Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
13. Jahrgang 1979
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: W. Berger, Hartha (S. 124); Archiv Volk und Wissen (S. 124); Thies-Foto, Oxford (S. 128); J. Lehmann, Leipzig (S. 129); Scripta Mathematica, Universität New York (S. 137)
Umschlaggestaltung nach einem Entwurf der AG Zeichnen (siehe S. 129): W. Fahr, Berlin
Typographische Gestaltung: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Redaktionsschluß: 1. August 1979

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Ist 11111111111 eine Primzahl?

(Mit einem unveröffentlichten Manuskript von C. G. J. Jacobi)

Teil 2

Der Rechenkünstler Z. Dase

Für viele zahlentheoretische Untersuchungen ist es nützlich, die Primfaktoren der natürlichen Zahlen und die Primzahlen unterhalb einer bestimmten Grenze zu kennen. Man hat sich seit langem darum bemüht, diese in Tabellen zusammenzustellen. Bis um die Jahrhundertwende besaß man solche Faktorentafeln bis zur 9. Million einschließlich. Die Faktorentafeln für alle Zahlen der 7., 8. und 9. Million mit den darin vorkommenden Primzahlen wurden von Zacharias Dase (23.6.1824 bis 11.9.1861) ermittelt. (Sie erschienen in drei Bänden zwischen 1862 und 1865 in Hamburg.)

Bereits mit 15 Jahren trat Dase öffentlich als Schnellrechner und Rechenkünstler in deutschen Städten auf. In Wiesbaden multiplizierte er (im Kopf) eine 60ziffrige Zahl mit einer anderen 60ziffrigen Zahl in 2 Stunden 59 Minuten. In München berechnete er die Quadratwurzel aus einer 100ziffrigen Zahl in 52 Minuten. Er ermittelte den Kreisumfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1 (also die Zahl π) auf 200 Dezimalstellen. Durch sein Rechentalent und Zahlengedächtnis wurde er bei allen öffentlichen Auftritten von seinem Publikum staunend bewundert.

Dem ersten Mathematiker jener Zeit, Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) in Göttingen, wurde die Hilfe des Rechenkünstlers angeboten. Doch Gauß, der selbst eine außergewöhnliche vor allem durch die Beschäftigung mit der Zahlentheorie erworbene Rechenfertigkeit besaß, lehnte die Hilfe von jemand, der bloß mechanische Rechenfertigkeit besäße, entschieden ab.

In einem Brief an seinen Freund, den Astronomen H. C. Schumacher (1780 bis 1850), schrieb er: „Man muß hier zwei Dinge unterscheiden: ein bedeutendes Zahlengedächtnis und eigentliche Rechnungsfertigkeit. Dies sind eigentlich zwei ganz voneinander unabhängige Eigenschaften, die verbunden sein können, aber es nicht immer sind. Es kann einer ein sehr starkes Zahlengedächtnis haben, ohne gut rechnen zu können... Umgekehrt kann jemand eine superiöre Rechnungsfähigkeit haben ohne ein ungewöhnlich starkes Zahlengedächtnis. Das letztere besitzt Herr Dase ohne Zweifel in eminentem Grade; ich gestehe aber, daß ich darauf sehr wenig Wert legen kann. Rechnungsfähigkeit kann nur danach taxiert werden, ob jemand auf dem Papier ebenso viel und mehr leistet als andere."

Gefördert durch A. v. Humboldt (1769 bis 1859) konnte Dase seit Mitte 1846 für etwa $1\frac{1}{2}$ Jahre sein Talent für verschiedene wissenschaftliche Zwecke der Akademie der Wissenschaften in Berlin zur Verfügung stellen. So führte Dase Rechnungen für die Mathematiker C. G. J. Jacobi (1804 bis 1851) und P. G. L. Dirichlet (1805 bis 1859), für den Physiker H. W. Dove (1803 bis 1879) und für den Geodäten J. J. Baeyer (1794 bis 1885) aus.

In diese Zeit fällt sicher auch Dases Erkenntnis, daß die Zahl 11111111111 keine Primzahl ist. Sechs Stunden intensiven Kopfrechnens waren für ihn dazu nötig. Welcher Methode hatte er sich dabei bedient?

C. G. J. Jacobi

Diese Frage stellte sich auch der neben Gauß größte deutsche Mathematiker in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, Carl Gustav Jacob Jacobi. In Potsdam geboren, studierte er in Berlin und wirkte dann als Mathematikprofessor in Königsberg (Kaliningrad). Seit 1844 war er an der Akademie der Wissenschaften in Berlin tätig. Zusammen mit Dirichlet und dem Geometer J. Steiner (1796 bis 1863) entfaltete Jacobi hier eine mathematische Tätigkeit, die würdig die im 18. Jahrhundert durch G. W. Leibniz (1646 bis 1716), L. Euler (1707 bis 1783), J. H. Lambert (1728 bis 1777) und J. L. Lagrange (1736 bis 1813) begründete Tradition fortsetzte. (Berlin wurde wieder eine Hochburg der Mathematik.) Jacobi starb in seinem 47. Lebensjahr.

In seinem Nachlaß, der im Archiv der Akademie der Wissenschaften der DDR in Berlin aufbewahrt ist, befindet sich unter zahlreichen unveröffentlichten, meist unvollendeten Manuskripten eines, das der Frage nach dem „Geheimnis" des von Dase erzielten Resultates über die Zahl 11111111111 gewidmet ist. Auf dem Umschlag findet sich der Titel der Arbeit: „Untersuchung, ob die Zahl $\frac{10^{11}-1}{9}$ $=11111111111$ eine Primzahl ist oder nicht. Ein Kuriosum, veranlaßt durch Dase."

Die Idee für den Nachweis, daß 11111111111 keine Primzahl ist

Gewisse Kunstgriffe, deren sich viele Rechenakrobaten bedienen, finden ihre Begründung in dem Fermatschen Satz (A3, siehe 1. Teil): Ist p eine Primzahl und a eine natürliche Zahl, so ist stets a^p-a durch p teilbar. Hier wird nur der Spezialfall $a=2$ gebraucht: Ist p eine Primzahl, so läßt 2^p durch p dividiert den Rest 2. Wenn somit (für eine natürliche Zahl n) 2^n durch n dividiert nicht den Rest 2 läßt, so ist n keine Primzahl.

Dieses wird für $n=11111111111$ gezeigt.

Es soll die Methode zunächst für $n=111$ beschrieben werden. (Es kommt uns dabei nicht darauf an, auf diese – für 111 umständliche – Weise zu zeigen, daß 111 keine Primzahl ist, das ist offensichtlich – 111 ist durch 3 teilbar, vielmehr soll die Methode an dem Beispiel $n=111$ verständlich gemacht werden.)

Wir benutzen dabei die folgenden zwei Aussagen I und II.

I. *Der Rest eines Produktes bei der Division durch n ist gleich dem Rest des Produktes der Reste der einzelnen Faktoren bei der Division durch n.*

Beispiele: $n=11$. Gesucht ist der Rest des Produktes $13\cdot15\cdot17\cdot19$ bei der Division durch 11.

Die Reste der Faktoren 13, 15, 17 bzw. 19 sind 2, 4, 6 bzw. 8. Der Rest des Produktes $2\cdot4\cdot6\cdot8$ der Reste der Faktoren ist 10. Dies ist auch der Rest von $13\cdot15\cdot17\cdot19$ bei der Division durch 11.

Beweis von I.: Es sei $a=a_1\,a_2\ldots a_m$ das gegebene Produkt. Haben die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Reste $r_1, r_2, \ldots, r_m$ $(0\le r_1<n, \ldots, 0\le r_m<n)$ bei der Division durch n, so gilt $a_1=q_1n+r_1$, $a_2=q_2n+r_2$, $\ldots$, $a_m=q_mn+r_m$ (mit natürlichen Zahlen $q_1, \ldots, q_m$). Daher ist $a_1\,a_2\ldots a_m$ die Summe eines Vielfachen von n und $r_1\,r_2\ldots r_m$:

$a=a_1\,a_2\ldots a_m=qn+r_1\,r_2\ldots r_m$. Ist der Rest von $r_1\,r_2\ldots r_m$ bei der Division durch n gleich r $(0\le r<n)$, so wird $r_1\,r_2\ldots r_m=q'n+r$ (mit einer natürlichen Zahl q') und damit $a=(q+q')n+r$, d.h. r tatsächlich der Rest von a bei der Division durch n.

II. *Ist r der Rest der Zahl 2^{2^k} bei der Division durch n $(0\le r<n)$, so ist der Rest von $2^{2^{k+1}}$ bei der Division durch n gleich dem Rest von r^2 bei der Division durch n.*

Beispiele: $2^{2^3}=2^8=256$ läßt bei der Division durch 11 den Rest 3 $(256=23\cdot11+3)$. Der Rest von $2^{2^4}=2^{16}$ $(=65536)$ ist $3^2=9$. Der Rest von $2^{2^5}=2^{32}$ $(=4294967296)$ ist gleich dem Rest von $9^2=81$ bei der Division durch 11, d.h., er ist 4. Der Rest von $2^{2^6}=2^{64}$ ist gleich dem Rest von $4^2=16$ bei der Division durch 11, d.h., er ist 5.

Beweis von II.: Die Behauptung folgt aus $2^{2^{k+1}}=2^{2^k 2}=(2^{2^k})^2$ und aus I. (angewendet auf die zwei gleichen Faktoren 2^{2^k}).

Wir zeigen nun, daß 2^{111} bei der Division durch 111 den Rest 8 (also nicht den Rest 2) läßt.

Es ist $111 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$; daraus folgt

$2^{111} = 2^{2^6} \cdot 2^{2^5} \cdot 2^{2^3} \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^1} \cdot 2^{2^0}$.

Mittels der Aussage II erhält man unschwer die Tabelle 4. Aus ihr ergibt sich (mittels der Aussage I) der Rest von 2^{111} als Rest von $2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34 \cdot 7 \cdot 19$ bei der Division durch 111, und dieser ist 8 (Tabelle 5).

k	Rest von 2^{2^k} bei der Division durch 11	Quadrat des Restes
0	2	4
1	4	16
2	16	256
3	34	1156
4	46	2116
5	7	49
6	49	—

Tabelle 4

Zahl	Die Zahl hat denselben Rest bei der Division durch 111 wie die Zahl	Rest bei der Division durch 111
$2 \cdot 4$	$2 \cdot 4$	8
$2 \cdot 4 \cdot 16$	$8 \cdot 16$	17
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34$	$17 \cdot 34$	23
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34 \cdot 7$	$23 \cdot 7$	50
$2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 34 \cdot 7 \cdot 49$	$50 \cdot 49$	8

Tabelle 5

Jacobis Manuskript

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht schwer, die Ausführungen Jacobis zu verstehen. Der Text des nachgelassenen Manuskripts (Jacobi-Nachlaß II/27m, Archiv der AdW der DDR) lautet [Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf die nachfolgenden Anmerkungen]:

Untersuchung, ob die Zahl 11111111111 eine Primzahl ist oder nicht

Wenn 2^N durch N dividiert nicht den Rest 2 läßt, so ist N keine Primzahl. Setzt man N durch Addition aus Potenzen von 2 zusammen, so hat man, um diesen Rest zu finden, nur nach und nach die Reste der Zahlen von der Form 2^{2^n} zu suchen und diese miteinander zu multiplizieren. Man wird daher zu wiederholten Malen eine Zahl zu quadrieren, das Quadrat durch N zu dividieren, den Rest wieder zu quadrieren, das Quadrat durch N zu dividieren, den Rest zu quadrieren haben u.s.f.

Bei der graden Leichtigkeit, mit welcher Hr. Dase diese Operationen ausführt, konnte er in 6 Stunden erkennen, daß die Zahl $\frac{10^{11}-1}{9}$ *keine* Primzahl ist. Ich will alle hierzu nötigen Rechnungsresultate hersetzen, wie sie von Herrn Dase im Kopf gefunden sind.

Wenn man nach und nach die möglichst höchsten Potenzen von 2 so lange addiert, aber ihre Summe kleiner als $N = 11111111111$ bleibt, so erhält man [1]:

$2^{33} =$ 8 5 8 9 9 3 4 5 9 2
$2^{31} =$ 2 1 ...
1 0 7 ...
$2^{28} =$ 2 6 ...
1 1 0 0 ...
$2^{26} =$ 6 7 ...
1 1 0 7 ...
$2^{25} =$ 3 3 ...
1 1 1 0 6 ...
$2^{22} =$ 4 1 ...
1 1 1 1 0 7 ...
$2^{18} =$ 2 6
1 1 1 1 0 9 ...
$2^{17} =$ 1 3 ...
1 1 1 1 1 1 0 4 ...
$2^{12} =$ 4 0 ...
1 1 1 1 1 1 0 8 ...

$2^{11} =$ 2 0 ...
1 1 1 1 1 1 1 0 6 5 6
$2^{8} =$ 2 5 6
1 1 1 1 1 1 1 0 9 1 2
$2^{7} =$ 1 2 8
... ... 4 0
$2^{6} =$ 6 4
... 0 4
$2^{2} =$ 4
... 0 8
$2^{1} =$ 2
... 1 0

Man hat daher

11111111111
$= 2^{33} + 2^{31} + 2^{28} + 2^{26} + 2^{25} + 2^{22} + 2^{18} + 2^{17} + 2^{12} + 2^{11} + 2^{8} + 2^{7} + 2^{6} + 2^{2} + 2^{1} + 2^{0}$.

Es folgen jetzt die Reste R, welche die Zahlen 2^{2^n} von 2^{64} an durch N dividiert lassen: neben jedem steht sein vollständiges Quadrat Q. Den Rest, welchen dasselbe durch N dividiert läßt, gibt das nächstfolgende R.* (* Herr Dase ging hierbei von dem Werte $2^{64} = 184467$ ... aus, welcher durch 111 ... dividiert den Quotient 166 ... mit dem Rest 722 ... gibt.) [2]

Die noch übrige Rechnung besteht darin, daß die Reste, welche die Potenzen $2^{2^{33}}$, $2^{2^{31}}$, etc. durch N dividiert lassen, nach und nach miteinander multipliziert werden, indem man nach jeder Multiplikation wieder den Rest nimmt, welchen das Produkt durch N dividiert läßt.

Diese Produkte und Reste gibt das folgende Schema:

$2^{2^{33}} \equiv$ 349 ...
$2^{2^{31}} \equiv$ 73 ...
288 ...
51129
$2^{2^{28}} \equiv$ 374 ...
19 ...
.
.
.
1496324899 [3]

Man sieht daraus, daß für $N = 11111111111$ $2^N - 1$ durch N dividiert nicht den Rest 1, sondern den Rest 14966324899 [3] läßt, und daher 11111111111 keine Primzahl ist.

Ich bemerke noch, daß für die hier betrachtete Zahl 11111111111 die Divisionen sich auf eine einfache Addition und Subtraktion reduzieren. Denn, da 10^{11} durch dieselbe dividiert den Rest 1 läßt [4], kann man, wenn man bloß den Rest wissen will, den eine durch 11111111111 dividierte Zahl läßt, von derselben die auf die ersten 11 Stellen folgenden abschneiden und zu der übrigbleibenden Zahl addieren. [5]

Tabelle 6

n	R	Q
6	7227352390	52234622569238712100
.	.	.
.	.	.
.	.	.
32	9765068449	95356561813655265601
33	3497720108	NB. Hier keine Zahl.

Bei der ersten zu dividierenden Zahl [6] 18446744073709551616 hat man auf diese Weise

$$\begin{array}{r} 73709551616 \\ +\ 184467440 \\ \hline 73894019056 \\ -66666666666 \\ \hline \end{array}$$

Rest 7227352390, wie oben. J. [7]

Anmerkungen

[1] Im Manuskript sind die fehlenden Ziffern nicht angegeben. Man vergleiche das Ergebnis mit der Tabelle 7 der Potenzen von 2.

[2] In der Tabelle 8 sind die Reste der Zahlen 2^{2^n} für $n=0, 1, 2, \ldots, 33$ angegeben.

[3] In der Tabelle 9 sind die Reste angegeben. Wir erhalten abweichend von Jacobi 2992649798 als Rest von $2^{11111111111}$ bei der Division durch 11111111111.

Die Werte in den Tabellen 8 und 9 wurden freundlicherweise von Herrn Arlt auf einer EDVA im Rechenzentrum der Sternwarte Babelsberg errechnet.

[4] $10^{11}=9 \cdot 11111111111+1$

[5] Diesen Rechenvorteil kann man auch bei den Divisionen durch 11, 111, 1111, ... anwenden.

Dazu einige Beispiele: Es soll der Rest von 5123 bei der Division durch 11 bestimmt werden. Es ist $10^2=9 \cdot 11+1$, d.h. $10^2=100$ läßt den Rest 1, folglich 200 den Rest 2, ..., 5100 denselben Rest wie 51. Man hat für 5123 den Rest 8:

$$\begin{array}{r} 23 \\ +51 \\ \hline 74 \\ -66 \\ \hline 8 \end{array} \quad (=6 \cdot 11)$$

Rest 8

(In der Tat, es ist $5123=465 \cdot 11+8$.)

Es soll der Rest von 12345678 bei der Division durch 111 bestimmt werden. Es ist $1000=10^3=9 \cdot 111+1$, d.h., 1000 läßt den Rest 1, folglich 12345000 denselben Rest wie 12345. Man hat für 12345678 den Rest 36:

$$\begin{array}{r} 12345 \\ +\ 678 \\ \hline 13023 \\ -12987 \\ \hline 36 \end{array} \quad (=117 \cdot 11)$$

(In der Tat, es ist $12345678=111222 \cdot 111+36$.)

Als Rest von 13023 bei der Division durch 111 ergibt sich 36:

$$\begin{array}{r} 13 \\ +23 \\ \hline 36 \end{array}$$

[6] $2^{2^6}=2^{64}=2^{32}\,2^{32}=$ 18446744073709551616.

[7] J. – Kurzzeichen für „Jacobi" (Unterschrift).

Weitere Primzahlzerlegungen

Die Zahl 11111111111 ist also keine Primzahl. Ihre Primzahlzerlegung ist $21649 \cdot 513239$.

Tabelle 7 (Potenzen 2^k von 2)

k	2^k
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648
32	4294967296
33	8589934592

Tabelle 8

n	Reste von 2^{2^n} bei der Division durch 11111111111
0	2
1	4
2	16
3	256
4	65536
5	4294967296
6	7227352390
7	3094391659
8	6051191545
9	3534545105
10	10515502227
11	9369939622
12	9692349458
13	5821199033
14	4361220893
15	11063253259
16	7331410141
17	539580072
18	9657992206
19	7645070126
20	9819904626
21	9144949589
22	8409792173
23	4870419084
24	9584164432
25	4976889147
26	3996304087
27	377052477
28	3746590548
29	1169976378
30	2869465109
31	739609070
32	9765068449
33	3497720108

Tabelle 9

Zahl	Rest bei der Division durch 11111111111
2^{2^0}	$2=r_1$
$r_1 \cdot 2^{2^1}$	$8=r_2$
$r_2 \cdot 2^{2^2}$	$128=r_3$
$r_3 \cdot 2^{2^6}$	$2878883707=r_4$
$r_4 \cdot 2^{2^7}$	$8038661628=r_5$
$r_5 \cdot 2^{2^8}$	$10289303406=r_6$
$r_6 \cdot 2^{2^{11}}$	$956387382=r_7$
$r_7 \cdot 2^{2^{12}}$	$1436213141=r_8$
$r_8 \cdot 2^{2^{17}}$	$1146986783=r_9$
$r_9 \cdot 2^{2^{18}}$	$10709789192=r_{10}$
$r_{10} \cdot 2^{2^{22}}$	$40043007=r_{11}$
$r_{11} \cdot 2^{2^{25}}$	$6953537925=r_{12}$
$r_{12} \cdot 2^{2^{26}}$	$6842661773=r_{13}$
$r_{13} \cdot 2^{2^{28}}$	$11027977012=r_{14}$
$r_{14} \cdot 2^{2^{31}}$	$10797151647=r_{15}$
$r_{15} \cdot 2^{2^{33}}$	2992649798

In der Tabelle 10 (nach S. Rösch, Bild der Wissenschaft, Heft 12, 1977), deren Zahlenwerte ebenfalls mit Hilfe des Computers gefunden wurden, werden abschließend die Primzahlzerlegungen der nur aus der Ziffer 1 (bis zu 33ziffrigen) natürlichen Zahlen angegeben. Als Primzahl erweisen sich darunter nur die 19ziffrige Zahl $\frac{10^{19}-1}{9}$ und die 23ziffrige Zahl $\frac{10^{23}-1}{9}$.

H. Pieper

Anzahl der Ziffern	Zahl	Primzahlzerlegung
1		
2	11	11
3	111	$3\cdot 37$
4	1111	$11\cdot 101$
5	11111	$41\cdot 271$
6	111111	$3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$
7	1111111	$239\cdot 4649$
8	11111111	$11\cdot 73\cdot 101\cdot 137$
9	111111111	$3\cdot 3\cdot 37\cdot 333667$
10	1111111111	$11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091$
11	11111111111	$21649\cdot 513239$
12	111111111111	$3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 101\cdot 9901$
13	1111111111111	$53\cdot 79\cdot 265371653$
14	11111111111111	$11\cdot 239\cdot 4649\cdot 909091$
15	111111111111111	$3\cdot 31\cdot 37\cdot 41\cdot 271\cdot 2906161$
16	1111111111111111	$11\cdot 17\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 5882353$
17	11111111111111111	$2071723\cdot 5363222357$
18	111111111111111111	$3\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 52579\cdot 333667$
19	1111111111111111111	1111111111111111111
20	11111111111111111111	$11\cdot 41\cdot 101\cdot 271\cdot 3541\cdot 9091\cdot 27961$
21	111111111111111111111	$3\cdot 37\cdot 43\cdot 239\cdot 1933\cdot 4649\cdot 10838689$
22	1111111111111111111111	$11\cdot 11\cdot 23\cdot 4093\cdot 8779\cdot 21649\cdot 513239$
23	11111111111111111111111	11111111111111111111111
24	111111111111111111111111	$3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 9901\cdot 99990001$
25	1111111111111111111111111	$41\cdot 271\cdot 21401\cdot 25601\cdot 182521213001$
26	11111111111111111111111111	$11\cdot 53\cdot 79\cdot 859\cdot 265371653\cdot 1058313049$
27	111111111111111111111111111	$3\cdot 3\cdot 3\cdot 37\cdot 757\cdot 333667\cdot 440334654777631$
28	1111111111111111111111111111	$11\cdot 29\cdot 101\cdot 239\cdot 281\cdot 4649\cdot 909091\cdot 121499449$
29	11111111111111111111111111111	$3191\cdot 16763\cdot 43037\cdot 62003\cdot 77843839397$
30	111111111111111111111111111111	$3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 31\cdot 37\cdot 41\cdot 211\cdot 241\cdot 271\cdot 2161\cdot 9091\cdot 2906161$
31	1111111111111111111111111111111	$2791\cdot 6943319\cdot 57336415063790604359$
32	11111111111111111111111111111111	$11\cdot 17\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 353\cdot 449\cdot 641\cdot 1409\cdot 69857\cdot 5882353$
33	111111111111111111111111111111111	$3\cdot 37\cdot 67\cdot 21649\cdot 513239\cdot 1344628210313298373$

Tabelle 10

Der *alpha*-Club der J.-Schehr-OS Leipzig (Leitung: J. Lehmann, Chefredakteur *alpha*) auf dem Pressefest der Leipziger Volkszeitung in Aktion. Über 2000 Schüler (oft gemeinsam mit ihren Eltern) beteiligten sich an der *Wissensstraße Mathematik* (siehe Foto).

