Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dozent Dr. sc. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Dr. H. Martini (S. 34); W. Träger (S. 38); G. Stelzer (S. 41); Prof. A. Engel (S. 41); Prof. Dr. M. Schukowski (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto Leipzig (Titelvignetten)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, nach einer Vorlage von W. Neugebauer, beide Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

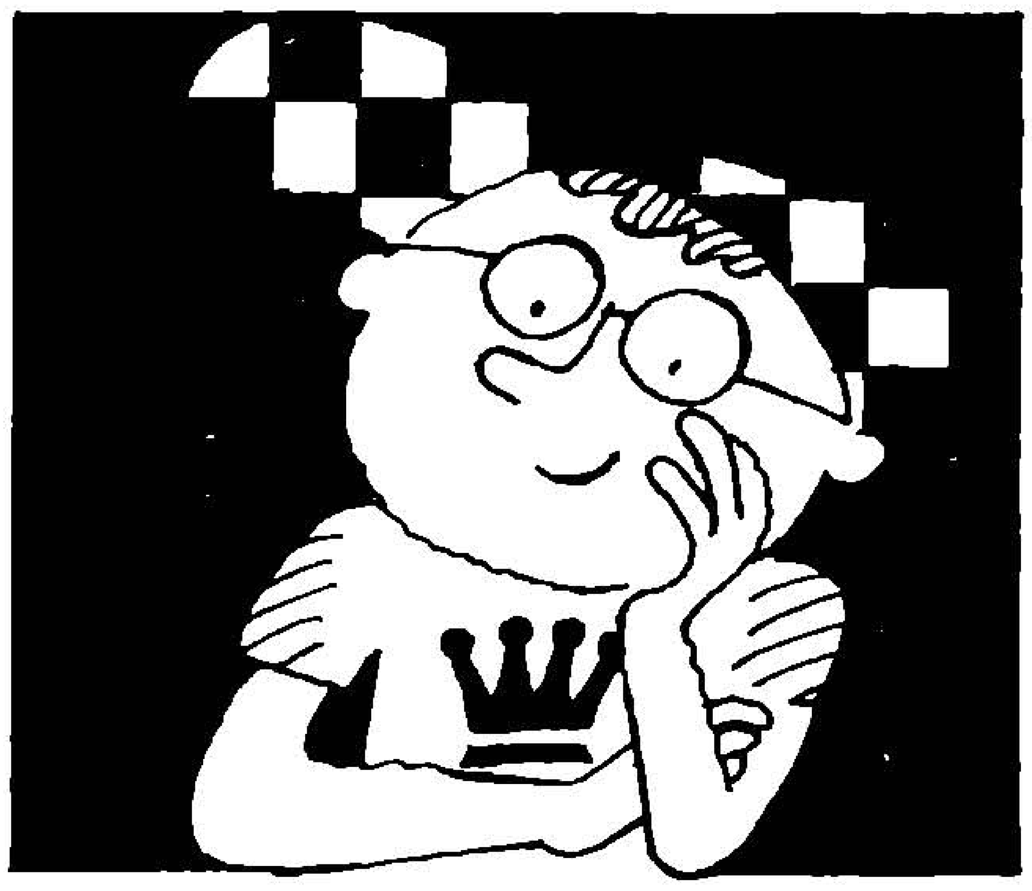
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 8. Dezember 1989
Auslieferungstermin: 10. April 1990

alpha

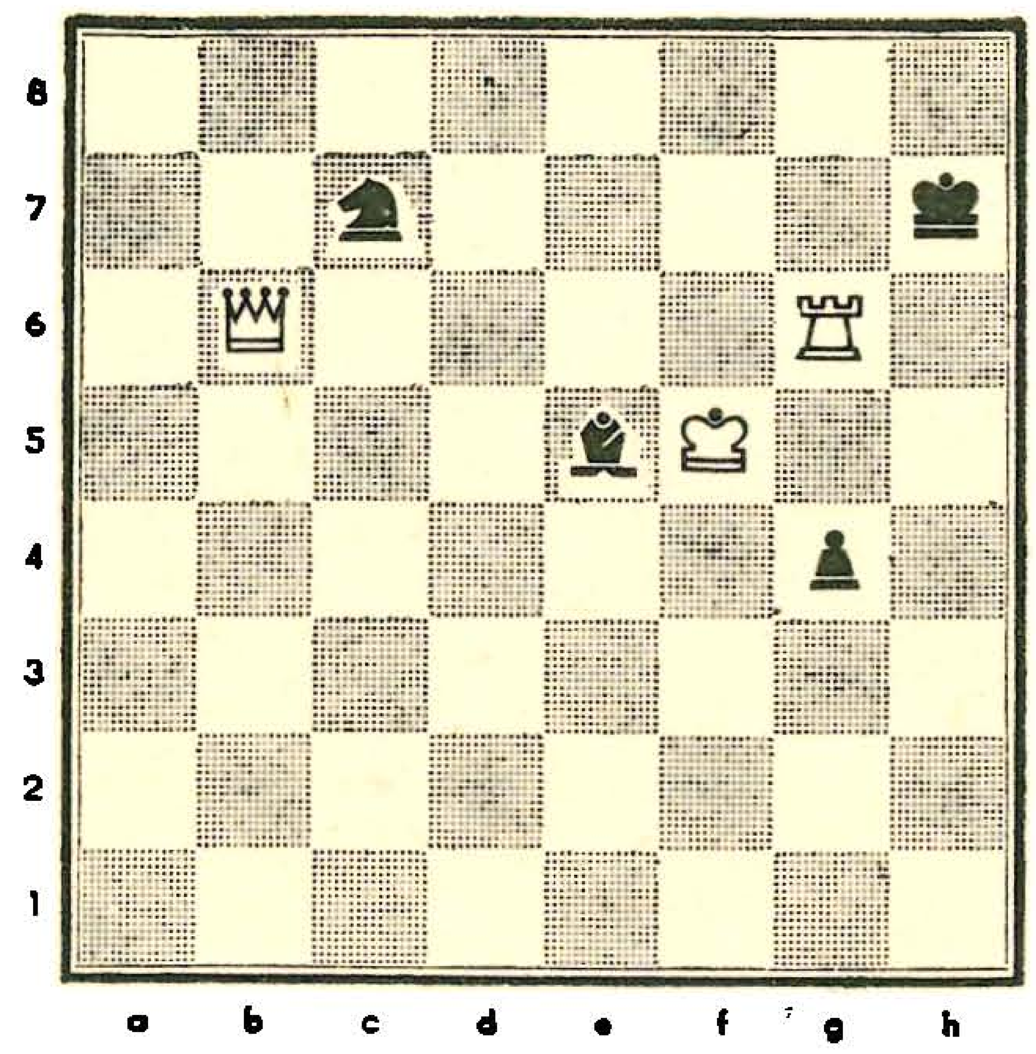
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.



Der Trick der Dame



Matt in drei Zügen

In dieser dreizügigen Miniatur von Dr. Gerhard Kaiser („Leipziger Volkszeitung“, 1954) droht die weiße Dame nach dem Schlüsselzug ein Matt auf der h-Linie an. Nach der schwarzen Parade schwenkt die Dame auf die 8. Reihe, um dort den schwarzen König mattzusetzen. Zwar kann sich Schwarz dagegen verteidigen, doch nur unter Freigabe der Deckung für die h-Linie, was die weiße Dame zum Mattzug ausnutzt. Wer durchschaut den Trick der Dame?

H. Rüdiger

2. Internationaler Spezialkurs der TU Dresden: Bedeutung des Schachs für Erziehung, Wissenschaft und Kultur

Neben Fußball, Eishockey und Tennis macht in letzter Zeit immer öfter eine Sportart auf sich aufmerksam, die bisher leider eher abseits des öffentlichen Interesses stand: das Schachspiel. Die Vereinigung der drei Elemente Wissenschaft, Sport und Kunst dürfte in dieser Form einmalig sein und zieht immer mehr Interessenten der verschiedensten Fachbereiche in ihren Bann. So konnte vom 15. bis 28. August 1989 im Rahmen des Internationalen Schachfestivals Dresden ein zweiter Kongreß zu diesem Thema stattfinden, welcher wie sein Vorgänger in der Schachwelt auf reges Interesse stieß. Hier erörterten Mathematiker, Physiker, Informatiker, Mediziner, Psychologen, Großmeister und Trainer aus 19 Ländern die verschiedensten Spezifika des königlichen Spiels, wiesen auf seinen allgemeinen Nutzen und seine Möglichkeiten hin. Doch auch die Praxis sollte in Dresden nicht zu kurz kommen – mit einem internationalen Frauenturnier und einem Openturnier setzten die Veranstalter hohe Maßstäbe.

In seiner Begrüßungsansprache betonte Dr. rer. nat. Strobel – wissenschaftlicher Leiter des Spezialkurses und Mitglied des Präsidiums des Deutschen Schachverbandes – daß es das Anliegen des Kongresses sei, Schach in noch breiterer Palette anzubieten und zu nutzen, womit man nahtlos an den Spezialkurs 1988 anschließe und diesen weiterführe.

Die Mobilisierung geistiger Ressourcen ist eine gesellschaftlich höchst relevante Aufgabe. Wie Untersuchungen der letzten Jahre deutlich machen, wirkt sich das Schachspiel positiv auf die Entwicklung der Fähigkeiten des Planens, Analysierens, Programmierens und der Strategiebildung aus. Es beeinflußt den Stil der geistigen Tätigkeit (siehe auch alpha 1/90).

Schachspielende Kinder sind ihren Altersgenossen auf erstaunlich vielen Gebieten voraus, besonders wird die Entwicklung von Talenten auf dem Gebiet der Mathematik und der Naturwissenschaften gefördert. Aber auch erwachsene Schachspieler betreiben ihr Hobby nicht umsonst. Es wirkt nachweisbar auf die Stabilisierung der geistigen und körperlichen Spannkraft ein. So wurde es in Persien vor der Jahrtausendwende gar als Medizin verordnet. Mit dem Wie und Warum solcher Wirkungen befaßten sich, neben Vorträgen zur Geschichte und Entwicklung des Spiels, zu neuen Erkenntnissen im Computerschach u. a. m., viele Referenten.

Dabei wurde dem Schulschach immer wieder breiter Raum gewidmet. Dr. rer. nat. Jordan – Vorsitzender der Arbeitsgruppe „Schach in der Schule (SiS) der DDR legte dar, daß in aller Welt Bemühungen zur Einführung des Schulschachs zu verzeichnen sind. Es existiert fakultativ in Österreich, Großbritannien, Frankreich und anderen Ländern. In Island können mehr als 75 % der 15jährigen Schüler Schach spielen. (Vgl. DDR: 25 bis 50 %) Das wahrscheinlich umfangreichste SiS-Projekt der Welt wird zur Zeit in der Provinz Quebec (Kanada) durchgeführt. Dort erlernen 25 000 Schüler im Rahmen des Mathematikunterrichtes das königliche Spiel. Die mathematischen Leistungen liegen dabei im Vergleich zu anderen Kursen (ohne Schach) deutlich höher.

Aber auch die Bemühungen des Deutschen Schachverbandes (DSV) der DDR können sich sehen lassen. Wir denken dabei in erster Linie an fakultative Kurse, an Schach im Schulhort und im Kindergarten. Im Vordergrund soll keinesfalls die Gewinnung von Schachtalenten stehen, sondern die Herausbildung allgemeiner Fähigkeiten bei den Schülern. Dazu bieten sich gerade im Vorschulalter und in der Unterstufe ideale Bedingungen. Dementsprechend nannte die sowjetische Kommission ihr Projekt nicht Schach in, sondern für die Schule.

In Leipzig und Dresden sind in dieser Richtung bereits erfolgversprechende Experimente angelaufen. So konnten 14 Hortnerinnen aus 11 Dresdener Schulen einen Schachintensivkurs besuchen, der es ihnen ermöglicht, das königliche Spiel zum festen Bestandteil der Beschäftigung im Schulhort werden zu lassen.

Initiiert von der Musikhochschule Leipzig findet in der Messestadt unter Leitung von Prof. Dr. Mehlhorn ein großangelegtes Experiment zur Förderung künstlerisch begabter Kinder statt. Es soll sich über einen Zeitraum von 5 Jahren erstrecken und beginnt in der letzten Kindergartengruppe.

Seit 1. 9. 1988 wurde zu diesem Zweck in ausgewählten Kindergärten eine breite Palette von künstlerischen Beschäftigungen angeboten, darunter auch Schach. Innerhalb von 6 Monaten erlernten 155 Kinder dieses Spiel mit großer Begeisterung. In seiner Eigenschaft als Regelspiel steht Schach in voller Übereinstimmung mit dem Bildungsprogramm des Kindergartens. Eine Ausbildungsanleitung liegt in Leipzig bereits vor. Auf die Ergebnisse des dortigen Experimentes darf man gespannt sein.

Nicht unerwähnt können in diesem Zusammenhang auch die Bemühungen des Nestors der Schulschachidee in der DDR, OSR Helmut Hartmann, Vizepräsident des DSV, bleiben, der an der Käthe-Kollwitz-OS Wittenberg schon seit mehr als einem Jahrzehnt auf schöne Erfolge mit und durch Schach zurückblicken kann. Schach hilft den Kindern, spielend schwierige Denkprozesse zu vollziehen, die in anderen Fächern als wesentlich abstrakter empfunden werden müssen. Laut einer Befragung, die Frau Dr. paed. Riemann an 21 Schulkindern vornahm, würden sich 20 davon auf Schach als Schulfach freuen, wenn es ohne Benotung bliebe. Das ist allerdings auch nicht vorgesehen. Erwähnenswert scheint mir ebenfalls der Fakt, daß mit Schach gerade die Leistungen durchschnittlich und unterdurchschnittlich begabter Kinder wesentlich gefördert werden können, was durch empirische Untersuchungen bereits belegt wurde.

Der hier angesprochene Beitrag des Schulschachs zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlicher Fähigkeiten dürfte besonders die Leser der alpha interessieren. Über Meinungen, Fragen und Kommentare zu diesem Thema würde ich mich sehr freuen.

Versehen mit Hinweisen auf Alter und Tätigkeit können sie gerichtet werden an: Markus Spindler, K.-Miehe-Str. 3 a, Sangerhausen, 4700

M. Spindler

30 Jahre Greifswalder Mathematikolympiaden

In Greifswald fand die erste Kreisolympiade bereits 1961 statt. Am 15. November 1989 begingen wir die 30. Kreisolympiade. Zu diesem Jubiläum fand ein Treffen mit 66 ehemaligen erfolgreichen Olympioniken statt.

Wie kam es zu den bisherigen Erfolgen?

Seit Januar 1968 gibt es bei uns in Greifswald den Klub „Junge Mathematiker", aber davor gab es schon mathematische Arbeitsgemeinschaften, die regelmäßig ihre Tätigkeit durchführten. Die Erfassung und Förderung mathematisch begabter Schüler beginnt mit der Klassenstufe 4 und endet mit der Klassenstufe 12. Außerdem wurde im Juli 1989 unser 25. Sommerlager für Junge Mathematiker durchgeführt. Ein Teil ist auch Mitglied im Bezirkskorrespondenzzirkel, und einige Schüler sind in der Mathematischen Schülergesellschaft der Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald. Für unsere Schüler der 3. bis 6. Klassen hat diese Sektion einen mathematischen Schülerwettstreit unter dem Namen „Pokal des Rektors" im Jahre 1987 ins Leben gerufen.

Wenn ich so überlege, warum ich mich eigentlich ausgerechnet für Mathematik interessiere, so liegt es wohl daran, daß die Mathematik in erster Linie auf der Logik des menschlichen Verstandes basiert, daß man wirklich jeden Sachverhalt selbst überprüfen und seinen Beweis nachvollziehen kann. Das ist nicht in jeder anderen Wissenschaft in solch einer Strenge und Exaktheit möglich. Hinzu kommt besonders bei den Olympiadeaufgaben, daß zur Lösung oftmals sehr originelle Ideen gefragt sind, daß man schöpferisch werden kann.

Ich hatte das Glück einer Klassenstufe anzugehören, in der es in unserer Stadt eine breite Leistungsspitze von Schülern gab, die sich der Mathematik verschrieben hatte, so daß bei den Bezirksolympiaden immer mehrere Greifswalder Schüler mit an der Spitze lagen. So etwas stimuliert natürlich enorm. Ich selbst nahm erst in der 9. Klasse zum ersten Male an einer Bezirksolympiade teil und erreichte ganz unerwartet einen 2. Preis. Dies gab mir einen mächtigen Auftrieb, so daß ich mich bereits ein Jahr später über einen 3. Preis bei der DDR-Olympiade freuen konnte. Zwei Jahre später (1989) konnte ich in Klasse 12 diesen Erfolg wiederholen.

Wie lief nun die AG-Tätigkeit in den drei letzten Jahren ab? Wir kamen wöchentlich einmal bis zu zwei Stunden zusammen und erhielten häufig schwierige Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik vorgelegt. Oft waren es Aufgaben, die echt ganz neu für mich waren. Manchmal gab es einen Tip. Hatten wir die Lösung oder den Beweis endlich vollständig, so wurden wir angehalten, nach anderen Lösungswegen zu suchen. Dazu gehörte eine Portion Ausdauer und Beweglichkeit, die wir natürlich nicht gleich mitbrachten. Aber der Reiz an der Sache hielt uns zusammen, und manchmal gab es auch ein lobendes Wort. Viel machten der Eifer und die Begeisterung unseres AG-Leiters, W. Bramschreiber, aus, der so manche Perle aus der Eigenschatulle holte. Hinzu kamen echte Ergänzungen zum Unterricht, gelegentlich auch physikalische Probleme. Aufgaben aus „Wurzel" und „Wissenschaft und Fortschritt", waren Vorkost unseres Speiseplanes. Hart, aber interessant wurde es, wenn wir die eine oder andere IMO-Aufgabe vorgesetzt bekamen! Wie mußten wir uns doch anstrengen, um hinter den Witz zu kommen!

Nachdem ich das Mathematikabitur vorfristig ablegen durfte, wurde ich gemeinsam mit einem Pasewalker Schüler seit Mitte der 11. Klasse von Wissenschaftlern unserer Universität in Analysis und Funktionalanalysis eingeführt. Das war eine gute Vorbereitung auf das Mathematikstudium, das ich aufnehmen werde.

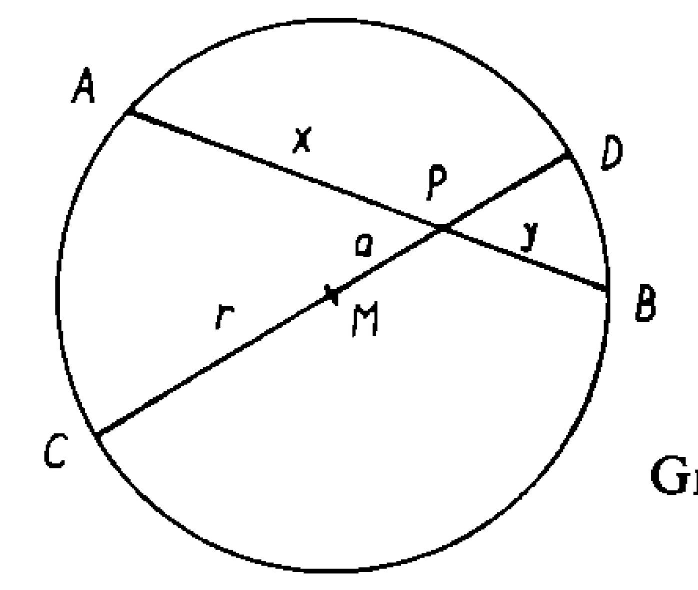
Bei allen, die mein Interesse für die Mathematik geweckt und erhalten haben, mir halfen und Anregungen gaben, möchte ich mich auf diesem Wege bedanken.

Thilo Kuessner

Unter den Förderern von Thilo und seinen Mitschülern finden sich für alpha-Leser so bekannte Namen wie Prof. Terpe, Prof. Flachsmeyer, Prof. Gronau, Dr. Schreiber und Dr. Dörbandt von der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald. Prof. Terpe, Vorsitzender der MSG Greifswald, feiert in diesem Jahr seinen 60. Geburtstag. Wir und die Greifswalder gratulieren ganz herzlich. Undenkbar aber wären solche Erfolge ohne die oft jahrelangen intensiven Bemühungen von Mathematiklehrern und Arbeitsgemeinschaftsleitern. Einen von ihnen, Thilos AG-Leiter Wolfried Bramschreiber wollen wir deshalb mit eigenen Beiträgen vorstellen. W. Bramschreiber leitet seit 25 Jahren im Klub „Junger Mathematiker" des Stadtkreises Greifswald Arbeitsgemeinschaften und betreute Thilo und seine Mitstreiter von der 10. bis zur 12. Klasse. *Alphons*

Eine runde Sache

Wir setzen eine Kugel mit dem Mittelpunkt M, dem Radius r und einem festen Punkt P im Innern der Kugel mit $\overline{MP} = a$ voraus. Durch P gibt es unendlich viele Kugelsehnen $\overline{AB}$ mit den Kugelsehnenabschnitten $\overline{AP} = x$ und $\overline{BP} = y$.



Großkreis

Es könnte von Interesse sein, ob das Produkt $x \cdot y$ der Längen der Kugelsehnenabschnitte jeder Sehne auch eine Konstante ist, wie wir es vom Kreis her kennen.

Zu jeder Kugelsehne $\overline{AB}$ durch P existiert ein Großkreis, der als Schnitt der Ebene, die durch A, B und M geht, mit der Kugel erzeugt wird.

Nehmen wir im Bild den Durchmesser $\overline{CD}$ durch P als weitere Kugelsehne, so erhalten wir die Sehnenabschnittlängen

$\overline{CP} = r + a$ und $\overline{DP} = r - a$.

Durch Anwendung des Sehnensatzes auf den Großkreis erhalten wir

$x \cdot y = (r + a)(r - a) = r^2 - a^2 =$ konstant.

Sollte der Sehnensatz nicht so geläufig sein, so erhalten wir das Ergebnis aus einer Proportion, die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACP und BDP folgt. Es gilt $\sphericalangle APC \cong \sphericalangle BPD$ (Scheitelwinkel) und $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle BDC$ (Peripheriewinkel über $\overline{CB}$).

Damit sind die Dreiecke ACP und BDP einander ähnlich nach dem Hauptähnlichkeitssatz. Deshalb gilt (für die entsprechenden Strecken dieser Dreiecke)

$\frac{x}{r-a} = \frac{r+a}{y}$ und folglich

$x \cdot y = (r + a)(r - a)$.

Nun können die Längen der Kugelsehnen durch P und auch deren Abschnittslängen selber sehr unterschiedlich ausfallen. Fassen wir die Abschnitte x und y als Kanten von Würfeln auf, so werden deren Rauminhalte und die Summe dieser Rauminhalte als veränderlich erwartet.

Deshalb sei die Aufgabe gestellt, für welche Kugelsehne der Länge $x + y$ durch P mit den Abschnitten x und y ist

a) $x^3 + y^3$ möglichst groß,

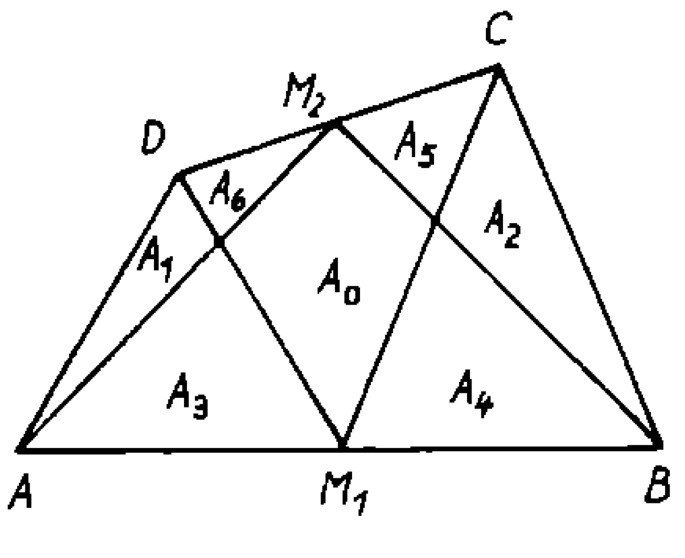
b) $x^3 + y^3$ möglichst klein.

Hinweis: Das Ergebnis $x \cdot y =$ konstant ist bei diesen Untersuchungen von besonderer Bedeutung.

W. Bramschreiber

Einige Perlen aus W. Bramschreibers „Eigenschatulle"

▲1▲ In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ sei M_1 der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und M_2 der Mittelpunkt von $\overline{CD}$. Verbindet man M_1 mit C und D und M_2 mit A und B, so erhält man folgende Skizze:

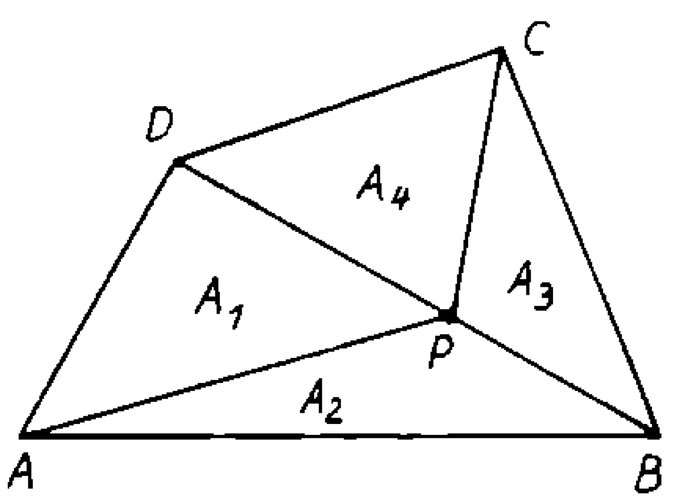


Es ist zu beweisen:
Sind A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und A_6 die Flächeninhalte der aus dem Bild ersichtlichen Figuren, so gilt stets

I. $A_1 + A_2 = A_0$

II. $A_3 + A_5 = A_4 + A_6$

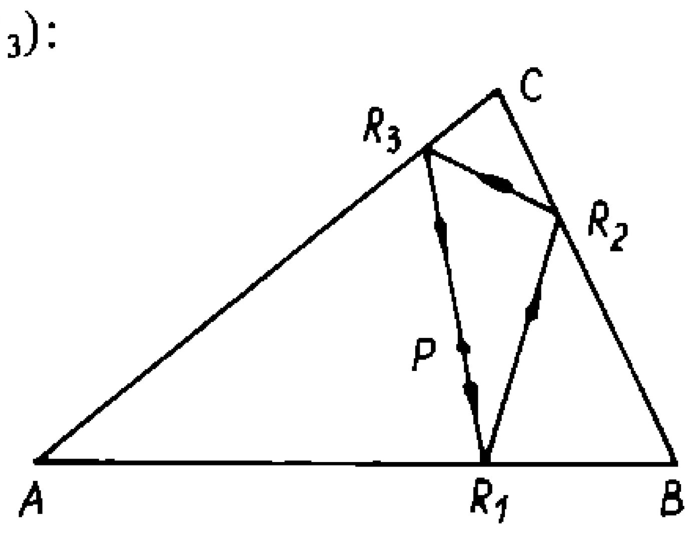
▲2▲ P sei ein beliebiger Punkt auf der Diagonale $\overline{BD}$ eines beliebigen konvexen Vierecks $ABCD$. Verbindet man P mit A und C, so erhält man die Figur:



Es ist zu beweisen:
Für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3, A_4 der Teildreiecke gilt

$$A_1 \cdot A_3 = A_3 \cdot A_4 .$$

▲3▲ Gesucht sind alle Punkte P im Innern eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ABC, für die folgendes zutreffen soll: Wird P nacheinander an den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ reflektiert, so ist der Reflexionsweg eine geschlossene Figur (Dreieck $R_1R_2R_3$):



▲4▲ Einer Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei eine Schar von Tetraedern $ABCD$ einbeschrieben, wobei die drei von D ausgehenden Kanten aufeinander paarweise senkrecht stehen mögen.
Beweise, daß für alle diese Tetraeder gilt: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \text{konstant}$.

▲5▲ Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei eine Schar von Dreiecken ABC mit $\overline{AB} = \text{konstant}$, C auf dem Kreis variabel einbeschrieben.
I. Gesucht ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieser Dreiecke.
II. Gesucht ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Höhen dieser Dreiecke.
III. Gesucht ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Seitenhalbierenden dieser Dreiecke.

▲6▲ Ein beliebiges gerades Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, werde von einer Ebene in allen vier Höhenkanten geschnitten. Dadurch entstehen zwei Prismenstümpfe.
Ist A der Flächeninhalt des Parallelogramms und sind h_1, h_2, h_3 und h_4 die Höhenkantenlängen eines Stumpfes, so ist zu beweisen, daß

$$V = \frac{1}{4} \cdot A \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) .$$

▲7▲ Ein Schüler stellte im Jahr 1988 an seinem Geburtstag überrascht fest, daß sein Alter in Jahren bei Ziffernvertauschung seinen Geburtsjahrgang ergibt.
a) Wie alt wurde der Schüler?
b) Für welche Jahrgänge dieses Jahrhunderts gilt das auch?
c) Für welche Geburtsjahrgänge dieses Jahrhunderts tritt das nach 1988 wieder ein?
(Bemerkung: Ich bin Jahrgang 35, wurde im Jahr 1988 53 Jahre alt und 53+35=88.)

▲8▲ Von einem Quadrat mit genau 64 Quadraten gleicher Größe fehlen die Eckfelder einer Hauptdiagonalen. Zur Verfügung stehen genügend Rechteckplättchen der Größe zweier Quadrate aneinandergelegt.
Ist es möglich mit diesen Rechteckplättchen die vorausgesetzte Figur vollständig (ohne Überlappung) zuzudecken?

▲9▲ Man beweise: Jede Kubikzahl ist als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar.

▲10▲ Man beweise: Der Flächeninhalt von rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seiten ist nie eine Quadratzahl.

Für euch zum Weiterknobeln noch zwei Eigenaufgaben von Mitgliedern der MSG Greifswald.

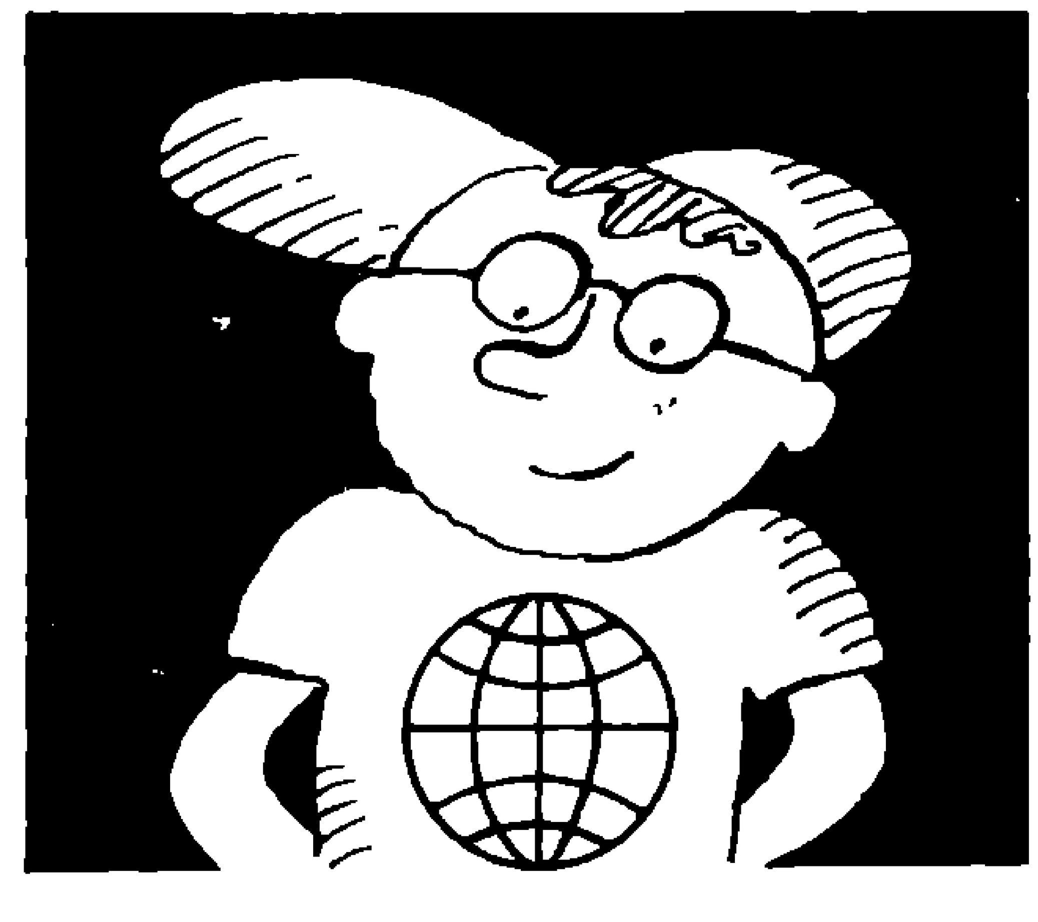
Ein OSG-Laden will gleich große Ananas- und Mandarinenbüchsen so aufstellen, daß in der untersten Reihe des Stapels n Büchsen, dann $n-1$, dann $n-2$, ..., in der obersten Reihe $n-(k-1)$ Büchsen symmetrisch zu einer vertikalen Achse ohne Lücken stehen. Dabei sollen die Mandarinenbüchsen stets außen (oben, unten, links, rechts) und die Ananasbüchsen stets innen stehen. Welche Werte können n und k annehmen, damit der Stapel gleich viele Büchsen jeder Sorte enthält?

Jan Fricke, Pasewalk

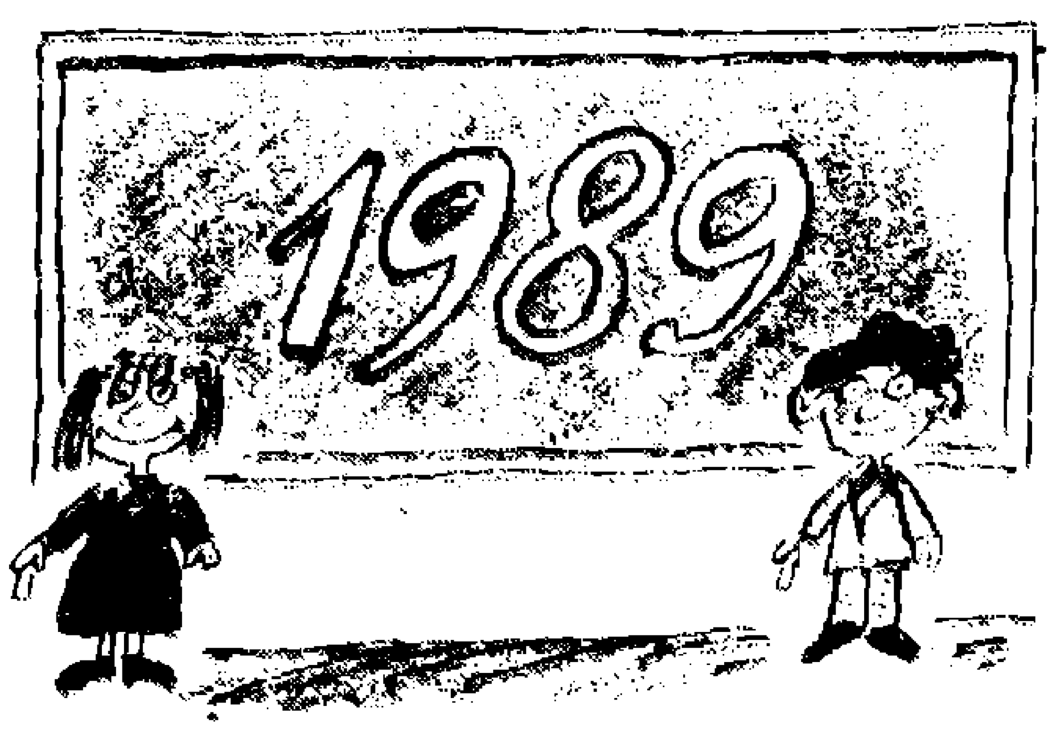
Gegeben sei die Menge aller konvexen Vierecke $ABCD$ mit
$AB = 3x$, $BC = AD = 2x$ und $CD = x$.
Der Inkreis des Vierecks ABCD berühre die Seiten BC bzw. AD in F bzw. H. Man ermittle das Verhältnis Q der Flächeninhalte der Vierecke $ABFH$ und $HFCD$ in Abhängigkeit von einem Parameter und, wenn möglich, den größten und den kleinsten Wert von Q!

René Schöne, Rostock

Übrigens – in Greifswald wird für die Hand von AG-Leitern und anderen Interessenten ein Heft „Geometrische Eigenaufgaben" zum Druck vorbereitet.

