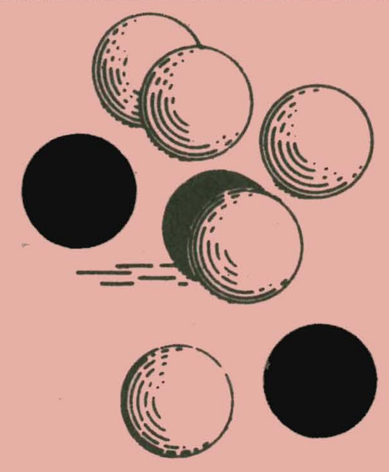
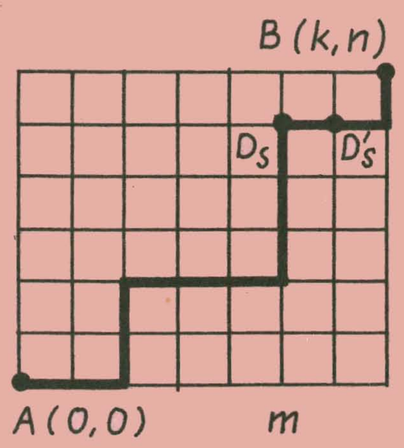
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

$$P_n = n!$$





00, 01, 02, 03
10, 11, 12, 13
20, 21, 22, 23
30, 31, 32, 33

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
10. Jahrgang 1976
Preis 0,50 M
Index 31059

4

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 75, S. 76), J. Freiberg, Leipzig
Vignetten: J. Flisak, Warschau; J. Puchalski, Warschau; Gabbert, Leipzig; Günzel, Berlin; Lehrerzeitung, Prag; H. Büttner, Berlin; K.-H. Guckuk, Leipzig
Nach einer Idee von *Kerstin Schulz*, 7. OS Aschersleben (Kl. 6) gezeichnet von K.-H. Guckuk, Leipzig (Vignetten S. 87 unten)
Typographie: Helmut Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 23. April 1976

alpha

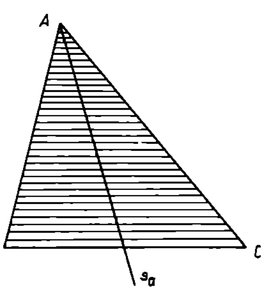
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

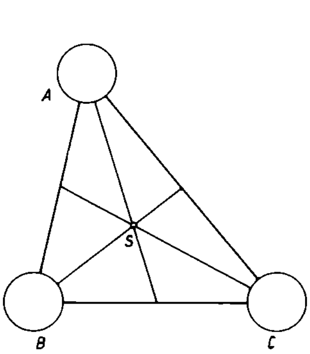
* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Bestimmung des Schwerpunktes eines Dreiseits

Aus der Schule ist uns die Aufgabe geläufig, von einem Dreieck den Schwerpunkt zu bestimmen. Hierzu zeichnet man in das Dreieck die Seitenhalbierenden ein. Diese schneiden sich in einem Punkt S, dem Schwerpunkt der Dreieckfläche. Zur Begründung dieser Konstruktion macht man sich klar, daß jede Seitenhalbierende eines Dreiecks eine Schwerelinie der Fläche ist. Zerlegt man nämlich in einem Gedankenexperiment die Fläche in feine Streifen parallel zu einer der Dreieckseiten, so liegen die Halbierungspunkte aller Streifen auf der dieser Seite zugeordneten Seitenhalbierenden.



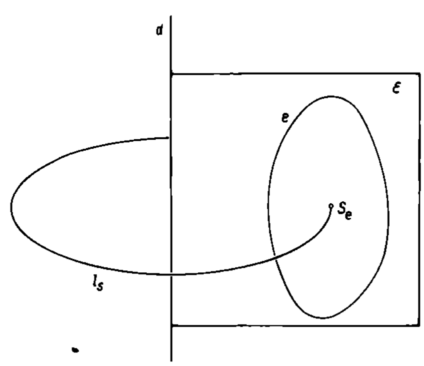
Der Schnittpunkt von zwei Schwerelinien eines ebenen Flächenstückes ist der Schwerpunkt dieser Fläche. Zur Probe kann man das auf Karton aufgezeichnete Dreieck ausschneiden und in S auf eine nach oben gerichtete Nadelspitze waagerecht auflegen. Das Dreieck wird dann ohne äußere Einwirkungen seine Lage nicht mehr ändern. Diese Schwerpunktkonstruktion ist auch dann richtig, wenn man unter einem Dreieck ein System von drei Körpern gleicher Masse versteht, deren Schwerpunkte sich mit den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks decken.



Überlegungen von ganz anderer Art sind anzustellen, wenn man die Schwerpunktbestimmung nur auf den Rand des Dreiecks ABC bezieht. Man spricht dann von dem Dreiseit ABC und dem Schwerpunkt S_e des Dreiseits. Ein aus drei geraden Metallstäben gleicher Stärke und gleichen Materials zusammengeschweißter Dreieckrahmen liefert ein Modell, das näherungsweise dieser Vorstellung entspricht. Zunächst kann man sich leicht erklären, daß die Seitenhalbierenden dieses Metallrahmens im allgemeinen keine Schwerelinien sind. Folglich entspricht auch der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiseits nicht dem Schwerpunkt dieser geschlossenen Linie.

I. Ein leicht verständlicher Satz soll uns zunächst einen analytischen Zugang zum Schwerpunkt eines allgemeinen Dreiseits bieten. Dieser Satz lautet: Dreht sich eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve e um eine in der Kurvenebene ε liegende Achse d, die e nicht schneidet, so ist der Flächeninhalt O der erzeugten Drehfläche gleich dem Produkt aus der Bogenlänge l_e von e und der Weglänge l_s des Schwerpunktes S_e von e bei einer Umdrehung von ε um d; es gilt also

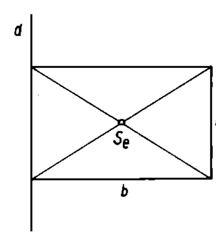
$$O = l_e \cdot l_s, \tag{1}$$



Wir wollen diesen Satz zunächst an einem bekannten Beispiel erproben.

1. Die geschlossene Kurve e sei ein Rechteck mit der Länge $l_e = 2(a+b)$ als Umfang (für Polygonseiten und deren Längen setzen wir im folgenden die gleichen Bezeichnungen, also $a, b, c, d, \ldots$). Eine der beiden Rechteckseiten a bringen wir mit der Drehachse d zur Deckung und lassen die Rechtecklinie e um d rotieren. Auf diese Weise wird eine Zylinderfläche erzeugt. Die Bogenlänge l_e der erzeugenden Kurve ist gleich $2(a+b)$. Der Schwerpunkt des Vierseits hat von der Achse den Abstand $b/2$. Für die Länge des von dem Schwerpunkt bei einem Umlauf zurückgelegten Weges folgt daher

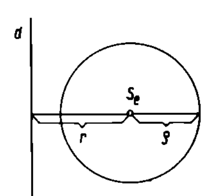
$$l_s = 2\pi \frac{b}{2} = \pi b.$$



Die Oberfläche O des erzeugten Zylinders hat nach (1) den Inhalt
$O = l_s \cdot l_e = \pi b \cdot 2(a+b) = 2\pi ab + 2\pi b^2$.
Die Anwendung des oben zitierten Satzes liefert, wie nicht anders zu erwarten, die Summe der Inhalte von Deck- und Basisfläche sowie des Mantels der Zylinderfläche.

2. Die erzeugende Kurve e sei eine Kreislinie, die die in ε liegende Gerade d nicht schneidet. Bei einmaliger Umdrehung von ε um d überstreicht e eine Ringfläche, auch Torus genannt. Uns interessiert nun der Inhalt der Oberfläche des Torus. Hat e den Radius ρ, so folgt $l_e = 2\pi\rho$. Der Mittelpunkt von e ist offensichtlich auch der Schwerpunkt S_e von e. Hat S_e den Abstand r von d mit $r > \rho$, so gilt für den Inhalt der in dieser Weise erzeugten Drehfläche nach (1)

$$O = 2\pi r \cdot 2\pi\rho \text{ oder}$$
$$O = 4\pi^2 r\rho.$$



3. Wir wollen uns nun der eingangs gestellten Aufgabe zuwenden. Um von dem Dreiseit ABC den Schwerpunkt S_e zu bestimmen,

bringen wir die Seite a mit der Drehachse d zur Deckung. Dreht sich das Dreiseit um die Achse d, so entsteht eine aus zwei Drehkegeln mit gemeinsamem Basiskreis zusammengesetzte Drehfläche. Dieser Basiskreis hat die Höhe h_a des Dreiseits als Radius. Somit ergibt sich für die Länge s der von dem Eckpunkt A beschriebenen Kreislinie

$$s=2\pi h_a.$$

Die Mantelfläche eines Drehkegels kann man, wie uns dies von Bastelarbeiten her sicher geläufig ist, in eine Ebene abwickeln. Dabei entsteht ein Kreissegment. Hat dieses Segment den Radius der Länge r und den Bogen der Länge s, so gilt für den Inhalt K des Kreissegmentes

$$K=\frac{1}{2}rs.$$

Wendet man diese Formel auf die beiden Kegelflächen an, ergibt sich für deren Inhalte

$$K_1=\pi h_a b \qquad K_2=\pi h_a c.$$

Wegen $h_a=c\sin\beta=b\sin\gamma$ kann man auch schreiben

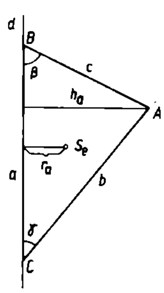
$$K_1=\pi bc\sin\beta \qquad K_2=\pi bc\sin\gamma$$

und für die Oberfläche des gesamten Drehkörpers

$$O=K_1+K_2=\pi bc(\sin\beta+\sin\gamma). \tag{2}$$

Ferner steht die Länge der erzeugenden Linie zur Verfügung. Es gilt

$$l_e=a+b+c. \tag{3}$$



Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunktes S_e von der mit a zur Deckung gebrachten Drehachse d mit r_a, so folgt für die Weglänge l_s von S_e bei einem Umlauf:

$$l_s=2\pi r_a. \tag{4}$$

Die Anwendung des oben zitierten Satzes führt unter Beachtung von (1), (2), (3) und (4) auf die Gleichung

$$\pi bc(\sin\beta+\sin\gamma)=2\pi r_a(a+b+c). \tag{5}$$

Darin ist r_a die gesuchte Größe. Die Auflösung von (5) nach r_a ergibt

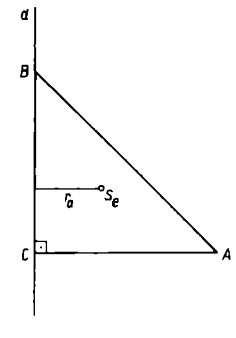
$$r_a=\frac{bc(\sin\beta+\sin\gamma)}{2(a+b+c)}. \tag{6}$$

Aus dem gefundenen Ergebnis (6) lassen sich sofort die Abstände des Schwerpunktes S_e von den beiden anderen Dreieckseiten ablesen. Man erhält durch zyklische Vertauschung

$$r_b=\frac{ac(\sin\alpha+\sin\gamma)}{2(a+b+c)},$$
$$r_c=\frac{ab(\sin\alpha+\sin\beta)}{2(a+b+c)}. \tag{7}$$

Zum Abschluß der Rechnung wollen wir uns davon überzeugen, daß sich der so gefundene Punkt S_e mit dem Schwerpunkt S der Dreieckfläche nicht deckt. Die Behauptung, daß S_e mit S identisch ist, stellt eine Allaussage dar. Um sie zu widerlegen, genügt es, ein Gegenbeispiel aufzuzeigen. Wir betrachten den Fall $a=b=1$, $c=\sqrt{2}$. Mit dieser Festlegung für die Seiten folgt für die Winkel

$$\beta=45^\circ, \qquad \gamma=90^\circ.$$



Die Anwendung von (6) liefert

$$r_a=\frac{1+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{8}$$

Da sich die Seitenhalbierenden des Dreiecks im Verhältnis 1 : 2 schneiden, hat der Flächenschwerpunkt S von a den Abstand $^1/_3$. Folglich sind die Schwerpunkte S und S_e nicht identisch. Lediglich für das gleichseitige Dreieck fallen der Schwerpunkt der Fläche und der Schwerpunkt des Randes zusammen.

Der hier zur Schwerpunktbestimmung der Dreieckslinie verwendete Satz findet sich erstmals in einem Werk des Schweizer Mathematikers Paul Guldin (1577–1643). Dieser Satz ist in die Fachliteratur als erste Guldinsche Regel eingegangen. Auf einen Beweis soll hier verzichtet werden.

II. Abschließend soll noch gezeigt werden, wie man den Schwerpunkt S_e der Dreieckslinie ABC auf konstruktivem Wege finden kann. Entscheidend ist zunächst die Zielstellung, zwei Schwerelinien in möglichst einfacher Weise aufzusuchen. Wir werden die durch den Halbierungspunkt P von a gehende Schwerelinie s_p bestimmen. Hierfür bietet sich an, einen zweiten Punkt $X\in s_p$ auf der Verbindungsgeraden der Halbierungspunkte Q und R der Seiten b bzw. c konstruktiv zu ermitteln. Zu diesem Zweck ordnen wir dem Punkt Q die Masse m_b und R die Masse m_c zu, so daß die Proportion

$$m_b:m_c=b:c \tag{9}$$

erfüllt ist. Der gesuchte Punkt X muß mit dem Schwerpunkt des aus den Massen m_b und m_c bestehenden Systems identisch sein. Nach dem Hebelgesetz stehen bei Gleichgewicht eines zweiarmigen Hebels die Hebellängen im umgekehrten Verhältnis zu den in ihren Endpunkten angebrachten Massen. Vgl. Abb. 8. Von dem Punkt $X\in s_p$ ist also zu fordern:

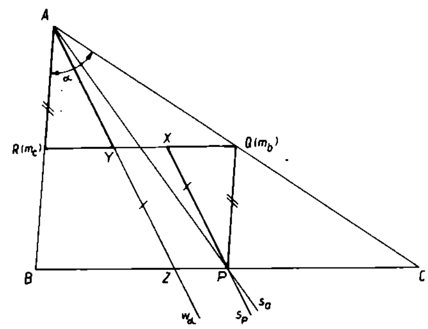
$$|RX|:|QX|=m_b:m_c. \tag{10}$$

Wegen (9) ist die Bestimmung von $X\in$ auf eine geometrische Aufgabe zurückführbar. Die mit (10) äquivalente Forderung lautet:

$$|RX|:|QX|=b:c. \tag{11}$$

Diese Proportion legt es nahe, die Winkelhalbierende w_α in die Konstruktion einzubeziehen. Zeichnet man in das Dreieck ABC die Winkelhalbierende w_α von α ein, so schneidet diese die Gegenseite in einem Punkt Z und die Verbindungsgerade (QR) in Y. Nun benutzen wir den Satz, daß die Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Die Anwendung des Satzes auf den vorliegenden Fall führt auf die Proportion

$$b:c=|CZ|:|BZ|.$$



Da die Verbindungsgeraden (BC) und (QR) zueinander parallel sind, kann man den Strahlensatz anwenden. Es gelten die Proportionen

$$|CZ|:|BZ|=|QY|:|RY| \text{ und damit}$$
$$|QY|:|RY|=b:c. \tag{12}$$

Wir behaupten: Zieht man durch P eine Parallele zu w_α, so schneidet diese die Gerade (QR) in dem gesuchten Punkt X; d. h., diese Parallele zu w_α durch P ist eine Schwerelinie der Dreieckslinie.

Beweis: Nach Konstruktion gilt

$\Delta PQX\cong\Delta ARY.$

Folglich bestehen die Gleichungen

$|QX|=|RY|$ und $|QY|=|RX|$.

Daraus resultiert die Proportion

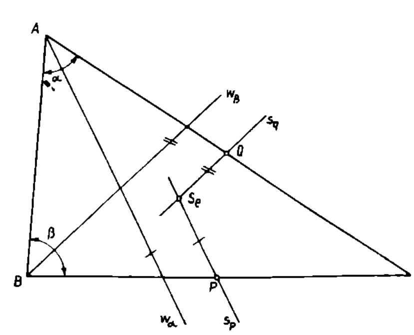
$$|QY|:|RY|=|RX|:|QX|. \tag{13}$$

Mit (12) und (13) kann man weiter folgern

$$|RX|:|QX|=b:c$$

und

$$|RX|:|QX|=m_b:m_c. \tag{14}$$



Mit (14) ist der Beweis erbracht, daß durch die angegebene Konstruktion die Forderung (10) und damit auch (11) erfüllt wird. Die hier abgeleitete Konstruktion der Schwerelinie s_p

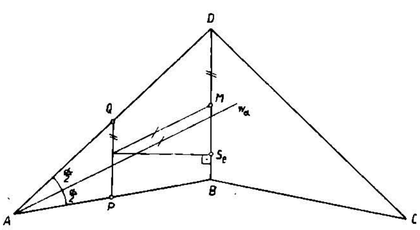
läßt sich in analoger Weise von Q und R ausgehend wiederholen. Im Schnittpunkt von zwei auf diese Weise bestimmten Schwerelinien liegt der gesuchte Schwerpunkt des Dreiseits ABC.

Zusammenfassend kann für den Schwerpunkt S_e einer Dreieckslinie folgende Konstruktionsvorschrift gegeben werden:

In dem Dreiseit ABC sind die Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ und die Halbierungspunkte P, Q, R der Seiten a bzw. b bzw. c einzuzeichnen. Dann schneiden sich die Parallelen s_p zu w_α durch P, s_q zu w_β durch Q und s_r zu w_γ durch R in einem Punkt S_e. Dies ist der Schwerpunkt der Dreieckslinie.

Aufgaben:

1. Begründe die in der Abbildung für ein symmetrisches Vierseit gegebene Schwerpunktkonstruktion!

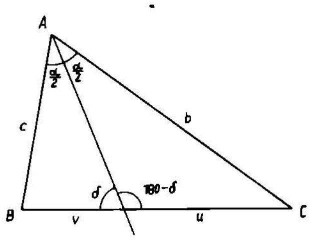


2. Konstruiere den Schwerpunkt eines beliebigen Vierseits!
3. Weise nach, daß das auf analytischem Wege gefundene Ergebnis (6) mit dem konstruktiven Ergebnis übereinstimmt!

E. Schröder

In obigem Beitrag wurde der Hilfssatz verwendet: Eine Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beweis durch Anwendung des Sinus-Satzes auf die Teildreiecke:



Es gilt

$$\frac{\sin\delta}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{c}{v},\quad \frac{\sin(180-\delta)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{b}{u}. \qquad (*)$$

Wegen $\sin\delta=\sin(180-\delta)$ folgt aus (*)

$$\frac{c}{v}=\frac{b}{u} \text{ oder } \frac{b}{c}=\frac{u}{v}.$$

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. nat. Gottfr. Bachmann

Pädagogische Hochschule Halle „N. K. Krupskaja" Sektion Mathematik-Physik

---

▲1536▲ Man ermittle fünf reelle Zahlen $a_j \geqq 1$ ($j=1,2,3,4,5$) derart, daß das Produkt $a_1^2 \cdot a_2 \cdot a_3^3 \cdot a_4 \cdot a_5^2$ seinen größten Wert annimmt unter den Bedingungen

$$\sqrt[100]{a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3 \cdot a_5} \leqq 2$$
$$\sqrt[80]{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5} \leqq 2$$
$$\sqrt[50]{a_1 \cdot a_3 \cdot a_4} \leqq 2$$

Lösungshinweis:
Durch die eineindeutigen Transformationen $a_j := 2^{x_j}$ ($j=1,2,3,4,5$) und anschließendes Logarithmieren (zur Basis 2) erhält man ein lineares Optimierungsproblem, aus dessen Lösungen die Lösungen der gestellten Aufgabe errechnet werden können.

Kurzbiographie

Prof. Dr. sc. nat. G. Bachmann,
geb. 1927 in Mockritz:
Vater: Lehrer, Mutter: Hausfrau;
1933 bis 1937 Besuch der Volksschule,
1937 bis 1944 Besuch des Realgymnasiums (später: Oberschule) Döbeln bzw. der Fürstenschule Meißen (Staatl. Gymnasium), Reifevermerk;
1945 Baupraktikant, später Neulehrer;
Lehrerprüfungen 1947 und 1949;
1949 bis 1953 Lehrer an Erweiterten Oberschulen in Waldheim/Sa., Altenberg/Erzgeb., Bischofswerda/Sa.;
1952/53 Teilnahme an einem einjährigen Sonderlehrgang an der Pädagogischen Hochschule Potsdam zur Ausbildung in Mathematik;
1954 bis 1959 Oberassistent,
1959 bis 1960 Lektor,
1961 bis 1969 Dozent am Pädagogischen Institut Halle;
1958 Diplom an der Martin-Luther-Universität Halle nach externer Vorbereitung,
1968 Promotion A und 1972 Promotion B an der TH Ilmenau;
1969 bis 1974 Hochschuldozent und seit 1974 ordentlicher Professor für Geometrie an der Pädagogischen Hochschule Halle.

