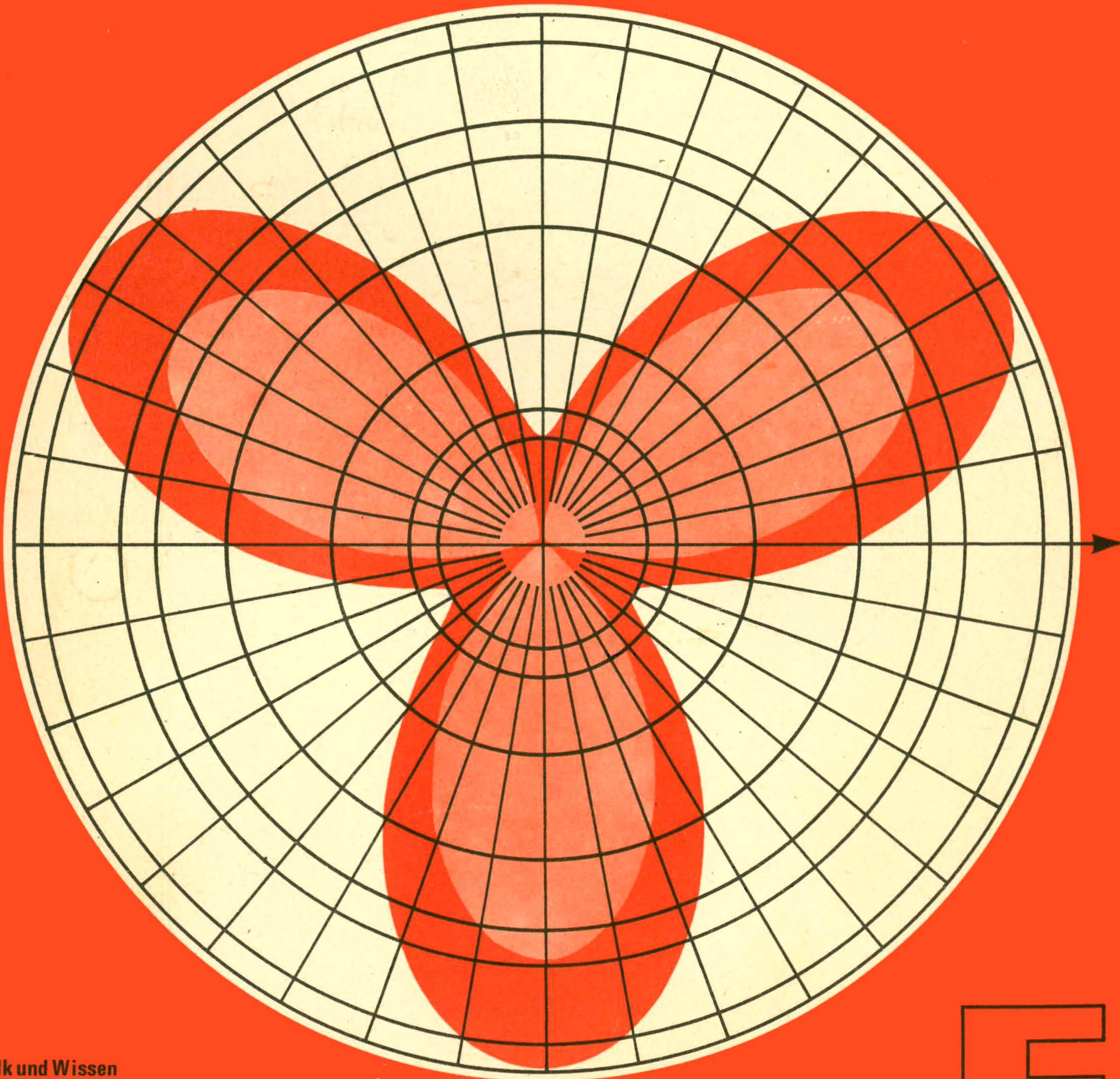
alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
11. Jahrgang 1977
Preis 0,50 M
Index 31059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Vignetten aus sowj. Büchern mit Unterhaltungsmathematik (S. 99, 100, 104, 112, IV.-U.-Seite); J. Sikojev, Berlin (S. 101); Repro, zur Verfügung gestellt von Red. „Wochenpost“ aus: Soviet Life Today (S. 102); Station Jg. Techniker u. Na'urf., Saalkreis (S. 105); Piostik, Moskau (S. 110); *Aus:* Kalenderblätter des Eulenspiegelverlages (S. 111); Zentralbild (III. U.-Seite)
Typographie: H. Tracksdorf
Das Titelblatt wurde (stilisiert) dem Beitrag auf Seite 107 entnommen.

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 4. Juli 1977
Index 31059

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Dieses Heft entstand in enger Zusammenarbeit zwischen Wissenschaftlern und Lehrern der UdSSR und der DDR.

Inhalt

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Polarkoordinaten

Während eines Frühstücks im Pionierlager fragte unser Pionierleiter Wolodja: „Wer möchte heute Himbeeren essen? Sie sind jetzt reif, und ich zeige euch den Weg. Ihr müßt aber langärmlige Hemden anziehen, denn es gibt dort viele Brennesseln."
Nach dem Frühstück warteten zwei Dutzend Himbeerliebhaber ungeduldig auf Wolodja. „Wir kommen zu den Himbeeren, indem wir zunächst die Hauptstraße entlanggehen und dann an der nächsten Schneise rechts abbiegen!" sagte Wolodja. „Das sind etwas mehr als 2 km. Wenn wir aber direkt quer durch den Wald zu den Himbeeren wandern, dann sind es nur 1,5 km. Also, wie gehen wir?" wollte Wolodja wissen. „Quer durch den Wald!" riefen die Himbeerliebhaber im Chor. „Hoffentlich verlaufen wir uns nicht!" Wolodja war einverstanden und führte uns aus dem Lager heraus. „Jetzt erkläre ich euch unseren Weg: Die Richtung ist 120° gegen die Straße, die Entfernung beträgt 2000 Schritte. Dort beginnt eine Schlucht, in der Himbeeren wachsen."
„Wessen Schrittmaß wurde verwendet?" wollte ein kleines Mädchen wissen. „Ich brauche sicher 3000 Schritte." Alle lächelten. Wir überquerten die Straße. Als wir den Wald erreichten, krempelte Wolodja die Ärmel hoch. Anstelle einer Armbanduhr trug er einen Kompaß. Mit Hilfe des Kompaß' stellten wir fest, daß die Straße in Nord-Süd-Richtung verläuft. Unser Weg zu den Himbeeren bildet mit der Nord-Süd-Richtung einen Winkel von 120°, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gemessen. Alle betrachteten den Kompaß. „Schaut mal! Wir können als Orientierungspunkt diese hohe Kiefer nutzen. Sie steht in Richtung unseres Weges", erklärte Wolodja.
Wir gingen los. Nach 20 Minuten erreichten wir die Schlucht. Die Himbeeren waren wirklich sehr süß und saftig.
Als wir ins Lager zurückgekehrt waren, fertigte ich eine Skizze an (siehe Bild 1). Die Südrichtung der Straße bildet mit der Strecke $\overline{AM}$ einen Winkel von 120°, gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Strecke $\overline{AM}$ beträgt 1,4 km: bis zur Schlucht zählte ich 2150 Schritte, und die Länge eines Schrittes von mir entspricht ca. 65 cm. Ich muß mir also nur zwei Zahlen merken, um die Himbeerschlucht wiederzufinden: Richtung 120° und Entfernung 1400 m. Auf der Skizze schrieb ich nur: M (1400; 120°). Später fügte ich der Skizze noch den kürzesten Weg zu einem naheliegenden Erholungsheim hinzu, wo wir manchmal Eis essen konnten. Die Lage des Erholungsheimes schrieb ich wie folgt auf: E (1200; 30°).

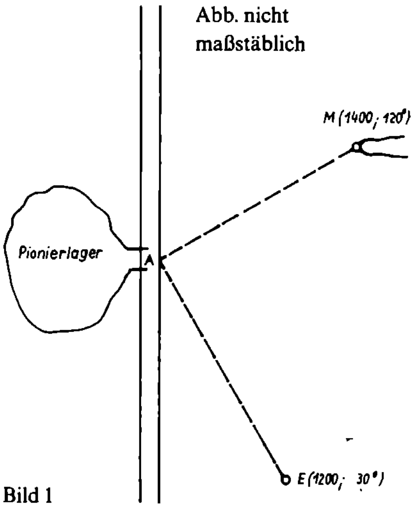


Bild 1

– In der Nähe unseres Lagers war auch ein kleiner See, in dem wir oft badeten. Seine Lage kann man folgendermaßen kennzeichnen: S (700; 270°).
Trage selbst in Bild 1 die Lage des Sees ein!
Wenn man in einer Ebene einen Punkt O (Pol) festlegt und von diesem Punkt aus einen Strahl OP (Polarachse), der mit Einheiten versehen ist, zeichnet, so kann man die Lage eines beliebigen Punktes $M \neq 0$ der Ebene durch ein Zahlenpaar – Länge der Strecke $\overline{OM}$ (Polarradius) und Größe des Winkels MOP (Polarwinkel) bestimmen (siehe Bild 2), also genauso wie wir die Himbeerschlucht und das Erholungsheim auf dem Bild 1 vermerkten. Die Entfernung OM vom Pol bezeichnet man gewöhnlich mit r, den Polarwinkel mit α. Der Polarwinkel α ist dabei derjenige Winkel, um den man die Polarachse OP entgegen dem Uhrzeigersinn drehen muß, bis sie mit dem Strahl durch OM zusammenfällt. Auf dem Bild 2 entspricht dem Punkt M $r = 8$ Einheiten und $\alpha = 45°$. Das schreibt man so: M (8; 45°). Den Punkt K im Bild 2 kann man analog dazu angeben: K (4; 120°).

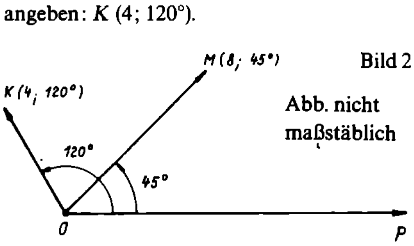
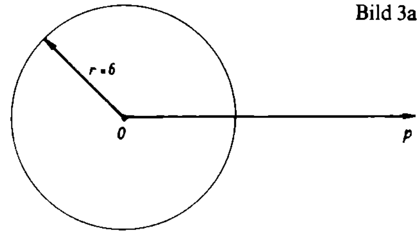


Bild 2

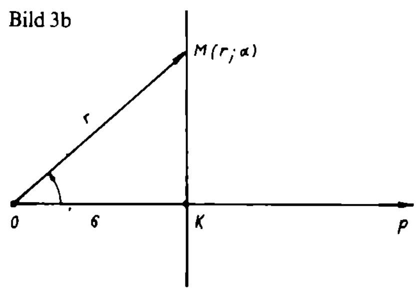
Gib in entsprechender Weise den Punkt A des Bildes 2 an! Damit haben wir eine eindeutige Abbildung zwischen Punkten der Ebene und Zahlenpaaren (r; α). (Mit einer Ausnahme: für den Punkt O haben wir $r = 0$, aber den Polarwinkel kann man nicht angeben.) Diese Abbildung nennt man Abbildung mit Hilfe eines Polarkoordinatensystems.
Wir wissen schon, daß eine Gleichung in den Variablen x und y im rechtwinkligen Koordinatensystem eine Kurve festlegt, d.h. eine Menge von Punkten, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. Eine Gleichung in der Variablen r und α kann im Polarkoordinatensystem auch eine Kurve festlegen:
a) Durch die Gleichung $r = 6$ wird eine Kurve bestimmt, deren Punkte einen Abstand von 6 Einheiten vom Punkt 0 haben, das heißt einen Kreis mit dem Radius $R = 6$ Einheiten (siehe Bild 3a).

Bild 3a



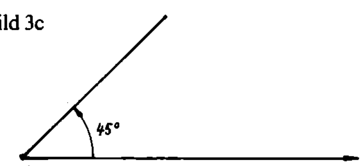
b) Durch die Gleichung $r \cdot \cos\alpha = 6$ wird eine Gerade bestimmt, die senkrecht zur Polarachse – 6 Einheiten vom Pol entfernt – verläuft (siehe Bild 3b).

Bild 3b



c) Durch die Gleichung $\alpha = 45°$ wird eine Gerade definiert, die durch den Pol 0 und im Winkel von 45° zur Polarachse verläuft (siehe Bild 3c).

Bild 3c



d) Durch die Gleichung $r \cdot \cos(\alpha - 60°) = 6$ wird eine Gerade festgelegt, welche einen Winkel von 150° mit der Polarachse bildet und die Polarachse im Abstand von 12 Einheiten bezüglich des Punktes 0 schneidet (siehe Bild 3d).

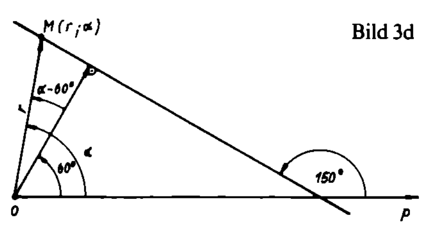


Bild 3d

e) Durch die Gleichung $r = 6 \cdot \cos\alpha$ wird ein Kreis mit dem Radius 3 Einheiten und dem Mittelpunkt A (3; 0) festgelegt (siehe Bild 3e).

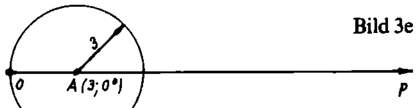


Bild 3e

f) Durch die Gleichung $r = 6 \cdot \cos 2\alpha$ wird eine „Blume" mit 4 Blütenblättern festgelegt (siehe Bild 3f).

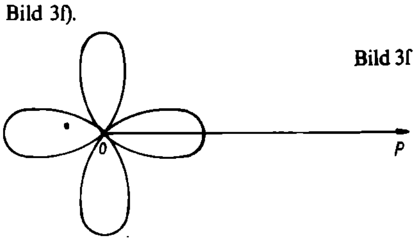


Bild 3f

Die Kurven im Polarkoordinatensystem kann man genauso wie im rechtwinkligen Koordinatensystem punktweise ermitteln. D. h., die Winkelgröße α legt man fest und die dazugehörige Größe r ist zu berechnen. Dazu eignet sich eine Werttabelle. Als Beispiel fertigen wir uns eine für die Kurve mit der Gleichung $r = a\,(1 - \cos\alpha)$ an. Die Größe a sei 10 Einheiten (im Bild 4 entspricht 1 Einheit 0,5 cm).

α	$\cos\alpha$	$1-\cos\alpha$	$r = 10(1-\cos\alpha)$
0°	1	0	0
15°	0,97	0,03	0,3
30°	0,87	0,13	1,3
45°	0,7	0,3	3
60°	0,5	0,5	5
75°	0,26	0,74	7,4
90°	0	1	10
105°	−0,26	1,26	12,6
120°	−0,5	1,5	15
135°	−0,7	1,7	17
150°	−0,87	1,87	18,7
165°	−0,97	1,97	19,7
180°	−1	2	20

Verbinden wir die erhaltenen Punkte, so ergibt sich das Bild 4, d. h. eine Hälfte der Kurve, nämlich den Teil, der über der Polarachse liegt. Wenn wir die Tabelle bis $\alpha = 360°$ fortsetzen, erhält man die zweite Hälfte der Kurve. Eine solche Kurve nennt man Kardioide. Weil $\cos\alpha = \cos\,(360° - \alpha)$, ist die untere Hälfte der Kurve symmetrisch zur oberen bezüglich der Polarachse.

Es sei noch bemerkt, daß im rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen x-Achse mit der Polarachse und dessen Ursprung mit O zusammenfällt, durch die Gleichung $x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$ dieselbe Kurve festgelegt wird. Wenn wir aber die Wurzel vermeiden wollen, erhalten wir eine Gleichung 4. Grades, also eine viel kompliziertere Gleichung als für das Polarkoordinatensystem.

Jedem Punkt M der Ebene entsprechen jetzt zwei Zahlenpaare: im rechtwinkligen Koordinatensystem – Abszisse x und Ordinate y; im

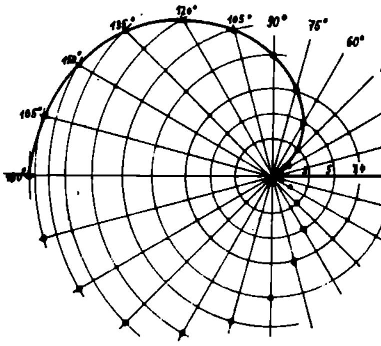


Bild 4

Polarkoordinatensystem – die Strecke $\overline{OM} = r$ und der Polarwinkel α.

Wenn unser Pol des Polarkoordinatensystems mit dem Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfällt und die x-Achse mit der Polarachse übereinstimmt, dann bestehen zwischen den Polarkoordinaten und den entsprechenden x-y-Koordinaten folgende Beziehungen (siehe Bild 5):

$$\overline{OA} = x = r\cos\alpha \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\overline{AM} = y = r\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Diese Gleichungen ermöglichen einen Übergang von der einen Koordinatenschreibweise in die andere. Berechnen wir z. B. die Polarkoordinaten der Punkte M (3; 4) und K (4; −3), $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\sin\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Daraus entnimmt man mit der Tafel $\alpha = 53{,}1°$; also M (5; 53,1). Der positive Wert des Kosinus und der negative Wert des Sinus vom Winkel α_k zeigt, daß der Winkel α_k im 4. Quadranten liegt. Entsprechend der Quadrantenbeziehungen finden wir $\alpha_k = 323{,}1°$ und daraus folgt K (5; 323,1°).

Von den Polarkoordinaten kann man auch leicht zu rechtwinkligen Koordinaten übergehen, z. B.:

Der Punkt M (8; 45°) hat folgende rechtwinklige Koordinaten

$$x_M = 8\cos 45 = 8\frac{\sqrt{2}}{2}4\sqrt{2};$$
$$y_M = 8\sin 45 = 8\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

– Ermittle selbst die Polarkoordinaten für den Punkt B (−12; 5) und die x-y-Koordinaten für den Punkt F (4; 120°)!

Aufgaben

▲1▲ Die Gleichung $r = a\,\sin 2\alpha$ legt auch ein „Vierblättriges Blütenblatt" fest. Konstruiere punktweise die Kurve für $\alpha = 10$!

▲2▲ Konstruiere folgende Kurven!

a) $r = a\,\sin 3\alpha$; c) $r = a\,\sin 4\alpha$;
b) $r = 1\,\cos 3\alpha$; d) $r^2\,\cos 2\alpha$.

▲3▲ Konstruiere eine Parabel mit der Gleichung $r\,(1 + \cos\alpha) = a$. Wie lautet eine entsprechende Gleichung für ein x-y-Koordinatensystem?

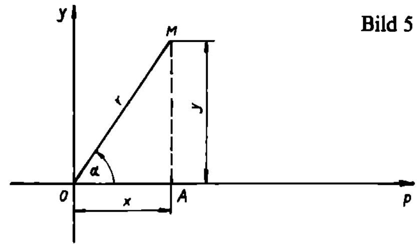


Bild 5

▲4▲ Konstruiere folgende Spiralen!

a) Spirale von Archimedes: $r = a \cdot \alpha$;

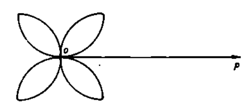
b) Hyperbolische Spirale: $r = \frac{a}{\alpha}$;

c) Logarithmische Spirale: $r = a^{\alpha}$;

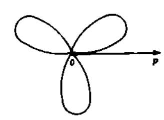
Bei Aufgabe 4 ist α im Bogenmaß zu verwenden! *A. Halameisär*

Lösungen

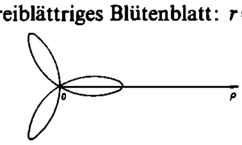
▲1▲ vierblättriges Blütenblatt $r = a \cdot \sin 2\alpha$



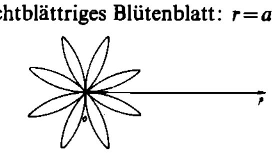
▲2▲ a) dreiblättriges Blütenblatt: $r = a \cdot \sin 3\alpha$



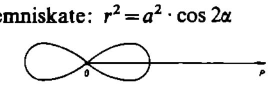
b) dreiblättriges Blütenblatt: $r = a \cdot \cos 3\alpha$



c) achtblättriges Blütenblatt: $r = a \cdot \sin 4\alpha$

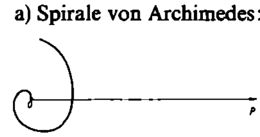


d) Lemniskate: $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\alpha$



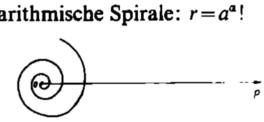
▲3▲ Die Konstruktion bleibt dem Leser überlassen.

▲4▲ a) Spirale von Archimedes: $r = a \cdot \alpha$



b) hyperbolische Spirale: $r = \frac{a}{\alpha}$.

c) logarithmische Spirale: $r = a^{\alpha}$!



Der interessierte Leser sei auf die Konstruktionen von Kurven in der *Kleinen Enzyklopädie Mathematik* S. 443 ff. hingewiesen, d. Red.

Aufgaben aus Freundesland

I класс

1. У мальчика было 15 копеек. Когда он купил марки, ему дали сдачи 3 копейки. Сколько стоили марки? Какие марки он мог купить (рис. I).

2. У Веры было 12 переводных картинок. Мама подарила ей на 3 картинки больше, чем у нее было. Сколько картинок стало у Веры?
3. Школьники посадили деревья: 38 берез, 29 лип, а дубов на 15 меньше, чем берез и лип вместе. Сколько дубов посадили дети?

II класс

1. Коля поймал 10 рыб, а Сережа поймал в два раза больше. Сколько рыб поймали оба мальчика вместе?

2. Во время отпуска папа сделал 92 фотоснимка, в том числе на 2 цветных пленки по 30 снимков на каждой и одну черно-белую пленку. Сколько снимков на черно-белой пленке сделал папа?

3. Мама купила один арбуз весом в 3 кг, а другой — весом в 2 кг. Сколько стоят оба арбуза, если за 1 кг нужно платить 15 копеек?

III класс

1. В первый день туристского похода пионеры прошли 12 км, а во второй день — еще 15 км. Всего они за оба дня были в пути 9 часов. Сколько часов пионеры были в пути каждый день?
2. В школьную столовую привезли 7 ящиков яблок и 9 ящиков груш, всего 96 кг фруктов. Вес фруктов в каждóм ящике один и тот же. Сколько килограммов яблок и сколько кг груш привезли в школу?
3. В первый день школьных каникул в музей пошли 5 групп учеников, а во второй день — еще 4 таких же группы. Всего за два дня в музей ходили 180 учеников. Сколько учеников ходили в музей в каждый из двух дней?

IV класс

1. Пароход проходит по течению 26,5 км в час, а против течения — только 18,5 км в час. Найти скорость течения и собственную скорость парохода.

2. Сплав содержит 3 части меди и 2 части олова, причем меди на 34,2 г больше, чем олова. Сколько меди и сколько олова в сплаве?