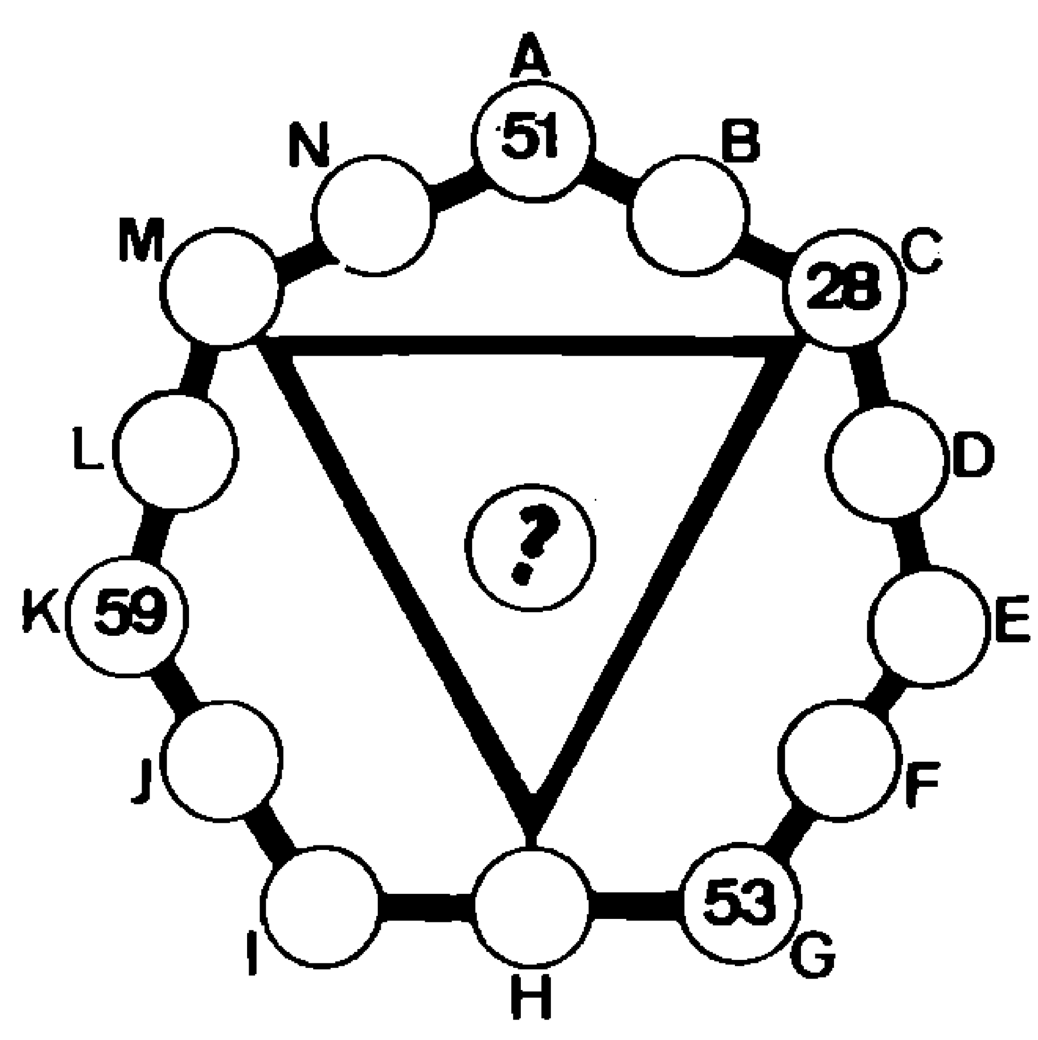


▲1▲ К числу 1989 припишите по цифре слева и справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 88.



aus: Quant, Moskau

▲2▲ **Polygone des nombres**
Sachant que $C + H + M = 114$, placez dans les cercles vides les nombres cidessous de façon à toujours obtenir un total de 114 sur chaque côté de cet heptagone.
8 – 16 – 20 – 22 – 33 – 35 – 39 – 41 – 45 – 47



Aus: Logigram, Paris

▲3▲ **Search for squares**
Here are three unusual squares: 41^2, 33^2, 836^2. What is so unusual about them? (A hint: look for new squares in the integer you get from computing the full number equal to each of the squares.)

aus: Fun with mathematics, Toronto

„... auf eine so leichte und schöne Art bewiesen"

Ein zahlentheoretischer Satz im Briefwechsel zwischen Euler und Goldbach

Zum 300. Jahrestag der Geburt von Christian Goldbach

Zu den berühmtesten Vermutungen der Mathematik gehört die im Jahre 1742 von Goldbach ausgesprochene Behauptung: „Jede natürliche Zahl, die größer als 2 ist, kann in drei Summanden zerlegt werden, die alle Primzahlen oder 1 sind."
Beispiele:
$3 = 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 2$,
$5 = 1 + 1 + 3$, $6 = 1 + 2 + 3$,
$289 = 3 + 3 + 283$.
Die Goldbachsche Vermutung ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt worden. – Wer war eigentlich Goldbach?
Christian Goldbach ist am 18.3. 1690 in Königsberg (heute Kaliningrad) geboren worden. Er studierte an der Albertus-Universität seiner Geburtsstadt. Danach unternahm er ausgedehnte Reisen durch Europa. Hierbei suchte er den Kontakt zu zahlreichen Gelehrten.
Im Jahre 1725 kam er nach Petersburg (heute Leningrad). Hier war ein Jahr zuvor durch Peter dem Großen die Akademie der Wissenschaften begründet worden. Goldbach übernahm als erster ständiger Sekretär die wissenschaftliche Federführung an der Akademie. Von 1727 an lebte er am kaiserlichen Hofe (vom Januar 1828 an in Moskau) als Erzieher des jungen Zaren Peter II. Anfang 1732 kehrte er nach Petersburg an die Akademie zurück. Im Jahre 1742 wurde Goldbach an das Collegium für auswärtige Angelegenheiten versetzt. Er lebte weiterhin in Petersburg, hatte aber oft längere Zeit in Moskau zu tun. Er starb am 20.11. (nach dem damals in Rußland noch üblichen julianischen Kalender) bzw. 1.12. (nach dem gregorianischen Kalender) 1764 in Petersburg.
Goldbach war ein Mensch mit vielseitigen Neigungen und Talenten. Man hat ihn als einen Polyhistor (einen Gelehrten, der über das Wissen seiner Zeit verfügt) bezeichnet. Ein Goldbach-Biograph schrieb: „Goldbach hatte ungewöhnlich weite Interessen, unter denen das Interesse für Mathematik ... vorherrschend war. Er zeigte jedoch wenig Neigung, sich systematisch mit einem Gebiet zu beschäftigen, wenig Neigung zur ständigen konzentrierten Arbeit an einem bestimmten abgegrenzten Komplex von Fragen. Und auch in der Mathematik ... blieb er immer ein Liebhaber und Autodidakt. ... Die Entdeckungen Goldbachs auf mathematischem Gebiet waren im Vergleich zu den Entdeckungen verschiedener anderer Wissenschaftler des 18. Jahrhunderts nicht bedeutend".
Im Jahre 1727 war mit Leonhard Euler (1707 bis 1783) ein mathematisches Genie nach Petersburg berufen worden, das sich zu einem der bedeutendsten Mathematiker entwickeln sollte. (Euler wirkte von 1741 bis 1766 an der Akademie der Wissenschaften in Berlin und kehrte danach wieder nach Petersburg zurück.) Während seiner ersten Petersburger Jahre hat Euler bei seiner Arbeit bedeutsame Anregungen von Goldbach erhalten. Im Oktober 1729 begannen Euler und Goldbach einen 35 Jahre andauernden Briefwechsel, in dem sie vorwiegend mathematische Fragen diskutierten. Goldbach lenkte bereits in seinen ersten Briefen Eulers Interessen auch auf zahlentheoretische Probleme. Das waren zunächst unbewiesene Behauptungen (Vermutungen) von Fermat, wie sie in dessen nach seinem Tode publizierten Werken enthalten waren bzw. unter „Zahlenliebhabern" als eine Art von Folklore zirkulierten (auch Goldbach zitierte Fermat vom Hörensagen). Pierre de Fermat (1601 bis 1665) hatte sich neben seiner Tätigkeit als Jurist in Toulouse mit Mathematik beschäftigt. Er gilt als der größte französische Mathematiker des 17. Jahrhunderts. „Seine genialste Leistung ist die Neuschöpfung der Zahlentheorie" – schrieb ein Mathematikhistoriker. Angeregt durch Goldbach wurde Euler der große Nachfolger Fermats in der Zahlentheorie. Das zahlentheoretische Werk Eulers füllt zwar nur vier Bände seines 29 Bände umfassenden mathematischen Werks; doch dieses allein hätte ihm einen geachteten Platz in der Mathematikgeschichte gegeben.
Zahlentheoretische Fragen waren damals nicht besonders populär. Für viele Jahre war Goldbach der einzige, der sich für Eulers arithmetisches Werk interessierte.
Im Folgenden soll ein mehrjähriges zahlentheoretisches Wechselgespräch zwischen Euler und Goldbach vorgestellt werden, das Goldbach zu einem Beweis des von Euler im August 1741 behaupteten Satzes 1 führte.
Satz 1: Zahlen der Form $4mn - m - 1 = 4n(m - 1) - 1$ können niemals eine Quadratzahl sein, wenn m und n natürliche Zahlen sind.
Goldbach an Euler (2./13.2. 1742): „Das theorema, daß $4mn - m - 1$ kein quadratum sein könne, gefället mir sehr". Er könne den Satz aber nicht beweisen. Euler an Goldbach (23.2./6.3. 1742): „Daß $4mn - m - 1$ ... niemals ein quadratum sein könne, konnte ich bis anjetzo auch nicht rigorose [streng] demonstrieren, sondern ich hatte solches aus einem theoremate Fermatiano [Theorem von Fermat] ... hergeleitet. ... Die Richtigkeit davon beruhet also auf der Wahrheit dieses theorematis ...". Es handelt sich um den von Fermat im August 1640 ausgesprochenen
Satz 2: Nicht eine einzige Primzahl der Form $4n - 1$ kann Teiler der Summe von zwei teilerfremden Quadraten sein.
Ist eine ungerade Zahl durch keine Primzahl der Form $4n - 1$ teilbar, so besitzt sie nur Primteiler der Form $4k + 1$. Ein Produkt von Primzahlen der Form $4k + 1$ ist aber wieder von dieser Form. Nach dem Satz 2 hat also eine Summe von zwei teilerfremden Quadraten keine Teiler der Form $4n - 1$. Das gilt auch für die Summe $a^2 + 1 = a^2 + 1^2$. Es ist stets (wie auch die natürlichen Zahlen a, m, n gewählt werden) $a^2 + 1 \neq (4n - 1)m$, d.h. $a^2 \neq 4mn - m - 1$.
Den ersten uns überlieferten Beweis des Satzes 2 gab Euler in diesem Brief an Goldbach! Damit war der Satz 1 bewiesen. Doch Goldbach suchte, wie aus mehreren Briefen an Euler zu entnehmen ist, nach einem neuen Beweis des Satzes 1, also nach einem Beweis, der vom Satz 2 unabhängig ist.
Goldbach an Euler (23.3. 1743): „Endlich stellet sich die demonstratio nova (neuer Beweis) ein."
Euler an Goldbach (29.3./9.4. 1743): „Ew. Wohlgeb. bin ich für die mir gütigst überschriebene Demonstration, daß $4mn - m - 1$ keine Quadratzahl sein kann, gehorsamst verbunden. Die Raisonnemens [Überlegungen] darin sind ... so tiefsinnig, daß ich viel Mühe gehabt, ehe ich dieselben habe völlig einsehen und auseinanderwickeln können. ... Wenn die letzte Konklusion [Folgerung] ihre Richtigkeit hat, so ist die ganze übrige Demonstration vollkommen. Allein, eben diese letzte Konsequenz erwecket bei mir einen Skrupel, welchen ich nicht wohl mit Worten ausdrükken kann."
Nach weiterer Diskussion der fraglichen „Konklusion" muß Goldbach am 11./22.6. 1743 bekennen: „... so erkenne ich doch nunmehr, daß die Demonstration [der Beweis] ... nicht bestehen kann. ... Vielleicht findet sich künftig etwas besseres".
Am 19./30.7. 1743 schrieb Goldbach an Euler: „Nachfolgende Demonstration [Beweis] habe ich zu dem Ende in unterschiedene kleine propositiones [Sätze] abgeteilet, damit E. Hochedelgeb. diejenige, bei welcher sie einigen Anstand finden möchten [Anstoß nehmen], desto bequemer anzeigen könnten." Nun formulierte er in lateinischer Sprache elf Sätze:
1. Wenn es überhaupt ein b^2 gibt, das der Gleichung $4mn - m - 1 = b^2$ mit natürlichen Zahlen m, n genügt, so sei a^2 das kleinste Quadrat mit $4mn - m - 1 = a^2$.
2. Addiere ich auf beiden Seiten dieser Gleichung $-4ma + 4m^2$, so ergibt sich $4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2$ oder $4mn' - m - 1 = b'^2$ mit $b' = a - 2m$ oder $2m - a$ und $n' = n - a + m$.

3. In dieser Gleichung kann nicht $a = m$ werden (dann wäre die rechte Seite der Gleichung durch m teilbar, die linke Seite jedoch nicht).
4. Es kann auch nicht $a > m$ werden, dann wäre nämlich $n - a + m < n$ und daher
$b'^2 = 4mn' - m - 1 = 4m(n - a + m)$
$- m - 1 < 4mn - m - 1 = a^2$,
was der Annahme widerspricht, daß a^2 das kleinste unter den Quadraten b^2 mit $4mn - m - 1 = b^2$ ist.
5. Es muß folglich $a < m$ sein.
6. Ähnlich gilt: Wenn man $-4an + 4n^2$ auf beiden Seiten der Gleichung
$4mn - m - 1 = a^2$ addiert, so ergibt sich
$4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$.
7. In dieser Gleichung kann nicht $a = n$ werden. Sonst wäre
$4mn - m - 1 = n^2$ oder
$n^2 - 4mn + m - 1 = 0$ (quadratische Gleichung für n) oder
$n_{1,2} = 2m \pm \sqrt{4m^2 - m - 1}$.
Diese Zahl ist jedoch (wie man zeigen kann) irrational.
8. Es kann auch nicht $a > n$ werden, dann wäre $m - a + n < m$ und daher
$(a - 2n)^2 = 4n(m - a + n) - m - 1 < 4nm$
$- m - 1 = a^2$,
was der Annahme widerspricht.
9. Es muß folglich $a < n$ sein. Da nach Satz 5. $a < m$ ist, ergibt sich $a^2 < mn$.
10. Folglich gilt $4mn - m - 1 < mn$, was absurd ist.
11. Deshalb kann es unter allen ganzzahligen Quadraten der Form $4mn - m - 1$ (wenn sie existieren) kein kleinstes Quadrat geben. Folglich gibt es gar keines.

Euler vermerkte auf dem Rand des Briefes: „Diese Demonstration [Beweis] kann etwas kürzer gefaßt werden und nur allein gezeiget werden, daß a non $> m$ nec $> n$ [nicht $> m$ und auch nicht $> n$], woraus schon folget, daß $4mn - m - n$ non $> mn$ [nicht $> mn$], quod est absurdum [was absurd ist].“ Und an Goldbach schrieb er am 13./14. 8. 1743: „Wann [wenn]
$4mn - m - 1$ in einem Fall ein quadratum [Quadrat] wäre, so würde man gleich unendlich viele andere casus [Fälle] daraus finden können. Was nun Ew. Wohlgeb. annehmen, daß a^2 das kleinste quadratum sei, welches in formula [in der Form] $4mn - m - 1$ enthalten ist, so muß notwendig a kleiner sein als m, und daher haben die 5 ersten propositiones [Sätze] ihre völlige Richtigkeit. Wann aber Ew. Wohlgeb. ferner zu dieser Aequation [Gleichung] fortgehen
$4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$, weilen dieselbe nicht in der vorgelegten Form $4mn - m - 1$ enthalten ist, so folgt auch nicht, daß $(a - 2n)^2$ kleiner sein müsse als a^2; dann [denn] $4mn - m - 1$ könnte das kleinste mögliche quadratum geben, ungeachtet $4n(m - a + n) - m - 1$ einem noch kleineren quadrato gleich wäre, und also kommt mir die 8te proposition verdächtig vor, weilen non obstante hypothesi [ohne der Annahme zu widersprechen] a^2 größer sein kann als $(a - 2n)^2$.“
Goldbach scheint in 8. analog wie in 4. geschlossenen zu haben.

In Wirklichkeit erhält er
$b''^2 = 4nm'' - m - 1 < 4nm - m - 1 = a^2$
(mit $b'' = a - 2n$, $m'' = m - a + n$),
wobei $4nm'' - m - 1$ (wegen $m'' \neq m$!) nicht von der Form $4nk - k - 1$ ist (die für $k = m$ nach der Annahme das kleinste derartige ganzzahlige Quadrat
$4nm - m - 1 = a^2$ liefert); also ist auch $b''^2 < a^2$ kein Widerspruch zur Annahme! Euler schrieb weiter: „Bei diesem tentamine [Versuch] fällt mir ein, ob man dieses theorema nicht etwan auf eine gleiche Art demonstrieren könnte, wie man zu erweisen pflegt, daß $a^4 + b^4$ oder $a^4 - b^4$ kein quadratum sein könne.“ Fermat hatte einst gezeigt, daß die Gleichungen $x^4 + y^4 = z^2$ und $x^4 - y^4 = z^2$ keine nichttrivialen ganzzahligen Lösungen besitzen.

Euler schlug nun vor, die dabei benutzte Beweismethode, die Fermat „Methode des unendlichen Abstiegs“ nannte (vgl. alpha 17 (1983), H. 2, S. 29), auf das diskutierte Problem anzuwenden.
Er beschrieb das Vorgehen konkreter: „Weil ... gewiß ist, daß in numeris parvis [in kleinen Zahlen] $4mn - m - 1$ kein Quadrat sein könne, so würde die Demonstration auf folgende Art vollkommen richtig sein.“ Und Euler notierte (in lateinischer Sprache);
I. [Es wird angenommen, daß es ein Quadrat gibt, das sich in der verlangten Form darstellen läßt.] Das Quadrat a^2, das sich in der Form $4mn - m - 1$ darstellen läßt, sei gegeben.
II. Daraus kann ein anderes Quadrat b^2 kleiner als a^2 gefunden werden, das gleichfalls in der Form $4mn - m - 1$ dargestellt ist.
III. Man wird also fortgesetzt zu kleineren Quadratzahlen kommen, was absurd ist. [Die Annahme I muß also falsch sein.] „Die ganze Demonstration würde also auf den II. Satz ankommen.“
Am 28. 9. 1743 schrieb Goldbach an Euler: „Aus Eurer Hochedelgeb. Erinnerung gegen die vorige Demonstration habe ich die prop. 6 ipsius demonstrationis [zu diesem Beweis] allerdings unrichtig befunden, dahero ich dieselbe nebst darauffolgenden in meinem letzteren Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu substituieren bitte“. Und er formulierte die Sätze 6. bis 8. (in lateinischer Sprache) neu:
6. Addiert man zu der Gleichung
$(4n - 1)m - 1 = a^2$ beiderseits
$-2a(4n - 1) + (4n - 1)^2$, so ergibt sich
$(4n - 1)(m - 2a + 4n - 1) - 1$
$= (a - (4n - 1))^2$.
7. Da a^2 das kleinste Quadrat ist, das der Gleichung $(4n - 1)m - 1 = a^2$ genügt, so muß $a^2 < (a - 4n + 1)^2$ oder
$a^2 = (a - 4n + 1)^2$ sein. Wegen $4n \neq 1$ kann das Gleichheitszeichen nicht gelten. Es gilt folglich
$(-2a + (4n - 1))(4n - 1) > 0$, und daher
$4n - 1 > 2a$. Nach Voraussetzung ist aber
$4n - 1 = \frac{a^2 + 1}{m}$; folglich gilt
$\frac{a^2 + 1}{m} > 2a$ oder $a^2 > 2am - 1$ oder
$a > 2m - \frac{1}{a}$.
8. Da nach dem 5. Satz $a < m$ ist, folgt $m > 2m - \frac{1}{a}$, was absurd ist, wenn m und a ganze Zahlen sind.
Letzteres ist jedoch in $4mn - m - 1 = a^2$ angenommen worden.
Die Annahme ist somit falsch. Stets gilt $4mn - m - 1 \neq \square$ [Quadratzahl], wenn m und n natürliche Zahlen sind. Und das war zu beweisen.
„Nunmehr hat Ew. Wohlgeb. Demonstration, daß $(4n - 1)m - 1 \neq a^2$, ihre völlige Richtigkeit“, schrieb Euler am 4./15. 10. 1743, denn „da Dieselben [Sie] vorher erwiesen, daß posito $a\,a$ omnium quadratorum, sie quae darentur, minimo [wenn man a^2 das kleinste aller Quadrate setzt, sofern welche gegeben sind], sein müsse $m > a$, anjetzo aber pro eodem casu [in demselben Fall], daß $(4n - 1) > 2a$, so muß folglich sein $(4n - 1)m > 2a^2$, nun aber ist $(4n - 1)m = a^2 + 1$, und wäre also $a^2 + 1 > 2a^2$, welches nicht sein kann nisi sit $a = 0$ [außer wenn $a = 0$ ist], vel [oder] $a = 1$, dann [denn] hier muß das Zeichen $>$ nicht majus [größer], sondern non minus [nicht kleiner] heißen. Wann [wenn] man aber setzt vel [entweder] $a = 0$, vel [oder] $a = 1$, so wird die Aequation [Gleichung] $(4n - 1)m - 1 = a^2$ unmöglich.
Ich muß gestehen, daß ich nicht geglaubt hatte, daß dieses theorema auf eine so leichte und schöne Art bewiesen werden könnte, und ich bin dahero versichert, daß die meisten theoremata Fermatii [Theoreme von Fermat] auf eine gleiche Art bewiesen werden können, weswegen ich Ew. Wohlgeb. um so vielmehr für die Kommunikation [Mitteilung] dieser herrlichen Demonstration [dieses Beweises] verbunden bin“.
Der Zahlentheoretiker André Weil (geb. 1908) machte darauf aufmerksam, daß dieser von Goldbach mit Eulers Hilfe so mühsam gefundene Beweis des Satzes 1 den ersten Keim der sog. Reduktionstheorie für binäre quadratische Formen enthält, die später von Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813, siehe alpha 21, 1987, H. 3 und 4, Seiten 52, 77) entwickelt worden ist.
Lagrange hatte sich seit 1768, sowohl von Fermats Vermutungen als auch von Eulers Abhandlungen angeregt, mit der Zahlentheorie befaßt.

H. Pieper

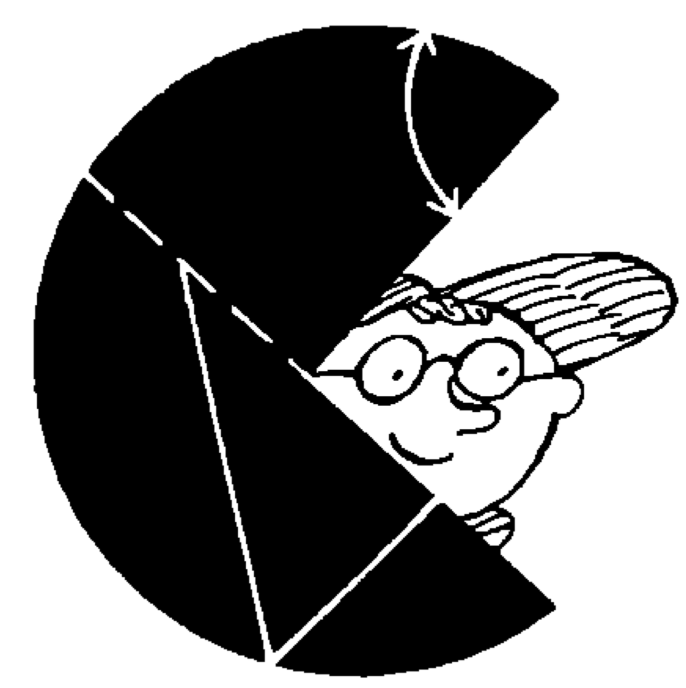
Buchtip

H. Wußing

Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik

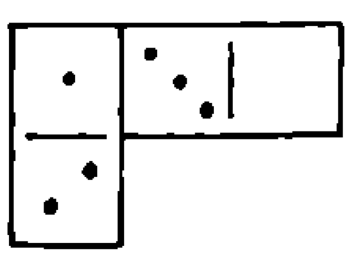
2., überarb. Auflage, etwa 365 S., zahlr. Abb. Bestell-Nr.: 571 832 3
Preis: 17,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Ein Band aus der Studienbücherei für Lehrer, der aber sicher allen unseren mathematikhistorisch interessierten Lesern viel Freude bereitet.

In freien Stunden · alpha-heiter

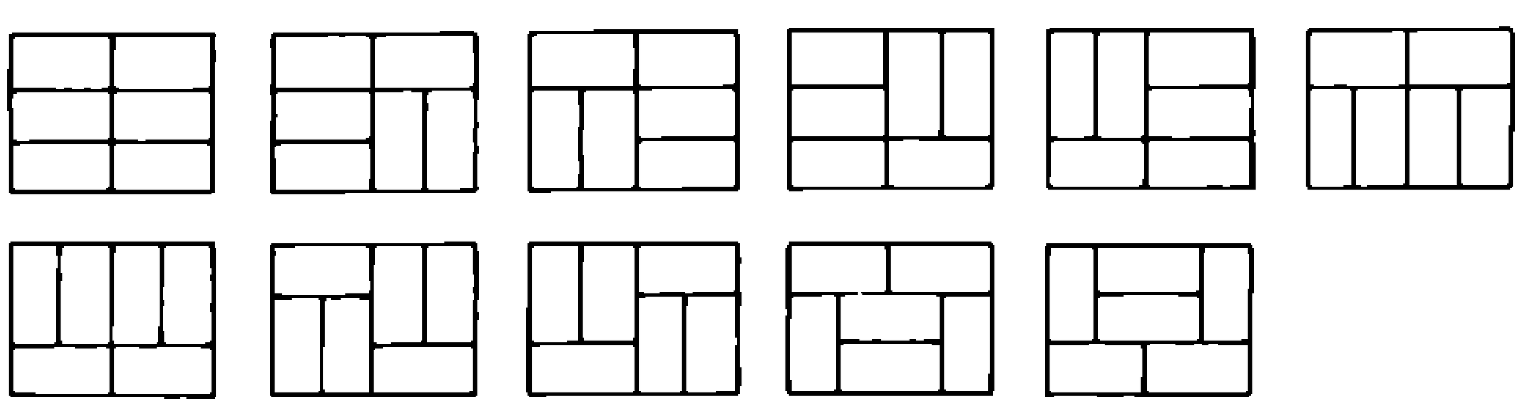


Leistungsfähiges Dominostein-Sextett

Deutet man die Punkte auf jeder Dominosteinhälfte als Ziffer, so kann man nebeneinanderliegende Hälften als Darstellung einer natürlichen Zahl auffassen. So stellen z. B. die hier nebeneinanderliegenden Hälften die Zahl 130 dar:



Von den 28 Steinen eines Dominospiels sind sechs geeignete auszuwählen: Diese sollen sich auf jede der 11 abgebildeten Schablonen so legen lassen, daß sich durch Addieren der Zahl der ersten Zeile und der der zweiten Zeile die Zahl der dritten Zeile ergibt.



W. Träger, Döbeln

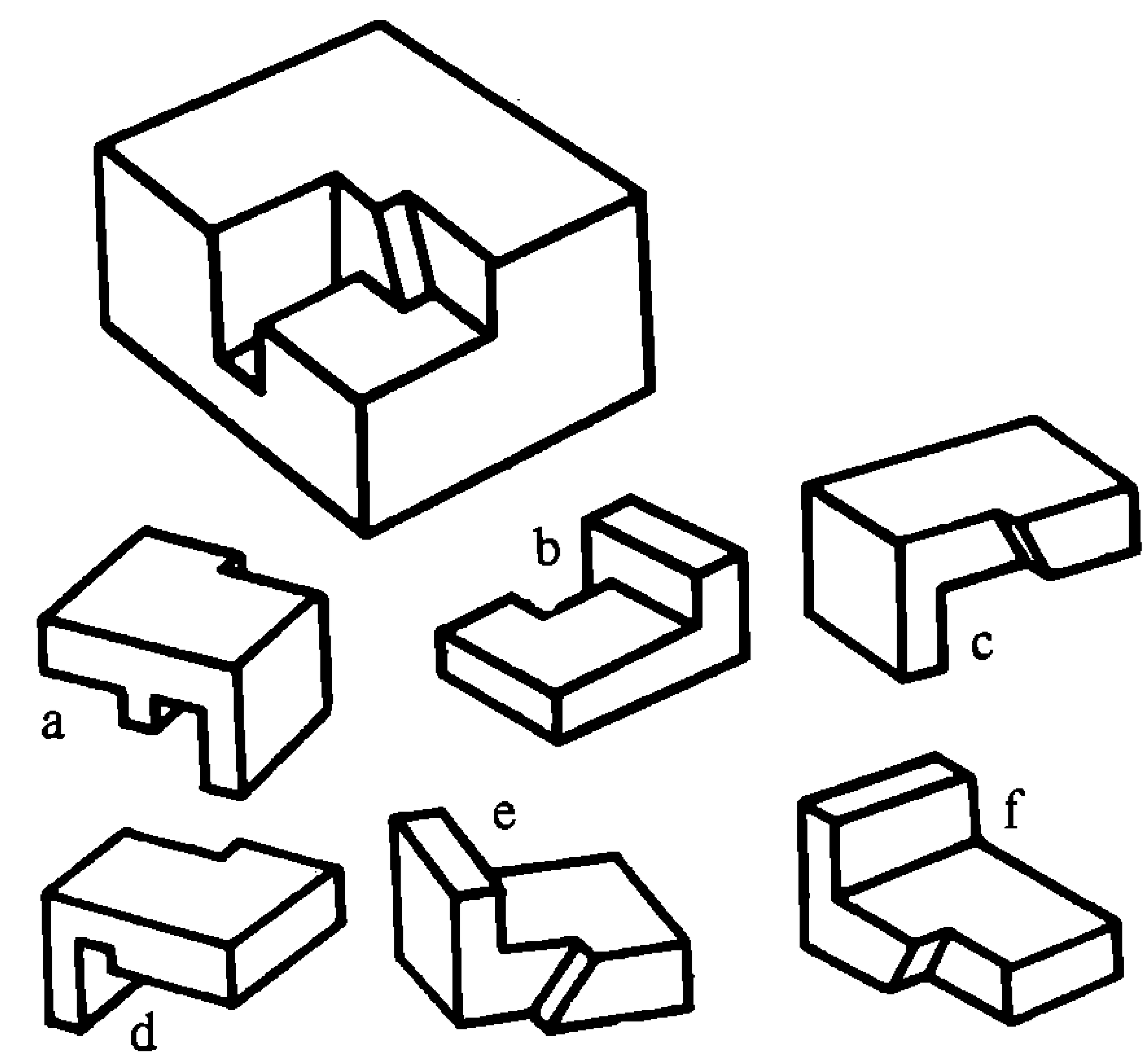
15 Meter im Quadrat

Herr Ackermann hat einen Garten. Dieser ist quadratisch von 15 m Seitenlänge. Seine Beete legte er so an: Zuerst teilte er die gesamte Fläche in drei gleichgroße Rechtecke und danach teilte er jedes dieser Rechtecke in zehn gleichgroße Rechtecke. So erhielt er 30 gleichgroße Beete. Nun wächst und blüht alles. In einer Ecke des Gartens befindet sich der Wasserhahn. Zum Begießen geht es mit zwei Gießkannen bei jedem Beet an der längeren Seite einmal rauf und einmal runter. Das Wasser reicht immer gerade für ein Beet. Zum Schluß stellt er die Kannen wieder beim Wasserhahn ab. Da sagt Herr Ackermann zu seiner Frau und seinem Sohn: „Ihr müßt mir in Zukunft helfen, denn ich alleine muß über einen Kilometer weit gehen, wenn ich alle Beete begießen will."
„Natürlich helfen wir", meint Frau Ackermann, „aber du hast sicher etwas übertrieben." Hat Herr Ackermann recht?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

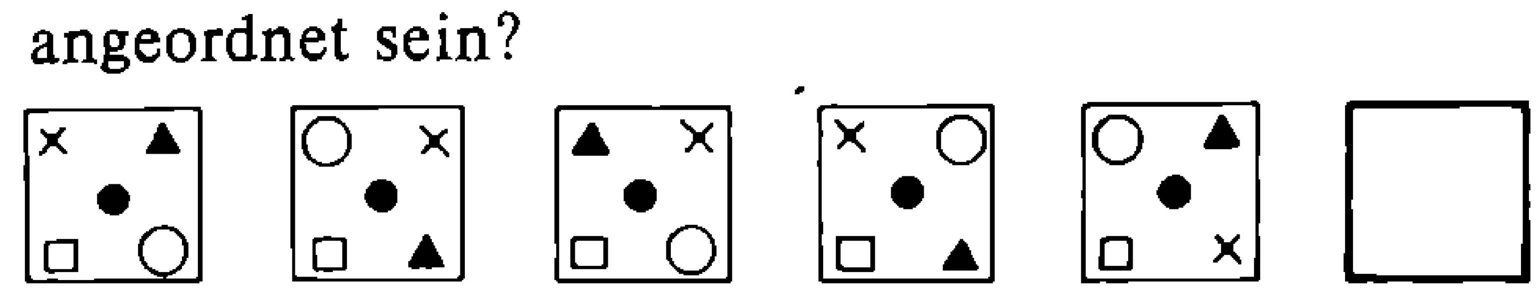
Zum Knobeln

Welches der Teile paßt genau in den Körper?



Scharf nachgedacht

Wie müssen die fünf Figuren im sechsten Quadrat angeordnet sein?



Iris Biziak, Dreitzsch

Wortspielereien

Vervollständige mittels Zahlworten zu Begriffen.
... füßler, ... felderwirtschaft, ... eck, ... er, ... chreiben, ... spitz, Re ..., ... schönchen, Schl ..., Gem ... amkeit, ... samkeit, ... atz, Tr ..., ... chlag, ... achser, ... zylindermotor, ... teiler, ... angel, ... losigkeit.

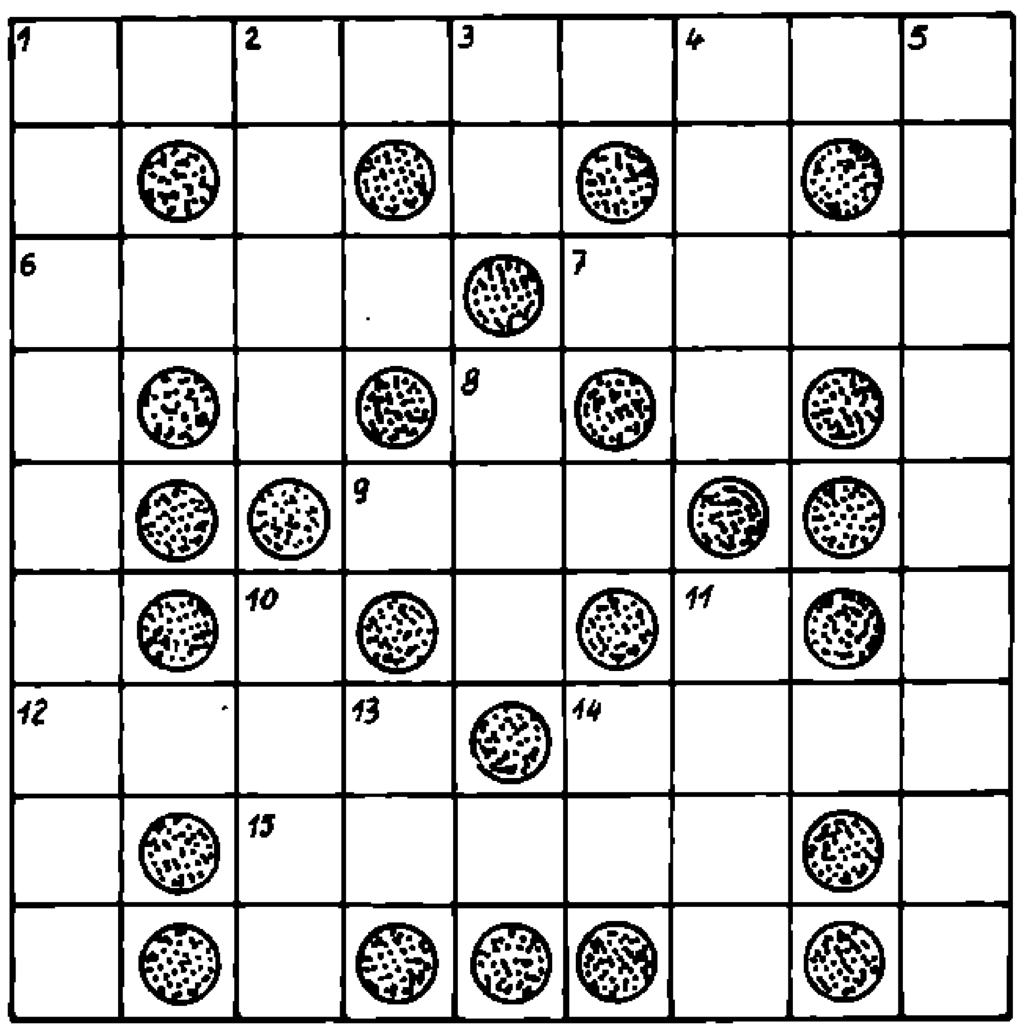
Jane Birkholz, Wilhelm-Pieck-Stadt Guben

J. Jakob v. Berzelius (Chemiker, 1779 bis 1848) soll ein sehr witziger Mann gewesen sein. So bat er seinen Schüler Wöhler, als dieser mit der Untersuchung eines neu entdeckten Minerals beschäftigt war, einen seiner Freunde „durch Ernennung zum Taufpaten des Minerals zu ehren" – und zwar nach dem Spanier Miguel Erecacoexecohoncrena.

aus: Lingmann/Schmiedel: „Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten", VEB Fachbuchverlag Leipzig

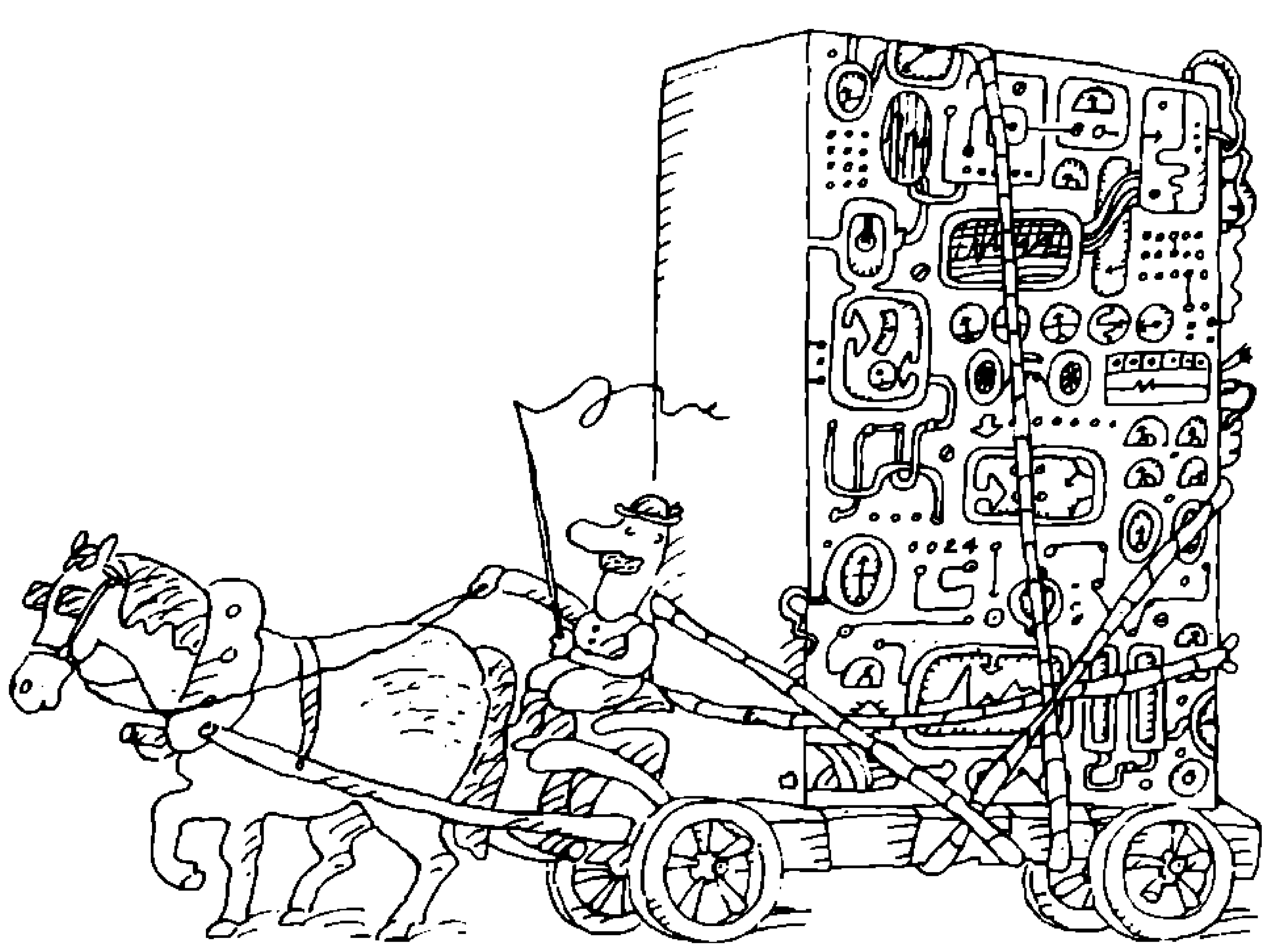
Mathematisches Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Längeneinheit, 6. natürliche Zahl, 7. ganze Zahl, 9. Unendlichkeitsstelle einer Funktion, 12. norwegischer Mathematiker (1802 bis 1829), 14. Zeitabschnitt, 15. algebraische Struktur



Senkrecht: 1. Verbindungsstrecke zweier Ecken eines Polygons, die keine Seite ist, 2. grundlegendes mathematisches Objekt, 3. kleine Längeneinheit (Abk.), 4. norwegischer Mathematiker (1863 bis 1922), 5. Zykloide, 8. geometrischer Begriff, 10. Segment, 11. Begriff aus der Graphentheorie, 13. Logarithmus zur Basis 2 (Abk.), 14. gegenteilige Entscheidung von „nein".

