die kurze Entfernung nur eine Reaktionszeit von genau $\frac{2}{100}$ Sekunden.

Vergleicht einmal diese Zeit an eurem Fotoapparat mit der Belichtungszeit von $\frac{2}{100}$ Sekunden! Daran werdet ihr erkennen, wie wenig Zeit einem Spieler bleibt, um den Angriffsschlag des Gegners zu kontern. Und das kommt in einem Satz bis zu 350 oder gar 400 mal vor.

Warum gibt es im Sport soviel ausgefallene Maße?

Die Frage, weshalb ein Fußballtor gerade 7,32 statt 7 m breit sein muß, eine Männer-Kugel ausgerechnet 7,257 kg statt 7 kg wiegen soll und ein Hockeystock höchstens 794 g wiegen darf, ist durchaus berechtigt. Der Sport hat hier ganz offensichtlich seine eigenen Gesetze. Da England das Mutterland des modernen Sports und vieler moderner Sportarten ist, so haben sich auch diese in England eingeführten Maße und Gewichte bis in die heutige Zeit überliefert.

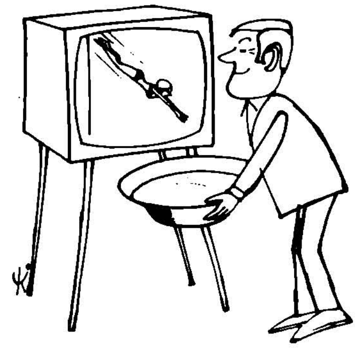


Wolfgang Schubert, aus: NBI

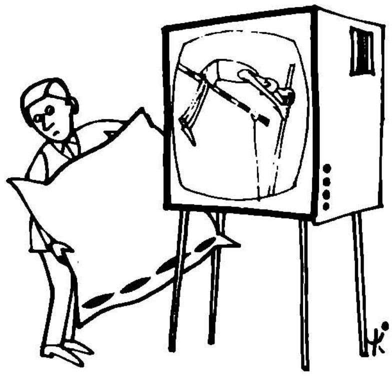
Ein Fußballtor sollte nämlich bei seiner Erfindung genau 24 Fuß breit und 8 Fuß hoch sein, und das sind nun mal bei der Umrechnung in das metrische Maßsystem, das seit 1875, seitdem die internationale Meter-Konvention gilt, genau 7,32 m und 2,44 m. Eine Männer-Kugel wiegt deshalb 7,257 kg, da das genau 16 englische Pfund sind. Der Abstand zwischen den Hürden auf einer 110-m-Hürden-Strecke der Männer beträgt seit eh und je zehn Yards, also umgerechnet 9,14 m, während eine Hürde bei einem 400-m-Hürden-Lauf ein Yard hoch ist, also 91,4 cm.

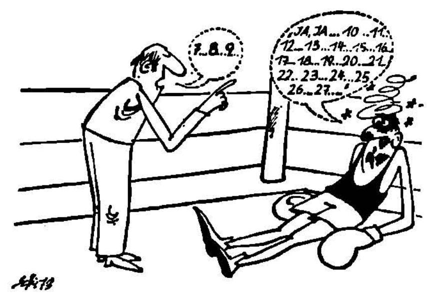
Ähnlich ist es auch in anderen Sportarten. England hat inzwischen das Dezimalsystem eingeführt. Für den Sport ist eine solche Umstellung aber noch nicht zu erwarten.

Volker Kluge (aus JW)



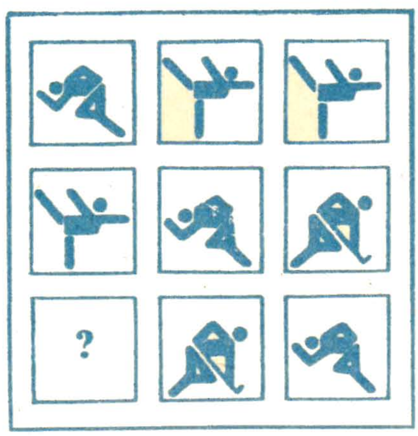
J. Kaczmarczyk, aus: „Polen", 11/73



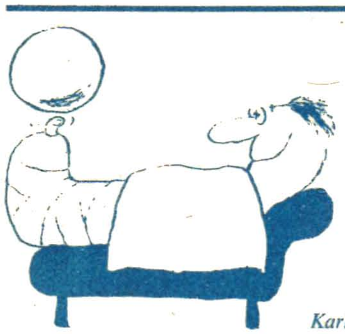


Wolfgang Schubert

aus NBI 3/73



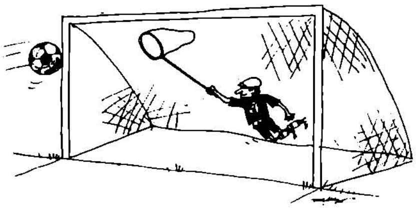
Welche der sechs numerierten Figuren gehört in das Feld mit Fragezeichen? Ihr könnt zwei Minuten versuchen, hinter die Gesetzmäßigkeit zu kommen.



Aufgaben für Freunde des Fußballs

Karl Schrader, aus: NBI

Bei einem Fußballturnier ist das Punktverhältnis einer Mannschaft das Verhältnis der insgesamt erreichten Plus- und Minuspunkte. Ein gewonnenes Spiel bringt einer Mannschaft zwei Pluspunkte, ein verlorenes zwei Minuspunkte und ein unentschiedenes Spiel je einen Plus- und Minuspunkt. Bei der Angabe eines Punktverhältnisses wird der Doppelpunkt lediglich als Trennzeichen zwischen Plus- und Minuspunkten verwendet; $a:b$ ist hierbei eine Schreibweise für das geordnete Paar $[a;\, b]$, wobei a die Anzahl der Plus-, b die Anzahl der Minuspunkte angibt.



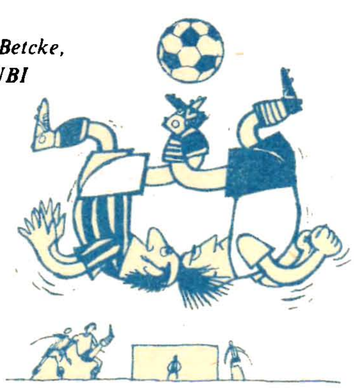
Iwan Milkov, aus: Eulenspiegel 49/73

▲1▲ Vier Fußballmannschaften A, B, C und D tragen ein Turnier aus, wobei jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel austrägt, d. h. Rückspiele sind nicht vorgesehen. Nach Abschluß des Turniers ergibt sich folgender Punktestand:

Mannschaft	Punktverhältnis
B	6 : 0
D	3 : 3
A	2 : 4
C	1 : 5

Welche Aussagen können über den Ausgang der einzelnen Spiele gemacht werden?

Hans Betcke, aus: NBI



▲2▲ Bei einem Fußballturnier wird für jede Mannschaft neben dem Punktverhältnis auch das Torverhältnis angegeben. Dies ist das Verhältnis der erzielten Tore zur Zahl der erhaltenen Gegentore. Am Ende eines Turniers, bei dem jede der fünf Mannschaften A, B, C, D und E gegen jede andere genau ein Spiel austrägt, also keine Rückspiele vorgesehen sind, ergibt sich folgender Tabellenstand:

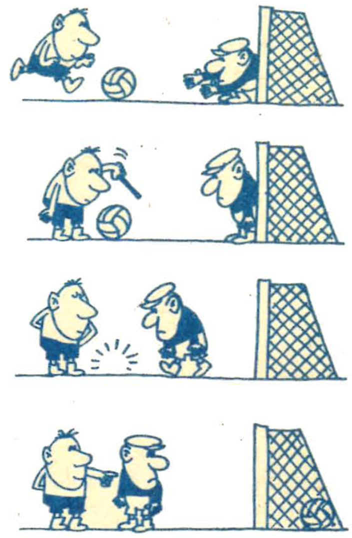
Mannschaft	Punktverh.	Torverh.
A	7 : 1	3 : 0
B	6 : 2	2 : 0
C	5 : 3	5 : 2
D	2 : 6	4 : 3
E	0 : 8	1 : 10

Gib für jedes ausgetragene Spiel das Punkt- und Torverhältnis an!

▲3▲ Bei einem Fußballturnier, an dem n Mannschaften ($n \geqq 2$) teilnehmen, trägt jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus, d. h., Rückspiele finden nicht statt.

a) Wie groß ist die Summe aus allen Plus- und Minuspunkten einer Mannschaft?

b) Wie groß ist die Summe aus den Pluspunkten aller Mannschaften?



Willy Moese, aus: ZB

▲4▲ Bei einem Fußballturnier hatte Mannschaft A genau vier Spiele zu bestreiten; sie erzielte dabei das Punktverhältnis 4 : 4 und das Torverhältnis 4 : 2.

Wieviele Möglichkeiten bestehen für den Ausgang (Punktverhältnis; Torverhältnis) der vier Spiele dieser Mannschaft?

W. Träger

Qualifikationsspiel
DDR–Albanien 2:0,
unser Bild: *Joachim Streich* (DDR)
beim Kopfball auf das albanische Tor.

Der „Euclides Danicus“ von Mohr

(entnommen aus: Középiskolai Matematikai Lapok, Budapest, 8/9 1972)

Hilfsmittel für geometrische Konstruktionen sind das Lineal und der Zirkel. Das Lineal dient dazu, um durch zwei gegebene Punkte eine Gerade zu legen, der Zirkel, um einen Kreis mit gegebenem Radius um einen gegebenen Punkt zu zeichnen. Von den konstruierten Punkten werden nur die betrachtet, die als Schnittpunkte von Geraden und Kreisen, die auf diese Weise gezeichnet werden, auftreten. Im weiteren Verlauf der Konstruktion werden die bereits konstruierten Punkte als gegeben angesehen.

Die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen lassen sich demnach aus folgenden drei Grundkonstruktionen zusammensetzen:

aus der Konstruktion der Schnittpunkte

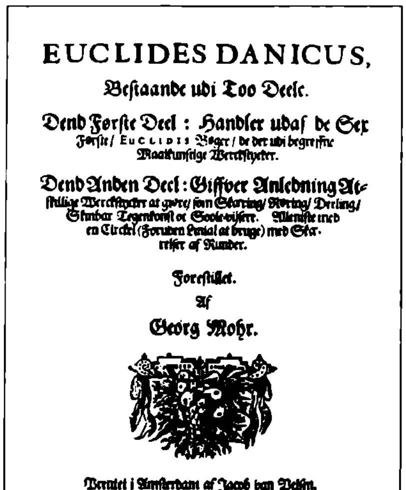
1. zweier Geraden,
2. einer Geraden und eines Kreises und
3. zweier Kreise.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts wies *Lorenzo Mascheroni* (1750 bis 1800, Ordensbruder, lehrte an der Universität von Padua Mathematik) nach, daß sich alle geometrischen Konstruktionen auch mit alleiniger Benutzung des Zirkels durchführen lassen. (Aufgaben, in denen das Ziehen von Geraden gefordert wird, sind als gelöst anzusehen, wenn zwei Punkte der Geraden konstruiert werden können.) *Mascheroni* veröffentlichte seine berühmte Entdeckung 1797 in Padua in seinem Werk „La geometria del compasso“. Diese Arbeit erregte zu damaliger Zeit großes Aufsehen und hat dem Namen des Verfassers in der Geschichte der Wissenschaft ein Denkmal gesetzt.

Weit weniger war in der mathematischen Welt bekannt, daß der dänische Mathematiker *Georg Mohr* bereits 125 Jahre vor *Mascheroni* in seinem Werk mit dem Titel „Euclides Danicus“ zu demselben Ergebnis gelangt ist.

Georg Mohr oder vielmehr *Mohrendal* (*Mohrenthal*) wurde am 1. April 1640 in Kopenhagen geboren. Von Jugend an zog es ihn zur Mathematik. Als 22jähriger ging er nach England, Frankreich und Holland, um sich Grundkenntnisse in Mathematik zu erwerben, und lernte dabei zahlreiche Gelehrte kennen, z. B. *Leibniz* und *Tschirnhaus*. Nach längerer Abwesenheit kehrte er in seine Heimat zurück und lebte ausschließlich von seinen wissenschaftlichen Forschungen. 1687 verlegte er seinen Wohnsitz nach Holland. Ende 1695 übersiedelte er nach Kieslingswalde bei Görlitz und starb dort am 26. Januar 1697.

Mohr hat mehrere Werke geschrieben, seine Manuskripte gingen aber in den Kriegen von 1672 größtenteils verloren. Uns ist nur ein einziges Werk von ihm erhalten geblieben, nämlich der schon oben genannte „Euclides Danicus“, der vor nunmehr über 300 Jahren 1672 in Amsterdam in dänischer und holländischer Sprache erschien, leider ohne die Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen, weil der Titel nicht sehr glücklich gewählt war und zu der Annahme verleitete, es handele sich um einen Auszug oder eine Übersetzung der Elemente von Euklid. Die Arbeit ist in der wissenschaftlichen Literatur vollständig unbekannt geblieben. Erst 1928 wurde man auf sie aufmerksam, als *V. Beck*, damals Hörer an der Universität, bei einem Kopenhagener Buchhändler ein holländischsprachiges Exemplar des Werkes fand; der Kopenhagener Universitätsprofessor *Johannes Hjelmslev*, dem *Beck* das Buch zeigte, studierte es mit großem Interesse und schrieb darüber eine Rezension.



EUCLIDES DANICUS,

Bestaaende udi Too Deele.

Dend Første Deel: Handler udaf de Sex Første/ EUCLIDIS Bøger / de der udi begriffne Maalkunstige Werckstycker.

Dend Anden Deel: Giffver Anledning At skillige Werckstycker at giøre/ som Stuckning/ Rørling/ Deeling/ Sambar Tegenkonst oc Soole-visere. Allenist med en Circkel (Foruden Lenial at bruge) med Sexter af Runder.

Forestillet.

Af

Georg Mohr.

Prentet i Amsterdam af Jacob van Velsen. For Authore, Aar 1672.

A könyv címlapja

Das Werk von *Mohr* erschien 1928 in einer Ausgabe der Kopenhagener Akademie erneut in Kopenhagen in der ursprünglichen dänischen Sprache.

Im ersten Teil des Buches löst der Autor alle in den ersten sechs Büchern der *Elemente Euklids* vorkommenden Konstruktionsaufgaben unter alleiniger Benutzung des Zirkels, im zweiten und letzten Teil behandelt er verschiedenartige Anwendungen von nur mit Hilfe des Zirkels durchführbaren Konstruktionen.

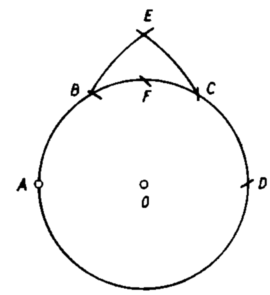
Im folgenden wollen wir unter den Mohrschen Konstruktionen diejenigen kennenlernen, mit deren Hilfe sich alle Konstruktionsaufgaben der Geometrie lösen lassen.

Es handelt sich um die folgenden Aufgaben:

▲1▲ Man verdopple die Strecke $\overline{AO}$.
(Es ist zu beachten, daß hier und in den folgenden Aufgaben unter „Strecke“ stets die Streckenlänge gemeint ist, von der nur die beiden Endpunkte bekannt sind.)

Lösung: Wir schlagen um 0 mit dem Radius $\overline{AO}$ einen Kreis, auf dessen Umfang wir, vom Punkt A ausgehend, dreimal den Radius $\overline{AO}$ als Sehne abtragen; der letzte Teilpunkt ist der dem Punkt A gegenüberliegende Punkt D des Kreises. Daher liegen A, O und D auf einer Geraden, und es ist

$$\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AO}.$$



Durch mehrmalige Anwendung dieses Verfahrens können wir einen Punkt N konstruieren, so daß

$$\overline{AN} = n \cdot \overline{AB}$$

ist, wo n eine positive ganze Zahl ist.

▲2▲ Man teile die Peripherie eines gegebenen Kreises in vier gleiche Teile.

Lösung: Wir tragen, nach Belieben von einem Punkt A des Kreises ausgehend, dreimal den Radius $\overline{AO}$ ab, so daß $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{OA}$ ist. Danach schlagen wir um die Punkte A und D als Mittelpunkte Kreise mit dem Radius $\overline{AC} = \overline{BD}$ und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit E.

Bringen wir jetzt den gegebenen Kreis mit einem um A mit dem Radius $\overline{OE}$ geschlagenen Kreis zum Schnitt und ist F der Schnittpunkt, so ist $\overline{AF}$ eine Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Vierecks.

Beweis: Da in dem rechtwinkligen Dreieck ACD $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{CD}$ ist, gilt

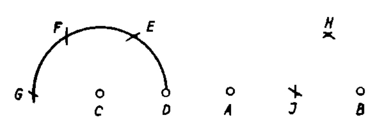
$$\overline{AC}^2 = 3 \cdot \overline{CD}^2, \text{ woraus folgt,}$$

daß in dem rechtwinkligen Dreieck AOE

$$\overline{OE}^2 = 2 \cdot \overline{AO}^2$$

gilt, d. h., $\overline{OE} = \overline{AF} = \overline{AO} \cdot \sqrt{2}$ ist die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Vierecks.

▲3▲ Gegeben seien zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ von der Art, daß $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$; man halbiere die Strecke $\overline{AB}$.

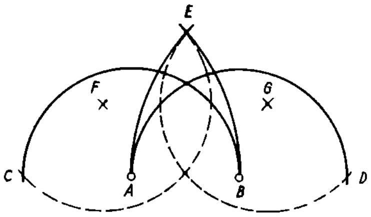


Lösung: Wir schlagen um den Punkt C mit $\overline{CD}$ als Radius einen Halbkreis, auf dem wir den Radius dreimal abtragen, so daß

$$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{CD} \text{ ist.}$$

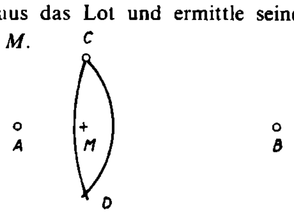
Nun schlagen wir um A mit der Zirkelöffnung $\overline{GE}$ einen Kreis und bringen ihn in H mit einem Kreis zum Schnitt, dessen Radius $\overline{DE}$ und dessen Mittelpunkt B ist. Schließlich zeichnen wir um B und H mit $\overline{CD}$ Kreise, die sich schneiden. Wenn unter den so gewonnenen Punkten J derjenige Punkt ist, dessen Abstand von A gleich $\overline{CD}$ ist, so ist J Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

▲4▲ Man halbiere die Strecke $\overline{AB}$.



Lösung: Zunächst bestimmen wir die Punkte C und D so, daß diese mit $\overline{AB}$ in eine Gerade fallen und $\overline{CA}=\overline{AB}=\overline{BD}$ ist. Danach schlagen wir um die Punkte C und D mit $\overline{BC}=\overline{AD}$ als Radius Kreise und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit E. Nunmehr halbieren wir nach der oben dargelegten Konstruktion die Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{DE}$ in F bzw. G. Schlagen wir schließlich um F und G Kreise durch den Punkt E, die sich noch im Punkt M schneiden, so gewinnen wir in M den gesuchten Halbierungspunkt.

▲5▲ Man fälle auf eine beliebige Gerade AB von einem außerhalb von ihr liegenden Punkt C aus das Lot und ermittle seinen Fußpunkt M.



Lösung: Wir schlagen um A und B durch den Punkt C Kreise, die sich noch in D schneiden. Halbieren wir jetzt gemäß der 4. Aufgabe die Strecke $\overline{CD}$ in M, so ist der Punkt M Fußpunkt des von C aus auf AB gefällten Lots.

▲6▲ Errichte auf einer beliebigen Geraden AB im Punkt A derselben die Senkrechte von der gegebenen Länge $\overline{AC}$!

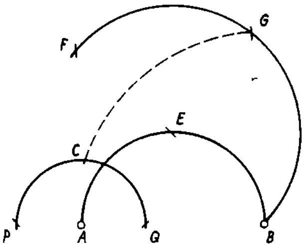
Lösung: Wir zeichnen über $\overline{AB}$ auf Grund von Aufgabe 4 einen Halbkreis und schlagen um A mit dem gegebenen Abstand als Radius einen Kreis, der den Halbkreis in D schneidet (vorausgesetzt, daß der gegebene Abstand kleiner als $\overline{AB}$ ist). Danach halbieren wir auf Grund von Aufgabe 2 den Halbkreis im Punkt E.

Jetzt beschreiben wir um E als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $\overline{BE}$ und bestimmen den B gegenüberliegenden Punkt F. Danach bringen wir den Kreis um F mit dem Radius $\overline{BD}$ mit dem über $\overline{BF}$ geschlagenen Halbkreis in G zum Schnitt.

Bringen wir schließlich den um B mit dem Radius $\overline{BG}$ geschlagenen Kreis mit dem mit $\overline{AC}$ als Radius um A geschlagenen Kreis zum Schnitt, so ist $\overline{AC}$ die gesuchte Senkrechte.

Beweis: In dem rechtwinkligen Dreieck ABD gilt $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2-\overline{AD}^2$,
in dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABE $2\cdot\overline{BE}^2=\overline{AB}^2$
und in dem rechtwinkligen Dreieck BFG
$\overline{BG}^2=\overline{BF}^2-\overline{FG}^2$.
Es ist indessen $\overline{BF}=2\cdot\overline{BE}$ und $\overline{FG}=\overline{BD}$, also $\overline{BG}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$.
In dem Dreieck ABC ist jedoch $\overline{BC}=\overline{BG}$ und $\overline{AC}=\overline{AD}$, woraus folgt, daß $\overline{AC}$ mit $\overline{AB}$ einen rechten Winkel bildet.

