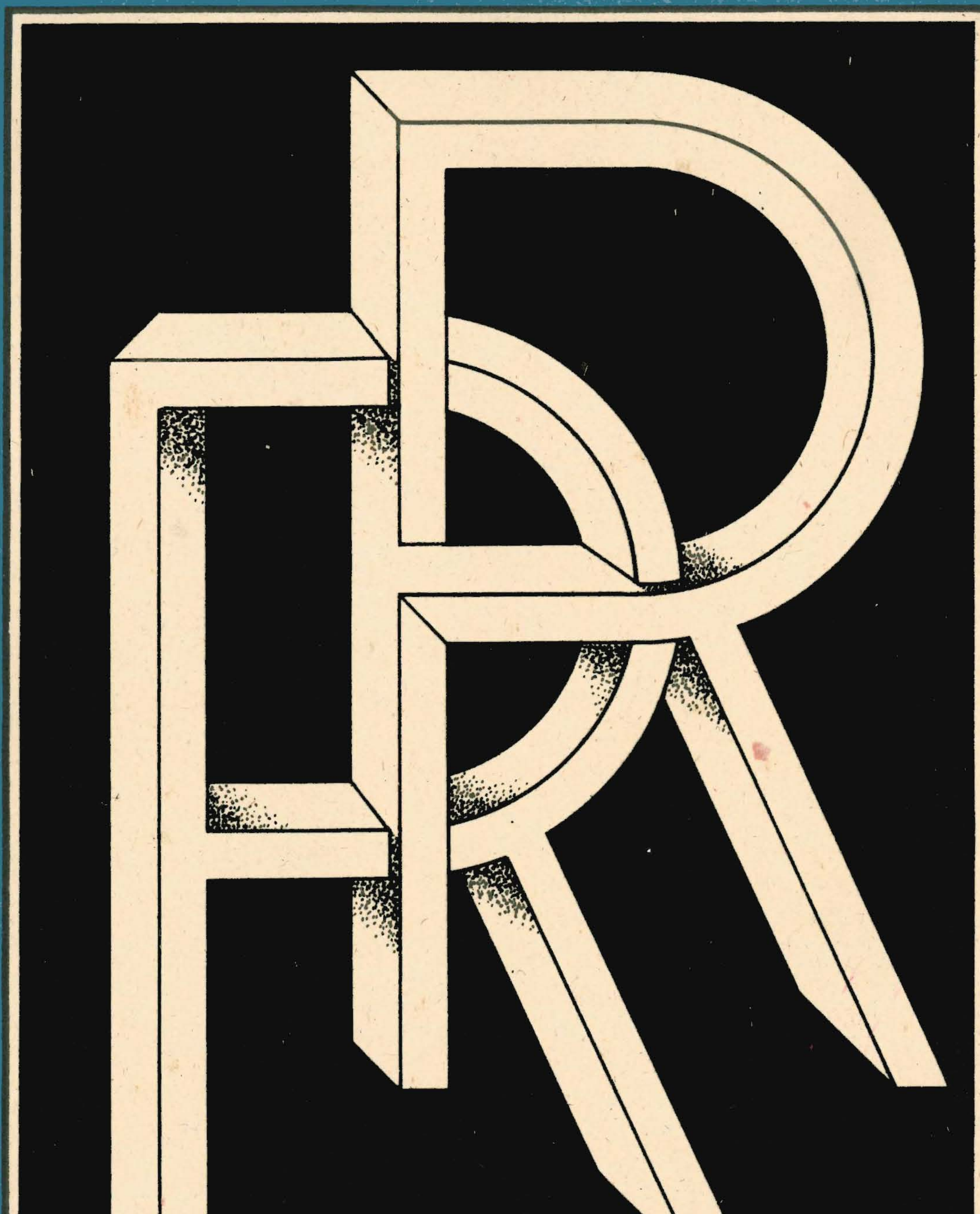
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
22. Jahrgang 1988
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Beyrich mit freundlicher Genehmigung des Urania-Verlages (S. 26, 27); P. Schreiber (S. 31); R. Thiele (S. 32); Th. Glocke (S. 37); Staatl. Math.-Phys. Salon (IV. U.-Seite)
Alphons-Vignette: L. Otto
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von R. Ruprecht, Coswig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 8. Dezember 1987
Auslieferungstermin: 5. April 1988

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

25 Beispiele zum Cavalierischen Prinzip
Spezialklassen der Sektion Mathematik der *Martin-Luther*-Universität Halle

26 Das „Gerechent Büchlein" des Rechenmeisters Adam Ries (1492 bis 1559)
Dr. H. Beyrich, Karl-Marx-Stadt

28 Adam-Ries-Wettbewerb im Bezirk Karl-Marx-Stadt
Dr. H. König, Sektion Mathematik der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt

29 Rund um den SR 1
Kalendergeschichten Teil 2 – Kalenderrechnung
Mathematikfachlehrer StR K. Becker, *Fr.-L.-Jahn*-Oberschule Lübtheen

29 Sprachecke
R. Bergmann, Döbeln/P. Hoffmann/G. Liebau (beide Leipzig)

30 Geometrische Interpretationen der Gleichung $x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha$
Dr. G. Windisch, Sektion Mathematik der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt

31 Eine experimentelle Bestimmung der Zahl π
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

32 Das Katzenjammerspiel
Dr. R. Thiele, *K.-Sudhoff*-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften Leipzig

34 Schachecke
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin

35 *alpha*-Märchen: Prinz Epsilon in Nöten
U. Siebert, Kreisklub Mathematik Halle-Süd

36 Wo finde ich den Regenbogen?
Dr. H.-J. Schmidt, Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR

37 Eine Aufgabe von Prof. Dr. em. Roman Roth, Jena

38 In freien Stunden · *alpha*-heiter
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

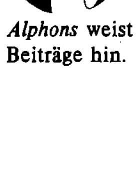
40 XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Aufgaben der Kreisolympiade

42 *alpha*-Wettbewerb 1986/87 · Abzeichen in Gold

44 Lösungen

48 Sowas gibt's doch gar nicht!
Ing. A. Körner, Leipzig

IV. U.-Seite: Eine Rechenmaschine von Blaise Pascal aus der Zeit um 1650
Dr. K. Schillinger, Direktor des Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salons Dresden



Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

Beispiele zum Cavalierischen Prinzip

Das *Cavalierische Prinzip* wird im Mathematikunterricht des achten Schuljahres mitgeteilt und dort einigemal benutzt, um die Volumengleichheit zweier Körper nachzuweisen. Die Beispiele, die das Lehrbuch für die Klasse 8 zur Anwendung des Cavalierischen Prinzips bringt, sind freilich, mit Ausnahme des letzten, recht trivial. Wir haben daher nach interessanteren Beispielen gesucht und unerwartet viele gefunden. Nachfolgend vier davon, für die keine Kenntnisse aus der Abiturstufe gebraucht werden.

Dr. G. Schiemann,
Leiter der Spezialklassen an der Martin-Luther-Universität Halle

Beispiel 1

Die Bilder 1 und 2 zeigen die Achsenschnitte zweier Drehkörper. Die darin vorkommenden Parabeln sind kongruent. Der zu Bild 1 gehörende Körper ist ein *Rotationsparaboloid*, der zu Bild 2 gehörende ein gerader Kreiszylinder, aus dem ein zu dem vorigen kongruentes Rotationsparaboloid herausgefräst ist.
Seien $A_1(y)$ und $A_2(y)$ die Inhalte der Querschnitte durch das Paraboloid bzw. durch den Zylinderrest, jedweils in der gemeinsamen Höhe y mit $0 \leqq y \leqq h$.
Man findet:

$$A_1(y) = \pi x_K^2 \quad \text{und} \quad A_2(y) = \pi(r^2 - x_P^2)$$
$$= \pi r^2\left(1 - \frac{y}{h}\right) \qquad = \pi r^2\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Die Querschnitte sind also in jeder Höhe gleich, beide Körper haben also gleiches Volumen. Da die Summe beider Volumina $\pi r^2 h$ ist, hat jeder Körper das Volumen $\frac{1}{2}\pi r^2 h$. Das ist ein einprägsamer Ausdruck für das Volumen eines Rotationsparaboloids.

Kurt Günther

Beispiel 2

Bild 3 zeigt den Achsenschnitt eines geraden Kreiszylinders, in den von oben ringförmig eine koaxiale *Furche* eingeschnitten ist, deren Achsenschnitt aus zwei gleichschenkligen Dreiecken besteht. Bild 4 zeigt den Achsenschnitt eines Rotationsparaboloids, der mit dem Zylinder gleichen Radius und gleiche Höhe hat.
Seien $A_1(y)$ und $A_2(y)$ die Inhalte der Querschnitte durch den Zylinderrest und das Paraboloid, jeweils in der gemeinsamen Höhe y mit $0 \leqq y \leqq h$.
Man findet $A_1(y) = \pi x_P^2 + \pi(r^2 - x_Q^2)$ als Summe der Inhalte eines Kreises und eines Kreisrings.
Mit $x_P = \frac{r}{2} - \frac{yr}{2h}$ bzw. $x_Q = \frac{r}{2} + \frac{yr}{2h}$ folgt

$$A_1(y) = \pi\left(\left(\frac{r}{2} - \frac{yr}{2h}\right)^2 + r^2 - \left(\frac{r}{2} + \frac{yr}{2h}\right)^2\right)$$
$$A_1(y) = \pi r^2\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Nun gilt $A_2(y) = \pi x_k^2$ für das Rotationsparaboloid.
Mit $x_k^2 = r^2 - \frac{yr^2}{h}$ folgt

$$A_2(y) = \pi r^2\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Die Querschnittsinhalte sind also in jeder Höhe gleich, beide Körper haben folglich gleiches Volumen, nämlich (nach Beispiel 1) $V = \frac{\pi}{2} r^2 h$.

Steffen Bonß/Jens Meusel

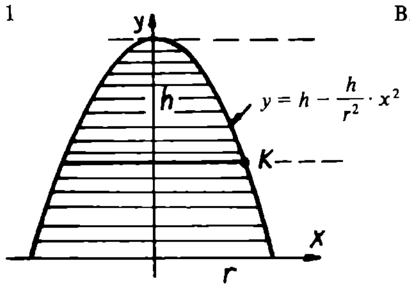
Bild 1


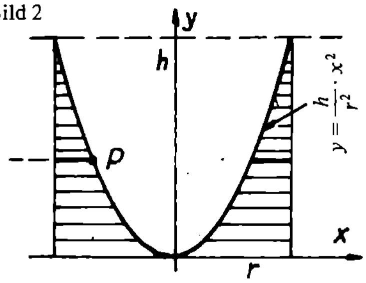
Bild 2


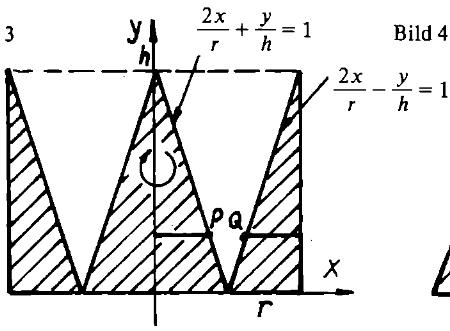
Bild 3


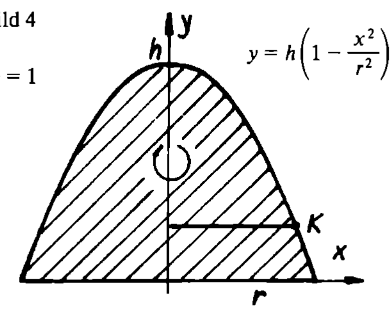
Bild 4


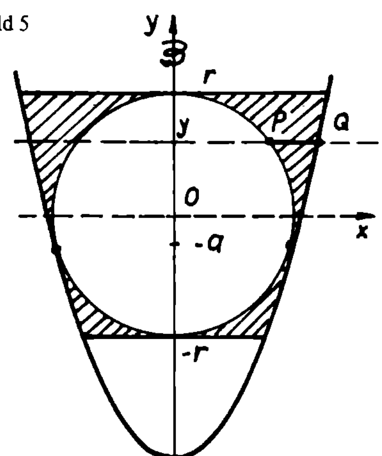
Bild 5


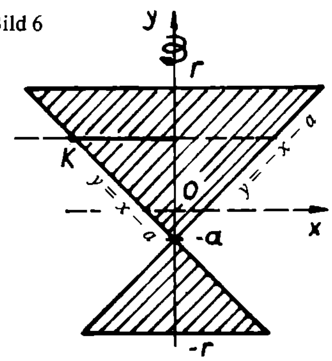
Bild 6


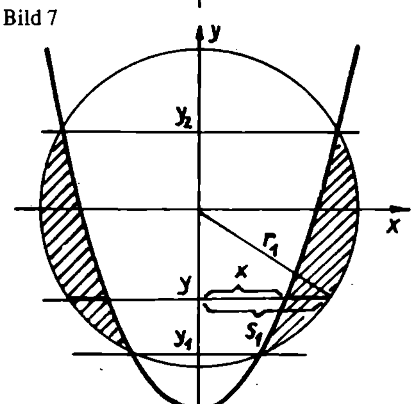
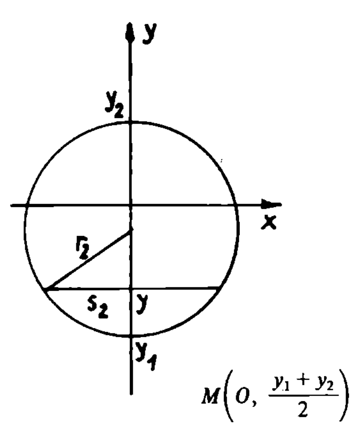
Bild 7


Bild 8


Beispiel 3

Bild 5 zeigt einen Kreis um O mit dem Radius r und eine zur y-Achse symmetrische Parabel, die durch den Kreis von innen berührt wird. Damit muß (das rechnet man leicht nach) die Parabelgleichung die Form $y = \frac{1}{2a}(x^2 - a^2 - r^2)$ haben, worin a eine reelle Zahl mit $0 < a < r$ ist. Der schraffierte Teil der Figur sei der Achsenschnitt eines Drehkörpers (Paraboloidschicht mit kugelförmigem Hohlraum). Bild 6 zeigt den Achsenschnitt eines Paares gerader Kreiskegel.

Seien $A_1(y)$ und $A_2(y)$ die Inhalte der Querschnitte durch den Rest der Paraboloidschicht und das Kegelpaar, jeweils in der gemeinsamen Höhe y mit $-r \leqq y \leqq r$. Man findet

$$\begin{aligned} A_1(y) &= \pi \cdot (x_Q^2 - x_P^2) \quad \text{u.} \quad & A_2(y) &= \pi \cdot x_k^2 \\ &= \pi \cdot (2ay + r^2 + a^2 & &= \pi \cdot (a+y)^2 \\ &\quad -(r^2 - y^2)) & & \\ &= \pi \cdot (a+y)^2 . & & \end{aligned}$$

Die Querschnittsinhalte sind also in jeder Höhe gleich; beide Körper haben folglich gleiches Volumen.

Kathrin Eversmann

Beispiel 4

Die Parabel $x^2 = ay - b$ schneide den Kreis $x^2 + y^2 = r_1^2$ in den Punkten mit den Ordinaten y_1 und y_2 (Bild 7). Bei Rotation um die y-Achse beschreibt die schraffierte Fläche einen parabolischen Kugelring. Das Volumen dieses *parabolischen Kugelringes* wird mit dem einer Kugel verglichen, deren Durchmesser das Intervall (y_1, y_2) auf der y-Achse ist (Bild 8).

Die Ermittlung der Schnittpunkte von Kreis und Parabel führt auf die Gleichung $y^2 + ay - b - r_1^2 = 0$.

Da die Lösungen dieser Gleichung y_1 und y_2 sind, gilt

$y^2 + ay - b - r_1^2 = (y - y_1)(y - y_2)$.

Eine Ebene, die senkrecht zur y-Achse verläuft und diese im Punkt $P(O, y)$ schneidet, schneide beide Körper. Für die Inhalte der Schnittfläche erhält man:

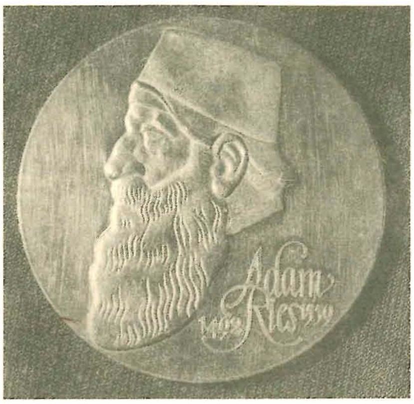
$$A_1(y) = \pi(s_1^2 - x^2)$$
$$A_2(y) = \pi s_2^2$$
$$A_1(y) = \pi(r_1^2 - y^2 - ay + b)$$
$$A_2(y) = \pi \cdot \left[r_2^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y \right)^2 \right]$$
$$A_1(y) = -\pi(y - y_1)(y - y_2)$$
$$A_2(y) = \pi \cdot \left[\left(\frac{y_2 - y_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y \right)^2 \right]$$
$$A_1(y) = \pi(y - y_1)(y_2 - y)$$
$$A_2(y) = \pi(y - y_1)(y_2 - y)$$

Somit gilt $A_1(y) = A_2(y)$ für alle $y \in \langle y_1, y_2 \rangle$.

Damit ist also der parabolische Kugelring volumengleich einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Höhe des Ringes ist.

Uwe Müller

Das „Gerechent Büchlein" des Rechenmeisters Adam Ries (1492 bis 1559)



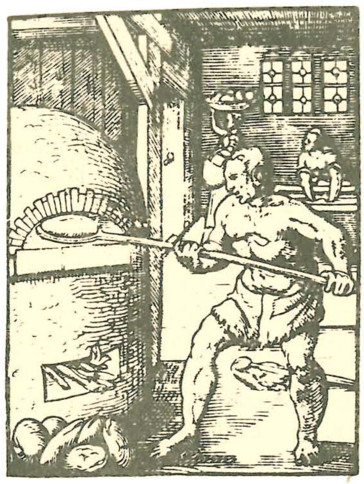
Medaille mit dem Bildnis des Adam Ries zu seinem 425. Todestag (aus Harry Beyrich: Adam Ries, der Rechenmeister in Annaberg, Bildmappe, Verlag H.C. Schmiedicke Leipzig 1983)

Ein Auftrag für den Rechenmeister

Am Beginn des 16. Jahrhunderts hatten Handel und Gewerbe in den Städten Deutschlands einen beachtlichen Umfang erreicht. Frühkapitalistische Wirtschaftsformen waren entstanden. Der steigende Waren- und Geldverkehr erforderte, daß Kaufleute und Marktkrämer rechnen konnten. Die Räte der Städte und manche Bürger aber nahmen die Dienste von Rechenmeistern in Anspruch. Diese führten bei Geschäften die Rechnungen aus, unterrichteten in Rechenschulen und verfaßten Rechenbücher.

Zum alltäglichen Handel gehörte der Verkauf und Kauf von Broten und Semmeln. Die Bäcker boten sie zu feststehendem Preise an und änderten ihr Gewicht und ihre Anzahl, wenn das Getreide teurer oder billiger geworden war. Bei wachsenden Kosten für Korn und Weizen verkleinerte man sie und stellte entsprechend mehr von ihnen her. Der Kunde sollte das offenbar weniger bemerken als die sonst notwendige Verteuerung der Ware. „Item so das Korn 14 grosch. gilt / beckt mann ein pfenning brodt wigt 34 loth / wie schwer soll mann es backen so es auffschlegt (sich der Preis erhöht) / vnd 17 groschen gilt? Facit 28 loth." Solche Aufgaben wie diese von Adam Ries [Adam Ries, Rechenung auff der linihen vnd federn, Auflage Frankfurt am Main 1544, S.62] waren in den Rechenbüchern jener Zeit verbreitet. Die Problemstellung ist durch eine Verhältnisgleichung mit umgekehrt proportionalen Größen bzw. durch einen indirekten Dreisatz zu lösen.

Der Beck.



Zu mir rein/wer hat Hungers not/
Ich hab gut Weiß vnd Rücken Brot/
Auß Korn/Weitzen vnd Kern/bachen/
Gesaltzn recht/mit allen sachen/
Ein recht gewicht/das recht wol schmeck/
Sem̃el/Bretzen/Laub/Spuln vñ Weck/
Dergleich Fladen vnd Eyerkuchn/
Thut man zu Ostern bey mir suchn.

Holzschnitt aus Jost Ammann, Eygentliche Beschreibung der Stände („Ständebuch"), mit Versen von Hans Sachs, Frankfurt am Main 1568

Wenn die Preise für das Getreide kräftiger stiegen und folglich das Brotgewicht stärker abnahm, kam es in den Städten zu Streitigkeiten zwischen den Bürgern und den Bäckern. Deshalb ordnete der Rat von Annaberg im Jahre 1533 eine Backprobe an. In Anwesenheit von Vertretern der Stadtverwaltung und der Bürgerschaft wurden ein Scheffel Korn und ein Scheffel Weizen (siehe Tab. 1) gemahlen und zu Broten und Semmeln verarbeitet. Der Rechenmeister Adam Ries, der zugleich Schreiber des Bergamtes Annaberg und seit kurzem Zehntner des Bergreviers Geyer war und sich durch Tüchtigkeit, Sachkenntnis und Gewissenhaftigkeit schon ausgezeichnet hatte, erhielt den Auftrag, für eine Brotordnung (Brot- und Semmelsatzung, Beckenordnung) zu berechnen, wie schwer sie bei einem bestimmten Getreidepreis sein mußten und wieviel Stück zu backen waren. Man wollte, daß „der arme gemeine man ym Brotkauff nicht vbersetzt (betrogen) würde" [Adam Ries, Ein Gerechent Büchlein, Leipzig 1536, Vorrede]. Der Rat, die Bäcker und ihre Kunden konnten die Zahlen nun von einer Tabelle ablesen. Sie brauchten sie nicht bei jeder Änderung der Getreidepreise selbst auszurechnen. Vom Rat ließ sich die Einhaltung der Vorschrift ohne Mühe kontrollieren. Die Herstellung aller Arten von Kuchen, die Feinbäckerei, stand dagegen nicht unter seiner Aufsicht.

Zur Erfüllung des Auftrages ging Ries von der Festlegung des Rates aus, „nach dem der kauff (Preis) im Korn vnnd Weitz dise zeit gleich / vnd vmb (um) zwenvndvierzick groschn der schöffel gekaufft / das ein halb groschen brott wegen sall (wiegen soll) drei pfunt / ein pfennig brott sechzehenn lott / vnnd ein par semel zwölff lott" (siehe Tab. 2 und 3) [dsgl.]. Es entstanden vier Brottabellen und eine Semmeltabelle für einen Getreidepreis zwischen 20 und 84 Groschen, jeweils um einen Groschen steigend. Die Zahlen ermittelte Ries in zweierlei Weise. Als erstes berechnete er die Gewichte der Brote und Semmeln bis auf Quent und Quententeil genau. Zum anderen wiesen die Ergebnisse nur Pfund und Lot aus, und er ließ die kleinen Reste zugunsten der Bäcker unberücksichtigt, die jetzt mehr Brote bzw. Semmeln zum gleichen Preis verkaufen konnten. Der Gewinn aus den geringen Gewichtsunterschieden nahm mit der Veränderung der Getreidepreise allerdings einen ungleichförmigen Verlauf.

Die Tabellen stellte Ries mit Übersichten zum Getreidemaß, Weinmaß und Gewicht und über die Preise für die Grundeinheiten dieser Größen – den Scheffel, den Eimer und das Pfund – und ihre Vielfachen und Bruchteile zusammen. Das 160 Seiten umfassende Werk erschien 1536 in Leipzig unter dem Titel „Ein Gerechent (ausgerechnetes) Büchlein / auff den Schöffel / Eimer / vnd Pfundtgewicht". Derartige Tafeln für den Handel waren kaum vorhanden (Preistabellen für das Gewicht von Gold und Silber im Bamberger Rechenbuch 1483, Brottaxe des Rülein von Calw in Freiberg um 1514, Preistafel für Wein von Jakob Köbel aus Oppenheim 1515) und in der Form, die die möglichen Veränderungen von Maß, Gewicht, Stückzahl und Preis so ausführlich darbot, wahrscheinlich überhaupt neu.

Volgende Tafell bericht wie vill ein par Semel wegen soll/ vnnd wie vill par Semel der Beck ausz dem schöffel machen söll/so quenten vnnd teill mit gerechent Vnd wie vill er aus einem schöffel macht so ym die quēten vn̄ teil nach gelassen / gibt auch berichtung seines gewins/so die Semeln von einander genumen.

Weitz		Par semel am gewicht				Semel vffn schöf.		Semel so qn̄t vn̄ teil nach gelassen.	
groß		lott	qn̄	teil		par semel		par semel	lot
20		25	0	16		240		241	23
21		24	0	0		252		252	0
22		22	3	14		264		274	20
23		21	3	15		276		288	0
24		21	0	0		288		288	0

D

Semmeltabelle, Schluß, aus Adam Ries, Ein Gerechent Büchlein ..., Leipzig 1536 (aus Fritz Deubner: ...nach Adam Ries, Urania-Verlag Leipzig/Jena 1959)

Ein Gerechent Büchlein/auff den Schöffel/Eimer/ vnd Pfundtgewicht/ zu ehren einem Erbarn/Weisen Rathe auff Sanct Annenbergk.

Durch Adam Riesen.

1533

Zu Leiptzick/ hatt gedruckt diss gerechent Büchlein Melchior Lotter.

Volendet vnd ausgangen am abendt des Newen Jars

1536

Titelseite aus Adam Ries, Ein Gerechent Büchlein ..., Leipzig 1536

Die Berechnungen von Ries dienten anderen Städten als Vorbild für die Brotordnung. Wegen der oft verschiedenen Maße, Gewichte und Münzverhältnisse konnten sie aber nicht ohne weiteres übernommen werden. Deshalb kam der Rechenmeister auf Wunsch des Zwickauer und des Leipziger Rates selbst, nahm am Backvorgang teil und fertigte die Tabellen an.

Heute ist das Gerechent Büchlein ein ganz bedeutsames Zeugnis der Tätigkeit eines Rechenmeisters jener Zeit. Exemplare der Schrift befinden sich unter anderem noch in Bibliotheken in Halle, Zwickau, Hamburg, London und New York.

Rechnungen zur Semmeltabelle

Den Gebrauch der Tabellen verdeutlichte am Ende ein Beispiel mit Worten. Hier werden die Ausführungen unter der Semmeltafel ausgewählt.

