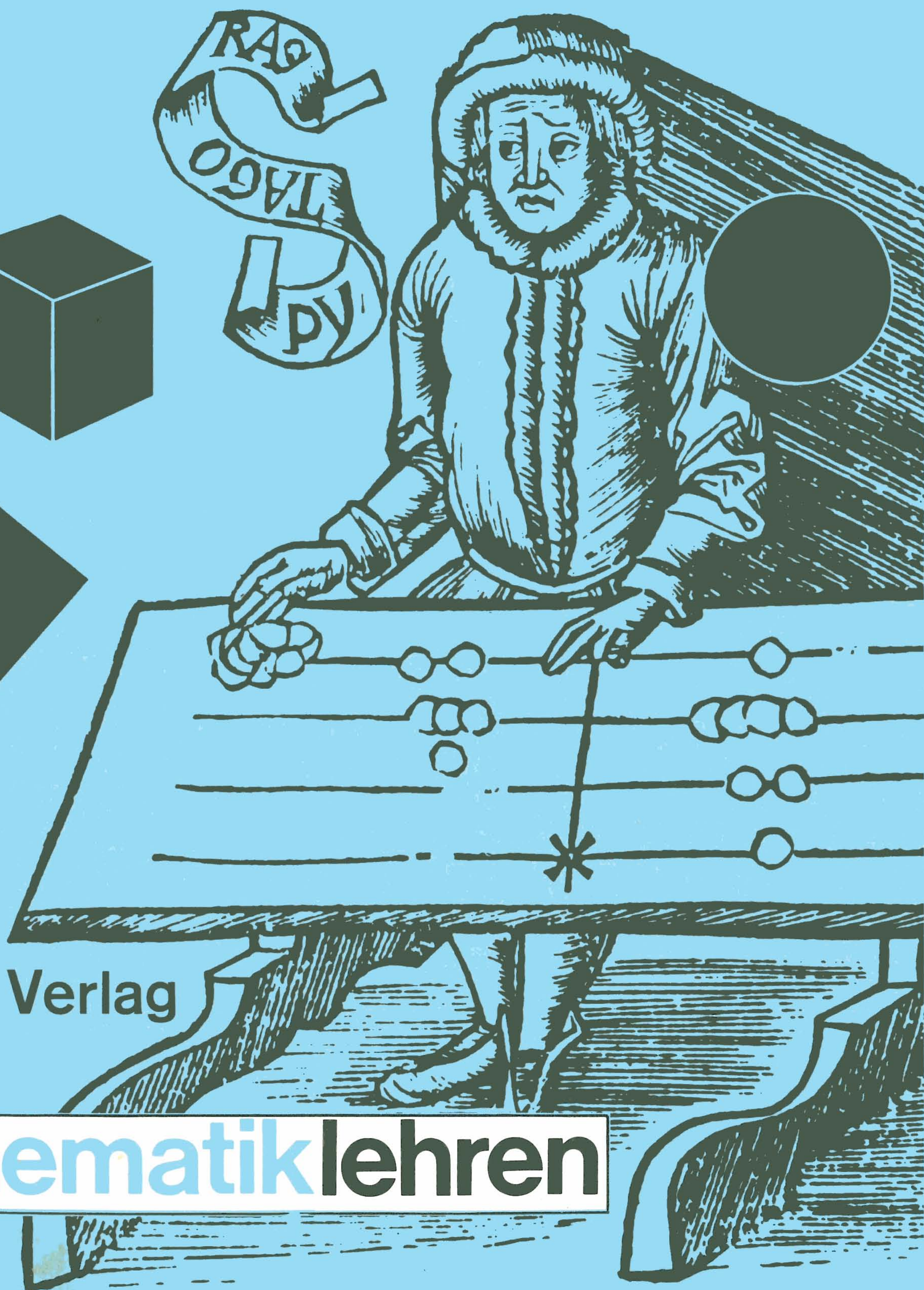
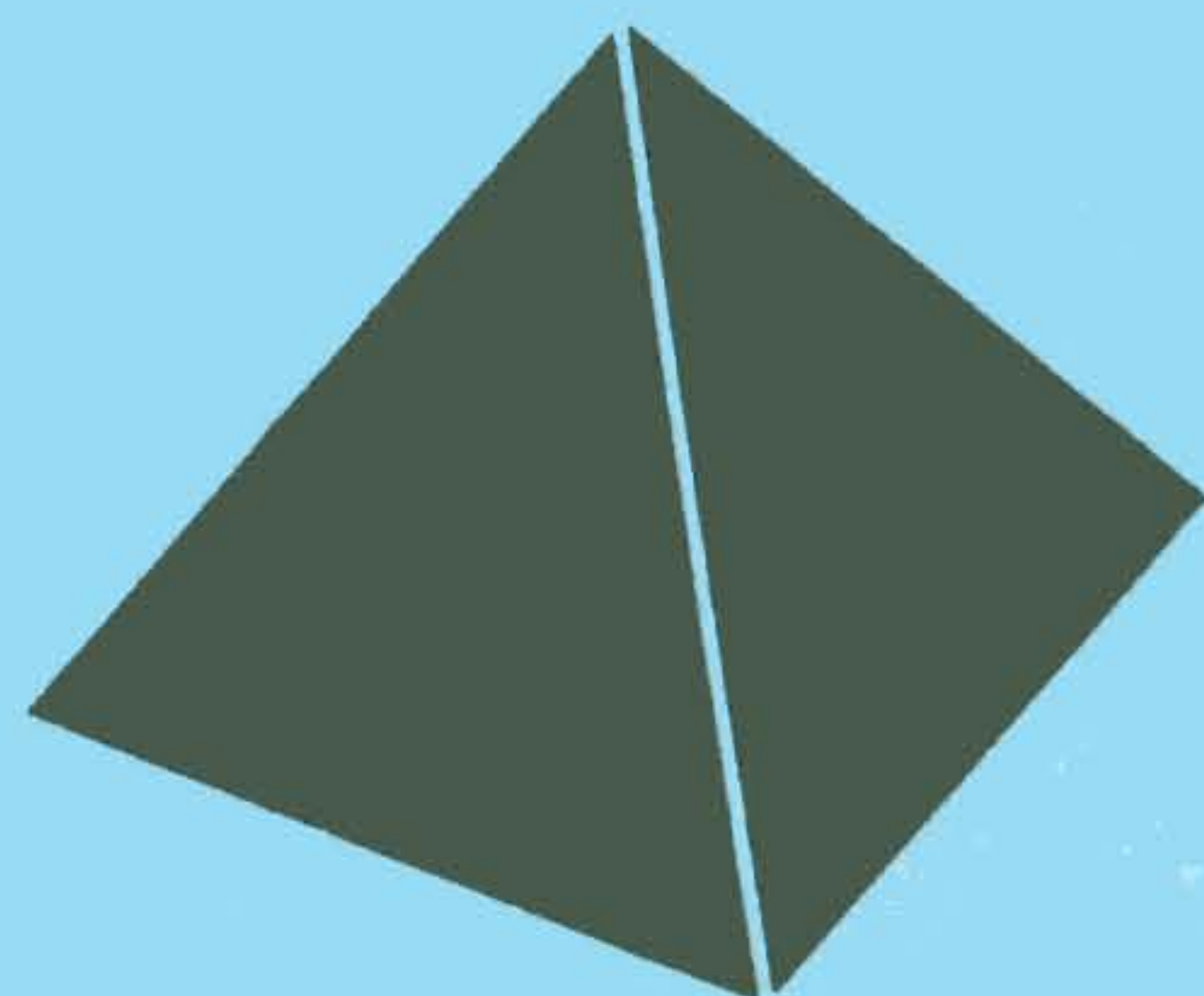
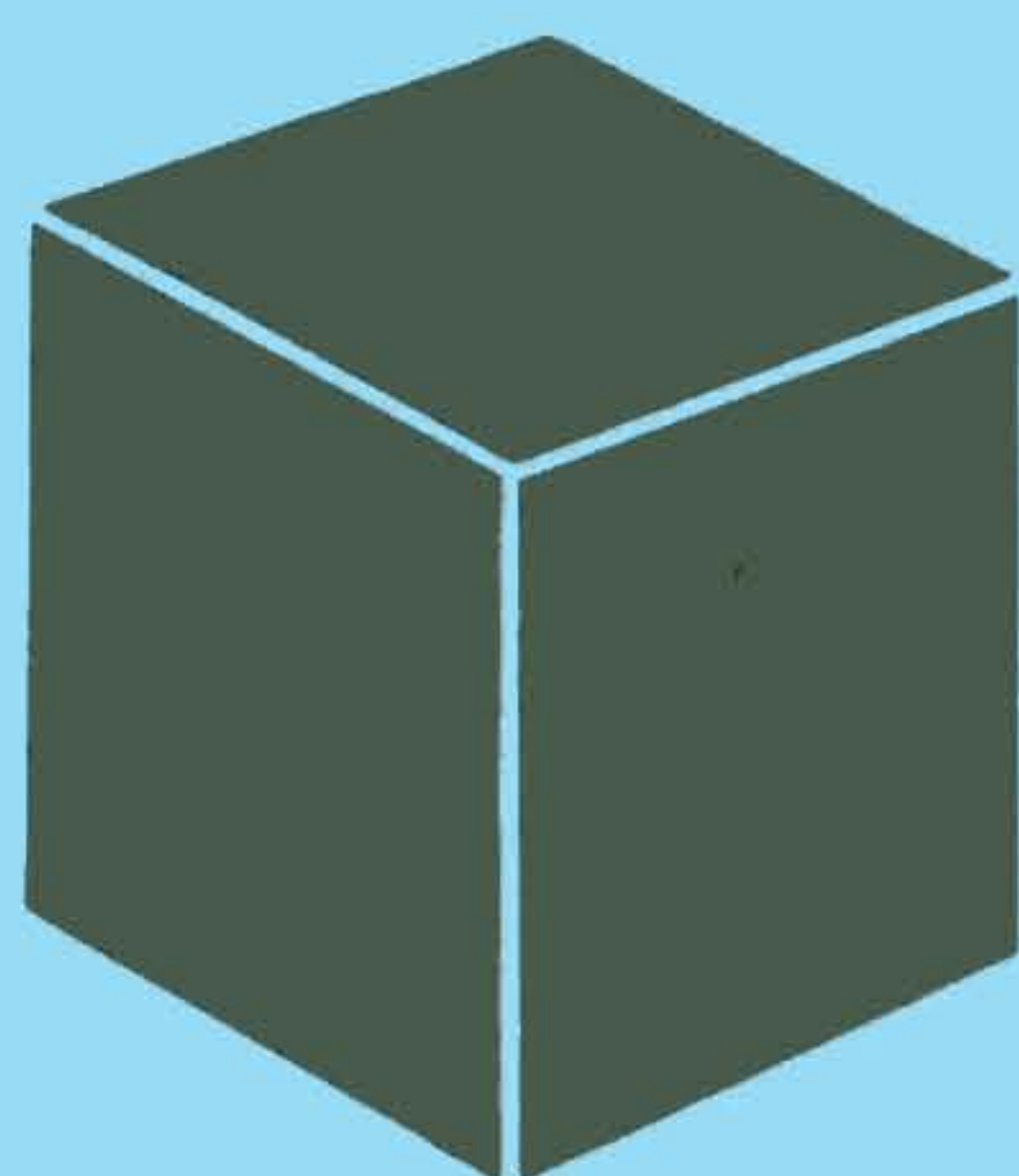
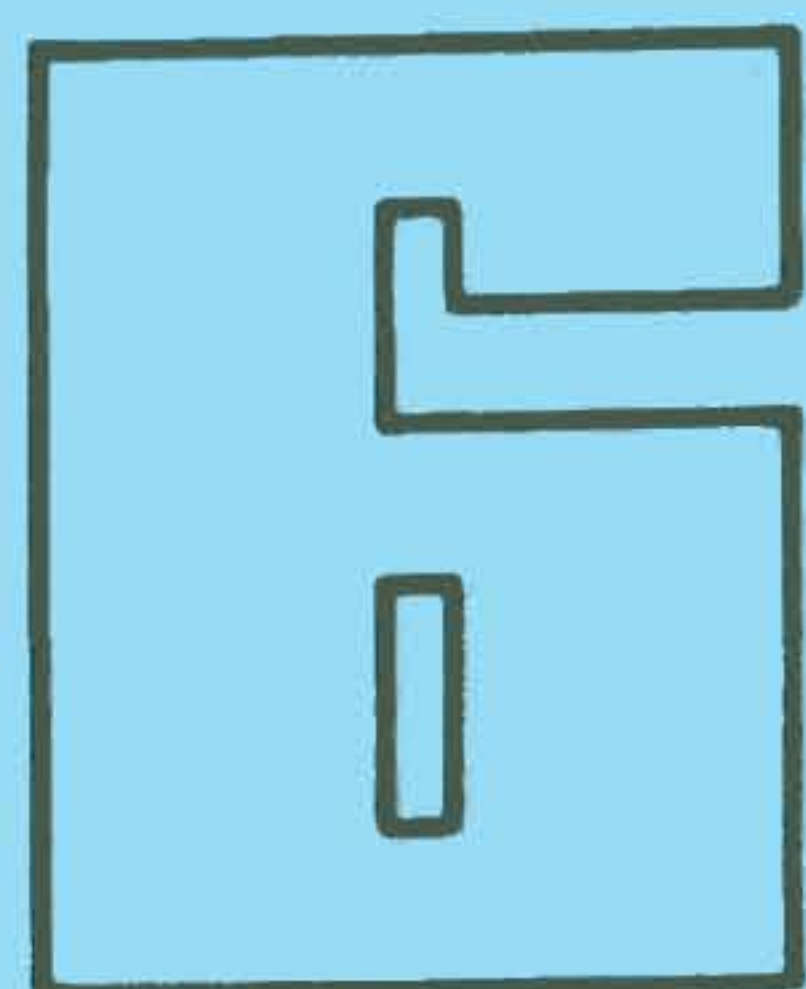
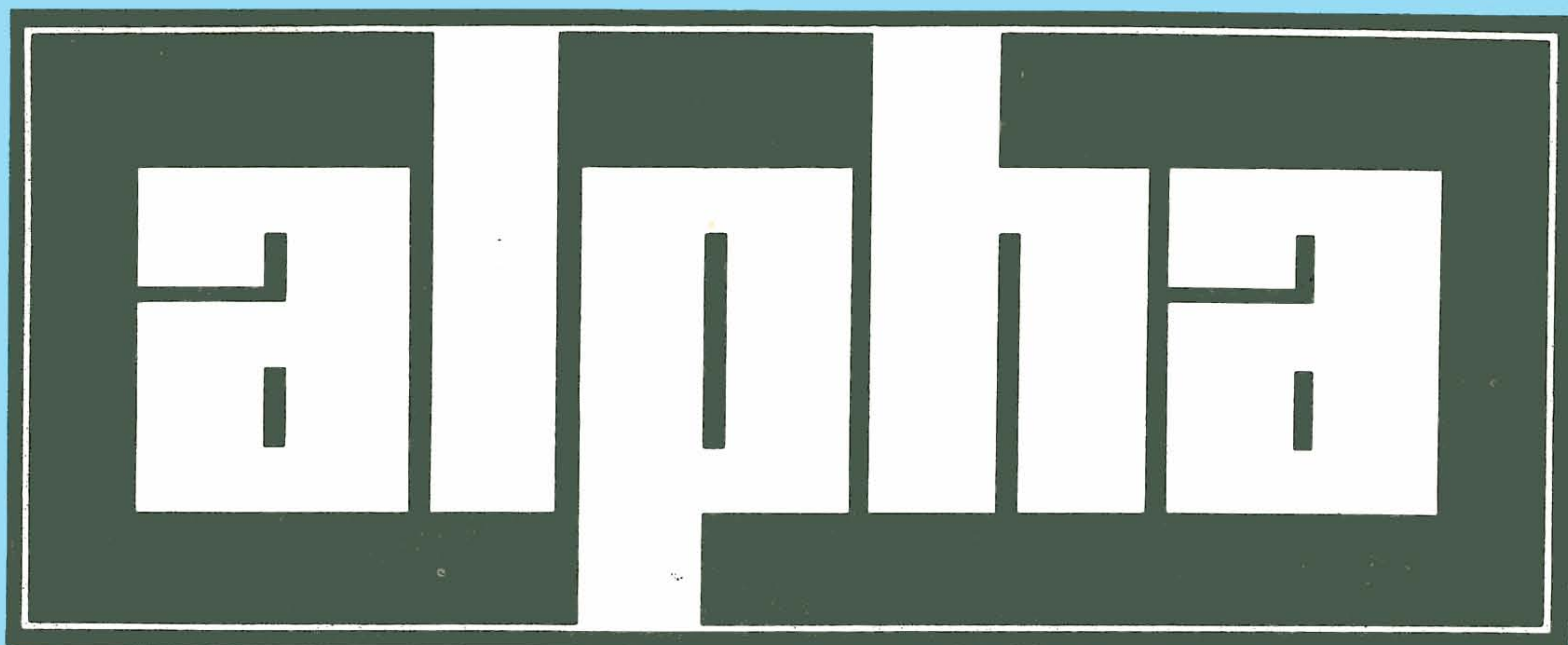


