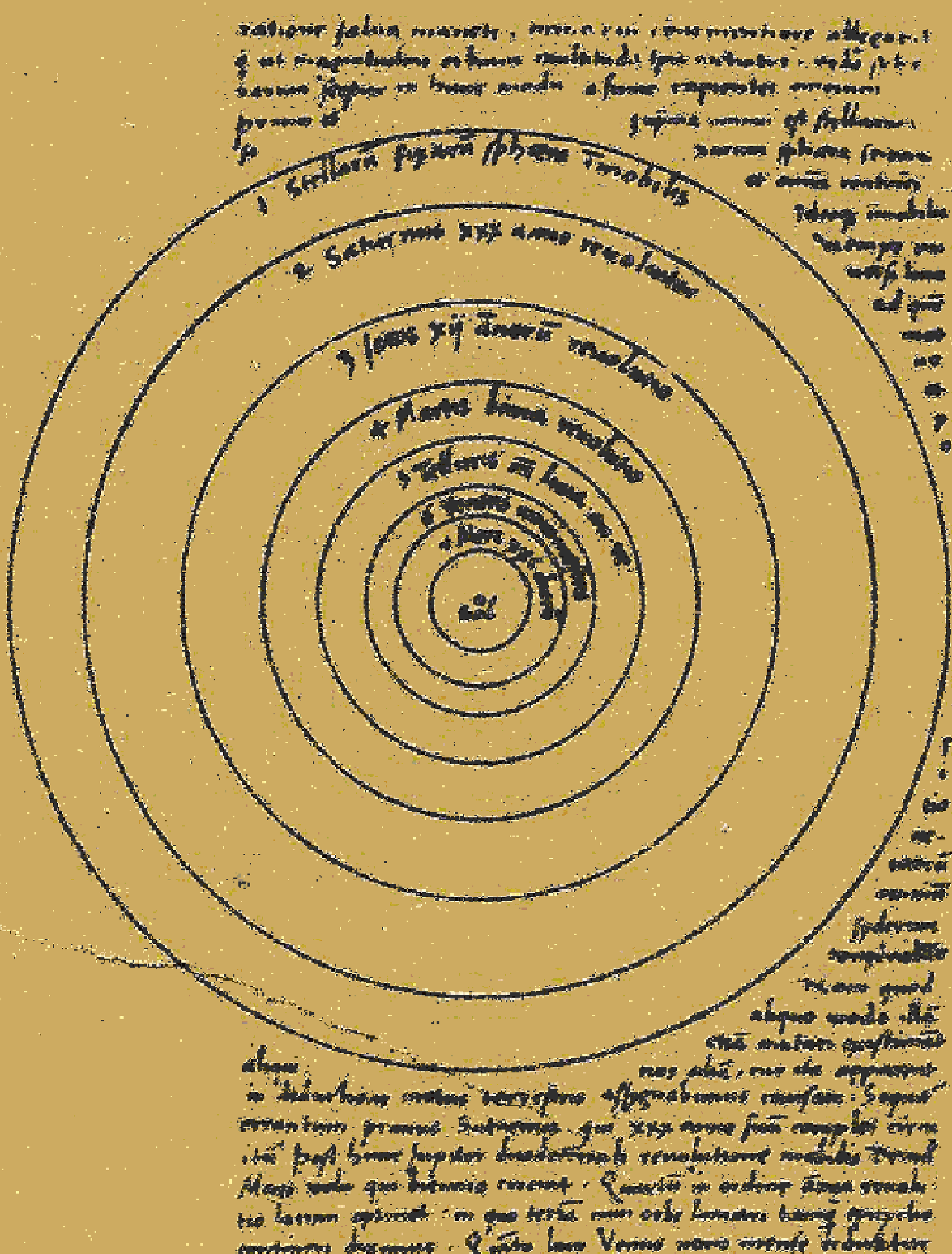
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

NICOLAVS COPERNICVS Mathematicus



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
6. Jahrgang 1972
Preis 1,– M
Sonderpreis für DDR: 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Briefmarken stellte zur Verfügung: W. Unze, Leipzig (S. 97); Bildstelle der Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar (S. 99); G. Pause, Döbeln (S. 103); J. Lehmann, Leipzig (S. 104/105); Vignette: F. Fricke, Berlin (S. 106); C. Thannhausser, Eigenfoto, Linz (S. 111); J. Lehmann, Leipzig (S. 114); Briefmarken stellte zur Verfügung: H. Decker, Köln (S. 120);
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: Idee J. Lehmann, Leipzig · Gestaltung: W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 27. Juli 1972

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* *bedeutet:* Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Nicolaus Copernicus

Am 19. Februar 1973 wird man überall in der Welt, wo sich Engagement für wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Fortschritt begegnen, des 500. Geburtstages von *Nicolaus Copernicus* festlich gedenken. Seine weltbewegende Leistung der Begründung des wissenschaftlichen astronomischen Weltbildes, sein Eintreten für seine polnische Heimat, seine Tätigkeit als Arzt, als Berater in Währungsfragen und anderen ökonomischen Problemen der Zeit, seine Tätigkeit als einer der ersten bedeutenden osteuropäischen Kenner der griechischen Sprache — all dies macht *Copernicus* zu einer der großen Gestalten der Renaissance, von der *Friedrich Engels* schreibt:

„Es war die größte progressive Umwälzung, die die Menschheit bis dahin erlebt hatte, eine Zeit, die Riesen brauchte und Riesen zeugte, Riesen an Denkkraft, Leidenschaft und Charakter, an Vielseitigkeit und Gehorsamkeit. Die Männer, die die moderne Herrschaft der Bourgeoisie begründeten, waren alles, nur nicht bürgerlich beschränkt ... Was ihnen aber besonders eigen, das ist, daß sie fast alle mitten in der Zeitbewegung, im praktischen Kampf leben und weben, Partei ergreifen und mitkämpfen, der eine mit Wort und Schrift, der andere mit dem Degen, manche mit beiden.“

I

Copernicus wurde hineingeboren in eine Zeit tiefgreifender gesellschaftlicher Umschichtungen. Im Schoße der sich zersetzenden Feudalgesellschaft begann sich eine neue Klasse zu formieren, das Bürgertum. Tiefe soziale Widersprüche in Stadt und Land, zahllose Kriege, die Herausbildung der Nationalstaaten, das Aufblühen der Städte, gärende geistige und religiöse Bewegungen prägten das Bild des Übergangs zur frühkapitalistischen Gesellschaft. Dazu gehörte eine noch nicht gekannte glanzvolle Entfaltung von Wissenschaft und Kunst. *Copernicus* erlebte den Großen Deutschen Bauernkrieg und die Hinrichtung *Thomas Müntzers*, die Entdeckung Amerikas, die Reformation; er war Zeitgenosse von *Leonardo da Vinci*, *Albrecht Dürer*, *Michelangelo* und *Raffael*. Als *Copernicus* geboren wurde, war *Johannes Gutenberg*, der Erfinder des Buchdruckes mit beweglichen Lettern, bereits fünf Jahre tot. Als *Copernicus* alterte, standen die Türken vor Wien, flammten in Westeuropa die Scheiterhaufen auf, mit denen die Inquisition gegen den Zerfall der katholischen Kirche ankämpfte, und in Oberitalien wurden die ersten großen Manufakturen eingerichtet, mit der eine neue, progressive Produktionsweise aufkam.

Auch die Heimat von *Copernicus*, das nördliche Polen, durchlitt während der Lebenszeit von *Copernicus* eine unruhige, kriegerische Zeit. In der historischen Schlacht von Grunvald (Grunewald) hatte 1410 ein vereinigtes polnisch-litauisch-russisches Heer dem aggressiven Deutschritterorden eine vernichtende Niederlage beigebracht. Nach einem 13jährigen blutigen Krieg gegen den Ordensritterstaat von 1454 bis 1466 konnten die ehemaligen westpreußischen Handelsstädte — unter ihnen Gdańsk und Toruń — sowie die Bistümer Chełmno (Kulm) und Varmia (Ermland) wieder in den Verband des Königreiches Polen zurückgeführt werden, das sich zur europäischen Großmacht entwickelt hatte. Doch trotz dieser Niederlage blieb der Deutschritterstaat ein gefährlicher Nachbar.

Von dieser politischen Situation sollte das Leben von *Nicolaus Copernicus* bestimmt werden, eines Domherren im Bistum Varmia, das geographisch vom Territorium des Ordensstaates nahezu umschlossen wurde. *Copernicus* hat sich den Forderungen, die seine Zeit an ihn stellte, nicht verschlossen und leidenschaftlich für die Belange seiner Heimat Partei ergriffen.

polnische Briefmarken, herausgegeben aus Anlaß des 500. Geburtstages von *Nicolaus Copernicus*.

II

Copernicus wurde am 19. Februar 1473 in Toruń geboren, als Sohn eines aus Kraków zugewanderten polnischen Kaufmannes, der in seiner neuen Heimat in die hochangesehene Familie der *Watzenrodes* eingeheiratet hatte. Toruń, an der Wisła (Weichsel) gelegen, war damals eine der mächtigsten Handelsstädte Preußens; ihre Handelsverbindungen reichten bis Skandinavien, Rußland, bis Brügge in Flandern und bis Ungarn.

Mit 10 Jahren (1483) erlitten *Nicolaus* und seine Geschwister *Andreas, Barbara* und *Katharina* durch den Tod des Vaters einen schweren Verlust. Ein Onkel mütterlicherseits, *Lucas Watzenrode* nahm sich der Erziehung insbesondere seiner Neffen mit großer Sorgfalt an.

Lucas Watzenrode war ein hervorragender Vertreter des Humanismus, stieg im Dienst der Kirche 1489 zum Bischof von Varmia auf und gehörte zu den entschiedensten und erfolgreichsten Verfechtern der polnischen Sache im Kampf gegen den Deutschen Ritterorden.

Der Onkel sandte seinen Neffen 1491 zum Studium an die Universität Kraków, die zu den ältesten und berühmtesten Hohen Schulen Europas gehörte und unter anderem eine hervorragende mathematisch-astronomische Tradition besaß. 1494 oder 1495 erhielt *Copernicus* durch Vermittlung seines Onkels eine Stellung als Kanonikus (Domherr) am Dom zu Frombork (Frauenburg), der Domkirche des Bistums Varmia. Auf Wunsch des Onkels, der selbst in Italien studiert hatte, setzte *Copernicus* 1496 seine Studien in Italien fort und hielt sich, mit nur einer kurzen Unterbrechung, dort bis 1503 oder 1504 auf. Er studierte in Bologna, Padua und Ferrara Rechtswissenschaft, Theologie, Astronomie, Mathematik und Medizin. 1503 promovierte er zum Doktor der Rechte.

Mit einer selbst für diese Zeit ganz außergewöhnlich umfassenden und tiefgründigen Ausbildung kehrte *Copernicus* nach Frombork zurück und trat dann, 1506, als eine Art Leibarzt in den unmittelbaren Dienst des Bischofs von Varmia, seines Onkels, in Lidzbark (Heilsberg), der dort nach Art weltlicher Feudalherren Hof hielt.

III

Bereits in Kraków, vor allem aber dann in Bologna, sah sich *Copernicus* mit dem unbefriedigenden Zustand der Astronomie konfrontiert. Das aus der griechisch-hellenistischen Antike überlieferte astronomische Weltbild hatte in dem berühmten Buch „Almagest" des alexandrinischen Astronomen *Ptolemäus* eine in sich abgerundete Darstellung gefunden, die mathematisch weitgehend durchgebildet war. Die Erde steht danach ruhend im Mittelpunkt der Welt. Die Planeten — unter ihnen die Sonne — umlaufen die Erde, und zwar so, daß sie die Planeten auf Kreisen bewegen, deren Mittelpunkte ihrerseits sich auf Kreisen um die Erde bewegen. Diese komplizierte Bewegung auf Epizykloiden hatten die antiken Astronomen annehmen müssen, um die Beobachtungen am Himmel mit dem aus idealistischen Vorstellungen abgeleiteten Postulat des hochangesehenen antiken Philosophen *Platon* einigermaßen in Übereinstimmung bringen zu können, wonach nur Kreise für die Bewegungen der Himmelskörper denkbar seien. Mit der sich steigernden Beobachtungsgenauigkeit bei den arabischen Astronomen und in Europa zu Beginn der Neuzeit gerieten die auf ptolemäischer Grundlage angestellten Berechnungen immer offensichtlicher im Widerspruch zum wirklichen Lauf der Planeten am Himmel. Es blieb dennoch die Vorstellung von der zentralen Stellung der Erde unerschütterlich, zumal deswegen, weil nach christlicher Ideologie der Wohnsitz des von Gott erschaffenen Menschen nur im Mittelpunkt der Welt denkbar erschien. Das Dogma von der Zentralstellung der Erde war somit wesentlicher Teil des christlichen Weltbildes; ein Angriff darauf mußte daher zugleich als ein Angriff auf die Kirche selbst aufgefaßt werden.

IV

Nachweislich hat *Copernicus* bereits in Kraków eingehende astronomische Studien betrieben und in Bologna und Rom im Anschluß an die weitgehenden Bemühungen des hervorragenden Astronomen *Regiomontanus* Beobachtungen angestellt. Als er in seine Heimat zurückkehrte, trug er bereits revolutionäre Ansichten über die Neubegründung der Astronomie in sich. Vermutlich in Lidzbark, zwischen 1506 und 1511, legte *Copernicus* seine Grundideen in einer kleinen Schrift nieder, die, ungedruckt geblieben, unter dem Namen „Commentariolus" (Entwurf) in die Geschichte der Wissenschaften eingegangen ist. *Copernicus* stellt die Sonne in den Mittelpunkt der Welt und alle Planeten (unter ihnen die Erde) umkreisen die Sonne. Das Dogma von der Zentralstellung der Erde ist durchbrochen — ein Schritt von großer gedanklicher Kühnheit ist getan. Die Bestätigung war durch eine mathematische Durchbildung dieses Ansatzes und durch weitere Beobachtungen zu erbringen.

Doch rückten aufkommende politische Fragen zunächst in den Vordergrund und forderten die Tatkraft von *Copernicus*.

H. Wußing

Dieser Beitrag wird in Heft 6 fortgesetzt.

Studienmöglichkeiten an der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar

An der Hochschule für Architektur und Bauwesen schließen die Absolventen nach einem vierjährigen Studium mit dem akademischen Grad Diplom-Ingenieur ab. Im Rahmen der 3. Hochschulreform haben sich die Studienmöglichkeiten an unserer Schule bedeutend erweitert.

Zunächst ist die Entscheidung zwischen den in der Tabelle angegebenen Grundstudienrichtungen zu fällen (siehe unten). In zwei Jahren werden hier breite Grundlagenkenntnisse in naturwissenschaftlichen, technischen und gesellschaftswissenschaftlichen Disziplinen erworben und bereits in praxisbezogenen Belegaufgaben angewandt sowie die Sprachkenntnisse und sportlichen Fähigkeiten erweitert.

Daran schließen sich vielseitige Möglichkeiten in den Fachstudienrichtungen unserer Hochschule an, für die sich die Bewerber frühzeitig, am besten schon bei der Aufnahme des Studiums entscheiden, und aus denen sich dann die sozialistische Gemeinschaftsarbeit mit Hochschullehrern, wissenschaftlichen Mitarbeitern, jungen Arbeitern und erfahrenen Facharbeitern aus den Kooperationsbetrieben der Hochschule entwickelt.

Gesellschaftlich aktive Studenten mit sehr guten fachlichen Leistungen können nach der Hauptprüfung für ein dreijähriges Forschungsstudium ausgewählt werden, das mit der Promotion zum Doktor-Ingenieur abschließt. Ihr Einsatz erfolgt dann in verantwortungsvollen Funktionen der sozialistischen Baupraxis oder als Nachwuchswissenschaftler im Hochschulwesen. *D. Schwaab*

Sektion Architektur, Vorbereitung auf die Verteidigung eines Entwurfs

Voraussetzungen für die Aufnahme eines Studiums:	Abitur mit guten bis sehr guten Leistungen in Staatsbürgerkunde, Mathematik, Physik und Chemie		
Grundstudiumsrichtungen je 2 Jahre	I. Architektur	II. Bauingenieurwesen	III. Verfahrensingenieurwesen
Fachstudienrichtungen je 2 Jahre	1. Architektur 2. Städtebau	1. Ingenieurbau 2. Tiefbau 3. Informationsverarbeitung im Bauwesen 4. Technische Gebiets- und Stadtplanung	1. Prozeßverfahrenstechnik 2. Systemsverfahrenstechnik 3. Anlagenbau

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. phil. et rer. nat. habil.

Horst Matzke

Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar
(Sektion Rechentechnik und Datenverarbeitung)

▲929▲ Eine Kurve (sie kann auch aus mehreren getrennten Zweigen bestehen) in einer Ebene heißt „Mittelpunktskurve", wenn in der Ebene ein Punkt M existiert, der folgende Eigenschaft besitzt: Jede Gerade durch M, die die Kurve schneidet, muß die Kurve in genau zwei Punkten P_1 und P_2 schneiden, und die Strecken $\overline{MP_1}$ und $\overline{MP_2}$ müssen gleiche Länge haben. (Solche Mittelpunktkurven sind z. B. der Kreis, das Bild der Funktion $y=\frac{1}{x}$, regelmäßige Vielecke mit gerader Eckenzahl.) Alle in den Beispielen angegebenen Kurven besitzen, wie man leicht feststellen kann, zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, die sich im Mittelpunkt schneiden.

Es ist zu untersuchen, ob

a) jede Mittelpunktskurve zwei sich in M schneidende Symmetrieachsen besitzt und

b) jede ebene Kurve mit zwei orthogonalen Symmetrieachsen Mittelpunktskurve ist.

In der Zeit vom 26. Juni bis 2. Juli 1972 fand unter der Schirmherrschaft der Hochschule für Architektur und Bauwesen, Sektion Rechentechnik und Datenverarbeitung, der

VI. Internationale Kongreß über die Anwendung der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften (ikm)

statt. Kongreßleiter war Prof. Dr. *Matzke*. Den Festvortrag hielt Prof. Dr. *F. K. Mann*, Berlin: Anwendung der EDV zur Rationalisierung der bautechnischen Projektierung und technologischen Vorbereitung von Investitionen. Wissenschaftler aus 26 Ländern hielten Vorträge.

Darstellende Geometrie und Architekturausbildung

In diesem Artikel soll ein kurzer Überblick über die Probleme gegeben werden, mit denen sich der Architekt während seiner Ausbildung im Fach „Darstellende Geometrie" beschäftigt. Wir weisen aber zugleich darauf hin, daß in diesem Rahmen die angegebenen Definitionen und Erklärungen nicht umfassend sein können. Das muß einer größeren Arbeit vorbehalten bleiben, die sich gründlich mit der oben genannten Problematik auseinandersetzen kann.

Wir gehen von einer Definition aus, die *E. Müller*, ein Wiener Geometer, angegeben hat: „Die darstellende Geometrie lehrt, wie man Raumgebilde nach geometrischen Grundsätzen durch Zeichnung abbildet und Aufgaben über die dargestellten Gebilde auf Grund der Abbildung löst."

An die Abbildungsverfahren werden in der Praxis folgende zwei Forderungen gestellt. Sie sollen 1. anschaulich und 2. maßgerechte Bilder liefern. Wir erläutern diese Eigenschaften:

1. *anschaulich:* Wir nennen ein Bild eines Gegenstandes anschaulich, wenn es den Eindruck vermittelt, den wir vom Gegenstand selbst erhalten.
2. *maßgerecht:* Der Aufwand zur Konstruktion des Bildes vom gegebenen Gegenstand ist gering, oder aus dem Bild lassen sich mit geringem Konstruktionsaufwand die wirklichen Größen des ursprünglichen Gegenstandes bestimmen.

Es gibt aber kein Abbildungsverfahren, das die beschriebenen zwei Eigenschaften gleichzeitig erfüllt. Eine Fotografie eines Gebäudes z. B. vermittelt einen plastischen und naturgetreuen Eindruck, also ein anschauliches Bild. Jedoch ist ein großer Zeitaufwand nötig, um aus den Abmessungen des Gebäudes das Bild herzustellen, das uns die Fotografie liefert. Es ist auch nicht einfach, aus der Fotografie die Abmessungen von Gebäudeteilen zu konstruieren.

In der darstellenden Geometrie bedient man sich der folgenden Projektionsarten:

1. *Zentralprojektion*

Bei der Zentralprojektion gehen von einem Zentrum O (liegt außerhalb der Bildebene) zu jedem Punkt des abzubildenden Körpers Strahlen (Projektionsstrahlen) aus, die eine Bildebene in Punkten, den Bildpunkten des Körpers, durchstoßen.

2. *Parallelprojektion*

Verlaufen die Projektionsstrahlen zueinander parallel, so sprechen wir von Parallelprojektion. Wir unterscheiden zwischen orthogonaler und schiefer Parallelprojektion, je nachdem, ob die Projektionsstrahlen senkrecht oder schief auf die Bildebene einfallen.

Da die Methoden und Ergebnisse der darstellenden Geometrie die Voraussetzungen für die Arbeit des Architekten schaffen, ist eine gründliche Einführung der Studenten der Architektur in dieses Fach notwendig. Es ist darum erforderlich, daß sich die Studenten mit den Projektionsarten und den geometrischen Eigenschaften von ebenen Gebilden, die beim Projektionsvorgang erhalten bleiben, den sogenannten Invarianten, vertraut machen. Eigenschaften von ebenen Gebilden, die unter diesem Aspekt betrachtet werden, sind z. B. Flächentreue, Winkeltreue, Parallelität und Teilverhältnis. Die Kenntnis der Invarianten bezüglich der Abbildung gestattet wesentliche Konstruktionsvereinfachungen in der darstellenden Geometrie.

Eine Aufgabe der Architekturstudenten besteht darin, ein räumliches Objekt perspektiv abzubilden, d. h. ein räumliches Objekt mit Hilfe der Zentralprojektion auf eine Bildebene zu projizieren. Das entstandene Bild des Objektes entspricht etwa dem, welches wir beim einäugigen Sehen wahrnehmen. Das Objekt kann entweder im Grund- und Aufriß oder in seiner Gestalt und in seinen Abmessungen bekannt sein. Da man im ersten Fall an Grund- und Aufriß gebunden ist, spricht man von „gebundener Perspektive", im zweiten Fall von freier Perspektive. Neben der Aufgabe perspektivischer Konstruktion des Objektes tritt auch die Aufgabe in der Umkehrung auf:

Aus einem zentralperspektiven Bild sind die zugeordneten Normalrisse zu rekonstruieren. Diese Aufgabe hat sowohl Bedeutung in der Architektur (Rekonstruktion zerstörter Gebäude aus Fotografien usw.) als auch in der Geodäsie (Entzerrung von Luftbildaufnahmen des Objektes). Die Fotogrammetrie beschäftigt sich mit diesen Problemen.

Viele Konstruktionsmethoden der Perspektive erfordern Hauptrichtungen (Länge, Breite, Höhe) des abzubildenden Objektes. Bei Geländeaufgaben sind sie nicht vorhanden, und man verwendet zur Gewinnung des zentralperspektiven Bildes vorteilhaft die rechnerische Durchstoßmethode.

In einer räumlichen Skizze wird die perspektive Abbildung eines Quaders gezeigt (Bild 1). Zunächst sind jedoch einige grundsätzliche Bemerkungen notwendig:

O ist das Zentrum der Projektionsstrahlen. σ ist eine waagerechte Standebene, und darauf wird der Quader gestellt. Mit π bezeichnen wir die zu σ senkrechte Bildebene, mit s die Standlinie (Schnittgerade zwischen π und σ). Die Lote von O auf σ und π schneiden die Ebenen σ und π im Standpunkt St und Hauptpunkt H. Die Parallele zu s durch H nennen wir die Horizontlinie h, die Strecke $\overline{OH}$ die Distanz d und die Strecke $\overline{OSt}$ die Horizonthöhe a. Denken wir uns in O das unbewegliche menschliche Auge, gerichtet auf den Hauptpunkt H, so kann es nur innerhalb eines geraden Kreiskegels mit einem räumlichen Öffnungswinkel von 36° die Konturen des Körpers scharf und unverzerrt erkennen. Diesen geraden Kreiskegel mit der Spitze in O und der Achse $\overline{OH}$ nennen wir den Sehkegel. Sp ist der Spurkreis des Sehkegels in π. Nach diesen Vereinbarungen beschäftigen wir uns mit der perspektiven Abbildung von Punkten und Geraden.

Abbildung eines Punktes:

P sei ein Raumpunkt. Indem wir den Strahl $\overline{OP}$ (von O nach P) mit der Bildebene π zum Schnitt bringen, erhalten wir P^*, den Bildpunkt von P. Zu jedem Raumpunkt (mit Ausnahme von O) gibt es eindeutig einen Bildpunkt, zu jedem Bildpunkt unendlich viele Raumpunkte (alle Punkte auf dem Projektionsstrahl $\overline{OP}$). Die Raumpunkte (mit Ausnahme von O), die in der zu π parallelen und durch O verlaufenden Ebene liegen, werden auf die unendlich fernen Punkte von π abgebildet.

Abbildung einer Geraden (Bild 2):

Das Bild g^* einer Geraden g ist bestimmt durch die Bilder zweier Punkte der Geraden. Jede Gerade g, die nicht parallel zu π verläuft, durchstößt π in einem Punkt, dem Spurpunkt Sg der Geraden. Wir senden von O aus Projektionsstrahlen zu den Punkten der Geraden, die jenseits der Bildebene π liegen. Die Durchstoßpunkte der Projektionsstrahlen durch π sind Bildpunkte der Geraden. Dabei gelangt schließlich der Projektionsstrahl in paralleler Lage zu g, der zum unendlich fernen Punkt der Geraden g zeigt. Der Schnittpunkt dieses Projektionsstrahles mit π heißt der Fluchtpunkt Fg der Geraden g und der Projektionsstrahl selbst der Fluchtstrahl FS.

