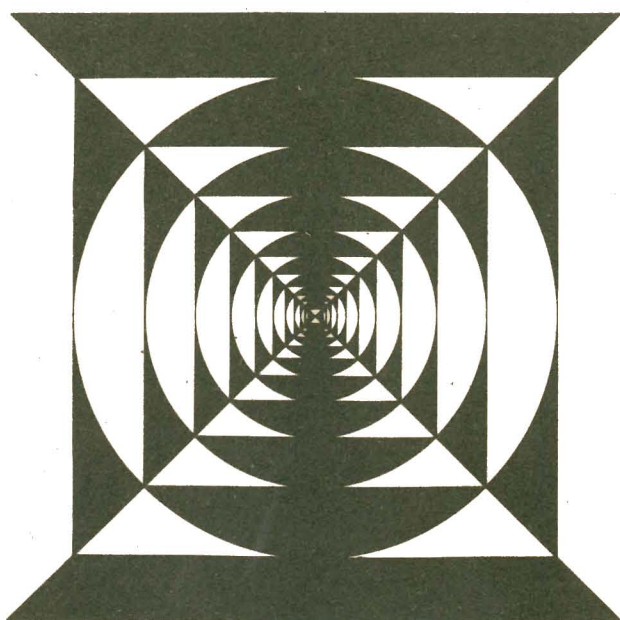
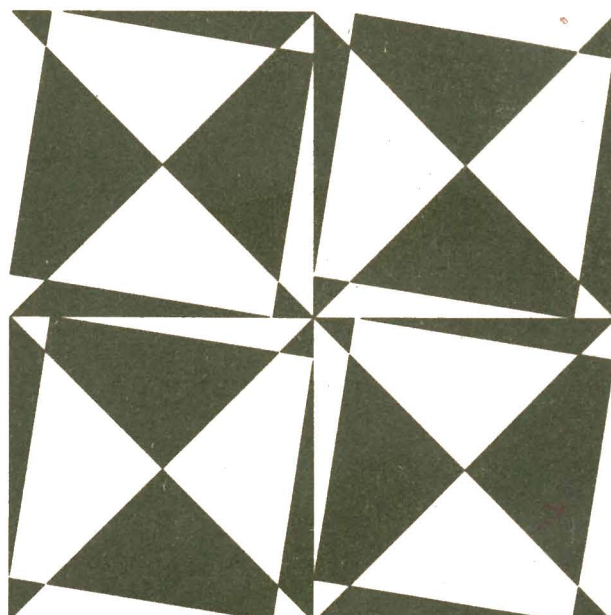
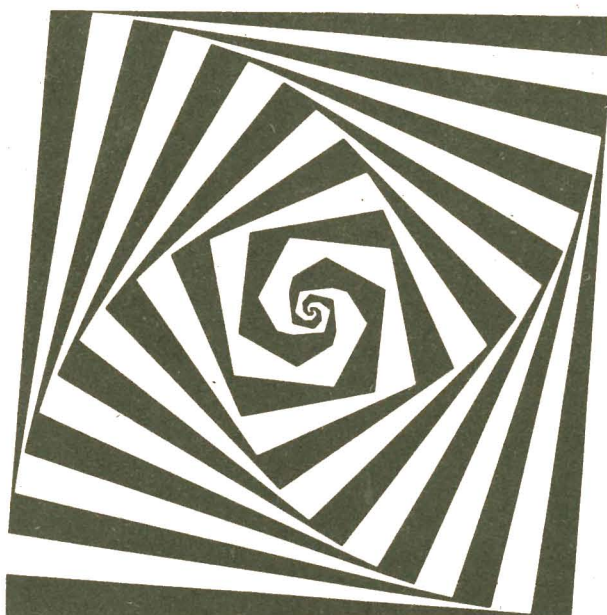


**Mathematische
Schülerzeitschrift**

alpha



**Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
21. Jahrgang 1987
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395**



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Anschrift des Verlags:

Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086

Anschrift der Redaktion:

PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:

OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn.

G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr.

W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat.

J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent

Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv P. Schreiber, Stralsund (S. 25); Zentralbild/ADN (S. 29); Eigenfoto H.-J. Treder (S. 31); Rolf F. Müller, Gera (S. 34)

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage aus der math. Schülerzeitschrift *Investigator*, London, Autor: Katharine Evans

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Artikelnummer (EDV) 128

ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 9. Dezember 1986

Auslieferungstermin: 15. April 1987



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 25 Vom Schicksal eines mathematischen Problems [9]¹
Wie aus dem Fermatschen Problem das Steiner-Weber-Problem wurde
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
- 27 *alpha*-Wettbewerb 1985/86 [5]
Abzeichen in Gold
- 28 Die Mathematik als Produktivkraft, Teil 2 [8]
Gedanken nach dem XI. Parteitag der SED
Prof. Dr. G. Laßner, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig
- 30 Zur Lösung von Zahlenrätseln mit graphischen Hilfsmitteln [5]
Dr. G. Scheithauer, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
- 31 Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Dr. h. c. mult.
Hans-Jürgen Treder [9]
Direktor des *Einstein-Laboratoriums*, Potsdam-Babelsberg
- 31 Forschungsstätte mit großen Aufgaben [8]
Dr. R. Schimming, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität* Greifswald
- 32 Symmetrie im Raum, Teil 1 [6]
Dr. E. Quaisser/Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam
- 33 Rechenbäume [7]
Dr. L. Flade, Sektion Mathematik der *M.-Luther-Universität* Halle
- 33 Sprachecke [7]
H. Begander/Dr. C. P. Helmholz/J. Lehmann (alle Leipzig)
- 34 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Aufgaben zu Mathematik, Naturwissenschaft und Technik
- 37 XXVI. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [5]
Aufgaben der Kreisolympiade (12. 11. 1986)
- 39 Anordnung von Schachfiguren [5]
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 40 Einige Bemerkungen über Extremalprobleme, Teil 2 [9]
Prof. Dr. Wildenhain, Sektion Mathematik der *W.-Pieck-Universität* Rostock
- 42 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 44 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt
Mini-BASIC für *alpha*-Leser, Teil 4 [6]
Dr. L. Flade/Dr. M. Pruzina, Sektion Mathematik der *M.-Luther-Universität* Halle
- 45 Lösungen [5]
- IV. U.-Seite: Volumen gesucht [8]
Aus: *Pythagoras*, Groningen

¹ bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

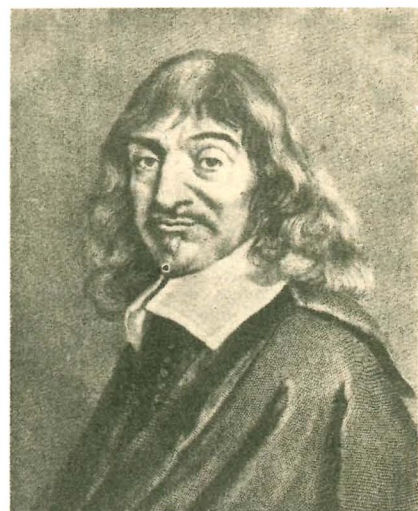
Vom Schicksal eines mathematischen Problems

Wie aus dem Fermatschen Problem
das Steiner-Weber-Problem wurde

Aufgaben, bei denen in einer Menge M von Objekten oder Situationen ein Element x_0 gesucht wird, für das eine gewisse auf M definierte Funktion f den größten oder den kleinsten Wert annimmt, spielen in der heutigen, stark auf ökonomisches Denken gerichteten Zeit eine hervorragende Rolle unter den Anwendungen der Mathematik. Das war jedoch nicht immer so. Bevor sich am Ende des 17. Jahrhunderts die Differentialrechnung als erstes mathematisches Werkzeug zur Lösung solcher Aufgaben herausbilden konnte, mußte das Interesse der Mathematiker durch viele anregende konkrete *Extremwertaufgaben* in die neue Denkrichtung gelenkt werden. Eine größere Zahl derartiger Aufgaben geht auf den französischen Mathematiker *Pierre de Fermat* (1601 bis 1665) zurück, der auch als erster eine kalkülmäßige Methode zur Lösung von Extremwertaufgaben entwickelte, welche in sich den Keim der rund 50 Jahre später von G. W. Leibniz (1646 bis 1716) und I. Newton (1643 bis 1727) geschaffenen Differentialrechnung trug. Fermat, der eigentlich Jurist war und die Mathematik nur als Liebhaberei (aber mit großem Erfolg) betrieb, setzte seine Aufgaben oft durch Briefe in Umlauf, so auch um 1644 die folgende schöne Aufgabe:

Zu drei gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3 ist derjenige Punkt P_0 zu finden, für den die Summe $\overline{P_0P_1} + \overline{P_0P_2} + \overline{P_0P_3}$ der Abstände am kleinsten wird.

René Descartes, 1596 bis 1650



(Ist M eine Ebene, die die Punkte P_1, P_2, P_3 enthält, so ist jedem Punkt P von M die Abstandssumme $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3}$ als $f(P)$ zugeordnet. Die Fermatsche Aufgabe ordnet sich also wirklich in den oben skizzierten allgemeinen Begriff der Extremwertaufgabe ein und ist sogleich ein Beispiel dafür, daß der Definitionsbereich einer betrachteten Funktion f keine Zahlenmenge sein muß – und auch der Wertebereich nicht, denn für unsere Aufgabe spielt die Möglichkeit, nach Wahl einer Maßeinheit die Streckenlängen durch reelle Zahlen zu messen, überhaupt keine Rolle. Es kommt nur auf die Möglichkeit des Größenvergleichs von Strecken an.)

Lösungen der Fermatschen Aufgabe wurden von drei italienischen Mathematikern veröffentlicht, und zwar 1646 von E. Torricelli (darum bezeichnet man den gesuchten Punkt P_0 auch als Torricellischen Punkt des Dreiecks $P_1P_2P_3$), 1647 von B. Cavalieri und 1659 von V. Viviani. Einiges von ihren Ideen findet sich in den von W. Jungk in *alpha* 1982, Heft 3, S. 51 unter (2), (3) und (4) vorgestellten Lösungen der Fermatschen Aufgabe.

Verallgemeinerungen der Fermatschen Aufgabe bieten sich in folgenden Richtungen an:

I. Es können mehr als drei Punkte gegeben sein, und sie müssen dann nicht alle in derselben Ebene liegen.

II. Deutet man die Strecken $\overline{PP_1}, \overline{PP_2}, \dots, \overline{PP_n}$ etwa als Transportwege zwischen einer

Pierre de Fermat, 1601 bis 1665



in P gelegenen Produktionsstätte, deren günstigster Standort P_0 ermittelt werden soll, und den gegebenen Standorten $P_1, P_2, \dots, P_n$ von Rohstoffen und Zulieferern bzw. Abnehmern, so liegt es nahe, die verschiedenen Strecken $\overline{PP_i}$ mit unterschiedlichen positiven Faktoren k_i zu multiplizieren, je nachdem, wieviel Güter zwischen P und P_i transportiert werden müssen und was dieser Transport pro km kostet. Die so modifizierte Aufgabe lautet: Gesucht ist bei gegebenen P_i und k_i derjenige Punkt P_0 , für den

$$f(P_0) = k_1 \overline{P_0P_1} + k_2 \overline{P_0P_2} + \dots + k_n \overline{P_0P_n}$$

minimal wird.

III. Es wird nicht nach einem einzelnen Punkt P_0 sondern nach einem Verbindungssystem zwischen den gegebenen Punkten von minimaler Gesamtlänge gefragt. (Die eingangs erwähnte Menge M ist also jetzt eine Menge von Streckensystemen, die $P_1, \dots, P_n$ miteinander verbinden, und die Funktion f , deren Minimum gesucht wird, ordnet jedem dieser Streckensysteme seine Gesamtlänge zu.) Für die vier Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 eines Quadrats ist, um den Unterschied zwischen den Aufgaben I und III zu verdeutlichen, der Schnittpunkt P_0 der Diagonalen die Lösung der Aufgabe I (man beweise dies!), während eine Lösung der Aufgabe III in Bild 1 gezeigt ist. (Man vergleiche hierzu die Artikel von D. Cieslik und H.-J. Schmidt in *alpha* 6/84 und C. Isenberg in 6/86. Dort wird auch erklärt, was die Lösung der ursprünglichen Fermatschen Aufgabe zur Lösung der Aufgabe III beiträgt.)

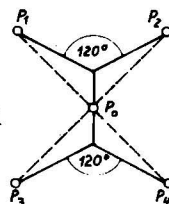


Bild 1

IV. Die gegebenen Punkte könnten z. B. auch auf einer Kugel oder einer anderen gekrümmten Fläche liegen, wobei die Entfernungen dann innerhalb dieser Fläche zu bestimmen sind.

V. Es ist denkbar, daß die gegebenen Punkte zwar in der euklidischen Ebene liegen, aber ihre Entfernungen trotzdem auf eine nichteuklidische Weise zu bestimmen sind. Zum Beispiel kommen in der Elektrotechnik und Elektronik im allgemeinen nur Verbindungssysteme zwischen gegebenen Anschlußpunkten in Frage, die sich aus Strecken in zwei zueinander senkrechten Richtungen zusammensetzen (Bild 2).

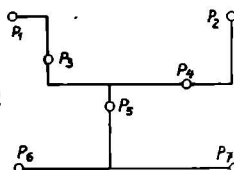
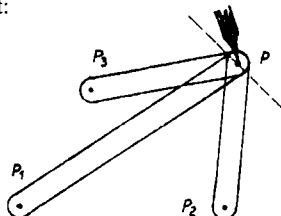


Bild 2

VI. Im Umkreis der Fermatschen Aufgabe ist auch das folgende Problem angesiedelt: Wie sehen die Kurven aus, die bei gegeb-

nen Punkten $P_1, \dots, P_n$ und gegebener genügend großer Gesamtlänge s von denjenigen Punkten P gebildet werden, für die $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \dots + \overline{PP_n} = s$. (*) gilt? Diese Kurven bilden gewissermaßen die Höhenlinien derjenigen Fläche oder Landschaft, die entsteht, wenn man über jedem Punkt P der Ebene, die $P_1, \dots, P_n$ enthält, die Gesamtlänge $f(P) = \overline{PP_1} + \dots + \overline{PP_n}$ als Höhe aufträgt. Der in Aufgabe I gesuchte Punkt ist der tiefste Punkt dieser Landschaft. Die gesuchten Kurven lassen sich prinzipiell (praktisch stößt dies für eine größere Zahl von Punkten allerdings auf große Schwierigkeiten) durch eine Fadenkonstruktion erzeugen, wie sie in Bild 3 für den Fall dreier gegebener Punkte dargestellt ist:

Bild 3



Die Gesamtlänge des in der gezeigten Weise um P, P_1, P_2, P_3 geschlungenen geschlossenen Fadens sei $2s$. Zieht man nun die Fäden straff und bewegt die in P befindliche Bleistiftspitze im Rahmen der ihr dann noch verbleibenden Bewegungsmöglichkeit, so beschreibt sie die gesuchte Kurve. Für den Spezialfall von zwei gegebenen Punkten P_1, P_2 erhält man die sogenannte *Gärtnerkonstruktion* der Ellipse aus ihren beiden Brennpunkten P_1, P_2 . Die besondere Qualität der ursprünglichen Fermatschen Aufgabe besteht darin, daß sie so viele Anregungen für sinnvolle Verallgemeinerungen, praktische Anwendungen und das Aufsuchen von Zusammenhängen zwischen scheinbar weit voneinander entfernten Begriffen der Mathematik bietet. So ist es nicht verwunderlich, daß der gesamte Problemkreis über Jahrhunderte hinweg bis in die Gegenwart immer wieder Mathematiker beschäftigt hat. Dabei wurden viele Fragen mehrfach aufgeworfen und viele Ergebnisse mehrfach gefunden und so oft nach den falschen Leuten benannt. Daher lehrt die Geschichte des Fermatschen Problems uns auch, daß historisches Wissen für Mathematiker kein bloßer Luxus sondern wichtiger Bestandteil ihrer fachlichen Ausbildung ist. Die folgende Zeittafel faßt einige der wichtigsten Ereignisse in der Geschichte des Fermatschen Problems zusammen.

Zeittafel

1638 R. Descartes fordert Fermat brieflich auf, die Kurven (*) im Fall $n = 4$ zu untersuchen und dabei insbesondere mittels seines neuen Kalküls die Tangenten zu bestimmen.

1644 Fermat stellt seine Aufgabe.

1646 bis 1659 erste Lösung der Fermatschen Aufgabe durch Torricelli (1646), Cavalieri (1647) und Viviani (1659).

1659 E. W. v. Tschirnhaus fordert zur Untersuchung der Kurven (*) im allgemeinen Fall auf und findet deren Fadenkonstruktion.

1775 J. Fr. Fagnano behandelt die Aufgabe I für den Fall von vier Punkten rechnerisch.

1810 P. Tédénat und S. l'Huilier behandeln die allgemeine Aufgabe I mit Mitteln der Differentialrechnung und finden als notwendige Bedingung für den Minimalpunkt P_0 , daß er mit einem der gegebenen Punkte $P_1, \dots, P_n$ zusammenfallen muß oder daß von P_0 nach $P_1, \dots, P_n$ gerichteten Einheitsstrecken sich zu einem gerichteten geschlossenen Weg zusammenfügen lassen müssen. (Diese Bedingung liefert in den Fällen $n = 2, 3, 4$ triviale bzw. bereits bekannte Lösungen, während sie für $n \geq 5$ nicht zu einer brauchbaren Lokalisierung von P_0 führt. Man begründe diese Aussagen!)

1836 C. F. Gauß formuliert in einem Brief an den ihm befreundeten Astronomen Schumacher als erster die Aufgabe III.

Um 1837 J. Steiner beschäftigt sich mehrfach mit Aufgabe I und findet ohne Differentialrechnung eine Verallgemeinerung der notwendigen Bedingung von Tédénat und l'Huilier.

1879 K. Bopp löst in seiner Dissertation die von Gauß gestellte Aufgabe III vollständig für den Fall $n = 4$. Er bemerkt

1. daß die Lösung der analogen Aufgabe für größere Zahlen n von gegebenen Punkten einen mit n so schnell wachsenden Aufwand an Fallunterscheidungen erfordert, daß die Aufgabe für große n praktisch unlösbar ist,

2. daß man die Lösung der Aufgabe III durch ein physikalisches Experiment erhalten kann, indem man die Eigenschaft von Seifenlauge benutzt, zwischen Festpunkten ein Häutchen von minimalem Flächeninhalt aufzuspannen.

1909 Der ökonomische Geograph A. Weber formuliert die Aufgabe II als Anwendungsaufgabe, und der Mathematiker G. Pick empfiehlt die mechanische Lösung dieser Aufgabe mittels des sogenannten Varignonschen Gestells zur Bestimmung des Schwerpunktes von n punktförmigen Massen.

1929 J. E. Hofmann findet für die ursprüngliche Fermatsche Aufgabe eine neue Lösung. (Sie ist in dem erwähnten *alpha*-Artikel von W. Jungk unter (1) mitgeteilt.)

1941 In dem heute weltweit verbreiteten Buch *Was ist Mathematik?* von R. Courant und H. Robbins wird das ursprüngliche Fermatsche Problem als Steinersches Problem vorgestellt, die Verallgemeinerung I als Beispiel einer schlechten bzw. unfruchtbaren Verallgemeinerung eines Problems bezeichnet und statt dessen die Verallgemeinerung III empfohlen. Courant und Robbins entdecken die Boppsche Seifenlauge-Methode erneut.

1963 H. W. Kuhn behandelt die Aufgabe II numerisch als Beispiel nichtlinearer Optimierung.

1966 Hanan behandelt erstmals die Aufgabe V.

1977 Garey und Johnson bestätigen im Rahmen eines modernen Begriffssystems die 1879 von Bopp geäußerte Bemerkung 1 (offensichtlich ohne Kenntnis der Arbeit von Bopp).

Seit den sechziger Jahren hat sich eine umfangreiche Spezialliteratur vor allem um Aufgabe III und ihre Variante V gebildet, die seitdem meist als Steinersches Problem oder als Steiner-Weber-Problem bezeichnet wird, obwohl weder Steiner noch Weber sich jemals mit dieser Variante des Fermatschen Problems beschäftigt haben. Übrigens hat anscheinend keiner der hier genannten Mathematiker die gesamte Vorgeschichte des Problems gekannt, und nur wenige haben überhaupt irgendwelche Bemerkungen darüber gemacht.

Während die weitere Bearbeitung der für Anwendungen, insbesondere beim Entwurf mikroelektronischer Schaltungen, heute hochaktuellen Aufgabe V ein umfangreiches und tiefgehendes Spezialwissen erfordert, bieten sich im Umkreis der ursprünglichen Fermatschen Aufgabe immer noch reizvolle und für den Hobbyknobler erfolgversprechende Teilfragen an, wie zum Beispiel die konstruktive Lösung der Aufgabe I für den Fall von vier nicht in einer Ebene gelegenen Punkten, die nähere Untersuchung von Spezialfällen der unter VI beschriebenen *verallgemeinerten Ellipsen* (oder *Kurven mit n Brennpunkten*, wie Tschirnhaus sie nannte) oder die Frage, wie man die Lösung der Aufgabe I für große Punktsysteme schrittweise auf die Lösung analoger Aufgaben für kleinere Teilsysteme zurückführen kann.

P. Schreiber

Unterhaltsame Psychologie

Lest die folgenden Begebenheiten! Wißt ihr die Antwort?

1. Zwei Menschen, die von Kind an befreundet sind, treffen sich. Zwischen ihnen entspinnt sich folgender Dialog:

„Wir haben uns ja ewig nicht gesehen und auch nicht voneinander gehört.“ – „Ja, ja, und ich habe mittlerweile schon eine Tochter“, entgegnete der andere. – „Wie heißt sie denn?“ – „So wie ihre Mutter.“ – „Und wie alt ist die kleine Johanna jetzt?“

Wie war der eine Gesprächspartner darauf gekommen, daß das Kind Johanna heißt? 2. Zwei Männer wollen einen Fluß überqueren. Das Boot aber, das sie am leeren Strand finden, bietet nur für einen Platz. Trotzdem überqueren beide den Fluß in diesem Boot und setzen ihren Weg fort. Wie konnten sie das tun?

