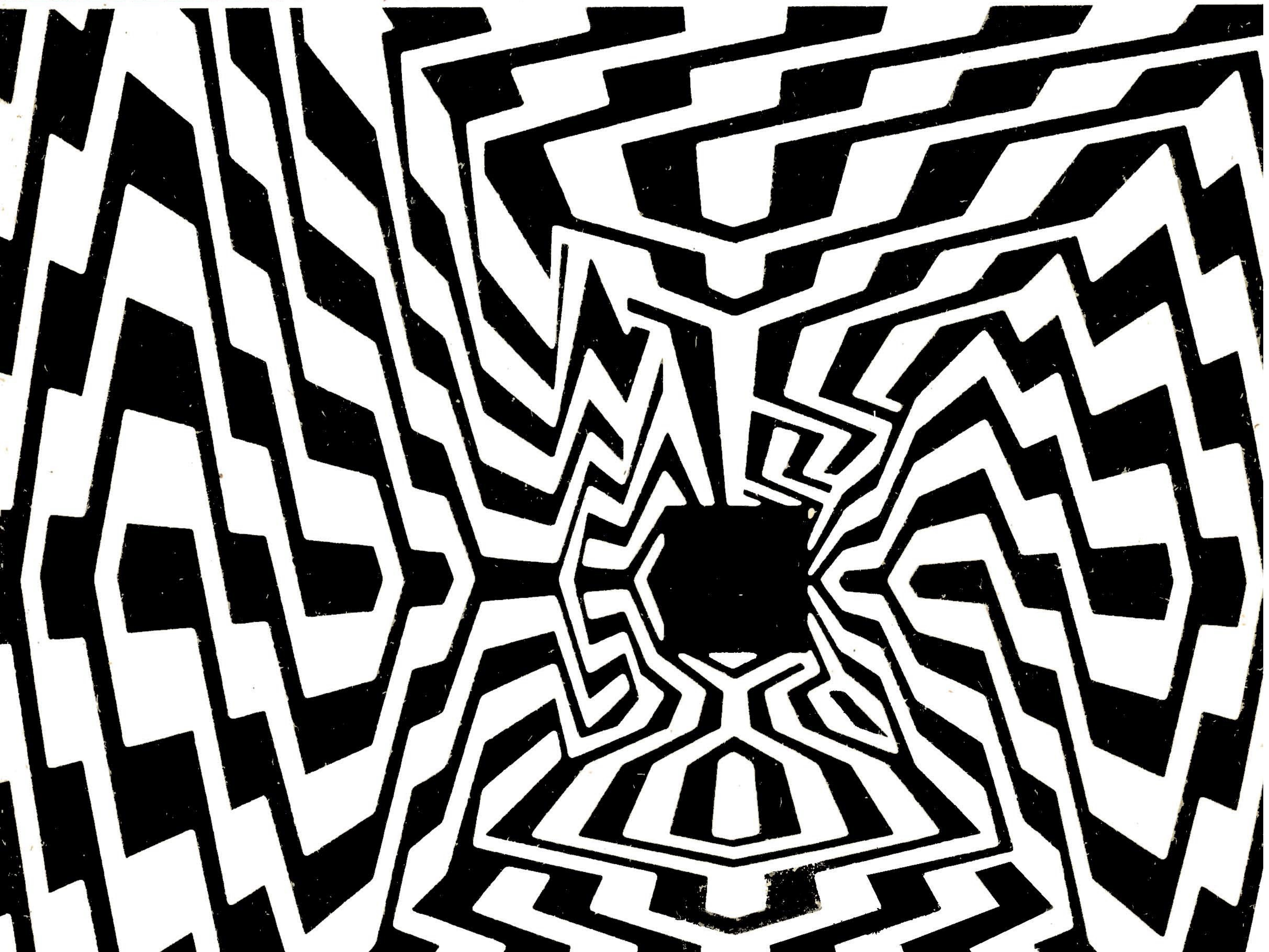
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31059

2

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: Abb. aus J. I. Perelman: Unterhaltsame Algebra, Volk u. Wissen, Berlin (S. 28); Mathe-LVZ (S. 31); ZB, Berlin (S. 32); Geza Fekete, Budapest (S. 37); Mohr, Berlin (S. 41); P. Krassowski, Opole (S. 41); ZB/ADN (III. U.-Seite)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin (nach Motivauswahl von J. Lehmann, Leipzig)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 20. Dezember 1978

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Wie Hipparch die Bahn der Sonne berechnete

An einem Beispiel wollen wir uns einmal ansehen, mit welchen Vorstellungen, Gedanken und mathematischen Methoden sich die Astronomen vor etwa 2000 Jahren um die Beschreibung der Bewegungen der Himmelskörper bemüht haben.
Hipparch von Nicäa, der bedeutendste Astronom des Altertums, lebte etwa von 190 bis 125 v. u. Z. Auf der Insel Rhodos und in Alexandria machte er zahlreiche astronomische Beobachtungen. Die Astronomie verdankt ihm grundlegende Erkenntnisse. Hipparchs Werke sind zwar verschollen, aber das „Handbuch der Astronomie" von Claudius Ptolemäus, der etwa 300 Jahre nach Hipparch in Alexandria lebte, ist uns unter dem Titel „Almagest" vollständig überliefert. Ptolemäus kannte und schätzte Hipparchs Arbeiten. Er hat in sein Handbuch auch Hipparchs Lösung der Aufgabe, für jeden Zeitpunkt den Ort der Sonne am Himmel zu berechnen, aufgenommen. Anhand einer deutschen Übersetzung des Almagest, die 1963 in Leipzig erschienen ist, wollen wir Hipparchs Sonnentheorie verfolgen. Als mathematische Hilfsmittel benötigt er Sätze aus der Geometrie des Kreises und die Trigonometrie, die er zu diesem Zweck in die Astronomie einführte.
Uns ist geläufig, daß die Erde zwei voneinander unabhängige Bewegungen ausführt: Sie rotiert wie ein Kreisel in 23 h 56 min einmal von West nach Ost um ihre Achse, und sie bewegt sich innerhalb eines Jahres einmal auf einer Ellipsenbahn um die Sonne. Einem Beobachter auf der Erde wird durch die Erdrotation eine scheinbare, sich täglich wiederholende Bewegung der Sonne von Ost nach West um die Erde vorgetäuscht. Als Folge des Erdumlaufes um die Sonne scheint es ihm, als ob die Sonne in einem Jahr einen größten Kreis auf der scheinbaren Himmelskugel von West nach Ost durchläuft (Bild 1). Dieser Kreis heißt Ekliptik. Sie schneidet den Himmelsäquator in zwei sich diametral gegenüberliegenden Punkten F' und H', dem Frühlings- und Herbstpunkt. Die beiden Halbkreisbogen der Ekliptik zwischen F' und H' werden durch die sogenannten Wendepunkte S' und W' halbiert. In S' steht die Sonne von der Erde aus gesehen zu Beginn des Sommers, in W' zu Beginn des Winters. Da die Erde ihre Bahn mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchläuft, bewegt sich auch die Sonne auf ihrer scheinbaren Bahn, der Ekliptik, verschieden schnell.
Hipparch hält diese beiden scheinbaren Sonnenbewegungen für tatsächlich vor sich gehende Bewegungen der Sonne. Er nimmt an, daß „die Erde die Mitte des Himmelsgewölbes einnimmt" und daß die Sonne (wie alle Himmelskörper) die Erde jeden Tag einmal umkreist. Er geht also von einer „geozentrischen" Vorstellung aus (griechisch ist „ge" die Erde, lateinisch „centrum" der Mittelpunkt). Ihm ist zwar die Kugelgestalt der Erde bekannt, doch weist er die von einigen Philosophen geäußerte Vermutung, die Erde rotiere, zurück, weil sonst „alles, was auf der Erde nicht niet- und nagelfest wäre, scheinbar immer in einer einzigen Bewegung begriffen sein müßte, welche der Bewegung der Erde entgegengesetzt verliefe". Zur Erklärung der zweiten Bewegung der Sonne (nämlich auf der Ekliptik) macht Hipparch die willkürliche Annahme, daß sich die Sonne in einem Jahr auf einer Kreisbahn von West nach Ost, also

Bild 1

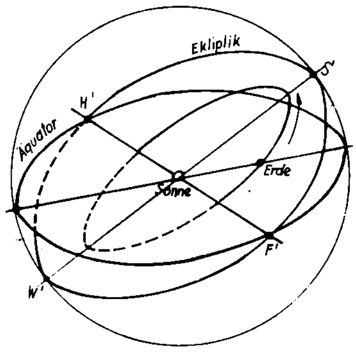


Bild 2

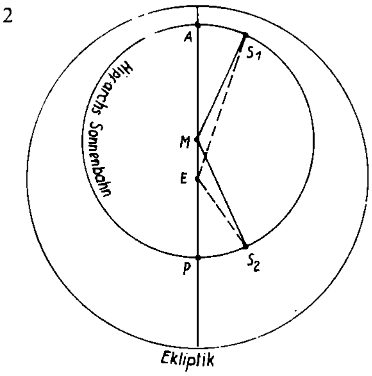


Bild 3

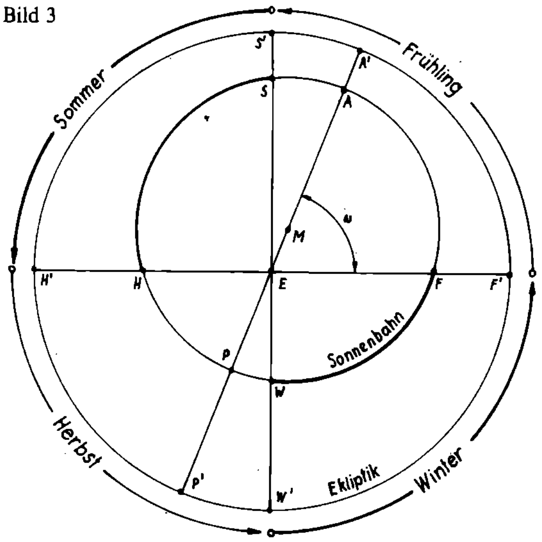


Bild 4

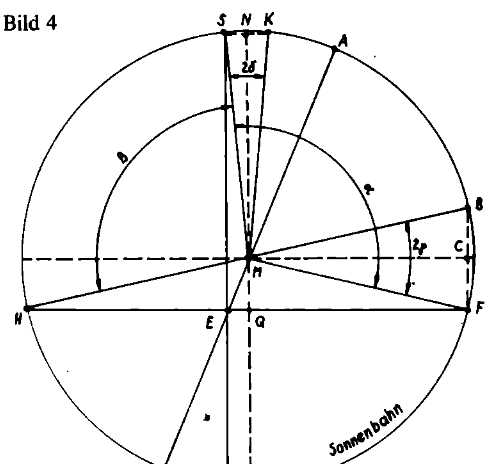


Bild 5

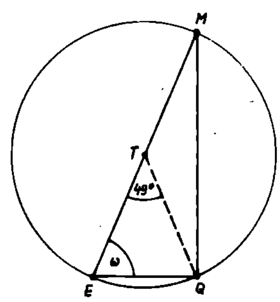
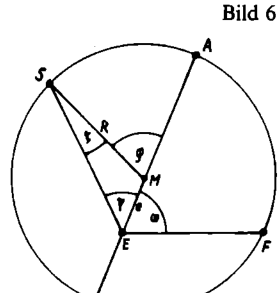


Bild 6



entgegengesetzt zur ersten Bewegung, um die Erde bewegt. Dieser Kreis projiziert sich als Ekliptik auf die Himmelskugel. Jahrhundertelang waren die Astronomen nämlich überzeugt, daß sich alle Himmelskörper auf Kreisen bewegen, da man den Kreis als die vollkommenste Figur ansah. Schließlich nimmt er noch an, daß die Sonne diesen Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, daß sie also in gleichen Zeiten gleichlange Bogen ihrer Bahn zurücklegt. Die Bestimmung des Sonnenortes auf diesem Kreis ist der Inhalt der Sonnentheorie von Hipparch. Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, den Winkel ψ (Bild 6) zwischen einem festen Punkt A der Ekliptik und dem jeweiligen Sonnenort S zu berechnen.

Wir verfolgen nun Hipparchs Lösung und stellen uns dabei auch auf seinen geozentrischen Standpunkt.

„Unter allen Aufgaben, die die Theorie der Sonne uns stellt, ist die erste, die Länge des Jahres zu finden.“ So beginnt die Darstellung dieser Theorie bei Ptolemäus. Als ein Jahr bezeichnet er die Zeitspanne, die die Sonne für zwei aufeinanderfolgende Durchgänge durch den Frühlingspunkt benötigt. (Wir nennen diesen Zeitraum heute ein tropisches Jahr.) Aus vielen Beobachtungen findet er, daß ein tropisches Jahr etwas kürzer als 365,25 Tage sein muß. Die Auswertung dieser Beobachtungen hatte nämlich ergeben, daß nach 300 „Jahren“ zu je genau 365,25 Tagen die Sonne bereits einen Tag früher als erwartet den Frühlingspunkt erreicht. Wir lesen dazu bei Ptolemäus (er rechnet im Sechzigersystem der Babylonier): „Wenn wir daher den einen Tag auf die 300 Jahre verteilen, so kommen auf jedes Jahr $\frac{12}{60^2}$ eines Tages; wenn wir dieses von $365+\frac{15}{60}$ abziehen, so werden wir die gesuchte Jahreslänge mit $365+\frac{14}{60}+\frac{48}{60^2}$ Tagen erhalten.“ Es ist leicht nachzurechnen, daß das tropische Jahr nach Hipparch 365,24667 Tage = 365 d 5 h 55 min 12 s dauert. (Wir messen heute 365 d 5 h 48 min 46 s.) Also – schließt Hipparch weiter – bewegt sich die Sonne mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit $v_s = 360°:365{,}24667$ Tage $= 0{,}98564°$ pro Tag in ihrer Bahn ostwärts weiter. (Aufgabe 1)

Weiter wußte Hipparch aus Beobachtungen, daß – von der Erde aus gesehen – die Sonne die Ekliptik nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft. Zur Erklärung dieses Widerspruchs zu seiner Annahme nimmt er an, daß der Mittelpunkt M des Kreises, auf dem sich die Sonne mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, nicht mit dem Erdmittelpunkt E zusammenfällt (Bild 2). Er stellt sich also vor, daß die Sonne auf einem exzentrischen Kreis um die Erde läuft. A ist der erdfernste Punkt, das Apogäum, P der erdnächste Punkt, das Perigäum der Sonnenbahn. Dazu sagt Ptolemäus: „Ziehen wir alsdann nach Abtragung der gleichgroßen Bogen S_1A und PS_2 die Verbindungslinien S_1M, S_1E, S_2M, S_2E, so wird ohne weiteres klar sein, daß die Sonne, nachdem sie jeden der beiden Bogen in gleicher Zeit zurückgelegt hat, auf dem um E beschriebenen Kreise scheinbar ungleiche Bogen durchlaufen haben muß; denn Winkel S_1EA wird kleiner, Winkel S_2EP größer sein als jeder der als gleich angenommenen Winkel S_1MA und S_2MP.“ Und er folgert weiter, „daß die kleinste Bewegung stets im erdfernsten und die größte Bewegung stets im erdnächsten Punkte vor sich geht, weil Winkel AES_1 in allen Fällen (wenn Bogen AS_1 = Bogen PS_2 ist) kleiner ist als Winkel PES_2.“ (Aufgabe 2)

Nun wird das Verhältnis $e:R$ berechnet. e ist die Länge der Strecke ME, R die Radiuslänge der Sonnenbahn (Bild 3). Außerdem ist die Größe ω des Winkels $F'EA'$ zu ermitteln. Dieser Winkel heißt „Länge des Apogäums“. Durch ihn wird die Lage des Apogäums auf der Ekliptik festgelegt.

Hipparchs Lösung dieser beiden Aufgaben ist verblüffend einfach. Er hatte beobachtet, daß der Frühling 94,5 Tage und der Sommer 92,5 Tage dauert. Er überlegt zunächst, daß A auf dem Frühlingsbogen FS liegen muß: Den Halbkreis $F'S'H'$ durchläuft die Sonne nach Beobachtung in 187 Tagen, also in mehr als der Hälfte eines Jahres. Der Halbkreis $H'W'F'$ wird in kürzerer Zeit durchlaufen. Die Sonne ist demnach im Sommer„halb“jahr langsamer als im Winter„halb“jahr. Also muß A' auf dem Bogen $F'S'H'$ liegen, und zwar zwischen F' und S', da von den beiden gleichlangen Bogen $F'S'$ und $S'H'$ der erste in der längeren Zeit, also mit kleinerer Geschwindigkeit durchlaufen wird. Der Mittelpunkt M der Sonnenbahn liegt auf der Geraden durch A' und E zwischen diesen beiden Punkten.

Bild 4 zeigt die Sonnenbahn um M noch einmal. Als Hilfslinien sind durch M die Parallelen zu HF und WS, durch F die Parallele zu WS und durch S die Parallele zu HF gezogen. Bei Ptolemäus lesen wir dazu: „Nun beträgt die gleichförmige Bewegung der Sonne in 94,5 Tagen von den 360 Graden des Kreises 93°9′ und in 92,5 Tagen 91°11′ (wir nennen diese Winkelgrößen hier α und β), so daß auf den Kreisbogen FSH 184°20′ kommen.“ (Aufgabe 3) Damit berechnet Hipparch die Größen 2γ und 2δ der beiden Zentriwinkel FMB und SMK. Er findet $2\gamma = 184°20' - 180° = 4°20'$ und $\delta = \alpha - 90° - \gamma = 0°59'$, also $2\delta = 1°58'$.

Wir würden heute aus den rechtwinkligen Dreiecken FCM und MNS sofort $|CF| = R \cdot \sin\gamma$ und $|SN| = R \cdot \sin\delta$ entnehmen und unter Beachtung von $|CF| = |MQ|$ und $|SN| = |EQ|$ aus dem rechtwinkligen Dreieck MQE das Verhältnis $e:R$ berechnen. Dazu benötigen wir eine Tafel der Werte der Sinusfunktion. Eine solche kannte Hipparch nicht. Er arbeitet statt dessen bei trigonometrischen Rechnungen mit seinen „Sehnentafeln“. Aus diesen Tafeln kann er zu jedem Zentriwinkel im Kreis die Länge der zugehörigen Sehne entnehmen. Da Ptolemäus Hipparchs Sehnentafeln samt ihrer Berechnung in den Almagest aufgenommen hat, wissen wir, wie Hipparch diese Tafeln berechnet hat. Darauf können wir hier jedoch nicht eingehen.

Mit Hilfe dieser Tafeln findet Hipparch $|BF| = R \cdot 0{,}0756$ und $|SK| = R \cdot 0{,}0344$. Da $\frac{1}{2}|BF| = |CF| = |MQ|$ und $\frac{1}{2}|SK| = |SL| = |EQ|$ ist, erhält er aus dem rechtwinkligen Dreieck EQM mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$e = \sqrt{|MQ|^2 + |EQ|^2} = R \cdot \sqrt{0{,}0378^2 + 0{,}0172^2}$.

Als Ergebnis gibt er $e:R = 1:24$ an. (Dazu Aufgabe 4)

Zur Berechnung von ω beschreibt Hipparch um das rechtwinklige Dreieck MQE den Umkreis (Bild 5). Dessen Mittelpunkt T halbiert die Hypotenuse ME. Der Durchmesser dieses Kreises und die Länge der Sehne EQ sind bekannt. In der Sehnentafel findet er, daß zur Sehne EQ ein Zentriwinkel der Größe 49° gehört. Folglich ist $\omega = 65°30'$. Wir können das leicht nachprüfen, denn es ist $\tan\omega = |MQ|/|EQ|$.

Somit hat Hipparch gefunden, daß der Mittelpunkt M der Sonnenbahn $\frac{1}{24}$ der Länge des Radius der Sonnenbahn von der Erde entfernt ist in der Richtung, die auf einen Punkt der Ekliptik zeigt, der 65°30′ östlich vom Frühlingspunkt liegt.

Schließlich zeigt Hipparch, wie man aus der gleichförmigen Bewegung der Sonne um M ihre ungleichförmige Bewegung um E berechnen kann. Um uns kurz fassen zu können, verlassen wir jetzt Hipparchs Darstellung und verwenden unsere Kenntnisse der Trigonometrie. Als Beispiel berechnen wir den Winkel ψ (Bild 6), der den Sonnenort auf der Ekliptik t Tage nach dem Durchgang der Sonne durch das Apogäum angibt.

Es ist $\psi = \phi - \zeta$, da Winkel AMS ein Außenwinkel des Dreiecks EMS ist. Zuerst berechnen wir $\phi = t \cdot v_s$. Um ζ zu bestimmen, wenden wir auf das Dreieck SME den Sinussatz der ebenen Trigonometrie an:

$e:R = \sin\zeta : \sin(\phi - \zeta)$. Diese Gleichung lösen wir nach $\sin\zeta$ auf und wenden ein Additionstheorem trigonometrischer Funktionen an. Wir erhalten $\sin\zeta = \frac{e}{R}(\sin\phi\cos\zeta - \cos\phi\sin\zeta)$.

Nun dividieren wir diese Gleichung durch $\cos\zeta$ (es ist $\cos\zeta \neq 0$, wenn ϕ kein ganzzahliges Vielfaches von 180° ist) und lösen sie nach $\tan\zeta$ auf:

$\tan\zeta = \frac{e}{R}\sin\phi : \left(1 + \frac{e}{R}\cos\phi\right)$. Daraus läßt sich ζ berechnen, da $\frac{e}{R}$ und ϕ bekannt sind. Damit kennen wir auch $\psi = \phi - \zeta$. Nun ist der Win-

kel AES bestimmt und der Sonnenort S gegeben:
Die Sonne steht t Tage nach dem Apogäumsdurchgang in dem Punkt der Ekliptik, der $(\omega+\psi)$ Grad vom Frühlingspunkt entfernt ist.
Damit war Hipparch in der Lage, die Bewegung der Sonne mathematisch in einer Weise zu beschreiben, die der damaligen Beobachtungsgenauigkeit genügte. Daß er trotz falscher Voraussetzungen die Sonnenbewegung annähernd richtig beschreiben konnte, liegt daran, daß die Erdbahnellipse nur wenig von der Kreisform abweicht.
Es ist lehrreich, Hipparchs Formeln mit heutigen Werten durchzurechnen. Im Jahre 1978 war Frühlingsbeginn am 21. März 1 h, Sommerbeginn am 21. Juni 19 h und der Herbstbeginn am 23. September 10 h. Wer die Rechnungen ausführt, wird für seine Mühe mit einer astronomischen „Entdeckung“ belohnt (dazu Aufgabe 5).

Aufgaben

▲1▲ Man prüfe Hipparchs Berechnung der Jahreslänge und von v_s nach.

▲2▲ Man beweise Hipparchs Behauptung: „Winkel S_1EA wird kleiner, Winkel S_2EP größer sein als jeder der als gleich angenommenen Winkel S_1MA und S_2MP.“ Die Bezeichnungen entnehme man aus Bild 2.

▲3▲ Man führe die Berechnung der Winkelgrößen α und β aus.

▲4▲ Man berechne das Verhältnis $e:R$ unter Benutzung einer Tafel der Werte der Sinusfunktion und vergleiche das Ergebnis mit dem von Hipparch angegebenen.

▲5▲ a) Man berechne nach Hipparchs Verfahren die Apogäumslänge $\bar{\omega}$ für 1978 aus den am Ende gegebenen Daten. (Die heutige Apogäumslänge $\bar{\omega}$ weicht erheblich von Hipparchs Wert ω ab. Also kann das Apogäum kein auf der Ekliptik fester Punkt sein. Tatsächlich bewegt es sich pro Jahr um 61.9 Winkelsekunden auf der Ekliptik vorwärts.)
b) Man berechne aus der Apogäumsdifferenz $\bar{\omega}-\omega$, wieviel Jahre seit Hipparchs Beobachtungen ungefähr vergangen sind.

