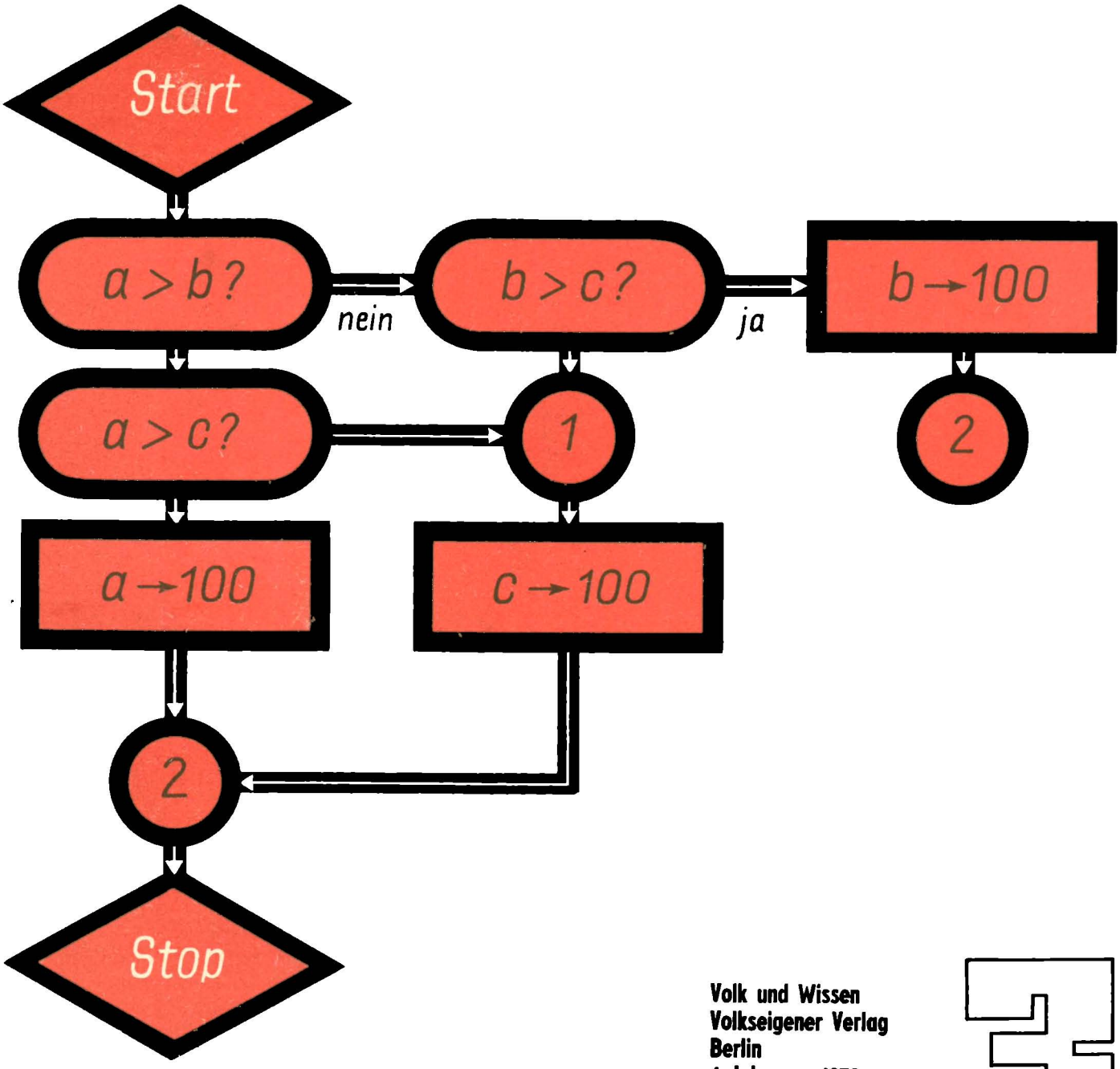
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Junge Welt, W. Schulze, Berlin (S. 49); Stat. Jahrbuch der Volksrepublik Ungarn (S. 53); J. Lehmann, Leipzig (S. 51, S. 61); Zeichnungen: E. Berger, Döbeln (S. 58/59); Technische Zeichnungen: G. Gruß (Leipzig)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 20. März 1970

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

49 Wir waren 1965 dabei (5)*
László Lóvasz/Jósef Pelikán, Lóránd-Eötvös-Universität Budapest

50 Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn (5)
Dipl.-Ing. M. Walter, Meiningen/J. Reimann, Akademie der Wissensch. Budapest

51 János Bolyai (8)
I. Reimann, Akademie der Wissensch. Budapest

52 Eine Aufgabe von Endre Hódi (10)
Ungarische Optische Werke, Budapest

52 Ich war 1961 dabei (5)
K. Zipperer, VEB Kombinat Kraftwerksanlagenbau Greifswald
Ltr. Abt. Problemanalyse und Programmierung

53 Volksrepublik Ungarn (5), Zahlen, Fakten, Statistik
Zusammenstellung: Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

54 Ornamente (6)
Dr. R. Bittner, Sektion Mathematik, Institut für Schulmathematik, Humboldt-Universität zu Berlin

56 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung Teil 9 (7)
J. Frormann, Klement-Gottwald-Schule (EOS), Berlin-Treptow

58 Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen (6)
W. Träger, Schloßberg-Oberschule, Döbeln

59 Ungarische Unterhaltungsmathematik (5)

60 IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (10)
Aufgaben der DDR-Olympiade/Bericht (22. 3. bis 26. 3. 1970)

62 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)

63 Aufgaben aus ungarischen Mathematik-Lehrbüchern (5)
Zusammenstellung: Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

64 Leseprobe aus „Mathematische Logik für Anfänger" (5)
Autor: T. Varga, Lóránd-Eötvös-Universität Budapest

65 Lösungen (5)

70 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)
Ungarischer Bilderbogen
Zusammenstellung: Studienrat J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig

72 Mathematik-Kalender Juli/August 1970 (5)
W. Heinig, Hohenstein-Ernstthal; Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

III. Umschlagseite: Ungarische Literatur in deutscher Sprache (5)
Zusammenstellung: Studienrat J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

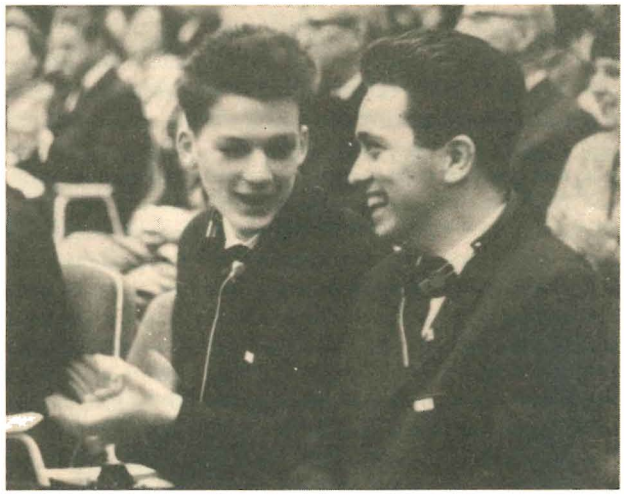
Wir waren 1965 dabei

Im Sommer 1965, als wir mit dem Expreß Budapest–Berlin zur VII. Internationalen Mathematikolympiade nach Berlin fuhren, zählten wir bereits zu den Veteranen der Mathematikolympiaden. Diese war unsere dritte. Im Zuge haben uns zahlreiche Fragen beschäftigt: Wie sieht es in der DDR aus? Wie wird die Organisation, wie das Programm, wie werden die anderen jugendlichen Teilnehmer, wie die Aufgaben sein? Und vielleicht am aufregendsten von allen Fragen: Wie werden wir abschneiden?

Auf die erste Frage erhielten wir bald eine Antwort, als der Zug in Bad Schandau das Territorium der DDR erreichte. Wir alle betrachteten die kleinen bunten Häuser jenseits der Elbe, die das ohnehin herrliche Elbtal verschönten. Bis Berlin verflog die Zeit sehr schnell. Mit S-Bahn und Bus waren wir schnell am etwa 30 km entfernten Bogensee. Hier wohnten wir während des Wettbewerbs im Internat der Jugendhochschule. An zwei aufeinanderfolgenden Tagen schrieben wir zwei Klausuren, je 3 Aufgaben waren zu lösen. Nach dem zweiten Wettbewerbstag haben wir es so empfunden, daß die Lösung der Aufgaben verhältnismäßig gut ging und konnten jetzt entspannt auf den Sportplätzen der Hochschule Fußball oder Basketball spielen. Mit afrikanischen Studenten, welche an der Hochschule studierten, haben wir spannende Tischtenniskämpfe ausgefochten.

Noch vor dem Wettbewerb hatte man für alle IMO-Teilnehmer eine Dampferfahrt auf der Spree organisiert. Berliner Schülerinnen waren unsere Reisegefährtinnen. Bald begann eine rege Unterhaltung und zum Schluß wurde Tanz daraus (man hat dabei die Verständigungsschwierigkeiten weniger empfunden). Nach dem Wettstreit besuchten wir in Potsdam die historischen Stätten Cecilienhof und Schloß Sanssouci. Am anderen Tage ging es mit dem Bus weiter. Unsere erste Station war Naumburg, wo uns der mittelalterliche Markt und der Dom sehr beeindruckt haben. Über Jena fuhren wir nach Weimar weiter. Dort besichtigten wir die Wohnhäuser von Goethe und Schiller. Sehr erschüttert hat uns der Besuch im ehemaligen Konzentrationslager Buchenwald, in dem man so viele unschuldige Menschen umgebracht hat. Nach Weimar kamen Karl-Marx-Stadt und Dresden an die Reihe. Hier haben wir einen halben Tag im Zwinger verbracht, aber wir wären gerne noch länger dort geblieben.

Nach Berlin zurückgekehrt, bereiteten wir uns mit etwas Aufregung auf die Bekanntgabe der Ergebnisse in der Kongreßhalle vor. Als wir dann erfuhren, daß wir beide einen ersten Platz belegt hatten, war die Freude um so größer (siehe Foto) und sie wuchs noch, denn mit *Endre Makai* erreichte ein weiterer Ungar ebenfalls einen 1. Platz. Außer uns belegten noch fünf sowjetische Jungen erste Plätze. Wir kehrten mit einem recht schönen Ergebnis nach Budapest zurück. Was geschah seit dieser Zeit? Im Jahre 1966 nahmen wir noch einmal an der IMO in der VR Bulgarien teil. Es gelang uns wieder, erste Plätze zu belegen. Auch das Abitur brachten wir hinter uns und wurden Studenten der Mathematischen Fakultät der Eötvös-Universität zu Budapest. Noch heute haben wir in vielen Fällen gemeinsame Interessengebiete, besonders Kombinatorik, Graphentheorie und abstrakte Algebra. Gemeinsam haben wir ein Buch für Mittelschüler über die Kombinatorik verfaßt.



Zum Abschied überreichen wir den *alpha*-Lesern eine Aufgabe aus diesem Buch:

Auf einer Insel leben 10 Indianerstämme. Jeder Stamm hat $\frac{1}{10}$ der Insel als Jagdrevier (die Jagdreviere sind freilich nicht ineinandergreifend). Durch einen glücklichen Zufall gibt es auf der Insel 10 verschiedene Schildkrötenarten, die je $\frac{1}{10}$ der Insel bevölkern, und auf der Insel gibt es überall Schildkröten. Die einzelnen Indianerstämme wollen je eine Schildkrötenart zum Totemtier wählen, und zwar jeder Stamm eine andere Art, jedoch eine solche, die in seinem Jagdrevier vorkommt.

Beweien Sie, daß dies stets möglich ist!

László Lóvasz/József Pelikán

Mathematische Schülerwettstreite in Ungarn

Der ungarische Physiker Baron *Lóránd von Eötvös* (1848 bis 1919) – Erfinder der nach ihm benannten Drehwaage, die zum Aufsuchen der Lagerstätten wichtiger Rohstoffe (Erze, Salze, Kohle, Erdöl usw.) dient – der damalige Präsident der *Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft* Ungarns – wurde 1894 zum Minister für Religions- und Unterrichtswesens ernannt. Diese Berufung des Wissenschaftlers zum Minister war der Anlaß seitens der Gesellschaft, als bleibendes Denkmal der Freude über die ihrem Präsidenten zuteil gewordene Ehrung zum ersten mathematischen Schülerwettstreit aufzurufen.

Die Gesellschaft veranstaltet seitdem jedes Jahr im Herbst für solche Schüler, die im Sommer desselben Jahres ihre Reifeprüfung ablegen, mathematische Wettstreite. In den Jahren 1919, 1920 und 1921 sowie 1944, 1945 und 1946 kam es zu keinen Wettbewerben. Nach der Befreiung Ungarns vom Faschismus wurde im Jahr 1947 die Mathematische Gesellschaft *János Bolyai* gegründet. Die Physikalische Gesellschaft trägt den Namen Baron *Lóránd von Eötvös*. Beide Institutionen sind also die Nachfolger der 1894 gegründeten Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft. Als solche setzen sie die guten Traditionen fort.

Die neugegründete Mathematische Gesellschaft begann gleich im Jahre 1947 mit neuen Wettbewerben. Ihre Organisation und Abwicklung ist keine schulische Angelegenheit, sondern Anliegen der Mathematischen Gesellschaft der VR Ungarn. Daraus folgt, daß die Mitglieder — damit insbesondere die Hochschullehrer — ständig Kontakt mit den Schulen haben, indem sie aus den Leistungen der mathematischen Talente auf die Leistungen der Schule schließen und — wenn erforderlich — die schulische Entwicklung beeinflussen können. Zu Ehren des Professors *József Kürschák* (TH Budapest), der bis zu seinem Lebensende (* 1864, † 1933) mit viel Sorgfalt und Liebe an der Entwicklung der mathematischen Schülerwettstreite mitgearbeitet hatte, tragen diese seit 1949 seinen Namen.

Die mathematische Gesellschaft tritt nicht nur als Organisator der Wettbewerbe auf, sondern schafft durch ständigen Einfluß auf die Schüler der Mittelschulen (vergleichbar unseren EOS) das ganze Jahr über ein mathematisches Klima.

Diese Einflußnahme geschieht vor allem durch die wissenschaftliche Zeitschrift *Mathematische Blätter für die Mittelschulen (Lapok)*. Sie bietet verschiedene Abhandlungen über mathematische Probleme, die zwar häufig außerhalb des Schulstoffes liegen, jedoch mit entsprechenden Schulkenntnissen verstanden und gelöst werden können. So kommt es, daß Schüler, die für Mathematik besonderes Interesse haben, durch die Zeitschrift angeregt, über ein Wissen verfügen, das sie zum guten Abschneiden bei den Schülerwettstreiten auch im internationalen Maßstab befähigt. In *Lapok* werden auch zahlreiche Aufgaben gestellt, die den einzelnen Altersstufen entsprechen. Diese sind mit Schulkenntnissen — was die Fertigkeiten betrifft — zu lösen, erfordern jedoch eine hohe Denkleistung. Außerdem gibt es Aufgaben, die eben mehr als Schulkenntnisse verlangen, z. B. Kenntnisse aus der Zahlentheorie, der Graphentheorie u. a., die aber die Schüler durch die Zeitschrift kennenlernen und womit sie sich dann beschäftigen. Die zahlreichen Einsendungen richtiger Lösungen zeugen davon, daß die Mitarbeit rege ist. Die besten Lösungen werden (mit Namensangabe) veröffentlicht. Am Ende jedes Schuljahres findet man die fleißigsten und erfolgreichsten Einsender — sie erhalten Geldprämien — abgebildet. *Lapok* leistet damit eine gründliche Vorarbeit für die Wettstreite und trägt zur mathematischen Bildung der Schüler wesentlich bei.

Ursprünglich fanden die Wettbewerbe nur für Abiturienten statt. Gegenwärtig können auf Landesebene Schüler von 13 bis 18 Jahren teilnehmen. In zwei Runden werden Klausuren geschrieben. In der ersten Runde kann man im allgemeinen aus mehreren Aufgaben auswählen. In der zweiten Runde müssen drei Aufgaben gelöst werden. Die im Jahre 1894 begonnene Wettstreitfolge hat auch weiterhin eine Runde.

Das ungarische Schulsystem ist gegenwärtig so beschaffen, daß die Talente leichter in Erscheinung treten können. Deshalb dienen die Wettstreite nicht in erster Linie der Talentsuche, sondern im Vordergrund steht ihr propagandistischer Charakter. Sie tragen wesentlich dazu bei, daß für viele Jugendliche die Mathematik nicht nur Unterrichtsfach, sondern auch Unterhaltung und Hobby ist. Beinahe jede der gestellten Aufgaben weist auf eine schöne Besonderheit der Mathematik hin. So tragen die Wettstreite auch viel dazu bei, daß die Beschäftigung mit der Mathematik für viele ein ästhetisches Erlebnis bedeutet. *I. Reiman/M. Walter*

Die gestellten Aufgaben in den vergangenen 76 Jahren geben uns ein interessantes Bild von der Entwicklung und des Umfangs der Mathematik wieder. Wir geben die Wettbewerbsaufgaben der Jahre 1894 und 1947 wieder:

1894

■ 1 ■ Ist $2x + 3y$ bei ganzzahligen Werten von x und y durch 17 ohne Rest teilbar, so ist auch $9x + 5y$ bei denselben Werten von x und y durch 17 ohne Rest teilbar. Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung!

■ 2 ■ Es sind zwei Punkte P und Q innerhalb des Kreises K gegeben. Konstruieren Sie ein dem Kreis einbeschriebenes rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete durch P und dessen andere Kathete durch Q geht! Bei welcher Lage von P und Q ist diese Aufgabe unlösbar?

■ 3 ■ Die Seiten eines Dreiecks bilden eine arithmetische Folge, deren Differenz d ist; die Fläche des Dreiecks beträgt F Flächeneinheiten.
Wie groß sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?
Welche Werte erhalten Sie, wenn $d = 1$ und $F = 6$ beträgt?

1947

fand der erste Wettbewerb nach der durch den II. Weltkrieg hervorgerufenen Zwangspause mit folgenden Aufgaben statt:

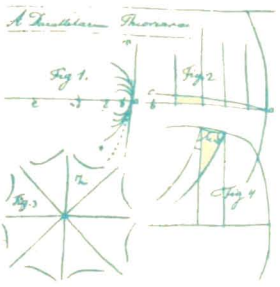
■ 1 ■ Ist n eine ungerade Zahl, so läßt sich $46^n + 296 \cdot 13^n$
durch 1947 ohne Rest teilen. Beweisen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung!

■ 2 ■ Beweisen Sie, daß es in einer sechsköpfigen Gesellschaft stets drei solche Personen gibt, die sich gegenseitig kennen, oder drei solche, die sich gegenseitig nicht kennen! (Zwei Personen A und B kennen sich gegenseitig, wenn A B kennt und B A kennt.)

■ 3 ■ Eine Kreisscheibe soll mit Hilfe anderer Kreisscheiben von halbsogroßem Durchmesser bedeckt werden. Wie läßt es sich mit möglichst wenig Scheiben durchführen?

Die Sieger des ersten mathematischen Wettstreits im Jahre 1894 waren *M. Seidner* und *P. Pap*. In der Liste der Sieger finden wir Namen bekannter Mathematiker wie *Fejér, Riesz, von Krbek, Kálmár, von Kármán, König*.

János Bolyai



Aus einer Handschrift *János Bolyais* zur Theorie der Parallelen (1820)

Man hält *János (Johann) Bolyai* bis heute für den größten ungarischen Mathematiker. Er wurde am 15. 12. 1802 in Klausenburg (heute Cluj) in Siebenbürgen geboren. Daß er Mathematiker wurde, verdankte er in erster Linie seinem Vater *Farkas (Wolfgang) Bolyai*. Dieser wurde bereits in János' ersten Lebensjahren auf das Interesse seines Sohnes für die Mathematik und auf sein ausgezeichnetes logisches Denkvermögen aufmerksam. Er war noch keine fünf Jahre alt, als er sich den Kopf darüber zerbrach, wie es möglich sei, daß die Sterne sich, von zwei verschiedenen Städten aus betrachtet, in derselben relativen Lage zueinander befinden. Er kam darauf, daß dies nur möglich sein kann, da sie sehr weit von der Erde entfernt sind. János besaß ein ausgezeichnetes Sprachgefühl und spielte virtuos Geige.

Von seinem 16. Lebensjahr an bereitete er sich an der *Technischen Militärakademie* in Wien auf seinen Beruf als Militäringenieur vor. Während seiner militärischen Ausbildung und auch danach im Dienst als Offizier fand er noch Zeit dafür, sich mit Mathematik zu beschäftigen, mit solchen Problemen, deren Lösung seit zweitausend Jahren niemand gelang. Sein Streben war nicht vergeblich. Mit einundzwanzig Jahren, am 3. November 1823, schrieb er seinem Vater den berühmt gewordenen Brief, in dem er ankündigt, daß er am Ziel angelangt sei: „Aus dem Nichts habe ich eine neue, andere Welt geschaffen."