Entnommen aus:

Unterhaltsame Psychologie,
von Konstantin Platonow,
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

alpha- Wettbewerb 1985/86

Abzeichen in Gold

Fortsetzung

Für siebenjährige Teilnahme

Beate Thomas, Halle; Silke Umbreit, Ilmenau; Steffi Gebauer, Jörg Fiebig, beide Jena; Henrik Hodem, Kaltennordheim; Michael Tix, Ingolf Knopf, Michael und Jürgen Hoppe, alle Karl-Marx-Stadt; Torsten Schütze, Klettenberg; Susan Hoffmann, Klingenthal; Viola Sell, Lobenstein; Henning Hetzer, Oettersdorf; Steffen Scheithauer, Parey; Kay Leitz, Michael Taeschner, beide Parchim; Antje Reichel, Pirna; Andrea Schmidt, Potsdam; Wolfgang Schneider, Radeberg; Lutz Marschner, Riesa; Beate Walter, Röbel; Anne und Heiner Ruser, beide Rostock; Astrid Grulka, Schernberg; Achim Kröber, Schönbach; Roland Drendel, Senftenberg; Jochen Wetzel, Sömmerda; Bert Liebmann, Sondershausen; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Andreas Heidtmann, Waren; Volker Lehmann, Johannes Thäter, beide Weimar; Lutz Grothe, Wiederitzsch; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Matthias Schwenck, Wittenburg; Uwe Schulz, Zittau

Für sechsjährige Teilnahme

Uwe Döbler, Arnstadt; Marcus Markardt, Bad Salzungen; Tom Pfeifer, Stefan Bading, Sarah Pietzsch, Frauke Wendt, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Christian und Steffen Gering, Beuditz; Ralf Gröper, Biesenrode; Grit Giering, Blumberg; Michael Kremmer, Breitungen; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; AG Math. der POS K. Niederkirchner, Domersleben; Ullrich Hartung, Klaus-Horst Milde, Jens Haufe, alle Dresden; Andreas Prüver, Eberswalde; Lutz Küch, Erlau; Ulrike Röbner, Erfurt; Kai Mettke, Alexander Schachow, beide Frankfurt (Oder); Anke Zimmermann, Geithain; Kristina Böttger, Görlitz; Andrea Rueß, Goldberg; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Holger Porath, Güstrow; Antje Ohlhoff, Halberstadt; Anja Botzon, Havelberg; Sylke Gonschorek, Harzgerode; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Maik Otto, Holzthaleben; Marie-Luise Funk, Greifswald; Frank Lautenschläger, Ilsenburg; Stefan Lippmann, Ilsenburg; Katrin Holzhaus, Gerd F. Reifarth, Rainer Werner, Holger Illgen, Heiko Frank, alle Karl-Marx-Stadt; Frank Müller, Klaffenbach; Kerstin Trägenap, Kletitz; Annett Raue, Langenweddingen; Thomas Kaufhold, Leinefelde; Bodo Marks, Leipzig; Petra Heiliger, Leuna; Hanna Erler, Massanei; Steffen Scharnowski, Möser; Martina Schulz, Steffen Siewert, beide Neuhaus; Karsten Kattner, Paserwald; Ingo Schubert, Pfaffroda; Martina Schenck, Pitschen-Pickel; Joachim Rothe, Pretzschendorf; Andreas Suchanow, Neubrandenburg; Dagmar und Birgit Lenz, Reichenbach; Ines Schmidt, Reuth; Martin Wolff, Ute Möller, Stephan Dittmann, alle Rostock; Sven Ungelenk, Saalfeld; Kirsti Knabe, Sondershausen; Katrin Brock, Steinbach-Hallenberg; Claudia Schwartz, Suhl; Astrid Rogowski, Schweig; Tanja Reinwarth, Teltow; Torsten Marx, Ueckermünde; Ina Gössinger, Unterbreizbach; Tom Boyks, Vietlübbe; Heike Bauer, alpha-Club, Klasse 6 und Kl. 7, Vitzsburg; Edith Boettcher, Weimar; Kristin Neumann, Zella-Mehlis; Frank Goth, Waltersdorf

Für fünfjährige Teilnahme

Matthias List, Altenburg; Gerlind Krolop, An-

gern; Veneta Türke, Auerbach; Lothar Fischer, Bad Köstritz; Ines Sobanski, Bad Liebenstein; Ute Patsch, Bad Salzungen; Veit Eska, Bad Sülze; Sven Aßmus, Gerhard Haug, Eva-Christina Müller, Annette Spangenberg, Claudia Lehmann, Petra Kuckuk, Axel Schneider, Sven Hartmann, Cornelia Wolf, alle Berlin; Peter Grabs, Bibra; Carsten Schmidt, Borna; Angela Maier, Bürgel; Rainer Lenk, Olaf Baur, beide Cottbus; Charis Förster, Crimmitschau; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Eva Faßmann, Dessau; Tino Riethmüller, Döbeln; Hans Schwenke, Dohna; Michaela Meyer, Dorndorf; Christoph Reichl, Eckart Henßge, Sylvia Penz, Rita Dach, Thomas Rotter, alle Dresden; André Kratzert, Dürrröhrsdorf; Christian Pigorsch, Eisleben; Andreas Flemming, Erla; Thomas Gerlach, Erfurt; Guido Strauch, Finsterwalde; Sven Schmitt, Freiberg; Hanka Pruditsch, Geithain; Lars Schiefner, Gesack; Thomas Galley, Goßen; Gunthard Stübs, Thilo Kuessner, beide Greifswald; Daniela Burkhardt, Guben; Heinz Seifert, Hagenow; Alexander Schmerling, Halle-Neustadt; Falk Ottilie, Harzgerode; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Hagen Reimann, Horka; Klaus Liesenberg, André Klinge, beide Ilsenburg; Gunnar Clausnitzer, Ivenack; Uta Störl, Ulf Proddo, beide Jena; Jana Hodam, Kaltennordheim; Ricarda Baartz, Kandelin; Uwe Pirl, Karl-Marx-Stadt; Katja Hoffmann, Klingenthal; Sven Juffa, Langewiesen; Thomas Neuhaus, Leipzig; Beate Balzer, Lindow; Claas Gennrich, Lösenberg; Jens Löw, Luisenthal; Simone Schönmann, Thomas Rolle, Antje Mißbach, alle Magdeburg; Gerald Werner, Meiningen; Manja Franke, Mülsen; Bodo Braune, Neuburxdorf; Dirk Plischka, Jens Burmann, beide Neuhaus; Falk Thomas, Neukirch; Dirk Welke, Stefan Wärmest, beide Neuruppin; Lars Abbe, Niederorla; Christian Usbeck, Oberschnöna; Uwe Anke, Pappendorf; Claudia Paschwitz, Räckelwitz; Steffen Dragesser, Roßdorf; Katja Grunow, Sangerhausen; Andreas Jähnichen, Schneidlingen; Bertram Bracher, Schwarzheide; Ulf Schmiedel, Antje Blechschmidt, beide Schwarzenberg; Rosa-Flint, Stapel; Christiane Marr, Frank Holland, Thomas Reumtschüssel, Jutta Huhn, Gerit Hollan-Moritz, Katrin Usbeck, Manuela Reich, Mario Endter, Sandra Ebert, Anja Köhler, alle Steinbach-Hallenberg; Rüdiger Scheller, Teltow; Sven Janssen, Tormau; Ansgar Bock, Erik Schneider, Björn Langlotz, Wim Fleischhauer, Katja Lederhos, alle Vacha; Fredrik Schiller, Voigtgrün; Ben Forstreuter, Thomas Kudraß, Achim Nahler, Sven Hoffmann, alle Weimar; René Voigt, Wernburg; Holger Post, Wiebendorf; Carl Grosch, Wolferstedt; Tilo Marschall, Zella-Mehlis; Matthias Klink, Zeulenroda; Diana Michler, Zschortau; Lutz Eichner, Halle-N.

Für vierjährige Teilnahme

Kerstin Friedrich, Angermünde; Martina Mazurek, Aschersleben; Kathleen Heitfort, Bad Gottleuba; Michael Henning, Bad Salzungen; Juliane Röthmaler, Dirk Pandel, Anita Winter, Frank Wagner, alle Berlin; Annette Scholz, Blumberg; Norbert Wölfel, Brandenburg; Susanne Vinz, Brunnharshausen; Cynthia Bengs, Bürgel; Stefan Janke, Burg; Roland Bullan, Thomas und Birgit Reißner, Silvio Löffler, Daniela Kempf, alle Cottbus; AG Jg. Math. O.-Gretowohl-OS, Dreitzsch; Dorothea Krippstadt, Rita Kempe, Birgit Jeske, Elke Seifert, Henrike Süß, Kerstin Pohle, Daniel Overmann, Cornelia Zillmann, Susann Schober, Frank Naumann, Michael Potthoff, Matthias Overmann, alle Dresden; Judith Knopf, Drosia; Thomas Guder, Claudio Bannicke, beide Eberswalde; Matthias Buchmann, Eisenberg; Sven Hauptvogel, Yvonne Arnold, Susanne Förster, Kathleen Schaffer, Anja Titzmann, alle Elsterwerda; Andreas Kupsch, Finsterwalde; Silke Breunung, Geisa; Alexander und Mathias Neuber, Gerbitz; René Franke, Gersdorf; Dietlind

Mai, Gillow; Gernot Mersowsky, Görlitz; Andrea Landgraf, Gräfenenthal; Michaela Große, Gohrau; Volker Schönborg, Groß Klessow; Karsten Hennig, Großörner; Rene Kallenbach, Gumpelstadt; Ralf Gericke, Hainichen; Elke Heidemann, Halberstadt; Almuth Berg, Halle; Uta Börner, Harzgerode; Jan Wohlbold, Heidenau; Roberto Stahl, Herzberg; Stefan Heiber, Heyda; Susan Wikinski, Hillersleben; Matthias Fuß, Frank Lampert, beide Kaltennordheim; Gunnar Bimberg, Kandelin; Tobias Wille, Ulf Niederländer, beide Karl-Marx-Stadt; Carsten Blech, Klein-Rodensleben; Dirk Raue, Langenweddingen; Jörg Anschütz, Lehesten, Cornelia Häfner, Leinefelde; Rodica Meltzer, Beate Wasner, beide Leipzig; Andreas Vogel, Limbach-Oberfrohna; Hardy Dömpke, Löderburg; Ina Büttner, Ronny Henschel, Manja Lehnhuß, alle Lössau; Marco Schmidtgen, Luckenwalde; Gisela Schütze, Magdeburg; Manuela Zenker, Mehltheuer; Isabelle Nicol, Meiningen; Karsten Knothe, Merseburg; Christina Lang, Merkers; Maren Wolf, Milkau; Rüdiger Grewe, Neuhaus; Christian Bey, Neustadt; Lars Fischer, Niederschmalkalden; Kathrin May, Olbernhau; Carola Walter, Otterndorf-Okrilla; Felix Kraenz, Picher; Olav Zirnstein, Pirna; Axel Buerke, Pottenhagen; Katrin Lucchesi, Pulsnitz; Mareike Schmidt, Michael Hainke, Andrea Thiele, alle Raskwitz; Marco Rößler, Radebeul; Susanne Norden, Ribnitz-Damgarten; Beatrix Lorenz, Ellen Kupfer, beide Riesa; Enrico Anton, Steffi Bräunung, Claudia Lück, Liane Marschall, Daniela Bauer, Jens Weisheit, Jeannette Hornung, Christine Peter, Anja Bauckmann, alle Roßdorf; Rainer Walke, Kirstin Peter, Karen Meyer, Anika Drews, alle Rostock; Michael und Heike Gerhardt, Sandersleben; Sandra Henschke, Schierke; Marion Walther, Schlottwitz; Andreas Meynhardt, Annette Ruß, beide Schmalkalden; Oliver Henze, Reno Wenzel, beide Schneidlingen; Stefanie Hopf, Schönbunn; Sylvia Ulrich, Schwallungen; Holger Reinitz, Sommerfeld; Carola Mücke, Sondershausen; Axel Bichler, Sondershausen; Thomas Heublein, Steinach; Steffi Döll, Alexander Anschütz, Corina Dieg, Sabine Recknagel, Daniela Jung, Silke Gerlach, Peter Reumtschüssel, Carsten Bühner, Sven Reumtschüssel, René Scherschmidt, Alexander Wäldrich, Norbert Zeiß, Sören Bube, Katrin Häfner, Katja Usbeck, Sandra Usbeck, Katrin Recknagel, Bernd Büttner, alle Steinbach-Hallenberg; Marlies Müller, Ralf Busse, beide Strasburg; Veronika Fischer, Töplitz; Sabina Kaiser, Tormau; Beate Günther, Markus Messerschmidt, Mathias Storch, Nico Messerschmidt, Beate Hahne, Stefan Otto, Rene Storch, Gitta Eichel, alle Trusetal; Michaela Berndt, Ueckermünde; Kerstin Waitz, Anja Frank, Jeannette Pfromm, alle Vacha; Dag Lohse, Vielau; Erik Möbus, Wegeleben; Andreas Günther, Weinböhla; Lars Fischer, Wernshausen; Sven-Uwe Kanngießer, Wolmireben; Andreas Vogt, Christiane Lehmer, Kirsti Linke, alle Worbis; Heike Dittrich, Zeuckritz; Claudia Heret, Zwickau; André und Dietmar Linde, Zittau

Vorbildliche Hilfe

Unser Dank gilt den Verlagen, die Bücher im Werte von 1.500 M für die fleißigsten Wettbewerbsteilnehmer zur Verfügung stellten:
BSB B. G. Teubner, Leipzig;
VEB Fachbuchverlag Leipzig;
Der Kinderbuchverlag Berlin;
Militärverlag der DDR, Berlin;
Sportverlag, Berlin;
transpress VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin;
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin;
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin;
VEB Verlag Technik, Berlin.

Die Mathematik als Produktivkraft

Gedanken nach dem XI. Parteitag der SED Teil 2

Nur auf der Grundlage der neuen mathematischen Naturgesetzmäßigkeiten ist es möglich, die Präzision in der Meßtechnik und damit auch in der Technologie soweit zu erhöhen, daß solche Schlüsseltechnologien wie Mikroelektronik und Robotertechnik, Informationstechnologien, Kernenergie, Weltraum- und Nachrichtentechnik, Mikromechanik und die Biotechnologien möglich werden.

Die große stimulierende Wirkung einer richtigen Einstellung zu den Wissenschaften ist den Kommunisten aus ihrem praktischen Kampf geläufig. Lenin hatte sie in die Losung „Kommunismus, das ist Sowjetmacht plus Elektrifizierung“ gegossen. Dies ist ein Beispiel, über welches sich auch gegenwärtig erneut nachzudenken lohnt. Denn es geht nicht einfach darum, diese Losung zu aktualisieren, indem man etwa sagt: „Kommunismus, das ist Macht der Arbeiterklasse plus Hochtechnologie“. In der Leninischen Losung war mit der Elektrifizierung zu Beginn unseres Jahrhunderts eine Technologie angesprochen, die aus der Sicht der damaligen Naturwissenschaften etwas prinzipiell Neues darstellte. Erstmals war mit dem Elektromagnetismus eine Theorie entstanden, die zwei fundamentale Kräfte, oder wie wir heute sagen Wechselwirkungen, in einer einheitlichen Theorie vereinigte, die elektrische und die magnetische. Nur dadurch wurde der Bau von Dynamomaschinen, die Funktechnik, kurz die gesamte Elektrotechnik möglich, die das Alltagsleben im 20. Jahrhundert so revolutionierend verändert hat.

Nachdem in den 70er Jahren bereits eine Vereinigung der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung gelang, die der wahren Theorie wahrscheinlich sehr nahe kommt, deutet vieles darauf hin, daß wir vor einem qualitativen Sprung bei der Schaffung einer einheitlichen Theorie aller Wechselwirkungen stehen.

Indikator einer solchen Situation ist das sprunghafte Ansteigen der diesbezüglichen Vorhersagen auf dem Gebiet der Elementarteilchenphysik im letzten Jahrzehnt und die kurzfristigen Bestätigungen, die diese gefunden haben. Aus diesen Vorhersagen ergab sich u. a., daß ganz merkwürdige Teilchen existieren müßten, die in den 80er Jahren auch mit großem experimentellem und damit auch finanziellem Aufwand gefunden wurden. Zu ihnen gehören

die W- und die Z-Bosonen sowie das neue Zeta-Teilchen. Wie konnten solche Teilchen vorausgesagt werden?

Das war möglich, weil man mathematische Symmetriengesetze in den Feldtheorien entdeckt hatte. Gleichzeitig stellte man fest, daß die Symmetrien, die in den Gesetzen herrschen, im realen Universum gebrochen sind, so wie die räumliche Symmetrie gebrochen ist, wenn ein Stoff beim Kondensieren kristallisiert. Es entstehen dabei neue Strukturen, und so entstehen auch die neuen Elementarteilchen. Deswegen muß auch das Photon die Masse 0 haben. Die anderen, die W- und Z-Teilchen, sind sehr schwer, etwa 80 Protonenmassen.

Für ihre Entdeckung wurde 1984 an Rubbia und van der Meer der Nobelpreis verliehen. Es ist wohl das erste Beispiel, daß sich jemand den Nobelpreis nicht nur vorgenommen hat, sondern daß er strategisch geplant wurde. Sie haben ihn dann auch prompt ein Jahr nach der Entdeckung erhalten.

Aber welche Überzeugungskraft der Mathematik! Wenn der mathematische Apparat solche seltsame Teilchen voraussagt, so werden sie auch gefunden. Alles fußt auf der Symmetrie gemäß der Konzeption des Erlanger Programms.

Als der 23jährige Professor Felix Klein 1873 in Erlangen seine *Vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* vortrug, wurde für die weitere naturwissenschaftliche Forschung ein Programm entworfen, das durch die Ergebnisse unseres Jahrhunderts, wie wir sehen, seine volle Bestätigung gefunden hat.

Dieses *Erlanger Programm* ist eines der größten Dokumente in der Geschichte der Mathematik. Es nannte als die Aufgabe der Mathematik, die Geometrie und die dynamischen Systeme mittels der Gruppentheorie zu klassifizieren.

Damals erschienen trotz der Ideen von Riemann und Helmholtz Geometrie und die dynamischen Systeme noch als natürlich getrennt – die Geometrie als die Struktur, in der die Dynamik abläuft.

Nach Einstein und den Entwicklungen der Quantenfeldtheorie mit ihrer Geometrisierung der Dynamik wird die Zielstellung des *Erlanger Programms* zur Aufgabe, die Bewegungen der physikalischen Realität und die damit verbundenen Strukturbildungen aus den Symmetrien und Invarianzeigenschaften heraus zu verstehen.

Natürlich ändern sich die Betrachtungsweisen und im Laufe der Entwicklung rücken andere Momente in das Zentrum der Bewertungen. Aber im Moment ist noch kein Ende der seit nun mehr als 100 Jahren währenden Entwicklung im Geiste des Erlanger Programms abzusehen.

Betrachten wir noch ein anderes Beispiel: Seit vor hundert Jahren durch den Hallenser Mathematiker Georg Cantor die Mengenlehre begründet wurde, hat die Konstruktion pathologischer Mengen immer eine Rolle gespielt. Eine dieser Mengen ist das Cantorsche Diskontinuum. Eine interessante Menge, unzusammenhängend, jeder Punkt ist Häufungspunkt, überabzählbar aber vom Maß Null.

Noch während meiner Ausbildung in den 60er Jahren erschien diese Menge im wesentlichen als ein interessantes mögliches Gegenbeispiel zu allen sonst guten und praktischen Eigenschaften einer Menge.

In den 70er Jahren hat sich die Situation dramatisch gewandelt. Heute weiß man, daß bei nichtlinearen Effekten oder fastperiodischen Einflüssen in den Meßwerten fast immer Aufspaltungen vom Typ des Cantorschen Diskontinuums zu beobachten sind.

Dies gilt für die sich immer feiner auffächernden Saturnschen Ringe genauso wie für Spektren von Schrödingeroperatoren mit fastperiodischen Potentialen. Mengen vom Typ des Cantorschen Diskontinuums sind auch das mathematisch Typische beim chaotischen Verhalten, sei es bei der Turbulenz oder bei dem chaotischen Auf und Ab in einem Elektrokardiogramm.

Analysiert man also mit dem Blick auf die Hochtechnologien die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Praxis in unserem Jahrhundert, so kann man nur erstaunt sein, wie kurzfristig und tief neuentstandene, scheinbar ganz abstrakte mathematische Ergebnisse über andere Wissenschaften die Praxis grundlegend umgestalten halfen.

Wir sind für die künftigen Aufgaben gerüstet. Die mathematische Grundlagenforschung der DDR hat im Fünfjahrplanzeitraum 1981 bis 1985 eine vielseitige Entwicklung vollzogen. Die generell positive Bilanz der politisch stabilen, wirtschaftlich dynamischen Entwicklung der DDR, die auf dem XI. Parteitag gezogen werden konnte, ist nicht zuletzt dadurch bedingt, daß in der DDR Wissenschaft, Technik und Ökonomie zum Wohle des Volkes vorangebracht wurden. Das spiegelt sich auch in den Ergebnissen der Mathematik unseres Landes wider und wird durch bemerkenswerte Resultate untermauert.

Die mehr als 8000 im Fünfjahrplanzeitraum fertiggestellten Arbeiten, darunter mehr als 200 neue Bücher, belegen schon rein quantitativ, welch großes Potential der mathematischen Grundlagenforschung in der DDR vorhanden ist. Die positiven Ergebnisse waren nicht zuletzt deswegen möglich, weil die Leistungsfähigkeit und Leistungsbereitschaft der Wissenschaftler ständig gestiegen sind, ein Ergebnis der

unseren sozialistischen Prinzipien gemäßen langfristigen planmäßigen Entwicklung der Kader und speziell des wissenschaftlichen Nachwuchses. Das drückt sich auch in den mehr als 600 erfolgreich abgeschlossenen Promotionen A und B aus. ~ All das war deshalb möglich, weil schon der Nachwuchs eine ständige Förderung erfährt, aber auch ständig herausgefordert wird.

Dies gilt auch schon für die *Jungen Mathematiker* unter den Schülern. Die Aufgaben der diesjährigen Mathematikolympiade (1986) hatten in beiden Olympiadeklassen ein hohes Niveau. Die erfolgreiche Bewältigung dieser Aufgaben durch viele Teilnehmer macht euer Leistungsvermögen deutlich.

Besonders hervorzuheben sind die Leistungen von Mathias-Torsten Tok von der Spezialklasse für Mathematik/Physik der *Martin-Luther-Universität Halle* und Gunter Döge von der Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung *Friedrich Engels* in Riesa, die in der Olympiadeklasse 11/12 volle Punktzahl erreichten. Ebenfalls bemerkenswert ist die Leistung von Dirk Liebscher von der Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung *Georg Thiele* in Kleinmachnow, der in der Olympiadeklasse 10 39 Punkte erhielt.

Die 30 Frühstarter beider Olympiadeklassen erzielten ebenfalls sehr gute Ergebnisse.

Thomas Mautsch, Schüler der 8. Klasse der *Rosa-Luxemburg-Oberschule* in Luckau, wird mit einem 3. Preis geehrt und erreichte immerhin 28 Punkte.

Von euch, liebe Freunde, von der Jugend in eurem Alter, von der Leistungsfähigkeit, die ihr euch jetzt durch euren Fleiß erwirbt, führt der Weg direkt zu den Spitzenleistungen, die wir brauchen, damit diese *Schlacht* für den Frieden, von der gesprochen wurde, gewonnen werden kann.

Die meisten der bahnbrechenden Leistungen werden in jungen Jahren erzielt bzw. liegen in jungen Jahren zumindest die Ansätze für bedeutende Leistungen in höherem Alter vor.

Gauß war 15 Jahre alt, als er den Primzahlsatz empirisch fand, mit 19 Jahren entdeckte er die Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks mit Zirkel und Lineal. Abel entdeckte mit 23 Jahren die Unmöglichkeit der Lösung der algebraischen Gleichungen höheren als 4. Grades durch Radikale; als er mit 27 Jahren starb, hatte er die Theorie der elliptischen Funktionen, der Abelschen Integrale und vieles andere mehr geschaffen.

Galois war in dem Alter, in dem, wie manche glauben, die Studenten mit Klausuren und Testaten bei der Stange gehalten werden müssen, schon tot; sein Einfluß aber auf die Mathematik wird Jahrhunderte überdauern. Felix Klein war mit 22 Jahren Professor, nachdem er mit 21 Jahren sein berühmtes Erlanger Programm geschaffen hatte, über das (schon) gesprochen wurde. Minkowski errang mit 18 Jahren den großen Preis der Pariser Akademie, Einstein

war 25 Jahre, Heisenberg 26 Jahre, als sie ihre berühmten Theorien schufen. Van der Waerden hat mit 28 Jahren seine die gesamte moderne Algebra revolutionierende Monographie geschrieben und Kolmogorov war knapp 30 Jahre, als er die Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung schuf.

Das gilt heute so wie eh und je. Gerade auch auf dem Gebiet der Informatik, bei der Schaffung der Software, setzt die Jugend Maßstäbe.

Das wissenschaftliche Niveau einer Nation hängt vielleicht mehr von ihren Schulen als von ihren Universitäten ab. So war z.B. Deutschland in den 30er Jahren des vorigen Jahrhunderts keine bedeutende wissenschaftliche Macht. Um diese Zeit aber wurde ein relativ fortschrittliches System der Lehrerbildung eingeführt und der Gymnasialunterricht in den Naturwissenschaften wurde auf ein entschieden höheres Niveau gehoben. 10 bis 15 Jahre später hatte sich die deutsche Wissenschaft eine damals führende Stellung in der Welt verschafft.

Die Anforderungen an einen jungen Menschen, der sich der Wissenschaft widmen will, müssen außerordentlich hochgestellt sein. Es ist eine Auszeichnung, sich mit der Wissenschaft befassen zu dürfen und ein solcher Weg erfordert persönliche Opfer und ein über dem Durchschnitt der Gesellschaft liegendes Arbeitspensum. Eine notwendige Bedingung für eine solche Einstellung ist die Liebe zur Sache, die Begeisterung für die Wissenschaft. Diese Liebe zur Sache charakterisiert alle bedeutenden Wissenschaftler der Vergangenheit. Es ließe sich kein einziges Beispiel eines bedeutenden Wissenschaftlers aus der Vergangenheit anführen, der die Wissenschaft betrieb, um sein Brot zu haben. Gerade bei den großen Mathematikern ist eine geradezu fanatische Hingabe an die Wissenschaft zu beobachten. So wird von Weierstraß berichtet, daß es, als er noch Gymnasiallehrer in Bransberg war, öfter vorkam, daß er nach einer durchgearbeiteten Nacht früh vergaß, daß er Unterricht hatte und von seiner Arbeit weg zum Unterricht geholt werden mußte. Dedekind berichtete von sich, daß ihm die Schaffung der Idealtheorie algebraischer Zahlkörper eine mehrjährige unbeschreibliche Anstrengung gekostet habe. In einer Biographie von Felix Klein liest man: Er verschenkte nicht eine Minute und die Freuden der gewöhnlichen Menschen gönnte er sich nicht. Über Hilbert schreibt Blumenthal in einer Lebensskizze, daß er neben dem unbewußten Fleiß, nämlich in allen Lebenslagen über mathematische Probleme nachzudenken, einen wahrhaft Kantischen Fleiß besessen habe.

