Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

X. Weltfestspiele
der Jugend
und Studenten
Berlin 1973
Hauptstadt
der DDR

Wir sind dabei

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
7. Jahrgang 1973
Preis 1,– M
Sonderpreis für die DDR: 0,50 M
Index 31 059

3

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541 Postscheckkonto: Berlin 132626 Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Deutsche Bundesrepublik und Westberlin erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 50, 54/56, 58, 63, 64); R. Dannenberg, Karl-Marx-Stadt (S. 64); Pionierhaus *Juri Gagarin* (S. 64 2 mal); Eigenfotos von Ch. Meinel, Berlin (S. 51). M. Geisler, W. Hossack, Gera (S. 65), Vignetten: K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 59, S. 63); *Vignetten:* W. Fricke (III./IV. U-Seite); M. Naumann (S. 50, S. 65).
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung:
Staatsdruckerei
der Deutschen Demokratischen Republik,
(Rollenoffsetdruck)
Redaktionsschluß: 26. März 1973

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren der X. Weltfestspiele von Jugendlichen für Jugendliche gestaltet.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Gitterpunkte

Ich möchte mich in meinem Beitrag mit einigen Sätzen über Gitterpunkte beschäftigen. Vorausgesetzt werden die Kenntnisse des Schulstoffs, sowie die Benutzung des Zeichens $[a]$ (ganzer Anteil von α). Weiterhin werde folgendes vereinbart: Z sei die Menge aller ganzen Zahlen, R die Menge aller reellen Zahlen.

Im Text sind Übungsaufgaben angegeben, deren Lösung dem Leser angeraten sei, da sich das Folgende teilweise darauf aufbaut.

Zunächst wollen wir die Definition eines Gitters und der Gitterpunkte im zweidimensionalen Raum E^2 (denn nur mit solchen werden wir uns beschäftigen) angeben. Dabei verstehen wir unter einer ganzzahligen Linearkombination zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einen Vektor $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}=n\mathfrak{a}+m\mathfrak{b}$, wobei n und m ganze Zahlen sind. Zwei Vektoren heißen im E^2 linear unabhängig, wenn sie nicht parallel sind.

Definition: Eine Menge $\mathfrak{G}$ von Vektoren des zweidimensionalen Raumes nennen wir ein (Vektor-) Gitter, wenn $\mathfrak{G}$ folgende Eigenschaft hat: Es existieren zwei linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{G}$ aus allen ganzzahligen Linearkombinationen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ besteht. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ nennen wir eine Basis von $\mathfrak{G}$.

Eine Menge Γ von Punkten des zweidimensionalen Raumes, die man erhält, wenn man an einen Punkt 0 dieses Raumes alle Vektoren eines Vektorgitters abträgt, heißt (Punkt-) Gitter, ihre Elemente Gitterpunkte $\Gamma=\{\mathfrak{P}\in\mathfrak{E}^2 \mid \overline{0\mathfrak{P}}\in\mathfrak{G}\}=\Gamma\{0,\mathfrak{G}\}$. Aus der Definition folgt sofort: $0\in\Gamma$, wegen $0\in\mathfrak{G}$.

1. Läßt sich eine Basis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ eines Gitters mit $|\mathfrak{a}|=|\mathfrak{b}|=1$ und $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=0$ finden, so sind die Gitterpunkte von $\Gamma\{0,\mathfrak{G}\}$ gerade die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung 0 und den Maßvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Mit diesem Fall werden wir uns im 1. Abschnitt beschäftigen.

1.1. Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(a,b)$ und dem Radius r im kartesischen Koordinatensystem. Weiter sei $f(x)$ die Funktion $f(x)=\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ die für alle reellen x mit $a-r\leqq x\leqq a+r$ definiert ist.

$T(r,a,b)$ bezeichne die Anzahl der Gitterpunkte, die innerhalb oder auf der Peripherie dieses Kreises liegen (für diesen Sachverhalt werden wir in Zukunft nur noch „im" benutzen).

Dann gilt:

$$(1)\quad T(r,a,b)=\sum_{a-r\leqq x\leqq a+r,\, x\in Z}([b+f(x)]+[f(x)-b]+1)$$

Beweis: Der Kreis hat die Mittelpunktsgleichung:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Daraus folgt:

$$(y-b)^2=f(x)^2,\quad |y-b|=f(x)$$

Letztere Gleichung gilt wegen $f(x)\geqq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Damit erhalten wir:

$$y=b+f(x) \text{ für } y\geqslant b,$$
$$y=b-f(x) \text{ für } y<b.$$

Bestimmt werde nun die Anzahl der Gitterpunkte, die sowohl auf der Geraden $x=t$ mit $t\in Z$, $a-r\leqq t\leqq a+r$ als auch im Kreis liegen. Es sei $P(t,y)$ ein variabler Punkt auf dieser Geraden. Das größte ganze y, für das P noch im Kreis liegt, ist $[b+f(x)]$, das kleinste ganze y, für das P noch im Kreis liegt, ist $-[-(b-f(x)]$. Die erste Behauptung ist nach der Definition des Zeichens $[a]$ sofort klar. Die zweite werden wir durch eine Fallunterscheidung beweisen.

a) $b-f(x)$ ist ganz. Dann ist das kleinste ganze y, für das P noch im Kreis liegt, gleich $b-f(x)$. Nun ist:
$b-f(x)=[b-f(x)]=-[-(b-f(x))]$.

b) $b-f(x)$ ist nicht ganz. Dann ist das kleinste ganze y, für das P noch im Kreis liegt, gleich $[b-f(x)]+1$. Sei nun zunächst $b-f(x)\geqq 0$. Dann läßt sich $b-f(x)$ darstellen: $b-f(x)=B+\varepsilon$ mit ganzem $B\geqq 0$ und $0<\varepsilon<1$. Es ist:
$[b-f(x)]+1=[B+\varepsilon]+1=B+[\varepsilon]+1$
$B+1=B-[-\varepsilon]=-(-B)-[-\varepsilon]$
$=-[-(B+\varepsilon)]=-[-(b-f(x))]$. Analog läßt sich die Behauptung für $b-f(x)\leqq 0$ beweisen.

Die Anzahl der Gitterpunkte, die gleichzeitig auf der Geraden und im Kreis liegen, ist dann gleich:
$[b+f(x)]-(-[-(b-f(x))])+1$
$=[b+f(x)]+(f(x)-b]+1$

(Es muß eine 1 addiert werden, da bei der bloßen Differenzenbildung ein Gitterpunkt nicht erfaßt wird.) Durch Summation ergibt sich (1).

1.2. Als Spezialfall nehmen wir nun an: $a, b\in Z$. Dann ist: $[b+f(x)]=b+[f(x)]$, $[f(x)-b]=[f(x)]-b$.

Damit vereinfacht sich (1) zu:

$$(2)\quad T(r,a,b)=\sum_{a-r\leqq x\leqq a+r,\ x\in Z}(2[f(x)]+1)$$

Es sei $x'=(x-a)$. Dann ist
$\sqrt{r^2-(x-a)^2}=\sqrt{r^2-x'^2}$.

Wir erhalten aus (2):

$$T(r,a,b)=\sum_{-r\leqq x'\leqq r,\ x'\in Z}(2[\sqrt{r^2-x'^2}]+1)$$

(Wegen $a\in Z$ ist mit $x\in Z$ auch $x'\in Z$.)

Durch einfache Umformung folgt:

$$T(r,a,b)=2[r]+1$$
$$+2\sum_{x'=1}^{[r]}(2[\sqrt{r^2-x'^2}]+1)=$$
$$=4\sum_{x'=0}^{[r]}[\sqrt{r^2-x'^2}]+1.$$

Wie man sieht, ist $T(r,a,b)$ für $a,b\in Z$ von a, b unabhängig.

Zu diesem Ergebnis kämen wir auch durch geometrische Betrachtungen, da ein Punktgitter Γ durch eine Translation um einen Vektor $\mathfrak{c}\in\mathfrak{G}$ in sich selbst übergeht (Beweis?).

Wir geben (2) nun also die Form:

$$(3)\quad T(r)=4\sum_{k=0}^{[r]}[\sqrt{r^2-k^2}]+1$$

Aufgabe 1: Zeige, daß auch

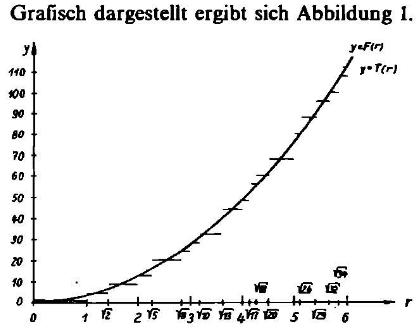
$$(4)\quad T(r)=1+4[r]-4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2+$$
$$+8\sum_{k=1}^{\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]}[\sqrt{r^2-k^2}]$$

gilt. (*Anleitung:* Berechne zunächst die Anzahl der Gitterpunkte in einem dem Kreis einbeschriebenen Quadrat und dann die Anzahl in den restlichen Bereichen des Kreises!)

1.3. Wir werden jetzt für alle reellen $r\leqq 6$ die (stückweise konstante) Funktion $T(r)$ berechnen und zusammen mit den zugehörigen Flächeninhalten $F(r)$ in eine Tabelle eintragen:

r	$T(r)$	$F(r)$	$\frac{T(r)}{F(r)}$
0	1	0	—
1	5	3,14	1,59
$\sqrt{2}$	9	6,6	1,37
2	13	12,57	1,03
$\sqrt{5}$	21	15,9	1,32
$\sqrt{8}$	25	24,63	1,02
3	29	28,27	1,01
$\sqrt{10}$	33	31,37	1,05
$\sqrt{13}$	45	41,17	1,08
4	49	50,27	0,97
$\sqrt{17}$	57	53,59	1,11
$\sqrt{18}$	61	56,51	1,08
$\sqrt{20}$	69	62,8	1,10
5	81	78,5	1,03
$\sqrt{26}$	89	81,8	1,09
$\sqrt{29}$	97	91,0	1,07
$\sqrt{32}$	101	100,5	1,005
$\sqrt{34}$	109	108,2	1,006
6	113	114,5	0,98

Grafisch dargestellt ergibt sich Abbildung 1.



Wie wir sehen, nähern sich beide Kurven immer mehr. Diesen Sachverhalt erfassen wir mathematisch durch:

(5) $$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r)}{F(r)} = 1.$$

Beweis: Um jeden Gitterpunkt im Kreis mit dem Mittelpunkt $M(a, b)$, $a, b \in Z$ dem Radius r und der Fläche $F(r)$ werde ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 so konstruiert, daß jede Quadratseite parallel zu einer Koordinatenachse verläuft und der jeweilige Gitterpunkt mit dem Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrats zusammenfällt. Jedes Quadrat hat dann den Flächeninhalt 1. Die Anzahl der Gitterpunkte des Kreises ist dann gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate. Dann ist:

(6) $$F\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \leqq T(r) \leqq F\left(r+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Denn alle Quadrate liegen innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(a, b)$ und dem Radius $r+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, da die größtmögliche Entfernung eines Punktes eines Quadrats zu dem zugehörigen Gitterpunkt $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.

Analog zeigt man die andere Seite der Ungleichung. Mit der bekannten Formel für die Kreisfläche folgt:

$$\pi\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 \leqq T(r) \leqq \pi\left(r+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

oder nach Division durch $F(r) \neq 0$:

(7) $$\frac{\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{r^2} \leqq \frac{T(r)}{F(r)} \leqq \frac{\left(r+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{r^2}$$

Wegen $\frac{\left(r\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{r^2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{r} + \frac{1}{2r^2}$ folgt aus (7):

$$1-\frac{\sqrt{2}}{r}+\frac{1}{2r^2} \leqq \frac{T(r)}{F(r)} \leqq 1+\frac{\sqrt{2}}{r}+\frac{1}{2r^2}.$$

Da $\lim_{r\to\infty}\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{r}+\frac{1}{2r^2}\right)=1$ ist, folgt:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r)}{F(r)} = 1, \text{ d. h. (5).}$$

1.4. Analoge Betrachtungen wollen wir jetzt bei einer Ellipse durchführen. Wir werden uns dabei auf den Fall beschränken, daß die Ellipse den Mittelpunkt $M(0, 0)$ hat. (Wie beim Kreis werden auch hier gleich die Fälle eines Mittelpunktes $M(c, d)$ mit $c, d \in Z$ erfaßt.) $T(a, b)$ sei die Anzahl der Gitterpunkte, die in einer Ellipse E mit dem Mittelpunkt $M(0, 0)$ und den Halbachsen $a \geqq b$ liegen. (Das „in" hat die gleiche Bedeutung wie beim Kreis.) Es sei $f(x)$ die Funktion $f(x)=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(d^2-x^2)}$ die für alle reellen x mit $a \geqq x \geqq -a$ definiert ist. Dann gilt:

(8) $$T(a, b) = \sum_{-a \leqq x \leqq a,\ x \in Z} (2[f(x)]+1)$$

Aufgabe 2: Beweise (8)! *Anleitung:* Verwende die Mittelpunktsgleichung der Ellipse!

1.5. Analog zum Kreis werde nun um jeden Gitterpunkt in der Ellipse ein Quadrat mit der Fläche 1 konstruiert. $F(a, b)$ sei die Fläche der Ellipse $E(a, b)$ und λ die reelle Zahl mit $\lambda=\frac{6}{b}$. Dann gilt für alle reellen a, b mit $a \geqq b \geqq 8$:

(9) $$\pi \cdot a \cdot b \cdot (1-\lambda)^2 \leqq T(a, b) \leqq \pi \cdot a \cdot b \cdot (1+\lambda)^2.$$

Beweis: Die rechte Ungleichung von (9) ist bewiesen, wenn gezeigt wird, daß alle Quadrate in der Ellipse $E(a(1+\lambda), b(1+\lambda))$ mit dem Mittelpunkt $M(0, 0)$ und den Halbachsen $a(1+\lambda) \geqq b(1+\lambda)$ liegen. Für Quadrate, die einschließlich ihres Randes innerhalb $E(a, b)$ liegen, ist das klar. Sei Q ein Quadrat, das mit der Ellipsenperipherie von $E(a, b)$ einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gemeinsam hat. Die Punkte, die außer P_0 noch in diesem Quadrat liegen, mögen die Koordinaten $(x_0+\alpha), (y_0+\beta)$ haben. Man sieht sofort: $|\alpha| \leqq 1, |\beta| \leqq 1$, dann ist:

$$\frac{(x_0+\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta)^2}{b^2}$$
$$=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+2\left(\frac{x_0\alpha}{a^2}+\frac{y_0\beta}{b^2}\right)$$
$$\leqq 1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\left(\frac{|x_0||\alpha|}{a^2}+\frac{|y_0||\beta|}{b^2}\right)$$
$$\leqq 1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leqq (1+\lambda)^2$$

Wir erhalten also:

$$\frac{(x_0+\alpha)^2}{(a(1+\lambda))^2}+\frac{(y_0+\beta)^2}{(b(1+\lambda))^2} \leqq 1,$$

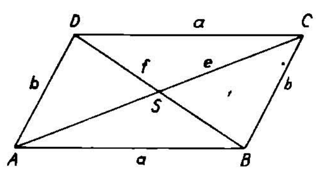
d. h. $Q \subseteqq E(a(1+\lambda), b(1+\lambda))$. Damit ist die rechte Seite von (9) bewiesen.

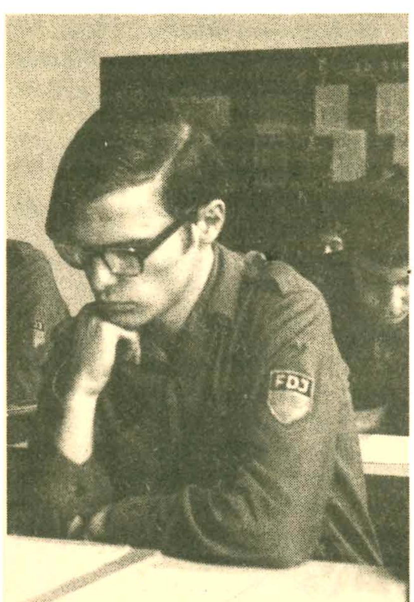
M. Günther

Eine Aufgabe von stud. math.
W. Burmeister

Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden
erfolgreichster Teilnehmer der DDR bei Internationalen Mathematikolympiaden

▲1075▲ Gegeben ist ein Parallelogramm *ABCD* mit den Seitenlängen a und b (dabei sei $a > b$) und den Diagonalen e und f. Es ist zu zeigen, daß dann stets die Ungleichung $(a+b)(a-b) < ef$ gilt.





Wolfgang Burmeister — 1971 zum letzten Mal Teilnehmer der DDR-Olympiade

Eine Aufgabe von
P. Kröger

49. Oberschule Leipzig, Klasse 8; jüngster Teilnehmer und 1. Preisträger der XIV. Internationalen Mathematikolympiade (1972)

▲1076▲ Bei einer Veranstaltung mögen sich $2n$ Personen treffen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl sei. Von diesen Personen seien einige miteinander bekannt, während andere nicht miteinander bekannt seien. Dabei sei stets, wenn A mit B bekannt ist, auch B mit A bekannt. Ferner möge es keine drei Personen geben, von denen jede mit jeder bekannt ist. Endlich mögen nicht alle $2n$ Personen dieselbe Anzahl von Bekannten haben.

Man beweise, daß es dann mindestens eine Person gibt, die weniger als n Bekannte hat.

Hinweis zur Lösung: Der Beweis erfolgt am besten indirekt, d. h., man geht davon aus, daß alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt sind und daß es *keine* Person gibt, die weniger als n Bekannte hat. Daraus kann dann ein Widerspruch zu den Voraussetzungen der Aufgabe hergeleitet werden, womit die Behauptung bewiesen ist.

Pawel Kröger übergibt dem Chefredakteur seine Aufgabe

Über eine Aufgabe der XII. Internationalen Mathematik-Olympiade

Ausgehend von einer Aufgabe der XII. Internationalen Mathematik-Olympiade wollen wir andeuten, wie man sich mit einer Aufgabe, über die Lösung hinausgehend, beschäftigen kann. Interessant sind einerseits verschiedene Lösungswege, die teilweise wesentlich verschiedene Lösungshilfsmittel benutzen, und andererseits andere Probleme (z. B. Verallgemeinerungen), die aus der gestellten Aufgabe gewonnen werden können.
Zunächst wollen wir die erwähnte Aufgabe formulieren:

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Die Menge

$$\mathfrak{M}=\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

läßt sich so in zwei elementefremde nichtleere Teilmengen zerlegen, daß das Produkt aller Elemente der einen Teilmenge gleich dem Produkt aller Elemente der anderen Teilmenge ist.
Wir geben zuerst folgende sehr elegante Lösung:
Angenommen, die Zahl n hat die beschriebene Eigenschaft. Dann teilt jeder Primteiler p eine der Zahlen

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$$

auch noch eine weitere dieser Zahlen. Dabei kann p nur 2, 3 oder 5 sein, und ferner können die Zahlen

$$n+1, n+2, n+3, n+4$$

nur 2 und 3 als Primteiler haben. Unter diesen Zahlen sind genau 2 Zahlen ungerade und 2 gerade. Die beiden ungeraden Zahlen können nur Potenzen der 3 sein. Dieses ist aber nicht möglich, da beide ungeraden Zahlen eine Differenz von 2 haben und die Differenz

$$3^k-3^m,\ k\geqq 1,\ m\geqq 1$$

nie gleich 2 sein kann. Demnach war unsere Annahme falsch und es gibt keine natürliche Zahl n mit der angegebenen Eigenschaft.
Es tut sich doch nun sofort folgendes interessante Problem auf. In der gelösten Aufgabe bestand $\mathfrak{M}$ aus sechs aufeinanderfolgenden Zahlen. Wie sieht die Lösung aus, wenn $\mathfrak{M}$ aus k ($k\geqq 1$ sei eine natürliche Zahl) aufeinanderfolgenden Zahlen besteht? Für welche k gibt es überhaupt Lösungen? Gibt es für kein k eine Lösung?
Wir wollen uns mit diesen Fragen beschäftigen. Zunächst stellen wir eine notwendige Bedingung für eine Lösung mit k aufeinanderfolgenden Zahlen auf. Dazu führen wir folgende Überlegungen durch. Wir nehmen an, es existieren zwei natürliche Zahlen n und k mit der Eigenschaft, daß sich die Menge

$$\mathfrak{M}=\{n,\ n+1,\ \dots,\ n+k-2,\ n+k-1\}$$

in zwei elementefremde Mengeh $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zerlegen läßt, so daß

$$P_{\mathfrak{M}_1}=P_{\mathfrak{M}_2} \qquad (1)$$

ist, wobei $P_{\mathfrak{M}_i}(i=1;2)$ das Produkt der Elemente von $\mathfrak{M}_i$ bedeutet.
Es sei m eine natürliche Zahl aus dem Intervall $[0,\ k-1]$. Wir betrachten die Reste von $P_{\mathfrak{M}_1}$ und $P_{\mathfrak{M}_2}$ beim Teilen durch $(n+m)$. In einem der Produkte $P_{\mathfrak{M}_1}$ und $P_{\mathfrak{M}_2}$ ist $(n+m)$ als Faktor enthalten, da $n+m\in\mathfrak{M}$ ist. Wir können annehmen (ohne Beschränkung der Allgemeinheit), daß

$$n+m\in\mathfrak{M}_2 \qquad (2)$$

ist, d. h.