Diese Angaben folgen aus der Festlegung des Annaberger Rates zum Brot- und Semmelgewicht (s. o., Vorrede zum Gerechent Büchlein). Bei der Rechnung wird zunächst in Quent und am Schluß wieder in

Weitz		Par semel am gewicht			Par semel vffn schöf	Par semel so qn̄t vn̄ teil nachgelassen	
gros.		lot	qn̄t	teil	par semel	par semel	lot.
76		6	2	40	912	1008	0
77		6	2	14	924	1008	0
78		6	1	66	936	1008	0
79		6	1	41	948	1008	0
80		6	1	16	960	1008	0
81		6	0	72	972	1008	0
82		6	0	48	984	1008	0
83		6	0	24	996	1008	0
84		6	0	0	1008	1008	0

Wenn der weitz 64 groschen gilet. das seint 3 gülde 1 grosß/musz 1 par semel habē 7 lot 3 quent $\frac{32}{64}$ ist gleich $\frac{1}{2}$ quentē/komē vō 1 schöffel 768 par semel Wigt 1 par 7 lot vn̄ die quentē vnd teil werden nachgelassen in gemeltem kauff/ so kan der Beck machen 864 par semeln/ vn̄ were also sein gewyn 96 par semeln an 1 schöffel macht gerad 8 groschen.

D 3

Semmeltabelle, Beginn, aus Adam Ries, Ein Gerechent Büchlein ..., Leipzig 1536 (aus Fritz Deubner: ...nach Adam Ries, Urania-Verlag Leipzig/Jena 1959)

Lot umgewandelt (siehe Tab. 2). Die Quententeile drückte Ries in den Tafeln als Bruchteile des Getreidepreises aus, deren Zähler er niederschrieb.

Weizenpreis 42 Groschen:
Bei einem Weizenpreis von 42 Groschen soll ein Semmelpaar 12 Lot wiegen.
12 Lot = 48 Quent
Weizenpreis 64 Groschen:

$$\frac{64}{42} = \frac{48}{x}, \quad x = \frac{48 \cdot 42}{64} = 31\frac{32}{64}$$

$$x = 31\frac{32}{64} \text{ Quent} = 7 \text{ Lot } 3\frac{32}{64} \text{ Quent}$$

$$= 7 \text{ Lot } 3\frac{1}{2} \text{ Quent}$$

Bei einem Weizenpreis von 64 Groschen soll ein Semmelpaar 7 Lot $3\frac{1}{2}$ Quent wiegen.

Ein Semmelpaar kostete damals einen Pfennig. Stellt man diesen Preis in Rechnung, ergibt sich, daß von einem Scheffel Weizen zu 64 Groschen oder 768 Pfennigen 768 Paar zu backen sind.

Wenn Quente und Quententeile außer Betracht bleiben und die Semmeln also weniger wiegen, erhöht sich die hergestellte Anzahl.

7 Lot = 28 Quent

$$\frac{28}{31\frac{1}{2}} = \frac{768}{x}, \quad x = \frac{768 \cdot 31\frac{1}{2}}{28} = 864$$

$x = 864$ Paar Semmeln
Aus einem Scheffel Weizen erhält man jetzt 864 Semmelpaare.

Der zusätzliche Erlös der Bäcker geht aus der Differenz der beiden Stückzahlen hervor („...gibt auch berichtung seines gewins / so die Semeln von einander genumen").

H. Beyrich

Adam-Ries-Wettbewerb im Bezirk Karl-Marx-Stadt

Am 12. Mai 1987 fand in der Adam-Ries-Oberschule in Annaberg-Buchholz der 7. Adam-Ries-Wettbewerb für Schüler der Klassen 5 aus unserem Bezirk statt. Über den 1. Adam-Ries-Wettbewerb hatten wir im Heft 6/1981 der Schülerzeitschrift *alpha* berichtet.
Dieser Wettbewerb soll helfen, mathematisch begabte Schüler frühzeitig zu entdekken, um sie dann systematisch zu fördern und letztlich für einen Besuch der Spezialschule oder Spezialklassen zu gewinnen. Dabei sind Erfolge in der Olympiadebewegung ein wirksamer Anreiz für solche Schüler, sich über den Unterricht hinaus intensiv mit Mathematik zu beschäftigen. Noch haben wir dieses Ziel keinesfalls voll erreicht. Trotzdem können wir bereits auf erfreuliche Erfolge zurückblicken. Besonders erfolgreich bei der systematischen Förderung der leistungsstärksten Teilnehmer an diesem Wettbewerb waren das Mathematikzentrum des Pionierhauses *Juri Gagarin* in Karl-Marx-Stadt sowie die Kreise Freiberg und Hohenstein-Ernstthal. Gegenwärtig sind 45 ehemalige Teilnehmer des 1. bis 4. Adam-Ries-Wettbewerbs Schüler der Spezialklassen 11 und 12 der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt oder der Klassen 9 bis 11 der Spezialschule math.-nat.-techn. Richtung *Hans Beimler* in Karl-Marx-Stadt, und sie gehören zu den leistungsstärksten Schülern ihrer Klassen.
Es ist nicht verwunderlich, daß solche Schüler auch in der OJM-Bewegung Erfolge erzielen. Wer im Adam-Ries-Wettbewerb gut abgeschnitten hat, sollte sich auf einen Frühstart in der Olympiadeklasse 7 vorbereiten. Die Anzahl solcher Schüler hat in den vergangenen Jahren ständig zugenommen. Im vergangenen Schuljahr erreichten bereits 17 solche Frühstarter die Bezirksolympiade, in diesem Schuljahr werden es sogar 24 Schüler sein.
Durch die Teilnahme am Korrespondenzzirkel Mathematik unseres Bezirks, an Spezialistenlagern, an der Bezirksarbeitsgemeinschaft für die Klassen 9/10 bzw. 11/12 und einer individuellen Förderung für Schüler der Klassen 10 bis 12 haben sie dann die Möglichkeit, ihr mathematisches Wissen und Können stark zu erhöhen.
Die guten Erfolge unseres Bezirks bei der XXVI. Zentralen Olympiade Junger Mathematiker (ZMO) in Erfurt haben wir in hohem Maße den 12 von insgesamt 19 Mitgliedern unserer Delegation zu verdanken, die ehemals Teilnehmer des Adam-Ries-Wettbewerbs waren und die jetzt sämtlich Schüler der Spezialschule oder der Spezialklassen sind. Die sechs erfolgreichsten von ihnen wollen wir hier vorstellen:

Gerd Kunert (Klasse 11);
II. Preis bei der ZMO
I. Preis bei der IMO in Havanna

Torsten Ehrhard (Frühstarter in Klasse 10); I. Preis bei der ZMO

Carsten Deus (Frühstarter in Klasse 10); II. Preis bei der ZMO

André Pönitz (Frühstarter in Klasse 11); III. Preis bei der ZMO

Enrico Thierbach (Klasse 10);
II. Preis bei der ZMO

Holger Illgen (Klasse 10);
III. Preis bei der ZMO

Tabelle 1: Scheffel, altes deutsches Hohlmaß für Getreide

1 Scheffel = 104 Liter (Sachsen 16. Jh., in Deutschland nicht einheitlich)
nach anderen Angaben im damaligen Annaberg 182 Liter
1 Scheffel Korn (zu 104 l) etwa 74 kg
1 Scheffel Weizen (zu 104 l) etwa 79 kg

Tabelle 2: Einteilung und Umrechnung der Gewichtseinheiten (Krämer- oder Handelsgewichte)

Pfund	Lot	Quent	Pfennig-gewicht	Heller-gewicht	in Gramm
1	32	128	512	1024	467,3 (Dresden 1579)
	1	4	16	32	14,6
		1	4	8	3,6
			1	2	0,9
				1	0,45

Gramm ist hier Gewichtsangabe. Auf die heutige Unterscheidung zwischen Gewicht und Masse und den Gebrauch des Gramms als Masseeinheit sei hingewiesen.

Tabelle 3: Einteilung und Umrechnung der Münzsorten

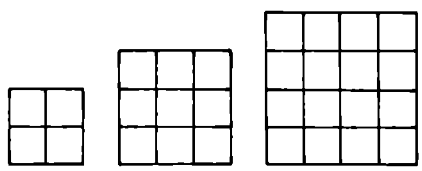
Gulden (fl)	Groschen (g)	Pfennig (d)	Heller (h)
1	21	252	504
	1	12	24
		1	2

Abschließend wollen wir noch die Aufgaben des 7. Adam-Ries-Wettbewerbs mitteilen. Viel Spaß beim Knobeln!

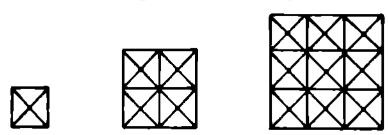
▲ 1 ▲ a) Die Klasse 5a sammelte 2,25 dt einer bestimmten Sorte von Altstoffen.
Die Klasse 5b sammelte von der gleichen Sorte von Altstoffen 3,15 dt und erhielt dafür 22,50 M mehr als die Klasse 5a.
Wieviel Mark erhielt die Klasse 5a für ihr Sammelergebnis?
b) Die Klassen 3, 4, 5 und 6 sammelten zusammen genau 5 dt Altpapier.
Dabei sammelte die Klasse 4 um 80 kg mehr als die Klasse 3.
Die Klasse 5 sammelte ebensoviel wie die Klassen 3 und 4 zusammen.
Die Klasse 6 sammelte nur halb soviel wie die Klasse 5.
Wieviel Dezitonnen Altpapier sammelte die Klasse 5?

▲ 2 ▲ Karsten möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die folgende Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:
(1) Die Summe der Ziffern von z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches größer als 100 und kleiner als 200 ist.
(3) Vergrößert man die Einerziffer von z um 2, so erhält man die Zehnerziffer von z.
Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

▲ 3 ▲ Wer kann *geschickt* zählen?
a) In der Figur a 1 findet man 5 Quadrate (nämlich ein *großes* mit der Seitenlänge 2 und vier *kleinere* mit der Seitenlänge 1).
Wieviel Quadrate findet man in Figur a 2?
Wieviel Quadrate findet man in Figur a 3?



Figur a 1 Figur a 2 Figur a 3



Figur b 1 Figur b 2 Figur b 3

b) In Figur b 1 findet man 8 Dreiecke (nämlich vier *kleine* und vier *große*).
Wieviel Dreiecke findet man in Figur b 2?
Wieviel Dreiecke findet man in Figur b 3?
Wer angibt, wie man in Aufgabe a) die Anzahl der Quadrate in einer derartigen Figur mit beliebig vorgegebener Seitenlänge n ermitteln kann, erhält Sonderpunkte!

Rund um den SR 1

Kalendergeschichten Teil 2 – Kalenderrechnung

Wir stützen unsere Berechnungen auf eine für den Zeitraum vom 1. März 1900 bis zum 28. Februar 2100 gültige Formel, die in [2] zu finden ist. Diese Formel unterscheidet sich von denen des vorigen Beitrages. Berechne zuerst

$$Y = [365{,}25 | A] + [30{,}6 | B] + T - 694\,066\,,$$

die Werte für A und B sind hierbei der folgenden Tabelle zu entnehmen:

M	Jan. 1.	Febr. 2.	März 3.	April 4.	Mai 5.	Juni 6.
A	$J-1$	$J-1$	J	J	J	J
B	14	15	4	5	6	7

M	Juli 7.	Aug. 8.	Sept. 9.	Okt. 10.	Nov. 11.	Dez. 12.
A	J	J	J	J	J	J
B	8	9	10	11	12	13

Dabei bedeutet J die Jahreszahl (also $J = h \cdot 10^2 + j$), M den Monat und T den Tag des jeweiligen Datums. Der gebrochene Anteil werde im Falle des Produkts $365{,}25\,A$ mit d_A und beim Produkt $30{,}6\,B$ mit d_B bezeichnet. Also ist

$365{,}25 \cdot A = [365{,}25 \cdot A] + d_A$ bzw.

$30{,}6 \cdot B = [30{,}6 \cdot B] + d_B$

Die Werte d_A und d_B können entsprechenden, in der Leuchtanzeige ausgewiesenen Zwischenwerten entnommen werden.

Wir fragen wieder, *wie viele Tage von einem Datum bis zu einem anderen Datum vergangen sind:*

Die Anzahl n dieser Tage erhalten wir als Differenz der zu den beiden Daten gehörenden Y-Werte, also als $n = Y_2 - Y_1$, wobei das mit „1“ indizierte Datum vor dem mit „2“ indizierten liegt.

Damit lautet der Ablaufplan:

$$\boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{A_2}\ \boxed{-}\ \boxed{d_{A_2}}\ \boxed{=}\ \boxed{X\to M}$$
$$\boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{B_2}\ \boxed{-}\ \boxed{d_{B_2}}\ \boxed{+}\ \boxed{T_2}$$
$$\boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{A_1}\ \boxed{-}\ \boxed{d_{A_1}}$$
$$\boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{B_1}\ \boxed{-}\ \boxed{d_{B_1}}$$
$$\boxed{+}\ \boxed{T_1}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR} \nearrow n.$$

Als Beispiel wählen wir als erstes Datum den 25. Januar 1984 mit

$J_1 = 1984$, $M_1 = 1$, $T_1 = 25$,

$A_1 = 1984 - 1 = 1983$, $B_1 = 14$

und als zweites den 3. Juli 1985 mit

$J_2 = 1985$, $M_2 = 7$, $T_2 = 3$,

$A_2 = 1985$, $B_2 = 8$.

Damit modifiziert sich der obige allgemeine Ablaufplan zu

$$\boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{1985}\ \boxed{-}{}^{*)}\ \boxed{,25}$$
$$\boxed{=}\ \boxed{X\to M}\ \boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{8}\ \boxed{-}\ \boxed{,8}\ \boxed{+}\ \boxed{3}$$
$$\boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{1983}\ \boxed{-}\ \boxed{,75}$$
$$\boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{14}\ \boxed{-}\ \boxed{,4}\ \boxed{+}$$
$$\boxed{25}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR} \nearrow 525.$$

Vom 25. Januar 1984 bis zum 3. Juli 1985 sind 525 Tage vergangen.

*) *In der Leuchtanzeige erscheint 725021.25; nach der getroffenen Festlegung für d_A ist 0,25 zu subtrahieren.*

Nun betrachten wir das Problem, *auf welchen Wochentag ein vorgegebener Kalendertag fällt*. Dazu wird wieder Y dargestellt als $Y = 7 \cdot l + r$ mit l, r natürliche Zahlen und $0 \leqq r < 7$.

Zu diesem Zweck berechne den Term

$r = \{Y : 7\} \cdot 7 = \{([365{,}25 \cdot A] + [30{,}6 \cdot B] + T - 694\,066) : 7\} \cdot 7$.

Die Klammer $\{\ldots\}$ fordert, daß der ganze Teil g des Quotienten $Y : 7$ abgestrichen und nur mit dem restlichen echten Dezimalbruch weitergerechnet werden soll, denn es gilt allgemein die Formel $w = [w] + \{w\}$.

Dann lautet der zugehörige Rechenablaufplan zur Bestimmung des Wochentages:

$$\boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{A}\ \boxed{-}\ \boxed{d_A}\ \boxed{=}\ \boxed{X\to M}$$
$$\boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{B}\ \boxed{-}\ \boxed{d_B}\ \boxed{+}\ \boxed{T}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}$$
$$\boxed{-}\ \boxed{694066}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{-}\ \boxed{g}$$
$$\boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{=} \nearrow r.$$

Der errechnete Wert r ist mit den Zahlen $0, 1, \ldots, 6$ gemäß Tabelle 7 (vgl. „Kalendergeschichten Teil 1“, Heft 1/88) zu vergleichen und dabei festzustellen, mit welcher dieser Zahlen (bis auf Rundungsfehler) r übereinstimmt.

Als Beispiel wählen wir den 25. Januar 1984 mit

$J = 1984$, $M = 1$, $T = 25$,

$A = 1984 - 1 = 1983$, $B = 14$; also

$$\boxed{365{,}25}\ \boxed{\times}\ \boxed{1983}\ \boxed{-}\ \boxed{,75}$$
$$\boxed{=}\ \boxed{X\to M}\ \boxed{30{,}6}\ \boxed{\times}\ \boxed{14}\ \boxed{-}\ \boxed{,4}$$
$$\boxed{+}\ \boxed{25}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}\ \boxed{-}\ \boxed{694066}$$
$$\boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{-}{}^{*)}\ \boxed{4382}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}$$
$$\boxed{=} \nearrow 2.99999.$$

Wegen $2{,}99999 \approx 3$ ist der 25. Januar 1984 ein Mittwoch gewesen.

*) *In der Leuchtanzeige erscheint 4382.4286; nach der getroffenen Festlegung für g ist 4382 zu subtrahieren.*

Analog erhält man für den 3. Juli 1985, daß dieses Datum ebenfalls auf einen Mittwoch fiel. *Überprüfe die Beispiele aus „Kalendergeschichten Teil 1“ mit dem SR 1!*

Wer sich umfassender mit der Kalenderrechnung befassen möchte, kann nachlesen in

[1] Butkewitsch, A. W.; Selikson, M. S.: Ewige Kalender. Leipzig Teubner-Verlag 1978

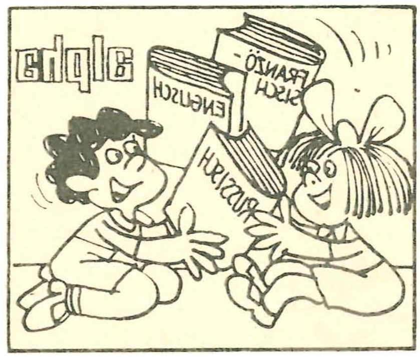
[2] Csákány, A.: Mein Taschenrechner. Berlin, Verlag der Technik 1980

[3] Gilde, W.; Altrichter, S.: Noch mehr Spaß mit dem Taschenrechner. Leipzig, Fachbuchverlag 1981

[4] Gilde, W.; Altrichter, S.: Schneller, leichter, genauer – Möglichkeiten des Taschenrechners. Leipzig, Fachbuchverlag 1987.

Es sei auch verwiesen auf: Welchen Ursprung haben die Namen der Monate? *alpha* 1985, 1, S. 7; Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. A. Smorodinsky. *Alpha* 1982, 3, S. 54/55.

K. Becker



▲ 1 ▲ Using your calculator you will be able to check that

$\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{8 + \sqrt{55}}$ and

$\sqrt{7 + \sqrt{33}} + \sqrt{6 + \sqrt{35}}$

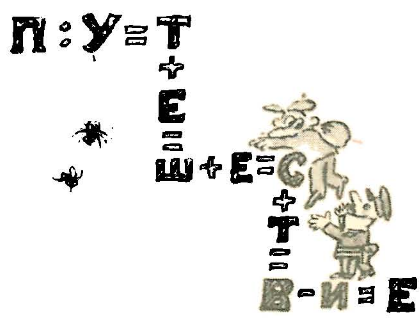
are approximately equal. Either prove that they are exactly equal, or decide (with proof) which is the larger.

aus: Parabola, Australien

▲ 2 ▲ Le bacille de la tuberculose (bacille de Koch) a une longueur de 4 µ. Quel grossissement faut-il utiliser pour que son image ait une longueur de 2 mm? *H.*

▲ 3 ▲ Совершите путешествие из пункта П в пункт Е (см. рисунок). Для этого замените буквы цифрами так, чтобы все равенства стали верными (одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные – разными). Счастливого пути!

aus: Quant, Moskau



Geometrische Interpretationen der Gleichung $x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha$

Die Gleichung

$$x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha, \qquad (1)$$

in der wir den Exponenten α als einen Parameter auffassen, hat in der Mathematik eine vielfältige Bedeutung.

In der Zahlentheorie untersucht man ihre ganzzahlige Lösbarkeit für natürliche Zahlen $\alpha \geqq 2$ (*alpha*, 1984, Heft 3).

Während für $\alpha = 2$ alle ganzzahligen Lösungen bekannt sind, ist die Fermatsche Vermutung, die Gleichung (1) hat für $\alpha > 2$ keine ganzzahligen Lösungen, noch nicht vollständig bewiesen. Man zeige, für $\alpha = -1$ hat die Gleichung (1) unendlich viele ganzzahlige Lösungen und ermittle alle.

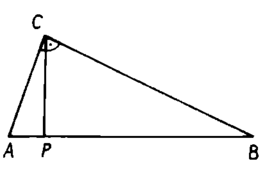
In der Geometrie steht die Gleichung (1) im engen Zusammenhang mit Sätzen und Konstruktionen. Auf der Suche nach möglichen geometrischen Interpretationen sollen x, y und z die Längen gewisser Strecken bedeuten. Wir stellen uns die Aufgabe, drei solche Strecken zu finden, deren Längen x, y und z für noch festzulegende Werte von α der Gleichung (1) genügen. Zur Lösung der Aufgabe sollen einfache ebene geometrische Gebilde, wie Dreiecke, Trapeze, regelmäßige Vielecke u. a. herangezogen werden.

Wenn wir uns auf Dreiecke beschränken, so kann man für jeden Exponenten α aus der Menge

$$\mathcal{M} = \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

Lösungen der gestellten Aufgabe angeben. Je eine ist nachfolgend genannt; es lassen sich weitere finden.

Bild 1



$\alpha = 1$

Dieser Fall ist trivial. Er läßt sich interpretieren als Teilung einer Strecke der Länge z in zwei Teilstrecken mit den Längen x und y, wobei gilt

$$x + y = z.$$

$\alpha = 2$

Zur Interpretation für $\alpha = 2$ kann ein rechtwinkliges Dreieck ABC dienen (siehe Bild 1).

Wenn $x = \overline{BC}$ und $y = \overline{AC}$ die Längen der Katheten sind und wenn $z = \overline{AB}$ die Länge der Hypotenuse bedeutet, so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck und P der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse AB (siehe Bild 1). Mit $h = \overline{PC}$, $x = \overline{AP}$, $y = \overline{PB}$ werden die Längen der Höhe und der Hypotenusenabschnitte bezeichnet. Nach dem Höhensatz gilt

$$h^2 = xy.$$

Für die Länge $c = \overline{AB}$ der Hypotenuse ergibt sich

$$x + y = c.$$

Durch Addition von $2\sqrt{xy} = 2h$ zur letzten Gleichung erhält man

$$x + 2\sqrt{xy} + y = c + 2h.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ergibt ein vollständiges Quadrat

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = c + 2h.$$

Mit $z = c + 2h$ folgt daraus

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}}.$$

$\alpha = -2$

Für $\alpha = -2$ verwenden wir abermals das in Bild 1 dargestellte rechtwinklige Dreieck ABC. Mit $x = \overline{BC}$, $y = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

oder, nach Division durch x^2y^2:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{c^2}{x^2y^2}. \qquad (2)$$

Mit $h = \overline{PC}$, $p = \overline{AP}$, $q = \overline{PB}$ lautet der Höhensatz:

$$h^2 = pq.$$

Da im rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über jeder Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der orthogonalen Projektion der entsprechenden Kathete auf die Hypotenuse ist, gilt

$$x^2 = qc, \quad y^2 = pc.$$

Daraus folgt

$$\frac{c^2}{x^2y^2} = \frac{1}{pq} = \frac{1}{h^2}.$$

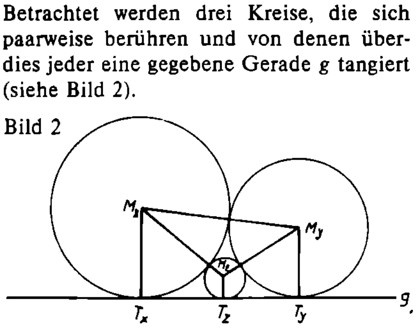
Mit $z = h$ ergibt sich somit unter Verwendung der letzten Gleichung aus der Gleichung (2) die Beziehung

$$x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}.$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$

Betrachtet werden drei Kreise, die sich paarweise berühren und von denen überdies jeder eine gegebene Gerade g tangiert (siehe Bild 2).

Bild 2



Die Mittelpunkte der drei Kreise mit den Radienlängen x, y und z seien M_x, M_y und M_z. Man erhält ein Dreieck mit den Eckpunkten M_x, M_y und M_z. Die Dreiecksseiten haben die Längen

$x + y = \overline{M_xM_y}$, $x + z = \overline{M_xM_z}$, $y + z = \overline{M_yM_z}$.

Wir setzen die folgenden Größenverhältnisse voraus:

$$x \geqq y > z > 0.$$

Die drei Kreise mögen die Gerade g in den Punkten T_x, T_y und T_z berühren. Unter Anwendung des Satzes von Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypotenusen M_xM_y, M_xM_z, M_yM_z und entsprechenden Katheten, die jeweils parallel bzw. rechtwinklig zur Geraden g sind, erhält man folgende drei Beziehungen:

$$(x - y)^2 + \overline{T_xT_y}^2 = (x + y)^2$$
$$(x - z)^2 + \overline{T_xT_z}^2 = (x + z)^2$$
$$(y - z)^2 + \overline{T_yT_z}^2 = (y + z)^2.$$

Nach Auflösung der Klammerausdrücke ergibt sich

$$\overline{T_xT_y} = 2\sqrt{xy}, \quad \overline{T_xT_z} = 2\sqrt{xz}, \quad \overline{T_yT_z} = 2\sqrt{yz}.$$

Wegen

$$\overline{T_xT_z} + \overline{T_yT_z} = \overline{T_xT_y}$$

folgt nun unmittelbar

$$\sqrt{xz} + \sqrt{yz} = \sqrt{xy}.$$

Wenn die letzte Gleichung durch $\sqrt{xyz}$ geteilt wird, so erhält man die gewünschte Gleichung

$$x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = z^{-\frac{1}{2}}.$$

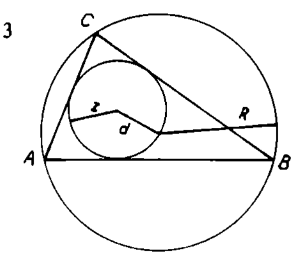
$\alpha = -1$

Für den letzten Fall von $\alpha \in \mathcal{M}$ ziehen wir einen Satz von Leonhard Euler (1707 bis 1783) heran. Der Satz besagt, daß für die Längen z bzw. R der Radien des In- bzw. Umkreises eines beliebigen Dreiecks ABC gilt:

$$\frac{1}{R + d} + \frac{1}{R - d} = \frac{1}{z}, \qquad (3)$$

wobei d der Abstand der Mittelpunkte dieser beiden Kreise ist (siehe Bild 3).

Bild 3



Aus dem Eulerschen Satz ergibt sich für d die Beziehung

$$d^2 = R^2 - 2Rz.$$

Leser, die sich für den Beweis des zitierten Satzes interessieren, seien beispielsweise auf die sowjetische mathematische Schülerzeitschrift Quant, 1984, Heft 5 verwiesen.

Setzen wir nun $x = R + d$ und $y = R - d$, so geht die Gleichung (3) über in

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

▲1▲ Man konstruiere die Strecken mit den Längen x, y und z für die betrachteten Beispiele.

