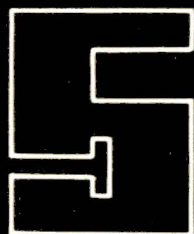
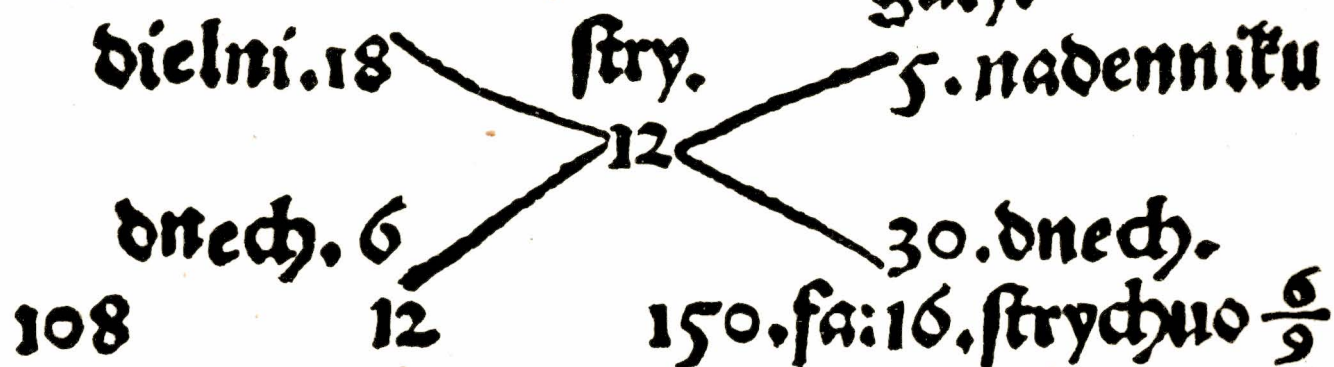




Item 18. naden  
nikuow w. 6.  
dnech skopaly 12  
strychu winigý/  
worazka polik  
strychuow 5. nas  
den nikuow we  
30. dnech sko-  
pagi/stogý wre  
guly.



Volk und Wissen  
Volkseigener Verlag  
Berlin  
18. Jahrgang 1984  
Preis 0,50 M  
ISSN 0002-6395

**Redaktionskollegium:** Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Frey (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Grotz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritzt); Dr. sc. rer. nat. E. Quaiser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholtz)

**Redaktion:**  
OSTr J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)  
Anschrift der Redaktion:  
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14  
Anschrift des Verlags: Volk und Wissen  
Volkseigener Verlag Berlin  
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213  
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik  
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.  
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegen genommen.  
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

**Fotos:** J. Lehmann, Leipzig (S. 100/101); aus *rozhledy*, Prag (S. 104/105); W. Milejko, Bukarest (S. 109)

**Abzeichen bzw. Signets:** J. Lehmann, Leipzig (IV. U.-Seite)

**Typographie:** H. Tracksdorf, Leipzig  
**Titelblatt:** W. Fahr, Berlin nach einer Vorlage aus *rozhledy*, Prag

Alle ČSSR-Beiträge wurden dankenswerterweise von O. Langer, Döbeln übersetzt und z. T. bearbeitet.



**Gesamtherstellung:** INTERDRUCK  
Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit,  
III/18/97

AN (EDV) 128

**Redaktionsschluss:** 25. Juni 1984

**Auslieferungstermin:** 19. Oktober 1984

**alpha**

## Mathematische Schülerzeitschrift

Dieses Sonderheft wurde zu Ehren der deutsch-tschechoslowakischen Freundschaft und aus Anlaß der XXV. IMO mit Beiträgen aus unserem benachbarten Freundesland gestaltet.

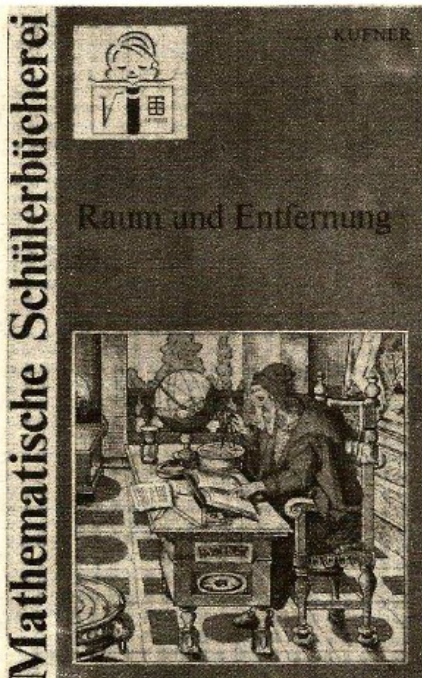
### Inhalt

- 97 Raum und Entfernung [9]<sup>1)</sup>  
Wie man in der Mathematik reißt (Leseprobe)  
Prof. Dr. A. Kufner, Karls-Universität Prag
- 99 Eine Aufgabe von Prof. E. Kraemer, Karls-Universität Prag/Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *rozhledy* [9]
- 100 XXV. Internationale Mathematikolympiade [10/12]  
1. bis 10. Juli 1984, Prag  
J. Lehmann, Leipzig
- 102 XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]  
Aufgaben und Preisträger der 4. Stufe (DDR-Olympiade)
- 103 Anspruchsvolle Aufgaben für *alpha*-Leser, überreicht durch IMO-Mannschaften [9]
- 104 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]  
Aufgaben aus der ČSSR
- 106 Tschechische praktische Rechenbücher aus dem 16. und dem frühen 17. Jahrhundert [6]  
Ivana Füzeková, aus *rozhledy*
- 107 Für unsere Briefmarkenfreunde: Die Technische Hochschule Prag [7]  
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
- 108 Aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht  
Mathematische Spielereien [5]  
Milan Koman, aus *rozhledy*
- 109 Für unsere Schachfreunde: Böhmisches Schach [7]  
H. Rüdiger, Schichtleiter im Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 110 Zur Berechnung von Getriebe-Übersetzungen [9]  
Vlastimil Mráz, aus *rozhledy*
- 111 Rauminhalt des Vielflachs [9]  
Stanislav Horák, aus *rozhledy*
- 112 Papierformate und Mathematik  
Vlastimil Mráz, aus *rozhledy*
- 113 Aufgaben bei Aufnahmegesprächen [10/12]  
Fakultät Mathematik/Physik an der Komenský-Universität Bratislava
- 113 19 harte Nüsse, zusammengestellt in der mathematischen Schülerzeitschrift *rozhledy* [10]
- 114 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]  
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig
- 116 Arbeitsgemeinschaft im Blickpunkt  
Ein mathematisches Spiel: *Trlenka* [5]  
Milan Hejny, aus *rozhledy*
- 117 Lösungen [5]
- 120 Deutschsprachige Literatur aus der ČSSR [6]
- III. U.-Seite: Geschicklichkeitsrätsel [5]  
Josef Svoboda, aus *rozhledy*
- IV. U.-Seite: 25 Jahre Internationale Mathematikolympiaden [5]  
Dokumentation, zusammengestellt von J. Lehmann, Leipzig

<sup>1)</sup> bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

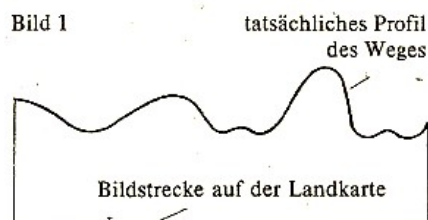
# Raum und Entfernung

## Wie man in der Mathematik mißt



### Einleitung

Aus dem täglichen Leben weiß jeder, daß Entfernung ein sehr relativer Begriff ist. Zum Beispiel hat schon mancher Tourist auf einer Landkarte den Weg des geplanten Marsches ausgemessen und sein Ergebnis für verläßlich gehalten, dann aber festgestellt, daß er in dem unebenen Terrain viel längere Strecken zurücklegen mußte. Er hatte nicht beachtet, daß sein Meßinstrument die Höhenunterschiede auf der Landkarte nicht berücksichtigen kann.



Auch wenn unser naiver Tourist auf einer „idealen“ Ebene ginge, würden sich seine der Landkarte entnommenen Angaben von der tatsächlichen Entfernung unterscheiden. Das ist deshalb der Fall, weil die Erdoberfläche bekanntlich keine Ebene ist, wir sie auf Landkarten aber als Ebene darstellen.

Die Entfernung zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  einer Kugeloberfläche projiziert man in die Ebene; bei Zentralprojektion auf die Strecke  $A_1B_1$ , bei Parallelprojektion auf die Strecke  $A_2B_2$ . Das Bild 2 zeigt, daß die gewählte Projektionsart sowie bei der Zentralprojektion auch noch die Lage des Projektionszentrums  $S$  von Bedeutung sind.

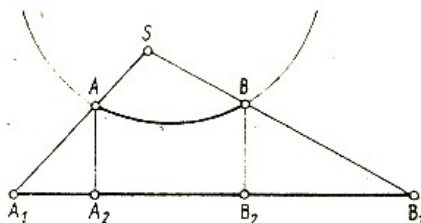


Bild 2

Das Bild verdeutlicht dies, und die Kartographen wissen genau, daß bei der Darstellung eines Terrains auf der Landkarte die Entfernung nicht exakt wiedergegeben werden kann, weil die Kugel keine Fläche ist, die sich in die Ebene abwickeln läßt, und deshalb projizieren sie so, daß entstandene Verzerrungen minimal bleiben.

**Beispiel:** Die Länge eines Halbkreises mit dem Radius  $r$  berechnet sich  $\pi r$ , und bei Parallelprojektion entsteht eine Bildstrecke der Länge  $2r$ ; es kommt also zu einer Verkürzung der tatsächlichen Entfernung im Verhältnis  $\frac{\pi}{2} = 1,57 \dots$ . Bei Zentralprojektion vom Kreismittelpunkt aus ist die projizierte Halbkreislinie sogar die gesamte unendliche Gerade.

Es zeigt sich also, daß die Entfernung auch im täglichen Leben kritisch betrachtet werden muß und dieser Begriff nicht zu verabsolutieren ist. Wir werden uns daher im weiteren näher mit dem Begriff der Entfernung befassen, allerdings wird es nicht die Entfernung sein, welche uns täglich in vielfältiger Weise begegnet, sondern wir wollen den Abstand in einer Welt genau definierter mathematischer Objekte untersuchen.

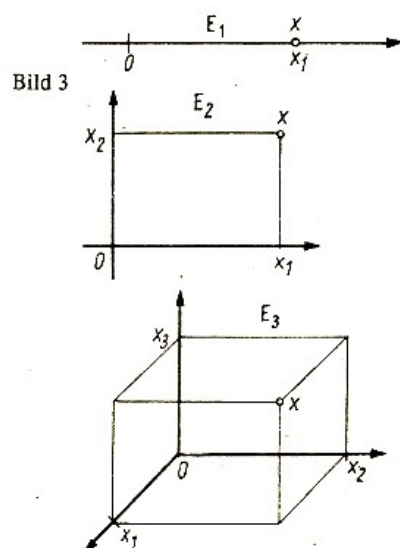
Wir werden uns daher im weiteren näher mit dem Begriff der Entfernung befassen, allerdings wird es nicht die Entfernung sein, welche uns täglich in vielfältiger Weise begegnet, sondern wir wollen den Abstand in einer Welt genau definierter mathematischer Objekte untersuchen.

### Abstand im euklidischen Raum

Zuerst werden wir mit Objekten arbeiten, welche aus der Schule oder auch aus der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) bekannt sind; mit der *Geraden* (eindimensionaler euklidischer<sup>1)</sup> Raum  $E_1$ ), mit der *Ebene* (zweidimensionaler euklidischer

Raum  $E_2$ ) und mit dem bekannten dreidimensionalen euklidischen Raum  $E_3$ .

Die Punkte der Geraden bezeichnen wir mit  $x = (x_1)$ , die Punkte der Ebene mit  $x = (x_1, x_2)$  und die Punkte des Raumes mit  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , wobei  $x_1, x_2, x_3$  reelle Zahlen sind.



In diesen Räumen kennen wir folgende Entfernungen:

Auf der Geraden  $E_1$  bezeichnet das Symbol  $d(x, y)$  den Abstand des Punktes  $x = (x_1)$  vom Punkt  $y = (y_1)$ . Die Definition lautet:

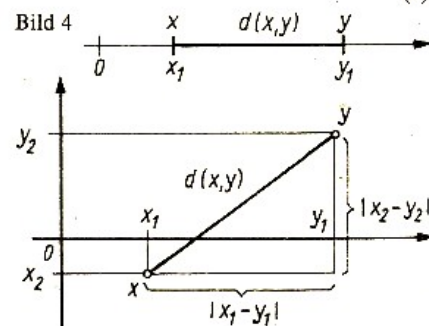
$$d(x, y) = |x_1 - y_1|. \quad (1)$$

In der Ebene  $E_2$  ist der Abstand  $d(x, y)$  des Punktes  $x = (x_1, x_2)$  vom Punkt  $y = (y_1, y_2)$  folgendermaßen definiert:<sup>2)</sup>

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \quad (2)$$

Entsprechend ist im Raum  $E_3$  der Abstand  $d(x, y)$  des Punktes  $x = (x_1, x_2, x_3)$  vom Punkt  $y = (y_1, y_2, y_3)$  definiert:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}. \quad (3)$$



**Bemerkung 1:** In allen drei Fällen bezeichnen wir den Abstand mit  $d(x, y)$ . Das ist konsequent, denn Formel (1) kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2}. \quad (1^*)$$

Die Formeln (1) und (2) sind spezielle Fälle von (3), denn die Punkte aus  $E_1$  haben die Form  $(x_1, 0, 0)$  und sind somit Sonderfälle der Punkte aus  $E_3$ ; entsprechend haben die Punkte aus  $E_2$ , die Form  $(x_1, x_2, 0)$ .

Wir nennen  $d(x, y)$  *euklidischen Abstand* und betrachten nun ausführlich seine Eigenschaften:

**A** Vor allem ist  $d(x, y)$  stets eine nichtnegative Zahl, d. h.

$$d(x, y) \geq 0, \quad (4)$$

wobei der Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $y$  genau dann gleich Null ist, wenn beide Punkte identisch sind:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \quad (5)$$

Wir erinnern uns, daß die Identität der Punkte  $x = (x_1, x_2, x_3)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3)$  bedeutet, daß  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$  gilt, und wir zeigen die Gültigkeit von (4) und (5): Die Ungleichung (4) folgt aus der Definition (3) des Abstandes  $d(x, y)$ ; für  $x = y$  ist nach dieser Definition die Zahl  $d(x, y)$  gleich Null. Ist dagegen  $d(x, y) = 0$ , so gilt auch  $[d(x, y)]^2 = 0$ , und aus (3) folgt  $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 0$ . Diese Summe dreier nichtnegativer Zahlen ist genau dann gleich Null, wenn jeder einzelne Summand gleich Null ist, also für  $x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, x_3 - y_3 = 0$ . Folglich ist  $x_i = y_i$  für  $i = 1, 2, 3$ , und somit gilt  $x = y$ .

**B** Außerdem ist der Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $y$  gleich dem Abstand des Punktes  $y$  vom Punkt  $x$ :

$$d(x, y) = d(y, x). \quad (6)$$

Der Beweis folgt wieder aus der Definition von  $d(x, y)$ :

Weil  $(x_i - y_i)^2 = [-(y_i - x_i)]^2 = (y_i - x_i)^2$  für  $i = 1, 2, 3$  ist, erhalten wir die Gleichung (6) direkt aus (3).

**C** In einem Dreieck mit den Eckpunkten  $x, y$  und  $z$  ist die Länge einer Seite nicht größer als die Summe der Längen der beiden übrigen Seiten.<sup>3)</sup> Mit anderen Worten, der Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $z$  ist nicht größer als die Summe aus dem Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $y$  und dem Abstand des Punktes  $y$  vom Punkt  $z$ . Es ist möglich, dies in Form der sogenannten *Dreiecksungleichung* aufzuschreiben:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \quad (7)$$

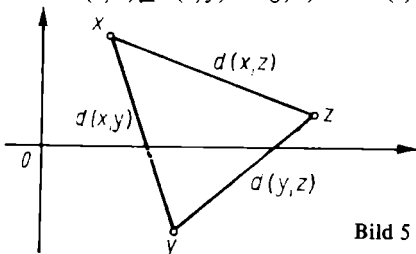


Bild 5

Die Gültigkeit dieser Ungleichung wird zwar durch Bild 5 verdeutlicht, wir werden uns aber nicht allein auf die Anschauung verlassen, damit es uns nicht wie jenem eingangs erwähnten Touristen ergeht. Wir beweisen daher die Gültigkeit der Ungleichung (7) und stellen uns dazu erst einmal einige Hilfsmittel bereit:

**Erster Exkurs:** Es seien  $a$  und  $b$  beliebige reelle Zahlen. Dann ist auch die Zahl  $(a - b)$  reell, und folglich ist die Zahl  $(a - b)^2$  nichtnegativ, d. h.

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

daraus folgt  $2ab \leq a^2 + b^2$

$$\text{bzw. } ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Diese Ungleichung gilt für je zwei reelle Zahlen  $a, b$ . Wählen wir spezielle  $a$  und  $b$ , beispielsweise  $a = \sqrt{\alpha}$  und  $b = \sqrt{\beta}$  mit den nichtnegativen Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ , so erhalten wir die Ungleichung

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \quad (8)$$

Es seien auch  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  nichtnegative Zahlen, und wir definieren die positiven Zahlen

$$A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \text{ und } B = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2.$$

Wählen wir in (8)  $\alpha = \alpha_i^2/A$  und  $\beta = \beta_i^2/B$ , so erhalten wir für  $i = 1, 2, 3$  die Ungleichungen

$$\frac{\alpha_i \beta_i}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_i^2}{A} + \frac{\beta_i^2}{B} \right),$$

$$\frac{\alpha_2 \beta_2}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2^2}{A} + \frac{\beta_2^2}{B} \right),$$

$$\frac{\alpha_3 \beta_3}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_3^2}{B} \right),$$

und durch Addition auf beiden Seiten entsteht die Ungleichung

$$\frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{B} \right) = 1$$

(die letzte Gleichung folgt aus der obengenannten Definition der Zahlen  $A$  und  $B$ ).

Nach Multiplikation mit der nichtnegativen Zahl  $\sqrt{AB}$  erhalten wir dann die sogenannte *Höldersche<sup>4)</sup> Ungleichung*

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{\frac{1}{2}} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle reellen Zahlen  $\alpha_i$  und  $\beta_i$ . Wir haben zwar bei dieser Herleitung verlangt, daß  $A > 0$  und  $B > 0$  seien, jedoch gilt (9) natürlich auch für  $A = 0$  und  $B = 0$ . Die Ungleichung hat dann die Form  $0 \leq 0$ . (Man beweise das!) Aus der Ungleichung (9) folgt eine weitere wichtige Beziehung, die sogenannte *Minkowskische<sup>5)</sup> Ungleichung*

$$\sqrt{(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2} \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \quad (10)$$

welche für alle reellen Zahlen  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  gilt.

Um die Gültigkeit dieser Ungleichung (10) zu zeigen, setzen wir

$$C = (\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2$$

und können schreiben

$$C = [\gamma_1(\gamma_1 + \delta_1) + \gamma_2(\gamma_2 + \delta_2) + \gamma_3(\gamma_3 + \delta_3)] + [\delta_1(\gamma_1 + \delta_1) + \delta_2(\gamma_2 + \delta_2) + \delta_3(\gamma_3 + \delta_3)].$$

Wenden wir nun auf die zwei Ausdrücke in den eckigen Klammern jeweils die Höldersche Ungleichung (9) an (in der ersten Klammer steht  $\gamma_i$  für  $\alpha_i$ ,  $(\gamma_i + \delta_i)$  für  $\beta_i$  usw., d. h., allgemein gilt  $\alpha_i = \gamma_i$  und  $\beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$ ; für die zweite Klammer gilt entsprechend  $\alpha_i = \delta_i$  und  $\beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$ , für  $i = 1, 2, 3$ ), dann erhalten wir

$$C \leq (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}} [(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}} [(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

$$= \sqrt{C} \left[ (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}} + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Für  $C = 0$  gilt die Ungleichung (10). Ist  $C \neq 0$  (nach Definition gilt dann  $C > 0$ ), so genügt es, die vorhergehende Ungleichung durch die Zahl  $\sqrt{C} > 0$  zu dividieren, und wir erhalten sofort die Minkowskische Ungleichung (10).

Ende des ersten Exkurses

Nun können wir auch die Dreiecksungleichung (7) beweisen:

Diese ergibt sich aus (10), wenn wir  $\gamma_i = x_i - y_i$  und  $\delta_i = y_i - z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , setzen, denn dann ist  $\gamma_1 + \delta_1 = x_i - z_i$ , und es gilt

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2}.$$

Unter Verwendung der Punkte  $x, y$  und  $z$  entspricht dies der Dreiecksungleichung (7).

Fassen wir die drei Eigenschaften des euklidischen Abstandes zusammen, welche wir bereits bewiesen haben:

- A**  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- B**  $d(x, y) = d(y, x)$  für je zwei Punkte  $x, y$ ,
- C**  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  für je drei Punkte  $x, y, z$ .

**Beispiel 1:** Kehren wir zu unserem Touristen und zu seinem blinden Vertrauen zur Landkarte zurück. Er verstand unter der Entfernung zweier Punkte des  $E_3$  den euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte in der Ebene  $E_2$ , d. h. auf der Landkarte.

Wir verzichten auf eine weitere Dimension und definieren einen neuen Abstand  $t(x, y)$  als euklidischen Abstand der Bildpunkte  $x_1$  und  $y_1$  auf der entsprechenden Achse (siehe dazu Bild 6):

$$t(x, y) = |x_1 - y_1|. \quad (11)$$

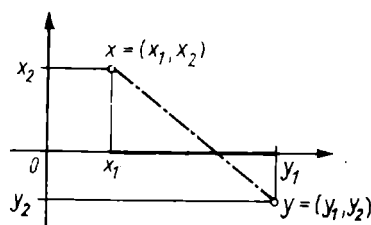


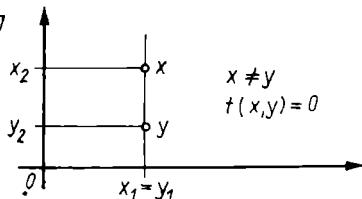
Bild 6

Hat dieser neue Abstand in der Ebene wieder die Eigenschaften A bis C? Die Eigenschaften B und C sind offensichtlich erfüllt, denn für

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \text{ und } z = (z_1, z_2) \text{ gilt} \\ t(x, y) &= |x_1 - y_1| = |(y_1 - x_1)| \\ &= |y_1 - x_1| = t(y, x) \text{ und} \\ t(x, z) &= |x_1 - z_1| = |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| \\ &= t(x, y) + t(y, z). \end{aligned}$$

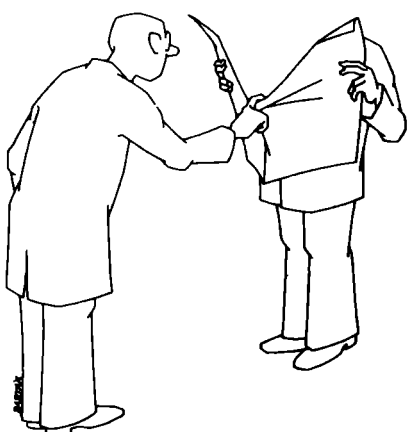
Es ist auch  $t(x, y) \geq 0$ , und für  $x = y$  gilt  $t(x, y) = 0$ . Die Implikation  $\Rightarrow$  aus Eigenschaft A ist jedoch nicht erfüllt, denn obwohl die Punkte  $x = (x_1, x_2)$  und  $y = (x_1, y_2)$  für  $x_2 \neq y_2$  verschieden sind, gilt  $t(x, y) = |x_1 - x_1| = 0$  (siehe Bild 7).

