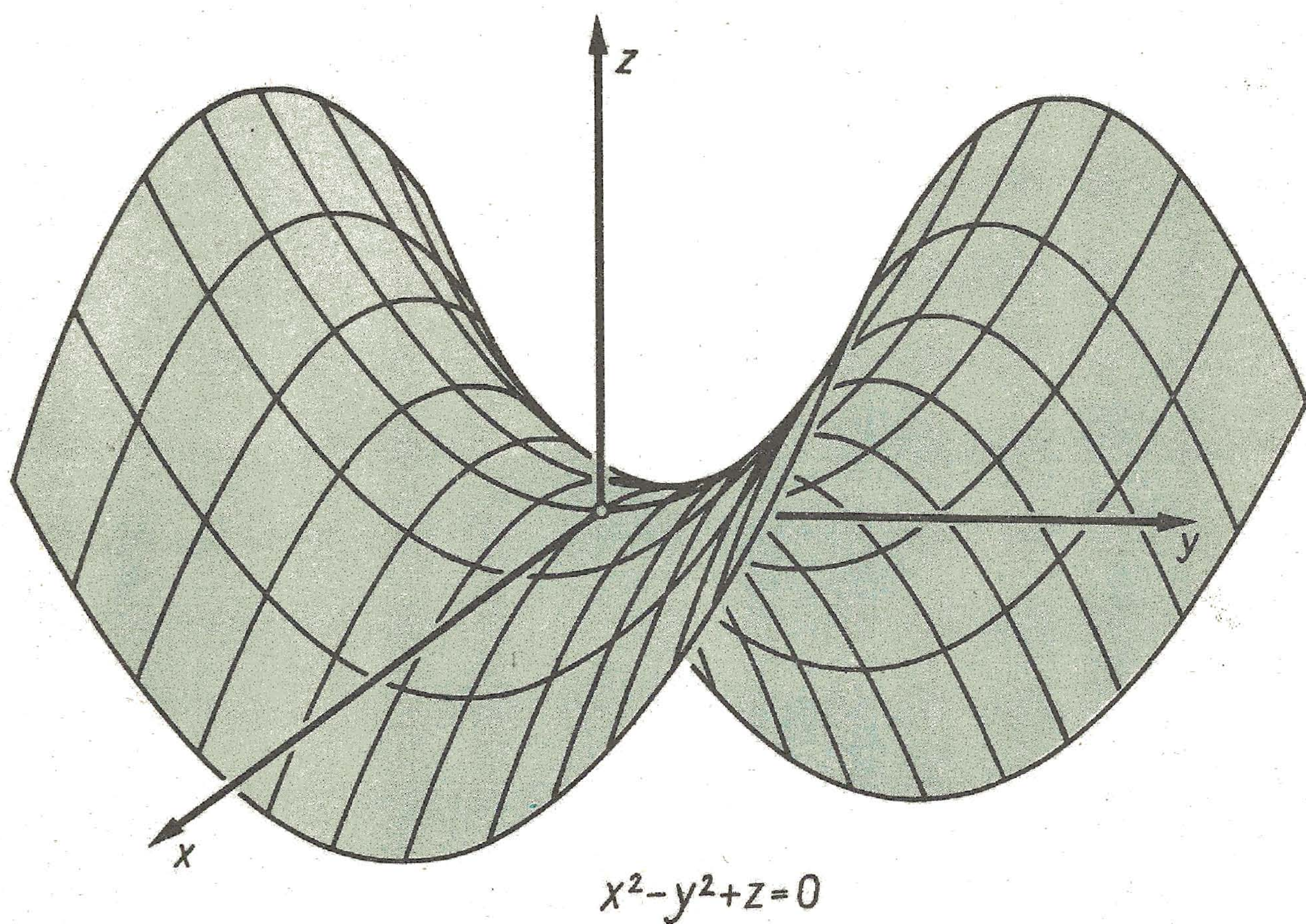
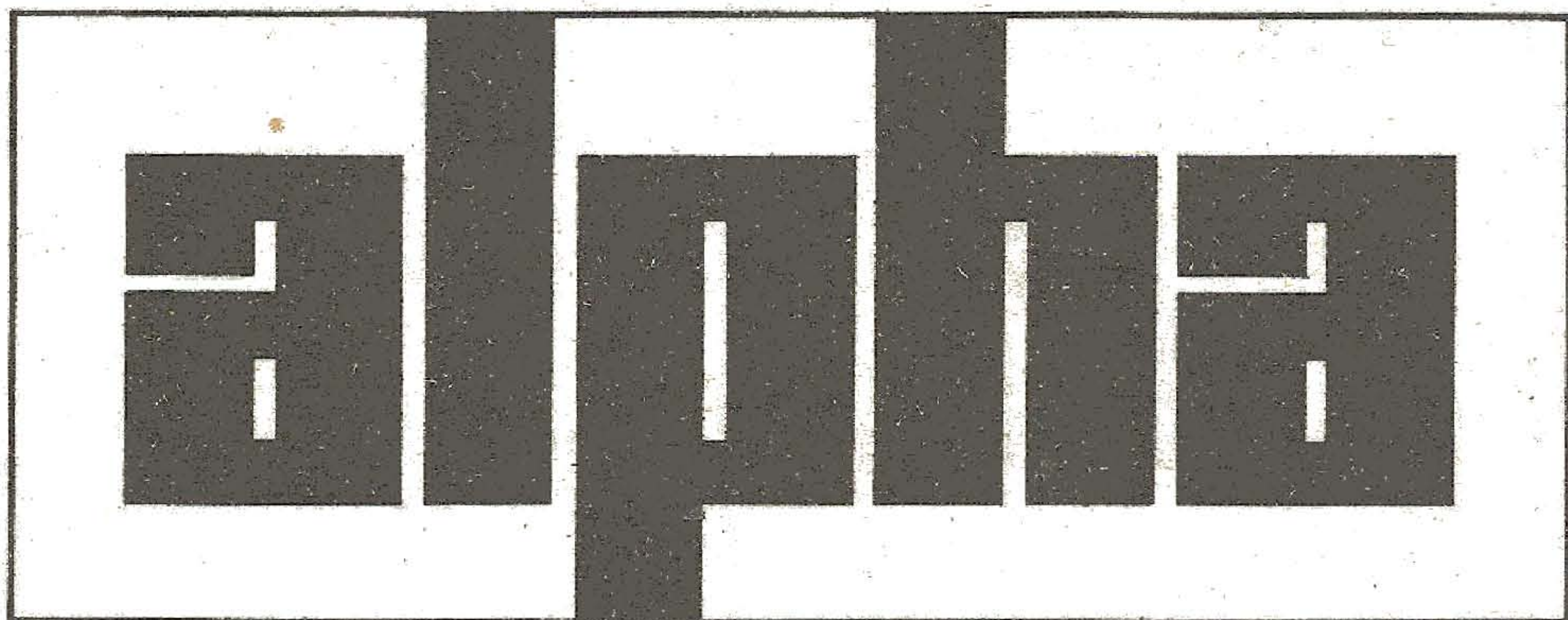




Redaktionskollegium:

Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig);
Prof. Dr. habil. Lilli Görke (Berlin); Dozent
Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. habil.
E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann
(Berlin); Dr. R. Hofmann (Leipzig); Prof.
Dr. H. Karl (Potsdam); Nationalpreisträger
H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger,
Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan);
Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer
des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent
Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger
Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Ober-
lehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr.
habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schrö-
der (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze
(Herzberg/Elster); Oberlehrer H. Schulze
(Leipzig); W. Stoye (Berlin); W. Träger
(Döbeln); W. Unze (Leipzig); Prof. Dr. habil.
W. Walsch (Halle);

Redaktion:

StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:

Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626 Erschei-
nungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,- M,
Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonne-
ment zweimonatlich 1,- M, Sonderpreis für
die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buch-
handel und der Deutschen Post entgegen-
genommen.

Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik
und Westberlin erfolgt über den Buchhandel;
für das sozialistische Ausland über das
jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für
alle übrigen Länder über den Deutschen
Buch-Export und -Import GmbH, DDR
701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 74); O. Krö-
tenheerdt/K. Vetter (Eigenfotos); Vignet-
ten aus: Formeln — und was dann? (S. 75/
76); J. Lehmann, Leipzig (S. 77); Vignette,
zur Verfügung gestellt von H. Decker, Köln
(S. 77); H. Worner, Berlin (S. 80/81); J. Leh-
man, Leipzig (S. 85); Vignette J. Uhlmann,
Wandlitzsee (S. 87); J. Lehmann, Leipzig
(S. 89); Postkarte, Foto A. Marušin (S. 90);
J. Lehmann, Leipzig (S. VII.)

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Titelblatt: Dr. E. Schröder (Dresden) · W. Fahr
(Berlin)

Gesamtherstellung:

Staatsdruckerei

der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollensetdruck)

Redaktionsschluß: 15. Mai 1972

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 73 Mathematikstudenten im Forschungsstudium [9]*
Prof. Dr. O. Krötenheerdt, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
- 74 Eine Aufgabe von Prof. Dr. O. Krötenheerdt [9]
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
- 75 *alpha*-Wettbewerb — Physik [6]
Norma Feistauer, Forschungsstudentin, Friedrich-Schiller-Universität Jena
- 76 Der Graph
Leseprobe aus Churgin: Formeln — und was dann?
- 78 Die „счеты“ — ein Souvenir aus der Sowjetunion [5]
A. Mertens, Institut für Lehrerbildung Krossen
- 80 Mathematik — plastisch
Bildhauer Heinz Worner, Berlin
- 82 XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben der Schulolympiade
- 84 Wissenschaftliche Haupttagung der Mathematischen Gesellschaft
der DDR
- 84 Technische Universität Dresden [8]
Prof. Dr. habil. R. Sonnemann, Sektion Philosophie
und Kulturwissenschaften der TU Dresden
- 85 XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
DDR-Olympiade (Aufgaben — Preisträger)
- 86 Arbeitspläne Mathematik [5]
für die außerunterrichtliche Tätigkeit der Klassen 5/6 (Vorschlag)
K. D. Klöpfel/Dr. W. Rautenberg, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität
Berlin
- 88 aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht,
speziell für Klasse 5/6 [5]
Studienrat D. Michels, Rostock/Studienrat Th. Scholl, Berlin
- 88 Über unsere Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift
alpha [8]
AG Mathematik der POS Lübbtheen
- 89 Für *Junge Mathematiker*: Mathematik frei Haus [5]
Oberlehrer R. Bergmann, Döbeln
- 90 In freien Stunden *alpha*-heiter [5]
Studienrat J. Lehmann, V. L. d. V., Leipzig/Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz
- 92 Lösungen [5]
- Beilage S. I bis VIII XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

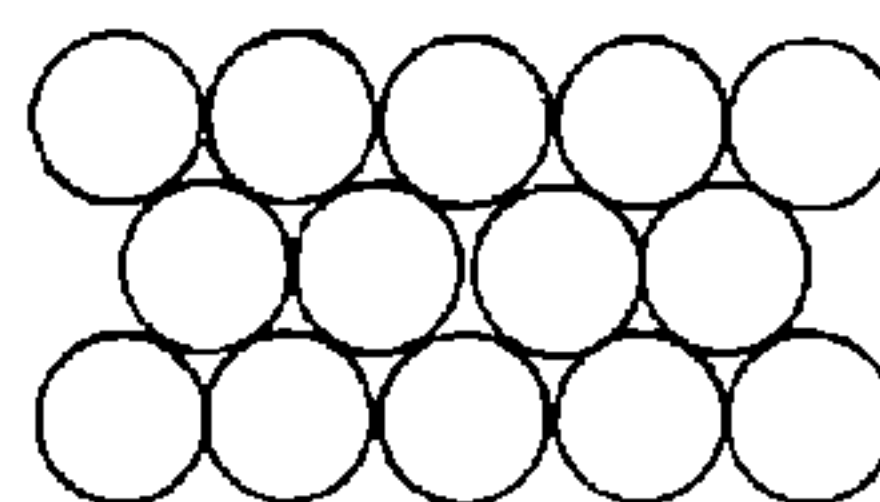
Mathematikstudenten im Forschungsstudium

Im Zuge der 3. Hochschulreform in der DDR wurde das Forschungsstudium als eine neue Ausbildungsform an Universitäten und Hochschulen eingeführt. Die besten Studenten erhalten die Möglichkeit, nach sechs- bzw. siebenjährigem Studium unter Einsparung des Diploms den akademischen Grad „Doktor eines Wissenschaftszweiges“ zu erwerben. Die Auswahl dieser Studenten erfolgt nach dem 3. bzw. 4. Studienjahr nach dem Leistungsprinzip, den gesellschaftlichen Erfordernissen und unter Berücksichtigung der sozialen Struktur der Bevölkerung. Die künftigen promovierten Kader, die durch das Forschungsstudium gehen und deren Einsatz in vielerlei Einrichtungen der Wissenschaft und Praxis vorgesehen ist, sollen wissenschaftlich hochqualifizierte sozialistische Persönlichkeiten sein. Bereits während ihrer Ausbildung sollen sie in Forschungskollektiven unter Anleitung erfahrener Wissenschaftler arbeiten lernen, und sie sollen solche charakterliche Eigenschaften und politische Fähigkeiten entwickeln, mit denen sie in die Lage versetzt werden, später selbst einmal sozialistische Kollektive leiten zu können.

Jeder Forschungsstudent arbeitet 3 Jahre nach einem Studienprogramm, das mit dem Forschungsprofil der jeweiligen Sektion im Einklang steht und zu dem eine vertiefte Ausbildung in Marxismus-Leninismus und eine Vervollkommnung in zwei Fremdsprachen gehören. Ein angemessenes Stipendium, welches sich von Jahr zu Jahr erhöht, und eventuell noch die Vergütung für 2 Stunden Lehrveranstaltungen in jeder Woche bewahren jeden Forschungsstudenten vor materiellen Sorgen.

In der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle gibt es Forschungsstudenten in der Analysis und in der Numerischen Mathematik und einige wenige auch in der Algebra und in der Geometrie. Die Forschungsstudenten der beiden letztgenannten Disziplinen sind in erster Linie Lehrerstudenten, die nach ihrer Promotion zunächst als Lehrer etwa 3 Jahre schulpraktische Erfahrungen sammeln werden, um dann anschließend selbst in der Ausbildung und Weiterbildung von Mathematikern tätig zu sein.

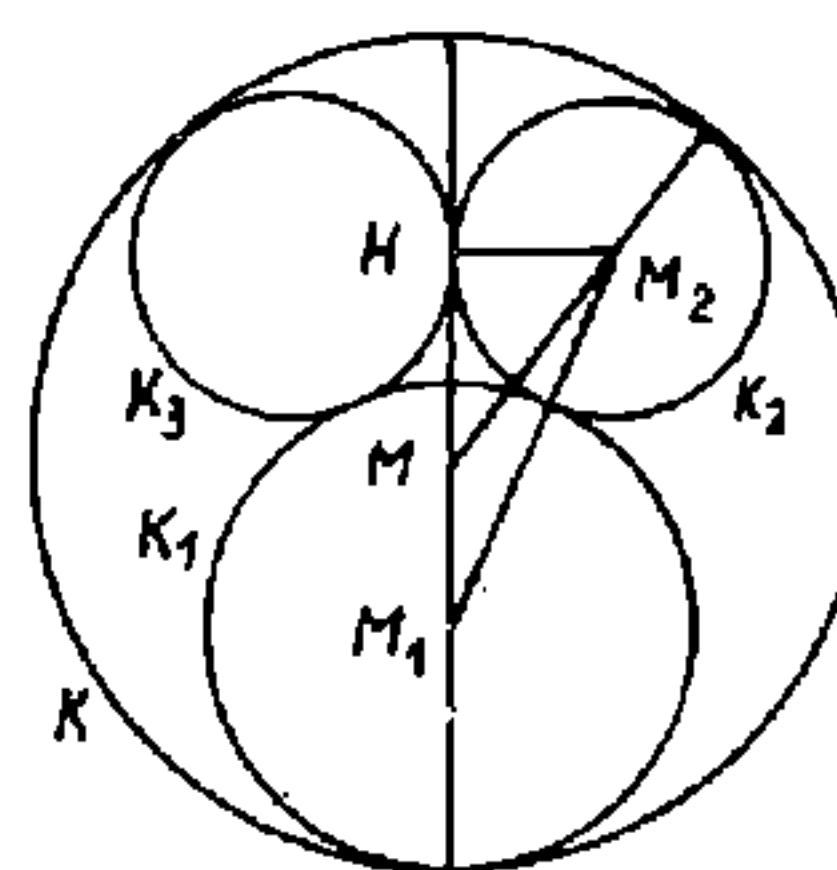
Einige dieser Forschungsstudenten bearbeiten in einem kleinen Kollektiv Probleme der zweidimensionalen geometrischen Kristallographie, und im Rahmen dieser Thematik werden gegenwärtig auch spezielle Kreislagerungsfragen in der Ebene behandelt. Wenn kongruente Kreise in der Ebene so gelagert werden sollen, daß keine 2 Kreise gemeinsame innere Punkte besitzen und daß der von den Kreisflächen bedeckte Teil der Ebene möglichst groß ist, so müssen die Kreise wie in Bild 1 angeordnet werden. Auch wenn diese Anordnung als sogenannte dichteste Kreislagerung von der Anschauung her fast selbstverständlich erscheint, muß sie streng begründet werden, und das haben Mathematiker getan. Sollen nun Kreise mit unterschiedlichen Radien in der Ebene in entsprechender Weise möglichst dicht gelagert werden, so sind Anordnungen, die wesentlich von den Radien abhängen, im allgemeinen nicht bekannt; sogar bei Verwendung von nur zwei unterschiedlichen Radien kennt man derartige Anordnungen nur für spezielle Verhältnisse der Radien.



Bei der Behandlung spezieller Kreislagerungsfragen sind wir am Rande unserer Arbeit auf mehrere interessante geometrische Aufgaben gestoßen, die mit den Mathematikkenntnissen der 10. Klasse, und bei gewissen Spezialisierungen der gegebenen Größen schon mit den Mathematikkenntnissen der 8. Klasse gelöst werden können. Mit einigen dieser Aufgaben möchten wir im folgenden die Leser der Schülerzeitschrift „alpha“ bekannt machen.

Aufgabe 1

Gegeben seien drei paarweise sich von außen berührende Kreise K_1 , K_2 , K_3 mit $r_1 \geq r_2 = r_3$. Wie groß ist die Radiusmaßzahl r des flächenkleinsten Kreises K , welcher K_1 , K_2 , K_3 im Inneren enthält?



Lösung

Im Dreieck M_1M_2H (siehe Bild 2) erhält man als Maßzahl der Strecke M_1H nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}.$$

Die Maßzahl der Strecke MH ist

$$\sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2} - (r - r_1),$$

und somit gilt im rechtwinkligen Dreieck MHM_2 die Beziehung

$$(r-r_2)^2 = r_2^2 + (\sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2} - (r-r_1))^2.$$

Daraus folgt

$$r \cdot (r_1 - r_2 + \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}) - (r_1^2 + r_1r_2 + r_1 \cdot \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}) = 0, \text{ das hei\ss t}$$

$$r = \frac{r_1 \cdot (r_1 + r_2 + \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2})}{r_1 - r_2 + \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}}$$

Erweitert man noch mit $r_1 - r_2 - \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}$, so erh\lt man schlie\ss lich

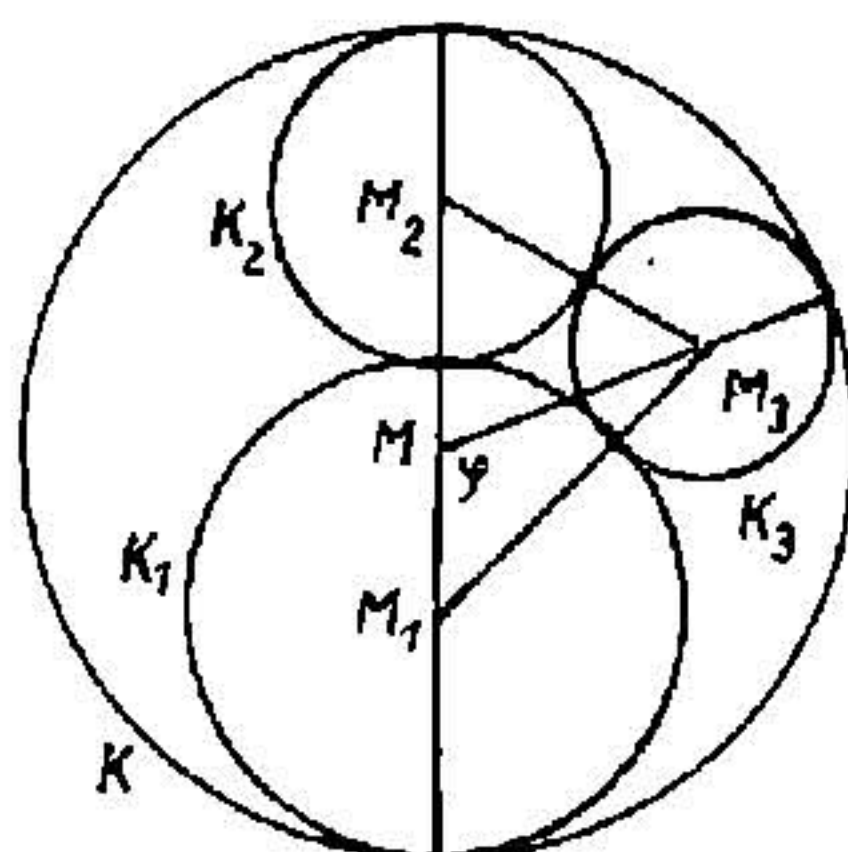
$$r = \frac{r_1 \cdot (2r_1 + r_2 + 2 \cdot \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2})}{4r_1 - r_2}$$

Bemerkung:

Eine Spezialisierung der Aufgabe ergibt sich im Falle $r_1 = r_2 = r_3$; eine Verallgemeinerung entsteht durch die Bedingung $r_1 > r_2 > r_3$.

Aufgabe 2

Gegeben seien zwei sich von au\ss en ber\hrende Kreise K_1 und K_2 mit $r_1 \geq r_2$ und der fl\ac htenkleinste Kreis K , welcher K_1 und K_2 im Inneren enth\lt. Wie gro\ss ist die Radiusma\ss zahl r_3 eines gr\o \ss tm\o glichen Kreises K_3 , welcher ebenfalls im Innern von K liegt und welcher von K_1 und K_2 au\ss en ber\hrt wird?



L\o sung

Durch Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck M_1M_3M und auf das Dreieck M_2M_3M (siehe Bild 3) erh\lt man die beiden Gleichungen

$$(r_1 + r_3)^2 = r_2^2 + (r_1 + r_2 - r_3)^2 - 2r_2(r_1 + r_2 - r_3) \cdot \cos \varphi,$$

$$(r_2 + r_3)^2 = r_1^2 + (r_1 + r_2 - r_3)^2 + 2r_1(r_1 + r_2 - r_3) \cdot \cos \varphi$$

mit den beiden Unbekannten r_3 und φ . Nach Elimination von

$$(r_1 + r_2 - r_3) \cdot \cos \varphi \text{ folgt}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(r_1 + r_3)^2 - r_2^2 - (r_1 + r_2 - r_3)^2}{2r_2} \\ &= \frac{-(r_2 + r_3)^2 + r_1^2 + (r_1 + r_2 - r_3)^2}{2r_1}, \text{ das hei\ss t} \\ & \frac{2r_1r_3 - r_2^2 - r_1r_2 + r_2r_3}{r_2} \\ &= \frac{-2r_2r_3 + r_1^2 + r_1r_2 - r_1r_3}{r_1}. \text{ Daraus ergibt sich} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 \cdot \left(\frac{2r_1}{r_2} + 2 + \frac{2r_2}{r_1} \right) &= 2r_1 + 2r_2 \text{ und schlie\ss lich} \\ r_3 &= \frac{r_1r_2 \cdot (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Sonderfall $r_1 = r_2$ gen\ugt zur L\o sung der Satz des Pythagoras, und die Rechnungen vereinfachen sich ganz wesentlich; man erh\lt $r_3 = \frac{2}{3}r_1$.

O. Kr\o tenheerdt

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. sc. O. Kr\o tenheerdt

Sektion Mathematik der „Martin-Luther-Universit\at“
Halle/Wittenberg

▲ 925 ▲ Gegeben seien zwei sich von au\ss en ber\hrende Kreise K_1 und K_2 mit $r_1 \geq r_2$. Wie gro\ss sind die Ma\ss zahlen der Seiten eines fl\ac htenkleinsten Rechtecks R , welches K_1 und K_2 im Inneren enth\lt?



Wir werden Mathematik studieren



Karin Vetter, EOS „Ernst Schneller“ Mei\ss en (Kl. 10): Die *alpha* abonniere ich seit Klasse 6. Sie hat mir oft beim L\o sen mathematischer Probleme geholfen. Mir gef\allt auch die Angabe exakter L\o sungswege zu den gestellten Problemen; kurz: *alpha* ist aktuell, lehrreich, vielseitig, auch die Satire kommt nicht zu kurz.

Sonja K\o rber, Magdeburg – erfolgreiche Teilnehmerin der XI. OJM: In meiner Freizeit besch\ftige ich mich oft mit mathematischen Problemen, besonders aus *alpha*. Die Mathematik wurde im Laufe der Schulzeit zu meinem Lieblingsfach.

alpha-Wettbewerb

Physik

Letzter Einsendetermin: 1. Oktober 1972

Liebe alpha-Leser!

In diesem Heft findet Ihr genau wie im Vorjahr Wettbewerbsaufgaben zur Physik. An der Lösung der Probleme kann sich jeder beteiligen. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Richtlinie: Schuljahr 1971/72) Schüler der Klassenstufe 11/12 und Erwachsenen lösen die Aufgaben, welche mit P 11 und 12 gekennzeichnet sind. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm mal 297 mm). Am Kopf der Lösung müssen stehen: Name, Vorname, Adresse der Schule und Name des Physiklehrers, der ihn im Schuljahr 1971/72 unterrichtete. Die besten Lösungen werden von der Redaktion prämiert. Die Namen der aktivsten Teilnehmer werden veröffentlicht. Jeder Einsender erhält eine Antwortkarte, die für den alpha-Wettbewerb 1972/73 gewertet wird. Die Lösungen sind einzusenden an:

Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14

Kennwort auf Briefumschlag: Physik-Wettbewerb 1972

P 6 ■ 926 In der einen Waagschale einer Balkenwaage befindet sich ein Eisenkörper, in der anderen ein Körper aus Pappe. Der Waagebalken ist bei der Wägung im Gleichgewicht. Die Waage mit den Probekörpern wird dann in einen Behälter gestellt, in dem Vakuum ist.

- Befindet sich dann die Waage immer noch im Gleichgewicht?
- Welche Seite des Waagebalkens sinkt nach unten?
- Erkläre die Erscheinung!

P 6 ■ 927 Ein Weltklassesprinter läuft die 100 m in 10,0 s. Welche Geschwindigkeit (in km/h) muß ein Pkw fahren, um die 100 m ebenfalls in 10,0 s zurückzulegen?

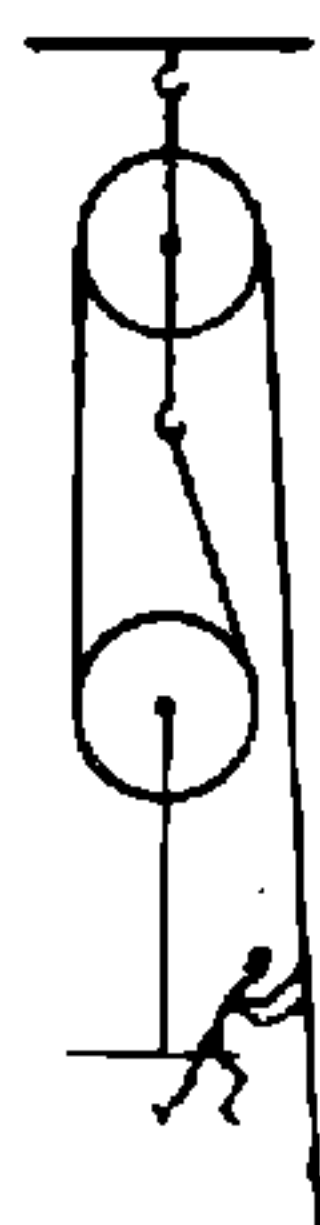
P 6 ■ 928 In den beiden Waageschalen einer Balkenwaage befinden sich je ein Gefäß mit der gleichen Menge Äther. Ein Gefäß davon ist verschlossen. Was kann nach einiger Zeit festgestellt werden?

P 7 ■ 929 An einem mit 120 km/h fahrenden Zug fährt in entgegengesetzter Richtung

ein 100 m langer Zug vorbei, der eine Geschwindigkeit von 60 km/h hat. Wie lange sieht ein im ersten Zug sitzender Beobachter den zweiten Zug an sich vorbeifahren?

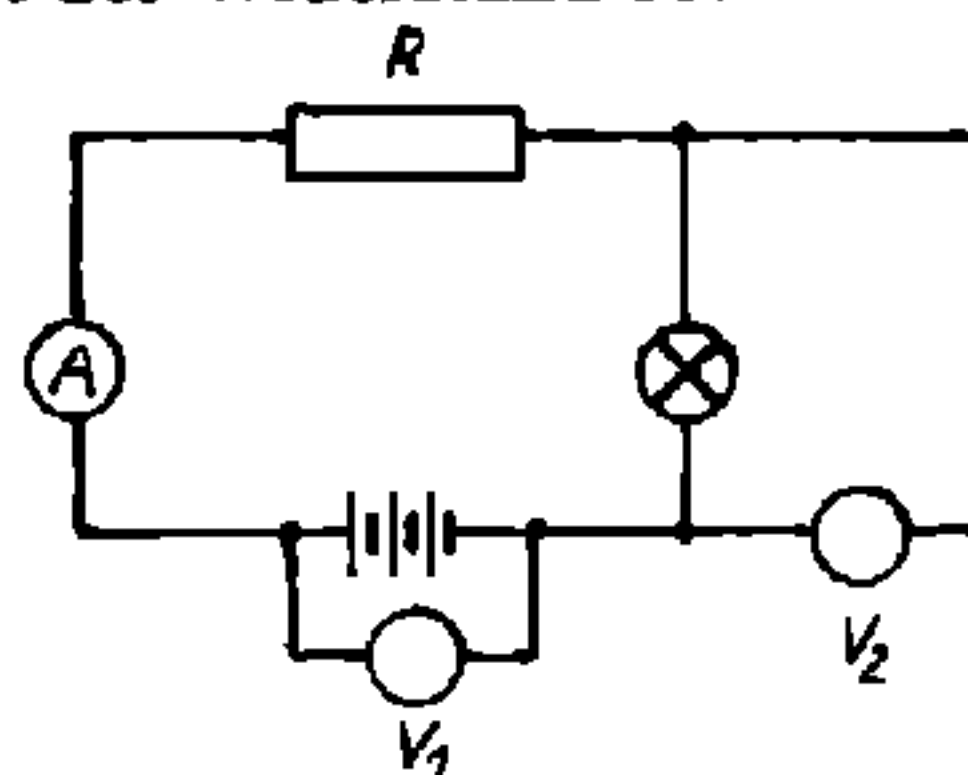
P 7 ■ 930 Ein 10 m langer Balken mit dem Gewicht 80 kp wird von zwei Arbeitern auf den Schultern getragen. Einer hat den Balken am äußersten Ende auf den Schultern liegen, der andere trägt ihn 60 cm vom Ende entfernt. Welche Last entfällt auf jeden von den beiden?

P 7 ■ 931 Ein Mann wiegt 75 kp und zieht sich selbst mittels des angegebenen Flaschenzuges nach oben. Welche Kraft benötigt er? Das Holzbrett ist zu vernachlässigen.

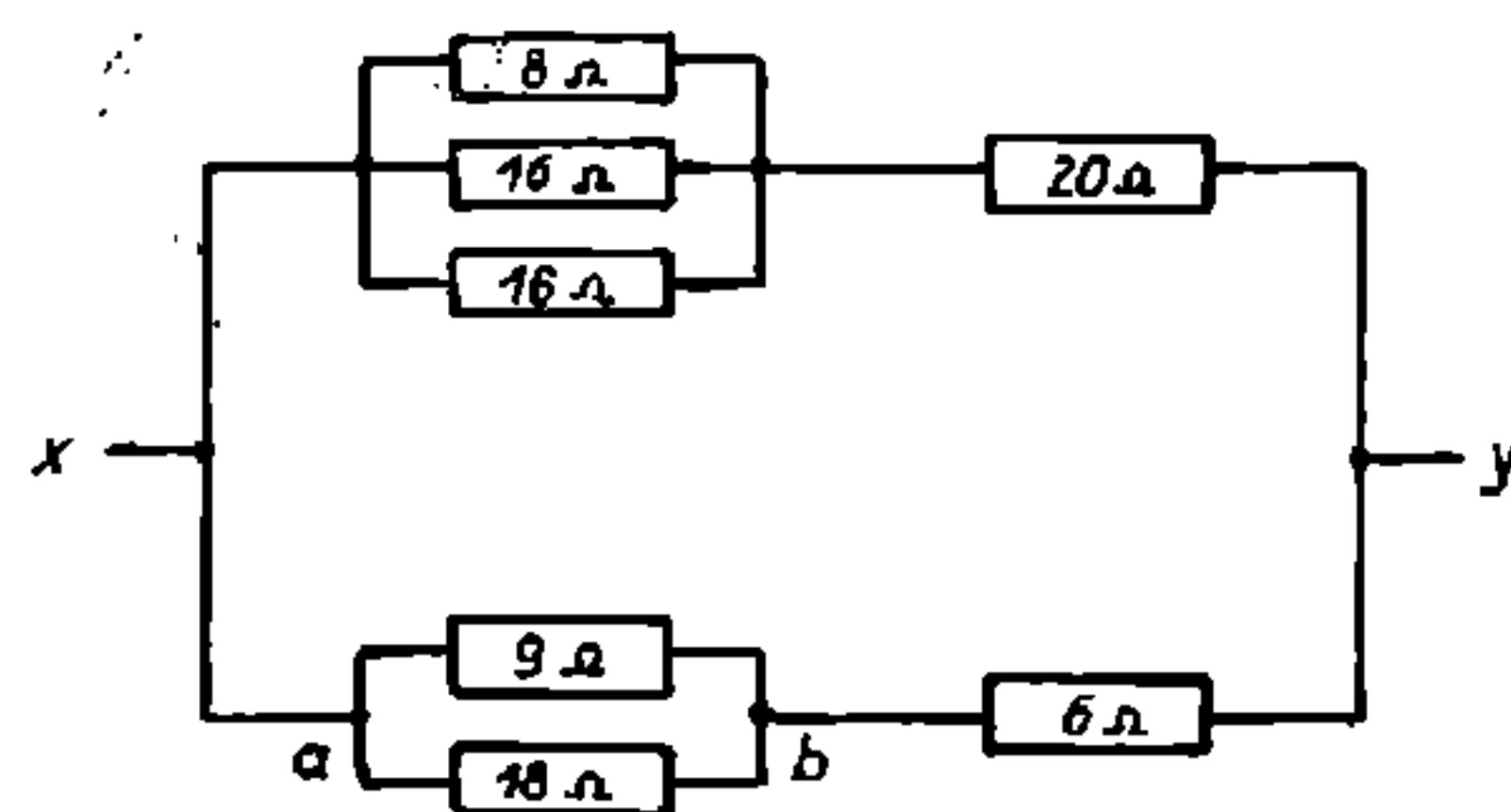


P 8 ■ 932 Um die Temperatur einer Bunsenflamme zu bestimmen, wurde ein Eisenstück von 6,85 g darin erhitzt und darauf in ein kupfernes Mischungskalorimeter geworfen, an welchem eine Änderung der Temperatur von 18,5 auf 21,3 °C beobachtet wurde. Die Masse des Kalorimeters betrug 152,5 g, die Wasserabfüllung 300 g. Wie heiß war die Flamme?

P 8 ■ 933 In der durch die Abbildung wiedergegebenen Zeichnung zeigt das Voltmeter V_1 die Spannung $U_1 = 25V$ und das Voltmeter V_2 die Spannung $U_2 = 22V$. Das Amperemeter mißt einen Strom von $I = 0,6A$. Wie groß ist der Widerstand R ?



