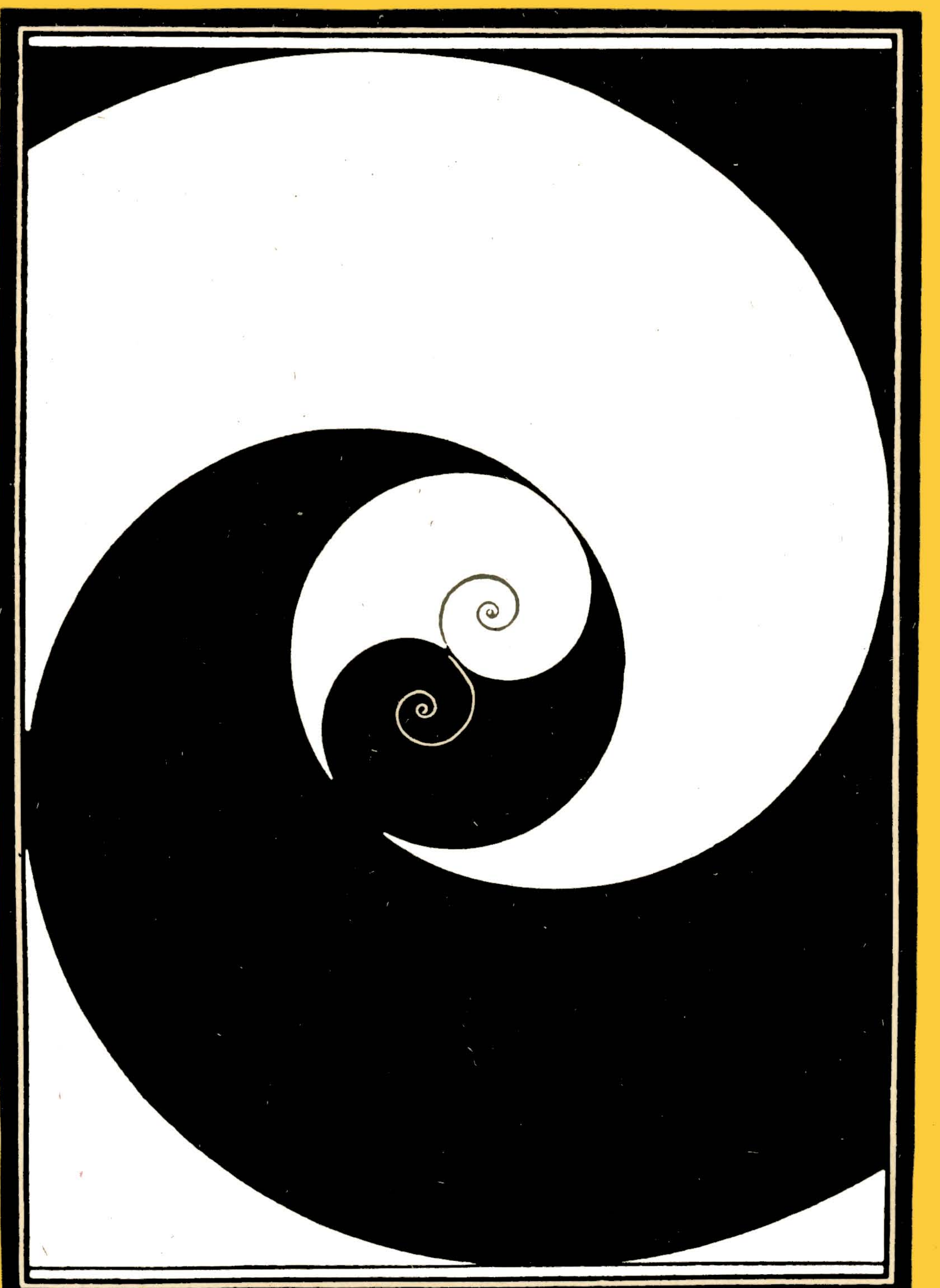
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
16. Jahrgang 1982
Preis 0,50 M
Index 31059



4

Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1086 Berlin, Krausenstraße 50, PSF Nr. 1213
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: K.-H. Guckuk, LVZ Leipzig (S. 78, S. 87); Miroslav Stejška, Dikobraz Beograd (S. 79); Eigenfoto E. Müller-Pfeiffer (S. 83); Eigenfotos H. Pollack, U. Baumann, M. Jentsch, Dresden (S. 86); Briefmarken von: Prof. Dr. G. Helmberg, Innsbruck
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: Mathematical Themes in Ornament, Rutherford Boyd, Yeshira-University New York, gestaltet von W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97

Auslieferungstermin: 23. August 1982
Redaktionsschluß: 26. April 1982

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Sind Mausefallenbeweise nötig?

Teil 1

1. Beweisen muß ich diesen Käs'!

Mathematische Probleme sind uralt, denn als die Menschen sich bewußt mit der Außenwelt (objektiven Realität) auseinanderzusetzen begannen, da mußten sie sich im Raum orientieren und Dinge zu Mengen zusammenfassen, also Geometrie und Arithmetik betreiben. Gewiß mögen uns heute nach mehreren tausend Jahren einige der ursprünglichen Schwierigkeiten als nichtig oder unbegründet vorkommen, wie etwa die umständlichen Ziffernsysteme der Griechen und Römer einfachste arithmetische Aufgaben zu komplizierten Rechnungen aufblähten (Probiert einmal, in römischen Ziffern 5321 durch 13 zu dividieren!), aber die rasante Entwicklung elektronischer Rechner, die bereits im Taschenformat Unglaubliches leisten, könnte auch unsere Nachfahren lächelnd auf uns herabblicken lassen! Und genau wie wir meinen, unser Bestes zur Lösung der anstehenden Probleme zu geben, so ist dies wohl auch zu allen Zeiten gewesen.

Babylonier und Ägypter gaben vor rund 4000 Jahren bereits praktische Anweisungen zur Lösung von mathematischen Aufgaben, aber erst bei den Griechen schälten sich die bei der Rechnung gewonnenen Erfahrungen, die mathematischen Begriffe und ihre Beziehungen zueinander, als *Theorie* heraus. Ein Beispiel hierfür hat uns Euklid übermittelt: Jedes Produkt aus geraden bzw. ungeraden Zahlen ist wiederum gerade bzw. ungerade. Diese Aussage über gerade und ungerade Zahlen nach Ausführung einer Rechenoperation geht offenbar über jede Erfahrung hinaus, denn es wird für alle (also unendlich viele) natürliche Zahlen etwas behauptet. Und, das ist wichtig, das Behauptete wird auch begründet, oder wie Mathematiker sagen, bewiesen. Der praktische Umgang mit Zahlen führte auf widerspruchsfreies Denken mit mathematischen Begriffen. *Mathemata* (Lehrstücke) nannten die Griechen solche kleinen theoretischen Probleme wie das obige und gaben damit der neuen Wissenschaft ihren Namen: *Mathematik.*

Das Ende eines Beweises wurde bei Euklid stereotyp durch den Satz „Hoper edei deixai" (Was zu zeigen war) kenntlich gemacht. Die lateinische Version lautet „Quod erat demonstrandum" (Was zu beweisen war), abgekürzt q. e. d. (deutsch w. z. b. w.), und hat sich bis heute erhalten, auch wenn sie mitunter unkenntlich nur noch als typografisches Zeichen ■ am Ende einer Beweisführung erscheint. Das Beweisprinzip mit seiner Traditionslinie von der griechischen Mathematik bis in unsere Zeit, also die Pflicht, alles Behauptete auch stichhaltig zu beweisen, ist unveräußerlicher Bestand der Mathematik geworden. Ein zeitgenössischer Mathematiker, Friedrich Wille, hat humorvoll diese Beweislast in einer bekannten mathematischen Zeitschrift in einer ernsthaften Arbeit im Stile eines Gedichtes von Wilhelm Busch beschrieben, aus der auch die Überschrift dieses Abschnitts entnommen ist. Vollständiger führte Wille aus: „Beweisen muß ich diesen Käs', sonst ist die Arbeit unseriös". In der Mathematik geht es also nicht wie in der alten preußischen Anekdote zu, wo ein neuer und eifriger Mathematiklehrer an einer Kadettenanstalt sich erkühnte, einen Offiziersschüler aufzufordern, den Satz des Pythagoras zu beweisen, und prompt zur Antwort erhielt: „Bei uns wird nicht bewiesen, bei uns wird aufs Wort geglaubt!"

2. Für Nichtmathematiker kein Zutritt

Diese Überschrift würde uns heute, beispielsweise in einem mathematisch orientierten Institut vor dem Rechnerraum, kaum überraschen. Das wäre nur eins der vielen Verbotsschilder. Überraschender ist aber, daß diese Zeile bereits vor rund 2000 Jahren mathematisches Selbstbewußtsein artikulierte, indem sie nämlich als Inschrift über dem Eingang zu Platons berühmter Akademie prangte. Zugegeben, dort stand etwas genauer übersetzt „Es trete kein der Geometrie Unkundiger ein", aber beide Sätze besagen grundsätzlich das gleiche, denn Mathematik und Geometrie waren damals (und noch bis ins 18. Jahrhundert) Synonyme. Dieses stolze Motto, das Platon gewählt hatte, zeigt uns deutlich, wie sehr sich die griechischen Mathematiker der Kraft und Wirksamkeit mathematischen Denkens bewußt waren, und dieses Denken fußte wesentlich auf der Beweisbarkeit mathematischer Sachverhalte durch logisches Denken.

Die griechische Formel für ein Beweisende lautete, wie bereits angegeben, was zu zeigen war. Vermutlich können wir hier noch die anschaulichen Anfänge der Beweisverfahren früher griechischer Mathematiker erkennen: das Aufzeigen von etwas anschaulich Gegebenem und ohne weiteres Einsichtigem. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist der Dialog des Sokrates mit einem Sklaven, in dem Sokrates mit seiner Hebammenmethode (d. h. die Lösung nach und nach durch Antworten auf gezielte Fragen hervorbringt) das Problem mit dem Sklaven behandelt, wie man wohl die Seitenlänge eines Quadrates finden könne, das doppelt so groß sei wie ein gegebenes Quadrat. Natürlich schlägt der Sklave zunächst ein Quadrat mit doppelt so großer Seitenlänge als Lösung vor (vgl. Bild 1, wo $AG = 2AB$) Sokrates zeigt, daß dann die Fläche vier mal so groß ist, und lenkt auf die Erkenntnis hin, daß das Quadrat $BFED$ doppelt so groß wie das Quadrat $ABCD$ ist, was durch kongruente Dreiecke fast unmittelbar einleuchtet. Auch die indische Mathematik liebte solche offensichtliche Beweisgründe. In ihr ist den Figuren, die zum Beweis der Sätze dienen, in der Regel nur die Bemerkung „Siehe!" beigegeben, wie z. B. in Bild 2. Wer Augen zum Sehen hat, der sieht es: nämlich der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich der Fläche des Rechtecks aus Grund-

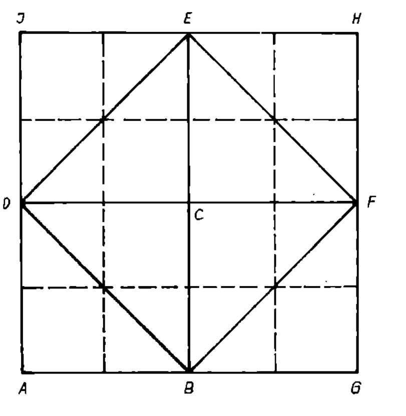


Bild 1
Figur zum Dialog des Sokrates. Das Quadrat $BFED$ hat die doppelte Fläche wie das Quadrat $ABCD$.

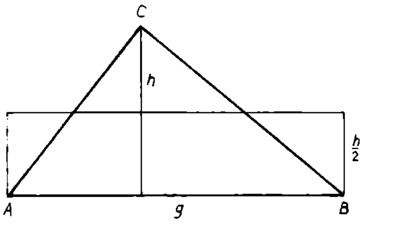


Bild 2
Typische Figur für einen indischen Beweis, hier zum Beweis der Formel für die Dreiecksfläche $F = \frac{1}{2}gh$. Der beigegebene Text besteht in der Aufforderung „Siehe!".

seite mal halber Höhe des Dreiecks (symbolisch: $F=\frac{1}{2}gh$). Ähnlich anschauliche Beweise enthält z. B. die frühe chinesische Mathematik.

Aber das Sehen hat auch seine Grenzen: Wir alle kennen optische Täuschungen. Hier sind einige zur Erinnerung (Bild 3). Der griechische Mathematiker Euklid zog bereits deshalb eine logische Ableitung der anschaulichen vor. Sein begründender Abschlußsatz „Was zu zeigen war" ist also schon eine formale Floskel. Der Grund für die Zuwendung zur Logik liegt, wie der zeitgenössische ungarische Mathematikhistoriker A. Szabó vermutet, in dem Schock, den die Entdeckung verursacht hatte, daß die Diagonale im Einheitsquadrat in keinem rationalem Verhältnis zur Seite steht. D. h., es gab im griechischen Verständnis der Zahl eine Krise, denn die anschaulich aufweisbaren Strecken hatten kein gemeinsames (rationales) Maß, und das pythagoreische Dogma „Alles ist Zahl", was ja bedeuten soll, daß sich alles durch Zahlen bzw. Zahlenverhältnisse ausdrücken läßt, wurde ziemlich in Frage gestellt. Heute wird dieser Sachverhalt gern als einfaches Beispiel eines indirekten Beweises benutzt, um nämlich zu zeigen, daß für natürliche Zahlen m und n eine Gleichung $\sqrt{2}=m/n$ nicht möglich ist.

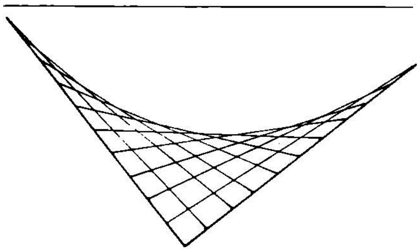
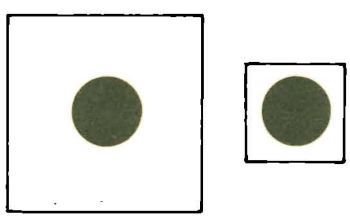
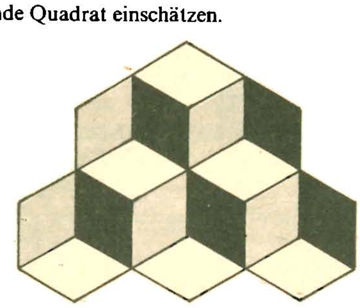


Bild 3
Einige optische Täuschungen
a) Man glaubt, eine gekrümmte Kurve zu sehen. In Wirklichkeit besteht die Kurve jedoch aus 20 Geradenstücken.



b) Beide Kreise scheinen verschiedene Größe zu haben. Das falsche Urteil beruht darauf, daß wir die Größe in bezug auf das umgebende Quadrat einschätzen.



c) Wie viele Würfel sind zu sehen? Je nach Einstellung des Lesers 3 oder 5. Nach Drehung der Figur um 180° werden im allgemeinen 5 Würfel gesehen.

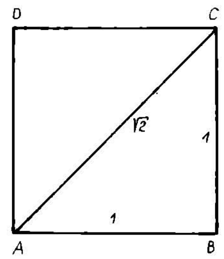


Bild 4
Die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat ist irrational. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich $\sqrt{2}$ als ihre Länge. Wäre $\sqrt{2}$ rational bzw. es bestünde eine Gleichung $\sqrt{2}=m/n$ (m und n natürliche Zahlen, o. B. d. A. auf Teilerfremdheit gekürzt), so folgte $2n^2=m^2$. Also müßte 2 die Zahl m^2 und damit auch m selbst teilen. Folglich wäre die rechte Seite m^2 durch 4 teilbar, mithin auch die linke Seite. Damit folgte aber aus 4 teilt $2n^2$, daß 2 die Zahl n teilt. Das widerspräche der Teilerfremdheit von m und n. Also ist eine Gleichung der Art $\sqrt{2}=m/n$ unmöglich.

Die logische Ableitung mathematischer Aussagen führte dazu, daß eine bestimmte Menge an unbewiesenen Grundaussagen, sogenannten Axiomen, als wahr angesehen werden mußten, denn sonst wären die Beweise entweder ins Endlose zurückgegangen oder hätten bereits zu beweisende Sätze irgendwann vorausgesetzt (Zirkelschluß). Aus diesen Grundsätzen, den Axiomen, können mit logischen Mitteln alle Sätze einer Theorie abgeleitet werden, und sie müssen es auch, wenn sie in die Theorie aufgenommen werden sollen. Die korrekte Ableitbarkeit mittels logischer Schlüsse aus den Axiomen ist entscheidend für die Zugehörigkeit eines Satzes zu einer Theorie oder für die Wahrheit eines Satzes in dieser Theorie. Euklids geometrisches Axiomensystem in seinem Buch „Elemente" ist hierfür ein Musterbeispiel; das Buch diente in Europa fast 2000 Jahre als Lehrbuch der Geometrie.

Den Verlust der Anschaulichkeit und den hohen Grad abstrakter logischer Überlegungen wollen wir an einem indirektem Beweis Euklids aufzeigen, der darlegt, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Beweis: Wir stellen zunächst fest, daß es überhaupt Primzahlen gibt, z. B. 2, 3, 5 und 7. Aus der Erklärung einer Primzahl folgt: Jede natürliche Zahl $n\,(>1)$ ist entweder durch eine Primzahl $p\,(1<p<n)$ teilbar oder selbst Primzahl. Nun beginnt der eigentliche Beweis. Wir nehmen dazu das Gegenteil der im Satz behaupteten Aussage an. Es soll also nur endlich viele Primzahlen geben, insbesondere muß dann eine größte Primzahl p vorhanden sein. Nun bilden wir das Produkt aus den endlich vielen Primzahlen 2 bis p und addieren die 1 hinzu:

$P=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p+1.$

Wenn diese Zahl P Primzahl wäre, so wäre offenbar $P>p$, also wäre p nicht größte Primzahl. Wäre aber andererseits P keine Primzahl, so müßte eine gewisse Primzahl a die Zahl P teilen. Nun ist aber klar, daß die Primzahlen von 2 bis p (also alle als bekannt angesehenen Primzahlen) die Zahl P nicht ohne Rest teilen. Also muß P doch Primzahl sein! Damit ist P eine neue Primzahl mit $P>p$. Unsere Annahme, daß es eine größte Primzahl gäbe, läßt sich nicht halten, folglich muß das Gegenteil zutreffen, bzw. es gibt zu jeder Primzahl eine noch größere. (Durch den Beweis wissen wir zwar, daß es zu jeder vorgelegten Primzahl eine größere gibt, aber es bleibt offen, ob P die nächstgrößere Primzahl nach p ist. Einfache Beispiele zeigen, daß unser Verfahren nicht alle Primzahlen nacheinander erzeugt:

$p=3,\ P=2\cdot3+1=7;\ p=5,\ P=2\cdot3\cdot5+1=31$).

Die Struktur dieses Beweises aus der griechischen Mathematik ist recht kompliziert: Man nimmt das Gegenteil einer Behauptung an und zeigt durch ein Beweisverfahren, daß das Gegenteil der Behauptung zu verwerfen ist, um daraus die Gültigkeit der unverneinten Behauptung zu folgern.

3. Ein Einwand aus der Philosophie

Die Mathematik hat bedeutende Persönlichkeiten ständig zu Stellungnahmen veranlaßt, wobei entweder enthusiastische Zustimmung oder kühle Ablehnung erschien, Gleichgültigkeit gegenüber der Mathematik gab es kaum. Daß Naturwissenschaftler, die Gebrauch von dieser exakten Wissenschaft machten, ihren Gebrauch lobten, das liegt auf der Hand. Aber auch Dichter und Philosophen priesen die Mathematik. Zwei Beispiele: „Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein" (Novalis); „Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist" (Kant).

Jedoch gibt es außerhalb der Naturwissenschaften auch häufig kritische Töne; von Goethe kennen wir distanzierte Stellungnahmen, und der Dichter Strindberg führte dilettantische Angriffe gegen die Mathematik. Der Philosoph Schopenhauer äußerte sich recht präzise über die Unzulänglichkeiten der mathematischen Methode, so daß eine Auseinandersetzung mit ihm möglich ist. Schopenhauer schrieb in seinem Buch „Die Welt als Wille und Vorstellung" (1818) polemisch:

„Erst jetzt können wir einsehen, daß des Euklids logische Behandlungsart der Mathematik eine unnütze Vorsicht, eine Krücke für gesunde Beine ist, daß sie einem Wanderer gleicht, der nachts, einen hellen festen Weg für ein Wasser haltend, sich hütet, ihn zu betreten, und stets daneben auf holprigem Boden geht, zufrieden, von Strecke zu Strecke an das vermeinte Wasser zu stoßen. Erst jetzt können wir mit Sicherheit behaupten, daß, was bei der Anschauung einer Figur sich uns als notwendig ankündigt, nicht aus der auf dem Papier vielleicht sehr mangelhaft gezeichneten Figur kommt, auch nicht aus dem abstrakten Begriff, den wir dabei denken, sondern unmittelbar aus der uns a priori (= von vornherein) bewußten Form aller Erkenntnis."

Damit drückt Schopenhauer sein Unbehagen an unanschaulichen und indirekten Beweisführungen aus. Er sagt genauer:

„Daß, was Euklid demonstriert (= beweist), alles so sei, muß man, durch den Satz vom Widerspruch gezwungen, zugeben; warum es aber so ist, erfährt man nicht. Man hat daher fast die unbehagliche Empfindung wie nach einem Taschenspielerstreich, und in der Tat sind einem solchen die meisten Euklidischen Beweise auffallend ähnlich. Fast immer kommt die Wahrheit durch die Hintertür herein, indem sie sich per accidens (= zufällig) aus irgendeinem Nebenumstand ergibt. Oft schließt ein apagogischer (= indirekter) Beweis alle Türen, eine nach der anderen, zu und läßt nur die eine offen, in die man nun bloß deswegen hinein muß. Oft werden, wie im pythagoreischen Lehrsatze, Linien gezogen, ohne daß man weiß warum; hinterher zeigt sich, daß es Schlingen waren, die sich unerwartet zuziehen und den Assensus (= Zustimmung) des Lernenden gefangen nehmen, der nun verwundert zugeben muß, was ihm seinem inneren Zusammenhang nach völlig unbegreiflich bleibt."

Schopenhauers Polemik richtet sich gegen den Mausefallencharakter, durch den er an anderem Ort diese Beweisverfahren charakterisierte. Für den Satz des Pythagoras (In jedem rechtwinkligem Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat) schlägt Schopenhauer, der es nicht bei Kritik bewenden lassen will, anstelle der zuschnappenden Mausefallenbeweise seine Beweismethode vor:

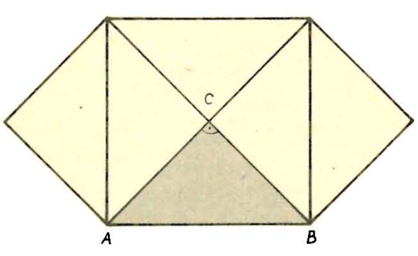


Bild 5
Schopenhauers Beweisfigur. Das Quadrat über AB ist offenbar flächengleich den beiden Quadraten über AC und BC.