$$P_{\mathfrak{M}_2}\equiv 0 \bmod (n+m).$$

Wegen (1) muß also auch

$$P_{\mathfrak{M}_1}\equiv 0 \bmod (n+m) \qquad (3)$$

sein, Wegen (2) ist sicher

$$\mathfrak{M}_1\subseteqq\mathfrak{M}_3=\{n,\ n+1,\ \dots,\ n+m-1,\ n+m+1,\ \dots,\ n+k-1\},$$ d. h. wenn

$$P_{\mathfrak{M}_3}=n(n+1)\dots(n+m-1)(n+m+1)\dots(n+k-1)$$ ist, gilt

$$P_{\mathfrak{M}_3}\equiv 0 \bmod P_{\mathfrak{M}_1},$$

und somit folgt aus (3)

$$P_{\mathfrak{M}_3}\equiv 0 \bmod (n+m), \qquad (4)$$

$$n(n+1)\dots(n+m-1)(n+m+1)\dots(n+k-1)\equiv 0 \bmod (n+m).$$

Ist l eine natürliche Zahl aus dem Intervall $[0, k-1]$, so gilt

$$n+l\equiv(l-m) \bmod (n+m).$$

Somit erhalten wir

$$P_{\mathfrak{M}_3}=n\dots(n+m-1)(n+m+1)\dots(n+k-1)\equiv(-m)\dots(-1)\cdot 1\dots(k-m-1) \bmod (n+m),$$ d. h.

$$P_{\mathfrak{M}_3}\equiv(-1)^m\cdot m!\cdot(k-m-1)! \bmod (n+m).$$

Wegen (4) ist

$$(-1)^{m+1}\, m!\,(k-m-1)!\equiv 0 \bmod (n+m),$$

d. h. $$m!(k-m-1)!\equiv 0 \bmod (n+m). \qquad (5)$$

Die Gleichung (5) muß für alle $m=0, 1, \dots, k-1$ erfüllt sein. Mit Hilfe dieser Bedingung (5) können wir ein Verfahren angeben, wie man für ein bestimmtes vorgegebenes k feststellen kann, ob eine Lösung vorliegt oder nicht.
Für $m=0$ ist

$$(k-1)!\equiv 0 \bmod n,$$

d. h. n muß ein Teiler von $(k-1)!$ sein. Wir prüfen, ob alle Teiler n von $(k-1)!$ die Kongruenzen

$$m!(k-m-1)!\equiv 0 \bmod (n+m)$$
$$\text{für } m=1, 2, 3, \dots, k-1$$

erfüllen. Nur wenn ein n alle Kongruenzen erfüllt, kann eine Lösung existieren. In so einem Fall kann man dann an den konkreten Zahlen (n und k sind dann ja bestimmt) untersuchen, ob tatsächlich eine Lösung unseres Problemes vorliegt.
Unser Verfahren gibt uns zwar eine prinzipielle Möglichkeit zur Lösung unseres Problems für konkrete k, aber schon für etwa $k=12$ ist ein erheblicher Rechenaufwand zu realisieren. Zum anderen gibt uns unser Verfahren keine Auskunft, ob überhaupt Lösungen existieren.
Für $k=6$, d. h. für die eingangs gestellte Aufgabe, erhalten wir recht schnell eine Lösung.
Betrachten wir für $m=2$ und $m=3$ die Bedingung (5), so erhalten wir

$$12=2!3!\equiv 0 \bmod (n+2)$$
und $$12=2!3!\equiv 0 \bmod (n+3).$$

Wegen $n\geqq 1$ folgt hieraus als einzige Lösung, wie man sich leicht überlegen kann, $n=1$.
Für $n=1$ ist aber unsere Bedingung (5) für $m=4$ nicht erfüllt, denn es ist

$$24=4!\not\equiv 0 \bmod 5.$$

Auch für $k=1$, 4, 8, 9, 10 ist das gestellte Problem nicht lösbar, wie man mit unserem Verfahren zeigen kann. Außerdem wissen wir, daß keine Lösung existiert, wenn k eine Primzahl ist, denn dann wäre genau eine Zahl von $\mathfrak{M}$ und damit nur eine Zahl in einer der Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ durch diese Primzahl teilbar. Also wissen wir auch, daß für $k=2$, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … keine Lösung existiert. Zusammenfassend ist klar, daß für $k\leqq 12$ unser Problem nicht lösbar ist. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß es nicht nur für $k\leqq 12$ sondern für alle natürlichen Zahlen n und k keine Lösung gibt.
Es sind zwei Ziele für weitere Untersuchungen ins Auge zu fassen:

1. Einen allgemeinen Beweis für unsere Vermutung zu finden.
2. Zu ermitteln, für welche Zahlen n und k unser Problem Lösungen hat. Weiterhin wäre hier interessant, wie man weitere Lösungen finden kann und wie die allgemeine Struktur dieser Lösungen ist.

Beide Ziele sind von uns noch nicht erreicht worden, und wir würden uns freuen, wenn ihr durch neue Ideen zur Lösung beitragen würdet.

H.-D. Gronau/W. Harnau

Es ist nicht das Wissen,
sondern das Lernen,
nicht das Besitzen,
sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn,
sondern das Hinkommen,
was den größten Genuß gewährt.

Wenn ich eine Sache ganz ins Klare gebracht und erschöpft habe, so wende ich mich davon weg, um wieder ins Dunkle zu gehen; so sonderbar ist der nimmersatte Mensch, hat er ein Gebäude vollendet, so ist es nicht, um ruhig darin zu wohnen, sondern um ein anderes anzulegen.

C. F. Gauß

Inversion oder Spiegelung am Kreis

Christoph Meinel stellt sich vor:

Das bin ich gerade zwischen zwei Mathematikknobeleien. Ihr, liebe Leser, kennt das ja selbst: die Beine leicht geschüttelt, die Gehirnzellen gelockert und frisch durchblutet — dann ran an die nächste Aufgabe! Ich bringe gerade das letzte Zwölftel meiner Schulzeit hinter mich. Aber schon jetzt (normalerweise erinnert man sich erst in höherem Alter wohlwollend an die Schulzeit) denke ich ganz gerne an bestimmte Tage im Schulkalender zurück. Zu diesen Tagen gehören vor allen Dingen die jährlichen Mathematikwettstreite auf den verschiedenen Ebenen. Schon manches mathematikolympische Metall konnte ich *errechnen*. So belegte ich seit fünf Jahren in unserem Stadtbezirk Treptow stets einen 1. Platz und im Bezirksmaßstab zweite und dritte Preise. Für dieses Jahr — es ist ja mein letztes Olympiadejahr — habe ich mir noch einmal etwas vorgenommen.

Erfolge sind natürlich ohne Training nicht möglich. So begann ich zuerst in verschiedenen Arbeitsgemeinschaften zu arbeiten. Vor drei Jahren wurde ich dann in die *Mathematische Schülergesellschaft* an der Humboldt-Universität aufgenommen. Hier wurde mir neben den verschiedenen Seminaren und Ferienlehrgängen noch eine persönliche Förderung durch einen Dozenten für Geometrie zuteil. Diese Patenschaft brachte mir Erkenntnisse über das Wesen, die Methoden und Ziele der Mathematik.

Natürlich darf ich in einer solchen Aufzählung meinen ständigen Heimtrainer, die *alpha*, nicht vergessen. Sie weckte mit verschiedenen Beiträgen überhaupt erst meine Begeisterung für die Mathematik.

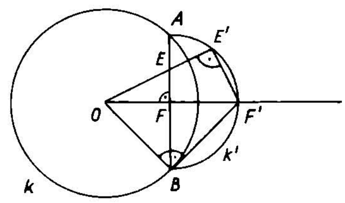
Aufgabe: Konstruiert zu einem beliebigen im Inneren des Kreises k gelegenen Punkt $P \neq 0$ den Spiegelpunkt P'!

Bevor wir diese Aufgabe lösen können — sie wurde übrigens zur DDR-Olympiade von 1968 gestellt — müssen wir die mit *Inversion am Kreis* bezeichnete Abbildung definieren. Es soll folgendes gelten:

(1) P' liege auf dem von 0 ausgehenden Strahl durch P.

(2) Es sei $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. (*)

Bild 1

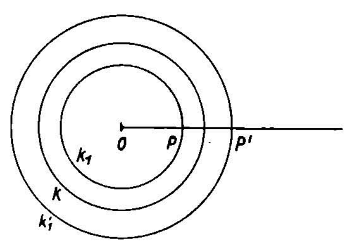


Erinnert ihr euch an eine Formel aus dem Schulunterricht, wenn wir für $\overline{OP'} = c$ und für $\overline{OP} = q$ setzen? Unsere Beziehung (*) hat dann folgende Gestalt:

$$q \cdot c = r^2.$$

Ihr habt sicher den *Satz von Euklid* erkannt. Da dieser aber nur im rechtwinkligen Dreieck gilt, haben wir schon einen wichtigen Hinweis für unsere Lösung. P' ist nämlich wie 0 Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks $OP'T$, wobei T ein Punkt der Kreisperipherie von k sein muß.

Bild 2



Wollen wir unsere Erkenntnisse zusammenfassen:

$\overline{OP'}$ ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $OP'T$ mit der Höhe $\overline{TP}$ und einer Kathete r. Nach dieser Analyse fällt es sicherlich keinem mehr schwer, die Ausgangsaufgabe zu lösen. Wir verbinden O und P und verlängern $\overline{OP}$ über P hinaus. Im Punkt P errichten wir die Senkrechte zu $\overline{OP}$ und erhalten als einen Schnittpunkt mit der Kreisperipherie von k den Punkt T. Nun verbinden wir O und T und errichten zu dieser Strecke $\overline{OT}$ in T die Senkrechte. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Gerade durch O und P ist der gesuchte Bildpunkt P' zu P.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei unserer Konstruktion!

Es gilt z. B.:

$$\overline{P'T}^2 = \overline{OP'}^2 - r^2 = k(P). \qquad (**)$$

Wir haben hiermit eine Beziehung hergeleitet, die als die Potenz des Punktes P bezüglich des Kreises k bezeichnet wird (Schreibweise $k(P)$). Diese Kreispotenz hat einige interessante Eigenschaften. So haben z. B. alle Punkte P, die auf einem Kreis k' um O mit dem Radius r' liegen, die gleiche Potenz $k(P)$ bezüglich des Kreises k, nämlich:

$$k(P) = r'^2 - r^2.$$

Insbesondere gilt:

$-r^2 \leq k(P) < 0$, wenn P im Inneren des Kreises k liegt;

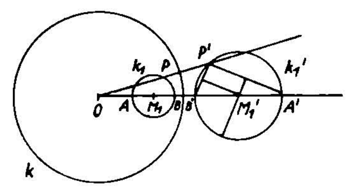
$k(P) = 0$, wenn auf der Peripherie von k liegt;

$k(P) > 0$ für alle Punkte P außerhalb von k.

Da die Inversion mit positiver Potenz mit der Spiegelung an einer Geraden verwandt ist, können wir auch von einer Spiegelung am Kreis sprechen.

Es sei noch erwähnt, daß wir die Beziehung (**) auch noch auf andere Weise hätten herleiten können, nämlich mit Hilfe des Sehnen-Tangentensatzes.

Bild 3



Hier gilt auch:

$$\overline{P'T^2} = \overline{PS} \cdot \overline{PR} = (\overline{OP'} - r)(\overline{OP'} + r) = \overline{OP'}^2 - r^2 = k(P).$$

Mit diesen theoretischen Hilfsmitteln können wir nun interessante Fragestellungen beantworten. War doch bei der Spiegelung an einer Geraden noch jede Gerade wieder in eine Gerade und jeder Kreis wieder in einen Kreis überführt worden, so werden wir bei der Inversion eine Überraschung erleben. Doch probiert selbst!

▲ Spiegelt eine Sehne des Kreises k an k (d. h. spiegelt mindestens drei Punkte der Sehne)!

▲ Zeichnet in den Kreis k um den Punkt P einen Kreis k' mit dem Radius r' und spiegelt ihn an k!

Bevor wir unsere Betrachtungen auswerten wollen, müssen wir uns noch überlegen, warum für die zu spiegelnden Punkte P immer $P \neq 0$ gelten muß. Was passiert mit dem Mittelpunkt O, wenn wir ihn an k spiegeln würden? Wo wäre sein Bildpunkt zu finden?

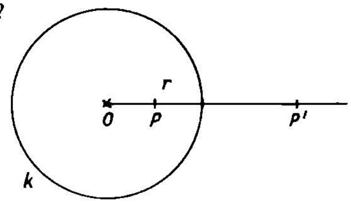
Um das zu erfahren, wenden wir unsere Beziehung

$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ an und setzen für $P = 0$ und erhalten:

$$0 \cdot \overline{OO'} = r^2.$$

Jeder erkennt leicht, daß dieser Ausdruck sinnlos ist und wir schlußfolgern, daß zu O im Endlichen kein Bildpunkt O' existiert. Doch nun zurück zu unseren Aufgaben. Ihr habt die Sehne s am Kreis k gespiegelt und beobachtet, daß die Mittelpunktsehnen in sich selber überführt werden. Sie bleiben also Geraden. Doch was geschieht mit Sehnen, die nicht durch das Inversionszentrum O gehen?

Bild 4



Die Schnittpunkte mit der Peripherie des Kreises k A und B bleiben unverändert, denn $\overline{OA}=r$ und somit

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=r^2$$
$$\overline{OA'}=r.$$

Greifen wir uns nun zwei weitere Punkte E und den Schnittpunkt F des Lotes von O auf $\overline{AB}$ heraus. Konstruiert zu E und F die Bildpunkte E' und F' und verbindet sie! Aus

$$\overline{OE}\cdot\overline{OE'}=\overline{OF}\cdot\overline{OF'}=r^2 \quad \text{folgt}$$
$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}}=\frac{\overline{OF'}}{\overline{OE'}}$$

und wir schlußfolgern, daß $\triangle OEF$ und $\triangle OF'E'$ ähnlich sind, denn sie stimmen nicht nur in zwei Seitenverhältnissen überein, sondern haben auch den Winkel $\sphericalangle E'OF'$ gemeinsam. Da $\triangle OEF$ nach unserer Konstruktion rechtwinklig ist, muß auch $\triangle OF'E'$ rechtwinklig sein.

Wenn ihr nun eure Konstruktion noch einmal anschaut, könnt ihr feststellen, daß über der Hypotenuse $\overline{OF'}$ zwei rechtwinklige Dreiecke zu finden sind. Es sind die Dreiecke $\triangle OE'F'$ und $\triangle OF'B$. Nach dem *Satz des Thales* können wir jetzt einen Kreis durch die Punkte O, B, E', F' und A zeichnen. Da der Punkt E beliebig gewählt war, können wir sagen, daß eine Sehne s, die nicht durch den Mittelpunkt O von k geht, bei der Spiegelung am Kreis in einen Kreis über dem Durchmesser $\overline{OF'}$ übergeht.

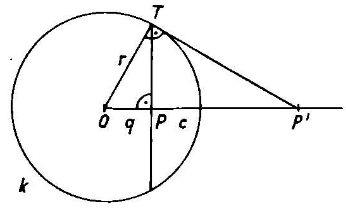
Da die Inversion — wenn wir vom Punkt O absehen wollen — eine ein-eindeutige Abbildung ist, gilt selbstverständlich auch die Umkehrung dieses eben gefundenen Satzes. Jeder durch O gehende Kreis k' wird in die auf dem Durchmesser $\overline{OF'}$ senkrecht stehende Gerade g überführt. Für den Schnittpunkt mit $\overline{OF'}$ gilt:

$$\overline{OF}\cdot\overline{OF'}=r^2 \qquad \text{(siehe Bild 4).}$$

Doch wenden wir uns der zweiten Aufgabe zu. Ihr solltet einen Kreis k_1, der im Inneren des Kreises k liegt, an diesem spiegeln. Von den möglichen Fällen soll hier nur kurz auf zwei eingegangen werden.

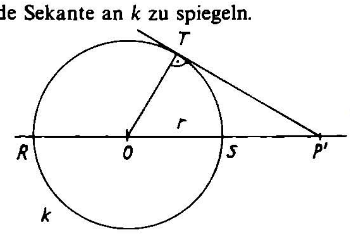
1. Der Kreis k_1 ist zu Kreis k konzentrisch, d. h. sie haben einen gemeinsamen Mittelpunkt O. Wie wir im Abschnitt über die Kreispotenz festgestellt hatten, haben alle Punkte der Kreisperipherie von k_1 die gleiche Potenz bezüglich k. Das heißt aber, daß unser Kreis k_1 durch die Inversion in den zu k und k_1 konzentrischen Kreis k_1' übergeht. Konstruktiv läßt sich der Radius r_1' finden, indem ein Punkt P der Kreisperipherie von k_1 an k gespiegelt wird.

Bild 5



2. Was wird aber aus einem Kreis k_1, der nicht durch das Inversionszentrum O geht? Zur Konstruktion des Spiegelkreises k_1' würde ich euch empfehlen, die Schnittpunkte A und B der Geraden durch O und M_1 mit k_1 und einen Schnittpunkt P der durch O gehende Sekante an k zu spiegeln.

Bild 6



Ihr erhaltet die Punkte A', B' und P', die alle drei auf einem Kreis k_1', dem gesuchten Spiegelkreis liegen. Seinen Mittelpunkt findet ihr in dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken von A', B' und P' (die Mittelsenkrechten aller Sehnen im Kreis gehen durch den Mittelpunkt). Dieser so gefundene Kreis ist der Kreis k_1', der inverse zu k_1. Zum Beweis dieses etwas komplizierteren Problems sei für den fortgeschritteneren Leser darauf hingewiesen, daß die Kreise k_1 und k_1' durch das Ähnlichkeitszentrum O und den Ähnlichkeitskoeffizienten $\frac{r^2}{k(P)}$ verbunden sind.

Beweist nun mit Hilfe dieser Beziehung, daß k_1 und k_1' zueinander invers sind!

Zum Schluß — bevor ich euch noch zwei Aufgaben zum Knobeln anbieten möchte — wollen wir unsere Erkenntnisse über die Inversion zusammenfassen.

Die Inversion ist eine Transformation der Ebene mit unendlich vielen Fixpunkten, die alle auf einem festen Kreis um O liegen. Dabei ist der Mittelpunkt O singulär, d. h. er hat keinen Bildpunkt im Endlichen. Bei einem gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r ist die Abbildung eines beliebigen Punktes $P\neq 0'$ auf P' definiert durch die Beziehung $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$.

▲1▲ Zeige, daß im allgemeinen die Mittelpunkte M_1 und M_1' zweier zueinander inverser Kreise k_1 und k_1' nicht invers sind!

▲2▲ Konstruiere zu zwei gegebenen Kreisen k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 alle Punkte P der Ebenen, die bezüglich beider Kreise die gleiche Kreispotenz haben! (Solche und ähnliche Aufgaben findet ihr mit Lösungen in dem Heft „Übungen für Junge Mathematiker" von *G. Grosche*, das in der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft erschienen ist.) *Ch. Meinel*

Probleme — Probleme

Auf den folgenden drei Seiten stellen wir 15 Jugendfreunde — Teilnehmer der DDR-Olympiade 1972 — vor. Sie stellen Aufgaben für die *alpha*-Leser, bearbeitet von stud. math. *W. Burmeister*, bisher erfolgreichster Teilnehmer an Internationalen Mathematikolympiaden.

Matthias Bär, Freital

Vier Jungen A, B, C und D sprechen je zwei Sätze, von denen je einer wahr und einer falsch ist. Wir wissen, daß A und C Brüder sind, die an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, B und D sind Zwillinge aus einer anderen Familie, die am gleichen Tag geboren sind. Die folgenden Sätze werden an einem Tag gesprochen, an dem weder A noch C Geburtstag haben:

1. a) A ist mein Bruder.
   b) Der 2. ist mein Bruder, wir haben am selben Tag Geburtstag.
2. a) Ich habe heute Geburtstag.
   b) Ich bin der Bruder des 1.
3. a) Ich bin nicht D und habe heute Geburtstag.
   b) Der 2. ist mein Bruder.
4. a) Heute haben der 3. und ich Geburtstag.
   b) Ich habe heute nicht Geburtstag.

Welcher der vier Jungen hat jeweils als 1., 2., 3. und 4. gesprochen? Man gebe alle Möglichkeiten an.

Brigitte Brand, Zella-Mehlis

In einer Ebene sind eine Gerade g und ein nicht zu g gehörender Punkt P gegeben. Außerhalb der Ebene befindet sich ein Punkt Q. Zu bestimmen ist die Lage eines Punktes R auf der Geraden g, so daß der Umfang des Dreiecks PQR möglichst klein wird.

