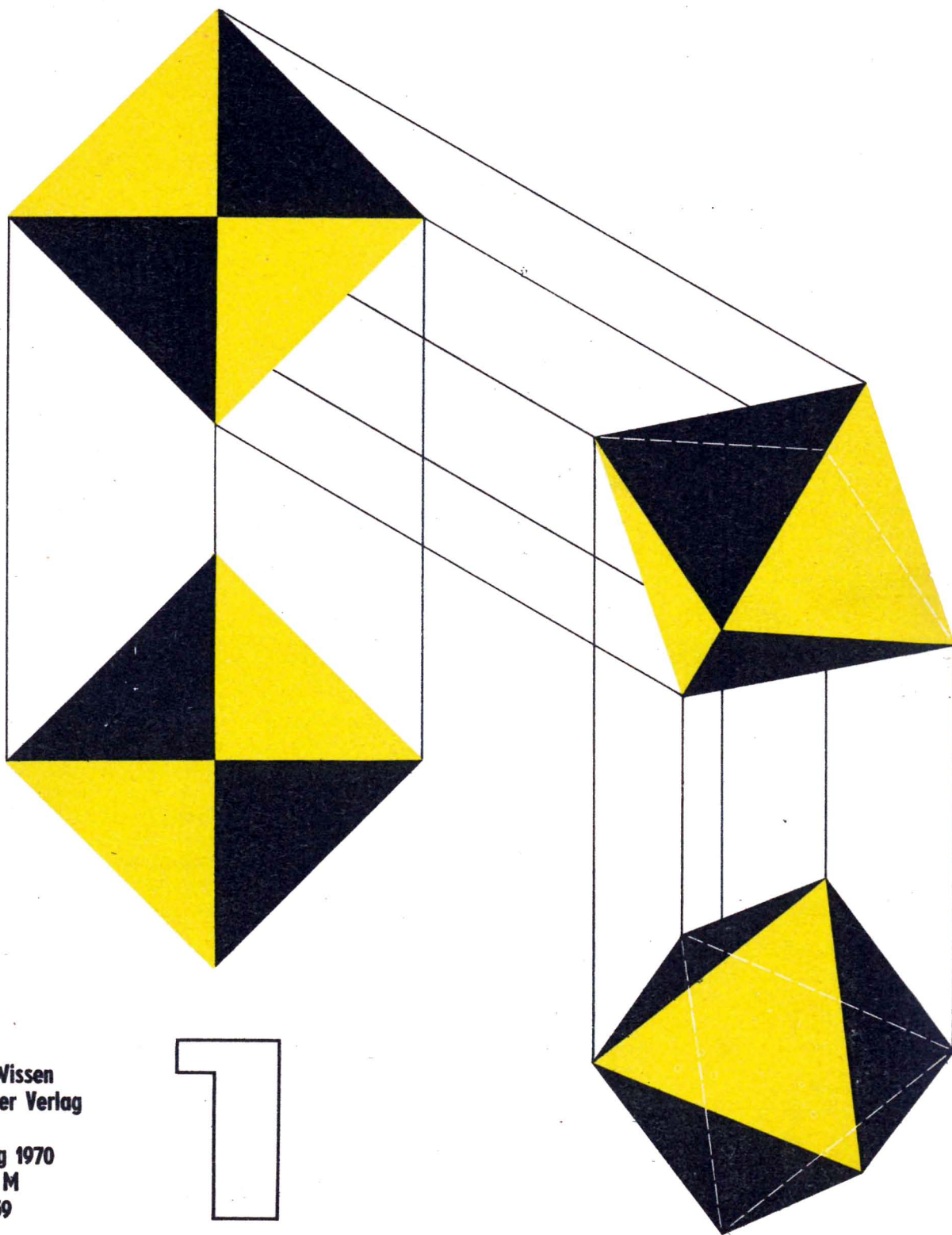
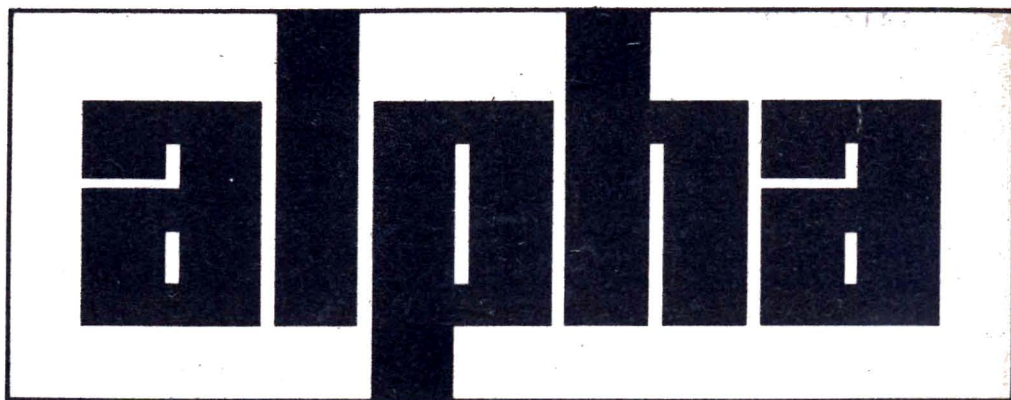


**Mathematische  
Schülerzeitschrift**



**Volk und Wissen  
Volkseigener Verlag  
Berlin  
4. Jahrgang 1970  
Preis 0,50 M  
Index 31059**



#### Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);  
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); J. Gro-  
nitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Ha-  
meister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin);  
Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl  
(Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner  
(Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter  
Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studien-  
rat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes  
(Leipzig); Oberlehrer Dr. H. Lohse (Leipzig);  
Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. Lü-  
ders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/  
Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin);  
Dr. E. Schröter (Dresden); Oberstudienrat  
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H.  
Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Trä-  
ger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Dr. habil.  
W. Walsch (Halle);

#### Redaktion:

StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

#### Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

#### Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin  
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41  
Postcheckkonto: Berlin 132 626 Erschei-  
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft  
0,50 M, im Abonnement zweimonatlich  
(1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder  
den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland  
und Westberlin durch den Buchhandel, für  
das Ausland durch Deutscher Buch-Export  
und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16  
Für unverlangt eingesandte Manuskripte  
kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: M. Naumann, Leipzig (S. 5); Vignet-  
ten: H.-J. Jordan, Leipzig (S. 22/23); Tech-  
nische Zeichnungen: G. Groß, Leipzig;  
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545  
des Presseamtes beim Vorsitzenden des Mini-  
sterrates der Deutschen Demokratischen Re-  
publik

#### Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei  
der Deutschen Demokratischen Republik,  
(Rollenoffsetdruck)

Redaktionsschluß: 25. November 1969

# alpha

## Mathematische Schülerzeitschrift

### Inhalt

- 1 Über die Anfänge der Mathematik (5)\*  
aus: Wußing, Mathematik in der Antike
- 3 Eine Aufgabe, ausgewählt von  
Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans Wußing (6)  
Karl-Sudhoff-Institut, Karl-Marx-Universität Leipzig
- 4 Rechnen mit Resten Teil 5 (6)  
Dr. G. Lorenz, Sektion Mathematik, Bereich Schulmathematik und Methodik,  
Humboldt-Universität, Berlin
- 6 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung Teil 7 (7)  
J. Frommann, Klement-Gottwald-Schule (EOS), Berlin-Treptow
- 8 Auch ein Schlußlicht hat es in sich  
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik, Bereich Geometrie,  
Technische Universität Dresden
- 9 Ein Patenschaftsvertrag (5)  
S. Düryn, 29. Oberschule, Leipzig
- 10 IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (5)  
Aufgaben der Kreisolympiade (7. 12. 1969).  
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR
- 12 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)
- 13 Prüfungsaufgaben (Auswahl) Island, Tanzania (5)  
Überreicht durch: G. Gestsson, Reykjavik, S. Wengel, Moshi
- 14 Rund um das Schachbrett (5)  
W. Träger, Schloßberg-Oberschule, Döbeln
- 16 XI. Internationale Mathematikolympiade — Lösungen (9)  
Dr. habil. H. Bausch, Dr. R. Lüders (beide Berlin)
- 18 Lösungen (5)
- 22 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)  
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig  
Oberlehrer H. Pätzold, OS Waren/Müritz
- 24 Mathematik-Kalender März/April 1970 (5)  
W. Heinig, Hohenstein-Ernstthal  
Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

#### II./IV. Umschlagseite

Wissen, wo ...

Eine Anleitung zum Selbststudium

Oberlehrer H. Herzog, V.L.d.V., 22. Oberschule Leipzig

\* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

## Über die Anfänge der Mathematik

Die menschliche Arbeit enthielt schon frühzeitig mathematische Elemente. Die handwerklichen Erzeugnisse der damaligen Zeit, wie z. B. Räder mit und ohne Speichen, die Bauwerke, die Anlage von Feldern, ferner Ornamente auf Waffen, in Webereierzeugnissen, an Bauten usw. verraten die Vertrautheit mit den geometrischen Grundtatsachen schon zum Zeitpunkt des Entstehens der Klassengesellschaften: Gleichseitiges und gleichschenkliges Dreieck, Quadrat, Würfel usw., Symmetrieeigenschaften sind erfaßt worden.

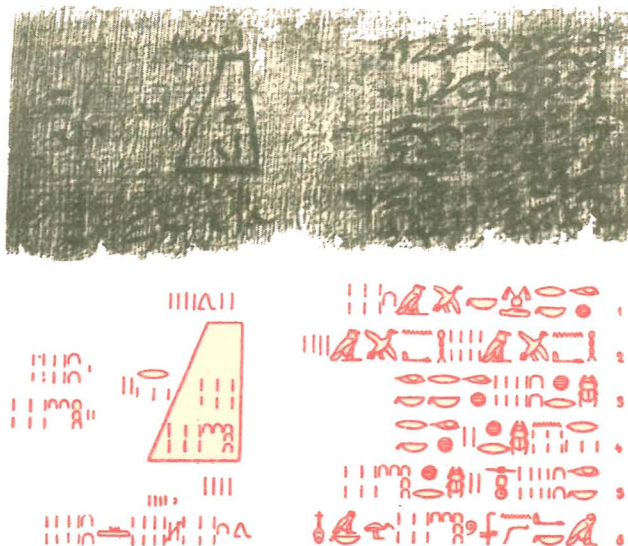


Abb. 1 Zwei Spalten des Moskauer Papyrus mit der Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit den Seiten 2 und 4 und der Höhe 6 Ellen. (Oben hieratischer Text, unten Umschrift in Hieroglyphen.)

Für die Ausbildung und Weiterführung der Zahlreihe haben die erste gesellschaftliche Arbeitsteilung, die Trennung in Ackerbauer und Viehzüchter, und das Aufkommen von Privateigentum die bestimmende Rolle gespielt. Aus der Notwendigkeit, Viehherden zu zählen, Tausch- und Geldgeschäfte zu betreiben, entwickelte sich die Fähigkeit zum Zählen. Es lassen sich mit philologischen Methoden und an ökonomisch und kulturell wenig entwickelten Völkern solche Stufen der Verwendung von Zahlwörtern nachweisen, wo die verwendeten Zahlwörter, etwa die „Drei“, von der Art der gezählten Gegenstände abhängen. Eine große Rolle haben in Europa noch bis zum

Mittelalter Fingerzahlen gespielt, in einigen Teilen der Erde werden sie noch heute verwendet. Die Zahlensysteme wurden meist auf dezimaler Grundlage ausgebildet (10 Finger!), daneben tritt noch die 20 als Grundzahl auf, wie z. B. bei den Kelten und Mayas. Französisch 80 = quatre-vingt erinnert noch daran. Vereinzelt wurde auch die 12, d. i. die Zahl der Knöchel, verwendet. Allgemein sind die Worte für Hand und Finger in die Zahlwörter eingegangen: „Hand“ fällt fast überall mit „fünf“ zusammen, 10 mit „beide Hände“, 20 mit „ein Mensch“.

Die philologischen Untersuchungen haben nachgewiesen, daß die gesamte indoeuropäische Sprachfamilie vor der Trennung in einzelne Völker im Besitz der Zahlwörter bis 100 war, z. B. deutsch zwei, lat. duo, griech. δύο, sanskrit dvi (dve), ostgotisch twa, engl. two, dänisch to, schwedisch tva, irisch da, russisch два, franz. deux, ital. due usw. Die Erweiterung der Zahlreihe setzte erst nach der Trennung in die einzelnen Völkerstämme ein.

Eine weitere Haupttriebkraft zur Entwicklung menschlicher mathematischer Fähigkeiten bestand in der Notwendigkeit, sich in Raum und Zeit zu orientieren. Die Bestimmung von Entfernungen, die Abschätzung von Flächen- und Rauminhalten, die Bestimmung landwirtschaftlicher Termine zur Aussaat, Ernte, Viehzucht — all das führte zur Ausbildung der Zeitrechnung, des Kalenderwesens. Astronomische Perioden wurden gefunden. In diesem Sinne, als Ansammlung eines gewaltigen Beobachtungsmaterials, von Dutzenden von Generationen geduldiger Beobachter akkumuliert, ist die Astronomie die älteste Wissenschaft. Beispielsweise datierten die ägyptischen Astronomen nach der Entdeckung der Sothis-Periode\* ihre Zeitrechnung bis 4228 v. u. Z. zurück.

Die Entwicklung des ursprünglichen mathematischen Denkens, das Herausarbeiten der direkt mit der Praxis zusammenhängenden mathematischen Probleme — bis etwa zur Bruchrechnung —, des Erfahrungsschatzes der elementaren Geometrie — ebene Figuren, deren Flächeninhalt; einfache Volumenberechnungen — usw. hat sich bei vielen Völkern unter ähnlichen gesellschaftlichen Bedingungen fast gleichartig und voneinander unabhängig vollzogen. So besaßen die Chinesen und Inder schon zwischen 3000 v. u. Z. und 500 v. u. Z. beträchtliche mathematische Kenntnisse.

\* Der erste Aufgang des Sirius am Morgenhimmel fiel für die Gegend von Memphis (Mittelägypten) mit dem Anschwellen des Nils zusammen. Aus dem Aufgang des hellen Sterns, der leicht zu beobachten war, folgte eine Jahreslänge von 365 Tagen. Der Aufgang des Sirius verschob sich, und zwar in 4 Jahren um 1 Tag, so daß nach 1460 Jahren der Jahresanfang wieder auf den Sirisaufgang fiel. Diese sog. Sirius- oder Sothis-Periode ermöglichte den ägyptischen Astronomen die Rückdatierung des Kalenders und die Fixierung der ägyptischen Chronologie.



Aus Indien sind für diese Zeit geometrische Flächenverwandlungen, der Pythagoreische Lehrsatz, die Verwendung der aus der Ähnlichkeit von Dreiecken folgenden Eigenschaften nachgewiesen. Mit Hilfe der arithmetisch-geometrischen Mittelwertbildungen wurde z. B. die Näherung

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17} \text{ gefunden;}$$

für die Kreisquadratur wurde die Näherung

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \approx \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8} \right) : \frac{1}{8 \cdot 29}, \text{ für die}$$

Quadratzirkulatur  $\sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx \frac{2+2}{3}$  benutzt.



Abb. 2 Altindisches Zahlensystem

Ein Viersystem wird überkreuzt von einem Dezimalsystem

Aus China sind uns seit 2800 v. u. Z. kontinuierliche astronomische Beobachtungen überliefert, um 2700 v. u. Z. wurde eine Sonnenfinsternis wissenschaftlich beschrieben. Um 1200 v. u. Z. entstand ein Lehrbuch der Kombinatorik: noch früher hatte die chinesische Tradition der magischen Quadrate begonnen. Diese standen im Mittelpunkt eines Zahlenkults ähnlich wie in der Sekte der Pythagoreer — ein erneuter Hinweis darauf, daß ähnliche gesellschaftliche Zustände ähnliche Erscheinungen auch auf geistigem Gebiet hervorbringen. Um 1100 v. u. Z. ist der Lehrsatz des Pythagoras für das Dreieck 3, 4, 5 nachgewiesen, Möglicherweise bereits um 1000 v. u. Z. wurde ein systematisches Lehrbuch des Rechnens, „Arithmetik in neun Teilen“, verfaßt: Teil 1 — Berechnung von Dreieck, Trapez, Kreis; Teil 2 — Verhältnisse und Proportionen; Teil 3 — Regeldetri; Teil 4 — Quadrat- und Kubikwurzeln; Teil 5 — Volumenberechnungen; Teil 6 — Bewegungsprobleme; Teil 7 — Auflösung einfacher Gleichungen; Teil 8 — Auflösungen quadratischer Gleichungen; Teil 9 — pythagoreisches Dreieck. Die chinesischen sog. Bambusziffern werden auf das 6. Jahrhundert v. u. Z. datiert.



Hunderter wie Einer usw.

Abb. 3 Chinesische Bambusziffern

Mit diesen wenigen Tatsachen wollen wir es bewenden lassen. Sie zeigen deutlich, daß die Chinesen und Inder eine gleiche oder ähnliche Höhe der mathematischen Entwicklung aufweisen, wie sie die anderen Völker des Altertums besaßen und daß sie jedenfalls zu den frühesten Wegbereitern der Mathematik gehören.

Infolge des fanatischen Zerstörungswillens der spanischen und portugiesischen christlichen Eroberer sind fast alle schriftlichen Unterlagen über die frühen amerikanischen Kulturkreise verlorengegangen. Bekannt sind nur wenige Einzelheiten z. B. das Zahlensystem der Mayas, ein unreines 20er System, später als Positionssystem mit Nullzeichen, das in ganz engem Zusammenhang mit einem komplizierten Kalender steht. Jedoch ist die Datierung schwierig, sie schwankt zwischen dem 3. Jahrtausend v. u. Z. und den Jahrhunderten kurz vor und nach dem Beginn unserer Zeitrechnung.

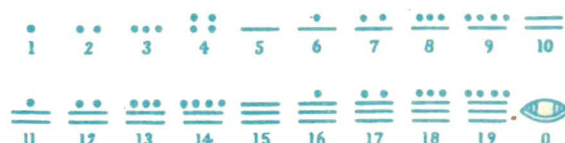


Abb. 4 Zahlzeichen der Mayas

Der Stand der Mathematik in Asien, Amerika und Afrika in dieser frühen Zeit ist jedoch relativ wenig erforscht — eine Folge des europazentristischen Standpunktes. Man wird für die nächste Zeit sehr viel neue Ergebnisse zu erwarten haben, wenn die von kolonialer Ausbeutung und innerer Unterdrückung befreiten Völker selbst ihre eigene kulturelle Vergangenheit studieren.

aus: H. Wußing: *Die Mathematik in der Antike*  
BG Teubner — Verlagsgesellschaft, Preis 18,— M

**Lenin über die Logik.** Die Denkformen der Logik sind durchaus nicht vom Himmel gefallen, sondern auf das engste mit der Tätigkeit des Menschen verknüpft. Kennzeichnend für den Menschen zum Unterschied vom Tier sind die Fähigkeit zu Begriffs- und Urteilsbildungen und die Fähigkeit zur Arbeit, d. h. die im planvollen Handeln verwirklichte Einheit von Theorie und Praxis. Im und am Arbeitsprozeß entwickelt sich das Denken als ein gesellschaftlicher Prozeß. Die Menschen gewinnen im Laufe der Auseinandersetzung mit der Natur allgemeine Denkerfahrungen.

Die Logik entwickelt sich als das

„Fazit, die Summe, die Schlußfolgerung aus der Geschichte der Erkenntnis der Welt“. „Die Gesetze der Logik sind die Widerspiegelungen des Objektiven im subjektiven Bewußtsein des Menschen.“ „Die praktische Tätigkeit des Menschen mußte milliardenmal das Bewußtsein des Menschen zur Wiederholung der verschiedenen logischen Figuren führen, damit diese Figuren die Bedeutung von Axiomen erhalten konnten.“ „Diese Figuren haben gerade (und nur) kraft dieser milliardenmaligen Wiederholung die Festigkeit eines Vorurteils und axiomatischen Charakter.“



## Eine Aufgabe, ausgewählt von Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans Wußing

Leiter der Abteilung Geschichte der Naturwissenschaften  
des Karl-Sudhoff-Instituts, Karl-Marx-Universität Leipzig

▲ 500 Es ist sehr schwierig, die Lebenszeit von Diophantos anzugeben. Sichere Grenzen nach unten und oben sind 150 v. u. Z. und 350 u. Z. Heute bestimmt man mit Hilfe vieler indirekter Schlüsse als Anhaltspunkt für seine Lebenszeit meist das Jahr 250 u. Z. Dagegen sind wir über einige seiner persönlichen Lebensumstände wie Alter, Zeitpunkt der Eheschließung u. a. bestens unterrichtet, und zwar durch gerade solch ein der damaligen Mode entsprechendes arithmetisches Gedicht. Es lautet:

Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das Wunder!  
Durch dies Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.  
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;  
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;  
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,  
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.  
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre  
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.  
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer  
Von sich scheuend auch er kam an das irdische Ziel.

Entnommen aus: H. Wußing: *Mathematik in der Antike*

### Mathematik — einst und jetzt

Als Kolumbus lossegelte, um den Seeweg nach dem reichen Indien zu suchen (und dabei einen ganz neuen Erdteil, Amerika, entdeckte) —, wie fand er auf dem weiten Ozean den Weg nach Westen? Wie wußte er, wo er sich befand? Hatte er seinen Reiseweg vorher auf der Karte konstruiert? Hatte er Zirkel und Lineal bei sich? Konnte man damals überhaupt schon Dreiecke konstruieren? Seit wann gibt es überhaupt Zirkel, seit wann gibt es überhaupt Geometrie als Wissenschaft?

Wer hat die Menschen das Rechnen gelehrt? Die Lehrer natürlich. Aber von wem lernten sie es? Von ihren Lehrern natürlich. Aber wer hat zuerst gefunden, daß  $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$  ist? Wer gab zuerst die allgemeine

Regel für die Addition von Brüchen? Wie kommt es, daß alle gebildeten Menschen auf der Erde die Zahl acht durch das Zeichen 8 ausdrücken? Wer hat die Schreibweise unserer zehn Ziffern erfunden? Warum sind es gerade zehn und nicht zwölf oder neun?

Fragen über Fragen. Mit ihnen beschäftigen sich die Historiker der Mathematik. Das ist eine schwierige aber zugleich auch eine sehr interessante Arbeit. Man muß sehr viel Mathematik können, man muß viele Sprachen lesen können und viel Geduld aufbringen, alte Dokumente der Mathematik zu entziffern und zu verstehen. Warum haben die Menschen überhaupt die Mathematik als eine solch großartige Wissenschaft geschaffen, wie taten sie es, wer tat es? Wer schuf beispielsweise die Mathematik, mit der man die Bahnen der Sputniks berechnen kann? Seit wann verfügen die Mathematiker über ihre fabelhaften Rechenautomaten?

