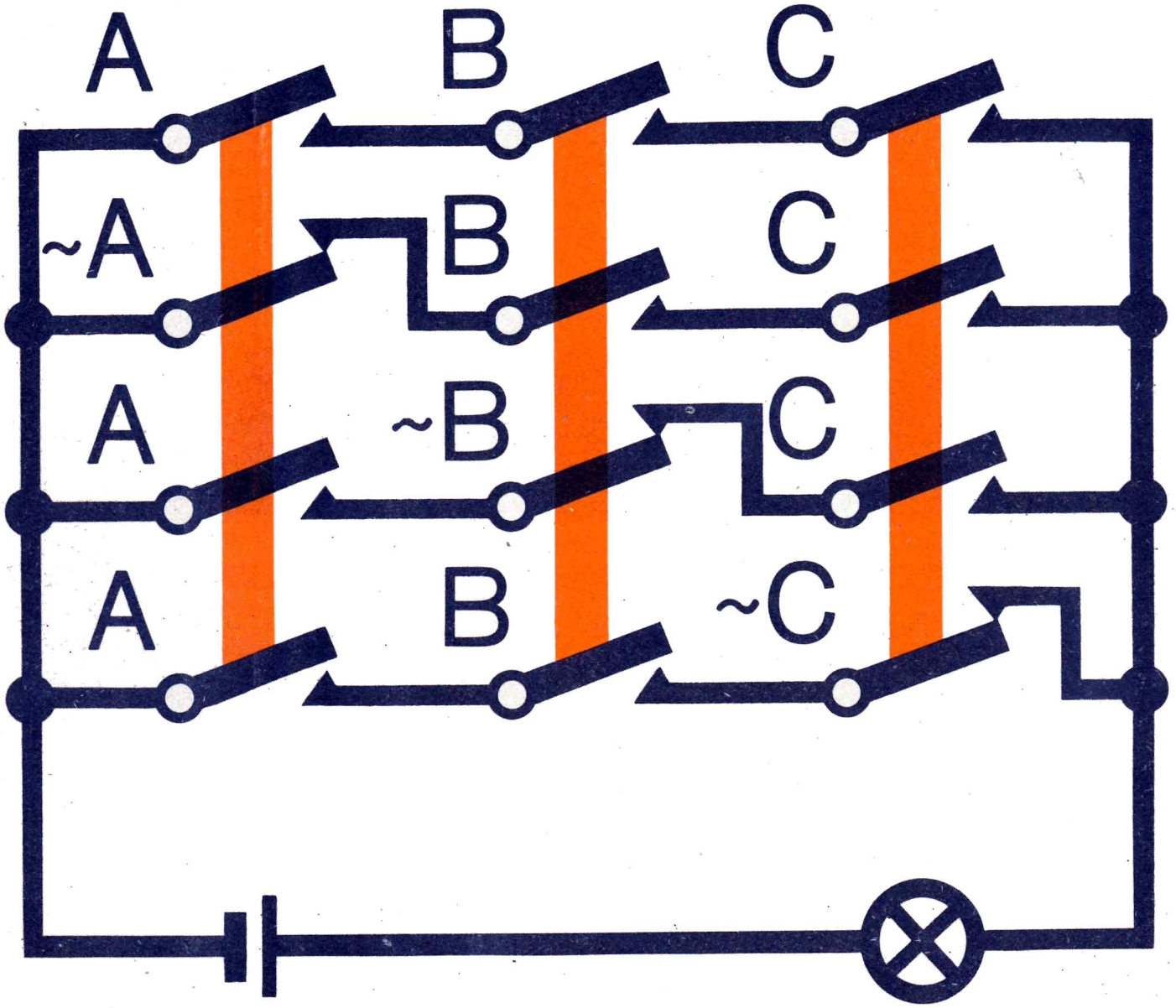
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
4. Jahrgang 1970
Preis 0,50 M
Index 31059

6

die die Menschheit bis dahin erlebt hatte, eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte, Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gelehrsamkeit". Einen Eindruck von den Fortschritten dieser Zeit möge die Gegenüberstellung zweier Weltkarten aus den Jahren 1470 bzw. 1527 vermitteln. Diese Karten fußten auf dem jeweils jüngsten Forschungsstand der geographischen Wissenschaften, und die Jahre ihrer Herausgabe umspannen etwa die Lebenszeit Albrecht Dürers.

Die noch dem Mittelalter zuzurechnende Grundkonzeption der älteren Karte ordnete die bis zu dieser Zeit erkundete Welt in das Innere eines Kreises, dessen Mittelpunkt sich mit Jerusalem, dem Ausgangspunkt der christlichen Glaubenslehre, deckt. Trotz der ungewohnten Orientierung (Afrika liegt oben, Europa unten, Asien links) erkennt man die Konturen der Mittelmeerländer, einige Städte, Flüsse und Gebirge Europas, den Nil mit seiner Delta-Mündung sowie das Schwarze und das Rote Meer. Diese in der Zeitzer Stiftsbibliothek aufbewahrte Karte war ursprünglich — gemäß der Vorstellung von der Welt als einer Scheibe — kreisförmig und wurde später beim Einpassen in einen Atlas links und rechts ein wenig angeschnitten.

Die zweite Karte aus der Thüringischen Landesbibliothek in Weimar stammt von dem portugiesischen Kartographen Diogo Ribeiro. Ihre Entstehung führt auf politische Motive zurück. Die bei der Eroberung der Neuen Welt rivalisierenden Spanier und Portugiesen wollten auch in den neu erworbenen Gebieten eine klare Grenzziehung herbeiführen. Außerdem beabsichtigte Kaiser Karl V. mit dieser

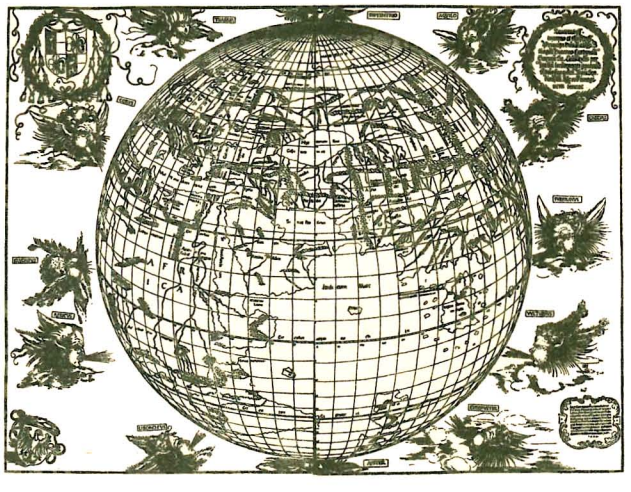
Karte vor den Fürsten die Weltmacht seines Reiches zu demonstrieren. Die Küsten des Atlantik, des Indischen Ozeans, des Mittelmeeres und des Schwarzen Meeres weisen schon eine weitgehende Übereinstimmung mit neuzeitlichen Darstellungen auf.

In der Zeit zwischen der Entstehung beider Karten liegen die Entdeckungsfahrten von Christoph Kolumbus, Vasco da Gama sowie die Weltumsegelung durch Magellan. Die Behauptung von der Kugelgestalt der Erde war nicht mehr eine Hypothese, sondern wurde jetzt von seemännischer Erfahrung gestützt. Karl V. verwies mit Stolz auf die Größe seines Reiches, in dem die Sonne nicht untergehe.

Die Fortschritte der geographischen Kenntnisse kann man nicht losgelöst von den Zeiterscheinungen des Humanismus und der Renaissance betrachten. Durch das Vordringen der Türken im östlichen Mittelmeer, im Donaugebiet, am Schwarzen und Roten Meer vom 14. bis 16. Jahrhundert waren die einträglichen Handelsverbindungen vor allem der Venezianer und Genuesen nach Indien, China und Japan unterbrochen. (Byzanz fiel endgültig im Jahre 1453 dem erobernden Sultan Mohammed II in die Hände.) Die Suche nach neuen Wegen zur Wiederherstellung der alten Beziehungen lenkte das Interesse auf die geographische und kartographische Erfassung bekannter und noch unbekannter Weltteile. Durch die Flucht zahlreicher Gelehrter vor den eindringenden Türken aus Byzanz, Alexandrien und verschiedenen griechischen Städten nach Italien waren viele antike, arabische und griechische Schriften und Bücher in italienische Bibliotheken gelangt. Vermittelnd zwischen Süd und Nord trat u. a. der Humanist und Gelehrte Regiomontanus (1436—1476) auf. Von seinen Studienreisen brachte er große Mengen schriftlicher Überlieferungen von Philosophen und Gelehrten des Altertums vornehmlich mit nach Nürnberg. Auch Dürers Meister Michael Wolgemut betätigte sich als ein Vermittler antiken Schrifttums und führte von seinen Italienreisen solche Schätze mit in die Heimat. So wurde das Interesse

für den Wissensstand der Antike in breiten Kreisen neu belebt. Eine kritische und schöpferische Auseinandersetzung mit dem Weltbild der Antike führte zur Überwindung vieler das ganze Mittelalter über herrschender Glaubensdogmen. Luthers Thesenanschlag an der Schloßkirche zu Wittenberg im Jahre 1517 machte auch die inneren Widersprüche der katholischen Glaubenslehre vor aller Welt offenbar. Das Aufbegehren der Bauern gegen die drückende Belastung durch die Fürsten und den Klerus griff wie ein Lauffeuer um sich, wurde jedoch von den Ritter- und Berufsheeren der Fürsten mit brutaler Gewalt niedergeschlagen.

An der spontanen Erweiterung des Weltbildes waren Nürnberger Gelehrte und Kosmographen nicht unwesentlich beteiligt (Schöner, Behaim, Stabius, Werner, Regiomontanus, Pirckheimer u. a. m.). Die Stadt war zu dieser Zeit eine Hochburg von Kartographen und ein Sammelpunkt kosmologischen und kartographischen Wissens. Der Nürnberger Martin Behaim nahm 1484 an einer Entdeckungsreise nach Afrika teil und schuf 1492 den ersten Erdglobus. Dürer beteiligte sich an der graphischen und künstlerischen Gestaltung von Kartenwerken des Geographen Stabius und entwickelte in seiner „Underweysung" Vorschläge für die Übertragung von Karten auf Globen.



Die weitreichenden Handelsverbindungen Nürnberger Unternehmungen sowie der hohe Entwicklungsstand des Handwerks und der Buchdruckerkunst trugen zur schnellen Anwendung von Erfindungen und Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse bei. Der Schlosser Peter Henlein stellte um 1510 in seiner Nürnberger Werkstatt die ersten mit Federantrieb und Unruh (Drehschwinger) laufenden Uhren (Nürnberger Eier) her. Damit schuf er die Grundvoraussetzung für die Ortsbestimmung von Schiffen bei längerer Fahrt auf hoher See.

Die Vorstellung von Nürnberg in der Zeit eines Hans Sachs und Albrecht Dürer als Stadt biederer oder gar einfältiger Handwerker, deren geistiger Horizont nicht wesentlich über die Regeln ihrer Zunft und die Mauern der Stadt hinausreicht, ist nach diesen überlieferten Zeugnissen gewiß als ein Trugbild zu werten. Das von Dürer verfaßte Lehrbuch „Underweysung" fand eine schnelle Ausbreitung und erfuhr zehn Jahre nach seinem Tod von seinen Freunden unter Einarbeitung vieler nachgelassener Manuskripte eine zweite Auflage (Formschneider-Auflage). Dürer vereinigte in diesem Werk einiges von dem aus der griechischen Antike und von Italien überlieferten mathematischen Wissen, verschiedene an mittelalterlichen Bauhütten gepflegte Konstruktionsregeln und einen reichen eigenen Erfahrungsschatz zu einer auf künstlerische Belange zugeschnittenen Konstruktionslehre. Diese Leistung allein würde es bereits rechtfertigen, ihn ebenbürtig neben die großen Humanisten seiner Zeit zu stellen.

Im folgenden Heft werden wir auf einige Einzelheiten von Dürers „Underweysung" eingehen, ohne dabei die große Linie und sein künstlerisches Schaffen aus dem Auge zu verlieren. Wir werden sehen, daß dieses Werk nicht allein ein mathematisch-künstlerisches, sondern auch ein sprachliches Dokument aus der Zeit des Humanismus darstellt.

E. Schröder

Das Buchhaus Leipzig empfiehlt:

Albrecht Dürer. Schriftlicher Nachlaß. Herausg. Huber Faensen.

288 S., mit 55 Abb. und 40 einfarbigen und 8 farbigen Abb. auf Tafeln. Leinen 22.50 Mark. Union Verlag Berlin

Lüdecke, Heinz, **Albrecht Dürer,** (Künstlermonographien.)

Etwa 80 S. Text mit 32 Abb., 40 Farbt. und 64 Schwarzweißabb. Format 237 mm × 313 mm, 45,— Mark, VEB E. A. Seemann

Der Verlag legt im Hinblick auf das 1971 bevorstehende Dürer-Jahr einen völlig neugestalteten Dürer-Tafelband vor. Neben den zahlreichen Reproduktionen, die durch verschiedene Drucktechniken dem vielseitigen Werk des bedeutendsten deutschen Renaissance-Künstlers gerecht werden und manche unbekannte Besonderheiten bieten, ist auch der Text entsprechend der reifen Erfahrung des bedeutenden Berliner Autors Prof. Dr. Lüdecke auf diesem seinem Spezialgebiet verfaßt.

„Maler und Werk" — Reihe

Jeder Band etwa 2,— Mark, 12 cm × 16,5 cm, 32 Seiten mit 15 Abb., davon 7 farbig, Broschur mit farbigem Kartonumschlag VEB Verlag der Kunst Dresden

Diese neue populärwissenschaftliche Reihe informiert über das Schaffen der bedeutendsten Maler aus Vergangenheit und Gegenwart.

Jährlich werden vier alte Meister und vier Künstler unserer Zeit vorgestellt. Eröffnet wird diese Reihe Anfang 1971 mit

Dürer, Velazquez, Cézanne, Lingner, Kretzschmar, Heller, Womacka.

Diese Reihe wendet sich an Schüler, Studenten, Kunsterzieher, Laienschaffende, breiteste kunstinteressierte Kreise

Bestellungen sind unter Angabe des Kennwortes *alpha* zu richten an:
Buchhaus Leipzig, 701 Leipzig, PSF 140

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Trieger (Döbeln); W. Unze (Leipzig); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle);

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die BRD und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und Import GmbH. DDR 701 Leipzig, Leninstraße 16

Fotos: Die Abbildungen zum Beitrag: Albrecht Dürer (S. 122/123) sind entnommen aus: W. Becker — Vom alten Bild der Welt — Koehler u. Amelang, Leipzig; Vignetten: K.-H.Guckuk, Leipzig (S. 128/129); Presseagentur Nowosti, M. Kulešova, APN (S. 137); Vignetten nach Originalen bearbeitet von F. Fricke, Berlin (III. Umschlagseite); M. Naumann, Leipzig (IV. Umschlagseite)
Technische Zeichnungen: G. Gruß (Leipzig)
Typograph:
H. Tracksdorf, Leipzig

Die sechs Titelbilder der Hefte 1 bis 6/70 gestaltete nach Vorlagen von Dozent Dr. E. Schröder (TU Dresden): W. Fahr, Berlin

Veröffentlicht unter der Lizenznummer 1545 des Presseamtes des Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Gesamtherstellung: Staatsdruckerei der Deutschen Demokratischen Republik, (Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 30. September 1970

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

121 Albrecht Dürer Teil 1 (7)*
— ein Künstler, Humanist und Geometer
Dozent Dr. E. Schröder, Technische Universität Dresden

124 Was ist eine Funktion? Teil 1 (8)
Prof. Dr. A. N. Kolmogorow, Moskau; aus: *Quant* 1/70

125 *Quant* — eine neue physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift

126 Über Gleichungen mit absoluten Beträgen (7)
W. Träger, Schloßberg-Oberschule, Döbeln

127 *Jugend und Mathematik* — eine mathematische Schülerzeitschrift der Demokratischen Republik Vietnam

128 Relationen Teil 1 (5)
Dr. Rosemarie Herrmann, Sektion Mathematik, Fachbereich Methodik, Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg

130 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb (5)

132 Berufsbild:Hochschulingenieur (8)
Dipl.-Journalist G. Burucker, Ingenieurhochschule, Leipzig

132 Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. techn. Detlef Schmidt
Ingenieurhochschule Leipzig

I bis VIII Sonderbeilage: Lösungen der Aufgaben der IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR 1969/70 (5)
Autorenkollektiv/Aufgabenkommission des Zentralen Komitees der OJM

132 Wir stellen vor: Die Leninpreisträger Jurij Rozanov und Jurij Prochorov (APN) (5)

134 Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung Teil 12 (Schluß) (7)
J. Frormann, Klement-Gottwald-Schule (EOS), Berlin-Treptow

136 *alpha*-Wettbewerb 1969/70 (5)
Statistik, kollektive Beteiligung, Preisträger

138 In freien Stunden, *alpha* heiter (5)
Zum Jahreswechsel ganz international
Zusammenstellung: StR. J. Lehmann, V.L.d.V., Leipzig

140 Lösungen (5)

144 Das Jahr 1971
Ing. H. Decker, Köln

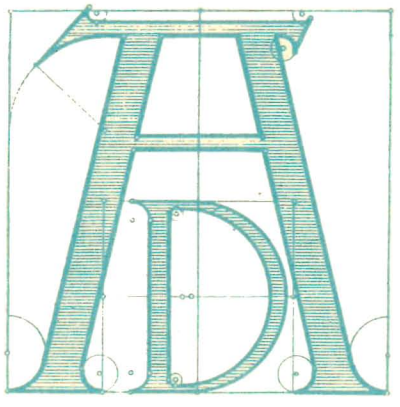
III. Umschlagseite: Mathe-Fasching

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Albrecht Dürer

ein Künstler, Humanist und Geometer

Teil 1



Wenn von dem Zeitalter des Humanismus oder der Renaissance gesprochen wird, so verbindet man mit diesem für die Neuzeit so wichtigen Entwicklungsabschnitt nicht unbedingt eine klare Vorstellung.

Gewiß können wir einige Hauptvertreter dieser Epoche, wie Petrarca, Reuchlin, Erasmus von Rotterdam, Ulrich von Hutten oder Philipp Melanchton nennen. Ein Bild jenes Lebensgefühles, das die Humanisten wenigstens zeitweise beherrschte, vermittelt der begeisterte Ausruf Ulrich von Huttens (1488 bis 1523): „Oh Jahrhundert! Oh Wissenschaften! Es ist eine Lust zu leben!" Der umwälzende Inhalt und Charakter humanistischer Ideen ist jedoch nur über ein umfassendes Quellen- und Literaturstudium voll verständlich, was wiederum vertiefte Sprach- und Geschichtskenntnisse voraussetzt. Wir wollen versuchen, dem Lebensgefühl und Gedankengut des Humanismus näher zu kommen, indem wir Leben und Werk eines Menschen betrachten, der dieser Epoche durch sein künstlerisches Schaffen zu einem einzigartigen, noch in unsere Tage hinein wirkenden Glanz verholfen hat: Albrecht Dürer.

Der in Daten erfaßbare Lebensweg Dürers läßt sich schnell umreißen. Albrecht Dürer wurde vor 500 Jahren, am 21. Mai 1471, in Nürnberg als Sohn eines Goldschmiedes geboren. Zunächst sollte er, wie sein Vater, das Handwerk eines Goldschmiedes erlernen. Da er sich jedoch mehr zum Maler berufen fühlte, wechselte er 1486 auf eine vierjährige Lehrzeit in die Werkstatt des namhaften Nürnberger Malers Michael Wolgemut über. Die Wanderjahre von 1490 bis 1494 führten ihn zu nicht mehr im einzelnen nachweisbaren Malern, Holzschneidern und Kupferstechern in Baden, im Elsaß und in der Schweiz.

Nach kurzem Zwischenaufenthalt in seiner Heimatstadt zog es ihn nach dem Süden, da er sich von der italienischen Malerei viele Anregungen für sein eigenes künstlerisches Schaffen versprach. Seit 1495 entwickelte er die in seinen Wander- und Reisejahren aufgenommenen Kenntnisse und Fertigkeiten in seiner künstlerischen Arbeit selbständig und schöpferisch weiter. Seinen kühnen fortschrittlichen Ideen verlieh er mit dem Geschick seiner Hände als Maler, Zeichner, Holzschneider, Kupferstecher, Baumeister und Theoretiker eine die Mit- und Nachwelt zutiefst beeindruckende Gestalt. Für Dürer war die künstlerische Bewältigung seiner Aufgaben untrennbar mit dem mathematischen Erfassen des ästhetisch Schönen und Harmonischen durch Proportionen, Konstruktionen und geschickte Kompositionen verknüpft.

Auch die Problematik der Abbildung eines räumlichen Objektes auf eine Ebene nach den Gesetzen der Perspektive ließ ihn zeitlebens nicht los.

Von 1505 bis 1507 reiste er ein zweites Mal nach Italien. Einen weiteren Markstein seines Lebens stellte die Reise von 1520 bis 1521 nach den Niederlanden dar. Als gefeierter und allgemein anerkannter Künstler empfing er auf dieser Reise höchste Ehrungen und durch das Studium der holländischen Meister letzte Ausreifung seines Werkes. Der materiellen Sicherstellung seines Lebens gewiß, wandte sich Dürer in der Folgezeit einem von ihm schon lange bevorzugten Themenkreis zu. Es ging ihm nun um eine exakte theoretische Fundierung seines künstlerischen Schaffens mit vorzugsweise mathematischen Hilfsmitteln. Neben hervorragenden Werken der Malerei entstanden in diesem letzten Lebensabschnitt die Manuskripte für die Bücher:

1 „Underweysung der messung/mit dem zirckel und richtscheyt/ in Linien ebnen und gantzen corporen/durch Albrecht Dürer zusammen getzoge/und zu nutz alle kunstlieb habenden mit zugehörigen figuren im Truck gebracht/in Jar. MDXXV"

2 „Etliche underricht zu befestigung der Stett Schloss und flecken"

3 „Hierin sind begriffen vier bücher von menschlicher Proportion durch Albrechten Dürer von Nürenberg erfunden und beschriben zu nutz allen denen, so zu dieser kunst lieb tragen; MDXXVIII"

Seit seiner Reise in die Niederlande stellten sich bei Dürer immer häufiger Fieberanfälle ein. Noch vor Ablauf seines 57-sten Lebensjahres starb der Meister am 6. April 1528, ein reiches, aber nach immer weiterer Vollendung drängendes Lebenswerk hinterlassend.

Jene Epoche der Renaissance, deren höchste Blütezeit Albrecht Dürer mitgestaltend erlebte, nannte später Friedrich Engels „die größte progressive Umwälzung,

Was ist eine Funktion? Teil 1

In diesem Aufsatz wird die moderne allgemeine Auffassung des Wortes „Funktion" erläutert. Der Artikel ist nicht leicht zu lesen: wiewohl er keinerlei über den Rahmen der Mittelschule hinausgehende Spezialkenntnisse voraussetzt, verlangt er doch, daß der Leser auf jedes Wort achtet. Er rechnet auch damit, daß der Leser mit den Worten „Menge" und „Element einer Menge" umgehen kann.

1. Einführung

Auf die Frage „Was ist eine Funktion" erhält man von Schülern häufig zur Antwort: „Eine Funktion kann durch eine Tabelle, eine graphische Darstellung oder eine Formel gegeben werden". Es ist klar, daß das *keine Definition* darstellt. Indessen haben die Schüler, die sich um die Formulierung einer klaren Definition drücken und statt dessen sogleich beschreiben, wie Funktionen vorgegeben werden, auch nicht so ganz unrecht. Die Mathematik kann nicht von Definitionen ihren Ausgang nehmen. Formulieren wir nämlich die Definition eines gewissen Begriffes, so gebrauchen wir in dieser Definition selbst notgedrungen irgendwelche andere Begriffe. Solange wir den Sinn irgendwelcher Begriffe nicht verstehen, kommen wir nicht voran und können keine einzige Definition in Worte fassen. Daher beginnt die Darstellung einer beliebigen mathematischen Theorie damit, daß gewisse *Grundbegriffe* ohne Definition akzeptiert werden. Mit ihrer Hilfe lassen sich dann die weiteren *abgeleiteten Begriffe* genau definieren.

Auf welche Weise machen sich nun die Leute einander klar, was ihre Auffassung von der Bedeutung der Grundbegriffe ist? Hierzu gibt es kein anderes Verfahren, als die Sache an Beispielen zu erklären und die charakteristischen Eigenschaften der zu definierenden Dinge eingehend zu beschreiben. Diese Beschreibungen brauchen in den Einzelheiten nicht völlig klar und zunächst auch nicht erschöpfend zu sein. Trotzdem zeichnet sich hieraus der Sinn des Begriffs allmählich immer deutlicher ab. Auf diese Weise wollen wir zum Begriff der *Funktion* gelangen, den wir als einen formal undefinierbaren mathematischen Grundbegriff ansehen.

Es wird zwar im folgenden gesagt werden, daß eine Funktion nichts anderes als eine *Abbildung* einer Menge auf eine andere (des *Definitionsbereichs* der Funktion auf ihren *Wertevorrat*) ist. Das Wort *Abbildung* erscheint hierbei jedoch einfach als *Synonym* des Wortes *Funktion*. Es handelt sich um zwei Bezeichnungen für ein und denselben Begriff. Die Erklärung eines Wortes durch ein anderes gleichbedeutendes macht die Definition des durch sie ausgedrückten Begriffs nicht überflüssig.

Beispiel 1: Wir wollen annehmen, daß die Buchstaben x und y *reelle Zahlen* bezeichnen. $\sqrt{\ }$ sei das Zeichen für das Ausziehen der arithmetischen (d. h. mit positivem Vorzeichen genommenen) Quadratwurzel. Die Gleichheit

$$y=\sqrt{1-x^2} \tag{1}$$

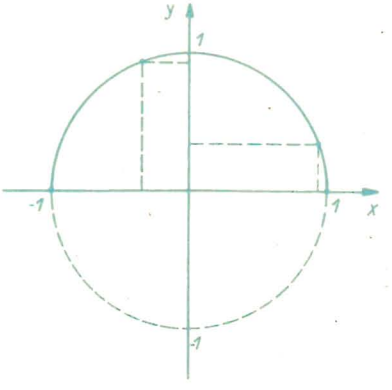
bedeutet, daß die Bedingungen

$$x^2\leqq 1,\quad y\geqq 0,\quad x^2+y^2=1 \tag{2}$$

erfüllt sind.

Die Punkte, deren Koordinaten diesen Bedingungen genügen, bilden einen Halbkreis, der in Bild 1 durch eine gestrichelte Linie dargestellt ist.

Bild 1 veranschaulicht die folgenden Tatsachen, die ihr auch auf rein algebraischem Wege beweisen könnt:



1) Formel (1) gestattet, für beliebiges x, das den Bedingungen

$$-1\leqq x\leqq 1 \tag{3}$$

genügt, ein ihm entsprechendes y zu berechnen, das die Ungleichungen

$$0\leqq y\leqq 1 \tag{4}$$

befriedigt;

2) Jedem y, das der Ungleichung (4) genügt, entspricht wenigstens ein solches x, dem dieses vorgegebene y nach Formel (1) entspricht.

Man kann sagen, die Formel (1) legt eine *Abbildung* der Menge der Zahlen x, die die Ungleichungen (3) befriedigen, auf die Menge der den Ungleichungen (4) genügenden Zahlen y fest. Die Mathematiker gebrauchen zur Bezeichnung von Abbildungen (besonders in letzter Zeit) oft einen Pfeil. Mittels eines Pfeils läßt sich die uns interessierende Abbildung folgendermaßen schreiben:

$$x\to\sqrt{1-x^2}. \tag{5}$$

Beispielsweise gilt:

$$-1\to\sqrt{1-(-1)^2}=0,\quad -\frac{4}{5}\to\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5},$$

$$\frac{3}{5}\to\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},\quad 0\to\sqrt{1-0^2}=1. \tag{6}$$

Haltet fest: *Eine Abbildung ist vollständig definiert, wenn*

a) *die Menge E vorgegeben ist, die abgebildet wird,*

b) *für jedes Element x dieser Menge E das Element y vorgegeben ist, auf das das Element x abgebildet wird.*

Die Menge aller y-Werte wollen wir mit dem Buchstaben M bezeichnen. Im Beispiel 1 ist E die Menge aller Zahlen, die der Bedingung (3) genügen, M dagegen die Menge der Zahlen, die die Bedingung (4) befriedigen*).

Beispiel 2: Die Regeln

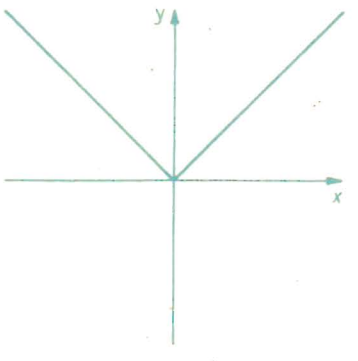
1) $x\to\sqrt{x^2}$,

2) $x\to\begin{cases} x, \text{ wenn } x\geqq 0,\\ -x, \text{ wenn } x<0,\end{cases}$

definieren *ein und dieselbe* Abbildung

$$x\to|x| \tag{7}$$

der reellen Zahlen x auf ihre Beträge (Absolutwerte) $|x|$ (Bild 2).



*) Eine Menge kann mit einem beliebigen Buchstaben bezeichnet werden. Hier sind die Buchstaben E (vom französischen Wort *ensemble* — Menge) und M (das deutsche *Menge*; zufällig beginnt das russische Wort „množestvo" mit diesem selben Buchstaben) gewählt, das muß aber nicht so sein: bereits im folgenden Beispiel bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen wie üblich mit dem Buchstaben R (französisch *réel* — reell, wirklich).