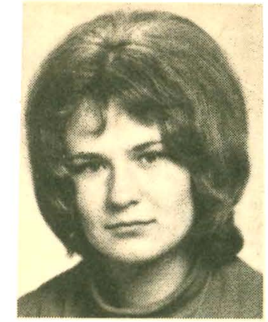
Ulf Brüstel, Altenburg

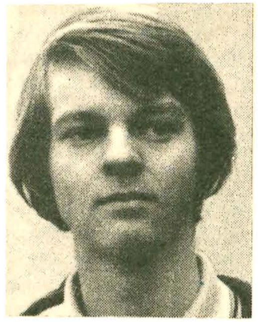
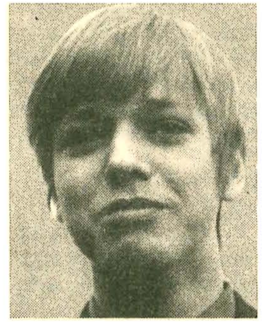
Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen Seiten die Längen a, b, c und dessen Seitenhalbierenden die Länge s_a, s_b, s_c haben. Es ist zu beweisen, daß dann folgende Beziehung gilt:

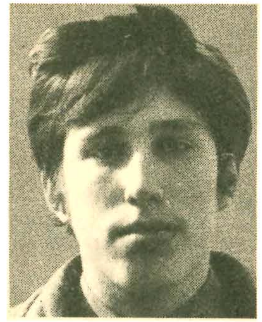
$$s_a^2+s_b^2+s_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

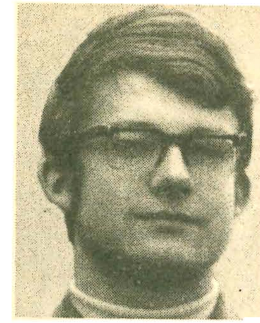
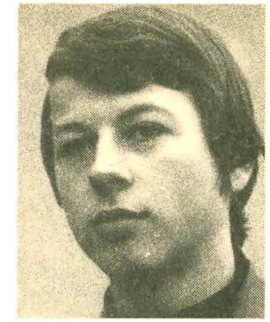
Fortsetzung auf Seite 57

alpha stellt vor:

					
Name	**Sabine Schlorff**	**Ute Winkler**	**Rainer Zerck**	**Bernd Süssmilch**	**Brigitte Brandt**
Bezirk	Neubrandenburg	Potsdam	Rostock	Schwerin	Suhl
Schule, Klasse	EOS „Clara Zetkin“ Neustrelitz, Klasse 11	Spezial-EOS-Kleinmachnow, Klasse 10	EOS „Geschwister Scholl“ Wismar, Klasse 10	BBS Maschinelles Rechnen Schwerin, Klasse 12	EOS „Fr. Schiller“ Zella-Mehlis Klasse 12
Beruf des Vaters	Lehrer	Dipl.-Ing., Dr.-Ing.	Ing. für Maschinenbau	Kaufm. Angestellter	Graveur
Tätigkeit des Vaters	Direktor einer EOS	Wissenschaftl. Abteilungsleiter	Leiter für Ökonomie	Ökonom	Graveur
Beruf der Mutter	Lehrerin	Buchhalterin	Industriekaufmann	Verkäuferin	Stenotypistin
Tätigkeit der Mutter	Lehrerin	Hausfrau	Sachbearbeiterin	Sachbearbeiterin	Maschinenarbeiterin
Berufswunsch	Mathematiker	Mathematiker	Kernphysiker	Mathematiker	Mathematiker
Besondere Interessen	Musik (Musikschule), Sport (Handball), Russisch (im Schulsprachkabinett)	Kunsterziehung, Briefmarken (Motive), Handarbeiten, Literatur	Technik, Philatelie	Tanzmusik, moderne Konzertmusik	Literatur (historische Romane, med. Literatur), Musik (mod. Musik bis Klassik)
Förderung in Mathematik	Bezirksklub, Ferienlager, Korrespondenzzirkel, Wurzelwettbewerb	Mathezirkel, Bezirksklub, regelm. Lösen der Aufgaben in *alpha* und „Wi u. Fo“.	Kreis-, Bezirks- und DDR-Klub Junger Mathematiker	Kreis- und Bezirksklub	im Unterricht und individuelle Förderung durch Lehrer und Korrespondenzzirkel
Erfolge in der Olympiadebewegung	1968 Bezirk 2. Preis 1969 Bezirk 3. Preis 1971 Bezirk 3. Preis	1970 Bezirk 2. Preis 1971 Bezirk 3. Preis 1972 Bezirk 1. Preis 1972 DDR 3. Preis	1970 Bezirk 1. Preis 1971 Bezirk 3. Preis 1971 DDR 1. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1070 Bezirk 1. Preis 1971 Bezirk 1. Preis 1971 DDR 2. Preis 1972 Bezirk 2. Preis	1971 Bezirk 1. Preis 1972 Bezirk 1. Preis
alpha-Leser	*alpha* seit 1968/Wurzel	*alpha* seit 1967, Abzeichen in Gold/Wurzel	*alpha* seit 1967, Abzeichen in Gold/Wurzel	*alpha* seit 1967	*alpha* seit 1969/Wurzel
Auszeichnungen	Herder-Medaille in Silber, Abzeichen für gutes Wissen in Bronze, Silber und Gold	Anerkennung für ausgezeichnete Leistungen in Russisch, Abzeichen für gutes Wissen in Bronze	Abzeichen für gutes Wissen in Bronze und Silber, Lessing-Medaille	Lessing-Medaille in Silber, Abzeichen für gutes Wissen	Abzeichen für gutes Wissen in Gold
Wer weckte Interesse?	Delegierung zur Kreisolymp. Erfolge im Kreisklub, Aufgaben mit einfachen Zuordnungen (welcher Schüler treibt welche Sportart usw.)	Delegierung zur Mathematikolymp., Förderung durch Kreisfachberaterin	Delegierung zur Kreisolymp., auf Grund guter schulischer Leistungen (in Kl. 5) und dem Leiter des Kreisklubs	Mein Bruder weckte Interesse, er war erfolgreicher Oly.-Teilnehmer, jetzt Armee-Student EDV (Vorbildwirkung)	Mathematiklehrerin in Kl. 5, Anreiz vom formalen Rechnen zu selbständigem Durchdenken und Lösen von Aufgaben
Motive	Ich möchte Mathematik studieren in der SU. Es macht Spaß, schwierige Aufgaben zu lösen. Ich freue mich über jedes Erfolgserlebnis.	Der Wunsch, das Mathematikstudium aufzunehmen und in den Olymp. gut abzuschneiden; auf diese Weise kann ich das logische Denken weiterschulen.	Mathematik begeistert mich durch ihre vielfältigen Variationen. Nicht zuletzt ist Mathematik eine gute Vorbereitung auf meinen zukünftigen Beruf.	Interesse und Gefallen an der Logik und Eindeutigkeit der Mathematik	Spaß am Knobeln und die Freude über jede gelöste Aufgabe

					
Name	**Gerd Weißenborn**	**Manfred Pockrandt**	**Matthias Bär**	**Hans-Joachim Hauschild**	**Karin Kühn**
Bezirk	Berlin	Cottbus	Dresden	Erfurt	Frankfurt
Schule, Klasse	EOS „Heinrich Hertz“, Klasse 10	8. OS Cottbus, Klasse 10	EOS Freital, Klasse 9	EOS Humboldt, Erfurt Klasse 11	EOS „Clara Zetkin“, Eisenhüttenstadt, Klasse 10
Beruf des Vaters	Arzt	Maschinenschlosser	Schlosser	Werkzeugmacher, Dipl.-Ing.	Ingenieur
Tätigkeit des Vaters	Arzt	Sicherheitsinspektor	Fräser	Offizier der NVA	Ingenieur
Beruf der Mutter	Ärztin	zahnärztl. Gehilfin	kaufm. Sachbearbeiterin	Näherin	Kindergärtnerin
Tätigkeit der Mutter	Ärztin	Anmeldegehilfin	Industriekaufmann	Hausfrau	z. Z. Rentnerin
Berufswunsch	Mathematiker	Mathematiker	Mathematiker	Mathematiker	Funkoffizier d. Handelsmarine
Besondere Interessen	Musik (Klavierspiel)	Musik	Bau von Modelleisenbahnen, Fahrplangestaltung bei den Massenverkehrsmitteln	Naturwissensch., bes. Physik Philosophie, Schach	Sprachen, Nachrichtentechnik
Förderung in Mathematik	Mathematische Schülergesellschaft-Selbststudium	Kreis- und Bezirksklub Cottbus, Einzelförderung durch Leiter des Kreisklubs	Mathematikklub an der TU Dresden, Korrespondenzzirkel Dresden Spezialförderung durch Fachberater	Mathezirkel an der PH Erfurt, Korrespondenzzirkel Erfurt, fakult. Unterricht an EOS	Bezirksklub, Korrespondenzzirkel, Ferienlehrgänge
Erfolge in der Olympiadebewegung	1971 Bezirk 1. Preis 1972 DDR 2. Preis 1972 XIV. IMO 3. Preis	1969 Bezirk 1. Preis 1970 Bezirk 2. Preis 1971 Bezirk 1. Preis 1972 Bezirk 2. Preis	1970 Bezirk 2. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1969 Bezirk 3. Preis 1971 Bezirk Anerkennung 1972 Bezirk 1. Preis	1970 Bezirk 3. Preis 1972 Bezirk 3. Preis
alpha-Leser	*alpha* seit 1969, Abzeichen in Silber/Wurzelleser	*alpha* seit 1969, Abzeichen in Silber	*alpha*, Abzeichen in Silber	*alpha* seit 1968, Abzeichen in Silber/Wurzel	*alpha* seit 1969
Auszeichnungen	Abzeichen für gutes Wissen in Silber	Abzeichen für gutes Wissen in Bronze und Silber	Abzeichen für gutes Wissen in Bronze	Urkunde für gutes Wissen in der sozialistischen Schule	Herder-Medaille in Silber, Abzeichen für gutes Wissen in Silber
Wer weckte Interesse?	Zeitschrift *alpha* und Olympiadebewegung	Mathematiklehrer unserer Schule, Leiter des Kreisklubs	Ich war immer Bester der Klasse. Ab Klasse 3 nahm ich an Olympiaden teil, Mathezirkel des Hauses JP.	Mein Mathematiklehrer, Olympiadebewegung, Mathematikzirkel	Ich habe immer gern geknobelt und mich an der Schulolympiade, dann an den Kreisolympiaden beteiligt, Spezialförderung.
Motive	Mir macht es Spaß, über mathematische Probleme nachzudenken.	Ich knoble gern und freue mich über die Lösung schwieriger Aufgaben. Mathematik ist für mich die am meisten interessierende Wissenschaft.	Mathematik macht mir Spaß. In der Schule und den Olympiaden möchte ich gute Plätze belegen. Mathematik braucht man in allen Gebieten des Lebens.	Was ich heute lerne, wird mir morgen leichter fallen — ich möchte Mathematiker werden; um gut in den Olympiaden abzuschneiden.	Bei Olympiaden bemerkt man Schwächen, die man beseitigen möchte. M. braucht man in der Freizeit, z. B. bei Nachrichtentechnik. Gute Erfolge beim Lösen von Aufgaben spornen an.

Name	Roland Matthus	Oswald Knoth	Barbara Kluge	Ulf Brüstel	Axel Hintze
Bezirk	Gera	Halle	Karl-Marx-Stadt	Leipzig	Magdeburg
Schule, Klasse	Spezialschule „Carl Zeiss“, Jena, Klasse 12	Spezialklasse Mathematik Universität Halle, Klasse 11	EOS Olbernhau Klasse 10	EOS „Karl Marx“, Altenburg Klasse 10	Spezialklasse der TH Magdeburg, Klasse 11
Beruf des Vaters	Tischler	Landwirt	Lohnbuchhalter	Mathematiklehrer	Gebrauchswerber
Tätigkeit des Vaters	Technologe	Agronom	Lohnbuchhalter	Mathematiklehrer	Gruppenleiter Werbung und Messen
Beruf der Mutter	Verkäuferin	Diplombetriebswirtschaftler	Schneiderin	—	Stenotypistin
Tätigkeit der Mutter	Kassiererin	Kreissekretär VdgB	Schneiderin	Hortnerin	Hausfrau
Berufswunsch	Physiker	Mathematiker	Mathematiker	Elektronik/Physik	Mathematiker
Besondere Interessen	Volleyball (Bez.-Klasse) Physik	Volleyball, theoretische Physik	Sport (Volleyball), Musik (Gitarre), Schulchor, Tanzen	Klavierspiel (seit 1964). Durch die Musikschule wurde ich 3mal zum Bach-Wettbewerb delegiert.	Lilien- und Kakteenzucht, Fotographie
Förderung in Mathematik	Bezirksklub, Mathematik-AG	Bezirksklub Junger Mathem. Leipzig (seit Klasse 6)	Kreisklub, Spezialistenlager im Kreis und Bezirk, Korrespondenzzirkel	Bezirksklub, Mathematiklager, Förderung durch Vater	Kreis- und Bezirkszirkel
Erfolge in der Olympiadebewegung	1970 Bezirk 1. Preis 1971 Bezirk 3. Preis 1972 Bezirk 1. Preis 1972 DDR 3. Preis	1970 Bezirk 4. Preis 1971 Bezirk 1. Preis 1971 DDR 3. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1969 Bezirk 4. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1969 Bezirk 1. Preis 1970 Bezirk 1. Preis 1971 Bezirk 1. Preis 1972 Bezirk 1. Preis	1968 bis 1972 jeweils 1. Preis im Bezirk
alpha-Leser	nein, Wurzel	*alpha* seit 1967, Abzeichen in Silber	*alpha* seit 1968	*alpha* seit 1967, Abzeichen in Gold	*alpha* seit 1967
Auszeichnungen	Abzeichen für gutes Wissen, Anerkennung von der VI. Internationalen Physik-Olymp.	Arthur-Becker-Medaille in Bronze	Abzeichen für gutes Wissen in Bronze und Silber	Herder-Medaille, Abzeichen für gutes Wissen in Bronze und Silber	Lessing-Medaille, Abzeichen für gutes Wissen in Silber
Wer weckte Interesse?	Mein Interesse wurde durch die Schule geweckt. Nach guten Erfolgen bei math. Knobeleien besuchte ich AG's und den Klub.	Erstes Interesse durch ABC-Olympiade und Lösen von Aufgaben	Delegierung durch Mathematiklehrerin zur Kreisolym. Lösen von Aufgaben, erteilt vom Mathematiklehrer.	Mein Vater weckte Interesse, er gab mir schon frühzeitig Knobelaufgaben, später schwierigere.	Eigentlich gar keiner. Ich habe im Kindergarten schon „gerechnet“. In der Spezialklasse ab Kl. 7 gab der Mathematiklehrer Anregungen.
Motive	Mathematik ist eines meiner Hauptsteckenpferde. Bei schwierigen Aufgaben setze ich mich ran und knoble immer mündlich. Bei zahlr. physikalischen Problemen benötige ich Mathematik.	In erster Linie ist es die Begeisterung für Mathematik. Mich faszinieren die Exaktheit, der grundlegend logische Aufbau, die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten.	Knobeln macht mir Spaß. Ich benutze dazu Nachschlagewerke und versuche, anhand ähnlicher Aufgaben zur Lösung der gestellten Aufgabe zu kommen.	Es macht Spaß. Ich schätze Mathematik wegen ihrer Exaktheit und Klarheit. Math. fördert das gesamte Denkvermögen.	Es macht Freude, besonders wenn ich verblüffende Lösungsmöglichkeiten finden kann.

Axel Hinze, Magdeburg

Für den Fall, daß $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen größer als 1 sind, ist folgende Ungleichung zu beweisen:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \geqq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}$$

Barbara Kluge, Olbernhau

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n

$$11^{n+2}+12^{2n+1}$$

durch 133 teilbar ist!

Oswald Knoth, Wurzen

Aufgabe aus einer sowjetischen Aufgabensammlung:

Man beweise die folgenden Ungleichungen, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

a) $\lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n$

b) $\lg(n!) \quad > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

Roland Matthus, Jena

Eine Aufgabe aus unserem Mathematik-Klub:

Gesucht ist die Summe $\sum_{k=0}^{n} (k-1)k\binom{n}{k}$.

Sabine Schlorff, Neubrandenburg

In unserem Bezirksclub ist es zur Tradition geworden, daß sich jeder Bezirksolympiadeteilnehmer eine Aufgabe ausdenkt und einen Lösungsvorschlag dazu erarbeitet. Die besten Eigenaufgaben werden von den Mathematiklehrern ausgewählt, von den Teilnehmern der DDR-Olympiade unseres Bezirkes auf dem Vorbereitungslehrgang noch einmal überarbeitet und zu einer Broschüre zusammengefaßt. Hier möchte ich eine meiner Eigenaufgaben nennen:

Aus dem Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems gehen Strahlen durch die Punkte $[1;c]$, $[2;c]$, ..., $[k;c]$, ... Diese schließen jeweils mit der x-Achse die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ ein. Es sind alle c gesucht, für die gilt:

Man kann zu jedem Winkel, der zwischen zwei Strahlen liegt, einen unter den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ finden, der gleich groß ist.

Bernd Süssmilch, Schwerin

Gegeben sind reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Man bestimme die kleinste Zahl M, für die

$|a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n| \leqq M \max |x_i|$

$(i=1, 2, \ldots, n)$

für beliebige reelle x_i gilt.

Gerd Weißenborn, Berlin

Löse das Gleichungssystem

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x^3+y^3+z^3=1$$

in reellen Zahlen x, y, z!

Ute Winkler, Kleinmachnow

Bei unserer letzten Klubveranstaltung befaßten wir uns unter anderem auch mit folgender Aufgabe:

Man beweise, daß sich jede Funktion mit symmetrischem Definitionsbereich (bezüglich des Nullpunktes) als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen läßt.

Rainer Zerck, Wismar

Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Quadrate der Abstände a und b zu den Geraden mit den Gleichungen $y=\sqrt{3}\,x$ und $y=\frac{x}{3}\sqrt{3}$ gleich einer gegebenen Zahl c ist.

Rückblick auf die XIV. IMO

Jede Mannschaft, die an der XIV. IMO in der VR Polen im vergangenen Jahr teilnahm, überreichte dem Chefredakteur der Schülerzeitschrift *alpha* eine Aufgabe für unsere anspruchsvollen Leser. *Olaf Böhme*, Preisträger der XIV. IMO, jetzt stud. math. an der *Technischen Universität Dresden*, übersetzte und bearbeitete die Aufgaben.

VR Bulgarien

Gesucht sind alle Funktionen $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und für die gilt: $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(xy)$ für alle reellen x und y.

ČSSR

Gegeben sei eine mit natürlichen Zahlen ausgefüllte $31\cdot 31$-Tabelle, in der jede der Zahlen von 1 bis 31 einunddreißigmal vorkommt und die zur Hauptdiagonalen symmetrisch ist. Es ist die Summe der Zahlen in der Hauptdiagonalen gesucht. (Die Hauptdiagonale läuft von links oben nach rechts unten.)

DDR

Man gebe alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen an, für die $a^b+b^c=abc$ gilt.

Großbritannien

Gesucht ist eine Folge (a_n), $n=0, 1, 2, \ldots$, nichtnegativer ganzer Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) $a_0=0$

(2) $a_{n+1}>a_n$ für alle n

(3) Zu jeder positiven ganzen Zahl k existieren Glieder a_i, a_j $(i \neq j)$ der Folge so, daß $k=a_i+a_j$ gilt.

(4) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}=0$.

SFR Jugoslawien

Gegeben sei eine Menge P von $\binom{m}{n}$ Personen, so daß sich beliebige zwei von ihnen stets gegenseitig kennen oder gegenseitig nicht kennen.

Man beweise, daß dann stets eine Teilmenge T von P existiert, die einer der folgenden Bedingungen genügt:

1. T enthält genau $n+1$ Personen, und diese kennen sich paarweise.
2. T enthält genau $m-n+1$ Personen, und diese kennen sich paarweise nicht.

(m, n sind positive ganze Zahlen mit $m>n$.)

Republik Kuba

Es sei p_n die n-te Primzahl. Man beweise, daß dann für $n \geqq 3$ gilt $p_n > 3n-6$.

Mongolische VR

Man beweise: Zu jeder positiven ganzen Zahl n existiert eine n-stellige natürliche Zahl N so, daß N^2 $2n$-stellig ist und an den letzten n-Stellen mit N übereinstimmt.

Niederlande

Man konstruiere einen Rhombus, dessen Flächeninhalt ebensogroß ist wie der eines gegebenen konvexen Vierecks.

Österreich

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen sei gegeben durch

$a_0=A,\ a_1=B,\ a_{k+2}=\frac{a_{k+1}^2+c}{a_k}\ (k\in N)$,

wobei A, B und $\frac{A^2+B^2+C}{AB}$ ganze Zahlen sind.

Man beweise, daß alle Glieder der Folge ganzzahlig sind.