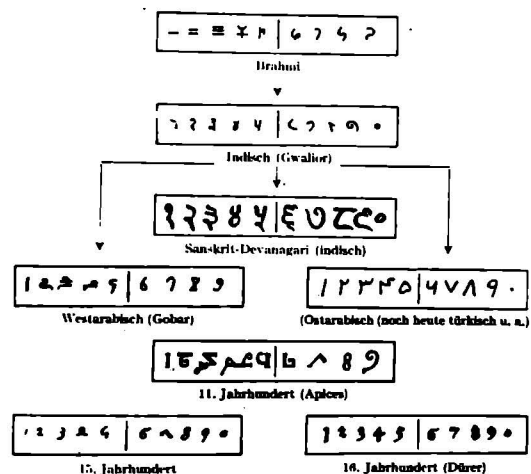


Abb. 5 Stammbaum unserer Ziffern (aus: Menninger: *Zahlwort und Ziffer*)

Wie in vielen Ländern der Erde beschäftigt man sich auch in der DDR mit der Geschichte der Wissenschaften. In Leipzig, an der Karl-Marx-Universität, gibt es das Karl-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften; dort lehrt und erforscht man die Geschichte der Medizin, der Naturwissenschaften (z. B. der Physik, der Chemie) und der Mathematik.

Aus diesem Institut stammen beispielsweise auch die Beiträge zur Geschichte der Mathematik in unseren Schulbüchern. Wenn ihr sie aufmerksam lest, wird euch klarwerden, wie schwierig und langwierig es war, die Mathematik zu einer so schönen Wissenschaft mit den vielfältigsten Anwendungen zu machen. Ihr werdet erkennen, daß viele Mathematiker in früheren Zeiten mit größter Anstrengung gearbeitet haben, um das zu entdecken, was man jetzt erlernen kann, und daß es keinen Stillstand in der Entwicklung der Mathematik gibt. Vieles wurde schon erforscht, viele interessante Aufgaben stehen den Mathematikern von heute und morgen noch bevor. Die Geschichte der Mathematik zeigt den Weg der Mathematik aus der Vergangenheit in die Zukunft.

# Rechnen mit Resten

## Teil 5

Wie man Rechnungen durch das Rechnen mit Resten bzw. Restklassen überprüft, soll uns zunächst ein Beispiel zeigen, bei dem mit Restklassen modulo 7 gearbeitet wird.

▲ B 12 Zu überprüfen sei die Multiplikation  $779 \cdot 356 = 276\,324$ . Die Siebenerreste der beiden Faktoren sind, wie man sofort übersieht, 2 und 6; die Faktoren liegen also in den Restklassen  ${}^7K_2$  und  ${}^7K_6$ . Das Produkt von  ${}^7K_2$  und  ${}^7K_6$  ist nun aber  ${}^7K_5$ . Falls unser Produkt richtig berechnet ist, muß es also den Siebenerrest 5 haben. Versuchen wir aber, 276 324 durch 7 zu dividieren, so stellen wir fest, daß sich der Rest 6 und nicht 5 ergibt. Unsere Rechnung muß also einen Fehler enthalten, das richtige Produkt lautet auch 277 324.

Nun ist allerdings diese Probe eine recht zweifelhafte Erleichterung, denn das Ermitteln des Siebenerrestes ist ja ziemlich umständlich. So einfach wie hier bei 779 und 356 geht es längst nicht immer — da bleibt uns dann nichts weiter übrig, als die schrittweise Division durch 7 zu versuchen. Beim Produkt mußten wir das ja schon in unserem Beispiel so machen. Es fehlt eben eine bequeme Teilbarkeitsregel für 7. Deshalb macht man solche Probe in der Praxis auch nicht mit 7, sondern mit 9 oder mit 11, wo wir die Reste einfach über fortgesetzte Quersummen- oder Querdifferenzbildung ermitteln können.

▲ B 13 Betrachten wir einmal eine „Neunerprobe“ für die Multiplikation  $7826 \cdot 952 = 7\,450\,352$ :

| Aufgabe | Quersumme | Neunerrest |
|---------|-----------|------------|
| 7826    | 23        | 5          |
| · 952   | 16        | · 7        |
| 7450352 | 26 ≡ 8    | 35 ≡ 8     |

Allerdings wird man, wenn man wirklich eine Rechnung, zu überprüfen hat, das nicht in einer so ausführlichen schriftlichen Form machen; die Probe würde ja dabei zu viel Zeit kosten. Wer die Probe nicht gänzlich im Kopf machen will, kann eine Form benutzen, die schon im Mittelalter üblich war. Dabei werden die Neunerreste  $R$  in die von einem liegenden Kreuz

erzeugten Felder eingetragen, für die Multiplikation  $a \cdot b = c$  folgendermaßen:



Der Rechenmeister *Adam Ries* (1492 bis 1559) führte in seinem Wappen das Kreuz



; wegen  $2 \cdot 2 = 2 + 2$  kann es sich hier sowohl

um die Probe für eine Additions- als auch für eine Multiplikationsaufgabe handeln. In unseren Beispielen soll die ausführlichere Darstellung den Gang der Rechnung deutlicher machen.

Schließen wir gleich noch ein Beispiel mit einer Subtraktion an. Dabei ist besonders das Reduzieren auf das „einfache“ Restsystem zu beachten, weil die Subtraktion der Reste ja zu einem negativen Ergebnis führen kann:

| Aufgabe | Quersumme | Neunerrest |
|---------|-----------|------------|
| 26447   | 23        | 5          |
| – 19258 | 25        | – 7        |
| 7189    | 25 ≡ 7    | – 2 ≡ 7    |

Nun haben diese Probleme allerdings noch einen „Haken“: Wenn die Neunerprobe „nicht aufgeht“, wissen wir zwar mit Sicherheit, daß wir uns verrechnet haben. Wenn sie aufgeht, haben wir aber noch keine hundertprozentige Gewißheit, daß die zu überprüfende Rechnung auch wirklich stimmt. Beispielsweise wären wir ja zur gleichen Quersumme gekommen, wenn wir einige Ziffern des Ergebnisses vertauscht hätten, also etwa im Beispiel 14 statt 7189 die Differenz 7198 gelautet hätte. Allgemein macht es sich für die Neunerprobe nicht bemerkbar, wenn wir uns um das Vielfache von 9 verrechnet haben. Natürlich kann man hier als zusätzliche Sicherung noch die Elferprobe anschließen. Auch für diese Probe soll ein Beispiel als Erläuterung dienen, diesmal für eine Addition:

| Aufgabe | Querdifferenz | Elferrest |
|---------|---------------|-----------|
| 5392    | – 9           | 2         |
| + 7263  | – 8           | + 3       |
| + 4639  | 8             | + 8       |
| 17194   | – 10 ≡ 1      | 13 ≡ 2    |

Das zeigt, daß die Addition einen Fehler enthalten muß. So kann das Rechnen mit Restklassen also dazu dienen, die Sicherheit zu erhöhen. Kenntnisse über das Rechnen mit Restklassen oder Kongruenzen sind aber manchmal auch gut, um eine besondere Schnelligkeit zu erreichen. Berufsmäßige Schnellrechner — also Rechenkünstler, wie sie in Varietés auftreten — glän-



zen immer besonders mit ihren Leistungen im Wurzelziehen. Dabei ist das — weil es sich immer um „aufgehende“ Wurzeln handelt — gar nicht so schlimm. Unter dieser Voraussetzung, wenn wir uns also nur wirkliche Quadratzahlen, Kubikzahlen usw. vorlegen lassen, können wir das bei einiger Übung auch: Generell gilt ja für jede natürliche Zahl  $n$  und jedes natürliche  $k$ , daß die letzte Ziffer von  $n$  auch die letzte Ziffer der  $k$ -ten Potenz von  $n$  festlegt. Für Quadrate,  $k=2$ , ist das wohl allen bekannt: Wir wissen, daß  $57^2$  auf die Ziffer 9 enden muß. Wenn wir von 6084 wissen, daß es eine Quadratzahl ist, so wissen wir auch, daß für die Basis nur 2 oder 8 als letzte Ziffer in Frage kommen. Aus  $70^2=4900$  und  $80^2=6400$  ergibt sich nun sofort  $\sqrt{6084}=78$  ( $72^2$  wäre 5184).

Das gilt nicht nur für Quadrate ( $k=2$ ), sondern für beliebiges  $k$ : Aus  $n \equiv a \pmod{10}$  folgt  $n^k \equiv a^k \pmod{10}$  für jede natürliche Zahl  $n$ . Besonders bequem ist nun das Ziehen von dritten oder fünften Wurzeln, weil alle Endziffern von 0 bis 9 bei den Kubikzahlen und den fünften Potenzen genau je einmal auftreten. Solch ein Fall wie beim Quadratwurzelziehen mit der Entscheidung zwischen 2 und 8, 3 und 9, 4 und 6 als letzte Ziffer der Wurzel kann hier also nicht vorkommen. Für das Folgende brauchen wir nun eine Tabelle der dritten und fünften Potenzen der Zahlen von 1 bis 10. In dieser Tabelle hier sind gleich die Elferreste der dritten Potenzen mit aufgenommen worden; der Grund dafür wird uns später klar werden.

| $n$ | $n^3$ | (Elferrest) | $n^5$  |
|-----|-------|-------------|--------|
| 1   | 1     | (1)         | 1      |
| 2   | 8     | (8)         | 32     |
| 3   | 27    | (5)         | 243    |
| 4   | 64    | (9)         | 1024   |
| 5   | 125   | (4)         | 3125   |
| 6   | 216   | (7)         | 7776   |
| 7   | 343   | (2)         | 16807  |
| 8   | 512   | (6)         | 32768  |
| 9   | 729   | (3)         | 59049  |
| 10  | 1000  | (10)        | 100000 |

Diese Tabelle müssen wir kennen, brauchen sie uns allerdings nicht bis in alle Einzelheiten einzuprägen. Für viele Zahlen, beispielsweise  $7^5$ ,  $8^5$ ,  $9^5$ , genügt die Größenordnung. Das Lernen der Elferreste können wir uns auch ersparen, wenn wir die dritten Potenzen genau kennen, um im Kopf aus der Querdifferenz den Elferrest schnell berechnen zu können. Ganz genau müssen wir aber nun jeweils die letzten Ziffern im Kopf haben. Für die 5. Potenzen ist das offensichtlich besonders einfach, denn es gilt, wie man sieht,  $n \equiv n^5 \pmod{10}$ ; die letzte Ziffer einer fünften Potenz stimmt mit der letzten Ziffer der Basis überein.

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, können wir nun zunächst aus jeder Kubikzahl bis zu einer Million die dritte Wurzel ziehen, aus jeder Zahl bis zu 10 Milliarden, die wirklich 5. Potenz ist, die fünfte Wurzel:

▲ B 16 Versuchen wir es zuerst mit  $z = \sqrt[3]{185193}$ . Die letzte Ziffer 3 zeigt uns, daß die letzte Ziffer der Wurzel nur 7 sein kann. 185 Tausender ( $185 \cdot 10^3$ ) weisen uns darauf hin, daß wegen  $125 < 185 < 216$  die Zahl der Zehner in der Wurzel 5 sein muß, also  $z = 57$ .

▲ B 17 Wie steht es nun mit  $z = \sqrt[5]{3707398432}$ ? Zunächst sehen wir, daß die letzte Ziffer der Wurzel 2 sein muß. Und nun kommt es auf die Zahl der Hunderttausender ( $10^5$ ) an:

37073 liegt zwischen  $8^3$  und  $9^3$ , also erhalten wir  $z = 82$ . Mit solchen Leistungen kann man schon die Zuschauer verblüffen! Ärgerlich ist es nur, daß wir uns bei den dritten Wurzeln bisher auf Radikanden bis zu einer Million beschränken müssen. Aber mit nur geringem Mehraufwand können wir hier unsere Fähigkeiten noch beträchtlich erweitern. Wir beachten dazu außer den Kuben selbst auch noch deren Elferreste. Wie wir sehen, kommt auch bei diesen Elferresten jede Zahl von 1 bis 10 genau einmal vor. Das hilft uns jetzt dazu, unsere Kubikwurzelkünste bis zu einer Milliarde ( $1000^3$ ) auszudehnen.

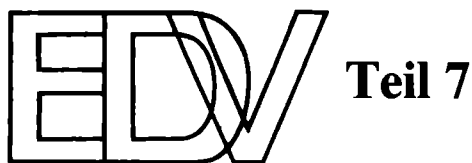
Wie wir dabei vorgehen, wollen wir uns im nächsten Beitrag, der den Abschluß unserer Betrachtungen über das „Rechnen mit Resten“ bildet, an einem Beispiel anschauen.

G. Lorenz



Das sind sie, die Korrektoren von rund 32 000 eingesandten Wettbewerbslösungen des *alpha*-Wettbewerbs 1967/69 — W. Unze, J. Lehmann (beide Leipzig), G. Schulze (Herzberg) v.l.n.r. — hier bei der Auswertung des *alpha*-Wettbewerbs 1969.

# Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung



Der Vorteil der Festkommaarithmetik ist es, daß der technische Aufwand, verglichen mit der im Folgenden zu erläuternden Gleitkommadarstellung, ungleich geringer ist. Man kann auf diese Weise hohe Rechengeschwindigkeiten erzielen. Auch genügt ein derartiger Rechner für viele Zwecke vollauf. Man denke etwa an Lohnabrechnungen. Bruchteile von Pfennigen kommen nicht vor, so daß man durchweg  $k=100$  zu setzen hat, falls es ein Automat des Typs (2) ist wie die Anlage *Robotron 300* (kurz: R 300), die wir bei den folgenden Betrachtungen vorwiegend im Auge haben wollen. Es gibt aber auch nicht weniger Probleme, bei denen, wie vorher schon erwähnt, die Lage des Kommas aller vorkommenden Zahlen vorher schwer, ja oft erst nach länger mühseliger Arbeit zu überblicken ist. Das einfache Gleichungssystem

$$0,1x + 0,2y = 0,63$$

$$0,3x - 0,1y = 0,56$$

könnte in dieser Form weder ein Automat des Typs (1) noch einer des Typs (2) unmittelbar verarbeiten, da einerseits die Koeffizienten und Absolutglieder kleiner als 1 sind, die Lösung aber

$$x = 2,5 ; \quad y = 1,9$$

lautet. An diesem Beispiel möge sich der Leser die Schwierigkeiten ausmalen, die bei den um viele Grade komplizierteren Aufgaben der Rechenpraxis in diesem Zusammenhang auftreten. Aus diesem Grunde werden größere Anlagen (wie etwa R 300) im allgemeinen zusätzlich mit einer zweiten Arithmetik ausgestattet, die es erlaubt, innerhalb eines größeren Stellenbereiches ganze und gebrochene Zahlen unmittelbar zu verarbeiten. Es ist die oben schon genannte

### 1.6.3. Gleitkommadarstellung

Als Vorbetrachtung mache sich der Leser folgendes klar: Jede Bewegung des Kommas einer Dezimalzahl kann durch Multiplikation mit einer Zehnerpotenz so ausgeglichen werden, daß sich der Wert nicht ändert. Beispiel:

$$67\,034,715 = 670,34715 \cdot 10^2 = 0,67034715 \cdot 10^5 \\ = 67\,034\,715 \cdot 10^{-3}.$$

Insbesondere können dadurch stets die beiden im

vorigen Abschnitt besprochenen Kommalagen (1) (vor der höchsten Stelle) und (2) (vor der niedrigsten Stelle) erreicht werden. Man beachte aber den wesentlichen Unterschied: die Festkommaarithmetik arbeitet mit im allgemeinen falschen und später zu korrigierenden Zahlenwerten, während hier der Fehler bei jeder Zahl durch das Hinzufügen der Zehnerpotenz sofort berichtigt wird. Wir befassen uns im Folgenden nur mit der Darstellung (2), da diese im R 300 — auch im Gleitkommabetrieb — angewendet wird. Als Beispiel diene die Zahl

$$67\,034\,715\,000 = 67\,034\,715 \cdot 10^3,$$

wobei man sich also das Komma hinter der 5 zu denken hat. Die Zahl ist durch zwei Angaben vollständig gekennzeichnet:

1. die Ziffernfolge 67 034 715, genannt *Mantisse*,
2. die Zahl 03, genannt *Exponent*.

Letzterer wird gleich zweistellig angesetzt, um einen Variabilitätsbereich von  $-99$  bis  $+99$  und damit ein Gleiten des Kommas über rund 200 Dezimalstellen zu ermöglichen. Wir stellen nun Mantisse und Exponent zu einer einzigen Ziffernfolge, nämlich

$$67\,034\,715\,03$$

zusammen. Diese ist vom Automaten in obiger Weise zu deuten, also die letzten beiden Ziffern als *Exponententeil*, der Rest als *Mantissententeil*. Eine solche Darstellung nennt man *halblogarithmisch*. Unsere Zahlendarstellung bedarf noch einer Ergänzung für den Fall, daß der Exponent negativ ist. Wir vereinbaren vorläufig: Negative Exponenten werden durch einen Querstrich über der Einerziffer des Exponenten gekennzeichnet. Beispiel:

$$48,74653 = 4\,874\,653 \cdot 10^{-5} \rightarrow 48\,746\,53\bar{0}5.$$

In gleicher Weise können wir auch die Einerziffer der Mantisse kennzeichnen und haben damit eine

| Zahl       | Ziffernfolge im Automaten |                |
|------------|---------------------------|----------------|
|            | Mantissententeil          | Exponententeil |
| 5761073    | 5 7 6 1 0 7 3             | 0 0            |
| 5761073000 | 5 7 6 1 0 7 3 0 4         |                |
| 5761,073   | 5 7 6 1 0 7 3 0           | $\bar{3}$      |
| -576107300 | 5 7 6 1 0 7 3 0           | $\bar{2}$      |
| -57,61073  | 5 7 6 1 0 7 3 0           | $\bar{5}$      |



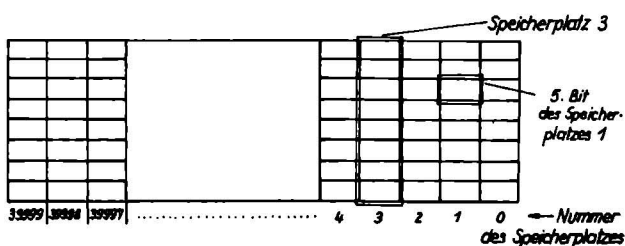
Möglichkeit, negative Zahlen in die Rechnungen einzubeziehen. Steht also ein Querstrich über der drittletzten Stelle, so soll das bedeuten, daß die dargestellte Zahl negativ ist. Zur Erläuterung einige Beispiele:

**Aufgaben:** Welche Zahlen werden durch die Ziffernfolgen

146 812 — 50 371 608 — 1 278 910 — 36 800 100 —  
7 390 413 dargestellt?

(Man schreibe, wo es sich anbietet, die Ergebnisse mit abgespaltenen Zehnerpotenzen!)

Kommen wir nun zur technischen Realisierung dieser Gleitkommadarstellung im Robotron 300! Der Speicher dieser Anlage (Hauptspeicher) ist eine Anordnung von 40 000 · 8 bistabilen Schaltelementen (Ferritkernen) zu einem rechteckigen Schema:



Jede Spalte des Speichers heißt *Speicherplatz* und besteht aus acht übereinanderliegenden *Bits*. Hinter jedem Bit denke man sich also einen (ringförmigen) Ferritkern mit folgenden beiden möglichen Magnetisierungszuständen:



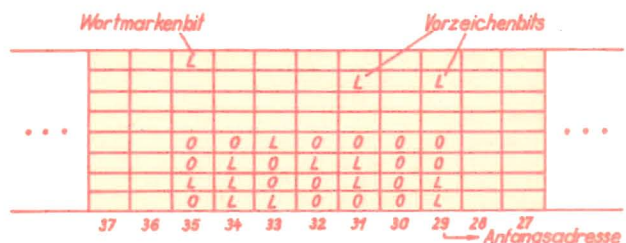
Werden nun die acht Bits eines Speicherplatzes mit den Informationen O beziehungsweise L belegt, so wird ein *Zeichen* repräsentiert. Schließt man aus nicht näher erläuterten Gründen das fünfte und das achte Bit von unten (weil diese für besondere Zwecke vorgesehen sind) aus der Betrachtung aus, so sind, wenn man alle Kombinationen der Belegungen L und O auf den übrigen Speicherplätzen zuläßt, insgesamt  $2^6 = 64$  verschiedene Zeichen möglich. Sie bilden das *Maschinenalphabet*. Es beginnt mit



Bedeutet das Zeichen (und das interessiert uns hier nur) eine *Ziffer*, so stellt man diese in den unteren vier Bits als *Tetrade* dar (siehe 1.5.!). Darüberliegende

Bits kann man für zusätzliche Kennzeichen benutzen, und zwar das siebente Bit als Vorzeichenbit, wenn es sich um die Einerstelle des Exponenten — oder des Mantissentails handelt:

O bedeutet +, L bedeutet —. Das achte Bit heißt Wortmarkenbit und wird über der höchsten Stelle der Mantisse (und nur dort) mit L belegt als Markierung, daß hier die Zahl — genauer: die die Zahl darstellende Zeichenreihe\* — links zu Ende ist. Das rechte Ende der Zahl, also die Einerziffer des Exponententeils, wird schon im Programm erfaßt durch die Angabe der sogenannten *Anfangsadresse* der Zahl. Das ist die Nummer des Speicherplatzes, auf dem die Einerstelle des Exponententeils untergebracht ist. Nehmen wir als Beispiel die Zahl —27,946:



Die unterste Stelle jeder Tetrade ist also die Einerstelle. Der Leser mache sich an diesem Beispiel nochmal genau den Aufbau der Zahlendarstellung klar, prüfe jede Belegung nach und übe anschließend derartige Aufstellungen an Hand folgender

**Aufgaben:** Stelle in dieser Weise die Zahlen

48,94361 — 6 374 006 000 — 0,00463518 dar!

Was das *Rechnen* im Gleitkommabetrieb betrifft, so sollen hier nur einige *Regeln* ohne größeren Kommentar aufgeschrieben werden. Einem Leser, der mit Potenzen rechnen kann (Stoff der 9. Klasse) wird es nicht schwerfallen, diese Regeln zu beweisen. Doch damit beschäftigen wir uns im nächsten Beitrag.

J. Frommann

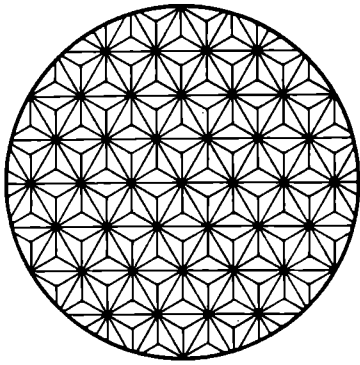
\* Für eine solche Zeichenreihe sagt man auch *Maschinenwort*. Es gibt also Maschinenwörter, die Zahlen darstellen, und solche, die irgendwelche anderen Informationen bedeuten. Erstere werden hier nur behandelt.

## Jugend und EDV

Im Betrieb Radeberg des Kombinati Robotron gibt es gegenwärtig 75 sozialistische Brigaden, welche mit Schulklassen Patenschaftsverträge abgeschlossen haben.