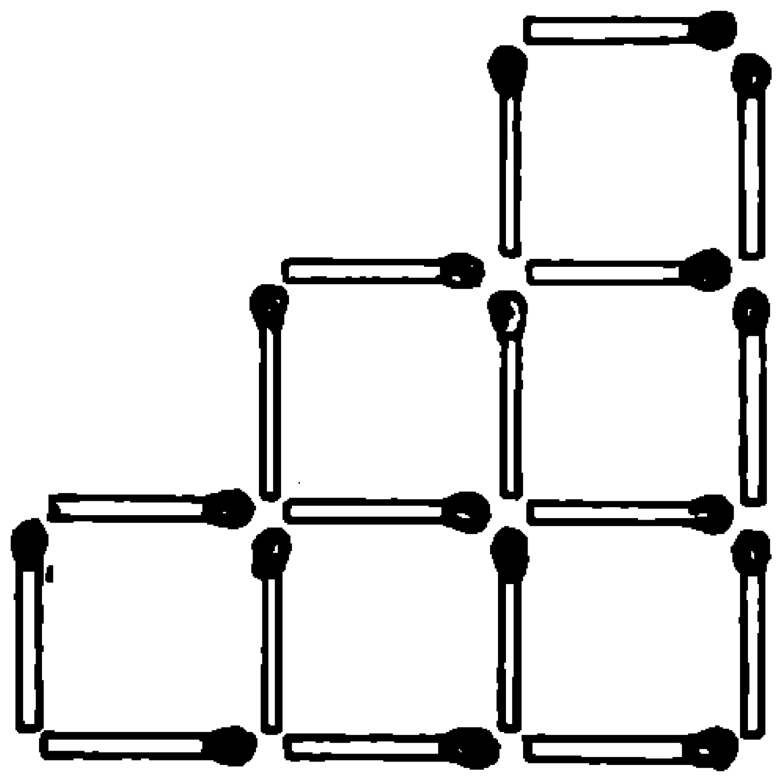
Dr. R. Mildner, Leipzig



L. Otto, Leipzig

Hölzchentrick

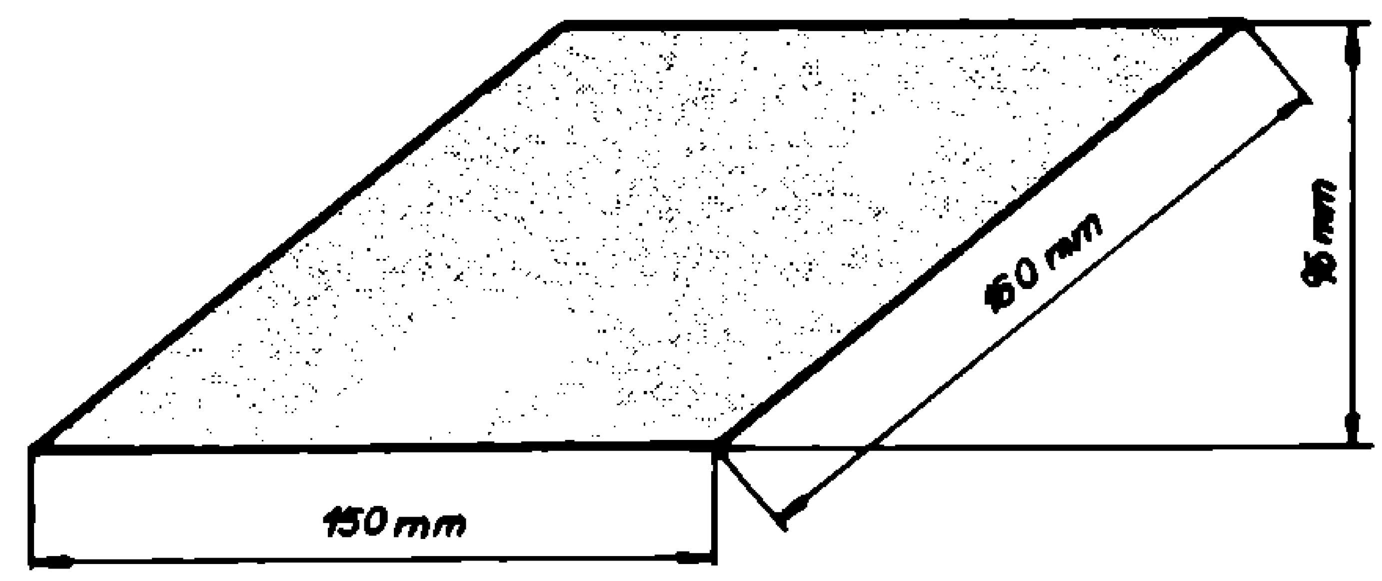
Nimm zwei Hölzchen so weg, daß vier Quadrate übrig bleiben.



Flächenverwandlung mittels Legespiel

Ein mit den angegebenen Maßen auf Papier gezeichnetes und ausgeschnittenes Parallelogramm ist durch einen Schnitt in zwei kongruente Vierecke zu zerschneiden. Beide Teile sind genau übereinander zu legen und dieses Paket ist durch einen weiteren Schnitt zu teilen, so daß insgesamt 4 Vierecke entstehen.

Wie müssen beide Schnitte ausgeführt werden, damit sich diese 4 Teile zu einem Quadrat aneinanderlegen lassen?

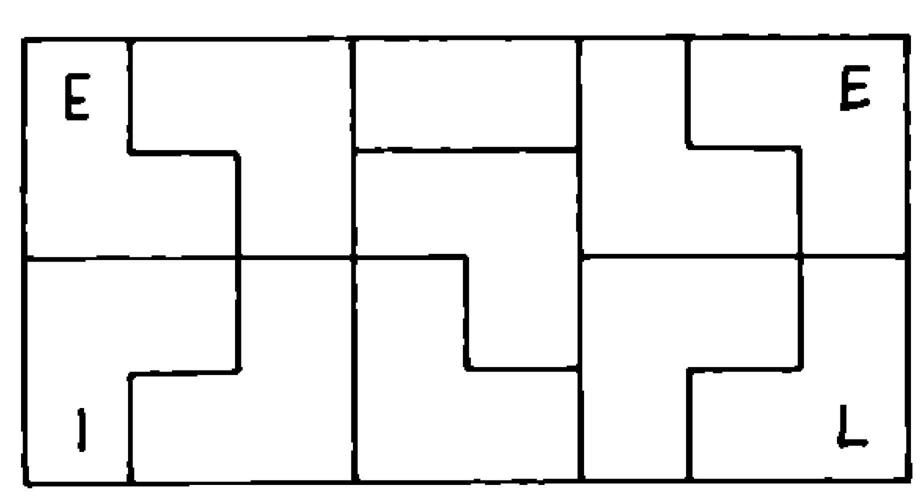


W. Träger, Döbeln

Sinnvoll getauscht

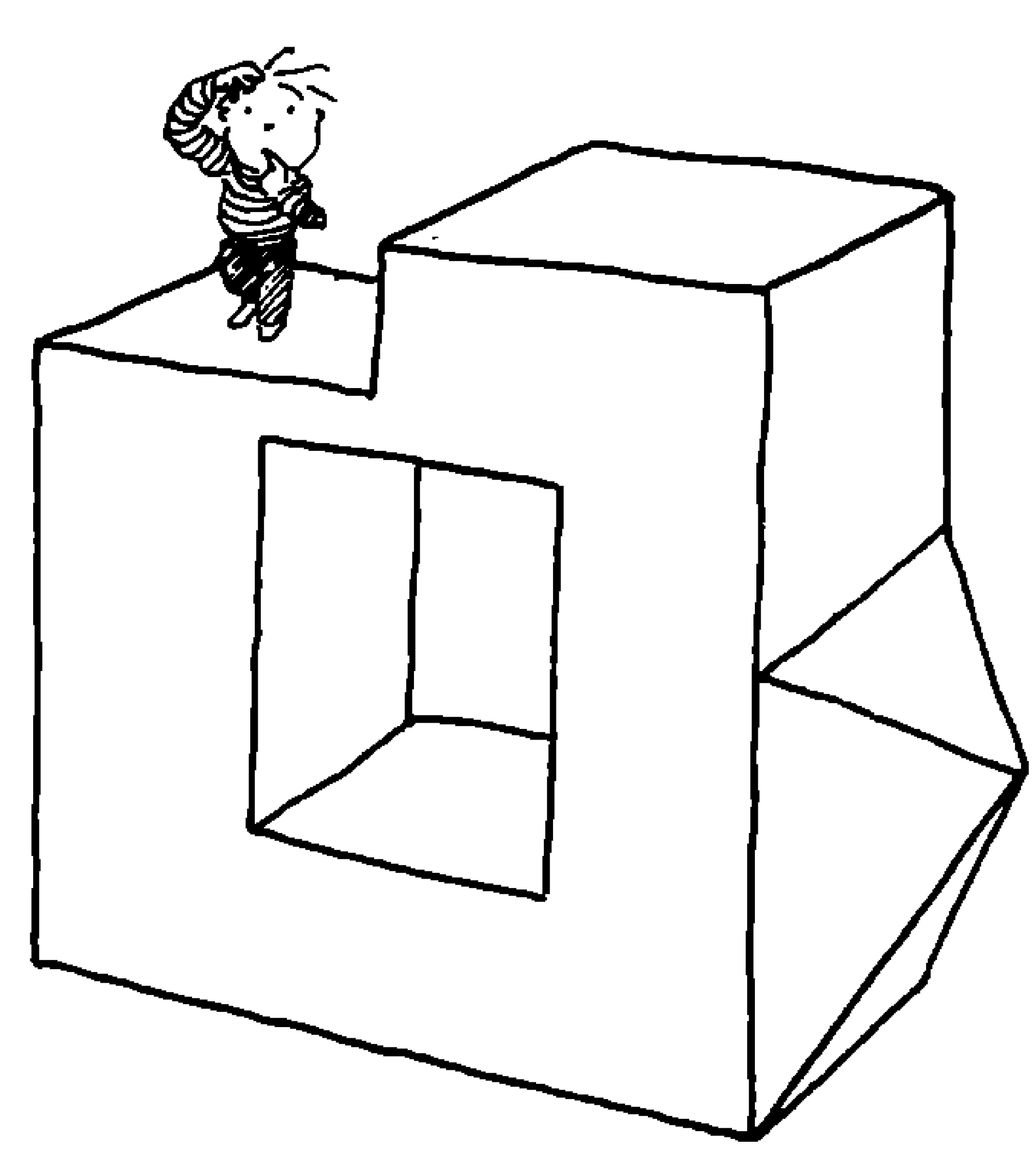
Die durch Umrandung abgegrenzten Buchstabengruppen der oberen Figur sind auf gleichgestaltete Felder der unteren so zu übertragen – zeilenweise gelesen –, daß es eine Aussage über natürliche Zahlen ergibt.

A	K	E	I	B	E	G	R
E	Z	S	S	G	I	N	T
Ü	R	L	T	E	T	E	N
A	H	L	Ö	S	I	C	H



OL O. Chromy, Coswig

Wieviel Flächen hat dieser Körper?



Über selbstregenerierende Zahlenfolgen

So, wie sich Lebewesen durch den genetischen Code regenerieren lassen, spricht man auch in der Mathematik von selbstregenerierenden Zahlenfolgen, wenn ein Teil der. Folge den Code dafür liefert, wie die gesamte Folge auszusehen hat.

Ein Beispiel

Im Jahre 1957 wurde in der Zeitschrift American Mathematical Monthly (Band 64, Seite 198) die Folge

0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 ... (*)

untersucht.

Sie läßt sich wie folgt erzeugen:

Wir betrachten zunächst nur endliche Zahlenfolgen, bestehend aus 0 und 1. Begonnen werde mit (0). Als Induktionsschritt werde jede 0 durch 0 1 (im obigen Vergleich heißt das: 0 ist der Code für die Kombination 0 1) und jede 1 durch 0 1 1 ersetzt, man erhält folgendes Schema:

Folge	Nullenanzahl	Einsenanzahl
0	1	0
0 1	1	1
0 1 0 1 1	2	3
0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1	5	8

Interessanterweise stehen links immer gleiche Ziffern untereinander (Selbstregenerierungsbedingung) und rechts die Fibonaccischen Zahlen. Wir wollen prüfen, ob dies nur zufällig für das Anfangsstück der Folge gilt, und wir wollen versuchen, eine Bildungsvorschrift für das allgemeine Folgenglied der unendlichen Zahlenfolge (*) zu finden. Vor dem Weiterlesen empfehlen wir dem Leser, die ersten etwa 200 Folgeglieder der Folge (*) aufzuschreiben und sich selbst mit der Lösung der drei genannten Probleme zu befassen. Wer die Übersicht zu verlieren fürchtet macht es am besten zu zweit: Einer liest ganz langsam die letzte Zeile des Schemas vor, der andere schreibt für jede vorgelesene Null auf ein Blatt 0 1, für jede gelesene Eins 0 1 1. Danach steht auf diesem Blatt die nächste Zeile des Schemas. Diese wird wieder langsam vorgelesen, und der andere schreibt entsprechend auf ein neues Blatt Papier wieder 0 1 für Null und 0 1 1 für Eins ....

Allgemeine Definition

Das Problem wird nicht komplizierter, wenn wir es allgemeiner formulieren: (a) und (b) seien zwei endliche Folgen aus 0 und 1. Dann gilt

Satz 1: Beginnt man mit der Folge (0) und ersetzt im Induktionsschritt jede 0 durch die Folge (a) und jede 1 durch die Folge (b), so ist die Selbstregenerierungsbedingung genau dann erfüllt, wenn (a) mit 0 beginnt.

Beweis: Daß (a) mit 0 beginnen muß, ist klar, da anderenfalls schon in der zweiten Zeile vorn eine 1 stehen würde. Nun setzen wir voraus, daß (a) mit 0 beginnt und führen den Beweis durch vollständige Induktion. Als Induktionsanfang wissen wir bereits, daß in der ersten und zweiten Zeile nur gleiche Zahlen übereinanderstehen, nämlich die 0 am Anfang. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, daß in der $(k-1)$-ten und k-ten Zeile nur gleiche Zahlen übereinanderstehen. Ersetzen wir in diesen beiden Zeilen jede 0 durch (a) und jede 1 durch (b), stehen auch wieder nur gleiche Zahlen übereinander. Damit ist gezeigt, daß auch in der k-ten und $(k+1)$-ten Zeile nur gleiche Zahlen übereinanderstehen, w. z. b. w.

Etwas abstrakter können wir unser Schema wie folgt beschreiben: Wir konstruieren eine unendliche Folge, deren Elemente endliche Zahlenfolgen sind, und zwar in das k-te Folgenglied gerade diejenige endliche Folge, die durch die k-te Zeile unseres Schemas gegeben ist.

Fibonaccische Zahlen

Wir wollen jetzt mit $N(a)$ die Anzahl der Nullen der Folge (a) und mit $E(a)$ die Anzahl ihrer Einsen bezeichnen, analog $N(b)$ und $E(b)$. Im obigen Beispiel gilt also $N(a) = E(a) = N(b) = 1, \quad E(b) = 2$. Die Nullenanzahl der k-ten Folge (d. h. der k-ten Zeile des Schemas) werde mit N_k und die Einsenanzahl mit E_k bezeichnet. Laut Annahme ist $N_1 = 1$, $E_1 = 0$. Die weiteren Glieder lassen sich rekursiv bestimmen:

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= N(a)N_k + N(b)E_k, \\ E_{k+1} &= E(a)N_k + E(b)E_k \end{aligned} \tag{1}$$

Im Wortlaut: N_{k+1}, die Anzahl der Nullen in der $(k+1)$-ten Zeile, ist die Summe aus $N(a)N_k$, der Anzahl der aus den Nullen der k-ten Zeile stammenden Nullen, und $N(b)E_k$, der Anzahl der aus den Einsen der k-ten Zeile stammenden Nullen. Im obigen Beispiel gilt also als Spezialfall von Formel (1)

$$N_{k+1} = N_k + E_k, \; E_{k+1} = N_k + 2E_k \tag{2}$$

Jetzt können wir beweisen:

Satz 2: In der Tabelle stehen rechts die Fibonaccischen Zahlen $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$, die durch $f_1 = f_2 = 1, f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$ definiert sind, und zwar gilt für $k = 2, 3, \ldots,: f_{2k-3} = N_k, f_{2k-2} = E_k$.

Beweis: Mittels Formel (2) können wir als Induktionsanfang $N_2 = E_2 = 1$ nachprüfen. Der Induktionsschritt erfolgt über die beiden Formeln $E_k + N_k = N_{k+1}$ und $N_{k+1} + E_k = E_{k+1}$, w. z. b. w.

Kettencode für Geraden

Nun haben wir die ersten beiden Probleme gelöst, aber eine Bildungsvorschrift für das allgemeine Folgenglied der Folge (*) konnte noch nicht gefunden werden. Hier ist die in Abschnitt 2 und 3 vorgenommene Verallgemeinerung hinderlich, und wir fragen speziell nach einer Bildungsvorschrift für die Folge (*).

Wir bezeichnen deren Folgenglieder mit (r_m), $m = 1, 2, \ldots$, also $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $r_4 = r_5 = 1, \ldots$.

In dieser Form läßt sich schwer eine Bildungsvorschrift erraten. Wir bilden die Partialsummen $s_n = r_1 + \ldots + r_n$. Man kann stattdessen auch rekursiv schreiben

$$s_1 = r_1, \; s_n = s_{n-1} + r_n, \; n \geqq 2. \tag{3}$$

Es gilt also $s_1 = 0$, $s_2 = s_3 = 1$, $s_4 = 2$, $s_5 = 3, \ldots$.

Diese Werte werden nun in das $n - s_n$-Diagramm eingetragen, vgl. Bild 1. Sie liegen annähernd auf einer Ursprungsgeraden (und zwar, genau betrachtet, alle unterhalb derselben), die zum Vergleich ebenfalls eingezeichnet wurde.

Diese Tatsache und die konstruktionsbedingte Ganzzahligkeit der Werte s_n legt nun die Vermutung nahe, daß eine allgemeine Bildungsvorschrift der Art

$$s_n = [x\, n] \tag{4}$$

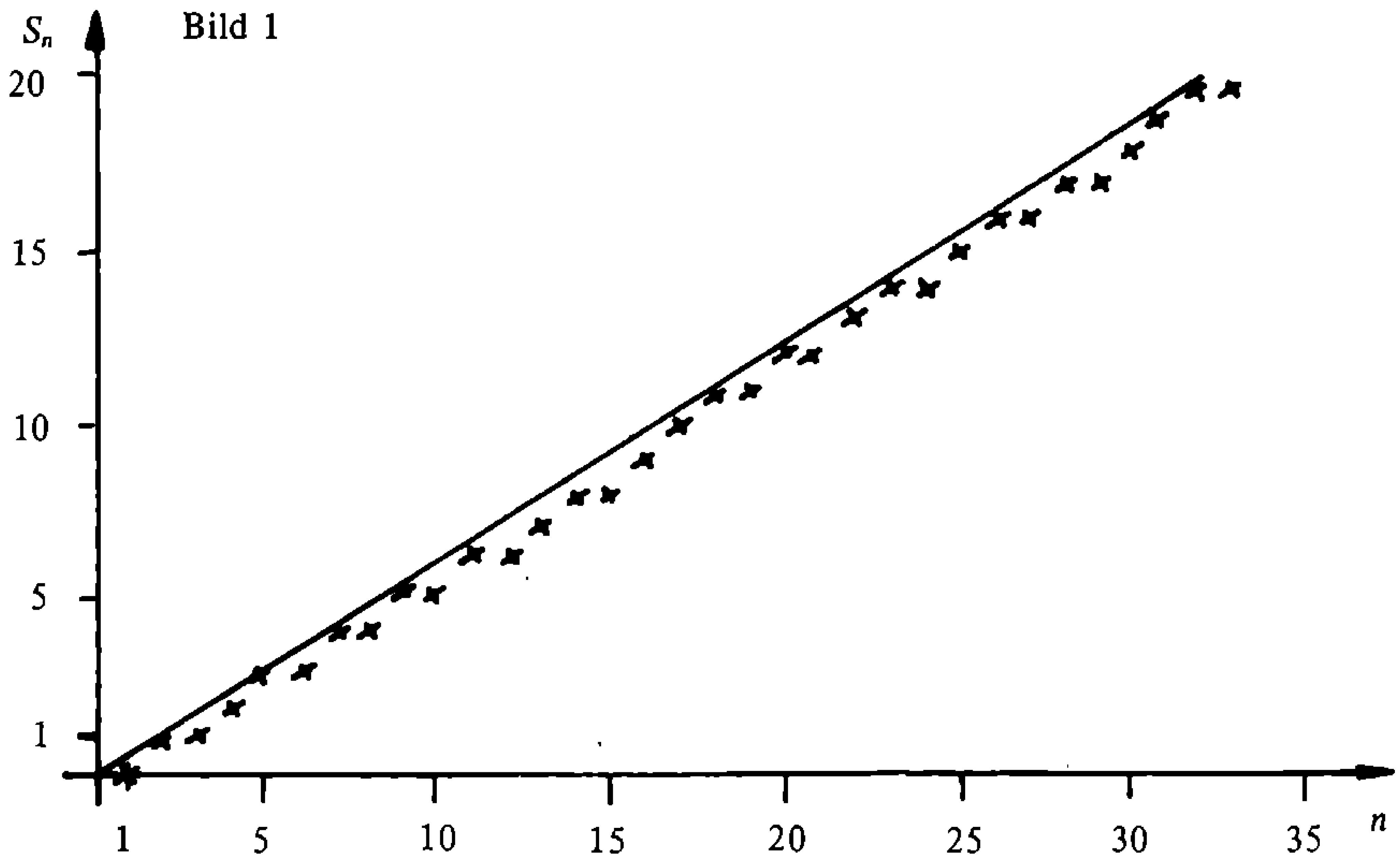
besteht. Dabei ist $x > 0$ eine noch zu bestimmende reelle Zahl, und [ ] bezeichnet den ganzzahligen Teil, d. h., für jede reelle Zahl y werden $[y]$ und $\{y\}$ durch $0 \leqq \{y\} < 1$, $[y]$ ganzzahlig, $y = [y] + \{y\}$ eindeutig definiert. Damit ist zumindest gewährleistet, daß alle Werte s_n knapp unterhalb der Ursprungsgeraden $y = x\, n$ liegen.

Bevor wir jetzt *den* Wert von x bestimmen wollen, so daß Formeln (3) und (4) dieselbe Folge (s_n) definieren, soll noch auf eine Anwendung hingewiesen werden: In der Computergraphik bis hin zur automatischen Bildauswertung besteht das Problem, daß Geraden, die schräg zum Raster des Bildschirms liegen, nur näherungsweise dargestellt werden können. Diese Näherung wird so realisiert, daß zu der ideal gedachten Geraden die jeweils nächstgelegenen Rasterpunkte (Pixel genannt) zum Aufleuchten gebracht werden, eben wie in Bild 1 die Kreuze ein Näherungsraster für die Gerade $y = x\, n$ darstellen. Und um ein Programm zu schreiben, das diese nächstgelegenen Rasterpunkte berechnet, muß man diese möglichst „rechnerfreundlich" beschreiben können, hier taucht dann der Begriff „Kettencode für Geraden" auf.

Jetzt wollen wir den Wert für x bestimmen:

Nach Satz 2 gilt ja für $k \geqq 2$:

$$N_k = f_{2k-3}, \; E_k = f_{2k-2}. \tag{5}$$



In der n-ten Partialsumme s_n der k-ten Folge ist jeder der n Summanden entweder 0 oder 1, und daher ist $N_k + E_k = n$ und $E_k = s_n$. Wegen (2) $N_k + E_k = N_{k+1}$ können wir auf $n = N_{k+1}$ schließen.
Aus Formel (4) folgt $xn - 1 < s_n \leqq xn$. Setzen wir hier die Werte für n und s_n ein, erhalten wir

$$xN_{k+1} - 1 < E_k \leqq xN_{k+1}.$$

Wir teilen durch N_{k+1} und benutzen Formel (5). Es ergibt sich

$$x - \frac{1}{f_{2k-1}} < \frac{f_{2k-2}}{f_{2k-1}} \leqq x. \qquad (6)$$

Für jedes $k \geqq 2$ stellt Formel (6) eine Doppelungleichung für x dar. Setzen wir beispielsweise $k = 6$, so erhalten wir

$$0{,}618 \approx \frac{55}{89} \leqq x < \frac{56}{89} \approx 0{,}629.$$

Je größer wir k wählen, desto kleiner wird das entsprechende Intervall für x. Die Leser, die mit Grenzwerten vertraut sind, können x auch genau ausrechnen (unter der Voraussetzung, daß der Grenzwert existiert):

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} + f_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{f_{n-1}}{f_n} + 1\right)} = \frac{1}{x+1}, \text{ also}$$

$$x^2 + x - 1 = 0,\ x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}.$$

Wegen $x > 0$ erhalten wir schließlich

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618\,034 \qquad (7)$$

Wenden wir nun die Formeln (3), (4) und (7) an, erhalten wir die gesuchte Formel

$$r_n = [nx] - [(n-1)x]$$
$$= [x + \{(n-1)x\}]. \qquad (8)$$

Der vollständige Beweis, daß Formel (8) und Abschnitt 1 dieselbe Folge definieren, muß hier aus Platzgründen weggelassen werden. Wir fordern aber den Leser auf, sich für $n = 1, \ldots 20$ von der Richtigkeit dieser Aussage zu überzeugen.

Ausblick

Wenn wir nun für x andere Werte einsetzen, erhalten wir mit Formel (8) andere Folgen (r_n). Es gibt für viele quadratische Irrationalitäten (d. h., Zahlen der Form $f + \sqrt{g}$, f, g rational, $g > 0$, aber nicht Quadrat einer rationalen Zahl) die Möglichkeit, dann mit Abschnitt 2 zugehörige endliche Folgen (a) und (b) zu finden, daß sich wieder dieselbe Folge (r_n) ergibt. Bei irrationalen Zahlen, die keine quadratische Irrationalität darstellen, ist das jedoch wesentlich komplizierter: Ohne auf die Einzelheiten dieser Aussage einzugehen, wollen wir sie wie folgt plausibel machen: Wenn wir die eben für Formel (2) vorgenommene Grenzwertbetrachtung auf den allgemeinen Fall (1) ausdehnen, ergibt sich ebenfalls eine quadratische Gleichung für x, deren Lösung rational oder eben quadratisch irrational ist.

Jetzt noch zwei Aufgaben für den Leser.

▲1▲ Man beweise die Gültigkeit des zweiten Gleichheitszeichens in Formel (8).

▲2▲ Man zeige, daß die Folge (r_n), Formel (8), für rationale Zahlen x periodisch ist, d. h., daß es ein $m \geqq 1$ gibt, so daß für alle $n \geqq 1$ gilt $r_n = r_{n+m}$.

Schließlich teilen wir noch ohne Beweis mit, daß die Umkehrung dieser Aussage auch gültig ist, speziell also die Folge (*) aus Abschnitt 1 nicht periodisch ist.

H.-J. Schmidt

Verflixt und zu-gepuzzelt!

Aufgabe zum Titelblatt

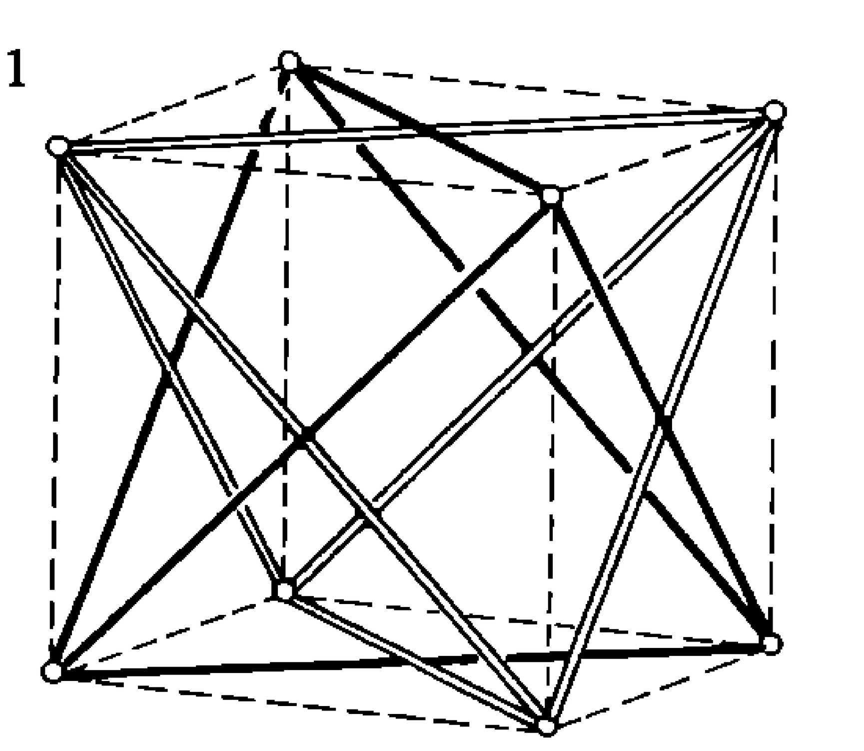
Die abgebildete Figur ist aus 12 rechtwinkligen Dreiecken und 12 halben Kreisabschnitten derart zusammengesetzt, daß die Summe der an den stark ausgezogenen Linien sich gegenüberliegenden Zahlen immer eine Quadratzahl ergibt. Übertragt die Figur auf Transparentpapier und zerschneidet sie an den stark ausgezogenen Linien. Die 24 Teile sind nun zu zwei gleich großen Kreisen zusammenzufügen und zwar derart, daß die Summe der gegenüberliegenden Zahlen wieder eine Quadratzahl ergibt.

W. Neugebauer, Berlin

Ein bewegliches Tetraederpaar

Im Jahre 1982 entdeckte L. Tompos, damals Student an der Ungarischen Hochschule für Angewandte Kunst und Design, eine interessante Eigenschaft des regulären Tetraeders. Es ist erstaunlich, daß diese relativ einfach zu beweisende, anschaulich verblüffende Eigenschaft nicht schon im vorigen Jahrhundert oder noch davor bekannt wurde.
Als zugrundeliegende geometrische Figur betrachten wir die Kantengerüste zweier kongruenter, regulärer Tetraeder. (Ein reguläres Tetraeder ist bekanntlich eine von insgesamt vier gleichseitigen Dreiecken berandete Pyramide.) Diese Tetraeder seien so zusammengepaßt, daß ihre Kanten sich paarweise rechtwinklig in den Mittelpunkten schneiden. Wir erhalten also zwei solche Kantengerüste durch die 12 Flächendiagonalen eines Würfels, wobei (siehe Bild 1) die Kanten des ersten Tetraeders durch dick gezeichnete, die des zweiten durch doppelt dünn gezeichnete Strekken markiert sind. Baut man so die Modelle beider Tetraeder aus 12 gleichlangen, geeignet verhefteten Stäben, wobei das erste Kantenmodell das zweite an den sechs Knotenpunkten stets von außen berühren soll (also unmerklich größer ist), so bemerkt man beim Festhalten eines Tetraeders, daß das zweite bequem bewegt werden kann, indem die sich berührenden Kantenpaare jeweils übereinander gleiten. Stellen wir uns erneut diese Stäbe als unendlich dünn und nicht verbiegbar, d. h. als Strecken gleicher Länge im mathematischen Modell vor, dann hat man zur Bestätigung dieser Beobachtung zu zeigen, daß es Bewegungen gibt, welche die entsprechenden Kantenpaare in jeweils einer Ebene (also insgesamt sechs Ebenen) liegenlassen, d. h. ob die Kanten paarweise in sich schneidenden, parallelen oder identischen Geraden liegen. (Natürlich können beide Tetraeder auch „zusammenbewegt“

Bild 1

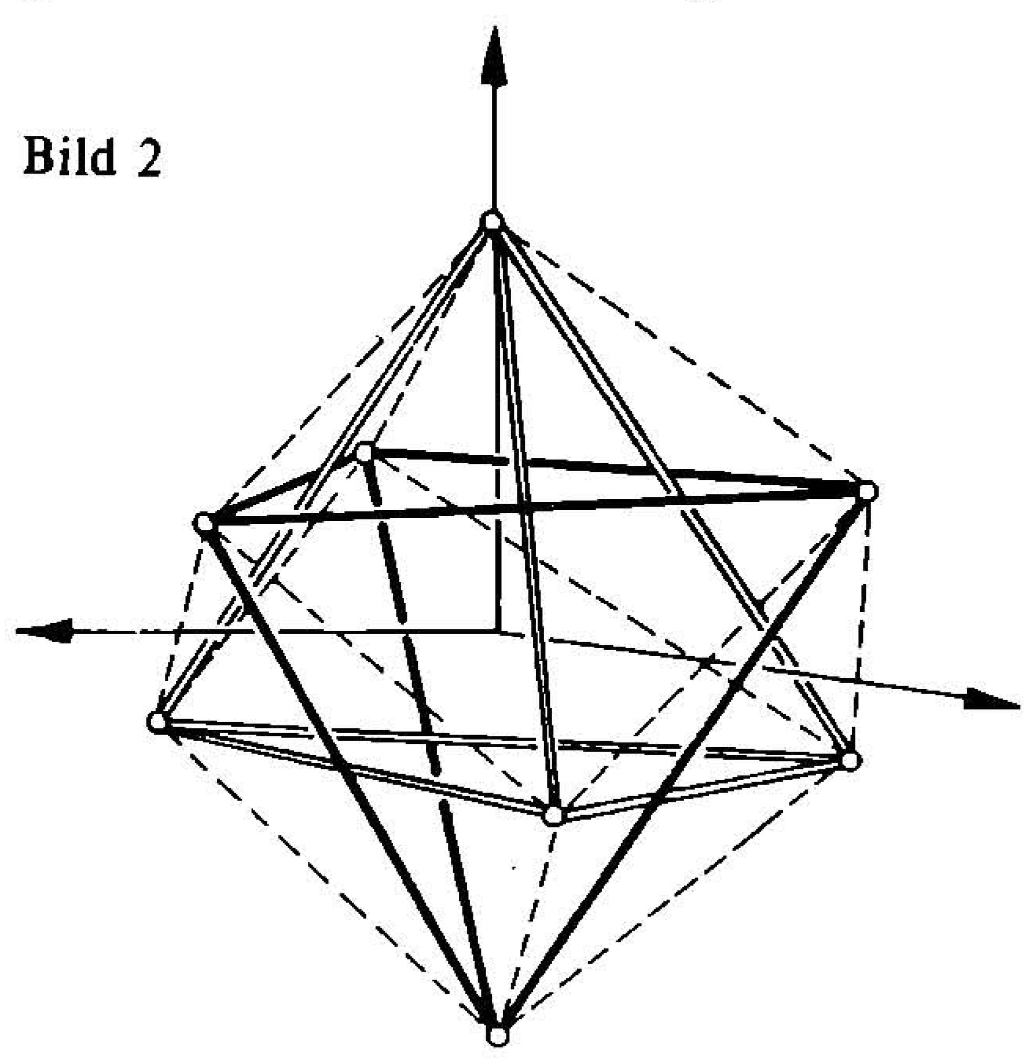


werden, aber wir schließen solch einfache Bewegungen aus.)

Es sei also ein Tetraeder festgehalten und nach allen in diesem Sinne zulässigen Bewegungen des anderen gefragt.

Zwei Arten von Bewegungen sind anhand unseres (physikalischen oder mathematischen) Modells leicht beschreibbar: Eines der Tetraeder festhaltend, bewegen wir das andere um eine Raumdiagonale des Würfels (Bild 1) und stellen fest, daß dies unter Erhaltenbleiben der sechs Kontaktpunkte möglich ist. Eine solche Bewegung, die sich also aus einer Drehung (um die Raumdiagonale des Würfels) und einer Verschiebung (in Richtung dieser Drehachse) zusammensetzt, nennt man naheliegenderweise eine Schraubung.

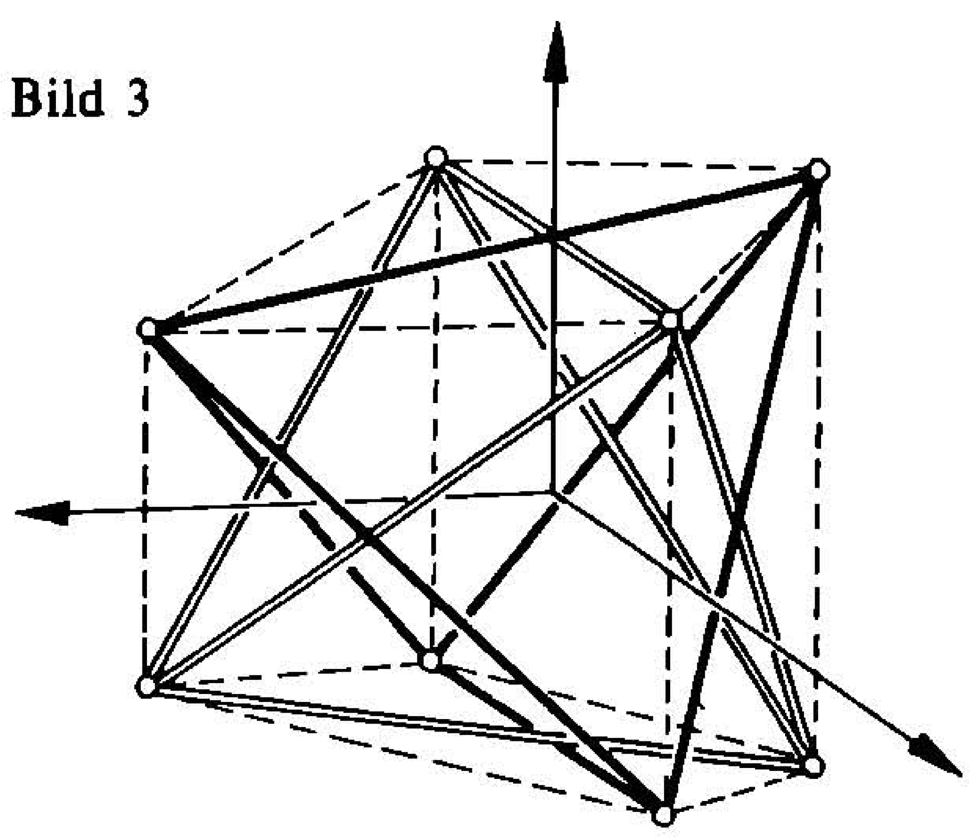
Bild 2



In Bild 2 ist eine Position beider Kantengerüste dargestellt, die aus der in Bild 1 durch eine solche Schraubung erhalten wurde. Eine zweite Bewegungsart erhalten wir wie folgt: Wir stellen uns eine Seitenfläche des Würfels (Bild 1) als in einer Horizontalebene liegend vor. (Horizontalebenen liegen, im Sinne der darstellenden Geometrie, parallel zur Grundrißebene.) Dann ist die dazu parallele Ebene S durch das Würfelzentrum eine Symmetrieebene des Würfels, und eines der Tetraeder ist das Spiegelbild des anderen bezüglich S. Wir wählen eine beliebige Gerade in S, die das Würfelzentrum enthält. Wenn wir nun ein Tetraeder um diese Achse um einen bestimmten Winkelbetrag drehen und es dann vertikal (d. h. senkrecht zu einer Horizontalebene), ebenfalls um einen bestimmten Betrag, verschieben, dann ist das Spiegelbild dieses gedrehten und verschobenen Tetraeders bezüglich S aus dem anderen Tetraeder durch Drehung um die gleiche Achse mit gleichem Drehwinkel, aber anderem Drehsinn, und vertikale Verschiebung um den gleichen Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung, erhältlich. Dann sind jene Kantenpaare der beiden Tetraeder, welche ursprünglich Diagonalen einer vertikalen Würfelfläche waren, Spiegelbilder voneinander, d. h. jedes Paar liegt auf sich schneidenden (oder parallelen oder zusammenfallenden) Geraden. Wenn nämlich ein solches Kantenpaar selbst nicht horizontal liegt, dann liegt sein Schnittpunkt in S, und wenn es horizontal liegt, dann liegen beide Kanten parallel oder fallen zusammen.

Im allgemeinen werden jene Kantenpaare, die ursprünglich Diagonalen einer horizontalen Würfelfläche waren, nicht in sich schneidenden Geraden liegen. Wählen wir aber die erwähnte vertikale Verschiebung so, daß dies gewährleistet ist (und aus Symmetriegründen muß dann die gleiche Bedingung vom ursprünglich in der zweiten Horizontalfläche gelegenen Kantenpaar erfüllt werden), dann haben wir wieder eine in unserem Sinne zulässige, nichttriviale Bewegungsart erhalten. Eine derart erzeugte Position beider Kantengerüste zeigt Bild 3.