Karl Marx hat die hohen moralischen Eigenschaften, die ein Wissenschaftler haben muß, mit folgenden eindrucksvollen Worten charakterisiert: „Einen Menschen aber, der die Wissenschaft einem nicht aus ihr selbst, sondern von außen, ihr fremden, äußerlichen Interessen entlehnten Standpunkt zu akkomodieren sucht, nenne ich gemein.“

Eine solche Hingabe ist nicht nur für denjenigen, der sich der wissenschaftlichen Arbeit verschrieben hat, die größte Befriedigung.

Wir brauchen sie auch als Gesellschaft, weil die Klassenkämpfe unserer Zeit nur durch den höchsten Einsatz entschieden werden können. Im Sozialismus können wir alles sozial gerecht gestalten, aber wir können nichts mit weniger Anstrengung erreichen.

Soll die Klassenschlacht ohne Waffen gewonnen werden, muß der Einsatz auf den anderen Gebieten um so höher sein. Nur so kann die Menschheit in die kommunistische Zukunft gebracht werden.

Natürlich kennen wir heute nicht die Zeiträume genau, in denen wir den naturwissenschaftlichen, technischen und ökonomischen Reifegrad erreichen werden, um real zum kommunistischen Verteilungsprinzip „Jeder nach seinen Fähigkeiten – jedem nach seinen Bedürfnissen“ übergehen zu können.

Aber die ausgeprägte Überzeugung, daß dies das humanistische Ziel all unserer Anstrengungen und Kämpfe ist, ist von großer mobilisierender Wirkung. Die Veränderungen, die in den letzten Jahren in Naturwissenschaft und Technik eingetreten sind, sind erstaunlich und unerwartet. So daß – wie es Genosse Kurt Hager formulierte – „der erreichte Entwicklungsstand der Produktivkräfte das große humanistische Ziel, Hunger, Not, Armut und Unwissenheit zu überwinden und allen Menschen wachsenden materiellen Wohlstand, Bildung und gesundheitliche Betreuung zu ermöglichen, in greifbare Nähe rückt“.

Auch in den neuen mathematisch-naturwissenschaftlichen Theorien spüren wir bereits die Konturen dieser künftigen Welt. Alles was die Menschheit in diesem Jahrhundert begonnen hat, den Übergang vom Kapitalismus zum Sozialismus und den Vorstoß in die Struktur der Materie, wird sie im nächsten Jahrhundert fortsetzen. Und es wird ein Jahrhundert des Friedens und des Sozialismus sein. *G. Laßner*

Produktion von Taschenrechnern im VEB Mikroelektronik Mühlhausen



Zur Lösung von Zahlenrätseln mit graphischen Mitteln

Sicher hat sich schon jeder mehr oder weniger erfolgreich mit Zahlenrätseln beschäftigt. Obwohl sie zumeist unter der Überschrift *Raten und Rechnen* gestellt werden, kommt es bei ihrer Lösung viel weniger auf Raten und Probieren an, als darauf, durch logisches Überlegen die richtige Zifferkombination zu finden.

Im folgenden wollen wir uns mit der Lösung von Zahlenrätseln befassen. Dazu betrachten wir die folgende Aufgabe:

$$\begin{array}{rcl} (1) & \text{AHB} : \text{JB} & = \text{HG} \\ (2) & \text{DI} + \text{FC} & = \text{CA} \\ (3) & \text{DKF} - \text{KGB} & = \text{FFF} \end{array}$$

Jeder Buchstabe bedeutet jeweils eine Ziffer, gleiche Buchstaben immer gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind Zahlen zu finden, die die waagerechten ((1)–(3)) und senkrechten ((4)–(6)) Gleichungen richtig lösen.

Wie kann man nun Zahlenrätsel möglichst einfach lösen? Zunächst wird man nachsehen, ob gewisse Buchstaben von vornherein die richtigen Ziffern zugeordnet werden können.

In unserem Beispiel erkennt man aus (3), daß $B=0$ gelten muß, und aus (6) folgt dann $F=1$. Damit wird auch $I=9$ in (4) eindeutig festgelegt.

Weitere Zuordnungen liegen nun nicht mehr auf der Hand. Man erkennt zwar Zusammenhänge zwischen den Unbekannten, z.B. muß wegen (6) $G+A=11$ oder wegen (4) $A-1=D$ gelten, aber eine eindeutige Festlegung eines Buchstabens ist nicht möglich.

An dieser Stelle kann man nur mit einer vollständigen Fallunterscheidung bzw. eines ausgewählten Buchstabens fortsetzen.

Die Frage, welcher Buchstabe zur Fallunterscheidung genommen werden soll, ist nicht eindeutig zu beantworten. Im allgemeinen ist es aber günstig, solche zu nehmen, bei denen möglichst wenig Fälle zu untersuchen sind. Falls z. B. für einen Buchstaben erkannt wird, daß er für eine gerade Ziffer steht, so sind für ihn maximal fünf Fälle zu unterscheiden.

Im obigen Beispiel wollen wir A zur Fallunterscheidung nehmen.

$A=0$ oder $A=1$ ist nicht möglich, da bereits $B=0$ und $F=1$ gilt. Wegen (4) und (3) gelten die Relationen $1 < K < D < A$,

und somit ist $A=2$ oder $A=3$ gleichfalls nicht möglich. Falls $A=4$ gesetzt wird, so folgt aus (4) $D=3$ und aus (6) $G=7$.

Damit müßte in (3) $K=2$ (als 1. Ziffer) und $K=8$ (als 2. Ziffer) gelten. Dies ist ein Widerspruch, d.h., $A=4$ ist nicht richtig. In gleicher Weise zeigt man, daß $A=5$ oder $A=6$ nicht möglich ist. Für $A=7$ erhält man $G=4$ (aus (6)), $D=6$ (aus (4)), $K=5$ (aus (3)), $H=2$ (aus (4)), $C=8$ (aus (6)) und $J=3$ (aus (1)) und somit eine Lösung.

Dies ist die eindeutige Lösung des Zahlenrätsels, da auch die Fälle $A=8$ und $A=9$ zum Widerspruch führen.

Bildlich kann die obige Vorgehensweise wie folgt dargestellt werden:

F	B	I	A	D	G	K	H	C	J
1	0	9							
			3	2	8	X			
			4	3	7	X			
			5	4	6	X			
			6	5	X				
			7	6	4	5	2	8	3
			8	7	3	X			
			9	8	2	X			

Falls aber Fallunterscheidungen für mehrere Buchstaben durchzuführen sind, und das ist sehr oft der Fall, so wird die Rechnung recht umfangreich und mitunter unübersichtlich. Deshalb soll im weiteren eine Methode vorgestellt werden, wie mit graphischen Hilfsmitteln die Größenrelationen zwischen den Buchstaben veranschaulicht und damit die Anzahl der notwendigen Fallunterscheidungen wesentlich reduziert werden können. Gleichzeitig erkennt man damit, für welche Buchstaben Fallunterscheidungen durchzuführen sind. Betrachten wir wieder das obige Beispiel. Aus (6) und (3) wissen wir, daß $F=1$ und $B=0$ gilt. Aus (3) folgt aber auch, daß D größer als K ist – dies wollen wir durch $K < D$ (lies: K kleiner als D) darstellen. Ebenfalls aus (3) erhält man $G+1=K$, dies beschreiben wir durch $G \perp K$ (lies: G um eins kleiner als K). Da $K > F$, d. h. $F < K$, gilt, folgt $K \perp D$. Insgesamt haben wir damit $B \perp F$, $F < G$, $G \perp K$, $F < K$ und $K \perp D$ und zusammengefaßt $B \perp F - G \perp K \perp D$.

Aus (4) erkennt man $D \perp A$, $I=9$ und $H < D+1$. Da $H=D$ nicht möglich, ist mithin $H < D$. Da $G \perp K \perp D$ gilt, folgt $H < G$.

Zusammengefaßt erhalten wir

$$B \perp F - H - G \perp K \perp D \perp A - I.$$

Schauen wir uns (5) an, so ist zu erkennen, daß auch $J < K$ gilt (da $F=1$). Wegen $G \perp K$ gilt auch $J < G$, aber J und H können noch nicht verglichen werden. Wir stellen dies wie folgt dar:

$$B \perp F < \frac{H}{J} > G \perp K \perp D \perp A - I.$$

$$(F < \frac{H}{J} \dots \text{lies } F \text{ kleiner als } H \text{ und } J;$$

$$H > G \dots \text{lies: } H \text{ und } J \text{ kleiner als } G)$$

Schließlich erhalten wir aus (2)

(da $I=9$), daß $A \perp C$ gilt und somit

$$B \perp F < \frac{H}{J} > G \perp K \perp D \perp A \perp C - I.$$

Nun sind alle zehn Buchstaben eingeordnet, und wir erkennen sofort, daß $G=4$, $K=5$, $D=6$, $A=7$ und $C=8$ gilt. Offen bleibt nur, ob $H=2$, $J=3$ oder $H=3$, $J=2$ gilt. Aus (4) folgt aber sofort $H=2$ und damit $J=3$.

Ein weiteres Beispiel, in dem nur neun unterschiedliche Buchstaben vorkommen, soll das Aufstellen der Größenrelationen und deren Veranschaulichung vertiefen und zeigen, daß die Anzahl der Fallunterscheidungen wesentlich reduziert wird.

Gegeben sei nun das Zahlenrätsel

$$\begin{array}{rcl} (1) & \text{EFEB} : & \text{GA} = \text{FCA} \\ (2) & \text{CMDC} + & \text{HB} = \text{CHAE} \\ (3) & \text{DAFD} - & \text{GFBA} = \text{FCBC} \end{array}$$

In der folgenden Übersicht ist die jeweilige Zeile bzw. Spalte angegeben, aus der neue Größenverhältnisse zwischen den Variablen abgeleitet werden und die Zusammenfassung in einem Schema (Graphen):

$$\begin{array}{l} (2) \quad M \perp H, A < \frac{D}{H} \quad A < \frac{D}{M \perp H} \\ (3) \quad F > D, C < D \quad F > D \\ \quad \quad G > (\text{wegen } A - D) \quad G > D \\ (4) \quad C > E \quad A - M \perp H \\ \quad \quad D > E \quad C > D - E \\ \quad \quad \quad \quad G > D - E \\ (6) \quad C \perp F, C < \frac{F}{H} \quad A - M \perp H \\ \quad \quad \quad \quad C \perp F > D - E \\ \quad \quad \quad \quad A - M \perp H \end{array}$$

Aus dem Graphen erkennt man nun, daß $A+C < 10$ gilt, denn ist $C=4$ (größtmöglicher Wert, da F, D, E, M, H größer als C sind), so gilt $A \leq 3$ und ist $A=5$, so gilt $C \leq 3$. Damit folgt

$$(6) \quad A > B \quad C \perp F > D - B \\ (4) \quad D - B \quad A - M \perp H$$

Weitere Größenrelationen zwischen den Buchstaben sind nicht offensichtlich. Hier muß nun mit einer Fallunterscheidung fortgesetzt werden. Wegen (6) gilt $H=8$ oder $H=9$. H könnte also zur Fallunterscheidung genommen werden.

Da $C > D$ gilt, folgt aus (3) aber auch, daß F gerade ist und aus dem Schema $F \leq 4$. Falls $F=2$ gilt, dann folgt $C=1$ (Schema),

B = 6 (aus (3)), E = 7 (aus (2)), A = 4 (aus (6)), D = 5, G = 3, M = 8 und H = 9 (jeweils aus dem Schema).
F = 4 ist nicht richtig, denn es würde C = 3 (Schema), B = 7 (3), E = 0 (2) folgen im Widerspruch zum Schema. Damit ist das Rätsel gelöst und die eindeutige Lösung gefunden.

Die vorgeschlagene Methode ist ein Beispiel dafür, wie mit grafischen Hilfsmitteln die Übersichtlichkeit erhöht und wesentliche Beziehungen zwischen den Variablen veranschaulicht werden können.

Zahlenrätsel sind auf Grund ihrer innewohnenden Kombinatorik recht reizvoll für den, der über das Raten und Probieren hinausgeht. Das Lösen derartiger Aufgaben erhöht die Sicherheit im Umgang mit Fallunterscheidungen und kann deshalb nur empfohlen werden.

G. Scheithauer

Wir lösen Zahlenrätsel

$$\begin{array}{r} \triangle 1 \triangle \quad ABC - DB = EC \\ \quad \quad \quad : \quad + \quad + \\ \quad \quad \quad \hline EA \times F = GF \\ \quad \quad \quad C + DF = DD \end{array}$$

$\triangle 2 \triangle$

$$\begin{array}{c} \text{X} \downarrow \text{X} = \text{X} \text{O} \text{X} + \text{X} \text{X} \\ \hline \text{X} \downarrow \text{X} = \text{O} \text{X} \text{X} + \text{X} \text{X} \\ \hline \text{O} \downarrow \text{X} = \text{X} \text{O} \text{X} - \text{X} \text{X} \end{array}$$

$\triangle 3 \triangle$

$$\begin{array}{r} \text{X} \text{O} \text{X} - \text{O} \text{X} \text{X} = \text{X} \text{O} \text{O} \\ : \\ \text{O} \text{O} \cdot \text{O} \text{X} = \text{O} \text{X} \text{O} \\ \hline \text{O} \text{O} + \text{O} \text{O} = \text{O} \text{O} \end{array}$$

$\triangle 4 \triangle$ Die beiden Wörter enthalten 10 verschiedene Buchstaben, welche so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Rechnungen stimmen.

$$\begin{array}{r} \text{TRI OLE} \\ + \text{LEGUAN} \\ \hline 1020200 \\ \text{TRI OLE} \\ - \text{LEGUAN} \\ \hline 195482 \end{array}$$

Die folgende Zahlenreihe

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

ergibt, wenn dafür die entsprechenden Buchstaben eingesetzt werden, eine andere Bezeichnung für Neubildung, Ausgleich.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. habil. Dr. h. c. mult. Hans-Jürgen Treder

Direktor des Einstein-Laboratoriums, Potsdam-Babelsberg

$\triangle 2777 \triangle$ Wie lange braucht ein Schwimmer, um in einem Fluß eine Strecke s hin und zurück zu schwimmen, wenn er relativ zum Wasser die Geschwindigkeit u entwickelt und wenn die Strömungsgeschwindigkeit v beträgt? Was ergibt sich bei $u = v$?

Anmerkung: Die Aufgabe steht in Analogie zu dem berühmten Versuch von A. A. Michelson, welcher erstmalig 1881 auf dem Telegrafenberg bei Potsdam durchgeführt wurde. Die Strömung des Flusses ist analog zur Bewegung der Erde relativ zum angenommenen sogenannten Äther – darunter verstand man damals einen besonderen feinen Stoff, der den gesamten Raum erfüllen sollte. Der Schwimmer ist analog zum Licht, dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit im Michelson-Versuch zweimal gemessen wurde – in Bewegungsrichtung der Erde und dazu entgegengesetzt. Es kam heraus, daß die Lichtgeschwindigkeit jedesmal denselben Wert hat, also von der Ausbreitungsrichtung sowie vom Bewegungszustand der Lichtquelle unabhängig ist. Als eine Schlußfolgerung daraus mußte die Äther-Hypothese fallengelassen werden und stattdessen die Spezielle Relativitätstheorie Einsteins als gültig angenommen werden. In diesem Sinne ist der Michelson-Versuch eine Stütze für die Spezielle Relativitätstheorie.

Unser Schwimmer in der Aufgabe verhält sich aber gerade anders als das Licht im Michelson-Versuch!



Forschungsstätte mit großen Aufgaben

Im März 1979, anlässlich des 100. Geburtstages von Albert Einstein, wurde an der Akademie der Wissenschaften der DDR das Einstein-Laboratorium gegründet. Zu seinem Direktor wurde der international bekannte Physiker Professor Dr. habil. Dr. h. c. mult. Hans-Jürgen Treder berufen. Die Forschungsstätte hat ihren Sitz auf dem Gelände der Sternwarte Babelsberg bei Potsdam; außerdem gehört Einsteins ehemaliges Sommerhaus in Caputh unweit von Potsdam dazu. Das Einstein-Laboratorium ist eine der Mitarbeiterzahl nach kleine Einrichtung, hat aber wichtige Aufgaben zu erfüllen – die Pflege und die Weiterführung des Werks von Albert Einstein.

Einstein war einer der größten theoretischen Physiker; er hat die Wissenschaft um fundamentale Erkenntnisse bereichert. Unter seinen Leistungen seien hervorgehoben die Arbeiten zur Lichtquantenhypothese, welche mit einem Nobelpreis gewürdigt wurden, sowie die Spezielle und die Allgemeine Relativitätstheorie, welche eine Umwälzung der Vorstellungen über Raum und Zeit bedeuteten. Mit Albert Einstein verbinden uns in der DDR bestimmte Traditionen: Er lebte von 1914 bis 1933 in Berlin, wirkte in dieser Zeit an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin und an der Humboldt-Universität. Das für ihn gebaute und architektonisch bedeutsame Sommerhaus in Caputh bewohnte er in den Jahren 1929 bis 1932.

Einsteins Wirken wurde bzw. wird von Prof. Treder und seinen Mitarbeitern erforscht. Die Ergebnisse sind in zahlreichen Büchern und Artikeln niedergelegt. Es wird die Verbindung zu aktuellen Problemen der Forschung hergestellt: Im Brennpunkt des Interesses der Physiker stehen heute Beziehungen zwischen der Kosmologie, d. h. der Lehre vom Aufbau der Welt im sehr Großen, einerseits und der Elementarteilchenphysik, d. h. der Lehre vom Aufbau der Welt im sehr Kleinen, andererseits. Dabei sucht man nach einer Theorie, welche alle bekannten Kräfte in der Natur umfassen soll. Zu diesen international intensiv betriebenen Forschungen leisten das Einstein-Laboratorium und andere Einrichtungen der Akademie der Wissenschaften der DDR Beiträge.

Das Einstein-Laboratorium versteht sich auch als eine Stätte der Weiterbildung. Der Autor dieses Beitrags wurde von der Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald 1986 zu einem halbjährigen Studienaufenthalt an das Einstein-Laboratorium delegiert und hat dort eine Fülle von Anregungen für seine Arbeit erfahren.

R. Schimming

Prof. Treder im Einstein-Haus in Caputh

Lösungen siehe Heft 3/87!

Symmetrie im Raum

Teil 1

Mit Symmetrie und symmetrischen Figuren haben wir uns bereits in der Ebene näher beschäftigt, so mit der *Axialsymmetrie* (Heft 4/1984), der *Zentralsymmetrie* (Heft 2/1985) und der *Drehsymmetrie* (Heft 4/1985). Analoge Sachverhalte und Begriffe gibt es auch im Raum.

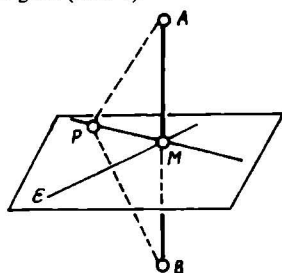
In manchen großen Schlössern, wie z. B. im *Neuen Palais* in Potsdam, aber auch in kleinen, wie etwa im Schloß Köthen, findet der Besucher Spiegelsäle mit ihrer immer wieder verblüffenden Wirkung. Denn – so wie vor langer Zeit aus Repräsentationsgründen – bleibt der Effekt auch heute der gleiche:

Der real bestehende Raum erscheint im Spiegel nochmals und *spiegelt* mehr als da ist! Der Spiegel wird zur Symmetrieebene bzgl. eines *Gesamtraums*, der sich aus dem real bestehenden und dem nur als *Bild* existierenden Raum zusammensetzt.

Jetzt abstrahieren wir: Eine Ebene ε heißt eine *Symmetrieebene einer Figur F*, wenn bei der *Spiegelung an der Ebene ε* die Figur auf sich abgebildet wird. Dieser Begriff ist also völlig analog der *Axialsymmetrie* einer Figur in der ebenen Geometrie (siehe Heft 4/1984) erklärt.

Bei der Spiegelung an ε wird jeder Punkt aus ε auf sich und jeder Punkt $A \notin \varepsilon$ auf denjenigen Punkt B abgebildet, für den die Verbindungsgerade g_{AB} senkrecht zur Ebene ε ist und ε durch den Mittelpunkt von AB geht (Bild 1).

Bild 1



Hat man umgekehrt bei einer Spiegelung einen Originalpunkt A und das zugehörige Bild B , so gibt es genau eine zugehörige Symmetrieebene. Sie besteht einfach aus der Menge aller Punkte P des Raumes, die von A und B gleichen Abstand besitzen (Bild 1); und wir nennen sie die *Mittellotenebene* von AB .

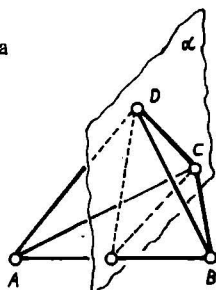
Aufgaben

▲ 1 ▲ Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder (d. h. eine dreiseitige Pyramide mit

gleichlangen Kanten). Bestimme alle Symmetrieebenen dieser Figur!

Lösung: Die Mittellotenebene α der Kante AB ist offensichtlich eine Symmetrieebene des regelmäßigen Tetraeders, da wegen $|CA| = |CB|$ und $|DA| = |DB|$ die Punkte C und D auf α liegen (Bild 2 a).

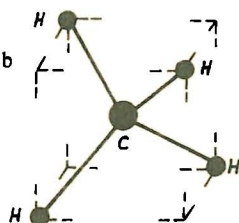
Bild 2 a



Entsprechendes gilt für jede der weiteren fünf Kanten. Also gibt es wenigstens sechs Symmetrieebenen. Gibt es weitere?

Nein! Denn ist ε eine Symmetrieebene des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$, so muß wenigstens einer der Eckpunkte nicht auf ε liegen, da A, B, C, D in keiner gemeinsamen Ebene liegen können. Es sei etwa $A \notin \varepsilon$. Das Bild von A bei der Spiegelung an ε muß eine der Ecken B, C oder D sein, da ε Symmetrieebene des Körpers ist, etwa der Punkt B . Dann ist aber ε gerade die Mittellotenebene von AB und damit eine der bereits angegebenen Symmetrieebenen. Symmetriebetrachtungen spielen in der *Chemie*, insbesondere in der *Kristallographie*, eine große Rolle. Ein regelmäßiges Tetraeder bilden u. a. das Kerngerüst der Moleküle von CH_4 (Bild 2 b).

Bild 2 b



▲ 2 ▲ Man bestimme alle Symmetrieebenen

- eines Würfels (Bild 3 a) und
- eines geraden Kreiskegels (Bild 3 b).

Bild 3 a

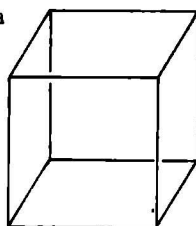
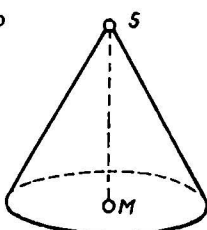


Bild 3 b



Symmetrieebenen findet man bei vielen Körperformen von Pflanzen (-teilen) und Tieren, in der Technik und bei Bauwerken. Da sich derartige symmetrische Formen in der Natur als Ergebnis einer langen Entwicklung herausgebildet haben, sind sie als optimale Gestalt unter den gegebenen Umweltbedingungen zu werten. In der Technik entstehen Formen mit Symmetrieebenen vielfach aus Zweckmäßigkeit, insbesondere aus Stabilitätsgründen.

▲ 3 ▲ Wie viele Symmetrieebenen besitzt

- eine Tomate?
- das Vorderrad eines Fahrrades?
- die Blüte einer Orchidee?
- gewöhnlicherweise eine Eisenbahnbrücke? (Bild 4)

Bild 4



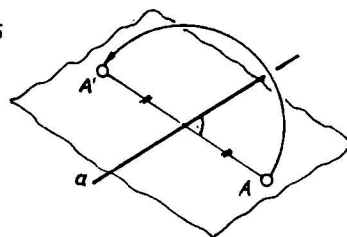
- eine Tetrapackung (z. B. für Kondensmilch)?

Beim geraden Kreiskegel im Bild 3 b) heißt die Gerade g_{MS} die Kegelachse; der Kegel wird als symmetrisch bezüglich dieser Geraden angesehen.

Man nennt eine Gerade a eine *Symmetrieachse der Figur F*, wenn bei der (räumlichen!) Spiegelung an dieser Geraden die Figur in sich übergeht. Die Bildpunkte bei der *Spiegelung an einer Geraden a* lassen sich dabei sehr einfach beschreiben:

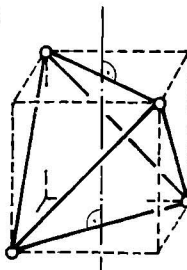
Alle Punkte auf a bleiben fest, und hinsichtlich eines Punktes $A \notin a$ ist in der Ebene durch a und A so wie bei der Geradenspiegelung in einer Ebene zu verfahren (Bild 5). Demnach ist eine Spiegelung an a auch einfach als eine (räumliche) Drehung um a mit 180° anzusehen.