Durch die Abbildung (7) wird die Menge

$$R = (-\infty, \infty)$$

aller reeller Zahlen auf die Menge

$$R_+ = (0, \infty)$$

der nichtnegativen reellen Zahlen abgebildet. An Stelle des Wortes *Abbildung* kann man *Funktion* sagen und die Abbildung (5) folgendermaßen schreiben:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}. \qquad (8)$$

die Abbildung (7) dagegen in der Form:

$$f(x) = |x|. \qquad (9)$$

Die bei den Formeln (6) aufgezählten speziellen Werte der Funktion (8) schreibt man dann auf folgende Weise:

$$f(-1) = 0,\ f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5},\ f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5};\ f(0) = 1.$$

Der Definitionsbereich der Funktion (9) ist die Menge R aller reellen Zahlen. Ihr Wertevorrat ist die Menge R_+ der nichtnegativen reellen Zahlen.

Beispiel 3: Petja, Kolja, Sascha und Wolodja wohnen in einem Zimmer des Wohnheims. Im Februar haben sie für ihren Dienst folgende graphische Darstellung aufgestellt:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	28
Petja	■				■				■				■	...	
Kolja		■				■				■				...	
Sascha			■				■				■			...	
Wolodja				■				■				■		...	■

Die Ähnlichkeit dieser Tabelle mit den euch aus dem Algebraunterricht in der Schule bekannten graphischen Darstellungen von Funktionen springt sogleich in die Augen. Hat diese Analogie eine exakte logische Bedeutung? Haben die Jungen hier eine *Abbildung* einer Menge auf die andere aufgestellt, d. h., eine gewisse *Funktion* definiert? Und haben sie nicht eine *graphische Darstellung* dieser Funktion aufgezeichnet? (Achtet auf die Alltagsformulierung „sie haben eine *graphische Darstellung* der Dienste aufgestellt"!)

A. N. Kolmogorow

Übersetzt und bearbeitet von Prof. Dr. habil. G. Eisenreich, Karl-Marx-Universität Leipzig

In Heft 2/71 (Teil 2) erscheint: Der allgemeine Begriff einer Funktion; umkehrbare Funktion; 20 Aufgaben für den Leser. d. Red.

Mitarbeiter gesucht

Wer sendet uns: Aufgaben für den *alpha*-Wettbewerb (mit Lösungen), Berichte und Pläne über die Arbeit in den AGs, Beiträge für *alpha*-heiter, lustige Begebenheiten aus Unterricht und AG?

Redaktion *alpha*

Научно-популярный физико-математический

Квант

1

1970

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

„Quant" — eine neue physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift

Ab Januar 1970 erscheint die populärwissenschaftliche physikalisch-mathematische Schülerzeitschrift *Quant* (Chefredakteur: Akademiemitglied I. K. Kikoin). Zum Redaktionskollegium gehören die ordentlichen Mitglieder der Akademie der Wissenschaften der UdSSR und der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der UdSSR L. A. Arzimowitsch, W. G. Subow, P. L. Kapiza, W. A. Kirillin, A. N. Kolmogorow, A. I. Markuschewitsch, M. D. Millionschtschikow, W. A. Fabrikant und andere bekannte Wissenschaftler.

Weshalb wurde diese neue Zeitschrift gegründet?

... Heute durchdringen die exakten Wissenschaften alle Kenntnisbereiche. Nicht zufällig wird an den philosophischen Fakultäten ein Mathematiklehrgang eingeführt ... Doch in die Wissenschaft muß man schon von Jugend an eindringen. Die heutigen Schüler werden am Ende dieses Jahrhunderts Leiter großer Institute sein. Natürlich darf es den heutigen Wissenschaftlern nicht gleichgültig sein, wer nach ihnen ihren Platz einnehmen wird.

Welches Grundanliegen hat „Quant"?

Einen bedeutenden Teil des in der Zeitschrift enthaltenen Materials muß man mit dem Bleistift in der Hand lesen. In einer Reihe von Artikeln sollen Fragen der modernen Physik und Mathematik behandelt werden. In den mehreren Nummern werden Artikel zu finden sein, deren Titel mit den Überschriften von Abschnitten der Schullehrbücher übereinstimmen. Sie enthalten bedeutendes Zusatzmaterial und bereichern so die Lehrbuchabschnitte mit neuen Angaben. Man bezeichnet diese Sparte mit: „Eine neue Art von Lehrmaterialien". In der Zeitschrift werden die Schüler auch interessante Mitteilungen aus der Geschichte der Wissenschaft finden. Den jungen Lesern soll die Liebe zum Experimentieren anerzogen werden. Die Rubrik „Experimentelle Technik" wird vorschlagen, eine Reihe von Versuchen bei sich zu Hause oder im Schullaboratorium durchzuführen. Die Rubrik „Bibliographie" wird Lektüre-Hinweise geben. Es ist zu hoffen, daß *Quant* auch für die Hochschulbewerber zum aktiven Hilfsmittel wird. Die Schüler werden in dieser Zeitschrift immer Mathematik- und Physikaufgaben finden und natürlich auch solche Dinge wie lustige Anekdoten und Kurzinformationen.

Die Zeitschrift ist für Schüler der 8. bis 10. Klassen gedacht. Für die Zukunft ist auch die Reservierung einiger spezieller Seiten für Schüler der 5. bis 7. Klassen geplant.

Aus Heft 1/70: Prof. S. Somorchinski eröffnet mit dem Artikel: „Die Erzählung über *Quant*". Akademiemitglied Kolmogorow schlägt den älteren Schülern die Lektüre der Ausführungen „Was ist eine Funktion?" vor. Über die Quantenelektronik informieren das Akademiemitglied Pochorov und der Kandidat der mathematisch-physikalischen Wissenschaften Karlow die jungen Leser.

Aus Heft 2/70: Akademiemitglied Kolmogorow behandelt den Begriff der Funktion und des Graphen einer Funktion von modernen Standpunkt aus und erläutert seine Ausführungen durch schöne Illustrationen. Er geht dabei auch auf geometrische Abbildungen und Vektoren ein. (14 Aufgaben sind beigefügt.) *alpha* übernimmt die beiden Artikel über Funktionen. Weitere Themen sind u. a.: „Laser"; „Geometrische Ungleichungen"; „Wie wurde das Atom gewogen?" In Heft 2/70 wurde eine Grußadresse der Schülerzeitschrift *alpha* veröffentlicht und eine kurze Einschätzung unserer Zeitschrift beigefügt.

Über Gleichungen mit absoluten Beträgen*

Aus dem Mathematikunterricht der Klasse 7 sind uns die Begriffe *Gleichung* sowie *zur Gleichung gehörige Grundmenge* und *Lösungsmenge* geläufig. Einige Beispiele von Gleichungen, bei denen die Variable x eine beliebige Zahl der jeweils angegebenen Grundmenge ist, seien mit ihren Lösungsmengen angegeben:

lfd. Nr.	Gleichung	Grundmenge	Lösungsmenge
1	$2\|x\|+1=6$	Menge der reellen Zahlen	$\{-2{,}5;\ 2{,}5\}$
2	$2\|x\|+1=6$	Menge der ganzen Zahlen	$\emptyset$
3	$\|x\|=x-2$	Menge der reellen Zahlen	$\emptyset$
4	$\|x\|=x-2$	Menge der ganzen Zahlen	$\emptyset$
5	$7+x=7+x$	Menge der natürlichen Zahlen	$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
6	$2\|x\|+1=6$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\{2{,}5\}$
7	$2\|x\|+1=6$	Menge der negativen reellen Zahlen	$\{-2{,}5\}$
8	$x^2=x^2-4x+4$	Menge der reellen Zahlen	$\{1\}$

Bei den Beispielen 1, 2, 6 und 7 sowie 3 und 4 wird jeweils die gleiche Gleichung betrachtet. Jedoch sind die zugehörigen Grundmengen andere. So sind die Grundmengen bei den Beispielen 2 und 4 gegenüber den Beispielen 1 und 3 eingeengt. Während in den Beispielen 3 und 4 die gleiche Lösungsmenge auftritt, ist die Lösungsmenge im Beispiel 2 eine echte Untermenge** der Lösungsmenge im Beispiel 1: Die Lösungsmenge aus Beispiel 2 ist die Durchschnittsmenge** der Lösungsmenge aus Beispiel 1 mit der Grundmenge aus Beispiel 2. Allgemein gilt:

Lehrsatz 1: Besitzt die Gleichung $f(x)=g(x)$ in bezug auf die Grundmenge G die Lösungsmenge L und in bezug auf die Grundmenge G_* mit $G_*\subseteq G$ die Lösungsmenge L_*, so gilt $L_*=L\cap G_*$.

Unseren Beispielen 1, 6 und 7 liegt ebenfalls die gleiche Gleichung zugrunde, jedoch ist hier die Vereinigungsmenge** der Grundmengen aus den Beispielen 6 und 7 gleich der Grundmenge aus Beispiel 1. Wir ersehen aus der Tabelle, daß der gleiche Zusammenhang zwischen den Lösungsmengen besteht: $\{2{,}5\}\cup\{-2{,}5\}=\{-2{,}5;\ 2{,}5\}$. Auch dieser Sachverhalt ist allgemeingültig:

Lehrsatz 2: Besitzt die Gleichung $f(x)=g(x)$ in bezug auf die Grundmenge G_1 die Lösungsmenge L_1 und in bezug auf die Grundmenge G_2 die Lösungsmenge L_2, so besitzt $f(x)=g(x)$ in bezug auf die Grundmenge $G=G_1\cup G_2$ die Lösungsmenge $L=L_1\cup L_2$.

Auch zwischen unserem 3. Beispiel mit der Gleichung $|x|=x-2$ und dem 8. Beispiel mit der Gleichung $x^2=x^2-4x+4$, zu denen jeweils die gleiche Grundmenge, nämlich die Menge der reellen Zahlen gehört, besteht ein Zusammenhang: Die zuletzt angegebene Gleichung ist für jede reelle Zahl x eine Folgerung der ersten. Denn aus $|x|=x-2$ folgt durch Quadrieren beider Seiten für jede reelle Zahl x: $|x|^2=(x-2)^2$. Unter Benutzung einer binomischen Formel*** und mittels $|x|^2=x^2$ folgt schließlich $x^2=x^2-4x+4$. Die Lösungsmengen in unserem 3. und 8. Beispiel stehen in der Beziehung $\emptyset\subseteq\{1\}$. Auch hier gilt allgemein:

Lehrsatz 3: Folgt für alle reellen Zahlen $x\in G$ die Gleichung $f_*(x)=g_*(x)$ aus der Gleichung $f(x)=g(x)$, so ist die Lösungsmenge L_* der Gleichung $f_*(x)=g_*(x)$ in bezug auf G eine Obermenge** der Lösungsmenge L von $f(x)=g(x)$ in bezug auf G: $L_*\supseteq L$.

Eine einfache Folgerung aus Lehrsatz 5 sei angegeben:

Lehrsatz 4: Folgt für alle reellen Zahlen $x\in G$ die Gleichung $f_*(x)=g_*(x)$ aus der Gleichung $f(x)=g(x)$ und umgekehrt, so haben die Gleichungen $f_*(x)=g_*(x)$ und $f(x)=g(x)$ in bezug auf G die gleiche Lösungsmenge.

Wir arbeiten gemeinsam: Es sind alle Zahlen zu bestimmen, die einer gegebenen Menge G angehören und gleichzeitig einer gegebenen Gleichung genügen.

▲ Aufgabe: Bestimme alle reellen Zahlen, die der Gleichung $|x-2|-2x=5$ genügen! Zunächst soll diese Aufgabe rechnerisch gelöst werden: Aus $|x-2|-2x=5$ folgt nach einer bekannten Umformungsregel für Gleichungen für jede reelle Zahl x:

$$\text{I}\quad |x-2|=2x+5$$

Um das störende Betragszeichen vermeiden zu können, unterscheiden wir die Fälle $x\geqq 2$ und $x<2$ (Diese Bedingungen sind äquivalent mit $x-2\geqq 0$ bzw. $x-2<0$):

1. Fall: $x\geqq 2$ *2. Fall:* $x<2$

Laut Definition des absoluten Betrages gilt:

$$\text{II}\quad |x-2|=x-2 \qquad |x-2|=-(x-2)=-x+2.$$

Durch Einsetzen von II in I und durch anschließendes Umformen nach bekannten Umformungsregeln für Gleichungen folgt schrittweise:

$$\begin{array}{ll} x-2=2x+5 & |-x-5 \\ \underline{x=-7} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -x+2=2x+5 & |+x-5 \\ 3x=-3 & |:3 \\ \underline{x=-1} & \end{array}$$

Mit den angegebenen Schlußketten ist auf Grund der Lehrsätze 2 und 3 die folgende Aussage bewiesen: Als Lösungen der gegebenen Gleichung kommen nur die Zahlen -7 und -1 in Frage. Da durch einen solchen Auflösungsprozeß laut Satz 3 im allgemeinen nur eine Obermenge der gesuchten Lösungsmenge L gefunden wird, d. h. es gilt $L\subseteq\{-7;\ -1\}$, ist noch für beide als Lösung in Frage kommenden Zahlen die Probe zu machen:

Probe für $x=-7$:
Linke Seite: $|-7-2|-2\cdot(-7)=23$;
Rechte Seite: 5 *Vergleich:* $23\neq 5$

Probe für $x=-1$:
Linke Seite: $|-1-2|-2\cdot(-1)=5$;
Rechte Seite: 5; *Vergleich:* $5=5$.

Tatsächlich scheidet durch die Probe eine der beiden als Lösung in Frage kommenden Zahlen aus: -1 ist die einzige Lösung dieser Gleichung. Dafür kann man auch sagen: Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $L=\{-1\}$. Kann bei dieser Aufgabe auf die Probe verzichtet werden? Im ersten Fall $x\geqq 2$ kann die Zahl -7, die hier als eine

* Dieser Beitrag ist eine Fortsetzung von „Über Funktionsgleichungen mit absoluten Beträgen" aus *alpha* 6/69.

** Über die Begriffe Untermenge, Obermenge, Durchschnitts- und Vereinigungsmenge sowie die zugehörigen Symbole orientieren wir uns in den Beiträgen „Mit Mengen fängt es an" aus *alpha* 1, 2 und 3/1967

*** Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Lösung in Frage kommt, sehr einfach ausgeschieden werden: Da $x=-7$ die Zusatzannahme $x \geqq 2$ nicht erfüllt, besitzt die gegebene Gleichung keine der Bedingung $x \geqq 2$ genügende reelle Zahl als Lösung. Auch im zweiten Fall $x<2$ könnte man laut Satz 4 dadurch auf die Probe verzichten, daß man sich überlegt, daß alle Schlüsse, durch die aus $|x-2|-2x=5$ die Beziehung $x=-1$ gefolgert wurde, umkehrbar sind. (Im ersten Falle $x<2$ sind die entsprechenden Schlüsse nicht umkehrbar, hier kann aus $x=-7$ nicht $|x-2|-2x=5$ gefolgert werden.)

Nun wenden wir uns der zeichnerischen Lösung der gegebenen Gleichung $|x-2|-2x=5$ zu. Betrachten wir zunächst die durch die Gleichungen $y=|x-2|-2x$ und $y=5$ für alle reellen Zahlen x erklärten Funktionen. Wir zeichnen deren kartesische Bilder: Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung enthält genau die Abszissen aller gemeinsamen Punkte beider kartesischen Bilder (siehe Bild 1).

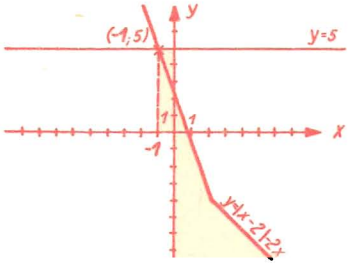


Bild 1

Da unsere Gleichung $|x-2|-2x=5$ mit $|x-2|=2x+5$ äquivalent ist (Weil jede beider Gleichungen aus der anderen folgt, besitzen beide laut Satz 4 die gleiche Lösungsmenge und heißen deshalb äquivalent.), kann die gesuchte Lösungsmenge auch bestimmt werden durch das Zeichnen der kartesischen Bilder von $y=|x-2|$ und $y=2x+5$ und anschließendes Ablesen der Abszissen ihrer gemeinsamen Punkte (siehe Bild 2):

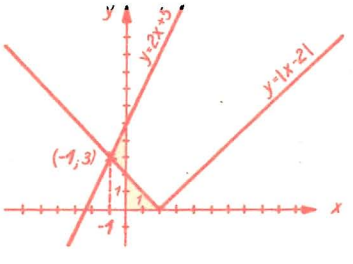


Bild 2

▲ Aufgabe: Bestimme a) alle reellen Zahlen und b) alle ganzen Zahlen x, die der Gleichung $|x|+\frac{1}{2}|x-3|-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$ genügen!

Alle der Bedingung $0 \leqq x \leqq 3$ genügenden reellen Zahlen sind Lösungen.

Lösung von b): Gemäß Lehrsatz 1 besteht die jetzt gesuchte Lösungsmenge aus allen der Bedingung $0 \leqq x \leqq 3$ genügenden ganzen Zahlen. Es gilt also jetzt: $L=\{0; 1; 2; 3\}$.

Rechnerische Lösung zu a):

Aus $|x|+\frac{1}{2}|x-3|-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$ folgt im ...

1. Fall mit $x<0$:

$-x-\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$-x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$-2x=0 \quad | :(-2)$

$x=0$

Wegen $x<0$ scheidet $x=0$ als Lösung aus. Die Probe entfällt.

2. Fall mit $0 \leqq x<3$:

$x-\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$x-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$0=0$

Jede der Bedingung $0 \leqq x<3$ genügende reelle Zahl x kommt als Lösung in Frage.

Probe:

Linke Seite:

$|x|+\frac{1}{2}|x-3|-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$=x-\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$=0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0=0$

3. Fall mit $3 \leqq x$:

$x+\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$

$x-3=0 \quad | +3$

$x=3$

$x=3$ kommt als Lösung in Frage.

Probe:

Linke Seite:

$|3|+\frac{1}{2}|3-3|-\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{3}{2}$

$=3-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$

$=0$

Rechte Seite: 0

Vergleich: $0=0$

Zeichnerische Lösung von a):

Die Lösungen der gegebenen Gleichung sind die Abszissen der sämtlichen gemeinsamen Punkte der kartesischen Bilder von

$y=|x|+\frac{1}{2}|x-3|-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ und $y=0$

(Bild 3):

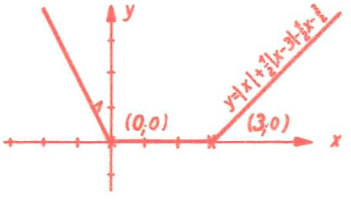


Bild 3

Wir arbeiten selbständig:

▲ Aufgabe (Klasse 8): Bestimme a) alle reellen Zahlen und b) alle ganzen Zahlen, die der Gleichung $2|x+3|+\frac{x}{2}+2=0$ genügen!

▲ Aufgabe (Klasse 9): Bestimme a) alle reellen Zahlen und b) alle ganzen Zahlen, die der Gleichung $2|x|-|x-3|-x-3=0$ genügen!

W. Träger

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

SỐ 12

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm Nguyễn Cảnh Toàn — Thư ký Tòa soạn Hoàng Chung

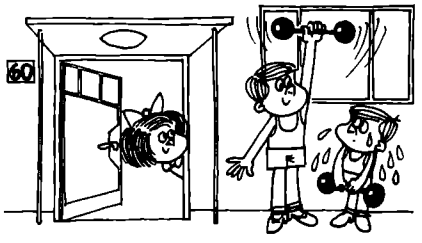
Trụ sở: 39 Trần Hưng Đạo Hà nội — Dây nói: 2781

Mit großer Freude empfing die Redaktion *alpha* zwei Hefte der mathematischen Schülerzeitschrift „Jugend und Mathematik", herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft der Demokratischen Republik Vietnam. Wir grüßen unsere vietnamesischen Freunde. *alpha* wird ausführlich über „Jugend und Mathematik" berichten.

Relationen
Teil 1

1. Überall Beziehungen

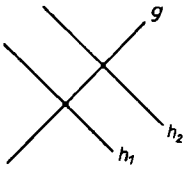
Fritz sagte neulich zu seinen Mitschülern und brüstete sich dabei:
„Ich habe gute Beziehungen zu meinem großen Freund Peter"! Seine Mitschüler waren neugierig und forderten Fritz auf, diese Beziehungen näher zu erläutern. Daraufhin antwortete er prahlerisch:
„Ich *bin Freund von* Peter" und
„Ich *bekomme oft Bastelmaterial von* Peter" und
„Peter *verteidigt* mich ", denn
„Peter *ist stärker als* ich" und
„Peter *ist größer als* ich" und außerdem wißt ihr,
„Peter und ich *wohnen in demselben Haus*".



Wir sehen, daß die Beziehungen zwischen Fritz und Peter vielseitig sind. Peter und Fritz gehören durch diese Beziehungen in gewisser Weise zusammen. Diejenigen Satzteile, die diese Beziehungen ausdrücken, sind in Schrägschrift gedruckt.
Merke dir: Wenn wir von *Beziehungen* zwischen Menschen sprechen, so meinen wir stets mindestens *zwei* Menschen, die in dieser Beziehung zueinander stehen.
In der Mathematik gibt es ebenfalls eine Fülle von Beziehungen. Ihr kennt manche sogar seit der ersten Klasse. Allerdings sind es nicht Beziehungen zwischen Menschen, sondern Beziehungen zwischen mathematischen Objekten, also etwa zwischen Zahlen oder zwischen geometrischen Figuren. Einige Beispiele sind:

$2<3$

„2 *ist kleiner als* 3"
„0 *ist Vorgänger von* 1"
„5 *ist ein Teiler von* 10"
„g *steht senkrecht auf* h_1"
„h_1 *verläuft parallel zu* h_2"
„25 *ist das Quadrat von* 5"

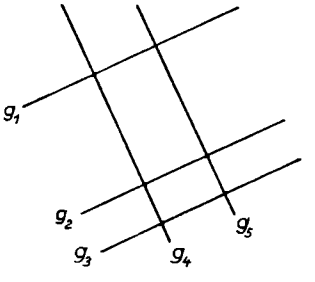


Die schräggedruckten Satzteile drücken wiederum die entsprechende Beziehung aus. Sie stehen meist zwischen den beiden in Beziehung stehenden Objekten.
Für einige dieser Beziehungen benutzt man in der Mathematik bestimmte Zeichen, z. B. $2<3$, $5 \mid 10$, $g \perp h_1$, $h_1 \parallel h_2$. Man ersetzt also z. B. „ist kleiner als" durch das Zeichen „<" und schreibt entsprechend die kleinere der beiden in dieser Beziehung stehenden Zahlen davor, die größere dahinter.
Wird die Beziehung „ist kleiner als" z. B. durch den Buchstaben K ersetzt, so könnte man für $2<3$ auch schreiben 2K3, d. h. 2 und 3 stehen in der Beziehung K: „ist kleiner als".
Wir wollen im folgenden Beziehungen oft durch große Buchstaben ersetzen, und zwar vornehmlich durch R oder R_1 oder R_2 usw. Damit ersparen wir uns lange Schreibarbeiten. Diese Abkürzungen sind auch in der Mathematik üblich. Der Buchstabe „R" kommt von dem Wort „Relation" (deutsch: Beziehung). Man spricht in der Mathematik nicht von Beziehungen, sondern von Relationen. Und nun verstehst du auch die Überschrift!
Aus den mathematischen Beispielen erkennen wir wieder, daß jeweils *zwei* Zahlen oder geometrische Gebilde in einer bestimmten Beziehung miteinander stehen. Würden wir eine der beiden Zahlen oder Figuren weglassen, entstünde ein unvollständiger Satz. Wenn wir nur sagen: „5 ist ein Teiler", so fragen wir sofort: „Wovon?". Schau dir daraufhin die zuerst genannten Sätze noch einmal an! Da spürst du bei einigen deutlich, daß diese erst Sinn haben, wenn außer Fritz noch eine Person genannt wird. In unserem Falle ist es Peter.
Beim Suchen von Beziehungen in der Umgangssprache wirst du merken, daß oft Beziehungen in obiger Weise unvollständig formuliert werden. Wenn man z. B. über das Wetter spricht, so sagt man oft: „Heute ist das Wetter viel schöner". Eigentlich müßte man fortfahren: „...als gestern" oder „...als vorige Woche". Aber der andere weiß meistens, was gemeint ist. Diese unvollständige Sprechweise im täglichen Sprachgebrauch kommt sehr häufig vor bei Benutzung des Komparativs (der Steigerungs- oder Vergleichsform), obgleich es sich in jedem Falle um eine Beziehung handelt („ist größer als", „ist höher als", „ist schwieriger als", ...).

Aufgaben:

■ 1 ■ Suche selbst Beziehungen aus der Mathematik und aus dem täglichen Leben und bilde je ein Beispiel!

■ 2 ■ Ergänze folgende Beziehungen so, daß ein sinnvoller und vollständiger Satz entsteht, der eine richtige Aussage darstellt!
a) Beziehungen aus dem täglichen Leben:
——— wohnt in derselben Straße wie ———.
——— geht in dieselbe Klasse wie ———.
——— ist älter als ———.
——— ist jünger als ———.
——— ist Schwester von ———.
——— ist befreundet mit ———.
b) mathematische Beziehungen:
——— steht senkrecht auf ———.
——— hat dieselbe Richtung wie ———.
——— ist ein Teiler von ———.
——— ist ein Vielfaches von ———.
——— ist größer als ———.
——— ist kleiner als ———.
——— ist Vorgänger von ———.
——— ist Nachfolger von ———.
——— ist gleich ———.



2. Grundmenge

Wenn du zu einer gegebenen Beziehung weitere in dieser Beziehung stehende Elemente suchst, dann wählst du sicher „passende Elemente" aus, d. h. der entstehende Satz muß sinnvoll und richtig sein. Du wirst also nicht sagen: „8 ist parallel zu 3", denn die Parallelität ist nicht für Zahlen erklärt, sondern für Geraden oder Ebenen. Du wirst auch nicht sagen: „2,4 ist Vorgänger von 2,5", denn 2,5 ist eine rationale Zahl, und diese hat keinen Vorgänger. Die „Vorgänger-Beziehung" ist z. B. für natürliche Zahlen erklärt.
Merke dir: Eine Beziehung ist stets in einer bestimmten Menge erklärt und außerhalb dieser eventuell sinnlos. Wir wollen diese Menge jeweils *Grundmenge* der Beziehung nennen.*

Wenn du von einer bestimmten Beziehung sprichst, mußt du also zunächst ihre Grundmenge angeben, d. h., du mußt sagen, welcher Menge die in Beziehung stehenden Elemente angehören sollen. Die aus dem Mathematikunterricht her bekannte Beziehung „steht senkrecht auf" hat im allgemeinen als Grundmenge eine Menge von Geraden. Sie kann auch als Grundmenge eine Menge von Ebenen oder eine Menge von Geraden und Ebenen haben.

Für die „Kleiner-als-Beziehung" kann man ebenfalls verschiedene Mengen als Grundmengen wählen: entweder die Menge der natürlichen Zahlen oder die Menge der gebrochenen Zahlen oder die Menge der rationalen Zahlen oder die Menge der reellen Zahlen (bzw. eine geeignete Teilmenge), denn in all diesen Zahlbereichen ist eine „Kleiner-als-Beziehung" definiert. Sie beschreibt die Ordnung der Zahlen im entsprechenden Zahlbereich, daher nennen wir sie „Ordnungsbeziehung" oder „Ordnungsrelation". Welche Besonderheiten eine solche Beziehung hat, werden wir später untersuchen. Wir wollen noch einmal auf die auf Seite 128 bereits benutzte vereinfachte kurze Schreibweise für Beziehungen hinweisen, da sie im folgenden oft verwendet wird. Wenn die „Kleiner-als-Beziehung" durch K abgekürzt werden soll, so bedeutet „aKb": „a ist kleiner als b". (a und b stehen für Elemente der Grundmenge der Beziehung K.)

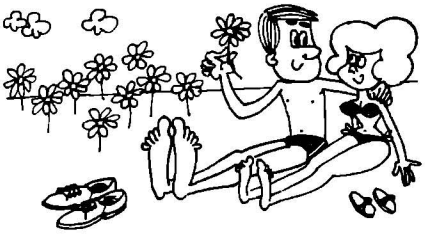
3. Geordnete Paare

Beziehungen können also bestehen zwischen *zwei* Menschen oder Zahlen oder Dreiecken, also zwischen *zwei* Elementen einer entsprechenden Grundmenge.

$[2;3] \neq [3;2]$

Merke dir: Die beiden in Beziehung stehenden Elemente bilden ein *geordnetes Paar*.

Es ist nicht unbekannt, daß *zwei* zusammengehörige Dinge ein Paar bilden (Ehepaar, Liebespaar, Paar Schuhe usw.). Aber warum bilden zwei in Beziehung stehende Elemente ein *geordnetes* Paar?



Bei einem geordneten Paar müssen wir ein erstes und ein zweites Element unterscheiden. Wenn wir das Beispiel „2 ist kleiner als 3" betrachten, dann bilden 2 und 3 das geordnete Paar [2; 3]**. Das Paar [2; 3] ist zu unterscheiden von dem Paar [3; 2], denn für das letztgenannte Paar trifft die „Kleiner-als-Beziehung" nicht zu. „3 ist kleiner als 2" ist eine falsche Aussage. Dieses geordnete Paar gehört zu einer anderen Beziehung, nämlich zu „ist größer als". Es ist also nicht gleichgültig, in welcher Reihenfolge du zwei Elemente einer Menge in eine Beziehung einsetzt. Sollte für die Beziehung ein Zeichen existieren, ist also nicht gleichgültig, welches der beiden in dieser Beziehung stehende Element vor dem Zeichen und welches hinter dem Zeichen steht (z. B. gilt $2<3$ aber nicht $3<2$).

Wenn du die Beispiele am Anfang aufmerksam anschaust, wirst du allerdings Beziehungen finden, bei denen die Vertauschung der beiden in Beziehung stehenden Elemente keine falsche Aussage ergibt. Du kannst sagen: „Fritz ist Freund von Peter" und „Peter ist Freund von Fritz". Beide Sätze sind richtig. Ebenso kannst du sagen: „Peter wohnt im selben Haus wie Fritz" und auch „Fritz wohnt im selben Haus wie Peter". Da der erste Satz eine richtige Aussage ist, ist auch der zweite Satz eine richtige Aussage. Diese Beziehungen haben also eine besondere Eigenart, die sie vor anderen auszeichnet. Darüber werden wir später nachdenken.