Was ist diese neue Welt? Wenig poetisch würden wir sagen, daß die Entdeckung *Bolyais* eine neue Betrachtungsweise der Welt, eine neue Untersuchungsmethode ermöglicht. Er stellte fest, daß die Welt nicht notwendigerweise so beschaffen sein muß, wie man es bisher auf Grund der Arbeiten von *Euklid* glaubte. *Bolyais* Bedeutung in der Wissenschaftsgeschichte besteht also in erster Linie darin, daß er darauf hingewiesen hat, daß der Raum nicht notwendigerweise euklidisch sein muß. Er hat gezeigt, daß eine derart aufgebaute Geometrie genauso zur Beschreibung der uns umgebenden Welt geeignet ist wie die euklidische.

Seine Arbeiten über diese Probleme wurden erst 1831 als Anhang (Appendix) eines Mathematikbuches seines Vaters veröffentlicht. In dieser Zeit hatte *J. Bolyai* schon unter Krankheiten zu leiden. Frühzeitig pensioniert, lebte er zurückgezogen in Maros-Vásárhely bis zu seinem Tode am 27. 1. 1860.

I. Reimann

Zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie

Es ist eine vielfach zu beobachtende Erscheinung, daß ein bestimmtes Problem, um das die Gelehrten lange Zeit vergeblich gerungen haben, plötzlich von mehreren Wissenschaftlern unabhängig voneinander gelöst wird. So war es auch um die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie bestellt.

Seit dem Altertum hatten die Mathematiker erfolglos *Euklids* Parallelenpostulat, nach dem durch einen Punkt außerhalb einer Geraden nur eine Parallele zu dieser Geraden gezogen werden kann, zu beweisen versucht. Erst zu Beginn des 19. Jh. erkannte man die Unbeweisbarkeit jenes Postulates, und indem man es beiseite ließ, wurde die *nichteuklidische Geometrie* geschaffen. Diese stellt sich die Aufgabe, die Lehrsätze der gewöhnlichen euklidischen Geometrie, die sie als Spezialfall enthält, unter der Voraussetzung abzuändern, daß es durch einen Punkt zu einer vorgegebenen und diesen Punkt nicht enthaltenden Geraden unendlich viele Parallelen oder überhaupt keine parallele Gerade gibt. Daraus folgt beispielsweise, daß die Winkelsumme in einem geradlinigen Dreieck kleiner oder größer π ist (hyperbolische bzw. elliptische Geometrie). Mit jenen umwälzenden Theorien sind wesentlich die Namen von *Gauß, Bolyai, Lobatschewski* und *Riemann* verbunden.

nach Informationen aus Wi. und Fo.

Bolyai, Farkas (Wolfgang) * 9. 2. 1775, † 20. 11. 1856, ungarischer Mathematiker, Studiengenosse und Freund von *Gauß*, unternahm den Versuch, die Analysis und die Geometrie neu zu begründen. In einem Buch vertritt er eine ganz moderne Auffassung über die Begriffe: Grenzwert, Funktion, Integral und spricht — wenn auch nicht in der heutigen Form — das Prinzip der Permanenz der Grundrechnungsarten aus. In einem originellen Beitrag zur Geometrie zeigt er, daß zwei inhaltsgleiche Polygone immer in kongruente Teilpolygone zerlegt werden können.

Eine Aufgabe von Endre Hódi*

Technischer Berater
Ungarische Optische Werke, Budapest

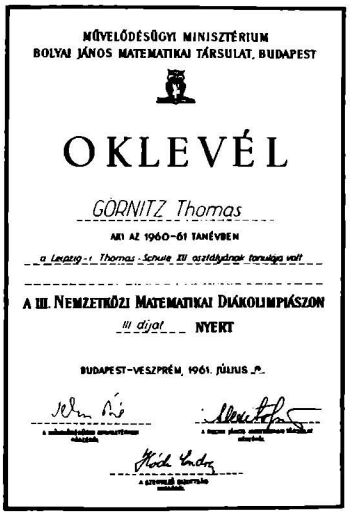
▲ 533 a) a und b sollen beliebige natürliche Zahlen bezeichnen. Beweise, daß $(a+b)^{2k}+a^{2k}+b^{2k}$ dann durch $a^2+2ab+b^2$ teilbar ist, wenn k eine nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl ist!

▲ 533 b) Beweise die Richtigkeit der Ungleichung

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$$

▲ 533 c) Bestimme im Inneren oder auf der Oberfläche von irgendeinem Würfel 3 Punkte derart, daß der kleinste ihrer Abstände voneinander möglichst groß wird. Wie groß ist dieses Maximum?

* Herr *Endre Hódi* ist seit Gründung der Internationalen Mathematikolympiaden Delegationsleiter der ungarischen Mannschaft. Er ist der einzige Wissenschaftler, der 12 Jahre hintereinander seine Mannschaft zur IMO begleitete.



MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTÉRIUM
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT, BUDAPEST

OKLEVÉL

GÖRNITZ Thomas

ARI AZ 1960–61 TANÉVBEN

a Leipzig-i Thomas-Schule III. osztályának tanulója volt

A III. NEMZETKÖZI MATEMATIKAI DIÁKOLIMPIÁSZON

III. díjat NYERT

BUDAPEST–VESZPRÉM, 1961. JÚLIUS 5-É.

Thomas Görnitz errang 1961 einen 3. Preis (Bild oben) und wurde damit zum ersten DDR-Preisträger einer Internationalen Mathematikolympiade. T. G. studierte an der Karl-Marx-Universität Leipzig *Theoretische Physik* und ist dort im Kollektiv „Theorie der Hochenergiephysik" als Wissenschaftler tätig.

Ich war 1961 dabei

Der Autor ist Mitglied des Jugend-Objektes Nord, dessen Vignette wir hier wiedergeben.

Das große Erlebnis der III. Internationalen Mathematikolympiade war eigentlich ein guter Ausgangspunkt für die Aufnahme des Studiums in der Fachrichtung Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin im September 1961. Aber Erfolge in der DDR-Mathematikolympiade und die daraus resultierenden Vorschußlorbeeren garantieren noch keine weitere erfolgreiche Entwicklung. Diese Erfahrung mußte auch ich in den ersten beiden Studienjahren sammeln. Erst mit dem Einzug zweier neuer Mitarbeiter in die Universität, dem Analogrechner Endim 2000 und dem Digitalrechner ZRA 1 änderte sich das Bild grundsätzlich. Das Fachgebiet der maschinellen Informationsverarbeitung war für mich der Ansatzpunkt für den Kampf um gute Studienergebnisse, für das Streben zur Vervollkommnung meines Wissens auf allen Gebieten.

Im Jahre 1966 schloß ich das Studium mit dem Prädikat „sehr gut" ab.

Im Rechenzentrum des VEB Kernkraftwerksbau Berlin wurde ich bei meiner Tätigkeit als Problemanalytiker mit sehr interessanten Problemen der friedlichen Nutzung der Kernenergie konfrontiert. Die rechentechnische Lösung dieser Probleme stellt durchaus ernste Anforderungen an den Mathematiker.

Zu Beginn des Jahres 1968 wurde ich zum Zentralen Jugendobjekt Kernkraftwerk Nord delegiert. Hier übernahm ich im Rahmen der kurzfristigen Einsatzvorbereitung für eine Elektronische Datenverarbeitungsanlage auf dieser Baustelle den Aufbau und die Leitung der Abteilung Problemanalyse und Programmierung. Wir sind ein sehr junges Kollektiv. Das große Vertrauen, das uns entgegengebracht wird, ist uns Ansporn im Kampf um Spitzenleistungen und d. h. für uns ganz konkret Reduzierung des Zeitaufwandes für die Einsatzvorbereitung der EDV auf ein Drittel des sonst in der DDR üblichen Durchschnittswertes. Diese Aufgabe ist für uns alle eine Bewährungsprobe, aber auch eine gute Schulung der Persönlichkeit. Ende dieses Jahres wird meine Aufgabe im Zentralen Jugendobjekt KKW-Nord erfüllt sein. In Berlin wartet eine noch verantwortungsvollere Aufgabe auf ihre Lösung, die Einsatzvorbereitung für den Großrechner des VEB Kombinat Kraftwerksanlagenbau.

Andere Probleme, wie z. B. Automatisierung der technischen Vorbereitung, werden im Mittelpunkt der Einsatzvorbereitung stehen. Eine ähnliche Leitungsaufgabe, wie hier im Zentralen Jugendobjekt ist in diesem Rahmen für meine zukünftige Tätigkeit vorgesehen. Bei allen diesen Aufgaben darf man natürlich in der persönlichen Qualifizierung nicht stehen bleiben. Der erfolgreiche Abschluß meiner außerplanmäßigen Aspirantur, in der ich einige mathematische Probleme der Regelungstheorie bearbeite, ist deshalb eines meiner Hauptziele in den nächsten Jahren.

K. Zipperer

Wir stellen vor: István Reiman

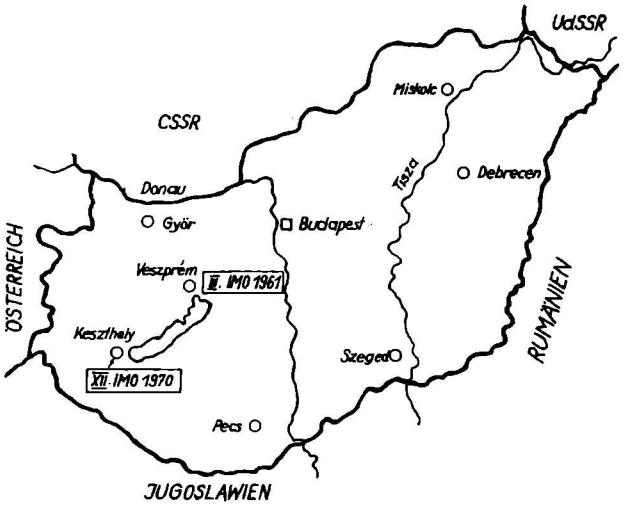
unseren langjährigen ungarischen Korrespondenten. Seit vielen Jahren betreut er die an den internationalen Mathematikolympiaden teilnehmenden ungarischen Mannschaften. Er ist als Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Akademie der Wissenschaften Budapest tätig.

Die Seiten 49 bis 54, 70/71 sowie die III. Umschlagseite wurde zu Ehren der XII. IMO (10. bis 22. 7. 1970, VR Ungarn) gestaltet.

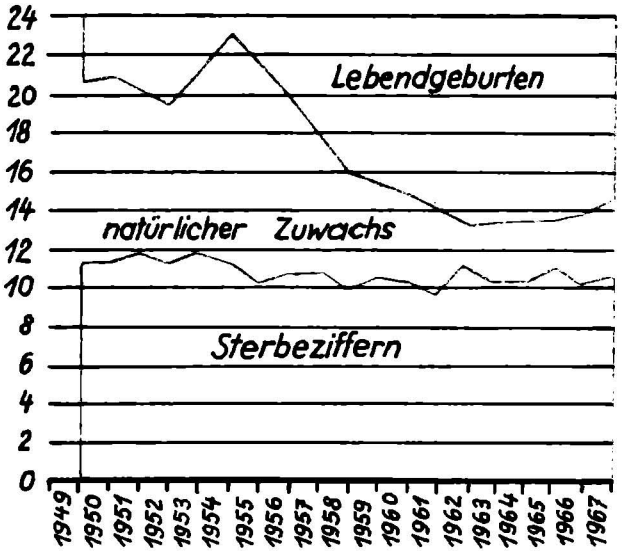
Wir danken für aktive Mitarbeit: Endre Hódi, István Reiman, László Lóvasz, Jósef Pelikán (alle Budapest), Dipl.-Ing. M. Walter (Meiningen), L. Boll (Berlin), Dr. R. Hofmann, H. Kästner, Dr. habil. G. Eisenreich, Th. Görnitz (alle Leipzig), K. Zipperer (Greifswald), Th. Scholl (Berlin)

Idee und Gestaltung: J. Lehmann (Leipzig)

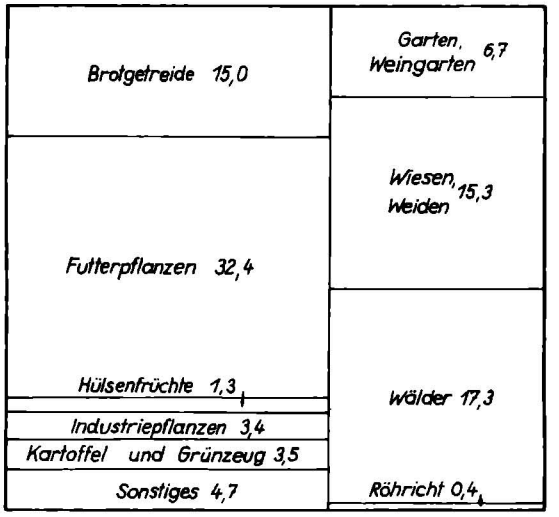
Volksrepublik Ungarn

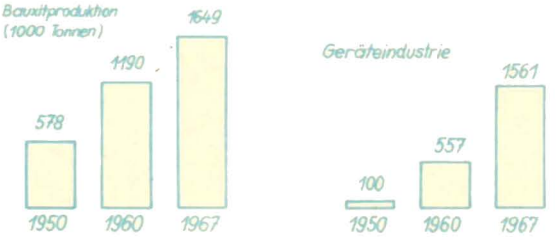


Kezthely — Austragungsort der XII. IMO (10. bis 23. 7. 1970): größter Ort am Balaton, Balatonmuseum, gotische Kirche aus d. 14. Jh., Geburtsort des Komponisten *K. Goldmark* (1830), älteste Landwirtschaftsschule Europas (1797), Landwirtschafts-Akademie (Ackerbau-Ingenieur-Ausbildung), Schloß Festeties, Barockbau mit bed. Bibliothek (40 000 Bände), 6 km von K. entfernt das bedeutendste Thermalbad Ungarns, das *Heilbad Heviz* — 35 m tiefer Quellenkrater, aus dem täglich 86 Mio Liter (28 °C bis 38 °C) Wasser (Kalk, Erde, Schwefel, Radon) in den 6 ha großen, am Boden mit Torfmoor bedeckten Teich einfließen.



Verteilung der landwirtschaftlichen Nutzfläche nach Bewirtschaftungszweigen und Pflanzengruppen



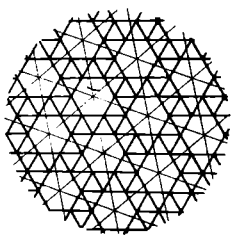


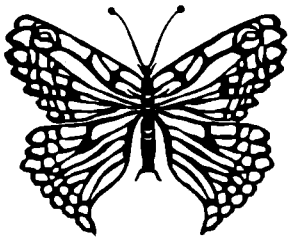
Zahlenspiegel

Fläche: 93 060 km² (1 % des Gebietes von Europa)
Bevölkerung: 10,2 Mill. Einw., pro km² 110 Einw.
Länge der Grenze: 2 242 km
Größte Breite: ost–west: 528 km, nord–süd: 268 km
Höchster Berg – Kékes: 1 015 m
Hauptstadt: Budapest: 1,99 Mill. Einwohner
Bedeutendste Außenhandelspartner: UdSSR 34,7 %, DDR 10,3 %, ČSSR 8,3 %, VR Polen 6,1 %, Westdeutschland 5,1 %, übrige Partner 35,5 %
Schulen: 5 866, Lehrkräfte: 62 340, Schüler: 1 331 100, Lehrlinge: 194 591
Balaton (Plattensee): Fläche: 591 km², Länge: 78 km, größte Breite: 15 km, durchschnittl. Tiefe: 3 m, Uferlänge: 197 km

Ornamente Teil 1

An Gebäuden, Maschinen und anderen Gegenständen sind häufig regelmäßig angebrachte Gebilde zu beobachten. Auch die Natur bringt regelmäßige Figuren hervor.

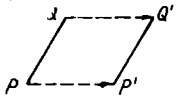




▲ A 1 a) Nenne verschiedene Gegenstände, die gewisse Regelmäßigkeiten aufweisen! Beschreibe diese Regelmäßigkeiten!
b) Nenne regelmäßige Gebilde, die die Natur geschaffen hat! Beschreibe diese Regelmäßigkeiten!
Wir wollen bestimmte Gesetzmäßigkeiten regelmäßiger Figuren untersuchen. Wir beschränken uns dabei auf ebene Figuren. Für die Untersuchung benötigen wir mathematische Begriffe, die wir zunächst erläutern werden.

Bewegungen

Jede eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich, bei der jede Bildstrecke ihrer Originalstrecke kongruent ist, nennen wir eine *Bewegung*. Ist also zum Beispiel die Strecke $\overline{P'Q'}$ das Bild einer Strecke $\overline{PQ}$ bei einer Bewegung, so sind die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ *kongruent*.



Beispiele für Bewegungen sind Verschiebungen, Drehungen um einen Punkt und Spiegelungen an einer Geraden. Diese Bewegungen nennen wir *elementare Bewegungen*.

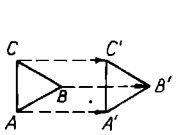


Abb. 4: Δ $A'B'C'$ ist Bild von Δ ABC bei der Verschiebung $\vec{AA'}$.

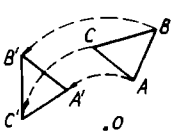


Abb. 5: Δ $A'B'C'$ ist Bild von Δ ABC bei der Drehung um O mit dem Winkel AOA'.

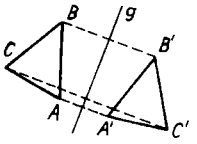


Abb. 6: Δ $A'B'C'$ ist Bild von ABC bei der Spiegelung an g.

Auch die *identische Abbildung* oder Identität, bei der jeder Punkt der Ebene in Ruhe bleibt, oder — mit anderen Worten — auf sich selbst abgebildet wird, ist eine Bewegung. Wir sagen dafür, daß bei der Indentität jeder Punkt der Ebene Fixpunkt (lat *fixus*, fest, unabänderlich) ist.

Übersicht

Eine Bewegung	ohne Fixpunkte, bei der jede Bildgerade zu ihrer Originalgeraden parallel ist	heißt	Verschiebung
Eine Bewegung	mit genau einem Fixpunkt	heißt	Drehung um einen Punkt
Eine Bewegung	deren Fixpunkte auf einer Geraden liegen	heißt	Spiegelung an einer Geraden

Bewegungen lassen sich nacheinander ausführen. Das Ergebnis der Nacheinanderausführung zweier Bewegungen ist wieder eine Bewegung.
Jede Bewegung ergibt sich durch Nacheinanderausführung elementarer Bewegungen.

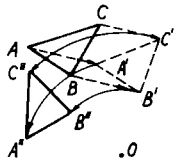


Abb. 7: Δ $A''B''C''$ ist Bild von Δ ABC bei der Bewegung, die sich aus der Verschiebung $\vec{AA'}$ und der Drehung um O mit dem Winkel $B'OB''$ zusammensetzt.

Ist das Ergebnis der Nacheinanderausführung zweier Bewegungen die Indentität, so nennen wir jede dieser Bewegungen die *Inverse* der anderen.
Bewegungen, die sich aus der Spiegelung an einer Geraden g und einer Verschiebung in Richtung von g zusammensetzen, nennen wir *Gleitspiegelungen*.

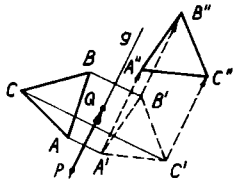


Abb. 8: Δ $A''B''C''$ ist Bild von Δ ABC bei der Gleitspiegelung mit der Spiegelachse g und der Verschiebung $\vec{PQ}$.

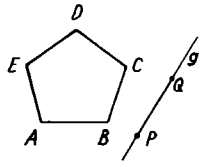
▲ A 2 a) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC! Bestimme sein Bild $A'B'C'$ bei der Verschiebung $\vec{AB}$! Bestimme das Bild des Bilddreiecks $A'B'C'$ bei derselben Verschiebung usw.!
(*Anmerkung:* Eine Verschiebung ist offenbar durch Angabe eines Punktes und dessen Bild eindeutig bestimmt.)
b) Erzeuge verschiedene Muster mit Hilfe von Verschiebungen!
c) Zeichne ein Viereck $ABCD$ und außerhalb des Vierecks einen Punkt O mit dem Drehwinkel $\alpha = 120°$!

Bestimme das Bild des Bildvierecks bei derselben Drehung usw.!

d) Erzeuge verschiedene Muster mit Hilfe von Drehungen!

e) Zeichne ein regelmäßiges Sechseck und bestimme seine Bilder bei den Spiegelungen an den Seiten des Sechsecks!

f) Zeichne ein Fünfeck und eine Gerade g entsprechend Bild 9! Wähle auf g zwei Punkte P und Q! Bestimme das Bild des Fünfecks bei der Gleitspiegelung, die sich aus der Spiegelung an g und der Verschiebung $\vec{PQ}$ zusammensetzt!



g) Überlege, ob es beim Hintereinanderausführen von Bewegungen auf die Reihenfolge des Hintereinanderausführens ankommen kann!

(*Anleitung:* Untersuche das Ergebnis des Hintereinanderausführens einer Drehung um einen Punkt und einer Spiegelung in verschiedener Reihenfolge.

