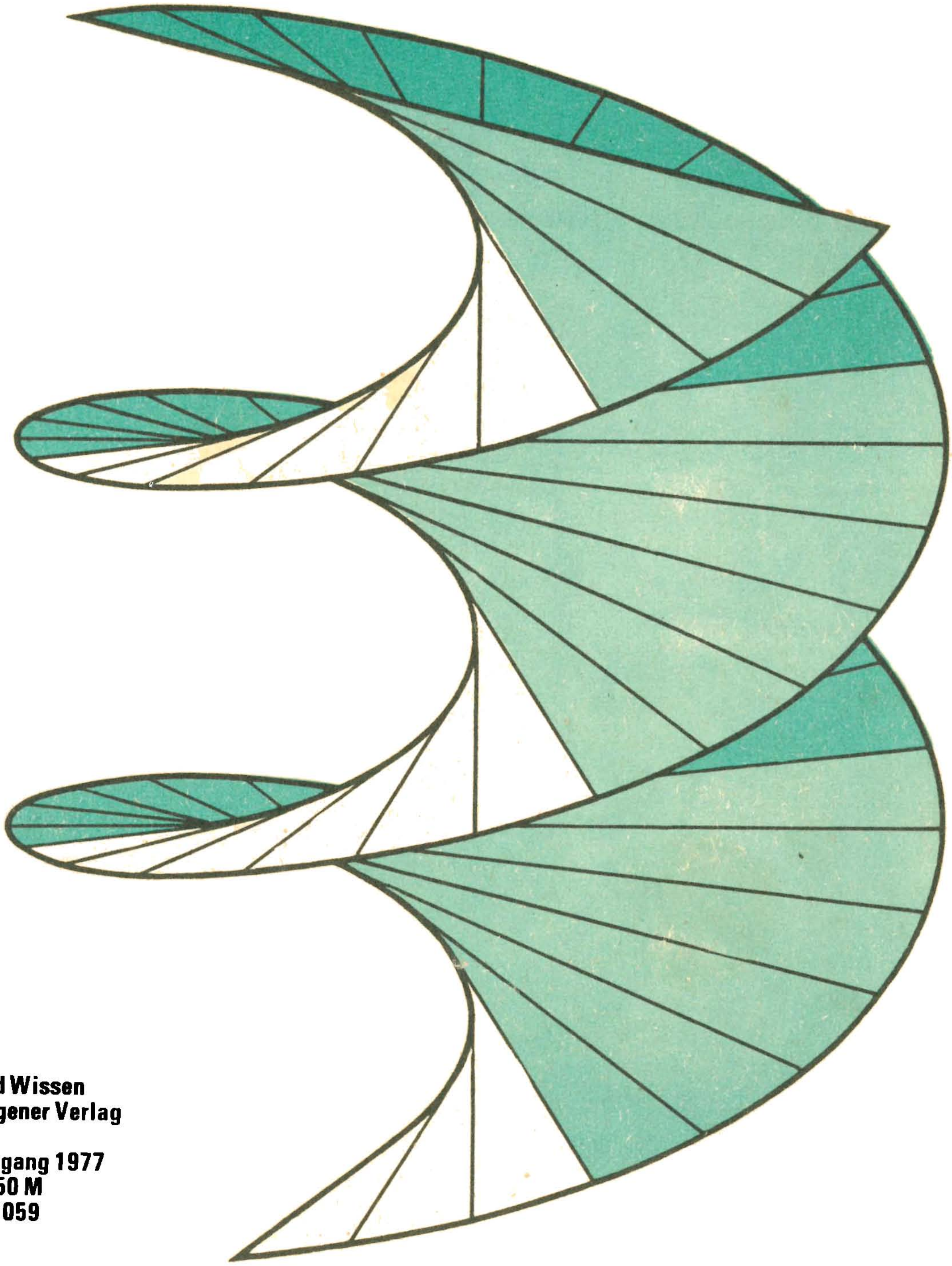
alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Mathe-AG Osternienburg (S. 78); Leipniz, Leipzig (S. 81/82); J. Lehmann, Leipzig (S. 85)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 23. April 1977

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Verknüpfungen in der Ebene

In dem Beitrag „Die ‚Uhr-Addition' und andere Verknüpfungen" (alpha 6/76) haben wir die Begriffe *Verknüpfung*, *Trägermenge* und *Verknüpfungsgebilde* kennengelernt:

Wir sprechen von einer Verknüpfung $\circ$ über einer nichtleeren (Träger-)Menge M, wenn jedem (geordneten) Paar (a, b) von Elementen $a, b \in M$ genau ein Element $c \in M$ zugeordnet wird. Statt

$\circ : (a, b) \to c$

haben wir kürzer (und in Anlehnung der uns durch die vier Grundrechenarten vertrauten Schreibweise)

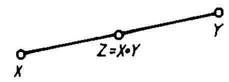
$a \circ b = c$

geschrieben. $(M, \circ)$ wurde dann ein Verknüpfungsgebilde genannt.

Bestand im oben genannten Beitrag unsere Trägermenge M fast ausschließlich aus Zahlen, so wollen wir jetzt zeigen, daß es auch in der „Welt der Punkte" eine Fülle von Verknüpfungen zu entdecken gibt. Seien deshalb im folgenden X und Y beliebige Punkte einer Ebene. Diese Ebene bezeichnen wir mit ε.

Wenn wir $X \circ Y$ als den Mittelpunkt Z der Strecke $\overline{XY}$ definieren, haben wir bereits ein erstes „geometrisches" Verknüpfungsgebilde gefunden (Klasse 6).

Bild 1



$X \circ Y =_{Df} Z$ mit $Z \in \overline{XY}$ und $\vec{XZ} = \vec{ZY}$.

(Der Einfachheit halber benutzen wir im folgenden auch *gerichtete* Strecken.)

Daß $(\varepsilon, \circ)$ in der Tat die geforderten Eigenschaften (Abgeschlossenheit von ε bzgl. $\circ$ und Eindeutigkeit von $X \circ Y$) besitzt, ist leicht einzusehen, da die Vorschrift (Definition) nicht aus der Trägermenge hinausführt ($Z \in \varepsilon$) und der Mittelpunkt Z der Strecke $\overline{XY}$ eindeutig bestimmt ist.

Als wir den Begriff der Verknüpfung definiert haben, ist der Fall $X = Y$ ausdrücklich mit einbezogen worden. Es erhebt sich für unser Verknüpfungsgebilde $(\varepsilon, \circ)$ deshalb die Frage, was wir unter $X \circ X$ verstehen wollen. Wir legen fest, daß $X \circ X$ wieder der Punkt X selbst sein soll – das kommt unserer Vorstellung entgegen, indem wir nämlich $X \circ X$ als den Mittelpunkt der entarteten Strecke $\overline{XX}$ (die also auf den Punkt X „zusammengeschrumpft" ist) auffassen.

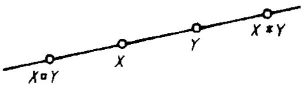
Aufgabe 1:

Vergleiche die Verknüpfungsgebilde $(\varepsilon, \circ)$ und $(P, \vartriangle)$, wobei $x \vartriangle y =_{Df} \frac{x+y}{2}$ das arithmetische Mittel der reellen Zahlen x und y ist! Welche Gemeinsamkeiten kannst du entdecken?

Die Spiegelung von Punkten können wir als Ausgangspunkt für weitere „geometrische" Verknüpfungen wählen:

Für beliebige Punkte X, $Y \in \varepsilon$ definieren wir $X * Y$ als den Spiegelpunkt von X an Y sowie $X \; Y$ als den Spiegelpunkt von Y an X. In beiden Fällen vereinbaren wir wieder, daß $X * X = X$ und $X \; X = X$ für alle $X \in \varepsilon$ gelten soll.

Bild 2



$X * Y =_{Df} Z$ mit $Z \in XY$ und $\vec{XZ} = 2 \cdot \vec{XY}$,
$X \; Y =_{Df} Z$ mit $Z \in XY$ und $\vec{ZY} = 2 \cdot \vec{XY}$.

Aufgabe 2:

Überlege dir, ob für alle X, $Y \in \varepsilon$ die Beziehungen
$X \circ (X * Y) = X * (X \circ Y) = Y$ und
$(X \circ Y) \; Y = (X \; Y) \circ Y = X$ gelten.
Veranschauliche dir diese Beziehungen!

Das folgende Beispiel ist dergestalt, daß es uns gleich unendlich viele Verknüpfungsgebilde liefert:

Für alle Punkte X, $Y \in \varepsilon$ definieren wir $X \bullet Y$ als den Punkt Z der Geraden XY, so daß

$\vec{XZ} : \vec{ZY} = a : b$ gilt,

wobei a und b beliebige, aber feste ganze Zahlen sind mit $b \neq 0$ und $a : b \neq -1$. Auch hier setzen wir für alle $X \in \varepsilon$:

$X \bullet X = X$.

Wir sehen sofort, daß das *Teilverhältnis* (Klasse 8) uns im Falle $a : b = 1$ die bereits angeführte Verknüpfung $\circ$ (Konstruktion des Mittelpunktes) liefert.

Aufgabe 3:

a) Zeige, daß die Definition von $\bullet$ neben der Konstruktion des Mittelpunktes ($\circ$) auch die Konstruktion der jeweiligen Spiegelpunkte ($*$; $\square$) beinhaltet!

b) Wie läßt sich die Verknüpfung $\bullet$ interpretieren, wenn der Fall $a = 0$ vorliegt?

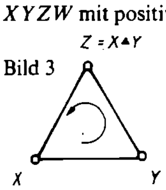
c) Untersuche die analoge Fragestellung für $b \to 0$!

Weitere Verknüpfungsgebilde mit ε als Trägermenge erhalten wir z. B. auf die folgende Weise:

1) Für alle Punkte X, $Y \in \varepsilon$ definieren wir $X \blacktriangle Y$ als den dritten Punkt Z des gleichseitigen Dreiecks XYZ mit positivem Umlaufsinn (Bild 3).

2) Für alle Punkte X, $Y \in \varepsilon$ definieren wir $X \blacksquare Y$ als den dritten Punkt Z des Quadrates $XYZW$ mit positivem Umlaufsinn (Bild 4).

Bild 3



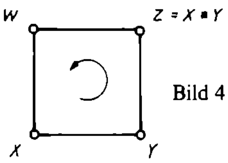
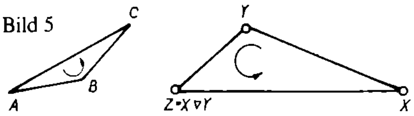


Bild 4

3) Sei ABC ein vorgegebenes (festes) Dreieck in ε; X, $Y \in \varepsilon$, beliebig.

Wir definieren $X \triangledown Y$ als den Punkt $Z \in \varepsilon$, so daß die Dreiecke ABC und XYZ gleichsinnig ähnlich sind.

Bild 5



In allen drei Fällen fordern wir wieder, daß für $X = Y$, $X \blacktriangle X = X$, $X \blacksquare X = X$ bzw. $X \triangledown X = X$ sein soll.

Aufgabe 4:

a) Warum kann man in den Definitionen für $\blacktriangle$, $\blacksquare$ und $\triangledown$ nicht auf die Forderungen „mit positivem (negativem) Umlaufsinn" bzw. „gleichsinnig" verzichten?

b) Zeige, daß die Verknüpfung $\triangledown$ eine Verallgemeinerung der Verknüpfungen $\blacktriangle$ und $\blacksquare$ ist!

c) Gib weitere Möglichkeiten einer Verallgemeinerung von $\blacktriangle$ an!

Aufgabe 5*:

Die Verknüpfung $\triangledown$ läßt sich auf die folgende Weise in der komplexen Ebene interpretieren: Für die Punkte des vorgegebenen Dreiecks ABC wählen wir

$A : a = 0$, $B : b = 1$, $C : c = r \cdot e^{i\phi}$,

wobei r und ϕ beliebige, aber feste reelle Zahlen mit $\phi \neq k \cdot \pi$, k ganzzahlig, $r \neq 0$, sind. Zeige, daß dann für alle komplexen Zahlen x, y $\quad x \triangledown y = (1 - c)x + c\,y$ gilt!

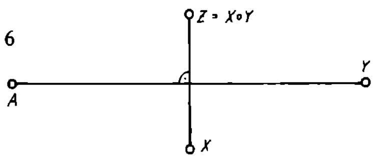
(Die drei *-Aufgaben sind für diejenigen Schüler aufgenommen worden, die sich bereits mit komplexen Zahlen beschäftigt haben. Zur Lösung dieser Aufgaben verweise ich auf A. I. Markuschewitsch: Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen, Berlin 1965 [Kleine Ergänzungsreihe, Band XVI].)

Bisher haben wir für verschiedene Verknüpfungen nach Möglichkeit auch verschiedene Verknüpfungssymbole benutzt (z. B. „$\circ$", „$\bullet$", „$\vartriangle$", „$\blacktriangle$", „$\triangledown$", „$*$", „$\;$", „$\blacksquare$"). Im folgenden wollen wir uns jedoch allein auf das Zeichen „$\circ$" beschränken. Die Gefahr, daß wir dann eventuell Verknüpfungen identifizieren könnten, die voneinander verschieden sind, besteht kaum, da aus dem jeweiligen Zusammenhang immer klar hervorgeht, auf welches Verknüpfungsgebilde wir uns beziehen.

Sei A ein beliebiger, aber fester Punkt in ε. Als Trägermenge wählen wir dann $M = \varepsilon \setminus \{A\}$, d. h., der Punkt A wird ausgeschlossen, er wird zur Verknüpfung nicht zugelassen.

Für alle Punkte X, $Y \in \varepsilon \setminus \{A\}$ definieren wir schließlich $X \circ Y$ als den Spiegelpunkt von X an der Geraden AY. Für $X = Y$ setzen wir $X \circ X =_{Df} X$.

Bild 6

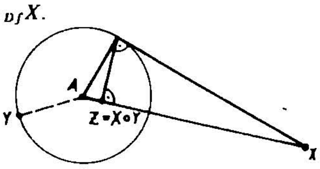


(Analog liefert natürlich auch die Spiegelung von Y an AX eine Verknüpfung über $\varepsilon\setminus\{A\}$.)

Aufgabe 6*:
Zeige, daß sich in der komplexen Ebene diese Verknüpfung $\circ$ in dem Ausdruck

$$x\circ y=\frac{y-a}{\overline{y-a}}\cdot(\overline{x-a})+a \text{ widerspiegelt!}$$

Auch im nächsten Beispiel schließen wir für die zu wählende Trägermenge einen Punkt A der Ebene ε aus.
Für alle $X,\ Y\in\varepsilon\setminus\{A\}$ definieren wir diesmal $X\circ Y$ als die Spiegelung (Inversion) von X an dem Kreis, der durch Y geht und A als Mittelpunkt besitzt. Im Falle $X=Y$ setzen wir $X\circ X=_{Df}X$.

Bild 7


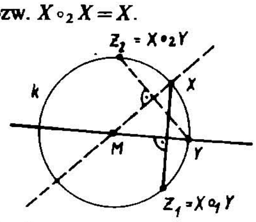
Aufgabe 7*:
a) Zeige, daß in der komplexen Ebene dieser Verknüpfung der Ausdruck

$$x\circ y=\frac{(y-a)\,(\overline{y-a})}{\overline{x-a}}+a \text{ entspricht!}$$

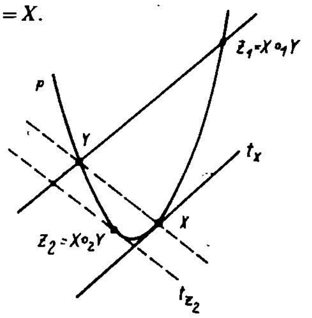
b) Verlegen wir den Punkt A in den Ursprung ($a=0$) und fordern wir $|y|=1$, so vereinfacht sich obiger Ausdruck auf

$$x\circ y=\frac{1}{\bar{x}} \qquad \text{(Spiegelung am Einheitskreis).}$$

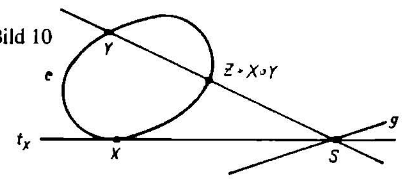
In den bisher betrachteten Beispielen haben wir bei der Wahl der Trägermengen keine oder nur endlich viele Punkte der Ebene ε ausgeschlossen (nämlich in zwei Fällen jeweils einen Punkt). Jetzt werden wir Verknüpfungsgebilde kennenlernen, deren Trägermengen zwar immer noch unendlich viele Elemente (Punkte) enthalten, andererseits aber auch unendlich viele Punkte der Ebene nicht zur „Konkurrenz" zulassen.
Sei k ein Kreis in ε, M sein Mittelpunkt.
1) Für alle Punkte $X,\ Y\in k$ definieren wir $X\circ_1 Y$ als den Spiegelpunkt von X an der Geraden MY.
2) Für alle Punkte $X,\ Y\in k$ definieren wir $X\circ_2 Y$ als den Spiegelpunkt von Y an der Geraden MX.
Für $X=Y$ setzen wir jeweils wieder $X\circ_1 X=X$ bzw. $X\circ_2 X=X$.

Bild 8


Aufgabe 8:
a) Welches Verknüpfungsergebnis liefert der Fall, wenn $X\in MY$ bzw. $Y\in MX$ gilt?
b) Zeige, daß für alle $X,\ Y\in k$ die Beziehung
$(X\circ_1 Y)\circ_1 Y=Y\circ_2(Y\circ_2 X)=X$ gilt!
Sei p eine Parabel in ε.
1) Für alle Punkte $X,\ Y\in p$ definieren wir $X\circ_1 Y$ als den Punkt $Z\in p$, so daß die Gerade YZ zur Tangente t_X (im Punkt X) parallel ist.
2) Für alle Punkte $X,\ Y\in p$ definieren wir $X\circ_2 Y$ als den Punkt $Z\in p$, so daß die Gerade XY zur Tangente t_Z (im Punkt Z) parallel ist.
Für alle $X\in p$ setzen wir $X\circ_1 X=X$ sowie $X\circ_2 X=X$.

Bild 9


Aufgabe 9:
Zeige, daß für alle $X,\ Y\in p$ die Beziehung $(X\circ_1 Y)\circ_2 Y=(X\circ_2 Y)\circ_1 Y=X$ gilt!
Sei e eine Ellipse in ε; g eine Gerade, die mit e keinen Punkt gemeinsam hat.
Für alle Punkte $X,\ Y\in e$ definieren wir $X\circ Y$ als den Punkt $Z\in e$ mit $Z\neq Y$, so daß die Geraden g, YZ und die Tangente t_X (an e im Punkt X) einen gemeinsamen Schnittpunkt S besitzen. Für $X=Y$ setzen wir $X\circ X=X$; ist YS ebenfalls Tangente an e (in Y), setzen wir $X\circ Y=Y$.

Bild 10


Aufgabe 10:
Veranschauliche dir, ob anstelle von e auch k (Kreis), p (Parabel) oder h (Hyperbel) bzgl. der definierten Verknüpfung $\circ$ abgeschlossen sind!
Fordern wir in unserem Beispiel, daß die Gerade g mit der Ellipse e genau einen Punkt A gemeinsam hat, also Tangente an e ist, gewinnen wir eine weitere Verknüpfung:
Für alle $X,\ Y\in e\setminus\{A\}$ wird definiert $X\circ_1 Y=_{Df}Z$ mit $Z\neq Y$ genau dann, wenn $g\cap t_X=g\cap YZ$. Für $X=Y$ fordern wir $X\circ_1 X=X$.

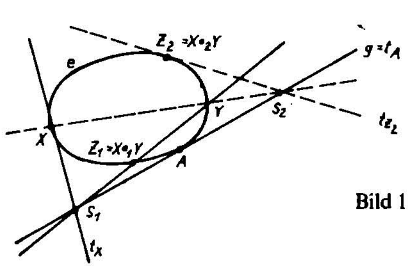
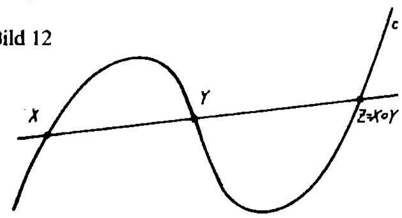


Bild 11

Aufgabe 11:
Auch in diesem Fall können wir einen beliebigen Kegelschnitt als Trägermenge wählen! Veranschauliche dir, daß jeweils Verknüpfungsgebilde vorliegen!
Definieren wir für alle $X,\ Y\in e\setminus\{A\}$ $X\circ_2 Y$ als den Punkt $Z\in e\setminus\{A\}$, so daß die Geraden g, XY und die Tangente t_Z einen gemeinsamen Schnittpunkt S besitzen, erhalten wir über derselben Trägermenge wie zuvor eine neue Verknüpfung $\circ_2$ ($X\circ_2 X=_{Df}X$) – in Bild 11 gestrichelt dargestellt.

Aufgabe 12:
In den vorangegangenen Verknüpfungsgebilden meidet die Gerade g den Kegelschnitt entweder oder sie berührt ihn in genau einem Punkt. Überlege dir, ob auch für den Fall, daß die Gerade g den Kegelschnitt schneidet, eine Trägermenge für die oben definierten Verknüpfungen gefunden werden kann!
Daß auch andere Kurven als nur Kegelschnitte Trägermenge eines Verknüpfungsgebildes sein können, beweist unser letztes Beispiel:
Sei c eine (nichtausgeartete) Kubik in ε (ohne ihre singulären Punkte, falls solche existieren).
Für alle $X,\ Y\in c$ mit $X\neq Y$ definieren wir $X\circ Y$ als den dritten Schnittpunkt Z der Geraden XY mit c. Für den Fall $X=Y$ definieren wir $X\circ X$ als den zweiten Schnittpunkt Z der Tangente t_X mit c (falls er existiert!).

Bild 12


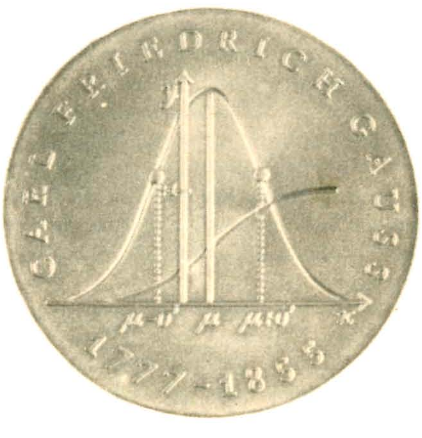
Aufgabe 13:
a) Überlege dir, wie die ausgezeichneten Punkte der Kubik c (Extrema und Wendepunkte) in die Definition der Verknüpfung $\circ$ einzubeziehen sind!
b) Führe den Nachweis für die Beziehung

$$X\circ(X\circ Y)=(Y\circ X)\circ X=Y$$

für alle $X,\ Y\in c$.

Ingmar Lehmann

Gauß-Gedenkmünze



Aus Anlaß des 200. Geburtstages von *C. F. Gauß* gab die Staatsbank der DDR eine 20-Mark-Gedenkmünze heraus (siehe Foto). Masse: 20,9 g – Durchmesser: 33 mm – Legierung: 500 Ag/500 Cu (siehe auch Text III. U.-Seite rechts unten)

Eine Aufgabe von Prof. Dr.

