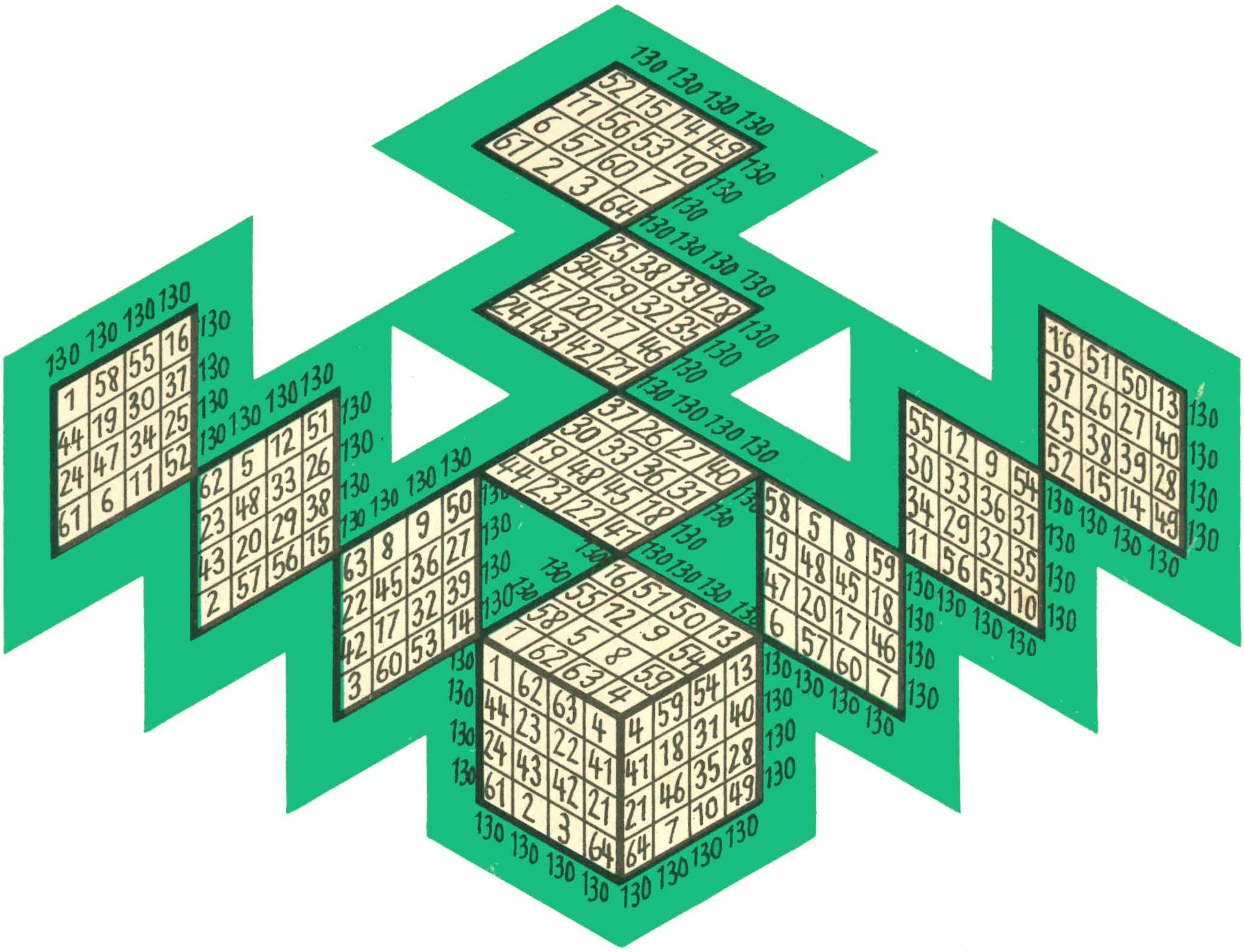
# alpha



# 2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

*Fotos:* alpha-Club, 29. OS Leipzig (S. 26, 27, 39); K. G. Steinert, Dresden (S. 26)
*Typographie:* H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
*Redaktionsschluß:* 22. Dezember 1976

# alpha
## Mathematische Schülerzeitschrift

## Inhalt



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

# Gauß' Beiträge zur Astronomie und Geodäsie

Um das Jahr 1770 stellten der Mathematiker J. D. Titius und der Astronom J. E. Bode eine empirisch gewonnene Beziehung auf, die es gestatten sollte, die mittleren Abstände $a_i$ der Planeten von der Sonne zu berechnen. Diese Beziehung lautet

$$a_i = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n_i},$$

worin der Index $i$ einem bestimmten Planeten zugeordnet ist (vgl. Aufg. 1). Die Größe $a_i$ wird in astronomischen Einheiten erhalten (die astr. Einheit AE ist der mittlere Abstand Erde–Sonne; $1\,\mathrm{AE} = 149{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$). Beim Vergleich der aus obiger Formel erhaltenen Zahlen mit den Beobachtungen schien es, daß offenbar zwischen Mars und Jupiter ein weiterer, bisher unbekannter Planet die Sonne umlaufen müsse. Diese Feststellung regte die Astronomen zu einer systematischen Suche nach dem vermuteten Planeten an, der sich nach obiger Formel in einem Abstand von 2,5 bis 3,0 AE von der Sonne befinden müßte.

Noch bevor die geplante systematische Suche in Gang gekommen war, fand der italienische Astronom Piazzi in der Neujahrsnacht 1801 ein schwaches Objekt 8. Größe von sternähnlichem Aussehen, das wegen beobachteter Bewegungen als Körper des Sonnensystems eingestuft wurde und den Namen Ceres erhielt. Um die Bahn des neuentdeckten Himmelskörpers berechnen und damit aus der Bahnform entscheiden zu können, ob es sich um einen Planeten (elliptische Bahnform) oder Kometen (vorwiegend parabolische Bahnform) handelte, waren zahlreiche Positionsbeobachtungen über einen genügend großen Zeitraum hinweg erforderlich. Leider konnte das Objekt Ceres von seinem Entdecker Piazzi nur etwa 6 Wochen lang beobachtet werden, weil es dann in der Abenddämmerung verschwand. Aus diesem geringen Beobachtungsmaterial war es mit den bis dahin üblichen Methoden nicht möglich, eine Bahn so zu berechnen, daß eine Wiederauffindung des Objektes möglich gewesen wäre. Nur langsam verbreitete sich unter den damaligen Verkehrs- und Nachrichtenverhältnissen die Kunde von der Neuentdeckung. Im Sommer 1801 berechneten neben anderen F. X. v. Zach, Leiter der zu dieser Zeit berühmten Sternwarte Seeberg bei Gotha und der Arzt und Amateurastronom H. W. Olbers aus Bremen Bahnen für Ceres und stellten fest, daß es sich nicht um einen Kometen, sondern um einen Planeten handeln müsse. Die Kreisbahn, die von ihnen zur Vereinfachung der Berechnungen als Ersatz für eine Keplerellipse[1]) angenommen wurde, genügte jedoch nicht. Natürlich konnte man um 1800 elliptische Planetenbahnen berechnen, aber für vorläufige Berechnungen aus einer kleineren Zahl von Beobachtungen zum Zwecke der Wiederauffindung eines Planeten war die Annäherung der Bahn durch einen Kreis damals üblich, und im allgemeinen war sie auch ausreichend gewesen. Es stellte sich übrigens heraus, daß die Ceres nicht der nach Titius und Bode zu erwartende Planet war. Sie war viel kleiner als die bis dahin bekannten Planeten. Man entdeckte in der Folgezeit hunderte und bis heute tausende dieser Art, die als kleine Planeten oder Planetoiden bezeichnet werden.

Auch der junge Mathematiker C. F. Gauß in Braunschweig hatte durch die von Zach herausgegebene „Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde" von dem neu entdeckten Planeten Kenntnis erhalten. Das Problem, aus Beobachtungen, die nur ein Bahnbogenstück von 9° überdecken, die Bahn so exakt zu berechnen, daß der Planet nach Monaten wieder aufgefunden werden konnte, interessierte Gauß sehr. Es gelang ihm, der der Astronomie bis dahin relativ fern gestanden hatte, eine mathematische Lösung zu finden, die die Wiederauffindung der Ceres ermöglichte und Gauß mit einem Schlage in die erste Reihe der Astronomen stellte, so daß wir ihn heute in gleicher Weise als einen der bedeutendsten Mathematiker, Physiker, aber auch Astronomen und Geodäten der Vergangenheit achten.

Die erfolgreiche Beschäftigung mit Problemen der Astronomie bewirkte, daß diese Wissenschaft während der ersten beiden Jahrzehnte des vorigen Jahrhunderts in Gauß' Leben eine wichtige Rolle spielte. Im Ergebnis dieser Forschungserfolge wurde er 1807 als Direktor der Sternwarte Göttingen berufen und bekleidete dieses Amt bis zu seinem Tode 1855.

Gauß stellte sich die Aufgabe, die Bahnkurve des kleinen Planeten Ceres ohne die willkürliche und die Lösungsmöglichkeit einengende Ersetzung der Ellipse durch einen Kreis zu berechnen. Im Vergleich mit den meisten großen Planeten, deren Bahnen zu jener Zeit bekannt waren, stellte die Bahn der Ceres eine relativ stark abgeplattete Ellipse dar. Die Bahnexzentrizität

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (a,\ b\text{: große bzw. kleine}$$

Halbachse der Bahnellipse) beträgt für die Ceres 0,08, während für die Erde 0,02 gilt. Wegen dieser recht großen Exzentrizität (später stellte sich allerdings heraus, daß bei den Planetoiden Werte von $e = 0{,}2$ keine Seltenheit sind) konnte die bis dahin bei Vorausberechnungen in ähnlichen Fällen angewendete Annäherung durch eine Kreisbahn nicht zum Erfolg führen.

Aus dem Vorwort zu dem wichtigen Werk von Gauß aus dem Jahre 1809 „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium" (Theorie der Bewegung der die Sonne in Kegelschnitten umkreisenden Himmelskörper) erfahren wir, daß er sich zur Zeit des Bekanntwerdens der Suche nach der Ceres gerade damit beschäftigte, aus nur wenigen Punkten eine Ellipse völlig hypothesenfrei zu berechnen. Die Lösung des Problems führte Gauß auf eine Gleichung achten Grades. Sie ließ sich auf die Bahnbestimmung der Ceres unter den oben genannten Umständen (geringes Beobachtungsmaterial) anwenden. Das Ergebnis war so präzise, daß der Planetoid genau am ersten Jahrestag seiner Entdeckung wieder aufgefunden wurde. Die Wiederentdeckung fand nicht an dem Ort am Himmel statt, den der ausgewiesene Astronom Zach berechnet hatte, sondern 7° daneben, an der Stelle, die der junge Mathematiker Gauß gefunden hatte. Zach fand anerkennende Worte über die Leistung des jungen Kollegen. Olbers bedrängte ihn, der Öffentlichkeit die neu erfundene und erstmals so erfolgreich angewendete Methode vorzustellen.

Gauß zögerte noch lange mit der Publikation, weil er zu dieser Zeit an vielen neuen Ideen arbeitete und weil er die Theorie noch weiter ausarbeiten wollte. Heute ist diese sogenannte „Methode der kleinsten Quadrate" Gemeingut der angewandten Mathematik[2]). Die Methode der kleinsten Quadrate ist ein Verfahren zur Ausgleichung von Beobachtungen, die mit zufälligen Meßfehlern behaftet sind. Das Prinzip der Methode soll im folgenden an einem ganz einfachen Beispiel erläutert werden.

Von einer Größe (z. B. einer Strecke), deren wahrer Wert $X$ nicht bekannt ist, sollen $n$ Messungen $l_i$ vorliegen. Der wahrscheinlichste Wert $X$ dieser Größe ist bekanntlich das arithmetische Mittel und wird berechnet nach der Formel

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n}.$$

[1]) Kepler veröffentlichte in den Jahren 1609 und 1619 die drei von ihm gefundenen und nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegung, deren erstes besagt, daß sich die Planeten in Ellipsenbahnen um die Sonne bewegen, die in dem einen Brennpunkt der Bahnellipse steht.

[2]) Die Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadrate" stammt von Legendre, der sie unabhängig von Gauß fand, aber als erster publizierte.

Die Begründung dafür, daß $x$ der wahrscheinlichste aus den Messungen ableitbare Wert der Größe $X$ ist, wird durch die Methode der kleinsten Quadrate gegeben. $x$ wird nämlich nach dieser Methode so bestimmt, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelmessungen $l_i$ vom Mittelwert $x$ ein Minimum ist, daß also gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (x-l_i)^2 = \text{Minimum}.$$

Neben dem wahrscheinlichsten Wert einer gemessenen Größe liefert die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate auch eine Angabe über die Genauigkeit der ausgeführten Messungen und des daraus abgeleiteten Mittelwertes, nämlich den mittleren Fehler. Der mittlere Fehler $m_0$ einer einmaligen Messung $l_i$ der gesuchten Größe ist

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{\sum(x-l_i)^2}{n-1}}$$ und der mittlere Fehler $m$ des Mittelwertes $x$ ist

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum(x-l_i)^2}{n(n-1)}} = \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

(vgl. Aufgabe 2).

Natürlich ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bei der Berechnung der Bahnellipse eines Planeten wesentlich schwieriger als bei dem angeführten Beispiel, aber prinzipiell ist es dasselbe. An die Stelle des konstanten Wertes $X$ in unserem Beispiel, der durch Messungen approximiert wird, treten bei der Bahnbestimmung veränderliche Werte $X_i$, die jeweils durch mehrere für einen bestimmten Zeitpunkt geltende Meßgrößen erfaßt werden.

Die glänzenden Ergebnisse, die Gauß mit der neuen Rechenmethode bei der Suche nach dem Planetoiden Ceres erzielt hatte, machten ihn im Kreise der Gelehrten sehr schnell bekannt. Der Fünfundzwanzigjährige erhielt eine Berufung als Leiter der Sternwarte Petersburg, der Vorgängerin der heutigen berühmten Hauptsternwarte der Akademie der Wissenschaften der UdSSR in Pulkovo bei Leningrad. Gauß blieb jedoch in Braunschweig, wo er sehr günstige Bedingungen für eine intensive wissenschaftliche Arbeit hatte. Auch die Berufung als Direktor der Sternwarte Göttingen (Bild 1) nahm er erst 1807 an.

Sternwarte Göttingen Bild 1

In den ersten Jahren des 19. Jahrhunderts wurden weitere kleine Planeten entdeckt, deren Bahnen alle nach dem bewährten Gaußschen Verfahren berechnet wurden. Von diesen Arbeiten ausgehend beschäftigte sich Gauß mehrere Jahre lang mit der Berechnung von Bahnstörungen der kleinen Planeten Ceres und Pallas unter dem Einfluß der Gravitationskräfte der massereichen Nachbarplaneten, insbesondere durch Jupiter. Der Aufwand an Zahlenrechnungen war hierbei enorm, da Gauß ja keinerlei mechanische Hilfsmittel oder gar Computer zur Verfügung standen. Durch Untersuchungen an den Bahnstörungen kleiner Planeten – insbesondere von Pallas, die eine große Bahnneigung gegen die Ekliptik (35°) hat – sah Gauß die Möglichkeit, die Masse des störenden Jupiter zu berechnen.

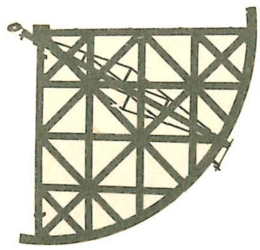


Bild 2
Mauerquadrant aus dem 18. Jahrhundert in der Sternwarte Göttingen

Die Aufgaben als Direktor der Sternwarte Göttingen verlangten von Gauß auch praktische Meßtätigkeit in der Astronomie. Die meisten Sternwartenleiter der damaligen Zeit waren durch ihre Beobachtungserfolge berühmt geworden. Gauß dagegen hatte sich bis zum Beginn seiner Göttinger Zeit als rechnender Astronom und Theoretiker ausgezeichnet. Auf diese neue Tätigkeit mit dem Winkelmeßgerät (Sextant, Theodolit) bereitete er sich mit der gleichen Gründlichkeit vor, die ihm auch bei seinen theoretischen Arbeiten eigen war. Vorhandene und neuerworbene Meßinstrumente behandelte er geradezu mit Ehrfurcht, wohl wissend, welche handwerkliche Kunst zur Herstellung derartiger Geräte nötig ist. In der Göttinger Sternwarte hängt noch heute der von Gauß' Vorgänger Tobias Mayer angeschaffte und verwendete Mauerquadrant, der auch für Gauß Bedeutung besaß (Bild 2).

Durch die praktische Meßtätigkeit beeinflußt, hat Gauß von Göttingen aus beachtliche Arbeiten zur Vermessung des Landes Niedersachsen selbst durchgeführt und in späteren Jahren angeleitet. Beachtlich ist, daß der Theoretiker Gauß jahrelang (1821–25) als praktischer Geodät gearbeitet und dabei als Mann von fast 50 Jahren die ganzen Strapazen einer solchen Arbeit bei Wind und Wetter, bei Hitze und Kälte auf sich genommen hat. Die Wechselwirkung zwischen Praxis und Theorie, ein bedeutendes Element des dialektischen Materialismus, hatte Gauß bereits als wichtige Triebfeder des Fortschritts erkannt.

Die Vermessung von Dreiecksnetzen auf möglichst großen Teilen der Erdoberfläche war vom 18. Jahrhundert an ein grundlegender Beitrag zur Ableitung von Größe und Figur der Erde, also der Parameter des Erdellipsoids. Gauß erhielt den Auftrag, im Rahmen des Gradmessungsunternehmens die Grundlage einer Landesvermessung für Niedersachsen (das damalige Königreich Hannover) zu schaffen, bestehend aus mehr als 30 Punkten, zwischen denen Dreiecke gebildet wurden (Bild 4). In diesem Dreiecksnetz wurden alle Winkel gemessen und außerdem eine Seite als Basis, die bei der Berechnung des Dreiecksnetzes den Maßstab lieferte. Die Winkel wurden damals, wie es auch heute noch üblich ist, mit dem Theodolit gemessen. Bild 3 zeigt den von Gauß verwendeten Theodolit. Wie aus Bild 4 hervorgeht, stellt der von Gauß bearbeitete Teil der niedersächsischen Triangulation das Kernstück und zugleich das Bindeglied zu den in allen vier Himmelsrichtungen angrenzenden Dreiecksnetzen dar.

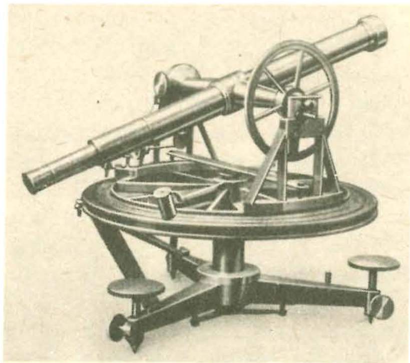
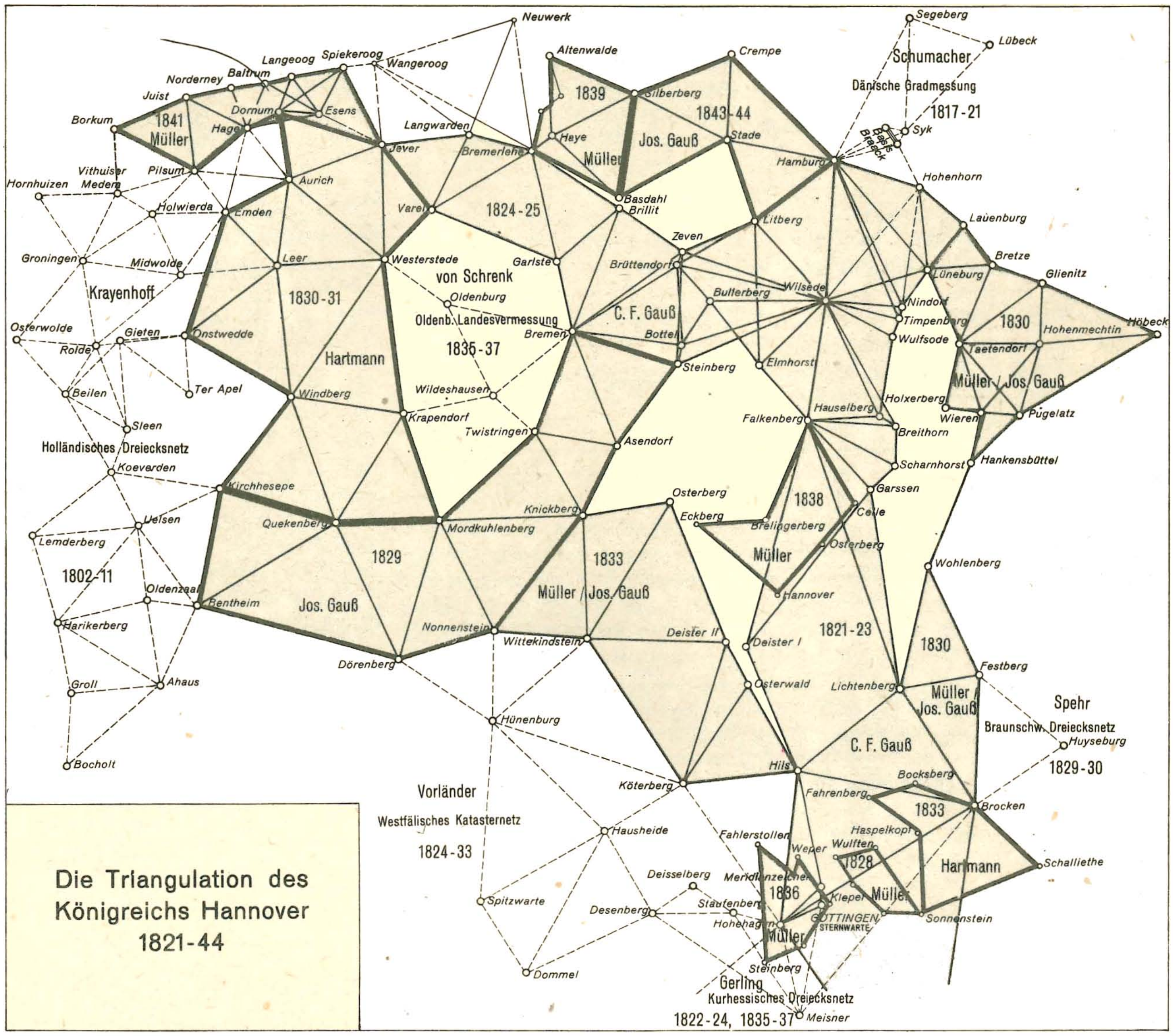


Bild 3
Theodolit, den Gauß 1822–25 benutzte

Bei der Messung des Winkels zwischen den Punkten Hamburg und Hohenborn von Lüneburg aus (s. Bild 4) störte Gauß die Spiegelung des Sonnenlichts in der Fensterscheibe einer Hamburger Kirche. Dieses Beobachtungserlebnis gab ihm den Anstoß zur Erfindung des Heliotrops. Das ist ein Hilfsgerät, bei dem durch einen beweglichen Spiegel das Sonnenlicht von einem Zielpunkt nach einem Meßpunkt reflektiert wird. Das südlichste Dreieck des Netzes (in Bild 4 nur teilweise dargestellt) enthält die Seite Brocken–Inselsberg mit über 100 km Länge. Diese Tatsache regte Gauß an, den Gültigkeitsbereich der euklidischen Geometrie zu prüfen. Es ist dies ein weiteres Beispiel für C. F. Gauß' Bestreben, stets praktische und theoretische Fragen




Die Triangulation des Königreichs Hannover 1821-44

im Zusammenhang zu untersuchen. Im Rahmen der kartographischen Darstellung der Ergebnisse der Landesvermessung behandelte Gauß die allgemeine Aufgabe der Abbildung einer gegebenen Fläche auf eine andere in der Weise, daß das Bild dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich ist.

Aus dem Studium der astronomischen und geodätischen Arbeiten von C. F. Gauß ist eine Reihe von Prinzipien erkennbar, die auch für unsere heutige Generation hohe Bedeutung besitzen: Die bereits erwähnte fruchtbare Verbindung von Praxis und Theorie, die Beharrlichkeit bei der Durchführung aller durchzuführenden Arbeiten, die Gründlichkeit bei Untersuchungen, die auch nicht die kleinste Unklarheit zuläßt.