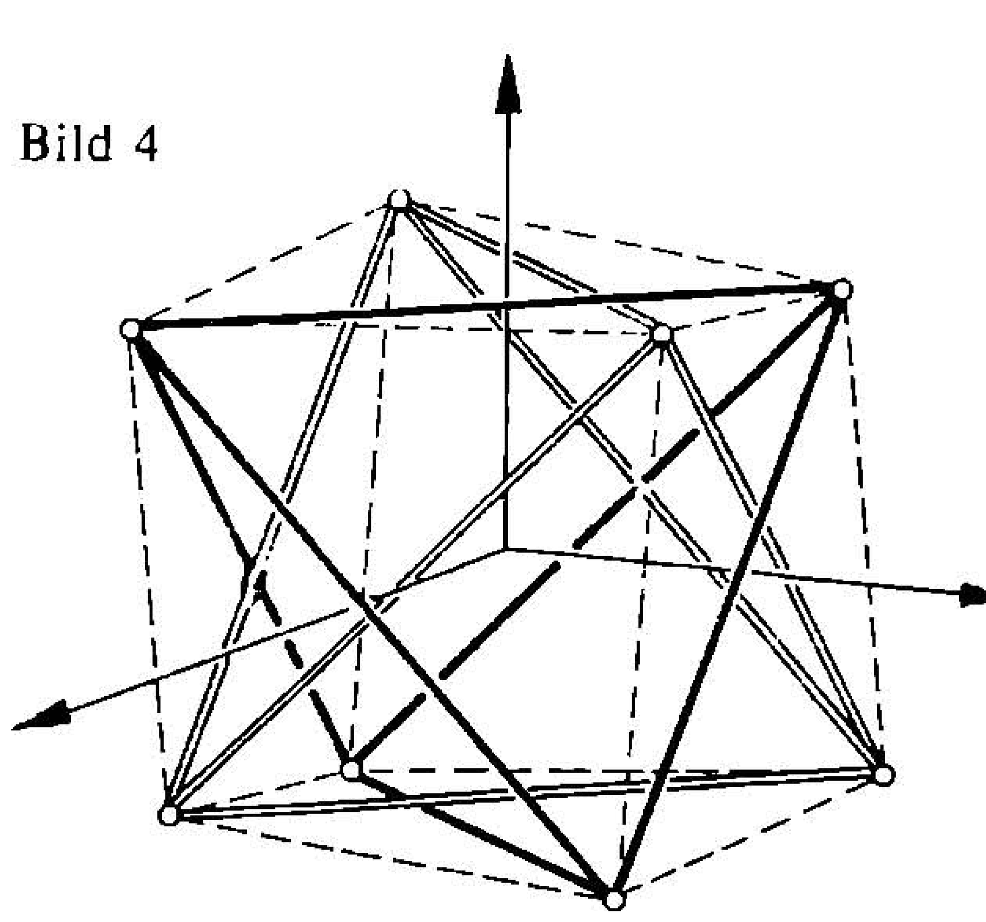
Bild 3



(Es sei bemerkt, daß beim Spiel mit dem physikalischen Modell nur eine Drehung beider Tetraedergerüste um besagte Achse nötig ist; die notwendige Verschiebung erfolgt automatisch, da die Kanten paarweise in ständiger Berührung bleiben.)

Wir kommen nun zur dritten Bewegungsart, die allerdings mit dem physikalischen Modell nicht ausgeführt werden kann. Ein Tetraeder festhaltend, drehen wir das andere aus seiner Ausgangslage (Bild 1) genau 180° um eine Achse durch die Mittelpunkte der Horizontalflächen des Würfels. Dann wird jedes Kantenpaar der zwei Tetraeder aus einer Vertikalfläche des Würfels in ein paralleles Kantenpaar überführt. Gleichzeitig wird jedes aus einer Horizontalfläche stammende Kantenpaar auf sich schneidenden Geraden verbleiben. Somit können wir die sich bewegenden Tetraeder horizontal in eine beliebige Richtung verschieben (um einen beliebigen Betrag) und erhalten dadurch erneut eine zulässige Bewegungsart. Eine solchermaßen erzeugte Position zeigt Bild 4.

Bild 4



Mit Mitteln der Elementarmathematik (trigonometrische Beziehungen, Lösung linearer Gleichungssysteme) kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz: Die einzigen zulässigen Bewegungsarten des Tetraederpaares sind die drei beschriebenen.

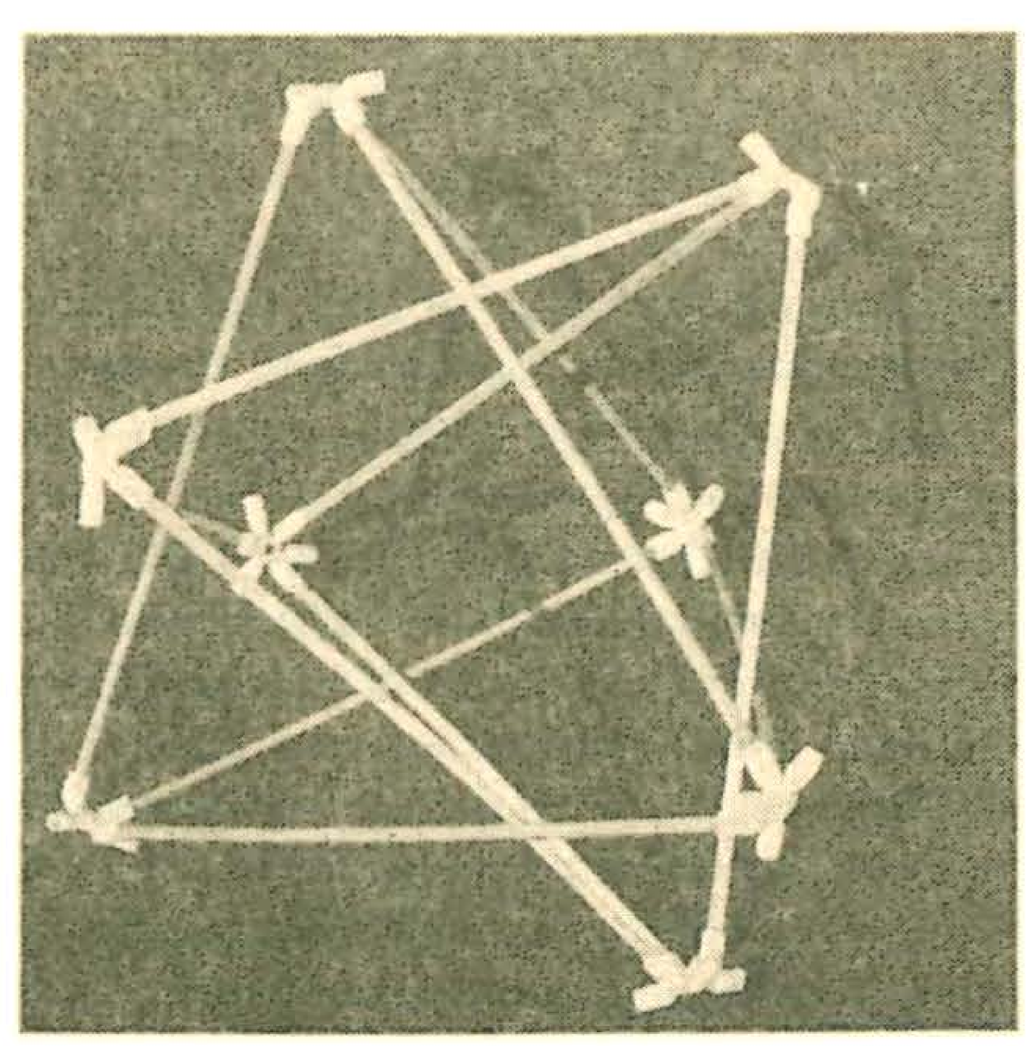
Probleme wie das hier behandelte, also Fragen der Stabilität oder Beweglichkeit von Gerüsten, spielen z. B. in der Architektur eine Rolle, wo insbesondere lasttragende Gerüste wie etwa Verstrebungen in Gebäuden oder beim Brückenbau derart konstruiert werden müssen, daß große Formveränderungen (Deformationen) und folglich Zerstörungen möglichst ausgeschlossen sind. Für das Bestimmen der zulässigen Bewegungen unseres Tetraederpaares waren ingenieurtechnische Methoden nutzbringend. Die Berechnung der Kräfte, welche zwischen beiden Kantengerüsten (oder zwischen Bestandteilen allgemeinerer Gerüste) auftreten, ist nämlich eng verknüpft mit der Möglichkeit zulässiger Bewegungen der Gerüste.

Weiterhin wollen wir eine Verallgemeinerung vom beschriebenen Zusammenhang zwischen zwei kongruenten Kantengerüsten regulärer Tetraeder erwähnen.

Wenn wir die Flächendiagonalen eines beliebigen Quaders betrachten, dann stellen sie (analog zu Bild 1) die Kantengerüste zweier kongruenter Tetraeder dar. Wenn diese Kantengerüste als Stabmodelle genauso zusammengepaßt werden wie im Falle zweier regulärer Tetraeder, kann man mit einem Kantengerüst bei Festhalten des anderen ähnlich verblüffende Bewegungen ausführen. Mathematisch kann man hier also einen ähnlichen Satz bezüglich zulässiger Bewegungsarten des Tetraederpaares beweisen. (Man sieht sofort, daß Analogien zu den an zweiter und dritter Stelle beschriebenen Bewegungen existieren, und auch zur zuerst dargestellten Art gibt es eine gewisse Analogie. Darüber hinaus hat man für bestimmte Quader eine vierte zulässige Bewegungsart.)

Die abschließend gegebene Fotografie zweier physikalischer Kantenmodelle regulärer Tetraeder, deren eines das andere in sechs Kontaktpunkten jeweils von außen berührt, soll Anregung für den Eigenbau dieser einfachen geometrischen Figur sein.

E. Makai, H. Martini, T. Tarnai



Die Arbeit an der hier behandelten Problematik wurde zum Teil aus dem Ungarischen Nationalen Forschungszuschuß Nr. 744 unterstützt.

alpha-Wettbewerb 1988/89

Preisträger
Susanne Dräbenstedt, Aderstedt; Martina Hebenstreit, Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Steffen Dittrich, Andrea Weigl, beide Bad Salzungen; Thoralf Czichy, Bergfelde; Thomas Trinks, Bert Minske, Gundula Hofer, Ulrich Fahrenberg, alle Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Enrico Senger, Bischofferode; Ulrich Voigt, Roland Voigt, Böhlen; Doreen Luck, Breitungen; Anett Gschwender, Brohm; Alexandra Parth, Bötzow; Thomas Riedel (Frühstarter)*, Hagen Lessing, Uta Neumann, Dörte Poelzig, Michael Schwenk, alle Cottbus; Uwe Martin, Crossen; Andrea Mann, Markus Stub, beide Dermbach; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Andreas Kirchberg, Dingelstädt; Ullrich Hartung, Marcus Heinrich, Cornelia Zillmann, Frank Steinigen, Hendrik Pomiers, Matthias Gehlert, Daniel Arndt, Jörg Frühauf, alle Dresden; André Kratzert, Dürröhrsdorf; Arvid Dahle, Erfurt; Ulrike und Ulrich Müller, Fischheim; Werner Ernst, Finsterwalde; Thomas Nopp, Frankfurt/O.; Karsten Wackernagel, Falkenberg; Katrin Schünemann, Freital; Nadine Koch, Gehofen; Sven Wroblewski, Glienicke; Cathrin Kunze, Michael Gronau, beide Greifswald; Steffen Vollbarth, Greußen, AG Math. Kl. 5 der Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Grevesmühlen; Frank Schneegaß, Großbodungen; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Christian Schuster (Frühstarter), Grünhain; Jens Rennefahrt, Halle; Andreas Nüchter, Halle-Neustadt; Rico Ramolla, Hennigsdorf; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Manuela Winkler, Hoyerswerda; Björn Borchardt, Ilmenau; Sabine Scheller, André Langd, Thilo Bocklisch, alle Karl-Marx-Stadt; Roland Becker, Kleinmachnow; Ronny Parchert, Kirsten Tostmann, beide Leegebruch; Patrick Fladerer, Leinefelde; Jens Gärtner, Jörg und Torsten Schreiber, Andrea Englisch, Lars-Peter Müller, André Gärtner, alle Leipzig; Gunter Semmler, Jens Grundmann, beide Limbach-Oberfrohna; Andreas Willnow, Lindenthal; Veit Kannegieser, Lübben; Martin Stein, Anke Misch, beide Magdeburg; Gerald Werner, Meiningen; Johannes Krause, Möser; Christina Hoba, Neuhaus; Thomas (Frühstarter) und André Westphal, Neuruppin; Matthias Loesdau, Neustrelitz; Torsten Möller, Ohrdruf; Robert Wetzker, Katja Schürer, Ilka Riedel, alle Oranienburg; Enrico Bruder (Frühstarter), Potsdam; Claudia Walter, Riesa; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Frank Schönheit, Rudolstadt; Kordula Pabst, Sachsenhausen, Willi Jacobs, Saurasen; Katja Manski, Olaf Kallert, beide Schildow; Christian Schmaltz, Schwerin, Holger Strahl, Thomas Lotze, beide Suhl; Jens Krubert, Templin; Ralf Schubert, Vacha; Sven Peyer, Weimar; Otmar Jannasch, Wiednitz; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Peter Stübner, Windischholzhausen; Mathe-Zirkel, Winniza (UdSSR); Ronald Peters, Wismar; Stefan Bretfeld, Jörg Silde, beide Zepernick

* Frühstarter sind Schüler der Klassenstufen 1 bis 4

Abzeichen in Gold

Für zweiundzwanzigjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für einundzwanzigjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle

Für zwanzigjährige Teilnahme
Ullrich Riedel, Flöha

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Sylvia Glomb, Berlin; Harry Höfer, Dorndorf; Ingolf Körner, Gudrun Thäter, Karl-Heinz Jünger, Jörn Wittig, Carolin Engel, alle Dresden; Dirk-Thomas Orban, Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Jens Pönisch, Andreas Hengst, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Per Witte, Königs Wusterhausen; Claudia Trochold, Reichenbach; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzburg, Thal; Eva-Maria Wabbel, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand

Für zehnjährige Teilnahme
Ralf und Wolfgang Beukert, Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Yvonne Großmann, Matthias Tittel, beide Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-Jürgen Schwerin, Blumberg; Peter Sitz, Calau; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Ulrich und Peter Wenschuh, Falkenstein; Ulf Winkler, Frankenberg; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Dirk Wenzlaff, Grieben; Jörg Blaurock, Guben; Beate Thomas, Halle; Antje Hüttig, Halle-Neustadt; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Michael Tix, Jürgen und Michael Hoppe, alle Karl-Marx-Stadt; Kay Leitz, Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Antje Reichel, Pirna; Beate Walter, Röbel; Annegret und Heiner Ruser, Rostock; Achim Kröber, Schönbach; Roland Drendel, Senftenberg; Jochen Wetzel, Sömmerda; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Johannes Thäter, Weimar; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mathias Schwenck, Wittenburg; Susan Hoffmann, Klingenthal

Für sechsjährige Teilnahme
Uta Schmidt, Altenburg; Sven Völker, Bad Salzungen; Katja Geißler, Berlin; Ingo Moldenhauer, Blankenfelde; Wolfram Schubert, Borna; René Aust, Calau; Thomas Freier, Creuzburg; Jens Renner, Dürröhrsdorf; Thomas Prüver, Eberswalde; Patrick Zacharias, Eilsleben; Maik Denner, Empfertshausen; Rüdiger Hochheim, Steffen Zillmer, beide Erfurt; Ortrun Grahl, Dresden; Jana Reinhardt, Corinna Mäder, Katharina Hildebrandt, Christiane Siebert, Kristin Danz, alle Fambach; Werner Ernst, Finsterwalde; Uwe Danz, Floh; Holger Hänchen, Forst; Katharina Dost, Geithain; Torsten Feigl, Gera; Britta Bölter, Greifswald; Jörn Pamperin, Hagenow; Britta und Rainer Struwe, Halberstadt; Göran Glockmann, Jena; Petra Koglin, Hoyerswerda; Mirko Niepel, Käthe Bäckmann, beide Karl-Marx-Stadt; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Kirsten Völz, Köchar; Marco Ringel, Jänickendorf; Jan Rüdiger, Leipzig; Christel Fritze, Magdeburg; Eberhard Schulze, Mildenberg; Kay Pfennighaus, Neubrandenburg; Manuela Grewe, Neuhaus; Carola Franke, Niedergräfenhainichen; Grit Pfützner, Ohorn; Michael Schmarje, Jürgen Rietz, beide Pirna; Kathrin Lönnig, Pretitz; Ralph Neumann, Ribnitz; Tobias Franke, Riesa; Ralf und Dirk Seifert, Rochlitz; Ulrich Rothe, Kirstin Peter, beide Rostock; Nicole Schmidt, Schmalkalden; Stefan Erb, Schwallungen; Alexander Otto, Schwanebeck; Peter Hörnich, Schwedt; Lars Prieske, Schwerin; Holger Reinitz, Sommerfeld; Andreas Lange, Stendal; Kerstin Schuster, Taubenheim; Stephan Marx, Ueckermünde; Horst Rex, Wählitz; Regine Katzy, Waren; Manuela Montag, Weißenschirmbach; Sebastian Steinbach, Wernigerode; Janet Thon, Wünschendorf; Jens Müller, Wolgast; Ulrike Häfner, Schmalkalden; Monika Döring, Berlin

Für fünfjährige Teilnahme
Dietmar Schimmel, Adorf; Tilo Kaiser, Aken; Frank Grembus, Altentreptow; Ronald Stüve, Anklam; Kathleen Heilfort, Bad Gottleuba; Uwe Völker, Jan Schwate, beide Bad Salzungen; Thoralf Räsch, Bad Wilsnack; Ina Müller, Alexander Starick, beide Bärenklau; Claudia Groll, Bannewitz; Alexander Golz, Jana Hoffmann, Bodo Petermann, Annekatrin Hegewald, alle Berlin; Torsten Adam, Jens Opalka, beide Bernburg; Stephan Hantsch, Berthelsdorf; Falk Wietreck, Bischofswerda; Andreas Liebmann, Bitterfeld; Ulrich Voigt, Böhlen; Heike Engel, Brotterode; Claudia Tittmann, Cainsdorf; Michael Schwenk, Cottbus; Stefan Daske, Dabendorf; Andreas Kirchberg, Dingelstädt; Edith Bombach, Jens Meyer, Stefan Seifert, Jens Herrmann, Ulf Erben, Beate Schreiber, Michael Grüning, alle Dresden; Burgund Berger, Barbara Berger, beide Drosa; Ivonne Gierth, Dürröhrsdorf; Kornelia Eckert, Effelder; Jan Buchmann, Eisenberg; Änne Heyl, Eisenach; Reinhard Schrippa, Eisenhüttenstadt; Lars Lämmerhirt, Ettenhausen; Karsten Wackernagel, Falkenberg; Steffen Pietsch, Frankfurt/O.; Karl Etourno, Freiberg; Roland Popp, Gotha; Jacqueline Spatke, Gräfenthal; Cornelia Bär, Greifendorf; Steffen Vollbarth, Greußen; Susanne Schulz, Grimma; Thomas Henker, Groitzsch; Frank Schneegaß, Großbodungen; Jan Glaser, Großdeuben; Ines Pannenberg, Jana Pausch, beide Grünhain; Alois Belter, Hagenow; Roland Kunert, Gundhild Berg, beide Halle; Vivian Bähr, Halle-Neustadt; Antje Stehfest, Havelberg; Michael Puchta, Hecklingen; Stephan Lexow, Henningsdorf; Jens Weinhold, Hermsdorf; Olaf Schmidt, Hohenebra; Torsten Borchardt, Steffen Vogler, beide Ilmenau; Ellen Stelzner, Jena; Andreas Anders, Jüterbog; Jana Bioly, Stefan Mader, beide Karl-Marx-Stadt; Matthias Müller, Klaffenbach; Karsten Knobloch, Kleinmachnow; Jan Richter, Krostitz, Olaf Dreyer, Krumbeck; Mario Menger, Lauterbach; Mirko Jelinek, Katrin Anton, Kirsten Schröter, alle Leegebruch; Martin Schreiter, Andreas Winter, Sebastian Meinhardt, alle Leinefelde; Mareike Schmidt, Christian Tiedt, beide Leipzig; Olaf Weber, Meuselwitz; Daniela Voigtländer, Dorit Pinnow, Steffi Pörschel, Stefan König, alle Mügeln; Christian Bittner, Mühlhausen; Mirko Teidge, Neubrandenburg; Rigo Hinkelmann, Neuenbeuthen; Petra Ropenus, Neuhof; Gabriele Bräuer, Niederodewitz; Christian Rißler, Niederodewitz; Susan Abbe, Niederorla; Michael Hummel, Olbersdorf; Torsten Kaiser, Oranienbaum; Jan Fricke, Pasewalk; Susanne Kraenz, Picher; Claudia Burkhardt, Prettin; Sylke Ahrend, Rakow; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Stephan Sprang, Doris Seifert, beide Rochlitz; Burkhard Rothe, Rostock; Daniela Möser, Sangerhausen; Sören Hader, Schlotheim; Torsten Haase, Schmalkalden; Andreas Seifert, Schönebeck, Enrico Rommel, Schwallungen; Diana Heinrich, Seyda; Eileen Hesse, Babette Stietz, Korina Maloszyk, Petra Gerlach, Sandy Schinkel, Ivonne Bühling, alle Sondershausen; Peter Brock, Stralsund; Silvana Seifert, Strausberg; Torsten Wöstenberg, Templin; Joachim Vogel, Thalheim; Diana Brenn, Daniel Schuster, Jörg Steinbach, Annett Storch, alle Trusetal; Hans-Helmut Zappe, Michael Lotz, Sven Buchholz, alle Vacha; Elko Kinlechner, Mario Zitek, Ronald Petigk, alle Weimar; Tanja Voigt, Wernburg; Otmar Jannasch, Wiednitz; Ronald Peters, Wismar; Manuela Kabelitz, Wollin; Kristina Bergmann, Wolzig; Heino Kuhn, Anja Hebestreit, beide Worbis; Nico Qual, Zeitz; Lutz Hengelhaupt, Zella-Mehlis; Holger Beyer, Zschopau

Für vierjährige Teilnahme
Lars Ziethmann, Altlüdersdorf; Tino Wirsing, Bad Salzungen; Jan Eska, Bad Sülze; Andreas Kunthel, Bautzen; Ines Heßelbach, Behrungen; Ingo Maas, Jan Strischek, Monika Zühlsdorff, Torsten und Jens Finner, alle Berlin: Norbert Schröder, Bernau; Tobias Priemuth, Karina Trübe, beide Bernburg; Karin Hüske, Biesenthal; Andreas Beleites, Bleicherode; Beate Pohler, Brand-Erbisdorf; Ronny Diener, Kati Reum, beide Breitungen; Gerd Heiser, Dorothe Fuchs,

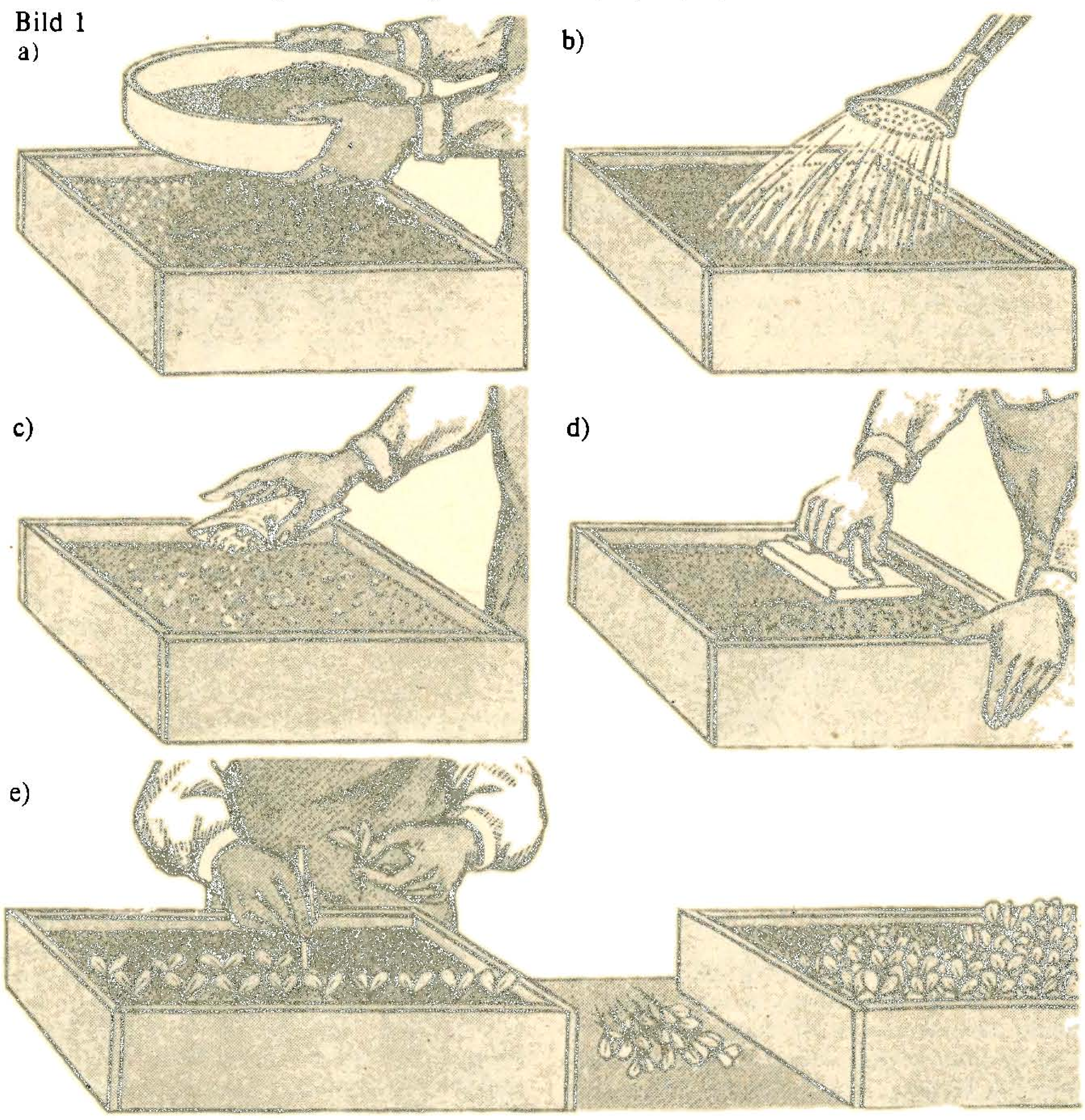
Fortsetzung auf Seite 44

Überall Algorithmen

Teil 1
Ein Algorithmus – was ist das?

▲1▲ Gib die richtige Reihenfolge der Bilder an (Bild 1)!

Bild 1

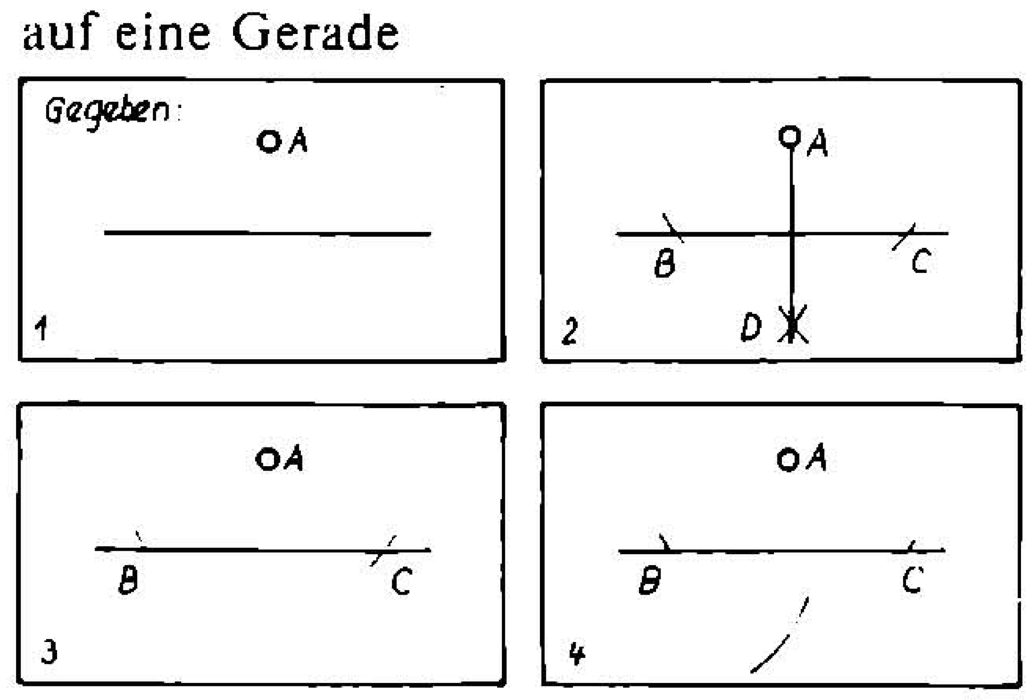


▲2▲ Ordne die Kästchen so an, daß sie eine vernünftige Vorschrift zur Zubereitung einer Sofix-Cremespeise ergeben! Du kannst die Reihenfolge durch Pfeile zum Ausdruck bringen.

1. Ich nehme einen Schneebesen und rühre so lange, bis das Pulver aufgelöst ist.
2. Ich fülle die Creme in kleine Schalen.
3. Ich gebe das Cremespeisepulver dazu.
4. Ich gieße die Milch in ein Gefäß.
5. Ich kaufe im Konsum 2 Sofix Cremespeisepulver und 1 Flasche (0,5 l) Milch.
6. Wir essen die Cremespeise.
7. Ich stelle die gefüllten Schalen kühl.
8. Ich warte 15 Minuten.

▲3▲ Gib die richtige Reihenfolge der Bilder an (Bild 2)!

Bild 2
Konstruktion des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade



▲4▲

	a)	b)	c)
1. Zahl	2	2	3
2. Zahl	4	6	5
3. Zahl	3	2	3
Ergebnis			

Fülle die letzte Zeile der obigen Tabelle nach folgender Vorschrift aus!
(1) Addiere zur ersten Zahl die zweite Zahl!
(2) Dividiere das Ergebnis durch 2!
(3) Multipliziere das Ergebnis mit der 3. Zahl!
(4) Schreibe das so erhaltene Ergebnis auf!

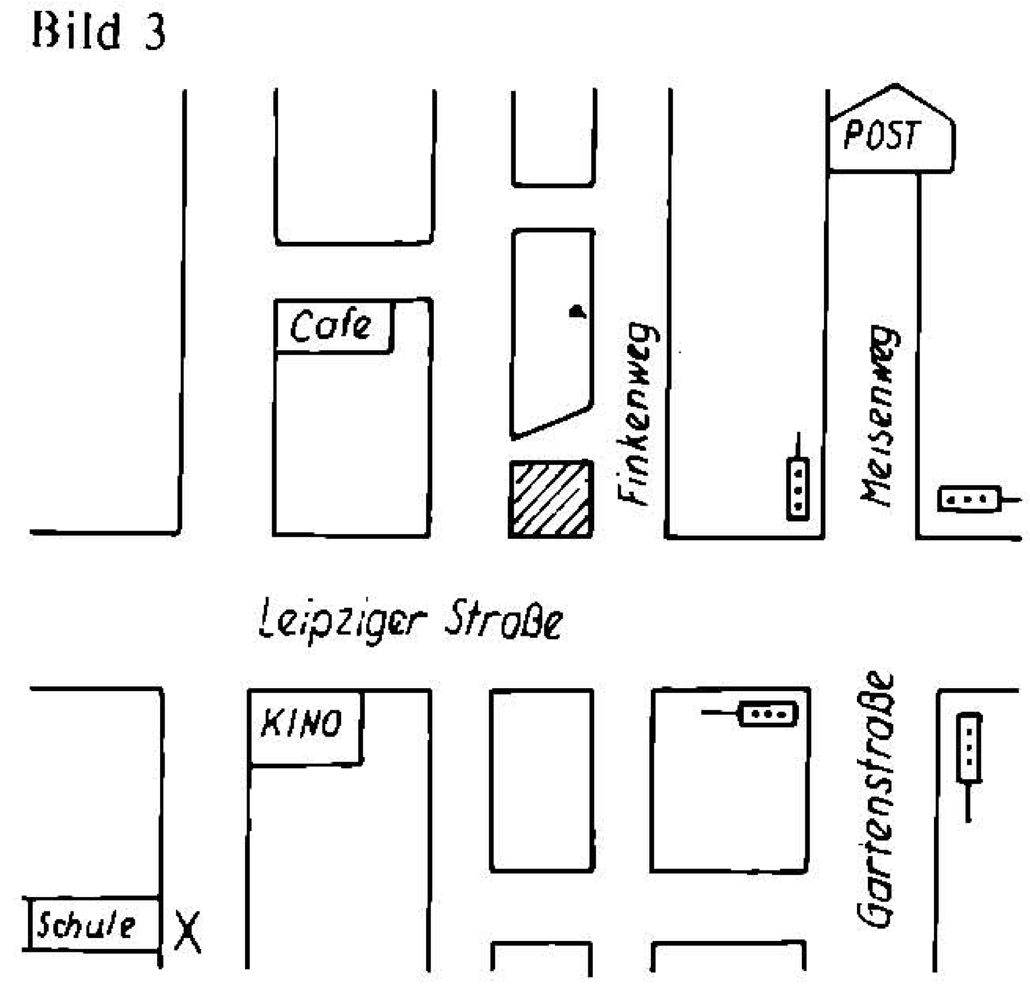
▲5▲ Was ist an der Vorschrift für die Addition von Dezimalbrüchen (DZB) falsch?

Schreibe die DZB untereinander!
↓
Addiere die DZB wie natürliche Zahlen ohne Rücksicht auf das Komma!
↓
Setze in der erhaltenen Summe ein Komma so, daß es genau unter den Kommas der einzelnen Summanden steht!

▲6▲ Verändere nachstehende Vorschrift so, daß sie von einem Schüler, der **nicht** weiß, wie man das Quadrat einer Zahl bildet, verstanden und abgearbeitet werden kann! Gegeben sind zwei natürliche Zahlen a, b.
(1) Bilde das Quadrat der Zahl a! Das ergibt x.
(2) Bilde das Quadrat der Zahl b! Das ergibt y.
(3) Berechne die Summe aus x und y!

▲7▲ Am Punkt x fragt dich jemand nach dem Weg zur Post.
Wie würdest du ihm antworten (Bild 3)?

Bild 3



Bei all den angegebenen Aufgaben treten *Folgen von Anweisungen* auf. Die ersten drei Aufgaben enthielten die Forderung, die einzelnen Anweisungen in eine *richtige* Reihenfolge zu bringen. Durch die Aufgabe 4 wurde der Leser aufgefordert, selbst eine Vorschrift abzuarbeiten. Damit nun alle Leser, die die Aufgabe 4 lösen, zum gleichen Resultat gelangen, ist es erforderlich (Rechenfehler sind natürlich ausgeschlossen), daß die einzelnen *Schritte eindeutig* und für den Ausführenden (Mensch/Maschine) hinreichend *elementar* formuliert sind.

In den Anweisungen zur Addition von Dezimalbrüchen (Aufgabe 5) habt ihr sicher den Fehler gefunden. Der erste Schritt ist nicht eindeutig formuliert. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Es sollen die Zahlen 23,91 und 0,632 nach der Vorschrift aus Aufgabe 5 addiert werden.

Entsprechend der ersten Anweisung kann man die Zahlen z. B. so 23,91, aber
0,623
auch so 23,91, aber auch so 23,91 , ...
0,632 0,632
untereinander schreiben.

Das wollen wir nicht zulassen. Wir müssen die erste Anweisung *eindeutig* formulieren. Hier unser Vorschlag:

Schreibe die DZB stellengerecht untereinander!

Der Vorschlag setzt allerdings voraus, daß *stellengerecht* dem Nutzer der Vorschrift bekannt ist.

Beim Lösen der Aufgabe 6 wird deutlich, was es heißt, die einzelnen Schritte so zu formulieren, daß sie für den Ausführenden hinreichend *elementar* sind. ‚So wissen Schüler unterer Klassen oft nicht, was man unter *Bilde das Quadrat der Zahl a*! versteht.

Verändert man die Formulierung und sagt: *Multipliziere die Zahl a mit sich selbst!*, so wissen auch sie, was gemeint ist.

Mit der Aufgabe 7 wird der Leser aufgefordert, selbst eine Folge von endlich vielen Anweisungen anzugeben, damit der Ortsunkundige den Weg von der Schule zur Post findet.

Folgen von endlich vielen, eindeutig formulierten und für einen Ausführenden hinreichend elementaren Anweisungen, wie wir sie in obigen Aufgaben kennengelernt haben, nennt man *Algorithmen.*

Algorithmen müssen stets gewährleisten, daß man mit ihnen ein Problem (z. B. eine Konstruktion, das Lösen einer Gleichung, die Zubereitung einer Speise usw.) in endlich vielen Schritten löst. Aus diesem Grunde darf z. B. eine Anweisung wie *Addiere alle natürlichen Zahlen!* **nicht** in einem Algorithmus auftreten.

Einer der ältesten uns bekannten Algorithmen ist der sogenannte *Euklidische Algorithmus* (Euklid, geb. um 365 v. u. Z., gest. um 300 v. u. Z.) zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von zwei natürlichen Zahlen a und b $(a > b,\ b \neq 0)$ durch schrittweise Division mit Rest.

Im ersten Schritt ist b Divisor und a Dividend. In jedem folgenden Schritt wird der Divisor des vorhergehenden zum Dividenden und der Rest des vorhergehenden Schrittes zum Divisor. Der letzte von 0 verschiedene Rest (bzw. der zuletzt auftretende Divisor) ist dann der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b. Das hört sich sehr kompliziert an, ist es aber gar nicht, wenn man folgendes Beispiel betrachtet.

$a = 273$; $b = 104$
273 : 104 = 2 Rest 65
104 : 65 = 1 Rest 39
65 : 39 = 1 Rest **13**
26 : 13 = 2 Rest 0

13 ist der größte gemeinsame Teiler von 273 und 104.

Da der Rest immer kleiner als der Divisor ist, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab.

▲ 8 ▲ a) Ermittle den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 1785 und 858!
b) Ermittle den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 2730; 3289 und 4199!

▲ 9 ▲ Für welche der folgenden Tätigkeiten lassen sich Algorithmen angeben?
a) Messen eines Winkels mit Hilfe des Winkelmessers;
b) Multiplikation zweier Dezimalbrüche;
c) Fortgesetztes Verdoppeln der Zahl 3;
d) Schreiben eines Romans;
e) Überqueren einer Straße;
f) Annähen eines Knopfes;
g) Konstruktion eines Dreiecks aus drei gegebenen Seiten;
h) Berechnen des Flächeninhalts eines Quadrates bei gegebener Seitenlänge a;
i) Binden einer Schleife.

▲ 10 ▲ Welche der folgenden Vorschriften ist ein Algorithmus?
a) Gegeben sind zwei natürliche Zahlen a, b $(0 < a < b)$. Zu berechnen ist ein Term nach folgender Vorschrift.
(1) Multipliziere a mit b! Das ergibt x.
(2) Quadriere die eine Zahl! Das ergibt y.
(3) Multipliziere x und y und schreibe das Ergebnis auf!
b) Gegeben ist eine Gleichung der Form $\frac{a}{x} = b$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq 0)$, die zu lösen ist.
Wir lösen die Gleichung folgendermaßen:
(1) Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit x.
(2) Wir dividieren nun beide Seiten der entstandenen Gleichung $a = b \cdot x$ durch b.
(3) Wir erhalten $x = \frac{a}{b}$ als einzige Lösung.
c) Gegeben ist eine Textaufgabe, die zu lösen ist. Wir lösen die Textaufgabe in folgender Weise:
(1) Schreibe gegebene und gesuchte Größen heraus!
(2) Stelle eine Gleichung auf!
(3) Löse die Gleichung!
(4) Führe die Probe am Text durch!
(5) Formuliere einen Antwortsatz!

Lediglich die Schrittfolge zur Lösung einer Gleichung des Typs $\frac{a}{x} = b$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq 0)$ stellt einen Algorithmus dar. Die Vorschrift 10 a) ist nicht eindeutig formuliert (Schritt (2)!) und die Schrittfolge 10 c) gibt nur eine grobe Orientierung zur Lösung einer Textaufgabe. Wenn man die einzelnen Schritte abarbeitet, gelangt man aber nicht zwingend zur Lösung einer gegebenen Textaufgabe. Damit ist eine wichtige Eigenschaft eines Algorithmus – in endlich vielen Schritten mit Sicherheit zum Resultat zu gelangen – nicht erfüllt.

Wie wir sehen, gibt es im täglichen Leben, aber auch in der Mathematik, für viele zu lösende Aufgabenklassen Algorithmen. Ist uns für die Lösung einer Aufgabenklasse ein Algorithmus bekannt, so können oft Computer helfen, Aufgaben zu lösen. Sie arbeiten im Vergleich zum Menschen äußerst schnell. Von selbst *können* sie aber sehr wenig. Um einen Computer zu nutzen, muß man den Algorithmus zur Lösung eines Problems in für den Computer hinreichend elementare Anweisungen zerlegen. Außerdem ist es erforderlich, die Anweisungen in einer für den Computer verständlichen Sprache zu verfassen. Diesen Vorgang nennt man *Programmieren.* Das entstandene Ergebnis heißt Programm. Erst wenn man einem Computer ein Programm *eingibt*, ist er in der Lage, unermüdlich und beliebig oft dieses Programm abzuarbeiten.

Schleicht sich jedoch in das Programm ein Fehler ein, so steht er still oder liefert die unsinnigsten Resultate.