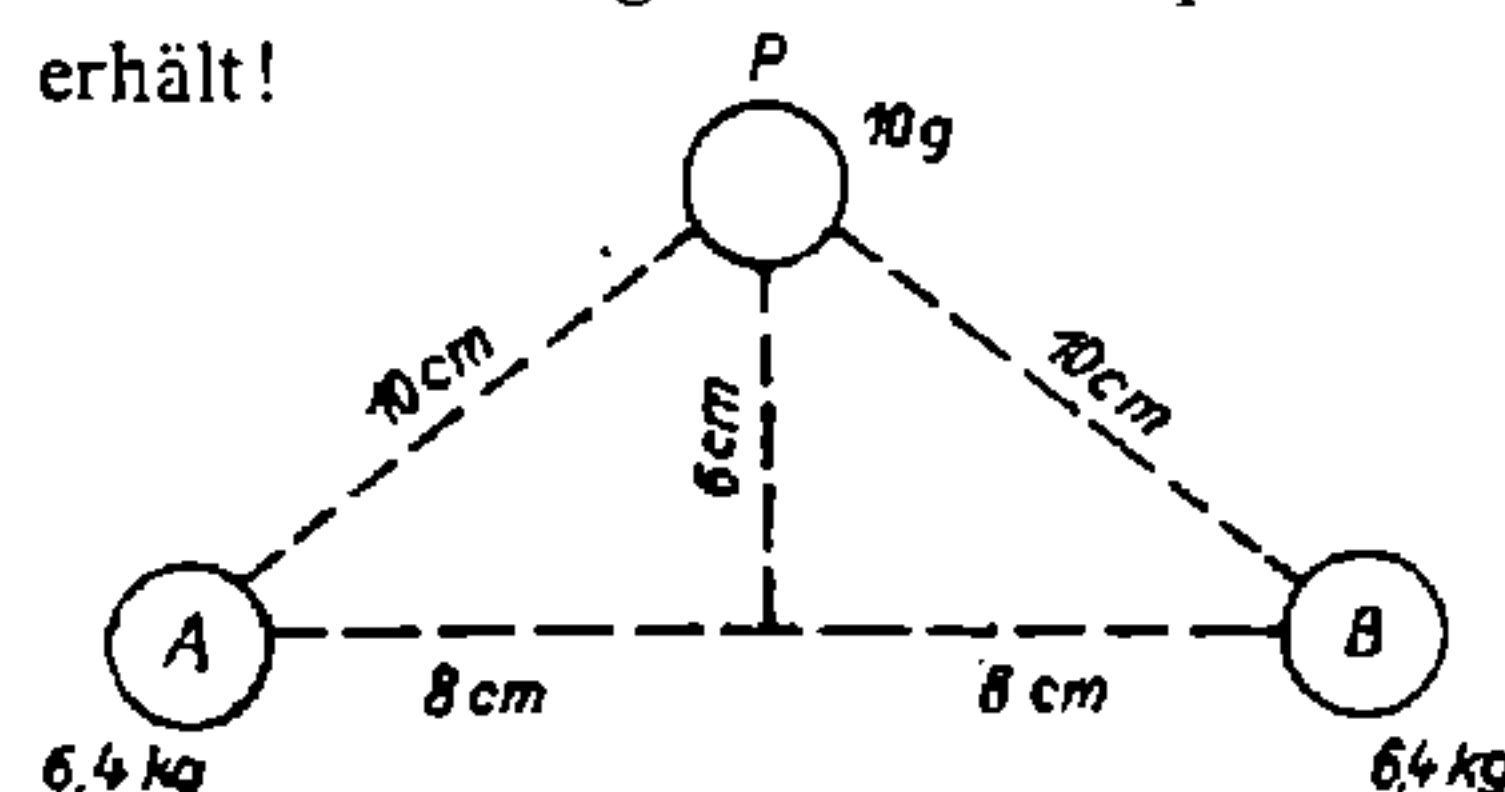
P 8 ■ 934 a) Berechne den Gesamtwiderstand zwischen den Punkten x und y .
b) Wie groß ist die Spannung zwischen den Punkten a und b , wenn der Strom im 8Ω Widerstand $0,5A$ beträgt?



P 9 ■ 935 Ein Aufzug mit der Masse $m = 1200\text{ kg}$ wird bei der Aufwärtsbewegung

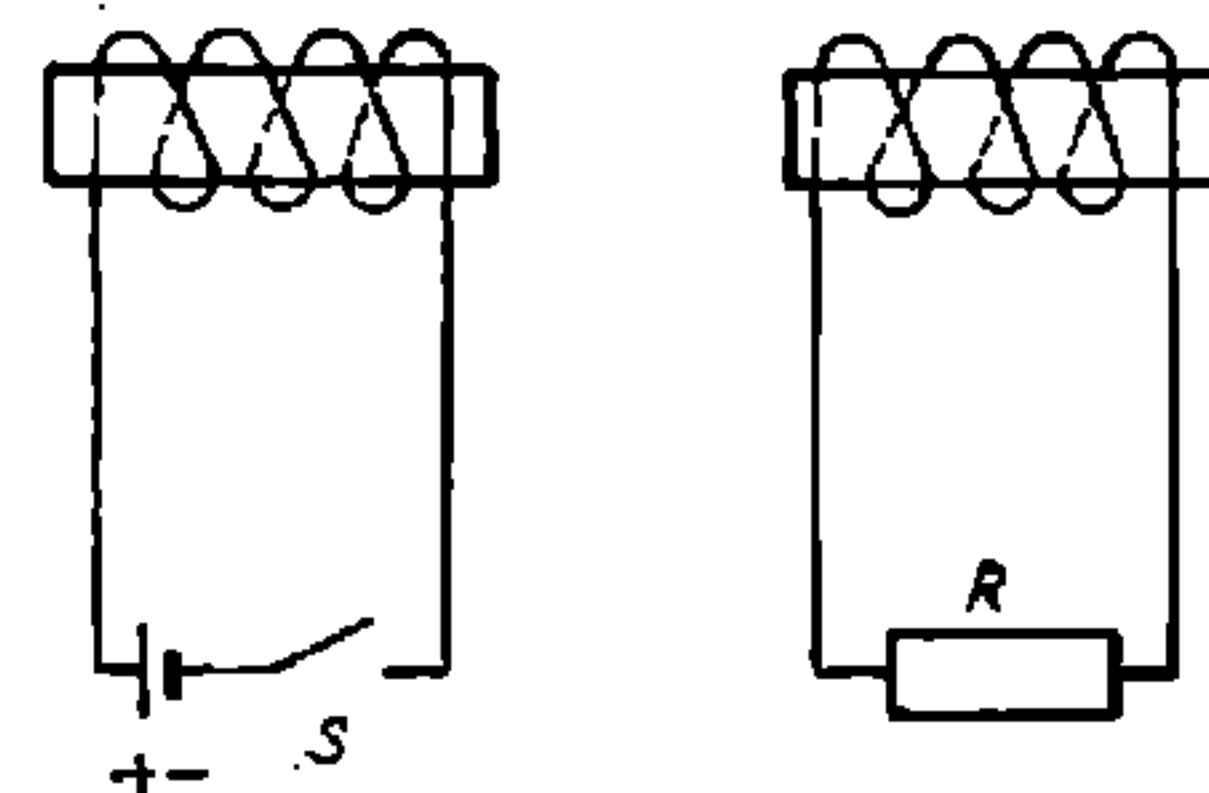
aus dem Ruhezustand auf die Geschwindigkeit $v = 3\text{ m/s}$ beschleunigt; er erreicht diese Geschwindigkeit nach $s = 2\text{ m}$. Wie groß ist die auf das Seil wirkende Kraft?

P 9 ■ 936 Berechne Größe und Richtung der Beschleunigung, die Körper P unter dem Einfluß der festgehaltenen Körper A und B erhält!



P 9 ■ 937 Bestimme die Richtung des Stromes im Widerstand R

- beim Öffnen
- beim Schließen von Schalter S (Lenzsche Regel).



P 10 ■ 938 An einer Schraubenfeder mit der Richtgröße 9 N/m hängt ein Körper, durch den die Feder um 10 cm gedehnt wird. Dem Körper wird aus der Ruhelage eine Geschwindigkeit von 50 cm/s erteilt.

- Wie groß ist die Schwingungsdauer und die Amplitude der entstehenden Schwingung ($g = 10\text{ m/s}^2$)?
- Wie groß ist die Masse des Körpers?

P 10 ■ 939 Eine vertikal hängende Spiralfeder wird zuerst mit 300 g belastet, wobei sie sich um $6,4\text{ cm}$ verlängert. Wie groß ist die Schwingungsdauer einer an der Feder hängenden Masse von 500 g ?

P 11 ■ 940 Ein von einer Turmspitze herabfallender Körper ist schon eine Strecke l gefallen, als ein zweiter Körper von einem Punkt zu fallen beginnt, der sich im Abstand h unterhalb der Turmspitze befindet. Beide Körper erreichen zu gleichem Zeitpunkt den Erdboden. Wie hoch ist der Turm?

P 11 ■ 941 In einem Gefäß befindet sich Wasser, dessen Oberfläche sich in der Höhe h über dem Boden befinden soll ($h = \text{const}$). Aus zwei Öffnungen strömt Wasser, wobei die untere in der Höhe $\frac{1}{3}h$ angebracht sein soll. In welcher Höhe muß sich die zweite Öffnung befinden, wenn beide Strahlen auf dem gleichen Punkt auftreffen sollen?

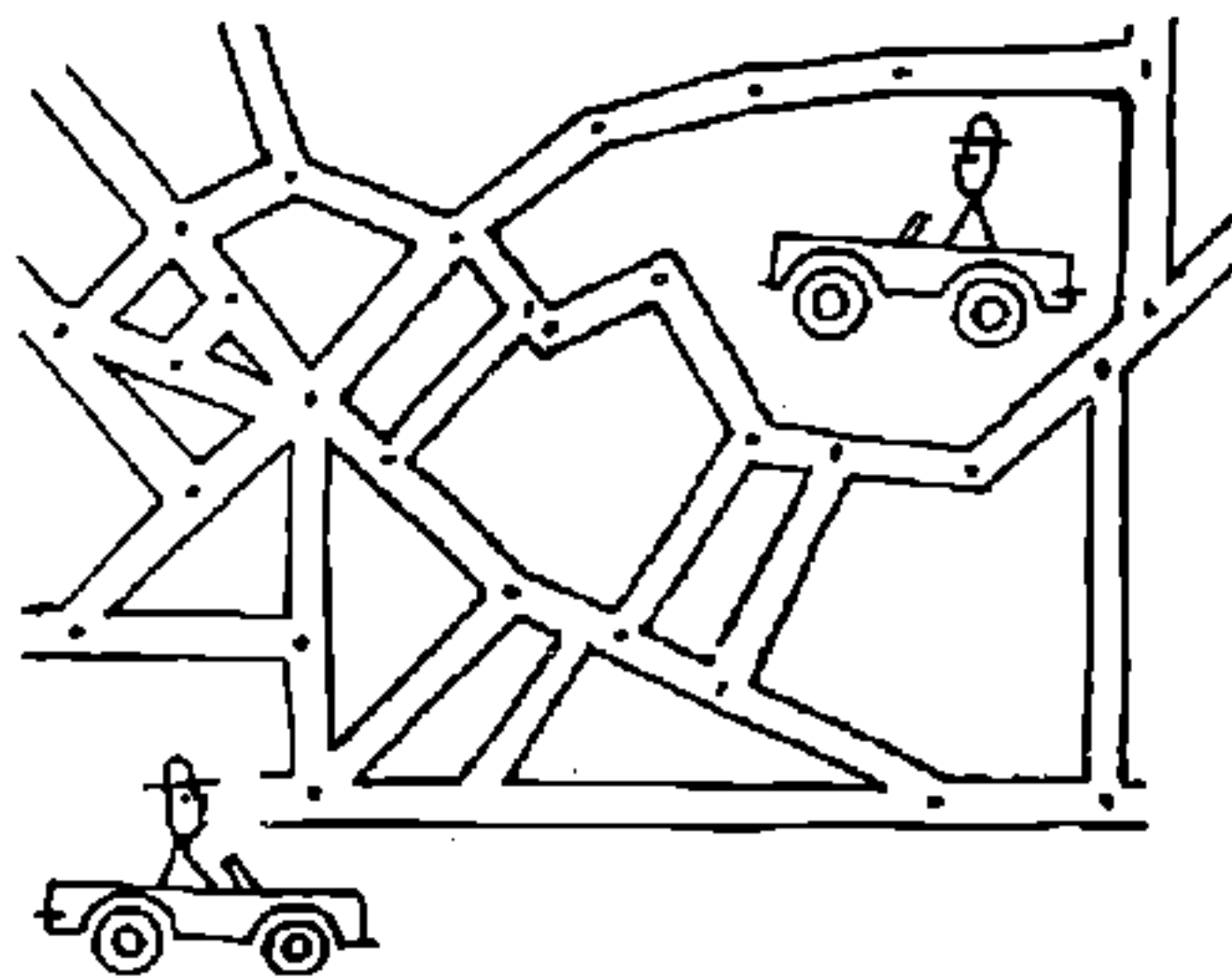
P 12 ■ 942 Zwei Körper werden nacheinander ($t = 5\text{ s}$) von einem Punkt aus mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 29,4\text{ m/s}$ nach oben geworfen. Nach welcher Zeit t , vom Startmoment des ersten Körpers aus gerechnet, und in welcher Höhe treffen sie sich? (Luftreibung wird vernachlässigt).

Norma Feistauer

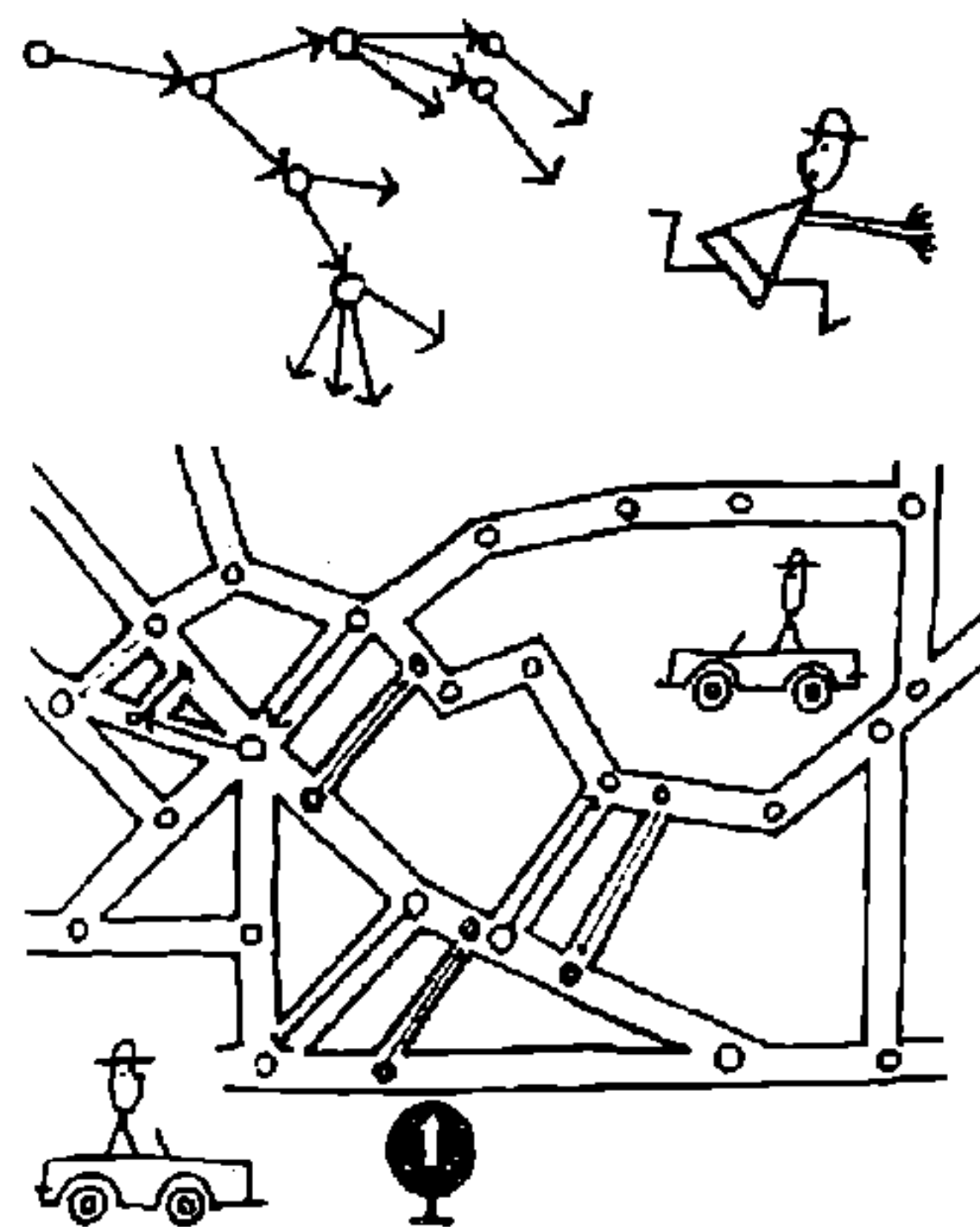
Der Graph



Auf einer Eisenbahnkarte oder einem Stadtplan (Bild 1) werden die Bahnstrecken bzw. Straßen der Stadt durch ein Netz aus Linien dargestellt. Jede Linie verbindet zwei Punkte, die *Knoten* genannt werden. Ein Netz aus Punkten und den zugehörigen Verbindungslinien trägt den sinnvollen Namen *Graph*.

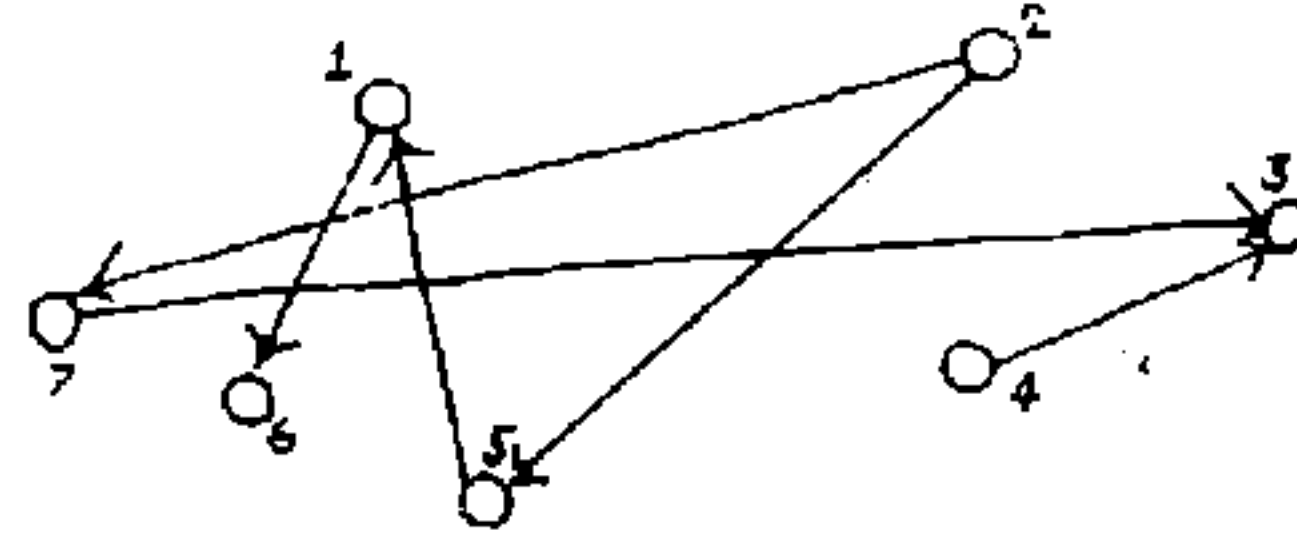


Der Plan des Wasserleitungsnetzes einer Stadt ist ebenfalls ein Graph. Im Unterschied zum Straßenverkehr kann das Wasser in den Leitungen jedoch nur in einer Richtung fließen. Vermerkt man auf den Kanten (Verbindungs-linien) des Graphen die Bewertungsrichtung des Wassers durch Pfeile, so erhält man einen gerichteten oder orientierten Graphen (Bild 2). Wegen des immer stärker werdenden Straßenverkehrs erklärt man immer mehr Straßen zu Einbahnstraßen. Deutet man im Stadtplan die Verkehrsrichtung dieser Straßen durch Pfeile an, während die in beiden Richtungen befahrenen Straßen ohne Pfeil bleiben, so erhält man einen gemischten Graphen (Bild 3).

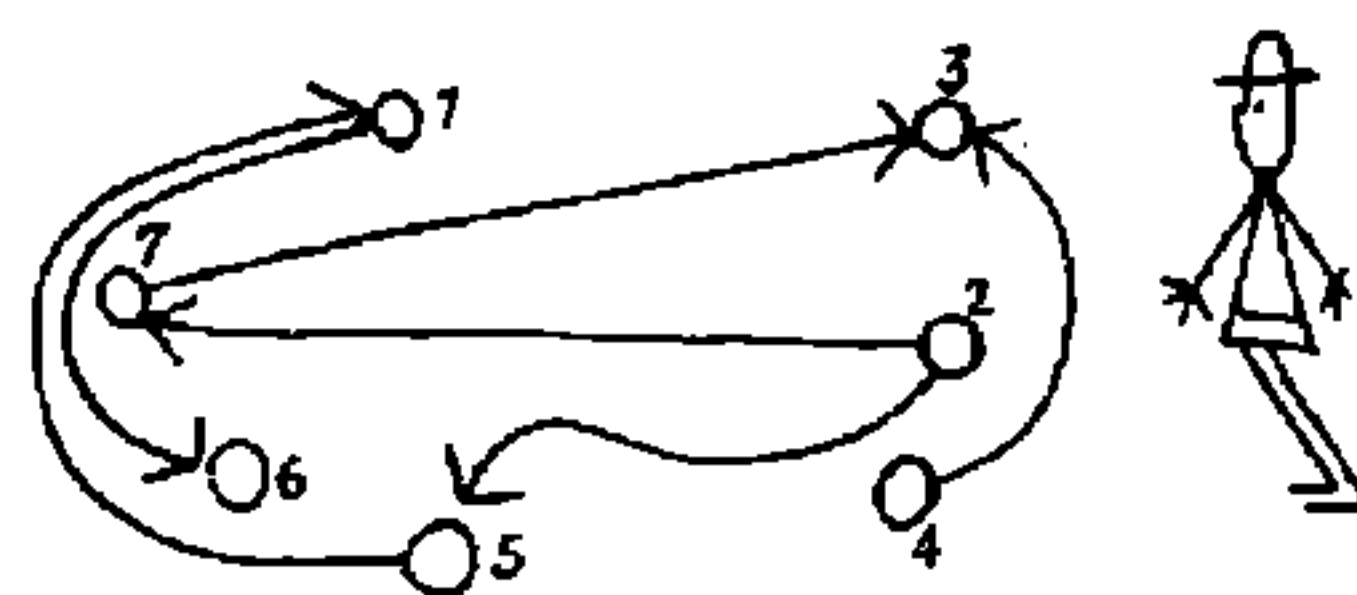


Die Ergebnisse eines Schachturniers kann man ebenfalls in Form eines Graphen darstellen (Bild 4). Man zeichnet auf dem Papier

für jeden Turnierteilnehmer einen Kreis und bezeichnet die Kreise mit den Startnummern der Teilnehmer. Das Ergebnis eines jeden Spiels wird durch eine Kante dargestellt, die die Kreise der Spieler verbindet. Eine Pfeilspitze zeigt vom Gewinner zum Verlierer. Endet das Spiel Remis, so wird an die Kante kein Pfeil gemacht.



Am Ende des Turniers ist jeder Kreis mit jedem anderen verbunden. Ein solcher Graph heißt *vollständig*. Gewinner des Turniers ist der Spieler, von dessen Kreis die meisten Pfeile wegführen. Wenn alle Teilnehmer jeweils zwei Parteien gegeneinander zu bestreiten haben (weiß und schwarz), so muß man jeweils zwei Kanten ziehen. Bild 4 zeigt die Situation, in der außer dem vierten und dem sechsten alle Teilnehmer je zwei Parteien gespielt haben, der vierte und sechste jedoch nur eine. Den ersten Platz hält zu diesem Zeitpunkt der Teilnehmer Nummer zwei.



Man könnte vermuten, daß die nicht durch Kreise gekennzeichneten Schnittpunkte der Kanten des Graphen auch irgend etwas bedeuten. Sie haben jedoch keinerlei Bedeutung. Das macht man sich am besten dadurch klar, daß man sich den Graphen im Raum vorstellt: dann schneiden sich seine Kanten nicht. Die Kanten eines Graphen brauchen auch nicht unbedingt geradlinig zu sein. So sind die Graphen in den Bildern 4 und 5 in dem Sinne gleich, daß einer durch eine stetige Transformation in den anderen übergeführt werden kann. Solche Graphen nennen die Mathematiker *isomorph*.

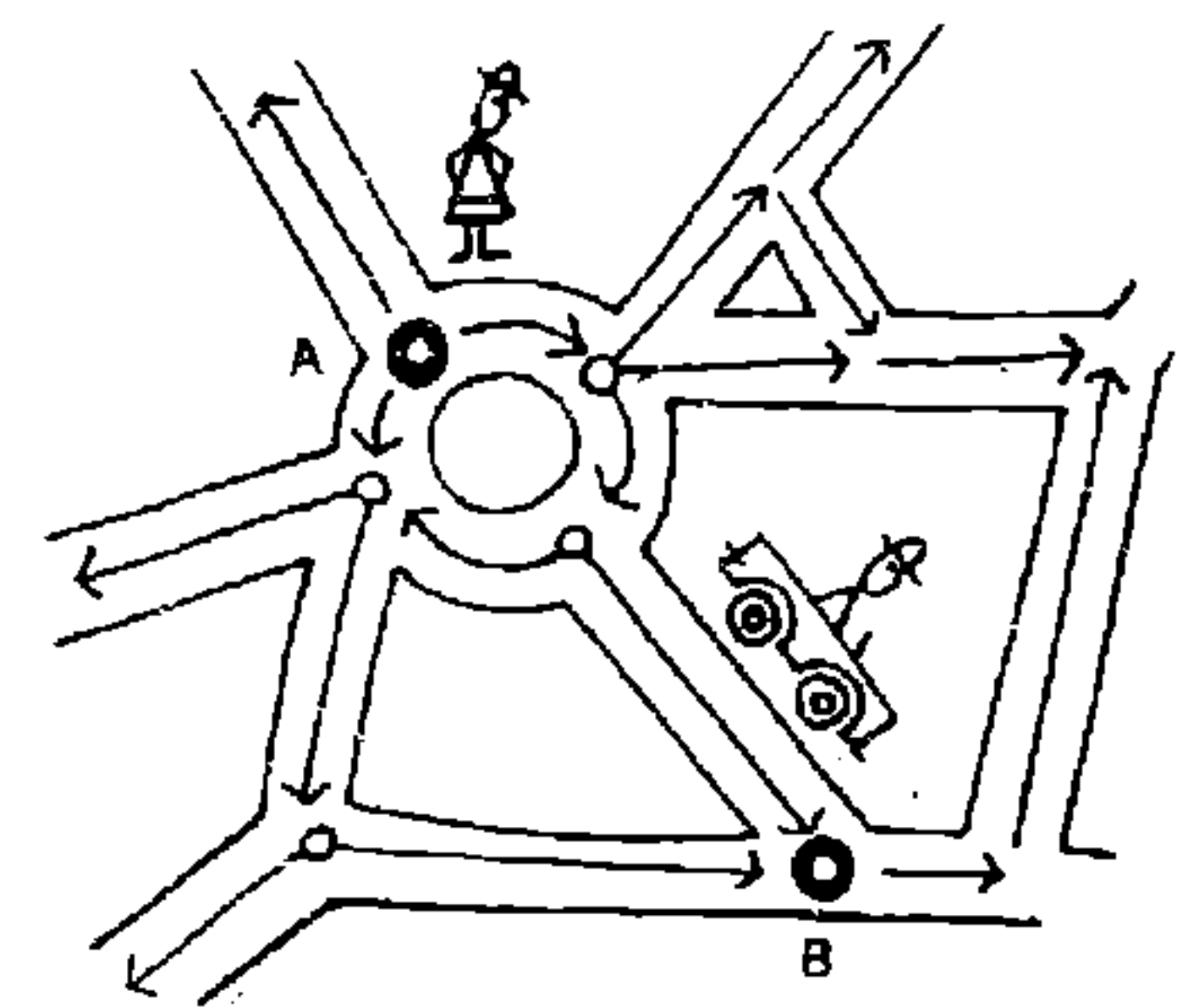
Es ist übrigens nicht immer gleichgültig, ob man einen Graphen so zeichnen kann, daß sich seine Kanten nicht schneiden. So ist z. B. das Schaltbild eines Rundfunkempfängers ein Graph, dessen Knoten die Widerstände, Kondensatoren, Röhren usw. sind, während die Leitungen die Kanten sind. Hier ist es unwesentlich, ob sich die gezeichneten Kanten schneiden oder nicht. Bei der praktischen Realisierung der Schaltung schneiden sich die Leitungen nicht; man kann sie übereinanderlegen und Kurzschlüsse durch Isolation verhindern.

In den letzten Jahren werden jedoch immer mehr gedruckte Schaltungen verwendet. Eine gedruckte Schaltung besteht aus einer mit Bauelementen bestückten Leiterplatte, auf der die dem Schaltbild entsprechenden Leitungszüge verlaufen. Dabei ist es wichtig, daß man die Knoten des Graphen (der Schaltung)

durch sie nicht schneidende Linien verbinden kann.

Es gibt also Fälle, in denen es notwendig ist, einen gegebenen Graphen in der Ebene so darzustellen, daß sich seine Kanten nur in den Knoten schneiden. Wenn das möglich ist, heißt der Graph *eben*. Man kann eine Methode angeben, nach der entschieden werden kann, ob ein Graph eben ist oder nicht. Das ist eine für die Praxis wichtige Aufgabe.

Bei der Einrichtung von Einbahnstraßen in einer Stadt muß die Verkehrspolizei die Verkehrseinrichtungen so festlegen, daß es keine Stellen gibt, zu denen man überhaupt nicht gelangen oder von denen man nicht mehr weiterfahren kann. So kann man z. B. im Bild 6 von A nach B fahren, jedoch nicht von B nach A. Derartige Aufgabenstellung können wir bereits als *allgemeine Aufgabe* über die Struktur eines gerichteten ebenen Graphen formulieren.



Natürlich würde die Verkehrspolizei zu Recht kritisiert werden, wenn sie die Verkehrsregeln nur nach den Gesetzen der Graphentheorie aufstellen würde.

Die Lenkung des Verkehrs in einer großen Stadt ist eine sehr schwierige Aufgabe, die wegen des Anwachsens der Anzahl der Fahrzeuge von Jahr zu Jahr komplizierter wird. Immerhin ist es aber eine mathematische Aufgabe, die eng mit der Graphentheorie zusammenhängt, jedoch nicht nur mit dieser.

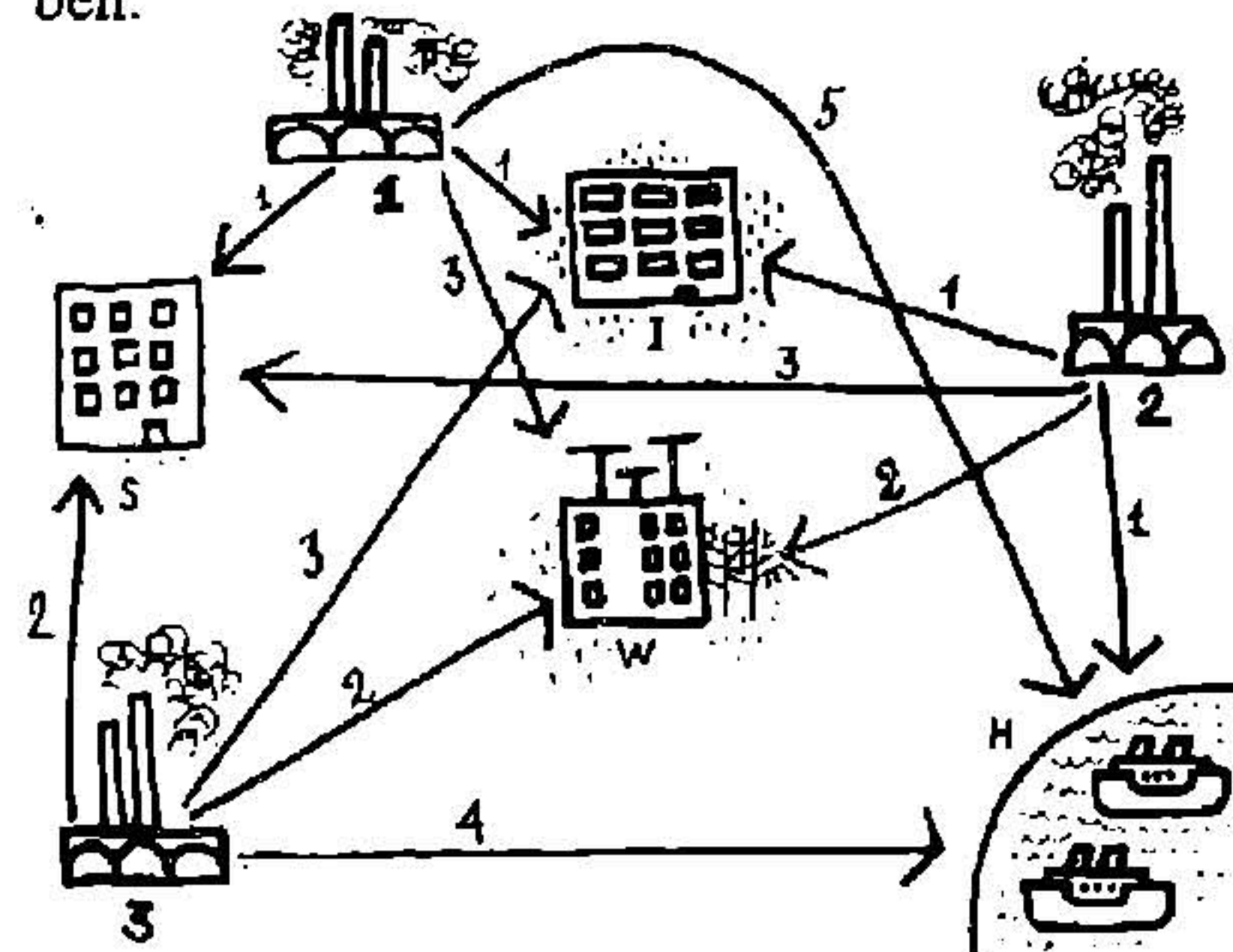
Sie haben sicher schon Glossen gelesen, in denen kritisiert wird, daß man Badeanzüge in die Arktis schickt oder daß sich eine Sendung Spaten z. B. von Rostock nach Suhl mit einer Sendung gleicher Spaten von Suhl nach Rostock kreuzt. Solche Glossen sind oft sehr geistreich geschrieben, doch die Autoren können meist, wenn man sie fragt, wie die Mängel abzustellen seien, nur vorschlagen, die Verantwortlichen zur Rechenschaft zu ziehen. Aber wie kann man es besser machen? Natürlich, unqualifizierte Mitarbeiter bringen manchmal etwas durcheinander, doch meist liegt das Problem tiefer. Die Planung des Transports und die Lagerhaltung sind komplizierte Aufgaben, und ein Fuhrparkleiter oder ein Lagerverwalter sind gar nicht immer ohne weiteres in der Lage, sie zu lösen.

Die Graphentheorie in Verbindung mit einigen anderen mathematischen Disziplinen gibt die Möglichkeit, solche Aufgaben zu lösen.

Ich werde einmal kurz das Wesen der Transportoptimierung erläutern.

Die Zeiten ändern sich, und, sagen wir, in der Stadt Surbagan, deren Entstehen wir der Phantasie des utopischen Schriftstellers *Alexander Grin* verdanken, wird intensiv gebaut. Eine Schule, ein Institut für Hochseeschifffahrt, ein sechzehnstöckiges Wohnhaus und ein Hafen sollen zur gleichen Zeit entstehen. In der Nähe der Stadt gibt es drei Werke für Baumaterial. Doch die Baustellen sind weit voneinander entfernt und befinden sich außerdem in verschiedenen Entfernungen von den Werken. Der Verantwortliche für die Versorgung der Baustellen muß den Transport des Baumaterials so organisieren, daß der Materialbedarf der Baustellen gedeckt wird und die recht beträchtlichen Transportkosten von den Werken zu den Baustellen möglichst niedrig bleiben. Diese Aufgabe ist prinzipiell lösbar; man braucht dazu jedoch Erfahrung und vor allem solide mathematische Kenntnisse und die moderne Rechentechnik, insbesondere wenn die Anzahl der Baustellen und Werke größer ist. Ich werde nun den Lösungsweg dieser Aufgabe skizzieren.

Wir stellen einen gerichteten Graph auf, in dem die Werke mit den Ziffern 1, 2 und 3 bezeichnet sind und die Baustellen die Buchstaben S (Schule), I (Institut), W (Wohnhaus) und H (Hafen) tragen; von den Werken zu allen Baustellen sind Kanten gezogen (Bild 7), die mit Zahlen versehen sind, die die relativen Transportkosten einer Einheit Fracht auf dem betreffenden Weg angeben.



Die Lösung der Aufgabe scheint zunächst offensichtlich zu sein: Der Schulneubau ist am günstigsten zu sein: Der Schulneubau ist am günstigsten durch das Werk Nr. 1 zu versorgen, die Baustelle Hafen durch das Werk Nr. 2. Der Institutsneubau kann sowohl vom Werk Nr. 1 als auch vom Werk Nr. 2 versorgt werden; die Baustelle des Wohnhauses kann man durch das Werk Nr. 2 oder das Werk Nr. 3 beliefern lassen. Es hat den Anschein, daß man das Werk Nr. 3 überhaupt nicht benötigt. Doch so einfach liegen die Dinge in Wirklichkeit nicht.

Stellen Sie sich vor, daß die drei Werke einen unterschiedlichen Produktionsausstoß haben und ihre Gesamtproduktion den Bedarf der Baustellen gerade deckt. Außerdem möge das Werk Nr. 3 den höchsten Ausstoß haben und Werk 2 den geringsten. Derartige Bedingungen erschweren die Lösung der Aufgabe be-

deutend. Trotzdem kann man durch Betrachtung der möglichen Varianten die Lösung finden, die die Versorgung der Baustellen bei minimalen Transportkosten garantiert.

Aus dem vorstehenden Beispiel kann man eine Erkenntnis ableiten: Plant man den Transport nur „über den Daumen“, so führt das unweigerlich zu Störungen in der Versorgung, besonders wenn die Gesamtmenge des erzeugten Materials den Bedarf nicht wesentlich übersteigt. Die Benutzung der günstigsten Variante des Transports kann außerdem riesige Einsparungen bringen.