Aus den Reihen der ingenieurtechnischen Mitarbeiter und erfahrenen Facharbeiter werden Leiter für Schularbeitsgemeinschaften auf mathematischem, naturwissenschaftlichem und technischem Gebiet zur Verfügung gestellt.

Die FDJ-Grundeinheit begann eine enge Zusammenarbeit mit der TH Dresden, der Ingenieurschule und der EOS „Wilhelm Pieck“ in Radeberg.



## Auch ein Schlußlicht hat es in sich

Im Alltag machen wir von vielen technischen Hilfsmitteln Gebrauch, ohne uns dabei nach den mathematisch-physikalischen oder auch chemischen Grundlagen der Wirkungsweise dieser Dinge zu fragen. Damit soll nicht auf so kompliziert gebaute Gegenstände wie Fernsehempfänger, Kühlschrank, Farbfilm oder Fotoapparat angespielt werden. Schon bei recht einfachen Gebrauchsgegenständen bestehen vielfach nur verschwommene Vorstellungen über deren Wirkungsweise, und selbst in einem Fachlexikon findet man darüber nicht immer eine klare Auskunft.

An dem uns allgemein vertrauten Gebrauchsgegenstand „Fahrrad“ soll lediglich einmal der Rückstrahler (auch „Schlußlicht“ genannt, s. o.) auf seine Wirkungsweise untersucht werden. Der Effekt des Rückstrahlers besteht doch darin, daß er bei Anstrahlung des Fahrrades von hinten — etwa durch die Scheinwerfer eines Autos — selbst eine Art Lichtquelle wird und rotes Warnlicht nach dem Auto hin reflektiert. Damit wird der Autofahrer bei Dunkelheit auf den anderen Verkehrsteilnehmer aufmerksam gemacht. In einem völlig abgedunkelten Raum sieht man von dem Rückstrahler nichts. Er stellt keine selbständige Lichtquelle dar, sondern sendet erst Strahlen aus, wenn er in geeigneter Weise angestrahlt wird. Als Besonderheit ist dabei zu vermerken, daß das Licht von dem Rückstrahler in Einfallrichtung zurückgeworfen wird. Nur so erweckt es die Aufmerksamkeit des hinter den Scheinwerfern sitzenden Autofahrers.

Den gleichen Effekt kann ein Kraftfahrer beobachten, wenn ihm bei nächtlicher Fahrt eine Katze in die Lichtkegel der Scheinwerfer läuft. Die Augen des Tieres scheinen zu funkeln, als wären es selbständige Lichtquellen. Im Sprachgebrauch hat sich daher auch das Wort „Katzenaugen“ auf den am Fahrrad gebräuchlichen Rückstrahler übertragen.

Wir wollen zunächst die Bau- und Wirkungsweise des Rückstrahlers untersuchen und anschließend prüfen, inwieweit der Vergleich mit einem Katzenauge berechtigt ist. Um einen einfachen ebenen Spiegel handelt es sich offenbar dabei nicht, denn ein solcher würde nur bei Anstrahlung senkrecht zur Spiegelebene den oben beschriebenen Effekt

abgeben. Nehmen wir einmal ein solches „Katzenaugen“ auseinander. Dabei stellen wir fest, daß sich hinter einer roten Glasscheibe ein Mosaik von Spiegeltripeln befindet. Je drei Spiegel sind zu einer räumlichen Ecke derart zusammengefaßt, daß jede Spiegelebene senkrecht auf den beiden anderen steht. Wir vermuten, daß ein Lichtstrahl nach einmaliger Reflexion an jedem der drei Spiegel eines solchen Tripels parallel zum einfallenden Lichtstrahl zurückgeworfen wird. Diese Vermutung wollen wir unter Anwendung elementarer Sätze aus der Optik und Geometrie beweisen.

Es ist sinnvoll, die zur Beweisführung notwendigen Gesetze unserer Untersuchung voranzustellen und dann im Bedarfsfall auf sie zu verweisen.

**Sätze aus der Optik:**

1. Ein Lichtstrahl  $s$ , der in einem Punkt  $G$  auf einen ebenen Spiegel trifft, wird in  $G$  derart reflektiert, daß einfallender und reflektierter Strahl  $s$ , eine Ebene aufspannen, welche das in  $G$  auf der Spiegelebene errichtete Lot  $l$  enthält.

2. Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel, d. h. es gilt

$$\angle s l = \angle l s_r.$$

**Sätze aus der Geometrie:**

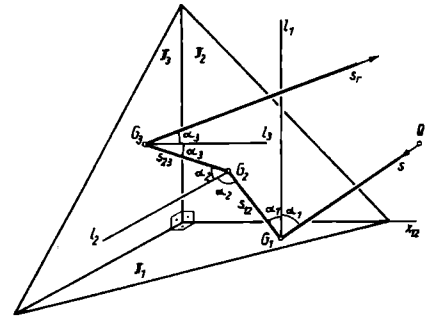
3. Entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen ergänzen sich zu  $180^\circ$ .

4. Die Summe der Innenwinkel im ebenen Dreieck beträgt  $180^\circ$ .

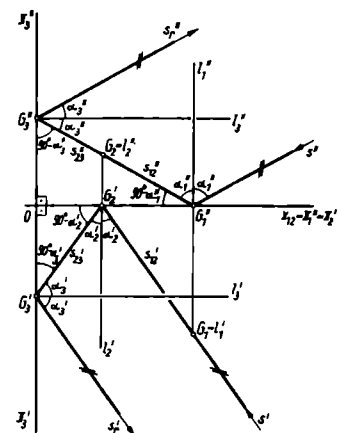
5. Sind die Grundrisse und die Aufrisse von je zwei Geraden  $p$  und  $q$  paarweise zueinander parallel, so sind die Geraden auch im Raum parallel. (Orthogonal zur Ribachse liegende Geraden sind hierbei auszuschließen.)

6. Bei Normalprojektion zweier sich schneidender Geraden  $p$  und  $q$  auf eine Bildebene  $\pi$  geht eine Symmetriegerade  $m$  von  $p$  und  $q$  im Bild wieder in eine Symmetriegerade  $m'$  von  $p'$  und  $q'$  über, wenn  $m$  in der von  $p$  und  $q$  aufgespannten Ebene entweder eine Höhenlinie oder eine Falllinie bezüglich  $\pi$  darstellt.

Als Vorbetrachtungsfigur für die Beweisführung dient uns das Schrägbild eines Tripels von paarweise aufeinander senkrecht stehenden Spiegeln. Durch die drei Spiegelebenen mit ihren spiegelnden Flächen wird



ein Oktant des Raumes festgelegt, in dem die Lichtquelle  $Q$  beliebig anzunehmen ist. Ein von  $Q$  ausgehender Strahl  $s$  treffe die Ebene  $\pi_1$  des ersten Spiegels in  $G_1$ . Der reflektierte Strahl  $s_{12}$  trifft anschließend  $\pi_2$  in  $G_2$ . Endlich wird  $s_{23}$  in  $G_3$  nach einer zunächst noch unbekannten Richtung  $s_r$  zurückgeworfen. In den Spurpunkten  $G_i$  errichten wir auf  $\pi_i$  die Lote  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Für unsere Darstellung ist lediglich vorauszusetzen, daß die Lichtquelle  $Q$  in dem vorgegebenen Oktanten liegt und der von  $Q$  ausgehende Lichtstrahl  $s$  von jedem Spiegel je einmal reflektiert wird. Dies ist sicher erreichbar, wenn man von hinreichend großen Spiegelebenen ausgeht und Strahlen parallel zu einer der drei Ebenen von der Betrachtung ausschließt. Nun gehen wir von der Darstellung des Spiegelungsvorganges vom Schrägbild in zugeordnete Normalrisse über. Bei Konstruktion der Bilder beachten wir die oben angeführten Sätze aus Optik und Geometrie.



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir  $\pi_1$  als Grund- und  $\pi_2$  als Aufriftafel.



Die Schnittgerade der beiden Ebenen wird in dieser Darstellung zur Rißachse  $x_{12}$ . Die Ebene  $\pi_3$  des dritten Spiegels ist bei unserer Anordnung erst- und zweitprojizierend. Ein Lichtstrahl  $s$  trifft, entsprechend den Annahmen aus Bild 2, in  $G_1$  unter einem Winkel  $\alpha_1$  gegen das Lot  $l_1$  die Ebene  $\pi_1$ . Die Grundrisse von einfallendem und reflektiertem Strahl ( $s'$  und  $s_{12}'$ ) bilden nach Satz 1 eine Gerade. Die Aufrisse  $s''$  und  $s_{12}''$  der beiden Strahlen schließen mit  $l_1''$  den gleichen Winkel  $\alpha_1''$  ein. Dies folgt aus den Sätzen 2 und 6, denn  $l_1$  ist parallel  $\pi_2$ .

Der reflektierte Strahl  $s_{12}$  trifft in  $G_2$  auf die Ebene  $\pi_2$  und schließt mit dem Lot  $l_2$  den Winkel  $\alpha_2$  ein. Nach Satz 1 liegen  $s_{12}''$  und  $s_{23}''$  in einer Geraden. Da  $l_2$  parallel  $\pi_1$  ist, gilt nach den Sätzen 2 und 6

$$\angle s_{12}' l_2' = \angle s_{23}' l_2' = \alpha_2'.$$

Der an  $\pi_2$  reflektierte Strahl  $s_{23}$  trifft  $\pi_3$  in  $G_3$  und schließt mit dem Lot  $l_3$  den Winkel  $\alpha_3$  ein. Da  $l_3$  parallel zu beiden Bildebenen ist, können die Sätze 2 und 6 bei Konstruktion der Bilder des zurückfallenden Strahles  $s$ , angewandt werden. Es gilt ...

$$\angle l_3' s' = \alpha_3' \text{ und } \angle l_3' s'' = \alpha_3'.$$

Aus dem Dreieck  $OG_1' G_3'$  ist nach Satz 4 abzulesen:  $\alpha_1' + \alpha_3' = 90^\circ$ .

Da die Winkel  $2\alpha_1''$  und  $2\alpha_3''$  eine Gerade als gemeinsamen Schenkel besitzen und sich außerdem zu  $180^\circ$  ergänzen, handelt es sich um entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen.  $s''$  und  $s_3''$  sind nach Satz 3 zueinander parallel. Ganz analog läßt sich zeigen, daß auch  $s'$  und  $s_3'$  parallel sind. Aus dem Dreieck  $OG_3' G_2'$  ist nach Satz 4 abzulesen:  $\alpha_2' + \alpha_3' = 90^\circ$ . Da die Winkel  $2\alpha_2'$  und  $2\alpha_3'$  eine Gerade als gemeinsamen Schenkel besitzen und sich außerdem zu  $180^\circ$  ergänzen, handelt es sich wieder um entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen.  $s'$  und  $s_3'$  sind nach Satz 3 zueinander parallel.

Aus diesen Ergebnissen kann man endlich nach Satz 5 den Schluß ziehen, daß der einfallende Strahl  $s$  und der zurückgeworfene Strahl  $s_3$  zueinander parallel sind, was zu beweisen war. Es ist noch leicht zu zeigen, daß Strahlen, die parallel zu einer der Spiegelebenen einfallen, nach zweimaliger Reflexion an den beiden anderen Spiegeln parallel zur Einfallrichtung zurückgeworfen werden.

Abschließend soll nur vermerkt werden, daß mit Festlegung der Reihenfolge der Spiegelungen an  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  dem Beweisgedanken nichts an Allgemeingültigkeit genommen wurde. Durch zyklische Vertauschung der Spiegelebenen oder eine Spiegelung des gesamten Vorganges an einem weiteren Spiegel kann man alle möglichen Arten von Reflexionen an dem Tripel auf einen Fall zurückführen, der dem von uns behandelten äquivalent ist.

\* Worterklärung: Laser — Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Dem hier einmal genauer betrachteten Tripelspiegel oder Zentralspiegel kommt eine sehr aktuelle wissenschaftliche und auch praktische Bedeutung zu. Die Entdeckung der Laserstrahlen\* eröffnete diesem Spiegelsystem neue Perspektiven der Anwendung, mit deren Erschließung man noch in den Anfängen steht. Da man diese Strahlen über größere Entfernungen hinweg außerordentlich scharf zu bündeln vermag, sind sie zum Zweck der Vermessung und Steuerung in vielfältigster Weise anwendbar. Tunnelvortriebsmaschinen werden bei längeren Tunnelbauten durch Laserstrahlen in Verbindung mit dem hier behandelten Spiegelungsprinzip mit höchster Präzision gesteuert. Beim Bau von Fernsehtürmen und hohen Schornsteinen lassen sich die geringsten Abweichungen von der Lotrechten mit diesen Strahlen registrieren. Auch die Justierung von Großtanks, Flugzeugen und Schiffen kann durch Laserstrahlen mit einer auf anderem Wege nicht erreichbaren Genauigkeit erfolgen. Die Anwendung des Impulszeitlaufverfahrens auf diese Strahlen

ermöglicht in Verbindung mit Tripelspiegeln eine Präzision und Schnelligkeit in der Entfernungsmessung, wie sie im Zeitalter der Astronautik unentbehrlich ist.

Die Bezeichnung des hier besprochenen technischen Hilfsmittels als „Katzenauge“ bestärkt manchen in der Annahme, daß zu jeder Erfindung des Menschen in der Natur ein Vorbild existiere und der Mensch seine Ideen diesen Vorbildern entlehnt habe. Beim Aufschneiden eines Katzenauges würde man vergeblich nach Spiegelsystemen suchen. Die Lichtreflexion beruht bei diesem organischen Gebilde auf einem anderen Prinzip. Aus gewissen Ähnlichkeiten eines äußeren Effektes an verschiedenen Dingen kann man also nicht auf Analogien im inneren Aufbau und in der Wirkungsweise schließen.

Bem.: Für das Verständnis dieses Beweises ist das Studium der Aufsätze zur darstellenden Geometrie aus den Heften 6/67, 1/68, 2/68 und 4/68 zu empfehlen.

E. Schröder



## Ein Patenschaftsvertrag

Seit zwei Jahren besteht an der 29. Oberschule in Leipzig eine rege Zusammenarbeit zwischen dem *alpha*-Klub (5 Arbeitsgemeinschaften Mathematik) und dem *Elektron*-Klub (eine Physik-Arbeitsgemeinschaft). Beide Klubs nutzen ihre Veranstaltungen und gemeinsame Exkursionen auch dazu, berufsorientierend und berufswerbend zu wirken. Alle Mitglieder wurden vor allem mit Schwerpunktbereichen im Bauwesen, in der Elektronischen Datenverarbeitung, im Maschinenbau und in der Elektrotechnik vertraut gemacht. Zahlreiche Werkstücke unterstützten uns vorbildlich. Um diese Arbeit noch syste-

matischer und vor allem mathematikintensiver zu gestalten, nahmen wir Verbindung zu einer Brigade des Zentralinstituts für Metallurgie, Abteilung Elektronische Rechanlage, auf. (Der Vater einer Teilnehmerin des *alpha*-Klubs ist Mitglied dieser Brigade.) Anfang November haben wir mit dieser Brigade, welche im Kampf um den Titel „Kollektiv der sozialistischen Arbeit“ steht, einen Patenschaftsvertrag abgeschlossen.

- Wir werden gemeinsam mit der Brigade Klub-Nachmittage durchführen und die Lenin-Gedenkstätten Leipzigs besuchen.
- In festgelegten Abständen berichten Klubmitglieder über ihre Arbeit und über ihre Erfolge. — Die Brigade gibt einen Einblick in ihren Kampf um den Titel „Kollektiv der sozialistischen Arbeit“.
- Mitglieder des *alpha*- und des *Elektron*-Klubs gestalten laufend eine Wandzeitung im Arbeitsbereich der Brigade und stellen ihre Arbeitsergebnisse in einer Vitrine aus.
- Die Patenbrigade unterstützt uns beim Bau von Lehrmitteln für den Mathematik- und Physikunterricht.

- Im Rahmen unseres Programms „EDV“ unterstützen uns die Mitglieder der Brigade durch Vorträge. Mehrere AG-Nachmittage verlegen wir an den Arbeitsplatz der Brigade.
- Mitglieder der Patenbrigade werden uns begleiten und fachlich beraten, wenn wir unsere Exkursion nach Berlin zum Fernsehturm, nach Jena zur Zeiß-Ausstellung und nach der Volkssternwarte Hartha durchführen.

Durch die engen Patenschaftsverbindungen wird unsere außerschulische Arbeit verbessert und ein noch engerer Kontakt zur gesellschaftlichen Praxis geschaffen. S. Dury

# IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## Aufgaben der Kreisolympiade (7. 12. 1969)



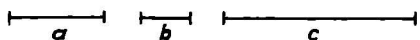
■ 5 ■ 1. Auf einem Tisch sind sechs gleichgroße Spielwürfel so übereinandergesetzt, wie es die Abb. zeigt. Auf der obersten Fläche ist die Augenzahl 1 zu sehen. Ermittle die Summe der Augenzahlen der verdeckten Flächen dieser Würfel!



Beachte dabei, daß die Augenzahl von je zwei gegenüberliegenden Würfelflächen eines jeden Spielwürfels stets 7 beträgt.

2. In einem HO-Bekleidungshaus kauften drei Kunden von dem gleichen Stoff. Der erste kaufte genau 3 m, der zweite genau 5 m und der dritte genau 9 m. Der zweite Kunde bezahlte 30,— M mehr als der erste. Wieviel Mark hatten die drei Kunden insgesamt für den Stoff zu bezahlen?

3. Gegeben seien drei Strecken mit den Längen  $a$ ,  $b$  und  $c$  (siehe Abb.).



Konstruiere eine Strecke mit der Länge  $2(2a + 3b - c)$ !

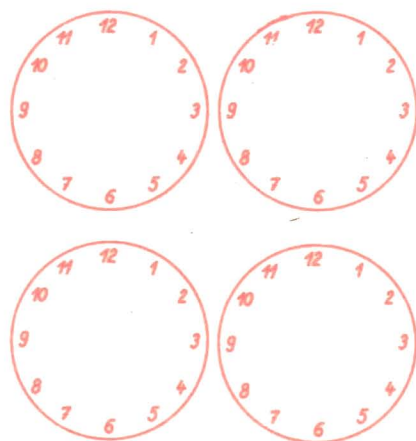
(Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung ist nicht verlangt.)

4. Ermittle *alle* natürlichen Zahlen  $z$ , für die die nachfolgenden Bedingungen gleichzeitig gelten:

- (a)  $z$  ist ungerade;
- (b)  $z$  ist durch 3, 5 und 7 teilbar;
- (c)  $500 < z < 1000$ .

■ 6 ■ 1. Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte: „Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir.“ Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wieviel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

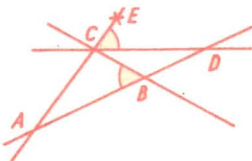
2. Auf dem Arbeitsblatt sind wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 aufgetragen.



Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z. B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, daß die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!

Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.

3. Die Abb. zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt  $C$  und eine vierte Gerade, die nicht durch  $C$  geht. Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten  $A$ ,  $B$  bzw.  $D$  schneiden, wobei  $B$  zwischen  $A$  und  $D$  liegen möge. Punkt  $E$  liege auf der Geraden durch  $A$  und  $C$  so, daß  $C$  zwischen  $A$  und  $E$  liegt.



Ferner gelte  $\angle ECD \cong \angle ABC$ .  
Beweise, daß  $\angle BCD \cong \angle BAC$  ist!

4. Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor

Jürgen aus dem Haus. Nach wieviel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein?

(Es sei angenommen, daß jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

■ 7 ■ 1. Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

- a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?
- b) Wir nehmen an, daß beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

2. Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks „ausgezeichnet“ nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind. Ermittle die größtmögliche Anzahl „ausgezeichneter“ Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

3. Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.

Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h.

Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km. Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer.

4. Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$ . Es sei  $g$  die Gerade durch den Punkt  $A$  und den Mittelpunkt der Seite  $BC$ . Beweise, daß dann die Punkte  $B$  und  $C$  von der Geraden  $g$  den gleichen Abstand haben!

■ 8 ■ 1. Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen. Klaus meint, daß unter allen möglichen

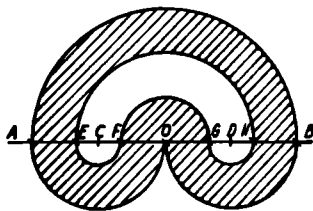


verschiedenen Würfeln solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen. Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

2. Auf einer Geraden seien die Punkte  $A, E, C, F, O, G, D, H, B$  in dieser Reihenfolge so gelegen, daß gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 6 \text{ cm}; \\ \overline{AE} &= \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} = 1 \text{ cm}; \\ \overline{EC} &= \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} = 0,5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Über den Strecken  $AB, EH$  und  $FG$  seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken  $AO, OB, EF$  und  $GH$  Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch  $A$  und  $B$  gezeichnet. Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche (siehe Abb.)



3. a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

4. Beweise folgenden Satz: In jedem Dreieck  $\triangle ABC$  teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

■ 9 ■ 1. Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:

Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, daß sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, daß jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die „Wahren“, weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten. Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die „Unwahren“, weil sie jede Frage falsch beantworten. Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die „Unbeständigen“, weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiß, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet. Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein „Wahrer“, ein „Unwahrer“ oder ein „Unbeständiger“ ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?

b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

2. Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge  $a_1$  und dem Volumen  $V_1$  sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge  $a_2$  und dem Volumen  $V_2$ . Für die Kantenlängen gelte

$$a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$$

Berechnen Sie das Verhältnis  $V_1 : V_2$ !

3. Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.

Man zeige, daß sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z.B. durch Umdrehen bewirktes „Verwandeln“ der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

4. Es ist zu beweisen:

Verbindet man in einem Parallelogramm  $ABCD$  den Eckpunkt  $C$  mit den Mittelpunkten der Seiten  $AB$  und  $AD$ , so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale  $BD$  in drei gleich lange Teilstrecken.

■ 10 ■ 1. Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten

$$\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0,0379]}!$$

Dabei bedeutet  $[x]$  die größte ganze Zahl, die  $x$  nicht übertrifft.

2. Gesucht sind vier natürliche Zahlen  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$  so, daß jede der Zahlen  $d_1 = a_4 - a_3$ ,  $d_2 = a_3 - a_2$ ,  $d_3 = a_2 - a_1$ ,  $d_4 = a_4 - a_2$ ,  $d_5 = a_3 - a_1$ ,  $d_6 = a_4 - a_1$  eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.