*Klaus-Günter Steinert*

**Aufgaben**

▲1▲ Gegeben seien die mittleren Abstände $a_i$ der folgenden Planeten von der Sonne in Astronomischen Einheiten:

Venus $a_1 = 0{,}72$; Erde $a_2 = 1{,}00$; Mars $a_3 = 1{,}52$; Jupiter $a_4 = 5{,}20$; Saturn $a_5 = 9{,}54$; Uranus $a_6 = 19{,}18$. Für jeden dieser Planeten ist der ganzzahlige Exponent $n_i$ in der Titius-Bodeschen Beziehung

$$a_i = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n_i}$$

so zu bestimmen, daß die nach der Beziehung berechneten $a_i$ möglichst gut mit den gegebenen übereinstimmen.

▲2▲ Eine Strecke $s$ ist $n_1 = 10$mal unter gleichen Bedingungen gemessen worden. Die Meßergebnisse sind:

$s_1 = 24{,}35$ m, $s_2 = 24{,}39$ m, $s_3 = 24{,}36$ m,
$s_4 = 24{,}32$ m, $s_5 = 24{,}35$ m, $s_6 = 24{,}37$ m,
$s_7 = 24{,}31$ m, $s_8 = 24{,}33$ m, $s_9 = 24{,}34$ m,
$s_{10} = 24{,}38$ m.

a) Zu berechnen sind der wahrscheinlichste Wert von $s$ nach der Methode der kleinsten Quadrate sowie der mittlere Fehler $m_s$ von $s$ und der mittlere Fehler $m_0$ einer Einzelmessung $s_i$.

b) Wie viele Einzelmessungen $n_2$ wären nötig, damit ein mittlerer Fehler $m_s = 0{,}005$ m erreicht wird?

▲3▲ Der kleine Planet Ceres hat einen mittleren Abstand von der Sonne $a_{Ceres} = 2{,}77$ AE.

a) Welchen Exponenten $n_{Ceres}$ bekäme der kleine Planet nach der Titius-Bodeschen Beziehung? (Vgl. Aufgabe 1)

b) Wie lange dauert ein Umlauf $U_{Ceres}$ des Planeten um die Sonne?

Es ist das dritte Keplersche Gesetz

$$\frac{U^2_{Ceres}}{a^3_{Ceres}} = \frac{U^2_{Jupiter}}{a^3_{Jupiter}}$$

mit $U_{Jupiter} = 11{,}86$ Jahre $a_{Jupiter} = 5{,}20$ AE anzuwenden. Zur Kontrolle ist $U_{Ceres}$ ein zweites Mal mit den Werten $U$ und $a$ für die Erde zu rechnen.

Lösungen siehe Seite 47

**Es ist nicht das Wissen,**
**sondern das Lernen,**
**nicht das Besitzen,**
**sondern das Erwerben,**
**nicht das Da-Sein,**
**sondern das Hinkommen,**
**was den größten Genuß gewährt.**

C. F. Gauß an Bolyai

# Die Konstruktion regelmäßiger $n$-Ecke

## Ein Streifzug durch ihre Geschichte von den Ägyptern bis zu C. F. Gauß

Eine ebene Figur, die durch Geradenstücke berandet wird, heißt *Vieleck* oder *Polygon.* Nach der Anzahl der Ecken unterscheidet man Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, ..., $n$-Ecke. Die Abbildung 1 zeigt einige Vielecke. Unter den Vielecken ist das Dreieck das wichtigste, denn alle Vielecke mit mehr als drei Eckpunkten lassen sich in Dreiecke zerlegen. Die Gestalt eines Vielecks ist dann vollständig festgelegt, wenn alle seine Seiten und Innenwinkel (d. h. die Winkel zwischen seinen Seiten) gegeben sind. Das 3-Eck bildet übrigens in bezug auf die Konstruktion eine Ausnahme; da bekanntlich bereits drei Seiten zur Konstruktion eines Dreiecks ausreichen, werden durch die Seiten hier auch die Winkel mitbestimmt. Die Gleichheit der Seiten allein reicht zur Konstruktion von $n$-Ecken mit $n>3$ nicht mehr aus, wie z. B. für 4-Ecke die Beispiele Quadrat und Rhombus zeigen (Abbildung 3).

Bild 1

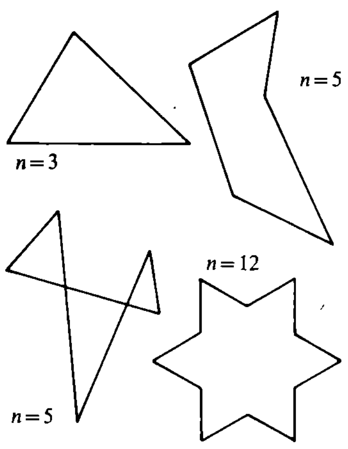



Bild 3

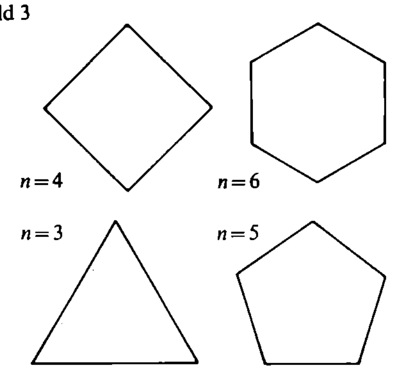
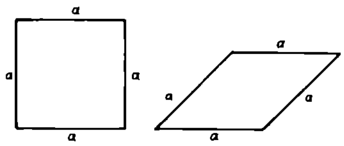



Bild 2




Wie unter den Dreiecken und Vierecken gibt es allgemein unter den Vielecken solche, für die alle Seiten gleich lang sind und alle Winkel gleich groß sind. Sie werden regelmäßige $n$-Ecke genannt. Das regelmäßige 3-Eck bzw. 4-Eck wird üblicherweise als gleichseitiges Dreieck bzw. Quadrat bezeichnet. In der Abbildung 2 sind für $n=3$, 4, 5 und 6 regelmäßige $n$-Ecke gezeichnet.

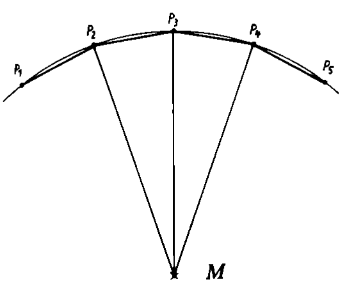
Wir untersuchen im folgenden eine sehr wichtige Eigenschaft regelmäßiger Vielecke. Drei Punkte einer Ebene bestimmen genau einen Kreis, der durch sie hindurch geht. Also kann man insbesondere durch die drei Eckpunkte jedes regelmäßigen 3-Ecks einen Kreis (Umkreis) ziehen. Beim regelmäßigen 4-Eck (Quadrat) haben die Ecken vom Schnittpunkt der Diagonalen den gleichen Abstand. Also läßt sich auch um das Quadrat ein Kreis ziehen. Wie sieht es beim regelmäßigen 5-, 6- bzw. allgemein beim regelmäßigen $n$-Eck aus? Wir zeigen, daß jedes regelmäßige $n$-Eck einen Umkreis besitzt. Dazu nehmen wir an, daß wir ein regelmäßiges $n$-Eck $(n>4)$ mit den Eckpunkten $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ gegeben haben (Abbildung 4). Wir zeichnen die Winkelhalbierende der Winkel $P_1P_2P_3$ und $P_2P_3P_4$, die sich im Punkt $M$ schneiden, und verbinden $M$ mit den restlichen Eckpunkten des Vielecks. Da in regelmäßigen $n$-Ecken die Winkel bei $P_2$ und $P_3$ gleich sind, ist $\sphericalangle MP_2P_3 = \sphericalangle MP_3P_2$. Mithin ist das Dreieck $MP_2P_3$ gleichschenklig bzw. $\overline{MP_2} = \overline{MP_3}$. Da $\overline{MP_3}$ den Winkel bei $P_3$ halbiert, gilt $\sphericalangle P_2P_3M = \sphericalangle MP_3P_4$. Damit sind in den Dreiecken $MP_2P_3$ und $MP_3P_4$ zwei Seiten ($\overline{MP_3}$, $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4}$) und der eingeschlossene Winkel gleich, also sind die Dreiecke $MP_2P_3$ und $MP_3P_4$ kongruent (*sws*). Wir haben also $\overline{MP_2} = \overline{MP_3} = \overline{MP_4}$. Ferner ist

$$\sphericalangle MP_3P_4 = \sphericalangle MP_4P_3 = \frac{1}{2}\sphericalangle P_1P_2P_3$$

$$= \frac{1}{2}\sphericalangle P_3P_4P_5 = \sphericalangle MP_4P_5,$$

und hieraus ergibt sich wie eben $\overline{MP_4} = \overline{MP_5}$. Indem wir so fortfahren, kommen wir schließlich zu den Gleichheiten $\overline{MP_1} = \overline{MP_2} = \ldots = \overline{MP_{n-1}} = \overline{MP_n}$. Das bedeutet aber, daß die $n$ Punkte $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ vom Punkt $M$ alle den gleichen Abstand haben bzw. auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r = \overline{MP_1} = \ldots = \overline{MP_n}$ liegen. Damit ist gezeigt

Bild 4




Satz 1: Um jedes regelmäßige $n$-Eck läßt sich genau ein Kreis (Umkreis) zeichnen.

Da gleiche Bogen auch gleiche Sehnen in einem Kreis haben, gilt folgende Umkehrung

Satz 2: Die Punkte $P_1$, ..., $P_n$ teilen den Kreis in $n$ gleiche Teile, d. h. je zwei der Bogenstücke $P_1P_2$, $P_2P_3$, ..., $P_{n-1}P_n$, $P_nP_1$ haben die gleiche Länge. Dann sind die Punkte $P_1$, ..., $P_n$ Eckpunkte eines regelmäßigen $n$-Ecks.

Die Konstruktion eines regelmäßigen $n$-Ecks läuft aus der Sicht von Satz 2 darauf hinaus, einen Kreisumfang in $n$ gleiche Teile zu zerlegen. Das bereitet uns anschaulich gar keine Schwierigkeiten, so daß wir voreilig der Behauptung, daß sich jedes regelmäßige $n$-Eck mit den üblichen Konstruktionsmitteln der Geometrie, dem Zirkel und dem Lineal, konstruieren läßt, zustimmen würden. Die Mathematik hat über 2000 Jahre benötigt, um die Richtigkeit oder Falschheit dieser Behauptung zu ermitteln.

Wir haben oben gesehen, daß sich jedes regelmäßige $n$-Eck in $n$ kongruente gleichschenklige Dreiecke $MP_1P_2$, $MP_2P_3$ usw. zerlegen läßt, so daß sich die Konstruktion eines regelmäßigen $n$-Ecks auch über die Konstruktion dieser „Grunddreiecke" ausführen läßt. Wir wollen die Zerlegung eines regelmäßigen $n$-Ecks in die Grunddreiecke dazu benutzen, die Winkelsumme $\sigma_n$ eines regelmäßigen $n$-Ecks zu berechnen. Da in einem Dreieck die Summe der Winkel 180° beträgt, erhalten wir für das regelmäßige $n$-Eck die Winkelsumme, wenn wir die Dreieckswinkel aller Grunddreiecke addieren $(= n \cdot 180°)$ und davon die $n$ Winkel an der Spitze $M$ der Grunddreiecke, die zusammen 360° ergeben, abziehen:

$$\sigma_n = n \cdot 180° - 360° = (n-2) \cdot 180°.$$

Der Winkel $\alpha_n$ an der Spitze eines Grunddreiecks beträgt offenbar

$$\alpha_n = \frac{360°}{n} \text{ und}$$

die Basiswinkel $\beta_n$ eines Grunddreiecks

$$\beta_n = \frac{180° - \frac{360°}{n}}{2} = 90° - \frac{180°}{n} = 90°\left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

In der folgenden Tabelle haben wir einige Werte ausgerechnet.

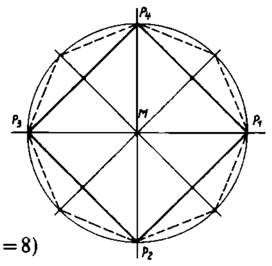
| $n$ | $\alpha_n$ | $\beta_n$ | $\sigma_n$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 90° | 45° | 360° |
| 5 | 72° | 54° | 540° |
| 6 | 60° | 60° | 720° |
| 10 | 36° | 72° | 1440° |

Wir wenden uns nun der Konstruktion einiger regelmäßiger $n$-Ecke zu, die wir einem gegebenen Kreis einbeschreiben wollen.

**a) Das regelmäßige 4-Eck und die von ihm ausgehende Reihe**

Um ein regelmäßiges 4-Eck zu erhalten, müssen die Grunddreiecke an der Spitze $M$ einen rechten Winkel besitzen. Dies erreichen wir, indem wir in dem gegebenen Kreis zwei zueinander senkrechte Durchmesser ziehen (Abb. 5). Durch Halbieren der Bogen $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_2P_3}$, $\widehat{P_3P_4}$ und $\widehat{P_4P_1}$, was konstruktiv durch das Halbieren der Seiten $P_1P_2, \ldots, P_4P_1$ erfolgt, gelangen wir zum regelmäßigen 8-Eck. Wiederholtes Halbieren führt schließlich auf das regelmäßige 16-Eck, 32-Eck, ..., $4 \cdot 2^n$-Eck. Die ältesten Aufschlüsse über regelmäßige Vielecke geben altägyptische Wandgemälde, die anfänglich ausschließlich regelmäßige 4- und 8-Ecke zeigen.

Bild 5

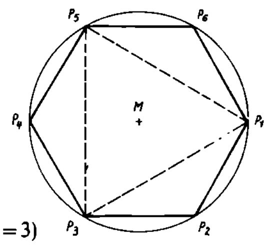



$n=4\,(n=8)$

**b) Das regelmäßige 6-Eck und die von ihm ausgehende Reihe**

Da der Winkel $\alpha_6$ an der Spitze des gleichschenkligen Grunddreiecks 60° beträgt, die Grunddreiecke also gleichseitig sind, ist die Seite des regelmäßigen 6-Ecks gleich dem Radius des Umkreises. Wir erhalten die Eckpunkte folglich durch sechsmaliges Abtragen des Radius am Kreisumfang (Abb. 6). Halbieren wir wiederholt die zu den Seiten des regelmäßigen 6-Ecks gehörigen Bogen, so gelangen wir zum regelmäßigen 12-, 24-, ..., $6 \cdot 2^n$-Eck. Durch Überspringen jeweils einer Ecke erhalten wir übrigens das regelmäßige 3-Eck. Auf späteren altägyptischen Wandgemälden treten regelmäßige 6- und 12-Ecke auf (z. B. in Wagenrädern), und es hat den Anschein, daß die Ägypter diese Konstruktionen von den Babyloniern gelernt haben. Der griechische Mathematiker Archimedes hat durch das regelmäßige 96-Eck ($96 = 6 \cdot 2^4$) zum ersten Mal die Fläche des Kreises (hier des zum regelmäßigen 96-Eck gehörigen Umkreises) verläßlich nach unten abgeschätzt und dabei für das Verhältnis $\pi$ von Kreisumfang zum Durchmesser näherungsweise $3\frac{10}{71}$ erhalten.

Bild 6




$n=6\,(n=3)$

**c) Das regelmäßige 10-Eck und die von ihm ausgehende Reihe**

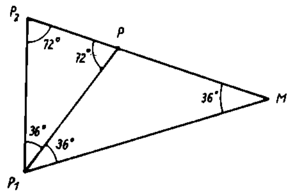
Der Winkel $\alpha_{10}$ an der Spitze eines Grunddreiecks beträgt jetzt 36°, die Basiswinkel $\beta_{10}$ 72°. Es ist also $\alpha_{10} = \beta_{10}/2$. Zeichnen wir für einen dieser Basiswinkel, sagen wir bei $P_1$ (Abb. 7), die Winkelhalbierende, die die Seite $\overline{MP_2}$ in $P$ schneiden möge, so sind die Winkel $P_1MP$ und $PP_1M$ gleich. Das Dreieck $PP_1M$ ist gleichschenklig:
$\overline{PP_1} = \overline{PM}$. Weiter ist aber auch
$\sphericalangle P_1PP_2 = \sphericalangle P_1P_2P$, also ist auch das Dreieck $PP_1P_2$ gleichschenklig und damit
$\overline{PP_1} = \overline{P_1P_2}$. Mithin gilt $\overline{MP} = \overline{P_1P_2}$. Auf Grund der Winkelgleichheit in den Dreiecken $MP_1P_2$ und $PP_1P_2$ sind diese ähnlich. Deshalb ist

$$\overline{MP_2} : \overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_2} : \overline{P_2P}$$

bzw. wegen $\overline{MP} = \overline{P_1P_2}$

$$\overline{MP_2} : \overline{MP} = \overline{MP} : \overline{PP_2}. \qquad (*)$$

Bild 7




Die Gleichung (*) bedeutet in geometrischer Sprechweise, daß der Radius $r = \overline{MP_2}$ des Umkreises durch den Punkt $P$ stetig geteilt wird und daß der größere Abschnitt der stetig geteilten Strecke gleich der Zehneckseite $s_{10}$ ist. Mit den neuen Bezeichnungen erhalten wir für
$(*): r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$ bzw.

$$s_{10} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}$$

(die negative Wurzel entfällt wegen $s_{10} > 0$). Nach dem Satz des Pythagoras ist $\sqrt{r^2/4 + r^2}$ gleich der Hypothenuse $\overline{AC}$ eines rechtwinkligen Dreiecks $ABC$ mit den Seiten $\overline{AB} = r$ und $\overline{CB} = r/2$ (Abb. 8). Um $s_{10}$ zu erhalten, ist von $AC$ die Strecke $r/2$ zu subtrahieren, so daß $\overline{AD} = \overline{AE}$ die gesuchte Seite $s_{10}$ bildet. Das regelmäßige 10-Eck wird also konstruiert, indem man den Radius des Umkreises stetig teilt und den größeren Abschnitt zehnmal am Kreisumfang abträgt. Das regelmäßige 5-Eck ergibt sich durch Überspringen jeweils eines Eckpunktes. Gauß teilte folgende einfache Bestimmung der Seite $s_5$ des regelmäßigen 5-Ecks als Entdeckung eines seiner Schüler mit, die wir ohne Beweis nennen (Abb. 8): Ziehe durch $B$ und $D$ eine Gerade, die den Kreis um $A$ mit dem Radius $r$ in $F$ schneidet. Dann ist $\overline{BF} = s_5$. Durch Halbieren der Bogen, die zu den Seiten des regelmäßigen 10-Ecks gehören, erhalten wir nacheinander das regelmäßige 20-, 40-, ..., $5 \cdot 2^n$-Eck. Die Konstruktion des regelmäßigen 5-Ecks ist eine Entdeckung der griechischen Mathematiker; das Sternenfünfeck (Abb. 9) diente der Schule des Pythagoras als Geheimzeichen.

Bild 8

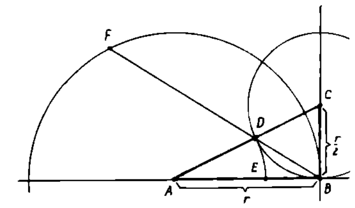
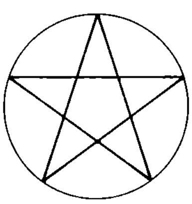



Bild 9



**d) Weitere konstruierbare regelmäßige $n$-Ecke**

Es ist $\alpha_{15} = 24°$. Dieser Winkel – und damit das regelmäßige 15-Eck – kann konstruiert werden, indem man $24° = 60° - 36° = \alpha_6 - \alpha_{10}$ bildet, also zwei bekannte Winkel subtrahiert. Daraus folgt die Konstruierbarkeit der $15 \cdot 2^n$-Ecke. Auch diese Konstruktion finden wir bereits in der klassischen griechischen Mathematik. Bis zum Schluß des 18. Jahrhunderts hielt man damit den Bestand der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren regelmäßigen $n$-Ecke für erschöpft.

Am 1. 6. 1796 erschien in der „Allgemeinen Literaturzeitung" folgende Mitteilung, die die erste Veröffentlichung von C. F. Gauß ist: Neue Entdeckungen. Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, daß verschiedene regelmäßige Vielecke, namentlich das Dreieck, Fünfeck, Fünfzehneck und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch konstruieren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, daß das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern. Desto mehr dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, daß außer jenen regelmäßigen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium (Corollarium, lat. = Folgesatz eines Beweises) einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publikum vorgelegt werden.

*C. F. Gauß, q. Braunschweig,*
*Stud. d. Mathematik zu Göttingen*

Die Lösung einer 2000jährigen Fragestellung der Mathematik gelang Gauß durch eine algebraische Formulierung, die er für das geometrische Problem fand. Die algebraische Behandlung der Aufgabe erfordert umfassende mathematische Kenntnisse, so daß wir hier darauf nicht eingehen. Für denjenigen aber, der Lust hat, ein regelmäßiges 17-Eck zu konstruieren, geben wir wenigstens die Konstruktionsbeschreibung an. Vorher nennen wir noch das von Gauß gefundene Resultat. Ein Kreis kann dann und nur dann mit Zirkel und Lineal in $n$ gleiche Teile zerlegt werden, wenn $n$ eine Primzahl der Gestalt $2^{2^m}+1$ ist. Für $m=0$ ist $n=3$, für $m=1$ ergibt sich $n=5$ und für $m=2$ erhält man überraschenderweise $n=17$. Gauß hat die wirkliche geometrische Durchführung der Konstruktion zunächst anderen überlassen, später gab auch er eine Konstruktionsbeschreibung. Für $m=3$ ist $n=257$, also eine Primzahl. Richelot hat 1832 diese Aufgabe bearbeitet. Auch für $m=4$ ergibt sich eine Primzahl, nämlich $n=65537$. Diese umfangreichen Untersuchungen hat Hermes vorgenommen. Gauß benötigte für seine Überlegungen eine Schiefertafel, Richelot schon 80 Seiten und Hermes gar einen Koffer, um sein Manuskript aufzubewahren. Für $m=5$ ist $n=641\cdot 6700417$, also keine Primzahl. Bis jetzt sind noch keine weiteren Primzahlen der Art $2^{2^m}+1$ bekannt. Eins ist jedoch klar: wenn es eine weitere Primzahl gibt, so muß sie astronomische Ausmaße haben.

Nun aber die versprochene Konstruktion. Im Mittelpunkt des gegebenen Kreises $K$, in den das regelmäßige 17-Eck eingezeichnet werden soll, errichten wir zwei zueinander senkrechte Geraden $g$ und $h$. Wir teilen den Radius $r=\overline{MA}$ (vgl. Abb. 10) in vier Teile. Es sei $\overline{MC}=\frac{1}{4}\overline{MA}$. Um $C$ schlagen wir einen Kreisbogen mit dem Radius $\overline{BC}$ (wobei $B$ ein Schnittpunkt der Geraden $h$ mit dem Kreis $K$ ist), der die Gerade $g$ in $D$ und $E$ schneidet. Um $D$ schlagen wir einen Kreis mit dem Radius $\overline{DB}$, der $g$ außerhalb des Kreises $K$ in $F$ schneidet; um $E$ schlagen wir ebenfalls einen Kreis mit dem Radius $\overline{EB}$, der auf $g$ innerhalb des Kreises $K$ den Punkt $G$ liefert. Wir halbieren die Strecke $\overline{MF}$ und erhalten den Punkt $H$. Über $\overline{AG}$ wird der Thaleskreis errichtet, der $h$ in $I$ schneidet. Der Kreis um $I$ mit dem Radius $\overline{MH}$ schneidet $g$ in $L$. Wir tragen auf $g$ von $M$ aus nach rechts die Strecke $\frac{1}{2}\overline{HL}$ ab, im Endpunkt dieser Strecke errichten wir eine Senkrechte zur Geraden $g$, die den Kreis in $P_2$ und $P_{17}$ schneidet. Mit $A=P_1$ haben wir drei aufeinanderfolgende Eckpunkte des regelmäßigen 17-Ecks. Damit lassen sich alle weiteren leicht konstruieren.