Bild 7



A. Kufner

- 1) Euklid von Alexandria (365? bis 300? v. u. Z.), Mathematiker, soll hauptsächlich in Alexandria gewirkt haben.
- 2) Der Leser beachte, daß im Bild auf der waagerechten Achse jeweils die ersten Koordinaten und auf der senkrechten Achse jeweils die zweiten Koordinaten der Punkte  $x$  und  $y$  abgetragen werden.
- 3) Wenn alle drei Punkte auf einer Geraden liegen, kann dieses Dreieck auch entarten. In  $E_1$  ist dies immer so.
- 4) Otto Hölder (1859 bis 1937), Mathematiker, wirkte hauptsächlich in Leipzig.
- 5) Hermann Minkowski (1864 bis 1909), Mathematiker, wirkte hauptsächlich in Zürich und Göttingen.



Miroslav Barták, ČSSR

## Eine Aufgabe von Prof. Emil Kraemer

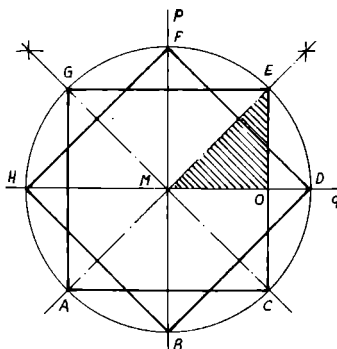
Karls-Universität Prag  
Chefredakteur der mathematisch/  
physikalischen Umschau (rozhledy)

▲ 2491 ▲ Als Projektion ist das Parallelogramm  $A'C'E'G'$  gegeben, dessen Eckpunkte die Parallelprojektionen der nicht- benachbarten Eckpunkte  $A, C, E, G$  eines regelmäßigen Achtecks  $ABCDEFGH$  sind. Konstruiert mittels Parallelprojektion das vollständige Bild dieses Achtecks!

### Lösung

Vereinfachte Lösung des Schülers Jaroslav Smejkal, Klasse 4A6, Velké Meziříčí, Bezirk Südmähren.

Bild 1



Die Punkte  $A, C, E, G$  sind Eckpunkte eines Quadrats, ebenso auch die Punkte  $B, D, F, H$  (siehe Bild 1). Die Diagonalen  $AE$  und  $CG$  des ersten Quadrats und die Diagonalen  $BF, DH$  des zweiten Quadrats gehen durch den Mittelpunkt  $M$  des gegebenen Achtecks.

Gleichzeitig gilt

$$p = BF \parallel AG, \quad q = DH \parallel AC \quad (1)$$

$$\text{und } BD \parallel HF \parallel AE. \quad (2)$$

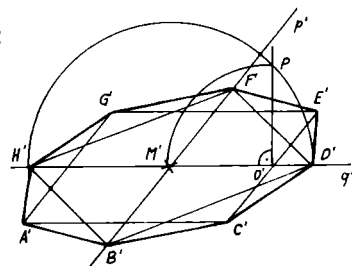
Es sei  $O$  der Schnittpunkt der aufeinander senkrecht stehenden Geraden  $q = DH$  und  $CE$ , es sei  $\angle OME = 45^\circ$ ; dann ist  $ME$  die Hypotenuse des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks  $OME$ . Nach dem Satz von Pythagoras gilt  $|ME|^2 = 2|MO|^2$ , ferner ist

$$\frac{|MO|}{|MD|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Bei der Parallelprojektion bleibt die Eigenschaft Parallelität von Geraden erhalten (sofern diese Geraden nicht die Projektionsrichtung darstellen). Deshalb ist die Projektion des Quadrats  $ACEG$  das Parallelogramm  $A'C'E'G'$ ; der Schnittpunkt  $M'$  seiner Diagonalen ist die Projektion des Mittelpunktes  $M$  des gegebenen Achtecks (siehe Bild 2). Die Projektionen der Gera-

den  $p = BF, q = DH$ , für welche die Beziehung (1) gilt und die durch den Punkt  $M$  gehen, sind die Geraden  $p' \parallel A'G', q' \parallel A'C'$ , die durch den Punkt  $M'$  gehen. Die Projektion des Schnittpunktes  $O$  der Geraden  $q$  und  $CE$  ist der Schnittpunkt  $O'$  der Geraden  $q'$  und  $C'E'$ .

Bild 2



Bei der Parallelprojektion bleibt auch das Verhältnis der Längen von Strecken erhalten, die auf einer Geraden liegen (vgl. obige Einschränkung). Deshalb gilt für die Länge der Projektionen  $M'O', M'D'$  der Strecken  $MO, MD$  nach (3) die Beziehung

$$\frac{|M'O'|}{|M'D'|} = \frac{|MO|}{|MD|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wir konstruieren also in Bild 2 das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck  $M'O'P$  mit der Hypotenuse  $M'P$  und auf dem Strahl  $M'O'$  den Punkt  $D'$  derart, daß  $|M'O'| = |M'P|$ . Die Projektion des Punktes  $H$  ist der Punkt  $H'$ , der symmetrisch zum Punkt  $D'$  bezüglich des Mittelpunktes  $M'$  liegt. Gemäß (2) gilt dann  $B'D' \parallel H'F' \parallel A'E'$ .



# rozhledy

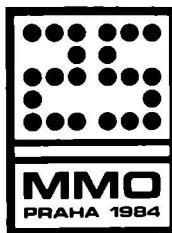
## MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamendní Za zásluhy o výstavbu

Der Verein tschechischer und später tschechoslowakischer Mathematiker und Physiker begann in den 70er Jahren des 19. Jh. eine Zeitschrift für die Pflege der Mathematik herauszugeben. Diese enthielt auch eine Beilage, die für Schüler der damaligen Mittel- und Oberschulen bestimmt war. Aus ihr ging 1920 die selbständige *Mathematisch-naturwissenschaftliche Umschau* hervor. Neben klassischen Partien der Mathematik werden überwiegend Artikel mit moderner Thematik veröffentlicht. In der Geometrie finden wir vor allem Beiträge, die in der technischen Praxis Anwendung finden. Die Physik gibt Anleitungen aus sich neu bildenden Fachgebieten. Die Wettbewerbsbewegung der Mittel- und Oberschulen wird durch Preisausschreiben gefördert. Eine besondere Rubrik wird den jüngsten Lesern gewidmet. Seit über zwei Jahrzehnten bestehen freundschaftliche Beziehungen zwischen *rozhledy* und *alpha*.

# XXV. Internationale Mathematikolympiade

Prag,  
1. bis 10. Juli 1984



## Aufgaben

1. Tag (4. Juli 1984)

▲ 1 ▲ Es seien  $x, y$  und  $z$  nichtnegative Zahlen, für die  $x + y + z = 1$  gilt. Man beweise die Ungleichung:

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

▲ 2 ▲ Man finde ein Paar  $a, b$  positiver ganzer Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

- (1) Die Zahl  $ab(a+b)$  ist nicht durch 7 teilbar,
  - (2)  $(a+b)^7 - a^7 - b^7$  ist durch  $7^7$  teilbar.
- Begründen Sie Ihre Antwort!

▲ 3 ▲ In der Ebene seien zwei verschiedene Punkte  $O, A$  gegeben.

Für jeden Punkt  $X \neq O$  der Ebene sei  $w(X)$  das Bogenmaß des Winkels  $\angle AOX$  ( $0 \leq w(X) < 2\pi$ , entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen), und  $C(X)$  bezeichne die Kreislinie mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius der Länge  $\overline{OX} + \frac{w(X)}{OX}$ . Seien endlich viele Farben gegeben und jeder Punkt der Ebene sei mit einer von ihnen gefärbt. Man beweise, daß es einen Punkt  $Y$  gibt, für den  $w(Y) > 0$  gilt und dessen Farbe auf der Kreislinie  $C(Y)$  vorkommt.

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Pro Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

2. Tag (5. Juli 1984)

▲ 4 ▲ In einem konvexen Viereck  $ABCD$  sei die Gerade  $CD$  eine Tangente an den Kreis mit dem Durchmesser  $[AB]$ .

Man beweise, daß die Gerade  $AB$  dann und nur dann den Kreis mit dem Durchmesser  $[CD]$  berührt, wenn die Geraden  $BC$  und  $AD$  parallel sind.

▲ 5 ▲ Ein ebenes konvexes  $n$ -Eck ( $n > 3$ ) habe den Umfang  $p$  und die Summe der Längen aller Diagonalen sei  $d$ .

Beweise:

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2$$

( $\lfloor x \rfloor$  bedeute die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich  $x$  ist.)

▲ 6 ▲ Es seien  $a, b, c, d$  ungerade ganze Zahlen, so daß

- (1)  $0 < a < b < c < d$ ,
- (2)  $ad = bc$  und
- (3)  $a + d = 2^k$  und  $b + c = 2^m$  für passende ganze Zahlen  $k, m$  gilt.

Beweisen Sie, daß  $a = 1$  ist!

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Pro Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

● An der XXV. IMO nahmen 180 Jungen und 12 Mädchen teil.

● Jeder Teilnehmer konnte – bei sechs Aufgaben zu je 7 Punkten – maximal 42 Punkte erreichen. Die tatsächlich erreichte durchschnittliche Punktzahl lag bei 17,8 Punkten. 1. Preis: 42 bis 40 Punkte, 2. Preis: 39 bis 36 Punkte, 3. Preis: 25 bis 17 Punkte.

● Die feierliche Abschlußzeremonie fand im traditionsreichen Festsaal der Karls-Universität, dem *Karolinum*, statt. Die Preise wurden vom Minister für Schulwesen der ČSSR überreicht.

● Der finnische Delegationsleiter lud alle Teilnehmerländer zur XXVI. IMO (Juli 1985) nach Helsinki ein.

## alpha stellt vor:

Eine elegante Lösung der 1. Aufgabe von Jörg Stahnke (DDR):

Die linke Ungleichung ist wegen  $0 \leq x, y, z \leq 1$  sehr einfach zu zeigen:

$$xy + xz + yz - 2xyz = xy(1-z) + xz(1-y) + yz \geq 0.$$

Zum Beweis der rechten Ungleichung können wir o.B.d.A.

$z \geq y \geq x \geq 0$  annehmen.

1. Fall: Ist  $z \leq \frac{1}{2}$ , so folgt  $1 - 2x \geq 0$ ,

$1 - 2y \geq 0$ ,  $1 - 2z \geq 0$  und nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(1-2x)(1-2y)(1-2z)} \\ & \leq \frac{(1-2x) + (1-2y) + (1-2z)}{3} \\ & = \frac{3 - 2(x+y+z)}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

wegen  $x + y + z = 1$ . Weiter folgt

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leq \frac{1}{27}, \quad (1)$$

$$1 - 2(x+y+z) + 4(xy+xz+yz) - 8xyz \leq \frac{1}{27},$$

$$4(xy+xz+yz-2xyz) \leq \frac{28}{27}$$

und die Behauptung.

2. Fall: Ist  $z > \frac{1}{2}$ , so folgt  $x, y < \frac{1}{2}$  wegen

$$x + y + z = 1, (1-2x)(1-2y) \times (1-2z) < 0 \text{ und damit auch (1).}$$

Damit ist der Beweis schon erbracht.

## Wettbewerbsatmosphäre



Aus dem Kulturprogramm der XXV. IMO: Stadtrundfahrt durch Prag; Besuch der „Laterna magica“, des „Schwarzen Theaters“, der Ausstellung „Glas 84“, einer Käthekollwitz-Ausstellung im DDR-Kulturzentrum, der Nationalgalerie, Höhepunkt: Tagesexkursion aller IMO-Teilnehmer – Delegationsleiter und Schüler – zur Burg Karlštejn (unser Foto)



Mitarbeiter der Fakultät für Mathematik der Päd. Hochschule Banská Bystrica/Bratislava hatten alle IMO-Teilnehmer zu einem unterhaltsamen Nachmittag unter dem Motto: *Mathematical Games* (Math. Spiele) eingeladen. In fünf Räumen, vorbereitet für die Sprachgruppen russisch, englisch, französisch, spanisch und deutsch, wurden logische Spiele in Wettbewerbsgruppen durchgeführt. „alpha“ wird einige interessante Spiele in den nächsten Heften vorstellen.



Die siegreiche sowjetische Mannschaft



alpha stellt vor: Die DDR-Mannschaft: Karin Gröger, Alexander Schmidt, Ingo Witt, alle EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Oliver Geupel, EOS *Romain Rolland*, Dresden; Arnd Rösch, Spezialklasse Mathematik, TH Karl-Marx-Stadt; Jörg Stahnke, EOS *Willi Sänger*, Pasewalk.

Karin Gröger erhielt einen 1. Preis. Sie ist damit einziges Mädchen, das auf einer IMO diese höchste Auszeichnung erhielt. Sie studiert ab September 1984 an der Karl-Marx-Universität Leipzig Mathematik.

### Schulwesen in der ČSSR

Das tschechoslowakische Schulwesen kann auf eine althergebrachte Tradition zurückblicken. Die Prager Karlsuniversität wurde bereits im Jahre 1348 gegründet. Die Grundlagen des modernen Schulwesens der Tschechoslowakei schuf im 17. Jahrhundert der weltbekannte Pädagoge Jan Anos Komenský (Komenius). Schulpflicht besteht schon über 200 Jahre, aber erst die sozialistische Tschechoslowakei gewährte allen das Recht auf kostenlose Bildung, einschließlich Fach- und Hochschulen.

Das System des tschechoslowakischen Schulwesens besteht aus neunjährigen Grundschulen, zwei- bis vierjährigen allgemeinbildenden oder spezialisierten Oberschulen, sowie vier bis fünfjährigen Hochschulen humanistischer, technischer oder künstlerischer Fachrichtung. Mathematikolympiaden werden seit 1951 durchgeführt. Im Vergleich zu 1945 hat sich die Schülerzahl der Fachschulen verdoppelt, und in der Slowakischen Sozialistischen Republik fast vervierfacht. Im Vergleich mit 1936 hat sich die Anzahl der Hochschulstuden-

Zu Beginn der IMO wurde das in Jugoslawien im Jahre 1977 erstmals durchgeführte Symposium zu Fragen der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik durch 10 Vorträge und Diskussionen fortgeführt. Eine wichtige Rolle spielten dabei nationale Mathematikolympiaden bzw. regionale Mathematikolympiaden, z. B. VR Polen – Österreich, Olympiaden nordafrikanischer Länder. Eine Ausstellung mit Literatur, Aufgabensammlungen, Urkunden usw. gab einen umfassenden Einblick in die außerunterrichtliche Tätigkeit auf den verschiedensten Ebenen, zusammengestellt aus Materialien der meisten Teilnehmerländer (siehe Foto).

ten vervierfacht. Infolge der wissenschaftlichen und technischen Revolution nimmt Fachausbildung in der ČSSR ständig an Bedeutung zu. Die Hälfte sämtlicher Studenten studiert in neuen Schulen, die der sozialistische Staat nach dem zweiten Weltkrieg errichtet hat. Auf je 1000 Einwohner entfallen fast 250 mit Mittel- oder Hochschulbildung.

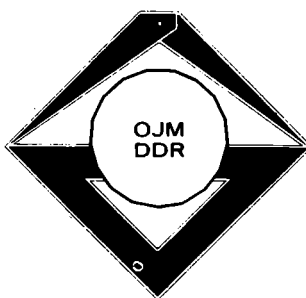
### Inoffizielle Länderwertung der XXV. IMO

|                 | 1. Pr. | 2. | 3. | Punkte |                                |    |    |      |
|-----------------|--------|----|----|--------|--------------------------------|----|----|------|
| Sowjetunion     | 5      | 1  | –  | 235    | Brasilien                      | –  | –  | 3 92 |
| VR Bulgarien    | 2      | 3  | 1  | 203    | Griechenland                   | –  | 1  | – 88 |
| SR Rumänien     | 2      | 2  | 2  | 199    | Kanada                         | –  | –  | 2 83 |
| Ungarische VR   | 1      | 4  | 1  | 195    | Kolumbien                      | –  | –  | 2 80 |
| USA             | 1      | 4  | 1  | 195    | Kuba                           | –  | –  | 1 67 |
| Großbritannien  | 1      | 3  | 1  | 169    | Belgien                        | –  | –  | 1 56 |
| Vietnam         | 1      | 2  | 3  | 162    | Marokko                        | –  | –  | 1 56 |
| DDR             | 1      | 2  | 3  | 161    | Schweden                       | –  | –  | – 53 |
| BRD             | –      | 2  | 4  | 150    | Zypern                         | –  | –  | 1 47 |
| Mongolische VR  | –      | 3  | 2  | 146    | Spanien                        | –  | –  | – 43 |
| VR Polen        | –      | 1  | 5  | 140    | Algerien (4)*                  | –  | –  | – 36 |
| Frankreich      | –      | 2  | 2  | 126    | Finnland                       | –  | –  | – 31 |
| ČSSR            | –      | 2  | 2  | 125    | Tunesien                       | –  | –  | – 29 |
| SFR Jugoslawien | –      | –  | 4  | 105    | Norwegen (1)*                  | –  | –  | 1 24 |
| Australien      | –      | 1  | 2  | 103    | Luxemburg (1)*                 | –  | –  | 1 22 |
| Österreich      | –      | 1  | 2  | 97     | Kuweit                         | –  | –  | – 9  |
| Niederlande     | –      | 1  | 2  | 93     | Italien                        | –  | –  | – 0  |
|                 |        |    |    |        | Pro Land 6 Teilnehmer, außer * | 14 | 35 | 50   |

# XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, Mai 1984



### Olympiadeklasse 10

231041 Stellen Sie fest, ob es Quadratzahlen  $z$  gibt, die sich in der Form  $z = n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 4n^2 + 12n + 3$  mit einer natürlichen Zahl  $n$  darstellen lassen!

231042 „Konstruieren Sie ein Dreieck aus  $b - c = 10$  cm,  $\beta - \gamma = 80^\circ$  und der Differenz  $u - v = 4$  cm der Winkelhalbierenden-Abschnitte  $u, v$  von  $a$ !“

Mit dieser Kurzfassung ist folgende Aufgabe gestellt: Gegeben seien die Längen  $d = 10$  cm,  $e = 4$  cm und die Winkelgröße  $\delta = 80^\circ$ . Konstruieren Sie ein Dreieck  $ABC$  mit folgenden Eigenschaften: Wenn die Winkelhalbierende von  $\angle BAC$  die Seite  $BC$  in  $D$  schneidet, und wenn  $b, c, u, v$  die Längen der Strecken  $AC, AB, CD, BD$  sowie  $\beta, \gamma$  die Größen des Winkel  $\angle ABC, \angle ACB$  sind, so gilt

$$b - c = d, \quad u - v = e, \quad \beta - \gamma = \delta.$$

Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Stellen Sie fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck  $ABC$  bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 231043A und 231043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

231043A Von einem Tetraeder  $ABCD$  wird  $\overline{BC} = \overline{AD}$ ,  $\overline{CA} = \overline{BD}$  und  $\overline{AB} = \overline{CD}$  vorausgesetzt. Die Mittelpunkte der Strecken  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD}$  seien in dieser Reihenfolge  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ . Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen ein gemeinsamer Punkt  $P$  der drei Strecken  $\overline{M_1M_4}, \overline{M_2M_5}, \overline{M_3M_6}$ , existiert und daß dieser Punkt  $P$  der Mittelpunkt der Umkugel von  $ABCD$  (d. h. der durch die vier Punkte  $A, B, C, D$  gehenden Kugel) ist!

231043B a) Geben Sie eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion  $f$  an, die für alle reellen Zahlen  $x$  die Eigenschaft

$$f(x+1) = f(x) + (-1)^{U(x)} \quad (1)$$

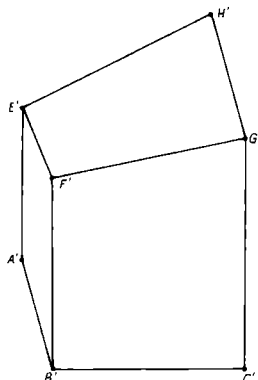
hat! Dabei bezeichnet, wenn  $z$  eine reelle Zahl ist,  $[z]$  diejenige ganze Zahl  $[z] = g$ , für die  $g \leq z < g+1$  gilt. Beweisen Sie, daß die von Ihnen angegebene Funktion  $f$  die Eigenschaft (1) hat! Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion  $f$  im Intervall aller  $x$ , für die  $-3 \leq x \leq 3$  ist!

b) Beweisen Sie, daß jede Funktion  $f$  mit der Eigenschaft (1) periodisch mit der Periode 2 sein muß, d. h., daß sie für jedes

reelle  $x$  die Gleichung  $f(x+2) = f(x)$  erfüllt!

231044 Auf dem Arbeitsblatt sind von einem Körper  $K$  die bei schräger Parallelprojektion entstandenen Bilder der sichtbaren Ecken und Kanten abgebildet. Ferner wird vorausgesetzt, daß der Körper  $K$  insgesamt von sechs ebenen Vierecken  $ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH$  und  $EFGH$  begrenzt wird und daß die vier Kanten  $AE, BF, CG$  und  $DH$  sämtlich zueinander parallel sind.

Konstruieren Sie das Bild  $D'$  der nicht sichtbaren Ecke  $D$  bei der genannten Parallelprojektion! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, daß der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt  $D'$  das Bild der genannten Ecke  $D$  ist!



231045 Ermitteln Sie alle diejenigen Winkelgrößen  $x$ , für die

$$0 \leq x \leq 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{und} \quad (2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x) \cdot \sin x = 1 \quad (2)$$

gilt!

231046 Von einem Achteck  $ABCDEFGH$  werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

- (1) Die Maßzahlen der Längen jeder der Achteckseiten sind rationale Zahlen.
  - (2) Die Innenwinkel des Achtecks haben abwechselnd die Größen  $150^\circ$  und  $120^\circ$ .
- Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen folgt: In dem Achteck  $ABCDEFGH$  gilt
- $$\overline{AB} = \overline{EF}, \quad \overline{BC} = \overline{FG}, \quad \overline{CD} = \overline{GH} \quad \text{und} \quad \overline{DE} = \overline{HA}.$$

### Olympiadeklassen 11/12

231241 Es sei  $(x_n)$  diejenige Folge von reellen Zahlen, für die

$$x_1 = 1$$

$$\text{und} \quad x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gilt. Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

231242 a) Man beweise, daß es eine Menge  $M$  mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3), (4) gibt:

- (1) Jedes Element von  $M$  ist eine natürliche Zahl.
- (2) Das kleinste Element von  $M$  ist die Zahl 1.
- (3) Das größte Element von  $M$  ist die Zahl 100.
- (4) Jedes Element von  $M$  mit Ausnahme der Zahl 1 ist die Summe von zwei Elementen von  $M$  oder das Doppelte eines Elementes von  $M$ .

b) Man ermittle eine Menge  $M$ , die die Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt und dabei möglichst wenig Elemente hat. Daß die ermittelte Menge  $M$  diesen Anforderungen genügt, ist zu beweisen.

231243 Vier Mathematiker  $T, D, S, P$  einigen sich auf ein Ratespiel nach folgenden Regeln:  $T$  denkt sich ein Tripel  $(x, y, z)$  ganzer Zahlen mit  $1 \leq x \leq y \leq z$  und  $x + y + z \leq 10$ . Dann soll er  $D$  die Zahl  $d = y - x$ ,  $S$  die Zahl  $s = x + y + z$  und  $P$  die Zahl  $p = xyz$  mitteilen, jeweils so, daß die beiden anderen den Wert der mitgeteilten Zahl nicht erfahren. Danach sollen sich  $D, S$  und  $P$  über ihre Informationen unterhalten.

Untersuchen Sie, ob es ein Tripel  $(x, y, z)$  gibt, mit dem bei einer Durchführung dieses Spiels (nach Mitteilung von  $d, s$  und  $p$ ) das folgende Gespräch stattfinden kann:

$P$ : „Ich kann das Tripel  $(x, y, z)$  nicht eindeutig ermitteln.“

$S$ : „Das wußte ich schon, bevor Sie es ausgesprochen haben.“

$P$ : „Jetzt kann ich das Tripel ermitteln.“

$D$ : „Ich auch.“

$S$ : „Ich jetzt auch.“

Wenn es ein solches Tripel gibt, stellen Sie fest, ob es durch dieses Gespräch eindeutig bestimmt ist! Ist das der Fall, so geben Sie dieses Tripel an!