VR Polen

Für jede natürliche Zahl n sei a_n die Quersumme der im Dezimalsystem dargestellten Zahl $(1972)^n$. Man beweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty.$$

SR Rumänien

Gegeben sei eine Überdeckung eines Einheitsquadrates mit kleineren Quadraten, deren Seiten zu denen des Einheitsquadrats parallel (bzw. senkrecht) sind und die sich auch überdecken können. Man beweise, daß man einige der kleineren Quadrate so auswählen kann, daß keine zwei von ihnen einen gemeinsamen Punkt haben und die Summe ihrer Flächeninhalte nicht kleiner als $\frac{1}{4}$ ist.

Schweden

Es sei p eine Primzahl. Man gebe die kleinste natürliche Zahl n an, für die $n!$ durch $(p^2+p)^2$ teilbar ist.

Sowjetunion

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ (n positive ganze Zahl) reelle Zahlen mit

$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \geqq 0$,

$y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n \geqq 0$,

$x_1 \geqq y_1$,

$x_1+x_2 \geqq y_1+y_2$,

$\vdots$

$x_1+x_2+\ldots+x_n=y_1+y_2+\ldots+y_n$.

Man beweise, daß dann für jede positive ganze Zahl k gilt:

$x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k \geqq y_1^k+y_2^k+\ldots+y_n^k$.

Ungarische VR

Es seien n eine positive ganze und x und a reelle Zahlen.

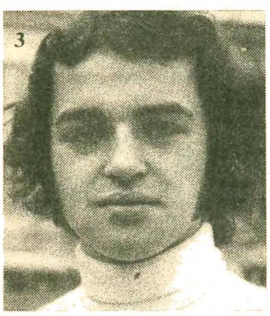
Man beweise, daß dann stets

$(x+a)^n\cdot(x-na) \leqq (x^2+na^2)^{\frac{n+1}{2}}$ gilt.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

DDR-Olympiade

16. 4. bis 18. 4. 1973



Erste Preise wurden vergeben:

Uwe Löbus, EOS Romain Rolland, Dresden (Klasse 9) — Bild 1

Uwe Risch, EOS Geschwister Scholl, Burg (Kl. 9) — Bild 2
(beide Olympiadeklasse 10)

Albrecht Heß, EOS Dresden-Süd — Bild 3
(Olympiadeklasse 11)

Jürgen Roßmann, EOS Fr. Engels, Neubrandenburg — Bild 4

Pawel Kröger, 49. OS Leipzig (Kl. 8) — Bild 5
(beide Olympiadeklasse 12)

Zweite Preise wurden vergeben:

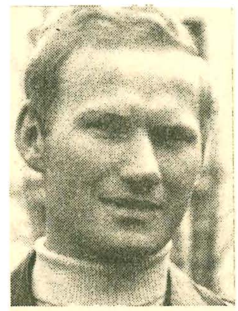
In Olympiadeklasse 10 an: Klaus Schulze, Goethe-OS Wurzen; Kurt Frischmuth, EOS Mühlhausen; Udo Matte, Goethe-EOS, Weißenfels; H.-U. Frömmer, EOS C. Zetkin, Neustrelitz; Jörg Schulze, EOS Luckenwalde (Kl. 9); Siegfried Weiß, OS Neusalza-Spremberg; Klaus Altmann, EOS H. Hertz, Berlin
In Olympiadeklasse 11 an: Helmut Roßmann, A.-Zapototzky-OS, Neubrandenburg (Kl. 10)
In Olympiadeklasse 12 an: Albrecht Böttcher und Elias Wegert, beide Spezialkl. der TH Karl-Marx-Stadt; Holger Steinberg, BBS Schiffselektronik, Rostock

Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Egbert Lindner, BBS VEB Pentacon, Dresden; Bernd Mathiszik, EOS Lessing, Erfurt; Harald Schneider, EOS Geschw. Scholl, Löbau; Eckard Wildgrube, EOS L. Cranach, Wittenberg; Volker Ihde, Goethe-EOS, Schwerin; Alfred Pietrzik, OS II Gadebusch (Kl. 8); Peter Reuter, OS Kreischa (Kl. 9); Uwe Quasthoff, EOS Leibniz, Schkeuditz; Horst Kohlschmidt, EOS R. Rolland, Dresden; Michael Funke, EOS Karl Marx, Altenburg; Renate Molgedey, EOS H. Hertz, Berlin
In Olympiadeklasse 11 an: Bernd Zaddach, A. Becker-OS Cottbus (Kl. 10); K.-D. Wirth, EOS H. Hertz, Berlin; Ralph Lehmann, EOS Diesterweg, Strausberg (Kl. 10); Konrad Engel, Herder-EOS, Rostock; Jörg Bergmann, Spezialsch. f. elektronische Industrie M.-A.-Nexö, Dresden (Kl. 10); Ulf Brüstel, EOS Karl Marx, Altenburg
In Olympiadeklasse 12 an: Guntram Pausch, EOS W. Pieck Leipzig; Borna; Ingo Bandlow, ABF Walter Ulbricht, Halle; Reinhard Schuster, EOS Helmholtz, Leipzig (Kl. 11); Lothar Wenzel, EOS F. List, Berlin; Oswald Knoth, Spezialklasse der Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg

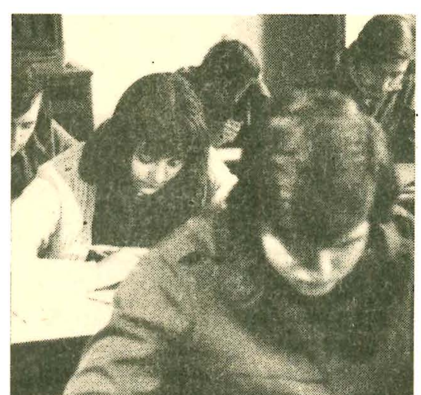
Zwei Diplome wurden für die ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe vergeben. 30 Schüler erhielten Anerkennungsurkunden für gute Leistungen.

Aus dem Rahmenprogramm der OJM: Vortrag von Prof. Dr. F. Kuhnert: Über moderne Aspekte der *Numerischen Mathematik;* Forum zu den X. Weltfestspielen, Lichtbildervortrag: Auf den Spuren des Copernicus; Besuch der Hauptstadt der DDR




Angela Rohrbeck, EOS Franzburg, Teilnehmerin am *alpha*-Wettbewerb seit Gründung der Zeitschrift. Sie gehört zu den erfolgreichsten Teilnehmerinnen der OJM.

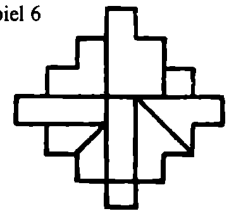
Wettbewerbsatmosphäre



Die Losung der XII. OJM:

Lernt und arbeitet für unsere Republik – vorwärts zu den X. Weltfestspielen!

Spiel 6



Spiel 7a: Man halte den Bogen mit der beschrifteten Seite nach unten, so daß beim Betrachten zu sehen ist:

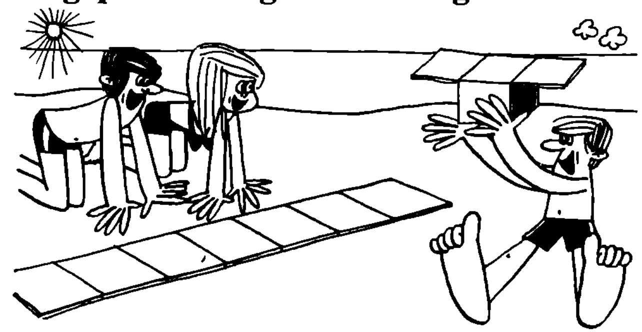
2356
1874

Man falte nun die rechte Hälfte des Bogens nach links, so daß die 5 über der 2, die 6 über der 3, die 4 über der 1 und die 7 über der 8 liegt. Die untere Hälfte falte man nun nach oben, so daß die 4 über der 5 und die 7 über der 6 liegt. Anschließend falte man 4 und 5 zwischen 6 und 3 und falte 1 und 2 unter das Paket. Die Lösung der Figuren 7 und 8 sei dem Leser selbst überlassen.

Zusammenstellung dieses Ferienheftes:
Studienrat J. Lehmann,
Verd. Lehrer des Volkes, Leipzig

12

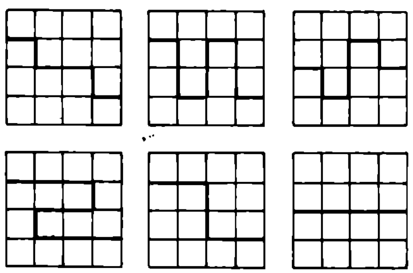
aufgepaßt–nachgedacht–mitgemacht



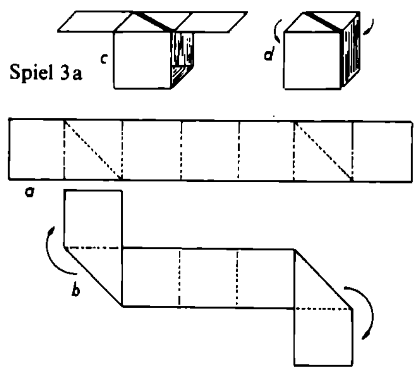
alpha Spiel-Magazin

Lösungen

Spiel 1: Es gibt 6 Möglichkeiten.



Spiel 3a



10

Spiel 2

Falte das Zahlenquadrat so, daß nur die vier Zweien sichtbar sind!

2	2
2	2

3

5	2	1	3
1			2
2			1
3	1	2	5

Spiel 7

a) Es gibt 40 Möglichkeiten, diese Karte an den eingezeichneten Linien so zu falten, daß ein quadratisches Paket entsteht, welches an oberster Stelle die „1“ zeigt. Der Bogen ist so zu falten, daß die Quadrate in ihrer natürlichen Reihenfolge zu liegen kommen. Die Figur *b* wird wesentlich schwerer zu lösen sein!

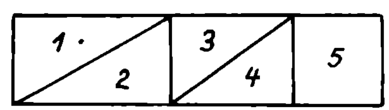
1	8	7	4
2	3	6	5

1	8	2	7
4	5	3	6

8

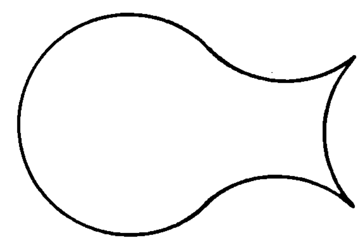
Spiel 4

a) Die vorliegenden 5 Flächen sind so zusammenzustellen, daß ein Quadrat entsteht.



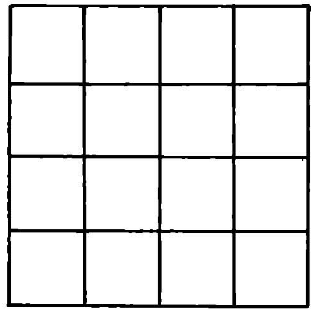
5

b) Durch drei gerade Schnitte ist die Figur so zu zerschneiden, daß daraus zwei Quadrate zusammengestellt werden können, die der gegebenen Figur flächengleich sind.



Spiel 1

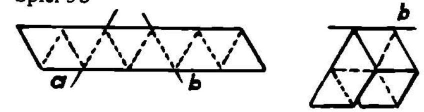
Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein 4×4 Quadrat in zwei Hälften zu zerlegen, welche von gleicher Größe und gleicher Figur sind, d. h. die beiden Hälften müssen jeweils deckungsgleich sein.



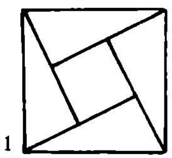
2

11

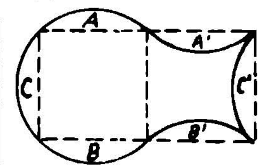
Spiel 3b



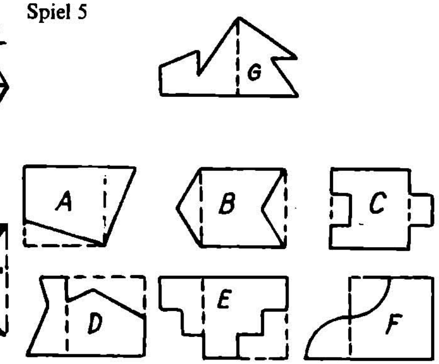
Spiel 4a



Spiel 4b



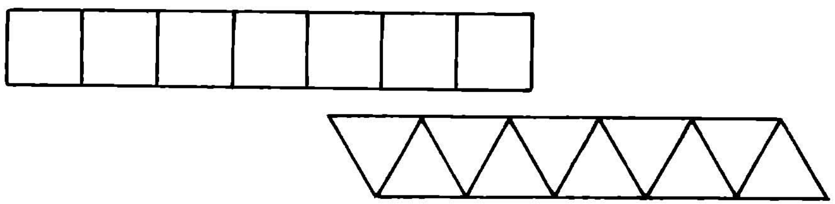
Spiel 5



Spiel 3

a) Gegeben sei ein Streifen von 2 cm Breite und 14 cm Länge. Falte aus ihm einen Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm.

b) Falte den Streifen, bestehend aus 10 gleichseitigen Dreiecken, so, daß ein Sechseck entsteht!



4

Spiel 8

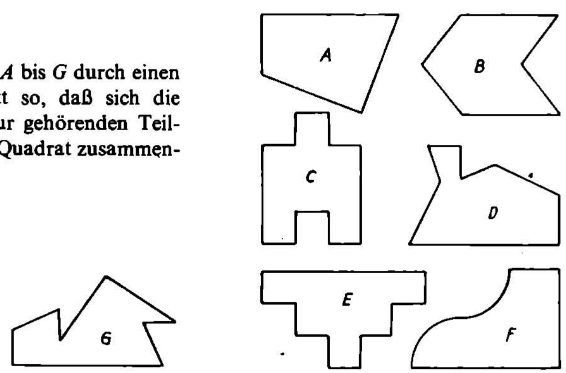
Falte das Stück Papier so, daß die Buchstaben in der Reihenfolge WOLFGANG übereinanderliegen!

O	N	G	A
W	G	F	L

9

Spiel 5

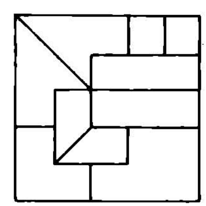
Zerschneide die Figuren *A* bis *G* durch einen einzigen geraden Schnitt so, daß sich die beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einem Quadrat zusammensetzen lassen!

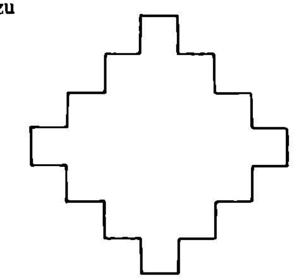


6

Spiel 6

Das abgebildete Quadrat ist in 10 Teile aufgeteilt. Aus diesen Teilen ist eine Fläche zu bilden, die die abgebildete Form hat.

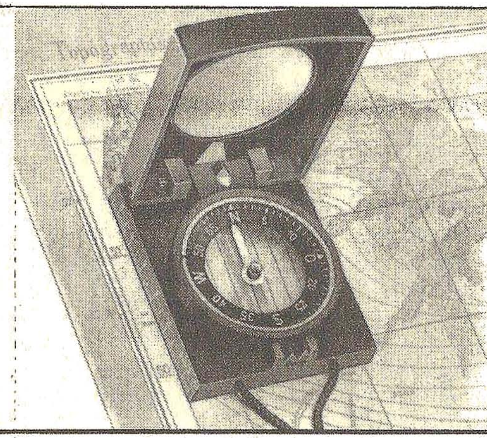




7

VEB FREIBERGER PRÄZISIONSMECHANIK

DDR 92 Freiberg



Mit Karte und Kompaß

Marschkompaß F 70

Kurvimeter 62

mit Nullstellungs-Drucktaste (Preis 11,60 M, Masse 20 g)

Mit dem *Kurvimeter 62* werden rasch und sicher Entfernungen auf Karten und Plänen gemessen. Seine Handhabung ist einfach: Durch kurzen Druck auf den Knopf an dem oberen Griffende wird der Zeiger auf Null gestellt und dann das Laufrädchen entlang der zu messenden Linie von beliebiger Krümmung geführt. Auf einer doppelseitigen Teilung kann unter dem Zeiger die dem Kartenmaßstab entsprechende Entfernung abgelesen werden.

Glasklare, unzerbrechliche Celluloidscheiben schützen die verschieden gefärbten Teilungen für folgende Maßstäbe:

1 : 25000	1 : 100000
1 : 40000	1 : 200000
1 : 50000	1 : 300000.

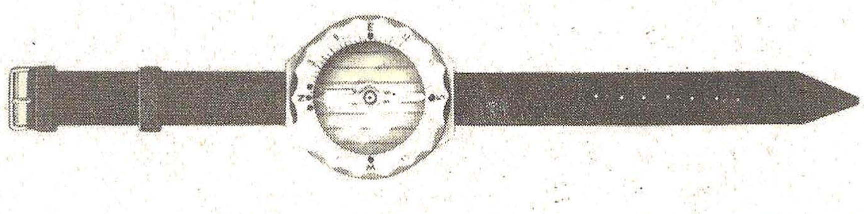
Das Kurvimeter wird in einer gefälligen Plasthülle geliefert.

10

rosionsfestem Kunststoff. Das Magnetsystem ist in der Fluidkapsel aus unzerbrechlichem, glasklarem Kunststoff vollkommen geschützt gegen Staub, Wasser und dergl. untergebracht. Der Boden der Fluidkapsel ist mit einer Schar paralleler Richtungslinien versehen, mit deren Hilfe aus der Karte Marschrichtungszahlen entnommen werden können, ohne die Karte vorher orientieren zu müssen. Da hierzu der Kompaß nach Art eines Kartenwinkelmessers benutzt und das Magnetsystem nicht verwendet wird, scheiden magnetische Umwelteinflüsse als Fehlerquelle völlig aus. Streckenlängen auf der Karte werden mit der Millimeterteilung der Anlegekante gemessen und mit Hilfe des Maßstabes der verwendeten Karte umgerechnet.

Die als Einstellmarke dienenden starken parallelen Richtungsstriche auf dem Kapselboden, das Nordende der Magnetnadel sowie Kimme und Korn der Visiereinrichtung sind für Zielungen bei Dunkelheit mit Leuchtfarbe ausgelegt worden.

3



8

Aufsuchen des Marschzieles im Gelände

Beispiel: Entfernung 1 500 m, Marschrichtungszahl 20

Stelle die vorgegebene Marschrichtungszahl 20 durch Drehen des Teilungsringes auf die Spitze des Leuchtzeigers (Korn) ein, kippe den Kompaßdeckel mit Spiegel so, daß beim Visieren über Kimme und Korn Strichteilung und Magnetnadel im Spiegel sichtbar werden. Stecke den Daumen durch die Handschlaufe und halte den Kompaß in Augenhöhe. Drehe dich mit dem Kompaß so, daß das Nordende der Magnetnadel (Nadelhälfte mit Leuchtspitze) genau zwischen den beiden parallelen Leuchtstrichen auf dem Kompaßboden einspielt. Visiere bei einspielender Magnetnadel über Kimme und Korn einen markanten Orientierungspunkt im Gelände an (Baum, Strauch, Haus oder dergl.). Der anvisierte Punkt liegt in deiner Marschrichtung. Erreiche das Marschziel in einer Entfernung von 1 500 m (Schrittmaß beachten).

Eine dem Kompaß beigegebene Beschreibung legt jetzt dar, wie man die Marschrichtung im Gelände festlegen kann, eine Marschrichtung in die Karte übertragen kann, ein im Gelände gegebenes Marschziel auf der Karte aufsuchen kann.

5

Anwendung

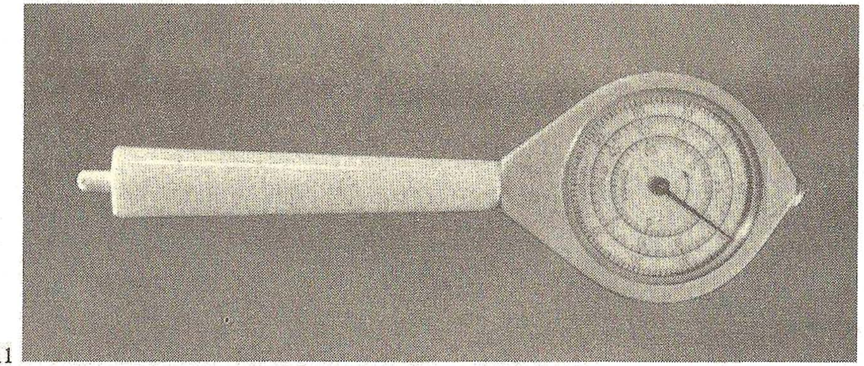
Der *Marschkompaß F 70* mit Fluidkapsel dient zur Orientierung im Gelände. Er ermöglicht das Übertragen von Richtungen aus der Karte ins Gelände und umgekehrt. Für die Entnahme von Marschrichtungen aus der Karte oder zum Übertragen im Gelände gemessener Richtungen in die Karte ist kein Orientieren der Karte notwendig.