Symmetrie

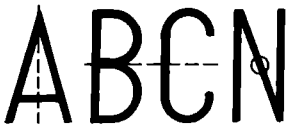
Bei einer Bewegung kann es vorkommen, daß eine Figur auf sich selbst abgebildet wird, d. h. jeder Punkt der Figur hat als Bild wieder einen (nicht notwendig denselben!) Punkt dieser Figur.

▲ A 3 a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck und bestimme sein Bild bei der Spiegelung an einer Höhe des Dreiecks!

b) Zeichne ein Parallelogramm und bestimme sein Bild bei der Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen mit dem Drehwinkel $\alpha = 180°$!

c) Stelle alle Bewegungen zusammen, bei denen ein Quadrat $ABCD$ auf sich selbst abgebildet wird!

Definition: Eine Bewegung, bei der eine Figur auf sich selbst abgebildet wird, nennen wir eine *Symmetrieoperation* dieser Figur.



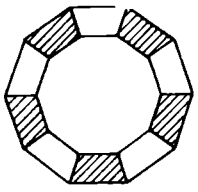
▲ A 4 a) Nenne Symmetrieoperationen für Geraden, Strahlen, Strecken und Streifen!

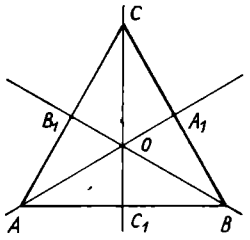
b) Nenne Symmetrieoperationen für Kreise und andere geometrische Figuren!

c) Begründe, daß jede Figur mindestens eine Symmetrieoperation besitzt!

Besitzt eine Figur Symmetrieoperationen, die von der Identität verschieden sind, so nennen wir die Figur *symmetrisch*. Eine Figur, die nur die Identität als Symmetrieoperation besitzt, heißt *asymmetrisch*.

▲ A 5 Definiere die Begriffe axialsymmetrisch bzw. zentralsymmetrische Figuren!





Beispiele für Symmetriegruppen

In den folgenden Tabellen sind alle Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks ABC angegeben (siehe Abb. rechts oben).

Symmetrieoperationen	Abkürzung	Zuordnungen
Identität	e	$A\to A;\ B\to B;\ C\to C$
Drehung um O; $\alpha = 120°$	d_1	$A\to B;\ B\to C;\ C\to A$
Drehung um O; $\alpha = 240°$	d_2	$A\to C;\ B\to A;\ C\to B$
Spiegelung an AA_1	s_1	$A\to A;\ B\to C;\ C\to B$
Spiegelung an BB_1	s_2	$A\to C;\ B\to B;\ C\to A$
Spiegelung an CC_1	s_3	$A\to B;\ B\to A;\ C\to C$

Für die Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

I. Die Nacheinanderausführung zweier Symmetrieoperationen ist eine Symmetrieoperation.

Wir führen dazu zwei Beispiele an; dabei soll z. B. die Schreibweise „s_1 o s_2" die Nacheinanderausführung (der Symmetrieoperationen s_1 und s_2 in dieser Reihenfolge) bedeuten.

Beispiel 1:

s_1	o s_2	Ergebnis
$A\to A$	$A\to C$	$A\to C$
$B\to C$	$C\to A$	$B\to A$
$C\to B$	$B\to B$	$C\to B$

Beispiel 2:

s_1	o d_1	Ergebnis
$A\to A$	$A\to B$	$A\to B$
$B\to C$	$C\to A$	$B\to A$
$C\to B$	$B\to C$	$C\to C$

Das Ergebnis im Beispiel 1 ist die Symmetrieoperation d_2. Das Ergebnis im Beispiel 2 ist die Symmetrieoperation s_3.

II. Zu jeder Symmetrieoperation gibt es die Inverse.

s_1	o s_1	e
$A\to A$	$A\to A$	$A\to A$
$B\to C$	$C\to B$	$B\to B$
$C\to B$	$B\to C$	$C\to C$

d_1	o d_2	e
$A\to B$	$B\to A$	$A\to A$
$B\to C$	$C\to B$	$B\to B$
$C\to A$	$A\to C$	$C\to C$

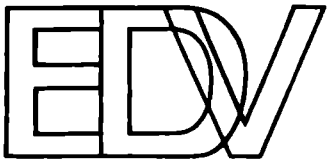
▲ A 6 Stelle in einer Tabelle alle Symmetrieoperationen für ein Quadrat zusammen! Überprüfe, ob die Eigenschaften I und II gelten!

Gewisse Symmetriegruppen der Ebene werden Ornamentgruppen genannt. Dabei unterscheidet man Rosettengruppen, Friesgruppen und Wandmustergruppen.

Mit ihnen wollen wir uns im nächsten Heft beschäftigen.

R. Bittner

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung



Teil 9

2.2. Eigenschaften der drei Grundschaltungen, Zusammenhänge und Kombinationen

Zunächst seien einige (für beliebige x_1, x_2, x geltende) Formeln kommentarlos hingeschrieben. Der Leser mache sich jede einzelne klar und überzeuge sich von der Richtigkeit, auch um dadurch mit diesen Funktionen besser vertraut zu werden.

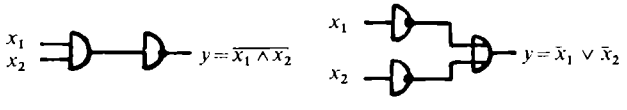
(1) $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$
(2) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
(3) $x \wedge \mathrm{O} = \mathrm{O}$
(4) $x \wedge \mathrm{L} = x$
(5) $x \vee \mathrm{O} = x$
(6) $x \vee \mathrm{L} = \mathrm{L}$
(7) $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
(8) $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$
(9) $\bar{\bar{x}} = x$
(10) $x \wedge \bar{x} = \mathrm{O}$
(11) $x \vee \bar{x} = \mathrm{L}$

(1) und (2) zeigen, daß diese Funktionen kommutativ, (7) und (8) zeigen, daß sie assoziativ sind. Diese Eigenschaften teilen sie also mit den Rechenoperationen Multiplikation und Addition. Durch (7) und (8) kommt man zur Ausdehnung der Konjunktion und Disjunktion auf mehr als zwei Eingangsgrößen.

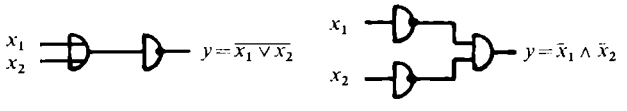
Die nächsten Formeln verlangen vom Leser etwas mehr Überlegung und werden deshalb ausführlicher erläutert:

(12) $\overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
(13) $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$.

Sie zeigen einerseits, daß man durch Kombination von Grundschaltungen neue Funktionsschaltungen definieren kann, und andererseits, daß man in manchen Fällen eine Kombinationsschaltung durch eine andere ersetzen kann, die das gleiche leistet. Wir veranschaulichen die Formel (12):



und auch die Formel (13):



In Worten: (12) Die Negation der Konjunktion zweier Schaltgrößen ist gleich der Disjunktion ihrer Negationen.
(13) Die Negation der Disjunktion zweier Schaltgrößen ist gleich der Konjunktion ihrer Negationen.

Aufgabe: Tabellieren Sie die beiden durch (12) und (13) definierten Schaltfunktionen!

Diese beiden neuen Tabellen, zusammen mit denen für die Konjunktion und die Disjunktion, drängen uns folgende Fragen auf:

1. Wieviel verschiedene Schaltfunktionen lassen sich mit zwei Eingangsgrößen überhaupt bilden?
2. Lassen sie sich *alle* aus den drei Grundbausteinen, das heißt aus UND-Glied, ODER-Glied und NEIN-Glied, durch geeignete Kombinationen darstellen?

Die erste Frage ist schnell beantwortet. Da es genau 16 verschiedene Kombinationen der Größen O und L zu je vieren gibt (von OOOO bis LLLL), existieren auch genau 16 verschiedene Schaltfunktionen dieser Art:

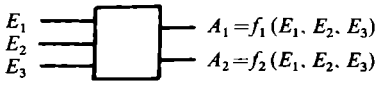
Eingänge	x_1	O	O	L	L		x_1	O	O	L	L				
	x_2	O	L	O	L		x_2	O	L	O	L				
Ausgang	y_1	O	O	O	O		y_9	L	O	O	O				
	y_2	O	O	O	L		y_{10}	L	O	O	L				
	y_3	O	O	L	O		y_{11}	L	O	L	O				
	y_4	O	O	L	L		y_{12}	L	O	L	L				
	y_5	O	L	O	O		y_{13}	L	L	O	O				
	y_6	O	L	O	L		y_{14}	L	L	O	L				
	y_7	O	L	L	O		y_{15}	L	L	L	O				
	y_8	O	L	L	L		y_{16}	L	L	L	L				

y_2 ist die Konjunktion, y_8 die Disjunktion, und aus der Lösung der letzten Aufgabe findet der Leser auch die Indizes der Funktionen (12) und (13).

Die zweite Frage kann bejaht werden. Man kommt dabei sogar mit Konjunktion und Negation beziehungsweise mit Disjunktion und Negation aus. Beispiele, wie man die Disjunktion durch die Konjunktion und umgekehrt die Konjunktion durch die Disjunktion unter Zuhilfenahme der Negation ausdrücken kann, zeigen wiederum die Beziehungen (12) und (13). Zur Übung wird empfohlen, nach Belieben verschiedene Grundschaltungen zu kombinieren und hernach

festzustellen, welche der 16 Schaltfunktionen man gefunden hat, ohne Rücksicht darauf, ob die jeweilige Funktion rechentechnisch von Bedeutung ist oder nicht.

In der Praxis werden nun häufig Schaltungen benötigt, die nicht nur mehrere Eingänge, sondern auch mehr als einen Ausgang haben. Man kann sie nicht als Funktionsschaltungen bezeichnen, da der Funktionsbegriff bekanntlich die Eindeutigkeit des Funktionswertes einschließt. Vielmehr ist ein solches System eine Vereinigung von mehreren, zum Beispiel von zwei Funktionsschaltungen. Für drei Eingänge und zwei Ausgänge sei es so symbolisiert:



Ein spezielles System dieser Art werden wir gleich kennenlernen.

2.3. Das Addierwerk

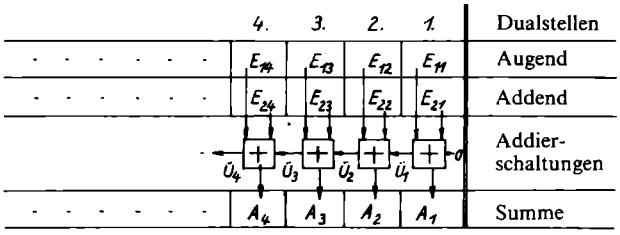
Wir wollen nun die Wirkungsweise der genannten Grundschaltungen und ihrer Kombinationen in einem Rechenautomaten näher betrachten. Natürlich kann hier nicht die Fülle sämtlicher Anwendungsmöglichkeiten besprochen werden. Wir begnügen uns mit *einem* besonders wichtigen Beispiel, nämlich einer Schaltung zur *Addition zweier Dualzahlen* in einem reinen Dualrechner. Addiert man zwei Dualzahlen ziffernweise (siehe Abschnitt 1.4.!), so muß man, um jeweils eine Ergebnisziffer zu finden, dreierlei berücksichtigen: erstens die Augendenziffer, zweitens die entsprechende Addendenziffer und drittens den Übertrag (auch O gilt als Übertrag) aus der vorherigen Dualstelle. Das sind — schalttechnisch betrachtet — drei Eingänge. Sie liefern erstens die Ergebnisziffer und zweitens den Übertrag für die nächste Dualstelle. Das sind zwei Ausgänge. Wir brauchen also gerade eine Schaltung der zuvor beschriebenen Art. Sie muß so arbeiten, wie die folgende Tabelle zeigt:

Eingänge	E_{1i}	O	O	O	O	L	L	L	L
	E_{2i}	O	O	L	L	O	O	L	L
	$Ü_{i-1}$	O	L	O	L	O	L	O	L
Ausgänge	A_i	O	L	L	O	L	O	O	L
	$Ü_i$	O	O	O	L	O	L	L	L

Hierbei bedeuten (positive ganze Dualzahlen vorausgesetzt) die Symbole:

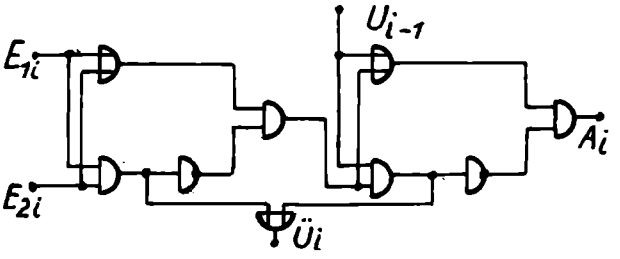
E_{1i} = Augendenziffer der i-ten Stelle
E_{2i} = Addendenziffer der i-ten Stelle
$Ü_{i-1}$ = Übertrag aus der $(i-1)$-ten Stelle
A_i = Ergebnisziffer der i-ten Stelle
$Ü_i$ = in der i-ten Stelle anfallender Übertrag, der dann in der $(i+1)$-ten Stelle als Eingang verwendet wird.

Denken wir uns die beiden zu addierenden Dualzahlen im Automaten gespeichert und bezeichnen wir die erläuterte Additionsschaltung mit ⊞, so läßt sich der Vorgang wie folgt darstellen:



Man muß sich vorstellen, daß über die Verbindungsleitungen die Impulse O bzw. L nahezu gleichzeitig laufen.* Der Rechner benötigt, wenn er elektronisch arbeitet, für die gesamte – vielleicht über zwanzig und mehr Dualstellen laufende – Rechnung nur einen mehr oder weniger kleinen Bruchteil einer Sekunde. Ein Relaisrechner arbeitet natürlich wesentlich langsamer. Man beachte noch die O als dritten Eingang des ersten Addiergliedes. Sie muß als fiktiver Übertrag, das heißt als Anfangsbedingung, mit eingegeben werden, da die Schaltung, wenn eine Eingangsstelle leer ist, nicht arbeitet.

Als letzte Aufgabe dieses Kapitels bleibt uns noch die Überlegung, wie eine solche Addierschaltung praktisch herzustellen, das heißt aus UND-Glied, ODER-Glied und NEIN-Glied aufzubauen ist. Es gibt viele Möglichkeiten, von denen hier nur eine gezeigt wird:



Sie erscheint dem Anfänger vielleicht schwierig. Man wird damit vertraut, wenn man sie in einigen oder besser in allen acht Kombinationsmöglichkeiten der drei Eingänge auf Grund der obigen Tabelle ausprobiert. Wir schließen damit das Kapitel über logistische Funktionen ab. Wer mehr darüber erfahren will, dem sei als Literatur empfohlen:

1. *Günter Schubert:* Digitale Kleinrechner,
2. *Dieter Bär:* Schaltalgebra,

beides aus der Reihe *Automatisierungstechnik* VEB Verlag Technik Berlin.

J. Frormann

* Ein Rechner der genannten Art heißt *Parallelrechner*. Ein *Serienrechner* würde die einzelnen Ziffern nacheinander abarbeiten. Er benötigt dadurch für alle Dualstellen nur *eine* Addierschaltung. Man muß dann aber eine sog. *Verzögerungsschaltung* einbauen, die jeweils den Übertrag für den nächsten (zeitlich späteren) Arbeitsschritt aufspart. Wir wollen aber darauf und erst recht auf die in der Praxis auftretenden Kombinationen von Parallel- und Serienrechnern nicht weiter eingehen.

Nomogramme ersetzen oder kontrollieren unsere Berechnungen

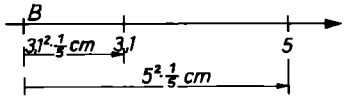
Teil 2
Wir üben das Zeichnen von Funktionsleitern

Wie das Nomogramm der Abbildung 5 bestehen alle Nomogramme, die wir kennenlernen werden, aus Funktionsleitern. Deshalb üben wir in diesem Abschnitt das Zeichnen solcher Funktionsleitern, die uns später fast alle als Teile von Nomogrammen wieder begegnen.

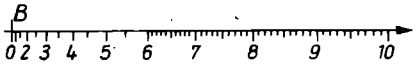
Zunächst wollen wir eine Funktionsleiter zur Funktion mit der Gleichung $y=x^2$ zeichnen. Durch diese Rechenvorschrift $y=x^2$ wird jeder reellen Zahl x ihr Quadrat $x^2=y$, also eine nichtnegative reelle Zahl zugeordnet. So gehört z. B. zu $x=3{,}1$ der y-Wert $y=3{,}1^2=9{,}61$ (Wir benutzen gegebenenfalls die Tafel der Quadratzahlen oder den Rechenstab!). Einige der durch diese Zuordnungsvorschrift bestimmten geordneten Wertepaare $(x;\ y)=(x;\ x^2)$, die in ihrer Gesamtheit die jetzt zu betrachtende Funktion bilden, sind in der folgenden Wertetabelle zusammengestellt:

x	0	1	2	3	...	3,1	...	-1	...
y	0	1	4	9		9,61		1	...

Um schließlich eine Funktionsleiter zu $y=x^2$ zu erhalten, wählen wir eine beliebige, orientierte Gerade, auf ihr einen Bezugspunkt B und als Längeneinheit 1 LE $=\frac{1}{5}$ cm.



Gemäß der Definition einer Funktionsleiter sind die Koten 5 bzw. 3,1 den Punkten der orientierten Geraden zuzuordnen, die vom Punkte B die orientierten Abstände 5^2 LE $=5^2\cdot\frac{1}{5}$ cm $=5$ cm bzw. 1 LE $=3{,}1^2\cdot\frac{1}{5}$ cm $=1{,}92$ cm besitzen. In dieser Weise entsteht die gewünschte Funktionsleiter:



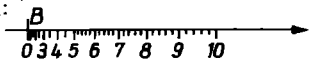
Da die Funktion $y=x^2$ keine negativen Funktionswerte annimmt (Ihr Wertebereich ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen), liegen alle Koten auf dem einen der beiden von B auslaufenden Strahlen der gewählten Geraden. Da wir von der Leitergeraden nur ein endliches Stück zeichnen können, kann diese Funktionsleiter nur für einen Teil des Definitionsbereiches dieser Funktion (Menge aller reellen Zahlen) gezeichnet werden.

Da schließlich der gleiche Funktionswert von der Funktion $y=x^2$ im allgemeinen für zwei x-Werte angenommen wird, nämlich für x und für $-x$, tragen die mit Koten versehenen Punkte außer dem mit der Kote 0 jeweils zwei Koten. Der Übersichtlichkeit wegen kann nur ein Teil der Koten markiert werden, wie wir das vom Zentimetermaß und vom Rechenstab her gewohnt sind.*

Auch auf dem Zentimetermaß und auf dem Rechenstab sind, wie wir jetzt erkennen, Funktionsleitern aufgetragen.

1. Aufgabe: Zeichne eine Funktionsleiter zu $y=x^2$ für $0\leqq x\leqq 10$ und 1 LE $=1$ mm.

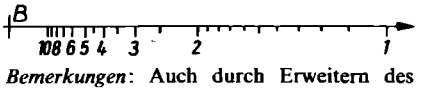
Lösung:



2. Aufgabe: Zeichne für $1\leqq x\leqq 10$ und 1 LE $=2$ dm zu $y=\frac{1}{x}$ eine Funktionsleiter!

Lösung: Eine Wertetabelle wird mittels Rechenstab oder der Tafel der reziproken Werte aufgestellt.

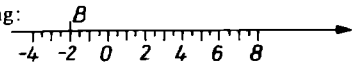
x	1	2	...	10	2,1	...
y	1	0,5	...	0,1	0,4762	...
y LE	2 dm	1 dm	...	0,2 dm	0,95 dm	...



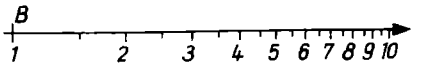
Bemerkungen: Auch durch Erweitern des Bereiches $1\leqq x\leqq 10$ kann dem Bezugspunkt B keine Kote zugeordnet werden, denn die Zahl 0 gehört nicht zum Wertebereich der Funktion $y=\frac{1}{x}$, d. h. diese Funktion nimmt den Wert $y=0$ nicht an. Alle positiven reellen Zahlen x sind als Koten den Punkten des einen der beiden von B auslaufenden Strahlen unserer Leitergeraden zugeordnet, die negativen reellen Zahlen den Punkten des anderen Strahles.

3. Aufgabe: Zeichne eine Leiter der Funktion $y=\frac{x}{2}+1$ für $-4\leqq x\leqq 8$ und 1 LE $=2$ cm!

Lösung:

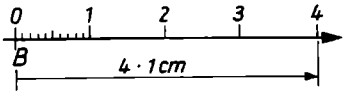


4. Aufgabe: (ab Klasse 9) Zeichne zu $y=\lg x$ für $1\leqq x\leqq 10$ und 1 LE $=2$ dm eine Funktionsleiter unter Benutzung der Tafel der Briggschen Logarithmen! Lösung:



Teil 3
Wir zeichnen weitere Nomogramme, die aus einer Funktionsleiter bzw. einer Doppelleiter bestehen.