3. Gegeben sind zwei Strecken der Längen  $m$  und  $n$  (mit  $n < m$ ).

a) Führen Sie folgende Konstruktionen aus: Um einen beliebigen Punkt  $Y$  einer Geraden  $g$  werde ein Kreis  $k_1$  mit dem Radius  $m$  geschlagen. Einer der Schnittpunkte von  $g$  und  $k_1$  sei  $A$  genannt, der andere  $E$ . Von  $A$  aus werde die Strecke  $AB$  mit  $\overline{AB} = n$  so auf  $g$  abgetragen, daß  $B$  zwischen  $A$  und  $Y$  liegt (das ist wegen  $n < m$  möglich). Von  $B$  aus werde auf  $g$  die Strecke  $BC$  mit  $\overline{BC} = m$  so abgetragen, daß  $A$  zwischen  $B$  und  $C$  liegt (das ist wieder wegen  $n < m$  möglich).

Um  $C$  werde ein Kreis  $k_2$  mit dem Radius  $\overline{BC}$  geschlagen. Einer der Schnittpunkte von  $k_1$  und  $k_2$  sei  $D$  genannt.

b) Ermitteln Sie die Länge  $x$  der Strecke  $AD$ !

4. Mit welchen der folgenden Bedingungen (1), ..., (5) ist die Bedingung  $3x^2 + 6x > 9$  äquivalent?

- (1)  $-3 < x < 1$ ; (2)  $x > -3$ ; (3)  $x < 1$ ;  
(4)  $x < 1$  oder  $x > -3$ ; (5)  $x > 1$  oder  $x < -3$

■ 11/12 ■ 1. Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge  $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$  durch die (unabhängige) Darstellung

$$(1) \quad a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0,$$

wobei  $c_0, c_1, c_2$  reelle Zahlen sind.

Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge

$$D_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n \text{ und als zweite Differenzenfolge die Folge}$$

$$D_n^{(2)} = D_{n+1}^{(1)} - D_n^{(1)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

a) Es seien  $c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = 1$ .

Unter dieser Voraussetzung sind  $a_m, D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$  für  $n = 1, 2, 3, 4$  und 5 zu berechnen.

b) Es ist allgemein zu beweisen, daß für (1) die Folge  $D_n^{(2)}$  konstant ist.

2. In einem Würfel mit den Eckpunkten  $A, B, C, D, E, F, G, H$  und der Kantenlänge  $a$  seien  $FB, FG$  und  $FE$  die drei von  $F$  ausgehenden Kanten. Ferner sei  $\varepsilon$  die Ebene durch  $G, B, E$ .

Es ist zu beweisen, daß die Körperdiagonale  $FD$  senkrecht auf der Ebene  $\varepsilon$  steht und von ihr im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird.

3. Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x + y = az \quad (1)$$

$$x - y = bz \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = cz \quad (3) \quad \text{Dabei sind } a, b, c$$

reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

4. Gegeben seien natürliche Zahlen  $k$  und  $n$  mit  $0 < k < n$ . In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so daß ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau  $n$  Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:

Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchstens  $k$  Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muß, hat verloren.

Welche Beziehung zwischen  $k$  und  $n$  muß erfüllt sein, damit

a) der anziehende Spieler,

b) der nachziehende Spieler

den Gewinn erzwingen kann?

#### Unser Glückwunsch

dem Vorsitzenden für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang Engel

zu seiner Auszeichnung mit dem

Vaterländischen Verdienstorden in Bronze

# Wer löst mit? **alpha**-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin : Mai 1970

W 5 ■ 480 In einer Kleinstadt werden in einem unterteilten Gehege insgesamt 37 Tiere gehalten, und zwar Fasanen, Hirsche, Brieftauben und Füchse. Frank, der durch das Gehege geht, stellt fest, daß zweimal soviel Füchse wie Hirsche, viermal soviel Brieftauben wie Füchse und eine Brieftaube mehr als Fasanen im Gehege vorhanden sind. Wieviel Tiere jeder Art besitzt dieser Kleinstadtzoo? Löse die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

Dietmar Engelman, Thomas-Müntzer-Oberschule, Klasse 7b, Limbach-Oberfrohna III

W 5 ■ 481 Mit welchen natürlichen Zahlen müssen die Variablen  $a, b, c, d$  und  $e$  belegt werden, damit wir aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 \cdot a &= e, & 2 + c &= e, \\ 12 : b &= e, & 5 - d &= e \end{aligned}$$

vier wahre Gleichheitsaussagen erhalten, wenn  $a > b > c > d$  gelten soll?

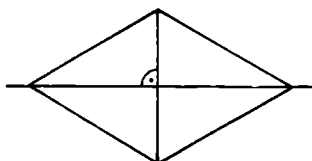
Volker Schmidt, 1901 Dessow, Kreis Kyritz, Klasse 3

W 6 ■ 482 Hans will Schrippen zu 5 Pf das Stück oder Knüppel zu 7 Pf das Stück einkaufen; ihm stehen dafür genau 23 Pf zur Verfügung.

a) Beweise, daß Hans diesen Geldbetrag von 23 Pf nicht voll ausgeben kann, wenn er dafür Schrippen und Knüppel kaufen will!

b) Beweise, daß Hans jeden höheren Geldbetrag als 23 Pf voll ausgeben kann, wenn er dafür Schrippen und Knüppel kaufen will! 23 Pf ist also der größte Geldbetrag, mit dem ein solcher Einkauf nicht möglich ist, wenn der Betrag voll ausgegeben werden soll. T.

W 6 ■ 483 Zeichne auf Pappe ein gleichseitiges Dreieck und schneide es zur Verwendung als Zeichendreieck aus. Konstruiere mit Hilfe dieses selbstgefertigten Zeichendreiecks und eines Lineals einen rechten Winkel und beschreibe diese Konstruktion! T.



W 7 ■ 484 An unseren Tankstellen kostet ein Liter Benzin (Oktanzahl 88) 1,50 M, ein Liter Motorenöl hingegen 3,00 M. Wieviel

Liter Kraftstoffgemisch, bei dem je 33 l Benzin mit je 1 l Öl gemischt werden, erhält ein Kraftfahrer für 20,00 M? T.

W 7 ■ 485 Der russische Mathematiker *Leonti Filippowitsch Magnizki* (1669 bis 1738) stellte in seinem Buch *Arithmetik* (1709) die folgende Aufgabe:

Ein Vater fragt den Lehrer seines Sohnes, wieviel Kinder er unterrichte. Der Lehrer antwortet: „Hätte ich noch einmal soviel Schüler, wie ich jetzt habe, und dann noch die Hälfte und dazu ein Viertel und dann noch deinen Sohn, so wären es genau 100.“ Wieviel Schüler unterrichtet der Lehrer?

W 8 ■ 486 Der neu eingesetzte Expreszug Ex 2 von Berlin nach Leipzig fährt in Berlin-Schönefeld um 8,26 Uhr ab und trifft in Leipzig-Hbf. um 9,56 Uhr ein. Der Schnellzug D 273 fährt in Leipzig um 8,19 Uhr ab und trifft in Berlin-Schönefeld um 10,14 Uhr ein.

a) Wann begegnen sich diese beiden Züge, wenn eine konstante Geschwindigkeit auf der Strecke Berlin-Schönefeld – Leipzig vorausgesetzt wird? (Diese Annahme ist in der Praxis mit einer guten Annäherung erfüllt, obwohl D 273 in Bitterfeld, Wittenberg und Jüterbog je 1 min hält.) Bei der Lösung dieser Teilaufgabe soll die Entfernung zwischen Berlin-Schönefeld und Leipzig nicht als bekannt vorausgesetzt werden.

b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit (in km/h) dieser beiden Züge, wenn die Entfernung zwischen Berlin-Schönefeld und Leipzig 162,7 km beträgt?

c) In welcher Entfernung von Berlin-Schönefeld begegnen sich die beiden Züge?

d) Die Teilaufgaben a) und c) sollen graphisch gelöst werden. L.

W 8 ■ 487 Bei einem 100-m-Lauf starteten gleichzeitig die sechs Schüler Axel, Bruno, Christian, Dieter, Ernst und Fred. Genau zwei von ihnen liefen mit der gleichen Zeit als Sieger durchs Zielband. Auf die Frage, welche beiden Schüler sich den Sieg teilten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

- Axel und Christian;
- Bruno und Fred;
- Axel und Fred;
- Bruno und Ernst;
- Axel und Dieter.

Nun wissen wir daß in genau einer Antwort beide Angaben falsch sind, während in den

übrigen vier Antworten jeweils genau eine Angabe richtig und genau eine Angabe falsch ist. Wie heißen die beiden siegreichen Schüler? Sch.

W 9 ■ 488 Einem spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  soll ein Quadrat  $PQRS$  so einbeschrieben werden, daß die Punkte  $P$  und  $Q$  auf der Seite  $AB$ , der Punkt  $R$  auf der Seite  $BC$  und der Punkt  $S$  auf der Seite  $CA$  liegt.

Die Konstruktion ist allein mit dem Zirkel und dem Lineal durchzuführen.

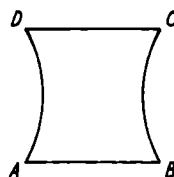
Wolfgang Riedel, Karl-Marx-Stadt, EOS Friedrich Engels, Kl. 10 R

W 9 ■ 489 Zwei Personen  $A$  und  $B$  spielen das folgende Spiel:

$A$  wählt eine einstellige natürliche Zahl und schreibt sie auf. Dann wählt  $B$  eine einstellige Zahl und schreibt sie links daneben; darauf wählt  $B$  noch eine einstellige Zahl, die größer als 0 und kleiner als 5 ist, und schreibt sie wieder links daneben. Zum Schluß wählt  $A$  drei einstellige Zahlen und schreibt sie links daneben.

Wie muß  $A$  spielen, damit unabhängig von der Wahl der beiden Zahlen durch  $B$  die entstandene sechsstellige Zahl durch 1334 teilbar ist? L.

W 10 ■ 490 Ein Stück Stahlblech von der abgebildeten Form hat die Dicke 3 mm. Der verwendete Stahl hat die Dichte  $7,85 \text{ g/cm}^3$ . Das Blechstück ist von zwei Strecken von der Länge  $a = 120 \text{ mm}$  und zwei Kreisbögen von dem Radius  $a = 120 \text{ mm}$  begrenzt. Die vier eingezeichneten Punkte  $A, B, C, D$  bilden ein Quadrat.



Es ist die Masse dieses Blechstücks zu berechnen. Ulrike Weise, Wüstenbrand

W 10 ■ 491 Es sind alle reellen Zahlen  $x$  anzugeben, für die die Gleichung

$$\begin{aligned} x(x+2)(x+4)(x+6) \\ = (x+1)(x+3)^2(x+5) \end{aligned} \text{ erfüllt ist. L.}$$

Die vier besten Schulen in der Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb wurden für ihre vorbildlichen Leistungen mit einer Ehrenurkunde ausgezeichnet. Der Chefredakteur überbrachte persönlich die Glückwünsche des Redaktionskollegiums. Maßstab für die Platzierung waren: Anzahl der erworbenen Urkunden sowie die Schülerzahl der Schulen (Kl. 5 bis 10):

- Oberschule Mittelstille (29 Urkunden)
- Oberschule Fambach (30 Urkunden)
- Oberschule Steinbach-Hallenberg (47 Urkunden) — alle Kr. Schmalkalden
29. Oberschule Leipzig (30 Urkunden)

Redaktion *alpha*

## Prüfungsaufgaben (Auswahl)

## Island, Tanzania

### Abschlußprüfung, Klasse 8

### Island

▲ 492  $\left(4\frac{7}{8} : \frac{5}{14} : 3\frac{4}{7}\right) : 2\frac{6}{13} = x$

▲ 493  $5 : \frac{1}{5} = x \quad \frac{1}{5} : 5 = x$

▲ 494 Ermittle die Summe aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 100 sind!

▲ 495 Drei Personen A, B und C haben gemeinsam 4 ha Baugrund erworben. Von der Bodenfläche wurden 25% für die Anlage einer Zufahrtstraße verwendet. Die danach verbliebene Grundstücksfläche wurde im Verhältnis  $\frac{11}{10} : 1 : \frac{2}{5}$  aufgeteilt. Wieviel Quadratmeter erhielt jeder zur Nutzung?

▲ 496 Der Rauminhalt einer geraden quadratischen Pyramide mit einer Grundkante von 6 cm Länge ist um 25% kleiner als der Rauminhalt eines geraden Kreiszylinders, dessen Durchmesser 8 cm und dessen Höhe 21 cm beträgt. Berechne die Höhe der Pyramide.

▲ 497 a) Eine Kanne, die mit  $4\frac{1}{2}$  kg Waschmittel gefüllt ist, wird zum Preise von 253,50 Kronen verkauft. Wie teuer stellt sich 1 kg dieses Waschmittels?  
b) Nach einer Preiserhöhung von 12% wurde das Waschmittel in größeren Kannen angeboten, deren Fassungsvermögen um den dritten Teil größer war als das der ursprünglichen. Welcher Preis war nunmehr für eine Kanne Waschmittel zu zahlen?

▲ 498 Die Zahl 10,5 ist durch alleinige, aber mehrfache Verwendung der Ziffer 7 darzustellen. Dabei dürfen Zeichen für Rechenoperationen und Klammern gesetzt werden.

▲ 499 Wieviel vierstellige natürliche Zahlen lassen sich mit Hilfe der Ziffern 1, 2, 3 und 4 schreiben, wenn in jeder der Zahlen jede der zu verwendenden Ziffern genau einmal vorkommen soll?

Wir danken unserem Leser G. O. Gestsson, Reykjavik, welcher uns das Material übersandte. Aus den 12 gestellten Prüfungsaufgaben haben wir die vorliegenden ausgewählt.

### Abschlußprüfung, Klasse 10

### Tanzania

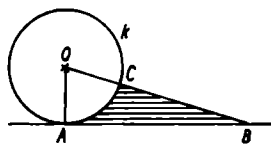
▲ 501 Eine gerade Pyramide  $SABCD$  besitzt die quadratische Grundfläche  $ABCD$ . Jede Grundkante ist 10 cm lang, und die Höhe der Pyramide beträgt 12 cm. Berechne  
a) die Höhe eines Dreiecks, das eine Seitenfläche bildet,  
b) den Flächeninhalt einer Seitenfläche,  
c) das Volumen der Pyramide.

▲ 502 Die folgenden beiden sprachlichen Formulierungen sind als Gleichungen zu schreiben:

a) Addiert man zu einer Zahl  $x$  ihren zehnten Teil, quadriert man danach die erhaltene Summe, so erhält man die Zahl  $z$ .  
b) Wenn man das Produkt aus  $a^2$ ,  $b$  und  $c$  durch die Quadratwurzel aus  $p$  dividiert, so erhält man als Ergebnis  $t$ .  
c) Bestimme den Wert von  $t$ , wenn  $a=3$ ,  $b=-4$ ,  $c=5$  und  $p=16$  ist.

▲ 503 Die Differenz aus den Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen beträgt 81. Um welche Zahlen handelt es sich?

▲ 504 In der nachstehend abgebildeten Zeichnung ist die Gerade  $AB$  Tangente an den Kreis  $k$ . Der Mittelpunktswinkel  $\angle AOC$  beträgt  $72^\circ$ , und der Radius  $\overline{AO}$  des Kreises  $k$  ist 5 cm lang. Berechne



a) die Länge des Tangentenabschnittes  $\overline{AB}$ ,  
b) die Länge der Strecke  $\overline{OB}$ ,  
c) die Länge des kleineren Kreisbogens  $\widehat{AC}$ ,  
d) den Inhalt der in der Zeichnung schraffiert dargestellten Fläche.

▲ 505 Eine Schule möchte für die Fahrt ins Naturschutzgebiet „Serengeti“ einen Autobus mieten. Die Unkosten betragen 2352 Schillinge. Da acht Sitzplätze unbesetzt blieben, mußte jeder der Reisetilnehmer 7 Schillinge mehr bezahlen, als ursprünglich bei besetztem Bus vorgesehen war. Wieviel Sitzplätze hatte der Autobus?

▲ 506 Die Entfernung zwischen zwei Orten A und B beträgt genau eine Meile. Auf einer Landkarte (Maßstab 1 : 100 000) wurde die Entfernung  $\overline{AB}$  mit 1,63 cm gemessen.

a) Wieviel Yards Unterschied ergeben sich aus der wirklichen und aus der mit Hilfe der Karte ermittelten Länge der Strecke  $\overline{AB}$ ?

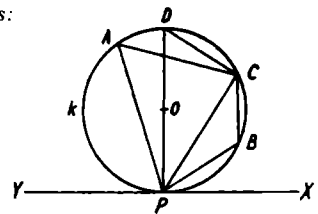
b) Es sei  $\overline{AB}$  die Länge der Seite eines Quadrates. Wieviel Hektar Flächeninhalt besitzt dieses Quadrat in Wirklichkeit? Welcher Flächeninhalt ergibt sich für das Quadrat aus den Ablesungen an Hand der Karte?

(1 Yard  $\approx$  0,9144 m; 1 acre  $\approx$  0,4047 ha; 640 acres  $\approx$  1 Quadratmeile)

▲ 507 Der Beweis für den Satz „Jeder Peripheriewinkel ist kongruent zu dem zugehörigen Sehntangentenwinkel“ wird in seinen einzelnen Schritten nachstehend in Kurzform wiedergegeben. Es sind in die vorgesehenen Zeilen jeweils die Begründungen für die Gleichheitsaussagen einzutragen.

In der nachstehenden Abbildung ist die Gerade  $XY$  Tangente an den Kreis  $k$ ; sie berührt den Kreis im Punkte  $P$ .  $\overline{DP}$  ist Durchmesser des Kreises,  $O$  sein Mittelpunkt.

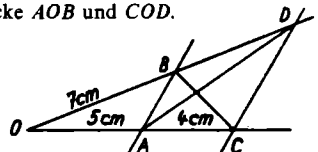
Beweis:



- $\angle DPX = 90^\circ$  (1) .....  
 $\angle CPX + \angle DPC = 90^\circ$  (2) .....  
 $\angle DCP = 90^\circ$  (3) .....  
 $\angle PDC + \angle DPC = 90^\circ$  (4) .....  
 $\angle PAC = \angle PDC$  (5) .....  
Folglich  
 $\angle PAC = \angle CPX$  (6) .....  
 $\angle CPX + \angle CPY = 180^\circ$  (7) .....  
 $\angle CBP + \angle PAC = 180^\circ$  (8) .....  
 $\angle PAC = \angle CPX$  (9) .....  
Folglich  
 $\angle CBP = \angle CPY$  (10) .....

▲ 508 Die Schenkel des Winkels  $\angle DOC$  werden von zwei parallelen Geraden  $AB$  und  $CD$  geschnitten (siehe Zeichnung).

a) Ermittle die Länge der Strecke  $\overline{BD}$ .  
b) Bestimme das Verhältnis aus den Maßzahlen der Flächeninhalte der Dreiecke  $OAD$  und  $ACD$ , der Dreiecke  $BCD$  und  $ACD$ , der Dreiecke  $AOB$  und  $COD$ .



Am 3. Juni 1969 wurden in allen Regionen (vergleichbar unseren Bezirken) Tanzanias Prüfungsarbeiten geschrieben: Arbeit in Gruppen A und B; reine Arbeitszeit: 150 Minuten; gestellte Aufgaben: 20; erreichbare Punkte: 100. Dieser Abschluß ist vergleichbar dem unseres 10. Schuljahres. Sechs der 20 Aufgaben veröffentlichen wir. Fachlehrer aus der DDR unterrichten jeweils zwei Jahre in Tanzania. Dies ist ein echtes Zeichen zielstrebig und freundschaftlicher Zusammenarbeit zwischen beiden Staaten. Wir danken dem Mathematikfachlehrer S. Wengel, z. Z. Moshi (Tanzania), für die Übersendung des Materials.



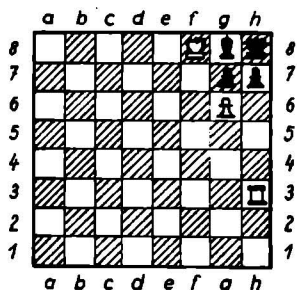
## Rund um das Schachbrett, Teil 2



### Matt in zwei Zügen

Wir finden in Zeitungen und Zeitschriften öfters Schachaufgaben der Typen „Matt in zwei Zügen“, „Matt in drei Zügen“ u. s. f. In diesem Beitrag erfahren wir, wie solche Aufgaben zu lösen sind. Aus Platzgründen wird vorausgesetzt, daß die zulässigen Züge der einzelnen Schachsteine sowie die Begriffe „einen Stein schlagen“, „dem König Schach bieten“ und „den König mattssetzen“ bekannt sind. Bei einer Aufgabe „Matt in zwei Zügen“ hat stets Weiß, der Spieler mit den weißen Figuren, den ersten Zug auszuführen. Dabei muß Weiß unter allen möglichen ersten Zügen denjenigen bzw. diejenigen auswählen, daß — bei jeder denkbaren Spielweise seines Gegners Schwarz — Weiß mit einem geeigneten zweiten Zug stets Schwarz mattssetzen kann.

Wir lösen die folgende Aufgabe gemeinsam:



Matt in zwei Zügen:

Weiß: Kf8, Th3, g6 (3 Steine)

Schwarz: Kh8, Lg8, h7, g7 (4 Steine)

Es ist üblich, die Ausgangsposition einer solchen Aufgabe in der Zeichnung und nochmals schriftlich zu fixieren. Dabei werden für die Schachsteine König, Dame, Turm, Läufer und Springer die Anfangsbuchstaben als Abkürzungen verwendet. Die Spalten des Schachbrettes werden mit den Buchstaben a bis h und die Zeilen mit den Ziffern 1 bis 8 bezeichnet. Somit bedeutet die Angabe „Kf8“: „Der König steht auf dem Feld der Spalte f und der Zeile 8“. Eine Angabe wie „g6“ ohne Symbol eines Schachsteines bedeutet: „Ein Bauer steht auf dem Feld der Spalte g und der Zeile 6“. Wir nehmen ein Schachspiel zur Hand und stellen die in der Aufgabe genannten Steine in der angegebenen Weise auf das Schachbrett.

Als erstes überprüfen wir, daß Weiß genau die folgenden Anfangszüge ausführen kann: Th3 — a3, Th3 — b3, Th3 — c3, Th3 — d3, Th3 — e3, Th3 — f3, Th3 — g3, Th3 : h7†, Th3 — h6, Th3 — h5, Th3 — h4, Th3 — h2, Th3 — h1, Kf8 — e8, Kf8 — e7 und g6 : h7.

Dabei bedeutet z. B. „Th3 — a3“ „Der Turm wird vom Feld h3 auf das Feld a3 gezogen“, „g6 : h7“ „Der Bauer auf dem Feld g6 schlägt den gegnerischen Stein auf dem Feld h7“ und „Th3 : h7†“ „Der Turm auf dem Feld h3 schlägt den gegnerischen Stein auf dem Feld h7 und bietet Schach“.