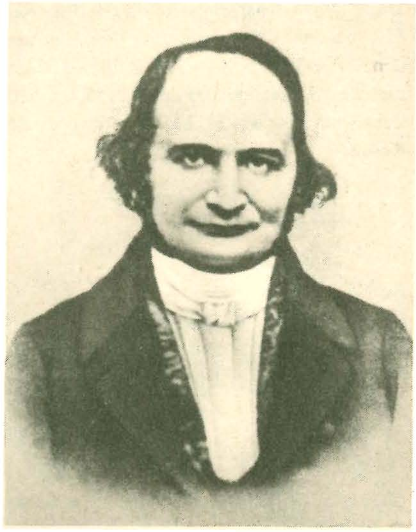
Eine Aufgabe von Prof. Dr.

Carl Gustav Jacob Jacobi

Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin

Der 10. Dezember dieses Jahres ist der 175. Jahrestag der Geburt dieses bedeutenden Mathematikers. (In Heft 1/80 veröffentlichen wir eine umfassende Biographie.)

Als Quelle für diese Aufgabe wurde eine bisher unveröffentlichte Arbeit von C. G. J. Jacobi benutzt, deren Manuskript Jacobi nach November 1850 angefertigt hat, deren Titel „Über die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen, welche es bis zu einer gegebenen Grenze gibt" lautet und die sich im Jacobi-Nachlaß des Archivs der Akademie der Wissenschaften der DDR befindet.



▲1908▲ a) Wieviel Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 250, welche durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind?

b) Wieviel Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 10000, welche durch keine der Primzahlen 3, 11, 4001 teilbar sind?

c) Es seien $a, b, c, \ldots p$ beliebige voneinander verschiedene Primzahlen und $N \geqq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl derjenigen unter den natürlichen Zahlen von 1 bis N, welche durch keine der Primzahlen $a, b, c, \ldots, p$ teilbar sind!

Hinweis: Benutze, daß die Anzahl der Zahlen bis N, welche durch eine Zahl k teilbar sind, dem Bruch $\frac{N}{k}$ oder der nächst kleineren ganzen Zahl gleich ist!

XXI. Internationale Mathematikolympiade

London (1. bis 9. Juli 1979)

WESTFIELD COLLEGE
(University of London)

Aufgaben

1. Seien p und q natürliche Zahlen, so daß
$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$
gilt. Man beweise, daß p durch 1979 teilbar ist. (6 Punkte)

2. Gegeben sei ein Prisma mit den Fünfecken $A_1A_2A_3A_4A_5$ bzw. $B_1B_2B_3B_4B_5$ als Grund- bzw. Deckfläche. Jede Seite der beiden Fünfecke sowie jede Verbindungsstrecke A_iB_j für alle $i, j=1, 2, \ldots, 5$ sei entweder rot oder grün gefärbt. Jedes Dreieck, dessen Ecken Eckpunkte des Prismas sind und dessen drei Seiten gefärbt sind, hat zwei Seiten verschiedener Farbe.
Man zeige, daß alle 10 Seiten der Grund- und Deckfläche die gleiche Farbe erhalten. (7 Punkte)

3. In der Ebene seien zwei sich schneidende Kreislinien k_1, k_2 gegeben. A sei einer der beiden Schnittpunkte. Zwei Massenpunkte P_1 bzw. P_2 bewegen sich mit konstanten Geschwindigkeiten im gleichen Drehsinn auf k_1 bzw. k_2. Sie beginnen gleichzeitig in A und treffen nach einem Umlauf wieder gleichzeitig in A ein.
Man zeige, daß es einen festen Punkt P in der Ebene gibt, für den in jedem Zeitpunkt der Bewegung gilt:
$$\overline{PP_1}=\overline{PP_2}.$$ (7 Punkte)

4. Gegeben seien ein Punkt P in der Ebene π und ein Punkt Q außerhalb der Ebene π. Bestimme alle Punkte R der Ebene π, für die der Quotient
$$\frac{\overline{QP}+\overline{PR}}{\overline{QR}}$$
ein Maximum ist! (6 Punkte)

5. Man bestimme alle reellen Zahlen a, für die es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 gibt, die den Bedingungen
$$\sum_{i=1}^{5} ix_i=a, \quad \sum_{i=1}^{5} i^3x_i=a^2$$
und $\sum_{i=1}^{5} i^5x_i=a^3$ genügen. (7 Punkte)

6. Es seien A und E zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines regulären 8ecks. In A sitzt ein Frosch. Von jeder Ecke des 8ecks, mit Ausnahme von E, darf er jeweils zu einer der beiden Nachbarecken hüpfen. Sobald er die Ecke E erreicht hat, bleibt er dort sitzen. Es sei a_n die Anzahl der unterscheidbaren Wege, die Ecke E von der Ecke A aus in genau n Sprüngen zu erreichen.
Beweise, daß für $n=1, 2, 3, \ldots$ gilt:
$$a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x^{n-1}-y^{n-1}),$$
wobei $x=2+\sqrt{2}$ und $y=2-\sqrt{2}$ ist!
Bemerkung: Ein Weg aus n Sprüngen ist eine Folge $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ von Eckpunkten, so daß
(*i*) $P_0=A$, $P_n=E$,
(*ii*) für alle i mit $0\leqq i\leqq n-1$ ist P_i von E verschieden,
(*iii*) für alle i mit $0\leqq i\leqq n-1$ sind P_i und P_{i+1} benachbarte Eckpunkte.
(7 Punkte)

Zur DDR-Mannschaft gehörten Bernd Kreußler und Frank Eisenhaber von der Spezialschule Mathematik/Physik der Berliner Humboldt-Universität, Thomas Gundermann (2. Preis) von der EOS *H. Pistor* Sonneberg, Lutz Dietrich (2. Preis) aus der Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt, Uwe Szyszka (3. Preis) von der EOS *Friedrich Engels* Neubrandenburg, Steffen Zopf von der EOS *Karl Marx* Leipzig, Bodo Heise (3. Preis) von der F.-J.-Curie-OS Görlitz sowie Andreas Kasparek von der ABF *Walter Ulbricht* Halle.

Teilnehmerland	erreichte Punkte								insgesamt	1. Preis	2. Preis	3. Preis
Österreich	20	23	13	16	21	15	19	25	152			4
Belgien	3	3	22	6	2	6	7	17	66			1
Bulgarien	9	20	23	24	24	23	5	22	150			5
Brasilien	5	5	2	4	3	–	–	–	19			
Kuba	10	5	11	9	–	–	–	–	35			
ČSSR	16	20	24	17	23	40	12	26	178	1	0	4
BRD	21	14	35	27	39	30	34	29	235	1	5	1
DDR	33	13	31	20	19	19	26	19	180		2	2
Frankreich	14	12	15	19	37	11	28	19	155	1	1	1
Großbritannien	23	23	34	30	32	34	21	21	218		4	4
Griechenland	6	2	7	6	7	5	3	21	57			1
Ungarische VR	15	20	16	18	34	22	17	34	176		2	2
Israel	13	4	28	16	11	20	12	15	119			2
Niederlande	22	10	17	18	11	8	11	33	130		1	1
VR Polen	13	9	8	24	21	29	29	27	160		2	3
SR Rumänien	35	23	17	33	32	28	39	33	240	1	3	2
Schweden	14	10	17	29	13	22	9	29	143		2	1
Finnland	16	18	14	1	4	6	7	23	89			1
UdSSR	19	27	35	34	36	40	36	40	267	2	4	1
USA	17	9	27	17	39	24	32	34	199	1	2	2
SR Vietnam	32	29	33	40*	–	–	–	–	134	1	3	
SFR Jugoslawien	13	27	13	11	23	26	24	35	172		1	4
Luxemburg	7	–	–	–	–	–	–	–	7			
										8	32	42

* Ein Schüler der vietnamesischen Mannschaft erhielt einen Sonderpreis für die elegante Lösung der Aufgabe 3.

Wir arbeiten mit Mengen

Teil 3

Weitere Arten von Abbildungen

Es gibt noch weitere Arten von Abbildungen: So liegt z. B. eine Abbildung *von* M_1 *in* M_2 genau dann vor, wenn $Vb = M_1$ und $Nb \subset M_2$ ist; es liegt eine Abbildung *aus* M_1 *auf* M_2 genau dann vor, wenn $Vb \subset M_1$ und $Nb = M_2$ ist. An der Abbildung F_2 erkennen wir, daß Peter nicht nur das Bohnern, sondern auch das Heizen erledigt. Ihm ist also nicht genau eine Arbeit zugeordnet; er erledigt zwei Arbeiten. Gisela hingegen geht nur einkaufen und bekommt keine weiteren Aufträge; ihr ist genau eine Arbeit zugeordnet.

Mit Hilfe dieses Beispiels werden wir bestimmt nachstehende Definition erfassen, die eine besondere Eigenschaft von Abbildungen widerspiegelt:

Wenn *jedem* Urbild *genau ein* Bild zugeordnet ist, so liegt eine *eindeutige* Abbildung vor; und jede eindeutige Abbildung heißt *Funktion.*

F_2 ist also *keine* Funktion. Auch F_1 ist keine eindeutige Abbildung. In F_2 ist Peter *nicht* genau eine Arbeit zugeordnet, und in F_1 sind Vater und auch Mutter jeweils *nicht* genau eine Arbeit zugeordnet.

F_1 ist demzufolge eine *nicht eindeutige* Abbildung *von* M_1 *auf* M_2;

F_2 ist eine *nicht eindeutige* Abbildung *aus* M_1 *in* M_2. Von jeder Abbildung F läßt sich eine Umkehrabbildung F^{-1} bilden.

Das geschieht, indem man die „Glieder“ in allen geordneten Paaren vertauscht. Aus $[a;b]$ wird $[b;a]$.

Bei der Pfeildarstellung erhalten alle Pfeile den entgegengesetzten Richtungssinn, oder wir vertauschen die Anordnung der Mengen M_1 und M_2.

Für unser praktisches Beispiel F_1 heißt die Frage: „Was erledigt Vater?“ Antwort: „Dem Vater wird das Heizen zugeordnet.“ usw. Für die Umkehrabbildung F_1^{-1} heißt dann die Frage: „Wer heizt?“; Antwort: „Der Arbeit ‚Heizen‘ wird der Vater zugeordnet.“ usw.

Es ist also $F_1^{-1} = \{[f;m], [w;I], [b;P], [e;H], [h;V], [p;G], [u;V], [k;M]\}$.

Pfeildarstellung von F_1^{-1}:

entweder: oder:

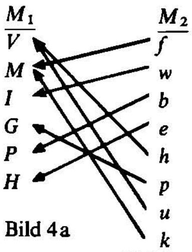


Bild 4a

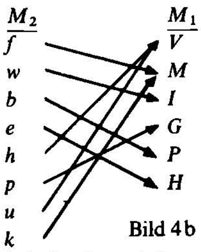


Bild 4b

Wenn eine Abbildung F eindeutig und ihre Umkehrabbildung F^{-1} ebenfalls eindeutig ist, so heißt F eine eineindeutige (oder eindeutig umkehrbare) Abbildung.

Eine Funktion f besitzt demnach eine Umkehrfunktion f^{-1} genau dann, wenn f eineindeutig ist.

Wir wollen an zwei Beispielen die weiteren Arten und Eigenschaften von Abbildungen darstellen und erläutern:

1) Gegeben seien die Mengen $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{4,5,6\}$ und die Abbildung $F_3 = \{[1;4], [2;4], [3;5]\}$.

Pfeildarstellung:

F_3

A	B
1	4
2	5
3	6

F_3 ist eine eindeutige, aber nicht eineindeutige Abbildung von A in B. Es gilt: $Vb = \{1,2,3\}$; $Nb = \{4,5\}$; $Vb = A$; $Nb \subset B$.

F_3^{-1}

A	B
1	4
2	5
3	6

F_3^{-1} ist nicht eindeutig, weil dem Element 4 nicht genau ein Element, sondern die Elemente 1 und 2 zugeordnet sind.

2) Gegeben seien die Mengen $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{4,5\}$.

Die Abbildung $F_4 = \{[1;4], [2;5]\}$ ist eine eineindeutige Abbildung aus A auf B, denn es gilt: F_4 ist eindeutig und auch F_4^{-1} ist eindeutig, wie die folgenden Pfeildarstellungen anschaulich zeigen:

F_4

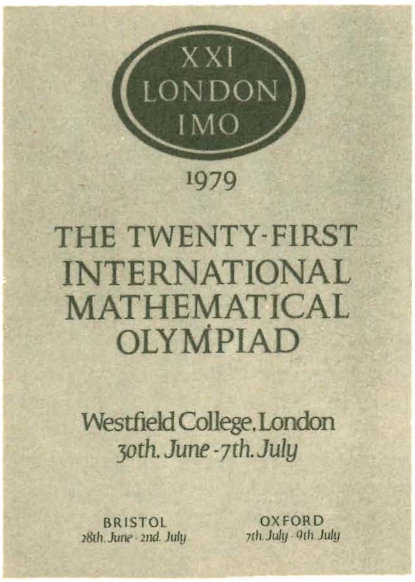
A	B
1	4
2	5
3	

F_4^{-1}

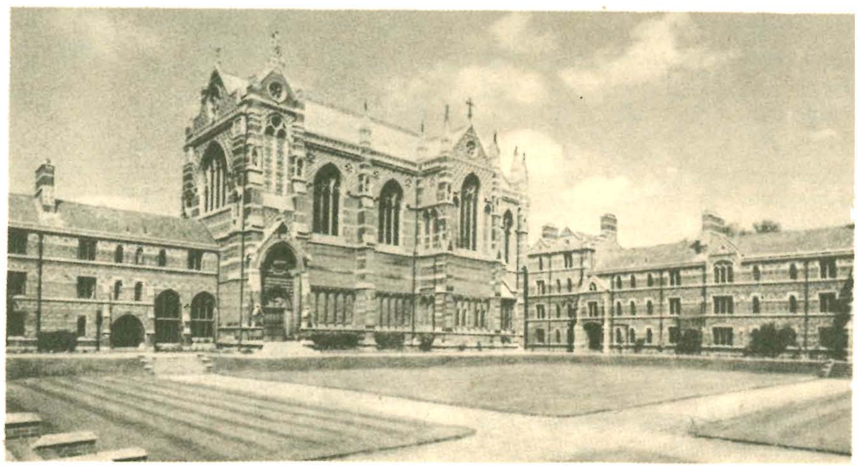
A	B
1	4
2	5
3	

Im Arbeitsblatt Nr. 6 sollen nun die Kenntnisse über Arten, Eigenschaften und Darstellungsmöglichkeiten von Abbildungen angewendet werden.

Wir wollen nun noch etwas näher auf Funktionen eingehen. Es mögen die Mengen $X = \{x \in N; x \leqq 5\}$ und $Y = \{y \in N; y \leqq 10\}$ vorliegen. Die Abbildung F soll folgenden Sachverhalt widerspiegeln: Jeder Zahl der Menge X soll ihr doppelter Wert aus der Menge Y zugeordnet werden. Zunächst wollen wir das veranschaulichen:



Nach den Klausurtagen unternahmen alle IMO-Teilnehmer eine Exkursion zur Universität Oxford (Foto), lernten die Shakespeare-Stadt Stratford on Avon kennen. Die Sehenswürdigkeiten der britischen Hauptstadt hatten sie während einer Stadtrundfahrt bereits kennengelernt.



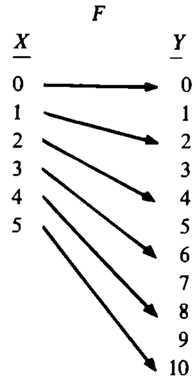


Bild 5

F ist eine eineindeutige Abbildung von X in Y. F ist eine Funktion. Wir bezeichnen sie mit f und können sie als Menge geordneter Paare

$f=\{[0;0], [1;2], [2;4], [3;6], [4;8], [5;10]\}$ oder mit Hilfe von Grundbereich und Aussageform

$f=\{[x;y]\in N X N;\ y=2x \wedge x\leqq 5 \wedge y\leqq 10\}$

schreiben.

Der Vorbereich einer eindeutigen Abbildung F heißt Definitionsbereich der Funktion f. In unserem Beispiel gilt:

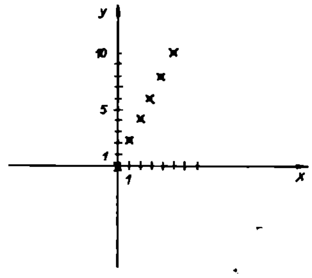
$Db=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Der Nachbereich einer eindeutigen Abbildung F heißt Wertebereich (oder Wertvorrat) der Funktion f. In unserem Beispiel gilt:

$Wb=\{0,2,4,6,8,10\}$.

Eine Funktion läßt sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen.

Bild 6

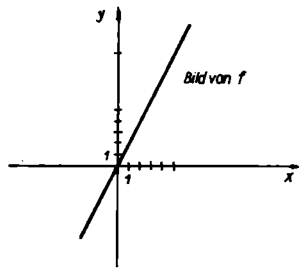


Die Funktion f besteht aus 6 geordneten Paaren natürlicher Zahlen. Ihre graphische Darstellung sind 6 Punkte der xy-Ebene. Diese Punkte heißen „diskrete" Punkte, weil „dazwischen Lücken sind".

Würden wir für die Funktion f die Menge aller reellen Zahlen als Grundbereich wählen, so würde die graphische Darstellung eine Strecke sein. Ein Aufschreiben der Funktion als Menge geordneter Paare wäre dann nicht möglich, da es unendlich viele geordneten Paare reeller Zahlen gibt, die die Gleichung $y=2x$ im Intervall $[0;5]$ erfüllen.

$f=\{[x;y]\in PXP;\ y=2x \wedge x\leqq 5\}$:

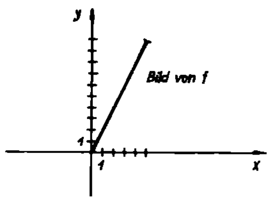
Bild 7



Ohne die Einschränkung $x\leqq 5$ würden wir als Bild der Funktion eine Gerade erhalten:

$f=\{[x;y]\in PXP;\ y=2x\}$:

Bild 8



Bilder linearer Funktionen können Geraden, Strahlen, Strecken oder Mengen diskreter Punkte sein. Das hängt vom gewählten Grundbereich und vom Definitionsbereich der Funktion ab.

Im Arbeitsblatt 7 sollen verschiedene Funktionen dargestellt werden.

Auf Grund des bisher Gelesenen wird es nicht schwierig sein, auch den Begriff „Relation" zu erfassen. Wir beginnen wieder mit einem sehr einfachen Beispiel:

Eine Familie möge aus Vater (v), Mutter (m), Sohn (s) und Tochter (t) bestehen. Vater sei 41 Jahre, Mutter 36, Sohn 16 und Tochter 14 Jahre alt. In der Menge $F=\{v,m,s,t\}$ soll untersucht werden, welches Familienmitglied zu welchem Familienmitglied in der Beziehung „... ist jünger als ..." steht. *Alle* geordneten Paare $[a;b]$, bei denen das Familienmitglied a jünger ist als das Familienmitglied b, sollen zur Menge R zusammengefaßt werden. Wir erhalten

$R=\{[t;s], [t;m], [t;v], [s;m], [s;v], [m;v]\}$.

Die Menge R aller dieser geordneten Paare widerspiegeln die Beziehung „... ist jünger als ..." in der Menge F. Wir können auch sagen, daß in allen diesen geordneten Paaren $[a;b]$ a zu b in der Relation „... ist jünger als ..." steht.

Die Menge R ist – wie man feststellen kann – eine Teilmenge der Kreuzmenge FXF.

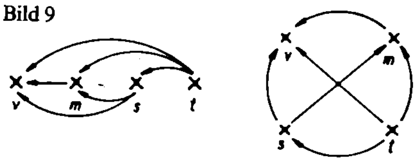
Es gilt allgemein:

Jede Teilmenge R der Kreuzmenge MXM heißt eine zweistellige Relation in der Menge M (und umgekehrt!). Wir erkennen, daß jede Abbildung eine Relation ist (und umgekehrt!). Es kommt nur auf die Betrachtungsweise und auf Zweckmäßigkeitsgründe an, ob man ‚Abbildung' oder ‚Relation' sagt.

In unserem Beispiel könnte man auch formulieren: „Jedes Familienmitglied aus F wird auf ein älteres Familienmitglied aus F abgebildet." Einfacher und verständlicher ist hier sicher die Ausdrucksweise: „Von je zwei Familienmitgliedern aus F soll immer das erste jünger als das zweite sein."

Relationen lassen sich mit Hilfe von Relationsgraphen veranschaulichen, wie wir das an unserem Beispiel zeigen wollen:

Bild 9

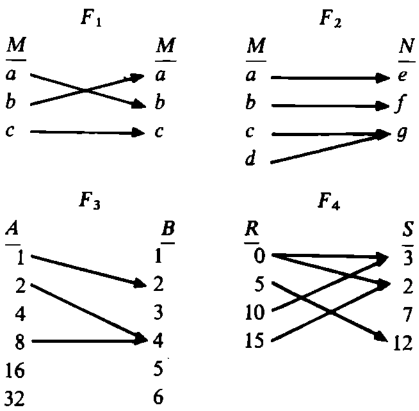


Ein weiteres Beispiel soll das Verständnis vertiefen, ehe wir die Aufgabe erhalten, im Arbeitsblatt 8 Relationen zu bilden und zu veranschaulichen.

Gegeben sei die Menge $M=\{0,1,2,3\}$ und die Relation „... ist kleiner oder gleich ..." in M. Wir finden: $0=0$; $0<1$; $0<2$; $0<3$; $1=1$; $1<2$; $1<3$; $2=2$; $2<3$; $3=3$. Es gibt keine weiteren Elemente a und b aus M, für die die Aussageform $a\leqq b$ zu einer wahren Aussage wird.