„Daß es so sei, beweist freilich Euklid im 35. Satz des dritten Buches: das Warum steht noch dahin. Ebenso lehrt der pythagoreische Lehrsatz uns eine qualitas occulta (= geheimnisvolle Eigenschaft) des rechtwinkligen Dreiecks kennen; des Euklids stelzbeiniger, ja hinterlistiger Beweis verläßt uns beim Warum, und beistehende, schon bekannte, einfache Figur gibt auf einen Blick weit mehr als jener Beweis Einsicht in die Sache und innere feste Überzeugung von jener Notwendigkeit und von der Abhängigkeit jener Eigenschaft vom rechten Winkel.

Auch bei ungleichen Katheten muß es sich zu einer solchen anschaulichen Überzeugung bringen lassen, wie überhaupt bei jeder geometrischen Wahrheit, schon deshalb, weil ihre Auffindung allemal von einer solchen angeschauten Notwendigkeit ausging und der Beweis erst hinterher hinzu ersonnen ward."

4. Ein Beweis im Sinne Schopenhauers für den Satz des Pythagoras

Gegen den Beweis Schopenhauers ist mathematisch gar nichts einzuwenden, wenn er als Begründung für den speziellen Fall eines gleichschenkligen Dreiecks beim pythagoreischen Satz gelten soll. Dieser an den erwähnten Dialog des Sokrates erinnernde Beweis hat auch methodische Vorzüge, nämlich schnell an einem speziellen Fall die Gültigkeit der allgemeinen Behauptung einzusehen. Wie sieht es aber bei ungleichen Katheten aus? Hier bleibt uns Schopenhauer den Beweis schuldig. Wir wollen nicht fragen „Warum?", sondern einen anschaulichen Beweis selbst geben. (Ein 1940 erschienenes Buch zählt gegen 370 Beweisvarianten dieses Satzes auf, so daß schwer nachzukommen ist, wer zuerst diese oder jene Version erdachte. In der mathematischen Schülerbücherei gibt es ein Bändchen von W. Lietzmann „Der pythagoreische Satz", das interessierten Lesern erstaunlich viele Beweisvarianten vorführt.)

Nun zum Beweis. Wir betrachten ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck ABC, wobei über den Dreiecksseiten die Quadrate errichtet sein sollen. In der Zeichenebene denken wir uns das Hypotenusenquadrat um die Hypotenuse als Drehachse um 180° herumgeklappt. Weiterhin verlängern wir die Seiten der Kathetenquadrate QS und EF bis zum gemeinsamen Schnittpunkt O sowie denken uns das Quadrat $ABFE$ längs der Strecke AS so verschoben, daß F mit O zusammenfällt. Das umgeklappte Hypotenusenquadrat überdeckt Teile der Kathetenquadrate, nämlich das Viereck $CBUP$ und das Dreieck ABD. Wir wollen zeigen, daß die nicht überdeckten Teile der Kathetenquadrate, nämlich die Dreiecke CQP und PSU sowie das Viereck $AEFD$ (als Teil I, III und V in der Figur bezeichnet), sich so in das umgeklappte Hypotenusenquadrat zu den bereits überdeckten Teilen einfügen lassen, daß das Hypotenusenquadrat vollständig und einfach überdeckt ist. (Der Beweis ist wie ein Puzzlespiel, bei

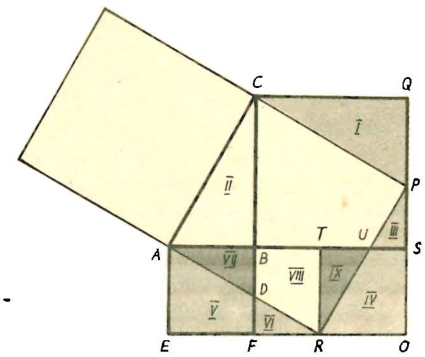


Bild 6
Ein Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes im Stile von Schopenhauer.

dem aus fünf Teilen ein Quadrat zu legen ist.) Folgende Flächengleichheiten sind wegen der Kongruenz der Figuren offensichtlich und durch unterlegtes Raster in der Abbildung besonders kenntlich gemacht:

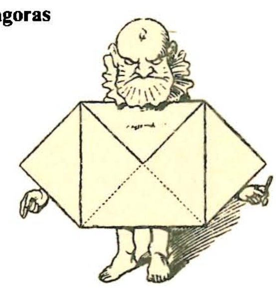
a) I = II;
b) (III + IV) = (V + VI) = (VII + VIII),
   also wegen IV = V, III = VI schließlich
   (III + V) = (VII + VIII);
c) VII = IX,

hieraus folgt, was zu zeigen war.

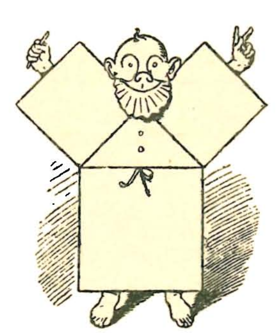
R. Thiele

(Ein 2. Teil folgt im nächsten Heft.)

Pythagoras



vor der Erfindung seines Lehrsatzes und *nach* der Erfindung desselben.

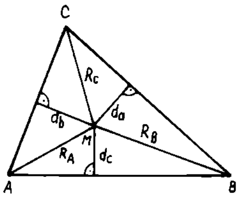


(aus: Münchner fliegende Blätter 1886, Lesereinsendung J. Weitendorf, Schwerin)

Ungleichung von Erdös-Mordell

Im Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c gilt für einen beliebigen im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt M mit den Abständen d_a, d_b, d_c zu den Seiten und R_A, R_B, R_C zu den Eckpunkten des Dreiecks die Ungleichung
$R_A+R_B+R_C \geqq 2(d_a+d_b+d_c)$.
Gleichheit tritt genau dann ein, wenn das Dreieck gleichseitig ist und M im Dreiecksmittelpunkt liegt. (Bild 1)

Bild 1



Die Beziehung formulierte erstmals im Jahre 1935 der ungarische Mathematiker *P. Erdös*, der allerdings noch keinen Beweis dafür erbrachte. Der erste Nachweis für die Gültigkeit der Ungleichung gelang dem englischen Mathematiker *L. J. Mordell*, einem Spezialisten der Zahlengeometrie. Der Beweis von Mordell, der übrigens ziemlich kompliziert ausfiel, benutzte ebenso wie der später von D. F. Barrow gefundene Beweis vorrangig die Hilfsmittel der ebenen Trigonometrie.
Den ersten rein geometrischen Beweis der Erdös-Mordell-Ungleichung führte im Jahre 1945 der Amerikaner D. K. Kazarinoff. Andere, oftmals recht einfache Beweise derselben Ungleichung schlugen Ende der 50er Jahre der Amerikaner L. Bankoff, die Holländer G. R. Veldkamp und H. Bralant, der Engländer Eglestone, der sowjetische Wissenschaftler S. A. Skopetz (die von den zuletzt genannten drei Mathematikern stammenden Beweise waren fast identisch) sowie erneut L. J. Mordell vor. Im folgenden stellen wir drei verschiedene Beweisvarianten für die betrachtete Ungleichung vor, daran schließen sich einige Folgerungen und Übungen. Im Dreieck werden die in der Schulmathematik üblichen Bezeichnungen für Seiten, Winkel und Transversalen verwendet.
Wir benötigen im Beweisverlauf die folgenden drei Hilfssätze.
Hilfssatz 1: Für beliebige positive Zahlen a gilt die Beziehung

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2.$$

Beweis:
Die Gültigkeit folgt aus der Identität

$$a+\frac{1}{a}=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+2.$$

Hilfssatz 2: Es seien U, V und W auf den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$ des Dreiecks $\triangle ABC$ gelegene Punkte, wobei die Gerade UV und AB, UW und AC sowie VW und BC jeweils parallel verlaufen. Man zeige, daß die Punkte die Dreiecksseiten halbieren.

▲1▲ Aufgabe: Wende dabei mehrmals den Strahlensatz an!
Hilfssatz 3: Für einen beliebigen innerhalb des Winkelraums BAC (d. h. innerhalb des durch die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ gebildeten Teils der Ebene) gelegenen Punkt M gilt

$$aR_A \geqq bd_b+cd_c.$$

Beweis: Die Strecke $\overline{BC}$ schneide den Strahl $\overrightarrow{AM}$ in dem Punkt A_1. Weiter seien $\overline{BQ}$ und $\overline{CR}$ die Lote von den Punkten B bzw. C auf die Gerade AM. Dann gilt offenbar

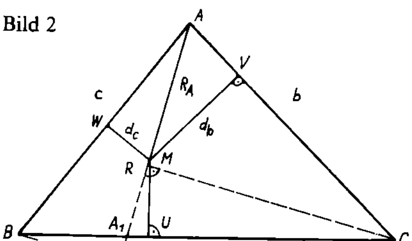
$$a=\overline{BC}=\overline{BA_1}+\overline{A_1C} \geqq \overline{BQ}+\overline{CR},$$

da in den (ggf. entarteten) rechtwinkligen Dreiecken $\triangle A_1BQ$ und $\triangle A_1CR$ die Katheten nicht länger als die Hypothenusen sein können. Hieraus ergibt sich

$$aR_A=\overline{BC}\cdot\overline{AM} \geqq \overline{BQ}\cdot\overline{AM}+\overline{CR}\cdot\overline{AM} =2S(\triangle AMB)+2S(\triangle AMC)$$

und damit $aR_A \geqq cd_c+bd_b$, w. z. b. w. Wir haben dabei mit $S(F)$ den Flächeninhalt der Figur F bezeichnet.
Aus dem Beweis ergibt sich, daß das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn die betrachteten Dreiecke entarten, d. h. wenn A_1, Q und R identisch sind und somit mit U zusammenfallen, was aber bedeutet, daß die Geraden AM und BC einen rechten Winkel bilden. (Bild 2)

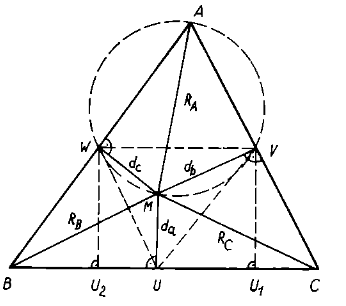
Bild 2



Beweisvariante 1:
Zunächst fällen wir die Lote $\overline{MU}$, $\overline{MV}$ und $\overline{MW}$ des Punktes M auf die die Dreiecksseiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$ enthaltenden Geraden und verbinden ihre Endpunkte U, V und W miteinander (Bild 3). Der über MA als Durchmesser konstruierte Kreis, dessen Radius $\frac{1}{2}R_A$ beträgt, verläuft laut Umkehrung des Thalessatzes durch die Punkte V und W. Der zu VW als Sehne gehörige Peripheriewinkel ist gleich α und der entsprechende Zentriwinkel demnach 2α. Man erhält damit die Beziehung $\overline{VW}=R_A \sin\alpha$. (Beweise dies!) Nun projizieren wir die Strecke VW auf die Gerade BC. Ist $\overline{U_1U_2}$ die Projektion, so gilt offenbar

$$\overline{VW} \geqq \overline{U_1U_2}=\overline{UU_1}+\overline{UU_2}. \qquad (1)$$

Bild 3



Durch eine Fallunterscheidung läßt sich leicht zeigen, daß die Geraden MV und BC einen Winkel der Größe $|90°-\gamma|$ einschließen und analog die Geraden MW und BC einen Winkel der Größe $|90°-\beta|$. (Führe den Nachweis dafür ausführlich durch Betrachtungen der Fälle $\gamma<90°$ und $\gamma \geqq 90°$!) Daraus lassen sich die Längen der Teilprojektionen $\overline{UU_1}$ und $\overline{UU_2}$ errechnen: $\overline{UU_1}=d_b \sin\gamma$ und $\overline{UU_2}=d_c \sin\beta$.
Eingesetzt in die obige Ungleichung (1) ergibt sich die folgende Abschätzung der Größe R_A von unten:

$$R_A \geqq \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}d_b+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}d_c.$$

Aus Symmetriegründen gelten analoge Beziehungen für R_B und R_C:

$$R_B \geqq \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}d_a+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}d_c,$$

$$R_C \geqq \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}d_a+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}d_b.$$

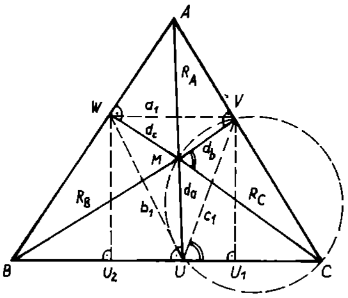
(Zum Beweis die folgende Überlegung: man vertauscht die Bezeichnungen der Ecken, Seiten und übrigen Stücke in geeigneter Weise und betrachtet aber nach wie vor dieselben Hilfslinien wie oben.)
Addiert man jetzt die erhaltenen Abschätzungen für die Größen R_i und faßt die Glieder in geeigneter Weise zusammen, dann folgt die Ungleichung

$$R_A+R_B+R_C \geqq d_a\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)+ +d_b\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)+d_c\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right).$$

Durch mehrmalige Anwendung des Hilfssatzes 1 auf die Klammerausdrücke folgt schließlich die Ungleichung von Erdös-Mordell. Die Ungleichung wird zur Gleichung, wenn im Hilfssatz 1 das Gleichheitszeichen gilt, d. h. wenn gilt $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ und damit $\beta=\gamma$ und analog $\alpha=\gamma$ sowie $\alpha=\beta$, mit anderen Worten, das Dreieck ist gleichseitig. Außerdem muß in der Ungleichung (1) das Gleichheitszeichen gelten, d. h. die Geraden VW und BC parallel verlaufen, analog die Geraden AC und UW sowie UV und AB. Nach Hilfssatz 2 ist M somit der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, also gleich dem Umkreismittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$.

Beweisvariante 2:

Bild 4



Wir gehen wie in Variante 1 vor und betrachten die Ungleichung (1). Nun wollen wir die Strecken $\overline{UU_1}$ und $\overline{UU_2}$ durch einfachere Ausdrücke ersetzen (ohne Verwendung der Trigonometrie). Dazu bezeichnen wir $c_1=\overline{UV}$, $b_1=\overline{UW}$ sowie $a_1=\overline{VW}$ (Bild 4).
Erneut errichten wir den Thaleskreis über einer der Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$, etwa $\overline{CM}$. Wieder nach Thalessatz verläuft der Kreis durch die Punkte U und V. Da Peripheriewinkel über derselben Sehne (auf derselben Seite dieser Sehne) gleich groß sind, gilt $\sphericalangle VUC=\sphericalangle VMC$, und die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle VUU_1$ und $\triangle CVM$ sind ähnlich. Also gilt $\overline{UU_1}:\overline{MV}=\overline{UV}:\overline{MC}$, oder in den gewählten Bezeichnungen $\overline{UU_1}=\frac{c_1d_b}{R_C}$, analog $\overline{UU_2}=\frac{b_1d_c}{R_B}$. (Leite die letzte Gleichung her!) Die Ungleichung (1) schreiben wir in folgender Weise:

$$R_A\geqq R_A\frac{\overline{UU_1}}{\overline{VW}}+R_A\frac{\overline{UU_2}}{\overline{VW}}.$$

Nach Substitution der eben erhaltenen Werte für $\overline{UU_1}$ und $\overline{UU_2}$ folgt daraus die Ungleichung

$$R_A\geqq\frac{c_1R_A}{a_1R_C}d_b+\frac{b_1R_A}{a_1R_B}d_c.$$

Auf die nun schon bekannte Art lassen sich analog die Beziehungen

$$R_B\geqq\frac{a_1R_B}{b_1R_A}d_c+\frac{c_1R_B}{b_1R_C}d_a \text{ und}$$

$$R_C\geqq\frac{a_1R_C}{c_1R_A}d_b+\frac{b_1R_C}{c_1R_B}d_a \text{ nachweisen.}$$

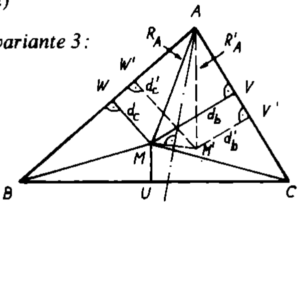
Durch Addition und Umformung der erhaltenen Abschätzungen der R_i ergibt sich die Ungleichung

$$R_A+R_B+R_C\geqq d_a\left(\frac{c_1R_B}{b_1R_C}+\frac{b_1R_C}{c_1R_B}\right)+d_b\left(\frac{c_1R_A}{a_1R_C}+\frac{a_1R_C}{c_1R_A}\right)+d_c\left(\frac{b_1R_A}{a_1R_B}+\frac{a_1R_B}{b_1R_A}\right)$$

und daraus schließlich nach Anwendung des Hilfssatzes 1 die zu beweisende Ungleichung von Erdös-Mordell. (Ermittle analog zu Beweisvariante 1, in welchem Fall Gleichheit eintritt!)

Beweisvariante 3:

Bild 5



Zunächst ersetzen wir den Punkt M durch seinen Spiegelpunkt bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$ und bezeichnen diesen mit M' (siehe Bild 5). Jetzt wenden wir auf das Dreieck $\triangle ABC$ und M' den Hilfssatz 3 an, wonach gilt

$$aR'_A\geqq cd'_c+bd'_b, \qquad (2)$$

dabei ist $R'_A=\overline{AM'}$ und d'_b bzw. d'_c sind die Abstände des Punktes M' zu den Geraden AC bzw. AB. Nun gilt aber $R'_A=R_A$, $d'_c=d_b$ sowie $d'_b=d_c$.

▲2▲ Führe den Nachweis für diese 3 Identitäten, setze die Werte in (2) ein, und leite im Anschluß daran die zu beweisende Ungleichung nach dem in den vorigen Beweisvarianten demonstrierten Schema selbständig her!

Folgerungen und Aufgaben:

1. $\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}\right)$

Zum Beweis wird die Ungleichung von Erdös-Mordell auf das Dreieck $\triangle A'B'C'$ und den Punkt M angewendet, wobei die Eckpunkte A', B' und C' derart auf den Strahlen $\overrightarrow{MU}$, $\overrightarrow{MV}$ bzw. $\overrightarrow{MW}$ gewählt werden, daß gilt $\overline{MA'}=\frac{1}{d_a}$, $\overline{MB'}=\frac{1}{d_b}$ und $\overline{MC'}=\frac{1}{d_c}$. Mit anderen Worten, es wird zum Dreieck mit denjenigen Eckpunkten übergegangen, die sich aus der Polartransformation der Ecken des Ausgangsdreiecks bezüglich des Zentrums M ergeben.

Beweise, daß dann gilt $R'_A=\frac{1}{d_a}$, $d'_a=\frac{1}{R_A}$ und analoge Beziehungen für die übrigen R'_i und d'_j und daß daraus die Behauptung folgt!

2. $R_AR_BR_C\geqq 8d_ad_bd_c$

▲3▲ Leite diese Beziehung unter Verwendung von Hilfssatz 3 und der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel von Zahlen her!

3. Die bisherigen drei erhaltenen Ungleichungen kann man infolge ihrer Symmetrie bzgl. der Dreiecksseitenlängen noch in folgender Form niederschreiben

$$M_k(R_A, R_B, R_C)\geqq 2M_k(d_a, d_b, d_c),\ k=-1;0;1. \qquad (3)$$

Dabei bezeichnet $M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ das Mittel k-ten Grades der positiven Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nach der Formel

$$M_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\left(\frac{1}{n}(x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k)\right)^{\frac{1}{k}}$$

für $k\neq 0$ und

$$M_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_1x_2\ \ldots\ x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Bekanntlich heißt M_0 das geometrische, M_1 das arithmetische und M_{-1} das harmonische Mittel der betreffenden Zahlen x_i. Im nächsten Abschnitt formulieren wir Aufgaben, in denen die Beziehung (3) noch für andere Werte k nachzuweisen ist. Dabei fällt auf, daß lediglich für $k=2$, d.h. für die quadratischen Mittel die Ungleichung (3) keine Gleichheit zuläßt und dabei $\sqrt{2}$ anstelle 2 steht! (Anmerkung: Es läßt sich dafür zeigen, daß beide Ungleichungsseiten beliebig nahekommen können!)

4. $aR_A+bR_B+cR_C\geqq 2(ad_a+bd_b+cd_c)$

▲4▲ Folgere diese Ungleichung aus dem Hilfssatz 3!

5. Im gleichseitigen Dreieck gilt $R_A+R_B+R_C\geqq\sqrt{3}a$.

▲5▲ Folgere diese Ungleichung aus der Ungleichung von Erdös-Mordell!

Weiterführende Übungen

Wer sich mit weiteren Beziehungen zwischen Dreiecksstücken und den Größen R_A, R_B, R_C sowie d_a, d_b, d_c beschäftigen will, sollte sich an den nun folgenden Aufgabenvorschlägen versuchen.
Es bezeichne S die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$, h_a, h_b und h_c seine Höhen und r bzw. R die Radien von In- und Umkreis des Dreiecks.

1. $\min(h_a, h_b, h_c)\leqq d_a+d_b+d_c \leqq\max(h_a, h_b, h_c)$

▲6▲ *Anleitung:* Betrachte die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle MBC$, $\triangle MAC$ und $\triangle MAB$!

2. $d_ad_bd_c\leqq\frac{8S^3}{27abc}$

▲7▲ *Anleitung:* Betrachte die ebengenannte Flächensumme (siehe 1.), und wende die Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel dreier Zahlen an!

3. $\sqrt{R_A}+\sqrt{R_B}+\sqrt{R_C} \geqq\sqrt{2}\,(\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c})$

▲8▲ Diese Ungleichung entspricht der in Bemerkung 3. enthaltenen Beziehung (3) für $k=\frac{1}{2}$. Zum Beweis gehe man von der in Beweisvariante 3 hergeleiteten Beziehung (2) aus und benutze die Ungleichung $\sqrt{x+y}\geqq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$ für beliebige x; $y\geqq 0$, die zunächst aber noch nachzuweisen ist.

4. $R_A^2+R_B^2+R_C^2>2(d_a^2+d_b^2+d_c^2)$

▲9▲ *Anleitung:* Benutze die Ungleichung (2)!

Die hier behauptete Ungleichung entspricht der Beziehung (3) für $k=2$ allerdings mit dem Faktor $\sqrt{2}$ statt 2 und läßt, wie bereits in Bemerkung 3. erwähnt, keine Gleichheit, dafür aber eine beliebige Annäherung der beiden Seiten zu.

5. $R_AR_BR_C\geqq(d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c)$

▲10▲ Zum Beweis sind Hilfssatz 3 und Beziehung (2) zu benutzen.