Unser nächster Beitrag befaßt sich mit: *Beziehung als Menge von geordneten Paaren* (1/71).

R. Herrmann

Aufgabe zu Abschnitt 3.

■ 3 ■ a) Gib einige geordnete Paare zu folgenden Beziehungen an:

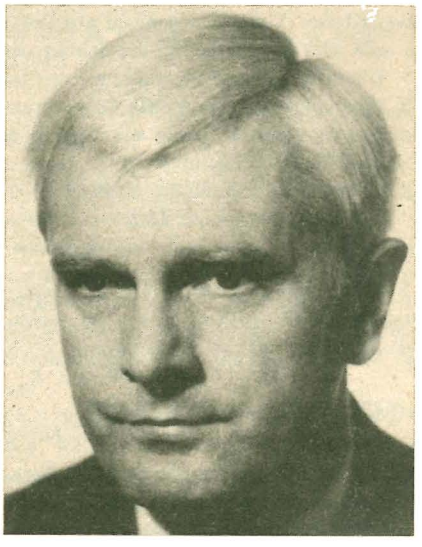
„ist größer als"
„ist ein Teiler von"
„ist das Dreifache von"
„ist um 7 kleiner als"
„ist doppelt so groß wie"
„ist das Quadrat von"

b) Entscheide, ob die angegebenen Paare zu der entsprechenden Beziehung gehören oder nicht! Begründe deine Antwort! (Führe die Beispiele entsprechend den Musterbeispielen durch!)

Hinweis zu b): Versucht doch mal zu begründen, warum z. B. „$5<360$" eine wahre Aussage ist, ihr müßt dabei auf die Definition der „Kleiner-als-Beziehung" zurückgehen! Macht es ähnlich bei den folgenden Aufgaben! Wiederholt dazu die Definition der Beziehungen „ist ein Teiler von" bzw. „ist ein Vielfaches von"!

* Über Mengen kannst du dich noch einmal im Heft 1/4 1967 informieren!

** Man setzt bei geordneten Paaren die Elemente in eckige Klammern und trennt sie durch ein Semikolon, damit man nicht die Dezimalzahl 2,3 liest.



alpha gratuliert

Unser Redaktionsmitglied Dr. habil. *W. Walsch* wurde im Oktober 1970 zum Professor und als Korrespondierendes Mitglied in die Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR berufen.

Beziehung	[a; b]	ja oder nein	Begründung
„ist kleiner als"	[5; 360]	ja	„$5<360$" ist eine wahre Aussage
„ist kleiner als"	[360; 5]	nein	„$360<5$" ist eine falsche Aussage
„ist ein Teiler von"	[27; 297]		
„ist ein Teiler von"	[3; 561]		
„ist ein Teiler von"	[0; 5]		
„ist ein Teiler von"	[5; 0]		
„ist ein Vielfaches von"	[280; 70]		
„ist ein Vielfaches von"	[993; 3]		
„ist ein Vielfaches von"	[0; 5]		
„ist ein Vielfaches von"	[5; 0]		

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin 1. März 1971

5 ▲ 590 Die Schüler der 6. Klasse einer Schule spendeten zur „Woche der Solidarität mit dem vietnamesischen Volk" 44 M. Die Schüler der 5. Klasse spendeten 2,50 M weniger als die der 6. Klasse. Die Schüler der 7. Klasse brachten 8,50 M mehr auf als die der 5. Klasse. Die Schüler der 8. Klasse spendeten die Hälfte des Betrages, der von den Klassen 5 und 6 zusammen abgeliefert wurde. Der Spendenbetrag der Schüler der 9. Klasse war um 25 Pf größer als der der 8. Klasse. Die Schüler der 10. Klasse spendeten den gleichen Betrag wie die der 6. Klasse. Welcher Gesamtbetrag konnte dem Solidaritätskonto zugeführt werden?

Karl-Heinz Gentzsch, Mathematiklehrer, 7404 Meuselwitz

5 ▲ 591 Mit welchen natürlichen Zahlen müssen die Variablen a, b, c, d belegt werden, damit wir aus den drei Gleichungen

$$a \cdot b = 18, \quad c = a - 6 \text{ und } d = 2 \cdot b$$

wahre Gleichheitsaussagen erhalten?

Marlies Lattke, Klasse 5, 8601 Rackel

W 5 ■ 592 In drei Bücherregalen befinden sich zusammen 120 Bücher. Entnehmen wir dem ersten Regal zwei Bücher und stellen sie in das zweite, entnehmen wir danach dem zweiten Regal drei Bücher und stellen diese in das dritte Regal, so befinden sich in jedem Regal gleich viel Bücher. Wie waren die Bücher zuvor auf die einzelnen Regale verteilt?

W 5 ■ 593 Ein Mathematiklehrer stellt erfreut fest, daß sich gegenwärtig sechs Schüler mehr als im vergangenen Jahr am *alpha*-Wettbewerb beteiligen. Die Anzahl der Schüler, die gegenwärtig die Wettbewerbsaufgaben lösen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die sich im vergangenen Jahr nicht am Wettbewerb beteiligten. Wieviel der 28 Schüler dieser Klasse nehmen gegenwärtig am *alpha*-Wettbewerb teil?

Karl-Heinz Gentzsch, Mathematiklehrer, 7404 Meuselwitz

* 5 * 594 Drei Schüler stellen fest, daß jeder von ihnen genau 2,— M gespart hat. Die Ersparnis eines jeden besteht aus 5-, 10-, 20- und 50-Pfennigstücken, von denen jede Geldstückart bei jedem Sparer mindestens einmal, aber nicht häufiger als dreimal vertreten ist. Regine, die das hört, behauptet: „Mindestens zwei Schüler besitzen die gleiche Anzahl an Geldstücken." Begründe Regines Behauptung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6 ▲ 595 Herr L. wohnt in Leipzig und arbeitet in Halle (Saale). In Halle kostet eine Fahrt mit der Straßenbahn 15 Pf, in Leipzig dagegen 20 Pf. Wieviel Fahrten mit der Straßenbahn könnte Herr L. für 2,00 M in Halle und Leipzig unternehmen?

Karl-Heinz Gentzsch

6 ▲ 596 Vor vielen Jahren erzählte ein Forscher: „Ich legte auf meiner letzten Forschungsreise 3 040 km zurück. Davon $3\frac{1}{2}$ mal so viel zu Wasser als zu Pferde und $2\frac{1}{3}$ mal so viel zu Fuß als zu Wasser." Wieviel Kilometer Wegstrecke legte der Forscher zu Fuß, zu Pferde bzw. mit dem Boot zurück?

P.

W 6 ■ 597 *Monika* belegte beim *Hans-Beimler*-Wettkampf im Luftgewehrschießen den dritten Platz. Die Siegerin, *Bärbel*, erzielte vier Ringe mehr als *Monika* und zwei Ringe mehr als *Margit*, die auf den zweiten Platz kam. *Monika* erreichte $\frac{4}{5}$ der Anzahl aller möglichen Ringe. Addiert man die von diesen drei Mädchen erreichten Ringzahlen, so erhält man das $2\frac{1}{2}$fache der Anzahl aller möglichen Ringe. Wie groß ist diese Anzahl? Welche Ringzahlen erzielten die drei Mädchen?

Ulrike Weise, Kl. 10, SIII EOS „Friedrich Engels", Karl-Marx-Stadt

W 6 ■ 598 Fünf Kugeln, und zwar drei weiße und zwei schwarze, werden so an drei Personen *A*, *B* und *C* verteilt, daß jede dieser Personen wenigstens eine, jedoch höchstens zwei Kugeln erhält. Nach der Verteilung der Kugeln sagen diese drei Personen folgendes aus:

A: „Ich habe nur Kugeln der gleichen Farbe in der Hand."

B: „Ich erhielt Kugeln mit unterschiedlicher Farbe."

C: „Ich habe genau zwei Kugeln erhalten."

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h., für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben, mit * versehen, gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe oder die entsprechenden in Heft 1/71, 2/71, 3/71 veröffentlichten Aufgaben der Kreis-, Bezirks- bzw. DDR-Olympiade einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ■ 10/12 gekennzeichnet sind oder veröffentlichte Olympiadeaufgaben 11/12.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm), denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder das Endergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 70/71 läuft von Heft 5/70 bis Heft 3/71. Zwischen dem 1. und 10. Oktober 1971 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/71 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/70 bis 3/71 erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, welche bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1970/71 einsenden, erhalten das *alpha-Abzeichen in Gold* (und die Urkunden zurück).

Redaktion *alpha*

Wie wurden die Kugeln verteilt, wenn wir wissen, daß alle von diesen drei Personen gemachten Aussagen falsch sind? *T.*

* 6 * 599 Das Beispiel $P \cdot PQP \cdot P = RPRP$ einer Multiplikation ist zu entschlüsseln. Dabei entspricht jedem Buchstaben eine Ziffer. Gleichen Buchstaben entsprechen gleichen, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ferner sei $P \neq 0$ und $R \neq 0$. Wie lautet diese Multiplikationsaufgabe?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7 ▲ 600 Von drei von Null und Eins verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c sind die kleinsten gemeinsamen Vielfachen je zweier dieser Zahlen bekannt:
$k(a, b) = 12$; (lies: das k. g. V. der Zahlen a und b ist 12)
$k(b, c) = 108$;
$k(a, c) = 27$.
Welche Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen genügen diesen Bedingungen? *T.*

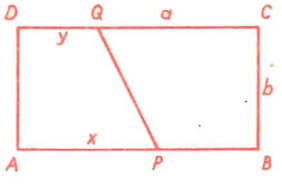
7 ▲ 601 Wieviel dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die die folgenden vier Bedingungen zugleich erfüllen? Sie sollen bei Division durch
a) 8 den Rest 7, b) 6 den Rest 5,
c) 4 den Rest 5, d) 10 den Rest 1 lassen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 7 ■ 602 Multipliziert man die Summe von drei natürlichen Zahlen mit je einer von ihnen, so erhält man die Produkte 240, 270 und 390. Um welche Zahlen handelt es sich?

Karl Krause, 4274 Mansfeld

W 7 ■ 603 Das abgebildete Rechteck $ABCD$ wird durch die Gerade PQ so in



zwei Trapeze zerlegt, daß sich die Flächeninhalte A_1 und A_2 der Trapeze $APQD$ und $PBCQ$ wie 2:3 verhalten. Die Summe der Strecken $\overline{AP} = x$ und $\overline{DQ} = y$ ist durch die Seite $\overline{AB} = a$ des Rechtecks $ABCD$ auszudrücken. *T.*

* 7 * 604 Ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ besitzt die folgende Eigenschaft:
Der Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$ hat vom Fußpunkt D der Höhe $\overline{CD}$ zur Seite $\overline{AB}$ den gleichen Abstand wie von der Halbierungslinie des Winkels $\sphericalangle ABC = \beta$. Es ist die Größe der beiden spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks ABC zu ermitteln.

Ing. H. Decker, Köln

8 ▲ 605 Es sei p eine Primzahl, die größer als 3 ist. Es ist zu beweisen, daß dann die Zahl $p^2 - 1$ stets durch 24 teilbar ist.

Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

8 ▲ 606 Der Kapitän eines Schiffes beobachtet genau 20° voraus an Steuerbord ein Leuchtfeuer (d. h., der Strahl von dem Schiff zu dem rechts von dem Schiff liegenden Leuchtfeuer bildet mit der Fahrtrichtung des Schiffes einen Winkel von 20°). Das Schiff steuert west (fährt also in genau westlicher Richtung) und läuft 15 Knoten (15 Seemeilen in einer Stunde). Nach 20 Minuten Fahrt beobachtet der Kapitän das Leuchtfeuer genau 40° voraus an Steuerbord.
Wieviel Seemeilen ist das Schiff zur Zeit der zweiten Beobachtung von dem Leuchtfeuer entfernt?
Die Antwort ist zu begründen, und es ist eine maßstäbliche Zeichnung anzufertigen.

K.-H. Krüger, Fachlehrer für Mathematik, Wustrow

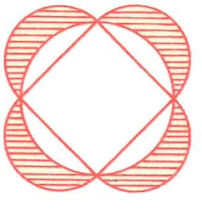
W 8 ■ 607 Es sind alle geordneten Paare von zweistelligen natürlichen Zahlen anzugeben, die die folgenden Eigenschaften haben.
1. Ihre Summe ist gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.
2. $\frac{1}{5}$ der ersten Zahl ist gleich $\frac{6}{25}$ der zweiten Zahl.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W 8 ■ 608 Wie lautet diejenige vierstellige natürliche Zahl, die gleich
$$a^a(100 - a^a)$$
ist, wobei a eine von Null verschiedene natürliche Zahl darstellt?

Ing. H. Decker, Köln

* 8 * 609 Einem Quadrat $ABCD$ sei ein Kreis k umbeschrieben. Ferner seien über den vier Quadratseiten nach außen die Halbkreise gezeichnet.
a) Es ist zu entscheiden, ob der Flächeninhalt des Quadrats größer, kleiner oder gleich der Summe der Flächeninhalte der in der beigefügten Abbildung schraffierten „Mondsicheln" ist, d. h. der jeweils von einem Kreisbogen des Kreises k und einem der Halbkreise begrenzten Flächenstücke.
b) Diese Summe ist durch die Seitenlänge a des Quadrats $ABCD$ auszudrücken.



Thomas Feigel, OS Hirschberg (Saale), Kl. 9

9 ▲ 610 Übungsaufgaben
9 ▲ 611 siehe IV. Umschlagseite

W 9 ■ 612 Es ist zu entscheiden, ob die Zahl
$$z = \frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} - \frac{10}{23}\sqrt{2}$$
eine rationale Zahl ist oder nicht.

Bemerkung: Eine Zahl ist rational genau dann, wenn sie sich in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen läßt, wobei p und q teilerfremde ganze Zahlen mit $q \neq 0$ sind.

TU Dresden

W 9 ■ 613 Einem Würfel sei eine Kugel einbeschrieben und eine Kugel umbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte dieser beiden Kugeln zueinander?

TU Dresden

* 9 * 614 a) Von einem Dreieck $A_1A_2A_3$ seien die Mittelpunkte der Seiten M_1, M_2, M_3 gegeben, wobei M_1 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_1A_2}$, M_2 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_2A_3}$ und M_3 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_3A_1}$ ist.
Es ist das Dreieck $A_1A_2A_3$ zu konstruieren.
b) Von einem Viereck $A_1A_2A_3A_4$ seien die Mittelpunkte der Seiten M_1, M_2, M_3, M_4 gegeben, wobei M_1 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_1A_2}$, M_2 der Mittelpunkt der Seite $\overline{A_2A_3}$ usw. ist.
Es ist das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ zu konstruieren.

10/12 ▲ 615 Übungsaufgabe, siehe IV. Umschlagseite.

W 10/12 ■ 616 Ein Steilwandzelt vom Typ „Puck 8" hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes, dessen Grundkanten die Längen $a = 3{,}30$ m und $b = 2{,}15$ m haben und dessen Höhe die Länge $h_1 = 1{,}70$ m hat, mit aufgesetzter gerader quadratischer Pyramide, deren Höhe die Länge $h_2 = 0{,}50$ m hat.
Es ist der Rauminhalt dieses Zeltes zu berechnen, wobei der Rauminhalt V_1 des pyramidenstumpfförmigen Teils
a) mit Hilfe der Näherungsformel für das Volumen des Pyramidenstumpfes
$$V_1' = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot h_1$$
b) mit Hilfe der genauen Formel
$V_1 = \frac{h_1}{3}(a^2 + ab + b^2)$ berechnet werden soll.

L.

W 10/12 ■ 617 Es sind alle ganzen rationalen Zahlen k anzugeben, für die das Gleichungssystem
$$kx - 3y = 18, \quad (1)$$
$$\frac{x}{k} + 5y = 2 \quad (2)$$
negative rationale Lösungen x und y hat.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

* 10/12 * 618 Es sei $ABCA'B'C'$ ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a ist und dessen Höhe die Länge h hat. A' liege über A, B' über B und C' über C.
Für welches Verhältnis $h : a$ ist der Winkel $\sphericalangle AC'B$ genau gleich 45°?

Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

Berufsbild: Hochschulingenieur

Ein neuer Bildungsweg für junge Facharbeiter

An der Ingenieurhochschule Leipzig werden in 7 Semestern Hochschulingenieure in den Sektionen „Technische Kybernetik" und „Polygrafie" ausgebildet

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. sc. techn.

Detlef Schmidt

Rektor der Ingenieurhochschule Leipzig

In Weiterführung der 3. Hochschulreform entstand mit Beginn des Studienjahres 1969/70 in der DDR ein neuer Typ von wissenschaftlichen Hochschulen für strukturbestimmende Bereiche der Volkswirtschaft. Die Ingenieurhochschulen — so lautet ihre Bezeichnung — stellen einen neuen Bildungsweg für die in der Praxis tätigen jungen Facharbeiter dar. Die Möglichkeiten für die Ausbildung von Ingenieuren mit Hochschulabschluß werden beträchtlich erweitert und das Gesamtsystem des Bildungswesens in der DDR um einen wesentlichen Bestandteil ergänzt.

Sicherlich ist die Tatsache bekannt, daß jeder dritte Schulabgänger in der DDR 1970 ein Hoch- oder Fachschulstudium aufnehmen mußte, um die Aufgaben im Zuge der wissenschaftlich-technischen Revolution zu meistern. Im Bereich des Hoch- und Fachschulwesens werden in diesem Jahr die Investitionen auf fast das Doppelte erhöht. Auf dieser Grundlage ist es möglich, auch die Zulassungsquote an den Hoch- und Fachschulen weiter zu steigern.

Die Bewerber für ein Studium an der Ingenieurhochschule Leipzig müssen zwei Voraussetzungen erfüllen. Neben der Hochschulreife benötigen sie den Abschluß der Facharbeiterprüfung in einem einschlägigen Beruf. Es ist typisch für die Ingenieurhochschulen, daß sie in wesentlichem Umfang auch hervorragende Absolventen der Berufsschulen als den Kadern der Arbeiterklasse beim Erwerb der Hochschulreife unterstützen und nach einer entsprechenden Prüfung immatrikulieren. Die Facharbeiterprüfung soll in einem technischen Grundberuf erfolgt sein, vorzugsweise in der elektrotechnischen Industrie, der Metallindustrie, der chemischen Industrie oder in der polygrafischen Industrie.

An der Ingenieurhochschule Leipzig bestehen gegenwärtig die Sektionen „Technische Kybernetik" und „Polygrafie". An beiden Sektionen werden in einem Studium von sieben Semestern Hochschulingenieure ausgebildet, ein neuer Typ von Ingenieuren mit Hochschulabschluß, der sich vor allem durch eine enge Verbindung zur Praxis auszeichnet.

Der Hochschulingenieur auf dem Gebiet der Technischen Kybernetik hat im Rahmen der Volkswirtschaft eine wichtige und verantwortungsvolle Tätigkeit auszuüben, die hohe Anforderungen an ihn stellt. Er nimmt entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung automatisierungsgerechter Technologien und Verfahren zur Gestaltung ökonomisch und technisch optimaler Prozesse im gesamten Bereich der Volkswirtschaft.

Nach der Vermittlung eines breiten Grundlagenwissens erfolgt im Fachstudium die Ausbildung in den einzelnen Lehrkomplexen. Dazu zählen die Komplexe Technische Stoffe, Technische Systeme, Grundlagen der Technologie, Systemgestaltung und Sozialistische Betriebswirtschaftslehre. Eine gewisse Akzentuierung und zugleich die Vorbereitung auf das Ingenieurpraktikum wird durch wahlobligatorische Vorlesungen in der letzten Ausbildungsphase erreicht. Anschließend erfolgt im 7. Semester mit einem halbjährigen Ingenieurpraktikum eine spezielle Fachausbildung für den späteren Arbeitsbereich. Aus den konkreten Einsatzbedingungen ergeben sich diejenigen Gebiete, in denen erweiterte und vertiefte Fähigkeiten und Kenntnisse für eine erfolgreiche Tätigkeit unabdingbar sind.

Der Hochschulingenieur auf dem Gebiet der Polygrafie muß in der Lage sein, die neuesten naturwissenschaftlichen Erkenntnisse im Industriezweig anzuwenden und den Produktions- und Reproduktionsprozeß ständig zu intensivieren. Den Anforderungen der wissenschaftlich-technischen Revolution entsprechend wird er u. a. dazu beitragen, daß die manuelle Tätigkeit verringert wird, zu automatisierten Arbeitsverfahren übergegangen und automatisch gesteuerte Produktionssysteme angewandt werden.

Nach der Vermittlung eines breiten Grundlagenwissens erfolgt ebenfalls im Fachstudium die Ausbildung in industriebezogenen Stoffkomplexen, so z. B. in Technische Stoffe, Technische Systeme, Grundlagen der Technologie, Prozeßgestaltung. Ebenso wie in der Sektion „Technische Kybernetik" erfolgt im 7. Semester eine spezielle Fachausbildung im Ingenieurpraktikum.

Der Einsatz der Hochschulingenieure erfolgt entsprechend der jeweiligen Ausbildung. Die aus der Sektion „Technische Kybernetik" kommenden technologisch orientierten Hochschulingenieure können u. a.

- in Entwicklungs- und Projektierungsbetrieben
- in Zentralstellen für Rationalisierung
- in verantwortlichen Funktionen von Betriebskontrollen, Wärmestellen und Meßwarten
- in der Wartung und Instandhaltung komplex automatisierter Produktionsanlagen

eingesetzt werden.

Die Hochschulingenieure der Sektion „Polygrafie" können u. a.

- in Führungsfunktionen für den technologischen Prozeß polygrafischer Industriebetriebe
- in Leitungsorganen von Betrieben der Verpackungsmittelindustrie sowie in den Verlagen
- als Mitarbeiter in Instituten, Projektierungsbüros und in Außenhandelsorganen

eingesetzt werden.

Nach erfolgreicher ein- bis eineinhalbjähriger Tätigkeit in der Praxis hat der Hochschulingenieur die Möglichkeit, den wissenschaftlichen Grad eines Diplomingenieurs an der Ingenieurhochschule Leipzig zu erlangen. Damit wird deutlich, daß die Ingenieurhochschulen der DDR vollwertig in die Reihe der Technischen Hochschulen treten, wobei sie sich durch besonders enge Praxisverbindungen auszeichnen.

G. Burucker

▲ 619 Vier Facharbeiter *A*, *B*, *C* und *D* einer Brigade betreuen je einen Lehrling *a*, *b*, *c* und *d*. Sowohl Facharbeiter als auch Lehrlinge produzieren gleiche Gegenstände und verabreden folgenden Wettstreit:

Jeder erhält für jeden von ihm gefertigten Gegenstand soviel Pfennige aus der Brigadekasse, wie er Gegenstände abgeliefert hat.

Am Ende ergibt sich folgende Abrechnung: *A*(*B*, *C*) lieferten 37 (11,9) Gegenstände mehr ab als *a* (*b*, *c*). Jeder Facharbeiter erhält 1,05 M mehr als sein ihm zugeordneter Lehrling.

Welcher Facharbeiter hat welchen Lehrling zu betreuen?

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade

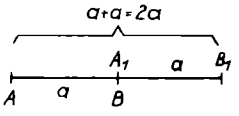
Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

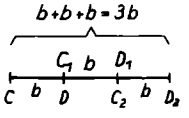
1. Bei genau 5 Würfeln sind je zwei gegenüberliegende Würfelflächen verdeckt. Die Summe ihrer Augenzahlen beträgt daher $5 \cdot 7 = 35$. Bei dem obersten Würfel ist nur die der Fläche mit der Augenzahl 1 gegenüberliegende Fläche verdeckt. Sie hat aus dem in der Aufgabe genannten Grunde die Augenzahl 6. Mithin beträgt die Summe der Augenzahlen aller verdeckten Flächen $35 + 6 = 41$.

2. Der zweite Kunde kaufte genau 2 m Stoff mehr als der erste; denn 5 m − 3 m = 2 m. Für diese 2 m Stoff hatte er 30,— M zu bezahlen. Jedes Meter Stoff kostete daher die Hälfte davon, das sind 15,— M. Die drei Kunden kauften zusammen 17 m Stoff; folglich hatten sie insgesamt $17 \cdot 15$ M = 255 M zu bezahlen.

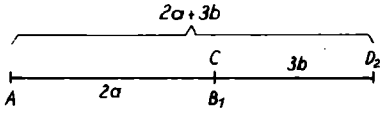
3.



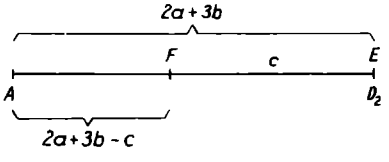
(1) Konstruktion einer Strecke der Länge $2a$:



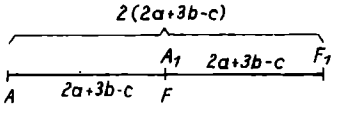
(2) Konstruktion einer Strecke der Länge $3b$:



(3) Konstruktion einer Strecke der Länge $2a + 3b$:



(4) Konstruktion einer Strecke der Länge $2a + 3b - c$:



(5) Konstruktion einer Strecke der Länge $2(2a + 3b - c)$:

4. Die Zahlen 3; 5 und 7 sind paarweise teilerfremd. Daher ist wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ eine Zahl genau dann sowohl durch 3 als auch durch 5 als auch durch 7 teilbar, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von 105 ist. Nun gilt

$4 \cdot 105 = 420$ $5 \cdot 105 = 525$ $6 \cdot 105 = 630$
$7 \cdot 105 = 735$ $8 \cdot 105 = 840$
$9 \cdot 105 = 945$ $10 \cdot 105 = 1\,050$.

Die Bedingungen (b) und (c) werden daher von den Zahlen 525; 630; 735; 840; 945 und nur von diesen erfüllt; denn jedes Vielfache von 105 mit einer kleineren ganzen Zahl als 5 ist kleiner als 500 und jedes Vielfache von 105 mit einer größeren ganzen Zahl als 9 ist größer als 1 000.

Von diesen Zahlen erfüllen 525; 735 und 945 und nur diese auch die Bedingung (a).

Die gesuchten Zahlen sind daher 525; 735 und 945 und nur diese.

Olympiadeklasse 6

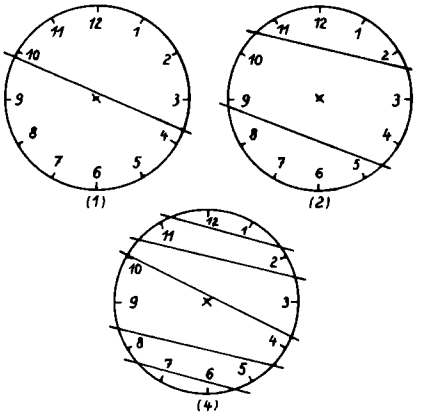
1. (I) Nach Aufgabenstellung waren (wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$) alle Fahrer außer Klaus so viel wie $\frac{5}{6}$ aller teilnehmenden Fahrer. Klaus stellte daher $\frac{1}{6}$ aller Teilnehmer dar. Das ist nur möglich, wenn die Teilnehmerzahl 6 betrug.

(II) Daher erreichten wegen $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ genau 2 der Teilnehmer vor Klaus das Ziel, so daß Klaus den 3. Platz belegte.

2. Die Summe der auf jeder Kreisscheibe aufgetragenen Zahlen beträgt jeweils 78. Die Kreisscheibe läßt sich daher höchstens dann in die laut Aufgabe geforderten Teile zerlegen, wenn die verlangte Teilanzahl (also 2; 3; 4; 6) ein Teiler von 78 ist. Das gilt für 2; 3 und 6, für 4 dagegen nicht. Daher lassen sich höchstens die erste, die zweite und die vierte Kreisscheibe in der geforderten Weise zerlegen.

Eine Zerlegung in 4 derartige Teile (Kreisscheibe 3) ist nicht möglich. Wie die Abb. L 6;2 zeigt, können die genannten Kreisscheiben tatsächlich der Aufgabe entsprechend geteilt werden. Dabei beachten wir, daß für die Zahlen 1, 2, ..., 12 gilt:

$1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5 + 8 = 6 + 7 = 13$.



3. Die Summe der Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ECD$ wird von $\sphericalangle BCD$ zu 180° ergänzt. Die nach Voraussetzung ihr gleiche Summe der Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ABC$ wird von $\sphericalangle BAC$ zu 180° ergänzt (Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$). Daraus folgt die Behauptung

$$\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle BAC.$$

Anmerkung: Die Lösung kann auch mit Hilfe des Außenwinkelsatzes oder der Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen erfolgen. In diesem Fall wäre z. B. die Parallele zu BC durch den Punkt A zu ziehen, usw.

4. Laut Aufgabe legt Elke in jeder Minute genau $\frac{1}{30}$ des Schulweges, Jürgen in jeder Minute genau $\frac{1}{20}$ des gleichen Weges zurück. Da Elke 5 Minuten vor Jürgen losgegangen ist, hat sie vor Jürgen in dieser Zeit einen Vorsprung von $\frac{5}{30} = \frac{10}{60}$ des Weges.

Wegen $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ verringert sich dieser Vorsprung in jeder Minute um $\frac{1}{60}$ des Gesamtweges. Die gesuchte Anzahl der Minuten bis zum Einholen kann also nur diejenige Zahl sein, mit der man $\frac{1}{60}$ multiplizieren muß, um $\frac{10}{60}$ zu erhalten. Das ist die Zahl 10. Jürgen holt unter den angegebenen Umständen seine Schwester in genau 10 Minuten ein.

Olympiadeklasse 7

1. a) Mit 4 Schritten legt der Vater 320 cm zurück; denn $4 \cdot 80\text{ cm} = 320\text{ cm}$. Da der Sohn für die gleiche Strecke 5 Schritte braucht, beträgt wegen $320 : 5 = 64$ seine durchschnittliche Schrittlänge 64 cm.

b) Genau dann, wenn der Vater ein (positives ganzzahliges) Vielfaches von 4 als Schrittzahl beendet hat, hat der Sohn gleichzeitig mit dem Vater eine ganzzahlige Schrittzahl beendet, treten also Vater und Sohn gleichzeitig auf. Dies geschieht genau dann mit dem linken Fuß, wenn sie eine gerade Anzahl von Schritten beendet haben. Bei dem Vater ist dies für jedes Vielfache von 4 der Fall, bei dem Sohn genau für alle geradzahligen Vielfachen von 5. Das kleinste (positive) geradzahlige Vielfache von 5 ist aber das Zweifache.