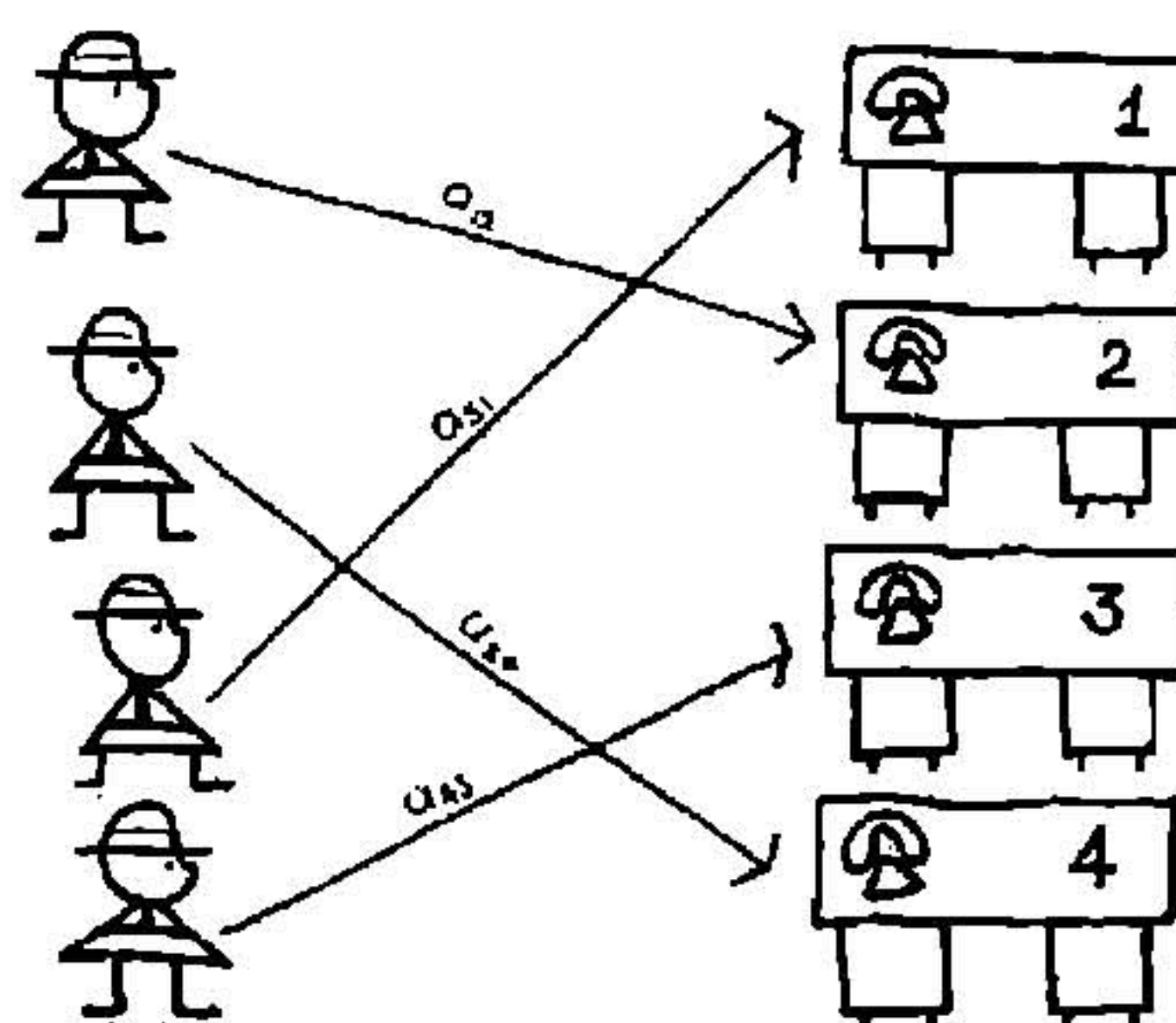
Nun wollen wir noch eine Klasse von Aufgaben betrachten, die auf Probleme der Graphentheorie hinauslaufen.

Stellen Sie sich eine Werkhalle mit n verschiedenen Maschinen und m Arbeitern ($n < m$) vor. Die Bedingung jeder Maschine ist nur einigen Arbeitern entsprechend ihrer Qualifikation möglich. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Bedienung sämtlicher Maschinen gewährleistet ist?

Ähnlich ist die Situation, wenn Arbeitskräfte möglichst rationell eingesetzt werden sollen. Angenommen, wir haben n Mitarbeiter und ebenso viele Arbeiten; jeder Mitarbeiter kann jede der Arbeiten verrichten, doch die Leistungen sind unterschiedlich. Wenn a_{ij} die Leistung a (in gewissen Maßeinheiten) bei der Erfüllung der Arbeit Nummer j durch den Mitarbeiter Nummer i ist, dann ist z. B. a_{24} die Leistung des Mitarbeiters Nr. 2 bei der Arbeit Nr. 4. Es ist vorteilhaft, die Mitarbeiter so einzusetzen, daß sie alle mit hoher Effektivität arbeiten. Diese Situation wird durch Bild 8 illustriert. Als Kennziffer für die Arbeit des gesamten Kollektivs der Mitarbeiter kann man die Summe der Leistungen nehmen. Dann ist für die Situation im Bild 8 die

$$\text{Gesamtleistung} = a_{12} + a_{24} + a_{31} + a_{43}.$$

Die Aufgabe des günstigsten Einsatzes der Mitarbeiter wird durch die Arbeitseinteilung gelöst, bei der die Gesamtleistung maximal wird.



Man könnte die Arbeit eines Kollektivs auch an der Effektivität des schwächsten Mitarbeiters messen. Die Aufgabe des günstigsten Einsatzes der Mitarbeiter besteht dann darin, den schwächsten Mitarbeiter am wirksamsten einzusetzen. Das läßt sich so formulieren: Die Arbeit ist so aufzustellen, daß die kleinste Leistung ihren größten Wert hat. Die kleinste

Leistung muß also größer sein als die kleinste Leistung bei irgendeiner anderen Aufteilung. In der Sprache der Graphentheorie würde sich das folgendermaßen ausdrücken lassen: Angenommen, a_{31} sei die kleinste Leistung im Graphen (Bild 8). Man kann nun die Arbeiten anders aufteilen, z. B. so, daß sich die Leistungen a_{11} , a_{23} , a_{32} und a_{44} ergeben. Ist nun a_{44} die kleinste Leistung, a_{44} aber größer als a_{31} , so ist die zweite Arbeitseinteilung der ersten vorzuziehen. Die Aufgabe besteht also darin, die Anordnung der Pfeile so zu bestimmen, daß die kleinste der jeweils vier auftretenden Zahlen für die Leistungen maximal ist.

Die optimale Variante kann bei der vorstehenden Aufgabe, bei dem bereits betrachteten Transportproblem und einer Reihe weiterer Aufgaben in der Praxis natürlich nicht durch das Probieren gefunden werden. Man benutzt die Methoden der Spieltheorie und der linearen bzw. nichtlinearen Optimierung und findet so einen systematischen Lösungsweg, der auch den Einsatz von Rechenautomaten ermöglicht.

Die Graphentheorie wird heute in den verschiedensten Gebieten von Wissenschaft und Technik benutzt. Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die Netzwerkplanung. Ursprünglich hatte ich die Absicht, einen Abschnitt darüber zu schreiben. In letzter Zeit ist jedoch so viel darüber geschrieben worden, daß ich die mir zur Verfügung stehenden Seiten lieber benutzen will, um über weniger bekannte Probleme zu sprechen.

Diese Leseprobe wurde entnommen aus:

J. I. CHURGIN

Formeln — und was dann?



VEB Verlag Technik
252 Seiten, 140 Abb., 12 Tafeln
Halbleinen, Preis: 9,- M

Gespräche eines Mathematikers mit Biologen und Nachrichtentechnikern, Ärzten und Technologen, Geologen und Ökonomen, mit Menschen verschiedener Fachgebiete und Interessen über die Mathematik und ihre Beziehungen zu den anderen Wissenschaften

Zum Autor

Der Doktor der physikalisch-mathematischen Wissenschaften Jakov Issevic Churgin war sowohl Dispatcher eines Großbetriebes als auch wissenschaftlicher Mitarbeiter mehrerer führender Institute für Nachrichtentechnik sowie Lehrer an verschiedenen Hochschulen. Zur Zeit ist er Professor am Moskauer Gubin-Institut für Erdölchemie und Gasindustrie.

Zur Information: alpha veröffentlicht ab Heft 6/72 einen umfassenden Beitrag zur Graphentheorie, d. Red.

Die „счеты“ — ein Souvenir aus der Sowjetunion

Von einer Sommerreise im vergangenen Jahr habe ich mir ein Andenken aus der Sowjetunion mitgebracht. Pflichtgemäß hatte ich bei der Rückkehr in unsere Republik alle dort gekauften Gegenstände unseren Zollorganen mitgeteilt. Nur mein wohl nicht sehr häufig vorkommendes Souvenir mußte ich vorweisen. Nun, eine Rechenmaschine wird sicher nicht jeden Tag aus der Sowjetunion in unsere Republik im Handgepäck eingeführt. Der junge Genosse vom Zoll hat dann etwas geschmunzelt, als ich ihm meine „счеты“ zeigte und hat natürlich keine zusätzlichen Einfuhrgebühren verlangt.

Wenn man die Sowjetunion besucht, ist man beim Einkauf immer wieder überrascht, wie schnell viele Verkäuferinnen, ohne Papier und Bleistift zu benutzen, den Gesamtpreis der erstandenen Waren ermitteln. Sie verwenden hierzu eine einfache Rechenmaschine, die „контторские счеты“. Frei übersetzt können wir dazu Geschäftsrechenbrett oder kurz Rechenbrett sagen.

In der Sowjetunion werden schon die Kinder an den Umgang mit dem Rechenbrett herangeführt. Für sie gibt es in den Läden mit Artikeln für den Schulbedarf „счеты ученические“, Schülerrechenbretter, zu kaufen. Ich habe mir ein solches aus Moskau mitgebracht und möchte euch nun erläutern, wie es aufgebaut ist und wie man damit umzugehen hat.

1. Der Aufbau der „счеты“ und das Einstellen der Zahlen

Unsere einfache Rechenmaschine ist so, wie es Bild 1 angibt, aufgebaut. Auf 8 Drähten befinden sich weiß oder schwarz gefärbte „Steine“. Das sind hölzerne Scheiben, die an den Seiten abgerundet sind. Nach Bild 1 könnt ihr euch selbst ein Rechenbrett bauen. Zur Anfertigung eines Modells kann man sich auf einem Stück Papier auch parallele gerade Linien ziehen, auf die man entsprechend Bild 1 verschieden gefärbte Scheiben oder Knöpfe legt.

Das Rechenbrett ist nach dem Dezimalsystem aufgebaut. Jeder Draht, mit Ausnahme des dritten, entspricht einer Dezimalstelle, und jeder Stein auf dem entsprechenden Draht bedeutet eine Einheit der entsprechenden Stelle.

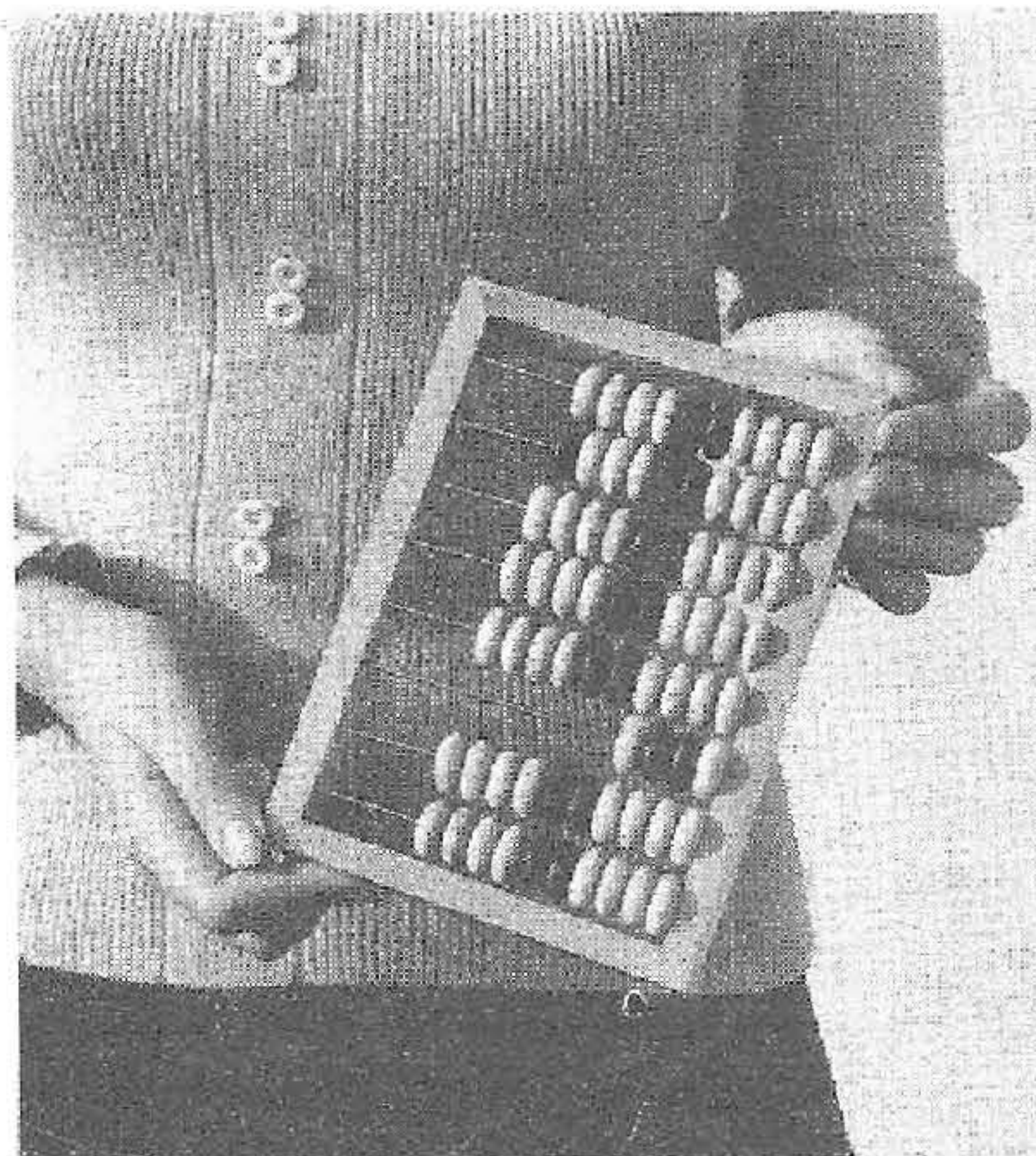


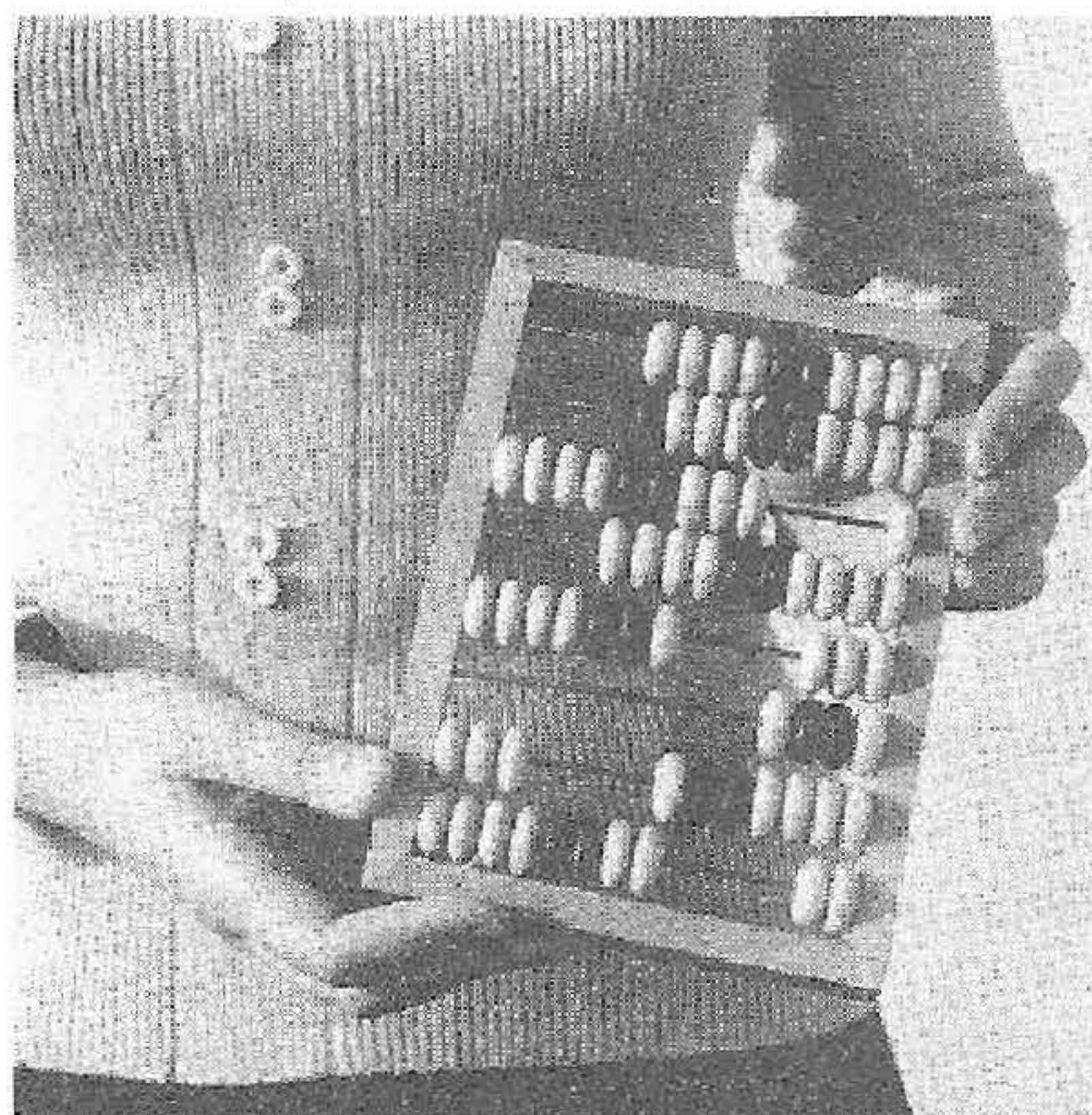
Bild 1 „счеты ученические“

Zum besseren Abzählen sind die Steine farblich unterschieden. Der 3. Draht von unten enthält nur 4 Steine und wird als unvollständiger Draht bezeichnet. Er dient als Komma. Die zwei unteren Drähte sind für das Rechnen mit Dezimalbrüchen bestimmt.

Bevor man mit der „счеты“ rechnet, ist es wichtig zu lernen, wie darauf die Zahlen einzustellen und abzulesen sind. Beim Einstellen beginnt man so, wie man im Russischen die Zahlen spricht, mit der höchsten Dezimalstelle.

Beispiel 1: In Bild 2 ist auf dem Rechenbrett die Zahl 907,38 eingestellt. Bildet jetzt selbständig Zahlen, die ihr einstellt, und übt euch im Ablesen von eingestellten Zahlen!

Bild 2 907,38



2. Das Addieren unter Benutzung des Rechenbrettes

Das Rechenbrett kann zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren benutzt werden. Am häufigsten wird es sicherlich zum Addieren verwendet. Deshalb soll diese Rechenart auch am ausführlichsten beschrieben werden. Zu Beginn müssen bei jeder Rechnung alle Steine auf der rechten Seite liegen. Mit der höchsten Stelle beginnend wird der erste Summand nach links geschoben. Die nächsten Summanden werden einzeln nacheinander danach ebenfalls nach links geschoben, bis nach dem Verschieben des letzten Summanden die Summe auf dem Rechenbrett sofort ablesbar ist.

Beispiel 2: $2423 + 565$. Diese Aufgabe ist ohne Schwierigkeiten nach der soeben angegebenen Vorschrift auf dem Rechenbrett zu lösen. Man stellt zuerst den ersten Summanden ein und schiebt danach den zweiten Summanden nach links. Die Summe 2988 kann man danach vom Rechenbrett sofort ablesen.

Beispiel 3: $386 + 572$. Hier handelt es sich um eine Aufgabe mit „Überschreiten“. Zur Lösung ist 386 einzustellen. Danach schieben wir zu den drei Steinen auf der linken Seite des 6. Drahtes noch 5 Steine hinzu. Zu den 8 Steinen des 5. Drahtes müßten wir noch 7 Steine hinzufügen. Hierzu reichen aber die Steine rechts nicht aus. Beim weiteren Rechnen benutzen wir die Tatsache, daß 10 Steine eines Drahtes soviel wie ein Stein des darüber befindlichen Drahtes bedeuten. Jetzt benutzen wir die Tatsache, daß $7 \text{ gleich } 10 - 3$ ist. Wir fügen auf dem 6. Draht einen Stein hinzu und nehmen auf dem 5. Draht durch Schieben nach rechts 3 Steine fort. Zu den 6 Steinen auf dem 4. Draht schieben wir noch 2 und können jetzt als Summe von 386 und 572 die Zahl 958 ablesen. Die Rechengeschwindigkeit wird beim Umgang mit dem Rechenbrett wesentlich erhöht, wenn man Rechen-vorteile ausnutzt. Das soll das nächste Beispiel zeigen:

Beispiel 4: $1583 + 298$. Diese Aufgabe kann gelöst werden, indem man zuerst 1583 einstellt. Dann fügt man $298 = 300 - 2$ hinzu, indem man zum 6. Draht 3 Steine nach links schiebt und vom 4. Draht 2 nach rechts. Danach kann man 1881 als Summe ablesen.

Die Addition von Dezimalzahlen wird, wie in den Beispielen 3 und 4 erläutert wurde, unter Berücksichtigung des Kommas durchgeführt. Wenn mehr als zwei Stellen hinter dem Komma vorhanden sind, nimmt man über dem 3. Draht liegende Drähte noch dazu. Bei drei Dezimalstellen liegt das Komma dann zwischen dem 4. und 5. Draht. Versucht nach diesen Beispielen selbständig Additionsaufgaben auch mit mehr als zwei Summanden zu lösen!

3. Das Subtrahieren mit dem Rechenbrett

Die Subtraktion ist ähnlich wie die Addition auszuführen. Man stellt zuerst den Minuenden ein. Danach schiebt man den Subtrahenden, mit der höchsten Stelle wieder beginnend, von links nach rechts. Die links verbliebenen Steine geben die Differenz an.

Beispiel 5: $746 - 534$. Zuerst schiebt man auf dem Rechenbrett die Zahl 746 zur Seite. Danach werden auf dem 6. Draht 5 Steine, auf dem 5. Draht 3 Steine und auf dem 4. Draht 4 Steine nach rechts geschoben. Auf der linken Seite bleibt die gesuchte Differenz 212 zurück.

Beispiel 6: $527 - 374$. Nachdem man 527 eingestellt hat, schiebt man die entsprechenden Steine des Subtrahenden nach rechts. Zuerst werden von der linken Seite des 6. Drahtes drei Steine weggenommen. Auf dem 5. Draht sind weniger Steine vorhanden als nach rechts zu schieben sind. Aus diesem Grunde schiebt man vom 6. Draht einen Stein nach rechts. Dieser Stein hat dieselbe Bedeutung wie 10 Steine des 5. Drahtes. Von diesen gedachten 10 Steinen des 5. Drahtes subtrahiert man im Kopf 7. Die Differenz, 3 Steine, fügt man dann den zwei Steinen des 5. Drahtes noch hinzu. Nachdem man vom 4. Draht vier Steine nach rechts geschoben hat, kann man als Ergebnis 153 vom Rechenbrett ablesen.

Beispiel 7: $565 - 367$. Beim Verschieben der Steine des Subtrahenden nach rechts müßt ihr von den Steinen des 6. Drahtes einen Stein in 10 Steine des 5. Drahtes „verwandeln“. Auf dem 5. Draht werden aber nur 9 nach links geschoben. Ein Stein des 5. Drahtes wird in 10 Steine des 4. Drahtes „verwandelt“. Beim 4. Draht werden 3 Steine ($10 - 7 = 3$) nach links geschoben.

Bildet und löst jetzt selbständig Subtraktionsaufgaben auf dem Rechenbrett! Berücksichtigt dabei, daß man auch bei der Subtraktion, ähnlich wie im Beispiel 4 für die Addition erläutert wurde, Rechenvorteile ausnutzen kann. Zum Schluß noch ein Hinweis: Es läßt sich besser mit der „счеты“ rechnen, wenn ihr die Zahlen russisch ausspricht.

4. Das Multiplizieren und Dividieren mit dem Rechenbrett

Obwohl das Rechenbrett hauptsächlich zum Addieren und Subtrahieren benutzt wird, wollen wir uns noch kurz dem Multiplizieren mit einstelligen Faktoren und dem Dividieren durch einstellige Divisoren zuwenden.

Das Multiplizieren wird bei der Benutzung des Rechenbretts als wiederholtes Addieren aufgefaßt. Zum Beispiel ist für $134 \cdot 2$ auf dem Rechenbrett $134 + 134$ zu lösen. Soll eine Zahl mit 3 multipliziert werden, so ist diese Zahl dreimal als Summand zu wiederholen. Um eine beliebige Zahl mit 4 zu multiplizieren, verdoppeln wir ihr Produkt mit 2. Zur

Multiplikation einer Zahl mit 5 multipliziert man im Kopf zuerst mit 10 und dividiert dann durch 2. Bei der Division durch 2 schiebt man jeweils die Hälfte der Steine des Dividenden, mit der niedrigsten Stelle beginnend, nach rechts.

Beispiel 8: $369 \cdot 5$. Auf dem Rechenbrett wird die Zahl 3690 eingestellt. Auf dem 5. Draht sind 9 Steine. Wir können also nicht die Hälfte der Steine von links nach rechts schieben. Wir ersetzen jetzt einen Stein auf dem 5. Draht durch 10 Steine auf dem 4. Draht. Danach schieben wir 5 Steine des 4. Drahtes und 4 Steine des 5. Drahtes nach rechts. Von den 6 Steinen des 6. Drahtes werden 3 Steine nach rechts geschoben. Auf dem 7. Draht schieben wir zum Schluß 1 Stein nach rechts und auf dem 6. Draht 5 Steine nach links. Als Ergebnis können wir 1845 ablesen. Um eine Zahl mit 6 zu multiplizieren, wird das Dreifache dieser Zahl verdoppelt. Bei der Multiplikation einer Zahl mit 7 wird zuerst mit 5 multipliziert und dann zweimal die betreffende Zahl zu diesem Produkt addiert. Multipliziert man mit 8, so ist zuerst mit 10 zu multiplizieren und dann zweimal die betreffende Zahl von diesem Produkt zu subtrahieren. Zur Multiplikation mit 9 ist zuerst mit 10 zu multiplizieren und dann der erste Faktor einmal zu subtrahieren.

Das Dividieren wird ähnlich wie beim schriftlichen Rechnen, mit den höchsten Stellen des Dividenden beginnend, ausgeführt.

Beispiel 9: $4524 : 6$. Auf dem Rechenbrett wird der Dividend 4524 eingestellt. 45, die Zahl, die zu den beiden vorderen Ziffern gehört, teilt man durch 6. Die 7. als höchste Stelle des Quotienten, wird auf dem 1. Draht von oben eingestellt. Danach wird $6 \cdot 7 = 42$ von 45 subtrahiert. Nachdem man 32 durch 6 geteilt hat, schiebt man auf dem 2. Draht von oben 5 Steine nach links. Anschließend wird von 32 das Produkt $6 \cdot 5 = 30$ subtrahiert. Es bleibt jetzt nur noch die Zahl 24 übrig. Nachdem man 24 durch 6 geteilt hat, schiebt man 4 Steine auf dem 3. Draht von oben nach links und subtrahiert noch $6 \cdot 4 = 24$ von 24. Die Lösung 764 kann man zum Schluß vom Rechenbrett ablesen. Sollte bei der Division einmal ein Rest entstehen, so bleibt er auf dem 5. Draht von oben stehen.

5. Von der „счеты“ zur elektronischen Rechenmaschine

Unsere „счеты“ können wir auch in ein einfaches Modell einer elektronischen Rechenmaschine umbauen (siehe Bild 3). Wir ordnen hierzu die Drähte — wir können sie auch durch Striche auf Papier ersetzen — nebeneinander an. Da elektronische Rechenmaschinen nach dem Zweier — oder Dualsystem aufgebaut sind, müssen wir zuerst, um mit ihr arbeiten zu können, wiederholen, wie Zahlen im Dualsystem geschrieben wer-

den. Man kann dazu das Lehrbuch der 4. Klasse (Ausgabe 1971, Seite 49) oder *alpha* Heft 3/1969, Seite 53 benutzen.

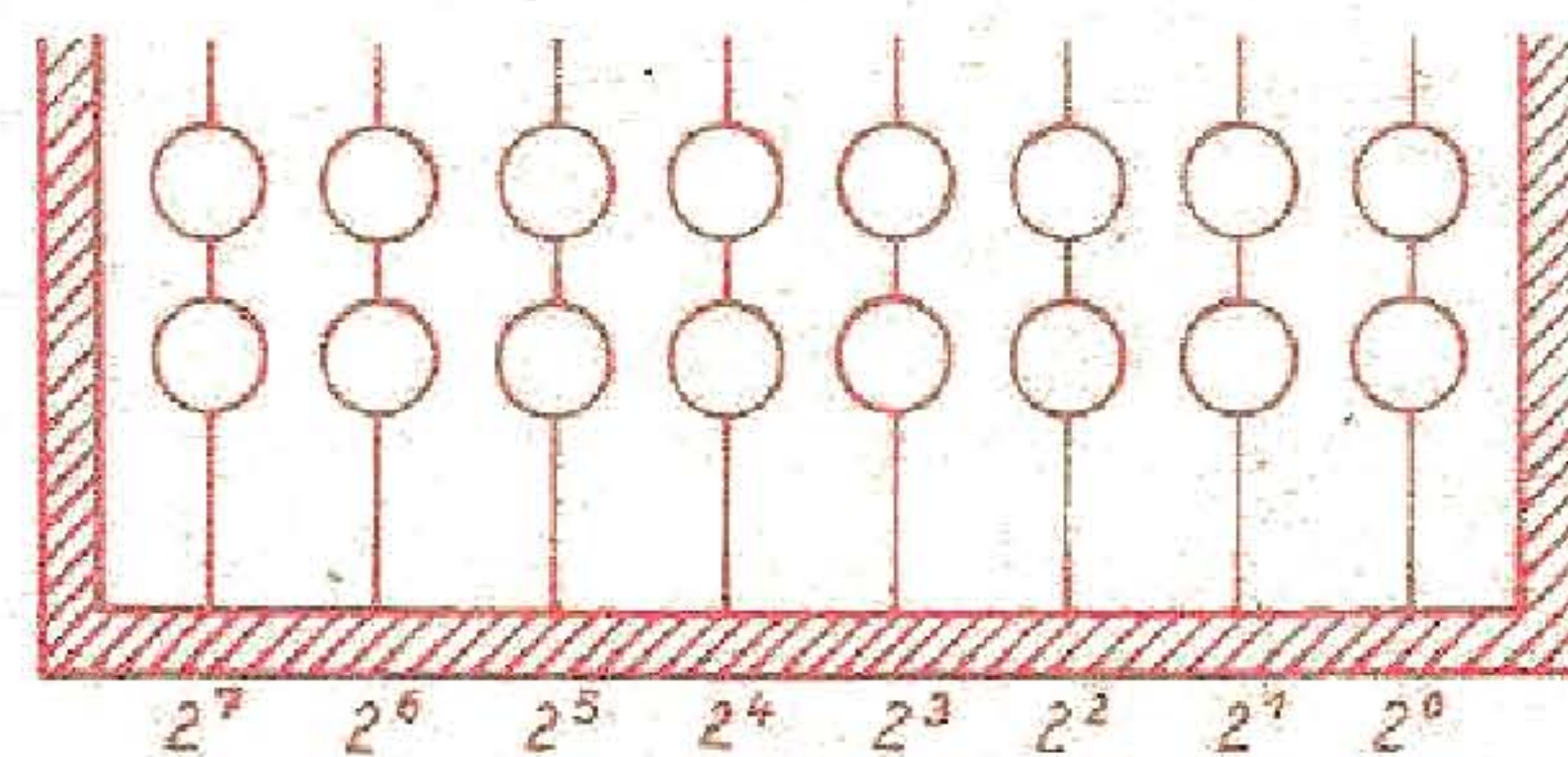


Bild 3

Im Dualsystem ist $0 + 0 = 0$ und $1 + 1 = 1$. Bei der Arbeit mit unserem Modell einer elektronischen Rechenmaschine ist ferner zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, \\ 0 + 1 &= 1 + 0 = 1, \\ 1 + 1 &= 10. \end{aligned}$$

Beim Addieren mit unserem Modell ist zuerst der erste Summand im Dualsystem zu schreiben und danach von oben nach unten „einzugeben“.

Beispiel 10:

$$\begin{aligned} 43 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= \quad L \quad O \quad L \quad O \quad L \quad L \end{aligned}$$

Soll jetzt zu 43 noch eine Zahl addiert werden, so wird der zweite Summand zuerst wieder im Dualsystem geschrieben und danach ebenfalls von rechts nach links nach unten geschoben. Befindet sich auf einem Draht schon ein Stein, so ist der zweite Stein wieder nach oben zu schieben und solange nach links zu übertragen, bis er unten eine freie Stelle findet. Anschließend ist das Ergebnis abzulesen und in die dezimale Schreibweise zu verwandeln.

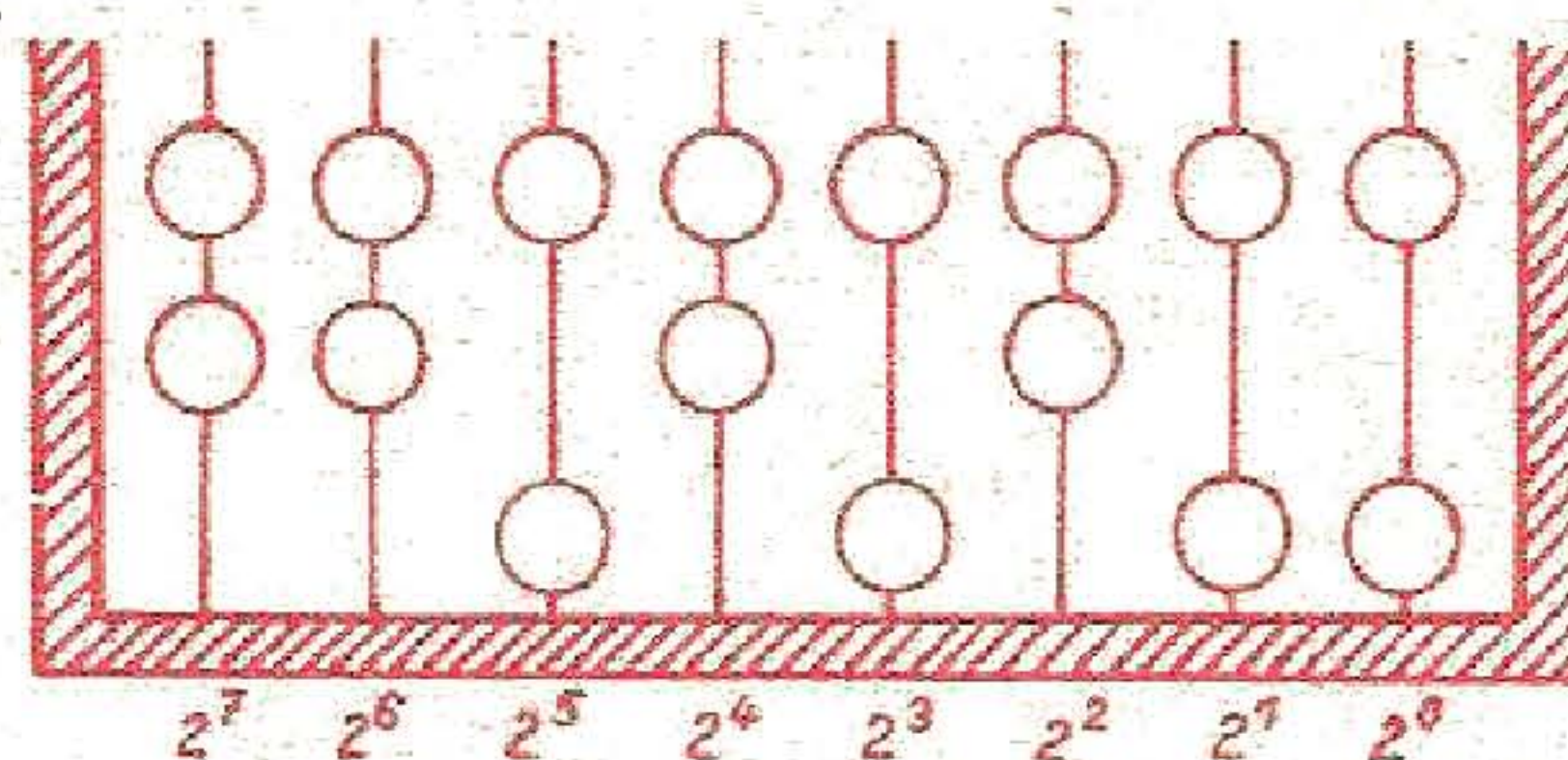
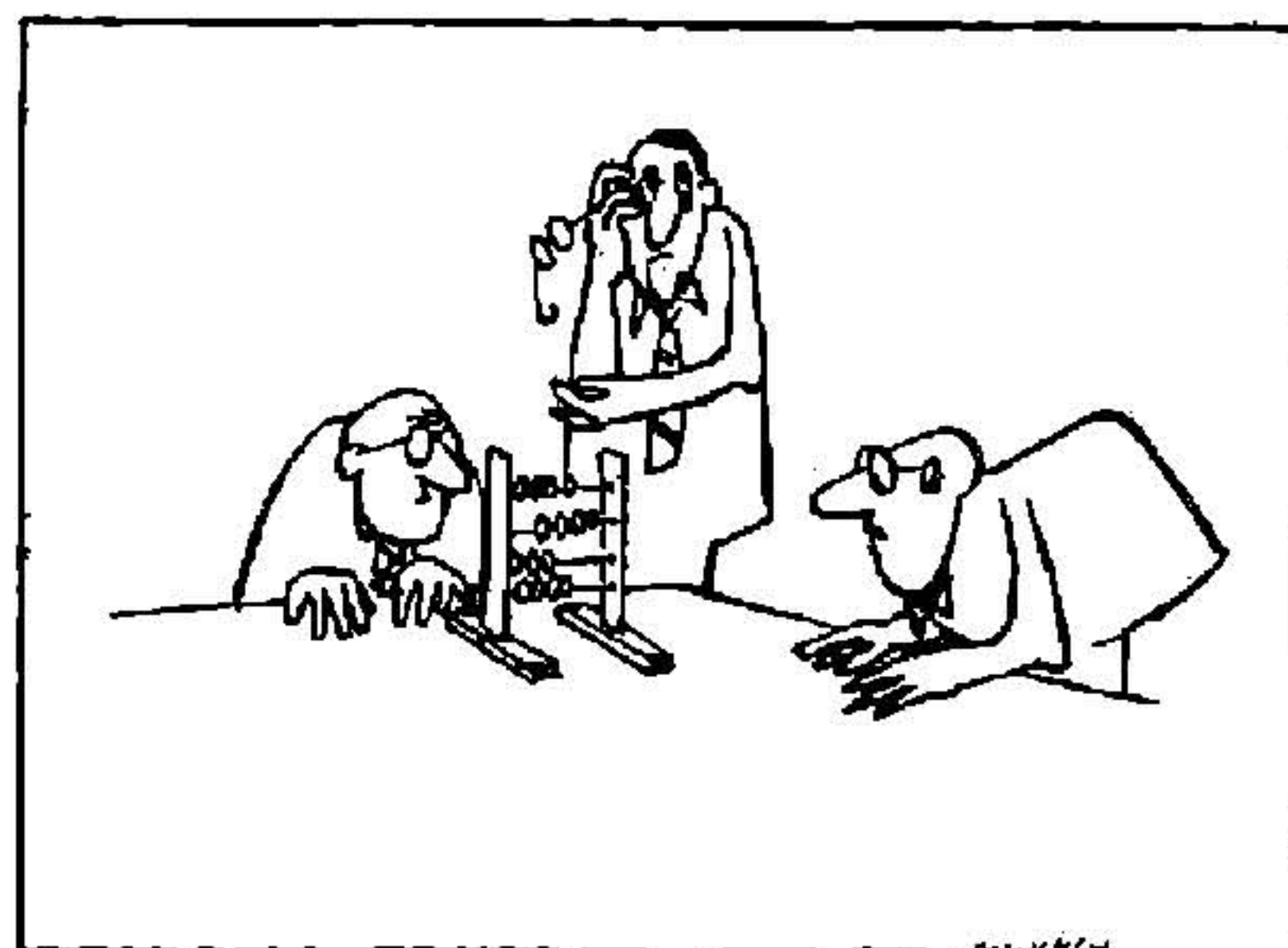


Bild 4 $43 = \text{LOLOLL}$ eingegeben

A. Mertens



Mathematik – plastisch

Im Januar 1969 erhielt ich vom Ingenieur-Hochbau Berlin den Auftrag, für den Neubau des *VEB Maschinelles Rechnen* in der Hans-Beimler-Straße, Berlin, plastische Gitter anzufertigen.