Ohne hier auf Einzelheiten weiter einzugehen, wollen wir ein mögliches Computerprogramm für die Vorschrift der Aufgabe 4 in der Programmiersprache BASIC vorstellen:

1Ø INPUT "1. Zahl:"; A 2Ø INPUT "2. Zahl:"; B 3Ø INPUT "3. Zahl:"; C	**Eingabe** von Zahlen
4Ø LET D = A + B 5Ø LET E = D/2 6Ø LET F = E*C	**Verarbeitung** der Zahlen
7Ø PRINT "Ergebnis:"; F 8Ø END	**Ausgabe** des Resultats

Erklärung: input (engl.) – Eingabe,
let (engl.) – sei,
print (engl.) – drucken
/ Sumbol für die Division
* Symbol für die Multiplikation

Durch die Anweisung "LET d = A + B" wird der Variablen D der Wert von A + B zugeordnet.

Alle in Anführungszeichen geschriebenen Texte sind für den Computer und seine Arbeit unbedeutend. Man könnte auf diese Texte auch verzichten. Sie sind aber für den Nutzer eine große Hilfe, damit er z. B. weiß, welche Zahl er wann einzugeben hat. Die in Anführungszeichen geschriebenen Texte des Programms erscheinen nämlich auf dem Bildschirm, der dem Computer angeschlossen ist. *L. Flade*

Ostereiereien

Egon und Fritz färben insgesamt 30 Ostereier und teilen diese so auf, daß jeder gleichviel erhält. Egon hat eine gleiche Anzahl blauer und violetter Eier und halbsoviel rote wie blaue. Fritz hat eineinhalb mal soviel violette Eier wie rote und blaue zusammen. Er hat 2 rote Eier mehr als Egon. Wieviel rote, blaue und violette Eier haben sie gefärbt? *Alice Kraneis, Bernburg*

Läßt sich der Zufall berechnen?

Teil 1

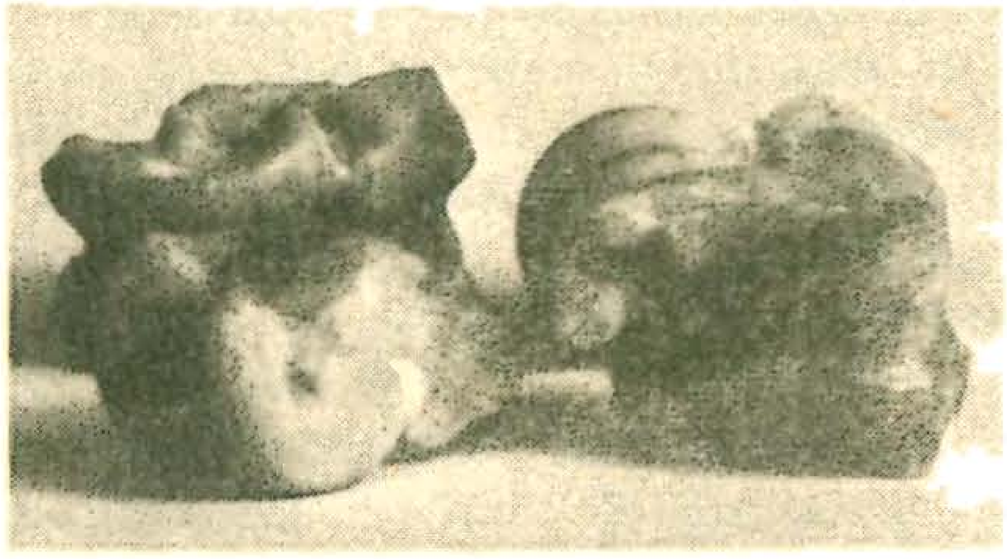
Bei einem Wurf mit einem Spielwürfel ist die gewürfelte Augenzahl ein zufälliges Ergebnis, das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Elementarereignis genannt und als Menge aufgefaßt wird. Die möglichen Elementarereignisse beim einmaligen Würfeln sind also $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ und $\{6\}$. Wird eine 6 gewürfelt, so sagen wir, das Elementarereignis $\{6\}$ ist eingetreten. Mit einem Würfel bei einem Wurf eine ungerade Augenzahl, eine 1 oder 3 oder 5 zu würfeln, ist gleichbedeutend mit dem Eintreten des Ereignisses $U = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} = \{1; 3; 5\}$, der Vereinigung der Elementarereignisse $\{1\}$, $\{3\}$ und $\{5\}$.

Das Würfeln wird als zufälliger Versuch bezeichnet. Allgemein ist ein zufälliger Versuch ein beliebig oft wiederholbarer Versuch, dessen Ergebnis im Bereich gewisser Möglichkeiten ungewiß ist.

Definition 1: Die endlich vielen möglichen Ausgänge eines zufälligen Versuches heißen *Elementarereignisse* und werden mit E_1, E_2, ..., E_v bezeichnet. Jede Untermenge von $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_v = \Omega$, der Vereinigung aller Elementarereignisse, heißt *Ereignis*. Das bei jedem Versuch eintretende Ereignis Ω heißt *sicheres Ereignis* und das bei keinem Versuch eintretende Ereignis $\varnothing$, das Ereignis „leere Menge", heißt *unmögliches Ereignis*.

Die Germanen benutzten zum Würfeln den Talus, den auch als Würfel- oder Sprungbein bezeichneten Knochen der Fußwurzel der Säuger, der beim Fallen auf eine Unterlage vier verschiedene Lagen einnehmen kann. Der römische Geschichtsschreiber Publius Cornelius Tacitus berichtet um das Jahr 100 u. Z. über die Germanen: „Dem Würfelspiel huldigen sie merkwürdigerweise in voller Nüchternheit, ... daß sie, wenn sie alles andere verspielt haben, mit dem letzten entscheidenden Wurfe um ihre Freiheit und um ihre eigene Person kämpfen ... Sklaven, die sie auf diese Weise gewonnen haben, verkaufen sie weiter ..."[1])

Bild 1
Würfelbeine des Hausschweins



Tacitus' Schilderung der Spielleidenschaft der Germanen ist sicher übertrieben und das auf dieser Schilderung fußende, zum Teil abgedruckte Lied entstellt diese weiter.

Die Römer benutzten zum Würfeln bereits den kubischen Würfel. Ihnen war schon bekannt, daß man durch Ausgießen eines Würfels mit Blei an geeigneter Stelle dem „Glück" beim Würfelspiel auf unlautere Weise nachhelfen kann.[2]) Betrug mit gezinkten Würfeln wurde im Mittelalter hart bestraft, wie die Fotokopie einer Textstelle aus einem 1569 in Leipzig gedruckten Sachsenspiegel (Rechtsbuch) belegt.

Zur Einführung weiterer Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und als Zahlenmaterial für einige Aufgaben werden die Versuchsergebnisse bei wiederholtem Würfeln mit einem für diesen Beitrag angefertigten gezinkten Würfel benutzt: Bei den ersten 100 Würfen mit diesem Würfel trat das Elementarereignis $\{6\}$ 42mal ein. Als ein zweites und danach ein drittes Mal 100 Würfe ausgeführt wurden, trat das gleiche Elementarereignis 47 und nochmals 47mal ein, bei diesen 300 Würfen also im Mittel bei 100 Würfen

$\frac{45 + 47 + 47}{3} = 46{,}\overline{3}$ und im Mittel bei einem Wurf $\frac{45 + 47 + 47}{300} = 0{,}46\overline{3}$mal.

Nach insgesamt 1000 Würfen war insgesamt 85mal $\{1\}$, 88mal $\{2\}$, 89mal $\{3\}$, 131mal $\{4\}$, 151mal $\{5\}$ und 456mal $\{6\}$ eingetreten. In der genannten Reihenfolge traten diese Elementarereignisse im Mittel bei einem Wurf

$h_1 = 0{,}085$, $h_2 = 0{,}088$, $h_3 = 0{,}089$,
$h_4 = 0{,}131$, $h_5 = 0{,}151$ und $h_6 = 0{,}456$

mal ein. Dabei gilt $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 1$. Bei diesen 1000 Würfen wurden insgesamt $85 + 89 + 151$mal ungerade Augenzahlen gewürfelt. Das Ereignis $U = \{1; 3; 5\}$ trat im Mittel bei einem Wurf

$H(U) = \frac{85 + 89 + 151}{1000} = 0{,}325$mal ein.

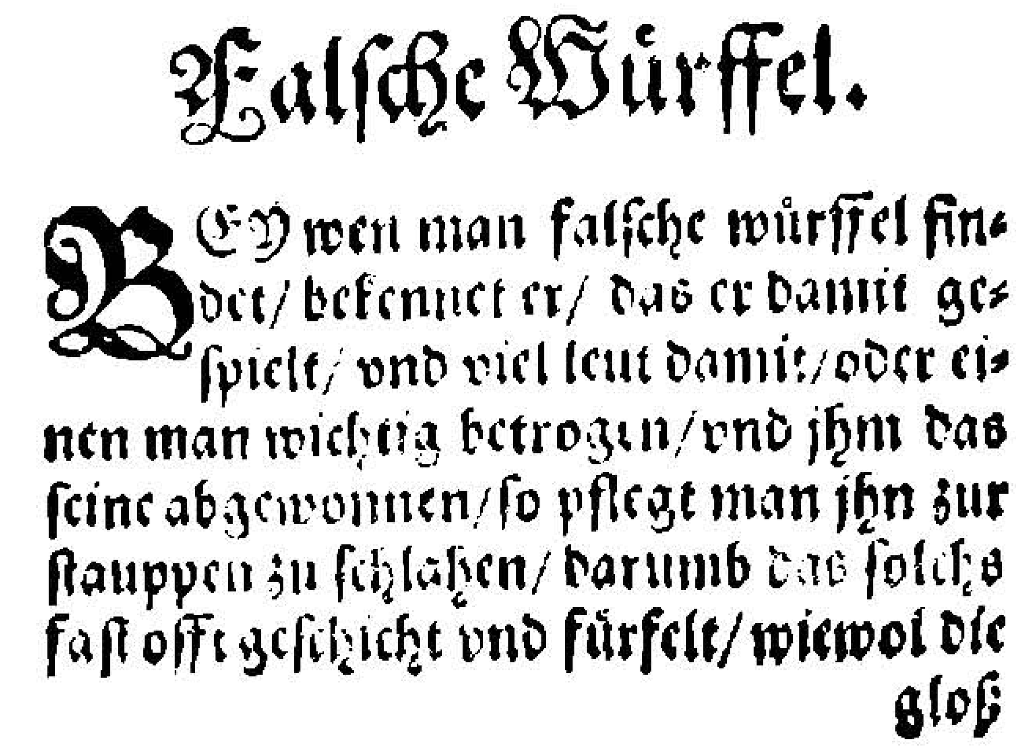
Die experimentell ermittelten Zahlen h_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) und $H(U)$ heißen relative Häufigkeiten für das Eintreten eines Elementarereignisses E_i bzw. des Ereignisses U bei den mit dem gezinkten Würfel ausgeführten 1000 Würfen. Die relative Häufigkeit für das Elementarereignis $\{6\}$ beim Würfeln mit dem gezinkten Würfel beträgt bei den ersten 100 Würfen 0,45, bei den ersten 300 Würfen $0{,}45\overline{3}$ und bei allen 1000 Würfen 0,456.

Für wiederholtes Ausführen desselben zufälligen Versuches wird erklärt:

$$\text{relative Häufigkeit für Ereignis } A = \frac{\text{Zahl der Versuche mit eingetretenem Ereignis } A}{\text{Zahl aller Versuche}}$$

Wird die relative Häufigkeit für das Eintreten eines Ereignisses A bei einem zufälligen Versuch mehrfach ermittelt, so schwanken diese relativen Häufigkeiten um eine Zahl, die als Wahrscheinlichkeit (engl. probability; franz. probabilité) $P(A)$ für das Eintreten des Ereignisses A bei diesem zufälligen Versuch bezeichnet wird. Es gilt $0 \leqq P(A) \leqq 1$. Die ermittelten relativen Häufigkeiten sind im allgemeinen um so bessere Näherungswerte für $P(A)$, je länger die zugehörigen Versuchsfolgen sind, aus um so mehr Wiederholungen des zufälligen Versuchs die Versuchsfolgen bestehen. Diese experimentell erkannten Aussagen sind zutreffend, obgleich z. B. beim Würfeln mit einem nicht gezinkten Würfel auch die folgende genügend lange Versuchsfolge denkbar ist: Bei jedem Wurf tritt stets das Elementarereignis $\{6\}$ ein. Die relative Häufigkeit für das Elementarereignis $\{6\}$ ist hier 1 und die relativen Häufigkeiten für alle anderen Elementarereignisse sind 0. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bestätigt und präzisiert diese durch Experimente erhaltenen Ergebnisse mittels des sogenannten „Gesetzes der großen Zahlen" (Jacob Bernoulli, 1654 bis 1705, schweiz. Math.): Der Betrag der Differenz aus Wahrscheinlichkeit und relati-

Bild 2
Abschnitt „Falsche Würfel" aus dem 1569 gedruckten Sachsenspiegel, in Besitz des Stadtarchivs Döbeln


Falsche Würffel.

BEy wen man falsche würffel findet/ bekennet er/ das er damit gespielt/ vnd viel leut damit/oder einen man wichtig betrogen/vnd jhm das seine abgewonnen/so pflegt man jhn zur stauppen zu schlahen/ darumb das solchs fast offt geschicht vnd fürfelt/ wiewol die gloß ver Häufigkeit für das gleiche Ereignis nähert sich mit zunehmender Gewißheit unbegrenzt der 0, falls dazu nur die relative Häufigkeit zu immer längeren Versuchsfolgen benutzt wird. („Mit zunehmender Gewißheit" bedeutet exakt „mit gegen 1 strebender Wahrscheinlichkeit". – Der Leser vergleiche diese Mitteilung mit den Betrachtungen über den radioaktiven Zerfall im Teil III dieses Beitrages, voraussichtlich im Heft 5/90.)

Da die mittels einer genügend langen Versuchsfolge bestimmte relative Häufigkeit für ein Ereignis A im allgemeinen stets ein brauchbarer Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ist, kann auf Grund der beschriebenen 1000 Versuche für das einmalige Würfeln mit dem gezinkten Würfel $P(E_i) = p_i = h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ gesetzt werden. (Bei experimentell bestimmten Wahrscheinlichkeiten ist es üblich, statt des Zeichens $\approx$ das Gleichheitszeichen zu benutzen.)

Die Betrachtungen über die relative Häufigkeit beim Würfeln mit dem präparierten Würfel und die Beziehung zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit lassen erkennen, daß jede Wahrscheinlichkeit die folgenden Grundannahmen erfüllt.

Grundannahmen (Axiome):

Jedem Elementarereignis E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ eines zufälligen Versuches ist eindeutig als Wahrscheinlichkeit eine Zahl
$P(E_i) = p_i$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ zugeordnet, wobei gilt $p_1 + p_2 + \ldots + p_v = 1$.

Jedem Ereignis A eines zufälligen Versuchs ist als Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zu A gehörenden Elementarereignisse zugeordnet.

Ein sich auf Axiome stützender exakter Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde erstmals von A. N. Kolmogorow (sowj. Math., geb. 1903) vollzogen.

Aus unseren Grundannahmen folgt insbesondere, daß die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_v$
$P(\Omega) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_v)$
$= p_1 + p_2 + \ldots + p_v = 1$ ist.

Für den gezinkten Würfel ergibt sich aus den Grundannahmen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A = \{5; 6\}$ zu
$P(A) = p_5 + p_6 = 0{,}151 + 0{,}456 = 0{,}607$.

Die Elementarereignisse eines zufälligen Versuchs heißen gleichwahrscheinlich, wenn $p_1 = p_2 = \ldots = p_v$ gilt. In diesem Fall folgt aus den Grundannahmen $P(E_i) = p_i = \frac{1}{v}$ und es gilt:

$$\text{Wahrscheinlichkeit für Ereignis } A = \frac{\text{Anzahl der zu } A \text{ gehörenden Elementarereignisse}}{\text{Anzahl aller Elementarereignisse}}$$

Mit diesem Spezialfall ergibt sich der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff, den P. Laplace (franz. Math., 1749 bis 1827), als erster formelmäßig als Verhältnis der für ein Ereignis günstigen Möglichkeiten zu der aller Möglichkeiten erfaßte. Bei einem nicht präparierten, fehlerfreien Würfel, Idealwürfel genannt, kann angenommen werden, daß alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind und daß damit
$P(E_i) = p_i = \frac{1}{6}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ gilt.

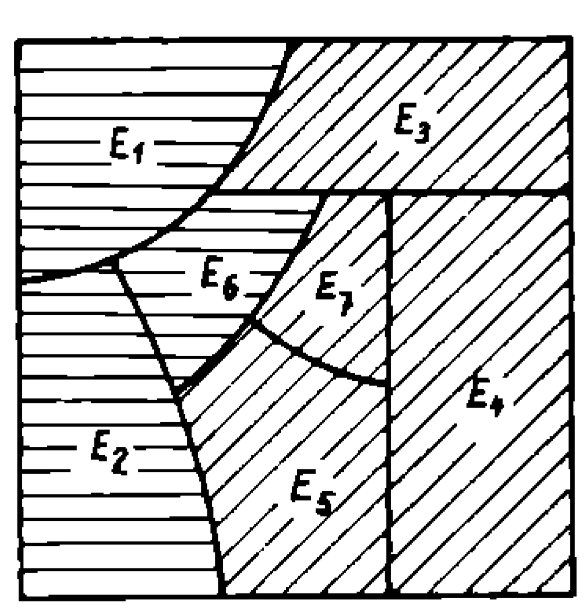
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $U = \{1; 3; 5\}$ bei einem Idealwürfel ist also
$P(U) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Bei Anwendungen in der Volkswirtschaft werden Wahrscheinlichkeiten häufig als Prozentsätze $P_{\%}(A)$ angegeben. Dabei gilt $P_{\%}(A) = P(A) \cdot 100\,\%$. Beim präparierten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit in Prozent für das Eintreten von $\{1\}$ also 8,5 %. Die Maßzahl 8,5 gibt hier an, wie oft im Mittel bei 100 Würfen eine 1 gewürfelt wird.

Aufgabe 1: In eine Schachtel wurden die 28 Steine eines Dominospieles geschüttet. Es soll ohne Hinzusehen ein Stein herausgenommen werden. Dabei soll für jeden in der Schachtel befindlichen Stein die Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden, gleich groß sein. Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ und $P(D)$, wenn für die Ereignisse A, B, C und D gilt:

A – Die Summe aller Augen des gezogenen Steines ist kleiner als 5.
B – Die Summe aller Augen des gezogenen Steines ist 5.
C – Die Summe aller Augen des gezogenen Steines ist 6.
D – Der gezogene Stein besitzt auf beiden Hälften gleich viel Augen.

Zur Veranschaulichung kann man die Elementarereignisse und Ereignisse eines zufälligen Versuches in einem sogenannten Venn-Diagramm darstellen (Bild 3):

Bild 3



Ordnet man dem sicheren Ereignis $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_v$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(\Omega) = 1$ die Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 dm zu, so kann dem Elementarereignis E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ eine Teilfläche dieses Quadrates mit dem Flächeninhalt $P(E_i)\,\mathrm{dm}^2$ zugeordnet werden. Verschiedenen Elementarereignissen werden Flächen zugeordnet, die keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Jedem Ereignis A wird die Fläche zugeordnet, die die Flächen aller zu A gehörenden Elementarereignisse gerade bedeckt. Nach den Grundannahmen ist damit der Flächeninhalt der dem Ereignis A zugeordneten Fläche $P(A)\,\mathrm{dm}^2$. In Bild 3 ist ein solches mögliches Venn-Diagramm für $v = 7$ dargestellt. Die schräg schraffierte Fläche gehört zum Ereignis $A = E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_7$ und es gilt
$P(A) = P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_7)$.

Die waagerecht schraffierte Fläche gehört zum zu A bezüglich Ω komplementären Ereignis $\overline{A} = E_1 \cup E_2 \cup E_6$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Definition 2: Zwei Ereignisse eines zufälligen Versuchs heißen *komplementäre Ereignisse*, falls das eine genau dann eintritt, wenn das andere nicht eintritt.

Für komplementäre Ereignisse A und $\overline{A}$ gilt also $A \cap \overline{A} = \emptyset$ und $A \cup \overline{A} = \Omega$.

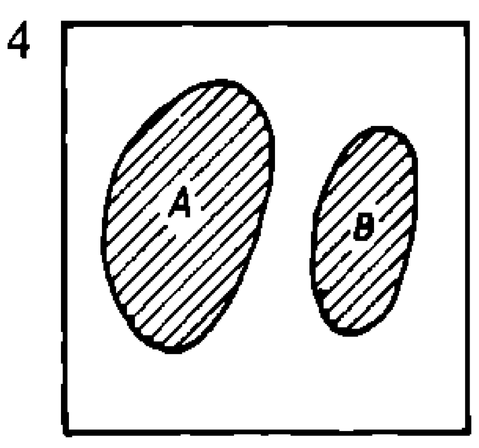
Satz 1: Sind A und $\overline{A}$ komplementäre Ereignisse eines zufälligen Versuchs, so gilt $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Definition 3: Zwei zum gleichen zufälligen Versuch gehörende Ereignisse A und B heißen *unvereinbar*, wenn es kein Elementarereignis E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ gibt, für das gleichzeitig $E_i \subset A$ und $E_i \subset B$ gilt.

Für zwei unvereinbare Ereignisse A und B gilt $A \cap B = \emptyset$. Insbesondere sind zwei komplementäre Ereignisse und zwei verschiedene Elementarereignisse unvereinbar.

Satz 2: Für zwei unvereinbare Ereignisse A und B eines zufälligen Versuchs gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (siehe Bild 4).

Bild 4



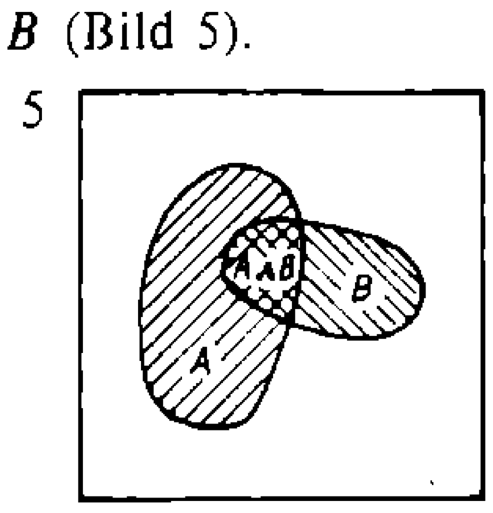
Aufgabe 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Schachtel der Aufgabe 1 einen Stein mit verschiedenen Augenzahlen auf beiden Hälften zu ziehen?

Aufgabe 3: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Schachtel der Aufgabe 1 einen Stein mit insgesamt mehr als 6 Augen zu ziehen?

Aufgabe 4: Welche Paare der in Aufgabe 1 genannten Ereignisse sind nicht unvereinbar?

Sind A und B zwei nicht unvereinbare Ereignisse, so gibt es mindestens ein Elementarereignis E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ mit $E_i \subset A$ und $E_i \subset B$. Zwei solchen Ereignisse A und B sind im Venn-Diagramm Flächen zugeordnet, die ein Flächenstück gemeinsam haben. Zum gemeinsamen, doppelt bedeckten Flächenstück gehört das Ereignis $A \cap B$ (Bild 5).

Bild 5



Satz 3: Für zwei nicht unvereinbare Ereignisse A und B eines zufälligen Versuchs gilt
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Aufgabe 5: Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß der aus der in Aufgabe 1 betrachteten Schachtel gezogene Stein insgesamt weniger als 5 Augen oder auf beiden Seiten gleich viele Augen hat!

W. Träger

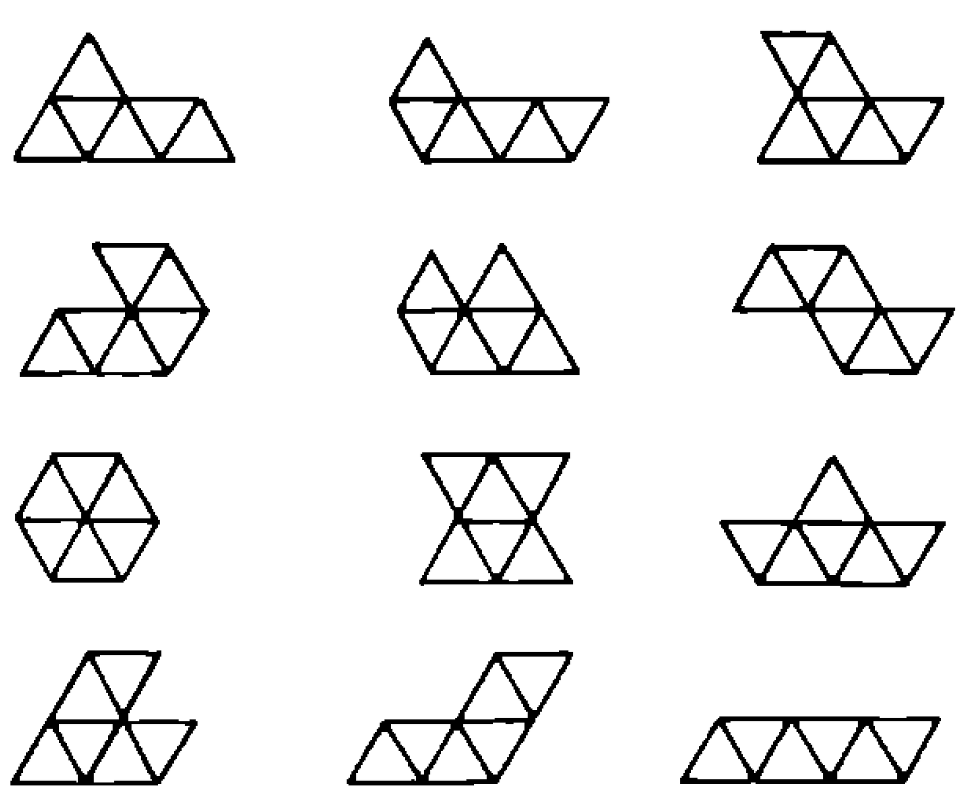
[1]) P. C. Tacitus, Germania (Lateinisch/deutsch). Phillipp Reclam jun., Leipzig 1976

[2]) R. Thiele, Die gefesselte Zeit. Urania-Verlag, Leipzig/Jena/Berlin 1987

Noch einmal: Köpfchen, Köpfchen

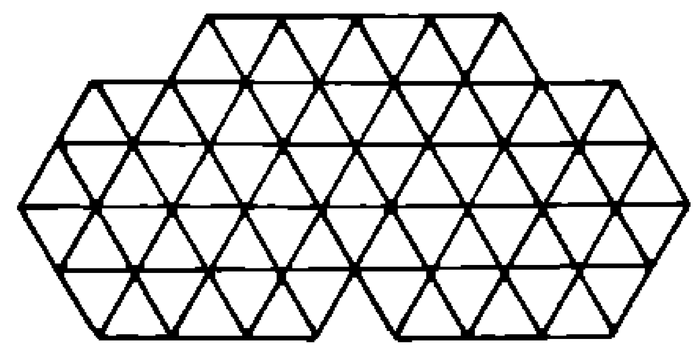
Ebene Legespiele regen immer wieder viele Leser zum Knobeln an. In *alpha*, Heft 4 und 5 (1983) haben wir die Spiele Hexatrion, Pentomino und Tangram beschrieben und zahlreiche Zuschriften erhalten.
Beim Spiel Hexatrion sollen aus 12 Elementen (Bild 1), von denen jedes aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist, ebene Figuren gelegt werden. Dabei darf jedes der 12 Elemente höchstens einmal verwendet werden. Man darf die Spielelemente auch umdrehen (spiegeln)!

Bild 1

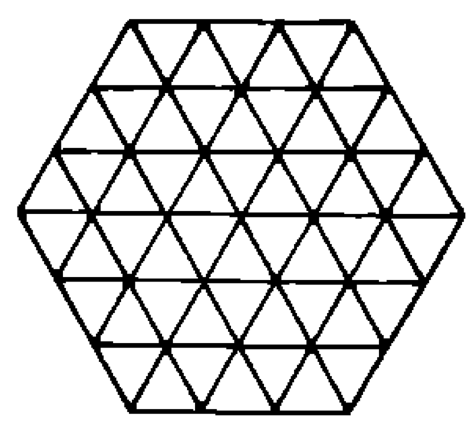


Folgende Aussage ist wahr:
Wenn eine ebene Figur beim Hexatrion zusammengesetzt werden kann, so läßt sich diese Figur in kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen. Dabei ist die Anzahl derartiger Dreiecke durch 6 teilbar und kleiner oder gleich 72.
Die Teilbarkeit durch 6 ist eine *notwendige Bedingung* dafür, daß sich Figuren aus den Hexatrion-Elementen zusammensetzen lassen. Wir können die Aussage auch so formulieren:
Läßt sich eine ebene Figur nicht in 6n kongruente gleichseitige Dreiecke (mit $1 \leq n \leq 12$) *zerlegen, so kann sie mit Hexatrion nicht zusammengebaut werden.*
Ihr könnt euch leicht Figuren überlegen, die aus $6n$ kongruenten gleichseitigen Dreiecken ($1 \leq n \leq 12$) bestehen und die ihr mit den Hexatrion-Elementen nicht legen könnt. Die angegebene Bedingung ist also *nicht hinreichend*!
Zu vorgegebenen Figuren kann es mehrere Lösungen geben!
Es kann passieren, daß sich beim Aufzeichnen Flüchtigkeitsfehler oder Druckfehler einschleichen. Gelegentlich überlegt man sich auch Figuren, bei denen es sich beim genauen Nachprüfen erweist, daß sie nicht aus einer durch 6 teilbaren Zahl von Dreiecken bestehen. Die oben angeführte Bedingung ist dann verletzt. Alle Bemühungen, diese Figuren zu legen, sind somit von vornherein zum Scheitern verurteilt.
In Bild 2 sind acht Figuren dargestellt, versucht bitte, sie aus den zwölf Hexatrion-Elementen zu legen. Zwei dieser Figuren hat Herr Schubert aus Pfaffroda unserer Redaktion vorgeschlagen!

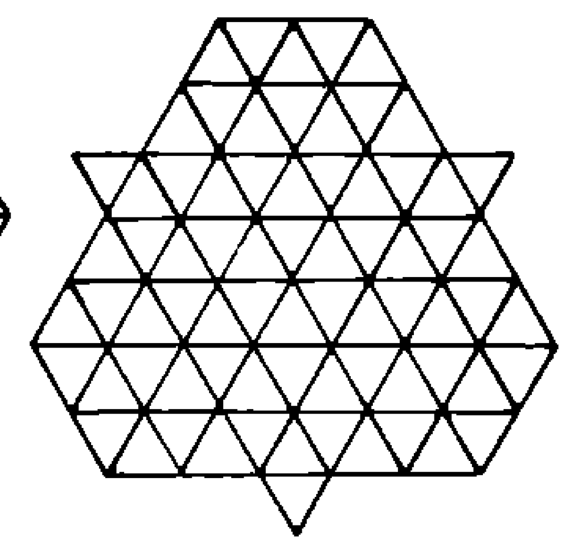
Bild 2 a



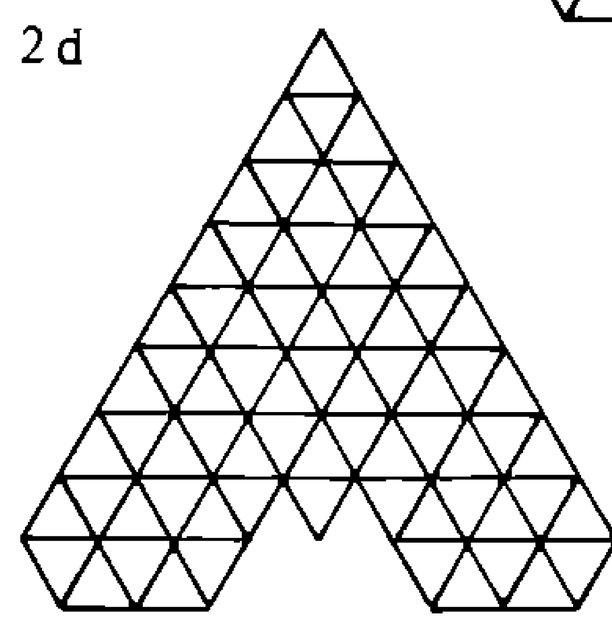
2 b



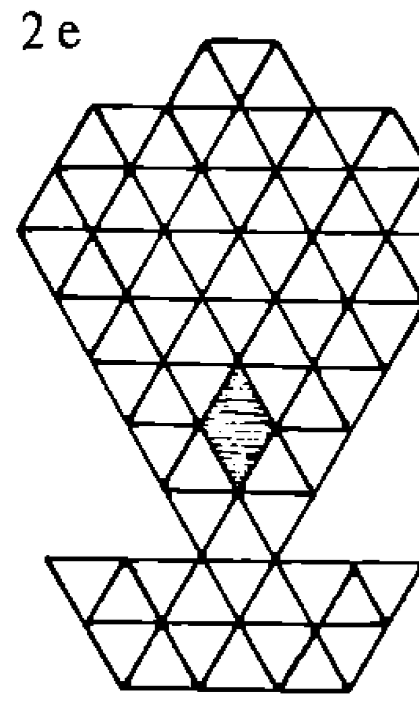
2 c



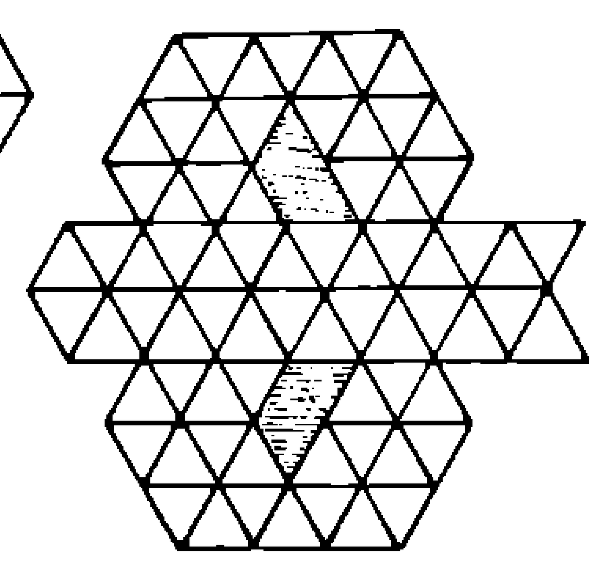
2 d

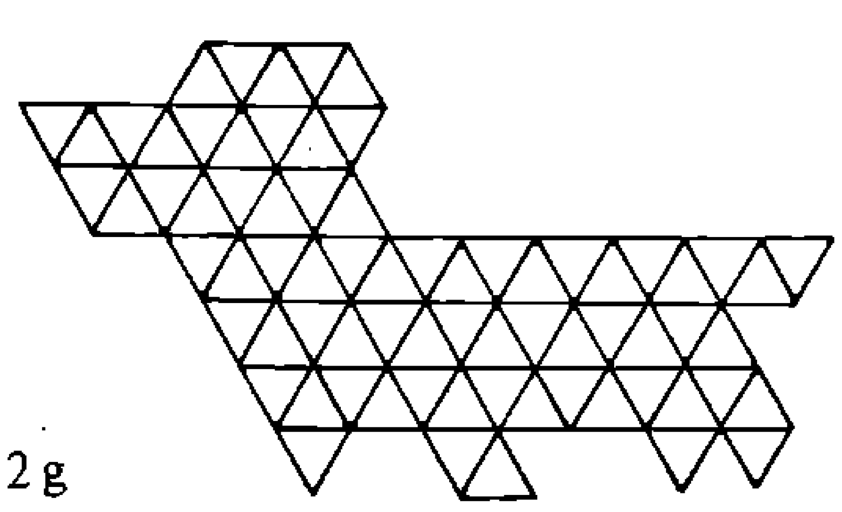


2 e

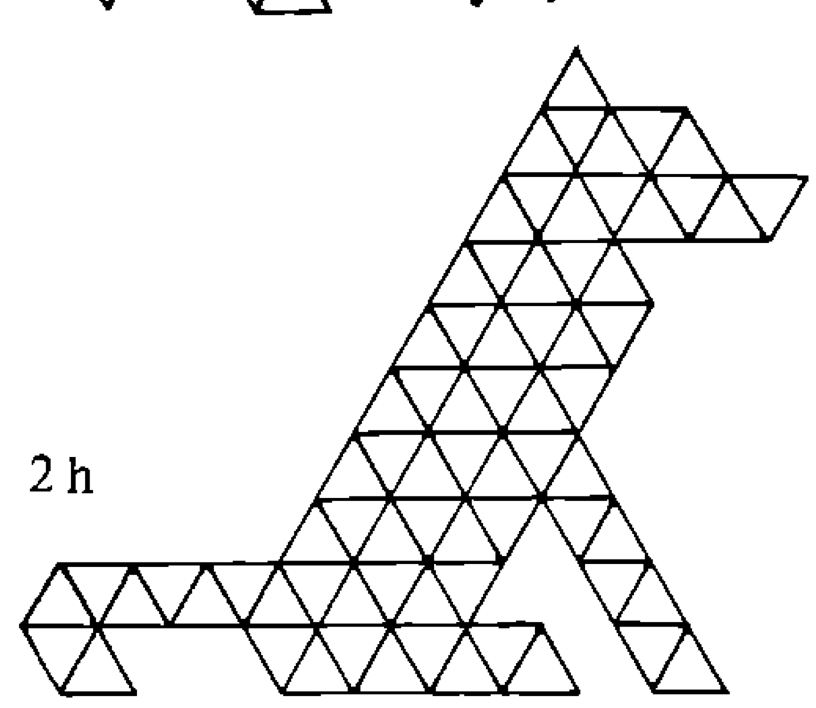


2 f





2 g



2 h

Beim Pentomino (Bild 3) sind aus 12 Elementen, die jeweils aus fünf gleichgroßen Quadraten bestehen, Figuren zu konstruieren.
Formuliert wieder eine notwendige Bedingung dafür, daß eine ebene Figur mit diesem Spiel gelegt werden kann. Ist diese Bedingung auch hinreichend?