Arbeitsblatt 6

Gegeben seien die folgenden Pfeildarstellungen von Abbildungen. Es ist der Lückentext auszufüllen!



F_1 ist eine .... Abbildung
.... M .... M;
$Vb=$, Vb .... M; $Nb=$;
Nb .... M;
$F_1=\{[\quad;\quad]$,

F_2 ist eine .... Abbildung
.... M .... N;
$Vb=$; Vb .... M; $Nb=$;
Nb .... N;
$F_2=\{$

F_3 ist eine .... Abbildung
.... A .... B;
$Vb=$; Vb .... A; $Nb=$;
Nb .... B;
$F_3=\{$

F_4 ist eine .... Abbildung
.... R .... S;
$Vb=$; Vb .... R; $Nb=$ ....,
Nb .... S;
$F_4=\{$

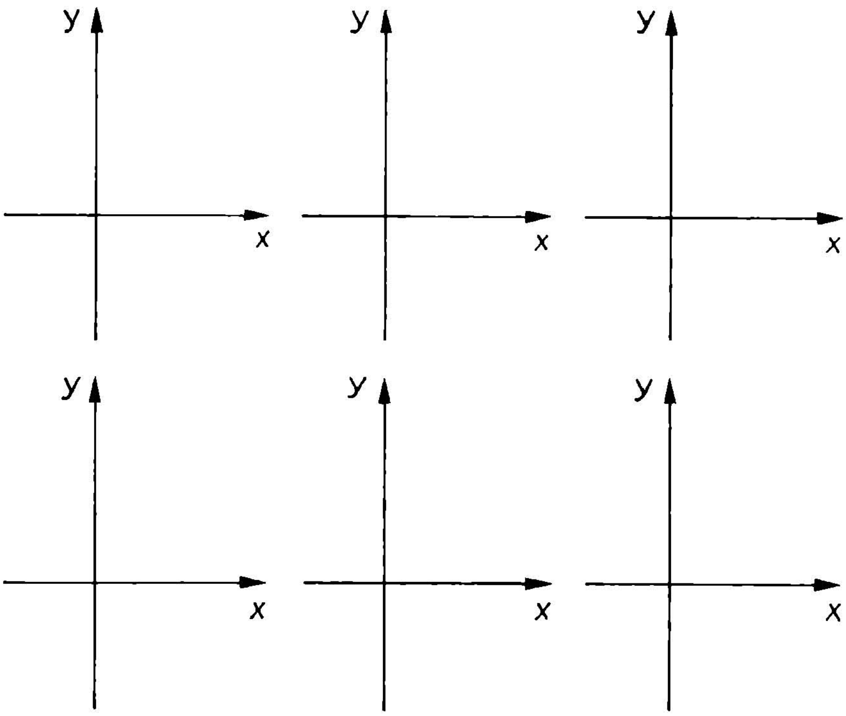
Man schreibe als Menge geordneter Paare:
$F_1^{-1}=\{$
$F_2^{-1}=\{$
$F_3^{-1}=\{$
$F_4^{-1}=\{$

Arbeitsblatt 7

Die folgenden Funktionen sollen graphisch dargestellt werden:

$f_1 = \{[x;y] \in N X N;\ y = 3x - 1 \wedge x \leqq 4 \wedge y < 8\}$
$f_2 = \{[x;y] \in N X N;\ y = 3x - 1 \wedge x \leqq 4\}$
$f_3 = \{[x;y] \in P X P;\ y = 3x - 1 \wedge x \leqq 4\}$
$f_4 = \{[x;y] \in P X P;\ y = 3x - 1\}$
$f_5 = \{[x;y] \in G X G;\ y = 3x - 1 \wedge -2 \leqq x \leqq 4$
$\wedge -5 < y < 8\}$
$f_6 = \{[x;y] \in R^* X R^*;\ y = 3x - 1 \wedge x > 1\}$
(als Einheit ist 2 mm zu wählen!)

Bild 10



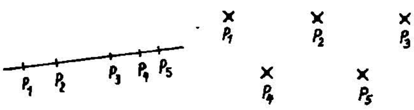
Arbeitsblatt 8

Gegeben seien die folgenden Mengen M_1, M_2, M_3, M_4 und die in ihnen erklärten zweistelligen Relationen R_1, R_2, R_3, R_4. Die Relationen sind elementweise (als Mengen geordneter Paare) anzugeben und mit Hilfe von Relationsgraphen zu veranschaulichen!

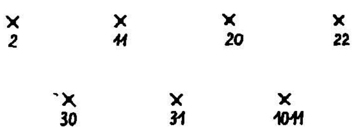
(1) $M_1 = \{2,3,4,5,6\}$ und R_1:
„... ist Teiler von ...",
also $R_1 = \{[a;b] \in M_1 X M_1 : a \mid b\}$!
$R_1 = \{[$

(2) $M_2 = \{0,1,2,3,4\}$ und R_2:
„... läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie ..."
$R_2 = \{[$

(3) $M_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ und R_3:
„... liegt links von ..."
$R_3 = \{[$

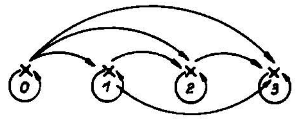


(4) $M_4 = \{2,11,20,22,30,31,1011\}$ und R_4: „... hat dieselbe Quersumme wie ..."
$R_4 = \{[$



Wir schreiben als Menge geordneter Paare:
$R = \{[0;0], [0;1], [0;2], [0;3], [1;1], [1;2], [1;3], [2;2], [2;3], [3;3]\}$.
Es gilt $R \subseteqq M X M$; hier sogar $R \subset M X M$. Wir können auch schreiben: $R = \{[a;b] \in M X M: a \leqq b\}$.
Relationsgraph:

Bild 11



Es gibt spezielle Relationen (z. B. Äquivalenzrelationen oder Ordnungsrelationen), die eine wichtige Rolle bei weiteren Betrachtungen spielen. Darauf werden wir aber nicht eingehen.

Abschließend wollen wir einige Erkenntnisse zusammenfassen:

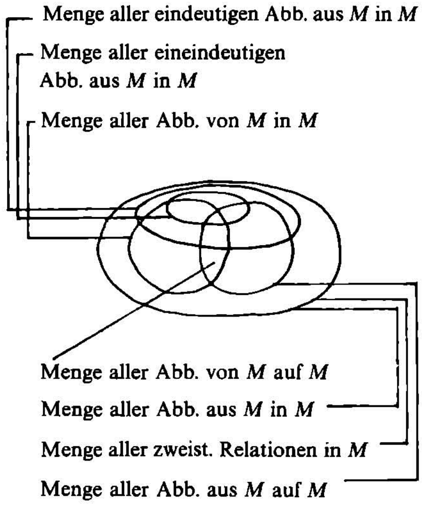


Bild 12

Aus dem Mengendiagramm erkennen wir:
1. Jede Abbildung aus M in M ist eine zweistellige Relation in M.
2. Jede zweistellige Relation in M ist eine Abbildung aus M in M.
3. Jede Funktion f ist eine Abbildung, aber nicht jede Abbildung ist eine Funktion.
4. Jede Funktion f ist eine Relation, aber nicht jede Relation ist eine Funktion.

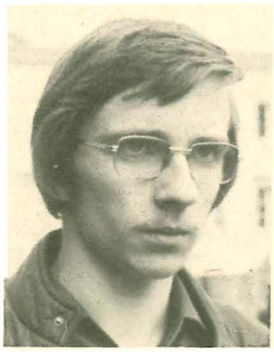
W. Fregin

Georg Cantor (1845 bis 1918)
Begründer der Mengenlehre

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

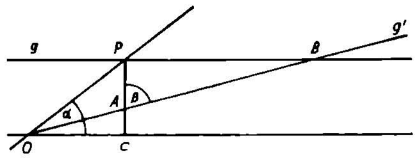
Über eine AG Mathematik der EOS Humboldt Erfurt

Stefan Geiß, der z. Z. seinen Ehrendienst bei der NVA leistet, war Schüler der Erweiterten Humboldt-OS Erfurt, Mitglied des Bezirksmathematikklubs Erfurt und Teilnehmer der DDR-Mathematik-Olympiaden 1974, 1975, 1976 und 1977.



Gemeinsam mit drei anderen Schülern leitete er einen Mathematik-Zirkel für Schüler der 9. und 10. Klassen. Einige dieser Schüler erreichten bei den Kreisolympiaden erste und zweite Preise. Der AG-Stoff war so gestaltet, daß in der Zeit zwischen den Olympiaden größere Stoffkomplexe behandelt und vor Olympiaden ein spezielles Aufgabentraining durchgeführt wurde.
So wurden z. B. Elementargeometrie (u. a. Dreieckskonstruktionen mit Kreis des Apollonius, In- und Umkreisradius), Ungleichungen (Bestimmung von Lösungsmengen und Beweise) und Zahlenkongruenzen besprochen.
Das folgende interessante Problem trug einer der Schüler des Zirkels vor. Es ist ein Verfahren zur Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile. Natürlich ist diese Konstruktion nicht unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal möglich.

1. Verfahren: Gegeben sei ein Winkel von $\alpha < 90°$. Auf einem seiner Schenkel wird ein Punkt P beliebig festgelegt ($P \neq 0$). Von diesem Punkt P aus fällt man das Lot auf den anderen Schenkel und erhält C. Weiterhin trägt man die Gerade g mit folgenden Eigenschaften ein:
a) g verläuft durch P,
b) sie ist dem Schenkel von α parallel, auf dem P nicht liegt.



Weiterhin trägt man die Strecke $\overline{AB}$ ($\overline{AB} = 2 \cdot \overline{OP}$) wie folgt ein („Einpaßverfahren"):
a) $A \in PC$, b) $B \in g$, c) $0 \in g'$ (A, B).
Diese Strecke findet man durch Probieren, wenn auf einem Lineal $\overline{AB}$ abgetragen wird und das Lineal so lange verschoben wird, bis die Bedingungen erfüllt sind. Man kann nun beweisen, daß g' den Winkel α drittelt.

2. Beweis:
a) Es gilt: $2 = 6 - 4$

$$= 6 - 4(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma)$$
$$= (3 - 4\sin^2\gamma) - (4\cos^2\gamma - 3) \quad [0 < \gamma < 30°]$$
$$= \frac{3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma}{\sin\gamma} - \frac{4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma}{\cos\gamma}$$
$$\left[\begin{array}{l}\text{wegen } 0 < \gamma < 30° \\ \text{folgt } \sin\gamma \neq 0 \wedge \cos\gamma \neq 0\end{array}\right]$$
$$= \frac{\sin 3\gamma}{\sin\gamma} - \frac{\cos 3\gamma}{\cos\gamma}$$
$$= \frac{\cos^3\gamma}{\sin\gamma}(\tan 3\gamma - \tan\gamma) \left[\begin{array}{l}\text{wegen } 0 < 3\gamma < 90° \\ \cos 3\gamma \neq 0 \wedge \sin 3\gamma \neq 0\end{array}\right]$$

Wir setzen $3\gamma = \alpha$ ($\alpha = ∢POC$)

$$=> \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{3}}\left(\tan\alpha - \tan\frac{\alpha}{3}\right) = 2 \quad [0 < \alpha < 90°]$$

b) $∢AOC = \alpha'$ $(0 < \alpha' < 90°)$
Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{PC} = \tan\alpha \cdot \overline{OC} \\ \overline{AC} = \tan\alpha' \cdot \overline{OC}\end{array}\right\} => \overline{PA} = \overline{OC}$$
$$(\tan\alpha - \tan\alpha') \quad (1)$$

Weiterhin gilt:

$$\overline{PA} = \overline{AB} \cdot \cos\beta = \overline{AB}\cos(90° - \alpha')$$
$$= \overline{AB} \cdot \sin\alpha' \quad (2)$$

und $\overline{OC} = \overline{OP} \cdot \cos\alpha.$ (3)

(2) und (3) in (1) eingesetzt ergibt:

$$\underbrace{\overline{AB} \cdot \sin\alpha'}_{\overline{PA}} = \underbrace{\overline{OP} \cdot \cos\alpha}_{\overline{OC}}(\tan\alpha - \tan\alpha').$$

Wegen $2\overline{OP} = \overline{AB}$

folgt $2 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}(\tan\alpha - \tan\alpha')$.

c) Aus a) und b) erfolgt der Nachweis, daß $\alpha' = \frac{\alpha}{3}$, denn $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}(\tan\alpha - \tan\alpha') = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{3}}$

$$\left(\tan\alpha - \tan\frac{\alpha}{3}\right).$$
$$0 < \alpha < 90° \rightarrow \cos\alpha \neq 0$$
$$\rightarrow \frac{1}{\sin\alpha'}(\tan\alpha - \tan\alpha')$$
$$= \frac{1}{\sin\frac{a}{3}}\left(\tan\alpha - \tan\frac{\alpha}{3}\right)$$
$$\rightarrow \tan\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha'} - \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{3}}\right)$$
$$= \frac{\tan\alpha'}{\sin\alpha'} - \frac{\tan\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}}$$
$$\tan\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha'} - \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{3}}\right) = \frac{1}{\cos\alpha'} - \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{3}}.$$
$$0 < \alpha', \frac{\alpha}{3} < 90°$$

In diesem Intervall ist $\sin x$ streng monoton wachsend und $\cos x$ streng monoton fallend, also $\frac{1}{\sin x}$ streng monoton fallend und $\frac{1}{\cos x}$ streng monoton wachsend.

Also gilt: Bei $x_1 \lesseqgtr x_2$ $\quad (0 < x_1, x_2 < 90°)$

$$\frac{1}{\sin x_1} - \frac{1}{\sin x_2} \gtreqless 0 \quad \text{und}$$
$$\frac{1}{\cos x_1} - \frac{1}{\cos x_2} = 0.$$

Bei $x_1 \neq x_2$ haben $\frac{1}{\sin x_1} - \frac{1}{\sin x_2}$ und $\frac{1}{\cos x_1} - \frac{1}{\cos x_2}$ verschiedene Vorzeichen.

Wir setzen $x_1 = \alpha'$ und $x_2 = \frac{\alpha}{3}$. Wäre $\alpha' \neq \frac{\alpha}{3}$ und $\tan\alpha > 0$ $(0 < \alpha < 90°)$, so folgt, daß $\tan\alpha$ $\frac{1}{\sin\alpha'} - \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{3}}$ und $\frac{1}{\cos\alpha'} - \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{3}}$ verschiedene Vorzeichen haben. Also folgt aus

$$\tan\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha'} - \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{3}}\right) = \frac{1}{\cos\alpha'} - \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{3}} : \alpha' = \frac{\alpha}{3},$$

d. h., g' drittelt den Winkel α.

Wir möchten nun eine Aufgabe stellen:
- Vereinfache den Ausdruck!
$P = (x + a)(x^2 + a^2) \ldots (x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}})$

Eine AG Zeichnen stellt sich vor:

In unserer Schule schneiden zahlreiche Schüler gern Faltschnitte. Diese Technik ist im Kunsterziehungsunterricht in verschiedenen Klassenstufen eingebaut. Wir üben sie aber auch in der *AG Zeichnen*. Es gibt mehrere Arten von Faltschnitten:
Einachsige Faltschnitte, Reihenschnitte und Zentralfaltschnitte. Das im *Titelblatt* gezeigte Bild ist ein Zentralfaltschnitt. Der Graphiker der alpha wählte aus einem schönen Sortiment von Arbeiten anläßlich des Jahres des Kindes den Schnitt der Schülerin Iris Lange, Klasse 4, aus. Eine Papierscheibe wurde zweimal gefaltet, und die Figuren wurden halbseitig aufgezeichnet. Die Überraschung nach dem Schneiden ist jedesmal wieder groß, obwohl alle wissen, daß durch die Faltung Figuren und Gegenstände mehrmals achsialsymmetrisch erscheinen.

Chr. Bachmann, Kunsterzieher an der Goethe-OS Limbach-Oberfrohna

Verteilungen

1. Im Anfangspunkt eines Zahlenstrahls schichten wir eine Anzahl von Plättchen oder gleichartigen Münzen auf. Jetzt soll, wenn möglich, die Hälfte der Plättchen um ein Feld nach rechts verschoben werden. Es läßt sich die Aufgabe nur für gerade Startanzahlen durchführen. Dabei entstehen folgende Verteilungen. (Bild 1)

Die nächste Aufgabe besteht in der Fortsetzung der Verschiebung. Von jedem der zwei entstandenen Plättchentürme soll, wenn möglich, gleichzeitig wieder die Hälfte um ein Feld nach rechts verschoben werden. Es läßt sich die Verschiebung mit zwei Schritten nur für die durch 4 teilbaren Startanzahlen durchführen.

Dabei entstehen folgende Verteilungen. (Bild 2)

Nun führen wir eine Verschiebung in drei Schritten durch. Von jedem der drei entstandenen Plättchentürme wird jeweils wieder die Hälfte abgehoben und die abgehobenen Plättchen je ein Feld nach rechts verschoben. Da man für jeden Schritt die vorliegenden Anzahlen durch 2 teilen muß, kann dann die Verschiebung mit drei Schritten nur für die durch 8 ($=2^3$) teilbaren Startanzahlen durchgeführt werden.

Bei acht Ausgangsplättchen entsteht folgende Verteilung. (Bild 3)

Fülle bitte die anschließende Tabelle für eine 3-Schritt- und 4-Schritt-Verschiebung aus!

Führe entsprechende Verschiebungen durch, wenn in jedem Schritt ein Drittel von den Plättchentürmen abgehoben und nach rechts transportiert wird!

Jetzt müssen die Startanzahlen für die Ausführbarkeit des ersten Verschiebungsschrittes durch 3 teilbar sein. Wenn noch ein zweiter Schritt ausführbar sein soll, so müssen die Startzahlen sogar durch 9 ($=3^2$) teilbar sein. Fertige dir entsprechende Tabellen an, und bestimme die Verteilungen nach drei und vier Schritten!

2. Wir zeichnen uns zunächst Quadrate von der Seitenlänge 1, 2, 3 und 4 cm und teilen diese jeweils in ein Quadratgitter der Seitenlänge 1 cm (Bild 4).

Jedes dieser Quadrate stellen wir auf eine ihrer Ecken. In diesen auf der Spitze stehenden Quadraten benennen wir die Punkte in der angegebenen Art und zeichnen ebenso Pfeile ein sowie die Werte $\frac{1}{2}$ an diese Pfeile (Bild 5).

In dem Eingangspunkt E soll nun eine Anzahl von Plättchen starten, davon sollen jetzt längs der Pfeile die Hälfte nach links und die andere Hälfte nach rechts abwandern. Wir fragen, wieviel Plättchen in den Punkten A_0, A_1; A_0, A_1, A_2; A_0, A_1, A_2, A_3 und schließlich im letzten Fall in den Punkten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 anlangen? Damit die fortgesetzte Halbierung möglich ist, muß man bei Quadrat (1) mit einer durch 2 teilbaren Zahl in E starten, bei Quadrat (2) mit einer durch 4 ($=2^2$), bei Quadrat (3) mit einer durch 8 ($=2^3$) und endlich bei Quadrat (4) mit einer durch 16 ($=2^4$) teilbaren Zahl beginnen. Wir erhalten die gleichen Verteilungen wie bei den Verschiebungen von Aufgabe 1.

Bewertet man die nach rechts verlaufenden Pfeile anstelle mit $\frac{1}{2}$ jeweils mit $\frac{1}{3}$ und die nach links verlaufenden Pfeile mit $\frac{2}{3}$ und nimmt die Aufteilung der Plättchentürme nach diesen Anweisungen vor, so erhält man in den Ausgabepunkten A_0, A_1; A_0, A_1, A_2; ...; A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 die Verteilungen für die durch 3; 9; 27 und 81 teilbaren Zahlen.

3. Man kann sich noch viele andere Verschiebungspläne aufstellen. Wir wollen noch zwei angeben.

Mit welchen Anzahlen von Plättchen muß man in dem Eingang E des Verschiebungsplanes des Bildes 6 beginnen, damit am Ausgang A nach einer Anzahl von Zügen wirklich Plättchen anlangen?

Im ersten Schritt erfolgt eine Aufteilung in $\frac{1}{2}\left(=\frac{3}{6}\right)$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}\left(=\frac{2}{6}\right)$, d. h., die Startanzahl

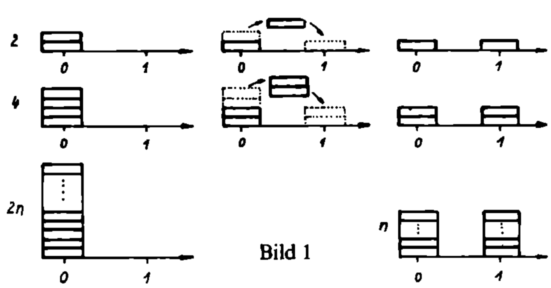


Bild 1

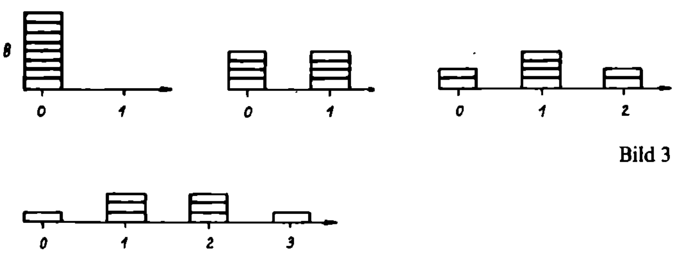


Bild 3

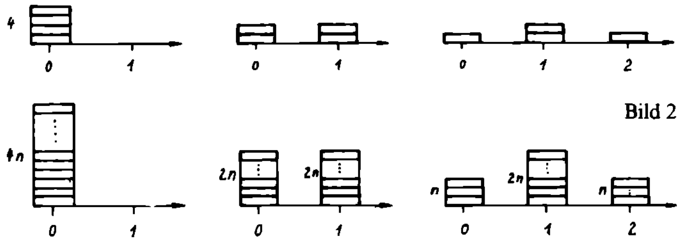


Bild 2

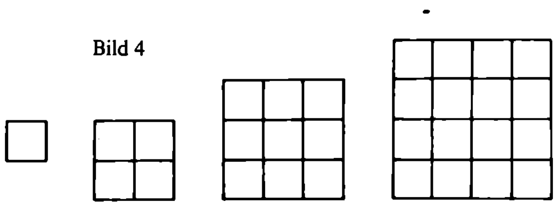


Bild 4

	Verteilung nach 1. Schritt		Verteilung nach 2. Schritt			Verteilung nach 3. Schritt				Verteilung nach 4. Schritt				
Startanzahl	Platz 0	Platz 1	Platz 0	Platz 1	Platz 2	Platz 0	Platz 1	Platz 2	Platz 3	Platz 0	Platz 1	Platz 2	Platz 3	Platz 4
16														
32														

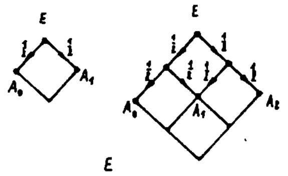
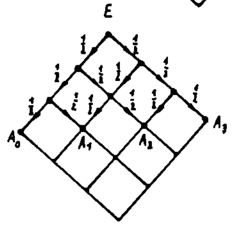
(1)  (2)

Bild 5

(3) 

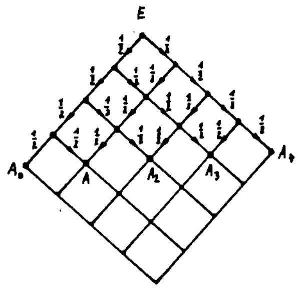
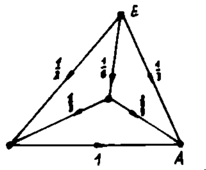
(4) 

Bild 6



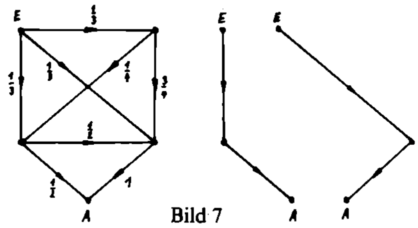


Bild 7

muß durch 6 teilbar sein. Die im ersten Zug zum Mittelpunkt gelangende Plättchenzahl muß durch 3 teilbar sein, wenn die im zweiten Schritt angewiesene Aufteilung möglich sein soll. Die Plättchenaufteilung ist also bei den durch $6 \cdot 3 = 18$ teilbaren Startzahlen auch im zweiten Zug möglich.