W. Ihle

Lesen – das ist die beste Lehre, den Gedanken eines großen Menschen zu folgen, ist die unterhaltsamste Wissenschaft. Alexander Puschkin

Bücher lesen, heißt wandern gehen in ferne Welten, aus den Stuben über die Sterne. Jean Paul

100 Bände Mathematische Schülerbücherei

Als vor rund 16 Jahren das Politbüro des ZK der SED und der Ministerrat den Mathematikbeschluß faßten, wurde damit auch die Idee der „Mathematischen Schülerbücherei“ geboren. Sie sollte dazu beitragen, das Interesse an der Mathematik und die Freude an mathematischer Betätigung zu wecken und damit die mathematischen Kenntnisse der Schüler und Jugendlichen zu verbessern.
Verschiedene Verlage taten sich zusammen, um für alle Klassen- und Altersstufen entsprechende mathematische Literatur herauszubringen, Verlage, die schon eine gewisse Tradition auf diesem Gebiet hatten; wie z. B. der Teubner-Verlag (BGT), der Deutsche Verlag der Wissenschaften (DVW), der Verlag Volk und Wissen (VWV), aber auch der Urania-Verlag (U), der Fachbuchverlag (FV) und der Kinderbuchverlag (KV).
Als Autoren wurden hauptsächlich Mathematiklehrer und Wissenschaftler an Universitäten und Hochschulen gewonnen, die bereits in der Arbeit mit Schülerzirkeln Erfahrungen gesammelt hatten. So entstanden z. B. die „Übungen für Junge Mathematiker“, die bei der Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiaden eingesetzt werden, die „Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik“ von M. Hasse, das Büchlein „Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene“ von E. Hameister, die vier Bändchen von H. Belkner über „Determinanten“, „Matrizen“, „Metrische Räume“ und „Reelle Vektorräume“ und viele andere.
Ein großer Teil der Bändchen der Mathematischen Schülerbücherei wurde aus anderen Sprachen übersetzt. An erster Stelle stehen die Übersetzungen aus dem Russischen, denn in der UdSSR ist bei vielen Schülern die Beschäftigung mit der Mathematik über den Rahmen der Schule hinaus zu einer beliebten Freizeitbeschäftigung geworden, die mit Ausdauer und Fleiß betrieben wird und deren Erfolge sich bei der Internationalen Mathematik-Olympiade zeigen. Bedeutende sowjetische Wissenschaftler unterstützen die Schüler durch entsprechende Literatur. Zu den ersten Übersetzungen in dieser Reihe gehörten Werke von Mathematikern mit Weltruf wie z. B. „Einführung in die Gruppentheorie“ von P. S. Alexandroff und „Die Fibonaccischen Zahlen“ von N. N. Worobjow. Viele weitere folgten, z. B. „Die Methode der vollständigen Induktion“ von I. S. Sominski, die „Ungewöhnliche Algebra“ von I. M. Jaglom, die „Unterhaltsame Mengenlehre“ von N. J. Wilenkin.

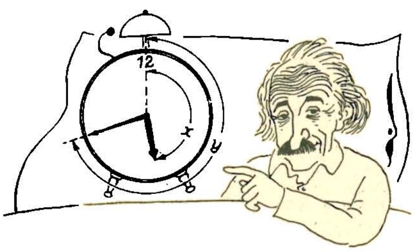
Aber auch Bücher aus anderen Ländern wurden übersetzt und in diese Reihe aufgenommen, z. B. „Einführung in die Graphentheorie“ von J. Sedláček aus dem Tschechischen, „Kombinatorik“ von L. Lovász, J. Pelikán und L. Vesztergombi aus dem Ungarischen und „Zählen und Rechnen einst und jetzt“ von W. Krysicki aus dem Polnischen.
Bei der Entwicklung der Mathematischen Schülerbücherei haben sich zwei Wissenschaftler besonders verdient gemacht, denen Dank gebührt, doch die das Erscheinen des 100. Bändchens nicht mehr erleben konnten: Dr. Ernst Hameister und Professor Dr. Herbert Karl.

Viele von den Bänden der Reihe haben bei den Schülern großes Interesse gefunden und sind schon in mehreren Auflagen erschienen. Es ist ja auch wirklich erstaunlich, wie viele interessante Fragen und Probleme mit Hilfe der Mathematik beantwortet und gelöst werden können. Mancher, der ursprünglich glaubte, die Mathematik sei eine „trockene“ Sache, hat sich schon durch interessante Lektüre vom Gegenteil überzeugen lassen.
So zeigt z. B. O. Zich im Buch „Unterhaltsame Logik“, wie man mit Hilfe mathematischer Schlüsse einen Kriminalfall lösen kann. N. J. Willenkin erzählt in seinem obengenannten Buch, was John Tichy auf seiner 1001. Reise in eine andere Galaxis in einem Hotel mit unendlich vielen Betten erlebt hat; dabei zeigt sich, daß man der „Wunderwelt des Unendlichen“ mit mathematischen Mitteln ganz schön beikommen kann! So könnte man noch viele Beispiele bringen, wie in den Büchern heiter und unterhaltsam, aber auch ernst und zielstrebig mathematische Zusammenhänge dargeboten werden. Doch das beste ist, ihr seht euch die Liste der 100 bisher erschienenen oder in nächster Zeit erscheinenden Bändchen auf der IV. Umschlagseite einmal genauer an; dann wird bestimmt jeder etwas Interessantes für sich finden.

D. Ziegler

Einstein und die Uhrzeiger

Einsteins Name ist untrennbar mit der neuen Auffassung des Zeitbegriffs verbunden. Im folgenden geben wir eine Aufgabe an, die *Einstein* während einer leichten Erkrankung von einem Freund gestellt wurde:
Wann können auf einer Uhr der große und kleine Zeiger vertauscht werden, ohne daß falsche (d.h. unmögliche) Zeigerstellungen entstehen?



Hier ist eine Lösung des Problems: Es genügt, die Zeigerstellungen zu untersuchen, die sich etwa von Mitternacht bis Mittag ergeben, da sich von Mittag bis Mitternacht die Zeigerstellungen wiederholen. Wir benutzen die im allgemeinen gegebene Unterteilung des Ziffernblattes in 60 Teile (Minutenstriche). Zu einem bestimmten Zeitpunkt z seien der Stundenzeiger x und der Minutenzeiger y Teilstriche (im Uhrzeigersinn gerechnet) von der 12 (Mitternacht) entfernt. Wir müssen beachten, daß die Stellung des Stundenzeigers bereits genau die Zeit angibt und die Position des Minutenzeigers, der nur zur besseren Ablesbarkeit angebracht wurde, schon mitbestimmt ist, also nicht mehr beliebig ist. (Umgekehrt legt der Minutenzeiger die Uhrzeit nicht genau fest, da jeweils 12 verschiedene Stellungen des Stundenzeigers möglich sind.) Wenn zu einem Zeitpunkt z eine Zeigervertauschung eine sinnvolle Zeitangabe ergibt, so ist die vertauschte Zeigerstellung z' durch y Teilstriche für den Stundenzeiger und x Teilstriche für den Minutenzeiger charakterisiert.
Der Stundenzeiger benötigt 12 Stunden, um einmal das Zifferblatt zu umlaufen, folglich für einen der 60 Teilstriche $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ Stunden.
Für 15 Teilstriche also 3 Stunden, für 16 Teilstriche 3,2 Stunden bzw. 3 Stunden und 12 Minuten. Entsprechend braucht der Minutenzeiger $\frac{1}{60}$ Stunden für einen Teilstrich. Der „einfache" Grundgedanke, der zur Lösung führt, beruht darauf, daß jede mögliche Zeigerstellung aus der Zeigerstellung 12 Uhr (Mitternacht) hervorgehen muß. Wir betrachten nun irgendeine Zeigerstellung z, die durch x bzw. y Teilstriche für Stunden- bzw. Minutenzeiger bestimmt ist. Dann waren vor $\frac{x}{5}$ Stunden beide Zeiger auf der 12. Da $\frac{y}{60}$ die Minuten angibt, die verstrichen sind, seit der Minutenzeiger die 12 das letzte Mal verlassen hat, gibt $\frac{x}{5}-\frac{y}{60}$ die ganzen Stunden an, die seit dem gemeinsamen Stehen auf 12 Uhr (Mitternacht) verflossen sind. Damit ist $\frac{x}{5}-\frac{y}{60}$ eine ganze Zahl zwischen 0 und 11:

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{60}=m \quad (m=0, 1, 2, \dots, 11). \tag{1}$$

Wenn der Zeitpunkt z eine sinnvolle Vertauschung zuläßt, so muß die durch y Teilstriche für den kleinen und x Teilstriche für den großen Zeiger gegebene Stellung z' möglich sein, d.h., in diesem Fall hätten beide Zeiger vor $\frac{y}{5}$ Stunden auf der 12 (Mitternacht) stehen müssen. Entsprechend gibt $\frac{y}{5}-\frac{x}{60}$ die ganze Zahl der Stunden an, die zwischen 0 und 11 einschließlich liegen muß:

$$\frac{y}{5}-\frac{x}{60}=n \quad (n=0, 1, 2, \dots, 11) \tag{2}$$

Das Gleichungssystem (1), (2) stellt den rechnerischen „einfachen" Grundgedanken dar. Eine gleichwertige Schreibweise für das System ist

$$\begin{matrix} 12x-y=60m \\ 12y-x=60n. \end{matrix} \quad (m, n=0, 1, 2, \dots, 11)$$

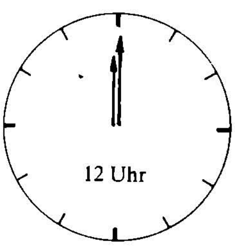
Hieraus folgt

$$x=\frac{60(12m+n)}{143}, y=\frac{60(12n+m)}{143}$$

mit $m, n=0, 1, 2, \dots, 11$. Setzen wir für m und n alle zulässigen Werte ein, so erhalten wir alle Lösungen.
Die Stundenangabe ergibt sich aus der größten ganzen Zahl von $\frac{x}{5}$ oder einfacher aus der natürlichen Zahl m; y gibt die Minuten an.
Für $m=n=0$ erhalten wir die Zeigerstellung 12 Uhr (Mitternacht), die durch Vertauschen ungeändert bleibt. Zu $m=0$ und $n=1$ gehören $x=\frac{60}{143}$ und $y=\frac{720}{143}=5\frac{5}{143}$.
Die $\frac{60}{143}$ Teilstriche des kleinen Zeigers geben 0 Stunden ($m=0$) an, die $5\frac{5}{143}$ Teilstriche des großen Zeigers bedeuten $5\frac{5}{143}$ Minuten. Vertauschung von x und y liefert die Zeit 1 Uhr und $\frac{60}{143}$ Minuten ($n=1$). Fahren wir so fort, so erhalten wir für jedes m genau 12 Kombinationen mit einem n, insgesamt also $12 \cdot 12 = 144$ Vertauschungsmöglichkeiten. Für $m=n=11$ folgt aber $x=60$, $y=60$ (Mittag, 12 Uhr), und diese Zeigerstellung ergab sich ja bereits für $m=n=0$. Also gibt es von Mitternacht bis Mittag 143 Zeitpunkte, an denen die Zeiger der Uhr vertauscht werden können.

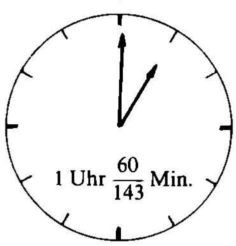
Mitgeteilt von R. Thiele

A $m=n=0$,
$m=n=11$



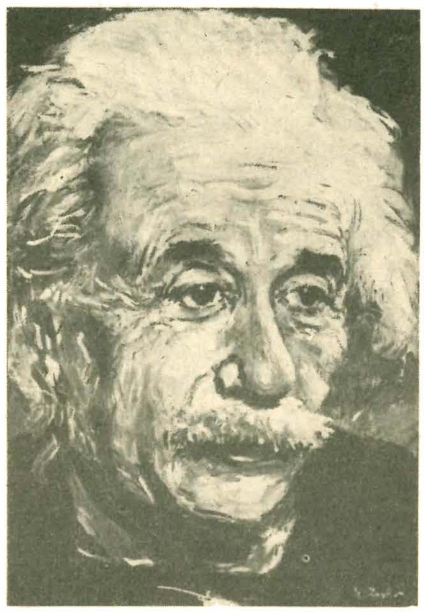
B
D $m=0$, $n=1$

C
E $m=1, n=0$



Persönlichkeiten werden nicht durch schöne Reden geformt, sondern durch Arbeit und Leistung.

A. Einstein



Dieses Bild wurde 1978 im Auftrage der Friedrich-Schiller-Universität Jena von dem Jenaer Maler Hans Lasko zur Ausgestaltung der 9. Internat. Konferenz gemalt.

9. Internationaler Kongreß über Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation 1980 in Jena

In einem ADN-Gespräch teilte Prof. Dr. E. Schmutzer, Mitglied der Internationalen Gesellschaft für allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation, mit, daß im Juli 1980 an der Jenaer Friedrich-Schiller-Universität der 9. Kongreß stattfinden wird. Führende Wissenschaftler auf dem Gebiet der relativistischen Physik aus über 40 Ländern werden als Teilnehmer erwartet. Dieser Kongreß wird einer der wissenschaftlichen Höhepunkte der Ehrungen zum 100. Geburtstag des Begründers der allgemeinen Relativitätstheorie, Albert Einstein, in der DDR sein.
Im Mittelpunkt des für die thüringische Universitätsstadt ersten Weltkongresses werden die aus der Einsteinschen Theorie resultierenden neuesten Erkenntnisse auf diesem physikalischen Fachgebiet stehen. Etwa ein Drittel der geplanten Vorträge wird experimenteller Art sein und sich u. a. mit dem Nachweis von Gravitationswellen befassen. Die theoretischen Beiträge untersuchen auch die enge Verbindung zwischen Relativitätstheorie und Quantentheorie.
An der Friedrich-Schiller-Universität wird seit zwei Jahrzehnten international anerkannte Forschung betrieben. Enge Kontakte bestehen zu ähnlichen Forschungseinrichtungen in vielen Ländern, insbesondere in die UdSSR nach Moskau und Minsk sowie nach London und Kopenhagen.

9th International Conference on General Relativity and Gravitation under the auspices of the International Society for G.R.G. (July 14–19, 1980, Friedrich Schiller Universität Jena). Das Signet zeigt die Buchstaben GR9.
9. Internationale Konferenz über Relativitätstheorie und Gravitation

„Albert Einstein war schließlich nicht der Schlechteste, und er hatte keinen Taschenrechner!"

Gute Grundkenntnisse gefragt

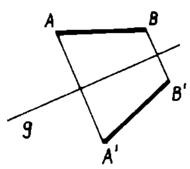
Klasse 5

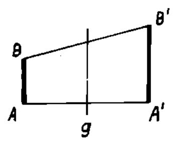
▲1▲ Entscheide, ob Frank recht hat, wenn er behauptet:
a) Es gibt wenigstens eine natürliche Zahl x, für die
$x \cdot 0 = x$ ist.
b) Es gibt wenigstens eine natürliche Zahl m, für die
$m \cdot 0 = 1$ ist.
c) Für jede natürliche Zahl z ist $z \cdot 3 > z$.

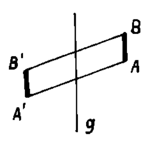
▲2▲ a) Welcher der Dezimalbrüche 0,7; 0,1 :0,09 ist am weitesten von Null entfernt?
b) Gib die kleinste natürliche Zahl an, die größer als 4,12 ist!
c) Gib die größte natürliche Zahl an, die kleiner als 6,71 ist!

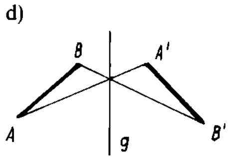
▲3▲ Zwischen welchen benachbarten natürlichen Zahlen liegen die Ergebnisse folgender Aufgaben?
a) $4{,}71 + 0{,}12$ b) $9{,}30 + 2{,}99$
c) $1{,}79 - 0{,}75$ d) $5{,}02 - 1{,}75$

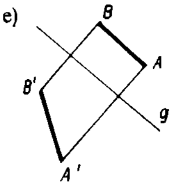
▲4▲ In welchen Beispielen kann die Strecke $\overline{A'B'}$ nicht das Spiegelbild von AB bezüglich der Geraden g sein? Begründe deine Antwort!

a)


b)


c)


d)


e)


Klasse 6

▲1▲ Von den natürlichen Zahlen a und b weiß man, daß höchstens eine durch 9 teilbar ist. Ist ihr Produkt (ihre Differenz) durch 9 teilbar?

▲2▲ Es gilt $a|b$ und $a|c$. Kann man daraus schließen, daß
$a \mid (b-c)$?

▲3▲ Zerlege 18 so in zwei Faktoren, daß
- beide durch 3 teilbar sind;
- genau einer durch 3 teilbar ist;
- keiner durch 3 teilbar ist.

▲4▲ Bestimme das Volumen der Quader Q_1 und Q_2, deren Kantenlänge a, b, c gemessen wurde:

	a	b	c
Q_1	4 dm	18 dm	2,6 dm
Q_2	0,75 dm	1,2 dm	0,64 dm

Runde die Ergebnisse sinnvoll!

Klasse 7

▲1▲ Peter ist 12 Jahre alt, seine Schwester Ute schon 24 Jahre, also doppelt so alt wie Peter.
a) Wie alt waren beide vor 6 Jahren? Wievielmal so alt wie Peter war damals Ute?
b) Ist das Alter von Ute proportional zu Peters Alter?
Bestimme den Proportionalitätsfaktor, wenn das zutrifft!

▲2▲ Gegeben sei ein Trapez mit den Grundseiten $a = 8$ cm und $c = 6$ cm. Seine Höhe betrage 3 cm.
a) Berechne für dieses Trapez den Flächeninhalt!
b) Verkleinere die Grundseite a um jeweils 1 cm, bis $a = c$ gilt.
Berechne die Flächeninhalte der so entstandenen Trapeze!
c) Untersuche, ob der Flächeninhalt der Trapeze proportional zur Grundseite a ist.

▲3▲ Rechne folgende Aufgaben (Prüfe stets, ob es mehrere Lösungen gibt!):
a) $\frac{b}{3} - \frac{2}{3} = 1$
b) $\frac{5}{6} - \frac{v}{3} = \frac{1}{2}$
c) $0{,}2 + a = 0{,}7$
d) $0{,}20 + u = 0{,}200$

▲4▲ Fülle folgende Tabelle aus!

a	b	$a:b$	$a:b<a$	$a:b>a$
27	$\frac{3}{4}$			
27		3		
$\frac{1}{2}$			nein	nein
$\frac{2}{5}$	0			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$			

Fünf Aufgaben aus Freundesland

Aufgaben der schriftlichen Aufnahmeprüfung 1976 im Fach Mathematik für Studienbewerber der Moskauer Staatlichen Universität „M. W. Lomonossow", Fakultät für numerische Mathematik und Kybernetik

▲1▲ Gegeben seien ein Parallelogramm mit den Längen der Seiten $\sqrt{19}$ und $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ sowie dem Winkel 45° zwischen diesen Seiten und ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{3}{5}\sqrt{2}$.
Es ist zu ermitteln, was größer ist: der Flächeninhalt des Parallelogramms oder der Flächeninhalt des Quadrats.

▲2▲ Es sind alle reellen Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$7^y \cdot \log_5 x = -2 \quad (1)$$
$$4 \cdot 7^y + \log_5 x = 2 \quad (2)$$

zu ermitteln.

▲3▲ Man ermittle alle Werte für $\cot x$, für die

$$\sqrt{2+\cot x-\sin^2 x}-\sqrt{\frac{4}{17}-\sin^2 x} = \sqrt{\frac{30}{17}+\cot x} \text{ gilt.} \quad (1)$$

▲4▲ In der Ebene seien zwei einander schneidende Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten N_1 und N_2 und den Radien $r_1=5\sqrt{2}$, $r_2=8$ gegeben. Die Strecke $\overline{N_1N_2}$ schneidet beide Kreise; dabei gilt $\sphericalangle FN_2N_1=45°$, wobei F einer der beiden Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2 ist.
Nun seien L der Schnittpunkt des Kreises k_1 mit der Strecke $\overline{N_1N_2}$ und $\triangle KLM$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\sphericalangle KLM=90°$, wobei $\overline{KM}$ eine Sehne des Kreises k_2 ist, die senkrecht auf der Geraden N_1N_2 steht.
Man ermittle die Längen der Seiten des Dreiecks KLM, wenn bekannt ist, daß $\overline{KL}>8$.

▲5▲ Es sind alle positiven reellen Zahlen a zu ermitteln, für die es unendlich viele reelle Zahlen x und y gibt, die gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$18x^2+\frac{3}{2}(1-a)(x^3+9x) - \frac{1}{8}a(x^2+9)^2 \leqq 0, \quad (1)$$
$$\frac{6x}{x^2+9}=\frac{1}{9y}+\frac{ay}{3}+\frac{a}{b}, \quad (2)$$
$$y>0. \quad (3)$$

Lösungen:

▲1▲ Für den Flächeninhalt F_1 des Parallelogramms gilt, da die Seitenlängen gleich $\sqrt{19}$ bzw. $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ und der eingeschlossene Winkel gleich 45° sind,

$$F_1=\sqrt{19}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{2}\cdot\sin 45°.$$

Wegen $\sin 45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

folgt $F_1=\sqrt{19}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{6}\sqrt{19}.$

Für den Flächeninhalt F_2 des Quadrats gilt, da die Seitenlänge gleich $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ ist,

$$F_2=\left(\frac{3}{5}\sqrt{2}\right)^2=\frac{18}{25}.$$

Also gilt

$$F_1^2=\frac{19}{36},\ F_2^2=\frac{324}{625}.$$

Daraus folgt

$$F_1^2>F_2^2;$$

denn $19\cdot 625>36\cdot 324$, weil $11875>11664$.
Wegen $F_1>0$, $F_2>0$ gilt daher

$$F_1>F_2,$$

d. h., der Flächeninhalt des Parallelogramms ist größer als der Flächeninhalt des Quadrats.

▲2▲ Setzt man $7^y=u$, $\log_5 x=v$, so erhält man das Gleichungssystem

$$u\cdot v=-2 \quad (3)$$
$$4u+v=2. \quad (4)$$

Ist nun (u, v) eine Lösung dieses Gleichungssystems, so gilt

$$u\neq 0,\ v=-\frac{2}{u},$$

also wegen (4)

$$4u-\frac{2}{u}=2,$$
$$u^2-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

a) $u=1$; dann ist $v=-2$;

b) $u=-\frac{1}{2}$; dann ist $v=4$.

Im Falle a) erhält man

$$7^y=1, \text{ also } y=0;$$
$$\log_5 x=-2, \text{ also } x=5^{-2}=\frac{1}{25}.$$

Die Probe zeigt, daß für diese Werte von x und y die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

Im Falle b) erhält man

$$7^y=-\frac{1}{2};$$

da aber für alle reellen Zahlen y $7^y>0$ gilt, erhält man in diesem Falle keine reelle Lösung. Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau eine reelle Lösung, nämlich

$$x=\frac{1}{25},\ y=0.$$

▲3▲ Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung (1). Dann gilt

$$2+\cot x-\sin^2 x=\left(\sqrt{\frac{4}{17}-\sin^2 x}+\sqrt{\frac{30}{17}+\cot x}\right)^2,$$

$$2+\cot x-\sin^2 x=\frac{4}{17}-\sin^2 x+\frac{30}{17}+\cot x +2\sqrt{\left(\frac{4}{17}-\sin^2 x\right)\left(\frac{30}{17}+\cot x\right)},$$

also $$\left(\frac{4}{17}-\sin^2 x\right)\left(\frac{30}{17}+\cot x\right)=0. \quad (2)$$

Die Gleichung (2) ist erfüllt, wenn

a) $\cot x=-\frac{30}{17}$ oder

b) $\sin^2 x=\frac{4}{17}$.

Im Falle a) gilt wegen $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\cot^2 x$,

also

$1-\sin^2 x=\sin^2 x\cot^2 x$, d. h.

$$\sin^2 x=\frac{1}{1+\cot^2 x},$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{1+\frac{900}{289}}=\frac{289}{1189}.$$

Daher gilt

$$\frac{4}{17}-\sin^2 x=\frac{4}{17}-\frac{289}{1189}=\frac{4756-4913}{1189\cdot 17}<0,$$

d. h., der zweite Radikand auf der linken Seite von (1) ist negativ, die Gleichung (1) hat also in diesem Falle keine reelle Lösung.

