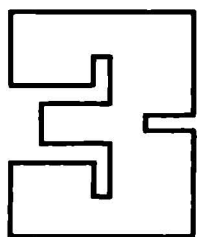
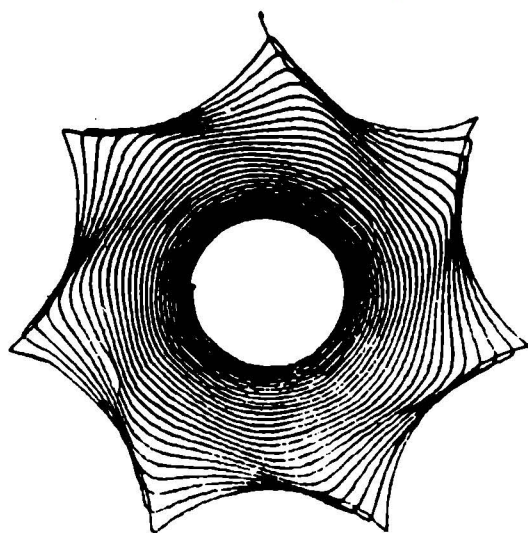
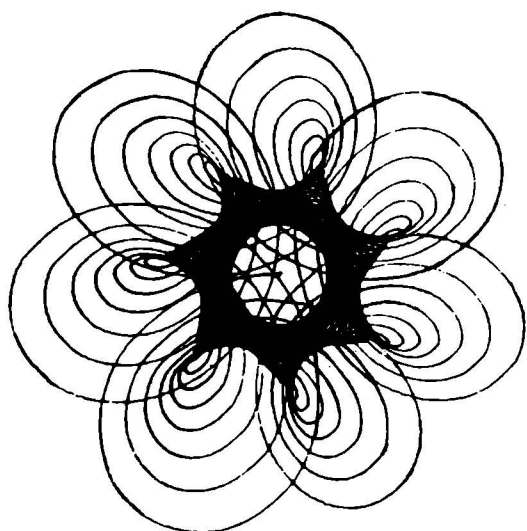
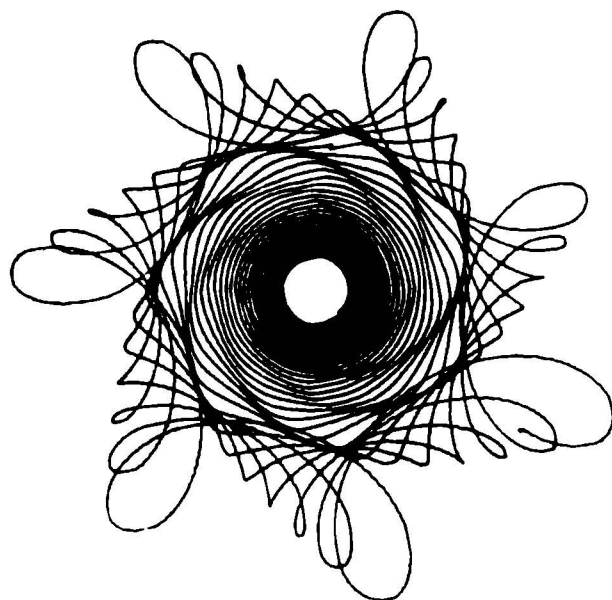
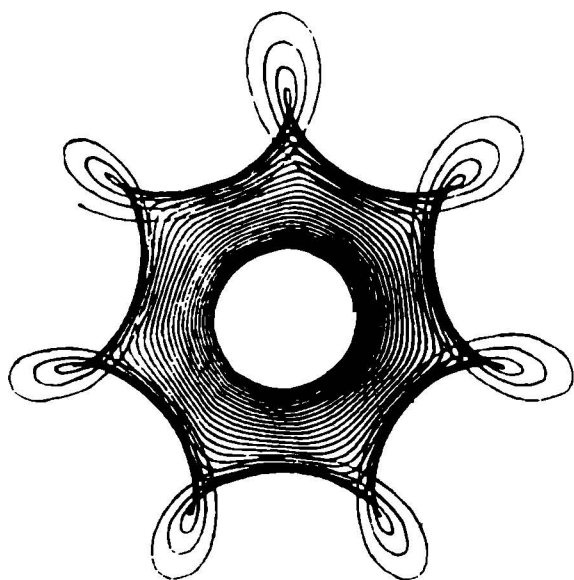


alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt);
Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); National-
preisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer
K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes
(Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Ver-
dienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberleh-
rer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); National-
preisträger Oberstudienrat D. R. Lüders (Ber-
lin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz);
Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent
Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat
G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer
Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Ber-
lin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des
Volkes

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des
Presseamtes beim Vorsitzenden des Minister-
rates der Deutschen Demokratischen Repu-
blik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft
10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M,
im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Son-
derpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutsch-
land und Berlin(West) erfolgt über den Buch-
handel; für das sozialistische Ausland über
das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und
für alle übrigen Länder über: Buchexport
Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Gesamtherstellung: INTERDRUCK

Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 9. Februar 1977

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 49 Grundgedanken der Netzplantechnik [9]*
Dr. G. Deweß, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
- 51 Eine Aufgabe von Prof. (em.) Dr. Ing. Dr. techn. h. c. Helmut Hein-
rich [10]
Technische Universität Dresden
- 52 Wir lösen lineare Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorith-
mus, Teil 1 [9]
Dr. J. Gronitz, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
- 54 Kleine Fehler – große Auswirkungen [8]
Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS Döbeln
- 57 Flußdiagramme (Leseprobe) [5]
Prof. Dr. Tamás Varga, Budapest
- 59 Magische Spielereien [5]
alpha-Ferienheft, zusammengestellt von StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig
- 61 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [8]
Korrespondenzzirkel des Bezirks Leipzig
FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig/OL R. Berg-
mann, Döbeln
Ein Verfahren zur mündlichen Lösung von quadratischen Gleichun-
gen mit ganzzahligen Koeffizienten [10]
Oberlehrer L. Dimenstein, Leningrad
- 62 Aufgaben aus der Praxis [5]
Diplomlehrer E. Knauth, Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz
- 63 Berufsbild: Technologe [8]
Dr. M. Wittwer, Ingenieurschule für Maschinenbau, Schmalkalden
- 64 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: StR J. Lehmann, VLdV, Leipzig; OL H. Pätzold, Waren/Müritz
- 66 In einem Pionierlager südlich von Moskau [5]
Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau
Lösungen
alpha-Wettbewerb 6/76 und 1/77
- III. Umschlagseite: Spiele mit Hölzchen [5]
Dr. R. Thiele, Lektor im BSB B. G. Teubner, Leipzig
- IV. Umschlagseite: Nachgedacht – mitgemacht [5]
Aufgaben, die das Leben schreibt
Dr. E. Stöckel, Pädagogische Hochschule „N. K. Krupskaja“, Halle
- Seite I bis VIII: XVI. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [5]
Lösungen zu den Aufgaben der Kreis- und Bezirksolympiade (Klassenstufen 5 bis 10)

* bedeutet: Artikel beziehungsweise Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Grundgedanken der Netzplan- technik

Es gibt in der Mathematik nur sehr selten Dinge, die innerhalb weniger Jahre von einer Sache der Spezialisten zur allgemein angewandten „Technik“ werden. Eines dieser Gebiete ist das der Netzpläne. Es gehört in die Graphentheorie, eine insgesamt noch junge Disziplin (Ansätze im 18. Jahrhundert, erstes Lehrbuch 1936), die sich heute sprunghaft entwickelt. 1958 begann man, unter den Graphen speziell die Netzpläne zu betrachten, und bereits 1965 gab es mehrere hundert Anwendungen dieser Überlegungen in allen hochindustrialisierten Ländern. Vom mathematischen Schwierigkeitsgrad her hätte die Netzplantechnik bereits einige tausend Jahre früher entwickelt werden können. Aber mathematische Disziplinen entstehen nicht als freie Erfindung weltabgeschiedener Gelehrter – erst in der Mitte unseres Jahrhunderts gab es ein wirkliches gesellschaftliches Bedürfnis für solche Planungsmethoden wie die Netzplantechnik und gab es elektronische Rechenanlagen als materielle Voraussetzung, diese Methoden auch effektiv anzuwenden.

Graphen

Ein Graph (in dem eingeschränkten Sinne, wie er für die Begründung der Netzplantechnik ausreicht) läßt sich durch zwei endliche Mengen charakterisieren: Eine Menge M von Objekten, die wir mit Großbuchstaben A, B, C, D usw. bezeichnen und „Knoten“ nennen, und eine Menge R von geordneten Paaren aus M . Jedes Element von R nennen wir einen „Bogen“ des Graphen. Zum Beispiel kann also (A, B) ein Element von R sein, A heißt dann Anfangsknoten und B Endknoten des Bogens (A, B) . Greifen wir zwei beliebige Knoten aus M heraus, etwa X und Y , und das Paar (X, Y) findet sich in R , so heißt X ein unmittelbarer Vorgänger von Y , Y ein unmittelbarer Nachfolger von X .

Jedem Graphen können wir auf vielerlei Weise Bilder in der Ebene zuordnen: Wir zeichnen die Knoten als kleine Kreise irgendwie in die Ebene und verbinden X mit Y durch einen Pfeil genau dann, wenn der Bogen (X, Y) in R ist.

Zum Beispiel stoßen wir auf einen Graphen, wenn wir von einem Wasserwerk W , einem Gaswerk G und einem Elektrizitätswerk E

je eine Leitung zu jedem der drei Häuser H_1, H_2, H_3 ziehen wollen:

$$M = \{W, G, E, H_1, H_2, H_3\}$$

$$R = \{(W, H_1), (W, H_2), (W, H_3), (G, H_1), (G, H_2), (G, H_3), (E, H_1), (E, H_2), (E, H_3)\}$$

Ein Bild dieses Graphen ist (Bild 1)

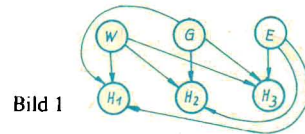


Bild 1

Ein anderes Bild desselben (!) Graphen ist (Bild 2)

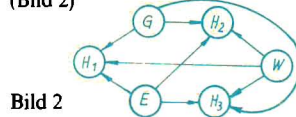


Bild 2

(Mancher Leser wird schon versucht haben, von diesem Graphen ein solches Bild zu zeichnen, bei dem sich die Pfeile nicht schneiden. Man kann beweisen, daß kein solches Bild gefunden werden kann.)

Ein Knoten X , für den es kein Z mit $(Z, X) \in R$ gibt (bei dem im Bild also kein Pfeil endet), heißt eine „Quelle“. In unserem Beispiel sind W, G und E Quellen. Entsprechend heißt ein Knoten X , für den es kein Y mit $(X, Y) \in R$ gibt, eine „Senke“. In unserem Beispiel sind H_1, H_2, H_3 Senken.

Eine Folge von Bögen $(H_1, H_2), (H_2, H_3), (H_3, H_4), \dots, (H_{k-1}, H_k)$ mit der Eigenschaft, daß jeweils der Endknoten eines Bogens der Anfangsknoten des nächsten ist, heißt eine Bahn $[H_1, H_2, \dots, H_k]$. Eine Bahn mit $H_k = H_1$ heißt ein Kreis.

Wir betrachten zur Erläuterung der Begriffe nochmals ein Beispiel (Bild 3):

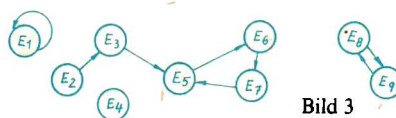


Bild 3

Alle Quellen: E_2, E_4

Alle Senken: E_1

Beispiele für Bahnen: $[E_2, E_3, E_5, E_6]$,

$[E_8, E_9, E_8, E_9]$.

Beispiele für Bahnen, die Kreise sind:

$[E_1, E_1]$, $[E_7, E_5, E_6, E_7]$, $[E_8, E_9, E_8]$

Das sind alle elementaren Kreise, nach Definition ist aber auch $[E_8, E_9, E_8, E_9, E_8]$ ein Kreis.

Definition: Ein Graph ohne Kreise, der genau eine Quelle und genau eine Senke hat, heißt Netzplan.

Netzpläne

Daß gerade die Netzpläne unter den Graphen eine wichtige Rolle spielen, hängt damit zusammen, daß man sie zur Beschreibung komplizierter Abläufe benutzen kann. Wir wollen als Beispiel das Errichten eines Bauwerkes betrachten. Die wichtigsten Ereignisse, die während des Bauprozesses eintreten, fassen

wir als Knoten eines Graphen auf. Es bezeichne etwa F die Fertigstellung der Fundamente und K die Fertigstellung des Kellergeschosses. Natürlicherweise muß erst das Ereignis F eintreten, ehe das Ereignis K eintreten kann. Das drücken wir dadurch aus, daß wir (F, K) in R aufnehmen. Dem Bogen (F, K) ordnen wir die Zeitdauer $d_{F,K}$ zu, die das Montieren des Kellergeschosses erfordert, seien das etwa 2 Tage. Im Bild 4 erscheint somit unter anderem $\rightarrow$ und man kann sofort ablesen, daß nach dem Ereignis F noch mindestens 2 Tage vergehen, bis das Ereignis K eintritt.



Bild 4

So ergibt sich insgesamt ein Graph, die Bögen entsprechen gewissen „Vorgängen“ beim Bau, zum Beispiel ist also (F, K) das „Montieren des Kellergeschosses“.

Logischerweise darf dieser Graph keinen Kreis enthalten, denn etwa der Kreis $[F, K, X, Y, F]$ würde doch bedeuten, daß K erst nach F eintreten kann, X erst nach K , Y erst nach X , F erst nach Y – es könnte also F erst nach F eintreten.

Nimmt man unter die Ereignisse noch „Beginn des Gesamtbauwerkes“ B und „Ende des Gesamtbauwerkes“ E auf, so muß B die einzige Quelle und E die einzige Senke des Graphen sein. Somit ist die Definition eines Netzplanes erfüllt.

Bei großen Bauvorhaben treten oft Hunderte von Ereignissen und Vorgängen auf, also Netzpläne mit Hunderten von Knoten und Bögen. Schon einfachste Fragen sind dann schwer zu beantworten wie etwa: Wann wird das Bauvorhaben abgeschlossen sein? Für welchen Zeitraum müssen bestimmte Zulieferungen bestellt werden? Ist es günstig, bei einem Vorgang Arbeitskräfte abzugeben, damit ein anderer beschleunigt wird? Wir betrachten nun im folgenden nur ein kleines Beispiel.

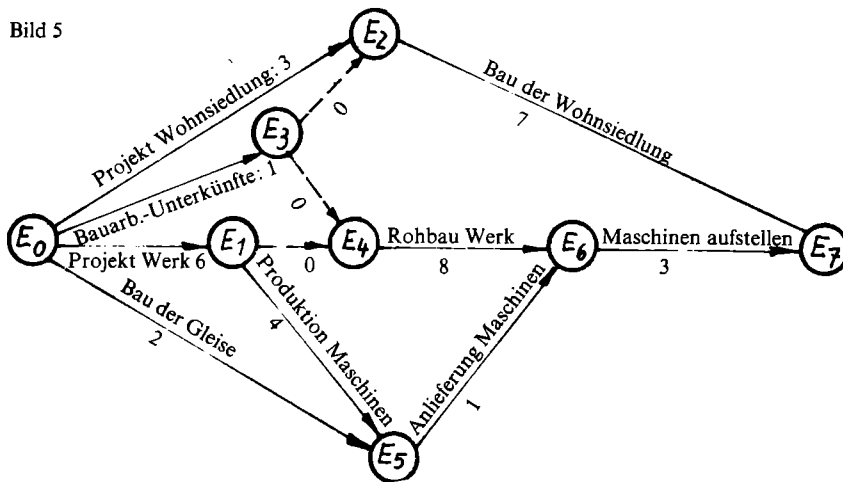
Beim Bau eines Werkes mit zugehöriger Wohnsiedlung treten stark vereinfacht folgende Vorgänge auf – die Dauer sei jeweils in Monaten angegeben:

Tabelle 1

Projektierung des Werkes	6 (E_0, E_1)
Projektierung der Wohnsiedlung	3 (E_0, E_2)
Bau der Gleise für Anlieferung der Maschinen	2 (E_0, E_5)
Aufstellen provisorischer Bauarbeiterunterkünfte	1 (E_0, E_3)
Produktion der Maschinen	4 (E_1, E_5)
Anlieferung der Maschinen	1 (E_5, E_6)
Bau der Wohnsiedlung	7 (E_2, E_7)
Rohbau des Werkes	8 (E_4, E_6)
Aufstellen der Maschinen, Fertigstellen des Werkes	3 (E_6, E_7)

Diese Vorgänge können wir als Bögen eines Netzplanes auffassen, der in Bild 5 dargestellt wird:

Bild 5



Dabei ist E_0 das Startereignis, jedes andere Ereignis E_i ist das Ereignis „Die Vorgänge, die zu den in E_i einmündenden Pfeilen gehören, sind alle beendet“. Zum Beispiel ist E_6 das Ereignis „Das Werk ist rohbaufertig und die Maschinen sind angeliefert“. E_1 ist das Ereignis „Das Werk ist projektiert“. Natürlich kann E_6 erst eintreten, nachdem E_1 eingetreten ist. Den entsprechenden Bogen (E_1 , E_6) kann man einsparen, man sieht das im Bild daran, daß von E_1 nach E_6 eine Bahn [E_1 , E_4 , E_6] verläuft.

In unserem Bild treten auch (gestrichelt gezeichnet) drei „Scheinvorgänge“ mit der Dauer 0 auf. Scheinvorgänge können notwendig sein, um die Abhängigkeit der Vorgänge richtig wiederzugeben. E_3 bedeutet „Das Werk ist projektiert“, E_3 „Die Bauarbeiterunterkünfte sind aufgestellt“, E_4 „Das Werk ist projektiert, und die Bauarbeiterunterkünfte sind aufgestellt“.

Würde man E_1 und E_4 zu einem Knoten zusammenfassen, so würde E_3 auf einer Bahn vor (E_1 , E_5) liegen, wir würden also behaupten, die Projektion der Maschinen (E_1 , E_5) hätte die Fertigstellung der Bauarbeiterunterkünfte E_3 zur Voraussetzung. Es ist gar nicht so einfach, die Vorgänge richtig zu einem Netzplan zusammenzufassen!

Untersuchungen am Bild des Netzplanes

Man interessiert sich häufig für die frühesten Termine FT_i , zu denen die Ereignisse eintreten können. Die Berechnung beruht auf folgenden Überlegungen:

- Alle Ereignisse können nicht früher als zum Zeitpunkt 0 eintreten, zu dem das Gesamtvorhaben gestartet wird.
- Ist (E_i , E_j) mit Dauer d_{ij} ein Bogen des Netzplanes und E_i kann nicht früher als zum Zeitpunkt t_i eintreten, so kann E_j sicher nicht früher als zum Zeitpunkt $(t_i + d_{ij})$ eintreten. Liegt ein Bild des Netzplans vor, so kann man den Netzplan leicht von der Quelle her durchmustern, so daß man immer dann, wenn man ein t_i braucht, das entsprechende endgültige FT_i schon hat.

Tabelle 2 zeigt schematisch den Rechengang.

E_i , von d. die FT aller Vorgänger bekannt	alle Vorgänger	$FT_i \geq \dots$	$FT_i =$	kritische Vorgänger
E_0	—		0	—
E_3	E_0	$FT_0 + d_{03} = 0 + 1 = 1$	1	E_0
E_1	E_0	$FT_0 + d_{01} = 0 + 6 = 6$	6	E_0
E_5	E_0 E_1	$FT_0 + d_{05} = 0 + 2 = 2$ $FT_1 + d_{15} = 6 + 4 = 10$	10	E_1
E_4	E_1 E_3	$FT_1 + d_{14} = 6 + 0 = 6$ $FT_3 + d_{34} = 1 + 0 = 1$		
E_2	E_0 E_3	$FT_0 + d_{02} = 0 + 3 = 3$ $FT_3 + d_{32} = 1 + 0 = 1$	3	E_0
E_6	E_4 E_5	$FT_4 + d_{46} = 6 + 8 = 14$ $FT_5 + d_{56} = 10 + 1 = 11$		
E_7	E_2 E_6	$FT_2 + d_{27} = 3 + 7 = 10$ $FT_6 + d_{67} = 14 + 3 = 17$	17	E_6

Betrachten wir das an unserem Beispiel:

E_0 ist die Quelle, deshalb ist $FT_0 = 0$.

Nun suchen wir uns einen Knoten, wo die FT für alle Vorgänger schon bekannt sind, etwa E_3 – denn dieser hat nur E_0 als unmittelbaren Vorgänger. Folglich ist $FT_3 = FT_0 + d_{03} = 0 + 1 = 1$. Entsprechend erhalten wir auch für E_1 den Wert $FT_1 = FT_0 + d_{01} = 0 + 6 = 6$.

Als nächstes können wir uns E_5 vornehmen. Da E_0 Vorgänger von E_5 ist, muß nach Regel b) gelten $FT_5 \geq FT_0 + d_{05} = 0 + 2 = 2$. Da aber auch E_1 Vorgänger von E_5 ist, muß auch $FT_5 \geq FT_1 + d_{15} = 6 + 4 = 10$ gelten. Weitere unmittelbare Vorgänger hat E_5 nicht, es ist somit $FT_5 = 10$ der größere der beiden erhaltenen Werte 2 und 10 (da ja alle einmündenden Vorgänge abgearbeitet werden müssen). Wenn wie hier bei E_5 mehrere Vorgänger betrachtet werden mußten, merken wir uns den oder die „kritischen“ Vorgänger an, hier also E_1 . Hat ein Knoten überhaupt nur einen Vor-

gänger, so ist dieser auch kritischer Vorgänger.

Damit kennen wir alle frühesten Termine, insbesondere auch den frühesten Termin der Senke E_7 – frühestens nach 17 Monaten kann das Gesamtvorhaben abgeschlossen werden. Ausgehend von dieser 17 kann man nun „von hinten her“ ausrechnen, wann der späteste Termin ST ist, zu dem ein Ereignis eintreten muß, damit die Zeitdauer 17 eingehalten werden kann. Zum Beispiel muß E_2 spätestens nach $17 - 7 = 10$ Monaten eintreten.

Besonders wichtig ist es, von der Senke aus über die kritischen Vorgänger rückwärts zu gehen: Von E_7 war der kritische Vorgänger E_6 , von E_6 war er E_4 usw.:

$$E_7 - E_6 - E_4 - E_1 - E_0$$

Für diese Ereignisse wird sich stets $FT_i = ST_i$ ergeben, die entsprechenden Bögen (E_0 , E_1), (E_1 , E_4), (E_4 , E_6), (E_6 , E_7) bilden eine „kritische Bahn“ der Gesamtlänge 17. Verzögert sich einer dieser kritischen Vorgänge, so verzögert sich der Gesamtablauf. Will man den Gesamtablauf verkürzen, muß man auf der (oder, wenn es mehrere gibt, jeder) kritischen Bahn Zeit sparen. Dagegen wirken sich geringe Verzögerungen bei nichtkritischen Vorgängen nicht auf den Abschluß des Gesamtvorhabens aus.

In unserem Beispiel ist (E_2 , E_7) nicht kritisch. Auch wenn wir beim entsprechenden Vorgang „Bau der Wohnsiedlung“ einige Arbeitskräfte abziehen, so daß der Vorgang nicht 7, sondern 9 Monate dauert, ändert sich nichts an der Gesamtdauer 17. Diese freigewordenen Arbeitskräfte können wir vielleicht dafür einsetzen, den kritischen Vorgang (E_4 , E_6) von 8 auf 6 Monate zu verkürzen – dann

ergibt sich als neuer Abschlußtermin für das Gesamtvorhaben 15 Monate. (Nach jeder Änderung der d_{ij} müssen die FT_i und die kritischen Bahnen neu errechnet werden!) Auf diese Weise dient die Netzplantechnik dazu, Abläufe von Großvorhaben zu planen und die vorhandenen Arbeitskräfte und Maschinen rationell einzusetzen. Diese Technik ist nicht nur im Bauwesen anwendbar, sondern überall dort, wo ein Gesamtvorhaben aus vielen Teilvorgängen besteht. Selbst komplizierte medizinische Operationen sind so schon zeitlich analysiert worden, um im Interesse des Patienten die Dauer der Operation möglichst zu verkürzen.

Berechnung der frühesten Termine unabhängig vom Bild

Unser Verfahren, früheste und späteste Termine an einem Bild des Netzplans zu ermitteln, ist für größere Netzpläne nicht mehr geeignet. Man bearbeitet dann den abstrakten Netzplan selbst mit Hilfe von Rechenautomaten. Wir erläutern das wieder an unserem Beispiel. Wir legen eine Tabelle an (Tabelle 3), wo im Kreuzungspunkt der Zeile zum Knoten E_i mit der Spalte zum Knoten E_j gerade d_{ij} steht, falls $(E_i, E_j) \in R$ ist.

Nach Regel a) beginnen wir als erste Annäherung an die gesuchten FT mit einer Spalte aus lauter Nullen. Entsprechend Regel b) berechnen wir dann weitere Spalten nach folgendem Rezept:

Der nächste Wert in der Zeile E_i ist das Maximum aller folgenden Summen:

$$\left[\begin{array}{l} \text{„vorhandene Zahl“ } d_{ki} \\ \text{in der Spalte } E_i \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{letzter Näherungswert in derjenigen} \\ \text{Zeile } k, \text{ in der diese „vorhandene} \\ \text{Zahl“ steht} \end{array} \right]$$

In der Tabelle haben wir diese Rechnung unterbrochen, als nächste wäre die Zeile E_6 dran: Vorhanden in der Spalte E_6 sind die Zahlen 8 und 1. Letzte Zahl in der Zeile, wo die 8 steht, ist die 6, $8+6=14$. Letzte Zahl in der Zeile, wo die 1 steht, ist die 10, $1+10=11$. Das Maximum dieser Summen ist die 14, diese kommt also an die eingerahmte Stelle.

Mit diesem Rezept rechnen wir solange, bis zwei aufeinanderfolgende Spalten in unserer

Rechnung völlig gleich sind – diese Werte sind dann die FT_i .

Auf den genauen Beweis dafür müssen wir hier verzichten. Die Grundidee ist dieselbe wie bei der Untersuchung am Bild des Netzplans. Auch in Tabelle 2 wurde für E_6 gerechnet: $6+8=14$, $10+1=11$. Da wir in Tabelle 3 mit einer Spalte aus lauter Nullen beginnen, kann es jetzt aber vorkommen, daß wir am Anfang Werte $t_i < FT_i$ herausbekommen und weiterverwenden – erst wenn zwei Spalten der Rechnung völlig gleich sind, haben sich für alle FT die richtigen Werte ergeben. Dafür brauchen wir aber nicht mühsam nach solchen Knoten zu suchen, wo die FT aller Vorgänger schon bekannt sind.

▲ Aufgabe ▲ Im Ferienlager

Im Ferienlager ist fast schon Mittagszeit, da kommt eine Gruppenleitung auf die Idee, für den Nachmittag eine großartige Veranstaltung „Kuchen, Kultur und knifflige Fragen“ vorzubereiten, mit der die Gruppe sich vorgenommen hatte, das Lagerleben zu bereichern. Sie beruft für 13 Uhr eine kurze Gruppenversammlung ein und überlegt sich folgende Vorgangsliste (Zeiteinheit ist die Viertelstunde), s. Tabelle 4.

Tabelle 4

Gruppenversammlung,		
Bildung der Kommissionen	2	(E_0, E_1)
<i>Aufgaben der Kommission „Raum“:</i>		
in Lagerleitung freien Raum		
erfragen	1	(E_1, E_4)
Raum säubern und ausgestalten	2	(E_4, E_7)
Plakate malen und im Lager		
anbringen	2	(E_4, E_8)
Lautsprecherdurchsagen mit		
Hinweis auf Plakate	2	(E_8, E_9)
Gäste hereinlassen	1	(E_9, E_{11})
<i>Aufgaben der Kommission „Ratespiel“:</i>		
Fragen ausdenken		
Fragen für Spielrunden zu-	4	(E_1, E_6)
sammenstellen und Spielrunden		
mit Kulturprogramm koordinieren	2	(E_6, E_{11})
<i>Aufgaben der Kommission „Kultur“:</i>		
Kulturprogramm ausdenken		(E_1, E_5)
Programm an die Kommission		
„Ratespiel“ übergeben	0	(E_5, E_6)
Programm üben	5	(E_5, E_{11})

Tabelle 3

	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	$t_i^{(1)}$	$t_i^{(2)} \dots \rightarrow FT_i$
E_0		6	3	1		2			0	0
E_1					0	4			0	6
E_2								7	0	3
E_3			0		0				0	1
E_4							8		0	6
E_5						1			0	10
E_6								3	0	14
E_7									0	

Eine Aufgabe von Prof. (em.) Dr. Ing. Dr. techn. h. c. Helmut Heinrich

Technische Universität Dresden

▲ 1631 ▲ Es seien $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sechs voneinander verschiedene Punkte im Raum und $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ die Mittelpunkte der Strecken $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$, und es mögen weder die drei Punkte M_1, M_3, M_5 noch die drei Punkte M_2, M_4, M_6 auf einer Geraden liegen.

Man beweise, daß es einen Punkt P im Raum gibt, durch den alle Seitenhalbierenden des Dreiecks $M_1M_3M_5$ und alle Seitenhalbierenden des Dreiecks $M_2M_4M_6$ gehen.

Aufgaben der Kommission „Kuchen“:

Kaffee in der Lagerküche		
bestellen	1	(E_1, E_2)
Kaffee abholen	1	(E_{10}, E_{11})
Tassen und Teller besorgen	2	(E_1, E_7)
in Lagerleitung Geld besorgen	1	(E_1, E_3)
Kuchen kaufen	4	(E_3, E_7)
kleine Preise für Raterunden		
kaufen	4	(E_3, E_{11})
Tische decken	2	(E_7, E_9)
<i>Aufgabe der Lagerküche:</i>		
Kaffee kochen	2	(E_2, E_{10})

a) Zeichne den Netzplan! (Zur Erleichterung wurden schon die Ereignisnummern für alle Vorgänge mit angegeben, wer will, kann es ja mal ohne diese Hilfestellung versuchen.)

b) Bestimme die frühesten Termine für alle Ereignisse in Zeiteinheiten!

c) Die Veranstaltung soll zum frühestmöglichen Zeitpunkt beginnen – um wieviel Uhr kann das sein?

d) Es gibt zwei Vorgänge, die man klugerweise erst zum spätestmöglichen Zeitpunkt beginnt! Was ist mit der Lagerküche also zu vereinbaren?

e) Was ist die kritische Bahn, die der beste Organisator sichert?

Zum Vergleich mit eurer eigenen Lösung: Es gibt ein Bild für den Netzplan, auf dem sich keine Pfeile schneiden. Ohne Netzplantechnik hätte man kaum herausbekommen, daß die Veranstaltung schon um 15.30 Uhr beginnen kann, und ohne exakten Plan wäre das trotz Eifers aller Gruppenmitglieder kaum zu schaffen. Die Thermosbehälter mit Kaffee möchten 15.15 Uhr abholbereit sein. Die kritische Bahn ist $0-1-3-7-9-11$.

G. Deweß

Wir lösen lineare Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorithmus

Teil 1

Gauß hat auf dem Gebiet der praktischen Mathematik wesentliche Ergebnisse erzielt und diese angewandt. Zu diesen wissenschaftlichen Leistungen gehören u. a.:

die Methode des Fehlerausgleichs mittels der Methode der kleinsten Quadrate, das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme sowie Interpolations- und Integrationsformeln. In diesem Beitrag wollen wir lineare Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen.

1.1. Ein Beispiel

Der von Gauß entwickelte Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme soll zuerst an einem Beispiel betrachtet werden.

Es ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 11 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + 5y - 3z = 14 \end{cases} \text{ zu lösen.}$$

Die Lösung erfolgt durch schrittweise Elimination der Variablen. Zunächst wird die erste Gleichung so umgeformt, daß bei x der Koeffizient 1 steht (Division durch 3). Dann wird die Variable x aus der zweiten und dritten Gleichung eliminiert (Subtraktion des Zweifachen bzw. Einfachen der neuen ersten Gleichung von der zweiten bzw. dritten Gleichung). Man erhält nach diesem ersten Schritt

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ -\frac{7}{3}y + \frac{8}{3}z &= -\frac{13}{3} \\ \frac{13}{3}y - \frac{8}{3}z &= \frac{31}{3} \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird die erste Gleichung beibehalten, und die zweite Gleichung wird so umgeformt, daß bei y der Koeffizient 1 steht (Division durch $-\frac{7}{3}$). Dann wird aus der dritten Gleichung y eliminiert (Subtraktion des $\frac{13}{7}$ -fachen der neuen zweiten Gleichung von der dritten Gleichung). Als Ergebnis der Umformung im zweiten Schritt erhält man

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ y - \frac{8}{7}z &= \frac{13}{7} \\ \frac{48}{21}z &= \frac{48}{21} \end{aligned}$$

Im dritten Schritt werden die ersten beiden Gleichungen beibehalten, und es wird die dritte Gleichung so umgeformt, daß bei z der Koeffizient 1 steht (Division durch $\frac{48}{21}$):

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= \frac{11}{3} \\ y - \frac{8}{7}z &= \frac{13}{7} \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat nach dieser äquivalenten Umformung in drei Schritten eine sogenannte „Dreiecksgestalt“ (man spricht auch von einem „gestaffelten System“) und kann sofort aufgelöst werden. Man erhält

$$\begin{aligned} z &= 1 \\ y &= \frac{13}{7} + \frac{8}{7} \cdot 1 = 3 \\ x &= \frac{11}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Die Probe (z. B. Einsetzen in das Ausgangsgleichungssystem) zeigt die Richtigkeit der Lösung.