Stelle fest, wieviel Plättchen bei den Startzahlen 18, 36, 54 jeweils im ersten Zug nach A, im zweiten Zug nach A und wieviel im dritten Zug nach A gelangen!

Löse entsprechende Fragen für den Verteilungsplan in Bild 7! Mit welchen Startanzahlen muß man in E beginnen? Bei welchen Startanzahlen bleiben keine Plättchen stecken, sondern gelangen alle wirklich zum Ausgang A?

Wieviel Züge benötigt man dafür?

Zeichne dir in einer Skizze die Wege für die einzelnen Zugfolgen auf! Erstmalig können nach zwei Zügen Plättchen in A anlangen. Es sind die möglichen Wege dafür ebenfalls in Bild 7 hervorgehoben. Finde auch die 3er Wege heraus! Gibt es auch 4er Wege?

J. Flachsmeyer

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen auch diesmal wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

Im Heft 5/1978 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■1780 Gesucht sind alle dreistelligen, aus verschiedenen Ziffern bestehenden natürlichen Zahlen, die in dekadischer Darstellung die Form $z = \overline{abc}$ haben und folgende Eigenschaften besitzen:

a) Ihre Quersumme ist eine gerade Zahl.

b) Die Differenz aus den Zahlen, die den ersten beiden Ziffern entsprechen, ist dreimal so groß wie die Differenz aus den Zahlen, die den letzten beiden Ziffern entsprechen.

Im Heft 2/1979 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Für die gesuchten Zahlen $z = \overline{abc}$ soll $a+b+c$ durch 2 teilbar sein und $a-b = 3 \cdot (b-c)$ gelten. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

(1) Aus $b-c=0$ folgt $b=c$, was nicht möglich ist, da $b \neq c$ sein soll.

(2) Aus $b-c=1$ folgt $a-b=3$ und somit

$a=b+3$	$b=c+1$	c	$a+b+c$
4	1	0	5
5	2	1	8
6	3	2	11
7	4	3	14
8	5	4	17
9	6	5	20

Nur von den Zahlen 521, 743, 965 ist die Quersumme eine gerade Zahl.

(3) Aus $b-c=2$ folgt $a-b=6$ und somit

$a=b+6$	$b=c+2$	c	$a+b+c$
8	2	0	10
9	3	1	13

Nur von der Zahl 820 ist die Quersumme eine gerade Zahl.

(4) Aus $b-c=3$ folgt $a-b=9$ und somit $a=b+9$ und $b=c+3$, also $a=(c+3)+9 = c+12$, was nicht möglich ist.

Es existieren genau vier Zahlen mit den geforderten Eigenschaften:

sie lauten 521, 743, 820 und 965.

Wir stellen nun die Lösung von *Jens-Uwe Meyer* aus Halberstadt vor, der Schüler der Klasse 7 der Marx-Engels-Oberschule ist. *Jens-Uwe* löste diese Aufgabe wie folgt:

Die Differenz aus den Zahlen, die den letzten beiden Ziffern entsprechen, muß mindestens gleich 1 sein. Die Differenz aus den Zahlen, die den beiden ersten Ziffern entsprechen, muß mindestens gleich 3 sein. Ich nehme eine Fallunterscheidung vor:

(1) Für $z = \overline{abc}$ gelte $b-c=1$; die aus den letzten beiden Ziffern gebildeten Zahlen könnten dann 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 97 sein. Die erste Ziffer müßte dann in dieser Reihenfolge 4, 5, 6, 7, 8, 9 sein, d. h., es entfallen die Zahlen 76, 87, 97. Von den Zahlen 410, 521, 632, 743, 854, 965 haben nur die Zahlen 521, 743, 965 eine gerade Zahl als Quersumme.

(2) Für $z = \overline{abc}$ gelte $b-c=2$; die aus den letzten beiden Ziffern gebildeten Zahlen könnten dann 20, 31, 42, ..., 97 sein. Die erste Ziffer müßte dann in dieser Reihenfolge 8 und 9 sein, d. h., es entfallen die Zahlen 42 usw. Von den Zahlen 820 und 931 hat nur 820 eine gerade Zahl als Quersumme.

(3) für $z = \overline{abc}$ gelte $b-c=3$; wegen $a-b=9$ existiert in diesem Falle keine Lösung.

Die gesuchten Zahlen lauten 521, 743, 820, 965.

Wir stellen nun die Lösung von *Alexander Goldberg* aus Dresden vor, der Schüler der Klasse 7d der 59. POS „Max Zimmering“ ist. *Alexander* löste diese Aufgabe wie folgt:

Für die Zahlen $z = \overline{abc}$ gilt $a>b>c$ und $a+b+c=2k$, wobei k eine natürliche Zahl ist. Aus $a-b = 3 \cdot (b-c)$ folgt $a = 4b-3c$.

Durch Einsetzen erhalten wir

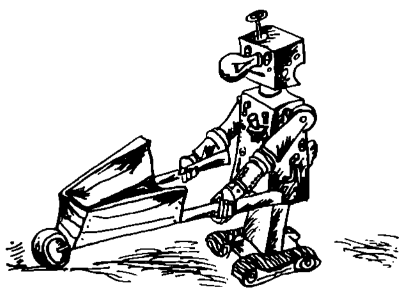
$4b-3c+b+c=2k$, also $5b-2c=2k$. Daraus folgt weiter, daß b eine gerade Zahl sein muß. Wegen $b>c$ könnte b gleich 2, 4, 6 oder 8 sein.

Ich stelle eine Tabelle auf:

a	b	c	
8	2	0	
5	2	1	
16	4	0	nicht möglich
13	4	1	nicht möglich
10	4	2	nicht möglich
7	4	3	
9	6	5	

Da $a>b$ kann für $b=8$ nur $a=9$ sein. In diesem Fall ist $a-b$ nicht durch 3 teilbar. Die Zahlen lauten 521, 743, 820, 965.

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. März 1980

Allen *alpha*-Lesern

SCHÖNE WÜNSCHE FÜR 1980

und viel Erfolg beim Knacken aller 50820667990!
Mit diesem Kryptogramm danken wir all unseren Mitarbeitern des In- und Auslandes für die zahlreichen Ideen zur inhaltreichen Gestaltung unserer Zeitschrift. Den über 4000 Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb, die ein Abzeichen und eine Urkunde erhielten, sprechen wir unsere Anerkennung für diesen Erfolg aus und wünschen, daß auch im Wettbewerbsjahr 1979/80 wieder über 90000 Lösungen bei uns eintreffen.
Unseren 55000 Lesern wünschen wir ein erfolgreiches und gesundes Neues Jahr.

Redaktion *alpha*

Mathematik

Ma 5 ▪1909 Drei Schnecken machen von einer gemeinsamen Startlinie aus einen „Wettlauf" zu einem Ziel, das 1 Meter entfernt ist. Sie kriechen mit gleicher konstanter Geschwindigkeit. Die Schnecke A kriecht immer 5 cm vorwärts; danach legt sie eine Pause von jeweils 6 Sekunden ein. Die Schnecke B kriecht immer 10 cm vorwärts; dann macht sie jeweils 12 Sekunden Pause. Die Schnecke C kriecht immer 20 cm vorwärts; sie macht danach jeweils eine Pause von 25 Sekunden Dauer. In welcher Reihenfolge kommen die Schnecken im Ziel an?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ▪1910 Zeichne auf kariertem Papier ein Rechteck, das die sechsfache Breite und die achtfache Länge eines Karos besitzt! Zerlege dieses Rechteck durch Strecken entlang des Gitternetzes so, daß genau a) 4 Quadrate, b) 6 Quadrate, c) 8 Quadrate entstehen! Fertige hierzu drei verschiedene Skizzen an!
(Eine Begründung ist nicht erforderlich.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ▪1911 a) Zeichne drei beliebig große Kreise so, daß sechs von Kreisbögen begrenzte Flächen entstehen, die man zum Beispiel verschiedenfarbig ausmalen könnte!
b) Zeichne nun drei Kreise so, daß sieben solcher Flächen entstehen!
c) Zeichne schließlich vier Kreise so, daß möglichst viele solcher Flächen entstehen, und gib die Anzahl der Flächen an!

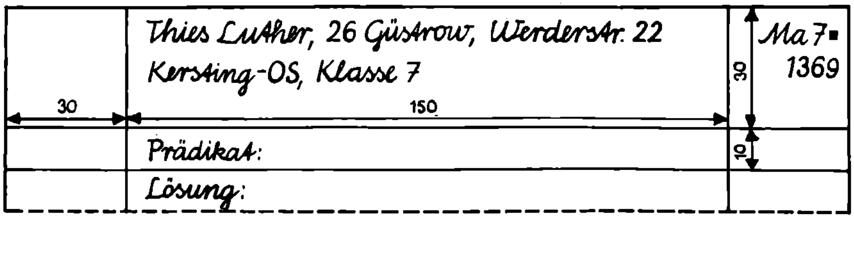
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ▪1912 Bernd kauft auf dem Postamt insgesamt 10 Briefmarken, und zwar 20-Pf-Marken und 25-Pf-Marken. Dafür muß er insgesamt 2,15 M bezahlen. Wieviel 20-Pf-Marken und 25-Pf-Marken hat Bernd gekauft?

Schüler Wieland Handke, Pulsnitz, Kl. 6

Ma 5 ▪1913 Von den 36 Schülern einer Klasse nimmt jeder an genau einer der Sportarten Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Schach und Judo teil. Der neunte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse nimmt entweder an der Sportart Schach oder Judo teil; dabei ist die Anzahl der Teilnehmer der Sportart Schach größer als die der Sportart Judo. An der Sportart Tischtennis beteiligen sich zweimal soviel Schüler wie an der Sportart Schach. Mehr als die Hälfte der Anzahl der Schüler dieser Klasse betreibt Leichtathletik. An der Sportart Schwimmen beteiligen sich mehr Schüler als am Tischtennis. Ermittle für jede dieser Sportarten die Anzahl der an ihr teilnehmenden Schüler dieser Klasse!

Schüler Manfred Opaterni, Babelsberg



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1979/80 läuft von Heft 5/79 bis Heft 2/80. Zwischen dem 1. und 10. September 1980 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/80 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/79 bis 2/80) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1979/80 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 5 ■1914 Ein Spaziergänger befragte eine Wandergruppe nach der Anzahl der Teilnehmer an der Wanderung. Ein Pfiffikus antwortete: „Wären es dreimal soviel Teilnehmer wie es sind und noch 10 Teilnehmer mehr, dann wären es 50 Teilnehmer mehr als die doppelte Anzahl der Teilnehmer.“ Wie viele Personen nahmen an dieser Wanderung teil? *Schüler Uwe Wollert, Edderich, Kl. 8*

Ma 6 ■1915 Im Finale um den FDGB-Pokal im Handball gab es im Jahre 1978 folgende Ergebnisse:

SC Magdeburg (SCM)	6 Punkte,
ASK Vorwärts Frankfurt/O.	6 Punkte,
SC Empor Rostock (SCE)	5 Punkte,
Post Schwerin (PS)	2 Punkte,
SC Dynamo Berlin (SCD)	1 Punkt.

Dabei wurden für einen Sieg 2 Punkte, für ein verlorenes Spiel keine Punkte, für ein unentschiedenes Spiel je Mannschaft ein Punkt vergeben. Es spielte jede Mannschaft gegen jede genau einmal. Der SC Magdeburg (SCM) blieb ungeschlagen. Das Spiel zwischen dem ASK und dem SCD ging unentschieden aus. Es sind die Ergebnisse aller Spiele zu ermitteln. *Schüler Frank Erdmann, Zeitz*

Ma 6 ■1916 In dem Schema

$$\begin{array}{rr} & a\ b \\ + & b\ c \\ + & c\ a \\ \hline & a\ b\ c \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Nach der sowjetischen Schülerzeitschrift Quant

Ma 6 ■1917 Vervollständige die nachstehende Tabelle! Dabei sind a, b und c natürliche Zahlen

a	b	c	$(a-b)^2 \cdot c$	$a^2 \cdot (b-c)$
7	6			98
6		2	18	
	1	0		16
9		5		81
		0		1
			1	9

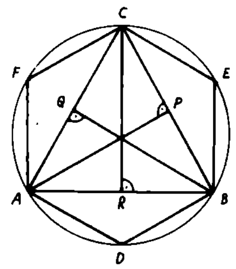
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■1918 Welche geordneten Zahlentripel $[a, b, c]$ aus natürlichen Zahlen a, b und c erfüllen zugleich die beiden Gleichungen $a+b+c=20$ und $a-b=5c$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■1919 Die Abbildung stellt ein gleichseitiges Dreieck ABC mit seinen drei Höhen $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ dar. Die Parallele zu $\overline{BQ}$ durch A schneidet die Parallele zu $\overline{AP}$ durch B im Punkte D. Die Parallele zu $\overline{BQ}$ durch C schneidet die Parallele zu $\overline{CR}$ durch B im Punkte E. Die Parallele zu $\overline{CR}$ durch A schneidet die Parallele zu $\overline{AP}$ durch C im Punkte F. Es ist nachzuweisen, daß die Seiten des Sechsecks $ADBECF$ gleich lang sind.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 7 ■1920 Ein Schüler hat eine Gleichung zu lösen; er geht wie folgt vor:

$$\begin{aligned} 56x+252 &= 72x+196, \\ 56x-196 &= 72x-252, \\ 7\cdot(8x-28) &= 9\cdot(8x-28), \\ 7 &= 9. \end{aligned}$$

Wo steckt der Fehler?

Herr Jochen Schröder, Riesa

Ma 7 ■1921 An einer Mathematikarbeit, deren Leistungsdurchschnitt die Note 1,88 ergab, beteiligten sich 25 Schüler. Es erzielten halb soviel Schüler die Note 3 wie die Note 2. Die Note 3 erhielten doppelt soviel Schüler wie die Note 4. Kein Schüler erhielt die Note 5. Wieviel Schüler erhielten die Noten 1, 2, 3 bzw. 4?

Schüler Joachim Braun, Koßdorf, Kl. 5

Ma 7 ■1922 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, deren Längen sich wie $5:4$ verhalten. Die Mittellinie $\overline{EF}$ dieses Trapezes ist 5,4 cm lang. Welche Länge haben die beiden parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$?

Herr A. Günther, Altenburg

Ma 7 ■1923 Eine aufgestellte Malerleiter bilde ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basislänge sich zur Schenkellänge wie $2:5$ verhält. Ein Schenkel ist um 1,5 m länger als die Basis. Wieviel Zentimeter stehen die Leiterenden am Fußboden auseinander?

Herr A. Günther, Altenburg

Ma 8 ■1924 Man beweise, daß für alle ganzen Zahlen q der Term q^3-q durch 6 teilbar ist.

Schüler Ralf Taubmann, Sonneberg, Kl. 9

Ma 8 ■1925 Es ist zu beweisen, daß das Produkt $m \cdot n$ der zwei natürlichen Zahlen m und n bei Division durch 6 den Rest 1 läßt, wenn jede der Zahlen m und n bei Division durch 6 den Rest 5 läßt.

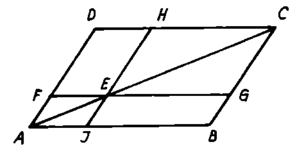
H. Engelmann, Sachsendorf

Ma 8 ■1926 Wenn Lena 40% von ihrem Geld und Sweta 45% von ihrem Geld gibt, dann sind das zusammen 2 Rubel 15 Kopeken. Wenn Sweta 40% ihres Geldes mit 45% von Lenas Geld zusammenlegt, beträgt die Summe 2 Rubel 10 Kopeken. Wieviel Geld besitzt jedes der Mädchen? (1 Rubel hat 100 Kopeken)

Jörg Bruchertseifer, Dubna, Kl. 8

Ma 8 ■1927 In das abgebildete Parallelogramm $ABCD$ wurde die Diagonale $\overline{AC}$ eingezeichnet. Durch einen beliebigen inneren Punkt E der Diagonalen $\overline{AC}$ sind die Parallelen zu $\overline{AB}$ und zu $\overline{AD}$ gezeichnet. Es ist zu beweisen, daß die Parallelogramme $IBGE$ und $FEHD$ flächeninhaltsgleich sind.

Schüler Andreas Löffler, Halle-Neustadt, Kl. 8



Ma 9 ■1928 Jemand behauptet: Es gibt zwei ganze Zahlen, deren Produkt 16 ist. Addiert man die Quadratwurzeln dieser beiden Zahlen, so erhält man als Summe die Zahl 4. Stimmt diese Behauptung?

Schüler Roland Kamke, Rostock, Kl. 8

Ma 9 ■1929 Man ermittle alle Quadrupel von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a, b, c, d, für die folgendes gilt:
Das Produkt aus der kleinsten und zweitgrößten Zahl ist gleich der Summe aus den beiden anderen Zahlen.

Schüler Torsten Siebert, Görlitz, Kl. 10

Ma 9 ■1930 Gesucht sind alle Paare einstelliger natürlicher Zahlen a und b, für die das arithmetische Mittel gleich dem geometrischen Mittel ist. Es ist zu beweisen, daß alle zweistelligen Zahlen, die man mit diesen Ziffern a und b bilden kann, durch 11 teilbar sind. *Baufacharbeiter Frank Walter, Berlin, z. Z. NVA*

Ma 9 ■1931 Es ist zu untersuchen, ob die Ungleichung

$$5^{10}+6^{10}<7^{10}$$

eine wahre Aussage darstellt. *Sch.*

Ma 10/12 ■1932 Als Uwe die Schule verläßt, zeigt die Schuluhr 13.00 Uhr, seine eigene Uhr 13.02 Uhr an. Zu Hause angekommen, zeigt seine Uhr 13.07 Uhr und die Museumsuhr 13.05 Uhr an.
Die Schuluhr geht immer vor (1),
die Museumsuhr geht nie nach (2),
und Uwes Uhr geht höchstens 3 min vor oder nach (3).
Wann verließ Uwe die Schule, und wann kam er zu Hause an?

Schüler Thomas Richter, Leipzig, Kl. 12

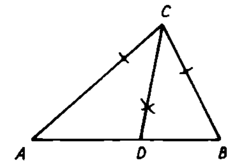
Ma 10/12 ■1933 Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle BCA = 90°$, $h_c = 4$ cm und $s_a = 7{,}5$ cm. Die Konstruktion ist zu begründen.

Schüler Karsten Schlutter, Wittstock, Kl. 10

Ma 10/12 ■1934 In dem abgebildeten Dreieck $\triangle ABC$ ist die Winkelhalbierende $\overline{CD}$ des

Winkels $\sphericalangle BCA$ eingezeichnet. Über $\overline{AD}$ werde ein Rechteck mit den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{CB}$ und über $\overline{AC}$ werde ein Rechteck mit den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ errichtet. Wie verhalten sich die Flächeninhalte beider Rechtecke zueinander?

Lehrling Axel Schulz, Greifswald



Ma 10/12 ▪1935 Gegeben sei ein beliebiges Rechteck *ABCD*. Man konstruiere eine vollständige Aufteilung der Fläche von *ABCD* in eine Dreiecks-, eine Parallelogramm- und eine Trapezfläche. Die Dreiecksfläche soll einen halb so großen Inhalt haben wie jede der beiden anderen Flächen. Die Konstruktion ist zu begründen. *Fr.*

Physik

Ph 6 ▪66 Ein vierachsiger Großraumwagen der Deutschen Reichsbahn hat eine Eigenmasse von 27100 kg und ist mit 52 m^3 Rohbraunkohle mit der Dichte $\varrho = 960\,\frac{kg}{m^3}$ beladen. Berechne die Gesamtmasse des beladenen Wagens in t!

Ing. Armin Körner, Leipzig

Ph 7 ▪67 Eine Elektrolokomotive erreicht an einer Steigung eine Geschwindigkeit von $90\,\frac{km}{h}$ und eine Zugkraft von rund 11000 kp. Berechne die Leistung in PS und in kW!

Ph 8 ▪68 In einer Gasflasche herrscht ein Druck von 75 at bei 15 °C. Auf wieviel at erhöht sich der Druck, wenn die Temperatur um 30 °C steigt? Gib den Druck auch in Pa (Pascal) an!

Ph 9 ▪69 Ein Straßenbahnzug besteht aus dem Triebwagen mit der Masse 16 t und dem Anhänger mit der Masse 8 t. Er wird elektrisch gebremst. Dazu wird der Motor als Generator geschaltet. Es wird eine Spannung induziert, die gemäß $U = k \cdot v$ mit $k = 60\,\frac{Vs}{m}$ mit der Geschwindigkeit v zusammenhängt.

a) Wie groß muß der an den Generator angeschlossene Bremswiderstand mindestens sein, damit der Triebwagen nicht gleitet, wenn nur dieser gebremst wird? $v = 50\,\frac{km}{h}$; Haftreibungskoeffizient $\mu_0 = 0{,}2$; übrige Reibung vernachlässigt.

b) Welche Wärmemenge wird bei einmaligem Bremsen bis zum Stillstand frei?

c) Wie groß ist die auftretende Verzögerung am Anfang des Bremsens (Bremswiderstand wie bei a))?