3. Геологи проделали путь в 2450 км. 10% пути они летели в самолете, 60% пути плыли в лодке, а остальной путь прошли пешком. Сколько км геологи прошли пешком?

V класс

1. Доклад ученика продолжался $\frac{2}{5}$ урока, рассказ учителя $\frac{2}{15}$ урока, остальное время учащиеся решали задачу. Сколько времени учащиеся решали задачу (1 урок = 45 мин.)?

2. Мастер может выполнить порученную работу за 20 дней, а ученик — за 30 дней. За сколько дней выполнят эту работу мастер и ученик совместно?

3. Собрали 100 кг грибов, влажность которых составляет 90%. Когда грибы подсохли, их влажность оказалась 80%. Сколько весят грибы после подсушки?

VI класс

1. Сплав меди и цинка содержит 82% меди. После добавления 18 кг цинка сплав стал содержать только 70% меди. Сколько меди и сколько цинка было в сплаве вначале?

2. Миша купил 10 конвертов и 8 видовых открыток с марками за 82 копейки, а Вера купила 3 конверта и 5 открыток за 35 коп. Сколько стоит конверт с маркой и сколько стоит видовая открытка с маркой?

3. Токарь и его ученик должны были изготовить за смену 65 деталей. Но токарь перевыполнил задание на 10%, а ученик — на 20%, поэтому они изготовили вместе 74 детали. Сколько деталей должен был сделать каждый из них?

VII класс

1. Турист проплыл на лодке 24 км по течению реки и вернулся обратно, затратив на весь путь 7 часов. Скорость его лодки в стоячей воде 7 км/час. Найдите скорость течения реки.

2. Поезд Москва — Харьков отправился с опозданием на 1 час. Но он прошел этот путь (720 км) со скоростью, на 10 км/час больше, чем предусмотрено расписанием, и прибыл в Харьков своевременно. С какой скоростью шел этот поезд?

VIII класс

1. Найдите сумму всех нечетных натуральных чисел, меньших 1000.
2. Что больше: а) $4\sqrt{3}$ или 7? б) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$?
3. В чем сходство и в чем различие между уравнениями $\sqrt{2x+1}+x=7$ и $\sqrt{2x+1}+7=x$?

IX класс

1. В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 8 см нужно вписать прямоугольник так, чтобы одна из его сторон лежала на основании треугольника. При какой высоте прямоугольника его площадь будет максимальной?

2. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды 7 см, стороны оснований 10 см (внизу) и 2 см (вверху). Найти длину бокового ребра пирамиды.

3. Составить уравнение касательной к кривой $y=x^3$ в точке, где $x=-2$.

X класс

1. Доказать, что $\sin 18° \cdot \cos 36° = 0{,}25$.

2. Решить уравнение $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = 0{,}25$.

3. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями
$y^2=2x+1$ и $x-y=1$.

Schüler einer Internatsschule in Ordshonikidse, s. Beitrag S. 101

Aufgaben aus sowjetischen Lehrbüchern

Klasse 1

▲1▲ Ein Schüler hatte 15 Kopeken. Als er Briefmarken kaufte, erhielt er 3 Kopeken zurück.
Wieviel kosteten die Briefmarken? Was für Marken konnte er kaufen (siehe Bild 1)?

▲2▲ Vera hatte 12 Abziehbilder. Die Mutti schenkte ihr noch 3 Abziehbilder mehr, als sie schon hatte.
Wieviel Bilder hatte Vera nun?

▲3▲ Schüler pflanzten Bäume: 38 Birken, 29 Linden; Eichen pflanzten sie 15 weniger als Birken und Linden zusammen.
Wieviel Eichen pflanzten die Kinder?

Klasse 2

▲1▲ Kolja angelte 10 Fische, aber Serjoscha angelte zweimal mehr.
Wieviel Fische angelten beide Jungen zusammen?

▲2▲ Während des Urlaubs machte Vati 92 Fotos, darunter waren 2 Farbfilme zu jeweils 30 Bildern und ein Schwarz-Weiß-Film.
Wieviel Fotos machte Vati auf dem Schwarz-Weiß-Film?

▲3▲ Mutti kaufte eine Wassermelone von 3 kg und eine andere von 2 kg.
Wieviel kosten beide Wassermelonen, wenn man für ein Kilogramm 15 Kopeken bezahlen muß?

Klasse 3

▲1▲ Am 1. Tag der Touristenwanderung legten die Pioniere 12 km zurück und am zweiten Tag noch 15 km. Insgesamt waren sie an den beiden Tagen 9 Stunden unterwegs.
Wieviel Stunden wanderten die Pioniere an jedem Tag?

▲2▲ In die Schulküche brachte man 7 Kisten Äpfel und 9 Kisten Birnen, insgesamt 96 kg Früchte. Das Gewicht der Früchte in jeder Kiste war ein und dasselbe.
Wieviel kg Äpfel und wieviel kg Birnen brachte man in die Schulküche?

▲3▲ Am ersten Tag der Schulferien gingen 5 Schülergruppen ins Museum und am zweiten Tag noch vier solcher Gruppen. Insgesamt waren an den zwei Tagen 180 Schüler im Museum.
Wieviel Schüler waren an jedem der zwei Tage im Museum?

Klasse 4

▲1▲ Ein Dampfer bewegt sich mit der Strömung mit einer Geschwindigkeit von $26{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, aber gegen die Strömung nur mit $18{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Gib die Geschwindigkeit der Strömung und die Eigengeschwindigkeit des Dampfers an!

▲2▲ Eine Legierung besteht zu 3 Teilen aus Kupfer und zu 2 Teilen aus Zinn, wobei 34,2 g Kupfer mehr als Zinn vorhanden sind.
Wieviel Kupfer und wieviel Zinn sind in der Legierung?

▲3▲ Geologen legten einen Weg von 2450 km zurück. 10% des Weges flogen sie im Flugzeug, 60% des Weges fuhren sie im Boot und den Rest liefen sie zu Fuß.
Wieviel km gingen die Geologen zu Fuß?

Klasse 5

▲1▲ Der Schülervortrag dauerte $\frac{2}{5}$ der Unterrichtsstunde, der Lehrervortrag $\frac{2}{15}$ der Stunde, in der restlichen Zeit lösten die Schüler Aufgaben.
Wie lange lösten die Schüler Aufgaben (1 Unterrichtsstunde ≙ 45 min)?

▲2▲ Ein Meister kann den Arbeitsauftrag in 20 Tagen schaffen, ein Lehrling in 30 Tagen.
In wieviel Tagen erfüllen diese Arbeit Meister und Lehrling zusammen?

▲3▲ Man sammelte 100 kg Pilze, die 90% aus Feuchtigkeit bestanden. Als die Pilze etwas getrocknet waren, betrug ihre Feuchtigkeit 80%.
Wieviel wiegen die Pilze nach dieser Trocknung?

Klasse 6

▲1▲ Eine Legierung aus Kupfer und Zink enthält 82% Kupfer. Nach einem Zusatz von 18 kg Zink enthält die Legierung nur noch 70% Kupfer.
Wieviel Kupfer und wieviel Zink waren am Anfang in der Legierung?

▲2▲ Michael kaufte 10 Briefumschläge und 8 Ansichtskarten (jeweils mit Briefmarke) für 82 Kopeken, und Vera kaufte 3 Briefumschläge und 5 Karten (jeweils mit Briefmarke) für 35 Kopeken.
Wieviel kostet ein Briefumschlag mit Briefmarke, und wieviel kostet eine Ansichtskarte mit Briefmarke?

▲3▲ Ein Dreher und sein Lehrling mußten in einer Schicht 65 Werkstücke anfertigen. Der Dreher schaffte 10% und der Lehrling 20% über den Plan, so stellten sie zusammen 74 Werkstücke her.
Wieviel Werkstücke mußte jeder von ihnen herstellen?

Klasse 7

▲1▲ Ein Tourist fuhr in einem Boot 24 km stromabwärts auf einem Fluß und anschließend zurück entgegengesetzt der Strömung. Für den ganzen Weg benötigte er 7 Stunden. Die Geschwindigkeit des Bootes in stehendem Wasser beträgt $7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gib die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses an!

▲2▲ Der Zug Moskau–Charkow fuhr mit einer Verspätung von einer Stunde ab. Er legte diese Strecke (720 km) mit einer um $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ höheren Geschwindigkeit als fahrplanmäßig vorgesehen zurück und erreichte Charkow pünktlich.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Zug?

Klasse 8

▲1▲ Finde die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 1000 sind!

▲2▲ Was ist größer a) $4\sqrt{3}$ oder 7;
b) $\sqrt{2}$ oder $\sqrt[3]{3}$?

▲3▲ Worin besteht die Gemeinsamkeit und worin besteht der Unterschied zwischen den Gleichungen
$\sqrt{2x+1}+x=7$ und $\sqrt{2x+1}+7=x$?

Klasse 9

▲1▲ In einem gleichschenkligen Dreieck mit einer Grundseite von 20 cm und einer Höhe von 8 cm soll ein Rechteck so eingezeichnet werden, daß eine seiner Seiten auf der Grundseite des Dreiecks liegt.
Bei welcher Höhe des Rechtecks ist die Rechtecksfläche am größten?

▲2▲ Die Höhe eines regelmäßigen viereckigen Pyramidenstumpfes beträgt 7 cm, die Grundseiten betragen (unten) 10 cm und (oben) 2 cm. Finde die Länge der Seitenkante der Pyramide!

▲3▲ Aufzustellen ist die Gleichung der Tangente an die Kurve $y=x^3$ im Punkt $x=-2$.

Klasse 10

▲1▲ Zu beweisen ist, daß
$\sin 18° \cdot \cos 36° = 0{,}25$.

▲2▲ Zu lösen ist die Gleichung
$\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=0{,}25$.

▲3▲ Bestimme die Fläche der Figuren, die begrenzt wird durch die Kurven $y^2=2x+1$ und $x-y=1$!

L. Flade/A. Halameisär

Eine Internatsschule der Stadt Ordshonikidse

Eine normale Internatsschule ist es, wie es viele im Nordkaukasus gibt. Sie befindet sich in einem der Stadtteile von Ordshonikidse, nimmt jedoch eine ziemlich große Fläche ein. Dazu gehören neben den Unterrichtsräumen die Gebäude mit den Schlafsälen, der Speiseraum und eine Vielzahl Hilfsgebäude. Die Schule besitzt einen großen Sportkomplex. Und obwohl sie, wie bereits erwähnt, eine ganz gewöhnliche Schule ist, unterscheidet sie sich doch von ähnlichen anderen Schulen: hier werden *Spezialklassen in Mathematik* geführt, und zwar für achtes, neuntes und zehntes Schuljahr. Die Schule existiert seit 1972. In ihr werden rund 500 Kinder unterrichtet, von denen fast 300 von außerhalb kommen und deshalb die Woche über hier wohnen. Die Auswahl in die Mathematikklassen erfolgt auf der Grundlage der regelmäßig in den Kreisen durchgeführten Mathematikolympiaden. Die besten Schüler – die Sieger dieser Olympiaden – werden in diese Klassen aufgenommen. Nicht selten weilen hier Gäste aus der Moskauer Staatlichen Universität, die talentierte Kinder für die Mathematik-Internatsschulen der Moskauer Staatlichen Universität auswählen.

Der Direktor der Schule, *Asylgirej S. Godshijew*, erzählt über das Leben an der Schule und bemerkt, daß sie wegen ihrer Jugend noch keine eigenen bekannten Mathematiker nachweisen kann, da diese noch in Moskau studieren, jedoch hofft das Lehrerkollektiv, in naher Zukunft unter den berühmten sowjetischen Mathematikern auch die Namen ihrer ehemaligen Schüler wiederzuerkennen.

Einer der vielen Schüler – *Boris Mildsichow* aus der 9. Klasse – ist Sieger der russischen Mathematikolympiade und fährt in diesem Jahr wieder zur Allunionsmathematikolympiade. Seine Mathematiklehrerin, *Raisa K. Demidowa*, hofft auf die Erfolge ihres Zöglings.

Für den Spezialunterricht in Mathematik an der Schule werden Dozenten der *Nord-Ossetischen Kosta-Chetagurow-Universität* der Stadt Ordshonikidse verpflichtet. Natürlich arbeiten auch die Mathematik-Zirkel aktiv. Interne Schul-Mathematik-Olympiaden werden durchgeführt.

Genosse *Godshijew* ist der Meinung, daß die große Aufmerksamkeit, die der Schule durch die Regierung der SOASSR zuteil wird und die großen Mittel, die für die Schulbedürfnisse bereitgestellt werden, es auch in Zukunft ermöglichen werden, die mathematische Spezialisierung der Schule bedeutend zu vertiefen. Alle Klassen sind bereits mit modernen Unterrichtsmitteln ausgestattet (Programmierung des Abfragens mit Hilfe von Spezialapparaturen, moderne Projizier- und Filmapparaturen).

Zweifellos – sagt Genosse *Godshijew* – kann man noch vieles tun. Die Hauptsache ist, Erfahrungen im Unterricht zu sammeln. In diesem Zusammenhang drückte er den Wunsch aus, mit entsprechenden Einrichtungen in der DDR in Erfahrungsaustausch zu treten. Für den Briefwechsel teilt er seine Adresse mit: SOASSR
Ordshonikidse, ul. Minina 15
Internatsschule Nr. 2

Aufgaben der Kreis-Mathematikolympiade

Klassenstufe 7

▲1▲ Berechne das Ergebnis des Ausdrucks:
$$3\frac{1}{117}\cdot 4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}\cdot 5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}\,!$$ (5 Punkte)

▲2▲ In einer zweistelligen Zahl wurde eine Ziffer gestrichen, wobei sich die Zahl um das 31fache verringerte.
Welche Ziffer und an welcher Stelle wurde gestrichen? (5 Punkte)

▲3▲ Ist die Zahl 111...1 (1977 Einsen hintereinander) das Quadrat einer ganzen Zahl? (4 Punkte)

▲4▲ Mit wie vielen Nullen endet das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 50$? (4 Punkte)

Klassenstufe 9

▲1▲ Löse die Gleichung
$$\left[\frac{8x+19}{7}\right]=\frac{16(x+1)}{11},$$
wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer eine ganze Zahl ist! (5 Punkte)

▲2▲ Entwickle die Formel des Kreisbogens um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α! (5 Punkte)

▲3▲ Auf dem Umfang eines Kreises mit einer Länge von 60 m bewegen sich gleichmäßig und in gleicher Richtung zwei Punkte. Ein Punkt durchläuft einen vollen Umkreis 5 Sekunden schneller als der andere, wobei er diesen jede Minute einmal einholt. Bestimme die Geschwindigkeit der Punkte! (4 Punkte)

▲4▲ In einer Urne befinden sich 500 Kugeln mit den laufenden Nummern von 1 bis 500.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl einer beliebig gezogenen Kugel durch 10 teilbar ist? (4 Punkte)

Klassenstufe 10

▲1▲ Löse die Ungleichung
$$3|x-2|-4|x+5|-|3x+9|<3!$$ (5 Punkte)

▲2▲ Löse die Gleichung
$$\left[\frac{8x+19}{7}\right]=\frac{16(x+1)}{11}$$
wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer eine ganze Zahl ist! (4 Punkte)

▲3▲ Entwickle die Formel des Kreisbogens um den Koordinatenursprung mit dem Winkel α! (4 Punkte)

▲4▲ Löse die Gleichung
$$4\sin^2 3x-2\cos 2x+2{,}1=0!$$
J. Sikojev (5 Punkte)

Stundenplan der allgemeinbildenden Oberschulen in der UdSSR

Fach	Anzahl der Wochenstunden nach Klassen									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1. Muttersprache	12	10	10	6	6	3	3	2	2/0	–
2. Literatur	–	–	–	2	2	2	2	3	4	3
3. Mathematik	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5
4. Geschichte	–	–	–	2	2	2	2	3	4	3
5. Gesellschaftskunde	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2
6. Naturkunde	–	2	2	2	–	–	–	–	–	–
7. Erdkunde	–	–	–	–	2	3	2	2	2	–
8. Biologie	–	–	–	–	2	2	2	2	0/2	2
9. Physik	–	–	–	–	–	2	2	3	4	5
10. Astronomie	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1
11. techn. Zeichnen	–	–	–	–	–	1	1	1	–	
12. Fremdsprache	–	–	–		4	3	3	2	2	2
13. Chemie	–	–	–	–	–	–	2	2	3	3
14. Zeichenunterricht	1	1	1	1	1	1	–	–	–	
15. Gesang u. Musik	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–
16. Turnen	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
17. Produktionsausbildung	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Wochenstunden (oblig.)	24	24	24	24	30	30	30	30	30	30
Unterricht (fak.)	–	–	–	–	–	–	2	4	6	6
insgesamt	24	24	24	24	30	30	32	34	36	36

alpha stellt vor: Prof. Dr.
P. S. Alexandrow

Mitglied der Akademie
der Wissenschaften der UdSSR,
Held der sozialistischen Arbeit
Moskauer Staatliche Universität

Professor *Pawel Sergejewitsch Alexandrow* ist gleichermaßen bekannt durch seine wissenschaftlichen Leistungen, durch seine Arbeit als Hochschullehrer – und durch die Musik- und Vortragsabende, die der 80jährige in einem der Hörsäle der mechanisch-mathematischen Fakultät veranstaltet. Der sowjetische Wissenschaftsjournalist *W. Jankulin*, selbst Mathematiker, zeichnete Bemerkungen von Prof. *Alexandrow* über „den Wissenschaftler" auf:

Sein Ziel

Das Prestige (Ansehen), das seit alters her die Tätigkeit und den Titel eines Wissenschaftlers begleitet, beruht auf zweierlei: erstens, daß die Wissenschaft die Wahrheit sucht als eines der höchsten Ziele, die der Mensch anstrebt, und zweitens, daß die Arbeit eines Wissenschaftlers untrennbar verbunden ist mit der Heranführung anderer, vor allem junger Menschen, an diese Wahrheit.

Wenn ein Mensch, der sich mit Wissenschaft beschäftigt, seine Tätigkeit unter diesen zwei Aspekten (Gesichtspunkten) begreift und danach handelt – die Suche nach der Wahrheit und die Heranführung an sie –, dann wird es die Gefahr eines ungehemmten, bloß quantitativen Wachstums der wissenschaftlichen Produktion kaum geben.

Seine Motive

Es ist von Übel, wenn das Verfassen einer wissenschaftlichen Arbeit zum Selbstzweck wird. Für das Schreiben von wissenschaftlichen Arbeiten will ich nur zwei Motive anerkennen:

unmittelbaren Nutzen zu liefern, oder das uneigennützige Interesse an Erkenntnis, besser gesagt, leidenschaftliche wissenschaftliche Neugierde, die den Menschen so lange nicht ruhen läßt, bis er sie befriedigt hat.

Natürlich können beide Motive – das Streben nach praktischem Nutzen und wissenschaftlicher Neugierde – wunderbar miteinander existieren, wie das *Euler* und *Gauß* und in der neueren und jüngsten Zeit *Tschebyschow*, *Poincaré*, *Shukowski* und viele andere zeigen.

Der Funken wissenschaftlicher Kreativität (Schöpfertum) entflammt erst dann, wenn das Interesse für die zu lösende Frage einen solch kritischen Stand erreicht, daß der Mensch nicht mehr umhin kann, sich damit zu beschäftigen, wenn er von dem Streben nach ihrer Lösung völlig beherrscht wird. Der Anstoß dazu mag sehr verschieden sein. Nehmen wir ein Beispiel aus dem Leben eines der größten Wissenschaftler der Neuzeit, des Astronomen und Mathematikers *Johannes Kepler*, der von 1571 bis 1630 lebte.

Er wurde mit ungefähr vierzig Jahren Witwer, und er beschloß zwei Jahre darauf, wieder zu heiraten. Seine neue Frau war die Tochter eines Weinhändlers. Bald nach der Heirat kam ein Kaufmann, der den Inhalt von Weinfässern messen wollte, um den Preis zu bestimmen. Ein schwieriges Unterfangen, denn Fässer haben keine regelmäßige zylindrische Form. Am einfachsten könnte man ihren Inhalt messen, indem man sie mit Eimern füllt – oder eimerweise entleert. Das ist einem Weinhändler aber nicht mehr möglich.

Kepler fühlte sich herausgefordert durch das Problem der Berechnung des Inhalts von Fässern. Das Ergebnis war eine geniale mathematische Arbeit, die den Untertitel trug: „Eine neue Stereometrie von Weinfässern". Dabei hatte *Kepler* am Beispiel von Weinfässern allgemeingültige Methoden zur Bestimmung von Volumina entwickelt, die durch gekrümmte Oberflächen begrenzt sind. So wurde er einer der Begründer der Integralrechnung.

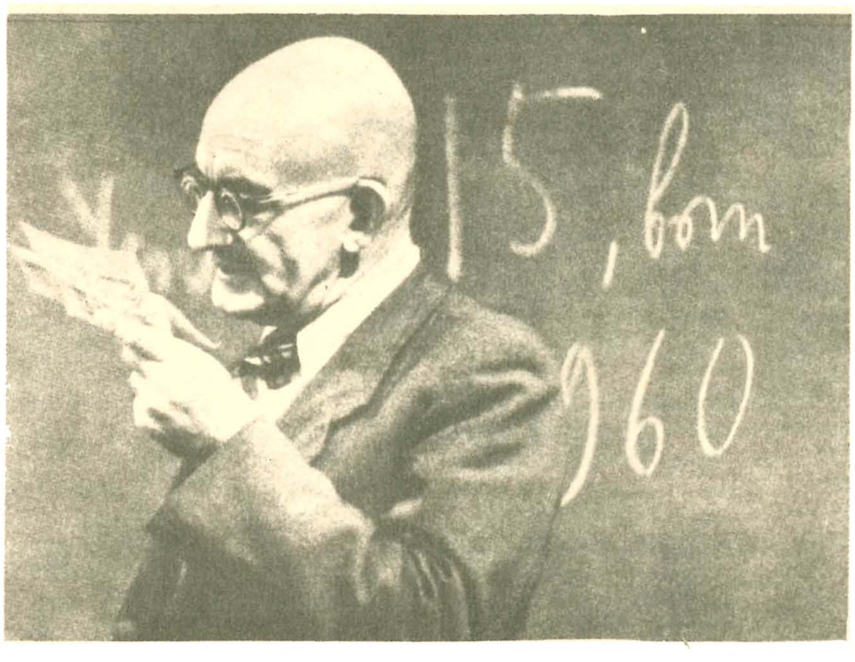
Seine Qualen

Wissenschaftler, deren Beruf eine Berufung ist, verspüren den inneren Zwang, sich mit ihrem Problem zu beschäftigen. Das wird ihnen zur Qual. Dieser Ausdruck „Qual" in bezug auf wissenschaftliche Arbeit stammt nicht von mir, sondern von dem Mathematiker *Kurant*, einem der großen Mathematiker unserer Zeit. Diese Qual – so sagte er mir in einem Gespräch – erklärt, warum die meisten Mathematiker verhältnismäßig früh ihre eigene schöpferische Arbeit beenden: Sie halten einfach die ständige innere Spannung, mit der ihre Arbeit verbunden ist, nicht sehr lange aus. Wenn ich von wissenschaftlicher Arbeit spreche, dann stütze ich mich selbstverständlich auf meine eigene Erfahrung. Und obwohl diese Erfahrung die Mathematik ist, glaube ich nicht, daß sie in anderen Wissenschaften, zumindest in den sogenannten exakten Wissenschaften, wie der Physik, der Chemie und anderen, eine wesentlich andere wäre. Wenn es um echte wissenschaftliche Arbeit geht und nicht um das Schreiben einer notwendigen Anzahl von Seiten, dann ist die sogenannte ruhige wissenschaftliche Arbeit ein Mythos.