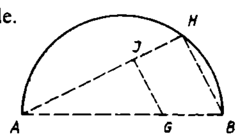
Wir merken an: Sollte die gegebene Strecke nicht kleiner als $\overline{AB}$ sein, d. h., den über $\overline{AB}$ gezeichneten Halbkreis nicht treffen können, so müßten wir das Zweifache, Dreifache, ..., n-fache der Strecke $\overline{AB}$ nehmen und hierüber den Halbkreis zeichnen, um um Ziel zu gelangen.



▲7▲ Auf der durch ihre Punkte A und B bestimmten Geraden trage man von A aus die gegebene Strecke $\overline{MN}$ ab.

Lösung: Zunächst bestimmen wir mit Hilfe der in Aufgabe 6 dargelegten Konstruktion den Punkt C derart, daß $\overline{AC}$ auf der Geraden AB senkrecht steht und gleich $\overline{MN}$ ist. Danach ermitteln wir gemäß der 2. Aufgabe auf dem um A mit dem Radius $\overline{AC}$ beschriebenen Kreis die Punkte P und Q so, daß diese mit AB in eine Gerade fallen. Dann ist $\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{MN}$.

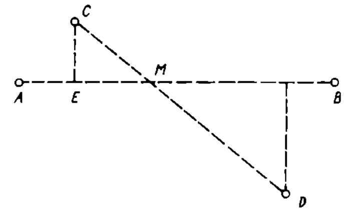
▲8▲ Zu drei Strecken ermittle man die vierte Proportionale.



Lösung: Die gegebenen Strecken seien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und es sei eine solche Strecke $\overline{MN}$ zu suchen, daß
$$\overline{AB}:\overline{CD}=\overline{EF}:\overline{MN}.$$
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß
$$\overline{AB}>\overline{EF}$$
ist, weil wir im Falle $\overline{AB}<\overline{EF}$ immer eine solche ganze Zahl n finden können, daß $n\cdot\overline{AB}$ größer als $\overline{EF}$ wird, und dann die vierte Proportionale zu $n\cdot\overline{AB}$, $n\cdot\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ zu suchen haben.

Die Konstruktion verläuft folgendermaßen: Wir bestimmen auf der Geraden AB den Punkt G so, daß $\overline{AG}=\overline{CD}$ wird (gemäß 7. Aufgabe). Danach zeichnen wir über $\overline{AB}$ einen Halbkreis (gemäß 4. Aufgabe) und bringen ihn mit dem um A mit dem Radius $\overline{EF}$ geschlagenen Kreis in H zum Schnitt. Schließlich bestimmen wir den Fußpunkt J des vom Punkt G aus auf $\overline{AH}$ gefällten Lotes (gemäß 5. Aufgabe). Dann ist die Strecke $\overline{AJ}$ die gesuchte vierte Proportionale.

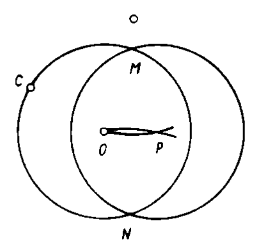
▲9▲ Man bestimme den Schnittpunkt der durch die Punkte A und B bzw. C und D gegebenen Geraden.



Lösung: Wir bezeichnen den Fußpunkt des von den Punkten C und D auf AB gefällten Lotes mit E bzw. F. Die Gerade CD schneide die Gerade AB in M.

Wenn C und D auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen, so ist
$$(\overline{CE}+\overline{DF}):\overline{CE}=\overline{EF}:\overline{EM}.$$
Fallen dagegen die Punkte C und D auf dieselbe Seite der Geraden AB, so ist
$$(\overline{CE}-\overline{DF}):\overline{CE}=\overline{EF}:\overline{EM}.$$
Nun sind $\overline{CE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ bekannt, und es läßt sich daher auf Grund von Aufgabe 7. und 8. $\overline{EM}$ konstruieren. Wenn wir nun schon $\overline{EM}$ kennen, so können wir den Ort von M ermitteln, indem wir von E aus auf $\overline{AB}$ die Strecke $\overline{EM}$ abtragen.

▲10▲ Man bestimme die Schnittpunkte der durch ihre Punkte A und B vorgegebenen Geraden mit dem Kreis um den Mittelpunkt O und dem Radius $\overline{OC}$.



Lösung:

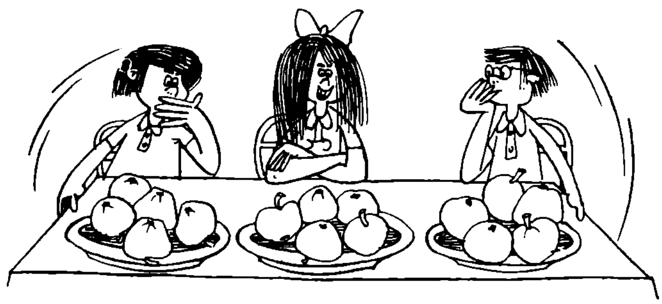
a) O liegt außerhalb der Geraden AB. Wir schlagen um A und B mit dem Radius $\overline{AO}$ bzw. $\overline{BO}$ Kreise, die einander in P schneiden. Nunmehr zeichnen wir um P als Mittelpunkt mit dem Radius $\overline{OC}$ einen Kreis. Die Schnittpunkte M und N der beiden Kreise sind die Schnittpunkte des gegebenen Kreises und der Geraden AB.

b) O liegt auf der Geraden AB. In diesem Falle bestimmen wir auf der Geraden AB die Punkte M und N so, daß $\overline{OM}=\overline{ON}=\overline{OC}$ ist (gemäß Aufgabe 7.)

Wir sehen also, daß die 1. und 2. Grundkonstruktion immer auf die 3. zurückführbar ist, die sich unmittelbar mit einem Zirkel ausführen läßt. Hieraus folgt jedoch, daß jede Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, auch nur mit dem Zirkel durchgeführt werden kann.

Gyula Strommer

Kann man „etwas an niemanden verteilen“?



Überlegungen zu dem alten Thema der Division durch Null.

Immer wieder tauchen gelegentlich Fragen auf, *warum man nicht durch Null dividieren „dürfe“*. Nun sind gewiß in der Mathematik wie in jeder Wissenschaft kritische Fragen nützlich. Es gibt aber in der Mathematik auch Fragen, von denen man bereits mathematisch (!) bewiesen hat, daß sie zu nichts führen. Wir wollen überlegen, wie es damit bei der Frage „Division durch Null“ steht.

Zuerst wollen wir die Tätigkeit „dividieren“ so erklären, daß über sie keine unterschiedlichen Meinungen mehr möglich sind. (Eine solche Erklärung heißt in der Wissenschaft eine *Definition*.) Eine Zahl a durch eine Zahl b zu dividieren, das soll — so erklären wir — folgendes bedeuten:

Man soll untersuchen, ob es eine Zahl x gibt, für die $b \cdot x = a$ gilt. Gibt es *keine* solche Zahl x, so wird erklärt: Die Division von a durch b ist *nicht* möglich. Gibt es dagegen eine solche Zahl x, so soll man untersuchen, ob es *mehr* als eine solche Zahl x gibt. Wenn das der Fall ist, so wird wieder erklärt: Die Division von a durch b ist *nicht* möglich. *Wenn es aber genau eine Zahl x gibt, für die $b \cdot x = a$ gilt, dann* — und wie die vorangehenden Erklärungen zeigen, auch *nur* dann — *wird erklärt: Diese Zahl x sei das Ergebnis der Division von a durch b.*

In Bild 1 wird diese Erklärung verdeutlicht. Wir müssen sie uns gut einprägen, damit wir nicht in manchen Fällen „aus Versehen“ eine andere Erklärung zugrunde legen. Hätte wohl z. B. jeder Leser erklärt, eine Division von a durch b sei *nicht möglich*, wenn es *mehr als eine Zahl x* gibt, für die $b \cdot x = a$ gilt? Manch einer wäre doch sicher bereit gewesen, zu „erklären“:

Dann soll eben *jede* solche Zahl x als ein mögliches „Divisionsergebnis“ gelten. Wir müssen uns also merken, daß die in der Mathematik zugrunde gelegte Division so eine „Erklärung“ nicht zuläßt! Dafür gibt es in der Mathematik gute Gründe. Das Dividieren, das wir erklären wollen, soll nämlich eine *Rechenoperation $a : b$* werden, und eine Rechenoperation liegt nur dann vor, wenn *ihr Ergebnis allein durch die Angabe der ersten Zahl a und der zweiten Zahl b festgelegt* wird: Eine Rechenoperation hat niemals (d. h. für keine Angabe von a und b) mehr als ein „mögliches Ergebnis“.

Nun einige Beispiele zu unserer Definition!

1. Beispiel: Wir wollen prüfen, ob die Division von 2 durch 0 möglich ist. Wir haben also zu fragen: Gibt es eine Zahl x, für die $0 \cdot x = 2$ gilt? Die Antwort lautet: Nein, es gibt keine solche Zahl; denn für *jede* Zahl x gilt $0 \cdot x = 0$, also $0 \cdot x < 2$.

Damit haben wir als Ergebnis: *Die Division von 2 durch 0 ist nicht möglich.*

2. Beispiel: Wir wollen prüfen, ob die Division von 0 durch 0 möglich ist. Wir fragen zuerst: Gibt es eine Zahl x, für die $0 \cdot x = 0$ gilt? Die Antwort lautet: Ja, es gibt eine solche Zahl, z. B. die Zahl 1; denn in der Tat gilt $0 \cdot 1 = 0$. Weiter fragen wir: Gibt es mehr als eine Zahl x, für die $0 \cdot x = 0$ gilt? Antwort: Ja, z. B. außer der Zahl 1 auch die Zahl 2; denn es gilt auch $0 \cdot 2 = 0$. Als Ergebnis fanden wir damit: *Die Division von 0 durch 0 ist nicht möglich.*

3. Beispiel: Wir wollen prüfen, ob die Division von 15 durch 3 möglich ist. Zuerst fragen wir: Gibt es eine Zahl x, für die $3 \cdot x = 15$ gilt? Die Antwort lautet: Ja, z. B. die Zahl 5; denn es gilt $3 \cdot 5 = 15$. Die nächste Frage lautet: Gibt es mehr als eine Zahl x, für die $3 \cdot x = 15$ gilt? Diesmal lautet die Antwort: Nein; denn für *jede* Zahl x, die *kleiner* als 5 ist, gilt $x < 5$ und daher $3 \cdot x < 3 \cdot 5$, d. h. $3 \cdot x < 15$; für *jede* Zahl x aber, die *größer* als 5 ist, gilt $x > 5$, also $3 \cdot x > 3 \cdot 5$, d. h. $3 \cdot x > 15$; es kann also *nur die eine* Zahl 5 die Eigenschaft haben, daß ihr Produkt mit 3 gleich der Zahl 15 ist. — Diese Ergebnisse besagen: *Die Division von 15 durch 3* (ist möglich und) *ergibt die Zahl 5.*

Mancher Leser hat sich vielleicht gewundert, daß in diesen drei Beispielen so einfache Rechnungen mit vielen Worten vorgeführt werden. Wer unsere Frage aber aufmerksam verfolgt hat, der wird gemerkt haben, daß bei ihr die „Schwierigkeit“ gar nicht im Rechnen besteht, sondern in den logischen Überlegungen, die man während des Rechnens nicht aus den Augen verlieren darf. Zum Beispiel mußten wir im 3. Beispiel auf folgendes achten: Als wir beweisen wollten, daß es *nicht mehr als eine* Zahl x gibt, für die $3 \cdot x = 15$ gilt, durften wir in diesem Beweis nicht etwa schon die Tätigkeit des Dividierens benutzen und kurz sagen:

„Wenn eine Zahl x die Eigenschaft $3 \cdot x = 15$ haben soll, dann muß für sie $x = 15 : 3$, d. h. $x = 5$ gelten, also gibt es nur die eine Zahl 5 mit dieser Eigenschaft.“ Hätten wir so „bewiesen“, dann hätten wir das, was wir beweisen wollten, im Beweis schon als „bekannt“ benutzt, nämlich das Divisionsergebnis $15 : 3 = 5$.

Einen solchen *fehlerhaften Beweis*, der das, was er erst zeigen soll, schon benutzt, nennt man einen „Zirkelschluß“. Im 3. Beispiel wurde der Zirkelschluß vermieden; man mußte sich dazu „nur“ ein anderes Hilfsmittel einfallen lassen; das Multiplizieren in Ungleichungen.

Bild 1

Gibt es eine Zahl x, für die $b \cdot x = a$ gilt?

Nein → Division von a durch b nicht möglich

Ja ↓

Gibt es mehr als eine Zahl x, für die $b \cdot x = a$ gilt?

Ja: Es gibt mehr als eine Zahl x, für die $b \cdot x = a$ gilt. → Division von a durch b nicht möglich

Nein: Es gibt genau eine Zahl x, für die $b \cdot x = a$ gilt → Division von a durch b ergibt diese Zahl x

Nun wollen wir über einzelne Beispiele hinausgelangen und zu *allgemeinen* Aussagen kommen.

1. Aussage: Ist a eine von 0 verschiedene Zahl, d. h. gilt $a \neq 0$, so gibt es keine Zahl x, für die $0 \cdot x = a$ gilt. *Für jede Zahl $a \neq 0$ ist folglich die Division von a durch 0 nicht möglich.*

2. Aussage: Es gibt mehr als eine Zahl x, für die $0 \cdot x = 0$ gilt. *Folglich ist die Division von 0 durch 0 nicht möglich.*

3. Aussage: Ist a eine beliebige Zahl und ist b eine von 0 verschiedene Zahl, d. h. gilt $b \neq 0$, so gibt es genau eine Zahl x, für die $b \cdot x = a$ gilt. *Für jede Zahl $b \neq 0$ und für jede Zahl a ist folglich die Division von a durch b möglich.*

Die erste Aussage wird jeder Leser nach dem Muster des 1. Beispiels leicht selbst beweisen können. Die zweite Aussage ist überhaupt dasselbe wie das 2. Beispiel; sie wurde hier nur zur Vollständigkeit nochmals kurz wiederholt. Die dritte Aussage kann erst von Schülern verstanden werden, die schon *gebrochene Zahlen* kennen; würde man das Wort „Zahl" etwa als „natürliche Zahl" verstehen, so wäre die dritte Aussage falsch. Beispielsweise wären zwar $a = 2$ und $b = 3$ natürliche Zahlen mit $b \neq 0$, aber es gäbe keine *natürliche* Zahl x, für die $3 \cdot x = 2$ gelten würde. — Die dritte Aussage, in dieser Weise von der Kenntnis gebrochener Zahlen an verstanden, kann nun grundsätzlich auf ähnlichem Wege wie beim 3. Beispiel bewiesen werden. Wenn man jedoch auch noch auf das Vorkommen positiver und negativer Zahlen achten muß, wird der Beweis etwas schwieriger. Wer sich beim Umgehen mit positiven und negativen Zahlen in Ungleichungen sicher fühlt und etwas Geduld aufbringt, wird den Beweis aber finden können.

Nun wollen wir noch einige Überlegungen zur *Veranschaulichung des Dividierens* durchführen.

Bekannt sei eine Anzahl b von Personen. Vorgeschrieben sei ferner eine Anzahl a von Gegenständen. *Gefragt wird, ob es genau eine Zahl x mit folgender Eigenschaft gibt:* Erhält jede der b Personen genau x Gegenstände, wobei aber niemals ein Gegenstand an zwei verschiedene Personen zugeteilt wird, so ist die Anzahl aller zugeteilten Gegenstände genau die vorgeschriebene Zahl a. Gibt es *keine* solche Zahl x oder gibt es *mehr als eine* solche Zahl x, so ist (wie wir wissen) die Division von a durch b nicht möglich. *Gibt es* aber *genau eine* solche Zahl x, so ist sie das Divisionsergebnis $a : b$, und wir sagen in diesem Falle und in keinem anderen: „Die Zahl x wurde dadurch ermittelt, daß man a Gegenstände gleichmäßig an b Personen *verteilte*." In diesem Sinne können wir an dem zweiten Bild ablesen, wie man 15 Gegenstände an 3 Personen verteilt, wobei sich *genau eine* Möglichkeit ergibt, nämlich daß jede Person genau $(15 : 3 =)$ 5 Gegenstände erhält. Ebenso zeigt das dritte Bild eine Veranschaulichung von $2 : 3 = \frac{2}{3}$.

Fragen wir nun nach einer solchen Veranschaulichung im Falle $1 : 0$, so haben wir zu prüfen, ob es möglich ist, genau eine Zahl x anzugeben, so daß folgendes gilt: Erhalten 0 Personen je x Gegenstände, so ist die Gesamtzahl der *an diese 0 Personen* verteilten Gegenstände genau 1. Die Antwort lautet: Man *kann nicht* „etwas an niemanden verteilen", d. h.: *Es gibt keine* Zahl x, so daß beim Verteilen von je x Gegenständen an 0 Personen insgesamt „etwas" (z. B. 1) zugeteilt würde.

Ebenso müssen wir feststellen: Man *kann nicht* „nichts an niemanden verteilen", d. h.: *Es gibt mehr als eine* (und folglich keine eindeutig bestimmte!) Zahl x, so daß beim Verteilen von je x Gegenständen an 0 Personen insgesamt „nichts" (0 Gegenstände) zugeteilt würde.

Die Rechenoperation des Dividierens $a : b$, praktisch angewandt als „Verteilen" von insgesamt a Gegenständen an b Personen, *ist nur für $b \neq 0$ möglich.*

L. Stammler

Bild 2

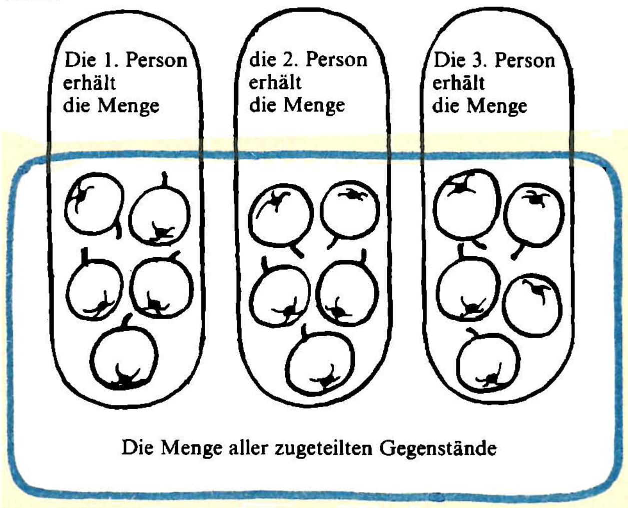
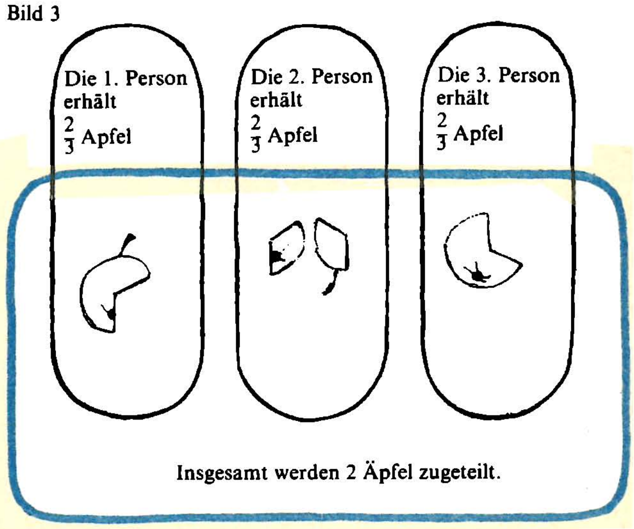
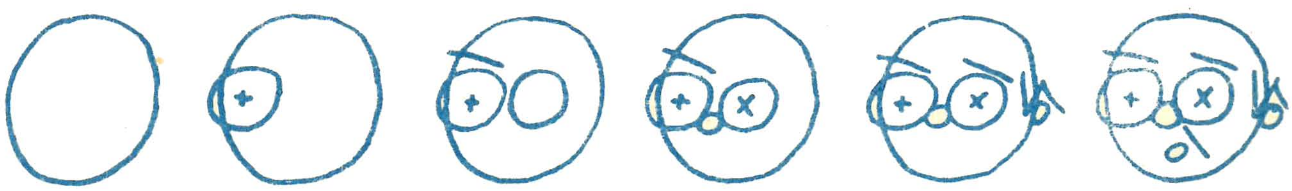


Bild 3





Null ... plus Null ... minus Null ... multipliziert mit Null ... minus Wurzel aus Null das Ganze geteilt durch Null

aus: *Jean Effel, Historio-Grafik* (Eulenspiegelverlag)

Wer löst mit?

alpha -Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1974

▲5▲1195 Welche natürlichen Zahlen n erfüllen zugleich die folgenden Bedingungen?
a) $15 < n < 85$,
b) n ist Vielfaches von 17,
c) n ist nicht durch 3 teilbar.
Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Meuselwitz

▲5▲1196 Es sind zwei natürliche Zahlen zu ermitteln, deren Summe 16 beträgt und deren Differenz gleich dem vierten Teil ihrer Summe ist. *Sch.*

W5 ■ 1197 Einige Schüler teilen 96 Äpfel unter sich zu gleichen Teilen auf. Es wird kein Apfel zerschnitten, und es bleibt kein Apfel übrig. Wären es vier Schüler weniger gewesen, dann hätte jeder von ihnen vier Äpfel mehr erhalten. Wieviel Schüler teilen sich die Äpfel, und wieviel Äpfel erhält jeder von ihnen? *Sch.*

W5 ■ 1198 Ein Rechteck habe die Seitenlängen 10 cm und 16 cm. Welchen Flächeninhalt besitzt ein Quadrat, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat?
Heidi Günther, Sohland, Kl. 7

W5*1199 Ein Quader habe die Kantenlängen 8 cm, 10 cm und 15 cm. Ein zweiter, zum ersten volumengleicher Quader besitzt die Kantenlängen 12 cm und 25 cm. Es ist die Länge seiner dritten Kante zu bestimmen! *Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch Meuselwitz*