Anmerkung: Man beachte die Einheitenumrechnung $1\,V = \frac{1\,kg\,m^2}{1\,A\,s^3}$, die man über die Beziehung $1\,Ws = 1\,Nm = 1\,VAs$ erhalten kann.

Annelie Meyer, Silberstraße

Ph 10/12 ▪70 Eine Pendeluhr geht in Meeresspiegelhöhe richtig. Wieviel Sekunden geht sie täglich falsch, wenn sie an einen Ort gebracht wird, der die Höhe 750 Meter über NN hat? (Erdradius $r = 6370$ km)

Annelie Meyer, Silberstraße

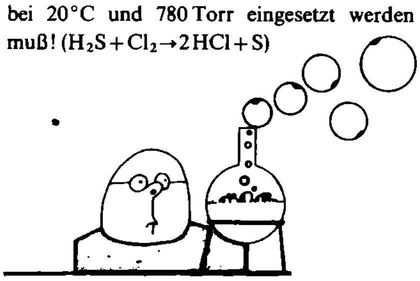
Chemie

Ch 7 ▪53 220 g Braunkohle vom VEB Braunkohlenwerk in Borna werden 2 Tage bei Zimmertemperatur an der Luft getrocknet. Danach hat die Kohle nur noch eine Masse von 192,6 g. Berechne den Feuchtigkeitsgehalt, den die Kohle nach zwei Tagen noch besitzt!

Ch 8 ▪54 Bei der Chlorkalielektrolyse entsteht eine 11%ige Natronlauge. Zu 10 kg dieser Natronlauge werden 25 l Wasser zugegeben. Wieviel prozentig ist die neue Lösung? Welche Masse Kochsalz läßt sich aus 10 kg 11%iger Natronlauge herstellen?

Ch 9 ▪55 Einer 0,5-l-Flasche mit 40%igem Alkohol wurde eine bestimmte Menge entnommen und die gleiche Menge durch Wasser ersetzt. Dadurch ist ein 32%iger Alkohol entstanden. Welche Flüssigkeitsmenge in ml (Alkohol und Wasser) wurde entnommen?

Ch 10/12 ▪56 Ein Zimmer hat folgende Abmaße: Länge 10 m, Breite: 5 m, Höhe: 4 m. Die Luft dieses Zimmers ist durch Schwefelwasserstoff im Verhältnis 1:5000 verunreinigt. Gereinigt wird durch Chlorkalk. Berechnen Sie die Masse an Chlorkalk mit 30% wirksamem Chlorgehalt, die zur Reinigung bei 20 °C und 780 Torr eingesetzt werden muß! ($H_2S + Cl_2 \rightarrow 2\,HCl + S$)



Er blickte so unverwandt in die Zukunft, daß er die Gegenwart übersah...

Lösung zu: Schöne Wünsche für 1980

Wir danken dem Musikpädagogen Dr. *Christian Lange* vom IfL Leipzig, einem aktiven Leser unserer alpha, für das schöne Kryptogramm.

Die einzige mögliche Lösung lautet:

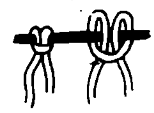
$$\begin{array}{r} 982160 \\ 3769820 \\ \hline 4751980 \end{array}$$

Daraus ergibt sich für 50820667990: Rechennüsse.

Kleine Knotenschule

Die Winterszeit regt zum Basteln an. Aus der „Für Dich“ 12/79 entnahmen wir für unsere Leser die vorliegende kleine Knotenschule. Mit etwas Geschick und vor allem Geduld lassen sich daraus Umhängetaschen, Schlüsseltaschen oder Halsbänder fertigen.

1. a) Einhängen der Fäden/Vorderseite
b, c, d verschiedene Arten der Doppelaufhängung

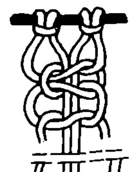
a)


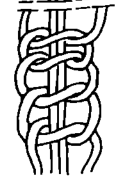
b)


c)


d)

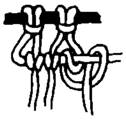

2. a) Weber- oder Doppelknoten, die Arbeitsfäden rechts und links werden um die Einlegefäden geschlungen.
b) Halber Weberknoten, der Knoten wird so geknüpft, daß der linke Arbeitsfaden immer vor den Einlegefäden liegt. Dadurch dreht sich das geknüpfte Band zu einer Spirale.

a)


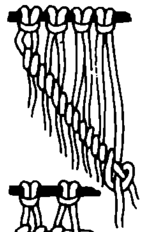
b)


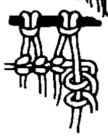
3. Rippenknoten, er kann von der Vorder- und von der Rückseite aus verwendet werden. Die Richtung des Einlegefadens bestimmt die waagerechte, diagonale oder senkrechte Reihung.

a) waagerechter Rippenknoten



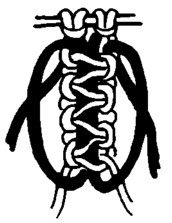
b) diagonaler Rippenknoten



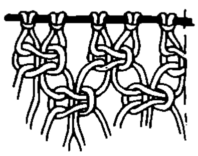


c) senkrechter Rippenknoten

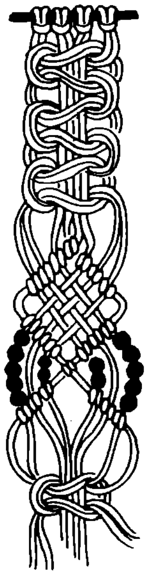
4. Perlknoten, nach einer Anzahl Weberknoten werden die Einlegefäden durch die Schlingen des ersten gefädelt und zu einer Rundung zusammengezogen. Die Anzahl der Weberknoten bestimmt die Größe der Perle.



5. Versetzte Weberknoten, Einlege- und Arbeitsfäden werden wechselweise getauscht. Diese Art läßt sich auch mit dem halben Weberknoten ausführen.



6. Ein Beispiel für die Kombination verschiedener Knoten mit eingearbeiteten Perlen.



U. Kähler

Wir basteln ein Modell von der Bienenzelle

In Heft 1/1979 fanden wir einen Beitrag mit der Überschrift „Die Biene als Geometer". Darin wurde uns der geometrische Aufbau einer Bienenzelle und einer Bienenwabe beschrieben. Dieser Aufsatz weckt in uns das Verlangen, auch selbst einmal ein Modell der Bienenzelle als geschlossenes konvexes Polygon aus Papier zu basteln. Wir geben euch hier eine Vorlage dazu.

Schneidet zunächst die Teile 1, 2 und 3 entsprechend den Vorgaben des Bogens aus! Teil 1 liefert die sechs Seitenwände der Bienenzelle, Teil 2 den Zellboden und Teil 3 den Zelldeckel. Vor dem Zusammenkleben der drei Teile zu unserem Modell sind die Körperkanten durch Anbringen von sauberen Falzen entsprechend den Vorgaben des Modellbogens an Teil 1 und Teil 2 herauszuarbeiten. Außerdem sind die Klebestreifen *A*, *B*, *C* und *D* an den Teilen 1 und 2 durch Falzen in die vorgesehene Stellung zu bringen.

Bestreicht zuerst den Klebestreifen *A* von Teil 1 mit Klebstoff, und verbindet die sechs Zellenwände zu einem geschlossenen Band! Bestreicht den Klebestreifen *D* von Teil 2 mit Klebstoff, und gebt dem Zellboden die vorgesehene Gestalt!

Nach Eintrocknen der Leimstelle *A* können die sechs Klebestreifen *B* von Teil 1 mit Leim bestrichen und der Zelldeckel (Teil 3) aufgepaßt werden. Nun warten wir, bis die Klebestellen *B* und *D* eingetrocknet und gefestigt sind. Abschließend sind die Streifen *C* mit Klebstoff zu versehen und der pyramidenförmige Zellboden (Teil 2) auf das Sechseckprisma aufzusetzen.

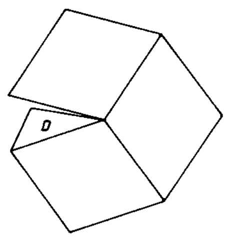
Beim Leimen sind alle Klebstellen gut aufeinander zu pressen. Mit einem Bleistift oder einem Holzspachtel läßt sich an schlecht zugänglichen Stellen leicht nachhelfen. Laßt zwischen zwei Leimvorgängen stets hinreichend Zeit, bis sich die Verbindungen an den Leimstellen gut gefestigt haben! Wenn eine größere Zahl von Freunden je eine Zelle basteln, dann könnt ihr diese Zellen einmal zu einem Wabenstück zusammensetzen.

Bei der Erarbeitung des Modellbogens waren u. a. folgende geometrische Beziehungen zu beachten:

1. In den Basisrhomben verhalten sich die Längen der Diagonalen wie $1:\sqrt{2}$.
2. Die stumpfen Winkel der Basisrhomben sind größengleich mit den stumpfen Winkeln der Seitenflächen des Prismas. Für den stumpfen Winkel α, auch Maraldi-Winkel genannt, gilt die Beziehung $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$. Daraus ergibt sich für α die Winkelgröße von $109^\circ 28' 16''$.

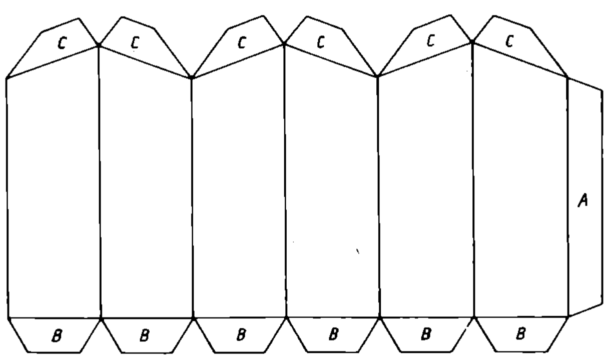
Weise durch Herleitung der Bienenzelle aus dem Würfel die Gültigkeit dieser geometrischen Beziehungen nach!

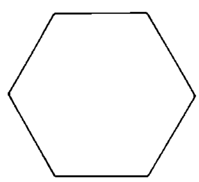
E. Schröder



Teil 2

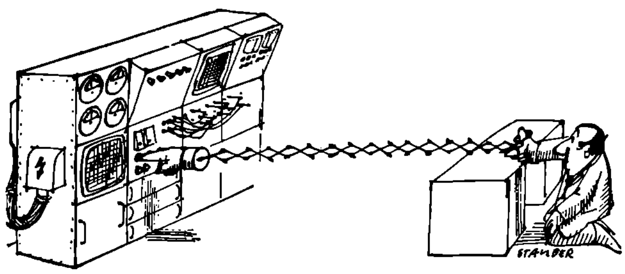
Teil 1





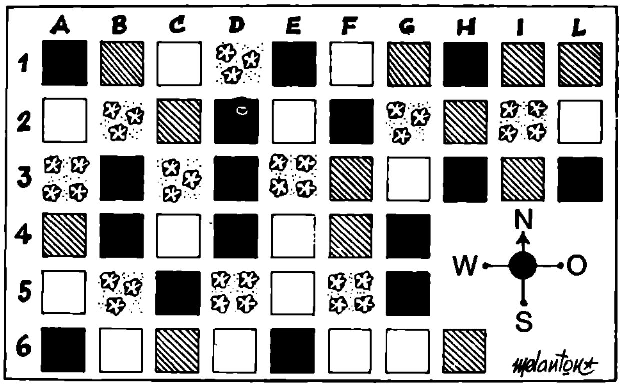
Teil 3

In freien Stunden alpha heiter



Stadtplan

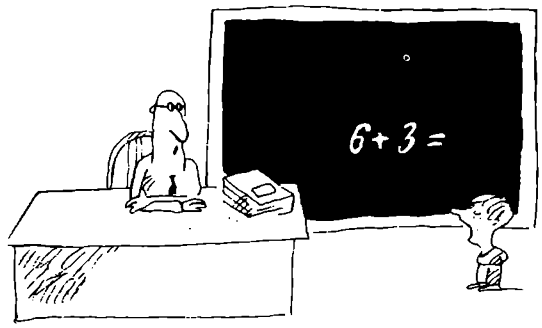
Welches ist das nicht weiße Haus, dessen nördlicher Nachbar nicht gestreift und dessen südlicher Nachbar nicht schwarz, im Westen und Osten jedesmal nur von Bäumen umgeben ist? *Aus: Füles, Budapest*



Eulenspiegelei

Eulenspiegel-Leser lieferten zu untenstehender lustiger Vignette witzige Unterschriften:

- Ich schlage vor, daß $6+3=9$ ist. Wer dafür ist, den bitte ich um das Handzeichen.
- Elf würde ich als Kellner sagen.
- Herr Lehrer, ich hab' meinen Taschenrechner vergessen!



„Schriftlich oder im Kopf?"

Des Menschen Tugend

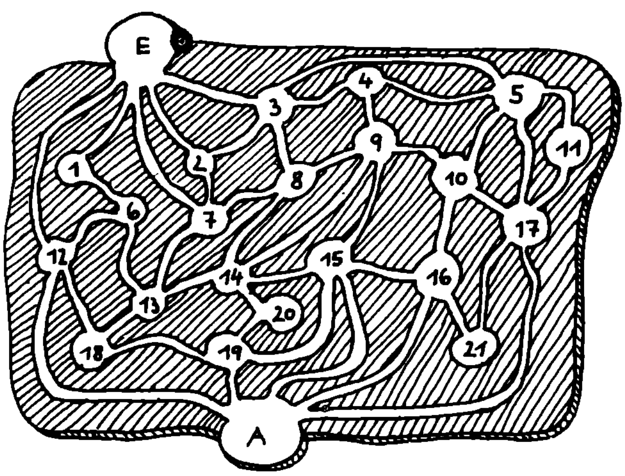
Der Mensch gleicht einem Bruch: Der Zähler ist, was er ist, der Nenner, was er zu sein glaubt. Je größer der Nenner, desto kleiner der Bruch.

Lew Tolstoi (1828 bis 1910)

Rätselspaß mit π

Wir wollen im berühmten Park von Saint-Soszé alle Sehenswürdigkeiten von 1 bis 21 besichtigen, aber jede nur einmal und ohne einen Weg doppelt zu gehen. Wie muß man laufen, um vom Eingang E zum Ausgang A zu gelangen?

Aus: Magazin 5/79



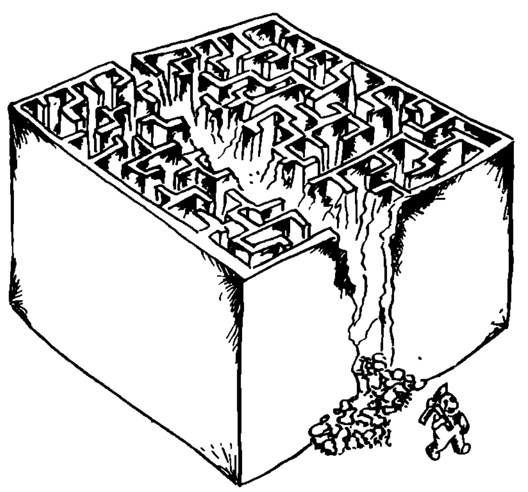
Abschied von 1979

Zeige, daß die Zahl

$A = 1979 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 1978)$

eine Quadratzahl ist!

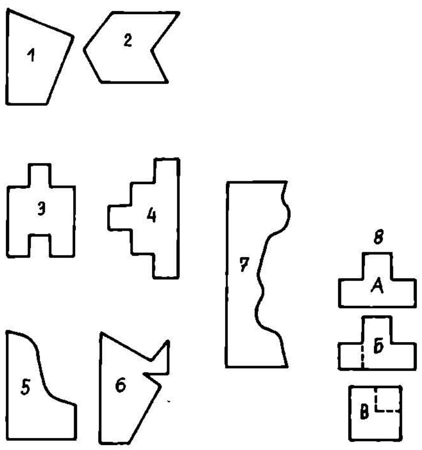
Mathematikfachlehrer W. Förg, Schwaz (Österreich)



Mit einem Schnitt

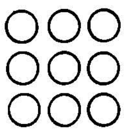
Jede der hier abgebildeten acht geometrischen Figuren kann man durch einen einzigen geraden Schnitt mit der Schere in ein Quadrat verwandeln, wie, das ist auf der Zeichnung rechts gezeigt (darauf wird die Figur *A* zum Quadrat *B*). Das ist aber die achte Figur. Und wie macht man das mit den übrigen sieben?

Aus: Nauka i Shisn



Knopfspielereien

1. Die neun Knöpfe bilden acht Dreierreihen (drei waagerechte, drei senkrechte und zwei diagonale).



Die Knöpfe sind so anzuordnen, daß drei Viererreihen entstehen.

2. Auf dem Tisch liegen 24 Knöpfe, und zwar in drei Reihen zu 11, sieben und sechs Stück. In jeder Reihe sollen aber acht Knöpfe liegen.

Wieviel Schübe von Reihe zu Reihe sind nötig, wenn man von einer Reihe in die andere nur genau so viele Knöpfe schieben darf wie in dieser bereits liegen?

3. Rechts liegen drei schwarze Knöpfe, links drei weiße und ganz links ist ein freies Feld. Nun sollen die schwarzen und die weißen Knöpfe durch Ziehen oder Springen ihre Plätze tauschen. Das freie Feld ist dann ganz rechts. (In einem Sprung dürfen ein, zwei oder drei Knöpfe überquert werden, wenn dahinter das freie Feld ist.)

Wie viele Bocksprünge sind nötig?

Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern (gilt nur für jeweils eine Aufgabe):

HIER	WIR	DIE	HIER
STEHT	HABEN	BIRNE	IST
MEIN	EINEN	IST	EINE
VATER	KATER	KLEIN	KATZE
A>T	W<A, A>T	T<E, D<R	S<N<I

Ing. J. Pěnčík, Prag

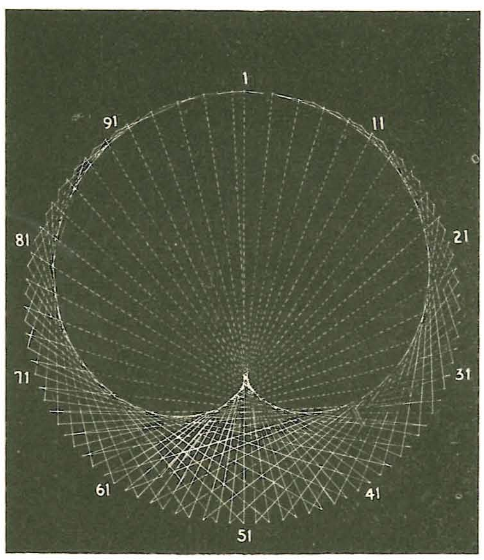
Silbenrätsel

Aus den Silben
a – al – be – blo – bo – ca – di – di – e – gen – go – gi – ka – kreis – kur – le – le – li – lier – mil – na – nal – ne – ne – ne – o – on – per – ra – ri – scha – spek – sub – sti – ti – ti – tu – us – va – ve – ven
sollen Wörter folgender Bedeutung gebildet werden: 1. gekrümmte Linie; 2. Verbindungsstrecke nicht benachbarter Eckpunkte eines Vierecks; 3. Hilfsmittel zum Zeichnen gekrümmter Linien; 4. Einsetzung; 5. Hälfte des Durchmessers; 6. Vorname des französischen Mathematikers Jordan (1838 bis 1922); 7. häufig verwendetes Verfahren zur Darstellung von Körpern; 8. Zeichengerät; 9. zweidimensionales Gebilde; 10. Gegensatz zu „Bild".
Sodann entnimmt man jedem dieser Wörter eine Silbe. Aneinandergereiht ergeben diese den Namen eines berühmten italienischen Mathematikers, der sich um die Stereometrie verdient gemacht hat. Zur Erleichterung sind durch die nachstehende Zahlenfolge die auszuwählenden Silben angegeben: 2; 4; 2; 3; 1; 1; 2; 1; 1; 2

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Bemerkenswerte Kurve

To construct this curve divide a circle into hundred equal parts. Number the points of division from 1 to 100. Then let one directed line start at each point N and terminate at the point corresponding to the number 2N or 2N — 101.



XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (14. 11. 1979)

Olympiadeklasse 5

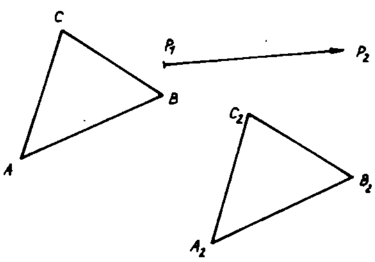
1. In einer Konsumverkaufsstelle werden genau vier verschiedene Waschpulversorten A, B, C und D angeboten. Insgesamt sind 900 Pakete Waschpulver im Lager der Verkaufsstelle vorhanden; jedes Paket hat 250 g Inhalt. Ein Drittel des gesamten Lagerbestandes an Waschpulver ist von der Sorte A. Ein Viertel des übrigen Bestandes ist von der Sorte B. Von der Sorte C sind ebenso viele Pakete im Lager wie von der Sorte D.
a) Wieviel Pakete beträgt für jede einzelne der vier Sorten der Lagerbestand?
b) Wieviel Kilogramm Waschpulver sind insgesamt in den Paketen enthalten?

Lösung: a) Für die Sorte A beträgt wegen $900:3=300$ der Lagerbestand 300 Pakete. Für die Sorte B beträgt wegen $900-300=600$ und $600:4=150$ der Bestand 150 Pakete. Wegen $600-150=450$ und $450:2=225$ beträgt für die Sorten C und D der Bestand je 225 Pakete.
b) Wegen $250\cdot 900=225000$ und 225000 g $=225$ kg sind insgesamt 225 kg Waschpulver in den Paketen enthalten.

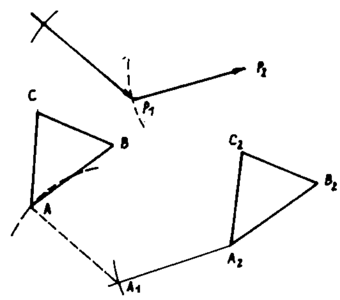
2. In einem Bericht eines Schülers über einen 60-m-Lauf war zu lesen: „Es war ein spannender Lauf unserer Mädchen. Astrid zog an Doris vorbei und konnte dann ihren Vorsprung bis ins Ziel behaupten. Auf den letzten Metern gelang es sogar noch Beate, Doris zu überholen. Das war zwar eine anerkennenswerte Leistung, jedoch kam Beate noch etwas später ins Ziel als Christine. Doris wurde nur teilweise den in sie gesetzten Erwartungen gerecht; immerhin konnte sie Christine hinter sich lassen.“ Können alle Aussagen dieses Berichtes gleichzeitig wahr sein? Begründe deine Entscheidung!