Pjurwja Mutschkajewitsch Erdnijew

Kalmückische Staatliche Universität in Elista

▲1632▲ Wir bilden Ketten von Verallgemeinerungen:

Kette 1

a) Gegeben sei ein Rechteck von 9 cm Länge und 4 cm Breite. Dieses Rechteck ist so in 2 Teile zu zerlegen, daß man daraus ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm zusammensetzen könnte.

b) Gegeben sei ein Rechteck von 8 cm Länge und 4,5 cm Breite. Dieses Rechteck ist so in 2 Teile zu zerlegen, daß man daraus ein Quadrat zusammensetzen könnte.

(Wovon hängt die Anzahl der Treppenstufen in den Figuren ab? Für welches Verhältnis der Seiten des Ausgangsrechtecks kann die Aufgabe nicht gelöst werden?)

c) Der Leser möge die Aufgabe (siehe oben) für den Fall des Raumes verallgemeinern. Welche kleinste Anzahl von Teilen ist notwendig, in die man einen Quader mit den Kantenlängen 32 mm, 75 mm und 90 mm zerlegen muß, um daraus einen Würfel mit der Kantenlänge 60 mm zusammensetzen zu können?

Kette 2

a) In einer Kiste befinden sich zwei Sorten Äpfel. Es ist die kleinste Anzahl an Äpfeln zu bestimmen, bei der man bei einmaliger Entnahme von Äpfeln aus der Kiste mindestens zwei Äpfel einer Sorte hat!

b) Die Aufgabe ist unter derselben Bedingung zu lösen (d. h., daß bei einmaliger Entnahme mindestens zwei Äpfel einer Sorte aus der Kiste genommen werden), wenn sich in der Kiste Äpfel von 3, 4, n Sorten befinden.

c) Wir verallgemeinern die Aufgabe, indem wir andere Parameter nehmen:

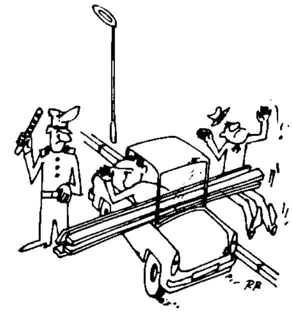
In einer Kiste befinden sich unter den entnommenen Äpfeln bestimmt k Äpfel. Es ist die kleinste Anzahl an Äpfeln zu bestimmen, die entnommen werden muß, damit sich unter den entnommenen Äpfeln bestimmt k Äpfel einer Sorte befinden.

d) Wir schlagen dem Leser vor, diese Aufgabe weiter zu verallgemeinern:

...damit unter den entnommenen Äpfeln bestimmt k Äpfel jeweils aus zwei Sorten sind (die Anzahl der Äpfel in der Kiste ist nicht beschränkt).

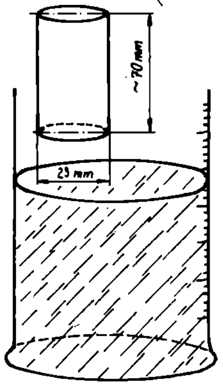
Handelt es sich hierbei um die äußerst mögliche Verallgemeinerung, wenn die Aufgabe keine Lösung mehr besitzt?

Zur Fehlerrechnung bei physikalischen Messungen



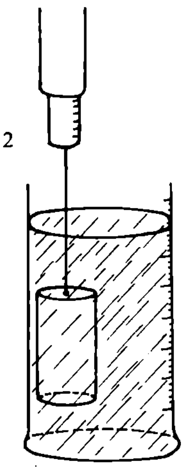
Ein Meßauftrag lautet, das Volumen eines zylindrischen Körpers $\left(V=\frac{\pi}{4}d^2h\right)$ zu bestimmen.

Bild 1



$$V=\frac{\pi}{4}d^2\cdot h$$

Bild 2



$$V=\frac{G_L-G_W}{\sigma_w}$$

Der Körper hat schätzungsweise einen Durchmesser von 23 mm und eine Höhe von 70 mm, also ein Volumen von etwa 30 cm^3. Das Volumen des Körpers kann man nach verschiedenen Methoden ermitteln:

1. Methode: aus der Flüssigkeitsverdrängung beim Eintauchen des Körpers in eine Meßflüssigkeit,

2. Methode: durch Berechnung aus den gemessenen geometrischen Größen,

3. Methode: als Quotienten aus dem Auftrieb, den der Körper beim Eintauchen in ein Medium erfährt, und der Wichte dieses Mediums.

Bei der dritten Methode wird der Körper zumeist einmal in Luft und einmal im Wasser gewogen. Der Auftrieb ist dem Betrage nach gleich dem Gewicht der vom Körper verdrängten Stoffmenge. Den Auftrieb, den der Körper in Luft erfährt, kann man vernachlässigen, da er weniger als 1 mp ausmacht. Der Auftrieb im Wasser ist dann gleich der Gewichtsdifferenz zwischen beiden Wägungen. Ist die Messung bei $t=20\,°\mathrm{C}$ durchgeführt, so beträgt die Dichte des Wassers $\varrho=0{,}998\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Da das Gewicht eines Körpers von der Masse 1 Gramm für unsere geographische Breite gleich 1 Pond ist, stimmen die Zahlenwerte der in $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ gemessenen Dichten und der in $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$ gemessenen Wichten überein.

Bei der Durchführung der Messungen nach diesen drei Methoden wird man bemerken, daß die Meßergebnisse auf Grund der verschiedenen Meßmethoden sich in ihrer Genauigkeit unterscheiden. Darum ist es für den Physiker und Techniker äußerst wichtig, sich Gedanken über die Genauigkeit einer Messung zu machen. Wie weit kann man dem Meßergebnis vertrauen? Welche Einflüsse verfälschen das Meßergebnis, gehen Fehler zufällig oder systematisch in das Meßergebnis ein? Wie breit ist der Meßunsicherheitsbereich, um bei einer vorgegebenen statistischen Sicherheit den wahren Wert der Meßgröße einzuschließen?

Die Messungen zur Volumenbestimmung des zylindrischen Körpers wollen wir im folgenden in Gedanken nachvollziehen, um einen ersten Einblick in die Grundproblematik der Meßtechnik zu gewinnen und den Sinn einer Fehlerrechnung zu begreifen.

Einfache Fehlerrechnung für zufällige Fehler bei gemessenen Größen

Die einfachste Methode zur Volumenbestimmung des Körpers ist, den Körper in einen Meßzylinder zu tauchen und die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge abzulesen (1. Methode). Man wird dazu einen möglichst schlanken Meßzylinder verwenden, um eine feine Skalenteilung zu haben.

Bei einer Wiederholung des Versuches wird man bemerken, daß man ein etwas anderes

Ergebnis erhält (siehe dazu Beispiel 1). Eine Meßwertreihe zeigt gewisse Schwankungen innerhalb der Meßwerte, die durch eventuell vorhandene Luftblasen am Versuchskörper, herausgerissene Wassertropfen, ungenaues Ablesen der Skale (Parallaxenfehler), unexakte Skalenteilung des Meßzylinders, ungleiche Dicke der Glaswand des Meßzylinders usw. zustandekommen.

Durch die Unzulänglichkeiten des Messenden, durch Einflüsse der Umwelt, durch das gewählte Meßverfahren und durch die Meßapparatur selbst ist diese wie auch jede andere Messung mit Fehlern behaftet. In der Physik gilt deshalb der Grundsatz: Jede Auswertung einer physikalischen Messung, die nicht zugleich mit dem Ergebnis auch eine Angabe des Vertrauensbereiches bei vorgegebener statistischer Sicherheit enthält, ist wertlos.

Halten wir fest, daß bei der Aufnahme einer Meßwertreihe eine Einzelmessung kaum reproduzierbar ist, daß mehrere Messungen insgesamt gesehen streuen. Wenn sich nun die einzelnen Meßwerte um einen mittleren Wert herum gruppieren, dabei große Abweichungen selten, kleine Abweichungen vom mittleren Wert häufig vorkommen, wenn positive und negative Abweichungen vom mittleren Wert gleich oft auftreten, dann spricht man von *zufälligen Fehlern*. Das ist in unserer Messung der Fall (siehe dazu die Meßwertreihe im Beispiel 1).

In unmittelbarer Nähe dieses mittleren Wertes muß der wahre Wert der Meßgröße liegen. Dieser wahre Wert aber bleibt trotz vieler Einzelmessungen unbekannt; er ist ein Grenzwert, dem sich der Physiker durch ausgewählte Meßapparaturen, wohldurchdachte Meßmethoden und äußerste Sorgfalt in der Durchführung der Messung zu nähern versucht. Durch kritisches Abwägen der gewonnenen Meßwerte in Hinblick auf Fehlereinflüsse und durch Ansetzen einer Fehlerrechnung bei vorgegebener statistischer Sicherheit gibt der Physiker anstelle des wahren Wertes der Meßgröße einen *wahrscheinlichsten Wert mit seinem Vertrauensbereich* an.

Häufig wird ein Meßergebnis als „richtiger Wert" bezeichnet. Diese Bezeichnung aber ist problematisch, da sie die logisch einwandfreien Begriffe *wahr* und *wahrscheinlich* verwischt. Wir wollen deshalb den Ausdruck „richtiger Wert" im folgenden vermeiden.

Natürlich gibt es in der Physik wie in der Mathematik richtige gleich wahre Werte, dann nämlich, wenn sie auf einer Definition beruhen. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° – das ist kein experimentell ermittelter Wert, sondern er beruht auf der Festlegung des Vollkreises zu 360°. Ebenso ist das elektrische Wärmeäquivalent, die Umrechnung von Kalorie in Wattsekunde (oder besser in Joule) definiert und kein experimenteller Wert, 1 kcal = 4186,8 J.

● Nach Überlegungen von Gauß ist der *wahrscheinlichste Wert* einer Meßwertreihe das arithmetische Mittel der einzelnen Meßwerte. Um den *Vertrauensbereich* dieses arithmetischen Mittels der einzelnen Meßwerte anzugeben, werden in der Physik die Standardabweichung *s* (das ist der mittlere quadratische Fehler der Einzelmessungen) und daraus der Vertrauensbereich $\bar{s}$ (das ist der mittlere quadratische Fehler des Mittelwertes) errechnet. *Der Vertrauensbereich gilt als das Genauigkeitsmaß für die Meßwertreihe.* Da aber zur Bestimmung der Standardabweichung und des Vertrauensbereiches ein verhältnismäßig großer mathematischer Aufwand nötig ist, werden wir uns im folgenden auf eine einfache Fehlerrechnung, eine Größtfehlerrechnung, beschränken.

Bei der einfachen Fehlerrechnung gilt die *Meßunsicherheit* als das Genauigkeitsmaß für die Meßwertreihe. Hierzu werden als erstes die sogenannten *absoluten Fehler* ermittelt. (Der „wahre" absolute Fehler ist genauso unbekannt wie der „wahre" Wert. Man kann nur die scheinbaren Fehler als Differenz zwischen dem einzelnen Meßwert und dem wahrscheinlichsten Wert bilden. Da die Addition der scheinbaren Fehler Null oder einen sehr kleinen Wert ergeben muß, es in der Fehlerrechnung nur auf die *Beträge* der scheinbaren Fehler ankommt, kann man sie im Sinne der mathematischen Operation „absoluter Betrag" als *absolut* bezeichnen.)

Entsprechend der Definition des wahrscheinlichsten Wertes als arithmetisches Mittel der einzelnen Meßwerte geben wir die Meßunsicherheit *u* als arithmetisches Mittel der absoluten Fehler an:

● Die *Meßunsicherheit u* ist das arithmetische Mittel der absoluten Fehler (bei Nichtbeachtung der systematischen Fehler).

● Das *Meßergebnis* ist die Summe aus dem wahrscheinlichsten Wert (arithmetisches Mittel der einzelnen Meßwerte) und der Meßunsicherheit (arithmetisches Mittel der absoluten Fehler):

$$V = \bar{V} \pm \Delta V.$$

Eine Meßgröße ist also nur dann sinnvoll angegeben, wenn das Meßergebnis gleich der Summe aus dem wahrscheinlichsten Wert und der Meßunsicherheit ist, da in den Fehlergrenzen der wahre Wert mit großer Wahrscheinlichkeit, in unserem Beispiel mit 95% statistischer Sicherheit, liegt.

Neben der Angabe der Meßunsicherheit als additives Glied im Meßergebnis ist es auch üblich, die Meßunsicherheit im Verhältnis zum wahrscheinlichsten Wert auszudrücken, den *prozentualen* Fehler zu bilden:

$$V = \bar{V}\left(1 \pm \frac{\Delta\bar{V}}{\bar{V}} \cdot 100\%\right).$$

Zusammenfassend sollen die neuen Begriffe noch einmal an einer graphischen Darstellung verdeutlicht werden: Die Häufigkeit eines Meßergebnisses ist als Funktion des Meßergebnisses aufgetragen. Auf der Abszissenachse sind die Begriffe aus der Fehlerrechnung markiert.

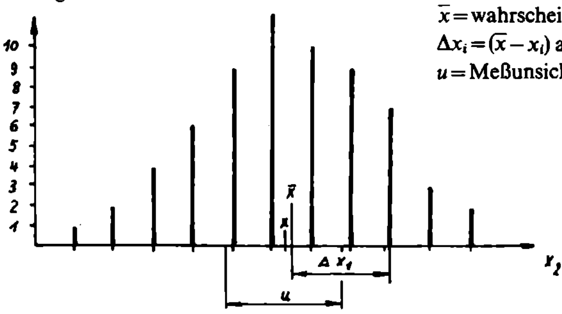
Diese Fehlerrechnungsbegriffe wollen wir nun auf die Meßwertreihe des Beispiels 1 anwenden.

Beispiel 1:
Volumenmessung durch Wasserverdrängung

Nr.	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{\lvert V-\bar{V}\rvert}{\text{ml}}$
1	30,8	0,14
2	30,7	0,04
3	30,9	0,24
4	30,5	0,16
5	30,6	0,06
6	30,6	0,06
7	30,6	0,06
8	30,7	0,04
9	30,5	0,16
10	30,7	0,04
	30,66	0,10

$\bar{V} = 30{,}66$ ml
$\bar{V} = 0{,}11$ ml
$V = (30{,}7 \pm 0{,}1)$ ml
$\varepsilon = \frac{0{,}10}{30{,}66} \cdot 100\% = 0{,}3\%$

Bei der Berechnung des Meßergebnisses von Beispiel 1 ist darauf zu achten, daß die Meßunsicherheit nicht genauer angegeben wird, als es die Messung zuläßt. Durch Ausrechnen vieler Stellen wird eine Genauigkeit vorgetäuscht, die physikalisch nicht realisiert ist. Im allgemeinen sollten Fehler höchstens auf zwei Stellen berechnet werden. Andererseits muß natürlich die Genauigkeit der Messung ausgenutzt werden, und es dürfen nicht durch Run-



x = wahrer unbekannter Wert
$\bar{x}$ = wahrscheinlichster Wert
$\Delta x_i = (\bar{x} - x_i)$ absoluter scheinbarer Fehler
u = Meßunsicherheit

Bild 3

den Ziffern wegfallen, die eine physikalische Bedeutung haben. Auf keinen Fall darf man eine Null als kleinste Ziffer einfach weglassen, wenn diese einen physikalischen Sinn hat. *Beispiel:* Eine Länge wird mit einer Meßlatte mit mm-Teilung gemessen. Es läßt sich ein halbes Millimeter schätzen. Dann lautet z. B. der Meßwert: $l=(52{,}\underset{.}{0}\pm 0{,}5)$ mm. (Die unterpunktete Ziffer ist fehlerbehaftet.) Der wahrscheinlichste Wert und die Meßunsicherheit werden in gleichen Einheiten angegeben.

Einfache Fehlerrechnung für zufällige Fehler bei berechneten Größen

a) *Größen, die durch Produktbildung berechnet werden*

Um das Volumen des Körpers aus seinen geometrischen Abmessungen zu bestimmen, muß man seine Höhe und seinen Durchmesser ermitteln. Zur Höhenmessung wird man einen Meßschieber, zur Bestimmung des Durchmessers eine Bügelmeßschraube verwenden. Der Meßschieber erlaubt mit Hilfe des Nonius noch 0,1 mm abzulesen, die Bügelmeßschraube durch ihre Ringteilung 0,01 mm. Die Skalen lassen zu, eine halbe Einheit zu schätzen.
Da der zylindrische Körper vermutlich sowohl im Durchmesser als auch in der Höhe kleine Unebenheiten aufweist, sind wiederum Meßwertreihen aufzunehmen (siehe dazu Beispiel 2). Zur Berechnung des Volumens müssen die fehlerbehaftete Höhe und das Quadrat des fehlerbehafteten Durchmessers miteinander multipliziert werden. Es besteht nun die Frage, wie sich der Gesamtfehler einer physikalischen Größe berechnet, die sich aus Meßwertreihen zwischen verschiedenen direkt und voneinander unabhängig gemessenen Größen *multiplikativ* zusammensetzt.
Es gilt

$$y\pm\Delta y=(a\pm\Delta a)(b\pm\Delta b)$$
$$y\pm\Delta y=a\cdot b\pm\Delta a\cdot b\pm\Delta b\cdot a\pm\Delta a\cdot\Delta b$$

Das Glied $\Delta a\cdot\Delta b$ als Produkt kleiner Größendifferenzen kann wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden.
Der absolute Fehler beträgt:

$$\pm\Delta y=\pm\Delta a\cdot b\pm\Delta b\cdot a$$

Da $y=a\cdot b$ ist, beträgt der relative Fehler:

$$\pm\frac{\Delta y}{y}=\pm\frac{\Delta a}{a}\pm\frac{\Delta b}{b}$$

● Der relative Größtfehler eines *Produktes* aus direkt und voneinander unabhängig gemessenen Größen ist gleich der *Summe* der relativen Fehler ihrer Faktoren.
Bei der Bestimmung der Meßunsicherheit in Beispiel 2 müssen wir diesen Satz anwenden (siehe Beispiel 2).

Physikalische Größen, die als Produkt aus anderen physikalischen Größen gebildet werden, sind in der Physik recht häufig; erinnert sei an die physikalischen Größenarten Kraft, Drehmoment, mechanische Arbeit, elektrische Leistung usw.

Beispiel 2:
a) *Volumenbestimmung durch Berechnung aus den gemessenen geometrischen Größen*

Nr.	$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{(h-\bar{h})}{\text{mm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{(d-\bar{d})}{\text{mm}}$
1	69,80	0,00	23,620	0,005
2	69,90	0,10	23,615	0,000
3	69,85	0,05	23,605	0,010
4	69,80	0,00	23,620	0,005
5	69,75	0,05	23,625	0,010
6	69,75	0,05	23,610	0,005
7	69,80	0,00	23,610	0,005
8	69,70	0,10	23,605	0,010
9	69,80	0,00	23,620	0,005
10	69,85	0,05	23,620	0,005
	69,80	0,04	23,615	0,006

$$\frac{\Delta\bar{h}}{\bar{h}}\cdot 100\%=0{,}06\%$$

$$\frac{\Delta\bar{d}}{\bar{d}}\cdot 100\%=0{,}03\%$$

$$\frac{\Delta\bar{V}}{\bar{V}}\cdot 100\%=0{,}06\%+2\cdot 0{,}03\%=0{,}1\underset{.}{2}\%$$

$$\bar{V}=30{,}576\ \text{cm}^3\approx 30{,}58\ \text{cm}^3$$
$$V=30{,}58\,(1+0{,}12\%)\ \text{cm}^3$$
$$V=(30{,}58\pm 0{,}03)\ \text{cm}^3$$

b) *Größen, die durch Summenbildung berechnet werden*

Setzt sich die berechnete Größe aus *additiven* Gliedern zusammen, so ist der absolute Fehler einer Summe (oder Differenz) von Meßwertreihen aus direkt und voneinander unabhängig gemessenen Größen gleich der *Summe* der absoluten Fehler der Summanden.
Bei der Volumenbestimmung nach der 3. Methode ist der Auftrieb gegeben als Gewichtsdifferenz zwischen der Wägung des Körpers in Luft und der in Wasser. Folglich ist die Meßunsicherheit des Auftriebes gleich der Summe der Meßunsicherheiten der Gewichtsbestimmungen in Luft und in Wasser:

$$u_A=u_{GL}+u_{GW}.$$

Die Fehlerabschätzung

Bei vielen physikalischen Messungen sind nicht persönliche Unachtsamkeiten und zufällige äußere Einflüsse die entscheidende Fehlerursache, sondern vielmehr die Ablese- und Anzeigegenauigkeit der Meßgeräte selbst. Dann müssen die Skalenteilung und die Güteklasse der Meßgeräte beachtet werden; die Aufnahme einer Meßwertreihe erübrigt sich. Bei einer Masse-, Gewichts-, Längen-, Stromstärke- oder Spannungsmessung genügt es, eine korrekte Haupt- und eine Kontrollmessung durchzuführen, die, falls die beiden Ergebnisse voneinander abweichen, nochmals wiederholt werden muß. Die im vorigen Abschnitt behandelte einfache Fehlerrechnung ist dagegen bei Zeitmessungen mit der Stoppuhr (persönliche Gleichung etwa 0,2 s), Volumenbestimmungen mit dem Meßzylinder oder bei Dickenmessungen von unebenen Körpern erforderlich. Bei der Fehlerabschätzung bezieht man sich auf die Hauptmessung, der Größtfehler wird in Hinblick auf die Skalenteilung, auf die kleinste Meßeinheit oder auf die Güteklasse des Meßgerätes abgeschätzt.

● Das *Meßergebnis bei der Fehlerabschätzung* setzt sich als Summe aus dem *einen* Meßwert und der Meßunsicherheit, dem *geschätzten Größtfehler*, zusammen.
Im Beispiel 3 ist das Volumen des zylindrischen Körpers als Quotient aus dem Auftrieb und der Wichte der vom Körper verdrängten Stoffmenge zu bestimmen:

$$V=\frac{G_L-G_W}{\sigma_W}.$$

Die Gewichtsbestimmungen führen wir über Massenvergleiche an der Analysenwaage durch; am gleichen Ort (g=const.) verhalten sich die Gewichte zweier Körper wie ihre Massen. Die verwendete Waage schlägt bei Überbelastung mit 10 mg nur noch geringfügig aus. Der Größtfehler bei der Wägung ist demnach auf ± 5 mg zu schätzen (siehe Beispiel 3).
Bei der Gesamtfehlerabschätzung des Volumens vernachlässigen wir den Fehler der Dichte (oder Wichte) des Wassers, da er kleiner als $\frac{10^{-3}\,\text{g}}{\text{cm}^3}$ ist, so daß nur die beiden additiven Glieder zu beachten sind.
In Beispiel 3 ist das Meßergebnis der Volumenbestimmung durch Auftriebsmessung ausgerechnet.