▲2▲ Es sind andere geometrische Interpretationen der Gleichung (1) zu finden.

▲3▲ Bezüglich anderer Gleichungen, wie zum Beispiel für

$$x^\alpha + y^\beta = z^\gamma$$

oder $x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha = w^\alpha$

behandle man analog einfache Spezialfälle.

G. Windisch

Eine experimentelle Bestimmung der Zahl π

Zum 200. Todestag von G. Buffon

Gelegentlich haben Personen, die kaum als Mathematiker im engeren Sinn zu bezeichnen sind, einen Begriff, ein Problem, eine Methode oder ein Resultat von nachhaltiger Bedeutung zur Entwicklung der Mathematik beigetragen, so z. B. auch Georges-Louis Leclerc Comte de Buffon (7. 9. 1707 bis 16. 4. 1788), dessen Name für immer mit dem sogenannten Nadelproblem verbunden ist.

Buffon ist in der Wissenschaftsgeschichte wohlbekannt als einer der Mitarbeiter der berühmten französischen Encyclopédie, als Vorläufer Darwins in bezug auf die Idee der biologischen Evolution, als Verfasser einer 36bändigen *Naturgeschichte*. Er war ab 1739 Direktor des *königlichen* Botanischen Gartens und des *Königlichen Naturalienkabinetts* in Paris, Mitglied der Französischen Akademie und insgesamt mehr ein Vertreter der Bio- und Geowissenschaften, aber dem für das 18. Jh. typischen Hang der Gelehrten zur Vielseitigkeit entsprechend, beschäftigte er sich gelegentlich auch mit physikalischen und mathematischen Dingen, z. B. mit dem Zahlensystem der Basis 12, dem Versuch einer *moralisch-sittlichen Arithmetik* oder der Übersetzung von Newtons Abhandlung über den Differentialkalkül ins Französische.

Worin besteht das Buffonsche Nadelproblem? Auf ein waagerecht liegendes Brett mit einem Raster paralleler Linien, von denen je zwei benachbarte den Abstand d haben, werde in zufälliger Weise eine Nadel der Länge $l \leqq d$ geworfen. Als *günstig* sehen wir den Fall an, daß diese Nadel eine der parallelen Linien trifft. Nun sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei Würfel- oder Kartenspielen, deren Probleme, die Wahrscheinlichkeit für einen günstigen Ausgang eines Spieles abzuschätzen, einmal die historische Wurzel der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebildet haben. Das Buffonsche Nadelspiel, um es einmal so zu nennen, unterscheidet sich jedoch von allen derartigen Spielen dadurch, daß sowohl die Menge aller möglichen Fälle als auch die Menge der günstigen Fälle unendlich ist, so daß die Definition der Wahrscheinlichkeit p als Quotient aus der Anzahl der günstigen Fälle und der Anzahl aller möglichen Fälle, die in ihrem Anwendungsbereich alle Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf kombinatorische Fragen reduziert, hier nicht anwendbar ist. Buffons richtungweisende Lösung des Problems bestand darin, den möglichen Lagen der Nadel umkehrbar eindeutig Punkte einer Ebene zuzuordnen und damit statt der Anzahlen der günstigen bzw. möglichen Fälle die Flächeninhalte der jeweils zugeordneten Mengen durcheinander dividieren zu können, um eine sinnvolle Verallgemeinerung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für diesen Fall zu erhalten.

Eine beliebige Lage der Nadel können wir (unter Berücksichtigung der Gleichberechtigung aller parallelen Linien des Rasters und der Unwesentlichkeit von Verschiebungen parallel zum Raster, beides läßt sich streng begründen) durch den Abstand x des *rechten* Endpunktes der Nadel von der links daneben verlaufenden Rastergeraden und den Winkel α zwischen der als Strahl mit diesem Anfangspunkt aufgefaßten Nadel und der Senkrechten zu den Rastergeraden beschreiben (Bild 1).

Bild 1

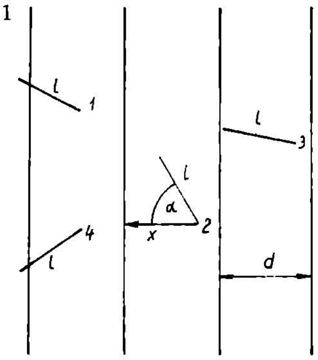
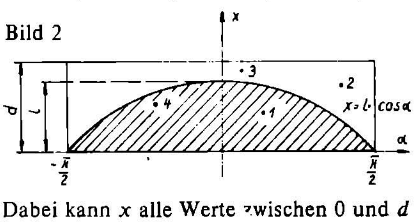


Bild 2



Dabei kann x alle Werte zwischen 0 und d annehmen, α alle Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. (α wird zweckmäßigerweise im Bogenmaß gemessen.) In einer mit einem kartesischen Koordinatensystem für die Größen α und x versehenen Bildebene nehmen daher die möglichen Lagen der Nadel das in Bild 2 gezeigte Rechteck mit den Seitenlängen π und d ein. Sein Flächeninhalt F_1 ist gleich $\pi \cdot d$.

Für die in Bild 1 eingezeichneten 4 Lagen der Nadel sind die jeweils zugehörigen Punkte in Bild 2 mit der gleichen Zahl markiert. Offenbar trifft die Nadel genau dann die links neben ihrem rechten Endpunkt verlaufende Rastergerade (und nur diese kann sie treffen), wenn $x \leqq l \cdot \cos\alpha$ gilt. Die Menge derjenigen Punkte, die dieser Bedingung genügen, ist in Bild 2 schraffiert. Mit Hilfe der Integralrechnung erhält man sehr leicht, daß sie den Flächeninhalt $F_2 = 2 \cdot l$ hat. (Dies kann man auch ohne Integralrechnung mit beliebiger Genauigkeit bestätigen, indem man die Fläche auf Millimeterpapier zeichnet und durch Auszählen von Quadraten einen unteren und einen oberen Näherungswert für den Flächeninhalt bestimmt.) Unsere in Bild 2 vorgenommene graphische Deutung des Problems liefert also für die gesuchte Wahrscheinlichkeit p den Wert $\frac{F_2}{F_1} = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}$. Da die Wahrscheinlichkeit auch als Grenzwert relativer Häufigkeiten verstanden werden kann (warum und in welchen Grenzen dies richtig ist, untersucht ebenfalls die Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. -theorie), müßte demnach folgendes richtig sein: Wirft man die Nadel n-mal auf das Brett und trifft sie dabei k-mal eine Gerade des Rasters, so ist für große Zahlen n ungefähr $\frac{k}{n} = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}$, und zwar um so genauer und mit um so größerer Sicherheit, je größer n ist. Man kann also, da l und d bekannt sind, aus der betrachteten Gleichung und experimentell gewonnenen Zahlen k und n die Zahl π berechnen. Dieser bestechende Gedanke hat zunächst noch einen verborgenen Haken: Unsere symbolische Darstellung der Mengen der möglichen und der günstigen Fälle in einer Bildebene ist ja ziemlich willkürlich. Man könnte die Lagen der Nadel auch durch andere Parameter als x und α beschreiben und bekäme andere Bildmengen mit anderen Flächeninhalten. Ausführung des beschriebenen Versuchs liefert aber mit verblüffender Güte Näherungswerte für π, so daß durch diese Versuche das Vertrauen in die *Natürlichkeit* der von uns gewählten Darstellung gestärkt wird. Danach ist es tatsächlich möglich, weitere, uns noch unbekannte Dezimalstellen der Zahl π durch hinreichend lange Wurfserien und deren statistische Auswertung zu bestimmen. Daß die von uns gewählte Darstellung der Lagen der Nadel die einzige dem Problem angemessene ist, kann von der modernen Mathematik auf ganz anderem als dem hier beschriebenen Weg begründet werden. Aus dem Buffonschen Nadelproblem entwickelte sich über mehrere Zwischenstufen ein ganzes Spektrum moderner und sehr praxiswirksamer mathematischer Theorien: Integralgeometrie, Theorie der geometrischen Maße, stochastische Geometrie und schließlich die sogenannte *Monte-Carlo-Methode* zur sehr effektiven (zeitsparenden) Lösung verschiedenartigster numerischer Probleme.

P. Schreiber

Das Katzenjammer-Spiel

Herkunft und Aufgabenstellung

Der ungarische Zauberwürfel mit seiner schwindelerregenden Zahl von Verdrehungsmöglichkeiten hat – zumindest für eine Zeit – das Interesse an anderen logischen Spielen in den Hintergrund gedrängt. Dabei stecken in farbig bemalten Würfeln noch viele andere reizvolle Spielideen, von denen wir eine, das Spiel *Katzenjammer*, vorstellen wollen. Einst hatte das Spiel unter diesem deutschen Namen im angelsächsischen Raum Furore gemacht und kehrte später unter der Bezeichnung *instant insanity* (sofortiger Wahnsinn) von dort wieder zurück.

Wer in Ungarn seinen Urlaub verbracht hat, der hat dieses Puzzle vielleicht in seiner letzten Form kennengelernt, die die Würfel durch Kugeln ersetzt und in deutlicher Anlehnung an die Zauberwürfelwelle den Namen *bűvös golyók* (Zauberkugeln) trägt. Im Gegensatz zu vielen Spielen bereitet es überhaupt keine Mühe, sich dieses Spiel selbst anzufertigen: 4 Würfel und 4 Farben zum Anstreichen reichen bereits (Bild 1). Die Seitenflächen von 4 gleich großen Würfeln werden auf bestimmte, später zu besprechende Weise mit 4 Farben bemalt (z. B. durch Anstreichen oder Aufkleben von Buntpapier bei handelsüblichen Holz- oder Plastewürfeln aus Kinderspielzeugen).

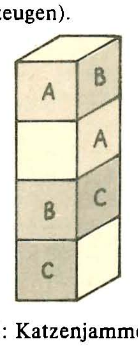
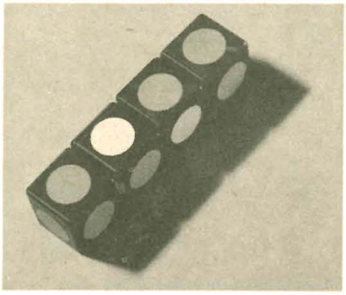


Bild 1: Katzenjammerspiel

Bild 2: Der Turm aus 4 Würfeln. Jede Farbe erscheint genau einmal pro Seite.



Worin besteht die Spielidee? Die vier bunten Würfel sollen so zu einem *Turm* zusammengesetzt werden, daß auf jeder der vier *großen* Seitenflächen des Turms jede der vier Farben genau einmal erscheint. Die Zauberkugeln sind eine geschickte Variante dieses Spiels, da der etwas unhandliche Turm aus Würfeln durch leicht drehbare Kugeln mit Farbkreisen ersetzt wurde (Bild 2).

Anfertigen des Spielgerätes

Von der gelösten Aufgabe her ist klar, wie die Würfel bemalt werden müssen. Die unbemalten Würfel werden zum Turm gelegt und die vier Farben so aufgetragen, daß sich eine Lösung ergibt. Die untere und obere Grundfläche des Turms sowie die einander berührenden Seitenflächen aufeinanderliegender Würfel können danach beliebig mit den vier vorgegebenen Farben angestrichen werden. Die Farbverteilung auf einem Würfel könnten wir für unsere Untersuchungen auf seinem abgewickelten Netz notieren, es ist aber bequemer, sich in den Würfeln ein Raumkreuz zu denken, dessen Enden die Farben der zugehörigen Seitenflächen aufweisen (Bild 3). Das Bild 4 zeigt einen Satz Raumkreuze mit einer Farbverteilung, wie sie z. B. für die Zauberkugeln gebraucht worden sind.

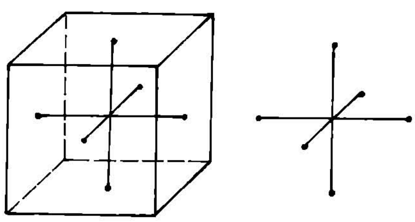


Bild 3: Raumkreuze sind praktischer als abgewickelte Würfelnetze

Bild 4: Ein Satz von Raumkreuzen mit der Farbaufteilung der Zauberkugeln (Erklärung der Abkürzungen im Text)

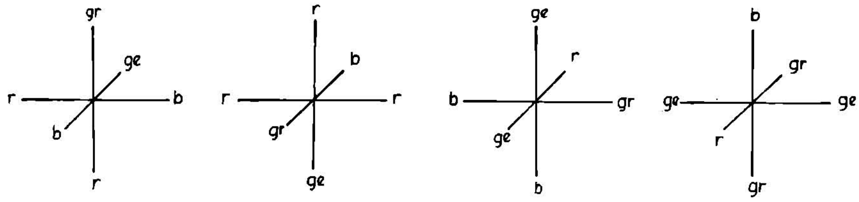
Ausflug in die Kombinatorik

Bis jetzt sieht das alles nach einem harmlosen Kinderspielzeug aus. Aber das ist nicht der Fall, wie uns die nachfolgenden kombinatorischen Überlegungen zeigen werden.

Auf wie viele Arten läßt sich *ein* Würfel in den Turm einbauen? Achten wir nur auf die geometrische Form des Würfels, so stellt sich diese Frage gar nicht. Aber sobald wir die farbigen Seitenflächen in Betracht ziehen, ergeben sich optisch verschiedene Möglichkeiten des Anordnens. Wir können einen Würfel auf irgendeine Fläche (Grundfläche) stellen, sagen wir so, daß die rote Farbe unten ist. Ohne die Grundfläche zu wechseln, läßt sich der Würfel drehen, daß jede der vier *Seitenwände* (Grund- und Deckfläche zählen nicht zu den Seitenwänden) nach vorn kommt. Das bedeutet: Für jede fest gewählte Grundfläche gibt es noch vier Möglichkeiten des Hinstellens. Da es sechs Flächen am Würfel gibt, kann jeder Würfel auf $6 \cdot 4 = 24$ verschiedene Arten in den Turm eingefügt werden. Wird der erste Würfel hingestellt, dann stehen dafür 24 Möglichkeiten zur Verfügung. Für den zweiten Würfel gibt es zu jeder dieser Möglichkeiten wiederum 24 Möglichkeiten des Daraufstellens. Damit lassen sich der erste und zweite Würfel auf $24 \cdot 24$ Arten aufeinander stellen. Überlegen wir entsprechend weiter, dann lassen sich vier Würfel auf
$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^4 = 331\,776$ Arten zusammenfügen.

Dabei folgt der als erster Würfel betrachtete auf den als zweiten angesehenen Würfel usw. Berücksichtigen wir jedoch, daß die Feststellung, welcher Würfel der erste, zweite usw. sein soll, ja ganz willkürlich ist, dann ist diese Zahl für völlig unterschiedlich gefärbte Würfel noch mit der Anzahl der verschiedenen Anordnungen von je vier Würfeln zu multiplizieren. Vier verschiedene Würfel lassen sich jeweils auf
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ unterscheidbare Arten aufzustellen, so daß das *Katzenjammerspiel* bis zu $24^5 = 7\,962\,624$ verschiedene Farbzustände aufweisen *könnte*. Wir müssen hier *könnte* schreiben, denn bei unseren Überlegungen haben wir unterstellt, daß sich alle 24 Seitenflächen der vier Würfel voneinander unterscheiden (d.h. 24 Farben benutzt wurden). Das trifft ja nicht zu. Damit haben wir die Möglichkeit vernachlässigt, daß gewisse Anordnungen optisch das gleiche Bild liefern können. Folglich ist 24^5 nur eine großzügig ermittelte obere Grenze für alle optisch unterschiedlichen Möglichkeiten.

Wir wollen versuchen, die Zahl der tatsächlich erreichbaren Farbkombinationen etwas genauer zu bestimmen. Zunächst wer-



1. Kugel 2. Kugel 3. Kugel 4. Kugel

den wir zwei vor uns stehende Farbtürme nicht als verschieden ansehen, wenn sie durch eine Drehung des Turmes als Ganzes auseinander hervorgehen. Das reduziert die Anzahl 24^5 bereits auf ein Viertel.

Falls wir jeden der vier Würfel als in gleicher Weise gefärbt unterstellen, so wäre im Farbturm jeder Würfel durch jeden ersetzbar, wobei gegebenenfalls beim Vertauschen eine geeignete Drehung notwendig wäre. Die Reihenfolge der Würfel spielte jetzt keine Rolle mehr, und es lägen dann bestenfalls $\frac{24^4}{4} = 82\,944$ verschiedene Farbmuster vor. Natürlich sind die vier Farbwürfel nicht völlig gleich, sondern unterscheiden sich, so daß auch diese Anzahl nicht exakt ist. Aber diese Zahl läßt vermuten, daß hinreichend viele Kombinationen möglich sind. Eine Schätzung, die unabhängig von der speziellen Bemalung der Würfel ist, gibt pro 40000 Anordnungen der Würfel etwa eine Grundlösung an. (Gibt es überhaupt eine Lösung, so lassen sich weitere Lösungen sofort durch Umordnen der Würfel erhalten, insgesamt so bestenfalls $4! = 24$ Lösungen, ohne Drehung des Turms.)
Bei den Zauberkugeln liegt durch das die Kugeln einschließende Röhrchen die Reihenfolge der Kugeln fest. Diese können nur noch auf zwei Arten als angeordnet betrachtet werden, je nachdem von welchem Röhrchenende aus gezählt wird (welches also als *oben* betrachtet wird). Die Zahl der optisch verschiedenen Bilder wird also bestenfalls gleich $2 \cdot \frac{24^4}{4}$ sein (Drehungen der Röhre nicht eingeschlossen).

Dieser Ausflug in die Kombinatorik soll uns genügen, um einen Eindruck von den Schwierigkeiten des Lösens zu bekommen. Durch mehr oder weniger zufälliges Herumdrehen werden wir vermutlich nicht viel erreichen, so daß wir uns um ein systematisches Herangehen bemühen.

Notwendige Bedingungen für eine Lösung

Bei der Lösung der Aufgabe wenden wir eine oft hilfreiche Methode an: Wir denken uns, daß die Aufgabe bereits gelöst sei und der Turm der vier Würfel in der gewünschten Farbanordnung (Bild 1) vor uns steht. Dann weisen die Vorder- und Rückseite und die beiden restlichen Seitenflächen natürlich die vier Farben in der gewünschten Weise auf. Wir verfolgen unser Ziel weiter, indem wir noch einen wirksamen Trick anwenden. Dieser Trick besteht darin, zunächst nicht alles das zu benutzen, was bekannt ist oder als bekannt angesehen wird. (In der Geometrie wird so z. B. bei der Methode der geometrischen Örter verfahren.)
In unserem Fall soll uns zunächst nur die Farbverteilung auf der Vorder- und Rückseite des Turms interessieren. Sie könnte beispielsweise für die Farben rot (r), gelb (ge), blau (b) und grün (gr) so aussehen:

	Vorderseite	Rückseite
1. Würfel	r	ge
2. Würfel	ge	b
3. Würfel	gr	r
4. Würfel	b	gr

Dieser Zusammenhang läßt sich graphisch so verdeutlichen (Bild 5) oder in einem Bild darstellen (die Zahlen an den Verbindungslinien geben den entsprechenden Würfel an) (Bild 6):

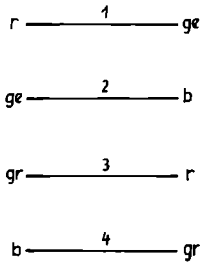


Bild 6

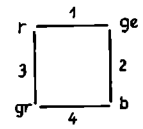


Bild 5

Bild 5: Schematische Darstellung des Farbzusammenhangs gegenüberliegender Turmseiten

Bild 6: Das in einem Graph zusammengefaßte Schema des Bildes 5

Natürlich könnte sich für den Zusammenhang ein ganz anderes Bild ergeben, wenn z. B. die beiden ersten Würfel eine unveränderte Farbaufteilung haben, aber beim dritten Würfel sich lediglich die Farbe grün und beim vierten Würfel die Farben blau und rot auf Vorder- und Rückseite gegenüber liegen (Bild 7):

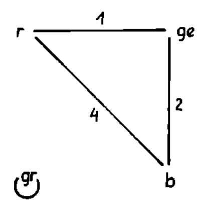


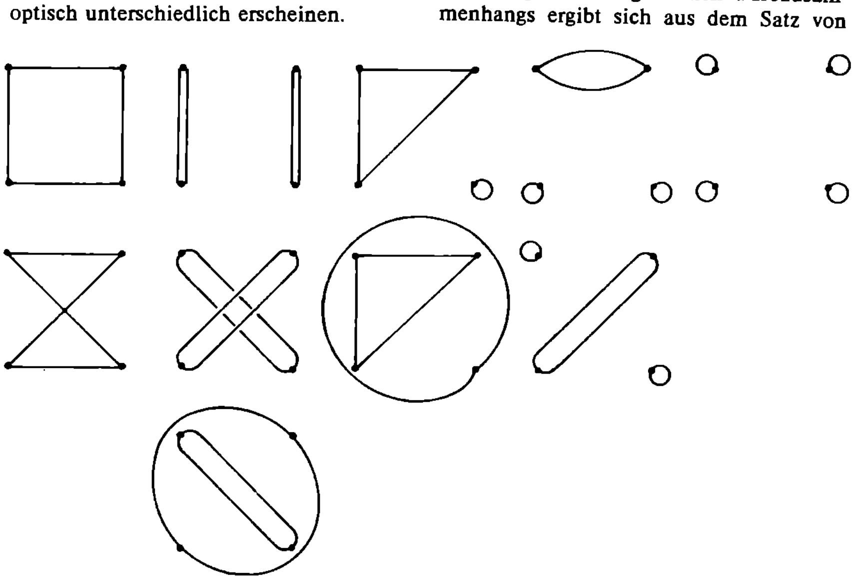
Bild 7: Ein weiterer möglicher Graph

Bild 8: Die fünf Typen möglicher Graphen für den Farbzusammenhang. Untereinander gezeichnete Graphen gehören zum gleichen Typ, auch wenn sie optisch unterschiedlich erscheinen.

Aber alle solche Bilder des Zusammenhangs der Farben, ein sogenannter Graph, weisen einige Merkmale auf, die für eine Farbverteilung auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen charakteristisch sind. Es ist klar, daß jeder Würfel genau einmal im Graph erscheinen muß. Das bedeutet, die Verbindungslinien zwischen den vier Farben tragen die Zahlen 1 bis 4 genau einmal.
Das Katzenjammerspiel verlangt, daß sowohl Vorder- als auch Rückseite jede Farbe genau einmal enthält. Es ist damit ein Graph unmöglich, in dem eine der Farben nicht erscheint.
Weiter gilt noch dieser einfache Sachverhalt. Von einer Farbe gehen genau zwei verschiedene Verbindungslinien weg oder eine Verbindungslinie bildet eine Schlaufe. Die Begründung ergibt sich wie folgt: Weist eine Farbe gar keine oder nur eine Verbindungslinie auf, so würde sie auf keiner oder nur einer Seite vorkommen. Wären jedoch mehr als zwei Verbindungslinien für eine Farbe vorhanden, so müßte diese insgesamt wenigstens dreimal auf Vorder- und Rückseite auftreten. Beide Fälle sind ausgeschlossen, wenn wir von einer Lösung ausgehen, womit nur die genannten Möglichkeiten übrig bleiben. Der Graph für den Farbzusammenhang zweier gegenüberliegender Seiten eines die Farbbedingung erfüllenden Turms muß damit strukturell folgendes Aussehen haben (Bild 8).

Aufsuchen der Lösung

Nachdem wir uns über die zu erwartende Struktur des Graphen für den Farbzusammenhang *gegenüberliegender* Seiten des Turms klar geworden sind, wollen wir den Graphen zeichnen, der den Farbzusammenhang *aller* Seiten für alle Würfel darstellt. In diesem alle Farbzusammenhänge wiedergebenden Graphen müssen dann – Lösbarkeit vorausgesetzt – auch die Graphen für die eben betrachteten Farbverteilungen als Teilgraphen zu finden sein.
Der Graph des allgemeinen Farbzusammenhangs ergibt sich aus dem Satz von



Typ I   Typ II   Typ III   Typ IV   Typ V

Raumkreuzen; für Bild 4 in dieser Form (Bild 9). Bei anderen Farbaufteilungen als in Bild 4 fällt er natürlich anders aus.

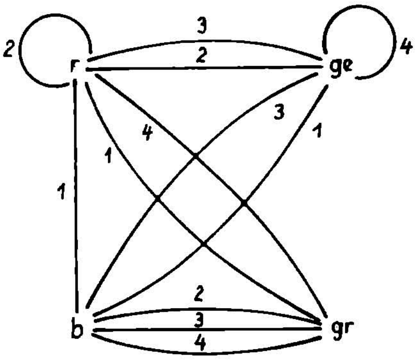


Bild 9: Der Graph des Farbzusammenhangs aller Seiten für die in Bild 4 gegebene Farbaufteilung dieser Würfel

Wir suchen jetzt in dem allgemeinen Graphen zwei verschiedene Teilgraphen der in Bild 8 gezeigten Struktur. Durch diese Teilgraphen ist die Farbaufteilung für Vorder- und Rückseite sowie die restlichen Seitenflächen gegeben. Verschiedene Teilgraphen bedeutet: Wenn ein Teilgraph z.B. die Verbindungslinie 1 von blau zu gelb enthält, so darf sie der andere nicht mehr aufweisen (denn die Farben blau und gelb können beim Würfel 1 entweder nur auf Vorder- und Rückseite oder nur auf den restlichen Seitenflächen einander gegenüberliegen.

Weil in dem Graphen des Bildes 9 nur zwei Schlaufen erscheinen, kann der Typ V als Teilgraph nicht auftreten. Auch der Typ IV kommt als Teilgraph nicht in Frage, denn für beide Schlaufen werden die Verbindungslinien 2 und 4 benötigt, so daß für die erforderlichen doppelten Verbindungslinien zwischen Blau und Grün von 2, 3 und 4 lediglich 3 möglich ist und damit 1 im Teilgraphen fehlt. Der Typ III ist ebenfalls auszuschließen.

Zunächst kann die einzelne Schlaufe nur bei Gelb erscheinen, denn für eine Schlaufe bei Rot gibt es die erforderliche geschlossene Verbindung der drei restlichen Farben nicht. Ist die Schlaufe bei Gelb plaziert, so scheidet im weiteren die Verbindungslinie 4 aus. Damit kommt die geschlossene Verbindung für die drei verschiedenen Farben nur mit einer doppelten Verbindungslinie 1 zustande, was nicht erlaubt ist. Der Typ II läßt für Rot doppelte Verbindungen nur nach Gelb oder Grün zu. Betrachten wir die beiden Fälle. Eine doppelte Verbindung Rot-Gelb erfordert die Linien 2 und 3, womit die doppelte Verbindung Blau-Grün aus 1 und 4 bestehen müßte. Linie 1 fehlt aber im Graphen. Entsprechend erfordert die doppelte Verbindung von Rot-Grün die Linien 1 und 4, und für die Verbindung Blau-Gelb fehlt die Linie 2. Also entfällt auch Typ II.

