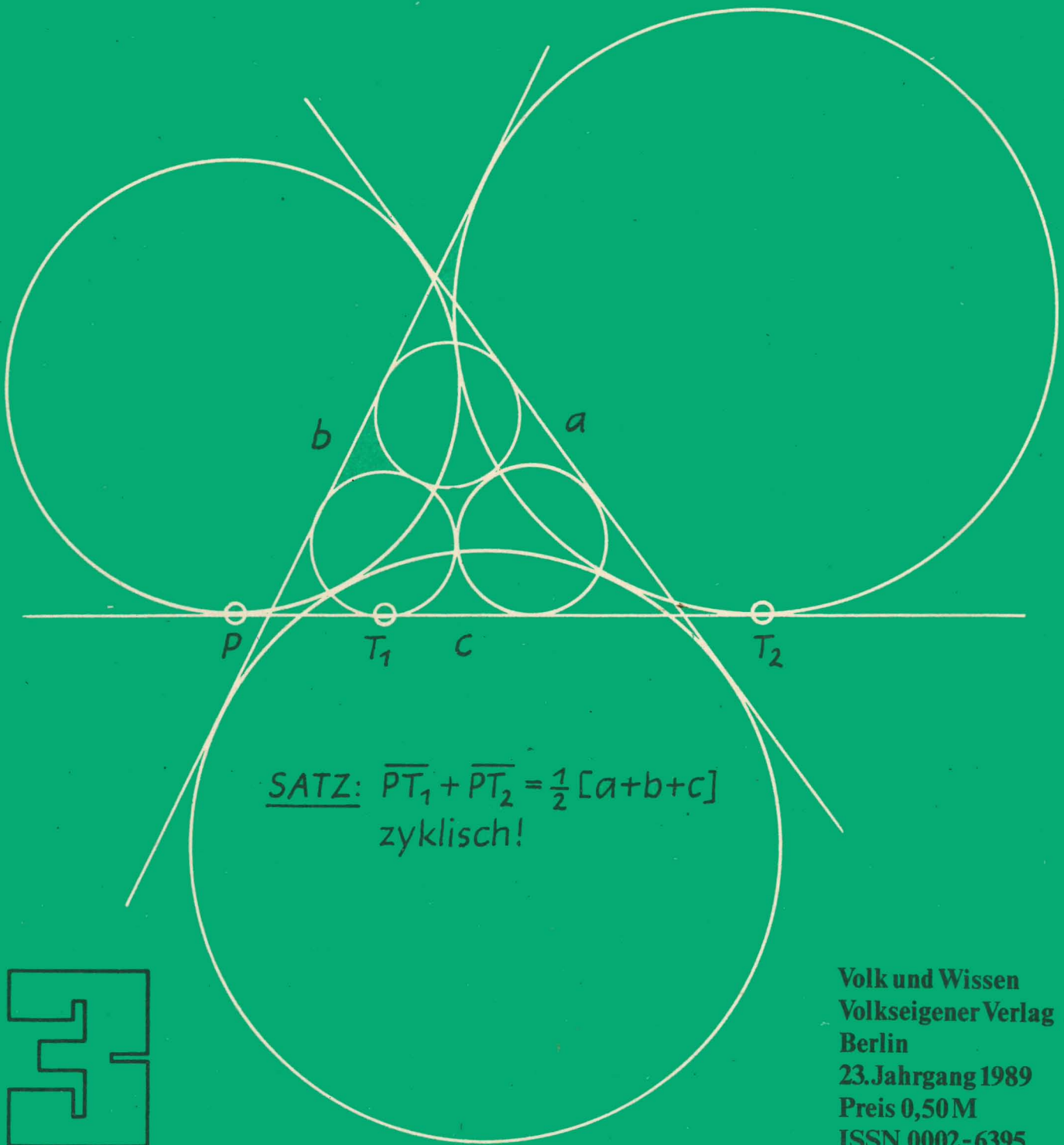
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



SATZ: $\overline{PT_1} + \overline{PT_2} = \frac{1}{2}[a+b+c]$
zyklisch!

3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
23. Jahrgang 1989
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Studiendirektor Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig 7010.

Fotos: Archiv der W.-Pieck-Universität Rostock (S. 50); Sawelski, „Die Masse und ihre Messung", VEB Fachbuchverlag Leipzig (S. 67 Mitte); Museum Göhren/Rügen (S. 67 r. oben); VEB Ammendorfer Plastwerk (S. 67 r. unten)
Vignetten: H. Teske, Leipzig (S. 59, Titel); L. Otto, Leipzig (Titelvignetten, S. 62)
Techn. Zeichnungen: StR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von S. Tunn, Barth
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 7. Februar 1989
Auslieferungstermin: 9. Juni 1989

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

49 Joachim Jungius – ein Leibniz vor Leibniz
Dr. D. Lau/stud. math. S. Röhl/stud. math. J. Schumacher, Sektion Mathematik der W.-Pieck-Universität Rostock

50 Das Fußballspiel auf der Insel Malta
StR A. Zenkert, Potsdam

52 Eine interessante geometrische Aufgabe
Dr. G. Grosche, Leipzig, nach einer Idee von S. Tunn, Barth

54 Sprachecke
R. Bergmann, Döbeln/P. Hofmann, Dr. G. Liebau (beide Leipzig)

55 Serpent – ein Spiel für zwei Personen
R. Wirsing, VEB Robotron Elektronik Zella-Mehlis, Werk Meiningen

56 Das Problem der kürzesten Fahrtstrecke
Dr. S. Dempe, Sektion Mathematik der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt

58 Attraktion für alpha-Schachfreunde
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin

59 alpha-Ferienmagazin
Zusammenstellung: OStR J. Lehmann, Leipzig

61 Informationen zum Ideenwettstreit „Kreativ mit Algorithmen"
Redaktionen „spectrum" und „Wissenschaft und Fortschritt", Berlin

62 alpha-Märchenecke
Prof. Dr. W. Walsch, Sektion Mathematik der M.-Luther-Universität Halle-Wittenberg

63 alpha-Wettbewerb 1987/88
Fortsetzung von Heft 2/89

64 XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Aufgaben der Bezirksolympiade

66 Mathematik an der Balkenwaage
A. Vogel, Limbach-Oberfrohna, z. Z. Student in Leningrad

67 Mathematik auf der Waagschale
W. Träger, VEB Organisations- und Abrechenzentrum Leipzig, BT Döbeln

68 Lösungen

III. U.-Seite: Einiges über das Sehnenviereck
OStR J. Kreusch, OS Kleindehsa/OStR K. Lehmann, 12. OS „Georg Schumann", Berlin

IV. U.-Seite: Die Ratsherrenwaage – eine Attraktion des Oschatzer Museums
W. Träger, VEB Organisations- und Abrechenzentrum Leipzig, BT Döbeln

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

Joachim Jungius – ein Leibniz vor Leibniz

Am 22. 10. 1987 jährte sich zum 400. Male der Geburtstag des Gelehrten Joachim Jungius, der nicht nur im Urteil seiner Zeitgenossen als bedeutender Mathematiker galt, sondern auch noch von einer Reihe von Wissenschaftlern der nachfolgenden Generationen geschätzt wurde. G. W. Leibniz verglich ihn z. B. mit Galilei, Kepler und Descartes und betonte, daß „er nicht nur mit allen Teilen der Gelehrsamkeit, sondern auch mit dem Innern der Mathematik in einer Weise vertraut (war), die fast über das Verständnis seiner Zeit und des Ortes, den ihm Geburt und Schicksal zugewiesen hatten, hinausging". Alexander von Humboldt, der – wie er selbst sagte – bei seinem Aufenthalt in Hamburg um 1790 die glückliche Gelegenheit hatte, die Jungiusschen Schriften kennenzulernen, sprach von dem großen, so lange verkannten Jungius. J. W. v. Goethe (der besonders Interesse an den botanischen Arbeiten Jungius' hatte) trug sich übrigens kurz vor seinem Tode mit der Absicht – ähnlich seiner Cellini-Biographie – eine von Jungius zu verfassen.

Wer war nun dieser Joachim Jungius, nach dem man z. B. in Rostock eine Straße benannt hat, von dem man jedoch in Büchern über Wissenschaftsgeschichte nicht allzu viele Informationen findet?

Geboren wurde er am 22. 10. 1587 in Lübeck als Sohn eines Gymnasiallehrers. Seine akademische Ausbildung begann Jungius in Rostock, wo er später – unterbrochen durch Studien in Gießen, Helmstedt und Padua – mehrere Jahre als Professor für Mathematik wirkte. In Rostock gründete Jungius 1622 auch die erste wissenschaftliche Gesellschaft nördlich der Alpen.

Typisch für die Studien von Jungius in jenen Jahren war sein Bestreben, sich das gesamte damalige Wissen anzueignen. Dabei war er sehr kritisch und forderte auch von seinen Schülern, ja nicht in der „Geborgenheit von Autorität einzuschlafen".

Jungius war auch ein engagierter Anhänger der pädagogischen Reformbewegungen und außerdem Doktor der Medizin.

Von 1629 bis zu seinem Tode am 23. 9. 1657 wirkte Jungius in Hamburg.

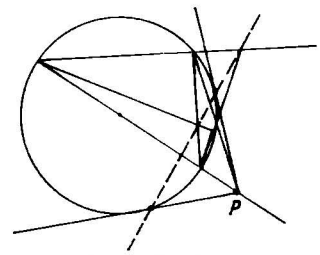
Auch wenn Jungius sich mit sehr vielen Gebieten beschäftigte (so nahm er z. B. auf Reisen zwecks astronomischer Studien sein Fernrohr mit, er legte sich Sammlungen von Naturdingen an und er experimentierte chemisch), hatte für ihn die Mathematik als Vorbild für Wissenschaftserkenntnis und -darstellung eine große Bedeutung. Es sind mehrere Reden und Schriften von ihm überliefert, in denen er den großen Nutzen und die Bedeutung der Mathematik für die allgemeine Naturerkenntnis preist, sowie ein Lehrbuch für Geometrie, mit dem er diejenigen Schüler, denen die klassische Geometrie zu schwierig erscheint, mittels empirischer Überlegungen an die Gedankengänge der Mathematik heranzuführen gedachte.

Aufs beste war Jungius mit den damals modernsten Richtungen und Entwicklungstendenzen in der Mathematik vertraut. In dieser Zeit vervollkommneten sich z. B. die Rechenmethoden (u. a. kamen Dezimalbrüche und Logarithmen auf), eine hochentwickelte Symbolik bildete sich heraus und man begann, eine Reihe von physikalisch-mechanischen Problemen (freier Fall, Planetenbewegungen, Pendelschwingungen, ...) mathematisch zu behandeln. Von Jungius ist nun bekannt, daß er wie selbstverständlich bei entsprechenden Rechnungen Logarithmen benutzte und z. B. auch trigonometrische Funktionen verwendete.

Seit 1613 beherrschte er die Buchstabenrechnung des Vieta, die er teilweise verbesserte. Er hatte übrigens die berühmte „Zetetica" von Vieta nur für eine Nacht geliehen bekommen, sich so weit wie möglich Auszüge angefertigt und dann selbständig vieles ergänzt. Vermutlich hat er auf diese Weise vor Descartes – dem man einige Verbesserungen der Vietaschen Zeichensprache zuschreibt – anstelle von großen Buchstaben die übersichtlicheren kleinen Buchstaben verwendet und den Grad einer Potenz durch Hochstellen eines Exponenten klarer als Vieta dargestellt. Die von Jungius in seinen Aufzeichnungen verwendete formelhafte Schreibweise ist auch für heutige Leser leicht verständlich.

Leider hat Jungius von seinen gewonnenen neuen Erkenntnissen auf dem Gebiet der Mathematik nichts publiziert. Daß trotzdem etwas bekannt geworden ist, verdankt Jungius vor allem seinem Schüler Woldeck Weland (1614 bis 1641) und Leibniz. Gelohnt hätte sich eine rechtzeitige Drucklegung seiner mathematischen Erkenntnisse sicher. So z. B. die seiner Restitution eines verlorenen Werkes des Apollonius von Perga über die ebenen Örter anhand der von Pappos ohne Beweis überlieferten Sätze, die von Weland im weiteren vollendet wurde, jedoch auf Grund des frühen Todes von Weland und anderer widriger Umstände nicht gedruckt wurde. Mathematikgeschichtlich wirksam wurden nur die Restitutionen von van Schooten (1615 bis 1660) und Fermat (1601 bis 1665).

Von Weland wurde 1640 eine kleine Abhandlung herausgegeben, die u. a. zwei interessante, von Jungius stammende Resultate enthält. Zum einen ist das
die Berechnung des Tetraedervolumens aus den 6 Seitenkanten (wobei Jungius auch den Radius der umbeschriebenen Kugel bestimmt hat)
und zum anderen eine hübsche
Konstruktion einer Tangente an einen Kreis von einem äußeren Punkt nur mit Hilfe eines Lineals:



Vom vorgegebenen Punkt P aus werden zwei Sekanten durch den Kreis, die eine durch den Mittelpunkt, gelegt. Die durch die Schnittpunkte der Sekanten bestimmten Seiten des entstehenden Kreisvierecks werden bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert.

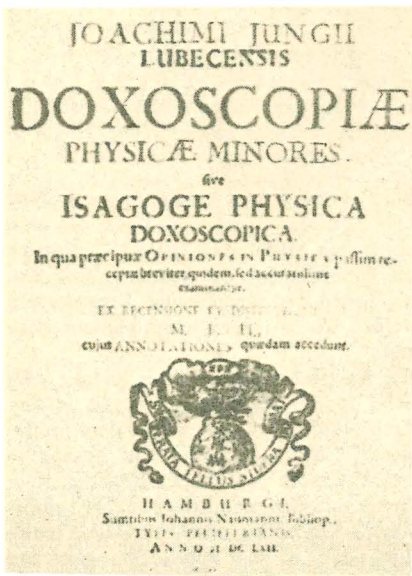
Die Verbindungslinie desselben mit dem Schnittpunkt der Diagonalen gibt auf der Kreisperipherie die gesuchten Berührungspunkte. Wir haben hier den bekannten Tangentensatz der Polarentheorie erstmalig vor uns, den man früher dem Gregorius von St. Vincentius zuschrieb. Die Verbindungslinie ist die Polare, der gegebene Punkt außerhalb des Kreises der Pol.

Eine weitere erwähnenswerte mathematische Leistung von Jungius ist der sowohl experimentelle als auch rechnerische Nachweis, daß eine Vermutung von Galilei aus dem Jahre 1638 „die Kettenlinie ist eine Parabel" falsch ist. Eine mathematische Konstruktion gab erstmalig Leibniz im Jahre 1691 an, wobei er auf den „ausgezeichneten Philosophen und Mathematiker" Jungius hinwies.

In dem Artikel über die Kettenlinie bemerkt Leibniz übrigens auch, daß man die Kettenlinie zur Hyperbelquadratur benutzen kann, womit ein seit der Antike bestehendes Problem gelöst war. (Unter der Hyperbelquadratur versteht man die Berech-

nung von Flächen, die durch einen Hyperbelast und Geraden begrenzt sind.)
Einem Brief des Jungius-Schülers Vincentius kann man nun entnehmen, daß Jungius ebenfalls eine Methode zur Hyperbelquadratur besessen haben soll. Vermutlich handelt es sich bei der Jungiusschen Hyperbelquadratur um die einer gleichseitigen Hyperbel, wie sie auch Gregorius von St. Vincentius 1647 gelang. Jungius würde mit dieser Leistung jedoch zu den Mathematikern des 17. Jahrhunderts gehören, die durch eine Reihe von Beispielen die Entwicklung der Infinitesimalmathematik vorbereiteten.

Von weiteren mathematischen Arbeiten Jungius' sind meist nicht mehr als nur die Titel bekannt. Da auch die etwa 8 000 Blätter mathematischen Inhalts des Hamburger Jungius-Archivs noch nicht vollständig ausgewertet worden sind, ist ein abschließendes Urteil über den Mathematiker Jungius zur Zeit noch nicht möglich.


JOACHIMI JUNGII
LUBECENSIS
DOXOSCOPIÆ
PHYSICÆ MINORES.
sive
ISAGOGE PHYSICA
DOXOSCOPICA.
HAMBURGI.

Abschließend sei noch bemerkt, daß Jungius nicht nur an konkreten mathematischen Problemen interessiert war, sondern auch eine allgemeine Beweislehre entwickelt hat. Dargelegt hat er seine Vorstellungen in der „Logica Hamburgensis", deren Kernstück (Buch 4) die Lehre vom wissenschaftlichen Beweis ist. Daneben findet man in den hinterlassenen Manuskripten von Jungius auch Ansätze zur Entwicklung einer mathematischen Logik. Damit waren Jungius und auch Leibniz, der diese Ansätze von Jungius weiterverfolgte, ihrer Zeit weit voraus. (Die mathematische Logik entwickelte sich erst im 19. Jh.)

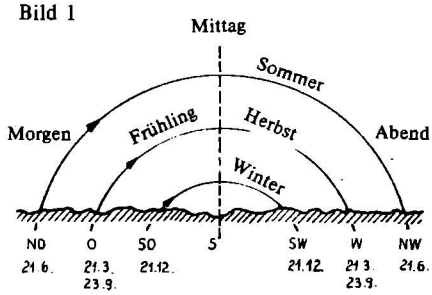
D. Lau, S. Röhl, J. Schumacher

Das Fußballspiel auf der Insel Malta

Eine unterhaltsame Betrachtung zur mathematischen Astronomie

Von der Insel Malta wurde neulich ein mit Spannung erwartetes Fußballspiel live im Fernsehen übertragen. Es war der 21. Juni, der Tag der Sommersonnenwende – der längste lichte Tag des Jahres!
Da im südlichen Europa um diese Zeit die Tagestemperaturen sehr hoch liegen, wurde der Beginn des Spieles auf 20^h MEZ (21^h MESZ) festgelegt. Wir hatten es uns an diesem Abend in den Sesseln vor dem Fernsehapparat gemütlich gemacht, draußen schien noch die Sonne, die sich noch etwa 3° über dem Horizont befand.
Der Anblick auf dem Bildschirm überraschte uns! Auf dem Spielfeld in La Valetta, der Hauptstadt von Malta, herrschte bereits Nacht, die großen Flutlichtscheinwerfer waren eingeschaltet. Wir fragten uns nach dem Grund dieses Unterschiedes, und mein Freund hatte dafür sofort eine Erklärung: „Ganz einfach, Malta liegt viel weiter im Osten, also ist dort die Sonne früher als bei uns untergegangen!" – Zugegeben, im Geographieunterricht war er keine Leuchte gewesen, denn sonst hätte er nicht eine solche Antwort geben können. Ein rascher Blick auf den Atlas belehrte ihn: Die geographische Länge der Insel stimmt mit der von Berlin überein. Also kann es keinen Zeitunterschied geben, und auf Malta steht die Sonne ebenfalls um 12^h MEZ (13^h MESZ) im Süden wie bei uns.
Wie aber war dieser Unterschied zu erklären? Bei uns taghell, auf Malta bereits dunkle Nacht? – Wohlgemerkt, es handelte sich um eine Direktübertragung und nicht um eine Aufzeichnung! Außerdem zeigten die Uhren auf dem Malteser Fußballplatz genau unsere Zeit an.
Um auf unsere Frage die richtige Antwort zu bekommen, müssen wir uns ein wenig mit den Tagbögen der Sonne befassen, also mit einem Thema, das im Heimatkundeunterricht der 3. Klasse behandelt worden ist. Ferner benötigen wir dazu auch noch Kenntnisse aus der mathematischen Geographie.

Bild 1

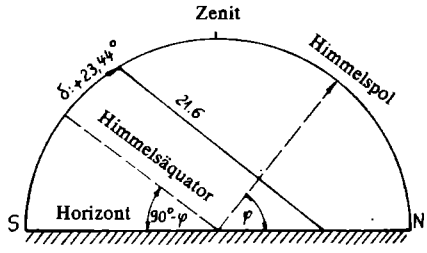


Wir wissen, daß die Sonne täglich in östlicher Richtung aufgeht, im Laufe des Vormittags immer höher steigt, um zu Mittag (12^h MEZ) ihren höchsten Punkt genau im Süden zu erreichen. Am Nachmittag nimmt die Höhe der Sonne wiederum ab, bis sie in westlicher Richtung untergeht. Diesen täglichen Sonnenweg bezeichnen wir als den Tagbogen der Sonne (Bild 1). Beobachten wir die Tagbögen im Laufe eines Jahres, müssen wir feststellen, daß sie sehr verschieden groß sind. An den kurzen Wintertagen ist der Tagbogen klein, die Sonne erreicht nur eine Mittagshöhe von 14°. Im Sommer dagegen, wenn sich die Sonne mehr als 16 Stunden über dem Horizont befindet, ist der Tagbogen groß, die Mittagshöhe 61°. Dazwischen liegt der gleich große Tagbogen vom Frühling und Herbst, der die Besonderheit aufweist, daß die Sonne genau im Ostpunkt aufgeht und im Westpunkt untergeht. Dies trifft für die anderen Jahreszeiten nicht zu. So geht die Sonne am 21. 6. im Nordosten auf und im Nordwesten unter, am 21. 12. ist dies im Südosten und Südwesten der Fall. Wer einmal aufmerksam über einen längeren Zeitraum hinweg beobachtet, wo z. B. die Sonne untergeht, wird dieses „Wandern" des Untergangpunktes feststellen können. Mit Hilfe einer einfachen Skizze, die das Datum des Beobachtungstages enthält, bekommt man ein brauchbares Beobachtungsprotokoll.

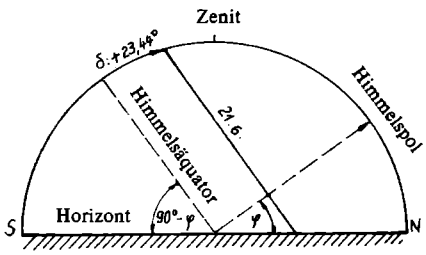
In unserem Beispiel handelt es sich um den größtmöglichen Tagbogen der Sonne im Jahr. Aus diesem Grund wird der 21. 6. als Tag der Sommer-Sonnenwende bezeichnet, von da ab werden die Tage wieder kürzer. Es ist aber nicht gleichgültig, wo wir uns am 21. 6. befinden, ob in Leningrad oder Kairo oder gar auf dem Äquator. Da Malta auf einer geographischen Breite von 36,5° liegt, besteht zu Berlin (52,5°) ein Breitenunterschied von 16°. Hier haben wir die Ursache zu suchen!
Die Tagbögen der Sonne verlaufen unter einem ganz bestimmten Winkel zum Horizont, der in Berlin (die Unterschiede in der DDR sind gering) 37,5° beträgt. Reisen wir nach Norden, werden die Winkel kleiner, die Tagbögen verlaufen flacher, bis sie auf dem Nordpol parallel zum Horizont liegen. Dieser Sonderfall soll uns aber für unsere Aufgabe weiter nicht interessieren!
Reisen wir nach Süden, werden die Winkel

größer, die Tagbögen verlaufen steiler, und die Sonne erreicht größere Höhen. Während bei uns die Sonne am 21. 6. zu Mittag 61° hoch steht, sind es auf Malta immerhin schon 77°. Diese Differenz entspricht dem Unterschied in der geographischen Breite. Wir haben in den verschiedenen Breiten eine unterschiedliche Lage der Tagbögen,

Bild 2



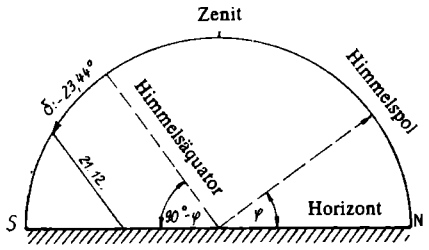
a) Für die geographische Breite von Berlin



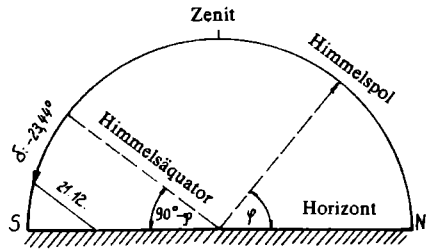
b) Für die geographische Breite von Malta

Schematische Darstellung der Tageslänge in verschiedenen geographischen Breiten am 21. 6.
(Die Tageslänge in Malta differiert um 10 mm gegenüber der Tageslänge von Berlin. Die Längen der Tagbögen sind nicht ausmeßbar, sie geben nur das ungefähre Verhältnis zueinander wieder.)

Bild 3



a) Für die geographische Breite von Berlin

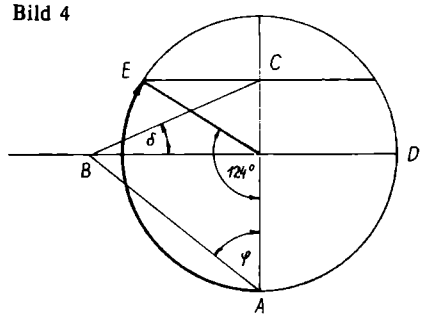


b) Für die geographische Breite von Malta

Schematische Darstellung der Tageslänge in verschiedenen geographischen Breiten am 21. 12.

so daß diese am Äquator sogar senkrecht verlaufen.
Verändern wir die geographische Breite, tritt eine weitere Besonderheit auf, die wenig bekannt ist: Die Längen der Tage sind unterschiedlich! Der 21. 6. ist zwar überall (vom Äquator und den Polen abgesehen!) der längste Tag des Jahres, aber er ist nicht überall gleich lang (Bild 2). Wie die Bilder zeigen, sind die Sommertage im Norden länger als im Süden, dafür sind aber die Wintertage im Süden länger als im Norden (Bild 3).
Diese wichtige Erkenntnis halten wir nun einmal fest! Somit beträgt in Berlin am 21. 6. der lichte Tag 16 Stunden 35 Minuten, auf Malta dagegen nur 14 Stunden 27 Minuten. Das bedeutet einen Unterschied von 2 h 8 min. Hinzu kommt noch, daß die Dämmerungsdauer im Süden kürzer ist und die Nächte um diese Zeit keine Aufhellung im Norden (Mitternachtsdämmerung) aufweisen wie bei uns. Das bedeutet aber auch, daß auf Malta die Sonne um 1 h 4 min (die Hälfte des Gesamtunterschiedes) später aufgeht und ebenfalls um diesen Betrag früher untergeht.
Die Berechnung der Tageslänge erfolgt mit Hilfe von Formeln der Trigonometrie (Dreiecksberechnung), die aber erst in den letzten Klassenstufen behandelt werden. Wir können uns die Berechnung sparen, indem wir ein graphisches Verfahren anwenden, das einfach und rasch zu handhaben ist (Bild 4). Das Ergebnis ist der sogenannte halbe Tagbogen, also die Zeit vom Sonnenaufgang bis Mittag (Sonne im Süden) bzw. vom Mittag bis zum Sonnenuntergang. Die Genauigkeit dieses Verfahrens hängt von der Größe der Zeichnung ab:

Bild 4



Die geographische Ermittlung des halben Tagbogens

Der halbe Tagbogen für den 21. 6. in Berlin (52,5°) beträgt 124°. Dies mit 15 geteilt ergibt 8,266 6 h.
Die Gesamttageslänge beträgt: 16,533 3 h.