231244 Seien  $P_1, P_2, \dots, P_n$  verschiedene Punkte in der Ebene,  $n \geq 2$ . Man beweise:

$$\max_{i,j} \overline{P_i P_j} > \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{n} - 1) \cdot \min_{i,j} \overline{P_i P_j}.$$

$$1 \leq i < j \leq n \quad 1 \leq i < j \leq n$$

231245 Man ermittle alle Funktionen  $f$ , die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen  $x$  definiert sind und die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (1) Für alle  $x_1, x_2$  mit  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0$  ist

$$f\left(\frac{1}{x_1 + x_2}\right) = f\left(\frac{1}{x_1}\right) + f\left(\frac{1}{x_2}\right).$$

- (2) Für alle  $x_1, x_2$  mit  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0$  ist

$$(x_1 + x_2) \cdot f(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2).$$

- (3) Es gilt  $f(1) = 1$ .

Von den nachstehenden Aufgaben  
231246A und 231246B ist genau eine aus-  
zuwählen und zu lösen:

231246A Über  $n$  Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen, wird vorausgesetzt, daß jedes Tetraeder, das vier dieser  $n$  Punkte als Ecke hat, einen Rauminhalt nicht größer als 1 besitzt.

Man beweise aus dieser Voraussetzung, daß es dann im Raum ein Tetraeder mit einem Rauminhalt nicht größer als 27 gibt, das alle  $n$  Punkte in seinem Innern oder auf seinem Rand enthält.

Anmerkung: In dieser Aufgabe wurde (bei der Angabe von Rauminhalten) einfachheitshalber auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet. In der Lösungsangabe verfähre man ebenso.

231246B Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl  $k$  mit  $k \geq 1$  und  $k$  natürliche Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , die nicht notwendig paarweise verschieden sind, gibt, so daß

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1984$$

$$\text{und } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$$

gilt. Falls das zutrifft, gebe man solche natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_k$  an.

## Preisträger der XXIII. OJM

Einen 1. Preis erhielten

in Olympiadeklasse 10:

Stefan Günther (Kl. 9), EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Ingo Warnke (Kl. 9), Erw. Spezialoberschule Kleinmachnow, Bez. Potsdam; Uta Hövel (Kl. 9), EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Jörg Wensch (Kl. 9), Friedensschule Köthen; Aicke Hinrichs (Kl. 9), A.-Diesterweg-OS Parchim; Kristin Fibian, 1. EOS *Ernst Thälmann*, Rostock; Carsten Schreiber, Spezialschule *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Antje Flechsig, OS Obercrinitz; Martin Welk (Kl. 8), 5. OS *Liselotte Hermann*, Eisenach; Jörg Jähnel (Kl. 9), Spezialschule *Carl Zeiß*, Jena;

in Olympiadeklassen 11/12:

Karin Gröger, Alexander Schmidt, Inge Witte, alle EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Oliver Geupel, EOS *Romain Rolland*, Dresden; Ulrich Meister (Kl. 11), EOS *A. Lachwig*, Ludwigsfelde; Mathias-Torsten Tok (Kl. 10), Juri-Gagarin-OS Leipzig; Johannes Waldmann (Kl. 10), W.-Seelenbinde-OS, Hermsdorf.

|           | 2. Preis | 3. Preis | Anerkennung |
|-----------|----------|----------|-------------|
| Kl. 10    | 7        | 11       | 19          |
| Kl. 11/12 | 7        | 16       | 16          |
|           | 14       | 27       | 35          |

Eine Urkunde für eine ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielten: Ulf Saalmann (Kl. 11), Spezialklasse der TH *Otto von Guericke*, Magdeburg und Thomas Vojta, EOS *Friedrich Engels*, Dresden.

## Anspruchsvolle Aufgaben

für alpha-Leser –  
überreicht  
durch IMO-Mannschaften

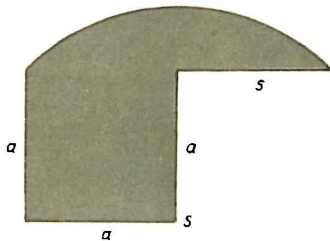
▲ 1 ▲ Aus 2000 Ziegelsteinen (Quadern) der Größe  $2 \times 2 \times 1$  wird ein Würfel der Größe  $20 \times 20 \times 20$  zusammengesetzt. Es ist zu zeigen: Es gibt eine Gerade  $g$ , die durch das Innere des Würfels verläuft, die aber nicht durch das Innere zweier der Ziegelsteine verläuft, die außerdem parallel zu einer der Würfelkanten liegt.

Vereinfachung für untere Klassen: Aus 128 Ziegelsteinen der Größe  $2 \times 2 \times 1$  wird ein Würfel der Größe  $8 \times 8 \times 8$  zusammengesetzt. Es ist zu zeigen: Es gibt ... (wie oben).

(Finnische Mannschaft)

▲ 2 ▲ Die Figur, bestehend aus einem Quadrat und einem Kreisabschnitt, ist in zwei kongruente Teilfiguren zu zerlegen. (Mittelpunkt des Kreisbogens:  $S$ )

(Jugoslawische Mannschaft)



▲ 3 ▲ Die Spieler  $A$  und  $B$  spielen folgendes Kreuzchenspiel. Sie setzen auf kariertem Papier abwechselnd Kreuze und Kreise, dabei setzt  $A$  bei jedem Zug zwei Kreuze und  $B$  bei jedem Zug einen Kreis. Kann  $A$  erreichen, daß 1982 Kreuze hintereinander zusammenhängend in einer Horizontalen stehen?

(Sowjetische Mannschaft)

▲ 4 ▲ Gegeben seien 6 Punkte  $A, B, C, A', B', C'$  in der Ebene, die folgenden Bedingungen genügen:

- $\overline{A'B} = \overline{A'C}$ ;  $\overline{B'A} = \overline{B'C}$ ;  $\overline{C'A} = \overline{C'B}$
- $\angle BA'C = 2\alpha$ ;  $\angle CB'A = 2\beta$ ;  $\angle AC'B = 2\gamma$  mit  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

Man zeige, daß dann

$$\angle A'B'C' = \beta; \angle B'C'A' = \gamma; \angle C'A'B' = \alpha \text{ gilt.}$$

(Rumänische Mannschaft)

▲ 5 ▲ Gegeben sei eine vierstellige Zahl, die nicht aus 4 gleichen Ziffern besteht. Bilde mit diesen Ziffern die größte und die kleinste vierstellige Zahl und subtrahiere beide! Man wiederhole das Verfahren siebenmal. Es ist zu zeigen: Irgendwann tritt 6174 auf.

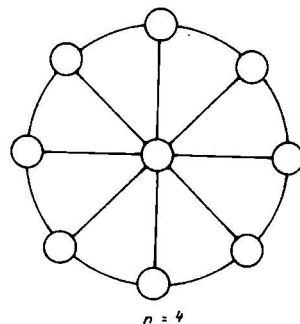
(Bulgarische Mannschaft)

▲ 6 ▲ Wie viele Kreuze kann man in ein  $n \times m$  Kästchen bestehendes Quadrat setzen, ohne daß 4 mit Kreuzchen belegte Kästchen die Endpunkte eines Rechtecks bilden?

(Holländische Mannschaft)

▲ 7 ▲ In die  $2n+1$  Felder sind die Zahlen von 1 bis  $2n+1$  einzusetzen, so daß die Summe in allen Diagonalen gleich ist und alle miteinander verbundene Zahlen der Peripherie relativ prim sind. Auf wieviel verschiedene Weisen können diese eingesetzt werden?

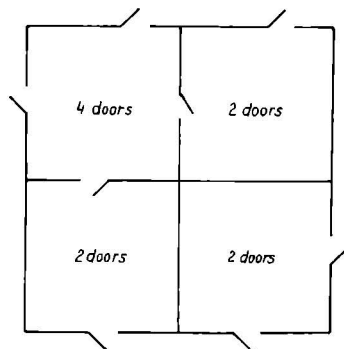
(Ungarische Mannschaft)



▲ 8 ▲  $ABC$  sei ein Dreieck und  $M, N, P$  seien in dieser Reihenfolge innere Punkte der Seiten  $AB, BC, CA$ .  $O_1, O_2, O_3$  seien die Mittelpunkte der Umkreise der Dreiecke  $MNB, NPC, PMA$ . Zeige  $\triangle ABC \sim \triangle O_1, O_2, O_3$ !

▲ 9 ▲ Erst übersetzen, dann knobeln! Prove: If the number of doors in each room is even, then the number of doors to the outside is also even.

(Englische Mannschaft)



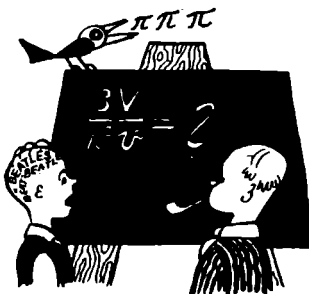
▲ 10 ▲ Man beweise, daß in einem Tangentenviereck die Mittelpunkte der beiden Diagonalen und der Inkreismittelpunkt auf einer Geraden liegen.

(DDR-Mannschaft)

# Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Aufgaben aus Freundesland

Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1985



Die 36 Aufgaben wurden dem slowakischen Buch *500 Riešených slovnych uloh z Matematiky* entnommen.

Die Autoren K. Križalkovič, A. Cuninka, O. Šedivý stellten 500 gelöste Textaufgaben aus dem täglichen Leben, der Ökonomie, der technischen Praxis, der Chemie, der Physik und auch der Unterhaltungsmathematik zusammen.

Die Aufgabengruppe der *alpha* stellte aus diesem Buch Probleme für die Leser zusammen und fügte Lösungen (siehe Heft 1/85) aus unserer Sicht hinzu.

Wir wünschen Freude und Erfolg!

## Mathematik

**Ma 5 ■ 2464** Schüler unternahmen eine Wanderung und legten in drei Tagen 65 km zurück. Am ersten Tag gingen sie doppelt soviel wie am dritten Tag. Am zweiten Tag legten sie 10 km weniger zurück als am ersten Tag. Wieviel Kilometer legten sie an jedem Tag zurück?

**Ma 5 ■ 2465** Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich sie mit 5 multipliziere und vom Produkt 20 subtrahiere, erhalte ich die Zahl 15. Welche Zahl habe ich mir ausgedacht?

**Ma 5 ■ 2466** 3 m Kunstfaserstoff und 4 m Wollstoff kosten zusammen 470 M, wobei 1 m Wollstoff um 30 M teurer ist als 1 m Kunstfaserstoff. Wieviel Mark kostet 1 m Wollstoff bzw. 1 m Kunstfaserstoff?

**Ma 5 ■ 2467** Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 4120, ihre Differenz 1280. Welche Zahlen sind das?

**Ma 5 ■ 2468** Ein 6 m langer Kupferdraht soll so in zwei Teile zerschnitten werden, daß der eine Teil 60 cm länger ist als der andere. Wie lang sind beide Teile zu wählen?

**Ma 5 ■ 2469** Beim Getreidetransport per Eisenbahn hat man in jedem Waggon je 10 t Getreide geladen. Es blieben 8 t Ge-

treide noch unverladen. Damit es nicht erforderlich wird, noch einen Waggon anzukuppeln, verteilte man die übriggebliebenen 8 t auf einige bereits beladene Waggon, und zwar so, daß auf diese je 2 t zusätzlich geladen wurden. Wieviel Tonnen betrug die Gesamtmasse des Getreides, wenn fünfmal soviel Waggon mit je 10 t Ladung wie Waggon mit einer Ladung von je 12 t vorhanden waren?

**Ma 6 ■ 2470** In einem Dreieck ist ein Winkel 4° größer als der zweite und 10° kleiner als der dritte Winkel. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

**Ma 6 ■ 2471** Die Summe zweier Zahlen beträgt 165. Vier Sechstel der ersten Zahl gleichen vier Fünftel der zweiten Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich?

**Ma 6 ■ 2472** Ein 80 m langer D-Zug, der eine durchschnittliche Geschwindigkeit von  $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  hat, fährt an einem stehenden Personenzug vorbei. Das Vorbeifahren dauert 10 s. Wie lang ist der Personenzug?

**Ma 6 ■ 2473** Von Bratislava bis Banská Bystrica fuhr ein LKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

Gleichzeitig mit diesem fuhr ein Autobus ab, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von  $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  fuhr und 1 h und 45 min früher als der LKW in Banská Bystrica ankam. Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen beiden Orten?

**Ma 6 ■ 2474** Die Summe dreier Zahlen, von denen jede nachfolgende um 3 größer ist als die vorhergehende, beträgt 63. Um welche Zahlen handelt es sich?

**Ma 7 ■ 2475** 50 Fleischkonserven zweier Sorten, und zwar Gänsefleisch für 5 M und Schweinefleisch für 3 M, kosten insgesamt 210 M. Wie viele Konserven Gänse- bzw. Schweinefleisch sind das?

## Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion *alpha*  
7027 Leipzig,  
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend nummeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1984/85 läuft von Heft 5/1984 bis Heft 2/1985. Zwischen dem 1. und 10. September 1985 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgeschickt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/85 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1984/85 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

|                                           |     |              |
|-------------------------------------------|-----|--------------|
| Thies Luther, 2600 Güstrow, Wendersstr 22 |     | Ma 7<br>1369 |
| Kersting-OS, Klasse 7                     |     |              |
| 30                                        | 150 |              |
| Prädikat:                                 |     |              |
| Lösung:                                   |     |              |

Ma 7 ■ 2476 Als man den berühmten griechischen Mathematiker Pythagoras fragte, wieviel Schüler in seine Schule gingen, antwortete er: „Die Hälfte der Schüler studiert Mathematik, ein Viertel Musik, ein Siebentel schweigt, und außerdem sind dort noch drei Frauen.“ Wieviel Schüler waren noch in seiner Schule?

Ma 7 ■ 2477 Ein Betrieb fertigte im 1. Quartal 200 t Erzeugnisse, davon 80 % in bester Qualität. Im 2. Quartal erzeugte er 300 t, davon 90 % bester Qualität. Wie hoch war die Produktion bester Qualität im ersten Halbjahr in Prozenten?

Ma 7 ■ 2478 Ein Fachschulstudent, der nach seinem Alter gefragt wurde, antwortete: „In zehn Jahren werde ich doppelt so alt sein, wie ich vor vier Jahren war.“ Wie alt ist dieser Student zum Zeitpunkt der Befragung gewesen?

Ma 8 ■ 2479 In einer Fabrik arbeiteten 1440 Werk-tätige. Für vorbildliche Leistungen erhielten  $18\frac{3}{4}\%$  aller Männer und

$22\frac{1}{2}\%$  aller Frauen Prämien. Die Betriebsleitung gab bekannt, daß 20 % aller Werk-tätigen prämiert wurden. Wieviel Männer bzw. Frauen waren in dieser Fabrik beschäftigt?

Ma 8 ■ 2480 Ein Wirbelsturm knickte einen Baum, dessen Höhe 14,5 m betrug, auf die Weise, daß seine Spitze 4,3 m über dem Erdboden hing. In welcher Höhe wurde der Baum geknickt?

Ma 8 ■ 2481 Um wieviel Prozent würde die Produktion sinken, wenn von einer achtstündigen auf eine siebenstündige Arbeitszeit übergegangen wird, ohne die Arbeitsproduktivität zu steigern? Um wieviel Prozent müßte die Arbeitsproduktivität ansteigen, damit die Produktion nicht absinkt?

Ma 8 ■ 2482 Eine Uhr zeigt die Zeit 9.00 Uhr an. Stelle fest, in wieviel Minuten der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt!

Ma 9 ■ 2483 Ein Arbeitsplatz wird durch 45 Glühlampen beleuchtet, die insgesamt eine Leistung von 2500 W umsetzen. Einige von ihnen sind 40-W-, die anderen 75-W-Glühlampen. Wie viele Glühlampen von jeder Sorte sind für die Beleuchtung des Arbeitsplatzes erforderlich?

Ma 9 ■ 2484 In einem bestimmten konvexen  $n$ -Eck sind 13 Diagonalen mehr als in einem  $(n-2)$ -Eck. Es ist zu ermitteln, für welches  $n$  diese Bedingung erfüllt ist.

Ma 9 ■ 2485 Die Oberflächen zweier Würfel, von denen einer eine um 22 cm längere Kante hat als der andere, unterscheiden sich um  $19\,272\text{ cm}^2$  voneinander. Es sind die Längen der Kanten beider Würfel zu berechnen.

Ma 9 ■ 2486 Bei der ersten Fahrt verbrauchte ein PKW 20 % des Kraftstoffes, der sich im Tank befand. Bei der zweiten

Fahrt wurden 10 % der Kraftstoffmenge verbraucht, die nach der ersten Fahrt übrig-blieb. Nach den beiden Fahrten verblieben noch 9 Liter Kraftstoff im Tank. Wieviel Liter Kraftstoff befanden sich vor Beginn der ersten Fahrt im Tank?

Ma 10/12 ■ 2487 Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist um 2 cm länger als die andere. Wie lang müssen die Katheten mindestens sein, wenn die Hypotenuse länger als 10 cm sein soll?

Ma 10/12 ■ 2488 Die Quersumme einer dreistelligen natürlichen Zahl beträgt 11. Die Summe der Quadrate der drei Grundziffern beträgt 45. Subtrahieren wir von der Zahl 198, so erhalten wir eine Zahl, in der sich die drei Grundziffern in umgekehrter Reihenfolge befinden. Um welche Zahl handelt es sich?

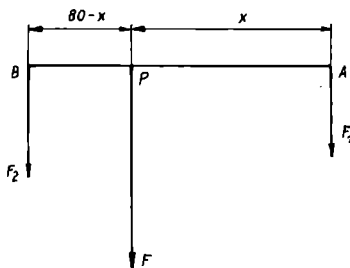
Ma 10/12 ■ 2489 Welche konvexen  $n$ -Ecke haben mindestens doppelt so viele Diagonalen wie Seiten?

Ma 10/12 ■ 2490 Der Preis einer Ware stieg um 10 %; dann sank er um 10 %. Um wieviel Prozent des ursprünglichen Warenpreises änderte sich der Preis?

## Physik

Ph 6 ■ 161 Ein Läufer läuft von der Stadt A nach der Stadt B, wobei er täglich 28 km zurücklegt. Gleichzeitig läuft ein anderer Läufer, der täglich 24 km zurücklegt, von B aus in Richtung A. Die Entfernung zwischen den Städten A und B beträgt 260 km. In wieviel Tagen treffen sich beide Läufer?

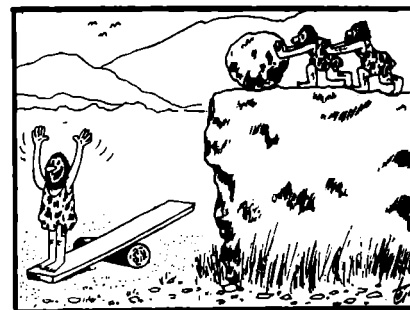
Ph 7 ■ 162 An einer Stange wirken zwei senkrecht angreifende Kräfte von 100 N und 150 N in einer Entfernung von 80 cm voneinander (siehe Bild). Welches ist ihre Resultierende, und wo liegt ihr Angriffspunkt, wenn diese Kräfte parallel wirken? (Die Masse der Stange bleibe unberücksichtigt.)



Ph 8 ■ 163 Eine Stange aus Stahl soll eine Zugkraft von  $150\,800\text{ N}$  aufnehmen. Welchen Durchmesser muß der Kreisquerschnitt bei zulässiger Zugbelastung von  $12\,000\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$  aufweisen?

Ph 9 ■ 164 Wenn anstelle von Buchenholz mit einer zulässigen Belastung von  $1000\text{ N}\cdot\text{cm}^{-2}$  Fichtenholz mit einer zuläs-

sigen Belastung von  $850\text{ N}\cdot\text{cm}^{-2}$  verwendet wird und wenn der Querschnitt um 20 % vergrößert wird, kann der Querschnitt mit  $2000\text{ N}$  mehr belastet werden. Wie groß war der Querschnitt des Buchenholzes, und wie hoch war seine Belastung?



Ph 10/12 ■ 165 Zwei Pumpen leeren aus einem Tankwagen in 3,75 h das darin enthaltene Öl. Mit der ersten Pumpe würde der Tankwagen 4 h schneller geleert als mit der zweiten Pumpe. In welcher Zeit wird der Tankwagen von jeder Pumpe allein geleert?

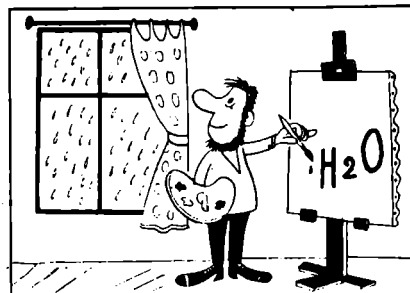
## Chemie

Ch 7 ■ 129 Schüler sammelten  $3200\text{ g}$  weiße Akazienblüten, gelbe Akazienblüten, Lindenblüten und Ahornblüten. Welche Mengen der Blüten einer jeden Art haben sie gesammelt, wenn sie das Dreifache an Lindenblüten im Vergleich zu weißen Akazienblüten, doppelt soviel Ahornblüten wie weiße Akazienblüten und Lindenblüten zusammen sowie  $1200\text{ g}$  gelbe Akazienblüten mehr als Ahornblüten gesammelt hatten?

Ch 8 ■ 130 Meerwasser enthält 5 % Salz. Wieviel Kilogramm Süßwasser muß man zu  $40\text{ kg}$  Meerwasser hinzugießen, damit der Salzgehalt 2 % beträgt?

Ch 9 ■ 131 Wieviel Prozent Kohlenstoff und Wasserstoff enthält Benzol, dessen Formel  $\text{C}_6\text{H}_6$  ist?

Ch 10/12 ■ 132 Wieviel 20 %ige und 45 %ige Schwefelsäure ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) müssen wir mischen, um  $250\text{ ml}$  35 %ige Schwefelsäure zu gewinnen?



# Tschechische praktische Rechenbücher aus dem 16. und 17. Jahrhundert

Im 16. Jahrhundert entwickelte sich ähnlich wie allgemein in Europa auch in den böhmischen Ländern das städtische Leben, besonders das Handwerk und der Handel. Dies erforderte Kenntnisse aus der praktischen Mathematik, besonders zu Aufgaben aus dem kaufmännischen Rechnen. Deshalb finden wir unter den ältesten in tschechischer Sprache gedruckten Büchern auch Rechenbücher. Sie waren für einen breiten Leserkreis gedacht, so für Schüler der Grundschulen wie auch für Handwerker und Kaufleute. Sie enthalten deshalb eine Anzahl praktischer Beispiele, die teilweise durch Abbildungen ergänzt sind, wie das im Bild 1 ersichtlich ist; es stammt aus dem ältesten tschechischen Rechenbuch.

## Wechsel slowe

ymienieni.



Item geden  
pruſſel tpeo  
niezomieny  
rychl mu/ry  
nien mi. 15.  
gr. alt. 6. 8.  
na muſſen  
ſtau muſſen  
deyuri. 3. S.  
muſſenſky za  
2. bila 8/ no  
taſka go mu  
ma dari kolk groſſuow ſtrybrnych / die  
leytakro rny 2. S. alt. dari mi 3. S. muſſ.  
go mi da 15 gr. alt. 6. S. alt. / 12. S. muſſ.  
geden gr. ſtrybrny / gedon gr. ſtry  
brny 8. S. alt. / Growney zadni počet  
ſproni in zagedno / rydicley gr. na S. 6.  
Enim prydey / ſlane wreguli takro facit  
13. gr. ſtrybrnych 10. S. 1. hl.  
2. S. alt. 3. S. muſſ. III. S. alt.