Beispiel 3:
Volumenbestimmung durch Auftriebsmessung

$$G_L=(42{,}385\pm 0{,}005)\ p$$
$$G_W=(11{,}840\pm 0{,}005)\ p$$

$$\bar{A}=30{,}545\ p$$
$$\sigma_W=0{,}998\ \frac{p}{\text{cm}^3}$$
$$\bar{V}=30{,}606\ \text{cm}^3$$
$$u_V=u_{GL}+u_{GW}$$
$$u_V=\pm 0{,}005\ p\pm 0{,}005\ p$$
$$u_V=\pm 0{,}01\ p$$
$$V=(30{,}61\pm 0{,}01)\ \text{cm}^3$$
$$\varepsilon_V=0{,}03\%$$

Zusammenfassung

Um die Ergebnisse der Volumenbestimmungen des zylindrischen Körpers nach den drei Meßmethoden vergleichen zu können, sind sie nochmals aufgeführt:

$$V_1=(30{,}7\pm 0{,}1)\ \text{cm}^3$$
$$V_2=(30{,}58\pm 0{,}03)\ \text{cm}^3$$
$$V_3=(30{,}61\pm 0{,}01)\ \text{cm}^3$$

Wir erkennen, daß die Meßergebnisse auf Grund der verschiedenen Meßmethoden sich in ihrer Genauigkeit unterscheiden. Die exakteste Meßmethode ist die durch Auftriebsmessung, die gröbste die durch Flüssigkeitsverdrängung.

Wo liegen die jeweiligen Fehlergrenzen?

$\frac{(V-u)}{cm^3}$	$\frac{V}{cm^3}$	$\frac{(V+u)}{cm^3}$
30,6	30,7	30,8
30,55	30,58	30,61
30,60	30,61	30,62

Bei einer Wichtung der Messungen würde vermutlich der wahrscheinlichste Wert bei 30,605 cm³ liegen.

Bei den bisherigen Betrachtungen blieben *systematische* Fehler unberücksichtigt, z. B. beachteten wir nicht die Anzeigegenauigkeiten der Meßgeräte (Welche Fehlertoleranz hatte die Bügelmeßschraube? War die Nullstellung sauber justiert?), eventuell beschädigte Wägestücke (oder bei anderen Messungen: mangelnde Reinheit der zu untersuchenden Substanzen, der Wärmeaustausch mit der Umgebung bei kalorischen Versuchen usw.).

● *Systematische* Fehler lassen sich durch Anbringen von Korrektionen berichtigen oder durch eine Größtfehlerabschätzung erfassen. Systematische Fehler haben unter gleichen Bedingungen den gleichen konstanten Wert. Die systematischen Fehler werden zu den zufälligen Fehlern addiert. Der wahrscheinlichste Wert soll frei von systematischen Fehlern sein, so daß die *Meßunsicherheit* allgemein als *Summe* aus dem arithmetischen Mittel der absoluten Fehler und dem abgeschätzten systematischen Fehler besteht.

Bei der Lösung unseres Meßauftrages, das Volumen eines zylindrischen Körpers nach drei verschiedenen Methoden zu bestimmen, mußten wir auf Grund der verschiedenen Meßmethoden sowohl die Fehlerrechnung als auch die Fehlerabschätzung anwenden. Wir merken uns, daß man sich auf die Fehlerabschätzung beschränken kann, wenn zufällige Fehler, wie die Unzulänglichkeit der Sinnesorgane, die Reibung bei mechanischen Bewegungen, Erschütterungen, Temperaturschwankungen oder Schwankungen der Netzspannung, so klein sind, daß eine Meßwertreihe keinen Fehler anzeigen würde, oder wenn nur wenige, weniger als 6 Meßwerte vorliegen oder wenn die systematischen Fehler des Meßergebnisses nicht korrigiert werden können. *U. Manthei*

Aufgaben zur Fehlerrechnung

▲1▲ Das durchschnittliche Fassungsvermögen eines Eßlöffels ist zu ermitteln. Folgende Meßwertreihe wurde aufgenommen: Gib das vollständige Meßergebnis an!

1. 15,5 ml	6. 16,0 ml
2. 15,0 ml	7. 15,5 ml
3. 15,5 ml	8. 15,7 ml
4. 15,7 ml	9. 15,3 ml
5. 15,3 ml	10. 15,5 ml

▲2▲ Wie berechnet sich der Gesamtfehler einer physikalischen Größe, die sich als Quotient aus zwei Meßwertreihen zusammengesetzt? – Solche physikalischen Größen sind z. B. Wichte, Geschwindigkeit und elektrischer Widerstand.

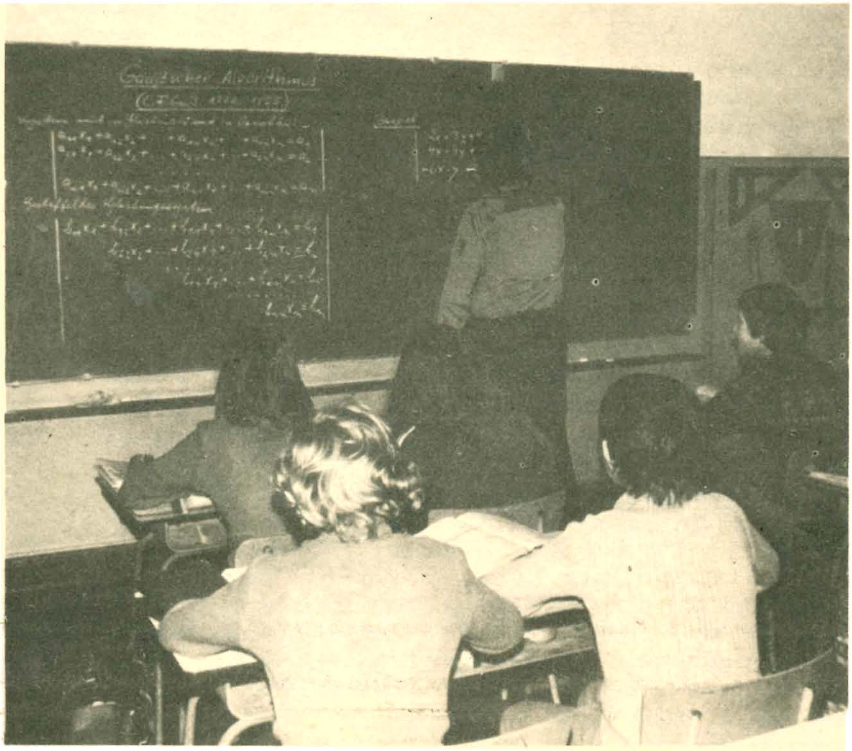
▲3▲ Die Dichte von Kupfer soll ermittelt werden. Der Meßgegenstand, ein Kupferstück, hat die Masse $\bar{m} = 34{,}5$ g und das Volumen $\bar{V} = 3{,}8$ cm³. Die Massebestimmung wurde mit einer Meßunsicherheit $u_m = \pm 0{,}5$ g, die Volumenbestimmung mit einer Meßunsicherheit $u_V = \pm 0{,}3$ cm³ durchgeführt. Prüfe, ob der Tabellenwert für Kupfer $\varrho_{Cu} = 8{,}9\,\frac{g}{cm^3}$ innerhalb der Meßunsicherheit liegt!

▲4▲ Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt $c = 2{,}9979 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$. Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man mit $\bar{c} = 3 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}$ rechnet?

Gauß-Erinnerungsplakette

Allen Teilnehmern der zentralen Gauß-Ehrung wurde eine Gauß-Erinnerungsplakette (Böttger-Porzellan, braun, 50 mm Durchmesser, ohne materielle Anerkennung, Auflage 4000 Stück) überreicht (siehe Foto Seite 92). Anläßlich der Olympiade Junger Mathematiker der DDR – 4. Stufe, DDR-Olympiade – hielt Nationalpreisträger *Prof. Dr. H. Reichardt*, Berlin einen Festvortrag zu: *Gauß und die Praxis.* Alle Teilnehmer der DDR-Olympiade erhielten die Erinnerungsplakette.

AG Mathematik Osternienburg (Kl. 10) bei der Behandlung des „Gaußschen Algorithmus“



Wir lösen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorithmus

Teil 2

(Fortsetzung aus Heft 3/77)

Bei der Lösung von m Gleichungen mit n Variablen ($m \leqq n$) können zwei Fälle auftreten.

1. Fall: Das Verfahren bricht nach $m-1$ Schritten ab, weil keine weiteren Gleichungen vorhanden sind.

Als „reduziertes System" erhält man das dem Ausgangssystem äquivalente der Form

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n &= a_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n &= a_2^{(2)} \\ x_3 + \ldots + a_{3n}^{(3)} x_n &= a_3^{(3)} \\ &\vdots \\ x_m + a_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + a_{mn}^{(m)} x_n &= a_m^{(m)} \end{aligned}$$

Die Variablen $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ sind frei wählbar (es sind sogenannte „freie Parameter"); die Variablen $x_m, \ldots, x_1$ werden dann in der üblichen Weise berechnet. Man erhält also keine eindeutige Lösung, sondern unendlich viele Lösungen. Im Falle $n=m$ ist die Lösung eindeutig bestimmt.

2. Fall: Das Verfahren bricht nach $(r-1) < (m-1)$ Schritten ab, weil in den restlichen Gleichungen die Koeffizienten aller Variablen verschwinden.

Das „reduzierte" System hat dann die Form

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n &= a_1^{(1)} \\ &\vdots \\ x_r + a_{r,r+1}^{(r)} x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r)} x_n &= a_r^{(r)} \end{aligned}$$

In diesem Falle können nun auch alle restlichen Absolutglieder (rechte Seite) Null sein, d. h., es kann gelten $a_{r+1}^{(r)} = 0, \ldots, a_m^{(r)} = 0$. Dann kann man die Variablen $x_{r+1}, \ldots, x_n$ frei wählen und die restlichen in der üblichen Weise ausrechnen. Das System ist wiederum lösbar, aber nicht eindeutig.

Falls für mindestens ein Absolutglied $a_i^{(r)} \neq 0$ ($i \in \{r+1, \ldots, m\}$) gilt, kommt man zu einem Widerspruch ($0 = a_2^{(r)}$), und das System ist nicht lösbar.

Man kann also feststellen:

1. Ein Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn sich bei der Reduktion keine Widersprüche ergeben, d. h., wenn neben Gleichungen, die wenigstens eine Variable enthalten, höchstens noch Identitäten der Form $0=0$ auftreten.

2. Wenn Lösbarkeit vorliegt, und das Verfahren nach $r-1$ Schritten ($r-1 \leqq m-1$) abbricht, dann können $m-r$ Variable frei gewählt werden („freie Parameter"), die restlichen Variablen werden in der üblichen Weise berechnet.

c) Beispiele

1.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 &= 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 7 \end{aligned}$$

liefert als „reduziertes System"

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{4}{3}x_3 - \tfrac{1}{3}x_4 &= \tfrac{2}{3} \\ x_2 - \tfrac{11}{5}x_3 + \tfrac{17}{5}x_4 &= -\tfrac{1}{5} \\ x_3 - \tfrac{8}{9}x_4 &= -\tfrac{6}{9}. \end{aligned}$$

Es liegt der erste Fall vor, x_4 ist frei wählbar. Als Lösungen erhält man

$$x_3 = \frac{8}{9}x_4 - \frac{2}{3}$$

$$x_2 = -\frac{13}{9}x_4 + \frac{19}{15}$$

$$x_1 = -\frac{4}{9}x_4 + \frac{267}{135}.$$

Falls $x_4 = 9$ gewählt wird, erhält man also

$$x_4 = 9,\ x_3 = 7\frac{1}{3},$$

$$x_2 = -11\frac{11}{15} \text{ und } x_1 = -\frac{273}{135}.$$

2. Bei der Reduktion des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 30 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 15x_3 &= -42 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 - x_3 &= 10 \\ x_2 - 6x_3 &= -12 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Es liegt der zweite Fall vor, und es gilt auch $a_3^{(3)} = 0$ (das restliche Absolutglied ist Null). Das System ist lösbar, die Variable x_3 ist frei wählbar. Man erhält

$$x_2 = 6x_3 - 12$$
$$x_1 = -3x_3 + 18.$$

Falls $x_3 = 1$ gewählt wird, ergibt sich als spezielle Lösung $x_3 = 1$, $x_2 = -6$ und $x_1 = 15$.

3. Wenn man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 15x_1 + x_2 + 9x_3 &= 2 \end{aligned}$$

reduziert, erhält man

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{7}x_2 + \tfrac{5}{7}x_3 &= 1 \\ x_2 - \tfrac{6}{11}x_3 &= \tfrac{24}{11} \\ 0 &= -49. \end{aligned}$$

Das ist auch der zweite Fall; aber das System ist nicht lösbar, da für $a_3^{(3)} = -49$ ($\neq 0$) gilt. Die Reduktion führt also auf einen Widerspruch.

3. Aufgaben

▲1▲ Es ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - 5y + 2z &= -2 \\ 2x - 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus zu lösen.

Führen Sie Rechenkontrollen (Zeilensummenprobe) durch!

Führen Sie die Endprobe mit Hilfe der Spaltensummen durch!

Legen Sie ein geeignetes Rechenschema an!

▲2▲ Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!

a) $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 17 \\ -9x_1 - 12x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 0 \\ 3x + 2y - 4z &= 0 \\ x + 5y - 10z &= 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 4x - 3y &= -2 \\ 2y + 5z &= 19 \\ 5x - 7z &= -16 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 15x_1 + x_2 + 9x_3 &= 9 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 15x_3 &= -10 \end{aligned}$$

J. Gronitz

Unser Titelbild

Das Titelbild dieser Ausgabe zeigt eine gerade, geschlossene Strahlschraubfläche, auch Wendelfläche genannt. Sie findet praktische Anwendung bei der Förderung von Sand, Schüttgut, Wasser, wobei diese in einer Rinne liegt und sich um ihre Achse dreht.

Interessante Erkenntnisse beim Rechnen mit natürlichen Zahlen

Wenn ihr das Mathematik-Lehrbuch der Klasse 4 auf der Seite 158 aufschlagt, findet ihr die Aufgabe 43:

„Schreibe zwei dreistellige Zahlen auf! Dabei soll eine Zahl größer sein als die andere. Bilde dann

a) die Summe, b) das Produkt, c) die Differenz dieser Zahlen! Ein Ergebnis läßt sich durch 3 teilen. Überprüfe diese Behauptung an vier Beispielen!"

Sicher werdet ihr die Aufgabe leicht lösen können. Vielleicht wundern sich aber einige von euch darüber, daß bei dieser Überprüfung verschiedene Fälle auftreten können. Wollen wir dem einmal nachspüren und einige Beispiele bilden!

Beispiel 1:
1. Zahl: 435   2. Zahl: 318
Summe $435 + 318 = 753$
753 ist durch 3 teilbar (Quersumme: $7 + 5 + 3 = 15$ und 15 ist durch 3 teilbar).
Differenz: $435 - 318 = 117$
117 ist durch 3 teilbar.
Produkt: $435 \cdot 318 = 138\,330$
138330 ist durch 3 teilbar.
Wir stellen fest: Summe, Differenz und Produkt sind durch 3 teilbar.

Beispiel 2:
1. Zahl: 523   2. Zahl: 247
Summe $523 + 247 = 770$
770 ist nicht durch 3 teilbar.
Differenz: $523 - 247 = 276$
276 ist durch 3 teilbar.
Produkt: $523 \cdot 247 = 129\,181$
129181 ist nicht durch 3 teilbar.
Wir stellen fest: Nur die Differenz ist durch 3 teilbar; Summe und Produkt sind nicht durch 3 teilbar.

Beispiel 3:
1. Zahl 824   2. Zahl: 352
Summe: $824 + 352 = 1\,176$
1176 ist durch 3 teilbar.
Differenz: $824 - 352 = 472$
472 ist nicht durch 3 teilbar.
Produkt: $824 \cdot 352 = 290\,048$
290048 ist nicht durch 3 teilbar.
Wir stellen fest: Nur die Summe ist durch 3 teilbar; Differenz und Produkt sind nicht durch 3 teilbar.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen:
Beim 1. Beispiel sind Summe, Differenz und Produkt, beim 2. Beispiel nur die Differenz und beim 3. Beispiel nur die Summe durch 3 teilbar.

Woran mag das wohl liegen? Ihr überlegt richtig, wenn ihr vermutet, daß der Grund dafür in den ausgewählten Zahlen zu suchen ist. Im 1. Beispiel (435 und 318) sind das zwei Zahlen, die beide durch 3 teilbar sind, und wir finden bestätigt:

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Wenn a durch 3 teilbar ist und auch b durch 3 teilbar ist, so sind $a + b$, $a - b$ und auch $a \cdot b$ durch 3 teilbar.

Im 2. Beispiel (523 und 247) und im 3. Beispiel (824 und 352) haben wir Zahlen ausgewählt, die sämtlich nicht durch 3 teilbar sind. Wenn wir trotzdem im 2. Beispiel ein anderes Ergebnis erhalten als im 3. Beispiel, so wollen wir auch hierfür die Gründe zu finden versuchen.

Wir müssen einmal feststellen, welche Reste die gewählten Zahlen bei der Division durch 3 lassen. Im 2. Beispiel läßt 523 den Rest 1 und 247 ebenfalls den Rest 1. Es ist nun möglich und auch viel einfacher, mit den Resten zu rechnen. Die Summe der Zahlen 523 und 247 läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie die Summe der Reste. Letztere ist 2. Die Differenz der Reste $(1 - 1 = 0)$ beträgt Null, d. h. aber, daß die Differenz der beiden Zahlen durch 3 teilbar sein muß. Da das Produkt der Reste $(1 \cdot 1 = 1)$ 1 ist, läßt auch das Produkt beider Zahlen bei der Division durch 3 den Rest 1, d. h. es ist nicht durch 3 teilbar.

Im 3. Beispiel läßt 824 bei Division durch 3 den Rest 2 und 352 den Rest 1.

Summe der Reste: $2 + 1 = 3$. „Rest 3" bedeutet, daß die 3 noch einmal im Dividenden enthalten ist und dann der Rest 0 bleibt, d. h. die Division aufgeht.

Differenz der Reste: $2 - 1 = 1$.
Produkt der Reste: $2 \cdot 1 = 2$.

Wie wir erkennen, sind Differenz und Produkt beider Zahlen nicht durch 3 teilbar.

Wir wollen uns nun die Frage stellen, welche und wie viele Möglichkeiten es gibt, zwei dreistellige Zahlen auszuwählen, deren Summe, Differenz oder Produkt durch 3 teilbar ist. Bei jeder Zahl besteht die Möglichkeit, daß sie entweder den Rest 0, 1 oder 2 läßt. Für zwei Zahlen kann man folgende Tabelle aufstellen:

	mögliche Reste bei der Division durch 3								
1. Zahl	0	0	0	1	1	1	2	2	2
2. Zahl	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Es gibt also
9 verschiedene Möglichkeiten.

Nun genügt es, mit den Resten zu rechnen, um Schlußfolgerungen für die Teilbarkeit der Summe, der Differenz oder des Produktes zweier natürlicher Zahlen durch 3 zu ziehen.

1. Lassen beide Zahlen den Rest 0, so ergibt sich:
$0 + 0 = 0$; $0 - 0 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$;
d. h., Summe, Differenz und Produkt sind durch 3 teilbar.

2. Läßt die 1. Zahl den Rest 0 und die 2. Zahl entweder den Rest 1 oder 2, so ergibt sich:
$0 + 1 = 1$ $3 - 1 = 2$ $0 \cdot 1 = 0$
$0 + 2 = 2$ $3 - 2 = 1$* $0 \cdot 2 = 0$
(* Statt $0 - 1$ bzw. $0 - 2$ schreiben wir $3 - 1$ bzw. $3 - 2$. Das ist möglich, weil wir statt 0 jedes ganzzahlige positive Vielfache von 3 einsetzen können; alle diese Zahlen lassen bei Division durch 3 den Rest 0!) In diesen Fällen ist nur das Produkt durch 3 teilbar.

3. Läßt die 2. Zahl den Rest 0 und die 1. Zahl entweder den Rest 1 oder 2, so ergibt sich:
$1 + 0 = 1$ $1 - 0 = 1$ $1 \cdot 0 = 0$
$2 + 0 = 2$ $2 - 0 = 2$ $2 \cdot 0 = 0$
Wie wir erkennen, ist auch in diesen beiden Fällen nur das Produkt durch 3 teilbar.

4. Lassen beide Zahlen gleiche Reste, so ergibt sich:
$1 + 1 = 2$ $1 - 1 = 0$ $1 \cdot 1 = 1$
$2 + 2 = 4$ $2 - 2 = 0$ $2 \cdot 2 = 4$
In beiden Fällen ist nur die Differenz durch 3 teilbar.

5. Läßt die 1. Zahl den Rest 1 und die 2. Zahl den Rest 2, so ergibt sich:
$1 + 2 = 3$ $4 - 2 = 2$* $1 \cdot 2 = 2$
und 3 läßt bei Division durch 3 den Rest 0!
(* Statt $1 - 2$ schreiben wir $(1 + 3) - 2$, also $4 - 2 = 2$!) Es ist nur die Summe durch 3 teilbar.

6. Läßt die 1. Zahl den Rest 2 und die 2. Zahl den Rest 1, so ergibt sich:
$2 + 1 = 3$ $2 - 1 = 1$ $2 \cdot 1 = 2$
Es ist auch nur die Summe durch 3 teilbar.

Zusammenfassung

1. Sind beide ausgewählten Zahlen durch 3 teilbar, so sind deren Summe, Differenz und Produkt durch 3 teilbar.
2. Ist nur eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, so ist nur das Produkt durch 3 teilbar.
3. Lassen beide Zahlen bei Division durch 3 gleiche von Null verschiedene Reste, so ist nur die Differenz durch 3 teilbar.
4. Lassen beide Zahlen bei Division durch 3 verschiedene Reste (kein Rest ist Null!), so ist nur die Summe durch 3 teilbar.

Nun können wir unsere Tabelle ergänzen:

	läßt bei Division durch 3 den Rest								
1. Zahl	0	0	0	1	1	1	2	2	2
2. Zahl	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Summe	0	1	2	1	2	0	2	0	1
Differenz	0	2	1	1	0	2	2	1	0
Produkt	0	0	0	0	1	2	0	2	1

Rechne so: Wenn die 1. Zahl bei Division durch 3 den Rest 2 läßt und die 2. Zahl auch den Rest 2 läßt, so läßt die Summe beider

Zahlen den Rest $2+2=4$. Die 4 läßt aber bei Division durch 3 den Rest 1.

Nun könnt ihr nicht nur die Aufgabe 42 auf der Seite 157 des Mathematik-Lehrbuches der 4. Klasse leicht lösen, sondern den dort stehenden Satz sogar beweisen:

„Die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist stets durch 3 teilbar.“

Wenn ihr drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen betrachtet, so können bei der Division durch 3 nur die folgenden Reste auftreten:

Zahlen	$\ldots, a,$	$a+1,$	$a+2, \ldots$
mögliche Reste	0	1	2
bei der Division	1	2	0
durch 3	2	0	1

Die Summe der Reste ergibt:

$0+1+2=3$, d. h. Rest 0

$1+2+0=3$, d. h. Rest 0

$2+0+1=3$, d. h. Rest 0

Man erkennt, daß diese Summe stets durch 3 teilbar ist, ganz gleich, welche drei aufeinanderfolgenden Zahlen man ausgewählt hat.

Außerdem kann man der Tabelle noch entnehmen, daß es unter 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets genau eine gibt, die durch 3 teilbar ist.