Preisträger
der XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Einen ersten Preis erhielten:

Peter Dittrich,
EOS *Dr. Th. Neubauer*, Rudolstadt (Kl. 10)
Peter Bartenstein, EOS *Geschw. Scholl*, Hildburghausen (Kl. 10)
Michael Marczinek,
EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Kl. 11)
Friedhelm Schieweck,
EOS *Otto von Guericke*, Magdeburg (Kl. 12)

Einen zweiten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Tilo Brock, 40. OS Leipzig; Jens-Uwe Richter, EOS *Th. Neubauer*, Karl-Marx-Stadt; Ilja Schmelzer, *Dr.-K.-Fischer-OS*, Halle; Uwe Szyszka, EOS *F. Engels*, Neubrandenburg (aus Kl. 9); Steffen Thiel, EOS Königs-Wusterhausen, (aus Kl. 9); Andreas Kasparek, EOS Gräfenhainichen (aus Kl. 9); *In Olympiadeklasse 11:* Roger Labahn, EOS *Geschw. Scholl*, Anklam
In Olympiadeklasse 12: Norbert Schieweck, EOS *Otto von Guericke*, Magdeburg; Jörg-Uwe Löbus, EOS *R. Rolland*, Dresden; Hans-Georg Martin, *Spezialschule Carl Zeiss*, Jena; Thomas Hoffmann, EOS *Geschw. Scholl*, Apolda; Klaus Brinckmann, EOS *B. Brecht*, Dresden; Uwe Risch, EOS Burg

Einen dritten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Jan Müller, EOS *H. Hertz*, Berlin; Heiko Hoffmann, Herder-OS, Rostock; Stefan Vogel, E.-Thälmann-OS, Plauen; Annette Damnik, EOS *F. Schmenkel*, Luckenwalde; Frank Bauernöppel, EOS *H. Hertz*, Berlin; Jürgen Prestin, EOS *R. Wossidlo*, Waren; Frank Bergner, EOS *F. Engels*, Riesa; Uwe Doetzkies, Max-Lingner-OS, Berlin; Bernd Kreußler, KJS *F. Lesch*, Frankfurt (Oder) (aus Kl. 9); Wolfram Würbel, EOS *R. Rotkegel*, Forst; Olaf Sammler, EOS *H. Hertz*, Berlin; Kerstin Rudorf, W.-Komarow-OS, Karl-Marx-Stadt
In Olympiadeklasse 11: Lutz Gärtner und Norbert Heß, beide Spezialkl. Math. der Humboldt-Univ. zu Berlin; Thomas Maiwald, EOS Zittau (aus Kl. 10); Hans-Dietmar Gröger, EOS Staßfurt (aus Kl. 10); Thomas Luschtinetz, Hansa-EOS, Stralsund; Harro Rosner, EOS *H. Hertz*, Berlin; Günter Gerbeth, Spezialkl. der Univ. Halle
In Olympiadeklasse 12: Ronald Lange, Spezialkl. der Univ. Halle; Bernhard Runge, EOS Goethe, Schwerin; Klaus Taeschner und Frank Reglin, beide EOS *H. Hertz*, Berlin; Reiner Lindemann, Spezialkl. der Humboldt-Univ. zu Berlin; Ingolf Buttig, EOS Goethe, Bischofswerda

Weitere 38 Schüler erhielten eine Anerkennungsurkunde für gute Leistungen.

XV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

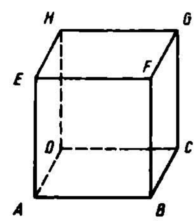
4. Stufe (DDR-Olympiade)

OJM
DDR

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

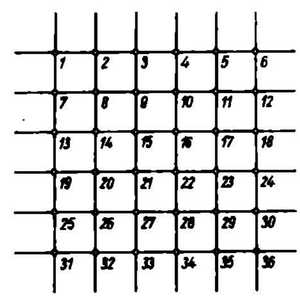
1. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.



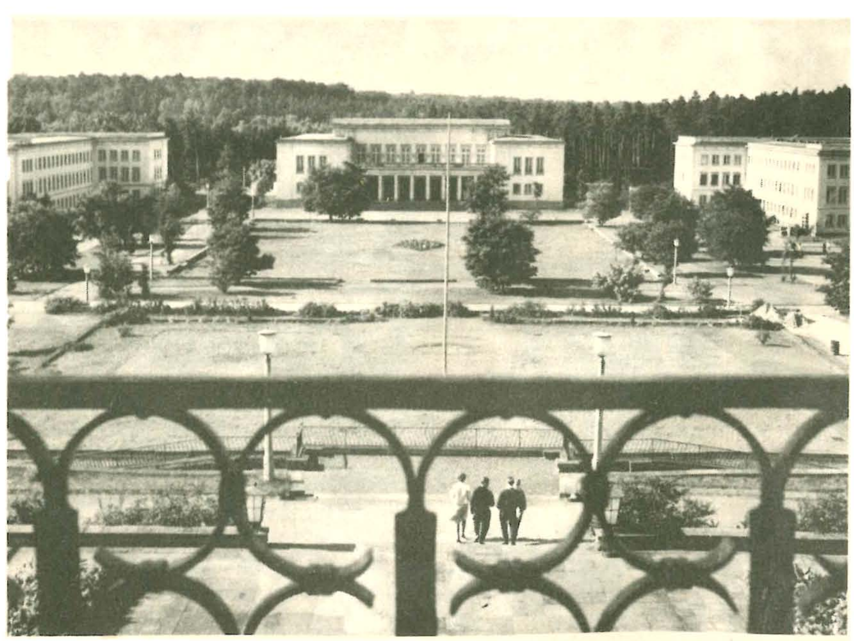
Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, daß sie jeweils zur Raumdiagonalen EC parallel verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt. Berechnen Sie das Volumen V_R des verbliebenen Restkörpers!

2. In einem vorgegebenen quadratischen Gitternetz sollen die im Bild dargestellten 36 Schnittpunkte der Gitterlinien durch einen geschlossenen Streckenzug derart verbunden werden, daß

(1) jede Teilstrecke des Streckenzuges entweder waagerecht oder senkrecht verläuft,
(2) beim Durchlaufen des Streckenzuges jeder der 36 Punkte genau einmal erreicht wird und
(3) die entstehende Figur mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt, die gleichzeitig auch Symmetrieachsen des Quadrates mit den Eckpunkten 1, 6, 36, 31 sind.



Zeichnen Sie möglichst viele derartige Streckenzüge, die untereinander nicht kongruent sind, und beweisen Sie, daß es keine weiteren mit den geforderten Bedingungen gibt!



Die Jugendhochschule „Wilhelm Pieck“, Bogensee bei Berlin – seit 15 Jahren Gastgeber der DDR-Olympiaden

Von den nachstehenden Aufgaben 3 A und 3 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

3A. Ist z eine reelle Zahl, so werde mit $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z]=g$ bezeichnet, für die $g \leqq z < g+1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die
$$-10 \leqq x \leqq 2 \text{ und}$$
$$[x^2]=[x]^2 \text{ gilt!}$$

3B. In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(x;\ y)$ seien die Punkte $F_1\ (\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ und $F_2\ (-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$ sowie der Graph x derjenigen Funktion f gegeben, die für alle reellen $x \neq 0$ durch
$f(x)=\frac{1}{x}$ definiert ist.
Man beweise: Es gibt eine Zahl c, so daß k in der xy-Ebene die Menge aller derjenigen Punkte der xy-Ebene ist, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist. Man ermittle diese Zahl c.

4. Man ermittle alle ungeordneten Paare $(x,\ y)$ aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die folgendes gilt: Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von x und y (das ist die Zahl $\sqrt{xy}$).

5. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus s, R, r! Dabei sei s der halbe Umfang, R der Radius des Ankreises an die Seite AC und r der Radius des Inkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC.
Ermitteln Sie Beziehungen, die genau dann zwischen den gegebenen Längen s, R, r bestehen, wenn ein derartiges Dreieck existiert! Untersuchen Sie, ob es dann bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck gibt!
Hinweis: Es gibt zu dem Dreieck ABC genau einen Kreis, der die Seite AC, die Verlängerung von BA über A hinaus und die Verlängerung von BC über C hinaus berührt. Dieser Kreis heißt der Ankreis an die Seite AC des Dreiecks ABC.

6. Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion. Vorausgesetzt werde, daß f nullstellenfrei ist, d. h., daß keine reelle Zahl x mit $f(x)=0$ existiert.
Untersuchen Sie, ob aus dieser Voraussetzung folgt, daß auch die durch $F(x)=f(2x)+f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist!

Die Lösungen zu diesen Aufgaben sowie die Aufgaben der Olympiadeklasse 11/12 veröffentlichen wir in Heft 5/76.
Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufe 11/12 findet der interessierte Leser in *Mathematik in der Schule*, Heft 12/76, d. Red.

Unser Dank gilt den Betreuern der Bezirksmannschaften und den unermüdlichen Organisatoren der DDR-Olympiaden

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Aus der Arbeit unseres NVA-Zirkels Jugendobjekt „Studienvorbereitung" der Sektion Mathematik der Universität Jena

Eine gute Vorbereitung auf ein Studium der Mathematik anzuregen und zu unterstützen, ist das Hauptanliegen des Jugendobjektes *Studienvorbereitung* unserer Sektion, das nun bald schon sein zehnjähriges Jubiläum feiern kann.
Wir wollen heute einmal darüber berichten, welche Aufgabe sich der *NVA-Zirkel* als ein Bereich des Jugendobjekts gestellt hat, und wie er seine Arbeitsziele zu realisieren versucht:
Wir sind zunächst davon ausgegangen, daß gegenwärtig nahezu alle männlichen Studienbewerber ihren Ehrendienst in der NVA *vor* Beginn ihres Studiums leisten. Dadurch wird eine gewisse Unterbrechung des Lernprozesses zwischen Schule und Universität unvermeidlich, und dies bringt u. a. mehr oder weniger große Schwierigkeiten mit sich. Die Frage:

Wie können die zukünftigen Studenten der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena, die ihren Ehrendienst in den Reihen der NVA leisten, einen Teil dieser Schwierigkeiten überwinden?
charakterisiert deshalb die Arbeit des Bereiches *NVA-Zirkel* unseres Jugendobjektes.

Dabei erschienen uns für diese spezielle Art von Studienvorbereitung drei Dinge als besonders wichtig:
1. der Kontakt zur Universität während der Armeezeit (einschließlich der Möglichkeit, sich mit Problemen, Fragen und Wünschen an uns zu wenden),
2. die Beschäftigung mit der Mathematik,
3. die Information über das fachliche und gesellschaftliche Leben an der Sektion (und Universität).

Das regelmäßige Studium der *Wurzel* kann hierbei – wie wir meinen – schon von sehr großem Nutzen sein. Deshalb schicken wir jedem an unserer Sektion vorimmatrikulierten NVA-Angehörigen die *Wurzel* kostenlos ins *Objekt*. Darüber hinaus haben wir zwei Lesematerialien erarbeitet, die einige *Grundbegriffe der Mengenlehre* und der *Logik* (beides spielt ja in den Grundvorlesungen der ersten Semester eine hervorragende Rolle), die zum Teil schon von der Schule her bekannt sind, einmal unter einem anderen Aspekt vorstellen, um auf diese Weise ein wenig auf die Denkweise der Mathematik zu orientieren. Erfahrungsgemäß macht ja gerade die neue Art der Betrachtung und Behandlung der mathematischen Grundbegriffe zu Beginn des Studiums Schwierigkeiten.
Diese Lesematerialien sind speziell auf unsere *Partner*, die Soldaten, zugeschnitten und haben bei ihnen bislang eine recht positive Resonanz gefunden.
Wir bleiben deshalb bei dieser Art der Betreuung, suchen aber nach weiteren Möglichkeiten, unsere Arbeit zu verbessern.
Die Arbeit des NVA-Zirkels, in dem z. Z. drei Studenten arbeiten, ist recht aufwendig: sie reicht von inhaltlichen Überlegungen und Entwürfen über die Beantwortung der umfangreichen Briefpost, vielen Adressenänderungen, der Neuerfassung unserer Mitglieder bis zum Versand der *Wurzel* und unserer Materialien.

Von den Überlegungen, die wir uns um eine Verbesserung der Arbeit des NVA-Zirkels machen, seien hier genannt:
– Kontaktaufnahme mit anderen Universitäten und Erfahrungsaustausch über Methoden der Studienvorbereitung.
– Verbesserung der Information über nichtfachliche Fragen des Studiums.
– Anregung zur Kontaktaufnahme der Soldaten untereinander (brieflich bzw. im selben Objekt).
– Verbesserung der Zusammenarbeit des NVA-Zirkels mit den anderen Bereichen des Jugendobjektes.

W. Nehrlich

Unser Dank gilt der Jury, den Koordinatoren und den Korrektoren der DDR-Olympiade

Von der Zahl zum Gesetz

Leseprobe

Speziell für Klassen 5/6

Wie hängt das zusammen?

Klasse 6 hat ihre erste Mathematikarbeit geschrieben, und von den 20 Schülern fehlte keiner. Folgende Zensuren wurden dabei erreicht:

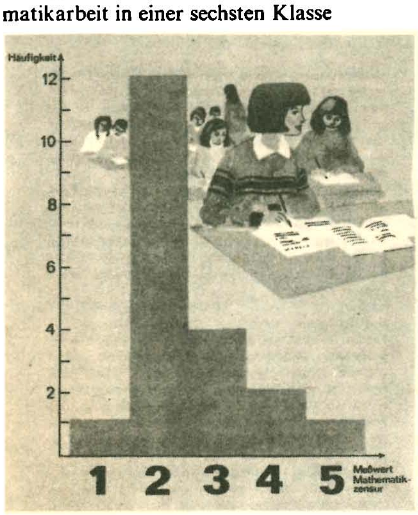
Zensur	Anzahl der Schüler
1	1
2	12
3	4
4	2
5	1

In der Fachsprache der Statistik bezeichnen wir die Zensuren als *Meßwerte* und die zugehörigen Schülerzahlen als *Häufigkeiten*. Zwölf Schüler erhielten die Note 2; der Meßwert 2 liegt also mit der Häufigkeit 12 vor.

Sehr oft haben derartige Tabellen von Meßwerten einen größeren Umfang, z. B. bei Ergebnissen von physikalischen Experimenten oder bei der Registrierung der Regenmengen für jeden Tag eines Jahres. Um in solchen Fällen rasch einen guten Überblick zu erhalten und um Besonderheiten zu erkennen, stellt man die Meßwerte und ihre Häufigkeiten zeichnerisch dar. In der Statistik ist dafür unter anderem das *Histogramm* gebräuchlich.

Beim Histogramm ordnen wir die Meßwerte nacheinander an und zeichnen darüber Rechtecke, deren Größe sich nach der Häufigkeit richtet.

Histogramm für die Zensuren der 1. Mathematikarbeit in einer sechsten Klasse



Das Histogramm liefert keine anderen Aussagen als die *Tabelle*, es gibt nur ein einprägsameres Bild. Bei der Besprechung einer Mathematikarbeit ist es für den Lehrer und die Schüler gleichermaßen interessant, wo jeder einzelne steht, ob die Leistung über oder unter dem Durchschnitt der Klasse liegt. Bei den Noten 1 oder 5 ist diese Frage leicht zu beantworten. Schwieriger scheint das aber bei den Zensuren 2 und 3 zu sein. Um einen Vergleich vornehmen zu können, berechnen wir einen *Mittelwert*.

Ganz absichtlich habe ich geschrieben „einen Mittelwert" und nicht „den Mittelwert". In der Statistik kann man nämlich mit verschiedenen Verfahren Mittelwerte erhalten. Da gibt es zunächst den Mittelwert, der den tatsächlich „mittelsten Wert" oder wie man ihn auch nennt ‚Medianwert" darstellt: in unserem Beispiel die Note 3. Dann existiert ein *Modalwert*, das ist der „häufigste Wert": für unsere Mathematikarbeit die Note 2. Beides sind „Mittelwerte", die aber für jeden einzelnen Schüler noch keinen echten Vergleich ergeben. Am häufigsten arbeitet man in der Statistik mit dem *arithmetischen Mittel*, das wir auch hier berechnen.

Wir bezeichnen die Meßwerte der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5. In unserem Beispiel heißt das:

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5.$

Für die Häufigkeiten verwenden wir die Symbole h_1, h_2, h_3, h_4 und h_5:

$h_1 = 1,\ h_2 = 12,\ h_3 = 4,\ h_4 = 2,\ h_5 = 1.$

Die Zahl der Schüler, die die Arbeit geschrieben haben, betrug $n = 20$.

Für das arithmetische Mittel wählen wir das Zeichen $\bar{x}$. Die allgemeine Formel heißt dann:

$$\bar{x} = \frac{h_1 \cdot x_1 + h_2 \cdot x_2 + h_3 \cdot x_3 + h_4 \cdot x_4 + h_5 \cdot x_5}{n}$$

Wir setzen die Zahlenwerte ein und erhalten

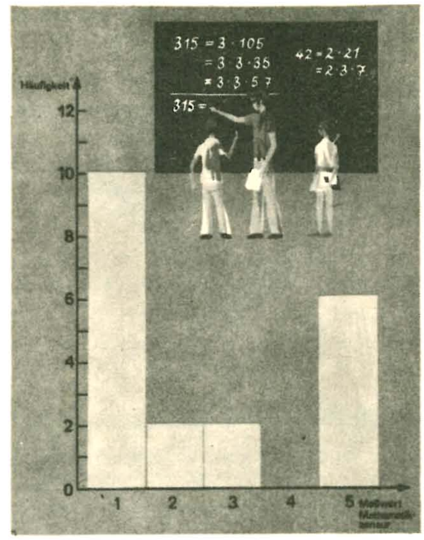
$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{20}$$

$$= \frac{1 + 24 + 12 + 8 + 5}{20} = \frac{50}{20} = 2{,}5$$

Der *Durchschnitt* der Klassenarbeit betrug, berechnet mit dem arithmetischen Mittel, also 2,5. Jene 13 Schüler mit den Noten 1 und 2 schrieben eine überdurchschnittliche Arbeit. Wer eine 3, 4 oder 5 als Zensur erhalten hatte, erreichte nur eine unter dem Durchschnitt liegende Leistung.

Außer Medianwert, Modalwert und arithmethischem Mittel gibt es in der Statistik noch einige weitere Mittelwerte. Für die meisten Aufgaben liefert aber das arithmetische Mittel die beste Aussage. Deshalb – und nicht etwa nur, weil es leicht zu berechnen ist – beschränken wir uns im weiteren auf diesen Mittelwert. Wenn wir jetzt vom Mittelwert sprechen, meinen wir damit immer das arithmetische Mittel.

Genau ein Monat war seit der ersten Mathematikarbeit in Klasse 6 vergangen, als die zweite Arbeit geschrieben wurde. Wieder waren alle 20 Schüler anwesend. Dieses Mal sahen die Ergebnisse etwas anders aus.



Histogramm für die Zensuren der 2. Mathematikarbeit in einer sechsten Klasse

Zensur	Anzahl der Schüler
1	10
2	2
3	2
4	–
5	6

Die Hälfte der Schüler bekam die Note 1, sechs Schüler mußten sich aber mit einer 5 begnügen. Welche Arbeit war besser ausgefallen, die erste oder die zweite?

Wir berechnen wieder den Durchschnitt mit dem arithmetischen Mittel und erhalten:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 6 \cdot 5}{20}$$

$$= \frac{50}{20} = 2{,}5$$

Genau der gleiche Wert hatte sich schon im ersten Fall ergeben. Wenn in zwei aufeinanderfolgenden Klassenarbeiten derselbe Mittelwert zustande kommt, so ist das sicherlich ein Zufall. Beide Male lagen ja den Zensuren ganz unterschiedliche Häufigkeiten zugrunde. Betrachten wir nun das Histogramm für die zweite Mathematikarbeit, so wird der Unterschied zur ersten Arbeit recht deutlich.

Um über eine Klassenarbeit oder eine andere Reihe von Meßwerten etwas Allgemeines auszusagen, reicht offenbar der Mittelwert nicht aus. Auf irgendeine Weise müssen wir angeben, wie dieser Durchschnitt zustande gekommen ist. Wir suchen eine Zahl, die zeigt, wie sich die einzelnen Meßwerte um den Mittelwert herum verteilen.

Um in der Sprache der Statistik zu sprechen: Welche Zahl sagt uns aus, wie stark die Meßwerte um den Mittelwert „streuen"? Von den verschiedenen Möglichkeiten, die die Statistik dafür hat, wählen wir nun eine wichtige Kennzahl aus: das lineare Streuungsmaß.