Der Fluchtpunkt einer Geraden ist das Bild ihres unendlich fernen Punktes; er wird

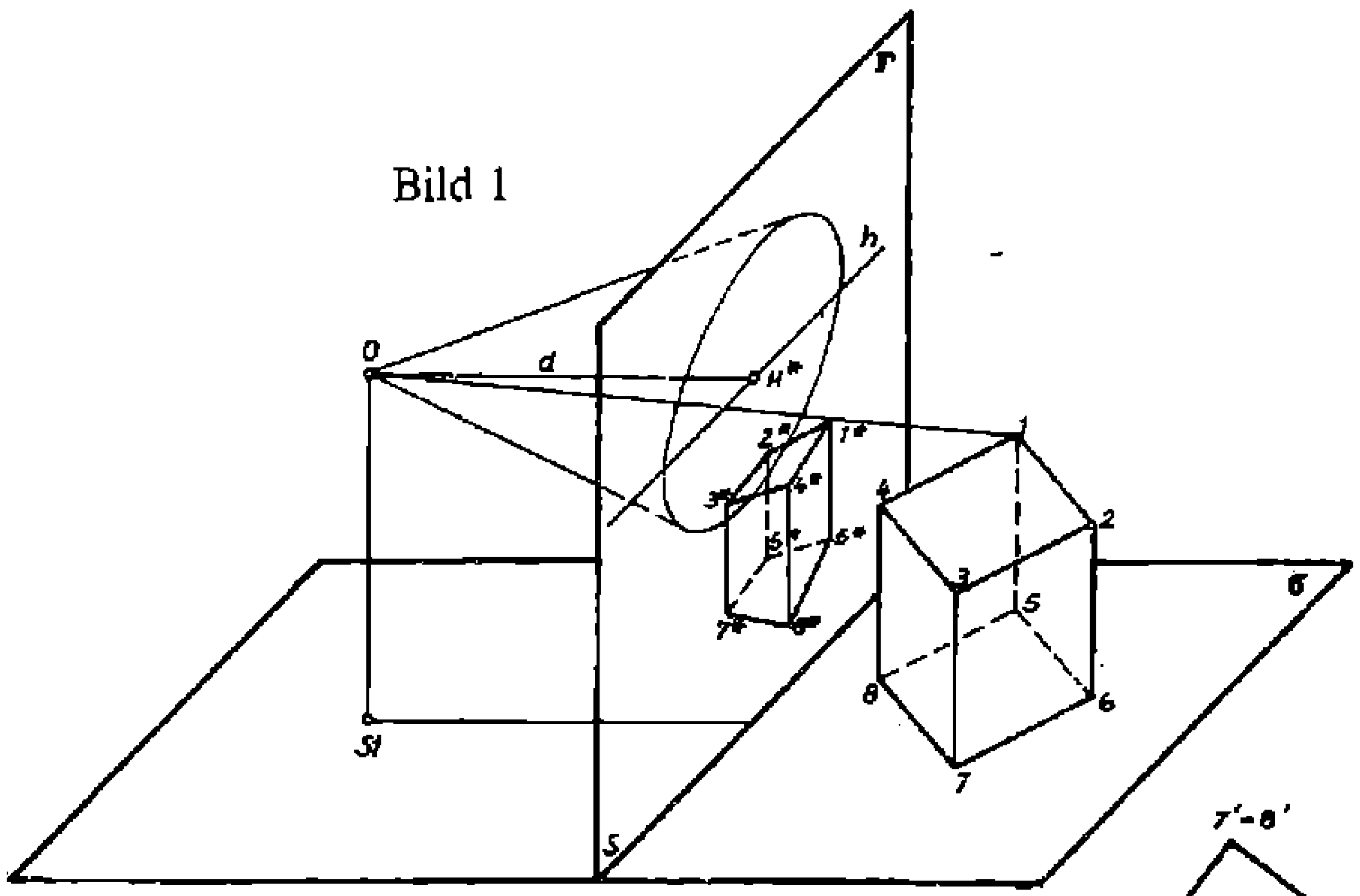


Bild 1

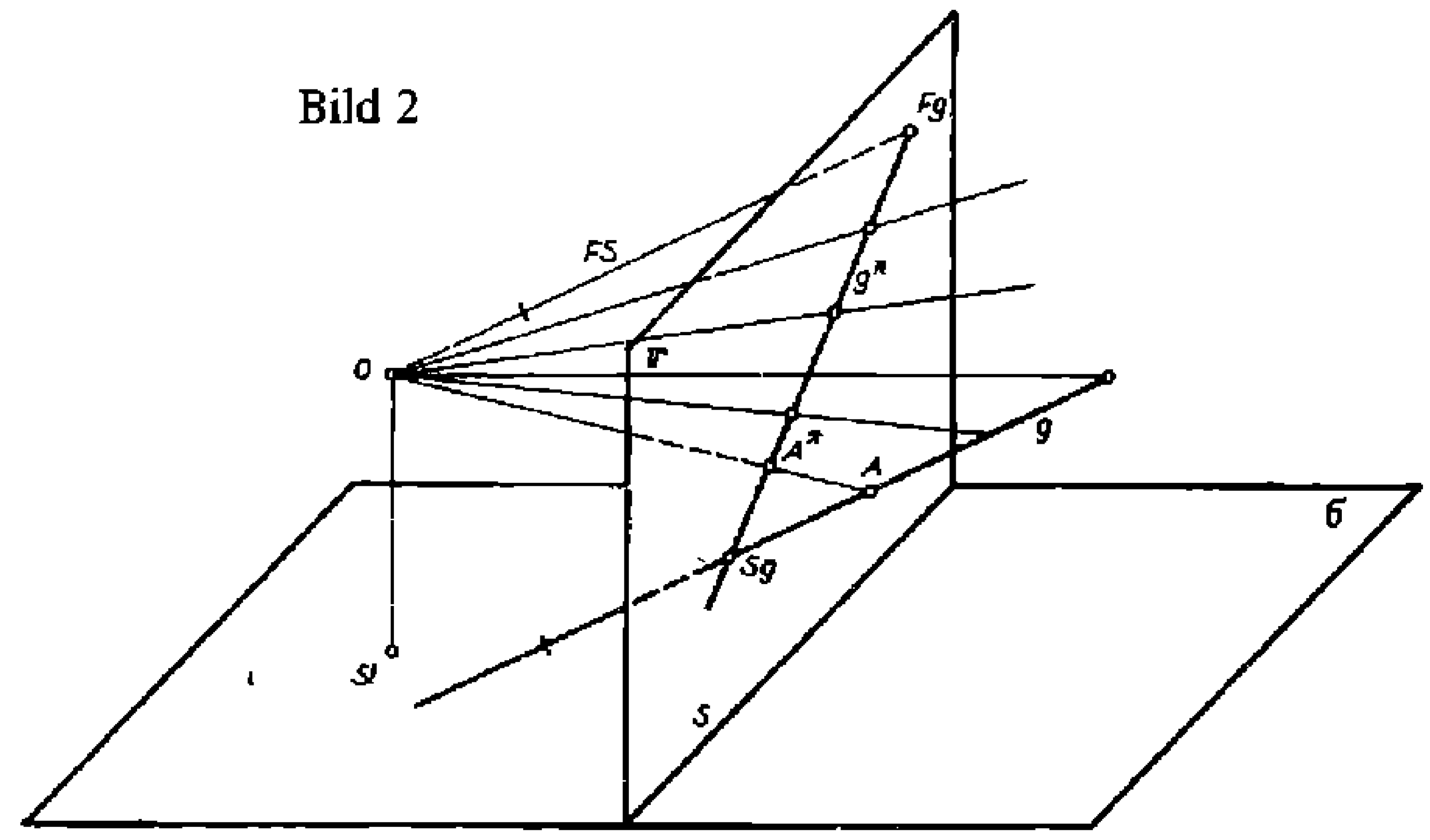


Bild 2

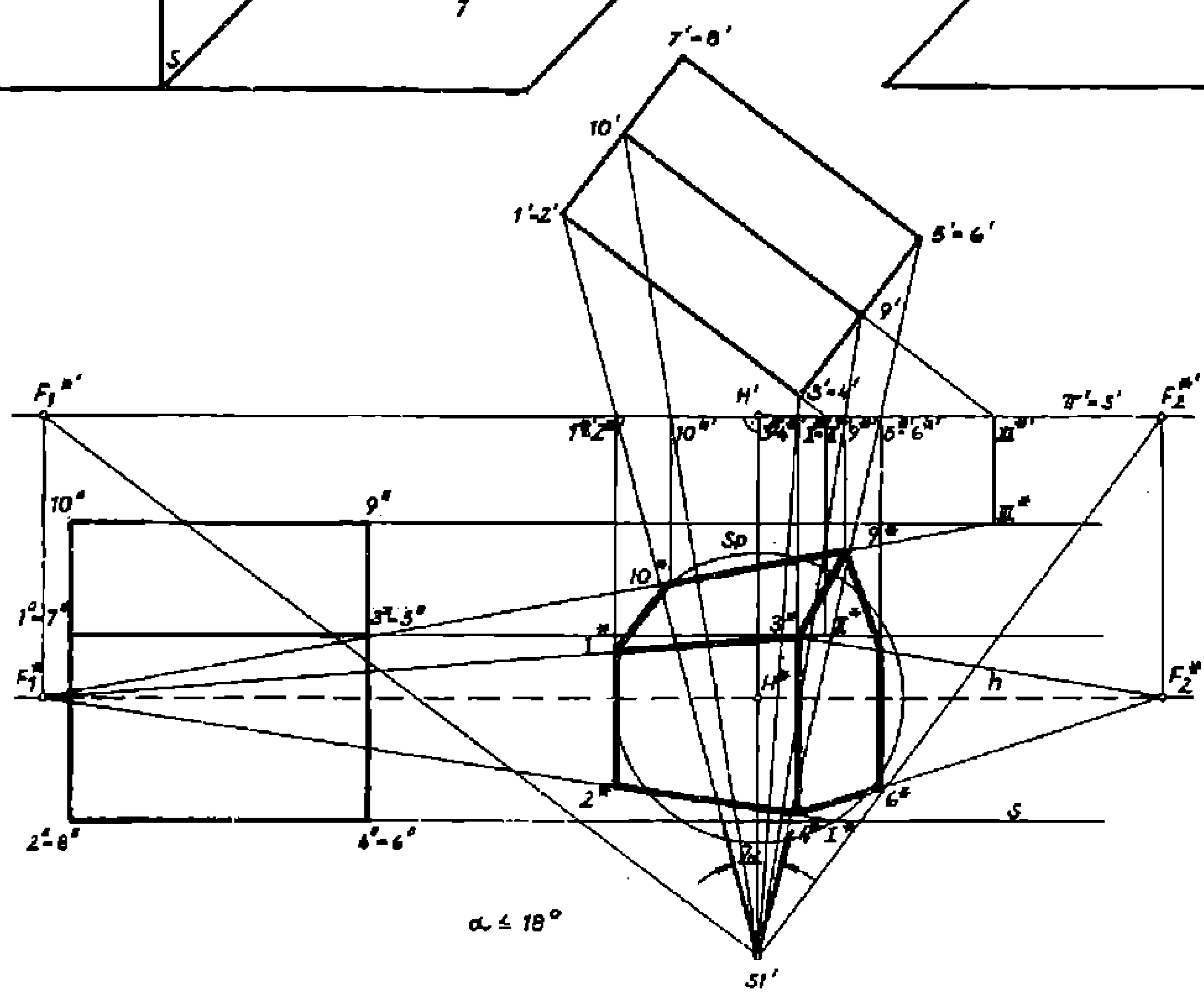


Bild 3

gefunden als Durchstoßpunkt des zur Geraden parallelen Projektionsstrahles durch die Bildebene π.

Hieraus läßt sich schlußfolgern:

Die Bilder paralleler Geraden gehen durch denselben Fluchtpunkt.

Sonderfälle:

Eine Gerade, die senkrecht zur Bildebene π steht, bezeichnet man als Tiefenlinie. Der Fluchtpunkt der Tiefenlinie ist der Hauptpunkt H.

Eine Gerade, die senkrecht zur Standebene σ steht, wird als Gerade senkrecht zur Standlinie s abgebildet. Flucht- und Spurpunkt sind der unendlich ferne Punkt der Geraden.

Liegt eine Gerade sowohl parallel zur Standebene σ als auch zur Bildebene π, heißt sie Breitenlinie. Das Bild einer Breitenlinie ist eine Gerade parallel zur Standlinie s. Spur- und Fluchtpunkt sind der unendlich ferne Punkt der Bildgeraden. Nach diesen Überlegungen konstruieren wir das perspektive Bild in der Architektenanordnung des im Grund- und Aufriß gegebenen Hausmodells (Bild 3). Im ersten Schritt heften wir den auf Transparent vorhandenen Grundriß des Hausmodells auf unser Zeichenblatt (Grundrißebene = Standebene σ) und tragen die Bildebene π in σ ein. Sie zeigt sich, da sie senkrecht auf σ steht, als Standlinie $s'=s$. Im zweiten Schritt wählen wir den Standpunkt St' so, daß der größere Winkel, den $St'H'$ mit einem der beiden äußersten Sehstrahlen im Grundriß einschließt, etwa 18° beträgt. Im dritten Schritt bestimmen wir die Grundrißbilder der Fluchtpunkte F_1 und F_2. Der Fluchtpunkt F_1 ist der Fluchtpunkt der zur Standebene σ parallelen Geraden, die die Kanten $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{75}$, $\overline{86}$, $\overline{910}$ enthalten. Er liegt auf der Horizontlinie. Wir finden $F_1{}^{*\prime}$, indem wir durch St' eine Parallele zu $\overline{1'3'}$ ziehen und mit π' zum Schnitt bringen. F_2 ist der Fluchtpunkt der Geraden, die die Kanten $\overline{46}$, $\overline{28}$ enthalten und befindet sich ebenfalls wie F_1 auf der Horizontlinie, da $\overline{46}$, $\overline{28}$ parallel zu σ verlaufen. Die Parallele zu $4'6'$ durch St' trifft π' in $F_2{}^{*\prime}$. Im vierten Schritt klappen wir die Bildebene π in die Standebene σ. Da sich in unserem Bild dann zwei Figuren überlagern würden, verschieben wir die umgeklappte Bildebene, so daß s unterhalb von s' und parallel zu s' ist. Wir heften dann das auf Transparent gezeichnete Aufrißbild des Hausmodells auf s an. Dann tragen wir die Horizontlinie im angegebenen Abstand a von s sowie die Fluchtpunkte F_1 und F_2 (senkrecht zu s' unter $F_1{}^{*\prime}$ bzw. $F_2{}^{*\prime}$) auf der Horizontlinie ein. Im fünften Schritt bestimmen wir die Spurpunkte der Geraden g_1, g_2 bzw. g_3, auf denen die Kanten $\overline{24}$, $\overline{13}$ bzw. $\overline{109}$ liegen. Wir verlängern die Kanten $\overline{24}$, $\overline{13}$ bzw. $\overline{109}$ über 4, 3 bzw. 9 hinaus, bis sie die Bildebene π in I*, II* bzw. III* durchstoßen. In unserem Bild treffen die Verlängerungen von $\overline{2'4'}$, $\overline{1'3'}$ und $\overline{10'9'}$ π' in den Punkten I*', II*', III*' (I*' = II*'). In der ungeklappten Ebene liegen I*, II* und III* senkrecht unter I*', II*' = I*' und III*' und zwar I* auf der Standlinie s, II* in der Höhe der Punkte 1'' und 3'' und III* in der Höhe der Punkte 10'' und 9'' darüber.

Das Bild von g_1 ist die Gerade I*F_1*, von g_2 die Gerade II* F_1* und von g_3 die Gerade III*F_1*. Nun verbinden wir $1'=2'$, $3'=4'$, $10'$ und $9'$ mit St' (Sehstrahlen im Grundriß) und erhalten auf π' $1^{*\prime}=2^{*\prime}$, $3^{*\prime}=4^{*\prime}$, $10^{*\prime}$ und $9^{*\prime}$. Die Senkrechte zu s' durch $1^{*\prime}=2^{*\prime}$ markiert auf II*F_1* den Punkt 1* und auf I*F_1* den Punkt 2* und die Senkrechte zu s' durch $3^{*\prime}=4^{*\prime}$ auf II*F_1* den Punkt 3* und auf I*F_1* den Punkt 4*. 10* und 9* ergeben sich als Schnittpunkte der Senkrechten durch $10^{*\prime}$ und $9^{*\prime}$ zu s' mit der Geraden III*F_1*. 1*, 2*, 3*, 4*, 9*, 10* stellen die perspektiven Bilder von 1, 2, 3, 4, 9, 10 dar. Die Bilder der Kante $\overline{46}$ bzw. der Hilfsgeraden $\overline{35}$ weisen in die Richtung 4*F_2* und 3*F_2*. Indem wir wieder die Durchstoßpunkte der Sehstrahlen nach 5 und 6 durch π bestimmen, ist das perspektive Bild des Hausmodells fertig. Die unsichtbaren Kanten werden weggelassen, da es uns nur auf ein anschauliches Bild ankommt. Zum Schluß geben wir den Spurkreis an.

E. Kühn

Mathematikern über die Schulter geschaut

Es gehörte nicht immer zu den Selbstverständlichkeiten, daß Schüler regelmäßigen Zugang zu Einrichtungen einer Hochschule haben, lange bevor sie selbst Studenten sind. Seit einigen Jahren gehören Schüler der EOS Friedrich Schiller Weimar zu dem Bild unserer Hochschule. In allen Sektionen nehmen sie als Mitglieder *Wissenschaftlich-Praktischer Arbeitsgemeinschaften* (WPA) unmittelbar Anteil an vielfältigen Forschungsvorhaben. Schulkenntnisse in Mathematik, Physik, Chemie und in Gesellschaftswissenschaften können sie unmittelbar bei der Lösung technischer und ökonomischer Probleme anwenden, neue Kenntnisse werden dazugewonnen. Die Arbeit in wissenschaftlichen Einrichtungen ist ihnen nicht mehr etwas Fremdes, sie gewinnen ein klares Bild von der Art der Aufgaben, die später auf sie zukommen. Darüber hinaus haben die Mathematiker der Sektion Rechentechnik/Datenverarbeitung, die Mitglieder der Mathematischen Gesellschaft der DDR sind, eine Arbeitsgemeinschaft für *Junge Mathematiker* zur Vorbereitung auf die OJM eingerichtet. Die besten Schüler der 11. und 12. Klassen der EOS Friedrich Schiller Weimar kommen hier einmal wöchentlich zusammen und lösen unter Anleitung eines Mathematikers schwierige Aufgaben aus den verschiedenen Gebieten, die in den OJM eine Rolle spielen.

Ein Beispiel aus einem solchen AG-Nachmittag sei hier angeführt:
Im Mittelpunkt stand eine geometrische Konstruktionsaufgabe. Am Beispiel sollte die Methode gezeigt werden, wie man eine Konstruktionsmethode durch Rechnung ermitteln kann, besonders wenn man die geometrischen Hilfsmittel nicht voll beherrscht. Die erste Lösung war etwas umständlich, später wurde dann die im nächsten *alpha*-Heft gebotene Lösung gefunden. Und welche Lösung findest du, lieber Leser, zu dem gestellten Problem?

▲926▲ In einer Ebene seien drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3 gegeben. g_2 liege zwischen g_1 und g_3. Der Abstand von g_2 zu g_1 sei m, der Abstand von g_2 zu g_3 sei n. Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Eckpunkte A, B und C auf je einer der drei Geraden liegen. *H. Bode*

Mathematik und Russisch

Liebe *alpha*-Leser!
Übersetzt die nachstehenden in russischer Sprache abgedruckten Mathematikaufgaben ins Deutsche! Als Übersetzungshilfe sind im Anschluß an jede Aufgabe die Vokabeln angegeben, die nicht zum Wortschatz der achten Klasse gehören.
Löst anschließend diese Mathematikaufgaben und versucht, zumindest das Ergebnis in russischer Sprache zu formulieren! Damit ihr eure Arbeit kontrollieren könnt, werden im gleichen Heft die Übersetzungen dieser Aufgabentexte in russischer Sprache abgedruckt. (Siehe Seite 114)
Die folgenden Mathematikaufgaben sind zwei Schriften entnommen:
1. F. F. Nagibin, Das mathematische Schatzkästchen, 2. Ausgabe, Staatlicher Pädagogischer Verlag des Ministeriums für Volksbildung der RSFSR, Moskau 1961.
2. Wissenschaft und Leben, Heft 10/1970.

▲1▲ Два брата разговорились о том, сколько они скопили денег. Старший говорит младшему: «Дай мне 80 копеек, тогда у меня будет денег в два раза больше, чем у тебя.» Младший подумал и ответил: «Нет, у тебя и так больше денег, чем у меня. Лучше ты дай мне 80 копеек, тогда денег у нас будет поровну.» Сколько денег накопил каждый брат?

разговориться	ins Gespräch kommen
о том	darüber
скопить	anhäufen, sparen
в два раза больше	doppelt soviel
и так	ohnehin
лучше	lieber
поровну	zu gleichen Teilen

▲2▲ Дочери в настоящее время 8 лет, а матери 38. Через сколько лет мать будет в трое старше дочери?

в настоящее время	gegenwärtig, zur Zeit
через	in (zeitl.)
в трое старше	dreimal so alt

▲3▲ Яша идёт от дома до школы 30 минут, а брат его Петя 40 минут. Петя вышел из дома на пять минут раньше Яши. Через сколько минут Яша догонит Петю?

вышел	verließ
на пять минут раньше	5 Minuten früher
догнать	einholen
через	in (zeitl.)

▲4▲ Диаметр опалённой площади тайги от взрыва Большого Тунгусского метеорита равен примерно 38 км. Какая площадь тайги была опалена?

диаметр	Durchmesser
опалённый	versengt
площадь	Fläche
взрыв	Explosion
равен	gleich
примерно	ungefähr, etwa

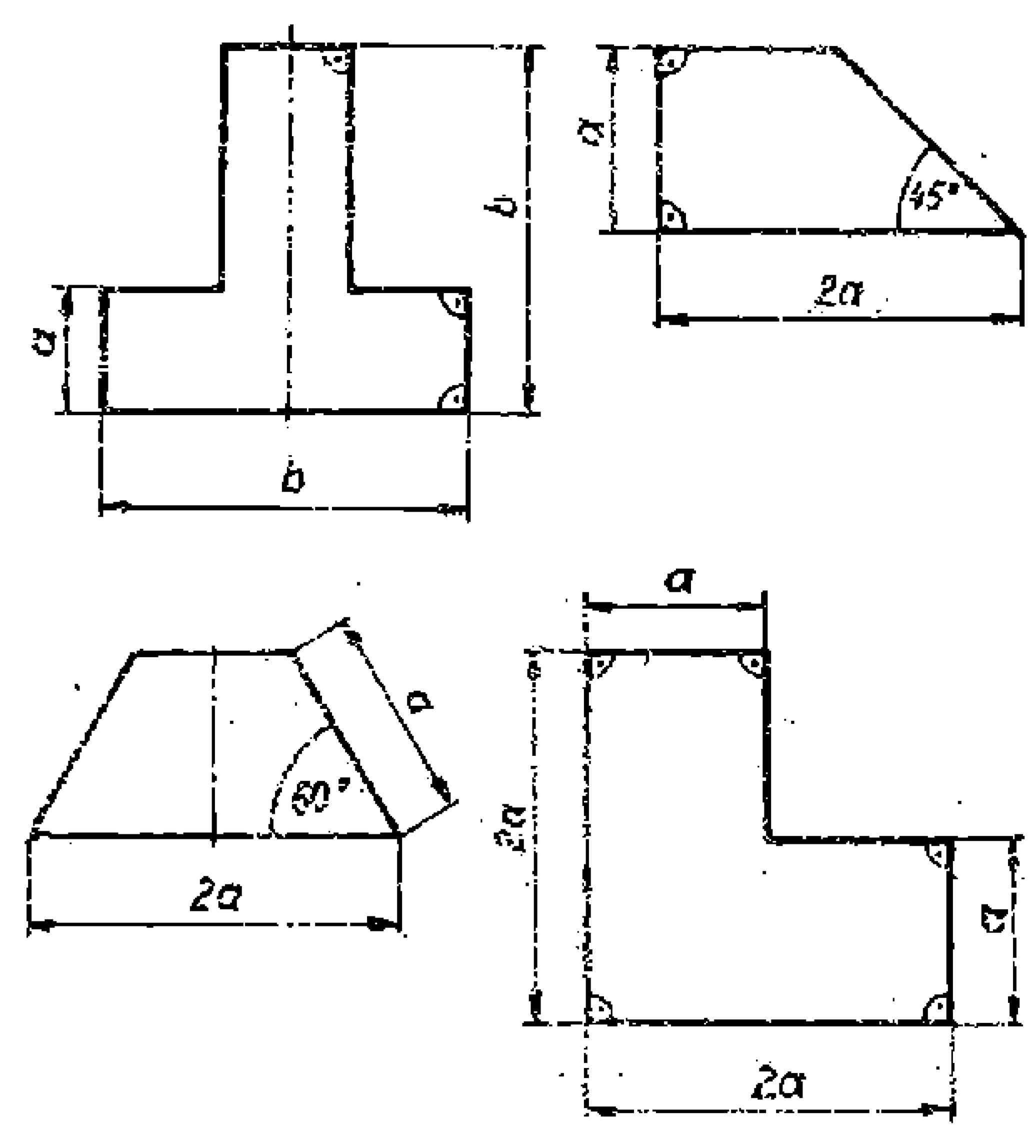
▲5▲ Как четырьмя прямыми линиями, не отрывая карандаш от бумаги, перечеркнуть девять точек, расположенных так, как показано на рисунке?

o o o
рисунок o o o
o o o

четырьмя	5. Fall von четыре
не отрывая	ohne abzusetzen
перечеркнуть	durchstreichen (hier: verbinden)
расположенный	gelegen
показано	dargestellt

▲6▲ Нарисуй каждую из фигур и разрежь её на четыре конгруэнтные части.

нарисуй	zeichne
каждый из	jeder der, jeder von
разрежь	zerlege
конгруэнтный	kongruent
часть	Teil

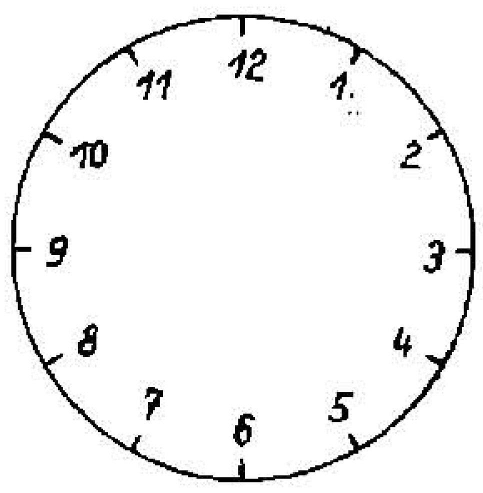


▲7▲ Арбуз стоит 10 копеек и ещё пол арбуза. Сколько стоит арбуз?

арбуз	Melone
поларбуза	eine halbe Melone (hier: der Preis für eine halbe Melone)

▲8▲ Этот циферблат надо разрезать на 6 частей любой формы, — так, однако, чтобы во всех частях сумма чисел была одинакова.

разрезать	zerlegen, zerschneiden
любой	beliebig
однако	jedoch
была	hier: ist
чисел	2. Fall Mehrz. v. число
одинакова	gleich



▲9▲ Тождество $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ можно написать, употребляя все десять цифр. Например: $\frac{1}{2}=\frac{3485}{6970}$.

Сможете ли вы найти ещё пять аналогичных примеров, где слева была бы дробь $\frac{1}{2}$?

Попробуйте поискать другие примеры, где равные дроби выражались бы десятью разными цифрами, например: $\frac{3}{6}=\frac{1485}{2970}$ или $\frac{1}{2}=\frac{35}{70}=\frac{48}{96}$.

тождество	Gleichung
употребляя	indem man verwendet
аналогичный	analog
дробь	Bruch
попробуйте	probiert
равный	gleich
где выражались бы	wo ausgedrückt werden können
десятью	durch zehn

Dolmetscherbüro hilft alpha

Seit vier Jahren besteht an der *Schloßberg-Oberschule* in Döbeln ein Dolmetscherbüro. In dieser Arbeitsgemeinschaft sind Jungen und Mädchen der Klassenstufen 8 bis 10 tätig. An der Schule gibt es etwa 150 feste Briefverbindungen mit Freunden in der Sowjetunion. Schüler der unteren Klassen der Schloßberg-Oberschule tragen häufig Wünsche an das Dolmetscherbüro heran, ihnen bei der Übersetzung oder Beantwortung von Briefen zu helfen.

Alles von unserem Moskauer *alpha*-Korrespondenten Prof. Dr. *Lewin* übersandte Material wurde im Dolmetscherbüro übersetzt und vom Mathematikfachlehrer *W. Träger*, der an der gleichen Schule tätig ist, bearbeitet.

Wir wünschen unseren Lesern viel Erfolg beim Übersetzen und beim Knobeln der Probleme unserer sowjetischen Freunde.

Redaktion *alpha*

Sammelbildserie Berühmte Mathematiker

Der Verlag VEB Bild und Heimat, 98 Reichenbach, gab eine Postkartenserie zum Preise von 2,00 M heraus. In einer Sammelmappe sind 9 Porträts (und dazu auf der Rückseite die Biographie) folgender Mathematiker enthalten: *R. Descartes, I. Newton, G. W. Leibniz, L. Euler, J.-L. Lagrange, C. F. Gauß, N. J. Lobatschewski, K. Weierstraß* (Bild und Text der Rückseite dieser Karte siehe unten), *D. Hilbert*.

Bestellungen können für größere Mengen bei LKG-Bilderdienst, 701 Leipzig, Querstr. 16 erfolgen.

Einzelbestellungen sind beim Buchhaus Leipzig, 705 Leipzig, Täubchenweg 83 möglich.

Die einzelnen Postkarten, unter Glas und Rahmen gebracht, mit der entsprechenden Biographie versehen, eignen sich hervorragend für die Ausgestaltung von Kabinetten, für Wandzeitungen usw. Redaktion *alpha*

Karl Weierstraß (1815 bis 1897)

Erst gegen Ende seines Jurastudiums begann sich der in Ostenfelde als Sohn eines Bürgermeistereisekretärs geborene *Karl Weierstraß* für mathematische Probleme zu interessieren. In Münster ließ es sich daraufhin vom nicht übermäßig begabten, aber als sehr tüchtig bekannten Professor *Christoph Gutermann* mathematisch ausbilden. Bereits nach sechs Semestern legte er die Oberlehrerprüfung mit Auszeichnung ab und wurde nach einem Praktikantenjahr mit einer Gymnasiallehrstelle im damaligen Deutsch-Krone betraut, wo er zu seinem Leidwesen in allen möglichen Fächern, auch Schönschreiben, unterrichten mußte.

Nach mehr als einem halben Jahrzehnt endlich wurde *Weierstraß* ausschließlich als Mathematiklehrer an das Braunsberger Gymnasium versetzt. In dieser Stadt verfaßte er seine erste aufsehenerregende Abhandlung „Beiträge zur Theorie der Abelschen Integrale", für die die Universität Königsberg ihm die Ehrendoktorwürde verlieh. Die Schulleitung indes erwirkte ihm einen längeren bezahlten Studienaufenthalt nach Berlin. Der Gelehrte ahnte nicht, daß er Spreeathen niemals mehr verlassen würde. Denn kaum hier eingetroffen, erhielt er den frei gewordenen Lehrstuhl der reinen Mathematik am Königlichen Gewerbeinstitut sowie eine Mathematikprofessur an der Berliner Universität.

Weierstraß' wissenschaftlicher Ruhm beruht auf seinen bahnbrechenden Arbeiten zur Variationsrechnung, Differentialgeometrie und Theorie der Elementarteiler. Weierstraß „klärte", wie sich der Mathematikhistoriker Dirk Struik in seinem „Abriß der Geschichte der Mathematik" (1963) ausdrückt, „die Begriffe des Minimums, der Funktion und der Ableitung völlig auf und beseitigte damit die noch vorhandene Unbestimmtheit der Ausdrucksweise in den grundlegenden Begriffen der Infinitesimalrechnung".

Struik rühmt ihn als einen der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, als „das mathematische Gewissen schlechthin".

XIV. Internationale Mathematikolympiade

Toruń/Warszawa 1972

Aufgaben

1. Gegeben sei eine Menge von zehn beliebigen paarweise verschiedenen zweistelligen positiven ganzen Zahlen (Dezimalsystem). Zeige, daß es zwei elementfremde Teilmengen der gegebenen Menge gibt, deren Elemente die gleiche Summe haben.

(UdSSR, 5 Punkte)

2. Zeige, daß für alle $n \geqq 4$ folgender Satz gilt: Jedes Viereck, für welches ein Umkreis existiert, läßt sich in n Vierecke zerlegen, von denen jedes wieder einen Umkreis hat.

(Niederlande, 6 Punkte)

3. Es seien m und n beliebige nichtnegative ganze Zahlen. Zeige, daß

$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ eine ganze Zahl ist.

(Beachte: $0! = 1$).

(Großbritannien, 7 Punkte)

4. Bestimme alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ des folgenden Ungleichungssystems

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqq 0$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqq 0$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqq 0$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqq 0$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqq 0,$$

wobei x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 positive reelle Zahlen sein sollen.

(Niederlande, 7 Punkte)

5. Es seien f und g reelle, im Intervall $(-\infty, +\infty)$ definierte Funktionen, die für alle x und y der Gleichung

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,g(y)$$

genügen.

Zeige: Ist $f(x)$ nicht identisch gleich Null und gilt $|f(x)| \leqq 1$ (für alle x), so gilt auch $|g(y)| \leqq 1$ (für alle y).

(VR Bulgarien, 7 Punkte)

6. Es seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen gegeben. Zeige, daß ein regelmäßiges Tetraeder existiert, welches in jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

(Großbritannien, 8 Punkte)

Die beiden Klausuren wurden an einer Oberschule in Toruń am 10. und 11. Juli 1972 durchgeführt. Für die erste standen 4 Stunden und für die zweite (wegen des erhöhten Schwierigkeitsgrades) $4\frac{1}{2}$ Stunden reine Arbeitszeit zur Verfügung.

Ein 1. Preis wurde vergeben für 40 Punkte, ein zweiter für 39 bis 30 Punkte, ein dritter für 29 bis 19 Punkte.