Aufgabe

Nun versucht, folgende *Aufgabe* zu lösen:

Gegeben seien zwei vierstellige natürliche Zahlen a und b. Es sei a größer als b.

Unter welchen Bedingungen sind die Summe $a+b$, die Differenz $a-b$ oder das Produkt $a \cdot b$ durch 4 teilbar? Gibt es Fälle (wie viele und welche?), in denen weder $a+b$, noch $a-b$, noch $a \cdot b$ durch 4 teilbar ist?

Bemerkung: Ob die gegebenen natürlichen Zahlen a und b vierstellig sind oder irgendeine andere beliebige Stellenzahl haben, ist für das Lösen der Aufgabe ohne Bedeutung!

W. Fregin

Antje „entdeckt“ eine Rechenprobe

Die elfjährige Schülerin *Antje Glaß* aus Bernburg, regelmäßige *alpha*-Leserin, überlegte sich folgende Probe für die „Neunerreihe“: Multipliziere ich 9 mit einer Zahl zwischen 1 und 10, so ist die erste Ziffer des Ergebnisses um 1 kleiner als diese Zahl, und die zweite erhalte ich, wenn ich von meiner Zahl bis 10 ergänze.

Die Richtigkeit ihrer Überlegung zeigt folgender Beweis: Ist ihre Zahl x, so berechnet sie $9 \cdot x$. Der Zehner des Ergebnisses ist $x-1$, der Einer $10-x$. Also lautet das Ergebnis ihrer Probe $10 \cdot (x-1) + (10-x) = 10 \cdot x - 10 + 10 - x = 9x$.

Vielleicht habt ihr in eurer AG, in der Schule oder zu Hause ähnliche „Entdeckungen“ gemacht?

Teilt sie uns doch einmal mit (Kennwort: Meine Knobelei)! Redaktion *alpha*

Berufsbild: Ingenieur für Technik und Technologie des Fernmeldewesens

Die mathematische Schülerzeitschrift *alpha* kaufen sich viele Leser am Zeitungskiosk, andere können ihre Zeitschrift zweimonatlich dem Hausbriefkasten entnehmen. Aber die wenigsten denken darüber nach, wer ihnen den bequemen Bezug dieser Zeitschrift und vieler anderer Presseerzeugnisse ermöglicht. Es sind die vielen fleißigen Werktätigen der *Deutschen Post.*

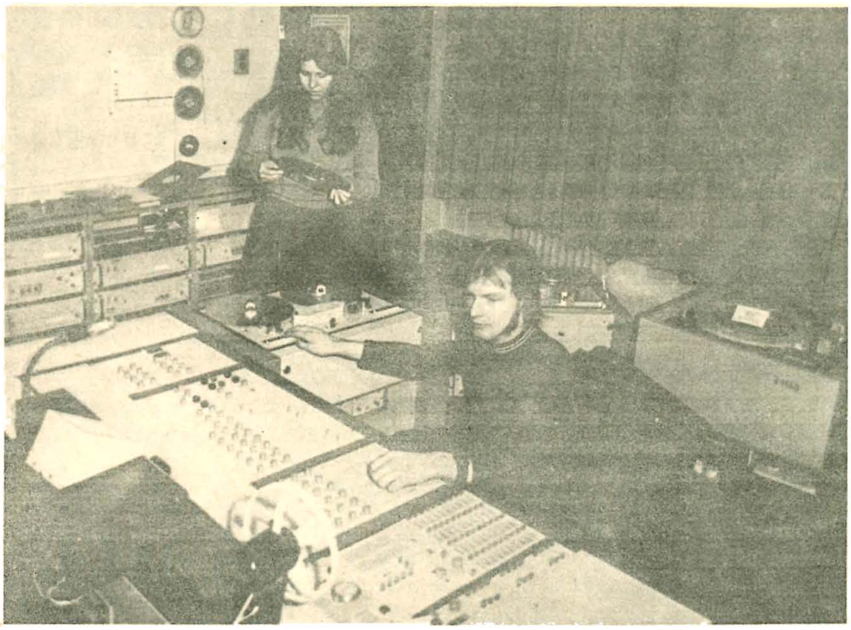
Sie vollbringen jedoch für die Bürger der DDR, für unsere Volkswirtschaft und für die Staatsorgane eine Vielzahl weiterer sehr wichtiger Leistungen, von denen hier nur einige genannt werden können. Allen sind solche postalischen Dienstleistungen, wie Übermitteln von Briefen, Telegrammen, Päckchen, der Verkehr mit Zahlungsmitteln und der Sparkassendienst bekannt. Wenn ihr aber telefoniert, fernseht oder Radio hört, so geschieht das mit Hilfe umfangreicher und komplizierter fernmeldetechnischer Einrichtungen der Deutschen Post. Kurz gesagt, beschäftigen sich die Werktätigen der Deutschen Post mit der Ortsveränderung von Nachrichten. Dabei treten schwierige Aufgaben auf, die nur durch qualifizierte Kader mit hohem politischem Bewußtsein gelöst werden können. Zur Ausbildung solcher Kader wurde am 1. September 1953 die Fachschule für Post- und Fernmeldewesen in Leipzig gegründet. Am 13. Oktober 1954 wurde der Fachschule der ehrende und verpflichtende Name *Rosa Luxemburg* verliehen. Jetzt trägt sie die Bezeichnung Deutsche Post – Ingenieurschule *Rosa Luxemburg.*

An der Ingenieurschule werden Ingenieure und Ingenieurökonomen im dreijährigen Direkt- und fünfjährigen Fernstudium für das sozialistische Nachrichtenwesen ausgebildet. Die Ausbildung erfolgt in den drei Fachrichtungen:

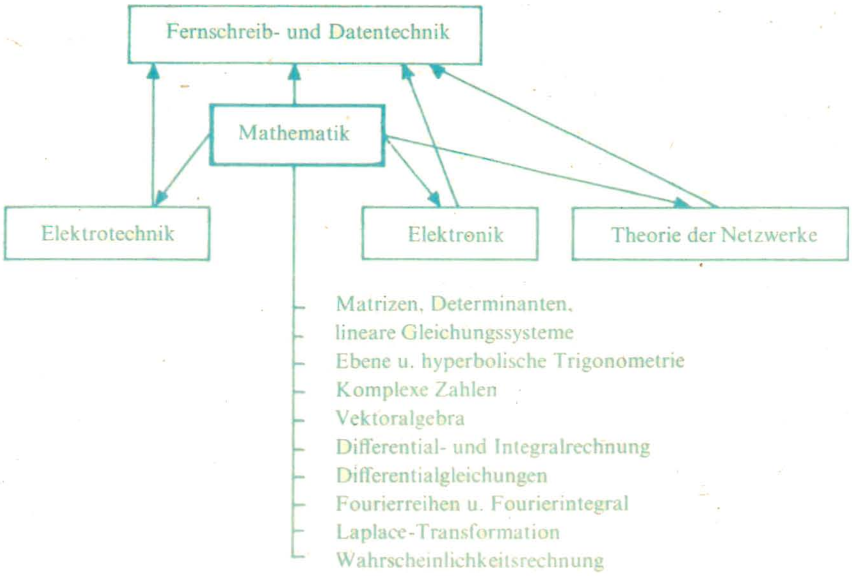
- Technik und Technologie des Fernmeldewesens mit den Vertiefungsrichtungen: Fernsprech- und Fernschreibwesen – Fernmeldebau – Funkwesen
- Technik und Technologie des Post- und Zeitungswesens
- Sozialistische Betriebswirtschaft/Ingenieurökonomie des Nachrichtenwesens.

Die erstgenannte Fachrichtung möchte ich etwas näher vorstellen, weil ein Studium in ihr den mathematisch-naturwissenschaftlich Interessierten ein reiches Betätigungsfeld eröffnet. Studienbewerber für diese Fachrichtung

Das Tonstudio für Ausbildung und Agitationsarbeit des Schulfunks



müssen deshalb solide Kenntnisse in Mathematik und Physik durch den Abschluß der 10. Klasse bzw. durch das Abitur nachweisen können. Sie sollten Facharbeiter für Nachrichtentechnik sein oder einen verwandten Berufsabschluß, z. B. Elektronikfacharbeiter, besitzen und über eine ein- bis zweijährige Berufspraxis verfügen. Der Ausbildungsinhalt des Studiums umfaßt Lehrgebiete mit allgemeinbildendem Charakter und Lehrgebiete, die das technische Grundwissen des Ingenieurs bilden. Zu den letztgenannten gehören u. a.:
Mathematik – Physik – Chemie – Technische Mechanik – Werkstoffkunde – Steuerungs- und Reglungstechnik – Grundlagen der Elektrotechnik – Grundlagen der Elektronik – Elektrische Meßtechnik – Elektrische Netzwerke – Übertragungstechnik.
Dazu kommen in den Vertiefungsrichtungen folgende spezielle Lehrgebiete:
Vertiefungsrichtungen „Fernsprech- und Fernschreibwesen" und „Fernmeldebau":
Vermittlungstechnik – Fernschreib- und Datentechnik – Fernmeldebau
Vertiefungsrichtung „Funkwesen":
Funksende- und -empfangstechnik – Studiotechnik – Spezielle Meßtechnik.
Die Grundlagenausbildung erfolgt im 1. und 2. Studienjahr des Direktstudiums. Im 5. Semester wird das spezielle Fachwissen in den drei Vertiefungsrichtungen vermittelt. Während des Praktikums im 6. Semester sind die Studenten in ihren späteren Einsatzämtern tätig und fertigen ihre Ingenieur-Abschlußarbeit an.
Im Jahr der 200. Wiederkehr des Geburtstages von *Carl Friedrich Gauß* sei daran erinnert, daß er gemeinsam mit dem Physiker *Wilhelm Weber* 1833/34 die elektromagnetische Telegrafie erfand. Die Telegrafie hat sich seitdem zu einem schnellen, zuverlässigen und weltweiten Kommunikationssystem entwikkelt: Das Fernschreiben über Selbstwählnetze und die elektrische Fernübertragung von Daten zwischen Rechenzentren sind in jüngster Zeit dazu gekommen. Es verwundert sicher nicht, daß bei der Ausbildung von Ingenieuren des Fernmeldewesens dem Gebiet der Fernschreib- und Datentechnik ein hoher Rang zukommt. Am Beispiel des Lehrgebietes „Fernschreib- und Datentechnik" läßt sich zeigen, welches umfangreiche mathematische Rüstzeug ein Student besitzen muß, um in dieses Gebiet erfolgreich und tief einzudringen. Nachstehendes Bild stellt die Zusammenhänge zwischen der Mathematik, den technischen Wissenschaften Elektrotechnik, Theorie der elektrischen Netzwerke und Elektronik und der Fernschreib- und Datentechnik dar.
Auch zur theoretischen Beherrschung der Fernsprech-, Funk- und Fernsehtechnik werden umfangreiche Kenntnisse der elementaren und höheren Mathematik vom Studenten und auch vom späteren Ingenieur erwartet.

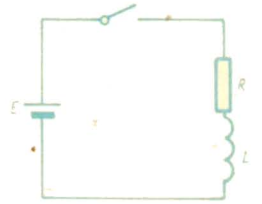


Die rasche Entwicklung der modernen Kommunikationsmittel bedingt ein immer stärkeres Eindringen mathematischer Disziplinen in die theoretischen Zweige dieser Techniken. Die moderne Theorie der Nachrichtenübertragung baut auf der Funktionentheorie, Mengenlehre, Boolschen Algebra und Ereignisalgebra auf. Die Höhen dieser Theorien kann nur derjenige erklimmen, der bereits in der polytechnischen oder erweiterten Oberschule die dort gelehrten mathematischen Grundlagen beherrschen gelernt hat. Abschließend möchte ich vier kleine mathematische Kostproben geben.

M. Necke

Aufgaben

▲1▲ In dem skizzierten Stromkreis wird durch Betätigen des Kontaktes der Strom für das Telegrafenrelais zum Zeitpunkt $t=0$ eingeschaltet. Das Relais stellt einen Energiespeicher mit der Selbstinduktivität $L=0{,}5$ H dar. Sein Widerstand beträgt $R=1\ \text{k}\Omega$, der Ansprechstrom $I_{an}=1$ mA und die Urspannung $E=12$ V. Der nach dem Einschalten fließende Strom genügt der Zeitfunktion.



$$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ mit } \tau=\frac{L}{R}$$

Berechne die Zeit t, die vom Schließen des Kontakts bis zum Ansprechen des Relais vergeht!

▲2▲ Der Widerstand einer Fernschreibanschlußleitung erhöht sich durch Verlängerung der Leitung um $R=500\ \Omega$. Bei einer konstanten Spannung $U=60$ V am Anfang der Leitung sinkt der Strom um $I=10$ mA. Wie groß war der ursprüngliche Leitungswiderstand?

▲3▲ Die kilometrische Dämpfung α einer Leitung mit geringen Verlusten ist durch die Gleichung

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{R'}{Z}-G'Z\right) \text{ mit } Z=\sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

gegeben. Darin ist R' der Widerstand, G' die Ableitung, L' die Induktivität und C' die Kapazität je Kilometer Leitungslänge.
Für welchen Wert Z wird α ein Minimum?

▲4▲ In einem Seekabel kann man nach Lord Kelvin mit der Geschwindigkeit

$$v=a\left(\frac{D}{d}\right)^2 \ln\frac{1}{\frac{D}{d}}$$

telegrafieren. v ist darin die Anzahl der Zeichen pro Sekunde; a eine Konstante, die von der Drahtlänge und vom Material abhängt; D ist der Kabeldurchmesser; d der Leiterdurchmesser.

Für welches Verhältnis $\frac{D}{d}$ erreicht v ein Maximum?

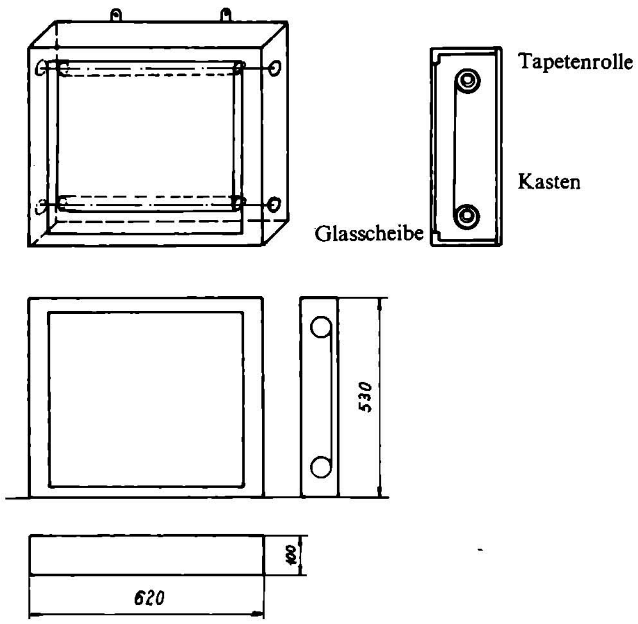
Nachrichtentechnisches Labor
Untersuchungen an Wechselstromtelegrafieeinrichtungen

Synchron-optischer Schaukasten

Mathematik und Mathematiker unter geschichtlichen Aspekten

So ist das nun mal: Irgendwann werden wir des Gewohnten überdrüssig. Wir ziehen neue Sachen an, obwohl die alten noch in Ordnung sind, wir tapezieren neu, obwohl das alte noch ganz gut ist. Wir räumen zu Hause um, hängen ein neues Bild auf, wechseln die Gardinen. Das Altgewohnte, das ist auch unser Arbeitsplatz, unsere Arbeitsgemeinschaft Mathematik. Gefällt sie uns noch? Fühlen wir uns darin wohl? Könnte man nicht einmal aus dem Gewohnten ausbrechen?
Solche und ähnliche Gedanken mögen wohl die meisten 13- bis 16jährigen Schüler an diesem Tage beschäftigt haben, denn mit dem Suchen von Lösungswegen, dem Aufstellen von Logarithmen und dem Finden der Ergebnisse wollte es gar nicht so recht klappen.
Viel mehr erfreuten sich alle an einem lustigen Frage- und Antwortspiel. Wie es gar nicht anders sein kann, landeten wir dann auch wieder bei der Mathematik. Wir stellten uns vor, noch einmal mit der Knotentechnik der alten Ägypter rechte Winkel zu konstruieren. Ja, wann war das eigentlich, als man damit arbeitete? War das vor oder nach Pythagoras?
Nun entwickelte sich ein echtes Streitgespräch. Jeder Schüler konnte diesem Meinungsstreit etliche Fakten beisteuern. Jeder suchte nach Fragen, die man eventuell noch klären müßte.
Wann kam Pythagoras zu seiner Feststellung? Welche Wissensgebiete – außer Mathematik – waren ebenfalls so früh? Hat man Überlieferungen aus dieser Zeit von Literatur, Kunst oder Philosophie? So viele Fragen! Geklärt werden konnten an diesem Tag aber längst nicht alle.
So kamen wir zu der Erkenntnis, man müßte einen *Wissensspeicher* für verschiedene Wissensgebiete haben, auf dem alles übersichtlich geordnet sei.
Her mit Ideen!
Und die kamen, beim Arbeiten, beim Nachdenken.
Es bildeten sich verschiedene Interessengruppen, die gemeinsam eine Materialsammlung aus den verschiedenen Wissensgebieten zusammentrugen. Da wurden Bücher gewälzt, Bücher ausgeliehen, die Fachlehrer mußten helfen.
Wir waren schon gut vorwärts gekommen.
Es mag manche gegeben haben, die dachten: „Na ja ... vielleicht genügt das ja schon." Aber...!
Alle überlegten von neuem: Wer könnte noch helfen?
Wir wandten uns an den Fachgruppenleiter für Mathematik vom Institut für Lehrerbildung in Meiningen, und er konnte uns helfen. Er stellte uns die Urania-Bildtafeln *Rolle der Mathematik in Wissenschaft, Wirtschaft und Technik*, viele Lichtbilder, zahlreiches Schriftmaterial zur Verfügung.
Nun bekamen wir wieder neuen Auftrieb, alles Wissenswerte war zusammengetragen. Jetzt fragten wir uns, wie soll unser Wissensspeicher aussehen? Nach langem hin und her entschieden wir uns für einen Anschauungskasten, der eine synchron-optische Wiedergabe gewährleistet.
Na dann los!
Sie haben alle an diesen vielen Nachmittagen gearbeitet, gebastelt, geschrieben, nachgedacht. Man fand wieder verschiedene Gruppen, eine, die das Holz besorgte und im Werkraum den Kasten bastelte, eine, die sich mit Elektronik beschäftigte und den Bewegungsrhythmus konstruierte, und eine dritte Gruppe beschriftete in mühevoller Arbeit eine Tapetenrolle. Hier durfte man auch nicht vergessen, zwischen den Zeitabschnitten immer ein Stück Platz zu lassen, damit man noch erweitern bzw. ergänzen kann.
Dann war es endlich soweit, der Wissensspeicher wurde zusammengebaut. Alle waren gespannt, ob die ganze Anlage auch funktionstüchtig war.
Na ja, es klappte schon, aber ganz zufrieden waren wir noch nicht. Wieder wurde sich regelmäßig getroffen. Es bedurfte noch einiger Stunden mühevoller Kleinarbeit, bis der Wissensspeicher nun endlich funktionierte, wie es sich alle wünschten.
Eine große Arbeit, zugegeben, aber die Freude über das Geschaffene entlohnt alle, die mitgeholfen hatten. Wir hoffen, daß sie uns gelungen ist und vielen etwas gibt.
Sicherlich ist aber dieser Anschauungskasten noch verbesserungswürdig. Wir würden uns freuen, wenn wir noch einige Anregungen zur Verbesserung bekommen könnten.
Wir hoffen auch, daß dieses Modell für andere Arbeitsgemeinschaften impulsgebend sein könnte, denn auch an unserer Schule war mit dieser Arbeit die Tätigkeit der AG nicht zu Ende.

Kollektiv der AG Mathematik der Maxim-Gorki-OS Dermbach



XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. Man beweise den folgenden Satz: Ist $OPQR$ ein Parallelogramm, sind ein Punkt X auf der Verlängerung von OP über P hinaus und ein Punkt Y auf der Verlängerung von OR über R hinaus gelegen, und ist S der Schnittpunkt von PY mit RX, so sind die Vierecke $OPSR$ und $SXQY$ einander flächeninhaltsgleich.

2. Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a+c=13$ cm, $e+f=15$ cm, $\phi=100°$ und $\varepsilon=70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, c die Länge der Seite CD, e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD, ε die Größe des Winkels $\sphericalangle DAC$ und ϕ die Größe des Winkels $\sphericalangle ASB$. S bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes.
Untersuchen Sie, ob ein solches Trapez existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 3A und 3B ist genau eine auszuwählen und zu lösen!

3A. Bei einem sportlichen Dreikampf ergab sich in jeder der drei Sportarten eindeutig eine Reihenfolge der Sportler (gekennzeichnet durch Platzziffern 1, 2, 3, ...). In jeder der drei Sportarten wurden für die ersten fünf Plätze Punkte so vergeben, daß die Punktzahlen (natürliche Zahl > 0) mit wachsender Platzziffer immer kleiner wurden und vom 2. Platz an mit wachsender Platzziffer die Punktdifferenz zwischen benachbarten Plätzen stets konstant war. Diese Punktbewertung war für jede der drei Sportarten die gleiche.
Nach zwei Wettkämpfen ergab sich, daß die ersten drei Plätze in jeder dieser beiden Sportarten stets von den Sportlern A, B, C errungen wurden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge). Jeder der Sportler A und B hatte nach zwei Wettkämpfen 17 Punkte, und der Sportler C hatte 16 Punkte erreicht.
In der Gesamtwertung des Dreikampfes (Summe der drei erreichten Punktzahlen) siegte der Sportler D, Zweiter wurde der Sportler C. Man ermittle in den einzelnen drei Sportarten für die Sportler C und D diejenigen Platzziffern, die diese Bedingungen erfüllen.

3B. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen p, für die die Gleichung

$$\frac{x^2-p+3p^2}{x-p}+2x=3$$

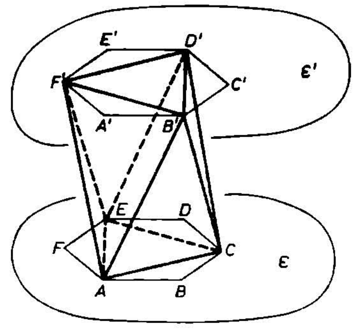
eine Lösungsmenge L hat, die
a) leer ist,
b) genau ein Element enthält,
c) aus mehr als einem Element besteht!

4. Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$xy+3x-2y-3=0.$$

5. Für ein Rechteck $ABCD$ sei a die Länge der Strecke BC, ferner sei die Diagonale AC eine q mal so lange Strecke wie BC (q reell). Von den Eckpunkten B und D seien die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien in dieser Reihenfolge E und F.
Man ermittle aus den gegebenen Werten a und q den Flächeninhalt des Vierecks $FBED$.