Bevor wir diese Kennzahl berechnen, lernen zunächst einen Begriff kennen, der manchem Leser noch unbekannt sein wird:
die negative Zahl.
An einem Februartag zeigt das Thermometer mittags um 12 Uhr die Temperatur von $+3\,°C$ Im Verlaufe der folgenden 12 Stunden, also bis Mitternacht, geht die Temperatur um 8 Grad zurück. Am Thermometer kann man dann ablesen: $-5\,°C$. Als Subtraktionsaufgabe sieht das so aus:

$$3-8=-5$$

Wird von einer kleineren Zahl eine größere subtrahiert, dann ergibt die Differenz stets eine negative Zahl. Mit solchen negativen Zahlen arbeiten wir jetzt auch beim Berechnen des *linearen Streuungsmaßes*.
Wir teilen uns den Weg in fünf Schritten ein und erläutern ihn am Beispiel der ersten Klassenarbeit, die bekanntlich die folgenden Ergebnisse brachte:

Zensur = Meßwert	Anzahl der Schüler = Häufigkeit
$x_1=1$	$h_1=1$
$x_2=2$	$h_2=12$
$x_3=3$	$h_3=4$
$x_4=4$	$h_4=2$
$x_5=5$	$h_5=1$

1. Schritt: Wir subtrahieren von jedem Meßwert den Mittelwert $x=2{,}5$.
Das ergibt die Differenzen

$$x_1-\bar{x}=1-2{,}5=-1{,}5$$
$$x_2-\bar{x}=2-2{,}5=-0{,}5$$
$$x_3-\bar{x}=3-2{,}5=+0{,}5$$
$$x_4-\bar{x}=4-2{,}5=+1{,}5$$
$$x_5-\bar{x}=5-2{,}5=+2{,}5$$

Das Vorzeichen dieser Differenzen ist teils positiv, teils negativ. Wenn wir die Streuung betrachten, so interessiert uns nicht, ob der einzelne Meßwert oberhalb oder unterhalb des Mittelwertes liegt. Wir suchen nach einer allgemeinen Aussage für alle Meßwerte, und deshalb beseitigen wir die Vorzeichen der berechneten Differenzen.
2. Schritt: Wir bilden von den Differenzen die absoluten Beträge.
Zur Erläuterung: Unter dem absoluten Betrag einer Zahl verstehen wir ihren Betrag ohne Vorzeichen; das mathematische Symbol dafür besteht aus zwei senkrechten Strichen. So ist der absolute Betrag von -4 gleich 4; symbolmäßig $|-4|=4$. Und für $+4$ heißt der absolute Betrag ebenfalls 4: $|4|=4$. Zwei Zahlen, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, haben also den gleichen absoluten Betrag. Zum Beispiel:
$|-3|=|+3|=3$. $|-3|$ wird gelesen als „absoluter Betrag von minus 3". Mit den absoluten Beträgen rechnen wir wie mit positiven Zahlen.
Für unser Beispiel erhalten wir

$$|x_1-\bar{x}|=|-1{,}5|=1{,}5$$
$$|x_2-\bar{x}|=|-0{,}5|=0{,}5$$
$$|x_3-\bar{x}|=|+0{,}5|=0{,}5$$
$$|x_4-\bar{x}|=|+1{,}5|=1{,}5$$
$$|x_5-\bar{x}|=|+2{,}5|=2{,}5$$

3. Schritt: Wir multiplizieren die absoluten Beträge mit den Häufigkeiten der einzelnen Meßwerte.

$$h_1\cdot|x_1-\bar{x}|=1\cdot 1{,}5=1{,}5$$
$$h_2\cdot|x_2-\bar{x}|=12\cdot 0{,}5=6{,}0$$
$$h_3\cdot|x_3-\bar{x}|=4\cdot 0{,}5=2{,}0$$
$$h_4\cdot|x_4-\bar{x}|=2\cdot 1{,}5=3{,}0$$
$$h_5\cdot|x_5-\bar{x}|=1\cdot 2{,}5=2{,}5$$

4. Schritt: Wir addieren die im 3. Schritt berechneten Produkte.

$$1{,}5+6{,}0+2{,}0+3{,}0+2{,}5=15{,}0$$

5. Schritt: Wir dividieren die erhaltene Summe durch die Anzahl $n=20$ der teilnehmenden Schüler und erhalten das lineare Streuungsmaß s.

$$s=\frac{15{,}0}{20{,}0}=0.75$$

Um uns in diesen Rechenschritten zu üben, ermitteln wir gleich noch das lineare Streuungsmaß für die Ergebnisse der zweiten Mathematikarbeit. Wir kürzen jetzt den Schreibaufwand etwas ab, indem wir die einzelnen Schritte in einer Tabelle zusammenfassen. Der Mittelwert hieß auch hier $\bar{x}=2{,}5$.

Meßwert	Häufigkeit	*1. Schritt*
$x_1=1$	$h_1=10$	$x_1-\bar{x}=-1{,}5$
$x_2=2$	$h_2=2$	$x_2-\bar{x}=-0{,}5$
$x_3=3$	$h_3=2$	$x_3-\bar{x}=+0{,}5$
$x_4=4$	$h_4=0$	$x_4-\bar{x}=+1{,}5$
$x_5=5$	$h_5=6$	$x_5-\bar{x}=+2{,}5$

2. Schritt	*3. Schritt*
$\lvert x_1-\bar{x}\rvert=1{,}5$	$h_1\cdot\lvert x_1-\bar{x}\rvert=10\cdot 1{,}5=15{,}0$
$\lvert x_2-\bar{x}\rvert=0{,}5$	$h_2\cdot\lvert x_2-\bar{x}\rvert=2\cdot 0{,}5=1{,}0$
$\lvert x_3-\bar{x}\rvert=0{,}5$	$h_3\cdot\lvert x_3-\bar{x}\rvert=2\cdot 0{,}5=1{,}0$
$\lvert x_4-\bar{x}\rvert=1{,}5$	$h_4\cdot\lvert x_4-\bar{x}\rvert=0\cdot 1{,}5=0{,}0$
$\lvert x_5-\bar{x}\rvert=2{,}5$	$h_5\cdot\lvert x_5-\bar{x}\rvert=6\cdot 2{,}5=15{,}0$

4. Schritt: Summe $=32{,}0$

5. Schritt: $s=\frac{32{,}0}{20}=1{,}6$

Das lineare Streuungsmaß gibt an, um welche Größe jeder Meßwert durchschnittlich vom Mittelwert abweicht. Die Betonung bei diesem Satz liegt auf dem Wort „durchschnittlich". Kein einziger Meßwert braucht dabei um genau den Betrag des Streuungsmaßes vom Mittelwert entfernt zu liegen, denn das Streuungsmaß ist eben eine für alle Meßwerte allgemeingültige Größe.
Für unsere beiden Mathematikarbeiten heißt das: Die einzelnen Zensuren streuen bei der ersten Arbeit durchschnittlich mit $s=0{,}75$, bei der zweiten mit $s=1{,}6$ um den gleichen Mittelwert $\bar{x}=2{,}5$. Ein großes Streuungsmaß zeigt, daß es bei den einzelnen Meßwerten große Unterschiede gibt – so wie bei der zweiten Arbeit: Von 20 Schülern erhielten zehn eine 1 und sechs eine 5.
Welches Ergebnis wünscht sich jeder Lehrer für eine Klassenarbeit? Mittelwert natürlich möglichst nahe bei 1 und ein sehr kleines Streuungsmaß, nicht größer als 1.
Ein solches kleines Streuungsmaß drückt aus, daß die Leistungen der einzelnen Schüler nicht allzuviel voneinander abweichen. Unsere Beispiele zeigen: Ohne mathematisch-statistische Berechnungen, ohne Untersuchung von Mittelwert und Streuungsmaß lassen sich die Noten einer Klassenarbeit nicht exakt deuten und auswerten.

Die folgende Aufgabe sollt ihr versuchen, selbständig zu lösen, um zu überprüfen, wieweit ihr in der Lage seid, kleinere statistische Betrachtungen anzustellen.

Arbeitskräfte im Kaufhaus

Ein Kaufhaus hat insgesamt 150 Mitarbeiter. Bedingt durch Urlaub, Krankheit, Haushalttage für Frauen, Freistellung zum Fernstudium und andere Gründe sind fast immer einige Arbeitskräfte abwesend. So betrug für den Verlauf einer Woche der tägliche Arbeitskräftebestand:

Montag	143 Mitarbeiter
Dienstag	138 Mitarbeiter
Mittwoch	147 Mitarbeiter
Donnerstag	142 Mitarbeiter
Freitag	136 Mitarbeiter
Sonnabend	140 Mitarbeiter

Berechne den durchschnittlichen Arbeitskräftebestand je Tag und das lineare Streuungsmaß!

Kombinatorik und binomischer Satz

Teil 2

Jetzt wollen wir uns die Lösung dieser Aufgaben noch einmal auf einem anderen Weg überlegen.

Der erste (z. B. der nach dem Alphabet erste) Spieler kann entweder kommen oder fehlen. Das sind zwei Möglichkeiten. Der zweite Spieler kann ebenfalls entweder kommen oder fehlen. Für beide Spieler gibt das insgesamt vier Möglichkeiten. Diese sind:

Möglichkeiten	1. Spieler	2. Spieler
1	nein	nein
2	ja	nein
3	nein	ja
4	ja	ja

Der dritte Spieler kann dabei fehlen (dann bleiben unsere vier Möglichkeiten) oder kommen (das ergibt noch einmal vier Möglichkeiten). Diese Überlegungen können wir für jeden Spieler fortsetzen. Auf diese Art und Weise vergrößert das Kommen oder Fehlen eines jeden folgenden Spielers die Anzahl der Möglichkeiten auf das Doppelte. Für 9 Spieler haben wir $2^9=512$ verschiedene Mannschaften. Darunter befindet sich als eine Möglichkeit die, daß alle 9 Spieler kommen, und als eine andere die, daß die Turnhalle leer bleibt.

Wenn man diese Überlegungen auf den Fall von n Spielern verallgemeinert, so erhält man die wichtige Formel:

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n \text{ oder} \qquad (5)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n \qquad (5a)$$

Aufgaben

▲23▲ Jeder von den 7 Studenten A, B, C, D, E, F, G kann zu einem Betriebspraktikum in eins von zwei Werken geschickt werden. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

▲24▲ In einer Klasse sind 29 Schüler. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Anwesenheit bzw. das Fehlen dieser Schüler in ihrem Klassenraum?

▲25▲ Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Aufteilung von acht verschiedenen Geldstücken in zwei Portemonnaies?

▲26▲ Wieviel verschiedene gerade Teiler besitzt die Zahl 2310?

▲27▲ Fünf Schüler möchten Fotos von sich haben. Neben den Einzelbildern und dem Gruppenfoto mit allen fünf Schüler wollen sie auch alle Bilder mit je zwei verschiedenen Schülern, alle mit je drei verschiedenen und alle mit je vier verschiedenen Schülern haben.

Wieviel Möglichkeiten für verschiedene Fotos gibt es?

Zusammenfassung von 1. bis 6.

Wir betrachten drei Arten von Vereinigungen: Permutationen, Variationen und Kombinationen.

a) Permutationen unterscheiden sich voneinander nur durch die Anordnung der Elemente;

b) Variationen unterscheiden sich voneinander durch die Anordnung der Elemente oder durch die Auswahl der Elemente;

c) Kombinationen unterscheiden sich voneinander nur durch die Auswahl der Elemente.

Bei den nachfolgenden Aufgaben ist zuerst die Art der jeweiligen Vereinigung festzustellen, und danach sind die Berechnungen auszuführen.

▲28▲ Am ersten Schultag begrüßten sich 20 Schüler mit Handschlag. Wieviel solcher Händedrücke gab es?

▲29▲ 20 Absolventen einer Schule beschlossen, zur Erinnerung jeweils ihre Fotos auszutauschen. Wie viele Fotos wurden dazu insgesamt benötigt?

▲30▲ Die Schüler einer Klasse werden in neun verschiedenen Fächern unterrichtet. Am 1. September sollen sie fünf verschiedene Unterrichtsstunden (Fächer) haben. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für das Aufstellen des Stundenplanes an diesem Tag?

▲31▲ Ein Unteroffizier muß 4 von 10 Soldaten für eine Streife auswählen. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

▲32▲ An einer FDJ-Versammlung nehmen 15 Jugendfreunde teil. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Auswahl des Versammlungsleiters, seines Stellvertreters und des Sekretärs der Versammlung?

▲33▲ Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, aus 15 Menschen eine dreiköpfige Delegation auszuwählen?

7. In der Aufgabe 17b wurde die Gültigkeit der folgenden wichtigen Formel bewiesen:

$$C_{p+1}^k=C_p^k+C_p^{k-1} \qquad (6)$$

Da die beiden folgenden Beziehungen gelten:

$$C_k^0=C_k^k=1 \text{ und } C_k^1=k,$$

erhalten wir:

$$C_3^2=C_2^1+C_2^2=2+1=3$$
$$C_4^2=C_3^1+C_3^2=3+3=6 \text{ usw.}$$

Die erhaltenen Ergebnisse kann man in Form einer Tabelle der Anzahl der Kombinationen aufschreiben, wobei in der k-ten Zeile die Anzahl der Kombinationen aus k Elementen steht, wie z. B.

$$C_7^5=C_6^4+C_6^5=15+6=21$$

Anzahl der Kombinationen

von	zu je 0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Bemerkung: Die erhaltene Tabelle heißt arithmetisches Dreieck oder Pascalsches Dreieck.

▲34▲ Setze die Tabelle bis zur 12. Zeile fort!

8. Wenn wir zwei zweigliedrige Ausdrücke (Binome) miteinander multiplizieren, so erhalten wir:

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$$

Bei drei Binomen ergibt sich:

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$$

Jetzt wollen wir n solche Binome miteinander multiplizieren:

$$P_n(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-p) \qquad (7)$$

Durch Ausklammern und Zusammenfassen erhalten wir ein Polynom, das wir nach fallenden Potenzen von x anordnen:

$$P_n(x)=\begin{cases} x^n \\ -x^{n-1}(a+b+c+\ldots+p) \\ +x^{n-2}(ab+ac+bc+\ldots) \\ -x^{n-3}(abc+abd+\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-1)^n abc\ldots p \end{cases}$$

oder kürzer:

$$P_n(x) \qquad (7a)$$
$$=S_0x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+\ldots+S_n$$

Man kann leicht feststellen, daß

a) der erste Koeffizient S_0 dieses Polynoms $P_n(x)$ gleich 1 ist;

b) die einzelnen Glieder Koeffizienten mit abwechselnden Vorzeichen besitzen;

c) jeder Koeffizient S_k gleich der Summe aller möglichen Produkte der zweiten Glieder der unter (7) angegebenen Binome ist, und zwar mit je k Faktoren in jedem Produkt.

Aufgabe

▲35▲ Klammere aus, und fasse das Polynom nach fallenden Potenzen von x zusammen:

a) $(x-2)(x-3)(x-4)$
b) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
c) $(x-1)(x+2)(x+4)(x-5)$
d) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)(x+2)$

Bemerkung: Wenn $P_n(x)=0$, so erhalten wir durch Ausklammern eine Gleichung n-ten Grades bezüglich x. Sie besitzt genau die n folgenden Lösungen: $x_1=a$, $x_2=b$ usw., weil diese eine der im Ausdruck (7) stehenden Klammern zu Null werden lassen. Solche Gleichungen wollen wir in diesem Artikel nicht betrachten.

9. Im Ausdruck (7) seien nun alle zweiten Glieder in den Klammern untereinander gleich, d. h.

$$P_n(x)=(x-a)^n$$

Dann ist klar, daß

$S_0=1$
$S_1=(a+a+a+\ldots+a)=na$
$S_2=(a^2+a^2+a^2+\ldots+a^2)=C_n^2a^2$,

weil es in der Klammer soviel Summanden gibt, soviel Möglichkeiten von Produkten mit zwei Faktoren aus n Faktoren existieren, nämlich C_n^2

$S_3=C_n^3a^3$
$S_4=C_n^4a^4$ usw.

Der „allgemeine" (an $(k+1)$-ter Stelle stehende) Koeffizient ist

$$C_n^ka^k.$$

Schließlich erhalten wir als letzten Koeffizienten a^n.

Zusammenfassend ergibt sich hieraus:

$$(x-a)^n=x^n-nax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}-C_n^3a^3x^{n-3}+\ldots+(-1)^kC_n^ka^kx^{n-k}+\ldots+(-1)^na^n \qquad (8)$$

Die Formel (8) heißt Zerlegungsformel des Newtonschen Binoms und wird zum Potenzieren des Binoms $(x-a)$ mit natürlichen Exponenten benutzt. In dieser Formel hat das $(k+1)$-te Glied die folgende Form:

$$T_{k+1}=(-1)^kC_n^ka^kx^{n-k} \qquad (9)$$

Newton selbst hat eine andere Formel hergeleitet, so daß die hier benutzte Benennung dieser Formel nicht ganz gerechtfertigt ist. Oft nennt man diese Formel einfach binomischen Lehrsatz oder die binomische Formel.

In der Praxis benötigt man oft irgendeins der Zerlegungsglieder. Man kann es bestimmen, ohne die ganze Zerlegung aufzuschreiben.

Bemerkung: 1. Beim Potenzieren (mit natürlichen Exponenten) der Summe $(x+a)$ werden alle Zerlegungsglieder positiv.

2. Unter „x" und „a" kann man eine beliebige Zahl bzw. einen beliebigen Term n verstehen, z. B.

a) $(x+a)^6 = x^6+6ax^5+C_6^2a^2x^4+C_6^3a^3x^3+C_6^4a^4x^2+C_6^5a^5x+a^6$
$= x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$

b) $(3x-2a)^5=(3x)^5-5\cdot 2a(3x)^4+C_5^2(2a)^2(3x)^3-C_5^3(2a)^3(3x)^2+C_5^4(2a)^4 3x-(2a)^5$
$=243x^5-810ax^4+1080a^2x^3+720a^3x^2+240a^4x-32a^5$

Wir wollen nun noch einige Eigenschaften der Formel (8) zusammenstellen:

1. die Anzahl der Zerlegungsglieder ist um 1 größer als der Exponent n;
2. der Exponent der ersten Zahl (x) nimmt ab, und der Exponent der zweiten Zahl (a) wächst von Glied zu Glied jeweils um 1; die Summe der Exponenten ist in allen Gliedern gleich n;
3. die Koeffizienten der Glieder, die gleichweit vom Anfang und vom Ende der Zerlegung entfernt sind, sind untereinander gleich (das sind gerade die Zahlen aus der entsprechenden Zeile des Pascalschen Dreiecks);
4. die Summe aller Binomialkoeffizienten ist gleich 2^n, vgl. mit der Formel (5);
5. die Summe aller Binomialkoeffizienten der geradzahligen Glieder ist gleich der Summe der Binomialkoeffizienten der ungeradzahligen Glieder; jede dieser Summen ist gleich 2^{n-1}.

Aufgaben

▲36▲ Beweise die Eigenschaften 1., 3., 4. und 5.!
Hinweis: Benutze zum Beweis von 4. und 5. den binomischen Lehrsatz für $(1+1)^n$ und $(1-1)^n$.

▲37▲ Zerlege:
a) $(2a^2-3a)^5$ b) $(1-\sqrt{2})^6$
c) $(2\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x})^4$

▲38▲ Bestimme
a) das neunte Glied der Zerlegung $(a+\sqrt{b})^{12}$
b) das sechste Glied der Zerlegung $(a^2-b^3)^{13}$

10. Musteraufgabe 6:
Bestimme das Zerlegungsglied von $(\sqrt{y}-\sqrt[4]{y})^{20}$, das y^7 enthält!
Lösung:
Dazu schreiben wir uns das allgemeine Zerlegungsglied auf:

$$T_{k+1}=C_{20}^k(\sqrt[4]{y})^k(\sqrt{y})^{20-k}$$
$$=C_{20}^k y^{\frac{k}{4}}y^{\frac{20-k}{2}}=C_{20}^k y^{\frac{40-k}{4}}$$

Nach der Aufgabenstellung gilt:

$$y^{\frac{40-k}{4}}=y^7,\text{ d. h. } \frac{40-k}{4}=7.$$

Hieraus ergibt sich $k=12$ und das gesuchte Glied hat die Form:

$$T_{12+1}=C_{20}^{12}y^7=C_{20}^8y^7=216970y^7$$

Musteraufgabe 7:
In der Zerlegung $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})$ verhält sich der Koeffizient des fünften Gliedes zum Koeffizienten des dritten Gliedes wie 7:2.
Bestimme das Zerlegungsglied, das x in der ersten Potenz erhält!

Lösung:
1. Aus der Aufgabenstellung folgt, daß

$$\frac{C_n^4}{C_n^2}=\frac{7}{2}\text{ oder}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n(n-1)}=\frac{7}{2}$$

Daraus ergibt sich, daß $n=9$.

2. Das allgemeine Zerlegungsglied lautet:

$$T_{k+1}=C_9^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k(\sqrt{x})^{9-k}=C_9^kx^{-\frac{2k}{3}}x^{\frac{9-k}{2}}$$

Da wir das Glied suchen, das x in der ersten Potenz enthält, gilt:

$$-\frac{2k}{3}+\frac{9-k}{2}=1$$

Daraus ergibt sich, daß $k=3$.

3. Das gesuchte Glied ist

$$T_{3+1}=C_9^3x^1=84x$$

Aufgaben

▲39▲ In der Zerlegung $\left(\frac{1}{z}+\sqrt{z}\right)^n$ verhält sich der Koeffizient des vierten Gliedes zum Koeffizienten des sechsten Gliedes wie 5:18. Bestimme in dieser Zerlegung das Glied, das kein z enthält!

▲40▲ Bestimme das Glied der Zerlegung $\left(z\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$, das nach der Vereinfachung z^5 enthält, wenn die Summe der Binominalkoeffizienten dieser Zerlegung gleich 128 ist!

▲41▲ Es sei das folgende Polynom gegeben:
$x(1-x)^{10}+x^2(1-2x)^{20}+x^3(1-3x)^{30}$
Bestimme den Koeffizienten des Gliedes, das x^4 enthält, nachdem alle genannten Operationen ausgeführt worden sind!

▲42▲ Das zweite, dritte und vierte Glied der Zerlegung $(x+y)^z$ ist gleich 240, 720 bzw. 1080. Bestimme x, y und z!

▲43▲ Leite den binomischen Lehrsatz für $(x+a)^n$ her unter Benutzung der Methode der vollständigen Induktion über n!
Hinweis: Benutze die Formel (6).

11. Musteraufgabe 8:
Berechne $1{,}002^5$ mit einer Genauigkeit bis zu 0,000001!
Lösung:
$(1+0{,}002)^5=1^5+5\cdot 1^4\cdot 0{,}002$
$+10\cdot 1^3\cdot 0{,}002^2+10\cdot 1^2\cdot 0{,}002^3$
$+5\cdot 1^1\cdot 0{,}002^4+0{,}002^5$
$=1+0{,}01+0{,}00004+0{,}00000008$
$+0{,}00000000008+0{,}000000000000032$
$\approx 1{,}01004$

Wenn der zweite Summand in einem Binom wesentlich kleiner ist als der erste, so sind die Zerlegungsglieder, die diesen Summanden in hohen Potenzen enthalten, fast Null. Bei Berechnungen mit einer vorgegebenen Genauigkeit können wir diese Glieder dann vernachlässigen, wenn sie nicht mehr in dem vorgegebenen Genauigkeitsintervall liegen.

▲44▲ Berechne
a) $0{,}997^4$ mit einer Genauigkeit bis zu 10^{-6}!
b) $1{,}04^6$ mit einer Genauigkeit bis zu 10^{-4}!
Bemerkung: Wenn die Größe x sehr klein ist, so benutzt man für Näherungsrechnungen oft die Formel

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$$

A. Halameisär

Combinatorial Problems

▲1▲ There are five roads leading from city A to city B, and three from B to C. How many routes passing through B lead from A to C?

▲2▲ There are five types of envelopes without postage stamps and four types of postage stamps of the same value. In how many ways can we choose an envelope with a postage stamp?