W5*1200 Die Summe aus drei natürlichen Zahlen beträgt 63. Die erste dieser Zahlen ist um 3 kleiner als die zweite, die dritte um 3 größer als die zweite. Wie lauten diese drei Zahlen? *Bärbel Eggebrecht, Loitz, Kl. 7*

▲6▲1201 Es sind alle dreistelligen Primzahlen zu bestimmen, für welche das Produkt aus ihren drei Ziffern 252 beträgt. *Sch.*

▲6▲1202 Es ist
a) die kleinste, b) die größte
sechsstellige natürliche Zahl zu ermitteln, die durch 18 teilbar ist und in der Form 71*84* dargestellt wird, wobei für die Sternchen Grundziffern einzusetzen sind. *Sch.*

W6 ■ 1203 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB} = 3$ cm und den Schenkeln $\overline{AC} = \overline{BC} = 5$ cm. Eine Gerade g, die parallel zur Geraden AC verläuft, schneide $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt D und $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt E so, daß der Umfang des Vierecks $ADEC$ genau 11 cm beträgt. Es ist die Länge der Strecke $\overline{AD}$ zu berechnen. *Sch.*

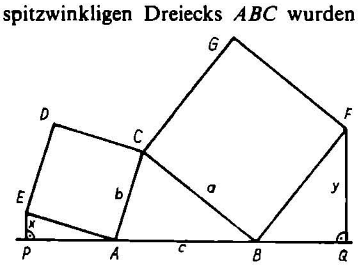
W6 ■ 1204 Gegeben seien drei gebrochene Zahlen a, b und c. Das Produkt aus den beiden ersten Zahlen ist gleich 30,2. Das Produkt aus der ersten und der dritten Zahl ist gleich 19,8. Es ist das Produkt aus der ersten Zahl und aus der Summe der beiden übrigen Zahlen zu berechnen. *Sch.*

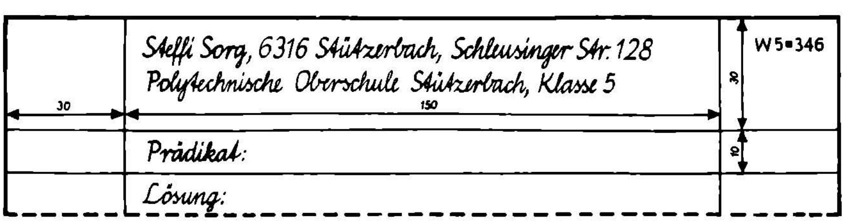
W6*1205 In der Multiplikationsaufgabe

```
**7 · **
     5*4
    *2**
    6***
```

ist jedes Sternchen durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. *Sch.*

W6*1206 Über den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eines spitzwinkligen Dreiecks ABC wurden





Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 oder W* 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

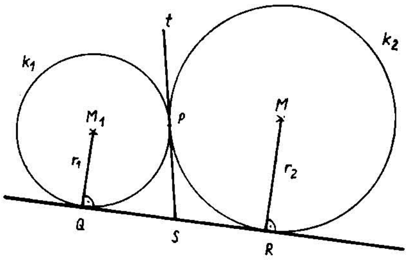
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
Der Jahreswettbewerb 1973/74 läuft von Heft 5/73 bis Heft 2/74. Zwischen dem 1. und 10. September 1974 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/74 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/73 bis 2/74) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1973/74 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück).
Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

die Quadrate $ACDE$ und $BFGC$ konstruiert. Von den Eckpunkten E und F dieser Quadrate wurden die Lote $\overline{EP}=x$ und $\overline{FQ}=y$ auf die Gerade AB gefällt. Es sei $\overline{AB}=c$. Es ist zu beweisen, daß $x+y=c$ gilt.

▲7▲1207 Von einem Dreieck ABC sind gegeben $\overline{AB}=c=7$ cm, $\sphericalangle ABC=\beta=40°$, der Abstand $\overline{SD}=e=2$ cm des Schnittpunktes S der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ABC$ mit der Höhe $\overline{CD}=h_c$ von der Seite $\overline{AB}$. Das Dreieck ABC ist zu konstruieren; die Konstruktion ist zu beschreiben. *Sch.*

▲7▲1208 Die abgebildete Figur stellt zwei sich von außen im Punkte P berührende Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 mit $r_1<r_2$ dar. Im Punkte P wurde die beiden Kreisen gemeinsame Tangente t gezogen. Ferner wurde die beiden Kreisen gemeinsame äußere Tangente QR gezeichnet. Es ist zu beweisen, daß der Schnittpunkt S der beiden Tangenten der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$ ist! *Sch.*



W7 ■ 1209 Ein Schüler sollte 37 mit einer zweistelligen natürlichen Zahl multiplizieren, in der die Ziffer der Zehnerstelle doppelt so groß ist wie die Ziffer der Einerstelle. Beim Abschreiben dieser Aufgabe vertauschte dieser Schüler versehentlich die beiden Ziffern des Faktors, und er erhielt ein Resultat, das um 666 kleiner ist als das gesuchte. Wie lautet der zweite Faktor?

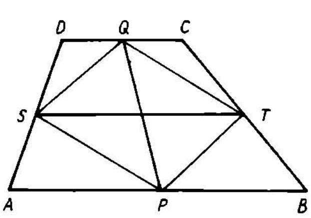
W7 ■ 1210 Es sind zwei natürliche Zahlen zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:

a) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfachen der zweiten Zahl beträgt 1 680.

b) Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl.

Wie lauten die beiden gesuchten Zahlen?

W 7*1211 In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei P die Mitte von $\overline{AB}$, T die Mitte von $\overline{BC}$, Q die Mitte von $\overline{CD}$ und S die Mitte von $\overline{AD}$. Ein solches Trapez ist aus den Strecken $\overline{PT}=4$ cm, $\overline{TQ}=5$ cm, $\overline{PQ}=6$ cm und dem Winkel $\sphericalangle BAD=50°$ zu konstruieren. *Sch.*



W7*1212 Unter $n!$ (lies n Fakultät) versteht man das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n$. So ist z. B. $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$.
Berechne $7!-6!-5!$, indem du die Differenz zunächst vereinfachst. *Sch.*

▲8▲1213 Es sind alle natürlichen Zahlen n anzugeben, für die die Summe
$s=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$
gleich einem Vielfachen von 10 ist.
Ch. Lerche, Hähnichen

▲8▲1214 a) Man beweise, daß in einem ebenen konvexen n-Eck ($n\geqq 3$) höchstens drei Winkel spitze Winkel sind.

b) Man konstruiere ein spezielles ebenes konvexes Fünfeck, das genau drei spitze Winkel hat.

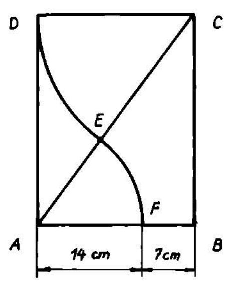
c) Man konstruiere ein spezielles ebenes *nicht*konvexes Fünfeck, das vier spitze Winkel hat.

Anleitung zur Lösung: Ein ebenes Vieleck ist genau dann konvex, wenn es nur spitze, rechte oder stumpfe Winkel, also keine überstumpfen Winkel, hat.

Für die Winkelsumme eines ebenen n-Ecks gilt $s=(n-2)\cdot 180°$. *T.*

W8 ■ 1215 In dem Buch des Georgiers *Suchan-Saba Orbeliani* (1658 bis 1725) „Die Weisheit der Lüge“, einer Sammlung von Fabeln und Erzählungen, finden wir die folgende Aufgabe:
Drei Brüder wollten sich voneinander trennen und ihren Besitz an Ziegen und Zicklein aufteilen. Sie sagten: „Zehn Ziegen haben je ein Zicklein, zehn je zwei Zicklein und zehn je drei; wir wollen sie so unter uns teilen, daß kein Bruder mehr erhält als der andere und auch kein Zicklein von seiner Mutter getrennt wird.“
Wie konnten die drei Brüder ihren Besitz an Ziegen und Zicklein aufteilen? *L.*

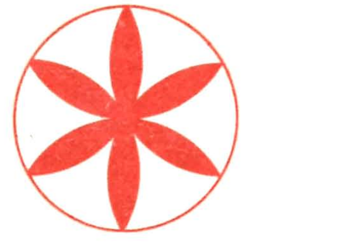
W8 ■ 1216 Die Figur stellt ein Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB}<\overline{BC}$ dar. Um den Punkt C wurde mit dem Radius $\overline{CD}$ ein Kreisbogen



beschrieben, der die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkte E schneidet. Um den Punkt A wurde ein weiterer Kreisbogen mit dem Radius $\overline{AE}$ beschrieben, der die Seite $\overline{AB}$ in dem inneren Punkt F so schneidet, daß $\overline{AF}=14$ cm und $\overline{FB}=7$ cm gilt. Es ist die Länge der Rechteckseite $\overline{BC}$ zu berechnen.
Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen

W 8*1217 Man beweise, daß jedes ebene konvexe Viereck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ und $\overline{DA}=d$, in dem
$a+b=c+d$ und $b+c=d+a$
gilt, ein Parallelogramm ist. *Sch.*

W 8*1218 Man berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Rosette und entscheide, ob er größer als, kleiner als oder gleich $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des umbeschriebenen Kreises ist.



Dabei sei der Radius r des umbeschriebenen Kreises gegeben. Die sechs Teile der Rosette seien von Kreisbögen begrenzt, die den Radius r haben. *L.*

W 9 ■ 1219 Der neue Personenkraftwagen *Shiguli WAS 2103* aus dem Automobilwerk in Togliatti an der Wolga erreicht bei einer Fahrt aus dem Stand die Geschwindigkeit von 80 km $\cdot$ h^{-1} in nur 10 s. Dabei kann angenommen werden, daß die Beschleunigung konstant ist.

a) Mit welcher Beschleunigung (in m $\cdot$ s^{-2}) fährt der Kraftwagen bis zur Erreichung dieser Geschwindigkeit?

b) Wie lang ist die Strecke, die der Kraftwagen dabei zurücklegt?

c) In welcher Zeit erreicht dieser Kraftwagen bei der Fahrt aus dem Stand seine Höchstgeschwindigkeit von 150 km $\cdot$ h^{-1}, wobei wieder eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und die gleiche Beschleunigung wie unter a) angenommen sei.

d) Wie lang ist die Strecke, die der Kraftwagen bis zur Erreichung dieser Höchstgeschwindigkeit zurücklegt?

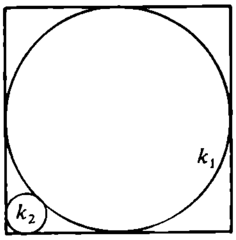
Anleitung zur Lösung: Für eine gleichmäßig beschleunigte Fahrt aus dem Stand gelten die Formeln (vgl. Tafelwerk, 7. –12. Klasse, S. 74): $v=a\cdot t$, $s=\frac{a\cdot t^2}{2}$.

Dabei ist t die Zeit (in s), bei der Beschleunigung a (in m$\cdot$s^{-2}) in der die Geschwindigkeit v (in m$\cdot$s^{-1}) erreicht wird und der Weg s (in m) zurückgelegt wird. *L.*

W 9 ■ 1220 Es sei ABC ein Dreieck mit den Seiten $\overline{BC}=a=9$ cm, $\overline{AC}=b=12$ cm und $\overline{AB}=c=15$ cm.
Man beweise, daß sich auf der Seite $\overline{BC}$ dieses Dreiecks ein innerer Punkt D so finden läßt, daß die Längen der Strecken $\overline{CD}=x$ cm und $\overline{AD}=y$ cm ganzzahlige Maßzahlen x und y haben. *T.*

W 9*1221 Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c mit $a+b+c=0$
$ab+ac+bc\leqq 0$ gilt. *H. Gratias, EOS „Ernst Schneller“, Sömmerda, Kl. 12*

W 9*1222 Einem Quadrat sei ein Kreis k_1 einbeschrieben, der alle vier Seiten dieses Quadrates berührt. Ferner liege innerhalb dieses Quadrates ein zweiter Kreis k_2, der zwei Quadratseiten berührt und außerdem den Kreis k_1 von außen berührt.



a) Es ist der Radius x des Kreises k_2 zu berechnen, wobei die Seitenlänge a des Quadrates gegeben sei.
b) Wievielmal so groß ist der Flächeninhalt des Kreises k_1 wie der Flächeninhalt des Kreises k_2?

I. Kunath, Meißen

W 10/12 ■ 1223 Ein sterbender Vater teilte sein Geldvermögen (das aus lauter gleichartigen Münzen bestand) zu gleichen Teilen unter seinen Söhnen auf und gab dabei dem ersten Sohn eine Münze und $\frac{1}{7}$ des restlichen Geldes, dem zweiten zwei Münzen und $\frac{1}{7}$ des (nun noch verbliebenen) Restes, dem dritten drei Münzen und $\frac{1}{7}$ des (nun noch verbliebenen) Restes usw.; doch in diesem Augenblick starb der Vater, und es soll festgestellt werden, wieviel Söhne er gehabt und wieviel Münzen er besessen hat.

Bemerkung: Diese Aufgabe stammt von dem byzantinischen Mathematiker *Maximos Planudes* von Nikomedia, der im 13. Jahrhundert gelebt und Bücher über die Arithmetik geschrieben hat. *L.*

W 10/12 ■ 1224 Es sind alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{2}{3}, \quad (1) \qquad \frac{xz}{x+z}=\frac{3}{4}, \quad (2) \qquad \frac{yz}{y+z}=\frac{6}{5} \quad (3)$$

zu ermitteln. *W. Janous, Innsbruck*

W 10/12*1226 Man ermittle alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen, deren Summe $x+y$, deren Produkt xy und deren Differenz der Quadrate x^2-y^2 einander gleich sind.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

W 10/12*1225 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 15 cm. Man beweise, daß sich auf der Seite $\overline{AB}$ dieses Dreiecks ein innerer Punkt D so finden läßt, daß die Längen der Strecken $\overline{AD}=x$ cm und $\overline{CD}=y$ cm ganzzahlige Maßzahlen x und y haben. *T.*

Aufgaben aus Olympiaden der SR Rumänien

Überreicht durch Prof. C. Ottescu, Bukarest

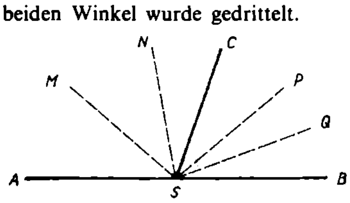
Klasse 5

▲1▲ In einem bestimmten volkseigenen Betrieb sind Facharbeiter und angelernte Arbeiter tätig. Ein Facharbeiter stellt durchschnittlich 20 Werkstücke, ein angelernter Arbeiter 15 Werkstücke je Tag her. Ein Meister soll eine aus 12 Werktätigen bestehende Brigade zusammenstellen, die täglich wenigstens 220 Werkstücke fertigt. Dabei sollen in diese Brigade möglichst viele angelernte Arbeiter aufgenommen werden.
Aus wieviel Facharbeitern bzw. angelernten Arbeitern muß sich diese Brigade zusammensetzen?

▲2▲ In einem Beutel befinden sich genau 10 weiße, 12 schwarze und 16 rote Kugeln von gleicher Größe und gleichem Gewicht. Wieviel Kugeln muß man dem Beutel mit verbundenen Augen entnehmen, um mit Sicherheit 3 Kugeln von der gleichen Farbe zu erhalten?

Klasse 6

▲1▲ Die abgebildete Figur stellt zwei Nebenwinkel $\sphericalangle ASC$ und $\sphericalangle BSC$ dar. Jeder dieser beiden Winkel wurde gedrittelt.



Weise nach, daß der Winkel $\sphericalangle NSP$ konstant ist, d. h., daß er unabhängig von der Größe des Winkels $\sphericalangle ASC$ ist!
Wie groß muß der Winkel $\sphericalangle ASC$ sein, wenn $\sphericalangle ASN = \sphericalangle NSQ$ gelten soll?

▲2▲ Berechne den Wert des Terms $\frac{3b}{2a+3b}$ für $\frac{a}{b}=0{,}6$!

Klasse 7

▲1▲ Drei Schüler *Axel*, *Bernd* und *Dieter* haben zur Finanzierung eines gemeinsamen Ausfluges zusammen 225 Lei gespart. Die Ersparnisse von Axel betrugen $\frac{2}{3}$ der Ersparnisse von Bernd, und die Ersparnisse von Bernd betrugen $\frac{3}{4}$ der Ersparnisse von Dieter. Die Unkosten für den Ausflug beliefen sich aber nur auf insgesamt 120 Lei, und jeder dieser Schüler hatte den gleichen Anteil zu tragen.
Wieviel Lei verblieben jedem dieser drei Schüler von den Ersparnissen?

▲2▲ Hans sagt zu Bruno: „Denke dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl und multipliziere sie mit 2. Addiere zu diesem Produkt 50. Dividiere das so erhaltene Ergebnis durch 2 und subtrahiere danach die von dir gedachte Zahl. Das Endergebnis deiner Rechnung beträgt genau 25."
Begründe, warum Hans das Endergebnis der Rechnung voraussagen konnte!

Klasse 8

▲1▲ Es seien a und b reelle Zahlen, und es sei $E=a^2+b^2-3a-3b$.
a) Man untersuche, ob E einen kleinsten Wert annimmt und gebe bejahendenfalls diesen Wert an.
b) Man weise nach, daß $E>0$ gilt, falls $a>3$ und $b>3$.

▲2▲ Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}=a$ und $\overline{CD}=b$, wobei $a>b$ sei.
1. Man drehe dieses Trapez um seine kleinere Grundseite, so daß ein Rotationskörper entsteht.
2. Man drehe dieses Trapez um seine größere Grundseite, so daß wieder ein Rotationskörper entsteht.
Wann hat der entstandene Rotationskörper ein größeres Volumen, im 1. Fall oder im 2. Falle? Können die Volumina einander gleich sein?

Klasse 9

▲1▲ Es sind alle reellen Zahlen a und b anzugeben, für die die Ausdrücke

$$E_1=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{ab(1+ab)}$$

und $$E_2=\frac{1}{a(b-a)}+\frac{1}{b(a-b)}$$

definiert sind, und es ist zu beweisen, daß für alle diese a und b $E_1=E_2$ gilt.

▲2▲ Eine Balkenwaage muß gleichlange Arme haben, damit die Masse einer Ware richtig ermittelt wird. Auf einem Markt stellt ein Käufer fest, daß die Waage eines Händlers ungleiche Arme hat; daher befindet sich die Waage nicht mehr im Gleichgewicht, wenn die Ware und die Wägestücke vertauscht werden. Der Käufer, der 2 kg einer Ware kaufen will, verlangt daher, daß ihm mit dieser Waage zunächst 1 kg so abgewogen wird, daß die Ware links und das Wägestück rechts liegt, und dann ein weiteres Kilogramm so, daß die Ware rechts und das Wägestück links liegt. Es soll entschieden und begründet werden, ob der Käufer auf diese Weise mehr als 2 kg, weniger als 2 kg oder genau 2 kg der wahren Masse der Ware erhält. (Dabei soll angenommen werden, daß die Waage sich im unbelasteten Zustand im Gleichgewicht befindet.)

Aufgaben Klasse 10 auf S. 39

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil.

Horst Baumann

Leiter des Lehrstuhles Math. f. Ökonomen an der Handelshochschule Leipzig

Die *Handelshochschule* Leipzig bildet in einem vierjährigen Direktstudium Kader für die Tätigkeit in zentralen und bezirklichen wirtschaftsleitenden Organen und Einrichtungen des Binnenhandels, in zentralen und örtlichen staatlichen Organen für Handel und Versorgung sowie in Bildungs- und Forschungseinrichtungen des Binnenhandels aus.

Im Verlauf des Studiums erhalten die Studenten der Hochschule eine umfassende Ausbildung in Marxismus-Leninismus, in Politischer Ökonomie, in der Ökonomie der sozialistischen Warenzirkulation und werden mit den modernen Methoden der Leitung, Planung und Organisation des sozialistischen Binnenhandels vertraut gemacht. Dazu dient auch die in den ersten beiden Studienjahren erfolgende Ausbildung im Fach Mathematik für Ökonomen. Hier werden den Studenten die wichtigsten mathematischen Verfahren für die Modellierung und Optimierung ökonomischer Prozesse einschließlich der dazu notwendigen mathematischen Grundkenntnisse vermittelt. Die mathematische Ausbildung ist in ihrem fachspezifischen und methodischen Aufbau so gestaltet, daß die Bildungs- und Erziehungsmöglichkeiten der Mathematik, besonders die Fähigkeiten und Fertigkeiten zum logischen und schöpferischen Denken und zur Abstraktion bestmöglich genutzt und gefördert werden. Neben den mathematischen Grundlagen, die die Stoffkomplexe

mathematische Logik und Mengenlehre,
lineare Algebra (insbesondere Matrizenrechnung),
Differential- und Integralrechnung,
Wahrscheinlichkeitsrechnung

umfassen, wird besonders in der Ausbildung im Fach Mathematik für Ökonomen die praktische Anwendung mathematischer Verfahren zur Modellierung und Optimierung ökonomischer Prozesse im Handel dargelegt. Einen breiten Raum nehmen dabei die lineare und nichtlineare Optimierung, die Netzplantechnik, die für den Handel außerordentlich wichtigen Fragen der Transport- und Standortmodellierung und -optimierung sowie die Lagerhaltungsmodelle ein.

Nach Abschluß der zweijährigen Ausbildung im Fach Mathematik für Ökonomen besitzen dann die Studenten ein anwendungsreifes Wissen, das sie in den Fachdisziplinen der Studienrichtung Binnenhandel anwenden müssen.