Zuerst wird ein Kreis mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern gezeichnet. Bei *A* wird die geographische Breite des betreffenden Ortes aufgetragen und bis zum waagerechten Durchmesser verlängert. Bei *B* wird die Deklination des Gestirns (Sonne, Mond, Planet, Stern) aufgetragen, und zwar positiv nach oben, negativ nach unten. In *C* wird eine Parallele zu $\overline{BD}$ bis zum Kreisumfang gezogen. Der Winkel zwischen *A* und *E* entspricht dem halben Tagbogen. Durch Division mit 15 wird in das Stundenmaß umgerechnet. Die somit ermittelte Zeit entspricht dem Stundenwinkel vom Gestirnsaufgang bis Mittag bzw. vom Mittag bis zum Gestirnsuntergang. Ein halber Tagbogen von 75° (= 5^h) bedeutet, daß die Sonne um 7^h wahrer Ortszeit aufgeht und um 17^h untergeht. Durch Multiplikation mit 2 bekommt man die Gesamttageslänge der Sonne. Bei Mond, Planeten und Sternen spricht man logischerweise nicht vom Tagbogen, sondern vom Sichtbarkeitsbogen oder von der Sichtbarkeitsdauer.
Unter der „Deklination" versteht man den Winkelabstand eines Gestirns vom Himmelsäquator, der bei der Sonne zwischen +23,44° am 21. 6. und −23,44° am 21. 12. schwankt. Am 21. 3. und 23. 9. beträgt die Deklination der Sonne 0°. Die Deklination kann dem „Kalender für Sternfreunde" oder anderen astronomischen Jahrbüchern entnommen werden.
Verbleiben wir noch bei unserem Fußballspiel! Wie wäre es, wenn das Spiel zur Zeit der Wintersonnenwende, am 21. 12., stattfände? Hier liegen die Verhältnisse umgekehrt, da die Wintertage im Süden länger als im Norden sind und die Sonne früher auf- und später untergeht. Angenommen, das Fußballspiel begänne um 16^h MEZ! Bei uns wäre die Sonne bereits untergegangen, die Straßenbeleuchtung wäre eingeschaltet. Auf Malta wäre es dagegen noch taghell, und die Sonne hätte eine Höhe von 7,5°. Das Bild 3 zeigt die unterschiedlich großen Tagbögen der Sonne am 21. 12.
Für unsere Überlegungen gibt es noch eine 3. Möglichkeit: Aus den Bildern ist zu ersehen, daß der mittlere Tagbogen für den 21. 3. und 23. 9. stets gleich groß ist, gleich in welcher geographischen Breite man sich befindet. An diesen beiden Tagen befindet sich die Sonne auf dem Himmelsäquator, die Länge des lichten Tages beträgt 12 h. Wann müßte das Fußballspiel stattfinden, damit die Beleuchtungsverhältnisse bei uns und auf Malta gleich wären? Die Antwort ist einfach: Am 21. 3. oder 23. 9.!
Nehmen wir den Spielbeginn für 18^h MEZ an, so wäre für uns sowie für Malta Sonnenuntergang.
Abschließend sei noch erwähnt, daß selbst innerhalb unserer Republik, die eine Nord-Süd-Ausdehnung von etwa 500 km hat (4° in der geographischen Breite) beachtliche Unterschiede in der Tageslänge bestehen. So ist auf der Insel Rügen der lichte Tag am 21. 6. um 45 Minuten länger als im Vogtland. Dafür aber liegen am 21. 12. die Verhältnisse umgekehrt: Auf Rügen ist der Wintertag um 45 Minuten kürzer als im Vogtland. Mit Hilfe des Bildes 2 kann dies überprüft werden. Für den halben Tagesbogen besteht zwischen Rügen (54,5°) und dem Vogtland (50,5°) ein Unterschied von 5,5°.
So betrachtet, kann ein Fußballspiel auch etwas mit der Astronomie zu tun haben!

A. Zenkert

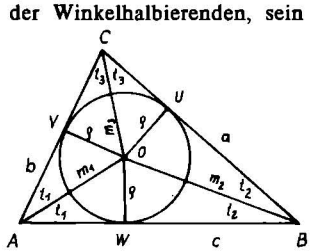
Eine interessante geometrische Aufgabe

Aus dem Altertum ist das Berührungsproblem des Apollonius bekannt. Apollonius von Perge lehrte um 200 v. u. Z. in Alexandria und Pergamon. Er stellte die Aufgabe, Kreise zu finden, die drei gegebene Kreise berühren. Dabei ist zugelassen, daß die gegebenen Kreise in Punkte oder auch Geraden entartet sind, so daß sich zehn verschiedene Fälle ergeben. Eine konstruktive Lösung dieser zehn Aufgaben ist in [1] angegeben. Angeregt durch dieses Problem stellte G. F. Malfatti (1731 bis 1807) im Jahre 1803 folgende Aufgabe: Gesucht sind drei Kreise, so daß jeder die beiden anderen und zugleich zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt. Er selbst gab eine Lösung an, indem er die Radien der gesuchten Kreise berechnete. J. Steiner (1796 bis 1863) veröffentlichte eine geometrische Konstruktion ohne Beweis. Der von Steiner benutzte Hilfssatz wurde erst 1874 durch Schröter bewiesen. Interessant ist, daß diese recht schwierige Aufgabe in einem Schulbuch [2] behandelt wird, allerdings ist der dort angegebene Beweis des von Steiner benutzten Hilfssatzes unverständlich dargestellt. Ein sehr elegantes Ergebnis durch Berechnung erhielt A. Cayley (1821 bis 1895), auf das später noch eingegangen wird.

S. Tunn aus Barth beschäftigte sich 1987 mit dieser Aufgabe. Er fand eine rechnerische Lösung, die lediglich Kenntnisse der Schulmathematik voraussetzt, aber mathematische Phantasie und Geschick im Umformen von Termen verlangt. Er entdeckte neben den bisher betrachteten einbeschriebenen Kreisen noch drei weitere Kreise, die ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe genügen, und konnte einen sehr schönen Satz beweisen, der diese beiden Tripel von Kreisen zueinander in Verbindung bringt. Ehe die Lösung von S. Tunn dargestellt wird, sollen noch einige einfache Beziehungen an Dreiecken bereit gestellt werden.

1. Bild 1 zeigt ein Dreieck mit seinem Inkreis. Der Mittelpunkt 0 ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, sein Radius sei ϱ. Mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ wird der halbe Umfang des Dreiecks bezeichnet. Dann gilt mit
$\overline{AW} = \overline{AV} = t_1$, $\overline{BW} = \overline{BU} = t_2$,
$\overline{CU} = \overline{CV} = t_3$:

Bild 1



$$(1)\quad \left.\begin{aligned} t_1 + t_2 &= c \\ t_2 + t_3 &= a \\ t_1 + t_3 &= b \end{aligned}\right\} \text{ also}$$

$$\left\{\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2}(b+c-a) = s-a \\ t_2 &= \frac{1}{2}(c+a-b) = s-b \\ t_3 &= \frac{1}{2}(a+b-c) = s-c. \end{aligned}\right.$$

Das Additionstheorem für die Kosinusfunktion lautet:
$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$.
Mit $\varphi = \psi = \frac{\alpha}{2}$: $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$.
Wegen $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ folgt daraus

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

wegen $\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}$ folgt daraus

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Aus dem Kosinussatz erhält man:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \text{ und weiter:}$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(s-c)(s-b)}{bc} \text{ nach der}$$

dritten binomischen Formel. Damit ergibt sich:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \text{ und entsprechend}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Aus diesen beiden Formeln findet man:

$$(2)\quad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$

wobei die beiden letzten Gleichungen aus der ersten durch zyklische Vertauschung folgen. Aus Bild 1 folgt weiter:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{t_1} = \frac{\varrho}{s-a},$$

und daraus mittels (2):

$$(3)\quad \varrho = (s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

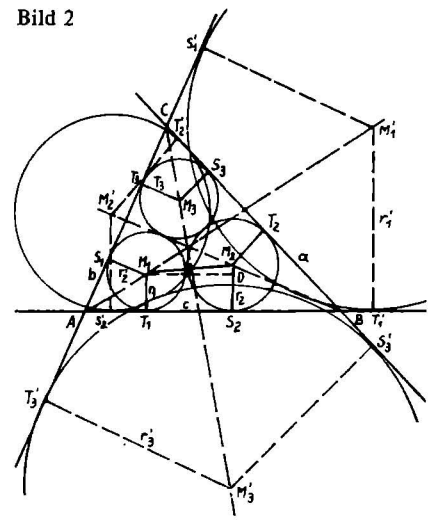
Für die Fläche A des Dreiecks ergibt sich aus Bild 1: $A = \varrho s$, und mit (3) erhält man die Formel des Heron von Alexandria (um 110 v. u. Z.):

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Lösung der Aufgabe von Malfatti nach S. Tunn.

In Bild 2 werde bezeichnet:

Bild 2



$\overline{AT_1} = \overline{AS_1} = x$, $\overline{BT_2} = \overline{BS_2} = y$,
$\overline{CT_3} = \overline{CS_3} = z$.5
M_1, M_2, M_3 sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise, die ganz im Innern des Dreiecks liegen, r_1, r_2, r_3 deren Radien. Läßt man zu, daß die Kreise auch die Verlängerungen der Seiten berühren können, so erhält man die von S. Tunn zusätzlich betrachteten Kreise mit den Mittelpunkten M_1', M_2', M_3' und den Radien r_1', r_2', r_3'.
Die Tangentenlängen seien
$\overline{AT_1'} = x'$, $\overline{BS_2'} = y'$, $\overline{CT_3'} = z'$.
Aus ΔM_1DM_2 folgt für $\overline{T_1S_2} = \overline{M_1D}$:
$\overline{T_1S_2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_2-r_1)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$
und entsprechend: $\overline{T_1'S_2'} = 2\sqrt{r_1'r_2'}$.
Wegen $\overline{AT_1} + \overline{T_1S_2} + \overline{S_2B} = c$ ergibt sich
$x + 2\sqrt{r_1r_2} + y = c$.
Aus $\overline{AT_1'} - c = \overline{T_1'S_2'} - \overline{BS_2'}$,
also $x' - c = 2\sqrt{r_1'r_2'} - y'$, folgt:
$x' - 2\sqrt{r_1'r_2'} + y' = c$.
Führt man das für alle drei Seiten aus, so folgen zwei Systeme von Ausgangsgleichungen:

$$\begin{aligned} &x + 2\sqrt{r_1r_2} + y = c \\ (4)\quad &y + 2\sqrt{r_2r_3} + z = a \\ &z + 2\sqrt{r_3r_1} + x = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x' - 2\sqrt{r_1'r_2'} + y' = c \\ (4')\quad &y' - 2\sqrt{r_2'r_3'} + z' = a \\ &z' - 2\sqrt{r_3'r_1'} + x' = b. \end{aligned}$$

Wegen $r_1 = x\tan\frac{\alpha}{2}$, $r_2 = y\tan\frac{\beta}{2}$,
$r_2 = z\tan\frac{\gamma}{2}$ und $r_1' = x'\tan\frac{\alpha}{2}$,
$r_2' = y'\tan\frac{\beta}{2}$, $r_3' = z'\tan\frac{\gamma}{2}$ folgt
aus (4) bzw. (4') unter Verwendung von (2):

$$\begin{aligned} &x + 2\sqrt{\frac{s-c}{s}xy} + y = c \\ (5)\quad &y + 2\sqrt{\frac{s-a}{s}yz} + z = a \\ &z + 2\sqrt{\frac{s-b}{s}zx} + x = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x' - 2\sqrt{\frac{s-c}{s}x'y'} + y' = c \\ (5')\quad &y' - 2\sqrt{\frac{s-a}{s}y'z'} + z' = a \end{aligned}$$

$$z' - 2\sqrt{\frac{s-b}{s}z'x'} + x' = b.$$

Beide Gleichungssysteme bleiben bei gleichzeitiger zyklischer Vertauschung von a, b, c und x, y, z bzw. x', y', z' bis auf die Reihenfolge der Gleichungen unverändert. Löst man jeweils nach den Quadratwurzeln auf und quadriert, so lassen sich beide Systeme zusammenfassen:

$$\begin{aligned} 4\frac{s-c}{s}uv &= (c-u-v)^2 \\ (6)\quad 4\frac{s-a}{s}vw &= (a-v-w)^2 \\ 4\frac{s-b}{s}wu &= (b-w-u)^2. \end{aligned}$$

Man beachte: Ist x, y, z Lösung von (5) bzw. x', y', z' Lösung von (5'), so ist auch $u = x$, $v = y$, $w = z$ bzw. $u = x'$, $v = y'$, $w = z'$ Lösung von (6), aber nicht jede Lösung von (6) muß auch Lösung von (5) oder (5') sein. Die erste Gleichung von (6) kann umgeformt werden zu:

$$v^2 - 2v\left(c - \left(2\frac{c}{s} - 1\right)u\right) + (c-u)^2 = 0,$$

und weiter:

$$v = c - \left(2\frac{c}{s} - 1\right)u \pm 2\sqrt{\left(\frac{c}{s} - \left(\frac{c}{s}\right)^2\right)(su - u^2)}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$R = 2\frac{a}{s} - 1$, $S = 2\frac{b}{s} - 1$, $T = 2\frac{c}{s} - 1$ und

$F = 2\sqrt{\frac{a}{s} - \left(\frac{a}{s}\right)^2}$, $G = 2\sqrt{\frac{b}{s} - \left(\frac{b}{s}\right)^2}$,

$H = 2\sqrt{\frac{c}{s} - \left(\frac{c}{s}\right)^2}$, so erhält man daraus:

$$(7)\quad v = c - Tu \pm H\sqrt{su - u^2},$$

und entsprechend aus der dritten Gleichung von (6):

$$(8)\quad w = b - Su \pm G\sqrt{su - u^2}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt: $a < b + c$, also $2a < a + b + c = 2s$ und damit $a < s$, d. h. $\frac{a}{s} < 1$ und entsprechend $\frac{b}{s} < 1$ und $\frac{c}{s} < 1$. Deshalb gilt $F > 0$, $G > 0$, $H > 0$, so daß durch F, G, H dividiert werden darf. Damit folgt aus (7): $\mp\sqrt{su - u^2} = \frac{1}{H}(c - Tu - v)$. Da man die erste Gleichung von (6) hätte auch nach u auflösen können, lassen sich aus (6) folgende Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned} \mp\sqrt{su - u^2} &= \frac{1}{H}(c - Tu - v), \\ \mp\sqrt{sv - v^2} &= \frac{1}{F}(a - Rv - w), \\ \mp\sqrt{sw - w^2} &= \frac{1}{G}(b - Sw - u), \\ \mp\sqrt{su - u^2} &= \frac{1}{G}(b - Su - w), \\ \mp\sqrt{sv - v^2} &= \frac{1}{H}(c - Tv - u), \\ \mp\sqrt{sw - w^2} &= \frac{1}{F}(a - Rw - v). \end{aligned}$$

Die Lösungen von (5) bzw. (5') können nur jeweils sechs der abgeleiteten Gleichungen gleichzeitig erfüllen, wenn diese sechs Gleichungen bei zyklischer Vertauschung von a, b, c und u, v, w bis auf ihre Reihenfolge ungeändert bleiben (vgl. Bemerkung im Anschluß an (5) und (5')). Daher muß jeweils entweder stets das positive oder stets das negative Vorzeichen der Wurzeln gewählt werden, so daß jeweils die rechten Seiten der Gleichungen mit gleicher linken Seite gleich sind. Durch Gleichsetzen und Umformen erhält man folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{G} - \frac{T}{H}\right)u - \frac{1}{H}v + \frac{1}{G}w &= \frac{b}{G} - \frac{c}{H} \\ \frac{1}{H}u + \left(\frac{T}{H} - \frac{R}{F}\right)v - \frac{1}{F}w &= \frac{c}{H} - \frac{a}{F} \\ -\frac{1}{G}u + \frac{1}{F}v + \left(\frac{R}{F} - \frac{S}{G}\right)w &= \frac{a}{F} - \frac{b}{G}. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem für u, v, w ist nicht eindeutig lösbar, weil die Gleichungen linear abhängig sind. Bildet man die Summe der drei linken und der drei rechten Seiten, so erhält man:

$$\left(\frac{1-T}{H} + \frac{S-1}{G}\right)u + \left(\frac{1-R}{F} + \frac{T-1}{H}\right)v + \left(\frac{1-S}{G} + \frac{R-1}{F}\right)w = 0.$$

Setzt man für die Abkürzungen die Werte ein, so erhält man mit

$$\begin{aligned} (9)\quad \frac{1-R}{F} &= \sqrt{\frac{s}{a} - 1} = f, \\ \frac{1-S}{G} &= \sqrt{\frac{s}{b} - 1} = g, \\ \frac{1-T}{H} &= \sqrt{\frac{s}{c} - 1} = h \end{aligned}$$

die Gleichung:

$$(10)\quad (h-g)u + (f-h)v + (g-f)w = 0.$$

Die Summe der drei Koeffizienten in (10) ist null.

1. Fall: $a \neq b$, $b \neq c$ und $a \neq c$. Dann folgt aus (9), daß f, g, h paarweise verschieden sind. Daher ist in (10) kein Koeffizient null. Man kann deshalb (10) z. B. nach w auflösen:

$$(11)\quad w = pu + qv \text{ mit } p = \frac{g-h}{g-f}, \quad q = \frac{h-f}{g-f} \text{ und}$$

$$(12)\quad p + q = 1.$$

Multipliziert man (7) mit q und setzt aus (11) w in (8) ein und ordnet nach qv um, so erhält man:

$$qv = q\left(c - Tu \pm H\sqrt{su - u^2}\right)$$

$$qv = b - Su \pm G\sqrt{su - u^2} - pu.$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten und Ordnen folgt:

$$(13)\quad \mp(Hq - G)\sqrt{su - u^2} = (S - Tq + p)u - (b - cq).$$

Setzt man für S und T die Terme ein und beachtet (12), so folgt:

$$S - Tq + p = \left(2\frac{b}{s} - 1\right) - \left(2\frac{c}{s} - 1\right)q + p = \frac{2}{s}(b - cq).$$

Mit $\frac{b - cq}{Hq - G} = B$ ergibt sich aus (13):

$$\mp\sqrt{su - u^2} = \left(\frac{2}{s}u - 1\right)B.$$

Daraus folgt durch Quadrieren und Ordnen:

$$\left(\frac{4}{s^2}B^2 + 1\right)u^2 - s\left(\frac{4}{s^2}B^2 + 1\right)u + B^2 = 0,$$

also:

$$(14)\quad u^2 - su + \frac{B^2s^2}{4B^2 + s^2} = 0.$$

Wegen der Bemerkung im Anschluß an (6) erfüllen sowohl x als auch x' die Gleichung (14). Da aber (14) nur zwei Lösungen hat und $x \neq x'$ gilt, sind x und x' die Lösungen von (14):

$$u_{1,2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{B^2s^2}{4B^2 + s^2}} = \frac{s}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{s^2}{4B^2 + s^2}}\right).$$

Setzt man noch $\frac{s^2}{4B^2 + s^2} = Q$ und beachtet, daß aus der Definition von x und x' folgt: $x \leqq x'$, so erhält man:

$$x = u_1 = \frac{s}{2}(1 - \sqrt{Q}),$$

$$x' = u_2 = \frac{s}{2}(1 + \sqrt{Q}).$$

Für y, y', z, z' erhält man entsprechende Formeln durch zyklische Vertauschung. Daraus folgt der Satz von S. Tunn:

Es gilt: $x + x' = y + y' = z + z' = s$.

Kennt man also die Punkte T_1, T_2, T_3, so lassen sich die Punkte T_1', T_2', T_3' nach diesem Satz leicht konstruieren und umgekehrt.

2. Fall: Ist das Dreieck gleichschenklig, also etwa $a = b \neq c$, so stimmen die Koeffizienten der 2. und 3. Gleichung in (6) überein, woraus $u = v$ folgt. Aus der ersten Gleichung von (6) findet man:

$$u_{1,2} = v_{1,2} = \frac{s}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{c}{s}}\right),$$

woraus sich wie oben ergibt:

$$x = y = \frac{s}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{s}}\right),$$

$$x' = y' = \frac{s}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{c}{s}}\right).$$

z und z' gewinnt man aus (8), indem man für u entweder x oder x' einsetzt.

3. Fall: Ist das Dreieck gleichseitig:

$a = b = c$, so wird $s = \frac{3a}{2}$, und aus (6) folgt wieder $u = v = w$. Damit geht jede der Gleichungen von (6) über in:

$\frac{4}{3}u^2 = (a - 2u)^2$, woraus folgt:

$$u_1 = x = y = z = \frac{3a}{4} - \frac{a}{4}\sqrt{3} \text{ bzw.}$$

$$u_2 = x' = y' = z' = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4}\sqrt{3}.$$

2. Bemerkung zur Lösung von Cayley. Dieser hatte gefunden [3], daß das spezielle quadratische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &a_1X^2 + a_2Y^2 + 2b_1XY = t^2a_3(a_1a_2 - b_1^2) \\ (15)\quad &a_2Y^2 + a_3Z^2 + 2b_2YZ = t^2a_1(a_2a_3 - b_2^2) \\ &a_3Z^2 + a_1X^2 + 2b_3ZX = t^2a_2(a_3a_1 - b_3^2) \end{aligned}$$

folgende Lösung hat:

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{t^2}{2a_1}\left(a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 + b_2\sqrt{D_3D_1} - b_3\sqrt{D_1D_2} - b_1\sqrt{D_2D_3}\right) \\ (16)\quad Y^2 &= \frac{t^2}{2a_2}\left(a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 - b_2\sqrt{D_3D_1} + b_3\sqrt{D_1D_2} - b_1\sqrt{D_2D_3}\right) \\ Z^2 &= \frac{t^2}{2a_3}\left(a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 - b_2\sqrt{D_3D_1} - b_3\sqrt{D_1D_2} + b_1\sqrt{D_2D_3}\right) \end{aligned}$$

mit $D_1 = a_1a_2 - b_1^2$, $D_2 = a_2a_3 - b_2^2$, $D_3 = a_3a_1 - b_3^2$.
Setzt man nun:

$$b_1 = \sqrt{\frac{s-c}{s}},\ b_2 = \sqrt{\frac{s-a}{s}},$$

$$b_3 = \sqrt{\frac{s-b}{s}},\ t^2 = s,\ a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

und $X^2 = x$, $Y^2 = y$, $Z^2 = z$,
so geht das System (15)
in das Gleichungssystem (5) über.
Beachtet man noch:

$$t^2 b_1 b_2 b_3 = s\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}} = \varrho$$

wegen (3) und

$$D_1 = 1 - \frac{s-c}{s} = \frac{c}{s},\ D_2 = \frac{a}{s},\ D_3 = \frac{b}{s}$$ also:

$$b_2\sqrt{D_3D_1} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{(s-a)bc}{s}},$$

$$b_3\sqrt{D_1D_2} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{(s-b)ca}{s}},$$

$$b_1\sqrt{D_2D_3} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{(s-c)ab}{s}},$$

und berechnet aus Bild 1:
$\overline{AO} = m_1 = \sqrt{t_1^2 + \varrho^2}$, so erhält man nach (1) und (3):

$$t_1^2 + \varrho^2 = (s-a)^2 + \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

$$= \frac{(s-a)}{s}((s-a)s + (s-b)(s-c)).$$

$$= \frac{(s-a)}{s}bc.$$

Damit wird $b_2\sqrt{D_3D_1} = \frac{1}{s}m_1$

und entsprechend $b_3\sqrt{D_1D_2} = \frac{1}{s}m_2$,

$b_1\sqrt{D_2D_3} = \frac{1}{s}m_3$ mit $m_2 = \overline{BO}$, $m_3 = \overline{CO}$.

Aus (16) folgt dann:

$$x = \frac{1}{2}(s - \varrho + m_1 - m_2 - m_3)$$

$$(17)\quad y = \frac{1}{2}(s - \varrho - m_1 + m_2 - m_3)$$

$$z = \frac{1}{2}(s - \varrho - m_1 - m_2 + m_3).$$

x, y, z setzen sich also in einfacher Weise aus s, ϱ und den Abschnitten m_1, m_2, m_3 der Winkelhalbierenden zusammen. Damit lassen sich x, y, z leicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. Soweit zur Lösung von Cayley.
Würde man

$$b_1 = -\sqrt{\frac{s-c}{s}},\ b_2 = -\sqrt{\frac{s-a}{s}},$$

$$b_3 = -\sqrt{\frac{s-b}{s}}$$

setzen, so erhielte man aus (15) das Gleichungssystem (5') mit der Lösung:

$$x' = \frac{1}{2}(s + \varrho - m_1 + m_2 + m_3)$$

$$y' = \frac{1}{2}(s + \varrho + m_1 - m_2 + m_3)$$

$$z' = \frac{1}{2}(s + \varrho + m_1 + m_2 - m_3),$$

woraus sich ebenfalls der Satz von S. Tunn ergibt:

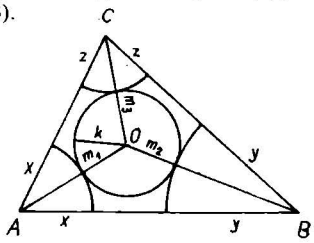
$$x + x' = y + y' = z + z' = s.$$

Aus der von Cayley angegebenen Lösung für x, y, z hat S. Tunn noch einen weiteren Satz gefunden. Setzt man nämlich

$k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + \varrho - s)$, so folgt:

$x = m_1 - k$, $y = m_2 - k$, $z = m_3 - k$, d. h.:
Schlägt man um den Mittelpunkt O des Inkreises einen Kreis mit Radius k, so schneidet dieser auf den Abschnitten m_1, m_2, m_3 die Tangentenlängen x, y, z ab (Bild 3).