Bei dem vorliegenden Gleichungssystem kann der Eliminationsprozeß auch in anderer und einfacher Weise durchgeführt werden (man kann z. B. auch das Gleichungssystem umordnen, Gleichungen vertauschen usw.). Die dargelegte Art und Weise der schrittweisen Elimination wurde gewählt, um eine einheitliche Vorgehensweise für beliebige lineare Gleichungssysteme zu haben, um einen Algorithmus für die Lösung linearer Gleichungssysteme anzugeben.

Man kann die Vorgehensweise bei der schrittweisen Elimination der Unbekannten auch in einem Rechenschema (Tabelle 1) erfassen.

Das Ziel des Eliminationsprozesses besteht also darin, das Gleichungssystem durch äquivalente Umformung auf „Dreiecksgestalt“ zu bringen. Die Lösung des Dreieckssystems ist leicht möglich.

Nach der Erläuterung des Eliminierungsverfahrens am Beispiel von drei linearen Gleichungen mit drei Variablen soll der Algorithmus allgemein für den Fall $n=3$ angegeben werden.

1.2. Der Gaußsche Algorithmus

Es wird ein lineares Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Variablen, das eindeutig lösbar sein soll, betrachtet.

Das System habe die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

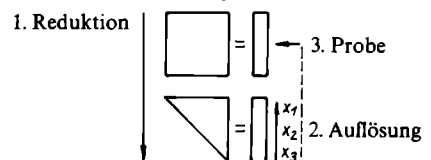
wobei $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{13}, a_2$ und a_3 reelle Zahlen, x_1, x_2 und x_3 die Variablen sind.

Das Ziel des Gaußschen Algorithmus besteht wie bereits angegeben darin, das System äquivalent so umzuformen, daß es in „Dreiecksgestalt“ vorliegt. Das Dreieckssystem wird dann aufgelöst.

Für die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergeben sich somit folgende Arbeitsschritte:

1. Reduktion des Systems auf „Dreiecksgestalt“
2. Auflösung des Dreieckssystems
3. Probe

Zur Veranschaulichung dient Bild 1.



Die einzelnen Arbeitsschritte sollen in einem Rechenschema zusammengefaßt werden. Man erhält: 1. Reduktion

1. Schritt: Elimination der Unbekannten x_1 aus der zweiten und dritten Gleichung (Division der ersten Gleichung durch a_{11} liefert Gleichung (1'); Subtraktion des a_{21} -fachen der Gleichung (1') bzw. a_{31} -fachen der Gleichung (1') von (2) bzw. (3) liefert (2') bzw. (3'))

Damit hat man das Gleichungssystem nach dem ersten Schritt.

Falls $a_{11}=0$ gilt, ordnet man vor der Umformung um. Falls einer der Koeffizienten bei x_1 in der zweiten bzw. dritten Gleichung (a_{12}, a_{13}) gleich Null ist, wird im 1. Schritt diese Gleichung ohne Umformung übernommen.

Für die Koeffizienten der Gleichungen nach dem ersten Schritt gilt:

$$\begin{aligned} a_{12}^{(1)} &= \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad a_{13}^{(1)} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad a_1^{(1)} = \frac{a_1}{a_{11}}, \\ a_{22}^{(1)} &= a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}^{(1)}, \\ a_{23}^{(1)} &= a_{23} - a_{21} \cdot a_{13}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} &= a_{32} - a_{31} \cdot a_{12}^{(1)}, \\ a_{33}^{(1)} &= a_{33} - a_{31} \cdot a_{13}^{(1)}, \\ a_2^{(1)} &= a_2 - a_{21} \cdot a_1^{(1)}, \\ a_3^{(1)} &= a_3 - a_{31} \cdot a_1^{(1)}. \end{aligned}$$

2. Schritt: Elimination der Unbekannten x_2 aus der dritten Gleichung (Übernahme der ersten Gleichung ohne weitere Umformung; Division der Gleichung (2') durch $a_{22}^{(1)}$ liefert (2''); Subtraktion des $a_{32}^{(1)}$ -fachen der Gleichung (2'') von (3) liefert (3''))

Damit hat man das Gleichungssystem nach dem zweiten Schritt. Falls $a_{22}^{(1)}=0$ gilt, ordnet man vor der weiteren Umformung um. Für die Koeffizienten der Gleichungen nach dem zweiten Schritt gilt:

Tabelle 1

Schritt Nr.	Gleichung	Koeffizient bei			Absolutglied	Hinweise
		x	y	z		
0	(1)	3	2	-1	11	(1) : 3 = (1')
	(2)	2	-1	2	3	(2) - 2 · (1') = (2')
	(3)	1	5	-3	14	(3) - 1 · (1') = (3')
1	(1')	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	keine weitere Umformung
	(2')	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{13}{3}$	
	(3')	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{31}{3}$	
2	(1'')	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	
	(2'')	0	1	$-\frac{8}{7}$	$\frac{13}{7}$	
	(3'')	0	0	$\frac{48}{21}$	$\frac{48}{21}$	
3	(1''')	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	$x = \frac{11}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 2$ $y = \frac{13}{7} + \frac{8}{7} \cdot 1 = 3$ $z = 1$
	(2''')	0	1	$-\frac{8}{7}$	$\frac{13}{7}$	
	(3''')	0	0	1	1	

Tabelle 2

		Koeffizient bei			
		x_1	x_2	x_3	
0	(1)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_1
	(2)	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_2
	(3)	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_3
Ausgangssystem					
1	(1')	1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_1^{(1)}$
	(2')	0	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_2^{(1)}$
	(3')	0	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_3^{(1)}$
Gleichungssystem nach dem 1. Schritt					
2	(1'')	1	$a_{12}^{(2)}$	$a_{13}^{(2)}$	$a_1^{(2)}$
	(2'')	0	1	$a_{23}^{(2)}$	$a_2^{(2)}$
	(3'')	0	0	$a_{33}^{(2)}$	$a_3^{(2)}$
Gleichungssystem nach dem 2. Schritt					
Gleichungssystem nach dem 3. Schritt: gestaffeltes System					
3	(1''')	1	$a_{12}^{(3)}$	$a_{13}^{(3)}$	$a_1^{(3)}$
	(2''')	0	1	$a_{23}^{(3)}$	$a_2^{(3)}$
	(3''')	0	0	1	$a_3^{(3)}$

$$a_{12}^{(2)} = a_{12}^{(1)}, a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(1)}, a_1^{(2)} = a_1^{(1)}$$

$$a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, a_2^{(2)} = \frac{a_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot a_{23}^{(2)}$$

$$a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot a_2^{(2)}$$

3. Schritt: Schaffung des Koeffizienten 1 bei x_3 in der dritten Gleichung (Übernahme der Gleichungen (1'') und (2'') ohne Umformung; Division der Gleichung (3'') durch $a_{33}^{(2)}$).

Man erhält das gestaffelte System.

Das gestaffelte System wird nun von unten

nach oben aufgelöst, und es wird eine Probe durchgeführt.

3. Probe: Bei der Probe kann man die errechneten Werte in das Ausgangsgleichungssystem einsetzen. Man kann auch die sogenannte „Spaltensummenprobe“ durchführen. Es muß nämlich gelten

$$\sum_{i=1}^3 s_i x_i = s \text{ mit } s_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}$$

$$i = 1, 2, 3 \text{ und } s = \sum_{j=1}^3 a_j.$$

Bei einem System von n Gleichungen mit n Variablen, das eindeutig lösbar ist, geht man analog vor:

Im ersten Schritt wird die Unbekannte x_1 aus der zweiten, dritten, ..., n ten Gleichung eliminiert. Im zweiten Schritt wird die Unbekannte x_2 aus der dritten, vierten, ..., n ten Gleichung des Systems, das man nach dem ersten Schritt erhalten hat, eliminiert. Dieser Prozeß wird fortgesetzt, bis man Dreiecksgestalt hat.

Bei der Vielzahl der Rechnungen ist es zweckmäßig, Rechenkontrollen durchzuführen. Solche Rechenkontrollen sind möglich mit Hilfe der sogenannten Zeilensummenprobe. Man bildet die Zeilensummen, wendet auf diese Zeilensummen auch den Gaußschen Algorithmus an und prüft nach, ob der Wert, den man erhält, wenn man den Algorithmus auf die Zeilensumme anwendet, mit der neuen Zeilensumme übereinstimmt.

Im Schritt Nr. 0 z. B. erhält man bei dem oben angegebenen Beispiel ($n=3$) als Zeilensummen

$$s_1 = \sum_{j=1}^3 a_{1j} + a_1,$$

$$s_2 = \sum_{j=1}^3 a_{2j} + a_2$$

$$\text{und } s_3 = \sum_{j=1}^3 a_{3j} + a_3.$$

Der Gaußsche Algorithmus angewandt auf s_1, s_2 und s_3 liefert im 1. Schritt s_1', s_2' und s_3' .

Bei richtiger Rechnung muß gelten

$$s_1' = s_1^{(1)}, s_2' = s_2^{(1)}$$

$$\text{und } s_3' = s_3^{(1)} \text{ mit}$$

$$s_1^{(1)} = 1 + a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(1)} + a_1^{(1)},$$

$$s_2^{(1)} = a_{22}^{(1)} + a_{23}^{(1)} + a_2^{(1)}$$

$$\text{und } s_3^{(1)} = a_{32}^{(1)} + a_{33}^{(1)} + a_3^{(1)}.$$

J. Gronitz

Dieser Beitrag wird in Heft 4/77 fortgesetzt.

Fünfbändige „Mathematische Enzyklopädie“ in Vorbereitung

Der sowjetische Verlag „Sowjetskaja Enziklopedija“ plant in den Jahren 1977–82 die Herausgabe einer fünfbändigen „Mathematischen Enzyklopädie“ in einer Auflage von 100 000 Exemplaren.

Das fundamentale Werk – dem Umfang nach auf dem Gebiet der Mathematik einmalig in der Welt – wird in alphabetischer Ordnung 15 000 Termini und etwa 7 400 Artikel umfassen. Davon entfallen 400 umfangreiche Artikel auf wichtige Teilgebiete und Richtungen in der Mathematik (z. B. „Algebra“), 2 000 auf wichtige mathematische Begriffe (z. B. „Differential“), Probleme (z. B. „Waring-Problem“), Methoden (z. B. „Winogradow-Methode“) und 5 000 auf knappe Definitionen verschiedenartiger mathematischer Begriffe. Der Preis pro Band beträgt 4 Rubel 50 Kopeken.

(Bearbeitet nach Angaben in „Sowjetische Bücher“ von Fachlehrer O. Dietze, Wählitz)

Kleine Fehler – große Auswirkungen

In den Naturwissenschaften, in der Technik, in der Ökonomie, in der Planung und Leitung der Volkswirtschaft und in vielen anderen Bereichen der Praxis werden in immer größerem Umfang mathematische Verfahren angewandt und benötigt.

Die Kompliziertheit der Aufgaben und der Rechenaufwand zu deren Lösung wachsen ständig. Die Lösung solcher Aufgaben erfolgt meist mit Hilfe von Näherungsverfahren; die Daten, die in die Rechnung eingehen, sind mit Fehlern behaftet (z. B. Meßwerte) und die Fehler pflanzen sich beim Rechnen fort (z. B. durch Rundungen). Es ist deshalb notwendig, Fehlerbetrachtungen durchzuführen und u. a. zu untersuchen, welche Arten von Fehlern auftreten, wie man Fehler erfassen kann, wie sich Fehler fortpflanzen und mit welcher Genauigkeit Ergebnisse vorliegen. In diesem Beitrag wollen wir nach der Betrachtung einiger Beispiele eine Frage untersuchen, nämlich, wie sich in die Rechnung eingehende Fehler (Eingangsfehler) bei einfachen Rechenoperationen fortpflanzen.

An zwei einfachen Beispielen sollen die Auswirkungen kleiner Fehler verfolgt werden:

Beispiel 1: Berechne die Summe

$S = 6,64 \cdot 7,14 + 8,13 \cdot 8,64$ auf eine Stelle nach dem Komma!

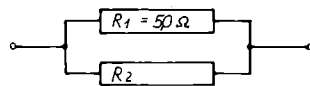
Diese Aufgabe der Näherungsrechnung soll hier auf vier Wegen gelöst werden. Diese vier Wege sind durch folgendes Vorgehen festgelegt: Entweder werden jeweils Teilaufgaben exakt gelöst (Gleichheitszeichen!) oder alle im jeweiligen Term vorkommenden Dezimalzahlen werden auf eine Stelle nach dem Komma gerundet (Zeichen „genähert gleich“!):

$$\begin{aligned} S &\approx 6,6 \cdot 7,1 + 8,1 \cdot 8,6 \\ &= 46,86 + 69,66 = 116,52 \approx 116,5 \\ &\approx 46,9 + 69,7 \\ &= 116,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 47,4096 + 70,2432 = 117,6528 \approx 117,7 \\ &\approx 47,4 + 70,2 \\ &= 117,6 \end{aligned}$$

Dieses einfache Beispiel zeigt, daß unterschiedliche Vorgehensweisen beim Rechnen und Runden zu unterschiedlichen Ergebnissen führen und daß man unbedingt Fragen der Fehlerfortpflanzung und Genauigkeitsfragen diskutieren muß.

Beispiel 2: Zwei Widerstände R_1 und R_2 sind als Bauelement zu einer Parallelschaltung verlötet. Auf einem ist die Größe aufgedruckt: $R_1 = 5,0 \Omega$. Durch Einschalten dieser Parallelschaltung in einen Stromkreis und Ausführen entsprechender Messungen soll der Gesamtwiderstand R der Parallelschaltung bestimmt werden und abschließend soll nach der Formel $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ der zweite Teilwiderstand R_2 berechnet werden. Ein Schüler ermittelt $R = 4,9 \Omega$, ein anderer $R = 4,8 \Omega$. Zu welchem Ergebnis führen beide Meßwerte?



Durch Umstellen von $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ nach R_2 ergibt sich:

$$R_2 = \frac{R R_1}{R_1 - R}$$

Durch Einsetzen des Meßwertes und Berechnen ergibt sich jeweils:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{5,0 \Omega \cdot 4,9 \Omega}{5,0 \Omega - 4,9 \Omega} & R_2 &= \frac{5,0 \Omega \cdot 4,8 \Omega}{5,0 \Omega - 4,8 \Omega} \\ &= \frac{24,5 \Omega^2}{0,1 \Omega} & &= \frac{24,0 \Omega^2}{0,2 \Omega} \\ &= 245 \Omega & &= 120 \Omega \end{aligned}$$

Geringe Änderungen in den Ausgangswerten führen hier zu großen Auswirkungen im Ergebnis.

Nach diesen Beispielen, die die Notwendigkeit von Fehlerbetrachtungen unterstreichen, die die Auswirkungen von Fehlern zeigen, wollen wir die Fortpflanzung von Eingangsfehlern bei einfachen Rechenoperationen näher untersuchen.

In Klasse 7 lernten bzw. lernen wir kennen:

Definition 1: Die Differenz zwischen dem Näherungswert a_F und dem wahren Wert a_W heißt absoluter Fehler Δa : $\Delta a = a_F - a_W$.

Der absolute Fehler Δa hat dieselbe Maßeinheit wie wahrer Wert a_W und Näherungswert a_F . Der absolute Fehler kann sowohl positiv als auch negativ sein.

Definition 2: Der Quotient (das Verhältnis) aus dem absoluten Fehler Δa und dem wahren

Wert a_W heißt relativer Fehler $\frac{\Delta a}{a_W}$.

Der relative Fehler ist eine unbenannte Zahl. Hat z. B. eine Strecke die wahre Länge $a_W = 3,24$ km und ist die Länge dieser Strecke zu $a_F = 3,20$ km gemessen worden, so gilt laut obigen Definitionen:

$$\begin{aligned} \Delta a &= 3,20 \text{ km} - 3,24 \text{ km} = -0,04 \text{ km} \\ &= -4 \cdot 10^{-1} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta a}{a_W} = \frac{-0,04 \text{ km}}{3,24 \text{ km}} = -0,001 \approx 0,1\%$$

Der relative Fehler wird häufig in Prozent angegeben, wobei $1 \approx 100\%$ gesetzt wird.

Aus den Definitionen 1 und 2 ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

■ Für jede beliebige Zahl s folgt aus $b_W = a_W + s$ und $b_F = a_F + s$ stets $\Delta b = \Delta a$.

Zum Beispiel gilt für $a_W = 0,06$ und $a_F = 0,1$ sowie für $b_W = 6311,86$ und $b_F = 6311,9$

$$\Delta b = \Delta a = 0,04.$$

■ Für jede von 0 verschiedene Zahl s und für $a_W \neq 0$ folgt aus $b_W = s a_W$ und $b_F = s a_F$ stets

$$\frac{\Delta b}{b_W} = \frac{\Delta a}{a_W}.$$

So gilt z. B. für $a_W = 0,15$ und $a_F = 0,12$ sowie für $b_W = 1500$ und $b_F = 1200$

$$\frac{\Delta b}{b_W} = \frac{\Delta a}{a_W} = 0,2 \approx 20\%.$$

Für die Praxis typisch und von großer Bedeutung ist die folgende Problemstellung:

▲ Was kann bei gegebenem Näherungswert a_F und gegebener Abschätzung des absoluten Fehlers $|\Delta a| \leq 10^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ über den zugehörigen wahren Wert a_W ausgesagt werden?

Aus Definition 1 folgt $a_W = a_F - \Delta a$ und aus $|\Delta a| \leq 10^n$ $-10^n \leq \Delta a \leq 10^n$. Hieraus folgt $a_F - 10^n \leq a_W \leq a_F + 10^n$. Das Ergebnis lautet: a_F und a_W stimmen in den Grundziffern, die in $a_F \cdot 10^n$ vor dem Komma stehen, mit einer Einschränkung überein: Eine Änderung dieser Grundziffern von a_W kann höchstens dadurch eintreten, daß die letzte der genannten Grundziffern durch ihren Vorgänger oder Nachfolger ersetzt wird. So folgt aus $a_F = 216341,62$ und $|\Delta a| \leq 10^2$ entweder $a_W = 2163xx,xxx\dots$ oder $a_W = 2162xx,xxx\dots$ oder $a_W = 2164xx,xxx\dots$ sowie aus $b_F = 5,79999999$ und $|\Delta b| < 0,6 \cdot 10^{-6}$ wegen $0,6 \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$ entweder $b_W = 5,799999xxx\dots$ oder $b_W = 5,799998xxx\dots$ oder $b_W = 5,800000xxx\dots$. Durch das Zeichen x sind Dezimalstellen fixiert worden, über deren Belegung keine Aussage gemacht werden kann.

Es ist üblich, bei einem Näherungswert die Grundziffern, die für den zugehörigen wahren Wert nichts aussagen, durch Runden wegzulassen und dafür eine etwas größere Fehler-schranke in Kauf zu nehmen.

Die so stehen bleibenden Grundziffern heißen **zuverlässige Grundziffern**. Bei einem Näherungswert a_F mit $|\Delta a| \leq 10^n$ sind alle Grundziffern, deren Stellenwertfaktor gleich oder größer als 10^n ist, zuverlässig.

So wird $a_F = 5,79999999$ mit $|\Delta a| < 0,6 \cdot 10^{-6}$ abgeändert in $a^* = 5,800000$ mit $|\Delta a^*| < 0,61 \cdot 10^{-6} < 0,7 \cdot 10^{-6}$.

Wir lernen die Dreiecksungleichung kennen

Die Dreiecksungleichung werden wir in den folgenden Abschnitten als Hilfsmittel zu Fehlerabschätzungen verwenden.

Satz 1: Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$, (Dreiecksungleichung).

Beweis: Nach der Definition der Addition reeller Zahlen und der Definition des absoluten Betrages gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} |a| + |b|, \text{ falls } a \text{ und } b \text{ gleiche} \\ \text{Vorzeichen haben oder} \\ \text{mindestens eine dieser} \\ \text{Zahlen 0 ist.} \end{array} \right.$$

$$|a+b| = \begin{cases} |a|-|b|, & \text{falls } a \text{ und } b \text{ verschiedene Vorzeichen haben und } |a| \geq |b| \text{ gilt.} \\ |b|-|a|, & \text{falls } a \text{ und } b \text{ verschiedene Vorzeichen haben und } |a| < |b| \text{ gilt.} \end{cases}$$

Da für beliebige reelle Zahlen a und b stets die Ungleichungen

$$|a|-|b| \leq |a+b| \text{ und } |b|-|a| \leq |a+b| \text{ gelten, folgt}$$

$$|a+b| \leq |a|+|b|. \text{ W. z. b. w.}$$

Selbständig beweisen wir den folgenden Satz. Die in diesem Satz enthaltene Relation wird ebenfalls als Dreiecksungleichung bezeichnet.

Satz 2: Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt $|a-b| \leq |a|+|b|$. Als erste Anwendung der Dreiecksungleichung soll folgende Frage beantwortet werden:

▲▲ Was kann bei gegebenem Näherungswert $a_F \neq 0$ und gegebener Abschätzung des relativen Fehlers $\left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 10^{-l}$ mit $l \in \mathbb{N}$ und $l \neq 0$ über den zugehörigen wahren Wert $a_W \neq 0$ ausgesagt werden?

$$\text{Aus } \left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 10^{-l} \text{ folgt } |\Delta a| \leq |a_W| \cdot 10^{-l}.$$

Mittels der Dreiecksungleichung (Satz 2) folgt aus $a_W = a_F - \Delta a$ die Ungleichung $|a_W| \leq |a_F| + |\Delta a|$. Die Dezimalzahldarstellung von $|a_F|$ laute $|a_F| = a_N \cdot 10^N + a_{N-1} \cdot 10^{N-1} + \dots$. Dabei sind $a_N, a_{N-1}, \dots$ Grundziffern und N ist die kleinste ganze Zahl, für die $a_N > 0$ gilt. a_F wird nach oben abgeschätzt durch $|a_F| < (a_N + 1) \cdot 10^N$. Durch Einsetzen in $|\Delta a| \leq |a_W| \cdot 10^{-l}$ ergibt sich:

$$|\Delta a| \leq (|a_F| + |\Delta a|) \cdot 10^{-l}$$

$$= |a_F| \cdot 10^{-l} + |\Delta a| \cdot 10^{-l}$$

$$|\Delta a| < (a_N + 1) \cdot 10^N \cdot 10^{N-l} + |\Delta a| \cdot 10^{-l}$$

$$= (a_N + 1) \cdot 10^{N-l} + |\Delta a| \cdot 10^{-l}.$$

Nach den Regeln für das Umformen von Ungleichungen folgt hieraus schrittweise:

$$|\Delta a| \cdot (1 - 10^{-l}) < (a_N + 1) \cdot 10^{N-l}$$

$$|\Delta a| < \frac{a_N + 1}{1 - 10^{-l}} \cdot 10^{N-l}$$

Wegen $10^{-l} \leq 0,1$ und damit $1 - 10^{-l} \geq 0,9$

$$\text{gilt für } a_N < 9 \quad \frac{a_N + 1}{1 - 10^{-l}} \leq 10 \text{ und}$$

$$\text{damit } |\Delta a| < 10 \cdot 10^{N-l} = 10^{N-l+1}. \text{ Für } N=9 \text{ ergibt sich } |\Delta a| < 1,2 \cdot 10^{N-l+1}. a_F \text{ und } a_W$$

stimmen hiernach in den ersten l Dezimalstellen $a_N, a_{N-1}, a_{N-2}, \dots, a_{N-l+1}$ überein. Eine Änderung dieser Grundziffern bei a_W kann höchstens dadurch eintreten, daß die letzte der genannten Grundziffern im Falle $a_N < 9$ ersetzt wird durch ihren Vorgänger oder Nachfolger und im Falle $a_N = 9$ ersetzt wird durch ihren Vorvorgänger, Vorgänger, Nachfolger oder Nachnachfolger.

$$\text{Ein Näherungswert } a_F \neq 0 \text{ mit } \left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 10^{-l}$$

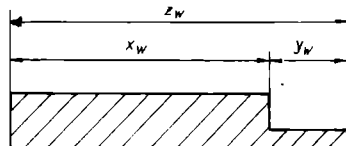
hat also l zuverlässige Grundziffern, deren erste (von links) in a_F die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist.

So folgt z. B. aus $a_F = 0,0007538$ und

$$\left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 10^{-4} \text{ entweder } a_W = 0,0007538xxx\dots \text{ oder } a_W = 0,0007537xxx\dots \text{ oder } a_W = 0,0007539xxx\dots \text{ Hier sind wiederum anstelle von } x \text{ beliebige Grundziffern einzusetzen.}$$

Der absolute Fehler einer Summe oder Differenz

Wir wollen von einem Beispiel ausgehen:



Meßwerte für die wahren Längen x_W und y_W des abgebildeten Werkstückes mögen mit der Schiebelehre ermittelt werden. Wird der Nominus der Schiebelehre mitbenutzt, können mittels Schiebelehre Längen bis auf 0,1 mm genau abgelesen werden. Dies bedeutet, daß der absolute Fehler jeder mittels Schiebelehre bestimmten Länge, sofern keine vermeidbaren Einstellungs- und Ablesfehler begangen werden, höchstens gleich 0,05 mm ist. Mittels Schiebelehre mögen für x_F und y_F die folgenden Meßwerte gefunden werden:

$$x_F = 67,8 \text{ mm}; |\Delta x| \leq 0,05 \text{ mm}$$

$$y_F = 13,2 \text{ mm}; |\Delta y| \leq 0,05 \text{ mm}$$

Was kann auf Grund dieser beiden Messungen über die Gesamtlänge $z = x + y$ unseres Werkstückes ausgesagt werden? Gemäß der Formel $z = x + y$ gelten für den wahren Wert z_W und den zu x_F und y_F gehörigen Näherungswert z_F der Gesamtlänge $z = x + y$ die Formeln $z_W = x_W + y_W$ und $z_F = x_F + y_F$. Hieraus folgt: $\Delta z = z_F - z_W = x_F + y_F - (x_W + y_W) = x_F - x_W + y_F - y_W$, d. h. $\Delta z = \Delta x + \Delta y$. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 3: Der absolute Fehler einer Summe ist gleich der Summe der absoluten Fehler der Summanden:

$$z = x + y$$

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y$$

Durch Anwenden der Dreiecksungleichung (Satz 1) folgt daraus die Ungleichung

$$|\Delta z| \leq |\Delta x| + |\Delta y|. \text{ Damit ist der folgende Satz bewiesen:}$$

Satz 4: Der Betrag des absoluten Fehlers einer Summe ist nie größer als die Summe der Beträge der absoluten Fehler der Summanden:

$$z = x + y$$

$$|\Delta z| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

Kehren wir zu unserem Beispiel zurück! Da die wahren Werte x_W und y_W nicht bekannt sind, können Δx und Δy nicht berechnet werden und damit auch nicht Δz . Doch gemäß Satz 4 ist eine Abschätzung des absoluten Fehlers möglich:

$$\text{Aus } |\Delta x| \leq 0,05 \text{ mm und } |\Delta y| \leq 0,05 \text{ mm folgt mittels } |\Delta z| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \quad |\Delta z| \leq 0,05 \text{ mm} + 0,05 \text{ mm} = 0,10 \text{ mm. Nunmehr berechnen}$$

wir gemäß $z_F = x_F + y_F$ den zu x_F und y_F gehörigen Näherungswert der Gesamtlänge:

$$z_F = 67,8 \text{ mm} + 13,2 \text{ mm} = 81,0 \text{ mm.}$$

Wegen $|\Delta z| \leq 0,1 \text{ mm}$ gilt

$$81,0 \text{ mm} - 0,1 \text{ mm} \leq z_W \leq 81,0 \text{ mm} + 0,1 \text{ mm.}$$

Die Dezimalzahldarstellung von z_W lautet entweder $z_W = 80,9xxx\dots \text{ mm}$ oder

$$z_W = 81,0xxx\dots \text{ mm oder } z_W = 81,1 \text{ mm. An}$$

stelle des Zeichens x dürfen wieder beliebige Grundziffern eingesetzt werden. Das erhaltene Ergebnis wird in der Form $z_W = 81,0 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$ fixiert.

Die folgenden Sätze beweisen wir selbständig: **Satz 5:** Der absolute Fehler einer Differenz ist gleich der Differenz der absoluten Fehler von Minuend und Subtrahend:

$$z = x - y$$

$$\Delta z = \Delta x - \Delta y$$

Satz 6: Der absolute Fehler einer Differenz ist betragsmäßig nie größer als die Summe der absoluten Beträge der absoluten Fehler von Minuend und Subtrahend:

$$z = x - y$$

$$|\Delta z| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$$

Im Mathematikunterricht rechnen wir mit Näherungswerten, z. B. Rundungswerten, ohne eine Fehlerabschätzung explizit aufzuschreiben. Hier sind also, eventuell bis auf Grundziffern „0“, nur zuverlässige Grundziffern jeweils anzugeben.

Damit wir im Ergebnis wiederum nur zuverlässige Grundziffern angeben, stützen wir uns auf zwei Faustregeln, deren eine jetzt formuliert wird.

▲ **Faustregel 1:** Gehört beim Näherungswert a_F zur letzten zuverlässigen Grundziffer der Stellenwertfaktor 10^a und beim Näherungswert b_F zur letzten zuverlässigen Grundziffer der Stellenwertfaktor 10^b und ist n das Maximum der Zahlen a_n und b_n , so sind in $a_F + b_F$ und $a_F - b_F$ jeweils alle Grundziffern, deren Stellenwertfaktor nicht kleiner als 10^n ist, zuverlässige.

Zum Formulieren der Faustregel wurde der Begriff des Maximums zweier Zahlen benutzt, den wir zumindest implizit vom Bestimmen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen mittels Primfaktorzerlegung kennen:

Definition 3: Als Maximum m zweier Zahlen s und t wird die Zahl m bezeichnet, für die gilt $m = s$, falls $s \leq t$ und $m = t$, falls $s > t$ ist.

Motivation und Grenzen dieser Faustregel folgen aus den Sätzen 4 und 6 und aus der eingangs unter dem Zeichen ▲ betrachteten Problemstellung.

Beispiele für das Rechnen mit Näherungswerten:

$$0,00051 + 7,28 \approx 0,00 + 7,28 = 7,28$$

$$1834,1 - 1834,23874 \approx 1834,1 - 1834,2 = -0,1$$

$$34,1 + 1,7 + 3,8 - 17,2 + 11,3 - 7,2 + 2,7 + 9,3$$

$$+ 11,2 - 11,2 \approx 38$$

Im letzten Beispiel ist es wegen der großen Zahl von Summanden nicht sinnvoll, gemäß Faustregel 1 im Ergebnis eine Stelle nach dem Komma anzugeben: Ist der Betrag des absoluten Fehlers jedes Summanden durch 0,05

nach oben abzuschätzen, so läßt sich der Betrag des absoluten Fehlers des Ergebnisses nur durch $10 \cdot 0,05 = 0,5$ nach oben abschätzen.

Absoluter und relativer Fehler eines Produktes

Den folgenden Betrachtungen legen wir die Formel $z = xy$ zugrunde, wobei bei gegebenen x und y jeweils z zu berechnen ist. Für wahre Werte gelte $z_W = x_W \cdot y_W$ und für ihre Näherungswerte entsprechend $z_F = x_F \cdot y_F$. Aus beiden Gleichungen folgt $\Delta z = x_F \cdot y_F - x_W \cdot y_W$. Wegen $-x_F \cdot y_W + x_F y_W = 0$ läßt sich diese Gleichung in der folgenden Form schreiben: $\Delta z = x_F y_F - x_F y_W + x_F y_W - x_W y_W$. Mittels Distributivgesetz und Definition 1 ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned}\Delta z &= x_F(y_F - y_W) + y_W(x_F - x_W) \\ \Delta z &= x_F \cdot \Delta y + y_W \cdot \Delta x\end{aligned}$$

(Später werden wir bei der Herleitung einer Formel für den relativen Fehler eines Produktes von dieser Gleichung ausgehen.) Nach Definition 1 gilt $y_W = y_F - \Delta y$. Durch Einsetzen folgt jetzt:

$$\begin{aligned}\Delta z &= x_F \cdot \Delta y + (y_F - \Delta y) \cdot \Delta x \\ \Delta z &= x_F \cdot \Delta y + y_F \cdot \Delta x - \Delta x \cdot \Delta y\end{aligned}$$

Mittels Dreiecksungleichung und da für alle reellen Zahlen a und b $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ gilt, ergibt sich:

$$|\Delta z| \leq |x_F| \cdot |\Delta y| + |y_F| \cdot |\Delta x| + |\Delta x| \cdot |\Delta y|$$

Die erhaltenen Ergebnisse fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 7: Für den absoluten Fehler eines Produktes $z = xy$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta z &= x_F \cdot \Delta y + y_F \cdot \Delta x - \Delta x \cdot \Delta y \text{ und} \\ |\Delta z| &\leq |x_F| \cdot |\Delta y| + |y_F| \cdot |\Delta x| + |\Delta x| \cdot |\Delta y|\end{aligned}$$

Als Anwendung lösen wir die folgende Aufgabe:

Aufgabe 1: Ein Fahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Geschwindigkeit und Fahrzeit werden gemessen zu:

$$\begin{aligned}v_F &= 48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}; |\Delta v| \leq 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\ t_F &= 97 \text{ s}; |\Delta t| \leq 0,5 \text{ s}\end{aligned}$$

Welchen Weg s hat dieses Fahrzeug in der Zeit t zurückgelegt?