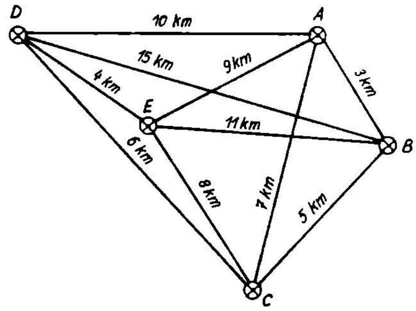
Die folgende Aufgabe ist aus dem sehr wichtigen Gebiet der *Transportoptimierung* entnommen und soll die Nutzung des mathematischen Instrumentariums für die Optimierung des Transportprozesses veranschaulichen.

▲1229▲ Die regelmäßige Belieferung der Einzelhandelsverkaufsstellen mit Nahrungs- und Genußmitteln erfordert eine exakte Planung des Einsatzes der Transportfahrzeuge. So wirken sich ungenügende Auslastung der Kapazität der Lieferfahrzeuge, ungünstige Festlegung der Auslieferungstouren nachteilig für die gesamte Volkswirtschaft aus, da unnötige zusätzliche Kosten entstehen und Transportfahrzeuge unnötig gebunden werden, die an anderer Stelle dringend gebraucht werden. Der verantwortliche Einsatzleiter im volkseigenen Handelstransportbetrieb muß daher mit modernen Planungsmethoden den rationellsten Einsatz der ihm zur Verfügung stehenden Transportfahrzeuge sowie deren bestmögliche Auslastung sichern. Dazu bedient er sich spezieller mathematischer Methoden und Modelle der Transportoptimierung. Für die günstigste Gestaltung der Touren für die Belieferung der Einzelhandelsverkaufsstellen durch den sozialistischen Großhandel muß dann das sogenannte Rundfahrtmodell angewandt werden.

Die Problemstellung für dieses Rundfahrtmodell kann man wie folgt formulieren:

Es sollen von *einem* Lager aus die verschiedenen Einzelhandelsverkaufsstellen in einer Reihenfolge (Rundfahrt) derart nacheinander angefahren werden, daß die zurückgelegte Gesamtstrecke zu einem *Minimum* wird. Dabei wird jede Verkaufsstelle innerhalb der Rundfahrt genau einmal berührt. Ferner muß das Fahrzeug am Ende der Rundfahrt wieder in das Lager zurückkehren.

Für unsere zu lösende Aufgabe wollen wir davon ausgehen, daß vier Orte A, B, C und D mit je einer Verkaufsstelle von einem Lager E aus in einer Rundfahrt angefahren werden sollen. Die Entfernungen zwischen diesen Orten sind aus der nachstehenden Skizze zu entnehmen.



Eine Rundfahrt wäre z. B.:

$$E \to A \to C \to D \to B \to E$$

mit einer Gesamtentfernung von

$$9+7+6+15+11=48 \text{ (km)}$$

oder

$$A \to D \to B \to C \to E \to A$$

mit einer Gesamtentfernung von

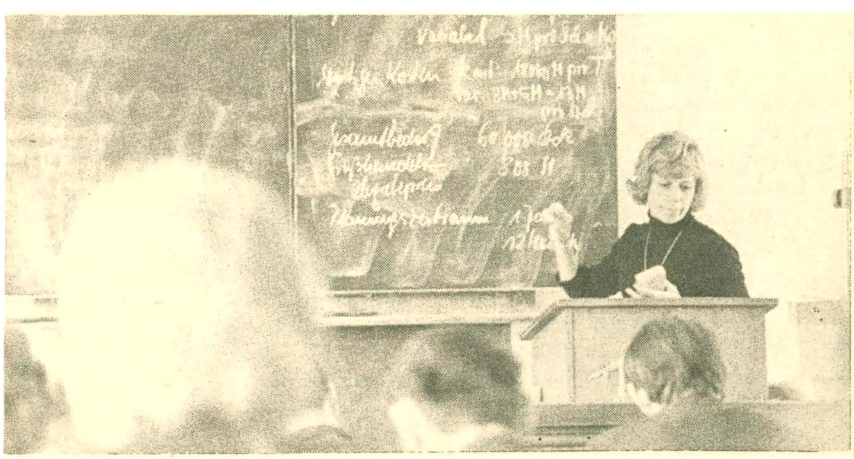
$$10+15+5+8+9=47 \text{ (km)}.$$

Diese Rundfahrten sind allerdings — wie selbst eingeschätzt werden kann — sehr ungünstig.

Berechne nun für diese 5 Orte die optimale Rundfahrt, d. h. die Rundfahrt, für die die zurückgelegte Gesamtentfernung ein Minimum wird.

Als Lösungshinweis sei gegeben, daß es sich hier um eine kombinatorische Aufgabenstellung handelt!

Studenten der HHL im Mathematikseminar



Weiter durch die Welt der Tetraeder

Wer sein räumliches Vorstellungsvermögen trainieren will, der folge der Fortsetzung unseres Streifzuges durch die Welt der Tetraeder. Wir hatten ihn im 5. Jahrgang dieser Zeitschrift, 1971, Heft 5, S. 106—107, begonnen. Zuletzt waren wir den rechtwinkligen Tetraedern begegnet:

Bezeichnung: Ein Tetraeder, das in einer Ecke paarweise senkrecht aufeinander stehende Kanten besitzt, heißt ein *rechtwinkliges Tetraeder.*

Die rechtwinkligen Tetraeder entsprechen in gewisser Weise den rechtwinkligen Dreiecken in der Ebene. Beim Nennen des Begriffs „rechtwinkliges Dreieck" denkt ihr gewiß sofort an die mit den rechtwinkligen Dreiecken verknüpften Sätze: Kathetensatz, Höhensatz, Satz von Pythagoras (manchmal „Satzgruppe Pythagoras" genannt). Es heißt der Satz von Pythagoras gelegentlich auch „ebener Pythagoras", und zwar dann, wenn man ihn kurz und knapp unterscheiden will vom

„räumlichen Pythagoras", der benutzt wird, wenn man etwa die Länge einer Diagonale eines Quaders oder eines Würfels aus den Kantenlängen berechnen will, oder vom

„trigonometrischen Pythagoras", der in der Theorie der trigonometrischen Funktionen die Beziehung „$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ für alle Winkel φ" bedeutet.

Uns geht es nun um einen anderen „räumlichen Pythagoras":

3. Der Pythagoreische Lehrsatz für rechtwinklige Tetraeder

Laßt eure Fantasie einmal spielen, um einen Satz von Pythagoras für rechtwinklige Tetraeder zu formulieren! An die Stelle von Hypotenuse und Katheten einerseits und Hypotenusen- und Kathetenlängen andererseits könnten welche Tetraederstücke treten? ... Das Resultat der Bemühungen ist, daß folgende Behauptung wünschenswerterweise richtig sei:

Satz 1: Es sei $SABC$ ein rechtwinkliges Tetraeder mit senkrecht aufeinander stehenden Kanten bei S. Wird einmal (der Kürze wegen) der Flächeninhalt der Dreiecke ΔABC, ΔABS, ΔBCS bzw. ΔCAS bezüglich mit (ABC), (ABS), (BCS) bzw. (CAS) bezeichnet, so gilt:

$(ABS)^2+(BCS)^2+(CAS)^2=(ABC)^2$.

Beweis: Zum Beweis dieses und weiterer Sätze benötigen wir

a) bezüglich eines rechtwinkligen Dreiecks den Satz von Pythagoras,
den Höhensatz,
den Kathetensatz sowie

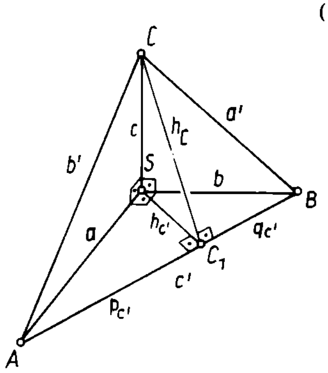
b) aus der darstellenden Geometrie den folgenden Sachverhalt, den ihr euch übrigens auch bequem selber klarmachen könnt:

Es wird die senkrechte Parallelprojektion des Raumes auf eine Ebene π betrachtet. Zwei senkrecht zueinander stehende (sich schneidende oder windschiefe) Geraden, von denen die eine zur Bildebene parallel liegt und die andere nicht auf der Bildebene senkrecht steht, werden dieser Abbildung unterworfen. Sie bilden sich als zwei senkrecht aufeinander stehende Geraden ab.

Nun zum Beweis des Satzes 1. Die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABS, ΔBCS und ΔCAS erhalten wir natürlich sofort. Mit den aus Bild 5 zu entnehmenden Bezeichnungen ist

$$(ABS)=\frac{1}{2}ab,\quad (BCS)=\frac{1}{2}bc,\quad (CAS)=\frac{1}{2}ca. \tag{1}$$

Bild 5



Von dem Dreieck ΔABC denken wir uns die Höhe h_C durch den Punkt C konstruiert; der Höhenfußpunkt sei C_1. — Stellt die Figur den Sachverhalt richtig dar? Diese Frage bedeutet: Prüfe, ob C_1 tatsächlich zwischen A und B liegt! Das ist gleichwertig mit einem Nachweis der Aussage: Das Dreieck ΔABC unseres rechtwinkligen Tetraeders $SABC$, dessen Kanten bei S senkrecht aufeinander stehen, ist spitzwinklig. — Das Lot $h_{c'}$ aus S auf die Gerade AB hat C_1 als Fußpunkt (Beweis?). Anhand des Bildes 5 ersehen wir:

$h_{c'}^2=p_{c'}\cdot q_{c'}$ (Höhensatz), (*)

$a^2\ =p_{c'}\cdot(p_{c'}+q_{c'})$ (Kathetensatz), somit

$b^2\ =q_{c'}\cdot(p_{c'}+q_{c'})$

$a^2b^2=p_{c'}\cdot q_{c'}\cdot(p_{c'}+q_{c'})^2$, wegen (*) und $(p_{c'}+q_{c'})^2=a^2+b^2$:

$=h_{c'}^2\cdot(a^2+b^2)$, daher

$h_{c'}^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; analog: $h_{a'}^2=\dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}$,

$h_{b'}^2=\dfrac{c^2a^2}{c^2+a^2}$. Nun ist

$$h_C^2=h_{c'}^2+c^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+c^2\text{, also} \tag{2}$$

$$h_C^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}; \tag{3}$$

analog: $h_A^2=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2+c^2}$,

$h_B^2=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{c^2+a^2}$.

Damit ergibt sich wegen $\overline{AB}^2=(p_{c'}+q_{c'})^2=a^2+b^2$ zunächst

$$(ABC)^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2\cdot h_C^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \tag{4}$$

und weiter nach (1):

$(ABC)^2=(ABS)^2\cdot(BCS)^2+(CAS)^2$, (5, Satz 1)

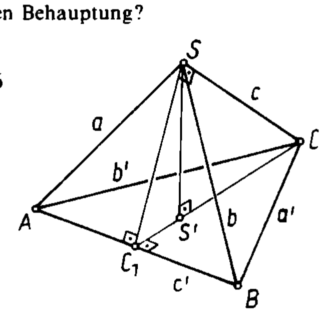
w. z. b. w.

Aufgabe 6: Formuliere die Umkehrung von Satz 1, und beweise die Gültigkeit dieser Umkehrung!

4. Der Kathetensatz für rechtwinklige Tetraeder

Nachdem es gelungen ist, den Satz von Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke aus der Ebene in den Raum für rechtwinklige Tetraeder zu übertragen, ist doch die Frage sicherlich naheliegend: Lassen sich in entsprechender Weise auch der Kathetensatz und der Höhensatz für rechtwinklige Tetraeder aussprechen? Wieder soll sich eure mathematische Fantasie angeregt fühlen! ... Wie steht es etwa mit der Gültigkeit der folgenden Behauptung?

Bild 6



Satz 2: Es sei $SABC$ ein rechtwinkliges Tetraeder mit senkrecht aufeinander stehenden Kanten bei S. Das Lot von S auf die

gegenüberliegende Seite ΔABC habe den Fußpunkt S'. Dann gilt, wenn Dreiecksflächeninhalte wie in Satz 1 bezeichnet werden:

$$\left\{\begin{array}{l}(ABS')\cdot(ABC)=(ABS)^2\\(BCS')\cdot(ABC)=(BCS)^2\\(CAS')\cdot(ABC)=(CAS)^2\end{array}\right. \quad (6, \text{Satz } 2)$$

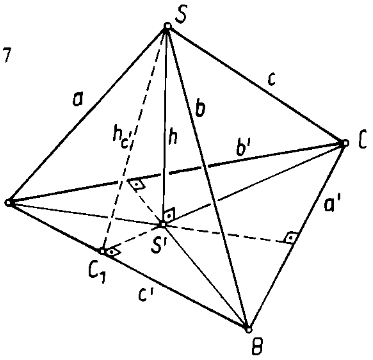
Aufgabe 7: Beweise den Satz 2!

Anleitung: Schneide die Ebene $SS'C$ mit den Ebenen ABC und ABS; der Schnittpunkt von $SS'C$ mit der Geraden AB ist C_1, der Fußpunkt des Lotes aus S auf AB. Die Ebene $SS'C$ steht auf AB senkrecht. Notiere für das rechtwinklige Dreieck ΔSCC_1 eine geeignete der beiden Aussagen des Kathetensatzes und multipliziere mit $\overline{AB}^2$!

5. Der Höhensatz für rechtwinklige Tetraeder

Noch leichter als der Pythagoreische Lehrsatz aus der Ebene in den Raum ließ sich also der Kathetensatz für rechtwinklige Tetraeder übertragen. Das stimmt uns bezüglich einer Übertragung des Höhensatzes hoffnungsfroh! Konstruieren wir also die Höhe h eines rechtwinkligen Tetraeders $SABC$, das Lot aus S auf ΔABC; der Fußpunkt sei S' (Bild 7). Während ein rechtwinkliges Dreieck durch die Höhe auf die Hypotenuse in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, definiert die Tetraederhöhe h sicher kein einziges rechtwinkliges Tetraeder! Das scheint nun wieder für unser Übertragungsvorhaben weniger günstig zu sein.

Bild 7



Ermitteln wir erst einmal die Länge der Höhe h; Bild 7. Dies ist eine leichte Anwendung der Beziehung (2), die auf das rechtwinklige Dreieck ΔABS bezogen ist. Gemäß (2) gilt in dem rechtwinkligen Dreieck ΔSCC_1:

$h^2=\frac{c^2\cdot h_{c'}^2}{c^2+h_{c'}^2}$, also nochmals nach (2):

$$h^2=\frac{c^2\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}{c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}. \quad (7)$$

In dem „räumlichen Kathetensatz" (Satz 2) haben die Flächeninhalte (ABS'), (BCS'), (CAS') die Stelle der Hypotenusenabschnitte p, q eines rechtwinkligen Dreiecks eingenommen. Nennen wir

$(BCS')=P$, $(CAS')=Q$, $(ABS')=R$,

dann folgt aus (6) (Satz 2) zusammen mit (1) und (4):

$$P\cdot Q\cdot R=(BCS')\cdot(CAS')\cdot(ABS')$$
$$=\frac{(BCS)^2\cdot(CAS)^2\cdot(ABS)^2}{(ABC)^3}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}b^2c^2\cdot\frac{1}{4}c^2a^2\cdot\frac{1}{4}a^2b^2}{\frac{1}{8}\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^3}}$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{a^4b^4c^4}{\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^3}} \text{ oder}$$

$$P\cdot Q\cdot R=\frac{abc}{8}\cdot h^3 \quad (8)$$

Daß die Tetraederhöhe h unser Tetraeder $SABC$ nicht in rechtwinklige Tetraeder zu zerlegen vermag, hat anscheinend zur Folge, daß bei der Übertragung des Höhensatzes für rechtwinklige Dreiecke ($p\cdot q=h^2$) in den Raum für rechtwinklige Tetraeder ein Korrekturfaktor ins Spiel gebracht werden muß; solch ein Faktor ist sichtlich auch aus Dimensionsgründen nötig (links steht eine Maßzahl für cm^6, also muß auch rechts eine solche stehen). Insgesamt haben wir damit den

Satz 3: Es sei $SABC$ ein rechtwinkliges Tetraeder mit senkrecht aufeinander stehenden Kanten bei S der Längen a, b, c. Die senkrechte Projektion der Seitenflächen ΔABS, ΔBCS und ΔCAS auf die Ebene des Dreiecks ΔABC liefert die Dreiecke $\Delta ABS'$, $\Delta BCS'$ und $\Delta CAS'$. Werden die Flächeninhalte $(BCS')=P$, $(CAS')=Q$, $(ABS')=R$ eingeführt und wird die Länge der Höhe SS' mit h bezeichnet, so gilt:

$$P\cdot Q\cdot R=\frac{abc}{8}\cdot h^3.$$

Nun kann aber dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke $h^2=p\cdot q$ mit Hilfe des Kathetensatzes $p\cdot c=a^2$, $q\cdot c=b^2$ auch die Form

$\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}=h^2$ oder wegen $c^2=a^2+b^2$

$$h^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \quad (9)$$

gegeben werden, was schon aus (2) bekannt ist. Diese Form ist mit (7) unmittelbar vergleichbar. Das kann man auf folgende Weise noch offensichtlicher machen:

Aus (9) ergibt sich als Beziehung zwischen den Katheten und der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

und aus (7) erhalten wir als Beziehung zwischen den von S ausgehenden, zueinander senkrechten Kanten a, b, c und der Höhe h eines rechtwinkligen Tetraeders $SABC$:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \quad (11)$$

Hierin können wir eine genaue Übertragung des Höhensatzes sehen. (Wer die trigonometrischen Funktionen kennt, kann aus (11) folgendes herleiten: Werden die Winkel $\alpha=\sphericalangle ASS'$, $\beta=\sphericalangle BSS'$, $\gamma=\sphericalangle CSS'$ zwischen der Höhe SS' und den ausgezeichneten Kanten SA, SB, SC eingeführt, so gilt: $1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$,

eine in der analytischen Geometrie des Raumes wichtige und oft verwendete Beziehung. Kannst du eine entsprechende Beziehung in der Ebene aus (10) herleiten?

Das rechtwinklige Tetraeder birgt noch eine ganze Reihe interessanter Eigenschaften. Es spielt eine wichtige Rolle beispielsweise in der Axonometrie, wie sie in dem Aufsatz von *Kühn, E.:* Darstellende Geometrie und Architekturausbildung II, diese Zeitschrift **6** (1972), H. 6, S. 128—129, auf S. 128 (Satz von Pohlke) angedeutet wird. Eine hübsche Anwendung findet das rechtwinklige Tetraeder im „Katzenauge", vergl. *Schröder, E.:* Auch ein Schlußlicht hat es in sich, diese Zeitschrift **4** (1970), H. 1, S. 8—9. Wir wollen uns mit obigen Darlegungen begnügen, noch eine hübsche Aufgabe stellen und in einer weiteren Fortsetzung andere aufregende Dinge über Tetraeder kennenlernen!

Aufgabe 8: Ist ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck, dessen Höhen sich im Punkte S' schneiden und die Höhenfußpunkte A_1, B_1, C_1 haben, so gilt:

$$AS'\cdot S'A_1=BS'\cdot S'B_1=CS'\cdot S'C_1.$$

Anleitung: Weise zunächst nach, daß es wenigstens ein rechtwinkliges Tetraeder $SABC$ gibt (mit senkrecht aufeinander stehenden Kanten bei S), dessen Seite ΔABC mit dem gegebenen Dreieck kongruent ist, und nutze geeignete der oben angestellten Betrachtungen aus! — Gilt die Aussage der Aufgabe 8 auch für stumpfwinklige Dreiecke?

G. Geise

Biographie des Autors

Prof. Dr. *G. Geise* ist in Stendal geboren, besuchte in Aschersleben vier Jahre die Grundschule, anschließend sechs Jahre die Mittelschule. Nachdem er den Schlosserberuf erlernt hatte, besuchte er nochmals für eineinhalb Jahre eine Erweiterte Oberschule, um die Reifeprüfung abzulegen. Damit war der Weg frei für ein fünfjähriges Studium der Mathematik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Seit 1956 ist er als wissenschaftlicher Assistent, Oberassistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Technischen Hochschule bzw. Technischen Universität Dresden tätig. In den Jahren 1962/63 und 1965/66 wirkte er an der Universität Rostock.

Die Arbeitsgebiete des 1972 zum ordentlichen Professor ernannten Wissenschaftlers sind: Kinematik, Matrizengeometrie, elementare Differentialgeometrie, oftmals im Zusammenhang mit speziellen Problemen aus der Technik. Er wirkt seit Jahren aktiv bei den *Olympiaden Jg. Mathematiker der DDR* mit.

Das Prinzip der kleinsten Zahl hilft uns weiter

1. Von dem bedeutenden Mathematiker *Gauß* wird erzählt, daß er seinen Lehrer mit einer schnellen Lösung folgender Aufgabe überraschte:

● Man bestimme die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100 ! Während der Lehrer seine Schüler für längere Zeit beschäftigt glaubte, überlegte *Gauß* kurz und summierte wie folgt:

$$1+2+3+\ldots+100=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51)$$
$$=101\cdot 50$$
$$=5050$$

● Bestimme auf die gleiche Weise die Summe aller natürlichen Zahlen von
a) 1 bis 30 b) 1 bis 31!

Bezeichnen wir die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100 mit $S(100)$, so ist

$$S(100)=\frac{(100+1)\cdot 100}{2}.$$ Ebenso ist

$$S(30)=\frac{(30+1)\cdot 30}{2}=465$$ und

$$S(31)=\frac{(31+1)\cdot 31}{2}=496.$$

2. Wir können nun für eine beliebige natürliche Zahl $n>1$ die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n bestimmen und sie mit $S(n)$ bezeichnen. Wenn n jedoch sehr groß ist, so wird das Addieren der n Summanden eine langwierige Angelegenheit. Schneller käme man zum Ziel, wenn man das Addieren der vielen Summanden auf eine Multiplikation zurückführen könnte, so wie es *Gauß* für $n=100$ tat.