Daher treten Vater und Sohn erstmalig nach dem 8. Schritt des Vaters gleichzeitig mit dem linken Fuß auf.

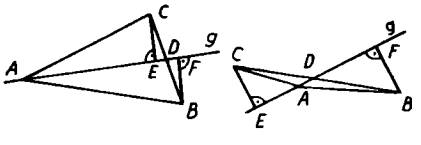
2. Da die Summe je eines Innenwinkels und eines zugehörigen Außenwinkels 180° beträgt, ist eine Ecke genau dann „ausgezeichnet", wenn der Innenwinkel bei dieser Ecke 90° beträgt. Nun gibt es Dreiecke mit *genau einem* rechten Innenwinkel, aber es gibt keine Dreiecke mit *mehr als einem* solchen. Daher ist die einzige und mithin auch größte mögliche Anzahl 1.

3. Die an den einzelnen Tagen zurückgelegten Wege sind proportional den jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeiten. Der am zweiten bzw. dritten Tag zurückgelegte Weg ist also das 5- bzw. 10fache des am ersten Tag zurückgelegten Weges.

Wegen $1+5+10=16$ ist somit der Gesamtweg, nach Aufgabenstellung 520 km, das 16fache des am ersten Tage zurückgelegten Weges. Dies ist nur möglich, wenn der am ersten Tage zurückgelegte Weg 520 km : 16 $= 32{,}5$ km und folglich der am zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegte Weg $5 \cdot 32{,}5$ km $= 162{,}5$ km bzw. $10 \cdot 32{,}5$ km $= 325$ km betrugen. Daraus ergibt sich wegen

$\frac{32{,}5}{6} = \frac{65}{12}\left(= 5\frac{25}{60}\right)$ die am ersten Tage (und nach Aufgabenstellung an jedem der drei Tage) aufgewendete Zeit als $\frac{65}{12}$ h ($= 5$ h 25 min).

4. Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF (siehe Abb. L 7;4).



Fällt E mit D zusammen, dann fällt auch F mit D zusammen, und es gilt $\overline{AD} \perp \overline{CB}$ und damit wegen $\overline{CE} = \overline{CD}$ und $\overline{BF} = \overline{BD}$ auch $\overline{CE} = \overline{BF}$. Fällt E nicht mit D zusammen, so fällt auch F nicht mit D zusammen. Dann stimmen die Dreiecke $\triangle CDE$ und $\triangle BDF$ in den Seitenlängen $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, den Größen der anliegenden Winkel $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\sphericalangle CED$, $\sphericalangle BFD$ überein.

Also gilt $\triangle CDE \cong \triangle BFD$, und daraus folgt $\overline{CE} = \overline{BF}$ w.z.b.w.

Olympiadeklasse 8

1. Ordnet man z. B. die möglichen Würfe und die zugehörigen Summen der jeweiligen beiden Augenzahlen in Form nachstehender Tabelle an, so erkennt man, daß in der Tat die Summe 7 am häufigsten auftritt.

kleiner Würfel	großer Würfel 1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich der Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über AB, FG, AO und OB vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über EH, EF und GH.

Wegen $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{FG} = 2$ cm, $\overline{AO} = \overline{OB} = 3$ cm, $\overline{EH} = 4$ cm, $\overline{EF} = \overline{GH} = 1$ cm gilt daher:

$$A = \frac{\pi}{8}(36+4+9+9-16-1-1)\text{ cm}^2$$
$$= 5\,\pi\text{ cm}^2.$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt $5\,\pi$ cm^2, das sind angenähert 15,71 cm^2.

3. (I) Im Zeitraum von je einem Übereinanderstehen der beiden Zeiger bis zum nächsten nimmt der Winkel zwischen den Zeigern (gemessen im Uhrzeigersinn vom Stundenzeiger bis zum Minutenzeiger) alle Werte von 0° bis 360° an, jeden genau einmal. Unter diesen Zeigerstellungen befinden sich genau zwei der gesuchten, nämlich die mit den Winkeln 90° und 270°.

(II) In der Zeit von 0 Uhr bis 12 Uhr führt der Minutenzeiger genau 12 volle Umdrehungen aus, der Stundenzeiger genau eine in gleicher Richtung. Daher wird dieser Zeitraum durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens der beiden Zeiger in 11 Teile geteilt (und zwar wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen in gleichlange).

(III) Aus (I) und (II) folgt zunächst: Die Zeit von 0 Uhr bis 24 Uhr wird durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens in 22 Teile geteilt, und in jedem dieser Teilzeiträume befinden sich genau 2 gesuchte Zeitpunkte. Deren Gesamtzahl beträgt somit 44.

(IV) Aus (I), (II) und der Gleichförmigkeit der Bewegungen folgt ferner: Der Zeitraum von 0 Uhr bis 12 Uhr wird durch diejenigen Zeitpunkte, die den Winkeln 0°, 90°, 180°, 270° entsprechen, in 44 gleichlange Teile geteilt. Diese Zeitpunkte ergeben sich somit als die ersten 43 positiven ganzzahligen Vielfachen von $\frac{12}{44}\text{ h} = \frac{3}{11}\text{ h}$. Die Zeitpunkte mit den Winkeln 90° und 270° sind dabei die ungeradzahligen unter diesen Vielfachen. Von diesen liegen zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr genau diejenigen $n \cdot \frac{3}{11}$ h (n ungerade), bei denen n die Ungleichungen $4 < n \cdot \frac{3}{11} < 5$ oder, gleichbedeutend hiermit, $\frac{44}{3} < n < \frac{55}{3}$ erfüllt, d. s. die Zeitpunkte

$15 \cdot \frac{3}{11}\text{ h} = 4\frac{1}{11}\text{ h} = 4\text{ h }5\frac{5}{11}\text{ min}$ und

$17 \cdot \frac{3}{11}\text{ h} = 4\frac{7}{11}\text{ h} = 4\text{ h }38\frac{2}{11}\text{ min}$.

(Auf weitere Lösungswege muß verzichtet werden, d. Red.)

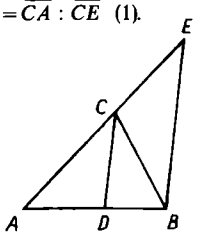
4. Im Dreieck $\triangle ABC$ schneide die Halbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Gegenseite AB im Punkt D.

(Weil eine Aussage über Streckenverhältnisse bewiesen werden soll, ist es naheliegend, das Dreieck $\triangle ABC$ mit der Winkelhalbierenden CD zu einer Strahlensatzfigur zu ergänzen.)

Man konstruiere die Parallele durch B zur Winkelhalbierenden CD und verlängere AC über C hinaus. Der Schnittpunkt, der in jedem Fall existiert (denn der Winkel $\sphericalangle ACD$ ist stets kleiner als 90°), sei E (vgl. Abb. L 8;4).

Nach einem der Strahlensätze gilt:

$\overline{DA} : \overline{DB} = \overline{CA} : \overline{CE}$ (1).



Außerdem ist $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CEB$ (Stufenwinkel an geschn. Parallelen)

und $\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle CBE$, und weil (Wechselwinkel an geschn. Parallelen)

$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle DCB$ vorausgesetzt war,

folgt $\sphericalangle CEB \cong \sphericalangle CBE$. Also ist das Dreieck $\triangle CEB$ gleichschenklig mit $\overline{CE} = \overline{CB}$.

Setzt man dies in (1) ein, so erhält man

$\overline{DA} : \overline{DB} = \overline{CA} : \overline{CB}$, w.z.b.w.

Anmerkung: Diese Hinführung zum Beweismotiv ist nicht für einen vollständigen Lösungstext erforderlich.

Ein anderer Beweisweg besteht darin, E auf der Verlängerung von AC über C hinaus durch $\overline{CE} = \overline{CB}$ zu definieren und *dann* $EB \parallel CD$ *zu beweisen.*

Olympiadeklasse 9

1. Eine Frage reicht nicht aus, da der Lehrer wegen der Aufteilung der Schüler in drei Gruppen und wegen des Vorhandenseins nur zweier Antwortmöglichkeiten (ja, nein) auf jede beliebige (nach den Regeln zulässige) Frage von Angehörigen mindestens zweier Gruppen die gleiche Antwort erhalten würde. („Schubfachprinzip"). Mit der Angabe des

folgenden Beispiels zeigen wir gleichzeitig, daß zwei Fragen ausreichen. Der Lehrer kann z. B. die Fragen „Bist du ein Unbeständiger?“ stellen; denn dann erhält er von einem „Wahren“ die Antworten nein, nein, von einem „Unwahren“ die Antworten ja, ja und von einem „Unbeständigen“ die Antworten ja, nein oder nein, ja. Damit ist aber eine Identifizierung möglich.

2. Es ist $V_1 = {a_1}^3$.

Ferner beträgt die Höhe einer Seitenfläche des Tetraeders $h = \frac{1}{2} a_2 \sqrt{3}$, die Höhe des Tetraeders $h' = \sqrt{{a_2}^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2} = \frac{1}{3} a_2 \sqrt{6}$, der Flächeninhalt einer Seitenfläche des Tetraeders

$F = \frac{1}{2} a_2 h = \frac{1}{4} {a_2}^2 \sqrt{3}$, also das Volumen des Tetraeders

$V_2 = \frac{1}{3} F \cdot h' = \frac{1}{12} {a_2}^3 \sqrt{2}$. (Kann evtl. der Zahlentafel entnommen werden.)

Nun ist laut Aufgabenstellung $a_2 = a_1 \sqrt{2}$.

Daraus folgt $V_2 = \frac{1}{3} {a_1}^3 = \frac{1}{3} V_1$.

Das gesuchte Verhältnis ist also $V_1 : V_2 = 3 : 1$.

3. Angenommen, es gäbe zwei solche Zahlen a und b (mit $b < a$) und es sei $a : b = n$ (n natürlich).

Dann gilt $n > 1$ sowie $1234567 \leqq a,b \leqq 7654321$, also $n \leqq \frac{7654321}{1234567} < 7$.

Deshalb kann n nur eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 oder 6 sein.

Angenommen, es sei $n = 3$ oder $n = 6$.

Dann ergibt sich folgender Widerspruch: Einerseits ist $a = 3b$ oder $a = 6b$, also a durch 3 teilbar. Andererseits hat a die Quersumme 28, kann also nicht durch 3 teilbar sein.

Angenommen, es sei $n = 2$. Da in b die Ziffer 4 vorkommt, müßte bei der Multiplikation der entsprechenden Stelle mit 2 in a eine 8 oder (falls der bei Multiplikation einer Ziffer 1, ..., 7 mit 2 und eventuellem Hinzufügen eines vorangegangenen Übertrags größtmögliche Übertrag 1 hinzukommt) eine 9 entstehen, im Widerspruch dazu, daß diese Ziffern in a nicht vorkommen.

Angenommen, es sei $n = 5$.

Der bei Multiplikation einer der Ziffern 1, ..., 7 mit 5 und eventuellem Hinzufügen eines früheren Übertrags größtmögliche Übertrag ist dann 3. Da die Vielfachen von 5 auf 0 oder 5 enden, kann in a keine 4 auftreten, im Widerspruch dazu, daß a die Ziffer 4 enthält.

Angenommen, es sei $n = 4$.

Da in b eine 7 enthalten ist, müßte wegen $7 \cdot 4 = 28$ in a entweder eine 8, 9 oder 0 enthalten sein; denn der größtmögliche Übertrag aus den übrigen Stellen beträgt 2. Da in a keine dieser Ziffern auftritt, liegt auch in diesem Falle ein Widerspruch vor. Da in allen möglichen Fällen ein Widerspruch auftrat, kann es Zahlen mit der angegebenen Bedingung nicht geben.

4. Es seien:
E der Mittelpunkt der Seite AD,
F der Mittelpunkt der Seite AB,
G der Schnittpunkt der Strecken EC und BD und
H der Schnittpunkt der Strecken FC und BD.
Ferner gelte: $\overline{HB} = a$, $\overline{HG} = b$, $\overline{GD} = c$, und $\overline{BD} = d$.

Nach dem Hauptähnlichkeitssatz folgt: $\triangle FBH \sim \triangle CHD$ (Übereinstimmung in Scheitelwinkeln und Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen).

Wegen $\overline{FB} : \overline{DC} = 1 : 2$ muß gelten $a : (b + c) = 1 : 2$. Hieraus und aus $a + (b + c) = d$ folgt $a = \frac{d}{3}$.

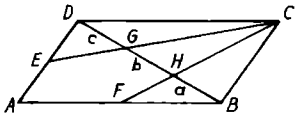
Nach dem Hauptähnlichkeitssatz folgt: $\triangle EGD \sim \triangle CGB$ (wie oben).

Wegen $\overline{ED} : \overline{BC} = 1 : 2$ muß gelten $c : (a + b) = 1 : 2$,

also $c = \frac{d}{3}$.

Daraus folgt $b = d - a - c = \frac{d}{3}$.

Also gilt $a = b = c$, was zu beweisen war.

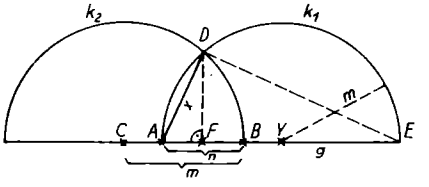


Olympiadeklasse 10

1. Wegen $10^3 < 3790 < 10^4$ ist $3 < \lg 3790 < 4$, also $[\lg 3790] = 3$.
Wegen $10^{-2} < 0.0379 < 10^{-1}$ ist $-2 < \lg 0.0379 < -1$,
also $[\lg 0.0379] = -2$.
Daher beträgt der gesuchte Quotient $\frac{3}{-2} = -1.5$.

2. Angenommen, $d_1, \ldots, d_4$ seien vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen $d_1, \ldots, d_6$ die Gleichungen
$d_4 = d_1 + d_2$, $d_5 = d_2 + d_3$, $d_6 = d_1 + d_2 + d_3$.
Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:
I. d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet dieser Fall aus.
II. d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2), dann ergibt sich derselbe Widerspruch.
III. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_6 gerade und größer als 2 ist.
IV. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).
a) unter diesen befindet sich d_2. Dann ergibt sich, daß entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist.
b) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl. Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d_6 = d_2 + 4$. Nun ist von drei ganzen Zahlen der Form d_2, $d_2 + 2$, $d_2 + 4$ stets eine durch 3 teilbar.
(*Beweis:* Beim Teilen von natürlichen Zahlen durch 3 können nur die Reste 0, 1 oder 2 auftreten.
Tritt beim Teilen von d_2 der Rest 0 auf, ist d_2 durch 3 teilbar. Tritt der Rest 1 auf, ist (wegen $1 + 2 = 3$) $d_2 + 2$ durch 3 teilbar. Tritt der Rest 2 auf, ist (wegen $2 + 4 = 6$) $d_2 + 4$ durch 3 teilbar.) Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3. Da aber ($d_2 > 1$ ist, also) $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$.
Hiernach folgt weiter
$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2$,
$a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5$,
$a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7$.
Daher können $a_1, \ldots, a_4$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form
(*) $a_1 = n$, $a_2 = n + 2$, $a_3 = n + 5$, $a_4 = n + 7$
mit einer natürlichen Zahl n sind.
Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (*) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen
$d_1 = a_4 - a_3 = 2$, $d_2 = a_3 - a_2 = 3$,
$d_3 = a_2 - a_1 = 2$, $d_4 = a_4 - a_2 = 5$,
$d_5 = a_3 - a_1 = 5$, $d_6 = a_4 - a_1 = 7$ Primzahl.

3. a) Verfährt man wie angegeben, so entsteht folgendes Bild: (s. Abb. L 10; 3)



b) Aus der Konstruktion folgt:
$\overline{AB} = n$ $\overline{AY} = \overline{DY} = \overline{EY} = m$
Ferner ist $\overline{AD} = x$ ($= \overline{BD}$).
Nach einem Satz der Elementargeometrie halbiert das von D auf g gefällte Lot die Strecke AB. Sein Fußpunkt sei F. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle AED$ rechtwinklig. In ihm gilt nach dem Satz des Euklid (Kathetensatz):

$$x^2 = \frac{n}{2}(2m) = m \cdot n, \text{ also}$$
$$x = \sqrt{m \cdot n}.$$

4. Folgende Ungleichungen sind der gegebenen äquivalent $x^2 + 2x - 3 > 0$,
$(x + 1)^2 > 4$.
(1. Fortsetzung:) $|x + 1| > 2$
(2. Fortsetzung:) $(x + 1)^2 - 2^2 > 0$,
$(x - 1)(x + 3) > 0$.
Nach Fallunterscheidung erhält man (in jeder der beiden Fortsetzungen) als äquivalent mit der letzten Bedingung: $x > 1$ oder $x < -3$.
Damit ist gezeigt, daß von den Bedingungen (1) bis (5) nur die Bedingung (5) der gegebenen äquivalent ist.

Bezirksolympiade

Olympiadeklasse 7

1. I. In der *Tausenderstelle* der aufgeschriebenen Zahlen kommt die Ziffer 9 nicht vor.

II. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der *Hunderterstelle* der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt

für die Zahlen von 1 bis 1000 } (2 Gruppen)
für die Zahlen von 1001 bis 2000 }

je genau 100 (da bei der ersten Gruppe die 9 in der Hunderterstelle genau der Zahlen 900, ..., 999 vorkommt und bei der zweiten Gruppe genau der Zahlen 1900, ..., 1999).

Bei den Zahlen von 2001 bis 2555 kommt in der Hunderterstelle die Ziffer 9 nicht vor.

III. Die Anzahl der Ziffern 9, die in der *Zehnerstelle* der aufgeschriebenen Zahlen vorkommen, beträgt

für die Zahlen von 1 bis 100 }
für die Zahlen von 101 bis 200 } (25 Gr.)
usw.
für die Zahlen von 2401 bis 2500 }

je genau 10 (bei der ersten Gruppe genau in 90, ..., 99, bei der zweiten Gruppe genau in 190, ..., 199 usw.).

Bei den Zahlen von 2500 bis 2555 kommt in der Zehnerstelle die 9 nicht vor.

IV. Die Anzahl der Ziffern 9 in der *Einerstelle* der Zahlen beträgt

für die Zahlen von 1 bis 10 }
für die Zahlen von 11 bis 20 } (255 Gr.)
usw.
für die Zahlen von 2541 bis 2550 }

je genau 1. Bei den Zahlen von 2551 bis 2555 kommt in der Einerstelle die 9 nicht vor.

Daher beträgt die gesuchte Zahl

$2 \cdot 100 + 25 \cdot 10 + 255 = 705$

2. a) Wenn die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt sind, so folgt (durch irgend eine Eliminationsmethode, z. B. durch Addition von (I), (II), (III), Division durch 2 und anschließende Subtraktion je einer der Gleichungen (I), (II), (III)

$$a = 17, \quad b = 21, \quad c = 25.$$

b) Ein Dreieck mit diesen Maßzahlen existiert; denn die Dreiecksgleichungen sind erfüllt. Es ist nämlich

$$17 + 21 > 25, \text{ also } a + b > c,$$
$$21 + 25 > 17, \text{ also } b + c > a,$$
$$17 + 25 > 21, \text{ also } a + c > b.$$

Jedes Dreieck mit diesen Maßzahlen seiner Seitenlängen erfüllt auch die Bedingungen (I), (II), (III). Es ist nämlich

$$17 + 21 = 38, \text{ also } a + b = 38,$$
$$21 + 25 = 46, \text{ also } b + c = 46,$$
$$17 + 25 = 42, \text{ also } a + c = 42.$$

Zu a) Man kann auch folgendermaßen schließen:

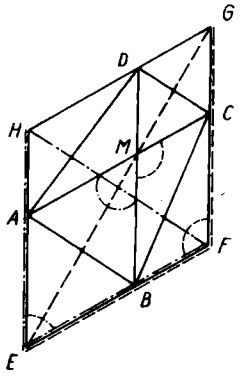
Aus $b + c = 46$ und $a + c = 42$ folgt, daß b um 4 größer ist als a.

Also gilt $b = a + 4$ (1)

Setzt man das in (I) ein, so erhält man $a + a + 4 = 38$, woraus $a = 17$ folgt.

Aus (1) folgt dann $b = 21$ und daraus sowie aus (III) $c = 25$ ... usw.

3. Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zieht die Parallelen zu den Diagonalen durch die Punkte A, B, C und D. Sie mögen sich in den Punkten E, F, G, H schneiden. Dann ist $EFGH$ laut Konstruktion ein Parallelogramm, dessen Fläche bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen E, F, G, H aus den Flächen der vier Parallelogramme $AMDH$, $BMAE$, $CMBF$ und $DMCG$ zusammengesetzt ist. Da diese Teilparallelogramme durch die Strecken AB, BC, CD und DA halbiert werden, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $EFGH$ doppelt so groß wie der des Vierecks $ABCD$. Daher ist der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht und folglich einem der Dreiecke $\triangle EFG$, $\triangle EFH$ kongruent ist, jeweils gleich dem des Vierecks $ABCD$.



4. a) Bezeichnet man den Minuenden mit m ($m \neq 0$), dann ist der Subtrahend $\frac{2}{5}m$.

Die Differenz ist $m - \frac{2}{5}m = \frac{3}{5}m$.

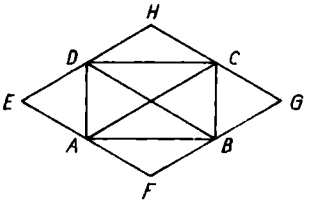
Wegen $\frac{3}{5}m = \frac{60}{100}m$ beträgt die Differenz 60% des Minuenden.

b) Die Summe aus Minuend und Subtrahend ist $m + \frac{2}{5}m = \frac{7}{5}m$. Wegen $\frac{7}{5}m = \frac{140}{100}m$ beträgt diese Summe 140% des Minuenden.

5. *Voraussetzung:* $ABCD$ ist ein Rechteck, E, F, G, H sind so gelegen, daß A auf EF, B auf FG, C auf GH, D auf HE liegt und $FG \parallel AC \parallel EH$ sowie $EF \parallel DB \parallel HG$ gilt.

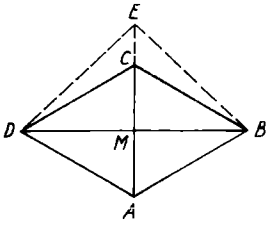
Behauptung: $EFGH$ ist ein Rhombus.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $EFBD$ ein Parallelogramm, also gilt $\overline{EF} = \overline{DB}$. Ebenso erhält man: $\overline{HG} = \overline{DB}$, $\overline{FG} = \overline{AC}$, $\overline{EH} = \overline{AC}$. Da im Rechteck $ABCD$ ferner $\overline{AC} = \overline{DB}$ gilt, folgt aus den vorigen Gleichungen $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{HG} = \overline{EH}$ und damit die Behauptung.



6. I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Rhombus, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei sein Mittelpunkt. Dann ist AM die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAD$, ferner gilt $AM \perp BD$ sowie $\overline{MB} = \overline{MD}$. Schließlich ist $\overline{AM} + \overline{MB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$.

Der Punkt E sei so auf der Verlängerung von AM über M hinaus gelegen, daß $\overline{ME} = \overline{MB}$ ist. Dann ist $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig, also $\sphericalangle MEB = 45°$. Ebenso ist auch $\sphericalangle MED = 45°$.



II. Daraus folgt, daß ein Rhombus nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel von 110°, dessen Scheitel A genannt sei, und seine Winkelhalbierende.

(2) Auf ihr trägt man von A aus eine Strecke von 7,5 cm Länge ab. Der zweite Endpunkt dieser Strecke sei E genannt.

(3) An den von E durch A gehenden Strahl trägt man in E nach beiden Seiten Winkel von 45° an. Schneiden ihre freien Schenkel die Schenkel der unter (1) genannten Winkel, so seien die Schnittpunkte B und D.

(4) Schneidet der Kreis um D mit dem Radius $\overline{AD}$ den von A durch E gehenden Strahl außer in A in einem weiteren Punkt, so sei dieser C genannt.

III. Beweis, daß diese Konstruktion zu einem Rhombus der gesuchten Art führt:

Nach Konstruktion wird $\triangle AEB \cong \triangle AED$ (wsw), also $\overline{AB} = \overline{AD}$. Hieraus folgt, wenn M der Schnittpunkt von AE und BD ist, $\triangle AMB \cong \triangle AMD$ (sws), also $\sphericalangle BMA = \sphericalangle DMA = 90°$.

Demnach gilt $\triangle DMA \cong \triangle DMC$ (ssw; $\overline{AD} > \overline{MD}$), also $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AM} = \overline{CM}$ und somit schließlich $\triangle AMB \cong \triangle CMB$ (sws), $\overline{AB} = \overline{CB}$.

Daher ist $ABCD$ ein Rhombus.

In diesem gilt nach Konstruktion $\sphericalangle BAD = 110°$. Ferner ist $\sphericalangle BME = 90°$ und nach Konstruktion $\sphericalangle BEM = 45°$, also $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $\overline{BM} = \overline{EM}$. Somit auch $\overline{AC} + \overline{BD} = 2 \cdot (\overline{AM} + \overline{BM}) = 2 \cdot (\overline{AM} + \overline{EM}) = 2 \cdot \overline{AE} = 15$ cm, wie verlangt.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar. Dasselbe gilt für (3), da $\frac{110°}{2} < 90°$ ist.

Olympiadeklasse 8

1. Die Zerlegung von 44 950 in Primfaktoren lautet $44\,950 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31$. Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, 44 950 in ein Produkt aus genau 4 natürlichen Zahlen zu zerlegen:

(1) $(2\cdot 5)\cdot 5\cdot 29\cdot 31 = 10\cdot 5\cdot 29\cdot 31$,
(2) $(2\cdot 29)\cdot 5\cdot 5\cdot 31 = 58\cdot 5\cdot 5\cdot 31$,
(3) $(2\cdot 31)\cdot 5\cdot 5\cdot 29 = 62\cdot 5\cdot 5\cdot 29$,
(4) $(5\cdot 5)\cdot 2\cdot 29\cdot 31 = 25\cdot 2\cdot 29\cdot 31$,
(5) $(5\cdot 29)\cdot 2\cdot 5\cdot 31 = 145\cdot 2\cdot 5\cdot 31$,
(6) $(5\cdot 31)\cdot 2\cdot 5\cdot 29 = 155\cdot 2\cdot 5\cdot 29$,
(7) $(29\cdot 31)\cdot 2\cdot 5\cdot 5 = 899\cdot 2\cdot 5\cdot 5$.

Da die Altersdifferenz der beiden Eltern 2 Jahre beträgt, können höchstens die Fälle (1) und (4) Lösung sein.
Von ihnen ist der Fall (4) nicht real; denn nach ihm müßte die 29jährige Mutter ein 25jähriges Kind haben. Somit verbleibt nur die Möglichkeit (1); d. h. die gesuchten Altersangaben können nur 31, 29, 10, 5 sein. Umgekehrt erfüllen diese Angaben auch tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

2. Wie üblich sei $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ gesetzt; AB sei die Hypotenuse von $\triangle ABC$. Die Flächeninhalte von V_a V_b, V_c seien F_a, F_b bzw. F_c genannt.
Da nun BC und AB in den ähnlichen Vielecken V_a, V_c einander entsprechende Seiten sind, gilt

$$F_a : F_c = a^2 : c^2, \text{ also}$$

$$F_a = \frac{a^2}{c^2} F_c. \text{ Ebenso erhält man}$$

$$F_b = \frac{b^2}{c^2} F_c.$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{F_c}{c^2}$ folgt hieraus

$$\frac{a^2}{c^2} F_c + \frac{b^2}{c^2} F_c = F_c,$$

d. h. $F_a + F_b = F_c$, w.z.b.w.

3. Sind a, b, c die Einer-, Zehner- bzw. Hunderterziffer einer natürlichen Zahl n, so läßt sich diese in der Form $n = 1000d + 100c + 10b + a$ mit einer ganzen Zahl d darstellen. Vermehrt man dann die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl um die Hälfte der Anzahl der Einer, so ergibt sich die Zahl $m = 10c + b + \frac{1}{2}a$.

Ist nun voraussetzungsgemäß m durch 4 teilbar, so ist $10c + b + \frac{1}{2}a = 4k$ mit einer ganzen Zahl k. Daraus folgt

$$20c + 2b + a = 8k, \text{ also ist dann}$$
$$n = 8k + 1000d + 80c + 8b$$
$$= 8(k + 125d + 10c + b)$$

durch 8 teilbar, w.z.b.w.

4. Aus den Gleichungen für die Radien folgt

$$r_2 = 2r_1 \quad r_3 = 3r_1 \quad r_4 = 4r_1.$$

Der Flächeninhalt A_1 des inneren Kreises K_1 beträgt:

$A_1 = \pi r_1^2$. Der Flächeninhalt A_2 des ersten Kreisringes:

$$A_2 = \pi[(2r_1)^2 - r_1^2] = 3\pi r_1^2.$$

Der Flächeninhalt A_3 des zweiten Kreisringes:

$$A_3 = \pi[(3r_1)^2 - (2r_1)^2] = 5\pi r_1^2.$$

Der Flächeninhalt A_4 des dritten Kreisringes:

$$A_4 = \pi[(4r_1)^2 - (3r_1)^2] = 7\pi r_1^2.$$

Daraus folgt

$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = \pi r_1^2 : 3\pi r_1^2 : 5\pi r_1^2 : 7\pi r_1^2$,
$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = 1 : 3 : 5 : 7$.