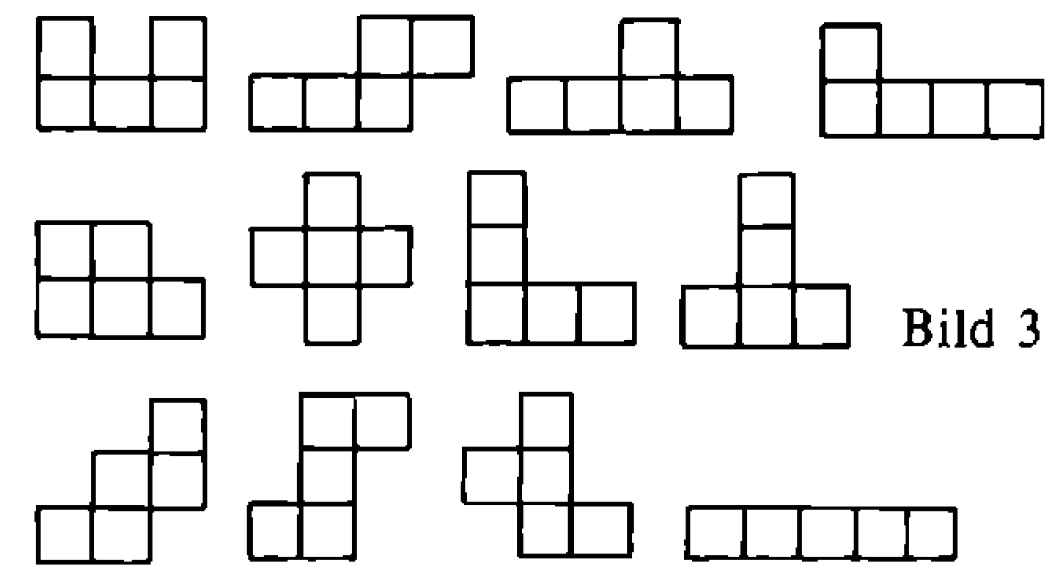
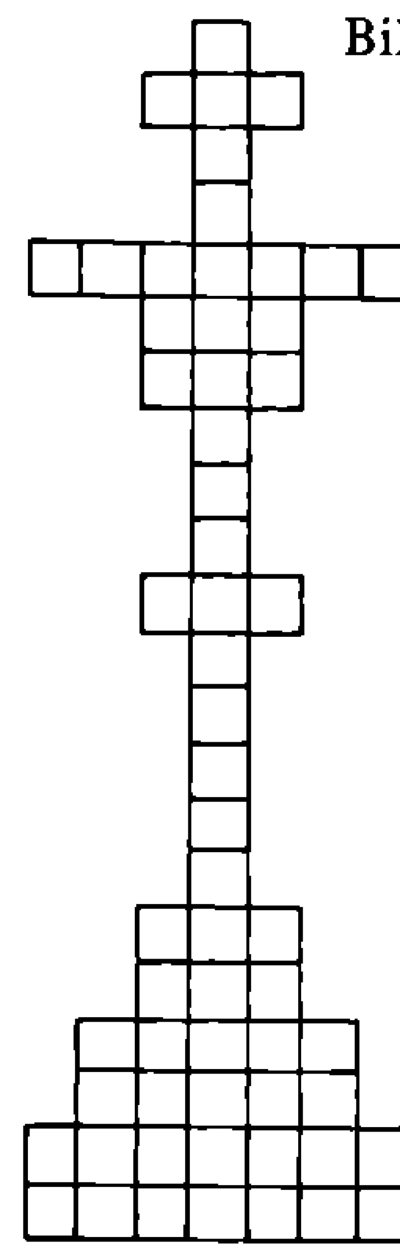


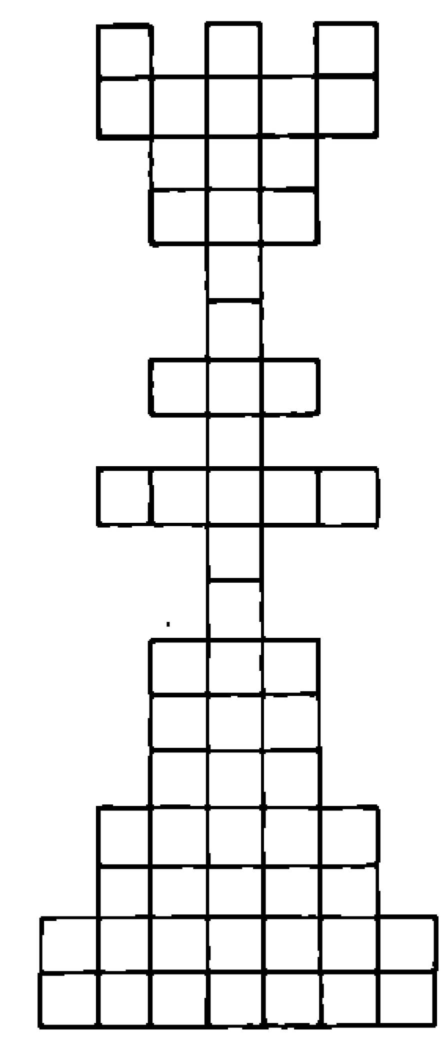
Bild 3

Viel Spaß wird euch sicher das Zusammensetzen der sechs Schachfiguren (Bild 4) und der stilisierten Tierfiguren Kamel, Elefant, Hirsch und Hahn (Bild 5) bereiten.

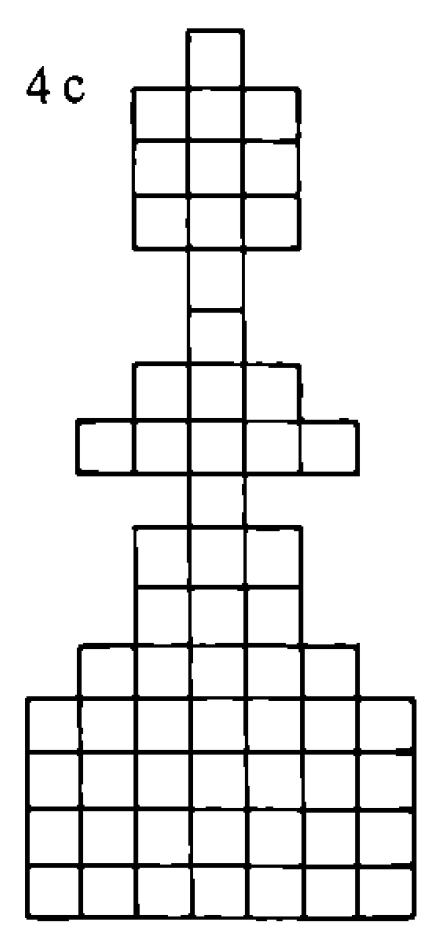
Bild 4 a



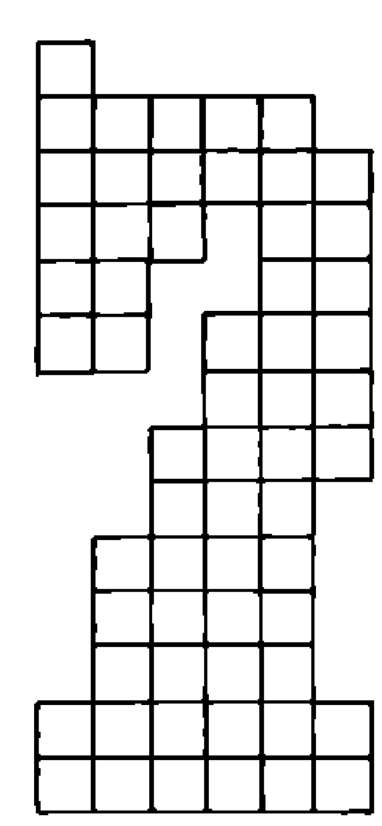
4 b



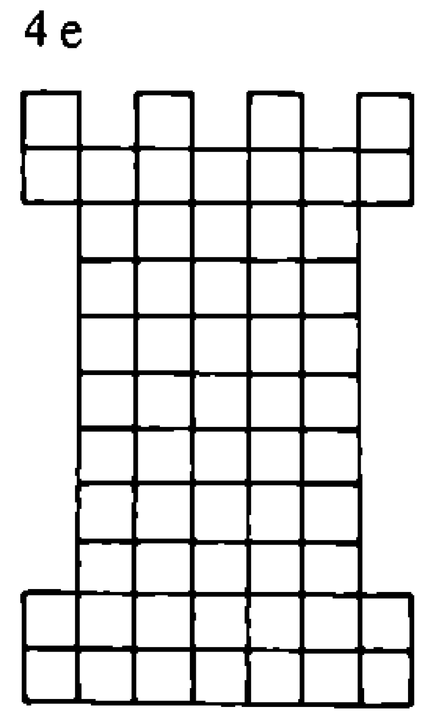
4 c



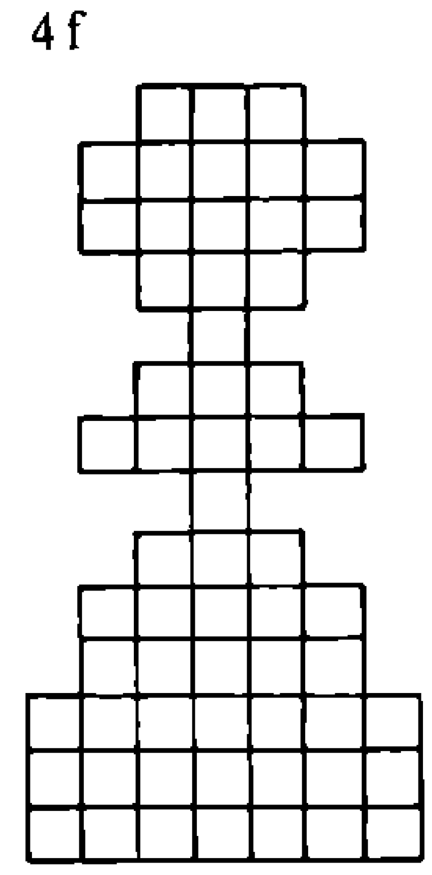
4 d



4 e



4 f



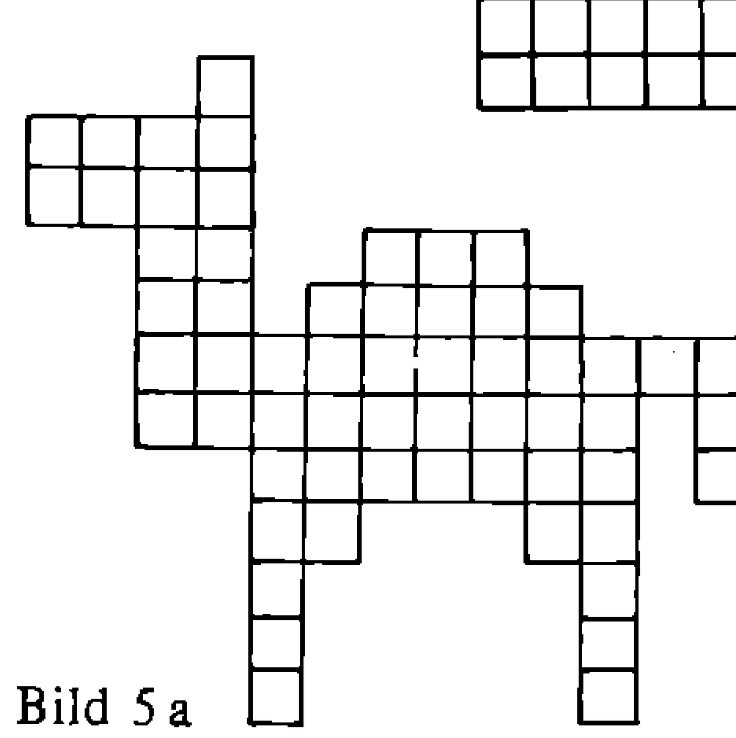
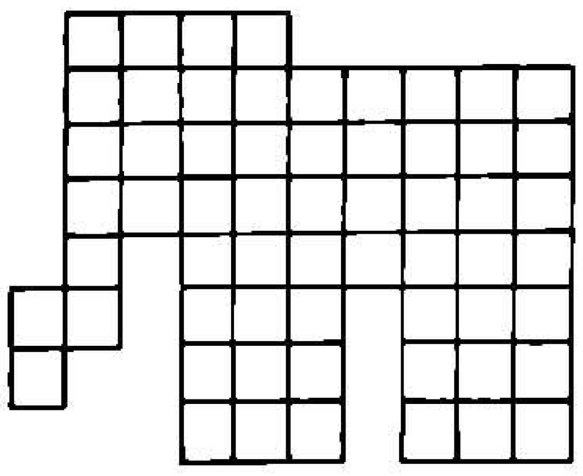
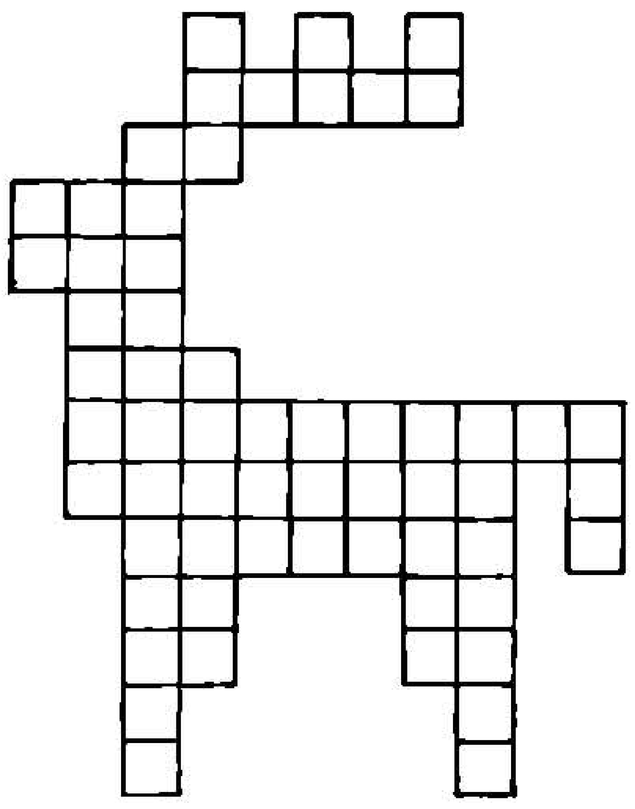


Bild 5 a



5 b

5 c



5 d

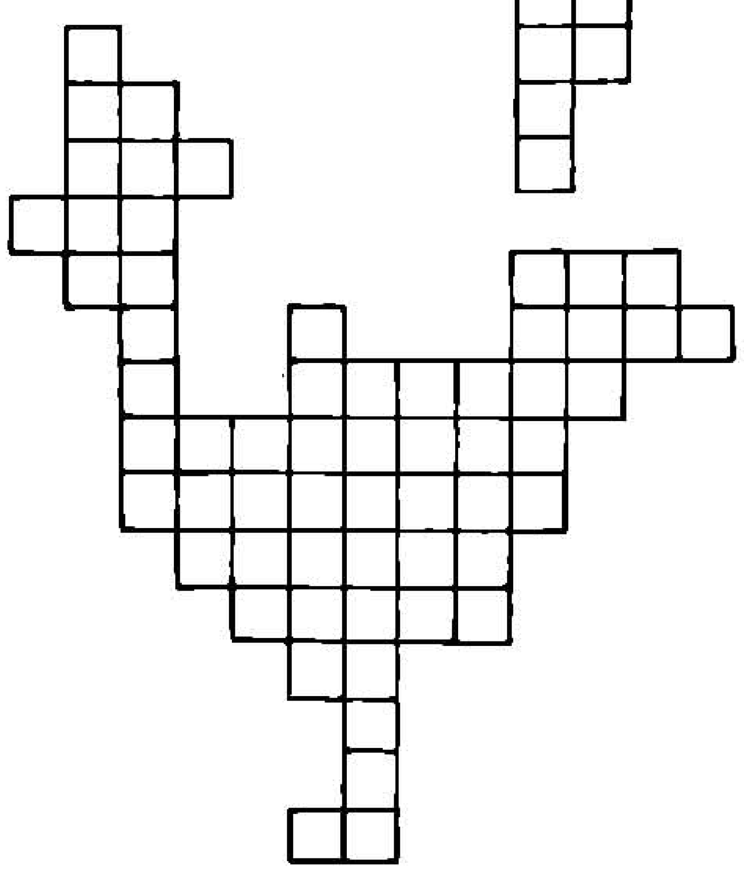
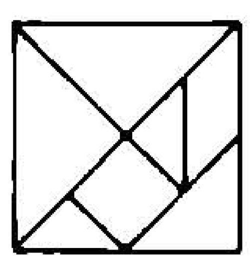
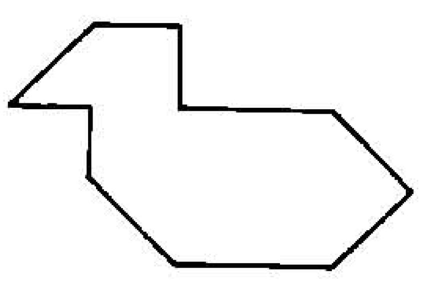


Bild 6

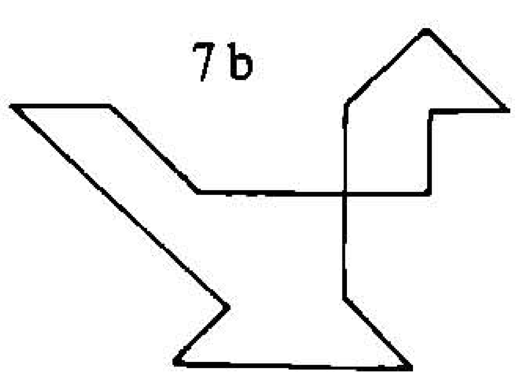


Die Elemente des Spieles Tangram findet ihr noch einmal in Bild 6.
Damit könnt ihr euren kleinen *Knobelzoo* vervollständigen (Bild 7).

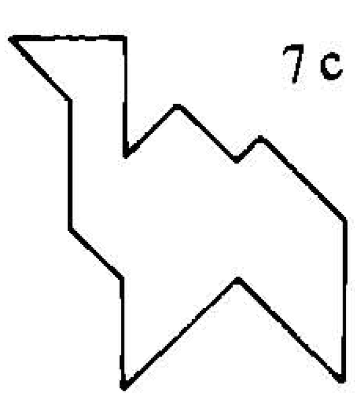
Bild 7 a



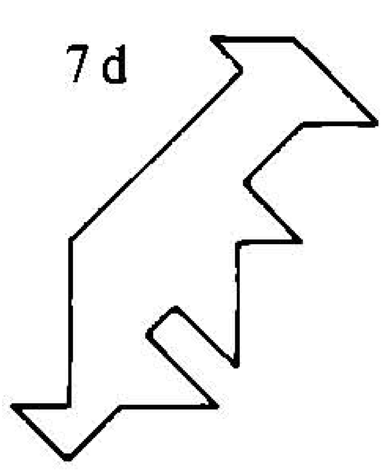
7 b

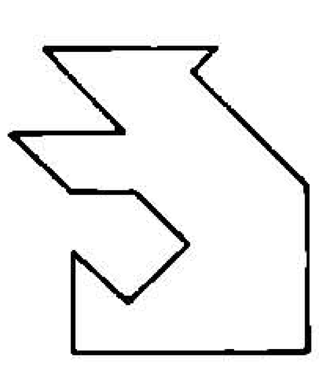


7 c



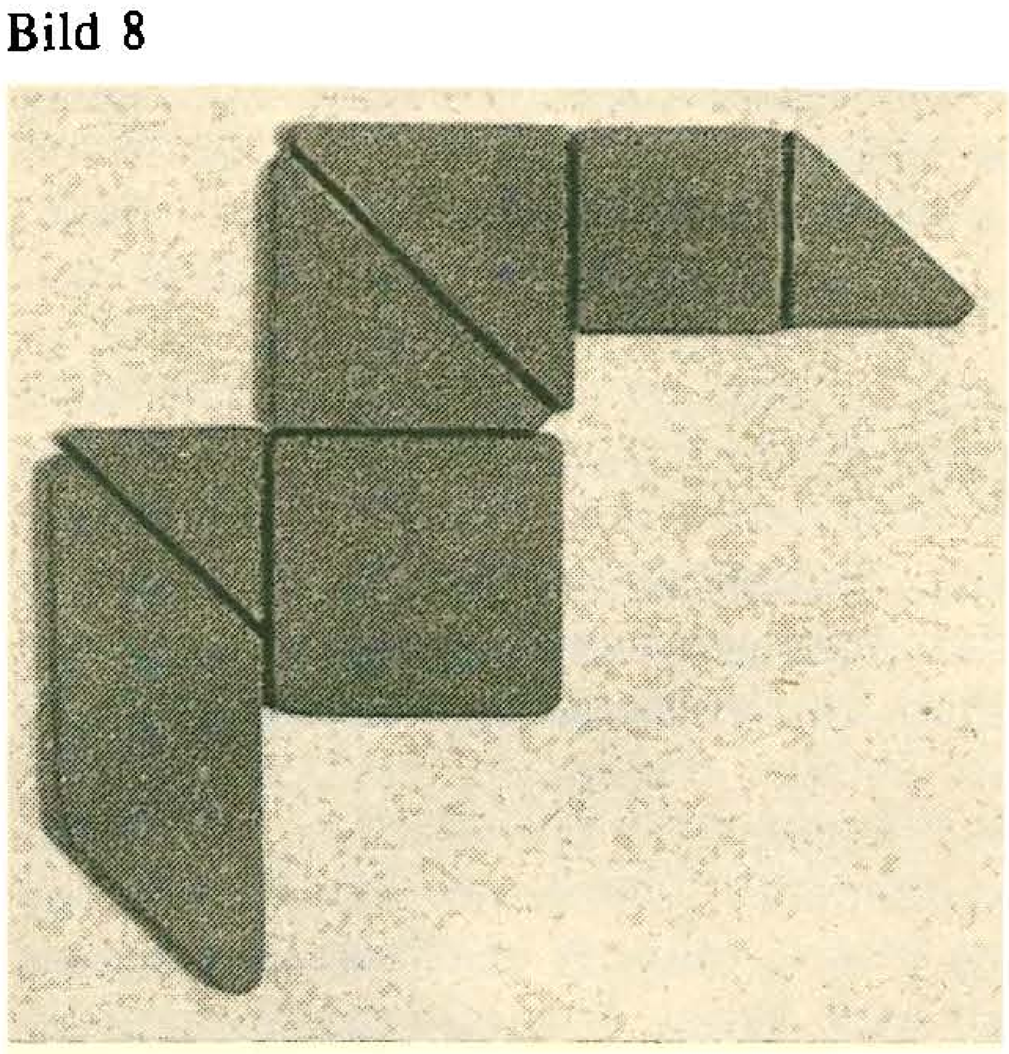
7 d





7 e

Bild 8



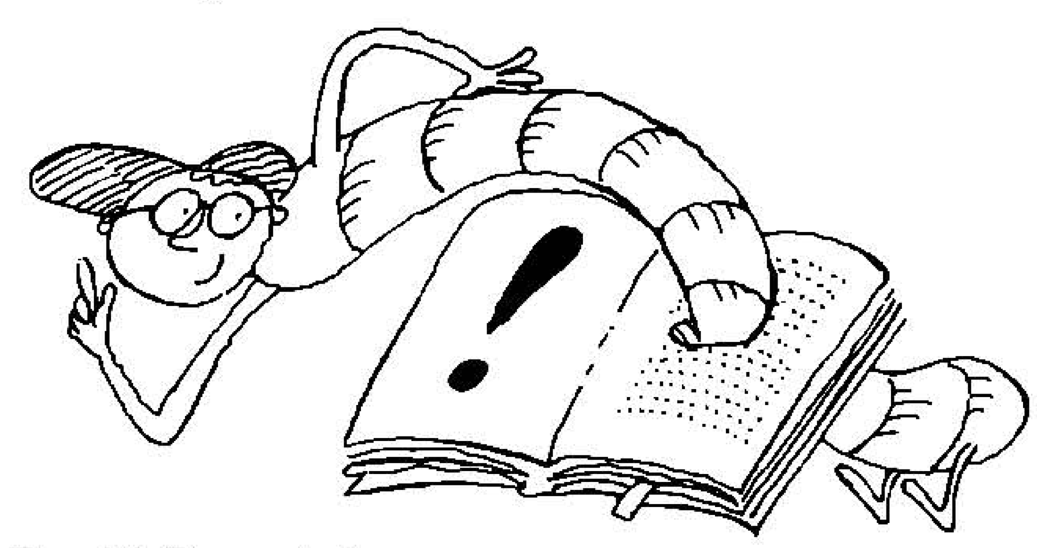
Ein ganz ähnliches Spiel aus der Zeit der Jahrhundertwende ist in Bild 8 dargestellt. Der nachdenkliche alte Herr (Bild 9) entsprang dabei der Phantasie des Gestalters und ist sicher nicht Pythagoras!

Bild 9

Wir empfehlen euch, die Elemente der drei Spiele auf Pappe, Plaste oder Sperrholz zu übertragen und auszuschneiden bzw. auszusägen. Bestimmt findet ihr dann auch weitere schöne Figuren.

U. und W. Schmidt

Buchtips für Schachfreunde



David Bronstein
Bronsteins Schachlehre
Wege zum erfolgreichen Spiel
247 Seiten, 202 Diagramme, Leinen
Bestell-Nr. 671 783 2 Preis: 16,50 M

Mark Taimanow
Gewinnen mit Sizilianisch
160 Seiten, 124 Diagramme, Leinen
Bestell-Nr. 671 787-5 Preis: 12,80 M

A. Suetin
Russisch bis Königsgambit
Bestell-Nr. 671 764 8 Preis: 14,00 M

M. Taimanow
Königsindisch
Bestell-Nr. 671 765 6 Preis: 14,00 M

A. Krogius/A. Mazukewitsch
Marshall-Angriff
Bestell-Nr. 671 785 9 Preis: 15,50 M

A. Suetin
Schachlehrbuch für Fortgeschrittene
Bestell-Nr. 671 791 2 Preis: 16,00 M

Eine Aufgabe von Prof. Arthur Engel

J. W. Goethe Universität Frankfurt/BRD
Vorsitzender der Jury der XXX. IMO

Es sei $b(0) = 1$, und für $n \geqq 1$ sei $b(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n in lauter Zweierpotenzen. Z. B.:

$$\begin{aligned}(7) &= 4+2+1 = 4+1+1+1\\ &= 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1\\ &= 2+1+1+1+1+1\\ &= 1+1+1+1+1+1+1.\end{aligned}$$

D. h., $b(7) = 6$. Leite eine Rekursion für $b(n)$ her.
Hinweis: Für gerade und ungerade n sind die Formeln verschieden. Man kann die Richtigkeit der Formeln prüfen durch Berechnung von $b(4) = 390$.

Kurzbiographie

Arthur Engel wurde am 21. 1. 1928 geboren, studierte 1947 bis 1952 Mathematik und Physik an der TH Stuttgart. Danach lehrte er 18 Jahre lang Mathematik am Karls-Gymnasium in Stuttgart.
Er war mit seiner Stellung sehr zufrieden, so daß er nur schweren Herzens und nach guten Zureden von Freunden 1970 den Ruf als Professor an die PH Ludwigsburg annahm. 1972 nahm er den Ruf als Professor für Didaktik der Mathematik an die Universität Frankfurt an. Neben seinen Schwerpunkten Stochastik und Algorithmik trainiert er seit 1977 die IMO-Mannschaft der BRD. Mit wenigen Ausnahmen war er auch ihr Delegationsleiter.

In der Wissenschaft kann eine gute und fruchtbare Revolution nur dann durchgeführt werden, wenn man sich bemüht, sowenig wie möglich zu ändern, wenn man sich zunächst auf die Lösung eines engen, fest umrissenen Problems beschränkt. Der Versuch, alles Bisherige aufzugeben und willkürlich zu ändern, führt zu reinem Unsinn.

Werner Heisenberg

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

(15.11.1989)

Olympiadeklasse 5

290521 Die leeren Felder im Bild sind so mit Zahlen 1, 2, 3, 4 auszufüllen, daß jede dieser Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt.

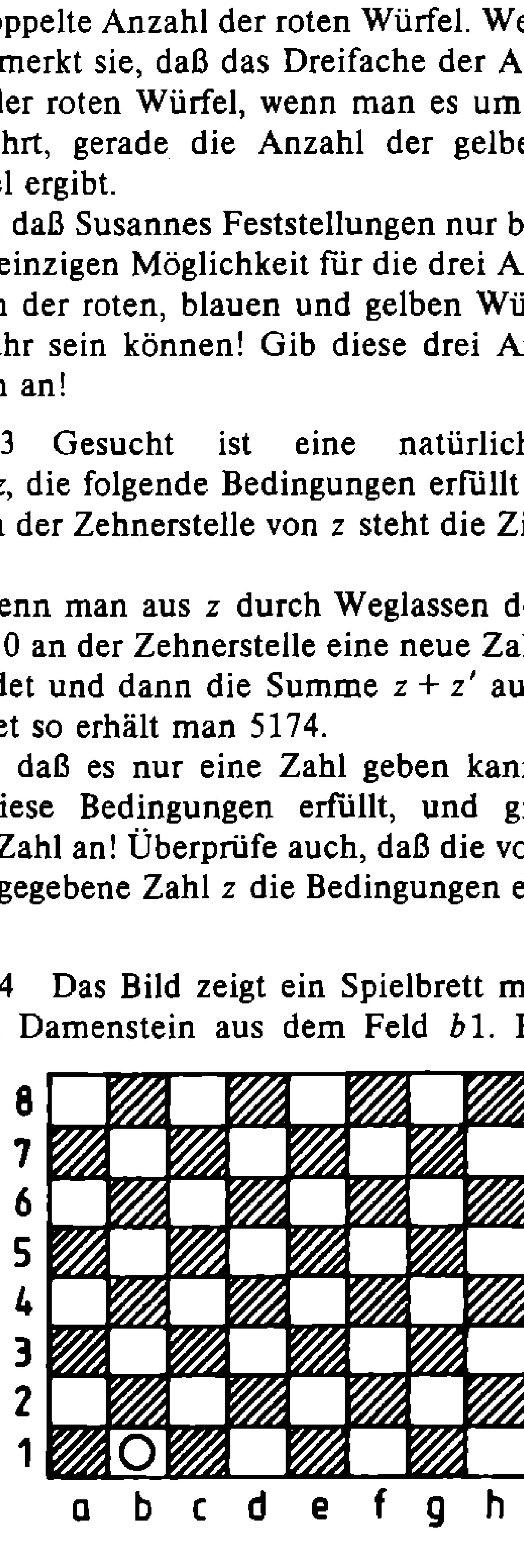
1			
		2	
	3		
			4

Gib alle solche Eintragungen an!
(Ein Beweis, daß es keine weiteren derartigen Eintragungen gibt, wird nicht verlangt.)

290522 Susanne besitzt 18 Spielwürfel. Einige davon sind rot, andere blau und die restlichen gelb. Sie stellt fest, daß die Anzahl der blauen Würfel um 1 kleiner ist als die doppelte Anzahl der roten Würfel. Weiter bemerkt sie, daß das Dreifache der Anzahl der roten Würfel, wenn man es um 1 vermehrt, gerade die Anzahl der gelben Würfel ergibt.
Zeige, daß Susannes Feststellungen nur bei einer einzigen Möglichkeit für die drei Anzahlen der roten, blauen und gelben Würfel wahr sein können! Gib diese drei Anzahlen an!

290523 Gesucht ist eine natürliche Zahl z, die folgende Bedingungen erfüllt:
(1) An der Zehnerstelle von z steht die Ziffer 0.
(2) Wenn man aus z durch Weglassen der Ziffer 0 an der Zehnerstelle eine neue Zahl z' bildet und dann die Summe $z + z'$ ausrechnet so erhält man 5174.
Zeige, daß es nur eine Zahl geben kann, die diese Bedingungen erfüllt, und gib diese Zahl an! Überprüfe auch, daß die von dir angegebene Zahl z die Bedingungen erfüllt!

290524 Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damenstein aus dem Feld $b1$. Er



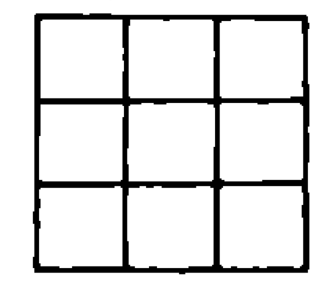
darf, wie im Damespiel üblich, nur stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gezogen werden.
a) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von $b1$ bis zum Feld $g8$ gelangen kann!
b) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von $b1$ bis zum Feld $e8$ gelangen kann!

Olympiadeklasse 6

290621 Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:
(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil.
Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.
(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.
(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.
(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.
Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, daß sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.
Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln läßt! Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

290622 a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2; 3)$, $B(6; 1)$, $C(6; 5)$ und $D(4; 6)$ ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, daß ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!
b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!
c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, daß jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt. Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

290623 Das Bild zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.

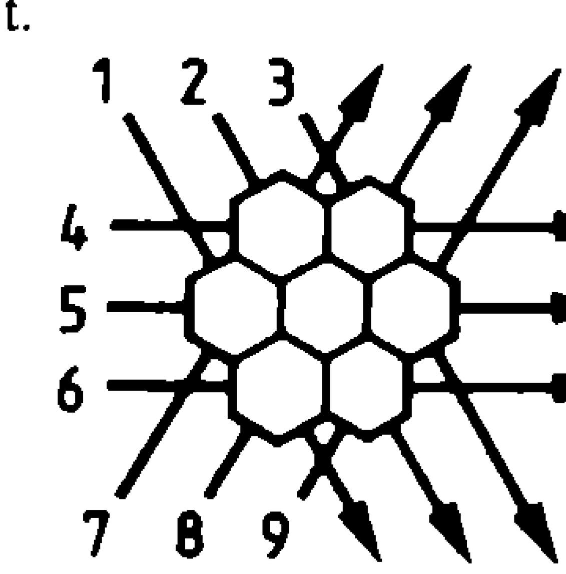


a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!
b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!

290624 a) In ein 3×3-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt.
Das Bild zeigt dafür ein Beispiel.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!
b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur aus dem Bild und stellt die Aufgabe: In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.



Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an! Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

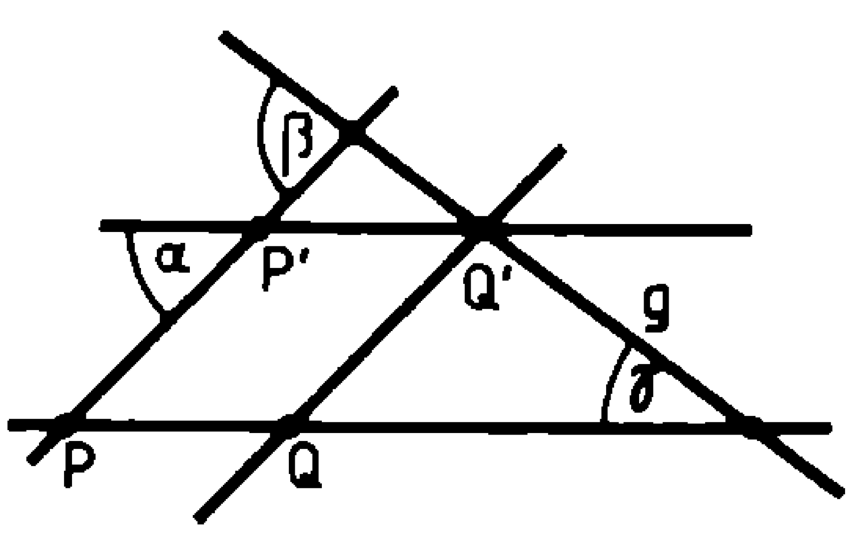
Olympiadeklasse 7

290721 Susi geht einkaufen. Von dem Geld, das ihr die Mutter gegeben hat, gibt sie 30 % im Fleischerladen aus; im Milchladen bezahlt sie mit einem Viertel desjenigen Betrages, den ihr die Mutter gegeben hatte. Im Gemüseladen braucht sie genau vier Fünftel desjenigen Betrages, den sie im Fleischerladen bezahlt hatte. Beim Bäker schließlich gibt sie doppelt so viel Geld aus, wie sie danach als Restbetrag wieder mit nach Hause bringt. Von diesem Rest-

betrag gibt ihr die Mutter die Hälfte, nämlich genau 1,05 M, damit sie sich ein Softeis kaufen kann.
Ermittle den Geldbetrag, den Susi zu Anfang von der Mutter bekommen hatte!

290722 An einem Fußballturnier nehmen genau 14 Mannschaften teil. Jede Mannschaft trägt gegen jede andere genau ein Spiel aus. Gewinnt eine Mannschaft, so erhält sie 2 Gewinnpunkte und ihre Gegnermannschaft 2 Verlustpunkte. Geht ein Spiel unentschieden aus, so erhält jede der beiden Mannschaften je einen Gewinnpunkt und einen Verlustpunkt.
a) Nach Abschluß aller Spiele kann man für jede Mannschaft die Summe aller derjenigen Punkte bilden, die sie erhalten hat, gleichgültig, ob es Gewinn- oder Verlustpunkte waren.
Weise nach, daß dabei jede der 14 Mannschaften dieselbe Summe erhält, und gib diese Summe an!
b) Nach Abschluß aller Spiele kann man auch die Summe aller Gewinnpunkte bilden, gleichgültig, welche Mannschaften sie erhalten haben. Weise nach, daß bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse der einzelnen Spiele des Turniers dieselbe Summe aller Gewinnpunkte entsteht, und gib diese Summe an!
c) An einem anderen Turnier mit denselben Regeln der Punktvergabe nahm eine andere Anzahl von Mannschaften teil. Wieder trug jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus. Kann als Summe aller Gewinnpunkte, wie in b) gebildet, dabei 432 entstehen? Begründe deine Antwort?

290723 Das Bild zeigt zwei Punkte P, Q und ihre Bildpunkte P', Q' bei einer Verschiebung.
Durch Q' ist eine Gerade g gelegt.
Ferner seien α und β die Größen der im Bild gekennzeichneten Winkel.



Ermittle eine Größenangabe für γ, ausgedrückt durch α und β!

290724 a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, daß die entstehende vierstellige Zahl durch 3 teilbar ist!
b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, daß die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!
c) Untersuche, ob es mehr als 250 dreistellige Zahlen gibt, aus denen durch Anfügen von vier Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl entsteht!
d) Beweise, daß man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von einer Ziffer 7 oder von mehreren Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann!

Olympiadeklasse 8

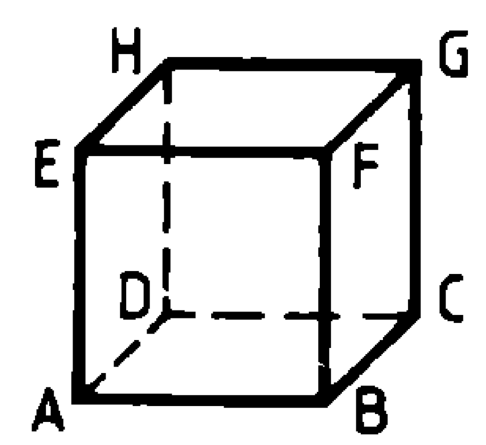
290821 Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt:
(1) Die Zahl x ist eine Primzahl.
(2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können schlittschuhlaufen.
(3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können skilaufen.
(4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder schlittschuhlaufen noch skilaufen.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln läßt!

290822 a) Untersuche, ob die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)(4x-7)=2x^2+\frac{x}{3}+1$$

eine natürliche Zahl x als eine Lösung besitzt!
b) In der genannten Gleichung soll die Zahl 7 so durch eine rationale Zahl r ersetzt werden, daß die entstehende Gleichung die Zahl $x=1$ als eine Lösung besitzt.
Ermittle alle diejenigen rationalen Zahlen r, die diese Forderung erfüllen!

290823 Es sei *ABCDEFGH* ein Würfel mit beliebiger Kantenlänge (siehe Bild).



a) Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle DEB$!
b) Beweise, daß die Winkel $\sphericalangle AHB$ und $\sphericalangle BEC$ zueinander gleiche Größen haben!

290824 Das 4×4-Felder-Quadrat im Bild soll so in vier Teile zerlegt werden, daß folgende Forderungen erfüllt sind:
(1) Jedes Teil besteht aus genau vier Feldern.
(2) Jedes Teil ist derart zusammenhängend, daß sich je zwei Mittelpunkte seiner Felder durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz in dem Teil verläuft und nur aus Strecken besteht, von denen jede zu einer Seitenkante des Quadrates parallel ist.
(3) Jedes Teil enthält alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4.

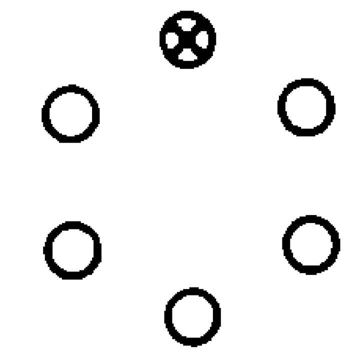
1	2	3	1
3	4	2	4
2	4	1	3
1	2	3	4

Gib alle Zerlegungen an, die diese Forderungen erfüllen! Weise nach, daß es keine weiteren derartigen Zerlegungen gibt!

Olympiadeklasse 9

290921 Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

290922 Auf die Felder des Bildes sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geqq 1$ fest vorgegeben. Nun soll, beginnend mit dem angekreuzten Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis a.



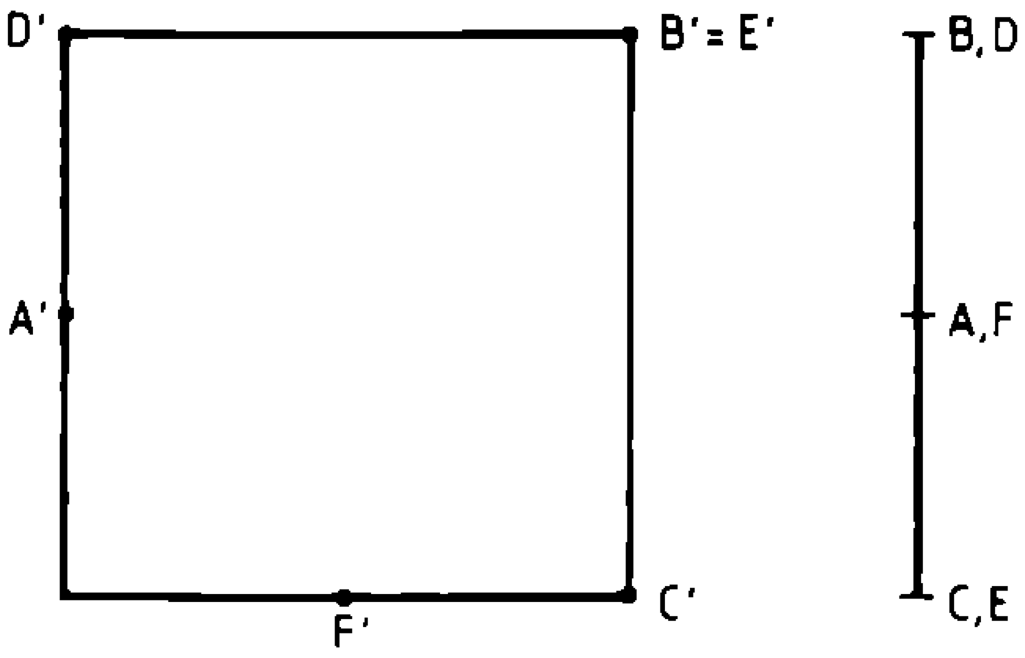
Der Stein, der dabei die Nummer a erhält, wird weggenommen. Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer a erhält, weggenommen. Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, daß leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.
a) Es sei $a=4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?
b) Jemand vermutet: „Wenn man a durch $a+6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine." Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für $a=4$ nachprüfen!
c) Beweisen Sie, daß es eine Zahl z gibt, mit der für jedes $a \geqq 1$ die folgende Aussage wahr ist: „Wenn man a durch $a+z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine – auch bei Abzählbeginn im angekreuzten Feld – ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

290923 Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von n als auch Teiler der Quersumme von $n+1$ ist.