Wissenschaftliche Arbeit, das ist die Suche nach der Wahrheit, und sie ist immer unruhig und besteht immer aus dem Übergang von einem mißglückten Versuch zum anderen, bis man schließlich einen erfolgreichen Weg findet – wenn man ihn überhaupt findet. Diese Arbeit ist genauso unruhig wie die Arbeit eines Musikers, der so lange nach dem Klang eines musikalischen Satzes sucht, bis er ihn gefunden hat. Noch unruhiger kann höchstens die Arbeit des Chirurgen sein, der sich zu alledem noch bewußt ist, daß jeder Mißgriff das Leben eines Patienten kosten kann.

Seine Freude

Eines der wesentlichen Momente für einen Wissenschaftler besteht meiner Meinung nach darin, daß er sich als Beteiligter am gesamten geistigen Leben seiner Epoche und seines Landes betrachtet, daß er sich an der geistigen Auseinandersetzung seiner Zeit beteiligt. Dann spürt er auch seinen Anteil an Verantwortung. Darin liegt eine der Ursachen für das Bestreben des Wissenschaftlers, seine Kenntnisse seinen Schülern zu übermitteln.



Ein Streben, das letztlich auch eine unmittelbare emotionale (gefühlsmäßige) Quelle hat – die Freude daran, daß es diese Schüler gibt.

Seine Freunde

In diesem Zusammenhang einige Bemerkungen über zwei hervorragende Mathematiker der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts: Über den Deutschen *Hausdorf* und den Holländer *Brouwer*. Beide vertraten jene sehr allgemeine und sehr abstrakte Richtung der höheren Mathematik, die unter der Bezeichnung *Theoretische Mengenrichtung* bekannt ist. *Brouwer* und *Hausdorf* waren einander ganz und gar unähnlich, hatten aber doch gemeinsame Züge. Sowohl der eine als auch der andere wollte in jungen Jahren, bevor er Mathematiker wurde, Musiker werden: *Hausdorf* Komponist und *Brouwer* Pianist. Zweitens interessierten sich beide bis zum Ende ihrer Tage für Fragen der Ethik, der Moral und der Philosophie.

Ihre musikalischen Neigungen behielten sie ihr ganzes Leben lang. Im Arbeitszimmer eines jeden stand ein Flügel. Bei meiner ersten Begegnung mit *Brouwer* zum Beispiel hörte ich von ihm die Violinkonzerte *Vivaldis*, die *Bach* fürs Fortepiano umgeschrieben hatte.

Ich hatte auch Gelegenheit, *Hausdorf* musizieren zu hören. Er hatte umfassende und subtilste (feinste) kulturelle Interessen. Als er Mathematiker wurde, schrieb er Theaterstücke, die in den zwanziger Jahren mit Erfolg auf deutschen Bühnen gespielt wurden. Sein Beitrag zur Mathematik besteht hauptsächlich darin, daß er zum ersten Mal den Inhalt einiger neuer mathematischer Objekte erfaßt hatte: Die sogenannten topologischen Räume, die er in die Mathematik einführte, womit er den Grundstein für die Erforschung ihrer Eigenschaften legte.

Der umfassende Charakter sowohl der mathematischen als auch der kulturellen Interessen verlieh der Lehrtätigkeit *Hausdorfs* Glanz und Universalität. Mein Umgang mit *Hausdorf* brach mit der Machtergreifung Hitlers ab. *Hausdorf* fand ein tragisches Ende. Zu Beginn des Jahres 1943 erfuhr *Hausdorf* von einem seiner früheren Schüler, daß er in ein Vernichtungslager transportiert werden sollte. Er zog es vor, mit seiner Frau in seinem Haus dem Leben ein Ende zu machen...

Sein Standpunkt

Gewiß, es gibt auch Menschen, die sich mit Wissenschaft beschäftigen, ohne Zweifel begabt sind und sogar wichtige wissenschaftliche Ergebnisse gewinnen, doch von dem, was ich unter „Wissenschaftler" verstehe, weit entfernt sind. Sie sehen ihre Wissenschaft nur vom Standpunkt ihrer eigenen Erfolge. Um ein bekanntes Wort *Stanislawskis* über die Kunst abzuwandeln, sie sehen nicht die Wissenschaft in sich, sondern sich in der Wissenschaft.

Diese egozentrische (alles auf das Ich beziehende) Haltung überträgt sich zuweilen auf die pädagogische Tätigkeit, wodurch schon die Schüler verdorben werden können. Solche Erscheinungen sind zu unserem Glück Ausnahmen, aber es gibt sie. Manchmal ist es so, daß sich eine derartige Haltung erst in den späteren Jahren zu entwickeln beginnt und in wissenschaftliche Ruhmsucht und Eigensucht übergeht. Was ist die Ursache einer solchen Fehlentwicklung? Meiner Meinung nach der Mangel an einer tiefgehenden allgemeinen Kultur und das Fehlen der Angewohnheit, über Dinge nachzudenken, die außerhalb der unmittelbaren Beziehung zum enggefaßten Gegenstand der eigenen Arbeit stehen.

Ich glaube deshalb, daß kein Lehrender, ganz gleich, ob er sich Professor, Dozent oder Lehrer nennt, das Recht hat, auf eine umfassende kulturelle und natürlich auch eine gesellschaftliche Erziehung seiner Schüler zu verzichten.

Die Kultur besteht in der Kunst zu lesen, Musik zu hören, die Werke der Natur und der darstellenden Kunst zu betrachten. Lesen können, das bedeutet, über das Geschriebene nachdenken zu können. Bücher werden ja geschrieben, um über sie nachzudenken, und nicht nur die Fabel aufzunehmen. Zum Lesen lernen, zum Hören und zum Sehen braucht man Erfahrung, braucht man Training.

Sein Jahrhundert

Man nennt unser Jahrhundert oft *das Jahrhundert der Technik*. Das ist richtig. Die Technik hat gerade jetzt ein prinzipiell neues Niveau erreicht, das uns ermöglicht, Probleme zu lösen, von denen man noch vor einigen Jahrzehnten im besten Falle träumen konnte. Und wir Mathematiker können stolz darauf sein, daß die Mathematik dabei eine große Rolle spielt.

Heute ist völlig klar, daß die moderne Technik ausreicht, um den materiellen Wohlstand der Menschheit zu gewährleisten. Aber der Fortschritt zu einem höheren Ziel ist eine Frage der Umgestaltung der menschlichen Gesellschaft, lösbar nur durch die Verwirklichung der Ideale der kommunistischen Gesellschaft. Deshalb ist es auch offensichtlich, daß die Technik selbst und der technische Fortschritt für die Menschheit nur ein Mittel und nicht Selbstzweck sind.

In der kommunistischen Gesellschaft wird die Arbeit Lebensbedürfnis sein. Ich hoffe, daß die Menschen dann Zeit haben und aufhören werden, in Hektik und Hast zu leben.

Man sagt, daß die moderne Musik den Rhythmus der modernen Epoche, die Epoche der Technik widerspiegelt. Mag sein, daß die Musik in der Epoche des Kommunismus den Rhythmus der Epoche widerspiegeln wird, in der die Menschheit begreift, daß nicht die Menge der Eindrücke, sondern ihre Tiefe die Möglichkeit für eine wahre Aufnahme der Welt in ihrer ganzen Schönheit eröffnet. Diese Freude an der Welt, das grenzenlose Entzücken, von dem der russische Dichter *Alexander Block* sprach, von dem *Skrjabin* und *Beethoven* und *Schubert* sangen, von dem aber auch die von mir erwähnten Mathematiker wußten – all das wird dann der Menschheit, diesem befreiten Prometheus, eigen sein.

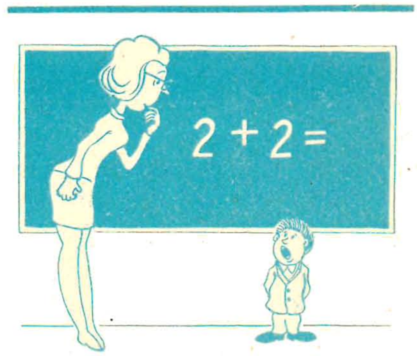
Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc.
I. M. Jaglom

Universität Jaroslawl, Sektion Mathematik

▲1677▲ Zwei verschiedene natürliche Zahlen bezeichnen wir als GUTE, wenn diese sich in dieselben Primzahlen zerlegen lassen (im allgemeinen mit verschiedenen Potenzen, z. B.
$30 = 2\cdot 3\cdot 5$ und $3000 = 2^3\cdot 3\cdot 5^3$).
Diese Zahlen heißen dann SEHR GUTE, wenn die beiden nächsten natürlichen Zahlen auch GUT sind (z. B. $6 = 2\cdot 3$ und $48 = 2^4\cdot 3$ sind SEHR GUT, weil $6+1=7$ und $48+1=49=7^2$ auch GUT sind).
Ist die Anzahl (Menge) der SEHR GUTEN Zahlenpaare endlich oder unendlich?

I. M. Jaglom
Ungewöhnliche Algebra
94 Seiten (1976) Preis: 5,50 M

L. I. Golowina/I. M. Jaglom
Vollständige Induktionen in der Geometrie
144 Seiten (1973) Preis: 6,00 M
(beide Titel erschienen bei BSB B. G. Teubner, Leipzig)



„Ich muß erst das Kollektiv befragen!"

18 Olympiadeaufgaben aus Freundesland

Ma 5 ▲ 1 ▲ In den Term $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$ sind Klammern so einzufügen, daß man
a) die Zahl 50,
b) die kleinstmögliche Zahl,
c) die größtmögliche Zahl erhält.

Ma 5 ▲ 2 ▲ Es ist die kleinste durch 36 teilbare natürliche Zahl zu finden, in der alle 10 Ziffern vorkommen.

Ma 6 ▲ 3 ▲ Auf einer gegebenen Geraden g ist ein solcher Punkt zu bestimmen, für den die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten A, B der Ebene am kleinsten ist.

Ma 6 ▲ 4 ▲ Im Innern eines konvexen Vierecks konstruiere man einen Punkt, für den die Summe der Abstände zu den Eckpunkten am kleinsten ist.

Ma 6 ▲ 5 ▲ Ein Wanderer geht von A nach B und zurück. Den gesamten Weg legt er in 3 Std. 41 Min. zurück. Der Weg von A nach B führt zunächst bergauf, dann auf ebenem Gebiet und danach bergab. Wie lang ist der Teil des Weges, der durch das ebene Gebiet führt, wenn die Geschwindigkeit des Wanderers bergauf $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$, in ebenem Gebiet $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und bergab $6\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt und der Weg von A nach B die Länge von 9 km hat?

Ma 6 ▲ 6 ▲ Gegeben sind ein Winkel und ein Punkt M im Innern des Winkels. Durch diesen Punkt konstruiere man eine Gerade derart, daß der Abschnitt der Geraden zwischen den Schenkeln des Winkels durch den gegebenen Punkt in zwei gleiche Teile geteilt wird.

Ma 6 ▲ 7 ▲ Auf wieviel verschiedene Arten kann man ein 20-Kopekenstück in Münzen der Werte von 10, 5, 3 und 2 Kopeken wechseln?

Ma 6 ▲ 8 ▲ Man beweise, daß $9^{1972} - 7^{1972}$ durch 10 teilbar ist.

Ma 7 ▲ 9 ▲ Man beweise, daß aus
$a + b + c = 0$ folgt
a) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$,
b) $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$.

Ma 7 ▲ 10 ▲ a und b sind ganze positive Zahlen. Es ist bekannt, daß von den folgenden vier Behauptungen
1) $a + 1$ ist teilbar durch b,
2) $a = 2b + 5$,
3) $a + b$ ist teilbar durch 3,
4) $a + 7b$ ist eine Primzahl,
drei Behauptungen wahr und eine unwahr ist. Es sind alle möglichen Paare $(a; b)$ zu finden.

Ma 7 ▲ 11 ▲ Man bestimme die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Abstände von den Geraden, die durch die vier Seiten des Einheitsquadrats führen, gleich 4 ist.

Ma 7 ▲ 12 ▲ Kann man alle zehnstelligen Zahlen, deren Ziffern nur aus Einsen und Zweien bestehen, so in zwei Teilmengen zerlegen, daß die Summe zweier beliebiger Zahlen aus einer Teilmenge nicht weniger als zwei Dreien enthält (alle Zahlen im Zehner-Positionssystem)?

Ma 7 ▲ 13 ▲ Angenommen, es seien die folgenden beiden Behauptungen wahr:
a) Unter den Leuten, die einen Fernseher besitzen, gibt es solche, die keine Maler sind;
b) die Leute, die jeden Tag schwimmen gehen, und keine Maler sind, besitzen keinen Fernseher.
Folgt hieraus, daß die Behauptung c) wahr ist?
c) Nicht alle Besitzer eines Fernsehers gehen jeden Tag schwimmen.

Ma 8 ▲ 14 ▲ Welche Zahl ergibt das Produkt
$$101 \cdot 100001 \cdot 100000001 \cdot \ldots \cdot \underbrace{100\ldots001}_{2^n - 1 \text{ Nullen}}?$$

Ma 8 ▲ 15 ▲ Welche ganzzahligen Lösungen besitzt die Gleichung
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$?

Ma 8 ▲ 16 ▲ Zur Gleichung
$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ sind die ganzzahligen Lösungen zu bestimmen.

Ma 8 ▲ 17 ▲ Man beweise: wenn die positiven ganzen Zahlen m und n relativ prim sind, dann existiert eine natürliche Zahl k, so daß die Zahl $m^k - 1$ durch n teilbar ist!

Ma 9 ▲ 18 ▲ Es haben sich n Menschen versammelt. Einige von ihnen sind miteinander bekannt. Je zwei Nicht-Bekannte haben genau zwei gemeinsame Bekannte. Zwei Bekannte haben keine weiteren gemeinsamen Bekannten. Man beweise, daß die Anzahl der Bekannten für jeden der Versammelten gleich ist.

Aus: „Aufgaben aus Mathematikolympiaden" von I. L. Babinskaja, Verlag Nauka Moskau.
Zur Verfügung gestellt, übersetzt und bearbeitet von stud. math. Otmar Langer z. Z. Student an der Universität Leningrad.

Auf der Spur eines sowjetischen Diploms

Aus meiner Adresse können Sie entnehmen, daß ich wieder an den Ort meiner Aspirantur zurückgekehrt bin – nach Minsk an die Belorussische Staatliche Lenin-Universität. Das Thema unserer mathematischen Forschungen ist im Freundschaftsvertrag der Jenaer und Minsker Universität verankert, die Konzeption für eine Monografie darüber hinaus bereits erarbeitet. Mein Freund *Mischa Kowaljow*, Kandidat der mathematisch-physikalischen Wissenschaften und Dozent am Lehrstuhl, und ich wollen sie in der DDR veröffentlichen. Wir stecken also mitten in der Arbeit. Und das ist wohl der beste Beweis, daß die Verbindung zu meiner Universität nicht abgerissen ist.
Sie fragen aber auch nach Erinnerungen. Viele sind verbunden mit meiner Funktion als Parteisekretär der Studentengrundorganisation der SED. Damals haben wir den jetzigen Sekretär der Aspiranten in unsere Reihen aufgenommen, jetzt konnte ich als Gast an der Wahlversammlung teilnehmen. Der gute Kontakt zu *Mischa Kowaljow* und zu meinem Doktorvater *Wladimir Aleksejewitsch Jemelitschew* ging und geht weit über die Arbeit hinaus. Gemeinsame Wanderungen und Naturbeobachtungen ließen uns einander nahekommen. Besonders beeindruckt war ich vom ersten Sprossergesang, dem Schlag der „Nachtigall des Nordens", auf den mich *Wladimir Aleksejewitsch* hinwies...

Dr. Eberhard Girlich, wiss. Oberassistent der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität, Jena

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Begegnung mit Freunden

Seit einigen Jahren bestehen für die *Jungen Mathematiker* des Saalkreises (Bezirk Halle) zentrale Arbeitsgemeinschaften. Die Zirkel für die Klassen 5 bis 8 werden im Haus des Lehrers in Halle 14tägig durchgeführt. In den Veranstaltungen werden die Mathematikolympiaden vorbereitet und Knobelaufgaben gelöst. Die Entwicklung des mathematisch-logischen Denkens steht immer im Vordergrund. Alle Schüler arbeiten systematisch mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* und beteiligen sich zu einem großen Teil am *alpha*-Wettbewerb. Die jeweils zwei AG's einer Klassenstufe treffen sich an verschiedenen Wochentagen, um eine bessere Teilnahme zu sichern.

Die FDJler der 9. und 10. Klasse beschäftigen sich gemeinsam mit Komsomolzen der 55. sowjetischen Mittelschule mit der *Angewandten Mathematik*. Sie arbeiten 14tägig im Rechenzentrum der Martin-Luther-Universität Halle unter der Leitung eines Dipl.-Mathematikers. Neben dem Aufstellen kleiner Programme dürfen die Schüler selbst an den Organisations-Apparaten arbeiten. Unser Bild zeigt Komsomolzen und FDJler am Duplizier-gerät. Dipl.-Math. *Bergmann* gibt Hinweise für die Kontrolle des Lochstreifens.

Im September 1975 wurde der *Kreisklub Mathematik* gegründet. Zum Klub gehören alle Schüler der zentralen Arbeitsgemeinschaften. Die Klubleitung bilden die Aktivvorsitzenden aus den AG's. Den Vorsitz der Klubleitung übernahm *Dr. Thiele* vom Teubner-Verlag Leipzig. Ziel des Mathe-Klubs ist es, über die AG-Tätigkeit hinaus die Schüler mit Problemen der *Angewandten Mathematik* in der Praxis vertraut zu machen und interessante mathematische Höhepunkte zu organisieren.

In den Herbstferien kommen die *Jungen Mathematiker* zum Mathe-Treff. Am Vormittag wird die Kreisolympiade vorbereitet, und am Nachmittag stehen mathematische Spiele auf dem Programm. In den Winterferien werden differenzierte Veranstaltungen für jede Klassenstufe durchgeführt. So beschäftigen sich z. B. die 6. Klassen mit der *Mathematik im Bauwesen*. Nachmittags sind Lichtbildervorträge bzw. Kinobesuche eingeplant. In den Sommerferien fahren die besten Schüler aus den Arbeitsgemeinschaften der Klassen 5 bis 8 in das Spezialistenlager. Für die Klassen 9 und 10 sind Exkursionen mit Komsomolzen in Naherholungsgebieten unseres Bezirkes eingeplant.

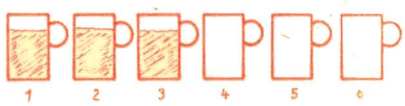
Neben der Festigung der Sprachkenntnisse wird die Freundschaft zwischen den beiden Jugendverbänden vertieft.

Höhepunkt der AG-Tätigkeit sind die Veranstaltungen anläßlich des *Roten Oktobers*.

H. Rebmann

Aufgaben aus der zentralen Arbeitsgemeinschaft Mathematik des Saalkreises (Klassenstufe 5)

▲1▲ In einer Reihe stehen sechs Gläser, davon sind die ersten drei mit Wasser gefüllt. Indem nur ein Glas bewegt wird, soll erreicht werden, daß sich ein gefülltes und ein leeres Glas abwechseln.



▲2▲ Rekonstruiert folgende Multiplikation, wenn in dem Multiplikationsschema g eine gerade Ziffer und u eine ungerade Ziffer ($0 \leqq g \leqq 9$; $0 \leqq u \leqq 9$) bedeutet:

$$\begin{array}{r} uu \cdot ggu \\ \hline gugu \\ guu \\ \hline uuuuu \end{array}$$

(An verschiedenen Stellen des Schemas brauchen g bzw. u nicht verschiedene Ziffern zu sein!)

▲3▲ Wir stellen uns vor, daß längs des Äquators die Erde mit einem Fahrrad umrundet werden kann. Der Äquator ist 40000 km lang, der Umfang der Räder soll 2 m betragen. Beim Fahren sollen die Räder abrollen, d. h. weder rutschen noch gleiten. Wie oft drehen sich die Räder bei einer Umkreisung?

▲4▲ In einem Buchlager ist ein bestimmtes Buch entweder in Paketen zu je drei Exemplaren oder in Paketen zu je fünf Exemplaren abgepackt vorhanden. Der Lagerverwalter erklärt, daß damit jede beliebige Anzahl von Büchern (die größer als sieben ist) zusammengestellt werden kann, ohne daß die Pakete geöffnet werden.

R. Thiele

Mein Zusatzstudium in der UdSSR

Im vergangenen Jahr hatte ich das große Glück, sechs Monate zu einem Zusatzstudium in die UdSSR fahren zu dürfen. Mein neuer Arbeitsplatz war das *Labor für Mathematik des Instituts für Inhalt und Methoden des Unterrichts an der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der UdSSR in Moskau*. Ein Ziel meines Aufenthaltes bestand darin, die Erfahrungen sowjetischer Pädagogen auf dem Gebiet des Mathematikunterrichts zu studieren. Da in jüngster Zeit in der Sowjetunion neue Lehrpläne und Lehrbücher für das Fach Mathematik in Kraft getreten sind, war es für mich besonders interessant, mit einigen Autoren der neuen Mathematiklehrbücher wie *Schwarzburd*, *Semuschin*, *Neschkow*, *Rudnizkaja* und anderen ins Gespräch zu kommen.

Für die *alpha*-Leser habe ich einige Aufgaben aus den neuen sowjetischen Lehrbüchern für die Klassenstufen 4 und 5 mitgebracht.

▲1▲ Setze in die Zeichenreihe 1*2*3*4*5 anstelle der Sternchen Operationszeichen oder Klammern so ein, daß der entstandene Term die Zahl 100 bezeichnet!

▲2▲ Setze zwischen die Zeichen 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Plus- oder Minuszeichen so ein, daß der entstandene Term die Zahl 100 bezeichnet!

▲3▲ Ersetze in dem Bild 1 alle freien Kästchen durch Zahlen so, daß die Summe dreier benachbarter horizontaler und vertikaler Zahlen 12 ergibt!

	5						
					1		
6							
			2				

▲4▲ Kann man der Tabelle (Bild 2) fünf Zahlen so entnehmen, daß deren Summe 20 ist?