▲3▲ Choose one textbook each out of 3 algebras, 7 geometries and 7 trigonometry books. In how many ways can this be done?

▲4▲ In how many ways is it possible to make a tricolour flag if there is bunting of 5 different colours? The same, only one of the strips has to be red.

▲5▲ One person has 7 mathematics books, another has 9 books. In how many ways can they exchange their books, one for one!

▲6▲ A committee of 9 is elected. They elect a chairman, vice-chairman, secretary and treasurer. In how many ways can this be done?

▲7▲ Mother has 2 apples and 3 pears. Every day, for five days running, she gives me one piece of fruit. In how many ways can this be done?

▲8▲ There are n telephone subscribers. In how many ways is it possible to connect three pairs simultaneously?

▲9▲ There are 12 girls and 15 boys at a school ball. In how many ways can we form 4 pairs in a dance?

▲10▲ In how many ways can 5 different rings be put on four fingers of one hand?

Olympiadeaufgaben aus der Demokratischen Republik Vietnam

(Republikausscheid 1974)

Seit einigen Jahren haben zunehmend mehr junge Vietnamesen die Möglichkeit, am *Herder-Institut* der Karl-Marx-Universität Leipzig einen etwa zehnmonatigen Vorbereitungslehrgang zu absolvieren. Während dieser Zeit vervollkommnen unsere vietnamesischen Freunde ihre in Hanoi erworbenen Kenntnisse der deutschen Sprache und machen sich mit den Besonderheiten der Fachsprache der einzelnen Unterrichtsfächer (Ma, Ph, Ch, Bio bzw. Gesellschaftswissenschaften) vertraut. Im jeweils folgenden Studienjahr beginnen sie dann das Studium an einer Hoch- oder Fachschule der DDR.

Seit dem Schuljahr 74/75 nehmen die besten vietnamesischen Studenten des *Herder-Institutes* an den Mathematikolympiaden der DDR teil. Sie errangen bei der Bezirksolympiade im vergangenen Schuljahr einen 2. und 3. Preis in Klassenstufe 11, in diesem Jahr demonstrierten sie den hohen Stand der Förderung mathematischer Talente in ihrer Heimat mit drei ersten und zwei zweiten Preisen in Klassenstufe 12.

Le Viet Thai, zur Zeit Student an der Bergakademie Freiberg, stellt uns die vorliegenden Aufgaben zur Verfügung. *Ch. Werge*

Aufgaben Klassenstufe 7

1. Tag

1. Beweise für alle natürlichen Zahlen n!
$$24 \mid n^4+6n^3+11n^2+6n$$

2. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung ($x \in R$)!
$$x-a^2x+a-\frac{b^2}{b^2-x^2}=\frac{x^2}{x^2-b^2}$$

3. Bestimme alle zweistelligen natürlichen Zahlen $10a+b$ (a, b Ziffern), für die gilt:
$$(10a+b)^2=(a+b)^3!$$

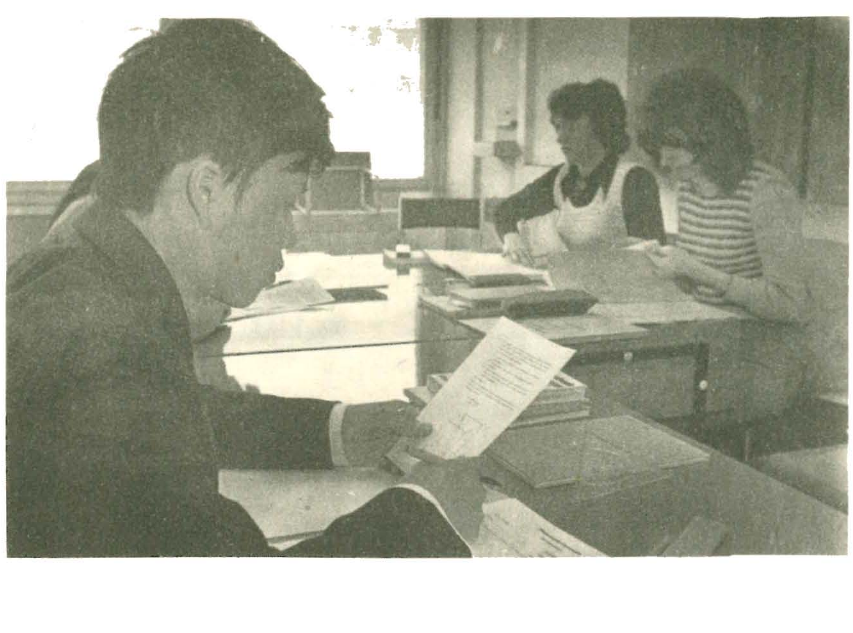
2. Tag

4. Einige ältere Bürger wollen 10 Bäume pflanzen. Diese Bäume bilden 5 Zeilen und jede Zeile hat genau 4 Bäume. Sie haben sechs Möglichkeiten gefunden. Bestimme die sechs Möglichkeiten!

5. Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ aus folgenden Bestimmungsstücken!
$\overline{AB}=a$; $\overline{AC}+\overline{BD}=m$; $\sphericalangle(AC, BD)=\alpha$

6. In einem spitzwinkligen $\Delta\ ABC$ liegt ein $\Delta\ A'B'C'$ mit $A' \in \overline{BC}$, $B' \in \overline{AC}$ und $C' \in \overline{AB}$. Bestimme das Dreieck $\Delta\ A'B'C'$, das den kleinsten Umfang hat!

Vietnamesische Studenten des Herder-Instituts Leipzig und sowjetische Schüler nahmen an der Bezirksolympiade des Bezirks mit großem Erfolg teil.



Übung macht den Meister

Quadratische Funktionen

Aus Abschlußprüfungen der Oberschulen der DDR

1976

a) Durch die Gleichung

$$y=x^2-6x+5 \qquad (x \in P)$$

ist eine Funktion bestimmt.
Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!
Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel. Geben Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes an!
Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion mindestens im Intervall

$$0 \leqq x \leqq 6!$$

b) Durch die Gleichung

$$y=x^2-6x+q \qquad (x, q \in P)$$

sind Funktionen gegeben.
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen q, die man in die Funktionsgleichung einsetzen kann, so daß die damit bestimmten Funktionen keine Nullstellen haben!

1975

Durch $y=\frac{1}{x^2}$ $\qquad (x \in P;\ x \neq 0)$

ist eine Funktion gegeben.
a) Berechnen Sie deren Funktionswerte y für die in der Tabelle vorgegebenen Argumente x! (Doppelbrüche sind in gemeine Brüche umzuformen.)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+\frac{5}{2}$
y							

(Übertragen Sie diese Tabelle auf Ihr Arbeitsblatt!)
b) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
c) Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatesystem den Graphen der Funktion

$$y=x^2 \qquad (x \in P)!$$

d) Geben Sie die Koordinaten derjenigen Punkte an, die sowohl zum Graphen der Funktion $y=\frac{1}{x^2}$ als auch zu dem der Funktion $y=x^2$ gehören!

1974

Durch die Gleichung $y=x^2-2$ ist eine Funktion gegeben, ihr Graph ist eine Parabel.
a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!
b) Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes an, und zeichnen Sie die Parabel!
c) Verschieben Sie die Parabel so, daß ihr Scheitelpunkt die Koordinaten $x_s=0$, $y_s=3$ hat!
(Zeichnen Sie die verschobene Parabel in dasselbe Koordinatensystem, das Sie bei Teilaufgabe b) benutzt haben!)
d) Geben Sie die Gleichung der Funktion an, deren Graph durch die Verschiebung entstanden ist!

1973

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $y=x^3$ $(x \in P)$. Berechnen Sie für diese Funktion die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte!

x	2	3	-1	
y				125

1972

Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen
(1) $\quad f_1(x)=y=2x+1,$
(2) $\quad f_2(x)=y=x^2+2x-3 \qquad$ mit $x \in P$.
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f_1 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f_1!
c) Der Graph der Funktion f_2 ist eine Parabel.
Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels, und zeichnen Sie die Parabel in das bei Teil a) verwendete Koordinatensystem!
d) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_2!
e) Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte an!

1971

a) Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Koordinateneinheit 1 cm) die Graphen der Funktionen mit Gleichungen der Form $y=ax^2$ (x reell) für

1. $a=1 \qquad$ 2. $a=\frac{1}{2} \qquad$ 3. $a=-1$

mindestens im Intervall $-3 \leqq x \leqq +3$!
b) Geben Sie den Wertebereich von Funktionen mit Gleichungen der Form $y=ax^2$ $(a<0)$ an, wenn der Definitionsbereich die Menge aller reellen Zahlen (d. h. $-\infty<x<+\infty$) ist!

1970

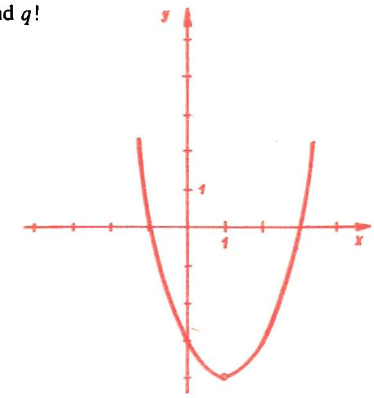
a) Eine quadratische Funktion habe eine Gleichung der Form

$$y=(x+d)^2+e. \qquad (x \text{ reell})$$

Geben Sie für den Fall $d=0$ und $e=3$ die Scheitelpunktskoordinaten des Graphen der Funktion an!
b) Die nachstehend dargestellte Parabel sei der Graph einer weiteren quadratischen Funktion mit einer Gleichung von der Form

$$y=(x+d)^2+e \qquad (x \text{ reell})$$

1. Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme der obenstehenden Abbildung die Nullstellen x_1 und x_2 dieser Funktion!
2. Geben Sie die Gleichung dieser speziellen quadratischen Funktion in der Form $y=(x+d)^2+e$ an!
3. Überführen Sie nunmehr diese Gleichung der Funktion in eine Gleichung der Form $y=x^2+px+q$, und bestimmen Sie hieraus p und q!



1969

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2-ax+c=0 \qquad (a, c, x \text{ reell}).$$

a) Geben Sie für diese Gleichung die Diskriminante an!
b) Geben Sie die Anzahl aller reellen Lösungen der Gleichung für folgende zwei Fälle an:
(1) $\quad a=0$ und $c=\frac{1}{5} \qquad$ (2) $\quad c=\frac{a^2}{4}$
Begründen Sie Ihre Aussage mit Hilfe der Diskriminante!

1968

Die Gleichung einer quadratischen Funktion lautet $y=(x-2)^2-1$; $\qquad$ (x reell)
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Bereich $1 \leqq x \leqq 5$!
b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion!

Zur Übung

Gegeben ist die quadratische Funktion mit der Gleichung

$$y=x^2-6x+5 \qquad (x \in P).$$

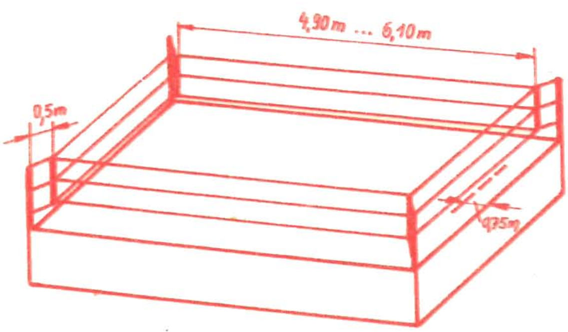
a) Zeichnen Sie das Bild dieser Funktion!
b) Geben Sie den Wertebereich an!
c) Lesen Sie die Nullstellen aus der Zeichnung ab!
d) Überprüfen Sie die Richtigkeit der für die Nullstellen ermittelten Werte rechnerisch!
e) Berechnen Sie, welcher Funktionswert y in dieser Funktion dem Argument $x=2$ zugeordnet ist!

Von dem Graphen einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y=x^2+px+q$ $(x \in P)$ ist der Scheitelpunkt $S(-3;\ -4)$ gegeben.
a) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion im Intervall $-6 \leqq x \leqq 0$!
b) Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion!
c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion für den gesamten Definitionsbereich $(x \in P)$ an!
d) Lesen Sie die Nullstellen aus der Zeichnung ab!
e) Ermitteln Sie die Nullstellen auch rechnerisch und vergleichen Sie sie anschließend mit den aus der Zeichnung gefundenen Werten!

Mathematik und Sport

alpha-Wandzeitung

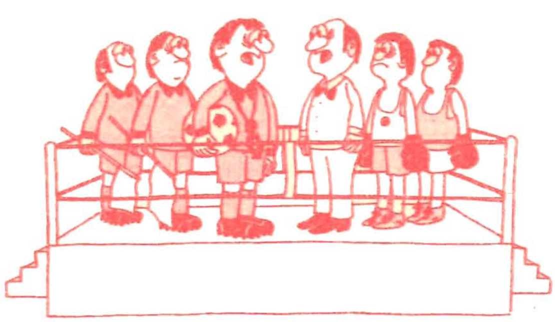
▲1▲ Ein quadratischer Boxring hat die in der Abbildung angegebenen Abmessungen und ist mit einem 1 cm dicken Fußbodenbelag ausgelegt.



a) Wieviel m^2 beträgt die minimale und die maximale Kampffläche zwischen den Seilen?

b) Wieviel m^2 Fußbodenbelag sind mindestens bereitzustellen?

c) Wieviel m Seil sind maximal zur Bespannung nötig (wobei die Abmessungen der Pfosten vernachlässigt werden sollen)?



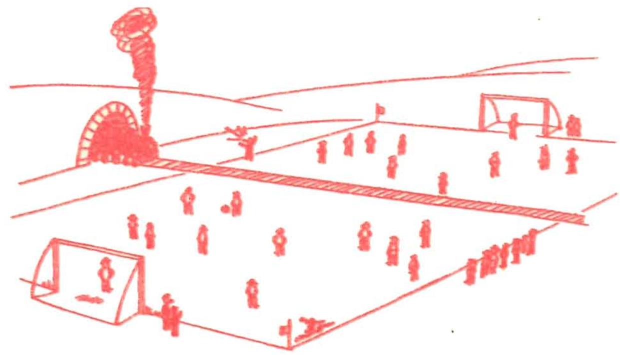
„Wer hat den Veranstaltungsplan aufgestellt?"

▲2▲ Das Spielfeld beim Hallenhandball besitzt einen Torraum, dessen Begrenzungslinie 6 m von der Grundlinie (auf der Breite des Tores) bzw. 6 m von den Torpfosten entfernt ist.

Das Tor ist 3 m breit.

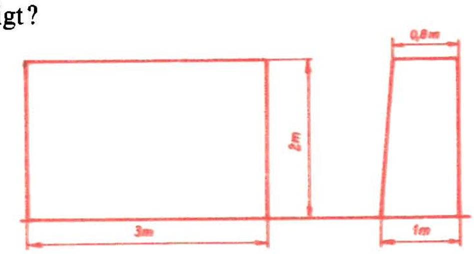
a) Berechne den Flächeninhalt des Torraumes und die Länge der Begrenzungslinie!

b) Wieviel Prozent der Fläche des 40 × 20 m^2 großen Hallenhandballfeldes nehmen die beiden Torräume ein?



▲3▲ Ein Hallenhandballtor hat die aus der Skizze ersichtlichen Abmessungen.

Wieviel m^2 Netz werden für die Bespannung benötigt, wenn man die Dicke der Begrenzungspfosten vernachlässigt?



▲4▲ Ein Handball muß einen Umfang von 58 bis 60 cm haben. Berechne sein kleinstes und sein größtes Volumen, wenn ideale Kugelform angenommen wird!

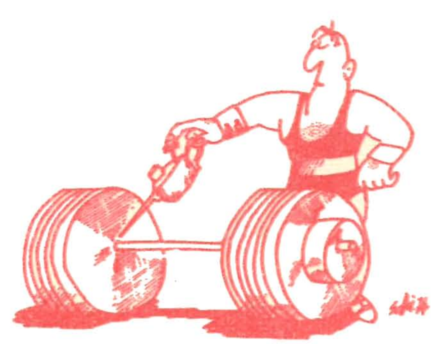
▲5▲ Die Eisenstange einer Scheibenhantel wiegt 20 kg und ist 220 cm lang.

Berechne

a) ihren Durchmesser;

b) den äußeren Durchmesser einer auf sie aufschiebbaren Scheibe von 50 kg Gewicht, wenn die Scheibe 10 cm dick ist!

$$\left(\varrho_{Fe} = 7{,}8\,\frac{g}{cm^3}\right)$$

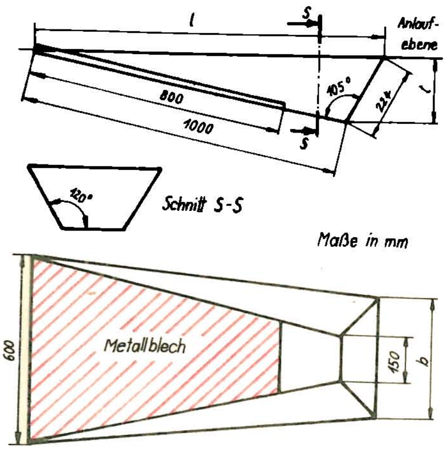


▲6▲ Der Einstichkasten für den Stabhochsprung hat folgende Form und Abmessungen:

Berechne

a) die Länge l des Kastens in der Anlaufebene,

b) seine größte Tiefe t,



c) seine Breite b am Ende des Kastens in der Anlaufebene,

d) die Fläche des Metallbleches, das den vorderen Teil des Kastenbodens schützt,

e) die Oberfläche des Körpers, der vom Einstichkasten und der Anlaufebene begrenzt wird!

▲7▲ Die Kugel für das Kugelstoßen der Männer wiegt 7,257 kg, ihr minimaler Durchmesser beträgt 110 mm, ihr maximaler 130 mm. Sie besteht entweder aus massivem Eisen $\left(\varrho_{Fe} = 7{,}8 \frac{g}{cm^3}\right)$ oder es ist eine Bleikugel $\left(\varrho_{Pb} = 11{,}3 \frac{g}{cm^3}\right)$ mit Eisenmantel.

Berechne

a) den Durchmesser einer massiven Eisenkugel,

b) den maximalen Durchmesser der inneren Bleikugel, damit die gesamte Kugel noch den Wettkampfbestimmungen entspricht!

„Loooslassen!!“

▲8▲ Das Kugelstoßen erfolgt aus einem Kreis mit 2,135 m Durchmesser heraus. Dieser Kugelstoßring wird an seiner Vorderseite von einem Stoßbalken aus Holz begrenzt, dessen Abmessungen den Skizzen zu entnehmen sind:

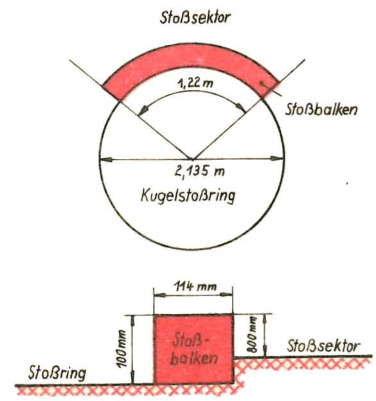
Welche Fläche des Stoßbalkens ist

a) von oben,

b) vom Kugelstoßring aus,

c) vom Stoßsektor aus

zu sehen (ohne Stirnflächen!)?

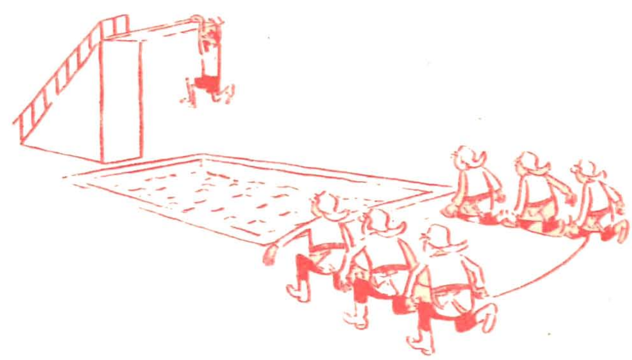


▲9▲ Eine 2,75 m breite und 9 m lange Sprunggrube soll mit frischem Sand so aufgefüllt werden, daß der Sand 50 cm hoch liegt.

Wieviel t Sand sind anzufahren $\left(\text{Dichte von trockenem Sand } \varrho = 1{,}6 \frac{g}{cm^3}\right)$?

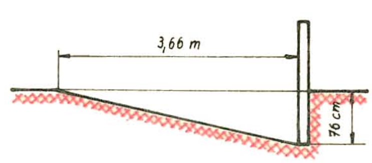
▲10▲ Ein Absprungbalken für Weit- bzw. Dreisprung hat folgende Mindestmaße: Länge 1,22 m; Breite 0,20 m; Höhe 0,10 m.

Berechne das Volumen des Balkens!

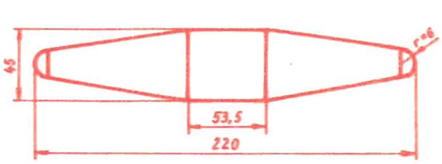


▲11▲ Der Wassergraben des 3000-m-Hindernislaufes hat die in der Zeichnung angegebenen Abmessungen.

Welche Neigung hat der Grabenboden?

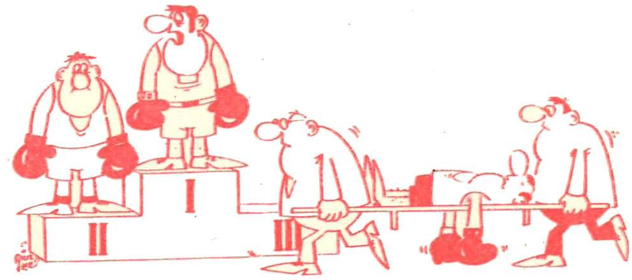


▲12▲ Ein Diskus für Männer hat folgenden Querschnitt (Maße in mm):



Berechne die Fläche dieses Querschnittes! *Ch. Pollmer*

In freien Stunden alpha heiter



„Immer die Warterei auf den Dritten!"