Im Falle b) gilt

$$\cot^2 x=\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-\frac{4}{17}}{\frac{4}{17}}=\frac{13}{4},$$

also $\cot x=\frac{1}{2}\sqrt{13}$ oder $\cot x=-\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Nun gilt aber

$$\frac{30}{17}<\frac{1}{2}\sqrt{13}; \text{ denn } \frac{900}{289}<\frac{13}{4},$$

weil $3600<3757$,

und daher $\cot x\neq -\frac{1}{2}\sqrt{13}$, da sonst der Radikand auf der rechten Seite von (1) negativ wäre.

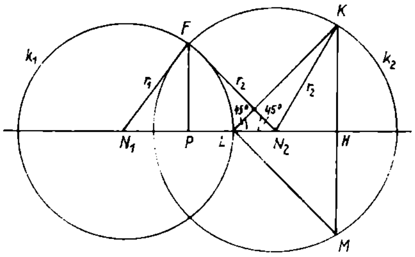
Also gilt

$$\cot x=\frac{1}{2}\sqrt{13},$$

und nur für diesen Wert ist die Gleichung (1) erfüllt, was durch die Probe bestätigt wird; denn es gilt

$$\sqrt{2+\cot x-\sin^2 x}-\sqrt{\frac{4}{17}-\sin^2 x}$$
$$=\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{13}-\frac{4}{17}}-\sqrt{\frac{4}{17}-\frac{4}{17}}$$
$$=\sqrt{\frac{30}{17}+\frac{1}{2}\sqrt{13}}$$
$$=\sqrt{\frac{30}{17}+\cot x}.$$

▲4▲ Wegen $\overline{KL}>8=r_2$ ist der Punkt L innerer Punkt der Strecke $\overline{N_1N_2}$ (siehe Bild). Nun sei P der Fußpunkt des von F auf N_1N_2 gefällten Lotes und H der Fußpunkt des von K auf N_1N_2 gefällten Lotes. Da $\triangle KLM$ rechtwinklig und $\overline{KM}$ eine auf N_1N_2 senkrecht stehende Sehne des Kreises k_2 ist, ist auch $\triangle KLH$ rechtwinklig mit $\sphericalangle KLH=45°$.



Ferner gilt $\overline{KH}=\overline{LH}=z$.
Nun folgt aus $\sphericalangle PN_2F=45°$
$$\overline{FP}=\overline{PN}_2,$$
also $$\overline{PN}_2^2=\frac{1}{2}r_1^2=\frac{64}{2}=32,$$
$$\overline{PN}_2=4\sqrt{2}.$$
Ferner gilt
$$\overline{N_1P}=\sqrt{r_1^2-\overline{FP}^2}=\sqrt{50-32}$$
$$=\sqrt{18}=3\sqrt{2},$$
also $$\overline{N_1N_2}=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}=7\sqrt{2}.$$
Daraus folgt
$$\overline{LN}_2=\overline{N_1N_2}-r_1=7\sqrt{2}-5\sqrt{2}=2\sqrt{2},$$
also nach dem Satz des Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck KN_2H
$$z^2+(z-2\sqrt{2})^2=64,$$
$$2z^2-4\sqrt{2}z-56=0,$$
$$z^2-2\sqrt{2}z-28=0.$$
Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive reelle Lösung, nämlich
$$z=\sqrt{2}+\sqrt{30}=\sqrt{2}(1+\sqrt{15}).$$
Ferner gilt
$$\overline{KL}^2=2z^2,$$
$$\overline{KL}=\sqrt{2}z=2(1+\sqrt{15}).$$
Das rechtwinklige Dreieck KLM hat daher die Seitenlängen
$$\overline{KL}=\overline{LM}=2(1+\sqrt{15}),$$
$$\overline{KM}=2\sqrt{2}(1+\sqrt{15}).$$

▲5▲ Es seien x, y und $a>0$ reelle Zahlen, für die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt sind. Dann gilt wegen (1)
$$\frac{36x^2}{2(x^2+9)^2}+\frac{3(1-a)6x}{2\cdot 6(x^2+9)}-\frac{1}{8}a\leqq 0.$$
Setzt man $z=\frac{6x}{x^2+9}$, so gilt
$$\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}(1-a)z-\frac{1}{8}a\leqq 0,$$
$$z^2+\frac{1-a}{2}z-\frac{a}{4}\leqq 0,$$
$$z\left(z+\frac{1}{2}\right)-\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\leqq 0,$$
$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{a}{2}\right)\leqq 0. \qquad (4)$$
Ferner gilt wegen (2)
$$z=\frac{1}{9y}+\frac{ay}{3}+\frac{a}{b}. \qquad (5)$$
Wegen $y>0$, $a>0$ ist $z=\frac{6x}{x^2+9}>0$, also $x>0$. Daraus folgt
$$\frac{x^2+9}{x}=x+\frac{9}{x}\geqq 2\cdot 3=6,$$
also $$z=6\cdot\frac{x}{x^2+9}\leqq 1. \qquad (6)$$
Nun sind genau 2 Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: $0<a\leqq 2$.
Dann ist (4) erfüllt für $z+\frac{1}{2}\geqq 0$
und $z-\frac{a}{2}\leqq 0$, also für $-\frac{1}{2}\leqq z\leqq\frac{a}{2}$.
2. Fall: $a>2$.
Dann ist (4) erfüllt für $z+\frac{1}{2}\geqq 0$
und $z-\frac{a}{2}\leqq 0$, also wegen (6) für $-\frac{1}{2}\leqq z\leqq 1$.
Nun gilt wegen (2) und $a>0$, $y>0$
$$z=\left(\frac{1}{9y}+\frac{ay}{3}\right)+\frac{a}{6}\geqq\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}+\frac{a}{6},$$
$$z\geqq\frac{2}{9}\sqrt{3a}+\frac{a}{6}. \qquad (7)$$
Im 1. Fall gibt es daher unendlich viele reelle Zahlen x, y, für die (1), (2), (3) erfüllt sind, wenn $\frac{a}{2}>z$, d.h., wenn
$$\frac{a}{2}>\frac{2}{9}\sqrt{3a}+\frac{a}{6},$$
$$\frac{a}{3}>\frac{2}{9}\sqrt{3a},$$
$$\sqrt{a}>\frac{2}{3}\sqrt{3},$$
$$a>\frac{4}{3}.$$
Im 2. Fall gibt es unendlich viele reelle Zahlen x, y, für die (1), (2), (3) erfüllt sind, wenn
$$1>\frac{2}{9}\sqrt{3a}+\frac{a}{6},$$
d.h. $$\frac{1}{6}\left(a+\frac{4}{3}\sqrt{3}\sqrt{a}+\frac{4}{3}\right)-\frac{2}{9}<1,$$
$$\frac{1}{6}\left(\sqrt{a}+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2<\frac{11}{9},$$
$$\sqrt{a}+\frac{2}{3}\sqrt{3}<\sqrt{\frac{66}{9}},$$
$$\sqrt{a}<\frac{1}{3}\sqrt{3}(\sqrt{22}-2),$$
$$a<\frac{2}{3}(13-2\sqrt{22})\approx 2{,}41.$$
Daher gibt es für alle positiven reellen Zahlen a mit
$$\frac{4}{3}<a<\frac{2}{3}(13-2\sqrt{22})$$
und nur für diese unendlich viele reelle Zahlen x und y, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen.
(Die vorliegenden Aufgaben wurden der sowj. Zeitschrift „Quant", Heft 2/1977 entnommen und von Oberstudienrat Dr. R. Lüders bearbeitet.)

Eine Aufgabe von einem Autorenkollektiv der Karl-Marx-Universität Leipzig unter Leitung von Prof. Dr. H. Schumann

Direktor der Sektion Mathematik

Die Beschäftigung mit der Mathematik besteht zu einem großen Teil im Auffinden sinnvoller Fragestellungen und dem Lösen der daraus sich ergebenden Probleme und Aufgaben. Trotz der großen Vielfalt möglicher Problemstellungen lassen sich doch einige allgemeine Hinweise zu ihrer Bearbeitung geben. Dies soll hier an folgendem Beispiel demonstriert werden.

▲1▲ a) Untersuchen Sie folgende Aussage: Ist das Produkt von n positiven reellen Zahlen gleich 1, so ist ihre Summe nicht kleiner als n ($n\geqq 2$).
b) Unter allen Quadern, deren Kanten die Längen a, b, c mit konstanter Summe s haben, ist der volumengrößte anzugeben.

Lösung der Aufgabe des Autorenkollektivs der Karl-Marx-Universität Leipzig

▲1▲ Der wichtigste – und gewiß nicht selbstverständliche – Hinweis ist: Sie müssen den festen Willen und die erforderliche Hartnäckigkeit aufbringen, das Problem aus eigener Kraft bis zu Ende zu lösen.
Die beiden Teile unserer Aufgabe haben auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun. Also wenden wir uns zunächst dem Teil a) zu.
(1) Wir beginnen mit einer *Analyse* der Aufgabenstellung:
(1) Welches sind die Voraussetzungen, welches ist die Behauptung?
Voraussetzungen:
V_1: Gegeben sind n reelle Zahlen; $n\geqq 2$.
V_2: Diese n Zahlen sind sämtlich positiv.
V_3: Das Produkt der n Zahlen ist gleich 1.
Behauptung:
B: Die Summe der n Zahlen ist nicht kleiner als n.
(2) Können wir die Aussage unter Benutzung der mathematischen Symbolik formulieren? Für unser Beispiel ergibt sich etwa:
$$\left.\begin{array}{l}(V_1)\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in R\ (n\geqq 2);\\ \quad R \text{ Menge der reellen Zahlen}\\ (V_2)\ a_i>0 \text{ für alle } i=1, 2, \ldots, n\\ (V_3)\ a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1\end{array}\right\}\ (B)$$
$(B)\ a_1+a_2+\ldots+a_n\geqq n$
(3) Können wir eine Vermutung aussprechen, ob der Satz wahr oder falsch ist?
Die Antwort auf diese Frage wird unser weiteres Vorgehen entscheidend beeinflussen. Vermuten wir, daß die Aussage wahr ist,

werden wir sie zu beweisen versuchen, andernfalls konzentrieren wir uns darauf, sie zu widerlegen. Die Aussage ist widerlegt, wenn wir ein spezielles Beispiel finden können, in dem sämtliche Voraussetzungen erfüllt sind, die Behauptung jedoch gilt nicht (Gegenbeispiel). Andernfalls versuchen wir, Argumente zu finden, die für die Richtigkeit der Aussage sprechen; dazu bietet sich im allgemeinen die Betrachtung geeigneter Spezialfälle an. In unserer Aufgabe sehen wir sofort: Wenn alle Zahlen gleich sind, dann ist ihre Summe gleich n (warum?). Sind nicht alle Zahlen gleich, so muß es wegen der Voraussetzung (V_3) solche geben, die größer als 1 sind, und solche, die kleiner sind als 1.

Nehmen wir z. B. den Spezialfall zweier Zahlen, von denen eine $c > 1$ ist; dann ist die andere $\frac{1}{c} < 1$. Ist nun $c + \frac{1}{c} \geqq 2$? Für alle $c \geqq 2$ stimmt das offenbar. Das bestärkt uns in der Vermutung, daß die Aussage richtig ist. Wir werden also versuchen, sie zu beweisen.

Selbstverständlich wird man sich bei der Analyse andersartiger Aufgabenstellungen gegebenenfalls anderer oder weiterer Vorüberlegungen bedienen; beispielsweise hat sich das Anfertigen einer Skizze bei geometrischen Problemen bewährt.

(II) Die Analyse hat ergeben: Das *Lösen* der Aufgabe besteht im Beweisen der Aussage. Beim Suchen eines Beweisansatzes helfen oft folgende Fragestellungen.

(1) Läßt sich der zu beweisende Satz zweckmäßiger formulieren? Ist eine Umformulierung der Voraussetzungen bzw. der Behauptung nützlich? Wie sind die auftretenden Begriffe definiert? Kann ich statt einer Voraussetzung eine dazu äquivalente Aussage oder eine unmittelbare Folgerung aus dieser zweckmäßig benutzen?

Vielleicht finden wir auch eine „beweistechnisch" leichter zugängliche Formulierung des Satzes.

Es gibt sogar Fälle, in denen es einfacher ist, einen allgemeineren Zusammenhang zu beweisen, aus dem sich unsere Behauptung als Spezialfall ergibt (vgl. Aufgabenteil b)). Oder aber wir fragen umgekehrt:

(2) Läßt sich ein Spezialfall des Satzes leicht beweisen?

Offenbar ist dies der Fall bei unserem Satz, der für zwei Zahlen einfach bewiesen werden kann. Wir wollen zeigen: Wenn a_1, a_2 positive reelle Zahlen, $a_1 \cdot a_2 = 1$, so $a_1 + a_2 \geqq 2$. Es liegt nahe, die schon oben gemachte Überlegung zu einem Beweis auszubauen. Falls $a_1 = a_2 = 1$, so ist $a_1 + a_2 = 2$. Andernfalls ist eine der Zahlen, etwa a_1, größer als 1, und dafür $a_2 < 1$.

Übung 1: Beweisen Sie für diesen Fall die Behauptung $a_1 + a_2 \geqq 2$, indem Sie $a_1 = 1 + c$ ($c > 0$) setzen und die Zerlegung

$\frac{1}{1+c} = 1 - \frac{c}{c+1}$ benutzen!

Vielleicht wären wir bei der Behandlung des Spezialfalles $n = 2$ auch so vorgegangen: Ist $a_1 = a > 0$, so muß $a_2 = \frac{1}{a}$ sein, also ist zu zeigen: $a + \frac{1}{a} \geqq 2$ für beliebiges $a > 0$. Wenn dies gilt, dann auch (nach Multiplikation mit $a > 0$) $a^2 + 1 \geqq 2a$ oder $a^2 - 2a + 1 \geqq 0$ oder $(a-1)^2 \geqq 0$. Die letzte Ungleichung ist nun gewiß richtig, da das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist. Der Beweis ist erbracht, wenn eine wahre Aussage am Anfang der Schlußkette und an ihrem Ende die Behauptung steht. Also brauchen wir, um unseren Beweis zu führen, nur zu überlegen, ob alle Schlüsse umkehrbar sind. Dies ist in der Tat möglich. Für beliebiges a ist $(a-1)^2 \geqq 0$, also $a^2 - 2a + 1 \geqq 0$ oder $a^2 + 1 \geqq 2a$. Falls $a > 0$, folgt daraus $a + \frac{1}{a} \geqq 2$. Der Beweis zeigt außerdem, daß das Gleichheitszeichen genau dann eintritt, wenn $a = 1 = \frac{1}{a}$ ist.

Der erste Beweis ging von den Voraussetzungen aus, die wir geeignet formulierten bzw. umformulierten, bis wir schließlich die Behauptung $a_1 + a_2 \geqq 2$ verifiziert hatten. Beim zweiten Beweisversuch hingegen haben wir gewissermaßen „von hinten", nämlich mit der Behauptung begonnen und diese mehrfach umgeformt, um so Anregungen für die Beweisführung zu erhalten. Weitere Anregungen vermitteln häufig auch folgende Fragestellungen:

(3) Ist uns die Lösung einer ähnlichen Aufgabenstellung bekannt? In diesem Falle könnten wir versuchen, daraus methodische Anregungen für unsere Problemstellung zu gewinnen. Auch nach jedem Teilschritt kann man sich fragen: Erinnert mich die gegenwärtige Konstellation in der Beweisführung an eine ähnliche Stelle eines schon geführten Beweises? (Je mehr Beweise man kennt, desto größer ist das Repertoire an Ideen.) Welche Voraussetzungen wurden noch nicht benutzt?

(4) Welche bekannten Sätze können wir bei der Lösung unserer Aufgabe benutzen?

Suchen Sie besonders solche Sätze, deren Voraussetzungen auch solche der zu beweisenden Aussage sind!

Übung 2: Beweisen Sie nun den unter a) genannten Satz! Anleitung:

Natürlich liegt es hier nahe, die Beweismethode der vollständigen Induktion heranzuziehen. Die Betrachtung des Spezialfalles $n = 2$ liefert gerade den Induktionsanfang. Beim Beweis der Induktionsbehauptung benutze man die Zerlegung

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} \\ &= (a_1 a_{k+1} + a_2 + \ldots + a_k) \\ &\quad + 1 + a_1 + a_{k+1} - 1 - a_1 a_{k+1} \\ &= (a_1 a_{k+1} + a_2 + \ldots + a_k) \\ &\quad + 1 + (a_1 - 1)(1 - a_{k+1}), \end{aligned}$$

wobei $a_1 > 1$ und $a_{k+1} < 1$ angenommen wird.

(III) Jedes gelöste Problem wirft sofort neue Fragen auf, deren Beantwortung die ursprüngliche Aussage ergänzen und ihre Beziehungen zu anderen Problemstellungen aufdecken kann. Wir wenden uns also der *Diskussion* des erhaltenen Ergebnisses zu.

Prof. Dr. Horst Schumann (1. Reihe, 3. v. links) erhielt auf dem VIII. Päd. Kongreß den „Vaterländischen Verdienstorden" in Gold. Er ist u. a. einer der hervorragenden Förderer der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik in seiner Eigenschaft als Leiter der Mathematischen Schülergesellschaft der Karl-Marx-Universität Leipzig.

(1) Haben wir alle Voraussetzungen beim Beweis benötigt, oder können wir gewisse Voraussetzungen abschwächen, vielleicht sogar entbehren?

In unserer Aufgabe kann auf keine der Voraussetzungen verzichtet werden. Die Betrachtung geeigneter Beispiele zeigt: Läßt man irgendeine der Voraussetzungen weg, kann die Behauptung nicht aufrechterhalten werden. Finden Sie selbständig ein Beispiel, welches zeigt, daß keine der Zahlen negativ sein darf!

Analog zur Frage nach der Abschwächung von Voraussetzungen stellen wir die Frage nach der Verschärfung der Behauptung:

(2) Hätte sich aus den Voraussetzungen auch eine schärfere Aussage beweisen lassen?

Offenbar kann die untere Schranke n für die Summe $a_1+a_2+\ldots+a_n$ nicht vergrößert werden, da für $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$ die Summe

$\sum_{i=1}^{n} a_i=n$ ist.

Allerdings zeigt der Beweis, daß dieser Fall auch nur dann eintritt, wenn alle Zahlen a_i gleich 1 sind, und in jedem anderen Fall die Summe größer ist als n.

Wir können unser Resultat also wie folgt präzisieren:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n positive reelle Zahlen $(n \geqq 2)$ mit $a_1a_2\ldots a_n=1$, so ist $a_1+a_2+\ldots+a_n \geqq n$, und das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$ ist.

(3) Welche Spezialfälle des Satzes sind von Interesse? Welche unmittelbaren Folgerungen gestattet der Satz?

Den Fall $n=2$ können wir auch geometrisch interpretieren:

Für den Umfang U eines Rechtecks mit den Seitenlängen a, b und dem Inhalt $A=ab=1$ gilt $U=2(a+b)\geqq 4$, und das umfangskleinste Rechteck vom Inhalt 1 ist das Quadrat mit der Seitenlänge 1.

Übung 3: Folgern Sie diese Aussage aus obigem Satz!

Übung 4: Suchen Sie weitere unmittelbare Folgerungen aus unserem Satz!

(4) In welcher Weise läßt sich das Resultat verallgemeinern? Folgende triviale Verallgemeinerung liegt auf der Hand:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige reelle Zahlen mit $a_1a_2\ldots a_n=\pm 1$, so ist $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|\geqq n$.

Schließlich kann man noch nach einer Abschätzung für die Summe $a_1+a_2+\ldots+a_n$ fragen, wenn $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=c=\text{const}$ für die positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt. Unter Benutzung des für $c=1$ bewiesenen Satzes erhält man

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqq n+\frac{c-1}{c}M$$

mit $M=\max(a_1, \ldots, a_n)$.

Wenden wir uns nun dem Aufgabenteil b) zu, der sich von a) zunächst dadurch unterscheidet, daß die Behauptung zuerst aufgestellt werden muß.

(I) Welche Vermutung haben wir?

Als erstes erscheint die Vermutung gerechtfertigt, daß die Aufgabe lösbar ist; ob allerdings die Lösung eindeutig ist oder ob es Quader verschiedener Abmessungen der gewünschten Eigenschaft gibt, läßt sich von vornherein schwerer abschätzen. Vielleicht probieren wir ein wenig mit konkreten Zahlen, etwa $a+b+c=12$. Wer allerdings weiß, daß unter allen Rechtecken gleichen Umfangs das Quadrat das flächengrößte ist, wird durch Analogieschluß aus dem „ebenen Problem“ schneller die folgende Vermutung für das „räumliche Problem“ aufstellen:

Unter allen Quadern mit den Kantenlängen a, b, c konstanter Summe $s=a+b+c$ ist der Würfel mit der Kantenlänge $\frac{s}{3}$ der volumengrößte.

Wir formulieren den Sachverhalt ausführlich:

Voraussetzungen: Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen a, b, c und dem Volumen V; $a+b+c=s$, $s>0$ konstant.

Behauptung: $V\leqq V_{\max}=\left(\frac{s}{3}\right)^3$, und $V_{\max}$ tritt ein, wenn $a=b=c=\frac{s}{3}$ ist.

(II) Bei der Suche nach einem Beweisansatz können Sie versuchen, die zur Lösung des „ebenen Problems“ verwendete Beweisidee auf unsere Fragestellung zu übertragen. Wir wollen diese Kenntnisse jedoch nicht voraussetzen und fragen: Läßt sich der Satz zweckmäßiger formulieren? Wir behaupten $V\leqq\left(\frac{s}{3}\right)^3$, andererseits ist $V=abc$ und $s=a+b+c$, also können wir die Behauptung auch so formulieren:

$$abc\leqq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad \text{oder}$$

$$\sqrt[3]{abc}\leqq\frac{a+b+c}{3}.$$

In dieser Ungleichung steht rechts das arithmetische Mittel der drei positiven Zahlen a, b, c, und links steht ihr geometrisches Mittel, so daß unsere Behauptung gleichbedeutend ist mit der folgenden, die wir verallgemeinernd gleich für n Zahlen aussprechen: Das arithmetische Mittel A von n positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist nicht kleiner als ihr geometrisches Mittel G:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=G\leqq A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

In dieser Ungleichung kommen das Produkt und die Summe von n positiven Zahlen vor; das muß uns doch an den Aufgabenteil a) erinnern! Allerdings ist das Produkt der n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nicht gleich 1, sondern es ist $a_1a_2\ldots a_n=G^n$.

Übung 5: Folgern Sie die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel von n positiven reellen Zahlen aus dem in a) bewiesenen Resultat! Wann tritt das Gleichheitszeichen ein?

Hinweis: Man betrachte $a_1a_2\ldots a_n=G^n$ als Anregung, von den n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ zu n (positiven) Zahlen vom Produkt 1 überzugehen.

Damit haben wir also, auf die ursprüngliche Aufgabenstellung zurückkommend, bewiesen: Sind a, b, c die Kantenlängen eines Quaders, so gilt für dessen Volumen V stets

$$V=abc\leqq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{s}{3}\right)^3,$$

und das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn $a=b=c=\frac{s}{3}$ ist.

Hier haben wir das vorgelegte Problem also am zweckmäßigsten dadurch gelöst, daß wir eine allgemeinere, umfassendere Fragestellung behandelt haben, nämlich die nach der Größenbeziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.

(III) Aus der Ungleichung $A\geqq G$ läßt sich wiederum eine Vielzahl von Folgerungen ableiten.

Übung 6: Zeigen Sie, daß der Radius des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks nie kleiner sein kann als die Länge der zur Hypotenuse gehörenden Höhe des Dreiecks!