6. In einer Ebene ε sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Eine Ebene ε' sei zu ε parallel. In ε' liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, daß die Strecken AA', BB', CC', DD', EE' und FF' auf ε senkrecht stehen. Gegeben seien die Seitenlänge $a=\overline{AC}$ des Dreiecks ACE sowie der Abstand h zwischen ε und ε'. Man berechne hieraus das Volumen



V des Polyederkörpers, der genau die Strecken AC, CE, EA, $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$, AB', AF', CB', CD', ED' und EF' als Seitenkanten hat (siehe Bild).

Olympiadeklasse 11/12

1. Es seien a, b, x_0 drei reelle Zahlen mit $a<x_0<b$; das Intervall aller x mit $a<x<b$ sei I genannt. Eine in I definierte Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Ferner sei g die in I durch $g(x)=|f(x)|$ definierte Funktion. Unter diesen Voraussetzungen beweise man: Genau dann ist g an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, wenn $f(x_0)=0$ und $f'(x_0)\neq 0$ gilt.

2. Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geqq 1$. Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, $2n$ rote, $2n$ grüne und $2n$ schwarze Kugeln so auf zwei Gefäße Q_1 und Q_2 zu verteilen, daß jedes der Gefäße $3n$ Kugeln enthält.
Hinweis: Zwei Verteilungsmöglichkeiten gelten genau dann als gleich, wenn für jede der drei Farben die Anzahl der in Q_1 enthaltenen Kugeln dieser Farbe bei beiden Verteilungsmöglichkeiten übereinstimmt (und folglich dasselbe auch für Q_2 zutrifft).

3. Ist $P_1P_2P_3P_4S$ eine vierseitige Pyramide mit S als Spitze und einem konvexen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ als Grundfläche, so seien die Seitenflächen SP_iP_{i+1} mit ε_i und die Größe des Winkels zwischen ε_{i-1} und ε_i mit α_i bezeichnet ($i=1, 2, 3, 4$; tritt in den Formeln ein Index 5 auf, so werde er durch den Index 1 ersetzt; tritt ein Index 0 auf, so werde er durch 4 ersetzt).
Man beweise: Wenn zu einer solchen Pyramide ein gerader Kreiskegel mit der Spitze S existiert, auf dessen Mantel P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen, so gilt $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$.

4. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a und b

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|} \text{ gilt.} \qquad (1)$$

5. Man ermittle die Anzahl aller Paare (p, q) natürlicher Zahlen mit $1 \leqq p \leqq 100$ und $1 \leqq q \leqq 100$ und der Eigenschaft, daß die Gleichung

$$x^5+px+q=0$$

mindestens eine rationale Lösung hat.

Von den nachstehenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6A. Es sind alle Polynome

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen x gilt

$$xf(x-1)=(x-2)f(x).$$

6B. Man gebe für jede natürliche Zahl $n \geqq 5$ eine Zerlegung eines regelmäßigen, konvexen n-Ecks in eine minimale Anzahl von
a) sämtlich spitzwinkligen Dreiecken,
b) sämtlich stumpfwinkligen Dreiecken an.
Hinweis: Unter einer Zerlegung in Dreiecke wird eine Zerlegung des n-Ecks verstanden, bei der jede Seite eines Zerlegungsdreiecks entweder gleichzeitig Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks oder eine der Seiten des n-Ecks ist.

Preisträger

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Einen ersten Preis erhielten:

Steffen Zopf,
EOS *Karl Marx*, Leipzig (Kl. 9) 1

Bodo Heise,
J.-Gagarin-OS Görlitz (Kl. 7) 2

Holger Rücker, EOS Nauen (Kl. 10) 3

Dirk Sprengel,
EOS 9, Potsdam (Kl. 10) 4

Peter Dittrich,
Spezialklasse Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin (Kl. 11) 5

Werner Hoffmann,
Arbeiter-und-Bauern-Fakultät *Walter Ulbricht*, Halle (Kl. 12) 6

Joachim Heinitz,
EOS *K. Kollwitz*, Zwickau (Kl. 12) 7

Der Chefredakteur der *alpha* im Gespräch mit Teilnehmern der DDR-Olympiade. *alpha* stellt in Heft 6/77 alle 18 Mädchen vor, unter: Mädchen meistern Mathematik.

1

2

3

4

5

6

Einen zweiten Preis erhielten:

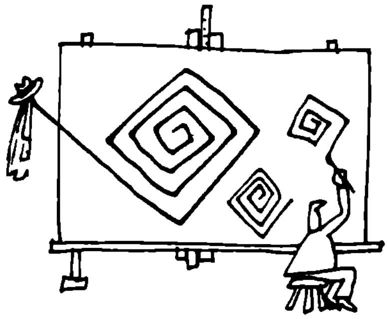
In Olympiadeklasse 10: Thomas Gundermann, EOS *H. Pistor*, Sonneberg; Frank Eisenhaber, EOS *J. Brinckmann*, Güstrow; Klaus Beck, Erw. Spezial-OS Kleinmachnow; Hans-Jürgen Heinitz, EOS *K. Kollwitz*, Zwickau; Ulf Hutschenreiter, EOS *B. Brecht*, Dresden; Norbert Münch, EOS *J. W. Goethe*, Bad Doberan (aus Kl. 9);
In Olympiadeklasse 11: Ilja Schmelzer, Spezialkl. Math. der M.-Luther-Universität Halle; Thomas Maiwald, Spezialkl. Math. der TH Karl-Marx-Stadt; Ralf Becker, EOS *W. Seelenbinder*, Zielitz; Steffen Thiel, EOS Königs Wusterhausen (aus Kl. 10);
In Olympiadeklasse 12: Harald Gottstein, EOS *Karl Marx*, Tangerhütte; Thomas Luschtinetz, Hansa-EOS Stralsund

Einen dritten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Burkhardt Götz, 1. EOS Cottbus; Hans-Martin Kühn, Puschkin-EOS, Prenzlau; Andreas Kasparek, EOS Gräfenhainichen; Hermann Tenor, EOS Philanthropinum, Dessau; Knut Franke, EOS Güstrow; Jürgen Lembcke, EOS *M. A. Nexö*, Dresden; Dietmar Berthold, EOS *J. Motteler*, Crimmitschau; Matthias Bernstein, EOS *Ernst Abbé*, Eisenach; Michael Schubert, Kersting-OS Güstrow (aus Kl. 9); Peter Berndt, EOS *E.-M.-Arndt*, Bergen/Rügen (aus Kl. 9); Erasmus Scholz, EOS *M. A. Nexö*, Dresden (aus Kl. 9); Torsten Musiol, Kersting-OS Güstrow (aus Kl. 9); Andreas Radtke, EOS *Geschw. Scholl*, Belzig (aus Kl. 9); Torsten Flade, EOS *B. Brecht*, Schwarzenberg (aus Kl. 9);
In Olympiadeklasse 11: Wolfgang Würbel, EOS *R. Rothkegel*, Forst; Bernd Mulansky, EOS *M. A. Nexö*, Dresden; Dittmar Kurtz, Spezialkl. Math. der M.-Luther-Universität Halle; Hans-Dietmar Gröger, EOS Staßfurt; Uwe Schäfer, Spezialkl. Math. der Humboldt-Universität zu Berlin; Uwe Hostmann, EOS *H. Hertz*, Berlin; Bernd Kreußler, KJS *F. Lesch*, Frankfurt (Oder) (aus Kl. 10); Uwe Szyska, EOS *Fr. Engels*, Neubrandenburg (aus Kl. 10);
In Olympiadeklasse 12: Roger Labahn, EOS *Geschw. Scholl*, Anklam; Torsten Boseniuk, EOS Brüel.

- Weitere 54 Teilnehmer erhielten eine Anerkennungsurkunde für sehr gute Leistungen, drei Schüler ein Diplom für die elegante Lösung einer Aufgabe.
- An der DDR-Olympiade nahmen bei insgesamt 204 Teilnehmern 18 Mädchen teil. *alpha* stellt sie in Wort und Bild in Heft 6/77 vor.

In freien Stunden alpha heiter



alpha-Produkte

$$\begin{aligned}
\alpha\alpha\cdot\alpha\alpha &= \alpha P\alpha\\
\alpha P\cdot\alpha\alpha &= \alpha RP\\
\alpha\alpha\cdot\alpha R &= \alpha OR\\
\alpha O\cdot\alpha\alpha &= \alpha DO\\
\alpha\alpha\cdot\alpha D &= \alpha UD\\
\alpha U\cdot\alpha\alpha &= \alpha KU\\
\alpha\alpha\cdot\alpha K &= \alpha TK\\
\alpha T\cdot\alpha\alpha &= \alpha ET
\end{aligned}$$

Die Buchstaben sollen so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Multiplikation zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. *Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*

Magisches Quadrat

Die Lösung eines magischen Quadrats ist keine Magie, sondern eine Gesetzmäßigkeit.
Aufgabe: Trage in ein magisches Quadrat mit 25 Feldern Zahlen von 38 bis 62 so ein, daß alle senkrechten, waagerechten und diagonalen Reihen die Summe von 250 ergeben! Beschreibe den Lösungsweg! *Dr. G. Blosfeld, Halle*

Gemeinsamer Beruf

Welchen gemeinsamen Beruf haben diese Personen?

Moni P. Dinu Riegel	Rudi M. Neige Lipno
Leo I. Rupig Minden	Emil N. Gorpi Udine

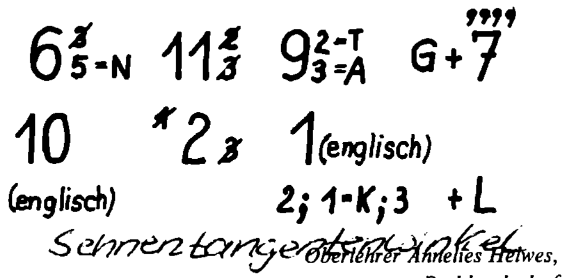
Fachlehrer D. Knape, Jessen

Aus Zehn ein Raum

Z	E	H	N
R	A	U	M

Schüler H. Völzke, Greifswald (Kl. 3)

Ohne Worte



Oberlehrer Annelies Helwes, Burkhardtsdorf

Knöpfchendrücken

Computer, ach Computer
Du bist ein dummes Luder.
Du stehst in deiner Ecke.
Kennst weiter nichts als Zwecke.
Kannst massig Daten schlucken
und große Töne spucken –
doch überhaupt nicht lachen.
Kannst keinen fröhlich machen.
Vieltausend Teile haste.
Doch fehlt dir eine Taste.
Das Knöpfchen in der Mitte.
Das haben wir. Na bitte.

Manfred Streubel, Leipzig

Zahlenrätsel

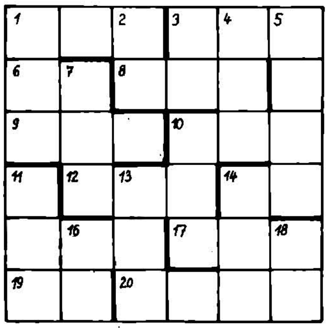
$$\begin{array}{ccccc}
a & - & b & = & c\\
: & & - & & -\\
d & \cdot & e & = & f\\
\hline
g & + & h & = & i
\end{array}$$

a Summe aller Zahlen von 2 bis 193
b $2^2\cdot 5^2\cdot 7^2$
c Mittelwert der Zahlen 23105; 13830 und 4525
d $\sqrt[3]{17576}$
e 6,25% von 5248
f $\frac{148}{37}=\frac{34112}{f}$
g $g^2=518400$
h $(h+4)13=59488$
i Kleinstes gemeinsames Vielfaches von 4; 27 und 49

R. Schulze, Niederkaina

Zahlenkreuzrätsel

In jedes der 36 Felder ist eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 einzutragen. Die dabei entstehenden zwei- bis vierstelligen Zahlen reichen jeweils von dem numerierten Feld aus waagerecht nach rechts bzw. senkrecht nach unten bis zur nächsten markierten Trennungslinie bzw. bis zum Rand. Sie sind aus den folgenden Angaben zu erschließen:



Waagerecht:
1. Vielfaches von 3w, 3. 3s im Quadrat, 6. Vielfaches der Quersumme von 7s, 8. Quersumme wie bei 16s, 9. Vielfaches der Quadratwurzel aus 14s, 10. Vielfaches von 14w, 12. wie bei 9w, 14. Primzahl, 15. sowohl Quadrat- als auch Kubikzahl, 17. wie 14s, 19. Primzahl, 20. hat die Quersumme 3s;

Senkrecht:
1. Produkt von 14w und 18s, 2. Vielfaches von 16s, 3. Kubikwurzel von 5s, 5. Vielfaches von 3w, 5. vorwärts = rückwärts, 7. Primzahl, 10. Vielfaches von 14w, 11. Vielfaches von 19w, 13. Primzahl, 14. wie 17w, 16. Quadratwurzel aus 15w, 18. Primzahl (es bedeutet w: waagerecht, s: senkrecht).

Prof. Dr.-Ing. H. Heinrich, Dresden

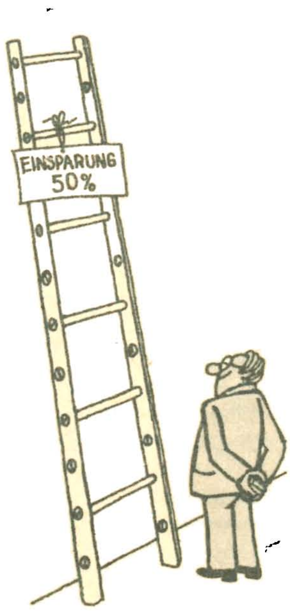
Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 18 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben nacheinander gelesen ergeben den Namen eines ganz bekannten griechischen Mathematikers, der etwa 580 bis etwa 500 v. u. Z. lebte. Eine nach ihm benannte Satzgruppe wird in Klasse 8 behandelt.

a – a – a – al – ar – bel – bel – ber – ble – bra – bus – che – chi – chung – de – des – flä – ga – ge – glei – hy – kan – le – lym – me – me – me – me – null – o – o – o – pa – per – pez – pi – ra – ri – rhom – satz – se – stel – sum – te – ter – tra – va – xiom – yard.

1. Graph einer quadratischen Funktion
2. Engl. und nordamerikanisches Längenmaß (91,4 m)
3. Viereck mit zwei ungleich langen parallelen Seiten
4. Kegelschnitt
5. Einleuchtendes, nicht beweisbares math. Grundgesetz
6. Ausdruck, in dem zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind
7. Letzter Buchstabe des griechischen Alphabets
8. Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind
9. Mathematiker des Altertums (um 287 bis 212 v. u. Z.)
10. Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet
11. Zeichen für ein beliebiges Element aus einem fest vorgegebenen Grundbereich
12. Sportlicher und mathematischer Wettbewerb
13. Schnittpunkt einer Funktion mit der Abzisse
14. Ergebnis einer Addition
15. Teilgebiet der Mathematik
16. Einheit der Länge
17. Begriff aus der Stereometrie
18. Bewiesene Aussage

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald



Harri Parschau

Läufersprung

Läßt man den Läufer nach den Regeln des Schachspiels so über die abgebildete Figur gleiten, daß alle Silben nacheinander erfaßt werden, so erhält man für eine mögliche Folge einen Ausspruch, an den man beim Knobeln von kniffligen Aufgaben denken sollte.

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Aus der OS Osternienburg berichtet

Mathematischer Schülerwettbewerb zu Ehren des 200. Geburtstages von C. F. Gauß

Zu Beginn des Schuljahres 1976/77 diskutierten wir, wie wir den 200. Geburtstag von *C. F. Gauß* würdigen könnten:

● In allen vier Arbeitsgemeinschaften *alpha* wurde Leben und Werk von *C. F. Gauß* besprochen. Besonders sind wir dabei auf die Jugend des berühmten Mathematikers eingegangen.

● In Zusammenarbeit mit der Arbeitsgemeinschaft Kunsterziehung entstand im Januar 1977 eine Wandzeitung über *C. F. Gauß*.

● Die AG Mathematik der Klassenstufe 10 beschäftigte sich mit dem *Gaußschen Algorithmus* (siehe Foto Seite 78).

● Ein Höhepunkt unserer Gauß-Ehrung war der 23. März 1977. Die 60 besten *Jungen Mathematiker* der Klassenstufen 4 bis 10 unserer Schule führten einen Wettbewerb (unter Klausurbedingungen) durch. Jeder erhielt eine Mappe mit dem Bild von *C. F. Gauß* als Titelblatt, einem Bericht über Leben und Werk sowie den Aufgaben des Wettbewerbs.

● Die besten Schüler des Wettbewerbs erhielten in einer Feierstunde im April 1977 Urkunden und Anerkennungspreise.

Mathematikfachlehrer B. Becker, alpha-Club der OS Osternienburg

Aufgaben des Wettbewerbs

(*alpha* übernahm die jeweils erste und vierte Aufgabe der Klausur)

Klassenstufe 4

● Welche geraden Zahlen kannst du für n einsetzen, damit die Ungleichungen erfüllt sind?

$$49 < 7 \cdot n < 90$$

▪ Eine Aufgabe von dem Rechenmeister *Adam Ries*, der von 1492 bis 1559 lebte:
Ein Sohn fragt seinen Vater: „Wie alt bist du?“ Der Vater antwortet: „Wenn du zu meinem Alter noch die Hälfte meines Alters und dazu noch den vierten Teil meines Alters addieren würdest, so würdest du ein Alter von 133 Jahren erhalten.“
Wie alt ist der Vater?

Klassenstufe 5

● Ein Obstgarten hat einen Flächeninhalt von 2880 m². Jeder Baum braucht eine Fläche von 6 m Länge und 6 m Breite.
Wieviel Bäume können gepflanzt werden?

▪ Eine Aufgabe von dem englischen Mathematiker *Alouin*, der vor ungefähr 100 Jahren lebte:
Ein Wanderer trifft mit Schülern zusammen. Er fragt: „Wie viele seid ihr in der Schule?“ Da antwortet einer von ihnen: „Nimm unsere Zahl doppelt und multipliziere das Produkt mit 3! Dividiere dieses Ergebnis durch 4! Wenn du dich jetzt dazuzählst, erhältst du genau 100. Weißt Du nun wie viele wir sind?

Klassenstufe 6

● Franks Vater besitzt ein Kraftfahrzeug vom Typ *Trabant*, das eine vierstellige Autonummer hat. Die vierte Ziffer ist gleich dem Dreifachen der zweiten Ziffer. Die dritte Ziffer ist um 2 kleiner als die erste Ziffer. Die erste Ziffer ist um 3 kleiner als die vierte Ziffer. Addiert man die Ziffern, so erhält man 22.
Wie lautet die Autonummer?

▪ Aus der Schrift „aldjabr w' almokabala“ des Arabers *Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi* (um 830):
Ein Tagelöhner erhält 10 Dirhems im Monat, wenn er arbeitet; wenn er aber nichts tut, muß er 6 Dirhems zahlen. Er hat einen Monat so verbracht, daß er nichts erhält und nichts zu zahlen braucht.
Wie viele Tage hat er gearbeitet?
Hinweis: Der Monat besteht aus 24 Arbeitstagen. Berechne Leistung und Gegenleistung für einen Tag!

Klassenstufe 7

● Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

▪ Zur Zeit der bekannten Kriege der Armenier mit den Persern in der zweiten Hälfte des 6. Jahrhunderts hat *Salirak Kamsarakan* eine ungewöhnliche Heldentat vollbracht; nachdem er die persischen Streitkräfte dreimal im Laufe eines Monats überfallen hatte, hatte er beim ersten Mal die Hälfte des Heeres vernichtet. Während der Verfolgung schlug er sie zum zweiten Mal und vernichtete ein Viertel des Heeres, beim dritten Mal schließlich vernichtete er ein Elftel der Feinde. Die am Leben gebliebenen 280 wandten sich zur Flucht.
Aus diesem Rest soll nun ermittelt werden, wie viele Perser vor der Vernichtung vorhanden waren.

Klassenstufe 8

● Die Zahlen 100 und 90 wurden durch ein und dieselbe Zahl geteilt. Im ersten Fall erhielt man den Rest 4 und im zweiten den Rest 18.
Durch welche Zahl wurde geteilt? (Begründe das Ergebnis!)

▪ Die Lebenszeit des großen Mathematikers *Diophantos* ist nicht genau bekannt (wahrscheinlich um 250 u. Z.). Aus der Inschrift seiner Grabplatte kannst du das Alter und wichtige Lebensdaten berechnen.
„Hier das Grabmal deckt DIOPHANTOS. Schaut das Wunder! Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein. Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel seines Lebens. Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart. Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe. Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn. Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag. Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.“
Wie alt ist *Diophantos* geworden?

Klassenstufe 9

● Die Summe aus dem Dreifachen einer Zahl und dem Achtfachen einer anderen sei 310. Die Summe aus dem dritten Teil der ersten und dem achten Teil der zweiten sei 10. Für welche beiden Zahlen gelten diese Bedingungen?
Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, und lösen Sie es!

▪ In dem Buch des Georgiers *Suchan-Saba Orbelians* (1658 bis 1725) „Die Weisheit der Lüge“ finden wir die folgende Aufgabe:
Drei Brüder wollten sich voneinander trennen und ihren Besitz an Ziegen und Zicklein aufteilen. Sie sagten:
„Zehn Ziegen haben je ein Zicklein, zehn je zwei Zicklein und zehn je drei; wir wollen sie so unter uns teilen, daß kein Bruder mehr erhält als der andere und auch kein Zicklein von seiner Mutter getrennt wird.“
Wie konnten die drei Brüder ihren Besitz an Ziegen und Zicklein aufteilen?

Klassenstufe 10

● Zwei Funkstationen der Nationalen Volksarmee, die 15,4 km voneinander entfernt sind, peilen einen feindlichen Sender an. Der Winkel zwischen dem Peilstrahl von F_1 und der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Sendern beträgt $\alpha = 35{,}5°$, der Winkel zwischen dem Peilstrahl von F_2 und der Verbindungsstrecke ist $\beta = 115{,}7°$.
Berechnen Sie die Entfernung des Senders S von den Funkstationen F_1 und F_2!

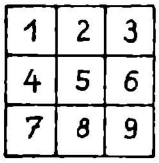
▪ Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:
Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in

der Nacht $\frac{1}{4}$ Elle hinunter, solange, bis sich die Tiere in gleicher Höhe befinden.
Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus?

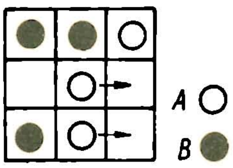
Zwei mathematische Spiele

Drei in einer Reihe:
Das Spiel wird auf einem quadratischen Brett mit 3 × 3 Feldern gespielt (Bild 1). Die Spieler *A* und *B* haben je drei weiße bzw. schwarze Steine, die sie abwechselnd auf das Brett setzen. Nachdem alle Steine gesetzt sind, kann jeder Stein waagerecht oder senkrecht, aber nicht diagonal in ein angrenzendes Quadrat ziehen. Sieger ist, wer zuerst eine Reihe von drei Steinen hat, d. h. entweder drei Steine in einer Zeile, Spalte oder Diagonalen.