1	1	1
3	3	3
5	5	5
7	7	7

Dr. Lothar Flade, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle

Rosenkurven

Kurvenkonstruktionen

Die Liebhaber schöner geometrischer Figuren können sich mit der Konstruktion von Kurven beschäftigen, deren Gleichungen in Polarkoordinaten $r = a + b \sin\frac{m\phi}{n}$ lauten, worin a, b, m, n gewisse gegebene Zahlen sind. Um ein Polarkoordinatensystem festzulegen, wählt man eine Einheitsstrecke e, einen Pol O und eine Polarachse Ox. Die Lage eines beliebigen Punktes M wird dann durch den Polarradius OM und den Polarwinkel ϕ bestimmt, den die Strahlen OM und Ox miteinander bilden. Die Zahl r, die die Länge OM durch e ausdrückt ($OM = re$), und der im Grad- oder Bogenmaß ausgedrückte Zahlenwert des Winkels ϕ heißen *Polarkoordinaten des Punktes M*.

Für einen beliebigen Punkt, der vom Pol O verschieden ist, kann man $0 \leqq \phi < 2\pi$ und $r > 0$ annehmen. Bei der Konstruktion von Kurven, die zu Gleichungen der Form $r = f(\phi)$ gehören, ist es jedoch sachgemäß, für die Variable ϕ beliebige Werte zuzulassen (unter anderem auch solche, die negativ oder größer als 2π sind), während r sowohl positiv als auch negativ sein darf.

Um den Punkt (ϕ, r) zu finden, zeichnen wir den Strahl mit dem Anfangspunkt O, der mit der Achse Ox den Winkel ϕ bildet und tragen auf ihm (bei $r > 0$) oder auf seiner Verlängerung in entgegengesetzter Richtung (im Falle $r < 0$) die Strecke $|r|e$ ab. Eine erhebliche Vereinfachung kann man dadurch erzielen, daß man vorher ein Koordinatennetz einzeichnet, das aus konzentrischen Kreisen mit den Radien $e, 2e, 3e$ usw. (mit dem Mittelpunkt im Pol O) und aus den Strahlen besteht, für die $\phi = 0°, 10°, 20°, \ldots, 340°, 350°$ ist. Diese Strahlen sind dann auch für $\phi < 0°$ und für $\phi > 360°$ verwendbar: bei $\phi = 740°$ und bei $\phi = -340°$ beispielsweise haben wir es mit dem Strahl zu tun, für den $\phi = 20°$ ist. [Siehe in d. Abb. die Punkte $M(40°, 3)$, $N(120°, -3)$ und $P(-1230°, 2)$.]

Wir wollen die folgenden Kurven untersuchen:

I. $r = \sin 3\phi$, II. $r = \frac{1}{2} + \sin 3\phi$,

III. $r = 1 + \sin 3\phi$, IV. $r = \frac{3}{2} + \sin 3\phi$.

Dazu stellen wir eine Tabelle auf:

ϕ	$-30°$	$-20°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$
$\sin 3\phi$	−1	−0,87	−0,5	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	−0,5	−0,87	−1
$\frac{1}{2} + \sin 3\phi$	−0,5	−0,37	0	0,5	1	1,37	1,5	1,37	1	0,5	0	−0,37	−0,5
$1 + \sin 3\phi$	0	0,13	0,5	1	1,5	1,87	2	1,87	1,5	1	0,5	0,13	0
$\frac{3}{2} + \sin 3\phi$	0,5	0,63	1	1,5	2	2,37	2,5	2,37	2	1,5	1	0,63	0,5

(Hier ist 0,87 ein Näherungswert der Zahl $\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

Wir nennen Sektor (α, β) den Teil der Ebene, für dessen Punkte $\alpha \leqq \phi \leqq \beta$ ist. Verbinden wir die Punkte (0°, 0), (10°, 0,5), (20°, 0,87), (30°, 1), (40°, 0,87), (50°, 0,5), (60°, 0) durch eine glatte Kurve, so erhalten wir im Sektor (0°, 60°) ein „positives Blatt" (1) der Kurve I (Bild 2a). Setzen wir die Tabelle bis $\phi = 360°$ fort und verbinden auf der Zeichnung die Punkte (60°, 0), (70°, −0,5), (80°, −0,87), (90°, −1), (100°, −0,87), (110°, −0,5), (120°, 0), die im Sektor (240°, 300°) liegen, so bekommen wir in diesem Sektor ein „negatives Blatt" ($\bar{2}$) der Kurve I.

Es ist leicht zu erkennen, daß hierauf ein „positives Blatt" (3) im Sektor (120°, 180°), ein negatives Blatt ($\bar{4}$) im Sektor (0°, 60°), ein positives Blatt (5) im Sektor (240°, 300°) und schließlich ein negatives Blatt ($\bar{6}$) im Sektor (120°, 180°) folgt.

Bei der Kurve I fallen die Blätter (1) und ($\bar{4}$), ($\bar{2}$) und (5), (3) und ($\bar{6}$) paarweise zusammen. Aus den letzten drei Zahlen der Tabelle ist jedoch ersichtlich, daß

1) sich das erste positive Blatt (1) der Kurve II (siehe die $r = \frac{1}{2} + \sin 3\phi$ entsprechende Zeile der Tabelle) im Sektor (−10°, 70°) befindet (größtes $r = 1{,}5$), das hierauf folgende negative Blatt ($\bar{2}$) im Sektor (250°, 290°) liegt (größtes $|r| = 0{,}5$) usw. (Bild 2a),

2) die Kurve III nur positive Blätter in den Sektoren (−30°, 90°), (90°, 210°) und (210°, 330°) besitzt (Bild 2b),

3) im Falle der Kurve IV der kleinste Wert $r = 0{,}5$ beträgt und die Blätter „unfertig" aussehen (Bild 2b). Ganz ähnlich verhält es sich mit den Kurven

$r = a + \sin\frac{5\phi}{3}$ für $a = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

Hier läßt man den Winkel ϕ zweckmäßigerweise in Schritten von 18° (von 0° bis 1080°) variieren. Bei $a = 0$ befinden sich das erste (positive) und das zweite (negative) Blatt in den Sektoren (0°, 108°) und (288°, 396°) (Bild 3a), bei $a = \frac{1}{2}$ dagegen in den Sektoren (−18°, 126°) und (306°, 378°) (Bild 3b). Bei $a = 1$ gibt es nur fünf positive Blätter in den Sektoren (−54°, 162°), (162°, 378°) usw.; dasselbe, aber mit „unfertigen Blättern", gilt für $a = \frac{3}{2}$ (Bild 3c).

Im allgemeinen Falle der Kurve $r = \sin\frac{m\phi}{n}$ liegt das erste positive Blatt innerhalb des Sektors $\left(0°, \frac{180°n}{m}\right)$, weil in diesem Sektor $0° \leqq \frac{m\phi}{n} \leqq 180°$ ist. Bei $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 1$ nimmt das Blatt einen Sektor ein, der zwischen 180° und 360° liegt, während für $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$ ein „Sektor" benötigt wird, der oberhalb 360° liegt (in Bild 4 ist dargestellt, wie die Blätter bei $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ aussehen).

Wir wollen die Gleichung $r = \sin\frac{m\phi}{n}$ für den Fall betrachten, daß m und n teilerfremd sind. Dann können folgende Fälle eintreten:

1) m gerade, n ungerade. Ändert sich ϕ von 0 bis $360°n$, so erhalten wir eine vollausgebildete Rosette aus $2m$ Blättern $\left(360°n : \frac{180°n}{m} = 2m\right)$, von denen das letzte negativ ist; daher durchlaufen wir, wenn ϕ weiter variiert, die bereits konstruierte Rosette von neuem (in Bild 5a ist $m = 4$, $n = 3$).

2) m ungerade, n gerade. Ändert sich ϕ von 0 bis $n \cdot 180°$ (eine ganze Zahl von Vollwinkeln!), so erhalten wir m Blätter $\left(n \cdot 180° : \frac{180°n}{m} = m\right)$, von denen aber das letzte positiv ist; ändert sich ϕ weiter von $n \cdot 180°$ bis $n \cdot 360°$, so ergeben sich infolgedessen Blätter, die zu den bereits konstruierten diametral entgegengesetzt sind; im großen und ganzen entsteht wiederum eine Rosette aus $2m$ Blättern (in Bild 5b ist $m = 5$, $n = 2$).

3) m und n ungerade. Ändert sich ϕ von 0° bis $n \cdot 180°$, so ergeben sich m Blätter, und da das letzte derselben positiv ist, wird das folgende $(m+1)$-te Blatt negativ und fällt mit dem allerersten positiven Blatt zusammen. Insgesamt bekommen wir, wenn ϕ von $n \cdot 180°$ bis $n \cdot 360°$ variiert, wieder alle m bereits konstruierten Blätter, nur daß diejenigen von ihnen, die beim „ersten Durchgang" positiv waren, jetzt negativ werden und umgekehrt (in Bild 5c ist $m = 5$ und $n = 3$).

A. P. Domorjad

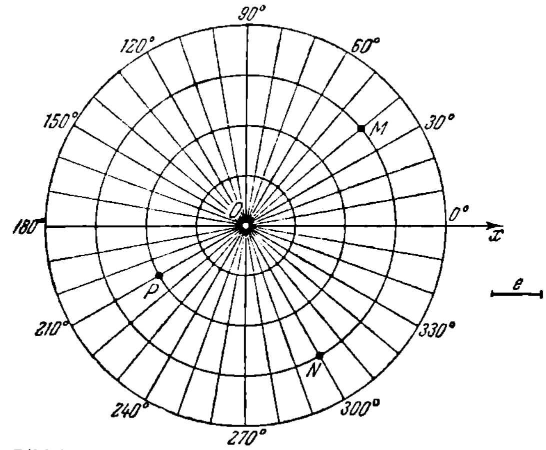


Bild 1

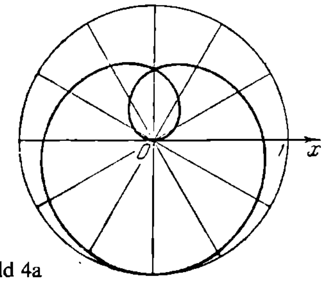


Bild 4a

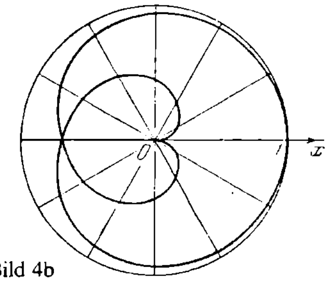


Bild 4b

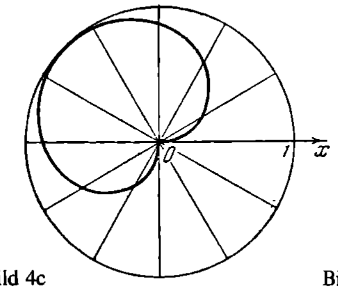


Bild 4c

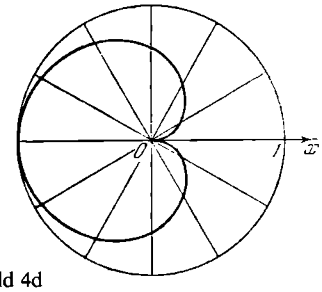


Bild 4d

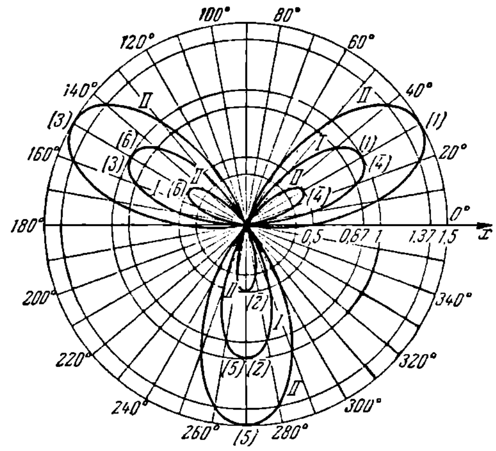


Bild 2a

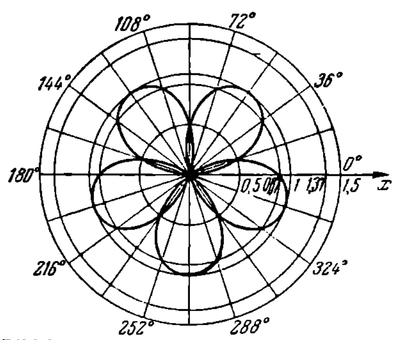
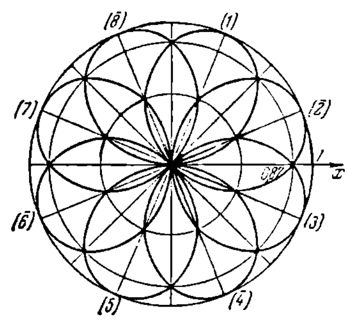


Bild 3a

Bild 5a



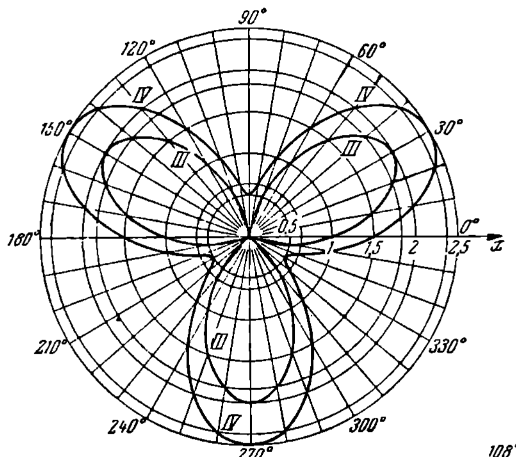


Bild 2b

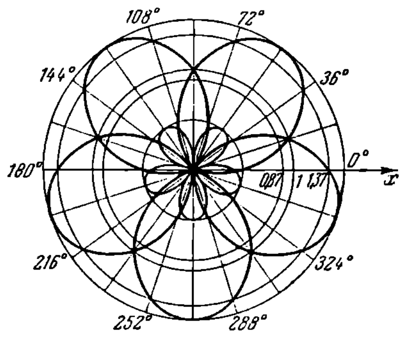


Bild 3b

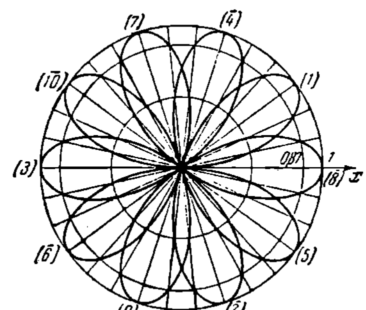


Bild 5b

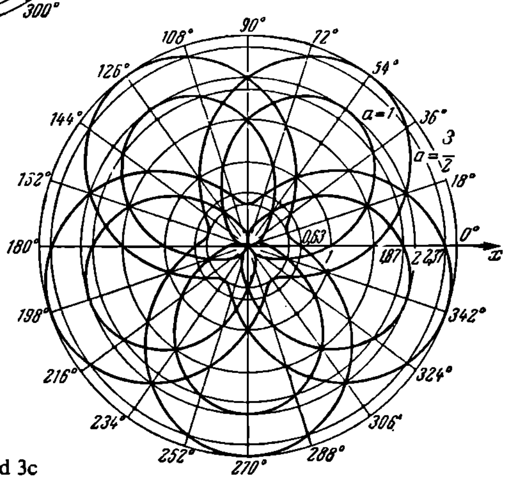


Bild 3c

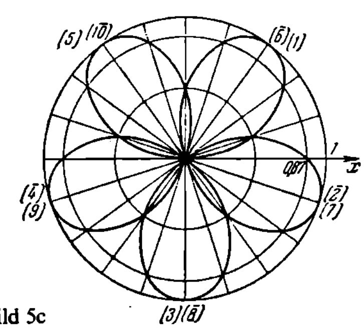


Bild 5c

Zeichnen hilft rechnen

Über die Anwendung von Diagrammen

Im einfachsten Falle werden die Größen einer mathematischen Aufgabe als *eindimensionales Diagramm* dargestellt. Ein solches Diagramm – oft nennt man es auch *Linien-* oder *Streckendiagramm* – besteht gewöhnlich aus einigen Strecken, deren Längen den Maßzahlen der zu betrachtenden Größen entsprechen. Häufig lassen sich aus den Bedingungen einer Aufgabe verschiedene Diagramme konstruieren, deren Vergleich zu einer Lösung führt.

Manchmal werden die Strecken, um sie deutlicher sichtbar zu machen, durch Rechtecke ersetzt. Ihre Breite kann dabei beliebig gewählt werden, sie muß nur bei allen Rechtecken gleich sein; von Bedeutung ist allein ihre Länge.

Mittagessen zu dritt

Klaus bezahlte an der Kasse der Werksküche drei Portionen Mittagessen, und Bernd bezahlte zwei Portionen (wobei alle fünf Portionen den gleichen Preis haben). Die beiden hatten sich gerade an den Tisch gesetzt, als Jürgen sich zu ihnen gesellte; und sie aßen zu gleichen Teilen alle fünf Portionen auf. Als die Freunde miteinander abrechneten, wurde klar, daß Jürgen für das, was er verzehrt hatte, 2,50 M bezahlen mußte.

Wieviel von diesem Geld gehört Klaus und wieviel Bernd?

Lösung

Wir nehmen dazu ein Blatt Kästchenpapier. Das erleichtert uns die Arbeit beim Zeichnen des Diagramms, das die Bedingungen der Aufgabe widerspiegelt. Da wir wissen, daß der Gesamtpreis des Essens gleichmäßig unter allen *drei* Freunden aufzuteilen ist, stellen wir den Preis für jede einzelne Portion als Strecke mit einer Länge von *drei* Kästchen dar (siehe Bild). Die obere blaue Strecke entspricht dem Preis für die drei Portionen, die Klaus bezahlte: die obere gelbe Strecke veranschaulicht den Preis für jene zwei Portionen, die von Bernd bezahlt wurden.

Folglich bedeuten beide Strecken zusammen den Preis für alle fünf Portionen, die von den drei Freunden gemeinsam verzehrt wurden. Nach den Bedingungen der Aufgabe beträgt Jürgens Schuld für sein Essen 2,50 M. Wieviel davon muß er nun Klaus und wieviel Bernd geben?

Die Antwort erhält man leicht aus demselben Diagramm. Wir teilen die gesamte Strecke in drei gleich lange Abschnitte. Jeder dieser Teile entspricht dem Preis des von jedem der drei Freunde verzehrten Essens. Dabei soll die mittlere dieser Strecken Jürgens Schuld für sein Essen – also 2,50 M – darstellen. Aus dem Diagramm geht hervor, daß jedes Kästchen auf der Zeichnung 0,50 M bedeutet. Ziehen wir jetzt durch den Punkt, in dem sich die obere blaue (Klaus) und die obere gelbe Strecke (Bernd) berühren, eine senkrecht verlaufende Gerade, so teilt diese die mittlere der drei Strecken (Jürgens Schuld) in zwei Teile:

Der linke Teil, der sich an die Schuld von Klaus anschließt, hat eine Länge von 4 Kästchen, während der rechte Teil, der sich an die Schuld von Bernd anschließt, nur aus einem einzigen Kästchen besteht.

Folglich muß Klaus von Jürgen 2,00 M bekommen, Bernd dagegen 0,50 M. Dieses Ergebnis, das anschaulich auf geometrischem Wege gefunden wurde, kann man mit Hilfe einfacher Berechnungen überprüfen.

Jürgen bezahlte für seinen Anteil am Essen 2,50 M. Folglich ist der Gesamtpreis für das ganze Essen gleich

$$2{,}50\,\mathrm{M} \cdot 3 = 7{,}50\,\mathrm{M}.$$

Daraus ergibt sich der Preis für eine Portion zu $7{,}50\,\mathrm{M} : 5 = 1{,}50\,\mathrm{M}$.

Klaus bezahlte an der Kasse $1{,}50\,\mathrm{M} \cdot 3 = 4{,}50\,\mathrm{M}$, Bernd bezahlte an der Kasse $1{,}50\,\mathrm{M} \cdot 2 = 3{,}00\,\mathrm{M}$. Demnach muß Jürgen an Klaus 2,00 M $(4{,}50 - 2{,}50 = 2{,}00)$ und an Bernd 0,50 M $(3{,}00 - 2{,}50 = 0{,}50)$ geben.

Wie wir sehen, kommt man auf diesem Weg zum gleichen Ergebnis.

Brüder und Schwestern

Ein Junge wurde gefragt, wie viele Brüder und Schwestern er habe. Er antwortete: „Ebenso viele Brüder wie Schwestern." Darauf fragte man seine Schwester, wie viele Brüder und Schwestern sie habe. Sie antwortete: „Ich habe halb soviel Schwestern wie Brüder."

Wie viele Brüder und Schwestern waren es insgesamt?

Lösung

Wir skizzieren nach den Angaben der beiden Geschwister Diagramme. Dabei wollen wir die Anzahl der Jungen durch blaue Strecken und die der Mädchen durch rote Strecken darstellen. Wir müssen noch beachten, daß der Junge und das Mädchen bei ihren Antworten sich selbst nicht mitzählten.

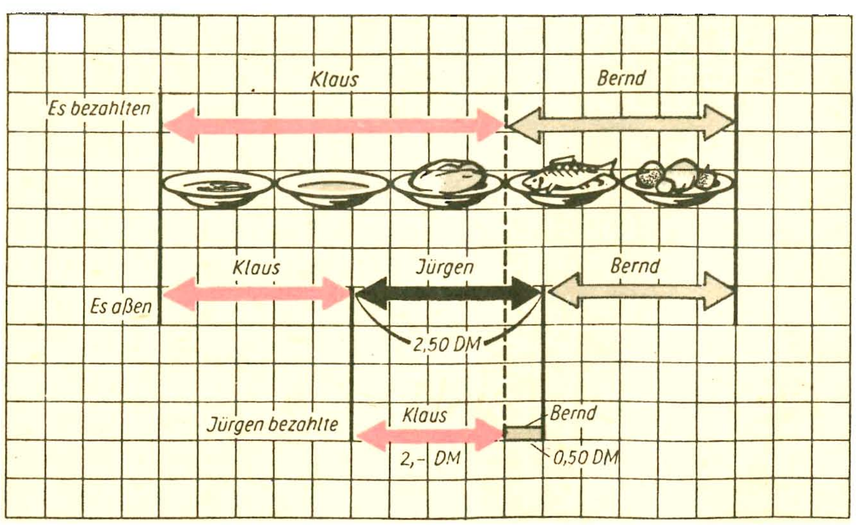
Der Junge sagte: „Ich habe ebenso viele Brüder wie Schwestern."

Wir zeichnen also den Jungen und legen links von ihm eine Strecke fest, die alle seine Brüder veranschaulicht; rechts von ihm ziehen wir eine *gleich lange* Strecke, die allen seinen Schwestern entspricht (siehe Bild). Dabei stellt die Strecke „Meine Schwestern" (die Schwestern des Jungen) die unbekannte Anzahl aller Mädchen dar.

Das Mädchen sagte: „Ich habe halb so viele Schwestern wie Brüder."