Bild 3



Ein entsprechender Satz gilt auch für die Tangentenlängen x', y', z' der „äußeren" Kreise. Setzt man $k' = k + s$, so folgt:
$x' = k' - m_1$, $y' = k' - m_2$,
$z' = k' - m_3$, d. h.:
Schlägt man um den Mittelpunkt O des Inkreises einen Kreis mit Radius k' und verlängert die Abschnitte m_1, m_2, m_3 über die Ecken des Dreiecks hinaus, so schneidet dieser Kreis auf den Verlängerungen die Tangentenlängen x', y', z' ab.

G. Grosche,
nach einer Idee von S. Tunn, Barth

Literatur:

[1] Grosche, G.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2. Mathematische Schülerbücherei, Leipzig 1983.
[2] Hoffmann, G.: Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben. Leipzig 1910.
[3] Loeber, K.: Beiträge zur Lösung und Geschichte des Malfattischen Problems und seiner Erweiterungen. Dissertation, Phil. Fak. Universität Halle 1914.

Olympische Kryptogramme

Buchstaben sind durch Ziffern zu ersetzen (gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern), so daß richtige arithmetische Beziehungen entstehen. Anfangsbuchstaben eines Wortes ist nicht die Ziffer 0 zuzuordnen!
Welches der beiden Kryptogramme, die an Olympia '88 erinnern, hat eine Lösung?

▲1▲

KRISTIN : OTTO = GOLD

▲2▲

KRISTIN : OTTO = 6 · GOLD

Die olympischen Sommerspiele 1992 werden in Barcelona durchgeführt. Wieviel Lösungen besitzen die Kryptogramme?

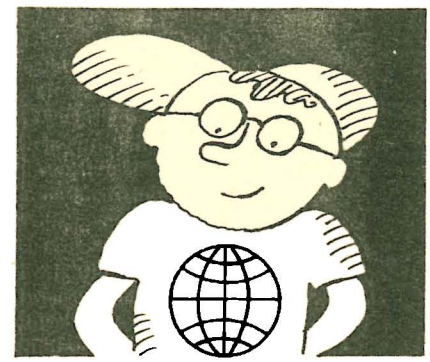
▲3▲

BAR + CE = LONA

▲4▲

BAR · CE = LONA

Dr. W. Schmidt, Greifswald



▲1▲ Два последовательных двузначных числа сложили и в их сумме переставили цифры. В результате получилось бóльшее из складываемых чисел. Какие числа складывали?

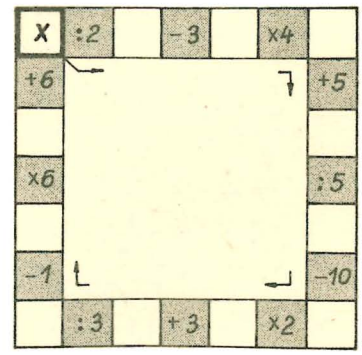
aus: Quant, Moskau

▲2▲ Divide a triangle into five similar ones
We learn that two triangles are said to be similar if the angles of one are correspondingly equal to the angles of the other. We can also say that two similar triangles have the same shape.

The drawing shows an isosceles triangle whose angles are 30°, 30°, and 120°. Find a way to divide this triangle into five triangles, each of them similar to the original one.

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲3▲ Boomerang
En respectant le sens giratoire, effectuez les douze opérations et retrouvez la valeur de X.
Elle a été choisie parmi les nombres de 1 à 100 et est identique au départ et à l'arrivée du circuit.



Attention! ce jeu n'accepte que des valeurs entières et supérieures à zéro comme résultat de chaque opération!

aus: Logigram, Paris

Serpent – ein Spiel für zwei Personen

Das Spielfeld, ein Quadrat mit 10 Kästchen Seitenlänge, wird auf kleinkariertem Papier mit Bleistift und Lineal aufgezeichnet (Bild 1). Die Randbezeichnung muß nicht übernommen werden. Sie dient der Beschreibung des Spieles. Auch die gekreuzten Felder müssen nicht vor jedem Spiel in das Feld gezeichnet werden, wenn man sich ein Muster des Spielplanes mit den eingezeichneten gekreuzten Feldern aufzeichnet. Sonst benötigen wir nur noch als Spielgeräte zwei verschieden farbige Kugelschreiber, z. B. blau und rot, Filzstifte oder ähnliches. Jeder Spieler bekommt einen der zwei Stifte. Sie einigen sich, wo das Ziel, ein umrahmtes Kästchen, eingezeichnet werden soll.

Es sind alle im Spielfeld befindlichen Kästchen möglich, außer diejenigen, welche mit einem Kreuz gesperrt sind. Nachdem ausgelost wurde, wer beginnt, folgen die ersten zwei Züge von Spieler A in Form von zwei Strichen auf den Linien a2 und u21 (Bild 2).

Bild 1

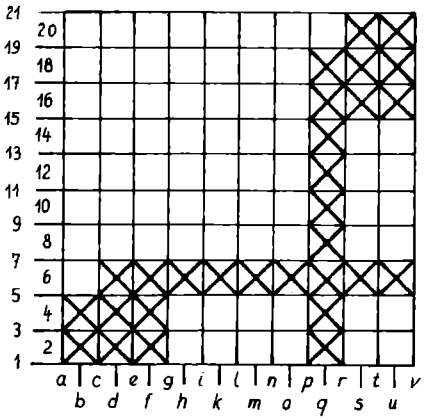
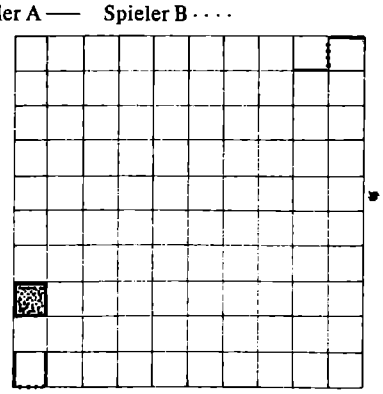


Bild 2

Spieler A —— Spieler B · · · ·

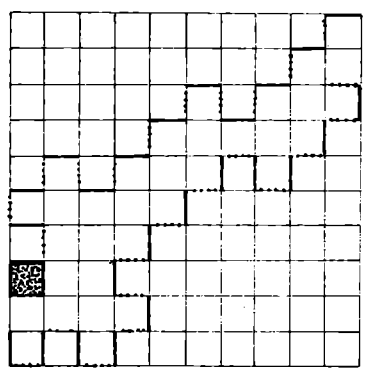


Es besteht Zugpflicht, außer wenn dadurch eine nachstehende Regel verletzt wird. Von jedem Spieler werden immer abwechselnd zwei Striche eingezeichnet. Nun folgt Spieler B mit seinen zwei Zügen. Dabei hat er am Anfang vier Möglichkeiten: b1, v20 oder b1, t20 oder b3, v20 oder b3, t20.

Im Beispiel 1 (Bild 2) wählte er b1, t20. Jetzt ist A an der Reihe. Jeder neue Strich muß rechtwinklig am freien Ende des zuletzt vom Gegner eingezeichneten gesetzt werden. In Beispiel 1: c2, s19. Es war unten nur c2 möglich. Statt s19 wäre u19 auch möglich. Es entstehen auf diese Weise zwei Schlangen mit abwechselnden Farblinien. Wer das eingezeichnete Ziel zuerst an einer beliebigen Ecke berührt, erhält 2 Gewinnpunkte. Es ist verboten, einen rückwärtigen Teil einer Schlange zu berühren.

Im Beispiel 2 (Bild 3) wäre nach dieser Regel der Zug b3 verboten. Weiterhin ist die Berührung einer Schlange durch die andere verboten. Ist das Ziel von einer Schlange erreicht, gilt es für die verbliebene andere Schlange im weiteren Spielverlauf als Hindernis. Diejenige Schlange, die das Ziel berührt hat, wird nicht mehr fortgesetzt. Das Ziel darf nun von der zweiten Schlange an keiner Stelle mehr berührt werden. Es wird so lange gespielt, bis keine Schlange mehr fortgesetzt werden kann. Jeder Spieler muß versuchen, so zu spielen, daß er nicht den letzten Strich einer Schlange setzt, außer bei Berührung des Zieles. Wer nämlich den letzten Strich einer Schlange setzt, hat die Fortbewegung dieser Schlange blockiert. Sein Gegenspieler erhält einen Gewinnpunkt. So erhält im Beispiel 2 der Spieler Blau einen Gewinnpunkt, weil Spieler Rot mit u17 die Schlange blockiert hat. Es ergibt sich im Beispiel 2 das Spielergebnis: Blau 1 Punkt und Rot 2 Punkte (Zielberührung).

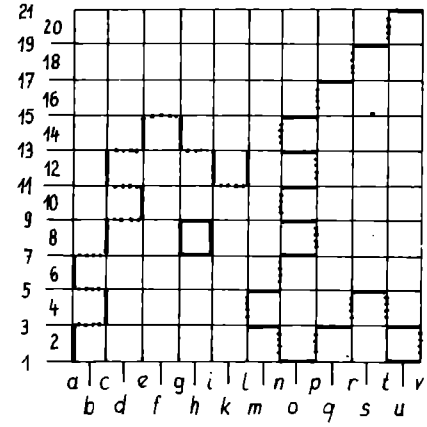
Bild 3



Spieler Rot ist Sieger. Wird eine zweite Partie gespielt, beginnt Spieler B.

Man kann die Anzahl der Spiele vorher festlegen und am Ende die Punkte aus allen Partien addieren.

Bild 4



Zur Illustration stellen wir einen möglichen Partieverlauf vor:

Beispiel 3 (Bild 4) zeigt eine Partie. In der weiteren Beschreibung werden folgende Zeichen eingeführt:

↑: Zwangsatz (für den betreffenden Spieler gibt es nur diese eine Möglichkeit, ohne Regelverstoß)

⊥: Zielberührung (2 Punkte)

→|: Blockade (Fortbewegung der Schlange blockiert, 1 Punkt für den Gegenspieler)

Blau (Spieler A) begann mit a2, u21. Rot (Spieler B) entschied sich für b3, t20. Es folgte Blau c4, s19, danach Rot b5, r18. (Hätte Rot d5 gesetzt, könnte Blau eine Zielberührung erzwingen, und zwar indem Blau mit e4 antwortet. Nun kommt Rot f3↑; Blau g4; Rot h5↑ und Blau i6⊥; 2 Gewinnpunkte für Blau.) Weiter Blau a6↑, q17; Rot b7↑, p16; Blau c8↑, o15; Rot d9, n14; Blau e10, o13. Blau muß auf d9 mit e10 antworten wegen Blau e8, Rot f7⊥. Jetzt kommt Rot d11, p12↑; Blau c12↑, o11; Rot d13, n10↑; Blau e14↑, o9. (Hätte Blau m9 gesetzt, könnte Rot eine Zielberührung erzwingen, und zwar indem Rot mit l10 antwortet. Nun kommt Blau k11↑ und Rot i10⊥.) Nun wird weitergespielt durch Rot f15, p8↑; Blau g14, o7; Rot h13↑, n6↑; Blau i12, m5; Rot k11, l4.

Die letzten beiden Züge von Rot waren die einzig möglichen, um Blau an der Zielberührung zu hindern. Es folgt Blau l12→|, m3. Blau hat sich für l12 entschieden, da auf Blau l10, Rot k9⊥ gefolgt wäre. Rot hätte 2 Punkte erhalten. Durch l12→| erhält Rot nur 1 Punkt. Jetzt kann nur noch die rechte Schlange fortgesetzt werden. Rot n2↑; Blau muß mit o1 antworten, da m1→|. Jetzt Rot p2↑; Blau q3↑; Rot r4; Blau s5 (Blau q5→|); Rot t4. Dieser Zug t4 von Rot führt eine rasche Blockade der Schlange herbei mit einem Gewinnpunkt für Rot. Zum Schluß folgt Blau u3↑, Rot v2, Blau u1→|. Das Spielergebnis lautet 2 Punkte für Rot (pro blockierte Schlange 1 Punkt).

R. Wirsing

Das Problem der kürzesten Fahrtstrecke

Eine interessante Aufgabenstellung der Diskreten Optimierung

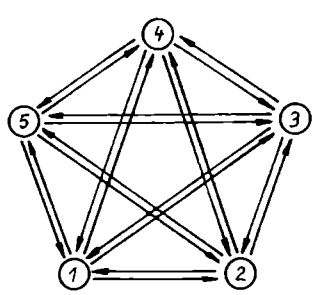
Teil 1

Aufgabenstellung 1: Ein Jugendlicher plant seinen Urlaub, in dem er mit dem Motorrad eine Reihe von Orten unserer Republik kennenlernen will. Dabei möchte er natürlich möglichst wenig Zeit und Sprit verfahren, er sucht also eine „Rundreise" durch diese Orte, die eine möglichst geringe Gesamtlänge hat.

Wie können wir dieses Problem mathematisch formulieren? Wir wollen das Problem anhand eines kleinen Beispiels untersuchen, in dem wir annehmen, daß ein in einer Stadt 1 wohnender Jugendlicher vier andere Orte, die wir der Einfachheit halber mit 2, 3, 4 und 5 bezeichnen, besuchen will.

Zunächst fertigen wir uns eine Skizze an, in die wir die zu besuchenden Orte (willkürlich oder entsprechend ihrer Lage auf der Landkarte) eintragen. Dabei dürfen wir natürlich den Heimatort 1 des jugendlichen Touristen nicht vergessen. Die Orte vermerken wir am besten durch einen kleinen Kreis, den wir mit der Nummer des Ortes kennzeichnen. Anschließend überlegen wir uns, daß der Tourist ja von jedem Ort zu jedem anderen fahren kann. So ist es möglich, von Ort 2 zu Ort 3 zu fahren. Dies vermerken wir durch eine Linie mit einem Pfeil (kurz: durch einen Pfeil) in der Skizze. Da wir auch umgekehrt von Ort 3 zu Ort 2 fahren können, nehmen wir auch diesen Pfeil in die Skizze auf. Wenn wir das für alle Orte getan haben, so erhalten wir Bild 1. Ein Gebilde, wie wir es gerade gezeichnet haben, nennt man in der Mathematik einen „gerichteten Graphen".

Bild 1



Dieser Graph G wird gewöhnlich durch zwei Mengen charakterisiert: durch die Menge seiner Knoten, d. h., durch die Menge der Bezeichnungen der zu besuchenden Orte, die wir eingezeichnet haben, und durch die Menge der Pfeile, die die möglichen Fahrtstrecken zwischen verschiedenen Orten symbolisieren.

Beide Mengen werden wir durch Angabe ihrer Elemente beschreiben, die Pfeile jeweils durch geordnete Paare, welche aus den Bezeichnungen der Anfangs- und Endknoten des Pfeiles gebildet werden. So entspricht zum Beispiel der Pfeil (2, 3) der Fahrtroute von Ort 2 zu Ort 3. Für die Menge der Knoten (oder auch Knotenmenge) E erhalten wir

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Für die Menge der Pfeile, die wir mit U bezeichnen wollen, ergibt sich

$U = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1),$
$(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2),$
$(3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3),$
$(4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$.

Beim Durchlesen dieser Menge U meint sicherlich der eine oder andere von euch, daß es doch gar nicht notwendig ist, die Menge U aufzuschreiben, es gäbe doch eine Gesetzmäßigkeit:

In der Menge U sind alle die Paare von Knotenbezeichnungen aus E enthalten, die nicht Paare gleicher Zahlen sind. Oder stimmt in dieser Überlegung etwas nicht? Was ist nun aber, wenn unser Jugendlicher seine Fahrt am 17. 7. des kommenden Jahres beginnen und in Ort 2 bei Bekannten übernachten will, die aber erst am 21. 7. aus dem Urlaub kommen? Dann kann er doch nicht von seinem Heimatort 1 sofort zum Ort 2 fahren, wir müßten also diese Fahrtroute (1, 2) verbieten, den entsprechenden Pfeil im Graphen streichen und erhielten die Menge der Pfeile

$U' = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3),$
$(2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4),$
$(3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$.

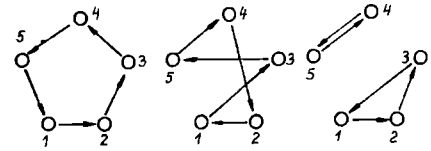
Überprüft das bitte. Vollkommen analog können wir natürlich auch gerichtete Graphen konstruieren, die entstehen, wenn unser Jugendlicher $n > 4$ Orte besuchen will. Dabei wollen wir annehmen, daß keine Fahrtrouten verboten sind. Die Knotenmenge bestehe also aus den natürlichen Zahlen von 1 bis $n + 1$,

$E = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$,

und die Menge der Pfeile aus allen geordneten Paaren von Elementen aus E außer Paaren gleicher Zahlen. Solche Graphen nennen wir vollständig.

Unser jugendlicher Reisender hat nun mehrere Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge er die verschiedenen Orte besuchen will. Eine solche Möglichkeit ist, daß er nach seinem Heimatort 1 Ort 2, dann Ort 3, danach Ort 4 und zum Schluß Ort 5 besucht und danach wieder zu Ort 1 zurückkehrt. Dieser Rundreise durch die Orte 1 bis 5 entsprechen ganz konkrete, spezielle Pfeile im Graphen in Bild 1. Diese sind in Bild 2a nochmals eingezeichnet. Eine andere mögliche Rundreise ist in Bild 2b angegeben. In welcher Reihenfolge besucht der Tourist dort die verschiedenen Orte?

Bild 2a 2b 2c



Richtig, in der Reihenfolge 1, 3, 5, 4, 2, 1. Bild 2c dagegen ist kein Bild einer Rundreise, warum? Verfolgen wir doch einmal den Weg des Reisenden. Ausgehend von Ort 1 wird Ort 2 erreicht, danach Ort 3, dann aber kehrt der Tourist vorzeitig in die Heimatstadt 1 zurück. Die Orte 4 und 5 werden nicht besucht.

Genauso wie wir es in den Bildern 2a und 2b getan haben, läßt sich jede Rundreise durch einen zweiten Graphen G' darstellen, der genauso viele Knoten hat wie der ursprüngliche Graph G, also die gleiche Knotenmenge E, jedoch nur eine Teilmenge U' der Menge der Pfeile U, $U' \subset U$. Welche Eigenschaften hat nun ein Graph G', der einer Rundreise entspricht?

(i) Er hat genauso viele Pfeile wie Knoten, denn aus jedem Ort muß unser Reisender schließlich irgendwann herausfahren.

(ii) Für jeden Ort gibt es genau einen Pfeil, der in diesem Ort endet, und genau einen Pfeil, der in diesem Knoten beginnt.

Beide Bedingungen sind leicht einzusehen, wenn wir die Graphen in den Bildern 2a und 2b betrachten. Doch hat auch der Graph in Bild 2c beide Eigenschaften. Dieser stellt jedoch keinen Graphen einer Rundreise dar. Das hatten wir durch Verfolgung des Weges erkannt, der durch die Pfeile vorgegeben wird. Damit erhalten wir die dritte Eigenschaft, welche sich im Gegensatz zu den Eigenschaften (i) und (ii) nur sehr aufwendig formalisieren läßt:

(iii) Wenn wir, beginnend mit Knoten 1, in Richtung der Pfeile im Graphen G' unsere Rundreise „abfahren", so endet diese Prozedur wieder in Knoten 1, aber erst, nachdem alle anderen Knoten passiert wurden.

Mit diesen Eigenschaften sind alle Rundreisen über die Eigenschaften der entsprechenden Graphen U' beschrieben. Um nun unser Problem zu lösen, müssen wir nur alle diese Rundreisen aufschreiben bzw. die entsprechenden Graphen zeichnen, ihre Gesamtlänge berechnen (wie, werden wir später noch sehen) und die Rundreise mit der geringsten Länge heraussuchen.

Doch, Achtung! Wie viele Rundreisen gibt es denn überhaupt in einem vollständigen Graphen mit $n + 1$ Knoten, d. h., wenn der Tourist n Städte besuchen will? Wenn er nur eine Stadt besuchen will, kann er nur hin- und anschließend zurückfahren: 1 Rundreise; will unser Reisender zwei

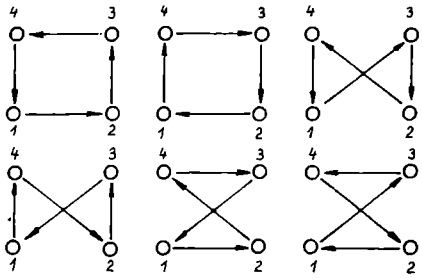


Bild 3

Städte besuchen, so gibt es schon zwei Möglichkeiten: er kann erst Ort 2 und dann Ort 3 besuchen oder umgekehrt. Bei drei zu besuchenden Orten sind die sechs möglichen Rundreisen in Bild 3 dargestellt.

Und in unserem Beispiel mit 4 zu besuchenden Orten gibt es 24 mögliche Rundreisen.

Wie viele sind es nun allgemein?

Die Antwort darauf gibt der folgende Satz, welcher mittels vollständiger Induktion bewiesen werden kann.

Satz: In einem vollständigen Graphen mit $n+1$ Knoten gibt es

$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2$

mögliche Rundreisen.

Zum Beweis wollen wir hier aus Platzgründen nur das folgende sagen. Wir betrachten in einem Graphen mit $k+1$ Knoten eine beliebige Rundreise, welche o. E. d. A. aus den Pfeilen $(1,2)$, $(2,3)$, ..., $(k-1,k)$, $(k,1)$ besteht. Dann können wir durch Einfügung des Knotens $k+1$ an jeder der k möglichen Stellen (zwischen Knoten 1 und 2, zwischen Knoten 2 und 3, usw.) aus dieser einen Rundreise k neue Rundreisen durch $k+1$ Knoten konstruieren und damit alle möglichen Rundreisen durch $k+1$ Knoten erfassen.

Den genauen Induktionsbeweis solltet ihr selbständig aufschreiben und untereinander oder mit eurem Lehrer diskutieren!

Wenn unser Jugendlicher also 10 Städte besuchen will, so müssen $10! = 3\,628\,800$ verschiedene Rundreisen konstruiert werden, eine Menge, die kaum noch zu schaffen ist, bei der wir aber zumindest bei unsystematischem Vorgehen schnell den Überblick verlieren würden. Wir werden also ein systematisches Vorgehen wählen müssen und ein Computerprogramm schreiben, wollen wir die kürzeste Rundreise suchen.

Zunächst beschäftigen wir uns aber mit der Berechnung der Gesamtlänge einer Rundreise. Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein. Unseren vollständigen Graphen G hatten wir charakterisiert durch die Knotenmenge E und die Menge der Pfeile U. Wir hatten auch schon erkannt, daß eine beliebige Rundreise einer Teilmenge U' der Menge der Pfeile U entspricht, die den Bedingungen (i), (ii), (iii) genügt. Damit können wir theoretisch alle möglichen Rundreisen konstruieren und die entsprechenden Mengen U' bilden. Alle diese Mengen U' fassen wir zur Menge V aller Rundreisen zusammmen. Jede der Mengen U' aus V (kurz $U' \in V$) besteht aus genau $n+1$ Pfeilen, die wir allgemein mit (i,j) bezeichnen. Dabei sei (i,j) ein beliebiger Pfeil, der im Knoten i aus E (kurz: $i \in E$) beginnt und im Knoten $j \in E$ endet. Jedem dieser Pfeile (i,j) entspricht eine „Länge", d. h., die Länge der entsprechenden Fahrtroute von Knoten i zu Ort j, welche wir mit c_{ij} bezeichnen. Die Menge dieser Längen fassen wir zu einer Matrix C zusammen:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1,1} & & \cdots & c_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

Dabei ist zum Beispiel c_{23} die Länge der Fahrtroute von Ort 2 zu Ort 3. Und was ist mit c_{22}? Richtig, der Weg von Ort 2 zu Ort 2 ist verboten! Das werden wir in der Matrix C dadurch kennzeichnen, daß wir c_{ii} gleich plus Unendlich setzen. Als Beispiel wollen wir folgende Matrix für das Rundreiseproblem mit den fünf Orten betrachten (die Zahlen sind dabei willkürlich gewählt, aber durchaus realitätsnah):

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 119 & 109 & 111 & 119 \\ 105 & \infty & 110 & 100 & 110 \\ 100 & 105 & \infty & 105 & 104 \\ 106 & 110 & 103 & \infty & 100 \\ 106 & 102 & 110 & 100 & \infty \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Betrachtet euch die Matrix genauer und versucht, die Zahlen zu interpretieren! Das kann doch nicht sein, höre ich da einige rufen, die Länge der Fahrtroute von Ort 1 zu Ort 2 ist größer als die Länge der Fahrtroute von Ort 2 zu Ort 1! Das ist richtig, $119 > 105$. Aber, wieso soll das denn verboten sein? Es gibt doch schließlich Einbahnstraßen, Umleitungen, usw., die solche Unterschiede erzwingen.

Damit können wir das Rundreiseproblem mathematisch fassen: Die Länge der Rundreise ergibt sich als Summe der Längen der einzelnen Fahrtrouten, die in ihr enthalten sind. Das drücken wir durch das Symbol

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} \qquad (2)$$

aus. Insgesamt ist also eine Rundreise

$$U \in V, \qquad (3)$$

für die (2) minimal wird, gesucht. Formal sagt man dann, daß die Funktion (2) unter der Bedingung (3) minimiert wird.

Bevor wir unsere Unterhaltung für heute beschließen, möchte ich noch zwei Aufgabenstellungen anführen, die auf die praktische Bedeutung des Rundreiseproblems hinweisen. Beide Aufgaben, die zunächst wenig mit einer „Reise" zu tun zu haben scheinen, wollen wir als Rundreiseproblem modellieren. Schwierigkeiten bereiten dabei die Wahl der Knoten und der Entfernungsmatrix C.