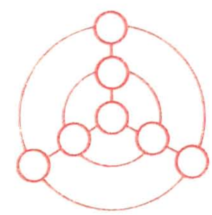
Wer nimmt das letzte Hölzchen?

Fordere einen Freund auf, sich mit dir in ein *Hölzchenduell* einzulassen! Du hast dabei nichts zu befürchten, es sei denn, dein Partner kennt diese Knobelei. Schütte die Hölzchen auf den Tisch, und reihe sie nebeneinander! Jeder – dein Freund und du – darf jetzt abwechselnd ein bis drei Hölzchen aufnehmen. Derjenige, dem es beschieden ist, das letzte Hölzchen aufzunehmen, hat die Knobelei verloren.
Du wirst immer gewinnen, wenn du die Hölzchen unauffällig zählst und darauf achtest, daß dein Freund dann aufnehmen muß, wenn 49, 45, 41, 37, 33, 29, 25, 21, 17, 13, 9, 5 Hölzchen liegen. Du wirst also immer so aufnehmen, daß du deinem Partner die erwähnten Stückzahlen servieren kannst.
Ein Beispiel: Du bist am Zuge. Es liegen 23 Hölzchen vor dir. 2 nimmst du auf, es verbleiben 21. Dein Freund nimmt 3 auf, du begnügst dich mit einem, 17 Hölzchen verbleiben noch. 1 nimmt dein Freund, jetzt bist du nicht so bescheiden, du nimmst gleich 3 Stück auf. Es verbleiben 13. Dein Freund nimmt 2 Hölzchen, du auch. 9 Hölzchen liegen noch auf dem Tisch. 3 nimmt dein Freund, du hebst 1 auf. Jetzt kommt der Endkampf. 5 Hölzchen sind noch vorhanden. Dein Freund kann 1, 2 oder 3 aufnehmen, du hast immer die Möglichkeit, so aufzuheben, daß für ihn 1 übrigbleibt.
Hast du im *Duell* einmal eine der angeführten Richtzahlen erreicht, zum Beispiel 33, so ist es für dich einfach, die Knobelei zu steuern. Nimmt nämlich dein Partner 3 Hölzchen auf, so begnügst du dich mit 1. Reichen deinem Freund 2 Hölzchen, so nimmst auch du 2 auf. Genügt deinem Freund jedoch 1 Hölzchen, so kassierst du 3. Wenn du so verfährst, wird deinem Freund immer das letzte Hölzchen vorbehalten sein.

Magische Kreise

Die Zahlen 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13 sollen so in die Figur eingesetzt werden, daß die Summe der drei Zahlen, die auf demselben Kreis oder derselben Geraden liegen, stets gleich ist. (Jede Zahl ist dabei nur einmal zu verwenden.)
Bestimme die Summe der drei Zahlen, und trage, unter Beachtung der gestellten Forderung, die Zahlen ein!

Fachberater f. Math. H. Kampe, OS Neuseddin



Die Mückenfamilie

Von einer Mückenfamilie ist folgendes bekannt:
(1) Der Mückenvater, seine Eltern, seine Tante *Mucki* und sein Großvater *Surrefein* leben zusammen.
(2) Die Mückenmutter hat ihre drei Schwestern und ihre vier Brüder mitgebracht. Auch ihr Vater ist noch in der Familie *Flatterflügel*.
(3) Die Mückenmädchen sind 4mal soviel wie die Mückenjungen, wenn der Mückenjunge *Kugelbauch* abgezogen wird.
(4) Die Anzahl der Mückenkinder ist kleiner als 23, aber größer als 18.
a) Wieviel Mitglieder hat die gesamte Mückenfamilie?
b) Wieviel Mückenmänner, Mückenfrauen, Mückenjungen und Mückenmädchen gibt es?
c) Wie groß ist die Anzahl der Mückenkinder?

Katrin Pohl, Lugau (13 Jahre alt)

Interessante Brüche

Wenn man zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{1}{3}$ den Nenner addiert, dann verdoppelt sich der Wert des Bruches:

$$\frac{1+3}{3+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Es ist der Bruch zu suchen, dessen Wert sich bei der Addition des Nenners zum Zähler und Nenner a) verdreifacht, b) vervierfacht.

aus: „Mathe zur Unterhaltung", Moskau

A vanishing Number

In einer alten Sprachzeitschrift stand das folgende Rätsel:
A vanishing Number –
There is a number of three figures, in value not very far short of a thousand, but when halved its value is nothing.
What is it?
Solution –
The number is 888. When halved it becomes
$\frac{000}{000} = 0.$
Das Rätsel enthält grundlegende Fehler. Welche sind es?

Mathematikfachlehrer W. Zehrer, Netzschkau

Silbenrätsel

ben – chen – e – e – ein – fer – fläch – gral – heits – in – ka – kel – kreis – kur – läu – ma – mul – nal – nen – ner – ner – nus – o – pli – ra – satz – si – te – ti – tion – ti – ve – win.

1. Er wird bestimmt durch eine Drehung, die zwei von demselben Punkt ausgehende Strahlen ineinander überführt.
2. Summe von unendlich vielen Differenzen
3. Teil des Bruches
4. Bild einer Funktion
5. Kreis mit dem Radius 1
6. Teil des Rechenstabes
7. Rechenoperation
8. Eine transzendente Zahl
9. Beweisbare Aussage
10. Winkelfunktion
11. Bezeichnung für Körper mit nur ebenen Begrenzungsflächen
12. Nenner eines Bruches von der Wurzel befreien.

Die ersten Buchstaben der 12 gefundenen Wörter ergeben ein Zeichengerät.

Dipl.-Lehrer Dieter Völzke, Greifswald

Der geheimnisvolle Schatz

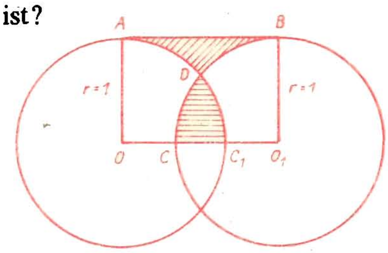
Sterbend trug ein alter Pirat seinem Enkel auf, einen versteckten Schatz zu holen: „Der Schatz liegt auf einer Insel. Du findest ihn, wenn du dich nach drei Punkten orientierst: einem Turm, einer Eiche und einem hohen Ahornbaum. Geh vom Turm zur Eiche und von da nach rechts unter einem rechten Winkel genau so weit wie vom Turm bis zur Eiche! Stecke da einen Stab in die Erde! Dann geh vom Turm zum Ahorn und von da nach links unter einem rechten Winkel so weit wie vom Turm zum Ahorn! Stecke auch da einen Stab in die Erde! In der Mitte zwischen den beiden Stäben liegt der Schatz vergraben.“
Der Enkel kam auf die Insel, fand Eiche und Ahorn. Vom Turm fehlte jede Spur. Wie soll er nun den Schatz finden? Kannst du ihm helfen?

aus: Quant 1/75, Moskau

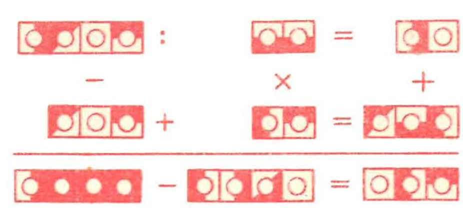
Denkökonomie

Wie groß ist die Strecke $\overline{OO_1}$ in dem abgebildeten geometrischen Problem, wenn die schraffierten Flächen gleich groß sind und der Radius der Kreise jeweils $r = 1$ ist?

Krudetski



Zahlenrätsel im Oktalsystem

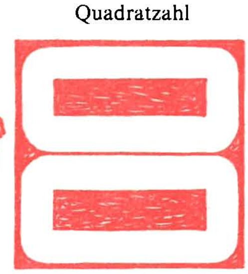


aus: Wurzel 12/75

Kegelmantel

eingeschlossener Winkel

Quadratzahl



Winkel an der Spitze

Über die Aufgabe, die Anzahl isomerer chemischer Verbindungen zu finden

Die Frage, wie zum Beispiel bei gesättigten Kohlenwasserstoffen, C_nH_{2n+2}, die Anzahl der isomeren Verbindungen gefunden werden kann, wird im Chemieunterricht nicht behandelt. Wer sich einmal mit dieser Frage beschäftigt hat, weiß, daß sie nicht ganz einfach zu beantworten ist. Die entsprechende Zahlenfolge (in Abhängigkeit von der Anzahl n der C-Atome) ist in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Tabelle 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13...
C_nH_{2n+2}	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	355	802...

Prüft, ob es sich um

a) eine arithmetische Folge 1. Ordnung,

b) eine geometrische Folge,

c) eine arithmetische Folge m-ter Ordnung ($m > 1$),

d) die Folge der FIBONACCIschen Zahlen

handelt!

Ein Bildungsgesetz ist nicht ohne weiteres zu erkennen.

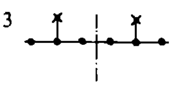
Wir können die Strukturformeln der Isomeren systematisch entwickeln, indem wir die Hauptkette um 1; 2; 3; ... C-Atome verkürzen und Seitenketten mit beziehentlich 1; 2; 3; ... C-Atomen angliedern. Dabei sind bei der Hauptkette und auch bei den Seitenketten alle möglichen und zulässigen Verzweigungen bzw. Kombinationen zu berücksichtigen.

Beispiel: C_7H_9

(Wir stellen nur das Gerüst der C-Atome dar, wobei wir diese in der Hauptkette symbolisch mit einem Punkt, in den Seitenketten mit einem Kreuz bezeichnen.)

Wir müssen Symmetrien beachten. Die beiden Formen sind zueinander symmetrisch (in bezug auf die eingezeichnete Symmetrielinie); sie stellen ein und dieselbe chemische Verbindung dar. Deshalb sind sie beim Abzählen der Isomeren nur einmal zu berücksichtigen. Die Form ist symmetrisch in bezug auf die eingezeichnete Symmetrielinie.

Bild 3



Wir behandeln das Problem analytisch und verallgemeinern. Dabei werden uns verschiedene Zahlenfolgen begegnen. Wir beschränken uns darauf, die Anzahl Formen für die Hauptketten n, $n-1$ und $n-2$ zu ermitteln.

1. Hauptkette n

Es gibt für jedes $n \in \{1; 2; 3; ...\}$ genau eine Form. Hiermit finden wir die einfache Zahlenfolge f_1, die wir tabellarisch darstellen.

Tabelle 2

n	1	2	3...
Anzahl Formen	1	1	1...

2. Hauptkette n − 1

Die Seitenkette ist eingliedrig (Methyl, $-CH_3$). Wir müssen zwischen geradem und ungeradem n unterscheiden.

n gerade, $n-1$ ungerade

Bei genau einer Form trägt das mittlere C-Atom die Seitenkette. Würde sich die Seitenkette an einem der beiden endständigen C-Atome der verkürzten Hauptkette befinden, so wäre die entsprechende Form mit der Hauptkette n identisch. Unter den $n-4$ möglichen Formen sind je zwei zueinander symmetrisch. Deshalb beträgt die Anzahl der Formen

$$1+\frac{n-4}{2}=\frac{n-2}{2}(n \geqq 4) \qquad (1)$$

Die Formel (1) führt zu einer Zahlenfolge

$f_2 = 1; 2; 3; ...$

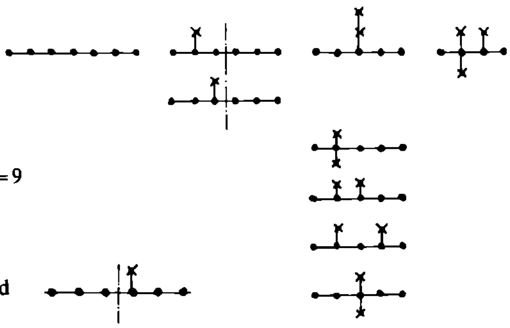
n ungerade, $n-1$ gerade

$$\text{Anzahl der Formen: } \frac{n-3}{2}(n \geqq 5) \qquad (2)$$

Prüft nach! Welche Zahlenfolge ergibt sich aus der Formel (2)?

Hauptkette 7 6 5 4 C-Atome

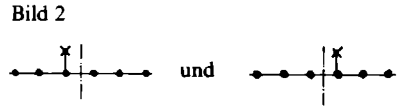
Bild 1



Anzahl

Formen $1+2+5+1=9$

Bild 2



3. Hauptkette n − 2

Die beiden C-Atome können eine zweigliedrige Seitenkette (Äthyl, $-C_2H_5$) oder zwei eingliedrige Seitenketten ($-CH_3$, $-CH_3$) bilden.

3.1. *Eine zweigliedrige Seitenkette*

Wir zählen ab wie bei der Hauptkette $n-1$. Dabei müssen wir beachten, daß jetzt an jedem Ende der Hauptkette zwei Plätze frei bleiben müssen (warum?).

n gerade, $n-2$ gerade

$$\text{Anzahl Formen: } \frac{n-6}{2}(n \geqq 8) \qquad (3)$$

n ungerade, $n-2$ ungerade

$$\text{Anzahl Formen: } 1+\frac{n-7}{2}=\frac{n-5}{2}(n \geqq 7) \qquad (4)$$

Prüft nach! Welche Zahlenfolgen ergeben sich aus den Formeln (3) und (4)?

3.2. *Zwei eingliedrige Seitenketten*

n gerade, $n-2$ gerade

Die beiden endständigen Plätze der verkürzten Hauptkette dürfen nicht besetzt werden (warum?). Wegen der Symmetrie kann die erste Seitenkette $\frac{n-4}{2}$ Plätze einnehmen.

In ihrer äußersten zulässigen Stellung gibt es dann für die zweite Seitenkette $n-4$ Möglichkeiten. Rückt die erste Seitenkette um einen Platz weiter nach der Mitte, so hat die zweite unter Beachtung der Symmetrie noch $n-6$ Möglichkeiten. Und so weiter. Macht euch den Sachverhalt an einem Beispiel klar!

Die Anzahl der Formen beträgt also

$$(n-4)+(n-6)+...+4+2.$$

Offensichtlich ist das eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsglied $(n-4)$ und der Differenz (-2). Sie hat so viele Glieder, wie die erste Seitenkette Plätze einnehmen kann, nämlich $\frac{n-4}{2}$. Nun ist die Summe einer endlichen arithmetischen Reihe gleich dem Produkt aus der halben Gliederzahl und der Summe aus Anfangs- und Endglied. So ergibt sich

$$\frac{n-4}{4}(n-4+2)=\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}$$

$$=\frac{n^2-6n+8}{4}(n \geqq 6) \qquad (5)$$

Die Formel (5) führt zu einer Zahlenfolge f_3.

n ungerade, $n-2$ ungerade

In diesem Fall ergibt sich die Anzahl Formen zu

$$(n-4)+(n-6)+\ldots+3+1$$
$$=\frac{n-3}{4}(n-4+1)$$
$$=\left(\frac{n-3}{2}\right)^2=\frac{n^2-6n+9}{4}(n\geqq 5) \qquad (6)$$

Rechnet nach! Die Formel (6) führt zu einer Folge f_4. Für die Herleitung der Formeln (5) und (6) gibt es noch andere Wege. Beim Lösen der Aufgaben könnt Ihr selbst solche Wege gehen.

Wir erhalten alle Formen mit der Hauptkette $n-2$, indem wir die Ergebnisse von 3.1. und 3.2. summieren.

n gerade
$$\frac{n-6}{2}+\frac{n^2-6n+8}{4}$$
$$=\frac{n^2-4n-4}{4}(n\geqq 6) \qquad (7)$$

n ungerade
$$\frac{n-5}{2}+\frac{n^2-6n+9}{4}$$
$$=\frac{n^2-4n-1}{4}(n\geqq 5) \qquad (8)$$

Die Formeln (7) und (8) führen zu den Zahlenfolgen f_5 und f_6.

Wir setzen jetzt einige Kenntnisse über Permutationen voraus und leiten für die Anzahl Formen mit zwei eingliedrigen Seitenketten an verschiedenen C-Atomen eine Formel her. N untereinander verschiedene Elemente können auf $1.2.3\ldots(N-1)N=N!$ (lies N Fakultät) Arten angeordnet werden. Die Anzahl der Permutationen von N verschiedenen Elementen ist $N!$

Treten in einer Anzahl von Elementen Gruppen von gleichen Elementen auf, so ist die Anzahl der Permutationen kleiner, als wenn alle Elemente verschieden sind. Die N Elemente seien in m Gruppen zu je $p_1, p_2, \ldots, p_m$ gleichen Elementen so zusammenzufassen, daß die $p_i!$ Permutationen der Elemente p_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ als gleich gelten. Dann ist die Gesamtanzahl der Permutationen dieser Elemente $\frac{N!}{p_1!\,p_2!\ldots p_m!}$; $p_1+p_2+\ldots+p_m=N$

Bei zwei eingliedrigen Seitenketten an verschiedenen C-Atomen unterscheiden wir die Elemente $\overset{\bullet}{\mathsf{I}}$ und $\cdot$. Für gerades n ist
$$N=n-4,\ p_1=2,\ p_2=N-2=n-6.$$

Gesamtanzahl Permutationen dieser Elemente:
$$\frac{(n-4)!}{2!\,(n-6)!}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2\cdot 1.2.3\ldots(n-7)(n-6)}$$
$$=\frac{(n-5)(n-4)}{2}$$

Unter diesen $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ Permutationen befinden sich jedoch Paare zueinander symmetrischer Formen, die bei der Bestimmung der Isomeren nur einmal zu berücksichtigen sind. Bevor wir halbieren, müssen wir die Formen subtrahieren, die nur einmal vorkommen; das sind $\frac{n-4}{2}$.

$$\frac{\frac{(n-4)(n-5)}{2}-\frac{n-4}{2}}{2}$$
$$=\frac{(n-4)(n-5-1)}{4}=\frac{(n-4)(n-6)}{4}$$

Nun sind noch die symmetrischen Formen zu addieren:
$$\frac{(n-4)(n-6)}{4}+\frac{n-4}{2}$$
$$=\frac{(n-4)(n-6+2)}{4}$$
$$=\left(\frac{n-4}{2}\right)^2 (n\geqq 6) \qquad (9)$$

Addiere hierzu die Anzahl Formen mit zwei eingliedrigen Seitenketten an demselben C-Atom, und vergleiche die Summe mit Formel (5)!

Wir stellen die Resultate zusammen.

Tabelle 3

Hauptkette	n	$n-1$	$n-2$
Anzahl	1	$\frac{n-2}{2}$	$\frac{n^2-4n-4}{4}$
			(n gerade)
Formen		$(n\geqq 4)$	$(n\geqq 6)$
	1	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n^2-4n-1}{4}$
			(n ungerade)
		$(n\geqq 5)$	$(n\geqq 5)$

Die folgende Tabelle 4 zeigt die ersten Glieder der entsprechenden Zahlenfolgen. In der zweiten bis vierten Spalte stehen links die Anzahl Formen für gerades n, rechts die für ungerades n.

„Und wie reagiert die Substanz in meiner Hand? Achten Sie auf die Färbung!" – „Sie schämt sich."

Tabelle 4

n		Anzahl Formen mit der Hauptkette n		$n-1$		$n-2$		Summe	
4			1		1				2
	5		1		1		1		3
6		1		2		2		5	
	7		1		2		5		
8		1		3		7			
	9		1		3		11		
10		1		4		14			
	11		1		4		19		
⋮									
Zahlen – folge		f_1		f_2		f_5	f_6		

Die letzte Spalte enthält Summen der Anzahl Formen mit den Hauptketten n, $n-1$ und $n-2$. Nur bis $n=6$ stimmen diese mit den Anzahlen der Isomeren in Tabelle 1 überein. Von $n=7$ an kommen Formen der Hauptketten $n-3$; $n-4$; ... hinzu.

Entsprechend ihrer Bedeutung als Anzahlen sind die Glieder der vorstehenden Folgen natürliche Zahlen. Die Folgen sind im allgemeinen unendlich. Beschränken wir uns jedoch auf die bekannten Kohlenwasserstoffe (gegenwärtig bis $n=82$), so erhalten wir endliche Folgen. Wir betrachten nun einige der Zahlenfolgen etwas näher.

Bei $f_1=1; 1; 1; \ldots$

handelt es sich um eine unendliche Folge mit konstanten Gliedern.

Independente (analytische) Darstellung:
$$a_k=1 \text{ mit } k\in\{1; 2; 3; \ldots\}$$

Der Zusammenhang zwischen k und n (unter den Bedingungen n gerade, $n\geqq 4$) ist durch die Beziehung gegeben
$$n=2+2k=2(k+1).$$
$$f_2=1; 2; 3; \ldots$$

ist die Folge der natürlichen Zahlen (ohne die Null).

Independente Darstellung:
$$a_k=k \text{ mit } \in\{1; 2; 3; \ldots\}$$

Die Folge f_5 schreiben wir in Tabellenform.

Tabelle 5

k	1	2	3	4...
a_k	2	7	14	23...

Der Zusammenhang zwischen k und n (unter den Bedingungen n gerade, $n\geqq 6$) ist durch die Beziehung gegeben
$$n=2k+4.$$

Setzen wir in die Formel (7) ein, so erhalten wir die independente Darstellung:
$$a_k=k^2+2k-1$$

Wir bilden die Differenzfolgen.

Ausgangsfolge: 2; 7; 14; 23; 34; 47; ...

1. Differenzfolge: 5; 7; 9, 11; 13; ...

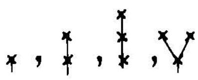
2. Differenzfolge: 2; 2; 2; 2; ...

f_5 ist also eine arithmetische Folge 2. Ordnung.

Ähnlich wie unter 3. dargestellt, können wir die Anzahl Formen mit der Hauptkette $n-3$

ermitteln. Hier werden die Verhältnisse schon komplizierter, zumal da wir vier verschiedene Seitenketten und deren mögliche und zulässige Kombinationen berücksichtigen müssen.