Beim Typ I lassen sich folgende Ansätze für die sich kreuzenden Verbindungslinien machen (Bild 10). Die punktierten Linien geben die möglichen Ergänzungen für die beiden ersten Fälle an, der letzte Ansatz

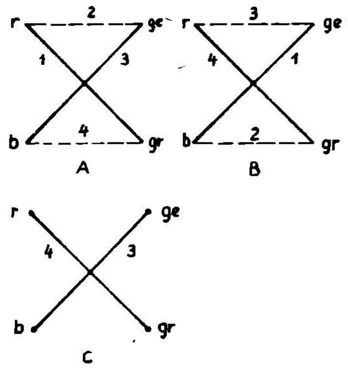


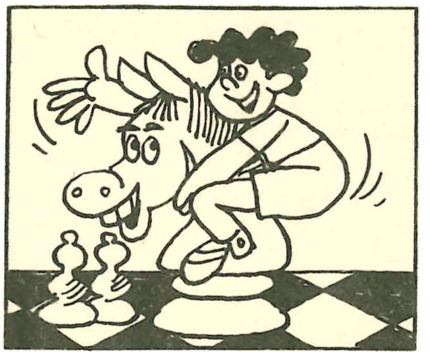
Bild 10: Ansätze für Teilgraphen

führt zu keiner Lösung (weil die 1 nicht erscheinen kann). Wenn wir die Variante *A* für Vorder- und Rückseite und die Variante *B* für die beiden anderen Seitenflächen die Farbaufteilung liefern lassen, erhalten wir folgende Lösung:

	Vorder-seite	Rück-seite	rechte Seite	linke Seite
1. Würfel	r	gr	b	ge
2. Würfel	ge	r	gr	b
3. Würfel	b	ge	ge	r
4. Würfel	gr	b	r	gr

Beim Aufstellen der Tabelle ist zu beachten, daß die Farbbedingung, alle Farben vorhanden, für jede Seitenwand erfüllt wird. Ordnen wir also, wie in der Tabelle, dem ersten Würfel vorn die rote Farbe zu, so muß zwangsläufig für den zweiten Würfel rot auf die Rückseite bzw. wir hätten es anders herum machen müssen (erster Würfel vorn grün, zweiter Würfel vorn rot). Die durch die Teilgraphen vermittelten Farbzusammenhänge sind tatsächlich in unserem Fall so, daß sich die Farbbedingungen erfüllen lassen. Das zeigt die aufgestellte Tabelle. (Dieser Sachverhalt rechtfertigt logisch unsere Methode, die von der Annahme einer Lösung ausging. Die Teilgraphen konnten damit nur notwendige Bedingungen widerspiegeln. Die aufgestellte Tabelle beweist, daß sich diese notwendigen Bedingungen zu hinreichenden erweitern ließen.)

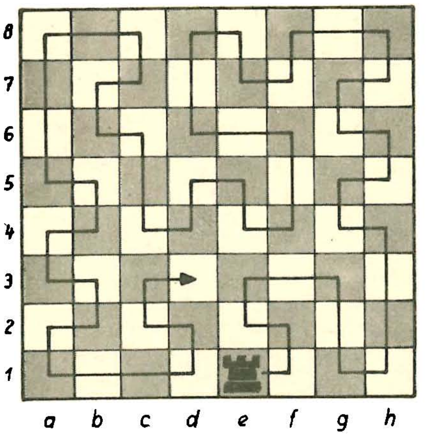
Wir hätten eine andere Tabelle erhalten, wenn wir wie angedeutet, beim ersten Würfel eine grüne Vorderseite gewählt hätten. Beim weiteren Abarbeiten des Teilgraphen wäre insgesamt die Vorder- und Rückseite vertauscht worden. Falls die rechte und linke Seitenwand dabei die Farben nicht geändert haben, so ergibt sich eine neue, optisch unterschiedliche Lösung. Vertauschen wir jedoch in diesen beiden Lösungen jeweils die Färbung der rechten und linken Seitenwände, so erscheinen keine neuen Lösungen, da sich die neuen Farbanordnungen durch Drehungen um 180° (um die Längsachse des Turms) ineinander überführen lassen. Gleichzeitiges Vertauschen gegenüberliegender Farben läuft auf ein Drehen um 180° hinaus. Unser Puzzle hat folglich nur zwei wesentliche Lösungen, aus denen sich durch Ändern der Reihenfolge der Würfel bzw. Kugeln neue Lösungen ableiten lassen. *R. Thiele*



Eine lange Turmwanderung übers Schachbrett

Aufgaben mit Turmwanderungen über oder Turmaufstellungen auf dem Schachbrett sind recht faszinierend, weil sie zwar einfach darzustellen, die Lösungen aber verhältnismäßig schwierig zu finden sind. So zeigt sich, daß viele kombinatorische Aufgaben aus dem Gebiet der angewandten Mathematik auf das Problem führen, bestimmte Aufstellungen von Türmen auf dem Schachbrett abzuzählen. Der amerikanische Mathematiker W. J. Riordan verbindet deshalb in seinem Buch „Einführung in die kombinatorische Analysis" den Schachausdruck „Turm" mit dem rein mathematischen Begriff „Polynom" zum neuen Begriff „Turmpolynom".

Wir möchten uns nun einer Schachknobelei von Henry E. Dudeney zuwenden. Gesucht wird eine Turmwanderung über das gesamte Schachbrett vom Feld e1 aus, wobei der Turm jedes Feld nur einmal betreten darf, aber möglichst viele Richtungsänderungen zu machen hat. Die Turmwanderung kann auf einem beliebigen Feld enden.



Die abgebildete Lösungsmöglichkeit zeigt 50 gerade Wegstrecken (Züge) des Turmes. Die Zahl der geraden Wegstrecken kann bei einer günstigeren Turmwanderung noch erhöht werden.

Wie sieht eine Wanderroute des Turmes vom Feld e1 bei maximaler Anzahl gerader Wegstrecken über alle Felder des Schachbrettes aus? *H. Rüdiger*

alpha-Märchen: Prinz Epsilon in Nöten

Dieses mathematische Märchen dachten sich die Mitglieder des Kreisklubs Mathematik in Halle-Süd aus. *alpha* stellte ihn im Heft 1/88 vor.

Die mit dem Kleincomputer gelöste Aufgabe könnt ihr auch mit dem Schulrechner SR 1 nachvollziehen.

In Syratanien lebte einst ein König mit einer wunderhübschen Tochter. Alle Prinzen, welche bisher um die Hand der Tochter anhielten, scheiterten an der Aufgabe, drei Prüfungen zu bestehen. Bis eines Tages Prinz Epsilon nach Syratanien fuhr und um die Hand der schönen Prinzessin anhielt...

Die erste Aufgabe teilen wir euch hier mit:

Hinter den sieben Hügeln und weiteren sieben Seen wartet eine Fee mit einer Kiste Goldstaub und einem Stück rechteckigen Karton von 2mal sieben Zentimeter Länge und sieben Zentimeter Breite. Der Prinz soll aus dem Karton durch Abschneiden quadratischer Stücke eine oben offene Schachtel basteln, so daß er die größtmögliche Menge Goldstaub zur Prinzessin befördern kann.

Helft dem Prinzen Epsilon! Da euch Sätze und Methoden aus der höheren Mathematik noch nicht bekannt sind, löst die Aufgabe (näherungsweise) mit dem SR 1, gebt die Länge der abzuschneidenden Quadrate auf Millimeter genau an.

Wir wollen uns an die Lösung *heranpirschen*. Es ist sicher gut, wenn ihr euch eine Skizze anfertigt und aus Zeichenkarton für einige Spezialfälle die Schachtel bastelt (Bild 1). Ihr erkennt:

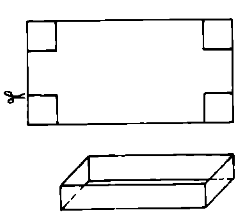


Bild 1

Schneidet man sehr kleine Quadrate ab, so hat die Schachtel zwar eine große Grundfläche, aber nur eine geringe Höhe. Sind die abgeschnittenen Quadrate aber groß, so entsteht eine Schachtel mit hohen Seitenwänden, die jedoch nur eine kleine Grundfläche besitzt. Die beste Lösung wird „irgendwo in der Mitte" liegen.

Nun wollen wir eine Formel aufstellen:

Die Schachtel wird x cm hoch, ihre Grundfläche ist $(14-2x)$ cm lang und $(7-2x)$ cm breit (Bild 2). Folglich gilt für das Volumen V der Schachtel

$V = x(14-2x)(7-x)$. Für jedes gewählte x liefert diese Formel einen Volumenwert V (man schreibt dafür auch $V(x)$). Die abzuschneidenden Quadrate können nicht ganz beliebig sein, offenbar muß $0 \leqq x \leqq 3{,}5$ gelten.

Berechne jetzt die Volumenwerte $V(x)$ für $x = 0$; $x = 0{,}5$; $x = 1$; ...; $x = 3$; $x = 3{,}5$ und trage diese in einem x-V-Diagramm ein (Bild 3). Die drei Linearfaktoren x, $(14-2x)$ bzw. $(7-2x)$ kann man entweder im Kopf berechnen und mit dem SR 1 multiplizieren oder jeweils auch auf dem SR 1 berechnen und auf dessen Speicher die Teilprodukte x, $(14-2x)$ bzw. $(7-2x)$ zwischenspeichern!

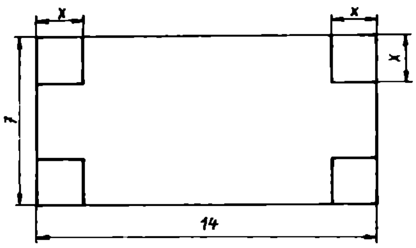


Bild 2

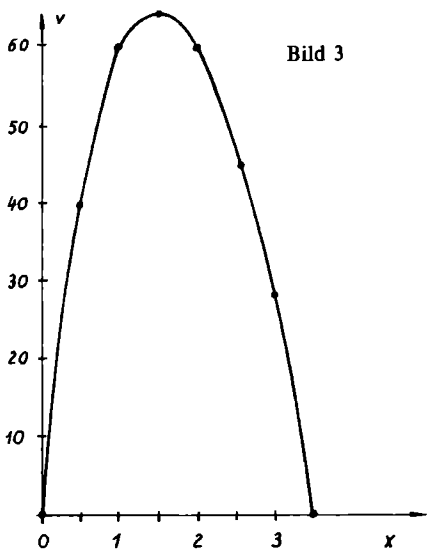


Bild 3

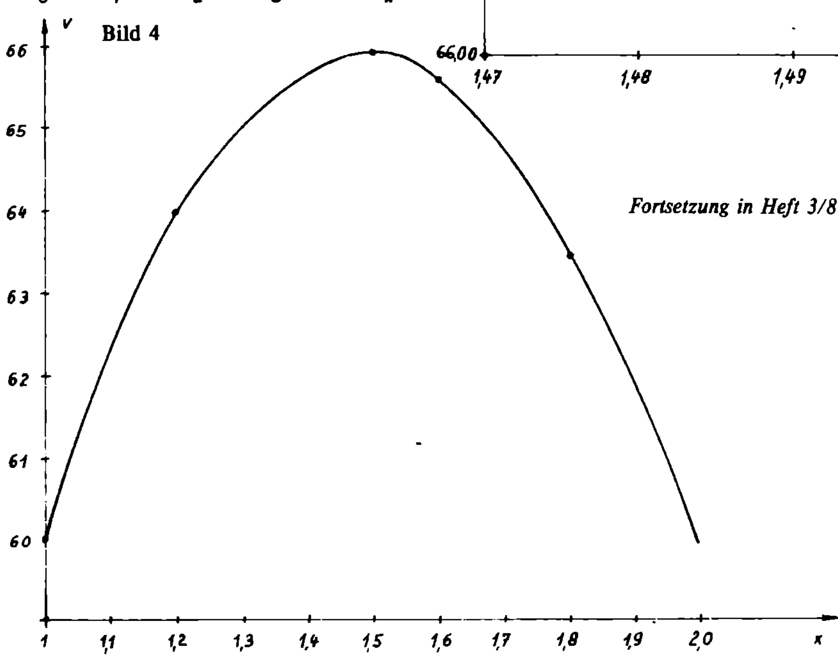


Bild 4

Nun nehmen wir an, daß sich das Volumen für reelle Zahlen x, die nicht Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind, nicht sprunghaft ändert. Das bedarf eigentlich einer Diskussion der Funktion $V(x)$! Wir verbinden die eingetragenen Punkte durch eine Kurve und erkennen, daß in der Nähe von $x = 1{,}5$ das größte Volumen erzielt wird.

Jetzt wiederholen wir unser Vorgehen, beschränken uns aber auf $1 \leqq x \leqq 2$ und berechnen die Volumenwerte für $x = 1{,}2$; $x = 1{,}3$; $x = 1{,}4$; ...; $x = 1{,}8$.

Diese Werte tragen wir in das Koordinatensystem ein (Bild 4). Verbindet man die eingezeichneten Punkte, so ist zwischen $x = 1{,}4$ und $x = 1{,}6$ die Stelle mit dem größten Volumenwert ablesbar. Zur Sicherheit verfeinern wir noch einmal und berechnen einzelne Volumenwerte für $1{,}4 \leqq x \leqq 1{,}6$ (Bild 5).

Man sieht, daß für Quadrate mit der Seitenlänge $x = 1{,}48$ cm das Volumen der Schachtel am größten wird. Mit der geforderten Genauigkeit erhält man also $x = 1{,}5$ cm.

Für das wiederholte Ausrechnen der Volumenwerte nach ein und derselben Vorschrift ist nun ein Kleincomputer ein geeignetes Hilfsmittel. Man kann dem Computer auch das Verkleinern der Intervalle und das Zeichnen der Kurve überlassen, natürlich muß man es ihm in geeigneter Weise (BASIC-Programm) befehlen!

Übrigens: Mit anderen Methoden erhält man als Lösung: $x = 1{,}4792\ldots$

U. Siebert

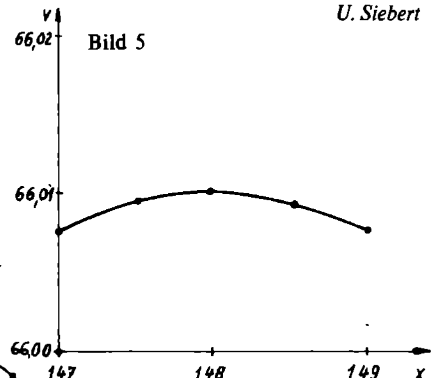


Bild 5

Fortsetzung in Heft 3/88

Wo finde ich den Regenbogen?

Wenn es regnet und zugleich die Sonne scheint, kann man damit rechnen, einen Regenbogen zu sehen. Unter sehr günstigen Umständen sieht man dann sogar zwei Bögen. Man braucht aber gar nicht das gesamte Himmelsgewölbe nach dieser schönen Erscheinung abzusuchen, denn, wenn der Regenbogen überhaupt zu beobachten ist, so ist das nur an ganz bestimmten Stellen der Fall. Meyers Lexikon (Leipzig 1980) gibt darüber Auskunft: „Der Regenbogen entsteht durch Brechung, Reflexion und Beugung des weißen Sonnenlichts in den Regentropfen. Im Hauptregenbogen (42° Abstand vom Sonnengegenpunkt) wird eine Folge der Regenbogenfarben Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett (von außen nach innen) erzeugt. Im Nebenregenbogen (51° Abstand) ist die Farbfolge umgekehrt.“ Wir wollen uns nun mit den Fragen beschäftigen, warum es sich gerade um die 42° bzw. 51° handelt und warum die Farbreihenfolge im Nebenregenbogen umgekehrt ist.

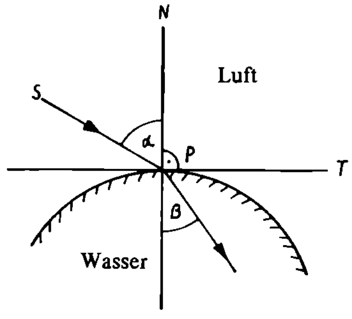
Zunächst wollen wir die physikalischen Voraussetzungen nennen, dann das zugehörige mathematische Problem lösen und schließlich einige offengebliebene Fragen diskutieren.

Die Brechungszahl für Wasser ist $n = 4/3$ und für Luft = 1. (Da wir das Ergebnis nur auf 1° genau herleiten wollen, können wir schon hier auf bequeme Werte runden.)

Das Brechungsgesetz lautet: Beim Eintritt eines Lichtstrahls S aus Luft in Wasser gilt für die Winkel α und β (siehe Bild 1)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4}{3}.$$

Bild 1



Dabei ist T die an den Durchstoßpunkt P angelegte Tangente, und N (die Normale) steht in P senkrecht auf T. Diese Normale ist der verlängerte Radius durch P, wenn wir von kugelförmigen Regentropfen ausgehen; der Nachweis, daß diese Voraussetzung gerechtfertigt ist, würde den Schulstoff weit übersteigen, und wir verweisen hier nur darauf, daß wir das richtige Ergebnis herleiten werden. Schließlich werden wir geradlinige Lichtausbreitung annehmen, da die durch die unterschiedliche Luftdichte hervorgerufene Krümmung des Lichtstrahls in der Atmosphäre vernachlässigbar klein ist.

Jetzt kommen wir zum mathematischen Problem: Wir bezeichnen den Winkelabstand eines Punktes des Himmelsgewölbes zum Sonnengegenpunkt mit φ (siehe Bild 2).

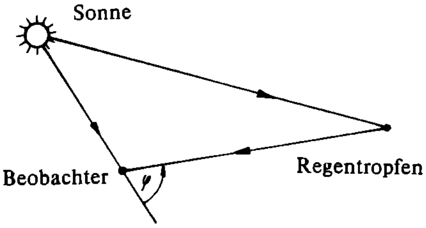


Bild 2

Für die Sonne selbst gilt folglich $\varphi = 180°$. Zunächst betrachten wir einen Lichtstrahl, der zentral auf einen Regentropfen fällt, also $\alpha = 0$ in Bild 1, d. h., die Verlängerung des Strahls S geht durch den Kugelmittelpunkt. Wird er im Tropfen geradzahlig oft reflektiert, hat er natürlich nach Austritt dieselbe Richtung wie zuvor, also $\varphi = \pm 180°$. (Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 360° ändert ja geometrisch nichts.) Bei ungeradzahliger Reflexionszahl ergibt sich $\varphi = 0°$. Für alle anderen Lichtstrahlen wird durch den Strahl S und den Kugelmittelpunkt eine Ebene E definiert. Wir benutzen jetzt die Voraussetzung, daß der Regentropfen kugelförmig ist.

Damit können wir das zunächst räumliche Problem auf ein ebenes zurückführen: Der Schnitt der Ebene E mit dem Regentropfen ist dann ein Kreis. Die Bilder 1 und 3 zeigen diese Schnittebene. Die Tangente T in Bild 1 ist folglich der Schnitt der Tangentialebene in P an den Tropfen mit der Ebene E. Da das Problem der weiteren Ausbreitung dieses Lichtstrahls bezüglich einer Spiegelung an E symmetrisch ist, bleibt der Strahl ganz in dieser Ebene. Wir brauchen also nur noch den Lichtweg in der Ebene E zu untersuchen.

Im ersten Fall untersuchen wir nun die Strahlen, die an der Tropfeninnenwand genau einmal reflektiert werden und danach austreten (siehe Bild 3). Wir bestimmen schrittweise die Änderung von φ: Anfangs ist $\varphi = 180°$. Nach der ersten Brechung bei P ist

$\varphi = 180° + \beta - \alpha$, nach der Spiegelung bei Q ist $\varphi = 3\beta - \alpha$ und nach dem Austritt schließlich $\varphi = 4\beta - 2\alpha$.

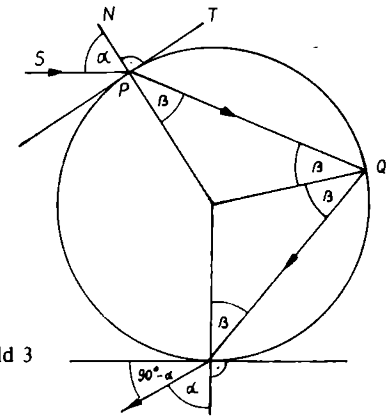


Bild 3

Mit Hilfe des Brechungsgesetzes soll jetzt β eliminiert werden. Dazu definieren wir die Funktion $\arcsin x$ für

$|x| \leqq 1$ durch $x = \sin(\arcsin x)$,

$-90° \leqq \arcsin x \leqq 90°$ und erhalten

$\beta = \arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\alpha\right)$. Wegen

$\frac{3}{4}|\sin\alpha| \leqq 1$ ist β stets definiert

und wir erhalten schließlich

$$\varphi = 4\arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\alpha\right) - 2\alpha.$$

Für $\alpha = 0°$ ergibt sich $\varphi = 0°$ in Übereinstimmung mit der vorherigen Überlegung zum zentralen Auffall. Betrachten wir nun den Fall

$0° < \alpha < 90°$. ($\alpha = 90°$ ergibt für β den Winkel für Totalreflexion.)

Die Funktion $\varphi(\alpha)$ ist nicht konstant.

Beweis (indirekt): Wäre $\varphi(\alpha)$ konstant, so wäre $\varphi(\alpha) = 0$ für jedes α, da $\varphi(0) = 0$ ist. Es müßte also für jedes α gelten

$$4\arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\alpha\right) = 2\alpha.$$

Wir teilen diese Gleichung durch 4 und wenden auf beide Seiten die Sinusfunktion an und erhalten

$$\frac{3}{4}\sin\alpha = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Diese Gleichung müßte für alle α gelten. Für $\alpha = 60°$ gilt sie aber nicht. Widerspruch, w. z. b. w.

Daß die Funktion $\varphi(\alpha)$ nicht konstant ist, ist überraschend, da doch nach unserer Herleitung φ die Richtung des Hauptregenbogens angeben soll. Deshalb wollen wir jetzt die Gestalt der Funktion $\varphi(\alpha)$ genauer betrachten. Es ergibt sich, daß sie in einem relativ großen α-Intervall nahezu konstant ist: Im Intervall

$53° \leqq \alpha \leqq 66°$ ist $41° \leqq \varphi \leqq 42°$.

Genauer: Das Maximum der Kurve $\varphi(\alpha)$ liegt bei $\alpha = 59{,}4°$ mit $\varphi = 42{,}03°$.

Das läßt sich mittels einer Wertetabelle oder schneller unter Zuhilfenahme der Differentialrechnung ermitteln.

▲1▲ Man zeige, daß es kein weiteres derartiges α-Intervall (mit einer Länge $\geqq 4°$) gibt, in dem $\varphi(\alpha)$ fast (bis auf 1°) konstant ist.
Im zweiten Fall untersuchen wir nun die Strahlen, die genau zweimal an der Tropfeninnenwand reflektiert werden. Wir müssen also zum φ-Wert des 1. Falls noch $2\beta - 180°$ addieren. Wir erhalten

$$\varphi = 6 \arcsin\left(\frac{3}{4} \sin\alpha\right) - 2\alpha - 180°.$$

Für $\alpha = 0°$ ergibt sich wieder richtig $\varphi = -180°$. Im Intervall
$67° \leqq \alpha \leqq 76°$ gilt
$-52° \leqq \varphi \leqq -51°$, und das Maximum der Kurve $\varphi(\alpha)$ liegt bei $\alpha = 71{,}8°$ mit $\varphi = -50{,}98°$. Damit ist der erste Teil der Aufgabe, die Herleitung der Werte 42° für den Haupt- und 51° für den Nebenregenbogen auf 1° genau, erledigt. Für den zweiten Teil, die Reihenfolge der Farben, müssen wir wissen, daß die Brechungszahl n für rotes Licht geringfügig kleiner ist als die für violettes Licht, um nur die Randfarben zu nennen. Damit wird φ für rotes Licht geringfügig größer, was im 1. Fall zu einer Vergrößerung von $|\varphi|$ (Rot ist außen) und im 2. Fall zu einer Verkleinerung von $|\varphi|$ (Rot ist innen) führt.

Abschließend wollen wir noch einige Fragen klären:
1. Warum betrachten wir nicht den Fall, daß der Lichtstrahl an der Außenwand des Tropfens reflektiert wird?
Antwort: Wir erhalten dann $\varphi = 2\alpha$, also eine Funktion, die in keinem Teilintervall fast konstant ist.
2. Warum betrachten wir nicht den Fall, daß der Lichtstrahl innen überhaupt nicht oder mehr als zweimal reflektiert wird?
Antwort: Das errechnete φ ist so groß, daß wegen der Nähe der Sonne kein Regenbogen zu sehen ist, bei mehr als drei Reflexionen ist der Lichtintensitätsverlust schon so groß, daß nichts mehr zu sehen ist. Der Nebenregenbogen mit zwei Reflexionen ist schon deutlich schwächer als der Hauptregenbogen mit einer.

▲2▲ Man berechne die φ-Werte bei genau drei bzw. bei gar keiner Innenreflexion. In diesen Richtungen müßten theoretisch ganz schwache Bögen zu sehen sein.
3. Warum kann man im Sommer um die Mittagszeit keinen Regenbogen sehen?
Antwort: Weil dann die Richtungen, die $\varphi = 42°$ bzw. 51° entsprechen, unterhalb des Horizonts liegen.

Mit vorliegenden Zeilen sollte gezeigt werden, wie man ein physikalisches Problem (Erklärung des Regenbogens) in ein geometrisches (Untersuchung trigonometrischer Funktionen) umwandeln kann, und wie man erst durch sinnvolles Runden (Fast-Konstanz im 1°-Intervall anstelle von Konstanz) zum gewünschten Ergebnis geführt wird.

H.-J. Schmidt

Zum 101. Geburtstag

Eine Aufgabe von Prof. em. Dr. habil. Roman Roth

Jena

Im Jahre 1965 stellte Prof. Roman Roth mathematisch interessierten Schülern die nachfolgende Aufgabe.

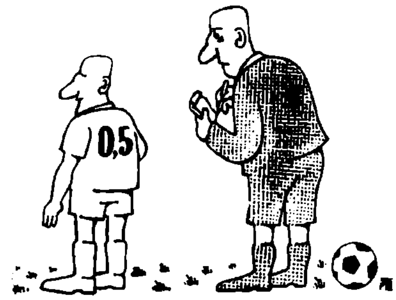
▲2907▲ Durch drei auf einer Geraden g liegende Punkte U, V, W sind drei Geraden so zu legen, daß der Schwerpunkt des von diesen Geraden gebildeten Dreiecks ebenfalls auf g liegt.