Es war unserem Künstler-Kollektiv (Architekt W. Kötteritsch, Graphiker H. Lüttger, Metallbildhauer Karl-Heinz Hillert und der Autor dieses Beitrags) von Anfang klar, daß wir an der exponierten Fassade dem Vorübergehenden etwas über die Mathematik aussagen mußten. Nach fünf Monaten intensiver Entwurfsarbeit und dem Durchsehen der verschiedensten Bücher, besonders der *Kleinen Enzyklopädie Mathematik*, hatten wir uns auf das vorliegende Resultat geeinigt.

In den Mittelpunkt setzten wir „den Menschen als Maß aller Dinge“ nach den Proportionslehren von *Leonardo da Vinci* und *Albrecht Dürer*. Links und rechts davon zeigen wir die Entwicklung der Mathematik von den alten Ägyptern bis zu *Ziolkowski*, dem Vater der Raumfahrt. Den Abschluß bilden zu beiden Seiten die Konstruktionen eines Dreiecks und einer Hyperbel.

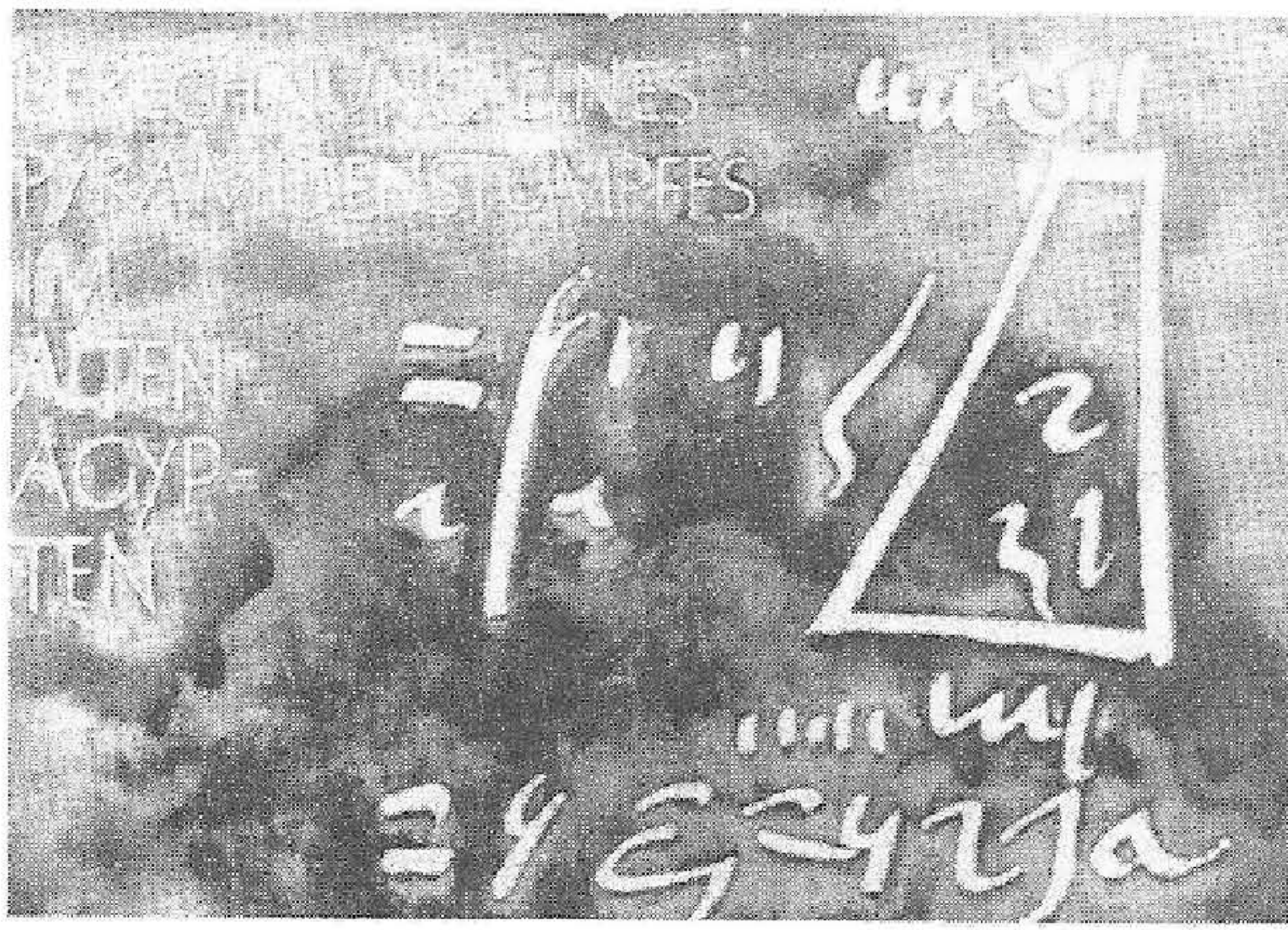
Entsprechend dem modernen Charakter der Architektur verwendeten wir Materialien wie verchromten Stahl, Messing und Kupfer. Die bildlichen Darstellungen sind Kupferätzungen.

Die Entwicklung der Mathematik wird durch folgende Kupferätzungen gezeigt:

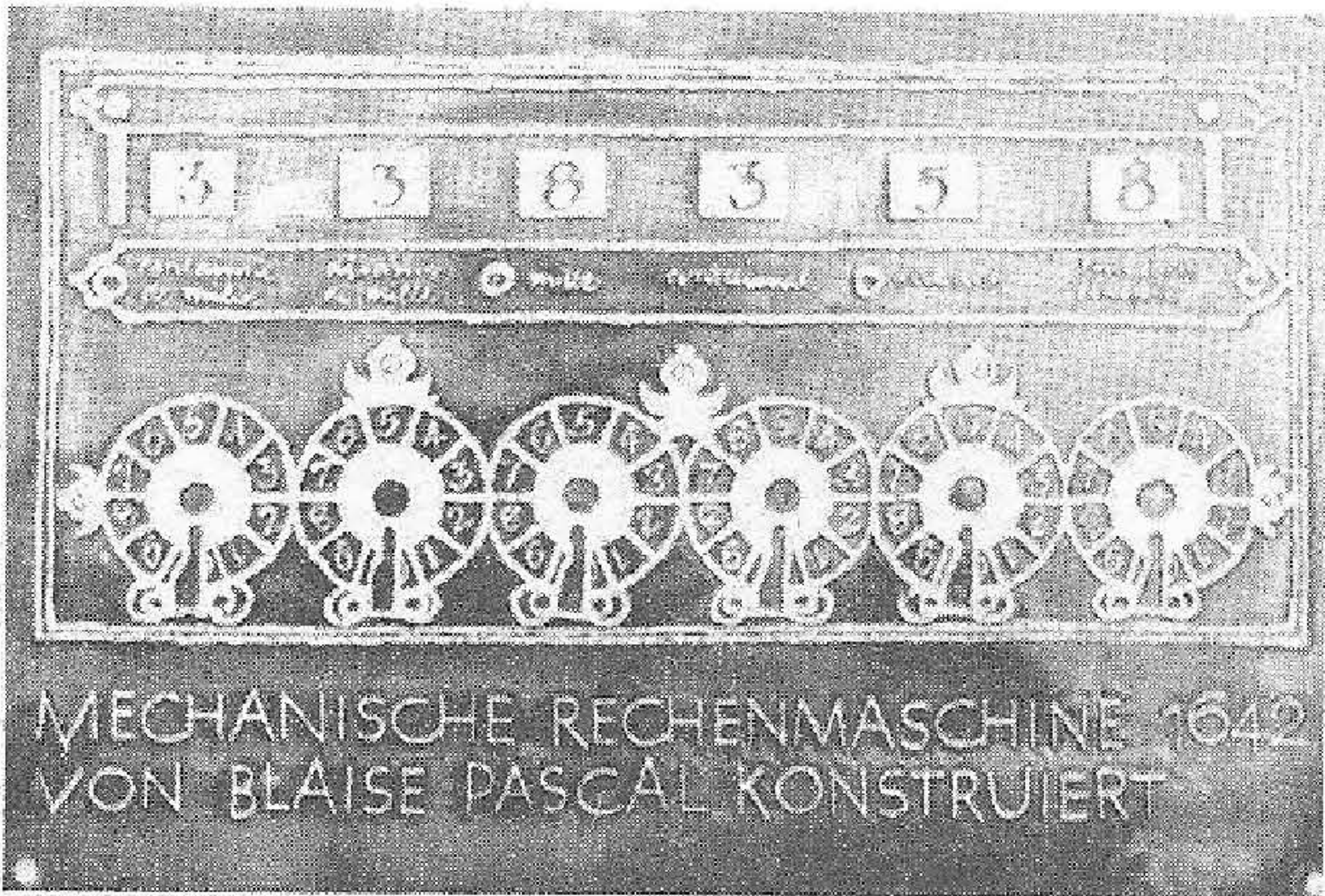
Beim Zählen im alten Ägypten und Zahlensysteme alter Kulturen · Berechnung eines Pyramidenstumpfes (Ägypten) · Griechisches Alphabet mit dem Hinweis: In der Mathematik haben die alten Griechen mit Beweisen operiert, dadurch wurde diese zur Wissenschaft · Lehrsatz des Pythagoras in Anwendung beim Entfernungsmessen · Porträt Albrecht Dürer · Proportionskanon von Albrecht Dürer · Porträt Adam Ries · Porträt Galileo Galilei · Ballistische Berechnung Galileis · Porträt Blaise Pascal · Abbildung der ersten Rechenmaschine von Pascal · Porträt G. W. Leibniz · Rechenmaschine von Leibniz und Darstellung des Binären Systems von Leibniz, das die Grundlage für die heutige Rechenautomatik ist · Porträt Isaac Newton · Formel: Berechnung der Entfernung zweier Punkte im Raum · Diagramm aus Newtons Principia · Porträt Leonhard Euler · Eulersche Dreiecke · Porträt C. F. Gauß mit Formel vom 17-Eck · Porträt Albert Einstein · Datenspeicher eines Computers · Porträt K. E. Ziolkowski mit Formel zur Berechnung kosmischer Geschwindigkeiten (Fundamentalgleichung der Raketen-Technik) · Raumstationen im Weltall.

H. Worner



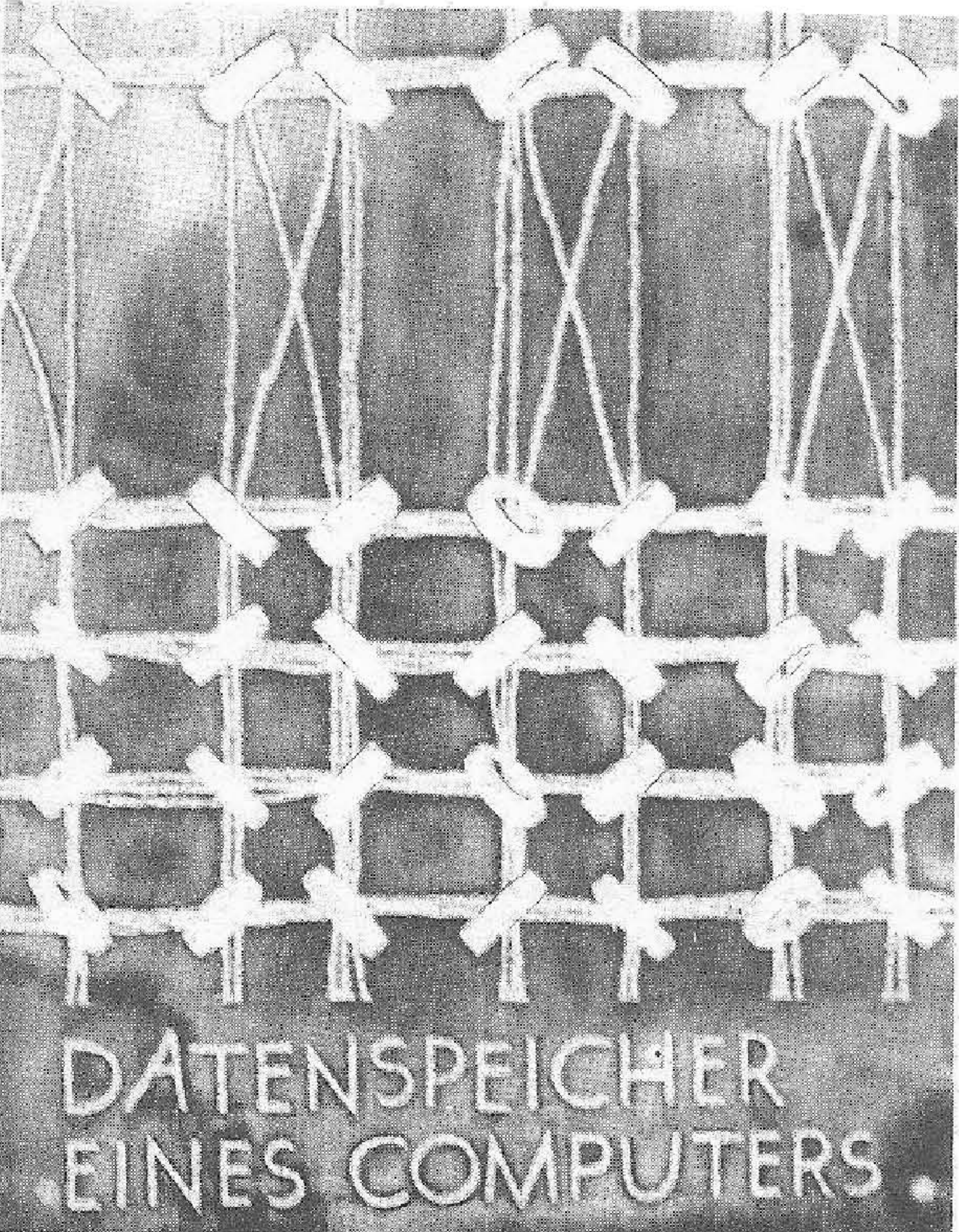


Berechnung eines Pyramidenstumpfes im alten Ägypten



Mechanische Rechenmaschine 1642 von Blaise Pascal konstruiert

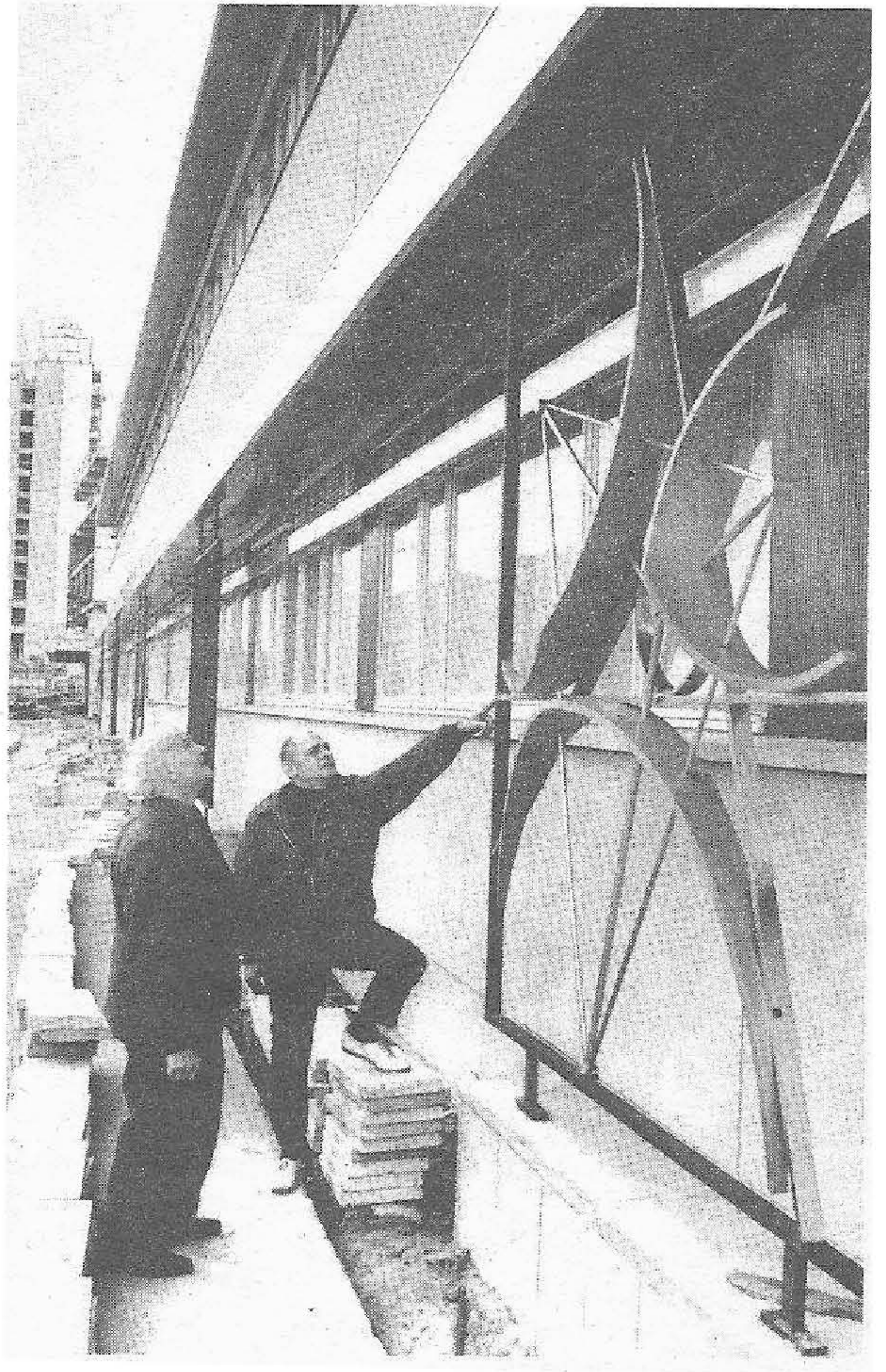
Datenspeicher eines Computers



alpha stellt vor:

Bildhauer Heinz Worner

Seine Entwicklung ist typisch für einen jungen Menschen, den die Arbeiterklasse geformt hat. Der Vater, ein Tischler, fiel im 1. Weltkrieg, die Mutter starb an Tuberkulose. Tagsüber als Steinbildhauer und Stukkateur und des Abends als Schüler der Kunstgewerbeschule und Marxistischen Arbeiter-Hochschule erhielt er sein Rüstzeug fürs Leben. Bei den Naturfreunden, im Arbeitersportverein Fichte und seit 1931 in der Kommunistischen Partei Deutschlands war er am politischen Leben Berlins aktiv beteiligt.



Montage der Plastik: Konstruktion eines Dreiecks (Masse etwa 0,6t) — im Bild links der Autor dieses Artikels

Im Oktober 1933 wurde H. Worner von der Gestapo verhaftet. Nach der Entlassung war er freischaffend tätig. Erneute illegale Arbeit zwang ihn 1937 Deutschland zu verlassen. Das „goldene Prag“ gab ihm viele künstlerische Anregungen, zeigte ihm aber auch das harte Los der politischen Emigration. 1939 gelang es ihm, über Polen nach England zu kommen. Während des 2. Weltkrieges war er im Freien Deutschen Kulturbund tätig, dessen größte Aufgabe es war, der englischen Bevölkerung das andere, das bessere Deutschland zu zeigen. 1946 nach Berlin zurückgekehrt, arbeitete er zunächst im Volk-und-Wissen-Verlag, später an der Hochschule für Bildende und Angewandte Kunst in Berlin-Weißensee. Seit 1957 ist er freischaffend tätig.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer):

14. Oktober 1972

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Die Lösungen sowie die Punktbewertungstabellen werden ab 14. Oktober 1972 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 5

1. Auf einer Geburtstagsfeier stellt Rainer seinen Gästen folgende — schon im Altertum bekannte — Knobelaufgabe:

Eine Schnecke beginnt am Anfang eines Tages vom Erdboden aus eine 10 m hohe Mauer emporzukriechen.

In der folgenden Zeit kriecht sie während der ersten 12 Stunden je eines Tages um 5 m höher und gleitet während der restlichen 12 Stunden des gleichen Tages jeweils um 4 m nach unten.

Nach wieviel Stunden hat sie erstmals die gesamte Mauerhöhe erreicht?

2. Heinz, Gerd und Jochen haben sich in einem Zeltlager für Thälmann-Pioniere kennengelernt. Von diesen drei Jungen ist folgendes bekannt:

(1) Mindestens zwei von ihnen spielen Tischtennis, mindestens zwei Fußball.

(2) Einer von ihnen wohnt in Berlin, einer in Leipzig und einer in Rostock. Keiner von ihnen wohnt gleichzeitig in zwei dieser Orte.

(3) Nur Heinz und der Berliner sind Tischtennispieler.

(4) Nur Gerd und der Leipziger sind Fußballspieler.

(5) Jochen, der Handball spielt, ist älter als der Leipziger.

(6) Keiner der Tischtennispieler spielt auch Handball.

(7) Der Handballspieler ist nicht der älteste der drei Jungen.

Gib von jedem der drei Jungen an, wo er wohnt und welche der drei Sportarten er betreibt! Wer ist der älteste und wer der jüngste der drei Jungen?

3. Von einem Bahnhof wurden mit zwei LKW Kartoffeln abtransportiert, und zwar insgesamt 170 t. Der erste LKW, der bei jeder Fahrt mit 4 t Kartoffeln beladen wurde, führte insgesamt 20 Fahrten aus.

Wieviel Fahrten führte der zweite LKW insgesamt aus, wenn er bei jeder Fahrt mit 5 t der Kartoffeln beladen wurde, die der erste LKW nicht abtransportiert hatte?

4. Erklärung:

Mit der Schreibweise einer „fortlaufenden Ungleichung“ $a < b < c < d$ drückt man aus, daß die drei Ungleichungen $a < b$, $b < c$ und $c < d$ gelten.

Es gelten dann auch die Ungleichungen $a < c$, $a < d$ und $b < d$.

Aufgabe:

Es seien w, x, y, z vier natürliche Zahlen, für die folgende Ungleichungen gelten:

(1) $z > x$ (2) $z < w$ (3) $w > x$

(4) $x < y$ (5) $y > w$ (6) $z < y$

Stelle fest, ob sich alle diese Ungleichungen in Form einer fortlaufenden Ungleichung schreiben lassen!

Olympiadeklasse 6

1. Von 30 Schülern einer Klasse lesen regelmäßig 20 Schüler die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen“ (Frösi), 12 Schüler die mathematische Schülerzeitschrift „alpha“ und 6 Schüler weder „Frösi“ noch „alpha“.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Klasse, die beide Zeitschriften lesen!

2. Ein Betrieb will unter Verwendung des gleichen Uhrwerks Uhren verschiedener Ausführung herstellen. Zu diesem Zwecke stehen sechs verschiedene Gehäuseausführungen, vier verschiedene Ausführungen von Zifferblättern und drei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.

Gib die Anzahl aller verschiedenen Ausführungen von Uhren an, die sich unter diesen Umständen herstellen lassen!

3. In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

Maschine A: 15 m ²	Maschine D: 60 m ²
Maschine B: 5 m ²	Maschine E: 18 m ²
Maschine C: 18 m ²	Maschine F: 50 m ²

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

Maschine A: 14 m² Maschine D: 21 m²

Maschine B: 6 m² Maschine E: 13 m²

Maschine C: 15 m² Maschine F: 17 m²

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.

a) Berechne (in m²) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!

b) Wir nehmen an, daß die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als „Gesamtlänge der Transportwege“ bezeichnen.

Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

4. Eine Strecke von 168 m Länge soll in drei Teilstrecken geteilt werden, deren Längen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet seien. Dabei soll die zweite Teilstrecke dreimal so lang wie die erste und die dritte Teilstrecke viermal so lang wie die erste sein.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Längen a, b, c der Teilstrecken so anzugeben, daß eine Teilung mit diesen Eigenschaften entsteht!

Olympiadeklasse 7

1. Klaus hatte an einem Sonnabend um 12.00 Uhr seine Armbanduhr nach dem Zeitzeichen von Radio DDR eingestellt. Er bemerkte am folgenden Sonntag um 12.00 Uhr beim Zeitzeichen, daß seine Uhr um genau 6 Minuten nachging, vergaß aber, sie richtig zu stellen. Er wollte am folgenden Montag früh genau um 8.00 Uhr fortgehen.

Welche Zeit zeigte seine Uhr zu dieser Uhrzeit an, wenn angenommen wird, daß seine Uhr während der ganzen Zeit gleichmäßig lief?

2. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z , von denen jede die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar.

(2) Vertauscht man bei der Zahl z die an der Hunderterstelle stehende Ziffer mit der an der Einerstelle stehenden, so erhält man eine neue dreistellige Zahl z' , die $\frac{2}{3}$ der Zahl z beträgt.

3. Beweise den folgenden Satz:

Stehen in einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ($\overline{AD} = \overline{BC}$) die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander, dann ist die Länge der Mittellinie dieses Trapezes gleich der Länge seiner Höhe.

4. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Ein Punkt C_1 soll folgende Eigenschaften haben:

(1) Das Dreieck $\triangle ABC_1$ ist flächengleich zu dem Dreieck $\triangle ABC$,

(2) $\overline{AC} = \overline{AC_1}$,

(3) $C \neq C_1$.

- a) Gib eine Konstruktion an, durch die man alle Punkte C_1 erhalten kann, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen!
- b) Untersuche, wie die Anzahl der Punkte C_1 mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von Eigenschaften des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ abhängt (Fallunterscheidung)!

Olympiadeklasse 8

1. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z , von denen jede die folgenden Bedingungen erfüllt:
(1) Die Quersumme der Zahl z beträgt 12
(2) Die aus der Zehner- und aus der Einerziffer (in dieser Reihenfolge) der Zahl z gebildete zweistellige Zahl ist das Fünffache der aus der Hunderterziffer von z bestehenden (einstelligen) Zahl.
2. Von einem Würfel mit der Kantenlänge $a=9$ cm seien an jeder seiner Ecken jeweils ein Würfel mit einer Kantenlänge $b < \frac{a}{2}$ herausgeschnitten. (Die Flächen der herausgeschnittenen Würfel seien parallel zu den entsprechenden Flächen des großen Würfels).
a) Zeichne ein Schrägbild des Restkörpers ($\alpha=60^\circ$, 1:3) für $b=3$ cm!
b) Es gibt genau einen Wert von b , für den das Volumen V_R des Restkörpers 217 cm³ beträgt.
Ermittle diesen Wert!
3. Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 000 fortlaufend nebeneinander geschrieben. Es entsteht die Zahl mit der Ziffernfolge 123456789101112.....
Welche Ziffer steht in dieser Zahl an der 300 001. Stelle?
4. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$. Konstruiere um jeden der Punkte A, B, C einen Kreis derart, daß die so entstandenen Kreise einander paarweise von außen berühren!

Olympiadeklasse 9

1. Zeigen Sie, daß es für jede ganze Zahl $n \geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt. (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)
2. Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10% weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10% höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.
Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?
3. Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis 2:5 teilt.
Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von 30° .

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist!

4. Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

Olympiadeklasse 10

1. Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion vier ebenflächig begrenzte Körper mit jeweils genau 6 Ecken, von denen der erste genau 5, der zweite genau 6, der dritte genau 7 und der vierte genau 8 Flächen besitzt!
Ermitteln Sie jeweils für diese Körper die Anzahl aller Kanten!
Hinweise zur Anfertigung der Zeichnungen: Sämtliche Zeichnungen sind unter Benutzung des Lineals anzufertigen. Von Flächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen. Die Projektion ist so zu wählen, daß die Eckpunkte sämtlich voneinander verschiedene Projektionen haben.
2. In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei eine Parabel durch die Gleichung $y=x^2$ gegeben.
Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die nicht parallel zur y -Achse verläuft und mit der Parabel genau einen Punkt P mit der Abszisse 3 gemeinsam hat!
3. Gegeben seien zwei Strecken mit der Länge a und b .
Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\frac{a \cdot b}{a+b}$!
4. In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet:
Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte.
Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld genau für drei Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

$$\frac{a \cdot b}{a+b}!$$

2. Man beweise den folgenden Satz:
Gelten für die Maßzahlen a, b, c der mit gleicher Maßeinheit gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen $1 < a < \sqrt{2}$, $1 < b < \sqrt{2}$, $1 < c < \sqrt{2}$, so ist das Dreieck spitzwinklig.
3. Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c .
Zu der Funktion $y=x^3+ax^2+bx+c$ (1)
soll eine Funktion $y=x^3+mx+n$ (2)
ermittelt werden, so daß der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x -Achse entsteht. Man zeige, daß dies immer möglich

Olympiadeklasse 11/12

1. Eine „utopische Aufgabe“: Als im dritten Jahrtausend u. Z. innerhalb von zwei Tagen nacheinander vier Kosmonauten von Planeten anderer Sonnensysteme auf einem Kosmodrom der Erde landeten, war die Verständigung der Erdenbewohner mit ihnen, aber auch die der Kosmonauten untereinander zunächst schwierig. Zwar waren diese durch die Farben rot, gelb, schwarz und blau ihrer Raumanzüge leicht zu unterscheiden, über ihre Herkunft aber war nichts bekannt.

Erst nach einiger Zeit konnte festgestellt werden, daß sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D zur Erde kamen. Folgende Informationen konnte man erhalten: Der rote und der schwarze Kosmonaut waren schon einmal auf einer kosmischen Reise zusammengetroffen und kannten sich daher. Der von A kommende Kosmonaut war dagegen nicht mit dem von B und der von C stammende Kosmonaut nicht mit dem von D bekannt. Der rote und der schwarze Kosmonaut konnten sich gut verständigen, und bald konnten das auch der gelbe und der blaue Kosmonaut, während sich die Kosmonauten von A und D nach wie vor nur schlecht verständigen konnten.

Nach langwierigen Berechnungen konnte festgestellt werden, daß der gelbe Kosmonaut älter war als der blaue. Ferner war der von D kommende Kosmonaut älter als der von B kommende und der von A stammende älter als der von C stammende.

Beim Versuch festzustellen, welcher Kosmonaut von welchem Planeten kam, zeigte sich, daß die obigen Angaben dazu noch nicht ausreichten. Immerhin konnte man ermitteln, daß für eine der vier Anzugsfarben nur noch der Kosmonaut von A oder der von D in Frage kam. Auf Grund weiterer Informationen ergab sich, daß der von D stammende Kosmonaut diese Farbe trug. Damit war auch die Anzugsfarbe des von B kommenden Kosmonauten ermittelt, aber bei den beiden übrigen noch keine Klarheit darüber vorhanden, welche Anzugsfarbe zu welchem Planeten gehörte. Erst durch die zusätzliche Information, daß der Anfangsbuchstabe der (in deutscher Sprache bezeichneten) Farbe des Raumanzuges des von A kommenden Kosmonauten im Alphabet hinter dem Anfangsbuchstaben der Farbe des Raumanzuges des von C kommenden Kosmonauten steht, konnte die Herkunft der Kosmonauten schließlich geklärt werden.

Von welchem Planeten stammte der rote, von welchem der gelbe, von welchem der schwarze und von welchem der blaue Kosmonaut? (Es sei bekannt, daß sich alle Bedingungen der Aufgabe realisieren lassen.)

2. Man beweise den folgenden Satz:
Gelten für die Maßzahlen a, b, c der mit gleicher Maßeinheit gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen $1 < a < \sqrt{2}$, $1 < b < \sqrt{2}$, $1 < c < \sqrt{2}$, so ist das Dreieck spitzwinklig.

3. Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c .
Zu der Funktion $y=x^3+ax^2+bx+c$ (1)
soll eine Funktion $y=x^3+mx+n$ (2)
ermittelt werden, so daß der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x -Achse entsteht. Man zeige, daß dies immer möglich

ist, und daß die Funktion (2) eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben.

4. Es sind alle geordneten Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x und y ($x \leq y$) anzugeben. Für die die Gleichung

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} \text{ erfüllt ist.}$$

Wissenschaftliche Haupttagung

der Mathematischen Gesellschaft der DDR

Vom 28. August bis 2. September findet die Wissenschaftliche Haupttagung der MG 1972 an der Technischen Universität Dresden statt. Sie steht unter dem Thema: *Mathematik und wissenschaftlich-technische Revolution*.

Das Programm wird in acht Tagungssektionen durchgeführt: Analysis und physikalische Anwendungen · Mathematische Kybernetik und Rechentechnik / Mathematische Grundlagen der Informationsverarbeitung · Mathematische Methoden der Operationsforschung · Mechanik · Numerische Mathematik · Theoretische Mathematik · Unterricht und Ausbildung · Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik. Eine Gruppe von 50 Jungen Mathematikern (vorwiegend Preisträger der letzten DDR-Olympiade) führen zur gleichen Zeit einen zentralen Ferienlehrgang in Dresden durch. Sie nehmen an der feierlichen Eröffnung, dem Hauptvortrag und einigen weiteren für sie wertvollen Vorträgen der Wissenschaftlichen Haupttagung teil.

Technische Universität Dresden

Gegründet im Jahre 1828 als (Königlich-) Technische Bildungsanstalt und 1851 zur Polytechnischen Schule erhoben, hatte die heutige TU Dresden während der ersten Jahrzehnte ihrer Existenz die Aufgabe, Mechaniker, Meister und Techniker für die sächsische Industrie auszubilden. Die Gründung dieser wie auch anderer Technischer Bildungsanstalten im damaligen Deutschland war unter dem Zwang der industriellen Revolution (etwa 1815 bis 1870) erfolgt, die mit der

Einführung von Maschinen in die gewerbliche Produktion und deren damit verbundener Umwandlung in die „große Industrie“ (Marx) die Wissenschaft als Produktivkraft im Dienste des Kapitals notwendig machte. Im Jahre 1871 erhielt die Polytechnische Schule den Status eines Polytechnikums und wurde damit in den Rang einer höheren Fachschule erhoben, ohne daß die erneute Namensänderung die Gleichstellung mit einer Universität bedeutete. Das letzte Drittel des 19. Jahrhunderts ist durch ein stürmisches Wachstum der Produktivkräfte und den damit verbundenen Übergang vom Kapitalismus der freien Konkurrenz zum Imperialismus charakterisiert. Gut ausgebildete Ingenieure, Physiker, Chemiker, Mathematiker und Architekten wurden in immer größerer Zahl gebraucht, um im Zuge der wissenschaftlichen Durchdringung der Produktion das Bestreben des deutschen Kapitalismus, nach der Weltmacht zu greifen, materiell zu fundieren. In diesen 30 Jahren vervierfachte sich die Zahl der Studenten am Dresdner Polytechnikum, das im Jahre 1890 die seit langem geforderte Bezeichnung Technische Hochschule erhielt.