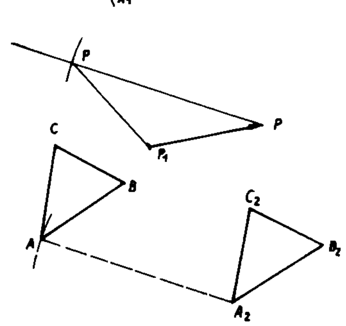
Lösung: Wären alle Aussagen des Berichtes wahr, so hätte Beate Doris „auf den letzten Metern überholt“, und Doris hätte Christine „hinter sich gelassen“. Also wäre Beate vor Christine ins Ziel gekommen. Das steht im Widerspruch zu der Aussage, Beate wäre „etwas später ins Ziel gekommen als Christine“. Folglich können nicht alle Aussagen des Berichtes gleichzeitig wahr sein.

3. Auf dem Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.
Gesucht ist ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit folgender Eigenschaft:
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_2}$ an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$. Konstruiere einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit dieser Eigenschaft! Verwende dabei nur Lineal (ohne Benutzung der Millimetereinteilung), Zirkel und (nur zum Konstruieren von Parallelen) Zeichendreieck! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt!



Lösung: Beispiel einer als Lösung möglichen Konstruktion:
Weitere Punkte und Linien sind (natürlich zulässig, aber) nicht erforderlich.





4. Das untenstehende Muster einer Multiplikationsaufgabe soll so ausgefüllt werden, daß in jedes Kästchen genau eine Ziffer eingetragen wird und daß dabei eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Für gleiche Variable sind gleiche Ziffern einzusetzen. Wie üblich soll 0 nicht als Anfangsziffer vorkommen. Für das Ausfüllen der leeren Kästchen werden sonst keine weiteren Vorschriften gemacht.

```
x y z · 8 x z
    x x 8 8
        □ □ x
      □ □ □ □
  □ □ □ □ □ □
```

Begründe, wie sich aus diesen Forderungen eine vollständige Eintragung ergibt!

Lösung: Aus dem ersten Teilprodukt ist ersichtlich, daß $z\cdot 8$ auf 8 endet; daher muß $z=1$ oder $z=6$ gelten. Wäre $z=1$, so könnte das dritte Teilprodukt nicht aus vier Ziffern bestehen, sondern nur aus drei. Folglich verbleibt nur die Möglichkeit

$z=6$.

Aus dem zweiten Teilprodukt ist nun ersichtlich, daß $6\cdot x$ auf x endet. Da x auch als Anfangsziffer vorkommt, also $x\neq 0$ gilt, kann folglich nur $x=2$ oder $x=4$ oder $x=6$ oder $x=8$ sein. Wäre x eine der Ziffern 4, 6, 8, so würde das zweite Teilprodukt nicht dreistellig, sondern vierstellig. Also verbleibt nur die Möglichkeit $x=2$.
Hiernach lautet das erste Teilprodukt 2288. Wegen $2288:8=286$ muß daher der erste Faktor der Multiplikationsaufgabe die Zehnerziffer $y=8$ enthalten.
Nun kann die vollständige Eintragung durch Fertigstellen des schriftlichen Multiplizierens erfolgen. Man erhält:

```
286 · 826
2288
  572
  1716
236236
```

Olympiadeklasse 6

1. Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.
Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

Lösung: Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360°. Hiernach und wegen $360-226=134$ hat einer der Schnittwinkel die Größe 134°. Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134°. Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen $180-134=46$ hat daher jeder von ihnen die Größe 46°.
Die gesuchten Größen sind mithin: 134°, 46°, 134° und 46°.

2. In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel zum Preis von

15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M,
von jeder Sorte genau ein Stück.
Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt soviel zu bezahlen wie der erste.
Ermittle aus diesen Angaben, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

Lösung: Der Gesamtpreis aller sechs Geschenke beträgt 199 M. Da genau fünf Geschenke gekauft wurden, blieb genau eines zurück. War es zu
15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M,
so hatten beide Käufer zusammen
104 M, 103 M, 101 M, 100 M, 99 M bzw. 88 M
gezahlt.
Zahlte der erste Käufer x Mark, so bezahlte der zweite $2x$ Mark. Die von beiden gezahlte Summe, $3x$ Mark, muß folglich durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für den Betrag von 99 M zu. Also wurde das Geschenk zu 20 M nicht gekauft; ferner ist $3x=99$, der erste Käufer bezahlte 33 M.
Hätte er als eines seiner beiden Geschenke das zu 16 M, 19 M oder 31 M gekauft, so müßte das andere 17 M, 14 M bzw. 2 M gekostet haben; diese Preise kamen aber nicht vor. Also hat der erste Käufer die Geschenke zu 15 M und 18 M gekauft, der zweite Käufer folglich die Geschenke zu 16 M, 19 M und 31 M.

3. Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden geplant. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen. Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal soviel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.
Untersuche, welche Zeiten man hiernach für jeden einzelnen Abschnitt zu planen hat! Überprüfe, ob diese Zeiten alle gestellten Forderungen erfüllen!

Lösung: Wenn die Forderungen erfüllt sind und dabei der erste Abschnitt x Stunden dauert, so dauert der zweite $3x$ Stunden und der dritte $\frac{3}{2}x$ Stunden. Daraus folgt

$$x+3x+\frac{3}{2}x=110,$$
$$\frac{2}{2}x+\frac{6}{2}x+\frac{3}{2}x=110,$$
$$\frac{11}{2}x=110,$$
$$\frac{1}{2}x=10,$$
$$x=20.$$

Also können die Forderungen nur dadurch erfüllt werden, daß man für den ersten Abschnitt 20 Stunden und somit für den zweiten 60 Stunden und für den dritten 30 Stunden plant.
Diese Zeiten erfüllen die Forderungen; denn 60 Stunden sind dreimal soviel Zeit wie 20 Stunden, 30 Stunden dauern halb so lange wie 60 Stunden, und wegen $20+60+30=110$ ergibt sich die vorgesehene Gesamtzeit.

4. Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... fort.
Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1, die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

Lösung: Jede Minute hat 60 Sekunden, wegen $15\cdot 60=900$ hat der Stempel genau 900 Zahlen zu drucken, d. h. die natürlichen Zahlen von 0 bis 899.
Beim Drucken der Zahlen von 0 bis 9 kommt die Ziffer 1 genau 1mal vor.
Setzt man vor jede dieser Zahlen (also an die Zehnerstelle) jede der neun Ziffern 1, ..., 9, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 10 bis 99, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an der Einerstelle insgesamt genau 9mal vor. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau zehn mit der Zehnerziffer 1 (nämlich die Zahlen 10, ..., 19). Somit kommt in den Zahlen von 10 bis 99 die Ziffer 1 an der Zehnerstelle insgesamt genau 10mal vor.
Setzt man vor jede der Zahlen von 0 bis 99 (nachdem die Zahlen von 0 bis 9 durch Vorschalten einer Zehnerziffer 0 zweistellig geschrieben wurden) an die Hunderterstelle jede der acht Ziffern 1, ..., 8, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 100 bis 899, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an den Einer- und Zehnerstellen insgesamt achtmal so oft vor wie das bisher ermittelte Vorkommen ($1+9+10=20$), d. h. genau 160mal.
Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau 100 mit der Hunderterziffer 1 (nämlich die Zahlen 100, ..., 199). Somit kommt in den Zahlen von 100 bis 899 die Ziffer 1 an der Hunderterstelle insgesamt genau 100mal vor.
Damit sind alle zu erfassenden Ziffern 1 berücksichtigt; ihre Anzahl beträgt somit

$$1+9+10+160+100=280.$$

Olympiadeklasse 7

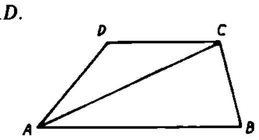
1. Dieter, Hans, Klaus und Peter sowie ihre Ehefrauen Erika, Gabi, Rita und Simone tauschen Erinnerungen aus. Ein Zuhörer entnimmt der Unterhaltung folgendes:
(1) Simone und ihr Mann sowie außer ihnen Erika und Hans waren zur Hochzeit von Dieter eingeladen.
(2) Auf der Hochzeit von Hans waren Gabi und Erika zu Gast.
(3) Zu den Hochzeitsgästen von Peter gehörten Klaus und Simone. Untersuche, ob für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau allein aus den Aussagen (1) bis (3) eindeutig zu ermitteln ist; wenn dies der Fall ist, so gib die Namen der Ehepaare an!

Lösung: Wegen (2) ist Hans weder mit Gabi noch mit Erika verheiratet, wegen (1) auch nicht mit Simone. Folglich gilt:
(4) Hans ist mit Rita verheiratet.
Wegen (1) ist Dieter weder mit Erika noch mit Simone verheiratet, wegen (4) auch nicht mit Rita. Daher gilt:
(5) Dieter ist mit Gabi verheiratet.
Wegen (3) ist Peter nicht mit Simone, wegen (4) nicht mit Rita und wegen (5) auch nicht mit Gabi verheiratet. Also gilt:
(6) Peter ist mit Erika verheiratet.
Aus (4), (5), (6) folgt schließlich:
(7) Klaus ist mit Simone verheiratet.
Damit ist gezeigt, daß für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau eindeutig ermittelt werden kann. Die Ehepaare sind somit in (4), (5), (6) und (7) angegeben.

2. a) Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Gleichung

$$\overline{CD}=\overline{AD} \qquad (1)$$

gilt, dann gilt die folgende Aussage (2):
Die Diagonale AC halbiert den Innenwinkel $\sphericalangle BAD$. (2)



b) Beweise auch die folgende Umkehrung!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Aussage (2) gilt, dann gilt die Gleichung (1).

Lösung: a) Wegen $AB \parallel CD$ sind $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle CAB$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, folglich gilt

$$\overline{\sphericalangle ACD}=\overline{\sphericalangle CAB}. \qquad (3)$$

Wegen (1) ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; seine Basiswinkel sind gleich groß, also gilt

$$\overline{\sphericalangle ACD}=\overline{\sphericalangle CAD}. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $\overline{\sphericalangle CAB}=\overline{\sphericalangle CAD}$; w. z. b. w.
b) Aus $AB \parallel CD$ folgt wie oben (3).
Wegen (2) gilt

$$\overline{\sphericalangle CAB}=\overline{\sphericalangle CAD}. \qquad (5)$$

Aus (3) und (5) folgt (4), also ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; d. h., es gilt (1), w. z. b. w.

3. Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) z ist eine dreistellige Zahl.
(2) Die Zehnerziffer (d. h. die an der Zehnerstelle stehende Ziffer) von z ist um 1 größer als die Hunderterziffer von z.
(3) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer von z.
(4) z ist das Doppelte einer Primzahl.

Lösung: I) Wenn eine natürliche Zahl z die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt und a ihre Hunderterziffer ist, so folgt:
Wegen (1) gilt $a \neq 0$, wegen (3) ist $2a<10$, also $a<5$. Die folgende Tabelle enthält die für die

verbleibenden Möglichkeiten $a=1, 2, 3, 4$ die nach (2) und (3) sich ergebenden Zehner- und Einerziffern und damit z.

Hunderterziffer a	Zehnerziffer	Einerziffer	z
1	2	2	122
2	3	4	234
3	4	6	346
4	5	8	458

Von diesen scheidet die Zahl $z=234$ aus, da sie das Doppelte von 117 ist und dies wegen $117=3\cdot 39$ keine Primzahl ist. Also können nur die Zahlen 122, 346 und 458 die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen.
II) Sie sind dreistellig, erfüllen also (1). Ferner zeigt die Tabelle, daß sie (2) und (3) erfüllen. Schließlich erfüllen sie auch (4), da sie jeweils das Doppelte von 61, 173 bzw. 229 sind und diese Zahlen Primzahlen sind.
Somit lauten die gesuchten Zahlen: 122, 346, 458.

4. Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B. Nach einer Fahrzeit von 20 Minuten hatte er eine Panne, die in 30 Minuten behoben werden konnte. Nach weiteren 12 Minuten Fahrzeit mußte er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 Minuten warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt. Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11.06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen, stellt der Kraftfahrer fest, daß er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte derjenigen Zeit benötigt hat, die insgesamt von der Abfahrt von A bis zur Ankunft in B vergangen war.
Es sei angenommen, daß der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.
a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?
b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ausgedrückt?
c) Wieviel Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

Lösung: a) Der Kraftfahrer benötigte wegen $20+30+12+4=66$ bis zur Abfahrt von der Bahnschranke genau 66 Minuten. Da diese Zeit ebenso lang war wie die Fahrzeit von der Bahnschranke bis nach B, war er ab 11.06 Uhr noch einmal 66 Minuten bis B unterwegs, traf daher dort um 12.12 Uhr ein.
b) Für die ersten 40 km betrug die reine Fahrzeit wegen $66-30-4=32$ genau 32 Minuten, das sind $\frac{8}{15}$ Stunden. Wegen $40:\frac{8}{15}=75$ betrug seine Durchschnittsgeschwindigkeit mithin $75\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
c) Da er den Rest des Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegte und dafür 66 Minuten, also $\frac{11}{10}$ Stunden benötigte, legte er dabei wegen $75\cdot\frac{11}{10}=82{,}5$ noch weitere 82,5 km zurück. Mithin hatte er von A nach B insgesamt $40\,\text{km}+82{,}5\,\text{km} = 122{,}5\,\text{km}$ zurückgelegt.

Olympiadeklasse 8

1. Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Russisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:
(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur 2.
(2) Genau 19 Schüler haben in Russisch die Zensur 2.
(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur 2.
(4) Genau ein Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur 2.
(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Russisch eine „2".
(6) Genau 7 Schüler haben in Russisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine „2".
(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Russisch, aber nicht in Deutsch eine „2".
Ermittle aus diesen Angaben, wieviel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wieviel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur 2 haben!

Lösung: Aus (1), (4), (5) und (7) folgt wegen $11-1-4-2=4$, daß genau 4 Schüler in Mathematik die Zensur 2 haben. Aus (2), (4), (6) und (7) folgt wegen $19-1-7-2=9$, daß genau 9 Schüler genau in Russisch die Zensur 2 haben. Aus (3), (4), (5) und (6) folgt, daß wegen $23-1-4-7=11$ genau 11 Schüler genau in Deutsch eine „2" haben.
Wegen $4+9+11=24$ haben somit genau 24 Schüler dieser Gruppe in genau einem der genannten Fächer die Zensur 2.
Da wegen (5), (6), (7) genau 13 Schüler in genau zwei der Fächer eine 2 haben und wegen (4) noch ein weiterer Schüler hinzukommt, haben wegen $24+13+1=38$ mithin genau 38 Schüler in wenigstens einem der Fächer die Zensur 2.
Folglich hat genau ein Schüler dieser Gruppe in keinem der genannten Fächer die Zensur 2.

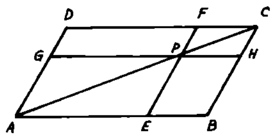
2. In einer AG Mathematik stellte ein Mitglied der Patenbrigade den Teilnehmern folgende Aufgabe:
„Unsere Brigade hat mehr als 20, aber weniger als 35 Mitglieder. Von ihnen nahmen im letzten Jahr im Juli dreimal soviel, im Februar doppelt soviel ihren Jahresurlaub wie im Mai. Im Januar nahmen drei Personen weniger als im Juli Urlaub, im August dagegen eine Person mehr als im Mai. In den nicht genannten Monaten dieses Jahres nahm kein Mitglied unserer Brigade Urlaub. Unter den genannten Urlaubern ist jedes Mitglied unserer Brigade genau einmal vertreten.
Stellt fest, ob ihr allein aus diesen Angaben die Anzahl unserer Brigademitglieder ermitteln könnt!"

Lösung: Die Anzahl der Mitglieder dieser Brigade, die im Mai Urlaub nahmen, sei x. Dann nahmen im Juli $3x$, im Februar $2x$, im Januar $3x-3$ und im August $x+1$ Brigademitglieder Urlaub. Das sind zusammen $(10x-2)$ Personen.
Nun gilt

$$20<10x-2<35, \text{ also}$$
$$22<10x<37.$$

Da x eine natürliche Zahl ist, folgt daraus $x=3$.
Mithin hatte die Brigade 28 Mitglieder.

3. In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen AC ($P\neq A$, $P\neq C$). Die Parallele durch P zu AB schneide BC in H und AD in G; die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F.
Beweise, daß die beiden Parallelogramme $EBHP$ und $GPFD$ den gleichen Flächeninhalt haben!



Lösung: Jede Diagonale eines Parallelogramms zerlegt dieses in zwei kongruente und somit flächeninhaltsgleiche Dreiecke. Wendet man dies auf die Parallelogramme $ABCD$, $AEPG$ und $PHCF$ an, so erhält man: Die Dreiecke ABC und CDA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_1 genannt. Die Dreiecke AEP und PGA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_2 genannt. Die Dreiecke PHC und CFP haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_3 genannt. Daher ergibt sich, daß sowohl das Parallelogramm $EBHP$ als auch das Parallelogramm $GPFD$ den Flächeninhalt A_1-A_2-A_3 haben.
Damit ist der verlangte Beweis geführt.

4. Klaus sagt: „Ich denke mir drei natürliche Zahlen. Die zweite Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei gedachten Zahlen beträgt 1120. Welche Zahl habe ich mir als erste gedacht, welche als zweite und welche als dritte?"
Kann diese Frage eindeutig beantwortet werden? Wenn das der Fall ist, so nenne die drei gedachten Zahlen!

Lösung: I) Wenn drei Zahlen die genannten Eigenschaften haben und die erste Zahl n ist, so lautet die zweite $\frac{n}{2}+2=\frac{n+4}{2}$ und die dritte $\frac{n+4}{4}+2=\frac{n}{4}+3$. Da auch dies eine natürliche Zahl ist, ist n durch 4 teilbar.
Wäre n eine (durch 4 teilbare) natürliche Zahl mit $n\leqq 12$, so wären $\frac{n}{2}+2$ und $\frac{n}{4}+3$ natürliche Zahlen mit $\frac{n}{2}+2\leqq 8$ und $\frac{n}{4}+3\leqq 6$, also wäre ihr Produkt

$n\cdot\left(\frac{n}{2}+2\right)\cdot\left(\frac{n}{4}+3\right)\leqq 12\cdot 8\cdot 6=576$
und daher kleiner als 1120. Wäre $n\geqq 20$, so wären $\frac{n}{2}+2\geqq 12$ und $\frac{n}{4}+3\geqq 8$, also das Produkt $n\cdot\left(\frac{n}{2}+2\right)\cdot\left(\frac{n}{4}+3\right)\geqq 20\cdot 12\cdot 8=1920$
und daher größer als 1120.

Also kommt als erste Zahl nur $n=16$, als zweite nur $\frac{n}{2}+2=10$ und als dritte nur $\frac{n}{4}+3=7$ in Frage.

II) Diese Zahlen haben die geforderten Eigenschaften, wie die Bestätigung von $\frac{16}{2}+2=10$, $\frac{10}{2}+2=7$, $16\cdot 10\cdot 7=1120$ zeigt.

Also kann die Frage von Klaus eindeutig beantwortet werden. Er hat sich als erste Zahl 16, als zweite 10 und als dritte 7 gedacht.

Olympiadeklasse 9

1. An einer Kreuzung standen in einer Reihe hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes dieser Fahrzeuge war entweder ein Personenkraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über ihre Reihenfolge sei bekannt:

(1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter einem anderen LKW.

(2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar zwischen zwei LKW.

(3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar zwischen zwei PKW.

(4) Genau drei PKW standen unmittelbar hintereinander.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden haben können!

Lösung: Wir bezeichnen Personen- bzw. Lastkraftwagen mit P bzw. L. Aus (2) folgt:

(5) In der Fahrzeugreihe kommt ein Teilstück

LPL (*)

vor. Hiernach folgt aus (1):

(6) An (*) schließt sich nach keiner Seite ein L an.

Wegen (3) ist es auch nicht möglich, daß sich an (*) nach beiden Seiten je ein P anschließt, somit folgt:

(7) Eines der Enden des Teilstücks (*) ist auch ein Ende der gesamten Fahrzeugreihe.

Aus (4) ergeben sich die beiden folgenden Aussagen:

(8) In der Fahrzeugreihe kommt ein Teilstück

PPP (**)

vor.

(9) An (**) schließt sich nach keiner Seite ein P an.

Da die Fahrzeugreihe insgesamt 7 Fahrzeuge enthält, folgt:

(10) Das Teilstück (**) kann entweder unmittelbar oder mit Dazwischenschalten genau eines Fahrzeugs an (*) angeschlossen sein.

Ein Fahrzeug zwischen (*) und (**) könnte aber wegen (6) kein L und wegen (9) kein P sein; also entfällt in (10) die Möglichkeit des Dazwischenschaltens, d. h., (*) und (**) stehen unmittelbar hintereinander. Hiernach ist das außer (*) und (**) noch vorhandene Fahrzeug wegen (7) an (**) angeschlossen und daher wegen (9) ein L. Also gibt es insgesamt als Möglichkeiten für die Reihenfolge nur

(*) (**) L, d. h. $LPLPPPL$,

L (**) (*), d. h. $LPPPLPL$.

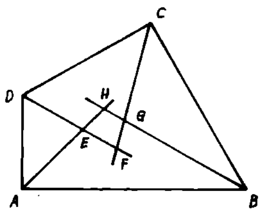
Diese beiden Möglichkeiten erfüllen in der Tat alle Bedingungen (1) bis (4). Daher sind genau sie die gesuchten.

2. Die Zahlen in einem Zahlentripel $[p,q,r]$ seien genau dann „Primzahldrillinge“ genannt, wenn jede der drei Zahlen p, q, r eine Primzahl ist und wenn p, q, r in dieser Reihenfolge drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.

Beweisen Sie, daß es genau ein Zahlentripel $[p,q,r]$ gibt, das alle diese Bedingungen erfüllt!

Lösung: Angenommen, ein Zahlentripel $[p,q,r]$ erfülle die genannten Bedingungen. Dann ist $p\geqq 3$ sowie $q=p+2$ und $r=p+4$. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 1 ergäbe, so wäre q durch 3 teilbar, also wegen $q\geqq 5>3$ keine Primzahl. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 2 ergäbe, so wäre r durch 3 teilbar, also wegen $r\geqq 7>3$ keine Primzahl. Daher verbleibt nur die Möglichkeit, daß p durch 3 teilbar und folglich (als Primzahl) gleich 3 ist. Somit kann nur das Tripel $[3,5,7]$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen. Es erfüllt diese Bedingungen; denn 3, 5 und 7 sind Primzahlen, und sie sind drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen.

3. Von einem konvexen Viereck $ABCD$ werde folgendes vorausgesetzt:



Konstruiert man die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte E, F, G, H, die so auf den Winkelhalbierenden angeordnet sind, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.

Beweisen Sie, daß unter dieser Voraussetzung stets in dem Viereck $EFGH$ die Summe zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt!