Bild 1



In diesem Spiel hat der beginnende Spieler *A* eine Gewinnstrategie. Er muß zuerst das Feld 5 besetzen. Dann kann *B* auf zwei Weisen antworten: entweder setzt *B* auf eine Ecke 1, 3, 7 oder 9 oder *B* setzt auf ein Feld, das zwischen zwei Ecken liegt, nämlich 2, 4, 6 oder 8. Untersuchen wir zunächst den ersten Fall weiter. Dazu nehmen wir an, daß *B* auf das Feld 1 gesetzt hat. Das ist keine Einschränkung, denn auf alle anderen Möglichkeiten, eine Ecke zu besetzen, kann *A* entsprechend antworten. *A* besetzt nun das Feld 8. Damit muß *B* sich für das Feld 2 entscheiden, weil sonst *A* bereits eine Spalte besetzen könnte. Um zu verhindern, daß *B* eine Zeile mit seinen Steinen füllt, ist *A* gezwungen, das Feld 3 zu besetzen, wodurch *B* wiederum genötigt ist, auf Feld 7 zu setzen. Damit sind jetzt alle Steine gesetzt. *A* ist am Zug und bewegt den Stein vom Feld 5 auf Feld 6, beim nächsten Zug den Stein vom Feld 8 auf Feld 9. Da diagonale Züge verboten sind, kann *B* nicht vom Feld 2 auf Feld 4 ziehen, um eine volle Spalte zu erhalten (Bild 2a).



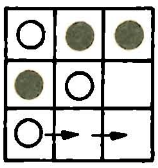


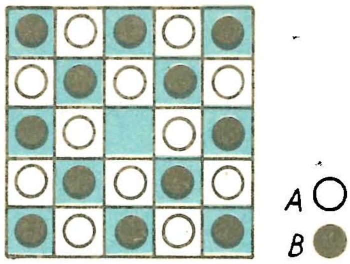
Bild 2a 1. Fall Bild 2b 2. Fall

Hätte *B* seinen ersten Stein auf Feld 2 gesetzt (entsprechend verlaufen die weiteren Züge für die Felder 4, 6 und 8), so belegt *A* dann Feld 7. Dann muß *B* auf Feld 3 setzen und damit *A* auf Feld 1. *B* muß mit dem letzten Stein Feld 4 besetzen. *A* zieht vom Feld 7 auf Feld 8 und dann auf Feld 9. Kein Stein von *B* (weder auf Feld 2 noch auf Feld 3) kann diese Züge verhindern (Bild 2b).

Versäumt es *A*, den ersten Stein auf Feld 5 zu setzen, so kann *B* durch geschicktes Ziehen das Spiel wenigstens unentschieden halten oder sogar gewinnen.

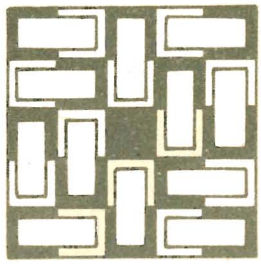
Lewthwaites Spiel:
Wir wollen dieses Spiel für ein quadratisches „Schachbrett" mit 5 × 5 Feldern erläutern. Die zwölf weißen und zwölf schwarzen Steine der Spieler *A* und *B* sind schachbrettartig auf das Brett gesetzt (Bild 3), d. h. schwarze Steine auf schwarze Felder und weiße Steine auf weiße Felder. Dabei bleibt stets eins der 25 Felder frei, in unserem Beispiel ist es das „mittlere". *A* und *B* ziehen abwechselnd einen Stein auf das gerade freie Feld, wobei nur waagerecht und senkrecht, aber nicht diagonal gezogen werden darf. Auf Grund dieser Regel muß ein Stein beim Ziehen zwangsläufig die Farbe des Feldes wechseln. Das Spiel endet mit der Unfähigkeit eines Spielers zu ziehen, womit er natürlich verloren hat.

Bild 3



Wir wollen annehmen, daß das Brett – wie in Bild 3 – dreizehn schwarze Felder hat. Damit ist das freie Feld stets schwarz. Wir setzen noch voraus, daß der Spieler *A* beginnt. Unter diesen Umständen kann der Spieler *B* die Zugunfähigkeit von *A* erzwingen. Um das einzusehen, belegen wir das Spielfeld mit 12 Dominosteinen (passender Größe) auf irgendeine Art, jedoch so, daß sich die Steine nicht überlappen und daß das ursprünglich freie Feld frei bleibt (Bild 4).
Zieht nun *A*, so zieht *B* mit dem Stein nach, der sich auf dem Dominostein befindet, dessen anderer Stein durch *A* gerade bewegt wurde. Also ist *B* in der Lage, auf jeden Zug von *A* einen eigenen Zug folgen zu lassen. Diese wichtige Schlußfolgerung aus der Dominosteintaktik wollen wir jetzt ausführlich begründen.
A bewegt im ersten Zug seinen Stein von einem weißen auf ein schwarzes Feld. *B* antwortet mit der Dominosteintaktik, er zieht also den schwarzen Stein von einem schwarzen auf ein weißes Feld. Damit kann der von *A* zuerst bewegte Stein, der jetzt auf einem schwarzen Feld steht, nicht auf das gerade frei gewordene schwarze Feld ziehen. Der Stein, den *A* jetzt nachrückt, muß also von einem noch nicht berücksichtigten Dominostein kommen. *B* hat deshalb wieder die Möglichkeit, auf den zweiten Zug mit der Dominosteintaktik zu antworten (weil auf dem neuen Dominostein garantiert ein schwarzer Stein ist). Auf das von *B* gerade frei gemachte schwarze Feld kann *A* die bisher bewegten Steine nicht ziehen, da sich diese auch auf schwarzen Feldern befinden. *A* wird daher im nächsten Zug einen Stein von einem Dominostein herunterziehen, dessen Steine bisher noch nicht bewegt worden sind. Wir können wieder entsprechende Überlegungen durchführen, um zu zeigen, daß *B* mit der Dominosteintaktik antworten kann. Das gilt auch für alle folgenden Züge.
Da sich auf dem Spielfeld nur zwölf Dominosteine befinden, muß *A* schließlich von dem letzten unberücksichtigten Dominostein seinen Stein herunterziehen, wobei *B* wieder mit der Dominosteintaktik antworten kann. Alle Steine von *A* sind genau einmal bewegt worden und damit sämtlich auf schwarzen Feldern. Das eben durch den Zug von *B* frei gewordene Feld ist ebenfalls schwarz. Also kann *A* keinen Stein auf dieses Feld ziehen, und *B* hat gewonnen.
Wir verdeutlichen die Dominosteintaktik auf einem Spielfeld mit 3 × 3 Feldern (Bild 5). Wenn das Mittelfeld frei bleibt, dann gibt es nur zwei mögliche Belegungen des Spielfeldes mit Dominosteinen, die spiegelbildlich auseinander hervorgehen. Eine Möglichkeit zeigt Bild 5a. In Bild 5b ist die Anfangsstellung mit den aufeinanderfolgenden Zügen zu sehen, und Bild 5c zeigt die Endstellung. *R. Thiele*

Bild 4



(Bild 4 liegt das gleiche „Schachbrett" wie Bild 3 zugrunde. Im Bild 4 sind anstelle der Steine ○ und ● Dominosteine gelegt worden.)

Bild 5a Lage der Dominosteine

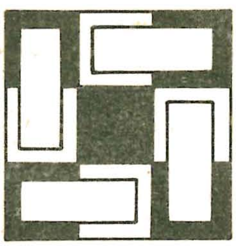


Bild 5b Anfangsstellung

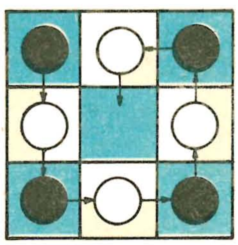
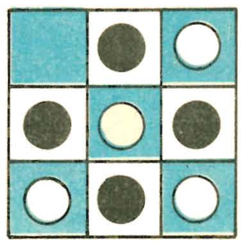


Bild 5c Endstellung



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 7. Oktober 1977

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab 7. Oktober 1977 veröffentlicht.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

1. Die Oberschule „Wilhelm Pieck" hat genau 314 Jungen und genau 322 Mädchen als Schüler. Ein Sechstel von ihnen gehört der FDJ an, alle anderen sind Mitglieder der Pionierorganisation „Ernst Thälmann".
Ermittle die Anzahl der FDJler unter diesen Schülern und die Anzahl der Pioniere unter ihnen!

2. Von drei Pionieren, die sich in einem Rätelager treffen, ist folgendes bekannt:
(1) Ihre Vornamen sind Frank, Gerd und Harald.
(2) Ihre Familiennamen lauten Schulze, Müller und Krause.
(3) Frank heißt mit Familiennamen nicht Krause.
(4) Der Vater von Gerd ist Offizier der NVA.
(5) Gerd besucht die 6. Klasse, der Pionier mit dem Familiennamen Krause geht in die 7. Klasse.
(6) Der Vater des Pioniers mit dem Familiennamen Schulze arbeitet als Dreher.
Wie heißen diese drei Pioniere mit Vor- und Zunamen?

3. Fritz möchte eine Subtraktionsaufgabe aufschreiben, bei der die Differenz zweier natürlicher Zahlen zu bilden ist. Als Ergebnis soll eine dreistellige Zahl entstehen, deren drei Ziffern alle einander gleich sind.
Der Minuend soll eine Zahl sein, die auf Null endet. Streicht man diese Null, so soll sich der Subtrahend ergeben.
Gib alle Subtraktionsaufgaben an, für die das zutrifft!

4. Eine Strecke von 240 m ist so in vier Teilstrecken geteilt, daß folgendes gilt:
(1) Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite Teilstrecke.
(2) Die zweite Teilstrecke ist so lang wie die Summe der Längen der dritten und vierten Teilstrecke.
(3) Die dritte Teilstrecke ist ein Fünftel der Gesamtstrecke.
Ermittle die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Olympiadeklasse 6

1. In der DDR wurden folgende Mengen von Stickstoffdüngemitteln (in t) produziert

1950	1960	1970	1974
231 000	334 000	395 000	424 000

Dabei wurden die Ergebnisse von Jahr zu Jahr gesteigert.
Berechne, um wieviel Tonnen die Stickstoffdüngemittelproduktion im Durchschnitt jährlich gesteigert wurde:
a) von 1951 bis 1960,
b) von 1961 bis 1970,
c) von 1971 bis 1974!

2. Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teiles der Route nur noch 45 km.
Wieviel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

3. Jeder der 27 Pioniere der Klasse 6a sammelte durchschnittlich 5 Flaschen und 8 kg Altpapier. Für jede Flasche gab es 5 Pfennig und für je 1 kg Altpapier 15 Pfennig. Die Klasse 6b sammelte Altstoffe für insgesamt 25 M.
Reicht das so erworbene Geld für die gemeinsame Eisenbahnfahrt beider Klassen zum Wandertag, die 60 M kosten wird?

4. Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:
(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.
(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, daß Frank höher sprang als Ernst.
(3) Christian sprang genau so hoch wie Anton, aber höher als Ernst.
(4) Es ist falsch, daß Bernd die Sprunghöhe eines anderen Schülers erreichte oder übertraf.
Ermittle die Reihenfolge der Sprunghöhen, die die Pioniere bei diesem Wettkampf erreichten! Beginne bei der Angabe der Reihenfolge mit dem Schüler, der die größte Sprunghöhe erreichte!

Olympiadeklasse 7

1. Matthias war in den Sommerferien in einem internationalen Pionierzeltlager. Er berichtet seinen Klassenkameraden: „Ein Viertel aller Teilnehmer und vier Pioniere kamen aus der Sowjetunion, ein Fünftel aller Teilnehmer und fünf Pioniere aus der DDR, ein Sechstel aller Teilnehmer und sechs Pioniere aus der ČSSR, ein Achtel aller Teilnehmer und acht Pioniere aus der VR Polen, ein Neuntel aller Teilnehmer und neun Pioniere aus der VR Bulgarien. Die übrigen 21 Pioniere kamen aus der Ungarischen VR. In jedem Zelt des Lagers waren genau acht Pioniere untergebracht."
Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Zelte des Lagers!

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt D der Seite BC.
Beweise, daß dann die Punkte B und C den gleichen Abstand von der Geraden g haben!

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 9{,}7$ cm, $b = 7{,}6$ cm und $\beta + \gamma = 115°$!
Dabei sei a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ und γ die des Winkels $\sphericalangle ACB$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Der kleine Uwe hat würfelförmige, weiß gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 2 cm und würfelförmige, rot gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 3 cm. Er baute einen größeren, zusammengesetzten Würfelkörper und verwendete dazu nur Steine dieser beiden Sorten. Dabei bestanden die vier senkrecht stehenden Außenwände aus roten Bausteinen, der restliche Würfelkörper bestand von unten bis oben durchgehend aus weißen Bausteinen.
Ermittle die Anzahl der hierbei verwendeten weißen und die der verwendeten roten Bausteine, wobei vorausgesetzt wird, daß Uwe nicht mehr als 60 Bausteine von jeder Sorte zur Verfügung hatte!

Olympiadeklasse 8

1. Der Preis einer Ware (100 M) wurde in drei hintereinander liegenden Jahren um jeweils 5% gesenkt.

a) Wieviel Prozent des Anfangspreises müßte eine einmalige Preissenkung betragen, wenn derselbe Endpreis erreicht werden sollte?

b) Wieviel Prozent des Endpreises beträgt der Anfangspreis der Ware?

Die Prozentangaben sind auf 2 Dezimalen genau zu runden.

2. Sechs quaderförmige Stücke Wandtafelkreide, jedes mit den Kantenlängen 8 cm, 1 cm, 1 cm, sollen derart hingelegt oder aufgestellt werden, daß jedes Stück alle fünf anderen berührt. Gib eine Lösung in Form einer Skizze an!

3. Der Name eines bedeutenden Mathematikers wird mit fünf Buchstaben geschrieben. Den Buchstaben $A, B, C, \ldots, Y, Z$ des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, ..., 25, 26 zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des erwähnten Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

(1) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

(2) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

(3) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

(4) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

(5) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Ermittle den Namen dieses Mathematikers!

4. Jens behauptet, es sei möglich, jedes beliebige Dreieck ABC in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.

Uwe dagegen meint, daß nur für spezielle Dreiecke eine derartige Zerlegung möglich sei.

Untersuche, wer von den beiden recht hat!

Olympiadeklasse 9

1. Beweisen Sie folgende Aussage:

Wenn sich zwei natürliche Zahlen ($\geqq 1$) um 1977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene Zahlen als Teiler.

2. Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d. h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

(Unter dem Abstand eines Punktes P im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke PQ, wobei Q folgendermaßen definiert ist: Man lege durch P einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis k mit den Endpunkten A und B erscheint. Ist M der Mittelpunkt von AB, so sei Q der Schnittpunkt von k mit der Geraden durch M und P.)

3. Herr A kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlaß. Als er zahlen wollte, stellte er fest, daß er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte, zwar so viele, daß das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben. Herr B, ein Bekannter von Herrn A, hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlaß.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn A einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr A denjenigen Teilbetrag für Herrn B mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr A für Herrn B damit ausgelegt?

4. Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln „Zeichenreihen" umzuformen. Eine „Zeichenreihe" sei eine Aneinanderreihung der Zeichen A, B, S, a, b in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

(1) S wird ersetzt durch A.

(2) A wird ersetzt durch aAB.

(3) A wird ersetzt durch a.

(4) B wird ersetzt durch b.

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, daß auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird.

Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus. Wir geben dem Automaten das Zeichen S ein.

a) Ist es möglich, daß der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!

b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?

c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

Olympiadeklasse 10

1. Beweisen Sie den folgenden Satz:

In jedem regelmäßigen Fünfeck ist jede der Diagonalen parallel zu einer der Fünfeckseiten.

2. Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term

$$\frac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$$

definiert ist.

3. Sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leqq a_i \leqq 7$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ und gilt

$z = a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 8 + a,$

so sagt man, z sei im Oktalsystem durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz

$$z = [a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0]_8.$$

Die natürliche Zahl, die im dekadischen System die Darstellung 135 hat, lautet z. B. im Oktalsystem $[207]_8$; denn es gilt $135 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 7$ sowie $0 \leqq 2; 0; 7 \leqq 7$ und $2 > 0$.

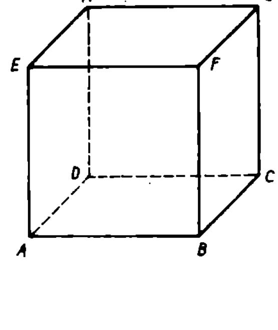
a) Stellen Sie die natürliche Zahl, deren Darstellung im dekadischen System 214 lautet, im Oktalsystem dar!

b) Im Kryptogramm

$$\begin{array}{r} [\mathrm{E\,I\,NS}]_8 \\ +\,[\mathrm{E\,I\,NS}]_8 \\ \hline [\mathrm{ZWEI}]_8 \end{array}$$

wird gefordert, für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern so einzusetzen, daß im Oktalsystem dargestellte natürliche Zahlen entstehen, für die die angegebene Additionsaussage wahr ist. Geben Sie mindestens eine Lösung dieses Kryptogramms an, und zeigen Sie, daß die angegebene Lösung alle verlangten Eigenschaften hat!

4. Es sei M die Menge aller 12 Kanten und aller 12 Flächendiagonalen eines Würfels mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Bild).



Gibt es einen Streckenzug, bei dem jede in M enthaltene Strecke genau einmal durchlaufen wird?

Wenn ja, geben Sie ein Beispiel dafür (durch Angabe der Folge der Eckpunkte des Streckenzuges), und zeigen Sie, daß der so angegebene Streckenzug die verlangte Eigenschaft hat!

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle im dekadischen Positionssystem fünfstelligen natürlichen Zahlen, die durch 17, 19 und 23 teilbar sind und deren Zehnerziffer 0 lautet.

2. Man ermittle alle reellen Lösungen (x, y) des Gleichungssystems

$$2\sqrt{x+y}+x+y=8 \qquad (1)$$
$$x^3+y^3=40. \qquad (2)$$

3. Über fünf Punkte A, B, C, D, S im Raum wird vorausgesetzt, daß A, B, C, D in einer Ebene ζ liegen, daß sie die Ecken eines konvexen Vierecks sind und daß S nicht in ζ liegt.

Es ist zu beweisen, daß dann zu der vierseitigen Pyramide $ABCDS$ eine Ebene ε existiert, die die Kanten SA, SB, SC bzw. SD in Punkten A', B', C' bzw. D' schneidet, die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

4. Jemand sucht alle Möglichkeiten, vier Ecken eines gegebenen Würfels schwarz zu markieren. Er betrachtet zwei dieser Markierungsmöglichkeiten genau dann als gleich, wenn es eine Drehung des Würfels gibt, die die eine der beiden Markierungsmöglichkeiten in die andere überführt.

Ermitteln Sie alle verschiedenen Markierungsmöglichkeiten!

Gauß-Ehrenplakette

Zu Ehren des 200. Geburtstages von *C. F. Gauß* wurde vom Gauß-Komitee der Akademie der Wissenschaften der DDR eine Ehrenplakette herausgegeben (Meißner Porzellan, weiß, 80 mm Durchmesser, ohne materielle Anerkennung, Auflage 500 Stück), die als einmalige Auszeichnung an verdienstvolle Persönlichkeiten, Mitarbeiter und Organisatoren auf Beschluß des Gauß-Komitees 1977 verliehen wurde (siehe Foto).

Lösungen

Lösungen zu: Verknüpfungen in der Ebene

▲1▲ Zum Beispiel gilt für alle $x \in P$ und für alle $X \in \varepsilon$ $x \,\Delta\, x = x$ bzw. $X \circ X = X$; Δ und $\circ$ sind beide kommutativ, aber nicht assoziativ...

▲2▲ *Hinweis:* Für alle X, Y, $Z \in \varepsilon$ gilt $X \circ Y = Z$ gdw $X * Z = Y$ gdw $Z \cdot Y = X$. Daraus folgt die Behauptung.

▲3▲ a) $\circ: \frac{a}{b} = 1$, $*: \frac{a}{b} = -2$, $\cdot: \frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$.

b) $a = 0$: Für alle X, $Y \in \varepsilon$ gilt $X \bullet Y =_{Df} X$.

c) $b \to 0$: Für alle X, $Y \in \varepsilon$ gilt $X \bullet Y =_{Df} Y$.

▲4▲ a) Weil sonst die Eindeutigkeit der Verknüpfungen verloren geht.

b) Wenn in 3) das Dreieck ABC gleichseitig ist, erhalten wir $(\varepsilon, \blacktriangle)$; ist das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ($\sphericalangle ABC = 90°$), ergibt sich $(\varepsilon, \blacksquare)$.

c) Zum Beispiel definieren wir $X \circ Y$ als den dritten Punkt Z des gleichschenkligen Dreiecks XYZ mit positivem Umlaufsinn und $\overline{XY}$ als Basis sowie $\overline{XZ} = \overline{YZ} = k \cdot \overline{XY}$, wobei k eine beliebige, aber feste positive Zahl ist.

▲8▲ a) $X \circ_1 Y = X$, $X \circ_2 Y = Y$.

b) Es wird jeweils an derselben Geraden gespiegelt, so daß die Nacheinanderausführung zweier solcher Spiegelungen zum Ausgangspunkt zurückführt.

▲9▲ *Hinweis:* Sei $X \circ_1 Y = Z_1$, $Z_1 \circ_2 Y = Z_2$. Dann gilt $YZ \parallel t_X$ und $Z_i Y \parallel t_{z_2}$, so daß $t_X \parallel t_{Z_2}$ folgt, also $X = Z_2$. Analog zeigt man $(X \circ_2 Y) \circ_1 Y = X$.

▲10▲ Jeder Kegelschnitt ist bezüglich $\circ$ abgeschlossen.

▲12▲ Schneide die Gerade g den Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ in den Punkten A und B. Auf einem der beiden dadurch entstandenen Bögen b_i $(i = 1, 2)$ von $\mathfrak{k} \setminus \{A, B\}$ wird dann z. B. definiert:

$X \circ Y =_{Df} Z$ mit $Z \neq Y$ genau dann, wenn $AB \cap t_X = AB \cap YZ$ – analog $\circ_1$ in Abbildung 11.

▲13▲ a) Falls die Gerade XY zugleich Tangente in X oder Y ist, setzen wir für $XY = t_X : X \circ Y = X$ und für $XY = t_Y : X \circ Y = Y$.

Wenn X ein Wendepunkt der Kubik ist, setzen wir $X \circ X =_{Df} X$.

b) *Hinweis:* Für alle X, Y, $Z \in c$ gilt $X \circ Y = Z$ gdw $X \circ Z = Y$ gdw $Z \circ Y = X$.

Lösungen zu den Aufgaben zur Fehlerrechnung bei physikalischen Messungen

▲1▲
$$\overline{V} = 15{,}5\ \mathrm{ml}$$
$$\Delta\overline{V} = 0{,}2\ \mathrm{ml}$$
$$V = (15{,}5 \pm 0{,}2)\ \mathrm{ml}$$
$$\varepsilon = \pm 1{,}3\%$$

▲2▲
$$y \pm \Delta y = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b}$$
$$y \pm \Delta y = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b} \cdot \frac{b \mp \Delta b}{b \mp \Delta b}$$
$$y \pm \Delta y = \frac{a \cdot b \pm \Delta a \cdot b \mp \Delta b \cdot a \mp \Delta a \cdot \Delta b}{b^2 - (\Delta b)^2}$$

Bei Vernachlässigung der Produkte aus kleinen Größendifferenzen ergibt sich:

$$y \pm \Delta y = \frac{a \cdot b \pm \Delta a \cdot b \mp \Delta b \cdot a}{b^2}$$
$$y = \frac{a}{b}$$
$$\pm \Delta y = \pm \frac{\Delta a}{b} \mp \frac{\Delta b \cdot a}{b^2}$$
$$\pm \frac{\Delta y}{y} = \pm \frac{\Delta a}{a} \mp \frac{\Delta b}{b}$$

Der relative Größtfehler eines Quotienten aus direkt und voneinander unabhängig gemessenen Größen ist gleich der Summe der relativen Fehler ihrer einzelnen Meßwertreihen.