Aufgabenstellung 2: Betrachten wir einen Roboter, der Bauelemente auf eine Leiterplatte montieren soll. Diese Bauelemente liegen in Kisten, die feste Standorte an der Peripherie des Roboters haben. Der Roboter nimmt nun ein Bauelement (einen Widerstand, eine Diode oder ähnliches) auf, bewegt sich zur Leiterplatte, montiert es auf die Leiterplatte, bewegt sich zum nächsten Bauelement, nimmt es auf, usw. In welcher Reihenfolge soll der Roboter die Bauelemente montieren, damit die Leiterplatte möglichst schnell fertig wird?

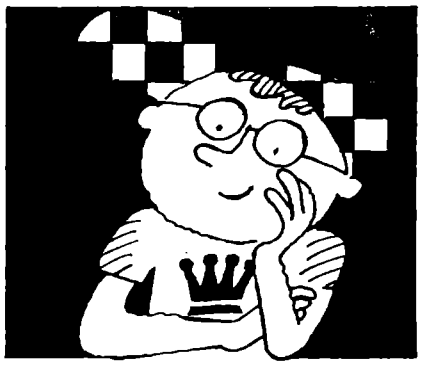
Als Knoten für unseren vollständigen Graphen werden wir die Bauelemente wählen. Der Heimatort des Roboters ist dabei eine fixierte Stelle, z. B. bei einem Bauelement. Die Pfeile in dem vollständigen Graphen bedeuten nun, daß die Bauelemente in einer bestimmten Reihenfolge montiert werden, so bedeutet (2, 3), daß das Bauelement 3 nach Bauelement 2 montiert werden kann. Wenn wir die reinen Montage- und Zugriffszeiten des Roboters vernachlässigen (die in Wirklichkeit auch nur einen konstanten Summanden darstellen), so ergibt sich, daß die Gesamtbearbeitungszeit einer Leiterplatte gleich der Summe der Bewegungszeiten des Roboters ist, die tatsächlich von der Reihenfolge der Montage der Bauelemente abhängt. Damit wählen wir als Länge der Fahrtrouten (oder Pfeile) zwischen den Knoten i und j die Bewegungszeit des Roboters von dem Standort des Bauelementes i zum Montageplatz der Leiterplatte und zurück zum Standort des Bauelementes j.

Aufgabenstellung 3: In einem Betrieb soll auf einem Automaten ein ständig wiederkehrendes Sortiment von Erzeugnissen 1, ..., p in gewissen Stückzahlen n_1, ..., n_p hergestellt werden. Der Automat muß nach Herstellung eines Erzeugnisses umgerüstet werden, damit auf ihm das nächste hergestellt werden kann, z. B. müssen Steuerprogramme, Werkzeuge, Spannbacken u. ä. ausgewechselt werden. Diese Umrüstzeiten sind unterschiedlich lang und hängen von dem davor bearbeiteten und dem danach zu bearbeitenden Erzeugnis ab. In welcher Reihenfolge sind die einzelnen Erzeugnisse zu produzieren, damit ein Sortiment möglichst schnell fertiggestellt wird?

Hier betrachten wir die Erzeugnisse als Knoten des vollständigen Graphen. Pfeile im Graphen bedeuten, daß ein Erzeugnis unmittelbar nach einem anderen hergestellt werden kann. Betrachten wir wieder die Gesamtbearbeitungszeit für das Sortiment, so gibt es wieder einen variablen und einen festen Teil wie bei der Modellierung von Aufgabenstellung 2. Der feste Teil ist hier die Summe der Bearbeitungszeiten der Erzeugnisse, variabel dagegen ist die Summe der Umrüstzeiten, die von der konkreten Reihenfolge der Bearbeitung der Erzeugnisse abhängt. Das legt es nahe, die Umrüstzeiten als Elemente der Matrix C, also als „Längen der Pfeile" zu wählen.

Im nächsten Teil werden wir uns mit einem Lösungsalgorithmus für das Rundreiseproblem beschäftigen. Versucht bis dahin doch selbst einmal, das kleine Beispiel mit den vier zu besuchenden Orten und der „Kostenmatrix" C aus (1) zu lösen. Welche der 24 möglichen Rundreisen realisiert die kleinste Summe in (2)?

S. Dempe



Attraktion für alpha-Schachfreunde

In veränderter Gestaltung präsentierte sich der 6. alpha-Schachwettbewerb in Heft 5/1988. Die Leser reagierten in etwas geteilter Meinung darauf. Als negativ wurde u. a. von J. Haas und S. Aßmus (beide aus Berlin) die Verringerung der Aufgabenzahl eingeschätzt. E. Bösenberg (Töppeln) bedauerte, daß damit der besondere Stil des alpha-Schachwettbewerbs verloren ginge. Dagegen freute sich u. a. A. Thorhauer (Jena) darüber, daß nur zweizügige Schachaufgaben zu lösen waren.
Jedoch die breite Zustimmung zum Wettbewerb trotz der Reduzierung auf vier zweizügige Aufgaben war einhellig. Für J.-C. Krumm (Oberhausen/BRD) waren die Schachaufgaben „sehr gut ausgesucht" und „bescherten hübsche Effekte und Pointen" nicht nur für K. Rubin (Berlin). „Erneut ein Wettbewerb, der Freude bereitete" meinte Dr. Büchel (Zella-Mehlis) und M. Klenke (Brück) betonte, daß „auch dieses Jahr der alpha-Schachwettbewerb eine gelungene Attraktion für alle Schachfreunde war".
Für T. Rühlemann (Greifswald) ist der alpha-Schachwettbewerb eine willkommene Werbung für das Schachspiel. „Als Übungsleiter der Sektion Schach kann ich durch alpha leicht den ersten Kontakt mit dem Problemschach erreichen, da ja das Lösen der gestellten Aufgaben durch den alpha-Wettbewerb einen besonderen Anreiz bietet."

Der sportliche Wettbewerbsanreiz regte wieder 338 alpha-Leser zum Mitmachen an. Dabei zählten Roland Voigt (Böhlen), Andreas Jähmlich (Weißwasser) und Kirsten Rudloff (Petkus) mit 7 bzw. 8 Jahren zu den jüngsten Teilnehmern, während die treuen alpha-Leser Hilde Espig (Karl-Marx-Stadt), Elisabeth Möller (Bad Kösen) und Fritz Rauhe (Wendgräben) mit 83 bzw. 84 Jahren, wie im Vorjahr, zu den ältesten Teilnehmern gehörten.
Allen Teilnehmern ein herzliches Dankeschön fürs Mitmachen!

Lösungen

▲1▲
1. Da1 (droht 2. Kf7 matt)
1. ... Kg8/Lg8
2. D:a8/K:g6 matt.
Die Auftaktaufgabe des Wettbewerbs, die vom unvergeßlichen Sam Loyd („Detroit Free Press", 1877) stammt, versuchten alle Teilnehmer zu lösen. Nur 10,3 % der Einsendungen wiesen eine falsche Lösung aus. Als ein mehrmaliger Fehler zeigte sich dabei die vermeintliche Lösungsangabe 1. D:a8+ Lg8 2. K:g6. Der schwarze König kann zwar nicht mehr ziehen, jedoch ist er von keinem Schachgebot einer weißen Figur bedroht – somit liegt ein Patt und kein Matt vor!

▲2▲
1. Tg5 (droht 2. L:d5 matt)
1. ... Td4/Se3/f3
2. Te5/f3/Tg4 matt.
In dem löserfreundlichen Urdruck von Fritz Hoffmann (Weißenfels) werden die schwarzen Verteidigungen 1. ... Td4 und 1. ... Se3, die zur Deckung des Feldes d5 dienen, aber den schwarzen König in seinem Aktionsradius blockieren, von Weiß vorteilhaft ausgenutzt. Zu dieser Aufgabe hatten 10,1 % der Löser eine falsche oder keine Lösung eingesandt.

▲3▲
1. Da1 (droht 2. Dd4 oder 2. De5 matt)
1. ... Sc3/Sf6
2. Td4/Dd4 matt.
1. ... Sf5/Sb5
2. Da2/Da2 oder Le6 matt.
Dieser Zweizüger von Dr. Karl-Heinz Siehndel („Freie Presse", 1975) brachte 30,5 % der Einsender auf eine falsche Fährte. Besonders über die Verführung 1. Dc1 (droht 2. Dc6 matt) „stolperten" mehrere Löser. Aber auf 1. Dc1 gibt es nach der schwarzen Verteidigung 1. ... Lf5 kein Matt im 2. Zug. Auch die Verführungen 1. Dg3/Dg7 oder 1. Dh2 scheitern eindeutig an 1. ... Sf6 bzw. 1. ... Sf5.

▲4▲
1. Sd7 (droht 2. Te6 matt)
1. ... D:b8/La2/Sf3
2. L:c6/L:d3/D:f3 matt.
1. ... Sf7/Sg4/L:f6/Lf4
2. D:g6/D:h1/S:f6/T:f4 matt.
Der Höhepunkt des Wettbewerbs. Die Aufgabe von József Szöghy („Magyar Sakkélet", 1955, 1. Preis) begeisterte viele Teilnehmer, die diese Aufgabe richtig lösten. Die Kommentierung von F. Götze (Döbeln) zu diesem Zweizüger sei hier stellvertretend für andere enthusiastische Zuschriften zitiert:
„Ein Reiterkunststück erster Güte! Dieses Vollblut (Se5) zu zügeln, an die richtige Stelle zu bringen und dabei die eigenen Mitstreiter nicht zu behindern, benötigt schon einen versierten Jockei!" In dem Fall erwiesen sich 43,5 % der Teilnehmer als „versierte Jockeis" und lösten die Aufgabe richtig.
Der weiße Springer auf dem Feld e5 hat 8 Zugmöglichkeiten, 7 davon sind Verführungen.

Verführung	Parade
1. Sc4? L:f6	2. Sd2 matt, aber 1. ... d2!;
1. S:c6? L:f6	2.Dd5 matt, aber 1. ... D:b8!;
1. S:d3? L:f6	2. De2 matt, aber 1. ... La2!;
1. Sg4? L:f6	2. S:f6 matt, aber 1. ... Sf3!;
1. S:g6? L:f6	2. Df5 matt, aber 1. ... Sf7!;
1. Sf3? L:f6	2. Sd2 matt, aber 1. ... Sg4!.

Nach 1. ... L:f6 ergeben sich dadurch 6 veränderte Matts zwischen Lösungs- und Verführungsabspiele. Im 7. Fall verteidigt eben 1. ... L:f6 gegen die Verführung 1. Sf7.

Unter den Einsendern, die alle vier Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Mario Freidank (Rathenow),
Silvio Jaschinski (Kamenz),
Jörn Neumann (Feldberg),
Christian Kühnert (Karl-Marx-Stadt)
und Angela Städter (Wiesenau).
Weiterhin wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten:
Thomas Berger (Bernburg),
Madlen Graunke (Hohen-Demzin),
Marco Jendrezok (Gera),
Stefan Neupert (Wittstock/Dosse)
und Mathias Simon (Geithain).
Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!

„Trotz aller Mühen hat es natürlich eine Menge Spaß gemacht und beim nächsten Wettbewerb werde ich sicher wieder mit von der Partie sein", zog N. Wodtke (Franzburg) sein Fazit und R. Kürschner (Zella-Mehlis) reimte sogar:
„Euer Schachwettbewerb findet bei mir großes Interesse,
er ist einfach toll und voller Raffinesse!"

Der nächste alpha-Schachwettbewerb folgt in Heft 5/1989 und wird sicher wieder einige knifflige Raffinessen zu bieten haben!

H. Rüdiger

Buchtips für Schachfreunde

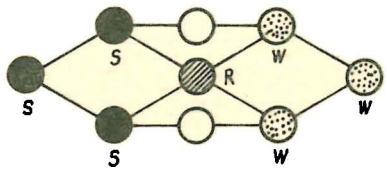
A. Pötzsch
Spaß am Kombinieren
192 S., 365 Diagramme
Bestell-Nr. 671 788 3 Preis: 15,80 M

B. Starck
Schach macht Spaß
160 S., 227 Diagramme
Bestell-Nr. 671 789 1 Preis: 16,80 M

A. Mazukewitsch
Verflixte Fehler
240 S., 311 Diagramme
Bestell-Nr. 671 790 4 Preis: 15,80 M

Alle Titel sind Nachauflagen des Sportverlages Berlin.

12. Wie das Bild zeigt, liegen ein roter (R), drei weiße (W) und drei schwarze (S) Spielsteine auf einem Brett, wobei Bewegungen nur entlang einer Linie zu einem angrenzenden leeren Feld vorgenommen werden dürfen. Das Ziel ist, die Positionen der schwarzen und weißen Steine auszuwechseln, wobei der rote Stein in der Mitte verbleibt. Eine Bewegung ist folgendermaßen zu verstehen: Zuerst wird ein schwarzer oder ein weißer Stein bewegt und dann der rote. Die Reihenfolge einer schwarzen oder weißen Bewegung, gefolgt von einer roten Bewegung, wird solange wiederholt, bis der erforderliche Austausch stattgefunden hat.

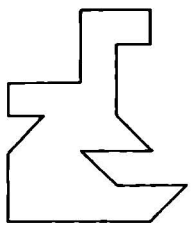


Zusammenstellung dieses Ferienmagazins: J. Lehmann, Leipzig; Lösungen siehe in diesem Heft S. 72.

8

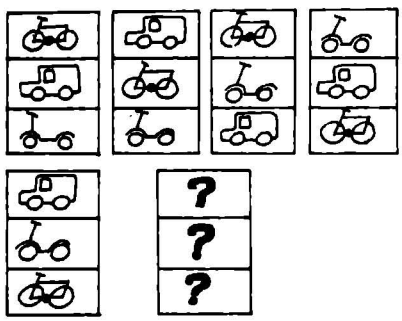
1

8. Zerlege die Figur durch einen geraden Schnitt so, daß drei Teile entstehen! (Verwende Transparentpapier!) Setze die drei Teile zu einem Quadrat zusammen!



Logelei

9. Welche Figuren müssen logischerweise an Stelle der Fragezeichen eingesetzt werden?



6

Kleine Zahlenspielerei

2. Setze zwei Minus- und zwei Pluszeichen links vom Gleichheitszeichen, so daß die Gleichung richtig ist!

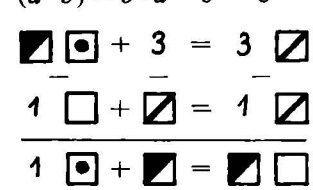
3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 = 153

Kryptarithmetik

3. a) $(\square\,\square)^2 = \square\,\triangle\,\square$

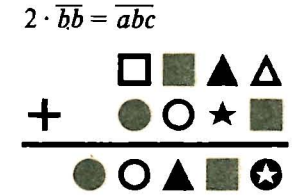
b) $(a \cdot b) = b : a = b^a = 8$

c)



d) $2 \cdot \overline{bb} = \overline{abc}$

e)

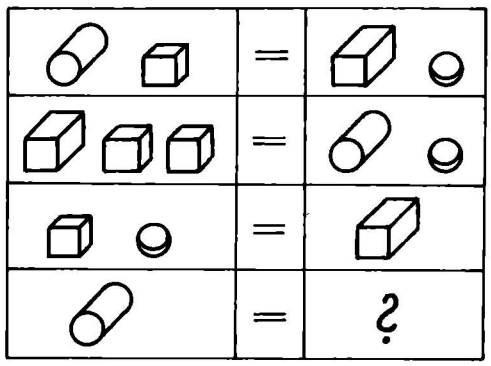


3

Waage-Rechtes

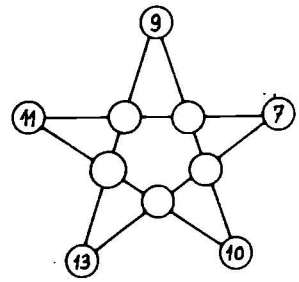
1. Vier Arten von Körpern (Würfel, Quader, Kugeln und Zylinder), wobei Körper einer bestimmten Art jeweils die gleiche Masse besitzen, werden mit einer einfachen Balkenwaage gegeneinander abgewogen. In den obigen drei Fällen (siehe Bild) ergibt sich Gleichgewicht. Wieviel a) Kugeln, b) Würfel bringen die Waage im unten dargestellten Fall ins Gleichgewicht?

R. Mildner, aus LVZ



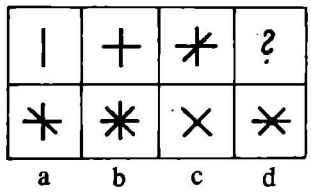
2

10. Setze die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 in die leeren Kreise ein, so daß sich an jedem Arm des Sterns die gleiche Summe ergibt!



Der dreifache Austausch

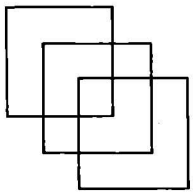
11. Welche der Figuren *a*, *b*, *c*, *d* gehört logischerweise in das Feld mit dem Fragezeichen?



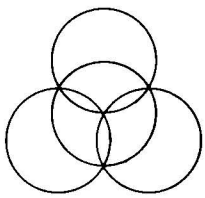
7

In einem Zug

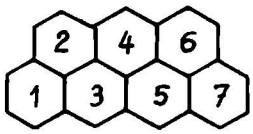
4. a) Lewis Carolls *Dreiquadrate-Problem*:



b) O'Beirnes *Vierkreise-Problem*:

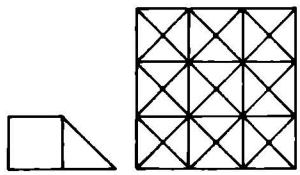


5. Wie viele Wege von 1 bis 7 sind möglich, wenn man sich immer nach einer angrenzenden Zahl und stets nach rechts bewegt?
Ein Beispiel wäre: 1–2–3–5–7.

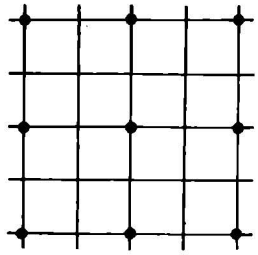


4

6. Wie viele Figuren der dargestellten Form in beliebiger Größe sind im folgenden Bild zu finden?



7. Wie viele gleichschenklige Dreiecke können auf diesem 3×3-Gitter gebildet werden, wenn man nur die neun Punkte als Endpunkte (Eckpunkte) benutzt?



5

Information zum Ideenwettstreit „Kreativ mit Algorithmen“

Im Oktober 1988 riefen die beiden von der AdW der DDR herausgegebenen Zeitschriften „spectrum“ und „Wissenschaft und Fortschritt“ zu einem Ideenwettstreit auf. Dieser zielt darauf, den Umgang mit dem Computer zu initiieren oder zu vertiefen sowie seine Anwendung auch auf derzeit noch ausgefallene Sachverhalte – wie künstlerische Betätigung, anspruchsvolle Spiele und das Ausknobeln origineller Problemlösungsvarianten – zu fördern.
Neuartige Lösungen können, wie sich in der Vergangenheit mehrfach gezeigt hat, große Wirkungen auslösen.
Jury und Redaktionen wünschten sich, daß der Wettbewerb die Leser anregen möge, sich mit folgenden Problemkreisen näher zu befassen:

- Neue kreative Ideen für den Umgang mit dem Computer;
- hocheffektive Algorithmen zur Lösung bekannter Probleme sowie
- interessante Fragen, die einer rechentechnischen Lösung bedürfen.

Bedingungen

Inhaltlich sind Probleme und Lösungen in keiner Weise eingeschränkt. Sie können sowohl numerischer, graphischer als auch künstlerisch-ästhetischer Natur sein (Bild, Ton, Text) – nur Originalität ist gefragt, die kreative, neue tragende Idee!
Nicht bearbeiten wird die Jury reine Aktionsspiele, die betont auf die manuelle Reaktion des Menschen angelegt sind.
Kommerzielle und zu umfangreiche Programmsysteme können ebenfalls nicht in den Wettbewerb einbezogen werden.
Die Einsendungen an die Redaktionen sollten aus drei Teilen bestehen:

- einer inhaltlichen Beschreibung (maximal fünf Schreibmaschinenseiten);
- einer Programmdokumentation (maximal 300 Programmzeilen), bevorzugt in PASCAL oder C, evtl. BASIC);
- einem maschinenlesbaren Beleg des Beispielprogramms zur Erprobung (Diskette oder Kassette).

Eingesandte Unterlagen bleiben materiell und urheberrechtlich Eigentum des Einsenders. Die Einsendungen werden umgehend bestätigt. Die Jury entscheidet innerhalb von drei Monaten über Annahme oder Nichtannahme zum Wettbewerb, gleichzeitig erhalten die Einsender ihre Unterlagen zurück. Im Oktober 1989 werden die besten Ergebnisse prämiert. In der Zwischenzeit können interessante Lösungen in „spectrum“ und „Wissenschaft und Fortschritt“ veröffentlicht werden, um einen regen und kreativen Meinungsaustausch zu Informatikproblemen zu erreichen.
Jedermann ist berechtigt zur freiwilligen Teilnahme. Vom Einsender sind folgende Angaben zur Person erforderlich:
Name, Alter, Beruf, Adresse; außerdem eine verbindliche Erklärung, daß der Inhalt der Einsendung sein geistiges Eigentum ist und Rechte anderer nicht bestehen. Wünschenswert ist ein Literaturverzeichnis zu ähnlichen Inhalten. In (1) und (2) sind Beispiele für zu lösende Aufgaben genannt; in (3) werden die Teilnahmebedingungen (hinsichtlich Programmiersprachen usw.) noch präzisiert.
Auf Programmangebote, Lösungsvarianten und neue, interessante Probleme freuen sich die Redaktionen „spectrum“ und „Wissenschaft und Fortschritt“ sowie die Jury.

Anschriften:

Redaktion spectrum, AdW der DDR,
Otto-Nuschke-Straße 22/23,
PSF 1298, Berlin, 1086

Redaktion Wissenschaft und Fortschritt,
Leipziger Straße 3–4,
Berlin, 1086

Literatur:

(1) Kreativ mit Algorithmen. – In: Wiss. Fortschr. – Berlin 38 (1988) 10
(2) Kreativ mit Algorithmen. – In: spectrum. – Berlin 20 (1989) 1
(3) Neues zu „Kreativ mit Algorithmen“. – In: Wiss. Fortschr. – Berlin 39 (1989) 3

alpha gratuliert

- dem Kinderbuchverlag Berlin zu seinem 40. Geburtstag.

Am 1. Juni 1949 gegründet, erschienen bis 1988 4 804 Titel mit 260 Millionen Exemplaren.

- dem Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin zu seinem 65. Geburtstag.

1924 initiierte der Jenaer Biologieprofessor Julius Schaxel (1887 bis 1943) die erste Ausgabe der „kulturpolitischen Monatshefte für Naturerkenntnis und Gesellschaftslehre“, „Urania“ genannt. Nach 14jähriger erzwungener Unterbrechung nahm der Verlag im Juli 1947 die Arbeit wieder auf und profilierte sich zum führenden Verlag für populärwissenschaftliche Literatur.

Buchtip

Walter Kranzer

So interessant ist Mathematik

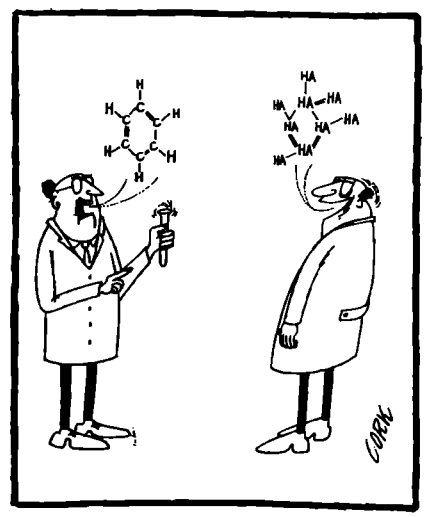
238 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 571 680 3 Preis: 28,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Dieses Buch richtet sich an zwei Lesergruppen, zum einen an bereits mathematisch interessierte, zum anderen an diejenigen, die erfahren möchten, ob und was die Mathematik an Erstaunlichem anzubieten hat. Der Bogen der Darstellung spannt sich von der Zahlentheorie über Mengenlehre, Analysis, Geometrie bis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, läßt immer wieder neue herrliche Schätze und überraschende Zusammenhänge entdecken.

Erna Padelt

Mit dem Meßrad um die Welt

131 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 633 231 8 Preis: 7,40 M
Der Kinderbuchverlag Berlin



aus: Pythagoras, Amsterdam

alpha-Märchenecke
Die Chance des Sterndeuters

Vor langer Zeit lebte am Hofe eines Königs ein Sterndeuter, der dem König Ratschläge für seine Regierungsentscheidungen gab. Eines Tages riet der Sterndeuter, das erkrankte Lieblingspferd des Königs nicht zu behandeln, nur dann könne es wieder gesund werden.

Der Stallmeister hielt sich an diese Empfehlung, aber das Pferd verstarb. Das ärgerte den König so sehr, daß er den Sterndeuter wegen des falschen Rates zu fünf Jahren Kerkerhaft verurteilte.

Nun bat der Sterndeuter seinen König um Gnade. Dieser wollte das Urteil nicht einfach abändern, dem Sterndeuter aber doch noch eine Chance geben. Er sprach deshalb zu ihm:

„Ich gebe dir sieben gleichartige Kugeln, drei weiße und vier schwarze, und zwei Urnen. Du sollst die Kugeln irgendwie auf die zwei Urnen verteilen, aber so, daß keine Urne leer bleibt. Dann wird mein Hofmarschall zuerst eine der beiden Urnen auswählen und anschließend aus dieser Urne eine Kugel ziehen. Natürlich weiß der Hofmarschall nicht, welche Kugeln in welcher Urne liegen. Zieht er eine schwarze Kugel, so bleibt mein Urteil bestehen, zieht er eine weiße, so sollst du begnadigt werden und meine Tochter heiraten. Überlege dir, wie du die Kugeln verteilen willst. Du hast eine Stunde Zeit!"

Der Sterndeuter strengte seinen Kopf an und überlegte:

„Wenn die Kugeln alle in einer Urne wären, dann hätte ich eine Chance von 3 : 7 $\left(\text{oder } \frac{3}{7}\right)$ für eine Begnadigung, denn 3 der 7 Kugeln sind weiß.