Für den eiligen Leser, dem diese exakte Konstruktion zu langwierig ist, teilen wir noch eine einfache Näherungslösung mit (Abb. 11): Wie eben werden in $M$ zwei senkrechte Geraden $g$ und $h$ eingezeichnet. Die Gerade $g$ schneide den Kreis in $A$ und $B$. Wir teilen $\overline{AB}$ in 17 Teile und zeichnen rechts von $A$ einen Punkt $C$ mit $\overline{AC}=\overline{AB}/17$. Auf $h$ wird oberhalb von $D$ ein Punkt $E$ mit $\overline{DE}=\overline{AB}/17$ eingezeichnet und $C$ mit $E$ verbunden. Die Verbindungsgerade schneidet den Kreis in $F$. Der dritte, links von $A$ liegende Teilungspunkt $G$ der Strecke $AB$ wird mit $F$ verbunden. Dann ist mit sehr guter Näherung die Seite $s_{17}$ des regelmäßigen 17-Ecks gleich $\overline{GF}$.

Wir wollen uns abschließend das merkwürdige Ergebnis plausibel machen, warum einige regelmäßige $n$-Ecke mit Zirkel und Lineal und andere nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Zirkel und Lineal sind beim praktischen Zeichnen die wichtigsten Instrumente. Deshalb wird die auf den griechischen Mathematiker Plato zurückgehende Forderung, bei geometrischen Konstruktionen nur Zirkel und Lineal zu benutzen, nicht als Einschränkung der Hilfsmittel empfunden. Wenn wir jedoch die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionsschritte näher betrachten, dann stellen wir fest, daß sich entweder Geraden mit Geraden oder Kreise mit Kreisen schneiden. Verfolgen wir diese Konstruktionsschritte rechnerisch (am besten mit Hilfe der analytischen Geometrie), so zeigt sich, daß wir nur Strecken konstruieren können, die zu einer Einheitsstrecke (dem Umkreisradius) ein rationales Verhältnis haben oder sich über eine Folge von Quadratwurzeln aus rationalen Vielfachen dieser Einheitsstrecke ergeben. Aus rechnerischer Sicht zeigen sich deutlich die Einschränkungen, die wir uns durch alleinige Verwendung von Zirkel und Lineal auferlegen, da z. B. Strecken, die gleich einer dritten Wurzel aus der Einheitsstrecke sind, mit Zirkel und Lineal nicht mehr konstruiert werden können. (Daher sind die klassischen Probleme der Würfelverdopplung und der Dreiteilung eines Winkels unlösbar.) Es ist nun nicht mehr erstaunlich, daß Zirkel und Lineal nicht mehr ausreichen, um alle regelmäßigen $n$-Ecke zu konstruieren bzw. den Kreis in $n$ gleiche Teile zu zerlegen. Ein moderner Geometer hat diesen Sachverhalt sehr drastisch ausgedrückt, indem er erklärte, daß eine Sense kein geeignetes Instrument zum Rasieren ist. *R. Thiele*

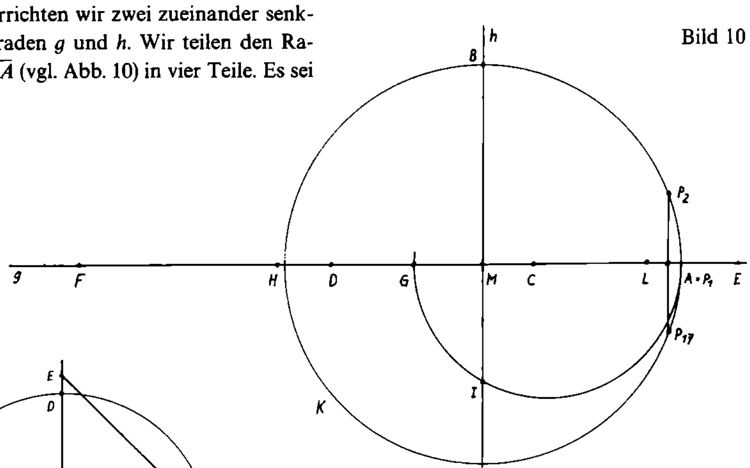


Bild 10

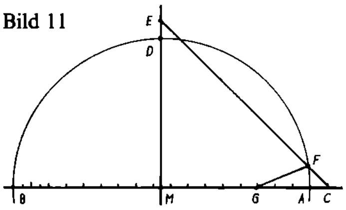


Bild 11

# Eine Aufgabe von Prof. Dr. Le Van Thiem


*Universität Hanoi*
*Vorsitzender der Mathematischen Gesellschaft der Sozialistischen Republik Vietnam*


▲1621▲ Es seien $m$, $n$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $m<n$ und $p$, $q$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $p<q$, für die $\arctan\frac{m}{n}+\arctan\frac{p}{q}=45°$ gilt.

1. Gegeben sind $m$ und $n$. Man ermittle $p$ und $q$.
2. Gegeben sind $m$ und $p$. Man ermittle $n$ und $q$.
3. Gegeben sind $m$ und $q$. Man ermittle $n$ und $p$.

*Bemerkung:* $\alpha=\arctan\frac{m}{n}$ bzw. $\beta=\arctan\frac{p}{q}$ sind die Größen derjenigen Winkel zwischen 0° und 90°, für die

$$\tan\alpha=\frac{m}{n} \quad \text{bzw.} \quad \tan\beta=\frac{p}{q} \quad \text{gilt.}$$

(Aus Platzgründen wurde z. T. ein Schrägstrich als Bruchstrich verwendet.)

# Gauß und die nicht-euklidische Geometrie

*Gauß* hat nur das veröffentlicht, was er selbst für völlig ausgereift hielt. Aus seiner umfangreichen Korrespondenz, seinem Tagebuch und anderen Aufzeichnungen geht hervor, daß er sich mit vielen Fragen befaßt hat, deren endgültige Lösung zwar erst Mathematikern späterer Zeit vorbehalten war, zu deren Erforschung er jedoch wesentliche Gedanken beigetragen hat. Ein solches Gebiet ist die *nicht-euklidische Geometrie.* Obwohl sich *Gauß* über viele Jahre mit diesem Problem beschäftigt hat und obwohl er die von *J. Bolyai* und *N. I. Lobatschewski* erreichten Ergebnisse schon vor den beiden gefunden hatte, ließ er nichts davon an die Öffentlichkeit dringen.

Als Festgabe zum Jubiläum erschien im *Teubner-Verlag Leipzig* ein Buch unter dem Titel „Gauß und die nicht-euklidische Geometrie".

Der Autor, Nationalpreisträger Professor Dr. *Hans Reichardt*, der – selbst Geometer – sich viel mit mathematikhistorischen Fragen befaßt, hat dieses eigenartige Kapitel der Mathematikgeschichte untersucht. Es ist ihm gelungen, aus Aufzeichnungen, Notizen und Bemerkungen, aus Briefen, Rezensionen und anderen Stellungnahmen zu verschiedenen Arbeiten von Geometern dieser Zeit ein Bild von dem Anteil zu entwerfen, den *Gauß* selbst zur Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie beigetragen hat.

**Worum geht es bei der nicht-euklidischen Geometrie?**

Im 4. Jh. v. u. Z. hatte *Euklid* das damalige mathematische Wissen systematisiert und in seinem Werk „Die Elemente" zusammengefaßt. Die ersten vier Bücher dieses Werkes sind der Geometrie gewidmet. Sie enthalten Axiome, mit deren Hilfe die gesamte Geometrie aufgebaut und alle weiteren Sätze bewiesen werden. Ein solches Axiom ist z. B. (in unserer heutigen Sprechweise ausgedrückt): „Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade." Eines dieser Axiome jedoch, das fünfte, war nicht so kurz und auch nicht so offensichtlich. Es lautete folgendermaßen:

„Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte."

Das ist inhaltlich gleichbedeutend mit den Aussagen „Zu einer Geraden gibt es durch einen nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt genau eine Parallele" oder „Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich 180°".

Viele Mathematiker haben sich im Laufe der Jahrhunderte mit diesem *Parallelenaxiom* beschäftigt. Sie glaubten, es sei gar kein Axiom, sondern ein Satz, der sich aus den anderen Axiomen ableiten läßt, und haben deshalb versucht, ihn zu beweisen. Es ist keinem gelungen. Auch *Gauß* und viele seiner Zeitgenossen haben sich mit solchen Beweisversuchen abgequält, z. B. sein Studienfreund *Wolfgang Bolyai* aus Ungarn und dessen Sohn *Johann* und auch *N. I. Lobatschewski* aus Rußland. Bei diesen Beweisversuchen wandte man auch das indirekte Beweisverfahren an, d. h., man nahm an, das Parallelenaxiom sei falsch, und hoffte, damit auf einen Widerspruch zu stoßen. Das geschah jedoch nicht; im Gegenteil, man konnte daraus eine ganz neue Geometrie ableiten. So wurde eigentlich gegen den Willen der Mathematiker selbst und entgegen aller Anschauung eine nicht-euklidische Geometrie, die sog. *hyperbolische Geometrie* gefunden.

Wie aus den verschiedenen Aufzeichnungen zu schließen ist, hat wohl *Gauß* als erster diese Konsequenz gezogen. Er hat jedoch seine Ergebnisse nicht veröffentlicht. Auch als später *N. I. Lobatschewski* und *J. Bolyai* unabhängig voneinander diese neue, nicht-euklidische Geometrie entdeckten, hat er sich nur sehr zurückhaltend geäußert.

Wahrscheinlich waren es mehrere Gründe, die *Gauß* zu diesem merkwürdigen Verhalten veranlaßten. Einmal war es ihm (und auch *J. Bolyai* und *N. I. Lobatschewski*) nicht gelungen, die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Geometrie nachzuweisen. Zum anderen war es natürlich sehr schwer, diese Ideen zu vertreten, für die den meisten Mathematikern damals jedes Verständnis fehlte und die der Anschauung widersprachen. Das haben auch *J. Bolyai* und *N. I. Lobatschewski* zu spüren bekommen, deren Veröffentlichungen keinesfalls die verdiente Würdigung fanden, wohl aber Anfeindungen und Spott hervorriefen. Diesem „Geschrei der Böltier" wollte sich *Gauß* nicht aussetzen, wie aus seinen Bemerkungen hervorgeht, wahrscheinlich besonders deshalb, weil ihm der Nachweis der Widerspruchsfreiheit fehlte.

In dem Buch „Gauß und die nicht-euklidische Geometrie" wird diese Entwicklung sehr lebendig dargestellt, werden die Verdienste und das Verhalten von *Gauß* gezeigt und mit vielen Zitaten belegt. Darüber hinaus wird die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie weiter verfolgt, ihre Bedeutung gewürdigt und die vollständige Lösung dieses Problems mit einbezogen. Namen wie *Felix Klein*, *Sophus Lie* und *Bernhard Riemann* vervollständigen das Bild. Den Abschluß bilden im Zusammenhang mit dem pseudoeuklidischen Modell der nicht-euklidischen Geometrie eigene Arbeiten des Autors.

Damit bringt das Buch ein abgerundetes Bild über die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie und ihre Beeinflussung durch *Gauß*, wie es in der Literatur bisher noch nicht zu finden ist.

Das Buch wendet sich nicht nur an Mathematiker mit dem Spezialgebiet Geometrie, sondern an alle, die sich für die Entwicklung der Mathematik oder für Fragen der Geometrie interessieren und die über diesen großen Mathematiker, über seine Arbeitsweise und seine Charakterzüge etwas erfahren wollen.

*D. Ziegler*

Prof. Dr. Hans Reichardt

**Gauß und die nicht-euklidische Geometrie**

*116 Seiten mit 8 Fotos und 21 Zeichnungen. Leinen mit Schutzumschlag. 29,50 M*

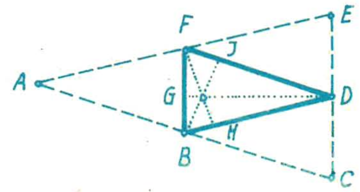
# Ein Beweis, geführt von C. F. Gauß

„Daß die Perpendikel in einem Dreieck aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten sich in einem Punkte schneiden, kann man sehr einfach so zeigen: Das gegebene Dreieck sei *BDF* und die erwähnten Perpendikel *BJ*, *DG*, *FH*. Man ziehe durch jeden Scheitelpunkt des Dreiecks Parallelen mit der gegenüberstehenden Seite, die sich in den Punkten *A*, *C*, *E* schneiden, und es steht folglich *FH* auch auf *AE*, *GD* auf *CE*, *BJ* auf *AC* senkrecht, und zwar ist

$AB = BC$

$ED = DC$

$AF = FE$.




Beschreibt man nun um das Dreieck *ACE* einen Kreis, so liegt sein Mittelpunkt sowohl in *BJ*, als in *DG*, als in *FH*, diese drei Linien müssen sich also in einem Punkte schneiden."

# In freien Stunden alpha heiter

$$\begin{array}{r} UUU \\ +\,UUSU \\ \hline GAUSS \end{array} \qquad \begin{array}{r} AAGG \\ +\,AGGG \\ \hline GAUSS \end{array} \qquad \begin{array}{r} ASUA \\ +\,ASGA \\ \hline GAUSS \end{array} \qquad \sqrt{GGA} = GAUSS \qquad AGG^A = GAUSS$$

### G · A · U · S · S

Man ersetze die Buchstaben im Namen von C. F. Gauß so durch natürliche Zahlen, daß nachfolgende Bedingungen erfüllt werden.

(1) $C \cdot F \cdot (G+A+U+S+S)+A \cdot U = 1777$

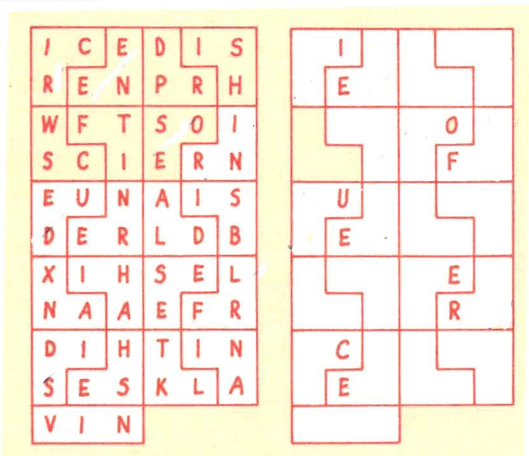
(2) $G \cdot A \cdot U \cdot S \cdot S = 1855$

(3) $G > C > A > U > F > S$

Wie viele und welche Lösungen gibt es?

*K. Koch*

### Mosaikrätsel




Die Buchstabengruppen der linken Figur sind so in die rechte Figur zu übertragen, daß sich ein Ausspruch von C. F. Gauß ergibt.

### Anekdote

Ein Jugendfreund von C. F. Gauß hatte sich zu der Bemerkung „Die Hälfte unserer Gemeinderatsmitglieder sind Dummköpfe“ hinreißen lassen.

Der Bürgermeister, über diese Äußerung erbost, verlangte die Zurücknahme der beleidigenden Worte.

Zur nächsten Sitzung erschien auch prompt der junge Mann und erklärte:

„Ich bedaure meine Bemerkung, die Hälfte der Gemeinderatsmitglieder seien Dummköpfe. Ich nehme sie zurück und widerrufe: Die Hälfte der Gemeinderatsmitglieder sind keine Dummköpfe.“

Im Sitzungssaal zunächst Schweigen, dann aber brach der Bürgermeister, ein Mann mit Sinn für geistvollen Humor, in schallendes Gelächter aus. Die Ratsmitglieder schlossen sich wohl oder übel an, und einer aus dem Publikum meinte: „Wenn hinter diesem Widerruf nicht der Carl Friedrich steckt?!“

### Krypto-Gleichungssystem

Den Buchstaben im Namen von CFGAUSS sind Ziffern von 0 bis 9 so zuzuordnen, daß die Gleichungen (I) bis (IV) zu wahren Aussagen werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Das Gleichungssystem kann sowohl durch systematisches Probieren als auch mit Hilfe äquivalenter Umformungen gelöst werden.

$(C, G \neq 0)$

(I) $\dfrac{(\sqrt[F]{GAUSS})^C - C^C \cdot G}{C \cdot G} = 1+7+7+7$

(II) $\dfrac{(\sqrt[F]{GAUSS})^C - G \cdot G^C}{C \cdot G} = 1+8+5+5$

(III) $\dfrac{(\sqrt[F]{GAUSS})^C}{C \cdot G} = 1+9+7+7$

(IV) $(\sqrt[F]{GAUSS})^C = \sqrt[C]{GAUSS}$

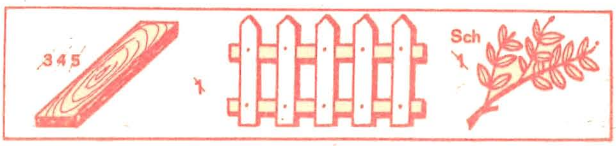
### Rösselsprung

mit Ausspruch von C. F. Gauß

| | | |
|---|---|---|
| tun | Nichts | was |
| et- | tan | übrig |
| ist | zu | noch |
| wenn | ist | ge- |

### Bilderrätsel

*K. Koch*



### Krypto-Arithmetik

Die Buchstaben sind so durch Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

DrCFGauß · D · ß = DDDDDDDDD
DrCFGauß · r · ß = r r r r r r r r r
DrCFGauß · C · ß = CCCCCCCCC
DrCFGauß · F · ß = F F F F F F F F F
DrCFGauß · G · ß = GGGGGGGGG
DrCFGauß · a · ß = a a a a a a a a a
DrCFGauß · u · ß = u u u u u u u u u
DrCFGauß · ß · ß = ß ß ß ß ß ß ß ß ß

C. F. Gauß erwarb 1799 die Doktorwürde an der damaligen Landesuniversität Helmstedt. Professor Pfaff war von der Dissertation, die den ersten strengen Beweis für den sogenannten Fundamentalsatz der Algebra lieferte, so begeistert, daß die Promotion in Abwesenheit erfolgte.

*K. Koch*

### Rösselsprung

mit Zitat von C. F. Gauß

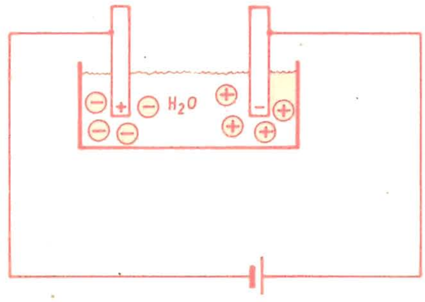
*K. Koch*

| | | | C.F.GAUSS | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | der | um | nen, | zu- | es | anders | |
| | son- | fan- | nim- | ein | woh- | um | |
| 1777 | mer- | ist | dern | nicht, | an- | ist | 1885 |
| 1777 | gen | voll- | sonder- | er | nun | zu | 1885 |
| | bar | satte | Ge- | darin | so | hat | |
| | bäude | So | endet, | Mensch; | ein | ruhig | |
| | | | 1977 | | | | |

### Ein „geschmecktes" Telegramm

Am 9. August 1834 wurde in den Göttingschen gelehrten Anzeigen die Erfindung eines elektromagnetischen Telegraphen durch die Professoren Gauß und Weber bekannt gemacht. Weniger bekannt ist die Idee eines elektrochemischen Telegraphen von Gauß, der den Geschmack zur Zeichengebung benützt und auf der Zerlegung des Wassers beruht (Elektrolyse). Gauß schreibt darüber 1835: „Eine ganz artige Entdeckung oder Bemerkung habe ich vor etwa sechs Wochen gemacht, daß man den Sinn (ob + oder –) eines galvanischen Induktionsimpulses ganz bestimmt mit den Lippen unterscheiden kann, so daß wir zum Spaß schon so telegraphiert haben, daß die Depesche aufgeschmeckt wurde."

*Dr. R. Thiele, Leipzig*




### Wie viele Möglichkeiten?

Auf wie viele Arten läßt sich der Name C. F. Gauß von der Mitte C aus nach den vier Ecken ß lesen?

*R. Thiele*

ß u a u ß
u a G a u
a G F G a
G F C F G
a G F G a
u a G a u
ß u a u ß

### Kreuzworträtsel

1. Genialer deutscher Mathematiker
2. Bogenmaß eines Winkels
3. Bauliche Veränderung
4. Maßeinteilung, z. B. auf dem Rechenstab
5. Nachlässige Umgangssprache

*D. Völzke, Greifswald*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 G | | | | S |
| 2 A | | | | S |
| 3 U | | | | U |
| 4 S | | | | A |
| 5 S | | | | G |

Frontseite der Gauß-Weber-Medaille

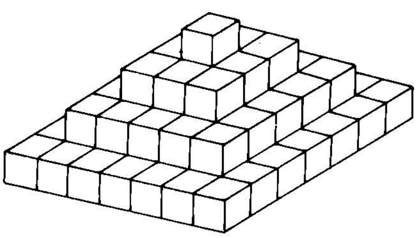
# Wer löst mit?
## alpha-Wettbewerb


*Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1977*

Ma 5 ■ 1622 Zwei Boote fahren auf einem Fluß stromaufwärts. Sie sind gegenwärtig 6 km voneinander entfernt. Nachdem das hintere Boot 5 km weitergefahren ist, hat das vordere Boot in der gleichen Zeit nur 3 km zurückgelegt.
a) Welchen Abstand haben die beiden Boote nun noch voneinander?
b) Wieviel Kilometer müßte das hintere Boot noch zurücklegen, um das vordere einzuholen, wenn beide Boote jeweils mit der gleichen Geschwindigkeit weiterfahren?
*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 1623 In einem Park soll eine rechteckige Rasenfläche von 12 m Breite und 25 m Länge von einem 2 m breiten Weg umsäumt werden. Dieser Weg soll mit quadratischen Platten von 50 cm Seitenlänge belegt werden. Wieviel solcher Platten werden dazu benötigt? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 1624 Auf einem Tisch steht, wie aus dem Bild ersichtlich, eine aus 84 gleichgroßen Würfeln gebaute „Pyramide“. Die unterste quadratische Schicht besteht aus $7 \cdot 7 = 49$ Würfeln, die zweite aus $5 \cdot 5 = 25$ Würfeln, die



dritte aus $3 \cdot 3 = 9$ Würfeln und die vierte aus nur einem Würfel. Wie viele quadratische Begrenzungsflächen sind zu sehen, wenn man die Pyramide von oben und von allen Seiten betrachtet?
*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 1625 In einer Ebene sind vier Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$ und $g_4$ so zu zeichnen, daß sie
a) genau 3 Schnittpunkte,
b) genau 4 Schnittpunkte,
c) genau 5 Schnittpunkte haben.
*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 1626 Eine zwei Meter lange Kette besteht aus lauter gleichgroßen ringförmigen Gliedern. Der äußere Durchmesser eines solchen Ringes beträgt 2,4 cm; die Stärke jedes Ringes beträgt 2,5 mm. Aus wieviel Gliedern (Ringen) ist diese Kette zusammengesetzt?
*StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■ 1627 Der sechste Teil der Anzahl der Aufgaben einer Klassenarbeit im Fach Mathematik waren Geometrieaufgaben, der dritte Teil Gleichungen und die Hälfte Knobelaufgaben. Peter löste insgesamt vier Aufgaben, das waren zwei Drittel der Anzahl aller gestellten Aufgaben. Wieviel Geometrieaufgaben, Gleichungen bzw, Knobelaufgaben waren insgesamt zu lösen?
*Schüler Andreas Fittke, Berlin*

Ma 6 ■ 1628 In dem Schema

$$\begin{array}{r} \text{OPA} \\ +\text{OMA} \\ \hline \text{PAAR} \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. *Sch.*

Ma 6 ■ 1629 Jeder von zwei befreundeten Schülern hat sich in einer Bibliothek ein Buch mit dem gleichen Titel ausgeliehen. Nachdem der erste von ihnen 150 Seiten und der zweite 350 Seiten gelesen hatte, stellten sie fest, daß der erste bis zum Durchlesen des Buches noch dreimal so viele Seiten zu lesen hatte wie der zweite. Wieviel Seiten umfaßt dieses Buch?
*Fachlehrer Dieter Knape, Jessen*


**Wettbewerbsbedingungen**

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

**Redaktion alpha**
**7027 Leipzig, Postfach 14.**

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1976/77 läuft von Heft 5/76 bis Heft 2/77. Zwischen dem 1. und 10. September 1977 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/77 veröffentlicht. Wer mindestens *10* Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/76 bis 2/77) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1976/77 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1630 Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks $ABC$ seien drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang dieses Dreiecks sei um 35 cm länger als die längste Dreieckseite. Wie lang ist jede der drei Seiten dieses Dreiecks? *Sch.*

Ma 6 ▪1631 Vertauscht man die Ziffern einer zweistelligen natürlichen Zahl, so erhält man eine um 9 größere Zahl als die ursprüngliche. Wie viele Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt es, und wie lauten sie?
*Schülerin Heidrun Stengel, Dautzschen*

Ma 6 ▪1632 Gegeben sind zwei Geraden $g$ und $h$, die in derselben Ebene liegen, und nicht parallel zueinander verlaufen. Es ist eine dritte Gerade $k$ zu konstruieren, die die Gerade $g$ in einem Punkte $P$ und die Gerade $h$ in einem Punkte $Q$ derart schneidet, daß $\overline{PQ}=e=3$ cm gilt und daß der von den Geraden $g$ und $k$ eingeschlossene Winkel 60° beträgt. *Sch.*

Ph 6 ▪16 Zwei Spiegel schließen miteinander den Winkel $\alpha$ ein. Bei der Reflexion an beiden Spiegeln ist der ausfallende Strahl gegenüber dem einfallenden um $360-2\alpha$ verdreht. Dies ist zu beweisen.