Kurzbiographie

Am 8. April 1887 als Sohn eines Schlossers geboren, absolvierte er zunächst die 8klassige Grundschule seiner Heimatstadt Charlottenburg, besuchte anschließend Präparandenanstalt und ein Lehrerseminar und war ab 1908 Volksschullehrer, ab 1911 Lehrer an der staatlichen Präparandenanstalt in Cottbus. Noch vor dem ersten Weltkrieg erwarb er die Lehrbefähigung als Turn- und Sportlehrer und legte die Prüfung für die Lehrbefähigung an Mittelschulen ab.
Den ersten Weltkrieg machte er als Sanitäter mit. Im Jahre 1921 bestand er das Staatsexamen für den Dienst in der preußischen Lehrerbildung, wurde Seminarlehrer und Seminaroberlehrer.
An der Berliner Universität hörte er Vorlesungen in Mathematik, Physik, Philosophie und Pädagogik, so die Grundlage für seine Promotion legend, die er 1926 in Freiburg i. Br. bei L. Heffter verteidigte.
Als die preußische Regierung die Lehrerbildung einschränkte, wurde R. Roth 1925 Lehrer am Gymnasium in Jüterbog. Bis 1945 war Prof. Roth in verschiedenen Städten als Gymnasiallehrer tätig. Nebenbei hörte er Vorlesungen in Medizin. Er, der sich nach dem ersten Weltkrieg zunächst der USPD, später der SPD angeschlossen hatte, hielt sich von den Nazis konsequent fern.
Nach der Zerschlagung des Faschismus nahm er als Direktor des Schulwissenschaftlichen Instituts in Leipzig und als Leiter des Lehrerbildungsheimes Abtnaundorf am Aufbau unserer Lehrerbildung teil.
Im Februar 1947 habilitierte er sich an der Pädagogischen Fakultät der Universität Jena, wurde im September 1947 dort zum Dozenten, 1950 zum Professor mit Lehrauftrag und 1952 zum Professor mit vollem Lehrauftrag für die Methodik des Mathematikunterrichts berufen. 1954 wurde Prof. Roth emeritiert.
Die Liste seiner wissenschaftlichen Veröffentlichungen umfaßt nahezu 40 Titel. Bis ins hohe Alter befaßte sich der Jubilar mit geometrischen Problemen und verfolgte die Entwicklung der Mathematik. Noch heute verläßt ein Besucher sein Haus in Jena-Auerbach nicht, ohne Anregungen für seine wissenschaftliche und pädagogische Arbeit erhalten zu haben.

Auszug aus:
Mathematische Schüleraufgaben
(für R. Roth ein „Königsweg").
Autor: Prof. Dr. Th. Glocke, Erfurt.
Zeitschrift: Sozialistische Universität, 15/87, Jena

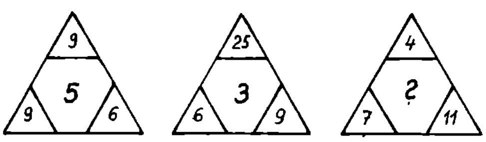
In freien Stunden · alpha-heiter



aus: Eulenspiegel,
Borislaw Georgiew (Sofia)

Zahlenlogik

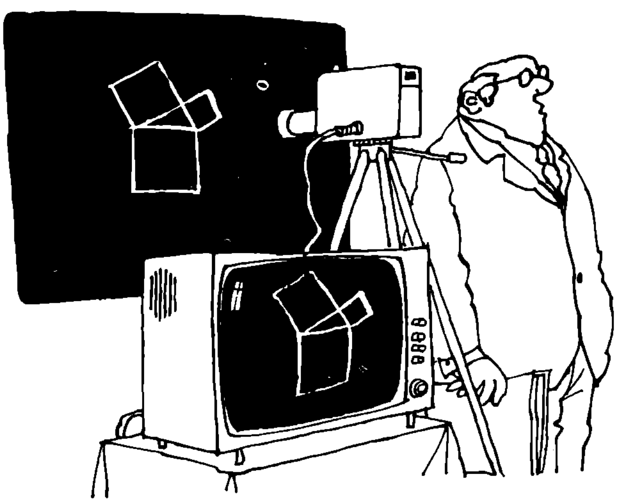
Zwischen den vier Zahlen der beiden Dreiecke links und Mitte besteht jeweils der gleiche Zusammenhang. Analog dazu ist die im rechten Dreieck fehlende Zahl zu bestimmen. *aus: NBI, Berlin*



Ein schlauer Händler

Im Basar gibt es Krach. Ali will eine große Lieferung mit Gold bezahlen. Sein Geschäftspartner weiß aber, daß in einem der zehn Säcke mit je 20 Goldstücken falsche Münzen sind. Sie wiegen statt zehn nur neun Gramm. Der Händler ist ein kluger Mann. Mit einer einzigen Wägung stellt er fest, in welchem Säckchen die falschen Münzen sind. *aus: WE, Köln*

In einem Zug



„Hat noch jemand Fragen?"

aus: Pythagoras, Groningen

Aufgabe: Die Figur (Satz des Pythagoras) ist in einem Zug nachzuzeichnen ohne eine Linie mehrfach zu zeichnen. *L.L.*

Drei Logeleien

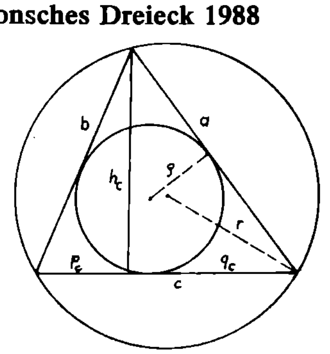
a) In jeder von fünf Kisten befinden sich genau die gleiche Anzahl von Äpfeln. Entnimmt man jeder Kiste 60 Äpfel, so bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig, wie vorher in zwei Kisten waren. Ermittle die Anzahl aller Äpfel, die sich anfangs in den Kisten befanden! (OJM, Kl. 5)

b) In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen Kugeln herausnehmen. Ihre Anzahl will sie so wählen, daß sie mit Sicherheit erreicht, daß sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von der gleichen Farbe befinden. Sie meint: „Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen." Birgit meint: „Es genügen dazu sogar nur 13 Kugeln." Cornelia behauptet: „Es genügen dafür 12 Kugeln."
Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!
(OJM, Kl. 6)

c) Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und 1 schwarze. Er soll sie in zwei Kästchen A und B legen, und zwar in A drei und in B vier. Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästchen an! (Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.)
(OJM, Kl. 8)

Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Heronsches Dreieck 1988



$a = 15 = 19 - \sqrt{8+8} = -1^9 + 8 + 8$

$b = 13 = 1 \cdot 9 + \sqrt{8+8}$

$c = 14 = 1 + 9 + \sqrt{8+8} = 1 - \sqrt{9} + 8 + 8$

$s = 21 = 19 + \sqrt{\sqrt{8+8}}$

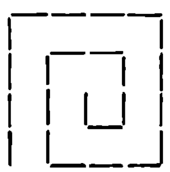
$$A = 84 = -1 - \sqrt{9} + 88$$
$$h_c = 12 = \sqrt{19 \cdot 8 - 8}$$
$$p_c = 5 = \sqrt{1 \cdot 9 + 8 + 8}$$
$$q_c = 9 = \sqrt{1 + 9 \cdot 8 + 8} = 1 \cdot (9 - 8) + 8$$
$$= 4 = \sqrt{1^9 \cdot (8 + 8)}$$
$$r = 8\frac{1}{8} = (1^9 + 8 \cdot 8) : \sqrt{1^9 \cdot 8 \cdot 8}$$
$$= (1^9 + 8 \cdot 8) : (1 - 9 + 8 + 8)$$

Ing. H. Decker, Köln

Hölzchenspiele

Bilde durch Umlegen von
a) 4 Hölzchen 2 gleich große Quadrate;
b) 4 Hölzchen 3 Quadrate (zwei Lösungen);
c) 12 Hölzchen 2 kleine und 2 große Quadrate!

L. L.



Aus dem Geschirrschrank

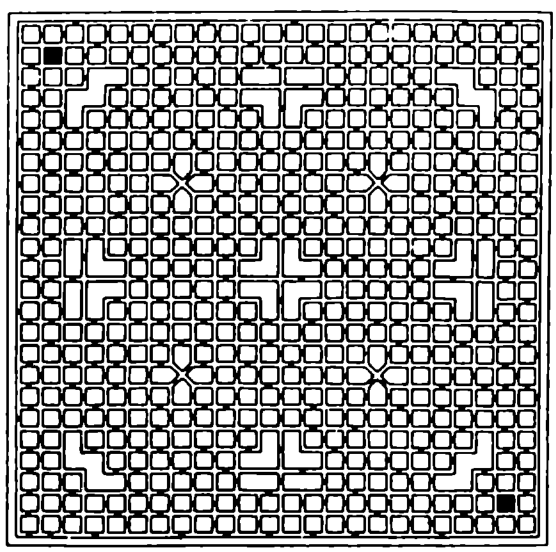
In einem Geschirrschrank befinden sich unter anderem etliche gleiche Teller, mehrere gleiche Gläser, einige gleiche Flaschen und zwei gleiche Krüge.
Ein Massenvergleich ergibt folgendes:
- eine Flasche und ein Glas entsprechen einem Krug,
- eine Flasche entspricht einem Teller und einem Glas,
- zwei Krüge entsprechen drei Tellern.

In welchem Verhältnis stehen die Massen der genannten Gegenstände zueinander?

mitgeteilt von Ing. A. Körner, Leipzig

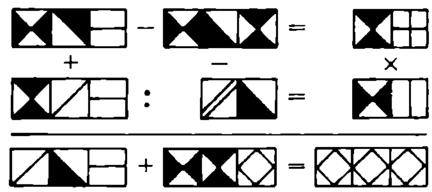
Labyrinth

Finde den Weg von einem zum anderen schwarz gekennzeichneten Quadrat! *aus: Füles, Budapest*

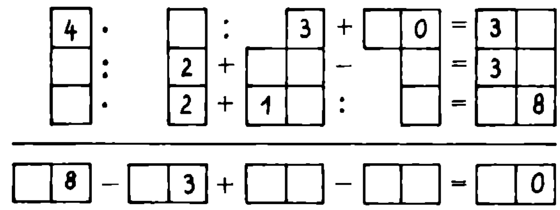


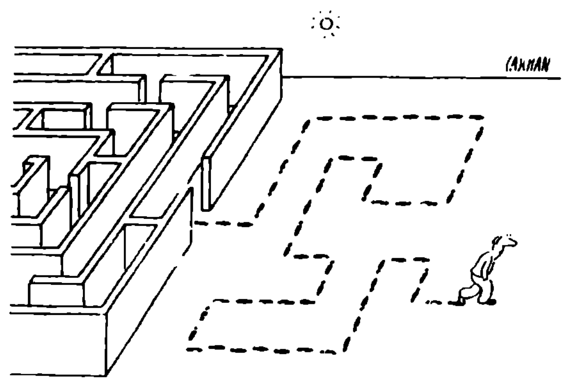
Kryptarithmetik

a)



b)

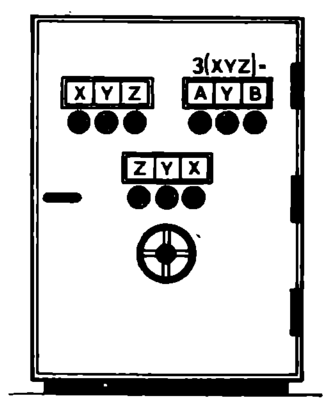




aus: Eulenspiegel, Juraj Cajchan (Schweden)

Der neue Tresor

Die Kaufhalle hat einen neuen Tresor bekommen, doch leider ist die Bedienungsanleitung verschwunden. Die drei Codezahlen zum Öffnen des Stahlschrankes stehen also nicht zur Verfügung.



Carmen, die bei der Abnahme anwesend war, erinnert sich aber an folgende Einzelheiten:
1. die Quersumme der ersten Zahl *XYZ* entsprach ihrem Alter, 18 Jahre;
2. die zweite Zahl war dreimal so groß wie die erste Zahl;
3. die dritte Zahl war um 99 kleiner als die zweite, außerdem war die Ziffernfolge der dritten Zahl genau umgekehrt wie die der ersten Zahl.
Wie lauten die drei Codezahlen?

aus: NBI, Berlin, Gedankentraining

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

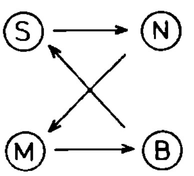
Aufgaben der Kreisolympiade

(18. 11. 87)

Olympiadeklasse 5

270521 Von Anja, Beate, Kerstin, Steffen und Maik wissen wir folgendes:
(1) Steffen ist kleiner als Kerstin und größer als Beate.
(2) Maik ist kleiner als Steffen und größer als Beate.
(3) Anja ist kleiner als Beate.
Ordne die Kinder nach ihrer Größe! Beginne mit dem größten Kind! Eine Begründung wird nicht verlangt.

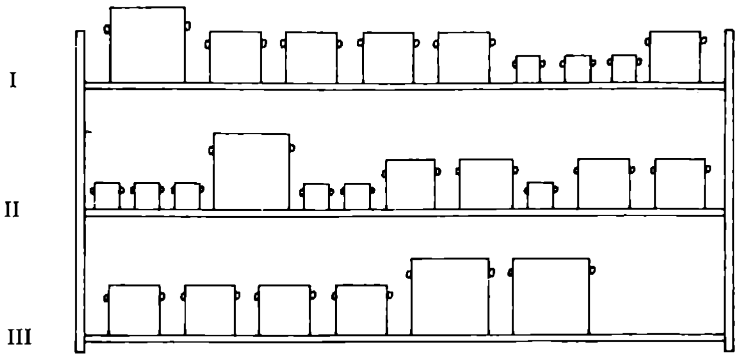
270522 Ein Tourist, der in Magdeburg (M) wohnt, möchte bei einer Rundreise jede der Städte Schwerin(S), Neubrandenburg (N) und Berlin (B) genau einmal aufsuchen und erst dann in seinen Wohnort zurückkehren.
Eine mögliche Reiseroute wäre von Magdeburg aus über Berlin, Schwerin und Neubrandenburg zurück nach Magdeburg (siehe Bild).



Gib alle Reiserouten an, die der Tourist unter den genannten Bedingungen wählen kann! Wieviel Reiserouten sind das insgesamt?
Eine Begründung wird nicht verlangt.

270523 In einer Olympiadeklasse wurde genau die Hälfte aller Teilnehmer mit einem Preis ausgezeichnet. Es gab nur erste, zweite und dritte Preise. Genau ein Achtel aller Teilnehmer erhielt einen ersten Preis. Genau ein Sechstel aller Teilnehmer erhielt einen zweiten Preis. In dieser Olympiadeklasse waren insgesamt mindestens 20, aber weniger als 30 Teilnehmer. Wieviel Teilnehmer genau waren in dieser Olympiadeklasse? Wie viele erste, zweite bzw. dritte Preise gab es darin? Gib an, wie du diese gesuchten Anzahlen eindeutig aus den obigen Angaben findest!

270524 Das Bild zeigt ein Regal, in dem Töpfe von genau drei verschiedenen Größen stehen. In jeder der Reihen I, II, III ergibt sich das gleiche Fassungsvermögen von genau 24 Litern.
Welches Fassungsvermögen hat jeweils ein Topf der verschiedenen Sorten?



Erkläre, wie sich für jede Topfsorte das Fassungsvermögen aus den Angaben über die Reihen I, II und III ergibt!
Überprüfe, daß bei deinen Ergebnissen sich wirklich für jede Reihe ein Fassungsvermögen von genau 24 Litern ergibt!

Olympiadeklasse 6

270621 Über einen 100-m-Lauf, den die drei Schüler Jens, Michael und Peter austrugen, wurden folgende Vorhersagen gemacht:
Frank sagte: „Jens oder Peter wird gewinnen."
Horst sagte: „Wenn Jens nicht gewinnt, dann gewinnt Michael."
Norbert sagte: „Wenn Michael gewinnt, dann wird Jens Zweiter."
Stefan sagte: „Michael wird schlechter abschneiden als Jens und Peter."
a) Nach dem Lauf wurde festgestellt:
Alle vier Voraussagen sind wahre Aussagen.
b) Nach dem Lauf wurde festgestellt:
Als einziger hatte Horst eine wahre Aussage gemacht.
Gib in beiden Fällen a), b) an, wer Erster, Zweiter bzw. Dritter wurde!
In beiden Fällen a), b) ist noch bekannt, daß Jens, Peter und Michael alle drei verschiedene Zeiten liefen.
Erkläre, wie du deine Angaben gefunden hast!

270622 a) Bei einem Wettkampf, an dem sich genau vier Mannschaften A, B, C und D beteiligten, spielte jede dieser Mannschaften gegen jede andere dieser Mannschaften genau ein Spiel.
Zähle diese Spiele auf!
b) Bei einem anderen Wettkampf spielte ebenfalls jede der teilnehmenden Mannschaften gegen jede andere der teilnehmenden Mannschaften genau ein Spiel. So kamen genau 21 Spiele zustande.
Wie viele Mannschaften nahmen insgesamt an diesem Wettkampf teil?
Zeige, daß bei der von dir angegebenen Anzahl von Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen!

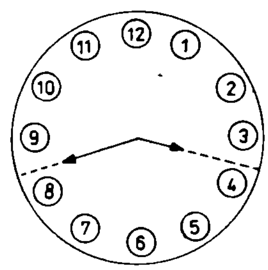
270623 a) Der Stundenzeiger einer Uhr (siehe Bild) zeigt um 3.42 Uhr in die Lücke zwischen den Zahlen 3 und 4, der Minutenzeiger in die Lücke zwischen 8 und 9. Dadurch wird das Zifferblatt so aufgeteilt, daß in einem Teil die Summe

$$4+5+6+7+8=30$$

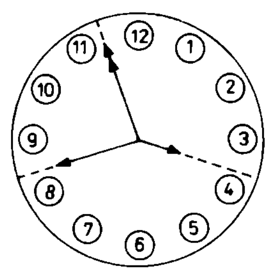
und im anderen Teil die Summe

$$9+10+11+12+1+2+3=48$$

steht.
Gesucht werden Uhrzeiten folgender Art: Jeder Zeiger zeigt in eine der zwölf Lücken zwischen benachbarten Zahlen, und dadurch wird das Zifferblatt in zwei Teile aufgeteilt, in denen die gleiche Summe steht.
Nenne zwei solche Uhrzeiten zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr, die sich voneinander um mehr als 5 Minuten unterscheiden!



b) Bei einer anderen Uhr (siehe Bild) zeigt 57 Sekunden nach 3.42 Uhr der Sekundenzeiger in die Lücke zwischen den Zahlen 11 und 12.



Hierdurch und durch die anderen Zeiger wird das Zifferblatt in Teile mit den Summen

$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30,$
$9 + 10 + 11 = 30,$
$12 + 1 + 2 + 3 = 18$
aufgeteilt.
Warum gibt es keine Uhrzeit, bei der (jeder Zeiger in eine der zwölf Lücken zeigt und) das Zifferblatt in drei Teile aufgeteilt wird, in denen die gleiche Summe steht?

270624 In einer Werkhalle stehen vier Maschinen zur Herstellung von Werkstücken. Jeweils in 24 Stunden werden
auf Maschine A genau 2 Werkstücke,
auf Maschine B genau 3 Werkstücke,
auf Maschine C genau 8 Werkstücke,
auf Maschine D genau 12 Werkstücke
hergestellt. Für jede der Maschinen gilt, daß zum Herstellen der Werkstücke auf dieser Maschine stets die gleiche Zeit gebraucht wird. Dabei ist die Zeiteinteilung so angelegt, daß jeweils die Herstellung des nächsten Werkstückes genau dann beginnt, wenn das vorhergehende fertig ist.
An einem Tag beginnen alle vier Maschinen gleichzeitig um 0.00 Uhr mit der Herstellung eines neuen Werkstücks. Wie oft kommt es an diesem Tag bis einschließlich 24.00 Uhr insgesamt vor, daß
a) auf allen vier Maschinen,
b) auf genau drei der vier Maschinen,
c) auf genau zwei der vier Maschinen
zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird?

Olympiadeklasse 7

270721 Jörg unternahm in den Ferien mit seinem Fahrrad eine Dreitagewanderung. Er legte dabei am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge der für alle drei Tage geplanten Wanderstrecke zurück. Am zweiten Tag war Jörg 24 km weniger gefahren als am ersten Tag.
Ermittle die Länge der Wegstrecke, die Jörg noch für den dritten Tag verblieb!

270722 Angela, Bodo, Constanze und Dietmar sprechen über den Ausgang zweier Fußballspiele der Klasse 7a gegen die Klasse 7b. Zu beiden Spielen machen sie dieselben Aussagen, nämlich:
Angela: Das Spiel endete unentschieden.
Bodo: Die Klasse 7a gewann.
Constanze: Bodos Aussage ist falsch.
Dietmar: Angelas Aussage ist wahr.
a) Petra, die das erste Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, daß für das erste Spiel genau eine der vier Aussagen falsch ist.
b) Rolf, der das zweite Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, daß für das zweite Spiel genau eine der vier Aussagen wahr ist.
Untersuche, ob sich a) aus Petras Feststellung, b) aus Rolfs Feststellung der Ausgang des betreffenden Spiels (Sieg der 7a, Sieg der 7b oder Unentschieden) eindeutig ermitteln läßt!

270723 Die Maßzahlen zweier Seitenlängen eines Dreiecks seien $a = 12$ und $b = 8$. Ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite so vorkommen können, daß die Maßzahl des Umfangs eine Primzahl ist. Alle drei Seitenlängen sollen dabei in derselben Maßeinheit, etwa in Zentimetern, gemessen sein.

270724 Es sei $\overline{AB}$ der Durchmesser eines Kreises, der Mittelpunkt des Kreises sei M, ferner sei C ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, daß der Winkel $\sphericalangle BMC$
a) die Größe 42°,
b) eine beliebig vorgegebene Größe φ mit $0° < \varphi < 180°$ hat.
Ermittle jeweils aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACM$ und die des Winkels $\sphericalangle ACB$!

Olympiadeklasse 8

270821 Ein AG-Leiter behauptet, er könne jede von seinen Zirkelteilnehmern gedachte Zahl erraten, wenn ihm nur das Ergebnis der folgenden Rechnung genannt wird: „Denke dir eine Zahl.
Addiere dazu die Zahl 5, multipliziere die Summe mit 16, subtrahiere davon das Sechsfache der gedachten Zahl und dividiere diese Differenz durch 10!"
Läßt sich tatsächlich aus dem nun zu nennenden Ergebnis dieser Rechnung die gedachte Zahl ermitteln?
Wenn das der Fall ist, so beschreibe und begründe, auf welche Weise das geschehen kann!

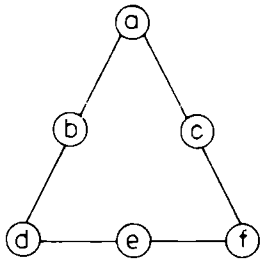
270822 Gegeben sei ein Kreis k; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius betrage r. Von drei Punkten A, B, C auf k werde vorausgesetzt, daß $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt und daß der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 120° hat.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} = r$ gilt!

270823 Über ein Turnier in einer AG „Schach" wird berichtet:
Das Turnier wurde in mehreren Runden ausgetragen. In jeder Runde spielte jedes AG-Mitglied gegen jedes andere genau eine Partie. Auf diese Weise wurden in dem Turnier insgesamt 112 Partien gespielt. Es nahmen mehr als zwei Mitglieder teil.
Untersuche, ob ein Turnier möglich ist, bei dem diese Angaben zutreffen, und ob die Anzahl der Runden sowie die Anzahl der Teilnehmer eindeutig aus den Angaben folgen!
Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Anzahlen!

270824 Ein Würfel W werde in volumengleiche Teilwürfel zerlegt. Der Oberflächeninhalt des Würfels W sei A, die Summe der Oberflächeninhalte der voneinander getrennten Teilwürfel sei S.
Ermittle das Verhältnis $A : S$
a) wenn der Würfel W die Kantenlänge 14 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt,
b) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl 8 der Teilwürfel,
c) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl n^3 der Teilwürfel, wobei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geqq 2$ ist!

Olympiadeklasse 9

270921 In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Bild) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt und daß auf jeder Dreieckseite die gleiche Summe entsteht.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

270922 Bei einem „ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom „gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ...; 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).
Eine „Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt „geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so daß man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem „ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!
b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden läßt!

270924 Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leqq 10, \qquad (1)$$
$$3a + 8b \leqq 25 \qquad (2)$$

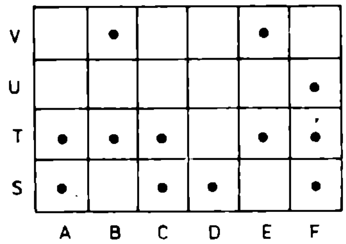
erfüllen, sei

$$S = a + 2b.$$

Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen S, die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt!
Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von S!

Olympiadeklasse 10

271021 Das Rechteck im Bild a) soll aus den Teilen des Bildes b) zusammengesetzt werden. Jedes Teil soll genau einmal verwendet werden; die Teile sind ohne Anwendung von Spiegelungen, nur durch Verschiebungen und Drehungen in die gewünschte Lage zu bringen.

Bild a


Zeichnen Sie zwei verschiedene Zusammensetzungen des Rechtecks, die auf diese Weise entstehen können! Überprüfen Sie darin die Erfüllung der geforderten Bedingungen, indem Sie die (jeweils in die gewünschte Lage gebrachten) Teile durch ihre Nummern kennzeichnen!

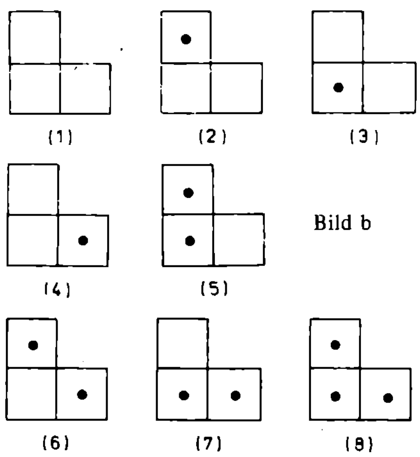


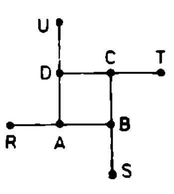
Bild b

271022 Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$\frac{n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6}{n+2}$$

eine natürliche Zahl ist!

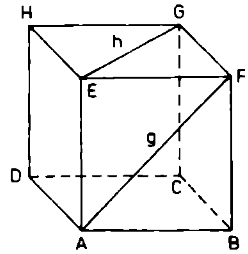
271023 Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a, ferner sei x eine beliebig gewählte positive reelle Zahl. Die Quadratseiten seien wie im Bild um Strecken der Länge $x \cdot a$ verlängert bis R, S, T bzw. U.



a) Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets $RSTU$ ein Quadrat ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen positiven reellen Zahlen x, bei deren Wahl der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ ein Fünftel des Flächeninhaltes des Quadrates $RSTU$ beträgt!