Preisträger der XIV. IMO

Land	Teilnehmer 1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamtpunktz.	1. Preis	2. Preis	3. Preis	Sonderpreis
Bulgarien	17	3	15	22	11	29	10	13	120	—	—	2	—
ČSSR	26	5	11	10	19	18	20	21	130	—	—	4	—
DDR	31	35	29	19	31	40	27	27	239	1	3	4	1**
Großbritannien	33	13	21	26	36	10	21	19	179	—	2	4	—
SFR Jugoslawien	25	11	17	23	17	2	15	26	136	—	—	3	—
Republik Kuba*	10	2	2	—	—	—	—	—	14	—	—	—	—
Mongolische VR	12	5	4	8	4	8	2	5	48	—	—	—	—
Niederlande	7	4	7	7	12	5	7	2	51	—	—	—	—
Österreich	26	16	22	19	20	20	11	2	136	—	—	5	—
VR Polen	40	11	15	8	15	37	25	9	160	1	1	1	1
SR Rumänien	16	15	35	35	15	40	19	31	206	1	3	1	1
Schweden	9	27	4	1	0	19	0	0	60	—	—	2	—
UdSSR	39	40	33	28	40	38	22	30	270	2	4	2	—
Ungarische VR	40	25	19	30	40	36	33	40	263	3	3	2	—
									2012***	8	16	30	3

* Aus der Republik Kuba nahmen nur 3 Schüler teil

** Pawel Kröger (DDR) erhielt einen Sonderpreis als jüngster Teilnehmer der IMO (bei voller Punktzahl)

*** Insgesamt wurden von der Jury 2012 Punkte vergeben, das sind 47% der erreichbaren Gesamtpunktzahl (Im Vergleich: Zur XIII. IMO 1971 wurden nur 28% der erreichbaren Gesamtpunktzahl erzielt.)

DDR-Teilnehmer der XIV. IMO

Pawel Kröger 1. Preis
dazu: Sonderpreis als jüngster Teilnehmer der XIV. IMO
49. Oberschule, Leipzig, Klasse 7

Harald Englisch 2. Preis
Erweiterte Oberschule „Karl Marx", Leipzig, Klasse 12

Albrecht Heß 2. Preis
Erweiterte Oberschule Dresden-Süd, Klasse 10

Olaf Böhme 2. Preis
Erweiterte Oberschule „Bertolt Brecht", Dresden, Klasse 12

Hans-Jürgen Fischer 3. Preis
Spezialklasse für Mathematik an der TH Karl-Marx-Stadt, Klasse 12

Gerd Weißenborn 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 10

Rainer Siegmund-Schultze 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Heinrich Hertz", Berlin, Klasse 12

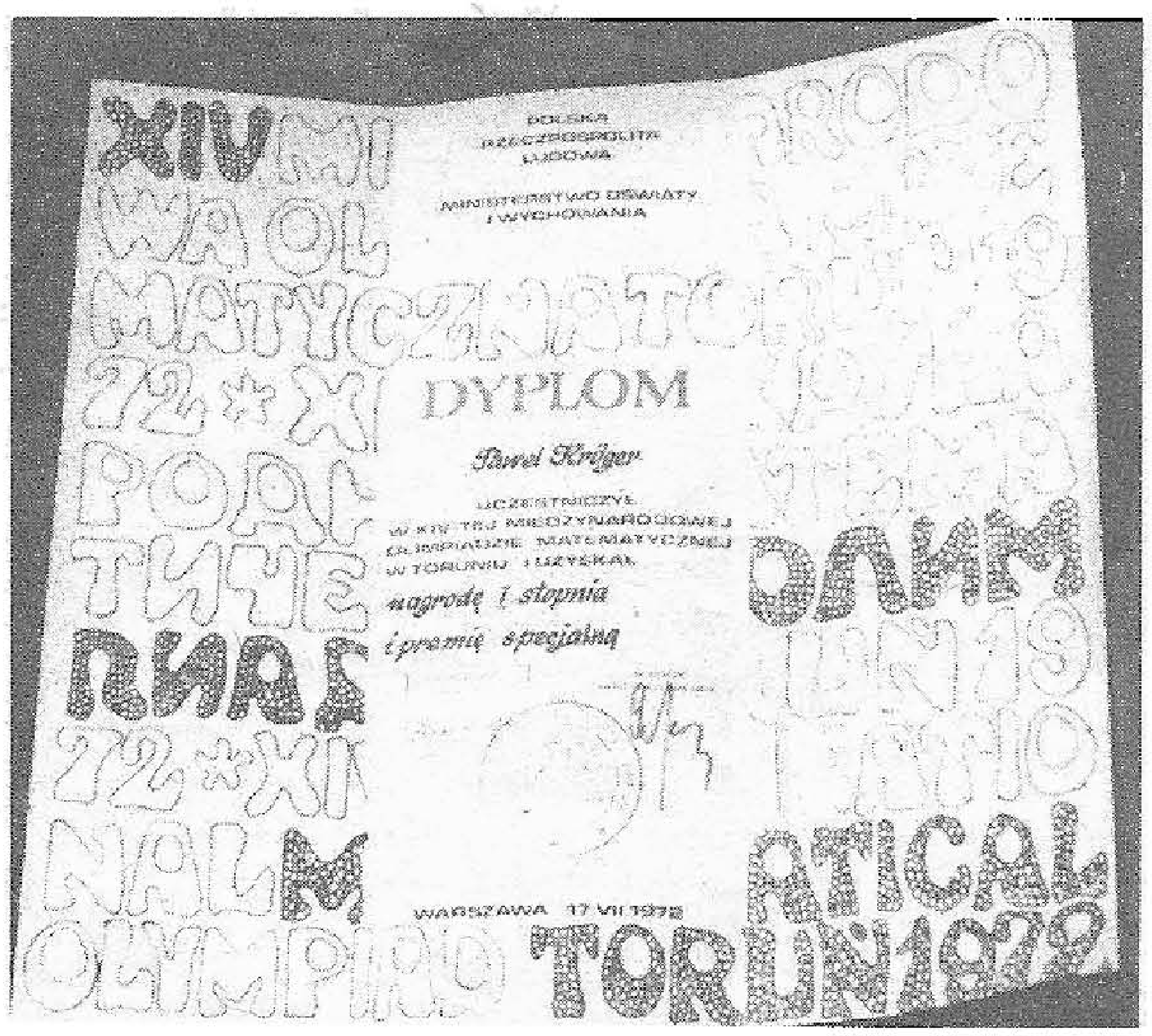
Matthias Günther 3. Preis
Erweiterte Oberschule „Hermann von Helmholtz", Leipzig, Klasse 10

Einen ersten Preis erhielten (für volle Punktzahl):

1 Pawel Kröger, Leipzig (DDR)
2 Füredi Zoltán, Budapest (Ungarische VR)
3 Komornik Vilmos, Budapest (Ungarische VR)
4 Tuza Zsolt, Budapest (Ungarische VR)
5 Mircea Martin, Alba (SR Rumänien)
6 Wladimir Burkow, Wladimir (UdSSR)
7 Sergej Konjalin, Saratow (UdSSR)
8 Grzegorz Andrzejcak, Pabianice (VR Polen)

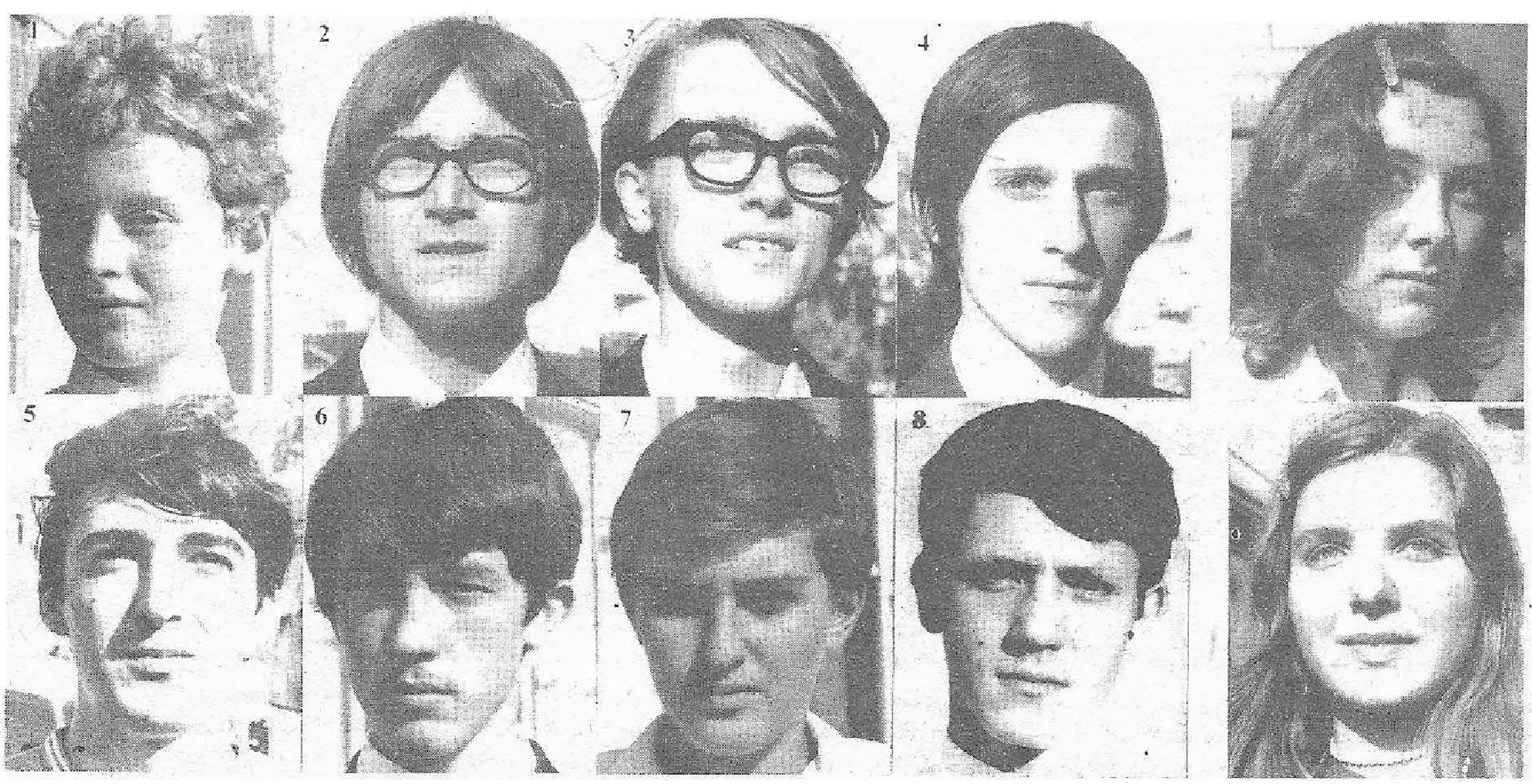
Pawel Kröger (DDR), Schüler einer 7. Klasse, 1. Preisträger und Träger eines Sonderpreises gibt Autogramme (oben) – seine Urkunde (unten)

Die Abschlußfeier der *XIV. Internationalen Mathematikolympiade* fand am 17. 8. 1972 in der *Hochschule für Elektrotechnik* in Warszawa statt. (Über die Rundfahrt der Teilnehmer der XIV. IMO vom 12. 8. bis 16. 8. berichtet *alpha* in Heft 6/72, d. Red.)



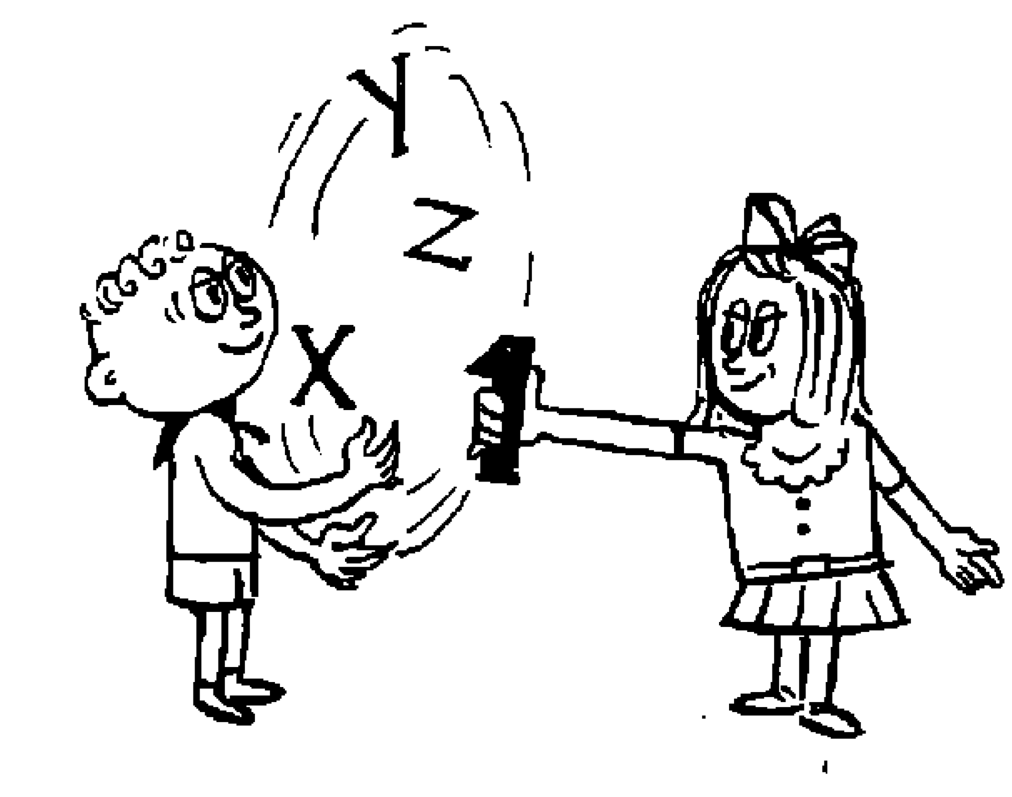
Die erfolgreiche sowjetische Mannschaft mit ihren Delegationsleitern

An der XIV. IMO nahmen zwei Mädchen teil:
Hanna Garyga (Wrocław) und Eva Janielity (Warszawa)



Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

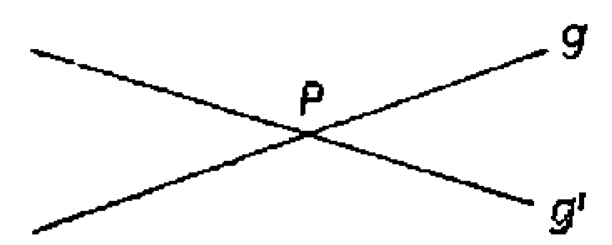


Letzter Einsendetermin: 3. Januar 1973

5▲927 Wenn man die Anzahl der Einfamilienhäuser unseres Ortes zunächst verdoppelt, das so erhaltene Produkt mit 3 und das neue Produkt mit 4 multipliziert, dann erhält man als Ergebnis eine dreistellige natürliche Zahl, die aus gleichen Grundziffern besteht. Wie viele Einfamilienhäuser gibt es in diesem Ort?

Anke Mentkowski, POS Eichwalde, Kl. 7 a

5▲928 Die Abbildung stellt eine Gerade g und ihre durch Spiegelung erzeugte Bildgerade g' dar, wobei sich g und g' im Punkt P schneiden.
Bestimme alle zu den Geraden g und g' zulässigen Symmetrieachsen! *T.*



W 5 ▪929 In einer Schachtel befinden sich nicht mehr als 100 Knöpfe. Genau der dritte Teil dieser Knöpfe sind Hemdenknöpfe, genau der vierte Teil Mantelknöpfe, und die restlichen Knöpfe sind Druckknöpfe.
a) Wieviel Knöpfe liegen höchstens in der Schachtel?
b) Wieviel Druckknöpfe sind in diesem Fall in der Schachtel?

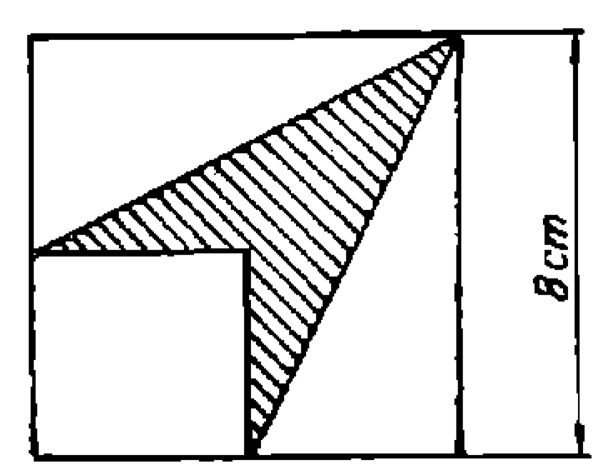
Hannelore Schiefer, Karl-Marx-Stadt

W 5 ▪930 Nach Abschluß der Kreisolympiade Junger Mathematiker wurde ein Schüler gefragt, wieviel Punkte er erreicht habe. Scherzhaft antwortete er: „Addiert man zu der Zahl meiner erreichten Punkte 10, und verdoppelt man die so erhaltene Summe, dann fehlen noch 10 Punkte an 100." Wieviel Punkte erzielte dieser Schüler?

W 5 * 931 Nach einem Eishockeyspiel sagte der Kapitän der siegreichen Mannschaft: „Wir haben dreimal soviel Tore erkämpft wie unsere Gegner, die weniger als fünf Tore erzielten." Wie lautet der Endstand dieses Spieles, wenn insgesamt weniger als 15, aber mehr als 9 Tore geschossen wurden?

Anke Mentkowski, POS Eichwalde, Kl. 7 a

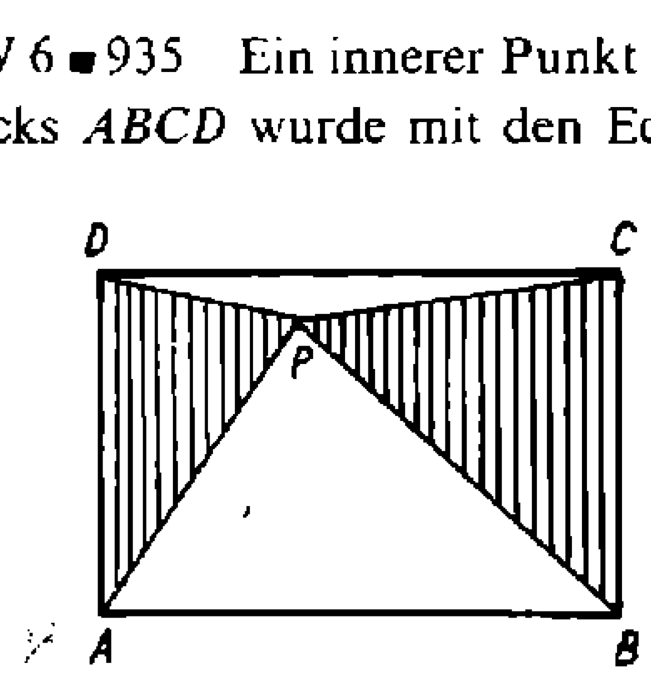
W 5 * 932 Die Mitten zweier benachbarter Seiten eines Quadrates sind mit dem Schnittpunkt der Diagonalen und mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt, wie aus der Zeichnung ersichtlich, verbunden. Wieviel Quadratzentimeter beträgt die schraffiert gezeichnete Fläche, wenn die Quadratseite 8 cm lang ist? *Sch.*



6▲933 Gegeben sei ein spitzer Winkel α mit seinem Scheitelpunkt S. Zeichne die Halbierungslinie des Winkels α, lege auf ihr einen Punkt P fest und zeichne durch P die Parallelen zu den Schenkeln des Winkels α. Beweise, daß die dabei entstandenen Streifen gleich breit sind! *Sch.*

6▲934 Es sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen anzugeben, die durch 12 teilbar sind und die Form 9*7* haben. Dabei ist jedes der Sternchen durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen. *T.*

W 6 ▪935 Ein innerer Punkt P eines Rechtecks $ABCD$ wurde mit den Eckpunkten des



30	Steffi Sorg, 6316 Stützerbach, Schleusinger Str. 128 Polytechnische Oberschule Stützerbach, Klasse 5 150	30	W5▪346
	Prädikat:	10	
	Lösung:		

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha,
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer, z. B. 7 vorgesetzt (d. h. für die 7. Klasse geeignet). Aufgaben mit W* versehen gelten auch als Wettbewerbsaufgaben. Sie haben einen hohen Schwierigkeitsgrad.

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit W ▪ 10/12 oder W * 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Experten korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.

Der Jahreswettbewerb 1972/73 läuft von Heft 5/72 bis Heft 2/73. Zwischen dem 1. und 10. September 1973 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/73 veröffentlicht. Wer mindestens 7 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/72 bis 2/73) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1972/73 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück).

Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Rechtecks verbunden. Ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle CDP$ kleiner, gleich oder größer als die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle BCP$ und $\triangle DAP$? Die Antwort ist zu begründen! *Sch.*

W 6 ■ 936 Holger berichtet: „Gestern erzielte ich beim Würfeln mit genau drei Würfeln einen besonderen Wurf. Die Augenzahl jedes der drei Würfel war eine Primzahl, und die Gesamtaugenzahl aller drei Würfel war ebenfalls eine Primzahl." Nach kurzem Nachdenken meint Bernd: „Bei diesem Wurf zeigten genau zwei Würfel die gleiche Augenzahl." Begründe Bernds Antwort, und gib die Augenzahlen für alle möglichen Würfe an! *T.*

W 6 * 937 Gegeben sei ein Dreieck ABC. Durch Konstruktion sind ein innerer Punkt D der Seite $\overline{AC}$ und ein innerer Punkt E der Seite $\overline{AB}$ derart festzulegen, daß $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$ gilt. Unter welchen Bedingungen ist die geforderte Konstruktion ausführbar?

W 6 * 938 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ schneide die Kathete $\overline{BC}$ in D derart, daß $\overline{BD}=2\cdot\overline{CD}$ gilt. Es ist die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB=\alpha$ zu ermitteln!

Jörg Lehnert, Tutow, Kl. 11

7 ▲ 939 In einem Kreis k mit der Sehne $\overline{AB}$, die kleiner als der Durchmesser des Kreises ist, verbinde man die Punkte A und B mit dem Mittelpunkt M des Kreises. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle AMB$ schneide den Kreis k im Punkte C, der mit M auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegt. Man verbinde C mit A und B. Es ist zu beweisen, daß $\sphericalangle ACB+\sphericalangle BMC=180°$ gilt.

Bernd Zimdars, Templin, Kl. 9

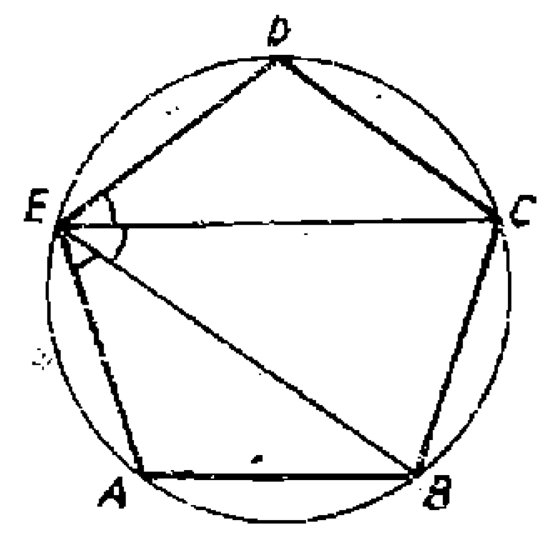
7 ▲ 940 Genau 8 % aller Schüler der Klassen 5 bis 10 einer Oberschule abonnieren die Schülerzeitschrift *alpha* bereits das vierte Jahr, $1\frac{1}{2}$mal soviel bereits das dritte, zweimal soviel das zweite und viermal soviel Schüler das erste Jahr. Genau 144 Schüler der Klassen 5 bis 10 sind nicht Abbonnent dieser Zeitschrift.

a) Wieviel Schüler der Klassen 5 bis 10 besuchen diese Schule?

b) Wieviel Schüler abonnieren die Schülerzeitschrift *alpha* das vierte, dritte, zweite oder erste Jahr?

Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Meuselwitz

W 7 ■ 941 Regelmäßige konvexe n-Ecke haben n gleiche Seiten und n gleiche Innenwinkel. Jedem regelmäßigen konvexen n-Eck läßt sich ein Kreis umbeschreiben, in dem die n-Eck-Seiten Sehnen sind. In dem abgebildeten regelmäßigen Fünfeck wurden alle von genau einem Eckpunkt ausgehenden Diagonalen eingezeichnet, die einen Innenwinkel in drei Teilwinkel zerlegen. Welche Größe hat jeder dieser Teilwinkel? *T.*



W 7 ■ 942 Es sind alle natürlichen Zahlen a und b anzugeben, für die die Gleichung $2a+3b=27$ erfüllt ist.

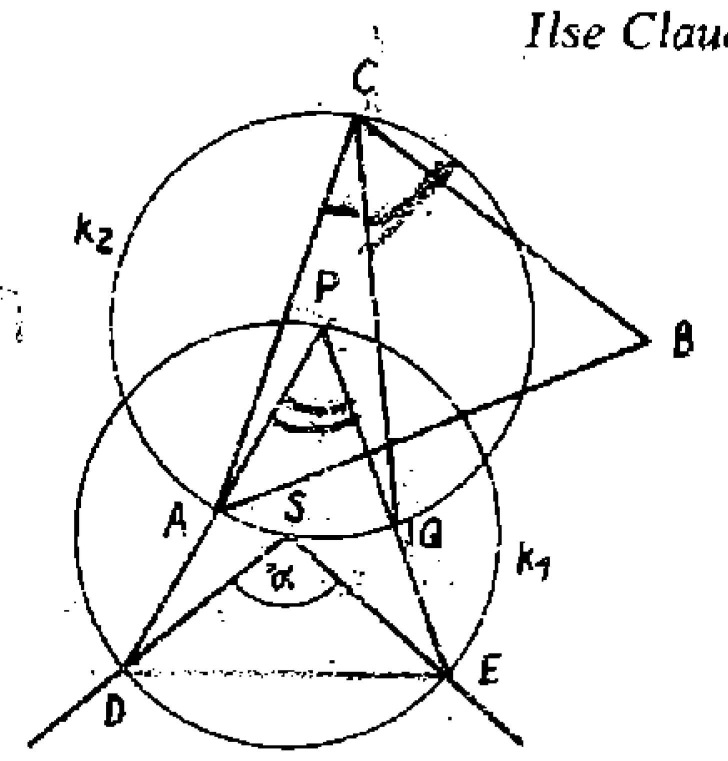
Mathematikfachlehrer K.-H. Gentzsch, Meuselwitz

W 7 * 943 Es sind alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen m und n anzugeben, deren Summe halb so groß wie ihr Produkt ist. *Sch.*

W 7 * 944 Aus einem gegebenen Winkel $\alpha<180°$ mit dem Scheitelpunkt S wurde ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ auf folgende Weise konstruiert:

Zunächst wurde um S ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 gezeichnet, auf seiner Peripherie ein Punkt P festgelegt und mit den Schnittpunkten D und E des Kreises k_1 mit den Schenkeln von α verbunden. Um P wurde ein zweiter Kreis k_2 mit dem Radius $r_2=r_1$ gezeichnet, auf k_2 ein Punkt C festgelegt, danach C mit A (Schnittpunkt von k_2 mit DP) und C mit Q (Schnittpunkt von k_2 mit EP) verbunden. Schließlich wurde in C an CQ der Winkel $\sphericalangle DPE$ angetragen; auf seinem freien Schenkel wurde die Strecke $\overline{CA}$ von C bis B abgetragen, und es wurde A mit B verbunden. Es ist zu beweisen, daß der Winkel $\sphericalangle ACB=\frac{3}{4}\alpha$ ist.

Ilse Clauder, Spielberg



8 ▲ 945 Am 23. März 1969 erreichte Manfred Wolf (DDR) auf der Skiflugschanze in Planica (FVR Jugoslawien) mit einer Sprungweite von 165 m den Weltrekord im Skiflug. Für seinen Skiflug benötigte er eine Zeit von 5,22 s.

a) Wie groß war seine mittlere Geschwindigkeit während des Fluges? Diese Geschwindigkeit soll in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ mit einer Dezimale nach dem Komma angegeben werden. Dabei soll die Abweichung der Flugbahn von der Distanz von 165 m nicht berücksichtigt werden.

b) Zwischen welchen Werten liegt die mittlere Geschwindigkeit, wenn die angegebene Sprungweite mit einem Fehler von 0,5 m und die angegebene Zeit mit einem Fehler von 0,005 s behaftet sein kann? *L.*

8 ▲ 946 Bei der Erneuerung des Oberbaus auf den Hauptstrecken der Deutschen Reichsbahn werden moderne Gleisjoch-Verlegeeinrichtungen eingesetzt, mit deren Hilfe 8 Arbeiter in einer Stunde 90 m Gleise verlegen können. Dagegen verlegen in traditioneller Handarbeit 40 Arbeiter in einer Arbeitswoche, das sind $43\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden, 1125 m Gleise.

1. Wieviel Arbeitsstunden benötigen 8 Arbeiter, um mit modernen Geräten 9 km Gleise zu verlegen?
2. Wieviel Arbeitsstunden benötigen 8 Arbeiter, um diese Arbeit in traditioneller Handarbeit zu verrichten?
3. Wieviel Kilometer Gleise können 8 Arbeiter in einer Arbeitswoche, das sind $43\frac{3}{4}$ Arbeitsstunden, verlegen, wenn sie
a) in traditioneller Handarbeit,
b) mit modernen Geräten arbeiten?
4. Wie verhält sich die Arbeitsproduktivität im Falle b) zu der im Falle a), d. h., wievielmal so groß ist die Länge der im Falle b) verlegten Gleise wie die Länge der im Falle a) verlegten Gleise? *L.*

W 8 ■ 947 Bei der inoffiziellen Mannschaftswertung der XI. Olympischen Winterspiele im Februar 1972 in Sapporo errang die DDR nach der UdSSR und vor allen übrigen Ländern den zweiten Platz mit insgesamt 84 Punkten. Dabei wurden für je eine Goldmedaille 7 Punkte, für je eine Silbermedaille 5 Punkte, für je eine Bronzemedaille 4 Punkte und für je einen 4., 5. bzw. 6. Platz 3, 2 bzw. 1 Punkte angerechnet.