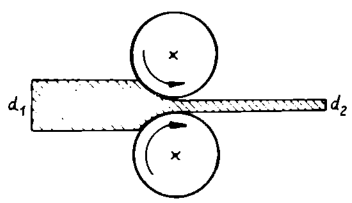
Ma 7 ▪1633 Heinz fuhr mit seinem Fahrrad vom Ort A nach dem Ort B. Als er zwei Drittel des Weges zurückgelegt hatte, platzte ein Reifen. Den restlichen Weg legte er zu Fuß zurück.
Für den Fußmarsch benötigte er doppelt soviel Zeit wie für die bisherige Fahrt mit dem Fahrrad. Wie verhält sich die Geschwindigkeit während des Radfahrens zur Geschwindigkeit während des Fußmarsches, wenn beide Geschwindigkeiten konstant waren?
*Schüler Norbert Albrecht, Schweina*

Ma 7 ▪1634 Die Summe aus drei von Null verschiedenen natürlichen Zahlen $a$, $b$, $c$ mit $a<b<c$ beträgt 54. Die Zahl $b$ ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Zahlen $a$ und $c$. Jede dieser drei Zahlen ist ein Vielfaches von 6. Wie viele Lösungen besitzt diese Aufgabe? Wie heißen diese Zahlen?
*Fachlehrer Dieter Knape, Jessen*

Ma 7 ▪1635 Addiert man 6 zum $k$-fachen einer natürlichen Zahl $n$, so erhält man das gleiche, als wenn man 6 vom $2k$-fachen dieser natürlichen Zahl subtrahiert. Welche natürlichen Zahlen $k$ und $n$ erfüllen diese Bedingungen? *Schülerin Manuela Wiemuth, Weißenborn-Lüderode*

Ma 7 ▪1636 Es sind alle sechsstelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:
a) die Zahl, die der Ziffer der Einerstelle entspricht, ist größer als 3.
b) Streicht man die Ziffer der Einerstelle und setzt man diese Ziffer links vor die verbleibende fünfstellige Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie die ursprüngliche Zahl. *Sch.*

Ph 7 ▪17 Beim Walzen von Aluminium unterscheiden wir zwischen Arbeits- und Stützwalze. Die Arbeitswalze habe einen Durchmesser von 240 mm, die Stützwalze von 560 mm; die Bandgeschwindigkeit betrage $350\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$. Wie viele Umdrehungen je Minute machen in diesem Fall Arbeits- und Stützwalze?
*Dipl.-Lehrer E. Knauth, OS Rackwitz*




Ch 7 ▪13 In einem Hochofen sollen 1200 t Roheisen hergestellt werden.
a) Der Kühlwasserverbrauch beträgt, auf eine hergestellte Tonne Roheisen berechnet, 30 bis 65 $m^3$. Wieviel Kubikmeter Wasser werden zur Kühlung benötigt?
b) Wieviel Tonnen Kohlenmonoxid sind erforderlich, wenn Eisen(II, III)-oxid reduziert werden soll?
c) Wieviel Tonnen Kohlenstoff sind bereitzustellen?

Ma 8 ▪1637 Wenn man zum Zähler und zum Nenner einer gebrochenen Zahl jeweils den Nenner addiert, so ist das Ergebnis neunmal so groß wie die ursprüngliche gebrochene Zahl. Um welche Zahl handelt es sich?
*Schüler Andreas Fittke, Berlin*

Ma 8 ▪1638 Gegeben seien drei parallele Geraden $g_1, g_2$ und $g_3$. Der Abstand zwischen $g_1$ und $g_2$ betrage 1 cm, zwischen $g_2$ und $g_3$ 2 cm und zwischen $g_1$ und $g_3$ 3 cm. Es ist ein Dreieck $ABC$ mit den Innenwinkeln $\sphericalangle BAC=\alpha=30°$ und $\sphericalangle ACB=\gamma=50°$ so zu konstruieren, daß $A$ auf $g_1$, $B$ auf $g_2$ und $C$ auf $g_3$ liegt. Die Konstruktion ist zu begründen! *Lehrer Adalbert Schatz, Leipzig*

Ma 8 ▪1639 In der inoffiziellen Länderwertung der Olympischen Sommerspiele 1976 in Montreal belegte die DDR mit 638 Punkten hinter der siegreichen UdSSR den zweiten Platz. Dabei wurden für eine Goldmedaille 7 Punkte, für eine Silbermedaille 5 Punkte, für eine Bronzemedaille 4 Punkte, für einen 4., 5. bzw. 6. Platz jeweils 3, 2 bzw. 1 Punkt vergeben. Für 40 Goldmedaillen und die Anzahl der 6. Plätze erhielt die DDR zusammen 294 Punkte. Die Anzahl der erworbenen Silbermedaillen, Bronzemedaillen und 4. Plätze war gleich groß. Die Anzahl der 5. Plätze war größer als 20, aber kleiner als die Anzahl der 4. Plätze. Wieviel Silber- und Bronzemedaillen, vierte, fünfte und sechste Plätze errang die DDR?
*Mathematikfachlehrer Wilfried Adler, EOS Neugersdorf*

Ma 8 ▪1640 Frank fragte Andreas nach der Kraftfahrzeugnummer des PKW seines Vaters. Andreas erwiderte scherzhaft: „Die erste Ziffer der vierstelligen Zahl ist gleich der zweiten Ziffer, die dritte ist gleich der vierten. Außerdem ist die Kraftfahrzeugnummer eine Quadratzahl. Nun finde sie selbst.“
*Schülerin Hilka Wenzel, Dresden*

Ph 8 ▪18 Ein Kupferseil besteht aus sieben Einzeldrähten von je 1,6 mm Durchmesser.
a) Wie groß ist der gesamte Widerstand des Seils bei einer Länge von 1000 m?
b) Aus dem Seil wird eine Doppelleitung hergestellt, die am Anfang eine Spannung von $U_1=220$ V aufweist.
Wie groß wird die Spannung $U_2$ am Leitungsende sein, wenn durch den Leiter ein Strom von 10 A fließt?
c) Welche Stromstärke $I_K$ wird diese Doppelleitung aufnehmen, wenn an ihrem Ende ein Kurzschluß auftritt? *H. B.*

Ch 8 ▪14 Berechne, wieviel Kubikmeter Äthin man aus 2 g; 3,4 g; 6,6 g Kalziumkarbid herstellen kann!

Ma 9 ▪1641 Für welches $n$ ist die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ genau fünfmal so groß wie die Summe $1+2+3+\ldots+n$ dieser Zahlen?
*Schüler Andreas Fittke, Berlin*

Ma 9 ▪1642 Man beweise, daß für alle konvexen Fünfecke $ABCDE$

$$2p>u>\frac{1}{2}p \text{ gilt.}$$

Dabei ist $u$ der Umfang und $p$ die Summe aus den Längen aller Diagonalen des Fünfecks. *Schüler Andreas Fittke, Berlin*

Ma 9 ▪1643 Ein Raum soll mit 12 Glühlampen so ausgestattet werden, daß sich eine Gesamtleistung von 720 Watt ergibt. Es stehen Glühlampen von 40 W, 60 W und 75 W in beliebiger Anzahl zur Verfügung. Wieviel Glühlampen zu 40 W, 60 W und 75 W werden benötigt, wenn Glühlampen mit jeder dieser unterschiedlichen Leistungen verwendet werden? *Sch.*

Ma 9 ▪1644 Es ist nachzuweisen, daß die Zahl $z=\frac{n^5}{120}+\frac{n}{30}-\frac{n^3}{24}$ für jede natürliche Zahl $n$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist!

*Schüler Andreas Fittke, Berlin*

Ph 9 ▪19 Förderkörbe besitzen Fangvorrichtungen. Diese greifen beim Reißen des Seils sofort ein. Ein Bremsversuch ergab, daß ein 25 Mp schwerer Förderkorb nach 4,5 m zum Stillstand kam. Bei welcher Geschwindigkeit griffen die Fänger ein, wenn die Bremskraft der Fangvorrichtung 65000 kp beträgt? *H. B.*

Ch 9 ▪15 Wieviel Stärke muß verwendet werden, wenn bei der Spaltung 260 kg Glukose entstehen sollen und nur 95% des Ausgangsstoffes umgesetzt werden?

Ma 10/12 ▪1645 Es ist nachzuweisen, daß die Volumina eines geraden Kreiskegels, einer Kugel und eines geraden Kreiszylinders, die einem Würfel einbeschrieben sind, sich wie 1 : 2 : 3 verhalten.

Ma 10/12 ▪1646 Man ermittle alle Paare $(x, y)$ von reellen Zahlen $x$ und $y$, für die die Gleichung $\sin(x+y)=\sin x+\sin y$ erfüllt ist!

Ma 10/12 ▪1647 Man ermittle alle reellen Zahlen $x$, für die gilt

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}>\frac{2}{x+\frac{1}{2}}$,

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{2}}$,

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}<\frac{2}{x+\frac{1}{2}}$.

Ma 10/12 ▪1648 Für welche reellen Zahlen $a$, $b$ ist $\frac{a^3+b^3}{2}\geqq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$?

Ph 10/12 ▪20 Das geschmolzene Aluminium wird in Behältern von kegelstumpfförmiger Gestalt transportiert, die folgende Innenmaße besitzen:
$d_1=1000$ mm, $d_2=1130$ mm, $h=1150$ mm.
a) Es ist der Flächeninhalt (Innenseite) des Behälters zu berechnen, der mit Schamottsteinen ausgekleidet ist.
b) Welches Füllvolumen besitzt dieser Behälter, wenn er bis zu einer inneren Höhe von 50 cm mit flüssigem Aluminium gefüllt ist?

Ch 10/12 ▪16 Durch quantitative Fällung aus 10 ml Schwefelsäure wurden 0,4669 g weißes Bariumsulfat erhalten. Wieviel Mol sind in einem Liter der untersuchten Schwefelsäure enthalten?

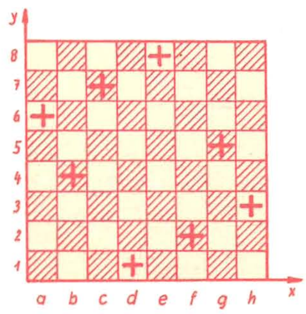
---

**alpha-Wettbewerb**

Mit Heft 5/76 gingen zum alpha-Wettbewerb über 24000 Lösungen ein, das ist neuer Rekord. In Heft 6/76 und 1/77 wurden versehentlich gleiche Aufgabennummern verwendet. *Die Redaktion*

# Gauß und das 8-Damen-Problem

**Aufgabe:** Es sind acht Königinnen so auf dem Schachbrett aufzustellen, daß keine von einer anderen geschlagen werden kann.




Eine der herausragenden Fähigkeiten von *C. F. Gauß* war es, scheinbar zusammenhanglose Dinge in Verbindung zu bringen. Das zeigt sich selbst bei kleinen Problemen. 1850 hatte *Nauck* die Aufgabe gestellt, acht Damen auf dem Schachbrett so aufzustellen, daß sie sich gegenseitig nicht schlagen können. *Nauck* gab 60 Lösungen an. *Gauß* benutzte zur Lösung des Problems komplexe Zahlen und fand 72 Varianten. Insgesamt gibt es 92 Lösungen, die sich aus 12 Grundlösungen durch Drehungen und Spiegelungen des Bretts herleiten lassen. Aus jeder Grundstellung lassen sich acht Lösungen ableiten. Bei der gezeichneten Lösung (und nur bei dieser!) unterscheiden sich jedoch einige der abgeleiteten Lösungen nicht, so daß es nur 92 anstatt 8 · 12 = 96 Lösungen gibt.

*Mitgeteilt von R. Thiele, Leipzig*

**Lösung:** 1. Durch systematisches Probieren kann man sämtliche Lösungen finden. Dabei hat sich folgende Methode als brauchbar erwiesen: Man hat 8 Figuren – die Damen – und ein Schachbrett vor sich, die senkrechten Spalten (Linien) a bis h von links nach rechts, die waagerechten Zeilen (Reihen) 1 bis 8 von unten nach oben. Zunächst stellt man eine Dame auf die a-Spalte, aber nur so hoch wie unbedingt erforderlich, d. h. zunächst auf a 1. Die zweite Dame stellt man auf die b-Spalte, ebenfalls nur so hoch wie unbedingt erforderlich, um die zuvor hingestellte Dame nach den Regeln der Dame-Gangart im Schach nicht zu bedrohen, also auf b 3. Die nächsten Damen stellt man in gleicher Weise der Reihe nach auf die c-, d-, usw. Spalte, jeweils nur so hoch wie gerade erforderlich, um keine der vorher hingestellten Damen zu bedrohen. Auf diese Weise braucht man beim Stellen der einzelnen Damen nur deren drei Schlagrichtungen nach links zu verfolgen, siehe Bild 1.

In der f-Spalte ergibt sich erstmalig der Fall, daß keine Dame mehr hingestellt werden kann. Dann muß die vorangehende Dame höher geschoben werden, aber wieder nur so weit wie unbedingt erforderlich, hier also bis e 8. Aber auch so läßt sich in der f-Spalte keine Dame mehr unterbringen. Daher muß die Dame der e-Spalte noch höher geschoben werden, und da dies nicht möglich ist, muß sie zunächst ganz entfernt und die Dame der vorangehenden d-Spalte höher geschoben werden, usw. – siehe Bild 2 –, ganz systematisch, bis alle 8 Damen zum Stehen kommen, ohne sich gegenseitig zu bedrohen.

So findet man als erste die Lösung a 1, b 5, c 8, d 6, e 3, f 7, g 2, h 4. Und wenn man in beschriebener Weise fleißig und systematisch fortfährt, so findet man schließlich alle 92 Lösungen des Problems. In der Tabelle sind nur die Zeilen der Lösungen angegeben, die Buchstaben der Spalten jeweils von a bis h sind zur Vereinfachung fortgelassen.

*V. Beyes*

Bild 1

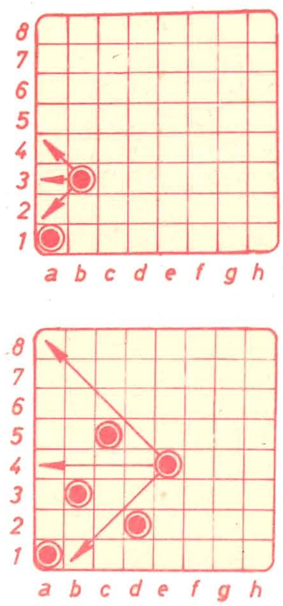
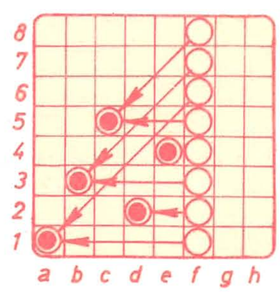
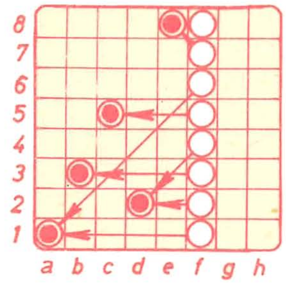
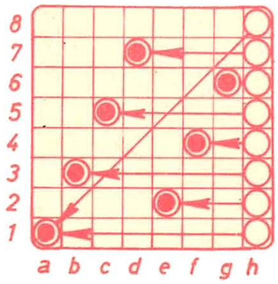



Bild 2







2. Hat man mit dieser Methode oder irgendwie anders eine Lösung gefunden, so lassen sich im allgemeinen Fall daraus noch 7 weitere Lösungen ableiten: da man die gefundene Lösung von vier Seiten betrachten und von jeder dieser vier Seiten aus auch noch ein Spiegelbild konstruieren kann, hat man jeweils acht Lösungen auf einen Schlag – siehe Bild 3.

3. Lösungen, die sich nicht, wie unter 2. beschrieben, auseinander gewinnen lassen, sollen voneinander unabhängige Lösungen heißen. Es gibt insgesamt 12 solche voneinander unabhängige Lösungen. Aus 11 davon lassen sich, wie unter 2. beschrieben, je 7 weitere Lösungen ableiten. Eine aber ist in bezug auf das Schachbrett symmetrisch, deshalb lassen sich daraus nur noch 3 weitere Lösungen ableiten. Insgesamt ergeben sich somit $11 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 92$ Lösungen, siehe Tabelle.

4. Bei der Herleitung der obigen Lösungsmethode ist davon auszugehen, daß die Unterscheidung von schwarzen und weißen Feldern auf dem Schachbrett für die Lösung des vorliegenden Problems belanglos ist; daß jede Lösung voraussetzt, daß auf jeder Spalte und auf jeder Zeile genau eine Dame steht; daß die eigentlichen Schwierigkeiten des Problems erst aus der notwendigen Berücksichtigung der Diagonalen in beiden Richtungen erwachsen.

Fortsetzung des Beitrags: Seite 48

Bild 3 Aus Lösung A 1 lassen sich 7 weitere Lösungen ableiten

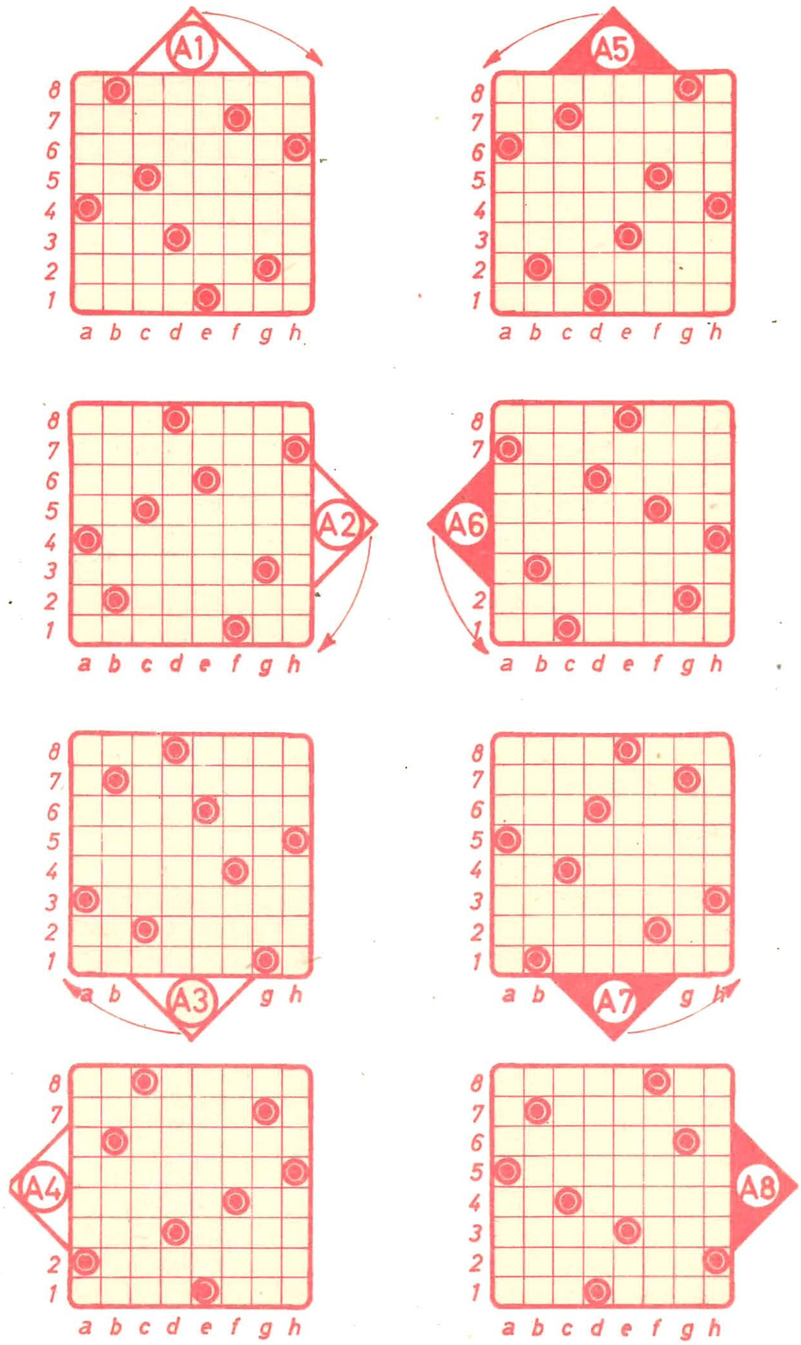



**Tabelle der 92 Lösungen des Acht-Damen-Problems**

| abcdefgh | Nr. | abcdefgh | Nr. |
|---|---|---|---|
| 15863724 | E–4 | 51468273 | A–7 |
| 16837425 | F–2 | 51842736 | L–6 |
| 17468253 | F–5 | 51863724 | J–8 |
| 17582463 | E–7 | 52468317 | C–5 |
| 24683175 | D–5 | 52473861 | F–6 |
| 25713864 | G–1 | 52617483 | D–4 |
| 25741863 | L–3 | 52814736 | K–1 |
| 26174835 | H–4 | 53168247 | G–3 |
| 26831475 | A–4 | 53172864 | B–1, B–3 |
| 27368514 | C–8 | 53847162 | H–8 |
| 27581463 | J–1 | 57138642 | D–1 |
| 28613574 | C–7 | 57142863 | I–5 |
| 31758246 | H–7 | 57248136 | K–2 |
| 35281746 | B–6, B–8 | 57263148 | E–2 |
| 35286471 | F–1 | 57263184 | J–6 |
| 35714286 | H–5 | 57413862 | A–8 |
| 35841726 | I–2 | 58413627 | C–6 |
| 36258174 | K–3 | 58417263 | G–2 |
| 36271485 | G–6 | 61528374 | D–2 |
| 36275184 | L–8 | 62713584 | A–5 |
| 36418572 | J–5 | 62714853 | I–6 |
| 36428571 | E–3 | 63175824 | I–7 |
| 36814752 | L–7 | 63184275 | K–6 |
| 36815724 | K–4 | 63185247 | L–1 |
| 36824175 | I–1 | 63571428 | E–5 |
| 37285146 | I–4 | 63581427 | J–3 |
| 37286415 | A–3 | 63724815 | L–2 |
| 38471625 | D–8 | 63728514 | G–4 |
| 41582736 | G–8 | 63741825 | K–5 |
| 41586372 | C–4 | 64158273 | I–8 |
| 42586137 | A–2 | 64285713 | H–3 |
| 42736815 | J–4 | 64713528 | F–7 |
| 42736851 | E–8 | 64718253 | B–2, B–4 |
| 42751863 | K–8 | 68241753 | H–1 |
| 42857136 | I–3 | 71386425 | C–1 |
| 42861357 | D–7 | 72418536 | J–7 |
| 46152837 | H–2 | 72631485 | C–2 |
| 46827135 | B–5, B–7 | 73168524 | A–6 |
| 46831752 | G–5 | 73825164 | H–6 |
| 47185263 | K–7 | 74258136 | L–5 |
| 47382516 | D–6 | 74286135 | G–7 |
| 47526138 | F–4 | 75316824 | D–3 |
| 47531682 | C–3 | 82417536 | E–1 |
| 48136275 | J–2 | 82531746 | F–3 |
| 48157263 | L–4 | 83162574 | F–8 |
| 48531726 | A–1 | 84136275 | E–6 |

# Quadratische Reste

## Teil 2

*Satz 11:* Für alle Primzahlen von einer der Formen $24m+13$, $24m+17$, $24m+19$, $24m+23$ ist $-6$ Nichtrest. Für die Primzahl 7 kann man folgendes beweisen:

*Satz L:* Für alle Primzahlen von einer der Formen $28m+1$, $28m+3$, $28m+9$, $28m+19$, $28m+25$, $28m+27$ ist 7 quadratischer Rest.