Eine etwas weiterreichende Verallgemeinerung erhalten wir, wenn wir die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel anwenden auf die Zahlen $a_1, a_1, \ldots, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_n$, wobei a_1 p_1-mal, a_2 p_2-mal, …, a_n p_n-mal auftreten soll. Dann erhalten wir mit $p_1+p_2+\ldots+p_n=m$ sofort:

$$\sqrt[m]{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_n^{p_n}} \leqq\frac{a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n}{m}$$

Dieser Beitrag ist eine **Leseprobe** aus dem unten genannten Ratgeber für Schüler, Lehrer und Eltern.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1979

Mathematik

Ma 5 ▪1851 Im Pionierlager Artek auf der Krim verbringen *Junge Pioniere* aus befreundeten Ländern ihre Ferien. Während eines Durchgangs waren es viermal soviel Pioniere aus der Sowjetunion wie aus der Ungarischen Volksrepublik. Aus der VR Polen waren genau so viel Pioniere angereist wie aus der DDR. Die Anzahl der Pioniere aus der Sowjetunion war gleich der Summe der Anzahlen der Pioniere aus der DDR und der VR Polen. Insgesamt waren es mehr als 1990, aber weniger als 2000 Junge Pioniere. Wie viele Pioniere verbrachten in diesem Durchgang ihre Ferien in Artek? Wie viele Pioniere kamen aus den einzelnen Ländern?

Schülerin Una Heinecke, Georg-Kunze-OS Eisenberg

Ma 5 ▪1852 Einige Kinder spielen mit Murmeln. Sie haben 50 Murmeln so untereinander aufgeteilt, daß jedes Kind gleichviel Murmeln erhielt; dabei blieben 2 Murmeln übrig. Bevor das Spiel begann, wurde ein Kind von seiner Mutter weggerufen; es gab die erhaltenen Murmeln zurück. Die 50 Murmeln wurden erneut an die verbliebenen Kinder aufgeteilt; jetzt erhielt jedes Kind zwei Murmeln mehr als zuvor, und es blieben keine Murmeln übrig. Wie viele Kinder spielten mit Murmeln?

Schüler Stefan Schleiff, Halle

Ma 5 ▪1853 Ein Teilnehmer an der *Kreisolympiade Junger Mathematiker* wurde gefragt, wieviel Punkte er erreicht habe. Er antwortete: „Wenn man zur Anzahl der von mir erreichten Punkte 10 addiert und die so erhaltene Summe verdoppelt, so fehlen noch 10 an 100 Punkten." Wie viele Punkte erreichte dieser Schüler?

Schülerin Kathrin Benewitz, POS Zschornewitz

Ma 5 ▪1854 Beim Ballweitwurf erreichten sechs Schüler folgende Wurfweiten:
Bernd schaffte 16 m mehr als Antje,
Jochen warf 2 m weiter als Peter,
Dieter erzielte 6 m mehr als Birgit,
Antje fehlten 14 m an der Wurfweite von Peter,
Birgit schaffte 3 m mehr als Antje.
Addiert man die Wurfweiten dieser sechs Schüler, so erhält man 148 m. Wie weit warf jeder von ihnen den Ball?

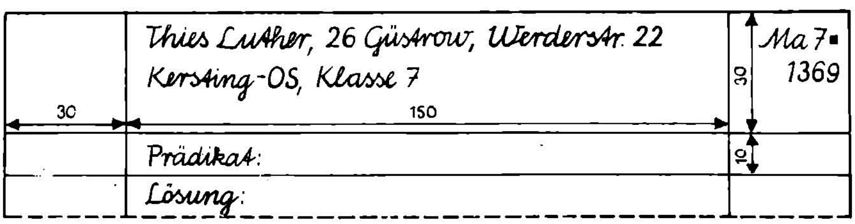
Schülerin Grit Maciejewski, Rostock, Kl. 6

Ma 5 ▪1855 Auf einem Solidaritätsbasar wurde von den Schülern der Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule durch den Verkauf selbstgebastelter Gegenstände Geld eingenommen, das auf das Solidaritätskonto überwiesen wurde. Die Schüler der Klasse 5a erzielten eine Einnahme von 30 M. Die Schüler der Klassen 5b und 5c erzielten zusammen eine Einnahme von mehr als 61 M, aber weniger als 65 M. Wieviel Mark wurden auf das Solidaritätskonto insgesamt überwiesen, wenn die Einnahmen der Klassen 5b und 5c jeweils volle Markbeträge waren und die Schüler der Klasse 5c sieben Mark mehr erzielten als die Schüler der Klasse 5b?

Schüler Klaus Mohnke, Krupskaja-OS Lübbenau, Kl. 7a

Ma 5 ▪1856 Hans hatte im Garten Äpfel gepflückt und in drei Spankörbe gelegt. Beim Auszählen der Äpfel stellt er fest, daß sich im zweiten Korb ein Apfel weniger als im dritten befand und daß der dritte Korb drei Äpfel mehr enthielt als der zweite. Zusammen waren es 67 Äpfel. Wieviel Äpfel enthielt jeder dieser drei Körbe?

Schülerin Gabriele Wehrsdorfer, Georg-Kunze-OS, Eisenberg, Kl. 5a



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1978/79 läuft von Heft 5/78 bis Heft 2/79. Zwischen dem 1. und 10. September 1979 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/79 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten – richtig gelöst – (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1978/79 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1857 Hans schaut morgens auf die Wanduhr in seinem Zimmer. Der große Zeiger hat $\frac{2}{5}$ seiner Kreisbewegung bis zur vollen Stunde zurückgelegt; der kleine Zeiger befindet sich zwischen den Ziffern 7 und 8.
a) Wie spät ist es zu diesem Zeitpunkt?
b) Berechne die Größe des Winkels, der von beiden Zeigern gebildet wird!

Schüler T. Weiß, Weimar

Ma 6 ▪1858 Evelyn, Katrin, Susanne und Ulrike haben Altstoffe gesammelt und an die Erfassungsstelle abgeführt. Den Erlös übergaben sie ihrem Freundschaftspionierleiter als Solidaritätsspende für Vietnam. Jede von ihnen übergab dem Freundschaftspionierleiter einen vollen Markbetrag. Katrin übergab zweimal soviel (Mark) wie Ulrike, Evelyn übergab 2 M weniger als Katrin, Susanne übergab zweimal soviel (Mark) wie Evelyn. Alle vier zusammen übergaben mehr als 20 M, aber weniger als 30 M. Wieviel Mark hat jede der vier Schülerinnen dem Solidaritätskonto zugeführt?

Schülerin Silke Meißgeier, Schönbrunn, Kl. 6

Ma 6 ▪1859 Heidrun berichtet von ihrer Familie folgendes:
„Meine Mutter ist dreimal so alt wie ich selbst. Mein Vater ist sechs Jahre älter als meine Mutter. Meine Schwester Katja ist acht Jahre jünger als ich. Meine Schwester Gabi ist dreimal so alt wie meine Schwester Katja. Addiert man die Lebensjahre (in ganzen Zahlen) aller Mitglieder der Familie, so erhält man als Ergebnis 95 Jahre." Wie alt ist jedes der Familienmitglieder?

Schülerin Heike Klüh, Heidrun Kirstein Mathe-Club Brandenburg Land (Ziesar)

Ma 6 ▪1860 Rolf liest ein Buch. Am ersten Tag schafft er 12 Seiten, am zweiten Tag den vierten Teil der noch zu lesenden Seiten, am dritten Tag die restlichen 57 Seiten. Wie viele Seiten umfaßt dieses Buch?

Schüler Ch. Garz, Halle

Ma 6 ▪1861 Ein D-Zug fährt um 21 Uhr in Berlin ab und kommt am folgenden Tag um 5 Uhr in Warschau an. Um 3 Uhr trifft er den Gegenzug (Warschau–Berlin) in Kutno. Wann ist der Gegenzug aus Warschau abgefahren? Die Entfernung Berlin–Warschau beträgt 560 km, die Entfernung Berlin–Kutno 420 km. (Die Geschwindigkeit beider Züge ist als gleich und konstant anzunehmen.)

Schüler Stefan Fritsch, Fürstenwalde, Kl. 6

Ma 7 ▪1862 Über das gegenwärtige Lebensalter (in ganzen Zahlen) von vier Freunden mit den Vornamen Axel, Bernd, Christian und Dieter sei folgendes bekannt:
(1) Axel ist jünger als Bernd.
(2) Die Summe aus den Zahlen, die das Lebensalter von Bernd und Dieter angeben, ist kleiner als die Summe aus den Zahlen, die das Lebensalter von Axel und Christian angeben.
(3) Die Summe aus den Zahlen, die das Lebensalter von Axel und Bernd angeben, ist gleich der Summe aus den Zahlen, die das Lebensalter von Christian und Dieter angeben.
Welcher dieser vier Freunde ist der Jüngste?

Schülerin Carola Stark, W.-Pieck-Stadt Guben, Kl. 7

Ma 7 ▪1863 Zwei Fußballmannschaften A und B trugen ein Freundschaftsspiel aus. Insgesamt wurden 13 Tore geschossen. Das erste Spiel verlief unentschieden. Im zweiten Spiel fielen mehr Tore als im ersten Spiel, und zwar erzielte Mannschaft A im zweiten Spiel doppelt soviel Tore wie Mannschaft B. Es sind die Ergebnisse beider Spiele zu ermitteln.

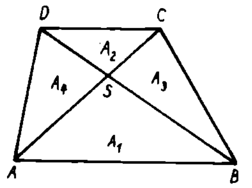
Schüler Steffen Gliwa, Staßfurt

Ma 7 ▪1864 Im Jahre 1977 wurde in der Frauenklinik des Bezirkskrankenhauses von Karl-Marx-Stadt durchschnittlich in einem Zeitabstand von jeweils 124 Minuten ein Kind geboren. Von den in diesem Jahr in dieser Klinik insgesamt geborenen Kindern waren 55 Prozent Mädchen. Wie viele Knaben wurden im Jahre 1977 in dieser Klinik geboren?

Schüler Frank Thieme, Kl. 8, Karl-Marx-Stadt

Ma 7 ▪1865 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}=a$ und $\overline{CD}=c$, und es gelte $a>c$. Ferner sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt A_1 des Dreiecks ABS größer ist als der Flächeninhalt A_2 des Dreiecks CDS.

Schüler Klaus Mohnke, Krupskaja-OS Lübbenau, Kl. 7a



Ma 8 ▪1866 Für welche natürlichen Zahlen z wird die Differenz z^2-z ein ganzzahliges Vielfaches von 10? *Dr. G. Hesse, Radebeul*

Ma 8 ▪1867 Gegeben sei die folgende Aussage:
„Für jede natürliche Zahl x ist x^2+x+11 eine Primzahl." Es ist zu entscheiden, ob diese Aussage wahr oder falsch ist. Die Entscheidung ist zu beweisen.

Schülerin Karin Ottlinger, Pirna

Ma 8 ▪1868 Ein Dreieck ABC habe die konstanten Seitenlängen $a=15$ cm und $b=8$ cm. Man gebe Bedingungen für c an, unter denen das Dreieck ABC
a) existiert, b) spitzwinklig ist,
c) rechtwinklig ist, d) stumpfwinklig ist!

Schüler Jörg Casper, Hohndorf, Kl. 8

Ma 8 ▪1869 Zwei Radfahrer, die 63 km voneinander entfernt wohnen, fahren einander entgegen. Der erste Radfahrer startet im Ort A um 9.00 Uhr und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zweite Radfahrer startet zur gleichen Zeit im Ort B und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Um wieviel Uhr und wieviel Kilometer von A entfernt treffen sich die beiden Radfahrer?

Schülerin Karin Ottlinger, Pirna, Kl. 8

Ma 9 ▪1870 Irina geht einkaufen. Ihre Mutter hat ihr 2,65 M gegeben; Irina soll dafür 9 Stückchen Kuchen kaufen, und zwar Negerküsse zu 0,25 M, Apfelkuchen zu 0,35 M und Bienenstich zu 0,30 M je Stück. Irina gibt das Geld vollständig aus; sie kauft mehr Negerküsse als Apfelkuchen; vom Bienenstich kauft sie die wenigsten Stücke. Wieviel Stück Kuchen jeder Art hat Irina eingekauft?

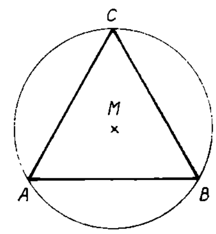
Schülerin Kathrin Scholl, Neubrandenburg, Kl. 6

Ma 9 ▪1871 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle BCA=90°$, $h_c=3$ cm und $A=12\text{ cm}^2$. Wie lang sind die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$?

Schüler Steffen Lausch, Grimma, Kl. 8

Ma 9 ▪1872 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 3 cm. Außerdem sei der Umkreis dieses Dreiecks konstruiert. Berechnen Sie den Flächeninhalt des schraffierten Flächenstückes! (Skizze nicht maßstäblich!)

Schüler Volker Leutheuser, Sonneberg, Kl. 8



Ma 9 ▪1873 Es ist zu beweisen:
In jedem gleichseitigen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über einer Seite dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über dem Radius des Umkreises dieses Dreiecks.

Schüler Jörg Schmidt, Neubrandenburg, Kl. 9

Ma 10/12 ▪1874 Beweisen Sie, daß der Ausdruck $136^n-5^n-11^n$ für alle natürlichen Zahlen n mit $n>0$ durch 10 teilbar ist!

Schüler T. Weiß, Weimar

Ma 10/12 ▪1875 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten a (Länge der Seite $\overline{BC}$) und b (Länge der Seite $\overline{AC}$). Es sei b um 5 cm länger als a. Weiter gilt:

$$3\cos(\beta+\gamma)+6\sin\alpha=0.$$

Gesucht sind die Längen der Katheten und der Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

P. Braumüller, Linz, Republik Österreich

Ma 10/12 ▪1876 Es ist zu beweisen, daß stets gilt:

$$2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma!$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Ma 10/12 ▪1877 Einem regulären Oktaeder mit der Kantenlänge a sei eine Kugel so umschrieben, daß alle Eckpunkte des Oktaeders die Oberfläche der Kugel berühren.

a) Fertigen Sie eine anschauliche Skizze an!

b) Drücken Sie den Durchmesser der Kugel mit Hilfe der Kantenlänge a des Oktaeders aus!

c) Wie verhält sich das Volumen der umbeschriebenen Kugel zum Volumen des Oktaeders?

d) Aus dem in c) errechneten Verhältnis ist das Volumen der Kugel zu ermitteln, wenn die Kantenlänge des Oktaeders $a=3{,}7$ cm beträgt.

Olaf Werger, EOS Nauen, Kl. 12

Physik

Ph 6 ▪56 Peter hat einen Stein gefunden und möchte feststellen, welcher Gesteinsart dieser angehört. Deshalb bestimmt er zunächst die Masse des Steines mit 242 g. Beim Eintauchen des Steines in einen Meßzylinder steigt das Volumen des Wassers von 250 ml auf 343 ml. Wie kann Peter aus den gegebenen Größen die Gesteinsart bestimmen?

Ph 7 ▪57 Bei Bremsversuchen mit einem PKW werden bei verschiedenen Geschwindigkeiten die Bremswege gemessen. Dabei ergeben sich folgende Werte:

Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	20	40	60	80	100
Bremsweg in m	2,6	10,2	23,6	41	64

a) Fertige eine grafische Darstellung an!

b) Untersuche, ob zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg Proportionalität besteht!

c) Entnimm der Zeichnung den Bremsweg bei $10\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $90\frac{\text{km}}{\text{h}}$!

d) Entnimm der Zeichnung die Geschwindigkeit für einen Bremsweg von 16 m; 31,4 m!

Ph 8 ▪58 Bestimme den Wirkungsgrad eines Tauchsieders aus folgenden Messungen!

Stromstärke	$I=4{,}5$ A
Spannung	$U=220$ V
Zeit	$t=270$ s
Masse des Wassers	$m=750$ g
Anfangstemperatur	$\vartheta_1=15{,}5°$
Endtemperatur	$\vartheta_2=91{,}5°$

(*Hinweis:* cal sind in Ws umzurechnen)

Ph 9 ▪59 Ein elektrischer Trockenofen soll je Stunde 2,5 Mcal abgeben. Berechnen Sie den Widerstand des Heizkörpers, wenn bei einer Netzspannung von 220 V die notwendige Heizleistung gebracht wird! (Verluste sollen unberücksichtigt bleiben.)

Ph 10/12 ▪60 Die Straßenbahnen fahren auf einer Strecke im zeitlichen Abstand von 12 min mit einer Geschwindigkeit von $48\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$. In der gleichen Fahrtrichtung läuft ein Fußgänger mit der Geschwindigkeit von $4\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$. Berechnen Sie den zeitlichen Abstand, in dem der Fußgänger die Bahnen an sich vorüberfahren sieht!

Chemie

Ch 7 ▪45 Im VEB Hydrierwerk Zeitz wird in Winkler-Generatoren Wasserdampf über glühende Kohle geleitet. Dabei entsteht ein Gemisch von Kohlenmonoxid und Wasserstoff, welches als Wassergas bezeichnet wird. Wieviel Tonnen Wassergas werden aus 5 t Koks, der 80% Kohlenstoff enthält, bei einem Gasverlust von 15% gewonnen?

Ch 8 ▪46 Ein aus Steinkohle erhaltenes Generatorgas hat folgende Zusammensetzung:

23,5%	Kohlenmonoxid
6,3%	Wasserstoff
5,1%	Kohlendioxid
62,4%	Stickstoff
1,7%	Methan

Es sei angenommen, die Luft besteht zu 21% aus Sauerstoff.

Zu berechnen sind

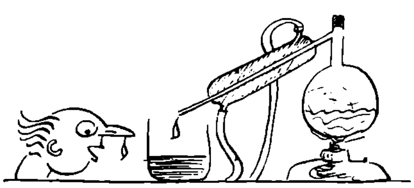
a) die theoretisch zur Verbrennung von 1 m³ Gas erforderliche Luftmenge

b) die prozentuale Zusammensetzung der Rauchgase.

Ch 9 ▪47 Ester der Hexadekansäure ist Hauptbestandteil des Bienenwachses. Wieviel Gramm eines Alkanols mit

a) 15 Kohlenstoffatomen im Molekül müssen eingesetzt werden, damit 250 g des Esters der Hexadekansäure gebildet werden?

b) Wieviel Gramm der Säure müssen zur Reaktion gebracht werden?



Ch 10/12 ▪48 Im VEB Chemiewerk Coswig/Anhalt wird Schwefelsäure unter Nutzung einheimischer Rohstoffe nach dem Gips-Schwefelsäure-Verfahren hergestellt. Wieviel Tonnen 98%ige Schwefelsäure lassen sich aus 208 t Anhydrit herstellen?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Heute stellen wir erneut Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen allen Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 5/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ▪1664 Eine Schulklasse unternimmt während der Schulferien eine mehrtägige Fahrt. Dieser Klasse gehören 15 Mädchen mehr an als Jungen. Die Anzahl der Mädchen verhält sich zur Anzahl der Jungen wie 5:2. Die Unkosten belaufen sich auf insgesamt 875 M. Wieviel Mark hat jeder Teilnehmer aufzubringen, wenn alle Schüler dieser Klasse an der Fahrt teilnehmen?

In Heft 1/1978 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, dieser Klasse gehören x Jungen an; dann gehören der Klasse $(x+15)$ Mädchen an, und es gilt

$(x+15):x=5:2$, $\quad 5x=2(x+15)$, $\quad 5x=2x+30$, $\quad 3x=30$, $\quad x=10$.

Dieser Klasse gehören somit 10 Jungen und 25 Mädchen an. Jeder Teilnehmer hat 875 M:35 = 25 M aufzubringen.

Wir stellen nun die Lösung von *Dieter Grebner* aus Roßdorf, Schüler einer 6. Klasse der Ziolkowski-Oberschule vor. Dieter löste diese Aufgabe wie folgt:

Es sei a die Anzahl der Jungen und b die Anzahl der Mädchen. Ich erweitere den Quotienten $\frac{b}{a}=\frac{b\cdot n}{a\cdot n}$ für $n=2, 3, 4, 5, \ldots$ und fertige dazu eine Tabelle an:

a	2	4	6	8	10	12	
b	5	10	15	20	25	30	…
$b-a$	3	6	9	12	15	18	…

Nur für $a=10$ und $b=25$ ist die Differenz $b-a=15$. In allen anderen Fällen ist diese Differenz ungleich 15.

Die Gesamtzahl der Schüler beträgt 35. Die Unkosten für einen Schüler belaufen sich auf 25 M, denn 875 M:35 = 25 M.

Wir stellen nun die Lösung von *Bernd Stammler* aus Halle-Neustadt, Schüler der Kl. 6b der Wilhelm-Pieck-Oberschule, vor. Bernd löste diese Aufgabe wie folgt:

Die Anzahl der Jungen sei x. Wenn man x mit $\frac{5}{2}$ multipliziert, dann erhält man die Anzahl der Mädchen. Deshalb gilt

$\frac{5}{2}\cdot x=x+15$, $\frac{3}{2}\cdot x=15$, $\frac{1}{2}\cdot x=5$, also $x=10$.

Der Klasse gehören 10 Jungen und $10+15=25$ Mädchen an. Aus $875:(10+25)=875:35=25$ folgt, daß jeder Teilnehmer 25 M zu zahlen hatte.

Sowohl Dieter als auch Bernd sind beide Schüler einer 6. Klasse. Sie haben sich an die Lösung von Aufgaben gewagt, die für Schüler einer 7. Klasse bestimmt sind.

Spielereien mit Vielecken

Aus regelmäßigen Vielecken kann man mit etwas schöpferischer Phantasie eine ganze Reihe neuer geometrischer Figuren erzeugen, wie man ihnen z. B. in Ornamenten begegnet.
Man verbindet dazu die Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks in irgendeiner Reihenfolge durch Strecken, wobei jeder Eckpunkt nur einmal durchlaufen werden darf, und erhält eine neue Figur, die aus einer in sich geschlossenen Linie besteht. Dabei interessieren nur (axial- oder punkt-) symmetrische Figuren.
Aus einem regelmäßigen Dreieck erhält man auf diese Art noch nichts Neues. Aber aus einem regelmäßigen Viereck (Quadrat) entsteht eine „Sanduhr" (Bild 1). Das regelmäßige Fünfeck liefert so vier neue Figuren, das Sechseck 11 – davon sind in Bild 1 nur sechs gezeichnet.

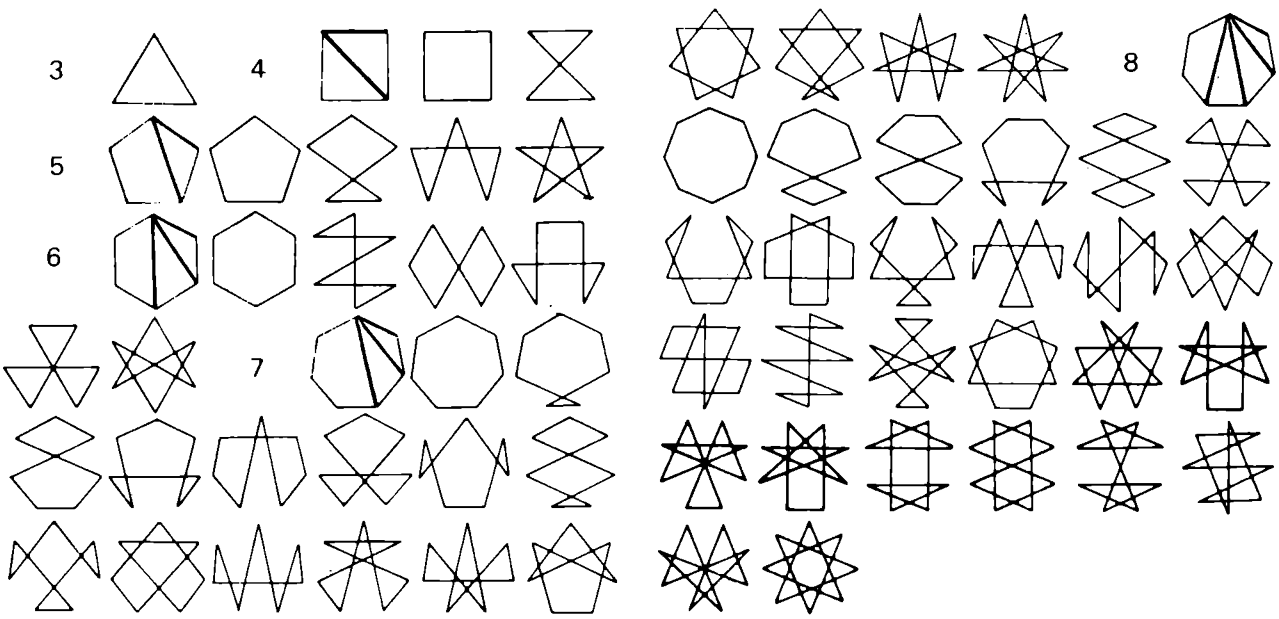
▲1▲ Versuche selbst, die restlichen fünf zu entwerfen!
Von einem regelmäßigen Siebeneck gibt es schon 24 abgeleitete Figuren (wovon 18 in Bild 1 gezeichnet sind). Das Achteck hat 67 usw. (Auf das Bestimmen dieser Anzahlen soll hier nicht eingegangen werden.)
Mit etwas Phantasie erkennt man in diesen Figuren bekannte Formen, wie eine Blume, einen Frosch, einen Stern.
Man kann das Ganze noch interessanter machen, indem man den flachen, linienförmigen Figuren Relief verleiht. Dies gelingt, wenn man statt der Linien Streifen zeichnet und diese ineinander verflicht. Die so entstehenden Figuren sehen noch schöner aus (Bild 2).