Die Mannschaft der DDR erhielt sieben Bronzemedaillen, einen 4. Platz, drei 5. Plätze und vier 6. Plätze.

Wieviel Goldmedaillen und wieviel Silbermedaillen errang die Mannschaft der DDR? *L.*

W 8 ■ 948 Es ist zu beweisen, daß jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, in diesem Schnittpunkt halbiert wird. *Sch.*

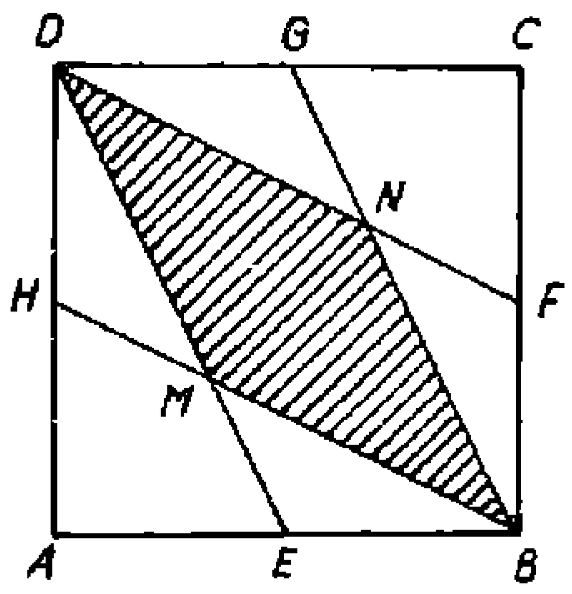
W 8 * 949 In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ seien die Längen der von A bzw. C ausgehenden Höhen gleich 12 cm bzw. 10 cm. Es ist die Länge der Basis $\overline{AB}$ zu berechnen.

Karl Krause, Mansfeld, Lehrer i. R.

W 8 * 950 Es sind alle natürlichen Zahlen a und b anzugeben, für die die Zahl a^3+b^3 eine Primzahl ist.

Erich Hoy, EOS „Lucas Cranach", Kl. 9 Wittenberg-Piesteritz

9▲951 Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a=6$ cm dar. Die Mitte E der Seite $\overline{AB}$ und die Mitte F der Seite $\overline{BC}$ wurden mit D, die Mitte G der Seite $\overline{CD}$ und die Mitte H der Seite $\overline{AD}$ wurden mit B verbunden (vgl. die Abb.). Der Schnittpunkt der Geraden BH und DE sei M, der Schnittpunkt der Geraden DF und BG sei N.



Es ist zu beweisen, daß das Viereck $BNDM$ ein Rhombus ist, und es ist sein Flächeninhalt A_R zu berechnen.

Martin Theuer, Fachlehrer für Mathematik, Crussow

9▲952 In dem folgenden Schema sind die Sternchen jeweils durch eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Divisionsaufgabe entsteht. Dabei darf am Anfang einer der Zahlen nicht die Ziffer 0 stehen.

```
* * * * * * * * * * : * * * = * * * * * * 2
 * * *
 -----
     * * * *
      * * *
     -------
         * * * *
         * * * *
         -------
               0
```

Obwohl nur eine Ziffer, nämlich die letzte Ziffer 2 des Quotienten gegeben ist, läßt sich diese Aufgabe eindeutig lösen. *L.*

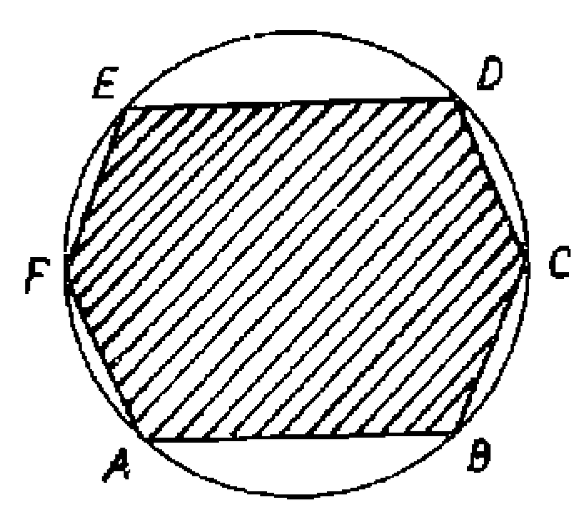
W 9 ■ 953 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die Gleichung

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$$

erfüllt ist. *Frank Harz, Käthe-Kollwitz-OS, Kl. 7, Weimar*

W 9 ■ 954 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $\overline{AB}=a$. Der Kreis k um A mit $\overline{AB}$ als Radius schneide die Diagonale $\overline{AC}$ im Punkte E. Die Parallele zu BC durch E schneide die Diagonale $\overline{BD}$ im Punkte F. Es ist zu beweisen, daß $\overline{CE}=\overline{EF}=\overline{FB}$ gilt. *Sch.*

W 9 * 955 Einem Kreis sei ein Sechseck $ABCDEF$ einbeschrieben, dessen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DE}$ gleichlang und doppelt so lang wie jede der einander gleichlangen Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FA}$ sind (vgl. die Abb.).



Es ist zu entscheiden, ob der Flächeninhalt dieses Sechsecks größer, kleiner oder gleich $\frac{3}{4}$ des Flächeninhaltes des Kreises ist.

Erst schätzen, dann rechnen!

Günter Stolz, Königs Wusterhausen, Fachlehrer für Mathematik

W 9 * 956 Es sind alle geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen anzugeben, für die die Gleichung

$$10a+(a-9)b^2=88+(6a-54)b$$

erfüllt ist. *Knut Taeger, EOS Dessau, Kl. 11*

10/12▲957 Es sind alle reellen Zahlen a zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:

Die Ungleichung $x^2+ax-a>0$ ist für alle reellen Zahlen x erfüllt. *S.-H.*

10/12▲958 Die Gleichung

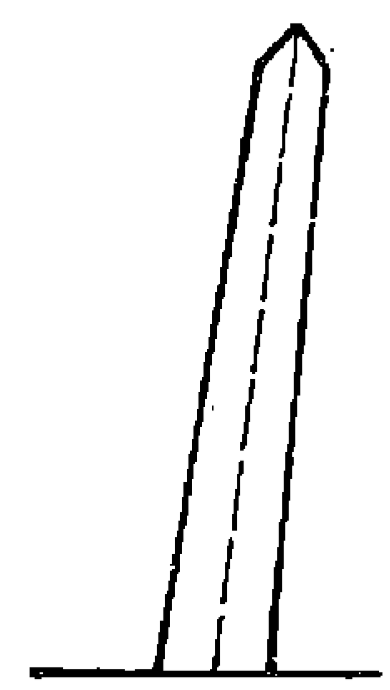
$$x^3+x^2+ax+b=0,$$

wobei a und b reelle Zahlen sind, habe drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) reelle Wurzeln.

Man beweise, daß dann stets $a\leq\frac{1}{2}$ gilt.

Jürgen Hopfe, Student, Merseburg

W 10/12 ■ 959 In Samarkand (Usbekische SSR) wurden kürzlich die Arbeiten zur Rettung eines vom Einsturz bedrohten alten Minaretts aus dem 14. Jahrhundert erfolgreich abgeschlossen. (Skizze, nicht maßstäblich)



Der 18 m hohe Turm, der um 1,47 m geneigt war (d. h. die Turmspitze war um 1,47 m in der Horizontalen verschoben), wurde mit einer mächtigen Hebewinde aufgerichtet.

a) Wie groß war der Neigungswinkel der Achse des Turmes gegen die Horizontale vor der Aufrichtung des Turmes?

b) Um wieviel Meter erhöhte sich der Turm nach seiner Aufrichtung, wenn man berücksichtigt, daß nach der Aufrichtung die Achse des Turmes gleich seiner Höhe ist? *L. L.*

W 10/12 ■ 960 Jemand will möglichst schnell eine Näherungslösung für das Gleichungssystem

$$89{,}5x+30{,}2y=2137{,}4, \qquad (1)$$
$$29{,}4x+10{,}1y=83{,}5 \qquad (2)$$

finden. Zu diesem Zweck rundet er die Koeffizienten und erhält die beiden Gleichungen

$$90x+30y=2137, \qquad (3)$$
$$29x+10y=84. \qquad (4)$$

Er erhält weiter aus (4) durch Multiplikation mit 3

$$87x+30y=252 \qquad (5)$$

und durch Subtraktion aus (3) und (5)

$$3x=1885,\ x\approx 628.$$

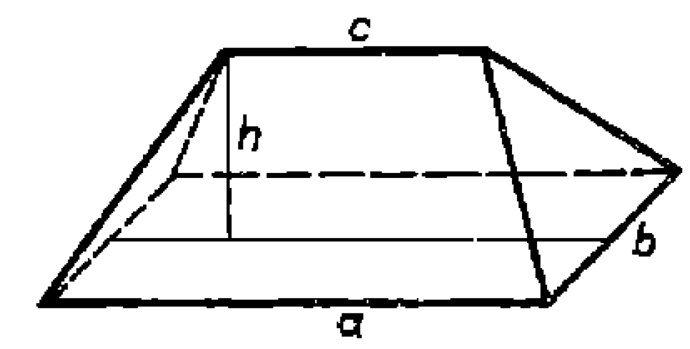
Ferner erhält er aus (4)

$$10y=84-29x\approx -18128,\ y\approx -1813.$$

Es ist durch eine genaue Rechnung zu überprüfen, ob diese erhaltenen Lösungen als Näherungslösungen brauchbar sind. Wenn das nicht der Fall ist, ist eine Begründung anzugeben. *L.*

W 10/12 * 961 Das Volumen des von einem abgewalmten Dach mit den Kantenlängen a, b und c sowie der Höhe h begrenzten Körpers (vgl. die Abb.) kann nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$V=\frac{1}{6}(2a+c)bh.$$

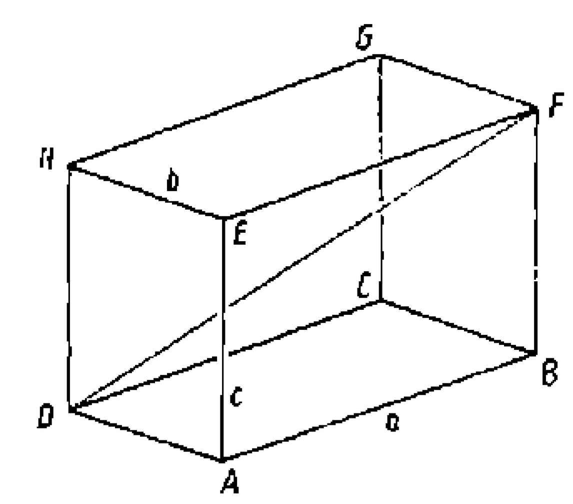


a) Es ist die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen.

b) Es ist das Volumen für $a=16m$, $b=6m$, $c=8m$, $h=4m$ zu berechnen.

Hinweis zur Lösung: Es empfiehlt sich, den Dachkörper durch zwei senkrechte Schnitte, die durch die Endpunkte des Dachfirstes gehen, in zwei Pyramiden und ein Prisma zu zerlegen und die Volumina dieser Körper nach den bekannten Formeln zu berechnen.

W 10/12 * 962 Ein als Drahtmodell ausgebildeter Quader mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H habe Kanten der Längen a bzw. b bzw. c (vgl. die Abb.). Die Verbindungsstrecke $\overline{DF}$ stellt eine Raumdiagonale des Quaders dar.



Gesucht sind die Längen der Gemeinlote l_a von AB und DF, l_b von EH und DF sowie l_c von AE und DF.

Erklärung: Unter dem Gemeinlot zweier windschiefer Geraden g und h versteht man jene Gerade l, die g und h senkrecht schneidet. Für nichtparallele windschiefe Geraden gibt es genau ein Gemeinlot. Der Abstand der Schnittpunkte des Gemeinlotes mit g und h ist die Länge des Gemeinlotes.

Lösungshinweis: Stellen Sie den Quader mit der Raumdiagonalen $\overline{DF}$ in Grund-, Auf- und Kreuzriß dar! In je einen der drei Risse läßt sich sofort je ein Gemeinlot einzeichnen. Aus jedem der drei Risse ist auch die Formel für die Länge des betreffenden Gemeinlotes sofort ableitbar.

Dozent Dr. E. Schröder, Technische Universität Dresden

aufgepaßt nachgedacht mitgemacht

Speziell für Klasse 5/6

Kleine Worte — Große Wirkung Teil 1

Als Klaus seine letzte Mathematikarbeit korrigiert zurückbekam, war er recht erstaunt. „Unser Mathematiklehrer ist ja wirklich kleinlich", meinte er zu seinem Freund Bernd. „Ich habe bis auf ein paar kleine Wörtchen alles richtig aufgeschrieben und doch erhielt ich bei keiner der ersten vier Aufgaben die volle Punktzahl."

Die ersten vier Aufgaben der Mathematikarbeit lauteten:

▲1▲ Wann ist die Division im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar?

▲2▲ Wieviel Punkte des Zahlenstrahls sind einer einzigen natürlichen Zahl zugeordnet?

▲3▲ Ist die Zahl 3 741 111 durch 3 teilbar? Begründe deine Antwort!

▲4▲ a) Entscheide, ob die Aussage
Alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger
wahr ist!
b) Falls die Aussage falsch ist, so berichtige sie, indem du die Aussage verneinst!

Klaus hat als Antwort folgendes geschrieben:
Zu 1: Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar, wenn der Dividend a ein Vielfaches des Divisors b ist oder wenn b nicht Null ist.
Zu 2: Jeder natürlichen Zahl ist ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Zu 3: Die Zahl 3 741 111 ist durch 3 teilbar.
Begründung: Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Quersumme dieser Zahl durch 3 teilbar.
Zu 4a: Die Aussage ist falsch, denn die Null hat keinen Vorgänger.
Zu 4b: Alle natürlichen Zahlen haben keinen Vorgänger.

Während sich die beiden Jungen die Lösungen betrachteten, fuhr Klaus fort: „Nur weil ich bei der ersten Aufgabe statt **und oder** geschrieben habe, war es nicht richtig. Bei der zweiten Aufgabe habe ich das kleine Wörtchen **genau** vergessen und bekam nicht die volle Punktzahl, obwohl die Aussage ja richtig ist.
An die Lösung der dritten Aufgabe schrieb unser Mathematiklehrer: ‚Falsche Begründung!' Hans hatte als Begründung geschrieben: ‚Da die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.' Er bekam die volle Punktzahl. Ich finde jedoch zwischen unseren beiden Begründungen kaum einen Unterschied. Bei der vierten Aufgabe bin ich tatsächlich reingefallen, denn ich hätte wirklich merken müssen, daß der Satz
Alle natürlichen Zahlen haben keinen Vorgänger
auch wieder eine falsche Aussage ist."

Aus dem Gespräch unserer beiden Freunde können wir folgendes entnehmen:

- Kleine, fast unscheinbare Wörtchen, wie z. B. **und, oder, genau** usw., können eine große Wirkung haben.
- Nicht nur die kleinen Wörtchen selbst, sondern auch deren Stellung im Satz ist sehr bedeutend, z. B. **wenn-, so, nicht**.

Damit wir in Zukunft nicht auch solche Fehler machen wie Klaus in seiner Mathematikarbeit, wollen wir uns in *alpha* mit diesen kleinen Wörtchen und ihrer großen Bedeutung beschäftigen.

Mindestens — höchstens — genau

Wenden wir uns zunächst der Aussage zu:
Jeder natürlichen Zahl ist ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Natürlich ist diese Aussage richtig. Sie bringt aber denselben Sachverhalt zum Ausdruck wie die Aussage:
Jeder natürlichen Zahl ist mindestens ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.
Mit diesen Sätzen wird also festgestellt, daß jeder natürlichen Zahl ganz sicher ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet wird, es könnten jedoch auch mehrere sein, weniger auf keinen Fall. Wie man sieht, ist der Informationsgehalt dieser Aussagen viel geringer als wenn man formuliert:
Zu jeder natürlichen Zahl gehört ***genau ein*** *Punkt auf dem Zahlenstrahl.*
Nun fällt es uns auch leicht, folgende Aussagen zu überprüfen.
1. Es gibt genau drei einstellige natürliche Zahlen, die durch 3 teilbar sind.
2. Es gibt drei einstellige natürliche Zahlen, die durch 3 teilbar sind.
3. Es gibt mindestens drei einstellige natürliche Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

Die erste Aussage ist natürlich falsch, weil mehr als drei, nämlich vier einstellige natürliche Zahlen durch 3 teilbar sind.
(Dies sind die Zahlen 0, 3, 6, 9.)
Dagegen sind die beiden anderen Aussagen wahr. Sie bringen ja auch denselben Sachverhalt zum Ausdruck.
Nun fällt es uns auch leicht festzustellen, daß die Aussage
Zwischen 1 und 100 gibt es mindestens 50 natürliche Zahlen, die durch 2 teilbar sind
falsch ist, da tatsächlich nur 49 (also weniger als 50) Zahlen zwischen 1 und 100 die Bedingung erfüllen.
Gewiß gibt es Leser unter euch, die der Meinung sind, daß die Aussage
Die DDR hatte am 1. 1. 1971 **höchstens** *50 000 000 Einwohner*
falsch sei, da die Einwohnerzahl der DDR etwa bei 17 000 000 liegt. Dieses Argument ist aber nicht zutreffend, weil mit der Wendung *höchstens 50 000 000 Einwohner* zum Ausdruck gebracht wird, daß es zwar weniger, aber keinesfalls mehr als 50 000 000 Einwohner sein können. Die Aussage ist also wahr.
Überlege nun selbst einmal, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind!
a) Es gibt **höchstens** neun einstellige natürliche Zahlen.
b) Es gibt **höchstens** zwei gerade Primzahlen.
c) Dreiecke haben **höchstens** drei spitze Winkel.
d) Die Gleichung $3^x=27$ hat im Bereich der natürlichen Zahlen **höchstens** eine Lösung.
e) Dreiecke haben **mindestens** einen rechten Winkel.
f) Die Gleichung $3^x=27$ hat **mindestens** eine Lösung.
g) Zwischen 1 und 1 000 gibt es **mindestens** 50 natürliche Zahlen, die durch 2 teilbar sind.
h) Die Gleichung $3^x=27$ hat **genau** eine Lösung.
i) Die Zahl 60 hat im Bereich der natürlichen Zahlen **genau** zehn Teiler.
j) Jeder natürlichen Zahl ist **höchstens** ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet.

Treffen für einen Sachverhalt gleichzeitig die Redeweisen
Es gibt mindestens ein x... und
Es gibt höchstens ein x...
zu, so kann man dafür auch sagen
Es gibt genau ein x...,
das diesen Sachverhalt erfüllt. (Vergleiche die Aussagen *d, f, h*!) *L. Flade*

Vorbildlich: Anläßlich eines Pionierfestes des Pionierhauses „Juri Gagarin", Karl-Marx-Stadt, wurde zur Werbung von Lesern ein alpha-Stand eingerichtet, der bei jeder weiteren Gelegenheit zum Einsatz kommt.

Diophantische Gleichungen

Ein sehr interessantes Gebiet der Zahlentheorie sind die diophantischen Gleichungen. Erstmalig wurden derartige Gleichungen von dem griechischen Mathematiker *Diophantos* (250 u. Z.) behandelt, und trotz jahrhundertlanger Forschungsarbeit sind heute noch mehrere Probleme dieser Theorie ungeklärt.

Gegenstand dieses Artikels soll nur ein spezieller Typ von diophantischen Gleichungen sein: Wir wollen nur *lineare* Gleichungen betrachten.

Definition 1:

G ist *lineare diophantische Gleichung* genau dann, wenn G die Form $ax+by=c$ hat, wobei a, b, c gegebene ganze Zahlen darstellen und x, y Variable für ganze Zahlen sind.

(Im folgenden wollen wir unter diophantischen Gleichungen immer nur lineare diophantische Gleichungen verstehen.)

Definition 2:

L ist *Lösung der diophantischen Gleichung* $ax+by=c$ genau dann, wenn L ein Paar $[x_0, y_0]$ von ganzen Zahlen ist, für das $ax_0+by_0=c$ gilt.

Allgemein ist bekannt, daß man die Gleichung $ax+by=c$ als Geradengleichung interpretieren kann, falls x und y aus dem Bereich der reellen Zahlen gewählt werden dürfen. Die Forderung „x, y ganzzahlig" kann man nun so verstehen, daß wir auf der vorliegenden Geraden nach Punkten mit ganzzahligen Koordinaten, sogenannten Gitterpunkten, suchen werden. Das *Ziel* besteht nun darin, *sämtliche Lösungen L der diophantischen Gleichung $ax+by=c$ anzugeben.* Rein anschaulich kann man sich überlegen, daß es Geraden geben kann, die nicht durch Gitterpunkte hindurchführen. Mit anderen Worten bedeutet das: Nicht jede diophantische Gleichung muß lösbar sein. Bevor man also an das Lösen von diophantischen Gleichungen herangehen wird, muß man die Lösbarkeitsfrage klären.

Eine Antwort darauf gibt

Satz 1:

Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung $ay+by=c$ ist, daß der größte gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler von c ist.

Bemerkungen:

(1) Die natürliche Zahl $d (d \neq 0)$ *heißt Teiler der ganzen Zahl c*, in Zeichen $d \mid c$, wenn es eine ganze Zahl e gibt, so daß $c=d \cdot e$ gilt. Gibt es keine solche Zahl, dann schreibt man $d \nmid c$.

(2) Unter (a, b) verstehen wir den *größten gemeinsamen Teiler* von a und b. Ist $(a, b)=1$, so nennen wir a und b *teilerfremd*.

Beweis von Satz 1:

Es sei $ax+by=c$ lösbar und $(a, b)=d$. Unter Berücksichtigung der Zerlegungen $a=\alpha \cdot d$ und $b=\beta \cdot d$ mit ganzzahligen α und β ergibt sich durch Einsetzen: $d(\alpha x+\beta y)=c$, und daraus folgt $d \mid c$.

Die Frage der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung haben wir damit auf das Vergleichen der ganzen Zahlen a, b, c zurückgeführt. Besitzen a, b, c den größten gemeinsamen Teiler d, dann wollen wir ihn stets aus der diophantischen Gleichung herausgekürzt denken, so daß wir nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit für lösbare Gleichungen stets $(a, b)=1$ voraussetzen können.

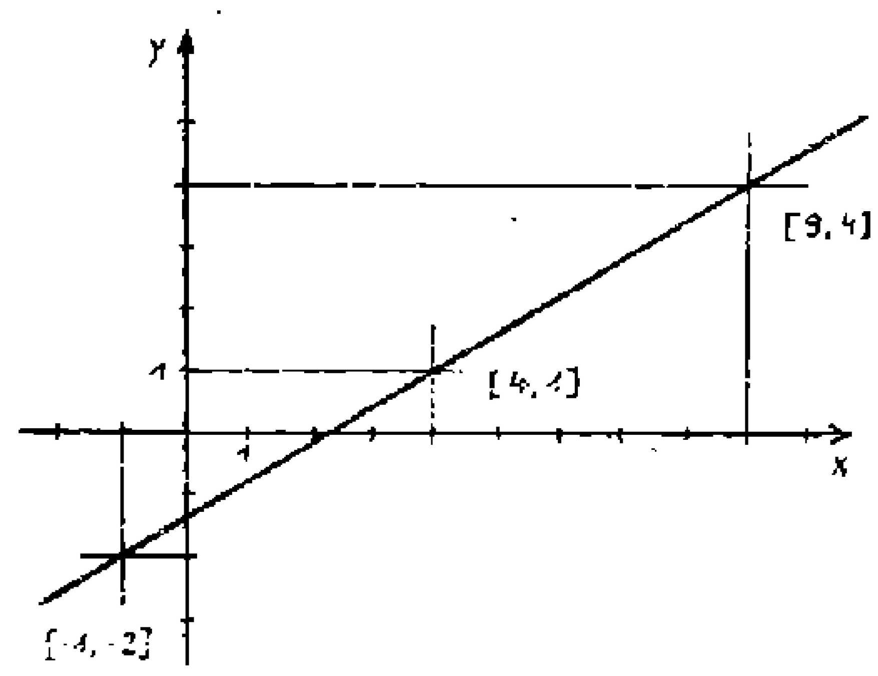
Aufgabe:

Man versuche wenigstens je 2 Lösungen $[x, y]$ für die diophantischen Gleichungen

$$6x+3y=1 \qquad (1)$$

$$3x-5y=7 \qquad (2)$$

anzugeben, indem man die zugehörigen Geraden zeichne und Gitterpunkte bestimme!



Ergebnis:

(1) Da $(6, 3)=3$ und $3 \nmid 1$, folgt unmittelbar Unlösbarkeit!

(2) Aus der angefertigten Zeichnung kann man erkennen, daß z. B. die Paare $[-1, -2]$, $[4, 1]$ und $[9, 4]$ zur Lösungsmenge gehören, wie man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigen kann. Auffallend ist, daß sich die x- bzw. y-Werte um Vielfache von 5 bzw. 3 unterscheiden. Diese Eigenschaft legt die *Vermutung* nahe, daß, *falls eine diophantische Gleichung lösbar ist, beliebig viele Lösungen existieren.*

Hiermit haben wir ein erstes, wenn auch umständliches Verfahren zur Lösung diophantischer Gleichungen kennengelernt. Es gibt jedoch wesentlich elegantere Methoden. Zwei Verfahren werden wir im folgenden behandeln.

Erste Methode:

Das Eulersche Reduktionsverfahren

Wir erarbeiten uns den Lösungsalgorithmus an Hand des Beispiels der diophantischen Gleichung $3x-5y=7$.

1. Schritt: Man stelle die Gleichung $3x-5y=7$ nach einer Variablen um (aus rechentechnischen Gründen nach derjenigen, deren Koeffizient den kleineren Betrag hat).

$$x=\frac{7+5y}{3}$$

2. Schritt: Man führe die Division so weit wie möglich aus.

$$x=2+y+\frac{1+2y}{3}$$

3. Schritt: Da beide Variable x, y ganzzahlig sind, folgt, daß der verbleibende Bruch ebenfalls ganzzahlig sein muß. Man führe dafür eine neue Variable z ein.

$$z=\frac{1+2y}{3}$$

Hieraus folgt:

$$3z-2y=1$$

Das *Ergebnis dieser 3 Schritte* besteht darin, daß wir die diophantische Gleichung $3x-5y=7$ auf die diophantische Gleichung $3z-2y=1$ zurückgeführt haben. Auf diese neu gewonnene diophantische Gleichung wenden wir das Verfahren abermals an und wiederholen es so lange, bis sich eine Gleichung ergibt, in der eine Variable den Koeffizienten 1 hat. (Dieser Fall wird stets erreicht, da bei diesem Verfahren die Koeffizienten ihrem Betrage nach kleiner werden.)

1. Schritt: $y=\frac{3z-1}{2}$

2. Schritt: $y=z+\frac{z-1}{2}$

3. Schritt: $u=\frac{z-1}{2}$, $2u-z=-1$

1. Schritt: $z=2u+1$

Damit ist der Algorithmus beendet.

Um die Lösungen $[x, y]$ zu erhalten, müssen wir nun lediglich $z=2u+1$ in $y=\frac{3z-1}{2}$ einsetzen. Wir erhalten $y=1+3u$. Einsetzen in $x=\frac{7+5y}{3}$ liefert $x=4+5u$.

Ergebnis:

Die Lösungen der diophantischen Gleichung $3x-5y=7$ lauten:

$$x=1+3u$$

$$y=4+5u$$

mit beliebigem ganzzahligem u.

Damit haben wir überdies gezeigt, daß — wie oben vermutet — die Gleichung unendlich viele Lösungen hat.

Zweite Methode:

Verfahren mittels linearer Kongruenzen

Wir lernen hier die wichtigsten Eigenschaften linearer Kongruenzen kennen. Mit Hilfe dieser Theorie lassen sich diophantische Gleichungen, wie wir sehen werden, sehr schnell lösen.

Definition 3:

Zwei ganze Zahlen a, b heißen kongruent modulo m, in Zeichen

$a \equiv b\ (m)$, wenn $m \mid a-b$ gilt.

Man sagt: *a, b sind inkongruent modulo m,* in Zeichen

$a \not\equiv b\ (m)$, wenn $m \nmid a-b$ ist.

Die *natürliche Zahl m* nennt man den *Modul der Kongruenz.*

Beispiele: $15 \equiv 5(5)$

$537 \equiv 117(10)$

$3 \not\equiv 4(2)$

Satz 2:

Die Kongruenz $a \equiv b(m)$ gilt dann und und nur dann, wenn a und b bei der Division durch m denselben Rest lassen.

Beweis: Wir haben zweierlei zu beweisen:

(1) Falls $a \equiv b(m)$ gilt, dann folgt, daß a und b bei der Division durch m denselben Rest lassen.

(2) Umkehrung zu (1)

Zu (1):

$a \equiv b(m)$ ist äquivalent mit $m \mid a-b$ bzw. $a=b+km$ mit ganzzahligem k. Für b nehmen wir o. B. d. A. die Zerlegung $b=qm+r$ mit $0 \leqq r<m$ und ganzzahligem q an. Folglich ergibt sich für a die Zerlegung $a=(k+q)m+r$.

Zu (2):

$a=qm+r$ und $b=pm+r$ mit $0 \leqq r<m$ und q, p ganzzahlig. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$a-b=(q-p)m$, d. h. $m \mid a-b$ und somit $a \equiv b(m)$.

Der Vorteil der Schreibweise $a \equiv b(m)$ für die Teilbarkeitsbeziehung $m \mid a-b$ liegt vor allem darin, daß mit Kongruenzen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation so gerechnet werden kann wie mit Gleichungen.

Satz 3:

Gegeben sind die Kongruenzen

$a_1 \equiv b_1\ (m)$

$a_2 \equiv b_2\ (m)$.

Dann gelten die Kongruenzen

$a_1+a_2 \equiv b_1+b_2\ (m)$

$a_1-a_2 \equiv b_1-b_2\ (m)$

$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2\ (m)$

Aufgabe:

Man versuche die Beweise selbständig zu führen, indem man Definition 2 anwende!