Wir zeichnen deshalb das Mädchen (natürlich auf der „Mädchenseite") und geben links von ihr eine Strecke für alle Brüder des Mädchens und rechts eine Strecke für alle Schwestern des Mädchens an. In diesem Diagramm (siehe Bild) muß die Strecke „Meine Brüder" *doppelt so lang* sein wie die Strecke „Meine Schwestern". Hier stellt die Strecke „Meine Brüder" (die Brüder des Mädchens) die unbekannte Anzahl aller Jungen dar. Da die Gesamtzahl der Jungen und Mädchen in beiden Fällen eindeutig bestimmt (wenn auch noch nicht bekannt) ist, so muß die Länge des gesamten Diagramms *a* (zusammen mit der Strecke, die von der Figur des Jungen ein-

Bild 1



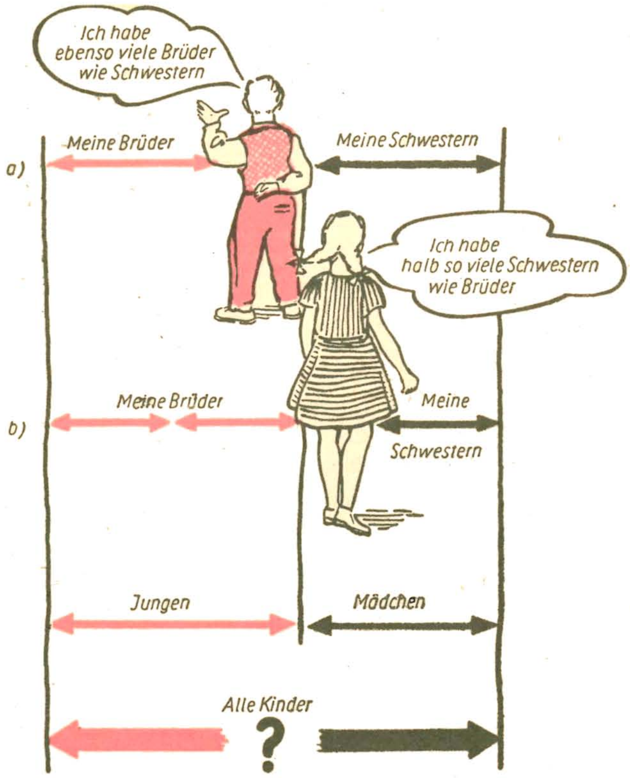


Bild 2

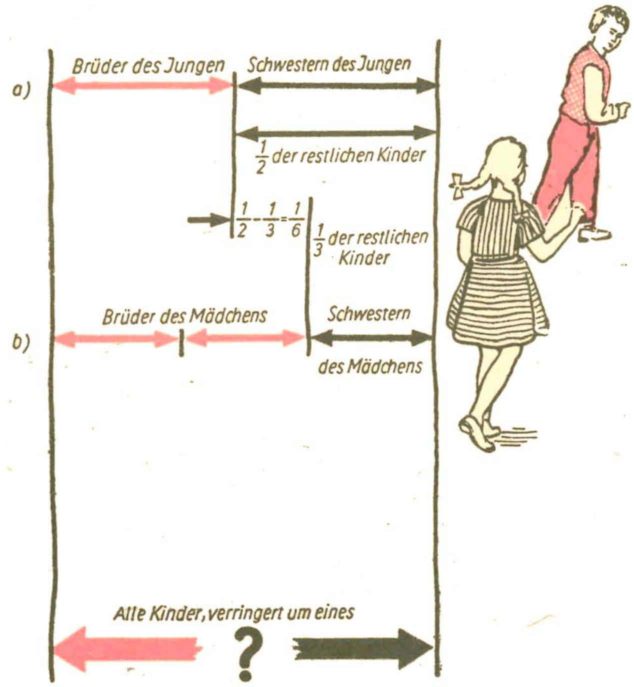


Bild 3

genommen wird) gleich sein der Länge des ganzen Diagramms *b* (zusammen mit der Strecke, die von der Figur des Mädchens eingenommen wird).

Jetzt lassen wir den Jungen und das Mädchen aus den Diagrammen „herausgehen". Dadurch ergeben sich zwei neue Diagramme (siehe Bild) von wiederum gleicher Länge, da sie in beiden Fällen die Anzahl der restlichen Kinder darstellen. Sie bedeuten also jeweils eine um 1 kleine Zahl als die tatsächliche Anzahl aller Geschwister. Wenn der Junge weggegangen ist (Diagramm *a*), so stellen die Mädchen (rote Strecke) die Hälfte der restlichen Kinder; ist aber nicht der Junge weggegangen, sondern das Mädchen (Diagramm *b*), dann stellen die Mädchen (rote Strecke) nur ein Drittel der restlichen Geschwister. Daraus folgt, daß die Differenz der roten Strecken auf dem Bild ein Mädchen darstellt, das den 6. Teil der Anzahl der restlichen Geschwister ausmacht, denn

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}.$$

Daher ist die Gesamtzahl aller Kinder, verringert um 1, gleich 6. Insgesamt waren es also 7 Geschwister, denn $6+1=7$;

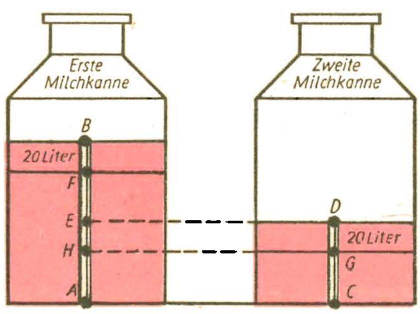
davon 3 Mädchen $\left(\frac{1}{2}\cdot 6=3\right)$ und 4 Jungen $(7-3=4)$.

Zwei Milchkannen

In einer Milchkanne ist doppelt soviel Milch wie in einer anderen. Wenn man aus beiden Kannen je 20 Liter Milch herausgießt, so ist in der ersten Kanne dreimal soviel Milch wie in der zweiten.

Wieviel Liter Milch waren anfangs in jeder Milchkanne?

Bild 4



Lösung

Wir zeichnen eine Gerade AC und errichten auf ihr zwei Senkrechte, $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, die erste doppelt so lang wie die zweite (siehe Bild). Der Punkt E sei die Mitte der Strecke $\overline{AB}$; dann ist $\overline{AE}=\overline{EB}=\overline{CD}$. Die Strecke $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zeigen die Anfangsmengen an Milch in jeder der beiden Kannen. Von den Punkten B und D tragen wir willkürlich gewählte, aber gleiche Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{DG}$ nach unten ab, die je 20 Liter Milch darstellen, welche aus jeder der Kannen ausgegossen wurden.

Dann bedeuten die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{CG}$ die restliche Milchmengen in den Kannen; dabei muß, in Übereinstimmung mit der Aufgabe, $\overline{AF}=3\ \overline{CG}$ sein, das heißt, die Strecke $\overline{CG}$ muß sich dreimal in die Strecke $\overline{AF}$ legen lassen.

Entfernen wir jetzt aus der Strecke $\overline{AF}$ die Strecke $\overline{EF}$, die gleich der Strecke $\overline{CG}$ ist (überlege, warum $\overline{EF}=\overline{CG}$ ist!), dann muß die verbleibende Strecke $\overline{AE}$ in sich nur noch 2 $\overline{CG}$ enthalten. Wir verbinden die Punkte D und E durch eine gerade Linie. Parallel zu dieser Verbindungslinie legen wir eine Gerade durch den Punkt G, welche die linke Senkrechte im Punkt H schneidet. Nehmen wir nun $\overline{AH}=\overline{CG}$ von der Strecke $\overline{AE}$ weg, dann ist die verbleibende Strecke $\overline{HE}$ ebenfalls gleich $\overline{CG}$. Da aber $\overline{HE}$ einer Menge von 20 Litern entspricht, muß die Strecke $\overline{CG}$ ebenfalls 20 Liter darstellen.

Folglich enthielt die *zweite* Milchkanne anfangs 20 Liter + 20 Liter = 40 Liter;

in der *ersten* Milchkanne waren anfangs

40 Liter · 2 = 80 Liter.

Es ist offensichtlich, daß in unserer Skizze die Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{DG}$ für eine genaue Darstellung von 20 Litern etwas zu kurz geraten sind. Dies hat die Zeichnung ein wenig verdorben, denn sie ist nicht maßstabgerecht; aber es hat nicht verhindert, daß wir die richtige Lösung fanden. Nachdem wir das Ergebnis kennen, ist es natürlich möglich, eine genaue Zeichnung anzufertigen.

Ostrowski/Kordemski

In freien Stunden alpha heiter

Unterhaltungsmathematik aus der UdSSR

Aus der Schule geplaudert

Welche Zensuren hatten die Schüler?

Ein Lehrer hat die Arbeit von drei Schülern, Alexejew, Wassiljew und Sergejew, durchgesehen, aber nicht mitgebracht. Er sagte zu den Schülern: „Ihr habt in euren Arbeiten unterschiedliche Leistungen gezeigt („3“, „4“, „5“). Sergejew hat keine „5“ und Wasiljew hat keine „4“. Aber ich glaube, Alexejew hat eine „4“. Später stellte sich heraus, daß der Lehrer dem einen Schüler die richtige Zensur gesagt, sich aber bei den beiden anderen geirrt hatte.
Welche Zensuren hatten die Schüler?

Mathematischer Wettstreit

Man wollte den klügsten von drei Siegern eines mathematischen Wettstreites, die alle die gleiche Punktzahl hatten, auswählen. Dies geschah folgendermaßen: Man zeigte ihnen fünf Mützen, drei weiße und zwei graue. Dann verband man ihnen die Augen und setzte jedem eine Mütze auf. Die übriggebliebenen zwei wurden beiseitegelegt. Danach nahm man ihnen die Binden von den Augen und erklärte, daß derjenige der Sieger des Wettstreites sei, der als erster herausfindet, welche Farbe die Mütze habe, die er trägt. Die Teilnehmer des Wettstreites betrachteten sich eine Zeitlang schweigend. Schließlich war einer von ihnen überzeugt, daß er eine weiße Mütze trägt.
Wie kam er zu dieser Überlegung?

Wer zerschlug den Spiegel?

Zum Direktor einer Schule wurden neun Schüler gebracht. Einer von ihnen hatte einen Spiegel auf dem Flur zerschlagen. Wer war der Übeltäter? Die Schüler gaben folgende Antworten:
Lednjow: „Dima war's!“
Aljoscha: „Nein, Dima war gar nicht mit dabei.“
Boris: „Ich habe den Spiegel zerschlagen!“
Kostja: „Weder Boris noch Sergejew waren es.“
Dima: „Aljoscha lügt!“
Wasja: „Boris war's!“
Tolja: „Boris war's nicht!“
Sergejew: „Weder ich noch Boris haben den Spiegel zerschlagen.“
Panin: „Sergejew lügt! Und Dima war gar nicht mit dabei.“
Wer zerschlug den Spiegel, wenn von den neun Antworten nur drei wahr sind?

Die drei Lehrer

In einer Schule wurden die Fächer Biologie, Geographie, Englisch, Französisch, Geschichte und Mathematik von den Lehrern Morosow, Wassiljew und Tokarew unterrichtet. Jeder von ihnen unterrichtete zwei Fächer. Der Geographielehrer und der Französischlehrer waren Nachbarn. Morosow war der jüngste von den dreien. Tokarew, der Biologielehrer und der Französischlehrer hatten einen gemeinsamen Schulweg. Der Biologielehrer war älter als der Mathematiklehrer. In der Freizeit spielten der Englischlehrer, der Mathematiklehrer und Morosow häufig mit einem vierten Partner Domino.
Welche Fächer unterrichteten die Lehrer?

K. A. Rupassow, Tambow

M. Ljapunow

Die Buchstaben in dem Namen des russischen Mathematikers M. Ljapunow (1857 bis 1918) und der Buchstabe x sind so durch die Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß nachfolgende Gleichungen zu wahren Aussagen werden. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{rcl}
L \cdot L + A &=& JJ \\
LJ \cdot L + P &=& JJJ \\
LJA \cdot L + U &=& JJJJ \\
LJAP \cdot L + N &=& JJJJJ \\
LJAPU \cdot L + O &=& JJJJJJ \\
LJAPUN \cdot L + W &=& JJJJJJJ \\
LJAPUNO \cdot L + M &=& JJJJJJJJ \\
LJAPUNOW \cdot L + X &=& JJJJJJJJJ
\end{array}$$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Frische Pilze

Katja und Petja haben so viele Pilze gesammelt, daß sie diese kaum tragen konnten. Die Pilze bestehen aber zu 85% aus Wasser. Nachdem die Pilze getrocknet waren, wurden sie 15 kg leichter; jetzt enthielten sie nur noch 40% Wasser.
Wieviel kg frische Pilze hatten die Kinder gesammelt?

Mathematikfachlehrer A. Halameisär, Moskau

Der Elefant und die Mücke

Ein Liebhaber der mathematischen Spielereien beschäftigte sich mit verschiedenen Umwandlungen algebraischer Ausdrücke und kam zu der sonderbaren Schlußfolgerung, daß das Gewicht eines Elefanten gleich dem Gewicht einer Mücke ist.
Er machte es so: er bezeichnete das Gewicht des Elefanten mit x, das Gewicht der Mücke mit y, die Summe dieser Gewichte mit $2v$. Dann ist $x + y = 2v$.
Aus dieser Gleichung kann man zwei andere ableiten:

$$x - 2v = -y,$$
$$x = -y + 2v.$$

Dann multiplizierte er die linken und die rechten Seiten der beiden Gleichungen miteinander:

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$$

Dann addierte er auf beiden Seiten v^2 und erhielt:

$$x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$$

oder $(x - v)^2 = (y - v)^2$.
Dann zog er die Quadratwurzel aus beiden Seiten und erhielt: $x - v = y - v$ oder $x = y$,
d. h., das Gewicht des Elefanten (x) ist gleich dem Gewicht der Mücke (y).
Untersuche einmal, was hier los ist!

N. A. Gerasumowa/E. S. Nowgorobowa, Moskau

Magisches Quadrat

A. A. Masanik, Minsk

4	+		−		=	2
+		−		+		+
	−	2	+	0	=	
−		+		−		−
	+		−	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	−		=	3

Auf der Wolga

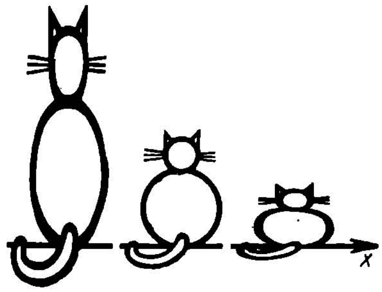
● Nachdem ein Dampfer die Hälfte des Weges zurückgelegt hatte, vergrößerte er seine Geschwindigkeit um 25%, so daß er eine halbe Stunde früher als vorgesehen am Endpunkt ankam. In wieviel Stunden durchfuhr der Dampfer den ganzen Weg?

● Ein Dampfer soll eine bestimmte Flußstrecke bei gleichbleibender Maschinenleistung stromab in 3 Stunden und stromauf in $4\frac{1}{2}$ Stunden zurücklegen. In wieviel Stunden durchschwimmt ein nur von der Strömung getragenes leeres Fäßchen diese Entfernung?

P. J. Germanowitsch

Kryptarithmetik aus Quant

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



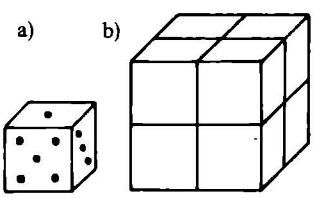
Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1978

Mathematik

Ma 5 ■1650 Hans kaufte 3 Buntstifte und 4 Hefte und mußte dafür insgesamt 1,08 M bezahlen. Erwin kaufte 7 Buntstifte und 6 Hefte der gleichen Preislage und mußte dafür 2,12 M bezahlen. Wieviel kostete ein Buntstift bzw. ein Heft? *Sch.*

Ma 5 ■1651 Das Bild a) stellt die Anordnung der ungeraden Augenzahlen eines Spielwürfels dar. Acht gleichgroße Spielwürfel seien, wie aus Bild b) ersichtlich, zu einem größeren Würfel zusammengesetzt. Ein Betrachter dieses Würfels möge genau drei in einer Ecke zusammenstoßenden quadratischen Flächen sehen. Wie sind die acht Spielwürfel zu setzen, damit der Betrachter nur ungerade Augenzahlen sieht und

1. die Summe der Augenzahlen möglichst klein,
2. die Summe der Augenzahlen möglichst groß ist?



Wie groß ist in jedem der beiden Fälle die Summe aus allen sichtbaren Augenzahlen? Zeichne die erforderlichen Skizzen!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■1652 In der Subtraktionsaufgabe

```
 ****6
− ****
     *
```

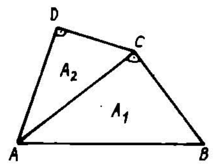
ist jedes Sternchen durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ■1653 Zeichne eine Gerade g_1, lege auf ihr zwei verschiedene Punkte A und B fest, zeichne durch A die Senkrechte g_2 zu g_1 und durch B die Senkrechte g_3 zu g_1! Konstruiere schließlich alle diejenigen Punkte, die von den Geraden g_1, g_2 und g_3 den gleichen Abstand haben!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

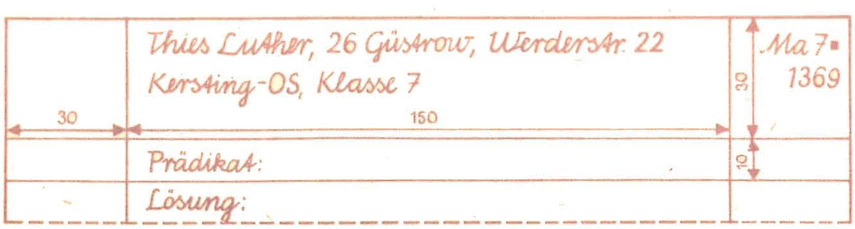
Ma 5 ■1654 Ein Rechteck habe den Umfang $u = 14$ cm und den Flächeninhalt $A = 10\ \text{cm}^2$. Welche Länge (in ganzen Zahlen) haben die Rechteckseiten a und b?
Löse diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle! *Sch.*

Ma 5 ■1655 Eine Verkaufsstelle für Oberbekleidung erhielt eine Lieferung von 45 preisgleichen Anzügen und 20 preisgleichen Kleidern von einem Gesamtwert von 10825,– M. In der ersten Woche wurden von dieser Lieferung 25 Anzüge und alle Kleider verkauft und dafür insgesamt 6725,– M eingenommen. Wie hoch ist der Preis für einen Anzug bzw. für ein Kleid?
Fachlehrer Dieter Knape, Jessen

Ma 6 ■1656 Die abgebildete Figur stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b = 2a$ dar. Über der Kathete $\overline{AC}$ wurde ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ACD mit $\overline{AC}$ als Basis konstruiert. Es sei A_1 der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, A_2 der Flächeninhalt des Dreiecks ACD. Welche der drei Beziehungen $A_1 < A_2$, $A_1 = A_2$, $A_1 > A_2$ trifft zu?
Lehrer H. Engelmann, Sachsendorf



Skizze
$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{BC}$
$\overline{AD} = \overline{CD}$



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm · 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1977/78 läuft von Heft 5/77 bis Heft 2/78. Zwischen dem 1. und 10. September 1978 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/78 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1977/78 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.
Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1657 Bilde aus allen natürlichen Zahlen von 2 bis 21 das Produkt und subtrahiere davon das Produkt aus der kleinsten und der größten dieser Zahlen!
a) Untersuche, ob die so erhaltene Differenz durch 7 teilbar ist!
b) Wie lauten die vier letzten Ziffern des Ergebnisses? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 6 ▪1658 Es sind alle dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Quersumme 24 beträgt und deren Vorgänger oder Nachfolger durch 7 teilbar sind.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ▪1659 Eine vierstellige natürliche Zahl, die durch 3 teilbar ist, habe in dekadischer Darstellung die Form $z = \overline{abcd}$, wobei für die den Ziffern a, b, c, d entsprechenden Zahlen $a \cdot b = 6$ und $b \cdot c = 4$ gilt. Wie lautet diese Zahl, wenn ihre Ziffern paarweise verschieden sind?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ▪1660 Zu ermitteln sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 10, die folgende Bedingungen erfüllen: Vergrößert man die der vorderen Ziffer entsprechende Zahl um 4 und vermindert man die der hinteren Ziffer entsprechende Zahl um 2, dann erhält man das Dreifache der Ausgangszahl.
Wieviel Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt es? *Lehrer D. Knape, Jessen*

Ma 7 ▪1661 Eine sechsstellige natürliche Zahl beginnt mit der Ziffer 2. Streicht man diese Ziffer und hängt man sie hinter den verbleibenden fünf Ziffern an, so erhält man eine Zahl, die dreimal so groß ist wie die ursprüngliche Zahl.
Um welche Zahl handelt es sich?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ▪1662 Wie viele dreistellige Primzahlen gibt es, für die das Produkt aus den drei den Ziffern entsprechenden Zahlen jeweils 252 beträgt? *Lehrer D. Knape, Jessen*

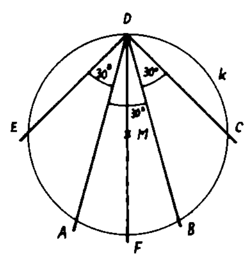
Ma 7 ▪1663 Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Konstruiere eine Gerade g, die die Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus in P, die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt Q, die Seite $\overline{CD}$ in einem inneren Punkt R und die Verlängerung von $\overline{AD}$ über D hinaus in S so schneidet, daß $\overline{SR} = \overline{RQ} = \overline{QP}$ gilt!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ▪1664 Eine Schulklasse unternimmt während der Schulferien eine mehrtägige Fahrt. Dieser Klasse gehören 15 Mädchen mehr an als Jungen. Die Anzahl der Mädchen verhält sich zur Anzahl der Jungen wie 5:2. Die Unkosten belaufen sich auf insgesamt 875 M. Wieviel Mark hat jeder Teilnehmer aufzubringen, wenn alle Schüler dieser Klasse an der Fahrt teilnehmen?
Schülerin Ingrid Wolf, Berlin

Ma 8 ▪1665 Ein Vater gibt seinen drei Söhnen Taschengeld. Dafür hat der Vater einen bestimmten Betrag zur Verfügung. Dem ersten Sohn gibt er ein Drittel dieses Betrages und noch 3 M dazu; dem zweiten Sohn gibt er ein Drittel des verbleibenden Restes und noch 3 M dazu; dem dritten Sohn gibt er die restlichen 35 M. Wieviel Taschengeld hat der Vater insgesamt seinen drei Söhnen zugedacht, wie hat er es verteilt?
Andreas Fittge, Berlin, Kl. 9

Ma 8 ▪1666 Man wähle drei beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen aus. Man beweise, daß das Produkt aus der kleinsten und der größten Zahl stets um 1 kleiner ist als das Quadrat der mittleren Zahl!
Schüler Volker Leutheuser, Sonneberg

Ma 8 ▪1667 Die abgebildete Figur stellt einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 4$ cm dar.