Mathematische
Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Verlag GmbH
24. Jahrgang 1990
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395



Friedrich Verlag
in Velber

mathematiklehren

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag GmbH
Anschrift des Verlages:
Lindenstr. 54 a, PSF 1213, Berlin, 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig, 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur);
Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Chemnitz); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritzt); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)

Lizenznummer: 1545

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 DM, im Abonnement zweimonatlich 1,20 DM.

„alpha“ ist zu beziehen über den Buch- und Zeitschriftenhandel, die Post oder die Redaktion.

Fotos: Dr. P. Schreiber (S. 122); K.-Sudhoff-Institut der Universität Leipzig (S. 138/139)

Vignetten: L. Otto (Titelvignetten); aus Funktio, Helsinki (S. 136)

Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig

Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einem Titelblatt von „mathematik lehren“, Friedrich Verlag in Velber

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig



Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

- 121 Schiebespiel im Pentagon, Teil 1
W. Träger, Döbeln
- 121 Ein interessantes Anordnungsproblem
OStR Th. Scholl, Berlin
- 122 Der gallische Apollonius
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 124 Sprachecke
R. Bergmann (†), Döbeln/P. Hofmann, Dr. G. Liebau, beide Leipzig
- 125 Erstaunlicher Tipschein
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz
Alphons logische Abenteuer
Prof. Dr. L. Kreiser, Institut für allg. Logik der Universität Leipzig
- 126 alpha-Schachwettbewerb
H. Rüdiger, Werk für Fernsehelektronik Berlin
- 127 alpha-Wettbewerb 1989/90 · Kollektive Beteiligung
- 128 Pythagoras – einmal anders!
Prof. Dr. P. Gerdes, E.-Mondlane Universität Maputo/
Dr. C. P. Helmholz, Sektion Math. der Universität Leipzig/
Dr. H. Meyer, Sektion Math. der Pädag. Hochschule Dresden
- 130 Pythagoreische Zwillinge sowie Potenzen von Drillingen und Vierlingen
Dr. W. Schmidt, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald
- 132 In freien Stunden · alpha-magisch
Zusammenstellung: Dr. G. Liebau, Leipzig
- 134 Wer löst mit? alpha-Wettbewerb
Zusammenstellung: Dr. W. Fregin/Dr. W. Riehl, beide Leipzig
OStR Th. Scholl, Berlin
- 137 31. Ausstellung „Herzberger Spiele“
B. Junghanns, Markkleeberg/OStR G. Schulze, Herzberg
- 138 Mathematische Traditionen in Leipzig
Prof. Dr. H. Wußing, K.-Sudhoff-Institut für Geschichte der Medizin und Naturwiss. der Universität Leipzig
- 140 XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Lösungen der DDR-Olympiade
- 143 Lösungen
- 144 XXXI. Internationale Mathematikolympiade, Peking 1990
- III. U.-Seite: Magische Quadratkompositionen
K. Ernst, Erfurt
- IV. U.-Seite: Jahreskalender 1991



Satz und Druck: Interdruck GmbH Leipzig
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 14. August 1990

Auslieferungstermin: 10. Dezember 1990



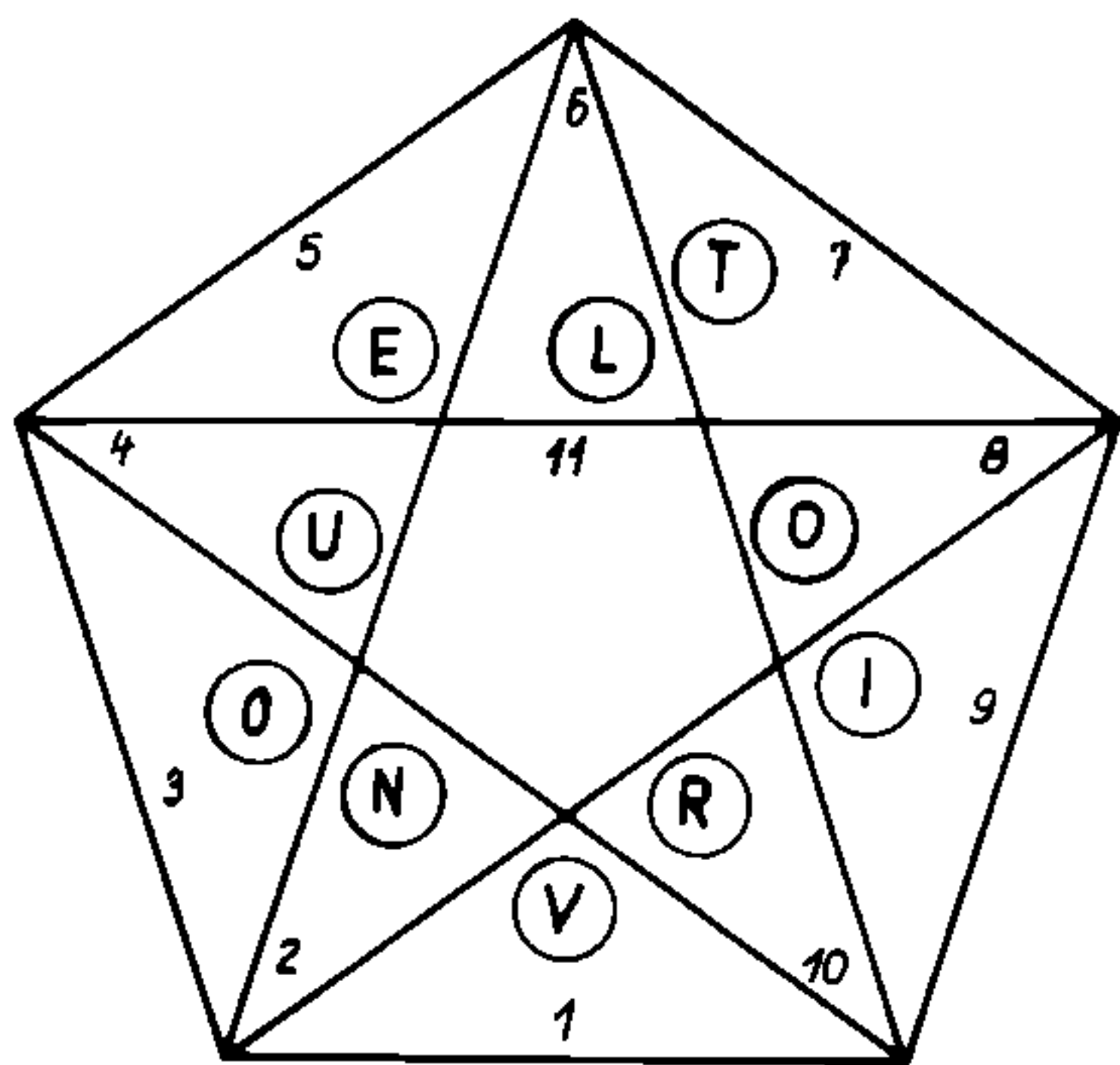
Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Schiebespiel im Pentagon

Teil 1

Wer den Spielbetrieb kennt, weiß,
welcher Zauber ihm innewohnt.
G. Hauptmann

Das Spielfeld dieses Schiebespiels ist ein mit seinen Diagonalen auf Papier gezeichnetes regelmäßiges Pentagon (Fünfeck). Zu Spielbeginn wird auf jedes der 10 Randfelder (Dreiecksflächen) ein mit je einem der Buchstaben R, E, V, O, L, U, T, I, O und N beschrifteter Spielstein (Pappstück) in ungeordneter, beliebiger Reihenfolge gesetzt, während das Mittelfeld (kleine Pentagonfläche) zunächst unbesetzt bleibt. Bei einem Zuge darf ein Stein von einem Feld auf ein benachbartes unbesetztes Feld gezogen werden, das mit dem Ausgangsfeld eine Seite gemeinsam hat. Als erster Zug kann also nur einer der Steine von den Randfeldern 2, 4, 6, 8 oder 10 auf das Mittelfeld 11 gezogen werden (siehe Bild). Durch eine Folge von Zügen sind die Spielsteine auf den Randfeldern so umzugruppieren, daß sich beim im Randfeld 1 beginnenden Lesen im Uhrzeigersinn das Wort „Revolution“ ergibt. Der Leser möge zunächst versuchen, die Ausgangslage des Bildes in die Ziellage überzuführen.



Doch das im Felde 1 beginnende, im Uhrzeigersinn zu lesende Zielwort „Revolution“ läßt sich ausgehend von jeder Ausgangslage stets durch eine Folge von Zügen herstellen! Zugfolgen, die die spezielle Ausgangslage des Bildes bzw. eine beliebige Ausgangslage in die Ziellage überführen, werden im Folgeheft vorgestellt. Somit hat der interessierte Leser genügend Zeit zum selbständigen Auffinden geeigneter Zugfolgen. Es sei noch mitgeteilt, daß die Theorie des „Schiebespiels im Pentagon“ viel gemeinsam hat mit der des „Fünftehnenspiels“, das in der angegebenen Literatur analysiert wird:

- R. Thiele, Die gefesselte Zeit, Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1987

Ein interessantes Anordnungsproblem

Der Schriftsteller W. K. Schweickert erzählt in seinem Buch „Der Senor und die Punkte“ folgende Geschichte aus Mexiko: Ein Aufseher betrügt die ihm unterstellten Arbeiterinnen um 24 Fässer mit Schmalz, die ihnen als Teil des Jahreslohnes in Naturalien ausgezahlt werden sollten. Der Aufseher war viel zu faul, täglich Faß für Faß zu zählen, deshalb hatte er die vorhandenen 68 Fässer mit Schmalz, von denen 24 Stück den Arbeiterinnen gehörten, so im Fabrikhof aufstellen lassen, daß in jeder Randreihe 21 (4 + 13 + 4) Fässer standen. Ein flüchtiger Blick durch sein Kontorfenster zeigte ihm so, daß sein Diebesgut unangetastet war. Die Fässer waren also wie folgt angeordnet:

4	13	4
13		13
4	13	4

Ein neuer Kollege gab den Arbeiterinnen einen Tip, wie sie zu ihrem Recht kommen könnten. Die Arbeiterinnen sollten in gewissen zeitlichen Abständen jeweils vier Fässer unbemerkt vom Hof holen und dabei so vorgehen, daß der Aufseher trotzdem in jeder Randreihe 21 Fässer sah. Der Schriftsteller gibt in seinem Buch nur eine empirische Lösung für dieses Anordnungsproblem an. Wir wollen es deshalb einmal mathematisch näher durchleuchten. Zur Veranschaulichung verwenden wir ein Quadrat, daß aus neun gleichgroßen quadratischen Feldern besteht.

4	13	4
13		13
4	13	4

e	m	e
m		m
e	m	e

Nennt man die Anzahl der Fässer jedes Eckfeldes e , die jedes Mittelrandfeldes m , und setzt man eine symmetrische Anordnung, also gleiches e für alle Eckfelder und gleiches m für alle Mittelrandfelder, vor-

aus, so beträgt die Gesamtzahl s aller Fässer

$$s = 4e + 4m = 2 \cdot (2e + m) + 2m.$$

Um den Aufseher zu täuschen, müssen die Arbeiterinnen darauf achten, daß die Anzahl der Fässer jeder Randreihe, also die Summe $2e + m$ konstant bleibt.