271024 Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie im Bild bezeichnet. Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h. Ermitteln Sie den Abstand von g und h!

Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke XY, die so gelegen ist, daß X auf g, Y auf h liegt und daß XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.



Olympiadeklassen 11/12

271221 Man ermittle alle Paare (x, y) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x\left(1 + \frac{x}{y}\right) = 6, \qquad (1)$$

$$y\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 3. \qquad (2)$$

271222 Es sei $ABCD$ ein beliebiges ebenes konvexes Viereck; k sei eine beliebige positive reelle Zahl. Die Punkte P, Q, R, S mögen in dieser Reihenfolge die Seiten AB, BC, CD, DA dieses Vierecks jeweils im Verhältnis $k:1$ teilen.
Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecke $PQRS$ und $ABCD$.

271223 a) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion f (mit dem Definitionsbereich aller reellen $x \neq 0$) durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-2)\, x^k$$

definiert. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die so erklärte Funktion f die Gleichung
$f(-1) = -f(1)$ erfüllt.
b) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion g (mit demselben Definitionsbereich) durch

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k-2} \cdot x^k$$

definiert.
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die die so erklärte Funktion g die Gleichung
($g(-1) = -g(1)$ erfüllt.

271224 a) Über eine Menge M, die aus genau 1987 Personen besteht, wird vorausgesetzt, daß jede Person aus M mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt ist.
Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Es gibt eine aus mindestens 332 Personen bestehende Untermenge U von M mit der Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.
b) Man gebe ein Beispiel für eine Menge M aus genau 1988 Personen, für die folgende Aussagen zutreffen: Jede Person aus M ist mit genau 5 Personen aus M bekannt; jede Untermenge U von M mit der Eigenschaft, daß keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist, besteht aus höchstens 333 Personen.
In diesen Aufgaben werde stets angenommen, daß eine Person X genau dann mit einer Person Y bekannt ist, wenn Y mit X bekannt ist.

alpha-Wettbewerb 1986/87

Abzeichen in Gold

Fortsetzung aus *alpha* Heft 1/88

Für elfjährige Teilnahme
Jens Fache, Altenburg; Uwe Schütze, Camin; Frank Sarodnick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Catherin Engel, Lutz und Heike Lauter, alle Dresden; Georg Kirchner, Dermbach; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Bettina Weser, Großenhain; Michael Schulze, Halberstadt; Frank Siebert, Dany Rose, beide Halle; Claus Janke, Ilmenau; Heiko Schinke, Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Frank Berndt, Radeburg; Jürgen Schmalisch, Reuden; Kurt Schulze, Schernberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Christina Fuhrmann, Zepernick; Frank Pampel, Zeulenroda; Sabine Oestreich, Oschersleben

Für zehnjährige Teilnahme
Eckhard Heinrich, Aschersleben; Susanne Krüger, Thomas Böhme, Andris Möller, Kerstin Kantiem, alle Berlin; Heiko Ringel, Ines Lauter, Kerstin Urban, Gerald Eichler, alle Dresden; Lars Mönch, Erfurt; Jens Wackernagel, Falkenberg; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Ingolf Hintzsche, Gräfenhainichen; Ulrike Brandenburg, Greifswald; Birgit Seifert, Hagenow; Anke Misch, Halberstadt; Annett Eichner, Halle-Neustadt; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Andreas Paukert, Karbow; Uta Mersiowsky, Sabine Pohlmann, beide Langewiesen; Andreas Eifler, Petra Polster, beide Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-Oberfrohna; Steffen Hoffmann, Potsdam; Uwe Knispel, Prösen; Ralf Heidenreich, Roßleben; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Ruth Backhaus, Silberhausen; Frank Zöllner, Sondershausen; Erhard Zilinske, Stralsund; Norbert Fuchs, Suhl; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Irene Michallik, Waren; Stefan Thäter, Weimar; Agnes Jorzick, Wismar; Mathias Goltzsche, Witterda; Erika Schreiber, Zella-Mehlis

Für neunjährige Teilnahme
Anka Sommer, Augsdorf; Bert Minske, Beate Müller, Jens Prochno, Norbert Dorn, Stefan Müller, alle Berlin; Christian Sitz, Calau; Uwe Martin, Crossen; Manfred Roßius, Cottbus; Bert Kühne, Dahme; Stefan Mattausch, Michael Nitsche, Carsten und Helmut Schreiber, Rolf Dach, alle Dresden; Barbara Tschada, Cornelia Wolf, beide Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Ingolf Thurm, Gößnitz; Karsten Sonnemann, Grabow; Henning Salz, Halle; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Sebastian Horbach, Andreas Israel, beide Karl-Marx-Stadt; Heiko Witte, Königs Wusterhausen; Bernd Fucke, Petra Gollewsky, beide Leipzig; Jens Fuchs, Luckau; Irma Goßmann, Oranienburg; Anja Voß, Riesa; Katja Uhlemann, Prausitz; Ronald Kaiser, Schleid; Sven Hacker, Schlotheim; Babette Müller, Winfried Ullrich, beide Schmalkalden; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Matthias Herrmann, Schwerin; Mike Selig, Stauchitz; Delia Wolfert, Söllichau; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Horst

Rißmann, Wesenberg; Friedhelm Reichert, Königs Wusterhausen; Andreas Stenzel, Cottbus

Für achtjährige Teilnahme

Ralf und Wolfgang Beukert, Beatrice List, alle Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Yvonne Selke, Matthias Röder, Matthias Tittel, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-J. Schwerin, Blumberg; Achim Kröber, Buttlar; Peter Sitz, Calau; Matthias Winkler, Dresden; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Jörg Simon, Engelsdorf; Peter und Ulrich Wenschuh, Falkenstein; Ulf Winkler, Frankenberg; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Volker Pohlers, Greifswald; Dirk Wenzlaff, Grieben; Ragna Siol, Grimma; Jörg Blaurock, Guben; Beate Thomas, Halle; Antje Hüttig, Christina Schmerling, beide Halle-Neustadt; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Michael und Jürgen Hoppe, Michael Tix, alle Karl-Marx-Stadt; Susan Hoffmann, Klingenthal; Kay Leitz, Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Antje Reichel, Pirna; Beate Walter, Röbel; Heiner und Anne Ruser, Rostock; Roland Drendel, Senftenberg; Christiane May, Siebenlehn; Jochen Wetzel, Sömmerda; Bert Liebmann, Sondershausen; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Johannes Thäter, Weimar; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mathias Schwenck, Wittenburg

Für siebenjährige Teilnahme

Uwe Döbler, Arnstadt; Marcus Markardt, Bad Salzungen; Sarah Plietzsch, Stefan Bading, Frauke Wendt, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Christian Gering, Beuditz; Ralf Gröper, Biesenrode; Michael Kremmer, Breitungen; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; POS K. Niederkirchner AG Math., Domersleben; Klaus-Horst Milde, Jens Haufe, Ullrich Hartung, alle Dresden; Andreas Prüver, Eberswalde; Ulrike Rößner, Erfurt; Lutz Küch, Erlau; Kai Mettke, Alexander Schackow, beide Frankfurt (Oder); Hanka Pruditsch, Anke Zimmermann, beide Geithain; Andrea Rueß, Goldberg; Marie-Luise Funk, Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Holger Porath, Güstrow; Antje Ohlhoff, Halberstadt; Anja Botzon, Havelberg; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Stefan Lippmann, Ilsenburg; Heiko Frank, Gerd F. Reifarth, Rainer Werner, Holger Illgen, alle Karl-Marx-Stadt; Frank Müller, Klaffenbach; Antje Schneider, Leipzig; Hanna Erler, Massanei; Steffen Scharnowski, Möser; Steffen Ewert, Neuhaus; Andreas Suchanow, Neubrandenburg; Karsten Kattner, Pasewalk; Ingo Schubert, Pfaffroda; Joachim Rothe, Pretzschendorf; Dagmar und Birgit Lenz, Reichenbach; Astrid Rogowski, Schwerin; Tanja Reinwarth, Teltow; Torsten Marx, Ueckermünde; Ina Gössinger, Unterbreizbach; Tom Boyks, Vietlübbe; Heike Bauer, alpha Klub Klasse 7 und 8, Witzenburg; Frank Goth, Waltersdorf; Edith Boettcher, Weimar; Christiane Moritz, Wriezen; Kristin Neumann, Zella-Mehlis; Petra Heiliger, Leuna

Für sechsjährige Teilnahme

Matthias List, Altenburg; Gerlind Krolop, Angern; Veneta Türke, Auerbach; Lothar Fischer, Bad Köstritz; Ute Partsch, Bad Salzungen; Veit Eska, Bad Sülze; Sven Hartmann, Axel Schneider, Annette Spangenberg, Eva-Christina Müller, Gerhard Haug, Sven Aßmus, Claudia Lehmann, alle Berlin; Peter Grabs, Bibra; Matthias Hentze, Bleicherode; Carsten Schmidt, Borna; Angela Maier, Bürgel; Olaf Baur, Cottbus; Charis Förster, Crimmitschau; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Eva Faßmann, Dessau; Hans Schwenke, Dohna; Thomas Rotter, Kristina Kutzer, Jens Pfennig, Rita Dach, alle Dresden; Christian Pigorsch, Eisleben; Gerd Kunert, Sven Schmitt, beide Freiberg; André Kratzert, Dürrröhrsdorf; Peter Meja, Wolfgang Sitte, beide Görlitz; Thomas Galley, Golßen; Lars Schiefner, Goseck; Gunthard Stübs, Greifswald; Astrid Gärtner, Großröhrsdorf; Daniela Burkhardt, Guben; Markus List, Grünbach; Regine Mallwitz, Güstrow; Heinz Seifert, Hagenow; Alexander Schmerling, Lutz Eichner, beide Halle-Neustadt; Schulklub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Maik Otto, Holzthaleben; Klaus Liesenberg, Ilsenburg; Gunnar Clausnitzer, Ivenack; Ulf Prudlo, Uta Störl, beide Jena; Jana Hodam, Kaltennordheim; Uwe Pirl, Karl-Marx-Stadt; Beate Balzer, Lindow; Thomas Rolle, Magdeburg; Manja und Dirk Franke, Mülsen; Bodo Braune, Neuburxdorf; Jens Burmann, Neuhaus; Stefan Warnest und Dirk Welke, Neuruppin; Lars Abbe, Niederorla; Uwe Anke, Pappendorf; Falk Thomas, Neukirch; Claudia Paschwitz, Räckelwitz; Bertram Bracher, Schwarzheide; Reiner Möwald, Sömmerda; Rüdiger Scheller, Teltow; Corinna Krische, Treben; Eric Schneider, Wim Fleischhauer, Katja Ledderhos, alle Vacha; alpha Klub Kl. 6, Vitzenburg; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Achim Nahler, Swen Hoffmann, beide Weimar; René Voigt, Wernburg; Arno Barthelmes, Tilo Marschall, beide Zella-Mehlis; Matthias Klinke, Zeulenroda; Diana Michler, Zschortau; Carl Grosch, Wolferstedt

Für fünfjährige Teilnahme

Kathrin Wagner, Antonsthal; Martin Mazurek, Aschersleben; Jochen Sommer, Augsdorf; Kathleen Heilfort, Bad Gottleuba; Michael Henning, Bad Salzungen; Dirk Prandel, Frank Wagner, beide Berlin; Annette Scholz, Blumberg; Ingrid Voigt, Böhlen; Norbert Wölfel, Brandenburg; Cynthia Bengs, Bürgel; Stefan Janke, Burg; Detlef Bartmuß, Burow; Thomas Reißner, Birgit Reißner, Silvio Löffler, alle Cottbus; AG J. Math. O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Birgit Jeske, Henrike Süß, Frank Naumann, Dorothea Krippstädt, Kerstin Pohle, Cornelia Zillmann, Michael Potthoff, Matthias Overmann, alle Dresden; Matthias Buchmann, Eisenberg; Sven Hauptvogel, Susanne Förster, beide Elsterwerda; Antje Kaufhold, Erfurt; Andreas Kupsch, Finsterwalde; René Franke, Gersdorf; Mathias und Alexander Neuber, Gerbitz; Gernot Meriowsky, Christoph Kothe, Matthias Grau, alle Görlitz; Andrea Landgraf, Gräfenthal; Karsten Hennig, Großörner; Elke Heidemann, Halberstadt; Almuth Berg, Halle; Ralf Gericke, Hainichen; Jan Wohlbold, Heidenau; Roberto Stahl, Herzberg; Stefan Heiber, Heyda; Jan Zimmermann, Michael Köhler, Frank Lampert, Frank Marth, alle Kaltennordheim; Dietmar und André Lindner, Karl-Marx-Stadt; Hans Hermann, Marko Epstude, beide Kirchheilingen; Carsten Blech, Klein Rodensleben; Jörg Anschütz, Lehesten; Cornelia Häfner, Leinefelde; Beate Wasner, Leipzig; Peggy Menzel, Leutersdorf; Andreas Vogel, Limbach-O.; Hardy Dömpke, Löderburg; Ina Büttner, Manja Lehnhuß, beide Lössau; Marco Schmidtgen, Luckenwalde; Giselher Schützer, Magdeburg; Isabelle Nicol, Meiningen; Maren Wolf, Milkau; Karsten Knothe, Merseburg; Lars Fischer, Niederschmalkalden; Katrin May, Olbernhau; Torsten Lüth, Parchim; Felix Kraenz, Picher; Olav Zirnstein, Pirna; Axel Buerke, Potthagen; Ingmar Hellhoff, Prenzlau; Andrea Thiele, Michael Hainke, beide Rackwitz; Antje Westermann, Marco Rößler, beide Radebeul; Ramona Plautz, Ribnitz; Beatrix Lorenz, Riesa; Rainer Walke, Barbara Menzel, beide Rostock; Marcus Spindler, Sangerhausen; Sandra Henschke, Schierke; Marion Walther, Schlottwitz; Andreas Meynhardt, Schmalkalden; Oliver Henze, Schneidlingen; Jens Gläßer, Schönfels; Lars Hantschmann, Seifhennersdorf; Karin Möwald, Sömmerda; Melanie Wilhelm, Alexander Anschütz, Steffi Döll, Rene Scheerschmidt, Karsten Bühner, Katja Usbeck, Katrin Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg; Michaela Berndt, Ueckermünde; Anja Frank, Thomas Flatz, Andreas Walter, alle Vacha; Dag Lohse, Vielau; Erik Möbius, Wegeleben; Sven-Uwe Kanngießer, Wolmirleben; Andreas Vogt, Worbis; Ralph Schammer, Zerbst; Claudia Heret, Zwickau; Axel Bichler, Sondershausen

Für vierjährige Teilnahme

Ulrich Egermann, Uta Schmidt, beide Altenburg; Sven Völker, Andreas Henning, beide Bad Salzungen; Monika Döring, Andrea Böttger, Cornelia Hauke, Michaela Hinke, Tanja Jakob, Anke Lindner, Sandra Neumann, Tanja Pfeiffer, Jana Schlüßler, Susanne Schmidt, Yvonne Stolz, Beate Wulf, Sven-Rico Gericke, Michael Köcher, Dominik Pelz, Frank Stehr, alle Berlin; Andreas Filz, Bernburg; Stefan Lenz, Bischofrod; Ingo Moldenhauer, Blankenfelde; Wolfram Schubert, Borna; Roberto Rohmeiß, Breitungen; Frank Wolff, Brotterode; Tilo Bartmuß, Burow; René Aust, Calau; Annett Löwa, Susan Dreyer, Falko Höhnsdorf, alle Cottbus; Thomas Freier, Stefan Heß, beide Creuzburg; Oliver Gehring, Ortrun Grahl, Christina Galikowsky, Jens Römer, Christoph Nitsche, Mario Kübler, Hans-Harald Neschke, alle Dresden; Burgund Berger, Drosa; Jens Renner, Dürrröhrsdorf; Martin Skriewe, Eichicht; Patrick Zacharias, Eilsleben; Thomas Prüver, Eberswalde; Dirk Lange, Gerit Schütze, beide Elsterwerda; Maik Denner, Empfertshausen; Rüdiger Hochheim, René Weilert, Steffen Zillmer, alle Erfurt; Kati Hildebrandt, Andrea Weyh, Corinna Mäder, Jana Reinhardt, Kristin Danz, Christiane Siebert, alle Fambach; Axel Pätzold, Flecken Zechlin; Uwe Danz, Floh; Bert Brause, Frankenberg; Thomas Monecke, Freiberg; Ulrike Hormann, Anja Bayer, Ulrike Bentz, alle Friedland; Torsten Feigl, Gera; Axel Plog, Gevezin; Michaela Große, Gohrau; Swen Ficker, Katja Martin, beide Grünhain; René Kallenbach, Gumpelstadt; Jörn Pamperin, Hagenow; Rainer und Britta Struwe, Halberstadt; Hendrik Speck, Halle; Corinna Wiefel, Silke Großmann, beide Hirzbach; Ulrike Watzke, Hoyerswerda; Peter Zimmermann, Ilmenau; Marco Ringel, Jähnikkendorf; Göran Glockmann, Norbert Kuschel, beide Jena; Thomas Fiekers, Mike Hesse, Martin Groß, Mario Stern, Cornelia Weber, alle Kaltennordheim; Sabine Klinger, Kamenz; Dorit Biedermann, Mirko Niepel, beide Karl-Marx-Stadt; Erika Preuß, Klietz; Katja Geißler, Königs Wusterhausen; Kirsten Völz, Körchow; Carsten Behrendt, Langenweddingen; Tobias Zepter, Langewahl; Liane Marx, Landsendorf; Katja Kasubek, Werner Unger, beide Lehesten; Stefan Suerbier, Leussow; Andreas Hockauf, Jana Ittner, beide Leutenberg; Jana Götz, Katrin Fröhlich, Dirk Schaller, Marian Reißig, alle Lössau; Jörg-Daniel Günter, Ludwigslust; Anke Näther, Lützschena; Christel Fritze, Magdeburg; Kay Pfennighaus, Neubrandenburg; Manuela Grewe, Dörte Busse, beide Neuhaus; Grit Richter, Niendorf; Jens Bastian, Heike Simmank, beide Niesky; Grit Pfützner, Ohorn; Kay Barthel, Oschersleben; Ute Zimmermann, Pauschwitz; Michael Schmarje, Jürgen Rietz, beide Pirna; Kilian Kindelberger, Potsdam; Antje Schleusener, Prag (ČSSR); Katrin Lonnig, Pretitz; Torsten Müller, Maria Meinel, beide Radebeul; Karsten Bossow, Heike Warm, Petra Roßenus, Stefan Maaß, alle Ribnitz; Tobias Franke, Ines Simmank, beide Riesa; Ralf und Dirk Seifert, Rochlitz; Ulrike Häfner, Schmalkalden; Kathrin Biedermann, Schneckengrün; Sabine Voß, Schönberg; Andreas Seifert, Schönebeck; Jana Herrmann, Schorssow; Stefan Erb, Schwallungen; Alexander Otto, Schwanebeck; Peter Hörnich, Schwedt; Simone Puhl, Schweinbach; Lars Prieske, Schwerin; Andreas Pechthold, Spechtsgrün; Jana Ullmann, Spremberg; Tino Sander, Springen; Steffen Müller, Hartmut Iser, Claudia Siegmund, alle Steinbach; Simone Thiem, Yvonne Menz, Sandra Usbeck, Sven Reumschüssel, Sabine Recknagel, alle Steinbach-Hallenberg

Fortsetzung in Heft 3/88

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/87

Ma 5 ■ 2840 Robert las an den ersten zwei Tagen (36 + 48) Seiten = 84 Seiten. Somit sind 84 Seiten gleich dem vierten Teil der Anzahl der Seiten des Buches. Es umfaßt deshalb $4 \cdot 84$ Seiten = 336 Seiten.

Ma 5 ■ 2841 Es sei x die gedachte Zahl; dann gilt
$x + 100 = 10 \cdot x + 10$, also $x = 10$.
Die gedachte Zahl lautet 10.

Ma 5 ■ 2842 Egon hat $18 \cdot 1$ Pf + $36 \cdot 5$ Pf + $54 \cdot 10$ Pf + $9 \cdot 50$ Pf + $9 \cdot 20$ Pf
= (18 + 180 + 540 + 450 + 180) Pf
= 1368 Pf = 13,68 M gespart.

Ma 5 ■ 2843 Angenommen, in jedem der 16 Klassenzimmer befinden sich x Stühle; dann gilt
$16 \cdot (x - 8) = 12 \cdot x$, also $x = 32$.
Die Schule verfügt somit über $(16 \cdot 32 + 38)$ Stühle, also über 550 Stühle.
Oder: (16 − 12) Klassenzimmer = 4 Klassenzimmer. In 4 Klassenzimmern befinden sich $16 \cdot 8$ Stühle, in einem Klassenzimmer $4 \cdot 8$ Stühle = 32 Stühle.

Ma 5 ■ 2844 Das Quadrat enthält die Vierecke (2), (3), (4), (6), (1;2), (2;3), (3;6), (4;5), (5;6), (1;2;3), (4;5;6), (1;2;4;5), (2;3;5;6),
insgesamt also 13 verschiedene Vierecke.

Ma 5 ■ 2845 Wegen $E + E = A$ muß A eine von Null verschiedene gerade Grundziffer sein.
Für $A = 2$ gilt $M = 1$ und $E = 6$.
Wegen $H + H + 1 = H$ gilt $H = 9$.
Für $T = 3$ gilt $P = 7$ und $L = 4$.
Für $T = 8$ gilt $P = 7$ und $L = 5$. Wir erhalten die beiden Lösungen
12396 + 12396 = 24792
und 12896 + 12896 = 25792.
Für $A = 4$ erhalten wir analog dazu zwei weitere Lösungen
24097 + 24097 = 48194
und 24197 + 24197 = 48394.
Für $A = 6$ oder $A = 8$ wäre $M + M = 5$ oder $M + M = 7$, was nicht möglich ist.

Ma 5 ■ 2846 Das Quadrat $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von $12 \cdot 12\,\text{cm}^2 = 144\,\text{cm}^2$. Jedes der vier Rechtecke hat deshalb einen Flächeninhalt von $144\,\text{cm}^2 : 4 = 36\,\text{cm}^2$. Die Rechteckseite $\overline{DE}$ habe die Länge x; dann gilt $x \cdot 12\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$, also $x = 3$ cm.
Dann hat die Rechteckseite $\overline{AE}$ die Länge $12\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$ und die Rechteckseite $\overline{BK} = \overline{GK}$ die Länge $9\,\text{cm} : 2 = 4{,}5\,\text{cm}$. Die Rechteckseite $\overline{AL}$ habe die Länge y; dann gilt $y \cdot 9\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$, also $y = 4$ cm; somit hat $\overline{BL}$ die Länge $12\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$.

Ma 6 ■ 2847 Die Tabelle zeigt alle Möglichkeiten der Spielausgänge. Nur die letzte Möglichkeit erfüllt alle Bedingungen. Wegen $18 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 37$ ergeben sich 37 Punkte für die Mannschaft.

Anzahl der gewonnenen	verlorenen	unentschiedenen Spiele
3	1	21
6	2	17
9	3	13
12	4	9
15	5	5
18	6	1

Ma 6 ■ 2848 Da die Hunderterstelle des zweiten Summanden nicht Null sein kann, ist sie gleich 1. Daraus ergeben sich für die Zehner- und Einerstelle der beiden Summanden nur die Ziffer Null und für die Tausenderstelle nur die Ziffer 9.
9909 + 190 = 10099.

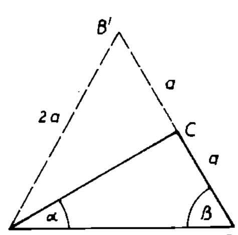
Ma 6 ■ 2849 Wegen $4 \cdot 5 = 20$ muß die zu ermittelnde Zahl durch 20 teilbar sein, also auf die beiden Grundziffern 00, 20, 40, 60 oder 80 enden. Damit die Zahl möglichst klein ist, muß die erste Grundziffer von links 1 sein. Die Zahl 199980 hat die Quersumme 36; sie ist die kleinste durch 4 und 5 teilbare natürliche Zahl, deren Quersumme 36 beträgt.

Ma 6 ■ 2850 Man beginnt systematisch mit der kleinsten Primzahl und erhält folgende Tabelle

a	b	c	Wertung
2			entfällt, da dann c geradzahlig
3	5	85	entfällt, da 85 keine Primzahl
3	7	79	
3	11	67	
3	13	61	
3	17	49	entfällt, da 49 keine Primzahl
3	19	43	
3	23	31	
3	29	13	entfällt, da $b > c$
5			entfällt, da dann c durch 5 teilbar
7	11	23	

Weitere Möglichkeiten entfallen, da dann stets $b > c$ gilt.
Somit gibt es sechs Zahlentripel, welche die Bedingungen erfüllen.

Ma 6 ■ 2851 Wir konstruieren das Bild



des rechtwinkligen Dreiecks ABC bei Spiegelung an der Geraden AC als Symmetrieachse. Es sei B' Bildpunkt von B. Dann ist das Dreieck ABB' gleichseitig. Somit hat Winkel ABC die Größe $\beta = 60°$ und Winkel BAC die Größe $\alpha = 30°$.

Ma 6 ■ 2852 Aus $b > a$ und $b \cdot c = 6 \cdot a$ folgt $c < 6$, also $a < b < c < 6$ und somit $c \leqq 5$. Wegen $a + b > c$ (Dreiecksungleichung) existiert genau eine Lösung, nämlich
$a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm.

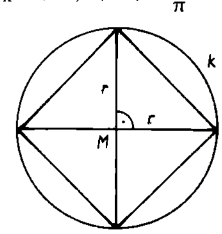
Na/Te 6 ■ 407 500 Umdrehungen bedeuten ein tausendmaliges Durchlaufen des Hubweges.
Damit ergibt sich ein Gesamtweg von
$73\,\text{mm} \cdot 1000 = 73\,000\,\text{mm} = 73\,\text{m}$,
also $\bar{v} = 73\,\text{m}/10\,\text{s} = 7{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ma 7 ■ 2853 Angenommen, beiden Arbeitsgemeinschaften gehören x Schüler an; dann gehören der AG Modellbau $3 \cdot x$ Schüler, der AG Werken $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$ Schüler an, und es gilt
$3x + 6x - x = 32$, $8x = 32$, $x = 4$.
An beiden Arbeitsgemeinschaften nehmen vier Schüler teil.