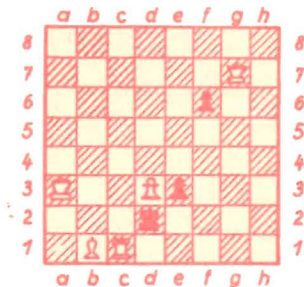
Als zweites versuchen wir, möglichst viele der für Weiß zulässigen Anfangszüge gemäß Aufgabenstellung auszuschalten: Mit dem Bauernzug „g6 : h7“ kann Weiß das Ziel, mit seinem zweiten Zuge Schwarz mattszusetzen, nicht mit Sicherheit erreichen. Ein Gegenzug von Schwarz, der Weiß dieses Ziel nicht erreichen läßt, ist hier z. B. „Lg8 — a2“. Denn jetzt könnte Weiß mit seinem zweiten Zuge nicht einmal Schach bieten, also erst recht nicht mattssetzen. Auch die beiden Königszüge scheiden als Eröffnungszüge für Weiß aus: Zur Begründung genügt es, für Schwarz einen Gegenzug anzugeben, durch den Weiß das Ziel der Aufgabe nicht erreichen kann. Ein solcher Zug ist für Schwarz „Lg8 — a2“. Nur mit einem einzigen seiner möglichen zweiten Züge kann Weiß Schach bieten. Es ist dies „Th3 : h7†“. Da Schwarz jetzt durch „Kh8 — g8“ seinen König aus dem Schach ziehen kann, kann also Weiß mit keinem zweiten Zug mattssetzen. Falls unsere Aufgabe eine Lösung besitzt, muß der erste Zug von Weiß also ein Turmzug sein. Doch auch von Turmzügen können wir alle bis auf „Th3 : h7†“ und „Th3 — h6“ sofort ausscheiden. Denn bei allen anderen Turmzügen könnte Schwarz mit „h7 — h6“ antworten. Steht dabei der weiße Turm nicht mehr auf der Spalte h, so kann Weiß mit keinem zweiten Zug Schach bieten. Steht hingegen der weiße Turm noch auf der Spalte h, so kann Weiß nur durch den zweiten Zug „Th : h6†“ Schach bieten. Dies ist jedoch keine Mattstellung, denn Schwarz kann durch „g7 : h6“ die Schachdrohung beseitigen. Von den beiden für Weiß verbliebenen Anfangszügen scheidet weiterhin „Th3 : h7†“ aus.

Denn wenn Schwarz mit „Lg8 : h7“ pariert, kann Weiß im zweiten Zug nicht einmal Schach bieten.

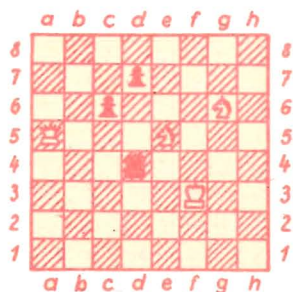
Als drittes weisen wir nach, daß der eine für Weiß verbliebene Anfangszug „Th3 — h6“ Lösung ist. Auf unserem Schachbrett führen wir diesen Zug aus. Es muß gezeigt werden, daß bei jedem Gegenzug von Schwarz Weiß mit seinem zweiten Zug das Matt erzwingen kann. Die sämtlichen Gegenzüge von Schwarz sind Lg8 — a2, Lg8 — b3, Lg8 — c4, Lg8 — d5, Lg8 — e6, Lg8 — f7 und g7 : h6.

Der zweite Zug von Weiß hängt von dem von Schwarz ausgeführten Zuge ab. Führt Schwarz einen Läuferzug aus, so setzt Weiß mittels „Th6 : h7 ≠“ seinen Gegner matt. (Das Zeichen ≠ bedeutet „matt“.) Führt hingegen Schwarz den Bauernzug aus, so pariert Weiß mittels „g6 — g7 ≠“ erfolgreich. Also lautet der Lösungszug der Aufgabe „Th3 — h6“.

Wir lösen selbständig:



Aufgabe 1: Matt in zwei Zügen  
Weiß: Ka3, Dg7, Tc1, Lb1, d3 (5 Steine)  
Schwarz: Kd2, e3, f6 (3 Steine)



Aufgabe 2: Matt in zwei Zügen  
Weiß: Kf3, Da5, Se5, Sg6 (4 Steine)  
Schwarz: Kd4, c6, d7 (3 Steine)

Abschließend lassen wir uns noch mitteilen:

1. Bei einer Aufgabe „Matt in drei Zügen“ hat ebenfalls Weiß den ersten Zug auszuführen. Weiß hat so zu spielen, daß er spätestens mit seinem dritten Zug seinen Gegner mattsetzt, und zwar bei beliebiger Spielweise von Schwarz.

2. Nicht unbedingt muß bei Aufgaben „Matt in drei Zügen“, „Matt in vier Zügen“ u.s.w. die Zahl der Züge angegeben sein. Oftmals lautet unter Nichtangabe der Maximalzahl zulässiger Züge die Aufgabenstellung nur „Weiß zieht und gewinnt“. Eine solche Aufgabe hat ebenfalls entweder keine, eine oder mehrere

Lösungen (geeignete, erste Züge für Weiß). Hat eine Aufgabe „Weiß zieht und gewinnt“ keine Lösung, so kann zur gleichen Ausgangsposition auf dem Schachbrett die Problemstellung „Weiß zieht und hält remis“ betrachtet werden. Ein Schachspieler *S* oder ein für das Schachspielen programmierter Rechenautomat *R*, der zu jeder Ausgangsposition die Problemstellung „Weiß zieht und gewinnt“ und gegebenenfalls auch „Weiß zieht und hält remis“ überblickt, würde die Theorie des Schachspiels vollständig beherrschen. Man würde dann sagen, *S* bzw. *R* können mit optimaler Strategie Schach spielen. Jedoch gibt es heute noch keinen Schachspieler und auch noch keinen für das Schachspiel programmierten Rechenautomaten, die die Theorie des Schachspiels vollständig beherrschen. Es ist nicht anzunehmen, daß der vom Schachexweltmeister Dr. Botwinnik laut Zeitungsmeldung programmierte Rechenautomat mit optimaler Strategie Schach spielen wird. Denn für die Bewältigung einer solchen Aufgabe dürften die heutigen Rechenautomaten zu langsam arbeiten, und ihr Speicherwerk dürfte zu klein sein. Der Botwinniksche Rechenautomat dürfte jedoch laut Ankündigung in der Lage sein, menschliche Weltklassem Spieler zu schlagen.

3. Von Spielen mit einfacheren Spielregeln als dem Schachspiel ist die vollständige Theorie bekannt. Die *alpha*-Leser werden in dem Beitrag „Wir spielen mit optimaler Strategie“ die Theorie einiger einfacher Spiele kennen lernen.

**Abschlußbemerkung:** Die drei Aufgaben „Matt in zwei Zügen“ dieses Beitrags sind entnommen aus I. L. Maiselis u. M. M. Judowitsch: Lehrbuch des Schachspiels, Sportverlag 1969 und aus der Zeitschrift „Schach“ des DSV.

### Die erste Partie seines Lebens

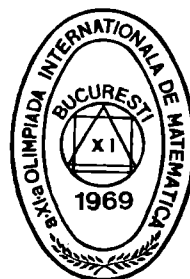
José Raoul Capablanca y Graupera (19. November 1888 in Havanna geb., 8. März 1942 in New York gest.) war der dritte Schachweltmeister (1921 bis 1927).

Die erste Partie seines Lebens spielte José bereits als Vierjähriger! Capablanca senior, ebenfalls ein großer Schachliebhaber, spielte damals eine Partie mit seinem Nachbarn. Der kleine José beobachtete schweigend das Kampfgeschehen. Plötzlich aber mischte er sich ein: „Du hast falsch gezogen, Papa!“

— „Waas!?“ — „Ja, du bist mit dem Springer von einem weißen Feld auf ein anderes weißes Feld gegangen. So zieht ein Springer nicht!“ — Der Steppke hatte recht. Zur Belohnung für seine Aufmerksamkeit spielte der Vater eine Partie mit dem Söhnchen und — verlor ...

# XI. Internationale Mathematikolympiade

## Lösungen der Aufgaben



Die Lösungen wurden von Dr. habil. Helmut Bausch  
und Dr. Rolf Lüders bearbeitet

1. Wir geben hier die Lösung von Jürgen Schefter wieder.

Es sei  $a = 4k^4$ , wobei  $k$  eine natürliche Zahl ist, die größer als 1 ist. Dann gilt  
 $z = n^4 + a = n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2$   
 $= (n^2 + 2k^2 + 2nk)(n^2 + 2k^2 - 2nk)$ ,  
 $z = [(n+k)^2 + k^2][(n-k)^2 + k^2]$ . (1)

Nun gilt wegen  $k > 1$

für alle natürlichen Zahlen  $n$

$$(n+k)^2 > 0, \quad (n-k)^2 \geq 0 \quad \text{und} \\ (n+k)^2 + k^2 > 1, \quad (n-k)^2 + k^2 > 1. \quad (2)$$

Beide Faktoren auf der rechten Seite der Gleichung (1) sind also größer als 1.

Die Zahl  $z = n^4 + a$  mit  $a = 4k^4$  und  $k > 1$  ist also für alle natürlichen Zahlen  $n$  eine zusammengesetzte Zahl.

Nun gibt es unendlich viele natürliche Zahlen  $k$ , die größer als 1 sind, also auch unendlich viele natürliche Zahlen  $a = 4k^4$ , so daß für alle natürlichen Zahlen  $n$  die Zahl  $z = n^4 + a$  keine Primzahl ist, womit die Behauptung bewiesen ist.

**Bemerkung:** Diese elementare zahlentheoretische Aufgabe, eine Verallgemeinerung des Satzes von Sophie Germain (1776 bis 1831), wonach  $n^4 + 4$  für keine natürliche Zahl  $n$ , die größer als 1 ist, eine Primzahl ist, wurde von sieben Teilnehmern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Diese Schüler lösten die Aufgabe im Prinzip in derselben Weise, wie oben dargestellt. Nur ein Schüler konnte die Aufgabe nicht vollständig lösen.

2. Wir geben hier die Lösung von Andreas Felgenhauer wieder.

Zunächst soll bewiesen werden, daß die Funktion  $f(x)$  nicht identisch gleich Null ist. Es existiert eine reelle Zahl  $x_0$ , so daß  $\cos(a_1 + x_0) = 1$ . Ferner gilt wegen  $\cos(a_i + x) \geq -1$  für alle reellen  $x$

$$\frac{1}{2} \cos(a_2 + x) + \frac{1}{2^2} \cos(a_3 + x) + \dots \\ + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x) \geq -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{2^{n-1}} \\ \geq -1 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Daraus folgt

$$f(x_0) \geq \cos(a_1 + x_0) - 1 + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

also  $f(x_0) \neq 0$ ,

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Durch die Anwendung der Additionstheoreme erhalten wir ferner

$$f(x) = \cos x \cos a_1 + \frac{1}{2} \cos x \cos a_2 + \dots \\ + \frac{1}{2^{n-1}} \cos x \cos a_n - \sin x \sin a_1 \\ - \frac{1}{2} \sin x \sin a_2 - \dots - \frac{1}{2^{n-1}} \sin x \sin a_n;$$

$$f(x) = \cos x \left( \cos a_1 + \frac{1}{2} \cos a_2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2^{n-1}} \cos a_n \right) - \sin x \left( \sin a_1 + \frac{1}{2} \sin a_2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2^{n-1}} \sin a_n \right).$$

Setzt man

$$\cos a_1 + \frac{1}{2} \cos a_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos a_n = b, \quad (1)$$

$$\sin a_1 + \frac{1}{2} \sin a_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \sin a_n = c, \quad (2)$$

wobei  $b$  und  $c$  Konstanten sind, so erhält man  $f(x) = b \cos x - c \sin x$ . (3)

Gilt nun  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , so gilt auch

$$b \cos x_i - c \sin x_i = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Nun ist aber  $b^2 + c^2 \neq 0$ ; denn aus  $b^2 + c^2 = 0$  würde  $b = c = 0$ , also wegen (3)  $f(x) = 0$  für alle  $x$  folgen, was, wie oben bewiesen wurde, nicht möglich ist.

Daher können wir in der Gleichung (4) durch  $\sqrt{b^2 + c^2}$  dividieren und erhalten

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cos x_i - \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \sin x_i = 0. \quad (5)$$

$$\text{Wegen } \left| \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right| \leq 1$$

$$\text{und } \frac{b^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2}{b^2 + c^2} = 1 \quad \text{können wir}$$

eine reelle Zahl  $z$  so wählen, daß

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \cos z \quad \text{und} \quad \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \sin z \quad \text{gilt.}$$

Wir erhalten dann aus (5)

$$\cos z \cos x_i - \sin z \sin x_i = 0, \\ \cos(x_i + z) = 0,$$

$$\text{also} \quad x_1 + z = \frac{\pi}{2} + t_1 \pi \quad (6)$$

$$\text{und} \quad x_2 + z = \frac{\pi}{2} + t_2 \pi, \quad (7)$$

wobei  $t_1$  und  $t_2$  ganze Zahlen sind. Aus (6) und (7) erhalten wir durch Subtraktion

$$x_2 - x_1 = (t_2 - t_1) \pi = m\pi, \quad \text{wobei} \\ m = t_2 - t_1 \quad \text{eine ganze Zahl ist, w.z.b.w.}$$

**Bemerkung:** Diese goniometrische Aufgabe wurde von drei Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Ein weiterer Schüler erhielt 6 Punkte, da der Nachweis dafür, daß die Funktion  $f(x)$  nicht identisch gleich Null

ist, lückenhaft war. Die weiteren Schüler konnten nur Teillösungen bringen (5 Punkte bzw. in zwei Fällen 4 Punkte), da die notwendigen Begründungen — insbesondere für das nicht identische Verschwinden von  $f(x)$  — unvollständig waren.

3. Wir geben hier die Lösung von Klaus Neumann wieder.

Es werden der Reihe nach die Fälle  $k = 1$ ,  $k = 5$ ,  $k = 2$ ,  $k = 4$  und  $k = 3$  behandelt.

1. Fall:  $k = 1$ .

O.B.d.A. können wir annehmen, daß, falls ein Tetraeder  $ABCD$  mit den geforderten Eigenschaften existiert,

$$\overline{AB} = a \quad \text{und} \quad \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$$

gilt. Wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir zunächst die notwendige Bedingung  $a < 2$ .

Es sei nun  $M$  die Mitte der Kante  $AB$ . Dann gilt

$$\overline{CM} = \overline{DM} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung (in dem Dreieck  $CMD$ ) gilt ferner

$$\overline{CM} + \overline{DM} > \overline{CD}, \quad \text{also}$$

$$2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > 1, \quad 4 - a^2 > 1, \quad a^2 < 3;$$

wir erhalten also die weitere notwendige Bedingung  $a < \sqrt{3}$ . (1)

Ist nun diese Bedingung erfüllt, so gilt auch  $\overline{CM} + \overline{CD} > \overline{DM}$  und  $\overline{DM} + \overline{CD} > \overline{CM}$ , d.h. es existiert ein Dreieck  $CMD$  mit den oben angegebenen Seitenlängen.

Daraus folgt, daß ein Punkt  $D$  außerhalb der durch  $A, B, C$  bestimmten Ebene existiert, so daß  $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$  ist. Die angegebene Bedingung  $a < \sqrt{3}$  ist also auch hinreichend für die Existenz des Tetraeders  $ABCD$ .

2. Fall:  $k = 5$ .

Dieser Fall läßt sich auf den Fall  $k = 1$  zurückführen, wobei nur die Kantenlängen  $a$  und 1 zu vertauschen sind. Man erhält die notwendige und hinreichende Bedingung

$$\frac{1}{a} < \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad a > \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

3. Fall:  $k = 2$ .

3.1. Die beiden Kanten der Länge  $a$  mögen in einem Dreieck liegen. O.B.d.A. können wir dann  $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ ,  $\overline{AB} = 1$  annehmen.

Wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir die notwendige Bedingung  $2a > 1$ , d.h.  $a > \frac{1}{2}$ .



Es sei wieder  $M$  die Mitte der Kante  $AB$ . Dann gilt

$$\overline{CD} + \overline{DM} > \overline{CM},$$

$$\text{also } 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} > \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}},$$

$$1 + \sqrt{3} + \frac{3}{4} > a^2 - \frac{1}{4},$$

$$a^2 < 2 + \sqrt{3}, \text{ d. h. } a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}. \quad (3)$$

Andererseits gilt aber auch

$$\overline{DM} + \overline{CM} > \overline{CD},$$

$$\text{also } \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} > 1,$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0,$$

$$\text{also } a^2 - \frac{1}{4} > 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4},$$

$$a^2 > 2 - \sqrt{3},$$

$$\text{d. h. } a > \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad (4)$$

Man erhält also die notwendige Bedingung

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}. \quad (5)$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, so existiert das Dreieck  $DMC$ , also auch das Tetraeder  $ABCD$ . Die Bedingung (5) ist also im Falle 3.1. *notwendig und hinreichend*.

3.2. Die beiden Kanten der Länge  $a$  mögen nicht in einem Dreieck liegen. O.B.d.A. können wir dann  $\overline{AB} = \overline{CD} = a$  annehmen.

Wir erhalten wieder die notwendigen Bedingungen  $a > 2$

$$\text{und wegen } \overline{CM} = \overline{DM} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}, \quad \overline{CD} = a$$

$$2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > a, \quad 4 - a^2 > a^2, \quad 2a^2 < 4,$$

$$\text{also } a < \sqrt{2}. \quad (6)$$

Diese Bedingung ist aber im Falle 3.2. auch hinreichend; denn in diesem Falle läßt sich stets ein Tetraeder mit den geforderten Eigenschaften konstruieren.

Aus (5) und (6) folgt, daß im Falle  $k=2$  notwendig und hinreichend für die Existenz eines Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften die Bedingung

$$a < \sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ ist.} \quad (7)$$

4. Fall:  $k=4$ .

Auch dieser Fall läßt sich auf den Fall  $k=2$  zurückführen, indem die Kantenlängen  $a$  und 1 vertauscht werden.

Man erhält die notwendige und hinreichende Bedingung

$$\frac{1}{a} < \sqrt{2 + \sqrt{3}},$$

$$\text{also } a > \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \quad (8)$$

5. Fall:  $k=3$ .

$$\text{5.1. Es sei } a > \frac{1}{3}\sqrt{3}. \quad (9)$$

Dann existiert ein Tetraeder mit  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 1$  und  $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = a$ ; denn, wenn  $S$  der Schwerpunkt des gleichseiti-

gen Dreiecks  $ABC$  ist, so hat man nur eine Senkrechte  $SD$  auf der Ebene dieses Dreiecks

$$\text{zu errichten mit } \overline{SD} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2},$$

was wegen  $a > \frac{1}{3}\sqrt{3}$  immer möglich ist.

5.2. Es sei  $a < \frac{1}{3}\sqrt{3}$ . (10)

Dann existiert ein Tetraeder mit  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$  und  $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = 1$ ; denn analog wie in 5.1. wählt man den

$$\text{Punkt } D \text{ so, daß } \overline{SD} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2},$$

was wegen  $a < \frac{1}{3}\sqrt{3}$  immer möglich ist. Da die durch die Bedingungen (9) und (10) festgelegten Intervalle einander überschneiden, ist im Falle  $k=3$  für alle reellen positiven  $a$  die Existenz des Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften nachgewiesen.

**Zusammenfassung:** Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Tetraeders mit den geforderten Eigenschaften sind die folgenden Bedingungen:

$$\text{im Falle } k=1: 0 < a < \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$k=2: 0 < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$k=3: 0 < a,$$

$$k=4: a > \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

$$k=5: a > \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

**Bemerkung:** Fünf Teilnehmer unserer Mannschaft haben diese Aufgabe vollständig gelöst. Zwei Teilnehmer konnten nicht alle Fälle richtig begründen und erhielten daher nur 5 bzw. 4 Punkte. Ein Teilnehmer hat diese Aufgabe wegen Zeitmangel nicht mehr behandelt.

4. Es seien  $M_i$  die Mittelpunkte und  $r_i$  die Radien der Kreise  $\gamma_i$  ( $i=1,2,3$ ).  $N_i$  seien die Projektionen von  $M_i$  auf  $AB$ ,  $O$  sei der Mittelpunkt von  $\gamma$  (vgl. die Abb.).

$$\text{Ferner setzen wir } \overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c,$$

$$\overline{AD} = p, \quad \overline{DB} = q = c - p, \quad \frac{a+b+c}{2} = s.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, daß  $N_2$  auf der Strecke  $AD$  liegt. Wir berechnen zunächst die Radien  $r_2$  und  $r_3$ .

Da  $N_2$  der Berührungspunkt des Kreises  $\gamma_2$  mit  $AB$  ist, gilt in dem rechtwinkligen Dreieck  $OM_2N_2$

$$\overline{N_2O} = \overline{N_2D} + \overline{DB} - \overline{OB} = r_2 + q - \frac{c}{2},$$

$$\overline{M_2N_2} = r_2$$

und, da der Kreis  $\gamma_2$  den Kreis  $\gamma$  mit dem

Radius  $\frac{c}{2}$  von innen berührt,

$$\overline{OM_2} = \frac{c}{2} - r_2,$$

also nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(r_2 + q - \frac{c}{2}\right)^2 + r_2^2 = \left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2. \text{ Daraus}$$

$$\text{folgt } (r_2 + q)^2 - cq - cr_2 + \frac{c^2}{4} + r_2^2$$

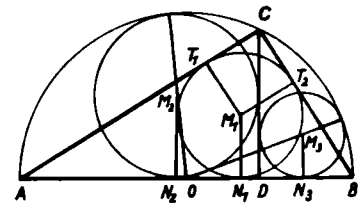
$$= \frac{c^2}{4} - cr_2 + r_2^2, \quad (r_2 + q)^2 = cq = a^2$$

und hieraus wegen  $r_2 + q > 0$ ,  $a > 0$

$$r_2 + q = a, \text{ also } r_2 = a - q. \quad (1)$$

Analog erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck  $ON_3M_3$

$$r_3 = b - p. \quad (2)$$



Nun berechnen wir den Radius  $r_1$  des Kreises  $\gamma_1$ . Bezeichnet man die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Katheten des rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  mit  $T_1$  und  $T_2$ , so ist das Viereck  $CT_1M_1T_2$  ein Quadrat. Nach einem Satz über den Abstand eines Eckpunktes eines Dreiecks von den Berührungspunkten des Inkreises gilt  $\overline{CT_1} = s - c$ , also in dem vorliegenden Fall  $r_1 = s - c$ .

Ferner erhält man wegen (1) und (2)

$$\frac{1}{2}(\overline{M_2N_2} + \overline{M_3N_3}) = \frac{1}{2}(r_2 + r_3)$$

$$= \frac{1}{2}(a - q + b - p) = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

$$= s - c = r_1 = \overline{M_1N_1}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}(\overline{BN_2} + \overline{BN_3}) = \frac{1}{2}(q + r_2 + q - r_3)$$

$$= \frac{1}{2}(2q + a - q - b + p) = \frac{1}{2}(a + c - b)$$

$$= s - b = \overline{BN_1}, \quad (4)$$

was wieder nach dem obigen Satz gilt, weil  $N_1$  der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks  $ABC$  mit der Seite  $AB$  ist.