Die Skale eines Zentimetermaßes kann aufgefaßt werden als eine Funktionsleiter der Funktion mit der Gleichung $y=x$ und der Längeneinheit 1 cm:

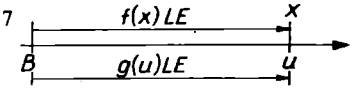


Mit dieser Interpretation besteht das Nomogramm der Abbildung 5 aus zwei Funktionsleitern, die die Leitergerade, den Bezugspunkt und die Längeneinheit gemeinsam haben. Eine solche Funktionsleiter wollen wir eine Doppelleiter nennen:

Definition: Zwei Funktionsleitern, die die orientierte Gerade, den Bezugspunkt und die Längeneinheit gemeinsam haben, heißen *Doppelleiter*. Mit jedem Nomogramm, das aus einer Doppelleiter besteht, soll analog gearbeitet werden wie mit dem der Abbildung 5:

Definition: Als *Lösung eines aus einer Doppelleiter zu den Funktionen mit den Gleichungen* $y=f(x)$ *und* $v=g(u)$ *bestehenden Nomogrammes* wird jedes geordnete Zahlenpaar $(x;\ u)$ bezeichnet, dessen Zahlen als Koten einem Punkt der Leitergeraden zugeordnet sind. Gemäß der folgenden, unter Beachtung der Definition der Funktionsleiter angefertigten Abbildung (Abb. 17) genügt jede Lösung $(x;\ u)$ eines solchen Nomogrammes der Gleichung $f(x)=g(u)$ und umgekehrt ist jedes geordnete Zahlenpaar $(x;\ u)$, das der Gleichung $f(x)=g(u)$ genügt, Lösung des zugehörigen Doppelleiternomogrammes.

Abb. 17

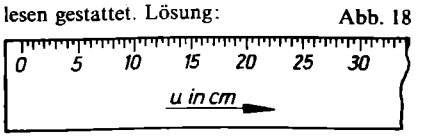


Jede Lösung des zu den Funktionen mit den Gleichungen $y=f(x)$ und $v=g(u)$ gehörigen Doppelleiternomogrammes genügt der Schlüsselgleichung $f(x)=g(u)$. Dabei wurde in naheliegender Weise festgesetzt:

Definition: Eine Formel, der alle Lösungen eines Nomogramms genügen, heißt *Schlüsselgleichung* des Nomogrammes.

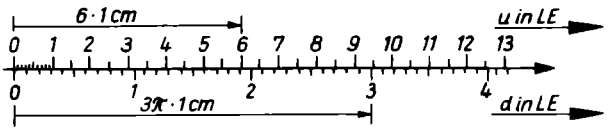
5. Aufgabe: Ein Lineal ist so zu kotieren, daß es beim Anlegen an einen Kreis gemäß Abbildung 1 den Umfang des Kreises abzulesen gestattet. Lösung:

Abb. 18



6. Aufgabe: Zur Formel $u=\pi d$ für den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser d ist ein Doppelleiternomogramm zu zeichnen.

Lösung: Mittels der naheliegenden Festsetzung $d=x$ und durch Vergleich mit der Schlüsselgleichung $f(x)=g(u)$ können die Funktionsgleichungen $y=f(x)$ und $v=g(u)$ gewählt werden zu $y=\pi x$ und $v=u$. Bei Wahl von 1 LE = 1 cm ergibt sich hiermit das folgende Nomogramm:

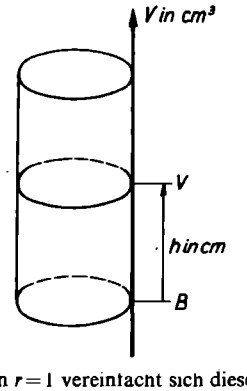


Auch Rechenprozesse nach den Formeln $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ (Volumen einer Kugel mit Radius r) und $s=\frac{g}{2}t^2$ (Weg-Zeitgesetz des freien Falles mit $g=9.81\,\frac{m}{s^2}$)

und anderen mit zwei Variablen lassen sich ersetzen durch unmittelbares Ablesen der Ergebnisse an entsprechenden Nomogrammen, die jeweils aus einer Doppelfunktionsleiter analog zu den Abb. 5 und 17 bestehen. Gemeinsam besprechen wollen wir noch das Zeichnen eines weiteren einfachen Nomogrammes, der Eichskale eines Meßzylinders:

7. Aufgabe: Ein Meßzylinder mit dem Innendurchmesser 2 cm ist mit einer Volumenskale von 0 cm³ bis 50 cm³ auszustatten. Diese Funktionsleiter ist zu zeichnen.

Lösung: Als Leitergerade wählen wir natürlich eine Mantellinie des Meßzylinders und als Bezugspunkt B den am Gefäßboden gelegenen Punkt der Leitergeraden. In der Volumenformel $V=\pi r^2 h$ sollen r und h die Maßzahlen des in cm gemessenen Radius bzw. der in cm gemessenen Höhe sein. Dann ist V die Maßzahl des in cm³ gemessenen Volumen eines Zylinders.



Wegen $r=1$ vereinfacht sich diese Formel zu $V=\pi h$.

Die V-Werte von 0 bis 50 sollen als Koten an der Funktionsleiter ablesbar sein. Also entspricht in der Definition der Funktionsleiter unser V dem x und unser h dem dortigen y. Die Gleichung $V=\pi h$ ist also nach h umzustellen:

$$h=\frac{V}{\pi}$$

Zu der durch diese Gleichung definierten Funktion ist für $0\leqq V\leqq 50$ etwa mittels Rechenstab eine Wertetabelle aufzustellen und anschließend ist für 1 LE = 1 cm die zugehörige Funktionsleiter zu zeichnen. Diese stimmt überein mit der auf dem Anlegestreifen der Abbildung 18 gezeichneten Funktionsleiter, sofern man sich diese genau bis zur Kote 50 gezeichnet denkt.

Schüler ab Klasse 9 können in analoger Weise die Eichskale eines Meßtrichters (Kegelstumpf) errechnen. *W. Träger*

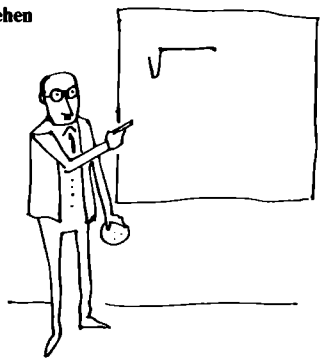
Aus drucktechnischen Gründen konnten verschiedene Abbildungen nur in einem Maßstab, der kleiner als 1 ist, gedruckt werden.

* Die nicht markierten Koten lassen sich durch Abschätzen fixieren. Ein solches Abschätzen ist nur möglich, falls die zugehörige Funktion zwei wichtige Eigenschaften besitzt: Sie muß stetig sein, d. h. einer kleinen Änderung des x-Wertes entspricht stets eine kleine Änderung des zugehörigen y-Wertes und sie muß eigentlich monoton steigend oder monoton fallend sein, d. h. zu dem größeren von zwei x-Werten gehört stets der größere oder kleinere y-Wert. Nur die zu stetigen und zumindest stückweise eigentlich monotonen Funktionen gehörigen Funktionsleitern haben praktische Bedeutung.

Ungarische Unterhaltungsmathematik

László Réber, Budapest
(aus: Hokuspokus, Eulenspiegelverlag Berlin)

Wurzelziehen



Nachdem Herr Lehrer *Göböl* der Klasse schon gründlich das Wurzelziehen beigebracht hatte, wartete er seinen Schülern mit einem Rätsel auf. Das Rätsel zeigte ein Schema des Wurzelziehens, in dem sich nur zwei Ziffern auf ihrem Platz befanden, während die übrigen durch Punkte (x) angedeutet waren.

Das Bild sah folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{l} \sqrt{\,x\,x\,x\,5\,x\,x\,} = x\,x\,x \\ \underline{\,x\,x} \\ x\,x\,5 : x\,x\cdot x \\ \,\underline{x\,x} \\ \,x\,x\,x\,x : x\,x\,x\cdot x \\ \,\underline{2\,x\,x\,x} \\ \,0 \end{array}$$

Herr Lehrer *Göböl* forderte seine Schüler auf, so an Stelle der Punkte Ziffern zu schreiben, daß auf der Tafel schließlich ein vollständiges Wurzelziehschema steht.

Auch wir wollen das tun!

Mathematical Journal for Secondary Schools

In der ungarischen Schülerzeitschrift *Lapok* werden in jedem Heft gleichlautende Aufgaben in ungarischer, russischer und englischer Sprache veröffentlicht. Hier geben wir ein Beispiel für unsere Leser (aus Heft 2/70):

● Folytassuk az alábbi táblázat mindegyik sorát mindkét irányban úgy, hogy az oszlopokban álló 3–3 szám összege továbbra is 8 legyen és négyzetösszegük köbszám legyen.

$$\begin{array}{ll} & \ldots 86,\ 26,\ 14,\ 50,\ 134,\ \ldots \\ (*) & \ldots -130,\ -18,\ -2,\ 14,\ 126,\ \ldots \\ & \ldots 52,\ 0,\ -4,\ -56,\ -252,\ \ldots \end{array}$$

● Развивать ряды таблицы (*) чтобы в каждом столбце сумма чисел 8 и сумма квадратов чисел полный куб.

● Extend every line in table (*) in both directions so that the sum of the three numbers in any column remain eight and the sum of the squares of the same numbers be a cubic number.

Ergebnis: x = 10

Aus einem ungarischen Unterhaltungsbuch haben wir folgende Aufgabe zum „Knobeln" entnommen:

$$x=\frac{6\cdot 27^{12}+2\cdot 81^{9}}{8\,000\,000^{2}}\cdot\frac{80\cdot 32^{3}\cdot 125^{4}}{9^{19}-729^{6}}$$

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

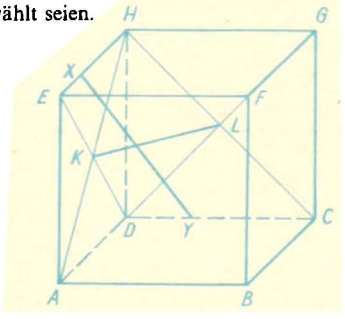
DDR-Olympiade (22. 3. bis 26. 3. 1970) Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, daß jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

2. Zu den reellen Zahlen a, b mit $a>0$, $b>0$ und $a \neq 1$, $b \neq 1$ ermittle man alle reellen Zahlen x, die die Gleichung
$(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

3. A, B, C, D, E, F, G, H seien die Ecken eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in der Abb. gewählt seien.



K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $\overline{DY} = \overline{EX}$ ist. Man beweise, daß der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.

4. Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2(x-1)+t(x+1)=0$ sind, so gilt:
$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=-1$.

5. Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks ΔABC, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von ΔABC liegen.
Beweisen Sie, daß der Mittelpunkt des Inkreises von ΔABC entweder auf k' oder auf k'' liegt!

6. Man beweise folgenden Satz:
Wenn in einer quadratischen Gleichung
(1) $\quad ax^2+bx+c=0$
die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung (1) keine rationale Lösung.

Olympiadeklasse 11/12

1. An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.
Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.
Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.
Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

2. Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks ΔABC möglichst klein ist.

3. Es ist zu beweisen, daß für jedes ganzzahlige $n \geqq 1$ die Funktion
$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ höchstens
eine reelle Nullstelle haben kann.

4. Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, \ldots P_n$ bezeichnet.
a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ können parallel zu sich selbst so verschoben werden, daß sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.
b) Es ist zu beweisen (z. B. mit Hilfe des Satzes unter a)), daß folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{n\,2\pi}{n}=0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\,2\pi}{n}=0 \qquad (2)$$

5. Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung
$\sin^4 x-\cos^4 x=\lambda\ (\tan^4 x-\cos^4 x)$
a) keine
b) genau eine
c) genau zwei
d) mehr als zwei
reelle Lösungen im Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$ hat.

6. Es ist zu beweisen, daß für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leqq \sqrt[3]{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

Erste Preise wurden vergeben:

BERND HOFMANN
EOS Zittau
(Olympiadeklasse 10, Vorbereitungsklasse)

WOLFGANG BURMEISTER
EOS Dresden-Süd
(Olympiadeklasse 11)

Ursula Tyl, EOS Heinrich Hertz, Berlin, erfolgreichstes Mädchen der IX. OJM (Kl. 11/12) und Kandidat der XII. IMO (3. Preis)

Zweite Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Jürgen Roßmann, Antonin-Zapotocky-OS Neubrandenburg (Schüler einer 9. Klasse); Hartmut Strese, EOS Dr.-Theodor-Neubauer, Cottbus; Harald Loose, Erw. Spezialoberschule Kleinmachnow (aus Kl. 9); Albrecht Heß, 49. OS Dresden (aus Kl. 8); Rolf Haftmann, OS Olbersdorf (Bez. Dresden); Bernd Donath, EOS Rudolph Rotkegel, Forst; Günter Hempel, EOS Markranstädt (Bez. Leipzig); Heidrun Seidel, Spezialschule f. elektron. Industrie Martin-Andersen-Nexö, Dresden; Ottmar Langer, EOS Lessingschule, Döbeln; Frank Täubner, EOS Georg Schumann, Calau

In Olympiadeklasse 11 an: Christoph Winter, EOS Gerhart-Hauptmann Wernigerode; Olaf Böhme, EOS Dresden-Reick (aus Kl. 10); Jürgen Schefter, EOS Wladimir Komarow, Elsterwerda (aus Kl. 10)

In Olympiadeklasse 12 an: Manfred Krzikalla, Spezialsch. phys.-techn. Richtung, Frankfurt (Oder); Peter Oswald, EOS Dresden-Süd; Andreas Felgenhauer, Spezialkl. der TH Otto von Guericke, Magdeburg

Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Hans Siepel, EOS Luckenwalde; Bernd Riedel, EOS Winckelmann, Stendal; Guntram Pausch, EOS Wilhelm Pieck, Borna (Bez. Leipzig); Volkmar Scheffel, Goethe-OS, EOS Sebnitz (Bez. Dresden); Reinhard Karge, Goetheschule, EOS Bad Doberan; Bernd Krause, EOS Schmölln (Bez. Leipzig); Hans-Jürgen Fischer, EOS Adolph Diesterweg, Plauen; Klaus-Peter Jerzynek, EOS Geschwister Scholl, Löbau (Bez. Dresden), Harald Lieske, BS Automobilwerk Eisenach

In Olympiadeklasse 11 an: Gerhard Spens und Ludwig Schäfer, beide EOS Alexander von Humboldt, Erfurt; Harald Englisch EOS Karl-Marx, Leipzig (aus Kl. 10); Michael Schulze, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialkl. an der Sektion Mathematik; Thomas Jentsch und Arnulf Möbius, beide Spezialkl. Mathematik/Physik der Martin-Luther-Universität Halle; Ursula Tyl, EOS Heinrich Hertz, Berlin

In Olympiadeklasse 12 an: Fredy Reimann, Fontane-Schule, EOS Neuruppin (Bez. Potsdam); Michael Josch, Erw. Spezialoberschule Kleinmachnow; Gerhard Noack, Kaufmännische Berufsschule Cottbus

Anerkennungsurkunden für sehr gute Leistungen erhielten:

Klasse 10: Helmut Roßmann, Antonin-Zapotocky-OS Neubrandenburg (aus Kl. 7); Martin Rohde, Maxim-Gorki-OS Berlin; Reiner Creutzburg, Pestalozzi-OS Wismar; Bernd Zaddach, 10. OS Cottbus (aus Kl. 7); Winfried Kung, Friedrich-Engels-OS Rostock; Axel Hintze, Clara-Zetkin-OS Magdeburg (aus Kl. 9); Rainer Staudte, EOS Artur Becker, Wilkau-Haßlau; Albrecht Böttcher, EOS Johannes R. Becher, Annaberg-Buchholz; Bernd Worel, Atonin-Zapotocky-OS Neubrandenburg (aus Kl. 9); Reiner Vanselow, EOS Wilhelm-Pieck-Stadt Guben; Hans-Dieter Sparing EOS II, Gera; Michael Schwarzer, EOS Georg Schumann, Calau (Bez. Cottbus); Wilfried Kröger, EOS Ernst Thälmann, Rostock; Wolf-Rüdiger Müller, EOS Freital; Gerit Schrade, EOS Alexander Puschkin, Neubrandenburg; Frank Loesdau, EOS Nikolaus Kopernikus, Torgelow (Bez. Neubrandenburg); Brigitte Prawitz, EOS Heinrich Hertz, Berlin (aus Kl. 9); Harry Niepel, EOS Lobenstein (Bez. Gera); Norbert Hennig, BBS des VEB Schwermaschinenbau S. M. Kirow, Leipzig; Michael Salewski, BS d. soz. Konsumgüter-Binnenhandels Löbau (Bez. Dresden)

Klasse 11: Günter Schwalbe, EOS Brand-Erbisdorf (Bez. Karl-Marx-Stadt); Reinhard Wobst, TH Karl-Marx-Stadt; Joachim Voigt und Stephan Wolf, beide EOS Heinrich Hertz, Berlin

Klasse 12: Werner Nagel und Inge Reimann, beide Spezialoberschule Carl Zeiss, Jena; Frank Galeski, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Ludwig Hoy, TH Karl-Marx-Stadt; Roland Müller, ABF Walter Ulbricht, Martin-Luther-Universität Halle; Ullrich Semmler und Achim Nötzold, beide TH Karl-Marx-Stadt; Volkmar Olbrich, Spezialkl. der TH Otto von Guericke, Magdeburg; Joachim Puls, BS Halbleiterwerk Frankfurt (Oder)

Losung der IX. OJM

Lernt, arbeitet und lebt im Geiste Lenins — vollbringt hohe Leistungen zu Ehren der DDR

Kandidaten zur XII. IMO (10. bis 22. Juli 1970) VR Ungarn

Wolfgang Burmeister, Peter Oswald, Olaf Böhme (alle Dresden); Andreas Felgenhauer und Christoph Winter (beide Magdeburg); Manfred Krzikalla, Frankfurt (Oder); Jürgen Schefter, Cottbus; Fredy Reimann, Potsdam; Thomas Jentsch, Halle; Gerhard Spens, Erfurt; Ursula Tyl, Berlin

Wir stellen vor (v. l. n. r.)

Dr. habil. Helmut Bausch, Vorsitzender der Jury und Delegationsleiter der DDR-Mannschaft für die XII. IMO;

Prof. Dr. habil. Wolfgang Engel, Vorsitzender des Zentralen Komitees für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR;

Oberstudienrat Herbert Titze, Sekretär des ZKOJM

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 15. September 1970

Achtung!
Alle Antwortkarten des Wettbewerbs 1969/70 (H. 5/69 bis Heft 3/70) sind zwischen dem 1. und 10. Oktober 1970 geschlossen an die Redaktion alpha, 7027 Leipzig, Postfach 14, einzusenden. Bei Einsendung von mindestens 7 richtigen Antwortkarten gibt es Abzeichen und Urkunden. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1969/70 einsenden, erhalten das *alpha-Abzeichen in Gold* (und die Urkunden zurück).

5 ▲ 534 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 10. Die Summe aus dem Fünffachen des ersten Summanden und dem Dreifachen des zweiten Summanden beträgt 44. Wie heißen die Summanden? Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

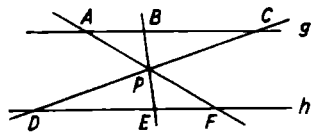
Sigrun Geyer, Sansibar/Tanzania

5 ▲ 535 Mit welcher Zahl sind alle aus gleichen Ziffern bestehenden zweistelligen natürlichen Zahlen zu multiplizieren, wenn das Produkt jeweils eine vierstellige, aus den gleichen Ziffern bestehende natürliche Zahl sein soll? *Sch.*

W 5 ■ 536 Eine Flasche Brause kostet 0,21 M. Für eine leere Flasche werden 0,30 M Pfand erhoben. Wieviel leere Flaschen muß Heinz zur Konsumverkaufsstelle mitnehmen, wenn er ohne zu zahlen zehn Flaschen Brause erhalten möchte? *P.*

W 5 ■ 537 Wieviel Möglichkeiten gibt es, in der Ungleichung $a < b$ die Variablen a und b durch die natürlichen Zahlen von 0 bis 20 so zu ersetzen, daß die Ungleichung dabei stets erfüllt wird? *T.*

6 ▲ 538 Die nachstehende Figur stellt einen Streifen dar, der von den parallelen Geraden g und h gebildet wird. Auf der Geraden g



sind drei Punkte A, B und C, auf der Geraden h drei Punkte D, E und F so festgelegt, daß $\overline{AB} = \overline{EF}$ und $\overline{BC} = \overline{DE}$ gilt.

Beweise, daß sich die drei Verbindungsgeraden AF, BE und CD in genau einem Punkt schneiden. *T.*

6 ▲ 539 Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
a) Addiert man die Quadrate der den beiden Ziffern der gesuchten Zahl entsprechenden Zahlen, so erhält man 100.
b) Multipliziert man diese beiden Zahlen, so erhält man 48.

Hans-Jürgen Bartscherer, Freiberg/Sa.