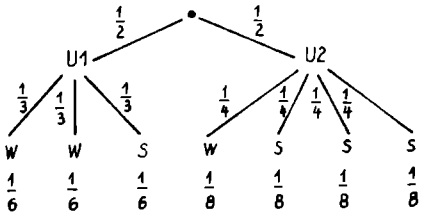
Sind die Kugeln aber auf zwei Urnen verteilt, dann ist es komplizierter. Nehmen wir an, in Urne 1 (U1) liegen zwei weiße und eine schwarze Kugel, in Urne 2 (U2) die restlichen, also so:

U1 ○○● U2 ○●●●

Die Chance, daß U1 gewählt wird, ist $\frac{1}{2}$ (eine von zwei Urnen). Für jede der Kugeln aus U1 beträgt dann die Chance, gewählt zu werden, $\frac{1}{3}$ (weil drei Kugeln in der Urne liegen). Insgesamt beträgt die Chance für jede der Kugeln aus U1, gewählt zu werden, demnach $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, also $\frac{1}{6}$.

Für die Wahl von U2 beträgt die Chance $\frac{1}{2}$ (wie für U1), dann hat jede der Kugeln von U2 die Chance $\frac{1}{4}$, insgesamt also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Das kann man aufzeichnen:



Günstig ist für mich das Ziehen einer weißen Kugel. Das kann – wie ich in der Zeichnung sehe – auf drei verschiedenen ‚Wegen' geschehen. Die Chance für ‚weiße Kugel' beträgt somit insgesamt $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$.

Das ist schon besser als $\frac{3}{7}$, denn $\frac{11}{24} > \frac{3}{7}$.

Aber ist diese Verteilung schon die für mich beste?"

Der Sterndeuter probierte andere Verteilungen aus, z. B.:

a) In U1 eine weiße Kugel und eine schwarze (w, s), in U2 alle übrigen Kugeln (w, w, s, s, s).

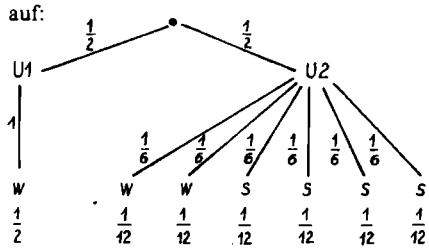
Da betrug seine Chance $\frac{9}{20}$ (prüfe das nach!), war also schlechter als im vorigen Fall, denn $\frac{9}{20} < \frac{11}{24}$.

b) In U1 eine weiße und zwei schwarze Kugeln (w, s, s), in U2 alle übrigen Kugeln (w, w, s, s).

Damit verringerte sich seine Chance weiter, sie betrug nur noch $\frac{10}{24}$. (Prüfe das nach!)

Aber nun wurde ihm klar: je „gleichmäßiger" die weißen und schwarzen Kugeln auf die beiden Urnen verteilt werden, um so ungünstiger ist das für ihn. Deshalb versuchte er die Verteilung U1: eine weiße Kugel; U2: alle übrigen Kugeln.

Er zeichnete sich den zugehörigen „Baum" auf:



Die Chance, daß eine weiße Kugel gezogen wird, beträgt hier

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Der Sterndeuter entschied sich für diese Verteilung, bei der die Chance für „weiße Kugel" tatsächlich am größten ist: legt man nämlich noch eine weiße Kugel aus U2 nach U1, so vermindert sich die Chance für „weiß" bei U2, ohne daß sie bei U1 wächst; legt man eine schwarze Kugel von U2 nach U1, so vermindert sich bei U1 die Chance für „weiß" von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{1}{4}$, während sie bei U2 nur von $\frac{1}{12}$ auf $\frac{2}{10}$ wächst – insgesamt wird die Chance für „weiß" also kleiner. Ähnlich ist es bei anderen Verteilungsvarianten.

Was wurde nun aus dem Sterndeuter? Hat seine Überlegung ihm zur Begnadigung verholfen? Leider wissen wir es nicht, die Chronik berichtet nur, daß die Tochter des Königs bald geheiratet hat. Aber wen?

W. Walsch

Nun fragt ein „gewöhnlicher" Mensch: „Kann man mit dieser Straßenbahn zum Hauptbahnhof fahren?" „Ja, man kann", antwortet der Computermann.

Das ist völlig richtig. Man kann. Aber die Straßenbahn fährt gerade in die entgegengesetzte Richtung! Man kann 17 Haltestellen bis zur Endstation der Linie fahren und dann noch 26 Haltestellen zurück, um den Hauptbahnhof zu erreichen...

Eine hilfreiche Antwort wäre aber nicht etwa nur „man muß in die entgegengesetzte Richtung fahren", sondern ein Hinweis darauf, daß man von der Bushaltestelle nebenan mit einem Expreßbus den Hauptbahnhof in 5 min erreichen kann.

Aber das wäre die Antwort auf die Frage „Wie kann man am schnellsten den Hauptbahnhof erreichen" – und diese Frage wurde dem Programmierer nicht gestellt!

Eine richtige, ganz präzise Antwort kann manchmal für den Fragenden völlig nutzlos sein, wenn dieser seine Formulierung nicht gründlich genug durchdacht hat.

A. Halameisär, Moskau

alpha-Wettbewerb 1987/88

Abzeichen in Gold

Fortsetzung

Für sechsjährige Teilnahme

Carsten Karl, Aken; Kathrin Schmidt, Antonsthal; Michael Henning, Bad Salzungen; Frank Wagner, Dirk Pandel, beide Berlin; Cynthia Bengs, Bürgel; Detlef Bartmuß, Burow; Silvio Löffler, Thomas Reißner, beide Cottbus; Cornelia Zillmann, Henrike Süß, Michael Potthoff, Birgit Jeske, Dorothea Krippstädt, Rita Kempe, Frank Naumann, Matthias Overmann, Jan Skribanowitz, alle Dresden; Matthias Buchmann, Eisenberg; Sven Hauptvogel, Elsterwerda; Antje Kaufhold, Erfurt; Andreas Kupsch, Finsterwalde; Elisabeth Siegel, Freital; Silke Breunung, Geisa; Alexander und Matthias Neuber, Gerbitz; René Franke, Gersdorf; Gernot Mersiowsky, Christoph Kothe, beide Görlitz; Karsten Hennig, Großörner; Ralf Gericke, Hainichen; Elke Heidemann, Halberstadt; Sabine Schwarz, Halle-Neustadt; Jan Wohlbold, Heidenau; Roberto Stahl, Herzberg; Stefan Heiber, Heyda; Marko und Hans-Hermann Epstude, Kirchheilingen; Cornelia Häfner, Leinefelde; Beate Wasner, Leipzig; Norbert Wölfel, Andreas Vogel, beide Limbach-O.; Hardy Dömpke, Löderburg; Antje Mißbach, Giselher Schütze, beide Magdeburg; Markus Walther, Meißen; Karsten Knothe, Merseburg; Katrin May, Olbernhau; Carola Walter, Ottendorf-O.; Felix Kraenz, Picher; Olav Zirnstein, Pirna; Axel Buerke, Potthagen; Andreas Thiele, Rackwitz; Torsten Engelhaupt, Enrico Anton, Cornelia Fleischmann, Liane Marschall, Christine Reder, alle Roßdorf; Rainer Walke, Rostock; Marion Walther, Schlottwitz; Oliver Henze, Schneidlingen; Lars Hantschmann, Seifhennersdorf; Karin Möwald, Sömmerda; Axel Bichler, Sondershausen; Anja Tippe, Teterow; Thomas Flatz, Andreas Walter, beide Vacha; Dag Lohse, Vielau; Sven-Uwe Kanngießer, Wolmirsleben; Andreas Vogt, Silke Weißbach, beide Worbis; Ralph Schammer, Zerbst; Claudia Heret, Zwickau; Jörg Anschütz, Lehesten; AG Junge Mathematiker der O.-Grotewohl-O. Dreitzsch

Für fünfjährige Teilnahme

Ulrich Egermann, Uta Schmidt, beide Altenburg; Sven Völker, Andreas Henning, beide Bad Salzungen; Monika Döring, Peter Zülsdorff, Katja Geißler, Andreas Böttger, alle Berlin; Andreas Filz, Bernburg; Stefan Lenz, Bischofrod; Wolfram Schubert, Borna; Frank Wolff, Brotterode; René Aust, Calau; Thomas Freier, Creuzburg; Hans-Harald Neschke, Dresden; Jens Renner, Dürröhrsdorf; Thomas Prüver, Eberswalde; Patrick Zacharias, Eilsleben; René Weilert, Rüdiger Hochheim, Steffen Zillmer, alle Erfurt; Jana Reinhardt, Katharina Hildebrandt, Christiane Siebert, Kristin Danz, Corinna Mäder, Andrea Weyh, alle Fambach; Werner Ernst, Finsterwalde; Uwe Danz, Floh; Holger Hänchen, Forst; Thomas Mittelstädt, Thomas Monecke, beide Freiberg; Ulrike Hormann, Ulrike Bentz, Anja Bayer, alle Friedland; Katharina Dost, Geithain; Torsten Feigl, Gera; Jörn Pamperin, Hagenow; Rainer und Britta Struwe, Halberstadt; Ulrike Watzke, Hoyerswerda; Marco Ringel, Jänickendorf; Göran Glockmann, Norbert Kuschel, Jan Rüdiger, alle Jena; Nico Schmidt, Jüdenberg; Cornelia Weber, Mario Stern, Mike Hesse, alle Kaltennordheim; Käthe Bäckmann, Marko Niepel, beide Karl-Marx-Stadt; Werner Unger, Lehesten; Tobias Zepler, Langenwahl; Sandra Krüger, Ludwigslust; Christel Fritze, Magdeburg, Eberhard Schulze, Mildenberg; Kay Pfennighaus, Neubrandenburg; Manuela und Rüdiger Grewe, Neuhaus; Grit Pfützner, Ohorn; Michael Schmarje, Jürgen Rietz, beide Pirna; Kilian Kindelberger, Potsdam; Katrin Lönnig, Prettitz; Karsten Bossow, Ribnitz; Axel Kaminski, Tobias Franke, beide Riesa; Dirk und Ralf Seifert, Rochlitz; Kirstin Peter, Ulrich Rothe, beide Rostock; Ulrike Häfner, Schmalkalden; Stefan Erb, Schwallungen; Alexander Otto, Schwanebeck; Lars Prieske, Schwerin; Holger Reinitz, Sommerfeld; Jana Ullmann, Spremberg; Claudia Siegmund, Steinbach; Birgit Spindler, Heide Rudolph, Katrin Werner, alle Steinbach-Hallenberg; Andreas Lange, Stendal; Kerstin Schuster, Taubenheim; Stephan Marx, Ueckermünde; Frank Werbach, Marko Treichel, beide Unterbreizbach; Steffen Schmidt, Urleben; Horst Rex, Wählitz; Bettina Wiemuth, Weißenborn-L.; Manuela Montag, Oliver Auert, beide Weißenschirmbach; Sebastian Steinbach, Wernigerode; Christine Storandt, Wernshausen; Sören Schubert, Wittenberg; Jens Müller, Wolgast; Silke Weißbach, Andreas Vogt, beide Worbis; Janet Thom, Wünschendorf; Beate Balzer, Zittau

Für vierjährige Teilnahme

Tilo Kaiser, Aken; Frank Gembus, Altentreptow; André Höna, Altenburg; Ronald Stüve, Anklam; Michael Seibt, Arnstadt; Sabine Keilhaupt, Bad Lauchstädt; Uwe Völker, Sabine Werkmeister, Jan Schwate, alle Bad Salzungen; Thoralf Räsch, Bad Wilsnack; Alexander Starick, Ina Müller, beide Bärenklau; Claudia Groll, Bannewitz; Alexander Golz, Guiletta Himmel, Annekatrin Hegewald, Reik Hartmann, Annett Schafranka, Rainer Scheel, Matthias Böttger, Bodo Petermann, alle Berlin; Christian und Clemens Neufert, Torsten Adam, Jan Opalka, Susanne Filz, Katrin Priemuth, alle Bernburg; Stephan Hantsch, Berthelsdorf; Thomas Schulze, Bindow; Falk Wietreck, Bischofswerda; Andreas Liebmann, Bitterfeld; Thomas Römhild, Breitungen; Torsten Peter, Holger Wehner, Ralf Fuchs, alle Brotterode; Claudia Tittmann, Cainsdorf; Matthias Wiesick, Hagen Lessing, beide Cottbus; Stefan Daske, Dabendorf; Simone Eyning, Dingsleben; Domenik Fiedler, Tobias Rinke, beide Dingelstädt; Jens Meyer, Jens Herrmann, Uwe Löbel, Beate Schreiber, Michael Grüning, Edith Bombach, Andrea Hahn, Birgit Alm, Stefan Seifert, Ulf Erben, alle Dresden; Yvonne Gierth, Carsten Heinrich, beide Dürröhrsdorf; Kornelia Eckert, Effelder; Anne Heyl, Eisenach; Jan Buchmann, Eisenberg; Reinhard Schnippa, Eisenhüttenstadt; Lars Lämmerhirt, Ettenhausen; Karsten Wackernagel, Falkenberg; Kirsten Leffler, Anke Jung, Petra Stadler, Katrin Gerlin, Adrian Weinaug, Yvonne Scheiber, Yvonne Hollandt, Nicola Erb, Silke Wirth, Tanja Ilgen, Rico Neuhöfer, Thomas Leffler, Enrico Eck, Torsten Krone, Yvonne Stengel, Peggy Möller, Frank Leffler, alle Floh; Steffen Pietzsch, Frankfurt/O.; Karl Etourno, Freiberg; Thomas Wiegel, Freienorla; Matthias Elert, Friedrichsthal; Katja Frey, Roman Knöfler, beide Gersdorf; Dorit Jackisch, Görlitz; Roland Popp, Gotha; Jacqueline Spatke, Gräfenthal; Cornelia Bär, Greifendorf; Yvette Vogelsberger, Greifswald; Susanne Schulz, Grimma; Thomas Henker, Groitzsch; Frank Schnecgaß, Großbodungen; Jan Glaser, Großdeuben; Birgit Bindig, Großweitzschen; Ines Pannenberg, Jana Pausch, Silke Tränkner, alle Grünhain; Alois Belter, Hagenow; Kurt und Uwe Lehmann, Haidemühl; Burkhard Huth, Roland Kunert, Gunhild Berg, alle Halle; Vivian Bähr, Torsten Bohn, beide Halle-Neustadt; Antje Stehfest, Havelberg; Michael Puchta, Hecklingen; Jens Weinhold, Hermsdorf; Matthias Lönhardt, Herzberg; Olaf Schmidt, Hohenebra; Bert Frenzel, Horka; Claudia Meyer, Manuela Winkler, beide Hoyerswerda; Steffen Vogler, Torsten Borchardt, beide Ilmenau; Ellen Stelzner, Jena-Lobeda; Markus Glück, Jössnitz; Andreas Anders, Jüterbog; Stefan und Franziska Koch, Kamenz; Stefan Mader, Jane Bicly, beide Karl-Marx-Stadt; Marcus Waclawczyk, Kirchheilingen; Matthias Müller, Klaffenbach; Astrid Mirle, Kleindehsa; Karsten Knobloch, Kleinmachnow; Anke Baumann, Ronny Müller, beide Klietz; Ulrike Kleinau, Kritzmow; Olaf Dreyer, Krumbeck; Marko Rogozia, Ladeburg; Katrin Ziermann, Landsendorf; Mario Menger, Lauterbach; Kirsten Schröter, Katrin Anton, beide Leegebruch; Dominique Dode, Sebastian Meinhardt, Robert Staufenbiel, Martin Schreiter, Andreas Winter, alle Leinefelde; Henrik Holke, Mareike Schmidt, Christian Tiedt, alle Leipzig; Annett Reiche, Liederstädt; Mario Voigt, Löderburg; Cornelia Seidel, Lössau; Olaf Weber, Meuselwitz; Frank Höll, Mittelstille; Tilo Schulz, Möbiskruge; Dorit Pinnow, Daniela Voigtländer, Stefan König, Steffi Pörschel, alle Mügeln; Christian Bittner, Mühlhausen; Tino Elste, Nebra; Dajana Predöhl, Michael Ritter, beide Neuhaus; Petra Ropenus, Neuhof; Christian Rißler, Gabriele Bröner, beide Niederodewitz; Susan Abbe, Susanne Ludwig, beide Niederorla; Michael Hummel, Olbersdorf; Torsten Kaiser, Oranienbaum; Jana Wetzel, Oranienburg; Mario Koch, Oschersleben; Dörte Schappler, Parchim; Jan Fricke, Pasewalk; Susanne Kraenz, Picher; Alexander Moskau, Plauen; Bernd Völkel, Potsdam; Ronald Dreße, Pretitz; Claudia Burkhardt, Prettin; Sylke Ahrend, Rakow; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Doris Seifert, Rochlitz; Nicole Eck, Diana Herget, Nicole Fuß, Steffen Tiedmann, alle Roßdorf; Burkhard Rothe, Rostock; Daniela Möser, Sangerhausen; Sören Hader, Schlotheim; Torsten Haase, Matthias Kittner, beide Schmalkalden; Sina Schnock, Schönebeck; Enrico Rommel, Schwallungen; Claudia Vörkel, Schköna; Diana Heinrich, Seyda; Sandy Schinkel, Eileen Hesse, Korina Maloszyk, Babette Stietz, Ivonne Bühling, Petra Gerlach, Kay Schinkel, Steffen Vollbarth, alle Sondershausen; Norman Heidecke, Staßfurt; Katja Hoffmann, Melanie Wilhelm, beide Steinbach-Hallenberg; Peter Brock, Stralsund; Mario Buchholz, Tantow; Ulrike Kaden, Teltow; Torsten Wüstenberg, Templin; Iris Demmer, Themar; Sigrun Pfeiffer, Trebra; Diana Brenn, Sebastian Brenn, Norman Fuß, Jörg Steinbach, Silvano Storch, Christiane Heinemann, Susanne Peter, Annett Storch, Tanja Zeiß, alle Trusetal; Steffen Limburg, Karen Stenderhoff, Anett Tischendorf, Katrin Fladung, Elvira Stehling, Hans-Helmut Zappe, Michael Lotz, Sven Buchholz, alle Vacha; Elko Könlechner, Mario Zitek, Ronald Petigk, alle Weimar; Tanja Voigt, Wernburg; Otmar Jannasch, Wiednitz; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; Manuela Kabelitz, Wollin; Ulrike Langer, Wolmirstedt; Kristina Bergmann, Wolzig; Ronald Peters, Wismar; Nico Qual, Zeitz; Tom Marschall, Lutz Hengelhaupt, beide Zella-Mehlis; Holger Beyer, Zschopau; Olaf Breitzke, Zühlsdorf

Achtung!

Immer wieder bitten uns Leser um „alphas" älterer Jahrgänge oder mathematische Lesebögen. Leider können wir in den seltensten Fällen helfen!

Also – „ausgelesene" Exemplare bitte nicht wegwerfen! Schickt sie bitte an die Redaktion „alpha". Vielen Dank!

Alphons

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

Februar 1989

Olympiadeklasse 7

280731 Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2. Wäre das Volumen von w_2 um genau $9\,\text{cm}^3$ kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.
Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

280732 In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.
Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

280733 Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.
(2) Für diese Punkte gilt $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DE}$.
I. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

280734 Ermittle alle diejenigen Paare $(p; q)$ aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!
(1) Es gilt $q > p + 1$.
(2) Die Zahl $s = p + q$ ist ebenfalls eine Primzahl.
(3) Die Zahl $p \cdot q \cdot s$ ist durch 10 teilbar.

280735 Beweise, daß für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt:
Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets
$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{DD'} + \overline{EE'} + \overline{FF'}$.

280736 Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d. h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... usw. werden markiert. Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d. h., beim Weiterzählen läßt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.
Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!

Olympiadeklasse 8

280831 Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, daß jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:
(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.
(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.
Zeige, daß unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten! Überprüfe, daß auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

280832 Beweise den folgenden Satz!
Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.

280833 Beweise die folgende Aussage!
Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, daß das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.
Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das „Produkt" der Zahlen dieser Gruppe.

280834 Für ein Schulsportfest möchte die Klasse 8c aus den sieben im 100-m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4×100-m-Staffellauf auswählen.
a) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?
b) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
c) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?
d) In wieviel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

280835 Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F.
Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle FDE$ in Abhängigkeit von α und β!
Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.

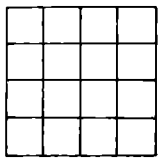
280836 Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.
(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.
(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.
I. Zeige, daß ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, daß ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck
a) existiert,
b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!

Olympiadeklasse 9

280931 Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.
Beweisen Sie, daß in jedem pythagore-

ischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

280932 In jedes der 16 Felder eines 4×4-Quadrates (siehe Bild) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.



Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!
Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in die andere überführt.

280933 Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide $P = ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ eine Ebene e so gibt, daß die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!
Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und daß jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

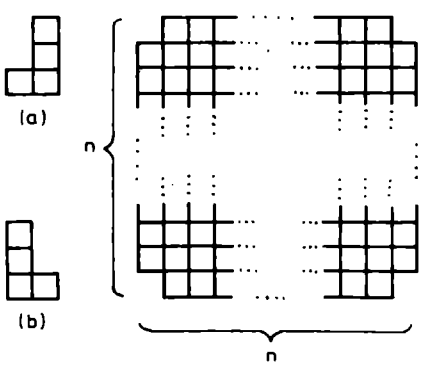
280934 Beweisen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen x und y stets die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

gilt!

280935 Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

280936 Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Bild) vollständig so in Teile zu zerlegen, daß jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!



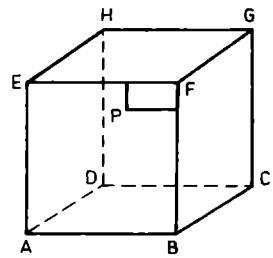
Hinweis: Es ist auch zugelassen, daß in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.

Olympiadeklasse 10

281031 Für jede natürliche Zahl n werde ihre Zifferndarstellung mit der Basis 2 (Darstellung als Dualzahl), ferner ihre Zifferndarstellung mit der Basis 3 usw. ..., schließlich ihre Zifferndarstellung mit der Basis 10 (Darstellung als Dezimalzahl) betrachtet.
Wenn es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, bei denen in jeder dieser Zifferndarstellungen (mit den Basen 2, 3, 4, ..., 10) die letzte Ziffer (Einerziffer) eine 1 ist, so ermittle man die kleinste derartige natürliche Zahl n.

281032 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(f; g)$ von Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) f ist eine quadratische Funktion, in deren Darstellung $y = f(x)$ der bei x^2 stehende Koeffizient 1 beträgt.
(2) Für alle reellen x gilt $f(x + 1) = g(x)$.
(3) f hat genau eine reelle Nullstelle.
(4) Es gilt $g(5) = 4$.

281033 Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel der Kantenlänge 6 cm. Auf der Seitenfläche $ABFE$ sei P derjenige Punkt, der von EF den Abstand 1 cm und von BF den Abstand 2 cm hat (siehe Bild).
Ermitteln Sie die Menge M aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Würfels, die von P aus erreichbar sind, jeweils längs eines auf der Oberfläche verlaufenden Weges, der höchstens die Länge 4 cm hat!



(verkleinerter Maßstab)

Hinweis: Die gesuchte Menge M ist als Vereinigungsmenge von Flächenstücken auf den einzelnen Seitenflächen des Würfels nachzuweisen. Jedes dieser Flächenstücke ist durch Angabe seiner Randkurve zu beschreiben; die Beschreibung ist so anzulegen, daß sie die Möglichkeit einer konstruktiven Gewinnung der einzelnen Teile solcher Randkurven vermittelt.

281034 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen!

$$a^3 - b^3 - a^2 + b^2 + a - b = 0 \quad (1)$$

281035 Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm, $s = 16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $a = \overline{BC}$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe γ.
I. Beweisen Sie, daß jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, daß jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz eine andere Zahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenannten Fall diese Zahl!

281036
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine $(n + 2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.
Hinweis: Die Verwendung eines – nicht programmierbaren – Taschenrechners ist gestattet.

Olympiadeklassen 11/12

281231 Man ermittle alle diejenigen aus je drei Gliedern bestehenden Folgen (a_1, a_2, q_3) und (b_1, b_2, b_3), die mit zwei geeigneten von Null verschiedenen reellen Zahlen p, r sowie mit $q = 5$ die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Es gilt $a_1 = \frac{1}{p}$, $a_2 = \frac{2}{q}$, $a_3 = \frac{1}{3}$.
(2) Es gilt $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_1 \cdot a_2}$, $b_3 = \frac{1}{a_2 \cdot a_3}$.
(3) Die Folge (a_1, a_2, a_3) ist eine arithmetische Folge.
(4) Die Folge (b_1, b_2, b_3) ist eine arithmetische Folge.

281232 Gegeben seien ein Punkt A in einer Ebene e sowie eine Länge a.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte C in e, zu denen es jeweils Punkte B und D so gibt, daß $ABCD$ ein Parallelogramm mit $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{AD}$ ist.

Von den nachstehenden Aufgaben 281233A und 281233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

281233A Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, zu jedem $i = 1, \ldots, n$ eine natürliche Zahl a_i so anzugeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:
(1) Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $0 \leq a_i \leq \frac{1}{2}(n - 1) \cdot n$.
(2) Keine zwei unter den Differenzen $a_j - a_i$, die man für alle i, j mit $1 \leq i \leq n$, $i \leq j \leq n$ und $i \neq j$ bilden kann, sind einander gleich.

281233B Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ sei die folgende Forderung betrachtet: Man soll $2n$ Gegenstände so in n (genügend

große) Behälter verteilen, daß die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder Behälter enthält mindestens einen der Gegenstände.
(2) Jeder Behälter enthält höchstens n der Gegenstände.
(3) Es ist nicht möglich, die n Behälter so in zwei getrennten (genügend großen) Räumen unterzubringen, daß dabei in jeden der beiden Räume n der Gegenstände gelangen.
a) Geben Sie für $n = 3$ eine Verteilung von 6 Gegenständen in 3 Behälter an, und weisen Sie nach, daß die von Ihnen angegebene Verteilung die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
b) Beweisen Sie, daß es genau dann möglich ist, die Forderung zu erfüllen, wenn n eine ungerade Zahl ist!
c) Ermitteln Sie für jedes ungerade $n \geq 3$ alle Verteilungen der geforderten Art!

281234 Man untersuche, ob es 21 paarweise verschiedene ganze Zahlen sowie eine Reihenfolge

$$a_1, a_2, \ldots, a_{21} \qquad (*)$$

dieser Zahlen so gibt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je vier in der Reihenfolge (*) unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen ergibt sich eine negative Summe dieser vier Zahlen.
(2) Die Summe aller 21 Zahlen $a_1, \ldots, a_{21}$ beträgt 1989.