In diesen Kreis wurden zwei Sehnen $\overline{DA}$ und $\overline{DB}$ so eingezeichnet, daß der Winkel $\sphericalangle ADB$ die Größe 30° besitzt, und die Gerade DM diesen Winkel halbiert. Ferner wurden in den Kreis k zwei Sehnen $\overline{DE}$ und $\overline{DC}$ so eingezeichnet, daß die Winkel $\sphericalangle ADE$ und $\sphericalangle BDC$ jeweils die Größe 30° besitzen.
a) Beweisen Sie, daß die Geraden AC und BM bzw. die Geraden BE und AM jeweils senkrecht aufeinander stehen!
b) Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$!
Dr. W. Fregin, Institut für Lehrerbildung, „N. A. Krupskaja", Leipzig

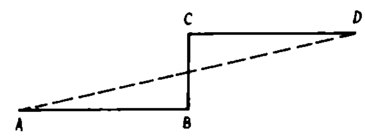
Ma 8 ▪1668 Gegeben seien die Gleichungen
(1) $7x + 5y - z = 8$ und
(2) $y + z = 11$.
Man ermittle alle geordneten Zahlentripel $[x, y, z]$ natürlicher Zahlen x, y und z, die beide Gleichungen erfüllen und in denen x den kleinstmöglichen Wert annimmt (ein Minimum ist)!
Schüler Peter Braumüller, Rep. Österreich

Ma 9 ▪1669 Gegeben ist die folgende Ungleichung
$$x(2-x) < (2-x)(2x-3). \qquad (1)$$
Ein Schüler soll die Lösungsmenge dieser Ungleichung im Bereich der natürlichen Zahlen bestimmen und rechnet so:
(1) $x(2-x) < (2-x)(2x-3) \,|\, :(2-x)$
$x < 2x - 3 \,|\, -x$
$0 < x - 3 \,|\, +3$
$3 < x$
$L = \{x;\, x \in N;\, x > 3\}$
bzw. $L = \{4, 5, 6, 7, \ldots\}$.
Nun will der Schüler überprüfen, ob z. B. die Zahlen 4 oder 5 tatsächlich Lösungen der Ungleichung sind und setzt in die Ausgangsungleichung (1) für x die Zahl 4 ein. Er erhält:
$4(2-4) < (2-4)(2 \cdot 4 - 3)$
$4 \cdot (-2) < (-2) \cdot 5$
$-8 < -10$.
Das ist eine falsche Aussage. Folglich kann 4 keine Lösung dieser Ungleichung sein.
Es stellt sich schließlich heraus, daß alle weiteren natürlichen Zahlen, die in der ermittelten Lösungsmenge liegen, gar keine Lösungen sind. Das ist ein Widerspruch.
Wo steckt der Fehler? Welche natürlichen Zahlen sind Lösungen der Ungleichung?
Mathematikfachlehrer Sprong, OS Rochlitz

Ma 9 ▪1670 Man ermittle die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems im Bereich der reellen Zahlen:
(1) $xy + 1 = x + y$
(2) $xz + 1 = x + z$
(3) $yz + 1 = y + z$
Schüler Peter Braumüller, Rep. Österreich

Ma 9 ▪1671 Man beweise, daß die Summe aus einer vierstelligen natürlichen Zahl und dem Doppelten ihrer Quersumme stets durch 3 teilbar ist.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

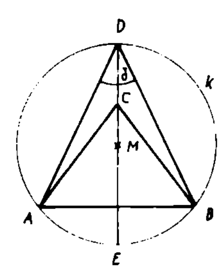
Ma 9 ▪1672 Für den in dem Bild angegebenen Streckenzug $\overline{ABCD}$ gilt: $\overline{AB} = \overline{CD}$; $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 90°$. Ferner ist $\overline{BC}$ um 2 m kürzer als $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{AD}$ ist 26 m lang. Berechnen Sie die Länge des Streckenzuges $\overline{ABCD}$!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 10/12 ▪1673 Zeigen Sie, daß gilt:
$444444444444445^2 + 111111111111111 - 444444444444444^2 = 10^{15}$!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ▪1674 Beweisen Sie, daß die Zahl $7^{2281} - 2$ keine Primzahl ist!
Schüler Andreas Fittge, EOS „Heinrich Hertz" Berlin, Kl. 9

Ma 10/12 ▪1675 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Radius der Länge $r = 4$ cm.



Dem Kreis k seien ferner ein Durchmesser $\overline{DE}$ und eine senkrecht auf diesem stehende Sehne $\overline{AB}$ von der Länge 6 cm eingezeichnet. Der Mittelpunkt von $\overline{DM}$ sei C. Das Viereck $ACBD$ nennt man ein Deltoid. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Deltoids $ACBD$ und die Größe des Winkels $\sphericalangle ADB = \delta$! *Fr.*

Ma 10/12 ▪1676 Gegeben sei das Dreieck ABC mit $\overline{AB} = c = 5\,\text{cm}$, $\overline{BC} = a = 4\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = b = 3\,\text{cm}$. Unter welchem Winkel schneidet die Mittelsenkrechte auf der Seite $\overline{BC}$ die Gerade, auf der die Höhe h_c liegt? *Fr.*

Physik

Ph 6 ▪21 Sportlehrer Müller fährt mit einer Schülergruppe in der Eisenbahn zu einem Sportfest. Während der Fahrt fragt Klaus, wie schnell der Zug wohl im Augenblick fahre. Herr Müller holt eine Stoppuhr aus der Tasche und mißt zwischen den Kilometersteinen mit den Angaben 50,2 und 51,6 eine Zeit von 70 Sekunden. Als er das den Schülern mitteilt, sagt Peter: „Und ich habe in der gleichen Zeit genau 36 Telegrafenmasten gezählt, an denen wir vorbeigefahren sind."
„Gut", erwidert Herr Müller, „Dann sagt mir, welchen Abstand die Telegrafenmasten voneinander haben und welche Geschwindigkeit unser Zug hat!" *Ing. A. Körner, Leipzig*

Ph 7 ▪22 Bei einem Gewehr verläßt ein Geschoß den Lauf innerhalb von $\frac{1}{900}\,\text{s}$ und besitzt eine Energie von 350 kpm. Berechne die Leistung, die in dem Gewehr erzielt werden muß, in kW!

Ph 8 ▪23 1 kWh (Kilowattstunde) Elektroenergie kostet nach dem Haushalttarif 0,08 M. In welcher Zeit verbraucht eine 60-Watt-Glühlampe für einen Pfennig Elektroenergie? *Dr. G. Hesse, Radebeul*

Ph 9 ▪24 Wie groß ist die Sichtweite für einen erwachsenen Menschen (Augenhöhe 1,70 m) auf dem Mond (Radius 1 738 km)? *Schüler Uwe Kassner, Bernau*

Ph 10/12 ▪25 Die magnetische Feldstärke H im Zentrum einer stromdurchflossenen, langen Zylinderspule ohne Ferromagnetikum (auch Luftspule genannt) ist nur durch den Strom I, die Windungszahl N und die Spulenlänge l bestimmt. Dann gilt $H = \frac{I \cdot N}{l}$. Zur Aufrechterhaltung dieses Feldes ist eine elektrische Leistung P als Produkt aus einer angelegten Spannung U und fließendem Strom I nötig, also $P = U \cdot I$. Gegeben sei eine Spule mit dem äußeren Durchmesser der Wicklung von $D = 5\,\text{cm}$, die je Wicklungslage $N_l = 300$ Windungen eines Kupferdrahtes mit $d = 0{,}1\,\text{cm}$ Durchmesser hat. Der Ohmsche Widerstand des Spulendrahtes wurde mit einer Meßbrücke zu $R_{gem} = (9{,}6 \pm 0{,}1)$ Ohm bestimmt. Nach einer Tabelle hat ein 100 m langer Kupferdraht von 1 mm Durchmesser einen Widerstand von 2,27 Ohm.
Gesucht sind:
1. die Anzahl M der Wicklungslagen dieser Spule,
2. der maximal zulässige Meßfehler des Drahtwiderstandes, um sicher für eine Lagenanzahl entscheiden zu können,
3. die magnetische Feldstärke H in $\frac{AN}{m}$ im Spuleninnern, wenn der Spulendraht mit $I = 10\,A$ beaufschlagt wird und
4. die Wärmeleistung in Watt, die von einem Kühlaggregat aufgebracht werden muß, um die Temperatur der Spule bei einem Strom von $I = 10\,A$ konstant zu halten.
Hinweis: Man stelle den Ausdruck für den Gesamtwiderstand $R(M)$ bei M Wicklungslagen auf und variiere M, bis $R(M)$ dem gemessenen Widerstand R_{gem} am nächsten kommt; $R(M)$ ist nur für ganze M (es gibt nur vollständige Lagen) definiert. Zur Bestimmung des maximal zulässigen Meßfehlers beachte man das ungünstigste Vorzeichen dieses Fehlers. *Dr. U. Rösler, Berlin*

Chemie

Ch 7 ▪17 Zur motorischen Verbrennung von 1 dm³ Kraftstoff gehören 8430 dm³ Luft.
a) Ein Kleinroller „Schwalbe" fährt 200 km und verbraucht dabei 6 l Kraftstoff.
Wieviel dm³ Luft werden dabei benötigt?
b) Zum besseren Verständnis des benötigten Luftvolumens soll folgender Vergleich angestellt werden:
Würde die Luft eines Wohnzimmers ($5\,\text{m} \times 3{,}50\,\text{m} \times 2{,}50\,\text{m}$) ausreichen, um diese Menge Kraftstoff vollständig verbrennen zu können?

Ch 8 ▪18 Durch zusätzliche Auslieferung von Stickstoffdüngemitteln (3000 t bei Jahresende) wollen die Schwedter Chemiewerker den Werktätigen der DDR-Landwirtschaft helfen, Ertragsausfälle durch Trockenheit auszugleichen. 1 kg Stickstoff ermöglicht 80 kg Grünfutter mehr zu erzeugen.
a) Wieviel Tonnen Grünfutter können zur Stabilisierung der Futterversorgung der Landwirtschaft unserer Republik zusätzlich erzeugt werden?
b) Diese zusätzlich erzeugte Grünfuttermenge bedeutet eine jährliche Mehrproduktion von 4% (vier Hundertstel).
Wieviel Tonnen Grünfutter werden in einem Jahr in unserer Republik erzeugt?

Ch 9 ▪19 Durch die Produktion von mineralischen Düngemitteln trägt unsere chemische Industrie zur besseren Versorgung der Landwirtschaft bei. Kaliumsulfat ist der Hauptbestandteil des Düngemittels „Schwefelsaures Kali". Berechnen Sie:
a) wieviel Gramm der drei Elemente sind in 1 Sg Kaliumsulfat enthalten,
b) die prozentuale Zusammensetzung für die im Kaliumsulfat enthaltenen Elemente,
c) wieviel Gramm Kalium sind in 20 g einer 10%igen Lösung von Kaliumsulfat enthalten!

Ch 10/12 ▪20 Wieviel Liter bzw. Kubikmeter Luft sind zur völligen Verbrennung von 1 m³ Stadtgas erforderlich, wenn dieses die folgende Zusammensetzung hat?
50% Wasserstoff, 35% Methan, 3% Äthylen, 8% Kohlenmonoxid, 3% Stickstoff, 1% Kohlendioxid.
Es sei angenommen, daß Luft und Stadtgas gleichen Druck und gleiche Temperatur haben und daß die Luft $\frac{1}{5}$ Volumen Sauerstoff enthält.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Liebe Leser der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*!

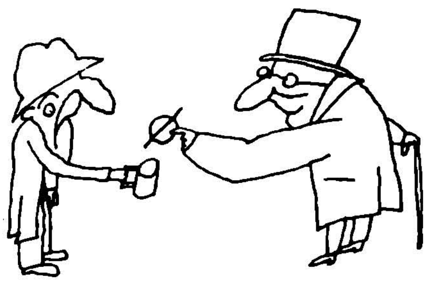
Groß ist die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb. In unserer Redaktion gehen dabei zu einer Aufgabe unterschiedliche Lösungen ein. Da eine Lösungsidee oftmals interessanter ist als die Aufgabenstellung selbst, wollen wir eingegangene Lösungen zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen. Wir hoffen, damit Anregungen zu geben, wie man mathematische Probleme anpacken und erfolgreich lösen kann.
Im Heft 6/1976 wurde folgende Aufgabe gestellt:

Ma 6 ▪1572 In einem Regal einer Bibliothek befinden sich mehr als 340, aber weniger als 350 Bücher. Genau der vierte Teil dieser Bücher besteht aus Kinderbüchern, genau der dritte Teil aus Erzählungen, die restlichen Bücher sind Romane.
Wieviel Kinderbücher, Erzählungen und Romane enthält dieses Regal? *Schülerin Karin Sukowski, Neukloster*

Zu dieser Aufgabe wurde von uns eine Lösung in Heft 2/1977 veröffentlicht. Nun stellen wir weitere Lösungen von *alpha*-Lesern vor, die uns besonders gefallen haben. *Redaktion alpha*

Kirsten Brandt, Rosa-Luxemburg-Oberschule, Jena-Neulobeda, Kl. 6c:
Von den Zahlen 341, 342, ..., 348, 349 sind nur die Zahlen 344 und 348 durch 4 teilbar. Von diesen beiden Zahlen ist nur 348 außerdem auch durch 3 teilbar.
$348:4 = 87$; $348:3 = 116$; $348-(87+116) = 145$.
Das Regal enthält 87 Kinderbücher, 116 Erzählungen, 145 Romane.
Unser Kommentar:
In der Kürze liegt die Würze!

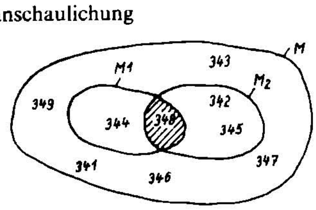
Holger Laube, Dr.-Theodor-Neubauer-Schule, Schlotheim, Kl. 5c:
$340 < n < 350$;
Menge der durch 4 teilbaren Zahlen n:
$M_1 = \{344, 348\}$;
Menge der durch 3 teilbaren Zahlen n:
$M_2 = \{342, 345, 348\}$;
Durchschnittsmenge: $M_1 \cap M_2 = \{348\}$
$\frac{1}{4} \cdot 348 = 87$; $\frac{1}{3} \cdot 348 = 116$; $348 - (87 + 116) = 145$.
(Antwortsatz wie oben)
Unser Kommentar:
Holger verdient besonderes Lob! Als Schüler einer 5. Klasse löst er bereits Aufgaben aus der Klassenstufe 6, und er hat sich bereits mit der Mengenlehre beschäftigt.



Holger Friedrich, W.-Komarow-Oberschule, Karl-Marx-Stadt, Kl. 6a:
Die Anzahl der Bücher sei n. Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $3|n$ und $4|n$. Das k.g.V. von 3 und 4 ist 12. Folglich muß gelten $12|n$. Im vorgegebenen Intervall (340, 350) natürlicher Zahlen ist genau eine Zahl, nämlich die Zahl 348, durch 12 teilbar.
$348:4 = 87$; $348:3 = 116$; $348 - (87 + 116) = 145$.
Unser Kommentar:
Knapp und präzis, also lobenswert.

Silke Vogel, POS Lohmen, Kl. 6:
$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + x = 1$; $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} + x = \frac{12}{12}$; $x = \frac{5}{12}$.
$348:4 = 87$; $348:3 = 116$; $348 - (87 + 116) = 145$. (Antwortsatz)
Unser Kommentar: So geht's auch.

Katrin Lippuner, Salvador-Allende-Oberschule, Rheinsberg, Kl. 6:
Katrin findet eine ähnliche Lösung wie Holger Laube. Sie ergänzt diese Lösung noch durch eine anschauliche Graphik.
Lösungsgrundbereich:
$M = \{341, 342, \ldots, 348, 349\}$
Menge der durch 4 teilbaren Zahlen:
$M_1 = \{344, 348\}$
Menge der durch 3 teilbaren Zahlen:
$M_2 = \{342, 345, 348\}$
Veranschaulichung



Unser Kommentar: Prima, mach weiter so!

Das sind sie, die 24000 Lösungen des Heftes 5/1976 (Höhe: 2,30 m) gebündelt nach Aufgabennummern, gehalten von dem Chefredakteur und der Redaktionsassistentin. (Sie bilden die Redaktion *alpha*.) Der Stapel zeigt die zu leistende Arbeit, um all den fleißigen Teilnehmern des *alpha*-Wettbewerbs eine Antwort zukommen zu lassen:

- Abtransport von etwa fünf Säcken Post vom Postamt 7027 Leipzig zur Redaktion.
- Öffnen der Briefe und Sortieren der Lösungen nach Nummern durch die Redaktionsassistentin – Schüler des *alpha*-Clubs der 29. OS helfen dabei.
- Korrektur der Lösungen durch Studienrat J. Lehmann, VLdV (Kl. 5, 6, 7) und OStR G. Schulze, Herzberg (Kl. 8, 9, 10/12).
- Schreiben der 24000 Antwortkarten durch Rentner und Schüler des *alpha*-Clubs der 29. OS Leipzig (insgesamt etwa 250 Arbeitsstunden).
- Übergabe der 24000 Antwortkarten an das Briefpostamt 701 Leipzig.
- Abtransport der Lösungen zum Altstoffhandel.
- Auswertung des Wettbewerbs (Analyse der Aufgaben und Lösungen, Statistik).

Um einen termingerechten Ablauf zu sichern, bitten wir, die Wettbewerbsbedingungen gewissenhaft einzuhalten.
Unser besonderer Wunsch: • Die Lösungen nicht erst kurz vor dem letzten Einsendetermin einsenden! • Jede Lösung auf Blatt für sich schreiben, da die Lösungen *vor* Beginn der Korrektur nach Nummern sortiert werden. • Jedes Lösungsblatt muß die Adresse des Einsenders tragen.

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb:

Heft 1/77 (Fortsetzung)

Ma 10/12 ■1599 a) Es sei (x, y) ein Paar von ganzen Zahlen, für das die Ungleichungen

$$x + y < 3, \quad (1)$$
$$x - y < 3, \quad (2)$$
$$2x + y > 2 \quad (3)$$

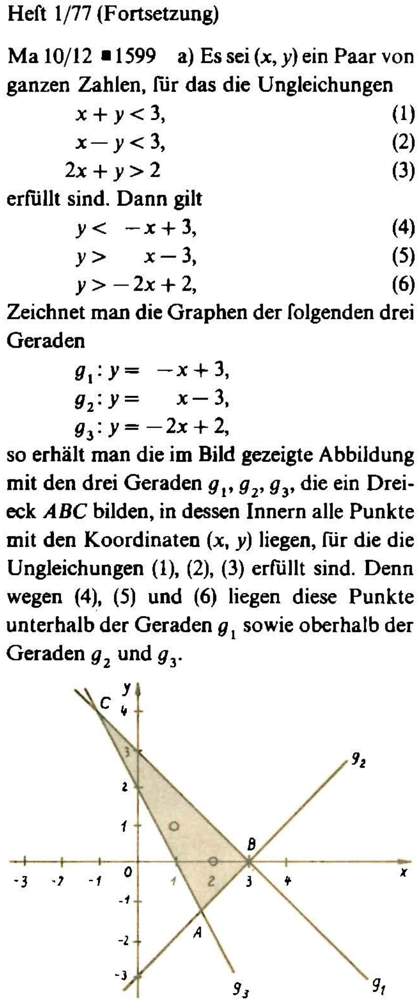
erfüllt sind. Dann gilt

$$y < -x + 3, \quad (4)$$
$$y > x - 3, \quad (5)$$
$$y > -2x + 2, \quad (6)$$

Zeichnet man die Graphen der folgenden drei Geraden

$$g_1: y = -x + 3,$$
$$g_2: y = x - 3,$$
$$g_3: y = -2x + 2,$$

so erhält man die im Bild gezeigte Abbildung mit den drei Geraden g_1, g_2, g_3, die ein Dreieck ABC bilden, in dessen Innern alle Punkte mit den Koordinaten (x, y) liegen, für die die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt sind. Denn wegen (4), (5) und (6) liegen diese Punkte unterhalb der Geraden g_1 sowie oberhalb der Geraden g_2 und g_3.



Im Innern des Dreiecks ABC liegen aber nur die folgenden Punkte mit ganzzahligen Koordinaten: (1, 1) und (2, 0). Daher erfüllen nur die Paare (1, 1) und (2, 0) die Bedingungen der Aufgabe.
b) Aus (1) und (2) folgt durch Addition

$2x < 6$, also $x < 3$ und,
da x ganzzahlig ist, $x \leqq 2$.

Ferner folgt aus (1)

$$-x - y > -3$$

und daher aus (3) und (7) durch Addition

$x > -1$, also, da x ganzzahlig ist,
$x \geqq 0$.

Es gilt daher $0 \leqq x \leqq 2$, also $x = 0$ oder $x = 1$ oder $x = 2$.

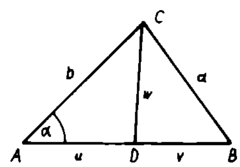
Aus (4), (5) und (6) folgt
für $x = 0$: $y < 3, y > -3, y > 2$,
was zu einem Widerspruch führt, da y ganzzahlig ist;
für $x = 1$: $y < 2, y > -2, y > 0$,
also, da y ganzzahlig, $y = 1$;
für $x = 2$: $y < 1, y > -1, y > -2$,
also $y = 0$.
Wenn also das gegebene Ungleichungssystem überhaupt ganzzahlige Lösungen hat, so können es nur die Paare (1, 1) und (2, 0) sein. Die Probe zeigt, daß diese Paare die gegebenen Ungleichungen erfüllen, daß sie also tatsächlich Lösungen sind.

Ma 10/12 ■1600 a) Aus $u : v = b : a$ folgt
$v = \frac{au}{b}$ und daher wegen $u + v = c$

$$u + \frac{au}{b} = c, \quad u = \frac{bc}{a+b}. \tag{1}$$

Ferner erhält man durch Anwendung des Kosinussatzes in dem Dreieck ADC

$$w^2 = b^2 + u^2 - 2bu \cos. \tag{2}$$



Dabei gilt nach dem Kosinussatz (Dreieck ABC)

$$\cos = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \tag{3}$$

Daher folgt aus (2) und (3)

$$w^2 = b^2 + u^2 - \frac{2bu(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

und weiter wegen (1)

$$w^2 = b^2 + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{b(b^2 + c^2 - a^2)}{a+b}$$

$$= \frac{b}{(a+b)^2}[b(a+b)^2 + bc^2 - (a+b) \cdot (b^2 + c^2 - a^2)]$$

$$= \frac{b}{(a+b)^2}[a^2b + 2ab^2 + b^3 + bc^2 - ab^2 - ac^2 + a^3 - b^3 - bc^2 + ab^2]$$

$$= \frac{b}{(a+b)^2}[a^3 + 2a^2b + ab^2 - ac^2]$$

$$= \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}, \text{ also}$$

$$w = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}.$$

b) Für $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$ erhält man

$$w = \frac{1}{11}\sqrt{30 \cdot 18 \cdot 4\,\text{cm}} = \frac{12}{11}\sqrt{15}\,\text{cm},$$

$w \approx 4{,}23\,\text{cm}$.