Technische Daten

Teilkreisdurchmesser	45 mm
Skalenwert der Kreisteilung	1-00 (5°)
Genauigkeit der Richtungsangabe	±0-25 (±1,5°)
Einschwingdauer der Magnetnadel	≦7 s
Teilungslänge der Anlegekante	55 mm
Skalenwert der Anlegekante	1 mm
Funktionsfähigkeit im Temperaturbereich	−30° bis +50° C
Abmessungen (Maße in mm)	72×55×20
Masse	95 g
Preis	18,75 M

Beschreibung

Sowohl das Gehäuse als auch der den Spiegel enthaltende Kompaßdeckel bestehen aus kor- 2



11

Handhabung

Entnahme von Marschrichtungszahlen aus der Karte

Das Orientieren der Karte ist dazu nicht erforderlich. Magnetische Gegenstände (Taschenmesser und dergl.) beeinflussen die Messung nicht. Lege den Kompaß mit der Millimeterteilung der Anlegekante so an die Verbindungslinie zwischen Ausgangspunkt und Zielpunkt an, daß der Nullpunkt der Längsteilung mit dem Ausgangspunkt übereinstimmt. Ist die Entfernung zwischen Ablaufpunkt und Zielpunkt größer als die Länge der Anlegekante, dann ziehe mit weichem Bleistift eine Hilfslinie zwischen Ablaufpunkt und Marschziel.

Halte nun den Kompaß fest und drehe den Teilring so, daß der Kreisteilungs-Nullpunkt (Nordmarke „N“) nach Karte — Nord zeigt und die Richtungslinie auf dem Boden der Fluidkapsel parallel zu den Kartenmeridianen verlaufen. Lies an der Spitze des Leuchtzeigers (am Korn der Visiereinrichtung) auf dem Teilkreis deine Marschrichtungszahl ab.

4

9

Daten

Teilringdurchmesser	37 mm
Skalenwert der Kreisteilung (rechtsläufig)	5°
Einschwingdauer der Magnetnadel	≦7 s
Mittlere Einspielunsicherheit der Magnetnadel	±0,5°
Funktionsfähigkeit im Temperaturbereich	−30° bis +50°
Abmessungen	∅ 60 mm×21 mm hoch
Masse	45 g
Preis	15,80 M

Anlegen einer Routenskizze

Die Routenskizze enthält eine annähernd maßstäbliche Aneinanderreihung von Marschrichtungszahlen und Streckenlängen zwischen je zwei Knickpunkten einer Marschroute. An jede Seite des auf diese Weise entstehenden gebrochenen Linienzuges wird die Marschrichtungszahl in Grad oder Strich und die Streckenlänge in Meter oder im Schrittmaß angeschrieben. Die Knickpunkte werden mit den als Richtungspunkte verwendeten markanten Geländezielen bezeichnet.

Weitere Themen des Anleitungsheftes: Messen von Entfernungen in der Karte, Messen von Entfernungen im Gelände, Bestimmen der Uhrzeit mit dem Kompaß, Berücksichtigung der magnetischen Abweichung u. a.

6

Der Armband-Fluidkompaß Sport 10

ist ein dauernd funktionsbereites, nicht erschütterungsempfindliches und beim Gebrauch praktisch unverlierbares Orientierungsmittel, insbesondere für den Sporttaucher.

Der Kompaß wird am linken Handgelenk so getragen, daß der Richtungsstrich auf dem feststehenden Gehäuseunterteil bei angewinkeltem linken Arm vom Körper weg in Blickrichtung zeigt.

7 Für die Orientierung ist ebenso wie beim Fluidkompaß „Sport 3“ der Teilring am Richtungsstrich auf eine vorgegebene Richtung einzustellen und das rote Nordende der Magnetnadel parallel zu dem Doppel-Leuchtstrich auf dem Kapselboden zu orientieren. Der feste Richtungsstrich auf dem Gehäuseunterteil zeigt dann in die vorgegebene Marsch- bzw. Schwimmrichtung.

Gegenüber dem bisherigen Armband-Fluidkompaß zeichnet sich der *Sport 10* durch folgende Eigenschaften aus:

Fluidkapsel, Teilring, Gehäuse und Armband bestehen aus korrosions- und feuchtigkeitsbeständigem Material.

Pioniere des alpha-Wettbewerbs

Fakten — Fakten

Der Kreis Schmalkalden ist der aktivste und vorbildlichste Kreis der DDR im *alpha*-Wettbewerb. In den Jahren 1968 bis 1972 gingen aus diesem Kreis etwa 12000 Lösungen in der Redaktion *alpha* ein:

1968: 50 Teilnehmer aus 14 Schulen (1524 Einsendungen) erhielten Urkunden;

1969: 39 Urkunden — 16 Schulen — 1374 Einsendungen;

1970: 238 Urkunden (davon 27 Abzeichen in Gold) — 16 Schulen — 2500 Einsendungen;

1971: 411 Teilnehmer (davon 36 Abzeichen in Gold) — 14 Schulen — 4000 Einsendungen;

1972: 228 Urkunden (46 Abzeichen in Gold, davon 13 mit drei- oder fünfjähriger Teilnahme) — 2600 Einsendungen.

Erfolgreichste Teilnehmer

Von den 56 Teilnehmern, die 1972 das *alpha*-Abzeichen in Gold für fünfjährige Teilnahme erhielten, stammen 12 aus dem Kreis Schmalkalden (d. s. 21 %). Weiterhin erhielten zwei Schüler das Abzeichen in Gold für vierjährige und 33 Schüler das Abzeichen in Gold für dreijährige Teilnahme.

Ehrentafel der aktivsten Lehrer

Werner Gehb, OS Fambach (Kreisfachberater Mathematik); Erwin Manske, Heinz Gotthelf, Siegmund Hellmann, alle OS Steinbach-Hallenberg; Roland Richter, OS J. G. Seume, Schmalkalden; Herbert Avemarg, OS Mittelstille; Helmut Kiehnapfel, OS Floh; Karl Koch, OS am Siechenrasen, Schmalkalden.

Erfolgreichste Schule des Kreises Schmalkalden

An der *Ernst-Thälmann-OS* in Steinbach-Hallenberg erhielten allein im Wettbewerbsjahr 1971/72 22 Schüler das *alpha*-Abzeichen in Gold und 74 Schüler das Abzeichen in Silber. Seit 1968 wurde das *alpha*-Abzeichen schon 402 mal an Schüler (davon 41 mal in Gold) verliehen.

Als Anerkennung für die vorbildlichen Leistungen besuchte der Chefredakteur der Schülerzeitschrift *alpha* unseren Jugendklub und hielt einen Lichtbildervortrag: „Auf den Spuren des Copernicus" (Erlebnisbericht von der XIV. IMO).

An unserer Schule wird bereits seit über zehn Jahren eine aktive, planmäßige außerunterrichtliche mathematische Betätigung durchgeführt. Noch vor Gründung der *alpha* gab es bei uns *Aufgaben des Monats*. Sie dienten der Vorbereitung auf Olympiaden. Durch *alpha* konnte ein noch viel größerer Teil unserer Schüler für die mathematische Arbeit interessiert werden. Die Lösung von Wettbewerbsaufgaben ist schon für zahlreiche Schüler unserer Schule zu einer Gewohnheit geworden. Jedes Jahr gehen vier dicke Pakete mit Lösungen direkt an *alpha*. Insgesamt sandten wir etwa 5000 Lösungen in fünf Jahren ein. In den Klassen gibt es Verantwortliche für den *alpha*-Wettbewerb. Sie sind gleichzeitig Fachhelfer für Mathematik, die im Zusammenwirken mit dem Fachlehrer ihrer Klasse folgende Aufgaben übernommen haben:

Anfertigung von Teilnehmerlisten — wöchentliches Einsammeln der Lösungen und ihre Registrierung — Informieren des Fachlehrers über den Stand der Beteiligung am Wettbewerb — Einwirken auf die Mitschüler, die Lösungen gewissenhaft und termingerecht einzusenden — Registrierung der Antwortkarten — Mithilfe beim Abschluß des Wettbewerbs.

Immer mehr Schüler gehen dazu über, gleich beim Erscheinen einer neuen *alpha* mit der Lösung der Aufgaben zu beginnen und zu versuchen, alle vorgestellten Probleme (pro Klassenstufe) zu lösen. Die in *alpha* gestellten Aufgaben empfinden wir als gut. Eine große Hilfe sind die ausführlichen Lösungen. Eine gute Hilfe beim Knacken der *alpha*-Nüsse sind unsere Arbeitsgemeinschaften. Wöchentlich wird einmal trainiert, nach einem ganz bestimmten Plan, der neben lehrplangerechten Stoffeinheiten auch andere enthält, z. B. in Klasse 7: Kombinatorik, Permutation.

In den Zusammenkünften tauschen wir auch die Meinung über die Wettbewerbsaufgaben aus. Unser AG-Leiter gibt Hinweise, welche Aufgaben höherer Klassenstufen wir schon lösen könnten. Im Vordergrund unserer Tätigkeit in der AG steht aber die Befähigung zur Lösung von Aufgaben nach Inhalt und Form, wie sie bei Mathematik-Olympiaden gefordert werden. Bei Konstruktionen lernen lernen wir z. B., daß zu ihrer vollständigen Lösung eine Vorüberlegung, die Konstruktion, die Konstruktionsbeschreibung, ein Beweis und eine Lösungsdiskussion gehören. Eine Aufgabe wollen wir den Lesern stellen. Sie war besonders geeignet, die genannten Schritte zu erarbeiten:

Aufgabe: Konstruiere ein Dreieck ABC aus $s_a = 4{,}8$ cm $s_b = 3{,}3$ cm und $h_c = 3{,}0$ cm!

Höhepunkt und Bewährung der Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb und der Arbeit der AG's sind die Olympiaden, bei denen unsere Schule schon recht beachtliche Erfolge erzielen konnte.

Einen großen Anteil an diesen Erfolgen haben die Mathematiklehrer. Dafür möchten wir ihnen danken. Mit noch höheren Leistungen in der Schule und zu unserem späteren beruflichen Leben wollen wir unser Bestes zum Wohle und zur Festigung unseres sozialistischen Staates geben.

AG Mathematik, OS Steinbach-Hallenberg

Durch meine Schwester lernte ich *alpha* kennen. In der 6. Klasse bekam ich 52 Antwortkarten für richtig gelöste Aufgaben. Zweimal schon erhielt ich das *alpha*-Abzeichen in Gold. Mathematik wurde durch *alpha* zur Freizeitbeschäftigung neben meinem intensiven Training für den Skilanglauf... *Gerlinde Koch, im Bild links, OS „Wilhelm Pieck", Trusetal (Kl. 8)*

Mein schönstes Erlebnis: Teilnahme an der DDR-Olympiade 1972. Daß mir diese Erfolge nicht geschenkt worden sind, ist selbstverständlich. Große Hilfe erhielt ich durch die Lehrer, die aktive Teilnahme in Arbeitsgemeinschaften. *alpha* ist mein ständiger Freund und Helfer seit ihrem Erscheinen.

Beate Recknagel, im Bild rechts, EOS Schmalkalden (Kl. 11)

Ein Mathematikzentrum in Aktion

PIONIERHAUS "JURI GAGARIN"

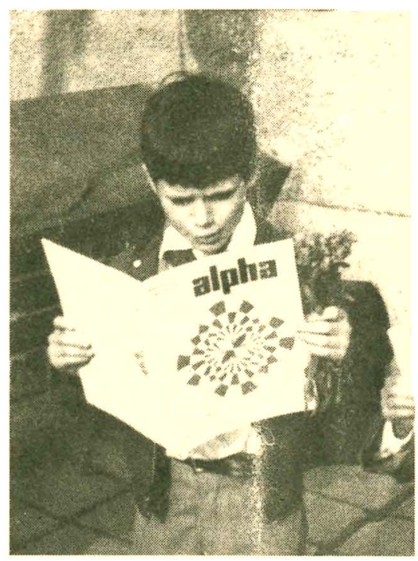
Karl-Marx-Stadt

Junge Mathematiker konstruieren Figuren, die man in einem Zuge nachziehen kann.

Seit zehn Jahren besteht in unserem Pionierhaus das *Mathematikzentrum*. Viele tausend Pioniere haben seitdem in Zirkeln, bei Veranstaltungen und Pionierfesten die Mathematik noch besser kennengelernt. Um euch und euren Klubs einige Anregungen zu geben, wollen wir in *alpha* kurz über uns berichten:

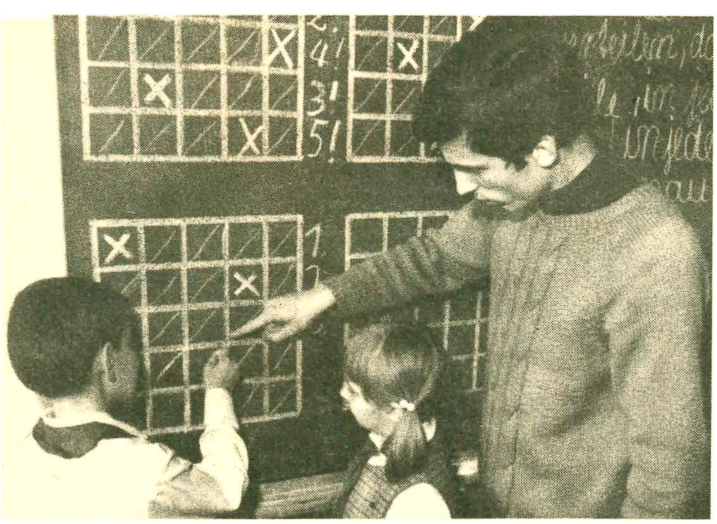
- In unseren Zirkeln der Klassenstufen 3 bis 10 arbeiten etwa 160 der besten *Jungen Mathematiker* unserer Stadt. Für jede Klassenstufe gibt es zwei Zirkel. Diese treffen sich 14täglich (bis Kl. 6) bzw. wöchentlich (ab Kl. 7) für 90 Minuten. Die Zirkelleiter sind Studenten der Technischen Hochschule, Fachrichtung *Lehrer für Mathematik*. Unser Jahresprogramm stellen wir entsprechend den Lehrplananforderungen und den Erfahrungen bei den Kreisolympiaden zusammen. Dabei werden Themen über längere Zeit behandelt, wie Einführung in das Beweisen, Konstruktionsaufgaben.
- Unsere Zirkelmitglieder erringen jährlich etwa die Hälfte der Medaillen bei den Kreisolympiaden. Natürlich wollen wir uns noch verbessern.
- Ab Klasse 5 bekommt jeder die *alpha* zum Jahrespreis von 1,— M. Der *alpha*-Wettbewerb ist ständige Hausaufgabe und lockert die systematische Arbeit auf. Etwa 15 Mitglieder besitzen das *alpha*-Abzeichen in Gold.
- Die Erfolge und die Entwicklung eines jeden Mitgliedes werden jährlich auf einer Karteikarte registriert.
- Zur gesellschaftlichen Arbeit gehören die Gestaltung des Schaukastens, die Diskussion aktueller Ereignisse, Spendenaktionen für Vietnam u. a.
- Zur Zeit bauen wir ein Kabinett für programmierten Unterricht.
- In jedem Jahr führen wir eine ABC-Stadtolympiade für die Klassen 3 und 4 durch. Jede Schule delegiert zwei Teilnehmer. Die Sieger erhalten ein Wandrelief von unserer AG Plastbearbeitung. Mit dieser Olympiade erkennen wir zeitig unseren Nachwuchs.
- Bei Pionierfesten und in den Ferien treten wir mit unseren Wissensstraßen für die Klassen 3/4 und 5/6 auf. Wir bieten außerdem noch die Veranstaltung *Lustige Knobeleien* an, bei der es wenig zu rechnen, aber viel zu knobeln gibt. Im Haus der JP gibt es vierteljährlich die bunte Veranstaltung *Zahlen und Zaubern*, bei der zehn Pioniere das Laienspiel *Dr. Plusminus und seine Zahlen* zeigen.

An vielen anderen Problemen arbeiten wir noch. Schreibt uns doch einmal von eurer außerunterrichtlichen Tätigkeit. *W. Henker*



Einer der jüngsten *alpha*-Leser — einer der Sieger der ABC-Olympiade Karl-Marx-Stadt

Wolfgang Henker, vor zehn Jahren Sieger in der Bezirksolympiade Leipzig, heute Diplomlehrer für Mathematik und Leiter des Mathematikzentrums. Unser Bild: Kombinatorik in Klassenstufe 5



Plastrelief (23 cm × 31 cm), hergestellt in der Vakuumtiefzieanlage der AG Plast.

Aus der Messezeitung der EOS „Otto Grotewohl" — Gera

... Im vergangenen Jahr konnte die MMM an unserer Schule mit einem beachtlichen Erfolg abgeschlossen werden. Die Exponate dieser Messe, der auch eine *Hobby-Ausstellung* angeschlossen war, umfaßte die verschiedenartigsten Gebiete. Neben den dominierenden praxisverbundenen Objekten wurden erstmals mathematische Exponate gezeigt. Was ist darunter zu verstehen?

Diese Frage mußte im vergangenen Jahr von mathematisch interessierten Schülern und den Mathematiklehrern beantwortet werden, um die Voraussetzung für eine sinnvolle Vorbereitung auf die nächste Messe zu schaffen. Zur Teilnahme an der MMM bewog uns zunächst der Gedanke, nicht länger abseits zu stehen. Wir sahen ferner darin die beste Möglichkeit, alle Schüler noch stärker für die Mathematik zu interessieren. Die Freude an der Darlegung mathematischer Probleme sollte geweckt, deren Qualität erhöht werden. Die *Jungen Mathematiker* unserer Schule, die bereits jahrelang in verschiedenen Zirkeln ihre Kenntnisse ständig erweitern, nahmen die Messe zum Anlaß, den Gedanken der seit zwölf Jahren bestehenden Mathematikolympiaden noch mehr zu popularisieren.

Von der Differenziertheit der Zielstellung wurde für die MMM die Art der Exponate bestimmt. Wir teilen sie in drei Gruppen ein:

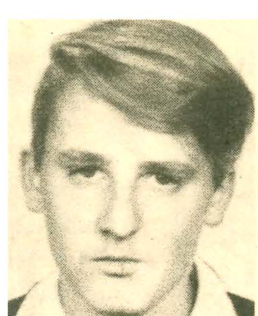
- *Beiträge zur Ausgestaltung unserer Fachunterrichtsräume:* Tafeln zeigen Leben und Werk berühmter Mathematiker (Leibniz, Gauß), die historische Entwicklung bestimmter Zweige der Mathematik (zwei Tafeln über den Mathematisch-physikalischen Salon im Dresdner Zwinger), inhaltliche Zusammenfassung von Teilgebieten des Unterrichtsstoffes (Satzgruppe des Pythagoras, Infinitesimalrechnung, graphische Darstellung gerader und ungerader Funktionen). Da ich selbst eine Tafel über Differentialrechnung gestaltet habe, weiß ich, wie schwer es ist, nur das wesentliche in übersichtlicher und anschaulicher Form darzulegen.
- *Anfertigung von verschiedenartigen, eleganten Lösungsmustern für Olympiadeaufgaben:* Wir wollten damit zugleich einen Angriff auf die im Unterricht teilweise noch praktizierte schablonenhafte Lösung von Problemen starten.
- *Ausstellung von Jahresarbeiten:* Meist ging man dabei unter Nutzung von Sekundärliteratur über den Lehrplanstoff hinaus, bzw. setzte sich kritisch mit ihm auseinander. Themen waren u. a.:
  - Herleitung der Tangentengleichung bei Kegelschnitten
  - Bedeutung der 1. und 2. Ableitung für das lokale Verhalten einer Funktion
  - Mathematische Beweise und Beweisverfahren.

Obwohl von den über 50 Arbeiten nur die besten ausgewählt werden konnten, wuchs bei allen Beteiligten das Vertrauen in die eigene Leistung.

Der Erfolg des Vorjahres spornt uns bei der Vorbereitung der diesjährigen MMM an.

Wolfgang Hossack (Kl. 12/1)

Michael Geisler (Kl. 11/1) sei an dieser Stelle gedankt. Er überreichte uns seine Arbeit mit dem Thema „Folgen und Reihen", die wir aus Platzgründen im Augenblick nicht veröffentlichen können. *Red. alpha*



Mathematikwettstreit — gemeinsam mit Freunden

Unsere Kreisolympiade wurde in diesem Schuljahr erstmals mit internationaler Beteiligung durchgeführt. Die Gäste, je vier *Junge Mathematiker* aus der Klassenstufe 9, kamen aus den Städten Brno (ČSSR), Plowdiv (VR Bulgarien), Poznań (VR Polen) und aus der sowjetischen Schule in Cottbus.

Das *Fest der Freundschaft* begann mit einer Stadtrundfahrt durch unsere Bezirkshauptstadt. Am Nachmittag wurde die Kreisolympiade feierlich eröffnet. Der erste Tag unseres Treffens endete mit einer Kinder- und Jugendtanzveranstaltung.