Anders verhält es sich hingegen mit der *Division*. Wir wissen bereits, daß aus der Gleichung $ax=ay$ stets $x=y$ folgt, falls $a \neq 0$ vorausgesetzt wird. Bei Kongruenzen ist dies jedoch nicht immer richtig.

Zum Beispiel ist $2 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 10\ (10)$, aber $5 \not\equiv 10\ (10)$ bei Division durch 2.

Eine *hinreichende Bedingung* dafür, wann in einer diophantischen Gleichung dividiert werden darf, liefert

Satz 4:

Die Kongruenz $ax \equiv ay(m)$ kann durch a dividiert werden, falls $(a, m)=1$ gilt.

Beweis: $ax \equiv ay(m)$ bedeutet nach Definition 2 $m \mid a(x-y)$. Da $m \nmid a$ ist, folgt $m \mid x-y$. D. h. $x \equiv y\,(m)$.

An einem Beispiel wollen wir jetzt das „Verfahren mittels linearer Kongruenzen" anwenden lernen.

Beispiel: Die diophantische Gleichung $3x-5y=7$ (siehe Eulersches Reduktionsverfahren) soll mit dieser Methode gelöst werden.

1. Schritt: Wir verwandeln die diophantische Gleichung $3x-5y=7$ in eine lineare Kongruenz. Als Modul wählen wir dabei einen der Koeffizienten der Variablen, z. B. 5:

$3x-5y \equiv 7(5)$. Da $-5y \equiv 0(5)$ und $5 \equiv 0(5)$ sind, folgt durch Subtraktion $3x \equiv 2\,(5)$.

2. Schritt: Wir versuchen, durch geschickte Rechnung auf der linken Seite der Kongruenz den Koeffizienten 1 zu erzeugen. (Man kann beweisen, daß dies stets erreichbar ist, und zwar auf Grund der oben getroffenen Voraussetzung $(a, b)=1$.)

$3x \equiv 2\,(5) \quad | \cdot 2$

$6x \equiv 4\,(5)$

Da $5x \equiv 0\,(5)$ gilt, folgt unmittelbar $x \equiv 4\,(5)$.

3. Schritt: Wir schreiben die so ermittelte Kongruenz als Gleichung auf. Mit diesem Ausdruck für x wird in die Ausgangsgleichung eingegangen und y bestimmt.

$x=4+5u$; $3(4+5u)-5y=7$; $y=1+3u$

Ergebnis: $x=4+5u$

$y=1+3u$

mit beliebigem ganzzahligem u.

Der Leser möge sich nun selbst weitere Gleichungen vorgeben und sie nach den angegebenen Methoden lösen.

H. Menzer, aus „Wurzel", Heft 2/72

Leser fragen – alpha antwortet

Frage:

Cornelia Thannhausser aus Linz (Österreich), seit drei Jahren *alpha*-Leser, Schülerin eines naturwissenschaftlichen Realgymnasiums, Kl. 9, fragt:

Bei uns an der Schule ist ein Streitgespräch entbrannt über die „sinnvolle Festlegung" von Grund- und Definitionsmenge:

„$x-3=2x-4$ Grundmenge $\mathbb{N}$

Einige sind der Ansicht, daß die Definitionsmenge dafür $D=\{x|x>3\}$ – und somit $L=\varnothing$ – sein müsse aus folgenden Gründen:

- Wenn man zur Feststellung der Richtigkeit der Lösung zur Probe $x=1$ einsetzt, erhält man auf beiden Seiten der Gleichung nicht in $\mathbb{N}$ liegende Zahlen $(-2=-2)$, zumal unter Umständen ein Schüler erst mit natürlichen Zahlen rechnen kann.

- Wenn eine Rechenmaschine nur für natürliche Zahlen programmiert ist, kann sie das Beispiel auch nicht lösen, weil sie ja auf negative Zahlen stößt, wenn man als $x=1, 2$ einsetzt.

Antwort:

Das Wort „Grundmenge" hat keine einheitlich festgelegte Bedeutung. Daher beschreibt der Text

„$x-3=2x-4$ Grundmenge $\mathbb{N}$"

nicht eindeutig eine Aufgabe. *Man muß genauer formulieren, wonach eigentlich gefragt werden soll.* Hierzu bestehen im vorliegenden Zusammenhang im wesentlichen zwei Auffassungsmöglichkeiten.

1. Auffassung: „Zu ermitteln ist die Menge L aller derjenigen $x \in \mathbb{N}$, für die $x-3=2x-4$ gilt!"

2. Auffassung: „Zu ermitteln ist die Menge L aller derjenigen $x \in \mathbb{N}$, für die $x-3 \in \mathbb{N}$ und $2x-4 \in \mathbb{N}$ und $x-3=2x-4$ gilt."

In der 1. Auffassung heißt „Grundmenge" so viel wie „vorgeschriebener *gemeinsamer Definitionsbereich* der beiden Funktionen $f(x)=x-3$ und $g(x)=2x-4$". In der 2. Auffassung heißt „Grundmenge" so viel wie „vorgeschriebene Menge, von der *der gemeinsame Definitionsbereich und beide Wertebereiche* Untermengen sein sollen". – Ob die 1. oder 2. Auffassung „sinnvoll" ist, hängt vom „Sinn", d. h. vom Verwendungszweck ab.

Ein Beispiel für eine Anwendungsaufgabe im Sinne der *1. Auffassung* ist etwa: „In einem Behälter war am Anfang einer Serie von Experimenten die Temperatur 0 °C festgestellt worden. Ein Experiment E, das die Temperatur um 1° erhöht, soll x mal durchgeführt werden, und danach soll durch ein Experiment F die Temperatur um 3° verringert werden. Dabei soll dieselbe Endtemperatur entstehen, wie wenn man (ausgehend von 0 °C) das Experiment E zunächst $2x$ mal durchgeführt und danach durch ein Experiment G die Temperatur um 4° verringert hätte. Zu ermitteln sind alle Möglichkeiten, die Anzahl x diesen Forderungen gemäß zu wählen."

Denkt man sich dieses Beispiel dadurch abgeändert, daß statt „Temperatur" und statt „0 °C", „1 °C", „3 °C", „4 °C" überall „Masse" und „0g", „1g", „3g" bzw. „4g" gesagt wird, so erhält man ein Beispiel im Sinne der *2. Auffassung.*

Dr. L. Stammler, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Lösungen

DDR-Olympiade, Olympiadeklasse 10

Lösung des Schülers Ulf Brüstel, Altenburg (Bez. Leipzig)

1. a) Für jede Primzahl p, die größer als 3 ist, gilt entweder $p \equiv 1 \pmod 6$ oder $p \equiv -1 \pmod 6$.

Die drei Primzahlen seien p_1, p_2, p_3, und ich untersuche, wann $p_1+p_2+p_3$ durch 3 teilbar ist.

Fall 1: Alle drei Primzahlen lassen bei der Division durch 6 denselben Rest, d. h. es ist entweder $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 1 \pmod 6$ oder $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -1 \pmod 6$. Dann ist $p_1+p_2+p_3 \equiv 3 \equiv -3 \pmod 6$.

In diesem Fall ist die Summe der drei Primzahlen durch 3 teilbar.

Fall 2: Die drei Primzahlen lassen bei der Division durch 6 nicht denselben Rest. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_1 \equiv 1 \pmod 6$ und $p_2 \equiv -1 \pmod 6$. Damit wird
$p_1+p_2+p_3 \equiv 1-1+p_3 \equiv p_3 \pmod 6$.

Da p_3 nicht durch 3 teilbar sein kann ($p_3>3$), ist in diesem Fall die Summe $p_1+p_2+p_3$ nicht durch 3 teilbar.

Wenn $p_1+p_2+p_3$ durch 3 teilbar ist, muß also

$$p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \pmod 6$$

sein. Daraus folgt
$p_1-p_2 \equiv p_2-p_1 \equiv p_1-p_3 \equiv p_3-p_1 \equiv p_2-p_3 \equiv p_3-p_2 \equiv 0 \pmod 6$

d. h., alle Differenzen je zweier der betrachteten Primzahlen sind durch 6 teilbar.

b) Es genügt, ein Gegenbeispiel anzugeben. Ich wähle z. B. $p_1=3$, $p_2=5$, $p_3=7$. Dann ist zwar

$$p_1+p_2+p_3=15 \equiv 0 \pmod 3,$$

aber p_2-p_1 ist nicht durch 6 teilbar (was sogar für alle zu betrachtenden Differenzen gilt).

Bemerkungen: Teil a) wurde von fast allen Schülern gemeistert. Überraschenderweise trat in den Bearbeitungen für b) ein Fehler ziemlich häufig auf: Es wurden Bedingungen formuliert, die zu Gegenbeispielen führen könnten, aber nichts über die Realisierbarkeit dieser Bedingungen geschrieben. So läßt die Formulierung „Ist $p_1=3$, $p_2 \equiv 1 \pmod 3$, $p_3 \equiv -1 \pmod 3$, dann ist $p_2-p_1 \not\equiv 0 \pmod 3$" die Frage offen, ob es solche Primzahlen p_2 und p_3 überhaupt gibt. Sie bringt lediglich zum Ausdruck „Wenn es Primzahlen p_2, p_3 mit $p_2 \equiv 1 \pmod 3$ und $p_3 \equiv -1 \pmod 3$ gibt, dann ist $p_2-p_1 \not\equiv 0 \pmod 3$", und damit ist kein Gegenbeispiel angegeben und auch seine Existenz nicht bewiesen.

Die Punktstufen verteilen sich wie folgt auf die Bearbeitungen:

Punkte	5	4	3	2	1	0
Schüler	46	41	6	2	4	2 .

Dr. Klaus-Dieter Drews, Universität Rostock

2. Von den Schülern wurde oft folgender günstiger Lösungsweg beschritten, der hier kurz wiedergegeben wird.

Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) ist ein Quadrupel der gewünschten Art. Die Zahl 82 944 000 000 wird in Primfaktoren zerlegt. Nach (1) ist dann $x_1x_2x_3x_4=2^{16}\cdot 3^4\cdot 5^6$ (*).

Auf Grund der Eigenschaften (2) und (4) gibt es positive ganze Zahlen y_1, y_2, y_3 und y_4 derart, daß
$x_1=2^4\cdot 3\cdot 5^2y_1$, $x_2=2^4\cdot 3\cdot 5^2y_2$, $x_3=2^3\cdot 3y_3$ und $x_4=2^3\cdot 3y_4$.

Aus (*) folgt dann $y_1y_2y_3y_4=2^2\cdot 5^2$ (**). Wegen (5) ist $y_2 \leqq 25$ und x_2 oder x_3 durch 5^4 teilbar, und demnach ist y_2 durch 5^2 oder y_3 durch 5^4 teilbar. Nach (**) kann nur $5^2 \mid y_2$ gelten. Also ist $y_2=5^2$. Die Eigenschaft (3) bedeutet schließlich, daß wenigstens eines der x_1, x_2, x_3 und x_4 durch 2^6 teilbar, also y_1 durch 2^2 oder y_3 durch 2^3 oder y_4 durch 2^3 teilbar ist. Nach (**) ist nur $y_1=2^2$ und folglich $y_3=y_4=1$ möglich. Damit ist gezeigt, daß es *höchstens* ein Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) der gewünschten Art gibt. — Eine Probe zeigt, daß (4800, 30000, 24, 24) eine Lösung ist.

Bemerkungen: Einige Schüler haben nicht alle Eigenschaften (1) bis (5) genügend ausgewertet. Sie erhielten bis zu 46 verschiedene Quadrupel, die meistens noch unbesehen als Lösungen angeboten wurden. Dabei hätte bereits eine Probe zum erfolgreichen Abschluß der Aufgabe geführt. Dieser einfache Existenzbeweis fehlte leider auch bei ca. 18 Teilnehmern, die zu dem Ergebnis gekommen waren, daß höchstens eine Lösung existiert. 50 Teilnehmer — etwa die Hälfte der Starter — erreichten 6 Punkte oder die volle Punktzahl 7. (Das bestärkt den Eindruck, daß die Aufgabe 10/2 leicht ist.) Dagegen konnten 12 Schüler keinen Lösungsansatz finden. 13 Teilnehmern gelang es nicht, an Hand des Ansatzes (*) die Eigenschaften (1) bis (5) auszuwerten.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß bei dem obigen Einzigkeitsbeweis weder Teilerfremdheit von y_1, y_2, y_3, y_4 (wegen (2)) noch die Teilerfremdheit von y_1, y_2 (wegen (4)) verwendet wurde. Die Eigenschaften (2) und (4) können also abgeschwächt werden zu

(2') Ein gemeinsamer Teiler ist gleich 24.

(4') Ein Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.,

ohne daß sich an der Lösung der Aufgabe etwas ändert. Das wurde nicht bemerkt.

Dr. E. Quaisser, PH Potsdam

3.1 (nach der Lösung von J. Bergmann, Bez. Dresden):

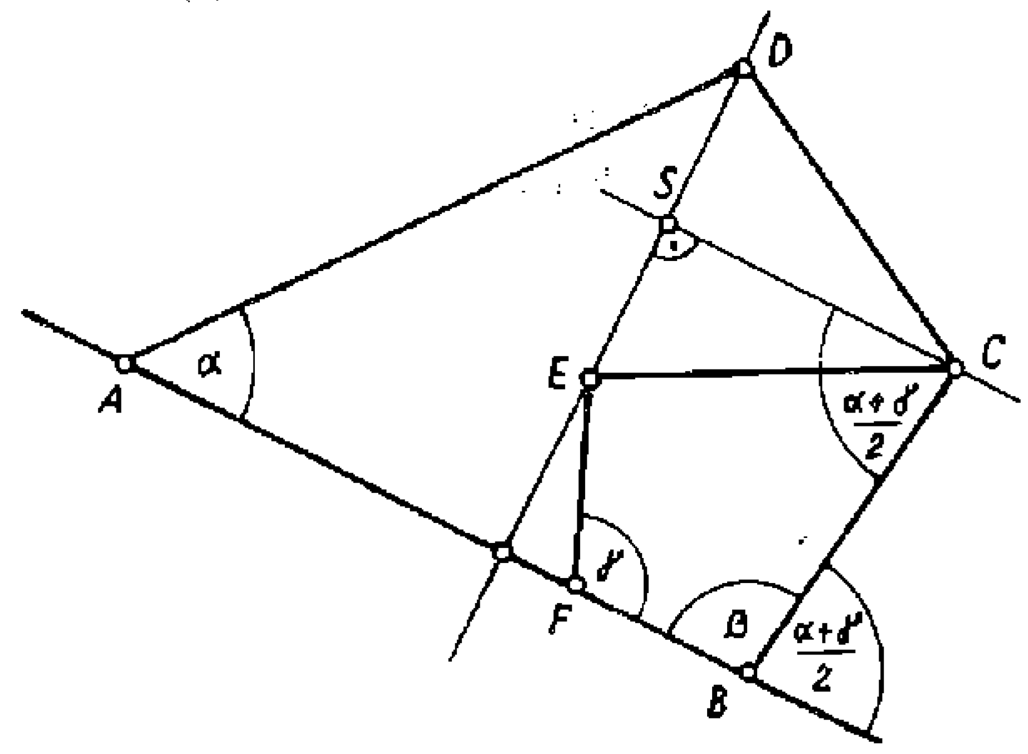
Vorausgesetzt sind folgende Beziehungen:

(1) $\overline{AB}=\overline{AD}>\overline{CB}=\overline{CD}$

(2) $\overline{AB} : \overline{BC}=\overline{BC} : \overline{FB}$

(3) $\overline{CE}=\overline{CB}\ (=\overline{CD})$

(4) $\overline{FE}=\overline{FB}$



Wegen der Längengleichheit der Strecken $\overline{CE}$ und $\overline{CB}$ einerseits und $\overline{FE}$ und $\overline{FB}$ andererseits ist das Viereck $BCEF$ ein Drachenviereck, das zum gegebenen ähnlich ist, denn wegen (1) und (2) gilt $\overline{CB}=\overline{CE}>\overline{FE}=\overline{FB}$, also sind in beiden Drachenvierecken die Größen der Innenwinkel zwischen den verschiedenlangen Seiten gleich ($\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABC$), und entsprechende Seitenverhältnisse stimmen nach (2) überein. Durch C werde die Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck $\triangle CDE$ gelegt, die gleichzeitig Mittelsenkrechte von $\overline{ED}$ ist. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit g_{ED} (Gerade durch E und D) sei S.

$$\alpha=\overline{\sphericalangle DAB}=\overline{\sphericalangle BCE}$$
$$\beta=\overline{\sphericalangle ABC}$$
$$\gamma=\overline{\sphericalangle BCD}=\overline{\sphericalangle EFB}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\overline{\sphericalangle SCB}=\alpha+\frac{\gamma-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{2}$$
$$\alpha+2\beta+\gamma=360°, \text{ also}$$
$$\frac{\alpha+\gamma}{2}=180°-\beta.$$

Werden zwei verschiedene Geraden g_1 und g_2 von einer dritten geschnitten und stimmen zwei Wechselwinkel überein, dann sind g_1 und g_2 parallel.

Damit ist g_{AB} parallel zu g_{SC}. Außerdem war g_{SC} senkrecht zu g_{DE}. So folgt unmittelbar, daß g_{DE} senkrecht zu g_{AB} verläuft, d. h. E liegt auf dem Lot von D auf die Gerade durch A und B.

Bemerkungen: Die Aufgabenkommission benutzt bei ihrem Lösungsvorschlag nur Winkelbeziehungen in den entstehenden Dreiecken. Außer den Symmetrieachsen der Drachenvierecke werden keine weiteren Hilfsgeraden verwendet. So erscheint die Aufgabe als recht elementar. Eine Analyse der Schülerleistungen liefert ein anderes Ergebnis. Von 101 Startern wählten 44 diese Aufgabe, von denen 25 keinen brauchbaren Lösungsansatz fanden. Nur 11 Schüler erreichten 6, 7 oder 8 Punkte. Einige Schüler hatten offenbar erst versucht, die Aufgabe 10/IV/3.2 zu bearbeiten. Als sie damit nicht zurechtkamen, beschäftigten sie sich mit der Aufgabe 3.1. kamen aber infolge Zeitmangels nicht mehr zur Lösung.

Interessante Lösungswege wurden u. a. von *H. Redlin* (Bez. Berlin) und *K. Heckemann* (Bez. Dresden) angegeben. Der Schüler *H. Redlin* gelangte über den Nachweis der Längengleichheit zweier geeigneter Strecken mit trigonometrischen Mitteln zum Ziel, während *K. Heckemann* durch geschickte Hilfslinien auf ähnliche rechtwinklige Dreiecke und schließlich auf ein passendes Rechteck kam.

Hans-Jürgen Vogel,
Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht"
Potsdam

3.2. Jürgen könnte etwa folgende Lösung gefunden haben:

1. Angenommen $ABCDE$ sei ein Fünfeck der gesuchten Art mit vorgegebenem Flächeninhalt F, dann gilt

$$u = 3a + 2b \qquad (1)$$

und $$F = ab + \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

Addiert man das $2a$-fache der ersten Gleichung zum (-4)-fachen der zweiten, so erhält man

$$2au - 4F = 6a^2 - a^2\sqrt{3}, \text{ also}$$

$$a^2 - \frac{2u}{6-\sqrt{3}}a + \frac{4F}{6-\sqrt{3}} = 0. \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) hat nur dann reelle Lösungen, wenn für die Diskriminante

$$D = \left(\frac{u}{6-\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4F}{6-\sqrt{3}} \geq 0$$

gilt, d. h. wenn

$$u^2 \geqq 4F(6-\sqrt{3}), \text{ also}$$

$$u \geqq 2\sqrt{F(6-\sqrt{3})} \text{ ist.} \qquad (3)$$

Wenn es also ein Fünfeck der gesuchten Art gibt, so gilt für die Ungleichung (3).

2. Angenommen, es gäbe sogar ein Fünfeck der gesuchten Art mit vorgeschriebenem Flächeninhalt F, für das

$$u = 2\sqrt{F(6-\sqrt{3})} \qquad (4)$$

gilt, dann gilt (wie in 1.) die Gleichung (2) wegen (4) sogar mit $D=0$. Also hat (2) nunmehr nur die einzige Lösung

$$a = \frac{u}{6-\sqrt{3}},$$

woraus man unter Berücksichtigung von (4)

$$a = 2\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} \text{ findet.} \qquad (5)$$

Aus (1) und (4) sowie (5) folgt dann

$$b = \frac{u}{2} - \frac{3a}{2} = \sqrt{F(6-\sqrt{3})} - 3\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

$$= (6-\sqrt{3}-3)\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} = (3-\sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}. \qquad (6)$$

Wenn es also ein Fünfeck der gesuchten Art, für das sogar (4) gilt, gibt, so ist

$$a = 2\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} \text{ und } b = (3-\sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

3. Angenommen a und b haben die in (5) bzw. (6) genannten Werte, dann gibt es ein Fünfeck mit vorgeschriebenem Flächeninhalt F und kleinstmöglichem Umfang u; denn ein Fünfeck mit (5) und (6) hat den Flächeninhalt

$$ab + \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{2(3-\sqrt{3})F}{6-\sqrt{3}} + \frac{F\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} = F,$$

also den vorgeschriebenen Wert. Es gibt also Fünfecke der gesuchten Art.

Daß dabei der Umfang u möglichst klein ist, folgt so: Nach 1. gilt für diese Fünfecke der verlangten Art die Ungleichung (3). Für ein Fünfeck mit (5) und (6) wird der Umfang

$$u = 3a + 2b = 6\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} + 2(3-\sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

$$= 2(6-\sqrt{3})\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} = 2\sqrt{F(6-\sqrt{3})},$$

also möglichst klein.

4. Damit wird der Umfang eines Fünfecks der verlangten Art möglichst klein genau dann, wenn (5) und (6) gelten, d. h. wenn $a : b = 2 : (3-\sqrt{3})$ ist.

Bemerkungen: Von 101 Schülern bearbeiteten 57 die Wahlaufgabe 3.2. Dabei traten folgende typische Fehler auf:

1. Die in der angegebenen Lösung in 3. dargestellten Überlegungen wurden von keinem Schüler angestellt, d. h. es wurde nicht gezeigt, daß es Fünfecke der gesuchten Art mit kleinstmöglichem Umfang gibt. Dafür wurden 2 Punkte abgezogen.
2. Fünf Schüler lösten die „inverse" Aufgabe: Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck der beschriebenen Art. Als Umfang dieses Fünfecks wird ein geeigneter Wert u vorgeschrieben. Dann wird untersucht, ob es unter allen derartigen Fünfecken eines von größtem Flächeninhalt gibt. Dabei ergeben sich a und b wie in (5) und (6). Es ist dabei aber von keinem Schüler nachgewiesen worden, daß beide Probleme äquivalent sind.
3. Drei Schüler rechneten mit speziellen Werten $F=1$, $F=10$ (bzw. von den unter 2 genannten mit $u=2$) ohne nachzuweisen, daß diese Werte zulässig sind bzw. daß sich die Aufgabe unabhängig vom Wert von F (bzw. von u) lösen läßt.
4. Sieben Schüler schrieben in Formel (1) für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a

$$F_1 = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \text{ bzw. } F_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

und rechneten mit diesen falschen Werten weiter.

5. Zwei Schüler wendeten Differentialrechnung zur Lösung an, obwohl das in der Aufgabenstellung ausdrücklich verboten war.

Punktverteilung für Aufgabe 3.1 und 3.2 (beide Wahlaufgaben gemeinsam).

Punkte	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Schüler	4	4	19	7	2	4	11	24	26

Dr. K. Rosenbaum, Pädagogische
Hochschule „Dr. Theodor Neubauer", Erfurt

4. a) Angenommen, es gibt ein Tripel (m, x, y) mit den geforderten Eigenschaften.

Dann gilt wegen (2) und $x<0$

$$x = 5y - 11 < 0; \qquad (3)$$

wegen $y>0$ und ganzzahlig folgt daraus

$$y_1 = 1,\ y_2 = 2.$$

Durch Einsetzen in (3) erhält man

$$x_1 = -6,\ x_2 = -1.$$

Nach (1) ist dann

$$m_1 = \frac{15}{2},\ m_2 = 4.$$

Also können höchstens die Tripel $\left(\frac{15}{2}, -6, 1\right)$ und $(4, -1, 2)$ Lösung der Aufgabe sein.

b) Die Probe zeigt, daß diese beiden Tripel das Gleichungssystem erfüllen und die übrigen geforderten Eigenschaften besitzen. Die Lösung der Aufgabe lautet: $\left(\frac{15}{4}, -6, 1\right)$; $(4, -1, 2)$.

Bemerkungen: Bei Aufgaben dieser Art müssen grundsätzlich Analyse (a) und Synthese (b) durchgeführt werden. Während die Analyse alle Tripel ergibt, die möglicherweise Lösung der Aufgabe sind, sondert die Synthese aus diesen die Lösung aus. In der vorliegenden Aufgabe erfüllt jedes in (a) gefundene Tripel alle gegebenen Bedingungen; jedes ermittelte Tripel ist tatsächlich Lösung der Aufgabe.

Bei mehr als der Hälfte der Schüler, die diese Aufgabe bearbeiteten, fehlte der Teil b), was Punktabzug zur Folge haben mußte.

Dipl.-Mathematiker Ingeborg Bartsch,
Universität Rostock

5. Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission:

O. B. d. A. genügt es, drei Fälle zu unterscheiden: (1) A zwischen P und M,
(2) P zwischen A und M,
(3) $A=P$.

Im Fall 1 und 2 gilt

$$\triangle PMB \cong \triangle PMD \text{ (sws), also}$$
$$\sphericalangle MPB = \sphericalangle MPD.$$

Im Fall 1 ist dies dasselbe wie

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle APT.$$

Im Fall 2 folgt die letzte Gleichung ebenfalls, und zwar durch Übergang zu den Scheitelwinkeln.

Daher gilt in den Fällen (1) und (2)

$$\triangle PAQ \cong \triangle PAT \text{ (wsw), also}$$
$$\overline{AQ} = \overline{AT}, \qquad (1)$$

und diese Gleichung trifft auch im Fall 3 zu. Der weitere Beweis verläuft für alle 3 Fälle gemeinsam.

Die Gerade g durch B, D ist parallel zu g_1 und g_2, und es gilt $\overline{AM} = \overline{MC}$. Daraus folgt nach einem der Strahlensätze

$$\overline{QB} = \overline{BR}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nach Umkehrung eines der Strahlensätze

$$AB \parallel TR$$

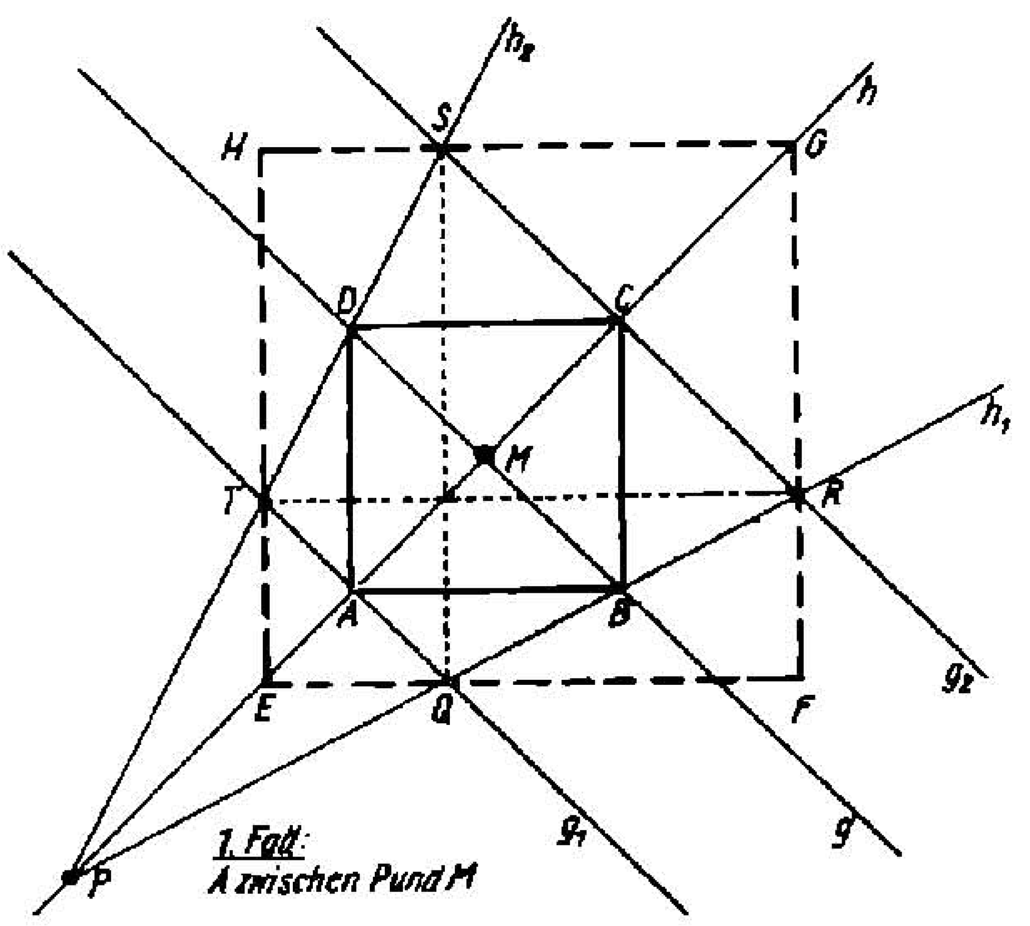
und dann nach einem der Strahlensätze

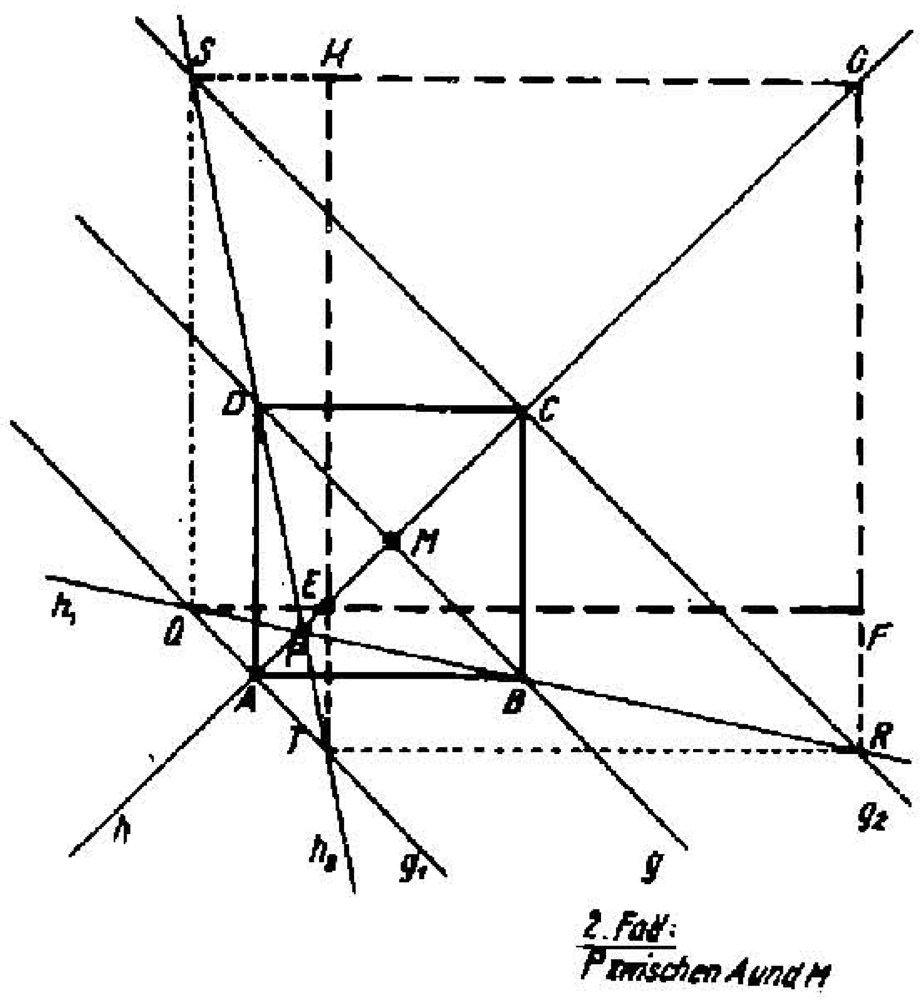
$$\overline{AB} : \overline{TR} = 1 : 2.$$

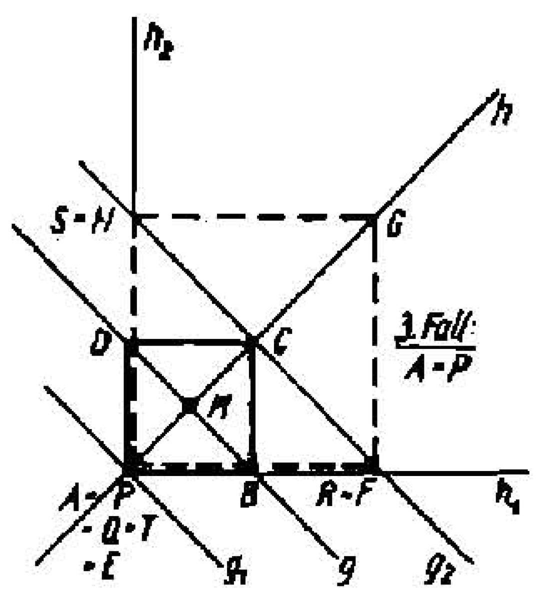
Analog erhält man $AD \parallel QS$ und $\overline{AD} : \overline{QS} = 1 : 2$.