## Item geden byl cluzen bruhemu 6. funto minze

Dieses Rechenbuch von Ondřej Klatovský hat – wie damals viele Bücher – einen langen Titel, der umfassend den Inhalt deutlich machen soll (womit sicherlich auch ein Werbezweck verbunden war): *Neue Bücher über Berechnungen mit Ziffern und auf den Linien, dazu einige Regeln und Beispiele, auch für Münzwechsel wie kaufmännisch üblich – in kurzer und nützlicher Weise ausgewählt.*

Dieses Rechenbuch wurde erstmals 1530 in Nürnberg in der Druckerei von Friedrich Peypus gedruckt, später (1558) in Prag bei Jan Kantor. In der Einleitung des Buches hebt der Autor die Bedeutung der Mathematik und praktischer Berechnungen hervor. Er bekundet dies ähnlich wie Pythagoras „... wer nicht rechnen kann, der kann überhaupt nichts ...“, oder wie es Platon sagte „Der Unterschied zwischen Mensch und Tier besteht hauptsächlich darin, daß der Mensch rechnen kann ...“. Klatovský fügte im Rechenbuch auch didaktische Bemerkungen ein, so z. B. einen Hinweis des römischen Dichters Quintus Horatius Flacco „Wenn du jemanden etwas lehren willst, so tue dies in prägnanter Form, damit die Lernenden es schneller begreifen können und dann auch im Gedächtnis behalten ...“.

Den Inhalt hatte Klatovský in vier Abschnitte (Traktate) eingeteilt; zu jedem Abschnitt war einleitend ein Holzschnitt als Schmuck beigelegt, der eine Tätigkeit aus dem Leben eines Rechenmeisters oder Kaufmannes darstellt. Der erste Abschnitt behandelt das Rechnen mit Zahlen (damals sagte man Ziffern), der zweite das Rechnen auf den Linien, der dritte das Rechnen mit Brüchen; der vierte Abschnitt enthält „gängige kaufmännische Berechnungen“.

Zum Titelblatt dieses Heftes

## Der Dreisatz im 16. Jahrhundert

Das Rechenbuch von Ondřej Klatovský aus dem Jahre 1530 enthält Anleitungen zur Lösung bestimmter Typen praktischer Aufgaben. Derartige Anleitungen wurden in der damaligen Zeit mit dem lateinischen Wort *regula* bezeichnet.

Eine dieser Anleitungen betraf ein Lösungsverfahren, das früher auch bei uns üblich war und als Dreisatz bezeichnet wurde. Dieser Algorithmus wurde damals *regula de tri* genannt, er fand weitverbreitete Anwendung bei kaufmännischen Berechnungen und wurde deshalb auch als *regula aurea* (Goldene Regel) bezeichnet.

Aus drei bekannten Angaben wurde die vierte zugehörige (unbekannte) Größe berechnet. In der Praxis gab es aber auch kompliziertere Aufgaben, wo man aus fünf Angaben eine 6. Größe zu berechnen hatte.

Für diesen Fall verwendete man eine weitere Regel, die als *regula de quinque* bezeichnet wurde; wir nennen diesen Algorithmus *Kettensatz*. Auch diese Regel war im Rechenbuch von Klatovský enthalten.

Das Titelblatt dieses *alpha*-Heftes zeigt Tagelöhner mit einem zugehörigen Aufgabentext in altschechischer Sprache. Die behandelte Aufgabe lautet (in heutiger Ausdrucksweise):

*18 Tagelöhner haben in sechs Tagen 12 Zeilen Weinreben behackt. Wieviel Zeilen können fünf Tagelöhner in 30 Tagen bearbeiten?*

Die Lösung der Aufgabe wurde in Form eines Schemas dargestellt. Die letzten Worte des Aufgabentextes lauten *diese Angaben werden nun für die Regel verwendet*. Dieser Anleitung folgt ein Rechteschema mit den fünf Zahlen, die in den Eckpunkten und im Mittelpunkt des Rechtecks (die Diagonalen sind angedeutet) eingetragen werden. In der oberen Zeile finden wir die Anzahl der Arbeiter (Tagelöhner), im Mittelpunkt die bekannte Anzahl der Zeilen, auf der unteren Zeile die Anzahl der Tage.

Unterhalb des Schemas steht eine weitere Zeile mit den Angaben 108 (= 18 · 6), 12, 150 (= 5 · 30). Ferner wurde in diese Zeile noch das Ergebnis angefügt, gekennzeichnet durch die Abkürzung Fa (= Facit):

16 Zeilen und  $\frac{6}{9}$  (Zeilen).



Item 18. nabn  
nifuow w. 6.  
dnech / kopaly 12  
strychu winny /  
worata kolk  
strychuow 5. na  
den nifuow w.  
30. dnech / ko  
paly / stogijore  
guly.



Die Zahlen in der Schlußzeile 108 12 150 stellen eine damals in Lehrbüchern übliche Kurzdarstellung einer Proportion (Verhältnisgleichung) dar:  $108 : 12 = 150 : x$ . Für die zu berechnende Größe  $x$  wurde jedoch die heute übliche Bezeichnung  $x$  noch nicht verwendet; deshalb treten im Dreisatz nur drei Zahlen auf. Aus der an anderer Stelle des Lehrbuchs angeführten Anweisung zur numerischen Berechnung für den Dreisatz ergeben sich daher folgende Operationen: Multipliziere die mittlere Zahl (12) mit der rechten Zahl (150) und teile das Ergebnis durch die linke Zahl (108).

Wenn man dies ausführt, erhält man das notierte Ergebnis  $16\frac{6}{9}$  (Zeilen). Versucht nun, aus den Angaben des Aufgabentextes diese Aufgabe mit euren Kenntnissen zu lösen – also unabhängig von den angeführten Regeln des Rechenbuchs! Wie schnell gelangt ihr zum Ergebnis? Ivana Füzeková



## Die Technische Hochschule Prag

Etwa seit Beginn des 19. Jh. begannen neben den traditionsreichen Universitäten höhere technische Bildungsanstalten eine rasch wachsende Rolle in der Lehre und Forschung auf dem Gebiet von Mathematik und einigen Naturwissenschaften, vor allem aber natürlich technischer Disziplinen, zu spielen. Es dauerte jedoch rund 100 Jahre, bis die annähernde gesetzliche Gleichstellung dieser Einrichtungen mit den Universitäten erreicht war. Äußerer Ausdruck dessen sind die wechselnden Bezeichnungen dieser Bildungseinrichtungen, die schließlich meist in der Anerkennung als „Technische Hochschule“ gipfelten, und der Kampf um das Recht zur Verleihung akademischer Grade. Der Bindestrich und die Großschreibung von Ing. im Titel Dr.-Ing. (gegenüber Dr. med. = Dr. medicinae, Dr. jur. = Dr. juris usw.) sind noch ein ursprünglich als Herabsetzung aufgefaßtes Überbleibsel jener Kämpfe. (Natürlich verlief diese Entwicklung in verschiedenen Ländern im einzelnen recht unterschiedlich.) Inzwischen haben zahlreiche Technische Hochschulen (oder wie immer sie heißen mögen) bedeutende Traditionen und ein hohes internationales Ansehen errungen und sind in das Alter gekommen, in dem man ans Feiern von Jubiläen denkt. Damit ist es jedoch nicht so einfach wie bei den alten Universitäten, die meist durch päpstliche Bulle gegründet wurden und so ein auf den Tag genau fixierbares eindeutiges Alter haben. Technische Hochschulen wuchsen organisch aus Bildungseinrichtungen vorläufigen Charakters oder niedrigeren Niveaus, entstanden oft durch Zusammenlegung mehrerer Anstalten, wechselten – wie gesagt – mehrfach Status und Namen.

Ein gutes Beispiel ist die heutige Technische Hochschule in Prag. Um 1707 gründete der Militäringenieur Christian Willenberg in Prag mit kaiserlicher Bewilligung eine *Ingenieurschule*. Dem 250jährigen Jubiläum dieser Gründung waren die vier hier abgebildeten Marken gewidmet. 1806 wurde diese Einrichtung in ein „*Polytechnisches Institut*“ umgewandelt, dessen erster Direktor der Mathematiker Franz Joseph Gerstner (1756 bis 1832) wurde, der zugleich Professor an der Prager Universität war und als Lehrer des bedeutenden Ma-

thematikers Bernard Bolzano (vgl. alpha 1981, H. 5) bekannt ist.

Eine besondere Pflege erfuhr an dieser seit her noch oft umbenannten Bildungsstätte die darstellende Geometrie, zu deren herausragenden Vertretern Rudolf Skuherský (1828 bis 1863) gehört. Seine Würdigung durch eine der vier Jubiläumsmarken hat er aber dem Umstand zu verdanken, daß er als erster Professor am Prager Polytechnikum 1861 dazu überging, seine Vorlesungen in tschechischer Sprache zu halten, entsprechend der Nationalität der Mehrheit seiner Hörer. Der Streit um die Sprache führte 1869 zur Teilung des Polytechnikums in ein deutsches und ein tschechisches (Analoges geschah auch mit der Prager Universität.), die 1879 beide den Rang einer Technischen Hochschule erhielten. Die Deutsche Technische Hochschule in Prag hat dann neben der Tschechischen noch nach der Gründung eines selbständigen tschechoslowakischen Staates im Jahre 1918 bis in die letzten Jahre des 2. Weltkrieges bestanden und sich (wie auch die deutsche Universität in Prag) als Hochburg deutschen Nationalismus und schließlich faschistischer Ideologie einen traurigen Ruhm erworben. Hingegen ist weltweit unbestritten, daß die „ČVUT“ (České Vysoké Učení Technické – mit russischen Sprachkenntnissen und etwas Phantasie kann man dies leicht übersetzen) zu den ältesten und bedeutendsten technischen Bildungseinrichtungen der Welt gehört. Ihr heutiges Emblem ist von eindrucksvoller Symbolik: Der böhmische Löwe hält einen Zirkel, aus dem es fruchtbar ausschlägt.

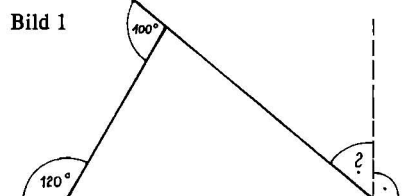
P. Schreiber



## Aufgaben für die jüngsten Leser (Klassenstufe 7/8)

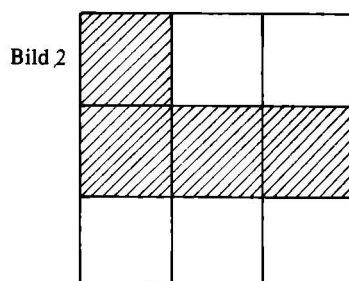
Es sind Aufgaben aus der Geometrie, die zur Lösung etwas Überlegung und Rechenfertigkeit erfordern.

▲ 1 ▲ Welche Größe hat der mit einem Fragezeichen versehene Winkel (Bild 1)?

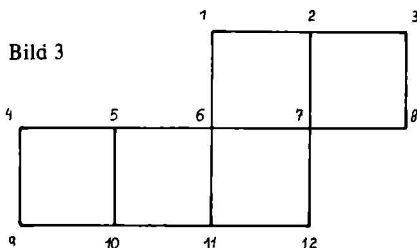


▲ 2 ▲ a) Die dunkle Teilfläche der Figur hat einen Flächeninhalt von  $36 \text{ cm}^2$ . Berechne ihren Umfang (Bild 2)!

b) Die dunkle Teilfläche soll nun einen Umfang von  $20 \text{ cm}$  besitzen; wie groß ist nun ihr Flächeninhalt?



▲ 3 ▲ An die dargestellte Figur (Bild 3), die aus fünf Quadraten besteht, soll noch ein Quadrat angefügt werden, so daß ein Würfelnetz entsteht.



▲ 4 ▲ Wieviel Winkel von  $150^\circ$  könnte a) ein Fünfeck, b) ein Siebeneck höchstens besitzen?

▲ 5 ▲ Kann man innerhalb eines Kreises mit dem Halbmesser  $r$  ein Quadrat mit dem Flächeninhalt  $\frac{7}{4} r^2$  zeichnen?

▲ 6 ▲ Kann man innerhalb eines Kreises mit  $r = 3 \text{ cm}$  einen Kreis mit dem Umfang  $u = 18 \text{ cm}$  zeichnen?

▲ 7 ▲ Gegeben seien eine Kugel  $K_1$  ( $r_1 = 1 \text{ cm}$ ) und eine Kugel  $K_2$  mit dem Rauminhalt  $4 \text{ cm}^3$ . Kann man die Kugel  $K_2$  vollständig im Inneren von  $K_1$  unterbringen?

▲ 8 ▲ Gegeben seien eine Kugel ( $r = 1 \text{ cm}$ ) und ein Würfel mit dem Rauminhalt  $0,5 \text{ cm}^3$ . Ist es möglich, diesen Würfel im Inneren der Kugel unterzubringen?

aus: rozhledy



## Mathematische Spielereien

„Habt ihr alles; nichts vergessen?“ fragte Tante Eva, bevor das Auto mit Onkel Pepa und den beiden Jungen Honza und Jirka losfuhr. Auf der Landstraße war wenig Verkehr, deshalb achteten die beiden Jungen nicht so sehr auf die polizeilichen Kennzeichen und Typen der anderen Fahrzeuge, sondern konzentrierten sich auf die Verkehrszeichen und ihre Bedeutung. Bald tauchten zwei Zeichen auf *Kurven auf einer Länge von 3 km* sowie *Empfohlene Geschwindigkeit 40 km/h*. Onkel Pepa verminderte daher als disziplinierter Fahrer die Geschwindigkeit.

„Onkel Pepa, bei deinem Tachometer funktioniert die Anzeige der gefahrenen Kilometer nicht“, sagte nach einer Weile der Neffe Jirka. Darauf sagte Onkel Pepa: „Warum meinst du das?“

„Ich habe schon eine ganze Weile auf den Tachometer geschaut, und er zeigt dauernd am Ende die Zahl 253.“

„Was ist denn bei dir dauernd?“ lachte Pepa.

„Als wir am Kurven-Verkehrszeichen vorbeifuhren, zeigte der Tachometer auch schon 253.“

„Schau jetzt hin“, sagte Honza, „gerade jetzt tauchte am Ende der Zahl eine Vier auf.“

„Bei unserem Auto, ebenso – wie ich weiß – beim PKW Škoda erscheint die neue Zahl immer erst dann, wenn ein voller Kilometer abgefahren ist. Wie ist denn das bei eurem Trabant, Jirka?“ fragte der Onkel.

„Bei uns dreht sich der Tachometer wie ein Elektrizitätszähler oder ein Gaszähler, also dauernd.“

„Vati, schau mal hin, schon hast du am Tachometer die Sechs“, sagte nach einer Weile Honza, „also sind die Kurven nun vorbei, und du kannst wieder Gas geben.“

Es war, als ob Jirka nur auf so eine Rede gewartet hätte, denn er warf sofort ein: „Da landen wir im Straßengraben. Herr Fahrer, geben Sie mir Ihre Fahrerlaubnis. Sie können zwar rechnen, aber Sie haben dabei nicht weiter nachgedacht.“

Ein paar Augenblicke später gab es tatsächlich noch einige scharfe Kurven, ohne daß noch ein weiteres Warnzeichen zu sehen gewesen wäre. Onkel Pepa hatte das vor-

ausgesehen und hatte die Fahrt mit geringer Geschwindigkeit fortgesetzt.

„Hier fehlte ein Verkehrszeichen“, meinte Honza.

„Es hat kein Zeichen gefehlt, schau mal her, ich male dir das auf“, sagte nun Jirka ganz kameradschaftlich. „Zur Vereinfachung zeichne ich die Landstraße als gerade Linie.“

Jirka skizzierte eine Gerade und markierte auf ihr mit Hilfe dreier gleich langer Strecken den 3 km langen Straßenabschnitt mit den Kurven; er malte auch das Warnzeichen dazu (siehe Bild 1).

„Erinnere dich, Honza, zu Beginn der Kurven zeigte der Tachometer am Ende die Zahl 253. Zeig jetzt mal ungefähr die Stelle, wo unser Auto war, als die Zahl 253 sichtbar wurde!“

„Wie kann ich das wissen?“ erwiderte unwillig Honza.

„Na, wenigstens ungefähr. Erschien die 253 am Zeichen selbst, davor oder dahinter?“ half ihm Jirka.

„Dahinter bestimmt nicht. Also etwa hier“, sagte nun Honza und markierte auf Jirkas Skizze einen Punkt. Jirka schrieb dazu die Zahl 253, und er forderte nun Honza auf, er solle auch die Punkte markieren, wo die Zahlen 254, 255, 256, 257 erschienen. Honza nutzte seine Fingerbreite zum ungefähren Abmessen der km-Abschnitte, und dabei kam ihm schon ein erleuchtender Gedanke. „Mir ist das jetzt schon klar. Du brauchst mir nichts mehr zu erzählen“, rief Honza. „Wenn wir seit Erscheinen der Zahl 253 – mal angenommen – 400 m gefahren sind, dann endet der Dreikilometerabschnitt auch erst dann, wenn seit Erscheinen der Zahl 256 noch 400 m gefahren sind.“

„Du hast recht“, fügte nun auch der Onkel hinzu. „Erst wenn die Zahl 257 erscheint, haben wir die Gewißheit, daß wir den gesamten gefährlichen Kurvenabschnitt durchfahren haben.“

Im Auto herrschte nun wieder gute Stimmung. Nach einer Weile sagte dann Onkel Pepa: „Paßt auf, ihr Jungen, vor uns liegt der Ort Neudorf. Versucht mal, nach dem Tachometer-Stand die Länge des Ortes zu bestimmen!“

Die Jungen stellten fest, daß am Anfang die Zahl 265, am Ende die Zahl 268 am Tachometer abzulesen war.

Könnt auch ihr das Ergebnis nennen, zu dem die beiden Jungen gekommen waren?

Die Jungen freuten sich, als sie schließlich am Tagesziel, dem Stausee, waren und sich im Wasser tummeln konnten; dabei waren Tachometer, Entfernungsbestimmung usw. rasch vergessen. Doch genügte bei der Rückfahrt ein kurzer Hinweis des Onkels: „Wir sind schon gleich bei Neudorf“, daß die beiden Jungen sich wieder auf ihre *Forschertätigkeit* bei der Hinfahrt besannen.

„Welchen Stand zeigt der Tachometer?“ fragte sofort wißbegierig Jirka. „Wir wollen doch mal feststellen, ob wir auf das gleiche Ergebnis kommen wie bei der Hinfahrt“, warf Honza zweifelnd ein. Onkel Pepa antwortete nun auf Jirkas Frage: „Der Tachometer zeigt 282,“ und ermunterte die Jungen, daß sie erneut die Länge des Dorfes bestimmen sollen.

„Schade, daß wir nicht früher daran gedacht haben“, bedauerte Jirka, „wir hätten auch die Zeitdauer für die Durchfahrt bestimmen sollen und hätten dann das Ergebnis durch eine Berechnung der Streckenlänge mit Hilfe der Geschwindigkeit überprüfen können. Aber zu diesem Zweck müßten wir ja immer die gleiche Geschwindigkeit haben.“

Wie bestellt, kam gerade eine Gänseschar über die Straße, und Onkel Pepa mußte scharf bremsen und sie vorüberlassen.

„Jetzt haben wir 283,“ sagte Honza. „Jirka, borg mir dein Notizbuch, ich zeichne dazu eine neue Skizze.“

Bild 1

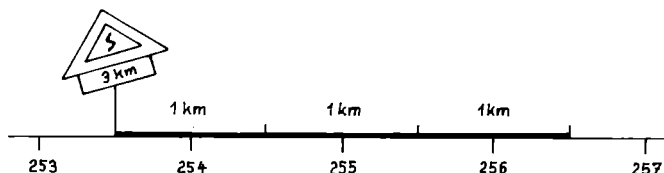


Bild 2

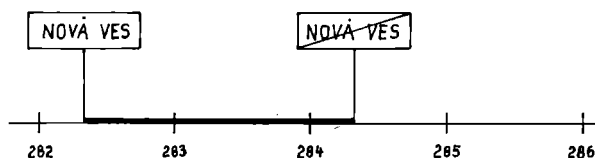


Bild 3

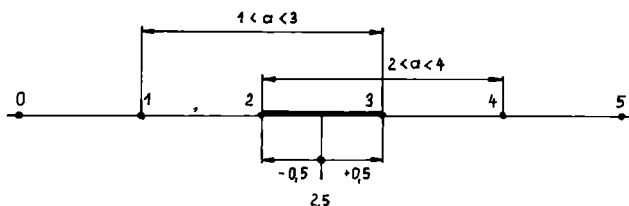
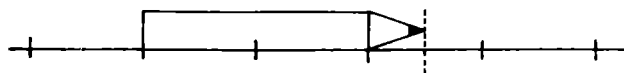


Bild 4



Ehe Honza auf einer neuen Seite die Straße als Zahlengerade gezeichnet hatte, waren sie schon wieder aus dem Dorf heraus. Der Tachometer zeigte dabei bereits seit einigen Dutzend Metern die Zahl 284.

„Ich hatte erwartet, daß es die Zahl 285 sein wird. Bei der Hinfahrt hatten wir einen Unterschied von drei Kilometern, und jetzt ist dieser nur zwei Kilometer,“ erinnerte sich Jirka.

Inzwischen hatte Honza seine Skizze fertig (Bild 2). „Wie du siehst,“ stellte Honza fest, „haben wir ein anderes Ergebnis. Jetzt müßte die Dorfänge zwischen einem und drei Kilometern liegen.“

„Aber das ist eigentlich prima“, freute sich Jirka.

„Was ist denn daran prima, wenn wir jedesmal ein anderes Ergebnis haben?“ meinte verständnislos Honza.

„Na, schau mal her. Auf der Hinfahrt stellten wir fest, daß die Länge des Dorfes zwischen zwei und vier Kilometern betragen muß, also  $2 < a < 4$ . Jetzt haben wir für die gleiche Streckenlänge gefunden  $1 < a < 3$ , also zwei verschiedene Abschätzungen, die aber für die gleiche Strecke  $a$  gelten,“ erklärte Jirka und fragte schließlich: „Was folgt daraus?“

„Daß die eine Abschätzung falsch ist,“ meinte pessimistisch Honza.

„Gar nichts ist falsch,“ sagte lächelnd Jirka, und er erläuterte sogleich seine Überlegungen. „Vergiß nicht, daß die Länge  $a$  in beiden Fällen *gleich* ist. Nur die obere und die untere Abschätzung ist verschieden. Aber gerade darin besteht unser Vorteil. Von den beiden unteren Abschätzungen 1 und 2 können wir die größere verwenden ...“

„... und von den beiden oberen Abschätzungen nehmen wir die kleinere,“ begriff endlich auch Honza. „Also haben wir damit die Möglichkeit, die Abschätzung zu verbessern und können behaupten, daß für  $a$  die Abschätzung gilt  $2 < a < 3$ .“

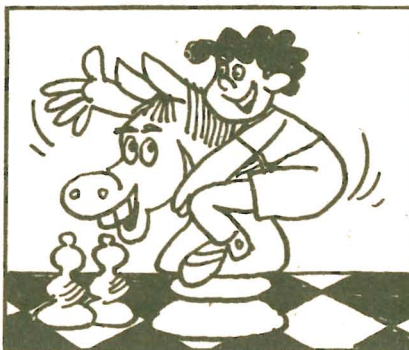
„Wir könnten auch schreiben  $a = (2,5 \pm 0,5)$  km,“ ergänzte Jirka und zeigte Honza seine Skizze (siehe Bild 3).

„Ihr seht also, daß es sich gelohnt hat, den Meßversuch zu wiederholen,“ fügte nun der Onkel dem Gespräch bei. „Den Fehler, der zunächst 1 Kilometer betrug, konnten wir durch die neue Messung auf die Hälfte vermindern, d. h. auf 0,5 km.“

„Und wenn wir diese Versuchsmessungen noch einige Male durchführen, würde der Fehler noch kleiner werden,“ meinte nun Honza, um zu zeigen, daß ihm die Sache jetzt völlig klar ist.