Bild 4



Schon vor 100 Jahren, im Jahre 1875, hat der englische Mathematiker A. Cayley das aufgeworfene Problem ganz allgemein geometrisch-konstruktiv und analytisch gelöst. Er veröffentlichte damals eine Arbeit „Über analytische Formen, genannt Bäume, mit Anwendung auf die Theorie chemischer Kombinationen".

W. Renneberg

Petrolchemisches Kombinat Schwedt

Kleiner alpha-Chemie-Wettbewerb

Löst die hier zu diesem Beitrag zusammengestellten Aufgaben! Der *VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie*, Leipzig, stiftete wertvolle Buchpreise. Alle eingesandten Lösungen werden korrigiert und nach den Richtlinien des *alpha*-Wettbewerbs bewertet. Die Antwortkarten zählen für den *alpha*-Wettbewerb 1976/77.

Überlegt, welche Verfahren im Hinblick auf Formen mit der Hauptkette $n-3$, $n-4$ usw. vorteilhaft sind! Vielleicht findet ihr noch andere rationelle Wege?

Aufgaben

▲1▲ Untersuche die Zahlenfolgen
$f_3 = 2; 6; 12; 20; \ldots$
$f_4 = 1; 4; 9;, 16; \ldots$
$f_6 = 1; 5; 11; 19; \ldots$!
Gib die independente, die rekursive, die verbale Darstellungsart an! Kennzeichne den Typ!

▲2▲ Bestimme für zwei eingliedrige Seitenketten die Anzahl Formen mit den Seitenketten
a) an demselben C-Atom,
b) an verschiedenen C-Atomen
getrennt und summiere! Unterscheide zwischen geradem und ungeradem n!
Vergleiche die Ergebnisse mit den Formeln (5) und (6)!

▲3▲ Für zwei eingliedrige Seitenketten an verschiedenen C-Atomen und gerades n ist die Anzahl Formen auf folgendem Wege zu ermitteln:
a) beide Seitenketten auf derselben Seite der Symmetrielinie der Hauptkette,
b) je eine Seitenkette auf den beiden Seiten der Symmetrielinie. Summiere die Ergebnisse, und vergleiche mit der entsprechenden Formel aus Aufgabe 2b)!

▲4▲ Für zwei eingliedrige Seitenketten an verschiedenen C-Atomen und ungerades n ist die Anzahl Formen in der folgenden Weise zu ermitteln.
1. Fall: Am mittleren C-Atom befindet sich keine Seitenkette. Unterscheide dabei Formen mit den Seitenketten auf derselben und auf verschiedenen Seiten der Symmetrielinie!
2. Fall: Das mittlere C-Atom trägt eine Seitenkette. Summiere und vergleiche mit der entsprechenden Formel aus Aufgabe 2b)!

▲5▲ Leite für ungerades n die Anzahl Formen mit zwei eingliedrigen Seitenketten an verschiedenen C-Atomen her, indem du zunächst die Gesamtanzahl Permutationen der Elemente ǂ und ● berechnest! Berücksichtige dann, daß darunter zueinander symmetrische Formen vorkommen!
Addiere zu dem Ergebnis die Anzahl Formen mit zwei eingliedrigen Seitenketten an demselben C-Atom! Mit welcher Formel des Textes muß dein Ergebnis übereinstimmen?

Werner Renneberg

XIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 7. Oktober 1976

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab 8. Oktober 1976 veröffentlicht.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Olympiadeklasse 5

1. In einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft stellt Monika den Teilnehmern folgende Aufgabe:

Jeder der Buchstaben A, L, P, H bedeutet eine einstellige natürliche Zahl. Dabei gilt:

(1) Die Zahl H ist doppelt so groß wie die Zahl P.

(2) Die Zahl A ist gleich der Summe aus der Zahl P und dem Doppelten der Zahl H.

(3) Die Zahl L ist gleich der Summe der Zahlen A, P und H. Schreibt man die Zahlen $ALPHA$ in dieser Reihenfolge hintereinander, dann erhält man die (fünfstellige) Leserzahl der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha".

Wie groß ist diese Leserzahl?

2. Auf einer Geraden g sollen fünf Punkte A, B, C, D, E in dieser Reihenfolge angeordnet sein und folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Strecke AE hat die Länge $\overline{AE} = 18$ cm.

(2) Die Strecke AD ist 2 cm kürzer als die Strecke AE.

(3) Die Strecke CD hat die Länge $\overline{CD} = 5$ cm.

(4) Die Strecke AB ist 3 cm länger als die Strecke CE.

a) Konstruiere fünf derartige Punkte A, B, C, D, E!

b) Ermittle die Längen der Strecken $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$!

Als Lösung genügt

a) eine Konstruktion ohne Beschreibung und

b) die Ermittlung der Streckenlängen $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ aus den Bedingungen (1) bis (4).

3. Um zu ermitteln, welchen Durchschnittswert die Masse eines Maiskolbens von einem Versuchsfeld hat, hatten Schüler einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft sechs Kolben ausgewählt und gewogen. Der größte Kolben hatte eine Masse von 850 g, drei Kolben hatten eine Masse von je 640 g, zwei Kolben von je 460 g. Wieviel Gramm betrug hiernach die durchschnittliche Masse eines dieser sechs Maiskolben?

4. Ein rechteckiger Spielplatz wird eingezäunt. Die Gesamtlänge des Zaunes beträgt 390 m; die langen Seiten des Rechtecks sind doppelt so lang wie die kurzen.

a) Ermittle die Seitenlängen des Spielplatzes!

b) Zeichne den Spielplatz (Konstruktion des Rechtecks) im Maßstab 1 : 1000!

Olympiadeklasse 6

1.
$$\begin{array}{ccc} AAA \cdot A & = & BBB \\ + & & - \\ CCC \cdot E & = & DDD \\ \hline FFF : F & = & GGG \end{array}$$

In diesem Schema sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle fünf angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

Ermittle alle möglichen derartigen Eintragungen!

2. Knut ist ein sehr trainierter Radfahrer. Bei einem Ausflug legte er auf seinem Fahrrad in der Minute durchschnittlich 320 m zurück. Er fuhr um 7.00 Uhr mit seinem Rad ab und erreichte um 11.00 sein Ziel. Von 9.00 Uhr bis 9.20 Uhr hatte er gerastet, in der übrigen Zeit ist er ununterbrochen gefahren.

Wie lang (in km) ist die dabei von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke?

3. Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches $\frac{17}{19}$ subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner dieses Bruches addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert $\frac{7}{11}$ erhalten soll.

Stelle fest, ob es eine solche Zahl x gibt, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und wie sie lautet!

4. Eine Gruppe von mehr als 10, aber weniger als 50 Thälmann-Pionieren wollte eine Wanderfahrt durchführen. Sie brauchte dazu genau 91 Mark. Jeder Pionier der Gruppe zahlte eine einheitlich festgesetzte Anzahl von 1-Mark-Stücken (und keine weiteren Geldbeträge) in die Reisekasse. Ein dann noch fehlender Restbetrag von genau 26 Mark wurde aus der Pionierkasse bestritten.

Ermittle die Anzahl der Pioniere dieser Gruppe und den Betrag, den jeder von ihnen zur Bezahlung dieser Fahrt in die Reisekasse zahlte!

Olympiadeklasse 7

1. Bei der 3. Stufe der XV. Mathematikolympiade erhielten die sechs Thälmann-Pioniere Anita, Bernd, Christine, Doris, Erich und Fritz je einen Preis.

Genau zwei von ihnen erhielten volle Punktzahl.

Auf die Frage, welche beiden Pioniere volle Punktzahl erhielten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anita und Christine;
(2) Anita und Fritz;
(3) Bernd und Fritz;
(4) Anita und Doris;
(5) Bernd und Erich.

Anschließend wurde festgestellt, daß in genau einer dieser fünf Antworten beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier jeweils eine Angabe wahr und eine falsch ist.

Wie heißen nach dieser Feststellung die beiden Preisträger, die die volle Punktzahl erhielten?

Überprüfe, ob sich diese Frage aus den vorliegenden Antworten eindeutig beantworten läßt!

2. Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form

$$z = 12345678910111213\ldots9899100$$

entsteht.

a) Wieviel Stellen hat z?

b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, daß die mit den restlichen Ziffern dargestellte Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll an der Reihenfolge der (in z') verbleibenden Ziffern von z nichts geändert werden.

Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten zehn Ziffern der neuen Zahl z' an!

3. Es seien a und b zwei zueinander parallele Geraden. A und P seien Punkte auf a, ferner seien B und Q Punkte auf b. Dabei gelte $PQ \perp a$. Der Mittelpunkt von PQ sei M, und es sei c die Parallele zu a durch M.

Beweise folgenden Satz:

Ist S der Schnittpunkt von c mit AB, so gilt $\overline{AS} = \overline{BS}$.

4. Bei einem Radrennen auf einem Rundkurs von 1 km Länge hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt der Radsportler A genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler B.

B fuhr mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

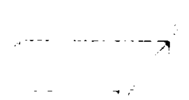
A mit einer Geschwindigkeit von $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach wieviel Minuten von dem angegebenen Zeitpunkt an gerechnet, holte B den Fahrer A das erste Mal ein, wenn angenommen wird, daß beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhren?

b) Nach wieviel weiteren Minuten würde B den Fahrer A zum zweiten Mal einholen (überrunden), wenn beide Fahrer auch weiterhin mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?
Wieviele Runden hätte A und wieviele B zwischen dem ersten und dem zweiten Mal des Überholens zurückgelegt?

Olympiadeklasse 8

1. Durch einen Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Bild) soll ein ebener Schnitt so gelegt werden, daß als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht, dessen sämtliche Ecken auch Eckpunkte des Würfels sind.



Gib alle Möglichkeiten für einen solchen Schnitt an, und stelle einen Würfel mit einem solchen Schnitt in Kavalierperspektive dar!

2. In einem VEB macht es sich erforderlich, für jeden der Arbeiter Arnold, Bauer, Donath, Funke, Große, Hansen, Krause und Lehmann langfristige Qualifizierungsmaßnahmen zu planen.
Innerhalb von vier Wochen, und zwar in der Zeit vom 1. 11. 1976 (Montag) bis 27. 11. 1976 (Sonnabend) kann jeweils für drei Tage (entweder von Montag bis Mittwoch oder von Donnerstag bis Sonnabend) je ein Arbeiter zu einem dreitägigen Lehrgang delegiert werden.
Da die laufende Produktion nicht gefährdet werden darf, kann eine Freistellung von der Arbeit nur zu bestimmten Zeiten erfolgen:
(1) Arnold kann nicht in der dritten Woche teilnehmen.
(2) Bauer ist in der ersten Hälfte jeder Woche im Betrieb nicht entbehrlich, aber auch nicht vom 11. bis 13. 11. und nicht in der zweiten Hälfte der vierten Woche.
(3) Donath kann nur in der gleichen Woche wie Lehmann gehen.
(4) Funke kann nur in der ersten oder zweiten Woche freigestellt werden.
(5) Große kann nur vom 4. bis 6. 11. oder vom 18. bis 20. 11. oder in der zweiten oder vierten Woche jeweils in der zweiten Hälfte berücksichtigt werden.
(6) Hansen kann nur in der zweiten oder dritten Woche jeweils in der zweiten Hälfte eingesetzt werden, jedoch nicht in der Woche, in der Funke zum Lehrgang geht.
(7) Krause kann nur in der ersten Woche oder vom 22. bis 24. 11. zum Lehrgang geschickt werden.
(8) Lehmann kann nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen.
Ermittle sämtliche Möglichkeiten, unter diesen Bedingungen die vorgesehenen Qualifizierungsmaßnahmen durchzuführen! Gib dabei für jeden der Arbeiter die Zeit an, in der er zum Lehrgang delegiert wird!

3. Beweise den folgenden Satz:
Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist, dann ist das Produkt dieser drei Zahlen durch 24 teilbar.

4. Peter stellt seinem Freund Fritz folgende Aufgabe:
Gegeben sei ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Erddurchmesser ist, und ein zweiter dazu konzentrischer Kreis, dessen Umfang 1 m länger als der Umfang des ersten Kreises ist.
Ermittle den Abstand beider Kreislinien voneinander!
Nach kurzem Überlegen nennt Fritz diesen Abstand und behauptet:
„Wenn der erste Kreis nur den Durchmesser einer Stecknadelkuppe (1 mm) besitzt, und der Umfang des zweiten konzentrischen Kreises wiederum 1 m länger als der des ersten Kreises ist, dann ist der Abstand dieser beiden Kreise genau so groß wie in deiner Aufgabe."
Stimmt diese Behauptung von Fritz?
Wie groß ist der Abstand der konzentrischen Kreislinien in beiden Fällen?

Olympiadeklasse 9

1. Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie Autorennen nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug $ABCDEFGA$ eingeschlossen, wobei A, B, C, D, E, F, G Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der Startlinie AG zur Ziellinie DE oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_n$ bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die P_0, P_1, ..., P_n Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken P_0P_1, P_1P_2, ..., $P_{n-1}P_n$ des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden.
Unter einem „Zug" wird der Übergang von einem Punkt P_k zu dem nächsten Punkt P_{k+1} verstanden.
Die Spielregeln lauten:
(1) P_0 liegt auf AE
(2) Der erste „Zug" besteht aus der Strecke P_0P_1, wobei $\overline{P_0P_1} = 1$ (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.
(3) Wenn bereits ein „Zug" $P_{k-1}P_k$ ausgeführt wurde, so findet man den nächsten „Zug" P_kP_{k+1} folgendermaßen:
a) Man verlängert die Strecke $P_{k-1}P_k$ über P_k hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der Q_k genannt sei.
b) Man wählt entweder den Punkt Q_k oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt P_{k+1} (Hinweis: P_{k+1} muß innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig Q_k).
Geben Sie für ein Spielfeld mit $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 14)$, $C(7;\ 21)$, $D(16;\ 21)$, $E(16;\ 18)$, $F(7;\ 18)$, $G(7;\ 0)$ einen „Fahrweg", d. h. einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_9$ an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke P_8P_9 erreicht oder geschnitten wird!
Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte P_i ($i = 0, 1, 2, ..., 9$) ohne Begründung.

2. Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen:
Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile usw.
Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?

3. Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB, der Länge $\overline{AB} = b$ und der Schenkellänge $2b$. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC, in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABCD$.

4. Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt:

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm
Würfel	a
Kugel	c
reguläres Tetraeder	e

	Oberflächeninhalt in cm²	Volumen in cm³
Würfel	b	b
Kugel	d	d
reguläres Tetraeder	f	f

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, c, e, die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen.

während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

Olympiadeklasse 10

1. In das Kryptogramm

$$\begin{array}{rl} & \text{K A T E R} \\ + & \text{K A T Z E} \\ & \text{T I E R E} \end{array}$$

sind anstelle der Buchstaben Ziffern (0, 1, ..., 9) so einzusetzen, daß eine Additionsaufgabe mit richtiger Lösung entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern darstellen.
Geben Sie sämtliche Lösungen dieser Aufgabe an!

2. Geben Sie alle reellen Zahlen $x (x \neq -3)$ an, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{x+3} - \frac{1}{10}. \qquad (1)$$

3. Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle Kanten eines Würfels so zu durchlaufen, daß nacheinander ohne Unterbrechung jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

4. Gegeben sei eine Streckenlänge a. Ein Dreieck ABC habe die Eigenschaften

$$\overline{AB} = 2a, \overline{BC} = a, \sphericalangle ACB = 90°.$$

Berechnen Sie die Abstände des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks von jeder der Dreieckseiten!

Olympiadeklassen 11/12

1. Man ermittle alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z), die das Gleichungssystem

$$x + yz = 7 \qquad (1)$$
$$xy + z = 5 \qquad (2)$$
$$x + y + z = 6 \qquad (3)$$

erfüllen.

2. Man beweise, daß für jedes Dreieck ABC die Gleichung

$$\overline{MA}^2 \cdot \sin\alpha + \overline{MB}^2 \cdot \sin\beta + \overline{MC}^2 \cdot \sin\gamma = 2F$$

gilt, wobei α, β, γ die Größen der Innenwinkel bei A, B bzw. C bezeichnen, F der Flächeninhalt des Dreiecks und M der Mittelpunkt seines Inkreises ist.

3. Einer Schule stehen für ein Zeltlager folgende Zelte zur Verfügung:
2 Zelte für je 3 Personen,
1 Zelt für 8 Personen,
2 Zelte für je 10 Personen und
2 Zelte für je 16 Personen.
(Die Personenzahlangaben sind die vom Hersteller angegebenen Höchstbelegungszahlen.)
Jedes dieser Zelte wird entweder mit Mädchen zu genau 50% seiner Höchstbelegungszahl ausgelastet oder mit Jungen so belegt, daß es zu höchstens 70%, mindestens aber zu 50% ausgelastet ist.
Dabei sind insgesamt für das Zeltlager mehr Mädchen als Jungen zu berücksichtigen.
a) Wieviel Personen können maximal unter diesen Bedingungen am Zeltlager teilnehmen?
b) Man gebe für einen derartigen Fall eine entsprechende Belegung der Zelte an.

4. Auf der Oberfläche einer massiven Kugel, deren Durchmessergröße nicht angegeben ist, seien zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen.
Man beschreibe eine Konstruktion des durch die Punkte A und B verlaufenden Großkreises. Zur Konstruktion auf der Kugeloberfläche darf nur ein Zirkel, zu eventuell notwendigen Hilfskonstruktionen in einer Ebene dürfen nur Zirkel und Lineal verwendet werden.
Hinweis: Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis auf der Kugeloberfläche, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Durch zwei Punkte der Kugeloberfläche, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen, verläuft genau ein Großkreis.

Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 2/76:

Ma 5 ■ 1497 Wegen $xx4 \cdot x = 2x4$ beträgt der zweite Faktor 11. Daraus folgt $2x4 = x3x$; jedes Teilprodukt beträgt somit 234, also auch der erste Faktor. Die gelöste Aufgabe lautet somit

$$\begin{array}{r} 234 \cdot 11 \\ \hline 234 \\ 234 \\ \hline 2574 \\ \hline\hline \end{array}$$

Ma 5 ■ 1498 Für jede der vier Ziffern der Autonummer gilt $0 \leqq n \leqq 9$. Die zweite Ziffer sei n, die vierte somit $3 \cdot n$, die erste $3n - 3$ und die dritte $3n - 5$. Für die Quersumme der Autonummer gilt deshalb

$$(3n-3) + n + (3n-5) + 3n = 22,$$
$$10n - 8 = 22,$$
$$10n = 30,$$
$$n = 3.$$

Die Autonummer lautet somit 6349.

Ma 5 ■ 1499 Angenommen, zur Herstellung des Werkstückes wurden bisher x Minuten benötigt; wegen 3 h 45 min = 225 min gilt dann

$$x : 2 + 15 = 225,$$
$$x : 2 = 210,$$
$$x = 420.$$

Zur Anfertigung des Werkstückes wurden bisher 420 Minuten, also 7 Stunden benötigt.

Ma 5 ■ 1500 Bei einer mittleren Geschwindigkeit von $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ schafft man 1 km in 2 min. Für 15,8 km − 0,9 km = 14,9 km benötigt man 14,9 · 2 min = 29,8 min. Hinzu kommen 10 min Fußweg. Nach Franks Vorschlag werden insgesamt (29,8 + 10) min = 39,8 min benötigt. Bei einer mittleren Geschwindigkeit von $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und einer Fahrstrecke von 15,5 km benötigt man (15,5 : 24) h = [(15,5 · 60) : 24 min = 38,75 min. Nach Uwes Vorschlag werden 38,75 min benötigt. Uwe hat somit recht.

Ma 5 ■ 1501 Wir rechnen 240 kg : 4 = 60 kg; 240 kg : 8 = 30 kg; 240 kg : 6 = 40 kg; 240 kg − 60 kg − 30 kg − 40 kg = 110 kg. Von den Schülern wurden 60 kg Blei, 30 kg Kupfer, 40 kg Zink und 110 kg Messing gesammelt.

Ma 5 ■ 1502 Wir rechnen 60 · 42 = 2520, 60 − 10 = 50, 50 · 49 = 2450, 2520 + 2450 = 4970 und 4970 : 70 = 71; beim Transport gingen 71 Gläser entzwei.

Ma 6 ■ 1503 Jede dreistellige natürliche Zahl läßt sich wie folgt darstellen:

$$z = 100a + 10b + c \text{ mit } 1 \leqq a \leqq 9 \text{ und } 0 \leqq b, c \leqq 9.$$

Wegen $b = a + 1$ und $c = 2a$ erhalten wir daraus

$$z = 100a + 10(a+1) + 2a.$$

Da die dreistellige Zahl z kleiner als 400 ist, folgt $a = 1$ oder $a = 2$ oder $a = 3$, also $z = 122$ oder $z = 234$ oder $z = 346$.
Nun soll $\frac{z}{2}$ eine Primzahl sein.
Für $a = 1$ erhalten wir $\frac{z}{2} = 61$; dies ist eine Primzahl. Für $a = 2$ erhalten wir $\frac{z}{2} = 117$; diese Zahl ist durch 9 teilbar, also keine Primzahl. Für $a = 3$ erhalten wir $\frac{z}{2} = 173$; dies ist eine Primzahl.
Erika hat sich entweder die Zahl 61 · 2 = 122 oder 173 · 2 = 346 gedacht.

Ma 6 ■ 1504 Angenommen, im Korb befanden sich ursprünglich n Früchte. Nachdem Ralf sechs herausgenommen hatte, waren im Korb noch $(n - 6)$ Früchte. Der Korb enthielt nun x Birnen und $(x + 10)$ Äpfel, also $(2x + 10)$ Früchte. Demnach gilt

$$n - 6 = 2x + 10,$$
$$n = 2x + 16,$$
$$n = 2 \cdot (x + 8).$$

Wegen $n = 2 \cdot (x + 8)$ ist n ohne Rest durch 2 teilbar. Da 29 aber nicht durch 2 teilbar ist, kann n nicht gleich 29 sein. Ralf irrte sich, Bärbel hatte recht.