6. $R_A+R_B+R_C\geqq 6r$

▲11▲ Benutze die Ungleichung von Erdös-Mordell, und leite die Beziehungen $R_A+d_a\geqq h_a$ sowie $h_a+h_b+h_c\geqq 9r$ her, mit deren Hilfe dann der Nachweis der Behauptung gelingt.

Anmerkung: Diese Aufgabe besitzt im Gegensatz zu den bisherigen Aufgaben einen größeren Schwierigkeitsgrad.

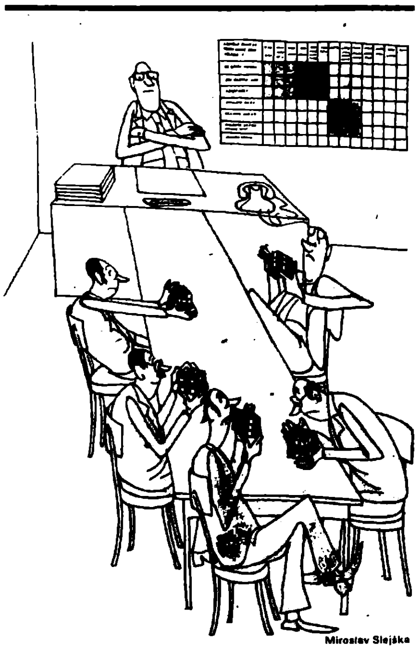
7. $$R_A^2+R_B^2+R_C^2 \geqq 12r^2$$

▲12▲ Gehe beim Beweis direkt von der Ungleichung von Aufgabe ▲11▲ aus, und benutze die Beziehung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel dreier Zahlen!

8. $$R_AR_B+R_AR_C+R_BR_C \geqq (d_a+d_b)(d_a+d_c)+(d_a+d_b)(d_b+d_c)+(d_a+d_c)(d_b+d_c)$$

Wir haben diese Ungleichung bewußt an den Schluß dieses Beitrages gesetzt und sie auch nicht gleich den übrigen als Aufgabe formuliert. Als erster hat A. Oppenheim die Gültigkeit dieser Ungleichung vermutet. Bislang ist aber der Nachweis dafür nicht gelungen, es wurde aber auch noch kein Gegenbeispiel ermittelt, so daß nach wie vor offen ist, ob diese natürlich scheinende Ungleichung tatsächlich Gültigkeit besitzt. Vielleicht ist hier ein interessantes Feld für alle, die sich weitergehend mit Beziehungen zwischen den genannten Dreiecksstücken beschäftigen wollen.

F. Rehm



Ein weiterer Algorithmus zum Ungarischen Würfel

Seit mehreren Jahren beschäftigt das Problem des *Ungarischen Würfels*, vielfach wird er auch als magischer Würfel – magic cube – bezeichnet, immer mehr Menschen auf der ganzen Welt. 1975 entwickelte Ernö Rubik, ein Ungar, diesen Würfel. Bei seinem Unterricht als Lehrer an der Hochschulsektion Typografie – Planung in Budapest bemerkte er, daß die Schüler nach Verlassen der Oberschule oft nicht räumlich denken können, sondern nur flächenbezogen. Da aber das räumliche Denkvermögen für die Absolventen seiner Sektion sehr wichtig ist, ließ er sich diesen Würfel einfallen, ohne allerdings vorauszusehen, daß dieser eine explosionsartige Verbreitung finden und zu einem Exportschlager Ungarns würde.

Worin besteht nun das Problem, das so viele fasziniert? Dieser Würfel besteht aus 26 kleinen Würfeln, wovon auf jeder Seite neun zu sehen sind. Das Besondere ist, daß jede Seite des Würfels, also jeweils neun kleine Würfel, um ihren Mittelpunkt gedreht werden kann.

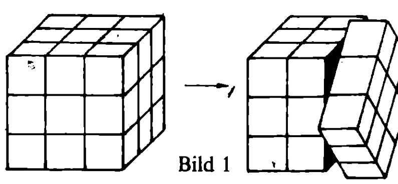
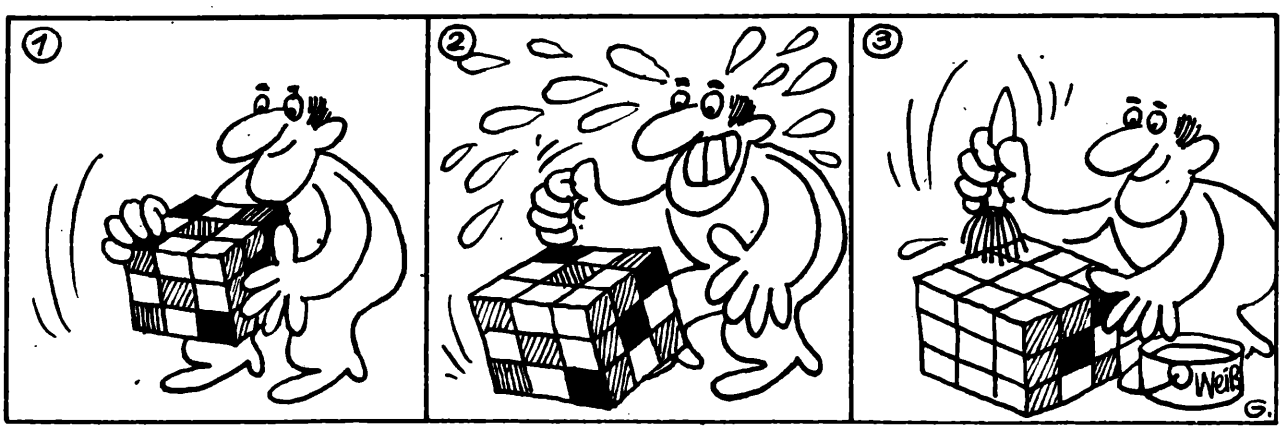


Bild 1

Der Würfel besitzt sechs Farben: Weiß, Rot, Orange, Blau, Grün und Gelb. Im Ausgangszustand sind die sechs Seiten des Würfels einfarbig. Aber bereits nach 4 bis 5 Drehungen verschiedener Seitenflächen ist die farbliche Anordnung so durcheinander, daß es schwierig erscheint, diese in den Ausgangszustand zurückzudrehen. Aber gerade darin besteht das Problem. In diesem Artikel möchte ich einen Algorithmus bzw. eine Strategie zum Ordnen des beliebig verdrehten Würfels vorstellen. Zunächst aber noch eine interessante Zahl – die Anzahl aller möglichen verdrehten Zustände des Würfels –, die ich einem Heftchen von David Singmaster „Notes on the ‚Magic cube'" entnahm.

Der Würfel besitzt 8 Eckwürfel, diese können miteinander permutiert werden, also 8!. – Gleichfalls die 12 Kantenwürfel: 12!.

Da aber jede Permutation der Eck- und Kantenwürfel zusammen eine gerade Permutation sein muß, halbiert sich die Anzahl aller Permutationen. Die Kantenwürfel besitzen 2 unterschiedlich gefärbte Flächen, die natürlich verschieden orientiert werden können, also 2^{12}. Da aber jeweils mindestens 2 Kantenwürfel zusammen verdreht werden, ergibt sich wieder ein Faktor $\frac{1}{2}$. Analog erhält man für die Orientierung der 8 Eckwürfel den Faktor $\frac{3^8}{3}$. Die Mittelsteine jeder Seite können nicht weggedreht werden, ergeben also keine weiteren Zustände, bestimmen aber damit die Farbe ihrer Seite. Insgesamt gibt es also $N=\frac{8!12!}{2}\cdot\frac{3^8}{3}\cdot\frac{2^{12}}{2}=$ $=43252\,00327\,44898\,56000 \approx 4{,}3\cdot 10^{19}$ verschiedene Zustände des Würfels, von denen ein einziger zu erreichen ist, bei dem alle Seitenflächen des Würfels einfarbig sind. Ein



Computer, der einen Zustand pro Mikrosekunde zählt, benötigt allein für das Zählen aller verschiedenen Zustände über 1,4 Millionen Jahre.

Zur Beschreibung des Algorithmus benötigen wir noch einige Bezeichnungen. Da der Würfel bez. seiner Farben gleich aufgebaut ist, wähle ich eine von den Farben unabhängige Beschreibungsweise. Der Würfel besitzt 6 drehbare Ebenen:

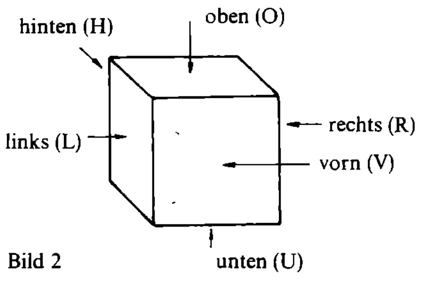


Bild 2

Die Drehrichtung (bei Draufsicht auf die entsprechende Ebene) und Drehlänge wird als Exponent bez. des Uhrzeigersinnes angegeben. V^2 bedeutet 2 Vierteldrehungen der vorderen Ebene in Uhrzeigersinn, V^{-1} 1 Vierteldrehung entgegen dem Uhrzeigersinn, $V^1 = V$. Mehrere Drehungen werden durch Aneinanderfolge von links nach rechts beschrieben. Ein Eckstein heißt positioniert, falls er sich in der Ecke befindet, die durch seine 3 Farben bestimmt ist. Ein Eckstein heißt orientiert, falls die Farben aller 3 Seiten mit den Farben der zugehörigen Ebenen übereinstimmen. Ein Kantenstein der vorderen Ebene heißt orientiert, falls die Farbe der auf der vorderen Ebene liegenden Seite des Kantenwürfels mit der Farbe der vorderen Ebene übereinstimmt.

Nun kann der Algorithmus angegeben werden.
Schritt 1: Ordne den Würfel so, daß 2 benachbarte Schichten vollständig geordnet sind! Die durch die 3. Schicht bestimmte (noch nicht geordnete) Ebene wird als vordere Ebene angesehen.
Schritt 2: Positionierung der Ecksteine der vorderen Ebene.
Schritt 3: Erzeugung eines Zustandes, bei dem die Ecksteine positioniert sind (farbliche Orientierung noch beliebig) und alle Kantensteine farblich orientiert sind (Reihenfolge der Kantensteine zueinander noch beliebig).
Schritt 4: Vollständige Ordnung des Würfels.
Im weiteren werden einige Teilalgorithmen, die zur Realisierung der Schritte 1 bis 4 verwendbar sind, angegeben.

Um 2 geordnete Schichten zu erhalten, wählt man zunächst eine obere Ebene und bringt alle 4 Kantensteine farblich orientiert an ihren richtigen Platz. Danach stellt man die jeweils entsprechenden Eck- und Kantensteine der ausgewählten 2 Schichten zusammen und dreht diese an ihren richtigen Ort.

Zum Beispiel:
Gegeben ist der Zustand in Bild 3. Nun dreht man so, daß der Zustand von Bild 4 erreicht ist. Dann ergibt die Drehfolge $LU^2L^{-1}V^{-1}U^2V$ den Zustand in Bild 5. Durch viermaliges Anwenden des eben Gezeigten erreicht man die 2 geordneten Schichten. Da in den Schritten 2 bis 4 nur zwischenzeitlich erreichte *günstige* Zustände zerstört werden, nach Abschluß aber stets die 2 in Schritt 1 geordneten Schichten geordnet sind, soll im weiteren eine andere Veranschaulichung die Algorithmen illustrieren.

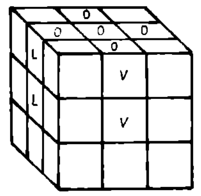


Bild 3

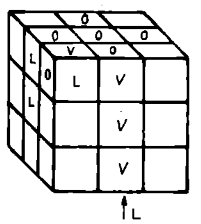


Bild 4

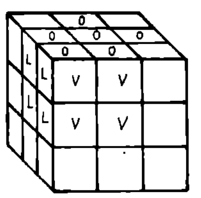


Bild 5

Zur Realisierung von Schritt 2 kann zum Beispiel der Algorithmus IIa verwendet werden (siehe Bild 6).

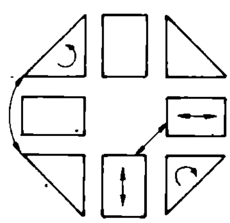


Bild 6: Algorithmus IIa

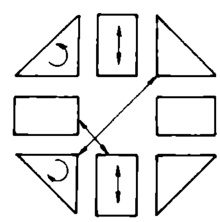


Bild 7: Algorithmus IIIa

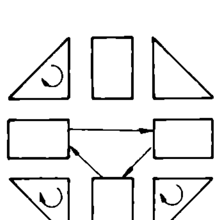


Bild 8: Algorithmus IVa

Algorithmus IIa:
$O^{-1}VOV^{-1}O^{-1}VO^2$
$LVL^{-1}V^{-1}O^2V^2OLV^2L^{-1}$
Aber auch Algorithmus IIb ist möglich.
Algorithmus IIb:
$OV^{-1}O^{-1}VOV^{-1}O^2R^{-1}V^{-1}$
$RVO^2V^2O^{-1}R^{-1}V^2R$

Und es gibt zahlreiche weitere Möglichkeiten. Wesentlich ist hier, daß zwei benachbarte Ecksteine vertauscht werden und damit durch evtl. mehrmaliges Anwenden der Algorithmen II jede beliebige Reihenfolge der Ecksteine erreichbar ist. Zur Realisierung von Schritt 3 sind zum Beispiel die Algorithmen IIIa und IIIb geeignet.

Algorithmus IIIa: $O^{-1}R^{-1}V^{-1}RVOV^{-1}$
Algorithmus IIIb: $OLVL^{-1}V^{-1}O^{-1}V$

Die Orientierung von zwei Kantenwürfeln wird geändert. Es ist aber zu beachten, daß 2 gegenüberliegende Eckwürfel vertauscht werden. Deshalb muß Algorithmus III im allgemeinen zweimal angewendet werden.

Für Schritt 4 verwende ich folgende drei Algorithmen:
Algorithmus IVa: $O^{-1}V^2OVO^{-1}VOV^2$
Algorithmus IVb: $V^2OVO^{-1}VOV^2O^{-1}$
Algorithmus IVc:
$OV^2O^2V^{-1}O^2V^{-1}O^2V^2OV^2$

Durch Kombination der Algorithmen oder Anwendung auf den gedrehten Würfel erreicht man recht schnell das gewünschte Ziel. Vielfach können die Algorithmen auch in entgegengesetzter Richtung verwendet werden. Zum Beispiel ergibt sich ein weiterer Algorithmus als entgegengesetzter zu IVa.

Algorithmus IVd:
$V^2O^{-1}V^{-1}OV^{-1}O^{-1}V^2O$

Es soll aber noch einmal betont werden, daß dies nur einige, längst nicht alle Möglichkeiten sind. Der Leser sollte sich weitere Algorithmen zu den Schritten 1 bis 4 überlegen. Auch das vorgeschlagene Konzept ist nicht das einzig Mögliche. Ich wünsche euch viel Erfolg und Spaß bei der Beschäftigung mit dem *Ungarischen Würfel*!

G. Scheithauer

Ich habe einen Mann gekannt, der die seltsame Grille hatte, nach Tisch beim Obst aus Äpfeln regelmäßige stereometrische Körper zu schneiden, wobei er immer den Abfall aufaß.
Meistens endigte sich die Auflösung des Problems mit einer gänzlichen Aufzehrung des Apfels.

Georg Christoph Lichtenberg

Mathematik in Landwirtschaft und Medizin

Wie kommt es, daß im Schulunterricht im Fach Biologie keine Mathematik benötigt wird, die biologischen Wissenschaften aber heute ohne Mathematik nicht mehr auskommen?

Ein wichtiger Grund besteht darin, daß die mathematischen Teilgebiete, die in den biologischen Wissenschaften am stärksten eingesetzt werden, im Mathematikunterricht der erweiterten Oberschulen nicht behandelt werden. Es handelt sich um die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und um die *Mathematische Statistik.*

Diese Teilgebiete ermöglichen die mathematische Beschreibung von Erscheinungen und Zusammenhängen, die in starkem Maße auch vom Zufall abhängen. Zufällige Erscheinungen sind aber für biologische Wissenschaften charakteristisch. Vom Zufall abhängig sind z. B. die Höhe des Ertrages an Wintergerste in einer LPG im Jahre 1982, die mittlere Anzahl geborener Ferkel in einer Sauenherde, die Anzahl der Grippeerkrankungen im Dezember 1982 in einer bestimmten Stadt oder der Prozentsatz des Waldbestandes eines Bezirkes, der von Borkenkäfern befallen ist. Zufällige Erscheinungen in der Biologie sind mathematisch anders zu beschreiben als viele Vorgänge in der Physik, die mehr oder weniger exakt vorhersagbar sind.

Beispiel 1

Welche Abhängigkeit besteht zwischen Brustumfang y und Körperhöhe x bei Milchrindern?

Tabelle 1
Meßwerte von Brustumfang (y_i) und Körperhöhe (Widerristhöhe) (x_i) von 12 weiblichen Kälbern einer Milchrindrasse

Tier Nr. i	Körperhöhe x_i	Brustumfang y_i
1	111	150
2	114	156
3	112	145
4	119	157
5	114	145
6	115	139
7	121	170
8	120	160
9	108	149
10	124	154
11	118	156
12	121	155

Tabelle 1 enthält von 12 Tieren die Meßwerte $(x_1, y_1), \ldots, (x_{12}, y_{12})$, dieser beiden Merkmale. Wir sagen kurz, das Tier mit der Nummer i, wobei i eine Zahl zwischen 1 und 12 ist, habe die Meßwerte (x_i, y_i).

In Bild 1 sind die 12 Wertepaare (x_i, y_i) abgetragen. Man hatte vor den Messungen sicher schon angenommen, daß größere Tiere auch einen größeren Brustumfang haben. Dieser Zusammenhang besteht sicher auch, aber die Meßwerte in Tabelle 1 lassen sich nicht durch eine eindeutige Funktionsgleichung $y=f(x)$ verknüpfen. Z. B. haben Tiere mit gleichem Brustumfang (145 bei den Tieren 3 und 5) nicht die gleiche Körperhöhe und Tiere mit gleicher Körperhöhe (121 bei den Tieren 7 und 12) doch erheblich voneinander abweichende Brustumfänge. Damit ist der Brustumfang keine Funktion der Körperhöhe bzw. umgekehrt, wenn man die Definition einer Funktion entsprechend dem Mathematiklehrbuch der Klasse 9 verwendet, denn dem Wert 114 wird nicht *eindeutig* ein Element aus der Menge der y-Werte zugeordnet.

Als Modell für die Beschreibung des Zusammenhanges kommt also sicher auch keine Funktionsgleichung $y=f(x)$ in Frage. Vielmehr wird der Zusammenhang durch ein sogenanntes Regressionsmodell der Form

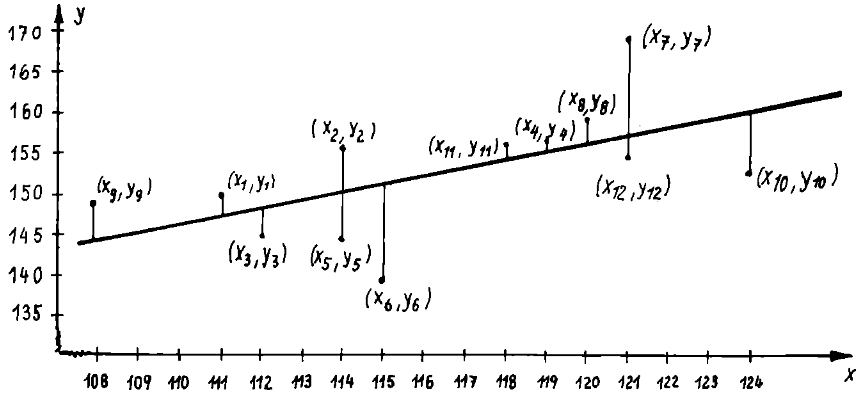
(1) $y(x_i)=\alpha+\beta x_i+e_i=m+nx_i+e_i$
$(i=1, \ldots, 12)$

beschrieben. In (1) sind (x_i, y_i) die Meßwertpaare, $\alpha=m$ und $\beta=n$ noch zu bestimmende Konstanten einer Geradengleichungen und e_i zufällige Abweichungen von einem mittleren oder durchschnittlichen Zusammenhang, der durch $\eta_i=\alpha+\beta x_i$ charakterisiert ist. An die Stelle funktionaler Abhängigkeiten in der Physik treten also in der Biologie sogenannte Regressionszusammenhänge. Die Werte α und β sind unbekannt, aus den Meßwerten berechnet man sogenannte Schätzwerte a bzw. b für α bzw. β nach folgender (von Gauß stammenden) Methode der kleinsten Quadrate: Die Größen a und b werden so berechnet, daß die Funktion $y=a+bx$ die Summe der Abweichungsquadrate

(2) $S=(y_1-a-bx_1)^2+\ldots$
$+(y_{12}-a-bx_{12})^2$

so klein wie nur möglich macht.

Bild 1
Wertepaare (x_i, y_i) für 12 Tiere und der Graph der geschätzten Regressionsgerade $\hat{y}(x)=37{,}915+0{,}98856x$



In Bild 1 sind der Graph von $y=a+bx$ und die Abweichungen e_i der Beobachtungswerte y_i an der Stelle x_i von dem Punkt auf dem Graphen von $a+bx$ über dem Punkt x_i eingezeichnet.

Jedes andere Paar (α, β) führt zu einer größeren Summe von Abweichungsquadraten.

Die Koeffizienten a und b, die (2) am kleinsten werden lassen, erhält man aus

$$(3)\qquad b=\frac{x_1y_1+\ldots+x_{12}y_{12}-\frac{1}{12}(x_1+\ldots+x_{12})(y_1+\ldots+y_{12})}{x_1{}^2+\ldots+x_{12}{}^2-\frac{1}{12}(x_1+\ldots+x_{12})^2}\quad \text{und}$$

$$(4)\qquad a=\frac{1}{12}(y_1+\ldots+y_{12})-b\frac{1}{12}(x_1+\ldots+x_{12}).$$

Speziell für unsere 12 Wertepaare in Tabelle 1 erhält man

$$b=\frac{111\cdot 150+\ldots+121\cdot 155-\frac{1}{12}(111+\ldots+121)(150+\ldots+155)}{111^2+\ldots+121^2-\frac{1}{12}(111+\ldots+121)^2}=0{,}98856 \text{ und}$$

$$a=\frac{1}{12}\,1836-0{,}98856\cdot\frac{1}{12}\cdot 1397=37{,}915$$

und damit für die als geschätzte Regressionsgerade bezeichnete Gerade die Gleichung

(5) $y=37{,}915+0{,}98856x$,

die den mittleren Zusammenhang zwischen x und y beschreibt. Wie eng der Zusammenhang ist, kann mit dem Korrelationskoeffizienten r beurteilt werden, der Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen kann und für unser Beispiel den Wert $r=0{,}586$ hat. Je näher r an $+1$ oder -1 liegt, um so näher liegen die den Wertepaaren entsprechenden Punkte an der geschätzten Regressionsgeraden und um so mehr entspricht die Regressionsbeziehung einer Funktion. Man kann den Grad eines Zusammenhangs auch für Merkmale berechnen, die nicht zu Meßwerten, sondern zu einer Zuordnung zu Kategorien führen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 2

Zusammenhang zwischen Zahnsteinbildung und Rauchen

Es soll geprüft werden, ob zwischen der Art der Zahnsteinbildung und der Intensität des Rauchens ein Zusammenhang besteht. Von $N=5690$ Patienten liegen Angaben über beide Merkmale mit den Kategorien kein Zahnstein, Zahnstein Typ I (supragingival) und Zahnstein Typ II (subgingival) beim Merkmal Zahnsteinbildung und Nichtraucher, schwacher bzw. starker Raucher beim Merkmal Rauchintensität vor. Die Anzahl der Patienten in den neun möglichen Kombinationen enthält Tabelle 2.