Bild 5



▲ 4 ▲ Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein regelmäßiges Tetraeder?

Bild 6



Lösung: Man erkennt leicht (etwa durch eine mögliche Einbettung in einen Würfel, Bild 6), daß die Verbindung der Mittelpunkte zweier windschiefer Kanten eine Symmetrieachse ist. Durch eine entsprechende Überlegung wie bei der Lösung zur 1. Aufgabe zeigt man, daß es nicht mehr als drei Symmetrieachsen gibt.

▲ 5 ▲ Wie viele Symmetrieachsen hat ein Würfel?

Es stellt sich die Frage, welcher Zusammenhang zwischen Symmetrieebenen und Symmetrieachsen besteht. Man kann leicht zeigen:

▲ 6 ▲ Hat eine Figur zwei Symmetrieebenen α und β und sind diese senkrecht zueinander, dann ist ihre Schnittgerade eine Symmetrieachse der Figur.

Mit dieser Eigenschaft kann die Aufgabe 4 nochmals mit dem Ergebnis aus der Aufgabe 1 gelöst werden. Man betrachte dazu wiederum das Bild 6. (Anhand dieses Bildes wird die Eigenschaft in der Aufgabe 6 selbst recht einsichtig!)

Muß nun umgekehrt bei Existenz einer Symmetrieachse auch ein Paar zueinander senkrechter Symmetrieebenen existieren? Nein!

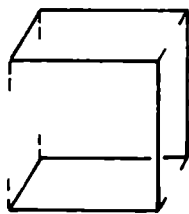
▲ 7 ▲ Nenne (und beschreibe) eine Figur, die keine Symmetrieebene aber eine Symmetrieachse besitzt!

Eine Symmetrieachse besitzen die Doppelschraube (Bild 7) und die Doppelwendelfläche. Derartige geometrische Figuren findet man u. a. in der Baukunst (Säulenformen und -verzierungen, Wendeltreppen), in der Technik und in der Mikrobiologie. Symmetrieachsen findet man bei vielen Formen rotierender Teile in der Technik.

Bild 7



Bild 8



▲ 8 ▲ Ist die Achse des Vorderrades deines Fahrrades eine Symmetrieachse dieses Rades? (Prüfe sorgsam!)

▲ 9 ▲ Bestimme die Symmetrieachsen der Drahtfigur im Bild 8, die sich aus Kanten eines Würfels zusammensetzt! (Die Naht beim [Feld-]Tennisball zeigt gleiche Symmetrieeigenschaften!) Nennenswert ist noch folgende allgemeine Eigenschaft:

▲ 10 ▲ Hat eine Figur zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen a und b , dann ist die zu a und b senkrechte Gerade c ebenfalls eine Symmetrieachse.

Beispiele dafür liegen in den Aufgaben 4 und 9 vor.

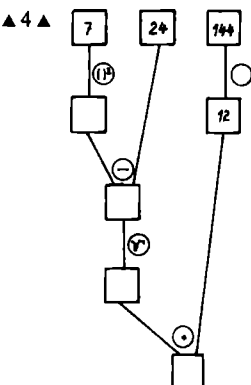
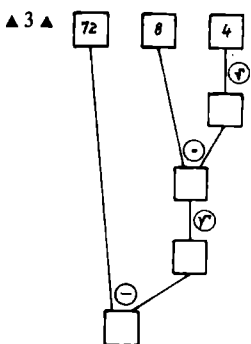
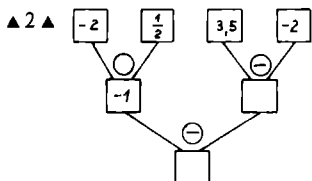
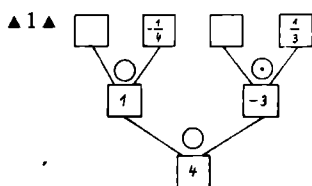
E. Quaisser/H.-J. Sprengel



Rechenbäume

Fülle die Leerstellen aus!

Gib jeweils den zu berechnenden Term an!



Stelle für folgende Terme einen Rechenbaum auf!

▲ 5 ▲ $-3 \cdot (-4,1 - 1,9)$

▲ 6 ▲ $\sqrt{2^2 \cdot 4} - (\sqrt{25} + 10)$



▲ 1 ▲ As you may know, the symbol $n!$ (called " n factorial") denotes the product of all integers from 1 to n . So, for instance, $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$, and so on.

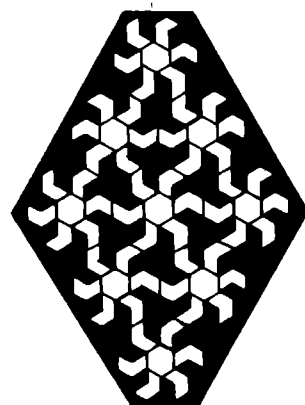
Here is the number 12! written out in full
4 7 9 0 ■ 6 0 0.

Alas! One of the digits got blotted out. Can you find the missing digit without doing all the multiplications?

Math. Pie, London

▲ 2 ▲ Симметричен ли узор на рисунке?

Quant, Moskau



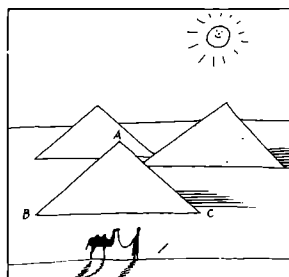
▲ 3 ▲ Chaque signe de ce tableau représente toujours le même chiffre. Les totaux de quinze additions vous sont donnés, horizontalement et verticalement. Attribuez à chaque signe sa valeur!

Maximath, Belgium

34	26	43	45	34	46	40	
ش	ن	لا	خ	ي	ز	39	
ة	و	ج	ش	خ	و	21	
خ	ج	ا	لا	لا	ن	44	
ش	و	لا	و	ة	خ	26	
و	و	ا	ج	لا	ش	29	
ن	و	ن	خ	ن	ن	29	
ج	و	لا	ي	و	لا	36	
ز	خ	لا	ي	و	ج	44	

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

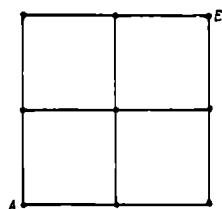
Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1987



Mathematik

Ma 5 ■ 2778 Das Bild besteht aus vier gleichgroßen Quadraten. Es gibt verschiedene Wege, um von A (Anfang) nach E (Ende) zu wandern. Auf einem solchen Weg darf kein Abzweigpunkt ein zweites Mal betreten werden. Eine kleine Quadratseite soll 10 m lang sein. Wie viele Wege sind 40 m, 60 m bzw. 80 m lang?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

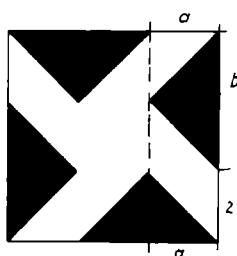


Ma 5 ■ 2779 Aus dem abgebildeten Quadrat wurden vier gleichgroße gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke herausgeschnitten ($a = 2$ cm, $b = 4$ cm).

(1) Welche Fläche ist größer, die gesamte herausgeschnittene Fläche oder die übriggebliebene Fläche?

(2) Um wieviel Quadratzentimeter unterscheiden sie sich?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 5 ■ 2780 Zeichne auf Karopapier ein Quadrat mit 25 gleichgroßen Feldern. Diese Felder sollen mit möglichst wenig

Farben so gefärbt werden, daß kein Feld, das ein anderes mit einer Seite oder mit einer Ecke berührt, die gleiche Farbe erhält. Wie viele Farben sind mindestens nötig? Gib ein Beispiel dafür an! (Anmerkung: Statt der Farben kannst du auch Ziffern setzen.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2781 Werner versucht, eine natürliche Zahl x zu finden. Dabei soll die Summe aus dem Vorgänger und Nachfolger von x die Jahreszahl 1987 ergeben.

a) Beweise, daß sich keine solche Zahl x finden läßt!

b) Zeige, wie sich eine solche Zahl x finden läßt, wenn die Jahreszahl eine gerade Zahl ist!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2782 In dem Schema

$$\begin{array}{r} A B C \\ + A B \\ + \underline{A} \\ 3 0 0 \end{array}$$

sind Ziffern durch Buchstaben ersetzt worden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ermittle die richtigen Ziffern für A, B und C!

OL Werner Melka, Neubrandenburg

Ma 5 ■ 2783 Ersetze in dem Schema

$$\begin{array}{r} * * * * \\ - * * * * \\ \hline 1 9 8 7 \end{array}$$

die Sternchen so durch Ziffern, daß eine richtige Subtraktionsaufgabe entsteht. Dabei dürfen aber nur die vier Ziffern 1, 9, 8, 7 benutzt werden, aber keine von ihnen mehr als dreimal.

Gib alle Möglichkeiten an!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2784 Die drei Mitglieder einer Familie sind zusammen 108 Jahre alt. Die Mutter ist dreimal so alt wie der Sohn, der Vater drei Jahre älter als die Mutter. Wie alt ist jedes der Familienmitglieder?

Schülerin D. Gretsche, Bad Freienwalde

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Na/Te (Naturwissenschaft und Technik) und eine Ziffer, z.B. 7, vorgesetzt (d.h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d.h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d.h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1986/87 läuft von Heft 5/1986 bis Heft 2/1987. Zwischen dem 1. und 10. September 1987 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/86 bis 2/87 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/87 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/1986 bis 2/87) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungs-urkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungs-urkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1986/87 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

30	Markus Mäder Schweizer Weg 17 Schmallalden 6080	150	J. Gagarin - OS Klasse 7	Ma 7 2647
	Prädikat:			
	Lösung:			

Ma 6 ■ 2785 Drei Würfel W_1 , W_2 und W_3 haben zusammen einen Rauminhalt von 90 cm^3 . Dabei ist das Volumen des Würfels W_3 dreimal so groß wie das des Würfels W_1 . Das Volumen des Würfels W_2 ist doppelt so groß wie das des Würfels W_3 . Es ist die Oberfläche des Würfels W_3 zu berechnen!
Schüler J. Heße, Berlin

Ma 6 ■ 2786 Es ist die kleinste, ohne Rest durch 7 teilbare natürliche Zahl zu ermitteln, die bei Division durch 2 den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, durch 5 den Rest 4 und durch 6 den Rest 5 läßt.
Schülerin B. Sommer, Görlitz

Ma 6 ■ 2787 Die Sternchen in der vierstelligen natürlichen Zahl $1**0$ sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß man durch 36 teilbare Zahlen erhält. Es sind alle Lösungen anzugeben!
Schüler A. Henning, Bad Salzungen

Ma 6 ■ 2788 Ermittle alle geordneten Zahlenpaare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b , die Lösung der Gleichung $a \cdot (a + b) = 1986$ sind!
OL W. Melka, Neubrandenburg

Ma 7 ■ 2789 In der Gleichung $\overline{AB}^2 = \overline{CDA}$ ist $\overline{AB}$ eine zweistellige, $\overline{CDA}$ eine dreistellige natürliche Zahl. Setze in diese Gleichung für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern so ein, daß eine wahre Aussage entsteht!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■ 2790 In zwei Gefäßen befindet sich Wasser, und zwar 450 cm^3 im ersten Gefäß. Gießt man von einem Gefäß 20 % der Flüssigkeit in das andere, so enthalten dann beide Gefäße die gleiche Wassermenge. Wieviel Kubikzentimeter Wasser waren zuerst im zweiten Gefäß?
OL W. Melka, Neubrandenburg

Ma 7 ■ 2791 Eine sechsstellige natürliche Zahl beginnt an der höchsten Stelle mit der Grundziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie an die verbleibenden fünf Grundziffern hinten an, so erhält man eine Zahl, die dreimal so groß wie die ursprüngliche ist. Wie heißen diese beiden Zahlen?
Sch.

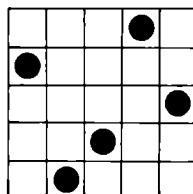
Ma 7 ■ 2792 Es ist nachzuweisen, daß für jedes konvexe Viereck mit den Seitenlängen a, b, c, d und den Längen e und f der Diagonalen $\frac{a+b+c+d}{2}$ $< e + f < a + b + c + d$ gilt!
Sch.

Ma 8 ■ 2793 Nach einer durchgeführten Altstoffsammlung lieferte Bert weniger Flaschen ab als Dirk. Arthur und Ede hatten zusammen genau so viele Flaschen gesammelt wie Dirk und Bert zusammen. Arthur und Dieter lieferten zusammen nicht so viele Flaschen ab wie Ede und Bert zusammen, sondern weniger. Wer dieser vier Schüler hatte die wenigsten, wer die meisten Flaschen abgeliefert?
Diplomlandwirt H. Boettcher, Weimar

Ma 8 ■ 2794 Es ist nachzuweisen, daß die Differenz $63! - 61!$ ohne Rest durch 71 teilbar ist. (Unter der Zahl $n!$ versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$.)
Nach Quant, Moskau

Ma 8 ■ 2795 Die Maßzahl des Umfangs eines Kreissektors (gemessen in cm) sei gleich der Maßzahl seines Flächeninhalts (gemessen in cm^2). Die Maßzahlen der Länge des Radius und des Kreisbogens seien natürliche Zahlen. Es ist zu untersuchen, für welche Maßzahlen diese Bedingungen erfüllt werden!
Sch.

Ma 8 ■ 2796 Ein Quadrat ist in 25 paarweise kongruente quadratische Felder aufgeteilt. Es sollen fünf gleiche Spielsteine so auf quadratische Felder gelegt werden, daß in jeder waagerechten Reihe und in jeder senkrechten Reihe genau ein Spielstein liegt. Wieviel unterschiedliche Belegungen gibt es?
Beispiel:



Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 9 ■ 2797 Kennt man das Quadrat einer natürlichen Zahl a , so kann man das Quadrat des Nachfolgers von a auf die folgende Weise leicht bestimmen:

Man addiert zum Quadrat von a nochmals a selbst sowie den Nachfolger von a .

Beispiel: Das Quadrat von 3 ist 9. Man erhält nun das Quadrat von 4, indem man zu 9 die 3 und den Nachfolger der 3 addiert, also

$9 + 3 + 4 = 16 = 4^2$. Es ist die Allgemeingültigkeit dieses Verfahrens für alle natürlichen Zahlen nachzuweisen.

Ch. Bittner, Mühlhausen

Ma 9 ■ 2798 Junge Pioniere hatten durch das Sammeln und den Verkauf von Altstoffen 100,- M zusammengebracht. Dafür kauften sie 34 Geschenke, die sie Bewohnern eines Altersheimes auf einer Weihnachtsfeier überreichten. Es waren Geschenke zum Preise von 2,- M, 3,- M und 5,- M das Stück, am meisten zu 2,- M, am wenigsten zu 5,- M. Wie viele Geschenke jeder dieser drei Preisstufen wurden überreicht?
Schülerin A. Heiser, Diesdorf

Ma 9 ■ 2799 Es sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 ($r_1 < r_2$) zu zeichnen, die sich in den Punkten A und B schneiden. Auf k_1 ist ein Punkt P derart zu wählen, daß die Gerade PM_1 die Strecke $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt schneidet. Die Gerade PA möge k_2 in D , die Gerade PB möge k_2 in C schneiden. Die Gerade PM_1 schneide $\overline{CD}$ in E . Es ist nachzuweisen, daß PE senkrecht auf CD steht.
Sch.

Ma 9 ■ 2800 Zeichnen Sie ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete $\overline{AB}$ von 6 cm Länge!

a) Berechnen Sie die Länge derjenigen zu $\overline{AB}$ parallelen Strecke, die die Fläche dieses Dreiecks halbiert!

b) Konstruieren Sie diese Strecke!

c) Beschreiben Sie die Konstruktion!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■ 2801 Eine Gruppe von Dolmetschern unterhielt sich über die Fremdsprachen, die sie beherrschen. Dabei stellte sich heraus, daß keiner nur eine Sprache beherrschte. Sechs Dolmetscher konnten Russisch und Englisch, zwei konnten Russisch und Französisch und nur einer konnte Englisch und Französisch sprechen. Alle drei Sprachen beherrschte auch nur ein Dolmetscher. Wie viele Dolmetscher hatten sich unterhalten?
Fr.

Ma 10/12 ■ 2802 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x gilt

$$\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}!$$

Dipl.-Math. C. Piehler, Halle

Ma 10/12 ■ 2803 Gegeben seien ein gerader Kreiskegel und eine gerade quadratische Pyramide. Beide Körper sind gleich hoch. Wie groß ist der Radius der Grundfläche des Kreiskegels, wenn beide Körper gleiche Volumina haben?

Schüler J. Kandziora, Zehdenick

Ma 10/12 ■ 2804 Die Summe der Größen der Innenwinkel eines regelmäßigen n -Ecks beträgt 1440° . Wie groß ist n ?

Schülerin B. Balzer, Zittau

Naturwissenschaft und Technik

Na/Te 6 ■ 369 Ein Junger Mathematiker wurde von seinen Freunden gefragt, wie er sein Campingziel erreicht habe, das 313 km von seinem Wohnort entfernt liegt. „Mit dem Autobus fuhr ich um 205 km weniger als mit dem Zug, meine Wanderstrecke war um 36 km kürzer als meine Fahrstrecke mit dem Autobus.“ Berechne, wieviel Kilometer die Bahnfahrt, die Autobusfahrt und die Wanderstrecke betrug, wenn der Junge Mathematiker die Reise in seinem Wohnort begann!

DDR-Olympiade-Aufgabe

Na/Te 7 ■ 370 Beim Experimentieren mit Kapillaren verschiedenen Durchmessers erhält Anja Meßwertpaare von Steighöhe h und Durchmesser d der Kapillaren, die sie zur besseren Veranschaulichung in ein Koordinatensystem einträgt.

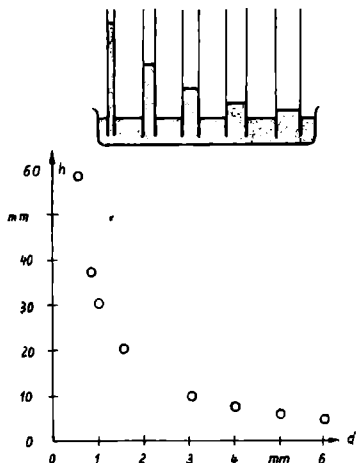
a) Bestimme zeichnerisch die Steighöhen für $d_1 = 1,2 \text{ mm}$ und $d_2 = 0,75 \text{ mm}$!

b) Was für ein Zusammenhang könnte vorliegen?

Stelle eine entsprechende Gleichung auf, die h und d enthält!

c) Prüfe damit die bei a) bestimmten Werte!

d) Biologische Kapillaren (z. B. Pflanzen) haben sehr geringe Durchmesser. Wie hoch



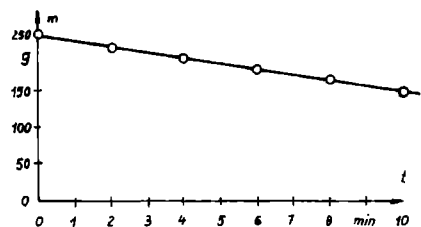
steigt das Wasser in einer Kapillare von 0,002 mm Durchmesser, wenn man voraussetzt, daß hierbei das gleiche Gesetz gilt?

Dipl.-Lehrer Ch. Werge,
Karl-Marx-Universität Leipzig

Na/Te 7 371 a) Bei der Analyse von Eisenoxid wird das Massenverhältnis Eisen zu Sauerstoff von $2\frac{1}{3} : 1$ festgestellt. Es ist die Formel des Oxids aufzuschreiben. b) Wieviel Gramm Eisen sind in 200 g Eisenoxid enthalten?

Aus: Chemie in der Schule, Berlin

Na/Te 8 372 Der Brennstoffverbrauch eines kleinen Spiritusbrenners soll ermittelt werden. Dazu wird über einen gewissen Zeitraum bei konstanter Dochtlänge die Masse des Brenners einschließlich des Brennstoffs im brennenden Zustand gemessen. Die folgende graphische Darstellung wurde, ausgehend von den Meßwerten, angefertigt:

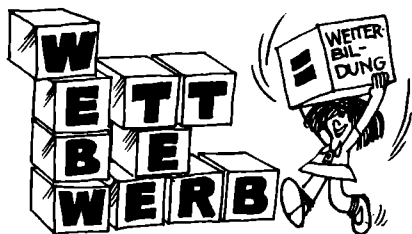


a) Der Zusammenhang zwischen Masse m und Zeit t kann mit einer Gleichung der Form

$$m = a \cdot t + b$$

(a , b physikalische Größen) beschrieben werden. Bestimme a und b so, daß die Gleichung für die Koordinaten aller Punkte der Geraden erfüllt ist!

b) Wieviel Brennstoff ist nach 5 Minuten verbrannt?



c) Wie groß ist der Spiritusverbrauch pro Minute?

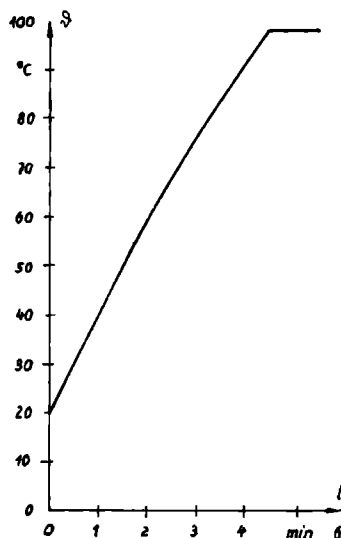
d) Berechne, wie lange der Brenner im vorliegenden Fall längstens in Betrieb sein kann (ohne Brennstoff hat das Gerät eine Masse von 110 g)! Ch. Werge, Leipzig

Na/Te 8 373 Ein Luxusdampfer der Weißen Flotte hat auf der Elbe stromabwärts eine Fahrgeschwindigkeit von $33 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, stromaufwärts beträgt diese jedoch nur noch $27 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

a) Berechne die Strömungsgeschwindigkeit!

b) Mit welcher Geschwindigkeit könnte der Dampfer in stehenden Gewässern fahren?

Na/Te 9 374 Beim Erwärmen von Wasser in einem offenen Gefäß über einem Bunsenbrenner wurde der untenstehende Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur festgestellt.



a) Bestimmen Sie zwei Funktionsgleichungen so, daß die Abweichung von der Messung unter 5 K liegt!

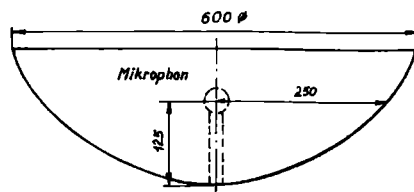
b) Wie ist der Verlauf des Graphen physikalisch zu deuten? Ch. Werge, Leipzig

Na/Te 9 375 Sonnenlicht trifft lotrecht auf eine Sammellinse mit einem Durchmesser von 8 cm und wirft auf einen 6 cm dahinter parallel zur Linse stehenden Schirm einen Lichtfleck von einem Durchmesser von 16 cm.

Wie groß ist die Brennweite der Linse?

Dr. M. Wurlitzer/Dr. H.-Ch. Semmelhack,
Karl-Marx-Universität Leipzig

Na/Te 10/12 376 Die Mitglieder einer Biologie-Arbeitsgemeinschaft wollen für Tierstimmenaufnahmen ein Mikrophon mit einem geeigneten Reflektor verwenden und den Reflektor aus glasfaserverstärktem Polyesterharz selbst herstellen. In einer Bauanleitung wird der Querschnitt des dazu benötigten Formkerns angegeben, der entsprechend dem Reflexionsgesetz für Schall bestimmt worden ist (siehe Bild). Da sich jedoch die Empfindlichkeit noch als zu gering erweist, möchten die Schüler den Formkern nach oben vergrößern.



a) Bestimmen Sie nach Einzeichnen eines geeigneten Koordinatensystems eine Funktionsgleichung so, daß der Rand des Kerns möglichst genau wiedergegeben wird! Um was für einen Graphen handelt es sich?

b) Wie hoch muß der Formkern für einen Durchmesser von 800 mm sein?

c) Ergänzen Sie den Graphen, der den Rand des Formkerns angibt, gemäß der Funktionsgleichung! Ch. Werge, Leipzig

Na/Te 10/12 377 Ein Bus mit 42 Sitzplätzen hat eine Eigenmasse von 7 t und eine Bremskraft von 62 000 N.