Ma 6 ▪1505 Aus $1800\,\text{km} \cdot \frac{3}{4} = 1350\,\text{km}$,

$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1350}{900}\,\text{h} = \frac{3}{2}\,\text{h} = 90\,\text{min}$ und $126\,\text{min} - 90\,\text{min} = 36\,\text{min} = \frac{6}{10}\,\text{h}$ folgt

$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{450 \cdot 10\,\text{km}}{6\,\text{h}} = 750\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Das Flugzeug setzte den Flug auf der restlichen Flugstrecke von 450 km mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $750\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fort.

Ma 6 ▪1506 Da nur ganzzahlige Punktzahlen vergeben wurden, muß die Anzahl der von Ursula erreichten Punkte sowohl durch 6 als auch durch 7, also durch 42 teilbar sein. Aus $1450 < 42 \cdot n < 1500$ folgt $n = 35$.
Ursula errang somit $42 \cdot 35 = 1470$ Punkte,
Sabine errang $\frac{5}{6} \cdot 1470 = 1225$ Punkte, und
Petra errang $\frac{6}{7} \cdot 1470 = 1260$ Punkte.

Ma 6 ▪1507 Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.
Aus $8042xx$ folgt für die ersten vier Ziffern die Quersumme 14. Entsprechend den Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 4 und 9 lautet somit die kleinste dieser Zahlen 804204. Aus $8942xx$ folgt für die ersten vier Ziffern die Quersumme 23. Entsprechend den Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 9 und 4 lautet somit die größte dieser Zahlen 894276.

Ph 6 ▪1508

Gegeben: $\varrho = 19{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ Gesucht: m

$$h = \frac{1}{9000}\,\text{mm} = \frac{1}{90000}\,\text{cm}$$

$$A_G = 1\,\text{m}^2 = 10000\,\text{cm}^2$$

$$m = \varrho \cdot V \qquad V = A_G \cdot h$$

$$m = \frac{19{,}3\,\text{g} \cdot 10\,\text{cm}^3}{\text{cm}^3 \cdot 90} \qquad V = 10000\,\text{cm}^2 \cdot \frac{1\,\text{cm}}{90000}$$

$$\underline{\underline{m = 2{,}14\,\text{g}}} \qquad V = \frac{10}{90}\,\text{cm}^3$$

Für 1 m² Blattgold braucht man 2,14 g Gold.

Ma 7 ▪1509 Angenommen, wir erhalten beim Wechseln des 25-Rubel-Scheines x 5-Rubel-Scheine und y 3-Rubel-Scheine, dann müßten wir nach Voraussetzung noch $(10 - x - y)$ 1-Rubel-Scheine erhalten, und es gilt

$$5x + 3y + 1 \cdot (10 - x - y) = 25,$$
$$5x + 3y + 10 - x - y = 25,$$
$$4x + 2y = 15,$$
$$2y = 14 - 4x + 1,$$
$$y = 7 - 2x + \frac{1}{2}.$$

Für keine natürliche Zahl x wird y ebenfalls eine natürliche Zahl. Ein 25-Rubel-Schein läßt sich auf die geforderte Weise nicht wechseln.

Ma 7 ▪1510 Angenommen, der erste Kunde habe x Flaschen, der zweite somit $(x+2)$ Flaschen Wein gekauft; dann gilt

$$5{,}60 \cdot x + 4{,}00 = 4{,}80 \cdot (x+2) + 2{,}40,$$
$$5{,}6x + 1{,}6 = 4{,}8x + 9{,}6,$$
$$0{,}8x = 8,$$
$$x = 10.$$

Der erste dieser Kunden hat 10 Flaschen, der zweite 12 Flaschen Wein gekauft. Jeder führte einen Geldbetrag von $5{,}60\,\text{M} \cdot 10 + 4\,\text{M} = 60\,\text{M}$ mit sich.

Ma 7 ▪1511 Angenommen, es sollten nach Plan täglich x Hektar bestellt werden; tatsächlich wurden aber $(x+2)$ Hektar bestellt. Nun gilt

$$14 \cdot x = 10 \cdot (x+2),$$
$$14x = 10x + 20,$$
$$4x = 20,$$
$$x = 5.$$

Nach Plan sollten täglich 5 ha Feld bestellt werden; insgesamt wurden $14 \cdot 5\,\text{ha} = 70\,\text{ha}$ bestellt.

Ma 7 ▪1512 Angenommen, es wohnen x Personen in diesem Haus; dann gilt

$$10x + 88 = 10{,}8x - (10x + 88) \cdot \frac{2{,}5}{100},$$
$$10x + 88 = 10{,}8x - \frac{10x + 88}{40},$$
$$(10x + 88) \cdot 40 = 40 \cdot 10{,}8x - (10x + 88),$$
$$41(10x + 88) = 432x,$$
$$410x + 41 \cdot 88 = 432x,$$
$$22x = 41 \cdot 88,$$
$$x = 4 \cdot 41,$$
$$x = 164.$$

Im Hause wohnen 164 Personen. Die Heizkosten belaufen sich auf $10\,\text{M} \cdot 164 + 88\,\text{M} = 1728\,\text{M}$.

Ph 7 ▪1513 Gegeben: $p_1 = 1{,}8\,\text{at}$; $p_2 = 75\,\text{at}$, $V_1 = 15000\,\text{m}^3$
Gesucht: V_2

Nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte gilt

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$
$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}$$
$$V_2 = \frac{1{,}8\,\text{at} \cdot 15000\,\text{m}^3}{75\,\text{at}}$$
$$V_2 = 360\,\text{m}^3$$

Die Quelle verliert $360\,\text{m}^3$ Gas in einer Stunde.

Ch 7 ▪1514 1. Aufstellen der Gleichung für die Reaktion:

$$2\,Mg + O_2 \rightarrow 2\,MgO$$

2. Gegeben: $m_{Mg} = 0{,}3\,\text{g}$; $M_{Mg} = 24\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$

$$M_{MgO} = 40\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

gesucht: m_{MgO}

3. Aufstellen des Stoffmengenverhältnisses:

$$m_{Mg} : m_{MgO} = 1 : 1$$
$$m_{Mg} = m_{MgO}$$

4. Einsetzen der Größengleichungen für die Stoffmengen:

$$\frac{m_{Mg}}{M_{Mg}} = \frac{m_{MgO}}{M_{MgO}}$$

$$m_{MgO} = \frac{m_{Mg} \cdot M_{MgO}}{M_{Mg}}$$

5. Einsetzen der Größen:

$$m_{MgO} = \frac{0{,}3\,\text{g} \cdot 40\,\text{g} \cdot \text{mol}}{24\,\text{g} \cdot \text{mol}}$$
$$m_{MgO} = 0{,}5\,\text{g}$$

Bei der Verbrennung von 0,3 g Magnesium entstehen 0,5 g Magnesiumoxid.

Ma 8 ▪1515 Wegen $\frac{a(c-b)}{b} > 0$ (1)

ist $a \neq 0$, da sonst der Zähler auf der linken Seite von (1) gleich Null wäre. Ferner ist auch $b \neq 0$, da b im Nenner der linken Seite von (1) steht.
Da genau eine der drei Zahlen gleich Null ist, kann daher nur $c = 0$ sein. Also folgt aus (1)

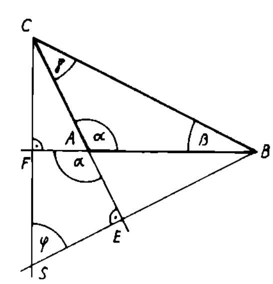
$$-\frac{ab}{b} > 0 \qquad (2)$$

und wegen $b \neq 0$ weiter $-a > 0$, d. h. $a < 0$. Also ist a negativ und ferner, da $c = 0$ ist, b positiv.
Die Probe bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses. Man erhält nämlich für $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$.

$$\frac{a(c-b)}{b} = -\frac{ab}{b} = -a > 0.$$

Ma 8 ▪1516 Das Viereck $SEAF$ hat zwei rechte Winkel, nämlich die Winkel $\sphericalangle SEA$ und $\sphericalangle AFS$, da die beiden Höhen $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ senkrecht auf den Verlängerungen der zugehörigen Seiten stehen (siehe Bild). Ferner ist in diesem Viereck $\sphericalangle EAF = \alpha$ (als Scheitelwinkel). Bezeichnet man die Größe des vierten Winkels $\sphericalangle FSE$ dieses Vierecks mit ϕ, so gilt, da die Winkelsumme eines jeden Vierecks 360° beträgt

$$\phi + 90° + \alpha + 90° = 360°,$$
$$\phi = 180° - \alpha.$$



Bezeichnet man die Größen der beiden spitzen Winkel des Dreiecks ABC mit β und γ, so folgt hieraus wegen $\beta + \gamma = 180° - \alpha$

$$\phi = \beta + \gamma, \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 8 ▪1517 Es seien p und q zwei Primzahlen, die die geforderte Eigenschaft haben. Dann gilt eine der folgenden drei Gleichungen:

$$18 \cdot p = (p+q) \cdot pq, \qquad (1)$$
$$18 \cdot (p+q) = p \cdot pq, \qquad (2)$$
$$18 \cdot pq = p \cdot (p+q). \qquad (3)$$

Im Falle (1) folgt wegen $p \neq 0$

$$18 = (p+q)q,$$
$$2 \cdot 3^2 = (p+q)q. \qquad (4)$$

Da q Primzahl ist, gilt also $q = 2$ oder $q = 3$.

Ist $q=2$, so folgt aus (4) $p+q=9$, also $p=7$. Die Primzahlen $p=7$, $q=2$ haben also die geforderte Eigenschaft, da für sie die Gleichung (1) erfüllt ist.

Ist $q=3$, so folgt aus (4) $p+q=6$, also $p=3$. Daher haben auch die Primzahlen $p=3$, $q=3$ die geforderte Eigenschaft; denn auch für sie ist die Gleichung (1) erfüllt.

Im Falle (2) gilt

$$2\cdot 3\cdot 3\cdot (p+q)=p\cdot p\cdot q. \qquad (5)$$

Daraus ergibt sich aber ein Widerspruch, weil auf der linken Seite von (5) mindestens vier Primfaktoren, stehen, während auf der rechten Seite nur drei Primfaktoren vorhanden sind. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

Im Falle (3) folgt wegen $p \neq 0$

$$18q=p+q, \text{ d. h. } 17q=p.$$

Wegen $q>1$ wäre also p nicht Primzahl, was der Voraussetzung widerspricht. Also kann auch dieser Fall nicht eintreten. Daher haben nur die Primzahlen $p=7$ und $q=2$ sowie die Primzahlen $p=3$ und $q=3$ die geforderte Eigenschaft.

Ma8 ▪1518 a) Wir bezeichnen die begrenzenden Kreise des unteren bzw. des oberen Geldstückes mit k_1 bzw. k_2 und die Berührungspunkte auf den beiden Kreisen mit T_1 bzw. T_2. Dann fallen bei Beginn des Versuches die Punkte T_1 und T_2 zusammen.

Während des Abrollens bleibt der Punkt T_1 fest, während der Punkt T_2 sich mit dem Kreis k_2 bewegt und auf diesem einen Weg von der Länge $d\pi$ zurücklegt, wobei d der Durchmesser der beiden Kreise ist. Daher fällt nach einem vollen Umlauf des Kreises k_2 um den Kreis k_1 der Punkt T_2 wieder mit dem Punkt T_1 zusammen. Aus diesem Grunde steht nach Beendigung des Versuches die Ziffer des oberen Geldstückes wieder aufrecht.

b) Wir wählen die gleichen Bezeichnungen wie im Falle a), beachten aber, daß der Durchmesser des Kreises k_1 gleich $d_1=29$ mm und der Durchmesser des Kreises k_2 gleich $d_2=19$ mm ist. Nach einem vollen Umlauf des Kreises k_2 um den Kreis k_1 hat dann der Punkt T_2 auf dem Kreis k_2 einen Weg von $d_1\pi$ zurückgelegt und die in der Abbildung angegebene Stellung erreicht. Dabei hat er sich um einen Winkel α gedreht, für den gilt

$$\alpha:360^\circ=d_1\pi:d_2\pi,$$

$$\alpha=\frac{d_1}{d_2}\cdot 360^\circ=\frac{29}{19}\cdot 360^\circ,$$

$$\alpha\approx 549^\circ=360^\circ+189^\circ.$$

Der Punkt T_2 hat also auf dem Kreis k_2 eine volle Umdrehung (360°) und außerdem noch etwas mehr als eine halbe Umdrehung (189°) ausgeführt. Er befindet sich nach Beendigung des Versuchs in der in der Abbildung angegebenen Stellung. Daher steht die Ziffer 5 des oberen Geldstückes fast „auf dem Kopf".

Ph8 ▪1519 Gegeben: $U=220$ V; $I=12$ A; $l=25$ m; $r=1$ mm; $\varrho=\frac{0{,}0286\ \Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$

Gesucht: Klemmenspannung U

Die Klemmenspannung U ergibt sich aus der Differenz der Spannung U an der Steckdose und dem Spannungsabfall U_V in der Leitung.

$$U_K=U-U$$

$$U_K=220\text{ V}-5{,}5\text{ V} \qquad R=2\cdot\frac{\varrho\cdot 1}{A}$$

$$U_K=214{,}5\text{ V}$$

$$U_V=I\cdot R \qquad A=\pi r^2$$

$$U_V=\frac{2\cdot I\cdot\varrho\cdot l}{\pi r^2}$$

$$U_V=\frac{2\cdot 12\text{ A}\cdot 0{,}0286\ \Omega\text{mm}^2\cdot 25\text{ m}}{3{,}14\cdot 1\text{ mm}^2\cdot\text{m}}$$

$$U_V=5{,}46\text{ V}\approx 5{,}5\text{ V}$$

Am Kochherd liegt eine Klemmenspannung von 214,5 V an.

Ch8 ▪1520

Volumen in cm^3	60	x
Masse in g	90	150

$$90:150=60:x$$

$$x=100$$

150 g des Stoffes nehmen ein Volumen von 100 cm^3 ein.

Ma9 ▪1521 Aus $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$

folgt $\frac{ad+bc}{bd}=1$, also $ad+bc=bd$.

Für die Summe der reziproken Werte der beiden Quotienten gilt daher

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}=\frac{bd}{ac},$$

d. h. man erhält diese Summe, indem man das Produkt bd der beiden Divisoren durch das Produkt ac der beiden Dividenden dividiert, w. z. b. w.

Ma9 ▪1522 1. Wegen $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ und $\overline{BC}=\overline{DA}=b$ gilt

$$\overline{AE}=2a, \overline{CG}=2a, \text{ also } \overline{AE}=\overline{CG}.$$

Ferner gilt

$$\overline{AH}=b, \overline{CF}=b, \text{ also } \overline{AH}=\overline{CF},$$

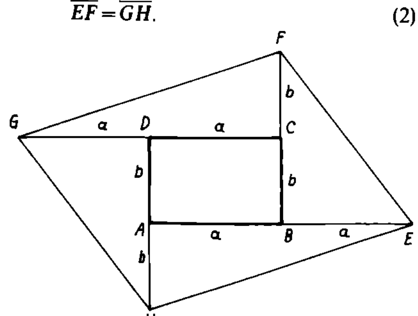
$$\sphericalangle EAH=\sphericalangle FCG=90^\circ \text{ (siehe Bild).}$$

Daraus folgt $\triangle EAH\cong\triangle FCG$, also

$$\overline{HE}=\overline{FG}. \qquad (1)$$

Analog erhält man $\triangle FGC\cong\triangle HDG$, also

$$\overline{EF}=\overline{GH}. \qquad (2)$$



Wegen (1) und (2) hat also das Viereck $EFGH$ zwei Paare gleichlanger Seiten, d. h., dieses Viereck ist ein Parallelogramm. Wegen $a\neq b$ kann man o. B. d. A. $a>b$ annehmen.

Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{HE}^2=4a^2+b^2, \overline{EF}^2=4b^2+a^2$$

und

$$4a^2+b^2=3a^2+b^2+a^2$$
$$>3b^2+b^2+a^2=4b^2+a^2, \text{ also}$$
$$\overline{HE}>\overline{EF},$$

d. h., das Viereck $EFGH$ ist kein Rhombus und erst recht kein Quadrat. Es trifft also nur die Aussage 1a) zu, wonach das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm ist.

2. Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ ist gleich

$$A_1=ab. \qquad (3)$$

Der Flächeninhalt eines jeden der rechtwinkligen Dreiecke $\triangle EAH$, $\triangle FBE$, $\triangle GCF$, $\triangle HDG$ ist gleich $\frac{1}{2}\cdot 2ab=ab$.

Daher ist der Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ gleich

$$A_2=ab+4ab=5ab. \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt

$$A_1:A_2=ab:5ab=1:5.$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ verhält sich also zu dem Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$ wie 1 : 5.

Ma9 ▪1523 Es seien x, y, z drei natürliche Zahlen mit $x\leqq y\leqq z$, für die die Gleichungen

$$x+y+z=46 \qquad (1)$$

und

$$xyz=3060 \qquad (2)$$

erfüllt sind. Dann gilt

$$46=x+y+z\leqq 3z,$$

also $z\geqq\frac{46}{3}$, und, da z eine natürliche Zahl ist, $z\geqq 16$. (3)

Andererseits gilt wegen (1) und $x>0$, $y>0$

$$z\leqq 44. \qquad (4)$$

Wegen $xyz=3060=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 17$ (5)

kann daher z nur gleich

17, 18, 20, 30, 34 oder 36 sein.

1. Für $z=17$ erhält man aus (1) und (2)

$$x+y=29, \qquad (6)$$
$$xy=2^2\cdot 3^2\cdot 5=180. \qquad (7)$$

Wegen $x\leqq y\leqq z$ folgt dann aus (7), $y=15$ und $x=12$, was der Gleichung (6) widerspricht. Also kann dieser Fall nicht eintreten.

2. Für $z=18$ erhält man aus (1) und (2)

$$x+y=28, \qquad (8)$$
$$xy=2\cdot 5\cdot 17=170. \qquad (9)$$

Dann würde aus (9) $y=17$ und $x=10$ folgen, was der Gleichung (8) widerspricht. Also kann auch dieser Fall nicht eintreten.

3. Für $z=20$ erhält man aus (1) und (2)

$$x+y=26, \qquad (10)$$
$$xy=3^2\cdot 17=153. \qquad (11)$$

Wegen $x\leqq y\leqq z$ folgt dann aus (11) $y=17$ und $x=9$. Dann ist auch die Gleichung (10) erfüllt. Damit haben wir eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2) erhalten, nämlich $x=9$, $y=17$, $z=20$.

Denn es gilt

$$x+y+z=9+17+20=46,$$
$$xyz=9\cdot 17\cdot 20=3060.$$

4. Für $z=30$, 34 oder 36 ergibt sich jeweils ein Widerspruch, so daß diese Fälle nicht eintreten können. Es gilt nämlich für alle natürlichen Zahlen x, y, z

$$x^2-2xy+y^2 \geqq 0,$$
$$x^2+2xy+y^2 \geqq 4xy,$$
$$(x+y)^2 \geqq 4xy,$$
$$xy \leqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Daraus folgt wegen $x+y \leqq 16$

$$xy \leqq 8^2 = 64. \qquad (12)$$

Nun ist aber in diesen Fällen

$$xy \geqq \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17}{36} = 85 \qquad (13)$$

im Widerspruch zu der Ungleichung (12).
Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau eine Lösung (x, y, z), wobei x, y, z natürliche Zahlen mit $x \leqq y \leqq z$ sind, nämlich $x=9$, $y=17$, $z=20$.

Ma9 ■1524 Wir setzen $z=\frac{7^{1975}+7^{1976}}{588}$
und erhalten wegen $588=2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$

$$z=\frac{7^{1975}\cdot(1+7)}{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}=\frac{7^{1975}\cdot 8}{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}=\frac{7^{1973}\cdot 2}{3}$$

Nun ist (vgl. Tabellen und Formeln, S. 42, Z. 16) a^n-b^n stets durch $a-b$ teilbar, wobei a, b, n natürliche Zahlen mit $a \neq b$ sind. Folglich ist
$7^{1973}-1=7^{1973}-1^{1973}$ durch $7-1=6$ teilbar. Daher ist $2\cdot(7^{1973}-1)=2\cdot 7^{1973}-2$ durch 6 und also auch durch 3 teilbar.
Wir erhalten

$$z=\frac{7^{1973}\cdot 2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{7^{1973}\cdot 2-2}{3}+\frac{2}{3}=k+\frac{2}{3},$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Wegen $588=3\cdot 196$ gilt weiter

$$z=k+\frac{2}{3}=k+\frac{2\cdot 196}{3\cdot 196}=k+\frac{392}{588}.$$

Also läßt die Zahl z bei der Division durch 588 den Rest 392.

Ph9 ■1525 Gegeben: $m=5$ kg;
$v=1200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $t=0{,}01$ s
Gesucht: F; W.

$$F=m\cdot a \qquad a=\frac{v}{t} \qquad W=F\cdot s$$
$$F=\mathrm{m}\cdot\frac{v}{t} \qquad W=\frac{F\cdot v\cdot t}{2}$$
$$F=\frac{5\ \mathrm{kg}\cdot 1200\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{0{,}01\ \mathrm{s}}$$
$$F=600\,000\ \mathrm{N}$$
$$F=\ 61\,200\ \mathrm{kp}$$
$$W=\frac{61200\ \mathrm{kp}\cdot 1200\ \mathrm{m}\cdot 0{,}01\ \mathrm{s}}{2\cdot \mathrm{s}}$$
$$W=367\,200\ \mathrm{kpm}$$
$$s=\frac{a}{2}t^2 \qquad a=\frac{v}{t}$$
$$s=\frac{vt}{2}$$

Auf die Granate wirkt eine Kraft von 61 200 kp, und es wird eine Arbeit von 367 200 kpm verrichtet.