Tabelle 2:
Verteilung von 5690 Patienten auf Kategorien bei Zahnsteinbildung und Intensität des Rauchens

Intensität des Rauchens	kein Zahnstein	Zahnstein Typ I	Zahnstein Typ II	Summe
Nichtraucher	284	236	48	568
schwacher Raucher	606	983	209	1798
starker Raucher	1028	1871	425	3324
Summe	1918	3090	682	5690

Würde keine Abhängigkeit zwischen beiden Merkmalen bestehen, müßten nach einfachen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung in jeder der neun Klassen etwa so viele Patienten auftreten, wie das Produkt von Zeilen- und Spaltenrandsumme der jeweiligen Klasse, dividiert durch die Gesamtzahl an Patienten (5690), ausmacht. Z. B. in der Klasse („Nichtraucher, kein Zahnstein") wären danach $191{,}5=\frac{1}{5690}\cdot 568\cdot 1918$ (also rund 192) Patienten zu erwarten.

Die bei vollständiger Unabhängigkeit theoretisch zu erwartenden Werte in den neun Klassen enthält Tabelle 3.

Tabelle 3:
Bei Unabhängigkeit zwischen Intensität des Rauchens und Zahnsteinbildung zu erwartende theoretische Verteilung von 5690 Patienten

Intensität des Rauchens	kein Zahnstein	Zahnstein Typ I	Zahnstein Typ II
Nichtraucher	191,46	308,46	68,08
schwache Raucher	606,07	976,42	215,51
starke Raucher	1120,46	1805,12	398,41

Ein Maß für die Abhängigkeit müßte eine Funktion der Differenzen zwischen diesen theoretischen und den tatsächlichen beobachteten Werten sein. Wir bezeichnen mit (i, j) die Klasse, die der i-ten Kategorie ($i=1, 2, 3$) bei der Intensität des Rauchens und der j-ten Kategorie ($j=1,2,3$) bei der Zahnsteinbildung entspricht. n_{ij} sind die beobachteten Werte der Tabelle 2 (z. B. ist $n_{23}=209$) und t_{ij} die entsprechenden theoretischen Werte der Tabelle 3. Dann ist durch den sogenannten Kontigenzkoeffizienten

$$(6)\qquad A=\sqrt{\frac{1}{2\cdot 5690}\left[\frac{(284-191{,}46)^2}{191{,}46}+\ldots+\frac{(425-398{,}41)^2}{398{,}41}\right]}$$

ein Maß für den Zusammenhang gegeben. A nimmt allgemeine Werte zwischen Null und Eins an und ist bei fehlendem Zusammenhang (Unabhängigkeit) wegen $n_{ij}=t_{ij}$ gleich Null.

In unserem Fall ist $A=0{,}0837$, und das bedeutet einen geringen Zusammenhang zwischen beiden Merkmalen.

Das sind einige ganz einfache Beispiele. Oft sind die Probleme komplizierter. Beim menschlichen, tierischen und pflanzlichen Wachstum als Funktion des Alters lassen sich nicht (wie in Beispiel 1) Geraden durch die beobachteten Punkte legen, sondern oft Graphen von Funktionsgleichungen der Form

$$(7)\qquad \eta_i=\alpha-\beta e^{-\gamma x_i}+e_i\ (i=1, \ldots, n), \quad (e=2{,}71828\ldots),$$

die mit wachsendem Alter gegen einen maximalen Wert $y=\alpha$ streben. Die Konstante γ mißt die Wachstumsgeschwindigkeit, und $\alpha=\beta$ gibt den mittleren Wert beim Alter Null an.

Bild 2 enthält den Graphen der Funktion $\eta=100-50e^{-0{,}05x}$, um den z. B. Meßwerte y_i des Körperwachstums beim Rind streuen ($y_i=\eta_i+e_i$). Solche Beziehungen werden u. a. auch in der forstwirtschaftlichen Ertragskunde verwendet.

In der medizinischen Diagnostik steht man oft vor der Aufgabe, anhand einer Vielzahl von Meßwerten (wie den Ergebnissen von Urin- und Blutanalysen, EKG-Messungen, Blutdruck, Pulsfrequenz und bestimmten Krankheitssymptomen) einen Patienten einer Krankheit zuzuordnen oder ihn als gesund zu diagnostizieren. Diese Zuordnung muß mit hoher Wahrscheinlichkeit richtig sein, damit die zweckmäßigste Behandlung angewendet wird. Die Zuordnung wird heute teilweise schon von Diagnosecomputern vorgenommen, in deren Programmen die Erfahrungen der besten Spezialisten ihren Niederschlag finden. Dabei kommen komplizierte mathematische Verfahren zum Einsatz.

Diese wenigen Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie stark alle biologischen Wissenschaften mit der Mathematik verbunden sind. Andererseits erkennt man das auch an der Vielzahl der allein in der DDR erschienenen

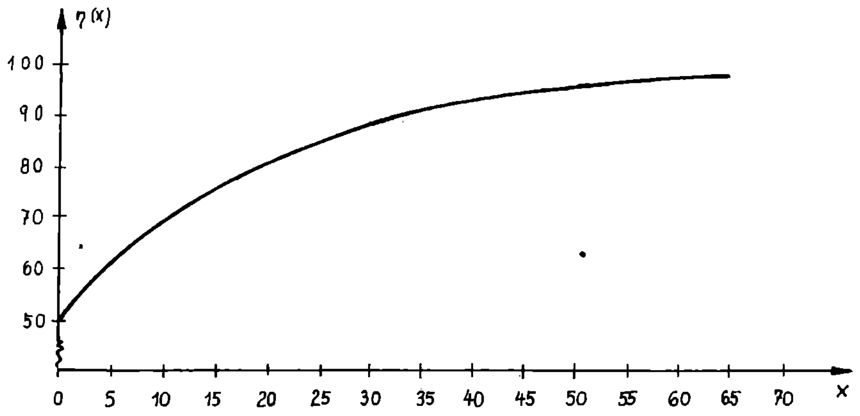


Bild 2
Graph der Funktion $\eta(x)=100-50e^{-0{,}05x}$.

Bücher über biomathematische Methoden (es sind über 30). Wesentlich zur Vereinheitlichung der Symbolik und Begriffsbildung auf dem Gebiet der Biomathematik/Biometrie hat das erstmals 1968 im VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag erschienene *Biometrische Wörterbuch*, dessen dritte Auflage in Vorbereitung ist, beigetragen. Es enthält Erläuterungen von etwa 2500 biometrischen Begriffen und Übersetzungen in sieben Sprachen.

Aus der dritten Auflage dieses Wörterbuches folgt die Erläuterung des Begriffes *Biometrie*.

„Biometrie heißt die Anwendung der Methoden der Mathematik, insbesondere der Mathematischen Statistik, in den biologischen und ihnen verwandten Wissenschaften (Biologie, Landwirtschaftswissenschaften, Medizin, Pharmakologie usw.). Da die Variabilität der Lebewesen und die durch sie entstehende Formenmannigfaltigkeit nur selten eine Beschreibung biologischer Zusammenhänge durch streng funktionale Beziehungen zulassen, sind die untersuchten Merkmale bzw. Eigenschaften fast immer zufallsbedingt. Zu ihrer Beschreibung müssen deshalb Zufallsvariable herangezogen werden, und es ist die Untersuchung ihrer Gesetzmäßigkeiten notwendig. Viele Methoden der mathematischen Statistik sind auf Grund biologischer Fragestellungen entwickelt worden.

In der Biometrie werden die allgemeinen mathematisch-statistischen Methoden im Zusammenhang mit der biologischen Fragestellung betrachtet. Die Biometrie beginnt bereits bei der Formulierung der Fragestellung, umfaßt die Gewinnung und Auswertung der Daten und reicht bis zur Interpretation der Ergebnisse. Da mit Hilfe der Biometrie Antwort auf biologische Fragen gegeben werden soll, müssen das biologische Element und die mathematisch-statistischen Methoden eine Einheit bilden. In den biologischen und ihnen verwandten Forschungsgebieten hat die Biometrie eine wachsende Bedeutung gewonnen.

Durch die Biometrie wird es erst möglich, rationell und mit bekannten Fehlerwahrscheinlichkeiten bzw. Risiken Schlußfolgerungen aus biologischen Daten zu ziehen.

Mitunter wird Biometrie eingeengt als Synonym für Biostatistik verwendet, während die nichtstatistischen Verfahren der Biologie und die Biometrie gemeinsam als Biomathematik bezeichnet werden. Der Sprachgebrauch ist in dieser Hinsicht nicht einheitlich. Zur Biometrie gehören die Teilgebiete Biologische Prüfung – Quantitative Genetik – Populationsgenetik – Statistische Genetik – Genetische Algebra – Populationsmathematik (darunter Bevölkerungsmathematik) – Versicherungsmathematik – Medizinische Statistik – Feldversuchswesen – Analyse von Wachstumskurven."

Während Physik und Chemie in ihrer Anwendung auf biologische Disziplinen bereits unter der Bezeichnung Biophysik bzw. Biochemie nicht nur in der Forschung, sondern auch als Studienfächer eingeführt sind, war das bislang bei der Biomathematik als Studienfach nicht der Fall. Das wird sich ändern, da ab Herbst 1982 an der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock für jährlich fünf Studenten die Möglichkeit besteht, die Spezialisierungsrichtung Biometrie mit einer Nebenfachausbildung in Biologie (Genetik, Tier- und Pflanzenphysiologie, Biochemie, Anatomie und Physiologie des Menschen) und Spezialvorlesungen in Mathematischer Statistik zu wählen. Absolventen dieser Spezialisierungsrichtung werden dringend in Medizin und Landwirtschaft benötigt und haben dort gute Entwicklungsmöglichkeiten.

D. Rasch

Aufgaben aus Freundesland

Ausgewählte Aufgaben aus den Rayon-Mathematik-Olympiaden der UdSSR

▲1▲ (4. Klasse, Leningrad)
Gibt es eine ganze Zahl, so daß das Produkt ihrer Ziffern gleich 2340 ist?

▲2▲ (5. Klasse, Leningrad)
Gegeben ist eine Menge von fünf Zahlen, von denen jede gleich $+1$ oder -1 ist. Wir führen folgende Operation aus: Wir ändern gleichzeitig das Vorzeichen von genau vier Zahlen. Ist es möglich, mit Hilfe mehrerer solcher Operationen von der Menge $/1, 1, 1, 1, -1/$ zur Menge $/-1, -1, -1, -1, 1/$ zu kommen?

▲3▲ (6. Klasse, Krim)
Zeige, daß in einem beliebigen 7-Eck zwei Diagonalen existieren, die einen Winkel kleiner als 13° einschließen!

▲4▲ (7. Klasse, Swerdlowsk)
Zeige, daß die Ungleichung ДВА × ШЕСТЬ < ДВАДЦАТЬ gilt, wobei jeder Buchstabe eine Ziffer bedeutet und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern darstellen!

▲5▲ (8. Klasse, Krim)
Im Stadium der Tausendfüßler und der dreiköpfigen Drachen gab es zusammen 26 Köpfe und 298 Beine. Jeder Tausendfüßler hat 40 Beine und einen Kopf. Wieviel Beine hat ein dreiköpfiger Drache?

▲6▲ (9. Klasse, Mogilew, Belorußland)
Von den positiven ganzen Zahlen a und b sei bekannt, daß von den folgenden vier Aussagen drei wahr und eine falsch sind.
1) $a+1$ ist durch b teilbar.
2) a ist gleich $2b+5$.
3) $a+b$ ist durch 3 teilbar.
4) $a+7b$ ist eine Primzahl.
Bestimmen Sie alle möglichen Paare a, b!

▲7▲ (Klasse 10, Moskau)
Einem Künstler gab man zwei kongruente kreisförmige Blätter Papier und bat ihn, darauf zwei kongruente einäugige Drachen zu zeichnen. Die gezeichneten Drachen unterschieden sich auf den Zeichnungen in ihrer Lage wie folgt: Bei einem befand sich das Auge des Drachens im Mittelpunkt des Kreises, beim anderen nicht. Zeigen Sie, daß man den zweiten Kreis so in zwei Teile zerschneiden kann, daß beide Teile zusammengesetzt wieder die Zeichnung des Drachens ergeben und sich das Auge jetzt im Mittelpunkt befindet!

A. P. Sawin/W. Moldenhauer

Ein viertel Jahrhundert Mathematiklehrerausbildung in Erfurt

Im September 1957 begann nach der Gründung des Lehrstuhls Mathematik am damaligen *Pädagogischen Institut Erfurt* die Ausbildung von Fachlehrern für Mathematik und Kunsterziehung. Seinerzeit nahmen 47 Abiturienten unter Anleitung von drei Mitarbeitern im Bereich Mathematik das Studium auf.

In den folgenden Jahren wurde die Mathematiklehrerausbildung auch mit anderen Fächern gekoppelt, z. B. mit Grundlagen der Produktion, Werken oder Physik. Es erfolgten zunächst noch wesentliche Kapazitätserweiterungen, später jedoch auch wieder eine Einschränkung der Anzahl der Fachkombinationen.

Seit 1969, dem Gründungsjahr der Sektion Mathematik/Physik an der Pädagogischen Hochschule *Dr. Theodor Neubauer* Erfurt/Mühlhausen, wird die Ausbildung von Mathematiklehrern nur noch gekoppelt mit Physik oder Kunsterziehung durchgeführt. Zur Zeit werden jährlich etwa 180 Studenten für das Diplomlehrerstudium mit dem Fach Mathematik immatrikuliert. Ungefähr ein Drittel davon wird nach Abschluß der 10. Klasse und erfolgreichem Absolvieren eines einjährigen Vorkurses in das Studium übernommen.

Insgesamt haben bisher etwa 3000 in Erfurt ausgebildete Mathematiklehrer ihre Arbeit in Schulen aller Bezirke der DDR aufgenommen. Im Bereich Mathematik der Sektion Mathematik/Physik arbeiten fünf Professoren, zwei Dozenten und mehr als 30 wissenschaftliche Mitarbeiter. Im September 1982 wird an unserer Sektion mit der 5jährigen Diplomlehrerausbildung begonnen, in der nach wie vor Mathematik mit Physik oder Kunsterziehung kombiniert ist. Das Studium wird zum Teil anders als bisher organisiert, z. B. steht den Studenten dann zwischen den Semestern mehr Zeit für das Selbststudium zur Verfügung.

Im Grundkurs Mathematik erfolgt die Ausbildung in den Teilgebieten Algebra, Analysis, Arithmetik, Geometrie und Grundlagen der Mathematik. Da außerdem mehrere Praktika zum Lösen von Aufgaben stattfinden, wird eine gute Grundlage für das Erteilen eines wissenschaftlichen Unterrichts gelegt. In den höheren Studienjahren erfolgt eine Ergänzung durch Darstellende Geometrie, Geschichte der Mathematik, Numerische Mathematik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik und eine wahlweise obligatorische Ausbildung in einer speziellen Disziplin, aus der das Thema der Diplomarbeit gestellt wird. Es wird so gewählt, daß der Student die Möglichkeit hat, mit seiner Arbeit einen Beitrag zur mathematischen Forschung zu leisten.

DR. THEODOR NEUBAUER · ERFURT-MÜHLHAUSEN · PH

Oft wird von Interessenten die Frage nach der Vorbereitung auf das Diplomlehrerstudium mit dem Fach Mathematik gestellt. Eine gute Voraussetzung dazu ist die Fähigkeit zur selbständigen Bearbeitung angemessener Aufgaben, wie sie etwa bei den mathematischen Olympiaden oder in der Zeitschrift *alpha* gestellt werden, in Verbindung mit der Beherrschung des im Schulunterricht vermittelten Wissens. Ebenfalls nützlich ist die Beschäftigung mit Problemen, die in den in ansehnlicher Anzahl vorhandenen Bänden der Mathematischen Schülerbücherei (MSB) vorgestellt werden.

G. Sommerfeld

Eine Aufgabe von Prof. Dr. E. Müller-Pfeiffer

Leiter des Wissenschaftsbereichs Analysis der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer" Erfurt/Mühlhausen

▲2236▲ Auf einem Gummiband $[A, B]$, das zum Zeitpunkt $t=0$ die Länge von 100 cm haben soll, bewege sich ein Beobachter (sagen wir ein Käfer) von A aus in Richtung B (siehe Bild).

Das Ende B des bei A festgehaltenen Gummibandes wird mit der Geschwindigkeit V cm sec^{-1} in Richtung von A nach B weggezogen (V ist die Geschwindigkeit von B von dem festen Punkt A aus gemessen). Der Käfer laufe auf dem Weg von A in Richtung B mit der konstanten Geschwindigkeit v cm sec^{-1}. (Das heißt: Geschwindigkeitsmessungen des Käfers für seine Bewegung ergeben zu verschiedenen Zeiten immer den festen Wert $v=\frac{ds}{dt}$.

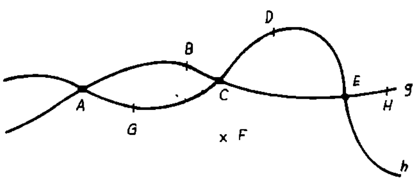
Der Käfer trägt eine Uhr und einen Maßstab bei sich, mit dessen Hilfe er Entfernungen s in seiner Welt $[A, B]$ messen kann. So ergibt auch die Geschwindigkeitsmessung des Käfers für den Punkt B den Wert V, wenn sich der Käfer bei dieser Messung im Punkt A aufhält.) Wird der Käfer, der zum Zeitpunkt $t=0$ im Punkt A startet, den Punkt B jemals erreichen, wenn $0<v<V$ vorausgesetzt wird? (Zahlenbeispiel: $v=1\,cm\,sec^{-1}$, $V=50\,cm\,sec^{-1}$)

Kurzbiographie

Prof. Dr. Erich Müller-Pfeiffer, geboren 1930 in Sonneberg (Thür.), 1949 Abitur in Steinach (Thür.), 1949 bis 1955 Mathematikstudium an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena, dort auch Diplom, Promotion (Differentialgeometrie) und Habilitation (Partielle Differentialgleichungen), seit 1969 ordentlicher Professor und Leiter des Bereichs Analysis an der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer" in Erfurt, Arbeitsgebiet Spektraltheorie von Differentialoperatoren, 45 wissenschaftliche Veröffentlichungen, darunter eine Monographie (Teubner-Text).

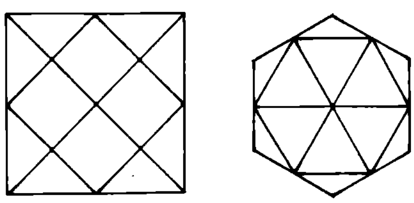
Bilderbogen Geometrie

▲1▲ In der Zeichnung befinden sich die Linien g und h sowie die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H.



Gib die Menge aller Punkte an, die
a) auf g liegen,
b) auf h liegen,
c) auf g und h liegen und
d) weder auf g noch auf h liegen!

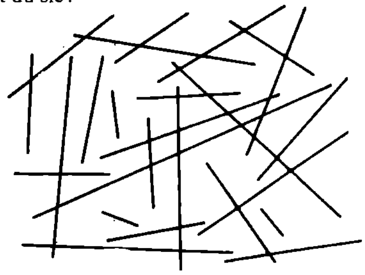
▲2▲ Wieviel Flächen siehst du?
a) Wieviel Quadrate und Dreiecke findest du in dieser Figur?



b) Gib die Anzahl der Dreiecke, Trapeze, Parallelogramme und Sechsecke in dieser Figur an!
Wieviel Vierecke siehst du noch?

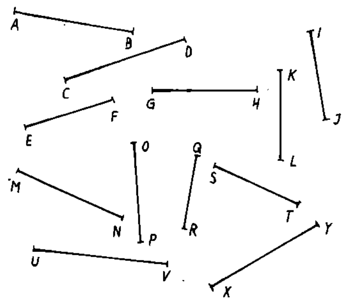
▲3▲ Zeichne drei Geraden so, daß
a) 0 Schnittpunkte entstehen,
b) 1 Schnittpunkt entsteht,
c) 2 Schnittpunkte entstehen und
d) 3 Schnittpunkte entstehen!

▲4▲ Hier sind nur zwei Geraden parallel. Findest du sie?

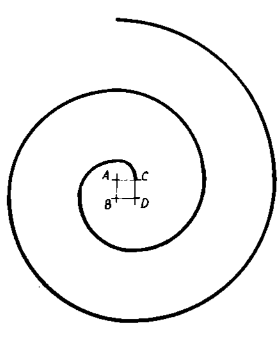


▲5▲ Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M!
Gib auf dem Kreis zwei Punkte A und B so an, daß der $\sphericalangle AMB = 135°$ beträgt! Zeichne auf dem Kreis den Punkt C, so daß $\sphericalangle AMC = 60°$ ist!
Berechne $\sphericalangle CMB$ und die erhabenen Winkel $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle AMC$ und $\sphericalangle CMB$! Miß mit dem Winkelmesser nach!

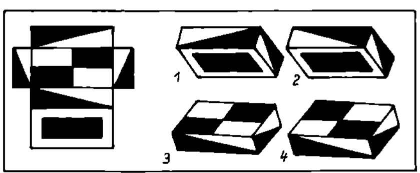
▲6▲ Miß die folgenden Strecken! Welche ist die längste, welche ist die kürzeste? Welche Strecken sind gleich lang?



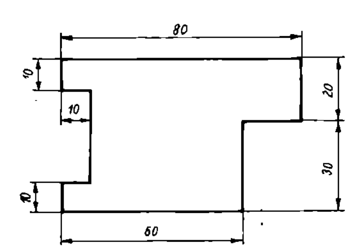
▲7▲ Erkläre die Konstruktion der Kurve in der gezeichneten Figur!



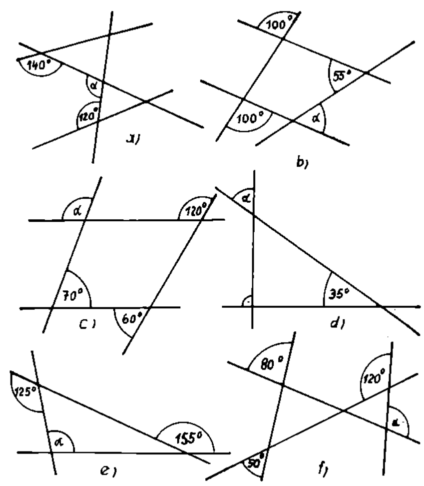
▲8▲ Übe dein Vorstellungsvermögen! Welcher Quader gehört zu dem abgebildeten Netz?