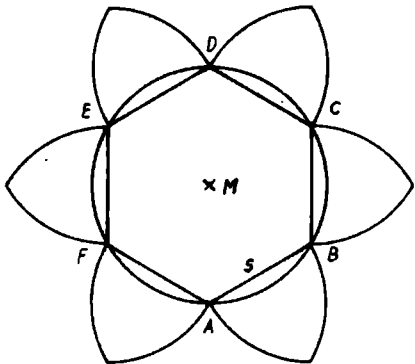
Nach den Bestimmungen der Straßenverkehrs-Zulassungsordnung (StVZO) müssen Fahrzeuge einer bestimmten Bauart eine mittlere Bremsverzögerung von 5 m/s^2 erreichen können.

Wieviel Sitzplätze können maximal eingenommen werden, wenn mit einer Masse von 75 kg je Passagier gerechnet wird?

Aus: Aufgabensammlung Mathematik,
Volk und Wissen, Berlin

Verdoppelte Kreisfläche mit verdoppeltem Umfang

Die Zeichnung stellt ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit seinem Umkreis dar. Um jeden Eckpunkt dieses Sechsecks wurden mit der Seitenlänge s des Sechsecks als Radius Kreisbogen geschlagen, deren Schnittpunkte außerhalb des Umkreises liegen.



Es ist nachzuweisen, daß der Umfang der so entstandenen Figur doppelt so lang, der Flächeninhalt doppelt so groß ist wie der des Umkreises des regelmäßigen Sechsecks!

Aus: Praxis der Mathematik, Köln
Autor: F. Meyer, München

XXVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade
(15.11.1986)



C
X

A X

X B

Olympiadeklasse 5

260521 Auf der DDR-Olympiade *Junger Mathematiker* treffen sich Andreas, Britta, Dirk und Kerstin. Sie kommen jeder aus einer anderen Stadt, und zwar aus Berlin, Dresden, Halle und Schwerin. Wir wissen folgendes über sie:

- (1) Andreas und der Teilnehmer aus Berlin sind von den vier Schülern die beiden einzigen, die schon im Vorjahr auf der DDR-Olympiade waren;
- (2) die beiden anderen, nämlich Kerstin und der Teilnehmer aus Dresden, sind zum ersten Mal bei der DDR-Olympiade anwesend.
- (3) Dirk ist älter als der Teilnehmer aus Berlin.
- (4) Kerstin ist jünger als der Teilnehmer aus Schwerin.

Welcher Teilnehmer kommt aus welcher Stadt? Wer sind die beiden, die schon im Vorjahr an der DDR-Olympiade teilgenommen haben?

260522 Fritz hat drei rot und drei blau angestrichene kreisförmige Spielmarken. Keine zwei von diesen sechs Spielmarken sind in der Größe ineinander gleich.

a) Fritz legt zuerst nur die drei verschieden großen roten Spielmarken nebeneinander auf den Tisch. Zeichne alle möglichen Anordnungen dieser drei Spielmarken auf! Wie viele Anordnungsmöglichkeiten sind dies insgesamt?

b) Nun möchte Fritz alle sechs Spielmarken so nebeneinander legen, daß sich stets die Farben der Spielmarken abwechseln. Wie viele Anordnungsmöglichkeiten der Spielmarken gibt es hierfür insgesamt? Nenne die Anzahl und erkläre, warum es genau diese Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten gibt!

260523 Zeichne eine Strecke AB der Länge 15 cm! Auf dem Strahl, der den Ausgangspunkt A hat und durch B geht, sollen nun zwei weitere Punkte C und D so eingezeichnet werden, daß $4 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$ und $\overline{CB} = \overline{BD}$ gilt. Wie groß sind dafür $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ zu wählen?

Erkläre, wie man zur Berechnung dieser beiden Längen $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ kommen kann, und zeichne dann die Punkte C und D !

260524 Du kannst die mit zwei Würfeln von jemandem geworfenen beiden Augenzahlen nennen, ohne sie gesehen zu haben, wenn du folgende Rechenschritte (1) bis

(4) ausführen und dir nur das Endergebnis nach Schritt (4) ansagen läßt:

- (1) Die mit dem einen Würfel geworfene Augenzahl ist zu verdoppeln.
- (2) Hierzu ist 5 zu addieren.
- (3) Die erhaltene Summe ist mit 5 zu multiplizieren.

(4) Zum Produkt ist die mit dem anderen Würfel geworfene Augenzahl zu addieren. Wenn du nämlich vom Ergebnis des Schrittes (4) die Zahl 25 subtrahierst, so erhältst du diejenige Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen Würfels und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels bezeichnet.

- a) Überprüfe dies an einem selbstgewählten Beispiel!
- b) Weise nach, daß das für jeden mit zwei Würfeln möglichen Wurf gilt!

Olympiadeklasse 6

260621 Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

2 7 * * 7

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, daß die Zahl durch 9 teilbar ist. Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, daß alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

260622 Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken. Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen. Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:

- (1) Britta wünscht sich den Ball.
- (2) Petra wünscht sich den Ball nicht.
- (3) Anja wünscht sich das Album nicht.

Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch. Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht. Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen, und gib die Feststellungen an!

260623 Es seien A, B, C die drei im Bild angegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

- a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte

S_1 und S_2 , für die $\overline{S_1A} = \overline{S_1B}$ und $\overline{S_2A} = \overline{S_2B}$ gilt!

b) Es gibt genau einen Punkt S , der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S !

c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

260624 Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben: In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft. Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, daß Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muß. Weise nach, daß die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

Olympiadeklasse 7

260721 Anne, Bernd und Peter helfen im Garten bei der Apfeelernte. Alle drei benutzen Körbe gleicher Größe. Anne benötigt 10 Minuten, um einen Korb zu füllen, Bernd braucht dafür 15 Minuten und der kleine Peter sogar 30 Minuten.

Wie lange würde es dauern, bis die drei Kinder gemeinsam einen Korb gefüllt hätten? Wir setzen voraus, daß sich für keinen der drei Helfer die Pflückgeschwindigkeit ändert.

260722 Klaus lernte im Mathematik-Spezialistenlager Dorit kennen und fragte sie nach ihrem Alter. Sie antwortete: „Ich wurde im Mai desjenigen Jahres 10 Jahre alt, dessen Jahreszahl die kleinste durch 7 teilbare Zahl ist, die bei Division durch 2, 3, 5 und 11 jeweils den Rest 1 läßt.“

Untersuche, ob Klaus aus dieser Antwort Dorits Alter eindeutig ermitteln konnte. Ist dies der Fall, dann gib an, wie alt (in vollen Lebensjahren gerechnet) Dorit im Juni 1986 ist!

260723 Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Die Halbierende des Winkels $\angle DAB$ schneide die Seite CD in einem inneren Punkt E . Die Parallele durch E zu AD schneide AB in F .

Beweise, daß das Viereck $AFED$ ein Rhombus ist!

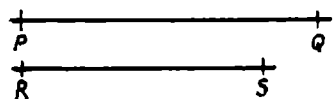
260724 Zu zwei gegebenen Streckenlängen $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ (siehe Bild) gibt es zwei

weitere Streckenlängen a und b , die die Bedingungen

$$\overline{PQ} = 2a + b, \quad (1)$$

$$\overline{RS} = 2a - b \quad (2)$$

erfüllen und durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind.



Sie sollen auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden:

a) Übertrage $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ auf ein Zeichenblatt und konstruiere (ohne Verwendung einer Längenskala) aus diesen gegebenen Längen die gesuchten a und b ! Beschreibe deine Konstruktion!

Begründe, warum die Aufgabe, (1) und (2) zu erfüllen, durch deine Konstruktion gelöst wird!

b) Ermittle a und b rechnerisch, wenn die gegebenen Längen

$\overline{PQ} = 9,8 \text{ cm}$ und $\overline{RS} = 6,6 \text{ cm}$ betragen!

Olympiadeklasse 8

260821 In der Kleinstadt A hat der Fleischer jeden Montag geschlossen, das Haushaltwarengeschäft jeden Dienstag und der Schuhmacher jeden Donnerstag. Der Optiker hat nur montags, mittwochs und freitags geöffnet. Am Sonntag sind alle Geschäfte geschlossen.

Eines Tages gingen die Freundinnen Anja, Ilka, Katrin und Susann, jede in ein anderes dieser vier Geschäfte. Als sie sich unterwegs trafen, sagten sie:

(1) Anja: „Susann und ich wollten eigentlich schon eher in dieser Woche einkaufen gehen, aber da gab es keinen Tag, an dem wir beide hätten unsere Besorgungen machen können.“

(2) Ilka: „Ich wollte heute eigentlich nicht einkaufen, aber morgen hat das Geschäft geschlossen, in dem ich einkaufen will.“

(3) Katrin: „Ich hätte auch schon gestern oder vorgestern alles besorgen können.“

(4) Susann: „Ich hätte ebenso gestern oder auch morgen meinen Einkauf erledigen können.“

Untersuche, ob diese Angaben miteinander vereinbar sind und ob dann aus ihnen eindeutig folgt,

a) wer von den genannten Mädchen in welchem der angegebenen Geschäfte war, b) an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat!

Ist dies der Fall, dann gib die entsprechenden Antworten auf die Fragen a) und b)!

260822 Es sei k ein Halbkreis über dem Durchmesser AB . Eine Gerade schneide k in zwei von A und B verschiedenen Punkten D und C sowie die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E derart, daß C zwischen D und E liegt. Außerdem gelte

$$(1) \quad \overline{BD} = \overline{BE} \quad \text{und}$$

$$(2) \quad \angle DAC = 27^\circ.$$

Ermittle die Größe α des Winkels $\angle ACD$!

260823 Es sei $ABCDEF GHIJKL M$ ein gerades sechsseitiges Prisma, in dem die

sechs Seitenflächen $ABHG$, $BCJH$, $CDKJ$, $DELK$, $EFML$, $FAGM$ sowie die Grund- und Deckfläche $ABCDEF$ und $GHIJKL M$ sämtlich einander umfangsgleich sind. Gegeben sei die Länge h der Strecke AG .

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken AB , BC , CD , DE , EF und FA !

260824 a) Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z , die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die beiden Ziffern von z eine dritte Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl, die 29mal so groß ist wie z .

b) Gib an, wie man weitere natürliche Zahlen z' bilden kann, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer, so entsteht eine neue Zahl, die 29mal so groß ist wie z' .

c) Ermittle alle diejenigen natürlichen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen z'' , die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z'' eine weitere Ziffer oder mehrere weitere Ziffern, so entsteht eine neue Zahl, die 29mal so groß ist wie z'' .

Olympiadeklasse 9

260921 Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n + 2}$$

eine natürliche Zahl ist!

260922 Peter und Heinz erzählen, daß sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9,$$

$$b = 5x + 8,$$

$$c = 4x + 1$$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.

Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a , b , c seiner Seitenlängen.

Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x , für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.

Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

260923 Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a , b , c , die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!

(1) Es gilt $b < c$.

(2) b und c sind zueinander teilerfremd.

(3) a ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.

(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.

(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4; 9; 12; a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13; 16; 21; b; c\}$ enthalten.

260924 Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, daß dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB ,

die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.

Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind! Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen des Winkels $\angle BAC$ und $\angle ABC$!

Olympiadeklasse 10

261021 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y , für die

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y + 27 = 0$$

gilt!

261022 Schneidet man einen Quader mit einer Ebene, so entsteht als Schnittfigur entweder ein Punkt oder eine Strecke oder ein n -Eck.

a) Ist es möglich, daß dieses n -Eck zwar ein Viereck, aber kein Trapez ist?

b) Ist es möglich, daß dieses n -Eck zwar ein Viereck, aber kein Parallelogramm ist?

261023 Zahlen stellen wir gewöhnlich im dekadischen Positionssystem (unter Verwendung der Basis 10 und der Ziffern 0, 1, ..., 9) dar. Man kann die Zahlen auch im dyadischen Positionssystem (oder Dualsystem) unter Verwendung der Basis 2 und der Ziffern 0 und 1 darstellen.

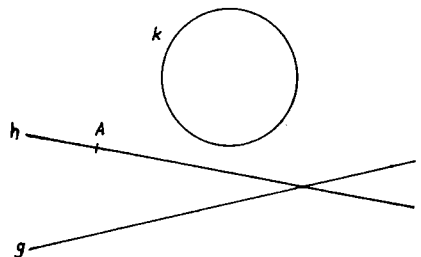
Zur Unterscheidung sei diese dyadische Darstellung einer Zahl durch eckige Klammern und eine kleine angehängte 2 gekennzeichnet.

a) Geben Sie für die Zahl 47 die dyadische Darstellung an! Ermitteln Sie für die Zahl, deren Darstellung im dyadischen System $[110001]_2$ lautet, die Darstellung im dekadischen Positionssystem!

b) Eine natürliche Zahl heiße „dekadische Spiegelzahl“, wenn ihre dekadische Darstellung von rechts nach links gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt wie von links nach rechts gelesen.

Ermitteln Sie mindestens zwei natürliche Zahlen, die größer als 9 sind und die Eigenschaft haben, sowohl dekadische als auch dyadische Spiegelzahl zu sein!

261024 Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g und h , ein Punkt A auf h und ein Kreis k eingetragen.



Untersuchen Sie, ob es einen Rhombus $ABCD$ gibt, der außer der gegebenen Ecke A seine Ecke B auf g , die Ecke C auf h und die Ecke D auf k hat!

Untersuchen Sie, ob es mehr als einen Rhombus mit diesen Eigenschaften gibt!

Wenn dies der Fall ist, sind dann alle derartigen Rhomben zueinander kongruent?
Hinweis: Der Lösungstext (nicht auf dem Arbeitsblatt) soll sich auf genau diejenige gegenseitige Lage der gegebenen g , h , k und A beziehen, die auf dem Arbeitsblatt ersichtlich ist. Das Arbeitsblatt (das für Konstruktionsschritte genutzt werden kann) ist abzugeben.

Olympiadeklassen 11/12

261221 Man ermittle alle diejenigen Tripel reeller Zahlen $(x; y; z)$, die Lösung des folgenden Gleichungssystems (1), (2), (3) sind:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 2 & (1) \\ x \cdot z &= 3 & (2) \\ x^2 + y^2 &= 5. & (3) \end{aligned}$$

261222 Man ermittle alle diejenigen Tripel $(p; q; r)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:

(1) In der Folge aller Primzahlen sind p, q, r in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Primzahlen.

(2) Die Zahl $s = p^2 + q^2 + r^2$ ist eine Primzahl.

261223 In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem zehn Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft spielt in einer Hin- und einer Rückrunde jeweils genau einmal gegen alle anderen. Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, daß im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem haben sich folgende Bedingungen als notwendig herausgestellt:

(1) An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.

(2) In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens fünf Mannschaften anwesend.

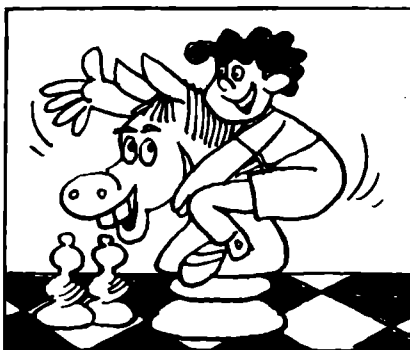
(3) Jede Mannschaft kann die Rückrunde erst beginnen, wenn sie alle Spiele der Hinrunde abgeschlossen hat.

Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in 10 Tagen durchgeführt werden kann.

Man untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch möglich ist, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen.

261224 Zwei Kreise k_1, k_2 seien so gelegen, daß sie sich in zwei verschiedenen Punkten A, B schneiden und daß die Verbindungsstrecke $M_1 M_2$ der beiden Kreismittelpunkte von der Strecke AB in einem Punkte geschnitten wird, der zwischen M_1 und M_2 liegt. Unter allen denjenigen Geraden, die durch A gehen und außerdem sowohl den Kreis k_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt P als auch den Kreis k_2 in einem von A und B verschiedenen Punkt Q schneiden, wird nun eine Gerade gesucht, für die die Strecke PQ möglichst lang ist.

Man untersuche, ob es eine solche Gerade gibt, ob sie dann durch die Kreise k_1, k_2 eindeutig bestimmt ist und, wenn dies der Fall ist, welche Lage diese Gerade dann hat.



Anordnung von Schachfiguren

Bei der Anordnung gleich- und verschiedenartiger Figuren auf dem Schachbrett gibt es eine Fülle interessanter Probleme. Dabei wirft jede Schachfigur für sich betrachtet die bekannten Minimax-Probleme auf: Wie viele braucht man minimal, damit alle Felder besetzt sind oder beherrscht werden? Wie viele können maximal aufgestellt werden, ohne daß sich die Steine bedrohen? Wie viele Variationen gibt es dabei jeweils?

Für den Fall, daß fünf Damen alle 64 Felder des Schachbrettes beherrschen, sind zahlreiche Lösungsmöglichkeiten bekannt.

Diagramm 1 zeigt eine solche Lösung. Die Anzahl der Lösungen wird jedoch bedeutend verringert, wenn man fordert, daß die fünf Damen in einer geraden Linie (Waagerechte, Senkrechte oder Diagonale) stehen müssen. Wie viele verschiedene Lösungsmöglichkeiten gibt es?

Im Diagramm 2 sind vier Damen und ein Springer so aufgestellt, daß 63 Felder des Schachbrettes von ihnen beherrscht oder besetzt sind. Nur das Feld a7 ist weder besetzt noch wird es von einer der Figuren beherrscht. Ist es möglich, mit diesen fünf Figuren alle 64 Felder entweder zu besetzen oder zu beherrschen?

H. Rüdiger

Diagramm 1

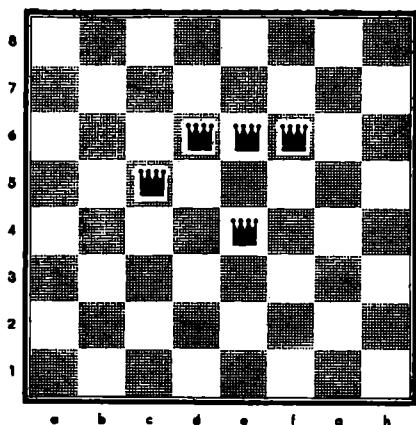
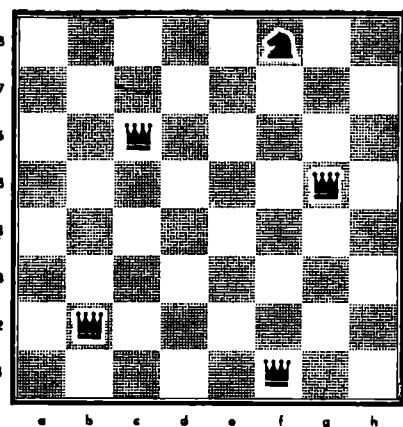


Diagramm 2



Neues aus dem Sportverlag

J. Awerbach

Turmdendspiele

Band 1: Turm gegen Bauern

Turm und Bauer gegen Turm

212 Seiten

Preis: 14,00 M

Bestell-Nr. 671 625 8

Band 2: Turm und zwei Bauern gegen

Turm - Turm mit Bauern gegen Turm mit Bauern

218 Seiten

Preis: 14,00 M

Bestell-Nr. 671 626 6

A. Pötzsch

Spaß am Kombinieren

190 Seiten

Preis: 15,80 M

Bestell-Nr. 671 643 4



„Beeile dich! Und nimm auf der Straße gefälligst deine Gedanken zusammen!“

Hans-Jürgen Starke, aus: Für Dich, Berlin

Einige Bemerkungen über Extremalprobleme

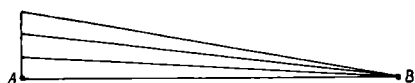
Teil 2

Entsprechend modernem Sprachgebrauch geht es in den in Heft 1/87 formulierten Variationsproblemen darum, ein sogenanntes Funktional zu einem Minimum zu machen. Ein Funktional F bezeichnet hierbei eine Abbildung, die jeder Funktion f aus einer gewissen Funktionenklasse M eine reelle Zahl $F(f)$ zuordnet. Gesucht ist eine solche Funktion f_0 , für welche $F(f_0)$ den kleinsten Wert hat.

In Beispiel 5 bedeutet $F(f)$ die Laufzeit eines Massenpunktes entlang einer Bahnkurve $f(x)$, in Beispiel 6 den Inhalt der durch eine Kurve f gegebenen Länge begrenzten Fläche in der Ebene bzw. das Volumen des durch eine Fläche f gegebenen Inhalts begrenzten räumlichen Bereichs und in Beispiel 7 den Flächeninhalt einer Fläche im Raum, die in eine gegebene Randkurve eingespannt ist. Es ist aber nicht nur erforderlich, für jedes Problem das Funktional F , sondern auch die Funktionenklasse genau zu präzisieren, die als Konkurrenzmenge zur Bestimmung des Minimums in Frage kommt. Abgesehen davon, daß die Funktionen, wie bereits in den obigen Beispielen ersichtlich ist, von einer oder von mehreren Variablen abhängen können, muß eine Festlegung darüber getroffen werden, wie „glatt“ die Konkurrenzfunktionen und damit auch die Lösungen des Problems sein sollen.

Diesem Sachverhalt trägt man heutzutage dadurch Rechnung, daß Lösungen in genau präzisierten, sogenannten Funktionsräumen gesucht werden. Ohne eine derartige Präzisierung des Problems ist es in der Regel nicht möglich, exakte mathematische Existenzbeweise zu führen. Wir werden darauf zurückkommen. Daß ein Variationsproblem nicht immer eine Lösung besitzen muß, wollen wir an einem ganz einfachen Beispiel illustrieren. In der Ebene seien zwei Punkte A und B gegeben, die den Abstand d voneinander haben. Gesucht ist ein A und B verbindender

Bild 4



Streckenzug minimaler Länge, welcher die Eigenschaft hat, im Punkte A senkrecht zu der A und B verbindenden Geraden zu verlaufen (Bild 4).

Offenbar kann die Länge des gesuchten Streckenzuges nicht kleiner als d sein. Un-

mittelbar einleuchtend ist auch, daß es zu jeder vorgegebenen Zahl $d + \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl ist, einen Streckenzug der verlangten Art mit einer Länge $< d + \varepsilon$ gibt. Der gesuchte kürzeste Streckenzug müßte also die Länge d haben. Der einzige A und B verbindende Streckenzug der Länge d ist die Verbindungsstrecke. Diese erfüllt aber nicht die geforderte Zusatzbedingung. Folglich besitzt die Aufgabe keine Lösung.

Bis weit in das 19. Jahrhundert hinein wurde selbst von den großen Mathematikern der damaligen Zeit bei der Betrachtung von Extremalproblemen die Existenz einer Lösung als selbstverständlich angenommen. Insbesondere gingen C. F. Gauß (1777 bis 1855), P. G. L. Dirichlet (1805 bis 1859) und B. Riemann (1826 bis 1866)

in vielen bedeutenden Arbeiten bedenkenlos von solchen Annahmen aus. Dieser Umstand findet allerdings seine Erklärung darin, daß eine Reihe grundlegender physikalischer Gesetze ihren Ausdruck in Minimalprinzipien findet, so daß aus damaliger Sicht die mathematische Existenz einer Lösung als gleichbedeutend mit der Realisierung eines bestimmten physikalischen Zustandes angesehen wurde. Zum Beispiel herrscht in einem mechanischen System dann ein stabiles Gleichgewicht, wenn sich das System in einem Zustand befindet, in dem die potentielle Energie ein Minimum ist. In ähnlicher Weise ließen sich viele klassische Variationsprobleme als Probleme der mathematischen Physik interpretieren, wobei es in der Regel um die Beschreibung eines stationären physikalischen Zustandes geht, d. h. eines Zustandes, der sich im Zeitablauf nicht ändert. Seine Realisierung im physikalischen Experiment galt gleichzeitig als Existenzbeweis für das zugehörige mathematische Problem. Beispielsweise lassen sich für das Minimalflächenproblem (Beispiel 7) solche Experimente in sehr einfacher Weise durchführen. Stellt man etwa aus einem Draht einen geschlossenen Rahmen her, der die gegebene Randkurve repräsentiert, taucht diesen in eine Flüssigkeit mit geringer Oberflächenspannung und zieht ihn dann heraus, so bildet sich innerhalb des Rahmens eine dünne Haut in der Gestalt der gesuchten Minimalfläche. Das Plateau'sche Problem, dessen explizite mathematische Lösung außerordentlich schwierig ist, läßt sich also praktisch sehr einfach „lö-

sen“, indem man den Draht in die jeweils vorgeschriebene Lage biegt.

Von der Entstehung der Variationsrechnung zu Beginn des 18. Jahrhunderts bis zu ihrer mathematisch einwandfreien Fundierung, die es schließlich ermöglichte, korrekte Existenzbeweise zu führen, sind immerhin 200 Jahre vergangen. Die Krönung dieser Entwicklung ist eng mit David Hilbert (1862 bis 1943) verbunden und stellt eine der grundlegenden Ausgangspunkte zur Entstehung der sogenannten Funktionalanalysis dar, die die Mathematik dieses Jahrhunderts wesentlich mitgeprägt hat, auf die hier allerdings nicht eingegangen werden kann.