281235 Beweisen Sie den folgenden Satz! Wenn (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist, die für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \ldots + \frac{x_{n^2}}{n} \geq 1$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

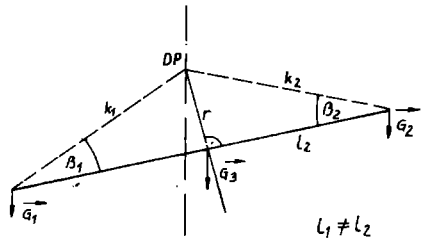
$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n} \leq 3.$$

281236 Es sei d eine gegebene Streckenlänge. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Pyramiden $ABCS$, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.
(2) Das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C hat den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Fußpunkt.
(3) Der Abstand zwischen den Kanten AS und BC beträgt d.
Untersuchen Sie, ob es in der Menge M eine Pyramide mit kleinstem Volumen gibt! Ist das der Fall, so ermitteln Sie in Abhängigkeit von d dieses kleinstmögliche Volumen!
Hinweis: Unter dem Abstand zwischen zwei Strecken UV und XY, von denen UV auf einer Geraden g und XY auf einer zu g windschiefen Geraden h liegt, versteht man die Länge der Strecke GH, wo G auf g, H auf h liegt und GH sowohl g als auch h senkrecht schneidet. Diese Erklärung gilt auch für den Fall, daß derartige Punkte G, H sogar den Strecken UV bzw. XY angehören.

Solltet ihr Probleme bei der Lösung der Aufgaben haben, wendet euch bitte über euren Mathematiklehrer an das Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit.

Mathematik an der Balkenwaage

Mit Hilfe der Balkenwaage wird ermittelt, ob zwei Probekörper die gleiche Masse besitzen, und wenn dies nicht zutrifft, wie groß die Differenz der Massen ist.
Der prinzipielle Aufbau einer solchen Waage ist folgender:



Das Waagengestänge wird von r, l_1 und l_2 gebildet, wobei l_1 der zum Probekörper 1 gehörende und l_2 der zum Körper 2 gehörende Lastarm ist. Das Gestänge ist im Drehpunkt (DP) gelagert. Der Auslenkwinkel wird mit einer Skala angezeigt. G_1 und G_2 sind die Gewichtskräfte der Probekörper. G_3 ist die Gewichtskraft des Waagengestänges. Sie greift wegen der Symmetrie und der Länge der Lastarme in der angezeigten Stelle an.
Es sollen die Gewichtskräfte G_1 und G_2 verglichen werden. Als Ergebnis der Wägung erhält man den zugehörigen Auslenkwinkel. Es muß eine Beziehung zwischen den Gewichtskräften und dem Auslenkwinkel gefunden werden.
Die Waage verhält sich wie ein starrer Körper. Dieser ist im Gleichgewicht, wenn (1) die Summe aller Kräfte 0 ist und (2) die Summe aller Drehmomente 0 ist.
Die Summe der nach unten gerichteten Kräfte $(G_1 + G_2 + G_3)$ findet ihre Gegenkraft im Lager der Waage, also im Drehpunkt. Damit ist Bedingung (1) erfüllt.
Der Betrag des Drehmoments ist definiert durch die Gleichung $M = F \cdot r \cdot \sin\gamma$. Dabei ist F die wirkende Kraft, r der Abstand zwischen dem Drehpunkt des Körpers und dem Angriffspunkt der Kraft. γ ist der Winkel zwischen der Wirkungslinie der Kraft und der Verbindungslinie Drehpunkt – Angriffspunkt von F.
O. B. d. A. sei das Drehmoment positiv, wenn der Körper durch dieses Moment in Uhrzeigerrichtung gedreht wird.
Für die Waage gilt deshalb, wenn o. B. d. A. α in der skizzierten Lage ist, für die Drehmomente von:
$G_1: M_1 = -G_1 \cdot k_1 \cdot \sin(90° + \beta_1 + \alpha)$
$G_2: M_2 = G_2 \cdot k_2 \cdot \sin(90° + \beta_2 - \alpha)$
$G_3: M_3 = G_3 \cdot r \cdot \sin(180° - \alpha)$

Es gilt (siehe Bild):

$$\cos\beta_i = \frac{l_i}{k_i} \text{ und } \sin\beta_i = \frac{r}{k_i}.$$

Durch einfache Umformungen erhält man:*
$M_1 = -G_1 \cdot (l_1 \cdot \cos\alpha - r \cdot \sin\alpha)$
$M_2 = G_2 \cdot (l_2 \cdot \cos\alpha + r \cdot \sin\alpha)$
$M_3 = G_3 \cdot r \cdot \sin\alpha.$
Bedingung (3) fordert nun:
$M_1 + M_2 + M_3 = 0$
$-G_1 \cdot (l_1 \cos\alpha - r \sin\alpha) + G_2(l_2 \cos\alpha + r \sin\alpha) + G_3 \cdot r \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$
Der Winkel $\alpha = 90°$ ist physikalisch unsinnig. Deshalb kann Gleichung (1) durch $\cos\alpha$ dividiert werden. Durch Umformungen erhält man daraus:

$$\tan\alpha = \frac{G_1 l_1 - G_2 l_2}{r(G_1 + G_2 + G_3)} \qquad (l^*)$$

Es soll nun der Winkel α_0 bestimmt werden, für den die Waage am empfindlichsten ist. Dieser Winkel ist dadurch gekennzeichnet, daß eine Änderung einer der Kräfte G_1 oder G_2 um ΔG an der Stelle $\alpha = \alpha_0$ die größte Änderung von α hervorruft.
Fall I: Die Gewichtskraft des Waagengestänges gegenüber den beiden anderen Gewichtskräften sei vernachlässigbar: $G_3 = 0$.
Die Änderung einer der Kräfte G_1 oder G_2 beeinflußt zunächst das Drehmoment und dann erst den Auslenkwinkel. Deshalb muß eine Änderung von G_2 um ΔG eine maximale Veränderung des Drehmoments M_2 bewirken. Für M_2 galt:
$M_2 = G_2 k_2 \sin(90° + \beta_2 - \alpha)$
$\hat{M}_2 = \hat{G}_2 k_2 \sin(90° + \beta_2 - \alpha)$
mit $G_2 - \hat{G}_2 = \Delta G_2$

$$\Delta M_2 = \Delta G_2 k_2 \cdot \sin(90° + \beta_2 - \alpha)$$

Damit ΔM_2 maximal wird, müssen k_2 und $\sin(90° + \beta_2 - \alpha)$ maximal sein.
k_2 sind durch die Ausmaße der Waage Grenzen gesetzt und kann deshalb nicht beliebig vergrößert werden.
$\sin(90° + \beta_2 - \alpha)$ ist maximal bei $\beta_2 = \alpha$. Damit hat die Waage an der Stelle $\alpha_0 = \beta_2$ für G_2 die größte Empfindlichkeit. Da $G_1 = G_2$ gemessen werden soll, muß l_1 verändert werden, damit die Waage für $G_1 = G_2$ den Winkel α_0 annimmt. Es gilt

$$\tan\beta_2 = \frac{r}{l_2}$$

und mit $\alpha_0 = \beta_2$ auch $\tan\alpha_0 = \frac{r}{l_2}$.
Mit $G_1 = G_2$ folgt für l_1 aus (l^*):

$$l_1 = l_2 + 2\frac{r^2}{l_2}.$$

Wenn die Gewichtskräfte nicht gleich sind, stellt sich ein Winkel ein, der ungleich α_0 ist. Es sei $G_1 - G_2 = \Delta G$ und $\Delta G \ll G_2$. Damit gilt $G_1 = G_2 + \Delta G$.
Für den Auslenkwinkel ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta G l_1 + G_2 l_1 - G_2 l_2}{r(2G_2 + \Delta G)}$$

$$= \frac{\Delta G l_1}{r(2G_2 + \Delta G)} + \frac{l_1 - l_2}{r\left(2 + \frac{\Delta G}{G_2}\right)}$$

* Nutze folgende Additionstheoreme:
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$

$$\tan\alpha \approx \Delta G\frac{l_1}{2rG_2} + \frac{l_1 - l_2}{2r}$$

$$= \Delta G\frac{l_1}{2rG_2} + \tan\alpha_0 .$$

Daraus folgt:
Die Differenz der tan-Werte ist proportional der Gewichtsdifferenz.
Die Differenz der tan-Werte kann nicht angezeigt werden.
Nur $(\alpha_0 - \alpha)$ ist ablesbar. Da die tan-Funktion streng monoton wachsend ist, gilt: je größer $\tan(\alpha_0 - \alpha)$, desto größer auch $(\alpha_0 - \alpha)$,

$$\tan(\alpha_0 - \alpha) = \frac{\tan\alpha_0 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha_0 \tan\alpha} \text{ mit}$$

$$\tan\alpha_0 = \frac{r}{l_2} \text{ und } \tan\alpha = \tan\alpha_0 + \Delta G\frac{l_1}{2rG_2}.$$

Damit erhält man

$$\tan(\alpha_0 - \alpha) = \frac{\Delta G}{G} \cdot \frac{l}{2r\left(1 + \frac{r}{l^2}\right)}.$$

Dieser Wert wird dann am größten, wenn $l \gg r$ gilt.

Der Wert $\tan\alpha_0 = \frac{r}{l}$ strebt gegen Null.

Deshalb ist die Balkenwaage am empfindlichsten, wenn gilt:
$\alpha_0 = 0$ und $l \gg r$ und $l_1 = l_2$.
Fall II: G_3 ist nicht vernachlässigbar. Es werde angenommen, daß die empfindlichste Stelle der Waage bei $\alpha_0 \neq 0$ liege. Für $G_1 = G_2$ muß die Waage diesen Winkel annehmen. Damit ergibt sich für die Länge des Lastarmes l_1

$$\tan\alpha_0 = \frac{l_1 G_2 - l_2 G_2}{r(2G + G_3)}$$

$$l_1 = r\left(2 + \frac{G_3}{G_2}\right)\tan\alpha_0 + l_2 .$$

Die Länge von l_1 ist also vom Verhältnis $G_3 : G_2$ abhängig. Es muß für jede (!) neue Messung ein anderer Lastarm benutzt und außerdem vor jeder Messung die Kraft G_2 bestimmt werden. Dafür braucht man allerdings wieder eine Waage ...!
Dieser Kreis ist nur zu durchbrechen, wenn $\alpha_0 = 0$ gewählt wird. So ist gezeigt, daß man mit der Balkenwaage die optimalen Ergebnisse bei $\alpha_0 = 0$ erzielt.
Tritt der Fall $G_1 + G_2 \ll G_3$ auf, ergibt sich folgendes:

$$\tan\alpha = \frac{l(G_1 - G_2)}{r(G_1 + G_2 + G_3)} \approx \frac{l}{rG_3}(G_1 - G_2).$$

Für kleine Winkel gilt $\tan\alpha \approx \alpha$ (bei 4° ist der Fehler 1,5 %).
Daraus folgt:

$$\alpha = m \cdot \Delta G \text{ mit } m = \frac{l}{rG_3}.$$

Die Skala für α kann sofort in Masseeinheiten geeicht werden, da m konstant ist.

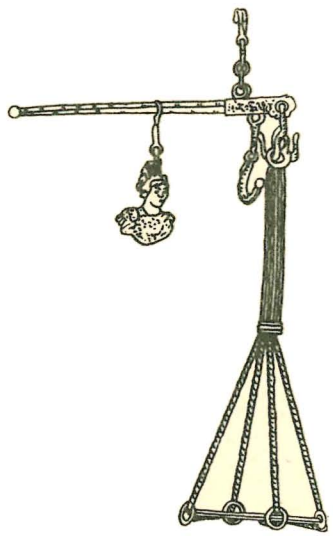
A. Vogel

Schon gewußt?

In der DDR gibt es einen einzigen Ichtmacher: Rainer Merzbach in Leipzig. Was R. Merzbach macht?
Er stellt hochgenaue Wägestücke zwischen 100 und einem tausendstel Gramm her. In seiner Werkstatt wachen Meßgeräte über konstante Raumtemperatur und Luftfeuchtigkeit, bei wechselndem Luftdruck müssen die Pinzetten aus der Hand gelegt werden.

Mathematik auf der Waagschale

Als wichtiges Instrument zum Vergleichen von Massen bei Handel und Produktion werden seit mindestens 5 000 Jahren Waagen benutzt:
Das Bild einer gleicharmigen Hebelwaage ist in eine Pyramide von Giseh eingemeißelt. Im Laufe der Zeit lernt die Menschheit die an einer Waage wirkenden Gesetzmäßigkeiten immer besser verstehen, werden dem jeweiligen Verwendungszweck angepaßte Waagentypen erfunden und weiterentwickelt. Ein kleiner Einblick in die Entwicklung der Wägetechnik mit Hebelwaagen soll beiläufig zu den folgenden Beiträgen über Waagen geboten werden. Für gewährte Unterstützung ist den Leitern und Mitarbeitern der Museen in Oschatz und Göhren/Rügen und des Stadtarchivs Stralsund herzlich zu danken.



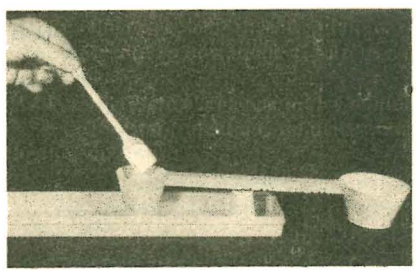
Die abgebildete, bei Ausgrabungen in Pompeji (79 u. Z. durch Vulkanausbruch des Vesuv verschüttet) gefundene Altrömische Schnellwaage befindet sich jetzt in der Leningrader Ermitage. Sie besitzt zwei Aufhängebügel. Zu jedem Aufhängebügel gehört eine mit Kerben versehene Ableseskale. Ihr Laufgewicht hat die Form einer Jünglingsbüste.

Aufgaben über ein Dosierbesteck für Pflanzenschutz- und Schädlingsbekämpfungsmittel (PSM)

Schnellwaagen wie die im Göhrener Museum befindlichen waren bereits in Indien vor 2 000 Jahren und im Frankenreich Karls des Großen (768 bis 814) gebräuchlich. Diese Schnellwaagen sind leicht herstellbar, jedoch ungenauer als die römischen. Der eine Hebelarm weist eine Verdickung (Festgewicht) auf, während sich am anderen Hebelarm ein Haken für die Last befindet. Das Gleichgewicht wird hergestellt, indem man die Schnurschlinge auf dem mit einer Skale versehenen Waagebalken verschiebt. Diese Schnellwaagen wurden noch im 19. Jahrhundert von den Bauern als Marktwaagen benutzt: Nach einer im Stadtarchiv Stralsund befindlichen Akte aus dem Jahre 1804 sind die „Besemermacher" verpflichtet, die „Löhde" (Waagebalken) aus einem Stück anzufertigen und die „Kolbe" (Festgewicht) mit Blei auszugießen. Das städtische Eichamt Stralsund besaß bis zu seiner Auflösung im Jahre 1912 (Verstaatlichung des Eichwesens) Brennstempel.

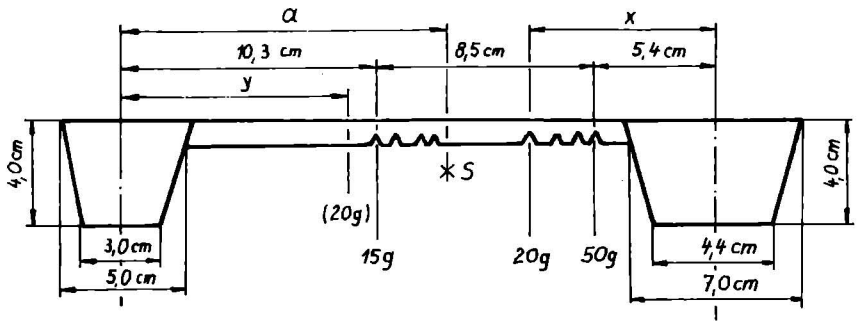
Als Besemer bezeichnete Schnellwaage mit eingebranntem Stralsunder Eichzeichen aus dem Mönchsguter Museum in Göhren

Das gleiche Prinzip zum Herstellen des Gleichgewichtes, nämlich das Verschieben der Drehachse, wird beim Dosierbesteck für PSM verwendet, über das einige Aufgaben gestellt und gelöst werden.



Dosierbesteck für PSM

▲1▲ Der Waagebalken des Dosierbestecks ist zum einen im Gleichgewicht, wenn sich im kleinen Becher 15 g Füllmittel befinden und die 15-g-Kerbe Drehachse ist, und zum anderen, wenn sich im großen Becher 50 g Füllmittel befinden und die 50-g-Kerbe Drehachse ist.
Berechne aus den in der Skizze des Waagebalkens angegebenen Längenangaben 10,3 cm, 8,5 cm und 5,4 cm die Masse m des Waagebalkens und den Abstand a seines Schwerpunktes von der Achse des kleinen Bechers!



▲2▲ Zum Abwägen von 20 g Füllmitttel im großen Becher ist die am Waagebalken angebrachte 20-g-Kerbe als Drehachse zu verwenden.
Berechne den Abstand x dieser Kerbe von der Achse des großen Bechers!

▲3▲ Der große Becher des Waagebalkens faßt (auch wenn die Oberfläche des Füllmittels eben ist) 50 g übliche Füllmittel.
Berechne aus den in der Skizze angegebenen Abmessungen beider Becher ihr Volumen! (Benutze dazu die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfes aus dem Tafelwerk!) Erschließe daraus, daß der kleine Becher mehr als 20 g übliche Füllmittel faßt!

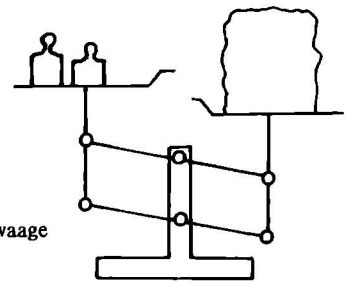
▲4▲ Die in der Skizze angegebenen Längenangaben wurden durch Messen mit einem Lineal erhalten. Für jeden dieser Meßwerte ist der Betrag des absoluten Fehlers höchstens gleich 0,05 cm. Wie genau konnte aus diesen Angaben die Masse m des Waagebalkens und der Abstand a seines Schwerpunktes von der Achse des kleinen Bechers ermittelt werden?

▲5▲ Wie kann man die Lage des Schwerpunktes S durch ein einfaches Experiment mit dem Dosiergerät bestimmen?

▲6▲ In der Gebrauchsanweisung zum Dosiergerät heißt es:
„... 1. Waagebalken mit der entsprechenden Gewichtsmarkierung auf die Schneide im Unterteil des Kastens auflegen.
2. Den hochstehenden Becher so lange zentrisch mit PSM befüllen, bis sich die Waage im Gleichgewicht befindet. ...“
Warum muß pulverförmiges PSM zentrisch in den Becher gefüllt werden?
Übrigens: Die Theorie der Hebelwaage entwickelten ...
... Aristoteles (384 bis 322 v. u. Z.),
Euklid (um 300 v. u. Z.) und
Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) für einen geraden masselosen Hebel
... Leonardo da Vinci (1452 bis 1519)
und Leonhard Euler (1707 bis 1783)
für einen massebehafteten, absolut starren Hebel
... Dmitri Iwanowitsch Mendelejew
(1834 bis 1907) für einen massebehafteten elastischen Hebel.

Wägungsaufgaben

Die bei Wägungsaufgaben in Text und Bild häufig benutzte Waage ist eine Tafelwaage. Die Tafelwaage wurde 1669 von Giles Persone, der sich nach seinem Heimatort de Roberval nannte, erfunden. Bei ihr wird durch ein doppeltes Stangensystem (Parallelogramm) bewirkt, daß sich beide Waagschalen nur parallel zu sich bewegen können. Dadurch wirkt jede aufgelegte Masse unabhängig von der Stelle, an der sie auf die Waagschale gelegt wird.

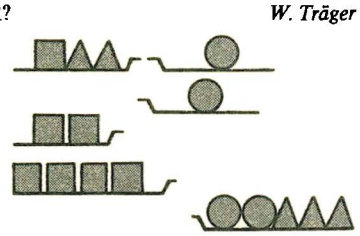

Tafelwaage

Ein Wägestück ist zu leicht!

Ein Vater hat seinem Sohn zur Einschulung als Geschenk eine Tafelwaage und neun zylinderförmige Wägestücke mit den Massen 1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g und 100 g angefertigt und in jedes Wägestück die Maßzahl seiner Masse eingeschlagen.
Nach geraumer Zeit teilt der Sohn dem Vater mit: „Eiche bitte meinen Wägesatz neu, denn eines meiner Wägestücke war verrostet und ich habe es deshalb mit Feile und Schmirgelpapier tüchtig bearbeitet. Ich weiß leider nur noch, daß es weder das 50-g- noch das 100-g-Wägestück war.“
Der Vater antwortet: „Finde selbst das Wägestück heraus, das weniger Masse besitzt als seine Beschriftung angibt und bringe es mir. Du kannst es sogar mit höchstens zwei Wägungen herausfinden.“ Wie kann der Sohn das schaffen?

Ohne Wägestücke!

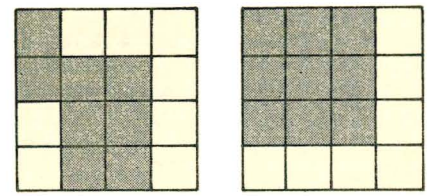
Zur Verfügung stehen massegleiche Kugeln, massegleiche Würfel und massegleiche Kegel. Die Masse einer Kugel ist ein Vielfaches der Masse eines Kegels. Mit diesen Körpern werden die folgenden drei Wägungen ausgeführt, wobei die Waage nur einmal im Gleichgewicht ist. Wieviel Kegel haben die gleiche Masse wie eine Kugel? *W. Träger*



Lösungen zu: alpha-Wettbewerb
Heft 1/89

Ma 5 ■ 2978 Aus (1) und (2) folgt: Birgit hat die Zeugnisnote 2. Somit hat Anke die Zeugnisnote 1. Aus (3) folgt: Birgit ist Schülerin der Klasse 4. Aus (5) folgt: Claudia ist Schülerin der Klasse 6.

Ma 5 ■ 2979 a) 16 Quadratseiten zu je 5 mm Länge ergeben einen Umfang von 80 mm Länge.
Mögliche Lösungen für b) und c)
b) c)



Ma 5 ■ 2980 Aus $mn - n = my$ folgt
$y = 0$,
aus $rs + mn = x0z$ folgt $x = 1$,
aus $10z + 1s = 1s0$ folgt $s = 2$,
aus $10z + 12 = 120$ folgt $z = 8$,
aus $r2 : 18 = a$ folgt $a = 4$ und $r = 7$,
aus $4 \cdot m0 = 120$ folgt $m = 3$,
aus $18 - n = 12$ folgt $n = 6$.
Die vollständige Lösung lautet somit

$$\begin{array}{rcl} 72 & + & 36 = 108 \\ : & - & + \\ 18 & - & 6 = 12 \\ \hline 4 & \cdot & 30 = 120 \end{array}$$

Ma 5 ■ 2981 Vom ersten bis zum fünften Mast gibt es vier Zwischenräume von je 250 m : 4 = 62,5 m Länge. Zwischen dem ersten und dem zehnten Mast sind es neun Zwischenräume; deshalb beträgt diese Entfernung 9 · 62,5 m = 562,5 m.

Ma 5 ■ 2982 Es sei n eine natürliche Zahl, also $(n - 1)$ ihr Vorgänger und $(n + 1)$ ihr Nachfolger. Wegen
$(n - 1) + (n + 1) = 2n$ gilt $2n = 1978$.
Die natürliche Zahl lautet $n = 989$. Wegen $2n = 1989$ existiert keine natürliche Zahl n, da $2n$ eine gerade, aber 1989 eine ungerade Zahl ist.

Ma 5 ■ 2983 Es sind 35 · 6 t = 210 t Mauersteine zu transportieren. Wegen
19 · 6 t = 114 t und
210 t − 114 t = 96 t und
12 · 8 t = 96 t sind 19 + 12 = 31 Fuhren durchgeführt worden. Es wurden also 35 − 31 = 4 Fuhren eingespart.

Ma 5 ■ 2984 Aus den acht Würfeln ohne Farbe läßt sich ein $2 \cdot 2 \cdot 2$-Würfel bilden. Es müssen in jeder der drei Richtungen (Länge, Breite, Höhe) vier Würfel gelegen haben. Der ursprüngliche, ganz mit einer Farbe angestrichene Würfel besteht deshalb aus $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ gleichgroßen kleineren Würfeln. Wegen $64 - 8 = 56$ gibt es also 56 Würfel mit Farbe.

Ma 6 ■ 2985 Es gilt
$1001 = 1 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Die Zahl 1001 besitzt genau acht Teiler; sie lauten 1, 7, 11, 13, 1001, 77, 91, 143.

Ma 6 ■ 2986 Im Dreieck ADS hat der Winkel $\sphericalangle ASD$ die Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$. Im Dreieck AEC hat der Winkel $\sphericalangle AEC$ die Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$. Als Scheitelwinkel zu $\sphericalangle ASD$ hat der Winkel $\sphericalangle CSE$ die Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$.
Aus $\sphericalangle CSE \cong \sphericalangle CES$ folgt $\overline{CS} \cong \overline{CE}$.

Ma 6 ■ 2987 Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann sind n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Nun gilt
$n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$
$= 4 \cdot n + 6 = 2 \cdot (2n + 3)$.
Da $2n$ eine gerade natürliche Zahl ist, muß $2n + 3$ eine ungerade natürliche Zahl sein. Somit ist $2 \cdot (2n + 3)$ durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Von den vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ sind genau zwei ungerade und genau zwei gerade Zahlen. Von den beiden geraden Zahlen ist eine durch 2, die andere durch 4, das Produkt
$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ also durch $2 \cdot 4 = 8$ teilbar.

Ma 6 ■ 2988 Angenommen, Erwin ist x Jahre alt; dann ist seine Schwester $(x - 2)$ Jahre, sein Bruder $(x + 3)$ Jahre alt. Die Geschwister sind zusammen $(3x + 1)$ Jahre alt, und es gilt $3x + 1 = 40$, $3x = 39$, $x = 13$. Erwin ist 13 Jahre, seine Schwester 11 Jahre, sein Bruder 16 Jahre alt.