*Satz M:* Für alle Primzahlen von einer der Formen $28m+5$, $28m+11$, $28m+13$, $28m+15$, $28m+17$, $28m+23$ ist 7 Nichtrest. Hieraus kann man entsprechende Resultate für $-7$ herleiten. Aus Satz F folgt: $-7$ ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen $p$, für die gilt

a) $-1Rp$ und $7Rp$ oder b) $-1Np$ und $7Np$.

Es gilt $-1Rp$, falls $p$ die Form $4m+1$ hat; $7Rp$, falls $p$ eine der Formen $28m+1$, $28m+3$, $28m+9$, $28m+19$, $28m+25$, $28m+27$ hat.

Hieraus folgt

$-7Rp$, falls $p$ eine der Formen $28m+1$, $28m+9$, $28m+25$ hat. Es ist $-1Np$, falls $p$ die Form $4m+3$ hat; $7Np$, falls $p$ eine der Formen $28m+5$, $28m+11$, $28m+13$, $28m+15$, $28m+17$, $28m+23$ hat. Dies ergibt: $-7Rp$, falls $p$ eine der Formen $28m+11$, $28m+15$, $28m+23$ hat.

Die Primzahlen der Formen $28m+1$, $28m+9$, $28m+11$, $28m+15$, $28m+23$ oder $28m+25$ sind genau die der Form $7m+1$, $7m+2$ oder $7m+4$.

*Satz 12:* Für alle Primzahlen der Form $7m+1$, $7m+2$, $7m+4$ ist $-7$ quadratischer Rest.

*Satz 13:* Für alle Primzahlen der Form $7m+3$, $7m+5$ oder $7m+6$ ist $-7$ Nichtrest.

Aus den bisherigen Ergebnissen kann man mit Hilfe von Satz F z. B. für die Zahl 21 herleiten, für welche Primzahlen sie quadratischer Rest ist und für welche Nichtrest. Man sieht, daß genau für die Primzahlen von einer der Formen $21m+1$, $21m+4$, $21m+5$, $21m+16$, $21m+17$, $21m+20$ die Zahl 21 quadratischer Rest ist, während 21 Nichtrest für die Primzahlen einer der Formen $21m+2$, $21m+8$, $21m+10$, $21m+11$, $21m+13$, $21m+19$ ist. Versucht, das nachzuprüfen!

Für die Primelemente $+2$, $-2$, $+3$, $-3$, $+5$, $-5$, $+7$, $-7$ haben wir alle Primzahlen gefunden, für die sie quadratische Reste sind.

Welches Gesetz gilt nun aber allgemein? Scheint es nicht immer komplizierter zu werden, die Primzahlen zu charakterisieren, für die ein gegebenes Primelement quadratischer Rest ist? Sehen wir uns noch einmal die Ergebnisse an. Sie sind besonders einfach für $-3$, 5, $-7$:

$-3$ ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen der Form $3m+1$. 5 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen der Formen $5m+1$ oder $5m+4$.

$-7$ ist quadratischer Rest genau für alle Primzahlen der Formen $7m+1$ oder $7m+2$ oder $7m+4$.

(Aus den Ergebnissen über $-3$, 5, $-7$ lassen sich mittels Satz A und Satz F Resultate über $+3$, $-5$, $+7$ gewinnen.)

Lassen sich die hier jeweils auftretenden Primzahlen nicht eventuell anders charakterisieren, so daß sie alle eine gemeinsame Eigenschaft bezüglich des vorgegebenen Primelements besitzen? Das ist möglich!

Die Primzahlen der Form $3m+1$ sind genau die, die quadratische Reste von 3 sind (weil $1R3$, $2N3$).

Die Primzahlen der Formen $5m+1$, $5m+4$ sind genau die, die quadratische Reste von 5 sind (weil $1R5$, $2R5$, $2N5$, $3N5$).

Wir können also formulieren:

$-3$ ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen, die quadratische Reste von 3 sind.

5 ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen, die quadratische Reste von 5 sind.

$-7$ ist quadratischer Rest genau für die Primzahlen, die quadratische Reste von 7 sind.

Ähnliche Resultate könnte man für $-11$, 13, 17, $-19$, $-23$, 29, $-31$, 37, 41, $-43$, $-47$, 53, $-59$, 61, $-67$, $-71$, 73, $-79$, $-83$, 97, ... finden.

Man erkennt, daß die Primzahlen unter diesen, die die Form $4m+1$ haben, mit positivem Vorzeichen, diejenigen hingegen, welche die Form $4m+3$, mit negativem Vorzeichen versehen vorkommen.

Allgemein gilt der folgende Satz $N$, der hier nicht bewiesen werden kann.

*Satz N:* (Quadratisches Reziprozitätsgesetz) Ist $p$ eine Primzahl von der Form $4m+1$, dann gilt

$+p$ ist quadratischer Rest aller Primzahlen, welche quadratische Reste von $p$ sind;

$+p$ ist Nichtrest aller Primzahlen, welche Nichtreste von $p$ sind.

Ist $q$ eine Primzahl von der Form $4m+3$, dann gilt:

$-q$ ist quadratischer Rest aller Primzahlen, welche quadratische Reste von $q$ sind;

$-q$ ist Nichtrest aller Primzahlen, welche Nichtreste von $q$ sind. Zusammen mit den Sätzen A und F bekommt man aus diesem Satz auch eine Übersicht darüber, von welchen Primzahlen $-p$ bzw. $+q$ quadratische Reste sind.

Damit hat man dann (wie schon erwähnt) eine Antwort auf das eingangs gestellte Umkehrproblem.

Warum der Satz als Reziprozitätsgesetz bezeichnet wird, erkennt man gut aus der folgenden Formulierung, die man mittels Satz A unmittelbar aus *Satz N* bekommt:

Es seien $k$ und $l$ Primzahlen.

Hat eine dieser Primzahlen die Form $4m+1$, so gilt $lRk$ genau dann, wenn $kRl$. Sind $k$, $l$ beide von der Form $4m+3$, so gilt $lRk$ genau dann, wenn $kNl$.

5. Weil sich überhaupt fast alles, was über quadratische Reste ausgesagt werden kann, auf diesen Satz stützt, gab *Gauß* ihm die Bezeichnung „Fundamentaltheorem". Die Bezeichnung „Quadratisches Reziprozitätsgesetz" stammt von *Legendre*.

Das Gesetz ist zuerst von *Euler* entdeckt worden (was erst 1875 von *Kronecker* bemerkt wurde). Es ist in Abhandlungen aus den Jahren 1744 bis 1746 im Wesentlichen enthalten und in vollendeter Form in einer Arbeit, die *Euler* 1783 in Petersburg publiziert hat. Später wurde es von *Legendre* erneut ermittelt und von ihm, jedoch nicht vollständig, bewiesen (1785 und 1798 in Paris publiziert).

Den ersten vollständigen Beweis gab 1796 der 18jährige *Gauß* (1801 in den „Disquisitiones arithmeticae" veröffentlicht). Er schreibt darüber: „Auf den Satz kam ich völlig selbständig im Jahre 1795, zu einer Zeit, da ich mich in völliger Unkenntnis über alles befand, was in der höheren Arithmetik bereits erreicht worden war, und zugleich nicht die mindesten literarischen Hilfsmittel besaß. Ein ganzes Jahr quälte mich dieser Satz und entzog sich den angestrengtesten Bemühungen, bis ich endlich den ... Beweis erlangte."

*Gauß* hat das Gesetz also 1795 ohne Kenntnis der Arbeiten von *Euler* und *Legendre* entdeckt.

Schon der 15- bis 17jährige *Gauß* hatte sich zahlreiche Zahlentabellen aufgeschrieben und sich mit rechnerischen Versuchen beschäftigt, die hauptsächlich auf die Teilbarkeit der Zahlen, auf die Eigenschaften der Primzahlen, auf die Reste, welche die Potenzen (speziell also Quadrate) anderer Zahlen durch Primzahlen geteilt lassen, gerichtet gewesen sind. *Gauß* stellte mit großer Gewandheit und Ausdauer eine Tabelle auf, die die Primzahlen von 2 bis 997 als Reste in bezug auf die Primzahlen von 3 bis 503 als Teiler enthält. Hierbei mußte über 16000mal untersucht werden, ob eine Zahl quadratischer Rest oder Nichtrest war!

Das zahlentheoretische Ergebnis seiner Mühe war eben die Erkenntnis seines „Fundamentaltheorems der quadratischen Reste". Zuerst (Anfang des Jahres 1795) bemerkte er eine Gesetzmäßigkeit für den quadratischen Charakter von $-1$:

$-1$ ist quadratischer Rest von allen Primzahlen der Form $4m+1$, und Nichtrest von allen Primzahlen der Form $4m+3$.

Er suchte die tieferen Gründe für dieses Verhalten und fand aus diesen bald den Beweis.

Bereits im März 1795 entdeckte er aus seinem numerischen Beobachtungsmaterial, aus den Zahlentabellen, induktiv auch das *Quadratische Reziprozitätsgesetz*.

„Daß *Gauß* sich zu Beginn seiner Forschertätigkeit mit umfangreichen Zahlenrechnungen beschäftigte, ist nicht verwunderlich. Die Mathematiker der damaligen Zeit waren vielfach Empiriker; sie ermittelten neue Sätze und Eigenschaften von Zahlen und Funktionen vorwiegend durch Induktion." (P. Maennchen: Gauß als Zahlenrechner, Gauß-Werke X, 2. Abh. 6.)

*Gauß* schreibt: „Das Fundamentaltheorem über die quadratischen Reste, welches zu den schönsten Wahrheiten der höheren Arithmetik zu rechnen ist, wurde durch Induktion entdeckt, allein sein Beweis war außerordentlich schwierig.

In diesem Zweige der Mathematik geschieht es häufig, daß sich dem Forscher einfache Wahrheiten durch Induktion von selbst aufdrängen, daß aber ihre Beweise sehr tief versteckt sind und erst nach vielen vergeblichen Versuchen, auf einem ganz anderen Wege als man sie vermutete, ans Licht gezogen werden können. Ferner geschieht es nicht selten, daß, wenn erst ein Weg aufgefunden ist, sich dann mehrere öffnen, die zu demselben Ziele führen; einige kürzer und direkter, andere gewissermaßen von der Seite her und aus so verschiedenen Prinzipien entspringend, daß man kaum eine Verbindung zwischen ihnen und der vorgelegten Frage vermutet haben würde. Dieser merkwürdige Zusammenhang zwischen versteckten Wahrheiten leiht solchen Betrachtungen nicht nur einen eigentümlichen Reiz, sondern verdient auch deshalb eifrig durchforscht und ergründet zu werden, weil aus ihm nicht selten neue Hilfsmittel oder Bereicherungen der Wissenschaft selbst fließen."

Am 8. April 1796 fand *Gauß* seinen ersten Beweis des *Fundamentaltheorems der quadratischen Reste*. Er beruht auf der Methode der vollständigen Induktion und operiert völlig innerhalb der Begriffsbildungen der Theorie der quadratischen Reste.

*Gauß* gab noch sechs weitere Beweise des Gesetzes, die auf sehr verschiedenen Grundlagen (quadratische Formen, höhere Kongruenzen, Gaußsches Lemma, Kreisteilung) beruhen. Seitdem sind nahezu hundert andere Beweise von Mathematikern wie *Cauchy*, *Jacobi*, *Eisenstein*, *Kummer*, *Zolotareff*, *Kronecker*, *Dedekind*, *Hilbert* u. a. gegeben worden. Es handelt sich (nach *Hasse*) meistens nur um Varianten der Gaußschen Beweise. Es sei bemerkt, daß das *Quadratische Reziprozitätsgesetz* ein wesentliches Bindeglied zwischen elementarer und algebraischer Zahlentheorie darstellt. Die Beschäftigung mit den entsprechenden Fragestellungen ist richtungsgebend bis in die heutige Zeit gewesen. Zunächst lag die Frage nahe, ob nicht auch ähnliche Gesetzmäßigkeiten bestehen, wenn man statt der quadratischen Reste die $n$-ten Potenzreste für Exponenten $n>2$ nimmt (statt Quadratzahlen $x^2$ betrachtet man $n$-te Potenzen $x^n$). Es zeigt sich, daß man für die Verallgemeinerung des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes auf die $n$-ten Potenzreste nicht nur die Zahlentheorie der ganzen und rationalen Zahlen benötigte, sondern allgemeiner eine Arithmetik der algebraischen Zahlen. Es entstand eine arithmetische Theorie der sogenannten algebraischen Zahlkörper. Die Grundlagen der sog. Abelschen algebraischen Zahlkörper (Klassenkörpertheorie) wurden um 1930 mit dem von *Takagi*, *Furtwängler* und *Artin* bewiesenen allgemeinen Reziprozitätsgesetz (das Quadratische Reziprozitätsgesetz ist ein Spezialfall dieses allgemeinen Gesetzes) abgeschlossen. Die Theorie wurde von *Hasse*, *Chevalley*, *Šafarevič*, *Serre*, *Tate* u. v. a. ausgebaut. Gegenwärtig stehen die nichtabelschen Zahlkörper im Brennpunkt der Forschung der algebraischen Zahlentheorie. Ziel ist ein Reziprozitätsgesetz für diese Zahlkörper.

•

6. Wir geben nun noch einige Ergebnisse der elementaren Zahlentheorie an, bei deren Beweis das Quadratische Reziprozitätsgesetz benutzt wird.

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $10k-1$, wobei $k$ eine natürliche Zahl ist. Mit anderen Worten, es gibt unendlich viele Primzahlen, deren letzte Ziffer 9 ist.

(2) Jede Primzahl $p$ der Form $6m+1$ ist in der Form

$$p = 3x^2 + y^2$$

mit natürlichen Zahlen $x$, $y$ darstellbar. (*Beispiele:* $7 = 3\cdot 1^2 + 2^2$, $13 = 3\cdot 2^2 + 1^2$, $19 = 3\cdot 1^2 + 4^2$, $31 = 3\cdot 3^2 + 2^2$, $37 = 3\cdot 2^2 + 5^2$, $43 = 3\cdot 3^2 + 4^2$, $61 = 3\cdot 2^2 + 7^2$, $67 = 3\cdot 1^2 + 8^2$)

(3) Eine ganze Zahl $a$ ist eine Quadratzahl genau dann, wenn $aRp$ für jede Primzahl $p$ ist.

(4) Es gibt keine Lösungen in rationalen Zahlen der Gleichung

$$x^4 - 17 = 2y^2 \text{ (Reichardt-Gleichung).}$$

*H. Pieper*

Ein eigentümlicher Zauber umgibt das Erkennen von Maß und Harmonie im anscheinend Reglosen.
C. F. Gauß an A. v. Humboldt

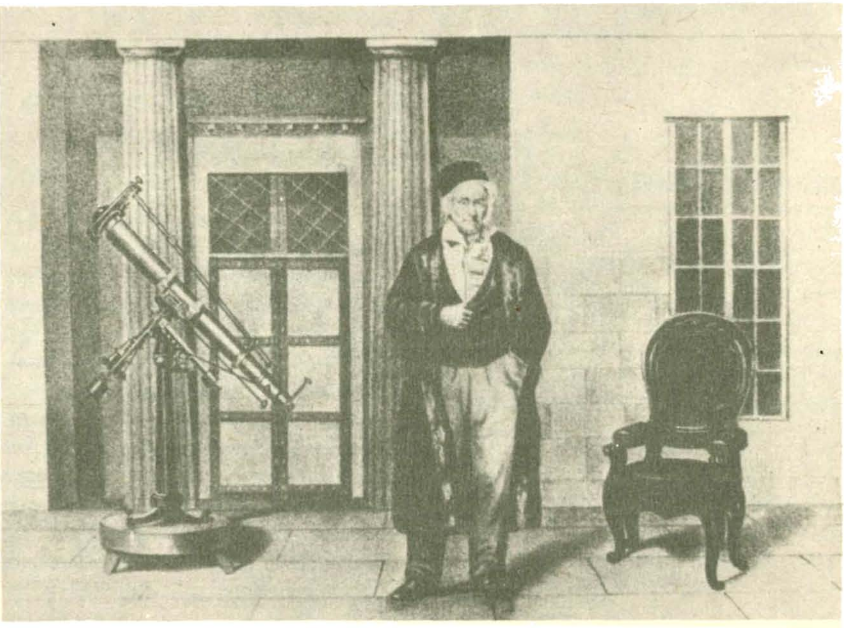
Die Wissenschaft soll die Freundin der Praxis sein, aber nicht ihre Sklavin.
C. F. Gauß

Du, Natur, bist meine Gottheit. Deinen Gesetzen diene ich.
C. F. Gauß

Ich habe die Unart, ein lebhaftes Interesse bei mathematischen Gegenständen nur dann zu nehmen, wo ich sinnreiche Ideenverbindungen und durch Eleganz oder Allgemeinheit sich empfehlende Resultate ahnen darf.
C. F. Gauß

Wenn ich eine Sache ganz ins Klare gebracht und erschöpft habe, so wende ich mich davon weg, um wieder ins Dunkle zu gehen; so sonderbar ist der nimmersatte Mensch, hat er ein Gebäude vollendet, so ist es nicht, um ruhig darin zu wohnen, sondern ein anderes anzufangen.
*C. F. Gauß*

Gauß auf der Terasse der Sternwarte in Göttingen




# Versuche mit 10 Münzen

Wenn du eine Münze wirfst, gibt es zwei Möglichkeiten:
Kopf oder Zahl

Bild 1


Nun wirf einmal 10 Münzen! Stelle fest, bei wievielen der Kopf und bei wievielen die Zahl oben liegt! Zeigt die eine Hälfte Kopf, die andere Zahl? Sind alle gleich? Vielleicht zwei das eine und acht das andere oder vier das andere und sechs das eine? Oder ist es irgendwie anders? Schreib es auf, wie viele zeigen Kopf, wie viele Zahl:

........................................

Bezeichne diejenige der 4 Zeichnungen im nächsten Bild, die deiner Meinung nach das wahrscheinlichste Ergebnis zeigt, mit 1, die anderen mit 2, 3 oder 4, je nachdem du sie für weniger wahrscheinlich hältst!

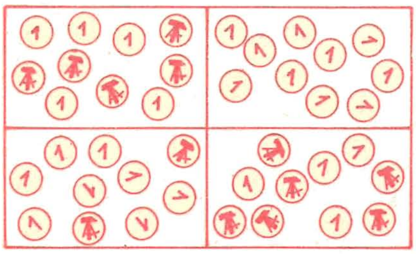


Bild 2

Die Zeichnungen zeigen:

| | |
|---|---|
| 5 Kopf, 5 Zahl | 10 Zahl |
| 2 Kopf, 8 Zahl | 4 Zahl, 6 Kopf |

Bild 3

Im Text haben wir aber folgende Fälle erwähnt: Bild 4

| | |
|---|---|
| Zur Hälfte Kopf, zur Hälfte Zahl (also fünfmal Kopf und fünfmal Zahl) | Alle gleich (Das könnte zehnmal Kopf sein) |
| Zweimal das eine, achtmal das andere (das könnte zweimal Zahl und achtmal Kopf sein). | Viermal das eine, sechsmal das andere (also beispielsweise viermal Kopf und sechsmal Zahl) |

Es ist also nicht wichtig, was viermal auftritt (Kopf oder Zahl), sondern daß das eine viermal, das andere aber sechsmal vorkommt. Ist dieser Fall deiner Meinung nach wahrscheinlicher, als daß sowohl fünfmal Kopf als auch fünfmal Zahl oben liegt?
Welcher Fall käme am häufigsten vor, wenn du die Münzen sehr oft würfest? Wenn du Geduld hast, kannst du es versuchen. Aber wenn du die Münzen nicht oft genug wirfst, kannst du ein anderes Resultat erhalten, als wenn sie sehr oft geworfen werden. Wie kann man feststellen, was nach vielen Würfen zu erwarten ist?
Mit Wahrscheinlichkeitsrechnung!
Wenige Versuche ergeben manchmal ganz andere Ergebnisse als die Rechnung. Bei vielen Versuchen kommt man aber ziemlich genau auf das gleiche Resultat. Vor den Versuchen lohnt es sich immer, darüber nachzudenken, was wir erwarten, nach den Versuchen aber darüber, ob wir erhalten haben, was wir erwarteten, oder etwas anderes, ob unser Ergebnis gesetzmäßig ist oder nur ein außerordentlicher Zufall. Wie können wir begründen, was wir mehr erwarten und was weniger?

**1. Aufgabe**

Wie oft kommen deiner Meinung nach die erwähnten Fälle vor, wenn du 10 Münzen wirfst? Trage in die folgende Tabelle auch ein, welche Fälle noch möglich wären und wie oft diese Fälle deiner Meinung nach vorkommen könnten! (Schreibe diese Schätzungen unter das Wort „Geraten"!) Mache dann Versuche mit 20 Würfen, und schreibe die Ergebnisse unter das Wort „Versuche"!

| | Geraten | Versuch |
|---|---|---|
| Alle zeigen die gleiche Seite | | |
| Fünfmal das eine, fünfmal das andere | | |
| 2 und 8 | | |
| 4 und 6 | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| Insgesamt | 20 | 20 |

Bild 5

Wenn du derartige Versuche machst, lohnt es sich, die Ergebnisse in dieser Weise zu notieren: Zuerst schreibst du auf, welche Fälle möglich sind, dann führst du die Versuche aus. Du stellst jedesmal fest, welcher Fall aufgetreten ist und machst dann einen Strich neben diesen Fall in der Strichliste.

Wir haben zwanzigmal geworfen.
Sechsmal davon erhielten wir 5mal Kopf und 5mal Zahl. Siebenmal trat 4mal das eine und 6mal das andere auf. Viermal lag 3mal das eine und 7mal das andere oben. Einmal kam 2mal das eine und 8mal das andere vor. Zweimal war 1mal das eine und 9mal das andere vertreten, und nicht einmal waren alle 10 gleich.
Das haben wir z. B. so notiert:

| | |
|---|---|
| 5 und 5 | \|\|\|\|\|\| |
| 4 und 6 | \|\|\|\|\|\|\| |
| 3 und 7 | \|\|\|\| |
| 2 und 8 | \| |
| 1 und 9 | \|\| |
| 0 und 10 | |

Bild 6

| | |
|---|---|
| 5 und 5 | ~~\|\|\|\|~~ \| |
| 4 und 6 | ~~\|\|\|\|~~ \|\| |
| 3 und 7 | \|\|\|\| |
| 2 und 8 | \| |
| 1 und 9 | \|\| |
| 0 und 10 | |

Bild 7

Streichen wir vier Striche mit dem fünften schräg durch, so fällt es uns am Ende leichter, die Striche zu addieren. (Bild 7)
Bei diesen Versuchen können wir 6 Fälle unterscheiden.

**2. Aufgabe**

Wieviel verschiedene Fälle gibt es, wenn wir Fälle wie z. B. viermal Zahl und sechsmal Kopf und sechsmal Zahl und viermal Kopf gesondert behandeln? Schreibe auf, was für Fälle du gefunden hast!

........................................

Das macht insgesamt ... Fälle.
Die richtige Lösung findest du in einer späteren Aufgabe.
Noch mehr Fälle treten auf, wenn man auch berücksichtigt, auf welcher von den Münzen der Kopf und auf welcher die Zahl oben liegt. Das ist natürlich schwer festzustellen, wenn die Münzen nicht klar voneinander unterscheidbar sind. Du kannst aber einfach unterschiedliche Geldstücke verwenden, die sich voneinander klar unterscheiden (Münzen zu 1, 5, 10, 20 und 50 Pfennigen und zu 1, 2, 5, 10 und 20 Mark; statt so wertvoller Münzen nimm aber lieber ältere, ungültige Geldstücke oder Spielgeld).
Was meinst du, wieviel verschiedene Fälle können nun auftreten? Du brauchst es nicht zu beantworten. Es gibt mehr als 1000 (genau 1024) unterschiedliche Fälle. Die Ergebnisse der Versuche, mit denen wir uns nun beschäftigen wollen, lassen sich von denen, die diese vielen Fälle gut überblicken, am besten schätzen.