Darum gilt $4e + 4m = s$ und

$$2e + m = k \text{ bzw. } e + m = \frac{s}{4} \text{ und } m = k - 2e.$$

Daraus folgt durch Einsetzen $e = k - \frac{s}{4}$.

Da das Mittelrandfeld nicht leer sein darf, um den Argwohn des Aufsehers nicht zu erregen, gilt $m \geq 1$; wegen $s = 4 \cdot (e + m)$ muß s ein Vielfaches von 4 sein.

Für den konkreten Fall ($s_1 = 68$ und $k = 21$) sind folgende Anordnungen möglich:

s	k	$e = k - \frac{s}{4}$	$m = k - 2e$
68	21	4	13
64	21	5	11
60	21	6	9
56	21	7	7
52	21	8	5
48	21	9	3
44	21	10	1

Wegen $68 - 44 = 24$ sind die Arbeiterinnen nach sechs Entnahmen von jeweils vier Fässern zu ihren 24 Fässern Schmalz gekommen. Dabei entstehen schrittweise folgende sechs weiteren Anordnungen der Fässer:

5	11	5
11		11
5	11	5

6	9	6
9		9
6	9	6

7	7	7
7		7
7	7	7

8	5	8
5		5
8	5	8

9	3	9
3		3
9	3	9

10	1	10
1		1
10	1	10

Th. Scholl

Derjenige, welcher von klein auf von der Mathematik durchdrungen wird, indem er sich ihre unumstößlichen Beweise aneignet, ist so zur Wahrnehmung der Wahrheit vorbereitet, daß er leicht jeglichen Betrug abschüttelt.

Petrus Gassendi (1592 bis 1655,
franz. Philosoph und Mathematiker)

- L. A. Kaloujnine, V. I. Suščanskij, Transformationen und Permutationen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986 (Mathematische Schülerbücherei Nr. 124)
- M. Deweß, G. Deweß, Summa summarum, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1986 (Mathematische Schülerbücherei Nr. 125)

W. Träger

Der gallische Apollonius

Zum 450. Geburtstag von François Viète (Vieta)

Frankreich in der zweiten Hälfte des 16. Jh.: Handel und Handwerk, darunter z. B. der Buchdruck, haben einen raschen Aufschwung genommen, aber das Land ist zerrüttet durch Kriege nach außen und durch die blutigen Auseinandersetzungen zwischen Katholiken und Calvinisten (in Frankreich als Hugenotten bezeichnet). Diese Religionskämpfe, in deren Hintergrund es aber um die Rivalität zweier Adelparteien ging, begannen 1562 mit dem „Blutbad von Vassy“, erreichten ihren Höhepunkt in der „Bartholomäusnacht“ vom 23. zum 24. August 1572, als in einer einzigen Nacht mehr als 2 000 Hugenotten in Paris und an den folgenden Tagen rund 20 000 in der Provinz einem Pogrom zum Opfer fielen, und endeten erst, als König Henri IV. 1598 im Edikt von Nantes den Katholizismus zur Staatsreligion erklärte, zugleich aber den Hugenotten Religionsfreiheit und gewisse politische Autonomie-rechte garantierte. In der Literatur ist diese bewegte Zeit später vielfach wiedergespiegelt worden, so von Heinrich Mann („Jugend und Vollendung des Königs Henri Quatre“), von Alexandre Dumas d. Ä. („Die Königin Margot“) und von Prosper Mérimée („Chronik der Regierung Karls IX.“, deutsch auch unter dem Titel „Die Bartholomäusnacht“). Eigentlich muß man alle diese, durchweg spannend ab-

Bild 1



teuerlichen Romane gelesen haben, um sich ein ungefähres Bild von den Lebensumständen des Mathematikers François Viète (besser unter seinem latinisierten Gelehrtennamen Vieta bekannt) malen zu können – und dann wird man um so beeindruckter von Umfang, Vielfalt und Originalität der Leistungen dieses Mannes sein. Wie konnte er, noch dazu in wichtigen Funktionen in die Adels- und Staatsaffären seiner Zeit verstrickt, Zeit und innere Ruhe für ein so gewaltiges Werk finden? Auf diese Frage gibt es bis heute keine befriedigende Antwort.

Vieta wird an einem heute unbekannten Tag des Jahres 1540 in der westfranzösischen Stadt Fontenay-le-Comte in einer wohlhabenden Kaufmannsfamilie geboren, die im Begriff ist, in den Adel aufzusteigen. Er wird später den Titel eines Seigneur de la Bigotière tragen, aber im Titel seiner wissenschaftlichen Abhandlungen wird er als Franciscus Vieta Frontenænsis (lat. s. v. w. aus Fontenay) bezeichnet werden. Nach dem üblichen Besuch einer Klosterschule studiert er Rechtswissenschaft und wird alsbald gesuchter juristischer Berater hochgestellter Familien und Personen, darunter zweier Könige von Frankreich: Heinrich III. von Valois (1574 bis 1589, ermordet) und Henri IV. von Bourbon (1589 bis 1610, ermordet), letzterer der berühmte „Zaunkönig“ von Navarra, lange Zeit Haupt der hugenottischen Partei, bis ihm 1593 „Paris eine Messe wert“ war, d. h. er trat zum Katholizismus über, um in die Hauptstadt einziehen zu können.

Eine aufsehenerregende Probe seines Scharfsinns hatte Vieta 1589 abgelegt, als es ihm gelang, den Geheimcode der mit Frankreich im Krieg befindlichen Spanier zu dechiffrieren. Fortan gehörten Chiffrieren und Dechiffrieren zu seinen ständigen Aufgaben im Dienst der französischen Krone. Bezüglich weiterer Einzelheiten aus dem Leben Vietas müssen wir auf seine Biographie in Wußing/Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen 1975, 1989 verweisen. Etwa seit 1571, verstärkt aber seit 1591 setzte Vieta eine Reihe von Büchern und Schriften mathematischen Inhalts in Umlauf, die er auf eigene Kosten drucken und an Interessenten, auch im Ausland, verschicken ließ.

So wurden seine Ergebnisse rasch bekannt, sein Ruhm wuchs, manche seiner Schriften wurden schon bald nachgedruckt, aber als

der selbst bedeutende niederländische Mathematiker Frans van Schooten (um 1615 bis 1660) 1646 die Gesammelten Abhandlungen Vietas (Bild 2) herausgab, konnte er schon nicht mehr alle zusammenbringen, und manche Schrift Vietas, von deren einstiger Existenz wir wissen oder sie vermuten, gilt bis heute als verloren. In der mathematikhistorischen Lehrbuch- und Populärliteratur wird Vieta heute – und durchaus berechtigt – vor allem als Begründer der Algebra im Sinne eines Rechnens mit Buchstaben zur Bezeichnung gegebener und gesuchter Zahlen und beginnender Symbolisierung der auszuführenden Rechenschritte herausgestellt.

FRANCISCI VIETÆ OPERA MATHEMATICA,

In unum Volumen congesta,
ac recognita,

Operâ atque studio

FRANCISCI à SCHOOTEN Leydenfis,
Matheseos Professoris.

N.



LVGDVNI BATAVORVM,

Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.

clō 15 c XLVI.

Bild 2

Er selbst nannte dieses Rechnen mit Buchstaben „logistica speciosa“ (etwa „kostbare Rechenkunst“) im Gegensatz zur „logistica numerosa“, dem Rechnen mit konkreten Zahlen. In späteren Ausgaben seiner diesbezüglichen Schriften erscheint in diesem Zusammenhang auch die Bezeichnung „Algebra nova“ (neue Algebra). Der neuen Algebra sind gewidmet:

– die kleine, kaum 25 Druckseiten umfassende Schrift „In Artem analyticam Isagoge“, deutsch etwa: Einführung in die analytische Kunst (1591, 1635 in Holland nachgedruckt). Übrigens ist das griechische Wort Isagoge (eigentlich Eisagoge) für Einführung ein Fremdling im sonst lateinischen Text. Daher weist seine Wiederverwendung durch Fermat (1636) und andere bedeutende Mathematiker des folgenden Jh. deutlich auf die bewußte Anknüpfung an eine von Vieta mit seiner „Isagoge“ begründete neue mathematische Tradition hin.

– „Zeteticorum libri quinque“ (1593), deutsch etwa: Fünf Bücher über „Zetetik“, worunter Vieta das Aufsuchen von unbe-

kannten Größen versteht, nachdem man sie mit Buchstabensymbolen bezeichnet hat und sie nun durch Umformen von Gleichungen zwischen ihnen und den gegebenen Größen gewissermaßen „jagt“.

– „De aequationum recognitione et emendatione“ (postum 1615 in Paris gedruckt), deutsch etwa: Über die Untersuchung und Verbesserung (im Sinne von Aufbereiten, auf Normalform bringen) von Gleichungen.

– „Ad logisticam speciosam notae priores“ (postum 1631 in Paris gedruckt), deutsch etwa: Erste Bemerkungen zur logistica speciosa. In diesen algebraischen Abhandlungen findet sich unter vielem anderen die Aufstellung einer Gleichung mit vorgegebenen Lösungen und der „Vietasche Wurzelsatz“ und die später als Tschirnhaus-Transformation bezeichnete Methode, den zweithöchsten Koeffizienten a_{n-1} eines Polynoms

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

durch lineare Substitution einer neuen Unbekannten y zum Verschwinden zu bringen. „alpha“ plant zum 400. Jahrestag des Erscheinens der „Isagoge“, die man ja mit einem gewissen Recht als Geburtsurkunde der modernen Algebra bezeichnen kann, einen besonderen Artikel über Vietas Verdienste um die Algebra. Darum und auch um der historischen Gerechtigkeit willen wollen wir uns hier im folgenden nur mit den in der modernen Literatur weit weniger gewürdigten, aber ebenfalls bemerkenswerten und zum Teil erhebliche historische Wirkungen auslösenden Beiträgen Vietas zur Geometrie beschäftigen.

Der leider verlorene „Canon mathematicus“ (1579) enthielt erstmals eine moderne Einführung in alle sechs trigonometrischen Funktionen (sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans und cosecans) und deren Tabellierung, von Bogenminute zu Bogenminute fortschreitend, ferner eine Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie, eine Berechnung der Zahl π mittels dem Kreis einbeschriebener und umbeschriebener regulärer 1296-Ecke auf neun Dezimalstellen genau und eine Fülle goniometrischer Beziehungen, die fast bis zum Satz von Moivre reichen. Auch später hat sich Vieta immer wieder als ein Meister des Rechnens mit trigonometrischen Funktionen erwiesen und als erster trigonometrische Formeln in Gestalt (modern gesprochen) unendlicher Reihen aufgestellt, wie z. B.

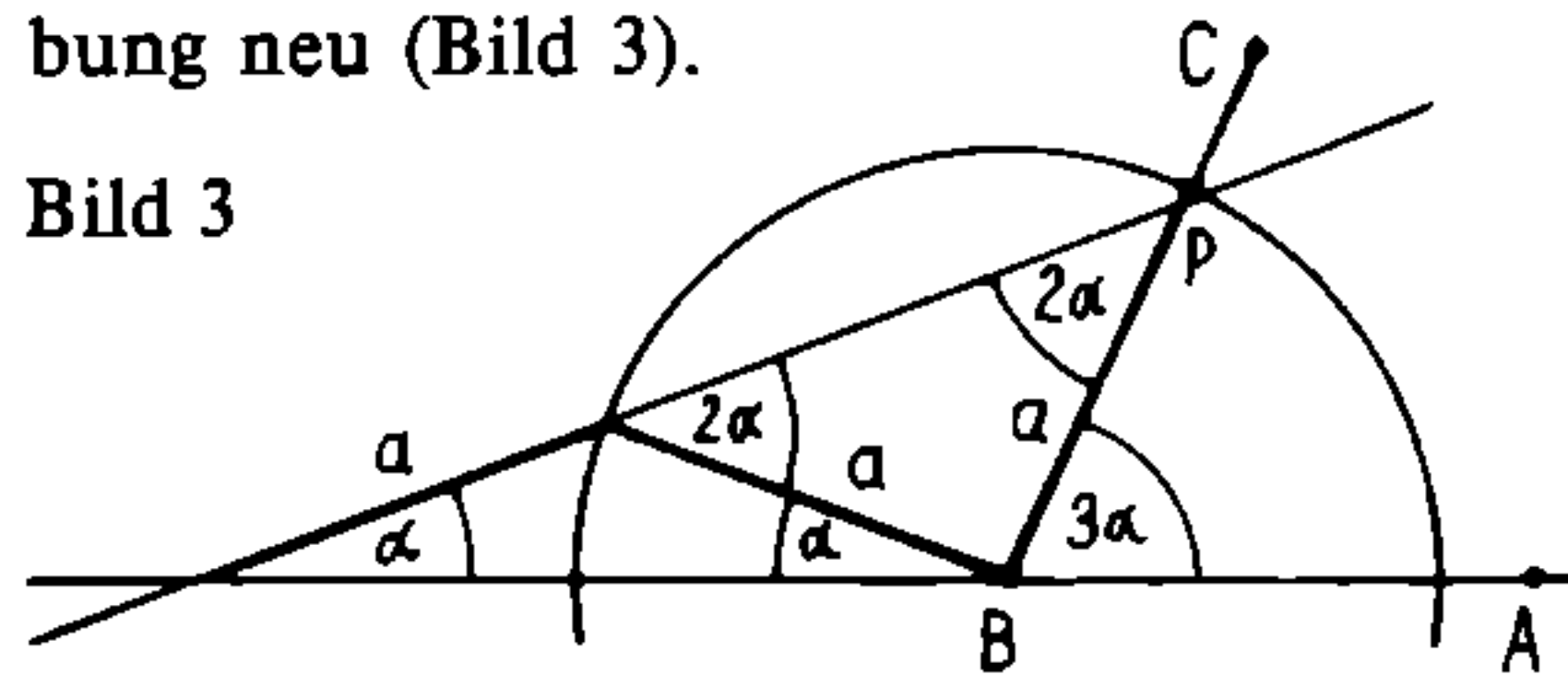
$$\sin nx = \cos^n x \left(n \tan x - \binom{n}{3} \tan^3 x + \binom{n}{5} \tan^5 x - \dots \right) \text{ oder}$$

$$\sin nx = \sin x \left((2 \cos x)^{n-1} - \binom{n-2}{1} (2 \cos x)^{n-3} + \dots \right).$$

1593 begann er systematisch, die Ausführung algebraischer Operationen durch geometrische Konstruktion an durch Strecken, Flächen und Volumina repräsentierten Größen auseinanderzusetzen. Zwar hatte er hierin einen unmittelbaren Vorläufer in dem Italiener Giovanni Battista Benedetti (1530 bis 1590), der Analoges schon 1585

in seinen „Speculationes diversae“ durchgeführt hatte, Vieta geht jedoch weit über Benedetti hinaus, indem er auch algebraische Gleichungen 3. und 4. Grades durch gegenüber Zirkel und Lineal leistungsfähigere Konstruktionsmittel löst, insbesondere durch die schon in der Antike erfundene Einschiebung, bei der ein mit zwei Abstandsmarken versehenes Lineal durch Probieren in eine solche Lage gebracht wird, daß es durch einen gegebenen Punkt geht und die beiden Marken auf je einer gegebenen Linie (im einfachsten Fall Gerade oder Kreis) liegen. Während Vieta so wesentliche Vorleistungen für die in der nächsten Generation von Pierre de Fermat (1601 bis 1665) und René Descartes (1596 bis 1650) begründete Koordinatenmethode erbringt (vgl. hierzu den Artikel „Die Koordinatenmethode im Wandel der Zeiten“ in „alpha“ 1987, Heft 6 und 1988, Heft 1), gelangt er zu der damals fast unglaublichen Erkenntnis, daß man jede Aufgabe 3. Grades auf Winkeldreiteilung und Volumenvervielfachung zurückführen kann, ein Resultat, das erst zu Beginn des 19. Jh. im Lichte der Gaußschen Deutung der komplexen Zahlen in der „Zahlenebene“ voll verständlich werden konnte. Nebenbei entdeckte Vieta unabhängig von Archimedes dessen Winkeldreiteilung durch Einschiebung neu (Bild 3).