Aus (3) und (4) folgt nun, daß  $M_1$  der Mittelpunkt der Strecke  $M_2M_3$  ist. Die drei Punkte  $M_1, M_2, M_3$  liegen also auf einer Geraden. Daher berührt die zu  $AB$  bezüglich der Geraden  $M_2M_3$  symmetrisch gelegene Gerade ebenfalls die drei Kreise  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$ , womit bewiesen ist, daß diese Kreise außer der Tangente  $AB$  noch eine zweite gemeinsame Tangente haben.

**Bemerkung:** Diese Aufgabe wurde von drei Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Allerdings gelang es den Schülern nicht, eine einfache elementargeometrische Lösung, wie sie oben gegeben wurde, zu finden; sie stützten sich auf die Koordinatengeometrie, berechneten die Koordinaten der Punkte  $M_1, M_2, M_3$  und wiesen dann nach, daß diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, ein Verfahren, das mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist.

Drei Schüler konnten die Lösung nicht vollständig angeben; sie erhielten 5 bzw. 4 Punkte. Die übrigen beiden Schüler kamen kaum über einen allgemeinen Ansatz hinaus. (2 Punkte bzw. 1 Punkt).

Es zeigte sich, daß unsere Schüler auf dem Gebiete der elementaren Geometrie noch nicht über genügend sichere Fertigkeiten verfügen. Es ist daher notwendig,

auch den Problemen der Elementargeometrie in den mathematischen Zirkeln und Arbeitsgemeinschaften mehr Aufmerksamkeit zu widmen.

5. Wir geben hier die Lösung von Wolfgang Burmeister mit geringfügigen Veränderungen und Ergänzungen wieder.

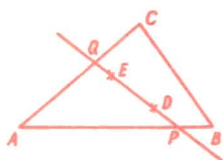
Es wird zunächst der Fall  $n=5$  untersucht.

Hierbei sind genau drei Unterfälle möglich:

1. Die fünf Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Fünfecks. Dann ist die Behauptung bereits bewiesen, da beliebige vier von diesen fünf Punkten ein konvexes Viereck bilden.

2. Vier der fünf Punkte sind Eckpunkte eines konvexen Vierecks, in dessen Innern der fünfte Punkt liegt. Auch in diesem Falle trifft die Behauptung zu.

3. Drei Punkte  $A, B, C$  bilden ein Dreieck, in dessen Innern die übrigen beiden Punkte  $D$  und  $E$  liegen (vgl. die Abb.).



Die Gerade  $DE$  hat dann mit zwei Seiten des Dreiecks  $ABC$  je einen inneren Punkt  $P$  bzw.  $Q$  gemeinsam; denn nach Voraussetzung kann  $DE$  nicht durch einen der Eckpunkte des Dreiecks  $ABC$  gehen.

O.B.d.A. können wir annehmen, daß  $P$  auf  $AB$  und  $Q$  auf  $AC$  liegt. Dann ist aber das Viereck  $BCED$  ein konvexes Viereck, da die beiden Diagonalen  $BE$  und  $CD$  im Innern dieses Vierecks liegen. Zu fünf beliebigen Punkten einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, gibt es also wenigstens ein konvexes Viereck, dessen Eckpunkte unter den gegebenen Punkten vorkommen.

Sind nun  $n$  Punkte mit  $n > 4$  gegeben, so kann man aus ihnen  $\binom{n}{5}$  verschiedene Teilmengen von je 5 Punkten bilden. In jeder dieser Teilmengen gibt es aber, wie oben bewiesen wurde, vier Punkte, die ein konvexes Viereck bilden. Andererseits kann ein solches Viereck höchstens zu  $n-4$  dieser Teilmengen von je 5 Punkten gehören. Die Gesamtzahl aller dieser konvexen Vierecke ist daher größer oder gleich

$$f(n) = \frac{1}{n-4} \binom{n}{5}. \quad (1)$$

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß für alle  $n$ , die größer als 4 sind,

$$f(n) = \frac{1}{n-4} \binom{n}{5} \geq g(n) = \binom{n-3}{2}. \quad (2)$$

Zunächst erhalten wir  $f(5) = g(5)$  und

$f(6) = g(6)$ . Für  $n \geq 7$  gilt

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2}{120 \cdot (n-3)(n-4)} = \frac{n(n+1)+6}{60}$$

$$+ \frac{2}{5(n-4)} > \frac{n(n+1)+6}{60} \geq \frac{62}{60} > 1,$$

also  $f(n) > g(n)$ .

Damit ist bewiesen, daß man wenigstens  $\binom{n-3}{2}$  konvexe Vierecke finden kann, deren

Eckpunkte unter den gegebenen  $n$  Punkten vorkommen.

Wegen  $f(n) > g(n)$  für  $n > 6$  stellt die Gleichung (1) sogar eine Verschärfung der zu beweisenden Behauptung dar, d. h., es gibt sogar mindestens  $\frac{1}{n-4} \binom{n}{5}$  konvexe Vierecke.

**Bemerkung:** Diese geometrisch-kombinatorische Aufgabe wurde von fünf Schülern unserer Mannschaft vollständig gelöst. Zwei von diesen Schülern gelang der Nachweis einer Verschärfung der zu beweisenden Relation; man kann nämlich sogar, wie oben gezeigt wurde, mindestens  $\frac{1}{n-4} \binom{n}{5}$  konvexe Vierecke der geforderten Eigenschaft finden. Für diese Erkenntnis erhielten sie, wie auch einige andere Teilnehmer der Olympiade, eine besondere Anerkennung für die gute Lösung einer Aufgabe.

Die drei anderen Schüler erhielten nur 5 bzw. 4 Punkte, da die Beweisführung im Falle  $n > 5$  nicht vollständig war bzw. fehlte.

6. Setzt man  $D_1 = x_1 y_1 - z_1^2 > 0$ ,

$D_2 = x_2 y_2 - z_2^2 > 0$ , so erhält man

$$x_1 y_1 = D_1 + z_1^2, \quad x_2 y_2 = D_2 + z_2^2.$$

Für den Nenner der linken Seite der behaupteten Ungleichung (s. Heft 5, S. 100) ergibt sich dann die Abschätzung

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \quad (1)$$

$$= D_1 + D_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2 z_1 z_2$$

$$= D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2} x_2 y_2 + \frac{x_2}{x_1} x_1 y_1 - 2 z_1 z_2$$

$$= D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2} (D_2 + z_2^2) + \frac{x_2}{x_1} (D_1 + z_1^2) - 2 z_1 z_2$$

$$= D_1 + D_2 + \left( \frac{x_1}{x_2} D_2 + \frac{x_2}{x_1} D_1 - 2 \sqrt{D_1 D_2} \right)$$

$$+ \left( \frac{x_1}{x_2} z_2^2 + \frac{x_2}{x_1} z_1^2 - 2 z_1 z_2 \right) + 2 \sqrt{D_1 D_2}$$

$$= (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2 + \left( \sqrt{\frac{x_1}{x_2} D_2} - \sqrt{\frac{x_2}{x_1} D_1} \right)^2$$

$$+ \left( \sqrt{\frac{x_1}{x_2} z_2} - \sqrt{\frac{x_2}{x_1} z_1} \right)^2 \geq (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2. \quad (2)$$

$$\text{Folglich gilt } \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2}$$

$$\leq \frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2}. \quad (3)$$

Ferner gilt wegen  $\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} \geq 2\sqrt{D_1 D_2}$

$$\text{und } \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \geq \frac{2}{\sqrt{D_1 D_2}}$$

$$\frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{D_1 D_2}} \leq \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) ergibt sich unmittelbar die zu beweisende Ungleichung (1).

Nun gilt das Gleichheitszeichen in (2) genau dann, wenn

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2} D_2} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1} D_1}, \text{ d. h. } x_1 \sqrt{D_2} = x_2 \sqrt{D_1}, \quad (5)$$

und wenn

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2} z_2} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1} z_1}, \text{ d. h. } x_1 z_2 = x_2 z_1. \quad (6)$$

Ferner gilt das Gleichheitszeichen in (4) genau dann, wenn

$$D_1 = D_2. \quad (7)$$

Wegen (5), (6) und (7) gilt daher das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn  $D_1 = D_2$  und  $x_1 = x_2$  und  $z_1 = z_2$ .

Das ist aber genau dann der Fall, wenn  $x_1 = x_2$  und  $y_1 = y_2$  und  $z_1 = z_2$ .

Diese Bedingungen sind daher notwendig und hinreichend für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der bewiesenen Ungleichung (1).

**Bemerkung:** Die vorliegende Aufgabe war die schwierigste unter den sechs gestellten Aufgaben. Keinem unserer Schüler gelang der vollständige Nachweis für die Richtigkeit der gegebenen Ungleichung. Es konnten nur Teilergebnisse erreicht werden, z. B. der Nachweis der Ungleichung für den Fall  $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \leq 0$ .

Zwei Schüler erhielten je 5 Punkte, zwei weitere je 4 Punkte, drei Schüler je 3 Punkte und ein Schüler nur 2 Punkte. Da Ungleichungen dieser Art in der Analysis gelegentlich auftreten, ist es notwendig, das Lösen auch solcher Ungleichungen, bei denen die Anwendung der bekannten Methoden nicht unmittelbar zum Ziel führt, häufiger zu üben.

## Lösungen



Fortsetzung zur Aufgabe  
von Prof. Dr. H. Sachs (4/69)

Beachten wir, daß für die in der Aufgabe genannten Figuren aufgrund von (IV)  $s=1$  gilt, so erhalten wir aus (2) sogleich die behauptete Beziehung

$$f = n + 2.$$

3. Betrachten wir zunächst den Fall  $n=0$ ; die Figur  $F$  hat dann keinen Knotenpunkt, jede ihrer  $s$  Komponenten ist eine einfach geschlossene Kurve.

**Erste Induktion** nach der Anzahl  $s$  der Komponenten:

Im Falle  $n=0$  und  $s=1$  sind die Behauptungen (A) und (B) offenbar richtig, denn dann haben wir eine einzige geschlossene Kurve, welche die Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegt. Nun nehmen wir an, die Behauptungen seien schon bewiesen für  $n=0$  und  $s=1, 2, \dots, S$  ( $S \geq 1$ ); wir wollen zeigen, daß sie dann auch für  $n=0$  und  $s=S+1$  zutreffen.  $F$  sei eine Figur mit  $n=0$  und  $s=S+1$ ;  $F$  besteht also aus  $S+1$  einfach geschlossenen,

sich gegenseitig nicht schneidenden Kurven. Unter diesen gibt es gewiß (mindestens) eine, etwa  $C$ , in deren Innerem keine weitere der Kurven liegt. Diese denken wir uns gelöscht und erhalten so eine Figur  $F'$  mit  $n=0$  und  $s=S$ , für die also nach Induktionsannahme die Behauptungen (A) und (B) gelten. Fügen wir  $C$  wieder hinzu, so wachsen  $f$  und  $s$  je um 1, während  $n$  ungeändert bleibt (nämlich  $n=0$  in beiden Fällen). Außerdem gewinnen wir eine Zweifärbung der Gebiete von  $F$  in der verlangten Art, indem wir eine solche Zweifärbung der Gebiete von  $F'$  vornehmen, die Kurve  $C$  hinzufügen und das Innere von  $C$  „umfärben“.

Der Induktionsschluß sichert nun, daß die Behauptungen (A) und (B) für jede Figur  $F$  mit  $n=0$  gelten.

4. Nachdem wir die Gültigkeit der Behauptungen für den Fall  $n=0$  gesichert haben, führen wir nun eine zweite Induktion nach der Anzahl  $n$  der Knotenpunkte (bei beliebigem  $s$ ) durch. Wir nehmen an, die Behauptungen seien schon bewiesen für  $n=0, 1, 2, \dots, N$  ( $N \geq 0$ ) und alle  $s$ ; wir wollen zeigen, daß sie dann auch für  $n=N+1$  und alle  $s$  zutreffen. Dazu nehmen wir eine Figur  $F$  mit  $n=N+1$  her, wählen einen beliebigen ihrer Knotenpunkte aus und „schneiden ihn durch“ (siehe Abb. 1).



(Diese Durchschneidung kann auf zwei verschiedene Weisen erfolgen; es ist gleichgültig, welche der beiden wir wählen.)

Man überlegt sich leicht, daß die entstandene Figur  $F''$  ebenfalls durch Zeichnen einer Anzahl geschlossener Linien erzeugt werden kann und daß sie den Bedingungen (II) und (III) genügt. Da  $F''$  genau  $N$  Knotenpunkte besitzt, gelten nach Induktionsannahme für  $F''$  die Aussagen (A) und (B). Kehren wir nun von  $F''$  zu  $F$  zurück, indem wir die Durchschneidung rückgängig machen, so ist sofort zu sehen, wie sich aus einer Zweifärbung der Gebiete von  $F''$  auch eine Zweifärbung der Gebiete von  $F$  ergibt — die Aussage (B) trifft also auch für  $F$  zu. Um zu sehen, daß auch (A) zutrifft, bezeichnen wir die zu  $F''$  gehörigen mit  $f'', n'', s''$ ; nach Induktionsannahme gilt dann

$$(3) \quad f'' = n'' + s'' + 1.$$

Nun können, wie man sich leicht klarmacht, bei der Durchschneidung des Knotenpunktes zwei Fälle auftreten:

Entweder nimmt die Anzahl der Komponenten um 1 zu; dann ändert sich die Anzahl der Gebiete nicht, und wir haben

$$(4) \quad f'' = f, \quad n'' = n - 1, \quad s'' = s + 1,$$

oder die Anzahl der Komponenten ändert sich nicht; dann vermindert sich die Anzahl der Gebiete um 1, und es gilt

$$(5) \quad f'' = f - 1, \quad n'' = n - 1, \quad s'' = s.$$

Sowohl aus (4) als auch aus (5) folgt wegen (3) die behauptete Relation

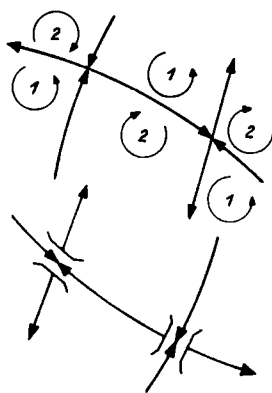
$$f = n + s + 1,$$

die Aussage (A) trifft also auch auf  $F$  zu. Induktion nach  $n$  liefert damit die Gültigkeit der Aussagen (A) und (B) für alle betrachteten Figuren  $F$ .

5. Wir wollen für die Behauptung (B) noch einen weiteren, besonders eleganten Beweis angeben. Dazu setzen wir zunächst zusätzlich voraus, daß keine Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_m$  sich selber schneiden. Dann zerlegt jede dieser Kurven  $C_\mu$  die Ebene in zwei getrennte Teile: in das Innere von  $C_\mu$  und das Äußere von  $C_\mu$ .  $G$  bezeichne ein Gebiet der Figur  $F$ , und  $\lambda(G)$  sei die Anzahl derjenigen unter den Kurven  $C_1, C_2, \dots, C_m$  die  $G$  im Innern enthalten. Dann ist klar: Beim Überschreiten einer der Kurven  $C_\mu$  (nicht gerade in einem der Knotenpunkte) ändert sich  $\lambda(G)$  genau um 1. Daraus folgt:

Geben wir allen Gebieten  $G$ , für die  $\lambda(G)$  ungerade ist, die Farbe 1, und allen Gebieten  $G'$  für die  $\lambda(G')$  gerade ist, die Farbe 2, so haben benachbarte Gebiete gewiß verschiedene Farben, und damit haben wir eine Zweifärbung der verlangten Art schon gewonnen. — Die Ausdehnung des Beweises auf den allgemeinen Fall möge dem Leser überlassen bleiben.

6. Schließlich bleibt noch die in der Aufgabe formulierte Behauptung c) zu beweisen. Dazu nehmen wir zunächst eine Zweifärbung der Gebiete gemäß (B) vor. Allen Gebieten der Farbe 1 ordnen wir nun den positiven, allen Gebieten der Farbe 2 den negativen Umlaufsinn zu; dadurch ist zugleich, wie in Abb. 2 dargestellt, jeder der Kanten eindeutig eine Richtung zugeordnet, und in einem Knotenpunkt treffen stets die beiden Spitzen oder die beiden Enden der beiden zur gleichen



Straße gehörigen Pfeile zusammen. Darauf bauen wir die Brücken so, daß eine Straße dort, wo zwei auf ihr gezeichnete Pfeilspitzen zusammentreffen, auf der Brücke verläuft, während sie dort, wo zwei auf ihr gezeichnete Pfeilenden zusammentreffen, unter der Brücke hindurchgeht (Abb. 3). Daß das so gebaute Straßensystem die in der Behauptung c) formulierten Eigenschaften hat, ist unmittel-

bar einzusehen; es wird besonders deutlich, wenn wir annehmen, daß sich die Brücken über die Ebene erheben. Die Richtung des Pfeiles stimmt dann jeweils mit der Richtung, in der die Straße ansteigt, überein.

▲ 421 Im ungünstigsten Falle werden dem Korb bei dreimaligem Hineingreifen abwechselnd je eine rote, eine grüne und eine blaue Kugel entnommen. Nachdem 27 Kugeln aus dem Korb genommen wurden, sind im ungünstigsten Falle 9 rote, 9 grüne und 9 blaue Kugeln vorhanden. Erst nachdem man dem Korb 28 Kugeln entnommen hat, erhält man mit Sicherheit 10 Kugeln der gleichen Farbe.

▲ 422 Unsere Untersuchung beschränkt sich auf die Zahlen 29, 38, 47 und 56. Die Zahl 65 scheidet bereits aus, da  $2 \cdot 65 - 20 = 110$  bereits eine dreistellige Zahl ergibt.

| $n$              | 29 | 38 | 47 | 56  |
|------------------|----|----|----|-----|
| $2 \cdot n$      | 58 | 76 | 94 | 112 |
| $2 \cdot n - 20$ | 38 | 56 | 74 | 92  |

Aus der Tabelle erkennen wir, daß es genau eine Lösung gibt; die Zahl heißt 47.

▲ 423 Aus  $19 + 4 = 23$  und  $23 - 13 = 10$  und  $10 : 2 = 5$  folgt, daß die gedachte Zahl 5 lautet. Oder: Es sei  $n$  die gedachte Zahl, dann gilt  $n \cdot 2 + 13 - 4 = 19$ ,  $n \cdot 2 + 9 = 19$ ,  $n \cdot 2 = 10$ , also  $n = 5$ .

W 5 ■ 424 Birgit sei gegenwärtig  $n$  Jahre alt; dann ist ihr Bruder Wolfram  $(n+10)$  Jahre alt.

| $n$    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $n+10$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

Aus der Tabelle erkennen wir:

Nur für die Zahlen 5 und 15 trifft der Sachverhalt der Aufgabe zu, daß Wolfram dreimal so alt wie Birgit ist. Deshalb ist Birgit gegenwärtig vier Jahre alt. In sechs Jahren ist Wolfram zweimal so alt wie Birgit.

W 5 ■ 425 Es seien  $m$  und  $n$  die beiden Summanden; die größtmöglichen Summanden und ihr Produkt sind in der nachstehenden Tabelle erfaßt.

| $m$         | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $n$         | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |
| $m \cdot n$ | 0  | 18 | 34 | 48 | 60 | 70 | 78 | 84 | 88 | 90 |

Das Produkt ist in jedem Fall eine zweistellige Zahl.

▲ 426 Es sei  $n$  die von Bernd gedachte Zahl; dabei gelte  $n=2, 3, 4, \dots, 9$ . Bernd hat folgende Rechenoperationen auszuführen:  $n \cdot 27 \cdot 37 = n \cdot 999 = 1000n - n$ .

| $n$           | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $1000n - n$   | 1998 | 2797 | 3596 | 4395 | 5194 | 5993 | 6792 | 7591 |
| letzte Ziffer | 8    | 7    | 6    | 5    | 4    | 3    | 2    | 1    |

Aus der Tabelle erkennen wir, daß die Summe aus der gedachten Zahl und der letzten Ziffer des Ergebnisses stets 10 beträgt. Also hat sich Bernd die Zahl 3 gedacht.



▲ 427 Die erste Stelle der zu ermittelnden Zahl ist offensichtlich 1, die zweite Stelle 0. Wählen wir für die verbleibenden Stellen die Ziffern 2, 3, 4 und 5, so erhalten wir die Zahl 102345. Die Quersumme dieser Zahl beträgt 15. Damit die gesuchte Zahl durch 9 teilbar ist, muß ihre Quersumme aber 18 betragen. Die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist demnach 102348.

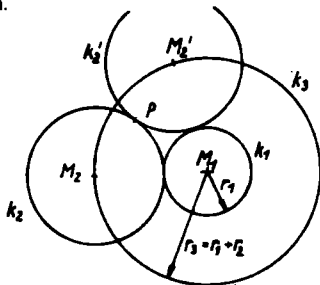
▲ 428 Aus  $120 \cdot 25 = 3000$  und  $3000 : 5 = 600$  folgt, daß bisher 600 Kannen mit einem Fassungsvermögen von je 20 Litern verwendet wurden. Die Molkerei verarbeitet demnach täglich  $600 \cdot 20$  Liter, das sind 12000 Liter Milch. Nach der Umstellung auf 25-Liter-Kannen waren nur noch 480 Kannen erforderlich, denn  $480 \cdot 25 = 12000$ .

W 6 ■ 429 Für die Seiten eines Dreiecks gilt stets  $a+b > c$ . Die möglichen Maßzahlen der Längen der Dreiecksseiten sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

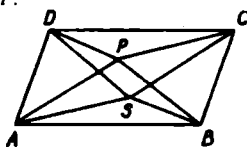
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| b | 5 | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 5 |
| c | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Es gibt also genau neun verschiedene Dreiecke mit den verlangten Eigenschaften.

W 6 ■ 430 Nachdem der Kreis  $k_1$  gezeichnet und der Punkt  $P$  festgelegt wurde, zeichnet man um  $M_1$  als Mittelpunkt einen Kreis  $k_3$  mit dem Radius  $r_3 = r_1 + r_2 = 5$  cm. Der Kreis um  $P$  mit  $r_2 = 3$  cm schneidet den Kreis  $k_3$  in den Punkten  $M_2$  und  $M_2'$ . Es gibt genau zwei Lösungen; die beiden Kreise um  $M_2$  und  $M_2'$  als Mittelpunkt mit dem Radius  $r_2 = 3$  cm erfüllen die gestellten Bedingungen.

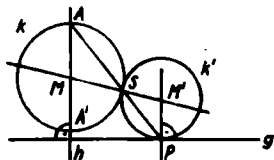


▲ 431 Das Viereck  $DSBP$  ist auf Grund der Konstruktion ein Parallelogramm, und es gilt deshalb  $\overline{SB} = \overline{DP}$ ,  $SB \parallel DP$ . Aus  $AB \parallel CD$  und  $SB \parallel DP$  folgt  $\angle SBA = \angle PDC$ . Wegen  $\overline{AB} = \overline{CD}$  und  $\overline{SB} = \overline{DP}$  und  $\angle SBA = \angle PDC$  gilt  $\triangle ABS \cong \triangle CDP$ . Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt  $\overline{AS} = \overline{CP}$  und  $\angle SAB = \angle PCD$ . Aus  $AB \parallel CD$  und  $\angle SAB = \angle PCD$  folgt  $AS \parallel CP$ .