**3. Aufgabe**

Auf der Grundlage der Resultate bei 20 Würfen können wir einschätzen, wie oft diese Fälle ungefähr bei 10 oder 100 Würfen vorkommen können. (Wie groß ist die Häufigkeit bei 10 oder 100 Würfen?)
Trage deine Schätzung in die folgende Tabelle ein! (Bild 8)
Sieh dir nun einmal diese Schätzung an! (Bild 9)
Die Häufigkeit der 6 Fälle bei 10 oder

| Fälle: | 5 und 5 | 4 und 6 | 3 und 7 | 2 und 8 | 1 und 9 | 0 u. 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeit bei 20 Würfen | 6 | 7 | 4 | 1 | 2 | 0 |
| Häufigkeit bei 10 Würfen | | | | | | |
| Häufigkeit bei 100 Würfen | | | | | | |

Bild 8

| Fälle: | 5 und 5 | 4 und 6 | 3 und 7 | 2 und 8 | 1 und 9 | 0 u. 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeit bei 20 Würfen | 6 | 7 | 4 | 1 | 2 | 0 |
| Häufigkeit bei 10 Würfen | 3 | 3 oder 4 | 2 | 0 oder 1 | 1 | 0 |
| Häufigkeit bei 100 Würfen | 30 | 35 | 20 | 5 | 10 | 0 |

Bild 9

| Fälle: | 5 und 5 | 4 und 6 | 3 und 7 | 2 und 8 | 1 und 9 | 0 u. 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mit diesem Anteil an der Gesamtzahl der Würfe traten die Fälle auf | $\frac{3}{10}$ | $\frac{7}{20}$ | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Bild 10

| Fälle: | 5 und 5 | 4 und 6 | 3 und 7 | 2 und 8 | 1 und 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bei 20 Würfen etwa | 5 | 8 | 5 | 2 | 0 | 0 |

Bild 11

| Fälle: | K Z 0 u. 10 | 1 u. 9 | 2 u. 8 | 3 u. 7 | 4 u. 6 | 5 u. 5 | 6 u. 4 | 7 u. 3 | 8 u. 2 | 9 u. 1 | 10 u. 0 | Insgesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Schätzung | | | | | | | | | | | | 20 |
| Versuch | | | | | | | | | | | | 20 |

Bild 12

| Fälle: | 5 und 5 | 4 und 6 | 3 und 7 | 2 und 8 | 1 und 9 | 0 u. 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mit diesem Anteil an der Gesamtzahl der Würfe traten die Fälle auf | 0,3 | 0,35 | 0,2 | 0,05 | 0,1 | 0 |
| | $\frac{3}{10}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{10}$ | 0 |
| | 30% | 35% | 20% | 5% | 10% | 0% |

Bild 13

| Fälle: | 0 u. 10 | 1 u. 9 | 2 u. 8 | 3 u. 7 | 4 u. 6 | 5 u. 5 | 6 u. 4 | 7 u. 3 | 8 u. 2 | 9 u. 1 | 10 u. 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zu erwarten ist | 0 | 0 | 1 | 2,5 | 4 | 5 | 4 | 2,5 | 1 | 0 | 0 |

Bild 14

100 Würfen haben wir auf der Grundlage der Häufigkeit bei 20 Würfen ausgerechnet. Fünfmal Kopf und fünfmal Zahl kam bei 20 Würfen z. B. sechsmal, d. h. in einem Verhältnis von 3/10 zur Gesamtanzahl der Würfe vor. Als wir nun einschätzen wollten, wie oft bei 10 oder 100 Würfen der Fall „zur Hälfte Kopf, zur Hälfte Zahl" auftreten könnte, haben wir uns gesagt, daß dieser Fall sicher immer in einem Verhältnis von 3/10 zur Gesamtanzahl der Würfe auftreten wird, gleichgültig, wie oft wir werfen.
Rechne aus und trage in die Tabelle ein, welchen Anteil der gesamten Würfe die anderen Fälle ausmachen! (Bild 10)
(Anstatt 3/10 kannst du auch 0,3 oder 30/100 oder 30% schreiben.)
Probiere die Schätzung nun einmal aus! Wirf 10 Münzen, dann noch einmal! Deine Ergebnisse stimmen mit der Schätzung nicht immer überein, nicht wahr? Das ist kein Wunder. Die Versuche einzelner Versuchsserien können recht unterschiedlich sein. Sehr große Unterschiede sind aber selten. Die Mehrzahl der Versuche führt zu ziemlich gleichlautenden Resultaten. Es ist auszurechnen – wir können es aber noch nicht –, ob in der Mehrzahl der Versuche mit 20 Würfen ungefähr die gleiche oder eine nicht sehr abweichende Verteilung zu erwarten ist. (Bild 11)

**4. Aufgabe**
Wenn wir den Fall 4 und 6 (viermal Kopf, sechsmal Zahl) vom Fall 6 und 4 (sechsmal Kopf, viermal Zahl) unterscheiden, welcher von beiden Fällen tritt dann häufiger auf?

**5. Aufgabe**
Wenn wir 11 Fälle voneinander unterscheiden (0 und 10, 1 und 9, 2 und 8, . . ., 10 und 0), wie oft kommen diese dann bei 20 Würfen vor? Trage deine Schätzungen in die folgende Tabelle ein, führe Versuche durch, und notiere auch deren Ergebnisse! (Bild 12)

**6. Aufgabe**
Wenn man 20mal jeweils 10 Münzen wirft, erhält man 200 Ergebnisse (Kopf oder Zahl). Wie oft tritt bei dieser Wurfserie insgesamt jeweils Kopf oder Zahl auf? (Berechne das auf Grund deiner Notizen!)

Wenn du die Versuchsserie sehr oft, beispielsweise hundertmal wiederholst, was meinst du, wie oft der Fall vorkommen wird, daß unter den 200 Ergebnissen genau die Hälfte Kopf, die andere Hälfte Zahl ist? Wie oft wird die Anzahl von „Kopf" sowohl als auch die Anzahl von „Zahl" zwischen 90 und 110 liegen? Wie oft wird der Fall eintreten, daß das eine 80mal oder seltener auftritt (dann muß das andere natürlich 120mal oder häufiger vorkommen)?
Es würde für einen Menschen schon zu lange dauern, diese Versuche durchzuführen. Die Rechnung ist auch nicht einfach. Deshalb kann man das Ergebnis nur schätzen. Wenn du die Lösungen studierst, kannst du kontrollieren, wie weit deine Schätzungen an die zu erwartenden Werte herankamen. (Das sind Werte, denen sich der Durchschnitt vieler Versuche nähert.)

**7. Aufgabe**
Du weißt nun schon, daß beim gleichzeitigen Wurf von 10 Münzen der Fall „5 und 5" wahrscheinlicher ist als der von „4 und 6" oder „6 und 4" einzeln betrachtet, aber weniger wahrscheinlich, als daß von einem 6, vom anderen 4 auftreten (ohne daß festgelegt wird, von welchem dies und von welchem das). Ist das auch dann wahr, wenn du die 10 Münzen nicht gleichzeitig wirfst, sondern eine nach der anderen?

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Auch dann, wenn du nicht 10 Münzen, sondern nur eine, diese aber zehnmal nacheinander wirfst? (Wenn du nicht sicher bist, so probiere es ein paarmal aus!)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *T. Varga*

# XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## Aufgaben der Bezirksolympiade

(5./6. Februar 1977)

### Klassenstufe 7

1. Von zwölf Mädchen einer 7. Klasse ist bekannt, daß alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind. Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:
Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.
Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

2. Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks.

3. Unter „Primzahldrillingen" wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form $p$, $p+2$, $p+4$ darstellen lassen. Beweise, daß es genau eine Zahl $p$ gibt, für die $p$, $p+2$, $p+4$ „Primzahldrillinge" sind, und ermittle diese!

4. Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.
a) Bei seinem Schätzwert von 350 Metern erfährt er, daß dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung. Ermittle die wahre Entfernung!
b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung?

5. Ermittle alle Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x+3y=27$ erfüllt ist!

6. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a=9{,}1$ cm, $b=6{,}3$ cm, $c=6{,}7$ cm und $d=5{,}0$ cm.
Dabei sei $a$ die Länge der Seite $AB$, $b$ die der Seite $BC$, $c$ die der Seite $CD$ und $d$ die der Seite $AD$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

### Klassenstufe 8

1. Uwe hatte zum Einkauf genau 41 Mark bei sich, ausnahmslos in gültigen Münzen der DDR. Darunter befand sich keine Münze mit einem geringeren Wert als 1 Mark. Bei seinem Einkauf hatte Uwe nun genau 31 Mark zu bezahlen. Dabei stelllte er fest, daß er diese Summe nicht „passend" hatte, also nicht ohne zu wechseln bezahlen konnte.
Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte (zu 1 M, 2 M, 5 M, 10 M bzw. 20 M) Uwe hiernach bei sich haben konnte!

2. Einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $r$ sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ derart umbeschrieben, daß alle Trapezseiten den Kreis berühren.
Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle BMC}=90°$ ist!
($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.)

3. In einem allseitig geschlossenen quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau 600 cm³ Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit einer seiner Außenflächen auf eine horizontale Ebene, so beträgt die Wasserhöhe im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm bzw. 4 cm.
Ermittle diejenigen Werte für das Fassungsvermögen des Kastens, die diesen Aufgaben entsprechen!

4. Fritz behauptet: Zwei zweistellige Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern auseinander hervorgehen (z. B. 72 und 27), kann man nach der folgenden Vorschrift miteinander multiplizieren, die am Beispiel der beiden genannten Zahlen dargelegt werden soll:
(1) Man berechnet das Produkt der beiden Ziffern $7 \cdot 2=14$
(2) Man schreibt die erhaltene Zahl zweimal hintereinander auf. (Hinweis: War die in (1) erhaltene Zahl einstellig, so schreibt man zwischen die beiden Zahlen noch eine Ziffer Null.) 1414
(3) Man addiert die Quadratzahlen der beiden Ziffern $49+4=53$
(4) Man hängt an das Ergebnis eine Null an 530
(5) Man addiert die Ergebnisse der Rechenschritte (2) und (4) und erhält damit das gesuchte Produkt. $1414+530=1944$

Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

5. Gegeben sei ein spitzer Winkel; sein Scheitel sei der Punkt $S$, seine Schenkel seien die Strahlen $a, b$; seine Winkelhalbierende sei der Strahl $w$. Gegeben sei ferner ein auf $w$ gelegener Punkt $P \neq S$.
Konstruiere einen Kreis $k$, der $a$ und $b$ berührt und durch $P$ geht! Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die genannten Bedingungen ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

6. Gegeben seien eine Länge $r$ und eine Länge $a \leqq 2r$. Auf einem Kreis $k$ mit dem Radius $r$ seien $A$ und $B$ zwei Punkte, deren Abstand $a$ beträgt. Weiterhin seien mit $P_1$ und $P_2$ zwei solche Punkte von $k$ bezeichnet, die auf verschiedenen Seiten der Geraden durch $A$ und $B$ liegen.
a) Gesucht sind unter allen diesen Punkten $P_1$, $P_2$ solche, für die der Flächeninhalt des Vierecks $AP_1BP_2$ am größten ist. Beweise, daß es solche Punkte gibt, und ermittle ihre Lage auf $k$!
b) Ermittle den so entstehenden größtmöglichen Flächeninhalt unter allen Vierecken $AP_1BP_2$!

### Klassenstufe 9

1. Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes $n$-Eck habe die Eigenschaft, daß es bei einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt $P$ gegeben.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl $n$ die SuNme $s$ der Quadrate der Abstände des Punktes $P$ zu allen Punkten des $n$-Ecks!

2. Man beweise folgenden Satz:
Sind $a$ und $b$ positive reelle Zahlen, für die $ab=1$ gilt, dann gilt $(a+1)(b+1) \leqq 4$. (*)
Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (*) das Gleichheitszeichen gilt.

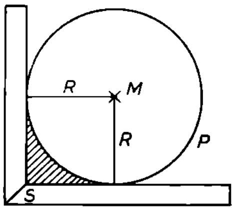
3. Wie betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:
(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.
(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge $a$ und drei die Länge $4\sqrt{2}$.
a) Zeigen Sie, daß zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!
b) Geben Sie für jedes dieser beiden Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

4. Beweisen Sie, daß für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Zahl $(3n-1)p^2+1$ Primzahl ist.

5. Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks $ABC$ in zwei Teilflächen zerlegen, seien die-

jenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.
Untersuchen Sie, ob es einen Punkt $P$ gibt, durch den alle diese Geraden gehen.

6. Zwei Holzleisten sind so aneinander geleimt, daß sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe $P$ gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius $R$ dieser Scheibe ist bekannt (siehe Bild). In den durch Schraffur gekennzeichneten Teilen zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe $P$ soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe $P$ berührt.




a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.
b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

**Klassenstufe 10**

1. In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ sei $a$ die Länge der Seiten $BC$, $CD$ und $DA$. Um die Eckpunkte seien Kreise mit gleichem Radius so gezeichnet, daß
der Kreis um $A$ die Seite $AB$ in $H$ und die Seite $AD$ in $E$, der Kreis um $B$ die Seite $AB$ in $I$ und die Seite $BC$ in $F$, der Kreis um $C$ die Seite $BC$ in $F$ und die Seite $CD$ in $G$ und der Kreis um $D$ die Seite $CD$ in $G$ und die Seite $AD$ in $E$ schneide.
Der über $HI$ errichtete Halbkreis berühre die um $C$ und $D$ gezeichneten Kreise von außen in den Punkten $N$ und $P$.
Ermitteln Sie die Länge der Seite $AB$!

2. Von einer gleichung
$x^4+3a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ werde vorausgesetzt, daß alle Koeffizienten $a_3$, $a_2$, $a_1$ und $a_0$ ganze Zahlen sind. Beweisen Sie, daß dann folgender Satz gilt:
Wenn eine rationale Zahl $x$ eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist $x$ eine ganze Zahl.

3. Bei dem folgenden Kryptogramm sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß

$$\begin{array}{r} \text{INES} \\ +\text{JENS} \\ +\text{AMES} \\ \hline \text{NAMEN} \end{array}$$

eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.
a) Zeigen Sie, daß es im dekadischen Zahlensystem keine Lösung der Aufgabe gibt!
b) Zeigen Sie, daß die Aufgabe im System mit der Basis 8 eine Lösung hat, und geben Sie alle Lösungen in diesem System an!
*Hinweis:* Sind $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen mit $0 \leqq a \leqq 7$ $(i=0\ldots n)$ und $a_n > 0$, so bezeichnet man durch Hintereinanderschreiben $a_n\ldots a_2a_1a_0$ im System mit der Basis 8 die Zahl
$z=a_n\cdot 8^n+\ldots+a_2\cdot 8^2+a_1\cdot 8^1+a_0\cdot 8^0$. Zur Unterscheidung von der Zahl mit denselben Ziffern im dekadischen Zahlensystem kann man die Zahl $z$ auch mit $z=[a_n\ldots a_2a_1a_0]_8$ bezeichnen.

4. Beweisen Sie, daß

$$\lg\left(1+\frac{1}{1}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\lg\left(1-\frac{1}{99}\right)=2 \text{ gilt!}$$

5. Für ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide seien folgende Voraussetzungen zugrunde gelegt: Beide Körper haben dieselbe Grundfläche; diese ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge $a$. Die Spitze der Pyramide liegt in der Deckfläche des Prismas.
Man ermittle diejenigen Werte für die (gemeinsame) Höhenlänge $h$ des Prismas (und der Pyramide), für die unter den zugrunde gelegten Voraussetzungen der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt wie der Mantel der Pyramide hat.

6. Konstruieren Sie ein Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{AD}=\overline{CD}$, $\overline{AB}=\overline{CB}$ aus $a+b = 12$ cm, $f=9$ cm und $\beta+\delta=172°$!
Dabei seien $a$ die Länge der Seite $AB$, $b$ die Länge der Seite $AD$, $f$ die Länge der Diagonalen $BD$, $\beta$ die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ und $\delta$ die Größe des Winkels $\sphericalangle ADC$.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Drachenviereck existiert und beweisen Sie, daß alle Drachenvierecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, zueinander kongruent sind!

**Klassenstufe 11/12**

1. Man gebe alle Paare $(x, y)$ reeller Zahlen an, für die

$$x^2+y=2 \quad (1)$$
und $$y^2+x=2 \text{ gilt.} \quad (2)$$

2. In einen geraden Kreiskegel mit dem Radius $r$ und der Höhenlänge $h$ seien Kugeln so einbeschrieben, daß die erste Kugel die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels, jede folgende Kugel die vorhergehende Kugel von außen und die Mantelfläche des Kegels berührt, wobei sämtliche Kugelmittelpunkte auf der Kegelachse liegen.
Gesucht ist eine formelmäßige Ermittlung des Radius $r_n$ der $n$-ten Kugel aus den gegebenen Längen $r$ und $h$
Man weise insbesondere nach, daß die Folge $(r_n)$ eine geometrische Folge mit dem Quo-Penten

$$q=\frac{h-2r_1}{h} \text{ ist.}$$

3. Es sei eine Menge von endlich vielen roten und grünen Punkten gegeben, von denen einige durch Strecken verbunden sind. Ein Punkt dieser Menge heiße „außergewöhnlich", wenn mehr als die Hälfte der von ihm ausgehenden Verbindungsstrecken in Punkten enden, die eine andere Farbe als er haben.
Wenn es in der gegebenen Punktmenge außergewöhnliche Punkte gibt, so wähle man einen beliebigen aus und färbe ihn in die andere Farbe um. Falls in der entstandenen Menge außergewöhnliche Punkte existieren, werde das Verfahren fortgesetzt.
Man beweise: Für jede Menge der beschriebenen Art und für jede Möglichkeit, jeweils außergewöhnliche Punkte zum Umfärben auszuwählen, entsteht nach endlich vielen solchen Umfärbungen eine Menge, die keinen außergewöhnlichen Punkt enthält.

4. a) Man beweise, daß für alle reellen Zahlen $x, y, z$ mit $x+y+z=\pi$ die Ungleichung

$$\cos 2x+\cos 2y-\cos 2z \leqq \frac{3}{2}, \text{ gilt.} \quad (1)$$

b) Es sind diejenigen Werte von $x, y, z$ zu ermitteln, für dPe in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

5. In einer Ebene sei eine Menge von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, so gegeben, daß der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das drei dieser Punkte als Eckpunkte hat, nicht größer als 1 ist.
Man beweise, daß für jede derartige Menge eine Dreiecksfläche (einschließlich ihres Randes verstanden) existiert, deren Flächeninhalt nicht größer als 4 ist und die die gegebene Menge enthält.

Von den folgenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6A. Für jede reelle Zahl $x$ mit $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ werde in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem der Kreis durch die Punkte $P$ $(0, 1)$, $Q$ $(x;\ \cos x)$ und $R$ $(-x; \cos(-x))$ gelegt.
a) Man gebe eine Funktion $f$ so an, daß für jede dieser Zahlen $x$ der genannte Kreis den Radius $r=f(x)$ hat.
b) Man berechne $\lim\limits_{x\to o} f(x)$, falls dieser Grenzwert existiert.
c) Man ermittle den Wertebereich der Funktion $f$ mit der Menge aller Zahlen $x$, für die $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ gilt, als Definitionsbereich.

6B. Es sei $M$ eine Menge, für die folgendes gilt:

(1) Jedem geordneten Paar $(a, b)$ von Elementen aus $M$ ist genau ein Element aus $M$ zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei.

(2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es genau ein $x \in M$ so, daß $x \circ b = c$ gilt; dieses Element $x$ werde mit $x = \frac{c}{b}$ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen beweise man olgende Aussage:

Wenn für alle $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$, $d \in M$ die Beziehung

$(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$

gilt, dann gilt für alle $p \in M$, $q \in M$, $r \in M$, $s \in M$ die Beziehung

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} = \frac{\left(\frac{p}{r}\right)}{\left(\frac{q}{s}\right)}.$$

## Zum Titelbild

Der im Bild dargestellte und in seine horizontalen und vertikalen Zahlenquadrate zerlegte magische Würfel mit $n=4$ ist ein räumliches System natürlicher Zahlen, deren Summe jeder Zeile, Spalte, Quadrat und Würfeldiagonale den gleichen Wert hat.

Mittels Zerlegung der $n^3$ Glieder der dem magischen Würfel zugrunde gelegten arithmetischen Folge, mit einer konstanten Differenz von $d=1$, in Grundzahl, Additionszahl und Quadratzahl können, wenn $n/2$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, magische Würfel in beliebiger Größe gebildet werden.

Wird die Zahl der Glieder einer Folge von $n^3$ auf $n^4$ erweitert, dann lassen sich bei Anwendung mathematisch fundierter Ordnungssysteme $n$ magische Würfel bilden, die insgesamt den Bedingungen einer magischen Zahlenformation genügen. Also, alle $n$ Würfel haben gleiche Summen.

Solchen Erweiterungen sind keinerlei Grenzen gesetzt. Derartige Möglichkeiten der Bildung ganzer magischer Zahlenkomplexe können bei gezielten Aufgabenstellungen einen bedeutenden praktischen Wert bei der Organisierung von Verlade- und Sortierprozessen gewinnen.

Die allgemein praktische Bedeutung der Theorie der Bildungsgesetze magischer Zahlenformationen wird durch die Möglichkeit der Anwendung von Zahlenfolgen mit unterschiedlichem „$d$" noch erhöht.

In Verbindung mit praxisverbundenen Zielaufgaben wird die Beschäftigung mit der Bildung magischer Zahlenformationen durch solche mathematisch fundierte Methoden vom reinen Denkspiel zum interessanten mathematischen Aufgabengebiet.

Die geheimnisvollen und zauberhaften Rätsel um die Bildung solcher magischer Quadrate und Würfel wurden durch logisches Denken und mathematisches Wissen endgültig entschleiert.

*M. Thurnser*

# Lösungen

Ma9 ■1557 Das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ ist ein Rhombus, da

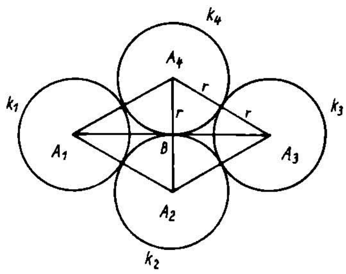
$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_4A_1} \text{ ist.}$$

Der Mittelpunkt $B$ dieses Rhombus ist gleichzeitig Berührungspunkt der Kreise $k_2$ und $k_4$. Ferner gilt

$$\overline{BA_4} = r, \quad \overline{A_3A_4} = 2r$$

und daher nach dem Satz des Pythagoras

$$x = \overline{BA_3} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}.$$




Der Flächeninhalt des Rhombus $A_1A_2A_3A_4$ ist daher gleich

$$F_1 = 2xr = 2r^2\sqrt{3}.$$

Da die Winkelsumme eines jeden Vierecks 360° beträgt, lassen sich die Kreissektoren im Innern des Rhombus zu einer Kreisfläche mit dem Radius $r$ zusammenfügen, deren Flächeninhalt gleich $\pi r^2$ ist. Der gesuchte Flächeninhalt der Figur beträgt daher

$$F = 2r^2\sqrt{3} + 4\pi r^2 - \pi r^2 = 2r^2\sqrt{3} + 3\pi r^2$$
$$= r^2(2\sqrt{3} + 3\pi) \approx 51{,}56 \text{ cm}^2.$$

Ma9 ■1558 Bezeichnet man den Dividenden mit $x$, den Divisor mit $y$ und den Quotienten mit $z$, so gilt

$$x : y = z, \text{ also } x = y \cdot z. \qquad (1)$$

Ferner gilt

$$x \geqq 10000000. \qquad (2)$$

Weiter gilt

$$100 \leqq y \leqq 999. \qquad (3)$$

Nun steht in der letzten Zeile des Schemas ein Vielfaches von $y$, also $k \cdot y$, und es gilt

$$8000 \leqq k \cdot y \leqq 8999.$$

Wäre nun $k \leqq 8$, so wäre $k \cdot y \leqq 8 \cdot 999 = 7992$, was zu einem Widerspruch führt. Daher ist die letzte Grundziffer von $z$ gleich 9. Weiter erhält man

$$\frac{8000}{9} \leqq y \leqq \frac{8999}{9},$$

also $\quad 889 \leqq y \leqq 999. \qquad (4)$

In der zweiten Zeile steht eine dreistellige Zahl, die nur gleich $y$ sein kann, da jedes andere Vielfache von $y$ bereits vierstellig ist.