Bild 3



Winkeldreiteilung durch Einschiebung: Der gegebene Winkel sei $\angle ABC$. Man verlängere den Schenkel BA rückwärts über B hinaus und schlage mit der einzuschiebenden Strecke a einen Halbkreis um B , der den Schenkel BC in P schneide. Nun wird das Lineal so plaziert, daß es durch P geht und die Enden der markierten Strecke auf dem Halbkreis bzw. dem rückwärts verlängerten Schenkel liegen; es entsteht α als dritter Teil von $\angle ABC$. Die Schrift des Archimedes, die diese elegante Lösung enthält, wurde erst nach Vietas Tod in Europa bekannt.

In der sphärischen Geometrie entdeckte Vieta das Polaritätsprinzip (jedem Punkt ist sein Großkreis um ihn als Mittelpunkt und jedem Großkreis sein „Pol“ zugeordnet) und findet so den Zugang zum letzten Kongruenzsatz der sphärischen Geometrie (sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen) und zur Lösung der zugehörigen konstruktiven bzw. rechnerischen Aufgabe, ein Dreieck aus seinen drei Winkeln zu berechnen (mittels des erstmals von Vieta formulierten Winkelosinussatzes) bzw. zu konstruieren. Freilich ist die Methode bei ihm noch etwas unübersichtlich, aber auf seiner Vorarbeit fußend, findet Willebrord Snellius (1580 bis 1626) 1621 das heute übliche Polardreieck (vgl. hierzu den Abschnitt Sphärische Trigonometrie in der Kleinen Enzyklopädie Mathematik).

In seiner letzten Schrift „Apollonius Gal-

lus“ (d. h. der französische Apollonios) löste 1600 Vieta alle zehn Konstruktionsaufgaben, die sich ergeben, wenn man zu drei gegebenen Stücken aus der Menge der Punkte, Geraden und Kreise der Zeichenebene alle Kreise sucht, die die drei gegebenen Stücke berühren.

Diese Aufgaben hatte der antike Mathematiker Apollonios von Perge (um 262 bis um 190 v. u. Z.) in einer verlorenen Schrift „Über Berührungen“ gestellt und gelöst, von deren Existenz und Inhalt nur durch den spätantiken Mathematik-Compiler Pappos (um 320) etwas bekannt ist. Vieta stellte den vermutlichen Inhalt dieser Schrift als erster Mathematiker wieder her. (Eine schöne Darstellung der Lösungen des „Apollonischen Berührungsproblems“ allerdings ohne historische Bemerkungen, wurde in „alpha“ 1980, Heft 5 veröffentlicht.) Das Appolonische Berührungsproblem hat nach Vieta noch eine bewegte Geschichte gehabt. Einer Aufforderung von Descartes folgend, löste Fermat das analoge Problem im Raum, zu vier gegebenen Kugeln alle Kugeln zu konstruieren, welche sämtliche gegebenen Kugeln berühren. Im 19. Jh. löste M. Chasles (1793 bis 1880) die analoge Aufgabe sogar für beliebige Flächen 2. Grades. Neue Lösungen des ebenen Problems gaben u. a. Descartes, Newton, Lambert und Euler. Am Ende des 19. Jh. erlebte die Aufgabe noch einmal eine unerwartete Blüte. Nachdem der Franzose E. Lemoine (1840 bis 1912) 1888 die sogenannte Geometrographie begründet hatte, in der es darum geht, eine Konstruktionsaufgabe in möglichst wenigen Schritten zu lösen, berechnete man die nach Vieta benötigte Schrittzahl für die Konstruktion der Berührungskreise dreier Kreise (die Aufgabe hat im allgemeinen 8 Lösungen) mit 335 Schritten, und es gelang mehreren Mathematikern, u. a. Lemoine selbst, wesentlich kürzere (zugleich aber weniger einsichtige) Lösungen mit schließlich nur noch 152 Schritten zu finden.

Am Rande sei bemerkt, daß Vieta bei der Lösung einiger Aufgaben des Berührungsproblems erstmals die später als „Inversion am Kreis“ oder auch als „Transformation durch reziproke Radien“ bezeichnete Abbildung der Ebene auf sich benutzte, bei der nach Wahl eines festen Kreises k_0 vom Radius R um einen Punkt P_0 jedem Punkt $P \neq P_0$ derjenige Punkt Q zugeordnet wird, der auf dem Strahl P_0P liegt und für den gilt: $\overline{P_0P} \cdot \overline{P_0Q} = R^2$. Diese Abbildung spielt seit dem 19. Jh. eine wichtige Rolle in der Geometrie und einigen anderen Gebieten der Mathematik. Man sieht leicht (Übung für den Leser), daß bei dieser Abbildung genau die Punkte des gewählten Kreises k_0 auf sich abgebildet werden, hingegen jedem „inneren“ Punkt des Kreises k_0 ein „äußerer“ Punkt entspricht und umgekehrt und daß man zu gegebenem Kreis k_0 und Punkt P den Bildpunkt mit Zirkel und Lineal konstruieren kann (wie?). Vieta bewies aber weiterhin den nach ihm benannten Satz:

Bei einer Inversion am Kreis ist das Bild

jedes nicht durch den Mittelpunkt P_0 gehenden Kreises wieder ein Kreis, während alle durch P_0 gehenden Kreise in Geraden und umgekehrt alle Geraden in durch P_0 gehende Kreise abgebildet werden.

Beweist diesen Satz! Seine Bedeutung liegt u. a. darin, daß aus der Sicht der Inversion am Kreis die Geraden sozusagen Ausartungsfälle von Kreisen sind, nämlich Kreise mit unendlich großem Radius bzw. Kreise, die durch den „unendlich fernen Punkt“ gehen, der seinerseits der in der euklidischen Ebene fehlende Bildpunkt des Mittelpunktes P_0 des Inversionskreises k_0 ist.

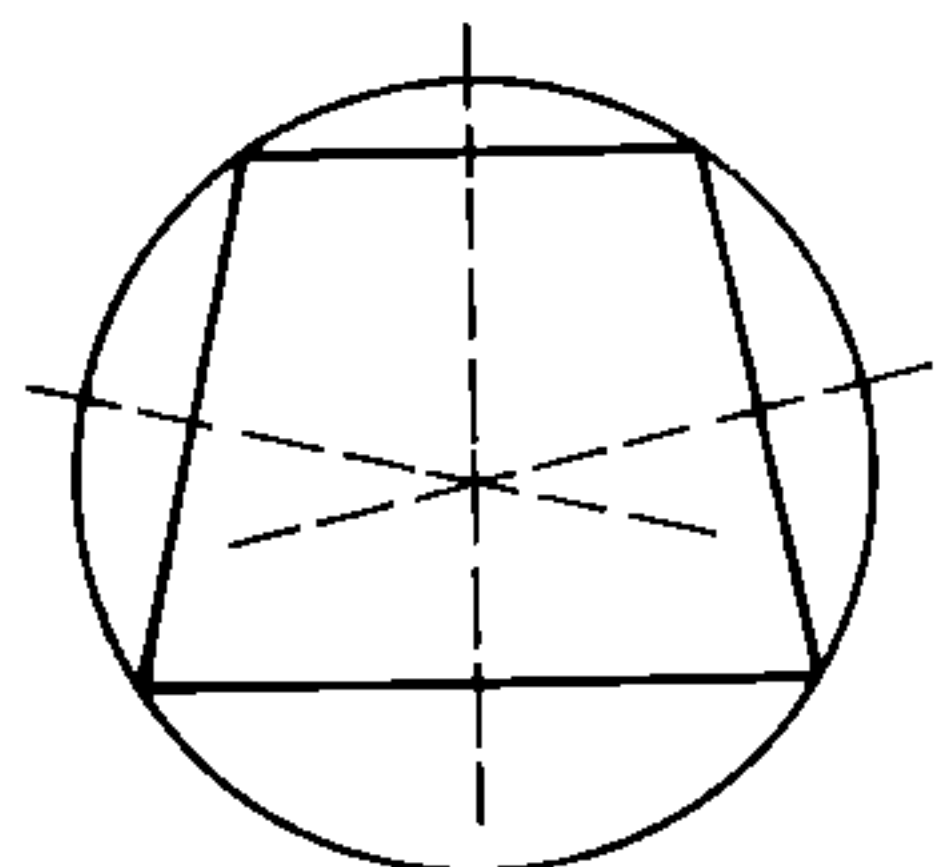
Da Apollonios von Perge einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike war, hat Vieta sich mit dem Titel seiner letzten Schrift einen Ehrennamen zugelegt, den wir ihm gern zugestehen wollen.

Als kostbare Probe aus dem geometrischen Schaffen Vietas geben wir abschließend (leicht bearbeitet und modernisiert) seine Lösung der Aufgabe wieder, ein Sehnenviereck (d. h. ein Viereck, dem sich ein Kreis umbeschreiben läßt) aus seinen vier Seiten zu konstruieren. Diese Aufgabe und ihre Lösung bilden einen der Anhänge von Vietas Schrift „Pseudomesolabum“ (1596). Vieta bemerkt einleitend, daß in jedem Viereck die Summe dreier beliebiger Seiten stets größer als die vierte ist. Daher müssen die vier gegebenen Seitenlängen a, b, c, d den Ungleichungen

$$(*) \quad a < b + c + d, \quad b < c + d + a, \\ c < d + a + b, \quad d < a + b + c$$

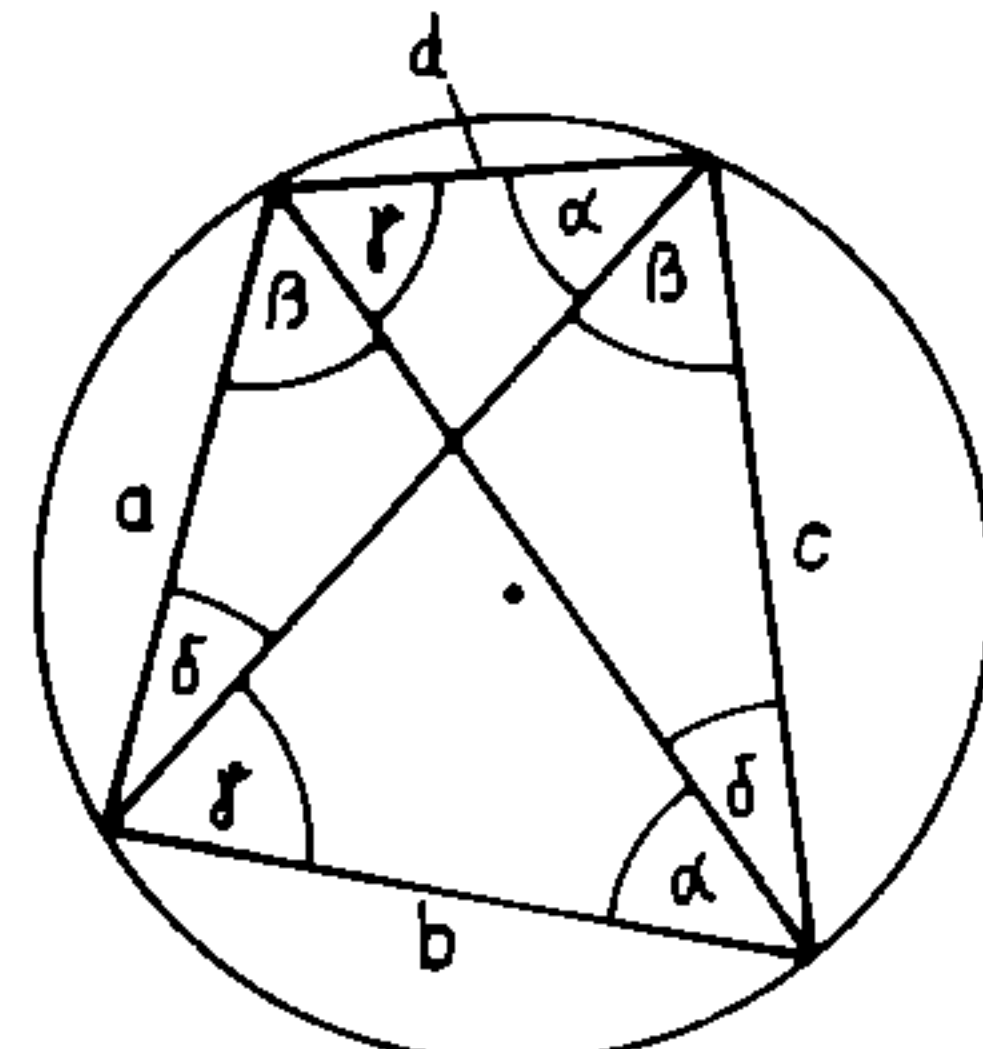
genügen, damit die Aufgabe lösbar ist. Weiter behandelt er den Spezialfall, daß wenigstens ein Paar gegenüberliegender Seiten kongruent ist. In diesem Fall besitzt das gesuchte Sehnenviereck offenbar eine Symmetrieachse (Bild 4) und ist daher leicht zu konstruieren (Aufgabe!).