Lösung: Wegen $s = v \cdot t$ gilt gemäß Satz 7 $|\Delta s| \leq |v_F| \cdot |\Delta t| + |t_F| \cdot |\Delta v| + |\Delta t| \cdot |\Delta v|$. Damit gilt erst recht:

$$|\Delta s| \leq 48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot 0,5 \text{ s} + 97 \text{ s} \cdot 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} + 0,5 \text{ s} \cdot 1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Hieraus folgt schrittweise:

$$\begin{aligned}|\Delta s| &\leq \frac{48 \cdot 0,5}{3600} \text{ km} + \frac{97}{3600} \text{ km} + \frac{0,5}{3600} \text{ km} \\ &< \frac{49 \cdot 0,5}{3500} \text{ km} + \frac{105}{3500} \text{ km} + \frac{0,7}{3500} \text{ km} \\ &= \frac{7 \cdot 0,5}{500} \text{ km} + \frac{15}{500} \text{ km} + \frac{0,1}{500} \text{ km} \\ &= 0,007 \text{ km} + 0,03 \text{ km} + 0,0002 \text{ km} \\ &< 0,04 \text{ km}\end{aligned}$$

Aus Geschwindigkeit und Zeit berechnet sich der zurückgelegte Weg zu:

$$\begin{aligned}s_F &= v_F \cdot t_F = 48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot 97 \text{ s} = \frac{48 \cdot 97}{3600} \text{ km} \\ &= \frac{4656}{3600} \text{ km} = 1,29 \dots \text{ km}.\end{aligned}$$

Die zurückgelegte Fahrstrecke beträgt also

$$s_W = (1,3 \pm 0,05) \text{ km}.$$

Für den relativen Fehler eines Produktes gilt eine einfachere Formel als für den absoluten Fehler. Diese soll jetzt hergeleitet werden. In die oben bei einem Zwischenschritt erhaltene Formel $\Delta z = x_F \cdot \Delta y + y_W \cdot \Delta x$ wird jetzt x_F durch $x_W + \Delta x$ ersetzt:

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x_W + \Delta x) \cdot \Delta y + y_W \cdot \Delta x \\ \Delta z &= x_W \cdot \Delta y + y_W \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y\end{aligned}$$

Durch Division beider Seiten mit $z_W = x_W \cdot y_W$ und nachfolgendem Kürzen ergibt sich:

$$\frac{\Delta z}{z_W} = \frac{\Delta y}{y_W} + \frac{\Delta x}{x_W} + \frac{\Delta x}{x_W} \cdot \frac{\Delta y}{y_W}$$

Satz 8: Der relative Fehler eines Produktes ist gleich der Summe aus dem relativen Fehler des ersten Faktors, dem relativen Fehler des zweiten Faktors und dem Produkt dieser beiden relativen Fehler.

$$z = xy$$

$$\frac{\Delta z}{z_W} = \frac{\Delta x}{x_W} + \frac{\Delta y}{y_W} + \frac{\Delta x}{x_W} \cdot \frac{\Delta y}{y_W}$$

Mittels Dreiecksungleichung ergibt sich für den relativen Fehler eines Produktes die Ungleichung:

$$\left| \frac{\Delta z}{z_W} \right| \leq \left| \frac{\Delta x}{x_W} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y_W} \right| + \left| \frac{\Delta x}{x_W} \right| \cdot \left| \frac{\Delta y}{y_W} \right|$$

Aufgabe 2: Die eine Rechteckseite a ist mit der Abschätzung für den relativen Fehler $\left| \frac{\Delta a}{a_W} \right| \leq 0,002$, die andere Rechteckseite b entsprechend mit $\left| \frac{\Delta b}{b_W} \right| \leq 0,001$ bestimmt worden. Was folgt hieraus für den relativen Fehler des Flächeninhaltes $A = ab$? Wieviel Dezimalstellen, gezählt von der ersten von „0“ verschiedenen an, sind in A_F zuverlässig?

Aufgabe 3: Berechne den Umfang $u = \pi d$ eines Kreises aus der Kreiszahl $\pi_F = 3,14$; $|\Delta \pi| \leq 0,002$ und dem Durchmesser $d_F = 6,8 \text{ cm}$; $|\Delta d| \leq 0,05 \text{ cm}$!

Aufgabe 4: Berechne den Flächeninhalt $A = a^2$ eines Quadrates aus der Seitenlänge $a_F = 7,34 \text{ dm}$; $|\Delta a| \leq 0,005 \text{ dm}$!

Die Aufgabe 4 zeigt uns, daß oft in guter Näherung für den relativen Fehler eines Produktes $z = xy$ gilt:

$$\frac{\Delta z}{z_W} \approx \frac{\Delta x}{x_W} + \frac{\Delta y}{y_W}$$

Absoluter und relativer Fehler eines Quotienten

Hier sollen wir zunächst den angegebenen Satz selbständig beweisen und die abgedruckte Aufgabe selbständig lösen.

Satz 9: Absoluter und relativer Fehler eines Quotienten $z = \frac{x}{y}$ genügen den Formeln:

$$\Delta z = \frac{\Delta x}{y_F} - \frac{x_W}{y_W \cdot y_F} \cdot \Delta y; y_F \neq 0; y_W \neq 0$$

$$\frac{\Delta z}{z_W} = \frac{\Delta x}{x_W} - \frac{\Delta y}{y_W} - \left(\frac{\Delta x}{x_W} - \frac{\Delta y}{y_W} \right) \cdot \frac{\Delta x}{x_W} \cdot \frac{\Delta y}{y_W}; y_F \neq 0; y_W \neq 0; x_W \neq 0$$

Aus Satz 9 folgt, daß für den relativen Fehler eines Quotienten $z = \frac{x}{y}$ oft in guter Näherung

$$\frac{\Delta z}{z_W} \approx \frac{\Delta x}{x_W} - \frac{\Delta y}{y_W} \text{ gilt.}$$

Aufgabe 5: Die Dichte ρ eines homogenen Körpers ist durch die Formel $\rho = \frac{m}{V}$ bestimmt.

Dabei sind m die Masse und V das Volumen des Körpers. Masse und Volumen eines Körpers aus Eisen werden bestimmt zu:

$$\begin{aligned}V_F &= 127 \text{ cm}^3; |\Delta V| \leq 0,5 \text{ cm}^3 \\ m_F &= 1000 \text{ g}; |\Delta m| \leq 0,5 \text{ g}\end{aligned}$$

Berechne nach diesen Angaben die Dichte ρ_W dieses Körpers!

Abschließend wird die bereits angekündigte zweite Faustregel, die sich mittels der Sätze 8 und 9 und der eingangs unter dem Zeichen $\blacktriangle\blacktriangle$ betrachteten Problemstellung motivieren läßt, formuliert.

$\blacktriangle\blacktriangle$ Faustregel 2: Besitzt der Näherungswert a_F l_a aufeinanderfolgende zuverlässige Grundziffern, deren erste (von links) in a_F die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist, besitzt der Näherungswert b_F l_b Grundziffern mit den gleichen Eigenschaften, und ist l das Minimum der Zahlen l_a und l_b , so besitzen $a_F \cdot b_F$ und $a_F : b_F$ jeweils l aufeinanderfolgende zuverlässige Grundziffern, deren erste (von links) in $a_F \cdot b_F$ bzw. in $a_F : b_F$ die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist. Wenn z. B. der Näherungswert 7,28 drei zuverlässige Grundziffern hat und wenn der Näherungswert 0,0041 zwei aufeinanderfolgende zuverlässige Grundziffern hat, deren erste in 0,0041 die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist, so sind in $7,28 \cdot 0,0041$ und $7,28 : 0,0041$ jeweils zwei aufeinanderfolgende Grundziffern, deren erste im jeweiligen Ergebnis die erste von „0“ verschiedene Grundziffer ist, zuverlässige.

$$7,28 \cdot 0,0041 = 0,0298 \dots \approx 0,030$$

$$7,28 : 0,0041 = 177, \dots \approx 1800$$

W. Träger

Bildmappe: C. F. Gauß

Im September 1977 gibt der Verlag *Bild und Heimat* eine Bildserie über C. F. Gauß heraus. Diese eignet sich besonders für die Gestaltung von Wandzeitungen, Bildserien in Mathematikabinetten, sie kann auch als Anerkennung für gute Leistungen in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern oder für vorbildliche außerunterrichtliche Arbeit überreicht werden.

Technische Daten: Bildmappe mit zweifarbigem Buchdruck-Umschlag sowie einführendem Text; 9 Inhaltsmotive in Bromsilberdruck mit erläuternden Rückseitentexten, Preis: 2,- M. Bestellungen erbeten bis Mitte Juli 1977 an:

Verlag Bild und Heimat, 98 Reichenbach, Roßplatz 15
Red. alpha

Wo benutzt man Flußdiagramme?

Hast du schon einmal von elektronischen Rechenmaschinen gehört? (Der englische Name dieser Maschine lautet Computer, ausgesprochen: Komput-er.) Es gibt Maschinen dieser Art, die in einer Sekunde mehr Rechenarbeit leisten, als du im ganzen Leben fertigbringen würdest, und solltest du auch zeitlebens immerfort rechnen. Und obendrein erledigen sie derart komplizierte Rechnungen, die der Mensch ohne Maschinen überhaupt nicht bewältigen könnte. Auch was die Arbeitsgenauigkeit und Zuverlässigkeit angeht, steht der Mensch diesen Maschinen sehr nach. Allerdings „verrechnet“ sich auch eine Maschine hier und da, aber ein Mensch würde bei solcher Arbeit viele tausend Fehler machen. Diese Maschinen arbeiten äußerst schnell, genau und zuverlässig und können für die verschiedensten Zwecke verwendet werden; von selbst „können“ sie aber überhaupt nichts. Sie verrichten nur das, worauf man sie eingestellt, programmiert hat. Schleicht sich ins Programm ein ganz kleiner Fehler ein, so stehen sie schon still oder liefern die unsinnigsten Ergebnisse. Sie können nicht begreifen, was man von ihnen verlangt. Sie haben eben keinen Verstand. Deshalb ist es so wichtig, daß wir bei der Programmierung einer Rechenmaschine sehr genau durchdenken, was die Maschine verrichten soll. Wir gliedern die Arbeit der Maschine in Teile, so wie wir es auch bisher bei den Flußdiagrammen getan haben. Die Flußdiagramme sind wichtige Hilfsmittel zur Programmierung von Maschinen.

8

Flußdiagramme

Reihenfolgebestimmung

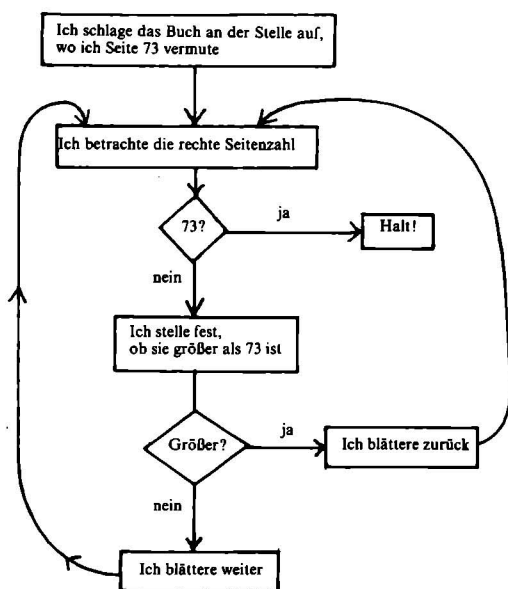
1. Alles, was du hier siehst, geschieht an einem Morgen. Ordne die Bilder nach der richtigen Reihenfolge, und nummeriere sie mit den Zahlen 1, 2, 3, ...!



1

Es ist langweilig, denselben Text noch einmal abzuschreiben. Und nebenbei bemerkt, wievielfach sollen wir es denn tun? Die Wiederholung ist aber auch überflüssig. Es genügt, zwei Pfeile an der richtigen Stelle zu zeichnen, damit wir wissen, wie es weitergeht.

Hier ist die verbesserte Figur:

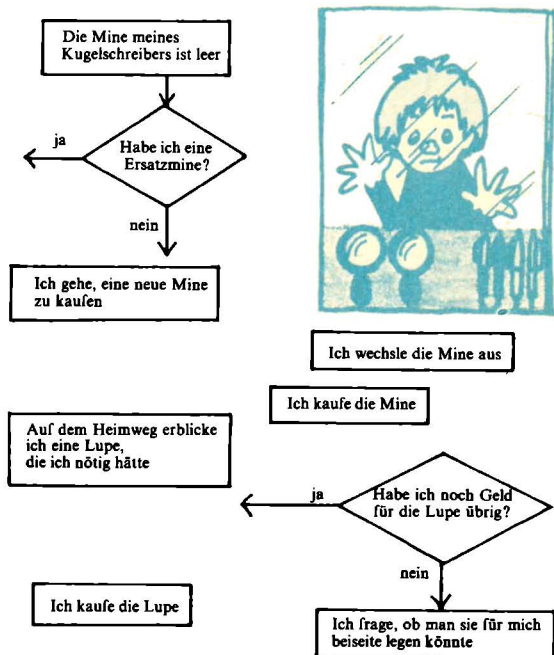


6

Entscheidungen

Setze das Zeichnen von Pfeilen fort!

In den Rahmen mit dieser Form $\diamond$ findest du Fragen, die auf zweifache Weise beantwortet werden können.



3

2. Wie sind die Aufgaben anzuordnen? Du kannst die richtige Reihenfolge durch Pfeile ausdrücken.



2

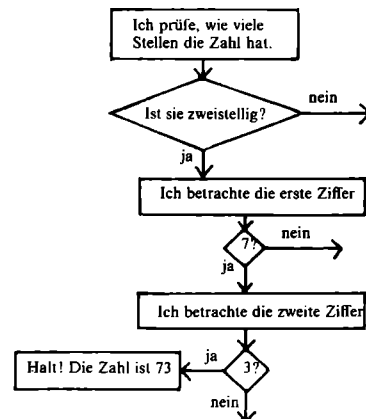
Der Pfeil führt an eine schon berührte Stelle zurück. Wir haben eine Rundreise unternommen, einen Zyklus beschrieben. Wenn du diese (zyklische) Vorschrift befolgst, kannst du die gesuchte Seitenzahl leichter finden, als wenn du nur in einer Richtung oder planlos hin und her blätterst. Auch die Figur fällt einfacher, kürzer aus, wenn wir Zyklen anwenden.

Die Vorschrift ist aber auch so nicht ganz genau, nicht ausführlich genug. Wie stellen wir denn fest, ob eine Zahl gerade 73 oder größer oder kleiner als 73 ist?

Wir zeichnen jetzt das Flußdiagramm (das Anweisungssystem) dieser Aufgabe.

73? Größer? Kleiner?

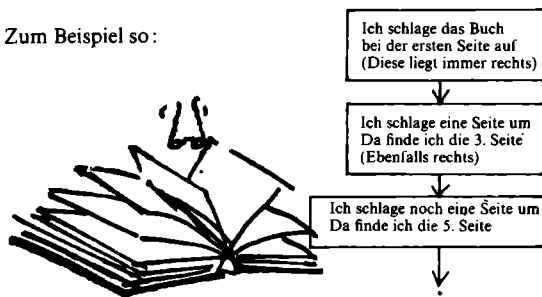
Setze die Zeichnung bei jedem „nein“-Pfeil fort!



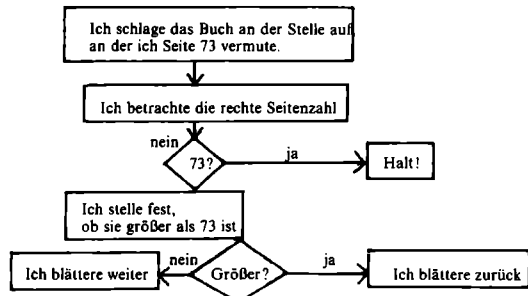
7

Wie suche ich in einem Buch die Seite 73?

Zum Beispiel so:



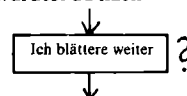
Mit Geduld kommt man auch so zu Seite 73. Es gibt aber noch eine bessere Methode:



Wir sind aber noch nicht fertig. Um weiterzukommen, benötigen wir weitere Anweisungen.

4

1. Aufgabe. Was für einen Rahmen würdest du nach



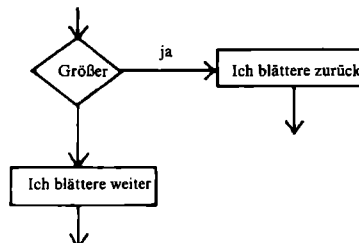
zeichnen? Was würdest du in diesen Rahmen schreiben?

2. Aufgabe. Was für einen Rahmen würdest du nach



zeichnen? Was würdest du in diesen Rahmen schreiben?

3. Aufgabe. Setze die Zeichnung von da an fort!

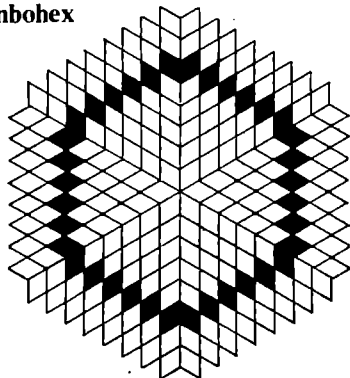


5

Und hier die *Lösung* der Knobelei:

Die Karte wird so weit gebogen, daß der schmale Streifen durch die runde Öffnung gezogen werden kann. Durch die entstehende Schlaufe wird eine Streichholzschachtel geschoben; die Aufgabe ist gelöst.

Rhombohex



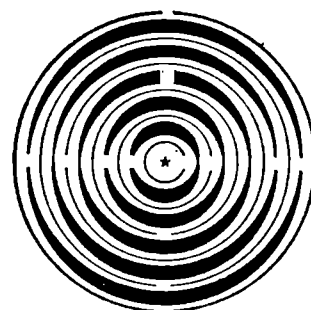
Rhombohex ist ein hexagonales Muster, das mit Rhomben so ausgelegt wird, wie es die Figur zeigt. Es besteht aus einer weißen Innenfläche, einem schwarzen Ring und einer weißen Außenfläche. Das Besondere an der Figur ist, daß die weiße Innenfläche genau so viele Steine haben soll wie die Umrandung. Das Bild zeigt die Lösung der Aufgabe mit der geringst möglichen Zahl von Steinen.

8

Magische Spielereien

alpha-Ferienheft

Irrgarten



Zahlen-Magie

Wir können das Alter eines Freundes erraten. Wir lassen ihn zu diesem Zwecke sein Alter mit 10 multiplizieren und davon das Produkt einer beliebigen einstelligen Zahl mit 9 subtrahieren. Nennt er uns das Ergebnis, sagen wir ihm sofort sein Alter.

Beispiel: Ralph ist 15 Jahre alt; er rechnet: $15 \cdot 10 = 150$; Produkt einer beliebigen einstelligen Zahl, z. B. $5 \cdot 9 = 45$; $150 - 45 = 105$.

Ralph nennt uns die Zahl 105, und wir haben nur die ersten beiden Ziffern als gemeinsame Zahl mit der letzten Ziffer zu addieren, so können wir das Alter nennen. Denn $10 + 5 = 15$.

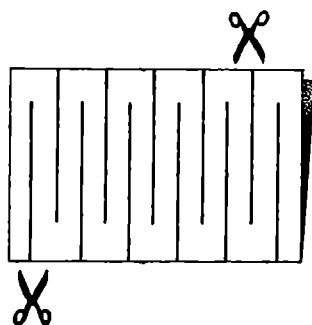
1

Gewandter Kletterer

Allgemeines Gelächter wird ausbrechen, wenn du einen Anwesenden bittest, durch eine Postkarte zu kriechen.

Verschiedene werden lachen, weil sie das für unmöglich halten, andere werden vielleicht deshalb schmunzeln, weil sie diesen Trick schon kennen.

So wird's gemacht: Du faltest eine Postkarte in der Mitte und schneidest sie unserer Abbildung entsprechend ein, abwechselnd einen Schnitt vom Mittelfalz zum Außenrand, dann einen Schnitt vom Außenrand zum Mittelfalz. Achte darauf, daß du nirgends durchschneidest! Abschließend wird der Mittelfalz vom ersten bis zum letzten Einschnitt getrennt. Das Ergebnis dieser Schneiderei ist ein großer Papierring, durch den jeder, selbst der umfangreichste Anwesende, hindurchsteigen kann.



6

Magisches Quadrat

Ein großes Quadrat – wir zeichnen es auf eine Tafel und legen Kreide bereit – ist in 16 kleine Quadrate aufgeteilt.

Wer findet vom Quadrat 13 aus den Weg zum Ausgang (Quadrat 4), ohne ein Feld mehrfach zu benutzen?

Lediglich Quadrat 13 darf mehrmals benutzt werden.

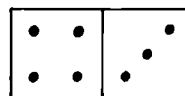
Lösung: Die Quadrate müssen in folgender Reihenfolge benutzt werden:

13, 14, 13, 9, 10, 11, 15, 16, 12, 8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Gewußt, wie!

Gero sagt zu Bernd: „Nimm einen Dominostein! Ich werde wissen, welchen du genommen hast.“



3

Der Magische Würfel

Nimm einen Würfel und faß ihn oben und unten an! Die oberste, somit zugedeckte Zahl multiplizierst du mit 5, addierst 3, verdoppelst die Summe und addierst die unten zugedeckte Zahl.

Nun nenne mir das Ergebnis, und sofort nenne ich dir die beiden zugedeckten Points.

Beispiel: Nehmen wir an, die Points 1 und 6 wurden zugedeckt.

Der Mitspieler rechnet: $1 \cdot 5 = 5$; $5 + 3 = 8$; $8 \cdot 2 = 16$; $16 + 6 = 22$, wenn die 1 oder $6 \cdot 5 = 30$; $30 + 3 = 33$; $33 \cdot 2 = 66$, $66 + 1 = 67$, wenn die 6 die obere Zahl ist. Er nennt uns als Ergebnis 22 oder 67. In jedem Falle subtrahieren wir die Zahl 6 und erhalten die beiden gesuchten Points des Würfels.

Das Labyrinth



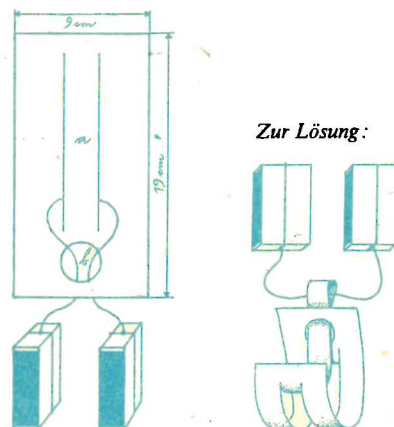
Irrgarten in Hampton Court, England. Dieses Labyrinth ist zu bewältigen, befolgt man die Vorschrift „Gehe immer an der rechten Wand entlang!“

2

Befreite Schachteln

Aufgabe dieser Knobelei ist es, 2 gefesselte Schachteln zu befreien. Die Schachteln sollen, ohne die Schnur von ihnen zu lösen, von der Karte entfernt werden.

Dieses Knobelspiel läßt sich schnell anfertigen.



Du nimmst ein Stück Karton und schneidest den 2,5 Zentimeter breiten Streifen (a) und die runde Öffnung (b) – sie hat einen Durchmesser von 3 Zentimetern – ein. 2 leere Streichholzschachteln verbindest du durch einen Faden.

7

Bernd nimmt den Stein mit den 4 und 3 Augen.

Nun sagt Gero:

„Multipliziere die erste Augenzahl mit 5 und addiere 3! Verdoppele dieses Ergebnis und addiere die zweite Augenzahl! Sag mir dein Ergebnis!“

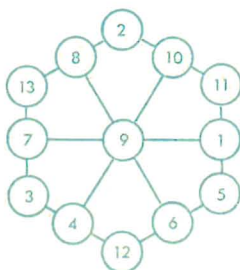
Bernd sagt die Zahl 49.

Gero subtrahiert davon 6, erhält 43 und liest daraus ab, daß Bernd den Stein mit den Augen 4 und 3 genommen hat.

Magische Kreise

Im Sechseck sind die Zahlen 1 bis 13 eingetragen. Je drei der Zahlen liegen auf einer der insgesamt 9 Geraden. Beachte, daß für sechs dieser Geraden die Summe ihrer Zahlen gleich ist:

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 13 &= 13 + 8 + 2 = 2 + 10 + 11 \\ &= 5 + 6 + 12 = 10 + 9 + 4 = 23 \end{aligned}$$

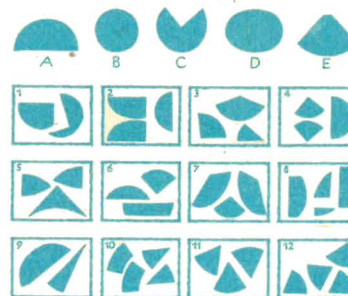


4

Der magische Charakter dieser Figur ist dadurch verdorben, daß die drei anderen Summen nicht ebenfalls 23 ergeben. Die Zahlen sollen derart umgestellt werden, daß alle neun Summen von Zahlen derselben Geraden dieselbe Zahl ergeben. Welche Zahl z (oder Zahlen) muß im Zentrum stehen und wie heißt die magische Konstante M ?

Lösung: $z = 9$, $M = 21$.

Räumliches Vorstellungsvermögen gefragt



Um ein Ordnen und Neu-Zusammensetzen handelt es sich bei diesem Spiel. Die oben gezeigten Muster sind zerschnitten worden. Die Schnipsel sind in den darunter stehenden Kästchen zu sehen. Welches Kästchen gehört zu welcher Figur?

Lösung: zu A: 8, 9, 11; zu B: 1, 4; zu C: 3, 6, 12; zu D: 2, 7; zu E: 5, 10

5

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR



Lösungen

Kreisolympiade

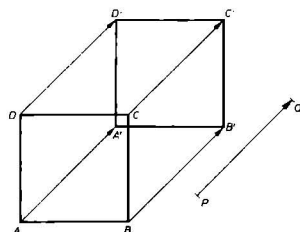
Klassenstufe 5

1. Wenn es eine solche Eintragung gibt, so ist nach der 1. Zeile B das Quadrat von A ($\neq B$), also $B=4$ oder $B=9$. Ferner ist E das Produkt zweier einstelliger Zahlen C, D , also nicht 0 und nicht 1. Daher ist auch keine der Zahlen C, D gleich 0 bzw. gleich 1. Wegen $2 \cdot 3 = 6$ ist E mithin mindestens gleich 6. Da ferner E nach der 3. Spalte kleiner als B ist, scheidet $B=4$ aus. Es folgt $B=9$, also $A=3$. Da G ($\neq 3$) somit das Dreifache von D ($\neq 3$), aber größer als 0 und kleiner als 10 ist, verbleibt nur die Möglichkeit $D=2, G=6$. Nach der dritten Zeile ist F größer als 6, also wegen $F \neq B, B=9$, entweder $F=7$ oder $F=8$. Nach der zweiten Zeile ist E gerade, nach der dritten Spalte ist H ungerade, nach der dritten Zeile also F ungerade. Daher folgt $F=7$ und somit $H=1, E=8$ sowie $C=4$. Also kann nur die folgende Eintragung alle Bedingungen erfüllen: $3 \cdot 3 = 9$

$$\begin{array}{r} + \quad - \\ 4 \cdot 2 = 8 \\ 7 - 6 = 1 \end{array}$$

Sie erfüllt die Bedingungen; denn die für A, B, C, D, E, F, G, H eingetragenen Ziffern 3, 9, 4, 2, 8, 7, 6, 1 sind sämtlich verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

2. Auf der Hinfahrt legten die Pioniere eine Strecke von 1200 m in 10 Minuten zurück, in jeder Minute also durchschnittlich 120 m. Auf der Rückfahrt legten sie wegen $120 - 40 = 80$ folglich in jeder Minute 80 m zurück. Wegen $1200 : 80 = 15$ brauchten sie daher für die Rückfahrt 15 Minuten.



3. a) Zeichnen des Quadrats $ABCD$ mit $AB = 4$ cm

b) Zeichnen des Verschiebungsveils

c) Zeichnen der Parallelen durch A, B, C, D

d) Konstruktion der Punkte A', B', C', D'
e) Zeichnen des Quadrats $A'B'C'D'$

4. Wegen $3 \cdot 25000 = 75000$ können aus 3 Tonnen Papier 75000 Hefte hergestellt werden. Wegen $75000 : 15 = 5000$ lassen sich mit diesen Heften in einem Jahr insgesamt 5000 Schüler versorgen.

Klassenstufe 6

1. Wenn bei einer Einsetzung alle Angaben zutreffen, so folgt aus den Angaben über die Zehntausenderziffer, daß $A=5$ ist. Aus den Angaben über die Einerziffer folgt daher $I+R=10$. Von den möglichen Darstellungen der 10 als Summe von zwei verschiedenen einstelligen Zahlen

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$$

scheiden diejenigen aus, in denen die Ziffern schon für andere Buchstaben als I und R eingesetzt wurden, also $E=1, H=9, P=7, L=6$. Daher verbleibt nur die Darstellung $10 = 2 + 8$. Wegen $I < R$ ist also $I=2, R=8$. Da bei der Addition der Zehnerziffern eine Zehnerübertragung von genau 1 auftritt, ergibt sich aus den Angaben über die Hunderterziffern $T=4$.

Also kann nur die Einsetzung

$$\begin{array}{r} \text{ALPHA} \quad \text{HEITER} \\ 56795 \quad 912418 \end{array}$$

alle Forderungen erfüllen. Sie erfüllt diese Forderungen; denn die für verschiedene Buchstaben eingesetzten Ziffern sind sämtlich verschieden, es gilt $EHPL = 1976$ und $I < R$, und die Addition

$$\begin{array}{r} 56795 \\ + 912 \\ + 418 \\ \hline 58125 \end{array}$$

ergibt die Summe 58125.

2. Wegen $68 + 76 + 64 + 52 = 260$ besitzen die vier Räume eine Gesamtbodenfläche von 260 m^2 . Wegen $260 : 65 = 4$ standen für jeden Pionier laut Aufgabe 4 m^2 Bodenfläche zur Verfügung. Daher ergab sich wegen $68 : 4 = 17, 76 : 4 = 19, 64 : 4 = 16$ sowie $52 : 4 = 13$ folgende Belegung:

Im ersten Raum: 17 Thälmann-Pioniere,
im zweiten Raum: 19 Thälmann-Pioniere,
im dritten Raum: 16 Thälmann-Pioniere,
im vierten Raum: 13 Thälmann-Pioniere,
zusammen also: 65 Thälmann-Pioniere.

3. Wegen $80 \cdot 60 = 4800$ beträgt der Flächeninhalt des großen Rechtecks $4800 \text{ mm}^2 = 48 \text{ cm}^2$. Für den Flächeninhalt des herausgeschnittenen Quadrats verbleiben wegen $48 - 44 = 4$ somit 4 cm^2 . Also beträgt seine Seitenlänge $a = 2$ cm, da 2 die einzige natürliche Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt. Die Seitenlänge a des herausgeschnittenen Quadrats beträgt somit $a = 20 \text{ mm}$.

4. Laut Aufgabe enthalten 35 kg des in der Aufgabe genannten Gemisches wegen $\frac{1}{2} \cdot 35 = 17,5$ genau 17,5 kg Haferschrot, wegen $\frac{1}{10} \cdot 35 = 3,5$ genau 3,5 kg Weizenkleie, wegen $\frac{1}{4} \cdot 35 = 8,75$ genau 8,75 kg Gerstenschrot, wegen $\frac{1}{100} \cdot 35 = 0,35$ genau 0,35 kg Mineralstoffe. Das sind wegen $17,5 + 3,5 + 8,75 + 0,35 = 30,1$ insgesamt 30,1 kg. Wegen $35 - 30,1 = 4,9$ verbleiben mithin genau 4,9 kg Wasser als Wasseranteil dieses Kraftfuttermischs.