▲3▲

Meßergebnis der Massebestimmung
$$m = (34{,}5 \pm 0{,}5)\ \mathrm{g}$$

Meßergebnis der Volumenbestimmung
$$V = (3{,}8 \pm 0{,}3)\ \mathrm{cm}^3$$

Dichte des Kupferwürfels $\overline{\varrho}_{cu} = 9{,}1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

Meßunsicherheit der Dichtebestimmung
$$\varepsilon\,\% = 1{,}5\% + 8\% = 9{,}5\%$$

Meßergebnis $\varrho_{cu} = 9{,}1\ (1 \pm 9{,}5\%)\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

$$\varrho_{cu} = (9{,}1 \pm 0{,}9)\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Der Tabellenwert liegt innerhalb der Meßunsicherheit.

▲4▲ $c = 0{,}002\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$$c = \frac{0{,}2}{3}\% = 0{,}07\%$$
(also rund ein Promille!)

Lösungen zu: Aufgaben zum Berufsbild: Ingenieur für Technik und Technologie des Fernmeldewesens

▲1▲ Umstellen der Zeitfunktion nach t:

$$i - \frac{E}{R} = -\frac{E}{R}\, e^{-\frac{-t}{\tau}}$$
$$1 - \frac{\frac{i}{E}}{R} = e^{-\frac{-t}{\tau}}$$
$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{\frac{i}{E}}{R}\right) \text{ mit } i = I_{an}$$
$$t = -\tau \ln\left(1 - \frac{\frac{I_{an}}{E}}{R}\right)$$

Mit den Zahlenwerten:

$$t = -0{,}5\ \mathrm{ms} \ln\left(1 - \frac{1}{12}\right) \approx -0{,}5\ \mathrm{ms}$$
$$t \approx 0{,}140\ \mathrm{ms} \qquad \ln(1 - 0{,}835)$$

Dabei wurde die mechanische Trägheit des Relais nicht berücksichtigt.

▲2▲ Ursprüngliche Länge der Fernschreibanschlußleitung:

(I) $I_x = \frac{U}{R_x}$

Verlängerte Fernschreibanschlußleitung:

(II) $I_x - I = \frac{U}{R_x + R}$

I in II liefert

$$0 = R_x^2 + RR_x - \frac{UR}{I}$$

$$R_x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{UR}{I}}$$

Mit den Zahlenwerten:

$R_x = -250\,\Omega \pm \sqrt{6{,}25 \cdot 10^4\,\Omega^2 + 300 \cdot 10^4\,\Omega^2}$

$R_x = -250\,\Omega \pm 1750\,\Omega$

Physikalisch sinnvoll ist nur ein positiver Leitungswiderstand.

$$R_x = 2\,\mathrm{k}\Omega$$

▲3▲ $\frac{d\alpha}{dZ} = -\frac{1}{2}\frac{R'}{Z^2} + \frac{1}{2}G' = 0$

$$G' = \frac{R'}{Z^2}$$

$$Z = \sqrt{\frac{R'}{G'}}$$

$\frac{d^2\alpha}{dZ^2} = \frac{R'}{Z^3}$; $\frac{R'}{\left(\frac{R'}{G'}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$ d. i. Min.! $\frac{R'}{\left(\frac{R'}{G'}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$

▲4▲ $v = ax^2 \ln \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{D}{d} = x$

$v = ax^2 \ln 1 - ax^2 \ln x$

$v = -ax^2 \ln x$

$\frac{dv}{dx} = -ax - 2ax \ln x = 0$

$-ax = 2ax \ln x$

$-1 = \ln x^2$

$e^{-1} = x^2$

$x = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{D}{d}$

$\frac{d^2v}{dx^2} = -a - 2a - 2a \ln x;$

$-3a - 2a \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -3a - a \ln \frac{1}{e}$

$= -3a + a$

$= -2a < 0$ d. i. Max.!

Lösungen zu den Aufgaben der XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 10 (Bezirksolympiade)

Fortsetzung aus Heft 3/77:

4. Es gilt nach den Logarithmengesetzen

$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lg(n+1) - \lg(n). \qquad (n > 0)$

Summiert man nun von $n = 1$ bis $n = 99$, so erhält man

$\lg\left(1 + \frac{1}{99}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{98}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{97}\right) + \ldots$

$+ \lg\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \lg 100 - \lg 99 + \lg 99 - \lg 98$

$+ \lg 98 - + \ldots - \lg 2 + \lg 2 - \lg 1.$

$= \lg 100 + (-\lg 99 + \lg 99) + (-\lg 98 + \lg 98)$

$+ \ldots + (-\lg 2 + \lg 2) - \lg 1.$

In dieser Zeile sind die in den Klammern stehenden Summen jeweils gleich Null. Da $\lg 1 = 0$ und $\lg 100 = 2$ gilt, ist damit die Behauptung bewiesen.

5. Da die Pyramide gerade ist, liegt ihre Spitze im Schwerpunkt der Deckfläche des Prismas. Der Mantel der Pyramide besteht aus drei zueinander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Basislänge a. Bezeichnet man die Länge der zugehörigen Höhe in diesen Dreiecken mit H, so ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$H^2 = h^2 + \left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2.$$

Also hat der Mantel der Pyramide den Flächeninhalt

$$M_1 = \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}.$$

Der Mantel des Prismas hat den Flächeninhalt $M_2 = 3ah$.

Daher ist wegen $a > 0$ und $h > 0$ die Forderung $M_1 = M_2$ der Reihe nach gleichwertig mit

$3ah = \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2},$

$2h = \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}, \quad 4h^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2,$

$h^2 = \frac{1}{36}a^2,$

$h = \frac{1}{6}a.$

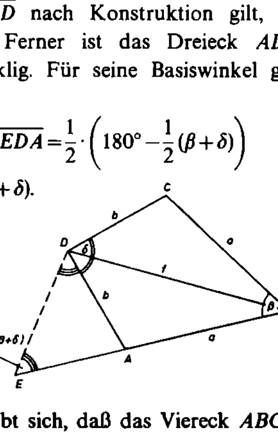
6. I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ und $\overline{AD} = \overline{CD} = b$. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Drachenvierecks halbiert die Diagonale BD die Winkel $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ADC$. Der Kreis um A mit b schneide die Verlängerung von BA über A hinaus in E. Nach dem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks gilt dann

$$\overline{\sphericalangle DAE} = \frac{1}{2}(\beta + \delta).$$

Da $\overline{AE} = \overline{AD}$ nach Konstruktion gilt, ist $\overline{BE} = a + b$. Ferner ist das Dreieck ADE gleichschenklig. Für seine Basiswinkel gilt folglich:

$\overline{\sphericalangle AED} = \overline{\sphericalangle EDA} = \frac{1}{2} \cdot \left(180° - \frac{1}{2}(\beta + \delta)\right)$

$= 90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta).$



Daraus ergibt sich, daß das Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn man es durch folgende Konstruktion erhalten kann.

II. (1) Man zeichnet eine Strecke BE mit der Länge $a + b$.

(2) Man trägt an EB in E einen Winkel der Größe

$$90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta) \text{ an.}$$

(3) Man zeichnet den Kreis mit f um B. Schneidet der Kreis den freien Schenkel des Winkels, so sei D einer der Schnittpunkte.

(4) Man trägt an DE in D einen Winkel der Größe

$$90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta) \text{ an.}$$

Schneidet sein freier Schenkel die Strecke BE, so sei A der Schnittpunkt.

(5) Man zeichnet die Kreise um D mit $\overline{DA}$ und um B mit $\overline{BA}$. Der Schnittpunkt dieser Kreise in der durch BD bestimmten Halbebene, in der A nicht liegt, sei C genannt.

III. Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $\overline{BD} = f$.

Da an ED gleichgroße Winkel angetragen wurden, folgt, daß das Dreieck EDA gleichschenklig ist. (*)

Nach Konstruktion, Innenwinkelsatz und Außenwinkelsatz eines Dreiecks ergeben sich die folgenden Winkelgrößen:

$\overline{\sphericalangle EAD} = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$ und $\overline{\sphericalangle ABD} + \overline{\sphericalangle ADB}$

$= \frac{1}{2}(\beta + \delta).$

Nach Konstruktion sind die Dreiecke BDA und BDC symmetrisch bezüglich BD. (**)

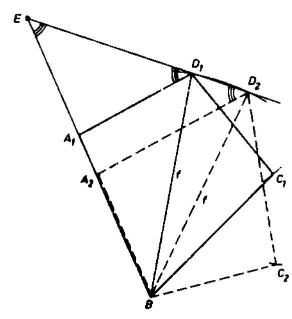
Daraus folgt:

$\overline{\sphericalangle CBA} + \overline{\sphericalangle ADC} = \beta + \delta.$

Aus (**) folgt, daß das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck mit $\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CB}$ ist.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Nun gilt laut Aufgabenstellung $f < a + b$, der Winkel $\sphericalangle AED$ liegt also der kleineren Seite gegenüber. Daher ist (3) entweder zweideutig oder eindeutig oder nicht ausführbar. Mit den gegebenen Größen erhält man bei der Konstruktion des Dreiecks ADE zwei verschiedene Punkte D_1 und D_2. Danach sind die Konstruktionsschritte (4) und (5) jeweils eindeutig ausführbar.

Somit erhält man die beiden Drachenvierecke $A_1BC_1D_1$ und $C_2D_2A_2B$.



Sie sind zueinander (ungleichsinnig) kongruent; denn es gilt:

$\overline{BD_1} = \overline{BD_2} = f$, $\overline{\sphericalangle BA_1D_1} = \overline{\sphericalangle D_2A_2B}$, wegen $A_1D_1 \parallel A_2D_2$ als Stufenwinkel, weiter gilt $\overline{\sphericalangle BED_1} + \overline{\sphericalangle EBD_1} = \overline{\sphericalangle D_2D_1B}$ (Außenwinkelsatz) sowie $\overline{\sphericalangle ED_1A_2} + \overline{\sphericalangle A_2D_2B}$

$= \overline{\sphericalangle D_1D_2B}$, woraus wegen $\overline{\sphericalangle D_2D_1B}$

$= \overline{\sphericalangle D_1D_2B}$ dann $\overline{\sphericalangle A_1BD_1} = \overline{\sphericalangle A_2D_2B}$ folgt.

Lösungen zu den Aufgaben des alpha-Wettbewerbs
Heft 1/1977 (Fortsetzung):

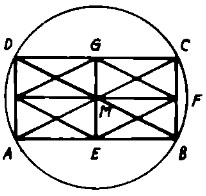
Ma 8 ■1585 Es sei $z=10x+y$ eine zweistellige natürliche Zahl, die die verlangten Eigenschaften hat. Dann ist $x=1$, 2 oder 3, da für $x \geqq 4$ wegen $z \geqq 40$ die Zahl z^2 bereits vierstellig wäre. Da das Quadrat einer natürlichen Zahl niemals auf 2 oder 3 endet, gilt $x=1$. Also ist auch die letzte Ziffer von z^2 gleich 1. Nun endet das Quadrat einer natürlichen Zahl nur dann auf 1, wenn die Zahl selbst auf 1 oder 9 endet. Da nach Voraussetzung die beiden Grundziffern von z voneinander verschieden sind, endet also z auf 9, und es gilt

$$z=19.$$

Tatsächlich hat diese Zahl die verlangten Eigenschaften; denn ihre Grundziffern sind voneinander verschieden, $z^2=361$ ist eine dreistellige Zahl, und die letzte Grundziffer 1 von z^2 stimmt mit der ersten Grundziffer 1 von z überein.

Ma 8 ■1586 Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$. Dann gilt $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=\overline{MD}$. M ist also gleichzeitig Mittelpunkt des Kreises durch A, B, C, D, und es gilt

$$\overline{MA}=r.$$



Da die Verbindungsgerade des Mittelpunktes M des Kreises mit dem Mittelpunkt E der Sehne $\overline{AB}$ auf dieser senkrecht steht, gilt $\sphericalangle AEM=90°$. Ebenso gilt $\sphericalangle MHA=90°$ und ferner, weil $ABCD$ ein Rechteck ist, $\sphericalangle HAE=90°$. Daher ist das Viereck $AEMH$ ein Rechteck.

Weil die beiden Diagonalen eines jeden Rechtecks gleichlang sind, gilt also $\overline{EH}=\overline{AM}=r$.
Analog beweist man, daß auch

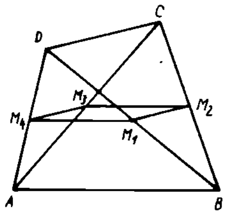
$$\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=r \text{ ist.}$$

Der Umfang des Vierecks $EFGH$ ist also gleich $u=4r=4 \cdot 5$ cm $=20$ cm.

Ma 8 ■1587 Zum Beweis benutzen wir den folgenden Satz: „Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier Dreieckseiten ist parallel der dritten Dreieckseite." (Vgl. Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6, S. 131, wo ein entsprechender Satz für das Trapez bewiesen wird.)

Nach diesem Satz gilt
in dem Dreieck ABC $M_2M_3 \parallel AB$,
in dem Dreieck ABD $M_1M_4 \parallel AB$.
Daraus folgt $M_2M_3 \parallel M_1M_4$.
Ferner gilt
in dem Dreieck BCD $M_1M_2 \parallel CD$,
in dem Dreieck ACD $M_3M_4 \parallel CD$,
also $M_1M_2 \parallel M_3M_4$.

Da nach Voraussetzung die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ nicht parallel sind, liegen die vier Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 nicht auf ein und derselben Geraden. Daher bilden sie ein Viereck, und zwar ein Parallelogramm, weil je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

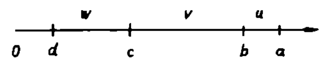


Ma 8 ■1588 Setzt man $a-b=u$, $b-c=v$, $c-d=w$, wobei u, v, w von Null verschiedene natürliche Zahlen sind (vgl. die graphische Darstellung), so erhält man die sechs Differenzen

$a-b=u$, (1)
$a-c=u+v$, (2)
$a-d=u+v+w$, (3)
$b-c=v$, (4)
$b-d=v+w$, (5)
$c-d=w$. (6)

Nun soll unter diesen sechs Zahlen jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 genau einmal vorkommen. Da $u+v+w$ größer als jede der anderen fünf Zahlen ist, gilt

$$u+v+w=6.$$



Wegen $1+2+3=6$ kommt unter den drei Summanden u, v, w jede der Zahlen 1, 2, 3 genau einmal vor. Nun kann weder u noch w gleich 3 sein, da sonst auch $v+w$ bzw. $u+v$ gleich 3 wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Also gilt $v=3$.

Dann ist entweder $u=1$, $w=2$ oder $u=2$, $w=1$. Im ersten Fall erhält man die sechs Differenzen

$u=1$, $u+v=4$, $u+v+w=6$,
$v=3$, $v+w=5$, $w=2$,

die man so ordnen kann, daß die Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6 entsteht. Nun kann man d beliebig positiv annehmen, also z. B. $d=1$.
Dann erhält man
aus (3) $a=6+1=7$,
aus (5) $b=5+1=6$,
aus (6) $c=2+1=3$.
Es gibt also vier natürliche Zahlen, nämlich

$$a=7, b=6, c=3, d=1,$$

die die verlangten Eigenschaften haben.
Ihre Differenzen sind nämlich gleich

$a-b=1$, $a-c=4$, $a-d=6$,
$b-c=3$, $b-d=5$, $c-d=2$;

diese Differenzen lassen sich so ordnen, daß sie die Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6 bilden.

Bemerkungen: 1. Setzt man $d=2$, $d=3$ usw., so erhält man weitere Zahlen mit der verlangten Eigenschaft, z. B.

$$a=8, b=7, c=4, d=2.$$

2. Der oben nicht ausführlich behandelte zweite Fall ($v=3$, $u=2$, $w=1$) führt auch noch auf weitere Lösungen, z. B.

$$a=7, b=5, c=2, d=1.$$

Auch hier sind die sechs Differenzen gleich 2, 5, 6, 3, 4, 1, entsprechen also den gestellten Bedingungen.

Ph 8 ■1589 Gegeben: $\Delta\vartheta=90$ grd,
$c=1\,\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grd}}$, $\eta=70\%$, $m=2$ kg $=2000$ g,
$t=25$ min $=1500$ s
Gesucht: P in Watt
Die benötigte Wärmemenge findet man aus

$$W=c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$$
$$W=\frac{1 \text{ cal} \cdot 2000 \text{ g} \cdot 90 \text{ grd}}{\text{g} \cdot \text{grd}}$$
$$W=180000 \text{ cal}=180 \text{ kcal}.$$

Die Leistung findet man aus

$$P=\frac{W}{t}$$
$$P=\frac{180 \text{ kcal}}{1500 \text{ s}}=\frac{180 \cdot 4{,}1868}{1500} \text{ kW}$$
$$P \approx 502 \text{ W}.$$

Weiterhin gilt

$$\frac{502 \text{ W}}{70\%} \quad \frac{x \text{ W}}{100\%} \qquad 502 : x=70 : 100$$
$$x \approx 717$$

Die Leistung des Kochers muß 717 W betragen.

Ch 8 ■1590 a) 318,0 g 168 g
$4\,CuO+3\,Fe \rightarrow 4\,Cu+Fe_3O_4$
m_1 m_2

NR: $4 \text{ mol} \cdot 79{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}=318{,}0$ g,

$$3 \text{ mol} \cdot 56\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}=168 \text{ g}$$

$$m_2=\frac{168 \text{ g}}{318 \text{ g}} \cdot m_1=\frac{28}{53} m_1$$

Die Funktionsgleichung heißt $m_2=\frac{28}{53} m_1$.

b) $m_2=2{,}1$ g; 3,7 g; 5,8 g
Der Verbrauch an Eisen ist beziehentlich 2,1 g, 3,7 g, 5,8 g.

Ma 9 ■1591 Wir zerlegen zunächst Zähler und Nenner auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=\frac{x^2-6x-7}{x^2-8x-9} \qquad (1)$$

in Faktoren und erhalten

$$x^2+2x-3=(x^2+2x+1)-4$$
$$=(x+1)^2-2^2$$
$$=(x+1+2)(x+1-2)$$
$$=(x+3)(x-1)$$

und weiter nach demselben Verfahren

$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$,
$x^2-6x-7=(x+1)(x-7)$,
$x^2-8x-9=(x+1)(x-9)$.

Nun sei x eine Lösung der Gleichung (1). Dann gilt also

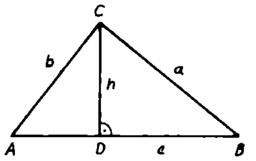
$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+5)(x-1)}=\frac{(x+1)(x-7)}{(x+1)(x-9)}; \qquad (2)$$

dabei ist $x \neq -5$, 1, -1, 9, da sonst die Nenner nicht von Null verschieden wären. Daher kann man kürzen, und man erhält

$$\frac{x+3}{x+5}=\frac{x-7}{x-9}, \qquad (x+3)(x-9)=(x-7)(x+5),$$
$$x^2-6x-27=x^2-2x-35,$$
$$-4x=-8,$$
$$x=2.$$

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt eine reelle Lösung hat, so kann es nur die Lösung $x=2$ sein. Die Probe zeigt, daß das tatsächlich eine Lösung ist, denn für $x=2$ erhält man aus $\frac{5}{7}=\frac{-15}{-21}$, d. i. eine wahre Aussage. (1)

Ma 9 ■1592 Wir bezeichnen mit $a, b, c=25$, $h=12$ die Maßzahlen der Längen der Katheten, der Hypotenuse bzw. der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ABC (vgl. das Bild).



Dann gilt für die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Dreiecks einerseits

$A=\frac{c \cdot h}{2}$, andererseits

$A=\frac{a \cdot b}{2}$. Daraus folgt

$a \cdot b=c \cdot h=25 \cdot 12=300,$

$b=\frac{300}{a}.$

Nun gilt nach dem Satz des Pythagoras

$a^2+b^2=c^2=625,$

also $a^2+\frac{90000}{a^2}=625,$

$a^4-625a^2+90000=0.$

Diese quadratische Gleichung für a^2 hat die Lösungen

$a_1^2=\frac{625}{2}+\sqrt{\frac{625^2}{4}-90000}=\frac{625+175}{2}=400,$

$a_2^2=\frac{625-175}{2}=225.$

Daraus folgt wegen $a>0$

$a_1=20$ und daher $b_1=\frac{300}{20}=15;$

$a_2=15$ und daher $b_2=\frac{300}{15}=20.$

Die Längen der Katheten sind also gleich 20 cm und 15 cm.

Ma 9 ■1593 Aus (4) folgt, daß die Zahl 2 sowohl der Menge A als auch der Menge B angehört. Aus (5) folgt, daß die Zahlen 2, 4 und 8 sowohl der Menge B als auch der Menge C angehören.

Die Zahl 2 gehört daher allen drei Mengen an, während die Zahlen 4 und 8 nicht der Menge A angehören, da sonst ein Widerspruch zu (4) entstehen würde.

Nun gehört wegen (1) die Zahl 1 weder der Menge A noch der Menge B an. Wegen (2) und (3) gehört sie daher der Menge C an. Durch eine analoge Überlegung folgt aus (1), (2) und (3), daß

die Zahl 3 nur der Menge A,

die Zahl 5 nur der Menge A,

die Zahl 6 nur der Menge B,

die Zahl 7 nur der Menge A angehört.

Die Mengen A, B, C enthalten daher genau die folgenden Elemente:

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{1, 2, 4, 8\}$.

$B=\{2, 4, 6, 8\}$,

Durch die Probe überzeugt man sich davon, daß die Gleichungen (1) bis (6) erfüllt sind.

Ma 9 ■1594 Es seien

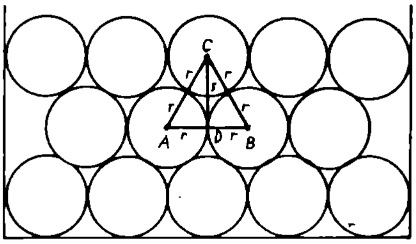
n die Anzahl der übereinanderliegenden Schichten,

$r=5$ cm der Radius eines jeden Holzstammes,

s der Abstand je zweier übereinanderliegender Schichten.

Dann ist das aus den Mittelpunkten A, B zweier nebeneinanderliegender Kreise und aus dem Mittelpunkt C des darüberliegenden Kreises gebildete Dreieck ABC gleichseitig mit der Seitenlänge $2r$ und der Höhe

$s=\overline{CD}=\frac{1}{2}\cdot 2r\sqrt{3} \triangleq r\sqrt{3}$ (vgl. d. Abb.).