„Das ist richtig, aber nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit,“ ergänzte ihn Onkel Pepa, „aber das kann ich euch erst zu Hause erklären, denn jetzt muß ich auf die Straße achten. Überlegt euch inzwischen, ob der Unterschied zwischen den beiden Tachometer-Anzeigewerten am Anfang und am Ende des Dorfes eine andere Zahl als zwei oder drei sein könnte.“

Die Jungen zeichneten eine neue Zahlengerade (Bild 4), und die km-Striche wählten sie in einem solchen Abstand, daß die



## Böhmische Schule

Vor über 120 Jahren gab der böhmische Kunstmaler und Schachproblemkomponist Antonin König (1836 bis 1911) mit einem theoretischen Aufsatz die erste Anregung dazu, den Akzent der kompositorischen Bestrebungen auf die Schlußstellungen der hauptsächlichlichen Abspiele (Varianten) zu legen, die Mattpositionen zu Mattbildern zu stilisieren und diese dem Grundsatz ökonomischer Formenstrenge zu unterwerfen. Die Mattbilder sollten durchweg ökonomisch bzw. rein sein oder, wie man später sagte, Muster- oder Modellmattbilder.

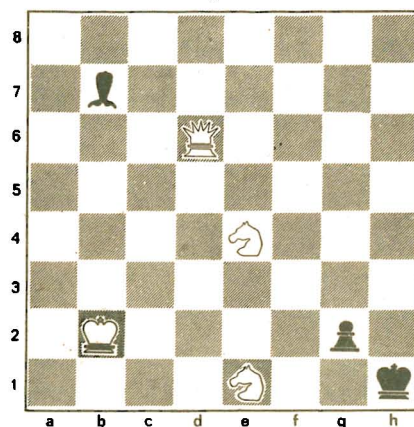
Ökonomisch nennt man eine Mattstellung, an der sämtliche weißen Figuren (ausgenommen eventuell König und Bauern) beteiligt sind. Als rein bezeichnet man ein Mattbild, in dem der schwarze König jeweils nur aus einem einzigen Grunde seine Nachbarfelder nicht betreten darf. Es ist auch zulässig, daß Nachbarfelder durch schwarze Steine blockiert oder verbaut sind; sie dürfen dann aber nicht zugleich durch einen weißen Stein beherrscht werden.

Mit seinem Aufsatz hat Antonin König den Grundstein zur „Česká Školá“, der sogenannten *Böhmischen Schule*, einer Stilrichtung in der Schachkomposition, gelegt. Sie hat sich mit der Zeit von Böhmen aus über ganz Europa verbreitet. Es gibt kaum Problemschachbücher, in denen keine Aufgaben der *Böhmischen Schule* vertreten sind. Bedeutende Problemkomponisten der Böhmischen Schule waren u. a. Dr. Jan Dobrusky (1853 bis 1907), Jiří Chocholous (1856 bis 1930), Josef Pospisil (1861 bis 1916) und Dr. Miroslav Kostal (1881 bis 1958). Von ihrem unbestritten größten Meister Dr. Miroslav Kostal, der sich im Problemschach M. Havel nannte, stammen die beiden folgenden Aufgaben.

Bleistiftlänge etwa eine 2,5-km-Länge darstellte. Durch Verschieben des Bleistifts überzeugten sie sich, daß der Unterschied zwischen den Tachometer-Anzeigewerten ... betragen kann. Macht dazu selbst einen Versuch, und begründet das Ergebnis mathematisch für eine beliebige Länge im Intervall von zwei bis drei Kilometern!

Milan Koman

## Matt in drei Zügen



1. Dd1! (Es droht 2. Sf3+.) Kh2/g1S

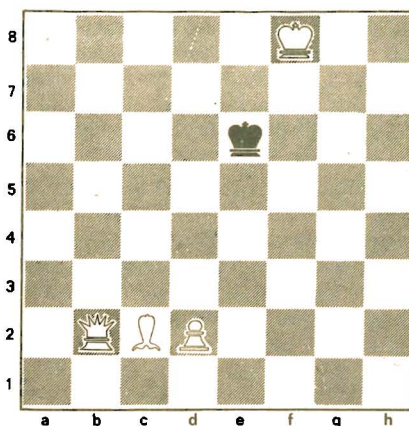
2. Sf3+/Sf2+ Kh3/Kh2

3. Dd7/Dd6 matt.

Die beiden Varianten enden mit Muster- matt der Böhmischen Schule.

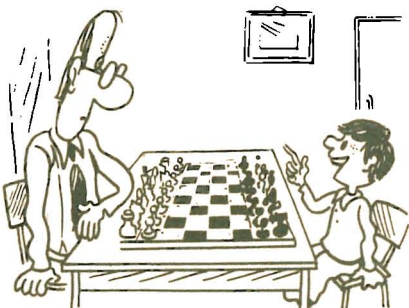
Nach der schwarzen Verteidigung 1. ...g1D ergibt sich zwar durch 2. Df3+ Kh2 3. Dh5 ein weiteres Mustermatt, jedoch entspricht diese Variante nicht der Böhmischen Schule, da Schwarz auf 2. Df3+ auch Dg2 spielen kann, wonach 3. D:g2 matt erfolgt. Die hiernach entstandene Mattstellung ist nicht ökonomisch – der weiße Springer auf e4 ist am Matt nicht beteiligt – und somit kein Mattbild der Böhmischen Schule.

## Matt in drei Zügen



Nach dem Schlüsselszug entstehen in vier Abspielen drei Böhmische Mattbilder. Diese sind zu finden!

H. Rüdiger



„Sind wir uns einig, wer verliert, macht die Hausaufgaben.“

W. Milejko

# Zur Berechnung von Getriebe-Übersetzungen

Eine Rotationsbewegung wird von einer Welle auf eine andere auf verschiedene Weise übertragen; es kann durch Riemen, Seil oder Kette erfolgen, ferner mittels Reibung, oder mit Zahnrad- bzw. Schneckengetrieben. Die beiden letztgenannten Arten der Übertragung sind am genauesten, denn dabei bleibt die Drehzahl entweder konstant oder sie wird auf eine festgelegte Weise umgewandelt. Zur Berechnung solcher Getriebe-Übersetzungen benötigt man Brüche, wie sie auch in der Schule vorkommen.

Eine einfache Übersetzung wird nachstehend an einem Zahlenbeispiel durchgerechnet. Dieses Beispiel wie auch die Berechnung zusammengesetzter Getriebe führen zur Notwendigkeit, gemeine Brüche auf andere Nenner umzurechnen bzw. sie in periodische Dezimalbrüche umzuwandeln.

**Beispiel:** In dem Bild 1 ist der Aufriß und ein Seitenriß eines einfachen Zahnradgetriebes dargestellt. Beim Treibrad zeigt ein Pfeil die Drehrichtung an, die Anzahl der Zähne beträgt  $z_1 = 70$ ; die Drehzahl (Frequenz) beträgt  $n_1 = 168 \text{ min}^{-1}$ . Das getriebene Rad liegt im Eingriff mit dem Treibrad, es gilt  $z_2 = 42$ ; die Drehzahl  $n_2$  soll berechnet werden. Wir wissen, daß bei solchen Zahnradgetrieben eine umgekehrte Proportionalität vorliegt, sie wird durch die Formel (1) dargestellt:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (1)$$

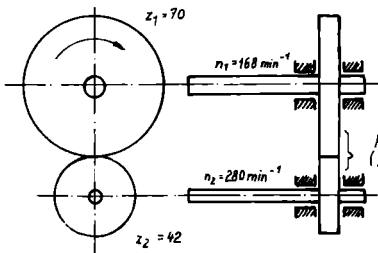


Bild 1

Diese Formel gilt unter der Voraussetzung, daß die Umfangsgeschwindigkeit bei eingreifenden Zahnradgetrieben gleich ist. In einem früheren Beitrag (Jahrgang 60, Heft 10) wurde die Beziehung hergeleitet:  $d_1 \cdot d_2 = z_1 \cdot z_2$  ( $d_i$  Durchmesser).

In der technischen Praxis wird die Größe der Übersetzung, also das Übersetzungsverhältnis, gewöhnlich durch eine Dezimal-

zahl oder einen periodischen Bruch dargestellt:

$$p = \frac{n_1}{n_2} \text{ bzw. } p = \frac{z_2}{z_1} \quad (2)$$

In unserem Beispiel – vergleiche dazu die Formel (1) – erhalten wir  $p = \frac{168}{280} = 0,6$ .

Anstelle von  $p$  wird oft der Kehrwert  $i = \frac{1}{p}$  verwendet, dann gilt

$$i = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

Die Übersetzung wird für den Fall mit  $i$  angegeben, wenn  $p$  eine periodische Zahl ist. Man wählt also zweckmäßig diejenige der beiden Zahlen  $p, i$ , welche die kürzere Anzahl von Stellen aufweist. Gilt  $p < 1$  (also  $i > 1$  wie im Zahlenbeispiel), sprechen wir von einer Übersetzung (Erhöhung der Drehzahl), für  $p > 1$  ( $i < 1$ ) handelt es sich um eine Untersetzung, das getriebene Rad erhält eine kleinere Drehzahl. Für  $p = i = 1$  bleibt die Drehzahl konstant.

Im angeführten Zahlenbeispiel ist

$$p = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}. \text{ Die letzte Zahl } \frac{3}{5} \text{ nennen wir Grundform des Bruches; Zähler und Nenner sind natürliche Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler besitzen.}$$

Wenn man die Grundform erweitert, z. B. mit 10, 11, 12, 13, 14, so erhalten wir der Reihe nach die Brüche  $\frac{30}{50}, \frac{33}{55}, \frac{36}{60}, \frac{39}{65}$ ,

$\frac{42}{70}$ ; diese Zahlen bezeichnen mögliche

Anzahlen von Zähnen  $z_2$  und  $z_1$ . Beim Getriebe im Zahlenbeispiel wurde der Bruch  $\frac{42}{70}$  verwendet. Bei einem Getriebe mit

$p = 0,4246$  muß man diese Zahl in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln. Wir fügen diese Umrechnung bei. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{hier: } 0,4246 &= \frac{4246 - 4}{9990} = \frac{4242}{9990} = \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 101}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 37} = \frac{707}{1665} \end{aligned} \quad (4)$$

Zur Realisierung einer einfachen Übersetzung mit  $p = 0,4246$  benötigen wir also Zahnräder mit folgenden Zähne-Zahlen:  $z_1 = 1665, z_2 = 707$ . Das sind die kleinsten Zahlen, denn die Zahlen 1665 und 707 haben keinen gemeinsamen Teiler. Würden wir statt  $p = 0,4246$  den Kehrwert  $i$  verwenden, so erhalten wir  $\frac{1}{p} = i$

$= 2,355021216407$ , damit wäre bei diesem Beispiel nichts vereinfacht.

Statt einer einfachen Über-(Unter-)setzung wird manchmal auch eine mehrfache zusammengesetzte Übersetzung verwendet. Wir benutzen dabei das eben angeführte Übersetzungsverhältnis  $p = 0,4246$ .

Eine Mehrfach-Übersetzung setzt sich aus einfachen Übersetzungen zusammen; dabei gilt für  $n$  beteiligte (einfache) Übersetzungen die Formel (5) für die Verknüpfung der Zahlen

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \quad (5)$$

Ersetzen wir z. B.  $p = 0,4246 = \frac{707}{1665}$  durch

zwei Übersetzungsverhältnisse  $p_1, p_2$ , so gilt  $p = p_1 \cdot p_2$ . Wenn wir die Primzerlegung des Zählers bzw. Nenners verwenden (s. o.), können wir für  $n = 2$  schreiben

$$\begin{aligned} p &= p_1 \cdot p_2 = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{35}{185} \cdot \frac{101}{45} \\ &= \frac{21}{185} \cdot \frac{101}{27} = \frac{14}{37} \cdot \frac{101}{90} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Bei Verwendung des letztgenannten Produkts ist  $p_1 = \frac{14}{37} = 0,378, p_2 = \frac{101}{90}$

$= 1,12$ ; daraus ergibt sich  $p = p_1 \cdot p_2 = 0,4246$ . Der Leser sollte sich einen Algorithmus für das Produkt  $0,378 \cdot 1,12$  überlegen; er kann sich leicht überzeugen, daß dafür ein Taschenrechner nur bedingt geeignet ist. Wegen  $p < 1$  handelt es sich bei diesem Beispiel um eine Übersetzung zur Erhöhung der Drehzahl. Die Anzahl der Zähne der beteiligten Zahnräder beträgt  $z_1 = 37, z_2 = 14, z_3 = 90, z_4 = 101$ ; siehe dazu das Schema im Bild 2.

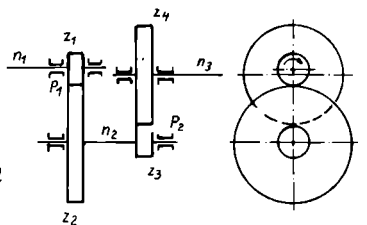


Bild 2

Führen wir auch die Drehzahlen  $n_i$  in die Berechnung ein, dann gilt für die einfache Übersetzung  $p_1$  die Beziehung  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$ ,

für  $p_2$  gilt  $\frac{n_2}{n_3} = \frac{z_4}{z_3}$ . Wir erhalten daraus

$n_2 = n_1 \cdot \frac{z_1}{z_2}$  und  $n_2 = n_3 \cdot \frac{z_4}{z_3}$ . Aus dieser

Gleichheit für  $n_2$  ergibt sich

$n_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} = n_3 \cdot \frac{z_4}{z_3}$  oder  $\frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}$ ,

die wir schon angeführt hatten. Für das ebenfalls angeführte Übersetzungs-Verhältnis  $0,4246 = \frac{21}{185} \cdot \frac{101}{27}$  ergibt sich als zusammengesetztes Verhältnis

$p = 0,1135 \cdot 3,740$ , diesen Zahlen entsprechen die Zähne-Zahlen  $z_1 = 185, z_2 = 21, z_3 = 27, z_4 = 101$ .

Wenn wir Rundungen der Brüche zulassen, um die Zähne-Zahlen zu vereinfachen, käme hier z. B. die Ersetzung von  $0,4246$  durch  $p_E = 0,425$  in Betracht. Damit wäre die Berechnung und besonders die techno-

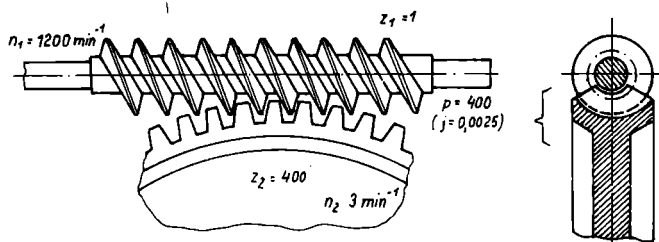


Bild 3

logische Ausführung für ein einfaches wie auch für ein zusammengesetztes Übersetzungs-Getriebe wesentlich einfacher, wie nachstehend angeführt ist:

$$p_E = \frac{425}{10\,000} = \frac{25 \cdot 17}{25 \cdot 400} = \frac{17}{400} = \frac{z_2}{z_1}$$

(einfache Übersetzung)

$$p_E = \frac{425}{10\,000} = \frac{17}{100} \cdot \frac{20}{80} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}$$

(für eine zweifache Übersetzung).

Sehr oft ist eine bedeutend größere Über- bzw. Untersetzung erforderlich, z. B. bei einem Aufzug, wobei die hohe Drehzahl des Elektromotors, z. B.  $n_1 = 1200 \text{ min}^{-1}$ , bedeutend vermindert werden muß, damit die Trommel, auf der das Seil mit der angehängten Aufzugskabine aufgewickelt wird, nur noch eine Drehzahl von z. B.  $n_2 = 3 \text{ min}^{-1}$  besitzt; das Zahlenverhältnis

$$\text{wäre hier } p = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1200}{3} = 400. \text{ In einem}$$

solchen Fall verwendet man zweckmäßig ein Schneckengetriebe, also eine (eingängige) Schneckenstange, die in ein Zahnrad mit 400 Zähnen eingreift (siehe Bild 3). Die Schneckenstange zählt bei der Berechnung wie ein Zahnrad mit nur einem Zahn ( $z_1 = 1$ ). Das Bild 4 zeigt eine zusammengesetzte Übersetzung mit zwei Schneckenstangen und  $p_1 = p_2 = 20$ ; die Gesamt-Übersetzung ist dann  $p = p_1 \cdot p_2 = 400$ . Es gibt auch mehrgängige Schneckengetriebe.

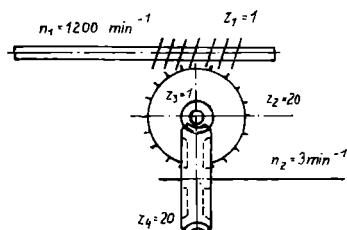


Bild 4

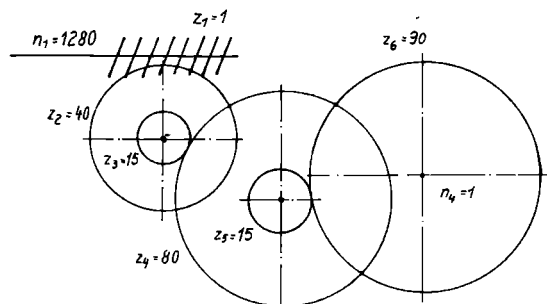


Bild 5

Oft begegnen wir auch Getrieben mit kombinierten Übersetzungen, wobei eine Schneckenstange mit mehreren Zahnradern zusammenwirkt, wie es Bild 5 zeigt. Die Berechnung für dieses Getriebe lautet dann (wegen  $p > 1$  liegt eine Untersetzung vor)

$$p = \frac{n_1}{n_4} = \frac{90}{15} \cdot \frac{80}{15} \cdot \frac{40}{1} = 1280;$$

es ergibt sich

$$p = \frac{z_6}{z_5} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_1}$$

$$= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 6 \cdot 5,3 \cdot 40 = 1280.$$

Wenn daher die Schneckenwelle, die mit der Elektromotorenwelle fest gekoppelt ist, eine Drehzahl von  $1280 \text{ min}^{-1}$  besitzt, dann wird für  $p = 1280$  am Ende des (Untersetzungs-) Getriebes eine Drehzahl von  $n_4 = 1 \text{ min}^{-1}$  erreicht.

Ein anderes Beispiel für eine große Untersetzung ist die Antriebseinrichtung für ein astronomisches Fernrohr, das sich mit gleichförmiger Bewegung in 24 Stunden einmal drehen muß. In diesem Falle kann man mehrere Schneckengetriebe verwenden. Die Berechnung und ein Schema des zusammengesetzten Getriebes können wir dem Leser überlassen. Bekannt sind folgende Angaben:

Drehzahl des Elektromotors  $n_1 = 2200 \text{ min}^{-1}$ , daraus ergibt sich  $p = 2\,160\,000$  bzw.  $i = 46,296 \cdot 10^{-8}$ . Eine mögliche Berechnung, nach der man das Schema zeichnen kann, wäre

$$\frac{2200}{n_4} = \frac{180}{1} \cdot \frac{160}{1} \cdot \frac{150}{1};$$

es ist

$$n_4 = 1 \text{ d}^{-1} = \frac{1}{24} \text{ h}^{-1}$$

$$= \frac{1}{24 \cdot 60} \text{ min}^{-1}$$

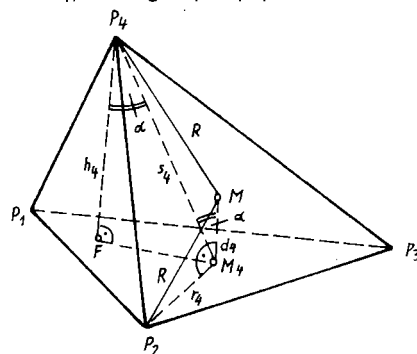
Vlastimil Mráz

## Rauminhalt eines Vierflachs

Der Rauminhalt eines beliebigen Vierflachs (d. h., einer unregelmäßig-dreieitigen Pyramide)  $P_1P_2P_3P_4$  kann mit Hilfe der Formel

$$V = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^4 A_i^2 (s_i^2 - r_i^2)} \quad (1)$$

berechnet werden. Dabei bedeutet  $A_i$  den Flächeninhalt derjenigen Seitenfläche, die nicht die zugehörige Spitze  $P_i$  enthält.  $M_i$  ist der Mittelpunkt des Umkreises dieser Seitenfläche. So bedeutet  $A_4$  z. B. den Flächeninhalt des Dreiecks  $P_1P_2P_3$ .  $r_i$  bezeichnet die Länge des Umkreisradius zur Fläche  $A_i$ ; ferner gilt  $s_i = \overline{P_i M_i}$ .



**Beweis der Formel (1)**

Den Mittelpunkt und Radius der Kugelfläche, die dem Vierflach umschrieben ist, bezeichnen wir mit  $M$  bzw.  $R$ . Die Länge der Strecken  $MM_i$  bezeichnen wir mit  $d_i$  und die Länge der räumlichen Höhe der Spitze  $P_i$  über der Fläche  $A_i$  mit  $h_i$ . Nun berechnen wir den Wert des Terms

$$s_4^2 - r_4^2 = s_4^2 - (R^2 - d_4^2), \quad (2)$$

der aus dem rechtwinkligen Dreieck  $MM_4P_4$  folgt. Auf das Dreieck  $MM_4P_4$  wenden wir den Kosinussatz an; den Betrag des Winkels  $\angle MM_4P_4$  bezeichnen wir mit  $\alpha$ :

$$R^2 = s_4^2 + d_4^2 - 2s_4d_4 \cos \alpha. \quad (3)$$

Bezeichnen wir den Fußpunkt der Höhe  $h_4$  mit  $F$  (siehe Bild), dann ist  $\angle MM_4P_4 = \angle FP_4M_4$ , denn es sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daher ist  $\cos \alpha = h_4 / s_4$ ; die Beziehung (3) erhält damit eine einfachere Form:

$$R^2 = s_4^2 + d_4^2 - 2d_4h_4.$$

Auch die Beziehung (2) wird dadurch nach Einsetzen für  $R^2$  bedeutend einfacher

$$s_4^2 - r_4^2 = 2d_4h_4. \quad (4)$$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir die Terme

$$s_i^2 - r_i^2 = 2d_ih_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nun multiplizieren wir die beiden Seiten der Beziehung (4) mit  $A_4^2$  und formen die rechte Seite unter Beachtung von  $V = \frac{1}{3} A_4 h_4$  um:

$$A_4^2 (s_4^2 - r_4^2) = 2 A_4 h_4 \cdot A_4 d_4 = 6 V \cdot A_4 d_4. \quad (5)$$

Da man sich das Vierfläch in 4 Pyramiden mit den Grundflächen  $A_i$  und den zugehörigen Höhen  $d_i$  zerlegt denken kann (gemeinsame Spitze in  $M$ ), ergibt sich

$$V = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 A_i d_i \text{ bzw. } \sum_{i=1}^4 A_i d_i = 3V.$$

Aus (5) erhalten wir also durch Summieren mit  $i = 1, 2, 3, 4$  die Beziehung

$$\sum_{i=1}^4 A_i^2 (s_i^2 - r_i^2) = 6V \sum_{i=1}^4 A_i d_i = 18V^2,$$

woraus sofort die Formel (1) folgt.

Stanislav Horák

## Lern-Spiele

Die Station Junger Techniker in Prag vermittelt jetzt Schülern der vierten und fünften Klassen auch Grundlagen der Elektronik und Kybernetik. Die ersten Kursteilnehmer bastelten Mikrorechner, an denen nun alle nachfolgenden Interessenten ausgebildet werden. Kenntnisse in Programmierung und Numerik werden den Kindern in Form von Spielen nahegebracht. Bisher erarbeiteten Schüler schon Programme für Telespiele und für einen Gitarrelehrgang. Aus einem elektronischen Baukasten entstand z. B. eine automatische Futterstelle für Aquarienfische.