Ma 6 ■ 2989 Wegen $a + b > c$ und $a + b + c < 30$ gibt es genau vier Möglichkeiten für die Maßzahlen der Seitenlängen des Dreiecks, und zwar (3, 5, 7), (3, 11, 13), (5, 7, 11), (5, 11, 13).

Ma 6 ■ 2990 Wegen $a + b > c$ und $a = 3$ cm und $b = 1$ cm gilt $c < 4$ cm.
Wegen $b + c > a$, also $1\text{ cm} + c > 3\text{ cm}$, gilt $c > 2$ cm.
Aus $2\text{ cm} < c < 4\text{ cm}$ folgt $c = 3$ cm und somit $u = a + b + c = 7$ cm.

Na/Te 6 ■ 443 Gesucht: G (in N)

Gegeben: $s = 10$ cm; $\varrho = 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Es wird zunächst die Masse des Körpers berechnet. Das Volumen V des Würfels beträgt $V = s \cdot s \cdot s$; $V = 1000\text{ cm}^3$.
Da 1 cm³ eine Masse von 7,8 g hat, hat der Würfel die Masse von $m = 7\,800$ g. Auf einen Körper mit der Masse von 100 g wirkt eine Gewichtskraft von 1 N. Demzufolge wirkt auf den Würfel eine Gewichtskraft von 78 N.

Ma 7 ■ 2991 Angenommen, die Tochter ist heute x Jahre, die Mutter also $4x$ Jahre alt; dann gilt
$4x + 16 = 2 \cdot (x + 16)$, also $x = 8$.
Heute ist die Tochter 8 Jahre, die Mutter 32 Jahre alt.

Ma 7 ■ 2992 Angenommen, es sind x Ein-, also $(82 - x)$ Zweibettzimmer; dann gilt $x + 2 \cdot (82 - x) = 132$, also $x = 32$.
Dieses Hotel hat 32 Ein- und 50 Zweibettzimmer.

Ma 7 ■ 2993 Wir zeichnen den Radius $\overline{MP}$.
Aus $\overline{MB} = \overline{MP}$ folgt $\sphericalangle MPB = \sphericalangle MBP = \varphi$.
Daraus folgt weiter $\sphericalangle CPA = 90° - \varphi$.
Im rechtwinkligen Dreieck AMB gilt ferner $\sphericalangle BAM = 90° - \varphi$. Ferner gilt $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAM = 90° - \varphi$ als Scheitelwinkelpaar. Aus $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CPA = 90° - \varphi$ folgt $\overline{CA} = \overline{CP}$, d. h., das Dreieck CPA ist gleichschenklig.

Ma 7 ■ 2994 Es seien $n - 1$, n, $n + 1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n \geqq 2$; dann gilt
$5 \cdot (n - 1 + n + n + 1) = (n - 1)$
$\cdot n \cdot (n + 1)$, $15n = n \cdot (n^2 - 1)$,
$15 = n^2 - 1$, $n^2 = 16$, $n = 4$. Es handelt sich um die Zahlen 3, 4 und 5.

Ma 7 ■ 2995 Es gilt $(n+1)^2 - n^2$
$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
$= n + (n + 1)$.

Na/Te 7 ■ 444 Gesucht: h (in cm);
Gegeben: (aus Lehrbuch 6 (Physik));

$\varrho_{\text{Wasser}} = \frac{1\text{ g}}{\text{cm}^3}$; $\varrho_{\text{Benzin}} = \frac{0{,}7\text{ g}}{\text{cm}^3}$;

$\varrho_{\text{Öl}} = \frac{0{,}9\text{ g}}{\text{cm}^3}$

Aus $m = \frac{\varrho}{V}$ folgt $V = \frac{m}{\varrho}$. Mit einer Masse $m = 100$ g ergeben sich Volumina von 100 cm³; 143 cm³ und 111 cm³. Da die Grundfläche der zylindrischen Flaschen 10 cm² beträgt, steht das Wasser 10 cm, das Benzin 14,3 und das Öl 11,1 cm hoch.

Na/Te 7 ■ 445 Mit einer Kraft von 10 N. Das Seil dient nur zum Übertragen der Kraft von einem Körper auf den anderen.

Ma 8 ■ 2996 Es gilt
$z = p^4 - 1 = (p^2 + 1)(p^2 - 1)$
$= (p^2 + 1)(p - 1)(p + 1)$.
Alle Primzahlen $p > 5$ sind ungerade. Das Quadrat p^2 einer ungeraden Zahl p ist ebenfalls ungerade; damit ist $p^2 + 1$ eine gerade Zahl, also durch 2 teilbar. Ferner sind $p - 1$ und $p + 1$ aufeinanderfolgende gerade Zahlen, von denen eine durch 2, die andere durch 4 teilbar ist. Deshalb ist z durch $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ teilbar. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p - 1$, p, $p + 1$ ist eine durch 3 teilbar. Da p Primzahl ist, muß entweder $p - 1$ oder $p + 1$ durch 3 teilbar sein. Damit ist z durch $3 \cdot 16 = 48$ teilbar. Primzahlen größer als 5 können nur auf die Grundziffer 1, 3, 7 oder 9 enden. Die Quadrate dieser Zahlen enden demnach nur auf die Grundziffer 1 oder 9. Deshalb ist entweder $p^2 + 1$ oder $p^2 - 1$ durch 5 teilbar. Damit ist z durch $5 \cdot 48 = 240$ teilbar.

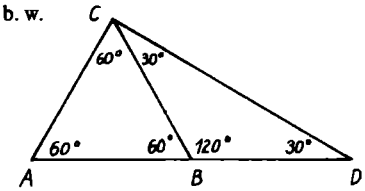
Ma 8 ■ 2997 Nach den Bedingungen der Aufgabe ist das Dreieck BCD gleichschenklig; daraus folgt, daß $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle DCB$; ihre Größe beträgt je $\frac{\gamma}{2}$. (γ sei die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$.) Nun gilt auf Grund des Innenwinkelsatzes für Dreiecke
$60° + \frac{3\gamma}{2} = 180°$; es folgt $\gamma = 80°$.

Die Innenwinkel des Dreiecks ABC haben folgende Größen: $\sphericalangle CAB$: 60°, $\sphericalangle ABC$: 40°, $\sphericalangle BCA$: 80°.

Ma 8 ■ 2998 $\sphericalangle AMB$ ist Zentriwinkel über $\overset{\frown}{AB}$, $\sphericalangle ADB$ ist Peripheriewinkel über $\overset{\frown}{AB}$; es gilt stets $\alpha' = \frac{\gamma}{2}$ (1) (γ sei die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$). $\sphericalangle MAB$ ist Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABM, und es gilt $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$. In diese Gleichung setzen wir (1) ein und erhalten
$\alpha = 90° - \alpha'$ bzw. $\alpha + \alpha' = 90°$.
Daraus folgt, daß nur dann $\alpha = \alpha'$ ist, wenn $\alpha = \alpha' = 45°$ ist.

Ma 8 ■ 2999 Ein Quadrat mit 1 km Umfang hat eine Seitenlänge von 250 m; sein Flächeninhalt ist $A = 250^2\text{ m}^2 = 62\,500\text{ m}^2$. Es gilt 1 ha = 10 000 m²; also hat das Quadrat einen Flächeninhalt von 6,25 ha. Ein Kreis mit einem Umfang von 1 km hat einen Radius von $r = \frac{u}{2\pi} = \frac{1000\text{ m}}{2\pi}$
$\approx 159{,}15$ m und einen Flächeninhalt von
$A = \pi \cdot r^2 \approx \pi \cdot 159{,}15^2\text{ m}^2$
$\approx \pi \cdot 25\,328{,}72\text{ m}^2 \approx 79\,572{,}52\text{ m}^2$;
das sind rund 7,96 ha. Wir setzen
6,25 ha $\hat{=}$ 100 %, 7,96 ha $\hat{=}$ x % und erhalten $x \approx 127{,}36$ %. Die Fläche, die von einem Kreis mit 1 km Umfang umschlossen wird, ist um etwa 27 % (mehr als ein Viertel) größer als die von einem Quadrat gleichen Umfangs.

Ma 8 ■ 3000 Die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ beträgt 60°, die des Winkels $\sphericalangle ACD$ 90°; daraus folgt, daß der Winkel $\sphericalangle BCD$ eine Größe von 30° hat. Da Winkel $\sphericalangle ABC$ eine Größe von 60° hat, beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle CBD$ 120°, da A, B und D auf einer Geraden liegen. Wegen des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck hat der Winkel $\sphericalangle BDC$ eine Größe von 30°.
Da nun $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BDC$ ist, folgt, daß das Dreieck BDC gleichschenklig ist. Somit gilt $\overline{CB} \cong \overline{BD}$ und damit auch $\overline{AB} \cong \overline{BD}$, w. z. b. w.



Na/Te 8 ■ 446 Gesucht: η;
Gegeben: $U = 220$ V, $I = 2{,}7$ A,
$m_{H_2O} = 2$ kg, $\vartheta_1 = 80$ °C, $\vartheta_2 = 100$ °C,
$\Delta\vartheta = 80$ K, $c_{H_2O} = 4{,}19\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$,
$t = 24\text{ min} = 24 \cdot 60\text{ s}$
Vom Tauchsieder abgegebene Energie $W_1 = U \cdot I \cdot t$, vom Wasser aufgenommene Energie $W_2 = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$, Wirkungsgrad

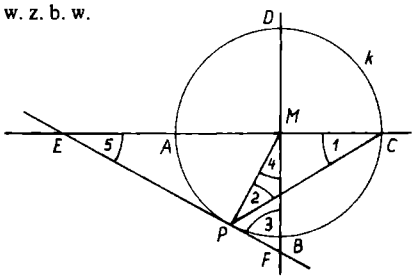
$\eta = \frac{W_2}{W_1}$ eingesetzt: $\eta = 0{,}78$.
Der Wirkungsgrad beträgt 78 %.

Na/Te 8 ■ 447 Gesucht: t (in s);
Gegeben: $v = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$,
$s = 150\,000\,000$ km.
Wenn das Licht 300 000 km in 1 s zurücklegt, dann benötigt es $\frac{150\,000\,000}{300\,000}$ s für die Strecke Sonne – Erde. Das ergibt $t = 500$ s. Das Licht benötigt 500 s für die Strecke Sonne – Erde.

Ma 9 ■ 3001 Es sei n die gesuchte natürliche Zahl, dann ist $(n-1)$ ihr Vorgänger und $(n+1)$ ihr Nachfolger. Nach den weiteren Angaben läßt sich die Gleichung $(n-1)(n+1) - 3n = 39$ aufstellen. Äquivalente Umformungen führen zu der quadratischen Gleichung
$n^2 - 3n - 40 = 0$ mit den Lösungen $n_1 = 8$ und $n_2 = -5$.
Da n eine natürliche Zahl ist, trifft nur $n_1 = 8$ zu. Probe:
$7 \cdot 9 = 63$ und $63 - 3 \cdot 8 = 39$.

Ma 9 ■ 3002
Wegen $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ gilt
$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}$, $\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c}$,
$\frac{1}{c+a} > \frac{1}{a+b+c}$. Daraus folgt
$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$,
w. z. b. w.

Ma 9 ■ 3003 Numeriert man die Größen der fünf Winkel in der angegebenen Reihenfolge mit 1, 2, 3, 4, 5, so ergeben wegen des Satzes über die Innenwinkelsumme in Dreiecken
$1 + 2 + 4 = 180° - 90° = 90°$ und
$3 + 5 = 180° - 90° = 90°$, also
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 90° + 90° = 180°$,
w. z. b. w.



Ma 9 ■ 3004 Wegen der in der Gleichung vorkommenden Ziffer 9 muß $x \in N$ und $x > 9$ sein. Wir stellen die Gleichung im x-adischen Positionssystem dar:
$[(6x^2 + 8x + 9) - (5x^2 + x + 1)] \cdot (x + 1)$
$= x^3 + 9x^2 + 4x + 8$ bzw.
$(x^2 + 7x + 8)(x + 1) = x^3 + 9x^2 + 4x + 8$.
Wir lösen diese Gleichung nach x auf, indem wir schrittweise äquivalent umformen:
$x^3 + 8x^2 + 15x + 8 = x^3 + 9x^2 + 4x + 8$,
$x^2 - 11x = 0$, $x(x - 11) = 0$,
$x_1 = 0$, $x_2 = 11$.
Da $x > 9$ gelten muß, ist $x_2 = 11$ einzige Lösung. Die gegebene Gleichung stellt nur im Elfersystem eine wahre Aussage dar. Wir überprüfen:
$[(689)_{11} - (511)_{11}] \cdot (11)_{11} = (1948)_{11}$,
$(6 \cdot 11^2 + 8 \cdot 11 + 9 - 5 \cdot 11^2 - 11 - 1)$
$\cdot (11 + 1) = 11^3 + 9 \cdot 11^2 + 4 \cdot 11 + 8$,
$(726 + 88 + 9 - 605 - 11 - 1) \cdot 12$
$= 1331 + 1089 + 44 + 8$,
$206 \cdot 12 = 2472$, $2472 = 2472$ w. A.

Ma 9 ■ 3005
Aus $\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{5} = n + 1$ folgt
$\frac{n(n+1)}{2} = 5(n+1)$, $\frac{n}{2} = 5$, also $n = 10$,
$n + 1 = 11$.
Probe: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 5 \cdot 11$.

Na/Te 9 ■ 448 Der Schleifkontakt teilt den Spannungsteiler in zwei Teilwiderstände von 200 Ω und 400 Ω auf. Parallel zum Widerstand von 200 Ω liegt ein Widerstand von 600 Ω. Der Widerstand der beiden parallel geschalteten Widerstände beträgt:
150 Ω $\left(\text{aus } \frac{1}{R} = \frac{1}{200\,\Omega} + \frac{1}{600\,\Omega}\right)$. Die Spannung von 240 V wird durch die hintereinandergeschalteten Widerstände von 150 Ω und 200 Ω geteilt. Es gilt $U_1 : U = 150\,\Omega : 400\,\Omega$. Mit $U = 240$ V ergibt sich $U_1 = 65$ V. Die Klemmenspannung am Widerstand beträgt 65 V.

Na/Te 9 ■ 449 Gesucht: I_{ges} (in A);
Gegeben: $U = 220$ V, $P_1 = 1{,}6$ kW
$= 1600$ W, $P_2 = 750$ W
Das Netz muß eine Gesamtleistung von $P = P_1 + P_2$ bringen. $P = 2350$ W;
da $P = U \cdot I$ ist, folgt $I = \frac{P}{U}$.
Es fließt ein Strom von 10,7 A. Da die Leitung nur mit 10 A abgesichert ist, würde der Automat ansprechen. Das Bügeleisen darf nicht zugeschaltet werden.

Ma 10/12 ■ 3006
Wir zerlegen die Potenzen und erhalten
$25 \cdot 25^x - 25 \cdot \frac{1}{25^x} = 120$. Nun nehmen wir weitere äquivalente Umformungen vor:
$25^x - \frac{1}{25^x} = 4{,}8$, $(25^x)^2 - 4{,}8 \cdot 25^x - 1 = 0$.
Wir setzen $25^x = a$ und erhalten weiter $a^2 - 4{,}8a - 1 = 0$. Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung nach a liefert die beiden Lösungen $a_1 = 5$ und $a_2 = -0{,}2$. Es gilt also $25^x = 5$ oder $25^x = -0{,}2$. Da $25^x = -0{,}2$ von keinem reellen x erfüllt wird, kann nur $25^x = 5$, also $x = \frac{1}{2}$ Lösung der gegebenen Gleichung sein.
Probe:
$25^{1,5} - 25^{0,5} = 120$, $\sqrt{25^3} - \sqrt{25} = 120$,
$125 - 5 = 120$, $120 = 120$.
Die Probe bestätigt die Lösung.

Ma 10/12 ■ 3007 Bezeichnet man die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ mit α, so gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC
$A = \frac{1}{2} \cdot 53{,}9 \cdot 34{,}6 \cdot \sin\alpha$
$= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin\alpha$, $A = 932{,}47 = \frac{1}{2}x^2$,
$x^2 = 1864{,}94$, $x \approx 43{,}18$.
Die an den Straßen liegenden Seiten des Grundstücks haben eine Länge von etwa 43,18 m.

Ma 10/12 ■ 3008 Sicher gilt $(\sin x + \cos x)^2 > 0$. Wir formen äquivalent um und erhalten
$\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x > 0$.
Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ergibt sich
$2 \cdot \sin x \cdot \cos x > -1$.
Nach Division durch 2 und anschließender Multiplikation mit (-1) erhalten wir schrittweise $\sin x \cdot \cos x > -0{,}5$,
$-\sin x \cdot \cos x < 0{,}5$, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 3009
Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$a^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = c^2$, also
$a^2 + \frac{a^2 + 2ac + c^2}{4} = c^2$,
$4a^2 + a^2 + 2ac + c^2 = 4c^2$,
$5a^2 + 2ac - 3c^2 = 0$,
$a^2 + \frac{2}{5}ac - \frac{3}{5}c^2 = 0$;
$a_{1,2} = -\frac{c}{5} \pm \sqrt{\frac{c^2 + 15c^2}{25}}$,
$a_{1,2} = -\frac{c}{5} \pm \frac{4c}{5}$, $a_1 = -c$ (entfällt, da negativ), $a_2 = \frac{3}{5}c$. Daraus folgt weiter
$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\frac{3}{5}c}{c} = \frac{3}{5}$, $\alpha = 36{,}87°$,
also $\beta = 53{,}13°$.

Ma 10/12 ■ 3010 Aus den Angaben in der Aufgabe kann man folgende Gleichung gewinnen: $(x + 1)^2 + x^2 + 1 = 62$.
Die äquivalente Umformung dieser Gleichung führt zu folgender quadratischen Gleichung: $x^2 + x - 30 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -6$. Für die Anzahl der Familienmitglieder kann nur die erste Lösung in Frage kommen. Die Familie bestand aus fünf Personen. Probe: Der Nachfolger von 5 ist 6, davon das Quadrat ist 36, das Quadrat „von uns" ist 25, der Nachfolger 26, und $36 + 26 = 62$.

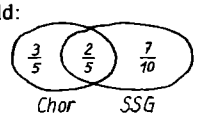
Na/Te 10/12 ■ 450 Gesucht: I (in A);
Gegeben: $R = 100\,\Omega$, $C = 4\,\mu\text{F}$, $f = 50$ Hz
Der Wechselstromwiderstand des ohmschen Widerstandes beträgt $R_\sim = R = 100\,\Omega$. Der Wechselstromwiderstand des Kondensators beträgt
$R_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot c}$; $R_C = 795\,\Omega$.
Im Wechselstromkreis müssen ohmsche und kapazitive oder induktive Widerstände geometrisch addiert werden (vgl. Zusammensetzung von Kräften).
Es gilt:
$R_{ges} = \sqrt{R_\sim^2 + R_C^2}$; $R_{ges} = 801\,\Omega$.
Nach dem Ohmschen Gesetz:
$I = \frac{U}{R}$ ergibt sich $I = 0{,}27$ A.

Na/Te 10/12 ■ 451 Ein Sekundenpendel ist ein Pendel, das für einen Hin- oder Hergang 1 s benötigt. Die Periodendauer eines Sekundenpendels beträgt also 2 s.
Gesucht: l_P (in m); $l_{\dot{A}}$ (in m);
Gegeben: $T = 2$ s; $g_P = 9{,}83\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$;
$g_{\dot{A}} = 9{,}78\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
Aus $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ folgt $l = \frac{T^2 \cdot g}{4 \cdot \pi^2}$;

Länge des Pendels am Pol: $l_P = 0{,}996$ m,
Länge des Pendels am Äquator:
$l_Ä = 0{,}991$ m.

Lösungen zu: Knifflige Sachen per Post (Heft 1/89)

▲1▲ Zeichnet man die Angaben in ein Mengendiagramm, dann ergibt sich folgendes Bild:



Da $\frac{2}{5}$ dem Chor und auch der SSG angehören, ergibt sich aus diesem Diagramm folgende Gleichung (y: Anteil der Schüler, die weder Mitglied der SSG noch des Chores sind):

$1 = \frac{3}{5} + \frac{7}{10} - \frac{2}{5} + y;\ 1 = \frac{9}{10} + y;\ y = \frac{1}{10}$.

▲2▲ a) Man zerlegt die Zahl 72 in ihre Primfaktoren: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
b) Man sucht alle Teiler von 72;
Teiler: 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72.
Feststellung: *378* (die zu suchende Zahl); nach a) muß hinten 0; 2; 4; 6; 8 stehen, da die Zahl auch durch 2 teilbar sein muß. Die Quersumme dieser Zahl muß durch 3 teilbar sein. Daraus ergeben sich folgende Zahlen:
33 780; 13 782; 23 784; 33 786; 13 788
63 780; 43 782; 53 784; 63 786; 43 788
93 780; 73 782; 83 784; 93 786; 73 788.
Da aber nach b) diese Zahlen auch durch 4 teilbar sein müssen, bleiben nur noch folgende Zahlen übrig:
33 780; 23 784; 13 788
63 780; 53 784; 43 788
93 780; 83 784; 73 788.
Da aber nach b) diese Zahlen auch durch 8 teilbar sein müssen, bleiben nur noch folgende Zahlen übrig:
23 784; 53 784; 83 784. Da aber nach b) diese Zahlen auch durch 9 teilbar sein müssen, bleibt nur noch diese Zahl übrig: 53 784; diese Zahl ist durch alle Teiler von 72 teilbar.

▲3▲ $V = 50$ l umgerechnet $V = 50$ dm³; da $V = a^3$ muß man die Umkehroperation nehmen, also:
$\sqrt[3]{50\ \text{dm}^3} = 3{,}7$ dm $= 37$ cm; $a = 37$ cm.
1 Würfelfläche $= a^2$, also $(37\ \text{cm})^2$;
1 Würfelfläche $= 1370$ cm².
Da eine Fläche offen ist am Würfel, bleiben noch fünf Flächen,
also: $5A$; $1370\ \text{cm}^2 \cdot 5 = 6850\ \text{cm}^2$;
$6850\ \text{cm}^2 = 0{,}685\ \text{m}^2 \approx 0{,}7\ \text{m}^2$.
Es werden rund 0,7 m² Blech für die Anfertigung gebraucht.
Probe: $6850\ \text{cm}^2 : 5 = 1370\ \text{cm}^2$;
$\sqrt{1370\ \text{cm}^2} = 37$ cm; 37 cm = 3,7 dm;
$(3{,}7\ \text{dm})^3 = 50$ l.

▲4▲ Nach der Dreiecksungleichung gilt $a < b + c$. Daraus folgt weiter:
$a + a < a + b + c;\ 2a < a + b + c;$
$a < \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{1}{2} \cdot u.$

▲5▲
$\frac{2\ \text{kg}}{32\,\%} = \frac{x\ \text{kg}}{100\,\%};\ x\ \text{kg} = \frac{2\ \text{kg} \cdot 100\,\%}{32\,\%};$
$x = 6{,}25$ kg. Aus 6,25 kg Trauben erhält man 2 kg Rosinen.

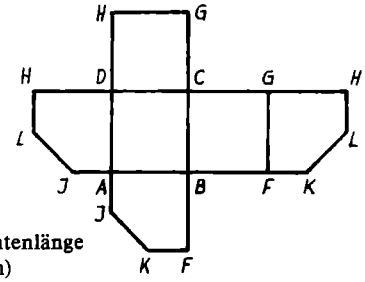
▲6▲ Auf die vollständige Lösung soll aus Platzgründen verzichtet werden. Hinweise zur Lösung:
Es genügt die Teilbarkeit durch 16, 9, 5, 7, 11, 13 und 17 nachzuweisen. Denn
16 ist die höchste 2er-Potenz
9 ist die höchste 3er-Potenz
5 ist die höchste 5er-Potenz
7 ist die höchste 7er-Potenz
11 ist die höchste 11er-Potenz
13 ist die höchste 13er-Potenz
17 ist die höchste 17er-Potenz.
Beachte: a ist Teiler von b genau dann, wenn die Elemente der Primfaktorzerlegung von a auch Elemente der Primfaktorzerlegung von b sind.

▲7▲ Folgende Feststellung muß getroffen werden: (x sei die gesuchte Zahl)
$x = 3y + 1;\ x = 4z + 2;\ x = 5a + 3;$
$x = 6b + 4$.
Man findet als Lösung die Zahl $x = 118$.

▲8▲ 1. Ausrechnen des Bruches $\frac{14{,}536\,62}{3 - 0{,}095}$;
2. Ergebnis von 1. mit 0,305 multiplizieren;
3. Ergebnis von 2. von 1,5291 subtrahieren;
4. Ergebnis von 3. durch 0,12 dividieren;
5. 0,228 durch Ergebnis von 4.;
6. $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ ausrechnen (Punktrechnung vor Strichrechnung);
7. Ergebnisse von 6. und 5. addieren.
Das Ergebnis lautet 10.

▲9▲ $a_1 = 2$ cm, $a_2 = 3 \cdot a_1 = 6$ cm
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3};\ \frac{A_{0_1}}{A_{0_2}} = \frac{1}{9};\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27}$
$a_1 = x$ cm, $a_2 = n \cdot a_1 = n \cdot x$ cm
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{n};\ \frac{A_{0_1}}{A_{0_2}} = \frac{6 \cdot x^2}{6 \cdot (n \cdot x)^2} = \frac{1}{n^2};$
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{x^3}{(b \cdot x)^3} = \frac{1}{n^3}.$

▲10▲ Das Netz des Restkörpers:



(Kantenlänge 2 cm)

Lösungen zu: Leontij Magnickij und seine Arithmetik, Heft 1/89

▲1▲ Zu Beginn hatte die Person x Rubel. Das erste Spielzeug kostete $\frac{1}{5}x$, als Rest verblieben $\frac{4}{5}x$. Das zweite Spielzeug kostete damit $\frac{4}{5}x \cdot \frac{3}{7}$ und der Rest betrug $\frac{4}{5}x \cdot \frac{4}{7}$. Das dritte Spielzeug kostete dann $\frac{4}{5}x \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}$ und der Rest war $\frac{4}{5}x \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} = 1$ Rubel 92 Kopeken.
Hieraus folgt $x = 10{,}5$ Rubel. Die Spielzeuge kosteten somit 2,10 Rubel, 3,60 Rubel und 2,88 Rubel.