6 ▲ 540 Zeichne ein unregelmäßiges Dreieck ABC mit den Seiten $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{BC} = a$, verlängere die Seite $\overline{AB}$ über A hinaus um b und über B hinaus um a, verbinde die erhaltenen mit D und E benannten Endpunkte jeweils mit dem Punkt C. Beweise, daß dann $\sphericalangle DCE = 90° + \frac{\gamma}{2}$ gilt, wobei $\gamma = \sphericalangle ACB$ ist! *T.*

W 6 ■ 541 Jürgen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf seinem Motorroller vom Ort A nach dem Ort B. Nachdem Jürgen den vierten Teil der Fahrstrecke zurückgelegt hatte, zeigte seine Armbanduhr die Uhrzeit 6.45 an. Um 6.55 Uhr hatte Jürgen bereits den dritten Teil der Fahrstrecke zurückgelegt.
a) Um wieviel Uhr startete Jürgen in A?
b) Um wieviel Uhr traf er in B ein? *Sch.*

W 6 ■ 542 Für sechs von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e und f gelte $a + 3b + 5c = 12$ und $d + 3e + 5f = 20$. Wie groß ist die Summe $a + b + c$, wenn $d + e + f = a + b + c$ gilt? Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle! *P.*

7 ▲ 543 Heinz berichtet über das Lebensalter seiner Eltern und zweier seiner Großeltern folgendes:
Meine Mutter ist gegenwärtig dreimal so alt wie ich. Vor zwei Jahren war mein Vater viermal so alt wie ich. Meine Großmutter war vor drei Jahren siebenmal so alt wie ich. Vor einem Jahr war mein Großvater doppelt so alt wie meine Mutter. Addiert man die Zahlen, die das gegenwärtige Alter von mir, meinen Eltern, meinem Großvater und meiner Großmutter angeben, so erhält man als Summe 248. Wie alt ist jedes der Familienmitglieder? (Das Lebensalter jeder der fünf Personen sei stets durch eine ganze Zahl angegeben.)

Ehrenfried Zschech, Bautzen

7 ▲ 544 In dem Wort „alpha" ist jeder Buchstabe durch eine der Ziffern von 1 bis 9 so zu ersetzen, daß die erhaltene fünfstellige Zahl das Quadrat einer dreistelligen Primzahl ist. Die Quersumme dieser Primzahl soll wiederum eine Primzahl sein und der Zahl „ap" entsprechen. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben dagegen verschiedene Ziffern einzusetzen. *Ing. H. Decker, Köln*

7 ▲ 545 Bestimme alle rationalen Zahlen x, die die Gleichung $|x| + 2 - 2x = 0$ erfüllen! (Löse die Aufgabe mit einer geeigneten Fallunterscheidung!) *T.*

W 7 ■ 546 Nach einer Mitteilung des „Neuen Deutschland" vom 29. September 1968 ist in der Volksrepublik Polen für die Jahre 1969 und 1970 eine Zunahme der Produktion im Maschinenbau um je 14% gegenüber dem jeweils vorhergehenden Jahr vorgesehen. Um wieviel Prozent wird die geplante Produktion im Maschinenbau des Jahres 1970 größer sein als die des Jahres 1968? *T.*

W 7 ■ 547 Ein Kreis, der eine Dreieckseite und die Verlängerungen der beiden anderen Dreieckseiten in je einem Punkt berührt, wird Ankreis des Dreiecks genannt. Ein innerer Punkt E der Seite $\overline{BC}$ eines Dreiecks ABC sei der Berührungspunkt des Ankreises.
Beweise, daß die Summe aus den Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BE}$ gleich dem halben Umfang des Dreiecks ABC ist. *Sch.*

8 ▲ 548 Im Leipziger Schnellbahnverkehr (elektrischer Betrieb) fährt ein Fahrgast um 14.50 in Markkleeberg-West ab und trifft nach einer Fahrt rund um Leipzig um 15.43 Uhr in Gaschwitz ein.
a) Wieviel Züge des Schnellverkehrs, die von Gaschwitz nach Markkleeberg-West in Abständen von 20 min fahren, begegnen ihm auf seiner Fahrt, wenn der letzte ihm begegnende Zug um 15.34 Uhr in Gaschwitz abfährt und die Züge in dieser Richtung dieselbe Fahrzeit haben wie der Zug des Fahrgastes?
b) Zu welcher Uhrzeit begegnet dem Fahrgast der erste Gegenzug? (Dabei soll eine konstante Reisegeschwindigkeit angenommen werden, eine Annahme, die trotz der häufigen Haltepunkte mit guter Annäherung zutrifft.) *L.*

8 ▲ 549 Es ist der Flächeninhalt eines Rhombus zu bestimmen, von dem der Umfang $2s$ und die Summe m der Längen der Diagonalen gegeben sind.

Gerhard Zinn, Schleusingen
EOS „Max Greil", Klasse 9/1

W 8 ■ 550 Es seien x, y, z drei natürliche Zahlen, deren Produkt 30 beträgt und deren Summe durch 4 teilbar ist. Ferner sei $x \leqq y \leqq z$.

a) Es sind alle natürlichen Zahlen x, y, z zu bestimmen, die die obigen Eigenschaften haben.

b) Es sind diejenigen natürlichen Zahlen x, y, z anzugeben, die die obigen Eigenschaften haben und bei denen eine Zahl kleiner als jede der beiden anderen sowie Teiler der beiden anderen Zahlen ist. *T.*

W 8 ■ 551 Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Ist das Viereck $ABCD$ ein Tangentenviereck, dessen Winkel $\sphericalangle DAB = \alpha$ und $\sphericalangle BCD = \gamma$ rechte Winkel sind, so gilt für die Längen der Seiten $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$

$a = b$ und $c = d$,

d. h., das Tangentenviereck $ABCD$ ist ein Drachenviereck, dessen Symmetrieachse auf der Diagonalen $\overline{BD}$ liegt. *T.*

9 ▲ 552 Mit Hilfe der modernen Technik kann man Drähte aus Metall herstellen, die nur eine Dicke von 2μm (2 Mikrometer), d. s. 0,002 mm, haben.

Welche Länge besitzt ein Draht von kreisförmigem Querschnitt und einem Querschnittsdurchmesser von 0,002 mm, der aus einer Masse von 2 g Silber hergestellt worden ist?

9 ▲ 553 Die Zahl 1 000 000 soll so mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9 dargestellt werden, daß jeweils immer nur eine dieser Ziffern in der Darstellung auftritt, und zwar höchstens siebenmal. Dabei dürfen Additions-, Multiplikations-, Subtraktions- und Divisionszeichen, die Potenzschreibung, das Zeichen für die Quadratwurzel, Klammern und die Schreibweise im dekadischen Positionssystem in beliebiger Weise benutzt werden.

Wer kann die Zahl 1 000 000 auf diese neun verschiedenen Arten darstellen?

Diese schon sehr alte, aber verhältnismäßig wenig bekannte Aufgabe wurde uns von *Regina Oberwinter*, Potsdam-Bornstedt, Schülerin einer 10. Klasse und Mitglied des Potsdamer *Klubs Junger Mathematiker* „Alexej Leonow", mitgeteilt.

W 9 ■ 554 a) Der Betrag der Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sei gleich 211.

Wie lauten diese Zahlen?

b) Der Betrag der Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sei gleich 1 000 001.

Wie lauten diese Zahlen?

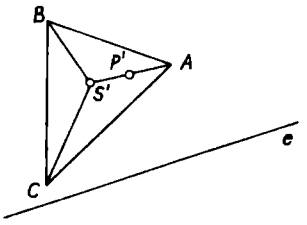
c) Der Betrag der Differenz der Kuben zweier aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen sei gleich 153 602.

Wie lauten diese Zahlen?

Schüler Egbert Lindner, Dresden

W 9 ■ 555 Es ist zu beweisen, daß die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist. *Sch.*

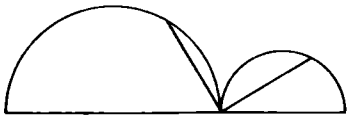
10/12 ▲ 556 Gegeben sei der Grundriß einer auf der Bildebene stehenden dreiseitigen Pyramide mit dem Basisdreieck ABC und der Spitze S. Eine Ebene ε schneide die Pyramidenkante $\overline{AS}$ in dem Punkt P und die Grundrißebene in der Geraden e (vgl. die Abbildung).



Es sind die Grundrisse der Schnittpunkte Q und R von ε mit den Pyramidenkanten $\overline{BS}$ und $\overline{CS}$ zu konstruieren.

Dr. E. Schröder, Dresden

10/12 ▲ 557 Welche der beiden Sehnen in den Halbkreisen der beigefügten Abbildung ist länger, die Sehne in dem größeren Halbkreis oder die Sehne in dem kleineren Halbkreis?



Dabei wird vorausgesetzt, daß die Flächeninhalte der beiden sich berührenden Halbkreise sich wie 3 : 1 verhalten, daß die beiden Sehnen aufeinander senkrecht stehen und daß die Sehne in dem größeren Halbkreis mit dem Begrenzungsdurchmesser dieses Halbkreises einen Winkel von 60° bildet.

Erst schätzen, dann messen, dann berechnen! *L.*

W 10/12 ■ 558 Von einem Viereck $ABCD$ seien die folgenden Stücke gegeben:

$\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AD} = 3$ cm, $\sphericalangle DAB = 60°$,

$\overline{CD} = 3{,}5$ cm, $\sphericalangle DBC = 30°$.

a) Das Viereck $ABCD$ ist zu konstruieren.

b) Die Länge der Seite $\overline{BC}$ und die Länge der Diagonale $\overline{BD}$ sind zu berechnen.

c) Es ist zu beweisen, daß die Lösung eindeutig ist, d. h., daß es bis auf kongruente Vierecke genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die gegebenen Stücke enthält.

Wolfgang Burmeister, Dresden
Träger eines 2. Preises bei der IMO 1969

W 10/12 ■ 559 Es ist die Basis m desjenigen Positionssystems zu ermitteln, in dem die Gleichung

$$(46)_m \cdot (3)_m = (162)_m \text{ erfüllt ist.}$$

Bemerkung: In dem Positionssystem mit der Basis m, wobei m eine natürliche Zahl bedeutet, die größer als 1 ist, gilt

$$(46)_m = 4m + 6,$$
$$(3)_m = 3,$$
$$(162)_m = 1m^2 + 6m + 2.$$ *U.*

Aus ungarischen Mathematik-Lehrbüchern

■ 5 ■ Ein Kunde kaufte 3 m, ein zweiter 5 m, ein dritter 9 m desselben Stoffes. Der zweite Kunde hatte 120 Forint mehr als der erste zu bezahlen. Wieviel Forint zahlte jeder dieser drei Käufer?

■ 5 ■ Viele Jungen und Mädchen verbringen jährlich am Plattensee ihre Ferientage; in einem Feriendurchgang waren es 957 Jungen, und Mädchen waren es 387 mehr als Jungen. Die Regierung der Volksrepublik Ungarn gab für jeden Schüler 435 Forint als Ferienzuschuß aus. Welcher Geldbetrag mußte für die Schüler dieses Durchgangs aufgewandt werden?

■ 7 ■ In 70 Budapester Filmtheatern wurden an einem Abend genau 15 verschiedene Filme gezeigt. Beweise, daß mindestens einer dieser 15 Filme an diesem Abend gleichzeitig in mindestens fünf verschiedenen Filmtheatern lief.

■ 6 ■ Karl wollte sich 20 Glaskugeln kaufen. Es waren jedoch nur Tonkugeln vorrätig. Eine Tonkugel war 10 Filler billiger als eine Glaskugel. Karls Geld reichte genau für den Kauf von 30 Tonkugeln. Wieviel Filler kostete eine Glaskugel, wieviel eine Tonkugel? Welcher Geldbetrag stand Karl beim Einkauf zur Verfügung?

■ 7 ■ Die Summe zweier rationaler Zahlen beträgt 410. Wenn man von der größeren dieser beiden Zahlen 10 subtrahiert und danach die so erhaltene Differenz durch die kleinere der beiden Zahlen dividiert, so erhält man 7. Um welche Zahlen handelt es sich?

■ 6 ■ Ein Personenzug fuhr 3 Stunden und 24 Minuten mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km · h^{-1} (d. i. Kilometer pro Stunde), ein Güterzug hingegen fuhr 6 Stunden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30,4 km · h^{-1}. Welcher der beiden Züge hat dabei die längere Fahrtstrecke zurückgelegt?

■ 8 ■ Die Erde ist fast kugelförmig; der Erdradius beträgt rund 6400 km. Etwa 70% der Oberfläche der Erde wird vom Meer eingenommen. Die Fläche der Sowjetunion beträgt etwa $\frac{1}{6}$ der Fläche des Festlandes der Erde. Wie groß ist die Fläche der Sowjetunion?

■ 8 ■ Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften: Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauschen wir die Ziffern dieser Zahl, so erhalten wir eine Zahl, die um 1 kleiner ist als das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

Leseprobe aus

Mathematische Logik für Anfänger

Was ist mathematische Logik?

Hänschens Schluß

„Wenn ich hundert Meter unter 10,2 Sekunden laufe", sagte Hänschen, „werde ich zur Olympiade delegiert. Leider laufe ich aber die hundert Meter nicht unter 10,2 Sekunden, folglich werde ich nicht zur Olympiade delegiert."

Von Hänschen kann man sagen, daß er ein guter Sportler, besonders ein guter Kugelstoßer ist. Zu seinem Bedauern läuft er aber die Hundertmeterstrecke nicht unter 10,2 Sekunden. Daraus zieht er einen logisch falschen Schluß.

Wer das nicht glaubt, wer der Meinung ist, daß man mit dieser Schlußweise doch zu einem richtigen Ergebnis gelangt, betrachte das folgende Beispiel.

Wenn das Benzin ausgeht, so bleibt das Auto stehen.
Das Benzin geht nicht aus.
Das Auto bleibt nicht stehen.

Das Wort „folglich" wird hier durch den langen horizontalen Strich vertreten. Die über dem Strich stehenden Aussagen, aus denen wir schließen, nennen wir *Prämissen*, die unter dem Strich stehende Aussage, auf die wir schließen, *Konklusion*.

Freilich kann man aus diesen Prämissen nicht auf die niedergeschriebene Konklusion schließen, denn, auch wenn das Benzin nicht ausgegangen ist, kann das Auto stehenbleiben, zum Beispiel, wenn der Fahrer anhält oder das Auto gegen einen Baum prallt. Hat der Leser herausgefunden, daß dieser Schluß auf demselben Fehler beruht wie Hänschens Schluß?

Nur wer sehr aufmerksam war, fand heraus, was beiden Schlüssen gemeinsam war.

Beide Schlüsse hatten die Form:

Wenn ..., so ...
Nicht ...
Nicht ...

Aus Beispielen können wir erkennen, daß diese Schlußfigur fehlerhaft und unzuverlässig war. (Von einer Schlußfigur sprechen wir dann, wenn es sich nur um die äußere Form, das Schema, das Skelett des Schlusses handelt, das ähnlich einem Formular in mannigfaltiger Form ausgefüllt werden kann.)

Es ist möglich, daß jemand die folgende Meinung vertritt: Ich schließe im täglichen Leben sehr schnell und habe mich an diese Art gewöhnt, ohne Fehler gemacht zu haben. Aber dieses Argument hat den gleichen Wert wie der Traum der alten Frau, die im Lotto fünf Richtige hatte. In ihrem Traum sah sie ein geflügeltes Schaf mit Tupfen auf den Flügeln. Sie erzählte: „Vier Beine hatte das Schaf und sieben Tupfen auf den Flügeln, gerade wie ein Marienkäfer. Ich kreuzte folgende Zahlen auf dem Lottoschein an: die 4, die 7, die 47, dann die 11, wegen $4+7=11$, und weiter die 32, weil doch $4 \cdot 7=32$ ist." Als jemand zu ihr sagte: „Gute Frau, $4 \cdot 7$ ist doch 28", antwortete sie: „Nein, $4 \cdot 7$ ist 32, denn mit der 32 habe ich doch das viele Geld gewonnen."

Der Gebrauch der Buchstaben

Was wollen wir damit ausdrücken, wenn wir in der vorangegangenen Schlußfigur an manche leeren Stellen Punkte, an anderen Stellen Linien setzten?

Der Leser wird sicherlich auf Grund der Beispiele verstehen, daß gleiche Zeichen für gleiche Sachverhalte stehen. In der Mathematik haben wir uns daran gewöhnt, derartige Sachverhalte mit Hilfe von Buchstaben darzustellen. Zum Beispiel benutzt man oft den folgenden Schluß:

$$\frac{a>b}{c>0}$$
$$ac>bc\,.$$

(In Worten: Wenn ich zwei verschiedene Zahlen mit ein und derselben positiven Zahl multipliziere, so ist das Produkt aus der größeren Zahl und der positiven Zahl größer als das aus der kleineren Zahl und der positiven Zahl.)

Das soll so verstanden werden, daß a, b und c an beiden Stellen jeweils dieselben Zahlen bedeuten. Wir können das zum Beispiel auch so schreiben:

$$\frac{\ldots > ---}{-.-. > 0}$$
$$\ldots \text{ mal } -.-. > --- \text{ mal } -.-.$$

Diese Schreibweise ist länger und unübersichtlicher als die vorangegangene. Dieselben Gesichtspunkte sind die Ursache dafür, daß man nicht nur für Zahlen, sondern auch an Stelle von Aussagen Buchstaben gebraucht.

(1) *Wenn A, so B*
Nicht A
Nicht B.

Das verstehen wir ebenfalls so, wie oben bereits angegeben. Übereinstimmende Buchstaben bedeuten übereinstimmende Aussagen beziehungsweise Zahlen. Aber verschiedene Buchstaben bedeuten nicht unbedingt verschiedene Aussagen beziehungsweise Zahlen. Warum sollten wir die Ungleichung $5>3$ nicht zum Beispiel mit 5 multiplizieren können?

Würden a, b und c verschiedene Zahlen bedeuten, so könnte man die Schlußfigur

$$\frac{a>b}{c>0}$$
$$ac>bc$$

in diesem Fall nicht anwenden.

Eine zweite Schlußfigur

Wir modifizieren die Schlußfigur (1) jetzt folgendermaßen:

(2) *Wenn A, so B*
Nicht B
Nicht A

Es ist gegenüber (1) nichts weiter verändert worden, als daß das zweite A und das zweite B gegeneinander ausgetauscht wurden. Ist diese Schlußfigur nun richtig oder ist sie immer noch fehlerhaft?

Sehen wir uns einige Beispiele an:

Wenn Paul die 100-m-Strecke unter 10 Sekunden läuft, so wird er zur Olympiade geschickt.
Paul wird nicht zur Olympiade geschickt.
Paul läuft die 100-m-Strecke nicht unter 10 Sekunden.

Ist dieser Schluß richtig?

Ein weiteres Beispiel:

Wenn das Benzin ausgeht, so bleibt das Auto stehen.
Das Auto bleibt nicht stehen.
Das Benzin ist nicht ausgegangen.

Hierauf sagte mir mein Freund, der selbst Kraftfahrer ist: „Das ist eine völlig falsche Schlußfolgerung. Es ist doch durchaus möglich, daß das Auto nicht stehenbleibt, obwohl das Benzin ausgegangen ist, denn auf glatter Strecke, besonders, wenn sie etwas Gefälle hat, kann das Auto auch ohne Benzin noch eine ganze Strecke rollen."

Hatte mein Freund recht? Was das Weiterrollen des Autos betrifft, ja. Was aber die Schlußfolgerung betrifft, darin hatte er nicht recht.

Er vergaß einfach die erste Prämisse. Und so stellte er sich vor, daß wir allein aus der zweiten Prämisse auf die Konklusion schließen könnten (darauf, daß das Benzin nicht ausgeht). Das wäre freilich eine falsche Schlußweise, denn es gibt auch eine erste Prämisse!

Mein Freund, der Kraftfahrer, hat recht, an der Gültigkeit der ersten Prämisse zu zweifeln, wenn er sich auf die Trägheit (das Beharrungsvermögen) oder beim Gefälle auf die Massenanziehung (Gravitation) bezieht. Man kann die Richtigkeit einer Prämisse bezweifeln, es ist aber eine andere Frage, daran zu zweifeln, daß aus einer gegebenen Prämisse eine gegebene Konklusion folgt.

Die vorliegende Leseprobe wurde entnommen aus: *T. Varga*: Mathematische Logik für Anfänger — Aussagenlogik, Volkseigener Verlag Volk und Wissen Berlin 1964, Bestell-Nr. 001 804, Preis 6,40 M. Titel der ungarischen Originalausgabe: MATEMATIKAI LOGIKA.

Lösungen

▲ 345 Der Schüler *Heinz Marbes* (Bernau) und Herr *Werner Schmidt* (Apolda) haben besonders gut aufgepaßt. Sie fanden heraus, daß die Aufgabe 345 (1/69) nicht wie angegeben (2/69) genau 6 Lösungen, sondern genau 13 Lösungen besitzt. Die von ihnen gefundenen weiteren sieben Lösungen lauten:

33 728	33 728	33 728	33 728
3 901	3 901	3 901	3 901
405	415	425	435
38 034	38 044	38 054	38 064

33 728	33 728	33 728
3 901	3 901	3 901
445	455	465
38 074	38 084	38 094

▲ Magischer Würfel (*alpha*-heiter 3/69): Die Schülerin *Karin Vetter* (Weinböhla) stellt fest: Die Summe der Zahlen von Grund-, Deck- und jeder Seitenfläche ist gleich:

Grundfläche: 6 − 1 − 8 − 3

Deckfläche: 7 − 4 − 5 − 2 (links vorn begonnen, im mathem. Drehsinn). Durch Drehung des Würfels sind mehrere Lösungen möglich.