▲2▲ Versuche, die Grundfiguren in Bild 1 wiederzufinden! Beim Vergleich wirst du merken, um wieviel abwechslungsreicher, um wieviel lebendiger sie geworden sind.
Man kann noch einen Schritt weitergehen und aus den regelmäßigen Vielecken ringförmige Muster ableiten:
Ausgangspunkt sei die aus dem regelmäßigen Viereck gewonnene „Sanduhr" (Bild 3). Um die Eckpunkte des Vielecks werden Kreise gezeichnet, deren Radien mit den Längen der für die abgeleitete Figur benutzten Seiten bzw. Diagonalen übereinstimmen. Auf diese Weise entstehen Kreisringe, die noch erfinderisch ineinandergeflochten werden können.
Man kann so sehr viele Muster erhalten. In Bild 3 sind nur einige Beispiele dargestellt.

▲3▲ Geh nun selbst an die Arbeit! Nimm ein regelmäßiges Vieleck (beginne einfach), leite eine linienförmige Figur ab, dann eine streifenförmige! Versuche danach, ein Ringmuster zu entwerfen! Falls es zu schwierig sein sollte, arbeite erst eines der angegebenen Beispiele nach!

Aus: „Pythagoras" (Niederlande)

Bild 1: Aus regelmäßigen Vielecken abgeleitete symmetrische Figuren



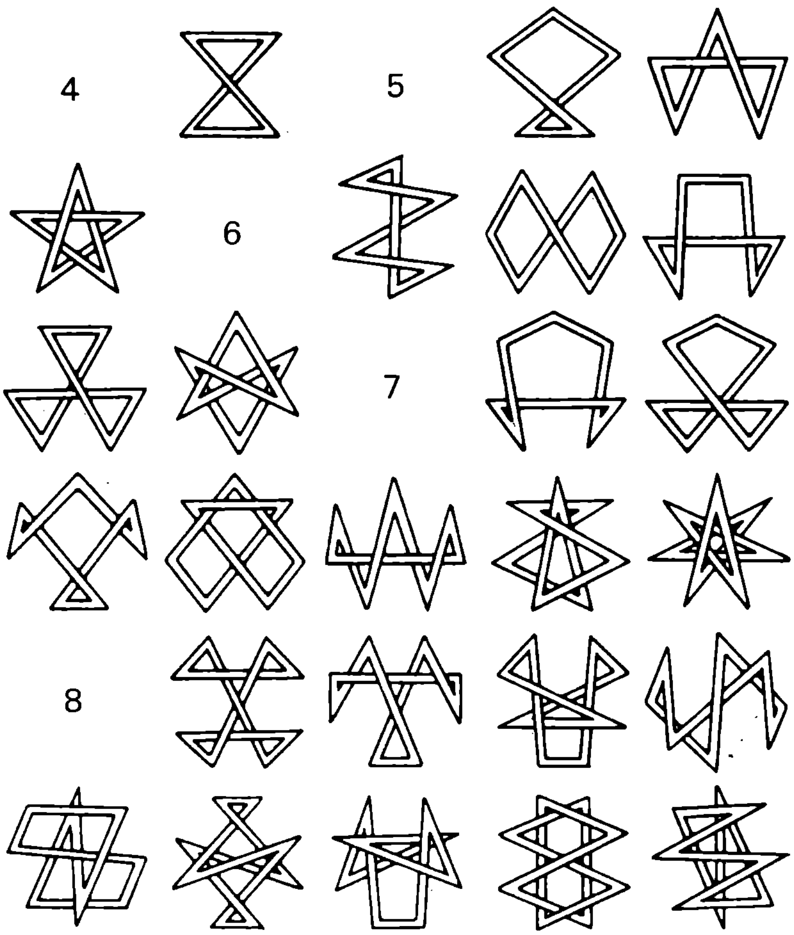
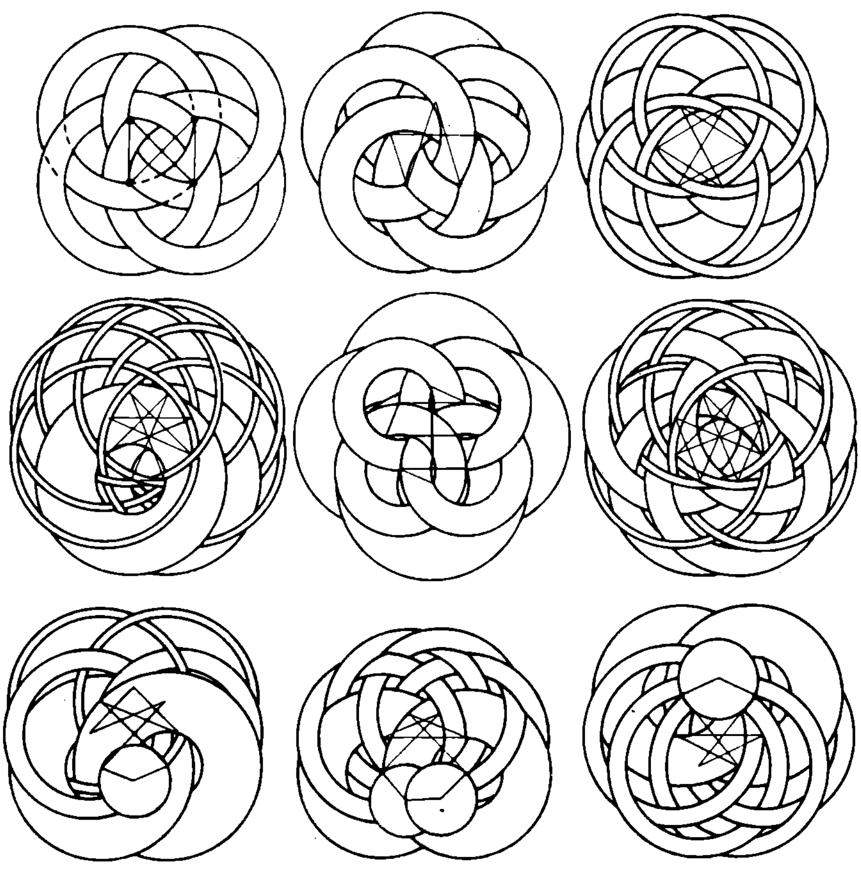


Bild 2: Geflochtene Streifenmuster

Bild 3: Geflochtene Ringmuster



Zauberhafte Mathematik

Andreas erstaunte seine Freunde mit der Ankündigung, daß er beabsichtigt, im Kulturprogramm, das zur traditionellen Klassenfahrt aufgeführt werden soll, als Zauberer und Gedankenleser aufzutreten.
Die Tanzpause hatte gerade begonnen, als Andreas das kleine Podium betrat. In der rechten Hand hielt er sechs große Papptafeln, die überdimensionalen Spielkarten glichen.
„Das magische Spiel FEMTOS gibt mir die außergewöhnliche Fähigkeit", sagte er geheimnisvoll, „die mir unbekannten Gedanken anderer Menschen blitzschnell zu erraten." Während er sprach, klammerte er die Tafeln an eine über das Podium gespannte Leine. Jeder aus dem Publikum konnte nun auf den Rückseiten der Karten die Buchstabenfolge „F – E – M – T – O – S" lesen. Jetzt bat Andreas als erste Mitspielerin seine Klassenlehrerin, Frau Roch, nach vorn. „Das Kunststück besteht darin", erklärte er den Zuhörern mit gedämpfter Stimme und drehte nacheinander alle sechs Karten herum, „daß ich eine Zahl erraten kann, die sich Frau Roch gemerkt hat!" Auf jeder der sechs Karten waren nun 16 Zahlen zu lesen:

Vorderseite:

4	20
5	21
6	22
7	23
12	28
13	29
14	30
15	31

8	24
9	25
10	26
11	27
12	28
13	29
14	30
15	31

5	18
6	19
9	22
10	23
11	26
14	27
15	29
17	31

2	18
3	19
6	22
7	23
10	26
11	27
14	30
15	31

1	17
3	19
5	21
7	23
9	25
11	27
13	29
15	31

16	24
17	25
18	26
19	27
20	28
21	29
22	30
23	31

Rückseite:

F E M
T O S

„Frau Roch, merken Sie sich bitte eine der natürlichen Zahlen zwischen 0 und 31, und zeigen Sie mir diejenigen Karten, auf denen diese Zahl steht!" lautete seine erste Anweisung. Frau Roch zeigte stumm auf die zweite, dritte, vierte und sechste Karte. Sofort kam Andreas' Reaktion: „Frau Roch, stimmt es, daß Sie sich die 26 gemerkt haben?" Als die Klassenleiterin dies bejahte, wurde es unter den Zuschauern unruhig; man war verblüfft. Gelassen fuhr Andreas fort: „Nun könnte jemand denken, ich habe diese Zahl gar nicht gewußt, sondern zufällig richtig geraten. Wiederholen wir das Spiel! Wer möchte mitmachen?" Zuerst hatte sich Stefan, das Mathematik-As der Klasse, gemeldet. „Stefan, merke auch du dir eine Zahl zwischen 0 und 31, und zeige mir alle Karten, auf denen diese Zahl enthalten ist!" Die Zahl, die sich Stefan ausgewählt hatte, stand nur auf der zweiten Tafel. Wieder zögerte Andreas keinen Augenblick und sagte: „Stefan hat sich die 8 gemerkt." Stefan bestätigte die Aussage von Andreas; einige begannen vor Begeisterung zu klatschen. Als nächster wollte Nico den Gedankenleser auf die Probe stellen. Er trat nach vorn und zeigte auf die zweite, dritte und fünfte Karte. Ohne nachzudenken nannte Andreas die 9 als unbekannte Zahl. „Das ist falsch", entgegnete Nico verschmitzt, „ich habe mir die 11 gemerkt!" Andreas achtete nicht auf das Raunen unter den Anwesenden, überlegte kurz und erwiderte: „Tut mir leid, Nico, dir ist beim Überprüfen der Karten ein Irrtum unterlaufen, denn du hast vergessen, auf die vierte Karte zu zeigen, die ebenfalls eine 11 enthält. Wie ihr seht, kann ich nicht nur Gedanken lesen, sondern auch Fehler finden." „Wie macht er das nur?" fragten sich die Schüler ratlos. Da bereitete Andreas seine nächste, zugleich letzte und größte Überraschung vor. „Ihr werdet vielleicht denken, ich habe die Zahlen auf den Karten auswendig gelernt, oder ich suche nach dem Zeigen schnell die in Frage kommenden Karten ab. Dem ist nicht so, wie ich euch beweisen will." Dabei trat er langsam hinter die Leine zurück, so daß er die Vorderseiten seiner Zauberkarten nicht mehr im Blickfeld hatte. „Ich kann die Gedanken auch raten, ohne die Zahlen zu sehen, die auf den Karten stehen. Wer spielt zum Abschluß noch einmal mit?" Siska, die erst kürzlich in die Klasse gekommen war, weil ihre Eltern umziehen mußten, stand auf und trat vor: „Die Zahl, die ich meine, steht auf der ersten und auf der letzten Karte." Sogleich kam hinter der Leine die Antwort von Andreas: „Es muß die 20 sein, die du dir herausgesucht hast. Habe ich recht?" Siska antwortete: „Ja." Nun konnte sich der kleine Günter, Frau Rochs Sohn, der schon lange unruhig auf seinem Stuhl hin- und herrutschte, nicht länger beherrschen. Er platzte heraus: „Ich habe mir eine Zahl gemerkt, die auf keiner einzigen Karte zu finden ist!" Andreas kam wieder hinter der Leine hervor und sagte dabei: „Es gibt keinen Anlaß zur Aufregung, Günter. Du hast dir die 0 ausgewählt." Günter nickte zustimmend, und Andreas empfing den wohlverdienten Beifall seiner Freunde. Danach setzte die Musik wieder ein. Es wurde weiter getanzt, aber noch lange bewegte alle die Frage: „Wie hat Andreas das nur gemacht?"

Die Frage nach dem „Wie?" läßt sich einfach beantworten. Andreas hat die natürlichen Zahlen von 0 bis 31 nach einem gutüberlegten System auf fünf der sechs Tafeln, nämlich die erste, zweite, vierte, fünfte und sechste, aufgeteilt. Mit der dritten Karte hat es eine besondere Bewandtnis. Andreas befürchtete, daß ein gewitzter Mathematiker seinen Trick schnell durchschaut. Deshalb führte er zur Verschleierung diese Tafel mit 16 unsystematisch und willkürlich zusammengestellten Zahlen ein. Für das Erraten der unbekannten Zahl hat sie keinerlei Bedeutung. Es ist völlig gleichgültig, ob diese Karte genannt wird oder nicht. Andreas konzentriert sich bei der Lösung nur auf die ersten beiden und die letzten drei, die sogenannten bedeutsamen, Karten. Um die unbekannte Zahl zu finden, addiert Andreas die in der linken oberen Ecke stehenden Zahlen der von den fünf bedeutsamen Karten, die ihm ein Mitspieler nennt.

4	20
5	21
6	22
7	23
12	28
13	29
14	30
15	31

8	24
9	25
10	26
11	27
12	28
13	29
14	30
15	31

2	18
3	19
6	22
7	23
10	26
11	27
14	30
15	31

1	17
3	19
5	21
7	23
9	25
11	27
13	29
15	31

16	24
17	25
18	26
19	27
20	28
21	29
22	30
23	31

Frau Roch zeigte auf die zweite, dritte, vierte und sechste Karte. Sie nannte Andreas damit drei bedeutsame Karten. Die gesuchte Zahl heißt $8+2+16=26$.

Stefan wies nur auf die zweite Karte. Somit war 8 seine gedachte Zahl.

Nico wählte die zweite, dritte und fünfte Karte, also zwei bedeutsame Karten. Die unbekannte Zahl lautet deshalb $8+1=9$, wie es Andreas richtig angab. Nico behauptete dagegen, daß er sich die 11 gemerkt hätte. Nun folgerte Andreas aus der Tatsache, daß die Differenz zwischen seiner Berechnung und Nicos Behauptung 2 beträgt, daß Nico die bedeutsame Karte, in deren linker oberer Ecke die 2 steht – also die vierte Karte – übersehen hatte.

Als Siska auf die erste und letzte Karte zeigte, stand Andreas aber hinter der Leine. Er konnte die Zahlen links oben gar nicht sehen, und trotzdem gelangte er zum richtigen Ergebnis! Nichts einfacher als das: Die Buchstaben auf den bedeutsamen Karten halfen ihm. Er wählte den Namen des magischen Spiels nämlich so, daß die Rückseiten der Karten die Anfangsbuchstaben der links oben stehenden Zahlen verraten, und zwar in englischer Übersetzung:

links oben stehende Zahl	englische Übersetzung	Anfangsbuchstabe
4	four	F
8	eight	E
2	two	T
1	one	O
16	sixteen	S

Die Buchstaben F der ersten und S der letzten Karte entsprechen den Zahlen 4 und 16. Die gesuchte Zahl ist dann $4+16=20$. Stellt jemand wie Günter fest, daß seine Zahl auf keiner der Karten steht, kann er sich nur die Null gemerkt haben.

Nachdem jetzt erklärt ist, wie mit Hilfe des „magischen" Spiels FEMTOS Zahlen erraten werden können, wollen wir zuletzt Andreas' Gedanken zurückverfolgen, auf welchem Weg er das System entdeckte. Dadurch erhalten wir eine Antwort auf die Frage nach dem mathematischen Hintergrund des Zahlenratens. Wie allen Schülern in seinem Alter war auch Andreas das Dezimalsystem bereits in Fleisch und Blut übergegangen. Es ermöglichte Andreas, allen Anforderungen gerecht zu werden, und es gab für ihn keinen Grund, über andere Zahlensysteme nachzudenken. Eines Tages jedoch erfuhr er von seinem Onkel Michael, der in einem der modernen Rechenzentren arbeitete: „Es gibt unendlich viele Positionssysteme, und das dir so vertraute Dezimalsystem ist für die Rechentechnik einigermaßen ungeeignet. Für uns in der Datenverarbeitung ist beispielsweise das Dualsystem bedeutungsvoller. Das liegt daran, daß sich zwei Zustände technisch gut realisieren lassen; ein Schalter ist geöffnet oder geschlossen, ein Strom fließt oder fließt nicht, ein Kondensator ist geladen oder ungeladen. Diesen beiden Zuständen kann man die Grundziffern 0 und 1 des Dualsystems zuordnen." Die nächsten Tage verbrachte Andreas damit, sich mit den Eigenschaften des Dualsystems vertraut zu machen, das Dezimal- und das Dualsystem zu analysieren sowie deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu bestimmen. Er stellte dabei folgendes fest:

1. Die Basis des Dezimalsystems ist 10. Die Menge D_{10} seiner Grundziffern enthält 10 Elemente: $D_{10}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
2. Es gibt $10^1=10$ einstellige Dezimalzahlen; sie stimmen mit den Grundziffern überein.

Mit Hilfe der Elemente von D_{10} lassen sich $10^2 = 100$ zweistellige, $10^3 = 1000$ dreistellige, ..., 10^k k-stellige Dezimalzahlen bilden.
3. Ausführlich geschrieben bedeutet z. B. $124 : 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.
Entsprechend fand Andreas für das Dualsystem die Eigenschaften:

1. Die Basis des Dualsystems ist 2. Die Menge D_2 seiner Grundziffern enthält 2 Elemente: $D_2 = \{0, 1\}$.

2. Es gibt $2^1 = 2$ einstellige Dualzahlen; sie entsprechen den Grundziffern. Unter Verwendung der Elemente von D_2 können $2^2 = 4$ zweistellige, $2^3 = 8$ dreistellige, ..., 2^k k-stellige Dualzahlen zusammengestellt werden.

3. Ausführlich geschrieben bedeutet z. B. $10110 : 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$.
Nun verstand Andreas, daß es unendlich viele Positionssysteme geben mußte, je nach der Wahl der natürlichen Zahl als Basis. Da ihm die Dualzahlen aber noch ziemlich fremd waren, beschloß er, sich einmal alle 32 fünfstelligen Dualzahlen aufzuschreiben. Die kleinste ist 00000; sie entspricht im Dezimalsystem der 0. Die größte ist 11111, dezimal bedeutet sie 31.

Dezimal-Dual-Konvertierung der Zahlen 0 bis 31

0	00000	8	01000
1	00001	9	01001
2	00010	10	01010
3	00011	11	01011
4	00100	12	01100
5	00101	13	01101
6	00110	14	01110
7	00111	15	01111
16	10000	24	11000
17	10001	25	11001
18	10010	26	11010
19	10011	27	11011
20	10100	28	11100
21	10101	29	11101
22	10110	30	11110
23	10111	31	11111

Mit dieser Tabelle zur wechselseitigen Umwandlung (Konvertierung) beschäftigte sich Andreas ziemlich lange. Nach mehreren Tagen fiel ihm eine gewisse Regelmäßigkeit innerhalb der 32 fünfstelligen Dualzahlen auf: es gibt 16, die in der 5. Stelle die Grundziffer 1 haben (dezimal: 16, 17, ..., 31); es sind 16 Dualzahlen, die in der 4. Stelle die Grundziffer 1 besitzen (8, ..., 15, 24, ..., 31); bei 16 Dualzahlen steht an der 3. Stelle die Grundziffer 1 (4, ..., 7, 12, ..., 31); 16 Dualzahlen haben an der 2. Stelle die Grundziffer 1 (2, 3, 6, 7, 10, 11, ..., 31) und 16 enden in der 1. Stelle auf die Grundziffer 1 (1, 3, 5, ..., 31).

Nun war es bis zur Entdeckung des Rätsels nur noch ein kleiner Schritt. Andreas übertrug diese fünfmal 16 Zahlen auf je einen Zettel (ohne zu wissen, daß er dadurch die vorn erwähnten bedeutsamen Karten gefunden hatte).

Nummer des Zettels	enthält die Zahlen	entspricht der ... Stelle	repräsentiert den Wert
1	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31	1	$2^0 = 1$
2	2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31	2	$2^1 = 2$
3	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31	3	$2^2 = 4$
4	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	4	$2^3 = 8$
5	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	5	$2^4 = 16$

Merkte er sich eine der natürlichen Zahlen, war es ihm aus der Dualkonvertierung jedesmal möglich vorherzusagen, auf welchen Zetteln diese Zahl geschrieben ist. Die Stellen, an denen die Grundziffern 1 stehen, entsprechen nach seinem System genau den Nummern der Zettel. Notierte er sich z. B. die 23 – ihr entspricht in dualer Form 10111 –, muß sie auf den Zetteln 1, 2, 3 und 5 vorhanden sein.
Um das magische Zahlenrätsel zu erhalten, drehte Andreas diesen Schluß einfach um: Zeigt ihm jemand die Zettel, auf denen eine Andreas noch unbekannte Zahl steht, weiß er in Wirklichkeit bereits, an welchen Stellen der dualen Konvertierung dieser Zahl die Grundziffer 1 steht. Damit ist Andreas die Zahl aber gar nicht mehr unbekannt; er braucht die duale lediglich noch in die dezimale Form zurückzuführen. Dazu addiert er bloß die den genannten Stellen zugeordneten Werte aus der vorangegangenen Tabelle. Diese Werte stehen als erste Zahlen auf den Zetteln bzw. in der linken oberen Ecke der bedeutsamen Karten. Nehmen wir an, daß ein Mitspieler die Zettel 1 und 4 angibt. Ihnen entsprechen die 1. Stelle mit dem Wert 1 und die 4. Stelle mit dem Wert 8, so daß $8 + 1 = 9$ die unbekannte Zahl war. Die einzige Fähigkeit, die der Gedankenleser bei seinem Auftritt benötigt, besteht darin, addieren zu können.
Um aus diesen mathematischen Erkenntnissen ein wirkliches Zauberkunststück zu machen, führte Andreas die Buchstaben auf den Rückseiten der Karten ein. Damit das System für andere nicht zu leicht erkennbar wird, ergänzte er eine zusätzliche Karte, die er in Wirklichkeit gar nicht benutzt. Schließlich veränderte er noch die Reihenfolge der Zettel, damit aus den Buchstaben ein gutklingender Name wird. Da das kommutative Gesetz der Addition gilt, hat diese Vertauschung natürlich keinen Einfluß auf das zu erratende Ergebnis.

Versucht es nun einmal selbst mit euren Geschwistern, Eltern, Freunden und Klassenkameraden! Sicher habt ihr mit der kleinen mathematischen Zauberei viel Erfolg.

Wer sich noch einige weitergehende Gedanken über Andreas' Kunststück machen möchte, kann folgende Aufgaben lösen:

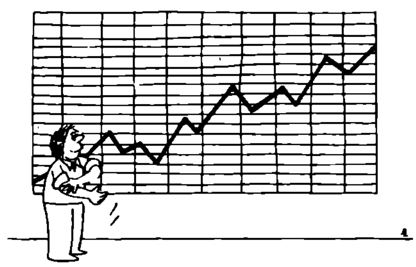
▲1▲ Läßt sich ein Spiel konstruieren, das auf einem System beruht, das die Zahlen auf einem Zettel zusammenfaßt, die in dualer Form die Grundziffer 0 an der gleichen Stelle haben?
Wie lautet die neue Regel zur Bestimmung der unbekannten Zahl?