Lösung: Es seien $\overline{\sphericalangle BAD}=\alpha$; $\overline{\sphericalangle CBA}=\beta$; $\overline{\sphericalangle DCB}=\gamma$; $\overline{\sphericalangle ADC}=\delta$. Dann gilt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck, angewandt auf das Dreieck AHB: $\overline{\sphericalangle EHG}=\overline{\sphericalangle AHB}=180°-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$ und angewandt auf das Dreieck DFC: $\overline{\sphericalangle EFG}=\overline{\sphericalangle DFC}=180°-\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right)$.

Somit erhält man durch Addition

$\overline{\sphericalangle EHG}+\overline{\sphericalangle EFG}=360°-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right)$.

Da aber die Summe der Innenwinkel im Viereck 360° beträgt, gilt

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=180°$ und somit

$\overline{\sphericalangle EHG}+\overline{\sphericalangle EFG}=180°$, w. z. b. w.

4. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen x, für die folgendes gilt!

(1) x ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.

(2) Vergrößert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

(3) Vermindert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung: Angenommen, eine Zahl x habe die Eigenschaften (1), (2), (3). Dann gibt es natürliche Zahlen m, n, p für die

$$x=n^2, \qquad (4)$$
$$x+24=p^2, \qquad (5)$$
$$x-24=m^2 \qquad (6)$$

gilt. Aus (4) und (6) folgt

$$n^2-m^2=24, \qquad (7)$$

aus (4) und (5) folgt

$$p^2-n^2=24. \qquad (8)$$

Aus (7) folgt $(n-m)(n+m)=24$. Damit ist 24 als Produkt der ganzen Zahlen $n-m$ und $n+m$ dargestellt. Von diesen ist $n+m$ eine natürliche Zahl, also auch der andere Faktor $n-m$. Ferner ist die Differenz dieser Faktoren $(n+m)-(n-m)=2m$ eine gerade natürliche Zahl. Das trifft, wie die sämtlichen Zerlegungen $24=1\cdot 24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6$ zeigen, nur für die Fälle

$n-m=1$, $n+m=12$,

also $m=5$, $n=7$, (9)

$n-m=4$, $n+m=6$,

also $m=1$, $n=5$ (10)

zu. Somit kann das Paar (m,n) nur eines der Paare $(1,5)$, $(5,7)$ sein.

Aus (8) folgt ebenso: Das Paar (n,p) kann nur eines der Paare $(1,5)$, $(5,7)$ sein.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $m=1$, $n=5$, $p=7$, nach (4) also $x=25$. Also kann nur diese Zahl die Eigenschaften (1), (2), (3) haben.

Sie hat diese Eigenschaften; denn es gilt

$25=5^2$, $25+24=49=7^2$,

$25-24=1=1^2$.

Olympiadeklasse 10

1. Ein rechteckiges Bild, dessen Seitenlängen sich wie 2:3 verhalten, soll einen überall gleich breiten Rahmen erhalten, dessen Flächeninhalt so groß ist wie der des Bildes.

Ermitteln Sie alle diejenigen Werte des Längenverhältnisses der Außenkanten des Rahmens, die diese Forderung erfüllen!

Lösung: Es sei $2a$ die Länge der kürzeren Seite des Bildes, dann ist $3a$ die Länge seiner längeren Seite. Es sei d die Breite des Rahmens, dann sind $2a+2d$ bzw. $3a+2d$ die Längen der Außenkanten des Rahmens.

Die in der Aufgabe gestellte Forderung ist genau dann erfüllt, wenn die von diesen Kanten eingeschlossene Fläche einen doppelt so großen Flächeninhalt hat wie die des Bildes, d. h. genau dann, wenn

$$(2a+2d)(3a+2d)=2\cdot 2a\cdot 3a$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$6a^2+4ad+6ad+4d^2=12a^2,$$
$$4d^2+10ad-6a^2=0,$$
$$d^2+\frac{5}{2}ad-\frac{3}{2}a^2=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat genau die Lösungen

$$d_{1,2}=-\frac{5}{4}a\pm\sqrt{\frac{25}{16}a^2+\frac{24}{16}a^2},$$

von denen genau

$$d=-\frac{5}{4}a+\frac{7}{4}a=\frac{a}{2}$$

nicht negativ ist. Daher ist die Forderung genau dann erfüllt, wenn die Außenkanten die Längen $2a+2\cdot\frac{a}{2}=3a$ und $3a+2\cdot\frac{a}{2}=4a$ haben.

Ist dies der Fall, so haben sie das Längenverhältnis 3:4, und auch umgekehrt gilt: Haben die Außenkanten das Längenverhältnis $(2a+2d):(3a+2d)=3:4$, so folgt $8a+8d=9a+6d$, also $2d=a$ und damit $d=\frac{a}{2}$.

Somit erfüllt genau das Längenverhältnis 3:4 die Bedingungen der Aufgabe.

2. Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, dann sind entweder alle drei Quadratzahlen durch 9 teilbar, oder genau zwei der Quadratzahlen ergeben bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Lösung: Ergibt eine natürliche Zahl bei Division durch 9 den Rest

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bzw. 8,

so ergibt ihr Quadrat jeweils den Rest

0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4 bzw. 1;

d. h., für jede Quadratzahl ist der Rest, den sie bei Division durch 9 ergibt, eine der Zahlen 0, 1, 4, 7. Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, so gilt das auch für die Summe der Reste, die diese Quadratzahlen jeweils bei Division durch 9 ergeben.

1. Fall: Einer der Reste ist 0.

Dann ist die Summe der beiden anderen Reste durch 9 teilbar. Alle Summen aus zwei Summanden, von denen jeder eine der Zahlen 0, 1, 4, 7 ist, sind aber

$0+0=0, 0+1=1, 0+4=4, 0+7=7, 1+4=5, 1+7=8, 4+7=11.$

Daher verbleibt nur die Möglichkeit, daß auch die beiden anderen Reste 0 sind; d. h., es folgt: Alle drei Quadratzahlen sind durch 9 teilbar.

$\left.\begin{matrix}2.\\3.\\4.\end{matrix}\right\}$ *Fall:* Einer der Reste ist $\left\{\begin{matrix}1\\4\\7\end{matrix}\right\}$

Dann ergibt die Summe der beiden anderen Reste bei Division durch 9 den Rest $\left\{\begin{matrix}8\\5\\2\end{matrix}\right\}$

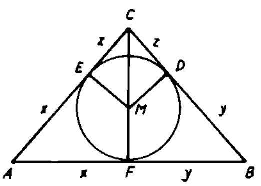
Hierfür verbleibt unter den Summen (1) nur die Möglichkeit, daß die beiden anderen Reste $\left\{\begin{matrix}\text{1 und 7}\\\text{1 und 4}\\\text{4 und 7}\end{matrix}\right\}$ lauten.

In jedem dieser Fälle ergeben also genau zwei der drei Quadratzahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

3. Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ und $\overline{AB}=c$ gegeben. Der Inkreis dieses Dreiecks berühre die Seite BC in D, die Seite CA in E und die Seite AB in F.

Ermitteln Sie die Längen der Seitenabschnitte BD, DC, CE, EA, AF und FB, in Abhängigkeit von a, b und c ausgedrückt!



Lösung: Es sei M der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Seiten des Dreiecks sind Tangenten an den Inkreis, also gilt $ME\perp AC$ und $MF\perp AB$. Weiter folgt $\triangle AEM\cong\triangle AFM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $\overline{AM}=\overline{AM}$, $\overline{ME}=\overline{MF}$ und in der Größe $\sphericalangle AEM=\sphericalangle AFM$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt. Daher ist $\overline{AE}=\overline{AF}$. (Die hier erhaltene Aussage, daß auf den Tangenten von einem Punkt A an einen Kreis die Strecken A bis zu den Berührungspunkten einander gleichlang sind, kann auch als bekannter Satz zitiert werden.) Entsprechend läßt sich zeigen, daß $\overline{BF}=\overline{BD}$ und $\overline{CD}=\overline{CE}$ gilt.

Für die gesuchten Seitenabschnitte $\overline{AE}=\overline{AF}=x$, $\overline{BF}=\overline{BD}=y$, $\overline{CD}=\overline{CE}=z$ gilt somit das Gleichungssystem

$$y+z=a, \qquad (1)$$
$$x+z=b, \qquad (2)$$
$$x+y=c. \qquad (3)$$

Addiert man (2) und (3) und subtrahiert (1), so folgt nach Division durch 2

$$x=\frac{1}{2}(b+c-a).$$

Entsprechend ergibt sich

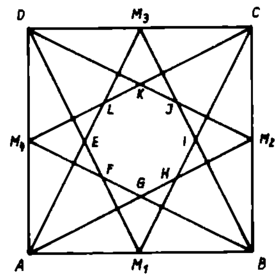
$$y=\frac{1}{2}(c+a-b),$$
$$z=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

Die gesuchten Längen sind also

$$\overline{AE}=\overline{AF}=\frac{1}{2}(b+c-a),$$
$$\overline{BF}=\overline{BD}=\frac{1}{2}(c+a-b),$$
$$\overline{CD}=\overline{CE}=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

(Da die Existenz (des Inkreises und folglich auch) der gesuchten Längen als bekannt verwendet werden darf, ist eine Probe (oder ein Nachweis der Äquivalenz zwischen dem System (1), (2), (3) und der Angabe von x, y, z) nicht erforderlich.)

4. Verbindet man in einem Quadrat $ABCD$ die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der Seiten jeweils mit den beiden gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht ein achtstrahliger Stern, der in seinem Innern ein Achteck $EFGHIJKL$ (siehe Bild) enthält.



Stellen Sie fest, ob dieses Achteck regelmäßig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Hinweis: Ein n-Eck heißt regelmäßig, wenn alle seine Seiten gleich lang und alle seine Innenwinkel gleich groß sind.

Lösung: Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen und a die Seitenlänge des Quadrates. Da M_4M_2 Symmetrieachse des Quadrats ist, liegt M auf M_4M_2, und da M_4M Symmetrieachse des Rechtecks AM_1M_3D ist, liegt E auf M_4M. Da ferner AC Symmetrieachse des Quadrats bezüglich der Spiegelung ist, die B und D sowie M_4 und M_1 jeweils untereinander vertauscht, liegt F auf AC.

Jeweils nach einem Teil des Strahlensatzes folgt nun

$$\frac{\overline{M_4E}}{\overline{DM_3}}=\frac{\overline{AM_4}}{\overline{AD}}=\frac{1}{2}, \text{ oder } \overline{M_4E}=\frac{a}{4}, \overline{EM}=\frac{a}{4}$$

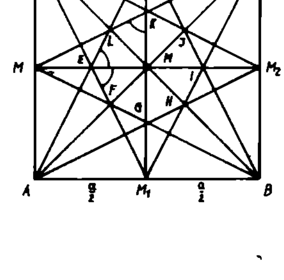
und

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{M_4M}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}, \text{ also } \overline{FM}=\frac{\overline{AM}}{3}.$$

Da $\overline{AM}$ die halbe Diagonale des Quadrats ist, gilt $\overline{AM}=\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und daher $\overline{MF}=\frac{a}{6}\sqrt{2}$.

Wegen $\frac{1}{6}\sqrt{2}\neq\frac{1}{4}$ folgt $\overline{ME}\neq\overline{MF}$ und hieraus nach der Seiten-Winkel-Relation $\sphericalangle MEF\neq\sphericalangle MFE$.

Da sowohl M_4M_2 als auch AC Symmetrieachsen der gesamten Figur sind, gilt $\sphericalangle LEF=2\sphericalangle MEF$ und $\sphericalangle EFG=2\sphericalangle MFE$. Daher folgt aus der vorigen Ungleichung auch $\sphericalangle LEF\neq\sphericalangle EFG$. Da somit in dem Achteck $EFGHIJKL$ zwei verschieden große



Innenwinkel vorkommen, ist es nicht regelmäßig.

2. Lösungsweg: Man zeigt
$\triangle MEM_3 \cong \triangle MKM_4 \cong \triangle MEM_1$,
$\overline{M_3M}:\overline{EM}=2:1$ und folglich
$\sphericalangle M_3EM = \sphericalangle M_4KM = \sphericalangle M_1EM = \phi$ mit $\tan\phi = 2$.
Daher ist einerseits $\sphericalangle FEL = 2\phi$, andererseits nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke, auf $EMKL$ angewandt, $\sphericalangle ELK = 270° - 2\phi$. Wäre das Achteck regelmäßig, so folgte $2\varphi = 270° - 2\phi$, $\phi = 67{,}5°$. Wegen $\tan 67{,}5° \neq 2$ ist damit ein Widerspruch erreicht.

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle Tripel $[x,y,z]$ reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\left.\begin{aligned} x-\frac{1}{y}&=1,\\ y-\frac{1}{z}&=1,\\ z-\frac{1}{x}&=1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

2. Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, seine Fläche also durch die Diagonale AC in zwei Dreiecksflächen, nämlich die des Dreiecks ABC und die des Dreiecks ACD, zerlegt, so werde der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F_1, der des Dreiecks ACD mit F_2 sowie die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ mit α bezeichnet.
Von einem konvexen Viereck $ABCD$ seien nun die folgenden Eigenschaften gefordert:

$$AB \parallel CD, \qquad (1)$$
$$\overline{AB} > \overline{CD}, \qquad (2)$$
$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} \qquad (3)$$
$$AC \perp BC. \qquad (4)$$

Man beweise, daß die Forderungen (1) bis (4) erfüllbar sind und daß die Werte von $F_1 : F_2$ und α durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Man ermittle diese Werte.

3. 100 Touristen sind in 100 verschiedenen Städten beheimatet, in jeder dieser Städte genau einer der Touristen. Keine zwei von ihnen sind miteinander bekannt. Sie unternehmen durch genau diese Städte Rundreisen, und zwar
a) als Touristengruppe (alle 100 Touristen machen gemeinsam ein und dieselben Reisen),
b) als Einzelreisende (jeder legt die Reihenfolge und die jeweilige Aufenthaltsdauer für die einzelnen Städte selbst fest, die Reisen erfolgen unabhängig voneinander).
Ferner treffen sie die folgende sonderbare Vereinbarung: Je zwei dieser Touristen machen sich genau dann miteinander bekannt, wenn sie sich zum ersten Mal gemeinsam in einer Stadt befinden, in der keiner dieser beiden Touristen beheimatet ist.
Ermitteln Sie im Fall a) und im Fall b) jeweils die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, für die die folgende Aussage (*) wahr ist!

(*) Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, daß jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in n Städten gewesen ist.

4. a) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_1(x) = \frac{\sin(x\sqrt{2})}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_1 periodisch ist.
b) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_2 periodisch ist.

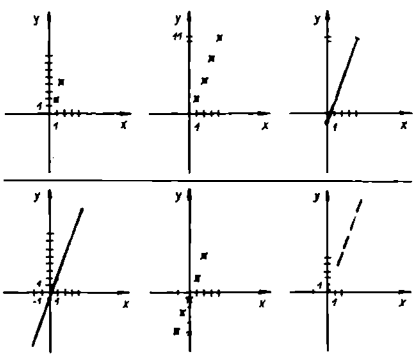
Lösungen

Lösungen zu:
Wir arbeiten mit Mengen, Teil 3:

Arbeitsblatt 6

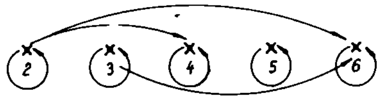
F_1 ist eine eineindeutige Abbildung von M auf M;
$Vb = \{a,b,c\}$; $Vb = M$; $Nb = \{a,b,c\}$; $Nb = M$;
$F_1 = \{[a;b], [b;a], [c;c]\}$
F_2 ist eine nur eindeutige Abbildung von M auf N;
$Vb = \{a,b,c,d\}$; $Vb = M$; $Nb = \{e,f,g\}$; $Nb = N$;
$F_2 = \{[a;e], [b;f], [c;g], [d;g]\}$
F_3 ist eine nur eindeutige Abbildung aus A in B;
$Vb = \{1,2,8\}$; $Vb \subset A$; $Nb = \{2;4\}$; $Nb \subset B$;
$F_3 = \{[1;2], [2;4], [8;4]\}$
F_4 ist eine nicht eindeutige Abbildung von R in S;
$Vb = \{0,5,10,15\}$; $Vb = R$; $Nb = \{-3,12,2\}$; $Nb \subset S$;
$F_4 = \{[0;-3], [0;2], [5;12], [10;-3], [15;2]\}$
Man schreibe als Menge geordnete Paare:
$F_1^{-1} = \{[b;a], [a;b], [c;c]\}$
$F_2^{-1} = \{[e;a], [f;b], [g;c], [g;d]\}$
$F_3^{-1} = \{[2;1], [4;2], [4;8]\}$
$F_4^{-1} = \{[-3;0], [2;0], [12;5], [-3;10], [2;15]\}$

Arbeitsblatt 7

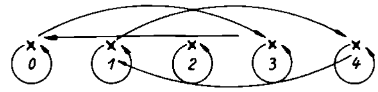


Arbeitsblatt 8

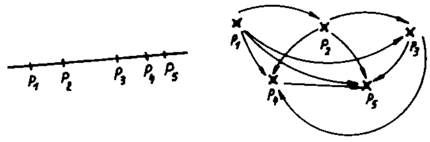
(1) $R = \{[2;2], [3;3], [4;4], [5;5], [6;6], [2;4], [2;6], [3;6]\}$



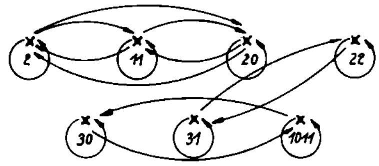
(2) $R_2 = \{[0;0], [1;1], [2;2], [3;3], [4;4], [0;3], [3;0], [1;4], [4;1]\}$



(3) $R_3 = \{[P_1;P_2], [P_1;P_3], [P_1;P_4], [P_1;P_5], [P_2;P_3], [P_2;P_4], [P_2;P_5], [P_3;P_4], [P_3;P_5], [P_4;P_5]\}$



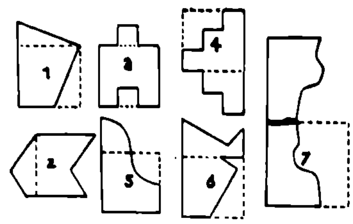
(4) $R_4 = \{[2;2], [11;11], [20;20], [22;22], [30;30], [31;31], [1011;1011], [2;11], [11;2], [2;20], [20;2], [11;20], [20;11], [1011;30], [30;1011], [22;31], [31;22]\}$.



Lösungen zu: alpha-heiter 6/79

Stadtplan

Das Haus mit den Koordinaten $C5$ erfüllt die Bedingungen.



Rätselspaß mit π

Die richtige Reihenfolge ist: E – 1 – 6 – 12 – 18 – 13 – 7 – 2 – 3 – 4 – 5 – 11 – 17 – 21 – 16 – 10 – 9 – 8 – 14 – 20 – 19 – A

Abschied von 1979

$$\begin{aligned} 1+1978 &= 1979\\ 2+1977 &= 1979\\ 3+1976 &= 1979\\ &\;\;\ldots \qquad\qquad „989 \cdot 1978“\\ 989+990 &= 1979\\ A &= 1979 + 2\cdot 989\cdot 1979\\ &= 1979 + 1978\cdot 1979\\ &= 1979\,(1+1978)\\ &= 1979\cdot 1979\\ &= 1979^2 \end{aligned}$$

Mit einem Schnitt

Die eine Hälfte der Figur 7 muß man nach dem Schnitt so umklappen, daß ein Quadrat entsteht.

Knopfspielereien

1. Ein gleichseitiges Dreieck mit einer Kantenlänge von je vier Knöpfen wird gebildet.
2. Man braucht nur drei Schübe: Von oben nach Mitte sieben Knöpfe, von Mitte nach unten sechs Knöpfe, von unten nach oben vier Knöpfe.
3. Numerieren wir die Felder im Geist von links nach rechts mit den Zahlen 1 bis 7. Fünf Sprünge sind nötig: 5 nach 1, 2 nach 5, 6 nach 2, 3 nach 6, 7 nach 3. Wenn man nur über einen Knopf oder zwei Knöpfe springen darf, wird es schwieriger. Dann braucht man 10 Züge.

Kryptarithmetik

$1820+53213+9287=64320$
$598+26710+19010=46318$
$298+39618+975=40891$
$5962+908+6976=13846$

Silbenrätsel

1. Kreisbogen; 2. Diagonale; 3. Kurvenschablone; 4. Substitution; 5. Radius; 6. Camille; 7. Kavalierperspektive; 8. Lineal; 9. Ebene; 10. Original – BONAVENTURA CAVALIERI

Lösungen zu: Winterfreuden

Bild 1: Alle haben sich bewegt: der hockende Sportfreund seinen linken Skistock, der stehende seine Hand. Das Mädchen hat ihr Stirnband heruntergezogen und ihre linke Hand versteckt. Der Mann neben ihr hält jetzt seine Pfeife anders, und der kleine Junge hat die Augen geschlossen.
Bild 2: Mehr Einzelheiten: Nr. 2 – Gürtelschnalle; Nr. 5 – Mützenbommel; Nr. 8 – Schal; Nr. 10 – Haarband; Nr. 17 – Krawatte. Weniger Einzelheiten: Nr. 7 – Pullovermuster; Nr. 11 – Schlittschuh; Nr. 13 – die Hand des Mannes; Nr. 20 – Hut; Nr. 21 – Puck
Bild 3: Der Damenschuh befindet sich in umgekehrter Stellung oberhalb des wehenden Schals des rechts am Schneemann bauenden Jungen. Sein Absatz wird von einem Zaunbrett und der schwarzen Hose des Mannes begrenzt, dem ein wohlgezielter Schneeball gerade den Hut vom Kopfe reißt.

Bild 4

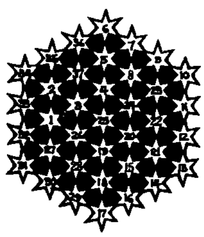
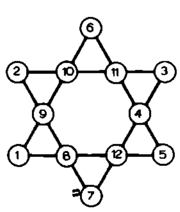


Bild 5



Lösung zu: AGs im Blickpunkt

$$P=\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)\dots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}$$

$$=\frac{x^{2^n}-a^{2^n}}{x-a}$$

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/79, Fortsetzung:

Ma 10/12 ■1876 Aus dem Sinussatz $a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$ folgt:

(1) $\sin\beta=\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}$ bzw.

(2) $\sin^2\beta=\frac{b^2\cdot\sin^2\alpha}{a^2}$ und

(3) $\sin\gamma=\frac{c\cdot\sin\alpha}{a}$ bzw.

(4) $\sin^2\gamma=\frac{c^2\cdot\sin^2\alpha}{a^2}$.