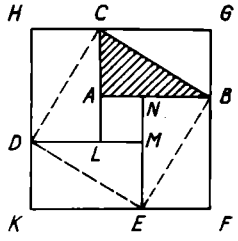
▲ 504 Zu dieser Aufgabe wurde die Lösung einer anderen geboten. Es muß richtig heißen:

a) $\overline{AB} = 15{,}39$ cm c) $\widehat{AC} = 6{,}28$ cm

b) $\overline{OB} = 16{,}18$ cm d) $A = 22{,}8$ cm^2

Lösung der Aufgabe „Ein Satz von Diophant von Alexandrien".

▲ 448a) Es seien ABC das in der nebenstehenden Figur schraffiert gezeichnete rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} = b$ und $BCDE$ das über der Hypotenuse dieses Dreiecks errichtete Quadrat, das auf derselben Seite der Hypotenuse wie der Punkt A liegen möge.



Ferner mögen sich die Parallelen durch B und D zu AC und durch C und E zu AB in den Punkten F, G, H und K schneiden. Endlich seien L der Schnittpunkt von AC mit der Parallelen durch D zu AB, M der Schnittpunkt von DL mit der Parallelen durch E zu AC und N der Schnittpunkt von AB und EM. Dann sind die Dreiecke ABC, GCB, LCD, HDC, MDE, KED, NEB, FBE sämtlich rechtwinklig und einander kongruent, da sie in der Hypotenuse und in den Winkeln übereinstimmen. Daher ist das Viereck $FGHK$ ein Quadrat, denn die Winkel dieses Vierecks sind sämtlich rechte Winkel und die Seitenlängen sind gleich $a + b$. Auch das Viereck $ALMN$ ist ein Quadrat; seine Seitenlänge ist gleich der Differenz der Längen der Katheten des Dreiecks ABC; denn

$\overline{AN} = \overline{AB} - \overline{NB} = a - b$.

Bezeichnet man mit

A_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC,

A_2 den Flächeninhalt des Quadrats $BCDE$,

A_3 den Flächeninhalt des Quadrats $FGHK$,

A_4 den Flächeninhalt des Quadrats $ALMN$,

so gilt, wie man aus der obigen Figur entnehmen kann,

$A_2 + 4A_1 = A_3$ und (1)

$A_2 - 4A_1 = A_4$, w.z.b.w. (2)

b) Wie unter a) gezeigt wurde, beträgt die Seitenlänge des Quadrats $FGHK$ $a + b$ und die Seitenlänge des Quadrats $ALMN$ $a - b$ oder $b - a$, je nachdem, ob $a > b$ oder $b > a$ ist. Ist aber $a = b$, so fallen die Punkte A, L, M und N zusammen, und es wird $A_4 = 0$.

c) Wenn a, b, c natürliche Zahlen sind, so sind auch a^2, b^2, $c^2 = a^2 + b^2$, $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ und $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ natürliche Zahlen.

Beispiele:

$a=4,\ b=3,\ c=5;\ c^2=25,\ (a-b)^2=1,\ (a+b)^2=49;$

$a=8,\ b=6,\ c=10;\ c^2=100,\ (a-b)^2=4,\ (a+b)^2=196;$

$a=12,\ b=5,\ c=13;\ c^2=169,\ (a-b)^2=49,\ (a+b)^2=289;$

$a=15,\ b=8,\ c=17;\ c^2=289,\ (a-b)^2=49,\ (a+b)^2=529.$

Hinweise: 1) Natürliche Zahlen a, b, c, für welche die Beziehung $c^2 = a^2 + b^2$ gilt, werden auch pythagoreische Zahlen genannt (Pythagoras, etwa 580 bis 500 v.u.Z.).

2) Bereits *Leonardo Fibonacci von Pisa* (um 1180 bis um 1250) und *Geronimo Cardano* (1501 − 1576) beschäftigten sich mit der Aufgabe, zu einer Quadratzahl q^2 (q natürliche Zahl) eine ganze Zahl y so zu bestimmen, daß auch $(q^2 + y)$ und $(q^2 - y)$ Quadratzahlen sind.

3) Mit Hilfe des in der Aufgabe zitierten und vermutlich auf *Diophant* zurückgehenden Satzes kann der Lehrsatz des Pythagoras (der schon etwa 1500 Jahre vor *Pythagoras* z. B. den Babyloniern bekannt gewesen sein soll) bewiesen werden (vgl. etwa *W. Lietzmann*, Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen, 5. A. S. 222). Man erhält nämlich wegen $A_1 = \frac{ab}{2}$, $A_2 = c^2$ und $A_3 = (a+b)^2$ aus (1)

$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = (a + b)^2,$$

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab,$$

$c^2 = a^2 + b^2$, womit

der Satz des Pythagoras bewiesen ist.

▲ 449 Aus Platzgründen muß zunächst auf die ausführliche Lösung dieser Aufgabe verzichtet werden.

K L E I N
+ V I E T A
N E W T O N

Es gibt genau 6 Lösungen:

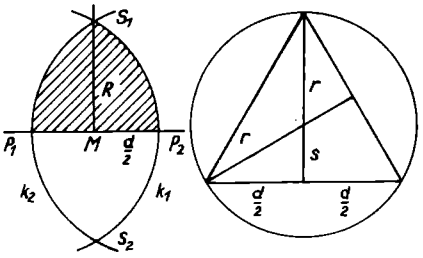
	37 291	87 291	45 321
I	+ 89 250	+ 39 250	+ 92 360
	126 541	126 541	137 681
	95 321	74 631	94 631
	+ 42 360	+ 93 620	+ 73 620
	137 681	168 251	168 251

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. W. Engel

▲ 450 1. Seien P_1 und P_2 zwei Punkte, die die Entfernung d voneinander haben. Der Punkt P_3 muß dann im Durchschnitt der beiden Kreisflächen mit den Mittelpunkten P_1 und P_2 sowie dem Radius d liegen (s. Fig. 1). Der Kreis um den Mittelpunkt M von P_1P_2 durch S_1 umfaßt P_1, P_2, P_3. Für seinen Radius R ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$R^2 = d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}d^2 \qquad R = \frac{d}{2}\sqrt{3}.$$

2. Der so gefundene Kreis läßt sich durch einen kleineren ersetzen. Man kann sich aus Symmetriegründen auf den Fall beschränken, in dem P_3 im schraffierten Teil der Figur liegt. Ist $P_3 = S_1$, hat also P_3 auch die Entfernung d von P_1 und P_2, so ist der Umkreis des Dreiecks $P_1P_2P_3$ der gesuchte Kreis. Er enthält bei beliebiger Lage von P_3 alle drei Punkte. Für seinen Radius r gilt (Fig. 2)



$$(r+s)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=d^2$$

$$s^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=r^2$$

$$2rs=d^2-2r^2$$

$$r^2s^2=\left(\frac{d^2}{2}-r^2\right)^2$$

$$r^2\left(r^2-\frac{d^2}{4}\right)=\frac{d^4}{4}-r^2d^2+r^4$$

$$\frac{3}{4}r^2=\frac{d^2}{4}$$

$$r=\frac{d}{3}\sqrt{3}$$

$r=\frac{d}{3}\sqrt{3}$ ist also der Radius des kleinsten Kreises, der die geforderten Bedingungen erfüllt. Bei besonderen Lagen der drei Punkte läßt sich der Kreis noch verkleinern, z. B. wenn P_3 auf P_1P_2 liegt, enthält ein Kreis vom Radius $\frac{d}{2}$ schon alle drei Punkte.

Das Problem läßt sich verallgemeinern auf Punktmengen von n Punkten. Auch dann gibt es einen Kreis vom Radius $\frac{d}{3}\sqrt{3}$, der alle gegebenen Punkte enthält. Das ist ein Satz von Prof. Dr. *H. W. E. Jung* (1876 – 1953), der an der Universität Halle wirkte.

▲ 475 Zur Lösung der Aufgabe empfiehlt es sich, die in der Gleichung auftretenden Logarithmen durch Logarithmen zur Basis x zu ersetzen. Nun gilt für alle positiven reellen Zahlen a und x mit $x \neq 1$ und alle positiven ganzen Zahlen n

$\log_x n a = \log_x a^{\frac{1}{n}}$;

denn aus $\log_x a = z$ folgt $(x^n)^z = a$,

also $x^{nz} = a$, $x^z = a^{\frac{1}{n}}$, d. h. $\log_x a^{\frac{1}{n}} = z$.

Daher gilt

$\log_x 4 + \log_x 8 + \log_x 16 + \log_x 32 = \log_x 2^2 + \log_x 2^{\frac{3}{2}} + \log_x 2^{\frac{4}{3}} + \log_x 2^{\frac{5}{4}}$

$= 2\log_x 2 + \frac{3}{2}\log_x 2 + \frac{4}{3}\log_x 2 + \frac{5}{4}\log_x 2$

$= \left(2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}\right)\log_x 2 = \frac{73}{12}\log_x 2.$

Die gegebene Gleichung ist also genau dann erfüllt, wenn $\frac{73}{12}\log_x 2 = \frac{73}{12}$, d. h. $\log_x 2 = 1$ gilt. Das ist aber nur für $x = 2$ der Fall.

Die gegebene Gleichung hat also genau eine Lösung, nämlich $x = 2$.

▲ 476 Wegen $(a-b)^2 \geqq 0$ gilt stets $a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$, also

$a^2 + b^2 \geqq 2ab$. Ferner gilt

$b^2 + c^2 \geqq 2bc$

und $a^2 + c^2 \geqq 2ac$,

also $2(a^2+b^2+c^2) \geqq 2(ab+bc+ac)$. (1)

Weiter gilt

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$\leqq 3(a^2+b^2+c^2)$. (2)

Daraus folgt wegen $a+b+c \geqq 1$

$$a^2+b^2+c^2 \geqq \frac{1}{3} \quad (3)$$

Andererseits gilt

$(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4$

$+2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$. (4)

Nun ist wegen (1)

$2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) \leqq 2(a^4+b^4+c^4)$,

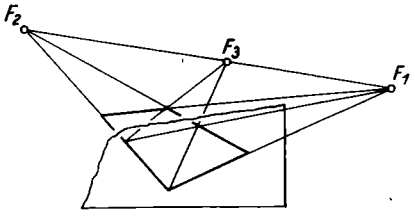
also $(a^2+b^2+c^2)^2 \leqq 3(a^4+b^4+c^4)$. (5)

Daraus folgt wegen (3)

$$a^4+b^4+c^4 \geqq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\geqq \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}, \text{ w.z.b.w.}$$

W 10 ■ 477 Die Verlängerungen der Bilder der parallelen Spielfeldseiten schneiden sich in den Fluchtpunkten F_1 bzw. F_2. Die Verbindungsgerade $[F_1F_2]$ liefert daher den Horizont des Bildes. Auf dem Horizont müssen sich auch die Bilder der parallelen Diagonalen beider Spielfeldhälften schneiden. Die eine Diagonale schneidet den Horizont in F_3. Folglich geht auch das Bild der parallelen Diagonalen der anderen Hälfte durch F_3. Damit läßt sich dann auch das Bild der vierten Seite des Spielfeldes leicht einzeichnen.



W 10 ■ 478 Man erkennt leicht, daß der Zähler und der Nenner des gegebenen Terms symmetrisch aufgebaut sind. Daher ist es zweckmäßig, den Mittelwert der im Zähler vorkommenden Zahlen durch eine Variable zu ersetzen: $x = 38\,795\,685$.

Dann erhält man

$$z = \frac{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1) - (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+3)^2+(x+1)^2 + (x-1)^2+(x-3)^2} = \frac{u}{v}$$

Im Zähler dieses Terms verbleiben nach der Berechnung der Produkte nun die Glieder mit x^3 und x. Daher erhält man

$u = 2x^3(4+3+2+1) + 2x(4\cdot3\cdot2 + 4\cdot3\cdot1 + 4\cdot2\cdot1 + 3\cdot2\cdot1)$

$= 20x^3 + 100x = 20x(x^2+5)$.

Im Nenner verbleiben nur die Glieder mit x^2 und die Absolutglieder; man erhält

$v = x^2+9+x^2+1+x^2+1+x^2+9$

$= 4x^2 + 20 = 4(x^2+5)$.

Es ergibt sich daher

$$z = \frac{u}{v} = \frac{20x(x^2+5)}{4(x^2+5)} = 5x.$$

Wegen $x = 38\,795\,685$ erhält man daher

$z = 193\,978\,425$.

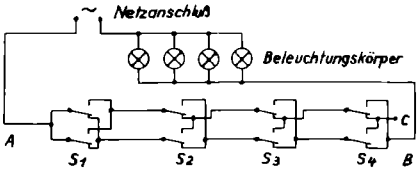
Durch die Einführung der Variablen konnte also die Berechnung wesentlich vereinfacht werden.

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. H. Rohleder

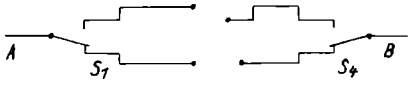
▲ 479 Folgende Schaltung mit vier Schaltstellen leistet das Verlangte, s. unten:

Sämtliche Schalter sind in Ruhestellung gezeichnet. Zwischen A und B besteht eine leitende Verbindung. Genau dann, wenn eine gerade Anzahl von Schaltern sich in der anderen Stellung (Arbeitsstellung) befindet, ist A mit B leitend verbunden. Ist eine ungerade Anzahl von Schaltern betätigt, so ist A mit C, aber nicht A mit B, leitend verbunden.

Anmerkung: Die Schalter S_1 und S_4 können auch durch einfache Umschalter ersetzt werden:



Selbstverständlich können zwischen S_1 und S_4 auch mehr oder weniger als zwei derartige Wechselschalter eingefügt werden. In der Schaltalgebra, einer mathematischen Disziplin zur Beschreibung solcher durch Reihen- oder Parallelschaltung von Kontakten aufgebauten Schaltungen, wird jeder solchen Schaltung in umkehrbar eindeutiger Weise ein Ausdruck des Aussagenkalküls zugeordnet. Durch Umformungsregeln können diese Ausdrücke in andere äquivalente Ausdrücke umgeformt werden. Äquivalente Ausdrücke beschreiben Schaltungen, die das gleiche Schaltverhalten zeigen, die also die gleiche Schaltfunktion ausüben. Ist eine Schaltfunktion vorgegeben (etwa wie in der vorliegenden Aufgabe), so kann man unter den diese



Schaltfunktion repräsentierenden äquivalenten Ausdrücken einen geeigneten aussuchen, der noch gewisse Zusatzbedingungen erfüllt (z. B. möglichst wenig Kontakte enthält oder, wie in diesem Beispiel, auf durch industrielle

Fertigung bedingte Kontaktzusammenstellungen Rücksicht nimmt), und danach die Schaltung entwerfen.

■ 480 Anzahl der

Hirsche	Füchse	Brieft.	Fasanen	Tiere
1	2	8	7	18
2	4	16	15	37
3	6	24	23	56

Nur die Zahlen der zweiten Zeile der Tabelle erfüllen die Bedingungen der Aufgabe. In diesem Kleinstadtzoo befinden sich demnach 2 Hirsche, 4 Füchse, 16 Brieftauben und 15 Fasanen.

■ 481 Wenn $d=0$. so $e=5$ wegen $5-d=e$; das widerspricht aber der Gleichung $12 : b=e$. denn es gibt keine natürliche Zahl b für die $12 : b=5$ gilt.
Wenn $d=1$. so $e=4$ wegen $5-d=e$. Dann gilt ferner $c=2$ wegen $2+c=e$ und $b=3$ wegen $12:b = e$ und $a = 4$ wegen $1 \cdot a = e$.
Wenn $d = 2$, so $e = 3$ wegen $5 - d = e$. Dann gilt ferner $c = 1$ wegen $2 + c = e$. Das widerspricht aber der Bedingung $a > b > c > d$.
Die Aufgabe besitzt genau eine Lösung, und zwar $a = e = 4, b = 3, c = 2, d = 1$.

■ 482 Es sei m die Anzahl der Schrippen, n die Anzahl der Knüppel, die Hans einkauft; dann gilt $5 \cdot m + 7 \cdot n = 23$, wobei m und n natürliche Zahlen sind.

a)

m	n	$5 \cdot m + 7 \cdot n$
0	3	21
0	4	28
1	2	19
1	3	26
2	1	17
2	2	24
3	1	22
3	2	29
4	0	20
4	1	27
5	0	25

Aus der Tabelle wird ersichtlich, daß es keine natürlichen Zahlen m und n gibt, die die Gleichung $5 \cdot m + 7 \cdot n = 23$ erfüllen, das heißt Hans kann den Geldbetrag von 23 Pf nicht voll ausgeben.

b)

	$27 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 7$
$24 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7$	$28 = 0 \cdot 5 + 4 \cdot 7$
$25 = 5 \cdot 5 + 0 \cdot 7$	$29 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7$
$26 = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7$	$30 = 6 \cdot 5 + 0 \cdot 7$

Alle weiteren Zahlen größer als 30 lassen sich wegen $24 + 7 = 31$ in der gleichen Weise darstellen, das heißt, Hans kann jeden höheren Geldbetrag als 23 Pf voll ausgeben.

■ 483 Mit Hilfe des selbstgefertigten Zeichendreiecks zeichnen wir zwei gleichseitige Dreiecke so, daß zwei Eckpunkte des ersten Dreiecks mit genau zwei Eckpunkten des zweiten zusammenfallen (siehe Zeichnung zur Aufgabe). Die so entstandene Figur stellt einen Rhombus dar. Mit Hilfe eines Lineals zeichnen wir die zweite, noch fehlende Diagonale dieses Rhombus. Da im Rhombus die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, erhalten wir im Schnittpunkt der Diagonalen vier rechte Winkel.

■ 484 33 l Benzin kosten $33 \cdot 1{,}50$ M, das sind 49,50 M. Aus $49{,}50 + 3{,}00 = 52{,}50$ folgt, daß 34 l Kraftstoffgemisch 52,50 M kosten.
Dann gilt $x : 34 = 20 : 52{,}5$ also $x = 12\frac{20}{21}$.
Der Kraftfahrer erhält für 20 M rund 13 l Kraftstoffgemisch.

■ 485 Angenommen, der Lehrer unterrichte x Schüler, dann läßt sich auf Grund des Aufgabentextes folgende Gleichung aufstellen:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100,$$

$$\frac{11}{4}x = 99,$$

$$x = 36.$$

Der Lehrer unterrichtet genau 36 Schüler.

■ 486 a) Ex 2 möge von Schönefeld bis zur Begegnung der Züge x min gefahren sein; dann ist D 273 von Leipzig $(x + 7)$ min gefahren, da dieser Zug in Leipzig 7 min früher abfährt. Ferner betrage die Entfernung von Berlin-Schönefeld nach Leipzig a km. Dann beträgt die Geschwindigkeit von Ex 2 $\frac{a}{90}$ km/min, da die Fahrzeit 90 min beträgt. Ex 2 hat also bis zur Begegnung $\frac{x \cdot a}{90}$ km zurückgelegt.
Die Geschwindigkeit von D 273 beträgt $\frac{a}{115}$ km/min; daher hat dieser Zug bis zur Begegnung $\frac{(x + 7)a}{115}$ km zurückgelegt.
Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{x\,a}{90} + \frac{(x + 7)a}{115} = a$$

und nach Division durch a

$$\frac{x}{90} + \frac{x + 7}{115} = 1. \text{ Daraus folgt}$$

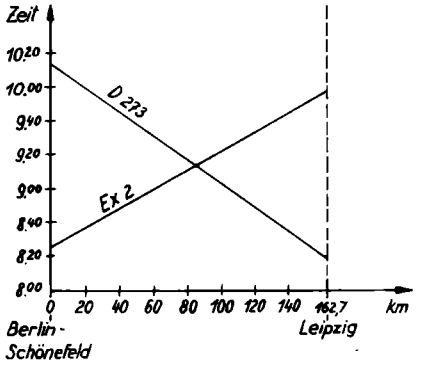
$$115x + 90x + 630 = 10350,$$

$$205x = 9720,$$

$$x = \frac{9720}{205} \approx 47{,}4.$$

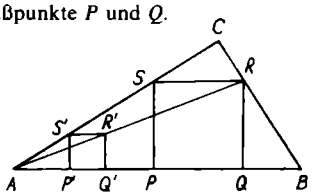
Die Fahrzeit von Ex 2 bis zur Begegnung beträgt also rd. 47 min, d. h., die beiden Züge begegnen sich um 9.13 Uhr.
b) Die mittleren Geschwindigkeiten betragen
für Ex 2 $v_1 = \frac{162{,}4 \cdot 60}{90}$ km/h $\approx 108{,}5$ km/h,
für D 273 $v_2 = \frac{162{,}7 \cdot 60}{115}$ km/h $\approx$ 84,9 km/h.
Man erkennt, daß der Expreßzug Ex 2 eine sehr hohe Geschwindigkeit hat.
c) Ex 2 hat bis zur Begegnung die Strecke $47{,}4 \cdot \frac{162{,}7}{90}$ km $\approx$ 85,7 km zurückgelegt.
Daher treffen sich die beiden Züge in einer Entfernung von 85,7 km von Berlin-Schönefeld.
d) Aus der beigefügten graphischen Darstellung können wir unmittelbar ablesen, daß die beiden Züge sich um 9.13 Uhr in einer Entfernung von rd. 86 km von Berlin-Schönefeld begegnen.