Kann man $S(n)$ mit Hilfe der Gleichung

$$S(n)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

berechnen?

Für $n=100$ und $n=30$ und $n=31$ ist die Gleichung richtig. Aber ist sie für *jede* natürliche Zahl n $(n>1)$ richtig?

● Überprüfe die Gleichung für $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$!

Für $n=2$ erhalten wir

$$S(2)=1+2=3$$

und $$\frac{(2+1)\cdot 2}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}=3.$$

Also ist die Gleichung für $n=2$ richtig.

Wollten wir jedoch die Gleichung für jede einzelne natürliche Zahl überprüfen, würden wir uns eine unlösbare Aufgabe stellen. Es gibt ja zu jeder natürlichen Zahl einen Nachfolger, für den die Gleichung auch wieder geprüft werden muß, so daß wir mit dieser Aufgabe nie zu Ende kämen.

3. Hier kann uns eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen helfen, das
Prinzip der kleinsten Zahl: *Jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl.*

Dieses Prinzip ist eine Grundeigenschaft der natürlichen Zahlen, die wir nicht beweisen. Wir wollen uns mit dem Inhalt des Prinzips jedoch an einigen Beispielen vertraut machen.

Sei M_1 die Menge der Zahlen 17, 10163, 10000000, 623, 11 und 89. Offenbar enthält die Menge M_1 eine kleinste Zahl, nämlich 11. Die Zahl 11 ist kleiner als alle anderen Zahlen, die ebenfalls der Menge M_1 angehören.

M_2 sei die Menge aller Primzahlen. Hier ist 2 die kleinste Zahl. Enthält eine Menge nur eine einzige natürliche Zahl, so ist diese eine Zahl selbstverständlich auch die kleinste Zahl der Menge.

● Bestimme die kleinste Zahl
a) der Menge aller Quadrate natürlicher Zahlen,
b) der Menge aller natürlichen Zahlen, die größer als 100 und durch 6 teilbar sind!

4. Wir werden nun das Prinzip der kleinsten Zahl anwenden, um den folgenden Satz zu beweisen:

Für jede natürliche Zahl n $(n>1)$ gilt

$$S(n)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}.$$

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl n $(n>1)$, für die die Gleichung falsch ist. Dann ist die Menge der natürlichen Zahlen, für die die Gleichung falsch ist, nicht leer. Nach dem *Prinzip der kleinsten Zahl* enthält diese Menge eine kleinste Zahl, die wir k nennen wollen.

Es ist also

$$S(k)\neq\frac{(k+1)\cdot k}{2}. \qquad \text{(X)}$$

Es muß $k>2$ gelten, denn wir lassen bei unserer Aufgabe nur natürliche Zahlen zu, die größer als 1 sind, und für die natürliche Zahl 2 ist die Gleichung — wie oben gezeigt — richtig. Da k die kleinste Zahl ist, für die die Gleichung falsch sein soll, muß die Gleichung für den Vorgänger von k, d. h. für die Zahl $k-1$, gelten, Es ist also

$$S(k-1)=\frac{((k-1)+1)\cdot(k-1)}{2}$$
$$=\frac{k\cdot(k-1)}{2}. \qquad \text{(XX)}$$

Aus $S(k-1)=1+2+\ldots+(k-1)$
und $S(k)=1+2+\ldots+(k-1)+k$
folgt $S(k)=S(k-1)+k$.

Unter Verwendung der richtigen Gleichung (XX) erhalten wir

$$S(k)=\frac{k\cdot(k-1)}{2}+k$$
$$=\frac{k^2-k}{2}+\frac{2k}{2}$$
$$=\frac{k^2-k+2k}{2}$$
$$=\frac{k^2+k}{2}$$
$$S(k)=\frac{(k+1)\cdot k}{2}$$

im Widerspruch dazu, daß die Gleichung für die Zahl k nicht gelten sollte. Also war die Annahme, daß es eine natürliche Zahl n $(n>1)$ gibt, für die die Gleichung nicht gilt, falsch.

Die Gleichung

$$S(n)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$$ gilt

somit für jede natürliche Zahl n $(n>1)$.

5. Wenden wir uns einer anderen Aufgabe zu.

● Gegeben seien zwei Buchstaben a und b.

Gegeben seien zwei Buchstaben a und b. Wir wollen nun Wörter nur unter Verwendung dieser beiden Buchstaben bilden, wobei aber jeder dieser Buchstaben durchaus mehrfach verwendet werden darf.

Betrachten wir zunächst die Wörter, die aus jeweils drei Buchstaben zusammengesetzt sind:

aaa	*abb*
aab	*bab*
aba	*bba*
baa	*bbb*

Man nennt diese Wörter auch Wörter der Länge 3. Es gibt also acht Wörter der Länge 3, wenn man zwei Buchstaben zur Verfügung hat. Daß diese Wörter in der deutschen Sprache ohne Bedeutung sind, soll uns hier nicht interessieren.

● Schreibe alle Wörter der Länge auf, die nur unter Verwendung der Buchstaben a und b gebildet werden können!

Hast du alle Wörter der Länge 4 gefunden? Es müssen insgesamt 16 Wörter sein.

● Wieviel Wörter der Länge 1 und wieviel Wörter der Länge 2 gibt es bei Verwendung von zwei Buchstaben?

Stellen wir die bisher erhaltenen Resultate in einer Tabelle zusammen:

Länge n	Anzahl der verschiedenen Wörter der Länge n
1	2
2	4
3	8
4	16

Für $n=1, 2, 3$ und 4 gilt offenbar: Es gibt genau 2^n Wörter der Länge n.

Gilt die Aussage sogar für alle natürlichen Zahlen n $(n>0)$?

Ja, wir können mit Hilfe des *Prinzips der kleinsten Zahl* beweisen:

Für jede natürliche Zahl n ($n>0$) gilt: Bei Verwendung von zwei Buchstaben gibt es genau 2^n Wörter der Länge n.

Beweis: Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl n ($n>0$), für die die Aussage falsch ist.
Dann ist die Menge der natürlichen Zahlen, für die die Aussage falsch ist, nicht leer. Nach dem Prinzip der kleinsten Zahl enthält diese Menge eine kleinste Zahl. Diese Zahl nennen wir k.
Wie wir oben gezeigt haben, ist die Aussage für $n=1, 2, 3$ und 4 richtig, also ist k sicher größer als 4.
Da k die kleinste Zahl ist, für die die Aussage falsch ist, muß die Aussage für $k-1$ richtig sein. Es gibt also 2^{k-1} Wörter der Länge $k-1$.
Betrachten wir nun ein beliebiges Wort der Länge k. Streichen wir den letzten Buchstaben dieses Wortes, so erhalten wir ein Wort der Länge $k-1$. Der letzte Buchstabe, den wir gestrichen haben, war entweder ein a oder ein b. Aus dem *Rest*-Wort der Länge $k-1$ kann man durch Anfügen eines Buchstaben ein Wort der Länge k gewinnen. Jedes Wort der Länge k kann man sich also aus einem Wort der Länge $k-1$ durch Anfügen des Buchstaben a oder des Buchstaben b entstanden denken. Aus jedem Wort der Länge $k-1$ erhält man zwei Wörter der Länge k. Damit gibt es also

$$2^{k-1}\cdot 2$$

Wörter der Länge k. Nun ist aber

$$2^{k-1}\cdot 2=2^k.$$

Folglich gibt es doch 2^k Wörter der Länge k im Widerspruch dazu, daß die Aussage für die Zahl k falsch sein sollte. Unsere Annahme, daß es eine natürliche Zahl n ($n>0$) gibt, für die die Aussage falsch ist, führt zum Widerspruch. Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n ($n>0$).

Aufgaben

Man beweise unter Verwendung des Prinzips der kleinsten Zahl:

▲1▲ Für jede natürliche Zahl n ($n>0$) ist

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

▲2▲ Ist $q\neq 1$, so gilt für jede natürliche Zahl n ($n>0$) die Gleichung

$$1+q^1+q^2+q^3+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

▲3▲ Ist $h\geqq -1$, so gilt für jede natürliche Zahl n die Ungleichung

$$(1+h)^n\geqq 1+nh$$

(Bernoullische Ungleichung).

W. Stoye

Aufgaben
speziell für Klasse 9/10

Im September 1973 lösten in einer größeren Anzahl von Schulen in unserer Republik viele Schüler der Klassenstufe 10 zentral gestellte Aufgaben (reine Arbeitszeit: 90 Minuten).
Im folgenden veröffentlichen wir die Aufgaben. Der interessierte alpha-Leser kann anhand dieser Arbeit sein Wissen und Können prüfen.

A. Hopfe

▲1▲ Gegeben ist der Term $\frac{a\cdot b}{c}$
($a, b, c\in P;\ c\neq 0$).
Setzen Sie $a=4.75$
$b=1.22$ und
$c=25{,}2$!
Führen Sie schriftlich eine Überschlagsrechnung aus!
Berechnen Sie den Wert des Terms mit Hilfe des Rechenstabes!

▲2▲ Gegeben ist die Ungleichung

$$\frac{2(5x-2)}{3}<2x+6.$$

Geben Sie die Lösungsmenge L dieser Ungleichung im Bereich der natürlichen Zahlen an!
(Eine Probe wird nicht verlangt.)

▲3▲ a) Formen Sie die folgende Summe in einen Quotienten um:

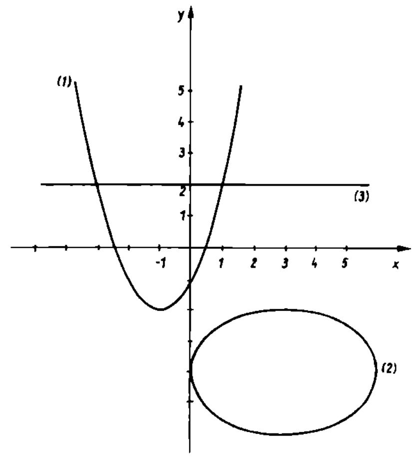
$$\frac{5}{4m}+\frac{7}{6n}-\frac{9-m}{8mn}\quad (m, n\in P;\ m\neq 0;\ n\neq 0)$$

b) Berechnen Sie:

$$\left(\frac{2}{3}u-\frac{1}{2}v\right)^2$$

▲4▲ Zwei Lastkraftwagen transportieren insgesamt 143 t Kies. Der eine LKW faßt 1,5mal soviel wie der andere. Insgesamt sind 31 volle Fuhren des kleineren und 27 volle Fuhren des größeren LKW erforderlich.
Berechnen Sie, wieviel Tonnen jeder dieser beiden Wagen faßt!

▲5▲ a) Geben Sie die Definition für eine Funktion an!
b) Entscheiden Sie für jede der Figuren (1), (2) und (3), ob sie Graph einer Funktion der Form $y=f(x)$ ist!
Begründen Sie für alle drei Fälle Ihre Entscheidung!



▲6▲ Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussage nach:
Vergrößert man das Quadrat einer beliebigen ungeraden Zahl um 3, so erhält man immer eine Zahl, die durch 4 teilbar ist!

(Lösungen auf S. 47)

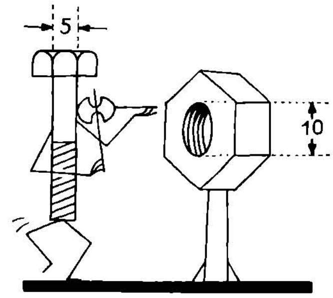
Fortsetzung der Aufgaben von S. 39

Klasse 10

▲1▲ Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt O, dem ein gleichschenkliges Trapez mit $ABCD$ $BC\parallel AD$, $\overline{BC}=2a$, $\overline{AD}=2b$ und $a>b$ umbeschrieben sei. Ferner seien E der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Trapezes und M bzw. N die Berührungspunkte des Kreises k mit den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ des Trapezes. P sei der Schnittpunkt der Parallelen durch den Punkt O zu der Seite $\overline{BC}$ mit der Seite $\overline{AB}$ des Trapezes.
1. Man ermittle den Radius des Kreises k in Abhängigkeit von a und b.
2. Man beweise, daß die Punkte M, E und N auf einer Geraden liegen.
3. Man ermittle die Länge der Strecke $\overline{ME}$ in Abhängigkeit von a und b.
4. Man stelle Ungleichungen zwischen den Strecken $\overline{OP}$, $\overline{OM}$ und $\overline{EM}$ auf und leite daraus Ungleichungen zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und harmonischen Mittel zweier positiver reeller voneinander verschiedener Zahlen a und b her.
(Unter dem harmonischen Mittel zweier positiver reeller Zahlen a und b versteht man diejenige Zahl x, für die $\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ gilt.)

▲2▲ Es seien $ABCD$ ein Quadrat und F der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$. Ferner sei E der Fußpunkt des von dem Punkt A auf die Gerade BF gefällten Lotes.
Man beweise, daß dann $\overline{AD}=\overline{DE}$ gilt.

In freien Stunden alpha heiter



„Bemühen Sie sich nicht,
es hat sowieso keinen Sinn."
Aus: Magazin 11/73

Bruchstücke

Die folgenden Bruchstücke sind so zu ergänzen, daß in jeder Zeile ein sinnvolles Wort entsteht, das du aus dem Mathematikunterricht kennst.
Die eingesetzten Buchstaben ergeben, hintereinander gelesen, einen mathematischen Satz.
Die Bedeutung der Wörter ist unten angegeben. Versuche, zunächst ohne diese Hilfe auszukommen!

		E			Z	I	G	
	Z	W				E	R	
T	A	F				E	R	K
				R	E	I	S	
			L	I	P		E	
	M	I		U	E	N		
	O	M	I		R			
			A		T	O	N	
	N		U			E	R	

1. k. g. V. der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6; 2. fast Erster; 3. Nachschlagewerk; 4 einem Dreieck einbeschriebene Figur; 5. ein Kegelschnitt; 6. Teil einer Subtraktionsaufgabe; 7. ein griechischer Buchstabe; 8. Mittel zur Hervorhebung bestimmter Teile in einer mathematischen Abbildung; 9. eine Ordnungszahl.

OStR K.-H. Lehmann, Berlin

Von 3 zu 3

Auf der Abbildung ist von der Ziffer 3 in der oberen linken Ecke quer durch die Felder bis zur 3 in der unteren rechten Ecke ein Weg zu suchen, der insgesamt — entsprechend der Summe der Zahlen auf den beschrittenen Feldern — die Zahl 110 ergibt. Wie (über welche Zahlen) führt dieser Weg?

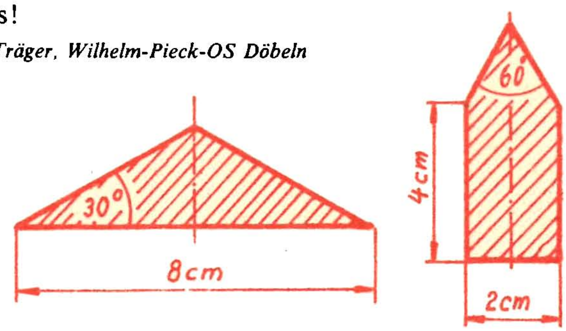
aus: NBI 33/73

3	4	5	4	3	9	7
1		6		5		8
2	3	7	6	9	4	1
4		8		1		3
5	6	9	8	7	2	6
1		1		6		3
3	4	2	8	5	4	3

Legespiel

Schneide aus Pappe sechs Fünfecke, die zu dem abgebildeten Fünfeck kongruent sind sowie sechs Dreiecke, die zum abgebildeten Dreieck kongruent sind, aus!

I. Träger, Wilhelm-Pieck-OS Döbeln



Lege diese zwölf Flächenstücke so aneinander, daß sie ein regelmäßiges Sechseck bilden!

a + b = cc
\+   +   +
−c + a   b
b + cc = ca

M. Jütte, 10. OS Greifswald

Eine Frage mit Pfiff

Ein Apotheker hält einem *Jungen Mathematiker* ein Röhrchen mit Tabletten hin und sagt erläuternd: „Eine Tablette enthält 500 mg Vitamin C."
Frage des *Jungen Mathematikers*: „Und die anderen?"

Rund um den Kreis

Im folgenden Text haben sich sieben Begriffe bzw. Namen versteckt, die bei der Behandlung der Kreislehre oft benutzt werden. Finde sie heraus!

Lieber Thomas!
Kurz vor unserer Rückreise aus Thale sende ich Dir herzliche Grüße. Gestern waren wir im Kino und sahen „Tecumseh".
Nebenbei: Ich bitte Dich darum, fang gleich an, unseren Zaunbau vorzubereiten. Du mußt die Stangen teilen und diese Kanten abschrägen. Führe alles gewissenhaft durch. Messer, Säge und Feile liegen im Werkzeugschrank.
Auf bald!
Dein Klaus

OStR K.-H. Lehmann, Berlin

„Eigentlich sollten Sie mir diese Wurzeln ziehen, Herr Doktor!"

alpha-Leser beim Augenarzt

Wurzelziehen

Neulich drückte sich Heike vor der Jugendzahnklinik herum. „Ich habe Angst. Der Doktor will mir eine Wurzel ziehen," erzählte sie ihrer Freundin Angelika. „Laß ihn nur machen," sagte Angelika darauf. „Morgen quadriert unser Mathematiklehrer die Wurzel wieder und die Zahnlücke ist weg . . . ."

Elsemarie Anger, Karl-Liebknecht-OS Oschatz (Kl. 9)

Angewandte Mathematik

Sie können es mir glauben, die Kinder sind heutzutage viel klüger als wir.
Mein *Wowa* ist Schüler der 1. Klasse. Kürzlich lernten sie in der Schule die Addition und Subtraktion. Damit fing es an...
Eines Tages kommt *Wowa* nach Hause, setzt sich an den Tisch und beginnt, auf ein Blatt Papier zwei Zahlenreihen zu schreiben. Er bewegt die Lippen, starrt mit den Augen zur Decke, zählt an den Fingern.
„Was rechnest du da?" frage ich.
„Ich rechne aus, wieviel ich koste", sagt er.
„Wie meinst du das, wieviel du kostest?"
„Ganz einfach", erklärt mein Sohn. „Auf der linken Seite addiere ich alle eure Ausgaben für mich, auf der rechten Seite addiere ich, was ihr mir schuldig seid."
„Aha", staunte ich und schaue interessiert auf seine Rechnung. „Du hast Mama drei Monate vor der Hochzeit kennengelernt. Drei Monate, das sind 90 Tage, das bedeutet 90 Stelldichein, also 90 Blumensträuße. Rechnen wir für jeden Strauß einen Rubel, das macht 90 Rubel. Plus 7 Theater- und 15 Kinobesuche, dazu 18 Portionen Eis und Gebäck, das wären etwa 75 Rubel. Eure Hochzeit war nicht sehr teuer, sagt Oma, weil ihr an einem Feiertag geheiratet habt. Ich setze dafür 200 Rubel ein. Dann die persönlichen Ausgaben für mich: ein Bett, einen Kinderwagen, ein Laufgitter, einige Anzüge und ein Pelzmäntelchen, dazu 7 Jahre täglich 3 Mahlzeiten, das wären rund 3000 Rubel. Ehrenwort, ich habe nichts vergessen.
Nun zur rechten Additionsarbeit: Das ist das Geld, das ihr durch mich gespart habt. Seitdem ich auf der Welt bin, seid ihr kein kinderloses Ehepaar mehr. Folglich bekommt ihr einen Kinderzuschlag plus Wohnungsgeld. Hat man euch nach meiner Geburt eine Wohnung zugewiesen?"
Ich bestätigte es kopfnickend.
„Als kinderloses Ehepaar mußtet ihr monatlich 40 Rubel bezahlen, jetzt nur noch 7. Das ergibt eine Einsparung von 33 Rubel im Monat, das sind 396 im Jahr und 2772 in 7 Jahren. Wenn ich zu diesem Betrag noch das Kindergeld addiere, erhalte ich die Summe von 3365 Rubel und 22 Kopeken. Subtrahiere ich nun die Einnahmen von der Summe eurer Ausgaben, bleibt lediglich eine Differenz von 22 Kopeken, die ihr mir schuldig seid. Du kannst mir das Geld gleich für eine Eiswaffel geben. Meine Freunde haben sich an der Ecke schon für mich angestellt. Und außerdem ist heute ein Feiertag!"

N. Stanilowski (Aus „Litershnaja Gaseta")

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(9./10. Februar 1974)

Klassenstufe 7

1. Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:
(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.
(2) Vater und Mutter sind zusammen dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.
(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.
(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.
Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

2. Zeige, daß für jede Primzahl $p \geqq 3$ das Produkt $(p+1)p(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

3. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \| CD$ aus $a-c=3$ cm, $b=4$ cm, $d=6$ cm, $e=9$ cm! Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!
Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv.
Dabei sollen auch Möglichkeiten mit $v=0$ oder $w=0$ zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

5. Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.
Beweise: $\overline{CM}+\overline{BN}=\overline{MN}$

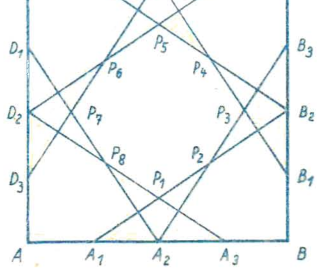
6. Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in 27 sec (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in 9 sec vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger 9 m zurückgelegt.
Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

Klassenstufe 8

1. *Anja*, *Brigitte*, *Cathrin*, *Daja* und *Eva* trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus.
In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer. Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male. Nach Abschluß aller Spiele stellte man fest:
(1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.
(2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.
(3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.
Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wieviele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann!

2. Zeige, daß für jede Primzahl $p>5$ das Produkt
$$(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$$
durch 360 teilbar ist!