Die vier Flächeninhalte verhalten sich zueinander wie

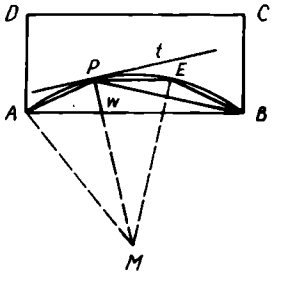
$$1 : 3 : 5 : 7.$$

5. Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann sei für diese x die Maßzahl der Masse des 77prozentigen Spiritus. Dann ist $(1000 - x)$ die Maßzahl der Masse des 87prozentigen Spiritus, und es gilt:

$$\frac{77}{100}x + \frac{87}{100}(1000 - x) = \frac{80}{100}\cdot 1000, \text{ also}$$
$$77x + 87000 - 87x = 80000, \text{ woraus man}$$
$$x = 700 \text{ erhält.}$$

Folglich kommen als Lösung der Aufgabe nur die Massen 700 g 77prozentiger und 300 g 87prozentiger Spiritus in Frage. Diese Massen haben tatsächlich die geforderte Eigenschaft; denn 700 g von 77prozentigem Spiritus enthalten genau 539 g reinen Spiritus; 300 g von 87prozentigem Spiritus enthalten genau 261 g reinen Spiritus. Das sind zusammen 800 g reiner Spiritus.
Laut Definition bezeichnet man 1000 g einer Mischung, die 800 g Spiritus und 200 g Wasser enthält, als 80prozentigen Spiritus, der laut Aufgabe herzustellen war.

6. Es sei o. B. d. A. $\overline{AP} \leqq \overline{BP}$. Der Kreis um P mit dem Radius $\overline{PA}$ schneidet den gegebenen Kreis außer in A in E. Wegen $\overline{AP} \leqq \overline{BP}$ ist E zugänglich, ebenso ein Stück der Winkelhalbierenden w des Winkels $\sphericalangle APE$.
Behauptung: Die Senkrechte t durch P auf w ist die gesuchte Tangente.



Beweis: Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ist $\triangle AMP \cong EMP$ (sss), also $\sphericalangle APM \cong \sphericalangle EPM$; daher liegt M auf w. Die gesuchte Tangente steht somit senkrecht auf w; sie fällt also mit der konstruierten Geraden t zusammen.

Olympiadeklasse 9

1. Jedes Dreieck, dessen Ecken drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind, ist kongruent zu (mindestens) einem der Dreiecke, unter deren Ecken der Punkt A auftritt. Die letztgenannten Dreiecke sind genau die folgenden: $\triangle ABH$,
$\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$, $\triangle ABF$, $\triangle ABG$,
$\triangle ACD$, $\triangle ACE$, $\triangle ACF$, $\triangle ACG$, $\triangle ACH$,
$\triangle ADE$, $\triangle ADF$, $\triangle ADG$, $\triangle ADH$,
$\triangle AEF$, $\triangle AEG$, $\triangle AEH$,
$\triangle AFG$, $\triangle AFH$,
$\triangle AGH$.

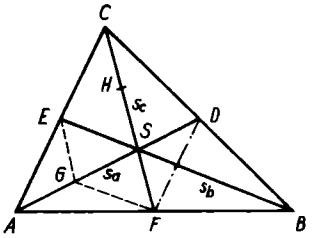
Zwischen diesen Dreiecken bestehen genau die folgenden Kongruenzbeziehungen:
(1) $\triangle ABC \cong \triangle ABH \cong \triangle AGH$,
(2) $\triangle ABD \cong \triangle ABG \cong \triangle ACD \cong \triangle ACH \cong \triangle AFG \cong \triangle AFH$,
(3) $\triangle ABE \cong \triangle ABF \cong \triangle ADE \cong \triangle ADH \cong \triangle AEF \cong \triangle AEH$,
(4) $\triangle ACE \cong \triangle ACG \cong \triangle AEG$,
(5) $\triangle ACF \cong \triangle ADF \cong \triangle ADG$.

Das in der Aufgabenstellung genannte Aufschreiben von Dreiecken ist daher nur so möglich, daß aus jeder der Zeilen (1) bis (5) höchstens ein Dreieck aufgeschrieben wird. Die größtmögliche Anzahl aufgeschriebener Dreiecke wird erreicht, wenn aus jeder dieser Zeilen genau ein Dreieck aufgeschrieben wird. Demnach beträgt diese größtmögliche Anzahl 5.

2. I. Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Es seien D, E, F die Mittelpunkte der Seiten BC, AC bzw. AB. Dann schneiden sich die drei Seitenhalbierenden AD, BE, CF in einem Punkt S, und es gilt

$$\overline{AS} = \frac{2}{3}s_a, \quad \overline{SE} = \frac{1}{3}s_b \text{ sowie } \quad \overline{SF} = \frac{1}{3}s_c.$$

Ferner sei G der Mittelpunkt von $\overline{AS}$; dann gilt $\overline{GS} = \frac{1}{3}s_a$ und $\overline{AG} : \overline{AS} = \overline{AF} : \overline{AB}$, also nach der Umkehrung des einen Strahlensatzes $GF \parallel SB$, ebenso auch $\overline{AG} : \overline{AS} = \overline{AE} : \overline{AC}$, also analog $GE \parallel SC$.
Daher ist $GFSE$ ein Parallelogramm und folglich $\overline{GF} = \frac{1}{3}s_b$.
II. Hieraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



Man zeichne eine Strecke GS der Länge $\frac{1}{3}s_a$. Schneiden sich nun der Kreis um G mit dem Radius $\frac{1}{3}s_b$ und der Kreis um S mit dem Radius $\frac{1}{3}s_c$, so sei F einer ihrer Schnittpunkte. Sodann verlängere man die Strecke SG über G hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt A,
die Strecke GS über S hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt D,
die Strecke FS über S hinaus um das Doppelte ihrer eigenen Länge bis zum Punkt C.
Schneiden sich schließlich die Verlängerungen der Strecken CD und AF über D bzw. F hinaus, so sei B ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion wird

$\overline{AD}=3\overline{GS}=s_a$, $\overline{CF}=3\overline{SF}=s_c$ sowie

$\overline{SD}:\overline{SA}=\overline{SF}:\overline{SC}=1:2$, also

$DF \parallel AC$ und $\overline{DF}:\overline{AC}=1:2$. Hieraus folgt $\overline{BF}:\overline{BA}=1:2$ und $\overline{BD}:\overline{BC}=1:2$, also ist

CF Seitenhalbierende im $\triangle ABC$ und

AD Seitenhalbierende im $\triangle ABC$.

Der Schnittpunkt von AC mit der Verlängerung von BS über S hinaus werde mit E bezeichnet.

Dann ist BE Seitenhalbierende im $\triangle ABC$, und für sie gilt $\overline{BS}=\frac{2}{3}\overline{BE}$. Andererseits gilt (nach Konstruktion und da F schon als Mittelpunkt von AB nachgewiesen ist)

$\overline{AG}:\overline{AS}=\overline{AF}:\overline{AB}=1:2$, also

$FG \parallel BS$ und $\overline{FG}:\overline{BS}=1:2$, und hieraus schließlich erhält man

$\frac{2}{3}\overline{BE}=\overline{BS}=2\overline{FG}=\frac{2}{3}s_b$, also $\overline{BE}=s_b$.

3. Angenommen, p sei eine Zahl, durch die bei gegebenem m und n die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Nach Aufgabenstellung sind m, n und p positiv. In einer Zeiteinheit verrichtet A die Arbeitsmenge x, B die Arbeitsmenge y, C die Arbeitsmenge z. Dabei sind auch x, y und z positiv anzunehmen.

Dann verrichtet A in m Zeiteinheiten einerseits die Arbeitmenge mx, andererseits nach Aufgabenstellung die Arbeitsmenge $y+z$. Daher gilt

(1) $mx=y+z$. Ebenso erhält man

(2) $ny=x+z$,

(3) $pz=x+y$.

Aus (1), (2), (3) folgt, indem man zwei der Größen x, y, z eliminiert – wobei sich herausstellt, daß die dritte eliminiert wird –, die Gleichung

(4) $(mn-1)\,p=m+n+2$. Hierzu ein Beispiel für mögliche Eliminationswege:

Aus (2) folgt $x=ny-z$; dies in (1) und (3) eingesetzt ergibt

(5) $(mn-1)\,y=(m+1)\,z$ und

(6) $(p+1)\;\;z=(n+1)\,y$.

Nach Multiplikation von (5) und (6) und anschließender Division durch yz (dies ist lt. Aufgabenstellung ungleich 0) ergibt sich $(mn-1)(p+1)=(m+1)(n+1)$ und daraus (4).

(2. Weg und Schluß der Aufgabe siehe *alpha* 1/71)

4. Es gibt mehrere Möglichkeiten für Lösungswege. Gruppen solcher Möglichkeiten entsprechen den Eliminationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen. Als Beispiel für ein Vorgehen, das dem Einsetzungsverfahren entspricht, diene der folgende Lösungsweg:

Ist $11a+2b$ durch 19 teilbar, so ist $2b=19k-11a$ mit einer ganzen Zahl k, also

(1) $2\cdot(18a+5b)=36a+5\cdot(19k-11a)=19\cdot(5k-a)$. Daher ist einerseits $5k-a$, d. h. $5k-a=2n$ mit einer ganzen Zahl n, andererseits folgt dann aus (1) weiter $18a+5b=19n$, w. z. b. w.

Eine andere Gruppe der Möglichkeiten besteht darin, durch Bildung ganzzahliger Vielfacher von einem der beiden Summanden $11a$, $2b$ bis auf ein Vielfaches von 19 den entsprechenden Summanden $18a$ bzw. $5b$ der anderen Summe zu erreichen.

5. Es bezeichne h_1 die Länge der Höhe des Teildreiecks, das die Parallele vom gesamten Dreieck abschneidet, und zwar die zu dieser Parallelen senkrechte Höhe. Die Länge des anderen Abschnitts auf der zur Seite AB gehörenden Höhe sei h_2 genannt. Dann sind (h_1+h_2) und h_1 die Längen entsprechender Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken vom Flächenverhältnis 2 : 1. Daher gilt

$(h_1+h_2)^2 : h_1^2=2:1$, also $\frac{h_1+h_2}{h_1}=\frac{\sqrt{2}}{1}$,

woraus sich durch Subtrahieren von 1 das gesuchte Verhältnis

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}$$ ergibt.

6. Aus den Voraussetzungen folgt

$$\frac{(x_0+2)\cdot f(x_0+1)}{x_0}=\frac{(x_0+2)\cdot x_0(x_0+1)}{x_0\cdot 2}=$$

$$\frac{(x_0+1)(x_0+2)}{2}=f(x_0+2),$$ w. z. b. w.

Olympiadeklasse 10

1. Angenommen, z sei eine natürliche Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Da z dreistellig ist, gilt

$z=a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0$ mit natürlichen Zahlen a_i und (1)

$1\leqq a_2\leqq 9;\; 0\leqq a_1\leqq 9;\; 0\leqq a_0\leqq 9$. (2)

a_0 kann nur 1 oder 6 sein, da z bei Division durch 5 den Rest 1 läßt (3)

Nach dem Satz über die Teilbarkeit durch 11 folgt aus (1) unter Berücksichtigung von (2)

$a_2+a_0-a_1=11n$, n natürliche Zahl. (4)

Hieraus folgt, daß n nur 0 oder 1 sein kann. (5)

Nach (1) läßt sich z auch folgendermaßen darstellen

$z=a_2\cdot 98+a_2\cdot 2+a_1\cdot 7+a_1\cdot 3+a_0$. (6)

Da z bei Division durch 7 den Rest 3 läßt, folgt aus (6)

$2a_2+3a_1+a_0=7m+3$; m natürliche Zahl. (7)

Nach (4) gilt:

$3a_2-3a_1+3a_0=33n$. (8)

Aus den letzten beiden Aussagen folgt

$5a_2+4a_0=33n+7m+3$ und damit

$33n-4a_0+3=5a_2-7m$. (9)

Fallunterscheidung: Nach (3) und (5) kommen nur folgende Fälle in Betracht:

a_0	n	$33n-4a_0+3$	Damit gilt nach (9)
1	0	− 1	$7m=5a_2+1$
6	0	−21	$7m=5a_2+21$
1	1	32	$7m=5a_2-32$
6	1	12	$7m=5a_2-12$

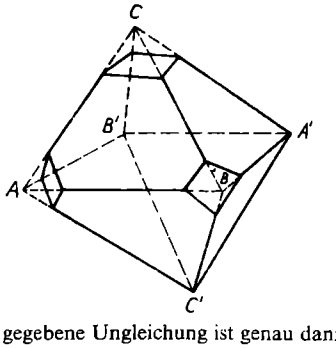
Hieraus und aus (2) folgen als einzige Möglichkeit für a_2	Hieraus und aus (4), (2) folgen als einzige Möglichkeit für a_1
4	5
7	keine
5	keine
1	keine
8	3

Hieraus folgt, daß nur 451 und 836 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen können. Wie die Probe zeigt, ist dies der Fall. (Aus Platzgründen wird auf weitere zwei Lösungswege verzichtet, d. Red.)

2. Da die Anzahl der ebenen Begrenzungsflächen nach der Ausführung der Schnitte 11 betragen soll, und da ein Oktaeder ein konvexer Körper ist, muß man mindestens 3 Schnitte ausführen. Das gegebene Oktaeder habe die Eckpunkte A, B, C, A', B', C' (A' liege A gegenüber usw.).

Da u. a. 3 Quadrate als Schnittfiguren entstehen sollen, liegt es nahe, zu untersuchen, was für ein Restkörper entstehen kann, wenn man die Schnitte parallel zu zweien oder dreien der Quadrate $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$ legt, und zwar so nahe bei den hierdurch abgeschnittenen Eckpunkten (C oder C' bzw. B oder B' bzw. A oder A'), daß die Schnittflächen sich gegenseitig nicht treffen. Dabei werden drei vierseitige Pyramiden abgeschnitten. Da auch eine Sechseckfläche entstehen soll, wähle man die drei abzuschneidenden Pyramiden so, daß unter deren Spitzen keine zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders vorkommen, also etwa die Eckpunkte A, B, C als Spitzen auftreten.

Man überzeugt sich leicht, daß man damit einen Körper der geforderten Art erhält.



3. Die gegebene Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn

$|\log_2|5-x||<1$, d. h., $-1<\log_2|5-x|<1$

gilt. Letzteres ist äquivalent mit

$0{,}5<|5-x|<2$. (1)

Fallunterscheidung:

1. $x\geqq 5$: Dann ist (1) äquivalent mit

$5{,}5<x<7$ (2)

2. $x<5$: Dann ist (1) äquivalent mit

$3<x<4{,}5$ (3)

Notwendig und hinreichend dafür, daß x die gegebene Ungleichung erfüllt, ist also, daß x in einem der durch (2) oder (3) charakterisierten Intervalle liegt.

Eine notwendige und nicht hinreichende Bedingung ist etwa, daß x im Intervall $3<x<7$ liegt. Eine hinreichende und nicht notwendige Bedingung ist etwa, daß x im

Intervall $5{,}5<x<7$ liegt. Natürlich kann man auch beliebig viele andere Bedingungen von dieser Art angeben.

4. Angenommen, a und b seien Zahlen der verlangten Art. Dann folgt $a \neq -b$; denn wäre $a=-b$, so erhielte man nach Aufgabenstellung $0=a+b=ab=-b^2$, also $b=0$, $a=0$, im Widerspruch dazu, daß nach Aufgabenstellung $b<a$ sein müßte.

Nach Aufgabenstellung ist ferner entweder $a+b=a^2-b^2$ oder $a+b=b^2-a^2$. Die letzte Gleichung würde wegen $a+b \neq 0$ auf $1=b-a$ und somit ebenfalls auf einen Widerspruch zu $b<a$ führen. Daher verbleibt nur die Möglichkeit $a+b=a^2-b^2$, woraus wegen $a+b \neq 0$ weiter $1=a-b$, also $a=b+1$ folgt. Setzt man dies in $a+b=ab$ ein, so erhält man die Gleichung $2b+1=b^2+b$, d. h. $b^2-b-1=0$, die die Lösungen

$b_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}$, d. h. $b_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, und nur diese hat.

Wegen $a=b+1$ erhält man als zu b_1 bzw. b_2 gehörige Werte für a

$$a_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad a_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Somit können höchstens die Paare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) Lösungen der Aufgabe sein. Die folgende Probe zeigt, daß sie dies tatsächlich sind:

Erstens gilt $b_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}<\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=a_{1,2}$.

Zweitens ist

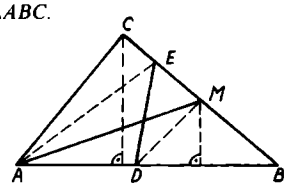
$$a_{1,2}+b_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}.$$

$$a_{1,2}\cdot b_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}\pm3\sqrt{5}+5}{4}=2\pm\sqrt{5}.$$

$$a_{1,2}^2-b_{1,2}^2=\frac{(9\pm6\sqrt{5}+5)-(1\pm2\sqrt{5}+5)}{4}=2\pm\sqrt{5}$$

oberes Vorzeichen stets für a_1, b_1, unteres Vorzeichen stets für a_2, b_2).

5. *Erster Lösungsweg:* Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\overline{AD} \leqq \overline{DB}$ vorausgesetzt. Der Mittelpunkt von BC sei M. Dann hat $\triangle ABM$ halb so großen Flächeninhalt wie $\triangle ABC$. *Beweis:* Beide Dreiecke stimmen in der Seite AB überein. Die zu dieser Seite gehörende Höhe ist im Dreieck $\triangle ABM$ nach einem der Strahlensätze halb so groß wie die entsprechende Höhe im Dreieck $\triangle ABC$.



I. Kein von C verschiedener Punkt E' auf AC kann der Aufgabenstellung genügen; denn für jeden solchen Punkt ist der Flächeninhalt von $\triangle ADE'$ kleiner als der von $\triangle ADC$ und somit stets kleiner als die Hälfte des Flächeninhalts von $\triangle ABC$.

Also kann es höchstens auf BC einen Punkt der gesuchten Art geben. Angenommen, ein Punkt E auf BC habe die verlangte Eigenschaft. Dann sind $\triangle ABM$ und $\triangle DBE$ flächengleich, also liegt M zwischen E und B, und es sind auch $\triangle ADM$ und $\triangle DME$ flächengleich. Hieraus folgt $AE \parallel DM$.

II. Daher kann ein Punkt E nur dann der Aufgabenstellung genügen, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: Man konstruiere den Mittelpunkt M von BC. Schneidet die Parallele durch A zu DM die Strecke BC, so sei E der Schnittpunkt.

III. Der *Beweis*, daß diese Konstruktion zu einem Punkt E der gesuchten Art führt, folgt durch Umkehrung der in I. genannten Schlüsse.

IV. Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar. Sei nämlich E zunächst als der (stets existierende) Schnittpunkt der Parallelen durch A zu DM mit dem von B durch C gehenden Strahl definiert. Dann gilt $\overline{EM} : \overline{MB} = \overline{AD} : \overline{DB} \leqq 1 : 1$, also liegt E auf der Strecke BC (im Falle $\overline{AD}=\overline{DB}$ und nur in diesem so, daß E mit C zusammenfällt).

Einen *zweiten Lösungsweg* erhält man, indem man die Parallele durch A zu DC mit der Geraden durch B und C zum Schnitt S bringt und dann das zu $\triangle ABC$ flächengleiche $\triangle DBS$ durch seine Seitenhalbierende DE halbiert.

6. Aus den gegebenen Wertepaaren erhält man die Gleichungen

(1) $a+b+c=1$
(2) $4a+2b+c=2$
(3) $9a+3b+c=n_1$
(4) $16a+4b+c=n_2$.

Durch Subtraktion ergibt sich aus (2) und (1), (3) und (2) bzw. (4) und (3)

$3a+b=1$
$5a+b=n_1-2$
$7a+b=n_2-n_1$. Daraus folgt
$2a=n_1-3$
$2a=n_2-2n_1+2$

und schließlich $3n_1-5=n_2$.

Da n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sein sollen, kann n_1 nur die Werte 2, 3 und 4 annehmen.

Es sei $n_1=2$.

Dann ist $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $c=-1$

Es sei $n_1=3$.

Dann ist $a=0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es sei $n_1=4$.

Dann ist $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=1$. Daher können nur die quadratischen Funktionen

(I) $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-1$

und (II) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

die gestellten Bedingungen erfüllen.

Durch Aufstellen der vorgeschriebenen Tabelle stellt man fest, daß sie dies auch tun.

Zu I:

x	1	2	3	4
y	1	2	2	1

Zu II:

x	1	2	3	4
y	1	2	4	7

DDR-Olympiade

Olympiadeklasse 10

(Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission des ZKOJM)

1. Angenommen, die Aufgabe hat eine Lösung. Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen seien a und b. Dann gilt:

(1) $a+b=u^2$ (2) $a+41=v^2$
(3) $b+41=w^2$ (4) $a+b+41=x^2$

mit natürlichen Zahlen u, v, w und x.

Aus (4) und (1) folgt durch Subtraktion $41=x^2-u^2=(x+u)(x-u)$.

Da 41 Primzahl ist und u und x natürliche Zahlen sind, also $x+u \geqq 0$ ist, kommt als einzige Zerlegung $x+u=41$ und $x-u=1$ in Frage, woraus (5) $\underline{x=21}$ und $\underline{u=20}$ folgt.

Aus (2) und (3) folgt durch Subtraktion (6) $a-b=v^2-w^2$ und aus (1), (5) und (6) durch Addition

$2a=400+v^2-w^2$, also

$a=200+\frac{v^2-w^2}{2}$. Da a eine natürliche Zahl ist, gilt $2 \mid v^2-w^2$.

Das bedeutet, daß v und w entweder beide gerade oder beide ungerade sind. In jedem Falle gilt dann

$2 \mid v+w$ und $2 \mid v-w$ und,

wegen $v^2-w^2=(v+w)(v-w)$, $4 \mid v^2+w^2$.

Daher erhält man $a=2\left(100+\frac{v^2-w^2}{4}\right)$ und mithin $2 \mid a$ und aus (1) und (5) auch $2 \mid b$.

Wegen (2) und (3) und der Geradzahligkeit von a und b sind v und w ungerade.

Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl hat als letzte Ziffer eine der Zahlen 1, 5 oder 9.

Daher endet wegen (2) und (3) jede der Zahlen a und b auf 0, 4 oder 8. Wegen $a+b=400$ folgt daraus:

a und b enden auf 0; v^2 und w^2 enden auf 1.

Ferner folgt aus $a+b=400$, daß a, $b \leqq 400$ gilt. Nach (2), (3) ergibt sich daraus

$41 \leqq v^2 \leqq 441$, $41 \leqq w^2 \leqq 441$, also $\begin{cases} 7 \leqq v \leqq 21 \\ 7 \leqq w \leqq 21. \end{cases}$

Somit können v und w nur gleich 9, 11, 19 oder 21 sein, und für das Paar (v^2, w^2) verbleiben als Möglichkeiten nur diejenigen Paare, die sich aus den Zahlen 81, 121, 361 und 441 bilden lassen und die Summe $v^2+w^2=a+b+82=482$ ergeben. Das einzige derartige (ungeordnete) Paar ist $\{121, 361\}$. Daraus folgt, daß als v, w nur die Zahlen 11, 19 und folglich als a, b nur die Zahlen 80, 320 in Frage kommen. Tatsächlich erfüllen diese Zahlen alle Bedingungen der Aufgabe; denn es gilt

(1) $320+80=20^2$ (2) $320+41=19^2$
(3) $80+41=11^2$ (4) $80+320+41=21^2$

2. *Lösung* (nach dem Vorschlag der Aufgabenkommission): Angenommen, eine reelle Zahl x erfülle die Gleichung.

Wegen $a>0$, $b>0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ und

$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$ gilt dann

$(\log_a x)\,\frac{\log_a x}{\log_a b}=\log_a b$, also

$(\log_a x)^2=(\log_a b)^2$.

Daraus folgt entweder

(1) $\log_a x=\log_a b$ oder

(2) $\log_a x=-\log_a b=\log_a\frac{1}{b}$.

Aus (1) folgt $x=b$, aus(2) folgt $x=\frac{1}{b}$. Daher können nur die Zahlen b und $\frac{1}{b}$ die vorgegebene Gleichung erfüllen. Probe: Diese beiden Zahlen sind Lösungen der gegebenen Gleichung, denn es gilt:

$(\log_a b)\,(\log_b b)=(\log_a b)\cdot 1=\log_a b$ und

$\left(\log_a\frac{1}{b}\right)\left(\log_b\frac{1}{b}\right)=(-\log_a b)\cdot(-1)=\log_a b$.

Bemerkungen zu den Schülerlösungen:

Fast alle Schüler beschritten den o. g. Weg. Die meisten Fehler wurden bei der Lösung der quadratischen Gleichung begangen. (Es wurde in der Regel nur *eine* Lösung angegeben.) *Ingeborg Bartsch, Universität Rostock*

3. (Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission) Da jede Seitenfläche des Würfels Quadratfläche ist, gilt $\overline{DK}:\overline{DE}=1:2=\overline{DL}:\overline{DG}$ und daher nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes

$$EG \parallel KL. \tag{1}$$

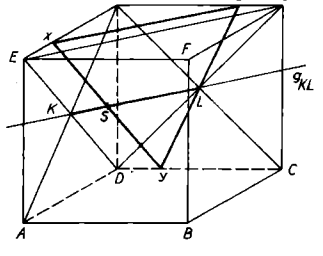
Bezeichnet Z denjenigen Punkt von GH, für den $\overline{HZ}=\overline{HX}$ ist, so gilt $\overline{HX}:\overline{HE}=\overline{HZ}:\overline{HG}$ und daher

$$XZ \parallel EG, \tag{2}$$

wenn man einmal jede zu einem Punkt ausgeartete Strecke als zu jeder anderen Strecke parallel ansieht. Aus (1) und (2) folgt

$$XZ \parallel KL, \tag{3}$$

da EG nicht zu einem Punkt ausgeartet ist. Folglich liegen K, L, X und Z in derselben Ebene ε. G und H liegen nicht auf derselben Seite von ε, desgl. D und G sowie C und H, weil jede der Strecken GH, DG und CH mit ε einen Punkt (Z bzw. L) gemeinsam hat. Daher liegen C und D nicht auf derselben Seite von ε, so daß CD mit der Ebene ε einen Punkt Y gemeinsam hat.



Wegen $CD \parallel GH$ gilt nach dem 2. Strahlensatz bzw. im Fall $Z=G$ trivialerweise $\overline{GZ}:\overline{GL}=\overline{DY'}:\overline{DL}$, woraus wegen $\overline{GL}=\overline{DL}$ die Beziehung $\overline{DY}=\overline{GZ}$ folgt. Daher fallen auf Grund der Definition von Y die Punkte Y und Y' zusammen. Mithin liegt Y in ε. Nach dem 1. Strahlensatz gilt wegen $CD \parallel GH$

$$\overline{YL}:\overline{YZ}=\overline{DL}:\overline{DG}=1:2 \text{ und,} \tag{4}$$

wenn S den Mittelpunkt von XY bezeichnet,

$$\overline{YS}:\overline{SX}=1. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt entweder $L=S$ oder nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes $LS \parallel XZ$, woraus sich wegen (3)

$$S \varepsilon g_{KL} \tag{6}$$

ergibt. Da jeder Würfel konvex ist, liegt XY und damit S im Würfelkörper. Da von g_{KL} nur die Strecke KL im Würfelkörper liegt, folgt in Verbindung mit (6)

$$S \in KL$$

Diese Aufgabe erwies sich als Wettbewerbsaufgabe insofern gut geeignet, als sie das Feld der Bewerber gut differenzierte. 28 % der Schüler erreichten von 8 Punkten 8, 7 oder 6 Punkte, andererseits erhielten 35 % der Schüler keinen oder nur einen Punkt. Viele Schüler erkannten, daß man 2 Teilprobleme betrachten konnte:

1. Nachweis der Existenz des Schnittpunktes.
2. Nachweis des Teilungsverhältnisses.

Nahm man dabei die Existenz eines Schnittpunktes zunächst an, so war das 2. Problem (etwa durch Projektion) leicht zu bewältigen. Bei diesem Vorgehen erhielt der Schüler von den Korrektoren 3 Punkte. Das 1. Problem bereitete den Schülern weitaus mehr Schwierigkeiten. Im Prinzip wurde von den Schülern häufig der oben dargestellte Lösungsweg beschritten, aber auch mit den Methoden der darstellenden Geometrie gearbeitet. Da es bei der Anwendung der darstellenden Geometrie (Zwei-Tafel-Verfahren) darauf ankommt, zu beweisen, daß der Schnittpunkt der Aufrisse und der Schnittpunkt der Grundrisse auf einer Ordnungslinie liegen, kamen einige Schüler auf die Idee, den Würfel so zu legen, daß die Projektion von KL mit einer Ordnungslinie übereinstimmt und damit zu dem verblüffenden Ergebnis, daß auch im Falle $\overline{EX} \neq \overline{DY}$ ein Schnittpunkt existiert! Wo steckt der Fehler?

H. J. Sprengel,
Pädagogische Hochschule Potsdam

4. Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission) Da $t \neq 0$ gilt, sind auch die drei Lösungen a, b, c der Gleichung sämtlich von Null verschieden.

Das Polynom

$s x^2(x-1)+t(x+1)=0$ ist wegen

$s \neq 0$ äquivalent mit

$x^2(x-1)+\frac{t}{s}(x+1)=0$, und es gilt:

$(x-a)(x-b)(x-c)=x^2(x-1)+\frac{t}{s}(x-1)$,

also $x^3-x^2(a+b+c)+x(ab+bc+ac)-abc=$

$=x^3-x^2+\frac{t}{s}x+\frac{t}{s}$

als Identität zweier Polynome in x.

Durch den Koeffizientenvergleich erhält man

(1) $a+b+c=1$ (2) $ab+bc+ac=\frac{t}{s}$

(3) $abc=-\frac{t}{s}$.

Aus (2) und (3) folgt durch Division

$\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$,

und daher wegen (1)

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=-1$.

5. Der Lösungsvorschlag (geometrisches Problem), eingesandt von Dozent Dr. *E. Schröder*, TH Dresden, wird auf einer gesonderten Seite in Heft 2/71 veröffentlicht, d. Red.

6. Die Aufgabe war für die Schüler der Klassenstufe 10 nicht schwierig. Das zeigten die Ergebnisse: 54 % der Schüler der Zehnklassigen Allgemeinbildenden Polytechnischen Oberschule, 51,8 % der Schüler der Vorbereitungsklassen und 28,6 % der Schüler der Berufsschulen erhielten 6 oder 7 der möglichen 7 Punkte. 19,1 % aller Beteiligten erzielten weniger als 3 Punkte und nur 4,5 % konnten keinen Lösungsansatz finden.