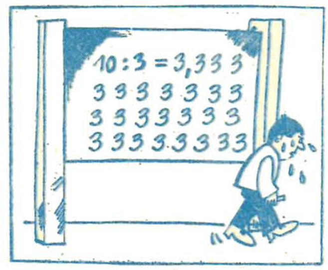
Am 22. November 1972, an dem in allen Kreisen der DDR die Kreisolympiade durchgeführt wurde, traten neben hundert *Jungen Mathematikern* unserer Stadt auch die fünf Mannschaften zum Wettbewerb an. Grundlage des Leistungsvergleiches waren die zentral gestellten Aufgaben, für unsere Gäste von der EOS Cottbus übersetzt. Neun der 20 Schüler erreichten die volle Punktzahl und erhielten erste Preise. Mannschaftssieger wurde Poznań vor Brno.

Das Treffen klang mit einer Exkursion in den Dresdner Zwinger aus. Wir freuen uns jetzt schon auf den nächsten Wettbewerb in Brno.

Uwe Schäfer, Mitglied des Clubs Junger Mathematiker, Haus der Jungen Pioniere Cottbus

Eine Mannschaft der sowjetischen Schule in Altenburg nahm an der Bezirksolympiade des Bezirks Leipzig teil. Unser Foto: *Tanja Grusina* bei der Klausur

In freien Stunden alpha heiter



Glos Nauczycielski, Warschau

Kompliziertes Problem — einfache Lösung

Schreibe eine beliebige dreistellige natürliche Zahl nieder, bei der die erste und letzte Ziffer verschieden sind! Schreibe die Ziffernfolge in umgekehrter Reihenfolge darunter und subtrahiere die kleinere von der größeren Zahl!
Schreibe dabei dein Ergebnis stets dreistellig, d. h. eine Null an erster Stelle ist mitzuschreiben. Schreibe das Ergebnis nochmals in umgekehrter Reihenfolge darunter und addiere die beiden Zahlen! Stets erhältst du 1 089.
Wie ist das möglich? — In welchem Falle kann die Subtraktionsaufgabe auf eine dreistellige Zahl mit der Anfangsziffer 0 führen? Wie heißt die Zahl?

Oberlehrer H. Bellmann, Freital

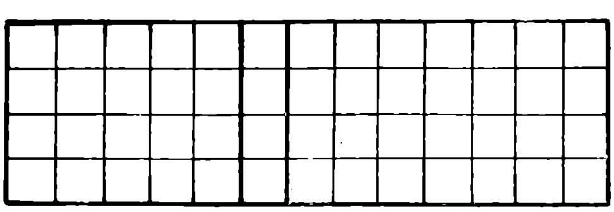
Alle Tassen im Schrank?

Von zwei Tassen hat eine die Form eines Zylinders (Radius R, Höhe H), die andere die Form eines Kegelstumpfs (Grundkreisradius $r<R$, R ist der Radius des oberen Randes.) Beide Tassen fassen gleichviel, wenn sie bis zum Rand gefüllt sind.
Welche Tasse enthält mehr Flüssigkeit, wenn beide nicht bis zum Rand gefüllt sind, sondern der Flüssigkeitsspiegel um $d<\frac{1}{4}H$ unter dem Rand liegt?

Aus: Mathematics in School, Yorkshire (England) Nov. 1971

Verkettung

In jeder Zeile des folgenden Schemas sind die Wortbilder zweier mathematischer Begriffe einzusetzen. Der letzte Buchstabe des ersten Wortes stimmt jeweils mit dem ersten Buchstaben des zweiten Wortes überein und ist in eins der markierten Felder einzutragen.

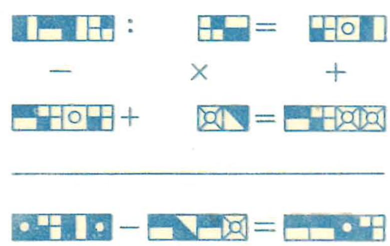


Die in den vier markierten Feldern bei richtigem Einsetzen stehenden Buchstaben ergeben von oben nach unten gelesen das Wortbild eines mathematischen Begriffes.

1. Zeile: Strecke am Kreis — Teil eines Winkels
2. Zeile: Spezieller Körper — Rechenoperation
3. Zeile: Größenangabe, die Flächen, wie Rechteck und Kreis zugeordnet ist — Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat.
4. Zeile: Spezielles Viereck — Spezieller Körper

Irmgard Träger, Wilhelm-Pieck-OS Döbeln

Zahlenrätsel



Steffi Nestler, EOS „Erich Weinert", Kl. 11

Kryptarithmetik

Setze für die Variablen a und b Ziffern ein, so daß eine sinnvolle Gleichung entsteht. (Gleiche Variable entsprechen gleichen Ziffern.)

$$(a+a)+3(b+b)=a^a+b^a$$

Michael Jütte, 10. OS Greifswald, Kl. 7

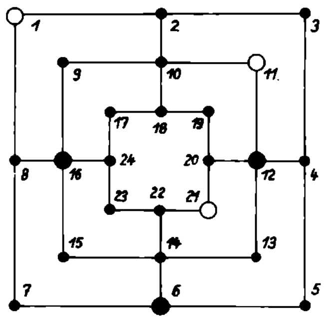
Silbenrätsel

Die Silben
ab – ar – bel – bil – di – dung – gens – graph – hy – in – li – me – mo – na – nal – ne – no – o – or – per – ra – sprung – sym – tan – te – ter – ti – ton – trisch – ur – vall.
ergeben Begriffe aus dem Stoffgebiet *Funktionen*. Es handelt sich beispielsweise um Eigenschaften und Namen bestimmter Funktionen.
Die Anfangsbuchstaben eines jeden Begriffes ergeben bei richtiger Ordnung das Wort *Algorithmus*!

K.-H. Gentzsch, Meuselwitz

Für Mühlespieler

Die Felder des Mühlespielbretts seien in der folgenden Weise von 1 bis 24 durchnumeriert:



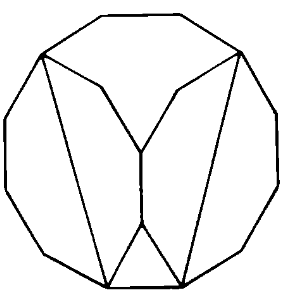
Bei einer Partei hat „Weiß“ noch drei Steine, die auf den Feldern 1, 11 und 21 stehen. „Schwarz“ hat ebenfalls noch drei Steine, die auf den Feldern 6, 12 und 16 stehen. — „Weiß“ ist am Zug. Wie muß „Weiß“ spielen, um mit Sicherheit spätestens mit seinem dritten Zug die Partie zu gewinnen?

W. Träger, Schloßberg-OS, Döbeln

Magisches Zwölfeck

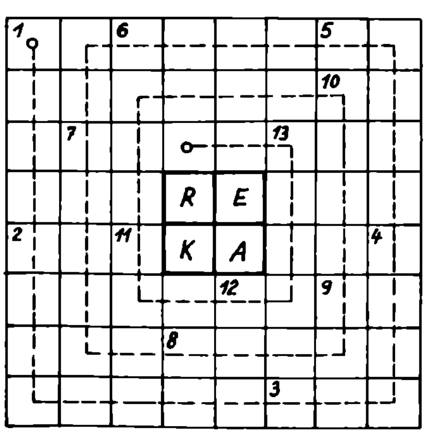
Aus den sechs Teilen des abgebildeten Zwölfecks ist ein Quadrat zu legen.

Aus: Matematicko Fizicki List, Zagreb (SFR Jugoslawien) 1/72/73



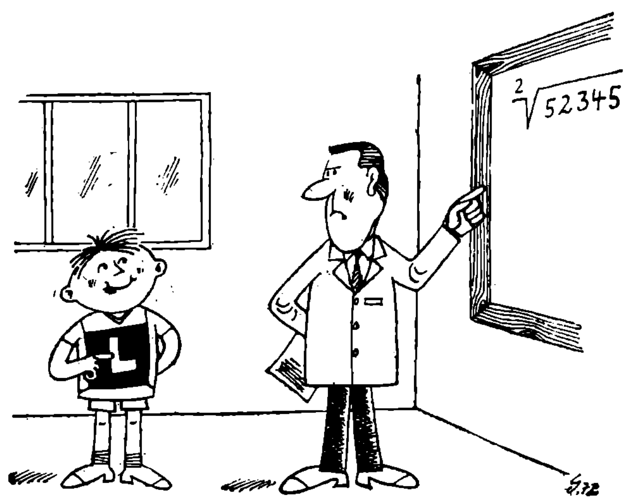
Rätselspirale

In das Quadrat sind bei 1 beginnend Wörter folgender Bedeutung einzutragen, wobei jedes folgende Wort mit dem letzten Buchstaben des vorhergehenden beginnt. Bei richtiger Lösung ergeben die beiden Diagonalen die Namen von zwei berühmten Mathematikern



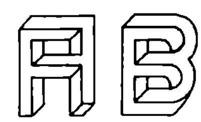
1. geometrischer Begriff
2. notwendige Bedingungen einer Funktion
3. mehr als eine Schranke
4. unwirtliche Gegend
5. berühmter Mathematiker (1707 bis 1783)
6. wirklich
7. niederländischer Physiker (1853 bis 1928)
8. Werkzeug
9. geometrischer Begriff
10. ein berühmtes Programm nach Felix Klein
11. Hauptstadt der Lettischen SSR
12. indischer Dichter
13. Fluß in der SU

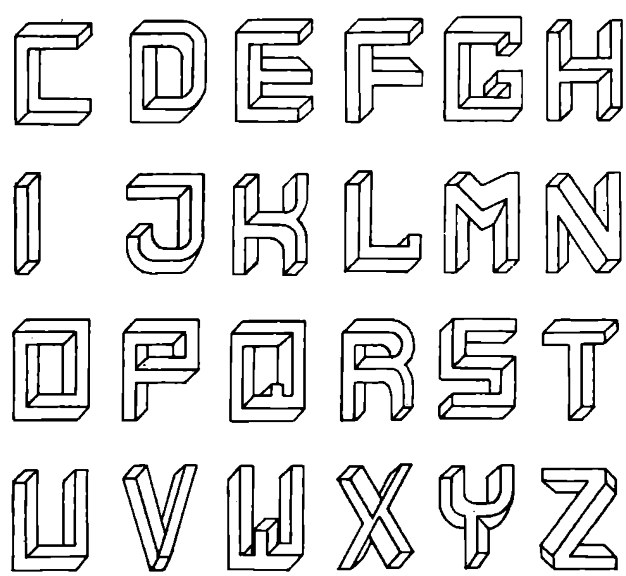
Oberlehrer H. Pätzold, VH Waren/Müritz



Schrader, aus: DLZ 48/72

Das Un-Staben-Alphabet





Lösungen

10/12▲957 Für alle reellen Zahlen a und alle reellen Zahlen x gilt

$$x^2+ax-a=\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)-\left(a+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(a+\frac{a^2}{4}\right) \text{ und } \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 \geqq 0,$$

weil das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ ist.

Daher gilt für alle x

$x^2+ax-a>0$ genau dann, wenn

$a+\frac{a^2}{4}<0$, d. h. $a\left(1+\frac{a}{4}\right)<0$ ist.

Das ist aber nur dann der Fall, wenn $a<0$ und $1+\frac{a}{4}>0$, also $\frac{a}{4}>-1$, d. h. $a>-4$, gilt.

Daher erfüllen alle reellen Zahlen a mit $-4<a<0$ und nur diese Zahlen die gegebene Bedingung.

10/12▲958 Da die Gleichung

$$x^3+x^2+ax+b=0 \qquad (1)$$

drei reelle Wurzeln hat, gilt für diese Wurzeln x_1, x_2, x_3 nach dem *Vietaschen Wurzelsatz*

$$x_1+x_2+x_3=-1 \qquad (2)$$

und $\quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=a. \qquad (3)$

Aus (2) folgt durch Quadrieren auf beiden Seiten

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=1,$$

also wegen (3)

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2a=1,$$

d. h. $\quad 2a=1-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$. Nun gilt für alle reellen Zahlen x_1, x_2, x_3

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geqq 0$. Daraus folgt

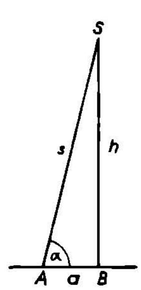
$2a \leqq 1$, also $a \leqq \frac{1}{2}$, w. z. b. w.

W 10/12 ■ 959 Es seien (vgl. die Abb.)

$\overline{AS}=s$ die Achse des Turmes,

$SB=h=18$ m die Höhe des Turmes,

$\sphericalangle SAB=\alpha$ der Neigungswinkel der Achse $\overline{AS}$ gegen die Horizontale AB,



$AB=a=1{,}47$ m die Verschiebung der Turmspitze in der Horizontalen.

a) Dann gilt

$$\tan\alpha=\frac{h}{a}=\frac{18}{1{,}47}=12{,}24.$$

Hieraus erhalten wir (vgl. Tafelwerk, S. 27) die Größe des Neigungswinkels $\alpha=85{,}3°$.

b) Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABS können wir nach dem *Satz des Pythagoras* die Länge der Seite s berechnen:

$$s^2=h^2+a^2=18^2+1{,}47^2=324+2{,}16$$
$$=326{,}16,$$
$$s=18{,}06.$$

Wegen $s-h=18{,}06-18=0{,}06$ erhöhte sich also der Turm nach seiner Wiederaufrichtung nur um rund 0,06 m, d. s. 6 cm.

W 10/12 ■ 960 Bei genauer Rechnung erhält man durch Multiplikation in der Gleichung (1) mit 101 und in der Gleichung (2) mit 302

$$9039{,}5x+3050{,}2y=215\,877{,}4, \qquad (6)$$
$$8878{,}8x+3050{,}2y=25\,217{,}0 \qquad (7)$$

und hieraus durch Subtraktion

$$160{,}7x=190\,660{,}4,$$
$$x=1186{,}4, \qquad (8)$$

wobei auf eine Stelle nach dem Komma gerundet wurde. Ferner erhält man durch Einsetzen in (2)

$$y=\frac{83{,}5-29{,}4x}{10{,}1}=-3445{,}2.$$

Die richtigen Werte für x und y weichen von den früher erhaltenen Werten erheblich ab. Daher sind diese als Näherungslösungen nicht brauchbar.

Die großen Fehler sind wie folgt zu erklären: Infolge der Rundung ist in der Gleichung (3) der Koeffizient von x um 0,5 zu groß und in der Gleichung (5) um 1,2 zu klein. Daher ist in der Gleichung $3x=1885$ der Koeffizient von x um $0{,}5-(-1{,}2)=1{,}7$ zu groß. Dieser verhältnismäßig hohe Fehler wirkt sich bei der Division erheblich aus und führt zu einer großen Abweichung bei dem Wert für x und dann auch entsprechend bei dem Wert für y. Daher ist in dem gegebenen Gleichungssystem die Rundung der Koeffizienten nicht zulässig, sie ergibt keine brauchbaren Näherungslösungen.

W 10/12*961 a) Wir zerlegen den Dachkörper $ABCDEF$ (vgl. die Abb.) durch zwei auf der Grundfläche senkrecht stehende Schnitte, die durch E und F gehen und parallel zu AD verlaufen. Dann entstehen zwei Pyramiden $APSDE$ und $QBCRF$ sowie ein Prisma $PSEQRF$.

Jede der Pyramiden hat eine rechteckige Grundfläche mit dem Flächeninhalt $\frac{a-c}{2}\cdot b$ und die Höhe h. Wir erhalten daher das Volumen

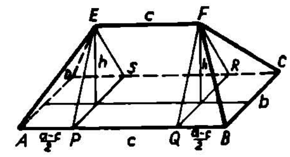
$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a-c}{2}\cdot bh.$$

Die Grundfläche PSE des Prismas hat den Flächeninhalt $\frac{b\cdot h}{2}$. Da seine Höhe gleich c ist, hat das Prisma das Volumen

$$V_2=\frac{bh}{2}c.$$

Daher beträgt das Volumen des Dachkörpers

$$V=2V_1+V_2=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a-c}{2}bh+\frac{bh}{2}c$$
$$=\frac{1}{6}(2a-2c+3c)bh,$$
$$V=\frac{1}{6}(2a+c)bh, \text{ w. z. b. w.}$$



b) Wir erhalten

$$V=\frac{1}{6}(2\cdot 16+8)\cdot 6\cdot 4\ \text{m}^3=160\ \text{m}^3.$$

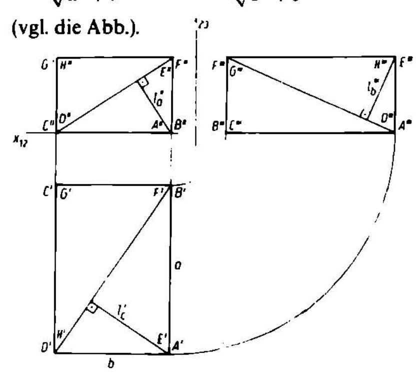
W 10/12*962 Das Gemeinlot l_c liegt lotrecht zur Quaderkante c. Folglich muß l_c parallel zur Grundrißtafel liegen. Ferner schließt l_c mit der Diagonalen DF nach Voraussetzung einen rechten Winkel ein. Da einer der Schenkel dieses rechten Winkels parallel zur Bildebene liegt, geht er bei der Normalprojektion in einen rechten Winkel über. Da l_c sich in wahrer Länge abbildet, kann die folgende Proportion aus dem Grundriß abgelesen werden:

$$l_c:b=a:\sqrt{a^2+b^2}.$$

Also gilt $l_c=\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, und durch zyklische Vertauschung folgt weiter

$$l_b=\frac{c\cdot a}{\sqrt{a^2+c^2}} \text{ und } l_a=\frac{b\cdot c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

(vgl. die Abb.).



5▲963 Wir rechnen wie folgt:

2,36 M − 0,52 M = 1,84 M (Preis für Brot und Brötchen);

1,84 M · 2 = 3,68 M (Preis für Fleisch und Wurstwaren);

10,00 M − 2,36 M − 1,84 M − 3,68 M = 2,12 M (verbleibender Geldbetrag).

5▲964 Wir rechnen wie folgt:

350 · 150 = 52500; das rechteckige Grundstück besitzt eine Fläche von 52 500 m² = 5,25 ha.

6,00 ha + 5,25 ha = 11,25 ha (Fläche des Parks nach Erweiterung).

W 5 ■ 965 Die kürzeste Nacht betrage x Stunden, dann beträgt der längste Tag $(x+10)$ Stunden, und es gilt

$$x+(x+10)=24,$$
$$2x+10=24,$$
$$2x=14,$$
$$x=7.$$

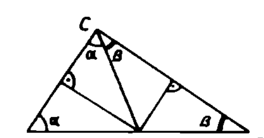
Der längste Tag dauert somit $7+10=17$ Stunden an.

W 5 ■ 966 Hätte der Lehrer von Minsk 12 Dias mehr, von Leningrad 20 Dias mehr angefertigt als von Moskau, also insgesamt $112+12+20=144$ Dias hergestellt, dann besäße er von jeder Stadt gleich viel Dias. Das wären $144:3=48$ Dias je Stadt. Folglich hat er von Minsk $48-12=36$ Dias, von Moskau 48 Dias, von Leningrad $48-20=28$ Dias.

W 5*967 Es gibt genau zwei Primzahlen 29 und 47, die die gestellten Bedingungen erfüllen.
Regine möge x Buntstifte besitzen; dann besitzt Ute $2x$ Buntstifte und Sabine $(x-13)$ Buntstifte; das sind insgesamt $(4x-13)$ Buntstifte. Es gilt entweder $4x-13=29$ oder $4x-13=47$. Daraus folgt entweder $4x=42$ oder $4x=60$. Da 42 nicht durch 4 teilbar ist, gibt es genau eine Lösung $x=15$.
Regine besitzt 15, Ute 30 und Sabine 2 Buntstifte.

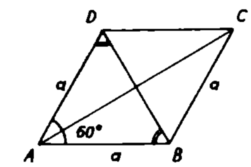
W 5*968 Die siegreiche Mannschaft A habe a Tore, die Mannschaft B habe b Tore geschossen; dann gilt
$(9a):(3b)=9$, also $a:(3b)=1$ bzw. $a=3b$.
Ferner gilt $1\leqq a+b<6$.
Für $b_1=0$ erhalten wir $a_1=0$, was der Aufgabenstellung widerspricht. Für $b_2=1$ erhalten wir $a_2=3$, also $a+b=4$. Für $b_3=2$ erhalten wir $a_3=6$, also $a+b=8>6$, was nicht möglich ist. Das Spielergebnis lautete somit 3 : 1; es wurden vier Tore geschossen.