3. In dem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a werde die Seite AB durch die Punkte A_1, A_2, A_3, die Seite BC durch B_1, B_2, B_3, die Seite CD durch C_1, C_2, C_3 und DA durch D_1, D_2, D_3 jeweils in 4 gleichlange Teilstrecken geteilt. Ferner seien die Strecken



A_1B_2, A_2B_3, B_1C_2, B_2C_3, C_1D_2, C_2D_3, D_1A_2 und D_2A_3 eingezeichnet.
Von den Schnittpunkten dieser Strecken miteinander seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 wie im Bild bezeichnet. Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ in Abhängigkeit von a!

4. Ermittle alle rationalen Zahlen a, die die Ungleichung
$$\frac{3a-2}{a+1}<0 \text{ erfüllen!}$$

5. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ und $\sphericalangle ACB=90°$. Ein Halbkreis über einer Teilstrecke von AB sei so gelegen, daß die Seiten BC und AC auf Tangenten an diesen Halbkreis liegen und dieser BC und AC berührt.
Beweise, daß für seinen Radius r dann
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \text{ gilt!}$$

6. Konstruiere ein Dreieck ABC, das den Bedingungen $a:b:c=2:3:4$ und $r=4$ cm genügt!
Dabei seien a, b, c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC und AB, und r sei der Umkreisradius.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC eindeutig bestimmt ist!

Klassenstufe 9

1. Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare $(x; y)$, worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:
Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z. B. (25; 61); denn es gilt $52+9=61$ und $16+9=25$.)
Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die „03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel „3").
Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.
a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!
b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

2. Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die
$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$$
durch 10 teilbar ist!

3. Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge 6 Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein

Punkt P außerhalb g sei so gelegen, daß PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte
$$\overline{PC}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}.$$
Man beweise, daß dann $\sphericalangle APF=135°$ gilt.
Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

4. In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, daß die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.
Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

5. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit $abc \neq 0$ und $a+b+c \neq 0$ die Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.
(Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x=-y$ gilt.)

6. Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:
(1) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
(2) $\overline{BD'}=\overline{CD'}=a$,
(3) $\overline{AD'}\neq a$.
Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

Klassenstufe 10

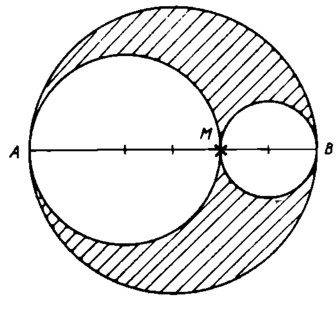
1. Man beweise, daß für alle konvexen Vierecke $ABCD$ $\frac{1}{2}u<e+f<u$ gilt. Dabei seien u der Umfang des Vierecks und e bzw. f die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD.

2. Man ermittle alle Paare $(x;\ y)$ ganzer Zahlen x, y, die die Gleichung $2x^3+xy-7=0$ erfüllen.

3. Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D. Die Spitze der Pyramide sei S. Alle acht Kanten haben die gleiche Länge a. E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC. Eine Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.
Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper!

4. Man beweise:
Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar.

5. Gegeben sei ein Kreis k mit einem Durchmesser AB der Länge d. In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, daß sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so daß also $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}$ gilt. Dabei sei $\overline{AM}\geqq\overline{MB}$.
Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2.



Man ermittle diejenige Länge von AM, für die der Flächeninhalt dieser schaffierten Fläche am größten ist.

6. Man beweise, daß die Ungleichung
$|\log_a b|+|\log_b a|\geqq 2$ für alle Paare positiver reeller Zahlen
(a,b) mit $a\neq 1$, $b\neq 1$ gilt.

Klassenstufe 11/12

1. Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:
Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtmal so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder. Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre.
Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Tochter und Sohn alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen.

2. Man beweise, daß die Ungleichung
$$\sqrt[n]{a^n+b^n}<\sqrt[m]{a^m+b^m}$$
für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n>m$ gilt.

3. Es sei $V=ABCD$ ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht überschlagenes ebenes Viereck.
Ferner seien A', B', C', D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke $ABA'D$, $ABCB'$, $C'BCD$, $AD'CD$ Parallelogramme sind.
Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt:
Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb V.

4. Gegeben sei ein nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4. Wir betrachten 4 Kugeln $K_i (i=1, \ldots, 4)$ mit P_i als Mittelpunkt von K_i.
Man beweise, daß die Forderung, derartige Kugeln sollen sich paarweise von außen berühren, genau dann erfüllbar ist, wenn
$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}=\overline{P_1P_3}+\overline{P_2P_4}=\overline{P_1P_4}+\overline{P_2P_3}$$ gilt.

5. Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.
Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung
$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma=0$ als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x;\ y;\ z)=(0;\ 0;\ 0)$.

6A. Eine Menge G von Elementen u, v, w, ... heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
(1) In G ist eine Operation definiert, d. h. jedem Paar (u, v) von Elementen u und v aus G ist eindeutig ein Element w aus G zugeordnet, wofür man $u\circ v=w$ schreibt.
(2) Diese Operation ist assoziativ, d. h. für alle Elemente
u, v, w aus G gilt $(u\circ v)\circ w=u\circ(v\circ w)$.
(3) Zu jedem Paar von Elementen von u und v aus G existiert mindestens ein Element x aus G, so daß $u\circ x=v$ gilt, und mindestens ein Element y aus G, so daß $y\circ u=v$ gilt.
Es sei P die Menge aller reellen Zahlen. Für je zwei Elemente a, b aus P ist durch $a\circ b=a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}$ eine Operation definiert.
Man beweise, daß die Menge P mit dieser Operation eine Gruppe ist.

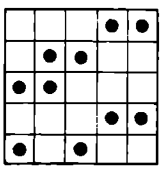
6B. $\mathfrak{M}$ sei die Menge aller Punkte $P(x, y)$ eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x, y ganzrationale Zahlen seien, für die $0\leqq x\leqq 4$ und $0\leqq y\leqq 4$ gilt. Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus $\mathfrak{M}$ der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).
Anmerkung: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind.

Lösungen

Lösungen zu Heft 6/73

▲5▲1132 Aus $2232:9=248$ und $248:31=8$ folgt, daß auf jeden Schüler der Klasse 5a im Durchschnitt ein Pflückergebnis von 8 Körben Äpfel je Nachmittag kommt. Aus $4\cdot 33+4\cdot 32=4\cdot(33+32)=4\cdot 65=260$ und $2210:260=8{,}5$ folgt, daß die Schüler der Klasse 5b eine bessere Leistung erreichten; denn es erreichte jeder Schüler im Durchschnitt ein Pflückergebnis von $8\frac{1}{2}$ Körben Äpfel je Nachmittag.

▲5▲1133 Eine mögliche Anordnung zum Setzen der Spielsteine ist die folgende:



W 5 ■ 1134 Die Anzahl der Noten 5 sei x; dann gilt folgendes:

Noten	5	4	3	2	1
Anzahl	x	$2x$	$4x$	$8x$	$8x$

Nun gilt ferner $23\cdot x<30$. Die Lösung $x=0$ entfällt, da sonst kein Schüler anwesend gewesen wäre. $x=1$ ist die einzige Lösung der Ungleichung.
Der Klasse gehören somit $(23+2)$ Schüler, also 25 Schüler an.

W 5 ■ 1135 Angenommen, die Mutter habe n Kinder; dann läßt sich folgende Tabelle aufstellen, die Auskunft über die Verteilung der Äpfel gibt.

n	$5n$	$6n$	$5n+3$	$6n-1$
2	10	12	13	11
3	15	18	18	17
4	20	24	23	23
5	25	30	28	29

Nur für $n=4$ gilt $5n+3=6n-1$. Da jede Zahl der Zahlenfolge 13, 18, 23, 28, ... um 5 größer als die vorangehende, jede Zahl der Zahlenfolge 11, 17, 23, 29, ... aber um 6 größer ist als die vorangehende, gilt für jede weitere Belegung $n>5$ stets $5n+3<6n-1$. Die Aufgabe besitzt somit genau eine Lösung. Es waren 4 Kinder und 23 Äpfel.

W 5 * 1136 Um die erste und die letzte Murmel jeweils einzeln zum Baum zurückzubringen, muß Hans insgesamt einen Weg von $2\cdot 1\,m+2\cdot 80\,m=162\,m$ zurücklegen. Für die zweite und vorletzte Murmel ergeben sich $2\cdot 2\,m+2\cdot 79\,m=162\,m$. Für das letzte Murmelpaar gilt $2\cdot 40\,m+2\cdot 41\,m=162\,m$. Insgesamt ist eine Strecke von
$40\cdot 162\,m=6480\,m=6{,}480\,km$
in nur 15 Minuten zurückzulegen. Das kann Hans nicht schaffen; folglich hat Peter recht.

W 5 * 1137 Aus a) folgt:
Familie Krause erhielt entweder einen roten oder einen grauen PKW. Da der graue PKW nach b) an Familie Schmidt ging, erhielt Familie Krause einen roten PKW. Somit erhielt die Familie Meier einen blauen PKW.
Aus a) folgt:
Familie Krause erhielt entweder einen „Wartburg“ oder einen „Skoda“. Da Familie Krause aber einen roten PKW erhielt, kann es nach c) kein „Wartburg“ sein. Demnach erhielt Familie Krause einen roten „Skoda“.
Aus d) folgt:
Familie Meier erhielt entweder einen „Wartburg“ oder einen „Skoda“. Da der „Skoda“ aber an Familie Krause ging, muß Familie Meier einen blauen „Wartburg“ und somit Familie Schmidt einen grauen „Trabant“ erhalten haben.

▲6▲1138 Der Fisch sei x kg schwer; nun gilt $\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, d. h. der vierte Teil seines Gewichts ist gleich $\frac{3}{4}$ kg. Der Fisch wiegt somit $4\cdot\frac{3}{4}\,\text{kg}=3$ kg.

Oder $x=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$, $\quad\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}$, $\quad x=3$.

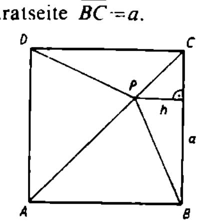
▲6▲1139 Die Dreiecke $\triangle BCP$ und $\triangle CDP$ liegen symmetrisch bezüglich der Geraden AC als Symmetrieachse; sie sind also flächengleich. Für den Flächeninhalt des Vierecks $BCDP$ gilt

$$A=2\cdot\frac{a\cdot h}{2}=a\cdot h.$$

Ferner soll gelten:

$$3\cdot A=a^2,\text{ also}$$
$$3\cdot a\cdot h=a^2,\ (a\neq 0)$$
$$3\cdot h=a,$$
$$h=\frac{1}{3}a.$$

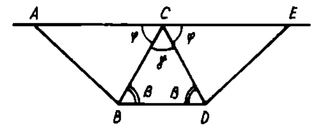
Der Abstand des Punktes P von der Geraden BC ist gleich dem dritten Teil der Länge der Quadratseite $\overline{BC}=a$.



W 6 ■ 1140 Bezeichnet man die erste der fünf Zahlen mit n, so lauten diese Zahlen n, $2n+1$, $4n+3$, $8n+7$ und $16n+15$. Ihre Summe beträgt somit $31n+26=243$. Daraus folgt $31n=217$, also $n=7$.
Die fünf Zahlen lauten somit 7, 15, 31, 63, 127.

W 6 ■ 1141 Der Dezimalbruch von $\frac{1}{7}$ besitzt eine sechsstellige Periode; es gilt $\frac{1}{7}=0{,}\overline{142857}$.
Aus $6\cdot 16+x=100$ folgt $x=4$, d. h. an der 100. Stelle steht die Grundziffer 8.

W 6*1142 Aus $\overline{AC}=\overline{CE}$, $\overline{AB}=\overline{DE}$ und $\overline{BC}=\overline{DC}$ folgt $\Delta ABC\cong\Delta CDE$; demnach gilt auch $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ECD=\varphi$. Aus $\overline{BC}=\overline{DC}$ folgt $\sphericalangle\, CBD=\sphericalangle\, CDB=\beta$. Es sei Winkel $BCD=\gamma$; dann gilt $\gamma=180°-\varphi$ und $\gamma=180°-2\beta$, folglich gilt $\varphi=\beta$.



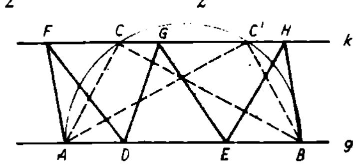
Zu a) Für $45°<\varphi<90°$ folgt aus $\gamma=180°-2\varphi$ stets $\gamma<90°$. Da auch die anderen Winkel des Dreiecks BDC kleiner als 90° sind, ist dieses Dreieck spitzwinklig.
Zu b) Für $\varphi=45°$ erhalten wir aus $\gamma=180°-2\varphi$ genau $\gamma=90°$, also ist das Dreieck BDC rechtwinklig.
Zu c) Für $0°<\varphi<45°$ folgt aus $\gamma=180°-2\varphi$ stets $\gamma>90°$, also ist das Dreieck BDC stumpfwinklig.
Zu d) Das Dreieck BDC ist gleichseitig genau dann, wenn $\gamma=60°$, also $2\varphi=180°-\gamma=120°$, d. h. $\varphi=60°$ ist.

W 6*1143 Da für „ZWEI“ die kleinstmögliche Zahl zu ermitteln ist, muß auch die Zahl für „VIER“ möglichst klein sein. Deshalb könnte $Z=1$ und $V=2$ sein.
Es sei $V=2$; wegen $W\neq V$ und $W\neq Z$ könnte dann $W=0$ oder $W=3$ sein. Für $W=0$ wäre $I=1$; das widerspricht $Z=1$. Es sei $W=3$; dann könnte $I=6$ oder $I=7$ sein.
Für $I=6$ ergäbe sich wegen $I+I=R$ $(6+6=12)$ somit $R=2$; das widerspricht $V=2$.
Es sei $I=7$; dann gilt $R=4$ $(7+7=14)$.
Daher gilt $1+E+E=10+E$, also $E=9$.
Die gesuchte Lösung lautet somit

$$\begin{array}{r} 1397\\ +\ 1397\\ \hline 2794\end{array}$$

▲7▲1144 Es sei h der Abstand der Parallelen g und k; für den Flächeninhalt des zu konstruierenden Dreiecks ABC gilt dann

$$A_{ABC}=\frac{h}{2}\cdot\overline{AD}+\frac{h}{2}\cdot\overline{DE}+\frac{h}{2}\cdot\overline{EB}=\frac{h}{2}\cdot(\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EB})=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\overline{AB}.$$



Demzufolge liegt der Punkt C des zu konstruierenden Dreiecks ABC auf der Geraden

k. Wir zeichnen deshalb über $\overline{AB}$ als Durchmesser den Thaleskreis, der k in den Punkten C und C' schneiden möge und verbinde C mit C' jeweils mit den Punkten A und B. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$ erfüllen die geforderten Bedingungen.

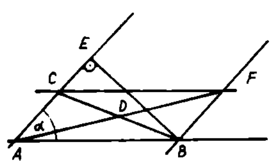
▲7▲1145 Bei der Fahrt stromaufwärts sei $v_1=4{,}5-1{,}5=3$ die Maßzahl der durchschnittlichen Geschwindigkeit, t_1 die Maßzahl der benötigten Zeit und s_1 die Maßzahl des zurückgelegten Weges. Für die Fahrt stromabwärts gilt dann entsprechend $v_2=4{,}5+1{,}5=6$, $t_2=4-t_1$ und $s_2=s_1$. Daraus folgt

$$v_1t_1=v_2t_2,$$
$$3\cdot t_1=6\cdot(4-t_1),$$
$$3\cdot t_1=24-6\cdot t_1,$$
$$9\cdot t_1=24,$$
$$t_1=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

Wir erhalten somit $s_1=v_1t_1=3\cdot\frac{8}{3}$ km $=8$ km.

Die Touristen können sich 8 km vom Anlegepunkt entfernen; sie erreichen den Wendepunkt nach $2\frac{2}{3}$ h.

W 7 ■ 1146 Verlängert man $\overline{AD}=s_a$ über D hinaus bis F um sich selbst, so sind $\overline{AF}$ und $\overline{BC}$ Diagonalen des Vierecks $ABFC$. Wegen $\overline{AD}=\overline{DF}$ und $\overline{BD}=\overline{CD}$ halbieren diese Diagonalen einander, d. h. das Viereck $ABFC$ ist ein Parallelogramm. Daraus ergibt sich folgende Konstruktion:



Wir zeichnen das Teildreieck ABE aus den Stücken $\sphericalangle CAB=\alpha=50°$, $\sphericalangle AEB=90°$ und $\overline{BE}=h_b=3$ cm. Durch B ziehen wir eine Parallele zu AE. Der Kreis um A mit dem Radius $2s_a=5$ cm schneidet diese Parallele in F. Die Parallele durch F zu AB schneidet die Gerade AE in C. Verbinden wir B mit C, so erhalten wir das zu konstruierende Dreieck ABC.

W 7 ■ 1147 Von 9.00 Uhr bis 24.00 Uhr sind 15 Stunden vergangen. Es waren an diesem Tage $15\cdot 200$ Gäste, also 3000 Gäste im Turmcafé. Darunter seien x Erwachsene, also $(3000-x)$ Kinder; dann gilt

$$5x+2{,}5(3000-x)=12\,000,$$
$$5x+7\,500-2{,}5x=12\,000.$$
$$2{,}5x=4\,500,$$
$$x=1\,800.$$

An diesem Tage haben 1800 Erwachsene und 1200 Kinder das Turmcafé besucht.

W 7*1148 Die Zahl $z=\overline{abcabc}$ (in dezimaler Darstellung) läßt sich wie folgt schreiben:
$z=1000\cdot x+x=1001\cdot x=7\cdot 11\cdot 13\cdot x$.
Aus $7\cdot 11\cdot 13\cdot x=7\cdot n^2$ folgt $11\cdot 13\cdot x=n^2$, also $x=11\cdot 13=143$.
Probe: $143143=7\cdot 143^2$.

Aus $11\cdot 13\cdot x=n^2$ erhält man noch eine weitere dreistellige Lösung für x, nämlich $x=11\cdot 13\cdot 4=572$, und es gilt $572572=7\cdot 286^2$.

W 7*1149 Wir unterscheiden die Fälle $n=4$ und $n>4$.
1. Fall: $(n=4)$
Wegen $(n-2)\cdot 180°$ gilt für die Winkelsumme eines Vierecks in diesem Falle $(4-2)\cdot 180°=360°$. Da $4\cdot 90°=360°$, kann ein Viereck höchstens vier rechte Winkel besitzen.
2. Fall: $(n>4)$
Jeder Innenwinkel eines konvexen Vielecks ist kleiner als 180°. Würde ein konvexes n-Eck mit $n>4$ vier rechte Winkel enthalten, so würde die Winkelsumme in diesem n-Eck kleiner als $4\cdot 90°+(n-4)\cdot 180°$, d. h. kleiner als $(n-2)\cdot 180°$ sein; denn jeder der übrigen $(n-4)$ Winkel wäre wegen der Konvexität kleiner als 180°. Nach dem Satz über die Winkelsumme im n-Eck kann dieser Fall nicht eintreten. Ein konvexes n-Eck mit mehr als vier Eckpunkten kann also höchstens drei rechte Winkel enthalten.

▲8▲1150 a) Da die Grundfläche aus einem Rechteck mit der Länge $45\text{ m}-2\cdot 10\text{ m}=25$ m und der Breite 20 m sowie aus zwei Halbkreisen mit dem Radius 10 m besteht, beträgt ihr Flächeninhalt

$$A=(25\cdot 20+100\pi)\text{m}^2\approx 814\text{ m}^2.$$

b) Da die Halle aus einem Halbzylinder mit dem Radius 10 m und der Höhe 25 m sowie zwei Viertelkugeln mit dem Radius 10 m besteht, beträgt ihr Rauminhalt

$$V=(\frac{\pi}{2}\cdot 100\cdot 25+2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 1000)\text{m}^3$$
$$\approx(1250\pi+667\pi)\text{m}^3;$$
$$V=1917\pi\text{m}^3\approx 6020\text{m}^3.$$

c) Die Oberfläche des Halbzylinderteils ist gleich $0_1=\pi\cdot 10\cdot 25\text{ m}^2\approx 785\text{ m}^2$, die Oberfläche der übrigen Teile ist gleich der Oberfläche einer Halbkugel von Radius 10 m, also gleich $0_2=2\pi\cdot 100\text{ m}^2\approx 628\text{ m}^2$.
Die Gesamtoberfläche beträgt daher

$$0\approx 1413\text{ m}^2.$$

▲8▲1151 a) Da $1\text{a}=365\cdot 24\text{ h}=8760$ h, fließen in 1 h

$$\frac{90000000}{8760}\text{t}\approx 10270\text{ t}$$

Erdöl durch den Querschnitt der Leitung.
Ist nun x die Maßzahl der Weglänge (in m), die das Erdöl in 1 h zurücklegt, so gilt, da der Radius des zylindrischen Rohres 0,61 m beträgt,

$$\pi\cdot 0{,}61^2\cdot x=10270,$$
$$x=\frac{10270}{0{,}61^2}\approx 8790.$$

Das Erdöl legt also in 1 h 8790 m $=8{,}79$ km zurück, d. h. die Geschwindigkeit beträgt

$$v=8{,}79\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=2{,}44\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

b) Die Zeit für den Transport von Ust-Balyk bis Almetjewsk beträgt $\frac{2200}{8{,}78}$ h $=251$ h, d. s. 10 Tage 10 Stunden.