Klassenstufe 7

1. Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Schüler dieser Klasse mit x , dann erhielt jeder Schüler $(x-1)$ Fotografien. Eine natürliche Zahl $x > 1$ entspricht mithin genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn für sie $x(x-1) = 812$ gilt. Nun sind x und $x-1$ benachbarte natürliche Zahlen. Da $812 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 29$ ist, läßt sich 812 nur auf die folgenden Weisen in ein Produkt aus zwei natürlichen Zahlen zerlegen:

$$812 = 1 \cdot 812 = 2 \cdot 406 = 4 \cdot 203 = 7 \cdot 116 = 14 \cdot 58 = 28 \cdot 29.$$

Dabei sind nur im Falle $28 \cdot 29$ die beiden Faktoren benachbarte natürliche Zahlen. Daher ist $x = 29$.

Es tauschten also 29 Schüler in der genannten Klasse ihre Fotos aus.

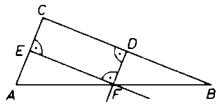
2. Der Preis für 1 kg Äpfel betrage im August x Mark, dann beträgt er im September $(x - \frac{1}{5}x)$ Mark $= \frac{4}{5}x$ Mark. Im November betrug der Preis $\frac{4}{5}x$ Mark $+ \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x$ Mark $= \frac{24}{25}x$ Mark. Da $\frac{24}{25}x < x$ ist, waren die Äpfel im November billiger als im August.

Aus $x - \frac{24}{25}x = \frac{1}{25}x = \frac{4}{100}x$ folgt, daß der Preis für die Äpfel im November um 4% ihres Preises im August von diesem abwich.

3. I. Angenommen, es gäbe ein Dreieck ABC , das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Mittelpunkt der Seite BC sei D , der von AC sei E . Der Schnittpunkt der senkrecht aufeinanderstehenden Mittelsenkrechten miteinander sei mit F bezeichnet.

Wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Viereck $DCEF$, folgt mithin, daß

$\angle ECD (\cong \angle ACB)$ ein rechter Winkel ist. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
II. (1) Man konstruiert einen rechten Winkel, dessen Scheitel C genannt sei.

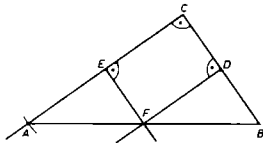


(2) Auf dem einen seiner Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 5,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt B genannt sei, auf dem anderen Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 7,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt A genannt sei.

II. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion haben BC bzw. AC die Länge 5,0 cm bzw. 7 cm. Die Mittelsenkrechte von BC ist, da auch AC senkrecht auf BC steht, parallel zu AC . Also ist sie senkrecht zur Mittelsenkrechten von AC .

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC der geforderten Art.



4. Der Winkel $\angle DBG$ hat als Außenwinkel des Dreiecks ABG die Größe $\alpha + \beta$. Als Scheitelwinkel von $\angle FKJ$ hat $\angle BKD$ die Größe γ . Mit Hilfe des Satzes über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ergibt sich die Größe des Winkels $\angle CDE$ im Dreieck BKD zu $180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$. Mit Hilfe des gleichen Satzes, angewandt auf das Dreieck CDE , erhält man für die Größe ϵ des Winkels $\angle DCE$:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta - \gamma + \delta) \\ &= 180^\circ - 180^\circ + \alpha + \beta + \gamma - \delta = \alpha + \beta + \gamma - \delta.\end{aligned}$$

Klassenstufe 8

1. Da 3 oder mehr Teile zu 10 M mehr als 29 M kosten, waren es höchstens 2 Teile zu 10 M. Angenommen, es wären genau 2 Teile zu 10 M gewesen. Dann wären genau 9 M für die beiden übrigen Sorten verblieben. Von diesen hätten 1 oder 2 Teile zu 3 M gekauft werden können, wonach 6 bzw. 3 M für die Teile zu 0,50 M geblieben wäre. Das wären 12 bzw. 6 Teile zu 0,50 M und damit insgesamt 15 oder 10 Einzelteile gewesen, also zu wenig. Folglich wurde genau 1 Teil zu 10 M gekauft, und es blieben genau 19 M für die 3-Mark-Teile und 0,50-Mark-Teile.

Angenommen, es wäre nur 1 Teil zu 3 M gekauft worden, dann wären noch 16 M geblieben, wofür 32 Teile zu 0,50 M zu kaufen waren, insgesamt also 34 Teile, im Wider-

spruch zur Aufgabe. Erhöht man nun die Anzahl der Teile zu 3 M immer um 1, so verringert sich, wenn der Gesamtpreis gleich bleiben soll, die Anzahl der Teile zu 0,50 M dabei jeweils um 6, wobei die Gesamtzahl der Teile um genau 5 abnimmt. Die einzige Möglichkeit, auf diese Weise 29 Teile zu erreichen, besteht folglich darin, daß man die Anzahl der Teile zu 3 M um genau 1 erhöht und damit die Anzahl der Teile zu 0,50 M um genau 6 verringert. Also wurden insgesamt genau 1 Teil zu 10 M, genau 2 Teile zu 3 M und genau 26 Teile zu 0,50 M gekauft.

2. Der Flächeninhalt A_1 des gegebenen Rechtecks beträgt $A_1 = a_1 \cdot b_1$.

Er entspricht 100%.

Die um 25% verkleinerte Seite habe die Länge a_2 , dann gilt

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{4}a_1 = \frac{3}{4}a_1.$$

Die um 20% verlängerte Seite habe die Länge b_2 , dann gilt

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{5}b_1 = \frac{6}{5}b_1.$$

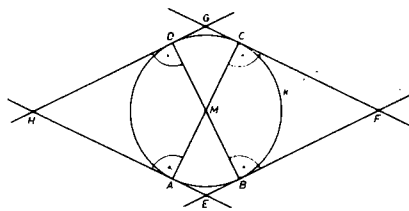
Demnach beträgt der Flächeninhalt des so veränderten zweiten Rechtecks

$$\begin{aligned}A_2 &= a_2 \cdot b_2 = \frac{3}{4}a_1 \cdot \frac{6}{5}b_1 = \frac{9}{10}a_1 \cdot b_1 = \frac{9}{10}A_1 \\ &= A_1 - \frac{1}{10}A_1.\end{aligned}$$

Daher wurde der Flächeninhalt des ersten Rechtecks um 10% verkleinert.

3. Werden die in der Aufgabe genannten Durchmesser mit AC und BD sowie die erwähnten Schnittpunkte mit E, F, G, H wie in dem Bild bezeichnet, dann gilt:

$AM = MC = BM = MD$. Folglich gilt $\triangle MBF \cong \triangle MCF$ und $\triangle MAH \cong \triangle MDH$ (s, s , rechter Winkel)



Hieraus folgt $\overline{BF} = \overline{CF}$, $\angle BMF = \angle CMF = \frac{1}{2}\angle BMC$,

weil B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch M und F liegen, und entsprechend

$$\overline{DH} = \overline{AH}, \angle DMH = \angle AMH = \frac{1}{2}\angle DMA.$$

Da nun als Gleichheit von Scheitelwinkeln $\angle BMC = \angle DMA$ gilt, folgt

$$\angle BMF = \angle DMH \text{ und damit } \triangle MBF = \triangle MDH$$

$$\overline{BF} = \overline{CF} = \overline{DH} = \overline{AH}.$$

Entsprechend erhält man

$$\overline{BE} = \overline{AE} = \overline{DG} = \overline{CG}.$$

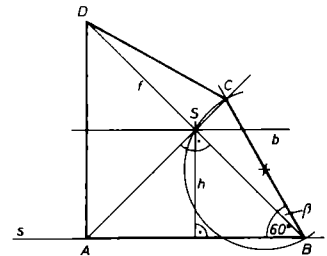
Aus (1) und (2) folgt:

$$\overline{EH} = \overline{EF} = \overline{GF} = \overline{GH},$$

d. h. $EFGH$ ist ein Rhombus.

Im Viereck $AMDH$ sind die Winkel bei A und D rechte. Daher ergänzen sich $\angle AMD$ und $\angle AHD$ zu 180° . Laut Voraussetzung ist $\angle AMD$ kein rechter Winkel. Folglich ist auch $\angle AHD$ kein rechter Winkel und $EFGH$ mithin kein Quadrat.

4. I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Bild). Dann liegt der Schnittpunkt S seiner Diagonalen wegen der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales erstens auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC und zweitens auf einer Parallelen, die im Abstand h zur Geraden durch A und B verläuft.



Punkt A liegt erstens auf einem Strahl s , der in B an BC unter einem Winkel der Größe β angetragen wurde, und zweitens auf der Geraden durch C und S . Punkt D liegt erstens auf der Geraden durch B und S und zweitens auf dem Kreis um B mit f als Radius.

Daraus folgt, daß ein Viereck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Wir zeichnen die Seite BC der Länge b . (2) Wir tragen in B an BC einen Winkel der Größe β an.

Sein freier Schenkel sei s .

(3) Wir zeichnen den Kreis k , der BC als Durchmesser hat.

(4) Wir zeichnen die Parallelen zu s im Abstand h .

(5) Für jeden Schnittpunkt von k mit einer dieser Parallelen zeichnen wir, wenn der betreffende Schnittpunkt $S \neq C$ ist, die Gerade durch C und S . Schneidet sie den Strahl s , so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

(6) Wir zeichnen die Gerade g durch B und S . (7) Wir zeichnen um B den Kreis mit dem Radius f . Ein Schnittpunkt von g mit diesem Kreis sei mit D bezeichnet, wenn dabei $ABCD$ ein Viereck wird, das den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel hat.

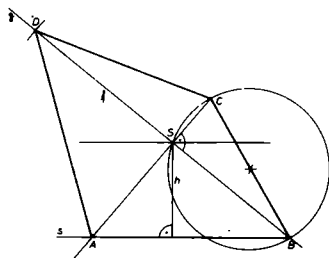
III. Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion hat die Seite BC die Länge $b = 6$ cm. Ebenso hat laut Konstruktion der Innenwinkel $\angle ABC$ die Größe $\beta = 60^\circ$, ferner die Diagonale BD die Länge $f = 12,5$ cm. Weiter hat der Punkt S von AB einen Abstand von $h = 3,5$ cm. Da schließlich Punkt S auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC liegt, schneiden sich die Diagonalen BD und AC unter einem Winkel von 90° , wie es verlangt war.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3), (4) sind ausführbar und – bis auf Kongruenz – eindeutig ausführbar.

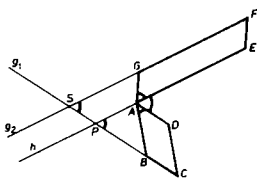
Bei den gegebenen Werten für β , b , h schneidet genau eine der beiden in (4) konstruierten Parallelen den Kreis k , und zwar in 2 Punkten. Für genau einen von diesen führt (5) zu einem Punkt A . Sodann ist Konstruktionsschritt (6) eindeutig ausführbar, und in (7) ergeben sich genau 2 Schnittpunkte von g mit dem Kreis um B mit f . Von den beiden entstehenden Vierecken hat genau eines den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel (das andere hat bei B einen Innenwinkel der Größe 300°).

Das Viereck $ABCD$ ist mithin durch die angegebenen Bedingungen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.



Klassenstufe 9

1. Es sei h die Gerade durch A und E . Dann gilt $h \parallel g_2$, da $AEFG$ ein Parallelogramm ist. Folglich schneidet die zu g_2 nicht parallele Gerade g_1 , die Geraden g_2 und h in S bzw. P (siehe Bild).



Nun sind $\angle BPA$ und $\angle BSG$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und daher gleich groß. Ebenso sind $\angle DAE$ und $\angle BPA$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und mithin gleich groß. Folglich ist der Winkel $\angle BSG$, den g_1 mit g_2 einschließt, genau so groß wie jeder der Winkel $\angle BAD$, $\angle DAE$, $\angle EAG$.

Damit ist der Satz bewiesen.

2. a) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{11}{42} + \frac{29}{42}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

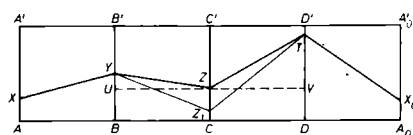
Beweis: Die beiden Summanden haben denselben, von 21 verschiedenen Nenner 42 sowie die unterschiedlichen Zähler 11 und 29.

In $\frac{11}{42}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 11 und 42, in $\frac{29}{42}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 29 und 42.

b) Die Zerlegung $\frac{20}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ beispielsweise hat alle verlangten Eigenschaften.

Beweis: Die beiden Summanden haben denselben Zähler 2 sowie die unterschiedlichen Nenner 3 und 7. In $\frac{2}{3}$ sind Zähler und Nenner die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 3, in $\frac{2}{7}$ die teilerfremden natürlichen Zahlen 2 und 7.

3. Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den „Mantel“ aus den vier zu AA' parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:



Für den dabei zweimal (als X und X_0) auftretenden Punkt X gilt $XX_0 \parallel AA_0$.

a) Zu jedem solchen X ergibt sich als Möglichkeit für Y, Z, T mit minimaler Gesamtlänge von $XYTZX_0$ die Wahl von Y, Z, T auf der Strecke XX_0 , da diese die kürzeste Verbindung zwischen X und X_0 ist und da die so bestimmten Punkte Y, Z, T wegen $AX = BY = CZ = DT = A_0X_0$ im Innern von BB', CC' bzw. DD' liegen. Die so zu je einem X gehörende minimale Gesamtlänge von $XYTZX_0$ ist $XX_0 = AA_0$, also für alle X dieselbe Länge. Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

b) Es sei $XYTZX_0$ ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug. Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen A, B, C, D sowie gleichzeitig A', B', C', D' und X, Y, Z, T erreicht, daß $CZ \leq BY$ und $CZ \leq DT$ gilt. Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu AA_0 durch Z dann BB' und CC' in Punkten U bzw. V auf BY bzw. DT . Daher ist $\angle CZY \geq \angle CZU = 90^\circ$ und $\angle CZT \geq \angle CZV = 90^\circ$. Wählt man nun einen Punkt Z_1 zwischen C und Z , so gehört auch XYZ_1TX_0 zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck Z_1ZY der Innenwinkel bei Z größer als der bei Z_1 , also gilt $\angle YZ_1T > \angle YZT$.

Ebenso folgt $\angle Z_1T > \angle ZT$. Daher hat XYZ_1TX_0 eine größere Gesamtlänge als $XYTZX_0$. Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge.

4. 1) Angenommen, eine Ersetzung habe die geforderten Eigenschaften. Dann kann X nicht für das Pluszeichen stehen; denn wenn die Summe zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ist, dann muß deren erste Ziffer eine 1 sein; die Ergebnisse von

$$abXab = cad \text{ und}$$

$$aeXae = ffe$$

beginnen jedoch mit verschiedenen Ziffern.

Da ferner weder die Differenz noch der Quotient zweier zweistelliger Zahlen eine dreistellige Zahl ergeben kann, kann X auch keins der Zeichen „-“ oder „:“ bedeuten.

Daraus folgt

(1) X steht für das Zeichen „ $\cdot$ “.

Aus $ffYff = gg$ folgt wegen $ff - ff = 0$ und $ff : ff = 1$, daß Y weder das Zeichen „-“ noch das Zeichen „:“ bedeuten kann.

Daraus und aus (1) ergibt sich

(2) Y steht für das Zeichen „+“.

Aus $cadZffe = gg$ folgt, daß Z nicht für das Zeichen „:“ stehen kann, da der Quotient zweier dreistelliger Zahlen nicht eine zweistellige Zahl sein kann. Daraus und aus (1) und (2) folgt

(3) Z steht für das Zeichen „-“.

Wegen $32^2 > 1000$ ergibt sich aus $ae \cdot ae = ffe$, daß die durch ae dargestellte Zahl höchstens 31 betragen kann. Da die Endziffern der drei Zahlen übereinstimmen, kann e nur eine der Zahlen 0, 1, 5 oder 6 darstellen.

Aus $ab + ae = ff$ folgt, daß e nicht 0 sein kann, weil sonst b und f die gleichen Zahlen darstellen müßten.

Von den somit für ae in Frage kommenden Zahlen 15, 16, 21, 25, 26 und 31 erfüllen nur die Zahlen 15 und 21 die Bedingungen, daß an der Hunderterstelle und an der Zehnerstelle ihres Quadrats die gleiche Ziffer steht.

Wäre nun $a = 1$ und $e = 5$, dann müßte wegen $ab + ae = ff$ mithin $f = 3$ und $b = 8$ sein. Wegen $18^2 = 324$ folgte dann aus $ab \cdot ab = cad$ der Widerspruch $a = 2$.

Für $a = 2$ und $e = 1$ folgt $f = 4$ und $b = 3$. Also kann nur die Ersetzung

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 23 = 529 \\ + \quad + \quad - \\ 21 \cdot 21 = 441 \\ \hline 44 + 44 = 88 \end{array}$$

allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

2) Diese Ersetzung hat in der Tat alle verlangten Eigenschaften; denn die für a, b, c, d, e, f, g eingesetzten Zahlen 2, 3, 5, 9, 1, 4, 8 sind verschieden, ebenso die für X, Y, Z eingesetzten Operationszeichen $\cdot, +, -$, und die entstehenden Aussagen sind sämtlich wahr.

Klassenstufe 10

1. Es gilt $q^3 - q = q(q^2 - 1) = q(q - 1)(q + 1)$.

Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $q - 1, q, q + 1$ ist stets eine durch 2 und eine durch 3 teilbar. Mithin ist ihr Produkt $q^3 - q$ durch 6 teilbar, d. h. $\frac{q^3 - q}{6}$ ist eine ganze Zahl.

2. Für die gesuchten Längen $a = \overline{BC}$, $c = \overline{AB}$, h, q gilt

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ (nach dem Satz des Pythagoras),

(2) $cq = b^2$ (nach dem Kathetensatz),

(3) $pq = h^2$ (nach dem Höhensatz),

(4) $p + q = c$ (da D auf AB liegt).

Aus (2), (4) folgt

$q^2 + pq - b^2 = 0$. Für die Maßzahl x der in cm gemessenen Länge q gilt daher $x^2 + 1,8x - 16 = 0$ sowie $x > 0$. Da die quadratische Gleichung genau die Lösungen

$x_{1,2} = -0,9 \pm \sqrt{0,81 + 16} = -0,9 \pm 4,1$ hat, folgt $q = 3,2$ cm.

Hieraus und aus (4) erhält man

$$c = (3,2 + 1,8) \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$

Aus (1) und $a > 0$ folgt hiernach

$$a = \sqrt{25 - 16} \text{ cm} = 3 \text{ cm}; \text{ aus (3) und } h > 0 \text{ folgt } h = \sqrt{1,8 \cdot 3,2} \text{ cm} = 2,4 \text{ cm}.$$

3. 1) Angenommen, eine Ersetzung habe die verlangten Eigenschaften. Die Spalten seien von rechts nach links mit 1 bis 5 numeriert. Wegen $L \neq S$ folgt aus Spalte 5

$$L + 1 = S \quad (1)$$

und damit aus Spalte 4 zunächst

$$Q + T \geq 9. \quad (2)$$

Wäre nun $T \geq 5$, so ergäbe sich aus Spalte 2 ein Zehnerübertrag, also wegen (2) auch aus Spalte 3, und aus den Spalten 3 und 4 folgte $I = P$. Also ist

$$T \leq 4, \quad (3)$$

in Spalte 2 entsteht kein Zehnerübertrag; wegen $I \neq P$ muß folglich in Spalte 3 ein Übertrag entstehen, d. h., es gilt sogar

$$Q + T \geq 10, \text{ wegen (3) also} \quad (2a)$$

$$Q \geq 6. \quad (4)$$

Daher verbleiben nur folgende Möglichkeiten:

a) Es ist $Q = 9$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 8$ und wegen (1) $S = 9$. Wegen $Q \neq S$ ist dies ein Widerspruch.

b) Es ist $Q = 8$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 6$ und wegen (1) $S = 7$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 2$ oder $T = 3$ oder $T = 4$. Ist $T = 2$, dann folgt $E = 5$, $I = 0$, $P = 1$. Ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$, im Widerspruch zu $S = 7$.

c) Es ist $Q = 7$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 4$ und wegen (1) $S = 5$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 3$ oder $T = 4$. Davon scheidet $T = 4$ wegen $L = 4$ aus, und ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$, im Widerspruch zu $Q = 7$.

d) Es ist $Q = 6$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 2$ und wegen (1) $S = 3$. Wegen (2a) und (3) kann nur noch $T = 4$ gelten, dann folgt $E = 9$, $I = 0$, $P = 1$.

Daher können nur die Ersetzungen

$$\begin{array}{r} 68228 \\ + 2828 \\ \hline 71056 \end{array} \quad \begin{array}{r} 68448 \\ + 4848 \\ \hline 73296 \end{array} \quad \begin{array}{r} 26446 \\ + 4646 \\ \hline 31092 \end{array}$$

die geforderten Eigenschaften haben.

2) Sie haben diese Eigenschaften; denn in jeder von ihnen wurden für L, Q, T, S, P, I, E verschiedene Ziffern eingesetzt, und es ist jeweils eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entstanden.

4. Jeder der gesuchten Streckenzüge muß genau zwei von A ausgehende Würfelkanten enthalten, also genau zwei der drei Kanten AB, AD, AE . Die Durchlaufung kann so gewählt werden, daß er entweder mit AB oder mit AD beginnt.

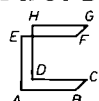
1. Beginnt er mit AB , so kann er nur mit einer der übrigen beiden von B ausgehenden Wür-

felkanten fortgesetzt werden, also entweder als ABC oder als ABF .

1.1. Nach der Fortsetzung ABC verbleiben ebenso nur die Möglichkeiten $ABCD$ und $ABCG$.

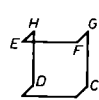
1.1.1. Bei der Wahl von $ABCD$ gibt es sowohl von A als auch von D aus nur noch je eine Möglichkeit der Weiterführung, nämlich zu E bzw. H hin. Von diesen beiden Punkten verbleibt wiederum nur noch je eine Möglichkeit, nämlich zu F bzw. G hin. Dann sind alle Punkte erfaßt, und der Streckenzug kann nur noch durch die Strecke FG geschlossen werden. Also gibt es im Fall 1.1.1. nur die Möglichkeit

$A B C D H G F E A$



1.1.2. Angenommen, bei der Wahl von $ABCG$ könnte auf G nun H folgen. Dann gäbe es, um über einen noch nicht erfaßten Punkt zu F zu gelangen, nur die Fortsetzung $ABCGHEF$, und der nun noch verbleibende Punkt D ließe sich nur auf dem Wege über einen bereits erfaßten Punkt erreichen, da F und D nicht Endpunkte einer gemeinsamen Würfelkante sind. Wegen dieses Widerspruches kann auf $ABCG$ nur F folgen, und als einzige Möglichkeit der Fortsetzung schließt sich an:

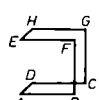
$A B C G F E H D A$



1.2. Nach der Fortsetzung ABF verbleiben nur die Möglichkeiten $ABFE, ABFG$.

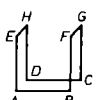
1.2.1. Zu $ABFE$ existiert wie in 1.1.1. nur die Fortsetzung

$A B F E H G C D A$



1.2.2. Zu $ABFG$ existiert mit analoger Begründung wie in 1.1.2. nur die Fortsetzung

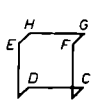
$A B F G C D H E A$



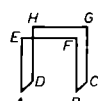
2. Beginnt der Streckenzug mit AD , so kann er nur als ADC oder ADH fortgesetzt werden.

2.1. Nach ADC gibt es nur die Fortsetzungen $ADCB$ und $ADCG$. Zu jeder von ihnen existiert wie in 1.1.1. bzw. 1.1.2. nur eine Weiterführung. Da ein mit $ADCG$ beginnender Streckenzug bereits in 1.2.1. vorkommt, verbleibt außer ihm nur die Weiterführung von $ADCB$, d. i.:

$A D C B F G H E A$



2.2. Nach ADH gibt es nur $ADHE$ und $ADHG$ und dazu wieder nur je eine Weiterführung. Davon kommt $ADHE$ bereits in 1.1.2. vor, und es verbleibt nur $A D H G C B F E A$.



Damit ist gezeigt, daß nur die sechs aufgezählten Streckenzüge den Forderungen der Aufgabe genügen können. Sie erfüllen in der Tat diese Forderungen; denn jeder enthält jede der Würfelkanten genau einmal, beginnt und endet mit A und verläuft nur längs der Würfelkanten. Ferner sind die Streckenzüge sämtlich verschieden voneinander, wie folgende Tabelle ausweist. Darin ist zu je zwei der genannten Streckenzüge eine Würfelkante angegeben, die in dem einen Streckenzug vorkommt, in dem anderen aber nicht.

	1.1.2.	1.2.1.	1.2.2.	2.1.	2.2.
1.1.1.	CD	BC	BC	AB	AB
1.1.2.		BC	BC	AB	AB
1.2.1.			FE	AB	AB
1.2.2.				AB	AB
2.1.					DC

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Die Lösung läßt sich z. B. mit Hilfe folgender Tabelle ermitteln, wobei für jedes der Mädchen der Anfangsbuchstabe seines Vornamens gesetzt wurde, siehe Tabelle.

Die tatsächlichen Daten ermittelt man folgendermaßen:

1) Gibt es jeweils nur eine Möglichkeit für das Geburtsdatum, so ist für dieses Mädchen das Geburtsdatum dann festgelegt (gilt für A, E, L, M).

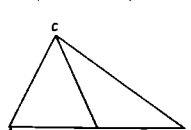
2) Nun streicht man bei den verbleibenden Mädchen die Daten, deren Monatsnummer bereits bei den unter 1) genannten Daten auftritt, da laut Aufgabe in jedem Monat genau eines der gesuchten Geburtsdaten liegt (gilt für G, H, I, K).

Bleibt dabei bei einem Mädchen nur ein Datum übrig, ist damit sein Geburtsdatum ermittelt (J, K).

3) Indem man analog fortfährt, werden die restlichen Daten ermittelt.

Reihenfolge: Streichung bei B, D, H ; Ermittlung des endgültigen Datums bei B, D ; Streichung und damit endgültige Datenermittlung bei F, G und dann bei C, H .

2. O. B. d. A. werde in dem beliebigen Dreieck ABC die Seitenhalbierende CD der Seite AB betrachtet (siehe Bild).



Name	Produkt	Primfaktorenzerlegung	mögl. Geburtsdaten	tats. Daten
A	49	7·7	7.7.	7. 7.
B	3	(1)·3	3.1. oder 1.3.	3. 1.
C	52	2·2·13	26.2. oder 13.4.	13. 4.
D	130	2·5·13	26.5. oder 13.10.	13.10.
E	187	11·17	17.11.	17.11.
F	300	2·2·3·5·5	30.10. oder 25.12.	25.12.
G	14	(1)·2·7	14.1. oder 7.2. oder 2.7.	7. 2.
H	42	2·3·7	21.2. oder 14.3. oder 7.6. oder 6.7.	7. 6.
I	81	3·3·3·3	27.3. oder 9.9.	27. 3.
K	135	3·3·3·5	27.5. oder 15.9.	27. 5.
L	128	2·2·2·2·2·2·2	16.8.	16. 8.
M	153	3·3·17	17.9.	17. 9.

Es ist zu beweisen, daß

$$\overline{DC} < \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) \text{ gilt.}$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\text{im Dreieck } ADC: \overline{DC} < \overline{AD} + \overline{AC}$$

$$\text{im Dreieck } DBC: \overline{DC} < \overline{DB} + \overline{BC}.$$

Durch Addition beider Ungleichungen erhält man

$$2\overline{DC} < \overline{AD} + \overline{AC} + \overline{DB} + \overline{BC} \text{ und,}$$

$$\text{da } \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB},$$

$$2\overline{DC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} \text{ bzw.}$$

$$\overline{DC} < \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}), \text{ w. z. b. w.}$$

3. Angenommen, für eine Primzahl p seien $p, p+2, p+4$ Primzahltrillinge. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 1 ließe, so wäre $p+2$ durch 3 teilbar und gleichzeitig (wegen $p > 1$) größer als 3, also nicht Primzahl. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 2 ließe, so wäre $p+4$ durch 3 teilbar und gleichzeitig größer als 3, also nicht Primzahl. Also muß p durch 3 teilbar und folglich selbst die Primzahl 3 sein.

In der Tat sind für $p=3$ auch $p+2=5$ und $p+4=7$ Primzahlen. Somit gibt es, wie behauptet, genau eine Zahl p , für die $p, p+2, p+4$ Primzahltrillinge sind; dies ist die Zahl 3 (bzw. diese Primzahltrillinge sind 3, 5 und 7).

4. a) Die wahre Entfernung sei x Meter. Der Schätzwert war um 12,5% von x Metern,

d. h. um $\frac{1}{8}x$ Meter zu klein. Das bedeutet, daß der Schätzwert genau $\frac{7}{8}x$ Meter betrug. Mithin gilt:

$$\frac{7}{8}x = 350, \text{ also}$$

$$x = \frac{350 \cdot 8}{7} = 400.$$

Die wahre Entfernung beträgt also 400 m.

b) In diesem Falle sei die wahre Entfernung y Meter. Der Schätzwert wäre um $\frac{1}{8}y$ Meter

zu groß gewesen, d. h., er hätte $\frac{9}{8}y$ Meter betragen.

Folglich gilt $\frac{9}{8}y = 350$, also

$$y = \frac{350 \cdot 8}{9} = \frac{2800}{9} = 311\frac{1}{9}.$$

In diesem Falle würde die wahre Entfernung $311\frac{1}{9}$ m betragen.

5. Angenommen, $(x; y)$ sei ein Paar natürlicher Zahlen, das die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt. Dann folgt $3y = 27 - 2x$, also ist insbesondere x ein Vielfaches von 3. Weiter folgt

$$y = 9 - \frac{2}{3}x. \quad (1)$$

Da y eine natürliche Zahl ist, gilt

$$\frac{2}{3}x \leq 9, \text{ also } x \leq \frac{27}{2};$$

Daher kommen nur folgende Werte für x in Frage:

$x=0, x=3, x=6, x=9$ und $x=12$. Nach (1) ergibt sich hierzu jeweils $y=9, y=7, y=5, y=3$ bzw. $y=1$. Also haben höchstens die Zahlenpaare $(0; 9), (3; 7), (6; 5), (9; 3)$ und $(12; 1)$ die verlangten Eigenschaften.

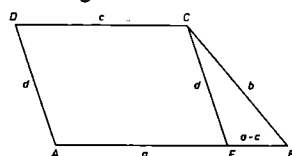
Sie haben tatsächlich diese Eigenschaften; denn sie bestehen aus natürlichen Zahlen, und es gilt

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 27, \quad 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 27,$$

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 27, \quad 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 27,$$

$$2 \cdot 12 + 3 \cdot 1 = 27.$$

6. I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Bild). Dann ist $a > c$. Daher schneidet die Parallele zu AD durch C die Seite AB in einem inneren Punkte E , für den $\overline{AE} = c$, also $\overline{EB} = a - c$ gilt.



Daraus folgt, daß ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Wir konstruieren das Teildreieck EBC aus $\overline{EB} = a - c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{EC} = d$.

(2) Wir verlängern BE über E um c und erhalten A .

(3) Wir zeichnen die Parallele zu AB durch C .

(4) Wir zeichnen die Parallele zu CE durch A . Der Schnittpunkt der beiden Parallelen aus (3) und (4) sei D genannt.

III. Jedes so erhaltene Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Das Viereck $AECD$ ist ein Parallelogramm, also gilt $\overline{CD} = \overline{AE} = c$ und $\overline{AD} = \overline{EC} = d$, und $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

Nach Konstruktion ist

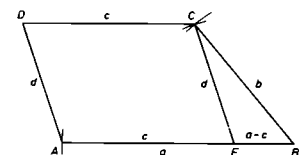
$$\overline{AB} = \overline{BE} + \overline{EA} = a - c + c = a = 9,1 \text{ cm,}$$

$$\overline{BC} = b = 6,3 \text{ cm, } \overline{CD} = \overline{AE} = c = 6,7 \text{ cm und}$$

$$\overline{AD} = \overline{EC} = d = 5,0 \text{ cm.}$$

IV. Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kriterium (sss) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, weil jede der drei Seitenlängen $a - c = 2,4$ cm, $b = 6,3$ cm und $d = 5,0$ cm kleiner als die Summe der beiden anderen ist.

Die Konstruktionsschritte (2), (3) und (4) sind danach stets eindeutig ausführbar. Mithin existiert bis auf Kongruenz genau ein Trapez $ABCD$ der geforderten Art.



Klassenstufe 8

1. I. Wenn eine Möglichkeit für derartige Anzahlen von Münzen vorliegt, so gilt:

1) Wäre unter den Münzen, die Uwe bei sich hatte, eine 10-Mark-Münze gewesen, so folgte der Widerspruch, daß die übrigen Münzen zusammen genau 31 M ergeben hätten.

2) Wäre keine 10-Mark-Münze, aber eine 5-Mark-Münze dabei gewesen, so ließen sich die restlichen 36 M nicht nur aus 20-Mark-Münzen zusammenstellen; mindestens 16 M müßten in 5-Mark-, 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen.

a) Wäre unter diesen eine weitere 5-M-Münze, so ergäbe sie zusammen mit der zuvor genannten 5-M-Münze 10 M, und es folgte wie in 1) ein Widerspruch.

b) Wären es aber nur 2-M- und 1-M-Münzen, so wären es entweder mindestens fünf 2-M-Münzen, womit wieder 10 M zusammenkämen, oder es wären höchstens vier 2-M-Münzen, also mindestens acht 1-M-Münzen. Aus fünf von ihnen und der 5-M-Münze erhielte man ebenfalls 10 M, so daß wiederum ein Widerspruch vorliegt.