▲9▲ Berechne den Inhalt des abgebildeten Flächenstückes!

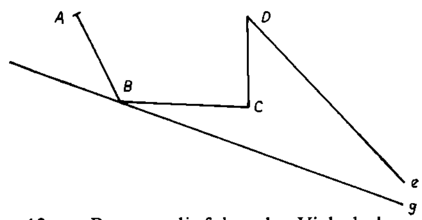


▲10▲ Bestimme jeweils die Größe des Winkels α!

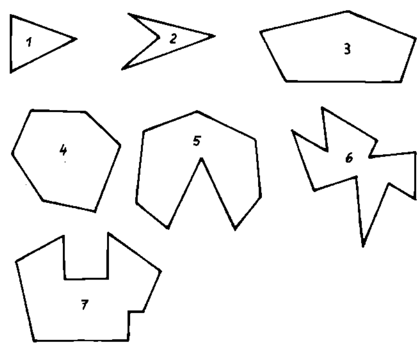


▲11▲ Zeichne die Punkte A, B, C, D und E so, daß jeweils 2 Punkte auf einer Geraden liegen! Wieviel Geraden erhältst du?

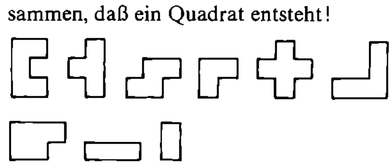
▲12▲ Spiegele diesen Streckenzug an der Geraden g!



▲13▲ Benenne die folgenden Vielecke!



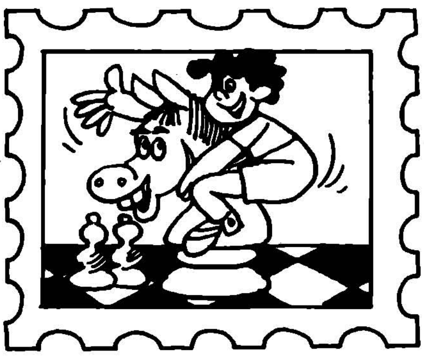
▲14▲ Übertrage die abgebildeten 9 Teile in einem vergrößerten Maßstab auf ein Stück Pappe, schneide sie aus, und lege sie so zusammen, daß ein Quadrat entsteht!



▲15▲ Es ist ein Dreieck zu konstruieren, wenn die Längen der Seite a, der Seitenhalbierenden s_a und der Höhe h_c gegeben sind. Unter welchen Bedingungen für die gegebenen Stücke ist die Konstruktion durchführbar?

▲16▲ In ein gegebenes rechtwinkliges Dreieck ist ein Quadrat so zu zeichnen, daß sie den rechten Winkel des Dreiecks gemeinsam haben und die drei anderen Ecken des Quadrates auf die Seiten des Dreiecks fallen.

H. Begander



Springerwege übers ganze Brett

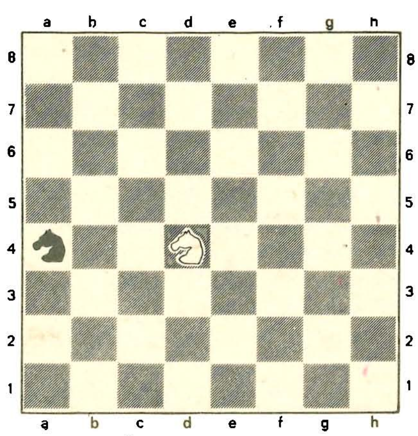
Springerzüge sind im Schachspiel am schwersten zu berechnen; deshalb gibt es selbst in Meisterpartien oft Überraschungen durch diese Figur. Die Gangart des Springers: vom Standfeld aus kann der Springer in jede beliebige Richtung springen, und zwar zwei Felder nach vorn und ein Feld zur Seite, oder anders ausgedrückt über ein Feld hinweg schräg auf ein andersfarbiges. Infolge dieser eigenartigen Gangart kann der Springer als einzige Figur im Schachspiel über alle anders- und gleichfarbigen Steine, die seinem Standfeld unmittelbar gerade oder schräg benachbart stehen, hinwegspringen. So könnte in der Diagrammstellung z. B. der schwarze Springer Sa4 in drei Zügen zum Feld g1 gelangen, Sa4–c3–e2–g1.

Nach einer Schachpartie stellt Sven auf dem leeren Schachbrett einen weißen Springer auf d4 (Siehe auch Diagramm!) und sagt zu seiner Partnerin Heike: „Ziehe mit dem Springer von d4 aus auf alle Felder des Brettes, ohne dabei ein Feld zweimal „besucht" zu haben, so könntest du anhand der Numerierung der Züge auf h1 mein Alter (18) und auf a8 das Alter meines Vaters (50) erfahren. Als zusätzliche Bedingung gilt, daß der Springer nach seiner vorgeschriebenen Wanderroute auf d4 zurückkehrt."

Heike überlegte nicht lange und zeigte ihm den Weg des Springers. Anschließend stellte auch sie eine Aufgabe: „Ziehe mit dem schwarzen Springer von a4 aus ebenfalls auf alle Felder des Schachbrettes, ohne dabei ein Feld zweimal berührt zu haben, unter der Bedingung, daß anhand der Nummern der Zugreihenfolge auf der vierten Reihe die Quadratzahlen zusammenkommen! Also a4–1, b4–4, c4–9, d4–16, e4–25, f4–36, g4–49 und h4–64!"

Wie müssen die beiden Springer jeweils ziehen um die gestellten Bedingungen zu erfüllen?

Anmerkung: Das jeweilige Standfeld der Springer (a4 und d4) zählt als 1. Zug!



Lösung zu:

Das Diagramm 1 zeigt den Lösungsweg (Zugreihenfolge), den der weiße Springer von d4 aus zurücklegen muß, um die geforderten Bedingungen zu erfüllen. Addiert man dabei die Nummern der Reihenfolge der Springerzüge sowohl in den Vertikalen (Linien) als auch in den Horizontalen (Reihen), so ergibt sich als Summe der Zahlen jeweils 260. Auch wenn man den Springer von einem anderen Ausgangsfeld aus über alle Felder des Brettes führt, bleibt diese Gesetzmäßigkeit, die der russische Mathematiker und Schachmeister *Karl Janisch* (1813 bis 1872) bewies, erhalten.

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	50	11	24	63	14	37	26	35	8
7	23	62	51	12	25	34	15	38	7
6	10	49	64	21	40	13	36	27	6
5	61	22	9	52	33	28	39	16	5
4	48	7	60	1	20	41	54	29	4
3	59	4	45	8	53	32	17	42	3
2	6	47	2	57	44	19	30	55	2
1	3	58	5	46	31	56	43	18	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

Das Diagramm 2 zeigt den geforderten Lösungsweg des schwarzen Springers. Imponierend, was Springer so können – was im Schach möglich ist! *H. Rüdiger*

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	21	30	19	54	33	56	39	52	8
7	18	27	22	31	38	53	34	57	7
6	23	20	29	26	55	32	51	40	6
5	28	17	24	37	50	41	58	35	5
4	1	4	9	16	25	36	49	64	4
3	10	7	12	3	42	61	46	59	3
2	13	2	5	8	15	44	63	48	2
1	6	11	14	43	62	47	60	45	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

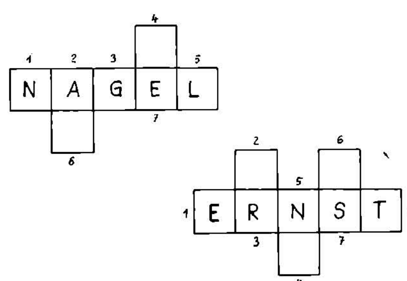
Spielwettbewerb „Schiebung!"

Hier wird ein Spiel von unserem Autor *Radunski* aus Moskau vorgestellt. Das Problem kennt ihr sicher schon von den sogenannten *Rangieraufgaben*.

Mit möglichst wenig Verschiebungen, wobei nur die vorgegebenen Felder benutzt werden dürfen, soll das eine Wort in das andere überführt werden. Es geht am besten, wenn man sich die Buchstaben auf kleine Pappkärtchen schreibt und das Netz so aufzeichnet, daß die Felder etwas größer als die Pappkärtchen sind. Dann kann man die Verschiebungen wiederholen und sogar kleine Wettbewerbe austragen. Sieger ist derjenige, der es mit den wenigsten Zügen geschafft hat. Als ein Zug gilt die Verschiebung eines Buchstaben um ein Feld. Wenn der Buchstabe also über drei Felder geschoben wird, dann sind das drei Züge!

Beachtet, daß die Netze für die verschiedenen Wörter unterschiedlich sind! Das müßt ihr bedenken, wenn ihr neue Begriffe findet und die Netze dafür entwerft! Es dürfen nicht zuviel *Springfelder* sein, sonst wird es zu leicht, aber auch nicht zuwenig, sonst ist das Problem nicht lösbar. A 3 bedeutet z. B. den Buchstaben A auf Feld 3 schieben.

Für NAGEL → ANGEL und ERNST → STERN haben wir Lösungsvorschläge in diesem Heft veröffentlicht.



Wer weniger als die angegebene Anzahl von Zügen benötigt, soll die Lösung an unseren *alpha*-Mitarbeiter Oberlehrer *Helmut Pätzold*, 2060 Waren, Mattei 62 schicken. Die besten Lösungen werden später einmal veröffentlicht.

Zum Spiel „Vom NEBEL zum LEBEN" sollt ihr selbst Netz und Lösung finden.

Wenn gleiche Buchstaben vorkommen, dann müssen sie gekennzeichnet werden (E_1, E_2 usw.).

Studentenwettstreit an der Pädagogischen Hochschule „Karl Friedrich Wilhelm Wander“ Dresden

Im „Wissenschaftlichen Wettstreit der Studenten und jungen Wissenschaftler“ ist ein Bewährungsfeld für jeden Studenten geschaffen worden, um Talente und Begabungen frühzeitig zu erkennen und allseitig zu fördern. Dabei sollen die Studenten ihre im Studium erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten schöpferisch bei der Lösung von Aufgaben, die die Praxis stellt, anwenden.

Aufgaben aus Lehre und Forschung werden den Studenten von den einzelnen Sektionen zur Bearbeitung angeboten (ausgeschrieben), z. T. sind es solche Aufträge, die die Studenten an die Forschungsaufgaben der Forschungskollektive heranführen, z. T. sind es aber auch wichtige Teile in Forschungsaufgaben selbst. Die Bearbeitung erfolgt dann einzeln oder im Kollektiv unter Betreuung eines Hochschullehrers oder eines wissenschaftlichen Mitarbeiters in einer vorgegebenen Zeit (ein oder zwei Jahre). Die eingereichten Arbeiten werden begutachtet und für die Forschung und Lehre genutzt, die besten Arbeiten prämiiert und in Leistungsschauen der Studenten ausgestellt.

Die Studentinnen *Heike Pollack*, *Ulrike Baumann*, *Martina Jentsch* beteiligten sich als Studenten des 1. Studienjahres am Studentenwettstreit 1980/81, um „Material“ für die Arbeit im *Klub Junger Mathematiker Dresden* zu schaffen. Sie stellten verschiedene Lösungsverfahren für logisch-kombinatorische Aufgaben zusammen und bildeten selbst 34 Aufgaben, von denen einige ausgewählt im folgenden vorgestellt werden.

A. Hilbert

Heike Pollack

Schon in den ersten Schuljahren gehörte die Mathematik zu meinen Lieblingsfächern. Später, etwa in der 7. Klasse, wurde sie zu meinem Interessengebiet. Ich abbonierte die Zeitschrift *alpha* und beteiligte mich aktiv am *alpha*-Wettbewerb. Besonders die Knobelaufgaben machten mir viel Spaß. Mehrere Jahre hintereinander wurde ich zu Kreisolympiaden delegiert und konnte dabei vordere Plätze erzielen. Außerdem nahm ich an Mathematikzirkeln der EOS Zittau teil. In dieser

Zeit entstand in mir der Wunsch, einmal Lehrerin für Mathematik und Physik zu werden. Mit der Aufnahme des Lehrerstudiums an der Pädagogischen Hochschule Dresden begann für mich ein neuer Lebensabschnitt. Um im Studium voranzukommen, ist es notwendig, das erworbene Wissen schöpferisch anzuwenden. Dazu nutzten wir den Studentenwettstreit.

Jetzt, im 2. Studienjahr, übernahm ich eine Arbeitsgemeinschaft des *Klubs Junger Mathematiker der Stadt Dresden*. Hier kann ich unsere Sammlung logisch-kombinatorischer Aufgaben, die im Rahmen des Studentenwettstreits gemeinsam mit Ulrike Baumann und Martina Jentsch entstanden ist, gleich selbst „an den Mann bringen“.

Ulrike Baumann

Mit meinem Studium wird eines meiner Hobbys zu meinem Beruf. Schon in der Schulzeit galt mein besonderes Interesse der Mathematik. Als Leser der *alpha* beteiligte ich mich mehrere Jahre am Wettbewerb,

nahm erfolgreich an Kreis- und Bezirksmathematikolympiaden teil, war Mitglied von mathematischen Arbeitsgemeinschaften, u. a. des *Klubs Junger Mathematiker der Stadt Dresden*. Mir selbst bereitete es immer besonders viel Freude, Aufgaben aus dem Gebiet der Logik-Kombinatorik zu lösen. So beteiligte ich mich auch auf diesem Gebiet am Studentenwettstreit.

Martina Jentsch

Zu meinen Lieblingsfächern gehörte schon seit Beginn meiner Schulzeit die Mathematik. Jedoch wurde mein Interesse für Knobelaufgaben erst viel später geweckt, nämlich in der 5. Klasse. Damals besuchte ich einen Mathematikzirkel an unserer Schule. Im 6. Schuljahr wurde ich erstmals zu einer Mathematikolympiade delegiert und konnte den ersten Platz belegen. Später nahm ich an weiteren Olympiaden teil und errang noch verschiedene Preise. Außerdem beteiligte ich mich am *alpha*-Wettbewerb und war Mitglied eines Korrespondenzzirkels.

In dieser Zeit prägte sich auch mein Wunsch, einmal Mathematik zu unterrichten. Seit September 1981 studiere ich nun an der PH Dresden.

Einige logisch-kombinatorische Aufgaben für die Klassenstufen 7 bis 9

▲1▲ Drei benachbarte LPGs beschäftigen sich mit der Pferdezucht. Anläßlich des Tages der Republik veranstalteten die drei LPGs ein großes Volksfest, auf dem unter anderem die Gestüte A, B, C ihre besten Pferde vorstellten, einen Schimmel, einen Schwarzen und einen Braunen. Die Namen der Pferde lauten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) Pluto, Cäsar, Rosa. Aus einem Gespräch dreier Zuschauer wurden folgende Aussagen entnommen:

1. Rosa verlor bereits ein Rennen gegen den Schimmel.
2. Cäsar wurde von Gestüt A gekauft und wurde dort mit Rosa zusammen aufgezogen.

3. Gestüt C züchtet keine Rennpferde und stellte auch keinen Braunen vor.
Es ist zu ermitteln, welches Gestüt welches Pferd vorstellt und wie diese heißen.

▲2▲ In den Endausscheid einer Fußballmeisterschaft einer OS kamen die Mannschaften der Klassen 9b, 10a und 10b. Es war vereinbart worden, daß jede dieser Mannschaften gegen jede der übrigen genau ein Spiel auszutragen hatte. Für ein gewonnenes Spiel wurden an die Siegermannschaft 2 Punkte, für ein unentschiedenes Spiel an jede Mannschaft je 1 Punkt vergeben. Nach Austragung der Spiele gab es folgenden Stand:

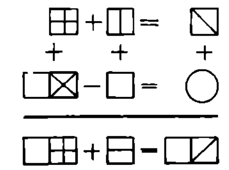
Klasse	Punktverhältnis	Torverhältnis
9b	(1) 2:2	(1') 3:1
10a	(2) 3:1	(2') 3:2
10b	(3) 1:3	(3') 2:5

Es ist das Torverhältnis jedes der ausgetragenen Spiele zu ermitteln.

▲3▲ Sechs Schüler halfen bei der Obsternte. Sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages an das Solidaritätskonto. Es ist folgendes bekannt:
(1) Keiner spendete weniger als 6 M und keiner mehr als 12 M.
(2) Konrad spendete mehr als Peter.
(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.
(4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Inge.
(5) Helga spendete 2 M weniger als Frank und Peter 2 M mehr als Inge.
(6) Alle spendeten volle Markbeträge.
Wieviel Geld erhielt jeder beim Obstpflücken?

▲4▲ Drei Freunde Andreas, Bernd und Claus beteiligen sich an einem Spiel mit farbigen Kugeln. Die Ausgangsbedingungen des Spiels sehen so aus, daß die drei Freunde in beliebiger Reihenfolge hintereinander sitzen. Jeder dieser drei Freunde hat zu Beginn zwei Kugeln. Es sind die Farben Gelb, Rot, Grün, Blau im Spiel. Nun ist folgendes bekannt:
(1) Es ist nur eine gelbe Kugel im Spiel. Claus hat keine gelbe Kugel.
(2) Wenn Andreas seine Kugeln zu Bernd oder Claus rollt, wobei die Kugeln in beiden Fällen den gleichen Weg zurücklegen müssen, dann hat Bernd bzw. Claus zwei Kugeln gleicher Farbe.
(3) Rollt Claus seine Kugeln zu Bernd, dann hat Bernd nur Kugeln unterschiedlicher Farben.
(4) Derjenige, der als letzter in der Reihe sitzt (von vorn nach hinten), hat zu Beginn des Spiels keine gelbe Kugel.
(5) Eine der beiden Kugeln von Andreas ist rot.
(6) Eine der beiden Kugeln von Claus ist mit ihrer Farbe nur einmal im Spiel.
(7) Es sind auf jeden Fall genau zwei blaue Kugeln im Spiel.
(8) Keiner der Freunde hat zu Beginn eine blaue und eine grüne Kugel.
Es ist anzugeben, in welcher Reihenfolge die drei Freunde hintereinander sitzen und welche Kugeln sie zu Beginn des Spiels haben.

▲5▲



▲6▲ Auf einem Bahnhof treffen sich vier Studenten, die alle nach Hause fahren wollen und in die gleiche Richtung fahren müssen. Sie steigen alle gemeinsam in ein Abteil.
Auf dieser Strecke hält der Zug viermal in gleichen Abständen, und an jeder der Stationen, die wir mit α, β, γ, δ (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) bezeichnen, steigt einer der Studenten A, B, C, D aus.
Folgendes wissen wir:
(1) Zwischen den Ausstiegsbahnhöfen von Student A und Student B liegt die Station β.
(2) Student D steigt von der 2. Haltestation des Zuges genausoweit entfernt aus, wie der Ausstiegsbahnhof von Student A von der Station α entfernt liegt.
(3) Die Fahrzeit von Student D ist ungefähr so groß, wie die Fahrzeit von Student A und B zusammengenommen.
(4) Student C steigt später als Student A aus.
(5) Die Station γ liegt vor dem Ausstiegsbahnhof von D.
Es ist zu ermitteln, in welcher Reihenfolge und an welchen Stationen die Studenten aussteigen.

▲7▲

10			
		20	
	30		
			40

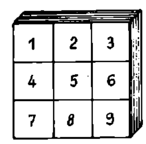
Alle geraden Zahlen von 10 bis 40 sind in die Felder so einzusetzen, daß sie in jeder waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe die Summe von 100 ergeben!

▶

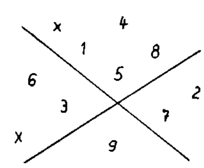
▲6▲ Le boulanger sait que la masse du pain qu'il fabrique est les $\frac{10}{9}$ de la masse de la farine utilisée.
a) Quelle quantité de pain obtient-il avec 72 kg de farine? avec 117 kg? avec 108 kg?
b) Quelle masse de farine faut-il pour fabriquer 100 kg de pain? 150 kg? 190 kg?

Erst übersetzen, dann lösen!

Квадраты в квадрате.
▲1▲ Переставьте цифры так, чтобы три образовавшихся трехзначных числа были точными квадратами.



▲2▲ Удивительные цифры.
Приведенная здесь запись обладает удивительным свойством. Посмотрите на нее со стороны нижнего левого угла книги. Вы увидите правильно выполненный пример на сложение. Теперь посмотрите со стороны нижнего правого угла. Что вы видите? Опять правильно выполненный пример на сложение! К тому же в нем использованы все цифры от 1 до 9.

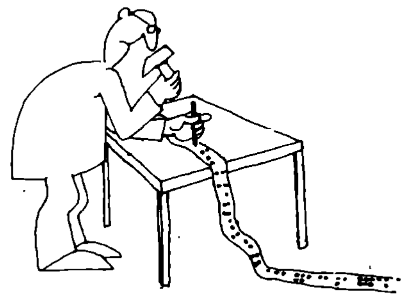


February 14th.
▲3▲ Suppose we want to use the numerals 1, 9, 8, 1, each exactly once, with no other numerals, to represent 14. (For example, we could represent 13 by writing $1+\sqrt{9}+8+1$.) How can we do this, using any mathematical symbols we wish, other than more numerals?

French Flags.
▲4▲ The French flag ist the Tricolor, with three bands of color.
How many of these flags can be made with five colors?

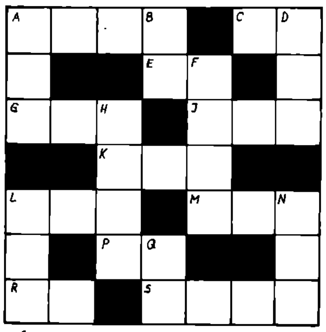
▲5▲ Le résevoir d'essence de la voiture de papa a une capacité de 32 l. Cette voiture consomme 8 litres d'essence aux 100 kilomètres. Papa a fait le plein de son éservoir avant de partir et nous avons fait un voyage de 400 km. Combien reste-t-il d'essence dans le réservoir, sachant que papa en a ajouté 14 l en cours de route?

In freien Stunden · alpha-heiter



Kreuzzahlrätsel

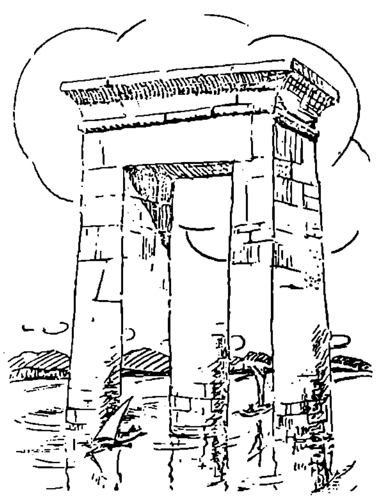
Ermittle die durch 9 teilbaren Zahlen! Dividiere sie durch 9, und trage den Quotienten in die entsprechenden Kästchen ein!