Mit solchen graphischen Darstellungen, den sog. graphischen Fahrplänen, wird bei der Deutschen Reichsbahn gearbeitet. Diese graphischen Fahrpläne enthalten alle Züge, die auf einer bestimmten Strecke verkehren. Aus technischen Gründen wird dabei in Abweichung von der beigefügten Zeichnung die Zeit unterhalb der Entfernungs-Achse eingetragen. Mit Hilfe dieser Fahrpläne lassen sich die gesuchten Zeiten schneller ermitteln als mit Hilfe des üblichen Kursbuches; ferner können Sonderzüge leichter eingeplant werden.



■ 487 Wenn in Antwort a) beide Angaben falsch sind, so muß aus Antwort e) die Angabe Dieter und aus Antwort c) die Angabe Fred richtig sein. Das steht aber im Widerspruch zur Antwort d). Wenn in Antwort b) beide Angaben falsch sind, so muß aus Antwort c) die Angabe Axel und aus Antwort d) die Angabe Ernst richtig sein. Diese Annahme führt auch bei den Antworten a) und e) zu keinem Widerspruch. Die beiden Sieger heißen Axel und Ernst. Weitere Annahmen, daß in den Antworten c), d) oder e) beide Angaben falsch sind, führen zu Widersprüchen. Daher sind Axel und Ernst die beiden Sieger.

■ 488 Wir konstruieren ein Quadrat $P'Q'R'S'$, wobei die Punkte P' und Q' auf dem Schenkel AB und der Punkt S' auf dem Schenkel AC des Winkels $\sphericalangle CAB$ liegen (vgl. die Abbildung). Das ist immer möglich, weil der Winkel $\sphericalangle CAB$ spitz ist. Dann verbinden wir A mit R' und erhalten den Schnittpunkt R dieser Verbindungsgeraden mit der Seite $\overline{BC}$. Wir ziehen die Parallele durch R zu AB, die die Seite $\overline{AC}$ in S schneidet. Dann fällen wir die Lote von R und S auf AB und erhalten die Fußpunkte P und Q.



Wir behaupten nun, daß das Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist und daher das gesuchte Quadrat.
Wegen der Konstruktion ist $PQRS$ ein Rechteck; wir haben also nur noch zu zeigen, daß $\overline{RQ} = \overline{RS}$ gilt.

Aus dem Strahlensatz folgt

$$\overline{RQ} : \overline{R'Q'} = \overline{AR} : \overline{AR'} \quad \text{und}$$
$$\overline{RS} : \overline{R'S'} = \overline{AR} : \overline{AR'},$$

also $\overline{RQ} : \overline{R'Q'} = \overline{RS} : \overline{R'S'}$,

$$\overline{RQ} : \overline{RS} = \overline{R'Q'} : \overline{R'S'} = 1 : 1,$$

weil nach der Konstruktion $P'Q'R'S'$ ein Quadrat ist. Mithin gilt $\overline{RQ} = \overline{RS}$, w.z.b.w. Wir bemerken noch, daß wir in dem vorliegenden Falle eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt haben; wir haben nämlich das Quadrat $P'Q'R'S'$ in die ähnliche Figur $PQRS$ übergeführt, die daher ebenfalls ein Quadrat ist.

■ 489 Die entstandene sechsstellige Zahl z muß gerade sein, da sie durch 1 334 teilbar sein soll. Ferner muß z wegen $1\,334 = 2 \cdot 667$ durch 667 teilbar sein.

Nun gilt $3 \cdot 667 = 2001$. Wenn also A so spielt, daß die entstehende Zahl z durch 2 001 teilbar ist, so ist z, weil eine gerade Zahl, auch durch 1 334 teilbar.

Nun kann aber A stets erreichen, daß die Zahl z durch 2 001 teilbar ist. A wählt nämlich zunächst eine gerade einstellige Zahl, z. B. 2. Dann wählt B zwei weitere einstellige Zahlen, so daß eine dreistellige Zahl x entsteht, die auf Grund der Spielbedingungen kleiner als 500 ist. Schließlich wählt A drei einstellige Zahlen so, daß sie die dreistellige Zahl $2x$ bilden. Es ergibt sich die sechsstellige Zahl $z = 1\,000 \cdot 2x + x = 2001 \cdot x$, wobei x eine gerade Zahl ist. Die Zahl z ist also durch 2 001 und daher auch durch 667 teilbar und, weil sie gerade ist, auch durch 1 334. Damit hat A sein Ziel erreicht. Zur Veranschaulichung geben wir noch ein Beispiel:

A wählt zunächst die Zahl 2; dann wählt B die Zahlen 7 und 3; es ergibt sich die Zahl 372. Nun wählt wieder A die Zahlen 4, 4 und 7, und es ergibt sich die Zahl $z = 744\,372$. Diese Zahl ist aber, wie man leicht nachweist, durch 1 334 teilbar.

■ 490 Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt A_0 des Flächenstücks $ABCD$. Es seien M und N die Mittelpunkte der durch A und D bzw. B und C gehenden Kreise (vgl. die Abbildung).

Ferner seien A_1 der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$, A_2 der Flächeninhalt des Kreissektors MAD, A_3 der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks MAD.

Dann gilt $A_0 = A_1 - 2(A_2 - A_3)$.

Ferner gilt $A_1 = a^2$, $A_2 = \frac{\pi}{6} a^2$,

da der Flächeninhalt des Kreissektors gleich $\frac{1}{6}$ des Flächeninhalts eines Kreises vom Radius a ist. Weiter gilt für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks MAD mit der Seitenlänge a

$$A_3 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Es ergibt sich daher

$$A_0 = a^2 - 2\left(\frac{\pi}{6}a^2 - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)$$
$$= a^2\left(1 - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \approx 0{,}819\,a^2.$$

Setzen wir $a = 12$ cm ein, so erhalten wir $A_0 \approx 117{,}9\ cm^2$. Da die Dicke des Stahlblechs 0,3 cm und seine Dichte 7,85 gcm^{-3} beträgt, ergibt sich die Masse des Blechstücks

$$M \approx 117{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 7{,}85\ \text{g} \approx 278\ \text{g}.$$

■ 491 Weil die Terme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung

$$x(x+2)(x+4)(x+6) = (x+1)(x+3)^2(x+5) \quad (1)$$

symmetrisch bezüglich $x+3$ sind, können wir diese Gleichung wesentlich vereinfachen, indem wir $x+3 = z$, also $x = z-3$ setzen. Wir erhalten die äquivalenten Gleichungen

$$(z-3)(z-1)(z+1)(z+3) = (z-2)z^2(z+2), \quad (2)$$
$$(z^2-9)(z^2-1) = (z^2-4)z^2, \quad (3)$$
$$z^4 - 10z^2 + 9 = z^4 - 4z^2, \quad (4)$$
$$6z^2 = 9, \quad (5)$$
$$z^2 = \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Nun hat die Gleichung (6) genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} \text{ und } z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Da die Gleichungen (2) bis (6) äquivalent sind und da $x = z-3$ gilt, hat die Gleichung (1) ebenfalls genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 3 \text{ und } x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{6} - 3.$$

Zunächst geben wir noch drei Aufgaben für das erste „öffentliche Auftreten":

▲ A 13 Man hat für eine Rechnung Neuner- und Elferprobe gemacht, und beide sind „aufgegangen". Steht jetzt mit Sicherheit fest, daß die Rechnung richtig ist?

▲ A 14 Gesucht ist eine vierstellige Zahl aus aufeinanderfolgenden Ziffern, die bei Vertauschen der ersten beiden Ziffern eine Quadratzahl ergibt.

▲ A 15 Eine gewisse natürliche Zahl schreibt sich im Dezimalsystem mit Hilfe von 3 000 Einsen und einer gewissen Anzahl Nullen. Kann sie eine Quadratzahl sein?

Lösungen zu A 1 bis A 15:

1 Peter habe p Streichhölzer in die Hand genommen, sein Vater v. Dann sind übriggeblieben $60 - p - v$ Streichhölzer, wobei Peter nur v unbekannt ist. Je nachdem, ob p gerade oder ungerade ist, ist auch $60 - p$ gerade oder ungerade, weil 60 selbst eine gerade Zahl ist. Ob nun n gerade oder ungerade ist, läßt sich angeben, wenn man weiß, ob v gerade oder ungerade ist:

p	gerade	gerade	ungerade	ungerade
v	gerade	ungerade	gerade	ungerade
n	gerade	ungerade	ungerade	gerade

2 Die Anzahl der Streichhölzer in der linken Hand sei l, die in der rechten r. Dann ist zu bilden $2l + 3r$, und dafür gilt

$2l + 3r$ ist
{ gerade, falls l ungerade und r gerade
{ ungerade, falls l gerade und r ungerade.

3 $z = 2^n + 2^{n+1} = 2^n(1+2) = 2^n \cdot 3$
$= 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 3 = 2^{n-1} \cdot 6$

Wegen $n \geqq 1$ ist 2^{n-1} eine natürliche Zahl k, also $z = k \cdot 6$, d. h. z ist durch 6 teilbar.

4 Es ist $9 \equiv 9\ (100)$; $9^2 \equiv 81\ (100)$;
$9^3 \equiv 29\ (100)$; $9^4 \equiv 61\ (100)$; $9^5 \equiv 49\ (100)$;
$9^6 \equiv 41\ (100)$; $9^7 \equiv 69\ (100)$; $9^8 \equiv 21\ (100)$;
$9^9 \equiv 89\ (100)$; $9^{10} \equiv 1\ (100)$; $9^{11} \equiv 9\ (100)$,
und nun wiederholen sich die Reste,
d. h. es gilt
(*) $9^{10k+i} \equiv 9^i\ (100)$ für alle natürlichen i und k.
Üblicherweise faßt man 9^{9^9} auf als $9^{(9^9)}$. Wegen $9^9 \equiv 9\ (10)$ und (*) gilt $9^{(9^9)} \equiv 9^9\ (100)$. Also endet $9^{(9^9)}$ auf die Ziffern 89. Betrachtet man hingegen $(9^9)^9 = 9^{9 \cdot 9} = 9^{81}$, so ist wegen (*) $9^{81} \equiv 9^1\ (100)$. Also endet $(9^9)^9$ auf 09.

5 Bei jedem Zerschneiden eines Papierbogens in 4 Teile wird die Anzahl der Bögen um 3 vermehrt, so daß am Schluß $s = 20 + 3k$ (mit natürlichem k) Bögen entstanden sein müssen. Nun ist $s \equiv 20$ (3), also $s \equiv 2$ (3). Andererseits ist aber $451 \equiv 1$ (3). Also kann die Gesamtzahl s der Bögen niemals 451 sein.

6

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

7 a) $m = 7$; Restklasse ${}^7R_4$

b) Gewinnzahlen sind die Zahlen der Restklassen ${}^7R_5$

c) Bei $1 \leqq s \leqq 5$ ist $m = 6$

$z = 50$: Die Gewinnzahlen sind wegen $49 \equiv 1$ (6) die Zahlen aus ${}^6R_1$ (Wer 50 oder mehr sagen muß, verliert.) bzw. wegen $50 \equiv 2$ (6) die Zahlen aus ${}^6R_2$ (Wer 50 sagen kann, gewinnt.).

$z = 75$: Gewinnzahlen aus ${}^6R_2$ bzw. ${}^6R_3$

$z = 100$: Gewinnzahlen aus ${}^6R_3$ bzw. ${}^6R_4$

Bei $1 \leqq s \leqq 10$ ist $m = 11$

$z = 50$: Gewinnzahlen aus ${}^{11}R_5$ bzw. ${}^{11}R_6$

$z = 75$: Gewinnzahlen aus ${}^{11}R_8$ bzw. ${}^{11}R_9$

$z = 100$: Gewinnzahlen aus ${}^{11}R_0$ bzw. ${}^{11}R_1$

Bei $1 \leqq s \leqq 12$ ist $m = 13$

$z = 50$: Gewinnzahlen aus ${}^{13}R_{10}$ bzw. ${}^{13}R_{11}$

$z = 75$: Gewinnzahlen aus ${}^{13}R_9$ bzw. ${}^{13}R_{10}$

$z = 100$: Gewinnzahlen aus ${}^{13}R_8$ bzw. ${}^{13}R_9$

d) Der Fall $1 \leqq s \leqq 10$, $z = 100$, wobei derjenige verliert, der zuerst 100 oder mehr sagen muß.

e) ja, denn der Nachziehende ist nur in folgenden zwei Fällen im Vorteil: 1. $z \equiv 1$ (m) und 2. $z \equiv 0$ (m) und wer zuerst z erreicht, gewinnt. In beiden Fällen sind die Gewinnzahlen die Zahlen der Restklasse ${}^mR_0$.

8 a) Gewinnzahlen sind die Vielfachen von 7, also die Zahlen aus ${}^7R_0$, und demzufolge ist der Nachziehende im Vorteil. Da bei einem normalen Spielwürfel die Augenzahlen auf einander gegenüberliegenden Seiten zusammen 7 ergeben, braucht er nur nach jedem Setzen des Anziehenden selbst zu setzen, indem er den Würfel umdreht. Freilich ist es unklug, gleich von Anfang an so zu verfahren und damit dem Spielpartner sofort den Kniff zu verraten. Je nachdem, wie weit man das Vorausdenken des Gegners einschätzt, wird man die Folge der Gewinnzahlen erst früher oder später ansteuern. Dabei muß man freilich das Risiko in Kauf nehmen, daß der Spielpartner den Sachverhalt durchschaut und selbst die Gewinnzahlenfolge früher „beschlagnahmt".
b) Das Spiel ist bei beiden Versionen für den Anziehenden günstig. Er gewinnt mit Sicherheit, falls er stets so viel Hölzchen nimmt, daß sich zusammen mit den im vorangegangenen Zug vom Nachziehenden genommenen Hölzchen 4 ergeben. Beginnen muß er mit 2 Hölzchen, falls derjenige verliert, der das letzte Hölzchen nehmen muß, andernfalls mit 3 Hölzchen.

9 Weil für jede ganze Zahl a gilt $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. In den Restklassen modulo m ist neutrales Element der Multiplikation die Restklasse ${}^mR_1 = \bar{1}$, denn für jede Restklasse a gilt $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{a} = \bar{a}$.

10 Das ist nicht möglich. Setzt man z. B. im Restklassenring modulo 7 fest, daß $\bar{a} < \bar{b}$ genau dann gelten soll, wenn $a < b$ ist, so gilt nicht etwa $\bar{a} + \bar{c} < \bar{b} + \bar{c}$ für jede Restklasse $\bar{c}$: Es wäre dann z. B. $\bar{2} < \bar{5}$, aber wegen $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}$ und $\bar{5} + \bar{4} = \bar{2}$ würde gelten $\bar{2} + \bar{4} > \bar{5} + \bar{4}$. Man sieht sofort, daß auch eine andere Festsetzung nicht zum Ziel führt.

11 Nicht lösbar im Restklassenring modulo 10 sind (außer allen Divisionen durch $\bar{0}$) folgende Divisionsaufgaben:
$\bar{1} : \bar{2}$; $\bar{3} : \bar{2}$; $\bar{5} : \bar{2}$; $\bar{7} : \bar{2}$; $\bar{9} : \bar{2}$; $\bar{1} : \bar{4}$; $\bar{3} : \bar{4}$; $\bar{5} : \bar{4}$; $\bar{7} : \bar{4}$; $\bar{9} : \bar{4}$; $\bar{1} : \bar{5}$; $\bar{2} : \bar{5}$; $\bar{3} : \bar{5}$; $\bar{4} : \bar{5}$; $\bar{6} : \bar{5}$; $\bar{7} : \bar{5}$; $\bar{8} : \bar{5}$; $\bar{9} : \bar{5}$; $\bar{1} : \bar{6}$; $\bar{3} : \bar{6}$; $\bar{5} : \bar{6}$; $\bar{7} : \bar{6}$; $\bar{9} : \bar{6}$; $\bar{1} : \bar{8}$; $\bar{3} : \bar{8}$; $\bar{5} : \bar{8}$; $\bar{7} : \bar{8}$; $\bar{9} : \bar{8}$
$\bar{a} : \bar{b}$ $(b \not\equiv 0)$ ist genau dann nicht lösbar, wenn b einen Primfaktor p von 10 (also 2 oder 5) als Teiler hat und $a \not\equiv 0$ (p) gilt.

12 $a = 34$; $b = 89$; $c = 46$; $d = 463$

13 nein; man kann sich noch um Vielfache von $9 \cdot 11 = 99$ verrechnet haben.

14 In Frage kommen die Zahlen 1 234, 2 345, 3 456, 4 567, 5 678, 6 789. Bei Zuhilfenahme einer Quadrattafel ist die Aufgabe natürlich sofort gelöst. Ohne eine solche Tafel führt folgende Überlegung schnell zum Ziel:
Die gesuchte Zahl habe die Dezimaldarstellung $(abcd)$ mit $1 \leqq a \leqq 6$, $b = a + 1$, $c = a + 2$, $d = a + 3$. Vertauschen der ersten und zweiten Ziffer liefert dann $z = (bacd)$, also

$$z = 1\,000b + 100a + 10c + d$$
$$= 1\,000a + 1\,000 + 100a + 10a + 20 + a + 3$$
$$= 1\,111a + 1\,023.$$

Wegen $1\,111a \equiv 0$ (11) und $1\,023 \equiv 0$ (11) folgt daraus $z \equiv 0$ (11), also auch $\sqrt{z} \equiv 0$ (11). Wegen $2\,134 \leqq z \leqq 7\,689$ kommen für $\sqrt{z}$ nur die Zahlen 55, 66, 77 in Betracht. Daß 55^2 und 77^2 ausscheiden, kann man sogar ohne Quadrieren sehen: Wegen $77^2 \equiv 9$ (10) einerseits und $77^2 < 7\,689$ andererseits scheidet 77^2 aus, wegen $3\,245 \equiv 0$ (5), aber $3\,245 \not\equiv 0$ (25), und $55^2 \not\equiv 5$ (10) bleibt nur 66^2 übrig. Es ist $66^2 = 4\,356$, die gesuchte Zahl mithin 3 456.

15 Die Quersumme der Zahl ist 300. Da 300 durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist, ist die Zahl selbst auch durch 3, aber nicht durch 9 teilbar, folglich keine Quadratzahl.

Lösungen zu: Aus ungarischen Mathematik-Lehrbüchern

■ Aus $5 - 3 = 2$ und $120 : 2 = 60$ folgt, daß 1 Meter dieses Stoffes 60 Forint kostet. Demnach hatte der erste Kunde 180 Ft, der zweite 300 Ft und der dritte 540 Ft zu zahlen.

■ Aus $957 + 387 = 1\,344$ folgt, daß es 1 344 Mädchen waren. Aus $957 + 1\,344 = 2\,301$ folgt, daß insgesamt 2 301 Schüler dem Durchgang angehörten. Aus $2\,301 \cdot 435 = 1\,000\,935$ folgt, daß als Ferienzuschuß 1 000 935 Forint aufgewandt wurden.

■ Eine Glaskugel möge x Filler kosten; dann gilt $20x = 30(x - 10)$. Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 30$. Eine Glaskugel kostete demnach 30 Filler, eine Tonkugel 20 Filler. Karl besaß 600 Filler beim Einkauf.

■ Der Personenzug hat $3{,}4 \cdot 60$ km, also 204 km zurückgelegt; der Güterzug hingegen hat $6 \cdot 30{,}4$ km, also nur 182,4 km zurückgelegt.

■ Angenommen, diese Behauptung wäre falsch, dann könnte einer dieser 15 verschiedenen Filme in höchstens 4 verschiedenen Filmtheatern vorgeführt werden, also alle 15 Filme in höchstens $15 \cdot 4 = 60$ Filmtheatern. Das würde aber der Voraussetzung widersprechen, wonach diese 15 Filme in 70 Filmtheatern gezeigt werden.

■ Die größere der beiden gesuchten Zahlen sei x, dann lautet die kleinere $410 - x$ und es gilt die Beziehung $(x - 10) : (410 - x) = 7$. Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 360$. Es handelt sich also um die Zahlen 360 und 50.

■ Oberfläche der Erde:
$A_0 = 4\pi \cdot 6\,400^2\ \text{km}^2 \approx 514\,457\,600\ \text{km}^2$
Oberfläche der Sowjetunion:

$$A_s = \frac{1}{20} \quad A_0 \approx 25\,700\,000\ \text{km}^2$$
$$\left(\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{6} A_0 = \frac{1}{20} A_0\right)$$

■ Wir lösen diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

n	$2n$	$2n-1$	k
19	38	37	91
28	56	55	82
37	74	73	73
46	92	91	64
55	110	109	55
64	128	127	46
73	146	145	37
82	164	163	28
91	182	181	19

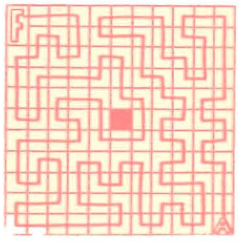
In der Tabelle sei k die Zahl, die aus der Zahl n durch Vertauschen der Ziffern hervorgeht. Es gibt genau eine solche Zahl, nämlich 37.