6▲969 Es sei D der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ des Dreiecks ABC, und es liege D zwischen A und B. Da die Mittelsenkrechten zugleich Symmetrieachsen sind und jeder Punkt einer

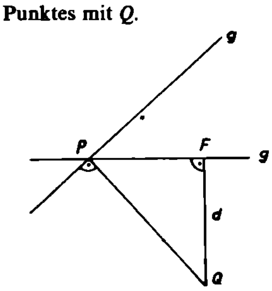


Symmetrieachse von zwei einander entsprechenden Punkten gleich weit entfernt ist, gilt $\overline{AD}=\overline{CD}$ und $\overline{BD}=\overline{CD}$. Die Dreiecke $\triangle CAD$ und $\triangle BCD$ sind somit gleichschenklig und es gilt $\sphericalangle CAD=\sphericalangle ACD=\alpha$ und $\sphericalangle CBD=\sphericalangle BCD=\beta$. Da die Summe der Innenwinkelgrößen eines Dreiecks 180° beträgt, gilt in unserem Falle $2\alpha+2\beta=180°$, also $\alpha+\beta=90°$. Somit ist Winkel $\sphericalangle ACB=90°$, d. h. Dreieck ABC ist rechtwinklig.

6▲970 Aus $\overline{AB}=\overline{AD}=a$ folgt, daß das Dreieck ABD gleichschenklig ist. Somit gilt $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ADB=(180°-\alpha):2=$ $=(180°-60°):2=60°$. Dreieck ABD ist also gleichwinklig und somit auch gleichseitig, und es gilt $\overline{AB}=\overline{BD}$. Nach der Dreiecksungleichung ist die Summe zweier Seiten eines Dreiecks stets größer als die dritte Seite. Deshalb gilt
$\overline{AB}+\overline{AD}=2a>\overline{BD}$ und $\overline{AB}+\overline{BC}=2a>\overline{AC}$.



W6 ■ 971 Es sei F der Fußpunkt des vom Punkt Q auf die Gerade g gefällten Lotes, und es sei F von P verschieden. Dann gilt $d=\overline{QF}<\overline{QP}$, weil die Länge d des Lotes $\overline{QF}$ kleiner ist als die Verbindungsstrecke jedes von F verschiedenen und auf g liegenden Punktes mit Q.



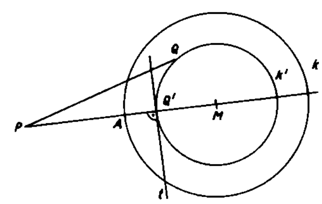
Fällt F mit P zusammen, dann gilt $d=\overline{QP}=\overline{QF}$ und g steht senkrecht auf PQ. Also ist in diesem Fall der Abstand d des Punktes Q von g am größten.

W 6 ■ 972 Wegen $96=2^5\cdot 3$ hat der gesuchte größte gemeinsame Teiler beider Zahlen eine Primfaktorenzerlegung von der Form $2^x\cdot 3^y$, wobei x und y natürliche Zahlen sind und $x\leqq 5$ und $y\leqq 1$ gilt.
Weil die Quersumme $s=36$ der zweiten Zahl durch 3 teilbar ist, gilt $y=1$. Weil die aus den letzten zwei Ziffern der zweiten Zahl gebildete Zahl 24 durch 4 und somit die Zahl selbst durch 4 teilbar ist, gilt $x=2$. Denn die zweite Zahl ist, weil 324 nicht Vielfaches von 8 ist, nicht durch 8 teilbar. Der g. g. T. beider Zahlen lautet somit $2^2\cdot 3^1=12$.

W 6*973 Für die Quersumme s der fünfstelligen Zahl gilt $4+8+x+7+y=19+x+y$. Damit die fünfstellige Zahl durch 3 teilbar ist, muß $x+y$ bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Falls x bei Division durch 3 den Rest 0 läßt, muß y bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Den Rest 0 lassen bei Division durch 3 nur die Zahlen 0, 3, 6 und 9. Den Rest 2 lassen bei Division durch 3 die Zahlen 2, 5 und 8. In diesem Fall erhalten wir $4\cdot 3=12$ Lösungen.
Falls x bei Division durch 3 den Rest 1 läßt, muß y bei Division durch 3 ebenfalls den Rest 1 lassen. Es ist dies möglich für $x=1$ oder 4 oder 7 und für $y=1$ oder 4 oder 7. In diesem Falle erhalten wir $3\cdot 3=9$ Lösungen.
Falls x bei Division durch 3 den Rest 2 läßt, muß y bei Division durch 3 den Rest 0 lassen. Dies trifft zu für $x=2$ oder 5 oder 8 und für $y=0$ oder 3 oder 6 oder 9. Wir erhalten somit $3\cdot 4=12$ Lösungen.
Insgesamt besitzt die Aufgabe $12+9+12=33$ Lösungen.

W 6*974 Es sei Winkel $\sphericalangle ABC=\beta$, dann gilt $\sphericalangle CBP=\sphericalangle PBA=\frac{1}{2}\beta$. Ferner gilt $\sphericalangle PQC=\sphericalangle BQD=90°-\frac{1}{2}\beta$ als Scheitelwinkel. Im rechtwinkligen Dreieck PBC gilt Winkel $\sphericalangle CPB=90°-\frac{1}{2}\beta$. Somit besitzt das Dreieck PQC zwei kongruente Winkel, nämlich $\sphericalangle CPQ=\sphericalangle CQP=90°-\frac{1}{2}\beta$. Da in einem Dreieck gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen, gilt $\overline{CP}=\overline{CQ}$, d. h., Dreieck PQC ist gleichschenklig.

7▲975 Für jeden inneren Punkt Q des Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gilt $\overline{MQ}<\overline{MA}=r$. Wir zeichnen einen Kreis k' um M als Mittelpunkt mit dem Radius $\overline{MQ}$, der $\overline{AM}=r$ in einem inneren Punkt Q' schneidet. Da der Punkt Q' Berührungspunkt der in Q' an den Kreis k' gelegten Tangente t ist und P und Q auf verschiedenen Seiten von t liegen, ist $\overline{PQ'}<\overline{PQ}$. Ferner gilt $\overline{PQ'}=\overline{PA}+\overline{AQ'}$, also $\overline{PA}<\overline{PQ'}$. Deshalb gilt auch $\overline{PA}<\overline{PQ}$.



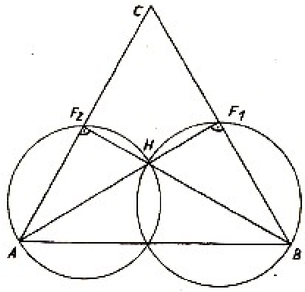
7▲976 Angenommen es haben x Schüler die Note 4 erhalten, dann haben $2x$ Schüler die Note 2 erhalten und $(23-3x)$ Schüler die Note 1. Demnach gilt

$$\frac{(23-3x)\cdot 1+2x\cdot 2+8\cdot 3+x\cdot 4}{31}=2,$$
$$23-3x+4x+24+4x=62,$$
$$47+5x=62,$$
$5x=15$, also $x=3$.

14 Schüler erhielten die Note 1, 6 Schüler die Note 2, 8 Schüler die Note 3 und 3 Schüler die Note 4.

W 7 ■ 977 Es seien F_1 Fußpunkt der Höhe $\overline{AF_1}$ zur Seite $\overline{BC}$ und F_2 Fußpunkt der Höhe $\overline{BF_2}$ zur Seite $\overline{AC}$. Wegen $\sphericalangle BF_1H=\sphericalangle AF_2H=90°$ liegt F_1 auf dem Thaleskreis über $\overline{BH}$ und F_2 auf dem Thaleskreis über $\overline{AH}$ als Durchmesser. Daraus folgt die folgende Konstruktion:
Wir zeichnen zunächst das Dreieck $\triangle ABH$ aus seinen drei Seiten $\overline{AB}=c=11$ cm, $\overline{AH}=6$ cm und $\overline{BH}=7$ cm. Danach zeichnen wir den Kreis mit $\overline{AH}$ und den Kreis mit $\overline{BH}$

als Durchmesser. Die Gerade BH schneidet den ersten Kreis in F_2, die Gerade AH den zweiten Kreis in F_1. Die Verbindungsgeraden AF_2 und BF_1 schneiden sich in C.



W 7 ■ 978 Vor dem Verdunsten bestand die Kochsalzlösung zu 99 ‰ aus Wasser und zu 1 ‰ aus Kochsalz, d. h. sie enthielt 1 g Kochsalz, da die Masse der Lösung 100 g betrug. Nach dem Verdunsten bestand die Kochsalzlösung zu 2 ‰ aus Kochsalz. Aus $2:100=1:x$ folgt $x=50$; die Kochsalzlösung besaß nunmehr nur noch 50 g Masse.

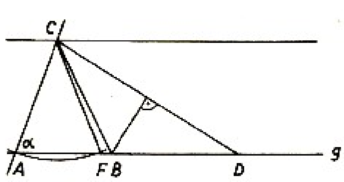
W 7 * 979 Angenommen es wurden a Rechenstäbe, b Zirkel und c Zeichenhefte angeschafft; dann gilt

$$\begin{array}{rl} 10a+3b+0{,}5c=\ 100 & |\cdot 2 \\ a+\ b+\ c=\ 100 & |\cdot(-1) \\ \hline 20a+6b+\ c=\ 200 & | \\ -a-\ b-\ c=-100 & | \ + \\ \hline 19a+5b\ =100 & \\ 5b=\ 100-15a-4a & \\ b=\ 20-\ 3a-\dfrac{4a}{5} & \end{array}$$

b ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn a Vielfaches von 5 ist. Das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung, die den Bedingungen entspricht, nämlich $a=5$, $b=1$ und $c=94$. Es wurden 5 Rechenstäbe, 1 Zirkel und 94 Zeichenhefte eingekauft.

W 7*980 Verlängert man im Dreieck ABC die Seite $\overline{AB}$ über B hinaus bis D um $\overline{BC}=a$, so gilt $\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{AB}=a+c$, und das Dreieck DCB ist gleichschenklig. Beschreibt man um C mit dem Radius $\overline{AC}=b$ einen Kreis, so schneidet dieser die Seite $\overline{AB}$ wegen $b<c$ in einem inneren Punkt F, und es gilt $\sphericalangle CAF=\sphericalangle CFA=\alpha$, $\sphericalangle CFD=180°-\alpha$ und $\overline{FD}=a+c-b$.

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion:



Wir zeichnen eine Gerade g, legen auf ihr einen Punkt A fest und tragen in A an g den Winkel $\alpha=70°$ an. Die zu g im Abstand $h_c=4$ cm zu konstruierende Parallele schneidet den freien Schenkel von α in C. Der Kreis um C mit $\overline{AC}=b$ als Radius schneidet g in F. Der Kreis um F mit dem Radius $a+c-b=5$ cm schneidet g in D. Die Mittelsenkrechte von $\overline{CD}$ schneidet g in B.

8 ▲ 981 Es sei x eine natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft; dann ist ihr Nachfolger $x+1$, und es gilt

$$5x=(x+1)^2+1, \qquad (1)$$

also $(x+1)^2+1-5x=0.$ (2)

Wir setzen

$$f(x)=(x+1)^2+1-5x$$

und erhalten, wenn wir für x der Reihe nach 0, 1, 2, 3 einsetzen.

$$\begin{aligned} f(0)&=\ 1+1-\ 0=2,\\ f(1)&=\ 4+1-\ 5=0,\\ f(2)&=\ 9+1-10=0,\\ f(3)&=16+1-15=2. \end{aligned}$$

Für $x\geqq 4$ wird

$$\begin{aligned} f(x)&=(x+1)(x+1)+1-5x\\ &>5\cdot x+1-5x>0, \end{aligned}$$

da $x+1\geqq 5$ und $x+1>x$ ist.

Also gilt $f(x)=0$ nur für $x=1$ und $x=2$. Daher sind die natürlichen Zahlen 1 und 2 die einzigen natürlichen Zahlen, die die geforderte Eigenschaft haben.

Bemerkung: Wer schon quadratische Gleichungen lösen kann, kann auch wie folgt vorgehen:

Man erhält aus (2)

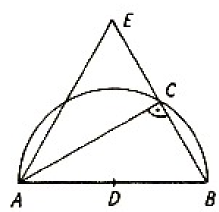
$$x^2+2x+1+1-5x=0,$$
$$x^2-3x+2=0$$

und hieraus die beiden Lösungen

$$x_1=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2,$$

$$x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1.$$

8 ▲ 982 a) Da das Dreieck ABC rechtwinklig mit $\gamma=90°$ ist, ist der Mittelpunkt D der Hypotenuse $\overline{AB}$ gleichzeitig Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks (vgl. die Abb.).



Daraus ergibt sich die Konstruktion:

Wir zeichnen die Hypotenuse $\overline{AB}=6$ cm und konstruieren um den Mittelpunkt D dieser Seite den Kreis mit dem Radius $r=3$ cm. Dann tragen wir an $\overline{AB}$ in A den Winkel $\alpha=30°$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneidet den Kreis um D in dem Punkt C. ABC ist das verlangte Dreieck.

b) Verlängert man die Seite $\overline{BC}$ über C hinaus um sich selbst bis zum Punkt E, so sind die Dreiecke ABC und ACE kongruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen rechten Winkel übereinstimmen. Daher gilt $\sphericalangle CEA=\sphericalangle ABC=60°$, d. h. das Dreieck ABE ist gleichseitig mit der Seite $c=6$ cm. Nun ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite c gleich $\frac{c^2}{4}\sqrt{3}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist halb so groß, also gleich

$$A=\frac{c^2}{8}\sqrt{3}=\frac{36}{8}\sqrt{3}\ \text{cm}^2=\frac{9}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$\approx 7{,}79$ cm².

W 8 ■ 983 Da die erste Aussage wahr ist, läuft Sabine schneller als Gabriele. Daher ist in der dritten Aussage die Schlußfolgerung falsch, also muß in dieser Aussage auch die Voraussetzung falsch sein, d. h. Sabine läuft nicht schneller als Ellen. Es sind also zwei Fälle möglich:

a) Ellen läuft ebenso schnell wie Sabine. Dann ist in der zweiten Aussage die Voraussetzung wahr, also auch die Schlußfolgerung wahr, d. h., Gabriele läuft schneller als Ellen, also auch schneller als Sabine. Das widerspricht aber der ersten Aussage. Daher kann dieser Fall nicht eintreten.

b) Ellen läuft schneller als Sabine. Dann ist die Voraussetzung in der zweiten Aussage falsch, also kann auch die Schlußfolgerung falsch sein, d. h. die zweite Aussage ist wahr. Es sind also in diesem Falle alle drei Aussagen wahr.

Wir erhalten daher das folgende Ergebnis: Ellen läuft schneller als Sabine, und Sabine läuft schneller als Gabriele. Ellen läuft daher am schnellsten von den drei Mädchen, und Gabriele läuft am langsamsten.

W 8 ■ 984 Mit 35 Mähdreschern E 512 können an einem Einsatztag $15\cdot 35$ ha $=525$ ha abgeerntet werden und mit y Mähdreschern E 175 an einem Einsatztag $4y$ ha. Insgesamt können also an einem Einsatztag $(525+4y)$ ha abgeerntet werden. Da die gesamte Ernte (14 000 ha) in t Einsatztagen eingebracht werden soll, erhalten wir die Gleichung

$$(525+4y)t=14\,000,$$
$$525t+4yt=14\,000,$$
$$4yt=14\,000-525t,$$
$$y=\frac{14\,000-525t}{4t}=\frac{3\,500}{t}-131{,}25.$$

Damit haben wir schon die Anzahl y der einzusetzenden Mähdrescher E 175 als Funktion der Anzahl t der Einsatztage dargestellt.

a) Bei 24 Einsatztagen ($t=24$) erhalten wir $y=\frac{3\,500}{24}-131{,}25=14{,}58$. Es werden also 15 Mähdrescher E 175 benötigt.

b) Bei 25 Einsatztagen ($t=25$) erhalten wir $y=8{,}75$. Es werden also 9 Mähdrescher E 175 benötigt.

c) Bei 26 Einsatztagen ($t=26$) erhalten wir $y=3{,}37$. Es werden also 4 Mähdrescher E 175 benötigt.

Für $t=23$ erhalten wir $y=20{,}92$. Da nur 18 Mähdrescher E 175 zur Verfügung stehen, kann also die gesamte Ernte nicht in 23 Einsatztagen eingebracht werden.

W 8*985 Für $n=0$ gilt $z=n!-1=0!-1=1-1=0=0^2$.

Für $n=1$ gilt $z=1!-1=0=0^2$.

Für $n=2$ gilt $z=2!-1=2-1=1=1^2$.

In diesen drei Fällen ist also jeweils z gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.

Nun sei $n \geqq 3$. Dann ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ durch 3 teilbar; also gilt $n! = 3k$, wobei k eine natürliche Zahl ist, und $z = n! - 1 = 3k - 1$. Wäre nun $z = x^2$ eine Quadratzahl, so wäre wegen $x = 3s$ oder $x = 3s + 1$ oder $x = 3s - 1$

$$x^2 = 9s^2 = 3 \cdot (3s^2)$$

oder $x^2 = (3s+1)^2 = 9s^2 + 6s + 1$
$= 3 \cdot s(3s+2) + 1$

oder $x^2 = (3s-1)^2 = 9s^2 - 6s + 1$
$= 3 \cdot s(3s-2) + 1$.

In jedem Falle wäre also $z = x^2$ entweder durch 3 teilbar oder würde bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen. Das steht aber im Widerspruch zu der obigen Gleichung $z = 3k - 1$.

Also ist für $n \geqq 3$ die Zahl $z = n! - 1$ niemals eine Quadratzahl. Daher ist z nur für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ eine Quadratzahl.

Bemerkung: Wer mit Zahlenkongruenzen rechnen kann, kommt mit dem Nachweis, daß z für $n \geqq 3$ keine Quadratzahl ist, schneller zum Ziel:

Für $n \geqq 3$ gilt $z = n! - 1 \equiv -1 \pmod 3$.

Nun folgt aus

$x \equiv 0 \pmod 3$ $\quad x^2 \equiv 0 \pmod 3$,
$x \equiv 1 \pmod 3$ $\quad x^2 \equiv 1 \pmod 3$,
$x \equiv -1 \pmod 3$ $\quad x^2 \equiv 1 \pmod 3$.

In keinem Falle ist also $z = x^2 \equiv -1 \pmod 3$, wobei der Nachweis erbracht ist.

W 8*986 Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also zunächst an, daß in einem Dreieck ABC die Höhe h_c und die Seitenhalbierende s_c zusammenfallen. Dann weisen wir nach, daß dieses Dreieck gleichschenklig ist. Das steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, womit die Behauptung im 1. Fall (Höhe und Seitenhalbierende) bewiesen ist. Entsprechend verfahren wir im 2. Fall (Höhe und Winkelhalbierende) sowie im 3. Fall (Seitenhalbierende und Winkelhalbierende).

1. Fall: In dem Dreieck ABC mögen die Höhe $\overline{CD}$ und die Seitenhalbierende $\overline{CD}$ zusammenfallen (siehe Bild 1).

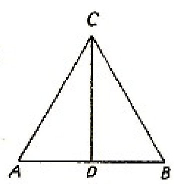
Dann gilt $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90°$ und $\overline{AD} = \overline{DB}$. Wegen $\overline{CD} = \overline{CD}$ folgt hieraus nach dem Kongruenzsatz (sws)

$$\triangle ADC \cong \triangle CDB,$$

also $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Daher ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

Bild 1



2. Fall: In dem Dreieck ABC mögen die Höhe $\overline{CD}$ und die Winkelhalbierende $\overline{CD}$ zusammenfallen (siehe Bild 1).

Dann gilt $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90°$ und $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCD$. Wegen $\overline{CD} = \overline{CD}$ folgt hieraus nach dem Kongruenzsatz (wsw)

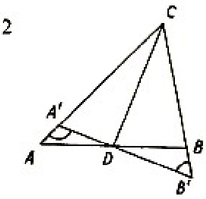
$$\triangle ADC \cong \triangle CDB,$$

also $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Daher ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

3. Fall: In dem Dreieck ABC mögen die Seitenhalbierende $\overline{CD}$ und die Winkelhalbierende $\overline{CD}$ zusammenfallen (siehe Bild 2).

Bild 2



Dann stimmen die Dreiecke ADC und CDB zwar in zwei Seiten ($\overline{CD}$ und $\overline{CD}$ sowie $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$) und einem Winkel ($\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle BCD$) überein, aber daraus können wir nach dem Kongruenzsatz (ssw) noch nicht schließen, daß diese Dreiecke kongruent sind; denn bei diesem Kongruenzsatz wird vorausgesetzt, daß die Dreiecke in dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, was hier nicht zutreffen muß. Wir müssen daher den Beweis für die Kongruenz der Dreiecke ADC und CDB anders führen. Angenommen, diese Dreiecke seien nicht kongruent. Dann steht $\overline{CD}$ nicht senkrecht auf $\overline{AB}$. Wir errichten nun auf $\overline{CD}$ in D die Senkrechte, die nicht mit $\overline{AB}$ zusammenfällt und $\overline{CA}$ in A' sowie $\overline{CB}$ in B' schneidet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß A' ein innerer Punkt der Seite $\overline{AC}$ und B' ein äußerer Punkt der Seite $\overline{BC}$ ist. Dann gilt $\overline{A'D} = \overline{DB'}$, weil die Dreiecke $A'DC$ und CDB' kongruent sind (sww). Hieraus folgt weiter $\triangle ADA' \cong \triangle BDB'$, weil diese Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (Scheitelwinkel) übereinstimmen.