Eine grundlegende Rolle in diesem historischen Entwicklungsprozeß spielte das Dirichlet'sche Prinzip, das wiederum in unmittelbarem Zusammenhang zum Dirichlet-Problem steht, auf das wir kurz eingehen wollen. Es handelt sich dabei um ein Randwertproblem für die sogenannte Laplace-Gleichung. Die Laplace-Gleichung stellt ein spezielles, jedoch sehr repräsentatives Beispiel einer partiellen Differentialgleichung dar. In einem Gebiet G des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes R^3 sei eine Funktion $u(x, y, z)$ gesucht, die von den 3 Variablen x, y, z abhängt und in G der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

genügt. Dabei bedeuten die einzelnen Summanden die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion u nach den jeweiligen Variablen. Für den Ausdruck auf der linken Seite schreibt man kurz Δu . Ganz allgemein spricht man von einer partiellen Differentialgleichung, wenn in einer Gleichung für eine gesuchte Funktion u von mehreren Variablen gewisse partielle Ableitungen von u vorkommen. Die Gleichung (2) ist der Prototyp einer elliptischen Differentialgleichung. Die Lösungen von (2) nennt man harmonische Funktionen. Denjenigen Zweig der Mathematik, der sich mit der Lösungstheorie der Laplace-Gleichung, insbesondere also mit den harmonischen Funktionen beschäftigt, nennt man Potentialtheorie. Die Potentialtheorie ist eines der ältesten und am weitesten entwickelten Gebiete der Analysis und stellt eines der vollkommensten Beispiele für die Verbindung mathematischen und physikalischen Denkens dar. Die Ursache liegt in der Verwurzelung der Laplace-Gleichung innerhalb der Mathematischen Physik.

Die Funktion u in der Gleichung (2) beschreibt verschiedenartigste stationäre physikalische Zustände. Charakteristische Beispiele sind

- a) das elektrostatische Potential eines stationären elektrischen Stromes,
- b) die Temperatur eines stationären Wärmefeldes,
- c) das Gravitationspotential,
- d) das Strömungspotential einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeitsströmung.

Es geht dabei nicht schlechthin darum, Lösungen der Differentialgleichung zu ermitteln, sondern solche Lösungen zu finden, die gewissen zusätzlichen Bedingungen ge-

nügen. Charakteristisch für die Klasse der elliptischen Differentialgleichungen sind die sogenannten Randwertaufgaben. Typisches Beispiel hierfür ist das Dirichlet-Problem bei der Laplace-Gleichung:

Gesucht ist eine im Gebiet G harmonische Funktion u , die auf dem Rand Γ des Gebietes vorgegebene Randwerte f annimmt. Die Existenz einer eindeutigen Lösung dieses Problems unter der Annahme, daß der Rand Γ hinreichend „glatt“ (und die Randfunktion f stetig) ist, läßt sich wiederum sehr leicht durch physikalische Experimente plausibel machen, denn beispielsweise führt jede elektrische Leiteranordnung zu einer wohlbestimmten „Lösung“ des Problems. Dieser sich schließlich einstellende physikalische Zustand ist andererseits durch ein Minimum der Energie charakterisiert. Daher kann das Dirichlet-Problem auch auf eine Variationsaufgabe, nämlich auf die Minimierung der Energie zurückgeführt werden. Der Ausdruck für die Energie hat die Gestalt eines Integrals. Es muß also ein gewisses Integral zum Minimum gemacht werden. Da wir den Integralbegriff hier nicht voraussetzen wollen, gehen wir nicht näher darauf ein. Es sei nur erwähnt, daß Variationsaufgaben in der Regel darauf hinauslaufen, Integrale zu minimieren. Die Lösbarkeit des dem Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung zugeordneten Variationsproblems bezeichnet man seit Riemann in der Literatur als Dirichlet-Prinzip. Die Gültigkeit des Dirichlet-Prinzips wurde also lange Zeit aus rein physikalischen Gründen, insbesondere von B. Riemann, als evident angesehen. B. Riemann gründete wesentliche Teile der von ihm entwickelten Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen auf dieses Prinzip. K. Weierstraß war es schließlich, der Kritik an dieser Vorgehensweise übte und darauf hinwies, daß die Gültigkeit des Dirichlet-Prinzips mathematisch keineswegs evident ist, sondern eines Beweises bedarf. Er stützte diese Kritik auf ein Gegenbeispiel, womit er zeigte, daß das Dirichlet-Prinzip ohne eine genauere Präzisierung der zugrundeliegenden Funktionenklasse tatsächlich nicht immer gültig ist. Die Klärung dieser Fragen erwies sich zur damaligen Zeit als außerordentlich schwieriges Problem. Die mathematische Forschung war noch nicht darauf vorbereitet. Erst nach weiteren Jahrzehnten gelang D. Hilbert der bereits erwähnte Durchbruch. Die Krise um das Dirichlet-Prinzip führte andererseits zur Entwicklung neuer Methoden zur Lösung des Dirichlet-Problems und wirkte sich daher sehr fruchtbar auf die Entwicklung der Potentialtheorie, der Theorie der Integralgleichungen, der direkten Methoden der Variationsrechnung bis hin zur modernen Funktionalanalysis aus.

Zur Ergänzung unserer Ausführungen fügen wir noch einige weitere, aus der mathematischen Literatur geläufige Extremalprobleme an, auf die wir aber nicht näher eingehen wollen.

Beispiel 8

Gegeben seien eine Gerade l und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von l . Für welchen Punkt R auf l ist der Weg eines Lichtstrahles von P über R nach Q am kürzesten (Heronisches Problem, Heron von Alexandria, um 75 u. Z.) (Bild 5). Die Lösung steht im Einklang mit dem bekannten Reflexionsgesetz (Heronisches Prinzip) der Physik. Mit anderen Worten, das Reflexionsgesetz kann durch ein Minimalprinzip beschrieben werden. Im 17. Jahrhundert zeigte P. Fermat, daß auch das Gesetz der Lichtbrechung in Form eines Minimalprinzips darstellbar ist. Die Lösung der folgenden Aufgabe möge der Leser selbst auf das Heronsche Problem zurückführen.

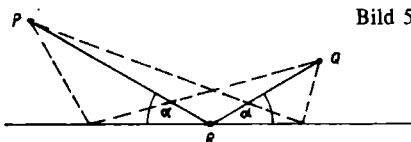


Bild 5

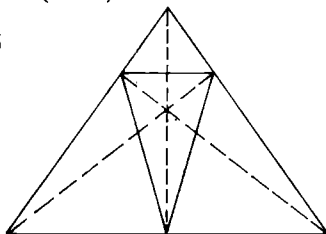
Beispiel 9

a) Gegeben sei der Flächeninhalt F und die Länge c einer Seite eines Dreiecks. Unter allen solchen Dreiecken ist dasjenige zu bestimmen, für das die Summe der Längen der beiden anderen Seiten den kleinsten Wert hat.
b) In einem Dreieck sei die Länge einer Seite c und die Summe $a + b$ der Längen der beiden anderen Seiten gegeben. Gesucht ist unter allen solchen Dreiecken das mit dem größten Flächeninhalt.

Beispiel 10

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck. Gesucht ist ein einbeschriebenes Dreieck (d. h. die Ecken liegen je auf einer Seite des gegebenen Dreiecks) mit minimalem Umfang (Schwarzsches Dreiecksproblem, Hermann Amandus Schwarz [1843 bis 1921]). Die Lösung wird durch das sogenannte Höhendreieck realisiert, dessen Eckpunkte die Fußpunkte der Höhen des gegebenen Dreiecks sind (Bild 6).

Bild 6



Beispiel 11

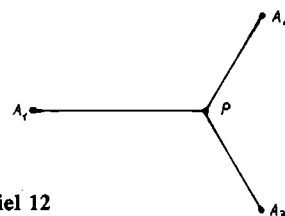
a) Es seien drei Punkte A_1, A_2, A_3 in der Ebene gegeben. Gesucht ist ein vierter Punkt P der Ebene, so daß die Summe $a_1 + a_2 + a_3$ der Abstände des Punktes P von A_1, A_2, A_3 ein Minimum wird (Steiner-sches Problem).
b) Gegeben seien n Punkte $A_1, A_2, \dots, A_n$ in der Ebene. Gesucht ist ein zusammenhängendes Streckensystem von minimaler Gesamtlänge, so daß je zwei der gegebenen Punkte durch einen Polygonzug aus Streck-

ken des Systems verbunden werden können (Straßennetzproblem oder Steiner-sches Minimalbaumproblem).

Nehmen wir im Falle des Beispiels 11a) an, daß alle Winkel des Dreiecks $A_1A_2A_3$ kleiner als 120° sind, so ist der gesuchte Punkt P dadurch charakterisiert, daß von ihm aus alle drei Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 unter dem Winkel 120° erscheinen (Bild 7).

Der Leser möge versuchen, diese Aussage zu beweisen. Was geschieht, wenn einer der Dreieckswinkel größer oder gleich 120° wird?

Bild 7



Beispiel 12

Gegeben sei eine Fläche S im Raum und 2 Punkte P und Q auf S .

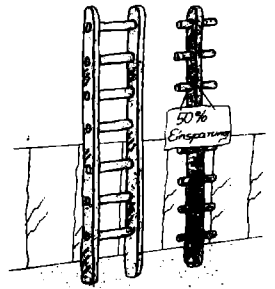
Unter allen P und Q verbindenden und in der Fläche verlaufenden Kurven ist diejenige mit minimaler Länge gesucht (Problem der geodätischen Linien).

Auf der Kugeloberfläche handelt es sich dabei gerade um die sogenannten Großkreise.

Abschließend wollen wir noch etwas näher auf das in Beispiel 6 formulierte isoperimetrische Problem eingehen. Daß der Kreis unter allen geschlossenen Kurven vorgeschriebener Länge den größten Flächeninhalt und entsprechend die Kugel unter allen geschlossenen Flächen gegebenen Inhalts das größte Volumen einschließt, sind Tatsachen, an denen man natürlich auch in der Antike keinen Zweifel hegte. Dennoch sind erst in neuerer Zeit strenge Beweise dafür gefunden worden. Diese Beweise sind zum Teil äußerst elegant und originell. Grundsätzlich ist hierzu zu bemerken, daß viele der klassischen, teilweise uralten Extremalprobleme heute mit „Standardmethoden“ gelöst werden können, die für zunächst scheinbar ganz verschiedenartige Problemstellungen eine einheitliche Behandlung gestatten. Man braucht nur an die oben skizzierte Untersuchung gewöhnlicher Extremwertaufgaben mit Hilfe der Differentialrechnung zu denken. Dabei geht allerdings oft der Reiz der direkten und elementaren Behandlung eines Problems verloren. Auch für das isoperimetrische Problem gibt es verblüffend elementare Zugänge. Wir möchten in der folgenden Aufgabe den Leser anregen, einen auf J. Steiner (1796 bis 1863) zurückgehenden einfachen Beweis für das isoperimetrische Problem in der Ebene nachzuvollziehen. Natürlich wird dazu eine Anleitung gegeben. Wer sich jedoch unmittelbar mit Steiner messen und das Problem auch ohne Anleitung lösen möchte, der versuche es, ohne diese zur Kenntnis zu nehmen. Schließlich wollen wir noch unterstreichen, daß es sich bei unserer Aufgabe nicht um einen Existenzbeweis für eine Lösung des isoperimetrischen Problems handelt.

G. Wildenhain

In freien Stunden · alpha-heiter



Frank Steger, Eulenspiegel

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} \text{BLAU} \\ + \text{ROT} \\ \hline \text{LILA} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{ALLE} \\ + \text{LESEN} \\ \hline \text{ALPHA} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{FÜNF} \\ + \text{FÜNF} \\ \hline \text{ZEHN} \end{array}$$

Steffi Hofmann, Halle

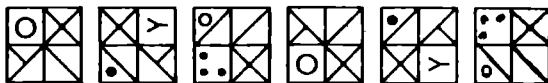
$$\begin{array}{r} 4xx \cdot x2x \\ \hline x3xx \\ 12 \\ \hline xx4x \\ \hline xxxxx8 \end{array} \quad \sqrt{\text{WONDERFUL}} = \text{OODDF}$$

$$\begin{array}{r} \text{GLIED} \\ + \text{GLIED} \\ \hline \text{KETTE} \end{array}$$

Knobelei

Wie muß die rechte Figur aussehen?
Vervollständige die Zeichnung!

aus: Trommel, Berlin



Achtung – Straßenbahnknotenpunkt

In einer Stadt existiert ein Straßenbahn-Knotenpunkt E, in dem insgesamt 14 Straßenbahnlinien aus (bzw. nach) vier verschiedenen Richtungen A, B, C, D zusammenlaufen. Die vier verschiedenen Richtungen haben über den Punkt E folgende Verbindungen: AEB, AEC, BEC, BED. Die Verbindungen: CED und AED gibt es nicht.

Die vier Richtungen werden erreicht:

- A von 6 Linien, – B von 10 Linien,
- C von 9 Linien, – D von 3 Linien.

Wieviel Linien verkehren: in Richtung AEB, in Richtung AEC, in Richtung BEC (bzw. entgegengesetzt)?

Ing. A. Körner, Leipzig

Kurios anmutende Beziehungen

Verifiziere die folgenden, kurios anmutenden Beziehungen!

Versuche, analoge Gleichungen anzugeben!

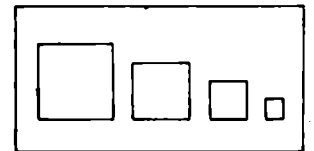
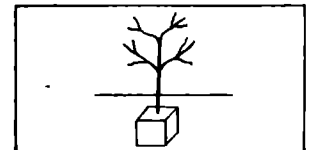
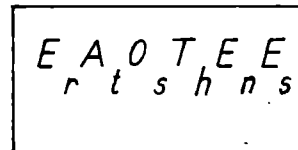
$$\sqrt{\frac{2}{3}} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \sqrt[3]{\frac{3}{26}} = 3 \sqrt[3]{\frac{3}{26}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = 5 \sqrt{\frac{5}{24}} \quad \sqrt[3]{\frac{4}{63}} = 4 \sqrt[3]{\frac{4}{63}}$$

Mathematische Spielereien

Interpretiere!

Prof. Dr. F. Smarandache, SR Rumänien



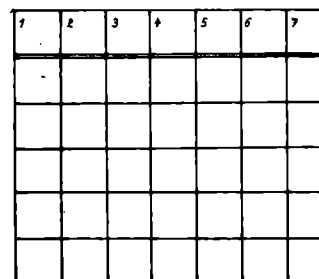
Notensalat

In einer Klasse erhielt kein Schüler als Abschlußzensur die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. In der Klasse sind mehr als 20 und weniger als 40 Schüler. Wie viele erhielten eine 3 als Abschlußnote?

Füllrätsel

In die senkrechten Spalten des Füllrätsels sind sieben Wörter mit je sechs Buchstaben von oben nach unten einzutragen, die folgendes bedeuten:

1. antikes Rechenbrett; 2. Zeichenhilfsmittel; 3. Linie ohne Krümmung;
4. griechischer Mathematiker; 5. polnischer Mathematiker; 6. Halbmesser eines Kreises;
7. eines der Bilder der Zweitafelprojektion.



Die oberste Zeile ergibt dann den Namen eines Teilgebietes der Mathematik.

OSTr Th. Scholl, Berlin

In der MITROPA

In der MITROPA-Verkaufsstelle im Leipziger Hauptbahnhof bedienen die dort tätigen Kolleginnen freundlich und schnell. Eines Tages kommt ein kleiner Junge in die Verkaufsstelle und spricht:

„Meine Mutti hat gesagt, ich soll für 5 Mark Kuchen holen. Ich möchte solchen und solchen Kuchen.“ Dabei zeigt er auf drei Kuchensorten, sagen wir Kuchen A (je Stück 0,30 M), Kuchen B (je Stück 0,35 M) und Kuchen C (je Stück 0,40 M). Wieviel Stück von jeder der drei Kuchensorten muß die Kollegin dem Jungen einpacken, damit der Gesamtpreis genau 5 Mark beträgt, und der Junge von jeder Kuchensorte mindestens 4 Stück erhält?

*Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik
der Karl-Marx-Universität Leipzig*

$$1 - 9 + 8 + 7 = 1 \cdot (9 - 8) \cdot 7$$

$$0 = 1^9 - (8 - 7) \quad 6 = 1 \cdot (-9 + 8) + 7$$

$$1 = 1^9 \cdot (8 - 7) \quad 7 = 1 \cdot (9 - 8) \cdot 7$$

$$2 = 1^9 + (8 - 7) \quad 8 = 1 \cdot 9 - (8 - 7)$$

$$3 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (8 - 7) \quad 9 = -1 + 9 + 8 - 7$$

$$4 = 1 \cdot \sqrt{9} + (8 - 7) \quad 10 = 1 + 9 \cdot (8 - 7)$$

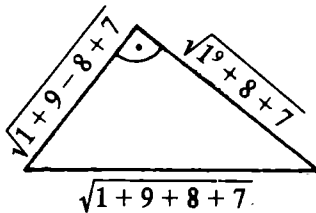
$$5 = -1 - 9 + 8 + 7$$

$$1^9 \cdot 8 \cdot 7 - 1 + 9 + 8 - 7 = 1 \cdot 9 \cdot 8 - 7$$

$$[1 \cdot (-9) + 8 + 7] \cdot (1 + 9 + 8 + 7) = (1 + 9) \cdot (8 + 7)$$

$$1 \cdot 9 - 8 + 7 = \sqrt{1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 : (1 \cdot 9 - 8 + 7) + (1^9 \cdot 8 - 7)}$$

*Schüler des Fakultät. Kurses „Mathematik“,
OS Dr. K. Fischer, Pirna*



$$A = (1 - 9) : 8 + 7$$

$$u = -1 \cdot \sqrt{9} + 8 + 7$$

Ing. H. Decker, Köln



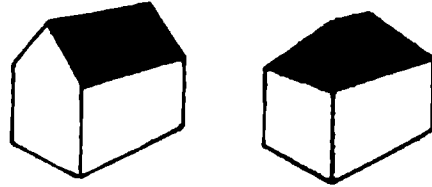
*N. Welewzew,
Krokodil, Moskau*

Gleiche oder ungleiche Mengen?

Zwei Häuser, wie das Bild zeigt, haben die gleiche rechteckige Grundfläche. Beim Giebelhaus und beim Wohnhaus ist der Neigungswinkel des jeweiligen Daches der gleiche.

Für welches Dach braucht man mehr Dachpappe?

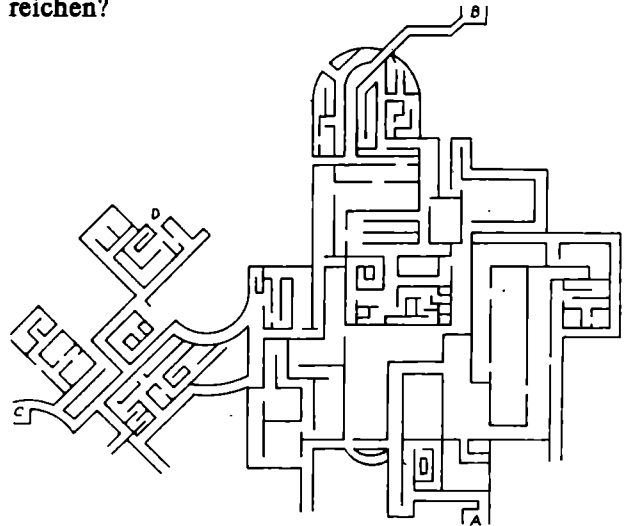
*aus der engl. Studentenzeitschrift Mathematical
Spectrum, Sheffield*



Labyrinth

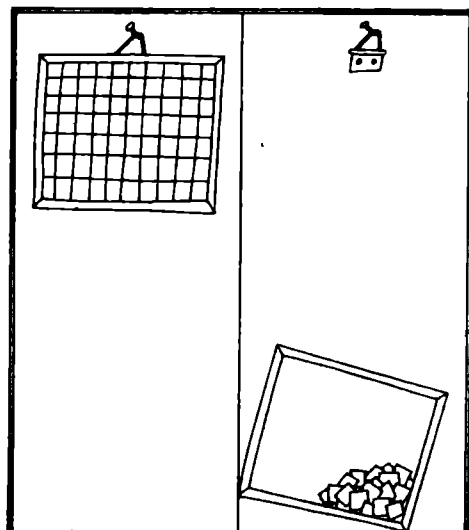
Finde den kürzesten Weg von A nach B,
von A nach C,
von A nach D!

Wieviel Ausgänge sind von A außerdem noch zu erreichen?



*Korinna König, Klasse 1c der 83. POS
in Leipzig-Grünau*

Eberhard Dietzsch, Eulenspiegel





Mini-BASIC für alpha-Leser, Teil 4

Wir haben bisher verschiedene BASIC-Anweisungen kennengelernt, mit denen wir auch schon Verzweigungen und Schleifen (auch Zyklen bzw. Wiederholungen genannt) programmieren können. Die folgenden Beispiele demonstrieren zum einen verschiedene Anwendungen, zum anderen weitere Möglichkeiten des Programmierens von Wiederholungen.

Ausdauer führt zum Ziel!

Oder:

Das Programmieren von Wiederholungen

Aufgabenbeispiel 3

Eine Schule hat 22 Klassen. Bei vielen Abrechnungen (z. B. Essengeld, Teilnehmermeldungen) sind die Angaben für jede Klasse zu addieren, um eine Gesamtsumme für die Schule zu erhalten! Für diese fortlaufende Addition von 22 einzugebenden Summanden soll ein Programm aufgestellt werden.

Wir überlegen:

Z_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 22$) sind die einzelnen Summanden.

Die Eingabeanweisung INPUT muß 22mal auftreten; deshalb nehmen wir sie einmal innerhalb einer entsprechenden FOR-NEXT-Schleife auf.

Die Summe wird wie folgt gebildet:

$$S_{22} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_{22}$$

Die i -te Summe ist allgemein

$$S_i = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_i$$

Für S_{i+1} gilt dann:

$$S_{i+1} = S_i + Z_{i+1} = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_i) + Z_{i+1}$$

Also können wir im $(i+1)$ -ten Durchlauf zum aktuellen Wert der Summe (S_i) die $(i+1)$ -te Zahl addieren und erhalten damit den neuen aktuellen Wert der Summe (S_{i+1}). $S \leftarrow S + Z^1$

Vor dem ersten Durchlauf muß natürlich S den Wert 0 haben. Man setzt daher $S = 0$, also einen Startwert für S .

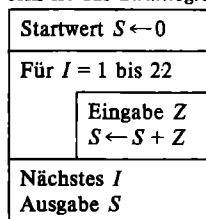
Der Lösungsplan liegt damit vor:

- (1) Startwert $2 \leftarrow 0$
- (2) Wiederhole 22mal
Eingabe Z
 $S \leftarrow S + Z$
- (3) Ausgabe von S

¹⁾ Den Pfeil $\leftarrow$ verwendet man, um Wertzuweisungen zu kennzeichnen.

Diesen verbal formulierten Lösungsplan kann man auch grafisch darstellen.

Eine Form ist das Struktogramm:



▲ 24 ▲ Entwickle ein BASIC-Programm entsprechend diesem Lösungsplan! (Das Programm soll auch Text enthalten.)

Wir haben gesehen, daß das fortlaufende Addieren von Zahlen, deren Anzahl bekannt ist, sich bequem in einer FOR-NEXT-Schleife (auch Zählschleife genannt) programmieren läßt.

▲ 25 ▲ Schreibe ein BASIC-Programm zur Ermittlung des Produkts P der ersten n geraden Zahlen ($n \neq 0$)!

$$P = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n$$

Aufgabenbeispiel 4

Bei physikalischen Experimenten werden oft Meßreihen aufgenommen, um zufällige Fehler auszugleichen. Bei der Auswertung von Meßreihen wird häufig das arithmetische Mittel $\bar{x}$ berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

Es soll ein Programm entwickelt werden, das die Eingabe von Zahlen und das Berechnen des arithmetischen Mittels dieser Zahlen ermöglicht.

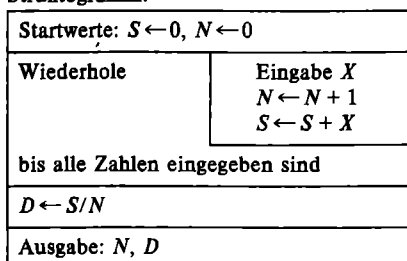
Die Anzahl der Summanden (n) soll vorher nicht bekannt sein.

Vorüberlegungen: Auch hier ist die Summe von Zahlen zu ermitteln. Jedoch kann das hier nicht mit einer FOR-NEXT-Schleife programmiert werden, weil die Summanden vorher nicht extra gezählt werden soll. Also muß nach jeder Eingabe festgestellt werden, ob noch Zahlen einzugeben sind. Wenn ja, kann zur Eingabe zurückgesprungen werden, wenn nein, kann die Berechnung des arithmetischen Mittels erfolgen. Innerhalb dieses Zyklus werden die Zahlen fortlaufend addiert und gezählt.