Der Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission, der die Annahme einer rationalen Lösung der Gleichung (1) $x_1=\frac{p}{q}$, p und q teilerfremd, $q \neq 0$, in drei Fällen (p und q beide ungerade, p gerade und q ungerade oder umgekehrt, p und q beide gerade) über das Einsetzen der Lösung x_1 in Gleichung (1) zum Widerspruch führt, wurde von den Schülern selten angegeben. Als Beispiel sei im folgenden eine Lösung in Anlehnung an die Bearbeitung der Aufgabe von *Hans-Jürgen Fischer* aus dem Bezirk Karl-Marx-Stadt angeführt. Da a, b, c ungerade Zahlen sein sollen, sind sie von Null verschieden. Notwendig dafür, daß die Lösung einer quadratischen Gleichung rational ist, ist die Rationalität der Quadratwurzel aus der Diskriminante b^2-4ac. Da a, b und c ganze Zahlen sind, ist auch b^2-4ac ganzzahlig. Wenn also $\sqrt{b^2-4ac}$ rational ist, muß diese Zahl sogar eine ganze sein, also ist b^2-4ac eine Quadratzahl.

Das ist aber bei ungeraden a, b, c nicht der Fall.

Beweis: Ist b ungerade, dann ist $b \equiv \pm 1$ (8) oder $b \equiv \pm 3$ (8), also $b^2 \equiv 1$ (8)

Für gerade Zahlen z gilt: $z \equiv 0$ (8), $z \equiv 4$ (8) oder $z \equiv \pm 2$ (8), also $z^2 \equiv 0$ (8) oder $z^2 \equiv 4$ (8).

Sind a und c ungerade, dann ist auch ihr Produkt ungerade, es gilt also $ac \equiv \pm 1$ (8) oder $ac \equiv \pm 3$ (8), folglich $4ac \equiv 4$ (8).

Für b^2-4ac ergibt sich dann $b^2-4ac \equiv 1-(-4) \equiv 5$ (8), also kann b^2-4ac für ungerade a, b, c keine Quadratzahl sein.

Hans-Jürgen Vogel,
Pädagogische Hochschule Potsdam

Die Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade, Klassenstufe 11/12, wurden in der Fachzeitschrift: „Mathematik in der Schule", Heft 10/70 veröffentlicht, d. Red.

Wir stellen vor:

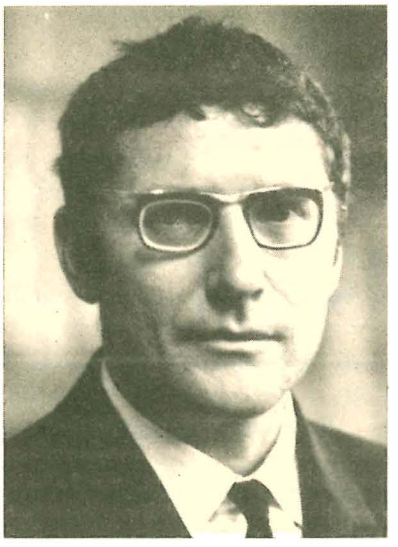
Die Leninpreisträger Jurij Rozanov und Jurij Prochorov

Jurij Rozanov, Doktor der mathematischen Wissenschaften und Professor, wurde 1934 in Moskau als Sohn eines Angestellten geboren. 1952 absolvierte er die Mittelschule und ging an die mechanisch-mathematische Fakultät der Moskauer Staatlichen Universität. Mit Abschluß des Universitätsstudiums erhielt er 1957 eine Aspirantur am Steklov-Institut für Mathematik. Er verteidigte vorfristig seine Dissertation und erhielt 1959 den Kandidatengrad. 1963 verteidigte er erfolgreich die Doktordissertation, zwei Jahre darauf wurde ihm der Professorentitel verliehen.

Nach der Aspirantur arbeitete er am Steklov-Institut für Mathematik zunächst als jüngerer wissenschaftlicher Mitarbeiter. Gegenwärtig ist er höherer wissenschaftlicher Mitarbeiter der Abteilung für Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sein Name ist im Ausland wohlbekannt. Häufig war er aktiver Teilnehmer verschiedener wissenschaftlicher Konferenzen.

Die Frau von J. Rozanov — Nina — ist jüngere wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut der Völker Asiens.

1970 wurde J. Rozanov für eine Reihe von Arbeiten zu den Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung der *Leninpreis* verliehen.



Jurij Prochorov — korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR und Professor — wurde 1929 in Moskau als Sohn eines Ingenieurs geboren. Von Kindheit an begeisterte er sich für die Mathematik. 1944 absolvierte Jurij das Externat (entsprechend dem Programm der Mittelschule) in Moskau und ging dann an die höhere technische Schule (Baumann-Schule). Vom zweiten Studienjahr ab wurde er auf persönliche Bitte hin an die mechanisch-mathematische Fakultät der Moskauer Staatlichen Universität (MGU) versetzt. 1949 absolvierte Jurij die MGU und arbeitete von da ab am Steklov-Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. 1952 verteidigte er die Kandidatendissertation und vier Jahre darauf die Doktordissertation. Seit 1956 arbeitet er als Lehrer am Moskauer Institut für Ingenieurphysik, bekleidet seit 1957 das Amt des stellvertretenden Direktors des Mathematischen Instituts und ist gleichzeitig Leiter der Abteilung für Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1958 wurde Jurij Prochorov der Professorentitel verliehen. Zur Zeit ist er Professor an der mechanisch-mathematischen Fakultät der Moskauer Universität. Jurij hat die Abenduniversität für Marxismus-Leninismus absolviert, er beherrscht die englische Sprache, liest und übersetzt aus dem Französischen und Deutschen. Häufig nahm er an wissenschaftlichen Konferenzen teil (1954 in der DDR, 1956 in der ČSSR, 1958 war er Teilnehmer am Internationalen Mathematikerkongreß in Edinburgh). Die Frau von Jurij — Svetlana — ist Dozentin am Moskauer Institut für Ingenieurphysik, die Tochter Marie ist zwei Jahre alt.

1966 wurde J. Prochorov zum korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR ernannt. 1970 wurde ihm für eine Reihe von Arbeiten zu den Grenzwertsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung der *Leninpreis* verliehen.

Nach einer Information von APN/Novosti

Einführung in die Elektronische Datenverarbeitung

Teil 12 (Schluß)

Auf ein etwas aufwendigeres zyklisches Programm führt uns das

Beispiel 3: Hier soll es darum gehen, die Zahl e auf eine gewisse Anzahl von Dezimalstellen zu berechnen. Für den mathematisch weniger fortgeschrittenen Leser sei erläutert: Die Zahl e ist eine „berühmte" Zahl ähnlich wie die Zahl π. So wie letztere für Kreis-, Kugelberechnungen usw. benutzt wird, braucht man die Zahl $e=2{,}7183\ldots$ für vielerlei Zwecke. Sie tritt u. a. beim *Gesetz des organischen Wachstums*, beim Laden und Entladen eines Kondensators und in der Wärmelehre auf. Ebenso wie π ist e eine irrationale Zahl, d. h. sie ergibt eine unendliche nicht periodische Dezimalbruchentwicklung, kann also in dieser Form immer nur näherungsweise (approximativ) dargestellt werden. Es gibt mehrere Möglichkeiten zur iterativen Berechnung von e. Wir benutzen die unendliche Reihe

$$e=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$$

(Zur Erklärung: $n!$, gelesen „n Fakultät", bedeutet $1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n$, also ist $1!=1$, $2!=1\cdot 2$, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$, $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ usw. Man hat ferner vereinbart: $0!=1$.) Man erkennt, daß in der obigen Reihe die Glieder sehr rasch kleiner und kleiner werden. Es ist bereits $\frac{1}{10!}=\frac{1}{3\,628\,800}<0{,}000001$. Je mehr Glieder man addiert, desto mehr nähert man sich dem wahren Wert von e, d. h. desto mehr Dezimalstellen sind richtig und werden durch Hinzufügen beliebig vieler weiterer Glieder der Reihe nicht geändert.

▲ Aufgabe: Bestätige den genannten Sachverhalt, indem du die ersten zehn Glieder der Reihe auf acht Dezimalen berechnest und sie schrittweise addierst!

Nun wieder zum Automaten! Setzen wir eine zehnstellig arbeitende Anlage voraus, so bedeutet das, daß ein zu addierendes Glied nur noch solange ins Gewicht fällt, wie es spätestens in der neunten Dezimale eine von 0 verschiedene Ziffer hat. Mathematisch formuliert hieße das, daß

$$\frac{1}{n!}<10^{-8}\quad\text{ist.}$$

Diese Genauigkeitsforderung benutzen wir beim Aufbau des Algorithmus als Abbruchbedingung für den Zyklus, der iterativ den Wert der Summe berechnet.

Ist die Frage $\frac{1}{n!}<10^{-8}$? mit *ja* entschieden,

so soll die Rechnung abbrechen, und wir können annehmen, daß die ersten neun Stellen hinter dem Komma dann stimmen.*

Um das Programm aufstellen zu können, benötigen wir noch ein paar Überlegungen: In unserer Reihe

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\quad\text{fassen wir}$$

$1+1=2$ als Anfangswert der Summe auf. Die Summanden nennen wir Q. Ist $S=2$ erste Zwischensumme, betrachten wir also die Reihe nur bis zum zweiten Glied, so ist der Wert des letzten Summanden $Q=1$. Da

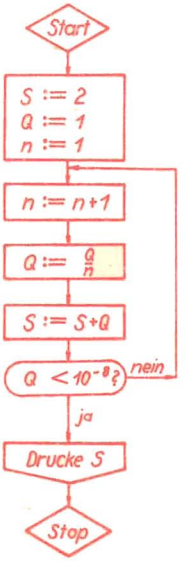
$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!\cdot n}$$

ist, ergibt sich der n-te Summand aus dem $(n-1)$-ten durch Division durch n. Für den laufenden Summanden Q gilt also beim Übergang zum nächsten: $Q:=\frac{Q}{n}$

Ausführlich:

$$Q:=1$$
$$Q:=\frac{Q}{2}\left(Q=\frac{1}{2}\right)$$
$$Q:=\frac{Q}{3}\left(Q=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}\right)$$
$$Q:=\frac{Q}{4}\left(Q=\frac{1}{6\cdot 4}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}\right)$$
$$\vdots$$

Jetzt wird dem Leser das Verständnis des Diagramms nicht schwerfallen:



* Diese Folgerung läßt sich nicht für beliebige unendliche Reihen verallgemeinern. Es gibt durchaus Fälle, wo von einem bestimmten Glied an die von 0 verschiedenen Ziffern erst rechts von einer gewissen Dezimalstelle auftreten, diese aber beim Addieren unter Umständen mehrere Stellen nach links übergreifen. In diesem Beispiel ist das aber nicht der Fall.

Man beachte noch den Unterschied zwischen diesem zyklischen Programm und dem vorigen. Beim vorigen stand schon zu Beginn der Rechnung fest, wie oft der Zyklus zu durchlaufen war, nämlich 999mal. Beim letzten Programm ist am Anfang die Zahl der

Durchläufe noch nicht bekannt; sie wird durch die Rechnung selbst entschieden. Für das nächste *Beispiel 4* sollen hier nur einige Anleitungen gegeben werden. Die Aufstellung des Flußdiagramms sei dem Leser überlassen. Es ist ein Programm für das Ziehen einer Quadratwurzel anzufertigen. Da es sich um eine nicht automatengerechte Operation handelt, müssen wir nach einer mathematischen Methode suchen, mit der das Radizieren auf die vier Grundoperationen zurückgeführt wird. Das gelingt iterativ nach der hier ohne Beweis mitgeteilten Formel

$$(1) \qquad x_{i+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(x_i+\frac{a}{x_i}\right).$$

Darin ist a der Radikand (eine beliebige positive Zahl), x_i ein *Näherungswert* für $\sqrt{a}$ und x_{i+1} ein *besserer Näherungswert*. Geht man von einem beliebigen positiven Anfangswert x_0 aus und berechnet man nach obiger Formel schrittweise x_1, x_2, x_3 usw., so kommt man mit dieser Folge der Zwischenergebnisse dem wahren Wurzelwert immer näher.

Aufgaben

■ 1 ■ Probiere das Verfahren mit $a=2$ und $x_0=2$ (man kann durchaus als Anfangswert den Radikanten selbst nehmen) aus! Wieviel Glieder braucht man, um $\sqrt{2}$ auf fünf Dezimalstellen genau zu berechnen?

■ 2 ■ Schreibe den Ablauf (mit allgemeinem Radikanden a) als zyklisches Programm mit der Abbruchbedingung

$$(2) \qquad \left|\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i}\right|<10^{-6}\ !$$

Beachte: Für die in den Formeln (1) und (2) vorkommenden Zwischenergebnisse sind (siehe Beispiel 1!) gesonderte Symbole einzuführen. Jedes Operationskästchen soll nur *eine* Teiloperation enthalten.

3.2. Programmiersprachen — Maschinenprogramme

Die bisher behandelten Diagramme kann man als *Strukturdiagramme* bezeichnen, weil sie die logische Struktur des Programmablaufs darstellen. Das bedeutet noch nicht, daß ein Automat solche Diagramme „versteht". Die Arbeit des Programmierers ist also an dieser Stelle noch nicht beendet. Was weiter geschieht, soll in dieser Artikelserie nicht mehr ausführlich behandelt, sondern nur kurz umrissen werden:

Es ist heute üblich, Programme in einer international vereinbarten problemorientierten *Programmiersprache* zu formulieren. Eine solche künstliche Sprache besteht aus den üblichen Alphabetzeichen, Ziffern und einigen Sonderzeichen. Am bekanntesten ist die Programmiersprache ALGOL (*Algo*rithmic *L*anguage). Ohne näher auf diese Sprache einzugehen, wollen wir den im Beispiel 2 (zweite Fassung) dargestellten Ablauf in ALGOL-Notation angeben. Die Darstellung wird nach dem Vorangegangenen unmittelbar verständlich sein:

$S:=0$; $i:=1$;
Wiederholung: $S:=S+a[i]$; $i:=i+1$;
$i \mid i\leqq 1000$ *then go to* **Wiederholung.**

Letzteres ist noch kein vollständiges ALGOL-Programm. Die Zeilen entsprechen aber dem arithmetischen Sachverhalt dieses Beispiels.

Ein solches Programm wird anschließend auf ein sogenanntes *Eingabemedium* übertragen. Als Medien dienen im wesentlichen *Lochkarten* und *Lochstreifen*. Von diesen Eingabemedien wird das Programm in den Automaten übernommen. Technisch muß man sich diesen Vorgang etwa so vorstellen: Die auf einer leitenden Fläche liegende Lochkarte wird zeilenweise mit einer metallischen Bürste abgetastet. Zwischen Bürste und Unterlage besteht eine elektrische Spannung. Jedes Loch bewirkt beim Überstreichen einen kurzfristigen Kontakt und somit einen vom Automaten registrierten Stromstoß.

Das in der Programmiersprache abgefaßte Programm — nehmen wir als Beispiel das ALGOL-Programm — muß nun noch für den betreffenden Maschinentyp übersetzt werden. Das geschieht durch ein besonderes Programm, in unserem Fall durch einen *ALGOL-Übersetzer*. Er bewirkt im Automaten die Übertragung in das *individuelle Maschinenprogramm*. Dieses führt dann die Rechnung explizit aus.

Die Ergebnisse können über einen *Schnelldrucker* ausgegeben werden und sind dann für den Menschen unmittelbar lesbar. Sie können aber auch in Lochstreifen oder Lochkarten eingestanzt oder auf Magnetbändern gespeichert werden, um für weitere Auswertungen in maschinenlesbarer Form unmittelbar zur Verfügung zu stehen. Fassen wir zum Abschluß den Inhalt des dritten und letzten Abschnitts der EDV-Serie noch stichwortartig zusammen:

Problem — mathematische Formulierung — Auflösen in Teiloperationen — Strukturdiagramm — ALGOL-Programm — ALGOL-Übersetzer — individuelles Maschinenprogramm — Rechnung — Ergebnis.

J. Frormann

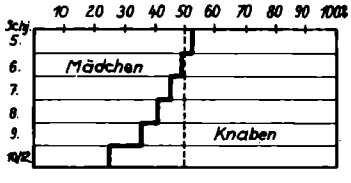
Wir empfehlen dem interessierten Leser für ein weiterführendes Studium folgende populärwissenschaftliche *Literatur:*

Arbeitsweise von Rechenanlagen:
1. Schubert, Digitale Kleinrechner, Verlag Technik, Berlin (1967)
2. Götzke, Programmgesteuerte Rechenautomaten, VEB Fachbuchverlag Leipzig
Programmierung: 3. Huhn, Grundlagen der Datenverarbeitung, Verlag Die Wirtschaft, Berlin (1970)
4. Paulin, Programmierung elektronischer Datenverarbeitungsanlagen, Berlin, Verlag Die Wirtschaft (erscheint 1970)
Nachschlagewerke: 5. Murphy, Elektronische Ziffernrechner, VEB Technik, Berlin (1965)
6. Paulin, Kleines Lexikon der Rechentechnik und Datenverarbeitung, VEB Verlag Technik, Berlin (1969)

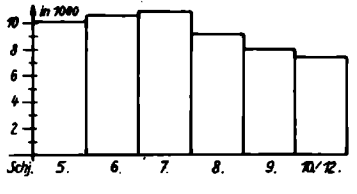
alpha-Wettbewerb 1969/70

Rund 25 000 Lösungen gingen im vergangenen Schuljahr ein. In Kleinarbeit wurden alle zwischen dem 1. und 10. 10. an die Redaktion eingesandten Briefe (mit Antwortkarten) bearbeitet. Bis zum 1. November haben wir an unsere aktiven Leser versandt:
72 Urkunden und Abzeichen, Preise (Wert: 950 M) für unsere Preisträger.
151 Urkunden, Abzeichen für „vorbildliche Leistungen".
150 Urkunden, Abzeichen in Gold für dreijährige und erfolgreiche Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb. (Die Namen dieser Schüler sowie die Preisträger veröffentlichen wir in Heft 1/71.)
1 227 Urkunden und Abzeichen für erfolgreiche Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb 1969/70.
45 Schulen nahmen als Kollektive am *alpha*-Wettbewerb teil (s. Heft 1/71).
12 Verlage überreichten für über 1 500 M Bücher für die Auszeichnung (s. Heft 1/71).

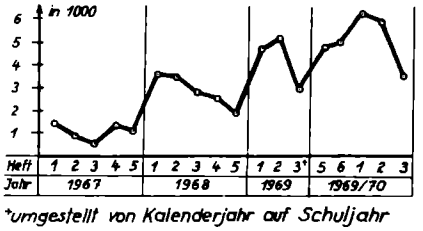
Beteiligung — aufgeschlüsselt nach Jungen, Mädchen (1967/70)



Beteiligung — aufgeschlüsselt nach Schuljahren (1967/70)



4 Jahre alpha-Wettbewerb (absolut)



*umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr

alpha-Wettbewerb 1969/1970 — Einsendung von Lösungen

Klassenstufe 5

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
5/69	424	204	265	469	(—12)
	425	208	267	475	(—15)
6/69	455	248	265	513	(—16)
	456	211	247	458	(—115)
1/70	480	276	290	566	(—4)
	481	250	320	570	(—3)
2/70	511	275	276	551	(—18)
	512	261	256	517	(—6)
3/70	536	198	225	423	(—12)
	537	168	189	357	(—43)
zus.		2299	2600	4899	

Klassenstufe 6

Heft	Aufgabe	Knaben	Mädchen	gesamt	falsche Lösungen
5/69	429	198	205	403	(—122)
	430	175	195	370	(—75)
6/69	460	219	231	450	(—3)
	461	122	154	276	(—22)
1/70	482	146	183	329	(—10)
	483	150	135	285	(—7)
2/70	515	341	287	628	(—2)
	516	280	233	513	(—47)
3/70	541	183	207	390	(—16)
	542	111	124	235	(—19)
zus.		1925	1954	3879	

Klassenstufe 7

5/69	434	275	251	526	(—52)
	435	250	230	480	(—174)
6/69	465	256	245	501	(—80)
	466	230	205	435	(—54)
1/70	484	307	304	611	(—88)
	485	423	415	838	(—84)
2/70	519	257	295	552	(—20)
	520	160	179	339	(—241)
3/70	546	187	173	360	(—57)
	547	66	60	126	(—23)
zus.		2411	2357	4768	

Klassenstufe 8

5/69	438	103	72	175	(—90)
	439	170	110	280	(—42)
6/69	469	206	141	347	(—121)
	470	254	173	427	(—37)
1/70	486	85	66	151	(—56)
	487	328	298	626	(—76)
2/70	523	298	287	585	(—164)
	524	92	62	154	(—6)
3/70	550	231	179	410	(—78)
zus.		1868	1468	3336	

Klassenstufe 9

5/69	442	394	297	691	—
	443	315	242	557	(—7)
6/69	473	110	62	172	(—14)
	474	223	150	373	(—15)
1/70	488	142	126	268	(—49)
	489	70	53	123	(—13)
2/70	526	327	275	602	(—8)
	527	93	32	125	(—23)
3/70	554	152	99	251	(—42)
	555	122	63	185	(—26)
zus.		1948	1399	3347	

Klassenstufe 10/12

5/69	446	165	32	197	(—34)
	447	111	30	141	(—69)
6/69	477	181	76	257	(—56)
	478	235	125	360	(—25)
1/70	490	262	95	357	(—28)
	491	221	116	337	(—24)
2/70	530	117	46	163	(—45)
	531	144	45	189	(—12)
3/70	558	119	49	168	(—4)
	559	145	61	206	(—4)
zus.		1700	675	2375	

Eingesandte Lösungen zur IX. Olympiade Jg. Mathematiker der DDR

Kreisolympiade

Klassenstufe	Knaben	Mädchen	gesamt	davon falsch
5	60	109	169	11
6	106	70	176	6
7	148	97	245	26
8	80	54	134	14
9	100	22	122	9
10	92	29	121	9
11/12	140	12	152	6
zus.	726	393	1119	81

Bezirksolympiade

Klassenstufe	Knaben	Mädchen	gesamt	davon falsch
7	132	98	230	24
8	140	63	203	9
9	128	24	152	20
10	116	29	145	10
11/12	135	41	176	14
zus.	651	255	906	77

DDR-Olympiade

10	61	13	74	2
11/12	55	6	61	6
zus.	116	19	135	8

Es wurden außerdem 5 Lösungen zur XI. IMO eingesandt.

Preisträger

Vorbildliche Leistungen

Die im Druck hervorgehobenen Schüler erhielten Buchprämien.

Klassenstufe 5

Bernd Derlich 205 Teterow; **Carola Kuhnt** 205 Teterow; **Heidrun Köpcke** 205 Teterow; **Astrid Rösel** 205 Teterow (aus Klasse 3); **Sven-Thorsten Freitag** 95 Zwickau; **Norbert Heß** 8019 Dresden; **Achim Bobeth** 806 Dresden; **Birgit Kuhmstedt** 5001 Erfurt; **Elke Kühne** 427 Hettstedt; **Kirsten Helbig** 1321 Schöneberg; **Monika Juppe** 8301 Markersbach; **Andreas Letzel** 15 Potsdam; **Heike Rommel** 62 Bad Salzungen; **Claus Scheffler** 88 Zwickau; **Wilfried Carl** 402 Halle; **Heike Anders** 1636 Dahlewitz; Holger Kuchling 110 Berlin; Ute Wittat 9507 Ebersbrunn; Marlies Englisch 7022 Leipzig; Beate Brandtner 7295 Schildau; Angelika Müller 22 Greifswald; Ursula Barth 5101 Kleinfahner; Jörg Schubert 9331 Pfaffroda; Andreas Hochhaus 57 Mühlhausen; Frank Richter 793 Herzberg; Heidrun Scheinhardt 4203 Bad Dürrenberg; Ulf Hutschenreiter 8020 Dresden; Ulrike Brandemer 92 Freiberg; Thomas Kischel 22 Greifswald; Peter-Michael Anders 128 Bernau; Andreas Näther 925 Mittweida; Ute Minow 2723 Warin; Birgit Lorenz 83 Pirna-Copitz; Christine Fründt 2723 Warin; Wolfhard Spiewok 22 Greifswald; Elvira Neubauer 9413 Schönheide; Angela Richter 2723 Warin; Torsten Waldeck 90 Karl-Marx-Stadt; Holger Jurack 8502 Burkau (aus Kl. 4); Christine Dehmel 205 Teterow; Regina Lewe 205 Teterow; Jutta Langmeier 205 Teterow; Roland Herdmann 6081 Mittelstille; Gerlind Koch 6081 Trusetal; Ulrike Grauck 8502 Burkau (aus Kl. 4); Heidrun Weichler 6081 Fambach; Heiko Wolff 6084 Floh; Ulrike Claußnitzer 14 Oranienburg; Birgit Sievert 14 Oranienburg; Thomas Fischer 6221 Kranlucken; Astrid Schulz 4401 Rotta; Kerstin Tamm 6083 Brotterode; Elke Gernath 6088 Steinbach-Hallenberg; Dietmar Huhn 4401 Radis; Steffi Bittorf 6085 Oberschönau; Annemarie Heldt 2561 Parkentin; Renate Daniel 262 Bützow.

Klassenstufe 6

Uwe Löbus 801 Dresden; **Arndt Petzold** 9034 Karl-Marx-Stadt; **Martina Römer** 128 Bernau; **Karl-Heinz Hering** 50 Erfurt; **Detlef Snaga** 128 Bernau; **Michael Schnelle** 754 Calau; **Reiner Lindemann** 75 Cottbus; **Uwe Risch** 327 Burg; **Sibylle Rohrbeck** 2302 Franzburg; **Birgit Volkert** 62 Bad Salzungen; **Brigitte Hildenbrandt** 6316 Stützerbach; **Barbara Wettengel** 992 Oelsnitz; Hans-Peter Tams 2851 Domsühl; Karl-Heinz Schubert 9331 Pfaffroda; Bärbel Rahnefeld 901 Karl-Marx-Stadt; Frank Kolwe 128 Bernau; Jörg Löschner 9201 Dorfchemnitz; Ulrike Huste 8502 Burkau; Peter Heumann 90 Karl-Marx-Stadt; Herbert Forst 62 Bad Salzungen; Eva Clauß 9501 Culitzsch; Thomas Rudolph 92 Freiberg; Peter-Michael Anders 128 Bernau; Jens Haupt 90 Karl-Marx-Stadt; Petra Hanisch 8502 Burkau; Volkmar Wagner 6081 Fambach; Burkhard Schneider 6081 Fambach; Barbara König 9215 Sayda; Margit Schneider 9201 Dorfchemnitz; Angela Brandt 9014 Karl-Marx-Stadt; Angelika Stephan 8502 Burkau; Jutta Storch 6081 Fambach; Birgit Ludwig 2051 Altkalen; Silva Schäfer 2051 Kleverhof; Bernd Richter 7261 Liptitz; Bernd Behnke 5403 Greußen; Zita Morgenstern 22 Greifswald; Gabriele Weisheit 6087 Seligenthal; Lutz Spiegel 3282 Güsen; Christina Wilhelm 6081 Mittelstille; Cornelia Müller 9215 Sayda; Lothar Jenning 2031 Gülzowshof; Uwe Löser 6801 Goßwitz; Marlene Möller 62 Bad Salzungen; Bärbel Anders 75 Cottbus.

Klassenstufe 7

Horst Kohlschmidt 801 Dresden; **Thomas Wolf** 655 Schleiz; **Gernot Förster** 757 Forst; **Harry Reimann** 104 Berlin; **Roland Maerz** 285 Parchim; **Siegfried Marg** 1501 Neu-Töplitz; **Christina Feige** 57 Mühlhausen; **Stefan Pfeifer** 74 Altenburg; **Regina Hildenbrandt** 6316 Stützerbach; **Andreas Schlosser** 95 Zwickau; **Frank-Günter Krause** 784 Senftenberg; Elke Mietzsch 21 Pasewalk; Regina Rau 9412 Schneeberg; Irene Hauske 8507 Putzkau; Andreas Popp 95 Zwickau; Angela Petzold 115 Berlin; Christian Hofmann 7404 Meuselwitz; Clemens Schlechte 808 Dresden; Manfred Bartsch 5501 Hesserode; Joachim Krautz 75 Cottbus; Horst Theel 1034 Berlin; Andreas Schneider 8512 Großröhrsdorf; Birgit Starke 703 Leipzig; Bärbel Hamm 60 Suhl; Carola Wobst 8502 Burkau; Martina Huste 8502 Burkau; Reiner Wagner 8502 Burkau; Jutta Rauer 608 Schmalkalden; Regina Schubert 6403 Neuhaus-Schierschnitz; Sabine Mark 608 Schmalkalden; Peter Segelek 301 Magdeburg; Claudia Neumann 9402 Bernsbach; Jörg Wehage 1802 Kirchmöser; Norbert Littig 8501 Lichtenberg.

Klassenstufe 8

Steffen Löbus 801 Dresden; **Egbert Lindner** 801 Dresden; **Anita Paul** 608 Schmalkalden; **Bernd Hanke** 8708 Großschweidnitz; **Ulf Brüstel** 7401 Ziegelhain; **Rolf Dietmar Regel** 75 Cottbus; **Bernd Ziemdars** 209 Templin; **Roland Nehrig** 55 Nordhausen; **Hans-Gert Gräbe** 50 Erfurt; **Reinhard Schuster** 703 Leipzig; **Ute Winkler** 153 Teltow; **Roland Borch** 75 Cottbus; **Bernd Kutnik** 205 Teterow; **Karin Schuster** 6575 Pausa; Yvonne Kruber 835 Stolpen; Reinhard Lehmann 79 Falkenberg; Manfred Pokrandt 75 Cottbus; Andreas Stern 22 Greifswald; Gert Hantsche 8142 Radeberg; Uwe Stitz 801 Dresden; Bernd Reddemann 36 Halberstadt; Hubert Sanik 2151 Rattey; Jutta Schuster 27 Schwerin; Andreas Fleischer 8027 Dresden; Peter Linhart 7305 Waldheim; Ulrich König 6081 Zillbach; Andreas Zimmermann 90 Karl-Marx-Stadt; Steffi Größel 9522 Reinsdorf; Monika Seiler 53 Weimar; Viola Eichler 8302 Bad Gottleuba; Hartmut Häfner 6088 Steinbach-Hallenberg.