Die Seiten des Rechtecks $EFGH$ sind folglich parallel zu TR bzw. QS, und da diese Seiten bzw. ihre Verlängerungen durch Q, R, S, T gehen, haben sie selbst die Längen $\overline{TR}$ bzw. $\overline{QS}$, also $2\overline{AB}$ bzw. $2\overline{AD}$.

Somit gilt $I_2 = 4I_1$, d. h. $I_1 : I_2 = 1 : 4$.







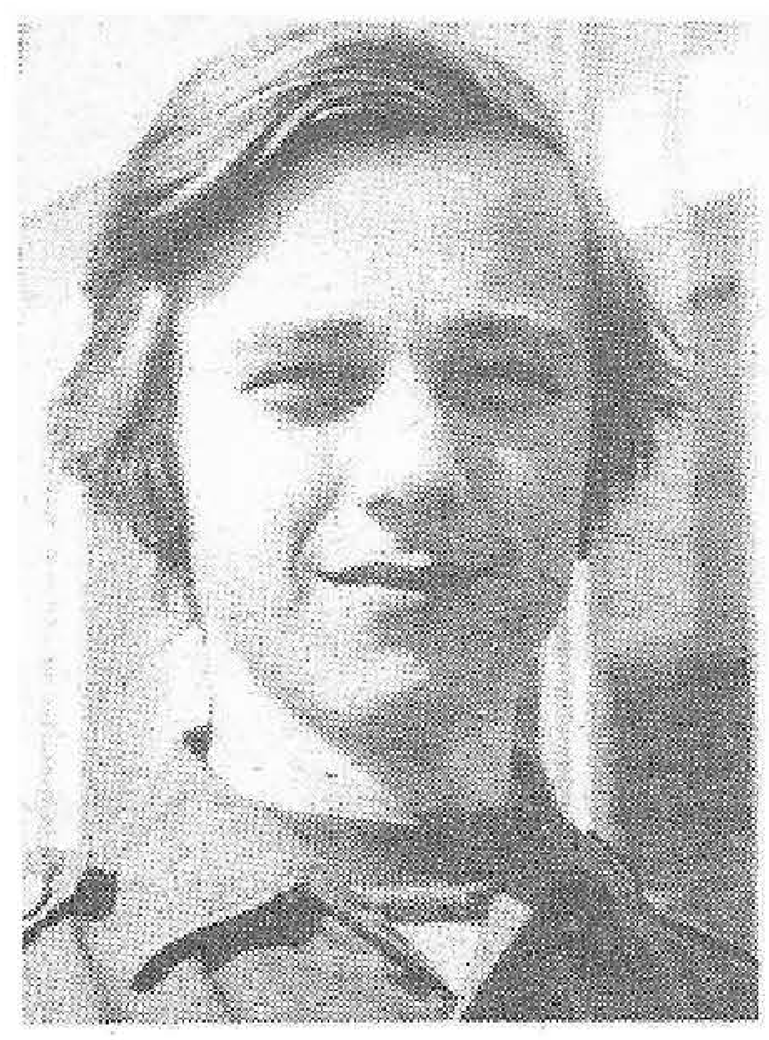
Bemerkungen: Der größte Teil der Schüler versuchte ebenfalls mit elementaren geometrischen Mitteln – häufig auch unter Ausnutzung der Symmetrie – die Aufgabe zu lösen. Kritisch muß hierzu aber angemerkt werden, daß mit diesen Mitteln sehr oft umständlich operiert wurde. Lediglich der Schüler Bernd Klipps erreichte auf diesem Wege die volle Punktzahl. Einige wenige Schüler verwendeten zur Lösung Methoden der analytischen Geometrie: Legt man die gesamte Figur in ein Koordinatensystem, so kann man für die Geraden g_1, g_2, h_1 und h_2 die zugehörigen Funktionsgleichungen aufstellen, mit diesen die Schnittpunkte R, S, T und Q berechnen, weiterhin die Punkte E, F, G und H. Aus den Entfernungen der Punkte E und F bzw. F und G erhält man dann schließlich das Verhältnis $I_1 : I_2$. Nach dieser Methode vorgehend, erhielt als zweiter Schüler Martin von Mickwitz für seine Lösung die volle Punktzahl. Den geringsten Erfolg zeigte die Methode, mit Mitteln der ebenen Trigonometrie die Lösung zu gewinnen.

Der häufigste Fehler, der unabhängig von der gewählten Methode auftrat, war der, daß die oben dargestellte Fallunterscheidung nicht gemacht wurde. Lediglich 15 Schüler konnten eine vollständige Fallunterscheidung vorweisen.

Die Punktverteilung sieht folgendermaßen aus: 2 Schüler 7 Punkte, 9 Schüler 6 Punkte, 47 Schüler 5 bzw. 4 Punkte 25 Schüler 3 bzw. 2 Punkte und 18 Schüler 1 bzw. 0 Punkte. Die Punkteverteilung zeigt, daß diese Aufgabe dazu beitrug, das Teilnehmerfeld zu differenzieren, d. h. einen angemessenen Schwierigkeitsgrad aufwies.

Dr. H. J. Sprengel, Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam

In diesem Jahr erhielt nur ein Schüler ein Diplom für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe:
Reinhard Illge, EOS „Juri Gagarin", Hermsdorf (Bez. Gera). Er führte den im folgenden eleganten Beweis:



6. Beweis: 1. Durch den inneren Punkt S wird das Tetraeder $ABCD$ in die vier Teiltetraeder $ABCS$, $BDCS$, $ACDS$, $ABDS$ zerlegt. Für das Volumen $V = V_{ABCD}$ des gesamten Tetraeders gilt dann

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4,$$

wobei $V_1 = V_{ABCS}$, $V_2 = V_{BDCS}$, $V_3 = V_{ACDS}$, $V_4 = V_{ABDS}$ bedeuten.

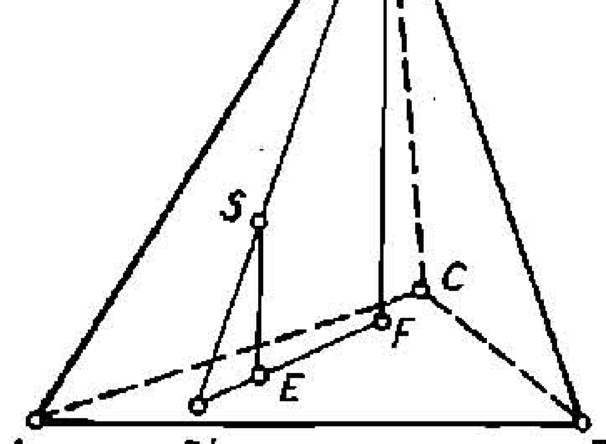
Also ist $\frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_3}{V} + \frac{V_4}{V} = 1.$ (1)

2. Es seien F bzw. E die Fußpunkte der Lote von D bzw. S auf die Ebene durch A, B, C. Das Volumen des Tetraeders $ABCD$ bzw. $ABCS$ ist

$$V = \frac{1}{3} F_{ABC} \overline{DF} \text{ bzw. } V_1 = \frac{1}{3} F_{ABC} \overline{SE},$$

wobei F_{ABC} den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bedeutet.

Dann ist $\frac{V_1}{V} = \frac{\overline{SE}}{\overline{DF}}$. (2)



Die beiden Dreiecke $\triangle ED'S$ und $\triangle FD'D$ sind ähnlich, denn sie stimmen in zwei Winkeln überein:

$\sphericalangle D'ES = \sphericalangle D'FD$ und
$\sphericalangle SD'E = \sphericalangle DD'F$.

Folglich ist $SE \parallel DF$,
und nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{DF}} \qquad (3)$$

Wegen (2) und (3) ist

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}}. \qquad (4)$$

Analog findet man

$$\frac{V_2}{V} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}}, \quad \frac{V_3}{V} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}}, \quad \frac{V_4}{V} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}}. \qquad (5), (6), (7)$$

Setzt man (4), (5), (6) und (7) in (1) ein, so folgt die Behauptung

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} = 1.$$

Bemerkungen: 1. Der hier angegebene Lösungsweg wurde, oft in abgewandelter Form, von den meisten Schülern gewählt. Zwei Schüler verwendeten das analoge Ergebnis für die Ebene als Ausgangspunkt ihrer Betrachtungen. Da dieses aber nicht als bekannt vorausgesetzt werden konnte, sondern seinerseits bewiesen werden mußte, wurde die gesamte Lösung dann nur länger.

2. 13 Schüler erhielten für die Behandlung des Spezialfalles, daß das Tetraeder regelmäßig und S der Schwerpunkt des Tetraeders ist, nur einen Punkt.

Punkteverteilung für die Aufgabe

Punkte	7	6	5	4	3	2	1	0
Schüler	9	4	3	0	0	1	13	71

Dr. K. Rosenbaum, Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer", Erfurt

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 werden in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule", Heft 12/72, veröffentlicht, d. Red.

Mathematik und Russisch

Übersetzung des Aufgabenteils (Seite 102)

▲1▲ Zwei Brüder kamen darüber ins Gespräch, wieviel Geld sie gespart haben. Der ältere sagt zum jüngeren: „Gib mir 80 Kopeken, dann habe ich doppelt soviel wie du." Der jüngere dachte nach und sagte: „Nein, du hast ohnehin schon mehr Geld als ich. Gib du mir lieber 80 Kopeken, dann haben wir beide gleichviel." Wieviel Geld hatte jeder von ihnen?

▲2▲ Die Tochter ist 8 Jahre alt, ihre Mutter 38 Jahre. In wieviel Jahren wird die Mutter dreimal so alt sein wie die Tochter?

▲3▲ Jascha geht (braucht) von zu Hause bis zur Schule 30 Minuten, sein Bruder Petja 40 Minuten. Petja ging 5 Minuten früher als Jascha aus dem Hause. In wieviel Minuten holt Jascha Petja ein?

▲4▲ Der Durchmesser der durch die Explosion des großen Tunguska-Meteoriten verwüsteten Taigafläche beträgt 38 km. Wie groß ist die versengte Taigafläche?

▲5▲ Wie kann man mit 4 geraden Linien 9 Punkte verbinden, die so angeordnet sind, wie es auf der Zeichnung dargestellt ist, aber ohne den Bleistift abzusetzen?

▲6▲ Zeichne jede der Figuren und zerlege sie in 4 kongruente Teilfiguren!

▲7▲ Eine Melone kostet 10 Kopeken und noch den Preis einer halben Melone. Wieviel kostet eine Melone?

▲8▲ Dieses Zifferblatt soll in 6 Teile beliebiger Form zerlegt werden, jedoch so, daß auf allen Teilen die Summe der Zahlen gleich ist.

▲9▲ Die Gleichung $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ kann man so schreiben, daß alle zehn Ziffern Verwendung finden, z. B.: $\frac{1}{2}=\frac{3485}{6970}$. Könnt ihr noch fünf analoge Beispiele finden, wo der Bruch $\frac{1}{2}$ stehen kann?

Versucht, andere Beispiele zu finden, wo die gleichen Brüche durch zehn verschiedene Ziffern ausgedrückt werden können, z. B.:

$\frac{3}{6}=\frac{1485}{2970}$ oder $\frac{1}{2}=\frac{35}{70}=\frac{48}{96}$.

---

*7*863 Der Lösungsweg ist folgender Tabelle zu entnehmen:

1. Zahl: n
2. Zahl: $n+5$
3. Zahl: 23 oder 29
4. Zahl: $2n+5$
5. Zahl: $2n+7$
6. Zahl: $3n$

Entweder $9n+40=175$ oder $9n+46=175$

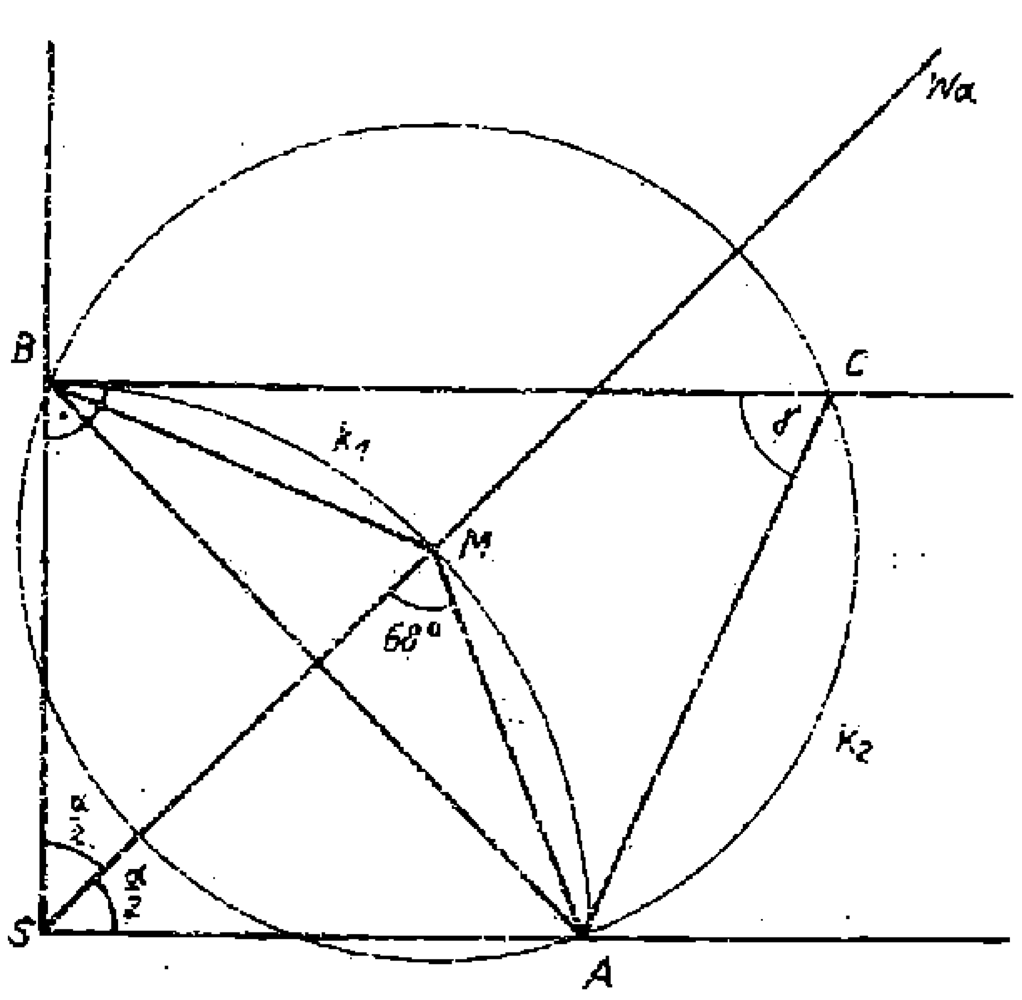
$9n=135$ $\qquad 9n=129$

$n=15$

Nicht lösbar, da 129 kein Vielfaches von 9.

Herr Schulze tippte die Zahlen 15, 20, 23, 35, 37 und 45.

*7*864 Zeichnet man nach Ausführung der Konstruktionen die Verbindungsgeraden AB, AM und BM, so erhält man wegen $\overline{SA}=\overline{SM}=\overline{SB}$ die gleichschenkligen Dreiecke



$\triangle AMS$ und $\triangle MBS$, die einander kongruent sind. Deshalb gilt $\sphericalangle SMA=\frac{1}{2}\cdot(180°-44°)=68°$ und somit $\sphericalangle AMB=136°$. Da $\sphericalangle AMB$ (Zentriwinkel und $\sphericalangle ACB$ (Peripheriewinkel) über der gemeinsamen Sehne $\overline{AB}$ stehen, gilt $\gamma=\frac{1}{2}\cdot 136°=68°$.

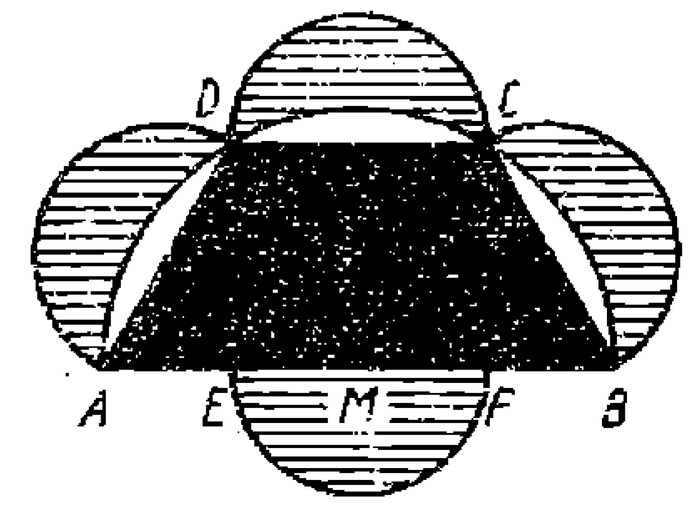
8▲865 Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ mit M und die Länge der Seite $\overline{CD}$ mit a. Dann gilt nach Voraussetzung $\overline{AM}=\overline{MB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=a$.

Es sei nun A_1 der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

Wir erhalten die Summe A_2 der Flächeninhalte der drei Mondsicheln und des Halbkreises unterhalb von AB, indem wir die Flächeninhalte der vier Halbkreise über $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ und $\overline{EF}$, die sämtlich den Durchmesser a haben, sowie den Flächeninhalt A_1 des Trapezes addieren und dann den Flächeninhalt des Halbkreises über $\overline{AB}$, der den Durchmesser $2a$ hat, subtrahieren. Daher gilt

$$A_2=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}a^2+A_1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}(2a)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2+A_1-\frac{\pi}{2}a^2=A_1.$$



Es gilt also $A_1=A_2$, d. h. der Flächeninhalt des Trapezes ist *gleich* der Summe der Flächeninhalte der drei Mondsicheln und des Halbkreises unterhalb von AB.

8▲866 Bezeichnet man die Maßzahl der Höchstgeschwindigkeit (in km/h) mit x, so gilt, da die mittlere Geschwindigkeit während der ersten 18 min und während der letzten 17 min gleich $\frac{x}{2}$ war,

$$\frac{18}{60}\cdot\frac{x}{2}+\frac{36}{60}\cdot x+\frac{17}{60}\cdot\frac{x}{2}=1900,$$

also $\quad 18x+72x+17x=1900\cdot 120,$

$$107x=228\,000,$$

$$x=\frac{228\,000}{107}\approx 2\,130.$$

Die Höchstgeschwindigkeit der TU 144 betrug also rund 2 130 km/h. Diese Geschwindigkeit ist doppelt so groß wie die Schallgeschwindigkeit (1 065 km/h in 16 000 m Höhe) und mehr als $2\frac{1}{2}$mal so groß wie die Geschwindigkeit der bisherigen Passagierflugzeuge (etwa 800 km/h).

W 8 ■ 867 Da genau eine der drei Aussagen (1), (2), (3) wahr ist, haben wir die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Die Aussage (1) sei wahr.

Dann hat Sabine entweder den Ball oder das Sprungseil. Nun kann die Aussage (3) höchstens dann falsch sein, wenn Sabine das Sprungseil nicht hat. Also muß Sabine den Ball haben. Damit die Aussage (3) tatsächlich falsch ist, müßte auch Werner den Ball haben. Das widerspricht aber der Voraussetzung; daher kann dieser Fall nicht eintreten.

2. Fall: Die Aussage (2) sei wahr.

Dann hat Werner den Ball und Elke das Sprungseil. Also muß Sabine den Kreisel haben. Die Aussagen (1) und (3) sind daher falsch. Es sind also bei dieser Verteilung alle Voraussetzungen erfüllt.

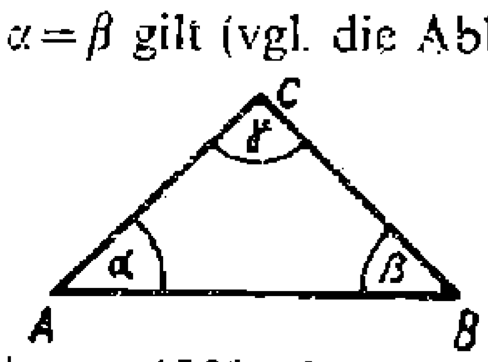
3. Fall: Die Aussage (3) sei wahr.

Da die Aussage (1) falsch ist, hat Sabine den Kreisel. Werner kann daher nur den Ball oder das Sprungseil haben, und auch Elke kann nur den Ball oder das Sprungseil haben. Da die Aussage (2) falsch ist, hat also Werner das Sprungseil, oder Elke hat den Ball. Das trifft aber nur zu, wenn Werner das Sprungseil und Elke den Ball hat. Bei dieser Verteilung ist die Aussage (3) wahr und es sind alle Voraussetzungen erfüllt.

Aus der Untersuchung der drei Fälle ergibt sich, daß nur der 2. und 3. Fall eintreten können. In jedem Falle hat also Sabine den Kreisel.

Aus der Untersuchung der drei Fälle ergibt sich, daß nur der 2. Fall eintreten kann. Daher hat Werner den Ball, Elke das Sprungseil und Sabine den Kreisel.

W 8 ■ 868 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}$, das die geforderten Eigenschaften besitzt, und es seien α, β, γ die Größen der Winkel dieses Dreiecks, wobei $\alpha=\beta$ gilt (vgl. die Abb.).



Dann ist $\gamma=180°-2\alpha$, und es gilt nach Voraussetzung $\gamma=n\cdot 2\alpha$, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt $\quad 2n\alpha=180°-2\alpha,$

$$2(n+1)\alpha=180°,$$

$$\alpha=\frac{90°}{n+1}.$$

Nun ist 90 nur durch die folgenden natürlichen Zahlen teilbar:

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

Da die Maßzahl des Winkels α eine ganze Zahl und da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, kann also n nur die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte annehmen, woraus sich dann jeweils die in der Tabelle für die Winkel α, β, γ angegebenen Werte ergeben. Andererseits sind für diese Winkelgrößen und nur für diese die geforderten Eigenschaften erfüllt.

n	$\alpha=\beta$	γ	n	$\alpha=\beta$	γ
1	45°	90°	14	6°	168°
2	30°	120°	17	5°	170°
4	18°	144°	29	3°	174°
5	15°	150°	44	2°	176°
8	10°	160°	89	1°	178°
9	9°	162°			

* 8 * 869 Der Umfang eines Reifens von 28 Zoll Durchmesser beträgt $\pi \cdot 28$ Zoll und der Umfang eines Reifens von 26 Zoll Durchmesser $\pi \cdot 26$ Zoll. Nun verhält sich der tatsächlich von dem Radfahrer zurückgelegte Weg von x km zu dem von dem Kilometerzähler angezeigten Weg von 50 km wie der Umfang eines Reifens von 28 Zoll Durchmesser zu dem Umfang eines Reifens von 26 Zoll Durchmesser; denn jede Umdrehung des Rades wird durch einen Stift auf das Zahnradwerk des Kilometerzählers übertragen. Wir erhalten daher
$x : 50 = \pi \cdot 28 : \pi \cdot 26$, also

$$x = \frac{50 \cdot 28}{26} \approx 53{,}8.$$

Die tatsächlich von dem Radfahrer zurückgelegte Entfernung beträgt also rund 53,8 km, sie ist um 3,8 km größer als die von dem Kilometerzähler angezeigte Entfernung.

* 8 * 870 a) Von jedem der gegebenen 5 Punkte aus kann man jeweils genau 4 Strecken ziehen, die diesen Punkt als Anfangspunkt und einen der anderen Punkte als Endpunkt haben. Insgesamt gibt es also $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ verschiedene Strecken, da bei dieser Betrachtung jede Strecke doppelt gezählt wurde.
Nun gibt es zu jeder dieser 10 Strecken genau 3 Dreiecke, deren Eckpunkte der gegebenen Punktmenge angehören. Dabei wurde aber jedes Dreieck dreimal gezählt; denn jede Strecke kann dreimal als Seite eines Dreiecks auftreten. Wir erhalten also insgesamt $\frac{10 \cdot 3}{3} = 10$ verschiedene Dreiecke, die den gestellten Bedingungen entsprechen.

b) Analog wie oben erhält man $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Strecken und
$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ verschiedene Dreiecke, die den gestellten Bedingungen entsprechen.

9 ▲ 871 Wir berechnen zunächst das Volumen des Stahlrohrs je 1 m Länge und erhalten, da es sich um einen Hohlzylinder mit einem äußeren Durchmesser von $d_1 = 1{,}220$ m, einem inneren Durchmesser von $d_2 = 1{,}190$ m und einer Höhe von $h = 1$ m handelt,

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot ({d_1}^2 - {d_2}^2) \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot (d_1 + d_2)(d_1 - d_2) \cdot h$$
$$= \frac{\pi}{4} \cdot 2{,}410 \cdot 0{,}030 \text{ m}^3 \approx 0{,}05678 \text{ m}^3.$$

Die Masse des Stahlrohrs von 1 m Länge beträgt also
$m = V \cdot \varrho \approx 0{,}05678 \cdot 7{,}85 \text{ t} \approx 0{,}4457$ t.
Da die Länge der Fernleitung 850 000 m beträgt, werden insgesamt 0,4457 · 850 000 t $\approx 379\,000$ t Stahl benötigt.

W 9 ■ 872 Es sei x eine solche Zahl. Dann gilt

$$x^4 - x^2 = 72(x^2 + x), \quad (1)$$

also

$$(x^2 + x)(x^2 - x) = 72(x^2 + x),$$
$$(x^2 + x)(x^2 - x - 72) = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$x^2 + x = 0, \text{ d. h., } x(x+1) = 0, \quad (3)$$

oder wenn

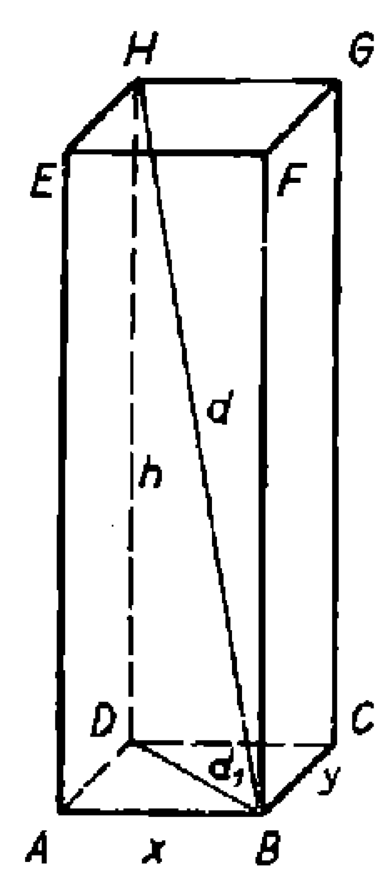
$$x^2 - x - 72 = 0. \quad (4)$$

Nun hat die Gleichung (3) die Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Ferner hat die quadratische Gleichung (4) die Lösungen

$$x_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 72} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{17}{2} = 9,$$
$$x_4 = \frac{1}{2} - \frac{17}{2} = -8.$$

Daher hat die Gleichung (1) genau vier reelle Lösungen, nämlich
$x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 9$, $x_4 = -8$.
Daher gibt es genau vier reelle Zahlen, für die die gestellte Bedingung erfüllt ist, nämlich 0, -1, 9, -8.