Bild 4



Als Hilfsbetrachtung für den allgemeinen Fall stellen wir fest, daß ein konvexes Viereck genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn die Summe zweier gegenüberliegender Winkel (und folglich auch die Summe der beiden anderen Winkel) 180° beträgt. Dies folgt leicht durch mehrfache Anwendung des Peripheriewinkelsatzes.

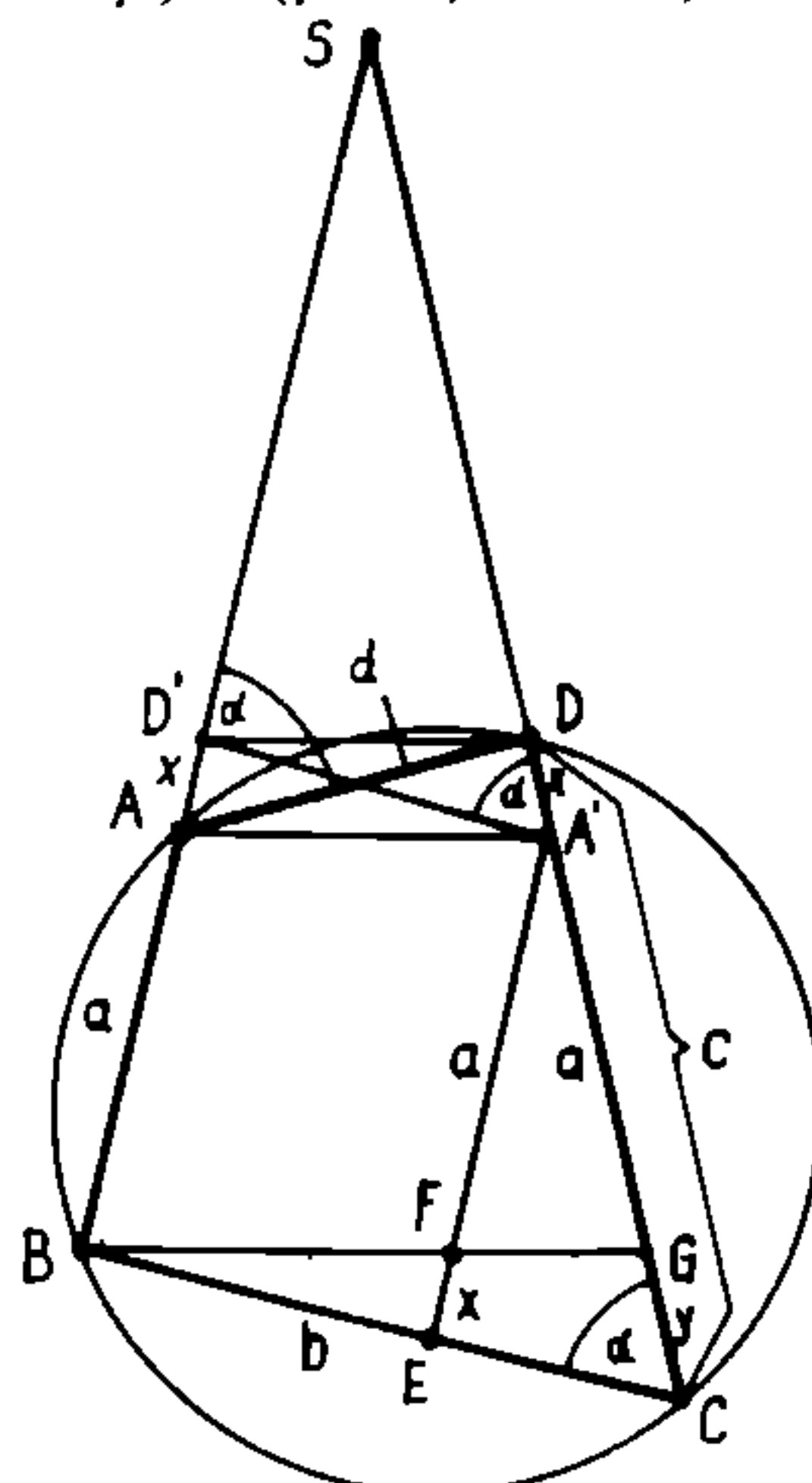
Bild 5



Man betrachte Bild 5: Die zur Sehne a gehörigen Peripheriewinkel sind mit α bezeichnet, die zu b gehörigen mit β , die zu

c gehörigen mit γ und die zu d gehörigen mit δ . Da die Gesamtwinkelsumme $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) 360^\circ$ beträgt, folgt $(\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180^\circ$ (und $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ$).

Bild 6



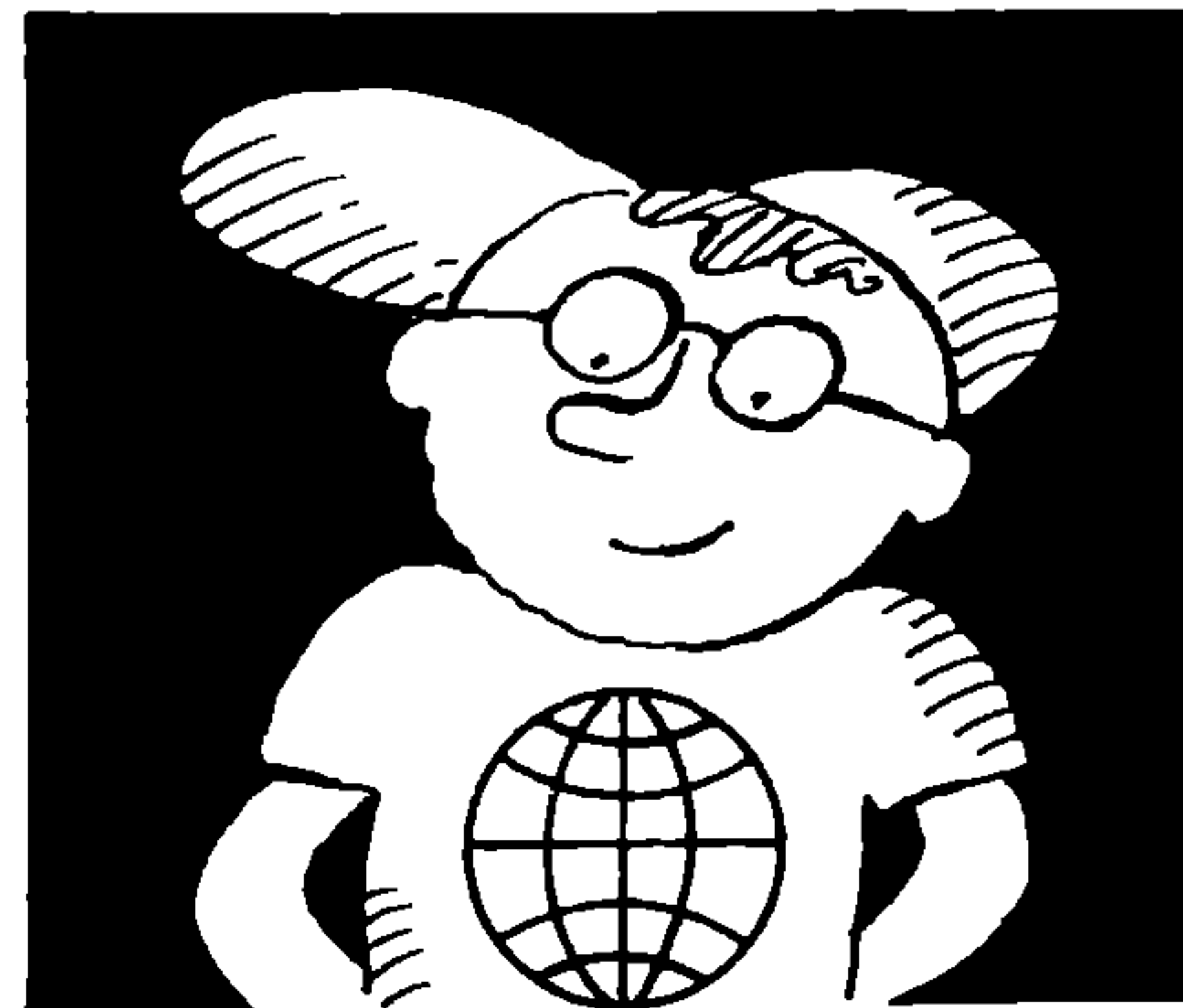
Es seien nun Strecken a, b, c, d mit $a < c$ und $d < b$ so gegeben, daß die Ungleichungen (*) erfüllt sind. So ein Viereck mit den Seiten a, b, c, d (in dieser Reihenfolge aneinanderhängend) kann man sich gelenkig vorstellen. In welcher Stellung wird es in einen Kreis einbeschreibbar sein? Offenbar würde es genügen, eine Diagonale oder einen Innenwinkel, etwa α , zu kennen.

Vieta folgend, zeichnen wir eine Analysisfigur $ABCD$ so in einen Kreis hinein (Bild 6), daß $\overline{AB} = a < c = \overline{CD}$ und $\overline{DA} = d < b = \overline{BC}$ ist. Dann werden sich die Verlängerung von $\overline{CD}$ über D hinaus und die Verlängerung von $\overline{AB}$ über A hinaus in einem Punkt S außerhalb des Kreises schneiden. Aus der obigen Hilfsbetrachtung folgt, daß $\alpha = \angle BCD$ nochmals als zu $\angle BAD$ komplementärer Winkel $\angle SAD$ auftritt. D' entstehe durch Abtragen von $\overline{SD}$ an S in Richtung A und A' durch Abtragen von $\overline{SA}$ an S in Richtung D . Daher ist auch $\angle SA'D' = \alpha$, folglich $\overline{D'A'}$ parallel zu $\overline{BC}$. E entstehe durch Abtragen von $d (= \overline{DA} = \overline{D'A'})$ an B in Richtung C . Daher ist $\overline{EC} = b - d$ und $\overline{BEA'D'}$ ein Parallelogramm. Die Parallele zu $\overline{AA'}$ durch B schneidet $\overline{DC}$ in G und $\overline{A'E}$ in F . Dann ist auch $\overline{BFA'A}$ ein Parallelogramm und Dreieck $\overline{FA'G}$ gleichschenkelig, weil ähnlich zum gleichschenkligen Dreieck $\overline{ASA'}$. Folglich sind $\overline{A'G}$ und $\overline{A'F}$ zu $\overline{AB} = a$ kongruent, und $c = \overline{CD}$ ist zerlegt in die Teilstrecken $x = \overline{DA'}$, $a = \overline{A'G}$ und $y = \overline{GC}$. Da die Dreiecke $\overline{AA'D}$ und $\overline{FBE}$ kongruent sind (warum?), ist auch $\overline{FE} = x$. Da ferner die Dreiecke $\overline{BCG}$ und $\overline{D'A'D}$ ähnlich sind (warum?), kann man x und y aus den Beziehungen

$$\frac{x}{d} = \frac{y}{b} \quad \text{und} \quad x + y = c - a$$

konstruieren. Dazu ist einfach die Strecke $c - a$ im Verhältnis $d:b$ zu teilen. Nunmehr sind vom Dreieck $\overline{ECA'}$ die Seiten $\overline{EC} = b - d$, $\overline{CA'} = a + y$ und $\overline{A'E} = a + x$ bekannt, woraus sich der gesuchte Winkel α ergibt. Führt nun die gesamte Konstruktion des Sehnenvierecks an einem Beispiel durch!

P. Schreiber



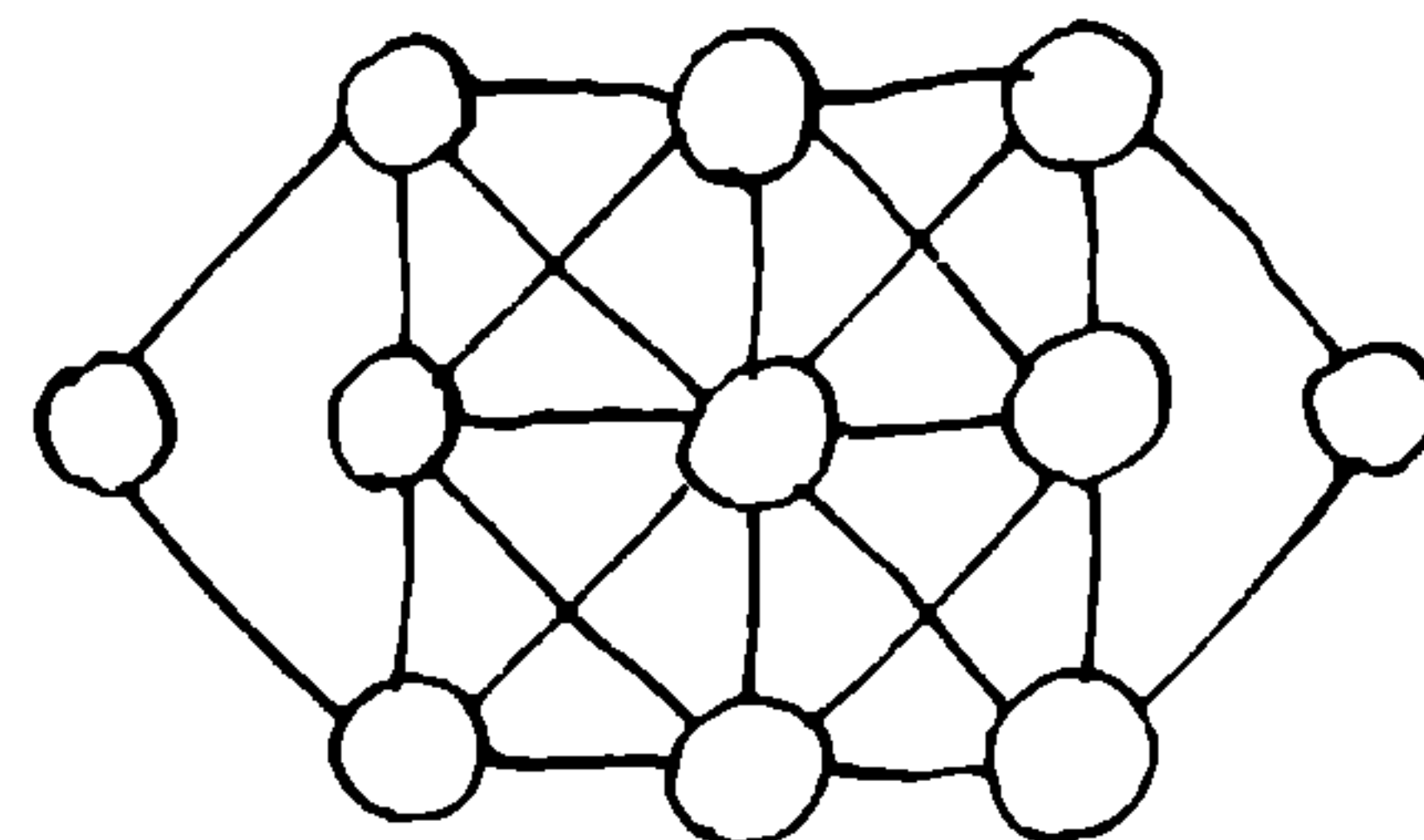
▲ 1 ▲ Les cruches

M. Crucheu, qui vit dans le désert, part avec sa camionnette et ses cruches vers le marché de l'oasis voisine. Il dispose de 9 récipients de contenances respectives: 3l, 6l, 10l, 11l, 15l, 17l, 23l, 25l et 30l.