# Papierformate und Mathematik

Grundlage der Rationalisierung der menschlichen Tätigkeit sind die Erfahrung und Festlegungen, die wir als betriebliche, staatliche oder internationale Normen bezeichnen. Es ist verständlich, daß bei der Festlegung von Normen verschiedene mathematische Beziehungen eine bedeutende Rolle spielen. Wir wollen das bei den Normvorschriften für Papier in Rechteckform betrachten, wie es zum Schreiben, Drucken usw. verwendet wird. So wird z. B. das Format unserer Zeitschrift *rozhledy* als A5 bezeichnet (Abmessungen 148 mm × 210 mm); das ausgebreitete Heft entspricht dem Format A4 (Abmessungen 210 mm × 297 mm).

Aus dem angeführten Beispiel ist zugleich die Grundforderung für genormte Papierformate ersichtlich, d. h., daß durch Halbieren der längeren Seite zwei kleinere Formate entstehen, die ebenfalls normgerecht sind, wodurch Abfall vermieden wird. Die geometrische Form des Ausgangsformats und des kleineren Formats sind daher ähnliche Rechtecke, wie das aus Bild 1 ersichtlich ist. Die längere Seite bezeichnen wir mit  $y$ , die kürzere mit  $x$ .

Aus Bild 2 ist ersichtlich, wie die einzelnen Papierformate durch fortgesetztes Teilen entstehen.

Bild 1

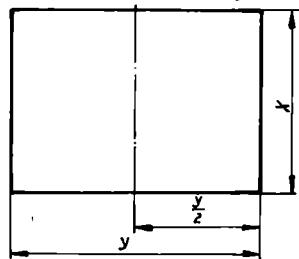
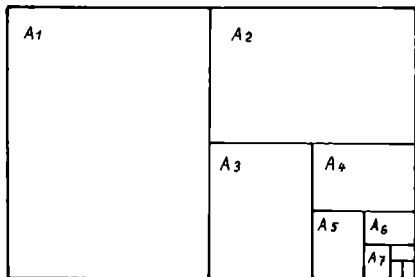


Bild 2



Aus der Grundforderung für das Verhältnis der Seiten eines Rechtecks beim genormten Papierformat ergibt sich die Gleichung

$$y : x = x : \frac{y}{2} \text{ bzw. } y = x \sqrt{2}. \quad (1)$$

Das Seitenverhältnis entspricht also der Beziehung  $x : y = 1 : \sqrt{2}$ . Das Verhältnis der Flächeninhalte zweier Formate, wovon das zweite durch Teilung entstand, beträgt 2 : 1.

Nun müssen noch die Abmessungen des Ausgangsformats berechnet werden, das als A0 (A Null) bezeichnet wird. Es ist ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 1 m<sup>2</sup>. Deshalb gilt die Gleichung

$$xy = 1 \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) bilden ein Gleichungssystem mit zwei Variablen ( $x$ ;  $y$ ). Für die Längen der beiden Seiten des Formats A0 erhalten wir

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,8408964 \dots (\text{Meter})$$

$$y = \sqrt{2} = 1,1892071 \dots (\text{Meter}).$$

Diese beiden theoretischen Maßzahlen für die Seitenlängen des genormten Papierformats A0 sind irrationale Zahlen; nach Rundung auf ganze Millimeter erhalten wir  $x = 841$  mm,  $y = 1189$  mm. Die relativen Fehler (in %) dieser beiden Maßzahlen im Vergleich zu den theoretischen Werten sind unbedeutend, in der Regel kleiner als 0,1 %. Tatsächlich ist  $\Delta x \% = \frac{0,5 \cdot 100 \%}{841} \approx$

$$0,06 \%, \Delta y \% = \frac{0,5 \cdot 100 \%}{1189} \approx 0,04 \%. \text{ Der}$$

entsprechende Fehler für den Flächeninhalt des Formats A0 beträgt  $\Delta A \% = (0,06 + 0,04) \% = 0,1 \%$ .

In der nebenstehenden Tabelle für die Papierformate der Reihe A sind sowohl die theoretischen Abmessungen als auch die genormten Maßzahlen angeführt. Ergänzend sei bemerkt, daß für technische Zeichnungen kein kleineres Format als A5 verwendet wird. Die Papierformate der Reihe A werden mit Ausnahme von A4 liegend verwendet, d. h., die längere Seite liegt waagerecht.

Vlastimil Mráz

Tabelle der Papierformate, Reihe A

| Format | Theoretische Abmessungen |                        | Genormte Abmessungen (mm) | Inhalt (m <sup>2</sup> ) |
|--------|--------------------------|------------------------|---------------------------|--------------------------|
|        | $x(m)$                   | $y(m)$                 |                           |                          |
| A0     | $1 : \sqrt{2}$           | $\sqrt{2}$             | 841 × 1189                | 1                        |
| A1     | $0,5 \cdot \sqrt{2}$     | $1 : \sqrt{2}$         | 594 × 841                 | $\frac{1}{2}$            |
| A2     | $0,5 : \sqrt{2}$         | $0,5 \cdot \sqrt{2}$   | 420 × 594                 | $\frac{1}{4}$            |
| A3     | $0,25 \cdot \sqrt{2}$    | $0,5 : \sqrt{2}$       | 297 × 420                 | $\frac{1}{8}$            |
| A4     | $0,25 : \sqrt{2}$        | $0,25 \cdot \sqrt{2}$  | 210 × 297                 | $\frac{1}{16}$           |
| A5     | $0,125 \cdot \sqrt{2}$   | $0,25 : \sqrt{2}$      | 148 × 210                 | $\frac{1}{32}$           |
| A6     | $0,125 : \sqrt{2}$       | $0,125 \cdot \sqrt{2}$ | 105 × 148                 | $\frac{1}{64}$           |
| A7     | $0,0625 \cdot \sqrt{2}$  | $0,125 : \sqrt{2}$     | 74 × 105                  | $\frac{1}{128}$          |

# Aufgaben bei Aufnahme- gesprächen

Fakultät Mathematik/Physik  
an der Komenský-Universität Bratislava

Als Muster führen wir hier zwei Varianten von Aufgabenkomplexen an, die bei Aufnahmegesprächen in früheren Jahren gestellt wurden. Die schriftliche Prüfung dauerte 60 Minuten.

## Variante 1

▲ 1 ▲ Löst die nachstehenden Gleichungssysteme im Bereich der reellen Zahlen!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x + 3y = 5 & \text{b) } \lg(4xy) = 2 \\ 7x - 2y = -20 & \lg(x + y) = 1 \\ \text{c) } \sin(x + y) = 1 & \\ \sin x + \sin y = 3 & \end{array}$$

▲ 2 ▲ Auf einer Strecke des Bus-Nahverkehrs gibt es 16 Haltestellen einschließlich der Anfangs- und Endhaltestelle. Der Verkehrsbetrieb hat beschlossen, daß im Interesse einer Beschleunigung des Verkehrs 8 Haltestellen wegfallen sollen.

a) Auf wie viele Arten kann das erfolgen, wenn die Anfangs- und die Endhaltestellen bestehen bleiben?  
b) Auf wie viele Arten kann das erfolgen, wenn wir außerdem fordern, daß von beliebigen zwei benachbarten Haltestellen mindestens eine Haltestelle gestrichen wird?

▲ 3 ▲ Entscheidet, ob die nachstehenden Aussagen (Folgerungen) wahr sind! Die Entscheidung ist zu begründen.

$$\begin{array}{l} \text{a) } 3^{400} > 4^{300} \\ \text{b) } \forall a, b \in \mathbb{R}: |a| = |b| \Rightarrow |a + 1| = |b + 1| \\ \text{c) } \exists x, y \in \mathbb{R}: x < y \wedge 2^x \geq 2^y \end{array}$$

▲ 4 ▲ Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck  $ABCDEF$  mit  $\overline{AB} = 1 \text{ LE}$ . Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks  $BCH$ , wobei

$$H = \overline{AB} \cap \overline{CE}!$$

▲ 5 ▲ Wie lautet die Gleichung des Kreises  $k = (M; r)$ , welcher beide Koordinatenachsen berührt und durch den Punkt  $P(2; 1)$  geht?

## Variante 2

▲ 1 ▲ Bestimmt die Anzahl der Elemente der folgenden Mengen, wenn euch bekannt ist: Menge  $A$  besitzt 5 Elemente, Menge  $B$  7 Elemente und die Menge  $A \cap B$  besitzt ein Element!

- Menge  $A \cup B$
- Menge  $A \times B$
- Menge  $(A \times B) \cup (B \times A)$ .

▲ 2 ▲ Löst die nachstehenden Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen!

$$\text{a) } \frac{3x+8}{2} - \frac{x+6}{2} = x+1$$

$$\text{b) } \sqrt{x+1} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{9x+9} = 6$$

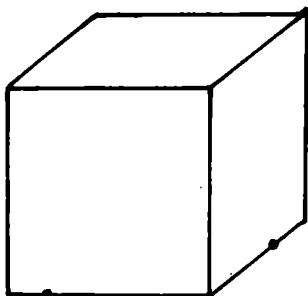
$$\text{c) } \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

▲ 3 ▲ Wieviel verschiedene Fahnen mit drei waagerechten Streifen existieren, wenn folgende Farben zu verwenden sind: Weiß, Rot, Blau, Gelb, Grün und wenn

- die Fahne dreifarbig sein muß,
- die Fahne dreifarbig oder zweifarbig sein kann, wobei aber benachbarte Streifen verschiedenfarbig sein müssen?

▲ 4 ▲ Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck  $ABCDEFGH$  mit der Seite  $\overline{AB} = 1 \text{ LE}$ . Ferner ist ein Punkt  $P$  bestimmt durch  $P = \overline{AB} \cap \overline{DE}$ . Zu berechnen ist  $\overline{RC}$ .

▲ 5 ▲ Durch gegebene drei Punkte (siehe Bild 1) ist eine Ebene bestimmt. Zeichnet den Schnitt des Würfels mit dieser Ebene, und numeriert die Reihenfolge der Schritte, wie ihr den Schnitt erhaltet!



Bereková/Hecht

## 19 harte Nüsse –

veröffentlicht in *rozhledy*

A Mathematische Schülerzeitschrift  
„Quant“, Moskau

Löst die folgende Ungleichung bzw. die Gleichungen!

$$\text{▲ 1 ▲ } 2(x+1) > x+4$$

$$\text{▲ 2 ▲ } \sqrt{4+2x-x^2} = x-2$$

$$\text{▲ 3 ▲ } \frac{\sqrt[3]{12+x}}{x} + \frac{\sqrt[3]{12+x}}{12} = \frac{64}{3} \sqrt[3]{x}$$

$$\text{▲ 4 ▲ } \frac{(5-x)\sqrt{5-x} + (x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2$$

$$\text{▲ 5 ▲ } \sqrt[3]{4-4x+x^2} + \sqrt[3]{49+14x+x^2} = 3 + \sqrt[3]{14-5x-x^2}$$

$$\text{▲ 6 ▲ } \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2-16}$$

$$\text{▲ 7 ▲ } \log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$$

$$\text{▲ 8 ▲ } \frac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} - \log_3 x + \log_3^2 x = 3$$

B Mathematische Schülerzeitschrift  
„Matematika“, Sofia

▲ 9 ▲ Mit dem Symbol  $\overline{xyz}$  bezeichnen wir die dreistellige Zahl  $100x + 10y + z$ . Löst dazu die Gleichungen!

$$\begin{array}{l} \text{a) } (x+y)^2 = \overline{xy} \\ \text{b) } (\overline{xy})^2 = (\overline{x+2})(\overline{x+2})y \\ \text{c) } (\overline{xy})^2 = (\overline{y-1})xxy \\ \text{d) } x^y = 2(\overline{x-1})(\overline{y-1}) \\ \text{e) } x^5 = \overline{yyyx} \\ \text{f) } x^3 = (\overline{x-2})(\overline{x-7})x \end{array}$$

▲ 10 ▲ Löst die Gleichungen!

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{x+\frac{1}{2}}$$

$$\text{b) } x^3(x^2-7)^2 - 36x = 0$$

▲ 11 ▲ Zwischen den Zahlen 50 und 100 sollen alle natürlichen Zahlen  $x$  bestimmt werden, für die folgende Bedingungen gelten:  $x+4$  ist teilbar durch 3,  $x-4$  teilbar durch 5,  $c-3$  teilbar durch 7.

▲ 12 ▲ Vereinfacht den Term!

$$\left[ 4(a+1) + \left( \frac{\sqrt[6]{ab^2} + \sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[6]{a} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$$

▲ 13 ▲ Löst die Gleichungen!

$$\begin{array}{l} \text{a) } \sqrt[3]{5+x} - \sqrt{x-2} = 1 \\ \text{b) } \log_5^4(x-2)^2 + \log_5^2(x-2)^3 = 25 \\ \text{c) } (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 14 \end{array}$$

▲ 14 ▲ a) Vereinfacht den Term!

$$\left[ \left( \frac{a}{3} - \frac{1}{2} \right) a^2 - a^{2n+1} : (3a^{2n-2}) \right] \cdot (3a-1)$$

b) Welchen Wert hat der Term für  $a = -2$ ?

C Mathematische Schülerzeitschrift  
„Matematičko fizički list“,  
Beograd

▲ 15 ▲ Berechnet

$$\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}!$$

▲ 16 ▲ Die Zahlen  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}-2}$ ,  $\frac{1}{2}$  sind die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge. Berechnet die Summe der zugehörigen unendlichen Reihe!

▲ 17 ▲ Vereinfacht den Term!

$$\frac{\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{2-1} - \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2-1}}{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2+1}}$$

▲ 18 ▲ Berechnet den Wert des Terms  $3x^2 + 4y - 3y^2$ , wenn

$$x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}!$$

▲ 19 ▲ Schreibt den Term

$$\sqrt{13+30\sqrt{2}+9+4\sqrt{2}}$$

in der Form  $a + b\sqrt{2}$ !

Zusammengestellt von Ota Setzer, Prag

Anmerkung: Die tschechische mathematische Schülerzeitschrift *rozhledy* spricht Schüler der Klassenstufen 9 bis 12 an.

# In freien Stunden · alpha-heiter

Unterhaltungsmathematik aus der ČSSR



Pavel Matuska

## Kryptogramme

a) Ersetzt in den gegebenen Diagrammen die Buchstaben durch Ziffern derart, daß die dabei entstehenden Zahlen in allen Zeilen und Spalten (dreiziffrige) Quadratzahlen ganzer Zahlen darstellen!

Jaromír Maláč

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | B |
| B | C | B |
| B | B | A |

|   |   |   |
|---|---|---|
| K | L | M |
| L | N | L |
| M | L | K |

b) MATHE ČSA Č < K  
 MATHE VIVAT KLM S > O  
 MATHE VIVAT LOT M < T  
 HOBBY MATHE AIR

Dirigent Jindřich Pěňčík, Prag

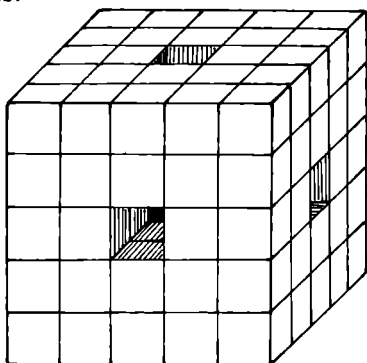
c) Überlegt und rechnet!

$$\begin{array}{r}
 a b b + c d e = f d e \\
 : \quad + \quad - \\
 \underline{g b + g f h = g d h} \\
 i b + j f i = h b i
 \end{array}$$

Petr Hnilička

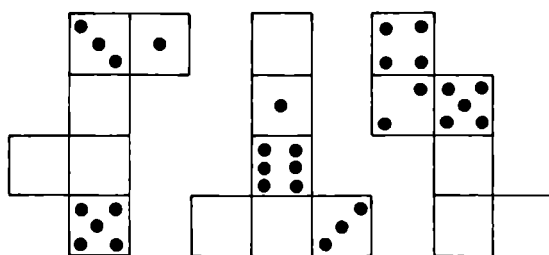
## Ein Würfelproblem

Ein Würfel besteht aus 125 kongruenten kleinen Würfeln mit der Kantenlänge 1 (cm). Aus diesem zusammengesetzten Würfel werden nun kleine Würfel herausgenommen, und zwar die mittlere Säule zwischen Grundfläche und Deckfläche, ferner die mittlere Säule zwischen der Vorderfläche und der Hinterfläche sowie die mittlere Säule zwischen der linken und rechten Seitenfläche. Berechnet die Oberfläche und den Rauminhalt des Restkörpers!



## Kleine Übung zum Vorstellungsvermögen

Bei den Netzen der Würfel in den Bildern 1, 2, 3 sollt ihr die leeren Felder mit Punkten (Augen) derart ausfüllen, daß aus dem vollständigen Netz ein richtiger Spielwürfel entsteht!



Bei diesem muß die Summe der Punkte auf gegenüberliegenden Seitenflächen 7 sein. Es dürfen auch Punkte zusätzlich auf den bereits ausgefüllten Feldern eingetragen werden; ihr müßt aber dann eine entsprechende neue Punktfigur zeichnen. Füllt also nicht die Felder in der Zeitschrift aus, sondern zeichnet euch die drei Netze auf Papier! Es kann auch mehrere verschiedene Lösungen geben.

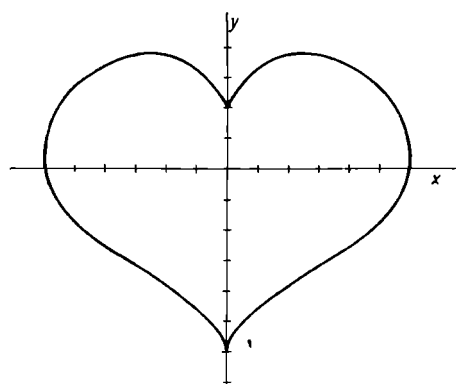
## Eine Herzkurve

Ein Beispiel für Funktionen, deren Graph eine geschlossene Kurve in Form eines Herzens aufweist, ist das folgende Paar von Funktionen:

$$y_{1,2} = \frac{2}{3} \left[ \frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2} \right]$$

Überlegt den Definitionsbereich der Funktionen, und zeichnet den Funktionsgraph; überlegt ferner, ob Symmetrie vorliegt! Warum entsteht bei diesem Funktionspaar eine geschlossene Kurve?

S. H.



## Aufgaben-Allerlei

1. Welche Länge hat der Uhrzeiger, wenn sein Ende in einer Minute einen Bogen von der Länge 1 cm beschreibt?

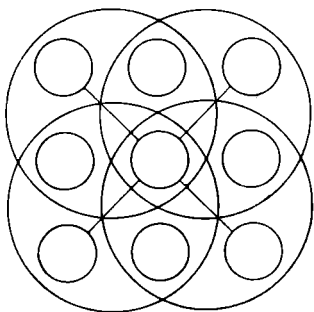
2. Ein Quadrat  $ABCD$  hat die Seitenlänge  $a$ .  $E, F, G$  sind der Reihe nach die Mittelpunkte der Seiten  $AB, BC, AD$ . Ohne schriftliche Rechnung soll der Flächeninhalt des Dreiecks  $EFG$  bestimmt werden.

3. Welche natürlichen Zahlen kann man in die folgenden drei Terme einsetzen, damit als Ergebnis wieder eine natürliche Zahl entsteht?

a)  $\frac{6}{x-1}$     b)  $\frac{x}{x-1}$     c)  $\frac{x}{x-4}$

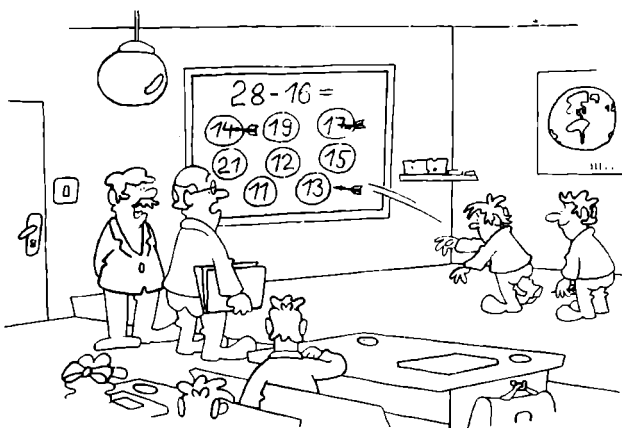
4. In die kleinen Kreise sollen 8 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- die Summen der Zahlen in den beiden Diagonalen sollen gleich sein;
- die Summen der Zahlen innerhalb der großen Kreise sollen gleich sein;
- die doppelte Summe der Zahlen innerhalb eines großen Kreises soll der dreifachen Summe der Zahlen gleich sein, die in einer Diagonale stehen.



5. In einem Kollektiv arbeiten Männer und Frauen. Eine Frau scheidet aus (Altersrente). Würde sie durch einen Mann ersetzt, so wäre der Prozentsatz der Frauen im Kollektiv gerade um ein Prozent kleiner als für den Fall, daß sie ohne Ersatz ausscheidet. Wieviel Männer und Frauen waren ursprünglich im Kollektiv?

Ota Setzer



„Ich richte mich nach Komenský“ (Comenius).  
– „...Wir wollen spielend lernen“. – Wer das richtige Ergebnis trifft, erhält eine Eins.

aus: Dikobraz, Václav und Petr Herinkovi

## Kreuzzahlenrätsel

In die leeren Felder sind natürliche Zahlen bzw. Grundziffern einzusetzen, die den nachstehenden Bedingungen entsprechen.

Waagrecht: A  $\sqrt{1936}$ ; größter gemeinsamer Teiler zu 36, 72, 126.

B Lösung der Gleichung  $x:30 = 9:10$ ; größte einziffrige Primzahl;

$$2 - \{1 - [2 - (1 - 2) - 1] - 2\} + 8.$$

C Arithmetisches Mittel der Zahlen 1, 1, 3, 7;  $\sqrt{152^2 + 714^2}$ ; Lösung der Gleichung

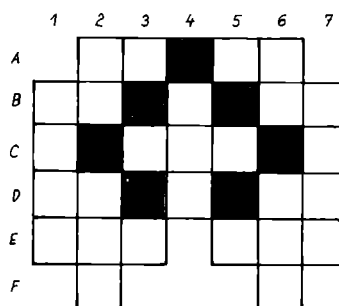
$$\frac{x}{3} - 1 = \frac{x}{2} - 2.$$

D Summe der Innenwinkel im Zehneck, ausgedrückt in rechten Winkeln;

$$24 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3 + \frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{2}}; \text{Basis unseres Zahlensystems.}$$

E Kleinstes gemeinsames Vielfaches der Zahlen 2, 3, 6, 12, 16, 36; kleinste dreiziffrige Primzahl, die auf 17 endet.



Senkrecht: 1 Primzahl

2  $2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$ ;  $28 \cdot 23$

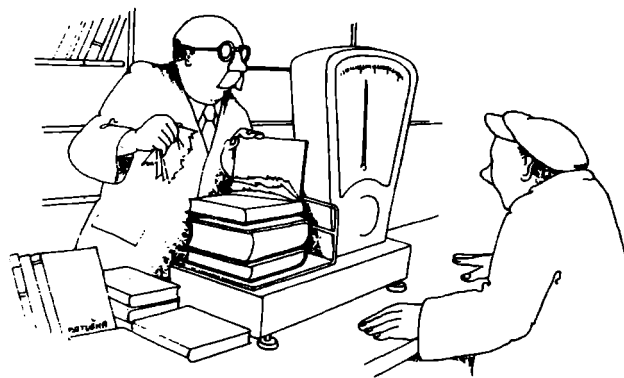
3 ?; größter gemeinsamer Teiler der Zahlen 21, 56, 63, 84; ?

4 Ein Vielfaches von 67

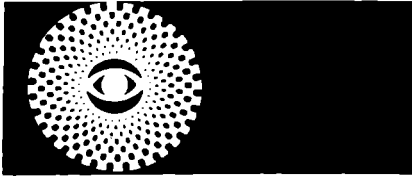
5  $4 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ ; eine Zahl, die weder positiv noch negativ ist.