Ma 7 ■ 2854 Angenommen, es sind s Karten mit dem Vermerk „sehr gut gelöst", g Karten mit dem Vermerk „gut gelöst" und n Karten mit dem Vermerk „nicht gelöst"; dann gilt
$g + n = 3$, $s + n = 7$ und $s + g = 8$.
Durch Addition der drei Gleichungen erhalten wir
$2s + 2g + 2n = 18$, $g + s + n = 9$,
also $g = 2$, $s = 6$ und $n = 1$.
Werner erhielt sechs Karten mit dem Vermerk „sehr gut gelöst", zwei Karten mit dem Vermerk „gut gelöst" und eine Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Ma 7 ■ 2855 Nach der Dreiecksungleichung gilt $x + y > a$, $x + z > a$, $y + z > a$, also auch $2 \cdot (x + y + z) > 3a$ und
somit $x + y + z > \frac{3}{2} \cdot a$.

Ma 7 ■ 2856 Für den Flächeninhalt des Kreises gilt $A_K = \pi \cdot r^2$, für den Flächeninhalt des Quadrates gilt
$A_Q = 4 \cdot \frac{r \cdot r}{2} = 2 \cdot r^2$. Daraus folgt
$A_Q : A_K = (2r^2) : (\pi r^2) = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366$.

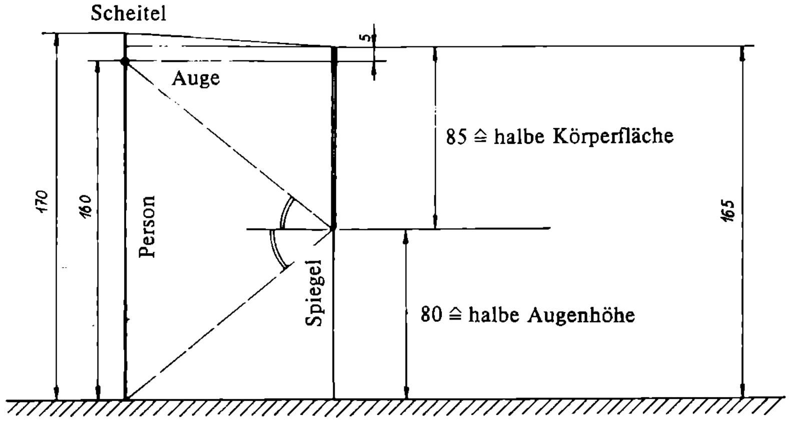


Der Flächeninhalt des Quadrates beträgt somit rund 64 % vom Flächeninhalt des Kreises.

Ma 7 ■ 2857 Der vierstellige Teiler der gesuchten fünfstelligen Zahl möge die Ziffernfolge $\overline{abcd}$ haben. Dann wäre nur $d = 1$ möglich. Ferner ist nur $c = 4$ möglich, da nur $4 \cdot 7$ auf die Ziffer 8 endet. Da a, b, c, d vier aufeinanderfolgende Zahlen sein sollen und die Zahl möglich groß sein soll, gilt $a = 3$ und $b = 2$. Somit gilt $22\,687 = 7 \cdot 3241$. Jürgen hatte am 22. 6. 87 Geburtstag.

Na/Te 7 ■ 408 Die Strahlungsverluste nehmen mit der Temperaturdifferenz zwischen Topf und Umgebung zu.

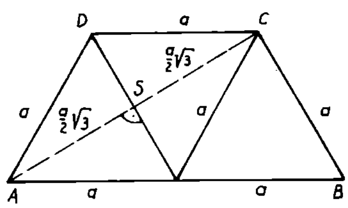
Na/Te 7 ■ 409 Maßangaben in cm



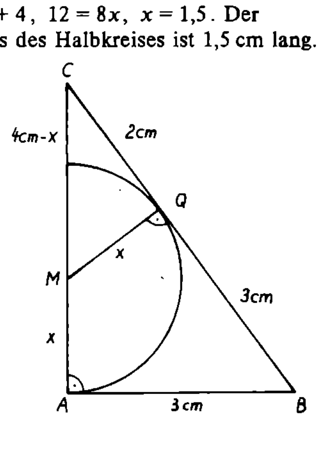
Ma 8 ■ 2858
Eine Lösung lautet 381 654 729.

Ma 8 ■ 2859 Das Trapez $ABCD$ läßt sich, wie aus dem Bild ersichtlich, in drei kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen. Die Diagonale $\overline{AC}$ ist doppelt so lang wie die Höhe im gleichseitigen Dreieck, sie beträgt somit

$$\overline{AC} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = a \cdot \sqrt{3}$$
$$= 5 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm} \approx 8{,}7\ \text{cm}.$$



Ma 8 ■ 2860 Der Halbkreis berühre die Gerade BC im Punkte Q; dann gilt $\overline{BA} = \overline{BQ}$. Der Radius $\overline{MA} = \overline{MQ}$ habe die Länge x; dann hat $\overline{CM}$ die Länge $4\ \text{cm} - x$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt
$(4 - x)^2 = x^2 + 2^2$, $16 - 8x + x^2 = x^2 + 4$, $12 = 8x$, $x = 1{,}5$. Der Radius des Halbkreises ist 1,5 cm lang.



Ma 8 ■ 2861 Es sei $\overline{abcde}$ eine fünfstellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise; dann soll gelten: $\overline{abcde} \cdot 4 = \overline{edcba}$. Wegen $4 \cdot a < 10$ und $a \neq 0$ gilt $a = 1$ oder $a = 2$. Da das Produkt $e \cdot 4$ eine gerade Zahl ergibt, entfällt $a = 1$.
Folglich gilt $a = 2$. Wegen $e \neq 0$ und da $e \cdot 4$ auf die Ziffer 2 endet, gilt $e = 3$ oder $e = 8$.
Wegen $a \cdot 4 = 2 \cdot 4 \geqq 8$ entfällt $e = 3$. Folglich gilt $e = 8$. Wir erhalten zunächst $\overline{2bcd8} \cdot 4 = \overline{8dcb2}$. Wegen $b \cdot 4 < 10$ gilt $b = 1$ oder $b = 2$. Wegen $4 \cdot 8 = 32$ (Übertrag 3) und da $d \cdot 4 + 3$ eine ungerade Zahl ist, entfällt $b = 2$. Folglich gilt $b = 1$. Wir erhalten $\overline{21cd8} \cdot 4 = \overline{8dc12}$. Da $d \cdot 4 + 3$ auf die Ziffer 1 endet, gilt $d = 2$ oder $d = 7$. Wegen $21 \cdot 4 = 84$ gilt $\overline{8dc12} > 84\,000$, also $d \geqq 4$. Somit entfällt $d = 2$; es gilt $d = 7$. Wir erhalten $\overline{21c78} \cdot 4 = \overline{87c12}$. Da $c \cdot 4 + 3$ auf die Ziffer c endet, gilt $c = 9$. Es existiert genau eine Lösung, nämlich $21\,978 \cdot 4 = 87\,912$.

Ma 8 ■ 2862 Wir setzen die Variablen e, a, s für den Preis in M für eine Portion Eis bzw. Ananas bzw. Sahne und erhalten folgendes Gleichungssystem:

(1) $e + s = 2{,}15\ \text{M}$
(2) $a + s = 2{,}55\ \text{M}$
(3) $a + e = 2{,}30\ \text{M}$.

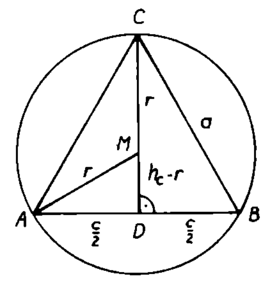
Die Addition dieser drei Gleichungen und die anschließende Division durch 2 führt zur Gleichung
(4) $a + e + s = 3{,}50\ \text{M}$.
Eine Portion Eis mit Ananas und Sahne kostet 3,50 M.
Aus (4) − (2) folgt $e = 0{,}95$ M, aus (3) folgt dann $a = 1{,}35$ M und aus (2) $s = 1{,}20$ M. Eine Portion Eis kostet 0,95 M, eine Portion Ananas 1,35 M und eine Portion Sahne 1,20 M.

Na/Te 8 ■ 410 Die Last ist 7mal größer als die vorhandene Kraft, also muß der Kraftarm 7mal länger sein als der Lastarm. Man muß also die gesamte Hebellänge in 8 Teile teilen. Der Drehpunkt muß 25 cm von der Last entfernt sein.

Na/Te 8 ■ 411 Die Auftriebskraft beträgt 0,050 N. Die Gewichtskraft des verdrängten Wassers muß deshalb 0,050 N betragen. Aus der Dichte des Wassers ergibt sich, daß 1 cm^3 Wasser die Masse von 1 g hat, d. h. 1 cm^3 Wasser hat die Gewichtskraft 0,01 N. Folglich wirken auf 5 cm^3 0,05 N. Das Volumen des Körpers beträgt 5 cm^3. Das gleiche Ergebnis erhält man auch, wenn man von der Dichte des Bleis $\left(11{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ ausgeht.
Inhaltliches Lösen: 1 cm^3 hat die Masse von 11,3 g, das sind 0,113 N. Die Gewichtskraft des Körpers ist 5mal so groß wie die von 1 cm^3, folglich beträgt sein Volumen 5 cm^3.

Ma 9 ■ 2863 Es sei a die Länge der Seite des ersten und auch des zweiten Quadrats, b die Länge der Seite des dritten Quadrats in cm. Dann gilt $b = a + 2\ \text{cm}$. Für die Flächeninhalte gilt nach Aufgabenstellung
$2a^2 + 4\ \text{cm}^2 = (a + 2\ \text{cm})^2$,
$2a^2 + 4\ \text{cm}^2 = a^2 + 4\ \text{cm} \cdot a + 4\ \text{cm}^2$,
$a^2 = 4\ \text{cm} \cdot a \mid : a\ (a \neq 0)$
$a = 4$ cm. Es folgt $b = 6$ cm. Die Länge der Seite eines der zwei kongruenten Quadrate beträgt 4 cm, die des dritten Quadrates 6 cm. Die Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

Ma 9 ■ 2864 Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises und D Fußpunkt der Höhe h_c; nach dem Satz des Pythagoras gilt
$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + (h_c - r)^2 = r^2$, also
$\frac{1}{4}c^2 + (4 - 4{,}5)^2 = 4{,}5^2$, $c^2 = 80$.



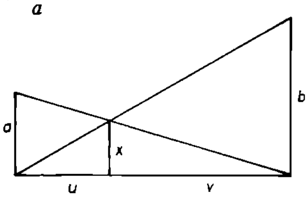
$c = 4 \cdot \sqrt{5}$. Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 4\ \text{cm}^2$
$= 8 \cdot \sqrt{5}\ \text{cm}^2 \approx 17{,}9\ \text{cm}^2$ Ferner gilt
$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_c^2$, $a^2 = 36\ \text{cm}^2$, $a = 6$ cm.
Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt somit $u = 2a + c$,
$u = (2 \cdot 6 + 4 \cdot \sqrt{5})\ \text{cm} \approx 20{,}9\ \text{cm}$.

Ma 9 ■ 2865 Es seien $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$ fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, wobei $n \geqq 3$ gilt. Ihre Summe beträgt $5n$. Daraus folgt
$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) = 224 \cdot 5n$, und wegen $n \neq 0$ gilt
$(n - 2)(n + 2)(n - 1)(n + 1) = 1120$,
$(n^2 - 4)(n^2 - 1) = 1120$,
$n^4 - 5n^2 - 1116 = 0$.
Wir setzen $n^2 = t$ und erhalten
$t^2 - 5t - 1116 = 0$, also $t_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{67}{2}$,
$t_1 = 36$ und $t_2 = -31$ (entfällt, da negativ). Wegen $n^2 = t = 36$ gilt nur $n = 6$. Die fünf Zahlen lauten 4, 5, 6, 7 und 8.

Ma 9 ■ 2866 Angenommen, die sechs

Spielsteine wären sämtlich verschiedenfarbig, dann gäbe es
$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$
Möglichkeiten verschiedener Anordnung in jeweils einer Reihe. Nun ist $720 = 15\cdot 48$. Wären es 1 weißer und 5 schwarze Steine oder umgekehrt, dann müßte man 720 durch 5! ($5! = 120$) dividieren und erhielte 6 Möglichkeiten. Wären es 2 weiße und 4 schwarze Steine oder umgekehrt, so müßte man die 720 Möglichkeiten durch $2! = 2$ Möglichkeiten und auch noch durch die $4! = 24$ Möglichkeiten, also insgesamt durch $2\cdot 24 = 48$ Möglichkeiten dividieren und erhielte 15 Möglichkeiten. Das Kind hatte entweder 2 weiße und 4 schwarze oder 2 schwarze und 4 weiße Spielsteine.
(Es handelt sich um eine Permutation mit Wiederholung von 6 Elementen, wobei ein Element zweimal und ein weiteres Element viermal auftritt. Es gilt
$${}^{(2,4)}P_6 = \frac{6!}{2!\ 4!}$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 15)$$

Ma 9 ■ 2867 Nach dem Strahlensatz gilt:
(1) $x : b = u : (u+v)$ bzw.
$x(u+v) = bu$ und
(2) $x : a = v : (u+v)$ bzw.
$x(u+v) = av$.
Aus (1) und (2) folgt nun $av = bu$ bzw. (3) $v = \frac{bu}{a}$. Nach (1) gilt $x = \frac{bu}{u+v}$ und nach Einsetzen von (3) folgt
$$x = \frac{bu}{u + \frac{bu}{a}};\ x = \frac{abu}{au+bu};\ x = \frac{ab}{a+b}.$$



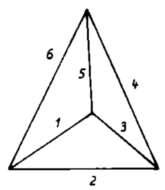
Na/Te 9 ■ 412 Ges.: c_{Cu}
Geg.: $m_{Cu} = 0{,}5$ kg, $m_{Kal} = 0{,}06$ kg,
$m_{Wasser} = 0{,}4$ kg; $\vartheta_1 = 15\,^\circ C$,
$\vartheta_2 = 100\,^\circ C$, $\vartheta_3 = 24{,}4\,^\circ C$.
Aus Tafelwerk: $c_{Al} = 0{,}90\,\frac{kJ}{kg\cdot K}$;
$c_{Wasser} = 4{,}19\,\frac{kJ}{kg\cdot K}$
abgegebene Wärme
= aufgenommene Wärme
$(\vartheta_2 - \vartheta_3)\cdot c_{Cu}\cdot m_{Cu} = (m_{Kal}\cdot c_{Al} + m_{Wasser}\cdot c_{Wasser})\cdot(\vartheta_3 - \vartheta_1)$;
$c_{Cu} = 0{,}43\,\frac{kJ}{kg\cdot K}$.

Na/Te 9 ■ 413 Der Gesamtwiderstand muß 110 Ohm sein; daraus folgt der Widerstand des Parallelgliedes mit 80 Ohm, des einen Zweiges mit 480 Ohm und des anderen Zweiges mit 96 Ohm. Also beträgt der Widerstand $R_x = 36$ Ohm.

Ma 10/12 ■ 2868 Es sei $1000a + 100b + 10c + d$ eine beliebige vierstellige Zahl mit $1 \leqq a \leqq 9$, $1 \leqq b \leqq 9$, $1 \leqq c \leqq 9$ und $0 \leqq d \leqq 9$. Die nach Aufgabenstellung zu bildende Summe ist dann
$1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d + a + d = 5900$ bzw.
$1002a + 101b + 11c + 3d = 5900$.
Nun muß $a = 5$ gelten, denn für $a > 5$ wäre $1002a > 5900$ und für $a < 5$ müßte $101b + 11c + 3d \geqq 1892$ sein, was wegen der Bedingungen für b, c und d nicht möglich ist. Aus $a = 5$, d.h. aus $1002a = 5010$ folgt nun $101b + 11c + 3d = 890$.
Es muß $b = 8$ sein, denn für $b > 8$ ist $101b > 890$ und für $b < 8$ müßte $11c + 3d \geqq 183$ sein, was wegen der Bedingungen für c und d nicht möglich ist. Durch weitere analoge Überlegungen findet man, daß die Zahl 5859 die einzige vierstellige Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Ma 10/12 ■ 2869 Die Aussage ist falsch. Der Beweis erfolgt durch die Angabe eines Gegenbeispiels:
Wenn $n = 59$, so
$2n - 3 = 115$ und $2n + 3 = 121$. Sowohl 115 als auch 121 ist keine Primzahl. Folglich ist die Aussage falsch.

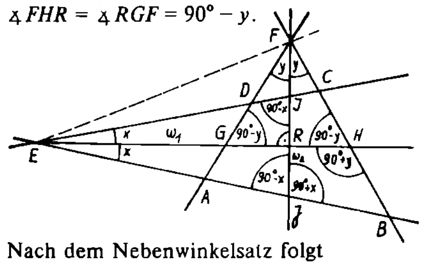
Ma 10/12 ■ 2870 a) Es können genau zwei unterschiedliche Kantenmodelle hergestellt werden. Entweder die zwei weißen Kanten haben genau einen oder keinen Punkt gemeinsam.
b) Es gibt 12 Möglichkeiten, das Modell verschieden aufzustellen, wenn die weißen Kanten genau einen Punkt gemeinsam haben und noch einmal drei Möglichkeiten, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, also insgesamt 15 Möglichkeiten.



Zur Veranschaulichung seien in dem folgenden Bild alle Kanten numeriert. Die folgenden Zahlenpaare sollen stets die Nummern der weiß gefärbten Kanten bedeuten:
(1;2), (1;3), (1;5), (1;6),
(2;3), (2;4), (2;6),
(3;4), (3;5),
(4;5), (4;6),
(5;6),
(1;4), (2;5), (3;6).

Ma 10/12 ■ 2871 Das Volumen einer Kugel K mit dem Radius r berechnet man nach der Formel $V_K = \frac{4\cdot\pi r^3}{3}$.
Der einbeschriebene Doppelkegel hat unter den Bedingungen der Aufgabe die Höhe r. Der Radius seiner Grundfläche sei mit r_1 bezeichnet.
Dann gilt für sein Volumen
$V_{DK} = \frac{\pi\cdot r_1^2\cdot r\cdot 2}{3}$. Nach Aufgabenstellung gilt die Beziehung
$2V_{DK} = V_K$, also $r_1^2\cdot r = r^3$, $r_1^2 = r^2$, also $r_1 = r$.
Der Radius der gemeinsamen Kegelgrundfläche ist gleich dem Radius der Kugel.

Ma 10/12 ■ 2872 Da w_1 und w_2 Winkelhalbierende sind, gilt $\sphericalangle BEH = \sphericalangle HEC$ $= x$ und $\sphericalangle AFJ = \sphericalangle JFB = y$. Dabei ist $x + y < \sphericalangle REF + \sphericalangle EFR = 90^\circ$.
Wegen des Innenwinkelsatzes für Dreiecke ergibt sich:
$\sphericalangle EIR = \sphericalangle RJE = 90^\circ - x$ und
$\sphericalangle FHR = \sphericalangle RGF = 90^\circ - y$.



Nach dem Nebenwinkelsatz folgt
$\sphericalangle BJR = 90^\circ + x$ und $\sphericalangle RHB = 90^\circ + y$.
Nach dem Innenwinkelsatz für konvexe Vierecke erhalten wir $\sphericalangle GDI$ $= 90^\circ + x + y$ und $\sphericalangle HBJ = 90^\circ - x - y$.
Die Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle GDI$ und $\sphericalangle HBJ$ des Vierecks $ABCD$ beträgt demnach 180°, und damit ist $ABCD$ ein Sehnenviereck.

Na/Te 10/12 ■ 414 Bremszeit t_1: Aus $s_1 = \frac{a_1}{2}\cdot t_1^2$ folgt $t_1 = 31{,}6\,s \approx 32\,s$.
Anfahrzeit t_3: Aus $v_3 = a_2\cdot t_3$ folgt $t_3 = 70{,}4\,s \approx 70\,s$.
Der dabei zurückgelegte Weg s_3:
Aus $v_3^2 = 2\cdot a_2\cdot s_3$ folgt
$s_3 = 371\,m \approx 370\,m$.
Gesamtzeit t: $t = t_1 + 75\,s + t_3 = 177\,s$;
Gesamtweg s: $s = 100\,m + 370\,m = 470\,m$.

Na/Te 10/12 ■ 415 Ges.: V Geg.:
$U = 100$ V; aus Tabelle: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,A\cdot s$;
$m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg;
$m\cdot\frac{v^2}{2} = e\cdot U$; $v \approx 8{,}4\cdot 10^3\,\frac{km}{s}$.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Unter Verwendung eures Rechners werdet ihr in der Lage sein zu überprüfen, daß
$\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{8+\sqrt{55}}$ und
$\sqrt{7+\sqrt{33}} + \sqrt{6+\sqrt{35}}$ annähernd gleich sind. Für beide (Terme) ist zu beweisen, daß sie genau gleich sind oder zu entscheiden (mit Beweis), welches der größere ist.
Lösung: Es gilt $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ mit $a, b \in N$ und folglich, daß
$$\sqrt{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}.$$
Daraus ergibt sich für unsere Aufgabe:
$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3+7}{2} + \sqrt{3\cdot 7}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}},$$
und ebenso $\sqrt{8+\sqrt{55}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$;
$$\sqrt{7+\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{2}};$$
$$\sqrt{6+\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$$
Es folgt, daß beide gegebenen Terme gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11})$ sind.

▲2▲ Der Tuberkelbazillus hat eine Länge von 4 µm. Welche Vergrößerung muß man wählen, damit sein Bild eine Länge von 2 mm hat?

Lösung: $\frac{4 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}}{2\,\text{mm}} = \frac{1}{x}$, d.h. $x = 500$.
Man benötigt eine 500fache Vergrößerung.

▲3▲ Gehe von π nach E auf die Reise! Hierzu ist es notwendig, die Buchstaben derart durch Grundziffern zu ersetzen, daß die angegebenen Rechnungen stimmen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Grundziffern, verschiedene bedeuten verschiedene Grundziffern.

Lösung: $6:2 = 3+1 = 4+1 = 5+3 = 8 - 7 = 1$.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

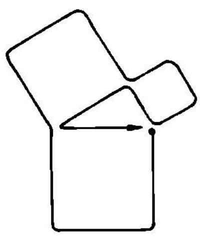
Zahlenlogik

Es fehlt eine Neun. (Summe der beiden unteren Zahlen geteilt durch Quadratwurzel aus der oberen Zahl.)

Ein schlauer Händler

Der Händler entnimmt dem 1. Sack 1 Goldstück, dem 2. Sack 2 Goldstücke, dem 3. Sack 3 Goldstücke usw. Die insgesamt 55 Goldstücke legt er auf die Waage. Sie würden, wären sie alle echt, genau 550 Gramm wiegen. Sind es nur 540 Gramm, so sind die Goldstücke des letzten Säckels falsch, bei 541 Gramm ist es der vorletzte Sack, der die falschen Münzen enthält usw.

In einem Zug



Drei Logeleien

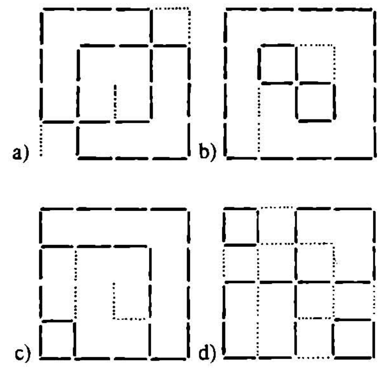
a) Aus den 5 Kisten wurden $5 \cdot 60$ Äpfel = 300 Äpfel herausgenommen. Diese Menge entspricht dem Inhalt von 3 Kisten, da nur soviel Äpfel übrig blieben, wie vorher in zwei Kisten waren. Folglich befanden sich in jeder Kiste anfangs genau 100 Äpfel. Insgesamt waren daher anfangs genau 500 Äpfel vorhanden.

b) Cornelias Meinung ist falsch; denn greift man 12 Kugeln heraus, können jeweils 4 von roter, blauer bzw. gelber Farbe sein. Birgits Meinung ist wahr; denn wenn unter beliebigen 12 von 13 Kugeln keine 5 von gleicher Farbe sind, müssen jeweils 4 von roter, blauer bzw. gelber Farbe sein. Dann hat aber die 13. Kugel ebenfalls eine dieser drei Farben. Von dieser Farbe existieren mithin unter den 13 Kugeln dann 5. Ankes Meinung ist ebenfalls wahr; denn wenn schon 13 Kugeln genügen, um mit Sicherheit zu erreichen, daß sich unter ihnen 5 von gleicher Farbe befinden, so erst recht 15 Kugeln.

c) Alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen gibt das folgende Schema an. Dabei bedeuten:
r = rote Kugel, s = schwarze Kugel, w = weiße Kugel.

	A	*B*
1.	rrr	rsww
2.	rrs	rrww
3.	rrw	rrsw
4.	rsw	rrrw
5.	rww	rrrs
6.	sww	rrrr

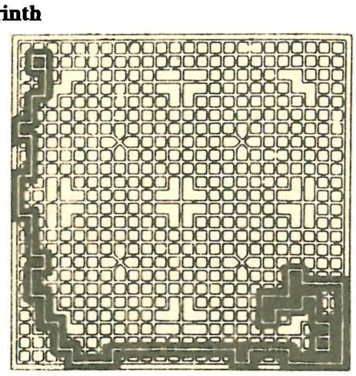
Hölzchenspiele



Aus dem Geschirrschrank

Bezeichne: Flasche = f; Glas = g; Krug = k; Teller = t.
Dann gilt: f + g = k (1),
f = g + t (2), 2k = 3t (3)
mit (2) in (1) folgt: 2g + t = k;
das in (3) ergibt:
4g + 2t = 3t, also: t = 4g;
damit in (2): f = 5g, bzw. in (3)
2k = 12g, also k = 6g.
Die Masseverhältnisse sind damit
g : t : f : k = 1 : 4 : 5 : 6.

Labyrinth



Kryptarithmetik

a)
$$\begin{array}{ccccc} 290 & - & 253 & = & 37 \\ + & & - & & \times \\ 360 & : & 15 & = & 24 \\ \hline 650 & + & 238 & = & 888 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccccccc} \boxed{4} & \cdot & \boxed{9} & : & \boxed{3} & + & \boxed{20} & - & \boxed{32} \\ \boxed{8} & : & \boxed{2} & + & \boxed{36} & - & \boxed{6} & = & \boxed{30} \\ \boxed{6} & \cdot & \boxed{2} & + & \boxed{12} & : & \boxed{2} & - & \boxed{18} \\ \hline \boxed{18} & - & \boxed{13} & + & \boxed{47} & + & \boxed{28} & = & \boxed{80} \end{array}$$

Der neue Tresor

Folgende Gleichungen können aufgestellt werden:

(1) $X + Y + Z = 18$
(2) $A = 100X + 10Y + Z$
(3) $B = 3A = 300X + 30Y + 3Z$
(4) $C = B - 99 = 300X + 30Y + 3Z - 99$
(5) $C = 100Z + 10Y + X$

Daraus folgt: $A = 297$; $B = 891$; $C = 792$.