290924 Das Bild stellt sechs Punkte A, B, C, D, E, F in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar. Die Punkte C', B', D' und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a=6$ cm. Die Punkte A' und F' sind die Mittelpunkte der im Bild ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben A, F von B, D den Abstand 3 cm und C, E von B, D den Abstand 6 cm.
a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha=45°$, $q=\frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte B, C, D, E gehören, und dazu die Punkte A und F!
b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen ABC und DEF durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke XY, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben! Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wie-

dergegeben werden! Eine Verdeckung durch davorliegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als „nicht vorhanden" oder „durchsichtig" zu betrachten).
Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck ABC parallel zu CB, im Dreieck DEF in dichterer Schraffur parallel zu DE!
c) Geben Sie für die Schnittstrecke XY eine Herleitung der – von Ihnen in b) verwendeten – Konstruktion der Bildpunkte von X und Y! Beschreiben Sie diese Konstruktion!

Projektion: Höhenmaßstab:



Olympiadeklasse 10

291021 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9}, \quad (1)$$

$$\frac{x + \sqrt{x}}{y + \sqrt{y}} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

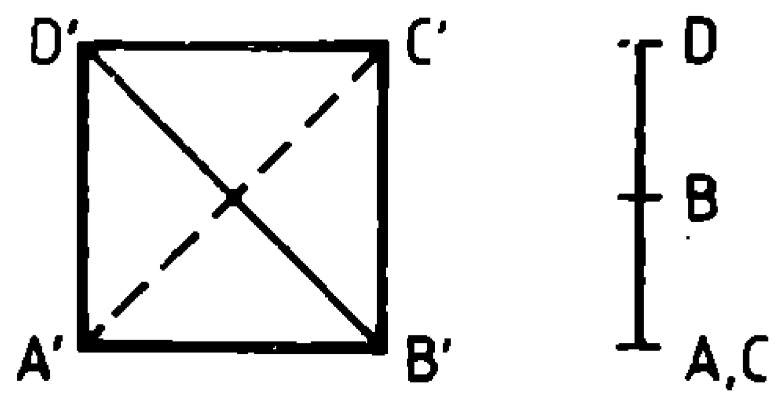
291022 Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 8 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um zwei Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um einen Schritt. Dieses Voransetzen beider Steine gilt dann als ein „Zug". Werfen beide Spieler die gleiche Augenzahl, so wird kein „Zug" ausgeführt, sondern nochmals gewürfelt. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, daß ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).
Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines „Zuges" der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.
Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von „Zügen", aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann?
Begründen Sie Ihre Antwort!

291023 Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $\overline{AB} > \overline{CD}$. Man zeige, daß sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen läßt, wenn $\overline{AB} < 3\overline{CD}$ gilt.

291024 Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar. Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im Höhenmaßstab haben A, C von D ebenfalls den Abstand a, während B im Höhenmaßstab den Abstand $\frac{a}{2}$ von D hat.

a) Zeichnen Sie diesen Körper $ABCD$ in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei!
b) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben das Volumen V $(ABCD)$ des Körpers!

Projektion: Höhenmaßstab:



Olympiadeklassen 11/12

291221 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + xy + xy^2 = -21, \quad (1)$$
$$y + xy + x^2y = 14, \quad (2)$$
$$x + y = -1. \quad (3)$$

291222 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen m, die die Bedingung erfüllen, daß für jede reelle Zahl x die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x^2 + (m + 2)x + 8m + 1 > 0. \quad (1)$$

291223 Über fünf Streckenlängen a, b, c, d, e werde vorausgesetzt, daß je drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.
Man beweise, daß unter dieser Voraussetzung stets eines dieser Dreiecke spitzwinklig sein muß.

291224 Man löse die folgende Aufgabe
a) für $n = 8$ und $k = 5$,
b) für $n = 9$ und $k = 6$.
Aufgabe: Untersuchen Sie, ob bei jeder Eintragung der natürlichen Zahlen 1, 2, ..., n^2 in ein schachbrettartiges nxn-Felder-Quadrat zwei zueinander benachbarte Felder vorkommen müssen, in denen Zahlen stehen, deren Differenz größer oder gleich k ist!
Hinweise: 1. Die genannten Eintragungen sollen die Bedingungen erfüllen, daß jedes Feld genau eine Zahl erhält und daß jede Zahl genau einmal verwendet wird.
2. Zwei Felder sollen genau dann zueinander benachbart heißen, wenn sie eine Seitenstrecke miteinander gemeinsam haben.
Solltet ihr Probleme bei der Lösung dieser Aufgaben haben, wendet euch bitte über euren Mathematiklehrer an den Fachberater des entsprechenden Kreises.

Fortsetzung von Seite 35
Michael Wolf, Nadine Werner, Juliane Büchner, Enrico Schild, Sindy Eck, Raimund Horn, Jürgen Krahmann, Marco Möller, alle Brotterode; Alek Opitz, Hagen Lessing, beide Cottbus; Karina Gattung, Dermbach; Henrik Jäger, Dersekow; Sebastian Haase, Dersekow; Holger Bogatsch, Doberschütz; Thomas Ziesche, Susann Wagner, Anja Waller, Katrin Dubitzky, alle Dohna; Susanne Überschär, Dorndorf; Benno Brandstetter, Yvonne Schmeißer, Falk Baumann, Grit Berthold, Kerstin Röske, Jörg Wagner, André Zillmann, alle Dresden; Cornelia Gruhn, Drosa; Anke Lehmann, Eberswalde; Olaf und Matthias Hirschfeld, Carsten Bundesmann, alle Eilenburg; Jan Blumentritt, Eisenberg; Andreas Luleich, Elsterberg; Joachim Suck, Essen (BRD); Mandy Jäger, Fambach; Christian Gruhl, Finsterwalde; Senta und Maresa Puls, Frankfurt/O.; Ute Jahn, Jörg Mildner, beide Freiberg; Dana Horak, Susann Hurt, Doreen Wald, Beatrice Worm, Angelika Senitz, Tobias Gerlach, Götz Lothal, Mirko Grasemann, Nicole Schüler, alle Friedeburg; Anni-Claire Lehmann, Beate Brandenburg, Ulrike Schmidt, alle Greifswald; Anke Grell, Stefan Detschner, beide Greußen; Silvia Wachholz, Görlitz; Mirko Süß, Grünhain; Frank Balszuweit, Güstrow; Enrico Alexander, Andreas Horn, beide Gützkow; Jan Wettstein, Gumpelstadt; Michael Köhler, Hainichen; Michael Göpfert, Halle; Karsten Sauer, Anja Goldschmidt, Thomas Pitzschke, alle Halle-Neustadt; Ulf Timme, Havelberg; Tom Werner, Peggy Marx, beide Hennigsdorf; Glenn Hofmann, Hohenstein-E.; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Björn Borchardt, Ilmenau; Annett Lieske, Joachimsthal; Daniel Fiekers, Mandy Koch, Evelin Karl, alle Kaltennordheim; Lothar Tischer, Kamenz; Katja Wurziger, Daniela Baumann, Lutz Thierbach, Vera Lorenz, Alexander Gräf, Thomas Krauße, Andreas Lönig, alle Karl-Marx-Stadt; Toralf Pusch, Karlsburg; Jürgen Frey, Kipsdorf; Regina Sachse, Kleinmachnow; Lars Nöbel, Klingenthal; Anke Neuber, Latdorf; Anke Jubel, Langenstriegis; Claudia Heßler, Lauscha; Kathleen Tiedt, André Gärtner, beide Leipzig; Katrin Schubert, Markus Wendler, beide Lengenfeld; Steffen Haas, Leutersdorf; Carsten Herboth, Löderburg; Katja Roesler, Lubmin; Matthias Weckner, Matthias Kassner, beide Meiningen; Karl-Günther Lautsch, Menteroda; Mathias Sekatzek, Merseburg; Lars Wagner, Simone Nattermann, Jana Linß, alle Mittelstille; Claudia Liebenow, Mühlhausen; Andreas und Axel Richter, Naundorf; Christian Weber, Neu Boltenhagen; Anja Wilkending, Neuhaus; Alexander Blacha, Niederorschel, Tilman Weigel, Niederwiesa; Andreas Birkner, Katja Schürer, beide Oranienburg; Patrick Leitz, Parchim; Steffen Siebert, Pionierrepublik „W. Pieck"; Steffen Blaess, Gregor Moskau, Klaus Klapproth, alle Plauen; Matthias Walther, Pleetz; Sebastian Clauß, Possendorf; Felix Ballani, Potsdam; Susan Paufler, Michael Meinel, beide Radebeul; Christian Holfeld, Nobert Klawuhn, beide Rathenow; Jörn Weichert, Riesa; Manuela Radtke, Rodewitz; Torsten Gerhardt, Ralf Hafften, Stephanie Horn, Malte Korten, Anne Seifert, Manuela Radke, Jennis Freyer, Antje Feldmann, alle Rostock; Ralf Fröhlich, Rudolstadt; Maida Tennemann, Saßnitz; Elko Jacobs, Saurasen; Björn Zimmermann, Schildow; Peggy Machelett, Schmalkalden; Kay Herrmann, Stefan Langenbucher, Kathleen Schneider, alle Schwallungen; Sven Kieselberger, Schwarzenberg; Mario Sellig, Schwerin; Heike Claußnitzer, Senftenberg; Jörg Näther, Christian Schäfer, Marco Siegmann, alle Sondershausen; Klaus Ullmann, Spremberg; Kati Wilhelm, Dirk Weber, Danny Gerlach, Ronny Malzo, Andy Reumschüssel, Nicole König, Ilka Reinhardt, Katja Zieger, Annett Jannoch, alle Steinbach-Hallenberg.
Fortsetzung in „alpha" 3/90

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der DDR-Olympiade
Fortsetzung aus Heft 1/90

II. Angenommen, es existiere eine Menge K von höchstens 31 Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1, a_2, a_3) überdeckt werden. Aus dieser Annahme läßt sich z. B. folgendermaßen ein Widerspruch herleiten: Zunächst folgt, daß für mindestens einen der acht Werte $p = 0, 1, \ldots, 7$ die Menge P aller (p, y, z) $(y, z \in \{0, 1, \ldots, 7\})$ höchstens drei Kombinationen aus K enthält. Daher gibt es erst recht drei paarweise verschiedene Zahlen c, d, e so, daß aus $(k_1, k_2, k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_2 \in \{c, d, e\}$ folgt, und es gibt (nichtnotwendig verschiedene) Zahlen f, g, h so, daß aus $(k_1, k_2, k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_3 \in \{f, g, h\}$ folgt. Es sei $Y = \{0, \ldots, 7\} \setminus \{c, d, e\}$ und $Z = \{0, \ldots, 7\} \setminus \{f, g, h\}$.
Die Menge aller

$$(p, y, z) \quad (y \in Y, z \in Z) \tag{5}$$

enthält mindestens $(8-3) \cdot (8-3) = 25$ Kombinationen. Jede von ihnen wird nach Annahme durch ein $(k_1, k_2, k_3) \in K$ überdeckt. Nach Wahl der $c, \ldots, f$ ist das nur mit $k_1 \neq p$ und folglich nur mit $k_2 \in Y$ und $k_3 \in Z$ möglich; somit müssen zu je zwei voneinander verschiedenen Kombinationen (5) auch zwei voneinander verschiedene überdeckende Kombinationen aus K gehören. Damit ist gezeigt, daß es mindestens 25 Kombinationen $(k_1, k_2, k_3) \in K$ mit $k_2 \notin \{c, d, e\}$ geben muß und folglich höchstens $31 - 25 = 6$ mit $k_2 \in \{c, d, e\}$ geben kann.
Wegen der paarweisen Verschiedenheit der c, d, e folgt nun, daß für mindestens einen der drei Werte $q = c, d, e$ die Menge Q aller (x, q, z) $(x, z \in \{0, \ldots, 7\})$ höchstens zwei Kombinationen aus K enthält. Analog wie bei P ergibt sich hieraus die Existenz von mindestens $(8-2) \cdot (8-2) = 36$ Kombinationen in K und damit ein Widerspruch.
Mit I. und II. ist als gesuchte kleinste Zahl $N = 32$ nachgewiesen.
Bemerkungen: Die Aufgabe ist äquivalent zur Bestimmung der minimalen Anzahl von „dreidimensionalen Türmen", die insgesamt alle Felder eines „dreidimensionalen Schachbrettes" der Abmessungen $8 \times 8 \times 8$ bedrohen. Diese geometrische Veranschaulichung ist bei der Lösungsfindung sehr nützlich (man interpretiere z. B. den obigen Beweis geometrisch). Interessenten wird auch die Lösung des entsprechenden allgemeineren Problems für ein „$n \times n \times n$-Schachbrett" empfohlen. Die Aufgabe kann als schwer bis sehr schwer eingeschätzt werden. Etwa 90% aller Teilnehmer fanden keinen tragfähigen Zugang zu ihrer Lösung.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	52	11	1	1	3	1	0	4	1

Dr. E. Wegert, Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg

281245 Bezeichnet man die Volumina der Tetraeder $ABCD$, $MBCD$, $MACD$, $MABD$ bzw. $MABC$ mit V, V_1, V_2, V_3 bzw. V_4, so gilt
$V_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ und

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V. \tag{1}$$

Sind h_1, h_2, h_3 bzw. h_4 die Längen der Höhen des Tetraeders $ABCD$ bezüglich der Grundflächen BCD, ACD, ABD bzw. ABC und h'_1, h'_2, h'_3 bzw. h'_4 die Längen der Höhen der Tetraeder $MBCD$, $MACD$, $MABD$ bzw. $MABC$ bezüglich derselben Grundflächen, so gilt

$$\frac{V_i}{V} = \frac{h'_i}{h_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Die Lote von A und M auf die Ebene durch B, C, D sind zueinander parallel; daher liegen sie mit der Geraden durch A, M, A' in einer Ebene, und aus dem Strahlensatz folgt die erste der Gleichungen

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \frac{h'_1}{h_1}, \ldots, \frac{\overline{MD'}}{\overline{DD'}} = \frac{h'_4}{h_4}; \tag{3}$$

die übrigen ergeben sich analog für B, C bzw. D statt A.
Aus (1), (2), (3) folgt

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{MC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{MD'}}{\overline{DD'}} = 1,$$

wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD} = r$ also

$$\frac{\overline{AA'} - r}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BB'} - r}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CC'} - r}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{DD'} - r}{\overline{DD'}} = 1,$$

$$\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}} = \frac{3}{r}. \tag{4}$$

Da das harmonische Mittel der vier Kantenlängen $\overline{AA'}, \ldots \overline{DD'}$ nicht größer als ihr arithmetisches Mittel ist, gilt

$$\frac{4}{\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}}} \leqq \frac{\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'}}{4}.$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} \geqq \frac{16}{\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}}} = \frac{16}{3} r.$$

Bemerkungen: Eine größere Anzahl von Schülern fand auf Grund unzureichenden räumlichen Vorstellungsvermögens und nicht genügend entwickelten Könnens im Lösen von Aufgaben aus der räumlichen Geometrie keinen zum Ziel führenden Lösungsansatz. Viele gingen vom regulären Tetraeder aus, veränderten die Lage der Eckpunkte und meinten, die Längen der betrachteten Strecken könnten sich nur vergrößern, was aber nicht zutreffend ist.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	33	21	6	0	0	1	3	10

Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

281246A Bezeichnen wir für $0 < x \leqq y$ mit $f(x, y)$ die Funktion $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, so folgt durch Ausmultiplizieren

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) = n + \sum_{1 \leqq i < k \leqq n} f(a_i, a_k). \tag{3}$$

Für jedes positive z gilt bekanntlich $z + \dfrac{1}{z} \geqq 2$ mit Gleichheit genau für $z = 1$.
Damit gilt stets $f(x, y) \geqq 2$, da die rechte Summe in (3) aus $\dfrac{n(n-1)}{2}$ Summanden besteht, folgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqq n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2.$$

Damit ist die linke Ungleichung von (2) bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Wir betrachten uns nun den Ausdruck auf der rechten Seite von (3) in folgendem Schema angeordnet:

$$\begin{array}{r} 1 + f(a_1, a_2) + f(a_1, a_3) \\ + \ldots + f(a_1, a_{n-1}) + f(a_1, a_n) \\ + 1 + f(a_2, a_3) \\ + \ldots + f(a_2, a_{n-1}) + f(a_2, a_n) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 1 + f(a_{n-1}, a_n) \\ + 1 \end{array}$$

Um diesen Ausdruck abzuschätzen, betrachten wir zwei Hilfsungleichungen (hier ohne Beweis):
1. Für $0 < w \leqq x \leqq y \leqq z$ gilt $f(w, z) \leqq f(x, y)$. Gleichheit gilt genau für den Fall $w = x$, $y = z$.
2. Für $0 < x \leqq y \leqq z$ gilt $f(x, y) + f(y, z) \leqq 2 + f(x, z)$. Gleichheit gilt genau für die zwei Fälle $y = x$ und $y = z$.
Betrachten wir nun zwei Zahlen i, k mit $1 \leqq i < k \leqq n$ und $i + k \leqq n + 1$ in unserem Schema die Summanden in der k-ten Spalte der i-ten Zeile und der $(n + 1 - i)$-ten Spalte der k-ten Zeile, so gilt für deren Summe nach der
zweiten Hilfsungleichung: $f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leqq 2 + f(a_1, a_{n+1-i})$.
Nach der ersten Hilfsungleichung folgt daraus wegen (1)
$f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leqq 2 + f(p, q)$.
Damit können wir unsere Summe nicht verkleinern, wenn wir für alle möglichen Werte von i und k die Summanden $f(a_i, a_k)$ und $f(a_k, a_{n+1-i})$ jeweils durch $\left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right)$ ersetzen. Die einzigen Summanden in unserem Schema, die noch nicht ersetzt sind, sind die Summanden auf der Diagonalen $f(a_1, a_n)$, $f(a_2, a_{n-1})$, …. Nach der ersten Hilfsungleichung können wir jeden durch $f(p, q)$ ersetzen. Unser Schema hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{r} 1 + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) \\ + \ldots + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) + f(p, q) \\ 1 + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) \\ + \ldots + f(p, q) + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 1 + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) \\ + 1 \end{array}$$

Durch Abzählen der Summanden erhält

man: Ist n ungerade, so hat das neue Schema die Summe
$\frac{(n^2+1)}{2}+f(p,q)\frac{(n^2-1)}{4}$, ist n gerade, $\frac{n^2}{2}+f(p,q)\frac{n^2}{4}$.
Berücksichtigt man noch, daß
$$f(p,q)=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2+2,$$
so folgt daraus die Behauptung der Aufgabe. Gleichheit gilt, falls in unseren Hilfsungleichungen stets Gleichheit galt, d. h. für $p=x_1=\ldots=x_m$,
$x_{m+1}=\ldots=x_n=q$ mit $m=\frac{n}{2}$ für n gerade und $m=\frac{(n-1)}{2}$ und $m=\frac{(n+1)}{2}$ für n ungerade.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	1	1	25	11	1	1	1	3

Dr. U. Quasthoff, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

281246B Die gesuchte größtmögliche Anzahl ist 1. Sei $ABCD$ das gegebene Quadrat der Seitenlänge 1,99. Offenbar kann man ein Quadrat der Seitenlänge 1 in $ABCD$ legen. Mit zwei Quadraten ist das jedoch nicht mehr möglich, weil sich zwei beliebige, in $ABCD$ liegende Quadrate der Seitenlänge 1 gegenseitig überlappen. Um das zu zeigen, wird bewiesen, daß ein beliebiges Quadrat mit der Seitenlänge 1, das in $ABCD$ liegt, den Mittelpunkt M von $ABCD$ in seinem Innern enthält.
Angenommen, für ein solches Quadrat $PQRS$ ist das nicht der Fall. Wir bezeichnen die Geraden durch P, Q bzw. Q, R bzw. R, S bzw. S, P mit p, q, r bzw. s. Dann liegt M auf dem Rand oder außerhalb von mindestens einem der beiden Streifen zwischen p und r bzw. zwischen q und s. Also hat M von mindestens einer der Geraden p, q, r oder s einen Abstand $\geqq 1$, o. B. d. A. von p.
Also liegt p ganz außerhalb des Inkreises k von $ABCD$, da dieser den Radius $\frac{1}{2}\cdot 1{,}99<1$ hat. Andererseits enthält der Durchschnitt von p mit der Quadratfläche $ABCD$ mindestens die Strecke $\overline{PQ}$ und ist daher selbst eine Strecke $\overline{XY}$. Wir bezeichnen nun mit E, F, G, H die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DA sowie mit AEH die Differenz zwischen $\triangle AEH$ und dem in $\triangle AEH$ liegenden, durch E und H bestimmten Segment von k, wobei AEH ohne den Bogen $\widehat{EH}$, aber mit allen übrigen Randpunkten verstanden sei. Analog seien die Flächenstücke BFE, CGF und DHG definiert. Da nun $ABCD$ mit dem Außengebiet von k nur die vier paarweise disjunkten Flächenstücke AEH, BFE, CGF und DHG gemeinsam hat, muß die Strecke $\overline{XY}$ ganz in einem dieser Stücke liegen, o. B. d. A. in AEH. Ihre Endpunkte X, Y sind Randpunkte von $ABCD$, wegen
$\overline{XY}\geqq\overline{PQ}=1>0{,}5\cdot 1{,}99=\overline{AE}=\overline{AH}$ also o. B. d. A. mit X auf AH und Y auf AE.
Unter allen Geraden, die parallel zu p sind und durch einen Punkt der Strecke $\overline{XH}$ gehen, muß es genau eine geben, die k berührt, denn p selbst liegt außerhalb k, und die Parallele durch H zu p schneidet den Kreis k in zwei Punkten, da sie nicht auf dem Radius MH senkrecht steht. Diese k berührende Gerade u schneidet die Strecke $\overline{XH}$ also in einem inneren Punkt U und somit die Strecke $\overline{YE}$ in einem inneren Punkt V, ihr Berührungspunkt mit k sei W. Wegen $\overline{AX}<\overline{AU}$ ist nach dem Strahlensatz auch $\overline{XY}<\overline{UV}$.
Nach Dreiecksungleichungen und dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte folgt schließlich
$$1=\overline{PQ}\leqq\overline{XY}<\overline{UV}$$
$$<\frac{1}{2}(\overline{AU}+\overline{AV}+\overline{UW}+\overline{VW})$$
$$=\frac{1}{2}(\overline{AU}+\overline{AV}+\overline{UH}+\overline{VE})$$
$$=\overline{AE}=\frac{1}{2}\cdot 1{,}99.$$
Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme falsch war und beendet den Beweis.
Bemerkungen: Die Aufgabe war sowohl von ihrem Charakter als auch vom Schwierigkeitsgrad und den erreichten Punktzahlen her als Wahlaufgabe der 4. Stufe sehr gut geeignet.

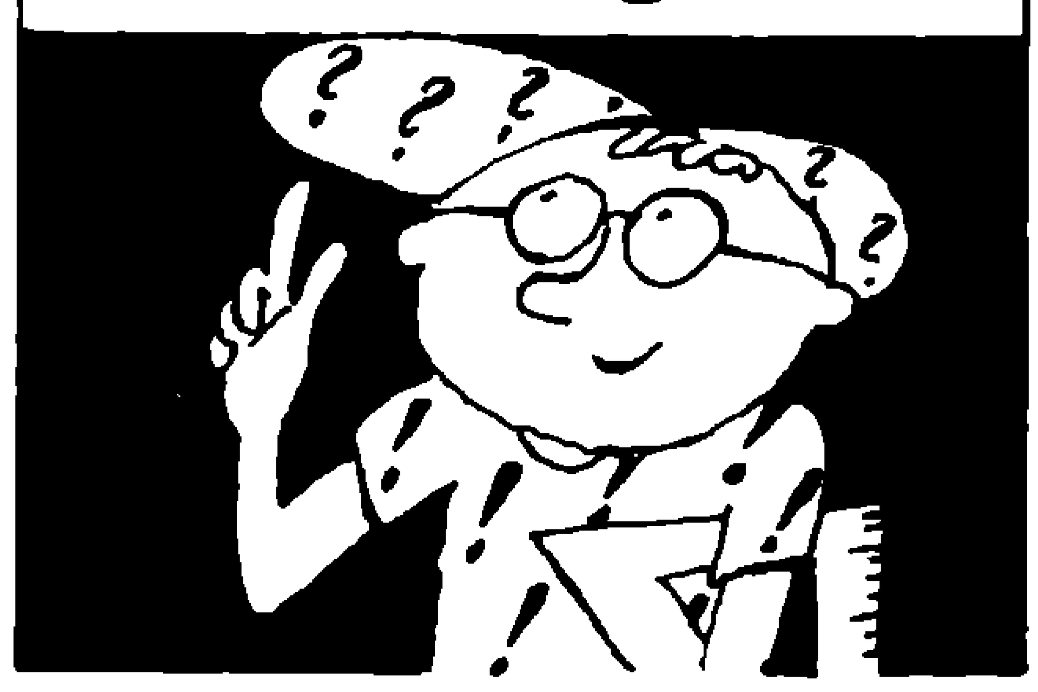
Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	5	8	4	3	7	1	1	1

Dr. R. Labahn, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Ein Dankeschön an unsere Verlage

Die Redaktion alpha konnte in diesem Jahr den Preisträgern des alpha-Wettbewerbs 1988/89 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellten uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:
Altberliner Verlag, Berlin 1
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig;
VEB Domowina Verlag Bautzen;
VEB Fachbuchverlag, Leipzig;
VEB Hinstorff Verlag, Rostock;
Der Kinderbuchverlag, Berlin;
Militärverlag der DDR, Berlin;
Mitteldeutscher Verlag, Halle;
Buchverlag Der Morgen, Berlin;
Verlag Neues Leben, Berlin;
VEB Postreiter-Verlag, Halle;
Verlag Philipp Reclam jun., Leipzig;
Sportverlag, Berlin;
VE Verlag Technik, Berlin;
Urania-Verlag, Leipzig;
Verlag Volk und Welt, Berlin;
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin;
VE Verlag der Wissenschaften, Berlin

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/89

Ma 5 ■ 3045 Wenn Lothar ein Jahr älter ist als Roland und Roland fünf Jahre älter ist als Heinz, dann ist Lothar sechs Jahre älter als Heinz.
Wir rechnen deshalb $41-5-6=30$, $30:3=10$. Heinz ist 10 Jahre, Roland 15 Jahre, Lothar 16 Jahre alt.

Ma 5 ■ 3046 Die Mutter verfügt über 100 M − 60 M = 40 M, der Vater über 40 M + 10 M = 50 M, jedes der beiden Kinder über 10 M : 2 = 5 M Taschengeld.

Ma 5 ■ 3047 Die Zahl 139 ist die kleinste, die Zahl 940 die größte dreistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 13.

Ma 5 ■ 3048 Aus (1) folgt: Der Schüler Gänsich hat nicht den Vornamen Bernd oder Claus. Aus (2) folgt: Der Schüler Gänsich hat auch nicht den Vornamen Andreas. Deshalb heißt er Daniel Gänsich. Aus (3) folgt: Claus hat nicht den Nachnamen Hermhaus. Deshalb heißt er Claus Eckbart. Somit hat Bernd den Nachnamen Hermhaus.

Ma 5 ■ 3049 a) Nach dem Verdoppeln erhält Jan 20 und das Doppelte seiner gedachten Zahl. Dann ist dieses Doppelte aber um $52-20=32$ größer als seine Zahl. Also lautet seine gedachte Zahl 32.
Probe:
$(32+10)\cdot 2=84$ und $32+52=84$.
b) Nach dem Verdoppeln erhält Jörg 20 und das Doppelte seiner gedachten Zahl. Dann ist dieses Doppelte aber um $20-20=0$ größer als deine Zahl. Also lautet seine gedachte Zahl 0.
Probe: $(0+10)\cdot 2=20$ und $0+20=20$.

Ma 5 ■ 3050 Da die Summe $E+E+E$ auf die Ziffer E endet, könnte $E=0$ oder $E=5$ sein. Da die Summe $E+E+E$ aber auch auf die Ziffer S endet, gilt $E=5$ und somit $S=6$. Daraus folgt weiter $L=8$ und $K=7$.
Die vollständige Lösung lautet
$7855+7855+7855=23565$.

Ma 5 ■ 3051 Wegen $63+5=68$ verbrauchte der Lada für 800 km 68 Liter Benzin. Wegen $68:8=8{,}5$ verbrauchte der Lada auf 100 km im Durchschnitt 8,5 Liter Benzin. Wegen $8{,}5-1=7{,}5$ verbrauchte der Dacia auf 100 km 7,5 Liter Benzin. Wegen $(63:7{,}5)\cdot 100=840$ hat der Dacia 840 km zurückgelegt.

Ma 6 ■ 3052 Der Wanderer legt in einer Minute 6000 m : 60 = 100 m, der Radfahrer $4 \cdot 100\,\text{m} = 400\,\text{m}$ zurück. Je Minute verändert sich also ihre Entfernung voneinander um 100 m + 400 m = 500 m.
Nach zwei Minuten treffen sie sich, nach weiteren zwei Minuten sind sie wieder 1000 m, also 1 km voneinander entfernt. Somit vergeht bis dahin eine Zeit von 4 Minuten.

Ma 6 ■ 3053 Die Seitenlänge des Quadrates beträgt 12 cm; denn $12\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 144\,\text{cm}^2$. Jede Teilstrecke einer Quadratseite beträgt deshalb 12 cm : 3 = 4 cm. Zwei Teildreiecke ergeben zusammen ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von $4\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 16\,\text{cm}^2$. Zwei Teildreiecke ergeben zusammen ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von $4\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} = 32$ cm. Somit beträgt der Flächeninhalt des Sechsecks
$144\,\text{cm}^2 - 16\,\text{cm}^2 - 32\,\text{cm}^2 = 96\,\text{cm}^2$.

Ma 6 ■ 3054 Angenommen, die Schüler der Klasse 5 sammelten x kg Altpapier; dann entfallen auf die Schüler der Klasse 6 nur $(x - 18)$ kg, auf die Schüler der Klasse 4 aber $(x - 8)$ kg Altpapier. Zusammen sind es $(3x - 26)$ kg Altpapier.
Nun gilt $3x - 26 = 274$, $3x = 300$, $x = 100$. Die Schüler der Klasse 4 sammelten 92 kg, die der Klasse 5 sammelten 100 kg und die der Klasse 6 sammelten 82 kg Altpapier.

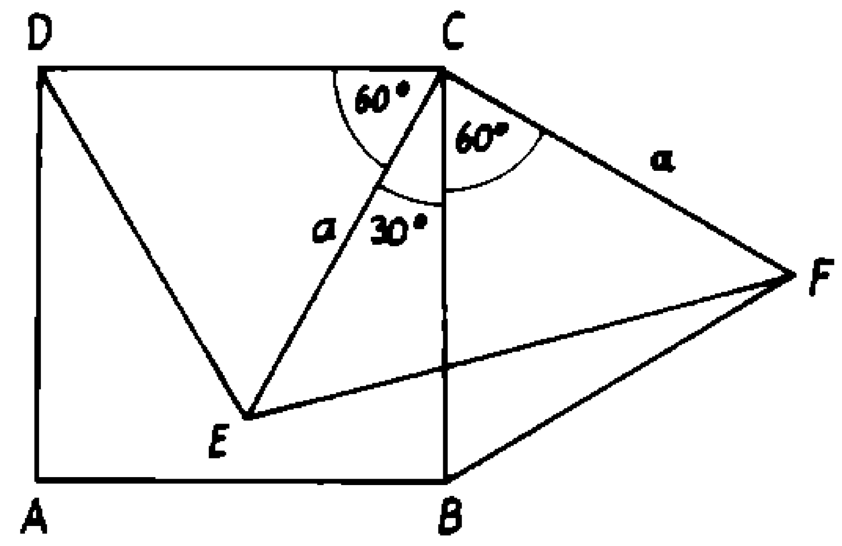
Ma 6 ■ 3055 Angenommen, es sind x Gänse, also $2x$ Hühner und $3 \cdot 2x = 6x$ Kaninchen. Nun gilt
$2 \cdot (x + 2x) + 4 \cdot 6x = 120$, $30x = 120$, $x = 4$. Der Kleintierhalter besitzt 4 Gänse, 8 Hühner und 24 Kaninchen.

Ma 6 ■ 3056 Angenommen, es wurden x kg Radieschen verkauft; dann waren es noch $2x$ kg Möhren, $(2x + 10)$ kg Kohlrabi und $(x - 20)$ kg Kohl. Das sind zusammen $(6x - 10)$ kg Gemüse. Nun gilt
$6x - 10 = 290$, $6x = 300$, $x = 50$. Es wurden 50 kg Radieschen, 100 kg Möhren, 110 kg Kohlrabi und 30 kg Kohl verkauft.

Ma 6 ■ 3057 Aus $\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$ folgt
$17 < 4x$ und $3x < 17$, also $x > 4$ und $x < 6$ und somit $x = 5$. Es existiert genau ein solcher Bruch; er lautet $\frac{5}{17}$.

Na/Te 6 ■ 460 Der Zug legt in einer Minute 120 : 102 km = 1,176 km zurück, in einer Stunde (60 min) also
$1{,}176 \cdot 60\,\text{km} = 70{,}58\,\text{km}$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt $70{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ma 7 ■ 3058 Winkel ECB hat die Größe $90° - 60° = 30°$, Winkel BCF hat die Größe 60°, Winkel ECF hat somit die Größe $30° + 60° = 90°$. Wegen
$\overline{AB} = \overline{CE} = \overline{CF} = a$ gilt $A_{EFC} = \frac{1}{2} \cdot a^2$
und $A_{ABCD} = a^2$, d. h. der Flächeninhalt des Dreiecks EFC ist halb so groß wie der des Quadrates $ABCD$.

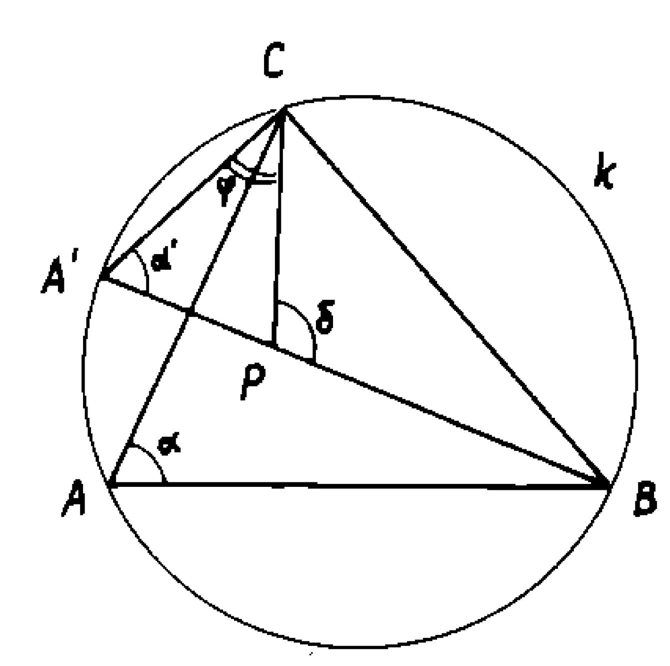


Ma 7 ■ 3059 Angenommen, Ulrike ist x Jahre alt; dann ist Dagmar $(x + 3)$ Jahre, die Mutter $(3x + 3)$ Jahre, der Vater $3 \cdot (x + 3) - 3 = 3x + 6$ Jahre alt. Die vier Personen sind zusammen $(8x + 12)$ Jahre alt, und es gilt $8x + 12 = 92$, $8x = 80$, $x = 10$. Ulrike ist 10, Dagmar 13, die Mutter 33, der Vater 36 Jahre alt.

Ma 7 ■ 3060 Angenommen, das jüngste Kind war x Jahre alt; dann war das zweite Kind $(x + 4)$ Jahre, das älteste Kind $2x$ Jahre, die Mutter $(3x + 12)$ Jahre, der Vater $(3x + 16)$ Jahre alt. Zusammen waren diese fünf Personen $(10x + 32)$ Jahre alt, und es gilt
$10x + 32 = 112$, $10x = 80$, $x = 8$.
Das jüngste Kind war 8 Jahre, das zweite Kind 12 Jahre, das älteste Kind 16 Jahre, die Mutter 36 Jahre, der Vater 40 Jahre alt.

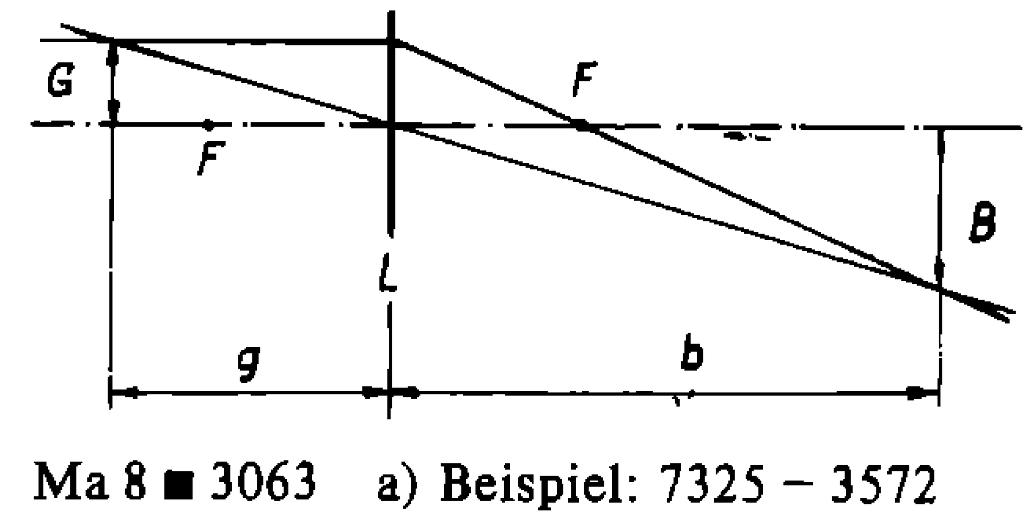
Ma 7 ■ 3061 Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen hat der Winkel AED die Größe $\frac{\delta}{2}$ und der Winkel BEC die Größe $\frac{\gamma}{2}$.
Daraus folgt $\overline{AD} = \overline{AE}$ und $\overline{BE} = \overline{BC}$.
Wegen $\overline{CD} = \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE}$ gilt somit auch $\overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

Ma 7 ■ 3062 Es seien $\sphericalangle BAC = \alpha$ und $\sphericalangle BPC = \delta$; die Gerade BP schneide den Umkreis k des Dreiecks ABC in A', und es seien $\sphericalangle CA'P = \alpha'$ und $\sphericalangle PCA' = \varphi$. Dann gilt $\alpha = \alpha'$ als Peripheriewinkel über derselben Sehne $\overline{BC}$. Ferner gilt $\varphi + \alpha' = \delta$ nach dem Außenwinkelsatz. Daraus folgt durch Einsetzen $\varphi + \alpha = \delta$, also $\alpha < \delta$.



Na/Te 7 ■ 461 Das Volumen des Würfels beträgt 9 cm³. Gegeben ist: Dichte von Aluminium $\varrho_A = 2{,}7\,\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Dichte von Stahl $\varrho_S = 7{,}8\,\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Der Aluminiumwürfel hat demnach eine Masse von 24,3 g, der Stahlwürfel eine Masse von 70,2 g, d. h. seine Masse ist $\frac{70{,}2}{24{,}3} = 2{,}9$fach größer. Das gilt auch für die Gewichtskraft. Demzufolge stellt sich eine 2,9fache Verlängerung ein. Die gesuchte Verlängerung beträgt 29 mm.