Il revient avec deux fois plus de lait de chameau que d'huile d'olive, et trois fois plus d'eau que de lait de chameau. Tous ses récipients sont complètement remplis, sauf un qui reste vide. Pouvez-vous indiquer, au-dessous de chaque cruche, le liquide qu'elle contient?

aus: tangente, Paris

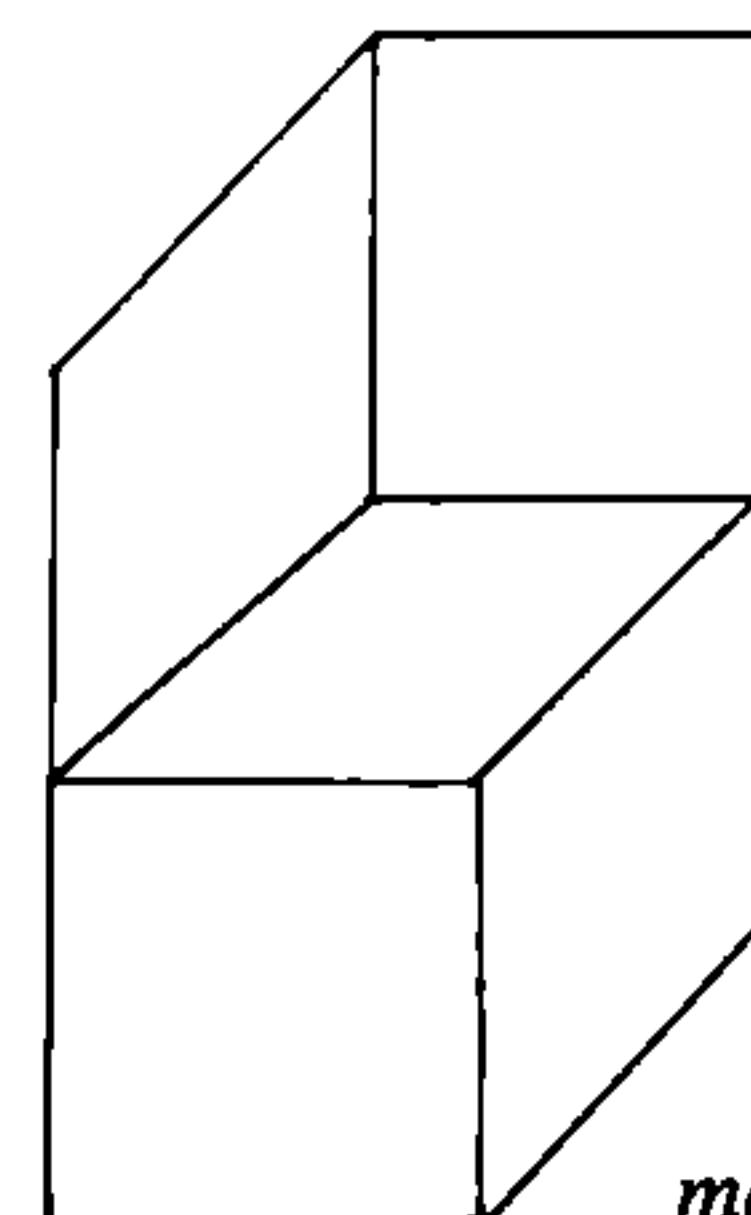
▲ 2 ▲ Расставьте в кружках фигуры, изображенной на рисунке числа 1, 2, ..., 11 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого квадрата была одна и та же.



aus: Quant, Moskau

▲ 3 ▲ What do you see?

Look carefully at the drawing given. Concentrate on the middle of the drawing. After a while you will notice that the picture has changed. The part of the drawing that you perceived as being on the bottom has suddenly moved up. If you continue concentrating it will again change its place and continue switching back and forth. This shows that our perception of a drawing is influenced by changes in our nervous system. This drawing was invented by a 14-year-old boy. Try to develop similar ones.



aus: Fun with mathematics, Toronto

Erstaunlicher Tipschein



Heino aus Rostock war mit seinen Eltern in Hamburg auf Besuch. Sein Freund Heiner hatte ihn herzlich mit „Hallo“ und „Hummel-Hummel“ begrüßt. Es gab natürlich viel zu erzählen. Auch hatte Heiner seinem Freund den Hamburger Fischmarkt gezeigt. Schließlich waren sie wieder zu Hause angelangt, und nun kam man auf ihr gemeinsames Hobby zu sprechen: Die Mathematik.

Das Zahlen-Lotto fand ihr besonderes Interesse. Sie stellten fest, daß ihre Eltern beide die Spielform „6 aus 49“ spielten. Heiner: „Die Wahrscheinlichkeit, einen Sechser zu gewinnen bei einem Tipschein mit willkürlich gewählten Zahlen oder z. B. mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ist in beiden Fällen völlig gleich. Es ist nun einmal ein Glücksspiel. Da nützen auch keine sogenannten Zahlen-Systeme, die die Aussichten auf Gewinn verbessern sollen.“

Darauf Heino: „Da wollte doch jemand bei uns sein Tip-System verkaufen, das so gut wie totsicher Gewinn bringen würde.“

„Und da hast du ihm doch bestimmt geantwortet, warum er es nicht selber benutzt.“ Nun kamen Heiners und Heinos Eltern dazu und Heinos Vater rief dazwischen: „Also, alles Zufall, Leute! Wir wählen die Zahlen so aus: Wir nehmen unsere Geburtsdaten her und daraus wählen wir unsere sechs Lotto-Zahlen.“ Heiners Vater daraufhin: „Und wir machen es so: Bei einem alten Kartenspiel haben wir die Vorderseiten mit den 49 Zahlen beschriftet. Es wird gemischt und einer aus der Familie darf sechs Karten ziehen.“

„Wir müßten einmal etwas mathematischer an die Sache herangehen“, war bald die Meinung der beiden Jungen. Nach einigem Hin und Her kam man auf folgende „Methode“: Wir denken uns eine beliebige vierstellige Zahl. Aus den vier Ziffern dieser Zahl bilden wir die größtmögliche und die kleinstmögliche Zahl und subtrahieren die zweite von der ersten. Mit dieser errechneten Zahl gehen wir genauso vor. Diese Differenzbildung machen wir – sagen wir – insgesamt siebenmal. Aus den Ziffern des letzten Ergebnisses bilden wir dann alle möglichen zweistelligen Zahlen. Sollten sie nicht ausreichen, können wir ja noch die einstelligen hinzunehmen.

„Gut!“, meinte Heiner. „Aber unsere vierstellige Zahl darf nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen, denn dann hätten wir sofort Null als Ergebnis.“

Nun war man sich einig. Jeder nahm sich einen Taschenrechner, damit die Rechnerei sie nicht aufhielt, und los ging es.

Jeder hatte nun seine sechs Lotto-Zahlen. Sie wollten gerade ihren Vätern ihre neue Methode zeigen, als Heino erschreckt ausrief: „Mensch, Heiner! Du hast ja die gleichen wie ich; nämlich 14, 16, 17, 41, 46, 47! Welch ein Zufall! – Wir versuchen es gleich noch einmal. Ich nehme die Zahl 1234.“ „Und ich nehme 5000!“ Wie groß war ihr Erstaunen, als sie beide wiederum die gleichen Lotto-Zahlen ermittelt hatten! Soweit die Geschichte von Heino und Heiner. Doch für uns ist die Sache noch nicht zu Ende. Müssen wir uns doch fragen: Erhält man immer – bei allen möglichen 8991 vierstelligen Zahlen – diese „zauberhafte“ Zahl 6174, woraus sich dann die oben genannten sechs Lotto-Zahlen ergeben?

Überlegen wir allgemein, wie unsere erste Differenz zustande kommt! Die größte Zahl sei $x_0 = 1000a + 100b + 10c + d$, mit $9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$.

Die kleinste Zahl ist dann

$$\bar{x}_0 = 1000d + 100c + 10b + a.$$

Unsere neue Zahl ergibt sich mit

$$x_1 = x_0 - \bar{x}_0 = 999a + 90b - 90c - 999d \\ = 999(a - d) + 90(b - c).$$

Nun sei $a - d = m$ und $b - c = n$.

Dann gilt $x_1 = 999m + 90n$, mit $9 \geq m \geq n \geq 0$, außer $(m, n) = (0, 0)$.

Damit verringert sich die Untersuchung auf 54 Fälle. Nämlich $(m, n) = (1, 0), (1, 1); (2, 0), (2, 1), (2, 2); (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$ usw. bis $(9, 9)$.

Das schafft ein einfacher Computer natürlich spielend. Wir erhalten tatsächlich stets unsere Fixzahl 6174. Und zwar:

1mal nach 1 Schritt (nämlich bei $a - d = 6, b - c = 2$), 3mal nach 2 Schritten, 12mal nach 3 Schritten, 10mal nach 4 Schritten, 10mal nach 5 Schritten, 10mal nach 6 Schritten, 8mal nach 7 Schritten.

(Zu beachten ist nur noch, daß bei $(m, n) = (1, 0)$ man $x_1 = 999$ erhält. Hier muß auf eine vierstellige Zahl wieder ergänzt werden, also 9990. Dies ist 18mal der Fall: 1000, 1110, 2111, 2221, usw.)

Wer nun einen Computer besitzt, könnte weiterforschen und jetzt die fünfstelligen Zahlen nach der soeben beschriebenen Methode untersuchen. Es sei aber vorweg gesagt, daß es zu einer Fixzahl wie im vorigen Fall nicht kommen wird.

Unsere erste Differenz lautet jetzt

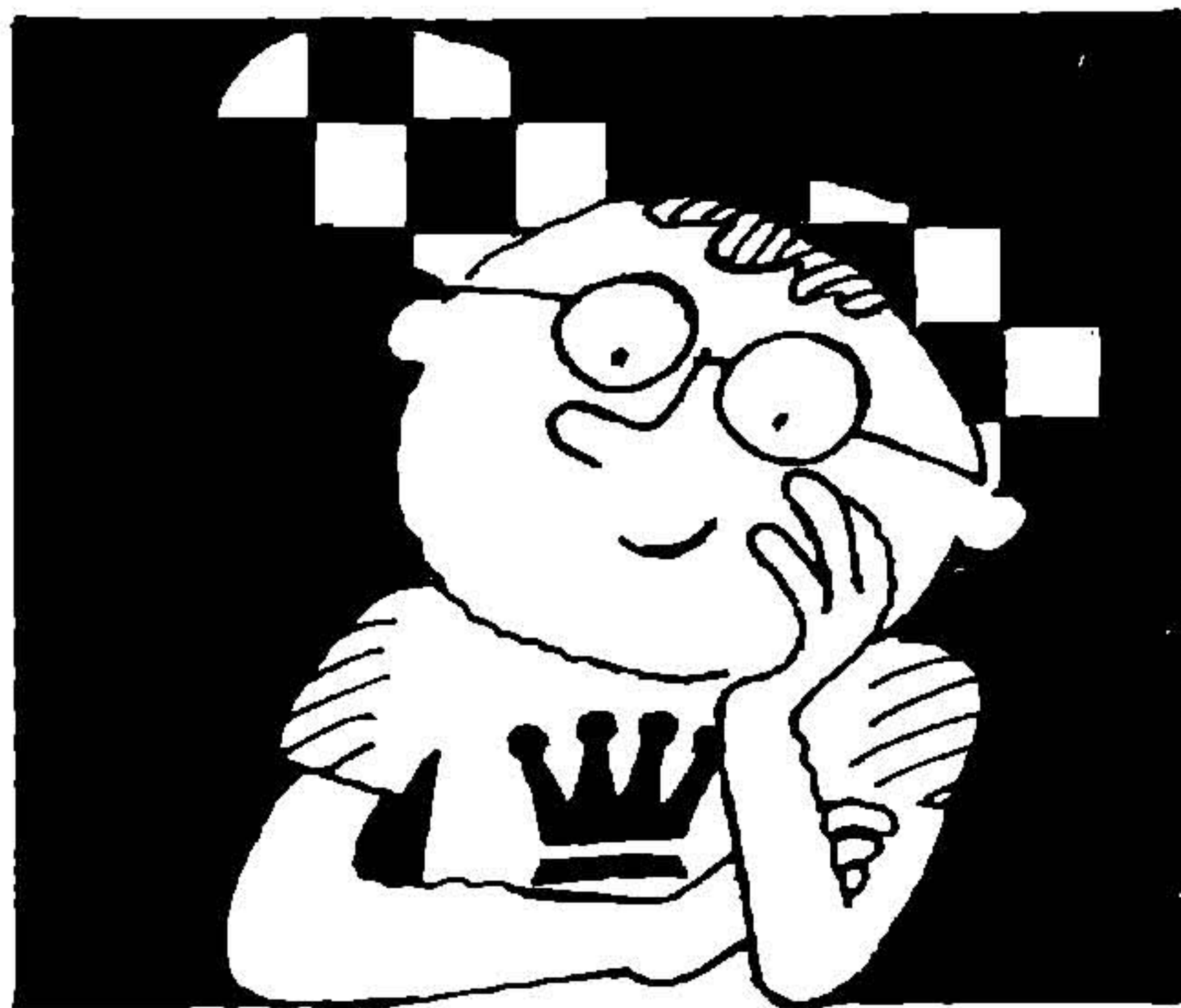
$$x_1 = x_0 - \bar{x}_0 = 9999m + 990n, \\ \text{mit } m = a - e, n = b - d.$$

Nach weiteren drei Differenzbildungen wiederholen sich diese vier Differenzen im Vierer-Zyklus, also $x_1, x_2, x_3, x_4; x_1, \dots$. In den Fällen $(m, n) = (5, 0), (5, 4), (6, 0)$ erhalten wir bereits einen Zweier-Zyklus, also $x_1, x_2; x_1, x_2; \dots$, z. B. für 86663, 87533, 87733, usw.