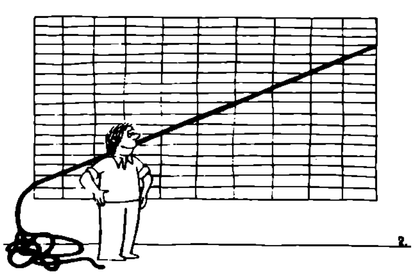
▲2▲ Erweitert das Spiel auf alle sechsstelligen Dualzahlen! Welche Veränderungen ergeben sich?

▲3▲ Entwickelt ein entsprechendes Spiel auf der Grundlage des Ternärsystems (Basis 3, $D_3 = \{0, 1, 2\}$)! Bis zu welcher natürlichen Zahl kann man raten, wenn vierstellige Ternärzahlen verwendet werden? Wie viele bedeutsame Karten benötigt man?

M. Röhr

Ohne Worte





Aus „Dikobraz“, Prag

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematischer Leistungsvergleich Potsdam – Opole

Im April 1978 fand erstmalig ein mathematischer Leistungsvergleich zwischen Schülern aus Opole, der Partnerstadt Potsdams, und Schülern aus dem Bezirk Potsdam statt. Die polnische Delegation mit 15 Schülern und zwei Betreuern weilte mehrere Tage – betreut vom BKAT Potsdam – in unserer Bezirkshauptstadt. An einem dieser Tage wurde eine vierstündige Klausur geschrieben. In vorangegangenen Absprachen wurden ein Modus und die Aufgaben in der folgenden Art vereinbart.

In drei Klassenstufen (9. Klasse, 10. Klasse und 11./12. Klasse) werden jeweils drei Aufgaben gestellt. (Der Schwierigkeitsgrad liegt etwa zwischen dem unserer Kreis- und Bezirks-Olympiaden.) Jede Delegation besetzt jede Klassenstufe mit mindestens drei Schülern. Durch die letzte Festlegung entstanden unterschiedlich starke „Startfelder". Der Bezirk Potsdam etwa nutzte diesen Wettstreit insbesondere, um seinen Frühstartern eine weitere Erprobungsmöglichkeit zu geben, und Axel Schüler (aus der Klasse 7) erreichte in der 9. Klasse auch 19 von 20 möglichen Punkten. Die Schüler aus Opole dagegen dominierten eindeutig in der 11./12. Klasse, vier von ihnen errangen die volle Punktzahl! Unter diesen ragte Radislaw Atlas noch durch die Art seiner Lösungen hervor.

Insgesamt war die *Bilanz* ausgeglichen, jede Delegation erreichte im Durchschnitt aller Starter 16 Punkte.

Trotz der Sprachunterschiede gab es keine Verständigungsschwierigkeiten, auch bei der Korrektur nicht. (An eine möglichst einfache Korrektur war schon beim Zusammenstellen der Aufgaben gedacht worden!)

Außer für die Mathematik interessierten sich natürlich unsere polnischen Freunde für die Sehenswürdigkeiten Potsdams. Als eine der Touristenstädte der DDR hinterließ Potsdam bei unseren Gästen einen tiefen Eindruck, insgesamt hat ihnen ihr Besuch bei uns großartig gefallen. Für 1979 ist unsere Delegation anläßlich der Mathematik-Olympiade nach Opole eingeladen.

H.-J. Sprengel

Aufgaben

Klassenstufe 9

▲1▲ Beweisen Sie, daß für jede reelle Zahl a die Ungleichung

$$\frac{a^2}{1+a^4} \leqq \frac{1}{2} \text{ gilt!}$$

▲2▲ Gegeben seien zwei Primzahlen p und $p+2$ mit $p \geqq 5$. Beweisen Sie, daß die Summe dieser beiden Primzahlen stets durch 12 teilbar ist!

▲3▲ Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h und ein Punkt P, der weder auf g noch h liegt.
Konstruieren Sie eine Gerade m mit folgenden Eigenschaften:
(1) m geht durch P
(2) m schneidet g in G und h in H
(3) P teilt GH innen im Verhältnis 2:1!

Klassenstufe 10

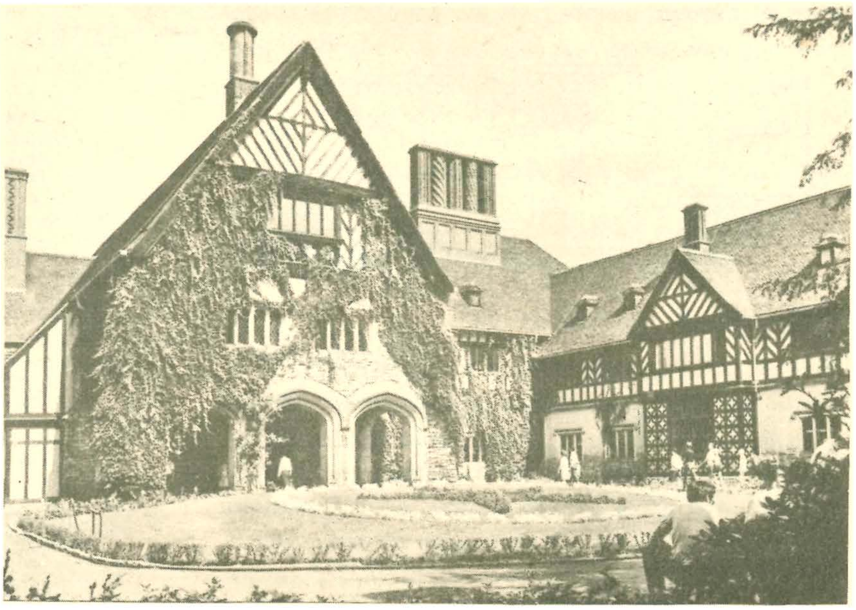
▲1▲ Entscheiden Sie, ob durch zwei Quadrate mit der Seitenlänge $a = 7$ cm ein Kreis mit dem Radius $r = 4$ cm überdeckt werden kann!

▲2▲ Für welche Primzahlen x, y, z gilt

$$\frac{x+y}{x-y} = z?$$

▲3▲ Siehe 9/3!

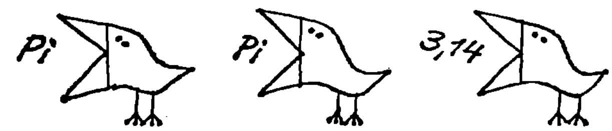
Auf die Veröffentlichung der Aufgaben der Klassenstufe 11/12 wurde verzichtet, d. Red.



Potsdam – Cecilienhof

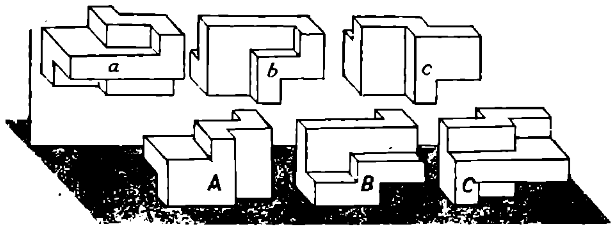
Panorama Opole

In freien Stunden alpha heiter



Aufgabe mit Spiegel

Drei Figuren A, B und C befinden sich vor einem Spiegel. Ihr Spiegelbild hilft dem Betrachter, sich einen Begriff von der Form einer jeden zu machen. Zwei sind gleich. Welche? *Aus: Nauka i Shisn, Moskau*



Niederländischer Denksport

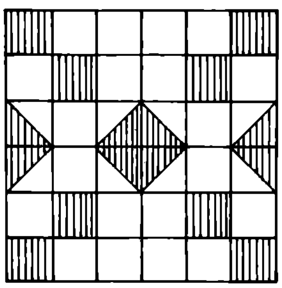
Punt F ligt op de zijde AD van vierkant $ABCD$. In C wordt een loodlijn opgericht op CF; deze snijdt het verlengde van AB in E. De oppervlakte van $ABCD$ is 256 en die van $\triangle CEF$ is 200. De lengte van BE is:
(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 20

Zeit und Ewigkeit

Eine amerikanische Journalistin fragte einmal Albert Einstein:
„Welch ein Unterschied besteht zwischen der Zeit und der Ewigkeit?“
„Mein Kind“, antwortete Einstein gutmütig, „wenn ich die Zeit hätte, Ihnen diesen Unterschied zu erklären, würde eine Ewigkeit vergehen, bis Sie verstehen würden.“ *Aus: „Wurzel“ 6/78, Jena*

Gute Beobachtungsgabe gefragt

Wie verhalten sich der Flächeninhalt der schraffierten zur nicht schraffierten Fläche? *Aus: „Mathematika“, Sofia*



Die Kreiszahl π

Das Bild zeigt die Kreiszahl π an 1134 Stellen genau nach einem Programm an BASIC und in netter Form für *alpha* ausgedruckt von

Mathematikfachlehrer M. Vowe, Therwil, Schweiz

```
                          3,1415926535
                     8979323846264338327950
                  2884197169399375105820974944
               59230781640628620899862803482534
             211706798214808651328230664709384460
           95505822317253594081284811174502841027
         019385211055596446229489549303819644288109
        75665933446128475648233786783165271201909145
       6485669234603486104543266482133936072602491412
       7372458700660631558817488152092096282925409171
      536436789259036001133053054882046652138414695194
      151160943305727036575959195309218611738193261179
     31051185480744623799627495673518857527248912279381
     83011949129833673362440656643086021394946395224737
     19070217986094370277053921717629317675238467481846
     76694051320005681271452635608277857713427577896091
     73637178721468440901224953430146549585371050792279
      689258923542019956112129021960864034418159813629
      774771309960518707211349999998372978049951059731
       7328160963185950244594553469083026425223082533
       4468503526193118817101000313783875288658753320
        83814206171776691473035982534904287554687311
         5956286388235378759375195778185778053217 12
           26806613001927876611195909216420198938
           -095257201065485863278865936153381827
               968230301952035301852968995773 62
                  2599413891249721775283479131
                     5155748572424541506959
                          508295331168
```

Buchstaben-Mosaik

Die Buchstaben sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$
\begin{aligned}
F\alpha &= EH\\
AF\alpha &= EEKH\\
AAF\alpha &= EEEKKH\\
AAAF\alpha &= EEEEKKKH\\
AAAAF\alpha &= EEEEEKKKKH\\
HHHHG\alpha &= FFFFFCCCCB\\
HHHG\alpha &= FFFFCCCB\\
HHG\alpha &= FFFCCB\\
HG\alpha &= FFCB\\
G\alpha &= FB
\end{aligned}
$$

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Französischer Denksport

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, die gesucht sind. Vorher sind die vier arithmetischen Zeichen +, —, ·, : an Stelle der Sternchen zu setzen, wenn man weiß, daß jedes Zeichen nur einmal vorkommt.

(1) $aab * c = adde$
(2) $adde * e = ccc$
(3) $ccc * f = fff$
(4) $fff * g = fhd$

Aus: „Sphinx", Paris (1932)

Magische Quadrate

In der folgenden Anordnung von Buchstaben verbirgt sich der Name eines französischen Mathematikers. Man findet ihn auf folgende Weise:

M	D	L	A	E	B	E	C	Z	S	E	I
N	D	G	E	T	T	A	C	G	Z	S	N
A	A	R	E	M	A	H	T	G	I	N	L
Z	A	F	R	M	R	R	H	T	T	T	L
H	L	F	I	M	L	H	H	D	U	L	D
Q	L	I	R	P	L	A	H	A	L	D	O
Q	U	U	R	U	S	L	L	B	B	D	R
E	R	E	U	T	S	M	G	L	D	R	U
S	S	T	E	T	E	M	L	D	I	D	N
I	L	S	T	R	M	U	L	I	E	R	N
K	L	E	T	B	R	A	A	L	E	Q	R
K	O	T	B	R	V	R	L	Z	E	N	R
T	E	T	V	V	I	R	Z	H	N	D	N
U	T	M	V	E	L	R	E	H	A	R	R
T	M	E	E	L	T	T	E	L	A	W	U
A	A	G	A	L	P	I	L	Z	Z	W	E
H	G	N	Z	A	P	N	I	L	I	E	C
G	U	N	B	A	K	K	N	L	E	H	T

GASPARMV

Sucht zunächst in dem Bild alle aus vier Kästchen bestehenden Quadrate heraus, in denen vier verschiedene Buchstaben auftreten, und umrandet sie! Aus den Buchstaben jedes dieser Quadrate läßt sich ein Wort bilden, das für den Mathematikunterricht eine Bedeutung hat.
Zum besseren Verständnis sind in dem Bild bereits zwei solcher Quadrate umrahmt. Ihre Buchstaben ergeben die Wörter „zehn" und „Rand".
Einige Buchstaben gehören dann zwei solchen umrandeten Quadraten an. Liest man sie hintereinander, so erhält man den gesuchten Namen.

OStR K.-L. Lehmann, VLdV, Berlin

Einige Wortspiele

Ein unentbehrlicher Ratgeber ist uns der Duden, ohne dessen Hilfe wir z. B. auch die Bedeutung manches Wortes nicht klären könnten. In Mußestunden lassen sich mit ihm Spiele durchführen, die die Kombinationsfreude wecken. Findet neue Beispiele zu folgenden Vorschlägen!

(1) Von hinten gelesene Wörter mit gleicher Bedeutung: Radar, Otto, Rotor. Ein Satz: Ein Ledergurt trug Redel nie.

(2) Von hinten gelesene Wörter mit anderer Bedeutung: Neger, Lage, Ohr.

(3) Wörter mit Silbentausch:
a) zweisilbige Wörter, die beim Silbentausch eine andere Bedeutung bekommen: Er le – leer; Ilse – Seil, Serie – Riese; Geber – Berge; Galle – legal.
b) zweisilbige Wörter, die beim Silbentausch die gleiche Bedeutung behalten: Mama, Papa, Toto,
c) dreisilbige Wörter und ihre Silbenvertauschung: Rei se rei, Ge he ge, Ma hat ma; Tor na do – Donator.

(4) Wortketten:
zweigliedrige Wortketten, die sich aus einem Wort durch Anhängen eines Buchstabens ergeben: Auto – Autor; Wicht – Wichte; Bach – Bache oder eine weitere Variante: Wicht – Wichte – Wichtel; Gatt – Gatte – Gatter.

Viel Spaß beim Suchen weiterer solcher Wortspiele wünscht

Diplom-Lehrer E. Schulze, Muldenberg

Nächtlicher Sturm

Ein 20 m hoher Radiomast wird durch einen Sturm geknickt. Christian und Barbara unterhalten sich darüber, in welcher Höhe der Mast gebrochen ist, ohne sich beim Schätzen einig werden zu können. Unmittelbar zu messen ist die Höhe der Bruchstelle nicht, die Entfernung vom Fußende des Maststumpfes bis zu der Stelle, wo jetzt die Spitze den Boden berührt, beträgt genau 6 m. Christian, der Praktiker, und Barbara, theoretisch sehr gut, denken sich jeder eine Methode aus, um die Höhe der Bruchstelle genau festzustellen. Sie kommen damit zu dem gleichen richtigen Resultat. Wie machen sie das?

Mathematikfachlehrer W. Förg, Schwaz (Österreich)

„Komischer Kauz, dieser Archi! Knobelt und knobelt, obwohl's dafür gar keine Zensuren gibt."

Aus: „Eulenspiegel" 38/78, B. Henniger

Lösungen

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

6. Angenommen, es gibt eine Lösung (x, y), dann folgt mit

$z = x + y$ aus (1) (3)

$xy = 2 + 3\sqrt{2} - z$ bzw. mit (4)

$z^2 = x^2 + 2xy + y^2$ aus (2)

$z^2 - 2xy = 6$ (5)

Aus (4) und (5) ergibt sich für z eine quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z - 10 - 6\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen

$z_1 = 2 + \sqrt{2}$ (6)

$z_2 = -4 - \sqrt{2}$. (7)

Setzt man nun (6) bzw. (7) in (3) und (4) ein, so erhält man die folgenden Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 + \sqrt{2} \\ xy = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} (6') \qquad \left.\begin{array}{l} x + y = -4 - \sqrt{2} \\ xy = 6 + 4\sqrt{2} \end{array}\right\} (7')$$

In beiden kann man nach dem Einsetzungsverfahren etwa y eliminieren und erhält eine quadratische Gleichung für x. Diese hat im Falle (7') keine reellen Lösungen und im Falle (6') die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Die zugehörigen y-Werte sind $y_1 = \sqrt{2}$ und $y_2 = 2$. Hat das Gleichungssystem (1), (2) Lösungen, so können das höchstens $(2, \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, 2)$ sein. Wie man durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt, sind dies tatsächlich Lösungen.

Bemerkungen: Die hier angegebene Lösung mittels einer Substitution (3) wurde im Prinzip von etwa einem Drittel der Schüler gewählt. Wiederum ein Drittel der Schüler wählte das Einsetzungsverfahren. Dieses führt auf eine Gleichung 4. Grades. Durch Ablesen von Lösungen und Polynomdivision fanden die Schüler auch auf diesem Wege meistens zum Ziel.

Die restlichen Schüler fanden zwar meist noch die Lösungen, konnten aber nicht exakt zeigen, daß diese Lösungen die einzigen sind.

Insgesamt war das Ergebnis bei dieser, einer 4. Stufe angemessenen, Aufgabe gut.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	8	7	7	20	7	5	8	31

Dr. H.-J. Sprengel, Päd. Hochschule „Karl Liebknecht“, Potsdam

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule“, Heft 10/78, veröffentlicht.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 6/78:

Ma 6 ■1774 Die kleinste Primzahl ist die Zahl 2; folglich hat Peter den zweiten Platz belegt. Angenommen, Peter hatte n Punkte erreicht; dann gilt

$$\frac{2+n}{5} \cdot 46 = 10n, \qquad 92 + 46n = 50n,$$
$$(2+n) \cdot 46 = 50n, \qquad 4n = 92, \quad n = 23.$$

Peter hatte 23 Punkte erreicht.

Ma 6 ■1775 Angenommen, im Korb befanden sich anfangs n Nüsse. Nachdem sich Hans $\frac{n}{3}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ Nüsse. Nachdem sich Bernd $\frac{2n}{9}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $\frac{2n}{3} - \frac{2n}{9} = \frac{4n}{9}$ Nüsse. Nachdem sich Elke $\frac{4n}{27}$ Nüsse genommen hatte, verblieben im Korb $\frac{4n}{9} - \frac{4n}{27} = \frac{8n}{27}$ Nüsse. Nun gilt $\frac{8n}{27} = 16$, also $n = 54$.

Im Korb befanden sich anfangs 54 Nüsse. Hans hat dem Korb 18 Nüsse, Bernd 12 Nüsse und Elke 8 Nüsse entnommen.

Ma 6 ■1776 Aus (2) und (4) folgt: Herr Müller unterrichtet nicht Biologie. Aus (3) folgt: Herr Taubert unterrichtet nicht Biologie. Folglich unterrichtet Herr Weber das Fach Biologie.

Aus (4) folgt: Herr Weber, der Biologielehrer, unterrichtet nicht Mathematik.

Aus (5) folgt: Herr Müller unterrichtet nicht Mathematik. Folglich unterrichtet Herr Taubert das Fach Mathematik.

Aus (5) folgt: Herr Taubert, der Mathematiklehrer, unterrichtet nicht Englisch.

Aus (5) folgt: Herr Müller unterrichtet nicht Englisch. Folglich unterrichtet Herr Weber das Fach Englisch. Da Herr Weber die Fächer Biologie und Englisch unterrichtet, entfallen für ihn die Fächer Geographie, Geschichte und Russisch.

Aus (3) folgt: Herr Taubert unterrichtet nicht Russisch. Folglich unterrichtet Herr Müller das Fach Russisch.

Aus (1) folgt: Herr Müller, der Russischlehrer, unterrichtet nicht Geographie. Folglich unterrichtet Herr Müller Geschichte und Herr Taubert Geographie.

Herr Müller unterrichtet die Fächer Russisch und Geschichte; Herr Taubert unterrichtet die Fächer Mathematik und Geographie; Herr Weber unterrichtet die Fächer Biologie und Englisch.

Ma 7 ■1777 Wegen $18 = 2 \cdot 9$ muß z durch 2 und durch 9 teilbar sein, d. h., z muß eine gerade Zahl und ihre Quersumme $q = 2x + 6y = 2(x + 3y)$ muß durch 9 teilbar sein. Nun ist q nur durch 9 teilbar, wenn $x + 3y$ durch 9 teilbar ist. Wegen $x > y$ trifft das nur zu für $x = 6$ und $y = 1$ oder für $x = 6$ und $y = 4$. Die gesuchten Zahlen lauten somit 61 111 116 und 64 444 46.

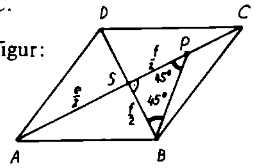
Ma 7 ■1778 Es ist $\frac{a(c-b)}{b-a} > 0$ genau dann, wenn entweder „$c > b$ und $b > a$“ oder „$c < b$ und $b < a$“ gilt, d. h., wenn entweder $a < b < c$ oder $a > b > c$ gilt.

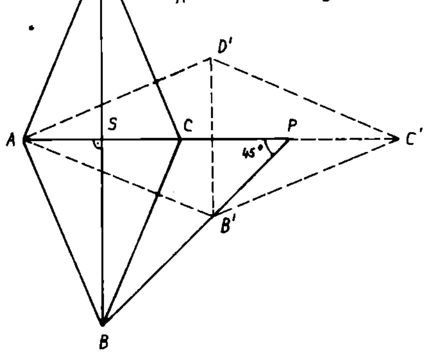
Für $a < b < c$, also für $a = 13$, $b = 15$, $c = 20$ erhalten wir $\frac{13 \cdot (20-15)}{15-13} = \frac{13 \cdot 5}{2} = 32{,}5$, also keine ganze Zahl. Für $a > b > c$, also für $a = 20$, $b = 15$, $c = 13$ erhalten wir

$$\frac{20 \cdot (13-15)}{15-20} = \frac{20 \cdot (-2)}{-5} = 8.$$

Ma 7 ■1779 In der abgebildeten Planfigur wurde um S mit dem Radius $\overline{SB} = \frac{1}{2} \cdot f$ ein Kreisbogen geschlagen, der $\overline{SC}$ in P schneidet, und es wurde B mit P verbunden. Deshalb gilt $\overline{AP} = \overline{AS} + \overline{SP} = \frac{1}{2} \cdot (e+f)$. Aus $\overline{SB} = \overline{SP}$ und $\sphericalangle BSP = 90°$ folgt $\sphericalangle SBP = \sphericalangle SPB = 45°$. Somit läßt sich zunächst das Teildreieck ABP aus $\overline{AB} = a = 5{,}5$ cm, $\overline{AP} = \frac{1}{2} \cdot (e+f) = 7$ cm und $\sphericalangle APB = 45°$ konstruieren. Die Senkrechte zu AP durch B schneidet AP in S. Der Kreis um A mit a schneidet BS in D. Der Kreis um B mit a schneidet AP in C.

Planfigur:





Konstruktion: Die Konstruktion ergibt zwei Rhomben $ABCD$ und $AB'C'D'$, die zueinander kongruent sind.

Ma 7 ■1780 Für die gesuchten Zahlen $z = \overline{abc}$ soll $a + b + c$ ist durch 2 teilbar und $a - b = 3 \cdot (b - c)$ gelten. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1) Aus $b - c = 0$ folgt $b = c$, was nicht möglich ist, da $b \neq c$ sein soll.

2) Aus $b - c = 1$ folgt $a - b = 3$ und somit

$a = b + 3$	$b = c + 1$	c	$a + b + c$
4	1	0	5
5	2	1	8
6	3	2	11
7	4	3	14
8	5	4	17
9	6	5	20

Nur von den Zahlen 521, 743 und 965 ist die Quersumme eine gerade Zahl.

3) Aus $b-c=2$ folgt $a-b=6$ und somit

$a=b+6$	$b=c+2$	c	$a+b+c$
8	2	0	10
9	3	1	13

Nur von der Zahl 820 ist die Quersumme eine gerade Zahl!