Die ersten vier Grundziffern von $z$ sind daher 1, 0, 0, 1; denn auch in der vierten Zeile des Schemas steht $1 \cdot y$. Da, wie oben gezeigt wurde, die letzte Grundziffer von $z$ gleich 9 ist, gilt für den Quotienten

$$z = 10019.$$

Daraus folgt

$$y = \frac{x}{z} \geqq \frac{10000000}{10019} > 998. \qquad (5)$$

Wegen (4) und (5) ist daher $y = 999$.

Daraus folgt

$$x = yz = 999 \cdot 10019 = 10008981.$$

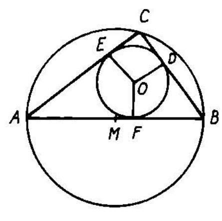
Das Divisionsschema lautet daher:

```
10008981 : 999 = 10019
 999
 ----
  1898
   999
  ----
  8991
  8991
```

Ma9 ■1559 Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$. Dann liegt der Mittelpunkt $M$ des Umkreises mit dem Radius $r$ auf der Hypotenuse, und es gilt $\overline{AM} = \overline{MB} = r$.

Sind $D$, $E$, $F$ die auf den Katheten bzw. der Hypotenuse gelegenen Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten und sind $O$ der Mittelpunkt und $\varrho$ der Radius des Inkreises, so gilt

$$\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = \varrho,$$
$$\sphericalangle ODC = \sphericalangle CEO = \sphericalangle DCE = 90°.$$




Daher ist das Viereck $ODCE$ ein Quadrat, und es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \varrho.$$

Ferner gilt $\overline{AE} = \overline{AF}$ und $\overline{BD} = \overline{BF}$, da die Abschnitte der von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten gleichlang sind. Daraus folgt für die Summe der Längen der Katheten

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AE} + \overline{EC} + \overline{BD} + \overline{DC}$$
$$= \overline{AF} + \varrho \quad + \overline{BF} + \varrho$$
$$= \overline{AB} + 2\varrho \quad = 2r \quad + 2\varrho,$$

d. h., die Summe der Längen der Katheten ist gleich der Summe der Längen der Durchmesser des Umkreises ($2r$) und des Inkreises ($2\varrho$), w. z. b. w.

Ma9 ■1560 Es sei $m$ mit $m \geqq 3$ eine natürliche Zahl, deren dritte Potenz $m^3$ sich in der Form

$$m^3 = p + n^3, \qquad (1)$$

darstellen läßt, wobei $p$ eine Primzahl und $n$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Dann gilt $m > n$ und

$$m^3 - n^3 = p,$$

also $\quad (m-n)(m^2 + mn + n^2) = p. \qquad (2)$

Dabei ist

$$m^2 + mn + n^2 \geqq 9 + 3 + 1 = 13. \qquad (3)$$

Wäre nun $m - n > 1$, so wäre $p$ nicht Primzahl, was der Voraussetzung widerspricht. Daher gilt $m-n=1$, d. h., $n=m-1$, also wegen (2)

$$p=m^2+m(m-1)+(m-1)^2$$
$$=3m^2-3m+1. \qquad (4)$$

Wir müssen nun nachweisen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen $m$ mit $m \geqq 3$ gibt, für die $3m^2-3m+1$ nicht Primzahl ist. Das trifft z. B. für jede natürliche Zahl $m$ zu, die bei der Division durch 7 den Rest 2 läßt, also von der Form

$m=7k+2$ ist,

wobei $k$ eine natürliche Zahl ist. (5)

Dann gilt nämlich wegen (4)

$$p=3(7k+2)^2-3(7k+2)+1$$
$$=3(49k^2+28k+4)-21k-6+1$$
$$=7(21k^2+9k)+7,$$

d. h. $p$ ist durch 7 teilbar. (6)

Andererseits gilt wegen (4)

$$p=3m(m-1)+1 \geqq 3\cdot 3\cdot 2+1$$
$$=19>7, \qquad (7)$$

$p$ ist also nicht Primzahl im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nun gibt es unendlich viele natürliche Zahlen $m^3$ mit $m \geqq 3$ und $m=7k+2$, also auch unendlich verschiedene natürliche Zahlen $z=m^3$, die sich nicht in der Form $z=p+n^3$ darstellen lassen, w. z. b. w.

*Bemerkung:* Wer mit Zahlenkongruenzen vertraut ist, kann den Schluß von (4) auf (6) schneller vollziehen. Wegen (4) folgt nämlich für $m \equiv 2 \pmod 7$

$p \equiv 3\cdot 4-3\cdot 2+1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7$,

also $p$ ist durch 7 teilbar.

Ph 9 ■4

Gegeben: $\overline{BE}=5{,}2\text{ mm}=0{,}52\text{ cm}$ (scheinbarer Monddurchmesser)

$\overline{AB}=57\text{ cm}$ (Entfernung Auge–Lineal)

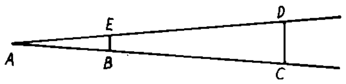
$\overline{CD}=3476\text{ km}$ (wahrer Monddurchmesser)

Gesucht: (1) $\overline{AC}$ (Entfernung Erde–Mond)

(2) Prozentualer Fehler

(1) Nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes gilt

$$\overline{AB}:\overline{BE}=\overline{AC}:\overline{DC}$$
$$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{BE}}=\frac{57\text{ cm}\cdot 3476\text{ km}}{0{,}52\text{ cm}}$$
$$\overline{AC}\approx 381\,023\text{ km}$$




Die Entfernung Erde–Mond beträgt 381 023 km.

(2) Der absolute Fehler ergibt sich aus

$$381\,023\text{ km}-384\,400\text{ km}=-3377\text{ km}.$$

Der relative Fehler ergibt sich aus

$$\left|\frac{-3377\text{ km}}{384\,400\text{ km}}\right|\approx 0{,}00878\ldots\approx 0{,}88\,\%$$

Der prozentuale Fehler der hier ermittelten Entfernung beträgt 0,88 %.

Ch 9 ■3 Masse der Salzsäure 15 g mit 0,15 g Chlorwasserstoff (HCl).

$$\begin{array}{ll} 72{,}92\text{ g} & 22{,}4\text{ l} \\ 2\,HCl+Zn \rightarrow H_2+ZnCl_2 & \\ 0{,}15\text{ g} & V_0 \end{array}$$

NR: $2\text{ mol}\cdot 36{,}46\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}=72{,}92\text{ g}$,

$1\text{ mol}\cdot 22{,}4\ \frac{\text{l}}{\text{mol}}=22{,}4\text{ l}$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:

$V_0=46{,}1$ ml bei 0 °C und 760 Torr

Nach der Zustandsgleichung für ideale Gase erhält man bei 22 °C

$$V=\frac{295\,°\text{K}\cdot 46{,}1\text{ ml}}{273\,°\text{K}}=49{,}8\text{ ml}.$$

Das Wasserstoffvolumen ist 49,8 ml.

Ma 10/12 ■1561 Es sei $x$ eine reelle Zahl, für die

$f_1(x)=f_2(x)$ gilt, wobei (1)

$f_1(x)=-x+3,$ (2)

$f_2(x)=|(x-2)^2-5|\geqq 0$. Dann gilt (3)

$f_1(x)=-x+3\geqq 0$, also $x\leqq 3$ und (4)

1. entweder $(x-2)^2-5=-x+3$ (5)

2. oder $\quad -(x-2)^2+5=-x+3$ (6)

Im 1. Falle folgt aus (5)

$$x^2-4x+4-5=-x+3,$$
$$x^2-3x-4\quad=0. \qquad (7)$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1=4$ und $x_2=-1$. Da wegen (4) $x\leqq 3$ gilt, kann höchstens $x_2=-1$ Lösung von (1) sein. Nun gilt

$f_1(-1)=4, f_2(-1)=|(-3)^2-5|=4$,

also ist $x_2=-1$ tatsächlich Lösung von (1).

Im 2. Falle folgt aus (6)

$$x^2-4x+4-5=x-3$$
$$x^2-5x+2=0. \qquad (8)$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_3=\frac{5+\sqrt{17}}{2}>3,\ x_4=\frac{5-\sqrt{17}}{2}<3,$$

von denen höchstens $x_4$ Lösung von (1) sein kann. Nun gilt

$$f_1(x_4)=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}+3=\frac{\sqrt{17}+1}{2}$$
$$f_2(x_4)=\left|\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}-2\right)^2-5\right|$$
$$=\left|\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^2-5\right|=\left|\frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right|$$
$$=\frac{\sqrt{17}+1}{2},$$

d. h. $x_4$ ist tatsächlich Lösung von (1).

Es gibt also genau zwei reelle Zahlen $x$, für die $f_1(x)=f_2(x)$ gilt, nämlich

$$x=-1 \text{ und } x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}.$$

Ma 10/12 ■1562 a) Der kürzeste Weg von $A$ nach $B$ möge auf dem Streckenzug $APQB$ liegen. Dann beträgt die Länge des Weges wegen $\overline{PQ}=s$

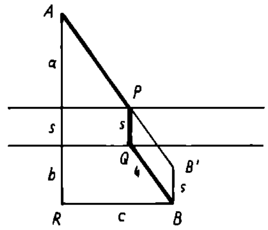
$$z=\overline{AP}+s+\overline{QB}.$$

Führt man nun eine Parallelverschiebung so durch, daß der Punkt $Q$ in den Punkt $P$ übergeführt wird, so wird der Punkt $B$ in einen Punkt $B'$ übergeführt, und es gilt $\overline{BB'}=s$, $\overline{QB}=\overline{PB'}$, also

$$z=\overline{AP}+\overline{PB'}+s.$$

Liegen nun die Punkte $A$, $P$, $B'$ auf einer Geraden, so ist der Weg von $A$ nach $B'$ am kürzesten und daher auch $z$ am kleinsten. Daraus ergibt sich die Konstruktion:

Man errichtet auf $RB$ in $B$ die Senkrechte bis zum Punkt $B'$, so daß $\overline{BB'}=s$. Dann verbindet man $B'$ mit $A$ und erhält den Schnittpunkt $P$ mit der Uferlinie. Nun verbindet man $A$ mit $P$, errichtet in $P$ auf der Uferlinie die Senkrechte bis zum Punkt $Q$ auf dem anderen Ufer und verbindet $Q$ mit $B$.




b) Man erhält

$$z=\overline{AB'}+s=\sqrt{(a+b)^2+c^2}+s,$$
$$z=(\sqrt{800^2+600^2}+200)\text{ m},$$
$$z=(\sqrt{1\,000\,000}+200)\text{ m}=1\,200\text{ m}.$$

Die Länge des kürzesten Weges $APQB$ beträgt also 1,2 km.

Ma 10/12 ■1563 Jedes der Volumina der Pyramiden $P_1$ bzw. $P_2$ ist gleich

$$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot a=\frac{1}{3}a^3.$$

Ist $A'$ der Schnittpunkt von $\overline{AM_1}$ mit $\overline{EM_2}$, $B'$ der Schnittpunkt von $\overline{BM_1}$ mit $\overline{FM_2}$, $C'$ der Schnittpunkt von $\overline{CM_1}$ mit $\overline{GM_2}$ und $D'$ der Schnittpunkt von $\overline{DM_1}$ mit $\overline{HM_2}$, so gilt, da die Dreiecke $A'M_1E$ und $A'AM_2$ kongruent sind, $\overline{A'M_1}=\overline{A'A}$, $\overline{B'M_1}=\overline{B'B}$ usw. also nach dem Strahlensatz

$$\overline{A'B'}:a=1:2,\ \overline{A'B'}=\frac{a}{2}.$$

Ferner haben die Pyramiden $A'B'C'D'M_1$ und $A'B'C'D'M_2$ eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$ sowie die Höhe $\frac{a}{2}$.

a) Der Körper, der aus allen Punkten der Durchschnittsmenge $P_1\cap P_2$ besteht, setzt sich nun aus diesen beiden Pyramiden zusammen. Sein Volumen ist daher gleich

$$V_1=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{12}a^3.$$

b) Der Körper, der aus allen Punkten der Vereinigungsmenge $P_1\cup P_2$ besteht, setzt sich aus zwei quadratischen Pyramidenstümpfen zusammen, bei denen der Flächeninhalt der Grundfläche gleich $a^2$, der Deckfläche gleich $\frac{a^2}{4}$ und die Höhe gleich $\frac{a}{2}$ ist. Sein Volumen ist daher gleich

$$V_2=2\left(\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot a-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left(a^3-\frac{1}{8}\cdot a^3\right)=\frac{7}{12}a^3.$$

c) Die Volumina der beiden Körper verhalten sich wie

$$V_1:V_2=\frac{1}{12}a^3:\frac{7}{12}a^3=1:7.$$

Ma 10/12 ■1564 Angenommen, es gibt zwei rationale Zahlen $x$ und $y$, für die

$x^2+y^2=7$ gilt. (1)

Dann ist $x\neq 0$ und $y\neq 0$, da das Quadrat

einer rationalen Zahl nicht gleich 7 ist. Ferner kann man sogar $x>0$ und $y>0$ annehmen, da für $x<0$ bzw. $y<0$ auch $-x>0$ bzw. $-y>0$ Lösung von (1) wäre.
Da $x$ und $y$ positive rationale Zahlen sind, lassen sie sich in der Form

$$x=\frac{p}{q},\quad y=\frac{r}{q} \qquad (2)$$

darstellen, wobei $p$, $r$ und $q$ von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, deren größter gemeinsamer Teiler gleich 1 ist.
Nun folgt aus (1)

$$\frac{p^2}{q^2}+\frac{r^2}{q^2}=7, \text{ also } p^2+r^2=7q^2. \qquad (3)$$

Wäre nun eine der Zahlen $p$ oder $r$ durch 7 teilbar, so wäre wegen (3) auch die andere durch 7 teilbar, also wäre $p^2+r^2$ durch $7^2$ teilbar. Dann müßte aber wegen (3) $q$ durch 7 teilbar sein, was der Voraussetzung widerspricht, wonach $p$, $q$ und $r$ den größten gemeinsamen Teiler 1 haben. Also ist weder $p$ noch $r$ durch 7 teilbar, und es gilt

$$p\equiv a \pmod 7 \text{ mit } 0<a<7,$$
$$r\equiv b \pmod 7 \text{ mit } 0<b<7.$$

Daraus folgt

$$p^2+r^2\equiv a^2+b^2 \pmod 7. \qquad (4)$$

Nun gilt

$a=1, 2, 3, 4, 5$ oder $6$,
also $a^2=1, 4, 9, 16, 25$ oder $36$,
d. h. $a^2\equiv 1, 4, 2, 2, 4$ oder $1 \pmod 7$.

Das Gleiche gilt für $b$.
$a^2$ bzw. $b^2$ sind also modulo 7 kongruent einer der Zahlen 1, 2 oder 4. Daher ist $a^2+b^2$ kongruent einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6, also niemals kongruent 0.
Daher gilt wegen (4) auch niemals

$$p^2+r^2\equiv 0 \pmod 7,$$

d. h. $p^2+r^2$ ist nicht durch 7 teilbar, und die Gleichung (3) ist in keinem Fall erfüllt. Daraus folgt, daß auch die Gleichung (1) für keine rationale Zahlen $x$, $y$ erfüllt ist, w. z. b. w.

Ph 10/12 ■5 Gegeben $t=3{,}8$ s; $v=340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;

$g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$;

Gesucht: $s$

Die Tiefe des Brunnens ergibt sich einmal aus dem Weg, den der Schall zurücklegen muß, und zum anderen aus dem Weg, den der Stein im freien Fall zurücklegen muß:

$s=vt_2$ bzw. $s=\frac{g}{2}\cdot t_1^2$, wobei $t_1+t_2=t$ gilt.

Es ist also:

$$s=\frac{g}{2}\left(t-\frac{s}{v}\right)^2 \text{ mit } t_1=t-t_2 \text{ und } t_2=\frac{s}{v}$$

$$\frac{2s}{g}=t^2-\frac{2ts}{v}+\frac{s^2}{v^2}$$

$$0=s^2-2v^2\left(\frac{t}{v}+\frac{1}{g}\right)\cdot s+v^2t^2$$

$$=s^2-\frac{2v}{g}(gt+v)\,s+v^2t^2$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$s_{1,2}=\frac{v}{g}(gt+v)\pm\sqrt{\left[\frac{v}{g}(gt+v)\right]^2-v^2t^2}$$

$$s_{1,2}=\frac{v}{g}(gt+v\pm\sqrt{v^2+2gtv})$$

$$s_{1,2}=\frac{340}{9{,}81}(9{,}81\cdot 3{,}8+340 \pm\sqrt{340^2+2\cdot 9{,}81\cdot 3{,}8\cdot 340})$$

$$s_{1,2}\approx\frac{340}{9{,}81}(377{,}278\pm 375{,}43)$$

$s_1 \approx 64$

$s_2 \approx 26\,088$

Da $t_2\leqq t$ also $\frac{s}{v}\leqq t$ sein muß, gilt nur $s=64$.

Der Brunnen ist 64 m tief.

Ch 10/12 ■4
60 g
$CH_3COOH+HOC_2H_5 \rightleftarrows$
16 g
88 g
$CH_3COOC_2H_5+H_2O$
m

NR: $1\text{ mol}\cdot 60\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}=60\text{ g}$,

$1\text{ mol}\cdot 88\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}=88\text{ g}$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:
m = 23,4 g
Ausbeute: 0,85 · 23,4 g = 19,9 g
Man kann 19,9 g Essigsäureäthylester herstellen.

**Lösungen zum alpha-Wettbewerb,** Heft 5/76

Ma 5 ■1566 Angenommen, Ute ist im Jahre 1975 genau $n$ Jahre alt; ihr Bruder Axel ist dann $(n+6)$ Jahre alt; nun gilt

$$n+(n+6)=30,$$
$$2n+6=30,$$
$$2n=24,$$
$$n=12.$$

Somit ist Ute 12 Jahre, ihr Bruder Axel 18 Jahre alt. Angenommen, Utes Mutter wird im gleichen Jahr $k$ Jahre alt; dann wird Utes Vater $(k+2)$ Jahre alt; nun gilt

$$k+(k+2)=120-30,$$
$$2k+2=90,$$
$$2k=88,$$
$$k=44.$$

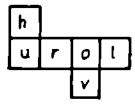
Somit wird Utes Mutter 44, Utes Vater 46 Jahre alt.

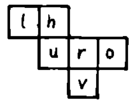
Ma 5 ■1567 Aus $10\cdot 0{,}2=2$ folgt, daß 2 Liter Kirschlimonade zubereitet worden sind. Der achte Teil der Kirschlimonade bestand aus Kirschsirup. Es wurden somit 2 Liter : 8 $=\frac{1}{4}$ Liter Kirschsirup verbraucht.

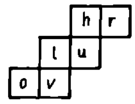
Ma 5 ■1568 a) Sämtliche sechs Begrenzungsflächen des Ausgangswürfels werden beklebt. Von jedem der sechs aufgeklebten Würfel sind fünf quadratische Begrenzungsflächen nicht überklebt. Insgesamt wird der so entstandene Körper von $6\cdot 5=30$ quadratischen Flächen begrenzt.
b) Ein Spielwürfel besitzt die Augenzahlen von 1 bis 6. Um eine möglichst große Gesamtaugenzahl zu erhalten, wird von den aufzuklebenden Würfeln jeweils die Seitenfläche mit der Augenzahl 1 beim Verkleben verwendet. Von jedem der sechs aufzuklebenden Würfel sind somit die Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6 nicht überklebt. Die Gesamtaugenzahl beträgt deshalb
$6\cdot(2+3+4+5+6)=120$ Augen.

Ma 5 ■1569 Hätte der zweite Autobus auf seiner letzten Fahrt vier Pioniere mehr befördert, so wären auf den letzten zwei Fahrten des zweiten Autobusses insgesamt $86+4=90$ Pioniere befördert worden. Somit war der zweite Autobus auf seiner vierten Fahrt mit $90:2=45$ Pionieren besetzt. Nun gilt $7\cdot 45+1\cdot 41=315+41=356$; insgesamt waren also 356 Pioniere eingetroffen.

Ma 5 ■1570 Aus den Netzen (3) und (5) läßt sich kein Würfel herstellen; die Beschriftung führt zu Widersprüchen.
Die Netze (1), (2), (4) könnten wie folgt beschriftet werden:

1



2



4



Ma 5 ■1571 Für alle in Betracht kommenden zweistelligen natürlichen Zahlen gilt $10\leqq 13\cdot n\leqq 99$, wobei $n$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist. Nur für $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ werden diese Ungleichungen erfüllt. Von den Vielfachen 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91 der Zahl 13 erfüllen nur die Zahlen 13 und 91 die gestellten Bedingungen, und es gilt

$$(3-1-1)\cdot 13=1\cdot 13=13,$$
$$(9-1-1)\cdot 13=7\cdot 13=91.$$

Ma 6 ■1572 Es sei $x$ die Anzahl der im Regal vorhandenen Bücher; dann gilt $340<x<350$. Aus $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x=\frac{7}{12}x$ und $\frac{12}{12}x-\frac{7}{12}x=\frac{5}{12}x$ folgt, daß das Regal $\frac{4}{12}x$ Romane enthält. Nun muß $x$ ein Vielfaches von 12 sein, also $x=12\cdot n$, wobei $n$ eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt weiter $340<12\cdot n<350$ bzw. $28\frac{1}{3}<n<29\frac{1}{6}$, also $n=29$ und somit $x=12\cdot 29=348$. Im Regal befinden sich somit $348:4=87$ Kinderbücher, $348:3=116$ Erzählungen und $348\cdot\frac{5}{12}=145$ Romane.

Ma 6 ■1573 Angenommen, dieser Schüler habe den $n$-ten Platz erreicht; dann gilt

$$\left(\frac{n+5}{10}+3\right)\cdot 5=n+10,$$
$$\frac{n+5}{2}+15=n+10,$$
$$n+5+30=2n+20,$$
$$n=15.$$

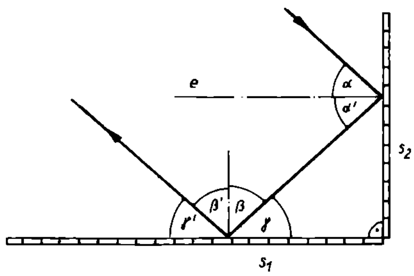
Dieser Schüler belegte auf dem mathematischen Wettbewerb den 15. Platz.

Ma6 ■1574 Wir rechnen $2240\,\text{km}\cdot\frac{3}{4}$
$=1680\,\text{km}$;
$2240\,\text{km}-1680\,\text{km}=560\,\text{km}$. Nun gilt
$t_1=\frac{s_1}{v_1}=\frac{1680\,\text{km}\cdot\text{h}}{840\,\text{km}}=2\,\text{h}$;
$t_2=\frac{s_2}{v_2}=\frac{560\,\text{km}\cdot\text{h}}{800\,\text{km}}=\frac{7}{10}\,\text{h}=42\,\text{min}$.
Der Flug von $A$ nach $B$ dauert 2 Stunden und 42 Minuten.

Ma6 ■1575 Angenommen, Ursula habe auf dem Sportfest $x$ Punkte erreicht, dann gilt $1475<x<1500$. Während der Spartakiade hatte Ursula nur $\frac{x}{9}$ Punkte erreicht; deshalb gilt $\frac{1475}{9}<\frac{x}{9}<\frac{1500}{9}$, also $163\frac{8}{9}<x<166\frac{2}{3}$. In diesem Intervall ist nur die Zahl 165 ganzzahlig und durch 5 teilbar. Ursula errang somit auf der Spartakiade 165 Punkte, auf dem Sportfest $9\cdot 165=1485$ Punkte.
Sabine schaffte $1485:3=495$ Punkte.