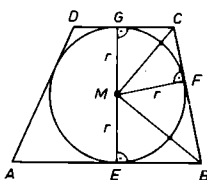
3) Wäre unter den Münzen, die Uwe bei sich hatte, keine 10-M- und keine 5-M-Münze, aber eine 2-M-Münze oder zwei 1-M-Münzen gewesen, so ließen sich die restlichen

39 M nicht nur aus 20-M-Münzen zusammenstellen; mindestens 19 M müßten in 2-M- und 1-M-Münzen vorliegen. Darunter wären entweder mindestens fünf 2-M-Münzen oder aber höchstens vier 2-M-Münzen und dann folglich mindestens elf 1-M-Münzen, womit in jedem Falle wiederum 10 M zusammengestellt werden könnten.

4) Also hatte Uwe höchstens eine 1-M-Münze und sonst nur 20-M-Münzen bei sich. Unter diesen Bedingungen lassen sich aber 41 M nur so zusammensetzen, daß genau eine 1-M-Münze und genau zwei 20-M-Münzen vorliegen.

11. Diese Zusammensetzungsmöglichkeit erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, da sich aus diesen Münzen nur die Beträge 1 M, 20 M, 21 M, 40 M und 41 M zusammenstellen lassen, also nicht 31 M.

2. Die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten AB, BC, CD seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bezeichnet.



Wegen $\overline{MB} = \overline{ME}$, $\overline{ME} = \overline{MF}$ sowie $\angle BEM = \angle BFM = 90^\circ$ (Berührungsradius) gilt $\triangle BME \cong \triangle BMF$ nach dem Kongruenzsatz (SSW). Analog läßt sich $\triangle CMG \cong \triangle CMF$ zeigen. Folglich gilt

$\angle GMC = \angle CMF$ sowie $\angle FMB = \angle BME$.

Da ME und MG die Lote auf die Parallelen AB und CD von dem zwischen ihnen liegenden Punkt M aus sind, ist $\angle GME = 180^\circ$.

Wegen $\angle BME + \angle FMB + \angle CMF$

$+ \angle GMC = \angle FMB + \angle CMF = 180^\circ$, d. h.

$2\angle FMB + 2\angle CMF = 180^\circ$, gilt somit

$\angle BMC = \angle FMB + \angle CMF = 90^\circ$, w. z. b. w.

3. I. Wenn die Kantenlänge a, b, c (in Zentimetern) des quaderförmigen Innern des Kastens den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen, so gilt o. B. d. A.

$$(1) \quad a \cdot b \cdot 2 = 600,$$

$$(2) \quad a \cdot c \cdot 3 = 600,$$

$$(3) \quad b \cdot c \cdot 4 = 600.$$

Dividiert man (1) durch (3), so erhält man

$$\frac{a}{2c} = 1 \text{ bzw.}$$

$$(4) \quad a = 2c.$$

Setzt man (4) in (2) ein, so folgt

$$6c^2 = 600, \text{ und daraus wegen } c > 0$$

$$(5) \quad c = 10.$$

Wegen (5) folgt aus (4) $a = 20$ und aus (1) oder (3)

$$b = 15.$$

Also können nur 10 cm, 15 cm, 20 cm als Innenmaße des Kastens und mithin nur der Wert 3000 cm^3 für sein Fassungsvermögen den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen. Wenn man nach der Gleichung (3) des

ersten Lösungsweges folgendermaßen fortfährt, ergibt sich ein weiterer Lösungsweg:

Multipliziert man (1), (2), (3), so erhält man

$$24a^2b^2c^2 = 216000000,$$

$$\text{also } a^2b^2c^2 = 9000000,$$

wegen $abc > 0$ mithin

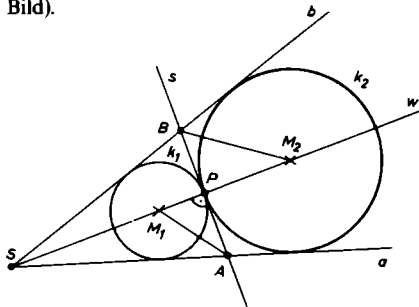
$$abc = 3000.$$

Nun ist aber abc gleich der Maßzahl des Volumens des quaderförmigen Innern des Kastens. Also kann für sein Fassungsvermögen nur der Wert 3000 cm^3 den Angaben der Aufgabenstellung entsprechen.

4. Sind a und b die beiden Ziffern, so sind die zu multiplizierenden Zahlen $10a + b$ und $10b + a$. Ihr Produkt ist $(10a + b)(10b + a) = 100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab$. In Rechenschritt (1) ergibt sich nun ab , in Rechenschritt (2) demnach $100ab + ab$.

In Rechenschritt (3) ergibt sich $a^2 + b^2$, in (4) also $10(a^2 + b^2)$. Somit führt Rechenschritt (5) auf $100ab + ab + 10(a^2 + b^2)$, also, wie behauptet, auf das zu berechnende Produkt.

5. I. Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Bild).



Dann liegt dieser Kreis k in dem gegebenen Winkel; sein Mittelpunkt M hat gleiche Abstände zu a und b und liegt folglich auf w . Daher steht die Senkrechte s zu w durch P senkrecht auf einem Durchmesser von k ; sie ist also die Tangente in P an k . Folglich hat M auch gleiche Abstände zu a und s und liegt demnach auf der halbierenden Geraden eines Winkels, den s mit a bildet. Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

II. (1) Man konstruiert in P die Senkrechte s auf w . Schneidet sie a , so sei der Schnittpunkt A genannt.

(2) Man konstruiert die halbierende Gerade eines Winkels, den s mit a bildet. Schneidet sie w in einem Punkt, so sei dieser M genannt.

(3) Man zeichnet den Kreis k um M mit dem Radius MP .

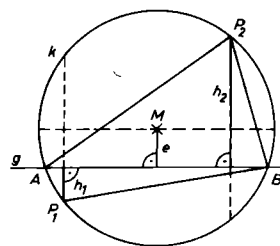
III. Jeder so konstruierte Kreis genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion geht k durch P . Ferner berührt k die Gerade s in P , da M auf w liegt und da sich w und s in P rechtwinklig schneiden. Weiterhin liegt M (auf w , also) in dem gegebenen Winkel sowie auf einer winkelhalbierenden Geraden von a und s ; hier-

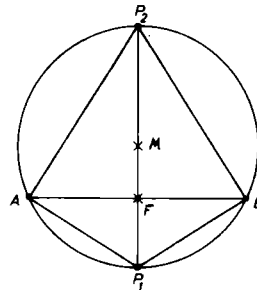
nach hat M gleiche Abstände zu a und s . Endlich hat M auch gleiche Abstände zu a und b , da M auf w liegt, also berührt k außer der Geraden s auch die Strahlen a und b .

IV. Die Konstruktion von s nach (1) ist eindeutig ausführbar. Da w mit a einen spitzen Winkel bildet und auf s senkrecht steht, schneiden sich a und s ; also ist auch A eindeutig bestimmt. Die in (2) zu konstruierenden winkelhalbierenden Geraden, von denen es genau zwei gibt, schneiden beide w ; denn die eine halbiert den Innenwinkel bei A im Dreieck SAP , schneidet also dessen Seite SP zwischen S und P ; die andere steht senkrecht auf der ersten, also bildet ein Strahl von ihr mit dem auf s liegenden Strahl aus A durch P einen spitzen Winkel, während w auf s senkrecht steht. Also entstehen in (2) genau zwei verschiedene Schnittpunkte M_1, M_2 , es gibt mithin zwei Kreise k_1 und k_2 , die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

6. a) Der Flächeninhalt von Viereck AP_1BP_2 ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AP_1B und ABP_2 . Deren Flächeninhalte sind jeweils am größten, wenn die Längen der Lote von P_1 bzw. P_2 auf die Gerade g durch A und B am größten sind. Das ist genau dann der Fall, wenn P_1, P_2 die Schnittpunkte von k mit der Mittelsenkrechten von AB sind, d. h. der zu g senkrechten Geraden durch den Mittelpunkt M von k .



Beweis: Bezeichnen nämlich e, h_1, h_2 die Abstände von M, P_1 bzw. P_2 zu g und sind die Bezeichnungen so gewählt, daß M und P_2 in derselben von g begrenzten Halbebene liegen, so kann man zunächst zu allen Punkten P_2 , für die $h_2 < e$ ist, auch Punkte P_1 finden, für die $h_2 > e$ gilt, und dann ist stets $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ der Abstand von P_1 bzw. P_2 zu dem zu g parallelen Durchmesser von k ; d. h., $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ ist die halbe Länge der durch P_1 bzw. P_2 gehenden auf AB senkrechten Sehne. Unter allen zu AB senkrechten Sehnen ist aber diejenige am längsten, die durch M geht. Also nehmen auch h_1 und h_2 für diese Lage von P_1, P_2 ihre größten Werte an.

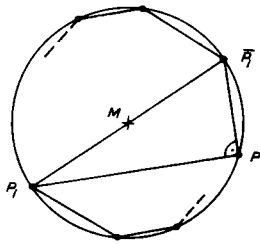


b) Für diese gilt $h_1 + h_2 = 2r$; der größtmögliche Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2 ist mithin

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ar.$$

Klassenstufe 9

1. Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft ist n gerade; zu jedem der Endpunkte gibt es einen anderen, der bezüglich des Mittelpunktes M des Einheitskreises spiegelbildlich zu ihm liegt. Wir können daher die Eckpunkte so mit P_i und $\bar{P}_i$ ($i = 1, \dots, \frac{n}{2}$) bezeichnen, daß P_i und $\bar{P}_i$ jeweils spiegelbildlich zueinander liegen.



Es läßt sich nun zeigen, daß für alle $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$

$$(1) \quad \overline{PP_i}^2 + \overline{PP_{\bar{i}}}^2 = 4 \text{ gilt.}$$

Ist nämlich $P \neq P_i$ oder $P \neq \bar{P}_i$, so gilt (1) nach der Umkehrung des Satzes des Thales sowie nach dem Lehrsatz des Pythagoras. Ist aber $P = P_i$ oder $P = \bar{P}_i$, so gilt $\overline{PP_i}^2 = 0$ und $\overline{PP_{\bar{i}}}^2 = \overline{P_iP_{\bar{i}}}^2 = 4$ bzw. $\overline{PP_i}^2 = 0$ und $\overline{PP_{\bar{i}}}^2 = \overline{P_iP_{\bar{i}}}^2 = 4$, d. h. (1) gilt auch in diesem Falle. Daher ist die zu berechnende Summe

$$s = \frac{n}{2} \cdot 4 = 2n.$$

2. Die Ungleichung (*) ist gleichbedeutend mit $a + ab + b + 1 \geq 4$,

d. h. wegen $ab = 1$ mit

$$a + 1 + b + 1 \geq 4,$$

oder gleichbedeutend hiermit

$$a + b \geq 2.$$

Nun gilt für alle reellen Zahlen a

$$(1) \quad (a - 1)^2 \geq 0, \text{ also}$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0,$$

$$a^2 + 1 \geq 2a.$$

Wegen $d > 0$ folgt daraus durch Division

$$a + \frac{1}{a} \geq 2,$$

woraus man wegen $b = \frac{1}{a}$

$$a + b \geq 2 \text{ erhält, w. z. b. w.}$$

Folglich gilt (*) für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $ab = 1$. Damit ist der Satz bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt in (*), da es in (1) genau für $a = 1$ gilt, genau für $a = b = 1$.

3. a) Da eine der Flächen die eines gleichseitigen Dreiecks sein soll und da genau zwei unterschiedliche Kantenlängen auftreten, sind folgende Fälle möglich:

Fall 1: Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a . Auf der Ebene durch A , B und C werde im Schwerpunkt A von ABC die senkrechte Gerade errichtet und auf ihr ein Punkt D mit $\overline{SD} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ gewählt. Wegen

$$\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$$

gilt dann nach dem Satz von Pythagoras in dem rechtwinkligen

Dreieck ASD , daß $\overline{AD} = a \cdot \sqrt{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}} = a \cdot \sqrt{2}$ ist.

Ebenso folgt $\overline{BD} = a \cdot \sqrt{2}$ und $\overline{CD} = a \cdot \sqrt{2}$.

Daher ist $ABCD$ ein Tetraeder mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$ und $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = a \cdot \sqrt{2}$.

Fall 2: Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a/\sqrt{2}$. Auf der Ebene durch A , B und C werde im Schwerpunkt S von ABC die senkrechte Gerade errichtet und auf ihr ein Punkt D mit $\overline{SD} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ gewählt. Wegen

$$\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

gilt dann nach dem Satz von Pythagoras in dem rechtwinkligen Dreieck ASD , daß $\overline{AD} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = a$ ist.

Daher ist $ABCD$ ein Tetraeder mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a/\sqrt{2}$ und $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = a$.

Da in jedem dieser beiden Tetraeder eine Fläche auftritt, die bei dem anderen nicht vorkommt, sind sie zueinander nicht kongruent.

b) Die Oberfläche des ersten Tetraeders besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a und drei gleichschenkligen Dreiecken, in denen jeweils die Basis die Länge a und die Schenkel die Länge $a/\sqrt{2}$ haben. Deren Höhe ist

$$a \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{7}.$$

Somit hat dieses Tetraeder den Oberflächeninhalt

$$O_1 = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} + \frac{3}{4}a^2\sqrt{7} = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{3} + 3\sqrt{7}).$$

Die Oberfläche des zweiten Tetraeders besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $a/\sqrt{2}$ und drei gleichschenkligen Dreiecken, in denen jeweils die Basis die Länge $a/\sqrt{2}$ und die Schenkel die Länge a haben. Diese Dreiecke sind also gleichschenkelig-rechtwinklig; ihr Flächeninhalt ist $\frac{1}{2}a^2$.

Somit hat dieses Tetraeder den Oberflächeninhalt

$$O_2 = \frac{1}{4} \cdot (a/\sqrt{2})^2\sqrt{3} + \frac{3}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2(3 + \sqrt{3}).$$

Anmerkung: Die Inkongruenz der beiden Tetraeder kann auch aus der Verschiedenheit ihrer Oberflächeninhalte geschlossen werden.

4. Wegen $n \geq 1$ und $p \geq 2$ gilt

$$(1) \quad (3n - 1)p^2 + 1 \geq 9.$$

Wegen $p \neq 3$ und da p Primzahl ist, gibt es entweder eine natürliche Zahl m mit $p = (3m + 1)$ oder eine natürliche Zahl m mit $p = (3m - 1)$.

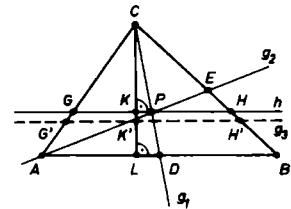
$$\text{Aus } (3n - 1)(3m + 1)^2 + 1 = 27nm^2 + 18nm + 3n - 9m^2 - 6m = 3(9nm^2 + 6nm + n - 3m^2 - 2m)$$

$$\text{bzw. } (3n - 1)(3m - 1)^2 + 1 = 27nm^2 - 18nm + 3n - 9m^2 + 6m = 3(9nm^2 - 6nm + n - 3m^2 + 2m)$$

folgt daher in beiden Fällen, daß die zu untersuchende Zahl durch 3 teilbar ist. Wegen (1) kann sie somit keine Primzahl sein.

5. Die Gerade g_1 gehe durch die Punkte C und D , wobei D der Mittelpunkt der Seite AB sei. Dann erfüllt g_1 die Bedingung; denn wegen $\overline{AD} = \overline{DB}$ und der gleichen Höhe sind die Dreiecke ACD und BCD flächengleich.

Die Gerade g_2 gehe durch die Punkte A und E , wobei E der Mittelpunkt der Seite BC sei. Dann erfüllt (Beweis wie oben) g_2 ebenfalls die Bedingung.



Der Schnittpunkt P von g_1 und g_2 ist der Schwerpunkt des Dreiecks, da g_1 und g_2 die Seitenhalbierenden durch C bzw. A enthalten, und es gilt $\overline{PC} = 2\overline{PD}$ bzw. $\overline{CP} : \overline{CD} = 2 : 3$.

Die Gerade h gehe durch P und sei zu AB parallel. Ihre Schnittpunkte mit den Seiten AC bzw. BC seien G bzw. H . Die Fußpunkte des Lotes von C auf h bzw. auf die Gerade durch A und B seien K bzw. L . Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\overline{CK} = \frac{2}{3}\overline{CL}.$$

Die Gerade g_3 sei parallel zu AB und gehe durch denjenigen Punkt K' auf CL , für den

$$\overline{CK'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{CL} \text{ gilt. Ihre Schnittpunkte mit } AC$$

bzw. BC seien G' bzw. H' . Dann gilt nach dem Strahlensatz $\overline{G'H'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}$. Also hat $\triangle G'H'C$

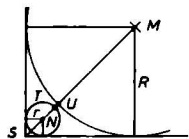
den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\overline{G'H'} \cdot \overline{CK'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AB} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{CL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CL}$, d. h. den halben Flächeninhalt von $\triangle ABC$.

Daher erfüllt g_3 die in der Aufgabe genannte Bedingung. Wegen $K' \neq K$ sind die Parallelen g_3 und h voneinander verschieden; sie haben also keinen Punkt gemeinsam. Also geht g_3 nicht durch P . Somit ist gezeigt, daß es keinen Punkt P gibt, durch den alle beschriebenen Geraden gehen.

6. Berührt ein Kreis die beiden Schenkel eines Winkels, dann liegt sein Mittelpunkt auf der Halbierenden dieses Winkels. Daher ist SM die Halbierende des rechten Winkels, und es sind lediglich Pappscheiben zu betrachten, deren Mittelpunkt auf SM liegt und die die Schenkel berühren.

Es sei r der Radius einer solchen Pappscheibe, und sie berühre die beiden Schenkel des rechten Winkels; ihr Mittelpunkt sei N , und T sei der auf SM liegende Randpunkt, der nicht zwischen S und N liegt (siehe Bild). Dann gilt: $\overline{ST} = r\sqrt{2} + r = (\sqrt{2} + 1)r$ bzw. $\overline{SN} = r\sqrt{2}$, weil die Größe der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden und einem der Schenkel 45° beträgt. Ist nun U der auf SM gelegene Randpunkt der Scheibe P , der zwischen S und M liegt, dann ist

$$\overline{SU} = R\sqrt{2} - R = (\sqrt{2} - 1)R.$$



Die Scheibe mit dem Radius r berührt die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P genau dann, wenn $\overline{NM} = r + R$ ist; denn auf Grund der Voraussetzungen der Aufgabe müssen sich die beiden Kreise von außen berühren.

Da im vorliegenden Fall $\overline{NM} = \overline{SM} - \overline{SN} = (R - r)\sqrt{2}$ ist, erhält man $R\sqrt{2} - r\sqrt{2} = R + r$, woraus eindeutig

$$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} R \text{ folgt.}$$

Der Mittelpunkt der Scheibe mit dem so ermittelten Radius r ist mithin der auf SM liegende Punkt N , für den $\overline{SN} = r\sqrt{2}$ gilt.

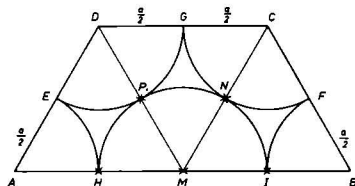
Klassenstufe 10

1. Wegen $\overline{AE} = \overline{ED}$ beträgt der Radius der vier um die Eckpunkte gezeichneten Kreise

$$\frac{a}{2}.$$

Sei x die gesuchte Länge der Seite AB , dann gilt $\overline{HI} = x - a$ da wegen $\overline{AB} > \overline{CD}$ der Punkt H zwischen A und I liegt.

Sei M der Mittelpunkt von AB und damit auch von HI , so ist $\overline{HM} = \frac{x-a}{2}$ der Radius des Halbkreises über HI .



Da M , N und C auf derselben Geraden liegen, gilt

$$\overline{MC} = \frac{a}{2} + \frac{x-a}{2} = \frac{x}{2}. \text{ Ebenso folgt } \overline{MD} = \frac{x}{2}, \text{ also}$$

$$\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD}.$$

Somit sind die Dreiecke AMD , DMC und CMB gleichschenkelig und wegen (s, s, s) kongruent. Die Winkel $\sphericalangle AMD$, $\sphericalangle DMC$ und $\sphericalangle CMB$ sind folglich ebenfalls kongruent, und da $\sphericalangle AMD + \sphericalangle DMC + \sphericalangle CMB = 180^\circ$ ist, ist jeder von ihnen 60° groß.

Daher sind die genannten Dreiecke gleichseitig, und somit ist $\overline{MA} = \overline{MB} = a$. Die Seite AB hat also die Länge $2a$.

2. Angenommen, eine rationale Zahl x sei eine Lösung der gegebenen Gleichung. Dann gibt es ganze Zahlen $q \neq 0$ und p , die zueinander teilerfremd sind und für die $x = \frac{p}{q}$ ist. Hiernach gilt

$$\frac{p^4}{q^4} + a_3 \frac{p^3}{q^3} + a_2 \frac{p^2}{q^2} + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0, \text{ also}$$

$$p^4 = -q(a_3 p^3 + a_2 p^2 q + a_1 p q^2 + a_0 q^3).$$

Daher ist q ein Teiler von p^4 . Da aber q zu p und folglich auch zu p^4 teilerfremd ist, ergibt sich, daß q nur $+1$ oder -1 sein kann.

Also ist $x = \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, w. z. b. w.

3. a) Angenommen, es gäbe eine Lösung.

Wir betrachten die einzelnen Spalten der Aufgabe. Es werden jeweils drei einstellige Zahlen (und gegebenenfalls ein Übertrag) addiert. Wegen $3 \cdot 9 = 27$ kann dabei aus der letzten Spalte höchstens ein Übertrag von 2 in die nächstfolgende Spalte erfolgen. Wegen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ gilt dies auch für die übrigen Spalten. Daher kommt wegen $I + J + A(+\dot{U}) = A + 10N$ und $I + J + \dot{U} = 8 + 9 + 2$ für N nur der Wert 1 in Frage.

Daraus folgte $S = 7$. Nun müßte in der zweitletzten Spalte $2E + 1 + 2 = E + k \cdot 10$ (k ganzzahlig) sein, woraus $E = 7$ folgen würde, im Widerspruch zu $E \neq S$. Daher gibt es im dekadischen System keine Lösung der Aufgabe.

b) Angenommen, die Aufgabe hat im System mit der Basis 8 eine Lösung. Dann gilt wegen $3 \cdot 7 = [25]_8$, $3 \cdot 7 + 2 = [27]_8$, daß ein möglicher Übertrag in jeder Spalte höchstens 2

betragen kann. Analog wie bei a) folgt daraus $N = 1$. Wegen

$$3 \cdot 0 = 0, \quad 3 \cdot 1 = 3, \quad 3 \cdot 2 = 6$$

$$3 \cdot 3 = [11]_8, \quad 3 \cdot 4 = [14]_8, \quad 3 \cdot 5 = [17]_8,$$

$$3 \cdot 6 = [22]_8, \quad 3 \cdot 7 = [25]_8$$

folgt hieraus $S = 3$. Nun gilt in der vorletzten Spalte $2E + 1 + 1 = E + k \cdot [10]_8$ (k ganzzahlig), woraus man $E = 6$ und $k = 1$ erhält. In der zweiten Spalte entsteht daher bei Addition von $1 + N + E + M = 1 + 1 + 6 + M$ ein Übertrag von 1. Die erste Spalte liefert somit $I + J + A + 1 = A + N \cdot [10]_8$, also $I + J + 1 = [10]_8$ bzw. $I + J = 7$. Mit den von N, S, E verschiedenen Ziffern 0, 2, 4, 5, 7 ist dies wegen $I \neq 0, J \neq 0$ nur dadurch möglich, daß entweder $I = 2$ und $J = 5$ oder $J = 2$ und $I = 5$ gilt.

Damit verbleiben für $A (\neq 0)$ nur die Ziffern 4 und 7 und für M nur die von A verschiedenen unter den Ziffern 0, 4 und 7. Die Aufgabe kann also höchstens durch die folgenden Ersetzungen im System mit der Basis 8 gelöst werden.

2163	2163	2163	2163
5613	5613	5613	5613
4063	4763	7063	7463
<u>14061</u> 8	<u>14761</u> 8	<u>17061</u> 8	<u>17461</u> 8
5163	5163	5163	5163
2613	2613	2613	2613
4063	4763	7063	7463
<u>14061</u> 8	<u>14761</u> 8	<u>17061</u> 8	<u>17461</u> 8

Da diese Ersetzungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, sind sie die gesuchten Lösungen.

Fortsetzung:

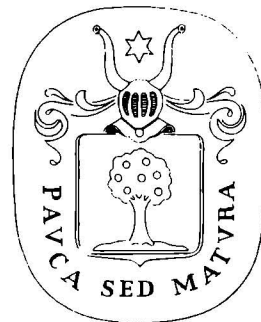
Briefmarke

zu Ehren des 200. Geburtstages von C. F. Gauß



Zum 200. Geburtstag von C. F. Gauß gab das Ministerium für Post- und Fernmeldewesen der DDR ein Sonderpostwertzeichen heraus. Wert: 20 Pfennig – Farben: Hellblau/schwarz – Motiv: Porträt von C. F. Gauß, Siebzehneck mit Zirkel und gleichschenkligen Dreieck – Signet der Olympiaden Junger Mathematiker in der DDR (siehe in diesem Heft S. 1) – Auflage: 8 Millionen – Entwurf: Gerhard Stauff/Leipzig – Druck: VEB Wertpapierdruckerei der DDR, Leipzig – Druck-

verfahren: Offset – Papiergröße: 43 mal 25,5 mm² – Bildgröße: 39 × 21,5 mm² – Zählung: 13:12¹/₂; jeder Bogen enthält 50 Postwertzeichen – Ausgabetag: 19. April 1977 – Ersttagsbriefumschlag siehe Abb.



C. F. Gauß

30. 4.1777-23 2.1855



Korrespondenzzirkel des Bezirks Leipzig

Seit Anfang 1971 besteht unter der bewährten Leitung von Oberlehrer R. Bergmann aus Döbeln ein Korrespondenzzirkel, in dem *Junge Mathematiker* aus allen Teilen des Bezirks Leipzig zusammengefaßt sind. Die Mitglieder dieses Zirkels nehmen am *alpha*-Wettbewerb teil und lösen darüber hinaus weitere Aufgaben, die sie in fünf Serien pro Jahr zugesandt bekommen. Sie erhalten dazu Literaturhinweise, die bei der Lösung eine wichtige Hilfe sein können und anregen, sich selbständig Wissen anzueignen. Jeder Teilnehmer verpflichtete sich, mindestens eine der gestellten Aufgaben zu lösen. In diesem Kalenderjahr stehen Konstruktionen, Konstruktionsbeschreibungen und Beweise im Mittelpunkt der Arbeit.

Aufgaben

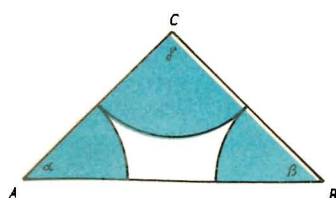
▲ 1 ▲ Gegeben ist das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{CA} = \overline{CB} = 2$ dm. Um jeden seiner Eckpunkte beschreiben wir eine Kreislinie mit dem Radius 1 dm. Die Bogen dieser Kreislinien schneiden aus dem Dreieck ABC drei Kreisausschnitte heraus, und von dem Dreieck bleibt eine Figur übrig, deren Flächeninhalt x dm² ist.

Man berechne, wieviel Prozent x dm² vom Inhalt des gegebenen Dreiecks (y dm²) sind!

Lösung: Laut Aufgabenstellung ist $\overline{CA} = \overline{CB} = 2$ dm und $\angle ABC = 90^\circ$, somit $A_{\triangle ABC} = y$ dm² = $0,5 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0,5 \cdot 2 \cdot 2$ dm² = 2 dm², $\Rightarrow y = 2$. Ist A_K , die Summe der Flächeninhalte der durch die Konstruktion entstehenden drei Kreisausschnitte (gemeinsamer Radius laut Konstruktion 1 dm), so gilt:

$$A_{Kr} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 + \frac{\beta}{360^\circ} \pi r^2 + \frac{\gamma}{360^\circ} \pi r^2 \\ = (\alpha + \beta + \gamma) \frac{1}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi \text{ dm}^2$$

($r = 1$ dm laut Aufgabe; $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ Innenwinkelsumme des Dreiecks ABC)



Man errechnet nun die Restfläche:

$$x \text{ dm}^2 = \left(y - \frac{1}{2} \pi \right) \text{ dm}^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \pi \right) \text{ dm}^2 \\ \Rightarrow x \approx 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} = 2 - \frac{11}{7} = \frac{3}{7}$$

folglich $x : y = p : 100 \Rightarrow p$

$$= \frac{100x}{y} \approx \frac{300}{7} = \frac{150}{7} \approx 21,43$$

Es sind ungefähr 21,43%.

▲ 2 ▲ In einem Abteil des Zuges Moskau–Odessa reisten Fahrgäste aus Moskau, Leningrad, Tula, Kiew, Charkow und Odessa. Ihre Familiennamen begannen mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F. Während der Unterhaltung ergibt sich:

- (1) A und der Moskauer sind Ärzte.
 - (2) E und der Leningrader sind Lehrer.
 - (3) Der Fahrgast aus Tula und C sind Ingenieure.
 - (4) B und F waren Teilnehmer am Großen Vaterländischen Krieg der SU und
 - (5) der Fahrgast aus Tula hatte überhaupt nicht bei der Armee gedient.
 - (6) Der aus Charkow war älter als A und
 - (7) der aus Odessa älter als C.
 - (8) B und der Moskauer stiegen in Kiew aus und
 - (9) C und der Charkower in Winniza.
- Wo wohnt jeder der genannten Fahrgäste, und welchen Beruf hat er?

Und nun geben wir euch noch eine Aufgabenreihe so, wie sie die Mitglieder des *Korrespondenzzirkels* zugeschickt bekommen:

1. Die Länge der Seite $\overline{AB} = c$ eines Dreiecks ABC betrage 21 cm, die Länge der Seite $\overline{AC} = b$ dieses Dreiecks betrage 20 cm. Aus diesen beiden Stücken sollen diejenigen Dreiecke konstruiert werden, deren Maßzahlen der Länge ihrer Umfänge durch 7 teilbare natürliche Zahlen sind.

Man bestimme, wieviel einander nicht kongruente Dreiecke dieser Art existieren! Für jedes der möglichen Dreiecke ist die Länge der Seite $\overline{BC} = a$ und die Länge des zugehörigen Umfanges anzugeben!

2. Es sollen alle Werte von m angegeben werden, für die das Gleichungssystem

$$2 + x + y + xy = 0 \\ x - y = m(1 + xy)$$

reelle Lösungen hat!

3. Man bestimme die Fläche eines Dreiecks, wenn zwei Seitenlängen 27 cm und 29 cm betragen und die Seitenhalbierende der dritten Seite 26 cm lang ist!

Nun noch einige Hinweise zu den Aufgaben:

1. Problem ist relativ einfach zu lösen, wenn man mit einer bekannten Ungleichung arbeitet. Man muß eben nur wissen, mit welcher!

2. Aufgabe 2 führt ebenfalls auf eine Ungleichung, zuvor muß man aber erst eine Gleichung bestimmen, in der z. B. y nicht auftritt. Dann heißt es weiter zu überlegen.

3. Diese Aufgabe hat wieder einmal mit Heron zu tun. Allerdings sollte man zunächst ein geeignetes Viereck bestimmen. Aber aufgepaßt: Jeder Lösungsschritt ist zu begründen bzw. jede Behauptung ist zu beweisen! Denkt daran!

Literaturhinweise:

Kleine Enzyklopädie Mathematik: S. 124, S. 302, S. 187, S. 185, S. 117 bis 121, S. 123 bis 124, S. 102 bis 104!

Und nun viel Erfolg beim Lösen dieser Serie!

Ein Verfahren zur mündlichen Lösung von quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten

Für die Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung in der Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

gilt bekanntlich der Vietasche Wurzelsatz

$$x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Dieser gestattet es in vielen Fällen, ganzzahlige Lösungen abzulesen, ohne die Lösungsformel benutzen zu müssen.

Beispiel: $x^2 - 27x + 170 = 0$

Man sieht sofort $10 + 17 = 27$

und $10 \cdot 17 = 170$

und hat damit die Lösung $x_1 = 10$ und $x_2 = 17$.

Es gibt auch ein Verfahren, mit dem man allgemeine quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

im Kopf lösen kann, sofern sie rationale Lösungen besitzen.

Die Lösungsformel für (2) ist

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Man findet nun eine Hilfsgleichung in Normalform

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (3)$$

mit derselben Diskriminante, wenn man $p = b$ und $q = ac$ setzt. Es ist leicht zu überprüfen, daß

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

und damit $x_1 = \frac{z_1}{a}$ und $x_2 = \frac{z_2}{a}$.