Klassenstufe 9

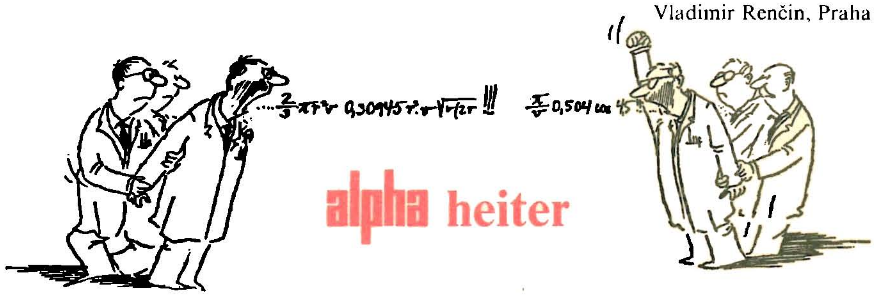
Albrecht Böttcher 9314 Neudorf; **Lothar Wenzel** 111 Berlin; **Michael Hoffmann** 238 Barth; **Bärbel Schulz** 75 Cottbus; **Wolfram Heimbrodt** 1055 Berlin; **Klaus-Peter Schemmel** 1055 Berlin; **Jörg Vogel** 55 Nordhausen; **Wolfgang Zahn** 532 Apolda; **Detlef Hantke** 42 Merseburg; **Volker Schneider** 9302 Annaberg-Buchholz; **Manfred Riemer** 83 Pirna; **Helga Däweritz** 7291 Neußen; Volker Warstat 323 Oschersleben; Bernd Droge 7541 Kalkwitz; Wolfgang Herrmann 9306 Elterlein; H.-Jürgen Weinberger 222 Wolgast; Elke Wiemann 8245 Glashütte; Sabine Dittrich 9402 Bernsbach; Dieter Garling 286 Lübz; Dietmar Mauersberger 57 Mühlhausen; Joachim Selle 5401 Großfurra; Carmen Hauptmann 8245 Glashütte; Kordula Obereigner 291 Perleberg; Burkhard Thiele 3018 Magdeburg; Bettina Belitz 68 Saalfeld; Eberhard Häfner 6088 Steinbach-Hallenberg; Eberhard Recknagel 6088 Steinbach-Hallenberg.

Klassenstufe 10/12

Uli Klaus 50 Erfurt; **Bärbel Kurz** 724 Grimma; **Matthias Heine** 8601 Schwarznaußlitz; **Rolf Dieckmann** 24 Wismar; **Rüdiger Nützmann** 2031 Trittelwitz; **Manfred Reißig** 9933 Bad Elster; **Brigitte Prawitz** 119 Berlin; **Karl Heym** 6202 Bad Liebenstein; **Stefan Ackermann** 725 Wurzen; **Gottfried Meisel** 965 Klingenthal 1; **Eberhard Paschkowski** 48 Naumburg; **Thomas Winkler** 9933 Bad Elster; Christoph Clauß 9163 Gornsdorf; Andreas Heß 794 Jessen; Roland Möller 58 Gotha; Lutz-Peter Klotz 9414 Sosa; Winfried Helwig 3018 Magdeburg; Rolf Sommer 993 Adorf; Klaus Schönefeld 53 Weimar; Angele Babenhauserheide 3501 Uchtspringe; Ottmar Langer 73 Döbeln; Knut Taeger 45 Dessau; Ulrike Weise 9274 Wüstenbrand; Hans-Peter Schneider 432 Aschersleben; Wolfgang Häfner 6088 Steinbach-Hallenberg; Johannes Gerth 5211 Singen; Bernd Ahrens 301 Magdeburg; Dieter Buchmann 1407 Lehnitz.

In freien Stunden

Vladimir Renčin, Praha



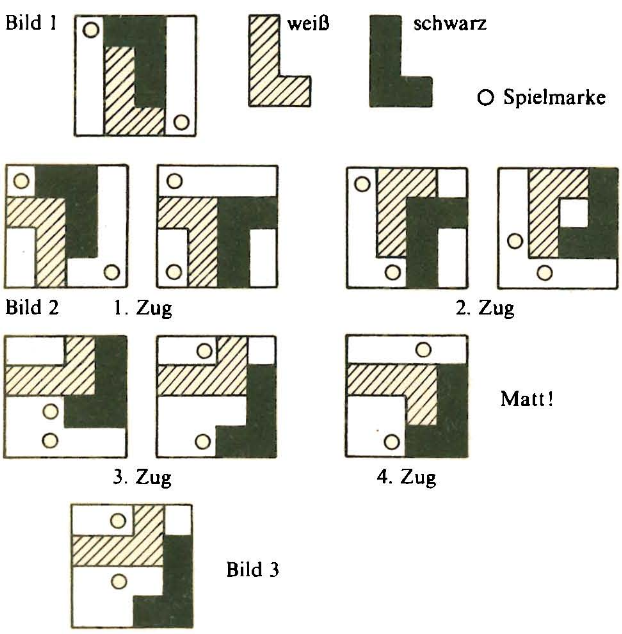
Zum Jahreswechsel: ganz international

Das L-Spiel

„Ich bin Mathematiklehrer, beziehe die *alpha* schon das zweite Jahr und habe so manche interessante Anregung aus Ihrer Zeitschrift entnommen. Aus unserer *Nauka i shisn* (7/70) sende ich Ihnen das *L-Spiel.*"

Oberlehrer L. Dimenstein, Leningrad

Das Spielfeld ist ein Quadrat mit 4 mal 4 Karos. Es spielen zwei Partner (weiß und schwarz), von denen jeder eine L-Figur besitzt. Außerdem gibt es zwei gemeinsame Spielmarken. Die Ausgangsstellung ist auf *Bild 1* gezeigt. Die Partner ziehen abwechselnd. Jeder Zug besteht aus einem *unbedingten* Versetzen des L's im Bereich der freien Spielfelder und einem möglichen (aber nicht unbedingten) Versetzen einer Spielmarke (*nach* dem L-Zug). Verloren hat der, der keinen Zug für sein L hat.
Als Beispiel sei eine Partie angeführt (*Bild 2*). Würde schwarz im 3. Zug die Spielmarke anders gesetzt haben, etwa wie in *Bild 3*, so würde das Spiel weitergehen.



Fällt das Studieren Dir mal schwer,
dann nimm Dir *alpha*-heiter her!

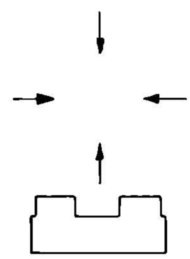
Oberlehrer H. Pätzold, Waren Müritz

Kleine Knobelei

Setze natürliche Zahlen ($0 < n < 10$) in die leeren Felder so ein, daß wahre Aussagen entstehen!

Aus: mame – mamu – ka, Sofia (6/68)

4	×		−		=1
×		×		+	
	×		−		=1
−		+		−	
	×		−		=2
=6		=7		=2	



Von oben wie?

▲

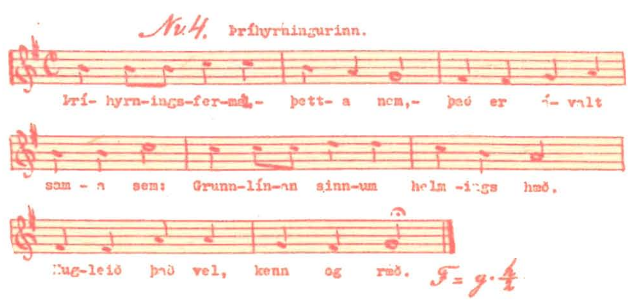
so fragt der Generalsekretär der Mathematischen Gesellschaft der SR Rumänien, Prof. *C. Ottescu* (Bukarest) und grüßt damit alle *alpha*-Leser.

Gereimte Mathematik

Unser Leser *G. O. Gestsson,* Mathematiklehrer in Reykjavík (Island), sandte uns ein Formelheft. Damit sich die Schüler Formeln besser merken, werden sie in Gedicht- oder Liedform dargeboten:

Tvíliða stærð öðru veldi í,
ávallt reiknast sama sem:
Tvíveldi tveggja liðanna því,
og tvöfalt margfeldi þeirra. — Nem.

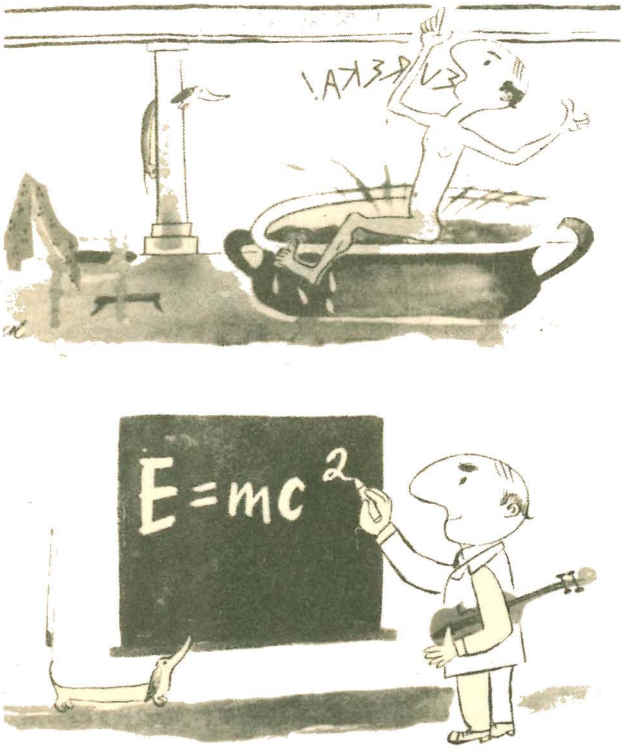
$$(A+B)^2 = A^2+2\,AB+B^2.$$



Rätsel um Otek

Auf unseren Bildern sehen wir *Otek*, eine bekannte polnische Figur, spitzbübisch, liebenswürdig — ironisch mit seinem Dackel *Taky*. *Otek* hat sich verwandelt und fragt: Wer bin ich?

Aus: Rätsel um Otek, Eryk Lipinski, Warschau (erschienen im Eulenspiegelverlag, Berlin)



Schwieriges Problem

In dem Schema

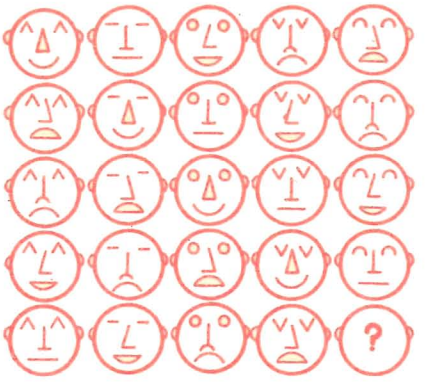
$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ +\,E\,D\,C\,B\,A \\ \hline F\,F\,F\,F\,F \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition (im dekadischem System) zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

Szepan Jeleński, Warschau

Ein wenig Logik

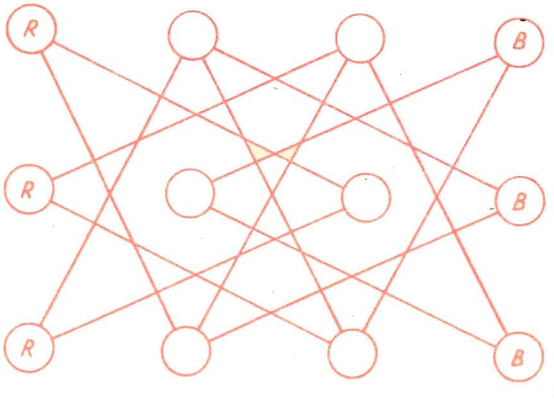
Die in der Abbildung gezeigten Figuren sind in einer bestimmten logischen Reihenfolge geordnet. Man finde den logischen Zusammenhang. Aus ihm ergibt sich die fehlende Figur. *Aus: Füles 28/70, Budapest*



Coloured Counter Puzzle

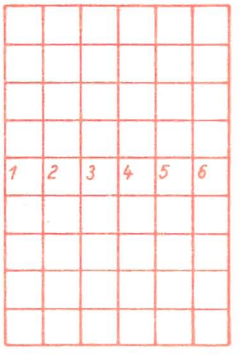
This is a puzzle for one person. — You need: 3 red and 3 blue counters. — Put three red counters on the positions marked R, and three blue counters on the positions marked B. —
Objekt: to change the positions of the red and the blue counters. — *Rules:* any counter can move along a straight line to an unoccupied position. Counters can move in any order, and backward moves are allowed.

Aus einem englischen Mathematiklehrbuch



Kreuzworträtsel

In die Felder der untenstehenden Figur sind, von den numerierten Feldern beginnend, nach oben und unten fünfbuchstabige Wörter der folgenden Bedeutung einzutragen. Die Buchstaben in den (numerierten) Mittelfeldern ergeben einen mathematischen Begriff.



Nach oben:
1. gekrümmte Linie
2. Oberbegriff zu Gerade und Kreis
3. unbewiesener Grundsatz
4. Teil einer Sekante
5. Zahlwort
6. Stellenwert;

nach unten:
1. geometrischer Körper
2. Hohlmaß
3. Name der Schülerzeitschrift
4. eine Winkelfunktion
5. Einteilung, z. B. auf dem Rechenstab
6. berühmter Schweizer Mathematiker.

OStR K.-H. Lehmann, V. L. d. V., Berlin

Lösungen

W 7 ■ 546

Jahr	Produktion im polnischen Maschinenbau, in Prozenten und bezogen auf das Jahr	
	1968	1969
1968	100 %	
1969	114 %	100 %
1970	x %	114 %

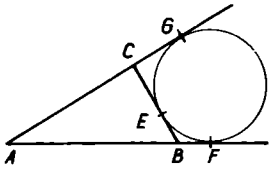
Aus der Tabelle läßt sich die Proportion $x : 114 = 114 : 100$ ablesen; daraus folgt

$$x = \frac{114^2}{100} = 129{,}96 \approx 130.$$

Im Maschinenbau der Volksrepublik Polen ist demnach für das Jahr 1970 eine Steigerung der Produktion um rund 30 % gegenüber der des Jahres 1968 geplant.

W 7 ■ 547 Auf Grund des Satzes „Für die von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten sind die Tangentenabschnitte zwischen Tangentenschnittpunkt und den Berührungspunkten gleich lang" gilt $\overline{AF} = \overline{AG}$, $\overline{BF} = \overline{BE}$, $\overline{CE} = \overline{CG}$. Demzufolge gilt $u = \overline{AF} + \overline{AG} = 2 \cdot \overline{AF}$. Daraus folgt

$$\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AF} = \frac{1}{2} u.$$



8 ▲ 548 a) Die zu den folgenden Zeiten in Gaschwitz abfahrenden Züge treffen nach jeweils 53 min in Markkleeberg-West ein und begegnen daher unterwegs dem Fahrgast, der um 14.50 Uhr in Markkleeberg-West abgefahren ist.

15.34, 15.14, 14.45, 14.34, 14.14 Uhr

(jedoch nicht mehr der um 13.54 Uhr abfahrende Zug, da dieser bereits um 14.47 Uhr in Markkleeberg-West eintrifft.)

Dem Fahrgast begegnen also genau 5 Züge des Schnellverkehrs.

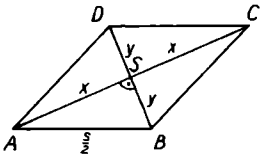
b) Es seien x die Anzahl der Minuten, die von der Abfahrt des Fahrgastes (um 14.50 Uhr in Markkleeberg-West) bis zur Begegnung mit dem ersten Gegenzug vergangen ist, und v die Maßzahl der durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit (in km/min) der Züge.

Dann hat der Fahrgast bis zur Begegnung mit dem ersten Gegenzug die Strecke xv km und der Gegenzug die Strecke $(36+x)v$ km zurückgelegt, da er bereits um 14.14 Uhr, also 36 min früher, abgefahren ist. Da die Gesamtstrecke eine Länge von $53v$ km hat, ergibt sich die Gleichung

$$xv + (36+x)v = 53v \text{ und wegen } v \neq 0$$
$$x + 36 + x = 53,$$
$$2x = 17,\ x = 8{,}5.$$

Der erste Gegenzug begegnet dem Fahrgast also bereits nach 8,5 Minuten, d. h. um etwa 14.59 Uhr.

8 ▲ 549 Es seien $ABCD$ ein Rhombus und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen (vgl. die Abbildung).



Bezeichnet man mit x bzw. y die halben Längen der Diagonalen dieses Rhombus, so gilt $\overline{AS} = \overline{SC} = x$ und $\overline{BS} = \overline{SD} = y$.

Da die Diagonalen des Rhombus aufeinander senkrecht stehen, beträgt der Flächeninhalt des Rhombus

$$A = 2 \cdot \frac{2x \cdot y}{2} = 2xy. \qquad (1)$$

Nun ist der Umfang des Rhombus gleich $2s$; jede Seite hat also die Länge $\frac{s}{2}$. Nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir daher aus dem rechtwinkligen Dreieck ABS

$$x^2 + y^2 = \frac{s^2}{4}. \qquad (2)$$

Andererseits gilt, da die Summe der Längen der Diagonalen m beträgt,

$$2x + 2y = m, \text{ also } x + y = \frac{m}{2}.$$

Hieraus erhält man durch Quadrieren

$$x^2 + y^2 + 2xy = \frac{m^2}{4}. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) erhalten wir durch Subtrahieren

$$2xy = \frac{m^2}{4} - \frac{s^2}{4} = \frac{m^2 - s^2}{4}$$

Wegen (1) beträgt also der Flächeninhalt des Rhombus $A = \frac{m^2 - s^2}{4}$.

W 8 ■ 550a) Die Zahl 30 läßt sich nur auf die folgenden Arten in Faktoren $x \cdot y \cdot z$ zerlegen, wenn $x \leqq y \leqq z$ gilt:

$$30 = 1 \cdot 1 \cdot 30 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10$$
$$= 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Wir erhalten daher die folgende Tabelle:

	x	y	z	$x+y+z$
1)	1	1	30	32
2)	1	2	15	18
3)	1	3	10	14
4)	1	5	6	12
5)	2	3	5	10

Nur in den Fällen 1) und 4) ist $x + y + z$ durch 4 teilbar; daher haben nur die Zahlen 1, 1, 30 und 1, 5, 6 die geforderten Eigenschaften.

Nur in dem Fall 4) gilt auch $x < y$ und $x < z$; außerdem ist in diesem Falle x Teiler von y und Teiler von z.

Daher haben nur die Zahlen 1, 5, 6 die in b) geforderten Eigenschaften.

W 8 ■ 551 Es sei 0 der Mittelpunkt des dem Tangentenviereck $ABCD$ eingeschriebenen Kreises (vgl. die Abbildung).

Dann gehen die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ durch den Punkt 0, da die Schenkel dieser Winkel den Inkreis des Vierecks $ABCD$ berühren. Daher gilt $\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC$,

$$\sphericalangle OAB = \frac{\alpha}{2} = 45°,\ \sphericalangle BCO = \frac{\gamma}{2} = 45°,$$

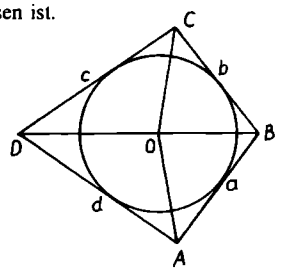
also $\sphericalangle OAB = \sphericalangle BCO$, $\overline{OB} = \overline{OB}$.

Daraus folgt

$\triangle OAB \cong \triangle OBC$ (sww).

Daher ist $\overline{AB} = \overline{BC}$, also $a = b$.

Analog beweist man, daß auch die Dreiecke DAO und CDO kongruent sind, woraus $c = d$ folgt und womit die obige Behauptung bewiesen ist.



Zu bemerken ist noch, daß der Punkt O auf der Diagonalen $\overline{BD}$ liegt, weil die Winkel $\sphericalangle BOA$ und $\sphericalangle COB$ sowie die Winkel $\sphericalangle AOD$ und $\sphericalangle DOC$ einander gleich sind; diese Tatsache haben wir aber bei dem obigen Beweis nicht benutzt. Ferner ist wegen $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ die Gerade BD Symmetrieachse des Drachenvierecks $ABCD$.

Der obige Satz läßt sich noch verallgemeinern: Aus $\alpha = \gamma$ folgt wie oben $a = b$ und $c = d$. Es genügt also, daß die Winkel γ und γ einander gleich sind; diese Winkel brauchen nicht notwendig rechte Winkel zu sein.

9 ▲ 552 Es sei V das Volumen der zur Verfügung stehenden Silbermenge von 2 g; dann gilt $V = \frac{2g}{10{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}} \approx 0{,}1905\ \mathrm{cm^3}$.

Nun sei x die Maßzahl der Länge des hergestellten Drahtes (in cm). Dann erhält man, da der Querschnittsdurchmesser 0, 0002 cm, also der Querschnittsradius 0,0001 cm beträgt, die Gleichung

$$0{,}0001^2 \pi \cdot x = 0{,}1905, \text{ also}$$
$$x = \frac{0{,}1905 \cdot 10^8}{\pi} \approx 0{,}0606 \cdot 10^8,$$
$$x \approx 6060000.$$

Die Länge des Drahtes beträgt also rund

$$6060000\ \mathrm{cm} = 60600\ \mathrm{m} = 60{,}6\ \mathrm{km}.$$

9 ▲ 553 Es gibt z. B. die folgenden Möglichkeiten der Darstellung:

1) $1000000 = \sqrt{(11-1)^{11+1}}$,

2) $1000000 = \left(\frac{22-2}{2}\right)^{2^2+2}$,

3) $1000000=\left(\frac{33-3}{3}\right)^{3+3}$,

4) $1000000=(4+4+\sqrt{4})^{4+\sqrt{4}}$,

5) $1000000=(5+5)^{5+\frac{5}{5}}$,

6) $1000000=\left(\frac{66-6}{6}\right)^{6}$,

7) $1000000=\left(\frac{77-7}{7}\right)^{7-\frac{7}{7}}$,

8) $1000000=(8+\sqrt{\sqrt{8+8}})^{8-\sqrt{8+8}}$,

9) $1000000=\left(9+\frac{9}{9}\right)^{9\cdot\sqrt{9}}$.

W 9 ■ 554a) Es seien n und $n+1$ die gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen; dann gilt

$$(n+1)^2-n^2=(n+1+n)(n+1-n)$$
$$=2n+1=211,\ \text{also}\ 2n=210,\ n=105.$$

Die beiden Zahlen lauten also 105 und 106. Die „Probe" zeigt die Richtigkeit unserer Rechnung:

$$106^2-105^2=11236-11025=211.$$

b) In diesem Falle erhalten wir die Gleichung

$$(n+1)^2-n^2=2n+1=1000001,$$
$$\text{also}\ 2n=1000000,\ n=500000.$$

Die beiden Zahlen lauten also 500000 und 500001.

Probe: $500001^2-500000^2=1000001$.

c) Es seien $n-1$ und $n+1$ die beiden gesuchten ungeraden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen; dann gilt

$$(n+1)^3-(n-1)^3=(n^3+3n^2+3n+1)$$
$$-(n^3-3n^2+3n-1)=6n^2+2,$$

also $6n^2+2=153602,\ 6n^2=153600,$
$n^2=25600,\ n=160.$

Die beiden ungeraden Zahlen lauten also 159 und 161.

Probe: $161^3-159^3=4173281-4019679$
$=153602$.

Wir sehen also, wie wir in den Fällen a) und b) mit Hilfe der Formel

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

und im Falle c) mit Hilfe der Formel

$$(n+1)^3-(n-1)^3=6n^2+2$$

die Ergebnisse sehr schnell ermitteln konnten.

W 9 ■ 555 Es seien $n-1$, n, $n+1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Dann ist die Summe ihrer Kuben

$$s=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$$
$$=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1$$
$$=3n^3+6n=3n(n^2+2).$$

Nun sind genau drei Fälle möglich:

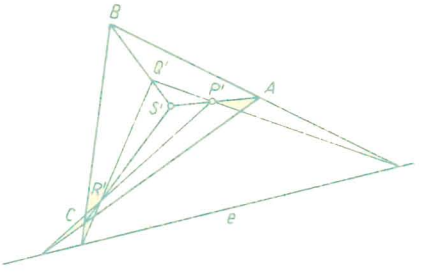
1. n ist durch 3 teilbar; dann ist s durch 9 teilbar

2. $n=3k+1$, wobei k eine natürliche Zahl ist; dann ist $n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1)$ durch 3 teilbar, also s wieder durch 9 teilbar.

3. $n=3k+2$, wobei k eine natürliche Zahl ist; dann ist $n^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+4k+2)$ durch 3 teilbar, also s wieder durch 9 teilbar.

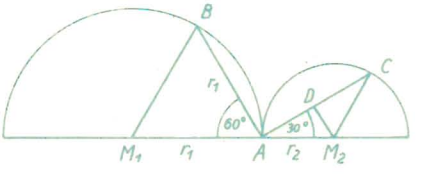
In jedem Falle ist also die Summe s durch 9 teilbar, w. z. b. w. Wir bemerken noch, daß nicht nur die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, sondern auch die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender ganzen Zahlen stets durch 9 teilbar ist; denn der obige Beweis gilt auch, wenn n eine beliebige ganze Zahl ist.

10/12 ▲ 556 Man verlängert $\overline{BA}$ über A hinaus bis zum Schnitt mit e. Dieser Punkt gehört der Schnittgeraden von ε mit der Ebene $[ABS]$ an. Da auch P ein Punkt dieser Schnittgeraden ist, ergibt die Verbindung von P' mit dem Schnittpunkt auf e den Grundriß der Schnittgeraden von ε mit der Ebene $[ABS]$. Diese Gerade schneidet $\overline{BS'}$ in Q', dem Grundriß von Q. In gleicher Weise erhält man R' als Grundriß von R.



10/12 ▲ 557 Es seien M_1 der Mittelpunkt und r_1 der Radius des größeren Halbkreises, M_2 der Mittelpunkt und r_2 der Radius des kleineren Halbkreises.

Ferner seien $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ die beiden im Punkt A aufeinander senkrecht stehenden Sehnen (vgl. die Abbildung).



Dann ist nach Voraussetzung $\sphericalangle M_1AB=60°$, also auch $\sphericalangle BM_1A=60°$. Ferner ist $\overline{AB}=r_1$, da das Dreieck M_1AB gleichseitig ist. Wegen $\sphericalangle BAC=90°$ gilt $\sphericalangle CAM_2=30°$.

Ist D die Mitte der Sehne $\overline{AC}$, so gilt

$$\cos 30°=\frac{\overline{AD}}{r_2},\ \text{also}$$

$$\overline{AC}=2\overline{AD}=2r_2\cdot\cos 30°=2r_2\frac{1}{2}\sqrt{3}=r_2\sqrt{3}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{r_2\sqrt{3}}{r_1}.$$

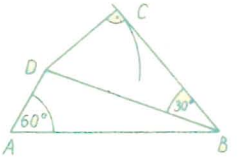
Nach Voraussetzung gilt nun $\frac{r_2^2\pi}{r_1^2\pi}=\frac{1}{3}$, also $\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Daher gilt

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{r_2}{r_1}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1,\ \text{d. h.}\ \overline{AC}=\overline{AB}.$$

Die beiden Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind also gleichlang.

Es handelt sich hier um eine optische Täuschung; die Sehne $\overline{AB}$ scheint länger als die Sehne $\overline{AC}$ zu sein, weil der Kreisbogen über $\overline{AB}$ eine geringere Krümmung als der über $\overline{AC}$ hat.

W 10/12 ■ 558a) Auf den Schenkeln eines Winkels von 60° mit dem Scheitelpunkt A trägt man die Strecke $\overline{AD}=3$ cm und $\overline{AB}=8$ cm ab. Dann trägt man die Strecke $\overline{BD}$ im Punkt B den Winkel $\sphericalangle DBC=30°$ an. Nun zeichnet man einen Kreis mit dem Radius 3,5 cm um den Punkt D, der den freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle$DBC im Punkt C berührt. A, B, C, D sind die Eckpunkte des gesuchten Vierecks $ABCD$ (vgl. die Abbildung).



b) Wir berechnen zunächst die Maßzahl f der Länge der Diagonale $\overline{BD}$ (in cm) nach dem Kosinussatz (in dem Dreieck ABD):

$$f^2=3^2+8^2-2\cdot3\cdot8\cos 60°=9+64-2\cdot3\cdot8\frac{1}{2}$$
$$=9+64-24=49,\ \text{also}\ f=7,\ \text{d. h.}$$
$$\overline{BD}=7\ \text{cm}.$$

Nun berechnen wir die Größe γ des $\sphericalangle BCD$ nach dem Sinussatz (in dem Dreieck BCD):

$$\frac{\sin\gamma}{\sin 30°}=\frac{7}{3{,}5},\ \text{also}\ \sin\gamma=2\sin 30°$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}=1,\ \text{d. h.}\ \gamma=90°.$$

Nun können wir die Länge der Seite $\overline{BC}$ nach dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$\overline{BC}=\sqrt{7^2-3{,}5^2}\ \text{cm}=7\sqrt{1-\frac{1}{4}}\ \text{cm}$$
$$=\frac{7}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}\approx 6{,}06\ \text{cm}.$$

c) Zunächst ist das Teildreieck ABD durch die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ und dem eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle DAB$ (bis auf Kongruenz) eindeutig bestimmt. Aber auch das Teildreieck BCD ist durch die Seiten $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ sowie durch den Winkel $\sphericalangle DBC=30°$ eindeutig bestimmt, da, wie oben gezeigt wurde, der Winkel $\sphericalangle BCD$ ein rechter Winkel ist, und ein rechtwinkliges Dreieck durch die Länge der Hypotenuse und einen spitzen Winkel bereits eindeutig bestimmt ist. Daher ist auch das gesuchte Viereck $ABCD$ durch die vorgegebenen Stücke eindeutig bestimmt, w. z. b. w.