Ma6 ■1576 Von Kilometerstein 54 bis Kilometerstein 87 sind es 33 km. Aus
$t_1=\frac{s_1}{v_1}=\frac{33}{120}\,\text{h}=\frac{11}{40}\,\text{h}$ und $t_2=\frac{s_2}{v_2}=\frac{33}{100}\,\text{h}$ folgt
$t_2-t_1=\frac{66}{200}\,\text{h}-\frac{55}{200}\,\text{h}=\frac{11}{200}\,\text{h}=\frac{60\cdot 11}{200}\,\text{min}$
$=\frac{33}{10}\,\text{min}=3\frac{3}{10}\,\text{min}$.
Der Moskwitsch kam $3\frac{3}{10}$ min vor dem Wartburg an der Raststätte an. Auf 100 km Fahrstrecke hätte der Moskwitsch gegenüber dem Wartburg nur 10 Minuten Zeit herausgefahren. Überhöhte Geschwindigkeiten rufen aber Unfälle und damit Schaden hervor.

Ph6 ■1577 Nach dem Reflexionsgesetz gilt $\alpha=\alpha'$ bzw. $\beta=\beta'$ also auch $\gamma=\gamma'$. Weiterhin ist $\alpha'=\gamma$ (Wechselwinkel an Parallelen wegen $l \parallel S_1$) und damit auch $\alpha=\gamma'$.




Demzufolge ist der einfallende und der reflektierende Strahl um den gleichen Winkel gegen die Horizontale geneigt, und sie laufen parallel, w. z. b. w.

Ma7 ■1578 Aus der Gleichung $a\cdot b$ $=10\cdot(a+b)$ erhalten wir durch Umformung
$ab=10a+10b$,
$ab-10a=10b$,
$a(b-10)=10b$,
$a=\frac{10b}{b-10}$.
Nun gilt $a\geqq 0$ und $b\geqq 0$. Ferner gilt $a\geqq 0$ nur dann, wenn $b\geqq 11$. Da $a$ und $b$ natürliche Zahlen sind, muß $10b$ ein Vielfaches von $b-10$ sein. Das trifft nur zu für folgende Paare natürlicher Zahlen: (11; 110), (12; 60), (14; 35), (15; 30), (20; 20).

Ma7 ■1579 Angenommen, es waren $x$ Sammelkarten mit je fünf, $y$ mit je sechs und $z$ mit je acht Fahrabschnitten; dann gilt
$5x+6y+8z=77$, (1)
$x+\ y+\ z=12$ (2)
bzw. $x=12-\ y-z$.
Durch Einsetzen von Gleichung (2) in Gleichung (1) erhalten wir
$5\cdot(12-y-z)+6y+8z=77$,
$60-5y-5z+6y+8z=77$,
$y+3z=17$,
$y=17-3z$.
Diese Gleichung wird für natürliche Zahlen $x$, $y$, $z$ erfüllt durch
$x_1=1,\ y_1=8,\ z_1=3$;
$x_2=3,\ y_2=5,\ z_2=4$;
$x_3=5,\ y_3=2,\ z_3=5$.
Die Aufgabe besitzt somit genau drei Lösungen:
Es könnten entweder eine Sammelkarte aus Berlin, acht aus Leipzig und drei aus Halle oder drei aus Berlin, fünf aus Leipzig und vier aus Halle oder fünf aus Berlin, zwei aus Leipzig und füpf aus Halle verbraucht worden sein.

**Lösungen zu: Gauß' Beiträge zur Astronomie und Geodäsie** (Seite 27)

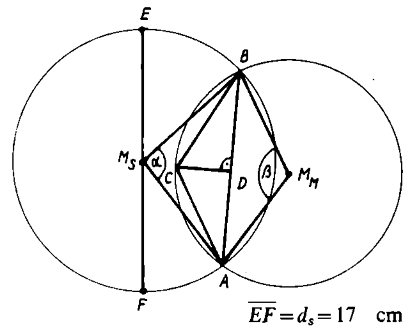
▲1▲ $n_1=0,\ n_2=1,\ n_3=2,\ n_4=4,$
$n_5=5,\ n_6=6.$
▲2▲ a) $s=24{,}35$ m, $m_s=0{,}008$ m,
$m_0=0{,}026$ m b) $n_2=27$.
▲3▲ a) $n_{Ceres}=3$
b) $U_{Ceres}=4{,}61$ Jahre.

**Lösung zu: Versuche mit 10 Münzen,** S. 40

*1. Aufgabe:* Es gibt zwei Möglichkeiten außerdem:
1 und 9, 3 und 7. In der Tabelle vor der 4. Aufgabe findest du Antwort darauf, welcher Fall mit welcher Häufigkeit bei 20 Würfen vorkommt. Die Null bei den Fällen 1 und 9 sowie 10 bedeutet, daß diese Fälle bei den 20 Würfen meist überhaupt nicht vorkommen. (Der erste dieser Fälle kommt nur ungefähr aller 50 Würfe einmal vor, der zweite, daß alle gleich sind, nur etwa aller 500 Würfe einmal.)
*2. Aufgabe:* Es gibt 11 verschiedene Fälle, sie sind unter der 5. Aufgabe zu finden.
*3. Aufgabe:* (Bild 13)
*4. Aufgabe:* Die Versuche zeigen, daß sie ungefähr ebenso häufig sind. Wenn die Münze so beschaffen ist, daß ihre Kopf- oder Zahlseite mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach oben zeigt, so sind auch beide Fälle gleich wahrscheinlich.
*5. Aufgabe:* Bei 20 Würfen ist für die einzelnen Fälle das folgende Ergebnis zu erwarten: (Bild 14)
2,5 bedeutet hier, daß ungefähr 2 oder 3 Fälle zu erwarten sind.
*7. Aufgabe:* Es ist gleichgültig, ob du die 10 Münzen gleichzeitig oder einzeln oder nur eine zehnmal nacheinander wirfst, wenn die Münzen gleichartig sind, gilt für alle drei Fälle das Gleiche.

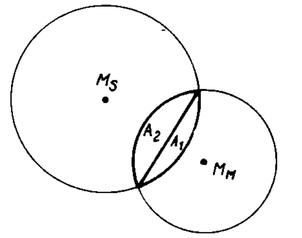
**Lösung zu: Sonnenfinsternis**

Bild der Sonne Bild des Mondes




$\overline{EF}=d_s=17$ cm
$r_s=\ 8{,}5$ cm

Die Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ und $\overline{AC}$ schneiden sich in $M_M$.
($M_M$: Mittelpunkt des Kreises des Bildes des Mondes)
$r_M$ sei der Radius des Bildes des Mondes.
Es gilt für das rechtwinklige Dreieck $(ADM_M)$ mit
$\overline{AD}=\frac{a}{2}$, $\overline{CD}=b$, $\overline{AM_M}=\overline{CM_M}=r_M$
$r_M{}^2=\frac{a^2}{4}+(r_M-b)^2\rightarrow r_M=\frac{a^2}{8b}+\frac{b}{2}\rightarrow r_M=7{,}4$ cm
Damit lassen sich weiter die Winkel $\alpha$ und $\beta$ bestimmen:
$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2\cdot r_s}=0{,}822\quad \frac{\alpha}{2}=55{,}5°\quad \alpha=111°$
$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{a}{2r_M}=0{,}945\quad \frac{\beta}{2}=71°\quad \beta=142°$




Daraus lassen sich die Flächen $A_1$ und $A_2$ berechnen:
$A_1=\left(\frac{\pi\cdot\alpha}{180°}-\sin\alpha\right)\frac{r_s{}^2}{2}$
$A_2=\left(\frac{\pi\cdot\beta}{180°}-\sin\beta\right)\frac{r_M{}^2}{2}$
$A_1=35{,}8\ \text{cm}^2\quad A_2=50{,}9\ \text{cm}^2$
Es ergibt sich eine „abgedunkelte" Fläche $A'=A_1+A_2=86{,}7\ \text{cm}^2$. Die Fläche der vollen Bildscheibe der Sonne beträgt
$A=\pi\cdot r_s{}^2=227\ \text{cm}^2$.
$\frac{A'}{A}\cdot 100\%=\frac{86{,}7}{227}\cdot 100\%=38{,}2\%$.
Aus dieser Berechnung ergibt sich, daß in Jena eine 38,2%ige Sonnenfinsternis beobachtet wurde.

**Lösungen zu alpha-heiter** (Heft 2/77):

**Kryptarithmetik**

1. $999+9989=10988$; 2. $9911+9111=19022$; 3. $9861+9819=19688$; 4. $112=\sqrt{12544}$; 5. $288^2=82944$

**G · A · U · S · S**

Um die Zahlen für G, A, U, S zu finden, zerlegt man das Produkt 1855 zunächst in seine Primfaktoren: $1855=5\cdot 7\cdot 53$

Dabei stellt man fest, daß nur drei Faktoren vorhanden sind. Also müssen noch zwei Faktoren ergänzt werden; diese beiden Faktoren können wegen der Ganzzahligkeit nur 1 sein:

$$1855=1\cdot 1\cdot 5\cdot 7\cdot 53$$

Aus (2) und (3) folgt: $G=53$, $A=7$; $U=5$; $S=1$ Diese Zahlen werden in (1) eingesetzt:

$C\cdot F\cdot(53+7+5+1+1)+7\cdot 5=1777$

$C\cdot F\cdot 67+35 \qquad =1777$

Durch äquivalente Umformungen ergibt sich:

$$C\cdot F=26$$

Aus (3) und $26=13\cdot 2$ folgt $C=13$; $F=2$

Aus den Darlegungen folgt: Es gibt genau eine Lösung; diese lautet $C=13$, $F=2$, $G=53$, $A=7$, $U=5$, $S=1$.

**Mosaikrätsel**

„Die Wissenschaft soll die Freundin der Praxis sein, aber nicht ihre Sklavin."

**Krypto-Gleichungssystem**

Setzt man (IV) in (I), (II), (III) ein, vereinfacht die Terme auf den rechten Seiten der Gleichungen (I), (II), (III) und formt die Quotienten auf den linken Seiten der Gleichungen (I), (II) in Differenzen um, so erhält man das dem ursprünglichen äquivalente Gleichungssystem:

(I') $\dfrac{\sqrt[C]{GAUSS}}{C\cdot G}-C^{C-1}=22$

(II') $\dfrac{\sqrt[C]{GAUSS}}{C\cdot G}-G^{C-1}=19$

(III') $\dfrac{\sqrt[C]{GAUSS}}{C\cdot G}=24$

Setzt man (III') in (I') und (II') ein, so erhält man das Gleichungssystem:

(I'') $C^{C-1}=2$

(II'') $G^{C-1}=5$ und hieraus

(1) $C=2$ und (2) $G=5$ Aus (IV) erhält man $\frac{C}{F}=\frac{1}{C}$ bzw. $F=C^2$ und wegen $C=2$, ist $F=4$, $C=2$ und $G=5$ in (III') eingesetzt, ergibt $\sqrt[2]{GAUSS}=240$ bzw. $GAUSS=240^2=57600$, also lautet die Lösung:

$C=2$, $F=4$, $G=5$, $A=7$, $U=6$, $S=0$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen wird die Richtigkeit der Lösung bestätigt.

**Rösselsprung**

Ausspruch: „Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist." Schema:

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 1 | 8 |
| 7 | 4 | 11 |
| 2 | 9 | 6 |
| 5 | 12 | 3 |

**Krypto-Arithmetik**

$D=1$; $r=2$; $C=3$; $F=4$; $G=5$; $a=6$; $u=7$; $ß=9$.

**Bilderrätsel**

Brett, Zaun, Zweig (Schweig); Braunschweig

**Rösselsprung**

Zitat: „So sonderbar ist der nimmersatte Mensch; hat er ein Gebäude vollendet, so ist es nicht, um nun ruhig darin zu wohnen, sondern um ein anderes anzufangen."

Schema:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 30 | 27 | 34 | 19 | 32 |
| 28 | 35 | 6 | 31 | 26 | 21 |
| 7 | 4 | 29 | 20 | 33 | 18 |
| 36 | 15 | 2 | 11 | 22 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 24 | 17 | 10 |
| 14 | 1 | 16 | 9 | 12 | 23 |

**Wie viele Möglichkeiten?**

Betrachtet man den Teil

C F G
F G a
G a u
a u ß,

so zählt man leicht nach, daß es 10 Möglichkeiten gibt. Das gesamte Viereck ergibt sich aus dem obigen Teil durch Spiegelungen, womit in jedem gespiegelten Teil ebenfalls 10 Möglichkeiten bestehen, den Namen auf verschiedene Art zu lesen. Insgesamt läßt sich der Name deshalb auf 40 verschiedene Arten lesen.

**Kreuzworträtsel**

1. Gauß; 2. arcus; 3.
4. Skala; 5. Slang

**Gauß und das 8-Damen-Problem**

Fortsetzung von Seite 37:

Da das Verfahren auf rationelle Weise alle Stellungen von a1, b1, ..., h1 bis a8, b8, ..., h8 durchläuft, kann keine Lösung unentdeckt bleiben.

5. Im Sinne der Spieltheorie handelt es sich bei der vorliegenden Aufgabe um ein „8-Personen-Spiel", zu dessen Lösung ein sogenannter „Spielbaum" gezeichnet werden müßte, aus dem dann die Lösungen unmittelbar abzulesen wären. Allerdings führt die übliche grafische Darstellungsform des Spielbaums bei der vorliegenden Aufgabe zu einem außerordentlich unübersichtlichen Gebilde. Die unter 1. angegebene Methode stellt eine rationalisierte Variante zur Ermittlung so eines Spielbaumes dar, die außer den Vorzügen des Spielbaumes auch noch Übersichtlichkeit bewahrt. (Über Spieltheorie siehe „Ausgewählte Kapitel der Mathematik", Autorenkollektiv, Fachbuchverlag Leipzig, 7. Auflage 1973, mit weiteren Literaturangaben.)

6. Ist man mit dem systematischen Verschieben der Damen so weit, daß die Dame der a-Spalte auf a5 muß, ist also die Hälfte aller zu untersuchenden Möglichkeiten erledigt, so kann das Verfahren abgebrochen werden, denn alle noch ausstehenden Lösungen müssen sich nun durch Variierung bereits gefundener Lösungen ergeben.

Die gefundenen 12 voneinander unabhängigen Lösungen lassen sich zu einer kompakten Figur zusammenfügen – siehe Bild 4 – die – zusammen mit ihrem Spiegelbild – dann alle 92 Lösungen als Ausschnitte enthalten.

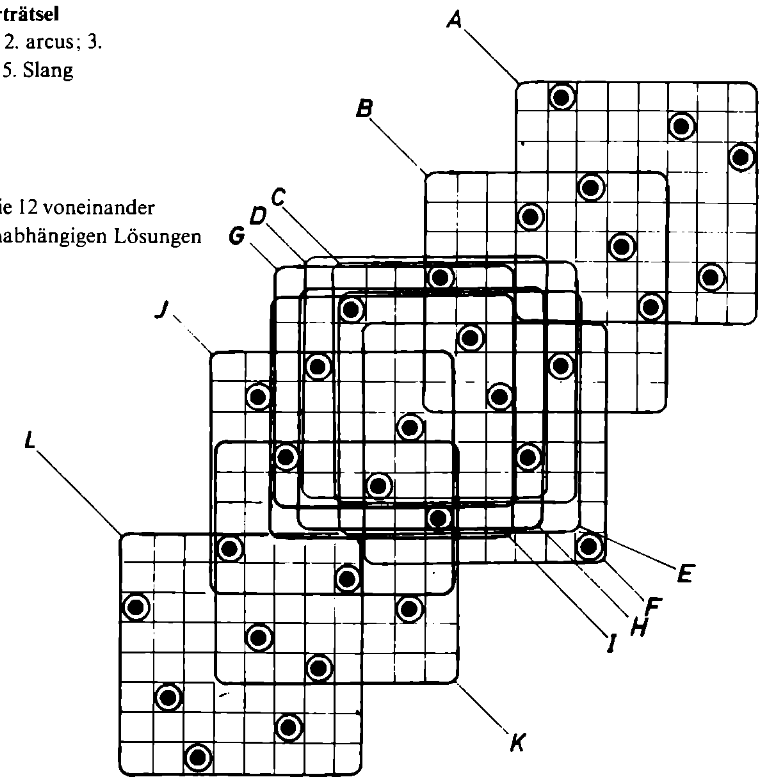



Bild 4 Die 12 voneinander unabhängigen Lösungen

## ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

**Olympiade Junger Mathematiker**
**3. Stadt-Olympiade-Klassenstufe 4**
**Greifswald, 16. Oktober 1976**

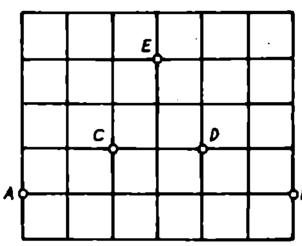
In jedem Jahr einmal treffen sich die besten Jungen Mathematiker der Stadt Greifswald zu einem Leistungsvergleich. Er ist eine gute Vorbereitung auf die Teilnahme an den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR. Die Fachkommission Unterstufe der Stadt Greifswald übergab der *alpha* die gestellten Aufgaben (reine Arbeitszeit: 120 Minuten):

▲1▲ Ermittle alle Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen!
a) $5\cdot 19<a<100$ c) $15<2\cdot c-3<25$
b) $21<7b<43$ d) $3>d:12>0$

▲2▲ Unsere Sportler konnten bei den Olympischen Spielen ihre Leistungen ständig verbessern. Sie feierten in diesem Jahr ihre bisher größten Erfolge.
1968 wurden von den DDR-Sportlern 30 Medaillen erkämpft; genau der dritte Teil davon waren Goldmedaillen.
Die Anzahl der Silbermedaillen war um 2 größer als die Zahl der Bronzemedaillen.
Bei den Olympischen Spielen 1976 verdreifachte sich die Gesamtzahl der für unsere Republik errungenen Medaillen gegenüber 1968; die Anzahl der Goldmedaillen stieg auf das Vierfache (gegenüber 1968). Unsere Sportler brachten gleich viele Silber- wie Bronzemedaillen heim.
Übertrage die folgende Tabelle auf dein Arbeitsblatt und fülle sie aus!

| | Gold | Silber | Bronze | Gesamtzahl |
|---|---|---|---|---|
| 1968 | | | | |
| 1976 | | | | |

▲3▲ Verbinde jeweils genau zwei Punkte miteinander durch eine Gerade! (Zeichne auf diesem Blatt!)




a) Wie viele verschiedene Geraden kannst du zeichnen?
b) Zähle sie auf (z. B. $AB$, ...)!

▲4▲ Die Klassenleiterin einer 4. Klasse macht eine Aufstellung über die Teilnahme ihrer Schüler an Arbeitsgemeinschaften.
10 Schüler sind Mitglieder der Schulsportgemeinschaft; 9 Schüler singen im Chor; 6 Schüler gehören keiner dieser Arbeitsgemeinschaften an; 3 Schüler sind sowohl Chormitglieder als auch in der Sportgemeinschaft tätig.
Wie viele Schüler sind in dieser 4. Klasse?

**10. Leistungsvergleich**
**Greifswald-Stadt–Greifswald-Land**
**Stralsund–Wolgast**
(16. Oktober 1976 in Greifswald)

**Klassenstufe 5**

▲1▲ Zeichne die Strecken $\overline{AB}$ mit der Länge 2,3 cm, $\overline{CD}$ mit der Länge 18 mm, $\overline{EF}$ mit der Länge 0,03 m!
a) Konstruiere $\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{EF}$!
b) Überprüfe das Ergebnis der Konstruktion durch Rechnung!

▲2▲ Zeichne eine Strecke $\overline{PQ}$ mit der Länge 6 cm! Zeichne dann um $P$ einen Kreisbogen mit dem Radius 5,2 cm und um $Q$ einen Kreisbogen mit dem Radius 3 cm! Ein Schnittpunkt dieser Kreisbögen sei $R$.
Trage in $P$ an $PQ$ das Dreifache des Winkels $\sphericalangle QPR$ an! Der zuletzt erhaltene Schenkel sei $PS$.
Was für ein Winkel $\sphericalangle QPS$ entsteht?

▲3▲ Bernd denkt sich eine Zahl, multipliziert diese Zahl mit sich selbst, addiert dann 19, dividiert durch 10, subtrahiert 4 und erhält als Endergebnis 10.
Welche Zahl hatte sich Bernd gedacht?

▲4▲ Beim Schulsportfest haben sich Antje, Christiane, Martina und Regine für den 100-m-Endlauf qualifiziert. Es soll getippt werden, wer den Endlauf gewinnt.
Gudrun sagt: Wenn ich nur den Sieger richtig voraussagen will, muß ich höchstens 4 verschiedene Tipscheine schreiben. Wenn ich aber den 1. und 2. Platz in der richtigen Reihenfolge auf einen Tipzettel schreiben soll, muß ich höchstens 10 verschiedene Tipscheine ausschreiben, um mit Sicherheit den richtigen dabei zu haben.
Hat Gudrun recht?

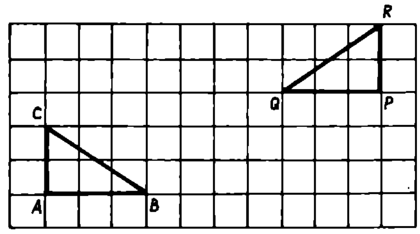
**Klassenstufe 6**

▲1▲ Welche der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sind Teiler von 1670228?

▲2▲ Eine Gruppe Junger Biologen wird gefragt: Wie viele Eidechsen habt ihr in eurem Terrarium? Die Antwort lautete:
Im ersten Gefäß ist genau die Hälfte, im zweiten genau ein Drittel, und im letzten Gefäß befinden sich noch 2 Eidechsen.

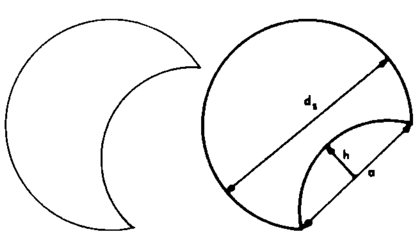
▲3▲ Angelika und Karin haben Kärtchen, auf denen je eine Ziffer steht. Angelikas Kärtchen tragen die Ziffern 3, 5, 6, 9, Karins die Ziffern 1, 2, 4, 8.
a) Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen kann jedes Mädchen mit seinen vier Kärtchen legen?
b) Wie viele davon sind durch 6 teilbar?

▲4▲ Finde eine Bewegung, die das Dreieck $ABC$ auf das Dreieck $PQR$ abbildet! Zeichne auf diesem Blatt!




# Sonnenfinsternis 1976

Wie groß war in Jena die Sonnenfinsternis vom 29. 4. 1976?
An der *Spezialschule des VEB Carl Zeiss* wurde die ringförmige Sonnenfinsternis am 29. 4. 76 am Schulfernrohr durch die Projektion des Bildes auf einen Schirm als partielle Finsternis beobachtet. Im Höhepunkt der Bedeckung der Sonne durch den Mond ergab sich auf dem Projektionsschirm das dargestellte Bild.
Wir stellten uns die Frage, wie groß am Beobachtungsort der prozentuale Teil der Sonne sei, der vom Mond überdeckt war.
Zur Lösung der Aufgabe wurden mit einem Lineal folgende Werte am projizierten Sonnenbild gemessen:
1. Durchmesser des Sonnenbildes $d_s = 17$ cm
2. Abstand der Schnittpunkte der Kreisbilder von Sonne und Mond $a = 14$ cm
3. Bogenhöhe über $a \cdot h = 5$ cm




Aus diesen drei Meßwerten wurde die vom Mond überdeckte Fläche der Sonnenscheibe berechnet und in Prozent ausgedrückt. Natürlich muß das Ergebnis mit Fehlern behaftet sein, die sich aus den Messungen mit Lineal am „wandernden" Bild auf dem Projektionschirm und den Relativbewegungen von Erde, Sonne und Mond ergeben. Wie groß war also die partielle Finsternis in Jena? Welcher Lösungsweg führt zum Ziel?
(Hinweis: Für Schüler bis Klasse 9 ist die Lösung nur möglich, wenn benötigte Winkelgrößen einer Zeichnung entnommen werden.)
*A. Dietzel*

# Wissen wo

## Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1976