Wir formen nun die rechte Seite der Gleichung unter Verwendung von (2) und (4) äquivalent um:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma$$
$$=\sin^2\alpha+\frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha-\frac{c^2}{a^2}\sin^2\alpha$$
$$=\sin^2\alpha\left(1+\frac{b^2}{a^2}-\frac{c^2}{a^2}\right)$$
$$=\sin^2\alpha\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2}\right).$$

Nun gilt

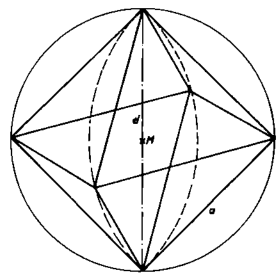
$$2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=\sin^2\alpha\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2}\right),\ |:\sin\alpha$$
$$2\sin\beta\cos\gamma=\sin\alpha\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2}.$$

Unter Verwendung von (1) ergibt sich

$$2\cdot\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}\cdot\cos\gamma=\sin\alpha\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2}\quad\Big|\cdot\frac{a}{\sin\alpha}$$
$$2b\cdot\cos\gamma=\frac{a^2+b^2+c^2}{a}\text{ bzw.}$$
$$2ab\cdot\cos\gamma=a^2+b^2-c^2\text{ bzw.}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma.$$

Das ist der bekannte Kosinussatz. Da alle Schritte äquivalente Umformungen sind, ist die Behauptung bewiesen.

Ma 10/12 ■1877 a)



b) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $d^2=a^2+a^2$ und somit $d=a\sqrt{2}$

c) Für das Volumen der Kugel gilt

$V_K=\frac{\pi}{6}d^3$ und wegen b) $V_K=\frac{\pi}{6}(a\cdot\sqrt{2})^3$
$=\frac{\pi}{3}\cdot a^3\sqrt{2}.$

Für das Volumen des Oktaeders gilt:
$V_0=\frac{a^3}{3}\cdot\sqrt{2}$. Nun gilt für das Verhältnis der beiden Volumina

$$\frac{V_K}{V_0}=\frac{\frac{\pi}{3}a^3\cdot\sqrt{2}}{\frac{a^3}{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\pi}{1}.$$

Das Volumen der Kugel verhält sich zum Volumen des Oktaeders wie $\pi:1$.

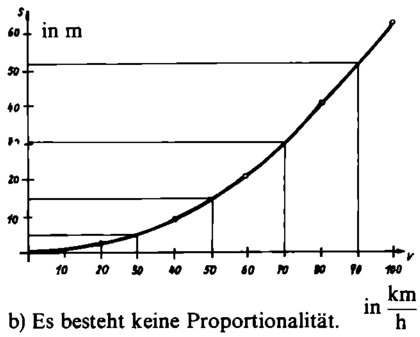
d) Aus $\frac{V_K}{V_0}=\frac{\pi}{1}$ folgt $V_K=\pi\cdot V_0$,
$V_K=\pi\cdot 23{,}87\text{ cm}^3$,
$V_K=75\text{ cm}^3$.

Das Volumen der Kugel beträgt 75 cm^3.

Aus Platzgründen geben wir zu den Physik- und Chemie-Wettbewerbsaufgaben des Heftes 2/79 nur die Schlußsätze wieder:

Ph 6 ■56 Marmor hat die Dichte $2{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (lt. „Tabellen und Formeln").

Ph 7 ■57 a)



b) Es besteht keine Proportionalität.
c) Ungefähr 0,6 m; 5,8 m; 51,8 m.
d) Ungefähr $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ph 8 ■58 Der Tauchsieder hat einen Wirkungsgrad von 0,89.

Ph 9 ■59 Der Widerstand des Heizkörpers muß rund 16,7 Ω betragen.

Ph 10/12 ■60 Der Fußgänger sieht die Straßenbahnen im Abstand von etwa 13 min an sich vorüberfahren.

Ch 7 ■45 Unter den gegebenen Bedingungen entstehen 8,5 t Wassergas.

Ch 8 ■46 a) Die theoretisch zur Verbrennung von 1 m^3 Gas erforderliche Luftmenge beträgt rund 0,9 m^3.
b) Die Rauchgase bestehen aus: 18,4% CO_2 und 81,6% N_2.

Ch 9 ■47 a) Es müssen 122,3 g des Alkanöls eingesetzt werden.
b) Es müssen 137,3 g der Säure zur Reaktion gebracht werden.

Ch 10/12 ■48 Aus 208 t Anhydrit lassen sich 153 t 98%ige Schwefelsäure herstellen.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Die Lösungen der Olympiade Klasse 10 veröffentlichen wir aus Platzgründen ab Heft 1/80, d. Red.

alpha-Wettbewerb 1978/79

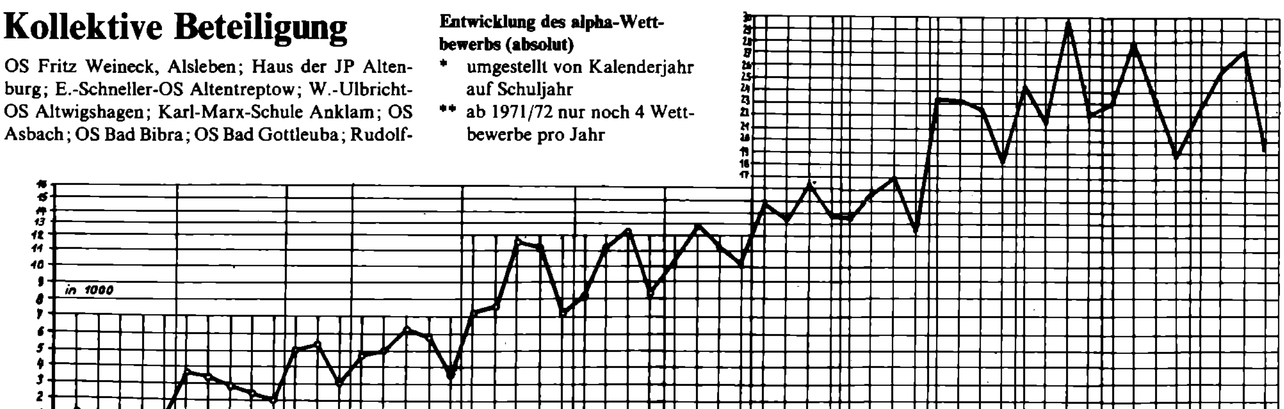
Preisträger

Manuela Winges, Bad Liebenstein; Alexander Mensch, Holger Neye, Kerstin Kantiem, Ingo Witt, Martin Schnauß, Mario Köppen, alle Berlin; André Weber, Bischofferode; Helge Dürschke, Bitterfeld; Andreas Jock, Blankenfelde; Andrea Fischer, Burkau; Harald Schiffhauer, Buttlar; Peter Strempel, Thomas Lundershausen, Frank Techen, alle Cottbus; Andrea Wetter, Michael Hoffmeier, Tobias Kunisch, Holger Lorenz, alle Dingelstädt; Olaf Jenkner, Dorfchemnitz; Thomas Hübner, Horst Schulze, beide Dresden; Bernd Leifheit, Eigenrieden; Monika Glaß, Claudia Pleyer, beide Eisenach; Bodo Baumbach, Andreas Möller, Astrid Abt, alle Fambach; Jens Wackernagel, Falkenberg; Ilka Forbig, Floh; Kai-Uwe Barholz, Annett Helbig, beide Frankfurt; Ralf Fünfziger, Katrin Burgmann, beide Friedeburg; Heiko Mißfeldt, Gammelin; Susann Laue, Gerbstedt; Ingolf Hintzsche, Gremmin; Erik Opelt, Güstrow; Stefan Große, Katrin Friedrich, beide Halle; Andreas Löffler, Halle-Neustadt; Steffen Heyde, Hohenbucko; Heidrun Schmidt, Mirko Schulze, beide Hoyerswerda; Sabine Sentker, Hettstedt; Michael Kaufhold, Hüpstedt; Martin Jaekel, Jena; Andreas Israel, Jens Siewert, Katrin Richter, Mathias Hänel, alle Karl-Marx-Stadt; Udo Müller, Kaltennordheim; Felix und Anita Baitalowitsch, Kasan (UdSSR); Ralf Laue, Leipzig; Sybille und Claudia Seifert, beide Lichtenberg; Monika Mayr, Linz (Österreich); Reiner Gerlach, Lübs; Hagen Haberland, Mesekenhagen; Jürgen Seifert, Milkau; Petra Klein, Mittelstille; Birgit Polley, Mühlhausen; Ralf Krause, Antje Krause, Christian Voigtländer, alle Neubrandenburg; Arndt Kretzner, Neustadt; Henning Schulz, Claudia Tiersch, beide Potsdam; Gerald Stibbe, Grit Maciejewski, Lutz Andrews, alle Rostock; Rolf Jurjans, Riga (UdSSR); Frank Schröter, Rotta; Frank Schneevoigt, Salzwedel; Bodo Bricks, Saalfeld; Cornelia Kubacki, Sargstedt; Antje Rudolph, Schkölen; Karin Semm, Schmalkalden; Lydia Balzer, Sondershausen; Beate Nothnagel, Uwe Döll, Christine Häfner, Ralf-Birger Häfner, Rainer Schwäblein, alle Steinbach-Hallenberg; Cordula Gottwald, Stendal; Gerd Mey, Suhl; Holger Wittner, Teterow; Steffen Weber, Tiefenort; Gabriele Wolf, Trusetal; Joachim Riedel, Clemens Kuhn, beide Vacha; Joachim Kleinert, Wernshausen; Frank Zapke, Uwe Tews, Marion Reek, alle Wittenberg; Cornelia Escher, Wolgast; Ray Langlotz, Unterbreizbach; Gert Künzelmann, Krina; Heiko Storandt, Wernshausen

Kollektive Beteiligung

OS Fritz Weineck, Alsleben; Haus der JP Altenburg; E.-Schneller-OS Altentreptow; W.-Ulbricht-OS Altwigshagen; Karl-Marx-Schule Anklam; OS Asbach; OS Bad Bibra; OS Bad Gottleuba; Rudolf-Schwarz-OS Bad Liebenstein; Otto-Grotewohl-OS III, Magnus-Poser-OS, OS V, alle Bad Salzungen; Zentrale OS Bärenklau; OS Bahratal; Kurt-Schweitzer-OS Basdorf; H.-Warnke-OS Bergwitz; Botschafterschule der DDR in der ARÄ, Zille-OS, 26. OS Wolodja Dubinin, alle Berlin; OS Fr. Mehring, Bernburg; OS Bernterode; OS Birkungen; Clara-Zetkin-OS Bischofferode; Kreisklub Math. Bischofswerda; Friedrich-Schiller-OS, Max-Planck-OS, beide Bleicherode; OS Fritz Weineck, Blumberg; Karl-Marx-OS Borna; OS Brandshagen; OS Bregenstedt; OS Breitenworbis; Werner-Seelenbinder-OS Breitungen; Pablo-Neruda-OS Britz; Magnus-Poser-OS Bürgel; OS Burkau; Wilhelm-Pieck-OS Burow; Waldemar-Estel-OS Buttlar; Klub Jg. Math., Station Jg. Naturf., Pablo-Neruda-OS, beide Cottbus; OS Deetz; 11. POS Dessau; OS Deuna; OS Deutschenbora; Nicolai-OS Diedorf; OS Diesdorf; OS Makarenko, OS K. Kollwitz, beide Dingelstädt; OS K. Bürger, Dobbertin; Marie-Curie-OS Dohna; alpha-Club Dolgelin; Paul-Gruner-OS, 39. OS, beide Dresden; Fr.-Wolf-OS Ebersdorf; OS Fr. Engels, Effelder; OS Geschw. Scholl, Eisenach; John-Schehr-OS Eisleben; OS H. Grundig Ellrich; Hugo-Joachim-OS Espenhain; Th.-Müntzer-OS Fambach; OS K. Niederkirchner, OS E. Weinert, beide Ferchland; B.-Brecht-OS Floh; Dr.-Th.-Neubauer-OS Frankfurt; OS Frauenhain; OS Frauensee; OS Friedeburg; R.-Arnstadt-OS Geisa; Diesterwegschule Geringswalde; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Gerstungen; J.-Brinckmann-OS Goldberg; Klub Jg. Math. Gräfenhainichen; K.-Krull-OS, O.-Drews-OS, beide Greifswald; OS J. Gagarin, OS H. Beimler, beide Greußen; OS W. Seelenbinder Gröden; OS Cl. Zetkin Groitzsch; OS Großbodungen; Lessingschule Großpostwitz; OS Großschönau; J.-Gagarin-OS Grünhain; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Diesterweg-OS, beide Guben; Haus d. JP Hagenow; M.-Gorki-OS Hainichen; E.-Thälmann-OS Haldensleben; OS Diesterweg Halle; W.-Koenen-OS, 12. OS, beide Halle-Neustadt; 11. OS Hamm; OS Hammerbrücke; Schule d. DSF Heiligengrabe; P.-Schreier-OS Hennigsdorf; OS Th. Müntzer Hermannsdorf; EOS E. Weinert, 1. OS H. Beimler, beide Herzberg; Goethe-OS Hohenleipisch; OS Hundeshagen; O.-Grotewohl-OS Ilmenau; Goethe-OS Ilsenburg; OS Ivenack; Fr.-Engels-Schule Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS Kandelin; H.-Beimler-OS Karbow; Pionierhaus J. Gagarin, P.-Tschaikowski-OS, Fr.-Heckert-OS, Stadtbezirkspionierhaus Mitte-Nord, alle Karl-Marx-Stadt; OS Kieselbach; Th.-Neubauer-Schule Kieselbach; EOS, G.-Eisler-OS, beide Kleinmachnow; OS Th. Müntzer Klettenberg; OS E. Thälmann Klosterfelde; OS Könitz; Station Jg. Naturf. u. Techn. Köthen; OS Kuhfelde; OS Küllstedt; L.-Fürnberg-OS Laage; alpha-Club OS Latdorf; OS Lauscha; R.-Teichmüller-OS Leimbach; K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, OS IV, EOS Karl Marx, alle Leinefelde; H.-Beimler-OS Leisnig; W.-Pieck-OS Lichte; OS Liebstadt; E.-Schneller-OS Löbnitz; Diesterweg-OS Lobenstein; OS W. Wallstab Löderburg; OS Lössau; R.-Niedermeyer-OS Löwenberg; OS Lubmin; G.-Eisler-OS Martinroda; Th.-Neubauer-OS Meiningen; Fr.-Heckert-OS Milkau; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS Naunhof; TOS Neuenhofe; O.-Grotewohl-OS Neukloster; Dr.-Th.-Neubauer-Schule Niederorschel; OS Niedersalza; OS E. Thälmann, EOS W. v. Humboldt, beide Nordhausen; OS W. Seelenbinder Oechsen; OS Osternienburg; Kreisklub Jg. Math. Parchim; OS Dr. Th. Neubauer Pfaffschwende; EOS Rainer Fetscher, Pirna; R.-Luxemburg-OS Plau; Makarenko-OS Plessa; OS 16 Potsdam; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Pritzwalk; OS Quitzöbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz; Pestalozzi-OS Radebeul; OS Radis; Cl.-Zetkin-OS Raschau; OS Rehna; J.-Gagarin-OS Ribnitz; H.-Matern-OS Riesa; J.-C.-OS Röbel; Ziolkowski-OS Roßdorf; Haus d. JP, 34. OS M. Reichpietsch, beide Rostock; W.-Pieck-OS Rotta; Fr.-Weineck-OS Rottleben; OS Rüdnitz; OS Saal; OS II Saalfeld; alpha-Club Sachsendorf; W.-Pieck-OS Sangerhausen; OS Schernberg; M.-Gorki-OS Schkölen; OS H. Danz, OS J. G. Seume, OS K. Marx, EOS G. Dimitroff, alle Schmalkalden; OS Schmölln; E.-Schneller-OS Schöneiche; Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Schönwalde; OS Schule der DSF Schorssow; E.-Thälmann-OS, Martin-May-OS, beide Sebnitz; OS Siedenbollentin; OS A. Hennecke Siersleben; OS J. R. Becher Sondershausen; Kreisklub Jg. Math. OS A. Becker, Spremberg; OS Stadtlengsfeld; OS E. Thälmann Steinbach-Hallenberg; OS Steinsdorf; O.-Grotewohl-OS, W.-Heinze-OS, Haus d. JP, alle Stralsund; OS E. Schneller Stülpe; 12. OS Dr. R. Sorge Suhl; EOS Karl Marx, H.-Riecke-Schule, beide Tangerhütte; OS Teistungen; OS K. Niederkirchner Teterow; Fr.-Mehring-OS Tiefenort; E.-Schneller-OS Töplitz; Pestalozzischule Torgelow; OS W. Pieck Trusetal; Goethe-OS Ueckermünde; H.-Beimler-OS Unterbreizbach; OS J. G. Seume Vacha; OS Viernau; OS Vitte (Hiddensee); Zentrale OS Waldau; J.-Fučik-OS Waldheim; Goetheschule, Fr.-Engels-Schule, beide Waren; OS L. Fürnberg Wegeleben; OS Weilar; Sprachheil-OS Weimar; OS E. Thälmann Weinböhla; OS Weißenborn-Lüderode; OS Wernshausen; OS O. Grotewohl Westerengel; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; alpha-Kollektiv der OS Wingerode; OS W. Lohmann Wittenberg-A.; Schule IV Wittstock; OS H. Heine Wörmlitz; OS H. Beimler, Wolfen; Spezialistenlager Jg. Math. Worbis; OS Th. Müntzer Wulfen; H.-Eisler-OS Wusterhusen; OS Zahna; VEB Kombinat Zentronik BBS, Lutherschule, Fr.-Schiller-OS, alle Zella-Mehlis; Fr.-Schiller-OS Zeulenroda; EOS, 5. OS, Prof. Dr.-W.-Du-Bois-OS, alle Zittau; W.-I.-Lenin-OS Zwenkau; OS Zschornewitz

Entwicklung des alpha-Wettbewerbs (absolut)
* umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr
** ab 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe pro Jahr



Winterfreuden

Gruppenbild

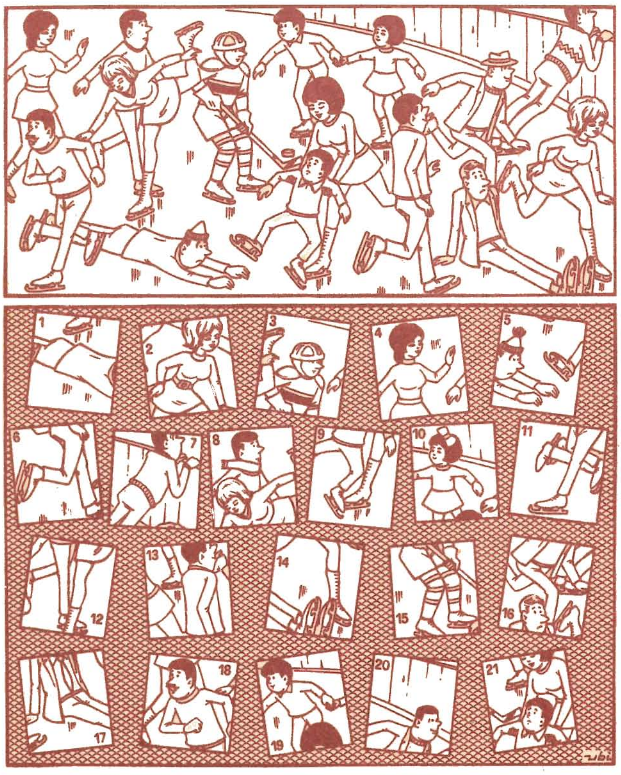
„Keine Bewegung! Ich fotografiere noch einmal!“ Wer hat sich nicht an diese Anweisung gehalten?

Bild 1

Komm mit aufs Eis!

Ein Teil dieser Zeichnung kann aus den 21 numerierten Zeichnungsbausteinen zusammengestellt werden. In manchen Bausteinen fehlen aber bestimmte Einzelheiten, in manchen sind Einzelheiten vorhanden, die auf der großen Zeichnung fehlen. Welche Bausteine sind das, und in welchen Einzelheiten weichen sie von der großen Zeichnung ab?

Bild 2



Da kannst du suchen!

Unter der Zeichnung sieht man fünf Gegenstände. Einer davon ist sehr sorgfältig auf dem hübschen Winterbild versteckt worden. Wer findet ihn?

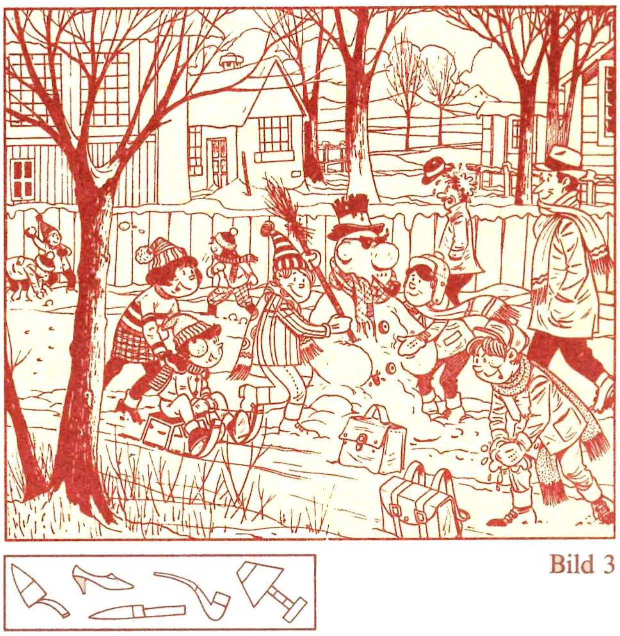


Bild 3

Zwei leuchtende Sterne

Auf Bild 4 sind zahlreiche Sterne ohne Zahl dargestellt. Durchlaufe das Bild so, daß du dabei jeden berührten Stern mit den Zahlen 1 bis 37 markierst! Jeden Stern darfst du nur einmal erreichen, und der nächste Schritt muß immer auf einen benachbarten Stern erfolgen. (Einige Zahlen sind bereits angegeben.)

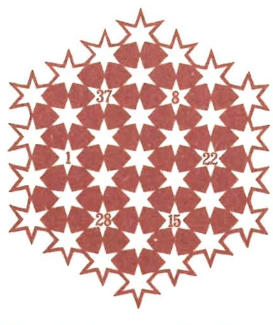


Bild 4

Auf Bild 5 sind in die kleinen Kreise des Sterns die Zahlen 1 bis 12 so einzutragen, daß die Summe aller Zahlen auf jeder Geraden genau 26 beträgt.

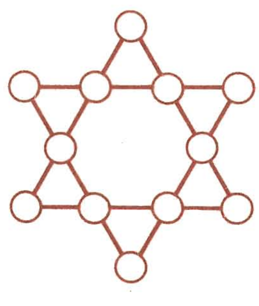


Bild 5