Daher gilt $\sphericalangle DA'A = \sphericalangle DB'B$. Diese Winkel sind aber Wechselwinkel an den geschnittenen Geraden CA und CB; also sind diese Geraden parallel, was zu einem Widerspruch führt, weil zwei Seiten eines Dreiecks nicht parallel sein können. Damit ist bewiesen, daß die Dreiecke ADC und CDB kongruent sind und wegen $\overline{AC} = \overline{BC}$ das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

Da in jedem der drei Fälle das Dreieck ABC gleichschenklig ist, haben wir bewiesen, daß in einem nicht gleichschenkligen Dreieck weder die Höhe und die Seitenhalbierende noch die Höhe und die Winkelhalbierende noch die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende zusammenfallen können.

9▲987 Durch Umformung erhalten wir

$z = n^6 + 8n^2 - 1$
$= (n^6 + 4n^4 + 4n^2) - (4n^4 - 4n^2 + 1)$
$= (n^3 + 2n)^2 - (2n^2 - 1)^2$
$= (n^3 + 2n + 2n^2 - 1)(n^3 + 2n - 2n^2 + 1)$.

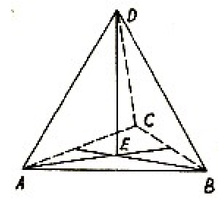
Wegen $n \geqq 1$ gilt

$n^3 + 2n + 2n^2 - 1 \geqq 1 + 2 + 2 - 1 = 4$ und
$n^3 + 2n - 2n^2 + 1 = n(n^2 - 2n) + 2n + 1$
$= n(n^2 - 2n + 1) - n + 2n + 1$
$= n(n-1)^2 + n + 1 \geqq 1 + 1 = 2$,

da $n \geqq 1$ und $n(n-1)^2 \geqq 0$ ist.

Die Zahl z läßt sich also stets in zwei Faktoren zerlegen, die beide natürliche Zahlen und größer als 1 sind. Damit ist bewiesen, daß die Zahl z niemals eine Primzahl ist.

9▲988 Es seien $ABCD$ ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $\overline{AB} = 2a$ und E der Fußpunkt der von D ausgehenden Höhe dieses Tetraeders (vgl. die Abb.).



Dann ist E der Schnittpunkt der drei Höhen des gleichseitigen Dreiecks ABC, und es gilt

$$\overline{BE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}.$$

Ferner gilt $\overline{BD} = 2a$, und wir erhalten für die Länge h der Höhe $\overline{DE}$ des Tetraeders die Gleichung

$$h^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BE}^2 = (2a)^2 - \left(\frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 4a^2 - \frac{4}{3}a^2 = \frac{8}{3}a^2, \text{ also}$$

$$h = a\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{6}.$$

Da der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ABC

$G = \frac{1}{4}(2a)^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$ beträgt, erhalten wir für das Volumen des Tetraeders $ABCD$

$$V_1 = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}a^2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{6} = \frac{2}{3}a^3\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Nun ist das Volumen eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius a und der Höhe a gleich

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a = \frac{1}{3}\pi a^3. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt wegen $\sqrt{8} < 3 < \pi$

$$V_1 = \frac{2}{3}a^3\sqrt{2} = \frac{1}{3}a^3\sqrt{8} < \frac{1}{3}\pi a^3 = V_2$$

d. h. das Volumen des geraden Kreiskegels ist größer als das Volumen des Tetraeders.

Für $a = 10$ cm erhalten wir z. B.

$$V_1 = \frac{2}{3} \cdot 1000\sqrt{2}\ \text{cm}^3 \approx 943\ \text{cm}^3,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1000\ \text{cm}^3 \approx 1047\ \text{cm}^3.$$

W 9■989 Um die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{9}{x-2} \leqq 3 \qquad (1)$$

zu ermitteln, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $x - 2 > 0$, d. h. $x > 2$.

Dann ist die Ungleichung (1) für alle x erfüllt, für die

$9 \leqq 3(x-2)$,
$9 \leqq 3x - 6$,
$3x \leqq 15$, $\quad x \geqq 5$.

Wegen $5>2$ ist also in diesem Falle die Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen x mit $x \geqq 5$ erfüllt.

2. Fall: $x-2<0$, d. h. $x<2$.

Dann ist (1) für alle x erfüllt, für die

$$9 \geqq 3(x-2),$$
$$9 \geqq 3x-6,$$
$$3x \geqq 15, \quad x \leqq 5.$$

In diesem Falle ist also die Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen x mit $x<2$ erfüllt.

Damit haben wir die Lösungsmenge der Ungleichung (1) erhalten; diese Lösungsmenge besteht aus allen reellen Zahlen x, für die $x<2$ oder $x \geqq 5$ gilt.

W 9 ■ 990 a) Wir erhalten die Gleichungen

$475 = m \cdot 0 + n$,

$25 = m \cdot 62 + n$, also

$n = 475$ und $m : 62 + 475 = 25$, also

$$m = \frac{25-475}{62} = -\frac{450}{62} = -7{,}258.$$

Die gesuchte Funktion ist also durch den folgenden Ausdruck definiert:

$$y = -7{,}258x + 475.$$

b) Für $x_1 = 25$ erhalten wir

$y_1 = -7{,}258 \cdot 25 + 475 \approx 294$,

für $x_2 = 40$ erhalten wir

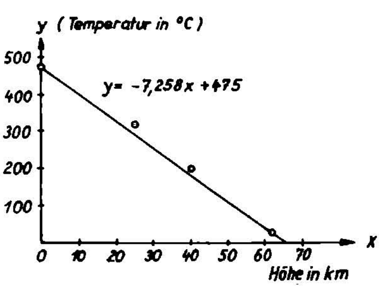
$y_2 = -7{,}258 \cdot 40 + 475 \approx 185$.

Die gemessenen Werte sind also etwas höher als die berechneten. Es ergeben sich die prozentualen Fehler:

$$x_1 = 25,\ \delta_1 = \frac{320-294}{320} = \frac{26}{320} \approx 0{,}081 = 8{,}1\,\%;$$

$$x_2 = 40,\ \delta_2 = \frac{200-185}{200} = \frac{15}{200} \approx 0{,}075 = 7{,}5\,\%.$$

Die Abweichungen von den gemessenen Werten sind also, wenn man die Schwierigkeiten bei der Messung in der Venusatmosphäre berücksichtigt, mit 8,1 % bzw. 7,5 % verhältnismäßig gering, so daß mit Recht ein linearer Verlauf der Funktion angenommen werden kann.



c) Die Abbildung zeigt den Graph der Funktion. Die gemessenen Temperaturwerte sind jeweils durch kleine Kreise gekennzeichnet. Man erkennt auch hier, daß die gemessenen Werte für $x_1 = 25$ und $x_2 = 40$ nur wenig von der Geraden abweichen. Es sei noch bemerkt, daß für die Maßzahlen von x und y jeweils ein anderer Maßstab gewählt wurde, damit der Verlauf der Funktion recht deutlich wird.

Lösungen zu alpha-heiter (3/73)

Kompliziertes Problem — einfache Lösung

Der Minuend habe die Ziffernfolge a, b, c, wobei auf Grund der Aufgabenstellung $a>c$ gelten soll. Der Subtrahend hat dann die Ziffernfolge c, b, a mit $0<a, c \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$.

Zur Subtraktionsaufgabe: In der Einerstelle ist $c-a$ nicht im Bereich der natürlichen Zahlen durchführbar, d. h. die letzte Ziffer der Differenz ergibt sich aus $(10+c)-a$. Hieraus folgt, daß die mittlere Ziffer der Differenz 9 sein muß, denn $1+9+b=10+b$. Da die 10 in der Hunderterstelle ihre Berücksichtigung findet, lautet die 1. Ziffer der Differenz $a-(c+1)$.

Hunderter	Zehner	Einer	
a	b	c	
c	b	a	
$a-(c+1)$	9	$(10+c)-a$	*Differenz*
$(10+c)-a$	9	$a-(c+1)$	
10	8	9	Summe

Zur Additionsaufgabe: Das Ergebnis in der Einerstelle ist stets 9, in der Zehnerstelle stets 18, wobei die 1 in der Hunderterstelle berücksichtigt wird, so daß hier das Endergebnis 10 lautet.

b) Die erste Ziffer der Differenz ist nur dann 0, wenn $a=c+1$ ist. Die Einerstelle lautet dann stets $(10+c)-(c+1)=9$. Nur im Falle 0 9 9 steht also in der Differenz eine 0 an der ersten Stelle, und es gilt dann

$$\begin{array}{r} 099 \\ +\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Alle Tassen im Schrank?

(Übersetzt und bearbeitet v. Oberlehrer H. Büchel, Zella-Mehlis)

Alle „Zahlenangaben" (R, r, d, H) verwirren nur! Natürlich enthält die „Stumpftasse" mehr Flüssigkeit. Die „Fehlmenge" ist bei ihr nur ein Kegelstumpfvolumen (mit der Höhe d), während sie im anderen Fall ein Zylindervolumen (mit der Höhe d) ist. Der Unterschied im Volumen ließe sich berechnen, aber danach ist nicht gefragt.

Verkettung

r	a	d	i	u	s	c	h	e	n	k	e	l
p	r	i	s	m	a	d	d	i	t	i	o	n
i	n	h	a	l	t	a	n	g	e	n	t	e
t	r	a	p	e	z	y	l	i	n	d	e	r

Zahlenrätsel

$$\begin{array}{rcrcr} 7276 & : & 68 & = & 107 \\ - & & \cdot & & + \\ 2101 & + & 43 & = & 2144 \\ \hline 5175 & - & 2924 & = & 2251 \end{array}$$

Kryptarithmetik

$$(2+2)+3(6+6)=2^2+6^2$$
$$4 \quad +3 \cdot 12 \ =4 \ +36$$
$$4+36 \ =40$$
$$40 \ =40$$

Silbenrätsel

Abbildung – Linear – Graph – Ordinate – Rational – Intervall – Tangens – Hyperbel – Monoton – Ursprung – Symmetrisch

Für Mühlespieler

Da beide Spieler nur noch drei Steine haben, können sie mit ihren Steinen springen, statt nur von einem Feld auf ein benachbartes zu ziehen. Im ersten Zug springt „Weiß" mit dem Stein vom Feld 21 auf Feld 2. „Schwarz" springt entweder (erster Fall) mit einem seiner Steine auf Feld 3 oder er führt (zweiter Fall) einen anderen möglichen Zug aus.

Im zweiten Fall wird „Weiß" bei seinem zweiten Zug den Stein von Feld 11 auf Feld 3 setzen, damit eine Mühle und die Partie mit seinem zweiten Zug gewinnen. Im ersten Fall wird „Weiß" bei seinem zweiten Zug den Stein von Feld 1 auf Feld 10 setzen.

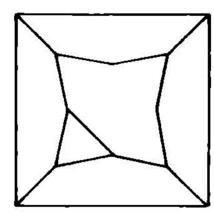
Die nun möglichen Züge von „Schwarz" unterscheiden wir in der folgenden Weise:

Fall a: „Schwarz" springt mit einem seiner Steine auf Feld 18.

Fall b: „Schwarz" springt nicht mit einem seiner Steine auf Feld 18.

Im Fall a springt „Weiß" von Feld 2 auf Feld 9, im Fall b von Feld 11 auf Feld 18. In beiden Fällen a und b erringt „Weiß" eine Mühle und gewinnt die Partie im dritten Zug.

Magisches Zwölfeck

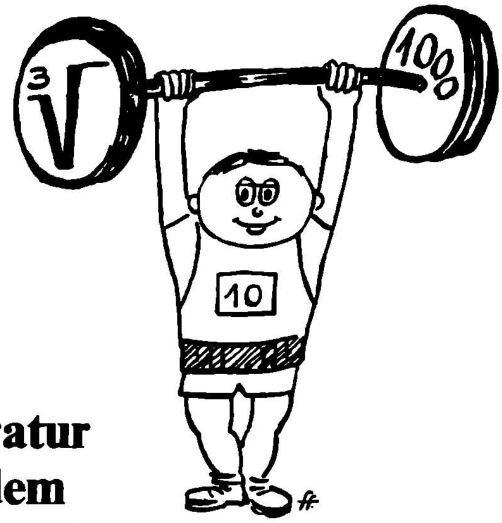


Rätselspirale

1 L	E	6 R	E	L	U	5 E	D
I	A	N	A	L	R	10 E	Ö
N	7 L	G	N	O	13 D	N	N
I	O	E	R	E	N	E	I
2 E	R	11 R	K	A	A	B	4 E
I	E	I	G	12 A	N	E	Z
N	N	T	8 Z	A	N	G	N
D	E	U	T	I	3 G	R	E

„Bei aller Liebe zur Mathematik — um 23 Uhr gehörst du nach Hause."

Glos Nauczycielski, Warszawa



Literatur aus dem Sportverlag

K.-H. Stichert

Schülersport — Sportschwimmen

160 S., 5,— M

Das Selbsterlernen der Techniken der vier Wettkampfschwimmarten für Schüler ist jetzt möglich! Ein methodisch gut aufbereitetes Sportfachbuch, leichtverständlich.

W. Lohmann

Schülersport — Lauf, Sprung, Wurf

160 S., 5,— M

Ein programmiertes Schülerfachbuch zum Selbsterlernen leichtathletischer Techniken und zum Selbsttraining.

N. Rogalski/E.-G. Degel

Schülersport — Fußball

160 S., 5,— M

Fußball ist ein Sportfachbuch für Schüler, mit dessen Hilfe sie die einzelnen Techniken und grundlegendsten taktischen Verhaltensweisen weitgehend selbständig erlernen können. Der Stoff wird in programmierter Form leicht faßbar dargeboten.

H. Rothert

Schülersport — Ringen

160 S., 5,— M

Dieser programmierte Lernstoff für die Hand des Schülers ist ein wesentlicher Beitrag zur Verbesserung der Grundausbildung im Ringkampfsport. Dieses Buch behandelt die olympischen Disziplinen *Klassischer Stil* und *Freier Stil.*

Über das Symbol der X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten

Der rot gedruckte Teil des abgebildeten vereinfachten Symbols der X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten symbolisiert die fünf bewohnten Erdteile und das Recht ihrer Menschen auf Gleichberechtigung. Dieser Teil wird begrenzt von fünf kongruenten Kreisbögen, von denen je zwei benachbarte Kreisbögen jeweils gemeinsame Endpunkte haben, die sämtlich auf einem Kreis liegen.
Der schwarz gedruckte Teil des abgebildeten Symbols, der die Erdkugel darstellt, besteht aus einem Kreis, zwei senkrecht aufeinander stehenden Durchmessern dieses Kreises und einer Ellipse, mit einem dieser Durchmesser als Hauptachse und der halben Länge des zweiten Durchmessers als Nebenachse.
Unter Beachtung dieser Angaben haben wir für unsere interessierten Leser folgende Aufgaben zusammengestellt:

5 ▲ 1077 Zeichne mit Zirkel, Lineal und Winkelmesser das Bild des rotgedruckten Teiles des abgebildeten Symbols der X. Weltfestspiele der Jugend und Studenten! Der Radius des Kreises, auf dem die Endpunkte der kongruenten Kreisbögen liegen, betrage $r=4$ cm.

6 ▲ 1078 Die abgebildete Ellipse läßt sich näherungsweise durch zwei kongruente Kreisbögen ersetzen, die einen der beiden Kreisdurchmesser als gemeinsame Sehne haben und die die auf dem anderen Durchmesser liegenden Radien halbieren. Es ist diese Näherungskonstruktion für den Durchmesser des Kreises $d=7$ cm auszuführen.

7 ▲ 1079 Vervollständigt man die im rotgedruckten Teil des abgebildeten Symbols dargestellten fünf kongruenten Kreisbögen zu vollständigen Kreisen, so schneiden sich diese Kreise in weiteren fünf Punkten. Welche Figur wird durch diese weiteren fünf Schnittpunkte bestimmt?

8 ▲ 1080 Im schwarzgedruckten Teil des abgebildeten Symbols werde die dem Kreis einbeschriebene Ellipse durch zwei kongruente Kreisbögen ersetzt, die den einen der abgebildeten Durchmesser als gemeinsame Sehne haben und die die auf dem anderen Durchmesser liegenden beiden Radien halbieren. Es ist der Abstand des Mittelpunkts des dargestellten Kreises vom Mittelpunkt des zu einem der Kreisbögen gehörigen Kreises zu berechnen.

9 ▲ 1081 Die im schwarzgedruckten Teil des abgebildeten Symbols dargestellte Ellipse ist das durch senkrechte Eintafelprojektion entstandene Bild eines Längenkreises des Erdglobus, wobei die zugehörige Bildebene die Ebene ist, in der der dargestellte Kreis liegt. Welchen Winkel bildet die Ebene, die den Längenkreis enthält, mit der Ebene, die den dargestellten Kreis enthält?

10/12 ▲ 1082 Es sei s die Verbindungsstrecke (Sehne) der beiden Endpunkte eines der im rotgedruckten Teil des abgebildeten Symbols dargestellten fünf kongruenten Kreisbögen und r der Radius des Kreises, auf dem sämtliche Endpunkte dieser Kreisbögen liegen. Es ist zu zeigen, daß s und r der Gleichung

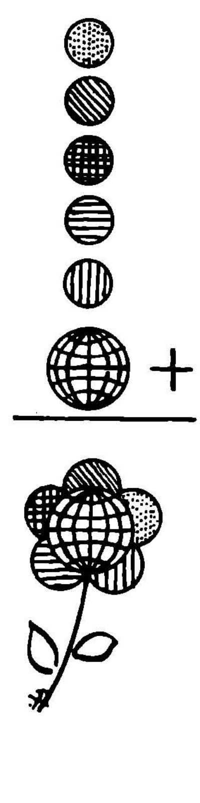
$$s=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

genügen.

Th. Scholl/W. Träger

von Prag bis Berlin

Stationen des Festivals



I Prag (20. 7. bis 17. 8. 1947)
Es war die erste Zusammenkunft der friedliebenden Weltjungend nach dem zweiten Weltkrieg, die den unbeugsamen Willen, ihre im Krieg geschmiedete Einheit aufrechtzuerhalten und für Frieden und Demokratie zu wirken, manifestierte. (17000 Teilnehmer aus 72 Ländern)

II Budapest (11. bis 18. 8. 1949)
Das Festival unter der Losung „Jugend, vereinige dich! Vorwärts für einen dauerhaften Frieden, Demokratie, nationale Unabhängigkeit und eine bessere Zukunft der Völker!" (10000 Teilnehmer aus 82 Ländern) Erstmalig war eine Delegation unserer FDJ vertreten, die am 21. 3. 1948 in den WBDJ aufgenommen wurde.

III Berlin (5. bis 19. 8. 1951)
Dieses Festival bewies das Vertrauen der demokratischen Weltjugend in die Jugend des ersten deutschen Arbeiter- und Bauernstaates. (26000 Teilnehmer aus 104 Ländern) Im Zentrum aller Veranstaltungen stand der Kampf gegen Atomwaffen und für das Verbot der Massenvernichtungsmittel.

IV Bukarest (2. bis 16. 8. 1953)
Das Festival stand im Zeichen eines großen Sieges der Weltfriedensbewegung, des Waffenstillstandes in Korea. (30000 Teilnehmer aus 111 Ländern)

V Warschau (31. 7. bis 14. 8. 1955)
Im Mittelpunkt stand der Kampf gegen die aggressiven imperialistischen Militärpakte.
(30000 Teilnehmer aus 114 Ländern)

VI Moskau (28. 7. bis 11. 8. 1957)
Das Festival im ersten sozialistischen Staat der Welt stand im Zeichen des Kampfes gegen Kolonialismus und Militarismus für friedliche Koexistenz zwischen Staaten unterschiedlicher Gesellschaftsordnung. (34000 Teilnehmer aus 131 Ländern)

VII Wien (24. 7. bis 4. 8. 1959)
Zum ersten Male fanden damit Weltfestspiele in einem kapitalistischen Staat statt. Trotz aller Provokationen des Gegners wurden sie dank der Überzeugungskraft der ihnen zugrunde liegenden Idee und der Disziplin der Teilnahmer ein Erfolg.
(18000 Teilnehmer aus 112 Ländern)

VIII Helsinki (28. 7. bis 6. 8. 1962)
Die Jugend demonstrierte ihren Willen nach Frieden und Freundschaft zwischen den Völkern, für Einstellung der Kernwaffenversuche, für Verbot der Atomwaffen. (18000 Teilnehmer aus 137 Ländern)

IX Sofia (28. 7. bis 6. 8. 1968)
Losung: „ Für Solidarität, Frieden und Freundschaft". Die FDJ-Vertreter übergaben der vietnamesischen Delegation 2,3 Mio Mark als Ergebnis der Aktion „Eine Schiffsfracht für Vietnam". (18000 Teilnahmer aus 142 Ländern)