Das naturwissenschaftliche Weltbild wurde um die Jahrhundertwende durch epochale Entdeckungen in der Physik, Chemie und Mathematik vertieft und erweitert.

Die TH Dresden leistete wertvolle Beiträge zum naturwissenschaftlichen und technischen Fortschritt; hervorragende Wissenschaftler lehrten und forschten an dieser hohen Bildungsstätte (Grübler, Hempel, Förster, Mollner, Zeuner, Hallwachs). Bis zum zweiten Weltkrieg, aber auch noch in den Jahren der Weimarer Republik, bildete sich die TH Dresden zu einer der größten technischen Bildungseinrichtungen Deutschlands heraus. In der Zeit der Herrschaft des deutschen Faschismus gerieten sowohl die Wissenschaften wie das studentische Leben in den Bann des nazistischen Ungeistes. Die Zahl der Studenten ging rapide zurück (1932/33: 3550, 1938: 1130 Studenten).

Der verbrecherische Angriff anglo-amerikanischer Bomber auf Dresden am 13. Februar 1945 führte zur Vernichtung von etwa 85% aller Bauten der TH und ihrer Einrichtungen.

Im Oktober 1946 wurde die TH Dresden wiedereröffnet. Im Zuge der demokratischen Umgestaltung des Hochschulwesens erlangten die im gleichen Jahr eröffneten Vorseminerkurse, die später unter dem Namen „Vorstudienanstalt“ weitergeführt wurden und 1949 als ABF ihre endgültige Form erhielten, besondere Bedeutung. Mit dem Beschluß des Parteivorstandes der SED über den „Zweijahrplan für 1949/50“ begann eine neue Etappe. Im Mittelpunkt von Lehre und Forschung standen von nun an die zentralen im Plan vorgegebenen volkswirtschaftlichen Aufgaben. 1950 studierten an der TH bereits

wieder 2545 Direkt- und 1123 Fernstudenten an sieben Fakultäten mit 76 Instituten. Im Zuge der II. Hochschulreform 1951 erfolgte der Übergang zur sozialistischen Hochschule. Mit der Einführung des obligatorischen gesellschaftswissenschaftlichen Grundstudiums wurde der Marxismus-Leninismus zur weltanschaulich-theoretischen Grundlage des gesamten Studiums. Die Wiederherstellung der Altgebäude wurde beendet, das Hochschulgelände vergrößert, 75 Mill. Mark von 1949 bis 1955 investiert. Die Studentenzahlen wuchsen in schnellem Tempo; 1956 waren 14600, 1960 16800 Studierende (einschl. Fernstudenten) immatrikuliert. Am 5. Oktober 1961 wurde der TH Dresden der Status einer Technischen Universität verliehen und damit dem qualitativen und quantitativen Wachstum in Lehre, Erziehung und Forschung Rechnung getragen.

Die Mathematik — zunächst im Rahmen der damals bestehenden Möglichkeiten nach 1945 in der Pädagogischen Fakultät konzentriert — wurde im Herbst 1949 in der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften mit dem Mathematischen Seminar und drei Abteilungen für Reine Mathematik, Angewandte Mathematik und Geometrie installiert. Seit der im Jahre 1968 begonnenen III. sozialistischen Hochschulreform sind alle mathematischen Disziplinen in der Sektion Mathematik vereinigt.

Der Inhalt der Ausbildung wird von den internationalen Entwicklungstendenzen der Mathematik sowie von der Entwicklung der führenden Zweige der Volkswirtschaft der DDR bestimmt. Die Studenten werden auch an dieser Sektion mit den Problemen der Forschung und der wissenschaftlichen Arbeit in der Industrie bekannt gemacht und aktiv in deren Lösungen einbezogen.

Im Grundstudium werden den Studenten Kenntnisse vor allem im Marxismus-Leninismus, den marxistisch-leninistischen Organisationswissenschaften sowie in der Analysis, Funktionsanalysis, Algebra, Geometrie, Mengenlehre und Logik, mathematischer Kybernetik, numerischen Mathematik, Rechentechnik und Informationsverarbeitung, Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik und in allgemeiner Physik vermittelt.

Das Fachstudium wird in den folgenden Fachstudienrichtungen durchgeführt: Numerische Mathematik, Mathematische Kybernetik und Rechentechnik, Wahrscheinlichkeitstheorie und numerische Statistik.

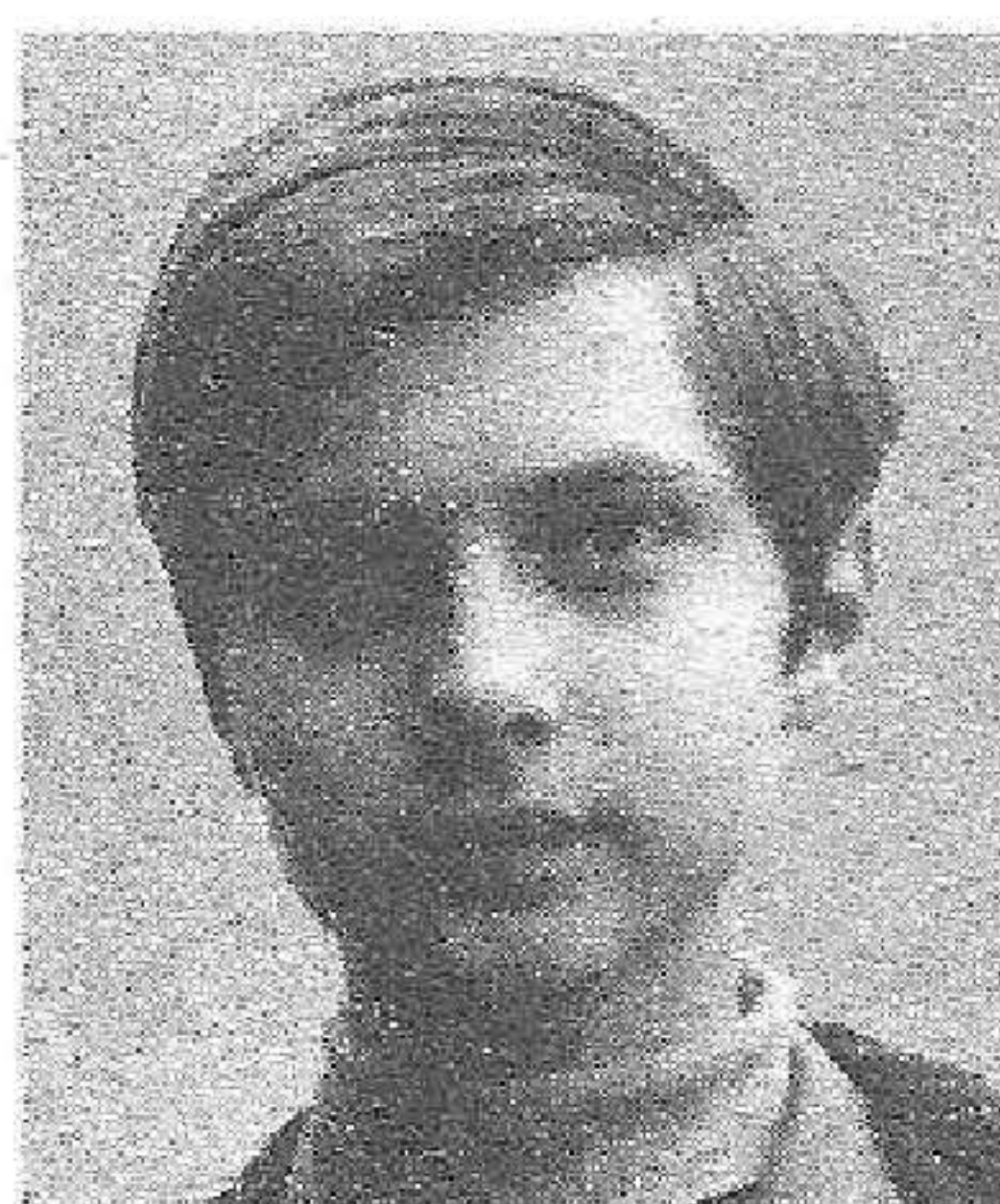
Der Einsatz der Absolventen erfolgt in volkseigenen Betrieben und Forschungszentren, die sich mit der Entwicklung und Einsatzvorbereitung von Datenverarbeitungsanlagen beschäftigen, in Rechenzentren und Hochschuleinrichtungen, Forschungs- und Planungsinstitutionen auf den Gebieten der Problemanalysen und Programmierung.

R. Sonnemann

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade (28. 3. bis 30. 3. 1972)

Erste Preise wurden vergeben:



Bernd Klipps, EOS „Heinrich Heine“, Teterow (Klasse 9)
Ralph Lehmann, EOS Strausberg, Bez. Frankfurt
(beide Olympiadeklasse 10)



Harald Englisch, EOS „Karl Marx“, Leipzig
Hans-Jürgen Fischer, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt
(beide Olympiadeklasse 12)

Zweite Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Uwe Jungnickel, EOS Dresden-Süd; Ulf Brüstel, EOS „Karl Marx“, Altenburg (Bez. Leipzig); Jörg Bergmann, Martin-Andersen-Nexö-OS, Dresden (Kl. 9)

In Olympiadeklasse 11 an: Guntram Pausch, EOS „Wilhelm Pieck“, Borna (Bez. Leipzig); Albrecht Heß, EOS Dresden-Süd (Kl. 10); Gerd Weißenborn, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin (Kl. 10)

In Olympiadeklasse 12 an: Olaf Böhme, EOS „Bertolt Brecht“, Dresden; Rolf Haftmann, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt (ehem. Dresden);

Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Klaus Heckemann, EOS „Bertolt Brecht“, Dresden; Helmut Roßmann, Antonin-Zapotocky-OS, Neubrandenburg; Hans-Jürgen Koppatz, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin (Kl. 9); Martin Hanke, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin; Heidrun Wabnitz, Spezialschule VEB Carl Zeiss, Jena; Karl-Heinz Jäckel, EOS „Geschwister Scholl“, Belzig (Bez. Potsdam); Mario Ziller,

Edgar-André-OS, Berlin; Matthias Gatzsche, Antonin-Zapotocky-OS, Neubrandenburg; Ute Winkler, EOS Kleinmachnow (Bez. Potsdam); Rolf Böllmann, Adolf-Diesterweg-OS, Nordhausen (Bez. Erfurt); Ernst Gruhlke, EOS Lützen (Bez. Cottbus); Matthias Richter, EOS „Romain Rolland“, Dresden;

In Olympiadeklasse 11 an: Matthias Günther, EOS „Hermann von Helmholtz“, Leipzig (Kl. 10); Reinhard Schuster, EOS „Hermann von Helmholtz“, Leipzig (Kl. 10); Brigitte Prawitz, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin;

In Olympiadeklasse 12 an: Roland Mattheis, Spezialschule VEB Carl Zeiss Jena; Christoph Heinze, EOS „Artur Becker“, Wilkau-Haßlau (Bez. Karl-Marx-Stadt); Pawel Kröger, 49. OS Leipzig (Kl. 7); Bernd Hofmann, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt (ehem. Dresden); Jan Paun, Spezialklasse der Humboldt-Universität Berlin; Rainer Siegmund-Schultze, EOS „Heinrich Hertz“, Berlin; Gerit Schrade, EOS „Alexander Puschkina“, Prenzlau

Ein Diplom für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe erhielt Reinhard Illge, EOS „Juri Gagarin“, Hermsdorf (Bez. Gera)

Anerkennungsurkunden für gute Leistungen erhielten 42 Schüler.

An der XI. OJM nahmen 176 Jungen und 25 Mädchen teil.

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. a) Man beweise den folgenden Satz:

Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zweier dieser Primzahlen durch 6 teilbar.

b) Man beweise, daß die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, daß jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird.

2. Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben: (1) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82 944 000 000.

(2) Ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist gleich 24.

(3) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) ist gleich 120 000.

(4) Der größte gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.

(5) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30 000.

Von den nachstehenden Aufgaben 3.1 und 3.2 ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3.1. Es sei $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit

$\overline{AB} = \overline{AD} > \overline{BC} = \overline{CD}$. Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{FB}$ gilt.

Schließlich sei E derjenige im Inneren von $ABCD$ gelegene Punkt, für den $\overline{EC} = \overline{BC}$ ($= \overline{CD}$) und $\overline{FE} = \overline{FB}$ gilt.

Beweisen Sie, daß E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt!

3.2. Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung an Hand der Lösung der folgenden Aufgabe:

Es sei $ABCDE$ ein ebenes konvexes Fünfeck derart, daß A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Als Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.

Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert. Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a:b$, wobei $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ bedeutet.

Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, daß er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden habe. Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte.

Fortsetzung auf Seite 92

Arbeitspläne Mathematik

für die außerunterrichtliche Tätigkeit
der Klassen 5/6

Die Erfahrung zeigt, daß die erfolgreiche Teilnahme an den Mathematik-Olympiaden eine systematische Vorbereitung voraussetzt, die vor allem in außerunterrichtlicher Betätigung vollzogen wird. Ein Aufgabentraining ist hierzu zwar unbedingt erforderlich, reicht aber allein nicht aus und würde auch der Aufgabenstellung des Gesetzes über das Einheitliche Sozialistische Bildungssystem und dem Mathematikbeschluß nicht entsprechen. Die außerunterrichtliche Tätigkeit im Fach Mathematik soll deshalb die im Mathematikunterricht vermittelten Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten vertiefen, ergänzen und hinsichtlich weiterer Stoffgebiete erweitern.

Zur Erfüllung dieser Forderungen wurden im Rahmen der *Mathematischen Schülergesellschaft* an der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin Vorschläge für mögliche Inhalte der außerunterrichtlichen Tätigkeit in Mathematik entwickelt. Wesentlicher Ausgangspunkt hierfür war, neben einem fundierten Grundwissen und -können, die Schüler systematisch mit solchen Arbeitsweisen vertraut zu machen, wie sie für das Lösen mathematischer Probleme im allgemeinen und unter Olympiadebedin-

gungen im besonderen notwendig sind. Bei der Auswahl der Stoffe wurde auch davon ausgegangen, daß immer mehr moderne mathematische Teilgebiete (Logik, Mengenlehre, Gruppentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Optimierung) an Bedeutung für Ökonomie, staatliche Planung und Leitung und Landesverteidigung gewinnen. Diese Gebiete sind aber entweder noch nicht oder nur in sehr geringem Maße Gegenstand des Mathematik-Unterrichts an Oberschulen. Sie spielen jedoch eine zunehmende Rolle in den Mathematik-Olympiaden.

Es erscheint jedenfalls möglich, in jeder Klassenstufe bestimmte spezifische mathematische Arbeitsmethoden zu vermitteln und die Schüler mit zunehmendem Alter an wissenschaftliches Denken heranzuführen. Dabei bilden in jeder Klassenstufe die Teilgebiete Logik, Mengenlehre und Algebra eine wichtige Grundlage.

Es muß hier noch hinzugefügt werden, daß die Effektivität der mathematischen Ausbildung der Schüler in dem Maße steigt, indem es gelingt, die Gemeinsamkeiten und Beziehungen zwischen den einzelnen Stoffkomplexen (z. B. Mengenlehre: Mengenoperationen; Logik: Aussagenlogik, Operationen) und deren Anwendungen herauszuarbeiten und den Schülern zu vermitteln. Der nachfolgende Vorschlag für die Klassenstufen 5 und 6 ist insgesamt für etwa 45 Unterrichtsstunden veranschlagt. Natürlich ist es ohne weiteres möglich, für ein geringes Zeitvolumen hieraus auszuwählen; dabei sollten aber möglichst alle angeführten Teilgebiete berücksichtigt werden.

Mit der Veröffentlichung unseres Vorschlages wollen wir auch den Schülern Anregung für das Selbststudium und die Selbstbeschäftigung geben. Dazu sei vor allem auch auf die inzwischen recht zahlreich vorhandene Ver-

öffentlichungen in der *Mathematischen Schülerbücherei* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik) und die *Übungen für Junge Mathematiker* verwiesen. Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß es sich bei diesem Vorschlag um ein Stoffangebot handelt, welches lediglich eine Orientierung für die außerunterrichtliche Betätigung in Mathematik geben kann.

K. D. Klöpfer/W. Rautenberg

Klassenstufe 5

1. Logik

1. Der Gebrauch von Variablen, einfache Terme und Aussageformen, Indizierungen,
2. Klassischer Wahrheitsbegriff (am Beispiel einfacher Aussagen demonstriert). Die Wahrheitsfunktion Negation, Konjunktion, Disjunktion und Implikation und ihre Verwendung an zahlreichen Beispielen. Anwendung auf die logische Struktur von Aussagen und zur Schulung des mathematischen Ausdrucks.

2. Mengenlehre

1. Menge, Element, Elementbeziehung, Identität von Mengen, Teilmengen
2. Spezielle Mengen (leere Menge, Einer-, Zweiermenge, endl. und unendl. Mengen), auf den Unterschied x (Element), $\{x\}$ (Menge) eingehen
3. Bezeichnungsweisen von Mengen, z. B. $\{a_1, \dots, a_n\}$
4. Potenzmenge

3. Algebra

1. Belegung von Variablen in Termen (einschl. Bedingungsanalyse wann bei Belegung Ergebnis im vorgegebenen Bereich, Beispiel: Wann ist $3a+2$ gerade Zahl?)
2. Begriff Gleichung Beispiele linearer Gleichung mit einer Variablen, Lösen durch systematisches Probieren (Tabellenverfahren), z. B. $x+3=2x-1$
3. Begriffe Operation – Umkehroperation (anschaulich interpretiert an Addition/Subtraktion)
4. Potenzen mit ganzen Zahlen (Multiplikation $2^3 \cdot 2^4$, Division $3^4:3^2$)

4. Zahlentheorie

1. Division mit Rest, Anwendung auf Dezimal- und Dualstellung, nat. Zahlen
2. Umrechnungen der Positionssysteme
3. Kryptogramme und Verwandtes (z. B. Magische Quadrate), z. B. $*3* \cdot 7 = 9*8$ Ziffern gesucht.

alpha stellt die beiden Autoren dieses Beitrags vor.



5. Analysis

1. Punktmengen auf Geraden, Zahlenstrahl
2. Unterschied $a \leq b$, $a < b$
3. Einfache lineare Ungleichung mit einer Variablen, Transitivität von Ungleichungen, Dualität ($a < b$, gdw. $b > a$)

6. Geometrie

1. Grundlagen
 - a) Dreiecke, Vierecke (allgem. Eigenschaften, bes. Linien wie Höhen, Seitenhalbierenden u. a. bzw. Diagonalen u. a.)
 - b) Räumliche Figuren (Quader, Pyramiden, Tetraeder) Beschreibungen, Dreieck als einfachste Ebene, Tetraeder als einfachste räumliche Figur
 - c) Anzahl der notwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke von Dreiecken und Vierecken
 - d) Klassifizierung von geometrischen Figuren (Dreiecke, Vierecke) unter Verwendung der $\subseteq$ -Relation
2. Konstruktionen
 - a) Grundkonstruktionen und Bezeichnungen (Lot fallen, Senkrechte errichten, Strecke bzw. Winkel halbieren, übertragen, Strecken addieren und subtrahieren)
 - b) Verschiebungen (Addition und Subtraktion)
 - c) Inhalt von Konstruktionsbeschreibungen (ohne Beweis und Determination)
3. Berechnungen
 - a) Addition und Subtraktion von Strecken (Unterschied $a - (b + c)$, $a - b + c$)
 - b) Flächeninhalte von Vierecken (Quadrat, Rechteck), rechtwinkliges Dreieck

7. Kombinatorik

1. Anordnungen, lexikografische Anordnungen und Permutationen an Beispielen (z. B. Wieviel 4-stellige Zahlen aus den Ziffern 1 bis 4)
2. Anwendung auf Mengen: Anzahl der Indizierung endl. Mengen, Anwendung der Dualzahlen zur Bestimmung des Umfanges von Potenzmengen

8. Spieltheorie

Einfache Spiele, Gewinnchancen (z. B. n Hölzer gegeben, wahlweise 1 bis $k < n$ abwechselnd wegnehmen, wer letztes Holz nimmt hat verloren), Strategie, optimales Verhalten anschaulich am Beispiel (z. B. Zahlenraten u. a.) erläutern

9. Algorithmentheorie

Anschaulicher Begriff Algorithmus, Darstellung als Anweisungsschema (Algorithmen der Rechenoperationen im Dezimal- und Dualsystem), Nachrichtenverschlüsselung dual (Morsealphabet)

Klassenstufe 6

1. Logik

1. Freie Variable, Aussage, Aussageform, Verwendung von Variablen für Aussagen, Klammernregeln für Terme und zusammengesetzte Aussagen
2. Beispiele allgemeingültiger Aussagen und für einfache logische Äquivalenzen (z. B. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$)
3. Einsetzungs- und Abtrennungsregel

2. Mengenlehre

1. Mengenalgebra, Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, Komplement
2. Einfache Regeln, z. B. $M \cup M = M$ oder falls $M \subseteq N$ so $M \cap N = M$ und $M \cup N = N$
3. Analogie zur Aussagenlogik z. B. Implikation von Aussagen – Enthaltenseinbeziehung von Mengen, Konjunktion – Durchschnitt u. a.

3. Algebra

1. Vergleiche algebraische Operationen – Mengenoperationen, Gesetze der vier Grundrechenoperationen (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität)
2. Lineare Gleichungen mit einer Variablen
3. Beispiele für algebraische Strukturen (als Mengen mit gewissen Operationen zwischen den Elementen), z. B. Multiplikation und Division mit gebrochenen Zahlen, Struktur-erweiterungen (z. B. natürliche Zahlen – Brüche)

4. Zahlentheorie

1. Allgemeine Eigenschaften der Teilbarkeit (z. B. aus $a|b$ und $a|c$ folgt $a|(b+c)$)
2. Besondere Teilbarkeitsregeln (8, 7, 11, 9, 99)
3. Analogie zu Mengen (z. B. Durchschnitt der durch drei teilbaren Zahlen mit den durch 2 teilbaren Zahlen ist die Menge der durch 6 teilbaren Zahlen)
4. Primzahlzerlegung, vor allem der grundlegende Hilfssatz: Wenn $p|ab$, so $p|a$ oder $p|b$. Sieb des Eratosthenes
5. Euklidischer Algorithmus

5. Analysis

1. Punktmengen in der Ebene, konvexe Mengen, Randpunkte, innere Punkte, abgeschlossene und offene Intervalle.
2. Mengenoperation mit Punktmengen, insbesondere mit solchen, die durch Ungleichungen bestimmt sind (z. B. $M = \{a | 1 \leq a \leq 3\} = [1, 3]$, $N = \{b | 2 \leq b < 4\} = [2, 4)$, gesucht $M \cap N$ oder $N \cup M$).

6. Geometrie

1. Grundlagen
 - a) Sätze über geschnittene Parallelen mit Umkehrungen (Wiederholung)
 - b) Ebene Figuren als Punktmengen
 - c) Dreiecksgleichungen, Analogie beim Te-

traeder (Summe der Flächeninhalte dreier Seiten stets größer als die dritte)

- d) Flächengleichheit, Flächenverwandlung
- e) Invarianten bei Bewegungen (z. B. Fixpunkte, Maße)
- f) Anwenden der Mengenoperationen (z. B. Durchschnitt Rechtecke/Rhomben = Menge der Quadrate)

2. Konstruktionen

- a) Dreiecks- und Viereckskonstruktionen (auch mit Hilfskonstruktionen)
- b) Konstruktion spezieller Winkel (z. B. 90° , 60° , 30° , 45°)

3. Berechnungen

- a) Kombinatorische Geometrie (z. B. Berechnung der Anzahl von Geraden, Strecken, Dreiecken durch vorgegebene Punkte)
- b) Ungleichungen, die sich aus Dreiecksungleichungen ableiten lassen (z. B. halber Umfang eines Dreiecks ist größer als jede Dreiecksseite)

7. Kombinatorik

1. Berechnungsformel für Anzahl der Permutationen anwenden, Permutationen mit Wiederholungen
2. Kombination von n Elementen zur Klasse 2 und 3, Anwendung in kombinatorischer Geometrie

8. Graphentheorie

1. Eulersches Brückenproblem, Zeichnen von Graphen in einem Zug (notwendige und hinreichende Bedingung)
2. Darstellung des Vierfarbenproblems als graphentheoretisches Problem (nur Einführung in die Problematik).

9. Algorithmentheorie

Darstellen der Algorithmen von Euklid, Eratosthenes als Flußdiagramm.

Zahlreiche Beispiele zur Festigung der Flußdiagrammtechnik.

Preisträger

der FDGB-Urlauberolympiade 1972
(Heft 1/72)

Folgende *alpha*-Leser erhielten Ehrenurkunde und Buchpreise: Kirsten Helbig, POS Schöneberg (Kl. 6); Andreas Schlosser, KKS Zwickau (Kl. 9); Rolf Sydow, POS Joachimsthal (Kl. 10); Petra Mittelstedt, Halle (Kl. 9); Rainer Guse, POS Bretleben (Kl. 9); Heike Kleffel, Suhl (Kl. 12); Joachim Päßler, POS Bärenstein (Kl. 8); Ellen Hartenstein, POS Radegast (Kl. 8); Mathias Otto, POS I Markneukirchen (Kl. 8); Annegret Kirsten, August-Bebel-OS Leuna (Kl. 7); Marid Helbig, 1321 Schöneberg (Kl. 3)



Über unsere Arbeit mit der mathematischen Schülerzeitschrift alpha

▲1▲ Einer Schulklasse gehören genau 30 Schüler an. Genau zehn von ihnen können schwimmen, genau 15 von ihnen können radfahren. Acht Schüler dieser Klasse können sowohl schwimmen als auch radfahren. Bestimme die Anzahl derjenigen Schüler, die
a) schwimmen, aber nicht radfahren können,
b) radfahren, aber nicht schwimmen können,
c) weder radfahren noch schwimmen können.

▲2▲ In einer Klasse mit genau 31 Schülern gibt es genau 19 Schüler, die schwimmen und genau 21 Schüler, die radfahren können. Wieviel Schüler gibt es mindestens und wieviel höchstens, die sowohl schwimmen als auch radfahren können?

▲3▲ Es sind alle natürlichen Zahlen x zu bestimmen, die die folgenden drei Ungleichungen zugleich erfüllen:
 $8 < x < 20$; $14 < x < 24$; $18 < x < 26$.

▲4▲ Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die jeweils gleich der 3. Potenz ihrer Quersumme sind.

▲5▲ Ein Rechteck, das doppelt so lang wie breit ist, hat einen Umfang von 18 cm Länge. Berechne den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

▲6▲ Der Flächeninhalt eines Rechtecks betrage 24 cm^2 . Welches von allen möglichen Rechtecken besitzt den größten Umfang; wenn die Maßzahlen der Seitenlängen natürliche Zahlen sind?

▲7▲ Warum ist die Summe aus den Längen der beiden Diagonalen eines Vierecks kleiner als die Summe aus den Längen seiner vier Seiten? Die Antwort ist zu begründen!

▲8▲ Die Schüler einer Klasse hatten zusammen 350,— M für eine gemeinsame Ferienexkursion gespart. Es bildeten sich drei Wandergruppen, und zwar zu 8, 11 und 16 Pionieren. Die Ersparnisse wurden entsprechend der Stärke der Wandergruppen aufgeteilt. Wieviel Mark entfielen auf jede der drei Wandergruppen?

▲9▲ Ein Blumenbeet, das die Gestalt eines Rechtecks besitzt, ist 7 m lang und 4 m breit. Rund herum sollen Sträucher gepflanzt werden, die voneinander einen Abstand von 25 cm aufweisen. Wie viele Sträucher sind zu pflanzen?

D. Michels/Th. Scholl

Seit Jahren bestehen an der Polytechnischen Oberschule Lübtheen Arbeitsgemeinschaften, in denen Schüler ihre mathematischen Kenntnisse aus dem Unterricht vertiefen, ergänzen und sich mit solchen Bereichen der Mathematik auseinandersetzen, die nicht im Unterricht behandelt werden.

Die Schüler der AG, Klassenstufe 9/10, beschäftigen sich (unter Leitung von Oberlehrer K. Becker) vorwiegend mit Problemen der Zahlentheorie einschließlich der diophantischen Gleichungen, kombinatorischen Fragen und kniffligen geometrischen Konstruktionen (wöchentlich zwei Stunden).

Die Aufgabe 1 der diesjährigen Schulolympiade für Klasse 10 war eine diophantische Gleichung. Ihr findet sie im Heft 4/71 unserer mathematischen Schülerzeitschrift alpha.

Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, daß sich eine Gesamtleistung von 1800 Watt ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von je 40 Watt, 60 Watt und 75 Watt, aber keine anderen zur Verfügung.

Gib alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an! Wie wir diese Aufgabe gelöst haben, möchten wir euch jetzt zeigen.

Bezeichnet man die Anzahl der Glühlampen von 40, 60 bzw. 75 Watt jeweils mit x , y bzw. z , so ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$(I) \quad x + y + z = 32 \quad \text{mit } x, y, z \in \mathbb{N}.$$

$$(II) \quad 40x + 60y + 75z = 1800$$

Setzt man

$$(I^*) \quad z = 32 - x - y$$

in (II) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$(III) \quad 35x + 15y = 600.$$

Da der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von x und y ein Teiler des absoluten Gliedes der Gleichung ist, also

$$(35; 15) = 5 \text{ und } 5 | 600,$$

besitzen die Gleichung (III) und die dazu äquivalente

$$(IV) \quad 7x + 3y = 120$$

Lösungen $[x; y] = [x_0 + 3t; y_0 - 7t]$ mit $t \in G$, wobei $[x_0; y_0]$ eines der Lösungspaare ist. Dieses Paar kann mit Hilfe zahlentheoretischer Kongruenzen ermittelt werden. Dazu empfehlen wir euch, die Beiträge über das Rechnen mit Resten in den Heften 3 bis 6 des Jahrganges 1969 sowie in den Heften 1 und 2 des Jahrganges 1970 unserer alpha zu lesen. Auch die „Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1: Zahlentheorie“ aus der Teubnerschen Verlagsgesellschaft Leipzig geben euch viele Hinweise.

Aus (IV) folgt

$$7x \equiv 120 \pmod{3}$$

$$x \equiv 0 \pmod{3}.$$

Damit können wir $x_0 = 0$ wählen und erhalten durch Einsetzen in (IV) dann $y_0 = 40$. Die Lösungsmenge für (III) ist somit $L_{III} = \{[0 + 3t; 40 - 7t]\}$ mit $t \in G$.

Aus der Wertetafel

$t \dots$	-1	0	1	2	3	4	5
$x = 3t \dots$	-3	0	3	6	9	12	15
$y = 40 - 7t \dots$	47	40	33	26	19	12	5



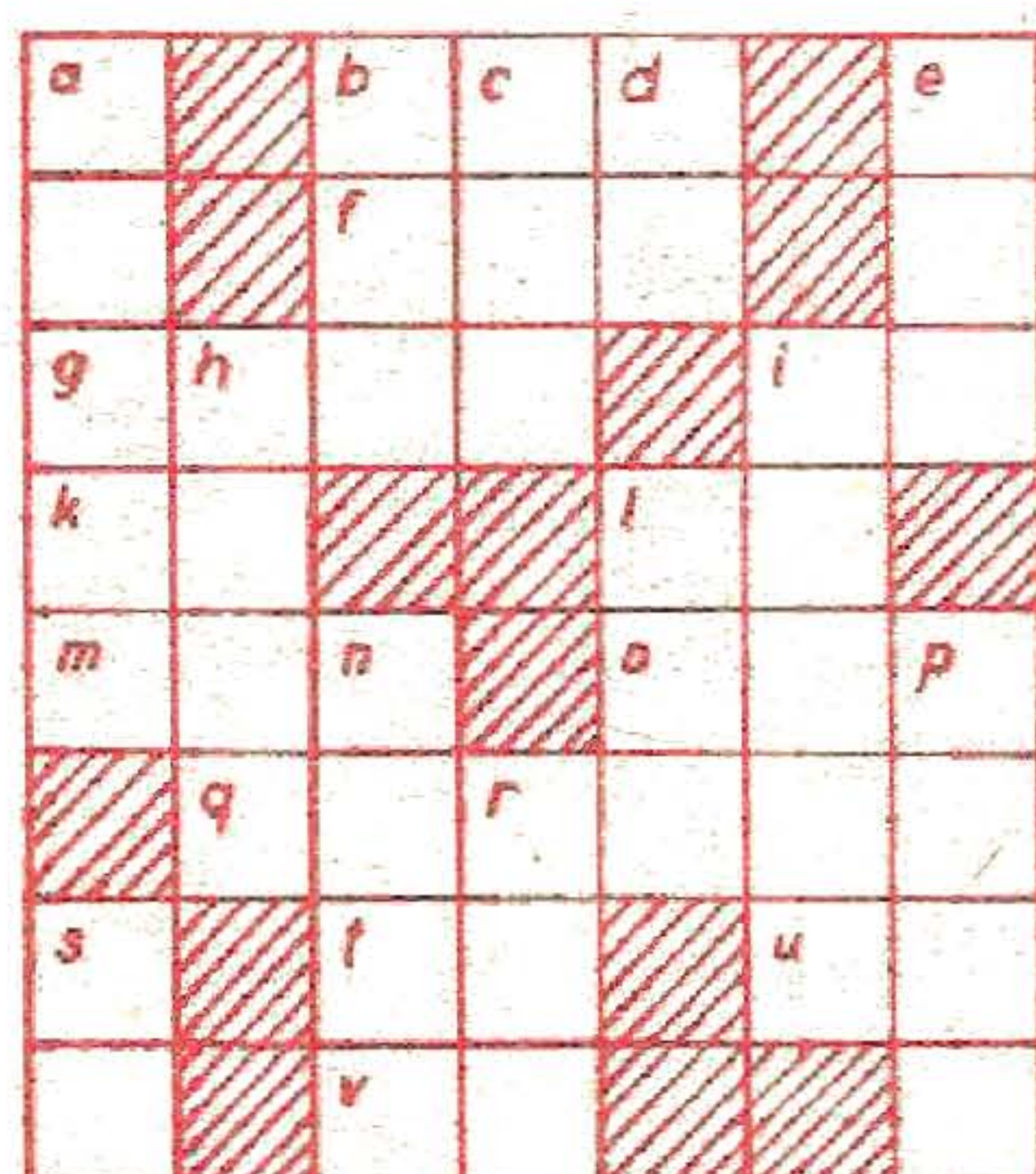


Entdeckerfreuden

Aus: LVZ v. 6. 11. 1971 — Reißig

Mathematisches Kreuzworträtsel

In die freien Felder des Schemas sind Ziffern, und zwar jeweils eine der Grundziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einzutragen, so daß sich in waagerechter bzw. senkrechter Anordnung die weiter unten definierten Zahlen ergeben.



Dabei bedeuten:

Waagerecht

- b) Die größte natürliche Zahl, die kleiner als 100π ist.
- f) Die kleinste von Null verschiedene natürliche Zahl, die durch 16 und 49 teilbar ist.
- g) Die Lösung der Gleichung $\frac{x}{30} = 1 + \frac{2x}{61}$.
- i) Die größte Primzahl, deren 11faches kleiner als 1 000 ist.
- k) Die größte zweistellige Quadratzahl.
- l) Die größte gerade zweistellige Quadratzahl.
- m) Die Lösung der Gleichung $2x - 100 = 666$.
- o) Die Lösung der Gleichung $9(x - 111) = 5(x + 9)$.
- q) Die Lösung der Gleichung $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 15\,293$.
- t) Eine Primzahl, die kleiner als 50 ist und deren Nachfolger durch 11 teilbar ist.
- u) Eine zweistellige Primzahl, die aus zwei gleichen Ziffern besteht.
- v) Zwei natürliche Zahlen, deren Summe gleich 3 ist und bei denen die Differenz aus der zweiten und der ersten Zahl ebenfalls gleich 3 ist.

Senkrecht

- a) Die Zahl $(x - 12)(x - 2)(x + 2)(2x + 11)$, wobei $x = 15$ ist.
- b) Die kleinste Primzahl, die größer als 370 ist.
- c) Die Maßzahl der Größe eines gestreckten Winkels (in Grad).
- d) Die kleinste von Null verschiedene natürliche Zahl, die durch 4 und 11 teilbar ist.
- e) Die Summe der ersten zehn Primzahlen.

- h) Die ersten vier Dezimalstellen hinter dem Komma des Bruches $\frac{9}{11}$.
- i) Die Lösung der Gleichung $423(x - 100) = 422(x + 100) + 111$.
- l) Eine dreistellige Zahl, die die vierte Potenz einer Primzahl ist.
- n) Die ersten vier Dezimalstellen hinter dem Komma für das Bogenmaß des Winkels, dessen Gradmaß gleich 22° ist (wobei die letzte Stelle gerundet worden ist).
- p) Zwei zweistellige natürliche Zahlen, von denen die erste der Nachfolger der zweiten ist und deren Summe 31 beträgt.
- r) Die größte natürliche Zahl, deren Dreifaches kleiner als 1 000 ist.
- s) Die größte zweistellige natürliche Zahl.

Karin Vetter, Oberschule Weinböhla, Kl. 8

Mathematisch formulierte Vornamen — Wer errät sie?