Soweit unsere Betrachtungen. Mit dem Computer lassen sich über die Vierer und die Zweier-Zyklen noch weitere Gesetzmäßigkeiten finden. Nach einer Information von Prof. Dr. H.-D. Gronau (Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greifswald) gehört unsere kleine Untersuchung zum sogenannten KAPRIKAR-Problem. *H.-J. Kerber*

Alphons logische Abenteuer (2)

Alphons las in seinem Buch, daß man genau darauf achten müsse, wann man den Ausdruck „dasselbe“ und wann den Ausdruck „das gleiche“ korrekt verwenden dürfe. Wenn zwei Personen feststellen, den gleichen Mantel zu haben, so ist die Rede von zwei Mänteln. Stellen sie aber fest, daß sie denselben Mantel haben, müssen unter Umständen die Besitzverhältnisse geklärt werden, denn dann ist nämlich nur von einem Mantel die Rede. Korrekt wollte Alphons sein, also beschloß er, diese Mahnung zu beherzigen. Als seine kleine Schwester beim Kartenspiel seufzte, sie falle immer auf den gleichen Trick von ihm herein, korrigierte er sofort: „Nicht auf den gleichen, sondern auf denselben Trick.“ Seiner Schwester mußte er auch widersprechen, als sie meinte, das sei doch dasselbe. „Das ist nicht dasselbe und auch nicht das gleiche.“ Worauf seine Schwester – zu unrecht – schnippisch bemerkte, er wisse es wohl selber auch nicht genau. Ehe er ihr erklären konnte, daß „dasselbe“ identisches und „das gleiche“ in der Art übereinstimmendes meint, hörte er die interessante Frage des Vaters, was es heute Mittag gäbe. „Dasselbe wie heute vor einer Woche“, kam die Antwort der Mutter aus der Küche. „Das gleiche!“, rief Alphons. „Wenn es erst nach einer Woche dasselbe gibt, kann man wohl nicht sagen, daß es schon wieder das gleiche gibt“, protestierte die Mutter. „Wenn Alphons etwas anderes essen will, braucht er ja nicht an den Tisch zu kommen“, sekundierte der Vater. „Ich meine doch dasselbe wie ihr, wenn ich vom gleichen Mittagessen spreche, nur daß es eben nicht dasselbe Mittagessen ist“, rechtfertigte sich Alphons. „Er weiß noch nicht, was er will“, versuchte seine Schwester einzulenken. „Wir sprechen alle von demselben Mittagessen, nämlich dem, das Mutti soeben in der Küche bereitet, aber es wird doch hoffentlich nicht dasselbe Mittagessen sein, wie vor einer Woche“, versuchte sich Alphons nochmals verständlich zu machen. „Nach einer Woche ist das Essen doch schlecht geworden“, wollte er noch sagen, doch resolut erklang aus der Küche: „Ich koche nichts anderes als das, was ich vor einer Woche auch gekocht habe. Und wenn es schmeckt, soll es mir egal sein, ob es dasselbe oder das gleiche ist.“ – „Nun habe ich dieselbe Erfahrung gemacht, von der im Buch die Rede ist: Im praktischen Leben soll man nicht so streng sein. Das stimmt, sonst verhungert man.“ *L. Kreiser*



alpha-Schachwettbewerb

Zum 8. Mal fordert alpha alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Dieses Mal sind wieder acht Schachaufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad zum Lösen vorgegeben. Wenn der eine oder der andere Leser vielleicht auch nicht alle Aufgaben lösen kann, so ist dennoch seine Teilnahme sehr erwünscht und wird auch in der Gewinnverlosung berücksichtigt. In erster Linie soll der Wettbewerb aber Spaß an den reizvollen Knebeln auf dem Schachbrett bereiten und als Anregung dienen, sich etwas intensiver mit dem königlichen Spiel zu beschäftigen.

In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt.

Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden. Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben korrekt gelöst haben, werden Buchpreise verlost und Urkunden verteilt.

In einer weiteren Verlosung haben auch alle anderen Teilnehmer, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, die Chance, einen Buchpreis zu gewinnen.

Die Einsendung der Lösungen ist bitte bis zum 1. März 1991 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

Redaktion alpha

PSF 14

Leipzig

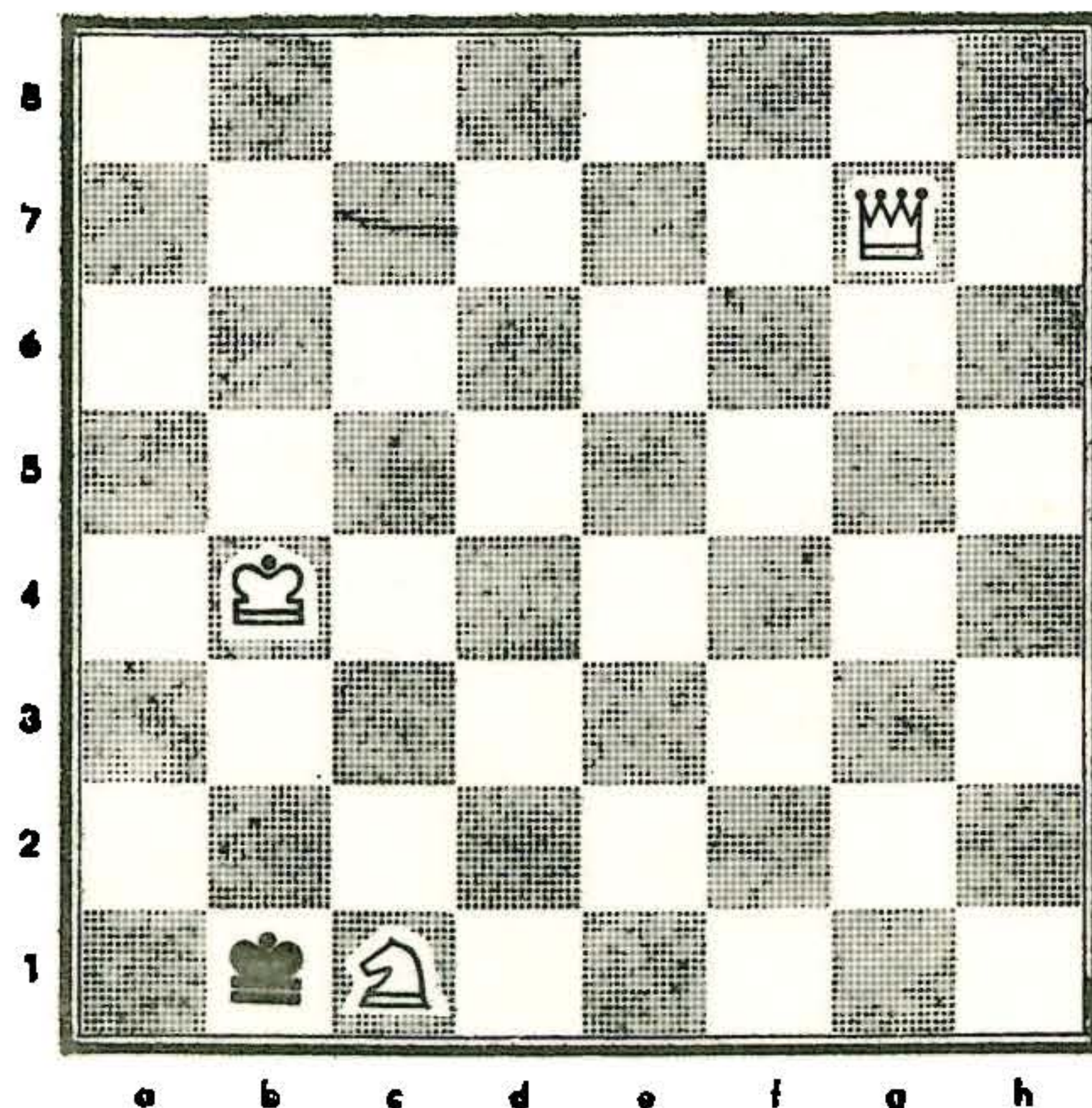
7027.

Die Lösungen sowie die Gewinner werden in alpha 4/1991 veröffentlicht.