6  $3^4$ ; drei gleiche Grundziffern

7 Primzahl



aus: NBI, Václav Ostatek



## ARBEITS- GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

### Ein mathematisches Spiel: Trlenka

Südlich von Ružomberok (Slowakei) liegt das Tal *Trlenská dolina*. Im Juli 1979 war dort ein Pionier-Spezialistenlager für *Junge Mathematiker*. In diesem Lager wurde erstmalig ein Spiel durchgeführt, das für dieses Lager erdacht und nach dem schönen Gebirgstal benannt wurde. Ihr sollt nun eine Beschreibung des Spiels erhalten, das eine gute Unterhaltung bietet.

**Spielregeln:** *Trlenka* wird auf einem schachbrettähnlichen Brett mit  $4 \times 4$  Feldern gespielt. Es sind zwei Spieler *A*, *B* beteiligt, die abwechselnd Züge ausführen. Zum Spiel gehören 16 Spielsteine.

Bei jedem Zug legt der Spieler 1, 2, 3 oder 4 Steine auf freie Felder einer Zeile oder einer Spalte. Auf jedes Feld darf nur ein Stein gelegt werden. Derjenige Spieler, der den letzten (16.) Stein hinlegt, hat verloren.

Die Spielregeln für jedes Spiel begreift man am besten beim Spielvorgang selbst; deshalb soll nun eine Beispiel-Partie beschrieben werden.

Der Spielverlauf wird durch eine Folge von acht Diagrammen veranschaulicht (siehe Bild 1), dabei werden die Steine durch

Punkte dargestellt. Beim ersten Zug legte Spieler *A* zwei Steine in die zweite Spalte (schwarze Punkte im Diagramm). Dann legte der Spieler *B* drei Steine in die Felder der ersten Zeile (schwarze Punkte im nächsten Diagramm). Im dritten Zug legte Spieler *A* einen Stein auf ein Feld in der ersten Spalte (siehe 3. Diagramm). Das Spiel wird nun so fortgesetzt, wie es auf den weiteren Diagrammen des Bildes 1 ersichtlich ist. Bei der Zugfolge der Beispielpartie fehlt der letzte Zug; dabei wäre Spieler *A* gezwungen, das letzte freie Feld zu besetzen und er hat damit verloren.

Denkt über diese Beispielpartie nach, und versucht folgende Fragen zu beantworten:

1. Konnte Spieler *A* im 7. Zug so spielen, daß er für jeden beliebigen Zug von *B* die Partie gewann?

2. Wir setzen voraus, daß Spieler *A* im 5. Zug den Stein nicht in die dritte Spalte, sondern in die erste legte. Wie könnte Spieler *B* in diesem Fall fortsetzen?

3. Könnte Spieler *A* im dritten Zug der Partie besser spielen? Wenn es euch gelungen ist, auf die gestellten Fragen eine zutreffende Antwort zu finden, so versucht ein weiteres Problem zu lösen: Kann Spieler *A* die Partie gewinnen? Oder, genauer formuliert: Gibt es eine Anleitung für die Zugfolge, bei deren Einhaltung der Spieler *A* über jeden Gegner siegt?

Dieses Problem könnte unlösbar sein, d. h., daß es keine solche Anleitung gibt. Aber vielleicht existiert dann eine solche Anleitung für den Spieler *B*, d. h., daß *B* jede Partie gewinnen kann? Sicher scheint zu sein, daß es für einen der Spieler (wir wissen aber nicht, für welchen) solch eine Anleitung gibt; man bezeichnet diese Anleitung als Spiel-Strategie.

Die Freude über die Entdeckung einer entsprechenden Strategie wollen wir dem Leser überlassen. Als Hilfestellung wollen wir die Strategie für ein einfacheres Spiel anführen, und zwar für eine Variante zu *Trlenka*, wo wir ein Brett mit nur  $3 \times 3$  Feldern verwenden; diese Variante soll *Klein-Trlenka* heißen.

#### Strategie für Klein-Trlenka

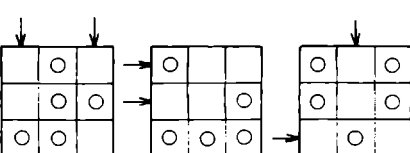
Unter allen möglichen Spielpositionen (wie viele gibt es?) sollen nur einige wichtige behandelt werden, wir nennen sie *kritische Positionen*. Das sind solche Positionen, bei denen derjenige Spieler verliert, der am Zug ist, wenn sein Gegner die Spielstrategie beherrscht. Bei *Klein-Trlenka* gibt es vier Typen kritischer Positionen:

1. Es sind genau 8 Felder besetzt (ein Feld ist frei).
2. Es sind genau 6 Felder besetzt, in jeder Zeile und Spalte ist genau ein Feld unbesetzt.

Bild 2a

b

c



3. Es sind genau 5 Felder besetzt; bei vier freien Feldern entsteht einer von drei Fällen (siehe Bild 2a, b, c).
4. Es ist nur ein Feld besetzt.

Wenn wir die kritischen Positionen kennen, haben wir damit bereits die Grundlage für die Spielstrategie erkannt. Die eigentliche Anleitung für die Zugfolge ist dann relativ einfach:

- a) Im ersten Zug legt Spieler *A* einen Stein auf ein beliebiges Feld.
- b) Im dritten Zug ergänzt Spieler *A* die Anzahl der gelegten Steine auf fünf (und zwar so, daß eine der im Punkt 3 beschriebenen Positionen entsteht).

c) Im fünften Zug spielt *A* so, daß eine der Positionen entsteht, die im Punkt 2 bzw. 1 beschrieben sind.

d) Wie im vorhergehenden Zug ist eine Position entstanden, wie sie im Punkt 2 beschrieben ist; dann legt im 7. Zug der Spieler *A* einen Stein auf ein beliebiges der restlichen zwei freien Felder.

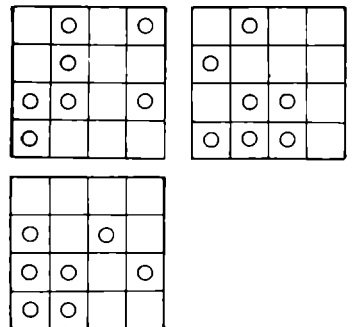
Nun könnt ihr nach dieser Anleitung einige Partien *Klein-Trlenka* spielen. Dann versucht, eine Spielstrategie für *Trlenka* zu finden! Zur Übung und als Hilfe beantwortet folgende Fragen:

a) Wieviel wesentlich verschiedene Positionen existieren beim Spiel *Trlenka*, wenn von 16 Feldern 12 besetzt und 4 frei sind?

b) Wieviel entsprechende Positionen existieren, wenn 10 Felder besetzt und 6 frei sind?

Wir müssen dazu noch erklären, was wir unter *wesentlich verschiedene Positionen* verstehen. Zunächst erklären wir, was *im wesentlichen gleiche Positionen* sind. Das sind zwei Positionen, die wir ineinander durch eine einmalige (ggf. mehrmalige) Anwendung folgender drei Transformationen überführen können: Zeilentausch, Spaltentausch, Umklappen um eine Diagonale. In diesem Sinne sind alle 3 Positionen in Bild 3 im wesentlichen gleich. Positionen, die nicht im wesentlichen gleich sind, werden als (wesentlich) verschieden bezeichnet.

Bild 3



#### Schlußbemerkung

Das Spiel *Trlenka* kann man auf verschiedenen großen Spielbrettern spielen. Je größer die Anzahl der Felder ist, desto schwieriger ist es, eine zugehörige Spielstrategie zu finden. Dem Autor ist keine Strategie für Spielbretter mit  $5 \times 5$  Feldern oder größer bekannt.

Milan Hejny

# Lösungen



Ergebnisse zu:

Aufgaben für die jüngsten Leser

- ▲ 1 ▲ 50°.  
 ▲ 2 ▲ a) 30 cm; b) 16 cm².  
 ▲ 3 ▲ Das fehlende Quadrat kann bei einer der folgenden Seiten angefügt werden: 9, 10; 10, 11; 11, 12; 3, 8.  
 ▲ 4 ▲ a) 3; b) 5.  
 ▲ 5 ▲ nein. 6 ja. 7 ja. 8 ja.

Lösung zu: Böhmisches Schloß

Der Schlüsselzug lautet 1. d2-d4!  
 Nach 1. ...Kf6/Kd6 2. Db5/Db7 Ke6/Ke6  
 3. Dc6/Dc6 ergibt sich das erste Böhmisches Schloß.  
 Das zweite nach 1. ...Kd5 2. Db6 Kc4 3. Dc5.  
 Das dritte nach 1. ...Kd7 2. Db6 Kc8 3. Lf5.

Lösungen zu: 19 harte Nüsse

- A ▲ 1 ▲  $x > 2$  ▲ 2 ▲  $x = 3$   
 ▲ 3 ▲  $x_1 = \frac{12}{127}$ ,  $x_2 = \frac{-4}{43}$   
 ▲ 4 ▲  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 5$   
 ▲ 5 ▲  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -6$  ▲ 6 ▲  $x = 5$   
 ▲ 7 ▲  $x = \frac{1}{12}$  ▲ 8 ▲  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 9$   
 B ▲ 9 ▲ (x; y) = a) (8; 1) b) (2; 1)  
 c) (7; 6) d) (4; 3) e) (6; 7) f)  $x = 9$   
 ▲ 10 ▲ a)  $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{2})$   
 b) 0;  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ ;  $\pm 3$   
 ▲ 11 ▲  $x = 59$  ▲ 12 ▲  $2 + 2\sqrt{a}$   
 ▲ 13 ▲ a)  $x = 3$  b)  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = \frac{11}{5}$   
 c)  $x = \pm 2$   
 ▲ 14 ▲ a)  $\frac{-3a^2}{2} + \frac{a^2}{2}$  b) 14  
 C ▲ 15 ▲ 1,5 ▲ 16 ▲  $4 + 3\sqrt{2}$   
 ▲ 17 ▲  $\sqrt{2}$  ▲ 18 ▲  $\frac{1}{3}(48\sqrt{10} + 28)$   
 ▲ 19 ▲  $5 + 3\sqrt{2}$

Lösungen zu:

In freien Stunden · alpha-heiter

Kryptogramme

- a) 1 4 4 1 6 1  
 4 8 4 6 7 6  
 4 4 1 9 6 1

|          |       |     |
|----------|-------|-----|
| b) 31592 | 35306 | 287 |
| 31592    | 35306 | 314 |
| 31592    | 70612 | 159 |
| 94776    |       | 760 |

$$c) 600 + 198 = 798$$

$$: + -$$

$$20 + 275 = 295$$

$$30 + 473 = 503$$

Ein Würfelproblem

Es wurden 13 kleine Würfel herausgenommen;

$$A = 144 \text{ (cm}^2\text{)}, V = 112 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Kleine Übung

zum Vorstellungsvermögen

Zu dieser Aufgabe erwartet die Redaktion alpha die Lösung und weitere Würfelnetz-Varianten, Kennwort: Kleine Übung zum Vorstellungsvermögen.

Eine Herzkurve

Zu dieser Aufgabe erwartet die Redaktion alpha Antworten unter dem Kennwort: Herzkurve.

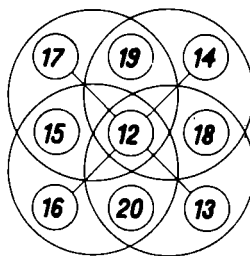
Aufgaben-Allerlei

$$1. s = 9,6 \text{ cm} \quad 2. A = \frac{a^2}{4}$$

$$3. a) x = 2; 3; 4; 7 \quad b) x = 2$$

$$c) x = 5; 6; 8$$

4. siehe Bild!



5. Im Kollektiv waren ursprünglich 18 Männer und 7 Frauen.

Kreuzzahlrätsel

|                   |             |             |
|-------------------|-------------|-------------|
| A 44; 18          | B 27; 7; 13 | C 4; 730; 6 |
| D 16; 7; 10       | E 144; 117  |             |
| 1 2311            | 2 47; 644   | 3 4; 7; 4   |
| 4 737 (= 67 · 11) | 5 1; 0      |             |
| 6 81; 111         | 7 5607      |             |

Lösungen zu:

Geschicklichkeitsrätsel

Schwarz und weiß

Zu den Bildern 5, 6, 7, 8 ist zu bemerken, daß die Bilder 5, 6 und 8 die Rätselscheibe an der Vorderseite zeigen (die schwarze Koralle ist rechts), das Bild 7 zeigt die Rückansicht (die schwarze Koralle ist links).

1. Vorgang (Bild 5): Die schwarze Koralle verschieben wir auf der Schleife so weit, bis sie hinter der Scheibe ist.

2. Vorgang (Bild 6): Wir ergreifen beide Stücke der Zierschnur auf der Rückseite der Scheibe (mit den Pfeilen nach oben bezeichnet) und ziehen sie in Pfeilrichtung so weit, daß wir die Schleifen, an denen sich die beiden Korallen befinden (auf dem Bild mit Pfeilen nach unten bezeichnet)

Bild 5

Bild 6

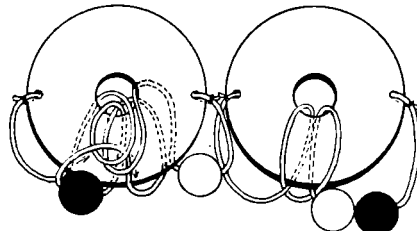
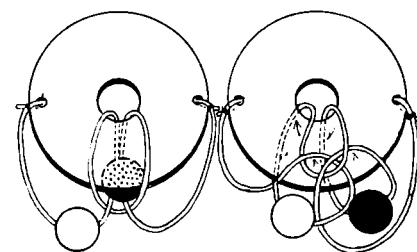


Bild 7

Bild 8

net) durch das Mittelloch in der Scheibe durchziehen. Wenn uns das gelungen ist, wenden wir die Scheibe und nehmen die Rückseite nach vorn.

3. Vorgang (Bild 7): Nun haben wir die schwarze Koralle links. Diese Koralle verschieben wir nach rechts und ziehen sie durch beide Schleifen an die Stelle, wohin die Pfeile zeigen. Dann ziehen wir beide Schleifen durch das Mittelloch zurück auf den ursprünglichen Platz, anschließend wenden wir die Scheibe wieder mit der Vorderseite zu uns. Wenn wir die entstandene Situation betrachten, so erkennen wir, daß es leicht möglich ist, die schwarze Koralle an eine Stelle neben die weiße Koralle zu verschieben (siehe Bild 8). Damit ist das Rätsel gelöst. Durch umgekehrtes Vorgehen bringen wir die schwarze Koralle auf den ursprünglichen Platz zurück.

Ein Ring in der Falle

Den Ring schieben wir auf das bewegliche Drahtbogenstück und zusammen mit diesem so dicht wie möglich an die Stelle, wo das andere (nichtverschiebbare) Bogenstück befestigt ist, das wir zuvor umgeklappt haben, siehe Bild 9. Nun können wir mit dem Ring diese Verbindungsstelle umgehen, und der Ring läßt sich dadurch aus dem inneren Bogenstück herausnehmen, siehe Bild 10. Das Hineinbringen des Ringes wird durch die Umkehrung des Vorgangs möglich.

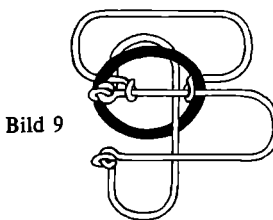


Bild 9

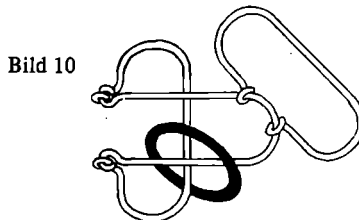


Bild 10

### Das gefangene Röhrchen

Wir betrachten dazu Bild 11. Das gefaltete Ende einer der beiden Zierschnuren ziehen wir zunächst durch das Röhrchen durch, dann durch die eine der beiden Öffnungen im Sperrholz. Mittels der Schlinge (mit dem gefalteten Ende der Zierschnur) können wir nun leicht die Koralle umgehen und die Zierschnur aus der Öffnung herausziehen. Damit hätten wir die Hälfte geschafft; das Röhrchen können wir nun leicht aus dem anderen Teil des Gebildes herauslösen.

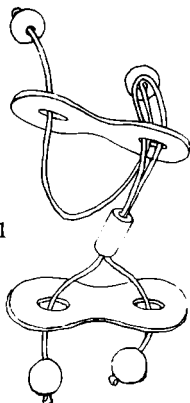


Bild 11

### Die Spange in der Spirale

Die beiden Bilder zeigen deutlich das Vorgehen. Wir verschieben die Spange derart entlang der Spirale, bis wir sie an die feste Schleife (an das *Auge*) gebracht haben; mit dem mittleren Teil der Spange können wir die feste Schleife umgehen und die Spange herausnehmen. Durch den umgekehrten Vorgang können wir dann die Spange wieder in die Spirale einschieben.

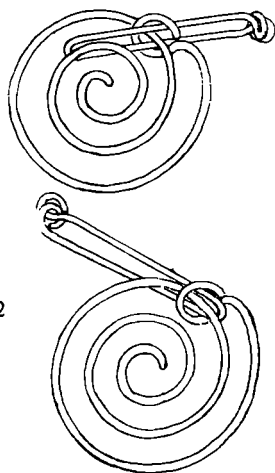


Bild 12

### Das Herz im Schuh

Die Herzfigur müssen wir so basteln, daß wir ihren mittleren Teil (die *Nadel*) in das waagrecht liegende Auge der Schuhfigur

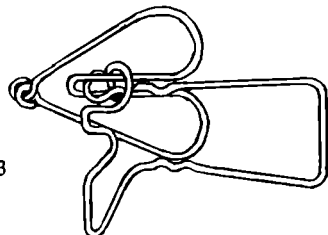


Bild 13

einschieben und dadurch das vertikal liegende Auge, d. h., den zur Schuhspitze liegenden Teil der Schuhfigur, umgehen können (Bild 12).

### Lösungen zu: alpha-Wettbewerb

Heft 1/84 (Fortsetzung)

Ma 8 ■ 2422 Dieses Verfahren kann man nur anwenden, wenn die Quersumme der zweistelligen Zahl kleiner als 10 ist. Es seien  $a$  und  $b$  die Grundziffern der zweistelligen Zahl in der vorgegebenen Reihenfolge; dann läßt sich die Multiplikationsaufgabe wie folgt darstellen:

$$(10a + b) \cdot 11$$

Nach unserem Verfahren gilt nun

$$100a + 10(a + b) + b$$

Ein Vergleich beider Terme zeigt die Allgemeingültigkeit:

$$(10a + b) \cdot 11 = 100a + 10(a + b) + b,$$

$$110a + 11b = 100a + 10a + 10b + b,$$

$$= 110a + 11b.$$

Wenn  $a + b \geq 10$ , dann ist

$$10(a + b) \geq 100. \text{ Dann gilt } (10a + b) \cdot 11$$

$$= 100(a + 1) + 10(a + b - 10) + b$$

$$= 100a + 100 + 10a + 10b - 100 + b$$

$$= 110a + 11b.$$

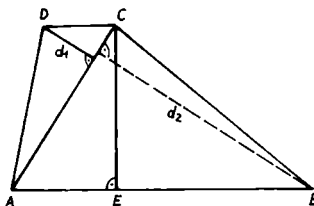
Es muß dann folgendermaßen verfahren werden:

Beispiel:  $48 \cdot 11 = 528$ .

Da die Quersumme von 48 größer als 10 ist, nämlich 12, schreibt man die 2 als mittlere Grundziffer und erhöht die erste Grundziffer um 1.

Ma 8 ■ 2423 Wegen  $2^{10} = 1024 > 1000$  müssen 9 Beutel folgende Anzahlen an Markstücken enthalten: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Der zehnte Beutel muß die restlichen, also 489 Markstücke enthalten.

Ma 8 ■ 2424 Skizze, nicht maßstäblich.



Die Flächeninhalte der Dreiecke  $ABC$  und  $ACD$  verhalten sich wie 4 : 1. Grundseiten sind  $AB$  bzw.  $CD$ ; Höhe ist in beiden Dreiecken  $CE$ .

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $ACD$  ist ein Fünftel des Flächeninhaltes des Trapezes, also  $24 \text{ cm}^2$ . Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC = 96 \text{ cm}^2$ .

Es seien  $d_1$  bzw.  $d_2$  die Abstände der Punkte  $D$  bzw.  $B$  von der Diagonalen  $AC$ . Dann gilt

$$24 \text{ cm}^2 = \frac{10 \text{ cm} \cdot d_1}{2} \text{ und}$$

$$96 \text{ cm}^2 = \frac{10 \text{ cm} \cdot d_2}{2}. \text{ Daraus folgen:}$$

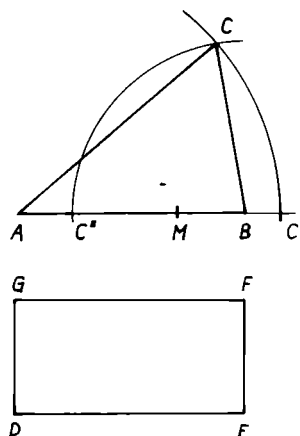
$$d_1 = 4,8 \text{ cm und } d_2 = 19,2 \text{ cm.}$$

Ma 8 ■ 2425

$$\overline{DE} = \overline{AB}$$

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AC} - \overline{AB} + \overline{BC}}{2}$$

Man zeichnet um  $A$  einen Kreis mit einem Radius der Länge  $\overline{AC}$ , der die Gerade  $AB$  in  $C'$  schneidet und um  $B$  einen Kreis mit einem Radius der Länge  $\overline{BC}$ , der die Gerade  $AB$  in  $C''$  schneidet. Die Strecke  $\overline{C'C''}$  ist genauso lang wie  $\overline{AC} - \overline{AB} + \overline{BC}$ . Wenn man  $\overline{C'C''}$  halbiert, so erhält man mit  $\overline{CM}$  die gesuchte zweite Rechteckseite.



Ma 9 ■ 2426 Es sei  $m$  die „Monatszahl“ des Geburtsmonats,  $j$  die „Jahreszahl“ des Geburtsjahres und  $a$  die Zahl, die das Lebensalter in Jahren am Geburtstag im Jahre 1984 angibt.

Nun gilt

$$(2m + 40) \cdot 50 - 16 - j = 100m + (1984 - j).$$

Wegen  $1984 - j = a$  gilt weiter

$$100m + 2000 - 16 - j = 100m + a,$$

$$100m + 1984 - j = 100m + a,$$

$$100m + a = 100m + a.$$

$a$  bedeutet das Alter in Jahren. Bei Streichung von  $a$  bedeutet dann  $m$  die „Monatszahl“ des Geburtsmonats, w.z.b.w.

Ma 9 ■ 2427  $cee$  muß eine Quadratzahl sein; es kommen nur 100 oder 144 in Frage. 100 entfällt, da sonst in  $efa$  die erste Ziffer eine Null wäre. Man setzt nun in (3) ein und erhält

$$\sqrt[3]{4 \cdot efa} = \sqrt{144},$$

$$\sqrt[3]{4 \cdot efa} = 12,$$

$$4 \cdot efa = 1728,$$

$$efa = 432.$$

Nun gelten

$$(1) 2b \cdot 1d = 432$$

$$(2) 1g \cdot 24 = 432. \text{ Es folgt } g = 8.$$

Wegen  $3^3 \cdot 2^4 = 432$  ermittelt man für

$$(1) 27 \cdot 16 = 432, \text{ also für } b = 7 \text{ und } d = 6.$$

Es ergeben sich die folgenden wahren Aussagen:

$$(1) 27 \cdot 16 = 432$$

$$(2) 18 \cdot 24 = 432$$

$$(3) \sqrt[3]{4 \cdot 432} = \sqrt{144}.$$

Ma 9 ■ 2428 Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$r^2 = (r - 21)^2 + 32^2,$$

$$r^2 = r^2 - 42r + 441 + 1024,$$

$$42r = 1465$$

$$r \approx 34,88 \approx 35.$$

Der Radius des Bogens beträgt etwa 35 mm.