Ph 10/12 ■1601

Gegeben: $l' = l - \frac{1}{2}l = 0{,}5\,l$

$\Delta f = 0{,}5\,\text{Hz}$, $g = 9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Gesucht: $l; f$

Es ergibt sich die Gleichung

$$f + \Delta f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l'}} \text{ mit } f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \text{ und } l' = 0{,}5\,l.$$

$$f + \Delta f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l'}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} + \Delta f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{0{,}5\,l}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} + \Delta f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{0{,}5}} \qquad | \cdot 2\pi\sqrt{0{,}5}$$

$$\sqrt{0{,}5}\sqrt{\frac{g}{l}} + 2\pi\sqrt{0{,}5}\Delta f = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$2\pi\sqrt{0{,}5}\Delta f = \sqrt{\frac{g}{l}} - \sqrt{0{,}5}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$2\pi\sqrt{0{,}5}\Delta f = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot (1 - \sqrt{0{,}5})$$

$$4\pi^2 \cdot 0{,}5 \cdot \Delta f^2 = \frac{g}{l} \cdot (1 - \sqrt{0{,}5})^2$$

$$l = \frac{g(1 - \sqrt{0{,}5})^2}{4\pi^2 \cdot 0{,}5 \cdot \Delta f^2}$$

$$l = \frac{9{,}81\,\text{m}\,(1 - \sqrt{0{,}5})^2 \cdot s^2}{s^2 \cdot 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^2}$$

$l \approx 0{,}17\,\text{m}$. Weiterhin ist

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{9{,}81\,\text{m}}{0{,}17\,s^2 \cdot \text{m}}} \approx 1{,}21\,\text{Hz}$$

Das Pendel hat eine Länge von 0,17 m und eine Frequenz von 1,21 Hz.

Ch 10/12 ■1602

$$\begin{array}{lll} 272{,}2\,\text{g} & & 44{,}8\,\text{l} \\ 2CaSO_4 + C \rightarrow 2CaO + 2SO_2 + CO_2 \\ 204 \cdot 10^6\,\text{g} & & V \end{array}$$

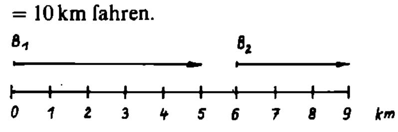
NR: $2\,\text{mol} \cdot 136{,}1\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} = 272{,}2\,\text{g}$,

$2\,\text{mol} \cdot 22{,}4\,\frac{\text{l}}{\text{mol}} = 44{,}8\,\text{l}$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:
$V = 33{,}6 \cdot 10^6\,\text{l}$
$33\,600\,\text{m}^3$ Schwefeldioxid können hergestellt werden.

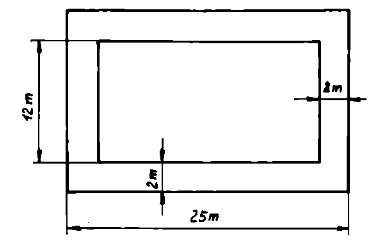
Lösungen zum alpha-Wettbewerb:
Heft 2/77

Ma 5 ■1622 a) Während das hintere Boot 5 km weitergefahren ist, hat das vordere Boot nur 3 km zurückgelegt. Darum gilt $6\,\text{km} - 5\,\text{km} + 3\,\text{km} = 4\,\text{km}$. Die Boote haben nun einen Abstand von 4 km.
b) Während das hintere Boot 5 km zurücklegte, hat sich der Abstand zwischen beiden Booten um 2 km verringert. Um den noch vorhandenen Abstand von 4 km auszugleichen, muß das hintere Boot noch $2 \cdot 5\,\text{km} = 10\,\text{km}$ fahren.



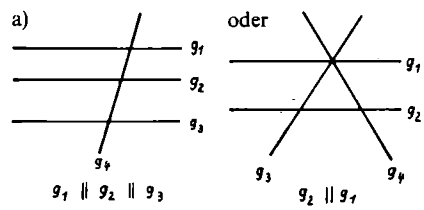
Ma 5 ■1623 Die Fläche des Weges beträgt $A = (16 \cdot 29 - 12 \cdot 25)\text{m}^2 = 164\,\text{m}^2$
$= 1\,640\,000\,\text{cm}^2$. Jede Platte hat einen Flächeninhalt von $50 \cdot 50\,\text{cm}^2 = 2500\,\text{cm}^2$. Aus $1\,640\,000 : 2500 = 656$ folgt, daß 656 solcher Platten zum Auslegen des Weges benötigt werden.

Ma 5 ■1624 Von der untersten Schicht sind $4 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 52$ quadratische Begrenzungsflächen sichtbar. Von der zweiten Schicht sind
$4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 36$ quadratische Begrenzungsflächen sichtbar. Von der dritten Schicht sind
$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 20$ und von der vierten Schicht
$4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5$ quadratische Begrenzungsflächen sichtbar.
Insgesamt sind also $52 + 36 + 20 + 5 = 113$ quadratische Begrenzungsflächen sichtbar.

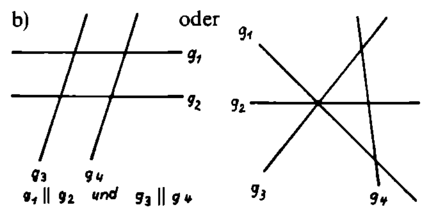


Ma 5 ■1625

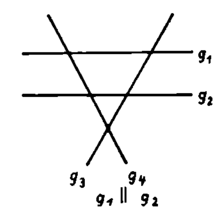
a)



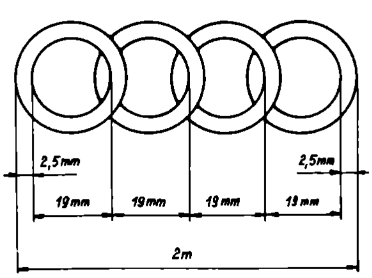
b)



c)



Ma 5 ■1626 Aus dem Bild wird ersichtlich, daß man die Anzahl der Kettenglieder (Ringe) erhält, wenn man von der Länge der Kette die doppelte Stärke eines Ringes subtrahiert und das so erhaltene Ergebnis durch den inneren Durchmesser eines Ringes dividiert.



$2\,\text{m} = 2000\,\text{mm}$; $2{,}4\,\text{cm} = 24\,\text{mm}$.
$2000\,\text{mm} - 2 \cdot 2{,}5\,\text{mm} = 2000\,\text{mm} - 5\,\text{mm} = 1995\,\text{mm}$;
$1995 : (24 - 5) = 1995 : 19 = 105$.
Die Kette besteht aus 105 Kettengliedern.

Ma 5 ■1627 Angenommen, es waren insgesamt n Aufgaben zu lösen; dann gilt $\frac{2}{3}\cdot n = 4$, also $n = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$. Insgesamt waren somit eine Geometrieaufgabe, zwei Gleichungen und drei Knobelaufgaben zu lösen.

Ma 6 ■1628 Aus $0+0=PA$ bzw. $0+0+1=PA$ folgt $P=1$. Aus $A+A=R$ bzw. $A+A=10+R$ und $A \neq R$ folgt $A \neq 0$. Aus $P=1$ folgt $A \neq 1$.
Wenn $A=2$, so $R=4$ und $0=6$. Wegen $P+M=A$ muß dann $M=1$ sein. Das steht im Widerspruch zu $P=1$. Also $A \neq 2$. Wenn $A=3$, so $R=6$. Dann muß aber auch $0=6$ sein. Das führt zu einem Widerspruch, also $A \neq 3$. Wenn $A=4$, so $R=8$ und $0=7$. Daraus folgt $m=3$. Wir erhalten

$$\begin{array}{r} 714 \\ +734 \\ \hline 1448 \end{array}$$

Durch analoge Überlegungen erhalten wir eine weitere Lösung, nämlich

$$\begin{array}{r} 816 \\ +846 \\ \hline 1662 \end{array}$$

Ma 6 ■1629 Angenommen, dieses Buch habe x Seiten; dann gilt

$$\begin{aligned} 3\cdot(x-350) &= x-150, \\ 3x-1050 &= x-150, \\ 2x &= 900, \\ x &= 450. \end{aligned}$$

Das Buch umfaßt 450 Seiten.

Ma 6 ■1630 Die Maßzahlen der Seitenlängen des Dreiecks seien n, $n+1$ und $n+2$; die Maßzahl des Umfangs des Dreiecks beträgt dann $(n+2)+35 = n+37$. Nun gilt

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= n+37, \\ 3n+3 &= n+37, \\ 2n &= 34, \\ n &= 17. \end{aligned}$$

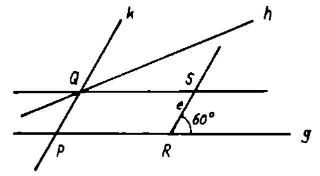
Die Seiten des Dreiecks sind somit 17 cm, 18 cm und 19 cm lang.

Ma 6 ■1631 Die ursprüngliche Zahl sei dargestellt in der Form $10a+b$; die durch Vertauschen der Ziffern erhaltene Zahl hat dann die Form $10b+a$. Dabei gilt $1 \leqq a \leqq 9$ und $1 \leqq b \leqq 9$. Nun gilt

$$\begin{aligned} 10a+b &= 10b+a-9, \\ 9 &= 9b-9a, \\ b-a &= 1, \\ b &= a+1. \end{aligned}$$

Es gibt somit acht Zahlen mit der geforderten Eigenschaft, sie lauten
12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.
Probe: $12 = 21-9$,
$23 = 32-9$,
....
$89 = 98-9$.

Ma 6 ■1632 In einem beliebigen Punkt R der Geraden g tragen wir einen Winkel von 60° an die Gerade g an, auf dessen freiem Schenkel tragen wir $e = 3$ cm von R bis S ab. Durch S zeichnen wir eine Parallele zu g, die h in Q schneiden möge. Durch Q zeichnen wir eine Parallele zu RS, die g in P schneiden möge. Auf Grund der Konstruktion ist das Viereck $PRSQ$ ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{PQ} = \overline{RS} = e = 3$ cm und $\sphericalangle QPR = 60°$.



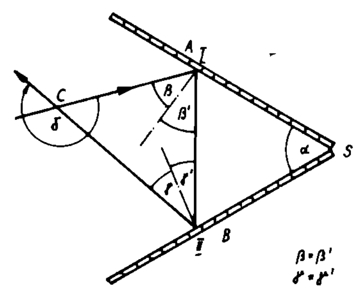
Ph 6 ■16 Im $\triangle ABC$ gilt nach dem Satz über die Außenwinkel und wegen $\beta = \beta'$ bzw. $\gamma = \gamma'$

$$360° - \delta = 2\beta + 2\gamma. \quad (1)$$

Im $\triangle ASB$ ist

$$\begin{aligned} 180° &= \alpha + (90° - \beta') + (90° - \gamma') \\ \alpha &= \beta' + \gamma' \end{aligned}$$

also $\alpha = \beta + \gamma$ und schließlich
$2\alpha = 2\beta + 2\gamma$.



In (1) eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned} 360° - \delta &= 2\alpha \\ \delta &= 360° - 2\alpha \text{ w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Ma 7 ■1633 Es seien v_1, s_1, t_1 bzw. v_2, s_2, t_2 die Geschwindigkeit, der zurückgelegte Weg, die dafür benötigte Zeit beim Radfahren bzw. beim Fußmarsch. Dann gilt $s_1 = 2s_2$ und $t_2 = 2t_1$. Daraus folgt

$$v_1 : v_2 = \frac{s_1}{t_1} : \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_1 t_2}{s_2 t_1} = \frac{2s_2 \cdot 2t_1}{s_2 \cdot t_1} = 4:1.$$

Ma 7 ■1634 Es sei $a = 6x$, $b = 6y$ und $c = 6z$. Nun gilt $b = \frac{a+c}{2}$ bzw. $6y = \frac{6x+6z}{2}$, also

$$y = \frac{x+z}{2} \text{ und somit } 2y = x+z. \quad (1)$$

Aus $6x+6y+6z=54$ folgt $x+y+z=9$. (2)
Durch Einsetzen erhalten wir aus (1) und (2) schließlich

$$\begin{aligned} y+2y &= 9, \\ 3y &= 9, \\ y &= 3, \text{ also } b = 6y = 6\cdot 3 = 18. \end{aligned}$$

Aus $b = 18$ und $b = \frac{a+c}{2}$ folgt $a+c = 36$.
Wegen $a<b<c$ könnte nur $a=6$ oder $a=12$ und $c=24$ oder $c=30$ gelten.
Diese Aufgabe besitzt daher genau zwei Lösungen:
$a_1 = 6$, $b_1 = 18$, $c_1 = 30$; $a_2 = 12$, $b_2 = 18$, $c_2 = 24$.

Ma 7 ■1635 Aus $2k\cdot n - 6 = k\cdot n + 6$ folgt durch Umformen

$$\begin{aligned} 2k\cdot n - k\cdot n &= 12, \\ k\cdot n &= 12. \end{aligned}$$

Nun gilt $12 = 1\cdot 12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4 = 4\cdot 3 = 6\cdot 2 = 12\cdot 1$.
Wir erhalten somit sechs Lösungen, und zwar die geordneten Paare (k, n):
(1; 12), (2; 6), (3; 4), (4; 3), (6; 2), (12; 1).

Probe:

$$\begin{aligned} 2\cdot 12 - 6 &= 1\cdot 12 + 6 = 18, \\ 4\cdot 6 - 6 &= 2\cdot 6 + 6 = 18, \\ 6\cdot 4 - 6 &= 3\cdot 4 + 6 = 18, \\ 8\cdot 3 - 6 &= 4\cdot 3 + 6 = 18, \\ 12\cdot 2 - 6 &= 6\cdot 2 + 6 = 18, \\ 24\cdot 1 - 6 &= 12\cdot 1 + 6 = 18. \end{aligned}$$

Ma 7 ■1636 Es sei $z = \overline{abcdef}$ die dekadische Darstellung der zu ermittelnden sechsstelligen Zahl, und es gelte $3 < f < 10$. Dann erhalten wir durch Streichen und Voranstellen der Einerstelle die Zahl $z' = \overline{fabcde}$. Für $\overline{abcde} = x$ gilt dann

$$\begin{aligned} (10x+f)\cdot 4 &= 100000f + x, \\ 40x + 4f &= 100000f + x, \\ 39x &= 99996f, \\ x &= 2564f. \end{aligned}$$

Für $f = 4$ gilt $x = 2564\cdot 4 = 10256$,
für $f = 5$ gilt $x = 2564\cdot 5 = 12820$,
für $f = 6$ gilt $x = 2564\cdot 6 = 15384$,
für $f = 7$ gilt $x = 2564\cdot 7 = 17948$,
für $f = 8$ gilt $x = 2564\cdot 8 = 20512$,
für $f = 9$ gilt $x = 2564\cdot 9 = 23076$.
Wir erhalten somit genau sechs Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen; sie lauten
$z_1 = 102564$, $z_2 = 128205$,
$z_3 = 153846$, $z_4 = 179487$,
$z_5 = 205128$, $z_6 = 230769$.

Ph 7 ■17 Gegeben: $v = 350\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$
Gesucht: n_A, n_S
$d_A = 240\,\text{mm} = 0{,}24\,\text{m}$
$d_S = 560\,\text{mm} = 0{,}56\,\text{m}$
Man berechnet die Drehzahl nach der Formel $n = \frac{v}{\pi\cdot d}$. Für die Drehzahl der Arbeitswalze ergibt sich

$$n_A = \frac{v}{\pi d_A}$$

$$n_A = \frac{350\,\text{m}}{0{,}24\,\text{m}\cdot 3{,}14\cdot\text{min}} = 464\,\frac{1}{\text{min}}.$$

Für die Drehzahl der Stützwalze ergibt sich

$$n_S = \frac{v}{\pi d_S}$$

$$n_S = \frac{350\,\text{m}}{0{,}56\,\text{m}\cdot 3{,}14\cdot\text{min}} = 199\,\frac{1}{\text{min}}.$$

Ch 7 ■13 a) Für 1 t Roheisen 30...65 m^3 Kühlwasser, für 1200 t Roheisen 1200.30...1200.65 m^3 Kühlwasser. Zur Kühlung werden 36000...78000 m^3 Kühlwasser benötigt.

b)

$$\begin{array}{c} 112\,\text{g} \qquad\qquad 168\,\text{g} \\ Fe_3O_4 + 4CO \rightarrow 3Fe + 4CO_2 \\ m_1 \qquad\qquad 12\cdot 10^8\,\text{g} \end{array}$$

NR: $4\,\text{mol}\cdot 28\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} = 112\,\text{g}$,
$3\,\text{mol}\cdot 56\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} = 168\,\text{g}$

$m_1 = 800\,t$
800 t Kohlenmonoxid sind erforderlich.

c) $\frac{28\,g}{12\,g} = \frac{800\,t}{m_2}$

Proportionaleinstellung am Rechenstab:
$m_2 = 343\,t$
343 t Kohlenstoff sind bereitzustellen.

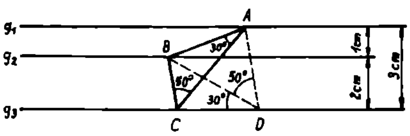
Ma 8 ■1637 Die ursprüngliche gebrochene Zahl sei $\frac{m}{n}$; dann gilt

$$\frac{m+n}{n+n} = \frac{9m}{n},$$
$$\frac{m+n}{2n} = \frac{9m}{n},$$
$$\frac{m+n}{2} = 9m,$$
$$m+n = 18m,$$
$$n = 17m.$$

Daraus folgt $\frac{m}{n} = \frac{m}{17m} = \frac{1}{17}$. Die gesuchte gebrochene Zahl lautet $\frac{1}{17}$, und es gilt

$$\frac{1+17}{17+17} = \frac{18}{34} = \frac{9}{17} = 9 \cdot \frac{1}{17}.$$

Ma 8 ■1638 Der Umkreis des zu konstruierenden Dreiecks ABC möge g_3 außer in A noch in D schneiden. Dann gilt
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \alpha$
(Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{BC}$) und
$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA = \gamma$
(Peripheriewinkel der Sehne $\overline{AB}$). Deshalb ergibt sich folgende Konstruktion:



In einem beliebigen Punkt D auf g_3 ist der Winkel $\alpha = 30°$ an g_3 anzutragen; sein freier Schenkel schneide g_2 in B. In D ist an DB der Winkel $\gamma = 50°$ anzutragen; sein freier Schenkel schneide g_1 in A. Es ist A mit B zu verbinden. In A ist an AB der Winkel $\alpha = 30°$ anzutragen; sein freier Schenkel schneide g_3 in C. Es ist B mit C zu verbinden.

Ma 8 ■1639 Für 40 Goldmedaillen wurden $7 \cdot 40 = 280$ Punkte vergeben. Aus $294 - 280 = 14$ folgt, daß die DDR 14 sechste Plätze belegte. Es verbleiben noch $638 - 294 = 344$ Punkte. Es sei m die Anzahl der fünften Plätze und n die Anzahl der erworbenen Silbermedaillen. Da diese gleich der Anzahl der Bronzemedaillen bzw. der vierten Plätze ist, gilt

$$5n + 4n + 3n + 2m = 344,$$
$$12n + 2m = 344,$$
$$6n + m = 172.$$

Wegen $m < n$ erhalten wir daraus

$$6m + m < 172,$$
$$7m < 172,$$
$$m < \frac{172}{7} = 24\frac{4}{7},$$
$$m \leq 24.$$

Wegen $m > 20$ könnte m gleich 21, 22, 23 oder 24 sein. Nur für $m = 22$ wird die Gleichung $6n + m = 172$ im Bereich der natürlichen Zahlen erfüllt. Wir erhalten somit

$$6n = 172 - m,$$
$$6n = 172 - 22 = 150,$$
$$n = 25.$$

Gesamtergebnis:

40 Goldmedaillen	zu je 7 P.:	280 P.
25 Silbermedaillen	zu je 5 P.:	125 P.
25 Bronzemedaillen	zu je 4 P.:	100 P.
25 vierte Plätze	zu je 3 P.:	75 P.
22 fünfte Plätze	zu je 2 P.:	44 P.
14 sechste Plätze	zu je 1 P.:	14 P.
		638 P.

Ma 8 ■1640 Die vierstellige Zahl läßt sich in der Form
$z = 1000a + 100a + 10b + b$,
$z = 1100a + 11b$,
$z = 11(100a + b)$ darstellen.
Nun gilt $11(100a + b) = n^2$; deshalb muß $100a + b$ ein Vielfaches von 11 sein. Wegen $100a + b = 99a + (a + b)$ trifft das zu, wenn $a + b$ durch 11 teilbar ist. Wegen $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ kann nur $a + b = 11$ sein. Wir erhalten somit

$$z = 11(99a + 11),$$
$$z = 11^2(9a + 1).$$

Da $9a + 1$ nur für $a = 7$ eine Quadratzahl ist, lautet die Kraftfahrzeugnummer 7744, und es gilt $7744 = 88^2$.

Ph 8 ■18

Gegeben: a) $d = 1{,}6\,mm$, $l = 1000\,m$, $\rho = 0{,}016 \frac{\Omega mm^2}{m}$
b) $U_1 = 220\,V$, $I = 10\,A$

Gesucht: a) R b) U_2 c) I_K

a) Der Gesamtwiderstand der Leitung ergibt sich aus

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} \text{ mit } A = 7 \cdot \frac{d^2\pi}{4}$$
$$R = \frac{\rho \cdot l \cdot 4}{7d^2\pi}$$
$$R = \frac{4 \cdot 0{,}016\,mm^2 \cdot 1000\,m}{7 \cdot 1{,}6^2\,mm^2 \cdot m \cdot 3{,}14}$$
$$R \approx 1{,}14\Omega$$

b) Der Spannungsabfall U_A ergibt sich aus der Differenz der Spannung U_1 am Leitungsanfang und U_2 am Leitungsende.
$U_A = U_1 - U_2$ sowie nach dem Ohmschen Gesetz $U_A = I \cdot 2R$ (Doppelleitung)
Also ist $I \cdot 2R = U_1 - U_2$

$$U_2 = U_1 - I \cdot 2R$$
$$U_2 = 220\,V - 10\,A \cdot 2{,}28\Omega$$
$$U_2 = 197{,}2\,V$$

Nun ist $U_A = U_1 - U_2$

$$U_A = 220\,V - 197{,}2\,V$$
$$U_A = 22{,}8\,V$$

c) Bei Kurzschluß ist I_K nach dem Ohmschen Gesetz

$$I_K = \frac{U}{2R} = \frac{220\,V}{2{,}28} = 96{,}5\,A$$

Ch 8 ■14

$$\underset{m}{\underset{64{,}1\,g}{CaC_2}} + 2H_2O \rightarrow \underset{V}{\underset{22{,}4\,l}{C_2O_2}} + Ca(OH)_2$$

NR: $1\,mol \cdot 64{,}1 \frac{g}{mol} = 64{,}1\,g$,

$1\,mol \cdot 22{,}4 \frac{l}{mol} = 22{,}4\,l$

$V = \frac{22{,}4\,l}{64{,}1\,g} \cdot m$

$V = 0{,}7\,l;\ 1{,}2\,l;\ 2{,}3\,l$

Man kann $0{,}0007\,m^3$; $0{,}0012\,m^3$; $0{,}0023\,m^3$ Äthin herstellen.