Waagerecht			Senkrecht		
A	9144;	9145;	A	1387;	1386;
C	567;	568;	B	594;	595;
E	557;	558;	D	2880;	2879;
G	4294;	4293;	F	22076;	22077;
J	3690;	3689;	H	63971;	63972;
K	945;	946;	L	1386;	1385;
L	1260;	1259;	N	4932;	4933;
M	2835;	2836;	Q	161;	162.
P	730;	729;			
R	387;	388;			
S	74683;	74682.			

H. Begander/ J. Lehmann, Leipzig

Ein „unmögliches" Bauwerk



Unterhaltsame Mengenlehre

Abbildung von M_1 in M_2: Gegeben sind die Mengen $M_1=\{\alpha, \beta, T, R, A, P, E, Z\}$ und $M_2=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sowie das Gleichungssystem

$$\alpha\alpha=(\alpha\beta)^{\alpha}+\alpha$$
$$\alpha\alpha\alpha=(\alpha\beta)^{T}+\alpha\alpha$$
$$\alpha\alpha\alpha\alpha=(\alpha\beta)^{R}+\alpha\alpha\alpha$$
$$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=(\alpha\beta)^{A}+\alpha\alpha\alpha\alpha$$
$$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=(\alpha\beta)^{P}+\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$$
$$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=(\alpha\beta)^{E}+\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$$
$$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=(\alpha\beta)^{Z}+\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$$

Bilde die Menge M_1 so in die Menge M_2 ab, daß sämtliche Gleichungen zu wahren Aussagen werden!

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Kreuzworträtsel

In die offenen Felder der abgebildeten Figur sind Buchstaben so einzusetzen, daß in den einzelnen Zeilen Begriffe aus der Mathematik entstehen.
Sie haben folgende Bedeutung:

1. Name eines griechischen Mathematikers
2. Begriff aus der darstellenden Geometrie
3. Zwei Terme und ein Gleichheitszeichen
4. Ergebnis einer bestimmten Projektion
5. abstandsgleiche Gerade
6. Winkelfunktion
7. Begriff aus der Ähnlichkeitslehre

		K	L	E	I	D	x	
		B	I	x L	D			
	x		I	C	H			
	R	U	N	D		x		
x			A	L	L			
		T	A	N	G			x
		R	x E	C	K			

In jeder Zeile ist ein Feld angekreuzt. Liest man die darin stehenden Buchstaben von oben nach unten, so erhält man den Namen einer geometrischen Figur.

Ing. D. Völzke, Greifswald

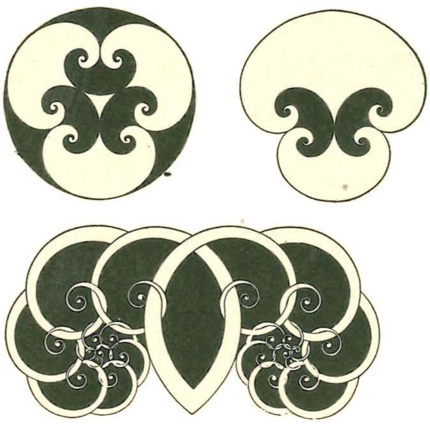
MCMLXXXII

$M:C+M:L+X=XX \cdot II \qquad \sqrt{MC-M}+L=XXX \cdot II$

n	$n^{1-9+8+2}$	n	$n^{1-9+8+2}$
1	$(1+9):(8+2)$	7	$1 \cdot 98:2$
2	$1+9-8+2$	8	$1^9 \cdot 8^2$
3	$19-8-2$	9	-1^9+82
4	$1+9+8-2$	10	$(1+9)(8+2)$
5	$1 \cdot 9+8 \cdot 2$	11	$(19-8)^2$
6	$1 \cdot 9 \cdot 8:2$	12	$1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2$

Ing. H. Decker, Köln

Mathematical Themes in Ornament



Rutherford Boyd, Yeshiva Universität, New York

Mathematik in Vierzeilern

Das erste schwimmt im Wasser,
das zweite schwimmt darauf.
Das Ganze trifft in einem Punkt
den Kreis in seinem Lauf.

Mit „r“ drin sendet man's dem Freund,
statt mit ihm anzustoßen.
Wird nun das „r“ durch „a“ ersetzt,
war's einer unserer Großen.

Für manche Dreiecksfläche ist
es eine seiner Grenzen.
Doch kennt man es genau so als
Bestandteil von Potenzen.

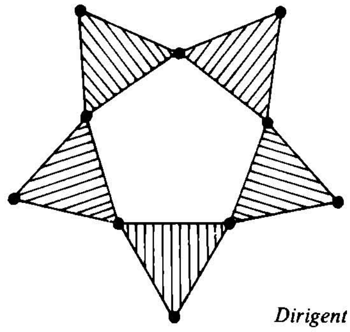
Die beiden Silben stellen dar
der Gleichung beide Seiten.
Vertauscht man sie, benutzt man es
als Maßeinheit für Weiten.

Dasselbe Wort erscheint zu dritt:
Wenn's aus Papier ist, ist er weiß.
Zum zweiten schießt man auch damit.
Und schließlich ist's ein Teil vom Kreis.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Magische Figur

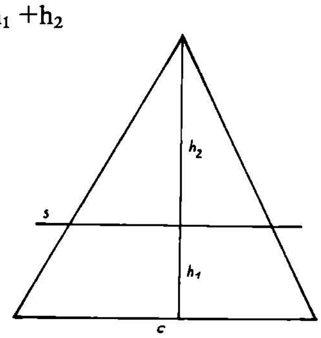
An Stelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 10 so einzutragen, daß die Summen am Umfang jedes Dreiecks zunächst 14, dann 16, 17 und 19 sind.



Dirigent Jindřich Pěnčik, Prag

$h_1 : h_2 = ?$

c und s seien parallel! s soll die Fläche halbieren!
$h = h_1 + h_2$

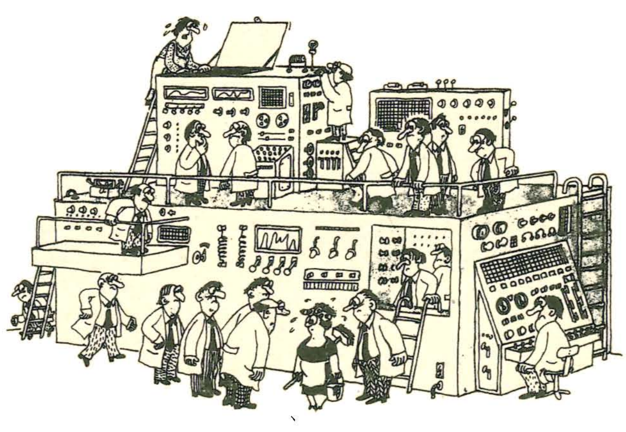


$$\frac{h_1}{h_2} = ?$$

S. Tunn, Berlin

Behauptung: 2 + 11 = 12

Beweis: zwo + elf = zwoelf



„Die Reparatur der Anlage kann Wochen dauern; ganz unten hat sich 'ne Haarnadel verklemmt.“

aus: Eulenspiegel, Berlin

XXII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1982

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1982 veröffentlicht.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

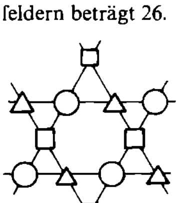
220511 In die 12 Felder des Bildes a sind die Zahlen von 1 bis 12 so einzutragen, daß folgendes gilt:

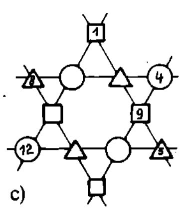
Auf jeder eingezeichneten Geraden beträgt die Summe der Zahlen in den vier Feldern 26;

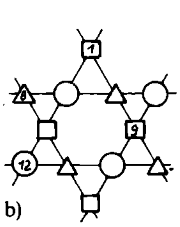
die Summe der Zahlen in den vier Dreiecksfeldern beträgt 26;

die Summe der Zahlen in den vier Kreisfeldern beträgt 26;

die Summe der Zahlen in den vier Quadratfeldern beträgt 26.


a)


c)


b)

a) Vervollständige die Eintragung Bild b), und überprüfe, ob dann alle Forderungen erfüllt sind!

b) Nenne einen Rechenweg, der zu derselben vollständigen Eintragung führt, aber nur die Vorgabe aus Bild c) benutzt!

c) Versuche, noch andere Eintragungen für Bild a) zu finden, z. B. solche, bei denen die Zahl 12 nicht in einem der sechs „äußeren" Felder steht!

220512 Mutter kauft ein. Sie hat genau 50 M bei sich. Eigentlich möchte sie drei Schals, eine Mütze und ein Paar Handschuhe kaufen, aber das Geld reicht hierfür nicht. Eine Mütze kostet 18 M, ein Schal halb so viel, ein Paar Handschuhe kosten 1,50 M mehr als ein Schal. Sie kauft drei Schals und ein Paar Handschuhe.

Wieviel Geld hat sie danach noch insgesamt übrig?

220513 Rolf, ein Mitglied im Bezirksklub Junger Mathematiker, schreibt seinen Mitschülern die folgenden drei Gleichungen auf:

$$B \cdot J \cdot M = 135,$$
$$M + A + T + H + E = 32,$$
$$(H + E + I) : (T - E - R) = 3.$$

Er verlangt, jeden der Buchstaben $A, B, E, H, I, J, M, R, T$ so durch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß alle drei Gleichungen wahr sind. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen ersetzt werden.

a) Anke antwortet: „Ich finde schon aus der ersten Gleichung, welche drei Zahlen für B, J und M einzusetzen sind. Nur ihre Reihenfolge weiß ich noch nicht."

Welche drei Zahlen sind dies?

b) Bertolt sagt: „Dann erhält man aus der zweiten Gleichung, welche Zahl M bedeutet." Wie könnte Bertolt die beiden anderen von Anke genannten Zahlen ausgeschlossen haben?

c) Nach weiterem Probieren finden die Mitschüler eine vollständige Lösung.

Welche könnte es z. B. sein?

220514 Ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm soll in Quadrate zerlegt werden. Zwei dieser Quadrate sollen die Seitenlänge 3 cm haben. Die anderen Quadrate sollen dann noch so groß wie möglich sein.

a) Zeichne eine Zerlegung, von der du vermutest, daß sie die geforderten Eigenschaft hat! Wieviel Quadrate (außer den beiden der Seitenlänge 3 cm) kommen in deiner Zeichnung insgesamt vor?

b) Beweise, daß in jeder Zerlegung der geforderten Art diese anderen Quadrate alle dieselbe Seitenlänge haben müssen!

Wie groß ist sie? Wie kann man die Anzahl dieser Quadrate auch rechnerisch finden, ohne sie zu zeichnen?

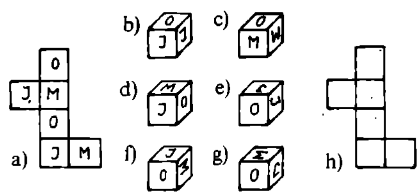
Olympiadeklasse 6

220611 In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.

Wieviel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter faßt?

220612 Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz im Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein? Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)



b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, daß sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen läßt:

(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.

(2) Der Würfel läßt sich so drehen, daß Bild d) entsteht.

(3) Der Würfel läßt sich so drehen, daß Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

220613 Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

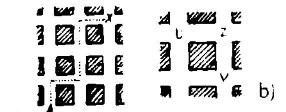
(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.

(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, daß Frank höher als Ernst sprang.

(3) Christian erreichte die gleiche Höhe wie Anton, sprang aber höher als Ernst.

(4) Es ist falsch, daß Bernd die Sprunghöhe eines anderen Pioniers erreichte oder übertraf.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Sprunghöhen der sechs Pioniere eindeutig erhalten läßt!
Wenn dies möglich ist, so nenne diese Reihenfolge, und beginne dabei mit der größten Sprunghöhe!

220614 Das Bild a) zeigt einen Teil eines Stadtplanes. Ein Auto soll auf einem möglichst kurzen Weg von A zu einer anderen Kreuzung, z. B. X, fahren. Als Beispiel ist ein solcher Weg eingetragen. Man will - für jede von A verschiedene Kreuzung Z - wissen, wieviel verschiedene möglichst kurze Wege von A nach Z es insgesamt gibt.



a) Suche zunächst alle diejenigen Kreuzungen, zu denen genau ein möglichst kurzer Weg von A aus hinführt!
b) Das Bild b) bedeute einen Ausschnitt aus Bild a), wobei Z eine der in a) nicht betrachteten Kreuzungen sein soll. Wenn man schon weiß, wieviel möglichst kurze Wege von A nach U es gibt und wieviel möglichst kurze Wege von A nach V es gibt, wie kann man dann die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen?
c) Benutze die Überlegungen zu a) und b), um für jede der elf von A verschiedenen Kreuzungen Z die gesuchte Anzahl zu finden!
d) Ermittle die Anzahl der möglichst kurzen Wege von A nach X in Bild a) noch einmal auf andere Weise: Schreibe jeden dieser Wege durch Angabe der Richtungen seiner fünf Teilstrecken auf! Benutze dabei Abkürzungen, z. B. w für waagerecht, s für senkrecht!

Olympiadeklasse 7

220711 Gegeben seien
a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier Rechtecke mit jeweils einer Länge von 4 cm und einer Breite von 1 cm,
b) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm,
c) zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_2 = b_2 = 3$ cm sowie ein Parallelogramm mit $g = h_g = 3$ cm und $\alpha = 45^\circ$.
Dabei seien a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 die Längen derjenigen Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen; g sei die Länge einer Seite des Parallelogramms und h_g die Länge der auf dieser Seite senkrecht stehenden Höhe sowie α die Größe eines Innenwinkels des Parallelogramms.
Lege die bei a), b) und c) genannten fünf geometrischen Figuren jeweils so, daß sie eine Quadratfläche vollständig bedecken, ohne sich gegenseitig ganz oder teilweise zu überlagern und ohne über die bedeckte Quadratfläche irgendwo hinauszuragen!
Als Lösung genügt für jede der Aufgaben a), b), c) eine Zeichnung.

220712 Die (untereinander nicht verwandten) Ehepaare Meier und Schmidt machen gemeinsam mit ihren Kindern eine kurze Urlaubsfahrt und nehmen dazu einen größeren Vorrat an Papierservietten mit. Jeder Teilnehmer erhält zu jeder Mahlzeit eine Serviette. Von jedem Teilnehmer wurde dieselbe Anzahl Mahlzeiten eingenommen, und zwar mehr als eine. – Nach Abschluß der Fahrt stellte man fest, daß genau 121 Servietten verbraucht wurden.
Wieviel Kinder dieser Familie nahmen insgesamt an der Reise teil?

220713 Zwei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften (LPG) A und B wollen einen Entwässerungsgraben von 2,4 km Länge säubern. Der LPG A gehören davon 1,5 km, die LPG B besitzt die übrigen 0,9 km. Damit diese wichtige Arbeit in kurzer Zeit geschafft wird, hilft auch die LPG C mit. Die drei LPG führen die Säuberungsarbeiten so durch, daß jede einen gleichlangen Grabenabschnitt übernimmt. Danach ist an die LPG C für die von ihren Mitgliedern geleistete Arbeit ein Betrag von insgesamt 240 M durch die LPG A und B zu zahlen.
Jede dieser beiden LPG zahlt davon soviel, wie es der Länge des Grabenstücks entspricht, dessen Reinigung die LPG C für sie übernommen hat.
Berechne die beiden von den LPG A und B gezahlten Beträge!

220714 Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Ferner sei AB ein Durchmesser von k. Durch A sei eine von AB verschiedene Sehne AC, durch B die zu AC parallele Sehne BD gezogen.
Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen die Kongruenz der Dreiecke ACM und BDM folgt!

Olympiadeklasse 8

220811 Vier Männer heißen Bäcker, Fischer, Förster und Müller. Sie üben die Berufe Bäcker, Fischer, Förster und Müller aus, jeder genau einen dieser Berufe. Einer der vier Männer ist Bruder eines fünften Mannes, der Herr X genannt sei. (Er hat natürlich denselben Namen wie sein Bruder.) Über diese fünf Männer werden folgende Angaben gemacht:
(1) Auch Herr X übt genau einen Beruf aus, denselben wie Herr Bäcker.
(2) Herr X übt einen anderen Beruf aus als sein Bruder.
(3) Bei jedem der fünf Männer lautet der Anfangsbuchstabe seines Namens anders als der Anfangsbuchstabe seines Berufes.
a) Beweise, daß Herr X nach diesen Angaben nicht Bäcker heißen kann!
b) Beweise, daß sich aus den Angaben eindeutig ermitteln läßt, wie Herr X heißt und welche zwei Berufe Herr X und sein Bruder haben!
c) Beweise, daß sich aus den Angaben nicht eindeutig ermitteln läßt, welchen Beruf Herr X hat und wie derjenige der vier anderen Männer heißt, der von Beruf Bäcker ist!

220812 Von einer 22stelligen Zahl z werden folgende Eigenschaften gefordert: z hat die Einerziffer 7; streicht man diese Endziffer und setzt sie vor die übrigen 21 Ziffern, so entsteht dasselbe Ergebnis wie bei der Multiplikation $7 \cdot z$.
Beweise, daß es genau eine solche Zahl z gibt!
Ermittle diese Zahl!

220813 Eine NVA-Marschkolonne ist 3,2 km lang. Ein Regulierungsposten fährt mit dem Krad vom Ende der Marschkolonne ab, holt die Spitze der Marschkolonne nach 5,6 km Fahrt ein, fährt sofort mit gleichbleibender Geschwindigkeit genau 6 min lang weiter und hat dann seinen Genossen erreicht, der an der nächsten Straßenkreuzung steht, um den Gegenverkehr zu sperren. Hier wartet er auf die Marschkolonne, die während der gesamten Zeit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beibehalten hat.
a) Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungspostens und der Marschkolonne zueinander?
b) Wieviel Minuten muß der Regulierungsposten an der Kreuzung insgesamt auf die Spitze der Marschkolonne warten?

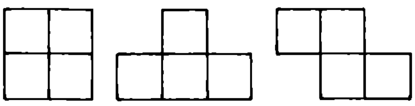
220814 In einer Ebene seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich in einem Punkt A von außen berühren. Eine der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_1 und k_2 berühre den Kreis k_1 in B, den Kreis k_2 in C.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\sphericalangle BAC$ ein rechter Winkel ist!

Olympiadeklasse 9

220911 Uwe sagt zu Gert: „Ich habe hier eine zweistellige Zahl z, deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von z setze, dann erhalte ich das Quadrat von z". Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl z, die diese Eigenschaften hat.
Zeigen Sie, daß aus Uwes Angaben die Zahl z ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie z an!

220912 Ist n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 2$, so bezeichne F_n eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in n^2 gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von

Papptäfelchen der abgebildeten Form (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden. (Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den n^2 Feldern von F_n kongruent ist.) Die Fläche F_n soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von F_n mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über F_n hinausragen.



a) b) c)

a) Beweisen Sie, daß diese Bedingungen für alle ungeraden n und für alle $n \leqq 4$ nicht erfüllbar sind!
b) Zeigen Sie, daß die Bedingungen für $n=6$ erfüllbar sind!
c) Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen $n \geqq 8$ die Bedingungen erfüllbar sind!

220913 a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die der Term

$$\frac{4x-4}{2x-3} \text{ definiert ist.}$$

b) Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen x alle diejenigen, für die $0<\frac{4x-4}{2x-3}<1$ gilt!

220914 In einer Ebene ε befinde sich ein n-Eck mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S. Das Volumen der Pyramide sei V_P. Die Mittelpunkte der Kanten A_1S, $A_2S, \ldots, A_nS$ seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Ferner sei B_1 ein beliebiger Punkt in der Ebene ε. Die zu M_1B_1 parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte $M_2, M_3, \ldots, M_n$ schneide ε in $B_2, B_3, \ldots$, bzw. B_n. Der Körper K mit den Eckpunkten $B_1, B_2, \ldots, B_n, M_1, M_2, \ldots, M_n$ habe das Volumen V_K.
a) Beweisen Sie, daß alle Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene liegen und K daher ein Prisma ist!
b) Beweisen Sie, daß V_K durch V_P eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie V_K in Abhängigkeit von V_P!

Olympiadeklasse 10

221011 In einer Abteilung eines VEB werden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 hergestellt. Aus der nachfolgenden Tabelle sind die täglich anfallenden Rohstoff-, Energie- und Lohnkosten in Mark je Stück der drei Erzeugnisse ersichtlich. Ferner ist die Gesamthöhe der Mittel angegeben, die täglich für Rohstoffe, Energie und Löhne zur Verfügung stehen.
Beweisen Sie, daß es möglich ist, die täglich zu produzierenden Stückzahlen der Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 so festzusetzen, daß alle zur Verfügung stehenden Mittel, die hier genannt sind, restlos ausgeschöpft werden! Beweisen Sie, daß durch diese Forderung des Ausschöpfens die Stückzahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese!

Kostenart	Kosten in M je Stück für E_1	E_2	E_3	Insgesamt zur Verfügung stehende Mittel in Mark
Rohstoffkosten	6	7	9	4950
Energiekosten	1	2	2	1100
Lohnkosten	5	6	8	4300

221012 In einer Diskussion über irrationale Zahlen wurde erwähnt, daß $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ irrational sind. Peter meinte: „Dann muß auch $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational sein." „Wie beweist du das?" fragte Katrin. „Es gibt doch keinen Satz, wonach stets dann $x+y$ irrational sein muß, wenn x und y irrational sind." „Ja, aber speziell für die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ kann ich beweisen, daß auch ihre Summe $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational ist", erwiderte Peter.
a) Bestätigen Sie durch ein Beispiel Katrins Meinung, daß es irrationale Zahlen x, y mit rationaler Summe $x+y$ gibt!
b) Wie könnte Peter den von ihm angekündigten Beweis führen?

221013 Zehn kleine Zifferlein

Wilhelm Busch gab ein Exempel
durch den braven Lehrer Lämpel.
Welcherart man soll sich plagen,
ließ er einstmals so ihn sagen:
„Nicht allein im Schreiben, Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen,
sondern auch in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen."
Liest man dieses umgekehrt,
ist es sicher auch viel wert:
„Nicht allein in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen,
sondern ein vernünftig Wesen
soll auch manchmal etwas lesen."
Darum zögert bitte nicht,
lest zuerst mal dies Gedicht!

Erstens sei sogleich gesagt,
daß nach Zahlen wird gefragt.
Unter diesen sei'n vorhanden
zwei dreistellige Summanden.
Der Summe wir nun unterstellen
(da 's möglich ist in vielen Fällen),
sie habe eine Stelle mehr.

Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer
zu zählen, daß zehn Ziffern man
für diesen Fall gut brauchen kann:
Die Ziffern sei'n 's von 0 bis 9,
die uns zu diesem Zweck erfreu'n!
Und jede Ziffer treffe man
in dieser Rechnung einmal an,
und zwar genau (wie man so sagt)!
Damit auch später keiner fragt:
Die 0 würd' vorne sehr schlecht passen,
drum ist sie dort nicht zugelassen.
Genau ein Übertrag auch sei,
nicht etwa zweie oder drei!
(Ein Übertrag – das sei erklärt,
damit es jedermann erfährt –,
das ist ein Fall, der dann passiert,
wenn jemand Zahlen hat addiert
und ihre Summe, wie sich zeigt,
die 9 an Größe übersteigt.)

Nun, liebe Tochter, lieber Sohn,
was kann bei dieser Addition
man für Ergebnisse erwarten?

Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten.
Als Lösung seien angegeben
– zumindest soll man danach streben –
alle möglichen End beträge!
Dabei beweise man recht rege,
daß es, hält man die Regeln ein,
nur diese Summen können sein.
(Der Summanden vielfache Möglichkeiten
sollen uns keine Sorgen bereiten,
nach ihnen ist hier nicht gefragt.)

Nun frisch ans Werk und nicht verzagt!
Denn nicht alleine nur im Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen ...

221014 Es sei r der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Zehnecks $P_1P_2 \ldots P_{10}$ und s die Länge einer Seite dieses Zehnecks. Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r!

Olympiadeklassen 11/12

221211 Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x+\frac{x}{y}=\frac{8}{3}, \quad (1)$$

$$y-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}. \quad (2)$$

221212 Man beweise: Sind a, b die Seitenlängen eines Parallelogramms und e, f die Längen seiner Diagonalen, so gilt

$$a^2-b^2<ef.$$

221213 In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142857 mit einer natürlichen Zahl n, die größer als 7 ist, angegeben:

Man dividiere zunächst n durch 7 und
schreibe als erste Zahl den ganz-
zahligen Teil des Ergebnisses auf.
Dann multipliziere man 142857 mit dem Rest
und schreibe das Produkt hinter die
zuerst aufgeschriebene Zahl.

Von der so gebildeten Zahl subtrahiere man die zuerst aufgeschriebene Zahl.
Das Ergebnis ist das gesuchte Produkt.

Beispiel für $n=326$

(326 : 7 = 46, Rest 4)
46
(142857 · 4 = 571428)
46571428
− 46
46571382 = 142857 · 326

Es zeigt sich jedoch, daß dieses Verfahren nicht für alle natürlichen Zahlen $n>7$ zum richtigen Ergebnis führt.

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen n mit $n>7$, für die das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt!

b) Nennen und begründen Sie für die anderen $n>7$ ein zum richtigen Ergebnis führendes Verfahren, das ebenfalls das Multiplizieren von 142857 mit einer Zahl größer als 7 vermeidet und die Division von n durch 7 zum Ausgangspunkt hat!

221214 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Eigenschaft haben, daß von den folgenden Aussagen (A) bis (F) vier wahr und zwei falsch sind!

(A) x ist eine positive rationale Zahl.

(B) x ist eine natürliche Zahl oder x ist mit einer ganzen Zahl $g \neq 0$ in der Form $x=\frac{1}{g}$ darstellbar.

(C) x^2 ist eine ganze Zahl, x ist aber selbst nicht ganzzahlig.

(D) Es gilt $7<x^2<9$.

(E) x ist eine positive reelle Zahl, aber keine natürliche Zahl.

(F) Wenn x rational ist, so ist x ganzzahlig.

Hinweis: Eine Aussage der Form „Wenn p, so q" ist genau dann wahr, wenn die Aussage „(nicht p) oder q" wahr ist. Eine Aussage der Form „u oder v" ist genau dann wahr, wenn von den beiden Teilaussagen u und v mindestens eine wahr ist.

Lösungen

Lösungen zu: Tangentialebenen an regelmäßige Polyeder, Heft 2/82

▲1a▲ Das zugrundegelegte regelmäßige Polyeder läßt sich in Pyramiden zerlegen, deren Grundflächen eine Seitenfläche und deren Spitze der Mittelpunkt M des Polyeders ist. Durch die betrachteten Tangentialebenen kommt zu jeder dieser Pyramiden eine Pyramide mit der gleichen Grundfläche und der Spitze S hinzu (siehe Bild 3). Das Volumen vergrößert sich damit um den Faktor $(|TM|+|TS|):|TM|=|SM|:|TM|$.

▲1b▲ Die Mittelpunkte der Seitenflächen bilden beim regelmäßigen Tetraeder ein regelmäßiges Tetraeder, beim Oktaeder einen Würfel, beim Ikosaeder ein Pentagondodekaeder (siehe Bild 6), beim Würfel ein Oktaeder und beim Pentagondodekaeder ein Ikosaeder.
Außerdem steht die Verbindungsgerade des Mittelpunkts eines regelmäßigen Polyeders mit dem Mittelpunkt einer Seitenfläche stets senkrecht auf dieser Seitenfläche. Auf Grund der Ähnlichkeit gleichartiger regelmäßiger Polyeder ist damit eine Übersicht über die gesuchten Körper gegeben.

Lösung zu:
Eine „abenteuerliche Aufgabe", Heft 2/82

▲1▲ Es bezeichne M die ursprüngliche Taleranzahl und M_i die Anzahl der Taler, die sich nach der Aufteilung durch den i-ten Räuber in der Kassette befinden ($i=1, \ldots, 5$).
Dann ist $M_1=\frac{4}{5}(M-1)$ und $M_{i+1}=\frac{4}{5}(M_i-1)$, $i=1, \ldots, 4$.
Aus diesen Formeln folgt

$$M_5=\left(\frac{4}{5}\right)^5 M-\left(\frac{4}{5}\right)^5-\left(\frac{4}{5}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3-\left(\frac{4}{5}\right)^2-\frac{4}{5}.$$

Die letzten fünf Summanden werden addiert (z. B. läßt sich die Summenformel für eine endliche geometrische Reihe anwenden).
Somit finden wir

$$M_5=\left(\frac{4}{5}\right)^5 (M+4)-4.$$

Der Problemstellung entsprechend muß M_5 eine natürliche Zahl sein. Weil 4 und 5 teilerfremd sind, ist M_5 genau dann eine natürliche Zahl, wenn $M+4$ ein Vielfaches von 5^5 ist. Folglich besitzt M die Darstellung $M=k5^5-4$, und es ist $M_5=4(256k-1)$, wobei k eine geeignete natürliche Zahl ist.
Nun soll M_5 durch 5 teilbar sein. Wegen $256k-1=255k+(k-1)$ ist M_5 genau dann durch 5 teilbar, wenn $k-1$ durch 5 teilbar ist. Für k kommen daher die Zahlen 1, 6, 11, 16, 21, ... in Frage, und für alle diese Werte ist das zugehörige M eine Lösung. Der Kassetteninhalt war also $(5m+1)5^5-4$ Taler, dabei ist m eine beliebige nichtnegative ganze Zahl.

▲2▲ Für $m=1$ ist der Kassetteninhalt 18746 Taler, also bereits größer als 10000. Daher kann nur $m=0$ sein. In diesem Fall erhalten wir als Gesamtbeute 3121 Taler. Sie wird folgendermaßen aufgeteilt:

1. Räuber
624 + 1 + 204 Taler = 829 Taler
2. Räuber
499 + 1 + 204 Taler = 704 Taler
3. Räuber
399 + 1 + 204 Taler = 604 Taler
4. Räuber
319 + 1 + 204 Taler = 524 Taler
5. Räuber
255 + 1 + 204 Taler = 460 Taler

▲3▲ Mit zu Aufgabe 1 analogen Bezeichnungen erhalten wir

$$M_1 = \frac{n-1}{n}(M-1).$$

$$M_{i+1}=\frac{n-1}{n}(M_i-1),\ i=1, \ldots, n-1.$$

Daher ist

$$M_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n (M+n-1)-n+1.$$

Weil M_n eine natürliche Zahl sein muß, ist $M+n-1$ ein Vielfaches von n^n, daher besitzt M die Darstellung $M=kn^n-(n-1)$ mit einer geeigneten natürlichen Zahl k. Dann finden wir $M_n=(n-1)\left[(n-1)^{n-1}k-1\right]$. Die Forderung, daß M_n durch n teilbar ist, wird genau dann erfüllt, wenn der Ausdruck in den eckigen Klammern durch n teilbar ist. Untersuchen wir zuerst, wie sich $k(n-1)^{n-1}$ bei Division durch n verhält. Es ist $k(n-1)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
&=kn(n-1)^{n-2}-k(n-1)^{n-2},\\
&=kn(n-1)^{n-2}-kn(n-1)^{n-3}+k(n-1)^{n-3},\\
&=\ldots,\\
&=kn(n-1)^{n-2}-kn(n-1)^{n-3}+kn(n-1)^{n-4}\\
&\quad -\ldots+(-1)^n kn+(-1)^{n-1}k,
\end{aligned}$$

Wegen des unerwartet starken Umfangs der Aufgaben der Schulolympiade veröffentlichen wir die Lösungen zum *alpha*-Wettbewerb 1/82 in Heft 5/82 und zum *alpha*-Wettbewerb 2/82 in Heft 6/82.

Erfolgreiche Fehlersuche:

Heft 4/81, *alpha*-heiter: Eine 2. Lösung lautet: 1928 + 1952 + 1906 + 1936 + 1957 = 9679, stellt Elke Kammann (17 J.), Berlin fest.

Heft 5/81, S. 115: EINS + EINS + EINS + + EINS = VIER; richtige Lösungen: 4 · 0326 = 1304; 4 · 0327 = 1308; 4 · 0651 = 2604; 4 · 0976 = 3904 stellt Dr. J. Paasche, Stockdorf (BRD) fest.

Heft 6/81, S. 139: Die beiden Dreieckseiten sind vertauscht worden (Kathete mit Hypotenuse, stellt Schüler R. Zimmermann, Kirchmöser, fest.

Heft 1/82, *alpha*-heiter: Weitere Lösungen für „Sport frei!" 5, 3, 2; 6, 3, 1; 7, 2, 1; stellt Synke Hochmann (15 J.), Riesa, fest.

Heft 1/82, „Schachstudie", S. 12: Nach der in *alpha* veröffentlichten Lösung verbleiben nicht zwei Springer gegen König, sondern zwei Springer gegen König und Bauer. Da der weiße Bauer noch auf c2 steht, ist für schwarz ein forcierter Gewinn möglich. Für diese Endspiele ist die 50-Züge-Regel auf 100 Züge erhöht worden, da für einen zwangsläufigen Gewinn mehr als 50 Züge benötigt werden, stellt Thomas Meyer, Vacha/Rhön, fest.

und diese Zahl hat bei Division durch n den gleichen Rest wie $(-1)^{n-1}k$. Daher ist k so zu wählen, daß $(-1)^{n-1}k-1$ durch n teilbar ist.

1. Fall: n gerade Zahl

Wähle k so, daß $-k-1$ durch n teilbar ist, äquivalent dazu ist die Teilbarkeit von $k+1$ durch n. Folglich ist $k=n-1, 2n-1, \ldots$.

2. Fall: n ungerade Zahl

Wähle k so, daß $k-1$ durch n teilbar ist. Wir finden $k=1, n+1, 2n+1, \ldots$.

Wir verifizieren leicht, daß alle mit diesen Zahlen k gebildeten Zahlen M Lösungen der Aufgabe sind. Die kleinstmögliche Zahl der Goldstücke erhält man nun für $k=1$ bei ungeradem n und für $k=n-1$ bei geradem n.

Lösungen zu: Aufgaben aus Freundesland (Rayon-Aufgaben aus der UdSSR), S. 82

▲1▲ Wir zerlegen 2340 in seine Teiler. Es ist $2340=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot13$. Unter den Teilern gibt es die Primzahl 13, die keine Ziffer oder das Produkt irgendwelcher Ziffern sein kann. Daher gibt es keine solche Zahl.

▲2▲ Wir betrachten eine oben eingeführte Menge. Das Produkt ihrer fünf Elemente ist gleich $+1$ oder -1. Wir führen eine Operation aus, indem wir genau vier Vorzeichen ändern. Das Produkt ändert sich um den Faktor $(-1)(-1)(-1)(-1)=1$, d. h., sein Wert bleibt erhalten. Nun hat die erstgenannte Menge das Elementenprodukt -1 und die zweite das Produkt $+1$. Damit ist es aber nicht möglich, durch eine Folge von Operationen von der einen zur anderen Menge zu gelangen.

▲3▲ Wir betrachten die Menge aller Diagonalen des 7-Ecks. Von jeder der 7 Ecken gehen 4 Diagonalen aus. Mithin gibt es genau $\frac{1}{2}\cdot7\cdot4=14$ Diagonalen, da wir alle doppelt gezählt haben. Durch einen Punkt P der Ebene zeichnen wir 14 Geraden, wobei jede Gerade zu einer Diagonalen parallel ist. Diese Geraden zerlegen die Ebene in 28 Winkelräume mit einer Winkelsumme von 360°. Angenommen, alle Winkel sind größer gleich 13°. Dann ist die Summe größer gleich $28\cdot13°=364°$. Wir erhalten einen Widerspruch. Also gibt es einen Winkel kleiner als 13°.

▲4▲ Wir bezeichnen die Zahl ДВА mit x. Da die Zahl ШЕСТЬ fünfziffrig ist, ist sie kleiner als 100000. Damit ist ДВА × ШЕСТЬ kleiner als $100000x$, aber die Zahl ДВАЦАТЬ ist größer als $100000x$. Damit gilt die Ungleichung.

▲5▲ Es sei x die Anzahl der Beine eines dreiköpfigen Drachens, a die Anzahl der Tausendfüßler und b die Anzahl der Drachen. Dann gilt:

(1) $a+3b=26$ und

(2) $40a+xb=298$.

Aus (1) folgt, daß a bei der Division durch 3 den Rest 2 läßt, also ist $a=3k+2$ mit $k\in N$. Wir erhalten mit (2) $120k+xb=218$. Offenbar kommt nur $k=0$ und $k=1$ in Betracht. Für $k=0$ folgt $a=2$, $b=8$, $x=27{,}25$. Für $k=1$ folgt $a=5$, $b=7$ und $x=14$. Damit hat ein dreiköpfiger Drache 14 Beine.

▲6▲ Angenommen, die Aussagen 3) und 4) sind wahr. Dann ist $a+7b=a+b+6b$, und da $a+b$ durch 3 teilbar ist, ist $a+7b$ keine Primzahl. Wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme, also ist Aussage 3) oder 4) falsch, und die Aussagen 1) und 2) sind wahr. Nun ist $a+1=2b+6$ durch b teilbar. Dies ist offenbar ($2b$ ist ohne Rest durch b teilbar) nur für die Teiler von b, also für $b=1, 2, 3$ oder 6 möglich. a hat folglich die Werte 7, 9, 11 oder 17. Auf Grund der Probe bleiben von diesen möglichen Paaren nur die Paare 9, 2 und 17, 6 übrig.

▲7▲ Wir legen die beiden Blätter so übereinander, daß die Drachen zur Deckung kommen. Dann befinden sich die Drachen im Durchschnitt beider Kreise, und die Ergänzungsmöndchen sind kongruent. Wenn wir das Möndchen des zweiten Kreises abschneiden und es über das Möndchen des ersten legen, erhalten wir das Gewünschte.

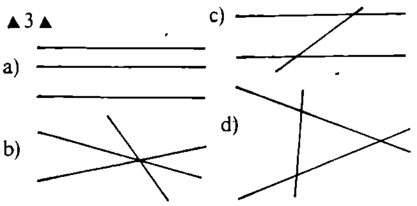
Bilderbogen Geometrie, S. 84

▲1▲ a) $M=\{A, B, C, E, H\}$
b) $M=\{A, G, C, D, E\}$
c) $M=\{A, C, E\}$
d) $M=\{F\}$

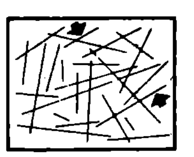
▲2▲ a) Es sind 6 Quadrate und 20 Dreiecke.

b) Es sind 12 Dreiecke, 6 Trapeze, 4 Parallelogramme und 2 Sechsecke. Es sind noch 6 Vierecke.

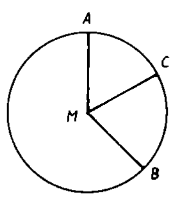
▲3▲



▲4▲



▲5▲



$\sphericalangle CMB=135°-60°=75°$
$\sphericalangle AMB=360°-135°=225°$
$\sphericalangle AMC=360°-60°=300°$
$\sphericalangle CMB=360°-75°=285°$

▲6▲ Die längste Strecke ist $\overline{UV}$. Die kürzeste Strecke ist $\overline{QR}$. Gleich lange Strecken sind $\overline{IJ}$, $\overline{ST}$, $\overline{EF}$ sowie $\overline{AB}$ und $\overline{XY}$.

▲7▲ Man zeichnet um A mit $\overline{AD}$ bei D beginnend einen Viertelkreis. Daran wird anschließend ein Viertelkreis um B mit $2\cdot\overline{AD}$, dann um C mit $3\cdot\overline{AD}$, dann um D mit $4\cdot\overline{AD}$, um A mit $5\cdot\overline{AD}$ usw. gezeichnet.

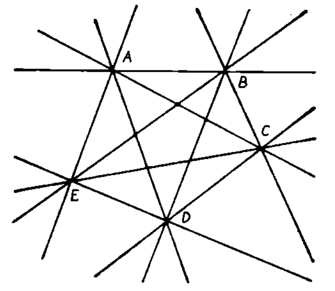
▲8▲ Es ist Quader Nr. 3.

▲9▲ $A=80(20+30)-10\cdot30-20\cdot30$
$A=3100$

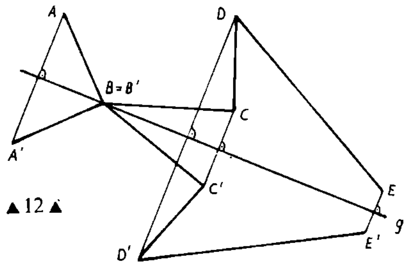
Die Fläche beträgt 3100 mm².

▲10▲ a) $\alpha=100°$ b) $\alpha=55°$ c) $\alpha=110°$ d) $\alpha=55°$ e) $\alpha=100°$ f) $\alpha=110°$.

▲11▲ Man erhält $\frac{5\cdot4}{2}=10$ Geraden.

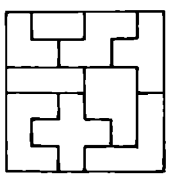


▲12▲



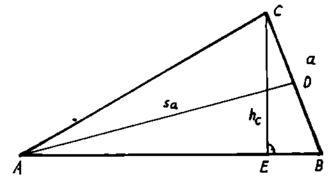
▲13▲ 1) Dreieck; 2) Viereck; 3) Fünfeck; 4) Sechseck; 5) Achteck; 6) Elfeck; 7) Zehneck.

▲14▲

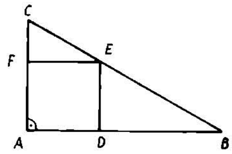


▲15▲ Es sei $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck mit den gegebenen Stücken a, s_a und h_c. Dann ist das $\triangle CEB$ konstruierbar nach dem Kongruenzsatz *ssw*. Damit ist die Lage von D bekannt; denn er ist der Mittelpunkt von a. Der Punkt A liegt einmal auf der Verlängerung von BE und auf dem um D mit s_a gezogenen Kreisbogen.

1. Im rechtwinkligen Dreieck EBC muß $a>h_c$ sein.
2. Wenn s_a kleiner ist als das Lot von D auf EB, entsteht kein Dreieck.
3. Wenn s_a gleich dem Lot ist, entsteht ein Dreieck.
4. Ist s_a größer als das Lot, so trifft der Kreisbogen um D die Gerade EB zweimal, und es entstehen zwei verschiedene Dreiecke.



▲16▲ Es seien $\triangle ABC$ das gegebene rechtwinklige Dreieck mit $\sphericalangle CAB = 90°$ und $ADEF$ das gesuchte Quadrat.
Verbindet man A mit E, so ist $\sphericalangle FAE = \sphericalangle FEA = \sphericalangle EAB$. Deshalb halbiert AE den $\sphericalangle CAB$.



Lösungen zu: Spielwettbewerb „Schiebung!“, S. 85

NAGEL → ANGEL – E4; A6; G7; N3; A1; N2; C3; E7.
STERN → ERNST – T2; R6; E7; S4; E1; R3; S6; R4; T7; R2; T3; N4; T8; R3; N5; S7.

Lösungen zu: alpha-Sprachecke, S. 87

Quadrate im Quadrat

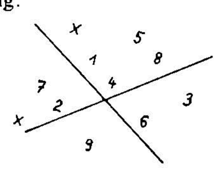
▲1▲ Stellt die Ziffern so um, daß die drei dann in den Zeilen stehenden dreistelligen Zahlen Quadratzahlen sind!

Lösung:

3	6	1
5	2	9
7	8	4

Merkwürdige Ziffern

▲2▲ Das hier aufgeschriebene Ziffernschema hat eine merkwürdige Eigenschaft. Seht es von der linken unteren Ecke des Blattes aus an! Ihr seht eine richtig gerechnete Additionsaufgabe.
Jetzt schaut das Schema von rechts unten an! Was seht ihr? Wieder eine richtig gerechnete Additionsaufgabe! Außerdem sind alle Ziffern von 1 bis 9 verwendet worden.
Findet noch solch ein Schema der Ziffern von 1 bis 9!
Lösung:



Der 14. Februar

▲3▲ Angenommen, wir würden die Ziffern 1, 9, 8 und 1, jede genau einmal, verwenden, um die Zahl 14 mathematisch darzustellen, ohne noch andere Ziffern zu benutzen. (Z. B. können wir die Zahl 13 durch den Ausdruck $1+\sqrt{9}+8+1$ darstellen.) Wie können wir das unter Verwendung irgendwelcher mathematischer Symbole durchführen?
Lösung: $18-(1+\sqrt{9})=14$.

Die französische Flagge

▲4▲ Die französische Flagge ist eine Trikolore mit 3 verschiedenfarbigen Streifen. Wie viele derartige Flaggen kann man mit 5 Farben herstellen?
Lösung: Bezeichnet man die 5 Farben mit a, b, c, d und e, dann findet man mit Farbe a am Anfang abc, abd, abe, acb, acd, ace, adb, adc, ade, aeb, aec, aed. Das sind 12 Möglichkeiten. Da sich auch für b, c, d und e am Anfang die gleiche Anzahl ergibt, erreicht man $12 \cdot 5 = 60$ Möglichkeiten. Es ist eine Variation ohne Wiederholung mit $n=5$ Elementen zur $k=3$ten Klasse.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 60.$$

▲5▲ Der Benzintank in Vaters Wagen hat ein Fassungsvermögen von 32,5 l. Dieser Wagen verbraucht 8 l Benzin auf 100 km. Vater hat seinen Tank vor der Abfahrt voll gefüllt, und wir haben eine Fahrt von 400 km unternommen. Wieviel Benzin verbleibt im Tank, wenn man weiß, daß Vater während der Reise 14 l nachgefüllt hat?
Lösung: Auf der Fahrt wurden $\frac{400\,\text{km} \cdot 8\,\text{l}}{100\,\text{km}} = 32\,\text{l}$ verbraucht. Im Benzintank sind dann noch $32{,}5\,\text{l} - 32\,\text{l} + 14\,\text{l} = 14{,}5\,\text{l}$.