Da die Mittelpunkte der Kreise in der untersten Schicht von dem unteren Rand den Abstand r haben und auch die Mittelpunkte der Kreise der obersten Schicht von dem oberen Rand den Abstand r haben und zwei übereinanderliegende Schichten den Abstand $r\sqrt{3}$ haben, ist die Gesamthöhe des Stapels gleich

$h=(n-1)r\sqrt{3}+2r.$

Daraus folgt

$(n-1)r\sqrt{3}=h-2r,$

$n-1=\frac{\frac{h}{r}-2}{\sqrt{3}}.$

Dabei gilt $r=5$ cm, $h \leqq 100$ cm, also

$\frac{h}{r} \leqq \frac{100}{5}=20$ und

$n-1 \leqq \frac{20-2}{\sqrt{3}}=\frac{18}{\sqrt{3}} \approx 10{,}4.$

Da n ganzzahlig ist, gilt $n-1 \leqq 10$, also $n \leqq 11$.

a) Es können also höchstens 11 Schichten übereinander gestapelt werden. Da der Durchmesser eines Stammes $2r=10$ cm und die Stapelbreite 100 cm beträgt, können in der untersten Schicht 10 Stämme liegen, in der zweiten Schicht also 9 Stämme, dann wieder 10 Stämme usw.

Insgesamt können also

$10 \cdot 6+9 \cdot 5=105$

Stämme gestapelt werden.

b) Das Volumen jedes einzelnen Holzstammes beträgt

$V'=\pi \cdot 5^2 \cdot 100\ \text{cm}^3=2500\,\pi\ \text{cm}^3.$

Daher beträgt das Gesamtvolumen der gestapelten Stämme

$V=105 \cdot V'=105 \cdot 2500\,\pi\ \text{cm}^3,$

$V=262\,500\,\pi\ \text{cm}^3 \approx 825\,000\ \text{cm}^3,$

$V \approx 0{,}825\ \text{m}^3.$

Bemerkung: In der Forstwirtschaft versteht man unter 1 Raummeter Holz diejenige Holzmasse, die in einem Kubikmeter-Stapel von geschichteten Holzstämmen enthalten ist. Dagegen versteht man unter 1 Festmeter Holz 1 Kubikmeter fester Holzmasse. Im allgemeinen rechnet man auf 1 Raummeter 0,7 bis 0,8 Festmeter, d. h., der Stapel besteht aus 70% bis 80% fester Holzmasse. In dem vorliegenden Falle enthält der Stapel sogar 82,5% fester Holzmasse, da verhältnismäßig günstig gestapelt werden konnte.

Ph 9 ■1595 Gegeben: $v=30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{25}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$g=9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Gesucht: s

Die Fallhöhe ergibt sich nach der Formel

$v=\sqrt{2a \cdot s}$ mit $a=g$

$s=\frac{v^2}{2g}$

$s=\frac{25^2 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}{3^2 \cdot \text{s}^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81\ \text{m}}$

$s \approx 3{,}54$ m

Die entsprechende Fallhöhe würde rund 3,54 m betragen.

Ch 9 ■1596

a) 65,4 g 120 g

$Zn+2CH_3\cdot COOH \rightarrow Zn(CH_3\cdot COO)_2+H_2$

32,7 g m

NR: $1\ \text{mol}\cdot 65{,}4\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}=65{,}4$ g,

$2\ \text{mol}\cdot 60\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}=120$ g

$m=60$ g

60 g 100%iger Säure entsprechen $10 \cdot 60$ g, $=600$ g 10%ige.

600 g 10%ige Äthansäure werden benötigt.

b) 65,4 g 22,4 l

$Zn+2CH_3\cdot COOH \rightarrow Zn(CH_3\cdot COO)_2+H_2$

32,7 g V

NR: $1\ \text{mol}\cdot 22{,}4\,\frac{\text{l}}{\text{mol}}=22{,}4$ l

$V=11{,}2$ l

11,2 l Wasserstoff entstehen.

Ma 10/12 ■1597 Es sei x eine reelle Lösung der Gleichung

$x^{2n+1}+2x^{2n}+2^2x^{2n-1}+2^3x^{2n-2}+\ldots+2^{2n+1}=0.$ Dann gilt (1)

$x^{2n}(x+2)+2^2x^{2n-2}(x+2)+\ldots+2^{2n}(x+2)=0,$

$(x+2)(x^{2n}+2^2x^{2n-2}+\ldots+2^{2n})=0.$ (2)

Nun gilt für alle natürlichen Zahlen n und für alle reellen Zahlen x

$x^{2n}+2^2x^{2n-2}+\ldots+2^{2n}>0,$

denn $x^{2n} \geqq 0$, $x^{2n-2} \geqq 0$ usw., $2^{2n}>0$.

Die Gleichung (2) ist also nur dann erfüllt, wenn $x+2=0$, d. h., $x=-2$.

Daher hat die Gleichung (2) und damit auch die Gleichung (1) genau eine reelle Lösung, nämlich $x=-2$.

Ma 10/12 ■1598 Es gilt

$1\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{1\cdot 3}{2},$

$2\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}=\frac{2\cdot 4}{3},$

$3\frac{3}{4}=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}=\frac{3\cdot 5}{4};$

allgemein gilt für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen k

$$k+\frac{k}{k+1}=\frac{k(k+1)+k}{k+1}=\frac{k(k+2)}{k+1}.$$

Daraus folgt

$$z=\frac{1\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}\cdot 3\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot 100\frac{100}{101}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100},$$

$$z=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100}\cdot\frac{1\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99\cdot 101}{100}\cdot\frac{100\cdot 102}{101},$$

$$z=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 101\cdot 102}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100\cdot 101},$$

$$z=\frac{102}{2},$$

$$z=51.$$

Berichtigung zu: $9\circ 5=2$, Heft 6/76

Auf Seite 125, Mitte, 2. Z. v. u., muß es $144 \sqcap 89=1$ heißen.

Bei den Lösungen zu „$9\circ 5=2$", alpha 11 (1), 1977, S. 18, war der „Druckfehlerteufel" leider gleich mehrfach am Werk. Richtig heißt es:

Linke Spalte:

6. Z. v. o.: $(R^*\setminus\{0\},\ \underline{:})$, $(P\setminus\{0\},\ :)$;

13. Z. v. u.: $2\ \ 1=1,\overline{3}$;

11. Z. v. u.: $\frac{1}{2}\vartriangle\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$, $\frac{1}{2}*\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{8}=\frac{1}{5}$;

8. Z. v. u.: $\notin R$;

7. Z. v. u.: $(R^*\setminus\{0\},\ \ )$;

4. Z. v. u.: $R^*\setminus\{0\}$;

3. Z. v. u.: $(R\setminus\{0\},\ \ )$ – nein, da z. B. $2\ \ (-2)$ nicht existiert;

Mittlere Spalte:

(4. Z. v. o.: nur)

5. Z. v. o.: 9: a) $x\ \ y\leqq x*y\leqq x\vartriangle y<x\bullet y$;

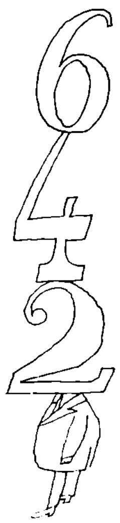
9. Z. v. o.: $g\mid x$ und $g\mid y$;

12. Z. v. o.: Wenn $t\mid x$ und $t\mid y$, so $t\mid g$.

14. Z. v. o.: $x\mid k$ und $y\mid k$;

17. Z. v. o.: Wenn $x\mid v$ und $y\mid v$, so $k\mid v$.

(18. Z. v. u.: Aufgabe 12 lautet:
Versuche, die Fragestellungen aus Aufgabe 10c) und e) auf die beiden neuen Verknüpfungsgebilde $(\mathfrak{P}(M),\ \cap)$ und $(\mathfrak{P}(M),\ \cup)$ zu übertragen! Insbesondere kläre, welche Elemente aus $\mathfrak{P}(M)$ die Rolle von 0 und 1 aus $(N,\ \sqcap)$ und $(N,\ \sqcup)$ spielen!)



Lösungen zu alpha-heiter 4/77:

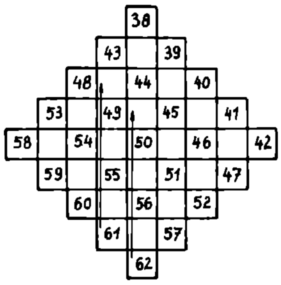
alpha-Produkte

$11\cdot 11=121$	$\alpha=1$
$11\cdot 12=132$	$P=2$
$11\cdot 13=143$	$R=3$
$11\cdot 14=154$	$O=4$
$11\cdot 15=165$	$D=5$
$11\cdot 16=176$	$U=6$
$11\cdot 17=187$	$K=7$
$11\cdot 18=198$	$T=8$
	$E=9$

Magisches Quadrat

Das 25 Felder umfassende Quadrat wird um je 4 Felder links, rechts, oben und unten erweitert. Im obersten Feld wird die niedrigste Zahl (38) eingesetzt. Dann wird von dort beginnend fortlaufend die geforderte Zahlenreihe 38, 39, 40...42 und in der zuvor liegenden Schrägen (oben links nach unten rechts) 43...47; usw. 48...52; 53...57; 58...62 eingetragen.

Schließlich werden die außerhalb des magischen Quadrates stehenden Zahlen (z. B. oben 38, 43, 39) so in die leeren Felder (die oberen in die unteren, die unteren in die oberen, die linken in die rechten und die rechten in die linken Felder) übertragen. Das ausgefüllte Quadrat beweist die Richtigkeit der geforderten Lösung.



48	61	44	57	40
41	49	62	45	53
54	42	50	58	46
47	55	38	51	59
60	43	56	39	52

Gemeinsamer Beruf

Diplomingenieur

Aus Zehn ein Raum

Z	E	H	N
Z	A	H	N
Z	A	U	N
Z	A	U	M
R	A	U	M

Ohne Worte

Sehnentangentenwinkel

Zahlenrätsel

$$\begin{array}{rcrcr} 18720 & - & 4900 & = & 13820 \\ : & & - & & - \\ 26 & \cdot & 328 & = & 8528 \\ \hline 720 & + & 4572 & = & 5292 \end{array}$$

Zahlenkreuzrätsel

6	0	5	1	2	1
9	1	4	1	4	3
7	5	6	1	2	3
6	7	5	6	4	1
7	2	9	4	4	1
9	7	3	0	1	7

Silbenrätsel

1. Parabel, 2. Yard, 3. Trapez, 4. Hyperbel, 5. Axiom, 6. Gleichung, 7. Omega, 8. Rhombus, 9. Archimedes, 10. Sekante, 11. Variable, 12. Olympiade, 13. Nullstelle, 14. Summe, 15. Algebra, 16. Meter, 17. Oberfläche, 18. Satz; Lösungswort: Pythagoras von Samos

Läufersprung

Es ist noch kein Meister vom Himmel gefallen.

Lösung zu: Graph einer Funktion oder nicht?

Nr. d. Figur	Funktionsgleichung	Funktionsklasse	Nullstellen	$f(0)$
1	$y=x-1$	Lineare Funktion	1	-1
2	kein Graph einer Funktion!			
3	$y=(x+1)^2-1$	Quadratische Funktion	$-2; 0$	0
4	$y=\log_{10}x$	Logarithmusfunktion	1	–
5	kein Graph einer Funktion!			
6	$y=10^x$	Exponentialfunktion	–	1
7	$y=-\lvert x\rvert+1$		$-1; 1$	1
8	kein Graph einer Funktion!			
9	$y=x+1$ $x\in G$	Lineare Funktion	-1	1
10	$y=2\sin 2x$	Trigonometrische Funktion	$k\cdot\frac{\pi}{2}$ $k\in G$	0
11	$y=x^3$	Potenzfunktion	0	0
12	–	–	0	0

Buchmarkt

Autorenkollektiv
Mathematisches Mosaik
Übersetzung aus dem Ungarischen
384 Seiten, 200 Zeichnungen, Pappband cell.
Bestell-Nr. 653 447 0 Preis: 9,80 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

P. Borneleit
Übungen für Junge Mathematiker
Teil 4: Gleichungen
128 S. mit 6 Abb., kartoniert
Bestell-Nr. 665 788 4 Preis 6,50 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

J. Lehmann
Mathe mit Pfiff
128 S., 18 farbige Vignetten, 93 z. T. farbige Textzeichnungen
Bestell-Nr. 653 364 6 Preis 4,50 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Imre Ruzsa
Die Begriffswelt der Mathematik
Übersetzung aus dem Ungarischen
472 S., 135 Abb., Ganzgewebe
Bestell-Nr. 706 732 5 Preis 21,50 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

Manfred Rehm
Zahl, Menge, Gleichung
Bestell-Nr. 629 077 9 Preis 5,80 M
Kinderbuchverlag, Berlin

Autorenkollektiv
Studienwunsch Mathematik
Etwa 72 S. mit etwa 5 Abb., kartoniert
Bestell-Nr. 665 781 7 Preis etwa 3,20 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

Fanghänel/Vockenberg
Arbeit mit Mengen für AG's nach Rahmenprogramm
Etwa 150 S., 60 Abb., Broschur
Bestell-Nr. 707 053 2 Preis 3,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

S. Wollgast/S. Marx
Johannes Kepler
etwa 100 S., 62 Fotos, 7 Zeichnungen
Bestell-Nr. 653 359 0 Preis 9,80 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Donat · Maibaum
Wahrscheinlichkeitsrechnung
Fachlich-methodische Hilfen für den fakultativen Mathematikunterricht
131 S., zahlr. Zeichnungen, Broschur
Bestell-Nr. 00 21 74–1 Preis 4,00 M
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

H. Lohse/R. Ludwig
Statistik für Forschung und Beruf
Ein programmierter Lehrgang
292 Lehrschritte mit 185 Bildern und 3 Selbstleistungskontrollen sowie einem Beiheft als Wissensspeicher
Bestell-Nr. Preis 22,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

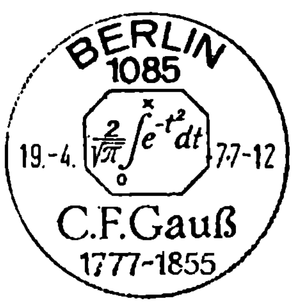
H. Simon/K. Stahl
Mathematik
Nachschlagewerk für Grundlagenfächer
670 S., 508 Bilder, zahlr. Beispiele, Plasteinb.
Bestell-Nr. 545 045 1 Preis 13,50 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

G. Höfner/M. Wittwer
Wiederholungsprogramm Elementarmathematik
237 S., 110 Bilder, 6 Leistungskontrollen
Bestell-Nr. 546 131 0 Preis 7,80 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

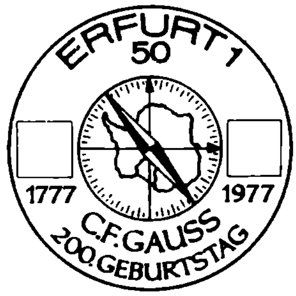
J. u. H. Henselmann
Das große Buch vom Bauen
(kleine Kulturgeschichte des Bauens)
240 S., zahlr. Abb., Pappband mit Folie
Bestell-Nr. 629 616 9 Preis etwa 17,50 M
Kinderbuchverlag Berlin

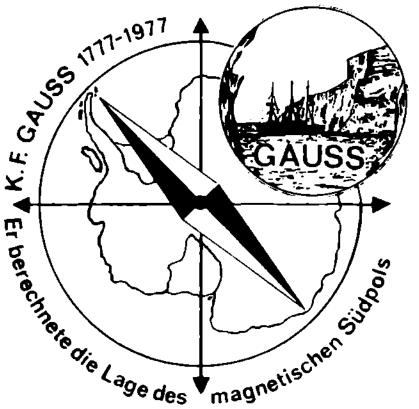
G. und H.-G. Mehlhorn
Die Ideenschule
Übungen zum schöpferischen Denken
128 S., zahlr. Abb.
Bestell-Nr. 653 361 1 Preis 4,80 M
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

K.-G. Steinert
Sphärische Trigonometrie
mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie
etwa 160 S., etwa 70 Abb., kartoniert
Bestell-Nr. 665 828 9 Preis etwa 9,50 M
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig



Das Postamt 1085 Berlin verwendete einen Ersttagsstempel, der das *Gaußsche Integral* zum Motiv hat. Einen weiteren Sonderstempel gab es beim Postamt 50 Erfurt, dessen symbolische Darstellung eine *Antarktiskarte* und ein *Kompaß* ist. Mit diesem Motiv soll an die Südpolarexpedition des Forschungsschiffes *Gauß* und an die Entdeckung des *Gaußberges* erinnert werden (siehe Fotos).





Der Arbeitskreis *Polarpost* Erfurt des Philatelistenverbandes der DDR gab anläßlich des 200. Geburtstags einen Sonderumschlag heraus. Das Bild zeigt das Segelschiff „Gauß" bei Vermessungsarbeiten vor den Eisbarrieren des Südpols.

Text zu Seite 74, rechts unten:
Die Abbildung zeigt die *Gaußsche Fehlerkurve*, auch *Glocken-* oder *Verteilungskurve* genannt. Sie ist die graphische Darstellung des Gaußschen Fehlerverteilungsgesetzes, d. h. der absoluten oder der relativen Häufigkeiten einer großen Anzahl gleichartiger, voneinander unabhängiger Einzelbeobachtungen, deren Unterschiede lediglich durch den Zufall hervorgerufen sind. Die Gaußsche Fehlerkurve spielt in der Statistik und der Fehlertheorie eine bedeutende Rolle.

Graph einer Funktion oder nicht?

● Welche der angegebenen Kurven sind nicht Graph einer Funktion?

● Fertige dir eine Tabelle zu den angegebenen Funktionsbildern an! Sie sollte enthalten: Funktionsgleichung, Funktionsklasse, Nullstellen, $f(0)$. (Lösung S. 96.)

L. Flade

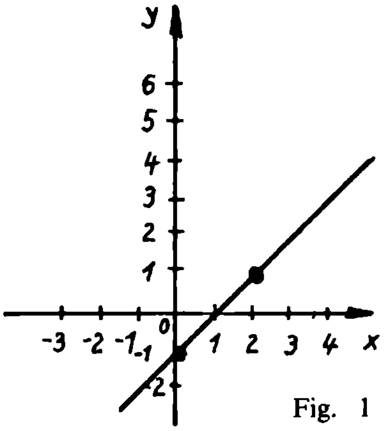


Fig. 1

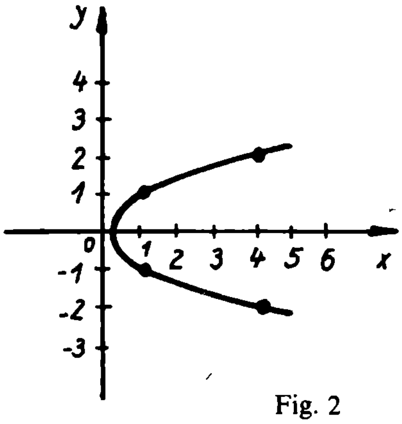


Fig. 2

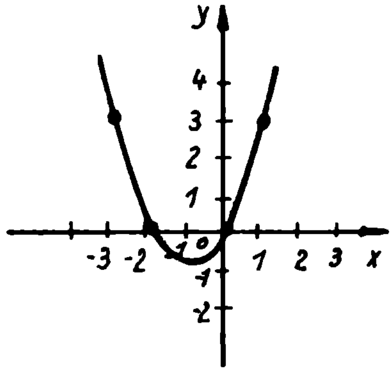


Fig. 3

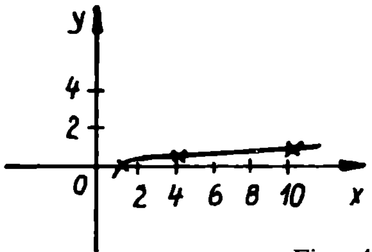


Fig. 4

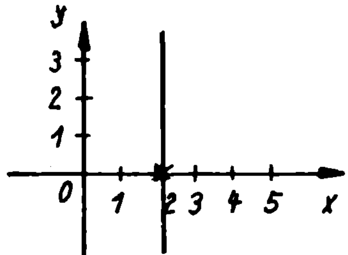


Fig. 5

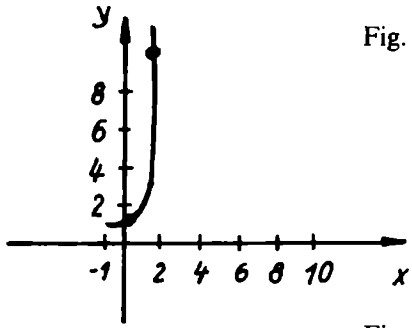


Fig. 6

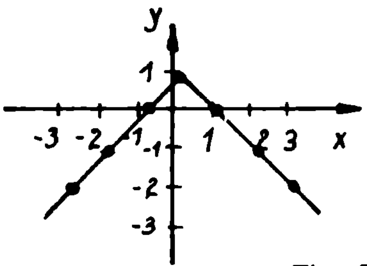


Fig. 7

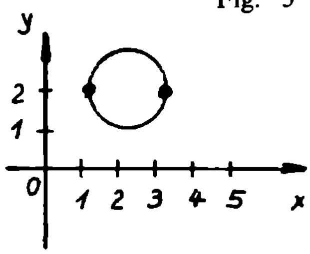


Fig. 8

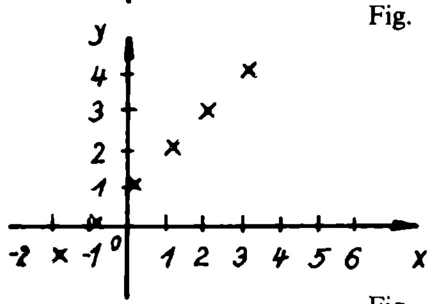


Fig. 9

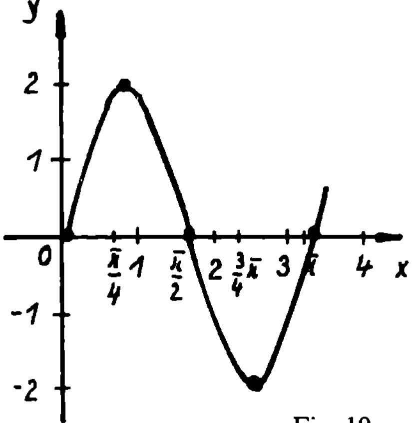


Fig. 10

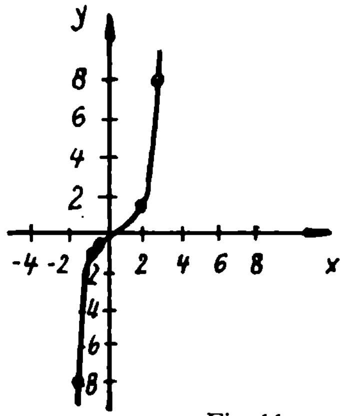


Fig. 11

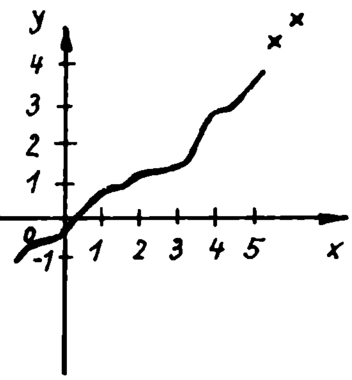


Fig. 12