Na/Te 7 ■ 462 $b = 30$ cm, $B = 8$ cm



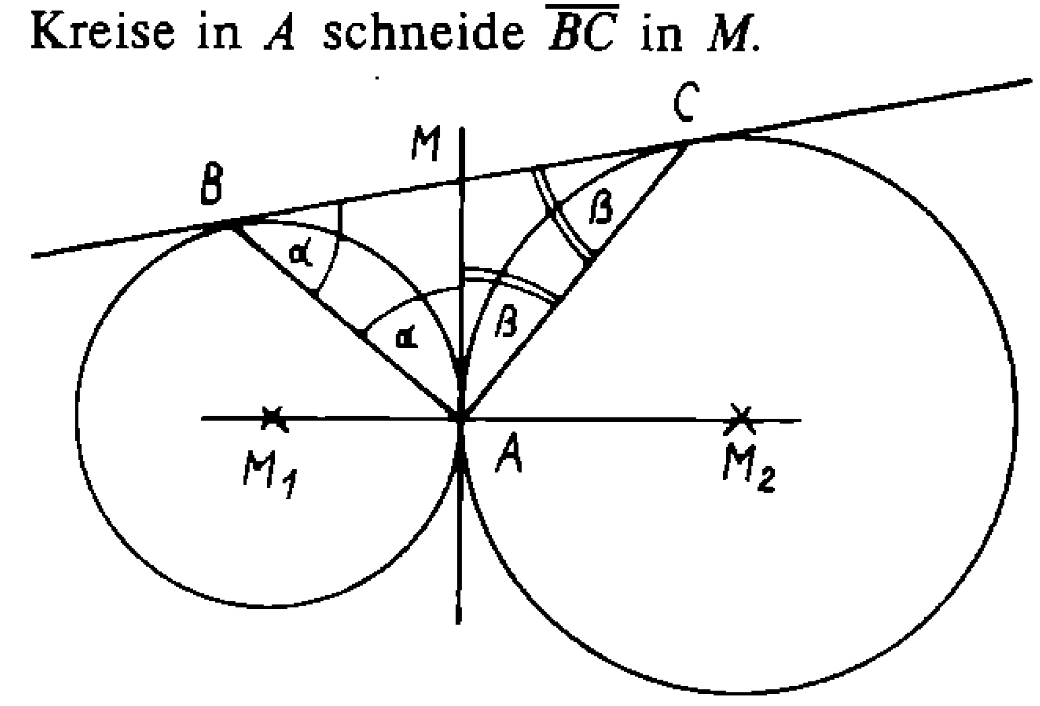
Ma 8 ■ 3063 a) Beispiel: 7325 − 3572 = 3753; 9/3753, denn $9 \cdot 417 = 3753$.
b) Stellt man eine vierstellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise so dar: $\overline{abcd}$ und geht man davon aus, daß alle Ziffern voneinander verschieden sind, so gibt es insgesamt 23 echte Vertauschungsmöglichkeiten, die angedeutet werden sollen:

	$\overline{bacd}$	$\overline{cabd}$	$\overline{dabc}$
$\overline{abdc}$	$\overline{badc}$	.	.
$\overline{acbd}$	.	.	.
$\overline{acdb}$	.		.
$\overline{adbc}$	.	.	.
$\overline{adcb}$	$\overline{bdca}$	$\overline{cdba}$	$\overline{dcba}$

c) Beim Vertauschen der Ziffernfolge bleiben die Quersumme einer Zahl und damit deren Rest bei Teilbarkeit durch 9 unverändert.
Wenn die Ausgangszahl bei Division durch 9 den Rest r läßt, so lassen auch alle Vertauschungen diesen Rest r.
Die Differenz zweier solcher Zahlen hat somit den Rest $r - r = 0$, w. z. b. w.

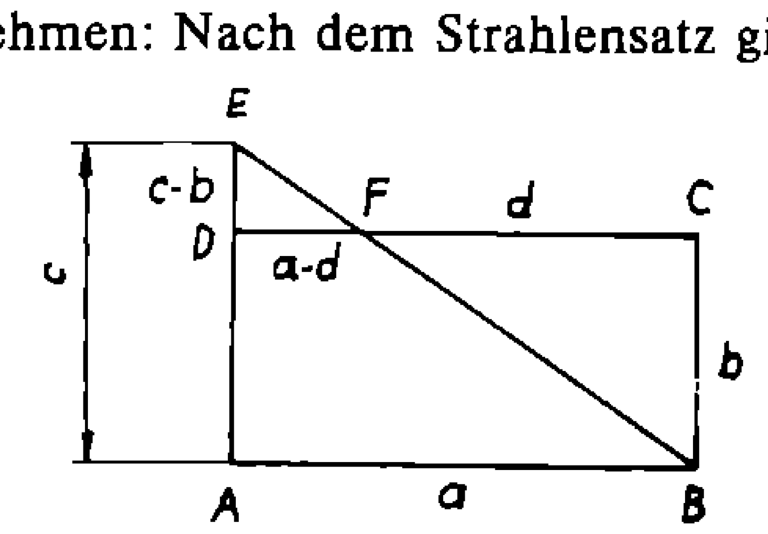
Ma 8 ■ 3064 Beispiel: $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$, $40 \cdot 2 = 80$, 8 ist dritter Summand.
Beweis: Die Summe sei $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 = 5a + 10$.
Die Verdopplung dieser Summe ergibt $10a + 20 = (a + 2) \cdot 10$. Das Ergebnis endet somit stets mit Null. Streicht man diese Ziffer 0, so verbleibt $a + 2$ als dritter Summand, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3065 Die Tangente an beide Kreise in A schneide $\overline{BC}$ in M.



Wegen $\overline{MB} \cong \overline{MA}$ und $\overline{MC} \cong \overline{MA}$ (Tangentenabschnitte von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis sind gleich lang) sind die Dreiecke AMB und ACM gleichschenklig. Daraus folgt $\sphericalangle MBA \cong \sphericalangle MAB$ und $\sphericalangle MAC \cong \sphericalangle MCA$. Bezeichnet man entsprechende Winkelgrößen mit α bzw. β, so gilt
$2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$
(Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$), w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3066 Dem Bild ist folgendes zu entnehmen: Nach dem Strahlensatz gilt



$\frac{c-b}{a-d}=\frac{c}{a}$, $ac-ab=ac-cd$, $a\cdot b=c\cdot d$. Die Strecken der Länge c und d sind die Seitenlängen eines Rechtecks, das dem Rechteck $ABCD$ inhaltsgleich ist.

Ma 8 ■ 3067 Nach Aufgabenstellung gilt $a^3=6a^2$. Weil $a\neq 0$, kann man diese Gleichung durch a^2 dividieren und erhält $a=6$. Die Kante des Würfels ist 6 cm lang; das Volumen beträgt $V=216\,\text{cm}^3$; der Oberflächeninhalt ist $0=216\,\text{cm}^2$.

Na/Te 8 ■ 463 Der Motor nimmt eine Leistung $P_{aufg.}=220\,\text{V}\cdot 59\,\text{A}=13\,\text{kW}$ auf. Da die Definitionsgleichung für den Wirkungsgrad auch für Leistungen gilt,

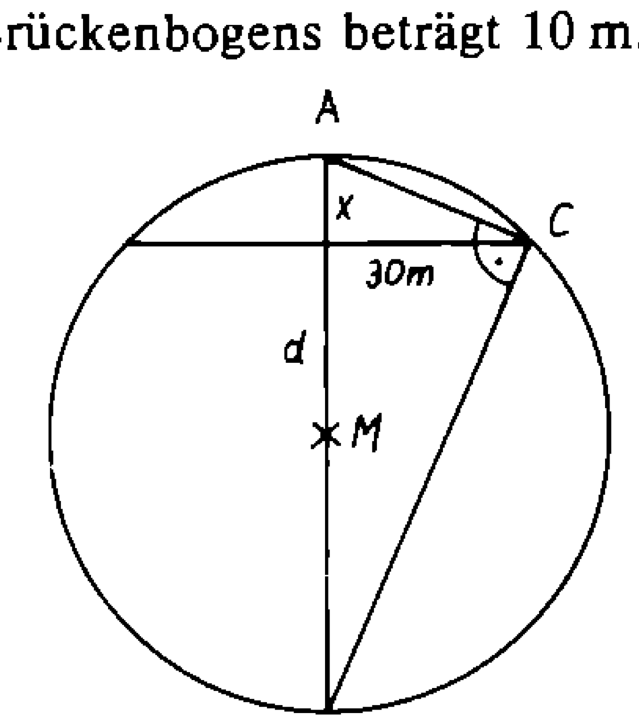
also $\eta=\frac{P_{Nutz}}{P_{aufg}}$ ist, ergibt sich

$P_{Nutz}=\eta\cdot P_{aufg}$, d. h. $P_{Nutz}=11\,\text{kW}$.

Na/Te 8 ■ 464 Gesucht wird die Temperatur $t_W=x\,°\text{C}$ des Wassers vor dem Eintauchen. Beim Eintauchen hat das Thermometer die Wärme $Q_{aufg.}=1{,}93\cdot 14{,}6\,\text{J}=28{,}2\,\text{J}$ aufgenommen. Wenn die spezifische Wärmekapazität des Wassers $c=\frac{4{,}19\,\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$, hat das Wasser an das Thermometer die Wärme

$Q_{ab.}=(x-32{,}4)\,\text{K}\cdot 6{,}7\,\text{g}\cdot 4{,}19\frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$ abgegeben. Da bei diesem Wärmeaustausch $Q_{ab.}=Q_{aufg.}$ ist, gilt (nach Kürzung mit J)
$1{,}93\cdot 14{,}6=(x-32{,}4)\cdot 6{,}7\cdot 4{,}19$.
Man errechnet $x=33{,}4$. Die Temperatur des Wassers betrug 33,4 °C.

Ma 9 ■ 3068 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $x:d=1:10$, also $d=10x$. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, da der Winkel $\sphericalangle ACB$ ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser $\overline{AB}$ ist. Im Dreieck ABC gilt nach dem Höhensatz
$30^2\cdot m^2=x\cdot(d-x)$,
$900\,\text{m}^2=x(10x-x)$, $900\,\text{m}^2=9x^2$,
$100\,\text{m}^2=x^2$, $10\,\text{m}=x$. Die Pfeilhöhe des Brückenbogens beträgt 10 m.



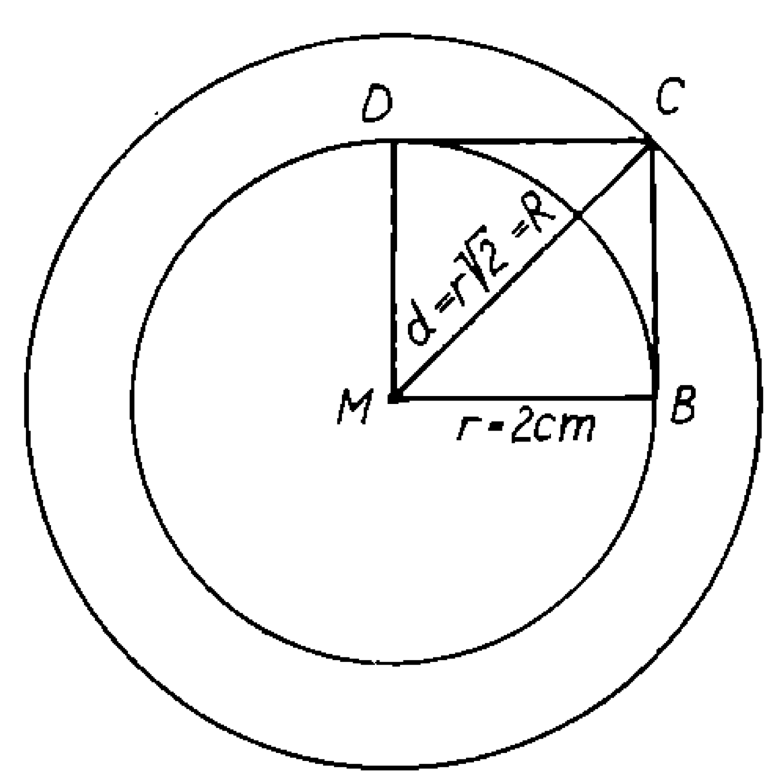
Ma 9 ■ 3069 Für die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks gilt $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3)$; daraus folgt entsprechend der Aufgabenstellung
$\frac{1}{2}\cdot(n+3)\cdot n-\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3)=21$,
$n^2+3n-n^2+3n=42$, $6n=42$, $n=7$.
Es handelt sich um ein Sieben- und ein Zehneck.

Ma 9 ■ 3070 Für die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks gilt $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Nach dem Strahlensatz gilt deshalb

$\frac{a}{2}\sqrt{3}:\frac{a}{2}=x:\frac{a-x}{2}$.
Wir formen um und erhalten
$\sqrt{3}=\frac{2x}{a-x}$; $a\sqrt{3}-x\sqrt{3}=2x$;
$2x+x\sqrt{3}=a\sqrt{3}$;
$x=\frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=a(2\cdot\sqrt{3}-3)$;
$x^2=a^2(21-12\cdot\sqrt{3})=3a^2(7-4\sqrt{3})$.
$\frac{A_Q}{A_D}=\frac{3a^2(7-4\cdot\sqrt{3})\cdot 4}{a^2\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$,
$\frac{A_Q}{A_D}=4\cdot\sqrt{3}(7-4\cdot\sqrt{3})=28\cdot\sqrt{3}-48$,
$\frac{A_Q}{A_D}=4\cdot(7\cdot\sqrt{3}-12)\approx 0{,}497$.
Der Flächeninhalt des Quadrates beträgt etwa 49,7 % des Flächeninhalts des gleichseitigen Dreiecks.

Ma 9 ■ 3071 Wird die erste der vier Zahlen mit a bezeichnet, so erhält man a, $2a$, $6a$, $18a$. Da $1986:2$ keine Primzahl ergibt und $1986:18$ keine natürliche Zahl ist, kann nur noch $1986=6a$ gelten. Tatsächlich ist dann $a=331$ eine Primzahl, und die vier Zahlen lauten 331, 662, 1986, 5958.

Ma 9 ■ 3072 Bezeichnet man den Radius des kleinen Kreises mit r und den des großen Kreises mit R, so ist der Flächeninhalt der Rasenfläche $A_R=\pi r^2$ und der Inhalt der Wegfläche $A_W=\pi(R^2-r^2)$. Wenn beide Flächen gleich groß sein sollen,
gilt $\pi r^2=\pi(R^2-r^2)$, $\pi R^2=2\pi r^2$,
$R^2=2r^2$, $R=r\sqrt{2}$.
Die Diagonale $d=r\cdot\sqrt{2}$ des Quadrates $MBCD$ mit der Seitenlänge r ist deshalb gleich dem Radius R des großen Kreises.



Na/Te 9 ■ 465 Hintereinandergeschaltet ergeben die drei Widerstände 35 Ohm, parallelgeschaltet 2,86 Ohm. Unter Berücksichtigung des Innenwiderstandes der Spannungsquelle fließt ein Strom bei Hintereinanderschaltung von 0,38 A, bei Parallelschaltung von 3,5 A. Die sich einstellende Klemmenspannung zwischen den Polen der Spannungsquelle beträgt 13,1 V resp. 10 V.
b) Die Stromstärke beträgt im Zweig mit dem 5-Ohm-Widerstand 2,0 A, im Zweig mit dem 10-Ohm-Widerstand 1,0 A und im Zweig mit dem 20-Ohm-Widerstand 0,5 A. Die Wärmeleistungen betragen 20 W, 10 W und 5 W. Man kann diese Werte mit der Gleichung $P=I^2\cdot R$ berechnen.

Na/Te 9 ■ 466 Die Kochplatte erzeugt in 15 min eine Wärme von $1000\cdot 0{,}7\cdot 15\times 60\,\text{W}\cdot\text{s}$. Die Wärme $Q'=m\cdot 82\,\text{K}\times 4{,}18\,\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ist erforderlich, um das Wasser (Masse m, spez. Wärmekapazität $4{,}187\,\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}$) um 82 K zu erwärmen. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke kann m berechnet werden. $m=1830\,\text{g}$. Es können in der angegebenen Zeit 1,83 l Wasser erwärmt werden.

Ma 10/12 ■ 3073 Wir stellen die Gleichung so dar, daß die einzelnen Zahlen als Summen geschrieben werden, deren Summanden Vielfache von Potenzen mit der Basis x sind:
$(x^3+3x^2+5x+4)\cdot(x+2)$
$=x^4+6x^3+4x^2+7x$. Wir formen schrittweise äquivalent um und erhalten
$x^4+3x^3+5x^2+4x+2x^3+6x^2+10x+8=x^4+6x^3+4x^2+7x$,
$x^3-7x^2-7x=8$, $x(x^2-7x-7)=8$.
Diese Gleichung wird nur von der natürlichen Zahl 8 erfüllt; es ist
$8(64-56-7)=8$. Die Basis des gesuchten Zahlensystems ist 8.
Probe: $(1\cdot 8^3+3\cdot 8^2+5\cdot 8+4)(1\cdot 8+2)$
$=(1\cdot 8^4+6\cdot 8^3+4\cdot 8^2+7\cdot 8)$
$7480=7480$.

Ma 10/12 ■ 3074 Es muß zunächst untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 3 teilbar ist. Es sind vier Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: Jede der drei Zahlen ist durch 3 teilbar,
2. Fall: Jede der drei Zahlen läßt bei Division durch 3 den Rest 1,
3. Fall: Jede der drei Zahlen läßt bei Division durch 3 den Rest 2,
4. Fall: Eine Zahl läßt den Rest 0, eine den Rest 1 und eine den Rest 2. Nun ist zu prüfen, daß in jedem der vier Fälle, in denen die Voraussetzung erfüllt ist, auch die Behauptung zutrifft. Es genügt dabei, wenn wir nur mit den Resten rechnen!
1. Fall: $0^3+0^3+0^3=0$ und $3/0$;
2. Fall: $1^3+1^3+1^3=3$ und $3/3$;
3. Fall: $2^3+2^3+2^3=24$ und $3/24$;
4. Fall: $0^3+1^3+2^3=9$ und $3/9$.
In allen Fällen, in denen die Voraussetzung erfüllt ist, trifft auch die Behauptung zu, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 3075 Im rechtwinkligen Dreieck EAB gilt $a:\sin\gamma=b:\sin 90°$, also $b=\frac{a}{\sin\gamma}$. Die Höhe h im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge b wird nach dem Satz des Pythagoras berechnet und beträgt $h=\frac{b}{2}\sqrt{3}$; der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ist dann
$A_D=\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot b^2$.
Nun setzt man für $b=\frac{a}{\sin\gamma}$ ein und
erhält $A_D=\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{a^2}{\sin^2\gamma}$.
Für das prozentuale Verhältnis der Dreiecksfläche zur Quadratfläche ergibt sich somit
$\frac{A_D}{A_Q}=\frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{4\cdot a^2\cdot\sin^2\gamma}=\frac{\sqrt{3}}{4\cdot\sin^2 75°}\approx 0{,}464$.
Der Anteil der Dreiecksfläche an der Quadratfläche beträgt etwa 46,4 %.

Ma 10/12 ■ 3076 Aus (2) folgt $\sqrt{abc} = a$, $abc = a^2$, $bc = a$ (wegen $a \neq 0$), $b = \frac{a}{c}$. Durch Einsetzen in (1) folgt daraus

$c \cdot \sqrt{c} + a \cdot \sqrt{c} = c \cdot (a + c)$,

$\sqrt{c} \cdot (a + c) = c \cdot (a + c)$,

$c = 1$ (wegen $c \neq 0$), also $a = b$.

Das Gleichungssystem ist lösbar, wenn $c = 1$ und $a = b$ ist.

Wir führen eine Probe für $a = b = 3$ und $c = 1$ durch:

(1) $\sqrt{1^3} + \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 1^2} = 3 \cdot 1 + 1^2$,
$1 + 3 = 3 + 1$, $4 = 4$

(2) $\sqrt{3 \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Ma 10/12 ■ 3077 Es seien $n - 1$, n, $n + 1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n \geqq 2$; dann gilt $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = k^3$, $n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = k^3$, $3n^3 + 6n = k^3$, $3n \cdot (n^2 + 2) = k^3$. Die Kubikzahl k^3 muß also durch 3 teilbar sein; das trifft für die Kubikzahlen 27, 216, 729, ... zu. Es entfällt 27, da $3n \cdot (n^2 + 2) = 27$, also $n \cdot (n^2 + 2) = 9$, für $n = 2$ bereits $12 > 9$ ergibt. Für $k^3 = 216$ erhalten wir $3n \cdot (n^2 + 2) = 216$ bzw. $n \cdot (n^2 + 2) = 72$. Diese Gleichung wird für $n = 4$ erfüllt; denn $4 \cdot 18 = 72$. Die Lösung lautet somit $3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$.

Na/Te 10/12 ■ 467 Die Periodendauer der Schwingung kann mit der Gleichung für die Periodendauer eines Federschwingers berechnet werden. Sie lautet $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, wobei T die Periodendauer, m die schwingende Masse und k die Federkonstante (sie gibt die Kraft an, die notwendig ist, um die Feder um 1 m zu dehnen) bedeuten. Beträgt die Dichte der schwingenden Flüssigkeitssäule ϱ und der Querschnitt der Röhre A, so ergibt sich als Masse für die Säule $m = l \cdot A \cdot \varrho$. Zur Berechnung der Federkonstanten: Senkt man den Meniskus in einem Schenkel um Δl, so hebt er sich im anderen auch um Δl. Mit $k = \frac{F}{\Delta l}$ ergibt sich $k = 2 \cdot A \cdot g \cdot \varrho$.

In die Gleichung für die Periodendauer eingesetzt, erhält man $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$. Setzt man die vorgegebene Länge ein, so ergibt sich $T = 1{,}4$ s.

Na/Te 10/12 ■ 468 Sind Spannung U, Widerstand R und Zeit t gegeben, so erzeugt ein elektrischer Strom die Wärme $Q = U^2 \cdot \frac{t}{R}$. Beachtet man, daß bei der Spannung U_1 in $t + 120$ s die gleiche Wärme erzeugt wird, wie in t bei der Spannung U_2, so erhält man:

$t = \frac{U_1^2 \cdot 120\,\text{s}}{U_2^2 - U_1^2}$. Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man $t = 13$ min 11 s.

Lösung zur Sprachecke:

▲ 1 ▲ Zur Zahl 1989 ist von links und rechts je eine Ziffer hinzuzuschreiben, so daß die erhaltene sechsstellige Zahl durch 88 teilbar ist.

Lösung: Es seien x und y die zu ergänzenden Ziffern und $\overline{x1989y} = z$ die gesuchte Zahl. Laut Aufgabe gilt $88 \mid \overline{x1989y} = z$. Da $88 = 8 \cdot 11$ und ggT $(8, 11) = 1$ ist, folgt $88 \mid z$, wenn $8 \mid z$ und $11 \mid z$. Auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 8 und 11 muß $8 \mid \overline{89y}$ und $11 \mid (y - 9 + 8 - 9 + 1 - x)$ gelten, so daß man zunächst $y = 6$ schließt und damit $6 - 9 + 8 - 9 + 1 - x = -(x + 3)$ errechnet. Folglich kann nur $x = 8$ richtig sein. Tatsächlich ist $819\,896 : 88 = 9317$. Man hat 8 vor 1989 zu schreiben und an die entstandene Zahl noch 6 anzuhängen, damit die so gefundene Zahl $z = 819\,896$ durch 88 teilbar ist.

▲ 2 ▲ Zahlenpolygon

In die leeren Kreise sind die Zahlen 8 – 16 – 20 – 22 – 33 – 35 – 39 – 41 – 45 – 47 so einzusetzen, daß man für jede Seite des Siebenecks die Summe 114 erhält. Darüber hinaus gilt: $C + H + M = 114$.

Lösung: $B = 35$, $D = 45$, $E = 41$, $F = 20$, $H = 39$, $I = 22$, $J = 33$, $L = 8$, $M = 47$, $N = 16$.

▲ 3 ▲ Untersuchung von Quadraten

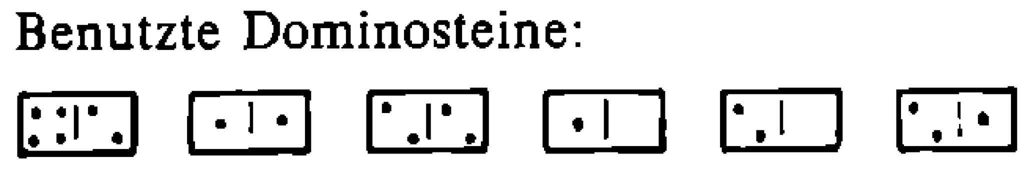
Hier sind drei ungewöhnliche Quadrate: 41^2, 33^2, 836^2. Was ist an ihnen ungewöhnlich? (Ein Hinweis: Suche nach neuen Quadratzahlen in den Zahlen, die du bei der Berechnung der jeweiligen Quadrate erhältst.)

Lösung: $41^2 = 1681{,}16 = 4^2$ und $81 = 9^2$, 4 und 9 sind selbst Quadrate; $33^2 = 1089$, $9801 = 99^2$; $836^2 = 698\,896$, rückwärts gelesen ergibt sich wieder eine Quadratzahl.

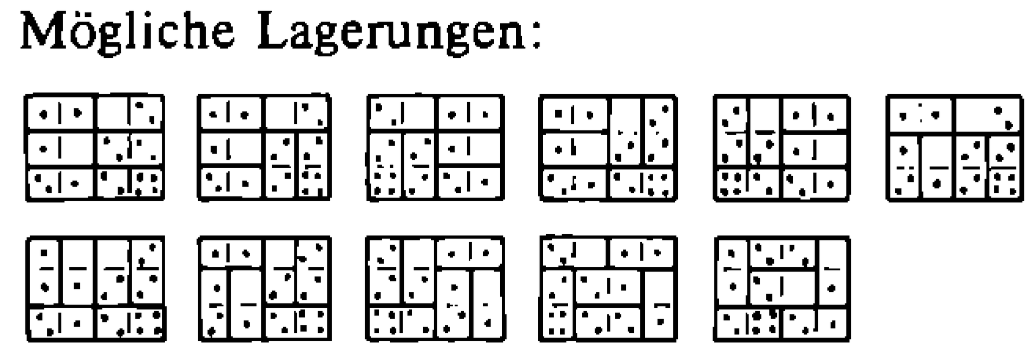
Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Leistungsfähiges Domino-Sextett

Benutzte Dominosteine:



Mögliche Lagerungen:



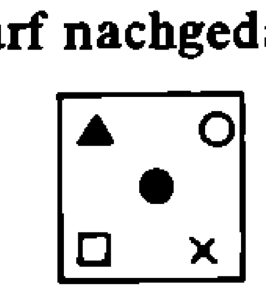
15 Meter im Quadrat

Wegen 15 : 3 ist jedes Beet 5 m lang und wegen 15 : 10 ist es 1,50 m breit. Daraus ergibt sich: $(5 \cdot 2) \cdot 10 \cdot 3 = 300$ als Wegsumme an den Längsseiten. Hinzukommen wegen $1{,}50 \cdot 2 = 3$ $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 = 4 \cdot 30 + 15 = 135$ und $135 + 10 \cdot 10 = 235$ und $135 + 20 \cdot 10 = 335$, $300 + 135 + 235 + 335 = 1005$. Das sind 1,005 km. Also stimmt die Meinung von Herrn Ackermann.

Zum Knobeln

Teil e

Scharf nachgedacht



Wortspielereien

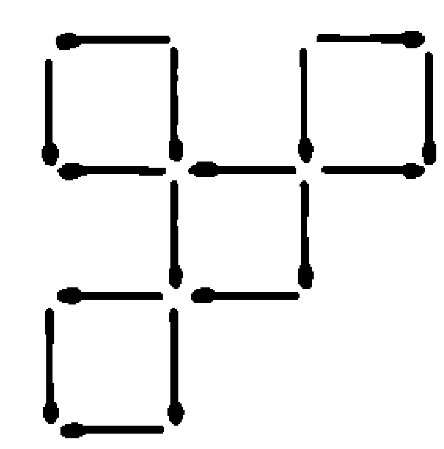
Tausendfüßler, Dreifelderwirtschaft, Dreieck, Zehner, Einschreiben, Dreispitz, Revier, Tausendschönchen, Schlacht, Gemeinsamkeit, Zweisamkeit, Einsatz, Tracht, Einschlag, Zweiachser, Vierzylindermotor, Zweiteiler, Dreiangel, Achtlosigkeit

Mathematisches Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Dezimeter, 6. Acht, 7. Null, 9. Pol, 12. Abel (Niels Henrik), 14. Jahr, 15. Ideal.

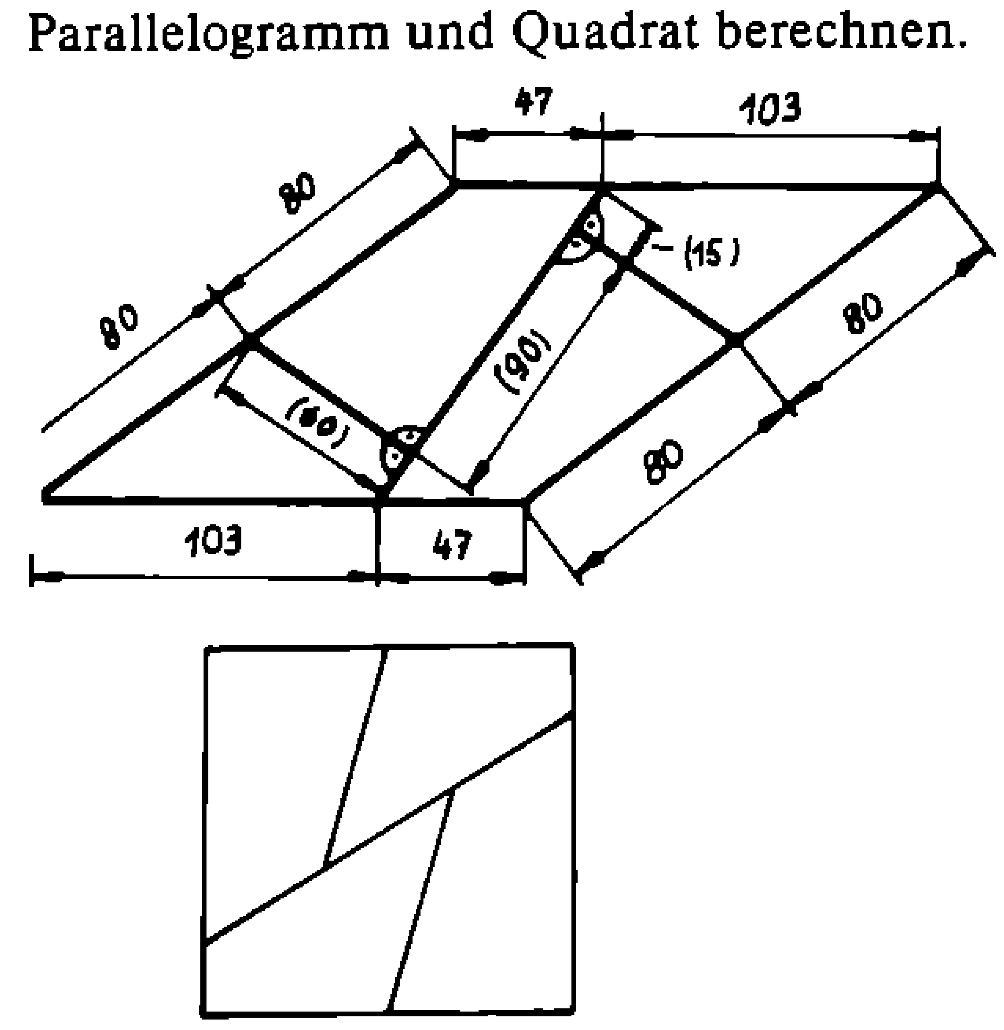
Senkrecht: 1. Diagonale, 2. Zahl, 3. mm (Millimeter), 4. Thue (Axel), 5. Rollkurve, 8. Lot, 10. Teil, 11. Wald, 13. Id, 14. Ja.

Hölzchentrick



Flächenverwandlung mittels Legespiel

Die zusätzlich in Klammern angegebenen Maße lassen sich mit dem Satz des Pythagoras und den Flächeninhaltsformeln von Parallelogramm und Quadrat berechnen.



Sinnvoll getauscht

E	S	G	I	B	T	K	E
I	N	E	G	R	Ö	S	S
T	E	N	A	T	Ü	R	L
I	C	H	E	Z	A	H	L

Wieviel Flächen hat dieser Körper?

16 Flächen

Lösung zu: Gut studiert? Heft 1/90

Betrachtet man z. B. nur den Punkt P mit den vier Strecken von P zu den Eckpunkten des Rechtecks, so ergeben sich vier Dreiecke mit den Flächeninhalten A_{ABP}, A_{BCP}, A_{CDP}, A_{DAP}. Mit den Bezeichnungen des Bildes wären dies $A_1 + A_7$, $A_4 + A_5 + A_8 + A_9$, $A_2 + A_6$, A_3. Wie sich zeigen läßt (siehe auch alpha-Wettbewerb Aufgabe Ma 6 ■ 2963 oder im angegebenen Beitrag, Aufgabe 1) gilt (1) bezüglich Punkt P $(A_1 + A_7) + (A_2 + A_6) = A_3 + (A_4 + A_5 + A_8 + A_9)$, (2) bezüglich Punkt Q $(A_1 + A_9) + (A_2 + A_8) = A_5 + (A_3 + A_4 + A_6 + A_7)$. Durch Addition von (1) und (2) erhält man die Behauptung a) und z. B. durch entsprechende Subtraktion die Behauptung b).

Die Rostocker Monumentaluhr

Wohl jeder hat von der berühmten astronomischen Uhr am Altstädter Rathaus in Prag gehört oder sie sogar gesehen. Weniger bekannt ist, daß auch wir bedeutende öffentliche Uhren mit astronomischer Anzeige besitzen. Ich nenne nur die wohl älteste original weitgehend erhaltene astronomische Uhr Europas in Stralsund, die Rathausuhr in Görlitz und die Rostocker Monumentaluhr in der Marienkirche. Von ihr soll im folgenden die Rede sein.

Im Jahre 1472 vollendete der in Danzig (Gdańsk) wohnende Hans Düringer die Kunstuhr in Rostocks Hauptkirche. Mit ihrer Höhe von 12 Metern, ihren astronomischen und kalendarischen Anzeigen, ihrer technischen Realisierung und künstlerischen Gestaltung und ihrem Erhaltungszustand ist sie heute eine der bedeutendsten mittelalterlichen astronomischen Großuhren auf der Erde.

Nach 170 Jahren wurde die gotische Uhr Düringers 1641/43 gründlich überholt, um ein Musikwerk ergänzt und mit einem Renaissancerahmen versehen.

Nach der Einführung des Pendels als Gangregler bei Uhren (Christian Huygens, 1657) und der Erfindung der Hakenhemmung (Robert Hooke, 1676) wurde die Rostocker Uhr 1710 von der ursprünglichen Spindel-Waag-Hemmung auf die noch heute vorhandene Pendel-Haken-Hemmung umgebaut.

Die gründlichste Restaurierung ihrer Geschichte erlebte diese Uhr 1974/77. Sie wurde im Auftrage des Instituts für Denkmalpflege der DDR von dem Metallrestaurator Wolfgang Gummelt vorgenommen. Seither ist sie mit allen ihren Werken und Anzeigen wieder in Funktion.

Die Rostocker Uhr zeigt eine Dreiteilung, die sich auch bei anderen astronomischen Großuhren findet (u. a. Strasbourg, Münster, Lübeck, Lund, Danzig): Über der in der Mitte liegenden Uhrscheibe befindet sich ein Figurenspiel, darunter eine Kalenderscheibe.

Der Ziffernring auf der Uhrscheibe zeigt zweimal die Ziffern von I bis XII. Er wird von dem stabförmigen Stundenzeiger einmal in 24 Stunden umrundet. Einen Minutenzeiger besaß diese Uhr nie. Konzentrisch zum Stundenring befinden sich auf der Uhrscheibe die Ringe der Tierkreiszeichen und der Monatsbilder.

Koaxial mit dem Stundenzeiger drehen sich zwei übereinanderliegende Scheiben: Die Sonnenscheibe einmal im Jahr, und die unter ihr befindliche Mondscheibe einmal während eines siderischen Monats (27,32 Tage). Im Zusammenspiel dieser beiden Scheiben wird in einer kreisförmigen Öffnung in der Sonnenscheibe die jeweilige Mondphase sichtbar. Da sich gleiche Mondphasen nach einem synodischen Monat wiederholen (29,53 Tage), müssen die Scheiben nach dieser Zeit wieder die gleiche Stellung zueinander haben. An den beiden Scheiben befindet sich je ein Zeiger mit einem Mond- bzw. Sonnenbild. Sie zeigen die Stellung von Mond und Sonne im Tierkreis. Der Sonnenzeiger gibt außerdem den jeweiligen Monat an.

Die Rostocker Uhr besitzt als einzige in der DDR eine Kalenderscheibe. Die jetzige ist die vierte in ihrer Geschichte (1472, 1643, 1745, 1885) und reicht bis ins Jahr 2017. Sie gibt zwei Gruppen von kalendarischen Anzeigen: Die einen sind dem jeweiligen Datum (Tag und Monat) zugeordnet (Tagesbuchstabe, kirchlicher Tagesname, Zeit des Sonnenaufgangs, Dauer von Tag und Nacht); die anderen sind einem bestimmten Jahr fest zugehörig (Goldene Zahl, Sonntagsbuchstabe, Sonnenzirkel, Römerzinszahl, Zeitraum zwischen Weihnacht und Fastnacht, Ostertermin). Diese letzteren müssen für die nächste Scheibe ab 2018 weitergeschrieben bzw. neu berechnet werden.

Aus der Vielzahl der Anzeigen greife ich nur ein Beispiel heraus: Tages- und Sonntagsbuchstaben (Buchstabenfolge A ... G) bilden einen „ewigen Kalender". Er gestattet, den Wochentag für jedes beliebige Datum zwischen dem 1. 1. 1885 und dem 31. 12. 2017 zu ermitteln. Dafür ein Beispiel: Auf welchen Wochentag fällt der 1. Januar 2001, der erste Tag des 21. Jahrhunderts?: Der Tagesbuchstabe jedes 1. Januar ist A. Das Jahr 2001 hat den Sonntagsbuchstaben G, d. h. in diesem Jahr sind alle Tage mit dem Tagesbuchstaben G Sonntage. A ist in der genannten Buchstabenfolge der Nachfolger von G. Also ist der 1. 1. 2001 ein Montag.

Zu jeder vollen Stunde ertönt bei dieser Uhr der Stundenschlag, und daran anschließend wird ein beliebig einstellbares Musikstück gespielt. Mittags um 12 Uhr wird der Figurenumlauf auf dem Aufsatz oberhalb der Uhrscheibe ausgelöst.

Vom Hauptwerk (siehe Zeichnung) dieser Uhr, das die Drehung des Stundenzeigers und der beiden Scheiben bewirkt, werden weitere vier Werke gesteuert: Das Schlagwerk, das Musikwerk, das Figurenwerk und das Kalenderwerk. Bis auf letzteres werden alle diese Werke täglich von Hand aufgezogen – die Arbeit des Küsters Siegfried Engel. Versucht einmal, die Schwingungsdauer des Uhrpendels zu berechnen, wenn außer den Zahn- bzw. Triebstreckenzahlen der Zahnräder und Laternentriebe bekannt ist, daß sich der Stundenzeiger in 24 Stunden einmal im Uhrzeigersinne dreht. Nutzt die so ermittelte Schwingungsdauer um zu prüfen, wie die Zeiten für eine Drehung von Sonnen- und Mondscheibe von den Werten für das tropische Jahr (365, 2422 Tage) und den siderischen Monat (27, 3217 Tage) abweichen. In welcher Richtung drehen sich die Scheiben?

Ich habe nichts über die künstlerische Ausgestaltung des Uhrenäußeren gesagt. Am besten, Ihr seht Euch auch das bei nächster Gelegenheit in der Rostocker Marienkirche selbst an. Sie ist Dienstag bis Sonnabend von 10.00 bis 12.00 und von 15.00 bis 17.00 zu besichtigen. *M. Schukowski*