4) Aus $b-c=3$ folgt $a-b=9$ und somit $a=b+9$ und $b=c+3$, also $a=(c+3)+9$ $=c+12$, was nicht möglich ist. Es existieren genau vier Zahlen mit den geforderten Eigenschaften; sie lauten 521, 743, 820 und 965.

Ma 8 ▪1781 Der Vorgänger der natürlichen Zahl n ist $n-1$, der Nachfolger $n+1$. Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt dann:

$$(n-1)(n+1)=2208, \text{ d. h.}$$
$$n^2-1=2208 \text{ bzw.}$$
$$n^2=2209.$$

Die gesuchte Zahl n ist 47. Es gilt $46 \cdot 48 = 2208$.

Ma 8 ▪1782 Es sei x eine beliebige natürliche Zahl. Soll sie die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so muß gelten:

$$x^2-1=p \;(p \text{ sei Primzahl}).$$

Zerlegt man die Differenz in ein Produkt, so erhält man

$$(x+1)(x-1)=p.$$

Eine Primzahl p läßt sich nur in $p \cdot 1$ oder $1 \cdot p$ zerlegen; daraus folgt, daß entweder $x+1=1$ oder $x-1=1$ gilt.

Aus $x+1=1$ folgt $x=0$. Das ist nicht möglich, da dann $p=0$ wäre, und 0 ist keine Primzahl.

Aus $x-1=1$ folgt $x=2$ und $p=3$, also eine Primzahl. Nur die natürliche Zahl 2 erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Es ist $2^2-1=3$.

Ma 8 ▪1783 zu (1): Man formt zunächst beide Terme um, indem man die Klammern auflöst (linke Seite: binomische Formel!)

$$a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2$$
$$\leqq a_1^2b_1^2+a_1a_2b_2^2+a_1a_2b_1^2+a_2^2b_2^2.$$

Nun subtrahiert man von der Ungleichung den Term $(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2)$ und erhält

$$2a_1b_1a_2b_2 \leqq a_1a_2b_2^2+a_1a_2b_1^2 \quad | : a_1a_2$$
$$2b_1b_2 \leqq b_1^2+b_2^2 \quad | -2b_1b_2$$
$$0 \leqq b_1^2-2b_1b_2+b_2^2$$
$$0 \leqq (b_1-b_2)^2.$$

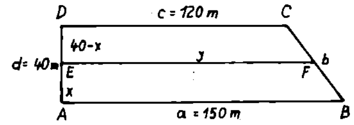
Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, wird die letzte Ungleichung stets erfüllt. Da alle Schritte rückwärts äquivalente Umformungen sind, ist also auch die Ungleichung (1) stets erfüllt, w. z. b. w.

zu (2): Analoge Umformungen führen zu:

$$a_1^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2$$
$$\geqq a_1^2b_1^2-a_1a_2b_2^2$$
$$-a_2a_1b_1^2+a_2^2b_2^2$$
$$-2a_1b_1a_2b_2 \geqq -a_1a_2b_2^2-a_2a_1b_1^2$$
$$-2b_1b_2 \geqq -b_2^2-b_1^2$$
$$b_1^2-2b_1b_2+b_2^2 \geqq 0$$
$$(b_1-b_2)^2 \geqq 0.$$

Da die letzte Ungleichung stets erfüllt ist und nur äquivalente Umformungen vorgenommen wurden, ist die Ungleichung (2) stets erfüllt, w. z. b. w.

Ma 8 ▪1784 Skizze:



Für den Flächeninhalt A des Trapezes gilt: (Wir rechnen nur mit den Maßzahlen!)

$$A=\frac{a+c}{2} \cdot h$$
$$A=\frac{150+120}{2} \cdot 40,$$

also $A=5400$.

Wenn das Grundstück halbiert werden soll, so müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

(1) $\quad \frac{150+y}{2} \cdot x=2700$ und

(2) $\quad \frac{120+y}{2} \cdot (40-x)=2700.$

Aus Gleichung (1) folgt $x=\frac{5400}{150+y}$. Ersetzt man nun in der Gleichung (2) x durch diesen Term, so erhält man Gleichung (2'):

$$\frac{120+y}{2} \cdot \left(40-\frac{5400}{150+y}\right)=2700.$$

Die äquivalente Umformung führt zu $y \approx 135{,}83$. Daraus folgt $x \approx 18{,}89$.

Der Zaun ist etwa 135,83 m lang, und der Abstand des Zaunes von der Seite $\overline{AB}$ beträgt etwa 18,89 m.

Ma 9 ▪1785 Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC gilt

$$A=\frac{x(x-1)}{2} \text{ bzw. } 15=\frac{x^2-x}{2}.$$

Nach Umformung erhält man

$$x^2-x-30=0,$$
$$x_1=6,$$
$$x_2x=-5 \text{ (entfällt).}$$

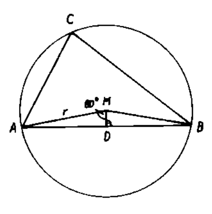
Die Basis des Dreiecks ABC ist 6 cm lang. Für die Breite y des Rechtecks gilt nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$6 \cdot y=15 \text{ bzw. } y=2{,}5.$$

Die Breite des Rechtecks beträgt 2,5 cm.

Ma 9 ▪1786 $\sphericalangle ACB$ ist Peripheriewinkel und Winkel $\sphericalangle AMB$ ist Zentriwinkel über dem gleichen Bogen $\overline{AB}$.

Dreieck ABM ist gleichschenklig ($\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ sind Radien desselben Kreises); $\overline{DM}$ ist Höhe von der Spitze auf die Basis; sie ist zugleich Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze und Seitenhalbierende der Basis. Folglich gilt im rechtwinkligen Dreieck ADM:



$$\sin 80^\circ=\frac{2{,}5 \text{ cm}}{r}$$

bzw. $\quad r=\frac{2{,}5 \text{ cm}}{\sin 80^\circ}; \; r \approx 2{,}54$ cm

Ma 9 ▪1787 Aus den Angaben für den Flaschenpfand folgt, daß 30 Flaschen gekauft wurden.

Es sei x die Anzahl der Flaschen Cola und y die Anzahl der Flaschen Limonade, dann gilt $x+y=30$.

Es ist dann weiter $0{,}35\,x$ der Preis für x Flaschen Cola und $0{,}25y$ der Preis für die y Flaschen Limonade (in Mark). Dann gilt

$$0{,}35x+0{,}25y=10.$$

Beide Gleichungen bilden ein System:

$$\begin{array}{lrl} (1) & 0{,}35x+0{,}25y= & 10 \\ (2) & x+\quad y= & 30 \;|\cdot(-0{,}25) \\ (1) & 0{,}35x+0{,}25y= & 10 \\ (2)' & -0{,}25x-0{,}25y= & -7{,}5 \quad \Big| + \\ (3) & 0{,}1x \quad = & 2{,}5 \\ & x \quad = & 25 \end{array}$$

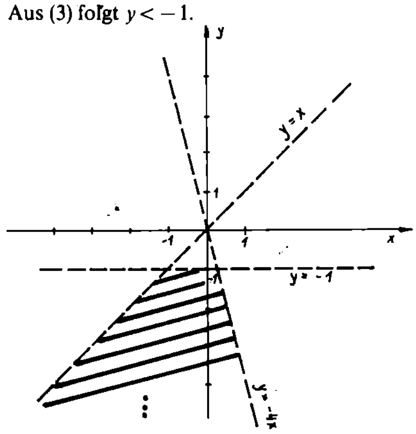
Es folgt $y=5$, also $L=\{[25;\,5]\}$.

Es wurden 25 Flaschen Cola und 5 Flaschen Limonade gekauft.

Ma 9 ▪1788 Aus (1) folgt $y<x$.

Aus (2) folgt $y<-4x$.

Aus (3) folgt $y<-1$.



Die Menge aller Punkte der schraffiert dargestellten Fläche mit Ausnahme der Punkte der Begrenzungsgeraden $y=-1$, $y=x$ und $y=-4x$ genügen den geforderten Bedingungen.

Ma 10/12 ▪1789 64 läßt sich durch die Potenzen 64^1, 8^2, 4^3 oder 2^6 darstellen. Es sind also 4 Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Es sei $64=64^1$. Dann gilt $2x+2=64$ bzw. $x=31$. Es müßte dann gelten $\sqrt[31]{64}=1$. Das ist offensichtlich nicht der Fall.

Daraus folgt: $L=\emptyset$.

2. Fall: Es sei $64=8^2$. Dann gilt $2x+2=8$ bzw. $x=3$. Es müßte dann gelten $\sqrt[3]{8}=2$. Das ist wahr.

Daraus folgt: $L=\{3\}$.

3. Fall: Es sei $64=4^3$. Dann gilt $2x+2=4$ bzw. $x=1$. Es müßte dann gelten $\sqrt[1]{4}=3$. Das ist falsch.

Daraus folgt: $L=\emptyset$.

4. Fall: Es sei $64=2^6$. Dann gilt $2x+2=2$ bzw. $x=0$. Es müßte dann gelten $\sqrt[0]{2}=6$. Das ist nicht definiert.

Daraus folgt: $L=\emptyset$.

Die Gleichung $(2x+2)^{\sqrt[x]{2x+2}}=64$ hat die Lösungsmenge $L=\{3\}$.

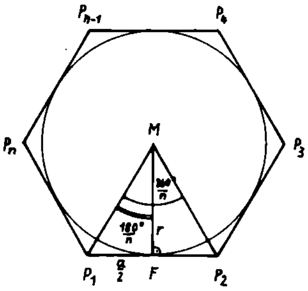
Ma 10/12 ▪1790 Jedes regelmäßige n-Eck läßt sich in n gleichschenklige Dreiecke zerlegen. Diese Dreiecke sind paarweise kongruent. Die Basis jedes Dreiecks ist gleich der Seite des n-Ecks. Die Höhe jedes Dreiecks ist gleich dem Radius des Inkreises des n-Ecks. Der Winkel an der Spitze jedes Dreiecks hat die Größe $\frac{360°}{n}$.

Der Flächeninhalt A_1 des Inkreises des n-Ecks beträgt $A_1=\pi r^2$. Der Flächeninhalt A_2 des n-Ecks beträgt $A_2=n\cdot\frac{a}{2}\cdot r$. Da $\frac{\frac{a}{2}}{r}=\tan\frac{180°}{n}$ und somit $\frac{a}{2}=r\cdot\tan\frac{180°}{n}$ gilt, beträgt der Flächeninhalt A_2 des regelmäßigen n-Ecks

$$A_2=n\cdot r^2\cdot\tan\frac{180°}{n}.$$

Das gesuchte Verhältnis ist dann

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{n\cdot r^2\cdot\tan\left(\frac{180°}{n}\right)}{\pi r^2}=\frac{n\cdot\tan\left(\frac{180°}{n}\right)}{\pi}.$$



Ma 10/12 ▪1791 a) Es seien a, $a+1$ und $a+2$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Dann muß nach Aufgabenstellung gelten:

$$(a+2)^2=(a+1)^2+a^2;$$

d. h. $a^2-2a-3=0$.

Die Lösungsmenge dieser quadratischen Gleichung ist $L=\{-1;3\}$. Nach unserer Aufgabe kommt nur die Lösung 3 in Frage; es gilt

$$3^2+4^2=5^2.$$

b) Bekanntlich ist ein Dreieck genau dann rechtwinklig, wenn die Beziehung $a^2+b^2=c^2$ gilt. Dabei sind a und b die Maßzahlen der Katheten, c ist die Maßzahl der Hypotenuse. Drei natürliche Zahlen a, b, c, die diese Beziehung erfüllen, heißen pythagoreische Zahlen.

Die Zahlen 3, 4, 5 erfüllen die Gleichung, denn es gilt

$$3^2+4^2=5^2 \text{ bzw. } 9+16=25.$$

Auch die Gleichung

$(3n)^2+(4n)^2=(5n)^2$ wird für natürliche Zahlen $n\geq 1$ erfüllt; denn es gilt

$$9n^2+16n^2=25n^2,$$
$$25n^2=25n^2.$$

Folglich gibt es beliebig viele Tripel natürlicher Zahlen, für die gilt, daß das Quadrat der größten Zahl gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Zahlen ist, w. z. b. w.

Beispiel für $n=7$:

$$(3\cdot 7)^2+(4\cdot 7)^2=(5\cdot 7)^2$$
$$21^2+\quad 28^2=35^2$$
$$441+\quad 784=1225$$
$$1225=1225.$$

Aus $(3\cdot n)^2+(4\cdot n)^2=(5\cdot n)^2$ folgt $(3n)^2+(3n+n)^2=(3n+2n)^2$.

Für $k=3n$ gilt dann

$$k^2+\left(k+\frac{k}{3}\right)^2=\left(k+\frac{2k}{3}\right)^2.$$

Das heißt, die gewählten natürlichen Zahlen k müssen durch 3 teilbar sein.

Beispiel für $k=99$:

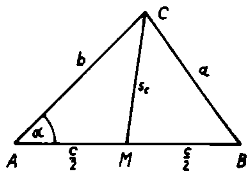
$$99^2+(99+33)^2=(99+66)^2,$$
$$99^2+132^2=165^2,$$
$$9801+17424=27225$$
$$27225=27225.$$

Ma 10/12 ▪1792 Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck AMC:

$$(1)\qquad s_c{}^2=b^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-2b\cdot\frac{c}{2}\cdot\cos\alpha$$

Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck ABC:

$$(2)\qquad \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$



Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$s_c{}^2=b^2+\frac{c^2}{4}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

(bc wurde gekürzt)

Die weitere äquivalente Umformung ergibt

$$s_c{}^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

$$s_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

Setzt man nun die gegebenen Längen ein, so gilt:

$$s_c=\frac{1}{2}\sqrt{73}\text{ cm bzw. } s_c\approx 4{,}27\text{ cm}.$$

Ph 6 ▪41 a) Versuch:

116,5 ml − 95 ml = 21,5 ml ≙ 21,5 cm³

(1 ml ≙ 1 cm³). Das Volumen beträgt 21,5 cm³.

b) Geg.: Kantenlängen $a=19$ mm, $b=27$ mm, $c=43$ mm

Ges.: Volumen V in cm³

$$V=a\cdot b\cdot c$$
$$V=19\text{ mm}\cdot 27\text{ mm}\cdot 43\text{ mm}$$
$$V=22059\text{ mm}^3$$
$$V=22{,}059\text{ cm}^3$$

Das berechnete Volumen beträgt 22,059 cm³.

c) 22,059 cm³ − 21,5 cm³ = 0,559 cm³ = 559 mm³.

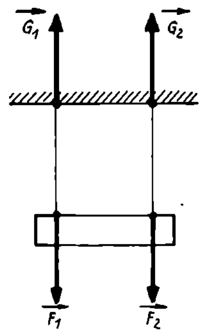
Die Meßergebnisse unterscheiden sich um 559 mm³ Das errechnete Ergebnis ist genauer.

Ph 7 ▪42

a) Maßstab 10 kp ≙ 1 cm.

Dann ist $F_1=F_2=48$ kp ≙ 4,8 cm.

b) $G_1=G_2=48$ kp ≙ 4,8 cm



Ph 8 ▪43

Geg.: $m_1=100$ g, $m_2=250$ g, $\vartheta_1=25$ °C, $\vartheta_2=40$ °C, $W_{auf}=80\%$ von W_{ab}

Ges.: Die Mischtemperatur ϑ_m

Nach der Grundgleichung der Wärmelehre gilt $W=c\cdot m\cdot\Delta\vartheta$

$$W_{auf}=0{,}8\;W_{ab}$$
$$c\cdot m_1\cdot(\vartheta_m-\vartheta_1)\;=0{,}8\cdot c\cdot m_2\cdot(\vartheta_2-\vartheta_m)$$
$$m_1\cdot(\vartheta_m-\vartheta_1)\;=0{,}8\cdot m_2\cdot(\vartheta_2-\vartheta_m)$$
$$100\text{ g}\cdot(\vartheta_m-25\text{ °C})=0{,}8\cdot 250\text{ g}\cdot(40\text{ °C}-\vartheta_m)$$
$$\vartheta_m=35\text{ °C}$$

Die Mischtemperatur beträgt 35 °C.

Ph 9 ▪44 Geg.:

a) $s=6{,}25$ m
$h=3{,}75$ m
$l=18$ m
$t=90$ min $=1{,}5$ h (Regendauer)
$n=1\,\frac{\text{mm}}{\text{h}}=0{,}001\,\frac{\text{m}}{\text{h}}$ (Regenmenge pro Stunde)

b) $r=6$ cm $=0{,}6$ dm

Ges.:

a) V_r (Gesamtregenmenge)

b) $t_ü$ (Überlaufzeit)

a) Weil gemäß der Aufgabe der Regen senkrecht fallen soll, ist die in die Rechnung einzusetzende „wirksame" Auffangfläche gleich der senkrechten Projektion des Daches auf die Horizontalebene. Diese Projektion des Daches ist gleich der Auffangfläche A.

Die Gesamtmenge V_r findet man mit der Gleichung

$$V_r=A\cdot n\cdot t \qquad (1)$$

Nun ist A zu berechnen. Nach Bild 1 und Bild 2 ist

$$A=2\cdot a\cdot l \qquad a^2=s^2-h^2$$
$$A=2\sqrt{s^2-h^2}\cdot l \qquad a=\sqrt{s^2-h^2}$$

In (1) eingesetzt, ist dann

$$V_r=2\sqrt{s^2-h^2}\cdot l\cdot n\cdot t$$
$$V_r=2\sqrt{6{,}25^2-3{,}75^2}\text{ m}\cdot 18\text{ m}\cdot 0{,}001\,\frac{\text{m}}{\text{h}}\cdot 1{,}5\text{ h}$$
$$V_r=0{,}27\text{ m}^3$$
$$V_r=270\text{ dm}^3=270\text{ l}$$

Vom Dach werden 270 l Regenwasser aufgefangen.

b) Für die Überlaufzeit $t_ü$ gilt

$$t_ü:t=2V_d:V_r$$
$$t_ü=\frac{2V_d\cdot t}{V_r}. \qquad (2)$$

Dabei ist V_d das Volumen einer Dachrinne mit $V_d=\frac{1}{2}r^2\cdot\pi\cdot l$.

In (2) eingesetzt

$$t_ü=\frac{r^2\cdot\pi\cdot l\cdot t}{V_r}$$

$$t_ü=\frac{0{,}6^2\,\mathrm{dm}^2\cdot 3{,}14\cdot 180\,\mathrm{dm}\cdot 1{,}5\,\mathrm{h}}{270\,\mathrm{dm}}$$

$t_ü \approx 1{,}1304$ h
$t_ü \approx 1$ h; 7 min; 50 s
$t_ü \approx 1$ h; 8 min

Die Dachrinne würde nach 1 Stunde und 8 Minuten überlaufen.

Ph 10/12 ▪45

Geg.: Bahnradius $l_2 = 384\,000$ km
Umlaufzeit $t_1 = 1$ d, $t_2 = 27{,}33$ d
Ges.: Bahnradius des Satelliten l_1

Nach dem 3. Keplerschen Gesetz verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Satelliten wie die dritten Potenzen der Bahnradien (bei elliptischen Bahnen der großen Halbachsen).

$$t_1^2 : t_2^2 = l_1^3 : l_2^3$$

$$l_1^3 = \frac{t_1^2\cdot l_2^3}{t_2^2}$$

$$l_1^3 = \frac{1^2\cdot 384\,000^3}{27{,}33^2}\ \mathrm{km}^3$$

$$l_1 = 384\,000 : \sqrt[3]{27{,}33^2}\ \mathrm{km}$$

$$l_1 \approx 42\,320\ \mathrm{km}$$

Die Höhe über der Erdoberfläche ist dann $42\,320\ \mathrm{km} - 6\,370\ \mathrm{km} = 35\,950\ \mathrm{km}$.
Der Fernseh-Satellit muß sich in einer Höhe von etwa 36000 km über der Erdoberfläche befinden.

Ch 7 ▪33

a) 500 kg Schwefelkies ≙ 180 kg Schwefel
x ≙ 1 500 kg Schwefel

$$x=\frac{500\,\mathrm{kg}\cdot 1\,500\,\mathrm{kg}}{180\,\mathrm{kg}} = 4\,167\,\mathrm{kg}$$

b) $4\,167\,\mathrm{kg}\cdot 30 \approx 125\,000\,\mathrm{kg}$
c) 125 000 kg ≙ 100 %
4 167 kg ≙ x
$x = 3{,}3\,\%$

Ch 8 ▪34

54 Teile Öl
66 Teile Kalilauge
278 Teile Spiritus
158 Teile Wasser
556 Teile Seifenspiritus ≙ 14 kg

a) 556 Teile ≙ 14 kg
54 Teile ≙ x

$$x=\frac{54\cdot 14}{556} = 1{,}34\ \text{kg Öl}$$

b) $x=\frac{66\cdot 14}{556} = 1{,}66$ kg Kalilauge

c) $x=\frac{278\cdot 14}{556} = 7{,}0$ kg Spiritus

d) $x=\frac{158\cdot 14}{556} = 3{,}98$ kg Wasser

Ch 9 ▪35

7 ml $\quad V$
$CH_4 + 2\,O_2 \rightarrow CO_2 + 2\,H_2O$
22,4 l $\quad$ 44,8 l

$$V=\frac{7\,\mathrm{ml}\cdot 44{,}8\,\mathrm{l}}{22{,}4} = 14\,\mathrm{ml}$$

Zur Verbrennung von 7 ml Methan werden 14 ml Sauerstoff benötigt ≙ 70 ml Luft. Da 50 % Luftüberschuß
70 ml + 35 ml = 105 ml

Ch 10/12 ▪36

a) $\quad m \qquad 300$ t
$CaO + 3\,C \rightarrow CaC_2 + CO$
56 g $\qquad$ 64 g

$$m=\frac{300\,\mathrm{t}\cdot 56\,\mathrm{g}}{64\,\mathrm{g}} = 263\,\mathrm{t}$$

263 t Branntkalk müssen für die Erzeugung von 300 t Kalziumkarbid eingesetzt werden.

b) $$\frac{0{,}13\,\mathrm{kWh}}{64\,\mathrm{g}} = \frac{W_{el}}{300\,000\,000\,\mathrm{g}}$$
$$W_{el} = 609\,370\,\mathrm{kWh}$$

c)
I $\quad CaC_2 + 2\,H_2O \rightarrow Ca(OH)_2 + C_2H_2$
II $\quad C_2H_2 + H_2O \rightarrow CH_3CHO$
III $\quad CH_3CHO + H_2 \rightarrow C_2H_5OH$

2000 g $\qquad m$
$CaC_2 \qquad C_2H_5OH$
64 g $\qquad$ 46 g

$$m=\frac{2000\,\mathrm{g}\cdot 46\,\mathrm{g}}{64\,\mathrm{g}} = 1\,440\,\mathrm{g}$$

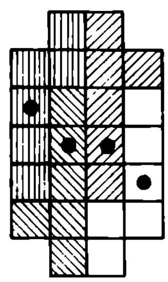
Aus 2 kg Kalziumkarbid erhält man theoretisch 1 440 g ≙ 1,44 kg Äthanol.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 5/78, Fortsetzung:

Ma 5 ▪1793 Wegen $1113 - 999 = 114$ und $1111 - 997 = 114$ und $114 > 112$ gibt es nur die Lösung $1111 - 999 = 112$.

Ma 5 ▪1794 Hätte jedes der 60 Fahrzeuge nur zwei Räder, dann wären es nur $2\cdot 60$ Räder, also 120 Räder gewesen. Aus $200 - 120 = 80$ und $80 : 2 = 40$ folgt, daß 40 Autos und 20 Fahrräder die Brücke passierten.

Ma 5 ▪1795 Wir stellen eine mögliche Lösung vor:



Ma 5 ▪1796 Der Käfer hat folgende Möglichkeiten, von A nach G zu gelangen: (a, b, l), (a, k, f), (d, c, l), (d, m, g), (i, e, f), (i, h, g). Es sind insgesamt sechs Möglichkeiten.