▲6▲ Der Bäcker weiß, daß die Masse des Brotes, das er herstellt, $\frac{10}{9}$ der Masse des verwendeten Mehls ausmacht.
a) Welche Menge Brot erhält er aus 72 kg, aus 117 kg und aus 108 kg Mehl?
b) Welche Masse Mehl braucht er, um 100 kg, 150 kg und 190 kg Brot herzustellen?
Lösung: a) $72\,\text{kg} \cdot \frac{10}{9} = 80\,\text{kg}$;

$117\,\text{kg} \cdot \frac{10}{9} = 130\,\text{kg}$; $108\,\text{kg} \cdot \frac{10}{9} = 120\,\text{kg}$.

b) $100\,\text{kg} \cdot \frac{9}{10} = 90\,\text{kg}$; $150\,\text{kg} \cdot \frac{9}{10} = 135\,\text{kg}$;

$190\,\text{kg} \cdot \frac{9}{10} = 171\,\text{kg}$.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter, S. 88

Kreuzzahlrätsel

Waagerecht: A: 1016, C: 63, E: 62, G: 477, J: 410, K: 105, L: 140, M: 315, P: 81, R: 43, S: 8298.
Senkrecht: A: 154, B: 66, D: 320, F: 2435, H: 7108, L: 154, N: 548, Q: 18.

Unterhaltsame Mengenlehre

(1) Aus der Struktur der Gleichungen folgt, daß die Basis der Potenzen nur auf Null enden kann, also $\beta = 0$ gilt.
(2) Nach äquivalenter Umformung der Gleichung $\alpha\alpha = \alpha\beta^\alpha + \alpha$ in $\alpha\alpha - \alpha = \alpha\beta^\alpha$ und Einsetzen von $\beta = 0$, ergibt sich $\alpha 0 = \alpha 0^\alpha$, woraus $\alpha = 1$ folgt.
(3) Die übrigen Gleichungen liefern entsprechend $T=2$, $R=3$, $A=4$, $P=5$, $E=6$, $Z=7$.
(4) Die Proben

$$11 = 10^1 + 1$$

$$\vdots$$

$$11111111 = 10^7 + 1111111$$

bestätigen die Richtigkeit der Lösung.

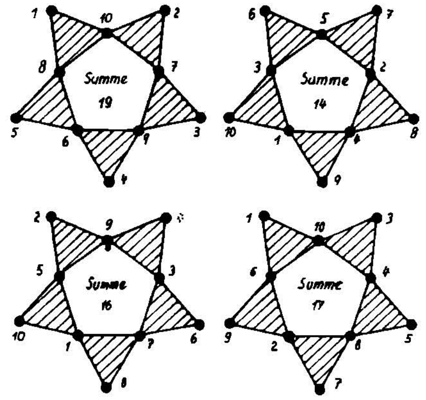
Kreuzworträtsel

Eukleides, Abbildung, Gleichung, Grundriss, Parallele, Kotangens, Streckung. – Ellipse

Mathematik in Vierzeilern

Tang – ente, Gruß/Gauß, Basis, Terme/Meter, Bogen.

Magische Figur



$h_1 : h_2 = ?$

$h_1 = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)h$; $h_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}h$

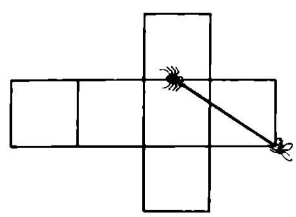
Lösungen zu: Würfeleien, IV. U. S.

▲1▲ 1d; 2f; 3e; 4a; 5b; 6c.

▲2▲ In jeder waagerechten Reihe beträgt die Summe der Punkte 15. Deshalb muß der letzte Würfel 3 Punkte haben.

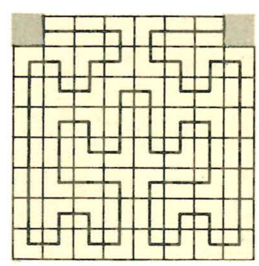
▲3▲ Es treten 8 Dreiecke und 6 Quadrate auf. Der Körper hat 12 Ecken.

▲4▲ Die Spinne muß auf einer Geraden laufen, weil diese die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten einer Ebene ist. Das Bild zeigt diese Gerade, die die Kante des Würfels im Verhältnis 1 : 2 teilt.



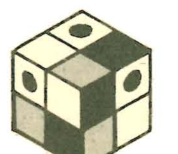
▲5▲ Es ist der Würfel a.

▲6▲



▲7▲ Es ist das Netz 4.

▲8▲



Der Escherwürfel und andere unmögliche Konstruktionen

Das künstlerische Schaffen des niederländischen Graphikers *M. C. Escher* (1898 bis 1972) spiegelt in vielfältiger und eigenwilliger Weise die Eindrücke wider, die die Mathematik interessierten Laien zu vermitteln vermag. Am populärsten ist wohl seine der Lithographie „Belvedere" (1958, Bild 1) zugrunde liegende Idee geworden, durch falsches Zusammenfügen zweier in sich logischer perspektivischer Bildhälften eine unmögliche, widerspruchsvolle Ansicht eines Objekts zu konstruieren. Das Rezept, nach dem der Pavillon der Lithographie gebaut ist, ist in dem nach dem gleichen Prinzip konstruierten

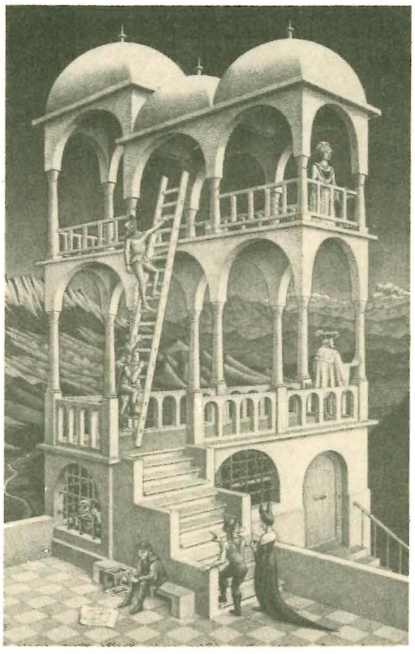
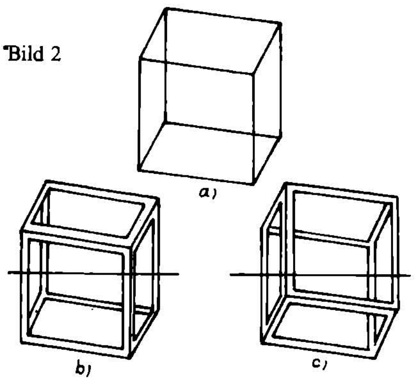


Bild 1 Belvedere

Selbstporträt von M. C. Escher

Bild 2



Escherwürfel verborgen, den der Narr links unten im Bild ratlos in seinen Händen dreht. Das Bild 2 veranschaulicht dieses Rezept: Die Parallelprojektion des Kantengerüsts eines mathematischen Würfels (oder Quaders) (Bild 2a) läßt sich bei materieller Realisierung der Kanten auf zwei verschiedene Weisen (Bild 2b, c) deuten. Der *Escherwürfel* ist aus der oberen Hälfte von b) und der unteren von c) zusammengesetzt.

Der *Escherwürfel* wurde mittlerweile so etwas wie ein inoffizielles Emblem der angewandten Geometrie (darstellenden Geometrie, automatischen elektronischen Bildverarbeitung usw.) und taucht in den verschiedensten Varianten auch als Symbol von mathematischen Tagungen, Zeitschriften u. ä. auf. Im September 1981 diente er zur Freude aller Mathematik-Briefmarken-Fans als Motiv für eine Marke (Bild 3), die anläßlich des 10. Internationalen Österreichischen Mathematiker-Kongresses in Innsbruck (d. h. nationaler österreichischer Kongreß mit starker internationaler Beteiligung) ausgegeben wurde.

Am 16. Februar 1982 kamen drei Gebrauchsmarken (Bild 4) an die schwedischen Postschalter, die ebenfalls perspektivisch widerspruchsvolle Figuren zeigen, entworfen von dem schwedischen Graphiker *Oscar Reutersvärd*. Er ist in der internationalen mathematischen Öffentlichkeit bisher nicht annähernd so bekannt und populär wie Escher. Nach den Angaben der schwedischen Post soll er jedoch sogar der erste Künstler gewesen sein, der sich schon vor 25 Jahren mit der Konstruktion solcher Bilder beschäftigte und die meisten Varianten hierzu fand. Dem Leser sei empfohlen, die „Rezepte", nach denen die drei abgebildeten Figuren von Reutersvärd erzeugt wurden, nach dem hier für den Escherwürfel durchgeführten Muster zu enthüllen.

P. Schreiber

Bild 3

Bild 4

Ein Leben für die Wissenschaft

Zum 200. Todestag von Daniel Bernoulli (8. 7. 1700 bis 17. 3. 1782)

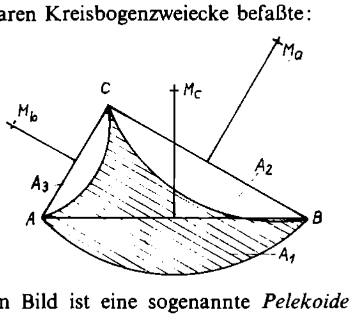
In der Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften hat der Name *Bernoulli* dasselbe Ansehen wie etwa der Name *Bach* in der Musikgeschichte, handelt es sich doch hier wie dort um Generationen von Männern, die sich auf ihren Arbeitsgebieten – hier der Mathematik und Naturwissenschaften, dort der Musik – bleibende Verdienste erwarben.

Daniel Bernoulli war ein Sohn des ebenfalls berühmten Mathematikers Johann Bernoulli (1667 bis 1748) und seiner Frau Dorothea, die einer Baseler Ratsfamilie entstammte. Er wurde am 8. 7. 1700 in der niederländischen Universitätsstadt Groningen geboren. Dort bekleidete der Vater zu dieser Zeit eine Professur für Mathematik und arbeitete auch erfolgreich auf physikalischen und medizinischen Gebieten. Zur Schule ging Daniel in Basel, wo die Familie nun seit 1705 lebte. Er zeigte schon sehr zeitig eine besondere Begabung für mathematische Fragestellungen, sollte aber dennoch nach dem Wunsch des Vaters, der inzwischen in Basel Professor für Mathematik war, Kaufmann werden. Daniel begann zwar eine dementsprechende Lehre, aber er brach diese zweimal ab, ohne dazu die Erlaubnis seiner Eltern einzuholen. Schließlich durfte er 1718 dann noch ein Medizinstudium aufnehmen, das er an den Universitäten in Basel, Strasbourg und Heidelberg absolvierte und 1721 abschloß. In den folgenden Jahren finden wir Daniel Bernoulli als Arzt in Italien. Im Jahre 1725 folgte er dann schließlich gemeinsam mit seinem Bruder Nicolaus (1695 bis 1726), der ebenfalls Mathematiker war, einer Berufung an die Akademie in St. Petersburg. Dort arbeitete er auch mit dem 1727 aus Basel gekommenen Leonard Euler (1707 bis 1726), der bei Daniels Vater Mathematik studiert hatte, zusammen. Aber schon 1733 mußte Daniel Bernoulli diese mathematisch fruchtbare Zusammenarbeit mit Euler abbrechen, da er Petersburg wegen des ihm nicht zuträglichen Klimas verlassen mußte. Er nahm nun in Basel die Professur für Anatomie und Botanik und ab 1750 die für Physik an. Obwohl sich Daniel Bernoulli in Basel (wohl auch wegen des sehr gespannten Verhältnisses zu seinem rechthaberischen und streitsüchtigen Vater, der sich mit ihm zerstritten hatte, weil Daniel einen Preis gewann, um den sich auch der Vater beworben hatte) nicht so recht wohl fühlte, schlug er einige Berufungen in zum Teil ehrenvolle auswärtige Professuren ab. Nach seiner Versetzung in den Ruhestand widmete sich Daniel Bernoulli, der unverheiratet blieb, mit seiner ganzen Person der wissenschaftlichen Arbeit. Ihm war das Glück beschieden, auch im hohen Alter bis zu seinem Tode am 17. 3. 1782 in geistiger Frische tätig sein zu können.

Die Leistungen Daniel Bernoullis können hier nur andeutungsweise hervorgehoben werden. Auf mathematischem Gebiet hat er beispielsweise Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie bearbeitet und erzielte bedeutende Ergebnisse beim Bearbeiten partieller Differentialgleichungen. Seine bedeutendsten Leistungen finden wir auf dem Gebiete der Physik. Sein 1738 erschienenes Werk *Hydrodynamik oder über die Kräfte und Bewegungen der Flüssigkeiten* enthielt eine Reihe von wichtigen Gesetzmäßigkeiten und Hypothesen, von denen eine die Grundlage für den Aufbau der kinetischen Gastheorie bildet. In einem Zerstäuber kommt praktisch eine Gesetzmäßigkeit zur Anwendung, die in der Strömungslehre nach ihrem Entdecker als *Bernoullische Gleichung* bezeichnet wird. Die Ergebnisse Daniel Bernoullis auf medizinischem Gebiet – z. B. Abhandlungen über die Muskelbewegung und Atemphysiologie – weisen ihn auch dort als leistungsfähigen Forscher aus, erlangten aber nicht die Bedeutung der Ergebnisse seiner mathematisch-physikalischen Forschungsarbeit. Daniel Bernoulli (wie übrigens auch die anderen Wissenschaftler der Gelehrtenfamilie Bernoulli) erfreute sich bereits zu seinen Lebzeiten aufgrund seiner wissenschaftlichen Leistungen hoher Wertschätzung und war Mitglied der seinerzeit bedeutendsten Akademie wie der Royal Society und der Berliner und Pariser Akademie. *M. Krebs*

Aufgabe

Über Daniel Bernoulli ist bekannt, daß er sich im Jahre 1724 mit der Frage der quadrierbaren Kreisbogenzweiecke befaßte:



In dem Bild ist eine sogenannte *Pelekoide* dargestellt. Man erhält sie, indem man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks jeweils Viertelkreisbögen beschreibt, und zwar über der Hypotenuse nach außen und über den Katheten nach innen. Es ist zu untersuchen, in welcher Beziehung die schraffierte Fläche und die Fläche des Dreiecks *ABC* zueinander stehen.

Die historische Mathematikaufgabe

Ich hab's gefunden!

Der im 3. Jahrhundert v. u. Z. lebende Gelehrte *Archimedes* gilt unbestritten als der bedeutendste Mathematiker der Antike. Er wirkte vorwiegend in seiner Vaterstadt Syrakus und verkehrte dort am Hofe der Könige Hieron II. und Gelon. Mit vielen Gelehrten seiner Zeit stand er im Briefwechsel.

Der Architekt Vitruvius, der etwa 200 Jahre später zur Zeit des Kaisers Augustus in Rom lebte, hat die folgende Anekdote über Archimedes überliefert.

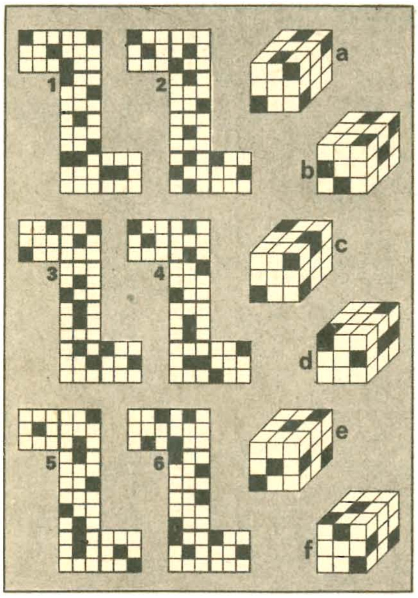
Der König Hieron II. von Syrakus übergibt einem seiner Goldschmiede einen Klumpen reinen Goldes. Der Handwerksmeister soll daraus einen Weihkranz herstellen. Als die Arbeit ausgeführt ist, befürchtet der König jedoch, daß der Schmied im Innern des Kranzes einen Teil des Goldes durch Silber ersetzt habe. Er wendet sich an Archimedes und bittet ihn, die Sache zu untersuchen, also festzustellen (ohne das Kunstwerk zu zerbrechen), ob Silber für den Kranz verwendet worden sei. Der Gelehrte kann das Problem nicht sogleich lösen. Als er sich eines Tages in der Badewanne waschen will, bemerkt er beim Einsteigen in die mit Wasser ganz gefüllte Wanne, daß wohl ebenso viel Wasser überläuft, wie sein Körper verdrängt. Da kommt ihm plötzlich der Gedanke, daß man die vom König gestellte Aufgabe lösen muß, indem man den Kranz in ein voll mit Wasser gefülltes Gefäß taucht und die überlaufende Wassermenge bestimmt. In der Freude über seine Entdeckung eilt Archimedes nackt aus dem Bade auf die Straße und ruft: „Heureka, heureka! (Ich hab's gefunden, ich hab's gefunden!)“

Wie konnte Archimedes die Aufgabe lösen? Kann man das Gold-Silber-Mischungsverhältnis des Kranzes berechnen?

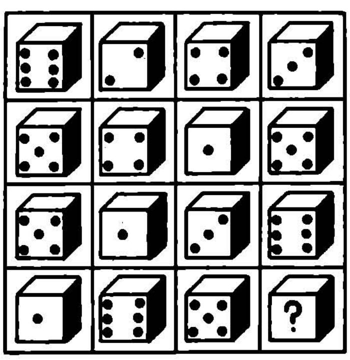
H. Pieper

Würfeleien

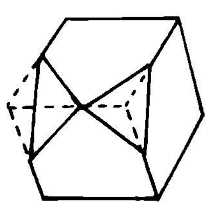
▲1▲ Welches Netz gehört zu welchem Würfel?



▲2▲ Jede waagerechte Reihe der Würfel hat eine gemeinsame Eigenschaft.
Wie heißt diese, und wieviel Punkte muß der letzte Würfel in der letzten Reihe erhalten?

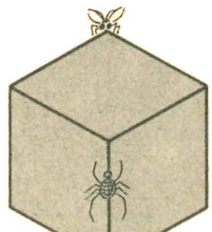


▲3▲ Ein Holzwürfel wird an seinen 8 Ecken so abgefeilt, wie es für zwei Ecken im Bild gezeigt ist, d. h., die entstehenden Flächen berühren sich an den Ecken. Es entsteht offensichtlich ein Körper, der Dreiecke und Quadrate als Begrenzungsfläche hat.

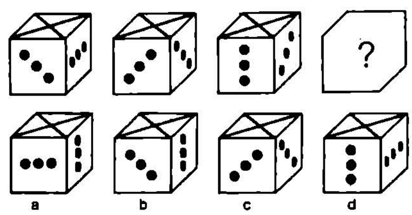


Wie viele Dreiecke und Quadrate treten auf? Wie viele Ecken hat dieser Körper?

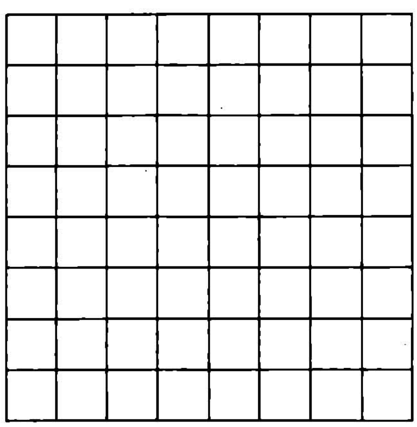
▲4▲ Eine Spinne sitzt in der Mitte der Kante eines Würfels und will die Fliege, die an einer gegenüberliegenden Ecke des Würfels sitzt, auf dem kürzesten Weg erreichen. Wie muß sie laufen?

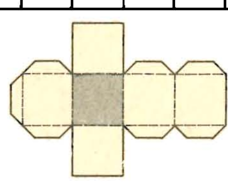


▲5▲ Welcher Würfel von a bis d gehört an die Stelle des Fragezeichens?



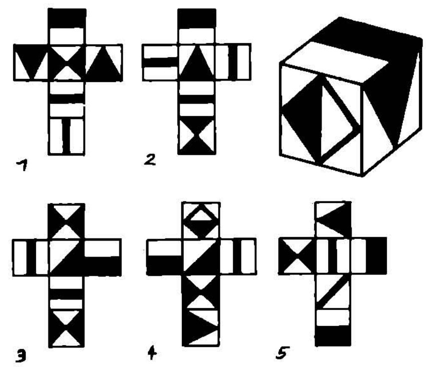
▲6▲ Würfelspiel: In diesem Spiel braucht man zwei Dinge, ein quadratisches Netz mit 64 quadratischen Feldern und einen Würfel, dessen eine Seitenfläche blau und genau so groß ist wie das quadratische Feld (siehe Bild).



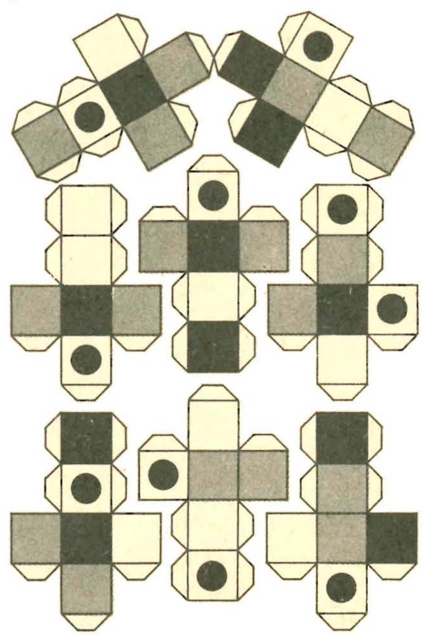


Man darf nun auf dem Netz so vorwärtsschreiten, indem man den Würfel über eine Kante von einem Feld auf das andere wälzt, nach oben, nach unten, nach rechts oder nach links, nur nicht diagonal oder über eine Ecke.
Man lege den Würfel in die linke obere Ecke des Netzes mit der blauen Seite nach oben. Man wälze den Würfel durch alle 64 Felder (jedes nur einmal) und erreiche am Ende die rechte obere Ecke des Netzes mit der blauen Seitenfläche nach oben. Unterwegs darf die blaue Seitenfläche niemals nach oben kommen.

▲7▲ Welches Netz entspricht dem abgebildeten Würfel?



▲8▲ Man schneide die 8 Würfelnetze aus und klebe sie jeweils zu einem Würfel zusammen.



Dann stelle man von den 8 kleinen Würfeln einen großen Würfel so zusammen, daß sich auf den sichtbaren Seiten des großen Würfels nirgendwo gleiche Muster der kleinen Würfel berühren.