W 8 ■ 1152 Im Falle a) ist keine der sieben Grundziffern gleich Null. Man kann also die erste Stelle auf sieben verschiedene Möglichkeiten besetzen. Dann verbleiben für die Besetzung der zweiten Stelle noch sechs Möglichkeiten usw., bis schließlich für die Besetzung der letzten Stelle nur eine Grundziffer übrigbleibt.
Wir erhalten daher in diesem Falle

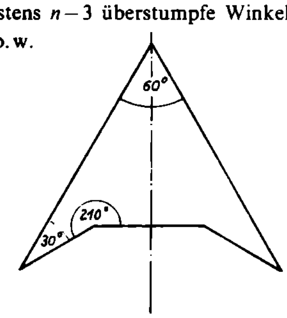
$$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$$

verschiedene siebenstellige Zahlen.
Im Falle b) ist eine der sieben Grundziffern gleich Null; es gibt also für die Besetzung der ersten Stelle nur sechs Möglichkeiten. Dann bleiben sechs Grundziffern übrig, und es gibt für die Besetzung der zweiten Stelle sechs Möglichkeiten, für die Besetzung der dritten Stelle fünf Möglichkeiten usw. wie oben.
Wir erhalten daher in diesem Falle

$$6\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4320$$

verschiedene siebenstellige Zahlen.

W 8 ■ 1153 a) Angenommen, für eine natürliche Zahl n mit $n\geqq 3$ gäbe es ein n-Eck, in dem mindestens $n-2$ Winkel überstumpf sind. Da jeder dieser Winkel größer als 180° ist und da ihre Anzahl mindestens $n-2$ beträgt, ist die Summe dieser überstumpfen Winkel größer als $(n-2)180°$. Damit gilt erst recht für die Summe s aller Winkel dieses n-Ecks $s>(n-2)180°$. Also kann das n-Eck nicht $n-2$ überstumpfe Winkel und daher höchstens $n-3$ überstumpfe Winkel haben, w. z. b. w.



b) In der beigefügten Abbildung ist ein Fünfeck gezeichnet, das $n-3=2$ überstumpfe Winkel von je 210° hat. Die übrigen Winkel von 60°, 30° und 30° sind spitz. Die Winkelsumme beträgt

$$210°+210°+60°+30°+30°$$
$$=540°=3\cdot 180°.$$

W 8*1154 Die Figur ist symmetrisch bezüglich der beiden Kreisen gemeinsamen Zentrale M_1M_2 und bezüglich der Geraden PQ als Symmetrieachsen, die sich im Punkt S schneiden (siehe Bild).
Das Viereck $APBQ$ ist demnach ein Rhombus; für seinen Flächeninhalt gilt

$$A=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PQ}.$$

Wegen $\overline{QM_1}=r=3$ cm und $\overline{SM_1}=\frac{1}{2}\cdot e=2{,}5$ cm gilt nach dem Satz des Pythagoras $\overline{SQ}^2=(3^2-2{,}5^2)\text{cm}^2=\frac{11}{4}\text{cm}^2$, also $\overline{SQ}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{11}$ cm. Aus $\overline{AB}=2r+e=6\text{ cm}+5\text{ cm}=11$ cm und $\overline{PQ}=2\cdot\overline{SQ}=\sqrt{11}$ cm folgt $A=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot\sqrt{11}\text{ cm}^2\approx 18{,}24\text{ cm}^2$.

W 8*1155 Der doppelte Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist einerseits gleich $2A=ab$
und andererseits gleich $2A=ch$.
Daraus folgt

$$ab=ch,$$
$$a^2b^2=c^2h^2,$$
$$\frac{1}{h^2}=\frac{c^2}{a^2b^2},$$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras $c^2=a^2+b^2$, also

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2},$$
$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}, \text{ w.z.b.w.}$$

W 9 ■ 1156 Es seien x und y zwei natürliche Zahlen, für die

$$x^2-y^2=1972 \qquad (1)$$

gilt. Wegen $1972=2\cdot 2\cdot 17\cdot 29$, wobei die Zahlen 2, 17 und 29 Primzahlen sind, gilt dann

$$(x+y)(x-y)=2\cdot 2\cdot 17\cdot 29, \qquad (2)$$

also

$$x+y=a, \qquad (3)$$
$$x-y=b, \qquad (4)$$

wobei a und b natürliche Zahlen mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $ab=1972$ sind. Aus (3) und (4) folgt durch Addition bzw. Subtraktion

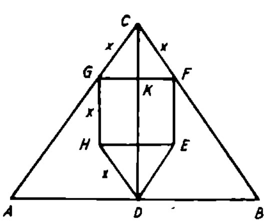
$$2x=a+b,\ x=\frac{a+b}{2}, \qquad (5)$$
$$2y=a-b,\ y=\frac{a-b}{2}. \qquad (6)$$

Daraus folgt aber, daß a und b entweder beide gerade oder beide ungerade sein müssen, weil sonst x und y nicht natürliche Zahlen wären. Ferner gilt $a \geqq b$.
Wegen $ab=1972=2\cdot 2\cdot 17\cdot 29$ können nun a und b nicht beide ungerade sein; also müssen sie beide gerade sein. Es gibt daher nur die folgenden beiden Möglichkeiten, da $a \geqq b$:

1. $a=986$, $b=2$;
   dann ist $x=494$, $y=492$,
   also $x^2-y^2=1972$.
2. $a=58$, $b=34$;
   dann ist $x=46$, $y=12$,
   also $x^2-y^2=1972$.

Es gibt also genau zwei geordnete Paare von natürlichen Zahlen, für die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, nämlich (494, 492) und (46, 12).

W 9 ■ 1157 Nach dem Satz des Pythagoras (siehe Bild) gilt $\overline{CD}^2=h^2=\overline{BC}^2-\overline{BD}^2=16$, also $h=4$ cm. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔGFC und ΔABC folgt $\overline{GF}:\overline{AB}=\overline{CG}:\overline{AC}$ bzw. $\overline{GF}:6=x:5$, also $\overline{GF}=\frac{6}{5}x$. Analog dazu erhalten wir $\overline{CK}=\frac{4}{5}x$.

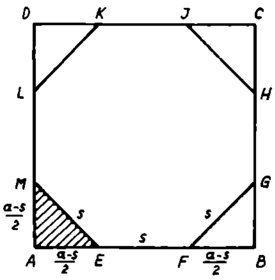


Aus $h=4=2\cdot\frac{4}{5}x+x$ folgt $x=\frac{20}{13}$ cm.

Für den Flächeninhalt des Sechsecks gilt somit, da $\overline{GK}=\frac{1}{2}\overline{GF}=\frac{3}{5}x$,

$$A=2\cdot\frac{\overline{CD}+\overline{GH}}{2}\cdot\overline{GK}=\left(4+\frac{20}{13}\right)\cdot\frac{3\cdot 20}{5\cdot 13}\text{ cm}^2=$$
$$=5\frac{19}{169}\text{ cm}^2\approx 5{,}11\text{ cm}^2.$$

W 9*1158 Da das Achteck $EFGHIKLM$ regelmäßig ist, sind alle seine Seiten gleichlang und alle seine Winkel gleichgroß. Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke ΔAEM und ΔBGF gleichschenklig und einander kongruent. Wegen $\overline{AB}=a$ und $\overline{EF}=s$ gilt also $\overline{AM}=\overline{AE}=\frac{1}{2}(a-s)$.



Nach dem Satz des Pythagoras gilt wegen $\overline{EM}=s$

$$s^2=2\cdot\frac{1}{4}\cdot(a-s)^2,$$
$$2s^2=a^2-2as+s^2,$$
$$s^2+2as-a^2=0,$$
$$s=a(\sqrt{2}-1). \text{ Daher gilt}$$
$$a-s=a-a(\sqrt{2}-1)=a(2-\sqrt{2}).$$

Der Flächeninhalt des Achtecks ist also gleich

$$A=a^2-4\cdot\frac{1}{8}\cdot(a-s)^2,$$
$$A=a^2-\frac{1}{2}a^2(2-\sqrt{2})^2,$$
$$A=a^2-\frac{1}{2}a^2(4-4\sqrt{2}+2),$$
$$A=2a^2(\sqrt{2}-1),$$
$$A=32(\sqrt{2}-1)\text{ cm}^2\approx 13{,}25\text{ cm}^2.$$

W 9*1159 a) Es sei t_1 die Zeit, die der Triebwagen bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit $v_1=120\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=33{,}3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ benötigt; dann gilt $v_1=a\cdot t_1$, wobei $a=1\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, also $t_1=33{,}3$ s. In dieser Zeit legt der Triebwagen einen Weg von

$s_1=\frac{a}{2}\cdot t_1^2=\frac{1}{2}\cdot 33{,}3^2\text{ m}\approx 555\text{ m}$ zurück. Die gleiche Weglänge legt der Triebwagen von dem Zeitpunkt, in dem die Höchstgeschwindigkeit vermindert wird, bis zur nächsten Haltestelle zurück. Daher verbleibt eine Strecke von

$$4000\text{ m}-2\cdot 555\text{ m}=2890\text{ m},$$

auf der der Triebwagen mit der konstanten Geschwindigkeit
$v_1=33{,}3\text{ m}\cdot s^{-1}$ fährt. Für diese Strecke wird daher die Zeit

$$t_2=\frac{2890}{33{,}3}\text{s}=86{,}8\text{ s}$$

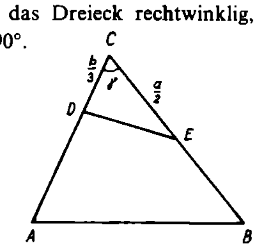
benötigt. Die gesamte Fahrzeit von einer Haltestelle bis zur nächsten (bei 4 km Entfernung) beträgt daher
$t=2t_1+t_2=66{,}6\text{ s}+86{,}8\text{ s}=153{,}4$ s, das sind rund 2 min 33 s.

b) Für jede der fünf Teilstrecken benötigt der Triebwagen 153 s. Dazu kommen noch die Haltezeiten von je 30 s auf den vier Zwischenhaltestellen, das sind zusammen 120 s.
Für die Gesamtstrecke von 20 km benötigt der Triebwagen also einschließlich der Haltezeiten eine Zeit von $5\cdot 153\text{ s}+120\text{ s}=885$ s, das sind 14 min 45 s.
c) Für $a=0{,}6\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ und $v_1=90\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}=$ $=25\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ erhält man analog wie oben

$$t_1=\frac{v_1}{a}=\frac{25}{0{,}6}\text{ s}=41{,}7\text{ s},$$
$$s_1=\frac{a}{2}t_1^2=\frac{0{,}6}{2}\cdot 41{,}7^2\text{ m}=521{,}7\text{ m},$$
$$t_2=\frac{4000-2\cdot 521{,}7}{25}\text{ s}=118{,}4\text{ s}.$$

Daraus folgt
$t=2t_1+t_2=201{,}8$ s, das sind rund 3 min 22 s.
Für die Gesamtstrecke von 20 km einschließlich der Haltezeiten benötigt der Zug also eine Zeit von $5\cdot 202\text{ s}+120\text{ s}=1130$ s, das sind 18 min 50 s.
Wir sehen also, daß der Zugverkehr durch den Einsatz der neuen Elektrotriebwagen erheblich beschleunigt werden kann. Bei einer Strecke von 20 km wird die Fahrzeit um 4 min 5 s geringer.

W 10/12 ■ 1160 Wir bezeichnen jeweils die Länge der Schenkel mit $a=b=0{,}5$ und die Länge der Basis mit c.
1. In diesem Falle gilt $c^2=0{,}25$, also $c=0{,}5$. Es ist also $a=b=c=0{,}5$, d. h. das Dreieck ist gleichseitig. Daraus folgt $\gamma=60°$.
2. In diesem Falle gilt $c^2=0{,}5$ und $a^2+b^2=$ $=0{,}25+0{,}25=0{,}5$, also $a^2+b^2=c^2$. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist also das Dreieck rechtwinklig, und es gilt $\gamma=90°$.



3. In diesem Falle gilt nach dem Kosinussatz $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$,

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Daraus folgt wegen $a=b=0{,}5$ und $c^2=0{,}75$

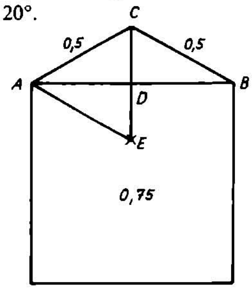
$$\cos\gamma=\frac{0{,}25+0{,}25-0{,}75}{2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}$$
$$=-\frac{0{,}25}{2\cdot 0{,}25}=-0{,}5, \text{ also}$$
$$\gamma=120°.$$

Bemerkung: Im 3. Falle können wir die Größe des Winkels γ auch elementargeometrisch ermitteln. Wählen wir die Bezeichnung der Punkte wie in Bild 3, wobei D die Mitte der Basis ist und die Strecke $\overline{CD}$ über sich selbst bis E verlängert wurde, so gilt

$\overline{AD}=\frac{1}{2}\sqrt{0{,}75}$,

$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2=0{,}25-\frac{1}{4}\cdot 0{,}75=\frac{1}{4}\cdot 0{,}25$,
$\overline{CD}=\frac{1}{2}\cdot 0{,}5$, $\overline{CE}=0{,}5$.

Wegen $\overline{AE}=\overline{AC}=0{,}5$ ist also das Dreieck AEC gleichseitig, d. h. $\sphericalangle ECA=60°$ und $\gamma=120°$.



W 10/12 ■ 1161 Es gilt

$|x-10|=x-10$, falls $x\geq 10$, (1)
$|x-10|=-x+10$, falls $x\leq 10$, (2)
$|x-2|=x-2$, falls $x\geq 2$, (3)
$|x-2|=-x+2$, falls $x\leq 2$. (4)

Für $f(x)=x^2-10x+16$ erhalten wir $f(x)=(x^2-10x+25)-9=(x-5)^2-9$, also $f(x)\geq 0$ genau dann, wenn $(x-5)^2\geq 9$, also wenn $x-5\geq 3$, d. h. $x\geq 8$ oder wenn $5-x\geq 3$, d. h. $x\leq 2$.

Dagegen ist $f(x)\leq 0$ genau dann, wenn $2\leq x\leq 8$. Es gilt also

$|x^2-10x+16|=x^2-10x+16$,
falls $x\geq 8$
oder $x\leq 2$ (5)
$|x^2-10x+16|=-x^2+10x-16$,
falls $2\leq x\leq 8$. (6)

Wir haben daher die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. $x\leq 2$.

In diesem Falle erhalten wir wegen (2), (4) und (5) die Gleichung

$$-x+10-x+2=x^2-10x+16,$$

$x^2-8x+4=0$; diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $4+\sqrt{16-4}=4+\sqrt{12}=4+2\sqrt{3}$, von denen nur die Lösung

$$x_1=4-2\sqrt{3}$$

der Bedingung $x\leq 2$ entspricht.

2. $2\leq x\leq 8$.

In diesem Falle erhalten wir wegen (2), (3) und (6) die Gleichung

$$-x+10+x-2=-x^2+10x-16,$$

$x^2-10x+24=0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_2=6 \quad \text{und} \quad x_3=4,$$

die beide die Bedingung $2\leq x\leq 8$ erfüllen.

3. $8\leq x\leq 10$.

In diesem Falle erhalten wir wegen (2), (3) und (5) die Gleichung

$$-x+10+x-2=x^2-10x+16,$$
$$x^2-10x+8=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $5+\sqrt{17}$ und $5-\sqrt{17}$, von denen nur die Lösung $x_4=5+\sqrt{17}$ die Bedingung $8\leq x\leq 10$ erfüllt.

4. $x\geq 10$.

In diesem Falle erhalten wir wegen (1), (3) und (5) die Gleichung

$$x-10+x-2=x^2-10x-16,$$
$$x^2-12x+28=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $6+\sqrt{8}$ und $6-\sqrt{8}$, die beide nicht die Bedingung $x\geq 10$ erfüllen. Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß für

$$x_1=4-2\sqrt{3},\ x_2=6,\ x_3=4,$$
$$x_4=5+\sqrt{17}$$

jeweils die gegebene Gleichung erfüllt ist. Daher ist die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung

$$L=\{4-2\sqrt{3}, 4, 6, 5+\sqrt{17}\}.$$

W 10/12*1162 Da die Punkte P_1 und P_2 auf der zu AC parallelen Gerade EG liegen, liegen die vier Punkte A, C, P_1, P_2 in einer Ebene (vgl. Bild 1). Sie bilden ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten $\overline{AC}=a\sqrt{2}$ und $\overline{P_1P_2}=\frac{a}{3}\sqrt{2}$ sowie der Höhe h (vgl. Bild 2). Der Flächeninhalt dieses Trapezes ist gleich

$$G=\frac{1}{2}(a\sqrt{2}+\frac{a}{3}\sqrt{2})h=\frac{2}{3}ah\sqrt{2}.$$

Bild 1

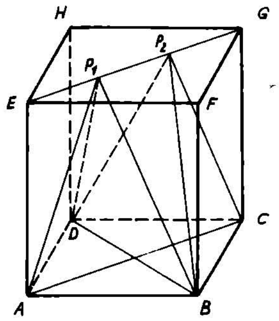
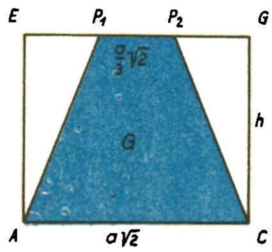


Bild 2



Nun können wir uns den Körper $ABCDP_1P_2$, dessen Volumen wir berechnen wollen, aus zwei Pyramiden mit der gemeinsamen Grundfläche ACP_2P_1 und den Spitzen B bzw. D zusammengesetzt denken. Die Grundfläche dieser beiden Pyramiden ist gleich G, ihre Höhe ist gleich $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, nämlich gleich der halben Diagonale des Quadrates $ABCD$. Daher beträgt das Volumen des Körpers $ABCDP_1P_2$

$$V=\frac{2}{3}G\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}ah\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{4}{9}a^2h.$$

W 10/12*1163 Angenommen, es gibt ein Polynom $f(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^2+a_3x^3$ mit den verlangten Eigenschaften. Dann gilt

$f(0)=a_0=1$, (1)
$f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3=1$, (2)
$f(2)=a_0+2a_1+4a_2+8a_3=1$, (3)
$f(3)=a_0+3a_1+9a_2+27a_3=100$. (4)

Durch Einsetzen von $a_0=1$ in (2), (3) und (4) erhalten wir das Gleichungssystem

$a_1+a_2+a_3=0$, (5)
$2a_1+4a_2+8a_3=0$, (6)
$3a_1+9a_2+27a_3=99$ (7)

und hieraus, indem wir $a_1=-a_2-a_3$ in (6) und (7) einsetzen,

$2a_2+6a_3=0$, (8)
$6a_2+24a_3=99$,
also $2a_2+8a_3=33$. (9)

Durch Subtraktion erhalten wir aus (9) und (8)

$$2a_3=33, \text{ also } a_3=16{,}5.$$

Ferner erhalten wir aus (8)

$$a_2=-3a_3=-3\cdot 16{,}5=-49{,}5$$

und aus (5)

$$a_1=-a_2-a_3=49{,}5-16{,}5=33.$$

Das Polynom lautet daher $f(x)=1+33x-49{,}5x^2+16{,}5x^3$.

Durch Einsetzen von $x=0$, 1, 2, 3 erhalten wir, wie gefordert, $f(0)=f(1)=f(2)=1$ und $f(3)=100$.

Lösungen zu Aufgaben, speziell für Klassen 9/10 (Seite 39)

▲1▲ *Gegeben:* Term $\frac{a\cdot b}{c}$ und die Werte $a=4{,}75$; $b=1{,}22$ und $c=25{,}2$

Gesucht: Wert des gegebenen Terms

Lösung: Der Überschlag lautet $\frac{5\cdot 1}{25}=\frac{1}{5}=0{,}2$

Ergebnis: $\frac{4{,}75\cdot 1{,}22}{25{,}2}=0{,}23$

Ein Vergleich des Ergebnisses mit dem Wert des Überschlages zeigt die richtige Größenordnung.

▲2▲ *Gegeben:* $\frac{2(5x-2)}{3}<2x+6$

Gesucht: Lösungsmenge im Bereich der natürlichen Zahlen

Lösung: Durch äquivalente Umformungen der gegebenen Ungleichung eliminiere ich x.

$\frac{2(5x-2)}{3}<2x+6$	$\cdot 3$
$10x-4<6x+18$	$-6x+4$
$4x<22$	$:4$
$x<5{,}5$	

Die Lösungsmenge ist $L=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

▲3▲ a) Zunächst bestimme ich den Hauptnenner der drei Summanden.

$4\cdot m \quad =2^2\cdot m$
$6\cdot n \quad =2\cdot 3\cdot n$
$8\cdot m\cdot n=2^3\cdot m\cdot n$
k.g.V. $2^3\cdot 3\cdot m\cdot n$

Durch Erweiterung jedes einzelnen Bruches erhalte ich die Summe

$$\frac{5}{4m}+\frac{7}{6n}-\frac{9-m}{8mn}=\frac{30n}{24mn}+\frac{28n}{24mn}-\frac{27-3m}{24mn}$$

Durch Addition der Summanden ergibt sich der gesuchte Quotient

$$\frac{5}{4m}+\frac{7}{6n}-\frac{9-m}{8mn}=\frac{30n+31m-27}{24mn}.$$

b) Bei der Berechnung des Quadrats benutze ich die binomische Formel $(a+b)^2$, wobei $a=\frac{2}{3}u$ und $b=-\frac{1}{2}v$ ist.

$$(\frac{2}{3}u-\frac{1}{2}v)^2=\frac{4}{9}u^2-\frac{2}{3}uv+\frac{1}{4}v^2$$

▲4▲ *Ansatz:*

(1) $31\ \text{LKW}_{klein}+27\ \text{LKW}_{groß}=143$
(2) $1{,}5\ \text{LKW}_{klein} \qquad =\text{LKW}_{groß}$?