▲2▲ Es sei x die Anzahl der Schüler, die der Lehrer zur Zeit hat. Dann gilt
$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$, also $x = 36$.
Er hat 36 Schüler.

▲3▲ Es sei x der Preis des Pelzes.
Dann gilt $12 : 7 = (12 + x) : (5 + x)$, also $x = 4{,}8$. Der Pelz kostete 4,80 Rubel.

▲4▲ Der erste Wanderer geht in einem Tag $\frac{1}{30}$ des Weges, in x Tagen also $\frac{x}{30}$. Der andere $\frac{x}{20}$. Damit ist $\frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 1$, also $x = 12$.
Sie treffen sich nach 12 Tagen.

▲5▲ Der Mann trinkt pro Tag $\frac{1}{14}$ des Fäßchens. In 10 Tagen trinkt er somit $\frac{10}{14}$. Die Frau schafft somit $\frac{4}{14}$ in 10 Tagen, also $\frac{4}{14} : 10 = \frac{1}{35}$ an einem Tag. Sie braucht also 35 Tage.

▲6▲ Seine Frau erhielt $\frac{48\,000}{8}$ = 6000 Rubel. Bezeichnet x die Erbschaft der Tochter, dann ist
$3 \cdot 2 \cdot x + x = 48\,000 - 6000$,
also $x = 6000$. Die Tochter erhielt also 6000 Rubel, die Söhne erhielten jeweils 12 000 Rubel.

▲7▲ Der Preis für die Hufnägel ist:
$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8$
(für die 6 Hufnägel des 1. Hufeisens)
$+ 16 + 32 + \ldots + 512$
(für die 6 Hufnägel des 2. Hufeisens)
$+ 1024 + \ldots + 32\,768$
(für die 6 Hufnägel des 3. Hufeisens)
$+ 65\,536 + \ldots + 2\,097\,152$
(für die 6 Hufnägel des 4. Hufeisens).
Die Summe ist somit 4 194 303,75 Kopeken. *Für Schüler höherer Klassen:*
Es liegt eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $\frac{1}{4}$, dem Quotienten 2 und dem Endglied $\frac{1}{4} \cdot 2^{23}$ vor. Die Summenformel liefert das obige Ergebnis. Der Preis ist somit fast 4 200 000 Rubel.
Bemerkung: Bei der letzten Aufgabe liegt eine große Ähnlichkeit zu der Aufgabe der Bezahlung des Erfinders des Schachspiels vor. Für das erste Feld ein Reiskorn, für das 2. zwei Reiskörner usw.

Lösung zu: Ein anspruchsvolles Magisches Quadrat, Heft 1/89

Die Summen der Zeilen, Spalten und Diagonalen ergeben sich aus folgender Überlegung: Die Gesamtsumme aller Zahlen von 1 bis 289 ist
$S = \frac{289 \cdot 289}{2} = 41\,905$.

137	282	121	266	105	250	89	234	73	218	57	202	41	186	25	170	9
10	138	283	122	267	106	251	90	235	74	219	58	203	42	187	26	154
155	11	139	284	123	268	107	252	91	236	75	220	59	204	43	171	27
28	156	12	140	285	124	269	108	253	92	237	76	221	60	188	44	172
173	29	157	13	141	286	125	270	109	254	93	238	77	205	61	189	45
46	174	30	158	14	142	287	126	271	110	255	94	222	78	206	62	190
191	47	175	31	159	15	143	288	127	272	111	239	95	223	79	207	63
64	192	48	176	32	160	16	144	289	128	256	112	240	96	224	80	208
209	65	193	49	177	33	161	17	145	273	129	257	113	241	97	225	81
82	210	66	194	50	178	34	162	1	146	274	130	258	114	242	98	226
227	83	211	67	195	51	179	18	163	2	147	275	131	259	115	243	99
100	228	84	212	68	196	35	180	19	164	3	148	276	132	260	116	244
245	101	229	85	213	52	197	36	181	20	165	4	149	277	133	261	117
118	246	102	230	69	214	53	198	37	182	21	166	5	150	278	134	262
263	119	247	86	231	70	215	54	199	38	183	22	167	6	151	279	135
136	264	103	248	87	232	71	216	55	200	39	184	23	168	7	152	280
281	120	265	104	249	88	233	72	217	56	201	40	185	24	169	8	153

(bearbeitet von Ing. A. Körner, Leipzig)

Die Summe aller Zeilen (aber auch Spalten und Diagonalen) muß diese Gesamtsumme ergeben. Bei 17 Zeilen muß jede Zeile (Spalte und Diagonale) die Summe

$S_Z = \frac{S}{17} = \frac{41\,905}{17} = 2465$ ergeben.

Lösung zu: Eine Aufgabe
von Prof. Dr. B. Goldschmidt Heft 2/89

▲2978▲

$$F = (px_1 + q - y_1)^2 + (px_2 + q - v_2)^2 + (px_3 + q - y_3)^2$$
$$= p^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3q^2 + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 2pq(x_1 + x_2 + x_3) - 2p(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - 2q(y_1 + y_2 + y_3).$$

Wir setzen

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$$
$$B = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$
$$C = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad (1)$$
$$D = x_1 + x_2 + x_3$$
$$E = y_1 + y_2 + y_3$$

Wenn man q festhält, ist F eine quadratische Funktion von p:

$$F = p^2A + 2p(qD - C) + (3q^2 - 2qE + b). \quad (2)$$

Das Minimum von F bezüglich p liegt bei

$$p = \frac{-(qD - C)}{A} \quad (3)$$

und hat den Wert

$$F = \frac{(q^2(3A - D) - 2q(EA - CD) + (AB - C^2))}{A}. \quad (4)$$

Dies ist eine quadratische Funktion in q mit dem Minimum bei

$$q = \frac{(AE - CD)}{(3A - D^2)}. \quad (5)$$

Setzt man (5) in (3) ein, so erhält man

$$p = \frac{(3C - DE)}{(3A - D^2)}. \quad (6)$$

Das Minimum von F liegt also bei den durch (5), (6) berechneten Werten. Für das konkrete Beispiel bedeutet das

$A = 14$, $B = 14$, $C = 13$, $D = 6$, $E = 6$
und damit $p = 0{,}5$, $q = 1$.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Zwei aufeinanderfolgende zweistellige Zahlen addierte man und stellte bei ihrer Summe die Ziffern um. Als Resultat erhielt man die größere der addierten Zahlen. Welche Zahlen addierte man?

Lösung: Da die beiden addierten Zahlen ein zweistelliges Dezimalsymbol besitzen und der größere Summand aus dem Dezimalsymbol der Summe durch Umstellung hervorgeht, hat die Summe ebenfalls eine zweistellige Dezimaldarstellung. (Der Fall, daß die Summe das Zehnfache des größeren Summanden ist, kann hier nicht auftreten, da die beiden Summanden aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind.)

Wir machen deshalb für die Summe der beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen den Ansatz

$10a + b$ $(1 \leq a \leq 9;\ 0 \leq b \leq 9;\ a, b \in N)$.

Laut Aufgabe gilt nun

$$10a + b = 10b + a - 1 + 10b + a$$

also $8a + 1 = 19b$.

Weil auf Grund des Ansatzes gelten muß

$$0 \leq 8a \leq 72,$$

folgt $1 \leq 19b \leq 73$.

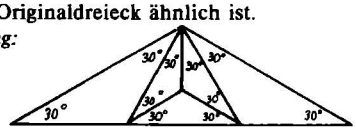
Hieraus folgert man, daß die Aufgabe nur für $a = 7$ und $b = 3$ eine Lösung haben kann. Tatsächlich gilt $73 = 36 + 37$. Die addierten aufeinanderfolgenden zweistelligen natürlichen Zahlen sind 36 und 37.

▲2▲ Teile ein Dreieck in fünf ähnliche Dreiecke

Wir lernen, daß zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn die Winkel des einen Dreiecks denen des anderen entsprechen. Wir können auch sagen, daß sich zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie dieselbe Form haben.

Die Zeichnung zeigt ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel 30°, 30° und 120° betragen. Finde einen Weg, dieses Dreieck in fünf Dreiecke zu teilen, von denen jedes zum Originaldreieck ähnlich ist.

Lösung:



▲3▲ Bumerang

Folge der Pfeilrichtung und führe die 12 Rechenoperationen aus, um die Zahl x zu finden. Die Zahl x befindet sich zwischen 1 und 100 und ist am Anfang und am Ende des Kreislaufs gleich.

Hinweis: Dieses Spiel kennt nur ganze und von Null verschiedene Zahlen als Ergebnisse jeder Rechenoperation.

Lösung: $x = 66$.

Lösungen zum alpha-Ferienmagazin

Zum Titelblatt:

$172 + 60 + 34 + 513 + 35 = 814$.

$656 + 656 = 1312$ oder $757 + 757 = 1514$,
oder $858 + 858 = 1716$
oder $959 + 959 = 1918$.

$16\,850 + 20\,640 = 37\,490$.

$3486 + 7425 = 10\,911$.

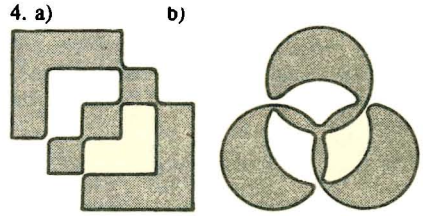
$5 + 54 + 543 + 5432 + 54\,321 = 60\,355$.

1. a) 2 Kugeln; b) 3 Würfel.

2. $3 - 344 + 5 + 566 - 77 = 153$.

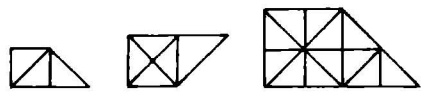
3. a) $11^2 - 121$;
b) $(1 \cdot 8) = 8 \cdot 1 = 8^1 = 8$;
c) $28 + 3 = 31$; $10 + 1 = 11$; $18 + 2 = 20$;
d) $2 \cdot 99 = 198$;
e) $9567 + 1085 = 10\,652$.

4. a) b)



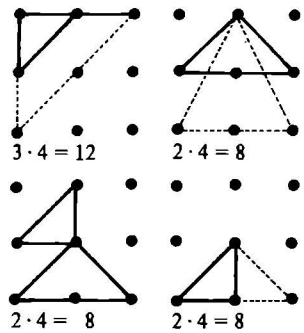
5. Es gibt 13 verschiedene Wege:
1–2–3–4–5–6–7; 1–3–4–5–6–7;
1–2–4–5–6–7; 1–2–3–5–6–7;
1–2–3–4–6–7; 1–2–3–4–5–7;
1–3–4–6–7; 1–3–5–6–7; 1–3–4–5–7;
1–2–4–6–7; 1–2–4–5–7; 1–2–3–5–7;
1–3–5–7.

6. Insgesamt 112 Trapeze sind zu finden.

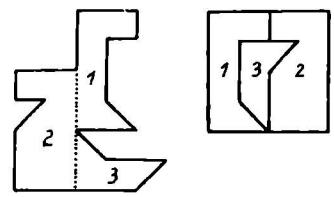


48 48 16

7. Es können 36 gleichschenklige Dreiecke gebildet werden.

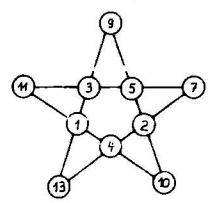


8.



9. Es müssen von oben nach unten eingesetzt werden: Roller, Fahrrad, Auto.

10.



11. Figur b

Einiges über das Sehnenviereck

Wenn man die Aufgabe hat, zu einem Dreieck den Mittelpunkt des Umkreises und den Mittelpunkt des Inkreises zu konstruieren, dann wird man gewöhnlich mit Hilfe der üblichen Grundkonstruktionen (mindestens) zwei Mittelsenkrechte und (mindestens) zwei Winkelhalbierende zeichnen. Es gibt indes für die Lösung dieser Aufgabe einen einfacheren Weg. Er ergibt sich aus Eigenschaften des Sehnenvierecks.

Diese Figur soll im folgenden näher betrachtet und untersucht werden.

Im Lehrbuch der Klasse 7 wird (S. 144) der Begriff „Sehnenviereck" definiert. Es heißt dort: „Als Sehnenviereck bezeichnet man jedes Viereck, zu dem es einen Umkreis gibt."

Gleichwertige Erklärungen für diesen Begriff wären zum Beispiel: „Ein Viereck, dessen Eckpunkte auf ein und demselben Kreis liegen, heißt Sehnenviereck."

Oder: „Wenn alle Seiten eines Vierecks Sehnen ein und desselben Kreises sind, dann ist dieses Viereck ein Sehnenviereck."

An gleicher Stelle wird auch eine Eigenschaft der Innenwinkel solcher Vierecke genannt und bewiesen:

„In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe gegenüberliegender Winkel jeweils 180°."

Aufgaben

▲1▲ Weise nach, daß jedes Rechteck und jedes gleichschenklige Trapez ein Sehnenviereck ist! Wo liegt jeweils der Mittelpunkt des Umkreises?

▲2▲ Von einem Sehnenviereck $ABCD$ sei die Seite $\overline{AB}$ gleichzeitig Durchmesser des Umkreises; ferner gelte: $\overline{AD} = \overline{CD}$. Der Winkel ADC sei 130° groß. Berechne die Größe der drei anderen Innenwinkel dieses Vierecks!

Auch die Diagonalen des Sehnenvierecks haben eine bemerkenswerte Eigenschaft:

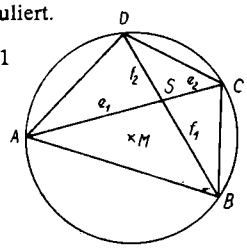
In jedem Sehnenviereck ist das Produkt aus den Längen der Abschnitte der einen Diagonale gleich dem Produkt aus den Längen der Abschnitte der anderen Diagonale. (Dabei werden als Abschnitte die Teile bezeichnet, die durch den Schnittpunkt der Diagonalen entstehen.)

Bezogen auf das Bild 1 bedeutet das:

Es gilt $e_1 \cdot e_2 = f_1 \cdot f_2$.

Dieser Satz wird auch „Sehnensatz" genannt und bisweilen für zwei einander schneidende Sehnen eines Kreises (also ohne Bezugnahme auf ein Sehnenviereck) formuliert.

Bild 1



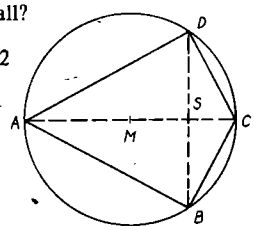
Aufgaben

▲3▲ Suche nach einer solchen Formulierung!

▲4▲ Beweise diesen Satz! Weise dazu nach, daß die Dreiecke ABS und CDS einander ähnlich sind! (Denke an den Satz über Peripheriewinkel!) Stelle aus den Seiten dieser Dreiecke eine geeignete Verhältnisgleichung auf, und bilde daraus die Produktgleichung!

▲5▲ Wende diesen Satz auf ein Sehnenviereck an, dessen eine Diagonale Durchmesser des Umkreises und Symmetrieachse des Vierecks ist! (Siehe Bild 2.) Was für ein Viereck ist dieses Sehnenviereck? Welchen Satz erhält man in diesem Spezialfall?

Bild 2

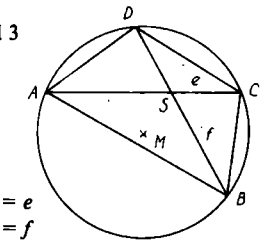


Weniger bekannt ist folgender Satz:

„Das Produkt der Diagonalen des Sehnenvierecks ist gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seitenpaare."

Bezogen auf das Bild 3 bedeutet das:

Bild 3



$\overline{AC} = e$
$\overline{BD} = f$

Es gilt $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$. Dieser Satz heißt auch „Satz von Ptolemäus".

Claudius Ptolemäus (auch: Ptolemaios) war ein bedeutender griechischer Astronom und Mathematiker. Er stammte aus Ägypten und lebte von etwa 90 bis etwa 165 unserer Zeitrechnung.

Er hat sich um die Entwicklung der Trigonometrie verdient gemacht, und auf ihn gehen auch die Bezeichnungen „Minute" und „Sekunde" zurück. Wir wollen diesen Satz hier ohne Beweis nutzen.

Aufgaben

▲6▲ Wende diesen Satz auf ein Rechteck an! Welchen bekannten Satz erhält man in diesem Falle?

▲7▲ Wende diesen Satz auf ein gleichschenkliges Trapez an!

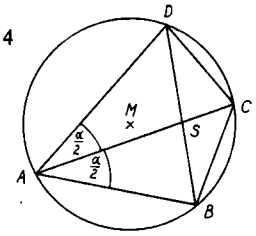
Welche Beziehung ergibt sich daraus?

▲8▲ Nutze diese Beziehung, um die Länge der Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes zu berechnen, von dem die Längen der Grundseiten mit 8 cm bzw. 3 cm und die Längen der Schenkel mit je 5 cm gegeben sind!

Betrachten wir abschließend den Spezialfall, daß eine der Diagonalen des Sehnenvierecks einen Innenwinkel halbiert.

Das Bild 4 zeigt ein Beispiel dafür.

Bild 4



$\overline{AS} = e_1$
$\overline{AC} = e$
$\overline{AB} = a$
$\overline{AD} = d$

Aufgaben

▲9▲ Es gelte in diesem Dreieck (Bild 4) $\alpha = 50°$ und $\beta = 110°$. Berechne die Größe aller anderen in dieser Figur auftretenden Winkel!

▲10▲ Suche in dieser Figur (Bild 4) nach weiteren Winkeln, die die Größe $\frac{\alpha}{2}$ haben!

▲11▲ Zeige, daß die Dreiecke ASD und ABC einander ähnlich sind! Leite daraus die Beziehung $e_1 \cdot e = a \cdot d$ her!

▲12▲ Wende diesen Satz auf den unter ▲5▲ genannten Spezialfall an! Welchen bekannten Satz erhält man daraus?

▲13▲ Beweise, daß das Dreieck BCD gleichschenklig ist!

▲14▲ Begründe, daß die Mittelsenkrechte von $\overline{BD}$ sowohl durch M als auch durch C verläuft!

Aus dieser hier hergeleiteten Eigenschaft ergibt sich folgender Satz: „Die Mittelsenkrechte einer Dreieckseite und die Halbierende des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels schneiden einander in einem Punkt des Umkreises."

Hat man also zu einem Dreieck die drei Mittelsenkrechten konstruiert, so braucht man nur jeweils den Schnittpunkt mit dem Umkreis und den gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks zu verbinden, um die Winkelhalbierende zu erhalten. (Streng genommen hat natürlich die Mittelsenkrechte zwei Schnittpunkte mit dem Umkreis. Es ist stets der zu benutzen, der in der durch die Dreieckseite bestimmten Halbebene liegt, in der sich der gegenüberliegende Eckpunkt nicht befindet.)

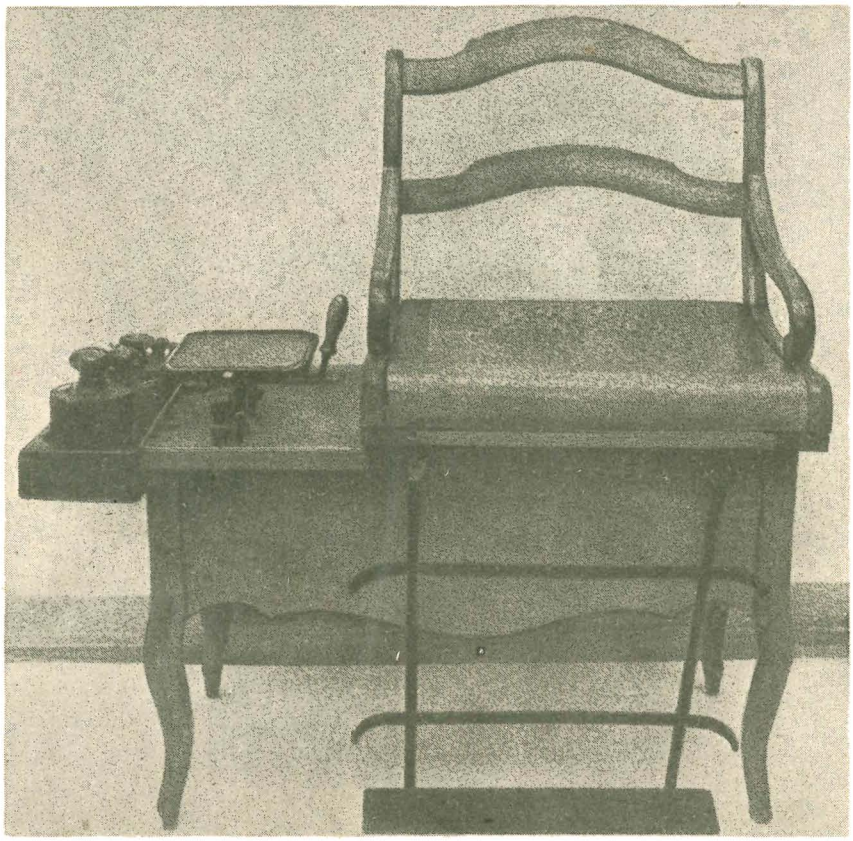
Aufgabe

▲15▲ Zeichne ein Dreieck ABC! Konstruiere seine drei Mittelsenkrechten! Zeichne dann, ohne die übliche Grundkonstruktion zu benutzen, die drei Winkelhalbierenden ein!

Auch das Eintragen der drei Seitenhalbierenden ist leicht möglich, da durch die Mittelsenkrechten die Mittelpunkte der Dreiecksseiten bereits fixiert sind.

J. Kreusch/K. Lehmann

Die Ratsherrenwaage – eine Attraktion des Oschatzer Museums



Spruch um 1848:
Jedes deutsche Ländchen
Hat sein eigen Quentchen.
Eigne Maße hat
Fast jede deutsche Stadt.

(Zu Beginn des 19. Jahrhunderts waren allein im Großherzogtum Baden 80 verschiedene Pfundmaße im Gebrauch.)

Die abgebildete, in Oschatz gebaute Personenwaage war 1862 als Exponat auf der Weltausstellung in London ausgestellt und befindet sich heute im Bereich „Entwicklung des Waagenbaus" des Oschatzer Stadtmuseums. Der zugehörige Wägesatz fußt auf dem 1858 vom „Deutschen Zollverein" eingeführten Zollpfund zu 500 g: Er enthält u. a. Wägestücke zu 1 Pf,

5 Pf, $\frac{1}{2}$ Pf = 250 g, $\frac{1}{4}$ Pf = 125 g und

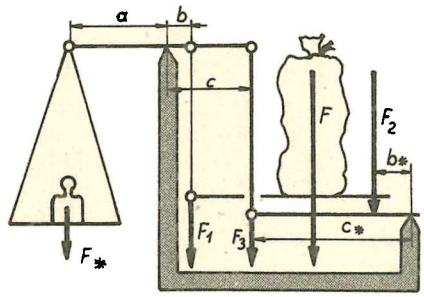
als kleinstes Wägestück $\frac{1}{100}$ Pf = 5 g.

Diese Waage ist eine Dezimalbrückenwaage: Die Masse der auf der Waagschale gelegten Wägestücke ist bei Gleichgewicht der 10. Teil der Masse der auf der Brücke sitzenden Person. Gegenüber dem abgebildeten Waagengestänge sind bei ihr Brücke und Waagschale nach oben gezogen.

Bei der 1823 von Quintenez und Schwilgué in Strasbourg erfundenen Brückenwaage genügen die Hebelarme b, c, b_* und c_* der Proportion $\frac{b}{c} = \frac{b_*}{c_*}$. Bei Gleichgewicht gelten die Gleichungen

$F = F_1 + F_2$, $F_2 b_* = F_3 c_*$ und

$F_* a = F_1 b + F_3 c$ und damit $\frac{F}{F_*} = \frac{a}{b}$.



Die auf der Brücke liegende Last wirkt durch Vermittlung des Waagengestänges so, als ob sie am Hebelarm b angreifen würde.

Brückenwaagen mit $\frac{a}{b} = 10$ heißen Dezimal-, solche mit $\frac{a}{b} = 100$ Zentesimalwaagen.

Im Oschatzer Waagenbaumuseum, dem einzigen unserer Republik, sind etwa 100 Waagen, historische und neuzeitliche, zu sehen, wird die Werkstatt eines Waagenbauers um 1900 gezeigt und wird die Entwicklung des Waagenbaues auch graphisch veranschaulicht.

Das Museum ist Dienstag bis Freitag von 10.00 bis 12.00 Uhr und von 13.00 bis 16.00 Uhr und sonntags von 13.00 bis 16.00 Uhr geöffnet. Nach vorheriger Absprache werden Besuchergruppen durch das Museum geführt.

W. Träger

Was ihr nicht rechnet, glaubt ihr,
sei nicht wahr,
Was ihr nicht wägt, hat für euch kein Gewicht,
Was ihr nicht münzt, das, meint ihr,
gelte nicht.

Johann Wolfgang v. Goethe, Faust II

Nach dem römischen Schriftsteller Marcus Vitruvius Pollio stellte Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) fest, daß ein Kranz nicht, wie vom Hersteller angegeben, aus reinem Gold bestand:
Durch Abwiegen mit einer Waage verschaffte er sich zunächst einen mit dem Kranze gleichgewichtigen Goldklumpen. Als er anschließend nacheinander Goldklumpen und Kranz in ein randvoll mit Wasser gefülltes Gefäß eintauchte, lief beim Kranze mehr Wasser über als beim Goldklumpen.

In einer 1569 in Leipzig gedruckten Ausgabe des Sachsenspiegels (Rechtsbuch) heißt es:
„Wer falsch Gewicht und Maß macht / wird es bürglich gefodert er muß denen / die damit betrogen sind worden / zwifaltig widerstattung thun / Wird es aber peinlich gefordert / so sol er nach Keyserlichem Rechten / zur stauppen geschlagen werden"
(Original im Stadtarchiv Döbeln).

Zur Finanzierung des Siebenjährigen Krieges (1756 bis 1763) ließ Friedrich II. von Preußen Geld mit vermindertem Silbergehalt prägen. Zum Beispiel wurden bei einer solchen Aktion 4 Millionen Silbertaler in 11 Millionen Taler „verwandelt".
Nach dem Siebenjährigen Krieg ließ er alle schlechten Münzen außer Kurs setzen und von den öffentlichen Kassen nur gegen ihren Metallwert zurücknehmen.

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 23 (1989) 3 · Seiten 49 bis 72