Lösungen zu alpha-heiter

Die merkwürdige Waage

4 Kegel = 1 Würfel + 1 Kugel
(ausführliche Lösung siehe Heft 4/70)

Fortuna

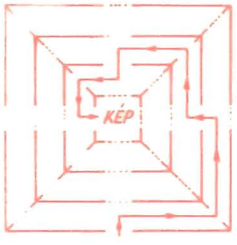


Knobelei im Strandbad

19	5	15	10	16
8	22	11	21	3
6	20	12	9	18
7	17	14	23	4
25	1	13	2	24

Detektive gesucht!

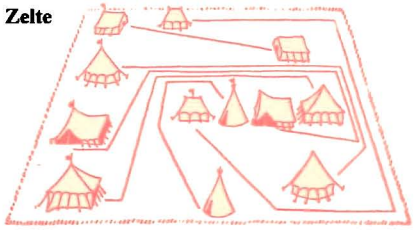
Mit Schlüssel Nr. 2, den Weg zum mittleren Raum zeigt die Abb.



Aus „Füles"

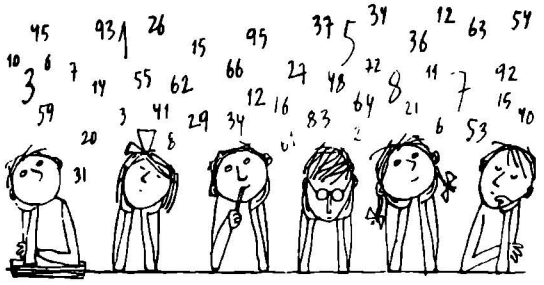
586 140
586 950
+972 048
2 145 138

Zelte



In freien Stunden alpha heiter

(Ungarischer Bilderbogen)



Die merkwürdige Waage

Auf dem Bild ist die bekannte Balkenwaage zu sehen. In den Waagschalen befinden sich aber keine Wägestücke. Vielerlei geometrische Körper — Kugel, Würfel, Zylinder und Kegel — halten einander im Gleichgewicht. Die ersten drei Abbildungen zeigen Körper im Gleichgewicht. Auf der vierten Skizze haben wir die das Gleichgewicht haltenden Körper „vergessen".

Mit wieviel und mit welchen Körpern kann man mit den im vierten Bild in der linken Waagschale zu sehenden vier Kegeln so das Gleichgewicht halten, daß möglichst wenig Körper verwendet werden?

Fortuna

Fortuna ist ein Wort aus der lateinischen Sprache, das auf deutsch *Glück* bedeutet. Das vorliegende Amulett ist folgendermaßen verfertigt: Man ging von dem in

F	O	R	T	A	F	O	R	U	N	A
	O	F	U	N	U	T	T	R	F	
T	R	A	N	A	F	R	U	N	O	O
U	R	T	U	N	O	O	F	A	F	R
N	O	U	T	R	R	T	A	N	U	T
A	F	N	A	O		U	T	U	N	A
T	R	O	F	F	A	N	R	O	O	F
U	F	O	R	T	A	F	A	F	R	T
N	A	R	O	U	N	O	N	U	T	U
N	U	T	F	A	N	R	N	A	R	N
A	F	O	R	T	U	T	U	F	O	A

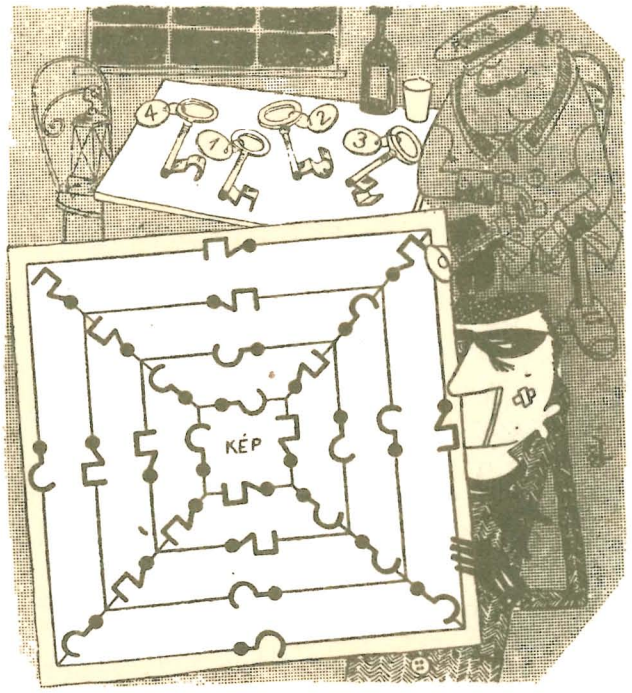
der linken oberen Ecke sichtbaren Buchstaben **F** aus und mußte so zu dem in der rechten unteren Ecke gezeichneten Buchstaben **A** gelangen, daß dabei alle kleinen Quadrate der Abbildung durchlaufen werden, aber nur einmal. Unterwegs darf man jedoch nur solche Buchstaben berühren, die nacheinander das Wort Fortuna bzw. seine Wiederholung ergeben. (Dem Leser garantieren wir nicht, daß er im Lotto einen Fünfer erzielt!)

Knobelei im Strandbad

In den in den Sand gezeichneten Ringen müssen alle Zahlen von 1 bis 25 vorkommen. Auf dem Kreisradius und längs der Peripherie der 5 Kreise soll die Summe der Zahlen stets 65 sein. Welche Zahlen muß man in die leer gelassenen Ringe eintragen, wenn man beiden Forderungen genügen will?

Detektive gesucht!

Ein Dieb fertigt sich einen Lageplan eines Gebäudes an, in dem Kunstschätze verwahrt werden. Im innersten Raum (KÉP), der von Gängen umgeben ist, befindet sich ein Gemälde von hohem Wert. Auf dem Tisch neben dem schlafenden Pförtner liegen vier Schlüssel. Der Dieb weiß, daß er sich nur einen von den vier Schlüsseln zu verschaffen braucht, um dorthin zu gelangen, wo das Gemälde ist.



Auch unsere Leser sollen herausfinden, mit welchem der vier Schlüssel man diejenigen Türen öffnen kann, durch die man schließlich zum mittleren Raum gelangen kann.

Sieben

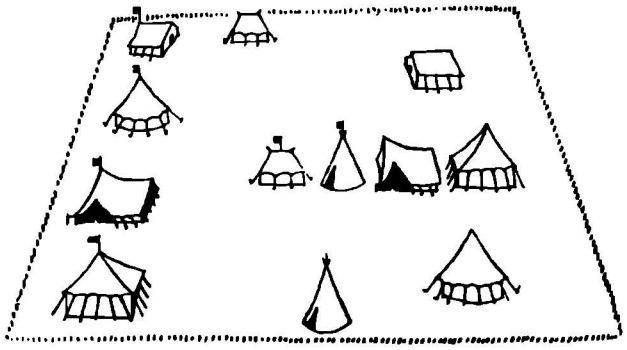
Paust die sechs Teile (auf der linken Seite der Abb.) ab, schneidet sie aus und setzt aus ihnen eine nach dem Muster der Abbildung rechts gezeigten *Sieben* zusammen.

Aus Füles

Eine der beliebtesten ungarischen Rätselzeitschriften ist „Füles". Aus ihr haben wir das folgende Kryptogramm ausgeschnitten (Schüler + Lehrer + Schule = Kultur). Jeder Buchstabe ist durch eine Grundziffer zu ersetzen, so daß eine (im dekadischen System) richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Die Zuordnung zwischen Buchstaben und Ziffern soll eindeutig sein; d. h. gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Ziffern, verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

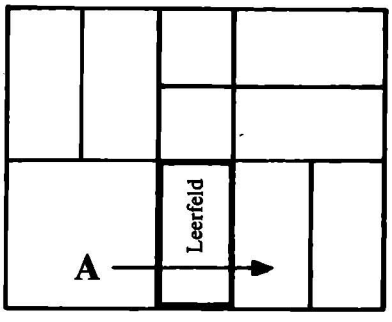
Zelte

Auf dem Bilde sind sechsmal je zwei Zelte gleicher Form zu sehen. Man verbinde die Zelte gleicher Form so je durch eine Linie, daß diese sich nicht kreuzen.



Geschicklichkeitsspiel

Ungarische Mathematik-Methodiker übergaben dem Chefredakteur von *alpha* ein Unterhaltungsspiel für die Heimfahrt von Budapest nach Leipzig. Es ist ein Kästchen mit 9 geometrischen Figuren aus Plaste. Das mit *A* gekennzeichnete Quadrat ist so zu verschieben, daß es in die rechte untere Ecke zu liegen kommt. Dem Leser ist es überlassen, weitere eigene Spielvarianten zu erdenken!



Mathematik-Kalender

Juli 1970

Mi 1 * 1646 Gottfried Wilhelm Leibniz, studierte in Leipzig seit 1661 Philosophie, seit 1664 die Rechte, promoviert 1667 in Altdorf. Er ist trotz unzureichender Fachausbildung mathematisch interessiert: Infinitesimalrechnung, Vorführung seiner Rechenmaschine in London (1673) († 14. 11. 1716)

Do 2

Fr 3 * 1866 Henry Frederik Baker († 17. 3. 1956)

Sa 4 Beginn der Sommerferien

So 5 † 1932 René Baire. Wirkte in Frankreich, darf als einer der Begründer der modernen Theorie der reellen Funktionen bezeichnet werden (* 21. 1. 1874)

Mo 6 * 1436 Johannes Regiomontanus (eigentl. Müller). R. ging 1448 an die Univ. Leipzig (neuart. Ber. einer Planetentafel) dann 1450 nach Wien (Hofastronom, Kalenderreformer † 1476)

Di 7

Mi 8 * 1629 Christiaan Huygens. Widerlegt die zeitgen. Ansicht, die Parabel sei zugleich Kettenlinie, beschäftigt sich mit Quadratur, Logarithmen, Kurvendiskussionen († 1695)

Do 9

Fr 10 1970 Beginn der XII. Internationalen Mathematikolympiade in der VR Ungarn

Sa 11

So 12

Mo 13

Di 14

Mi 15

Do 16 † 1931 Wladyslaw Bartkiewicz. Arbeitsgebiete: Mathematische Statistik und Versicherungsmathematik
† 1801 Julius Plücker. Wirkte in Bonn. Neuaufbau der analytischen Geometrie

Fr 17 † 1912 Henri Poincaré (* 29. 4. 1854)

Sa 18

So 19

Mo 20 † 1866 Bernhard Riemann. Wirkte in Göttingen. Seine Schöpfungen, die Riemannsche Fläche und die Riemannsche Geometrie zählen zu den größten Errungenschaften mathematischen Denkens. (* 17. 9. 1826)
† 1922 Andrei Andrejewitsch Markow (* 14. 6. 1856)

Di 21

Mi 22 * 1784 Friedrich Wilhelm Bessel, Astronom († 17. 3. 1846)
Ende der XII. IMO

Do 23

Fr 24

Sa 25

So 26 † 1941 Kazimierz Bartel. Wirkte in Lwow. Arbeiten üb. Darst. Geometrie und malerische Perspektive.

Mo 27

Di 28

Mi 29

Do 30

Fr 31

August 1970

Sa 1

So 2

Mo 3 * 1905 Sir William Hamilton. Wirkte in Dublin. Bed. Beiträge zur Algebra.

Di 4 † 1874 Otto Hesse (* 22. 4. 1811)

Mi 5

Do 6

Fr 7

Sa 8

So 9

Mo 10

Di 11

Mi 12

Do 13

Fr 14 † 1886 Edmond Laguerre. Wirkte in Paris. Beiträge z. höheren Geometrie (* 9. 4. 1834)

Sa 15

So 16

Mo 17

Di 18

Mi 19

Do 20

Fr 21 * 1789 Augustin Cauchy († 23. 5. 1857)

Sa 22

So 23 * 1829 Moritz Cantor. († 10. 4. 1920)

Mo 24

Di 25 * 1802 Nils Henrik Abel. († 4. 4. 1829)

Mi 26

Do 27 * 1858 Guiseppe Peano († 20. 4. 1932)

Fr 28

Sa 29 † 1937 Otto Hölder. Wirkte in Leipzig. Grundlegende Arbeiten zur Algebra (* 22. 12. 1859)

So 30 * 1856 Carl Runge. Wirkte in Berlin, Hannover und Göttingen. Grundlegende Arbeiten zur numerischen Anw. math. Methoden

Mo 31 † 1945 Stefan Banach (* 30. 3. 1892)
* 1821 Hermann v. Helmholtz († 8. 9. 1894)

Literatur

Ungarische Literatur in deutscher Sprache

Karla Lukács

Wie groß, wie spät, wie weit?

Kinderbuchverlag Berlin/Corvina-Verlag Budapest 1970
40 Seiten, zahlreiche Illustrationen, 5,80 M (ab 4. Klasse)
Aus dem Inhaltsverzeichnis: Ein wenig Geschichte · Wirrnis und Ordnung · Milch in der Kürbisschale? Wie entstanden die Zeiteinheiten? Die Sonne · Wie lang ist eigentlich ein Tag? Stunde, Minute, Sekunde · Das Wetter · Das Lichtjahr · Tabelle der Maßeinheiten

Gyula Mákassy

Zwei plus zwei gleich vier

Kinderbuchverlag Berlin 1970
40 Seiten, 5,40 M (ab 3. Klasse)
Dieses Kinderbuch führt den jungen Leser durch mehrere 10 000 Jahre Menschheitsgeschichte, in denen mit der Entwicklung der Kultur auch die Wissenschaft Mathematik geboren wurde. Die humorvollen Illustrationen in Verbindung mit einem knappen Text werden Freude und Interesse an der Mathematik wecken.

T. Varga

Mathematische Logik für Anfänger
Aussagenlogik

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1964
Bestell-Nr. 001 804, 6,40 M
(siehe unseren Beitrag auf Seite 64)
(ab Klasse 9)

István Szava

Der Gigant von Syrakus
Ein Archimedes-Roman

Prisma-Verlag, Berlin, 9,40 M (ab Klasse 8)
Archimedes war einer der berühmtesten Wissenschaftler der Antike. Seinen Namen und seine Gesetze kennt jedes Schulkind. Aber weißt Du auch, wie er den Auftrieb schwimmender Körper, den Flächeninhalt des Kreises, den Rauminhalt der Kugel, des Zylinders und andere Körper berechnete? Kennst Du die Wasserschraube?
Ist Dir bekannt, daß Archimedes auch ein hervorragender Feldherr war? Das Buch ist ein interessanter Roman, der uns mit dem Altertum auf spannende, unterhaltsame und lehrreiche Art bekannt macht.

J. Gy. Obádovics

Taschenbuch der Elementarmathematik
Mit praktischen Anwendungen

G. Teubner – Verlagsgesellschaft Leipzig 1962
868 S., zahlr. Abb., 12,— M (ab Klasse 7)
Das Buch ist ein umfassendes Nachschlagewerk für Schüler der Mittel- und Oberstufe

Alfréd Rényi

Briefe über die Wahrscheinlichkeit

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969
94 Seiten, 7,80 M (ab Klasse 10)

Rózsa Péter

Das Spiel mit dem Unendlichen

Teubner, Leipzig
278 S., zahlr. Abb., 9,80 M (ab Klasse 9)
Leseprobe: *Der Zauberlehrling*
Der Begriff der Teilbarkeit birgt noch so manches Interessante, womit es sich lohnt zu spielen. Dazu gehört z. B. die Entdeckung, daß es *befreundete Zahlen* gibt.
Zwei Zahlen sind befreundet, wenn die Summe der echten Teiler der einen die andere Zahl ergibt und umgekehrt. Die Zahl selbst wird nicht zu ihren echten Teilern gerechnet. (Die echten Teiler von 10 z. B. sind 1, 2 und 5.) Solche befreundete Zahlen sind z. B. 220 und 284, denn

$$220 = \begin{cases} 1 \cdot 220 \\ 2 \cdot 110 \\ 4 \cdot 55 \\ 5 \cdot 44 \\ 10 \cdot 22 \\ 11 \cdot 20 \end{cases} \quad \text{und} \quad 284 = \begin{cases} 1 \cdot 284 \\ 2 \cdot 142 \\ 4 \cdot 71 ; \end{cases}$$

die Summe der echten Teiler von 220 ist also:
$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$.
und die Summe der echten Teiler von 284 ist:
$1+2+4+71+142 = 220$.
Die Alten schrieben diesen Zahlen gewisse magische Eigenschaften zu, und deshalb ging man auf die Suche nach vollkommenen Zahlen....

Hochschulliteratur

Wir danken an dieser Stelle Frau *Ziegler*, Verantw. Lektor für Mathematik BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Herrn *Boll*, Cheflektor im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, sowie den Werbeabteilungen beider Verlage für die langjährige Beratung und umfassende Unterstützung der Redaktion *alpha*, wodurch es uns ermöglicht wurde, verdienstvollen Mitarbeitern unserer Zeitschrift als Anerkennung einige der genannten Hochschulbücher zu überreichen.

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

J. Aczél: Ein Blick auf Funktionalgleichungen und ihre Anwendung
J. Aczél: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen
P. Turán: Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, zur Erinnerung an Edmund Landau
G. Alexits: Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen
G. Freud: Orthogonale Probleme
B. Krekó: Lehrbuch der linearen Optimierung
A. Rényi: Wahrscheinlichkeitsrechnung
F. Riesz / B. Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis
E. T. Schmidt: Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen
J. Surányi: Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe
L. Rédei: Lückenhafte Polynome (in Vorbereitung)
I. Pál: Darstellende Geometrie in Raumbildern

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

A. Császár: Grundlagen der allgemeinen Topologie
Fejes Tóth: Reguläre Figuren
A. Kertész: Vorlesungen über Artinsche Ringe
L. Rédei: Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein
L. Rédei: Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen
G. Szász: Einführung in die Verbandstheorie
G. Hajós: Einführung in die Geometrie

B. A. Kordemski

Köpfchen, Köpfchen

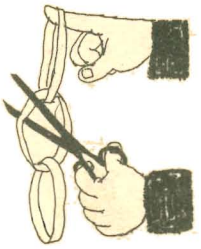
8. Auflage 1970, 332 Seiten,
493 zweifarbige Zeichnungen,
Ganzgewebe 12,– M.

Freude am Denksport ist eine Vorstufe mathematischer Arbeit. Aus allen dafür geeigneten Gebieten, Zahlenrätseln, Verschiebungsaufgaben, Gesellschaftsspielen, Bewegungsaufgaben, Zerlegungen und Zusammensetzungen geometrischer Figuren, planimetrischen und arithmetrischen Besonderheiten, magischen Quadraten und vielen anderen hat der Autor 323 Aufgaben zusammengestellt, die von einfachsten Denkübungen bis zu mittelschweren mathematischen Problemen reichen. Die meisten Beispiele sind mit ein- oder zweifarbigen Skizzen versehen. Im Anhang sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen gegeben.

Übergeben Sie die Bestellung bitte Ihrer Buchhandlung!

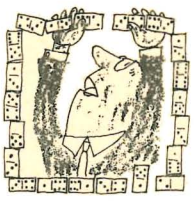
URANIA-VERLAG

Leipzig · Jena · Berlin
Verlag für populärwissenschaftliche Literatur
701 Leipzig, PF 969



Wer hat Geschick zum Konstruieren?

1. Wie muß man eine Kette zu drei Gliedern aus drei Streifen bilden, damit beim Durchschneiden eines einzigen beliebigen Gliedes die ganze Kette in drei Teile zerfällt? Die übliche Verkettung, die in der Abb. dargestellt ist, eignet sich offensichtlich nicht dazu, weil die Kette in diesem Falle nur dann in drei Teile zerfällt, wenn das mittlere Glied durchschnitten wird und nicht, wenn ein beliebiges durchschnitten wird, wie die Bedingung fordert.
2. Wie muß man eine Kette zu fünf Gliedern aus fünf Streifen bilden, damit sie in fünf Teile zerfällt, wenn man ein bestimmtes Glied durchschneidet?
3. Wie muß man eine Kette zu fünf Gliedern aus fünf Streifen bilden, damit beim Durchschneiden eines beliebigen Gliedes die ganze Kette in die fünf Teile zerfällt?



Der Rahmen

Legt die Dominosteine nach der üblichen Spielregel aneinander, so daß ein quadratischer Rahmen entsteht. Verwendet dabei alle 28 Steine und ordnet sie so, daß in jeder Seite des Quadrats die Summe der Augen 44 ist!

Mit gesundem Menschenverstand

Eine Studentin bereitet sich auf ihren „Probeunterricht" in Mathematik in der 8. Klasse vor.
„Sag mir doch, welche Aufgabe du deinen Schülern stellen willst?" fragte interessiert ihr Vater, ein ausgezeichneter Maschinist. „Das Alter eines Kindes, vermehrt um 3 Jahre, ergibt eine Zahl, aus der sich genau die Quadratwurzel ziehen läßt, diese Wurzel ergibt das um 3 Jahre verminderte Alter des Kindes. Wie alt ist das Kind?"
„Nun eine ganz gute Aufgabe für mündliche Übungen. Aufgeweckte Kinder lösen sie in einer Minute."