W 9 ■ 873 Es seien x und y die Maßzahlen der Längen der Grundkanten (in cm) und $h = 12$ die Maßzahl der Länge der Höhe des Quaders $ABCDEFGH$ (vgl. die Abb.). Dann gilt für die Maßzahl d_1 der Diagonale $\overline{BD}$ der rechteckigen Grundfläche
$d_1^2 = x^2 + y^2$.



Ferner gilt für die Maßzahl d der Raumdiagonale $\overline{BH}$
$d^2 = d_1^2 + h^2 = x^2 + y^2 + h^2$.
Wegen $d = 13$ und $h = 12$ erhalten wir daher die Gleichung
$x^2 + y^2 + 12^2 = 13^2$, also

$$x^2 + y^2 = 25. \quad (1)$$

Da das Volumen des Quaders 144 cm³ beträgt, gilt ferner

$$xy \cdot 12 = 144, \text{ also } xy = 12. \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) können wir nun x und y berechnen. Wir erhalten aus (2) wegen $x \neq 0$ $y = \frac{12}{x}$ und durch Einsetzen in (1)

$$x^2 + \frac{144}{x^2} = 25,$$
$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0. \quad (3)$$

Diese quadratische Gleichung für x^2 hat die Lösungen

$$x_1^{\,2} = \frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - 144}$$
$$= \frac{25}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{25}{2} + \frac{7}{2} = 16,$$
$$x_2^{\,2} = \frac{25}{2} - \frac{7}{2} = 9.$$

Wegen $x > 0$ und wegen (2) erhalten wir also die beiden Lösungen der Aufgabe

$$x_1 = 4, \quad y_1 = \frac{12}{4} = 3;$$
$$x_2 = 3, \quad y_2 = \frac{12}{3} = 4.$$

Durch die Probe überzeugen wir uns davon, daß für diese Werte auch die Gleichung (1) erfüllt ist.
Der Quader hat also Grundkanten mit den Längen 4 cm und 3 cm.

* 9 * 874 Um nachzuweisen, daß die Ungleichung (1) stets erfüllt ist, gehen wir davon aus, daß für alle reellen Zahlen a und b stets

$$(a - b)^2 \geqq 0 \quad (2)$$

gilt, da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ ist. Aus (2) folgt nun
$a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$, also

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab. \quad (3)$$

Wegen $a > 0$ folgt hieraus, wenn man durch a dividiert,

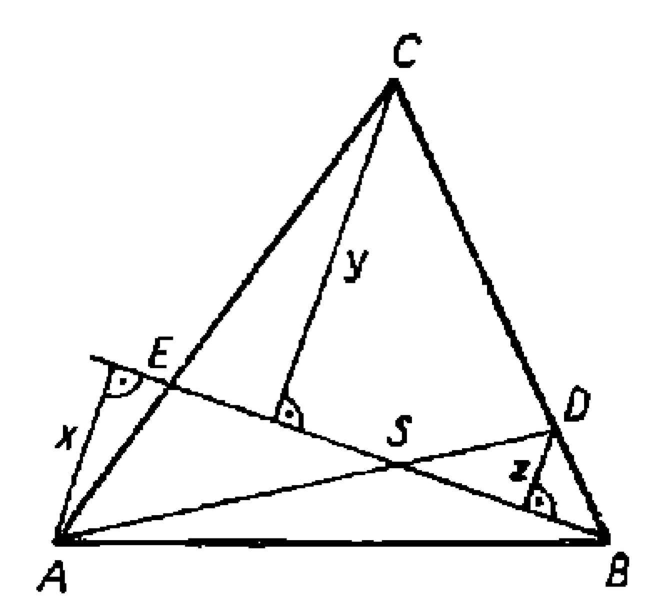
$$a + \frac{b^2}{a} \geqq 2b. \quad (4)$$

Ferner folgt durch Addition von a^2 auf beiden Seiten von (4)

$$a^2 + a + \frac{b^2}{a} \geqq 2b + a^2, \text{ also}$$
$$a(a+1) + \frac{b^2}{a} \geqq 2b + a^2. \quad (5)$$

Damit ist bewiesen, daß die Ungleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen a und b erfüllt ist.
Das Gleichheitszeichen gilt in der Ungleichung (2) und damit auch in den Ungleichungen (3), (4) und (5), also auch in der Ungleichung (1), genau dann, wenn $a - b = 0$, d. h., $a = b$ gilt.

* 9 * 875 Es seien x, y bzw. z die Längen der von den Punkten A, C bzw. D auf die Gerade BE gefällten Lote (vgl. die Abb.). Dann gilt nach dem Strahlensatz



$$x : y = \overline{AE} : \overline{EC} = p : q, \quad (1)$$
$$y : z = \overline{BC} : \overline{BD} = (r + s) : r. \quad (2)$$

Gesucht ist das Verhältnis

$$k = \overline{AS} : \overline{SD} = x : z. \quad (3)$$

Nun folgt aus (2) und (1) durch Multiplikation, da alle Glieder in den Proportionen von Null verschieden sind,

$$\frac{x}{z} = \frac{p(r+s)}{qr}.$$

Das gesuchte Teilverhältnis ist also gleich

$$k = \frac{p(r+s)}{qr}.$$

Bemerkung: Im Falle $p : q = 1 : 1$ und $r : s = 1 : 1$ sind die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$

Seitenhalbierende des Dreiecks ABC. Wir erhalten in diesem Falle $k=2:1$, d. h., zwei Seitenhalbierende eines Dreiecks schneiden sich so, daß die Teilstrecken sich wie $2:1$ verhalten. Damit haben wir gleichzeitig einen bekannten Satz der Geometrie bewiesen.

10▲876 Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, daß je zwei beliebige unter den 17 Punkten einen Abstand haben, der größer oder gleich $\frac{2}{3}r$ *ist*.

Es sei nun um jeden der 17 Punkte ein Kreis mit dem Radius $\frac{r}{3}$ gezeichnet. Dann haben keine zwei dieser 17 Kreise einen Punkt gemeinsam, weil sonst der Abstand von zwei Punkten kleiner als $\frac{2}{3}r$ wäre. Andererseits liegen alle diese 17 Kreise mit dem Radius $\frac{r}{3}$ im Innern eines Kreises mit dem Radius

$$r+\frac{r}{3}=\frac{4}{3}r.$$

Daher ist der Flächeninhalt dieses Kreises mit dem Radius $\frac{4}{3}r$ größer oder gleich der Summe der Flächeninhalte der 17 Kreise mit dem Radius $\frac{r}{3}$; es gilt also

$$\pi\left(\frac{4}{3}r\right)^2 \geqq 17\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2.$$

$$\frac{16}{9}r^2 \geqq \frac{17}{9}r^2,$$

was wegen $16<17$ und $r>0$ zu einem Widerspruch führt.

Daher ist unsere Annahme falsch, und es gibt unter den 17 Punkten stets zwei Punkte, deren Abstand kleiner als $\frac{2}{3}r$ ist, w.z.b.w.

W 10/12 ■ 877 Es sei (x, y, z) eine reelle Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann gilt wegen (3)

$$z(1+x)=14-x. \qquad (4)$$

Dabei ist $x \neq -1$; denn aus $x=-1$ würde $0=15$ folgen, was nicht möglich ist. Wir erhalten daher aus (4)

$$z=\frac{14-x}{1+x}. \qquad (5)$$

Setzen wir diesen Wert in (2) ein, so erhalten wir

$$y+\frac{14-x}{1+x}+\frac{y(14-x)}{1+x}=11,$$

$$y+xy+14-x+14y-xy=11+11x,$$

$$15y-12x=-3,$$

$$y=\frac{12x-3}{15}. \qquad (6)$$

Setzen wir diesen Wert (1) ein, so erhalten wir

$$x+\frac{12x-3}{15}+\frac{(12x-3)x}{15}=19,$$

$$15x+12x-3+12x^2-3x=285,$$

$$12x^2+24x-288=0,$$

$$x^2+2x-24=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$x_1=-1+\sqrt{1+24}=-1+5=4,$

$x_2=-1-5=-6.$

Wir erhalten weiter aus (6)

$$y_1=\frac{12\cdot 4-3}{15}=3, \quad y_2=\frac{12\cdot(-6)-3}{15}=-5,$$

und aus (5)

$$z_1=\frac{14-4}{1+4}=2, \qquad z_2=\frac{14+6}{1-6}=-4.$$

Wir überzeugen uns durch die Probe davon, daß das gegebene Gleichungssystem tatsächlich die Lösungen H

$x_1=4,\ y_1=3,\ z_1=2$ und $x_2=-6,\ y_2=-5,\ z_2=-4$ hat;

wir erhalten nämlich durch Einsetzen in die Gleichungen (1), (2), (3) die wahren Aussagen

$4+3+4\cdot 3=19, \quad -6-5+(-6)(-5)=19,$

$3+2+3\cdot 2=11, \quad -5-4+(-5)(-4)=11,$

$2+4+2\cdot 4=14, \quad -4-6+(-4)(-6)=14.$

W 10/12 ■ 878 siehe Heft 6/92!

* 10/12 * 879 Es seien

- x die Anzahl der Kugeln, die je 1 g wiegen und je 4 Pf kosten,
- y die Anzahl der Kugeln, die je 4 g wiegen und je 9 Pf kosten,
- z die Anzahl der Kugeln, die je 8 g wiegen und je 12 Pf kosten,
- u die Anzahl der Kugeln, die je 10 g wiegen und je 18 Pf kosten.

Dann gilt, weil 100 Kugeln gekauft werden, die zusammen 500 g wiegen und zusammen 1000 Pf kosten,

$$x+y+z+u=100, \qquad (1)$$

$$x+4y+8z+10u=500, \qquad (2)$$

$$4x+9y+12z+18u=1000. \qquad (3)$$

Aus diesem System von 3 Gleichungen mit 4 Variablen eliminieren wir zunächst die Variable x. Aus (1) und (2) erhalten wir durch Subtraktion

$$3y+7z+9u=400. \qquad (4)$$

Ferner erhalten wir aus (1) durch Multiplikation mit 4

$$4x+4y+4z+4u=400, \qquad (5)$$

also aus (3) und (5) durch Subtraktion

$$5y+8z+14u=600. \qquad (6)$$

Aus den Gleichungen (4) und (6) können wir jetzt die Variable y eliminieren. Wir erhalten, wenn wir in der Gleichung (4) mit 5 und in der Gleichung (6) mit 3 multiplizieren,

$15y+35z+45u=2000,$

$15y+24z+42u=1800$

und hieraus durch Subtraktion

$$11z+3u=200,$$

$$u=\frac{200-11z}{3}. \qquad (7)$$

Da u und z natürliche Zahlen sind, ergibt sich aus der Gleichung (7), daß z nur gleich 1, 4, 7, 10, 13 oder 16 sein kann. Wir erhalten dann aus der Gleichung (7) u, aus der Gleichung (4)

$y=\frac{400-7z-9u}{3}$ und aus der Gleichung (1)

$x=100-y-z-u.$

Die folgende Tabelle zeigt die sich ergebenden Werte:

z	u	y	x
1	63	negativ	
4	52	negativ	
7	41	negativ	
10	30	20	40
13	19	46	22
16	8	72	4

Die Werte der ersten drei Zeilen entsprechen nicht den Bedingungen der Aufgabe. Dagegen sind für die Werte der 4., 5. und 6. Zeile die Gleichungen (1), (2) und (3) und damit die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Es gibt also die folgenden Möglichkeiten für den Einkauf der Kugeln:

1. 40 Kugeln d. 1. Sorte, 20 Kugeln d. 2. Sorte, 10 Kugeln d. 3. Sorte, 30 Kugeln d. 4. Sorte.
2. 22 Kugeln d. 1. Sorte, 46 Kugeln d. 2. Sorte, 13 Kugeln d. 3. Sorte, 19 Kugeln d. 4. Sorte.
3. 4 Kugeln d. 1. Sorte, 72 Kugeln d. 2. Sorte, 16 Kugeln d. 3. Sorte, 8 Kugeln d. 4. Sorte.

Lösungen zu alpha-heiter

Wo steckt der Fehler?

Der Fehler liegt in den Gleichungsketten an der Stelle

$\ldots=\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}=\ldots$

Die Gleichungsketten sind wahre Aussagen, wenn geschrieben wird:

$\ldots\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}=\ldots$

Kryptarithmetik

$1296\cdot 36=46656$

Rösselsprung

Jedes konvexe Viereck mit einem Paar zueinander parallelen Gegenseiten heißt *Trapez*.

Logisch gedacht

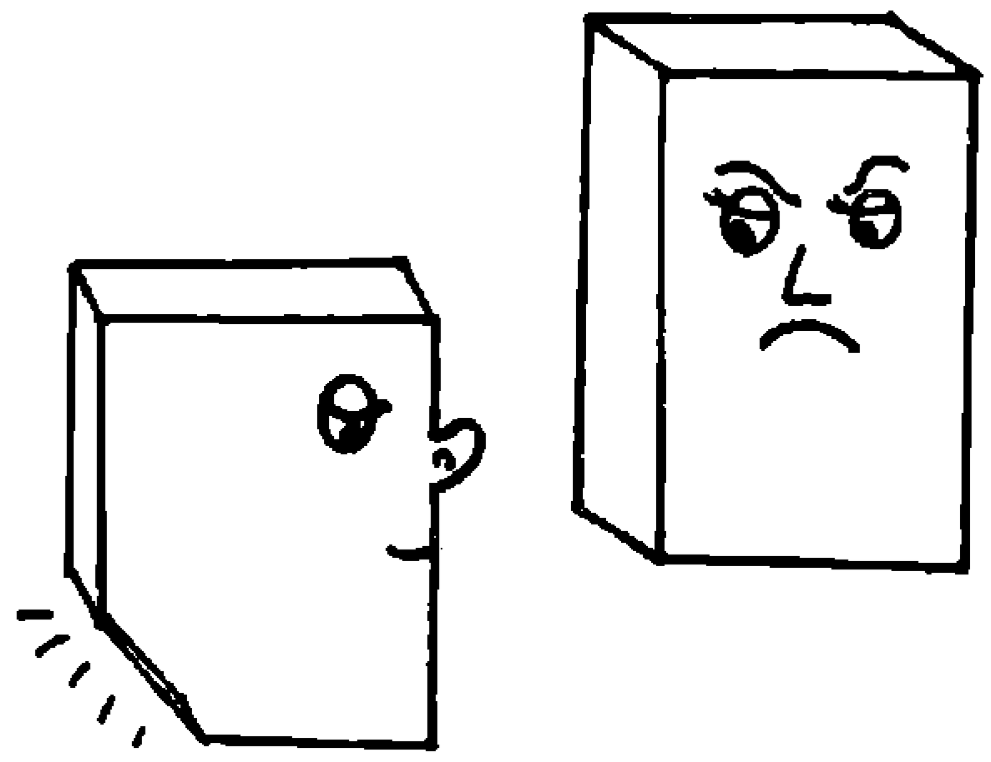
1. Die Aufgabe ist so nicht lösbar. 2. In der Vorgabe 1 muß anstelle von „in“ „neben“ eingesetzt werden. (In einem Haus kann ja nur ein Mann wohnen — Allg. Bemerkung A.) 3. Herr Meier ißt gern Quarktorte. 4. Herr Heinze züchtet Blumen.

Lösungsschema:

Haus	1	2	3	4	5
Farbe	gelb	blau	rot	grau	grün
Hausbesitzer	Meier	Schulze	Lehmann	Anton	Heinze
Hobby	Reiten	Fliegen	Mod.Eisb.	Briefmarken	Blumen
Nahrungs- und Genußmittel	Quarktorte	Wein	Zigarren	Konfekt	Kaffee
Benutztes Verkehrsmittel	Auto	Motorrad	Fahrrad	Eisenbahn	Omnibus

In freien Stunden alpha heiter

Pedant
aus: Für Dich 17/74



„Wie oft hab ich dir schon gesagt, daß du das Treppengeländer nicht hinabrutschen sollst!“

Schüler Andrej Jendrusch, Glienicke b. Berlin

Wo steckt der Fehler?

$\sqrt{29} = 7$, denn $\sqrt{29} = \sqrt{25+4} = \sqrt{25} + \sqrt{4}$
$= 5 + 2 = 7$

$\sqrt{100} = 14$, denn $\sqrt{100} = \sqrt{64+36} = \sqrt{64} + \sqrt{36}$
$= 8 + 6 = 14$

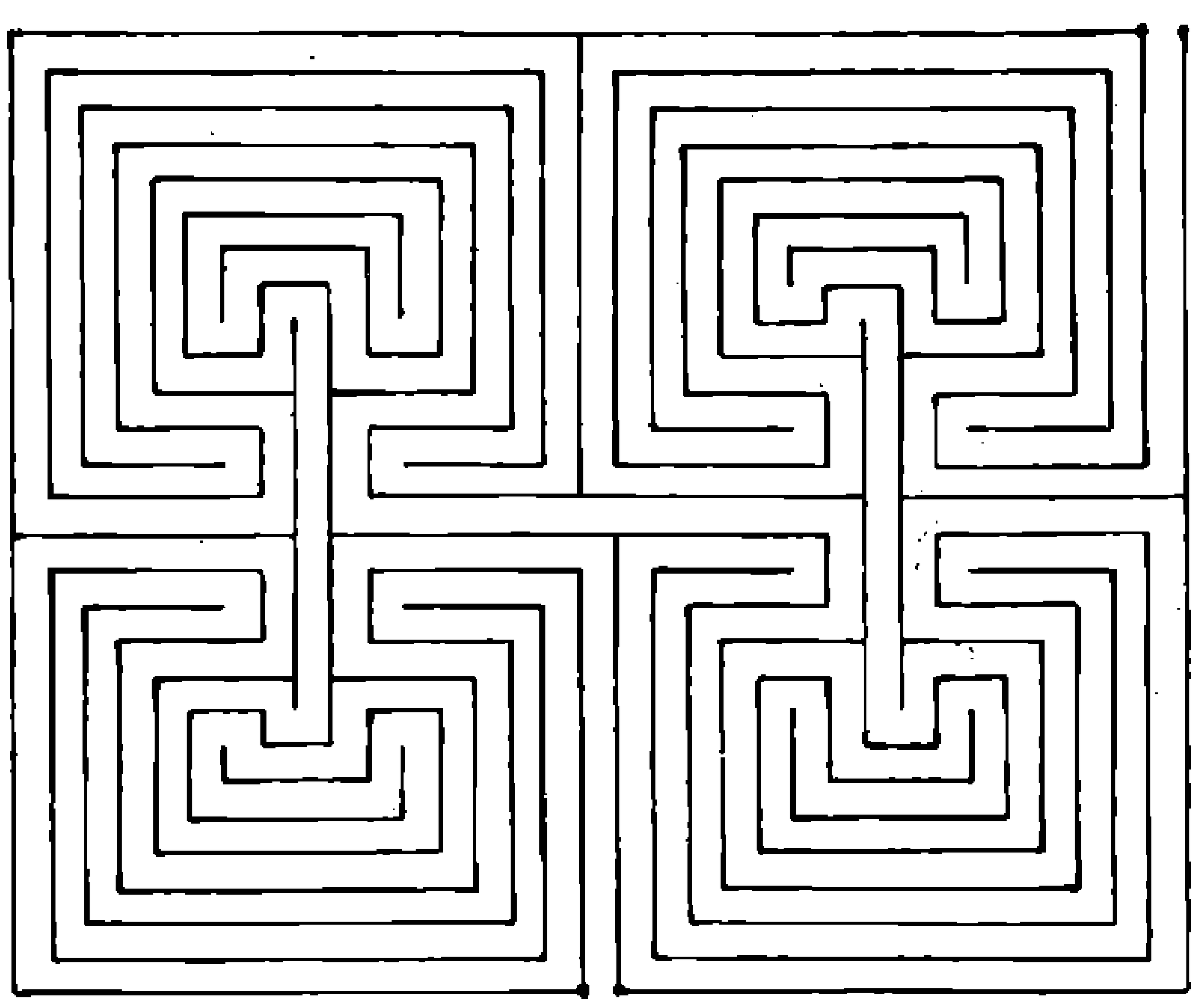
$\sqrt{50} = 8$, denn $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = \sqrt{49} + \sqrt{1}$
$= 7 + 1 = 8$

$\sqrt{90} = 12$, denn $\sqrt{90} = \sqrt{81+9} = \sqrt{81} + \sqrt{9}$
$= 9 + 3 = 12$

$\sqrt{15} = 3$, denn $\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = \sqrt{16} - \sqrt{1}$
$= 4 - 1 = 3$

Mathematikfachlehrer Joachim Kühn, POS Löbejün — Saalkreis

Labyrinth



Ein vierfaches Troja-Diagramm, eingesandt von Dr. Max Skalicky, Wien

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{r} abcd \cdot ed \\ \hline efff \\ gggd \\ \hline hddid \end{array}$$

Wolfgang Riedel, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialklasse 12

mathematics

1. This is a game for 2 people.
2. You need 16 counters.
3. Place the counters on the 16 squares of the board.
4. Object: to make your opponent take the last counter.
5. Rules: each player in turn takes any number of counters from any one row or column. Counters cannot be removed if there is a gap between them in the row or column.

Aus einem englischen Lehrbuch

Rösselsprung

	pez	je	nem	xe	
des	ei	ge	tra	pa	paar
gen	heißt	der	ve	len	vier
an	kon	mit	ten	zu	ral
	sei	ein	le	eck	

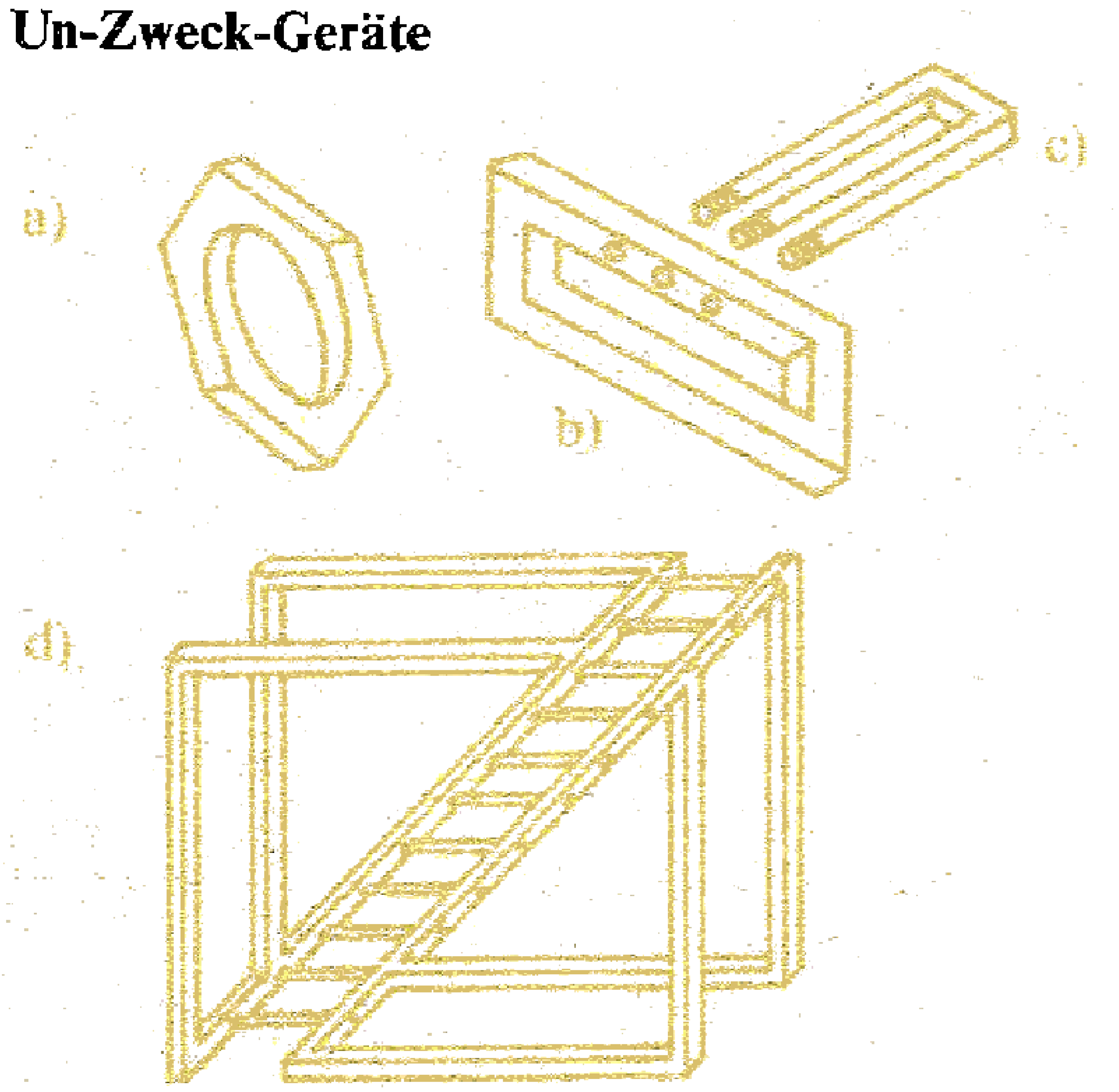
Die Lösung ist eine aus dem Mathematikunterricht der Klasse 6 bekannte Definition.

Lehrerin Irmgard Träger, Dr.-R.-Sorge-OS Ebersbach b. Döbeln

Aus der heiteren Feder von IMO-Teilnehmern

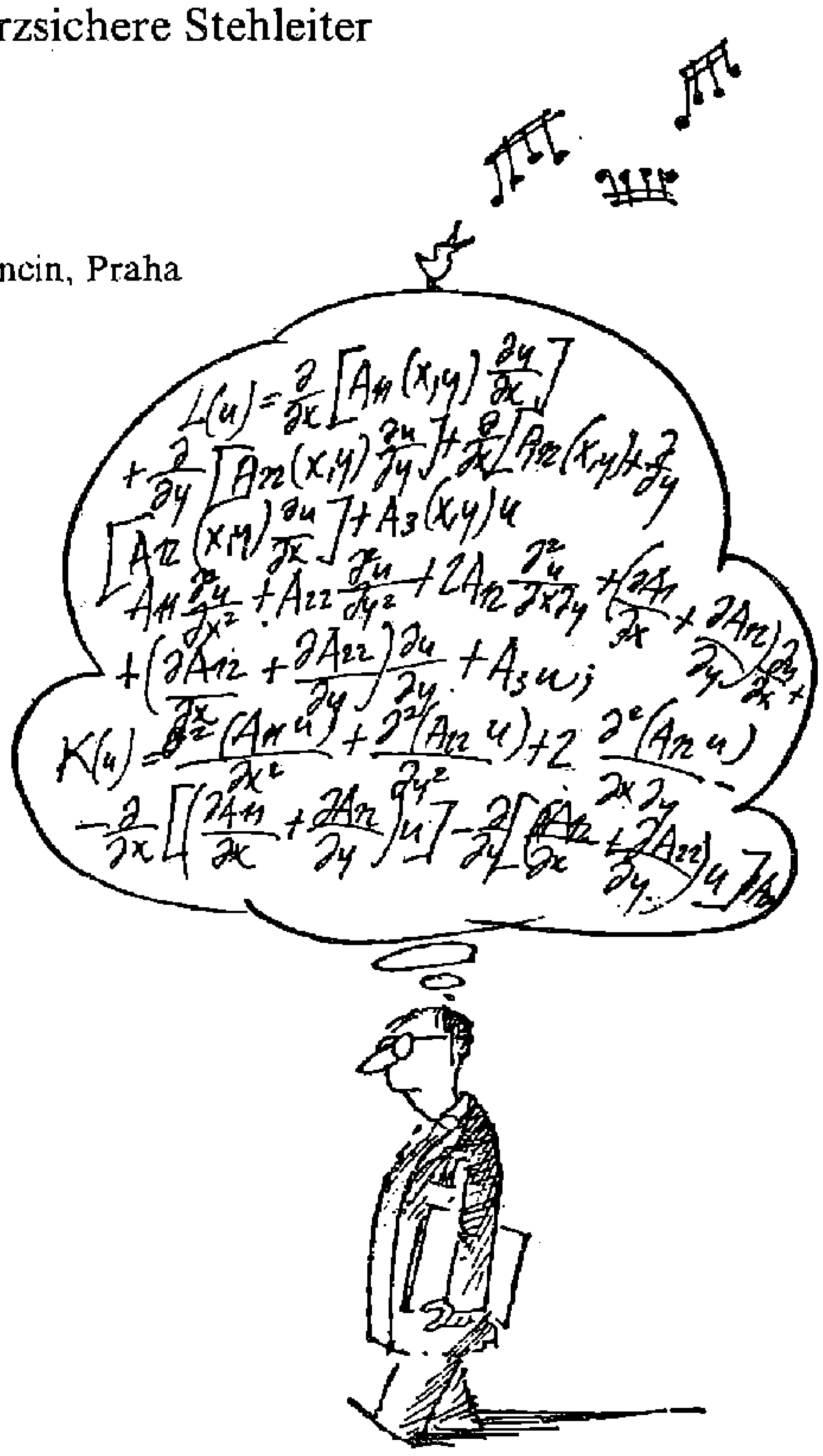
- Was ist eine Gerade? — Der geometrische Ort aller Punkte, die hintereinander liegen!
- Es ist die Länge einer Aschenbahn zu berechnen. Lehrer: „Dabei vernachlässigen wir natürlich die Breite.“
Schüler: „Dann gehen die Läufer wohl auf dem Strich?“
- Ein Punkt ist ein Winkel, dem man die Schenkel ausgerissen hat.