Um die Übersichtlichkeit zu verbessern, ersetze ich $LKW_{klein}=x$ und $LKW_{groß}=y$. Ich erhalte das folgende Gleichungssystem:

Lösung:

(1)′ $31x + 27y = 143$

(2)′ $1{,}5x \quad = y$

(2)′ in (1)′ eingesetzt ergibt:

(1)″ $31x + 27 \cdot (1{,}5x) = 143$

$71{,}5x = 143 \mid :71{,}5$

$x = 2$

Aus (2)′ erhalte ich für $y=3$

Probe: Die Probe führe ich am Text durch. 31 Fuhren des kleineren LKW befördern $2 \cdot 31 = 62$ t Kies. 27 Fuhren des größeren LKW befördern $3 \cdot 27 = 81$ t Kies. Insgesamt werden 62 t + 81 t = 143 t transportiert. Das entspricht der Aufgabenstellung.

Antwortsatz: Der LKW mit der kleineren Ladekapazität faßt 2 Tonnen und der größere LKW 3 Tonnen Kies.

▲5▲ a) Eine Funktion ist eine Menge geordneter Zahlenpaare $[x; y]$ mit $x \in X$ (Definitionsbereich) und $y \in Y$ (Wertebereich), wobei die Menge X eindeutig auf die Menge Y abgebildet wird.

b) Die Figuren (1) und (3) sind Graphen von Funktionen der Form $y = f(x)$, weil jedem x aus dem Definitionsbereich genau ein y aus dem Wertebereich zugeordnet wird. Die Figur (2) ist kein Graph einer Funktion der Form $y = f(x)$, weil es x-Elemente gibt, denen zwei verschiedene y-Elemente zugeordnet sind.

▲6▲ Der Term für eine beliebige ungerade Zahl hat die Gestalt $(2n+1)$, n natürliche Zahl. Das Quadrat dieser beliebigen ungeraden Zahl ist

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Dieses Quadrat soll um 3 vergrößert werden. Ich addiere zum Quadrat die Zahl 3 und erhalte

$$(2n+1)^2 + 3 = 4n^2 + 4n + 4.$$

Dieses Ergebnis ist durch 4 teilbar, da jeder Summand den Faktor 4 enthält.

Bei dieser Aufgabe wählten die Schüler sehr unterschiedliche Darstellungsformen des geforderten Nachweises. Beispielsweise gingen mehrere Schüler folgendermaßen vor:

Behauptung: $4 \mid [(2n+1)^2 + 3]$, n natürliche Zahl

Nachweis: $(2n+1)^2 + 3 = 4n^2 + 4n + 4$
$= 4(n^2 + n + 1)$

Das Produkt $4(n^2+n+1)$ enthält den Faktor 4, deshalb gilt:

$$4 \mid [(2n+1)^2 + 3]$$

Dieses Vorgehen ist exakt, vollständig und recht übersichtlich. Bei solchen Nachweisen gibt es stets verschiedene Möglichkeiten der Darstellung. Einige Schüler führten den Nachweis ohne jegliche Erläuterung folgendermaßen:

$$(2x+1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 3 = 4x^2 + 4x + 4$$

$$y = \frac{4x^2 + 4x + 4}{4}$$

$$y = x^2 + x + 1$$

Wenn auch eingeschätzt werden kann, daß diese Schüler die Aufgabenstellung und den richtigen Ansatz für den Nachweis erkannt hatten, so ist die Form der Darstellung nicht befriedigend. Die Gedanken, die sich dabei der einzelne Schüler gemacht hat, sind bestenfalls zu erraten.

Lösung zur Aufgabe von Prof. Dr. L. Berg

▲1038▲ Die Aufgabenstellung führt auf die Rekursionsformel $n_{k+1} = 2n_k - 1$. Von $n_1 = 2$ ausgehend, findet man sofort die ersten Glieder 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, ... der Folge, und man vermutet leicht das Bildungsgesetz $n_k = 2^{k-1} + 1$. Der Beweis der Vermutung kann folgendermaßen erfolgen.

1. Durch vollständige Induktion.
2. Durch die Substitution $n_{k+1} = 2^k x_k$, die zu der Gleichung $x_k - x_{k-1} = -2^{-k}$ und wegen $x_0 = 2$ zu der Lösung $x_k = 2 - \sum_{\nu=1} 2^{-\nu} = 1 + 2^{-k}$ führt.
3. Durch die Substitution $n_k = x_k + y_k$, mit $y_{k+1} = 2y_k - 1$ und $x_{k+1} = 2x_k$ sowie $x_1 + y_1 = 2$. Es ist naheliegend, $y_k = 1$ zu wählen. Dann folgt $x_1 = 1$ und somit $x_k = 2^{k-1}$.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. R. Klötzler

▲1164▲ Zu 1:

$$K(x) = \sum_{j=1}^{n} \{{}^{k}{}_{1} Min(b_j, x) - k_0(x - b_j)_+\}.$$

Zu 2: $y = K(x)$ stellt im kartesischen (x, y)-Koordinatensystem einen Polygonzug dar, dessen Ecken die Abszissen b_j haben und dessen Anstieg m_j in $[b_j, b_{j+1}]$ $(n-j)\,k_1 - jk_0$ beträgt. Das Maximum liegt dann z. B. in einem solchen Eckpunkt der Abszisse b_{i*} für den $m_{i*} < 0$ und $m_{i*} - 1 \geq 0$ ist. Aus voranstehender Charakterisierung von b_{i*} ergibt sich nach wenigen Rechnungen

$i^* =$ kleinste natürliche Zahl $> \frac{nk_1}{k_1 + k_0}$. Also $x_{max} = b_{i*}$.

Zu 3: Ist $b_{i*} \leq C$, beträgt $x_{max} = b_{i*}$; andernfalls ist $x_{max} = C$. (*Anmerkung:* Die angegebene Lösung braucht übrigens nicht die einzige optimale Lösung zu sein.

Lösungen zu alpha-heiter

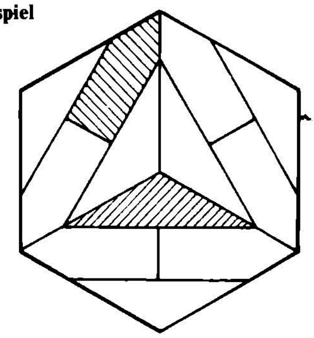
Bruchstücke

neunzig, Zweiter, Tafelwerk, Inkreis, Ellipse, Minuend, Omikron, Grauton, Neunter.

Von 3 zu 3

Der Weg verläuft über folgende Ziffern: 3–4–5–4–3–9–7–8–1–4–9–6–7–8–9–1–2–8–5–4–3.

Legespiel



b + cc = ca

6	+	5	=	11
+		+		+
− 1	·	6	=	5
5	·	11	=	16

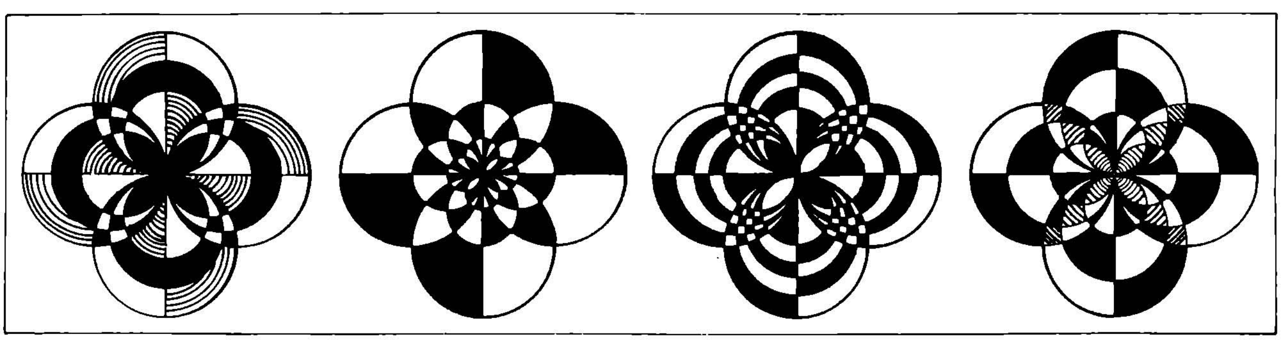
$a=6$; $b=5$; $c=1$

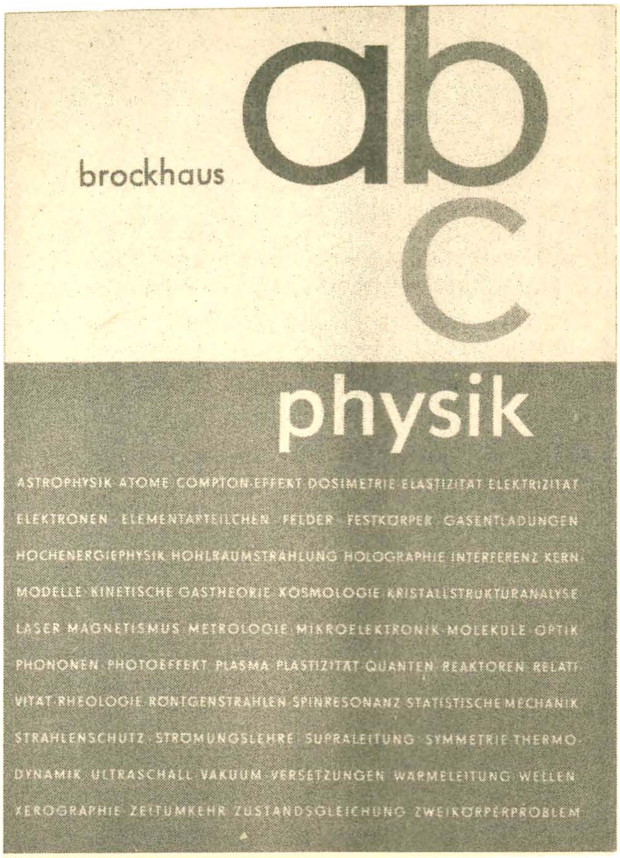
Rund um den Kreis

Rückreise **Thale** sende Tecumseh **nebenbei** darum **fang** **Stangen** teilen diese **Kanten** **durch Messer**

Mit Zirkel und Zeichendreieck

Schüler der Spezialschule für Musik, Halle (Klasse 5/6), zeichneten die vorliegenden Ornamente, Anregung gab das Titelblatt von Heft 2/73.





VEB F. A. Brockhaus Verlag Leipzig 1973
2 Bände, Kunstleder, 62,— M
Band I A—L, Band II M—Z

Brockhaus ABC Physik
Das umfassende Lexikon der Physik enthält auf mehr als 1 700 Seiten rund 12 000 Stichwörter, 2 000 Abbildungen im Text und auf 64 teilweise farbigen Tafeln sowie eine Vielzahl von Tabellen, graphischen Darstellungen und Literaturangaben.

Brockhaus ABC Physik
gibt in alphabetisch geordneten Einzelartikeln einen Überblick über das Gesamtgebiet der gegenwärtigen Physik und ihrer Spezialdisziplinen in der vielfältigen Verflechtung und gegenseitigen Abgrenzung zu den Nachbargebieten. Zusammenhängende Großartikel und kürzere Einzeldarstellungen geben Einblick in moderne physikalische Forschungs- und Arbeitsrichtungen sowie in den weiten technischen Anwendungsbereich der Physik. Die physikalischen Zusammenhänge der den Menschen umgebenden Erscheinungen werden wissenschaftlich einwandfrei und weitgehend allgemeinverständlich erläutert, um einen möglichst großen Benutzerkreis die rasche Orientierung zu erleichtern. Da viele Ergebnisse und Gesetzmäßigkeiten der modernen Physik nur in der Ausdrucksweise der Mathematik präzise zu erklären sind, werden die verwendeten mathematischen Ausdrücke selbst in besonderen Artikeln erläutert.

Brockhaus ABC Physik
wendet sich an alle Leser, die zu ihrer fachlichen Qualifizierung und allgemeinen Weiterbildung in und neben dem Beruf an der Erläuterung physikalischer Begriffe interessiert sind, an die Oberschüler, die Studierenden naturwissenschaftlicher und technischer Fachrichtungen in Fach- und Hochschulen, an die Lehrer der Polytechnischen und Erweiterten Oberschule, an interessierte Werktätige in den vielfältigen Einrichtungen der Erwachsenenbildung und schließlich an den wissenschaftlich oder praktisch tätigen Fachmann, um sich auf dem Nachbargebiet schnell und zuverlässig zu orientieren.

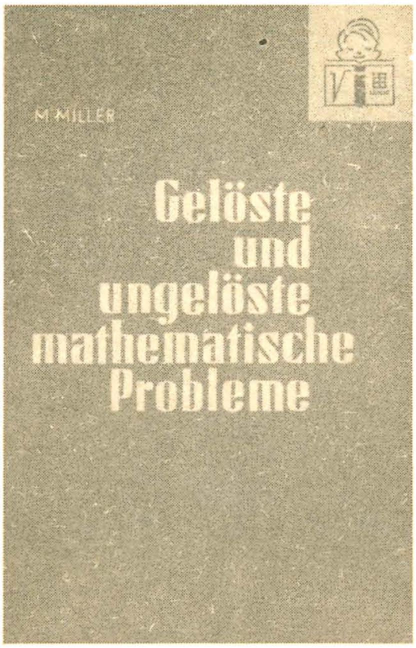
Auf 122 Seiten werden z. B. die mit dem *Anfangsbuchstaben A* beginnenden Begriffe erläutert. Die wichtigsten Stichwörter der ersten 50 Seiten seien hier genannt:

Abbesche Zahl; Abbildung (geometrisch-optisch; beugungsoptisch; akustisch); Abbildungsgleichungen; Abberation; Ableiter; Ablenkprisma; Ablese- und Anzeigeeinrichtungen; Abschirmung; absoluter Betrag, absoluter Fehler, absoluter Nullpunkt, absolute Ruhe, absolute Temperatur; Absorption; Adoptation; Additionstheorem der Geschwindigkeit; Adhäsion; Adsorption; Aeromechanik; Affinität; Aggregatzustand; Ähnlichkeitsregeln, -sätze, -theorie, -transformation; Akkommodation; Akustik; Algebra;

Die Spezialklassen Mathematik/Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin
nehmen noch Bewerbungen von besonders begabten und leistungsstarken Schülern der 10. Klassen (EOS und POS) für das Schuljahr 1974/75 entgegen.

Voraussetzung: Bei vorbildlichem gesellschaftlichem Verhalten hervorragende Leistungen in den Fächern Mathematik und Physik.
Ausbildungsziel: Vertiefte Kenntnisse in den naturwissenschaftlichen Fächern und Abitur nach zwei Jahren (11. und 12. Klasse).
Bei entsprechenden Leistungen ist eine bevorzugte Aufnahme eines Diplomstudiums gesichert.
Soziale Bedingungen: Finanzielle Zuwendungen werden gewährt. Unterkunft im Studentenheim ist möglich.

Bewerbungen sind umgehend an die Spezialschule der Humboldt-Universität,
102 Berlin, Burgstraße 26, zu richten.
Telefon: 422 65 85



Leseprobe

1. Ein landwirtschaftlich-mathematisches Problem Newtons

Isaac Newton sollte nach dem Willen seiner aus einer Bauernfamilie stammenden Mutter den von seinem Vater ererbten kleinen Gutshof in dem nahe der Ostküste Englands liegenden Dorf Wolsthorpe übernehmen. Aber auf Anraten von Verwandten und Freunden, die *Newtons* Begabung erkannten, konnte er studieren und erhielt bereits im Jahre 1669 den *Lehrstuhl für Mathematik* an der *Universität Cambridge* übertragen. Zu seinen Pflichten gehörten auch Vorlesungen über Arithmetik und Algebra. Sein Schüler und späterer Nachfolger *William Whiston* (1667 bis 1752) veröffentlichte 1707 diese Vorlesungen seines Lehrers unter dem Titel „Arithmetica universalis". In diesem Werk findet sich folgendes Problem, das *Newton* wohl in Erinnerung an seine frühere landwirtschaftliche Tätigkeit aufgestellt hatte:

k_1 Kühe weiden w_1 Wiesen in t_1 Tagen ab, k_2 Kühe weiden w_2 Wiesen in t_2 Tagen ab, k_3 Kühe weiden w_3 Wiesen in t_3 Tagen ab. Welche Beziehung besteht zwischen den neun Größen k_1 bis t_3? Es muß vorausgesetzt werden, daß alle Wiesen den gleichen Ertrag an Futter liefern, daß das tägliche Wachstum der Wiesen sich nicht ändert und daß jede Kuh täglich dieselbe Futtermenge frißt.

Newton fand folgende Lösung der Aufgabe: Der anfängliche Grasbestand jeder Wiese sei x, die tägliche Wachstumsmenge jeder Wiese sei y und die täglich von jeder Kuh aufgenommene Futtermenge sei z.

Am Ende des ersten Tages ist die auf allen Wiesen noch vorhandene Futtermenge $w_1x+w_1y-k_1z$; am Ende des dritten Tages ist die auf allen Wiesen noch vorhandene Futtermenge $w_1x+3w_1y-3k_1z$ usw; am Ende des t-ten Tages ist auf allen Wiesen noch die Futtermenge $w_1x+tw_1y-tk_1z$ vorhanden.

Da nach t Tagen sämtliche Wiesen abgefressen sind, ergeben sich die drei homogenen Gleichungen

$$w_1x+t_1w_1y-t_1k_1z=0, \tag{1}$$
$$w_2x+t_2w_2y-t_2k_2z=0, \tag{2}$$
$$w_3x+t_3w_3y-t_3k_3z=0. \tag{3}$$

Newton wußte von den von *Leibniz* gefundenen Determinanten noch nichts; er löste die Aufgabe folgendermaßen:

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben, nach den Unbekannten x und y aufgelöst:

$$x=\frac{t_1t_2\cdot(k_1w_2-k_2w_1)}{w_1w_2(t_2-t_1)}\,z;$$
$$y=\frac{w_1t_2k_2-w_2t_1k_1}{w_1w_2(t_2-t_1)}\,z.$$

Wir setzen diese beiden Ausdrücke in (3) ein und erhalten nach Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner $w_1w_2(t_2-t_1):z$ die gesuchte Beziehung:

$$w_3t_1t_2(k_1w_2-k_2w_1)+t_3w_3(w_1t_2k_2-w_2t_1k_1)$$
$$=k_3t_3w_1w_2(t_2-t_1).$$

In Determinantenform lautet diese Bedingung:

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_1t_1 & -k_1t_1 \\ w_2 & w_2t_2 & -k_2t_2 \\ w_3 & w_3t_3 & -k_3t_3 \end{vmatrix}=0.$$

2. Primzahlzwillinge

Abgesehen von dem Primzahlpaar 2 und 3 ist der Mindestabstand von zwei aufeinanderfolgende Primzahlen gleich 2. Primzahlpaare dieser Art bezeichnet man als Primzahlzwillinge, z. B. 3 und 5, 5 und 7, 17 und 19 usw. Auch die Primzahlzwillingspaare werden nach oben hin seltener. Die Abnahme unterliegt jedoch keinem angebbaren Gesetz und ist ziemlich unregelmäßig. So liegen zwischen 1 und 500 genau 24, zwischen 501 und 1000 nur 11 und zwischen 1001 und 1500 merkwürdigerweise 15 Zwillingspaare. Die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge oder ob es ein größtes Zwillingspaar gibt, ist bisher noch ungelöst.

Das Problem der Primzahldrillinge ist sehr einfach zu lösen. Außer den Drillingen 3, 5 und 7 kann es weiter keine Drillinge geben, da von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen stets eine Zahl durch 3 teilbar ist. Daraus folgt, daß es auch keine Vierlinge von Primzahlen, die in den Abständen 2, 2, 2 auftreten, geben kann. Bezeichnet man dagegen Primzahlen mit den Abständen 2, 4, 2 als Primzahlvierlinge, so kann man mit Hilfe einer Primzahltabelle solche Vierlinge ohne weiteres feststellen, z. B. 5, 7, 11, 13 oder 101, 103, 107, 109. Sogar noch zwischen 290000 und 300000 gibt es Primzahlvierlinge:

294311, 294313, 294317, 294319;
295871, 295873, 295877, 295879;
299471, 299473, 299477, 299479.

Ob es unendlich viele Gruppen von Primzahlvierlingen gibt, ist bisher nicht bekannt.

Weitere mathematische Titel des

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Belkner, H.

Determinanten

2. berichtigte und erweiterte Aufl.
96 S. mit 8 Abb., Leipzig 1970,
kartoniert 4,80 M
Mathematische Schülerbücherei 33,
Bestell-Nr. 665 100 1

Lehmann, E.

Lineare Optimierung

für Junge Mathematiker
116 S. mit 36 Abb., Leipzig 1970,
kartoniert 4,85 M
Mathematische Schülerbücherei 47,
Bestell-Nr. 665 564 3

Miller, M.

Rechenvorteile

4. verbesserte und ergänzte Aufl.
92 S. mit 1 Abb., Leipzig 1968,
kartoniert 3,75 M
Mathematische Schülerbücherei 14,
Bestell-Nr. 665 065 8

Übungen für Junge Mathematiker

Herausgegeben von G. Kleinfeld

Teil 1: Zahlentheorie

Von E. Lehmann, 2. Aufl. 159 S.
mit 22 Abb., Leipzig 1970,
kartoniert 6,50 M
Mathematische Schülerbücherei 36,
Bestell-Nr. 665 102 8

Teil 2: Elementargeometrie

Von G. Grosche, 2. Aufl.
93 S. mit 74 Abb., Leipzig 1973,
kartoniert 4,50 M
Mathematische Schülerbücherei 37,
Bestell-Nr. 665 466 7

Teil 3: Ungleichungen

Von G. Kleinfeld, 2. Aufl.
134 S. mit 20 Abb., Leipzig 1973,
kartoniert 5,50 M
Mathematische Schülerbücherei 38,
Bestell-Nr. 665 467 5