Lösungen zu alpha-heiter 4/76:

Die Mückenfamilie

Bezeichnet man die Anzahl der Mückenjungen mit x, dann ist die Anzahl der Mückenmädchen nach (3) $4\cdot(x-1)$. Aus (4) ergibt sich dann die Ungleichung

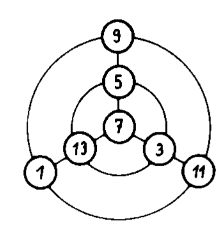
$$18 < x+4(x-1) < 23$$
$$18 < 5x-4 \quad < 23$$
$$22 < 5x \quad < 27$$

Da nur natürliche Zahlen zugelassen sind, ergibt sich die Lösung $x=5$. Also gibt es 5 Mückenjungen und 16 Mückenmädchen. Nun findet man aus (1) und (2) und (3):
a) Die gesamte Mückenfamilie hat 35 Mitglieder.
b) Es sind 8 Mückenmänner, 6 Mückenfrauen, 5 Mückenjungen, 16 Mückenmädchen.
c) Die Anzahl der Mückenkinder beträgt 21.

Magische Kreise

1. Die Summe der einzutragenden Zahlen ist 49.
2. Insgesamt muß fünfmal die gleiche Summe gebildet werden:
$5x$ (x...Summe)
3. Die Summen der Zahlen auf den beiden Kreisen werden je zweimal, die Zahl in der Mitte aber dreimal gezählt.
$2\cdot 49+m=5\cdot x$
Daraus folgt: Die Summe auf der linken Seite muß durch 5 teilbar sein. Damit kann m nur 7 sein. (Die Zahl in der Mitte ist 7.)
Die Summe der Zahlen auf demselben Kreis bzw. derselben Geraden muß 21 sein.
Da die Zahl in der Mitte 7 ist, bleibt als Summe für die beiden fehlenden Zahlen 14. Es ergeben sich folgende Kombinationen:

1	3	5
13	11	9



Damit ergibt sich eine der möglichen Lösungen: Weitere Möglichkeiten ergeben sich durch Vertauschung der „Radien" bzw. durch jeweiliges paarweises Vertauschen der Zahlen auf den Geraden.

Interessante Brüche

a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{7}$.

A vanishing Number

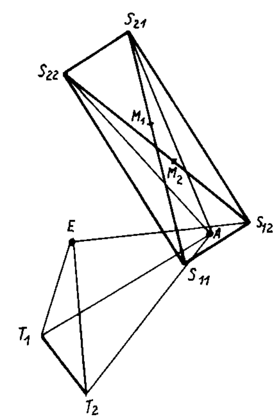
„Nichts" ist nicht mit Null gleichzusetzen. Null kann nicht Divisor sein.

Silbenrätsel

1. Winkel, 2. Integral, 3. Nenner, 4. Kurve, 5. Einheitskreis, 6. Läufer, 7. Multiplikation, 8. e, 9. Satz 10. Sinus, 11. Ebenflächner, 12. Rationalmachen – Winkelmesser

Der geheimnisvolle Schatz

Wenn es möglich ist, den Schatz ohne dritten Orientierungspunkt (Turm) zu finden, kann die Lage des Turmes als beliebig angenommen werden. Dann findet man den Schatz, indem man die Hälfte des Weges von der Eiche zum Ahorn zurücklegt, sich unter einem rechten Winkel nach links wendet und die gleiche Strecke geht. (Turm unmittelbar bei Eiche.) Es bleibt also zu zeigen, daß die Lage des Turmes beliebig ist:
T_1 und T_2 seien mögliche Standorte des Turmes, E und A die beiden Bäume, S_{11} der erste Stab für Turm T_1, S_{21} der zweite usw. M_1 und M_2 seien die Mitten der Strecken zwischen den Stäben (entsprechend für T_1 und T_2). Es ist zu zeigen, daß M_1 und M_2 zusammenfallen.
Die Dreiecke $\triangle T_1ET_2$ und $\triangle S_{11}ES_{12}$ sind kongruent (SWS). Da $\sphericalangle T_1ES_{11}=90°$, folgt T_1T_2 senkrecht zu $S_{11}S_{12}$. Analog erhält man $T_1T_2 \perp S_{11}S_{21}$, folglich $S_{11}S_{12} \parallel S_{22}S_{21}$ (1)



Aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle T_1ET_2$ und $\triangle S_{11}ES_{12}$ sowie $\triangle T_1AT_2$ und $\triangle S_{22}AS_{21}$ folgt $S_{11}S_{12}=S_{22}S_{21}$. (2)
Nach (1) und (2) ist das Viereck $S_{11}S_{12}S_{21}S_{22}$ ein Parallelogramm. Im Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander, folglich gilt $M_1=M_2$.

Denkökonomie

Die Strecke $\overline{00_1}$ ist eine Seite des Rechtecks $A00_1B$ und kann über den Umweg der Flächenberechnung dieses Rechtecks erhalten werden, da die Seite r des Rechtecks die Länge 1 hat; die Fläche des Rechtecks $A00_1B$ ist gleich der Summe aus den Flächen beider Viertelkreise und der Fläche ABD abzüglich der flächengleichen Überschneidungsflächen CDC_1, der beiden Viertelkreise, also der Fläche des halben Einheitskreises $\frac{\pi}{2}$.

Zahlenrätsel im Oktalsystem

$$\begin{array}{rcrcl} 5126 & : & 77 & = & 52 \\ - & & \times & & + \\ 126 & + & 46 & = & 174 \\ \hline 5000 & - & 4532 & = & 246 \end{array}$$

Proportionaleinstellung des Rechenstabs beim stöchiometrischen Rechnen

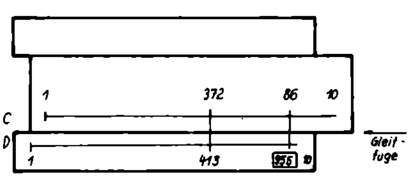
Mit Hilfe der Proportionaleinstellung des Rechenstabes kann man sich das Auflösen einer Verhältnisgleichung nach der Variablen ersparen. Wir erläutern die Berechnung des vierten Gliedes einer Verhältnisgleichung am Beispiel:

$$\frac{37{,}2}{41{,}3}=\frac{8{,}6}{x}$$

Zur Berechnung von x stellen wir den Rechenstab wie in Bild 1 ein. Wir denken uns die Gleitfuge gleichsam als Bruchstrich und stellen auf der Skale C die Zähler und auf der Skale D die Nenner ein. Es handelt sich um folgende Schritte:

1. Überschlag: Der Nenner auf der linken Seite ist etwas größer als der Zähler auf der linken Seite. Deshalb muß auch der Nenner auf der rechten Seite etwas größer als der Zähler auf der rechten Seite sein (etwa 10).
2. Wir stellen $C\ 3-7-2$ über $D\ 4-1-3$.
3. Wir lesen unter $C\ 8-6$ die Ziffernfolge $D\ 9-5-5$ ab.

Ergebnis: $x=9{,}55$.



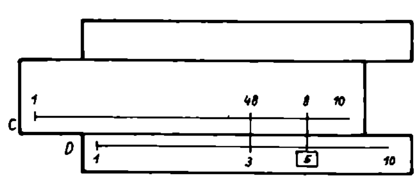
Proportionaleinstellung des Rechenstabs beim Lösen einer Verhältnisgleichung

Stöchiometrische Aufgaben können bekanntlich nach einer Schrittfolge gelöst werden; eine solche ist im Lehrbuch für Klasse 7 angegeben. Benutzt man zur eigentlichen Berechnung die Proportionaleinstellung des Rechenstabes, so kann man sich also das Auflösen der Verhältnisgleichung nach der Variablen ersparen. Die ganze Schrittfolge verkürzt sich dann um eine Maßnahme beim fünften Teilschritt. Da die Variable in der Verhältnisgleichung viertes Glied sein muß, tragen wir zweckmäßig die Massen der in der chemischen Gleichung angegebenen Stoffmengen über der Gleichung und die gegebenen und gesuchten Größen unter der Gleichung ein. Für das im Lehrbuch angeführte Beispiel erhalten wir:

$$\begin{array}{ll} 48\,\text{g} & 80\,\text{g} \\ 2\,Mg+O_2 & 2\,MgO \\ 0{,}3\,\text{g} & x \end{array}$$

$$\frac{48\,\text{g}}{0{,}3\,\text{g}}=\frac{80\,\text{g}}{x}$$

Die Proportionaleinstellung des Rechenstabs ist in Bild 2 wiedergegeben.



Lösen der Verhältnisgleichung bei einer stöchiometrischen Aufgabe

Vielleicht kommen aufgeweckte Schüler darauf, daß es gar nicht nötig ist, die Verhältnisgleichung explizite hinzuschreiben, daß sie vielmehr nach dem vierten Teilschritt „den Rechenstab unmittelbar an die chemische Gleichung anlegen" können. *W. Renneberg*

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungswege

Liebe Leser!

Einige von euch, die am *alpha*-Wettbewerb teilnehmen, werden sich an die Aufgabe W 10/12 1162 im Heft 6/1973 erinnern:

Es sei $ABCDEFGH$ ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$ (Seitenlänge a) und der Höhe h. Dabei sollen die Punkte E, F, G, H senkrecht über den Punkten A, B, C bzw. D liegen. Die Flächendiagonale $\overline{EG}$ sei durch die Punkte P_1 und P_2 in drei gleichlange Teile geteilt, so daß $\overline{EP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2G}$ ist. Es ist das Volumen des Körpers $ABCDP_1P_2$ zu berechnen, der durch die Kanten $\overline{P_1A}, \overline{P_1B}, \overline{P_1D}, \overline{P_2B}, \overline{P_2C}, \overline{P_2D}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ und $\overline{P_1P_2}$ begrenzt ist (siehe Bild 1, IV. Umschlagseite).

Wir werden sehen, daß wir durch verschiedene *räumliche Betrachtungen* zu einem Ergebnis kommen können. Dazu wollen wir gleich jetzt zur Vereinfachung der Darlegungen vereinbaren, daß bei der Bezeichnung einer Pyramide der letztgenannte Punkt die Spitze und die vorhergehenden die Ecken der zugehörigen Grundfläche darstellen sollen. Ferner wird mit $V(ABCD)$ das Volumen der Pyramide $ABCD$ und mit V_0 das Volumen des vorgegebenen Körpers bezeichnet.

▲1▲ Eine naheliegende und die wohl einfachste Lösung ergibt sich, in dem wir den Körper längs der Kanten $\overline{AP_1}$ und $\overline{CP_2}$ durch einen ebenen Schnitt *zerlegen*. Dies ist möglich, da die Punkte P_1 und P_2 auf der zu AC parallelen Geraden EG liegen.

Dabei zerfällt er in zwei gleich große Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche ACP_2P_1. Diese Fläche ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseitenlängen $a\sqrt{2}$ und $\frac{a}{3}\sqrt{2}$ und der Höhe h; sie besitzt demnach den Flächeninhalt

$\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}+\frac{a}{3}\sqrt{2}\right)\cdot h=\frac{2}{3}a\sqrt{2}\,h$. Die Höhe der Pyramiden ist $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, da $\overline{BD}$ senkrecht auf der Ebene durch A, C, G und E steht und durch AC halbiert wird. Also ist

$$V_0=2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\,h\right)\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{4}{9}a^2h.$$

▲2▲ Eine weitere einfache *Zerlegung* erhält man mittels ebener Schnitte durch B, D, P_1 bzw. B, D, P_2 (siehe Bild 2).

Wegen $P_1P_2 \parallel AC$ und $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{3}\overline{AC}=\frac{2}{3}\overline{AN}$ ist $V(BDP_1P_2)=\frac{2}{3}V(BDP_1A)$. Folglich gilt

$$V_0=2\cdot V(BDP_1A)+\frac{2}{3}\cdot V(BDP_1A)$$
$$=\frac{8}{3}\cdot V(BDP_1A)=\frac{8}{3}\cdot V(ABDP_1)$$
$$=\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}\cdot h\right)=\frac{4}{9}a^2h.$$

▲3▲ Geht man von der *Entstehung des Körpers* aus, so liegt es nahe, zunächst das Volumen jener Teile zu bestimmen, die vom ursprünglichen Quader abzutrennen sind. Die Bilder 3a und 3b vermitteln eine geäußerte Vorstellung, welche (leicht zu berechnenden) Teile dies sein könnten. Da sind zunächst die Pyramide $ABFEP_1$ und die dazu kongruente Pyramide $CDHGP_2$; ihre Grundflächen haben offensichtlich den Inhalt ah und ihre Höhen sind gleich der Dreieckshöhen von P_1 auf die Seite $\overline{EF}$ (des Dreiecks EFP_1), also aus Ähnlichkeitsgründen gleich $\frac{1}{3}\overline{FG}=\frac{a}{3}$.

Demnach ist ihr Volumen $V_1=\frac{1}{3}(ah)\cdot\frac{a}{3}=\frac{1}{9}a^2\cdot h$.

Ferner werden die Pyramide $BCGFP_1$ und die dazu kongruente Pyramide $DAEHP_2$ herausgenommen. Völlig analoge Betrachtungen ergeben eine Höhe von $\frac{2}{3}a$. Also ist ihr Volumen $V_2=\frac{1}{3}(ah)\cdot\frac{2}{3}a=\frac{2}{9}a^2\cdot h$. Insgesamt erhalten wir

$$V_0=a^2h-2V_1-2V_2=\frac{3}{9}a^2h.$$

Dies stimmt nicht mit dem bisherigen Ergebnis überein! Wo steckt hier der Fehler? Natürlich. Die zweite Abspaltung (Bild 3b) setzt voraus, daß $\overline{CP_1}$ und $\overline{BP_2}$ in einer gemeinsamen Ebene liegen. Das ist jedoch nicht möglich, da wegen $P_1P_2 \parallel AC$ die Ebene durch C, P_1, P_2 die Grundfläche $ABCD$ längs AC schneidet. (Für diejenigen von euch, die sich irreführen ließen, sei zum Trost gesagt, daß sich hier auch Menschen täuschen ließen,

Bild 1

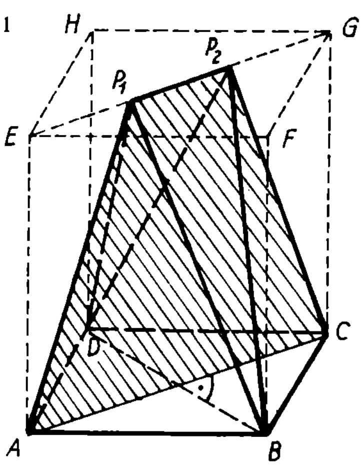


Bild 3a

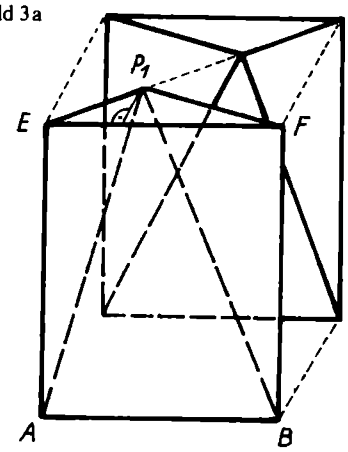


Bild 4

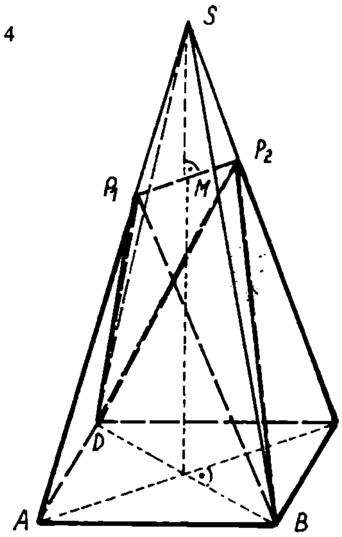


Bild 2

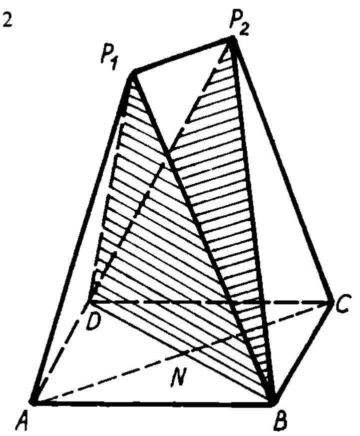


Bild 3b

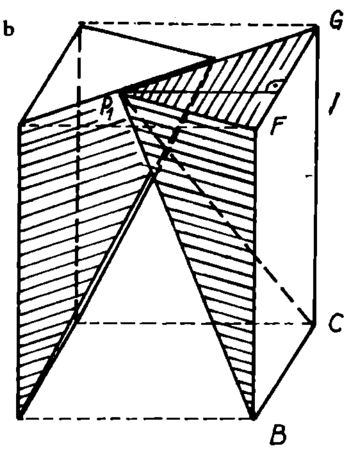
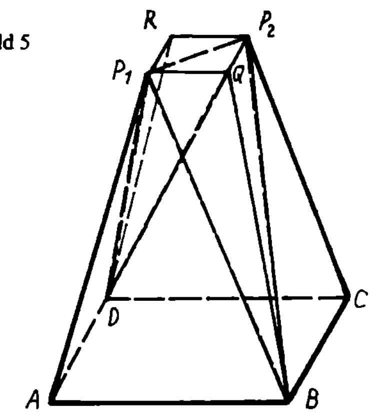


Bild 5



die von Berufs wegen ein gutes Vorstellungsvermögen brauchen. Aus Fehlern kann man lernen; also das nächste Mal kritischer bei räumlichen Betrachtungen sein!)

Nun wollen wir den Fehler schnell beheben. Anstelle der Pyramide $BCGFP_1$ sind einfach die Pyramiden P_1P_2FB und $BCGFP_2$ zu nehmen. Der Inhalt des Dreiecks P_1P_2F ist wegen $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{3}\overline{EG}$ gleich dem Drittel des Inhalts von EGF, also $\frac{1}{6}a^2$. Folglich ist $V(P_1P_2FB)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{6}\cdot h=\frac{1}{18}a^2h$. Die Pyramide $BCGFP_2$ jedoch ist offensichtlich kongruent zu $ABFEP_1$. Demnach ist

$V_0=a^2h-4V_1-2V(P_1P_2FB)=\frac{4}{9}a^2h$.

▲4▲ Das Volumen des Körpers kann deshalb nicht unmittelbar angegeben werden, weil es keiner der einfachen Körper mit bekannter Volumenformel ist. Darum wäre zu versuchen, ihn durch Anfügen von einfachen Körpern *zu einem einfachen Körper* mit bekannter Volumenformel zu *ergänzen*.

Die Verlängerungen der Kanten $\overline{AP_1}$ und $\overline{CP_2}$ schneiden sich in einem Punkt S. Das Dreieck ACS ist gleichschenklig. Aus dem Körper entsteht nun offenbar durch Anfügen der zueinander kongruenten Pyramiden P_1P_2SB und P_1P_2SD die Pyramide $ABCDS$ (siehe Bild 4). Wegen $P_1P_2 \parallel AC$ und $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ ist $\overline{SM}:(\overline{SM}+h)=1:3$ und damit $\overline{SM}=\frac{h}{2}$. Also ist $V(ABCDS)=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{3}{2}h=\frac{1}{2}a^2h$. Weiterhin hat das Dreieck P_1P_2S den Inhalt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a\sqrt{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}a\cdot h$.

Da das Lot von B auf die Ebene durch P_1, P_2, S (und A, C) nach unseren räumlichen Darlegungen unter 1. die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ besitzt, gilt $V(P_1P_2SB)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{12}ah\right)\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{36}a^2h$. Zusammen ergibt sich

$V_0=\frac{1}{2}a^2h-2\cdot\frac{1}{36}a^2h=\frac{4}{9}a^2h$.

▲5▲ Wir *ergänzen* den Körper zum Pyramidenstumpf $ABCDP_1QP_2R$ mit quadratischer Deckfläche P_1QP_2R (siehe Bild 5). Dies ist möglich, da $P_1P_2 \parallel AC$ und $ABCD$ Quadrat ist. Wegen $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ hat das Quadrat den Inhalt $\left(\frac{a}{3}\right)^2$; das Volumen des Pyramidenstumpfes ist demnach

$\frac{1}{3}\left(a^2+\frac{a^2}{9}+\sqrt{a^2\cdot\frac{a^2}{9}}\right)\cdot h=\frac{13}{27}a^2h$.

Weiterhin ist

$V(P_1P_2QB)=V(P_1P_2RD)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{9}\right)\cdot h$
$=\frac{1}{54}a^2h$.

Folglich ist

$V_0=\frac{13}{27}a^2h-2\cdot\frac{1}{54}a^2h=\frac{4}{9}a^2h$.

Überlegt euch nun selbst weitere geeignete Zerlegungen (etwa mit der Pyramide $ABCDM$ bzw. Ergänzungen (etwa zu einem dreiseitigen Prisma mit EG als Mantelkante). Wer von euch diese Aufgabe auch gern mit allgemeineren Methoden lösen möchte, dem wollen wir die Simpson-Formel (speziell die *Keplersche Faßformel;* siehe *Kleine Enzyklopädie Mathematik*, S. 236 und 607 (9. Aufl. 1974)) empfehlen: Da der Inhalt der Schnittfläche, die durch einen ebenen Körperschnitt parallel zur Grundfläche, die durch einen ebenen Körperschnitt parallel zur Grundfläche entsteht, eine quadratische Funktion von der Schnitthöhe x ist

[durch einige einfache Rechnungen erhält man $F_x=\frac{a^2}{3h^2}(h-x)(3h-x)$], gilt (exakt)

$V_0=\frac{h}{6}(F_0+4F_{\frac{h}{2}}+F_h)$
$=\frac{h}{6}\left(a^2+4\cdot\frac{5}{12}a^2+0\right)=\frac{4}{9}a^2h$.

L. Dimenstein/E. Quaisser