Mathematischer Ausdruck	Mögliche Bedeutung
r_{ik}, p_{tr}, h_{gn}	Elemente einer Matrix
u_t	von der Zeit t abhängige Lösung einer Differentialgleichung
n_φ	Einheitsvektor in φ -Richtung ([r, φ] Polarkoordinaten)
m_α, t_α	indizierte Variable
t^α	obere Grenze eines Zeitintervalls
$a \cdot i_e$	skalares Produkt des Vektors i_e mit der reellen Zahl a
$\min(n, a)$	Minimum der beiden Zahlen n und a
$G \wedge E_r$	logische Verknüpfung der Aussagen G, E_r
$\ln a$	natürlicher Logarithmus der positiven Zahl a
$I(e)$	Funktion I , abhängig von einer Veränderlichen e

Dipl. Math. Ch. Pollmer, TU Dresden

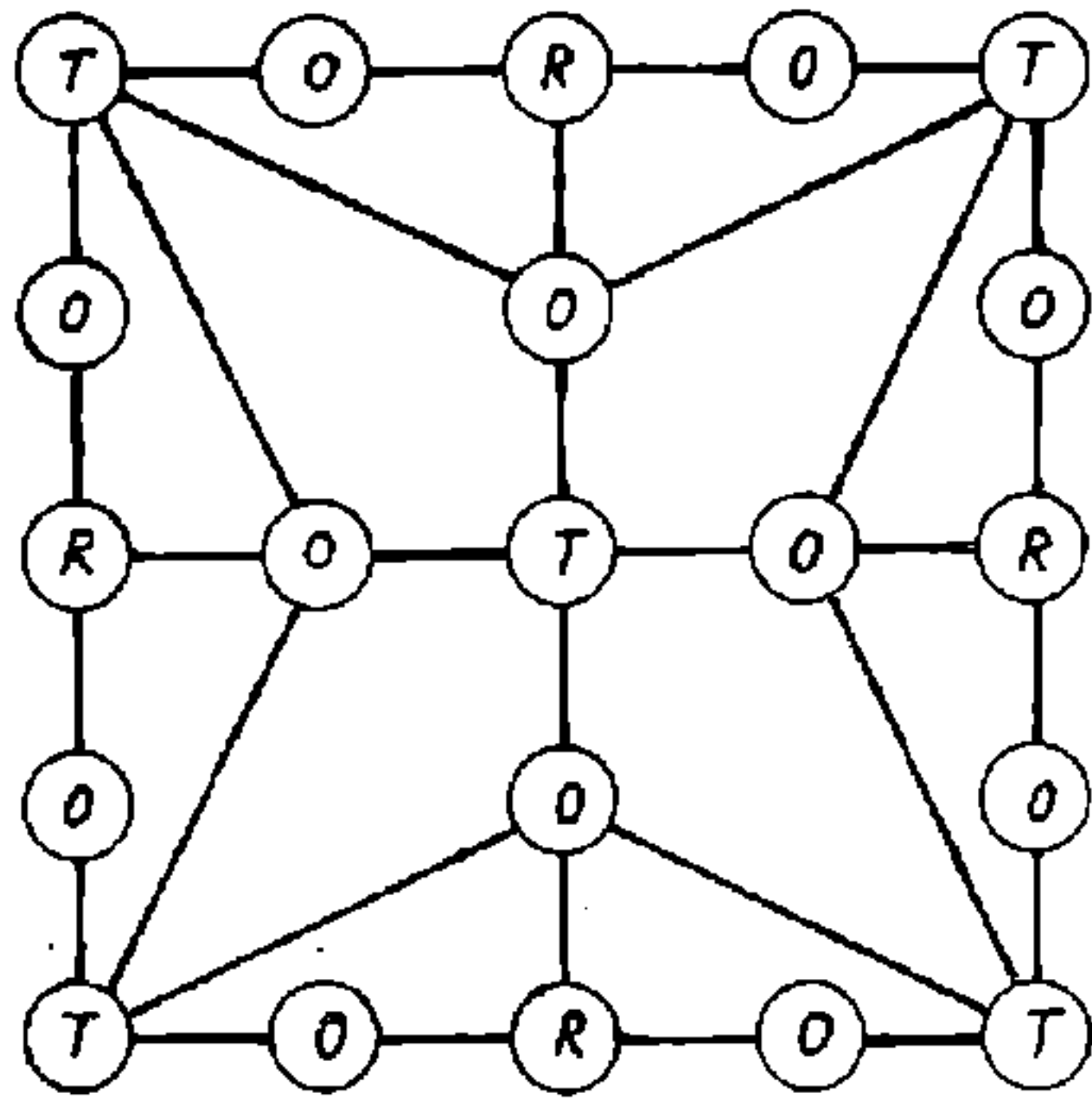
Nachgedacht — mitgemacht

$$\begin{array}{rcl} A & \cdot & B = CA \\ - & + & + \\ D & + & F = GH \\ \hline C & \cdot & GA = KA \end{array}$$

Schüler Manfred Riemer, EOS „Rainer Fetscher“, Pirna Kl. 11

Rotor

Verfolgt man in dem Graphen die Wege, so kann man das Wort „Rotor“ mehrfach lesen.
Auf wieviel Arten ist das möglich, wenn Anfangs- und Endbuchstabe *R* nicht zusammenfallen dürfen?

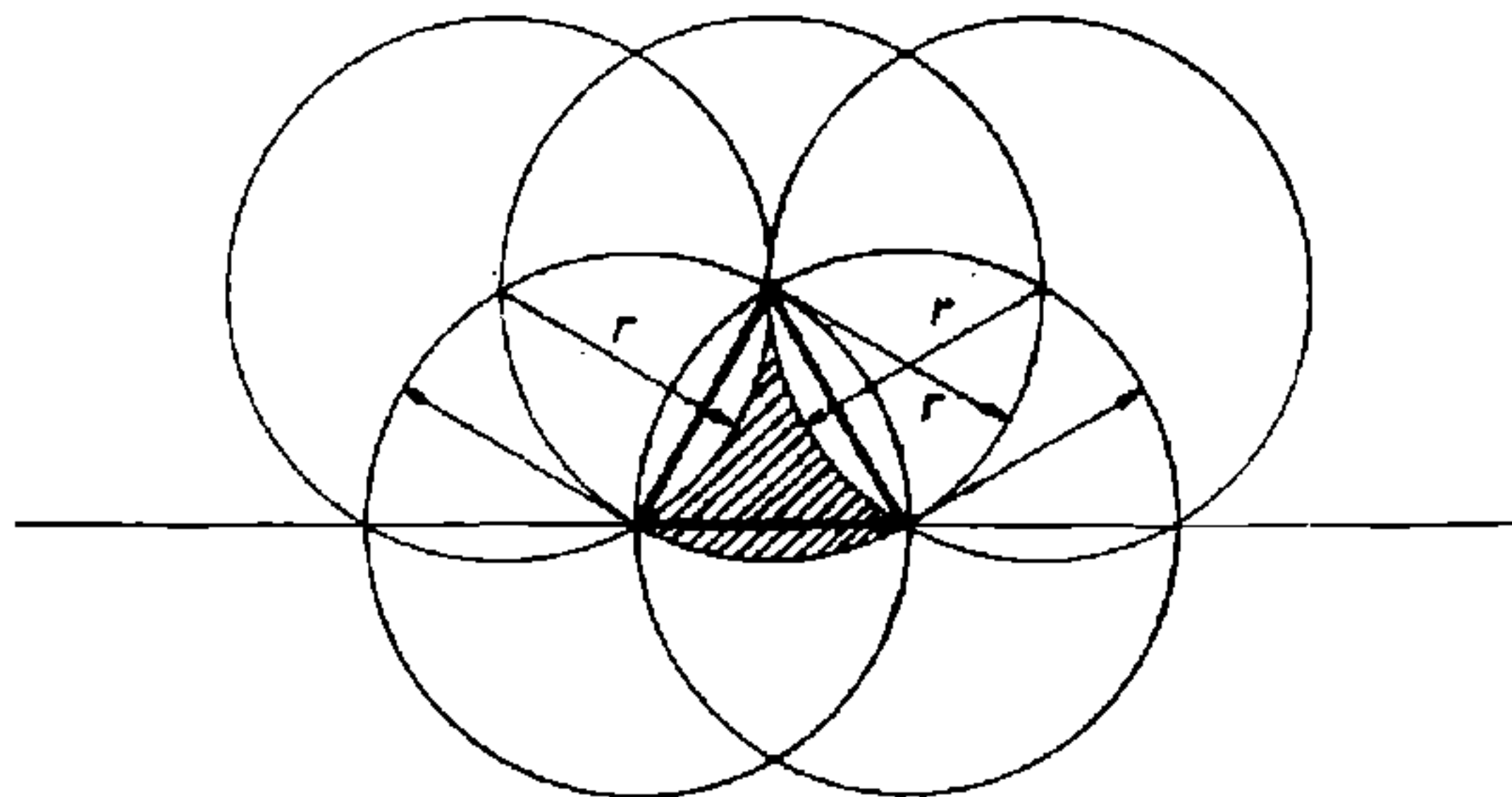


Oberlehrer Dipl.-Mathematiklehrer K. Becker, OS Lübtheen

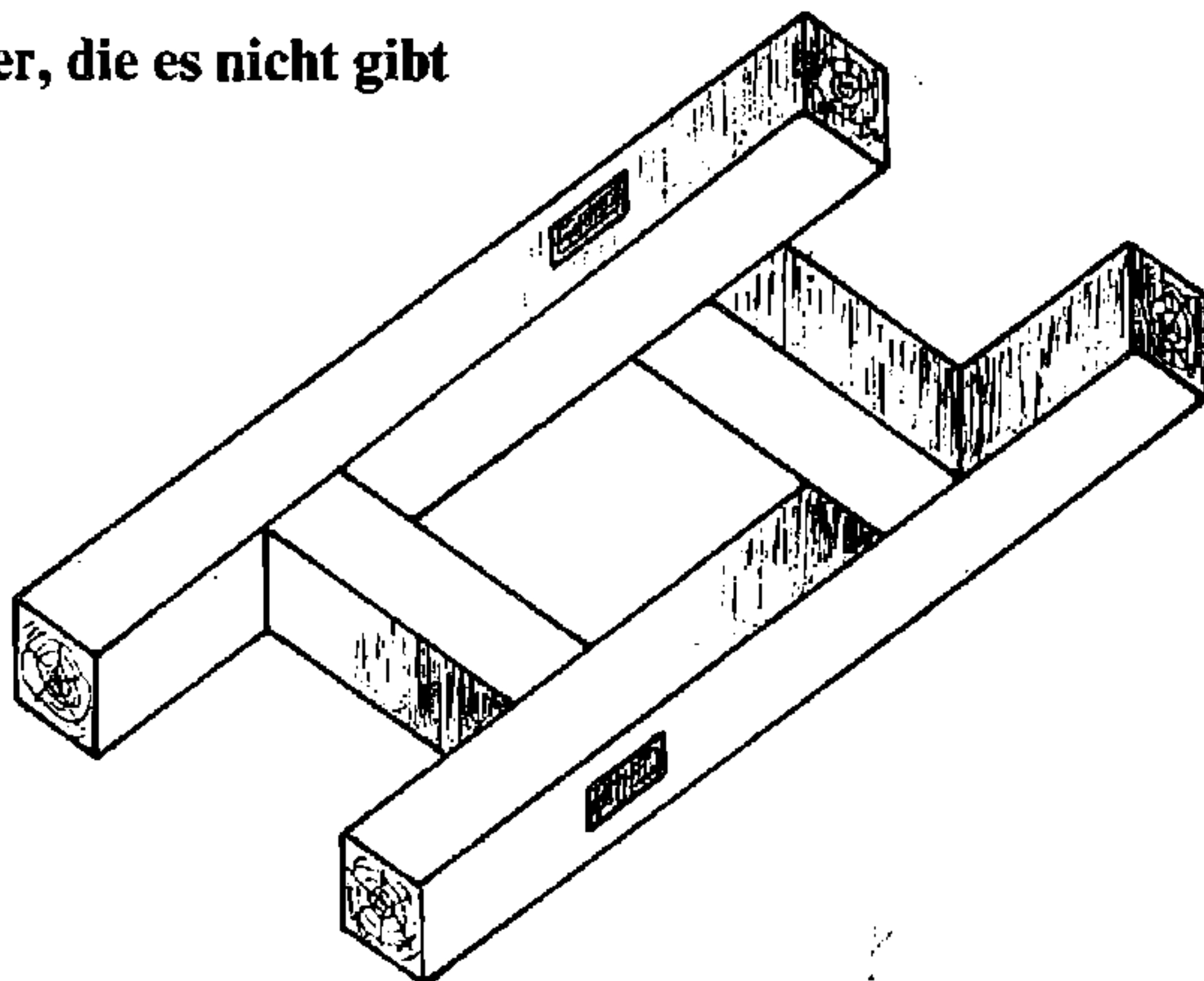
Fünf olympische Ringe — einmal anders

Es ist der Flächeninhalt *A* der schraffierten Figur zu berechnen!

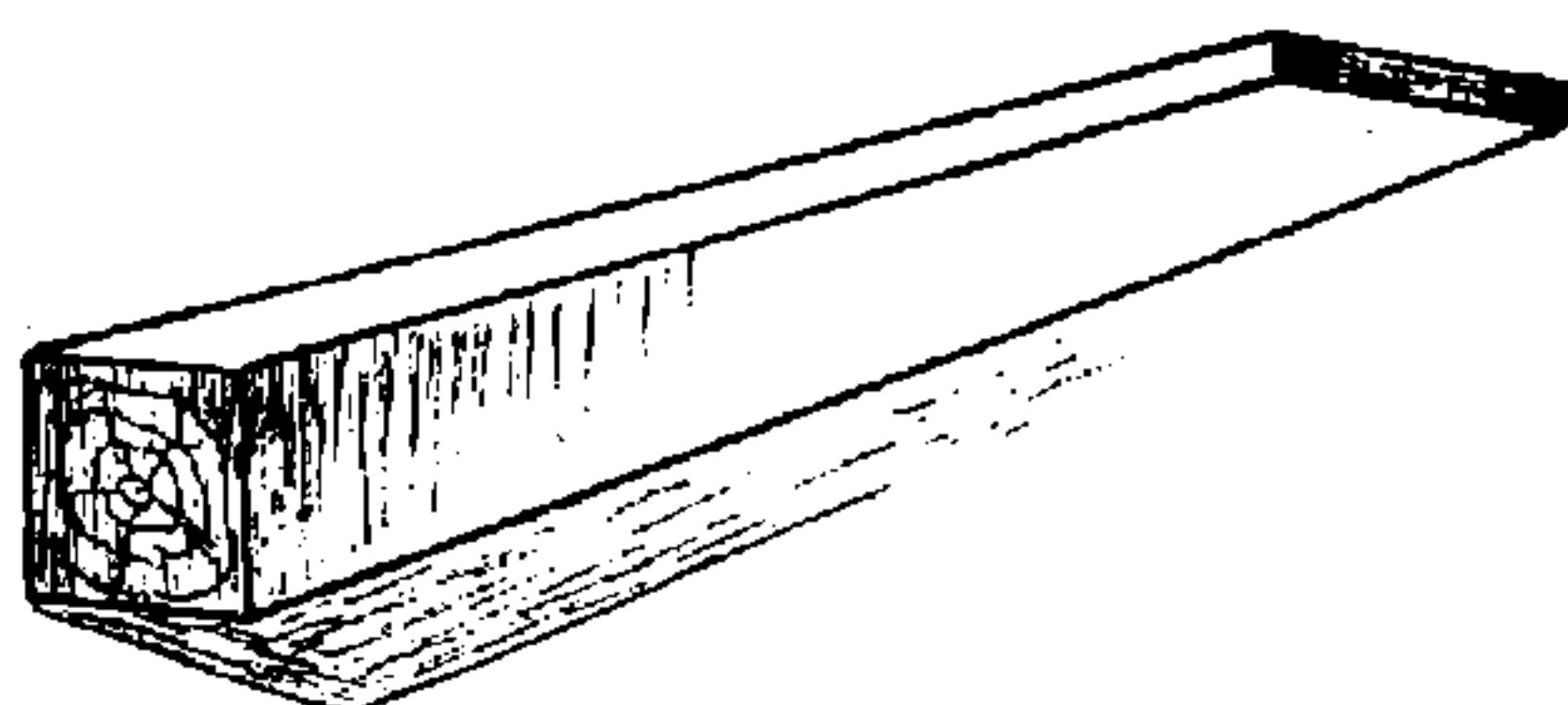
Schüler Hans-Reinhard Berger, EOS Lichtenstein, Kl. 12



Körper, die es nicht gibt

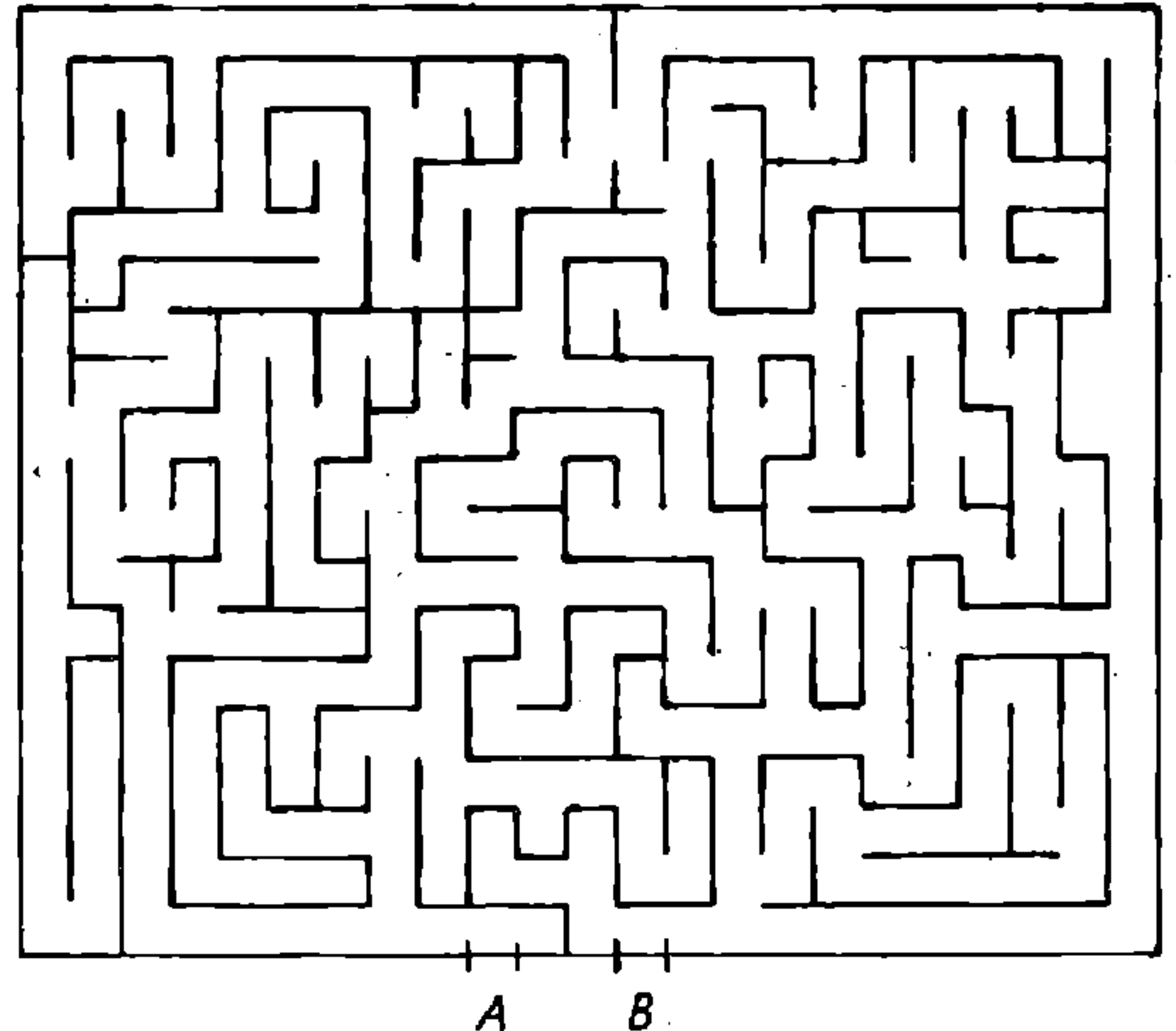


Dipl.-Ing. Dr. M. Skalicky, Wien



Labyrinth

Wer findet den kürzesten Weg von *A* nach *B*?



Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz

Ein Mathematik-Olympionik löst eine Aufgabe

Einzudringen in die schloßverhängten Gänge,
hievt er Werkzeug aus den Gruben seines Hirns,
eingelagert einst mit Paukenschlag,
entwickelt auch im eigenen Labor.

Mit dem Sinus bohrt er hier,
setzt dort den Vektorhebel an,
feilt sich einen Integralsdieterich,
um aufzuzwingen das Schloß.

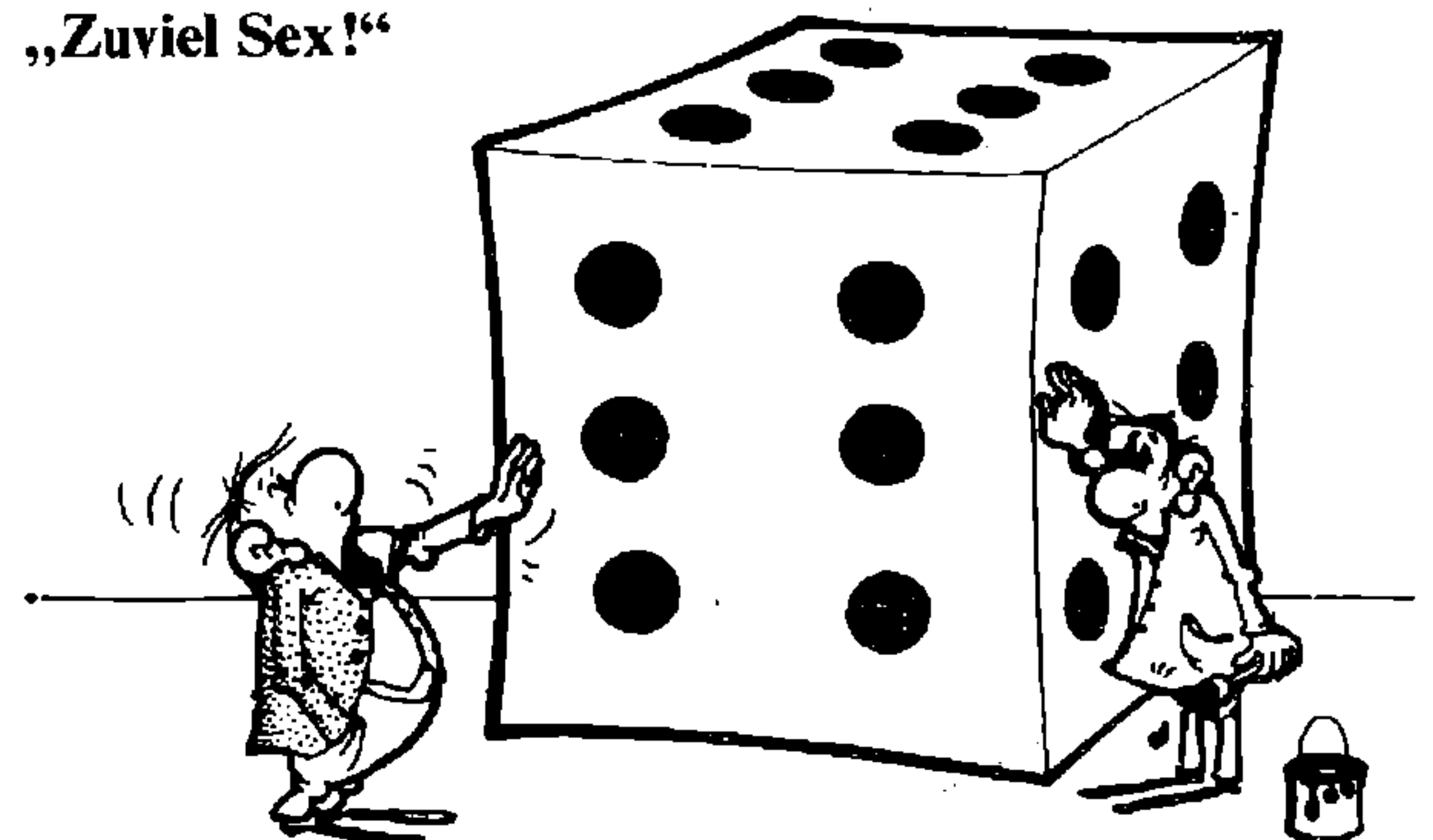
Er wickelt seinen Tintenfaden ab,
um zurückzufinden aus den Sackgassen,
die sein wegeoptimierender Computer
nicht erfaßt hat.

Eine Kommission wird
ihm einen weißen Wimpel schenken,
der ihn ausweist als geübten Schlosser,
zähen Schatzsucher
und sorgfältigen Gedankenvereiner.

Silvia Kortmann (18)

2. Zentrales Poetenseminar der FDJ in Schwerin (1971)

„Zuviel Sex!“



G. Langelotz

Aus: Kunststücke, Eulenspiegelverlag

Fortsetzung von Seite 89

4. Ermitteln Sie alle Tripel (m, x, y) aus einer reellen Zahl m , einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y , die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$(1) \quad -2x + 3y = 2m$$

$$(2) \quad x - 5y = -11.$$

5. Gegeben seien ein Quadrat $ABCD$ und auf der Geraden h durch A und C ein vom Mittelpunkt M des Quadrats verschiedener Punkt P . Die auf h senkrechte durch A laufende Gerade sei g_1 , die auf h senkrechte durch C laufende Gerade sei g_2 . Ferner sei h_1 die Gerade durch P und B und h_2 die Gerade durch P und D . Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei Q , der von g_2 und h_1 sei R , der von g_2 und h_2 sei S und der von g_1 und h_2 sei T genannt. Die Schnittpunkte der Parallelen durch Q und S zu AB sowie durch R und T zu AD seien so mit E, F, G, H bezeichnet, daß $EFGH$ ein Rechteck ist.

Schließlich sei I_1 der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und I_2 der des Rechtecks $EFGH$.

Ermitteln Sie $I_1 : I_2$!

6. Es seien A, B, C, D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt und A', B', C', D' die Schnittpunkte der aus A, B, C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$.

Man beweise, daß dann $\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = 1$ gilt.

Olympiadeklasse 11/12

1. Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck

$$\frac{2x}{|x-3| - 5} + \frac{1}{x+2} \quad (1)$$

existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die die folgende Ungleichung (2) erfüllen

$$\frac{2x}{|x-3| - 5} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \quad (2)$$

2. Es sei $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2 + \tan^2 x} & \text{für alle reellen } x, \text{ für die} \\ & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ gilt} \\ & (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \\ 0 & \text{für alle } x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Man beweise, daß die für alle reellen x durch $F(x) = f(x) + f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist.

3. Es seien P_1, P_2, P_3, Q die Eckpunkte eines nicht notwendig regelmäßigen Tetraeders. Die Strahlen aus Q durch je zwei Punkte P_i, P_j ($i, j=1, 2, 3$) bilden einen Winkel, dessen Größe α_{ij} zwischen 0° und 180° liegt. Man beweise, daß für diese Größen die Ungleichung

$$\alpha_{23} + \alpha_{31} > \alpha_{12} \text{ gilt.}$$

4. a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung $x^3z + x^2y + xz + y = x^5 + x^3$ erfüllen.

b) Man gebe unter den in (a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

5. Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x , geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:

Fügt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge $x+1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechststelligen Quadratzahl.

Von den nachstehenden Aufgaben 6.1 und 6.2 ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

6.1. Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4 \leq n \leq 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, daß auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt.

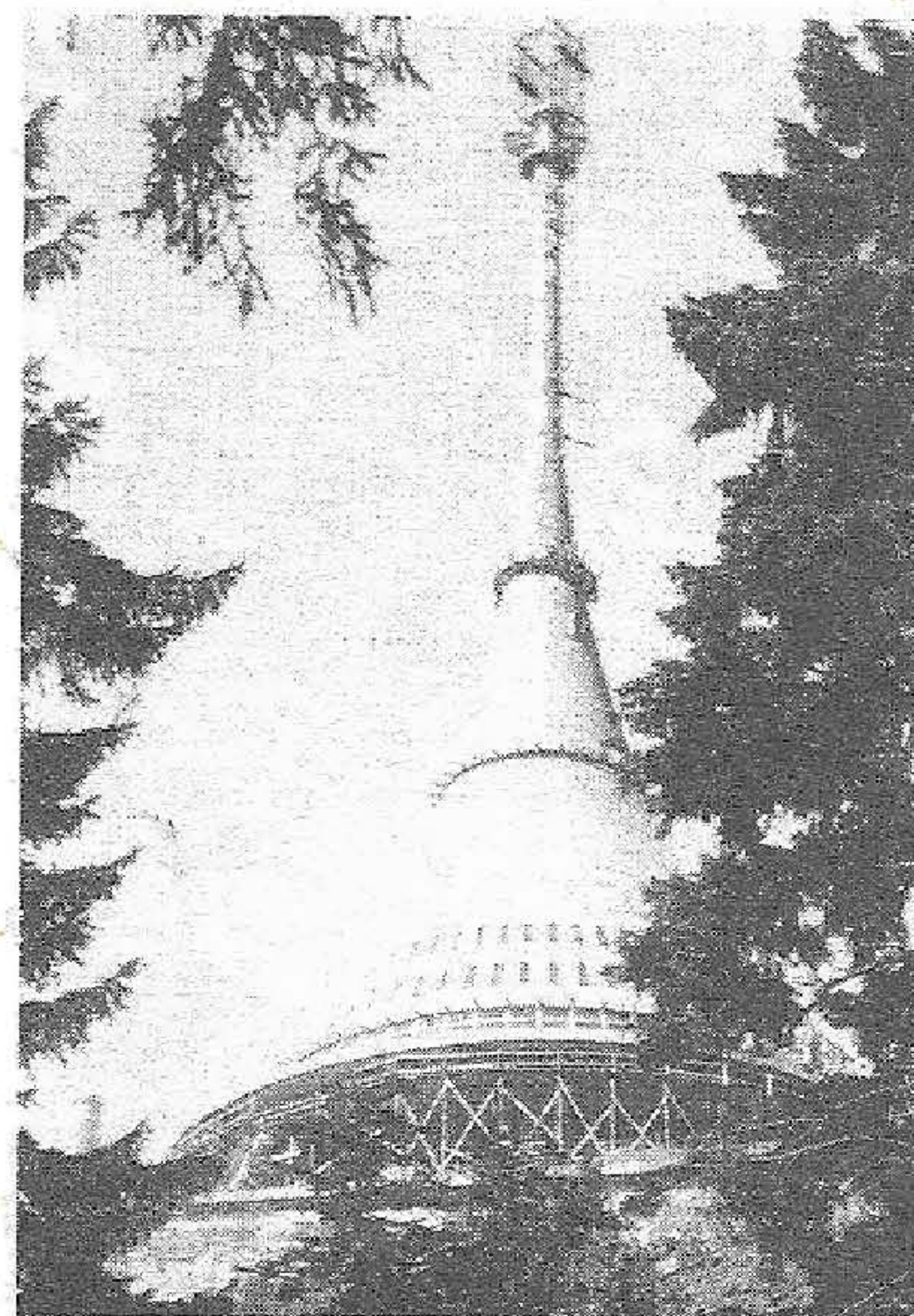
Man beweise, daß dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen.

6.2. Als „Abstand“ zweier Funktionen f und g , die im gleichen Intervall definiert sind, bezeichne man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x) - g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert.

Es seien die im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ durch $f(x) = 2 - |x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x) = -ax^2 + 2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben. Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der „Abstand“ von f und g möglichst klein ist.

Gibt es ein solches a , so gebe man alle derartigen Werte a an.

Kartengruß an alpha: Als Anerkennung für 5- bzw. 4-jährige Teilnahme am alpha-Wettbewerb erhielten 9 Schüler der POS Burkau eine Reise nach der ČSSR (Liberec-Ještěd).



Lösungen



Lösung der Aufgabe von Lektor A. Makowski

▲ 912 Wir setzen $f(n) = n^4 + 4^n$, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, und unterscheiden die folgenden Fälle:

1. Fall: Es sei $n=1$.

In diesem Falle erhalten wir

$$f(1) = 1^4 + 4^1 = 1 + 4 = 5, \text{ also eine Primzahl.}$$

2. Fall: Es sei $n=2k$ eine gerade natürliche Zahl mit $n > 1$, d. h. $k \geq 1$. Dann gilt

$$f(n) = n^4 + 4^n = (2k)^4 + 4^{2k} = 16k^4 + 16^k = 16(k^4 + 16^{k-1}).$$

In dieser Faktorenerlegung sind wegen $k-1 \geq 0$ beide Faktoren ganzzahlig, und 16 ist nicht Primzahl, also ist auch $f(n)$ nicht Primzahl.

3. Fall: Es sei $n=2k+1$ eine ungerade natürliche Zahl mit $n > 1$, also $k \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(n) &= n^4 + 4^n = 2^{2n} + 2 \cdot 2^n \cdot n^2 + n^4 \\ &= 2^{2n+1} \cdot n^2 \\ &= (2^n + n^2)^2 - 2^{n+1} \cdot n^2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$f(n) = (2^n + n^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n)(2^n + n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n). \quad (2)$$

Da n ungerade ist und $n \geq 3$ gilt, ist $\frac{n+1}{2} = k+1$ eine natürliche Zahl, und beide

Faktoren in der Faktorenerlegung von (2) sind ganzzahlig. Wir müssen nun noch zeigen, daß beide Faktoren größer als 1 sind; dann ist nämlich $f(n)$ nicht Primzahl.

Nun ist der erste Faktor größer als 1, da alle Summanden größer als 1 sind. Ferner gilt für den zweiten Faktor in (2)

$$2^n + n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n = n^2 - 2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot n + 2^{n-1} + 2^n - 2^{n-1}$$

$$= (n - 2^{\frac{n-1}{2}})^2 + 2^{n-1} \cdot (2-1)$$

$$= (n - 2^{\frac{n-1}{2}})^2 + 2^{n-1} \geq 4,$$

da $n-1 \geq 2$ gilt.

Also ist auch der zweite Faktor in (2) größer als 1, d. h. $f(n)$ ist im 3. Fall niemals eine Primzahl.

Damit wurde bewiesen, daß es genau eine von Null verschiedene natürliche Zahl n gibt, nämlich $n=1$, für die die Zahl $n^4 + 4^n$ eine Primzahl ist.

Lösungen zu: Aufgepaßt — nachgedacht — mitgemacht (Heft 4/72)

▲ 1▲ Aus $10 - 8 = 2$ folgt, daß zwei Schüler schwimmen, aber nicht radfahren können. Aus $15 - 8 = 7$ folgt, daß sieben Schüler radfahren, aber nicht schwimmen können. $10 + 15 - 8 = 17$ und $30 - 17 = 13$ folgt, daß 13 Schüler weder radfahren noch schwimmen können.

▲ 2▲ Aus $19 + 21 = 40$ und $40 - 31 = 9$ folgt, daß mindestens neun Schüler sowohl schwimmen als auch radfahren können. Es kann der Fall eintreten, daß alle 19 Schüler, die schwimmen können zugleich auch radfahren können, da $19 < 21$ gilt. Es gibt demnach höchstens 19 Schüler, die sowohl schwimmen als auch radfahren können.

▲ 3▲ Die Ungleichung $8 < x < 20$ wird von den Zahlen 9, 10, 11, ..., 18, 19 erfüllt. Die Ungleichung $14 < x < 24$ wird von den Zahlen 15, 16, 17, ..., 22, 23 erfüllt. Die Ungleichung $18 < x < 26$ wird von den Zahlen 19, 20, 21, ..., 24, 25 erfüllt. Nur die Zahl 19 erfüllt demnach alle drei Ungleichungen.

▲ 4▲ Wegen $4^3 = 64 < 100$ und $10^3 = 1000 > 999$ brauchen nur die dritten Potenzen der Zahlen 5, 6, 7, 8 und 9 untersucht werden. Nun gilt $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ und $9^3 = 729$. Die zugehörigen Quersummen lauten 8, 9, 10, 8 und 18. Nur die Zahl 512 erfüllt die Bedingung.

▲ 5▲ Es sei a die Länge und b die Breite des Rechtecks, dann gilt $a = 2b$. Der Umfang beträgt somit $2 \cdot (b + 2b) = 18$ cm, also $3b = 9$ cm und $b = 3$ cm. Daraus folgt $a = 6$ cm. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt demnach $A = a \cdot b = 6 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$.

▲ 6▲ Aus $a \cdot b = 24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ ergeben sich für den Umfang des Rechtecks folgende Möglichkeiten, die in der nachstehenden Tabelle angeführt sind:

a	b	$a + b$	$2 \cdot (a + b)$
1	24	25	50
2	12	14	28
3	8	11	22
4	6	10	20

Das Rechteck mit den Seitenlängen $a = 1$ cm und $b = 24$ cm besitzt somit den größten Umfang.

▲ 7▲ In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.
 $a + b > c$, $b + c > a$,
 $c + a > b$, $a + d > f$.

Durch Addition dieser vier Ungleichungen erhalten wir
 $2 \cdot (a + b + c + d) > 2 \cdot (e + f)$ und somit
 $a + b + c + d > e + f$.

▲ 8▲ Aus $8 + 11 + 16 = 35$ und $350 : 35 = 10$ folgt, daß für jeden Schüler 10 M zur Verfü-

gung stehen. Die erste Wandergruppe erhält demnach $10 \cdot 8 \text{ M} = 80 \text{ M}$, die zweite $10 \cdot 11 \text{ M} = 110 \text{ M}$, die dritte $10 \cdot 16 \text{ M} = 160 \text{ M}$.

▲ 9▲ Das rechteckige Blumenbeet hat einen Umfang von $2 \cdot (7 + 4) \text{ m} = 22 \text{ m}$. Auf das erste Meter kommen 5 Pflanzen, auf das letzte Meter kommen 3 Pflanzen, auf die übrigen 20 Meter kommen jeweils 4 Pflanzen. Insgesamt sind somit $5 + 3 + 80 = 88$ Pflanzen zu stecken.