Lösungsplan: (S – Summen, N – Anzahl, X – zu addierende Zahl, D – arithmetisches Mittel)

- (1) Startwerte: $S \leftarrow 0$, $N \leftarrow 0$
- (2) Eingabe: X
- (3) Erhöhe N um 1
- (4) Addiere X zu S
- (5) Wiederhole (2) bis (4), bis alle Zahlen eingegeben sind
- (6) Berechne $D \leftarrow S/N$
- (7) Gib D und N an

Struktogramm:



Programm 6

```

10 CLS
20 PRINT
  „ARITHMETISCHES MITTEL“
30 PRINT „-----“: PRINT
40 LET S = 0: LET N = 0
50 INPUT „GIB ZAHL EIN:“; X
60 LET N = N + 1
70 LET S = S + X
80 INPUT „NOCH EINE ZAHL?
  JA (1) / NEIN (0)“; A
90 IF A = 1 THEN 50
100 PRINT: PRINT: LET D = S/N
110 PRINT „ANZAHL DER DATEN:“; N
120 PRINT
  „ARITHMETISCHES MITTEL:“; D
130 END
  
```

▲ 26 ▲ Arbeite dieses Programm mit folgenden x -Werten ab: 2, 3, 5, 7, 6, 1! Fülle dabei folgende Tabelle aus!

N	
S	
X	
A	
D	

Dieses Programm ermöglicht das wiederholte Durchlaufen einer bestimmten Anweisungsfolge (50 bis 80), eine Schleife ohne FOR...NEXT.

Um diesen Zyklus verlassen zu können, gibt es eine Abbruchbedingung (vorgegeben in Zeile 80), die man mit einer IF...THEN-Anweisung überprüft (Zeile 90). Der Rücksprung wird so oft wiederholt, wie für A der Wert 1 eingegeben wird. Innerhalb des Zyklus werden die Summanden gezählt (= Anzahl der Schleifendurchläufe; Zeile 60). Nach Verlassen des Zyklus erfolgt die Berechnung des arithmetischen Mittels.

Wir haben eine Wiederholung mit nachgestellter Abbruchbedingung vorliegen (WIEDERHOLE...BIS-Zyklus). Dieser wird in jedem Fall mindestens einmal durchlaufen.

▲ 27 ▲ a) Kann man durch fortlaufende Addition der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ usw.

eine Summe erreichen, die größer als 5 ist? Wie viele Brüche müßte man dazu addieren?

Stelle zur Lösung dieser Aufgabe ein BASIC-Programm auf!

b) Gibt es eine Zahl für die Summe, die auf diese Weise nie erreicht wird?

Aufgabenbeispiel 5

Der Holzbestand eines Waldstücks werde auf 60 000 m³ Holz geschätzt.

Wieviele Jahre dauert es, bis der Holzbestand auf 80 000 m³ angewachsen ist, wenn man davon ausgeht, daß er jährlich um 2,3% wächst?

Überlegen wir gemeinsam:

x sei der gegenwärtige Holzbestand (in m³).

E sei der zu erreichende Holzbestand (in m³).

H_i sei der Holzbestand (in m^3) im i -ten Jahr ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Nach einem Jahr betragt

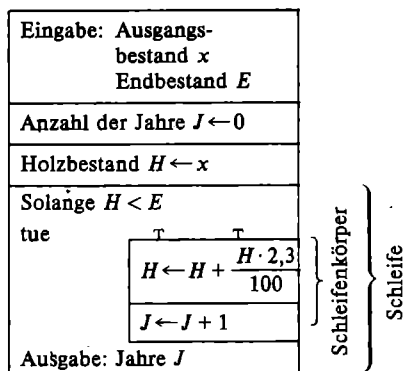
$$\text{der Holzbestand } H_1 = x + \frac{x \cdot 2,3}{100}$$

Nach zwei Jahren betragt

$$\text{der Holzbestand } H_2 = H_1 + \frac{H_1 \cdot 2,3}{100} \text{ usw.}$$

Solange der Holzbestand noch kleiner als 80 000 m^3 ist, muß der jährliche Holzzuwachs berechnet und der neue Holzbestand ermittelt werden.

Sehr übersichtlich kann man den Lösungsplan wieder in einem Struktogramm darstellen:



Solche Wiederholungen oder Schleifen, wie sie mit obigem Struktogramm beschrieben werden, nennt man *Wiederholungen mit vorangestellter Abbruchbedingung*. Ein wichtiger Unterschied zur FOR-NEXT-Schleife besteht darin, daß man auch bei solchen Wiederholungen (SOLANGE...TUE-Schleifen) die Anzahl der Schleifendurchgnge vorab nicht kennt. Wollen wir zur Lösung unserer Aufgabe einen Computer nutzen, so ist folgendes Programm geeignet:

Programm 7

```

10 INPUT „Ausgangsbestand:“; X
20 INPUT „Endbestand:“; E
30 LET J = 0
40 LET H = X
50 IF NOT (H < E) } Bedingter
   THEN 90 } Sprung
60 LET H = H + H*2.3/100 } Schleifen-
70 LET J = J + 1 } körper
80 GOTO 50 } Unbedingter
   Sprung
90 PRINT „Jahre:“; J
100 END

```

Die Anweisung GOTO n (n – Zeilennummer) veranlaßt den Computer, die Abarbeitung in der Programmzeile mit der angegebenen Zeilennummer n fortzusetzen (unbedingter Sprung).

Die IF-THEN-Anweisung in Zeile 50 bewirkt einen Sprung nach Zeile 90, falls die Bedingung „NOT ($H < E$)“ erfüllt ist (not [engl.] – nicht). Die Bedingung „NOT ($H < E$)“ ist nur erfüllt, wenn $H > E$ oder $H = E$ gilt. Man hätte die Zeile 50 also auch folgendermaßen aufschreiben können:

50 IF $H > = E$ THEN 90.

Solange allerdings $H < E$ gilt, werden jeweils die Schleifenanweisungen (Zeile 60 und Zeile 70) „durchlaufen“. Die Schleife

wird also erst bei Erfülltsein der Bedingung „NOT ($H < E$)“ verlassen (bedingter Sprung).

 28  Vergleiche die Anfangsbedingung für die Wiederholung im Struktogramm mit der Bedingung in Zeile 50 des entsprechenden BASIC-Programms. Was stellst du fest?

 29  Gib für das BASIC-Programm „Wachstum des Waldes“ Werte X und E an, so daß der Schleifenkörper nicht ein einziges Mal durchlaufen wird!

L. Flade/M. Pruzina

Lösungen

 24  Eine Möglichkeit

```

10 CLS
20 PRINT „GESAMTSUMME“
30 PRINT „-----“: PRINT
40 LET S = 0
50 FOR I = 1 TO 22
60 PRINT I;
70 INPUT „ZAHL:“; Z
80 LET S = S + Z
90 NEXT I
100 PRINT: PRINT
110 PRINT „SUMME“; S
120 END

```

 25  Eine Möglichkeit

```

10 CLS
20 PRINT „P = 2*4*6*...*N“
30 PRINT „-----“: PRINT
40 INPUT „GIB GERADE ZAHL N EIN:“; N
50 LET P = 1
60 FOR I = 2 TO N STEP 2
70 LET P = P*I
80 NEXT I
90 PRINT: PRINT
100 PRINT „P =“; P
110 END

```

 26 

N	0	1	2	3	4	5	6
S	0	2	5	10	17	23	24
X	-	2	3	5	7	6	1
A	-	1	1	1	1	1	0
D	-	-	-	-	-	-	-

 27  a) Eine Möglichkeit

```

10 CLS
20 LET N = 0: LET S = 0
30 LET N = N + 1
40 LET S = S + 1/(N + 1)
50 IF S <= 5 THEN 30
60 PRINT N, S
70 END

```

Ja, denn für $N = 226$ ist $S = 5.00437$

b) Nein. Das kann man aber mit dem Computer nicht nachweisen, weil dieser – wie der Taschenrechner – nur mit endlich vielen Zahlen arbeitet; er „läuft sich irgendwann fest“. (Siehe dazu auch *alpha*, Heft 2/1985, S. 33.)

 28 

Anfangsbedingung im Struktogramm:

$H < E$

Bedingung des bedingten Sprungs:

NOT ($H < E$)

 29  Zum Beispiel: $X = 300$, $E = 200$

Lösungen



Lösung zu: Nachgedacht – mitgemacht!
Heft 1, Seite 3

Der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Sechsecks ist gleich der Seitenlänge s dieses Sechsecks. Folglich sind z. B. die Kreisbogen $\widehat{AB}$, $\widehat{AP}$ und $\widehat{BP}$ gleich lang. Der Umfang der Figur hat deshalb die zwölffache Länge des Kreisbogens $\widehat{AB}$, der Umkreis des Sechsecks aber nur die sechsfache Länge des Kreisbogens $\widehat{AB}$, d. h., der Umfang der Figur ist doppelt so lang wie der des Umkreises.

Für den Flächenumfang eines Mndchens gilt

$$A_M = \frac{1}{6} \pi s^2 - \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}$$

Der Flächeninhalt der Figur setzt sich zusammen aus zwölf gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge s und aus zwölf kongruenten Mündchen. Für den Flächeninhalt der Figur gilt deshalb

$$A_F = 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3} + 12 \cdot \left(\frac{1}{6} \pi s^2 - \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3} \right) = 2 \pi s^2$$

Der Flächeninhalt des Umkreises hingegen beträgt $A_K = \pi \cdot s^2$.

Lösungen zu: Kryptarithmetik

Heft 1, Seite 7

$95 : 5 = 9 + 5 + 5$
 $63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3$
 $(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16$
 $2^3 \cdot 4 = 34 - 2$
 $2^8 - 1 = 128$
 $95 - 4^2 = 9 \cdot (5 + 4) - 2$
 $4^3 : 2 = 34 - 2$
 $5^6 - 2 = 625$

Lösungen zu: Mini-BASIC
für alpha-Leser, Teil 3

 18 

a	a : 7	[a : 7]	7/a
14	2	2	Ja
23	3,3	3	Nein
21	3	3	Ja
84	12	12	Ja
95	13,6	13	Nein

 19  Eine Programmmglichkeit:

```

10 CLS
20 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE ZAHL A EIN!“; A
30 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE ZAHL T EIN!“; T

```

```

40 IF INT (A/T) = A/T THEN PRINT
  „T/A“; ELSE PRINT „T IST KEIN
  TEILER VON A!“
50 END

```

▲ 20 ▲ Es genügt, wenn T die Zahlen 2 bis $\sqrt{n}$ durchläuft.

Verändertes Programm 5

```

10 CLS
20 INPUT „GIB EINE NATUERLICHE
  ZAHL EIN!“; N
30 PRINT „TEILER SIND: 1“;
40 FOR T = 2 TO SQR (N)
50 IF INT (N/T) < > N/T THEN GOTO
  90
60 IF N = T * T THEN GOTO 80
70 PRINT T;
80 PRINT N/T;
90 NEXT T
100 PRINT N
110 END

```

(In den Zeilen 50 und 60 tritt eine neue Anweisung auf:

GOTO Zeilennummer .

Die Anweisung GOTO ... (go to [engl.] – gehe zu) bewirkt, daß der Computer seine Arbeit mit der Programmzeile fortsetzt, deren Zeilennummer nach dem GOTO angegeben ist.)

```

▲ 21 ▲ a) 56, 65, 89, 98, 122, 131
b)
10 CLS
20 FOR N = 50 TO 150 STEP 3
30 IF N * N = INT (N * N / 11) * 11 + 1
  THEN PRINT N;
40 NEXT N
50 END

```

```

▲ 22 ▲ a) 310 Zahlen
b)
10 CLS
20 LET N = 0
30 FOR I = 5 TO 1985 STEP 5
40 IF INT (I/7) = I/7 THEN GOTO 70
50 IF INT (I/11) = I/11 THEN GOTO 70
60 LET N = N + 1
70 NEXT I
80 PRINT N
90 END

```

```

▲ 23 ▲
10 INPUT „RATEZAHL“; R
20 CLS
30 LET S = 1
40 INPUT „GIB EINEN TIP EIN!“; T
50 IF T = R THEN PRINT „TREFFER
  MIT“; S; „TIPS“
60 IF T = R THEN END
70 IF T < R THEN PRINT „TIP WAR
  ZU KLEIN!“; ELSE PRINT TIP WAR
  ZU GROSS!“

```

```

80 LET S = S + 1
90 GOTO 40

```

Elegant wäre es, die Zeilen 50 und 60 zu einer Zeile zusammenzufassen:
 ... IF T = R THEN PRINT „TREFFER MIT“; S; „TIPS“: END

Lösungen zu:

Unterhaltsame Psychologie

1. Einer der Gesprächspartner ist Johannes Mutter. Doch darauf kommt man gewöhn-

lich nicht. Liest man etwas von „zwei Menschen“, entsteht unwillkürlich das Bild zweier Männer, weil das Wort Mensch ebenfalls männlichen Geschlechts ist.

2. Gewohnheitsmäßig stellt man sich vor, daß die Männer zusammen zum Boot gingen. Schwerer fällt es schon, darauf zu kommen, daß sie sich von verschiedenen Seiten den Ufern des Flusses näherten und zunächst der eine, dann der andere den Fluß in entgegengesetzter Richtung überquerte. Danach setzte jeder allein seinen Weg fort.

Lösungen zu: Symmetrie im Raum

▲ 2 ▲ a) 3 (Mittellotebenen von Kanten) + 6 (Mittellotebenen von Flächendiagonalen) = 9

b) alle Ebenen durch die Kegelachse g_{MS}

▲ 3 ▲ a) 6; b) keine; c) 1; d) 2 zueinander senkrechte (also nach einer späteren Aussage in der Aufgabe 6 dann auch eine Symmetrieachse!); e) 2 (auf Grund der Herstellungsweise)

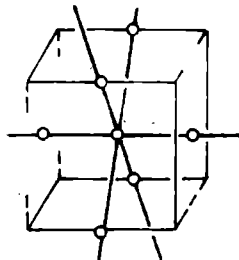
▲ 5 ▲ 3 (durch die Mitten von Seitenflächen) + 6 (durch die Mitten von Kanten) = 9

▲ 7 ▲ Zum Beispiel eine gerade Pyramide mit einem echten Parallelogramm als Grundfläche

▲ 8 ▲ Bei meinem 28er Rad nicht!

▲ 9 ▲ Siehe Bild 9

Bild 9



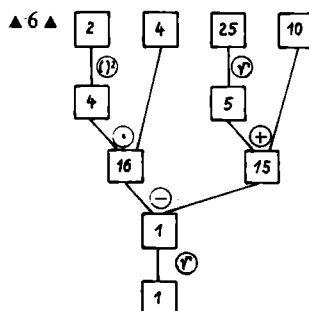
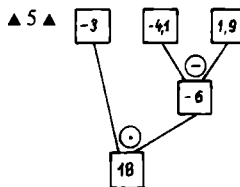
Lösungen zu: Rechenbäume

▲ 1 ▲ $\left(-\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{4}\right) - (-9) \cdot \frac{1}{3}$

▲ 2 ▲ $(-2) \cdot \frac{1}{2} - [3,5 - (-2)]$

▲ 3 ▲ $72 - \sqrt{8 \cdot \sqrt{4}}$

▲ 4 ▲ $\sqrt{7^2 - 24} \cdot \sqrt{144}$



Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Wie bekannt, bezeichnet das Symbol $n!$ (genannt n Fakultät) das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n . So z. B.

$2! = 1 \cdot 2 = 2;$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ usw.

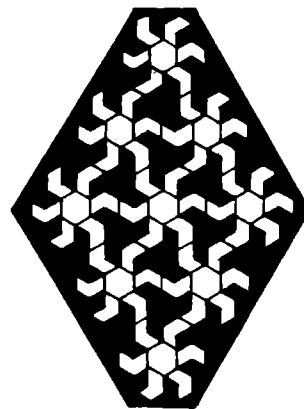
Die Zahl $12!$ voll ausgeschrieben lautet

$4\ 7\ 9\ 0\ \blacksquare\ 6\ 0\ 0.$

Leider ist eine der Ziffern ausgelöscht. Kannst du die fehlende Ziffer ermitteln, ohne alle Multiplikationen durchzuführen?

Lösung: Die Zahl $12!$ ist offensichtlich teilbar durch 9. Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, muß die Summe ihrer Ziffern auch durch 9 teilbar sein. Aber die Summe der verbliebenen Ziffern ist 26; mit anderen Worten, wir brauchen 1, um eine durch 9 teilbare Zahl zu erhalten. Demzufolge war die Ziffer 1 ausgelöscht worden.

▲ 2 ▲ Ist das Ornament symmetrisch?



Lösung: Nein. Aber wenn man einen der Sterne umlegt, erhält man eine zentralsymmetrische Figur.

▲ 3 ▲ Jedes Zeichen auf dieser Tafel stellt immer die gleiche Ziffer dar. Die Summen der fünfzehn Additionen sind waagerecht und senkrecht angegeben. Setzen Sie für jedes Zeichen den entsprechenden Wert ein!

Lösung:

2	5	9	7	4	6	6
3	3	1	4	2	7	1
8	7	3	9	9	3	5
2	1	9	1	3	7	3
1	1	3	4	9	9	2
5	1	5	7	5	1	5
7	1	4	9	1	5	9
6	7	9	4	1	8	9

Lösungen zu: alpha-heimer

Kryptarithmetik

Zum Beispiel $8952 + 743 = 9695;$

$7668 + 68489; 4584 + 4584;$

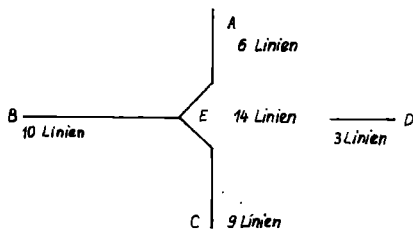
$456 \cdot 328 = 149568; \sqrt{523\ 814\ 769}$
 $= 22\ 887; 14\ 389 + 14\ 389 = 28\ 778.$

Knobelei



Achtung – Straßenbahnknotenpunkt

Das Liniennetz hat schematisch folgendes Bild:



Die drei Linien nach (bzw. von) D können nur in der Richtung BED verkehren! Damit verkehren von B aus die restlichen sieben Linien nach A oder C. Die Summe der Linien aus AEC und BEC soll neun sein. Damit müssen in der Richtung AEC mindestens zwei Linien verkehren, so daß für AEB höchstens vier Linien verbleiben. Damit bleiben aber für BEC nur noch drei Linien und C würde von $2 + 3 = 5$ Linien erreicht.

Wir tragen die Möglichkeiten in eine Tabelle ein:

Richtung	Linien				
AEB	4	3	2	1	0
AEC	2?	3?	4!	5?	6?
BEC	3?	4?	5!	6?	7?
BED	3	3	3	3	3
Summe in E:	12	13	14	15	16

Die Fragezeichen sollen darauf verweisen, daß die Summe aus AEC und BEC = 9 sein soll. Es ergeben sich also folgende Verteilungen:

- AEB = 2 Linien; - AEC = 4 Linien;
- BEC = 5 Linien; - BED = 3 Linien;
- Summe = 14 Linien.

Anmerkung für Leipziger Leser und Löser:

Das Vorbild für diese Aufgabe ist der Hauptbahnhofsvorplatz ohne die Haltestelle Wintergartenstraße.

Berücksichtigt wurden die Linien:

1, 2, 4, 6, 10, 11, 15, 16, 17, 20, 21, 25, 27, 28!

Entsprechend ist:

- A = Erich-Weinert-Platz;
- B = Friedrich-Engels-Platz;
- C = Karl-Marx-Platz;
- D = Rosa-Luxemburg-Straße.

Kurios anmutende Beziehungen

Wenn die Zahlen x, y die Gleichung $\sqrt[n]{x+y} = x\sqrt[n]{y}$ erfüllen, so muß $x+y = x^n y$

und daher $y = \frac{x}{x^n - 1}$ gelten. Andererseits

sind alle Paare $x > 1, y > 0$ mit dieser Eigenschaft auch Lösungen, denn aus $y(x^n - 1) = x$ folgt $x+y = x^n y$ und $\sqrt[n]{x+y} = x\sqrt[n]{y}$.

Beispiel: $n = 4, x = 11$. Wähle $y = \frac{11}{14640}$.

Mit dem Schulrechner SR 1 überzeugt man sich schnell davon, daß tatsächlich

$$\sqrt[4]{11 \frac{11}{14640}} = 11 \sqrt[4]{\frac{11}{14640}} \text{ ist.}$$

Der mit dem SR 1 für beide Terme ermittelte Zahlenwert ist 1,821 1914.

Mathematische Spielereien

Sieb des Eratosthenes; Kubikwurzel;

Kreis des Apollonios;

Methode der kleinen Quadrate

Notensalat

Zwischen 20 und 40 ist die 36 die einzige Zahl ein Vielfaches von 9, 3 und 6. Da also 36 Schüler in der Klasse waren, erhielten $36 - 4 - 12 - 6 = 14$ Schüler die Note 3:

Füllrätsel

1	A	2	L	3	G	4	E	5	B	6	R	7	A
	B		I		E		U		A		A		U
	A		N		R		K		N		D		F
	K		E		A		L		A		I		R
	U		A		D		I		C		U		I
	S		L		E		D		H		S		B

In der MITROPA

Bezeichnen a, b und c die Stückanzahlen der Kuchensorten A, B bzw. C, welche die Kollegin dem Jungen einpacken muß, dann muß gelten:

$$0,30a + 0,35b + 0,40c = 5 \text{ bzw.}$$

nach Multiplikation der Gleichung mit $20: 6a + 7b + 8c = 100$.

Die sogenannte diophantische Gleichung hat 10 der Forderungen des Jungen entsprechende Lösungstriple (a, b, c) , d.h. bei denen a, b und c von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind, nämlich die folgenden:

- $(1, 2, 10), (1, 10, 3), (2, 8, 4),$
- $(3, 6, 5), (4, 4, 6), (5, 2, 7),$
- $(7, 6, 2), (8, 4, 3), (9, 2, 4)$
- und $(13, 2, 1)$.

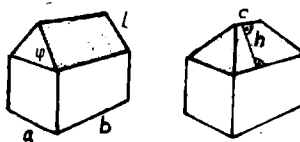
Aber nur das Tripel $(4, 4, 6)$ entspricht auch der Bedingung, daß der Junge von jeder Kuchensorte mindestens 4 Stück erhalten soll. Die Kollegin muß also 4 Stück Kuchen A, 4 Stück Kuchen B und 6 Stück Kuchen C einpacken.

Gleiche oder ungleiche Mengen?

Es seien a, b die Seiten der Grundfläche, φ der Neigungswinkel des Daches und F die Fläche des jeweiligen Daches. O.B.d.A. sei $b = a$. Für das Giebelhaus gilt dann:

$$\frac{a/2}{l} = \cos \varphi, l = a/(2\cos \varphi)$$

und damit $F = 2bl = ab/\cos \varphi$.



Beim Wohnhaus sei h die Höhe einer Fläche (siehe Skizze). Es ist wie beim Giebelhaus $h = a/(2\cos \varphi)$ und damit

$$F = 2 \frac{ah}{2} + 2 \frac{b+c}{2} h,$$

wobei $c = b - 2h\cos \varphi = b - a$ ist.

Dann gilt

$$F = 2(ah/2 + (b+c)h/2) = h(a+b+c) = h(a+b+b-a) = 2hb = ab/\cos \varphi.$$

Also benötigt man für beide Dächer die gleiche Menge Dachpappe. (Es ist nicht notwendig, die trigonometrischen Funktionen zu benutzen, wenn man h als h der Flächen stehenläßt.)

Labyrinth

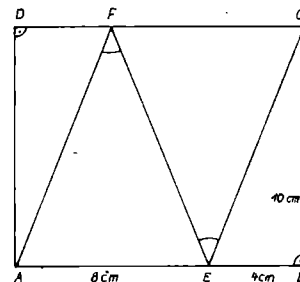
Man kann von A aus noch weitere 8 Ausgänge erreichen.