Wir bemerken noch, daß in dem vorliegenden Falle das Viereck $ABCD$ deswegen eindeutig bestimmt ist, weil der Winkel $\sphericalangle BCD$ ein rechter Winkel ist und daher der Kreis mit dem Radius 3,5 cm um den Punkt D und der freie Schenkel des Winkels $\sphericalangle DBC$ nur einen Punkt gemeinsam haben können (vgl. die Konstruktion unter a).

W 10/12 ■ 559 Setzt man $(46)_m=4m+6$, $(3)_m=3$ und $(162)_m=1m^2+6m+2$, so erhält man die Gleichung

$$(4m+6)\,3=m^2+6m+2,$$
$$12m+18=m^2+6m+2,$$
$$m^2-6m-16=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$m_1 = 3 + \sqrt{9+16} = 3+5 = 8 \text{ und}$$
$$m_2 = 3 - 5 = -2.$$

Da die gesuchte Basis m eine ganze positive Zahl sein muß, erfüllt nur *die Lösung* $m=8$ die Bedingungen der Aufgabe.

Wir überzeugen uns durch die Probe, daß die gesuchte Basis tatsächlich $m=8$ ist:

$(46)_m = 4\cdot 8+6 = 38$, $(3)_m = 3$,

$(162)_m = 64+48+2 = 114$; $38\cdot 3 = 114$.

5 ▲ 561 Aus $56-(c\cdot d)=50$ folgt $c\cdot d=6$. Für dieses Produkt sind genau vier Fälle möglich, und zwar $1\cdot 6 = 2\cdot 3 = 3\cdot 2 = 6\cdot 1 = 6$. Aus der abgebildeten Tabelle wird der weitere Lösungsweg ersichtlich.

c	d	$a=24:c$
1	6	24
2	3	12
3	2	8
6	1	4

$b=48:a$	$a+b+c$	$(a+b+c):d$
2	27	nicht lösbar
4	18	6
6	17	nicht lösbar

entfällt, da $a<c$

5 ▲ 562

Aus $fg+he=aai$ folgt $a=1$;

aus $de+11i=cie$ folgt $c=2$;

aus $11b2:12=de$ und $e\neq 1$ folgt $e=6$;

aus $d6+11i=2i6$ folgt $i=0$;

aus $d6+110=206$ folgt $d=9$;

aus $11b2:12=96$ folgt $b=5$;

aus $12\cdot h6=912$ folgt $h=7$;

aus $fg+76=110$ folgt $g=4$ und $f=3$;

aus $111j-912=206$ folgt $j=8$.

Wir erhalten also

$$\begin{array}{ccccc} 1152 & : & 12 & = & 96 \\ + & & \cdot & & + \\ 34 & + & 76 & = & 110 \\ \hline 1118 & - & 912 & = & 206 \end{array}$$

und stellen fest, daß alle waagerecht und senkrecht angeordneten Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

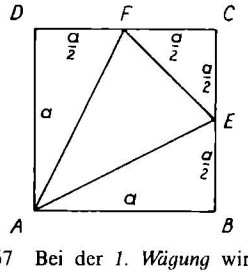
6 ▲ 566 Entsprechend den Bedingungen der Aufgabe gilt $\overline{AB}=\overline{AD}=a$,

$\overline{BE}=\overline{DF}=\frac{a}{2}$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ADF = 90°$;

daraus folgt $\triangle ABE \cong \triangle AFD$.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks AEF gilt deshalb

$$A = a^2 - a\cdot\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$= a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2.$$



6 ▲ 567 Bei der *1. Wägung* wird auf jede Waagschale eine Kugel gelegt:

1. Fall: Bei Gleichgewicht haben sowohl die beiden auf der Waage liegenden Kugeln wie die beiden nicht aufgelegten Kugeln jeweils gleiche Masse. Durch die anschließende 2. Wägung muß nur festgestellt werden, welche der Kugelsorten die schwerere ist. Dies geschieht durch Auflegen einer schon benutzten Kugel auf die eine Waagschale und einer noch nicht aufgelegten Kugel auf die andere Waagschale.

2. Fall: Falls bei der 1. Wägung kein Gleichgewicht herrscht, wird durch den Ausschlag der Waage die eine der beiden aufgelegten Kugeln als eine schwerere und die andere als eine leichtere Kugel erkannt. Bei der anschließenden 2. Wägung wird die als schwerere erkannte Kugel mit einer noch nicht aufgelegten Kugel verglichen. Je nachdem, ob Gleichgewicht herrscht oder nicht, wird die erstmals aufgelegte Kugel entweder als schwerere oder als leichtere erkannt. Gleichzeitig ergibt sich damit, daß die auch bei der zweiten Wägung noch nicht aufgelegte Kugel entweder eine leichtere oder schwerere ist.

7 ▲ 571 Die zu ermittelnden rationalen Zahlen x müssen die Gleichung $x\cdot|x| = x+|x|$ erfüllen.

1. Es sei $x<0$; wegen $|x|=-x$ gilt dann $x\cdot|x|<0$ und $x+|x|=0$, das heißt, es gibt keine Zahl $x<0$, die die Gleichung erfüllt.

2. Es sei $x=0$; wegen $|x|=0$ gilt dann $x\cdot|x|=0$ und $x+|x|=0$; also ist $x=0$ eine Lösung der Gleichung.

3. Es sei $x>0$; wegen $|x|=x$ gilt dann $x^2=2x$. Da $x>0$ ist, dürfen wir die Gleichung durch x dividieren und erhalten $x=2$ als Lösung der Gleichung.

Es gibt zwei rationale Zahlen, nämlich $x_1=0$ und $x_2=2$, die den gestellten Bedingungen genügen.

7 ▲ 572 Wenn die Summe zweier dreistelliger Zahlen eine vierstellige Zahl ergibt, so beginnt diese vierstellige Zahl stets mit der Ziffer 1, also $P=1$.

Wenn $A=0$, so $R=0$; das widerspricht den gestellten Bedingungen.

Wenn $A=2$, so $R=4$ und $M=1$; da $P=1$, entfällt $M=1$.

Wenn $A=3$, so $R=6$, $M=2$; $PA=13$ kann nicht erfüllt werden.

Wenn $A=4$, so $R=8$, $M=3$, $O=7$.

Wenn $A=5$, so $R=0$, $M=3$, $PA=15$ kann nicht erfüllt werden.

Wenn $A=6$, so $R=2$, $M=4$, $O=8$.

Wenn $A=7$, so $R=4$, $M=5$; $PA=17$ kann nicht erfüllt werden.

Wenn $A=8$, so $R=6$, $M=6$; da $R=6$ entfällt $M=6$.

Wenn $A=9$, so $R=8$, $M=7$, $PA=19$ kann nicht erfüllt werden.

Es existieren genau zwei Lösungen:

$$\begin{array}{cc} 734 & 846 \\ +\ 714 & +\ 816 \\ \hline 1448 & 1662 \end{array}$$

8 ▲ 576 Wir beweisen diese Behauptung durch eine Fallunterscheidung. Ist nämlich a eine natürliche Zahl, so läßt sich a in der Form $3n$ oder $3n+1$ oder $3n+2$ darstellen, wobei n eine natürliche Zahl ist; denn eine natürliche Zahl ist entweder durch 3 teilbar oder läßt bei der Division durch 3 den Rest 1 oder den Rest 2. Wir müssen daher die folgenden drei Fälle untersuchen:

1. Fall: $a=3n$.

Dann ist der Nachfolger des Quadrats der Zahl a gleich

$a^2+1=(3n)^2+1=9n^2+1$, also nicht durch 3 teilbar, da der Rest 1 entsteht.

2. Fall: $a=3n+1$.

Dann ist der Nachfolger des Quadrats der Zahl a gleich

$$a^2+1=(3n+1)^2+1=9n^2+6n+1+1$$
$$=3n(3n+2)+2,$$ also nicht durch 3 teilbar, da der Rest 2 entsteht.

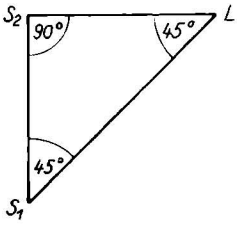
3. Fall: $a=3n+2$.

Dann ist der Nachfolger des Quadrats der Zahl a gleich

$$a^2+1=(3n+2)^2+1=9n^2+12n$$
$$+4+1=3(3n^2+4n+1)+2,$$ also nicht durch 3 teilbar, da der Rest 2 entsteht.

In allen drei Fällen ist also der Nachfolger der Quadratzahl a^2 nicht durch 3 teilbar, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

8 ▲ 577 Es seien S_1 der Standort des Schiffes bei der ersten Beobachtung, S_2 der Standort des Schiffes bei der zweiten Beobachtung, L der Standort des Leuchtfeuers (vgl. die Abb.).



Dann gilt auf Grund der Bedingungen der Aufgabe

$\sphericalangle S_2S_1L = 45$, $\sphericalangle LS_2S_1 = 90°$, $\overline{S_1S_2} = 6$ sm.

Daraus folgt $\sphericalangle S_1LS_2 = 45°$, d. h., das rechtwinklige Dreieck LS_2S_1 ist gleichschenklig mit $\overline{LS_2} = \overline{S_1S_2} = 6$ sm.

Das Schiff ist also zur Zeit der zweiten Beobachtung von dem Leuchtfeuer 6 sm entfernt.

9 ▲ 581 Angenommen, (x, y, z) sei eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Dann gilt

$$xy+xz = 810, \quad (4)$$
$$xy+yz = 680, \quad (5)$$
$$xz+yz = 572. \quad (6)$$

Addieren wir jetzt die Terme auf den linken bzw. rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) und subtrahieren davon die Terme auf der linken bzw. rechten Seite von (6), so erhalten wir eine Gleichung, in der die Variablen nur noch in der Form xy auf-

treten; denn $xz-xz=0$ und $yz-yz=0$. Wir erhalten also

$$2xy=810+680-572=918,$$
$$xy=459. \quad (7)$$

Ferner erhalten wir, wenn wir die Terme auf den beiden Seiten der Gleichung (4) und (6) addieren und davon die Terme auf den beiden Seiten der Gleichung (5) subtrahieren.

$$2xz=810+572-680=702.$$
$$xz=351. \quad (8)$$

Endlich erhalten wir durch Addition von (5) und (6) und Subtraktion von (4)

$$2yz=680+572-810=442,$$
$$yz=221. \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (7), (8) und (9) können wir nun x, y und z berechnen, wenn wir beachten, daß $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ gilt, denn sonst wären die Gleichungen (4), (5) und (6) nicht erfüllt. Wir multiplizieren die Terme auf beiden Seiten von (7) und (8), dividieren dann durch die Terme auf beiden Seiten von (9) und erhalten

$$\frac{xy\,xz}{yz}=\frac{459\cdot 351}{221}, \text{ also}$$
$$x^2=\frac{9\cdot 51\cdot 9\cdot 39}{13\cdot 17}=9\cdot 3\cdot 9\cdot 3=27^2.$$

Daraus folgt

$$x_1=27, \quad x_2=-27.$$

Aus der Gleichung (7) erhalten wir nun

$$y=\frac{459}{x}, \text{ also}$$
$$y_1=\frac{459}{27}=17, \quad y_2=\frac{459}{-27}=-17.$$

Aus der Gleichung (8) erhalten wir

$$z=\frac{331}{x}, \text{ also}$$
$$z_1=\frac{331}{27}=13, \quad z_2=\frac{331}{-27}=-13.$$

Wenn also das gegebene Gleichungssystem überhaupt Lösungen hat, so können es nur die Lösungen

$x_1=27$, $y_1=17$, $z_1=13$ und
$x_2=-27$, $y_2=-17$, $z_2=-13$ sein.

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß das tatsächlich Lösungen des Gleichungssystems (1), (2), (3) sind; wir erhalten nämlich durch Einsetzen in diese Gleichungen die wahren Aussagen

$$27(17+13)=810,$$
$$17(27+13)=680,$$
$$13(27+17)=572.$$

Entsprechendes gilt für die Lösung $(-27, -17, -13)$.

10/12 ▲ 585 Angenommen, die reelle Zahl x sei eine Lösung der gegebenen Ungleichung

$$\frac{x^2+2x-15}{x+1}<0. \quad (1)$$

Wegen $x+1\neq 0$ ist diese Ungleichung genau dann erfüllt, wenn auf der linken Seite der Zähler negativ und der Nenner positiv oder wenn der Zähler positiv und der Nenner negativ ist.

Wir untersuchen daher die beiden Fälle

1. $x+1>0$, also $x>-1$;
2. $x+1<0$, also $x<-1$.

1. Fall: $x>-1$.

In diesem Fall ist die gegebene Ungleichung genau dann erfüllt, wenn

$$x^2+2x-15<0, \text{ also} \quad (2)$$
$$x^2+2x+1-16<0,$$
$$(x+1)^2<16,$$
$$|x+1|<4, \text{ also} \quad (3)$$
$$-4<x+1<4, \text{ d. h., } -5<x<3 \text{ gilt.} \quad (4)$$

Nun ist im Falle $1\,x>-1$; die gegebene Ungleichung ist daher in diesem Fall genau dann erfüllt, wenn $-1<x<3$ gilt.

2. Fall: $x<-1$.

In diesem Fall ist die gegebene Ungleichung genau dann erfüllt, wenn

$$x^2+2x-15>0, \text{ also}$$
$$(x+1)^2>16,$$
$$|x+1|>4, \text{ also}$$
$$x+1>4 \text{ oder } x+1<-4,$$
$$\text{d. h., } x>3 \text{ oder } x<-5.$$

Nun ist im Fall 2 $x<-1$; die gegebene Ungleichung ist daher in diesem Fall genau dann erfüllt, wenn $x<-5$ gilt.

Zusammenfassend können wir daher feststellen, daß die gegebene Ungleichung für alle reellen Zahlen x erfüllt ist, für die

$$x<-5 \text{ oder } -1<x<3 \text{ gilt.}$$

Lösung zu der Aufgabe von Prof. Dr. sc. techn. D. Schmidt

▲ 619 x sei die Anzahl der von einem Facharbeiter gefertigten Gegenstände,
y sei die Zahl der Gegenstände, die „sein" Lehrling weniger als er fertigte.

Nach Absprache erhält der Facharbeiter x^2 Pfennige, sein Lehrling bekommt aber $(x-y)^2$ Pfennige, folglich muß gelten:

$$x^2-(x-y)^2=105$$

Daraus ergibt sich:

$$x=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{105}{y}+y\right)$$

Man überlege, daß x und y ganzzahlig und positiv sein müssen. Damit man für x positive ganze Zahlen erhält, muß y Teiler von 105 sein, d. h.

$$y=1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.$$

Mit diesen Werten erhält man aus der Gleichung

$$x=53, 19, 13, 11, 11, 13, 19, 53$$

und für

$$x-y=52, 16, 8, 4, -4, -8, -16, -52.$$

Die letzten 4 Möglichkeiten scheiden aus, weil auch $x-y$ positiv sein muß. Also bleibt

	x		$x-y$	
(A)	53	(37)	52	(d)
(B)	19	(11)	16	(a)
(C)	13	(9)	8	(b)
(D)	11		4	(c)

Aus den Differenzen (37, 11, 9) ergibt sich, wieviel Gegenstände von wem (in Klammern daneben geschrieben) angefertigt wurden.

Für die Betreuung der Lehrlinge ergeben sich damit die Zuordnungen

$A\leftrightarrow d$, $B\leftrightarrow a$, $C\leftrightarrow b$, $D\leftrightarrow c$.

5 ▲ 590

Klasse	Betrag in M
5	41,50
6	44,00
7	50,00
8	42,75
9	43,00
10	44,00
	265,25

5 ▲ 591 Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

Fall	$a\cdot b$	a	b	$d=2\cdot b$	$c=a-6$
1)	18	1	18	36	n. l.
2)	18	2	9	18	n. l.
3)	18	3	6	12	n. l.
4)	18	6	3	6	0
5)	18	9	2	4	3
6)	18	18	1	2	12

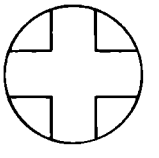
Wir erhalten also nun in den Fällen 4), 5) und 6) wahre Gleichheitsaussagen.

Lösungen zu alpha-heiter

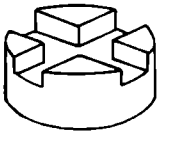
Kleine Knobelei

4	×	1	−	3	= 1
×		×		+	
2	×	3	−	5	= 1
−		+		−	
2	×	4	−	6	= 2
= 6		= 7		= 2	

Von Oben wie?



Grundriß



Schrägbild

Rätsel um Otek

Archimedes (287? bis 212 v. u. Z.)
Einstein (1897 bis 1955)

Schwieriges Problem

Die Zahlen 30241, 34201, 41230 und 43210 auch 54321, 52341 usw.
erfüllen die gestellten Bedingungen

Ein wenig Logik

Kreuzworträtsel

S	E	M	E	S	R
I	I	O	N	H	E
E	N	I	H	C	N
R	I	X	E	E	I
K	**L**	**A**	**S**	**S**	**E**
E	I	L	I	K	U
G	T	P	N	A	L
E	E	H	U	L	E
L	R	A	S	E	R

1.

660	653	658
655	657	659
656	661	654

= **1971**

(Die Summe jeder Zeile, Spalte und Diagonale ergibt 1971.)

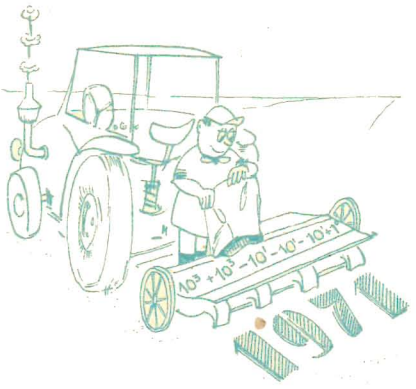
2. **1971** = MCMLXXI
(MC − M) : L − X : X = I (oder)
(MC − M) : L = X : X + I

3.
$$\begin{array}{r} 1+9+7+1 \\ +9+7+1+1 \\ +7+1+1+9 \\ +1+1+9+7 \\ +1+9+7+1 \\ \hline \mathbf{19+71} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 1+9+7+1 \\ +1\cdot 9+7+1 \\ +1+9\cdot 7-1 \\ \hline \mathbf{1\cdot 97+1} \end{array}$$

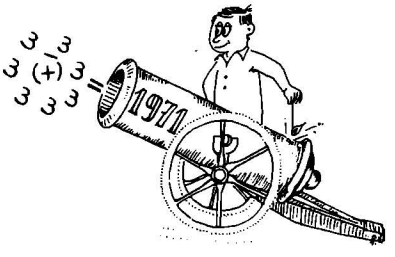
5.
$$\begin{array}{r} 1+9+7+1 \\ +1\cdot 9+7-1 \\ +1+9\cdot 7-1 \\ \hline \mathbf{1\cdot 97-1} \end{array}$$

6. **1971** 3^7-6^3
$=7^4-8^3+9^2+10^0$
$=3^2+4^2+5^2+5^4+6^4$
$=3^3+6^3+12^3$
$3^3(1^3+2^3+4^3)$



7. **1971** $=2^{11}-2^6-2^3-2^2-2^0$
$=3^7-3^5+3^3$
$=4^5+4^5-4^3-4^2+4^1-4^0$
$=44^2+44-(4+4)-4^0$
$=5^4+5^4+5^4+5^3-5^2-5^1+5^0$
$=10^3+10^3-10^1-10^1-10^1+1^0$

(Gleiche Basiswerte)



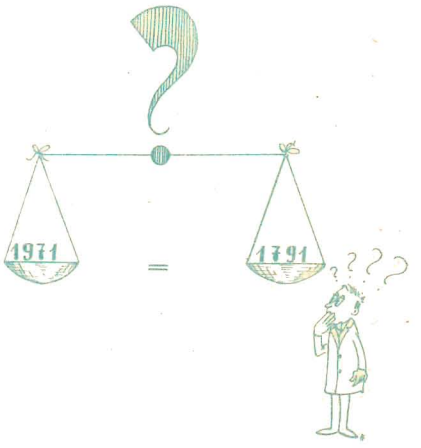
8. **1971** $=(2\cdot 22)^2+2\cdot 22-2\cdot 2^2-2^{2-2}$
$=333\,(3+3)-3^3$
$=44\cdot 44+44:4+4!$
$=44\cdot 44+44-4:4-4\sqrt{4}$

(Gleiche Ziffern)

9. **1971** $=12^3+(4\cdot 5+6-7+8)\cdot 9$
$=987\cdot 6:(5+4)\cdot 3-2-1$

(Ziffern von 1 bis 9, einmal steigend, einmal fallend)

10. $19+71=1+9\cdot 7+1+19+7-1$
$19-71=19-7-1-1+9-71$



11. $1+97+1=1+7+91$

(1971, einmal vorwärts, einmal rückwärts)

12. **1971**

$1^2+9^2+7^2+1^2=19\cdot 7-1$

$19+71=1+9+7+1+1\cdot 9\,(7+1)$

$1+971-19-71=1\cdot 9\cdot 7\cdot 1\cdot\sqrt{197-1}$

$1+9+7+1+1\cdot 9\cdot 7\cdot 1$
$=(1+9)(7+1)-(1-9):(7+1)$

$1^9+71=1!\cdot 9!:7!\cdot 1!$

$1^9+71+1^9\cdot 71=1\cdot 9\cdot 7\cdot 1+(1+9)(7+1)$

$\dfrac{1\cdot 9\cdot 7\cdot 1\cdot(1+9+7+1)}{1\cdot 9\cdot 7\cdot 1+(1+9+7+1)}=\sqrt{197-1}$

Ing. H. Decker

Mit einem interessanten Problem wollen wir das Jahr 1970 abschließen. Es wurde von Dipl.-Math. Victor Scharnitzky, Lehrstuhlleiter an der *Hochschule für Leichtindustrie* in Budapest (Koordinator der XII. IMO) für die *alpha*-Leser gestellt.

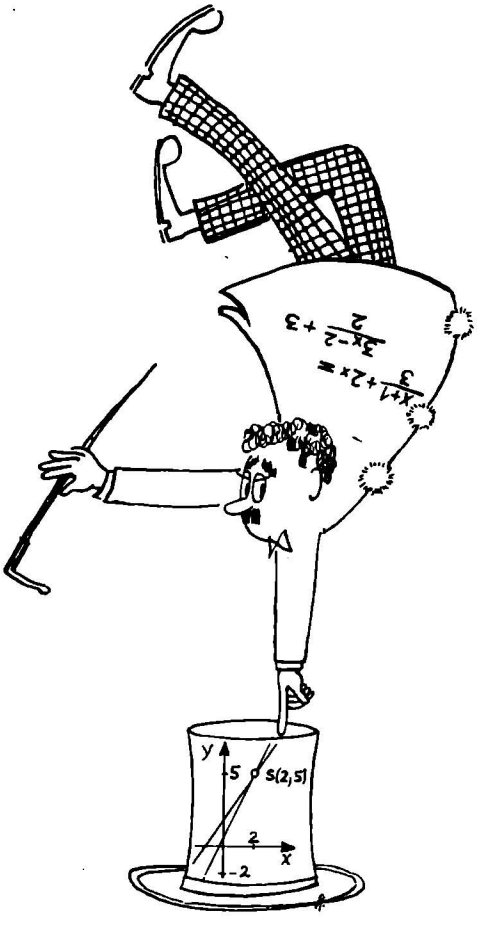
Man beweise, daß die Zahl
$222^n+202^n-192^n-172^n$
für alle geraden positiven ganzen Zahlen n durch **1970** teilbar ist.

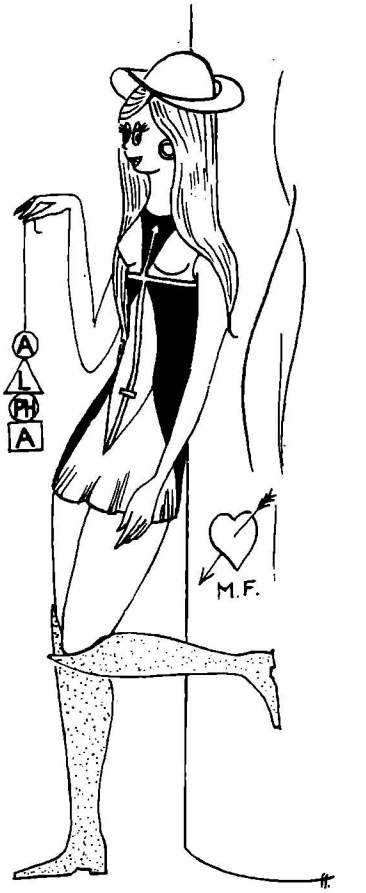
Die Redaktion alpha wünscht allen Lesern ein frohes und gesundes

1971

MATHE-FASCHING

Barbara Mahr und *Lutz Quasdorf*,
Kl. 12, EOS Humboldt, Leipzig,
wünschen eine heitere Faschingszeit!





Übungsaufgaben, Klasse 9/12

9 ▲ 610 Es ist zu beweisen, daß die Zahl $2 \cdot 13^n + 5 \cdot 7^n$ für alle natürlichen Zahlen n bei Division durch 9 den gleichen Rest läßt. Ferner ist dieser Rest zu bestimmen.

Hinweis zur Lösung: Es empfiehlt sich, zunächst die Fälle $n=0$, $n=1$, $n=2$ zu behandeln und dann den Beweis allgemein zu führen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9 ▲ 611 Zwei Kreise k_1 und k_2, von denen k_1 einen kleineren Radius als k_2 hat, mögen einander so von außen in einem Punkt P berühren, daß die beiden gemeinsamen Tangenten, die nicht durch den Punkt P gehen, einen Winkel von 60° bilden. Es ist das Verhältnis $r_1 : r_2$ der Radien dieser Kreise zu ermitteln.

Ekkehard Kührt
EOS „Friedrich Schiller", Zella-Mehlis, Kl. 10

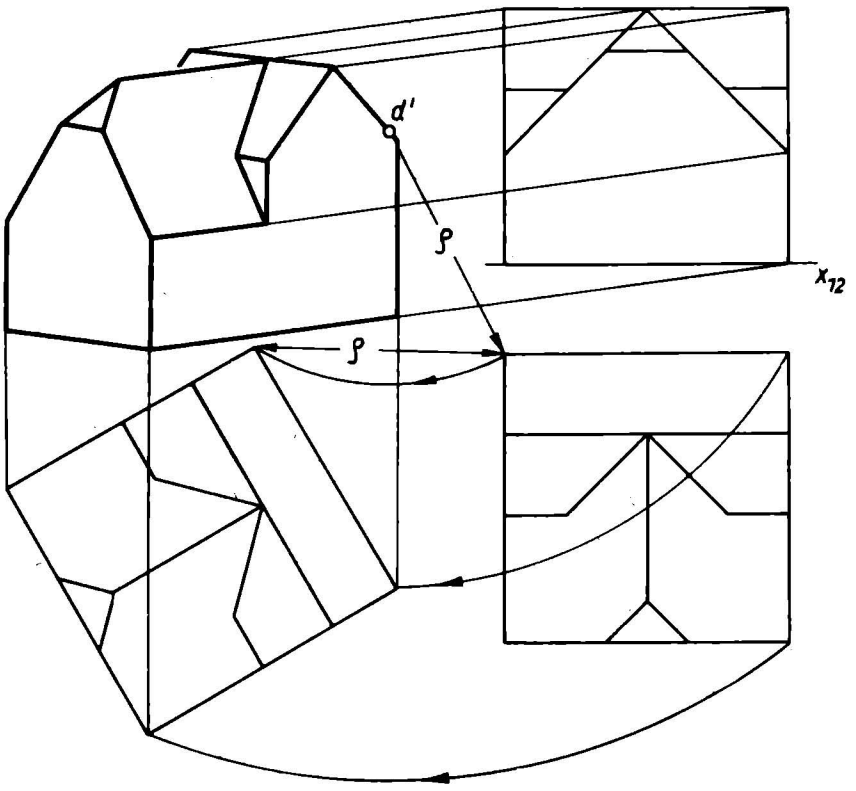
10/12 ▲ 615 Es ist zu beweisen, daß die Zahl lg 5 keine rationale Zahl ist.

Anleitung zur Lösung: Jede positive rationale Zahl läßt sich bekanntlich in der Form $\frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q einander teilerfremde, von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Beim Beweis geht man also davon aus, daß sich die Zahl lg 5 in dieser Form darstellen läßt, und zeigt, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt (vgl. den Beweis für die Irrationalität der Zahl $\sqrt{2}$).

Sektion Mathematik
der Technischen Universität Dresden

Lösung der Aufgabe zur Axonometrie

Ein kleiner Dreh führt zum Ziel (alpha, 5/70, S. 99)



technikus

technikus

Mathematik, Naturwissenschaft und Technik — das sind die Schwerpunkthemen des Magazins

„technikus"

Es erscheint monatlich im Verlag „Junge Welt" und ist für Jugendliche im Alter von 12 bis 16 Jahren bestimmt.

Preis: 0,60 M; Umfang: 48 Seiten

Vielseitig und lehrreich, gibt der „technikus" Anregungen für die Arbeit in der Pionierorganisation und Arbeitsgemeinschaft, unterstützt den Schulunterricht und gibt wertvolle Hinweise für eine sinnvolle Freizeitgestaltung.

„technikus" nimmt Stellung zu wehrpolitischen Fragen, berichtet über Manöver und bringt Beiträge aus der Militärgeschichte.

Mathematische Knobeleien fehlen ebensowenig wie Beiträge aus der Astronomie und Raumfahrt, der Physik, Chemie, Biologie und Elektronik.

Gern gelesen sind auch unsere Seiten „Blick in die Welt" mit Interessantem in Wort und Bild aus Wissenschaft und Technik und die Seiten „technikus" antwortet.

Ein Blick in den „technikus" lohnt sich immer. wer ein einmal hatte, liest ihn ständig.

Also am nächsten Kiosk ein Heft gekauft.

jw

VERLAG JUNGE WELT · 108 Berlin