▲ 10▲ Angenommen es haben x Schüler die Note 4 erhalten, dann haben $2x$ Schüler die Note 2 erhalten und $(23 - 3x)$ Schüler die Note 1. Demnach gilt

$$\frac{(23 - 3x) \cdot 1 + 2x \cdot 2 + 8 \cdot 3 + x \cdot 4}{31} = 2,$$

$$23 - 3x + 4x + 24 + 4x = 62,$$

$$47 + 5x = 62,$$

$$5x = 15, \text{ also } x = 3.$$

14 Schüler erhielten die Note 1, sechs Schüler die Note 2, acht Schüler die Note 3 und drei Schüler die Note 4.

Lösung zu: Eine Aufgabe von R. Gutschke

▲ 944▲ Da der Briefumschlag und vier Blatt Schreibpapier zusammen genau soviel wiegen wie sechs Blatt Schreibpapier, wiegt der Umschlag allein genau soviel wie zwei Blatt Schreibpapier. Ein Umschlag und zwei Blatt Schreibpapier wiegen genau 20 g; deshalb wiegen fünf Blatt Schreibpapier ebenfalls 20 g, also ein Blatt 4 g und ein Umschlag 8 g. Ein Umschlag und zehn Blatt Schreibpapier würden somit $8 \text{ g} + 10 \cdot 4 \text{ g} = 48 \text{ g}$ wiegen. Zum Frankieren des Briefes benötigt man eine 40-Pf-Briefmarke.

10▲ 839 Wir führen den Beweis indirekt.
a) Angenommen, die Ungleichung (1) sei falsch. Dann gilt

$$\sqrt{10} - \sqrt{9} \geq \sqrt{9} - \sqrt{8}, \quad (3)$$

$$\text{also } \sqrt{10} + \sqrt{8} \geq 2\sqrt{9}.$$

Hieraus folgt, da die Terme auf beiden Seiten der Ungleichung positiv sind, durch Quadrieren

$$10 + 2\sqrt{80} + 8 \geq 4 \cdot 9,$$

$$8\sqrt{5} \geq 18,$$

$$4\sqrt{5} \geq 9.$$

Hieraus folgt weiter durch Quadrieren $80 \geq 81$. Damit erhalten wir einen Widerspruch. Daher ist die Ungleichung (3) falsch, und es gilt, wie behauptet,

$$\sqrt{10} - \sqrt{9} < \sqrt{9} - \sqrt{8}.$$

b) Wir führen auch den allgemeinen Beweis indirekt und nehmen an, daß

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \quad (4)$$

gilt. Dann erhalten wir analog wie unter a)

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \geq 2\sqrt{n},$$

$$n+1+2\sqrt{(n+1)(n-1)}+n-1 \geq 4n,$$

$$2\sqrt{n^2-1} \geq 2n,$$

$$\sqrt{n^2-1} \geq n,$$

$$n^2-1 \geq n^2, \text{ also } -1 \geq 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch; also ist die Ungleichung (4) falsch, und es gilt, wie behauptet, für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

W 10/12 ■ 840 Wir formen die gegebene Gleichung

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999 \quad (1)$$

zunächst so um, daß wir auf beiden Seiten Quadrate von Binomen erhalten. Zu diesem Zweck addieren wir zunächst auf beiden Seiten $400x + 1$:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 400x + 10000.$$

Nun addieren wir auf beiden Seiten $4x^2$ und erhalten

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000,$$

also $(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$. (2)

Die Gleichung (2) ist genau dann erfüllt, wenn entweder

$$x^2 + 1 = 2x + 100 \text{ oder} \quad (3)$$

$$x^2 + 1 = -2x - 100 \text{ gilt.} \quad (4)$$

Im Falle der Gleichung (3) erhalten wir

$$x^2 - 2x - 99 = 0 \quad (5)$$

Diese quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen

$$x_1 = 1 + \sqrt{1 + 99} = 1 + 10 = 11;$$

$$x_2 = 1 - 10 = -9.$$

Im Falle der Gleichung (4) erhalten wir

$$x^2 + 2x + 101 = 0. \quad (6)$$

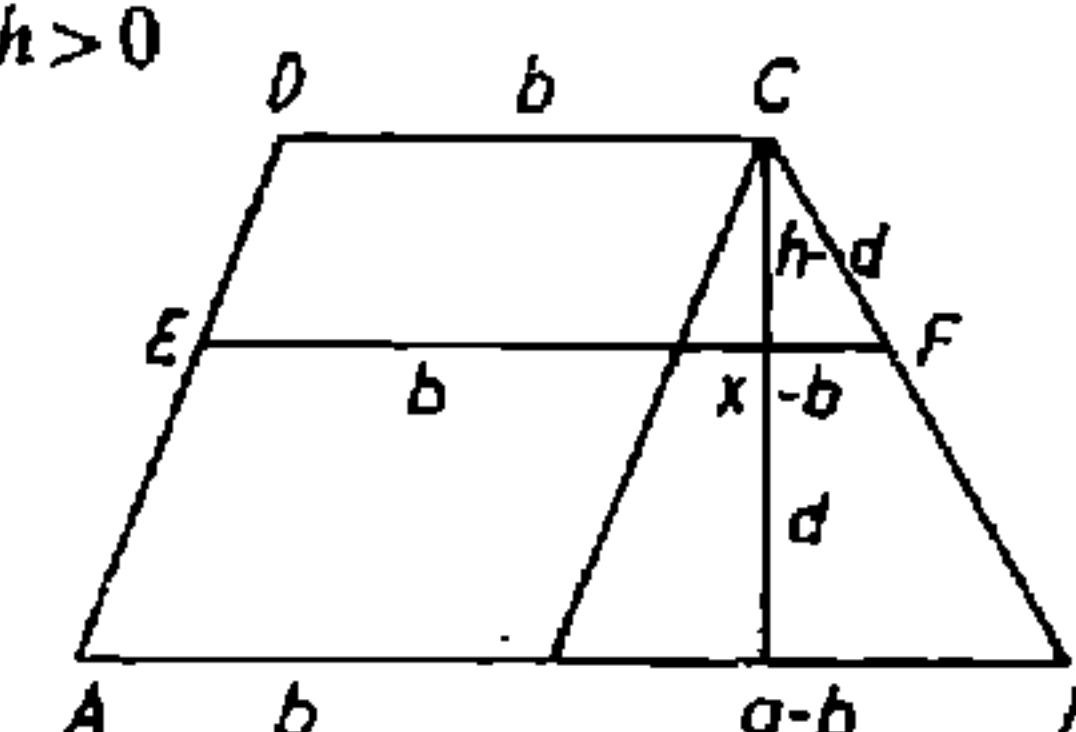
Diese quadratische Gleichung hat aber wegen $1 - 101 = -100 < 0$ keine reelle Lösung.

Wenn also die Gleichung (1) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Lösungen $x_1 = 11$ und $x_2 = -9$ sein. Tatsächlich sind das auch Lösungen der Gleichung (1); denn wir erhalten

$$11^4 - 2 \cdot 11^2 - 400 \cdot 11 = 14641 - 242 - 4400 = 9999$$

$$\text{und } (-9)^4 - 2 \cdot (-9)^2 + 400 \cdot 9 = 6561 - 162 + 3600 = 9999.$$

W 10/12 ■ 841 1. Wir erhalten nach dem Strahlensatz (vgl. die Abb. 1) wegen $a > b$ und $h > 0$



$$\frac{x-b}{a-b} = \frac{h-d}{h},$$

$$\text{also } x-b = (a-b) \left(1 - \frac{d}{h}\right),$$

$$x-b = a-b - \frac{a-b}{h} d,$$

$$x = a - \frac{a-b}{h} d$$

$$\text{und } d = \frac{a-x}{a-b} h.$$

2. Wir erhalten im Falle

$$a) x = \frac{a+b}{2}, \text{ also } d = \frac{a - \frac{a+b}{2}}{a-b} h = \frac{h}{2},$$

also $d = 2,5$ cm; ferner gilt $h-d = \frac{h}{2}$;

$$\text{b) } x = \sqrt{ab}, \text{ also } d = \frac{a - \sqrt{ab}}{a - b} h$$

$$= \frac{h \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} = \frac{h \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \text{ also } d = 3 \text{ cm};$$

$$\text{ferner gilt } h - d = \frac{h \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$$

$$\text{c) } x = \frac{2ab}{a+b}, \text{ also } d = \frac{a - \frac{2ab}{a+b}}{a-b} h$$

$$= \frac{a^2 + ab - 2ab}{(a-b)(a+b)} h = \frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)} h = \frac{ha}{a+b},$$

$$\text{also } d = \frac{45}{13} \text{ cm} \approx 3,46 \text{ cm}; \text{ ferner gilt}$$

$$h - d = \frac{hb}{a+b};$$

$$\text{d) } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \text{ also}$$

$$d = \frac{h}{a-b} \left(a - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right), \text{ also}$$

$$d = \frac{5}{5} \left(9 - \sqrt{\frac{81 + 16}{2}} \right) \text{ cm}$$

$$= \left(9 - \sqrt{\frac{97}{2}} \right) \text{ cm} \approx 2,04 \text{ cm};$$

$$\text{ferner gilt } h - d = \frac{h}{a-b} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - b \right).$$

$$3. \text{ Aus } A_1 = \frac{x+b}{2}(h-d) \text{ und } A_2 = \frac{a+x}{2}d$$

$$\text{folgt } A_1 : A_2 = (x+b)(h-d) : (a+x)d,$$

$$\text{also im Falle}$$

$$\text{a) } A_1 : A_2 = \left(\frac{a+b}{2} + b \right) \frac{h}{2} : \left(a + \frac{a+b}{2} \right) \frac{h}{2}$$

$$= (a+3b) : (3a+b) = 21 : 31;$$

$$\text{b) } A_1 : A_2 = \frac{(\sqrt{ab} + b) h \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{(a + \sqrt{ab}) h \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \sqrt{b} : \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \sqrt{a}$$

$$= b : a = 4 : 9;$$

$$\text{c) } A_1 : A_2 = \left(\frac{2ab}{a+b} + b \right) \frac{hb}{a+b} : \left(a + \frac{2ab}{a+b} \right) \frac{ha}{a+b}$$

$$= (2ab + ab + b^2) b : (a^2 + ab + 2ab) a$$

$$= b^2(3a+b) : a^2(a+3b)$$

$$= 16(27+4) : 81(9+12) = 496 : 1701;$$

$$\text{d) } A_1 : A_2 = \frac{\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + b \right) h \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - b \right)}{a-b}$$

$$\left(a + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right) h \left(a - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - b^2 \right) : \left(a^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right)$$

$$= (a^2 - b^2) : (a^2 - b^2) = 1 : 1.$$

$$4. \text{ Die Parallele } EF \text{ geht durch den Schnittpunkt } S \text{ der Diagonalen des Trapezes } ABCD$$

$$\text{(vgl. die Abb. 2) genau dann, wenn}$$

$$b : a = SC : SA = (h-d) : d$$



gilt; das trifft aber für beliebige a, b nur im Falle c) zu.

5. Die beiden Teiltrapeze $EFCD$ und $ABFE$ sind einander ähnlich genau dann, wenn

$$b : x = x : a, \text{ also } x^2 = ab$$

gilt; das trifft aber für beliebige a, b nur im Falle b) zu.

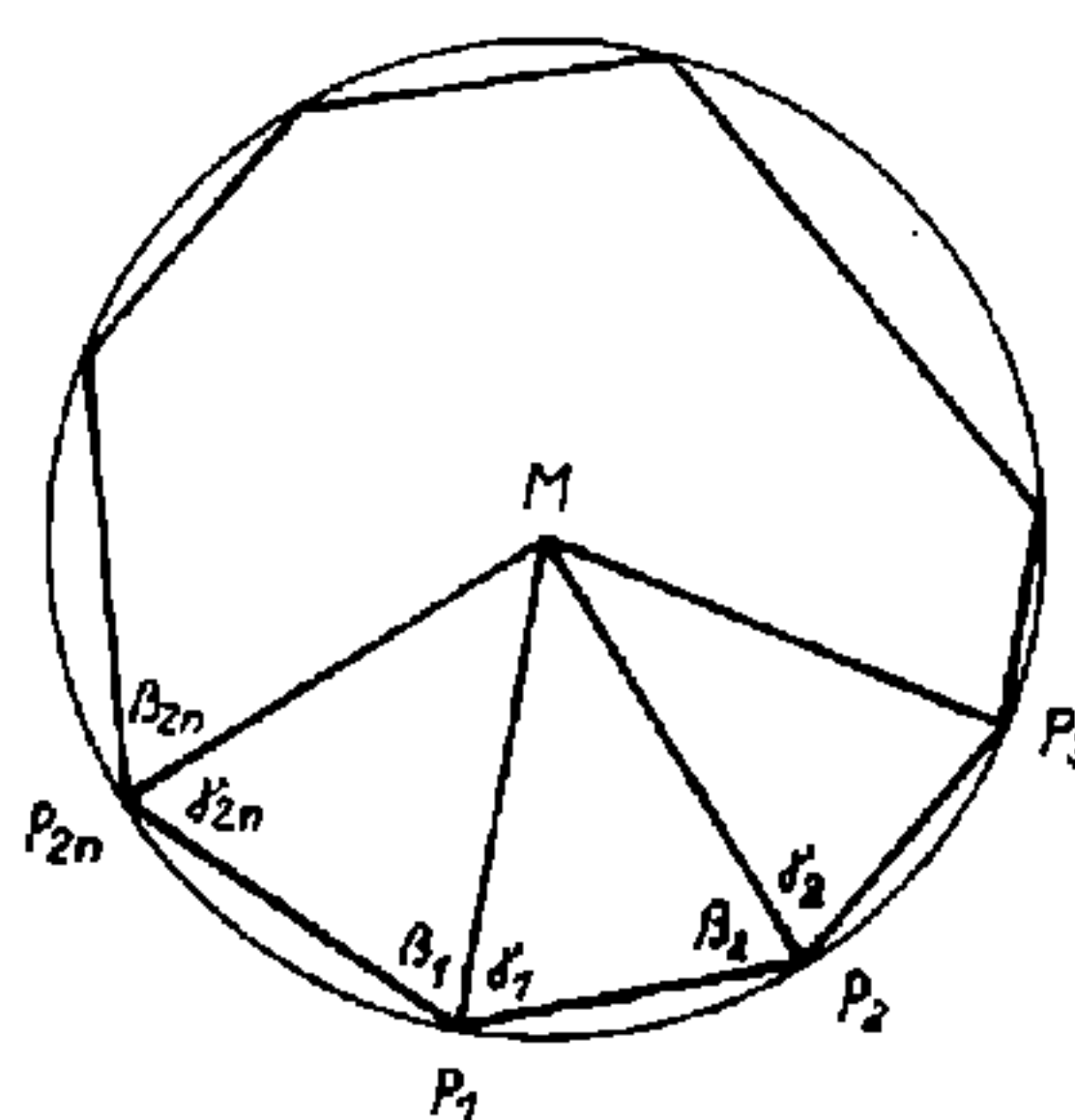
W 10/12 ■ 842 Wir verbinden den Mittelpunkt M des Umkreises des Sehnenvielecks mit den Eckpunkten dieses Vielecks (vgl. die Abb.). Dann wird jeder Innenwinkel α_i des Vielecks in zwei Winkel β_i, γ_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) zerlegt, und es gilt

$$\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1,$$

$$\alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2,$$

$$\dots$$

$$\alpha_{2n} = \beta_{2n} + \gamma_{2n}$$



Ferner gilt, da die Dreiecke $MP_1P_2, MP_2P_3, \dots, MP_{2n}P_1$ gleichschenkelig sind,

$$\gamma_1 = \beta_2,$$

$$\gamma_2 = \beta_3,$$

$$\dots$$

$$\gamma_{2n} = \beta_{2n-1},$$

$$\gamma_{2n} = \beta_1.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2n-1} = (\beta_1 + \gamma_1) + (\beta_3 + \gamma_3) + \dots + (\beta_{2n-1} + \gamma_{2n-1})$$

$$= \gamma_{2n} + \beta_2 + \gamma_2 + \beta_4 + \gamma_4 + \beta_6 + \dots + \gamma_{2n-2} + \beta_{2n}$$

$$= (\beta_2 + \gamma_2) + (\beta_4 + \gamma_4) + \dots + (\beta_{2n} + \gamma_{2n})$$

$$= \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n}, \text{ w. z. b. w.} \quad (3)$$

Bemerkung: Im speziellen Fall $2n = 4$ erhalten wir ein Sehnenviereck, und es gilt

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4.$$

Damit haben wir gleichzeitig den bekannten Satz bewiesen, wonach in jedem Sehnenviereck die Summen je zweier gegenüberliegender Winkel gleich sind und, da die Summe aller Innenwinkel 360° beträgt, 180° betragen.

* 10/12 * 843 Wir erhalten zunächst

$$s_n \cdot \overline{s_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \right) + \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_2}{a_n} \right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n} \right)$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_n} \right) + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_n}{a_1} \right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} \right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right). \quad (1)$$

Nun gilt für alle positiven reellen Zahlen a_i und a_k

$$\frac{a_i}{a_k} + \frac{a_k}{a_i} = \frac{a_i^2 + a_k^2}{a_i a_k} \geq 2; \text{ denn aus} \quad (2)$$

$$(a_i - a_k)^2 \geq 0 \text{ folgt}$$

$$a_i^2 + a_k^2 - 2a_i a_k \geq 0,$$

$$a_i^2 + a_k^2 \geq 2a_i a_k, \text{ also wegen } a_i > 0, a_k > 0$$

$$\frac{a_i^2 + a_k^2}{a_i a_k} \geq 2.$$

Nun ist auf der rechten Seite der Gleichung (1) die Summe der n ersten Summanden gleich n , während jedes weitere der $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare von Summanden wegen (2) größer oder gleich 2 ist.

$$\text{Wir erhalten daher}$$

$$s_n \cdot \overline{s_n} \geq n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n + n^2 - n = n^2, \quad (3)$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Das Gleichheitszeichen gilt in (2) und daher auch in (3) genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Bemerkung: Unter der Voraussetzung der Ungleichung, wonach das arithmetische Mittel von n positiven reellen Zahlen stets größer oder gleich dem geometrischen Mittel dieser Zahlen ist, können wir die Behauptung schneller beweisen. Wir erhalten nämlich

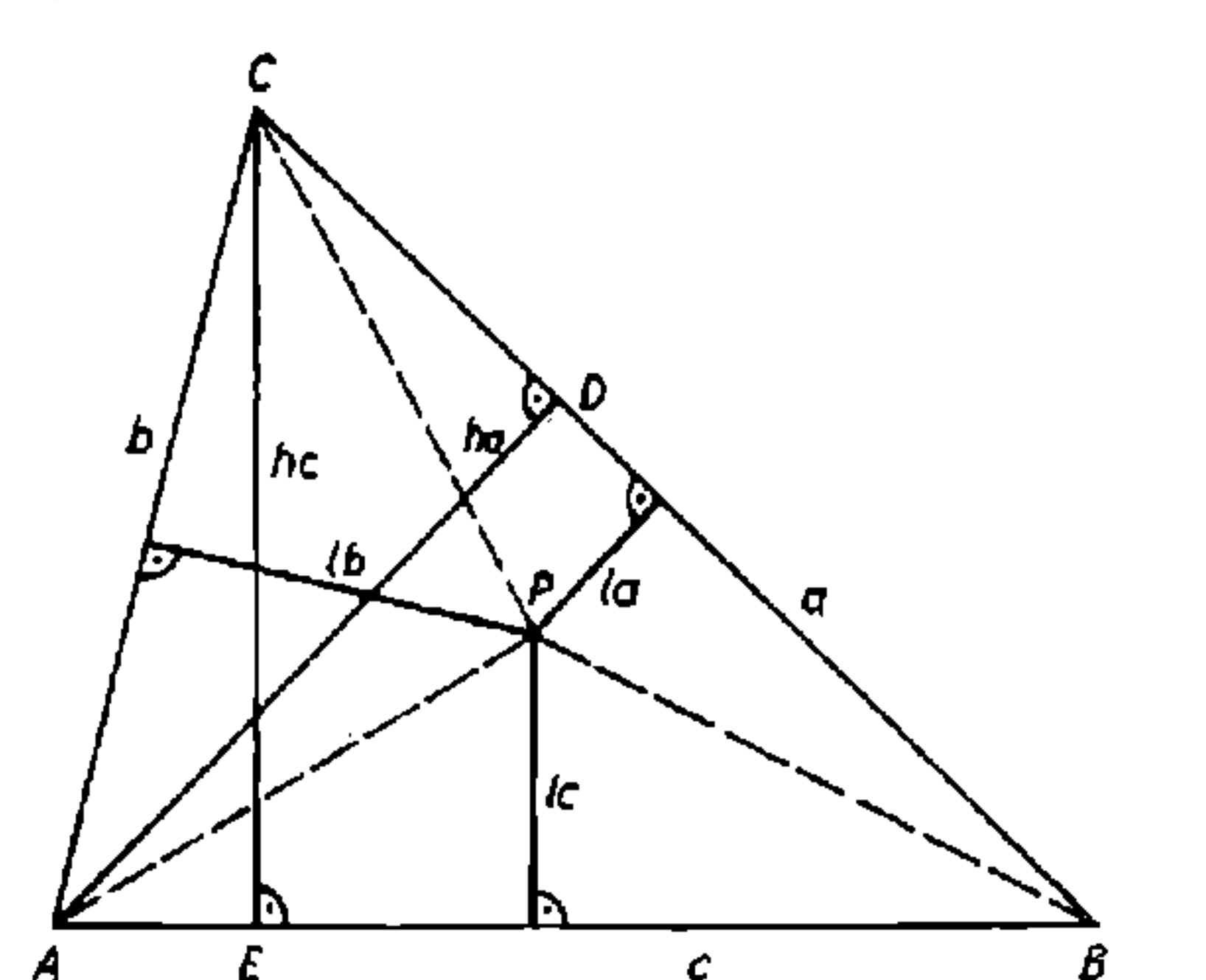
$$s_n \cdot \overline{s_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}} = n^2.$$

Lösungen zu: Ursula Baier, EOS Ernst Schneller, Meißen (Heft 1/72, S. 3)

▲ 8 ▲ 844 Es sei $a \leq b \leq c$; dann gilt $h_a \geq h_b \geq h_c$. Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC gilt

$$2A = a \cdot l_a + b \cdot l_b + c \cdot l_c = a \cdot h_a = c \cdot h_c$$



Aus $a \leq b \leq c$ folgt $a \cdot l_a + a \cdot l_b + a \cdot l_c \leq a \cdot h_a$, also $a(l_b + l_c) \leq a \cdot h_a$ und somit $l_b + l_c \leq h_a$.

Aus $a \leq b \leq c$ folgt ferner $c \cdot l_a + c \cdot l_b + c \cdot l_c \geq c \cdot h_c$, also $c(l_a + l_b) \geq c \cdot h_c$ und somit $l_a + l_b \geq h_c$.

Folglich gilt auch $h_c \leq l_a + l_b + l_c \leq h_a$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = b = c$ ist.

▲ 9 ▲ 845 Es sei $z = 0, \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ ein reinperiodischer Dezimalbruch mit der n -stelligen Periode $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ und es sei a_i eine natürliche Zahl für die $0 \leq a_i \leq 9$ gilt. Dann gilt auch $z \cdot 10^n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$; $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$. Durch Subtraktion erhalten wir $z \cdot 10^n - z$

$\approx a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ also $z(10^n - 1) = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ und somit $z = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{10^n - 1} = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{999 \dots 9}$.

Im Nenner des gemeinen Bruches z steht genau n -mal die Ziffer 9.

▲ 10/12 ▲ 846 Für jedes Dreieck gilt $A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$ und damit auch $A^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2 \gamma$.

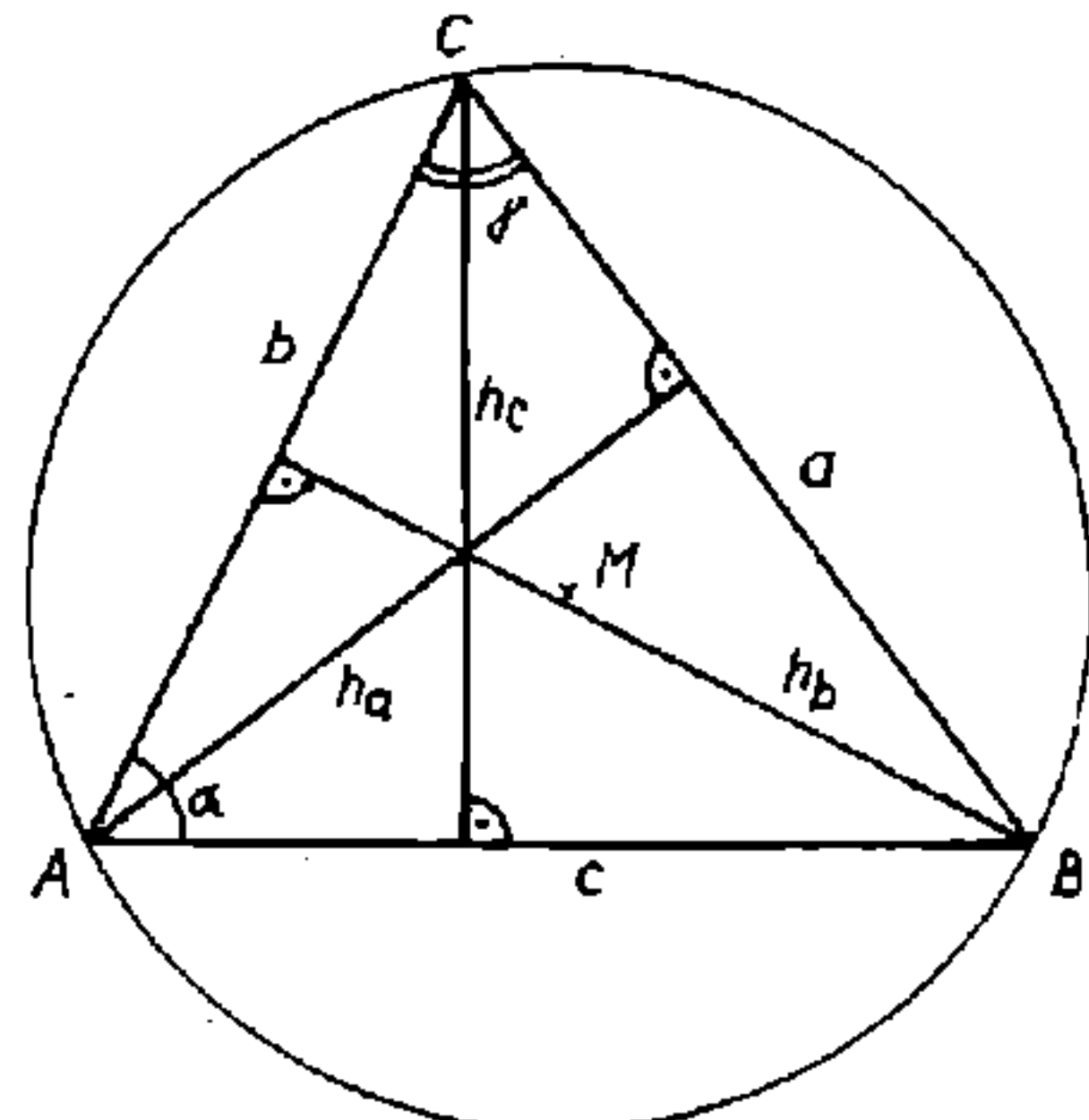
$$\sin^2 \gamma = \frac{a}{4 \sin \alpha} \cdot b \cdot \sin \gamma \cdot a \cdot \sin \gamma \cdot b \cdot \sin \alpha. \quad (1)$$

$$\text{Ferner gilt } \frac{a}{\sin \alpha} = 2r, \quad (2)$$

$$b \cdot \sin \gamma = h_a, \quad (3)$$

$$a \cdot \sin \gamma = h_b, \quad (4)$$

$$b \cdot \sin \alpha = h_c. \quad (5)$$



Setzen wir (2), (3), (4) und (5) in Gleichung (1) ein, so erhalten wir $A^2 = \frac{2r}{4} \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c$.

$$\text{bzw. } A = \sqrt{\frac{r}{2} \cdot h_a \cdot h_b \cdot h_c}.$$

5 ▲ 847 Das Grundstück ist $3 \cdot 60 \text{ m} = 180 \text{ m}$ lang; es hat einen Umfang von $2 \cdot (60 + 180) \text{ m} = 480 \text{ m}$. Aus $480 : 4 = 120$ und $120 \cdot 16,60 \text{ M} = 1992 \text{ M}$ und $1992 \text{ M} + 210 \text{ M} = 2202 \text{ M}$ ergeben sich die Gesamtkosten für die Einzäunung des Grundstücks.

5 ▲ 848 Die Wassermenge des Troges hat das Volumen $V = 87 \cdot 13 \cdot 2,5 \text{ m}^3 = 2827,5 \text{ m}^3$; sie hat daher eine Masse von $2827,5 \text{ t}$. Die Masse der Stahlträger, auf denen der Trog ruht, beträgt $2827,5 \text{ t} - 1600 \text{ t} = 1227,5 \text{ t}$. Es ist eine Last von $2 \cdot 2827,5 \text{ t} = 5655 \text{ t}$ zu heben.

W 5 ■ 849 Aus 336 kg Altpapier lassen sich $336 \cdot 700 \text{ g} = 235200 \text{ g}$ reines weißes Papier herstellen. Deshalb lassen sich aus dem gesammelten Altpapier maximal $235200 : 30 = 7840$ Schreibhefte herstellen.

W 5 ■ 850 Auf Grund der Bedingungen der Aufgabe könnte die Zahl z gleich 13, 26 oder 39 sein. Die durch Vertauschen der Ziffern entstehenden Zahlen lauten dann 31, 62 und 93. Aus $31 - 13 = 18$ und $62 - 26 = 36$ und $93 - 39 = 54$ folgt, daß es genau eine solche Zahl z gibt, nämlich die Zahl 26.

5 851 Der Rolls Royce hat eine wirkliche Länge von $8 \cdot 55 \text{ cm} = 440 \text{ cm} = 4,40 \text{ m}$. Der Daimler hat demnach eine wirkliche Länge von $440 \text{ cm} - 62 \text{ cm} = 378 \text{ cm} = 3,78 \text{ m}$. Aus $378 : 45 = 8,4$ folgt, daß das Matchboxauto vom Typ Daimler $8,4 \text{ cm}$ lang ist.

5 852 Es sei x die Anzahl der anwesenden Jungen, dann waren $(x + 68)$ Mädchen und damit $(2x + 68)$ Kinder anwesend. Von den beiden Gleichungen

$$\text{a) } 2x + 68 = 520 - 17 \quad \text{b) } 2x + 68 = 520 - 16$$

$$2x = 435$$

$$2x = 436$$

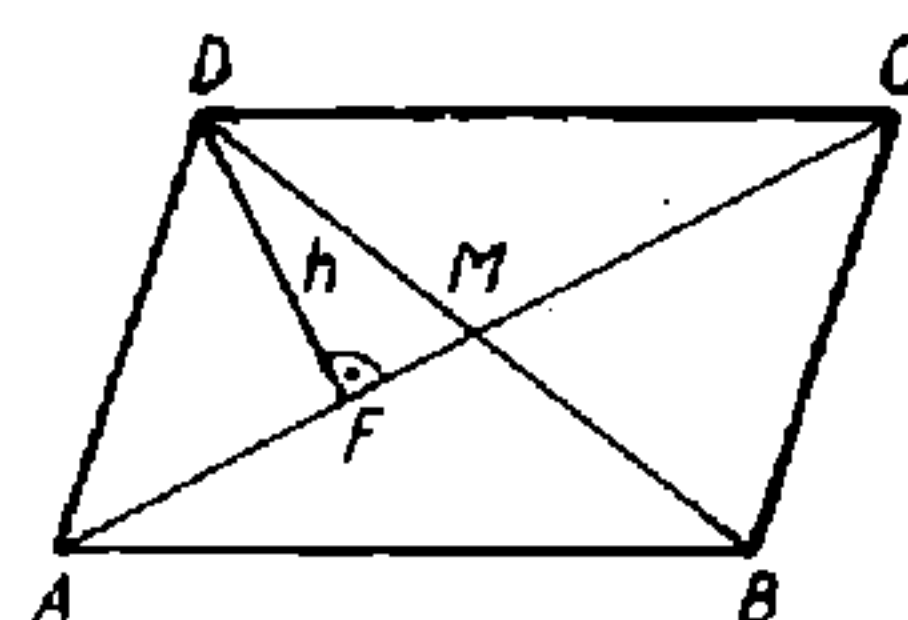
$$x = 218$$

ist die erste im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Es waren 218 Jungen und 286 Mädchen im Theater; von den 520 Plätzen waren 504 besetzt und 16 blieben frei.

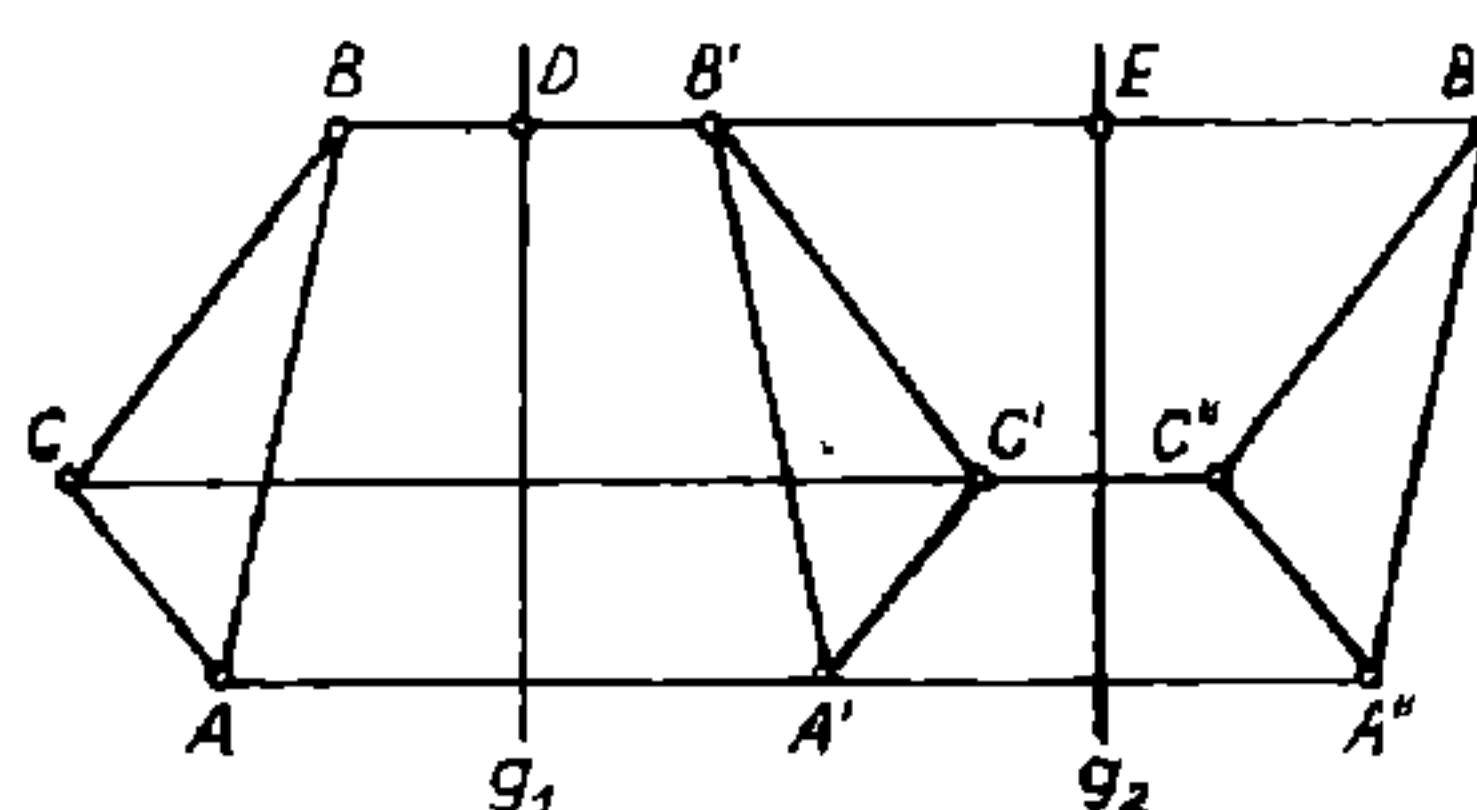
6 ▲ 853 Es sei $\overline{DF}$ Höhe des Dreiecks ACD zur Seite $\overline{AC}$. Dann gilt $A_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{DF}$

und $A_{MCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{DF}$. Wegen $\overline{AM} = \overline{MC}$

folgt daraus $A_{AMD} = A_{MCD}$. Die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABM \cong \triangle MCD$ und $\triangle BCM \cong \triangle AMD$ schließt ihre Flächengleichheit ein. Deshalb sind alle vier Teildreiecke flächengleich.



6 ▲ 854 Ist das Dreieck $A''B''C''$ das durch Verschiebung entstandene Bild des Dreiecks ABC , so ist zu beweisen, daß folgendes gilt: $\overline{AA''} \parallel \overline{BB''} \parallel \overline{CC''}$ und $\overline{AA''} = \overline{BB''} = \overline{CC''}$ und $\overline{BB''} = 2 \cdot \overline{DE}$.