Da die Koeffizienten und Lösungen von (3) bei vielen Beispielen leicht im Kopf zu bestimmen sind, hat man in diesen Fällen eine sehr einfache Methode zur Lösung von Gleichungen der Form (2).

Beispiel: $6x^2 - 7x + 2 = 0$

a) Hilfsgleichung $z^2 - 7z + 12 = 0$

b) Wegen $4 + 3 = 7$ und $4 \cdot 3 = 12$ gilt $z_1 = 4$ und $z_2 = 3$

c) Damit hat man $x_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und $x_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

L. Dimenstein

(Fortsetzung Seite 72)

Aufgaben aus der Praxis

Der VEB Leichtmetallwerk Rackwitz gehört dem VEB Mansfeld-Kombinat Wilhelm Pieck Eisleben an und ist einer der wichtigsten aluminiumverarbeitenden Betriebe unserer Republik. Für hervorragende Leistungen konnten die Beschäftigten dieses Werkes im Jahre 1955 mit dem Orden „Banner der Arbeit“ und im Jahre 1974 mit dem „Karl-Marx-Orden“ ausgezeichnet werden. Ein großer Teil des Produktionsprogramms umfaßt die Herstellung verschiedenster Aluminiumgußlegierungen sowie die Fertigung von Aluminiumfolien; dazu zählt auch die bekannte Haushaltfolie.

Besonderes Gewicht kommt der Produktion von Leichtmetall-Profilen zu, die in der größten und leistungsfähigsten Aluminium-Strangpresserei der DDR hergestellt werden und an viele Betriebe unserer Republik und in die Länder des RGW zur Weiterverarbeitung geliefert werden.

Aus dem breiten Produktionsangebot sind noch die Herstellung von Beschlagteilen für die Deutsche Reichsbahn und die Fertigung von Kühlelementen für die Kühlschränke des DKK Scharfenstein zu erwähnen.

In der Berufsschule des VEB Leichtmetallwerk Rackwitz erhalten jährlich etwa 150 Lehrlinge eine Ausbildung als Instandhaltungsmechaniker, Walzwerker, Metallurge für Erzeugung bzw. Formgebung, Folienveredler usw.

Außerdem wird in diesem Betrieb für eine große Anzahl von Schülern des Kreises Delitzsch der Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion und der Unterricht im Fach „Einführung in die sozialistische Produktion“ durchgeführt.

Wir stellen nun einige Aufgaben aus der Praxis dieses Betriebes vor:

Während des Unterrichtstages in der sozialistischen Produktion montieren Schüler im VEB Leichtmetallwerk Rackwitz Lautsprecher vom Typ LP 553, die in Kofferradio- und Fernsehgeräte eingebaut werden.

Klasse 5

▲1▲ Von diesen Schülern werden in 4 Stunden 80 Lautsprecher montiert. Nach wieviel Minuten verläßt jeweils ein fertiger Lautsprecher das Montageband?

Klasse 6

▲2▲ Die Membraneinheit eines Lautsprechers wird auf das Lautsprechergehäuse geleimt. Die ellipsenförmige Leimspur wird mit einem Automaten aufgetragen.

Bestimme die Länge der Leimspur ohne Berücksichtigung ihrer Dicke! (Länge der großen Halbachse der Ellipse $a=7,5$ cm, der kleinen Halbachse $b=5$ cm; Umfang der Ellipse $u \approx \pi \cdot (a+b)$; $\pi \approx \frac{22}{7}$).

Klasse 7

▲3▲ Die Spule der Membraneinheit eines solchen Lautsprechers wird von einem Kupferdraht mit 0,3 mm Durchmesser und 2,30 m Länge gebildet, der auf einen Spulenkörper mit einem Durchmesser von 1,5 cm gewickelt wird.

a) Bestimme die Anzahl der Windungen, wenn für beide Anschlüsse jeweils 5 cm Drahtlänge benötigt werden und die Windungen nur in einer Lage gewickelt werden!

b) Berechne die Länge einer Spule, wenn die Windungen in zwei Lagen gewickelt werden, wobei der etwas größere Durchmesser der oberen Lage unberücksichtigt bleiben soll!

Klasse 8

▲4▲ Die Leistung eines solchen Lautsprechers beträgt 2 VA.

a) Bestimme die Stromstärke I , wenn eine Spannung von 2,4 V angelegt wird!

b) Ermittle den Widerstand des Lautsprechers!

In der Barrengießerei des VEB Leichtmetallwerk Rackwitz werden Aluminiumbarren für die weiterverarbeitenden Abteilungen gegossen.

Klasse 5

▲5▲ Wieviel Aluminiumbarren mit einer Masse von je 250 kg können aus 9 t Aluminium gegossen werden?

Klasse 6

▲6▲ Beim Herstellen eines Aluminiumbarrens beträgt die Gießgeschwindigkeit

$$v = 10 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

Wie lange dauert der Gießvorgang für einen Aluminiumbarren von 4 m Länge?

Klasse 7

▲7▲ Berechne die Masse eines Aluminiumbarrens von der Form eines geraden Kreiszylinders, der den Durchmesser $d=110$ mm und die Länge $h=4$ m besitzt

$$\left(\rho = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)$$

Klasse 8

▲8▲ Von einer Aluminiumlegierung mit einem 3%igen Magnesiumanteil werden 8,5 t benötigt. Es stehen 4 t einer Aluminiumlegierung mit einem 2%igen Magnesiumanteil zur Verfügung. Wieviel Kilogramm

Aluminium und wieviel Kilogramm Magnesium müssen der Schmelze noch zugeführt werden?

Im Folienwalzwerk des VEB Leichtmetallwerk Rackwitz werden Aluminiumfolien für die verschiedensten Bereiche hergestellt. Als Ausgangsmaterial dient eine Rohfolie mit einer Stärke von 500 μm ($1 \mu\text{m} = 0,001 \text{ mm}$).

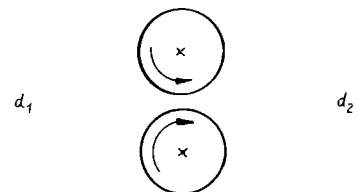
Klasse 6

▲9▲ Beim Walzen der Rohfolie wird die Breite des Aluminiumbandes nicht verändert. Auf welche Länge wird eine 100 m lange Rohfolie gebracht, wenn sie nach einigen Walzvorgängen nur noch eine Stärke von 25 μm besitzt?

Klasse 7

▲10▲ Beim Walzen von Aluminium unterscheiden wir zwischen Arbeits- und Stützwalze. Die Arbeitswalze habe einen Durchmesser von 240 mm, die Stützwalze von 560 mm; die Bandgeschwindigkeit betrage $350 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Wie viele Umdrehungen je Minute machen in diesem Falle Arbeits- bzw. Stützwalze?



Klasse 8

▲11▲ Beim Walzen von Aluminium würde sich das Aluminium auf Grund des hohen Walzendruckes von 50 MPa sehr stark erwärmen, wenn es nicht ständig gekühlt werden würde. An Kühlflüssigkeit werden in einer Minute 1000 Liter benötigt.

Wie groß ist die Geschwindigkeit $\left(\text{in } \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$ der Kühlflüssigkeit in einem Leitungsrohr mit einem Innendurchmesser von 8 cm?

Im VEB Leichtmetallwerk Rackwitz werden drei verschiedene Arten von Haushaltfolie hergestellt, die alle die gleiche Stärke von 11 μm haben, sich aber in der Breite unterscheiden.

Klasse 5

▲12▲ Berechne die Fläche (in dm^2) einer Rolle Haushaltfolie mit einer Breite von 300 mm und einer Länge von 23 m!

▲13▲ Wie viele Rollen Haushaltfolie mit einer Masse von 250 g können aus 3 t Rohfolie hergestellt werden, wenn durch das mehrmalige Walzen der Rohfolie der zehnte Teil des Ausgangsmaterials verlorengeht?

Berufsbild

Technologie

Ausbildung an der Ingenieurschule für Maschinenbau Schmalkalden

Der IX. Parteitag der SED hat unserem Volk neue, begeisterte Perspektiven gewiesen. Im Bereich der industriellen Entwicklung nehmen der Werkzeug- und Verarbeitungsmaschinenbau eine Schlüsselstellung ein. Mit ihren Erzeugnissen bestimmen sie das Wachstum der Arbeitsproduktivität in allen Bereichen der Produktion. In den kommenden Jahren ergibt sich ein steigender Bedarf des Maschinenbaues an ingenieurtechnischem Personal, insbesondere an Technologen. Die hohen Ziele der weiteren Durchsetzung der Hauptaufgabe des IX. Parteitages der SED fordern die umfassende sozialistische Intensivierung in allen Bereichen der Volkswirtschaft.

Für den Maschinenbau sind dazu noch mehr junge Menschen auszubilden, die als Technologen und Konstrukteure an der Seite der Arbeiter die zehn Faktoren der sozialistischen Intensivierung meistern. Während sich fast jeder vorstellen kann, was ein Konstrukteur zu tun hat, weiß man weniger von den Aufgaben des Technologen. Vereinfacht gesagt: Wenn der Konstrukteur festlegt, was gemacht wird, so muß der Technologie sagen, in welchen Arbeitsgängen, mit welchen Verfahren und mit welchen Maschinen die vom Konstrukteur zeichnerisch festgelegten Teile die gewünschte Gestalt annehmen sollen.

Die Tätigkeiten eines Technologen sind vielseitig. Sie werden übersichtlich, geht man von der dialektischen Einheit der drei verschiedenen Seiten des vollständigen Produktionsprozesses aus:

1. Der materiell-technischen,
2. der sozial-ökonomischen,
3. der fertigungsökonomischen Seite.

Ideologische, theoretische und methodologische Grundlage seiner Tätigkeit ist der Marxismus-Leninismus. Deshalb ist das gesellschaftswissenschaftliche Grundlagenstudium ein Eckpfeiler der gesamten Ingenieurausbildung.

Kaum eine ingenieurmäßige Arbeit ist denkbar, bei der nicht gerechnet wird – so stellt die Mathematik eine wesentliche Grundlage der Technologenausbildung. Entsprechend den Anforderungsschwerpunkten werden die Akzente gesetzt auf: lineare Algebra, Differential- und Integralrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik.

Die materiell-technische Seite der Technologentätigkeit verlangt von ihm Überlegungen und Entscheidungen zur Rohteil- bzw. Halbzuggestaltung; zur Unterteilung in eine ökonomische günstige Anzahl von Arbeitsgängen und ihre Kopplung; zur Auswahl des geeigneten Bearbeitungsverfahrens und der dazu notwendigen Maschinen, Werkzeuge und Vorrichtungen.

Fertigen bedeutet immer auch Messen. Deshalb gehört der Einsatz einer geeigneten Prüftechnik zu den Aufgaben des Technologen. Die kontinuierliche Zuführung von Rohstoffen und der Abtransport der Fertigteile erfordert Überlegungen auf dem Gebiet der Fördertechnik. Schließlich muß ein ausreichendes Verpackungsverfahren den Erhalt des Gebrauchswertes auf dem Wege zum Verbraucher gewährleisten.

Der politisch so eminent wichtigen Erhöhung der Arbeitsproduktivität dient der Technologie durch Um- und Neugestaltung von Fertigungsabläufen und -verfahren bis hin zum Einsatz von Automatisierungsmitteln.

Die sozial-ökonomische Seite der Berufsaufgaben eines Technologen besteht in der Lösung der komplexen Anforderungen der wissenschaftlichen Arbeitsorganisation.

Hier hinein spielen alle Fragen, die sich darauf richten, im Zusammenspiel von Arbeitsmittel, Arbeitskraft und Arbeitsgegenstand ein Optimum herbeizuführen, bei dem maximale Wirtschaftlichkeit und eine stete Verbesserung der Arbeitsbedingungen der Werktätigen erreicht werden.

Die fertigungsökonomische Seite der Technologentätigkeit erfordert Kenntnisse in der Betriebsökonomik, dem Rechnungswesen, der ökonomischen Modellierung und Optimierung technologischer Varianten sowie Fähigkeiten zur Rationalisierung der eigenen Arbeit. Der Vorbereitung auf die oben grob umrissenen Berufsaufgaben dient ein 3jähriges Studium. Davon werden $2\frac{1}{2}$ Jahre an der Ingenieurschule, das letzte halbe Jahr in wissenschaftlich produktiver Tätigkeit bereits im künftigen Einsatzbetrieb ausgebildet.

Die Lehrveranstaltungen gliedern sich nach folgender Stundentafel:

Marxismus-Leninismus	306 Std.
Sprachen, Sport	360 Std.
Mathematik	306 Std.
Physik, Chemie	234 Std.
Technische Grundlagenfächer	720 Std.
Technische Spezialfächer	1098 Std.

Einem Absolventen der Fachrichtung Technologie der metallverarbeitenden Industrie bieten sich vielfältige Einsatzmöglichkeiten in der Montage-, Fertigungs-, Operativ- und Planungstechnologie; in der Betriebsprojektion, Fertigungsmittelkonstruktion, Produktionsleitung und -lenkung sowie in den betrieblichen Rationalisierungsabteilungen. Nach erfolgreicher Ingenieurausbildung kann durch Fernstudienlehrgänge an technischen Hochschulen der akademische Grad eines Diplomingenieurs erworben werden.

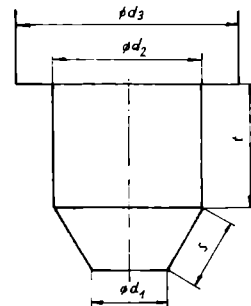
Neben der Fachrichtung Technologie kann an der Ingenieurschule Schmalkalden auch ein Studium in zwei weiteren Fachrichtungen erfolgen:

Instandhaltung und Werkzeugmaschinenbau.

M. Wittwer

Aufgabe:

Beim Arbeitsverfahren Tiefziehen wird aus einem ebenen Blech ein Gefäß gezogen. Das Blechvolumen vor und nach dem Tiefzug ist konstant, desgleichen die Blechstärke. Für zylindrische Ziehteile entspricht der Zugschnitt einem Kreis, der Ronde genannt wird. Es ist der Rondendurchmesser für das in der Skizze dargestellte Tiefziehteil zu ermitteln. Die Ziehradien können vernachlässigt werden.



Zum Titelblatt des Heftes 5/76

Auf dem Titelbild ist die harmonische Synthese der Rechteckkurve dargestellt. Die einzelnen Schwingungen werden addiert, und es ergibt sich die Rechteckkurve als Resultierende der Fourierschen Reihe

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right]$$

Für die ersten drei Glieder ergibt sich nur die rot eingezeichnete Kurve als Resultierende.

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right]$$

Klasse 6

▲ 14 ▲ Eine Rolle Haushaltfolie hat eine Masse von 200 g und ist 11 μm stark. Wie groß ist die Masse einer Rolle Grillfolie von gleicher Länge und Breite, die jedoch 25 μm stark ist?

▲ 15 ▲ Die Masse einer 300 mm breiten und 23 m langen Haushaltfolie beträgt 200 g. Wie groß ist die Masse einer 400 mm breiten und nur halb so langen Folie von gleicher Stärke?

E. Knauth

„Wem von den Studenten
habe ich die Hand gedrückt?“



Für Schnellrechner

Wie man vier dreistellige Zahlen miteinander im Kopf multiplizieren kann:

Ein Rechenkünstler hat 12 dreistellige Zahlen auf Kärtchen aufgeschrieben und in der folgenden Weise in vier Zeilen zu je drei Kärtchen auf den Tisch gelegt:

365	292	146
-----	-----	-----

685	548	274
-----	-----	-----

511	438	219
-----	-----	-----

959	822	411
-----	-----	-----

Nun fordert er vier Personen aus dem Publikum auf, aus jeder Zeile je eine Karte auszuwählen und nebeneinander auf den Tisch zu legen. Es werden z. B. die folgenden vier Karten ausgewählt:

365	548	219	822
-----	-----	-----	-----

Nach einem Blick auf diese Karten kann der Rechenkünstler sofort das Produkt dieser vier dreistelligen Zahlen niederschreiben:

36007200360

Dagegen benötigen die zur Kontrolle aus dem Publikum ausgewählten Personen längere Zeit, um das Produkt in der üblichen Weise mit dem Verfahren der schriftlichen Multiplikation auszurechnen.

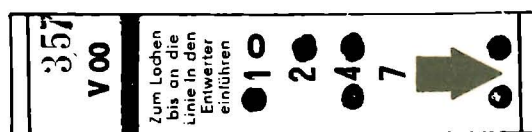
Wie konnte der Rechenkünstler das Produkt der vier dreistelligen Zahlen so schnell ermitteln?

OSTr Dr. R. Lüders, Berlin

Wie viele Lochkombinationen?

Ein Fahrschein für die Straßenbahn in Leipzig wird durch Lochen entwertet, wobei die Löcher in Reihen eingestanzt werden. Dabei können in einer Reihe kein, jeweils rechts oder links ein Loch sowie zwei Löcher erscheinen. Es gibt sechs solcher Reihen (siehe Bild).

- a) Wie viele Lochkombinationen gibt es für einen Schein, wenn in jeder Reihe wenigstens ein Loch erscheint?



- b) Auf wie viele Arten kann ein Fahrschein entwertet werden, wenn für die Reihen auch die Möglichkeit besteht, kein Loch einzustanzn?

Dr. R. Thiele, Leipzig

Kopftausch

Verändert man bei den folgenden Wörtern in geeigneter Weise den Anfangsbuchstaben, so erhält man jeweils einen Begriff, der im Mathematikunterricht vorkommt.

Die neuen Anfangsbuchstaben ergeben, von oben nach unten gelesen, ein Teilgebiet der Geometrie.

Haar – Rot – Echt – Kenner – Ankreis – Peter – Liner – Sonne – Dichtung – Anhalt – Ypsilon

OSTr K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



Humorvoller Setzer

Vor mir ein leeres Blatt Papier in der Limonadenflasche,
nur noch wenig Inhalt in meinem Kopf,
kluge Gedanken in meiner rechten Hand,
ein abgebrochener Stift in der Kekspackung,
noch genau zwei zerbrochene Kekse in meinem Gehirn,
eine Lösungsidee im Patronenfüller,
keine Tinte im Tafelwerk,
nichts zu finden.

Der humorvolle Setzer setzte die Kommas schmunzelnd an die falsche Stelle. Setze du sie an die richtige!

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Das Kfz-Nummernschild

Es ist ein Kfz-Nummernschild zu bestimmen.

Der erste Buchstabe des Kennzeichens steht an der Stelle im Alphabet, die der Tausender der Nummer angibt, der zweite Buchstabe steht an der Stelle, die der Einer der Nummer angibt. Die Nummer selbst setzt sich aus einem Primzahlzwillings zusammen, dabei steht die kleinere Primzahl vorn. Der Hunderter und der Zehner, in dieser Reihenfolge gelesen, sind 16mal so groß wie die Summe der beiden äußeren Zahlen.

Mathematikfachlehrer H. Engelmann, Sachsendorf

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} \text{AAL} \\ + \text{AAL} \\ \hline \text{FANG} \end{array}$$

Schüler Markus Lauterbach, Gotha

$$\begin{array}{r} abc - cba = dab \\ + \quad + \quad - \\ de - de = f \\ \hline dffg - bfh = dab \end{array}$$

Schüler Willi Rudolf, Wien

$$\begin{array}{r} \text{SCHI} \\ + \text{LIFT} \\ \hline \text{SCHÖN} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{LII} \cdot \text{COKE} \\ \hline \text{KACC} \\ \text{ICKK} \\ \text{BEEE} \\ \hline \text{KAMILLE} \end{array}$$

OL H. Förg-Rob, Schwaz (Österreich)

Wir wägen

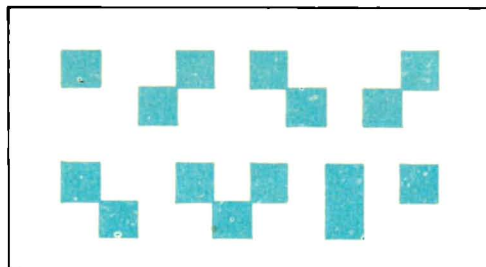
In einem Beutel befinden sich 9 kg Graupen. Wie kann mit einer Schalenwaage und zwei Gewichten zu 50 g und 200 g in Mengen von 2 kg und 7 kg geteilt werden? Es darf nur dreimal gewogen werden!

aus: Quant 3/76 (Moskau)

Geheimschrift

Zur Übermittlung vertraulicher Mitteilungen benutzt man schon seit langer Zeit sogenannte Geheimschriften.

Hier sei eine Methode genannt, Nachrichten zu verschlüsseln. Wir fertigen uns eine Schablone nach folgendem Muster an. Die farbigen Felder werden ausgeschnitten.



Mit dieser Schablone, die Absender und Empfänger haben müssen, läßt sich eine Nachricht von 30 Buchstaben übermitteln. Man notiert zuerst die Hälfte der Nachricht, indem man die Schablone auf ein leeres Blatt legt, dann wird die Schablone gewendet, und der Rest kann notiert werden. Die verbleibenden Lücken werden anschließend ausgefüllt, indem man beliebig Buchstaben einsetzt. Das Muster liefert bei Verwendung der Schablone den Text:

„Komme sofort nach X, bringe Karl mit. M.“

OL H. Pätzold, Waren/Müritz

A	K	X	L	O	B	M	C	R	E	M
F	I	Y	E	N	X	G	S	E	O	K
S	Q	Z	N	B	O	E	M	A	J	R
A	F	A	A	O	D	R	R	T	L	N
T	M	A	M	I	C	T	P	H	A	M

Abzählreim

In der linken oberen Ecke beginnend soll im Uhrzeigersinn mit einer bestimmten Zahl ausgezählt werden, so daß die Buchstaben in der Reihenfolge der Auszählung einen mathematischen Begriff ergeben.

BCEIR
E O
N F
O I
MMSLH

Mathematikfachlehrer H. Kampe, Neuseddin



Le Corbusier
Tibor Kajan,
Budapest

In einem Pionierlager südlich von Moskau

Während eines Geländespiels muß ich, Gena Lopuchow, mit sieben anderen Pionieren einen Spähtrupp bilden. Wir heißen die „Blauen“. Unsere Gegner sind die „Grünen“. Unser Lager befindet sich in einem für den Gegner schwer zugänglichen Teil des Waldes. Die „Grünen“ sind irgendwo auf der anderen Seite des Flusses Kalinowka. Der Spähtrupp steht unter meinem Kommando.

Zu ihm gehören Irina, Lena, Tanja, Borja, Serjoscha, Viktor und Kolja.

Wir verlassen das Lager und bewegen uns leise in Richtung des Flusses. Das Ende des Waldes ist bald erreicht, und es sind nur noch kleine Sträucher zu sehen. Aber hinter den Sträuchern können sich feindliche Aufklärer versteckt haben. Ich entscheide, einen Beobachtungspunkt in den Ästen einer hohen Espe einzurichten und teile dies meinen Spähern mit.

„So eine Espe“, wundert sich Viktor. „Sie ist mindestens hundert Meter hoch. Darf ich hinaufklettern?“

„Ich ernenne Viktor Komarow zum Beobachter“, antworte ich darauf.

„Aber zuerst müssen wir die Höhe des Beobachtungspunktes ermitteln.“ „Ich schätze 70 Meter“, meint Lena. „Darf ich auch hoch? Ich kann gut klettern.“

„Wartet mal!“ sage ich. „Zuerst wollen wir die Höhe des Baumes genau bestimmen.“

Um die Höhe zu messen, benutzen wir den Stock, der symbolisch mein Gewehr darstellt. Mit einem Blatt Karopapier aus dem Heft des Melders (die Länge eines Kästchens beträgt 5 mm) ermitteln wir die Länge des Stockes – 86 cm. Wir stoßen den Stock senkrecht in den Boden, so daß er noch 70 cm über der Erde zu sehen ist. Ich lege mich in einer solchen Entfernung auf die Erde, daß ich das Ende des Stockes (E) und die Krone des Baumes (K) auf demselben Strahl sehe

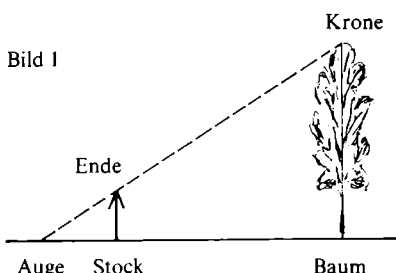


Bild 1

(siehe Bild 1). Mit Hilfe des Stockes und des Papiers finden wir den Abstand zwischen dem Auge (A) und dem Stock (S) und den Abstand zwischen dem Auge und dem Baum (B):

$$\overline{AS} = 90 \text{ cm} = 0,9 \text{ m}; \quad \overline{AB} = 36 \text{ m}$$

„Jetzt ist es einfach“, sagt Tanja, die die 8. Klasse absolviert hat. „Die Höhe des Baumes verhält sich zur Höhe des Stockes wie die Entfernung von deinem Auge zum Baum zu der Entfernung von deinem Auge zum Stock.“

„Und wie groß ist das Verhältnis?“ will Irina wissen, die erst in die 6. Klasse kommt.

„Soldat Irina Koslowskaja, ich beauftrage dich, den Quotienten aus 36 m und 90 cm zu berechnen!“ sage ich. Irina sieht nach unten und murmelt etwas Unverständliches. Alle sehen sie an und lachen. „Was ihr nur lacht!“ Irina wird böse. „Vier mal neun ist sechshunddreißig. Also ist der Quotient vier.“

„Nein, nicht vier, sondern vierzig!“ rufen Kolja und Lena, d. h. zuerst Lena und dann Kolja. „Also“, faßt Borja zusammen, „die Espe ist 40mal größer als der Stock. Das heißt, wir müssen 86 cm mit 40 multiplizieren.“ „Nicht 86 cm, sondern 70 cm“, wirft Tanja ein. „Das Stück des Stockes, das in der Erde steckt, dürfen wir nicht mitrechnen. Wir müssen also 70 mit 40 multiplizieren. Die Höhe des Baumes ist 28 m. Und nicht 100 m, mein lieber Vitja“, lächelt Tanja. „Darf ich jetzt hoch, Gena?“ Ich erlaube beiden hochzuklettern. „Nebenbei könnt ihr euch merken, wie man die Höhe eines Baumes ermitteln kann“, füge ich hinzu.

Vom dem Beobachtungspunkt kann man den Gegner nicht bemerken. Ich entscheide jetzt, daß wir uns einzeln zum Flußufer bewegen. Auf Vorschlag der Beobachter treffen wir uns bei den Sträuchern gegenüber einer einzelnen Birke, die sich am anderen Flußufer befindet. Von diesem Gebüsch aus beobachten wir das andere Ufer; vom Gegner sehen wir nichts. Nun haben wir Breite und Tiefe des Flusses zu ermitteln.

Den Fluß kennt jeder von uns. An der tiefsten Stelle reicht mir das Wasser bis zur Brust. Es ist aber kalt; baden wollen wir nicht. „Ich habe einen Vorschlag“, sagt Tanja. „Man kann ganz genau die Breite des Flusses ermitteln, ohne sich die Füße naß zu machen.“

„Immer denkt sich Tanja etwas aus. Sie hat nicht umsonst den zweiten Platz in der Mathematik-Olympiade des Bezirkes belegt.“ Nun gibt Tanja das Kommando an. Sie befiehlt Kolja, sich genau gegenüber der Birke aufzustellen. Sie selbst geht am Ufer entlang; geht und zählt die Schritte. Nach 30 Schritten bleibt sie stehen. Wir anderen bleiben auch stehen, obwohl wir nichts verstehen. „Lena, stell dich bitte genau auf meinen Platz!“ befiehlt Tanja. Lena macht dies, und Tanja geht weiter und zählt wieder die Schritte. Nach weiteren 30 Schritten stellt sie Serjoscha auf und dreht sich um 90° und geht vom Fluß in Richtung Wald. Ab und zu blickt sie sich um. Borja, Vitja, Irina und ich gehen hinterher.

Wir verstehen noch immer nichts, aber wir gehen ihr nach. Als Tanja Lena und die Birke auf dem anderen Ufer des Flusses auf demselben Strahl erblickt (siehe Bild 2), bleibt sie stehen.

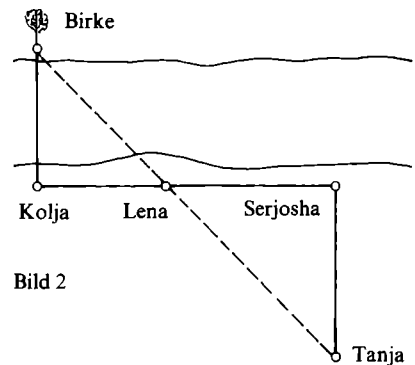


Bild 2

„Wie lange willst du noch messen, und was soll das Ganze?“ fragt Irina. „Nimm dein Gewehr“, Gena, und miß die Entfernung von mir zu Serjoscha!“ Die Entfernung beträgt 39 Stocklängen. Ich nehme Papier und multipliziere 86 cm mit 39. „33,5 m“, sage ich. „Also, von Kolja bis zur Birke sind es auch 33,5 m“, erklärt Tanja. „Davon muß man noch 0,5 m (das ist die Entfernung von Kolja bis zum Fluß) und 1 m (das ist die Entfernung von der Birke bis zum Ufer) subtrahieren. Jetzt notiere: 32 m als Flußbreite. Hast du mein Handeln verstanden?“ „Natürlich, es handelt sich um kongruente Dreiecke. Warum bin ich nur nicht selbst darauf gekommen?“

A. Halameisär

$$\sqrt{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7} = 1 + \sqrt{9!} + 7 + 7$$

$$\bullet \quad (1+9-7+7)-(1-9+7+7) = -1-9+7+7$$

$$(1^9 \cdot 7 - 7) : (1^9 \cdot 7 : 7) = 19 \cdot (7 \cdot 7)$$

$$\sqrt{\frac{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7}{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7}} = (1 + 10 - 7 : 7)$$

Dozent Dr. H. Lohse, Leipzig

■ Man beweise, daß es 1977 natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{1977}$ und eine natürliche Zahl b gibt, so daß

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1977}^2 = b^2 \text{ gilt.}$$

Michail Griestschenko, Student Universität Minsk (UdSSR)

▲ Ist die Zahl

$$z = 1^{1977} + 2^{1977} + \dots + 1977^{1977}$$

durch 1977 teilbar oder nicht?

Egbert Lindner, Student, Erkner

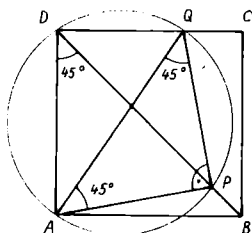
(Lösungen s. Seite 72)

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/76

Ma 7 ■ 1580 Aus $\angle ADQ = \angle APQ = 90^\circ$ folgt, daß das Viereck $APQD$ ein Sehnenviereck ist. Deshalb gilt $\angle ADP = \angle AQP = 45^\circ$ (Peripheriewinkel über derselben Sehne $\overline{AP}$), da die Diagonale $\overline{BD}$ den Winkel $\angle ADC$ halbiert. Somit gilt weiter $\angle QAP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Wegen $\angle QAP = \angle AQP = 45^\circ$ gilt auch $\overline{PA} = \overline{PQ}$, d. h., das Dreieck APQ ist gleichschenkelig.



Ma 7 ■ 1581 Auf Grund der Parallelogrammeigenschaften gilt $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$. Nach Konstruktion gilt $\overline{BC} = \overline{BF} = b$; daraus folgt $\angle BFC = \angle BCF = \alpha$. Ferner gilt $\angle BFC = \angle ABF = \alpha$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

Nach Konstruktion gilt $\overline{DE} = \overline{DC} = a$; daraus folgt $\angle DCE = \angle DEC = \alpha$. Ferner gilt $\angle CED = \angle ADE = \alpha$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

Aus $\overline{AD} = \overline{BF} = b$, $\overline{AB} = \overline{ED} = a$ und $\angle ABF = \angle EDA = \alpha$ folgt $\triangle ABF \cong \triangle EDA$ und somit $\overline{AE} = \overline{AF}$, d. h., das Dreieck AEF ist gleichschenkelig.

Ph 7 ■ 1582 Gegeben:

$$P_{zu} = 300 \text{ W} = 300 \cdot 0,10197 \frac{\text{kpm}}{\text{s}} = 30,59 \frac{\text{kpm}}{\text{s}}$$

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$G = 40 \text{ kp (40 l Wasser)}$$

$$h = 30 \text{ m}$$

Gesucht: η

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} \quad W_{ab} = G \cdot h$$

$$\eta = \frac{G \cdot h}{P_{zu} \cdot t} \quad W_{zu} = P_{zu} \cdot t$$

$$\eta = \frac{40 \text{ kp} \cdot 30 \text{ m} \cdot \text{s}}{30,59 \text{ kpm} \cdot 60 \text{ s}}$$

$$\eta \approx 0,654$$

Der Wirkungsgrad des Pumpaggregats beträgt 0,654 = 65,4%.