Ma 9 ■ 2429 In dem abgebildeten Dreieck  $ABC$  sei  $CD$  Höhe auf  $AB$ . Die Seite  $AC$  habe die Seitenlänge  $n - 1$ ,  $AB$

die Seitenlänge  $n$ ,  $\overline{BC}$  die Seitenlänge  $n+1$ ,  $\overline{AD}$  die Länge  $x$ , also  $\overline{BD}$  die Länge  $n-x$ . Aus  $h^2 = (n-1)^2 - x^2$  und  $h^2 = (n+1)^2 - (n-x)^2$  folgt  $(n-1)^2 - x^2 = (n+1)^2 - (n-x)^2$ , also  $x = \frac{1}{2} \cdot (n-4)$ .

Daraus folgt weiter

$$h^2 = (n-1)^2 - \frac{1}{4} \cdot (n-4)^2 = \frac{3}{4} \cdot (n^2 - 4),$$

also

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3(n^2 - 4)}.$$

$$\text{Nun gilt } \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3(n^2 - 4)} = 84,$$

$$n^4 - 4n^2 - 37632 = 0, n = 14.$$

Das Dreieck  $ABC$  hat die Seitenlängen 13 cm, 14 cm und 15 cm.

Ma 10/12 ■ 2430 Es seien  $(c+2)$ ,  $(c+1)$  und  $c$  die Grundziffern nach Aufgabenstellung. Dann gilt

$$100(c+2) + 10(c+1) + c + 21$$

$$= 3[(c+2) + (c+1) + c]^2.$$

Durch äquivalente Umformung erhält man

$$111c + 231 = 27c^2 + 54c + 27$$

$$\text{und weiter } c^2 - \frac{19}{9}c - \frac{68}{9} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat Lösungen, von denen für unser Problem nur  $c = 4$  in Frage kommt.

Daraus folgt, daß die gesuchte dreistellige Zahl 654 heißt. (Quersumme:

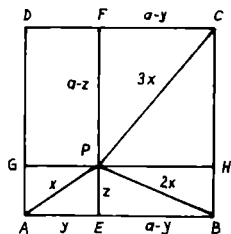
$$6 + 5 + 4 = 15; \quad 15^2 = 225; \quad 3 \cdot 225 = 675; \quad 675 - 21 = 654)$$

Ma 10/12 ■ 2431 Wir zeichnen durch  $P$  eine Parallele zu  $AB$  und eine weitere zu  $BC$ . Dem Bild ist folgendes zu entnehmen: Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$(1) \quad x^2 = y^2 + z^2,$$

$$(2) \quad 4x^2 = (a-y)^2 + z^2,$$

$$(3) \quad 9x^2 = (a-y)^2 + (a+z)^2.$$



Aus (3) und (2) folgt durch Subtraktion

$$5x^2 = (a-z)^2 - z^2 = a^2 - 2az, \text{ also}$$

$$(4) \quad z = \frac{a^2 - 5x^2}{2a}.$$

Aus (2) und (1) folgt durch Subtraktion

$$3x^2 = a^2 - 2ay, \text{ also}$$

$$(5) \quad y = \frac{a^2 - 3x^2}{2a}.$$

Aus (4), (5) folgt durch Einsetzen in (1)

$$x^2 = \frac{(a^2 - 3x^2)^2}{4a^2} + \frac{(a^2 - 5x^2)^2}{4a^2},$$

$$4a^2x^2 = 2a^4 - 16a^2x^2 + 34x^4,$$

$$x^4 = \frac{10}{17}a^2x^2 + \frac{a^4}{17} = 0.$$

Setzen wir  $x^4 = t^2$ , dann gilt

$$t^2 - \frac{10}{17}a^2t + \frac{a^4}{17} = 0,$$

$$\text{also } t_1 = \frac{a^2}{17}(5 + 2\sqrt{2}) \approx 0,46a^2 \text{ und}$$

$$t_2 = \frac{a^2}{17}(5 - 2\sqrt{2}) \approx 0,13a^2.$$

Daraus folgt schließlich

$$x_1 \approx 0,68a = 6,8 \text{ cm}$$

$$\text{und } x_2 \approx 0,36a = 3,6 \text{ cm}.$$

Es entfällt  $x_1$ , da in diesem Fall  $P$  außerhalb des Quadrates liegt. Die Strecke  $\overline{PA}$  hat die Länge 3,6 cm, die Strecke  $\overline{PB}$  hat die Länge 7,2 cm.

Ma 10/12 ■ 2432 Im rechtwinkligen

Dreieck  $DBE$  ist  $\frac{\beta}{2} = 30^\circ$ , folglich  $\beta = 60^\circ$ .

Wegen  $\gamma = 60^\circ$  ist  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck. Daraus folgt, daß die Strecke  $\overline{BE}$  ein Umkreisradius ist. Es gilt

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{r_1}{r_u}; \quad r_u = 2 \text{ cm} : \sin 30^\circ; \quad r_u = 4 \text{ cm}.$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = r_u^2 - r_1^2, \text{ also } \frac{c^2}{4} = 12.$$

Für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  gilt nun

$$A = \frac{c^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 12 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 20,78 \text{ cm}^2.$$

Ma 10/12 ■ 2433 Es gilt  $h = q$  nach Aufgabenstellung, nach dem Höhensatz

(1)  $p \cdot q = h^2$  und nach dem Satz des Pythagoras

$$(2) \quad p^2 + h^2 = q^2 \text{ bzw. } q = \sqrt{p^2 + h^2}.$$

Man setzt (1) in (2) und erhält

$$(3) \quad p^2 + pq = q^2, \quad p^2 + qp - q^2 = 0.$$

Von den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung ist nur  $p_1 = \frac{q}{2}(\sqrt{5} - 1)$

definiert. Das setzt man in die Gleichung  $c = p + q$  ein und erhält

$$c = \frac{q}{2}(\sqrt{5} - 1) + q$$

$$\text{bzw. } c \approx 1,618q.$$

Im rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  gelten

$$\sin \beta = \frac{q}{c} \text{ und } \cos \alpha = \frac{q}{c}.$$

Es ergeben sich

$$\sin \beta \approx \frac{q}{1,618q} \approx 0,618,$$

$$\text{d. h. } \beta \approx 38,17^\circ.$$

Analog erhält man für  $\alpha \approx 51,83^\circ$ .

Ph 6 ■ 151 Z. B.:

$$\rho_a = \frac{m}{V} = \frac{470 \text{ g}}{60 \text{ cm}^3} \approx 7,8 \text{ g/cm}^3 \quad (\text{Stahl})$$

$$\rho_b = \frac{m}{V} = \frac{150 \text{ g}}{60 \text{ cm}^3} \approx 2,6 \text{ g/cm}^3 \quad (\text{Marmor})$$

Es handelt sich um die Stoffe Stahl und Marmor.

Ph 7 ■ 152

Geg.: Gewichtskraft  $G = 650 \text{ kg}$

Ges.: Leistung  $P$

$$\text{Höhe} \quad s = 15 \text{ m}$$

$$\text{Zeit} \quad t = 8 \text{ s}$$

$$\text{Wirkungsgrad} \quad \eta = 0,85$$

Nach der Gleichung  $\eta = P_2/P_1$  für den Wirkungsgrad ist

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} \text{ mit } P_2 = F \cdot v \text{ und } v = \frac{s}{t},$$

$$P_1 = \frac{F \cdot s}{\eta \cdot t},$$

$$P_1 = \frac{650 \text{ kp} \cdot 15 \text{ m}}{0,85 \cdot 8 \text{ s}},$$

$$P_1 = 1434 \frac{\text{kpm}}{\text{s}},$$

$$P_1 = 1,434 \cdot 9,81 \text{ kW} \approx 13 \text{ kW}.$$

Die Leistung des Elektromotors beträgt rund 13 kW.

Ph 8 ■ 153

Geg.:  $W = 1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh}$  Ges.:  $t$

$$P_1 = 4 \cdot 40 \text{ W} = 160 \text{ W}$$

$$P_2 = 3 \cdot 60 \text{ W} = 180 \text{ W}$$

$$P_3 = 2 \cdot 100 \text{ W} = 200 \text{ W}$$

(1) Berechnung von  $P_{\text{Ges}}$

$$P_{\text{Ges}} = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_{\text{Ges}} = 160 \text{ W} + 180 \text{ W} + 200 \text{ W}$$

$$= 540 \text{ W}$$

(2) Berechnung von  $t$

$$W = U \cdot I \cdot t \text{ und } P = U \cdot I$$

$$W = P_{\text{Ges}} \cdot t$$

$$t = \frac{W}{P_{\text{Ges}}} = \frac{1000 \text{ Wh}}{540 \text{ W}} = 1,852 \text{ h}$$

$$\approx 1 \text{ h } 51 \text{ min}$$

Die Glühlampen vollbringen in 1 h und 51 min eine Arbeit von 1 kWh.

Ph 9 ■ 154

Geg.:  $v_1 = 0,5 \text{ m/s}$  Ges.:  $d_2$

$$d_1 = 0,01 \text{ m}$$

$$s = 0,05 \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Nach dem Durchflußgesetz sind die Querschnitte und die Geschwindigkeiten umgekehrt proportional. Also

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2.$$

Da nach dem freien Fall  $v_2 = v_1 + \sqrt{2gs}$  gilt, ist

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 (v_1 + \sqrt{2gs})$$

$$\text{bzw. } \frac{d_1^2 v_1}{4} = \frac{d_2^2 (v_1 + \sqrt{2gs})}{4},$$

$$d_2^2 = \frac{d_1^2 v_1}{v_1 + \sqrt{2gs}},$$

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_1 + \sqrt{2gs}}},$$

$$d_2 = 0,01 \text{ m}$$

$$\sqrt{\frac{0,5 \text{ m/s}}{0,5 \text{ m/s} + \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,05 \text{ m}}}}$$

$$d_2 \approx 0,06 \text{ m} = 0,6 \text{ cm}.$$

Der Durchmesser beträgt unten 0,6 cm.

Ph 10/12 ■ 155

Geg.:  $m = 1500 \text{ kg}$  Ges.:  $f$

$$s = 15 \text{ mm} = 0,015 \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F}{sm}}$$

Da  $F = G$  und  $G = mg$  gilt, ist

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{sm}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{s}},$$

$$f = \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0,015 \text{ m}}},$$

$$f \approx 4,1 \text{ Hz}.$$

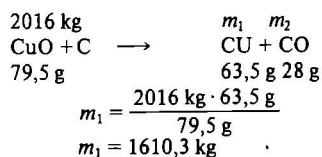
Die Maschine schwingt bei einer Frequenz von 4,1 Hz.

Ch 7 ■ 121 a)  $2100 \text{ kg} \approx 100\%$

$$x \approx 96\%$$

$$x = \frac{2100 \text{ kg} \cdot 96\%}{100\%}$$

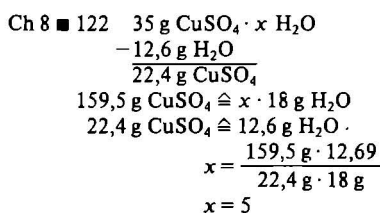
$$x = 2016 \text{ kg}$$



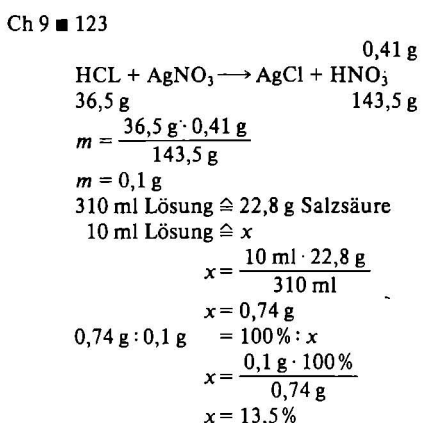
Aus 2,1 t Kupfer (II)-oxid, welches 4 % Verunreinigungen enthält, kann man 1610,3 kg Kupfer gewinnen.

$$\begin{array}{l} \text{b) } m_2 = \frac{2016 \text{ kg} \cdot 28 \text{ g}}{79,5 \text{ g}} \\ m_2 = 710,0 \text{ kg} \\ 710,0 \text{ kg} \hat{=} 100 \% \\ x \hat{=} 98,8 \% \\ x = \frac{710,0 \text{ kg} \cdot 98,8 \%}{100 \%} \\ x = 701,5 \text{ kg} \end{array}$$

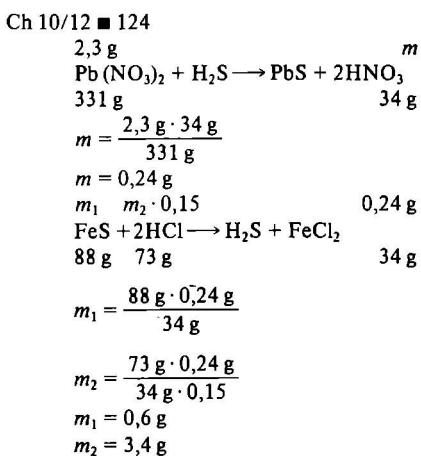
Bei der Reaktion entstehen 701,5 kg Kohlenmonoxid, wenn ein Gasverlust von 1,2 % auftritt.



5 Moleküle Wasser sind an der Kristallisation beteiligt.



Die Salzsäure ist 13,5%ig.



0,6 g Eisen(II)-Sulfid und 3,4 g 15%ige Salzsäure müssen zur Reaktion gebracht werden.

## Deutschsprachige Literatur für Junge Mathematiker aus der ČSSR

J. Sedláček

### Keine Angst vor Mathematik

168 Seiten, 71 Abb., MSB-Nr. 67  
VEB Fachbuchverlag Leipzig/Verlag  
SNTL-Verlag technischer Literatur Prag  
(1969)  
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 4,80 M

A. Kufner

### Raum und Entfernung

Wie man in der Mathematik mißt  
90 Seiten, 31 Abb., MSB-Nr. 104  
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft  
Leipzig (1981)  
Bestell-Nr.: 666 028 2 Preis (DDR): 6,00 M

F. Latka

### Kleine Formelsammlung

265 Seiten, Miniformat A7  
VEB Fachbuchverlag Leipzig/  
Alfa-Verlag Bratislava (1983)  
Bestell-Nr.: 546 877 4 Preis (DDR): 5,80 M

O. Zich/A. Kolman

### Unterhaltsame Logik

84 Seiten, zahlr. Abb., MSB-Nr. 51  
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft  
Leipzig/Verlag Mladá Fronta, Prag (1973)  
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 4,40 M

Unser Foto zeigt das Titelblatt des Mathematiklehrbuches, Klasse 8, der ČSSR.



Autorenkollektiv

### Aufgaben von Mathematik- olympiaden in der UdSSR und in der ČSSR

292 Seiten, zahlreiche Abb.  
Volk und Wissen Volkseigener Verlag  
Berlin/Staatl. Verlag für päd. Literatur,  
Moskau/Staatl. Päd. Verlag Prag (1965)  
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 8,20 M

A. Cuninka/K. Křižalkovič/O. Šedivý

### Textaufgaben zur Mathematik

mit Ansatz und Lösung  
mit 63 Bildern  
VEB Fachbuchverlag Leipzig/  
Alfa-Verlag Bratislava (1977)  
Bestell-Nr.: 546 286 6 Preis (DDR): 9,00 M

J. Vysin

### Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben

146 Seiten, zahlr. Abb., MSB-Nr. 5  
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft  
Leipzig/Verlag Státní pedagogické nakla-  
datelství, Prag (1972)  
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 9,60 M

J. Sedláček

### Einführung in die Graphentheo- rie

171 Seiten, zahlr. Abb., MSM-Nr. 40  
BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft,  
Leipzig/Academia-Verlag Prag (1972)  
Bestell-Nr.: ohne Preis (DDR): 6,40 M

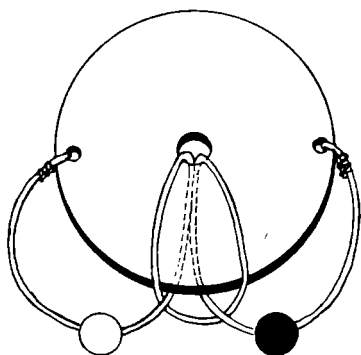
In der ČSSR werden seit 1951  
Mathematikolympiaden durchgeführt. Die  
*Mathematische Gesellschaft* gab zur Förde-  
rung dieser Form der außerunterrichtli-  
chen Tätigkeit zahlreiche Broschüren und  
Bücher mit mathematischen Problemen  
heraus. Unser Foto zeigt einen solchen  
(umfassenden) Titel.



# Geschicklichkeitsrätsel

## Schwarz und weiß

Heute kommen wir mit einem Geschicklichkeitsrätsel, dessen Herstellung zwar leicht, aber dessen Lösung bedeutend schwieriger ist. Dem erfolgreichen Rätsellöser bringt es aber dann große Freude. Die in Bild 1 dargestellte Rätselscheibe mit Zierschnur könnte auch eine andere Form haben. Die Musterscheibe im Bild ist aus Plexiglas, dadurch sieht man auch die auf der Rückseite befindliche Schnur (gestrichelte Linie). Zur Anfertigung der Rätselscheibe benötigen wir eine Scheibe aus beliebigem Material, ferner eine Zierschnur, deren Länge das 5- bis 6fache des Durchmessers der Kreisscheibe sein sollte, sowie zwei verschiedenfarbige Korallen, die so groß sein müssen, daß man sie nicht durch das Mittelloch der Scheibe hindurchziehen kann. Bei der Herstellung müssen wir das Aufziehen der Zierschnur und der Korallen genau nach dem Bild beachten.

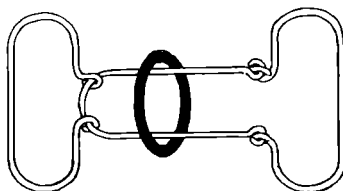


Die Aufgabe für den Rätselfreund lautet: Die schwarze und die weiße Koralle sollen auf die gleiche Schleife nebeneinander gebracht werden und mit dem umgekehrten Vorgang wieder zurück auf den ursprünglichen Platz.

## Ein Ring in der Falle

Diesmal ist es eine Rätselform aus nichtrostendem Stahl Draht. Zur Herstellung der Form wird am besten ein Drahtstück in eine Halbkreisform gebogen. Weil sich dieser Draht verhältnismäßig schwer biegen läßt, brauchen wir zur Anfertigung der Rätselform-Drahtstücke etwas Geschicklichkeit und Geduld. Zum Abtrennen des Drahtes auf die benötigte Länge eignet sich eine gewöhnliche Beißzange, zum Biegen

ist eine kleine Zange mit runden Backen zweckmäßig. Der Ring kann aus Metall oder aus Plast sein. Siehe dazu Bild 2.



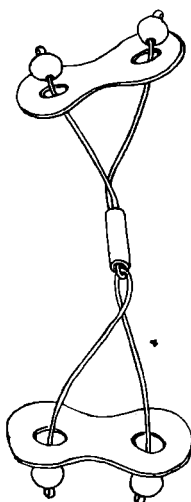
Nun zu den Abmessungen der Rätselform. Beim Festlegen ihrer Abmessungen richten wir uns nach der Größe des Ringes, den wir zur Verfügung haben. Die Länge eines Schenkels (Armes) des mittleren Drahtbogenstücks, an dem zwei weitere, seitliche Bogenstücke befestigt sind – davon das linke verschiebbar, das andere unver-schiebbar –, sollte etwa doppelt so groß sein wie der äußere Durchmesser des Ringes. Die Breite der Form, d. h. Abstand der Schenkel, muß geringfügig kleiner sein als der innere Durchmesser des Ringes (nur um so viel, daß es nicht möglich ist, den Ring über die seitlichen Bogenstücke wegzuziehen). Die Abmessungen der beiden seitlichen Bogenstücke sind ungefähr wie beim mittleren (inneren) Bogenstück zu wählen.

Die Aufgabe besteht darin, den Ring aus der Falle herauszubekommen und nachher wieder hineinzubringen.

## Das gefangene Röhrchen

Das Geschicklichkeitsrätsel, das ihr auf dem Bild 3 seht, gehört zu den leichteren dieser Art von Basteleien; es besteht im wesentlichen aus einer Schlinge und einer Öffnung. Wir nannten es *Gefangenes Röhrchen*.

Bild 3



Die Aufgabe besteht darin, dieses Röhrchen aus beiden Schlingen derart herauszulösen, daß kein Teilstück des gesamten Gebildes beschädigt wird.

Ehe wir mit der Lösung beginnen, müssen wir natürlich erst das Gebilde anfertigen. Für einen geschickten Bastler ist das keine schwierige Aufgabe, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.

Wir brauchen dazu ein Stück Sperrholz oder Plexiglas, vier größere gläserne oder hölzerne Korallen, etwa 60 cm dünne Zierschnur, ein Metallröhrchen sowie eine Laubsäge. Natürlich gehört etwas Geduld dazu. Bei der Anfertigung gehen wir nach dem Bild vor.

## Die Spange in der Spirale

Die Anfertigung ist für jeden gewandten Bastler fast eine Spielerei; auch die Lösung des Rätsels ist nicht schwierig.

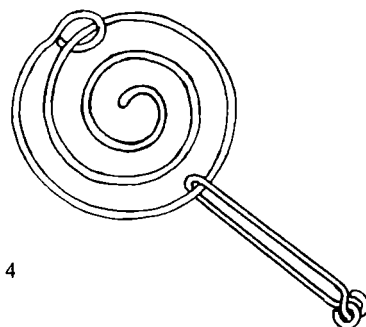
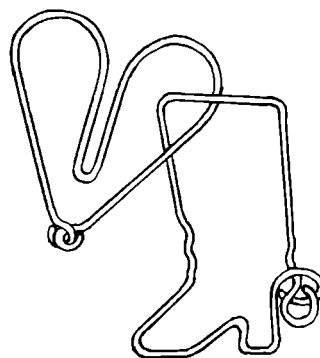


Bild 4

Wir verwenden dazu einen dünnen Stahl-draht (es eignet sich ein Fahrrad-Speichen-draht, im Fachgeschäft erhältlich), eine gewöhnliche Zange und eine kleinere Zange mit runden Backen zum Biegen des Drahtes. Entsprechend des Bildes werden nun an beiden Enden des einen Drahtes die Windungen (Schleifen) angebracht, ebenso an einem Ende des anderen Drahtes. Diesen biegen wir dann zu einer Spirale. Geschickte Bastler können das zugebogene Ende auch verlöten. Die Aufgabe besteht darin, die Spange aus der Spirale zu entfernen.

## Das Herz im Schuh

Zum Basteln der Figuren benötigen wir Stahldraht (z. B. Fahrradspeichen), eine Kneifzange sowie eine Zange mit runden Backen zum Biegen des Drahtes.



Entsprechend der Skizze (siehe Bild) fertigen wir das Herz und den Schuh an. Dann bemühen wir uns, die Herzfigur in das Schuhgebilde hineinzuschieben. Wenn uns das gelingt, dann haben wir das Rätsel eigentlich schon gelöst, denn durch die Umkehrung dieses Vorgangs können wir die Herzfigur wieder herauslösen, was unsere Aufgabe ist.

Josef Svoboda

# 25 Jahre Internationale Mathematikolympiaden



|                               |                             |                                  |
|-------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| I. bis XXV. IMO               | IX 1967 Jugoslawien         | XVIII 1976 Österreich            |
| I 1959 Rumänien               | X 1968 Sowjetunion          | XIX 1977 Jugoslawien             |
| II 1960 Rumänien              | XI 1969 Rumänien            | XX 1978 Rumänien                 |
| III 1961 Ungarn (ohne Signet) | XII 1970 Ungarn             | XXI 1979 Großbritannien          |
| IV 1962 Tschechoslowakei      | XIII 1971 Tschechoslowakei  | - 1980 -                         |
| V 1963 Polen (ohne Signet)    | XV 1973 Sowjetunion         | XXII 1981 Verein. St. v. Amerika |
| VI 1964 Sowjetunion           | XIV 1972 Polen              | XXIII 1982 Ungarn                |
| VII 1965 Deutsch. Dem. Rep.   | XVI 1974 Deutsch. Dem. Rep. | XXIV 1983 Frankreich             |
| VIII 1966 Bulgarien           | XVII 1975 Bulgarien         | XXV 1984 Tschechoslowakei        |