Lösungen zum Preisausschreiben: Komplexe Übungen, Heft 1/87

▲ 1 ▲

- a) $17 \text{ dt GE} \cdot 30\,562 \approx 520\,000 \text{ dt GE}$
- b) $40 \text{ M} \cdot 520\,000 = 20,8 \text{ Millionen Mark}$
- c) $30\,562 \text{ ha} \approx 306 \text{ km}^2$;
 $x \cdot 18 = 306, x = 17 \text{ (km)}$
- d) Zuckerrüben $\left(\frac{1}{4} \text{ GE}\right)$;
Zuckerrübenblatt $\left(\frac{1}{10} \text{ GE}\right)$
- e) $0,25 \cdot x = 2; x = 8; 2,5 \text{ dt} \cdot 8 = 20 \text{ dt}$
- f) $3000 : 7,5 = 400$, also 400 m^2
- g) $20 \cdot 5 \cdot x = 400, x = 4 \text{ (m)}$

▲ 2 ▲ a)



$$b) A_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2;$$

$$A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \text{ cm}^2 \approx 20 \text{ cm}^2$$

c) $\triangle AFD \cong \triangle EBC$ (sws), also $\overline{AF} = \overline{EC}$

d) $\triangle AEF \cong \triangle CFE$ (sss),

also $\angle AFE = \angle CEF$

e) $\angle AFE = \angle CEF$ (Wechselwinkel an geschnittenen Geraden), also $AF \parallel EC$

f) $10 \text{ cm} < \overline{AF} < 14 \text{ cm}$ (Dreiecksungleichung); wegen $\overline{AF} = \overline{FE} = \overline{EC}$ gilt Streckenzug $\overline{AFEC} = 3 \cdot \overline{AF}$,

also $30 \text{ cm} < \overline{AFEC} < 42 \text{ cm}$

g) $\angle EAF = \angle BEC$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);

$\angle BEC + \angle ECB \approx 90^\circ$,
also $\angle EAF + \angle ECB \approx 90^\circ$

$$\Delta 3 \Delta a) 5,40 \text{ m} \cdot 1250 \text{ m} = 6750 \text{ m}^2 = 0,675 \text{ ha}$$

$$b) x : 31 = 68 : 0,675, x = 3123 \text{ (dt)}$$

$$c) E = \frac{A \cdot F \cdot 1000}{l \cdot b} \text{ (in t)}$$

$$d) 3100 : 5 = 620; 620 \text{ s} \approx 10 \frac{1}{2} \text{ min}$$

$$e) \frac{1,250 \cdot 60 \cdot 60 \text{ km}}{620} \approx 7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$f) 46 \text{ dt} \cdot 1,75 = 80,3 \text{ dt Halmgetreide}; 34,5 \text{ dt} = 34,5 \text{ t Stroh}$$

$$g) 10 \frac{1}{2} \text{ min} + 4 \frac{1}{2} \text{ min} = 15 \text{ min};$$

$$x : 15 \text{ min} = 312 \text{ t} : 3,1 \text{ t},$$

$$x \approx 1500 \text{ min} = 25 \text{ h}$$

In $6 \frac{1}{4} \text{ h}$ ist der Schlag von vier

Mähdreschern abgemäht.

$$h) V = \frac{4 \cdot 3123}{31} \text{ m}^3 \approx 403 \text{ m}^3;$$

$$h = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{403}{16 \cdot 9} \text{ m} \approx 2,8 \text{ m}$$

i) $V_Z = \pi r^2 h = \pi \cdot 2,55^2 \cdot 10 \text{ m}^3 \approx 204 \text{ m}^3$;
wegen $408 \text{ m}^3 > 403 \text{ m}^3$ reichen zwei Silos aus.

- ▲ 4 ▲ a) $y = 2x + 4$
b) $2x + 4 \leq 30$; $2 < x \leq 13$
c) siehe Zeichnung
d) $y = (x - c)^2$; $4 = (0 - c)^2$;
 $c = 2$; $y = (x - 2)^2$; $P_0(2; 0)$
e) $x^2 - 4x + 4 = 2x + 4$; $x(x - 6) = 0$;
 $x_1 = 0$; $x_2 = 6$; $y_2 = 16$; $P_2(6; 16)$
f) $y = mx + n$; aus $16 = 6m + n$ und
 $0 = 2m + n$ folgt $m = 4$ und
 $n = -8$; $y = g(x) = 4x - 8$
g) $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \text{ (LE)}^2 = 36 \text{ (LE)}^2$;

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (4 + 16) \cdot 6 \text{ (LE)}^2$$

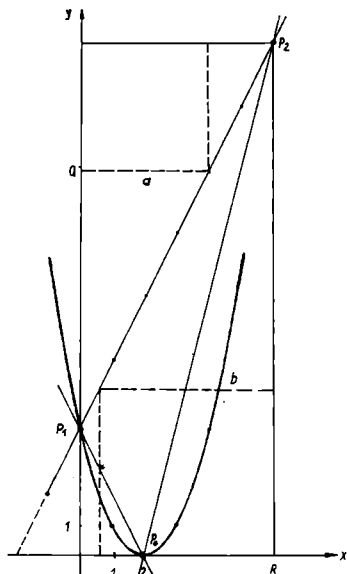
$$= 60 \text{ (LE)}^2; 36 : 60 = 3 : 5$$

h) Im Dreieck gilt $a : (12 - a)$
 $= 6 : 12 = 4$; im Trapez gilt

$$b : (16 - b) = (8 - b) : b; b = 5 \frac{1}{3};$$

die Quadratseiten sind 4 cm bzw. $5 \frac{1}{3}$ cm lang.

i) Beide Dreiecke sind rechtwinklig; ihre Katheten verhalten sich wie 2:1, folglich sind die Dreiecke einander ähnlich.



Lösung zu: Eine harte Nuß Heft 1, Seite 10

Setze $z = a + b$; dann ist
 $z^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
setze nun $a = u^2$ und $b = v^2$;
damit folgt
 $z^3 = u^6 + 3u^4v^2 + 3u^2v^4 + v^6$
oder anders geschrieben
 $z^3 = [u(u^2 + v^2)]^2 + [v(u^2 + v^2)]^2$;
und nun nur mit den Größen u und v
 $z^3 = [u(u^2 + v^2)]^2 + [v(u^2 + v^2)]^2$
also
 $z^3 = u^2(u^2 + v^2)^2 + v^2(u^2 + v^2)^2$
 $= (u^2 + v^2)(u^2 + v^2)^2$
 $z^3 = (u^2 + v^2)^3$.
Setze jetzt $x = u(u^2 + v^2)$
 $y = v(u^2 + v^2)$
Zusammengefaßt:
Wenn $x = u(u^2 + v^2)$, $y = v(u^2 + v^2)$,

dann ist $z = u^2 + v^2$
und damit folgt $x^2 + y^2 = z^3$.

Beispiel:

$u = 7$, $v = 11$ (beides Primzahlen!),
dann $x = 7(49 + 121) = 7 \cdot 170 = 1190$ und $y = 11(49 + 121)$
 $= 11 \cdot 170 = 1870$, damit $x^2 + y^2$
 $= 1190^2 + 1870^2 = 4913000 = 170^3$
also $1190^2 + 1870^2 = 170^3$.

Beachte:

Die vorstehend hergeleiteten Bedingungen besagen nicht, daß sich in jedem Falle eine eindeutige Zuordnung ergibt!

Es können sich für verschiedene Wertepaare x und y die gleichen Werte für z ergeben!

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. G. Wildenhain Heft 1

▲ 2749 ▲ Nehmen wir an, es gibt eine geschlossene Kurve der gegebenen Länge l , die einen maximalen Flächeninhalt einschließt. Wäre das umschlossene Gebiet G nicht konvex, so könnte man entsprechend Bild 1 das Kurvenstück zwischen A und B an $\overline{AB}$ spiegeln und erhielte ein um die schraffierte Fläche vergrößertes Gebiet, dessen Randkurve ebenfalls die Länge l besitzt. Die gesuchte Kurve ist also konvex.

Bild 1

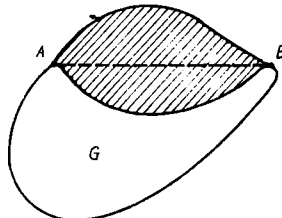
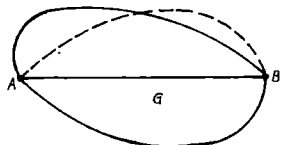


Bild 2



Wir wählen nun zwei Punkte A, B , welche die Lösungskurve in Bögen gleicher Länge zerlegen. Dann zerlegt die Strecke $\overline{AB}$ das Gebiet G in flächengleiche Teile, denn sonst könnte der Teil mit dem größeren Inhalt an $\overline{AB}$ gespiegelt werden, so daß entsprechend Bild 2 eine andere Kurve der Länge l entstünde, die einen größeren Flächeninhalt einschließt. Wir zeigen, daß $\overline{AB}$ das Gebiet G tatsächlich in zwei Halbkreisflächen zerlegt. Dazu betrachten wir entsprechend Bild 3 einen beliebigen Punkt C auf der Kurve.

Wäre nun $\angle ACB$ verschieden von $\frac{\pi}{2}$, so könnte man unter Beibehaltung der schraffierten Flächen durch Übergang von Bild 3 zu Bild 4 zu einer größeren Fläche übergehen (da sich das Dreieck ABC vergrößert), die aber nach wie vor von einem Bogen der Länge $\frac{l}{2}$ begrenzt wird. Also gilt $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ und nach dem Satz von Thales handelt es sich um einen Halbkreis.

Bild 3

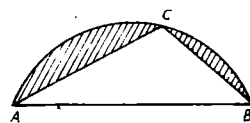
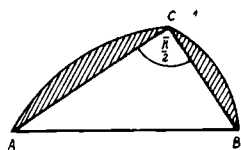


Bild 4



Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 5/86, Fortsetzung

Ma 5 ■ 2699 Wenn man die Gewichte addiert, die 3 Ferkel und 2 Lämmer bzw. 2 Ferkel und 3 Lämmer ergeben, dann erhalten wir das Gewicht von 5 Ferkeln und 5 Lämmern. Es ist gleich 45 kg. Deshalb wiegen 1 Ferkel und 1 Lamm zusammen 9 kg und 2 Ferkel und 2 Lämmer 18 kg. Da 3 Ferkel und 2 Lämmer 22 kg wiegen, hat ein Ferkel ein Gewicht von $22 \text{ kg} - 18 \text{ kg} = 4 \text{ kg}$ und somit 1 Lamm ein Gewicht von 5 kg.

Ma 6 ■ 2700 Der Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von $5 + 4 = 9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ so lange, bis die Freunde sich trafen. Beide legten in einer Stunde zusammen 9 km zurück, d. h. bis zum Treffen vergingen $36 : 9 = 4$ Stunden. In dieser Zeit fuhr der Radfahrer $9 \cdot 4 = 36 \text{ km}$.

Ma 6 ■ 2701 Die Summe der Früchte aus den übriggebliebenen Kisten muß durch 4 teilbar sein, d. h., es sind die Früchte der Kisten 2, 3, 4 und 5. In ihnen sind insgesamt $105 + 110 + 115 + 130 = 460$ Stück. Folglich sind $460 : 4 = 115$ Stück Zitronen und $460 - 115 = 345$ Stück Apfelsinen übriggeblieben.

Ma 6 ■ 2702 Da 6 Pferde und 40 Kühe täglich 472 kg Heu benötigen, werden für 12 Pferde und 80 Kühe täglich $2 \cdot 472 \text{ kg} = 944 \text{ kg}$ Heu benötigt. Da 12 Pferde und 37 Kühe täglich 514 kg Heu benötigen, werden für 43 Kühe täglich $944 \text{ kg} - 514 \text{ kg} = 430 \text{ kg}$, für 1 Kuh also täglich 10 kg Heu benötigt. Deshalb benötigen 40 Kühe täglich 400 kg Heu. Folglich benötigen 6 Pferde täglich $472 \text{ kg} - 400 \text{ kg} = 72 \text{ kg}$ und somit 1 Pferd täglich 12 kg Heu. Vom 15. Oktober bis zum 25. März sind es 162 Tage. Damit benötigen 30 Pferde und 90 Kühe für diesen Zeitraum $(12 \cdot 30 + 10 \cdot 90) \cdot 162 \text{ kg} = 204120 \text{ kg Heu}$.

Ma 6 ■ 2703 Der Fehler beträgt $(5 - 2) \cdot 100 + (8 - 3) \cdot 1000 + (2 - 9) \cdot 1 + (4 - 7) \cdot 10 = 5263$. Die erhaltene Summe ist also größer als die richtige Summe. Daher ist sie gleich $28975 - 5263 = 23712$.

Ma 6 ■ 2704 Angenommen, im Korb befanden sich anfangs x Eier, dann gilt $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{x}{16} = 10$, also $x = 160$. Zu Anfang waren 160 Eier im Korb.

Ma 7 ■ 2705 Die kleinere der Zahlen enthält alle Teiler, die der größte gemeinsame Teiler beider Zahlen enthält und ferner den Teiler 5. Das bedeutet, daß sie ein Vielfaches von $8 \cdot 5 = 40$ ist, also $40 \cdot n$ beträgt, wobei n eine natürliche Zahl ist. Für die zweite Zahl bleiben dann noch die Faktoren $240 : (40n) = 6 : n$; also ist sie gleich $(8 \cdot 6) : n = 48 : n$. Da $48 : n$ größer als $40n$ sein soll, gilt $n = 1$. Die gesuchten Zahlen lauten somit 40 und 48.

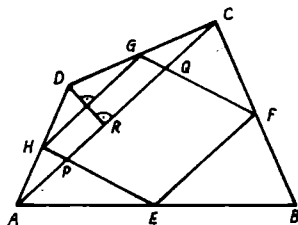
Ma 7 ■ 2706 Die Geschwindigkeit des Zuges von A nach B sei $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Dann betrug die Geschwindigkeit von B nach A $(x + 20) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und die Fahrzeit 12 Stunden. Wegen $s = v \cdot t$ gilt $16 \cdot x = 12 \cdot (x + 20)$, also $x = 60$. Dann gilt $s = 60 \cdot 16 \text{ km} = 960 \text{ km}$. Die beiden Städte sind 960 km voneinander entfernt.

Ma 7 ■ 2707 Angenommen, ein Teebeutel wiegt x Gramm. Dann gilt $6x + 50 = x + 300$, $5x = 250$, $x = 50$. Ein Teebeutel wiegt 50 g.

Ma 7 ■ 2708 Das erste Teilprodukt endet auf die Ziffer 8, das zweite auf 5. Dies ist nur möglich, wenn die letzte Ziffer des ersten Faktors auf 1 und der zweite Faktor auf 58 endet. Da das zweite Produkt dreistellig ist, beginnt der erste Faktor mit einer 1. Im ersten Teilprodukt muß man bei Multiplikation des ersten Faktors mit 8 am Anfang eine 10 erhalten. Dies ist nur möglich, wenn die zweite Ziffer des ersten Faktors 3 ist. Das dritte Teilprodukt ist größer als das erste, d. h., die erste Ziffer des zweiten Faktors ist größer als die letzte Ziffer des zweiten Faktors. Folglich ist sie gleich 9. Damit lautet der erste Faktor 131, der zweite 958.

Ma 8 ■ 2709 Die Geschwindigkeit des Gegenzuges betrage $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$; dann fährt er am Reisenden des ersten Zuges mit einer Geschwindigkeit von $(60 + x) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ vorbei. Deshalb gilt $\frac{120}{1000 \cdot (60 + x)} = \frac{x}{3600}$, also $x = 48$. Die Geschwindigkeit des Gegenzuges betrug $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ma 8 ■ 2710 Es gilt der Satz: Die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Dreiecksseiten verläuft parallel zur dritten Seite und ist halb so lang wie diese.



Daraus folgt $2 \cdot \overline{HG} = \overline{AC}$ und somit

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}. \text{ Deshalb gilt}$$

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{RD} \text{ und}$$

$$A_{PQGH} = \overline{PQ} \cdot \frac{\overline{RD}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{RD},$$

also $A_{ACD} = 2 \cdot A_{PQGH}$. Analog dazu erhält man $A_{ABC} = 2 \cdot A_{EFQP}$. Daraus folgt schließlich $A_{ABCD} = 2 \cdot A_{EFGH}$.

Ma 8 ■ 2711 Da keine Aufschrift richtig ist, gibt es nur zwei Möglichkeiten der Verteilung, nämlich

	a)	b)
„zwei weiße“	ws	ss
„weiß und schwarz“	ss	ww
„zwei schwarze“	ww	ws

Man hat also eine Kugel aus der Schachtel „weiß und schwarz“ zu wählen und je nachdem, ob diese Kugel weiß oder schwarz ist, wissen wir, ob die Verteilung a) oder b) vorliegt.

Ma 8 ■ 2712 Für $n = 1$ gilt $\frac{19 \cdot 1 + 17}{7 \cdot 1 + 11} = \frac{36}{18} = 2$; deshalb ist $n = 1$ eine Lösung.

$$\text{Wegen } \frac{19n + 17}{7n + 11} = 2 + \frac{5n - 5}{7n + 11} \text{ gilt}$$

$$0 < \frac{5n - 5}{7n + 11} < 1, \text{ so daß es keine weiteren Lösungen gibt.}$$

Ma 9 ■ 2713 Ist x die Anzahl der 1. Preise, so folgt, daß es $(x + 12)$ 2. Preise und $2 \cdot (2x + 12)$ 3. Preise gibt. Überdies ist $2(2x + 12) = x \cdot (x + 12) - 104$, $x^2 + 8x - 128 = 0$, $x = 5 \pm 12$, $x_1 = 8$ und $x_2 = -16$ (entfällt, da negativ). Es gab acht 1., zwanzig 2. und 56 dritte Preise.

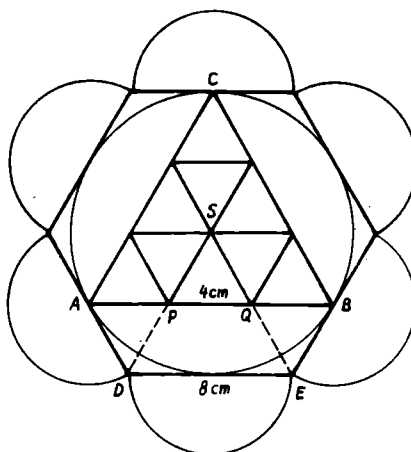
Ma 9 ■ 2714 Das gleichseitige Dreieck ABC läßt sich, wie aus dem Bild ersichtlich, in neun kongruente gleichseitige Teildreiecke zerlegen.

Wegen $\overline{SP} : \overline{SD} = \overline{PQ} : \overline{DE} = 1 : 2$ und

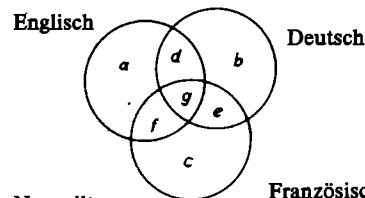
$$\overline{PQ} = \frac{12}{3} \text{ cm} = 4 \text{ cm} \text{ gilt } \overline{DE} = 8 \text{ cm.}$$

Der Flächeninhalt der Rosette beträgt somit

$$A_R = \left(6 \cdot \frac{8^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 8^2 \right) \text{ cm}^2 = 48 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} + \pi) \text{ cm}^2 \approx 317 \text{ cm}^2.$$



Ma 9 ■ 2715 Wir können die Mengen der Schüler, die eine Sprachkombination lernen, wie folgt graphisch darstellen:



Nun gilt

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f + g &= 40, \\ a + b + d + e + f + g &= 34, \\ b + c + d + e + f + g &= 25, \\ b &= 6, \\ d &= e + 3, \\ f + g &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $a = 15$, $b = 6$, $c = 6$, $d = 8$, $e = 5$, $f = g = 0$.

27 Schüler lernen genau eine, 13 Schüler genau zwei Sprachen.

Ma 9 ■ 2716 Die Fußpunkte der Lote von M auf AC bzw. BC seien K bzw. L. Wegen $A_{ABM} = A_{BCM} = A_{ACM}$ und

$$A_{ABM} + A_{BCM} + A_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \text{ ist}$$

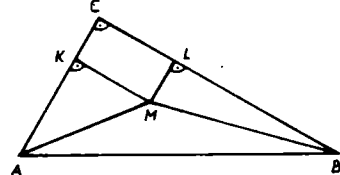
$$A_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC},$$

$$\text{also } \overline{MK} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BC}.$$

$$\text{Analog dazu gilt } \overline{ML} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AC}.$$

Da Viereck LCKM ein Rechteck ist, erhalten wir nach dem Satz des Pythagoras

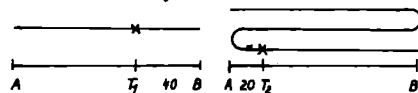
$$\begin{aligned} 5 \cdot \overline{MC}^2 - \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 &= 5 \cdot (\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2) \\ &- (\overline{AK}^2 + \overline{MK}^2) - (\overline{BL}^2 + \overline{ML}^2) \\ &= 4 \cdot (\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2) - \left(\frac{2}{3} \cdot \overline{AC} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \overline{BC} \right)^2 \\ &= 4 \cdot (\overline{MK}^2 + \overline{ML}^2) - (2 \cdot \overline{ML})^2 - (2 \cdot \overline{MK})^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$



Ma 10/12 ■ 2717 Der Radfahrer, der im Punkt A startet, fährt mit einer Geschwindigkeit von V_A und der andere mit V_B . Ferner sei $s = \overline{AB}$.

1. Treffen (nach Zeit t)
2. Treffen (nach Zeit $t + 8$)

$$\text{Es gilt } V_A = \frac{s - 40}{t},$$



$$V_B = \frac{40}{t} \text{ und } V_A = \frac{2s - 20}{t + 8}, \quad V_B = \frac{s + 20}{t + 8},$$

$$\text{also } V_A + V_B = \frac{s}{t} = \frac{3s}{t + 8},$$

$$\text{d. h. } t + 8 = 3t, \quad t = 4.$$

Und somit

$$V_B = 10, \quad s + 20 = 10 \cdot 12, \quad s = 100,$$

$$V_A = \frac{60}{4} = 15.$$

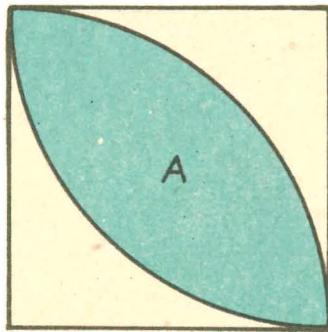
Die Orte A und B haben eine Entfernung von 100 km. Die Radfahrer fahren mit den Geschwindigkeiten $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Volumen gesucht

Die Kennzeichnung rechter Winkel ist weggelassen.

Alles, was nach einem Quadrat oder Rechteck aussieht, ist auch eins.

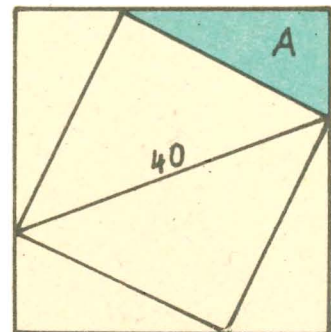
Aus: Pythagoras, Groningen



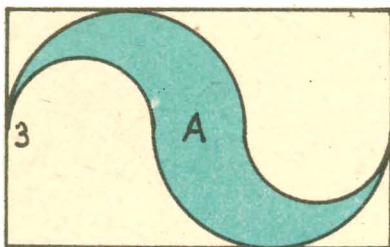
1



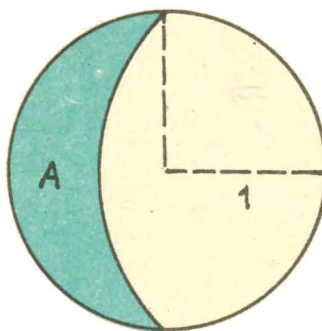
1



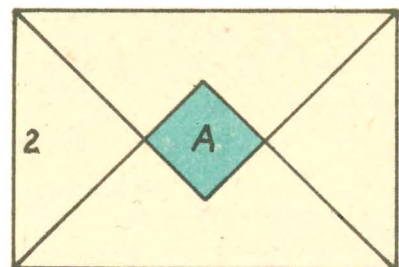
30



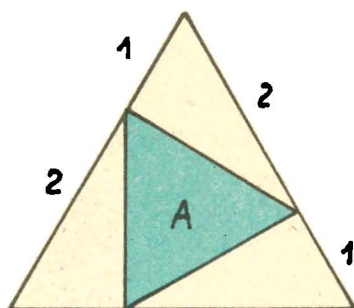
5



1

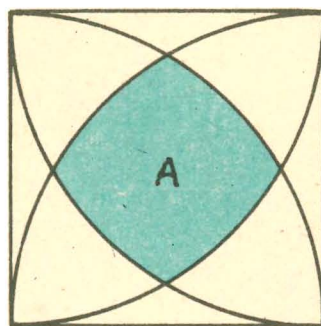


3

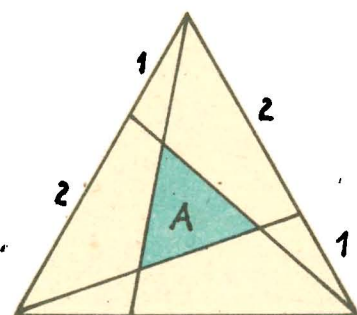


1

2



1



1

2