Ch 7 ■ 1583

$$\text{FeO} \quad \frac{72 \text{ g}}{500 \text{ g}} = \frac{56 \text{ g}}{m_1} \quad m_1 = 389 \text{ g}$$

$$\text{Fe}_2\text{O}_3 \quad \frac{160 \text{ g}}{500 \text{ g}} = \frac{112 \text{ g}}{m_2} \quad m_2 = 350 \text{ g}$$

$$\text{Fe}_3\text{O}_4 \quad \frac{232 \text{ g}}{500 \text{ g}} = \frac{168 \text{ g}}{m_3} \quad m_3 = 362 \text{ g}$$

Aus je 0,5 kg Eisen(II)-oxid, Eisen(III)-oxid und Eisen(II,III)-oxid entstehen 389 g, 350 g bzw. 362 g Eisen.

Ma 8 ■ 1584 Wegen $a = 973$ gilt

$$z = \frac{(a-3)^2 + (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2}{(a-1)(a+1) + 5}$$

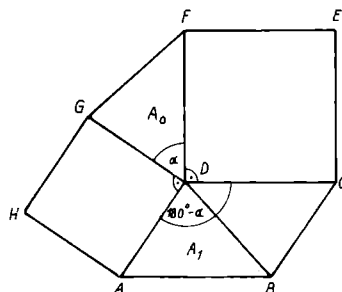
Dabei ist der Zähler gleich

$$a^2 - 6a + 9 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a + 1 + a^2 + a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 = 7a^2 + 28 = 7(a^2 + 4).$$

Der Nenner ist gleich

$$a^2 - 1 + 5 = a^2 + 4. \text{ Daraus folgt } z = \frac{7(a^2 + 4)}{a^2 + 4}, \text{ also } z = 7.$$

Ma 8 ■ 1585 Es sei $\angle DAB = \alpha$; dann ist $\angle CDA = 180^\circ - \alpha$ als entgegengesetzter Winkel. Daraus folgt (siehe Bild) $\angle GDF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha = \angle DAB$.



Ferner gilt nach Voraussetzung

$$\overline{AD} = \overline{GD}. \quad (2)$$

Aus $\overline{AB} = \overline{CD}$ (gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms $ABCD$) und $\overline{CD} = \overline{DF}$ (nach Voraussetzung) folgt weiter

$$\overline{AB} = \overline{DF}. \quad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) folgt nach dem Kongruenzsatz (sws)

$$\triangle ABD \cong \triangle DFG,$$

d. h., diese beiden Dreiecke sind kongruent und daher auch flächengleich. Es gilt also die Beziehung $A_0 = A_1$.

Ma 8 ■ 1586 a) Bezeichnet man die Länge der Rennstrecke mit

$$s = 2000 \text{ m} = 2 \text{ km},$$

die Zeit von 1948 mit $t_1 = 5 \text{ min } 56,7 \text{ s}$

= 356,7 s, die Zeit von 1970 mit $t_2 = 5 \text{ min } 36,1 \text{ s} = 336,1 \text{ s}$, so erhält man die prozentuale Zeitverringerung

$$p = \frac{t_1 - t_2}{t_1} \cdot 100\% = \frac{20,6 \cdot 100}{356,7} \approx 5,8\%$$

b) Die 1948 erreichte Geschwindigkeit beträgt

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{2 \cdot 3600 \text{ km}}{356,7 \text{ h}} \approx 20,19 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

und die 1970 erreichte Geschwindigkeit

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{2 \cdot 3600 \text{ km}}{336,1 \text{ h}} \approx 21,42 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

c) Daraus ergibt sich die prozentuale Geschwindigkeitserhöhung

$$p' = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \cdot 100\% = \frac{1,23 \cdot 100}{20,19} \approx 6,1\%.$$

d) Es gilt $p < p'$, weil

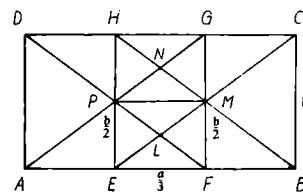
$$p' = \frac{\frac{s}{t_2} - \frac{s}{t_1}}{\frac{s}{t_1}} \cdot 100\% = \frac{s(t_1 - t_2)t_1}{t_1 t_2 s} \cdot 100\%.$$

$$p' = \frac{t_1 - t_2}{t_1} \cdot \frac{t_1}{t_2} \cdot 100\% = p' \cdot \frac{t_1}{t_2} > p, \text{ denn } \frac{t_1}{t_2} > 1.$$

Ma 8 ■ 1587 Wegen $\overline{EB} = \overline{HC} = \frac{2}{3}a$ ist das

Viereck $EBCH$ ein Rechteck; M ist der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Daher sind die Dreiecke EFM und CGM rechtwinklig und kongruent, es gilt also $\overline{MF} = \overline{MG} = \frac{b}{2}$.

Analog zeigt man, daß auch $\overline{PE} = \frac{b}{2}$ gilt.



Daher ist das Viereck $EFMP$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{a}{3}$ und $\frac{b}{2}$, das den Flächeninhalt $\frac{ab}{6}$ hat.

Da L der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Rechtecks ist, ist der Flächeninhalt des Dreiecks PLM gleich dem vierten Teil des Flächeninhalts des Rechtecks $EFMP$, also gleich $\frac{ab}{24}$. Analog zeigt man, daß auch das Dreieck PMN den Flächeninhalt $\frac{ab}{24}$ hat. Der Flächeninhalt des Vierecks $LMNP$ ist daher gleich

$$A_1 = 2 \cdot \frac{ab}{24} = \frac{ab}{12},$$

und man erhält das gesuchte Verhältnis

$$A_1 : A_0 = \frac{ab}{12} : ab = 1 : 12.$$

Ph 8 ■ 1588 Gegeben:

$$V_1 = 50 \text{ l}$$

$$p = 28 \text{ at}$$

$$p_0 = 760 \text{ Torr} = 1 \text{ atm} = 1,033 \text{ at}$$

$$p_2 = 750 \text{ Torr} = \frac{750 \cdot 1,36}{1000} \text{ at} = 1,02 \text{ at}$$

Gesucht: ΔV

Der absolute Druck p_1 in der Flasche beträgt

$$p_1 = p + p_0. \quad (1)$$

Nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte ist

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

$$V_2 = \frac{V_1 \cdot p_1}{p_2}$$

$$(1) \text{ eingesetzt: } V_2 = \frac{V_1(p + p_0)}{p_2}.$$

Da in der Flasche $V_1 = 50\text{ l}$ zurückbleiben, entweichen also

$$\Delta V = V_2 - V_1$$

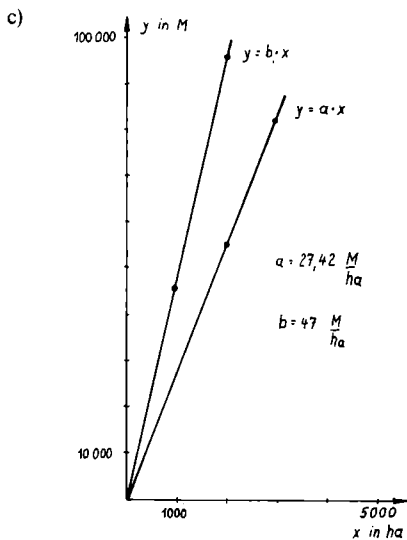
$$\Delta V = \frac{V_1(p + p_0)}{p_2} - V_1 = \frac{V_1(p + p_0 - p_2)}{p_2}$$

$$\Delta V = \frac{50\text{ l}(28 + 1,033 - 1,02)}{1,02} = 1373\text{ l}$$

Es entweichen 1373 l Sauerstoff.

Ch 8 ■ 1589 a) $y = a \cdot x$ bzw. $y = b \cdot x$, x LN in ha, y Kosten in M

b) Um 41,7% gingen die Selbstkosten zurück. Die Kosten sind im ACZ 411 300 M, die Ersparnis beträgt 293 700 M.



Ma 9 ■ 1590 Es sei (x, y, z) eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann gilt

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0.$$

Daher folgt aus (1)

$$y = \frac{4}{x} \text{ und aus (3)}$$

$$z = \frac{9}{x}. \text{ Wegen (2) gilt daher}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{9}{x} = 16,$$

$$x^2 = \frac{9}{4}.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Für $x_1 = \frac{3}{2}$ erhält man aus (5) und (6)

$$y_1 = \frac{8}{3}, z_1 = 6.$$

Für $x_2 = -\frac{3}{2}$ erhält man

$$y_2 = -\frac{8}{2}, z_2 = -6.$$

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2), (3) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Lösungen

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{8}{3}, 6\right) \text{ und } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{8}{3}, -6\right) \text{ sein.}$$

Die Probe zeigt, daß das tatsächlich Lösungen sind; denn es gilt

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4, \frac{8}{3} \cdot 6 = 16, 6 \cdot \frac{3}{2} = 9 \text{ usw.}$$

Ma 9 ■ 1591 Nach dem Höhensatz gilt $h^2 = pq$ und wegen $p + q = c$, also $q = c - p$, weiter

$$h^2 = p(c - p),$$

$$p^2 - cp + h^2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung für p hat die Lösungen

$$p_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - h^2},$$

$$\text{falls } \frac{c^2}{4} - h^2 \geq 0.$$

a) Für $h = 6\text{ cm}$ erhält man

$$p_{1,2} = (10 \pm \sqrt{100 - 36})\text{ cm} = (10 \pm 8)\text{ cm},$$

$p_1 = 18\text{ cm}$, also $q_1 = 2\text{ cm}$ und

$p_2 = 2\text{ cm}$, also $q_2 = 18\text{ cm}$.

b) Für $h = 10\text{ cm}$ erhält man

$$p_{1,2} = (10 \pm \sqrt{100 - 100})\text{ cm} = 10\text{ cm},$$

also genau eine Lösung

$$p = 10\text{ cm}, q = 10\text{ cm}.$$

c) Für $h = 11\text{ cm}$ wird $\frac{c^2}{4} - h^2 < 0$;

in diesem Falle erhält man also keine reelle Lösung für p .

Ma 9 ■ 1592 Für alle reellen Zahlen a und b gilt:

Die Ungleichung

$$\frac{a^4 + b^4 + 1}{2} \geq a^2 + b^2 - a^2b^2 \quad (1)$$

ist erfüllt, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$a^4 + b^4 + 1 \geq 2a^2 + 2b^2 - 2a^2b^2, \quad (2)$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2 - 2b^2 + 1 \geq 0, \quad (3)$$

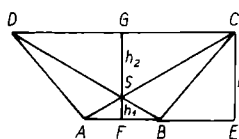
$$(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1 \geq 0, \quad (4)$$

$$(a^2 + b^2 - 1)^2 \geq 0. \quad (5)$$

Nun ist aber die Ungleichung (5) für alle reellen Zahlen a, b erfüllt, da das Quadrat der reellen Zahl $a^2 + b^2 - 1$ niemals negativ ist.

Daher sind auch die Ungleichungen (4), (3), (2) und die gegebene Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen a, b erfüllt, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 1593 Es sei E der Fußpunkt des von C auf AB gefällten Lotes (siehe Bild). Dann ist $CE = h$ die Höhe des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Ferner sei F der Fußpunkt des von S auf AB gefällten Lotes, und es sei $\overline{SF} = h_1$. Endlich sei G der Fußpunkt des von S auf CD gefällten Lotes, und es sei $\overline{SG} = h_2$.



Setzt man $\overline{AB} = a$, so ist $\overline{AF} = \frac{a}{2}$, $\overline{CD} = 3a$,

$\overline{AE} = 2a$. Nach dem Strahlensatz gilt daher

$$h_1 : h = \frac{a}{2} : 2a,$$

$$h_1 = \frac{h}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks SAB ist also gleich

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{h}{4} = \frac{1}{8}ah.$$

Wegen $h_2 = h - h_1 = \frac{3}{4}h$ und $\overline{CD} = 3a$ ist der

Flächeninhalt des Dreiecks SCD gleich

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{4}h = \frac{9}{8}ah.$$

Für die Flächeninhalte A_2 und A_3 der Dreiecke SBC und SDA gilt

$$A_2 = A_3 = \frac{1}{2}ah - \frac{1}{8}ah = \frac{3}{8}ah.$$

Daraus folgt

$$A_1 + A_2 + A_3 = \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right)ah = \frac{7}{8}ah$$

und wegen $A_0 = \frac{9}{8}ah$

$$(A_1 + A_2 + A_3) : A_0 = \frac{7}{8} : \frac{9}{8} = 7 : 9.$$

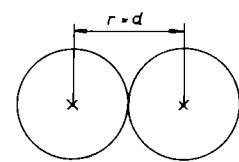
Ph 9 ■ 1594 Gegeben:

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

$$\rho = 11,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 11\,300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$F = 0,1 \text{ p} = 0,000981 \text{ N}$$

Gesucht: d



Nach dem Gravitationsgesetz gilt

$$F = \frac{\gamma \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{ mit } m_1 = m_2 = m = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \rho$$

(Masse der Bleikugel) und $r = d$

$$F = \frac{\gamma \cdot m^2}{d^2}$$

$$F = \frac{\gamma \cdot 4^2 \cdot \pi^2 \cdot d^6 \cdot \rho^2}{3^2 \cdot 2^6 \cdot d^2} = \frac{\gamma \cdot \pi^2 \cdot d^4 \cdot \rho^2}{36}$$

$$d^4 = \frac{36 \cdot F}{\gamma \cdot \pi^2 \cdot \rho^2}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{36 \cdot F}{\gamma \cdot \pi^2 \cdot \rho^2}}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{36 \cdot 0,000981 \text{ N} \cdot 10^{11} \cdot \text{kg}^2 \cdot \text{m}^6}{6,67 \cdot \text{Nm}^2 \cdot 3,14^2 \cdot 11300^2 \cdot \text{kg}^2}}$$

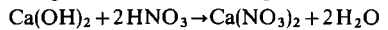
$$= \sqrt[4]{0,42056 \text{ m}^4}$$

$$d \approx 0,805 \text{ m}$$

Der Durchmesser der Bleikugel muß 0,805 m = 80,5 cm betragen.

Ch 9 ■ 1595 a)

$$74,1 \text{ g} \quad 164,1 \text{ g}$$



$$m_1 \quad 10 \text{ g}$$

$$\text{NR: } 1 \text{ mol} \cdot 74,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 74,1 \text{ g},$$

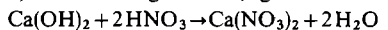
$$1 \text{ mol} \cdot 164,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 164,1 \text{ g}$$

Proportioneinstellung am Rechenstab:

$$m_1 = 4,52 \text{ g.}$$

4,52 g Kalziumhydroxid werden zur Neutralisation benötigt.

$$\text{b) } 126 \text{ g} \quad 164,1 \text{ g}$$



$$m_2 \quad 10 \text{ g}$$

$$\text{NR: } 2 \text{ mol} \cdot 63 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 126 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_2 = 7,68 \text{ g.}$$

7,68 g 100%iger Säure entsprechen $5 \cdot 7,68 \text{ g} = 39,4 \text{ g}$ 20%ige.

39,4 g 20%ige Säure werden gebraucht.

Ma 10/12 ■ 1596 Da die Masse des Schüttkegels 5 t beträgt und die Dichte $2,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 2,4 \text{ t} \cdot \text{m}^{-3}$, ist sein Volumen gleich

$$V = \frac{5}{2,4} \text{ m}^3 \approx 2,08 \text{ m}^3.$$

Nun gilt, wenn r der Radius und h die Höhe des Kegels sind,

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Ferner gilt $\tan \alpha = \frac{h}{r}$, also $h = r \tan \alpha$

Daraus folgt

$$V = \frac{\pi}{3} r^3 \tan \alpha,$$

$$r^3 = \frac{3V}{\pi \tan \alpha}.$$

Wegen $V \approx 2,08 \text{ m}^3$ und $\tan \alpha = \tan 33^\circ = 0,6494$ erhält man

$$r^3 \approx \frac{3 \cdot 2,08}{\pi \cdot 0,6494} \text{ m}^3 \approx 3,06 \text{ m}^3, \\ r \approx \sqrt[3]{3,06} \text{ m} \approx 1,45 \text{ m}.$$

Der Durchmesser des Grundkreises des Schüttkegels beträgt also 2,90 m und sein Umfang 9,11 m.

Wegen $h = r \tan \alpha \approx 1,45 \cdot 0,6494 \text{ m} \approx 0,94 \text{ m}$ beträgt die Höhe des Schüttkegels 0,94 m.

Ma 10/12 ■ 1597 Aus

$$z = 2^{300} - (2^{150} + 2^{100} + 2^{60}) + (2^{50} + 2^{30} + 2^{20}) - 2^{10} \quad (1)$$

folgt, wenn man $2^{10} = a$ setzt,

$$z = a^{30} - a^{15} - a^{10} - a^6 + a^5 + a^3 + a^2 - a \\ = (a^{30} - a^{10}) - (a^{15} - a^5) - (a^6 - a^2) + (a^3 - a) \\ = a^{10}(a^{20} - 1) - a^5(a^{10} - 1) - a^2(a^4 - 1) \\ + a(a^2 - 1). \quad (2)$$

Nun ist (vgl. Tabellen und Formeln, S. 42) $a^n - b^n$ für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n und für alle reellen Zahlen a und b mit $a \neq b$ durch $a - b$ teilbar.

Also sind die Faktoren auf der rechten Seite von (2) $a^{20} - 1 = (a^2)^{10} - 1$,

$$a^{10} - 1 = (a^2)^5 - 1,$$

$$a^4 - 1 = (a^2)^2 - 1,$$

$$a^2 - 1$$

sämtlich durch $a^2 - 1$ teilbar.

Daher ist jeder Summand auf der rechten Seite von (2) durch $a^2 - 1$ und außerdem noch durch a teilbar. Daraus folgt, daß die Zahl z teilbar ist durch

$$a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1) = 2^{10} \cdot (2^{10} - 1)$$

$$\cdot (2^{10} + 1)$$

$$= 2^{10} \cdot 1023 \cdot 1025 = 4 \cdot 2^8 \cdot 3 \cdot 341$$

$$\cdot 41 \cdot 25$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 2^8 \cdot 341 \cdot 41$$

$$= 300 \cdot 2^8 \cdot 341 \cdot 41,$$

d. h., die Zahl z ist auch durch 300 teilbar, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 1598 a) Es seien $\overline{AB} = c$ und $\overline{CD} = h$ bzw. $\overline{A'B'} = c'$ und $\overline{CD'} = h'$ die Grundlinien und Höhen der Dreiecke ABC bzw. $A'B'C'$.

Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{h'}{h} = \frac{c'}{c}.$$

Für die Flächeninhalte F' und F der beiden Dreiecke gilt nach Voraussetzung

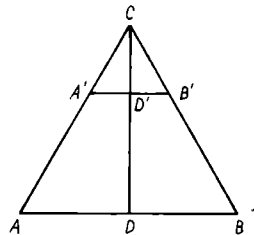
$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{64}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{64} = \frac{\frac{1}{2} c' h'}{\frac{1}{2} c h} = \frac{c'}{c} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{h'^2}{h^2},$$

$$\frac{h'}{h} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}.$$

Die Höhen der beiden Dreiecke verhalten sich also zueinander wie

$$h' : h = 1 : 8.$$



b) Es seien r und h bzw. r' und h' die Radien und Höhen der beiden geraden Kreiskegel K bzw. K' . Da die Achsenschnitte beider Kegel gleichschenklige Dreiecke mit parallelen Grundlinien und gemeinsamer Spitze sind, gilt wie unter a) nach dem Strahlensatz

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}.$$

Für die Volumina V' und V der beiden Kegel gilt nach Voraussetzung

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{64}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{64} = \frac{\frac{\pi}{3} r'^2 h'}{\frac{\pi}{3} r^2 h} = \frac{r'^2}{r^2} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{h'^3}{h^3},$$

$$\frac{h'}{h} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}.$$

Die Höhen der beiden Kegel verhalten sich also zueinander wie

$$h' : h = 1 : 4.$$

Ma 10/12 ■ 1599 1. Angenommen, die Bedingung (1) wäre erfüllt; dann wäre aber auch eine der Bedingungen (3), (4), (5) erfüllt, da für jede reelle Zahl mindestens eine dieser drei Bedingungen erfüllt ist. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Bedingung (1) nicht erfüllt, und es gilt

$$x^2 \geq \frac{1}{2}, \text{ d. h.,}$$

$$x \leq -\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ oder } x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (8)$$

2. Angenommen, die Bedingung (2) wäre erfüllt; dann ergibt sich wie oben ein Widerspruch; also gilt

$$x \leq \frac{1}{4}, \text{ d. h.}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt daher

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (10)$$

$$\text{oder } x = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (11)$$

Im Falle (10) wären aber die Bedingungen (3) und (4) erfüllt, was der Voraussetzung widerspricht. Also kann nur der Fall (11) eintreten, es gilt also

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,707, x^2 = \frac{1}{2},$$

$$x^3 = \frac{1}{4}\sqrt{2}, x^4 = \frac{1}{4}.$$

Nun sind für $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ die Bedingungen (1), (2), (3), (5), (6) und (7) nicht erfüllt; dagegen ist genau eine Bedingung, nämlich (4), erfüllt.

Die Zahl $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat also die verlangte Eigenschaft, und zwar nur diese Zahl, was sich aus (8) und (9) ergibt, da für jede andere Zahl ein Widerspruch entsteht.

Ph 10/12 ■ 1600 Gegeben:

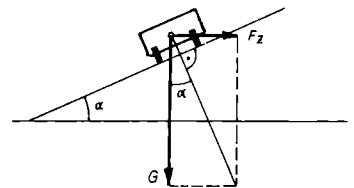
$$m = 1,2 \text{ t} = 1200 \text{ kg}$$

$$r = 150 \text{ m}$$

$$v = 81 \text{ kmh}^{-1} = \frac{81000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 22,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gesucht: a) F_Z b) μ_0 c) α



a) Der Betrag der Zentrifugalkraft ist gleich dem Betrag der Radialkraft. ($F_r = F_Z$)

$$F_r = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_r = \frac{1200 \text{ kg} \cdot 22,5^2 \cdot \text{m}^2}{150 \text{ m} \cdot \text{s}^2}$$

$$F_r = 4050 \text{ N}$$

$$F_r \approx 413 \text{ kp}$$

Die Zentrifugalkraft beträgt 413 kp.

b) Die Haftreibung F_R muß mindestens gleich der Zentrifugalkraft F_Z sein mit $F_R \geq F_Z$. Für die Haftreibung gilt $F_R = \mu_0 F_N$ mit $F_N = G$ bei horizontaler Ebene.

$$F_Z \leq \mu_0 \cdot F_N \text{ mit } F_N = G = mg \text{ und } F_Z = F_r \\ = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$\mu_0 \geq \frac{F_Z}{F_N}$$

$$\mu_0 \geq \frac{m \cdot v^2}{r \cdot m \cdot g}$$

$$\mu_0 \geq \frac{v^2}{rg} = \frac{22,5^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot 150 \text{ m}}$$

$$\mu_0 \geq 0,344$$

Die Haftreibungszahl beträgt mindestens

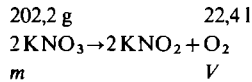
$$\mu_0 = 0,344.$$

c) Die resultierende Kraft muß senkrecht zur Fahrtrichtung verlaufen. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{F_z}{G} \\ \tan \alpha &= \frac{mv^2}{mgr} \\ \tan \alpha &= \frac{v^2}{gr} = \frac{22,5^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{9,81 \text{ m} \cdot 150 \text{ m}} \\ \tan \alpha &= 0,3440 \\ \alpha &= 19^\circ\end{aligned}$$

Die Straße muß um 19° geneigt sein.

Ch 10/12 ■ 1601



$$\text{NR: } 2 \text{ mol} \cdot 101,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 202,2 \text{ g,}$$

$$1 \text{ mol} = 22,4 \frac{\text{l}}{\text{mol}} = 22,4 \text{ l}$$

$$m = \frac{202,2 \text{ g}}{22,4 \text{ l}} \cdot V$$

a) $m_1 = 22,1 \text{ g}$, b) $m_2 = 34,1 \text{ g}$, c) $m_3 = 44,8 \text{ g}$
Man muß a) 22,1 g, b) 34,1 g, c) 44,8 g Kaliumnitrat zersetzen.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/77

Ma 5 ■ 1567 Aus a) folgt: Ina hilft entweder Frau Neumann oder Frau Weise. Da nach b) Carola die Helferin von Frau Neumann ist, so hilft Ina Frau Weise. Aus c) folgt: Andrea hilft Frau Heller. Somit hilft Katrin Frau Peter.

Ma 5 ■ 1568 Aus $964 : 4 = 241$ und $964 - 241 = 723$ folgt, daß nach einer Woche 723 kg Kartoffeln verkauft waren. Hierfür wurden $723 : 16 \text{ Pf} = 11\,568 \text{ Pf} = 115,68 \text{ M}$ eingenommen.

Ma 5 ■ 1569 Aus $30 \cdot 0,40 \text{ M} = 12,00 \text{ M}$ und $19,00 \text{ M} - 12,00 \text{ M} = 7,00 \text{ M}$ folgt, daß für den Einkauf von Salzsticks noch 7,00 M zur Verfügung stehen. Nun gilt $n \cdot 75 \leq 700$; wegen $9 \cdot 75 = 675 < 700$ und $10 \cdot 75 = 750 > 700$ könnten Hans und Uwe höchstens neun Päckchen Salzsticks einkaufen.

Ma 5 ■ 1570 Wegen $10\,250,00 \text{ M} - 1\,250,00 \text{ M} = 9\,000,00 \text{ M}$ betrugen die Unkosten zur Anschaffung der Betten insgesamt $10\,250,00 \text{ M} + 9\,000,00 \text{ M} = 19\,250,00 \text{ M}$. Aus $19\,250 : 385 = 50$ folgt, daß der Preis für ein Bett 50,00 M betrug. Für das erste Lager wurden somit $10\,250 : 50 = 205$ Betten, für das zweite Lager $9\,000 : 50 = 180$ Betten angeschafft.

Ma 5 ■ 1571 Angenommen, es waren n Schüler am Wandertag beteiligt; dann gilt $90 \cdot n - 150 = 80 \cdot n + 150$, $10 \cdot n = 300$, $n = 30$. Am Wandertag beteiligten sich 30 Schüler.

Ma 5 ■ 1572 Aus $50 - 26 = 24$ und $24 : 2 = 12$ folgt, daß an der Stadtrundfahrt 12 Kinder und somit 38 Erwachsene teilnahmen. Aus $38 - 2 = 36$ und $36 : 2 = 18$ folgt, daß unter den erwachsenen Teilnehmern 18 Männer und somit 20 Frauen waren.

Ma 6 ■ 1573 Angenommen, nach n Jahren ist Peters Vater doppelt so alt wie sein Sohn; dann ist Peter $(8+n)$ Jahre, sein Vater $(31+n)$ Jahre alt, und es gilt

$$\begin{aligned}2 \cdot (8+n) &= 31+n, \\ 16+2n &= 31+n, \\ n &= 15.\end{aligned}$$

Nach 15 Jahren, also im Jahre 1985, wird Peters Vater 46 Jahre, Peter selbst 23 Jahre alt sein, d. h., Peters Vater wird doppelt so alt sein wie sein Sohn Peter.

Ma 6 ■ 1574 Angenommen, Hans hat x Mark gespart; dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot x + 1,5 &= 4, \\ \frac{1}{2} \cdot x &= 2,5, \\ x &= 5.\end{aligned}$$

Somit hat Hans im letzten Monat von seinem Taschengeld 5,00 M gespart.

Ma 6 ■ 1575 Aus d) folgt: Herr B wohnt nicht in Dresden.

Aus b) folgt: Herr B wohnt nicht in Suhl, und Suhl, und er ist von Beruf nicht Elektriker.

Aus a) und b) folgt: Herr B wohnt nicht in Leipzig. Folglich wohnt Herr B in Halle.

Aus c) folgt: Herr C wohnt nicht in Suhl. Er wohnt aber auch nicht in Halle.

Aus c) und b) folgt: Da Herr C nicht in Suhl wohnt, ist er von Beruf nicht Dreher, sondern Elektriker.

Aus a) folgt: Herr C wohnt in Leipzig.

Aus a) folgt: Herr A ist nicht von Beruf Dreher.

Aus b) folgt: Herr A wohnt nicht in Suhl.

Folglich wohnt Herr A in Dresden, und Herr D wohnt in Suhl.

Ma 6 ■ 1576 Es seien m und n die zu ermittelnden natürlichen Zahlen; dann gilt

$$\begin{aligned}m \cdot n \cdot (m+n) &= 8602, \\ m \cdot n \cdot (m+n) &= 2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23.\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann man $m < n$ annehmen. Dann sind folgende Möglichkeiten einer Belegung der Variablen m und n zu untersuchen:

m	n	$m+n$
2	11	$13 < 17 \cdot 23$
2	17	$19 < 11 \cdot 23$
2	23	$25 < 11 \cdot 17$
11	17	$28 < 2 \cdot 23$
11	23	$34 = 2 \cdot 17$
17	23	$40 > 2 \cdot 11$

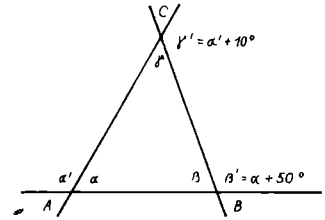
Nur die Zahlen $m=11$ und $n=23$ erfüllen die gestellten Bedingungen, und es gilt $11 \cdot 23 \cdot (11+23) = 11 \cdot 23 \cdot 34 = 2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 = 8602$.

Ma 6 ■ 1577 Es seien α' , β' und γ' die Größen der Außenwinkel des Dreiecks ABC . Aus $\alpha + \gamma = \beta'$ (Außenwinkelsatz) und $\beta' = \alpha + 50^\circ$ folgt

$\alpha + \gamma = \alpha + 50^\circ$, also $\gamma = 50^\circ$ und $\gamma' = 130^\circ$ (als Nebenwinkel).

Aus $\gamma' = \alpha' + 10^\circ$ und $\gamma' = 130^\circ$ folgt $\alpha' = 120^\circ$ und somit $\alpha = 60^\circ$. Aus $\beta' = \alpha + 50^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$

folgt $\beta' = 110^\circ$, also $\beta = 70^\circ$. Die Größen der Innenwinkel betragen 60° , 70° und 50° ; die Größen der Außenwinkel betragen 120° , 110° und 130° .



Ph 6 ■ 1578

Gegeben: $V = 0,6 \text{ m}^3 = 600 \text{ dm}^3$

$$m = 57,5 \text{ kg} \quad \rho = 2,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Gesucht: V_1 des Glases in %

Man berechnet zuerst das Volumen V_1 des Glases:

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{m}{\rho} \\ V_1 &= \frac{57,5 \text{ kg} \cdot \text{dm}^3}{2,5 \text{ kg}} \\ V_1 &= 230 \text{ dm}^3.\end{aligned}$$

Dann gewinnt man die Volumenprozent des Anteils aus Glas durch

$$\frac{600 \text{ dm}^3}{100\%} \cdot \frac{230 \text{ dm}^3}{x\%}$$

$$600 : 230 = 100 : x$$

$$x = 38,3$$

Der Ballen enthält 38,3% Glas.

Ma 7 ■ 1579 Angenommen, es wurden a Bücher zu 4,30 M, b Bücher zu 6,30 M und c Bücher zu 2,60 M gekauft; dann gilt

$$\begin{aligned}4,3a + 6,3b + 2,6c &= 36,8, \\ 43a + 63b + 27c &= 368.\end{aligned} \quad (1)$$

Ferner gilt $a + b + c = 10$, also $c = 10 - a - b$. (2)

Durch Einsetzen von (2) in (1) folgt daraus

$$43a + 63b + 26 \cdot (10 - a - b) = 368,$$

$$43a + 63b + 260 - 26a - 26b = 368,$$

$$17a + 37b = 108,$$

$$37b = 111 - 17a,$$

$$b = 3 - \frac{17a+3}{37}.$$

Nur für $a=2$ wird b ganzzahlig und positiv. Aus $a=2$ folgt $b=2$, also $c=10-2-2=6$.

Es wurden 2 Bücher zu 4,30 M, 2 Bücher zu 6,30 M und 6 Bücher zu 2,60 M gekauft, und es gilt $2 \cdot 4,30 \text{ M} + 2 \cdot 6,30 \text{ M} + 6 \cdot 2,60 \text{ M} = 36,80 \text{ M}$.

Ma 7 ■ 1580 Wegen $20^4 = 160\,000 < 810\,000 = 30^4$ müssen die vier gesuchten Zahlen größer als 20, aber kleiner als 30 sein. Da das Produkt auf die Ziffer 0 endet, muß ein Faktor durch 5 teilbar sein; das trifft in diesem Falle nur zu für die Zahl 25. Da die Quersumme 9 von 421 200 durch 9 teilbar ist, muß ein Faktor durch 9 teilbar sein; das trifft nur zu für den Faktor 27. Da 421 200 sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist, ist diese Zahl auch durch 12 teilbar; deshalb muß ein Faktor ebenfalls durch 12 teilbar sein. Das trifft nur zu für den Faktor 24. Somit lauten diese gesuchten vier Zahlen 24, 25, 26, 27, und es gilt $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 = 421\,200$.

Ma 7 ■ 1581 Angenommen, es wurden a Gold-, b Silber-, c Bronzemedailien, d vierte, e fünfte und f sechste Plätze erzielt; dann gilt $7a + 5b + 4c + 3d + 2e + f = 135$.