In analoger Weise läßt sich die Parallelität der Geraden  $AP$  und  $CS$  nachweisen. Folglich ist das Viereck  $ASCP$  ein Parallelogramm.

▲ 432 Wir konstruieren die Gerade  $h$ , die durch  $M$  geht und senkrecht auf der Geraden  $g$  steht. Die Schnittpunkte der Geraden  $h$  mit dem Kreis  $k$  seien  $A$  und  $A'$ . Die Verbindungsgerade  $AP$  schneidet den Kreis  $k$  in  $S$ . Durch  $P$  zeichnen wir die Senkrechte zu  $g$ . Die Gerade  $MS$  schneidet diese Senkrechte in  $M'$ . Der Punkt  $M'$  ist Mittelpunkt des Kreises  $k'$ , sein Radius ist  $r' = \overline{PM'} = \overline{SM'}$ .



Begründung der Konstruktion:

Da das Dreieck  $AMS$  gleichschenkelig ist, gilt  $\angle SAM = \angle ASM$ . Ferner gilt  $\angle ASM = \angle PSM'$  (Scheitelwinkel) und  $\angle SAM = \angle SPM'$  (Wechselwinkel an den Parallelen  $MA$  und  $M'P$ ). Daraus folgt  $\angle PSM' = \angle SPM'$ . Also ist auch das Dreieck  $SPM'$  gleichschenkelig, und es gilt  $\overline{SM'} = \overline{PM'}$ . Der Kreis  $k$  um  $M'$  mit dem Radius  $\overline{SM'}$  geht daher durch die Punkte  $S$  und  $P$ ! Er berührt den Kreis  $k$  von außen, weil die Verbindungsgerade der Mittelpunkte  $M$  und  $M'$  durch den gemeinsamen Punkt  $S$  der Kreise  $k$  und  $k'$  geht. Er berührt ferner die Gerade  $g$  im Punkt  $P$ , weil  $PM' \perp g$  laut Konstruktion gilt.

▲ 433 Aus  $13x + 5y = 82$  folgt durch Umformung  $y = 16 - 2x - \frac{3x-2}{5}$ . Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, daß die Differenz  $3x - 2$  nach einer Belegung der Variablen  $x$  durch 5 teilbar sein soll; das trifft zu für  $x = 4, 9, 14, 19, \dots$

Nur für  $x = 4$  wird  $y$  positiv. Das Zahlenpaar  $(4, 6)$  ist das einzige, das die Bedingungen erfüllt.

W 7 ■ 434 Axel habe  $a$  Mark, Bernd  $b$  Mark gespart. Aus  $(a+b) + (a-b) = 2a$  und  $2a = 50$  folgt  $a = 25$ , das heißt, Axel hat 25 M gespart. Aus  $(a-b) + a - b = 2 \cdot (a-b)$  und  $2 \cdot (a-b) = 10$  folgt  $a - b = 5$ . Aus  $a = 25$  und  $a - b = 5$  folgt  $b = 20$ , das heißt, Bernd hat 20 M gespart. Axel hat also mehr gespart.

W 7 ■ 435 Es gilt  $\frac{2a+b}{a} = 2 + \frac{b}{a}$  und

$\frac{a+2b}{b} = 2 + \frac{a}{b}$ . Aus  $a < b$  folgt  $\frac{a}{b} < 1$  und  $\frac{b}{a} > 1$ , also  $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$  und damit auch  $2 + \frac{a}{b} < 2 + \frac{b}{a}$ .

Als Ergebnis erhalten wir  $\frac{2a+b}{a} > \frac{a+2b}{b}$ .

\* Tabelle zu ▲ 436

| Zeitpunkt                               | Lebensalter (in vollen Jahren) |                        |                        | Gleichungssystem  |
|-----------------------------------------|--------------------------------|------------------------|------------------------|-------------------|
|                                         | von A                          | von B                  | von C                  |                   |
| gegenwärtig                             | $a$                            | $b$                    | $c$                    | $a+b-3c = 0$ (1)  |
| nach $\frac{a}{2}$ Jahren               | $\frac{3}{2}a$                 | $\frac{a}{2} + b$      | $\frac{a}{2} + c$      | $2a-3b+c = 0$ (2) |
| nach $\left(\frac{a}{2} + 12\right)$ J. | $\frac{3}{2}a + 12$            | $\frac{a}{2} + b + 12$ | $\frac{a}{2} + c + 12$ | $2a-b-c = 24$ (3) |

▲ 436 A sei gegenwärtig  $a$  Jahre, B sei  $b$  Jahre und C sei  $c$  Jahre alt; die in der Aufgabe formulierten Angaben sind wie folgt in einer Tabelle (unten) zusammengestellt:

$$\begin{aligned} \text{Man erhält aus (1) } 2a+2b-6c &= 0 & (4) \\ \text{und durch Subtraktion} & \\ \text{aus (4) und (2) } 5b-7c &= 0, & (5) \\ \text{aus (3) und (2) } 2b-2c &= 24, & (6) \\ & b-c = 12, & (7) \\ & b = 12+c & (8) \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (5)

$$60+5c-7c=0, \quad c=30,$$

und weiter aus (8) und (1)  $b=42$ ,

$$a=48.$$

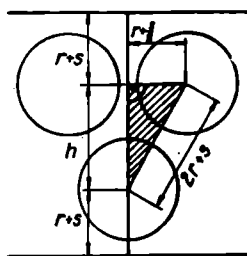
Vor  $x$  Jahren waren A  $48-x$ , B  $42-x$  und C  $30-x$  Jahre alt.

Aus  $(48-x) + (42-x) + (30-x) = 48$  folgt  $x=24$ . Vor 24 Jahren waren A 24, B 18 und C 6 Jahre alt.

▲ 437 Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt für die in der beigefügten Zeichnung angegebenen Größen  $h$ ,  $r$ ,  $s$  und  $b$ :

$$\begin{aligned} h^2 + \left(r + \frac{s}{2}\right)^2 &= (2r+s)^2, \\ h^2 + \left(r + \frac{s}{2}\right)^2 &= 4\left(r + \frac{s}{2}\right)^2, \\ h^2 &= 3\left(r + \frac{s}{2}\right)^2, \\ h &= \sqrt{3}\left(r + \frac{s}{2}\right). & (1) \end{aligned}$$

Ferner gilt  $b = 2r + 2s + h$ . (2)



Aus (1) und (2) folgt für die gesuchte Breite  $b$  des Blechstreifens

$$b = 2r + 2s + \sqrt{3}\left(r + \frac{s}{2}\right).$$

Mit  $\sqrt{3} \approx 1,732$  ergibt sich die Näherungsformel

$$b \approx 3,732r + 2,866s.$$

W 8 ■ 438 Angenommen, es existieren zwei solche Zahlen  $x$  und  $y$ . O.B.d.A. können wir  $x > y$  annehmen. Dann gilt  $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 455 = 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ .

Daraus ergeben sich nur die folgenden vier Möglichkeiten:

1.  $x - y = 1$  2.  $x - y = 5$  3.  $x - y = 7$  4.  $x - y = 13$   
 $x + y = 455$   $x + y = 91$   $x + y = 65$   $x + y = 35$   
 Denn wegen  $x - y < x + y$  kann  $x - y$  nicht gleich 35, 65, 91 oder 455 sein.  
 Durch Addition erhält man aus (1), (2), (3) und (4) die folgenden vier Lösungen:  
 $x_1 = 228$ ,  $x_2 = 48$ ,  $x_3 = 36$ ,  $x_4 = 24$ ,  
 $y_1 = 227$ ,  $y_2 = 43$ ,  $y_3 = 29$ ,  $y_4 = 11$ .  
 Für alle diese Zahlenpaare ist wegen (1), (2), (3) und (4) die Gleichung  $x^2 - y^2 = 455$  erfüllt.

#### Lösungen zu Prüfungsaufgaben aus Island:

▲ 492  $x = 1\frac{1}{5}$

▲ 493 a)  $x = 25$  b)  $x = \frac{1}{25}$

▲ 494  $0 + 3 + 6 + \dots + 93 + 96 + 99$   
 $= (0 + 99) + (3 + 96) + (6 + 99) + \dots + (48 + 51)$   
 $= 99 \cdot 17 = 1683$

▲ 495 75% von 4 ha sind 3 ha;

$\frac{11}{10}x + x + \frac{2}{5}x = 3$ ;  $x = 12$

A erhält  $1,1 \cdot 1,2$  ha = 1,32 ha,

C erhält  $0,4 \cdot 1,2$  ha = 0,48 ha, ...

B erhält 1,20 ha.

▲ 496  $V_Z = \pi \cdot 4^2 \cdot 21 \text{ cm}^3 = 336 \pi \text{ cm}^3$ ;

$V_P = \frac{3}{4} \cdot V_Z = 252 \pi \text{ cm}^3$

$\frac{1}{3} \cdot 62h = 252 \pi$ ;  $h = 21 \pi \text{ cm} \approx 66 \text{ cm}$ .

▲ 497 a)  $253,5 : 4,5 = 56\frac{1}{3}$ , d.h. 1 kg des

Waschmittels kostet 56,33 kr.

b)  $4,5 : 3 = 1,5$ ;  $4,5 + 1,5 = 6$ ; die neuen Kannen fassen 6 kg Waschmittel. Der alte Preis

für 6 kg beträgt  $6 \cdot 56\frac{1}{3} \text{ kr.} = 338 \text{ kr.}$

$x : 112 = 338 : 100$ ;  $x = 378,56$ .

Nach der Preiserhöhung mußten für eine größere Kanne 378,56 kr. bezahlt werden.

▲ 498  $(777 - 7 \cdot 7 + 7) : (77 - 7) = 10,5$  ist eine mögliche Lösung.

▲ 499 Es lassen sich 24 Zahlen bilden;

|            |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| sie lauten | 1 234 | 2 134 | 3 124 | 4 123 |
|            | 1 243 | 2 143 | 3 142 | 4 132 |
|            | 1 324 | 2 314 | 3 214 | 4 213 |
|            | 1 342 | 2 341 | 3 241 | 4 231 |
|            | 1 423 | 2 413 | 3 412 | 4 312 |
|            | 1 432 | 2 431 | 3 421 | 4 321 |

#### Lösungen zu den Prüfungsaufgaben aus Tanzania

▲ 501 a)  $h' = 13 \text{ cm}$  b)  $A = 65 \text{ cm}^2$   
 c)  $V = 400 \text{ cm}^3$

▲ 502 a)  $(x + 0,1x)^2 = z$  b)  $(a^2bc) : \sqrt{p} = t$   
 c)  $t = -45$

▲ 503 Die Zahlen lauten 40 und 41.

▲ 504 a)  $\overline{BD} = 5,6 \text{ cm}$

b)  $A_{OAD} : A_{ACD} = 5 : 4$ ;  $A_{ACD} : A_{ACN} = 1 : 1$ ;  
 $A_{AOB} : A_{COD} = 25 : 18$

#### ▲ 505 56 Sitzplätze

▲ 506 a) Die mit Hilfe der Karte ermittelte Entfernung  $\overline{AB}$  ist um rund 23 Yards länger als die wirkliche Entfernung.

b) Der Flächeninhalt beträgt in Wirklichkeit 259 ha; aus den Ablesungen der Karte ergibt sich eine Fläche von 266 ha.

#### Lösungen zu „Matt in zwei Zügen“

Jede beider Aufgaben hat eine Lösung:

Aufgabe 1:

|        | Weiß                                      | Schwarz                                            |
|--------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1. Zug | Dg7–g3                                    | a) Kd2 : c1<br>oder f6–f5<br>b) e3–e2<br>c) Kd2–e2 |
| 2. Zug | a) Dg3–e1 ≠<br>b) Dg3–f4 ≠<br>c) Dg3–g2 ≠ |                                                    |

Aufgabe 2:

|        | Weiß                         | Schwarz                            |
|--------|------------------------------|------------------------------------|
| 1. Zug | Sg6–e7                       | a) c6–c5<br>b) d7–d6<br>oder d7–d5 |
| 2. Zug | a) Da5–a1 ≠<br>b) Se7 : c6 ≠ |                                    |

#### Mitarbeiter gesucht

Wer sendet uns: Aufgaben (mit Lösungen) für den *alpha*-Wettbewerb, Berichte über die Arbeit in den Arbeitsgemeinschaften, Beiträge für *alpha*-heiter, lustige Begebenheiten aus Unterricht und Mathematik-Zirkel?

Redaktion *alpha*

#### Lösungen zu alpha-heiter

#### Nicht im Netz verfitzen

**Beweis:** Gerade benachbarte Paare von Quadraten auf einem Schachbrett sind entweder beide weiß oder beide schwarz. Wir nehmen an, daß die von uns ausgezeichneten Quadrate beide schwarz sind. Dann läuft die gestellte Aufgabe darauf hinaus, mit 31 Dominosteinen 32 weiße und 30 schwarze Felder des Schachbretts abzudecken. Da man mit jedem Dominostein jedoch immer nur ein weißes und ein schwarzes Quadrat zugleich abdecken kann, gibt es für die gestellte Aufgabe keine Lösung.

Jedes rechteckige Netz von Quadraten läßt sich mit einer schachbrettartigen Musterung versehen. Gemäß den getroffenen Voraussetzungen hat das aus den  $mn$  Quadraten bestehende Netz  $\frac{mn}{2}$  weiße und ebensoviel

schwarze Felder. Da ein Paar von gerade benachbarten Quadraten stets zur gleichen Gruppe gehören und man mit jeder Rechtecktafel nur zwei Quadrate aus verschiedenen Gruppen abdecken kann, ist unsere Behauptung bewiesen.

#### Rätselreien

Klavier, Übermacht, Umkreisung, Sachte! Vierlinge, Kreisel

#### Doppelbedeutung

Delta, Operation, Drehung, Element, Kegel, Achse, Ebene, Doppelbruch, Endlich, Rechenstab — DODEKAEDER

#### Wer sucht mit?

a) Ist die kleinere Zahl durch 6, die größere durch 7 teilbar, so sieht man gleich, daß 600 und 700 ein solches Zahlenpaar ist und weiter, daß die beiden Zahlen um ein gemeinsames Vielfaches von 6 und 7, d.h. um 42 größer oder kleiner sein können, also z. B. 642 und 742 — dies ist das Zahlenpaar, das eine Lösung der Aufgabe darstellt (oder 558 und 658 usw.).

b) Wenn aber die kleinere Zahl durch 7, die größere durch 6 teilbar sein soll, so findet man nach ein wenig Nachdenken, daß  $602 = 7 \cdot 86$  und  $702 = 6 \cdot 117$  die gesuchten Zahlen sind. 644 und 744 sind den unter a) genannten Zahlenpaaren am nächsten.

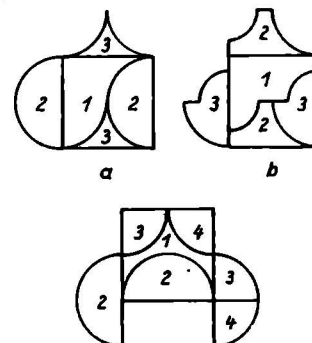
Also verkehren auf den Straßen von Lvov Wagenpaare, die ein arithmetisches Geheimnis in sich tragen.

Prof. N. Tschajkovskyj

#### Kreuzzahlenrätsel



#### Denksport

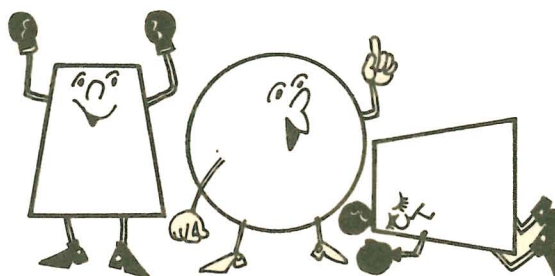


#### Zahlenrätsel

$$\begin{array}{r} 378 : 9 = 42 \\ : : : \\ 18 : 3 = 6 \\ 21 : 3 = 7 \end{array}$$

# In freien Stunden **alpha** heiter

... 8 — 9 — 10 ... aus!  
OL H. Pätzold, Waren/Müritz



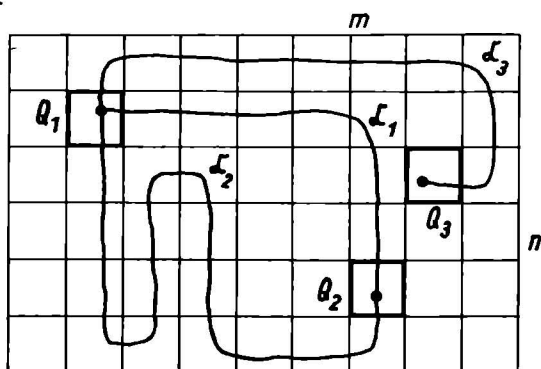
## Nicht im Netz verfristen!

Gegeben ist ein rechteckiges Netz von  $mn$  Quadraten. Dabei soll wenigstens eine der beiden Zahlen  $m, n$  gerade sein.

Wir bezeichnen zwei Quadrate des Netzes als unmittelbar benachbart, wenn sie genau eine Quadratseite gemeinsam haben. Ferner heißen zwei Quadrate des Netzes gerade benachbart, wenn sich von einem Punkt aus dem Inneren des einen Quadrates zu einem inneren Punkt des anderen Quadrates eine Verbindungslinie ziehen läßt, die eine gerade Zahl von Quadratseiten des Netzes schneidet. (Die Verbindungslinie soll keine Knotenpunkte des Netzes treffen.)

Außerdem stehen  $\frac{mn}{2} - 1$  kongruente rechteckige

Täfelchen von der Art zur Verfügung, daß man mit jedem dieser Täfelchen genau zwei unmittelbar benachbarte Quadrate des Netzes ganz überdecken kann.



Die Quadrate  $Q_1$  und  $Q_2$  sind gerade benachbart.

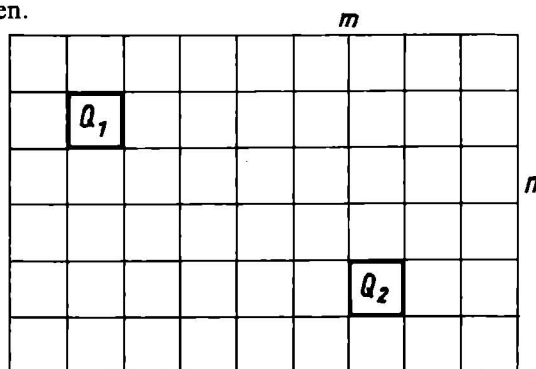
Es gilt dann die folgende *Behauptung*:

Für ein Netz von  $mn$  Quadraten ist keine Überdeckung durch  $\frac{mn}{2} - 1$  rechteckige Täfelchen mit der oben vorausgesetzten Eigenschaft in der Weise möglich, daß aus dem Netz zwei gerade benachbarte Quadrate von der Überdeckung ausgeschlossen werden.

*Anleitung*: Versuche etwa, das Spielfeld eines Schachbretts mit Hilfe von 31 Dominosteinen derart zu überdecken, daß zwei gerade benachbarte Quadrate von der Überdeckung ausgeschlossen werden. Mißerfolge

bei diesen Versuchen können auf den allgemeinen Beweisgedanken für die obige Behauptung führen.

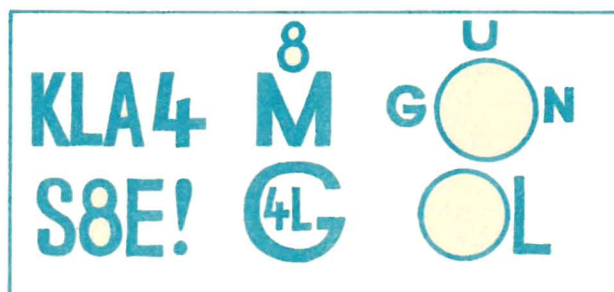
*Aufgabe*: Versuche, das vorliegende Netz von Quadraten mit 26 rechteckigen Papierstücken von 1 mal 2 cm Größe in der Weise zu überdecken, daß die Quadrate  $Q_1$  und  $Q_2$  von der Überdeckung ausgeschlossen werden.



Die Quadrate  $Q_1$  und  $Q_3$  sind nicht gerade benachbart.

Dr. E. Schröder, TH Dresden

## Rätsleien



Ing. H. Decker, Köln

## Ungerade Doppelziffern: 11 — 33 — 55 — 77 — 99

Im Leben von *Karl Friedrich Gauß* spielten Doppelziffern eine besondere Rolle!

1777 wurde *Gauß* geboren

1799 Doktorgrad erworben

1833 *Gauß* entwickelt gemeinsam mit *Weber*

den ersten elektromagnetischen Telegraphen

1855 starb *Gauß*

11 bedeutende mathematische Werke

von *Gauß* wurden veröffentlicht

OL H. Pätzold, Waren/Müritz



## Übrigens ...

muß man manchmal mehr überlegen, als man denkt  
E. Cz. (aus Eulenspiegel)

## Aus Klasse 1 berichtet

**Lehrer:** Nenne das Gesetz der Addition natürlicher Zahlen!

**Schüler:** Summand plus Summand gleich Summavit!



Zur Tg. der Math. Ges. Febr. 1969 berichtet

## Doppelbedeutung

Die Wörter der folgenden Bedeutung haben in einem anderen Sinn sämtlich etwas mit Mathematik zu tun. Ihre Anfangsbuchstaben ergeben einen geometrischen Körper.

1. Form einer Flußmündung
2. medizinischer Eingriff
3. Bewegung beim Tanzen
4. chemischer Grundstoff
5. hölzernes Zubehör für eine Sportart
6. Teil des Rades
7. Landschaftsform
8. zweifache Verletzung z. B. des Armes
9. Ausruf beim Eintreten eines langersehnten Ereignisses
10. Teil eines Gartengerätes

Zur Erleichterung geben wir die benötigten Silben an:  
ach – be – bruch – chen – del – dop – dre – e – e – end –  
gel – hung – ke – le – lich – ment – ne – o – on – pe –  
pel – ra – re – se – stab – ta – ti.