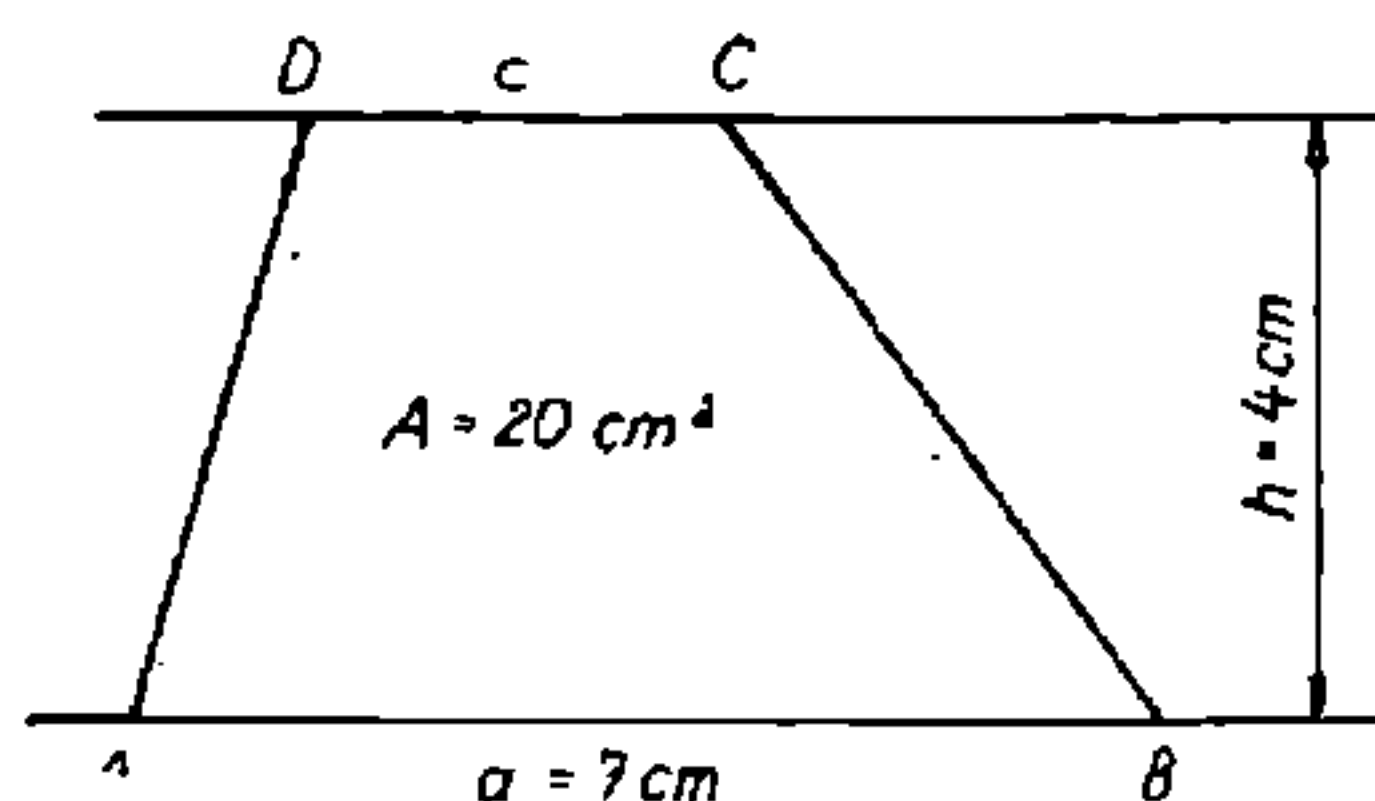
Auf Grund der ausgeführten Spiegelungen gilt $\overline{BB'} \perp g_1$ und $\overline{B'B''} \perp g_2$. Wegen $g_1 \parallel g_2$ gilt deshalb auch $\overline{BB''} \perp g_1$ und $\overline{BB''} \perp g_2$. Gleiches läßt sich auch für $\overline{AA''}$ und $\overline{CC''}$ nachweisen. Daraus folgt $\overline{AA''} \parallel \overline{BB''} \parallel \overline{CC''}$.

Auf Grund der Spiegelungen gilt $\overline{BD} = \overline{DB'}$ und $\overline{B'E} = \overline{EB''}$; ferner gilt $\overline{DE} = \overline{DB'} + \overline{B'E}$. Daraus folgt $\overline{BB''} = 2 \cdot \overline{DE}$. Gleiches läßt sich auch für $\overline{AA''}$ und $\overline{CC''}$ nachweisen. Daraus folgt schließlich $\overline{AA''} = \overline{BB''} = \overline{CC''} = 2 \cdot \overline{DE}$.

W 6 ■ 855 Wegen $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ gilt

$$20 = \frac{7+c}{2} \cdot 4$$

und damit $c = 3$. Die zweite parallele Grundseite muß eine Länge von 3 cm haben.



W 6 ■ 856 $27 : 3 = 9$; es erhielten 9 Aufgaben das Prädikat „gut gelöst“. $27 - 9 = 18$,

$\frac{7}{9} \cdot 18 = 14$; es erhielten 14 Aufgaben das

Prädikat „sehr gut gelöst“.

$18 - 14 = 4$, $4 : 2 = 2$; je 2 Aufgaben erhielten das Prädikat „gelöst“ bzw. „nicht gelöst“.

6 857 Da vom Tip n alle Angaben falsch waren, kam B nicht auf den 1. Platz. Nach Tip p folgt dann: 2. Platz – F , 4. Platz – D , 6. Platz – A .

Aus dem Vergleich der Tips p und m folgt, daß B nicht auf den 5. Platz kommt. Da B wegen Tip n auch nicht den 1. Platz einnahm, muß B den 3. Platz erkämpft haben. Nach Tip p kommt C nicht auf den 5. Platz, folglich auf den 1. Platz und somit E auf den 5. Platz.

Der Einlauf war folgender:

1.	2.	3.	4.	5.	6. Platz
C	F	B	D	E	A

6 858 Wir untersuchen zunächst die Quersummen der gesuchten vierstelligen natürlichen Zahlen.

$0 + 1 + 2 + 3 = 6$; $1 + 2 + 3 + 4 = 10$; $2 + 3 + 4 + 5 = 14$; $3 + 4 + 5 + 6 = 18$; $4 + 5 + 6 + 7 = 22$; $5 + 6 + 7 + 8 = 26$; $6 + 7 + 8 + 9 = 30$.

Nur die aus den Ziffern 3, 4, 5 und 6 gebildeten Zahlen haben eine Quersumme (18), die durch 9 teilbar ist. Aus diesen Ziffern lassen sich folgende Zahlen zusammenstellen, die auf eine gerade Ziffer enden:

3456, 3546, 4356, 5346, 5436, 6354, 3564, 3654, 4536, 5364, 5634, 6534.

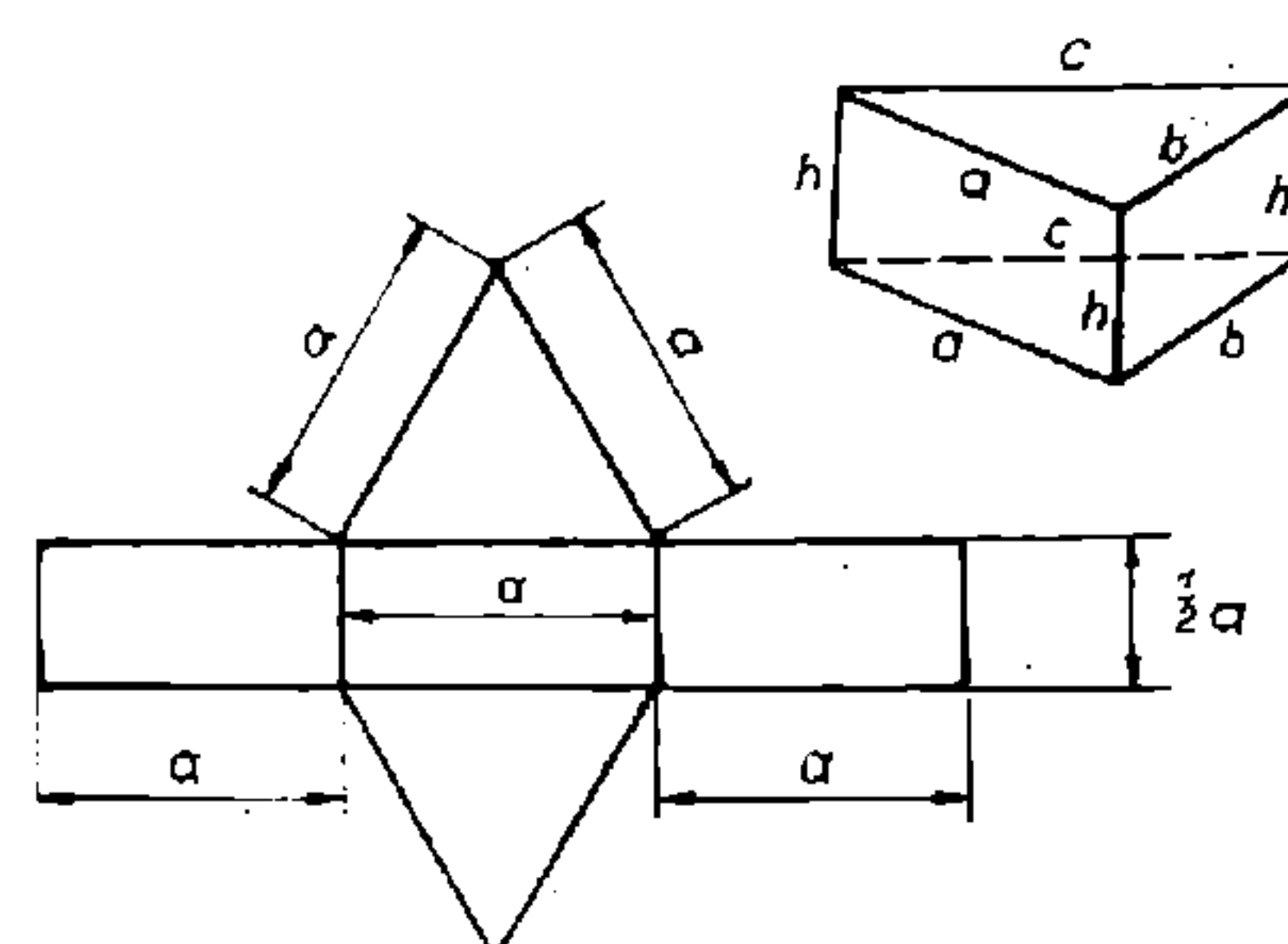
Diese Zahlen untersuchen wir auf ihre Teilbarkeit durch 8. Nur die Zahlen 3456 und 4536 sind durch 8 teilbar.

7 ▲ 859 Angenommen, x Jungen lesen die „Junge Welt“; dann lesen $(23 - x)$ Jungen die „Trommel“, und es gilt $0,15x + (23 - x) \cdot 0,10 = 2,70$ und damit $x = 8$.

8 Jungen lesen die „Junge Welt“, 15 die „Trommel“.

Wegen $41 - 23 = 18$ und $4 \cdot 2,70 \text{ M} - 0,40 \text{ M} = 10,40 \text{ M}$ gilt analog $0,70y + (18 - y) \cdot 0,50 = 10,40$ und damit $y = 7$. 7 Mädchen lesen „Frösi“, 11 lesen „alpha“.

7 ▲ 860 Es seien a , b und c die Längen der Grundkanten und h die Länge der Höhe eines geraden dreiseitigen Prismas, das die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft hat. Nach Voraussetzung gilt dann $u = a + b + c = 2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h$. Daraus folgt $a = b = c$. Grund- und Deckfläche eines solchen Prismas sind demnach zwei kongruente gleich-



seitige Dreiecke. Aus $a+b+c=2a+2h$ und $a=b=c$ folgt weiter $3a=2a+2h$, also $a=2h$ bzw. $h=\frac{1}{2}a$. Die Höhe eines solchen Prismas ist also halb so lang wie eine Grundkante. Daher erfüllt jedes gerade gleichseitige dreiseitige Prisma, dessen Höhe halb so lang wie eine der Grundkanten ist, die Bedingungen der Aufgabe.

W 7 ■ 861 Aus $464,25 \text{ M} - 312,00 \text{ M} = 152,25 \text{ M}$ und $152,25 : 0,75 = 203$ folgt, daß das Kino 203 Parkettplätze besitzt. Angenommen, es gebe x Plätze im Sperrplatz und y Plätze in den Logen, dann gilt

$$1,00x + 1,25y = 312,00, \quad (1)$$

$$x + y = 304, \quad (2)$$

$$\text{also } 4x + 5y = 1248 \quad (3)$$

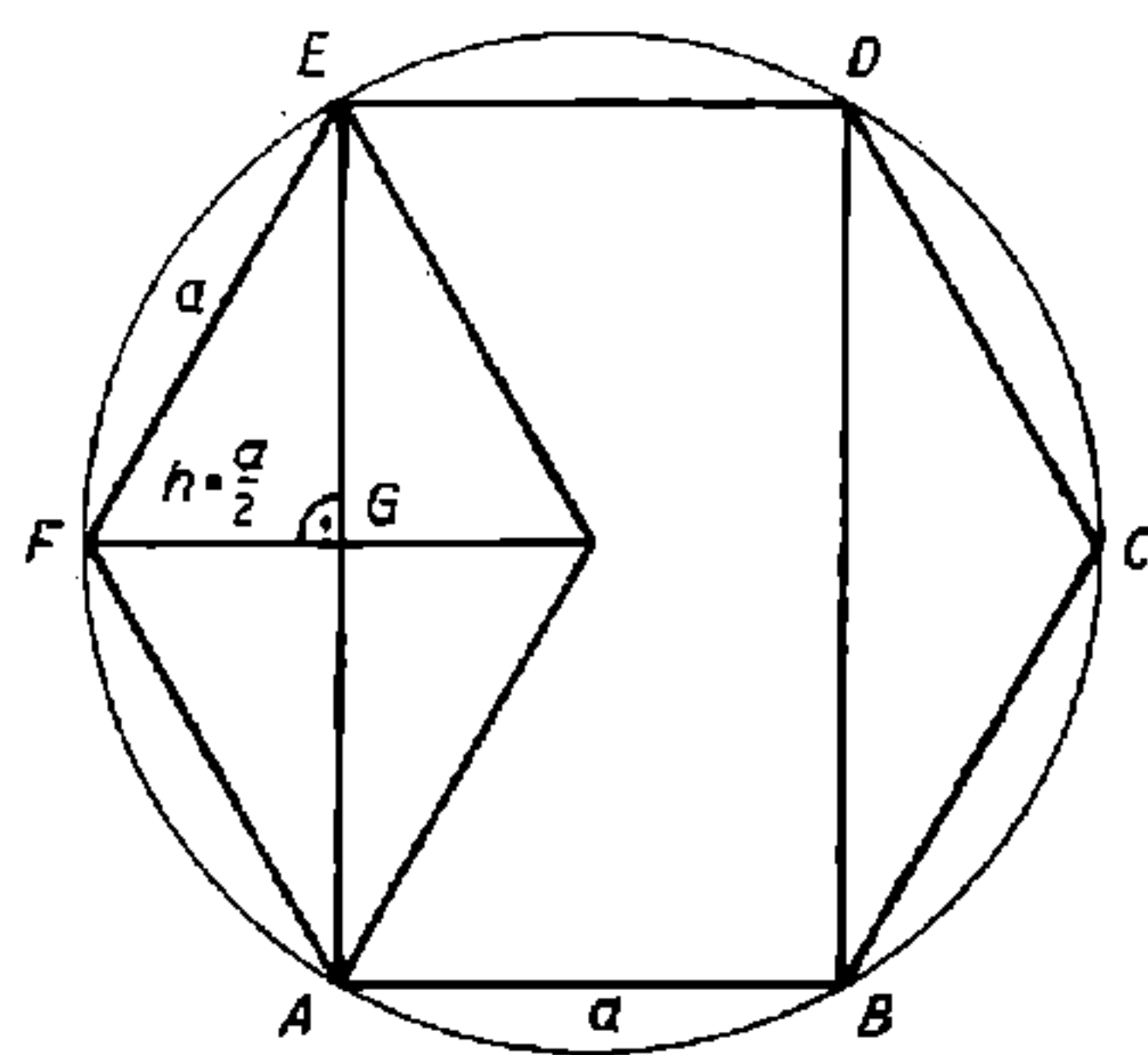
$$\text{und } 4x + 4y = 1216 \quad (4)$$

Subtrahieren wir Gleichung (4) von Gleichung (3), so erhalten wir $y=32$ und damit $x=272$.

Das Kino hat demnach 272 Plätze im Sperrplatz und 32 Logenplätze.

W 7 ■ 862 Bekanntlich läßt sich jedes regelmäßige Sechseck in sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen, da sich der Radius des Umkreises des Sechsecks auf der Peripherie genau sechsmal abtragen läßt. Die Höhe $\overline{FG}$ zur Seite $\overline{AE}$ des Dreiecks AEF ist gleich $\frac{1}{2}a$. Für seinen Flächeninhalt gilt

demnach $A_1 = \frac{1}{4}a \cdot \overline{AE}$. Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABDE$ gilt $A_2 = a \cdot \overline{AE}$. Daraus folgt $A_1 : A_2 = 1:4$.



Mitarbeiter gesucht

- Beiträge über den Inhalt und die Durchführung von Arbeitsgemeinschaftsnachmittagen
- Beiträge über die Beteiligung von *Jungen Mathematikern* oder Arbeitsgemeinschaften auf *Messen der Meister von Morgen* (Facharbeiten, mathematische Modelle u. a.)
- Beiträge über lebendige Arbeit mit mathematischen Jugendbüchern
- Beispiele kontinuierlicher Wandzeitungsarbeit.

Zahlreiche Einsendungen erwartet
Eure Redaktion *alpha*.

Lösungen zu alpha-heiter (3/72)

Mathematisches Kreuzworträtsel

2		3	1	4		1
7		7	8	4		2
1	8	3	0		8	9
8	1			6	4	
3	8	3		2	6	1
	1	8	3	5	1	6
9		4	3		1	1
9		0	3			5

Zur Erläuterung der Lösung geben wir die folgenden Hinweise:

Waagerecht

b) Wegen $100\pi \approx 314,16$ lautet die gesuchte Zahl 314.

f) Da die Zahlen 16 und 49 teilerfremd sind, lautet die gesuchte Zahl $16 \cdot 49 = 784$.

g) Wir erhalten $61x = 1830 + 60x$, also $x = 1830$.

i) Aus $11x < 1000$ folgt $x < \frac{1000}{11} = 90\frac{10}{11}$;

daher ist die gesuchte Primzahl gleich 89.

k) Die größte zweistellige Quadratzahl ist gleich $9^2 = 81$.

l) Die gesuchte Quadratzahl ist gleich $8^2 = 64$.

m) Wir erhalten $2x = 766$, also $x = 383$.

o) Wir erhalten $9x - 999 = 5x + 45$, also $4x = 1044$, $x = 261$.

q) Wir erhalten $\frac{x}{12} = 15293$, also $x = 183516$.

t) Unter den Zahlen 11, 22, 33 und 44 ist nur der Vorgänger von 44, d. h. die Zahl 43 eine Primzahl.

u) Da alle zweistelligen Zahlen, die aus zwei gleichen Ziffern bestehen, durch 11 teilbar sind, ist unter diesen Zahlen nur 11 eine Primzahl.

v) Aus $x+y=3$ und $y-x=3$ folgt $x=0$ und $y=3$.

Senkrecht

a) Setzen wir $x=15$, so erhalten wir $(15-12)(15-2)(15+2)(2 \cdot 15+11) = 3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 41 = 27183$.

b) Wegen $371 = 7 \cdot 53$ ist diese Zahl nicht Primzahl. Die Zahl 373 ist aber eine Primzahl, weil sie nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 und 19 teilbar ist.

c) Die Maßzahl ist gleich 180.

d) Die Zahl lautet $4 \cdot 11 = 44$

e) Die Summe der ersten zehn Primzahlen ist gleich $2+3+5+7+11+13+17+19+23+29=129$.

h) Wir erhalten $9:1=0,8181\dots$

i) Wir erhalten $423x - 42300 = 422x + 42200 + 111$, also $x = 84611$.

l) Es gilt $3^4 = 81 < 100$, $5^4 = 625$, $7^4 = 2401 > 1000$; daher ist die gesuchte Zahl gleich 625.

n) Aus dem Tafelwerk, 7.-12. Klasse, entnehmen wir $\arccos 22^\circ \approx 0,3840$.

p) Aus $x+(x-1)=31$ erhalten wir $2x=32$, also $x=16$.

Die Zahlen lauten 16 und 15.

r) Wegen $3x < 1000$ ist $x < \frac{1000}{3} = 333\frac{1}{3}$. Die

gesuchte Zahl ist daher gleich 333.

s) Die größte zweistellige natürliche Zahl ist gleich 99.

Mathematisch formulierte Vornamen —

Wer errät sie?

Erika, Peter, Hagen, Ute, Evi, Emma, Thea, Theo, Amalie, Minna, Gunter, Elena, Yvonne.

Nachgedacht — mitgemacht

$$5 \cdot 7 = 35$$

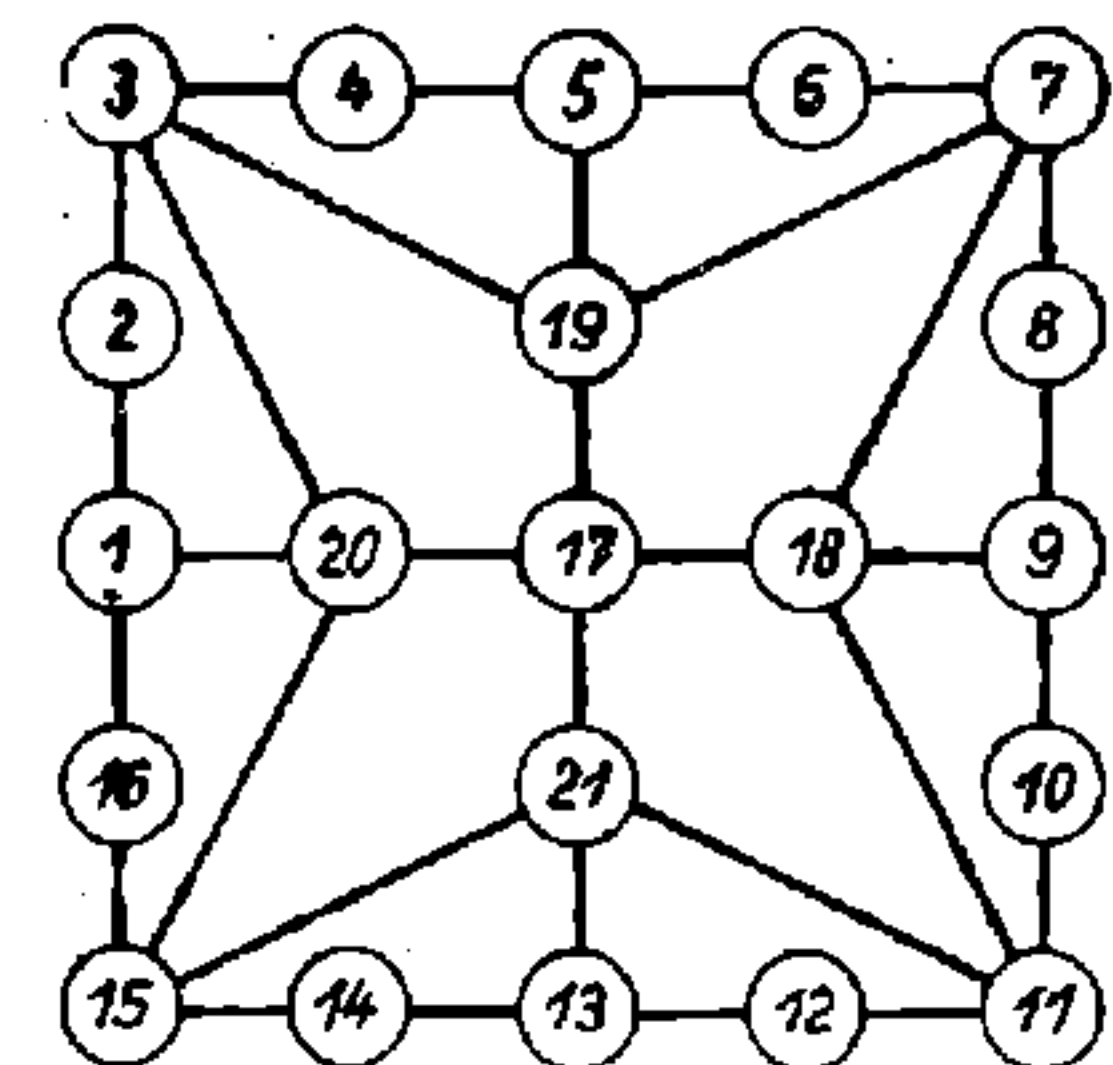
$$- + +$$

$$2 + 8 = 10$$

$$3 \cdot 15 = 45$$

Rotor

Wir numerieren die Knoten. Ausgehend vom Knoten 1 sind dann folgende 5-Tupel, möglich, die das Wort „Rotor“ ergeben:



1	2	3	4	5	1	16	15	21	13
1	2	3	19	5	1	16	15	14	13
1	20	3	4	5	1	20	17	21	13
1	20	3	19	5	1	20	15	21	13
1	20	17	19	5	1	20	15	14	13
1	20	17	18	9					

Geht man von den Knoten 5, 9 oder 13 aus, so findet man wegen der Symmetrie des Graphen jeweils weitere 11 Wege. Insgesamt läßt sich somit das Wort „Rotor“ auf der vorgeschriebenen Art genau 44 mal lesen.

Fünf olympische Ringe — einmal anders

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{r^2}{4} \sqrt{3} - \left(\frac{\pi\alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right) \frac{r^2}{2} \\
 &= \frac{r^2}{4} \sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \sin 60^\circ \right) \frac{r^2}{2} \\
 &= \frac{r^2}{4} \sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{6} + \frac{r^2}{4} \sqrt{3} \\
 &= \frac{r^2}{2} \sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{6} \\
 &= \frac{r^2}{6} (3\sqrt{3} - \pi) \\
 &\approx 0,342 r^2
 \end{aligned}$$

Zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975

Vorliegendes Material wurde entnommen aus: „Arbeitsmaterial zur Direktive des VIII. Parteitages der SED zum Fünfjahrplan für die Entwicklung der Volkswirtschaft der DDR 1971 bis 1975“ — erschienen im Verlag Die Wirtschaft, Berlin.
62 Tafeln — Preis 6,20 M

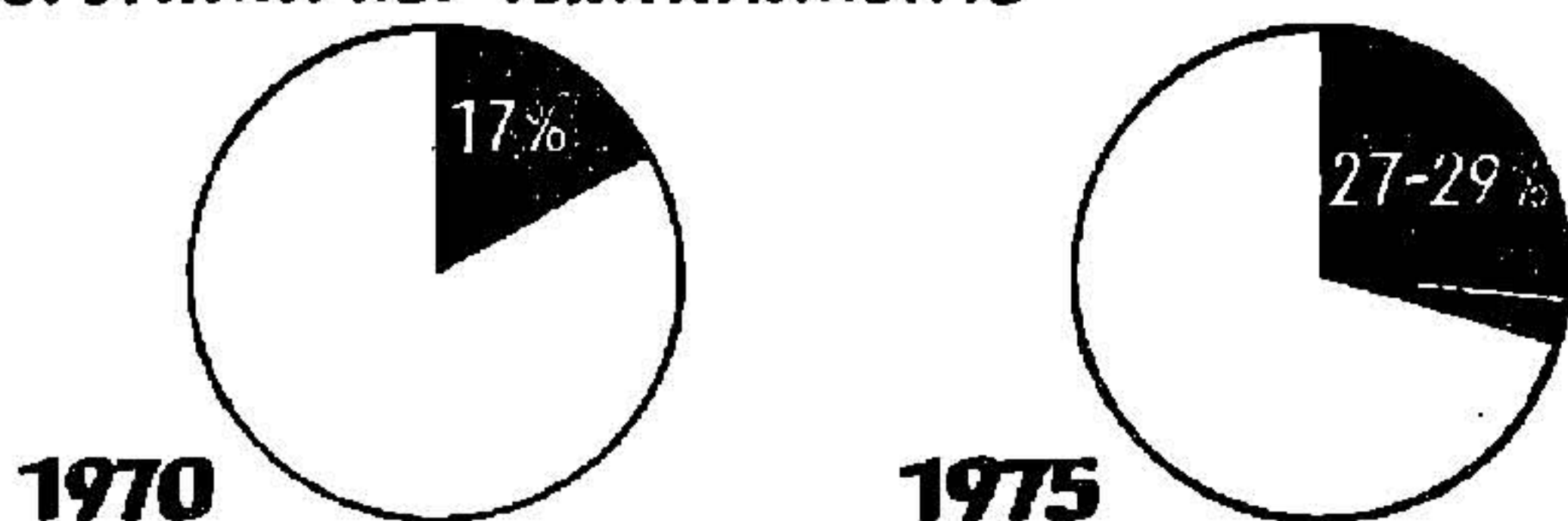
Entwicklung der chemischen Industrie

	1950	1955	1960	1965	1970	1975
--	------	------	------	------	------	------

Produktion von

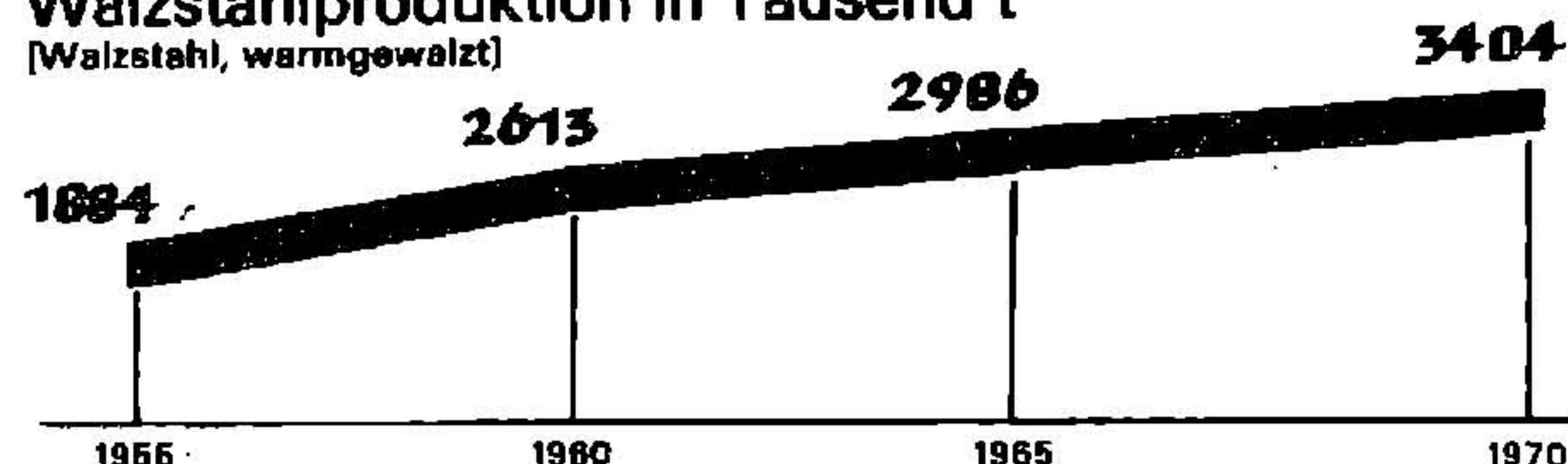
Plasten in kt	44,0	72,1	115,1	218,6	370	700-750
Synthesefasern in kt	0,7	3,4	7,8	19,0	47	100-105

Anteil der Synthesefasern am gesamten Faserverbrauch der Textilindustrie



Entwicklung der Metallurgie

Walzstahlproduktion in Tausend t (Walzstahl, warmgewalzt)



Die Produktion von Walzstahl insgesamt ist bis 1975 auf 128 bis 132 Prozent zu erhöhen.

Achtung, alpha-Wettbewerb

Zwischen dem 1. und 10. September 1972 sind alle Antwortkarten einzusenden an:

Redaktion alpha
7027 Leipzig
Postfach 14

Wer seine Karten zurückhaben möchte, lege einen richtig frankierten Briefumschlag mit seiner Adresse bei. Geschwister senden ihre Karten *getrennt*. Schulen legen eine Übersicht mit den Namen der Schüler, der Klassenstufe und des Wohnortes bei.

Zur Erleichterung der Arbeit bitten wir genau aufzuschreiben, wer Anspruch auf das Abzeichen in Gold für 3-, 4- oder 5-jährige Mitarbeit hat. Die Namen werden (nach Klassenstufen geordnet) als Anerkennung veröffentlicht. Auf den Urkunden wird die mehrjährige Mitarbeit gekennzeichnet. Wie in jedem Jahr erhalten 100 Teilnehmer am *alpha*-Wettbewerb Buchprämien.

Unser eifriger *alpha*-Leser *Rainer Gutsche* aus Klasse 5 der OS Herzberg sandte uns eine schöne Aufgabe:

▲ 944 ▲ Bernd, der seine Lösungen zu den Aufgaben im *alpha*-Wettbewerb stets auf Schreibpapier vom Format A 4 anfertigt, stellte fest, daß ein Briefumschlag vom Format A 6 und vier Blatt Schreibpapier zusammen genau so viel wiegen wie sechs Blatt Schreibpapier. Bernd schickte in einem Briefumschlag genau drei Blatt Schreibpapier mit Aufgabenlösungen ab. Mit einer Briefwaage stellte er dabei fest, daß der verschlossene Brief genau 20 g wog und somit die bereits aufgeklebte 20-Pf-Briefmarke gerade noch reichte. Wie schwer wäre ein Brief, der zehn Blatt Schreibpapier mit Aufgabenlösungen enthält, gewesen? Welchen Wert müßte eine Briefmarke zum Frankieren dieses Briefes haben?

POSTKARTE

Gebühren-
frei

Postamt

(PLZ)

Sofort an den zuständigen
Postzeitungsvertrieb weiterleiten.

VLV Spremberg Ag 310 69 DDR 2761
I 20 8 986

Z 6



Für den Unterricht
für Arbeitsgemeinschaften
und sinnvoll gestaltete Freizeit:

Sonne, Mond und Sterne

ein Modellbogen rund
um die Astronomie

Eine Sternenkarte, ein Winkel-
meßgerät, eine Weltzeituhr
und vieles andere mehr,
können mit diesem Modellbogen
hergestellt werden.

Diese Geräte können in der Schule,
bei Wanderungen und Gelände-
spielen verwendet werden.

Ein kleines beiliegendes Heft
gibt eine Einführung in
die Probleme der Astronomie.

Beim Spiel lernen —
mit Modellbogen aus dem

VERLAG JUNGE WELT  **BERLIN**

An allen Zeitungskiosken
und beim Volksbuchhandel
erhältlich.

1. Auflage 1972, etwa 320 Seiten, etwa 200
zweifarbige Zeichnungen, Ganzgewebe etwa
12,80 M

Best.-Nr.: 653 1958

Dieses Buch zeigt, daß Mathematik und Phy-
sik unterhaltsam und fesselnd sein können,
und widerlegt alle Skeptiker, die diese Wis-
enschaften als trocken und hölzern ver-
schreiben. Ein bißchen Köpfchen und — „Gut
gedacht ist halb gelöst!“ Unter diesem Motto
werden hier 200 Aufgaben aus den verschie-
densten Gebieten von Mathematik und Phy-
sik vorgestellt. Für jeden ist etwas dabei —
vom mathematischen „Anfänger“ bis zu dem,
der schon manch „harte Nuß“ geknackt hat.
In anregender Weise bieten uns die Autoren
eine Vielzahl mathematischer und physika-
lischer Knobelerien — zur Belehrung, zum

Vergnügen und Zeitvertreib. Viele Aufga-
ben tragen den Schein kleiner „Zaubereien“
in sich, manche Lösung ist verblüffend ein-
fach. Andere Aufgaben sind schon etwas
schwieriger, einige Lösungswege fordern so-
gar ein klein wenig Rechenfertigkeit. Das
Buch bringt aber nicht nur die Aufgaben und
die Resultate, auch auf eine ausführliche
Begründung der Lösungsmethode wird jeder-
zeit Wert gelegt. Wie ist ein Problem anzu-
packen, welche Wege sind einzuschlagen?
Auch auf diese Fragen gibt das Buch Ant-
wort, ohne daß der Leser etwa eine Mathe-
matikstunde absolvieren müßte. Eine Por-
tion gesunder Pflüchtigkeit genügt, um in unse-
rer Denkschule mit Erfolg abzuschneiden.
Versuchen Sie es! Dieses Buch wendet sich
an denkfrohe Junge und Alte, an Lehrende
und Lernende.

Bestellschein

Ich bestelle hiermit ab

zur Zustellung/Abholung *)

Überwiesen wird

Empfangstellenummer des PZV

Zustellbezirk

Einziehbezirk

Artikelnummer

WGr

Stück

Titel der Zeitung/Zeitschrift

Karteinummer

zu den Bezugsbedingungen lt. Postzeitungsliste zum Abonnementspreis von _____ M

In Blockschrift ausfüllen:

Name, Vorname:

Anschrift:

(Postleitzahl, Wohnort, Straße, Hausnummer, Gebäudeteil, Stockwerk)

Das Abonnementgeld wird bar bezahlt *)

ist abzubuchen vom Konto Nr. _____ beim _____

(Postscheckamt, Bankinstitut u. a.)

*) Nichtzutreffendes streichen

Ich versichere, daß ich den obengenannten Bezieher erworben habe

(Eigenhändige Unterschrift des Bestellers)

(Unterschrift des Werbers)

Die stark umrandeten Felder werden von der Deutschen Post ausgefüllt

Bezieherkarte/
Kundenkarte
berichtigt

Adreßplatte geprägt/
Z 47 ausgefertigt

Bestellvermerk

Verteilkarte
berichtigt

Vermerke