Wegen $a = c = d$ und $b = e$ folgt daraus

$$14a + 7b + f = 135,$$

$$7(2a + b) = 135 - f.$$

Da f Primzahl ist und $f < 10$ gilt, ist $135 - f$ nur für $f = 2$ durch 7 teilbar, und wir erhalten

$$7(2a + b) = 133,$$

$$2a + b = 19.$$

Da a und b einstellige Primzahlen sind, folgt $a = 7$ und $b = 5$. Somit gingen an die Sportler aus der DDR sieben Gold-, fünf Silber-, sieben Bronzemedailien, sieben 4., fünf 5. und zwei 6. Plätze.

Ma 7 ■ 1582 Angenommen, Katja hat a Stück Butterkuchen, b Stück Pflaumenkuchen und c Stück Törtchen gekauft; dann gilt

$$25a + 35b + 70c = 380,$$

$$5a + 7b + 14c = 76,$$

$$7 \cdot (b + 2c) = 76 - 5a.$$

Nun sind a, b, c natürliche Zahlen mit $2 \leq a, b, c \leq 4$; deshalb muß $76 - 5a$ durch 7 teilbar sein; das trifft nur zu für $a = 4$. Wir erhalten

$$7 \cdot (b + 2c) = 76 - 5 \cdot 4,$$

$$7 \cdot (b + 2c) = 56,$$

$$b + 2c = 8,$$

$$b = 8 - 2c,$$

$$b = 2 \cdot (4 - c).$$

Folglich muß b eine gerade Zahl sein, also $b = 2$ und somit $c = 3$. Katja hat vier Stück Butterkuchen, 2 Stück Pflaumenkuchen und 3 Stück Törtchen gekauft.

Ph 7 ■ 1583

Gegeben: $F_1 = 6 \text{ kp}$, $n = 3$, $G = 120 \text{ kp}$

Gesucht: F

Für den Flaschenzug gilt die Formel

$$F = \frac{F_2}{n} \quad (n \text{ ist die Zahl der tragenden Seilstücke})$$

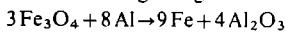
$$F = \frac{126 \text{ kp}}{3} \text{ mit } F_2 = G + F_1 = 120 \text{ kp} + 6 \text{ kp}$$

$$F = 42 \text{ kp}$$

Die Kraft $F = 42 \text{ kp}$ hält die Last im Gleichgewicht.

Ch 7 ■ 1584 a)

$$216 \text{ g } 504 \text{ g}$$



$$m_1 \quad 3000 \text{ g}$$

$$\text{NR: } 8 \text{ mol} \cdot 27 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 216 \text{ g},$$

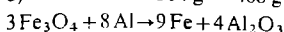
$$9 \text{ mol} \cdot 56 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 504 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_1 = 1286 \text{ g}$$

1286 g Aluminium sind mit Eisen(II,III)-oxid zu mischen.

$$b) \quad 504 \text{ g} \quad 408 \text{ g}$$



$$3000 \text{ g} \quad m_2$$

$$\text{NR: } 4 \text{ mol} \cdot 102 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 408 \text{ g}$$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$$m_2 = 2430 \text{ g}$$

2430 g Aluminiumoxid entstehen.

Fortsetzung von: Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt, Seite 61

Zur Übung verwende der Leser die Gleichung $5x^2 - 14x - 3 = 0$.

Mit Hilfe dieses Verfahrens läßt sich leicht beweisen, daß die Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ und $cy^2 + by + a = 0$ reziproke Lösungen haben:

Für beide ist die Hilfsgleichung $z^2 + bz + ac = 0$.

Damit hat man $x_1 = \frac{z_1}{a}$, $x_2 = \frac{z_2}{a}$

$$\text{und } y_1 = \frac{z_1}{c}, y_2 = \frac{z_2}{c}.$$

$$\text{Mithin gilt } x_1 \cdot y_1 = \frac{z_1 \cdot z_2}{ac} = \frac{ac}{ac} = 1$$

$$\text{und } x_2 \cdot y_2 = \frac{z_2 \cdot z_1}{ca} = 1$$

$$\text{und damit } x_1 = \frac{1}{y_2} \text{ und } x_2 = \frac{1}{y_1}.$$

L. Dimenstein, Leningrad/G. Schmidt, Leipzig

Lösungen zu: Aufgaben aus der Praxis, Seite 62

$$\Delta 1 \Delta \quad 4 \text{ h} = 4 \cdot 60 \text{ min} = 240 \text{ min};$$

$240 : 80 = 3$; alle drei Minuten verläßt ein montierter Lautsprecher das Montageband.

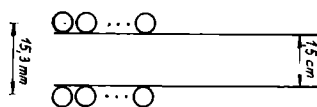
$$\Delta 2 \Delta \quad u \approx \pi \cdot (a + b) = \frac{22}{7} \cdot (7,5 + 5) \text{ cm} = 39,3 \text{ cm}.$$

$$\Delta 3 \Delta \quad a) \quad 230 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 220 \text{ cm} = 2200 \text{ mm}; n = \frac{2200}{15,3\pi} \approx 46;$$

eine Lage enthält rund 46 Windungen.

b) Werden die Windungen in zwei Lagen gewickelt, so enthält jede Lage 23 Windungen.

$$23 \cdot 0,3 \text{ mm} = 6,9 \text{ mm (Länge der Spule)}$$



$$\Delta 4 \Delta \quad a) \text{ Aus } P = U \cdot I = 2 \text{ VA und } U = 2,4 \text{ V}$$

$$\text{folgt } I = \frac{P}{U} = \frac{2 \text{ VA}}{2,4 \text{ V}} = \frac{5}{6} \text{ A}.$$

$$b) \text{ Aus } U = R \cdot I \text{ und } U = 2,4 \text{ V und } I = \frac{5}{6} \text{ A}$$

$$\text{folgt } R = \frac{U}{I} = 2,4 \text{ V} : \frac{5}{6} \text{ A} = 2,88 \Omega.$$

$$\Delta 5 \Delta \quad 9 \text{ t} = 9000 \text{ kg}; 9000 \text{ kg} : 250 \text{ kg} = 36; \text{ es können daraus 36 Aluminiumbarren gegossen werden.}$$

$$\Delta 6 \Delta \quad v = \frac{s}{t} \text{ und somit } t = \frac{s}{v} = \frac{400}{10} \text{ min}$$

= 40 min; der Gießvorgang dauert 40 Minuten.

$$\Delta 7 \Delta \quad V = \pi r^2 h; m = V \cdot \rho = \pi r^2 h \cdot \rho$$

$$= \pi \cdot 5,5^2 \text{ cm}^2 \cdot 400 \text{ cm} \cdot 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} x$$

$$102\,700 \text{ g} \approx 103 \text{ kg}$$

$$\Delta 8 \Delta \quad 8,5 \text{ t} = 8500 \text{ kg}; 3\% \text{ von } 8500 \text{ kg sind } 255 \text{ kg};$$

$$8500 \text{ kg} - 255 \text{ kg} = 8245 \text{ kg}.$$

Somit werden 255 kg Magnesium und 8245 kg Aluminium insgesamt benötigt.

$$4 \text{ t} = 4000 \text{ kg}; 2\% \text{ von } 4000 \text{ kg sind } 80 \text{ kg}; 4000 \text{ kg} - 80 \text{ kg} = 3920 \text{ kg}.$$

Es sind 80 kg Magnesium und 3920 kg Aluminium bereits vorhanden.

Der Schmelze müssen demnach noch 175 kg Magnesium und 4325 kg Aluminium zugeführt werden.

$$\Delta 9 \Delta \quad 500 \mu\text{m} = 0,0005 \text{ m};$$

$$25 \mu\text{m} = 0,000025 \text{ m};$$

$$V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1;$$

$$V_2 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2; V_1 = V_2;$$

$$b_1 = b_2$$

$$0,0005 \text{ m} \cdot b_1 \cdot 100 \text{ m} = 0,000025 \text{ m} \cdot b_2 \cdot c_2;$$

$$c_2 = \frac{0,05}{0,000025} \text{ m} = 2000 \text{ m} = 2 \text{ km}$$

Die Rohfolie wird durch das Walzen auf eine Länge von 2 km gebracht.

$$\Delta 10 \Delta \quad \text{Geg.: } v = 950 \frac{\text{m}}{\text{min}} \quad \text{Ges.: } n_A, n_s$$

$$d_A = 240 \text{ mm}$$

$$d_s = 560 \text{ mm}$$

Man berechnet die Drehzahlen aus

$$n = \frac{V}{\pi \cdot d}; n_A = \frac{V}{\pi \cdot d_A}; n_s = \frac{V}{\pi \cdot d_s}$$

$$n_A = \frac{350 \text{ m}}{0,24 \text{ m} \cdot \pi} \approx 464 \text{ (Umdrehungen je Minute)}$$

$$n_s = \frac{350 \text{ m}}{0,56 \text{ m} \cdot \pi} \approx 199 \text{ (Umdrehungen je Minute)}.$$

$$\Delta 11 \Delta \quad (1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3);$$

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 h;$$

$$h = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 1000000}{64 \pi} \text{ m} = \frac{625}{\pi} \text{ m};$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{625 \text{ m}}{60 \pi \text{ s}} \approx 3,32 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Geschwindigkeit der Kühlflüssigkeit beträgt etwa $3,32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\Delta 12 \Delta \quad 300 \text{ mm} = 3 \text{ dm}; 23 \text{ m} = 230 \text{ dm};$$

$$A = a \cdot b = 3 \cdot 230 \text{ dm}^2 = 690 \text{ dm}^2$$

$$\Delta 13 \Delta \quad 3 \text{ t} : 10 = 0,3 \text{ t}; 3 \text{ t} - 0,3 \text{ t} = 2,7 \text{ t};$$

$$2,7 \text{ t} = 2700 \text{ kg} = 2700000 \text{ g};$$

$$2700000 \text{ g} : 250 \text{ g} = 10800;$$

aus dem Rohmaterial können 10800 Rollen Haushaltsfolie hergestellt werden.

$$\Delta 14 \Delta \quad x = \frac{25}{11} \cdot 200 \text{ g} = 454 \frac{6}{11} \text{ g}$$

$$\Delta 15 \Delta \quad x = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ g} = 133 \frac{1}{3} \text{ g}$$

Lösungen zu: „1977“, Seite 66

$\Delta 1 \Delta$ a) Bekanntlich gibt es zwei natürliche Zahlen a_1 und a_2 und eine natürliche Zahl b_2 , so daß

$$a_1^2 + a_2^2 = b_2^2 \text{ gilt;}$$

man erhält nämlich für $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $b_1 = 5$
 $3^2 + 4^2 = 5^2$.

b) Wir beweisen nun mit Hilfe der vollständigen Induktion, daß es zu jeder natürlichen Zahl n mit $n \geq 2$ n natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ und eine natürliche Zahl b_n gibt, so daß $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_n^2$ gilt, was für $n=2$ bereits unter a) gezeigt wurde. Weiter nehmen wir an, daß diese Aussage für $n=k$ mit $k \geq 2$ richtig sei, und beweisen ihre Richtigkeit für $n=k+1$. Dabei nehmen wir ferner an, daß $a_k = 4m$ und $b_k = 4m+1$, wobei m eine natürliche Zahl ist. (Auch diese Annahme wurde für $n=k$ unter a) nachgewiesen.)

Dann gilt

$$\begin{aligned} b_k^2 &= (4m+1)^2 = 16m^2 + 8m + 1 = 2 \cdot 4m(2m+1) + 1 \\ &= [4m(2m+1)]^2 + 2[4m(2m+1)] + 1 \\ &= [4m(2m+1)]^2 \\ &= [4m(2m+1)+1]^2 - [4m(2m+1)]^2. \end{aligned}$$

Setzt man

$$a_{k+1} = 4m(2m+1), b_{k+1} = 4m(2m+1) + 1,$$

so folgt

$$\begin{aligned} b_k^2 &= b_{k+1}^2 - a_{k+1}^2, \text{ also} \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 &= b_{k+1}^2 - a_{k+1}^2, \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2 &= b_{k+1}^2, \end{aligned}$$

d. h., die obige Behauptung ist auch für $n=k+1$ richtig.

Da sie, wie unter a) gezeigt wurde, auch für $n=2$ richtig ist, gilt sie daher für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 2$, insbesondere also auch für $n=1977$, w. z. b. w.

▲ 2 ▲ Bekanntlich gilt für alle ungeraden natürlichen Zahlen n und alle von Null verschiedenen reellen Zahlen a und b (vgl. Tabellen und Formeln, S. 42):

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

d. h., $a^n + b^n$ ist durch $a+b$ teilbar.

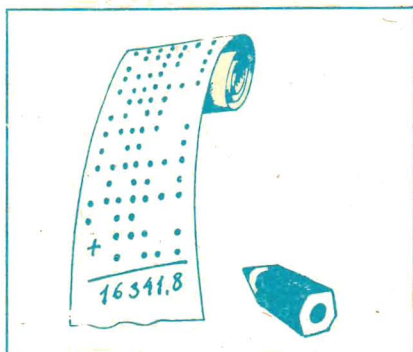
Daraus folgt, wenn man $n=1977$ setzt, wegen $1976=2 \cdot 988$

$$\begin{aligned} z &= 1^n + 2^n + \dots + 988^n + 989^n + \dots + 1975^n \\ &\quad + 1976^n + 1977^n \\ &= (1^n + 1976^n) + (2^n + 1975^n) + \dots \\ &\quad + (988^n + 989^n) + 1977^n \\ &= (1+1976)a_1 + (2+1975)a_2 + \dots \\ &\quad + (988+989)a_{988} + 1977^n, \end{aligned}$$

wobei $a_1, a_2, \dots, a_{988}$ natürliche Zahlen sind. Daher gilt

$$\begin{aligned} z &= 1977a_1 + 1977a_2 + \dots + 1977a_{988} \\ &\quad + 1977 \cdot 1977^{n-1} \\ &= 1977(a_1 + a_2 + \dots + a_{988} + 1977^{n-1}). \end{aligned}$$

d. h., die Zahl z ist durch 1977 teilbar.



Lösungen zu alpha-heiter, 3/77:

Für Schnellrechner

Prüft man die Zahlen in der ersten Zeile näher, so stellt man fest, daß es sich um Vielfache von 73 handelt. So ist z. B.

$$365 = 5 \cdot 73, 292 = 4 \cdot 73, 146 = 2 \cdot 73.$$

Es wird also eine Karte mit der Zahl $73 \cdot x_1$ ausgewählt, wobei $x_1 = 5, 4$ oder 2 ist.

In der zweiten Zahl liegen Vielfache von 137. Es wird also eine Karte mit der Zahl $137 \cdot x_2$ ausgewählt, wobei $x_2 = 5, 4$ oder 2 ist.

In der dritten Zeile liegen Vielfache von 73. Es wird also eine Karte mit der Zahl $73 \cdot x_3$ ausgewählt, wobei $x_3 = 7, 6$ oder 3 ist.

In der vierten Zeile liegen Vielfache von 137. Es wird also eine Karte mit der Zahl $137 \cdot x_4$ ausgewählt, wobei $x_4 = 7, 6$ oder 3 ist. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} 73 \cdot 137 &= 10001, \\ 73 \cdot 137 \cdot 73 \cdot 137 &= 100020001, \text{ also} \\ 73x_1 \cdot 137x_2 \cdot 73x_3 \cdot 137x_4 &= 100020001 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4. \end{aligned}$$

Der Rechenkünstler hat also nur die vier einstelligen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 miteinander im Kopf zu multiplizieren und ihr Produkt p mit 100020001 zu multiplizieren. Dazu benötigt er aber nicht das Schema der schriftlichen Multiplikation, sondern er schreibt p hin, belegt dann die nächsten vier Stellen mit $2 \cdot p$ und die letzten vier Stellen wieder mit p (falls $2 \cdot p$ bzw. p nur dreistellig ist, setzt er eine Null davor; falls $2 \cdot p$ bzw. p nur zweistellig, zwei Nullen).

Zur Erleichterung ist jeweils auf den Karten durch Punkte unter der Zahl gekennzeichnet, um das Wievielfache von 73 bzw. 137 es sich handelt. Ein Punkt links bedeutet 5 Einheiten, je ein Punkt rechts 1 Einheit.

In unserem Beispiel ist

$$\begin{aligned} 365 &= 5 \cdot 73, 548 = 4 \cdot 137, \\ 219 &= 3 \cdot 73, 822 = 6 \cdot 137, \\ \text{also } x_1 &= 5, \quad x_2 = 4 \\ \text{also } x_3 &= 3, \quad x_4 = 6, \\ p &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 360. \end{aligned}$$

Man erhält das Produkt der vier dreistelligen Zahlen

$$\begin{aligned} &360 \ 0720 \ 0360 \\ \text{oder in der üblichen Weise geschrieben} \\ &36007200360. \end{aligned}$$

Wie viele Lochkombinationen?

a) In der ersten Reihe gibt es drei Möglichkeiten, die Löcher zu verteilen, nämlich je ein Loch rechts oder links sowie zwei Löcher. Für jede Lochkombination in der ersten Reihe können wir eine der drei Möglichkeiten des Lochens der zweiten Reihe auswählen. Das sind für die erste und zweite Reihe insgesamt $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ Kombinationen. Für jede der drei Möglichkeiten in der dritten Reihe zu lochen, können wir eine der 9 Kombinationen der ersten beiden Reihen wählen, so daß sich für die ersten drei Reihen insgesamt

$3^2 \cdot 3 = 3^3 = 27$ Kombinationen ergeben. Fahren wir so fort, dann erhalten wir für alle sechs Reihen schließlich $3^6 = 243$ Kombinationen.

b) Durch das Weglassen der Löcher in einer Reihe gibt es jetzt vier Möglichkeiten der Anordnung pro Reihe. Entsprechend unseren vorangegangenen Überlegungen $4^6 = 4096$ Kombinationen. Die Variante, daß alle Reihen kein Loch aufweisen, stellt keine Entwertung dar, so daß nur 4095 Kombinationen bleiben.

Kopftausch

Planimetrie

Humorvoller Setzer

Vor mir ein leeres Blatt Papier, in der Limonadenflasche nur noch wenig Inhalt,

in meinem Kopf kluge Gedanken, in meiner rechten Hand ein abgebrochener Stift, in der Kekspackung noch genau zwei zerbrochene Kekse,

in meinem Gehirn eine Lösungsidee, im Patronenfüller keine Tinte, im Tafelwerk nichts zu finden.

Das Kfz-Nummernschild

Aus dem 16fachen für die mittleren Ziffern ergibt sich:

Summe 0 1 2 3 4 5 6 7...
16fach 0 16 32 48 64 80 96 112...
Nur 96 erfüllt alle Bedingungen.

Primzahlzwilling: 59 61

5. Buchstabe im Alphabet: E, 1. Buchstabe: A
Kennzeichen heißt: EA 59-61

Kryptarithmetik

991	992	993
+ 991	+ 992	+ 993
1982	1984	1986
987 - 789 = 198		
+ + -		
15 - 15 = 0		
1002 - 804 = 198		

$$\begin{aligned} 1054 + 9482 &= 10536; 1065 + 9578 = 10643; \\ 1065 + 9582 &= 10647; \\ 1076 + 9658 &= 10734; 1076 + 9682 = 10754; \\ 1087 + 9745 &= 10832; \\ 1087 + 9756 &= 10843 \\ 711 \cdot 4025 &= 2861775 \end{aligned}$$

Wir wägen

Das Wägestück zu 50 g benötigt man gar nicht. Man legt auf eine Schale das 200-g-Wägestück und gibt alle Graupen so auf die Waage, daß sie im Gleichgewicht ist. Dann befinden sich in einer Schale 4,4 kg, in der anderen 4,6 kg. Beim zweiten Wägen teilen wir analog die 4,6 kg in 2,4 kg und 2,2 kg. Nun sind von den 2,2 kg nur noch 200 g abzu ziehen.

Abzählreim

Zahl: 7; Lösungswort: Binomische Formel

Spiele mit Hölzchen

Bedeutende Mathematiker haben schon früh für einzelne Spiele mathematische Theorien geschaffen. Bekannt ist z. B. der 1654 zwischen *Pascal* und *Fermat* geführte Briefwechsel über Glücksspiele (Roulette, Würfeln), den man als den Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung ansehen darf. Aber erst in unserem Jahrhundert entstand die Theorie der Spiele als eine mathematische Disziplin. Diese Theorie betrachtet Spiele, in denen neben dem Zufall der oder die Spieler Einfluß auf das Spiel nehmen (z. B. Skat, Mensch-ärgere-dich-nicht) oder es sogar allein entscheiden (Schach, Go). Dabei versucht die Theorie, das bestmögliche Verhalten eines Spielers, die sogenannte optimale Strategie, zu ermitteln. Die typischen Probleme der Spieltheorie lassen sich oft an einfachen, aber recht interessanten Spielen erläutern. Das haben wir in den zentralen Arbeitsgemeinschaften Mathematik des Saalkreises ausgenutzt, um uns auf spannende Weise mit modernem mathematischem Denken vertraut zu machen. Im folgenden soll über einige Spiele, mit denen wir uns befaßt haben, berichtet werden.

Wir schließen dabei an ein Hölzchenspiel an, über das in der *alpha* 4/76 berichtet wurde. Im Gegensatz zu dem dort beschriebenen Spiel sind die Gewinnmöglichkeiten für die einzelnen Spieler hier unabhängig von der Anzahl der Hölzchen. Eine beliebige Anzahl von Hölzchen ($n > 3$) ist in eine Reihe gelegt worden, so daß sich die Hölzchen, vom ersten und letzten abgesehen, an beiden Enden berühren (Abb. 1). Zwei Spieler *A* und *B* nehmen abwechselnd Hölzchen, und zwar: entweder ein Hölzchen oder zwei sich berührende Hölzchen. Sieger ist, wer das letzte Hölzchen erhält. Hier gibt es eine Anleitung zum Handeln (Gewinnstrategie), die den zuerst waghenden Spieler zum Sieg führt. Um das einzusehen, numerieren wir die Hölzchen von links beginnend von 1 bis n . Wenn n ungerade ist, so liegt rechts und links vom mittleren Hölzchen, das die Nummer $\frac{1}{2}(n+1)$ hat, die gleiche Anzahl von Hölzchen. Entnimmt *A* das mittlere Hölzchen, dann verbleiben zwei gleiche Reihen. Durch die Spielregeln ist *B* gezwungen, nur aus einer Reihe Hölzchen zu entnehmen. *A* kann in der anderen Reihe „symmetrisch“ antworten, indem er dort das-

selbe tut. Führt *A* im weiteren nur symmetrische Züge als Antwort auf die Züge von *B* aus, so wird *A* zwangsläufig den letzten Zug haben. Wenn n gerade ist, so muß *A* die Hölzer mit den Nummern $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}+1$ wegnehmen (Abb. 1), womit wie eben zwei gleich lange zusammenhängende Hölzchenreihen verbleiben.

Bei dem nächsten Hölzchenspiel wird eine beliebige Anzahl von Hölzchen ($n > 4$) in der vorigen Art kreisförmig angeordnet (Abb. 2). Beide Spieler entnehmen wieder abwechselnd ein Hölzchen oder zwei zusammenhängende Hölzchen. Sieger ist wieder, wer das letzte Hölzchen entnimmt. *A* entnimmt als erster aus dem Kreis ein Hölzchen oder zwei zusammenhängende Hölzchen. Danach liegt eine Reihe wie in der ersten Variante vor. *B* entnimmt als erster aus dieser Reihe Hölzchen. Wenn er sich wie der erste Spieler im oben beschriebenen Spiel verhält, so wird er gewinnen.

Abschließend betrachten wir ein Spiel, das den oben beschriebenen Spielen sehr ähnlich ist. Es wird am besten mit Halmsteinen o. ä. gespielt, die auf die Ecken eines Sterns gesetzt werden (Abb. 3). Der Stern in Abb. 3 hat zwölf Ecken. Ihr könnt jedoch auch einen Stern mit mehr oder weniger Ecken wählen. (Wie werden dann die Ecken untereinander verbunden?) Die Spielregeln sind folgende:

A und *B* entnehmen abwechselnd je einen Stein oder zwei Steine, die durch eine gerade Linie verbunden sind. Wer den letzten Stein nimmt, hat das Spiel gewonnen. Der Zusammenhang mit dem eben untersuchten Spiel ergibt sich ganz einfach, wenn wir uns vorstellen, daß die Verbindungsstrecken des Sterns Fäden sind. Dann läßt sich der Stern zu einem Kreis „entwirren“ (Abb. 4). Früher hatten wir einen Kreis aus sich berührenden Hölzchen. Jetzt ist an dessen Stelle ein Kreis aus Halmsteinen getreten, wobei zwei sich berührende Hölzchen nun zwei durch eine Linie verbundenen Steine entsprechen (wie z. B. die Ecken mit den Zahlen 1 und 6). Damit ist die optimale Strategie für den zweiten Spieler klar. Da es auf die Bezeichnung der Ecken nicht ankommt, wollen wir annehmen, daß der erste Spieler *A* entweder den Stein auf der Ecke 1 oder die Steine auf den Ecken 1 und 6 nimmt. Damit zerfällt der Kreis in eine Reihe, und der zweite Spieler *B* nimmt nun die mittleren Steine entweder auf der Ecke 7 oder auf den Ecken 7 und 12. *B* antwortet in der Folge symmetrisch auf die Züge von *A* in der oben näher beschriebenen Art.

Dr. R. Thiele, Vorsitzender
des Mathematikklubs des Saalkreises

Bild 1

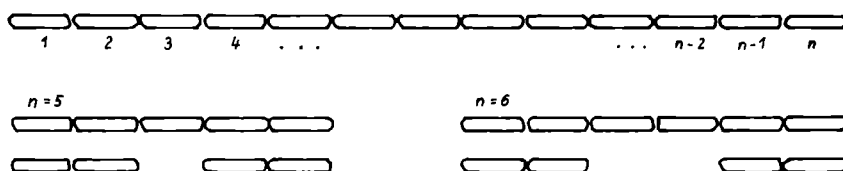


Bild 2

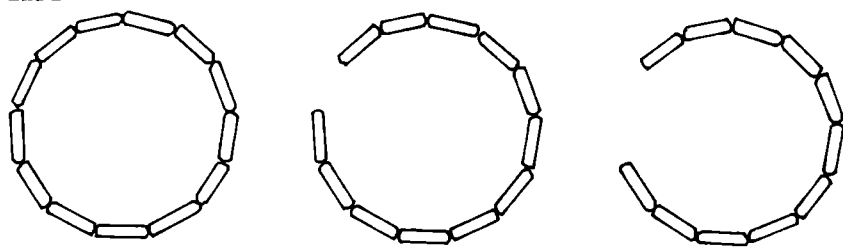


Bild 3

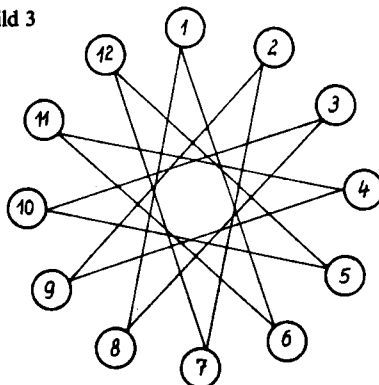
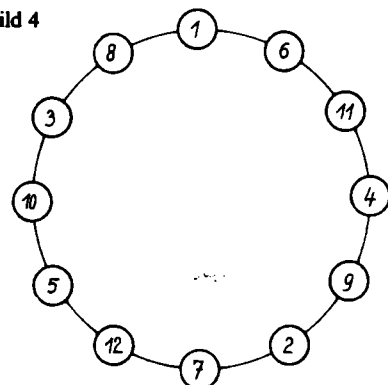


Bild 4



Nachgedacht – mitgemacht

Aufgaben, die das Leben schreibt

Klasse 5

1976 wird in der Volkswirtschaft unserer Republik Material im Werte von 6,8 Mill. Mark eingespart. Darunter fallen z. B. 150 000 t Walzstahl, 3 000 t Kupfer, 1 000 t PVC und 6 000 t Baumwolle.

- Welcher Wert könnte im 5-Jahrplan-Zeitraum bis 1980 erzielt werden, wenn die Einsparung von 1976 von Jahr zu Jahr um 200 000 M überboten würde?
- Wieviel Mill. Tonnen Kupfer könnten beispielsweise von 1976 bis 1980 eingespart werden, wenn die Einsparung von 1976 von Jahr zu Jahr um 100 t überboten würde?

Klasse 6

Zur Erschließung der Rohstoffreserven sollen für die Braunkohleförderung Abraumförderbrücken mit einer Förderleistung von 120 Mill. m³ im Jahr bei einer Abtraghöhe von 60 m bereitgestellt werden.

- Welche Förderleistung wird von einer solchen Brücke täglich erbracht? Rechne mit 360 Tagen im Jahr!
- Welche Strecke rückt die Maschine täglich weiter, wenn die Abtraghöhe 60 m und die Abtragbreite 4 000 m beträgt?

Klasse 7

Jährlich sind im Fünfjahrplan 1976/80 neben dem genutzten Oberflächenwasser etwa 140 Mill. m³ Grundwasser für die Haushalte und die Industrie aufzubereiten bzw. bereitzustellen.

- Berechne die Grundwassermenge, die durchschnittlich für einen Tag bereitzustellen ist!
- Eine Hauptwasserleitung hat einen Durchmesser von 800 mm. Welche Wassermenge fließt täglich durch diese Leitung, wenn eine Geschwindigkeit von 1,8 m/s angenommen wird?
- Wieviel Prozent der täglich bereitzustellenden Grundwassermenge sind das?

Klasse 8

Um den erhöhten Energiebedarf auch in Spitzenbelastungszeiten abzudecken, wurden in einigen Kraftwerken Energieblöcke mit Gasturbinenantrieb aufgebaut, die nur etwa 15 Minuten Anfahrzeit brauchen. Durch den hohen Gasverbrauch während des Betriebes

ist die Versorgung der übrigen Erdgasabnehmer nicht sichergestellt. Deshalb muß ein Gaszwischenpeicher im Kraftwerk gebaut werden; für ihn stehen zwei Möglichkeiten zur Auswahl.

1. Möglichkeit:

Das zu speichernde Erdgas wird auf -160°C abgekühlt, dabei verflüssigt es sich und nimmt nur noch $\frac{1}{625}$ seines ursprünglichen Volumens ein. Es wird in einem gekühlten Kugelbehälter von 5 m Durchmesser aufbewahrt.

2. Möglichkeit:

Das Erdgas wird bei Normaldruck in einem zylindrischen Scheibengasbehälter aufbewahrt. Sein Durchmesser beträgt 20 m, seine Höhe 35 m.

- Wieviel m³ flüssiges Erdgas nimmt der Kugelbehälter auf?
- Wieviel m³ Erdgas sind das bei Normaldruck?
- Wieviel m³ Erdgas nimmt der zylindrische Behälter auf?
- Vergleiche die Fassungsvermögen und die Oberflächen der beiden Behälter!

Klasse 9

Zur weiteren Verbesserung der Arbeits- und Lebensbedingungen der Werktätigen im Bezirk Halle sah die Direktive des VIII. Parteitages der SED zum Fünfjahrplan 1971/75 u. a. die Schaffung von etwa 56 000 Wohnungen durch Neu-, Um- und Ausbau vor. Unsere gewachsene ökonomische Kraft gestattet es, daß in der Direktive des IX. Parteitages eine Zahl von 80 000 Wohnungen genannt werden kann. Beim Neubau soll eine Steigerung um 40,5% und bei Um- und Ausbauten um 50% erreicht werden.



1975 Menge	%	Winkel Grad- maß	Bogen- maß	1980 Menge	%	Winkel Grad- maß	Bogen- maß
Stickstoff- düngemittel 720 kt N		134,3		940 kt N	44,3		
Phosphor- düngemittel 500 kt P ₂ O ₅		1,6267		530 kt P ₂ O ₅			1,5708
Kalidüngemittel 710 kt K ₂ O	36,8			650 kt K ₂ O		110,5	

1% Einsparung

bedeutet gegenwärtig



um 40,5% und bei Um- und Ausbauten um 50% erreicht werden.

Berechnen Sie die Anzahl der Wohnungen, die durch Neubau bzw. durch Um- und Ausbau auf Grund der Direktiven des VIII. und IX. Parteitages geschaffen werden sollten bzw. sollen! Runden Sie alle Ergebnisse auf eine Genauigkeit von 1 000 Wohnungen!

Klasse 10

Die umfassende Chemisierung der Landwirtschaft ist eine wichtige Voraussetzung für die Intensivierung der landwirtschaftlichen Produktion. Der enorm gestiegene Bedarf an hochwertigen Stickstoffdüngemitteln soll vor allem durch Intensivierungsmaßnahmen im VEB Düngemittelkombinat Piesteritz gedeckt werden.

Stellen Sie in zwei Kreisdiagrammen das in der DDR 1975 bereitgestellte und das für 1980 geplante Aufkommen an Stickstoff-, Phosphor- und Kalidüngemitteln dar! Vervollständigen Sie dazu die Tabelle! E. Stöckel