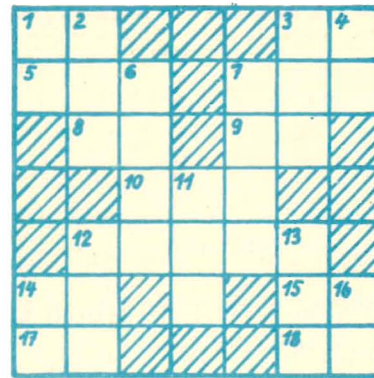
OSTR K.-H. Lehmann, V.l.d.V., Berlin

## Wer sucht mit?

In der ukrainischen Stadt Lvov verkehren neue, elegante Straßenbahnen. Jeder Zug besteht aus zwei zusammengekoppelten Wagen, die mit dreiziffrigen Zahlen numeriert sind. Die Nummer des ersten Wagens ist um 100 kleiner als die des zweiten. Einmal habe ich bemerkt, daß auf einem Wagenpaar die erste Nummer durch 6, die andere durch 7 teilbar ist. Da fiel mir eine Aufgabe ein: „Es sind alle dreiziffrigen Zahlenpaare zu finden, deren Differenz 100 beträgt und deren eine durch 6, die andere durch 7 teilbar ist. Wer sucht mit?“

Prof. Dr. N. Tschaykovskyj, Lvov

## Kreuzzahlenrätsel



**Waagerecht:**

1. Teiler von  $(10^5 - 1)$
3. Eine „vollkommene Zahl“
5. Vielfaches von 1. waagerecht
7. Produkt von 9. waagerecht und 14. senkrecht
8. Produkt von 2 Primzahlen
9. Kubikzahl
10. Vierte Potenz einer ganzen Zahl
12. Das um 1 vermehrte Produkt der ersten 6 Primzahlen
14. Quadrat der Quersumme von 8. waagerecht
15. Produkt von 2 Primzahlen
17. Teiler von  $(10^4 + 1)$
18. Teiler von  $(10^{13} - 1)$

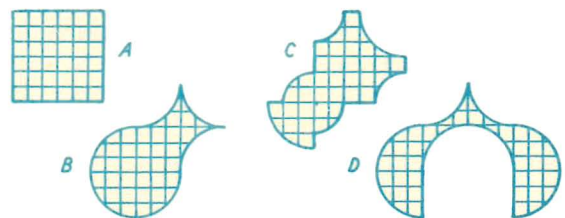
**Senkrecht:**

1. Quadrat der Quersumme von 12. waagerecht
2. Teiler von  $(10^4 - 1)$
3. Vielfaches von 9. waagerecht
4. Primzahl
6. Kleinstes gemeinsames Vielfaches der ganzen Zahlen 1 bis 10
7. Eine um 2 vermehrte Kubikzahl
11. Ein Faktor von 12. waagerecht
12. Vielfaches einer Quadratzahl
13. Teiler von  $(10^4 + 1)$
14. Primzahl
16. Teiler von 7. senkrecht (oder: Teiler von 12. waagerecht)

Mathematikfachlehrer F. Sandring, Stendal

## Denksport

Gegeben sei die Figur A. Zerlege die Figuren B, C und D durch gerade Schnitte so, daß jede dieser Figuren mit A zur Deckung gebracht werden kann!



aus: Spiele und Unterhaltungen von A. P. Dörmajd

## Zahlenrätsel

$$\begin{array}{rcl} A & C & F : G = B E \\ : & : & : \\ D & F & : A = H \\ \hline E & D & : A = C \end{array}$$

Schüler Ekkehard Skirl,  
Velten bei Berlin (Kl. 9)

# Mathematik-Kalender

## März 1970

|           |           |                                                                                                                                                                                     |
|-----------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>So</b> | <b>1</b>  |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Mo</b> | <b>2</b>  |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Di</b> | <b>3</b>  | * 1845 Georg Cantor. Wirkte in Halle. Schöpfer der Mengenlehre († 6. 1. 1918)                                                                                                       |
| <b>Mi</b> | <b>4</b>  |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Do</b> | <b>5</b>  | † 1827 Piere Simon Laplace. Lehrte an der Militär-Akademie in Paris (* 28. 3. 1749)                                                                                                 |
| <b>Fr</b> | <b>6</b>  |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Sa</b> | <b>7</b>  |                                                                                                                                                                                     |
| <b>So</b> | <b>8</b>  |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Mo</b> | <b>9</b>  |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Di</b> | <b>10</b> |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Mi</b> | <b>11</b> | * 1822 Joseph Bertrand. Wirkte in Paris. Bekannt hauptsächlich als Verfasser von Lehrbüchern.                                                                                       |
| <b>Do</b> | <b>12</b> |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Fr</b> | <b>13</b> | * 1879 Albert Einstein. Schöpfer der Relativitätstheorie. († 18. 4. 1955)                                                                                                           |
| <b>Sa</b> | <b>14</b> | * 1864 Josef Kürschák. Wirkte in Budapest. Arbeiten zur Variationsrechnung. Jährlich werden ihm zu Ehren Mathematikwettbewerbe für Schüler in der UVR durchgeführt. († 26. 3. 1933) |
| <b>So</b> | <b>15</b> | † 1897 Joseph James Sylvester. Wirkte u. a. in London. Bedeutende Arbeiten zur Theorie d. algebr. Gleichungen, d. Determinanten und Matrizen. (* 3. 9. 1814)                        |
| <b>Mo</b> | <b>16</b> |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Di</b> | <b>17</b> | † 1782 Daniel Bernoulli                                                                                                                                                             |
| <b>Mi</b> | <b>18</b> | * 1796 Jakob Steiner. Wirkte in Berlin. († 1. 4. 1863)                                                                                                                              |
| <b>Do</b> | <b>19</b> |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Fr</b> | <b>20</b> |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Sa</b> | <b>21</b> | * 1768 Joseph Fourier. Wirkte in Paris. Einer der Begründer der mathematischen Physik. († 16. 5. 1830)                                                                              |
| <b>So</b> | <b>22</b> | Beginn der DDR-Olympiade Mathematik. † 1953 Gustav Herglotz. Wirkte in Leipzig und Göttingen.                                                                                       |
| <b>Mo</b> | <b>23</b> | * 1882 Emmy Noether. Wirkte hauptsächlich in Göttingen. († 14. 4. 1935)                                                                                                             |
| <b>Di</b> | <b>24</b> |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Mi</b> | <b>25</b> |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Do</b> | <b>26</b> | Ende der DDR-Olympiade Mathematik.                                                                                                                                                  |
| <b>Fr</b> | <b>27</b> | * 1832 Carl Neumann. Wirkte in Leipzig. († 7. 5. 1925)                                                                                                                              |
| <b>Sa</b> | <b>28</b> | * 1749 Pierre Simon Laplace († 5. 3. 1827)                                                                                                                                          |
| <b>So</b> | <b>29</b> |                                                                                                                                                                                     |
| <b>Mo</b> | <b>30</b> | * 1892 Stefan Banach. Wirkte in Lwow. († 31. 8. 1945)<br>† 1559 Adam Ries. Deutscher Rechenmeister. (* um 1492)                                                                     |
| <b>Di</b> | <b>31</b> | * 1596 René Descartes († 11. 2. 1650)<br>† 1727 Isaac Newton (* 4. 1. 1643)                                                                                                         |

## April 1970

|           |           |                                                                                                                                                                                                                |
|-----------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Mi</b> | <b>1</b>  |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Do</b> | <b>2</b>  |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Fr</b> | <b>3</b>  | † 1900 Joseph Bertrand (* 11. 3. 1822)                                                                                                                                                                         |
| <b>Sa</b> | <b>4</b>  | † 1829 Nils Henrik Abel. Lebte in Christiana. Trotz der Kürze seiner Lebenszeit und des Ausbleibens rechtzeitiger Förderung hat er bahnbrechend gewirkt, vor allem auf dem Gebiet der Algebra. (* 25. 8. 1802) |
| <b>So</b> | <b>5</b>  |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Mo</b> | <b>6</b>  | † 1528 Albrecht Dürer (* 21. 5. 1471)                                                                                                                                                                          |
| <b>Di</b> | <b>7</b>  |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Mi</b> | <b>8</b>  |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Do</b> | <b>9</b>  | † 1869 Élie Cartan. Wirkte in Paris. Grundlegende Arbeiten zur Gruppentheorie. († 6. 5. 1951)                                                                                                                  |
| <b>Fr</b> | <b>10</b> | † 1920 Moritz Kantor. Berühmt durch seine Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik (Heidelberg) (* 23. 8. 1829)                                                                                               |
| <b>Sa</b> | <b>11</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>So</b> | <b>12</b> | † 1794 Pierre Dandelin. Wirkte in Frankreich. Beschäftigte sich mit Kegelschnitten. († 15. 2. 1847)                                                                                                            |
| <b>Mo</b> | <b>13</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Di</b> | <b>14</b> | † 1935 Emmy Noether (* 23. 3. 1882)<br>* 1629 Christian Huygens († 8. 7. 1695)                                                                                                                                 |
| <b>Mi</b> | <b>15</b> | * 1707 Leonhard Euler († 18. 9. 1783)<br>* 1452 Leonardo da Vinci († 2. 5. 1519)                                                                                                                               |
| <b>Do</b> | <b>16</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Fr</b> | <b>17</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Sa</b> | <b>18</b> | † 1955 Albert Einstein (* 14. 3. 1879)                                                                                                                                                                         |
| <b>So</b> | <b>19</b> | † 1567 Michael Stifel. Wirkte in Jena (* 1487)                                                                                                                                                                 |
| <b>Mo</b> | <b>20</b> | † 1932 Guiseppe Peano. Wirkte in Torino. Grundlegende Arbeiten zur mathematischen Logik und zur Axiomatik d. nat. Zahlen. (* 27. 8. 1858)                                                                      |
| <b>Di</b> | <b>21</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Mi</b> | <b>22</b> | * 1811 Otto Hesse († 4. 8. 1874)<br>* 1887 Harald Bohr († 22. 1. 1951)                                                                                                                                         |
| <b>Do</b> | <b>23</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Fr</b> | <b>24</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Sa</b> | <b>25</b> | * 1849 Felix Klein. Fundamentale Arbeiten in Geometrie, Algebra und Funktionentheorie<br>Konzeption über Geometrie im „Erlanger Programm“ niedergelegt. († 22. 6. 1925)                                        |
| <b>So</b> | <b>26</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Mo</b> | <b>27</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Di</b> | <b>28</b> |                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Mi</b> | <b>29</b> | * 1854 Henri Poincaré. Wirkte in Paris. Bahnbrechende Arbeiten auf versch. Gebieten der Math. († 17. 7. 1912)                                                                                                  |
| <b>Do</b> | <b>30</b> | * 1777 Carl Friedrich Gauß († 23. 2. 1855)<br>† 1957 Conrad Knopp. Verfasser zahlreicher Lehrbücher (* 22. 3. 1882)                                                                                            |

---

# Wissen, wo ...

## Eine Anleitung zum Selbststudium

---

### alpha (Zeitschrift alpha)

- 2/67 Wissen, wo (Eine Anleitung zum Selbststudium) H. Herzog/J. Lehmann  
1/68 Wissen, wo ... Inhaltsverzeichnis f. d. Jahrgang 1967  
6/68 *alpha* berichtet J. Lehmann  
5/69 An die Leser der Zeitschrift „alpha“ A. Markuschewitsch  
6/69 *alpha* berichtet J. Lehmann

### alpha-Wettbewerb

- 1/67, 4/67, 1/68 Bedingungen und Hinweise Redaktion  
6/67 Information zum *alpha*-Wettbewerb/Vorstellung der Jury  
2/68, 2/69 *alpha*-Wettbewerb 1967, 1968; Auswertung, Preisträger, Statistik Redaktion  
4/69 Pioniere des *alpha*-Wettbewerbs E. Manske  
6/69 *alpha*-Wettbewerb 1969 — Preisträger

### Ähnlichkeitslehre

- 4/67 Guter Mond, du gehst so stille ... L. Görke

### Berichte

- 1/67 Bericht über die VIII. IMO 1966 J. Lehmann  
1/67 Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten S. Günther  
1/67 Intern. Mathematikerkongreß 1966 (Moskau) D. Ziegler  
2/67 *alpha* berichtet aus aller Welt  
2/67 Mathematischer Leistungsvergleich Praha—Neubrandenburg J. Lehmann  
3/67 Mathematischer Mannschaftswettbewerb M. Mäthner/G. Schulze  
3/67 Schwankt der Fernsehturm? W. Zill  
3/67 Der Berliner Fernsehturm W. Zill  
3/67 Mathematische Wettbewerbe in England  
4/67 Auf den Spuren Roald Amundsens S. Meier  
4/67 Mathematikolympiaden in Bulgarien S. Bodurow  
5/67 Nowosibirsk W. Friedrich  
5/67 Aufgaben aus Mathematikbüchern der Estnischen SSR O. Prints  
5/67 Aus der Sowjetunion berichtet  
5/67 Erfahrungsaustausch mit sowjetischen Wissenschaftlern (Bratsk) H. Werner  
6/67 Als Diplommathematiker in Dubna G. Laßner  
6/67 Als Mathematiklehrer in Tanzania H. Büchel  
6/67 Ernährung und Leistungsfähigkeit W. Kraak  
1/68 50 Jahre Rote Armee  
1/68 Dresden in Zahlen W. Weidauer  
1/68 18. Mathematischer Jahreswettbewerb der USA 1967  
3/68 Die Aufgabenkommission d. Zentralen Komitees f. die OJM der DDR H. Karl  
3/68 Junge Mathematiker erlebten Jahrestag in Rostock H. Titze

- 6/68 Grüße aus der Demokratischen Republik Vietnam Nguyen lam Son/H. Tang  
6/68 Allunions-Fernolympiade R. Lüders/J. Lehmann  
1/69 Messegold für Präzisionsreißzeuge A. Hanisch  
2/69 Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon, Dresden-Zwinger H. Grötzsch  
3/69 Ulrich Zählle berichtet U. Zählle  
3/69 *alpha* berichtet aus aller Welt  
3/69 Mathematische Modelle aus der DDR W. Glaß  
4/69 Aus der VAR berichtet  
4/69 Multicurve  
5/69 20 Jahre Entwicklung des Volksbildungswesens in der DDR J. Lehmann  
6/69 Prüfungsaufgaben aus Island G. O. Gestsson

### Berufe

- 3/67 Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium W. Zill  
6/67 Als Diplommathematiker in Dubna G. Laßner  
6/67 Als Mathematiklehrer in Tanzania H. Büchel  
2/68 Elektronische Datenverarbeitung — eine Perspektive  
2/68 Berufsbild: Chemieanlagenbauer mit und ohne Abitur J. Pönisch  
3/68 Berufsbild: Facharbeiter für Datenverarbeitung Ch. Papendorf  
4/68 Berufsbild: Mathematisch-technischer Assistent G. Paulin  
5/68 Berufsbild: Ingenieur für Programmierung W. Leupold  
6/68 Berufsbild: Diplom-Mathematiker (Rechentchnik und Datenverarbeitung) J. Löttsch, G. Seifert  
1/69, 2/69, 3/69, 4/69, 5/69, 6/69 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung (Teile 1 bis 6) J. Frommann  
2/69 Spezialklassen an mathematischen Fakultäten  
4/69 Vom IOM-Teilnehmer zum Doktor-Aspiranten H. Ernst  
5/69 Berufsbild: Hochbauzeichner — ein Beruf für Mädchen  
6/69 Berufsbild: Diplom-Mathematiker H. Girlich

### Beweise

- 2/67 3/67 Beweise durch vollständige Induktion (1, 2) W. Stoye  
1/69 Spiegeln, Spiegeln an der Wand W. Träger  
4/69 Mathematikprobleme — selbst gemacht Nazla

### Biographien

- 2/67 Gottfr. Wilh. Leibniz als Mathematiker (zum 250. Todestag) W. Purkert  
4/67 Leonhard Euler 1707 bis 1783 H. Bernhardt  
4/67 Gaspard Monge 1746 bis 1818 E. Schröder  
5/67 A. J. Chintschin H. Bernhardt  
5/67 Aus der Jugend A. J. Chintschins A. Artisow/Muromzewa  
1/68 Gedenktage (G. Cantor — H. A. Lorentz — D. Hilbert — E. Landau)  
4/68 August Ferdinand Möbius 1790 bis 1868 H. Wußing  
1/69 Lew Danowitsch Landau B. Zimmermann  
4/69 Evariste Galois — Mathematiker und Patriot E. Hertel/O. Stamfort  
5/69 Wir stellen vor:  
Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert J. Gronitz  
6/69 Michael Stifel J. Schwarz  
6/69 Alexander Ossipowitsch Gelfond H. Boll

### Geometrie, darstellende

- 6/67 Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen E. Schröder  
1/68 Abstand zweier Punkte im Raum E. Schröder  
2/68 Darstellung einer Ebene in zugeordneten Normalrissen E. Schröder



- 4/68 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur E. Schröder

### Geschichte der Mathematik

- 6/68 Der mathematische Wettstreit in der Antike M. Otto  
 6/68 „Mathematische Manuskripte“ von Karl Marx R. Sperl  
 1/69 Die „Mathematischen Manuskripte“ von Karl Marx Aus „Nedelja“ 10/68  
 1/69 Was bedeutet eigentlich „x“? Aus „Po sv'etu“ 11/67

### Gleichungen

- 6/69 Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen W. Träger

### Literatur

- 4/68 Formen und Formeln, Fr. v. Krbek, Eine Buchbesprechung W. Arnold  
 2/69 „Werk der Millionen“ Redaktion alpha

### Logik

- 2/68 Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage M. Rehm

### Mengenlehre

- 1/67 Mit Mengen fängt es an! (1) und Aufgaben dazu W. Walsch/H. Lohse  
 2/67 Wir operieren mit Mengen (2) W. Walsch  
 3/67 Wir untersuchen Abbildungen (3) W. Walsch  
 4/67 Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre W. Walsch  
 2/69 Zweiermengen und geordnete Paare H. Tiede

### Olympiadaufgaben

- 1/67 Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO H. Bausch  
 1/67 VI. OJM der DDR; Aufgaben d. Kreisolympiade  
 2/67 VI. OJM, Aufgaben der Bezirksolympiade  
 3/67 VI. OJM, Aufgaben der DDR-Olympiade  
 3/67 Preisträger der VI. OJM  
 4/67 Aufgaben der MO, Schulstufe 1967  
 4/67 Lösungen zur Kreisolympiade 1966  
 5/67 Mathematikolympiaden in der UdSSR, Allunionsolympiaden Tbilissi 1967 J. Petrakow  
 5/67 VI. OJM d. DDR, Lösungen zur Bezirksolympiade  
 5/67 Eine vorbildliche Jahresarbeit R. Höppner  
 6/67 Heiße Tage in Cetinje, IX. IMO 1967 H. Bausch  
 6/67 VI. OJM der DDR, Lösungen zur DDR-Olympiade  
 1/68 VII. OJM d. DDR, Aufgabe der Kreisolympiade  
 2/68 VII. OJM d. DDR, Aufgaben der Bezirksolympiade  
 3/68 Aufgaben der VII. OJM, DDR-Stufe (15./19. 4. 1968)  
 3/68 Preisträger d. VII. OJM  
 4/68 VII. OJM d. DDR, Lösungen zu den Aufgaben d. Kreisolympiade  
 5/68 Fünf 1. Preise — Drei 2. Preise, X. IMO, Preisträger  
 5/68 Aufgaben der X. IMO  
 5/68 VII. OJM d. DDR, Lösungen zu den Aufgaben d. Bezirksolympiade  
 6/68 X. IMO — Bericht — Lösungen W. Burmeister  
 6/68 Allunionsolympiade R. Lüders/J. Lehmann  
 6/68 VII. OJM d. DDR, Lösungen zu den Aufgaben d. DDR-Olympiade  
 1/69 VIII. OJM, Aufgaben d. Kreisolympiade (17./18. 12. 1968)  
 2/69 VIII. OJM d. DDR, Aufgaben d. Bezirksolympiade  
 2/69 VII. OJM d. DDR, Lösungen zu den Aufgaben d. Bezirksolympiade  
 3/69 VIII. OJM d. DDR, Aufgaben der DDR-Olympiade (28. 3. bis 1. 4. 1969)

- 3/69 Concursul de matematica, Etapa locala — 22 martie 1968  
 4/69 IX. OJM d. DDR, 1. Stufe (Schulolympiade)  
 5/69 XI. IMO, Bukarest 1969 J. Lehmann  
 5/69 Fernolympiade Mathematik, UdSSR 1968 G. Ulbricht  
 6/69 Sonderbeilage: IX. OJM d. DDR, Lösungen

### Planimetrie

- 1/68, 2/68, 3/68 Nichts Einfacheres als ein Quadrat H. Wiesemann  
 5/68 Was ist ein Viereck? L. Görke  
 6/68, 1/69, 2/69, 3/69, 5/69 Mit Zirkel und Zeichendreieck J. Lehmann  
 1/69 Spieglein, Spieglein an der Wand W. Träger  
 3/69 Mit Bleistift und Lineal E. Schröder  
 3/69 Bange machen gilt nicht! — Modell eines geom. Extremwertproblems Th. Scholl  
 5/69 Übe sinnvoll — überall! Anleitung zur Arbeit am Dreieck G. Pietzsch  
 6/69 Kleine geometrische Exkursion Th. Scholl

### Stereometrie

- 1/69 Fernsehfußball — reguläre Polyeder E. Schröder  
 1/69 Aufgaben: Fernsehfußball — reguläre Polyeder E. Schröder  
 2/69 Der Eulersche Polyedersatz H. Günther

### Ungleichungen

- 1/68 Eine schwierige Hausaufgabe R. Lüders  
 2/68 Der Lucassche Turm J. Frommann

### Unterhaltung

- 1/68 Hinter die Kulissen geschaut W. Träger  
 3/68 Wir lösen ein Zahlenrätsel Th. Scholl  
 3/68, 4/68, 5/68 Eine Knobelgeschichte 1., 2., 3. Teil W. Träger  
 4/68 Lösungen zum Zahlenrätsel v. Th. Scholl (3/68)  
 6/68 Schön ist so ein Ring(el)spiel J. Frommann  
 3/69 An welchem Wochentag wurde ich geboren? W. Unze  
 4/69 Wir stellen ein Zahlenrätsel auf W. Träger  
 6/69 Rund um das Schachbrett J. Lehmann

### Verbindung zur Praxis

- 6/69 Mathematik und Musik Ch. Lange  
 6/69 Rund um das Schachbrett K. Kannenberg/J. Lehmann  
 6/69 Mathematik-Kalender W. Heinig/J. Lehmann

### Zahlenbereiche

- 5/68 Übe sinnvoll Anleitung zum Rechnen mit gebrochenen Zahlen G. Pietzsch

### Zahlenfolgen

- 6/67 Einige Aufgaben über Folgen aus den Schriften des Altertums A. A. Kolosow  
 3/68, 4/68, 5/68, 6/68 Elementare Zahlenfolgen 1., 2., 3., 4., 5., 6. Teil H. Lohse

### Zahlentheorie

- 3/69, 4/69, 5/69, 6/69 Rechnen mit Resten 1., 2., 3., 4. Teil G. Lorenz

### Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)

- 1/67 Eine Arbeitsgemeinschaft erlebte die Deutsche Bücherei AG 29. OS Leipzig  
 5/67 Mathematischer Wettbewerb W. Werner  
 5/68 Was verbirgt sich hinter: MBZ 8? G. Horn  
 3/69 Ein Zirkelnachmittag über „18. Mathem. Jahreswettbewerb der USA“ W. Träger