Ma 9 ■1641 Wegen $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ und $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ gilt $\frac{5n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Wegen $n > 0$ erhalten wir daraus $\frac{5}{2} = \frac{2n+1}{6}$,

$$30 = 4n + 2,$$
$$4n = 28,$$
$$n = 7.$$

Somit gilt $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 7^2 = 5 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 7)$.

Ma 9 ■1642 Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck; nach der Dreiecksungleichung gilt dann

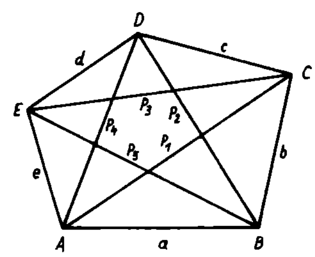
$$a + b > p_1,$$
$$b + c > p_2,$$
$$c + d > p_3,$$
$$d + e > p_4,$$
$$e + a > p_5,$$

also $2(a + b + c + d + e) > p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = p$,
$2u > p$ bzw. $u > \frac{1}{2}p$. Ferner gilt

$$a < p_2 + p_4,$$
$$b < p_3 + p_5,$$
$$c < p_1 + p_4,$$
$$d < p_2 + p_5,$$
$$e < p_1 + p_3,$$

also $a + b + c + d + e < 2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)$,
$u < 2p$ bzw. $2p > u$.

Somit gilt $2p > u > \frac{1}{2}p$.



Ma 9 ■1643 Angenommen, es wurden x Glühlampen zu 40 W, y Glühlampen zu 60 W und z Glühlampen zu 75 W verwendet; dann gilt

$$\begin{aligned}
40x + 60y + 75z &= 720 \\
x + y + z &= 12 \quad | \cdot (-40) \\
\hline
40x + 60y + 75z &= 720 \\
-40x - 40y - 40z &= -480 \\
\hline
20y + 35z &= 240 \quad | : 5 \\
4y + 7z &= 48 \\
4y &= 48 - 4z - 3z \\
y &= 12 - z - \frac{3z}{4}.
\end{aligned}$$

Da x, y und z natürliche Zahlen sind, wird diese Gleichung nur für $z = 4$ erfüllt. Wir erhalten $y = 12 - 4 - 3 = 5$ und $x = 12 - 5 - 4 = 3$.

Der Raum ist mit 3 Glühlampen zu 40 W, 5 Glühlampen zu 60 W und 4 Glühlampen zu 75 W auszustatten.

Ma 9 ■1644 Es gilt $z = \frac{n^5}{120} + \frac{n}{30} - \frac{n^3}{24}$,

$$z = \frac{n^5 + 4n - 5n^3}{120}$$

$$z = \frac{n(n^4 - 5n^2 + 4)}{120}.$$

Ferner gilt $n^4 - 5n^2 + 4 = (n^2 - 4)(n^2 - 1)$,
$n^4 - 5n^2 + 4 = (n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$.
Daraus folgt

$$z = \frac{(n-2)(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n+2)}{120}.$$

Der Zähler von z stellt das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dar. Von diesen fünf Zahlen ist wenigstens eine durch 4, wenigstens eine weitere durch 2, eine durch 3 und eine durch 5 teilbar. Wegen $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ ist deshalb der Zähler für jede natürliche Zahl n durch 120 teilbar, das heißt, z ist ebenfalls eine natürliche Zahl. Für $n = 0$ oder $n = 1$ oder $n = 2$ erhalten wir $\frac{0}{120} = 0$.

Lösungen zu alpha-heiter:
(Heft 5/77):

Welche Zensuren hatten die Schüler?
Wir nehmen an, daß die ersten beiden Aussagen nicht stimmen und die dritte stimmt. Wenn es nicht stimmt, daß Sergejew keine „5“ hat und Wassiljew keine „4“, dann hat Sergejew eine „5“ und Wassiljew eine „4“. Aus der Richtigkeit der dritten Aussage folgt, daß Alexejew ebenfalls eine „4“ hat. Dies ist aber nicht möglich, da die Zensuren der Schüler nach den Bedingungen der Aufgabe verschieden sind. Aus der Annahme, daß die erste und die dritte Aussage nicht stimmen und die zweite stimmt, ergibt sich, daß Sergejew eine „5“ hat, Wassiljew keine „4“ und Alexejew keine „4“. Dies ist wiederum nicht möglich, weil dann entweder Wassiljew oder Alexejew gewiß eine „4“ haben muß, da Sergejew eine „5“ hat. Die einzige Möglichkeit ist daher: Die erste Behauptung des Lehrers ist richtig, und die anderen beiden Male hat er sich geirrt. Somit erhalten wir: Sergejew hat keine „5“, Wassiljew hat eine „4“ und Alexejew hat keine „4“. Daraus ergibt sich, daß Wassiljew eine „4“ hat, Sergejew hat keine „5“ (und keine „4“), also eine „3“, und Alexejew hat keine „4“, sondern eine „5“.

Mathematischer Wettstreit
Der Sieger des Wettstreites war derjenige, der schneller als die anderen überlegte. Nehmen wir an, daß ich eine graue Mütze trage. Jeder von meinen Nachbarn sieht ihre Farbe und muß folgendermaßen denken: „Wenn ich eine graue Mütze auf dem Kopf hätte, dann müßte der dritte von uns, indem er sieht, daß beide grauen Mützen schon vergeben sind, sofort, nachdem man die Tücher von ihren Augen entfernt hatte, bemerken, daß er eine weiße Mütze trägt. Beide Nachbarn schweigen jedoch. Also trage ich eine weiße Mütze auf dem Kopf“.

Wer zerschlug den Spiegel?
Wenn wir annehmen, daß Sergejew den Spiegel zerschlagen hat, so sind genau drei Antworten wahr, die von Aljoscha, Kostja und Tolja. In allen übrigen Fällen sind die Antworten von vier Schülern wahr, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Die drei Lehrer
Morosow gibt Französisch- und Geschichtsunterricht, Wassiljew Biologie- und Englischunterricht und Tokarew Geographie- und Mathematikunterricht.

M. Ljapunow

$$9\cdot 9 + 7 = 88$$
$$98\cdot 9 + 6 = 888$$
$$987\cdot 9 + 5 = 8888$$
$$9876\cdot 9 + 4 = 88888$$
$$98765\cdot 9 + 3 = 888888$$
$$987654\cdot 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543\cdot 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432\cdot 9 + 0 = 888888888$$

bzw. $L = 9$, $J = 8$, $A = 7$, $P = 6$, $U = 5$, $N = 4$, $O = 3$, $W = 2$, $M = 1$, $X = 0$

Frische Pilze
x kg sei das Gewicht der gesammelten Pilze, darunter sollen $(0{,}85x)$ kg Wasser sein. Die trockenen Pilze wiegen $(x - 15)$ kg darunter sind $(0{,}85x - 15)$ kg Wasser, welches 40% von dem Gesamtgewicht bildet. Also gilt:

$$\frac{0{,}85x - 15}{x - 15} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}.$$

Daraus folgt $x = 20$ (kg), oder:
Die Kinder hatten 20 kg frische Pilze gesammelt.

Magisches Quadrat

4	+	7	−	9	=	2
+		−		+		+
9	−	2	+	0	=	7
−		+		−		−
12	−	0	−	6	=	6
=		=		=		=
1	+	5	−	3	=	3

Der Elefant und die Mücke
Als der „Mathematiker“ die Quadratwurzel aus den beiden Seiten der Gleichung $(x - v)^2 = (y - v)^2$ zog, verstand er nicht, daß es für das Resultat zwei Möglichkeiten gibt: entweder $x - v = y - v$ oder $x - v = v - y$. Richtig ist nur das zweite Resultat: x und y sind positive Zahlen und aus der Ausgangsgleichung $x + y = 2v$ folgt, daß dann, wenn $x > v$ ist, $y < v$ (erster Fall), und dann, wenn $x < v$ ist, $y > v$ (zweiter Fall).

Im ersten Fall ist $x - v > 0$ und $y - v < 0$, was der Gleichung $x - v = y - v$ widerspricht. Die zweite Gleichung $x - v = v - y$ jedoch widerspricht weder den Bedingungen des ersten Falles noch den Bedingungen des zweiten Falles. Aus der Gleichung $x - v = v - y$ folgt wieder die Ausgangsgleichung $x + y = 2v$.

Auf der Wolga
● Für die zweite Hälfte des Weges wendete der Dampfer $\frac{100}{125} = \frac{4}{5}$ der Zeit auf, die er für die erste Hälfte des Weges benötigte. Die Zeitdifferenz aus den Fahrzeiten der ersten und zweiten Hälfte beträgt $\frac{1}{5}$ und entspricht gemäß der Aufgabenstellung einer halben Stunde. Das bedeutet, daß die erste Hälfte des Weges in $\frac{1}{2}$ Std. $\cdot\, 5 = 2\frac{1}{2}$ Stunden und der ganze Weg in $2\frac{1}{2}$ Std. + 2 Std. = $4\frac{1}{2}$ Stunden zurückgelegt wurde.

● Stromab legt der Dampfer in einer Stunde $\frac{1}{3}$ der Entfernung zurück, stromauf dagegen nur $\frac{2}{9}$. Die Differenz $\left(\frac{1}{9}\right)$ entspricht der doppelten Strömungsgeschwindigkeit. Je Stunde legt das Fäßchen also $\frac{1}{18}$ des Weges zurück und die gesamte Strecke in 18 Stunden.

Kryptarithmetik aus Quant
1. $95846\cdot 95846 = 9186455716$.
2. $26953\cdot 26953 = 726464209$.
3. $26157\cdot 68351 = 1787857107$.
4. $24153\cdot 24153 = 583367409$.
5. $18594\cdot 18594 = 345736836$.
6. $48957\cdot 24751 = 1211734707$.
7. $52903\cdot 52903 = 2798727409$.
8. $46027\cdot 46027 = 2118484729$.
9. $12\cdot 7 = 84$ 10. $39 + 8 = 47$
$29\cdot 3 = 87$ $96 : 2 = 48$.

Nikolai Jegorowitsch Shukowsky (1847–1921)
Begründer der gegenwärtigen Hydro- und Aeromechanik; ist auch als erster Leiter des Zentralen Aero- und Hydrodynamischen Instituts, als „Vater der russischen Aviatik" bekannt; Prof. Dr. sc. der (angewandten) Mathematik; Vizepräsident (1903) und Präsident (1905) der Mathematischen Gesellschaft in Moskau.

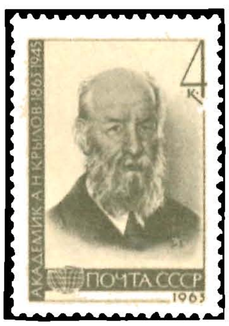
Sofia Wassiljewna Kowalewskaja (1850–1891)
Hervorragende russische Mathematikerin; erste Professorin der Mathematik in Europa (Stockholm, 1884), Privatschülerin von *Weierstraß* in Berlin; bedeutende Arbeiten über die Theorie der Differentialgleichungen, über die Funktionentheorie und die Kinematik.

Leonard Euler (1707 bis 1783)
Genialer Schweizer Mathematiker, ging 1729 nach Petersburg, 1741 an die Akademie der Wissenschaften nach Berlin, 1766 erneut nach Petersburg; höchst produktiv auf allen Gebieten der Mathematik und mathematischer Physik (bes. Variationsrechnung, Analysis des Unendlichen, Algebra); verfaßte 45 Bände sowie 950 Abhandlungen.

Michail Wassilowitsch Ostrogradski (1801 bis 1861)
Russischer Mathematiker und Hochschullehrer; bedeutende Arbeiten über mathematische Analyse, Begründer der „Petersburger Schule".

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 bis 1856)
Russischer Mathematiker und materialistischer Denker; entwickelte eine nichteuklidische (d. h. eine das Parallelenpostulat nicht voraussetzende) Geometrie: „Über die Anfangsgründe der Geometrie" 1829/30.

Mathematiker auf sowjetischen Briefmarken



Otto Julijewitsch Schmidt (1891 bis 1956)
Hervorragender Mathematiker, Astronom und Geophysiker sowie Arktisforscher; Absolvent der Universität Kiew (1913), ab 1926 ord. Professor an de' Lomonossow-Universität Moskau. Begründer und Leiter der algebraischen Schule; ord. Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR (ab 1935) und Vizepräsident dieser Akademie (1939 bis 1942); Held der Sowjetunion (seine besonderen Verdienste liegen in der Arktisforschung). Chefredakteur der *Großen Sowjetischen Enzyklopädie.*

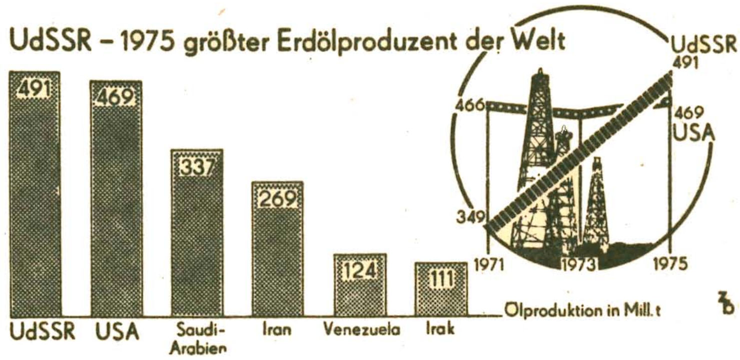
Alexey Nikolajewitsch Krylow (1863 bis 1945)
Berühmter russischer Mathematiker, Mechaniker und Schiffsbauingenieur, Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR (1916), Held der sozialistischen Arbeit (1943); sein „Lehrgang des Näherungskalküls" (1947) ist weltbekannt. Seine wichtigsten wissenschaftlichen Ergebnisse erzielte er auf den Gebieten: Schiffsbau, Schwimmfähigkeit, Kippsicherheit, Deviation, Hiroskopentheorie.

Iwan Georgiewitsch Petrowsky (1901 bis 1973)
Sowjetischer Mathematiker, Absolvent der Lomonossow-Universität Moskau (1927), an der er später Professor (1933) und Rektor (1951) wurde. Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR (1946). Hervorragender Experte auf dem Gebiet der Differentialgleichungen. Seine drei Lehrbücher (Lehrgang der Differentialgleichungen, der Differentialgleichungen mit partiellen Ableitungen und der Integralgleichungen wurden in viele Sprachen der Welt übersetzt.

BEGEGNUNG

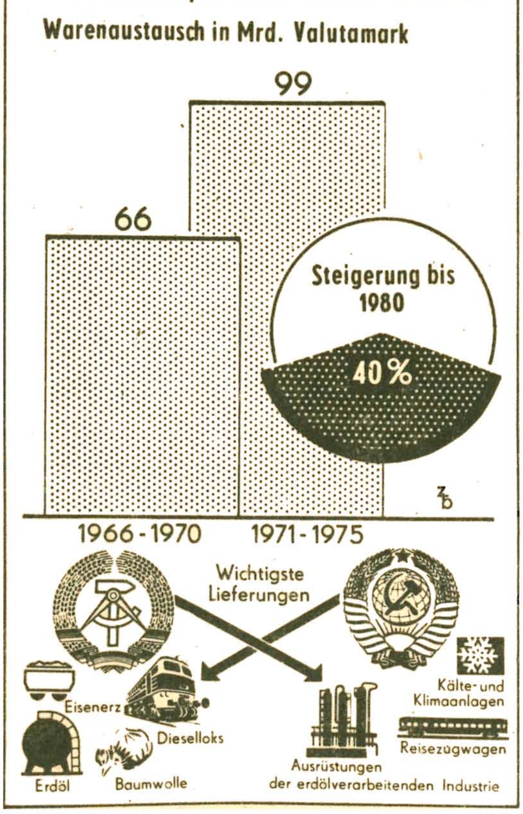
MIT FREUNDEN

UdSSR – 1975 größter Erdölproduzent der Welt

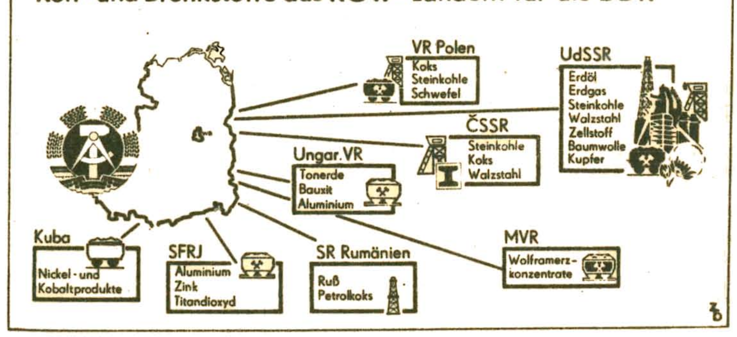


Stahlproduktion der RGW-Länder

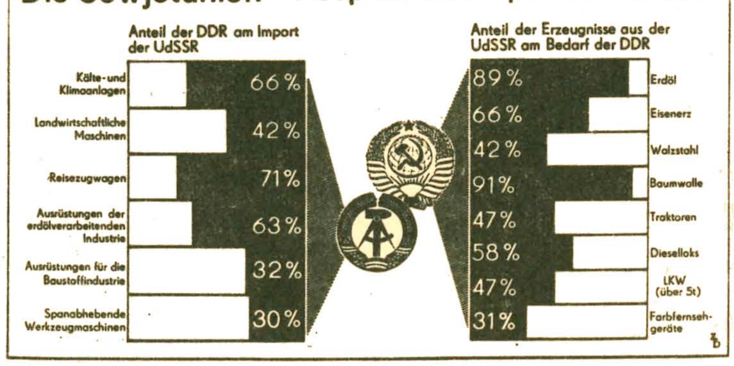
Wirtschaftspartner DDR-UdSSR



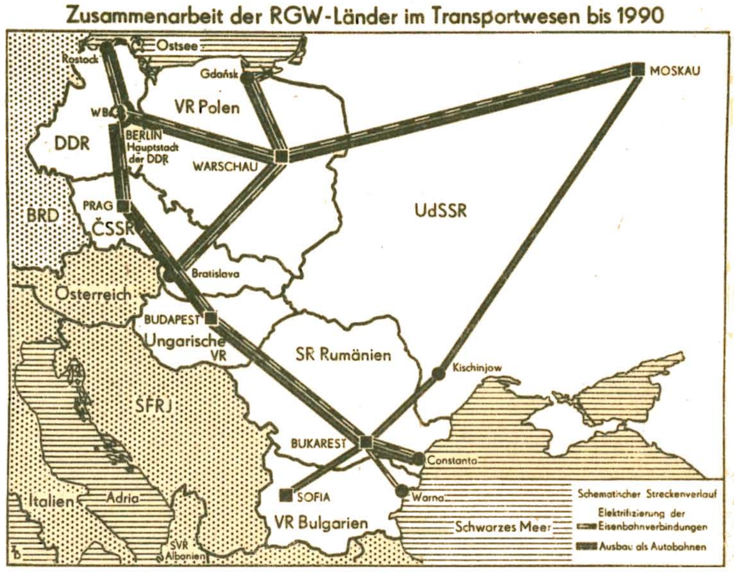
Roh- und Brennstoffe aus RGW-Ländern für die DDR



Die Sowjetunion – Hauptwirtschaftspartner der DDR



Zusammenarbeit der RGW-Länder im Transportwesen bis 1990



Buchtips für
Junge
Mathematiker

Sowjetische Literatur in deutscher Sprache

Bücher aus dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

I. S. Sominski
Die Methode der vollständigen Induktion
56 Seiten (1965) Preis: 2,00 M

A. I. Markuschewitsch
Flächeninhalte und Logarithmen
54 Seiten (1965) Preis: 4,25 M

P. S. Alexandroff
Einführung in die Gruppentheorie
118 Seiten (1967) Preis: 4,30 M

E. B. Dynkin/W. A. Uspenski
Mathematische Unterhaltungen I
Mehrfarbenprobleme
65 Seiten (1968) Preis: 5,10 M

Mathematische Unterhaltungen II
Aufgaben aus der Zahlentheorie
124 Seiten (1968) Preis: 6,10 M

Mathematische Unterhaltungen III
Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung
84 Seiten (1968) Preis: 4,10 M

A. I. Markuschewitsch
Rekursive Folgen
48 Seiten (1968) Preis: 2,80 M

W. G. Scherwatow
Hyperbel-Funktionen
54 Seiten (1969) Preis: 3,80 M

I. P. Natanson
Summierung unendlich kleiner Größen
60 Seiten (1969) Preis: 3,25 M

L. A. Kaloujnine
Primzahlzerlegung
40 Seiten (1971) Preis: 2,40 M

W. G. Boltjanski/I. Z. Gochberg
Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie
128 Seiten (1971) Preis: 6,80 M

A. O. Gelfond
Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Diophantische Gleichungen)
59 Seiten (1973) Preis: 3,80 M

P. P. Korowkin
Ungleichungen
56 Seiten (1973) Preis: 2,45 M

N. N. Worobjow
Teilbarkeitskriterien
85 Seiten (1973) Preis: 4,20 M

A. S. Solodownikow
Lineare Ungleichungssysteme
98 Seiten (1973) Preis: 5,00 M

B. W. Gnedenko/A. J. Chintschin
Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
174 Seiten (1973) Preis: 4,50 M

Bücher aus dem BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa/
A. A. Kirillow
Die Koordinatenmethode
75 Seiten (1968) Preis: 3,40 M

J. S. Wentzel
Elemente der Spieltheorie
66 Seiten (1970) Preis: 4,20 M

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa
Funktionen und ihre graphische Darstellung
128 Seiten (1971) Preis: 7,00 M

N. J. Wilenkin
Unterhaltsame Mengenlehre
184 Seiten (1973) Preis: 6,50 M

I. J. Bakelman
Spiegelung am Kreis
Grundlagen und Anwendung
132 Seiten (1976) Preis: 7,00 M

A. Kolman
Die vierte Dimension
116 Seiten (1976) Preis: 6,50 M

Bücher aus dem Volkseigenen Verlag Volk und Wissen Berlin

Autorenkollektiv
Algebraische Aufgaben aus der Technik
102 Seiten (1964) Preis: 3,90 M

A. A. Kolosow
Kreuz und quer durch die Mathematik
202 Seiten (1965) Preis: 6,00 M

J. I. Perelman
Unterhaltsame Algebra
148 Seiten (1965) Preis: 4,65 M

Autorenkollektiv
Aufgaben von Mathematikolympiaden in der UdSSR und in der ČSSR
292 Seiten (1965) Preis: 8,20 M

K. A. Rupassow
Mathematische Denkaufgaben
56 Seiten (1965) Preis: 1,60 M

Bücher aus dem Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Autorenkollektiv
Bausteine des Wissens
Streifzug durch die Mathematik
Band 1: 207 Seiten (1965) Preis: 12,00 M
Band 2: 227 Seiten (1965) Preis: 12,00 M

B. A. Kordemski
Köpfchen, Köpfchen
328 Seiten (1976) Preis: 12,00 M