Ma 5 ▪1797 Angenommen, Hans hat n Pilze gesammelt; dann hat Jürgen $(2n-5)$ Pilze, Erika $(3n-20)$ Pilze gesammelt. Insgesamt sind es $(6n-25)$ Pilze. Nun gilt

$$90 < 6n - 25 < 100,$$
$$115 < 6n < 125,$$
$$19 < n < 21, \text{ also } n = 20.$$

Hans hat 20, Jürgen 35, Erika 40 Pilze gesammelt.

Ma 5 ▪1798 Aus $aa + fg = bbf$ folgt $b = 1$.
Aus $ade - 1ja = 1dk$ folgt $j = 0$ und $a = 2$.
Aus $22 + fg = 11f$ folgt $f = 9$ und $g = 7$.
Aus $97 + h = 102$ folgt $h = 5$.
Aus $119 + e5 = 1dk$ folgt $k = 4$.
Aus $2de - 102 = 1d4$ folgt $e = 6$.
Aus $22 \cdot 1c = 2d6$ folgt $c = 3$.
Aus $119 + 65 = 1d4$ folgt $d = 8$.
Wir erhalten somit

$$\begin{array}{r} 22 \cdot 13 = 286 \\ + \quad \cdot \quad - \\ 97 + \ \ 5 = 102 \\ \hline 119 + 65 = 184 \end{array}$$

Ma 6 ▪1799 Die Summe aus allen Primzahlen, die kleiner als 100 sind, beträgt $s = 2 + 3 + 5 + \ldots + 97 = 1060$. Nun gilt

$$n = \left(\frac{1060\cdot 3}{10} + 12\right) : 10, \text{ also } n = 33.$$

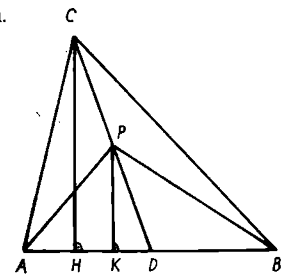
Dieser Klasse gehören 33 Schüler an.

Ma 6 ▪1800 Die Anzahl der Schüler dieser Klasse muß ein Vielfaches von 9 und von 6, also ein Vielfaches von 18 sein. Wegen $20 < n < 40$ trifft dies nur zu für $n = 36$. Dieser Klasse gehören somit 36 Schüler an. Angenommen x Schüler haben die Note 3 erhalten; dann gilt

$$x = 36 - \frac{36}{9} - \frac{36}{3} - \frac{36}{6}, \text{ also } x = 14.$$

Die Note 3 erhielten 14 Schüler.

Ma 6 ▪1801 Es sei $\overline{CH}$ Höhe zur Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC und $\overline{PK}$ Höhe zur Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABP. Wegen $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ sind die Dreiecke $\triangle ADP$ und $\triangle DBP$ flächengleich. Aus dem gleichen Grunde sind aber auch die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$ flächengleich. Folglich gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle APC$ und $\triangle BCP$ auch $A_1 = A_2$, d. h., sie sind ebenfalls flächengleich.



Ma 6 ▪1802 Aus $3 + 8 = 11$ folgt, daß Olaf im Jahre 1978 11 Jahre alt war. Angenommen, die Mutter war im gleichen Jahre n Jahre alt; dann war der Vater $(n+3)$ Jahre alt. Nun gilt

$$3 + 11 + n + (n+3) = 77,$$
$$2n + 17 = 77,$$
$$2n = 60,$$
$$n = 30.$$

Im Jahre 1978 sind die Mutter 30, der Vater 33, Olaf 11, sein Bruder Richard 3 Jahre alt.

Ma 6 ▪1803 Angenommen, nach der Preissenkung wurden x Portionen Essen ausgegeben; dann gilt

$$80\cdot(x-200) = 70\cdot x,$$
$$8\cdot(x-200) = 7\cdot x,$$
$$8x - 1600 = 7x,$$
$$x = 1600.$$

Es wurden nach der Preissenkung täglich 1600 Portionen Essen ausgegeben.

Ma 7 ■1804 Angenommen, es sind x Innen- und y Außenplätze;
dann gilt $x=6y$ (1) und
$x+2=4\cdot(y+6)$ bzw. $x=4y+22$ (2).
Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir

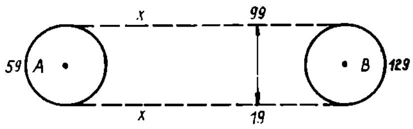
$$\begin{aligned} 4y+22&=6y,\\ 2y&=22,\\ y&=11. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Einsetzen $x=6\cdot 11=66$. Das Schiff hat für 77 Personen Sitzplätze.

Ma 7 ■1805 Der Abstand der beiden Sessel Nr. 19 und Nr. 99 von jeder der beiden Stationen des Sessellifts ist zum Zeitpunkt der Beobachtung gleich groß. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x+x&=99-19,\\ 2x&=80,\\ x&=40. \end{aligned}$$

Wegen $19+40=59$ und $140:2=70$ und $59+70=129$ befindet sich Sessel Nr. 59 in der einen, Sessel Nr. 129 in der anderen Station.



Ma 7 ■1806 Die Mannschaft der Klasse 9b hatte zwei Spiele zu bestreiten, und zwar gegen die Mannschaften der Klasse 10a und 10b. Die Mannschaft der Klasse 9b kann kein unentschiedenes Spiel erzielt haben; denn sonst müßte sie auf Grund des Punkteverhältnisses sowohl gegen die Mannschaft der Klasse 10a als auch gegen die der Klasse 10b unentschieden gespielt haben. Das ist wegen des Torverhältnisses nicht möglich.
Das Spiel zwischen den Mannschaften der Klassen 10a und 10b ging unentschieden aus, da die Pluspunkte 3 und 1 des Punkteverhältnisses ungerade Zahlen sind.
Fallunterscheidung:
1. Angenommen, das Spiel zwischen den Mannschaften der Klassen 10a und 10b endete mit dem Torverhältnis 0:0, dann müßte das Spiel (10a/9b) 3:2 geendet haben. Das ist nicht möglich, da die Mannschaft der Klasse 9b nur ein Tor einstecken mußte.
2. Angenommen, dieses Spiel endete 1:1; dann müßte das Spiel (10a/9b) 2:1 geendet haben. Das Spiel (9a/10b) hätte dann 1:0 enden müssen, was nicht möglich ist. Das Torverhältnis der Mannschaft der Klasse 10b müßte dann 1:2, aber nicht 2:5 lauten.
3. Angenommen, dieses Spiel endete 2:2; dann lautet das Torverhältnis des Spiels (10a/9b) 1:0, das des Spiels (9b/10b) hingegen 3:0. Nur dieser Fall ist möglich.

Lösungen zu: alpha-heiter, Heft 2/79

Aufgabe mit Spiegel
A und c sind gleich.

Niederländischer Denksport
De driehoeken CDF en CBE zijn congruent, zodat opp. AECF = opp. ABCD = 256. Daar opp. CEF = 200 en opp. AECF = 256, is opp. AEF = 56. Stel BE = x, dan is AE = 16 + x en AF = 16 − x. We drukken de opp. van driehoek AEF in x uit en vinden zo de vergelijking $(16+x)(16-x)=2\cdot 56=112$. Zo blijkt, dat BE = 12 is.

Gute Beobachtungsgabe gefragt
Zerlegt man das Quadrat in vier gleiche Teile, so erkennt man sofort, daß das Verhältnis schraffiert−nichtschraffiert wie 9:27 bzw. 1:3 ist.

Buchstaben-Mosaik
Da nach Aufgabenstellung verschiedene Buchstaben auch verschiedene Ziffern bedeuten und da in Gleichung (1) Basis und Exponent einstellige Zahlen sind, die Potenz aber zweistellig ist, besitzt Gleichung (1) folgende Lösungen:
$2^4=16$; $3^4=81$; $4^2=16$;
$7^2=49$; $8^2=64$; $9^2=81$.
Da die Potenz der Gleichung (2) vierstellig ist, entfallen die Lösungen mit dem Exponenten 4 (vierte Potenz einer zweistelligen Zahl ist mindestens fünfstellig), also gilt $x=2$. Da die Ziffer der Basis in Gleichung (1) übereinstimmt mit der Ziffer an der Zehnerstelle in der Potenz der letzten Gleichung, kann F nur 4 oder 8 und G nur 7 oder 9 sein.
Durch Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichungen (9) und (2) überzeugt man sich, daß nur $F=4$, $G=7$ sowie $H=6$ und $A=3$ die Gleichungen (1) bis (10) erfüllen –

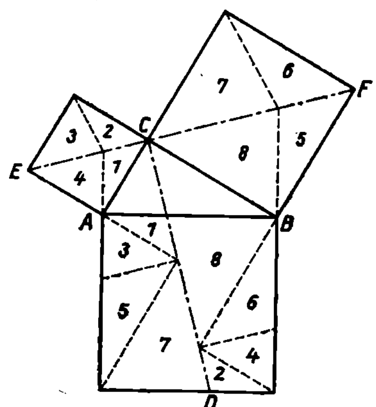
$$\begin{aligned} 4^2&=16\\ 34^2&=1156\\ 334^2&=111556\\ 3334^2&=11115556\\ 33334^2&=1111155556\\ 66667^2&=4444488889\\ 6667^2&=44448889\\ 667^2&=444889\\ 67^2&=4489\\ 7^2&=49 \end{aligned}$$

Französischer Denksport
In der Gleichung (1) kann es sich nur um eine Vervielfachung handeln. In der Gleichung (3) könnte eine Vervielfachung oder eine Division sein, somit Teilung. Entsprechend ergibt sich bei (2) nur das Zeichen „−“ und bei (4) das Zeichen „+“. Bei (3) kann f nur 2 oder 3 sein; nach (2) folgt dann $c=9$ und $f=3$; dann ergibt (2) $adde=999+9=1008$, somit $a=1$, $d=0$, $e=8$. Nach (1) wird also $1008:9=112$, also $b=2$. Schließlich gilt (4) für $g=7$ und $h=4$.
(1) $112\cdot 9=1008$; (2) $1008-9=999$;
(3) $999:3=333$; (4) $333+7=340$.

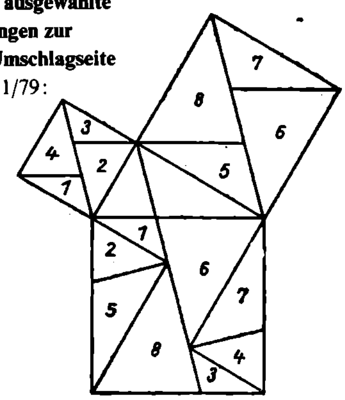
Magische Quadrate
Die Wörter in den Teilquadraten lauten: Lage, Beta, Eins, Grad, Acht, Zins, Zahl, prim, dual, plus, halb, quer, Rest, rund, Term, drei, Raum, Lote, Kote, Zehn, viel, Rand, Mega, Teil, ganz, zwei, echt
Gaspard Monge

M	D	L	A	E	B	E	C	Z	S	E	I
N	D	G	E	T	T	A	C	G	Z	S	N
A	A	R	E	M	A	H	T	G	I	N	L
Z	A	F	R	M	R	R	H	T	T	T	L
H	L	F	I	M	L	H	H	D	U	L	D
Q	L	I	R	P	L	A	H	A	L	D	O
Q	U	U	R	U	S	L	L	B	B	D	R
E	R	E	U	T	S	M	G	L	D	R	U
S	S	T	E	T	E	M	L	D	I	[illegible]	N
I	L	S	T	R	M	U	L	I	E	R	N
K	L	E	T	B	R	A	A	L	E	Q	R
K	O	T	B	R	V	R	L	Z	E	N	R
T	E	T	V	V	I	R	Z	H	[illegible]	D	N
U	T	M	V	E	L	R	E	H	A	R	R
T	M	E	E	L	T	T	E	L	A	W	U
A	A	G	A	L	P	I	L	Z	Z	W	E
H	G	N	Z	A	P	N	I	L	I	[illegible]	C
G	U	N	B	A	K	K	N	L	E	H	T

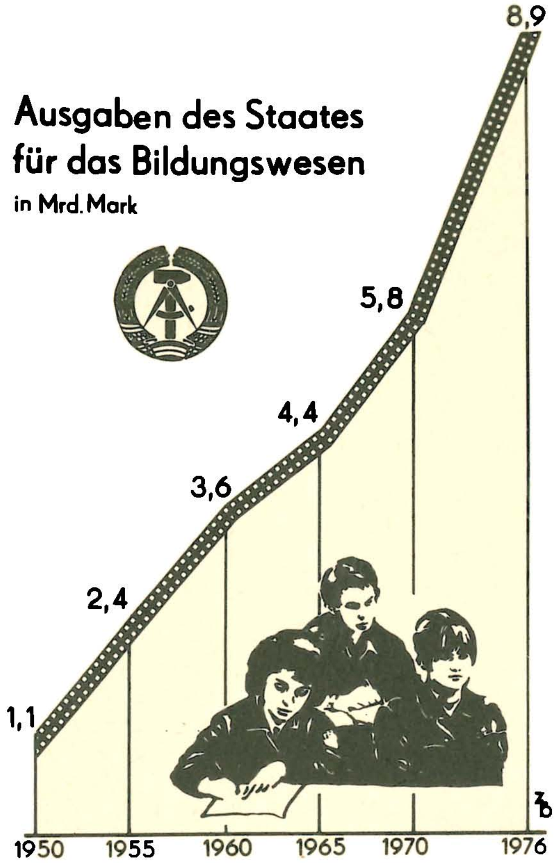
Nächtlicher Sturm
Christian nimmt einen 20 cm langen Bindfaden und befestigt beide Enden mit Stecknadeln auf einem Brett in einer Entfernung von 6 cm. Er schiebt den Bindfaden von einem Punkt aus senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Stecknadeln in die Höhe, bis sich der Faden strafft, und mißt die Entfernung; für die cm, die er abliest, setzt er m ein und erhält so die genaue Höhe.
Barbara rechnet mit dem pythagoreischen Lehrsatz:
Höhe x: $x^2=(20-x)^2-6^2$
$x=9{,}10$ m



Zwei ausgewählte Lösungen zur IV. Umschlagseite Heft 1/79:

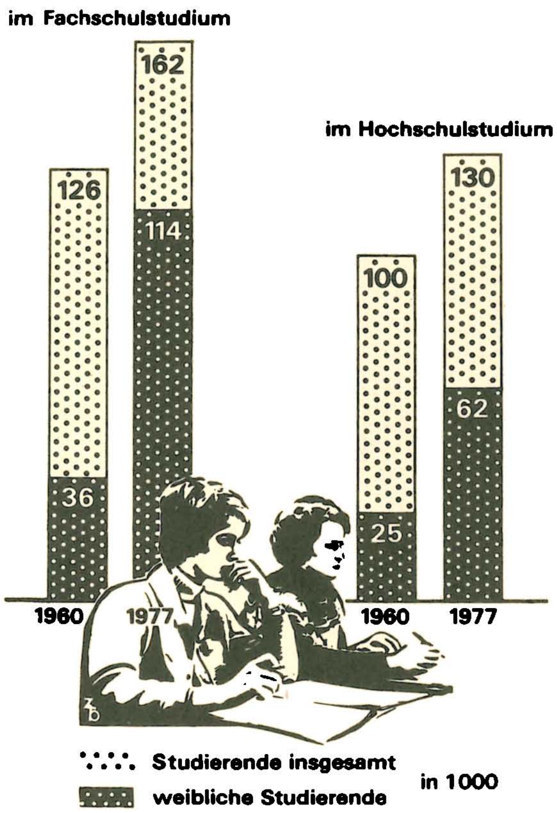


30 Jahre haben Gewicht

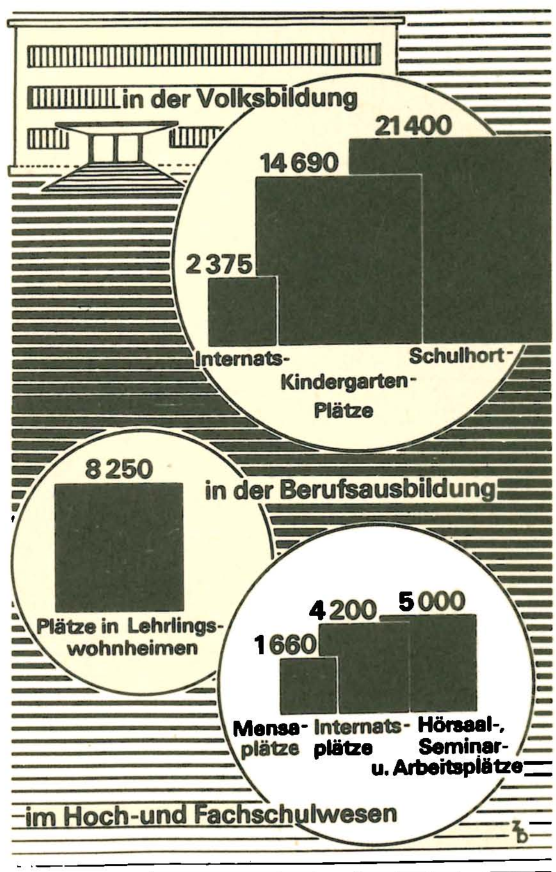


Feriensommer 1978
in der DDR

Studierende in der DDR



Verbesserung der materiellen Voraussetzungen im Bildungswesen 1978



Mathematische Schülerbücherei

Gesamtverzeichnis

Band 1 Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie (DVW)
Band 2 Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik (BGT)
Band 3 Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I (U)
Band 4 Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene (BGT)
Band 5 Vyšin, Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben (BGT)
Band 6 Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz (BGT)
Band 7 Varga, Mathematische Logik für Anfänger I (VWV)
Band 8 Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion (DVW)
Band 9 Korowkin, Ungleichungen (DVW)
Band 10 Gnedenko/Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (DVW)
Band 11 Lietzmann, Wo steckt der Fehler? (BGT)
Band 12 Lietzmann, Altes und Neues vom Kreis (BGT)
Band 13 Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich (BGT)
Band 14 Miller, Rechenvorteile (BGT)
Band 15 Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben (DVW)
Band 16 Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen (DVW)
Band 17 Dubnow, Fehler in geometrischen Beweisen (DVW)
Band 18 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I (DVW)
Band 19 Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen (DVW)
Band 20 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II (DVW)
Band 21 Kurosch, Algebraische Gleichungen beliebigen Grades (DVW)
Band 22 Gelfond, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (DVW)
Band 23 Schafarewitsch, Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (DVW)
Band 24 Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik II (U)
Band 25 Markuschewitsch, Rekursive Folgen (DVW)
Band 26 Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen III (DVW)
Band 27 Steinhaus, 100 Aufgaben (U)
Band 28 Perelman, Unterhaltsame Geometrie (VWV)
Band 29 Perelman, Unterhaltsame Algebra (VWV)
Band 30 Kolosow, Kreuz und quer durch die Mathematik (VWV)
Band 31 Teplow, Grundriß der Kybernetik (VWV)
Band 32 Jaglom/Boltjanski, Konvexe Figuren (DVW)
Band 33 Belkner, Determinanten (BGT)
Band 34 Autorenkollektiv, Rund um die Mathematik (KB)
Band 35 Schmidt, Kein Ärger mit der Algebra (KB)
Band 36 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1: Lehmann, Zahlentheorie (BGT)
Band 37 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2: Grosche, Elementargeometrie (BGT)
Band 38 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 3: Kleinfeld, Ungleichungen (BGT)
Band 39 Krysicki, Zählen und Rechnen einst und jetzt (BGT)
Band 40 Sedláček, Einführung in die Graphentheorie (BGT)
Band 41 Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode (BGT)
Band 42 Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen (DVW)
Band 43 Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen (DVW)
Band 44 Donath, Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks (DVW)
Band 45 Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder (DVW)
Band 46 Autorenkollektiv, Kompendium der Mathematik (VWV)
Band 47 Lehmann, Lineare Optimierung für Junge Mathematiker (BGT)
Band 48 Belkner, Matrizen (BGT)
Band 49 May, Differentialgleichungen (BGT)
Band 50 Sobol, Die Monte-Carlo-Methode (DVW)
Band 51 Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik (BGT)
Band 52 Worobjow, Teilbarkeitskriterien (DVW)
Band 53 Freyer/Gäbler/Möckel, Gut gedacht ist halb gelöst (U)
Band 54 Bürger/Wittmar, Was ist, was soll Datenverarbeitung? (U)
Band 55 Cendrowski, Bande der unsichtbaren Hand (KB)
Band 56 Göttner, Was ist, was soll Operationsforschung? (U)
Band 57 Dege, EDV Maschinelles Rechnen (U)
Band 58 Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und graphische Darstellungen (BGT)
Band 59 Kaloujnine, Primzahlzerlegung (DVW)
Band 60 Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen? (DVW)
Band 61 Boltjanski-Gochberg, Kombinatorische Geometrie (DVW)
Band 62 Varga, Mathematische Logik für Anfänger II (VWV)
Band 63 Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung (VWV)
Band 64 Wilenkin, Unterhaltsame Mengenlehre (BGT)
Band 65 Belkner, Metrische Räume (BGT)
Band 66 Jäckel, Mathematik heute (U)
Band 67 Sedláček, Keine Angst vor Mathematik (FV)
Band 68 Schreiber/Wußing, Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie (BGT) (1980)
Band 69 Gronitz, Praktische Mathematik (VWV)
Band 70 Hilbert, Matrizen (VWV)
Band 71 Wissensspeicher Mathematik (VWV)
Band 72 Steinhaus, 100 neue Aufgaben (U)
Band 73 Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme (BGT)
Band 74 Solodownikow, Lineare Ungleichungssysteme (DVW)
Band 75 Golowina/Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie (DVW)
Band 76 Rehm, Zahl, Menge, Gleichung (KB)
Band 77 Lehmann, Kurzweil durch Mathe (U) (1979)
Band 78 Kordemski, Köpfchen, Köpfchen (U)
Band 79 Glade/Manteuffel, Am Anfang stand der Abacus (U)
Band 80 Baschmakowa, Diophant und diophantische Gleichungen (DVW)
Band 81 Pieper, Zahlen aus Primzahlen (DVW)
Band 82 Lehmann, Mathe mit Pfiff (U)
Band 83 Jaglom, Ungewöhnliche Algebra (BGT)
Band 84 Belkner, Reelle Vektorräume (BGT)
Band 85 Stahl/Wenzel, Elektronische Datenverarbeitung (VWV)
Band 86 Göttner/Fischer/Krieg, Was ist, was kann Statistik? (U)
Band 87 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 4: Borneleit, Gleichungen (BGT)
Band 88 Kolman, Die vierte Dimension (BGT)
Band 89 Drews, Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben (DVW)
Band 90 Lovász/Pelikán/Vesztergombi, Kombinatorik (BGT)
Band 91 Rehm, Strecke, Kreis, Zylinder (KB)
Band 92 Fanghänel/Vockenberg, Arbeiten mit Mengen (VWV)
Band 93 Fehringer, Näherungsrechnung (VWV)
Band 94 Flose, Elementare Statistik (VWV) (1981)
Band 95 Kantor/Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen (BGT)
Band 96 Smogorschewski, Lobatschewskische Geometrie (BGT)
Band 97 Berg, Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Anwendungen (DVW) (1979)
Band 98 Ruben, Philosophie und Mathematik (BGT) (1979)
Band 99 Thiele, Mathematische Beweise (BGT) (1979)
Band 100 Lehmann, 2 ×2 plus Spaß dabei (VWV) (1979)

Zitat von Gerhart Holtz-Baumert,
Vizepräsident des Schriftstellerverbandes der DDR
aus seinem Diskussionsbeitrag auf dem VIII. Päd. Kongreß

...Wir hatten eine Zeitlang die Vorstellung, die Literatur dürfe nichts oder wenig Lehrhaftes enthalten. Aber Brecht wußte es schon anders. Ich denke heute: Jeder Schriftsteller muß auch ein Lehrer, ein Erzieher sein – ein guter natürlich, kein grober, aufdringlicher, aber wann wünschen wir uns den überhaupt!
Und in jedem Lehrer muß nach meiner Meinung ein Künstler stecken, nicht nur in denen, die Literatur, Musik oder Kunst lehren, in allen, also auch im Mathematik- und Sportlehrer...

Von den vielen Welten, die der Mensch nicht von der Natur geschenkt bekam, sondern sich aus dem eigenen Geist erschaffen hat, ist die Welt der Bücher die größte.

Hermann Hesse