Un-Zweck-Geräte



a) quergebälkter Rahmen
b) Zwillingsbolzen mit permanentem Drillingseffekt,
c) der doppelwindigen Allmutter
d) umsturzsichere Stehleiter

Vladimir Rencin, Praha



Logisch gedacht

Allgemeine Bemerkungen:

A. Jedes der 5 Häuser, welches je einem anderen Besitzer gehört, ist in einer anderen Farbe verputzt.
B. Jeder Hausbesitzer hat ein anderes Hobby.
C. Jeder Hausbesitzer frönt einem anderen Nahrungs- und Genußmittel.
D. Jeder Hausbesitzer benutzt täglich ein anderes Verkehrsmittel, um zur Arbeit zu gelangen.

Um die Aufgabe lösen zu können, sind 15 Vorgaben notwendig:

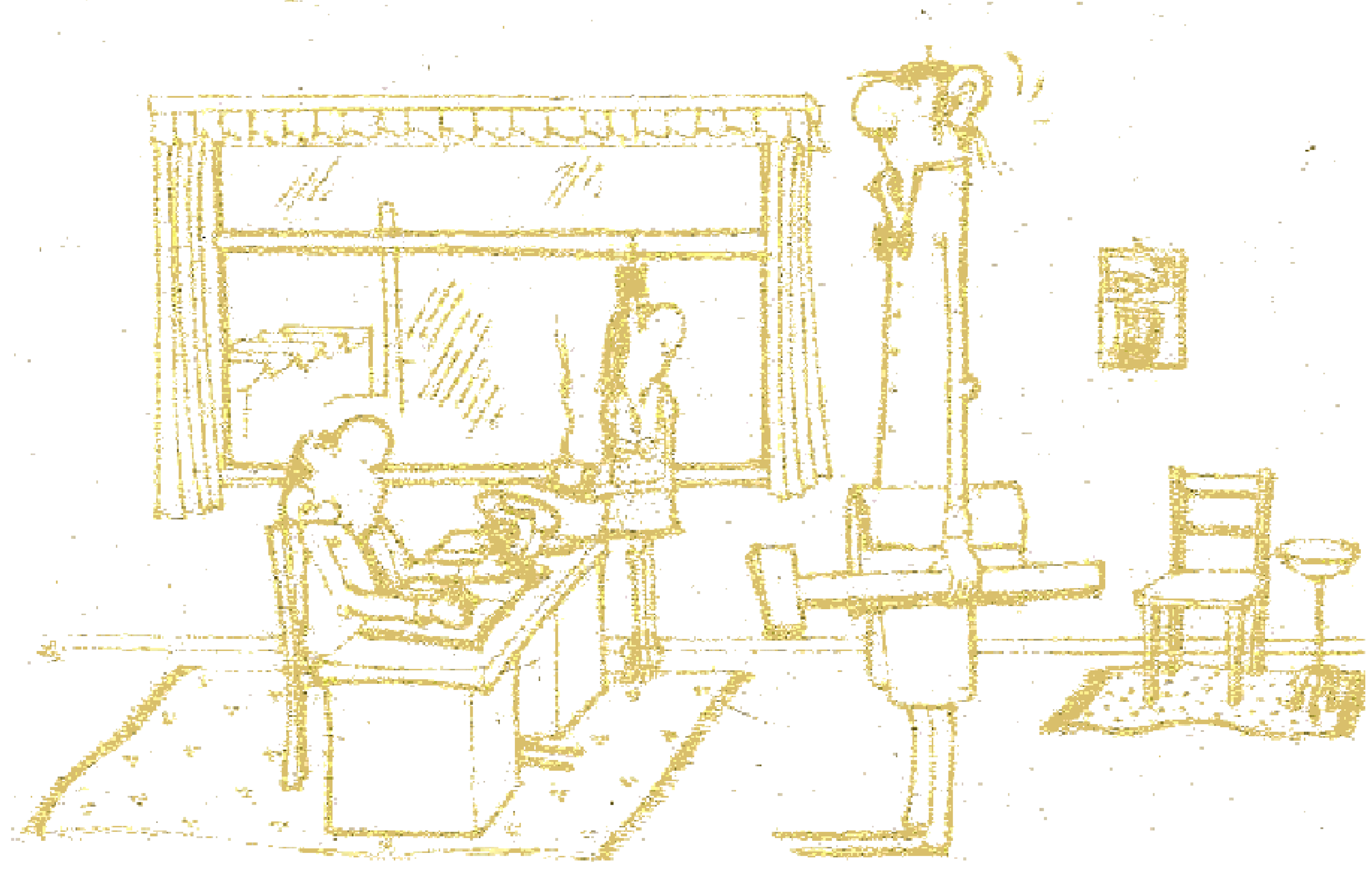
1. Der Mann, der mit dem Motorrad zur Arbeit fährt, wohnt in dem Haus mit dem Mann, der gern reitet.
2. Da stehen 5 Häuser nebeneinander.
3. Familie Anton sammelt Briefmarken.
4. Herr Schulz trinkt gern Wein.
5. Der Mann, der gern mit der Modelleisenbahn spielt, benutzt täglich sein Fahrrad.
6. Der stärkste Raucher wohnt im mittleren Haus.
7. Der Benutzer der Eisenbahn nascht gern Konfekt.
8. Familie Meier wohnt in dem gelben Haus.
9. Familie Lehmann hat ein rot angestrichenes und verputztes Haus.
10. Im grünen Haus wird gern Kaffee getrunken.
11. Der Besitzer des gelben Hauses fährt im Auto zum Dienst.
12. Familie Meier wohnt im ersten Haus.
13. Der Mann mit dem Hobby Fliegen wohnt neben dem Autofahrer.
14. Herr Heinze fährt mit dem Autobus zur Arbeit.
15. Das graue Haus steht (vom Lösenden gesehen) links neben dem grünen Haus.

Fragen:

1. Ist diese Aufgabe überhaupt lösbar?
2. Wenn nein, welche Präposition muß durch welche ersetzt werden?
3. Wer ißt gern Quarktorte?
4. Wer züchtet Blumen als Hobby?

Dr. G. Blosfeld, Halle

„Ich bin Spezialist für Turmbau!“



Mathematik einst

Aus dem Jahre 1790 ein Beispiel für die mathematische Ausbildung an universitätsvorbereitenden Schulen:

J. D. F. Wolff war dazu ausersehen, das Rektorat der Schule in Saalfeld im damaligen Ostpreußen zu übernehmen. Den Nachweis zu seiner Befähigung mußte er in einer zweitägigen, mündlichen und schriftlichen Prüfung erbringen.

Über den mathematischen Teil wird folgendes berichtet; zunächst zum mündlichen:

„Während er in der Arithmetik eine genügende Sicherheit zeigte, befand er sich in der Geometrie nur im Besitz der allerersten Anfangsgründe. Den Unterschied zwischen einem Zentri- und Peripheriewinkel wußte er wohl anzugeben, nicht aber den Beweis dafür zu liefern, daß einer der ersteren auf gleichem Bogen doppelt so groß als einer der letzteren ist, und bedurfte er der Einhilfe beim pythagoräischen Lehrsatz."

Über die schriftliche mathematische Prüfung heißt es:

„Aus der Arithmetik wurden ihm die Aufgaben gestellt:

1. Welches ist die Summe von $4\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $6\frac{3}{5}$, $8\frac{5}{6}$ und $3\frac{2}{7}$?

und dieselbe auf $25\frac{31}{35}$ von ihm angegeben, und

2. Es stirbt ein Schuldner, dem vier Kreditoren Geld geliehen haben, nämlich der erste 1 000, der zweite 800, der dritte 600 und der vierte 450 Taler. Er hinterläßt aber nur 1 596 Taler, wieviel wird ein jeder von dem geliehenen Gelde wiederbekommen?

Die Antwort war: A. 560, B. 448, C. 336, D. 252 Taler.

Endlich wurde aus der Geometrie die Lösung folgender Aufgaben verlangt:

1. Durch drei gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu ziehen und

2. Zu zwei gegebenen Linien die dritte Proportionale zu finden.

Beide wurden mit Hinzufügung von Zeichnungen richtig gelöst."

Der Kandidat wurde für das Amt bestätigt, erhielt allerdings die Mahnung zu fortgesetztem Fleiß in der Latinität, Geschichte und Geographie. Offenbar hatte er den Anforderungen in der Mathematik genügt. *Eingesandt von Dipl.-Math. Ch. Pollmer, Dresden*

Zehn mathematische Formeln, welche die Gestalt der Welt veränderten

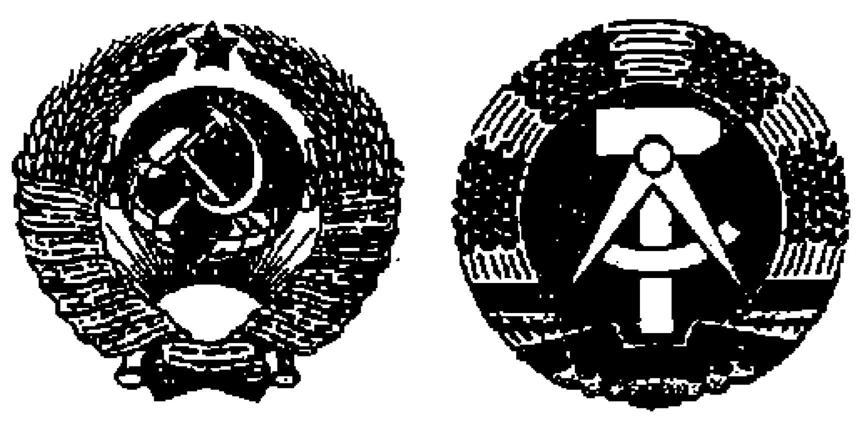
Im vergangenen Jahr gab das südamerikanische Land *Nicaragua* eine Briefmarkenserie über die hauptsächlichsten Grundlagen der Mathematik heraus. Auf der Rückseite der 42 mm × 31 mm großen Marken ist jeweils ein erläuternder Text (in Spanisch) dargeboten. Als Beispiel bieten wir den Inhalt der Marke von *J. Napier*:

J. Napier (1550 bis 1617)

Mit der Entwicklung des Logarithmus schenkte *Napier* der Welt eine bedeutsame Vereinfachung der Arithmetik. Sie erlaubt den Menschen, zu multiplizieren oder zu dividieren einfach durch Addition oder Subtraktion der Logarithmen der Zahlen und bedeutet, daß diese und weit kompliziertere Operationen mit großen, vielstelligen Zahlen schnell zu Ende geführt werden können. Die Einführung des Logarithmus auf Gebieten wie der Astronomie und der Navigation ist bedeutungsvoll und vergleichbar dem revolutionierenden Computer-Verfahren von heute.

Importlieferungen aus der UdSSR für die DDR —

eine Grundlage für die sichere Versorgung und die stabile Entwicklung unserer Volkswirtschaft



Gegenwärtig deckt die DDR z. B. ihren Bedarf an

Erdöl	zu 90 %
Eisenerz	zu 90 %
Walzstahl	zu 40 %
Zink	zu 70 %
Primäraluminium und Blei	zu 60 %
Schnittholz	zu 40 %
Baumwolle	zu 85 %

durch Importe aus der Sowjetunion.

Allein 1966 bis 1970 lieferte uns die Sowjetunion unter anderem

37,5	Mio Tonnen Erdöl
8	Mio Tonnen Koks
12	Mio Tonnen Walzstahl und Rohre
6	Mio Tonnen Eisenerz [100 Prozent Fe]
500 000	Tonnen Aluminium
10,6	Mio Kubikmeter Holz
280 000	Tonnen Zellulose
410 000	Tonnen Wolle
75 000	Tonnen Wolle

Maschinen, Anlagen und Rationalisierungsmittel nehmen einen steigenden Anteil an den Importen aus der Sowjetunion ein. Im letzten Fünfjahrplan bezog unsere Republik beispielsweise

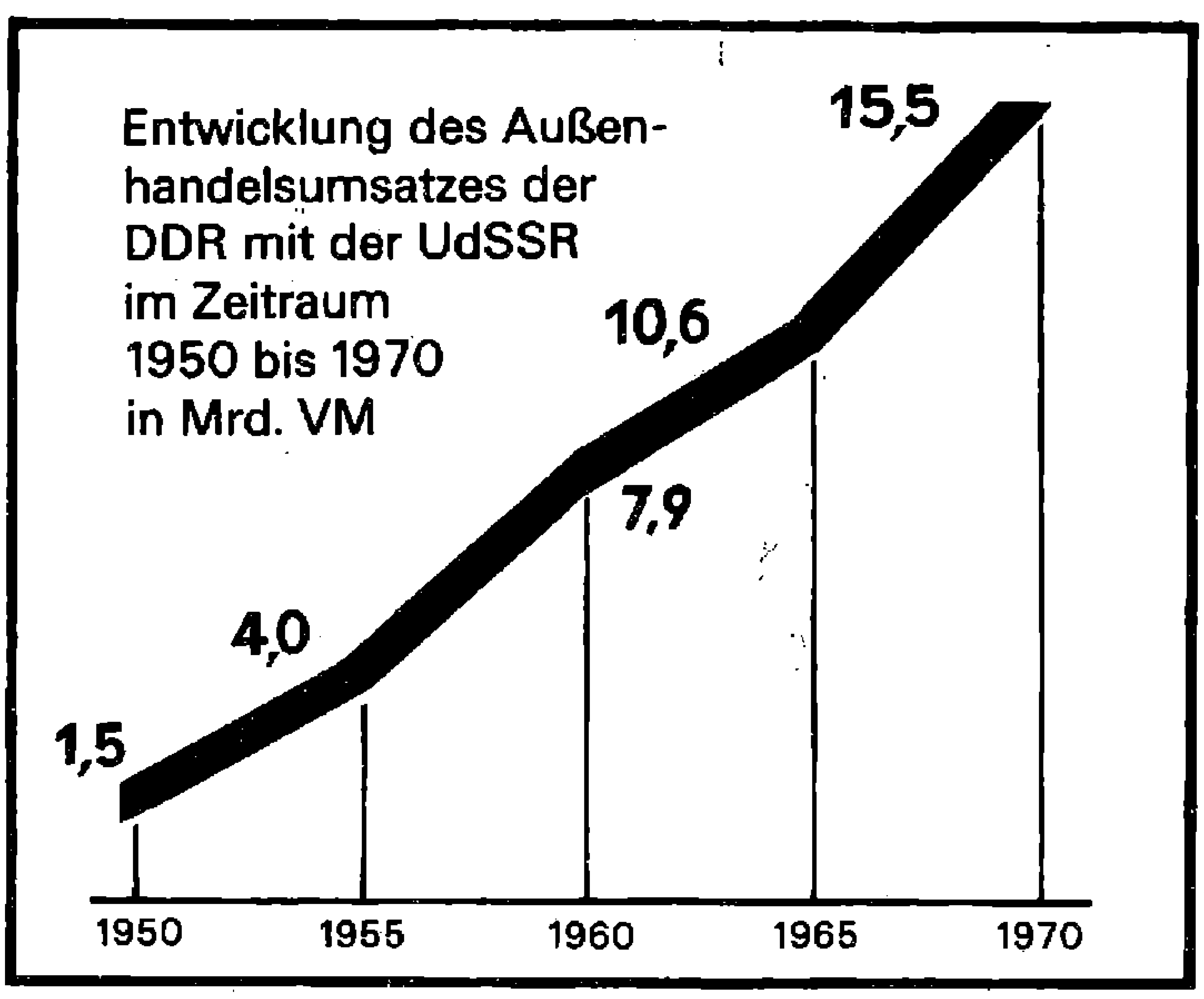
8 500	Werkzeugmaschinen
15 800	Traktoren
6 000	schwere Lastkraftwagen
450	Spezialbagger

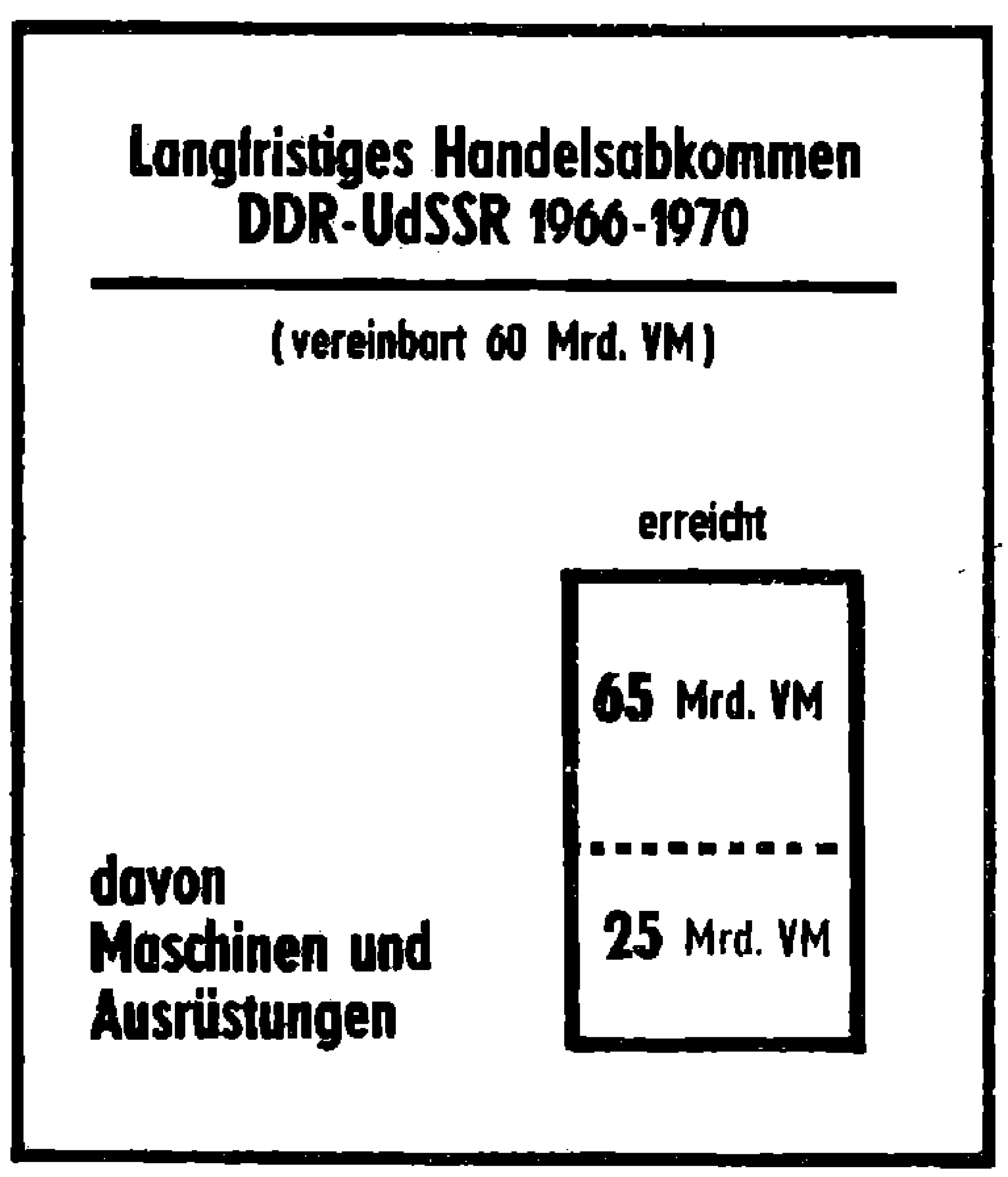
Im Rahmen des langfristigen Handelsabkommens für die Jahre 1971 bis 1975 wird die Sowjetunion außerdem in größerem Umfang

- Mittel der elektrischen Datenverarbeitungstechnik
- Chemieanlagen
- Diesellokomotiven
- Ausrüstungen für Wärme- und Kernkraftwerke
- elektronische Bauelemente
- Diamantenwerkzeuge

und andere wichtige Rationalisierungsmittel in die DDR liefern.

Das vorliegende Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975", herausgegeben von der Parteihochschule „Karl Marx" beim ZK der SED, erschienen im Verlag *Die Wirtschaft*, Berlin.
Preis der Mappe 6,20 M geblockt einseitig bedruckt. Auf 62 Tafeln wird mit mehrfarbigen Schaubildern und graphischen Darstellungen die Direktive zum Fünfjahrplan erläutert. Hervorragend für Unterricht, außerunterrichtliche Arbeit, insbesondere für Wandzeitungen geeignet.





Mihaly Kovács

Rechenautomaten und logische Spiele

Übersetzung aus dem Ungarischen

212 Seiten, 102 Bilder, 12 cm × 19 cm, Broschur (cellophoniert) 8,00 M

INTERNATIONALES JAHR DES BUCHES 1972

Der Autor will die Möglichkeiten, die der Einsatz elektronischer Schaltungen für die Lösung von mathematischen und logischen Aufgaben bietet und die letzten Endes in der EDV zum Ausdruck kommen, seinen Lesern zugänglich machen. Es werden besonders Arbeitsgemeinschaften und Bastelgruppen angesprochen, die einfache elektronische Geräte bauen wollen, durch die logische Operationen realisiert werden. Das Buch wird aber auch für alle die nützlich sein, die sich beruflich mit diesen Fragen beschäftigen.
Leserkreis: Schüler der 8. bis 12. Klassen der polytechnischen und erweiterten Oberschulen, Berufsschüler, Fachschüler, schulische Arbeitsgemeinschaften, Bastler

Wo hat es so etwas schon gegeben: ein Buch, nach dessen Instruktionen man sich Dutzende verschiedener Computer selbst bauen kann — Automaten, die tatsächlich allesamt funktionieren, mit denen man rechnen, Probleme simulieren oder einfach spielen kann.

Der ungarische Autor hat sich zunächst das Ziel gesetzt, uns mit einigen Grundgedanken über die Beziehungen zwischen Mathematik, Logik, Physik und Kybernetik zu konfrontieren. Getreu der alten Weisheit, daß die aktive Beschäftigung mit einer Sache das Verständnis dafür am besten fördert, empfiehlt uns Kovács gleichzeitig, diese Beziehungen an selbstgebastelten, einfachen Geräten zu überprüfen. Die gewichtige Bezeichnung Computer scheint im Zusammenhang mit diesen Apparaturen mitunter etwas hoch gegriffen. Sie trifft aber, wenn wir es genau bedenken, immer und ohne Einschränkung zu.

Lediglich drei Potentiometer, zwei zweipolige Umschalter, zwei Stromquellen und drei Meßinstrumente ergeben in sinnvoller Kombination z. B. einen einfachen Analogrechner, mit dem wir bei beachtlicher Genauigkeit immerhin addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren können. Nicht, weil wir anders nicht rechnen könnten, sollen wir uns den Automaten bauen, sondern weil wir auf diese Weise erstaunlich leicht verstehen lernen, wie ein Analogrechner funktioniert.

Die andere große Gruppe, die Digitalrechner, arbeitet nach einem etwas komplizierteren Schema. Um es zu verstehen, benötigt man schon etwas mehr Theorie, die Kovács auf rund 80 Druckseiten gekonnt darlegt. Er beginnt mit dem allereinfachsten Rechensystem, dem System der Dualzahlen, Null ist Null und „L" ist Eins. Wofür wir von der ersten Schulklasse an die Ziffern 1 bis 9 und zusätzlich die 0 benötigen, bewältigt jeder Digitalrechner viel schneller und sicherer mit zwei Zeichen. Der Autor führt es eindrucksvoll vor. So nebenbei erklärt er noch, was ein Multivibrator ist oder eine logische Grundoperation; er erläutert, wozu Speicher und Zählwerke, Lochkarten und -bänder erforderlich sind.

Wenn wir das alles verdaut haben — und das schafft jeder, der die zehn Jahre Mathe-Unterricht in der Schule nicht gerade verschlafen hat —, dürfen wir endlich spielen: mit Spielmaschinen. Kovács zeigt uns in Wort und Schaltbild, was wir zu tun haben. Vielleicht spielen wir das aus Indien stammende „Nim"-Spiel? Auf dem Tisch liegt ein Häufchen Streichhölzer.

Die Spieler nehmen immer der Reihe nach entweder 1, 2 oder 3 Hölzchen weg. Verloren hat, wer das letzte Streichholz bekommt. Es gibt verschiedene Versionen des Spiels. Wenn der selbstgebastelte Computer mitspielt, gewinnt er immer. Wie er das macht? Wenn wir Kovács' Buch gelesen haben, wissen wir es.

Wem das noch zu einfach ist, baut sich einen Kartenspielautomaten oder eine „Wundermühle", mit der er etwas ähnliches wie das bekannte „Mühle" spielen kann. Vielleicht konstruiert er sogar ein einfaches Modell der künstlichen Maus „Theseus", zur Zeit eine Spitzenleistung unter den kybernetischen Maschinen.

Günter Heinze (aus JW)

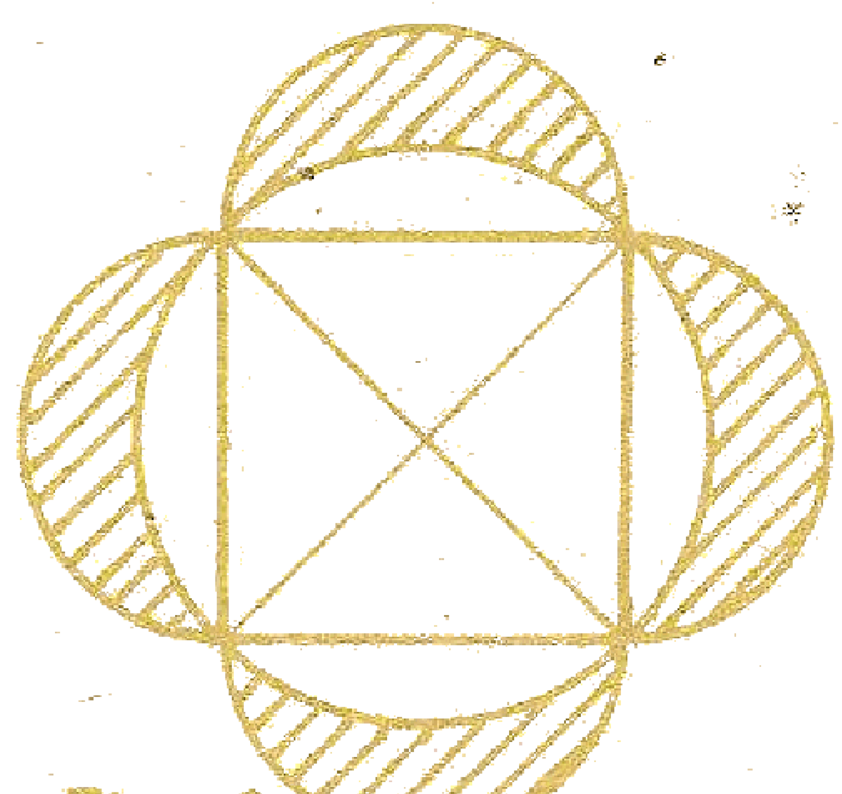
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Mit Zirkel und Zeichendreieck

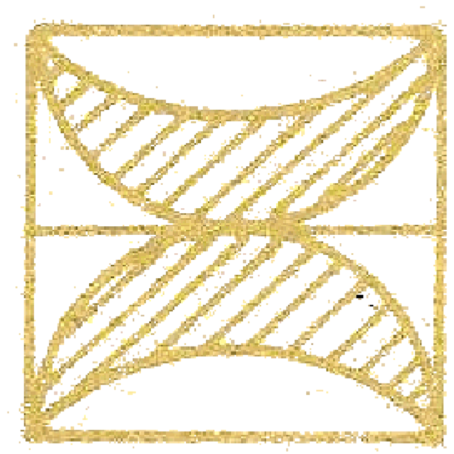
Figur 1: Vergleiche die schraffierte Fläche (Rosette) mit der Quadratfläche ($a=2r$); F. 2: Berechne den Flächeninhalt der vier *Möndchen* und vergleiche ihn mit dem des Quadrats. F. 3: Klappe zwei der in Figur 2 abgebildeten *Möndchen* nach innen. Vergleiche die schraffierte Fläche mit der Quadratfläche! F. 4: Vergleiche Figur 4 und 6! F. 5: Vergleiche die schraffierte Fläche mit der nichtschraffierten! (Lösungen siehe 6/72)

J. Lehmann

Figur 1

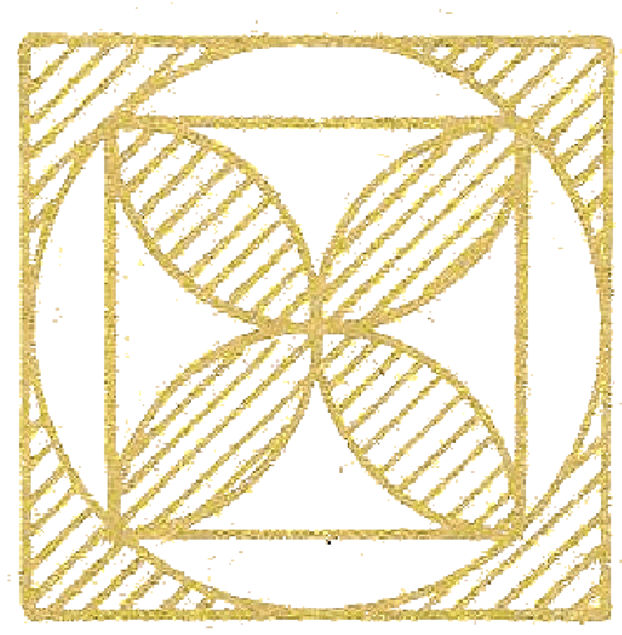


Figur 2

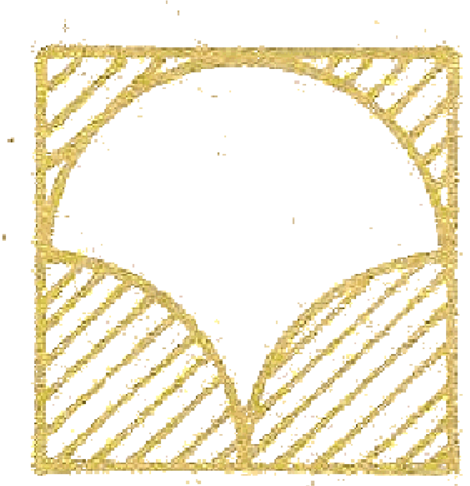


Figur 3

Figur 4



Figur 5



Figur 6