Lösungen zu: Drei harte Nüsse
Heft 6/87

▲1▲ Setze 12.00 Uhr als Zeitpunkt 0 und wähle die Zeiteinheit 1 ≙ 5 min, also 1 h ≙ 12; 16.05 Uhr ≙ $4 \cdot 12 + 1 = 49$. Bezeichne v_A, v_B die Geschwindigkeiten der von A bzw. B gestarteten Autos und t_{A1}, t_{A2} die Fahrzeiten des in A gestarteten Autos für die Strecken $3\overline{AT}$ bzw. $\overline{TB}$. Analog seien t_{B1}, t_{B2} die Zeiten des in B gestarteten Autos für die Strecken $\overline{BT}$ bzw. $\overline{TA}$. Dann gilt:
$$v_A = \frac{\overline{AT}}{49} \qquad v_A = \frac{\overline{TB}}{x-49}$$
$$v_B = \frac{\overline{TB}}{25} \qquad v_B = \frac{\overline{AT}}{x-49}.$$
Hieraus folgt
$$\frac{\overline{AT}}{49} = \frac{\overline{TB}}{x-49} \text{ und } \frac{\overline{AT}}{x-49} = \frac{\overline{TB}}{25}$$
also $\quad \frac{49}{x-49} = \frac{x-49}{25}$ bzw.
$$(x-49)^2 = 49 \cdot 25.$$
Mithin ist $x - 49 = 35$,
d.h. $x = 7 \cdot (5+7) = 7 \cdot 12$.
Da 123 Zeiteinheiten 1 h entsprechen, ist $x = 7$ h. Die Autos treffen 19.00 Uhr an ihren Zielorten ein.

▲2▲ Mit dem Umschalter für Winkelmaße stelle man *RAD* ein. Anschließend gebe man irgendeine Zahl in den Schulrechner (z. B. 0) ein. Nun drücke man die Taste $\boxed{\cos}$ so lange, bis sich der Wert in der Anzeige nicht mehr ändert. Angezeigt wird dann 0,73908, durch Multiplikation mit 10 werden weitere Stellen sichtbar gemacht: $x^* \approx 0{,}73908513$. Man nennt x^* einen *Fixpunkt* der Gleichung $x = \cos x$.

▲3▲ Ihr erkennt schnell, daß die Gleichungen $x = \sin x$ und $x = \tan x$ die Lösung $x^* = 0$ besitzen. Wie auch immer ihr beginnt, es gibt kein x mit $x = e^x$. Die Gleichung $x = \frac{1}{x}$ ist auf diesem Wege nicht lösbar. Dagegen könnt ihr die Gleichung $x = e^{-x}$ lösen: Nach Vorgabe einer ersten Zahl sind die 3 Tasten $\boxed{+/-}$ $\boxed{F}$ $\boxed{e^x}$ jeweils zu betätigen, bis sich nach dem Drücken der $\boxed{e^x}$-Taste immer der gleiche Wert ergibt.
Wir erkennen: $x^* \approx 0{,}56714$ bzw. $x^* \approx 0{,}56714329$. Analog kann die Gleichung $x = 10^{-x}$ gelöst werden ($x^* \approx 0{,}399013$). Unser Leser Herr E. Beier aus Zörbig hat festgestellt, daß man beim wiederholten Betätigen der Tasten $\boxed{\sin}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\tan}$, die beim SR 1 ja nebeneinander angeordnet sind, immer den gleichen Wert ($x^* \approx 0{,}8757798$) erhält. Hier ist gerade die Gleichung $x = \tan(\cos(\sin x))$ gelöst worden!

Lösung zu: Wissen und Rechnen
Heft 1/88

$693 \cdot 155 = 107\,415$

Sowas gibt's doch gar nicht!

Bild 1a zeigt einen Körper, der aus drei Quadern zusammengesetzt ist. Man könnte ein Modell aus drei Holzleisten mit quadratischem Querschnitt basteln. Halt! Hier stimmt doch irgend etwas nicht! Ein dreieckiger Rahmen, der aus Vierkantleisten zusammengefügt ist, müßte doch etwa so wie im Bild 1b aussehen!

Was nun am Bild 1a nicht stimmt, kann man leicht feststellen, wenn man mit einem Stück Papier irgendeine der drei Ekken verdeckt und sich den weiteren Verlauf der jetzt unvollständigen Quader vorstellt. Deckt man beispielsweise die rechte Ecke der Figur im Bild 1a ab, so müßten diese Quader etwa so verlaufen, wie es im Bild 1c dargestellt ist.

Einen Körper wie im Bild 1a gibt es also nicht, ebensowenig wie den im Bild 1d. In der *alpha* wurden bereits einige solche *unmöglichen Körper* vorgestellt (z. B. in Heft 1/85). Wir wollen hier einige Tricks erläutern, mit denen man solche Figuren konstruieren kann.

Zunächst erinnern wir uns: Projektionen bilden räumliche Gebilde (z.B. Körper) auf eine Ebene ab. Dabei entstehen mehr oder weniger anschauliche Bilder der räumlichen Originale.

Auf diese Weise wird zwar jedem Körper ein ebenes Bild zugeordnet, jedoch ist nicht jede ebene Figur Bild eines Körpers bei irgendeiner Abbildung. Zeichnet man aber geschickt ebene Figuren, die keinem räumlichen Original entsprechen, so ist der Betrachter dennoch versucht, sie räumlich zu interpretieren, d.h. in ihnen einen Körper o.ä. zu erkennen. Wie kann man beim Erfinden solcher Figuren vorgehen?

Nehmen wir an, zwei kongruente Quader (veranschaulicht durch zwei Holzleisten mit quadratischem oder rechteckigem Querschnitt) liegen irgendwie im Raum. Sie sollen aber nicht parallel liegen, sondern so, daß sich ihre Bilder bei Parallelprojektion in wenigstens einer Rißebene (z. B. im Grundriß) überschneiden. Nun läßt sich vorstellen, daß die beiden Quader bei geeigneter schräger Parallelprojektion Bild 2a ergeben. Dieses Bild sagt jedoch nichts über die wahre räumliche Lage der Quader, also beispielsweise über ihren wahren Abstand voneinander, aus. Das wird besonders deutlich, wenn man nur die äußeren Umrißlinien des Bildes 2a zeichnet und die davon eingeschlossene Fläche (als Schattenfläche) betrachtet, wie es Bild 2b zeigt. So paßt der Umriß der Figuren in den Bildern 2c und 2d ebenso in das Schattenbild 2b hinein wie der Umriß der Figur im Bild 2a.

Bekanntlich haben die Bilder zweier nicht paralleler Geraden in zumindest einer Rißebene einen Schnittpunkt. Umgekehrt müssen Schnittpunkte in einem durch Projektion entstandenen Bild aber nicht immer einem tatsächlichen Schnittpunkt im Original entsprechen. Wie die Beispiele zeigen, ist es für die eindeutige räumliche Interpretation eines Projektionsbildes unbedingt notwendig, den im Bild auftretenden Schnittpunkten besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Fehlinterpretationen wird schon vorgebeugt, wenn man sichtbare bzw. verdeckte Körperkanten im Bild deutlich kennzeichnet. Dadurch schließt das Bild 2a schon Körper wie in den Bildern 2c oder 2d aus (bei denen auch die vertikalen Schnittkanten auf die gegenseitige Durchdringung der beiden Quader hinweisen). Er ermöglicht aber dennoch keine Aussage über den Abstand der beiden Quader im Raum. Um diesen Abstand zu veranschaulichen, fügen wir jetzt einen dritten Quader senkrecht zu den beiden gegebenen so ein, daß er die Deckfläche des unteren mit der Grundfläche des oberen Quaders verbindet, und erhalten Bild 2e. Dabei haben wir angenommen, daß sich die beiden Quader nicht berühren, was nach Bild 2a durchaus möglich wäre.

Bis hierher haben wir uns streng an die Grundregeln der Darstellenden Geometrie gehalten. Wir betrachten nochmals das Bild 2e und stellen fest, daß dieses Bild richtig ist.

Was geschieht aber, wenn wir im Bild 2e die Kreuzungsstelle der beiden ursprünglichen Quader so umfrisieren, wie es im Bild 2c dargestellt ist? Dann entsteht Bild 2f.

Jetzt sind wir also bei dem *Trick* angelangt! Was haben wir getan? Wir haben zwei sich im Raum weder berührende noch durchdringende Körper so projiziert, daß sich ihre Bilder überschneiden. Ihren räumlichen Abstand haben wir mittels eines eingefügten dritten Körpers (Distanzstück) angedeutet. Und dann haben wir diesen räumlichen Abstand ignoriert und die Überschneidungsstelle unter Ausnutzung des zu den Bildern 2a bis 2c Gesagten zur Durchdringung manipuliert.

Es ist nun kein Problem, aus dem Bild 2f das Bild 1a zu gewinnen. Der ganze *unmögliche Körper* beruht also auf der zielgerichteten, absichtlichen Mißachtung der Regeln der Darstellenden Geometrie. Dabei haben wir Details durchaus richtig dargestellt, aber im Ganzen ergeben sich Widersprüche.

Nachdem wir nun wissen, wie Bild 1a entstanden ist, sehen wir uns Bild 3a an. Hier wurde genauso verfahren. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß sich zwei im Raum parallele Quader im Projektionsbild mit einem dritten überschneiden, wobei der räumliche Abstand der parallelen Quader wieder durch ein eingefügtes vertikales Distanzstück verdeutlicht wird. Die in der Mitte des Bildes 3a dargestellte Überschneidung kann natürlich auch so verändert werden, daß der vertikale Quader nicht vor, sondern hinter dem anderen Quader erscheint. Man kann diese Stelle aber auch als Durchdringung darstellen (Bild 3b).

Interessante Varianten ergeben sich, wenn man die Ecken der Figuren in den Bildern 1a bzw. 3a durch Kreisbögen ersetzt, wie es in den Bildern 1d und 3c gezeigt ist. Diese Gebilde erscheinen wesentlich realer, sehen sie doch so aus, als seien sie nur durch entsprechendes Verdrehen oder Verwinden eines in sich geschlossenen ringähnlichen Körpers entstanden.

Verfolgt man im Bild 1d den Verlauf der Kanten, so stellt man überraschenderweise fest, daß die Kanten einen in sich geschlossenen Linienzug ergeben. Verfolgt man den Verlauf der Begrenzungsflächen, so ergibt sich eine in sich geschlossene Fläche (Bild 1e soll das veranschaulichen).

Das heißt aber: Gäbe es einen Körper gemäß Bild 1d, so hätte dieser nur eine Kante und nur eine Fläche. Dennoch stellt Bild 1d *kein Möbiussches Band* dar, denn diese ist ja ein existierendes räumliches Gebilde, von dem man sich leicht ein Modell anfertigen kann.

Bleiben wir bei unseren *unmöglichen Gebilden*. Bild 4 zeigt eine Kombination aus zwei Figuren des Bildes 1a. Daß im Bild 5 lediglich die Überschneidungsstellen falsch dargestellt sind, indem nämlich die sichtbaren mit den verdeckten Kanten vertauscht wurden, ist sofort erkennbar. Der Effekt kommt auch hier dadurch zustande, daß der vertikale räumliche Abstand durch Quader als Distanzstück dargestellt wurde. Im Bild 6 wurden Überschneidungen als Durchdringungen gezeichnet.

Bei der Figur 7a wurde die Figur aus Bild 1a in das Bild eines Ringes mit quadratischem Querschnitt (d. h. in diesem Fall eines Körpers, der durch Rotation eines Quadrats Q um eine außerhalb von Q verlaufende, in der Ebene von Q liegende Achse erzeugt wird) gezeichnet. Figur 7b zeigt eine richtige Darstellung, allerdings so gedreht, daß die mögliche Überschneidung im Projektionsbild außerhalb der Zeichnung liegt.

Zum Abschluß möge sich der Leser überlegen, wie das Bild 8 entstanden ist und ob das Bild 9 ebenfalls mit den hier erklärten Kniffen gezeichnet werden kann.

Und wenn sich dieser oder jener unserer Leser ein besonders ausgefallenes *unmögliches Gebilde* einfallen lassen sollte, darf er es getrost an die Redaktion *alpha* einsenden.

A. Körner

Bild 1a

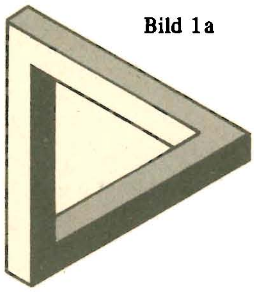


Bild 1c

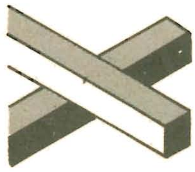


Bild 1b

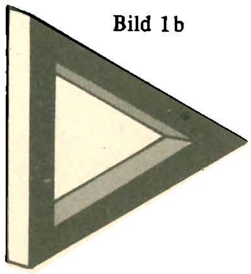
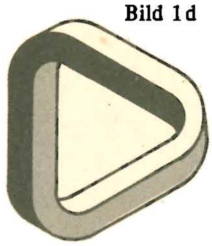


Bild 1d



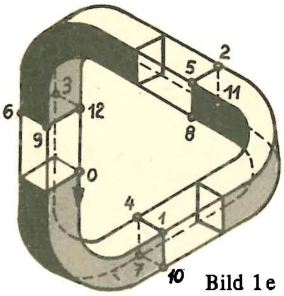


Bild 1e

Bild 2b Bild 2a

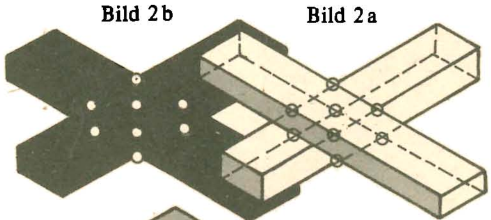


Bild 2c

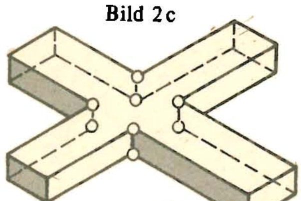


Bild 2d

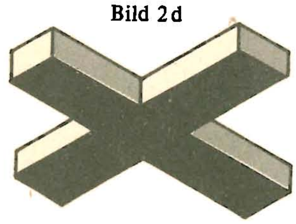


Bild 2e

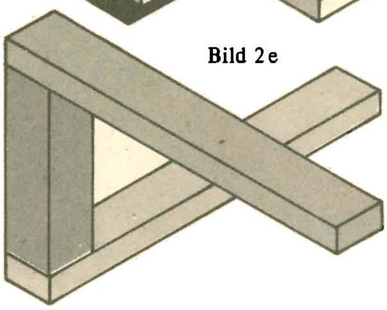


Bild 2f

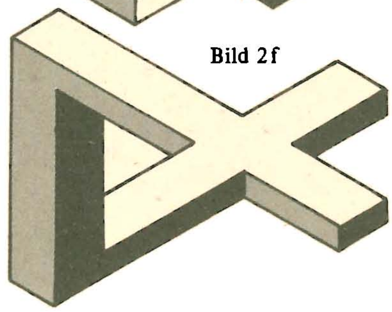


Bild 3a
Bild 3b

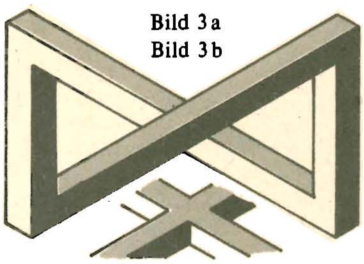


Bild 4

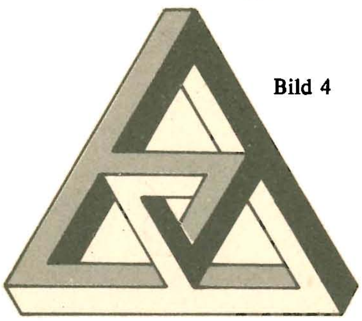


Bild 3c

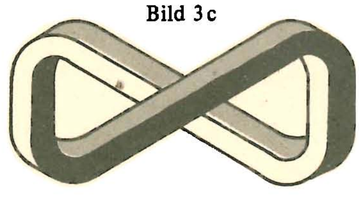


Bild 5

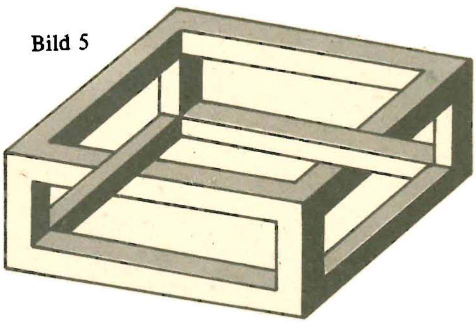


Bild 9

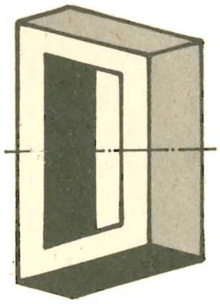


Bild 6

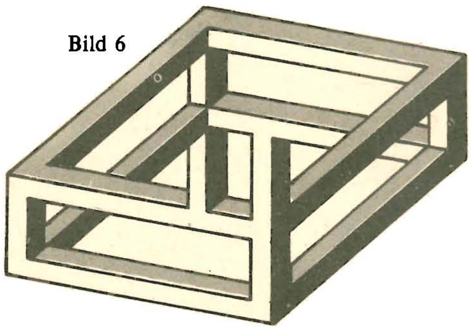


Bild 7a

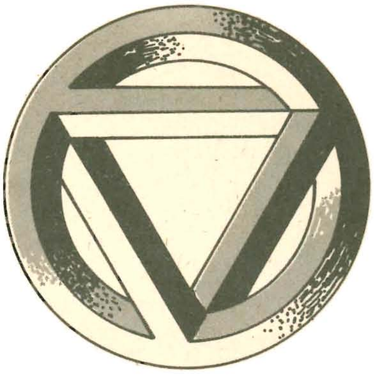


Bild 8

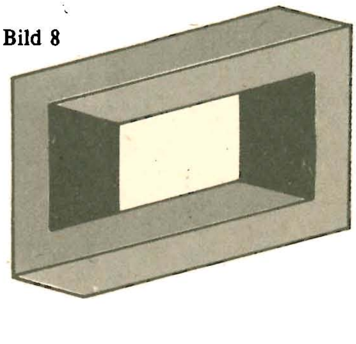
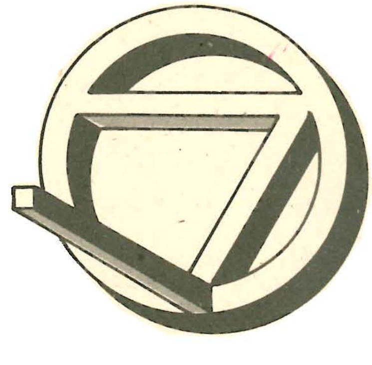
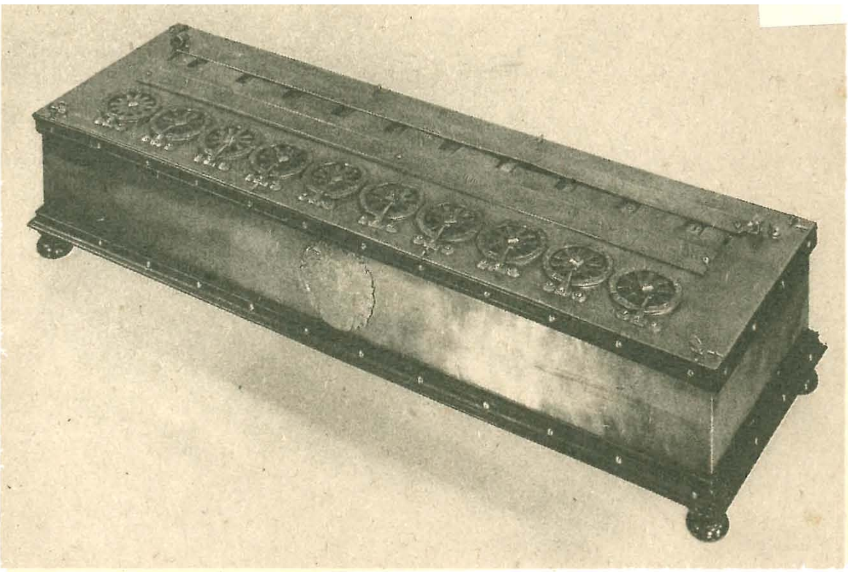


Bild 7b





Eine Rechenmaschine von Blaise Pascal aus der Zeit um 1650

im Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon

Das Rechnen gehört zu einer der frühesten Betätigungen des Menschen. Mit der Entwicklung von Handwerk, Handel und Geldwirtschaft sowie der Wissenschaften wuchsen stetig die Anforderungen an den Umgang mit Zahlen, deren Speicherung und an die Durchführung bestimmter Rechenoperationen. Bereits frühzeitig versuchte der Mensch sich bei der Durchführung einfacher Rechenoperationen entsprechender Hilfsmittel zu bedienen. Als Beispiele sollen das Benutzen der Finger, kleiner Steinchen oder Muscheln zum Addieren und Subtrahieren, das Speichern von Zahlen durch Einkerben in Hölzer oder Knochen oder die Schaffung des Rechenbrettes angeführt werden. Aber erst im 17. Jahrhundert entstanden vereinzelt Anforderungen, die eine Mechanisierung der vier Grundrechenoperationen wünschenswert erscheinen ließen. Inzwischen war auch die feinmechanisch-handwerkliche Technik so weit entwickelt, daß die Voraussetzungen für den Bau mechanischer Rechenmaschinen gegeben waren.

Die Geschichte der mechanischen Rechenmaschine beginnt mit der ersten 1623 von Wilhelm Schickard (1592 bis 1635) konstruierten und von einem damit beauftragten Mechaniker gebauten Maschine, von der aber kein Originalexemplar erhalten geblieben ist. Sie war auf Anregung des berühmten Astronomen Johannes Kepler (1571 bis 1630) zur Erleichterung seiner umfangreichen astronomischen Berechnungen entstanden. Infolge ungünstiger Umstände (Dreißigjähriger Krieg) geriet die Erfindung in Vergessenheit.

Als nächster beschäftigte sich der französische Mathematiker, Physiker und Philosoph Blaise Pascal (1623 bis 1662) mit der Konstruktion und dem Bau von Rechenmaschinen. Die ersten Exemplare entstanden zwischen 1640 und 1645 mit dem Ziel, die umfangreichen Rechenarbeiten seines Vaters, der als Finanzverwalter für die obere Normandie tätig war, zu erleichtern. Die Maschinen waren daher nur für Addition und Subtraktion konzipiert. Ihre Herstellung erfolgte wahrscheinlich durch einen Uhrmacher in Rouen. Im Jahre 1649 erhielt Pascal ein königliches Privileg für die Herstellung seiner Rechenmaschinen. Von ihnen sind 9 Exemplare erhalten geblieben, davon nur eine Maschine außerhalb Frankreichs; es ist die im Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon ausgestellte Pascalsche Rechenmaschine aus der Zeit um 1650.

Sie besitzt ein 10stelliges Einstell- und Resultatwerk. Entsprechend dem geplanten Verwendungszweck beschriftete Pascal die einzelnen Stellen mit Münzeinheiten bzw. deren Vielfachen. Die zu addierenden oder zu subtrahierenden Zahlen werden stellenweise mit Hilfe eines Griffels über die speichenkranzförmigen Einstellelemente eingegeben. Die eingestellten Zahlen erscheinen gleichzeitig auf Ziffernwalzen in Anzeigefenstern. Die Ziffernwalzen tragen auf ihrer Mantelfläche je einen schwarz bzw. rot beschrifteten Ziffernring, wobei sich jeweils Komplementziffern gegenüberstehen. Dadurch wird die Eingabe positiver und negativer Summanden ohne Umkehrung der Drehrichtung der Einstellelemente

Über den Anzeigefenstern befindet sich ein streifenförmiger Schieber zum Abdekken der jeweils nicht benötigten Zahlenreihe.

Das Rechenwerk besteht aus Kronrädern mit stiftförmigen Zähnen, die nach dem Prinzip eines Kegelradgetriebes angeordnet sind. Diese Kronräder mit den stiftförmigen Zähnen sind am Dresdner Exemplar jeweils aus einem Materialstück gefeilt.

Die Zehnerübertragung erfolgt über die Einwirkung der Schwerkraft auf einen speziellen Übertragungsmechanismus, so daß die Pascalschen Maschinen nur bei waagerechter Aufstellung arbeiten.

Mit Hilfe der Pascalschen Maschine ist es möglich, Zahlen zu addieren und zu subtrahieren. Nach einem etwas umständlichen Verfahren lassen sich aber auch Multiplikationen und Divisionen durchführen.

Der Weg des Dresdner Exemplares führte höchstwahrscheinlich über die aus Frankreich stammende Königin von Polen, Marie Louise de Gonzague, die zwei Rechenmaschinen von Pascal erhalten haben soll. Eine davon gelangte vermutlich während der sächsisch-polnischen Union an den Dresdner Hof und damit in die Sammlungen des Mathematisch-Physikalischen Salons. Sie blieb trotz vieler Kriegsereignisse bis in die heutige Zeit erhalten und legt Zeugnis ab vom hohen Stand der Feinmechanik und vom Können des Menschen der damaligen Zeit.

K. Schillinger

Staatlicher Mathematisch-Physikalischer Salon

Zwinger, Dresden, 8010

Öffnungszeiten: täglich, außer donnerstags, von 9–16 Uhr

Die weltbekannten Sammlungen umfassen kunstvolle Instrumente und Geräte der angewandten Mathematik und Physik sowie verwandter Disziplinen vom 13. bis 19. Jh. Seit seiner Gründung als eigenständiges Museum 1728 befindet sich der Salon im Zwinger. Die Uhrensammlung, die einen Überblick über 500 Jahre Zeitmessung gibt, gehört zu einer der umfangreichsten und international bedeutendsten ihrer Art. Das Glanzstück bildet die Planetenlaufuhr von Baldewein, Bucher und Diepel, 1563 bis 1567. Nicht minder berühmt ist die Globensammlung, die als ältestes Exponat einen Himmelsglobus vom Jahre 1279 aus der persischen Sternwarte Meragha enthält. Weitere wertvolle Sammlungen, die in dieser Geschlossenheit ebenfalls international zu den bedeutendsten zählen, umfassen geodätische Instrumente, optische und astronomische Instrumente, Waagen und Längenmaße, Thermometer und Barometer, Kompaßgeräte sowie Rechen- und Zeichenhilfsmittel vergangener Zeiten.

aus: Museen, VEB Tourist Verlag, Berlin · Leipzig

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 22 (1988) 2 · Seiten 25 bis 48