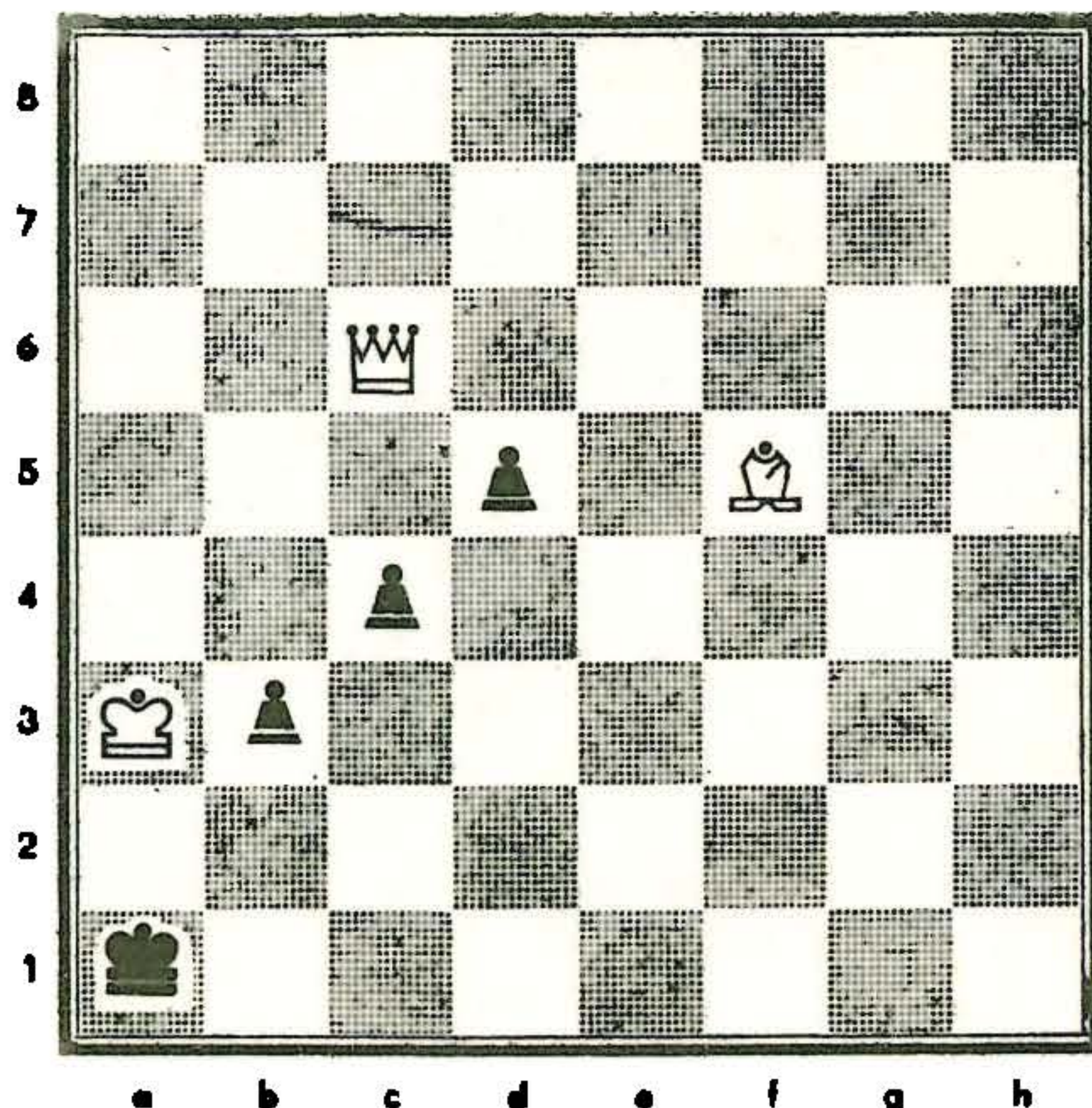
H. Rüdiger



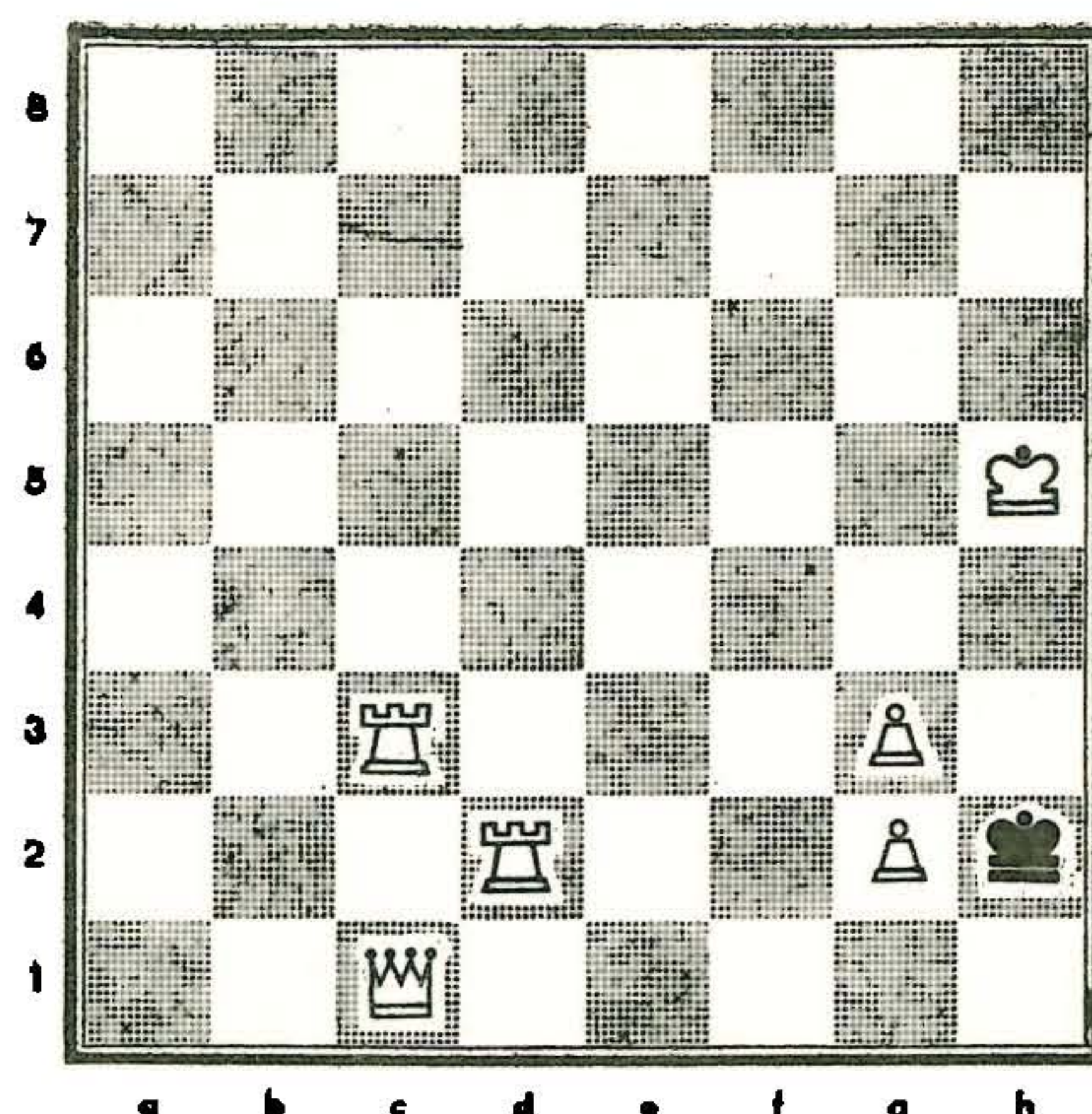
W. Spelnikow



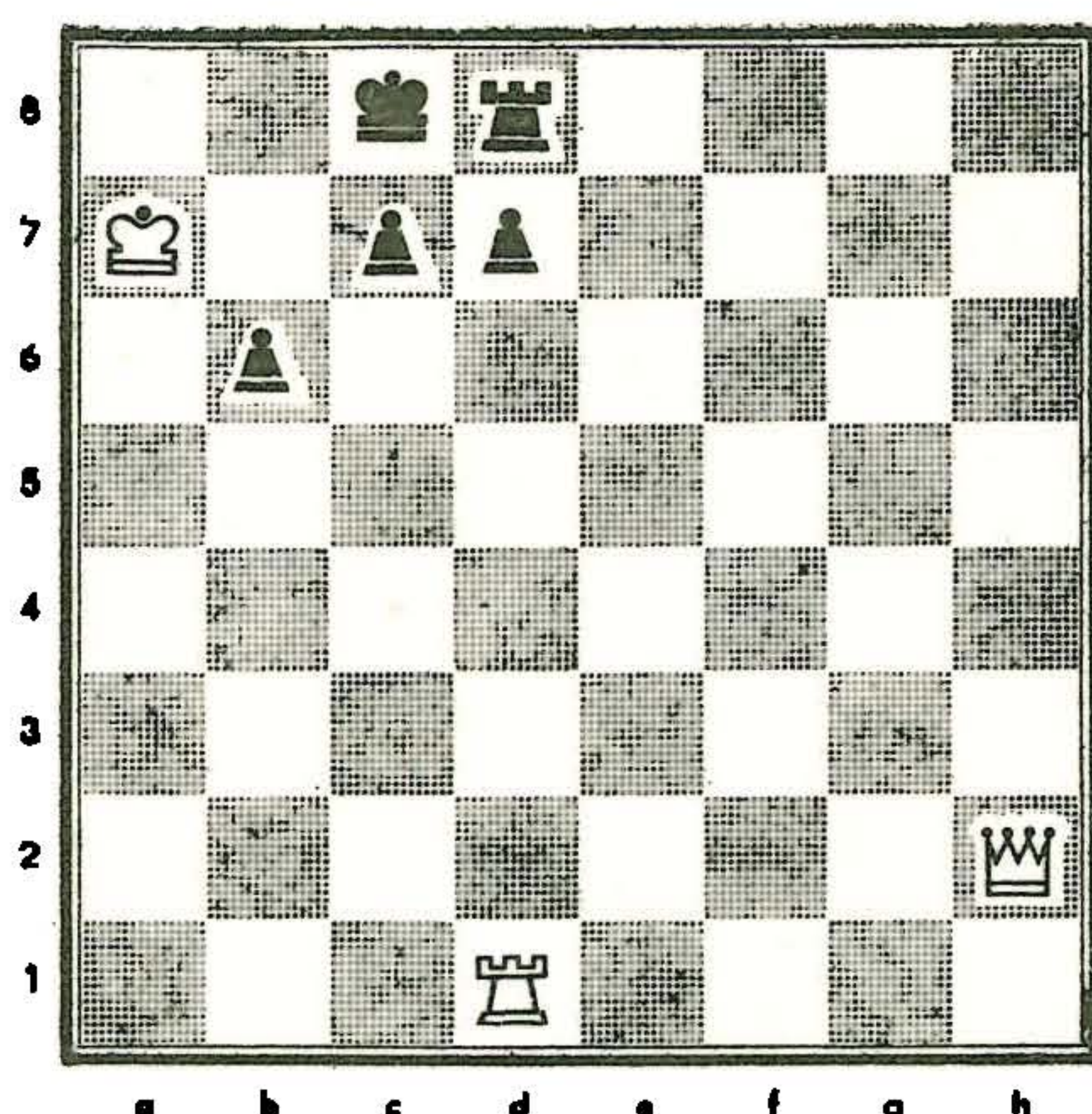
Nr. 1 Matt in zwei Zügen



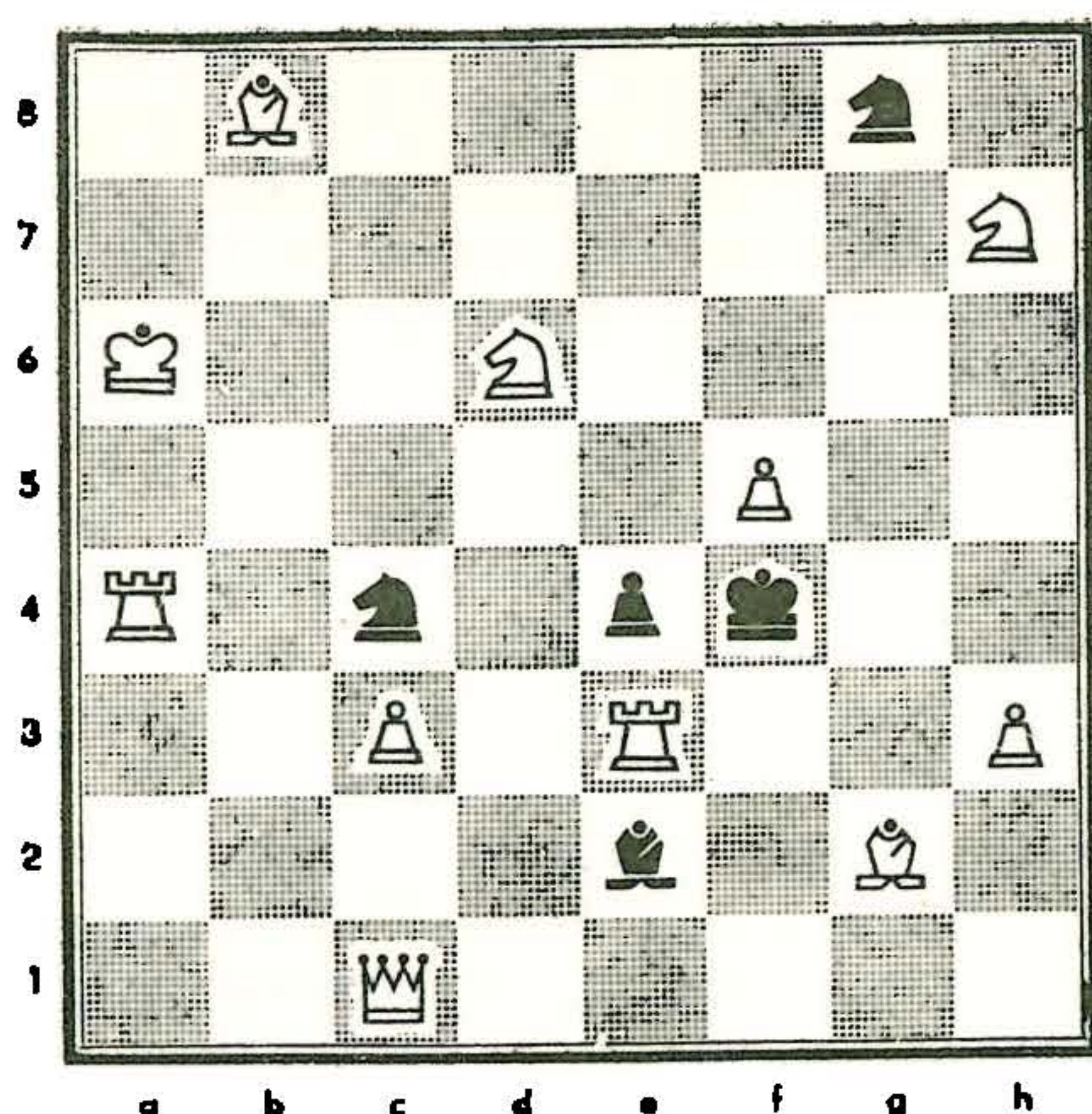
Nr. 2 Matt in zwei Zügen



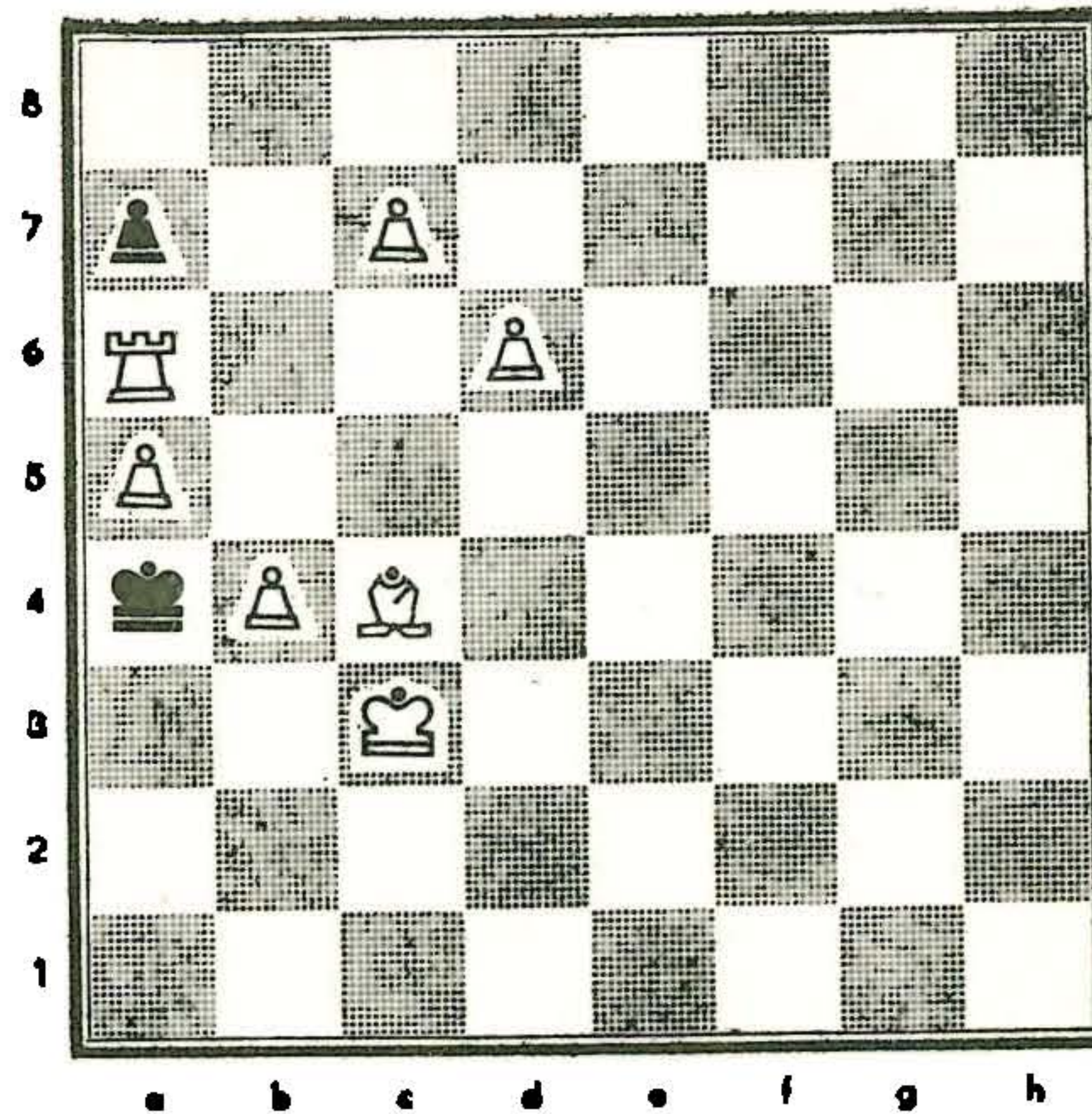
Nr. 3 Matt in zwei Zügen



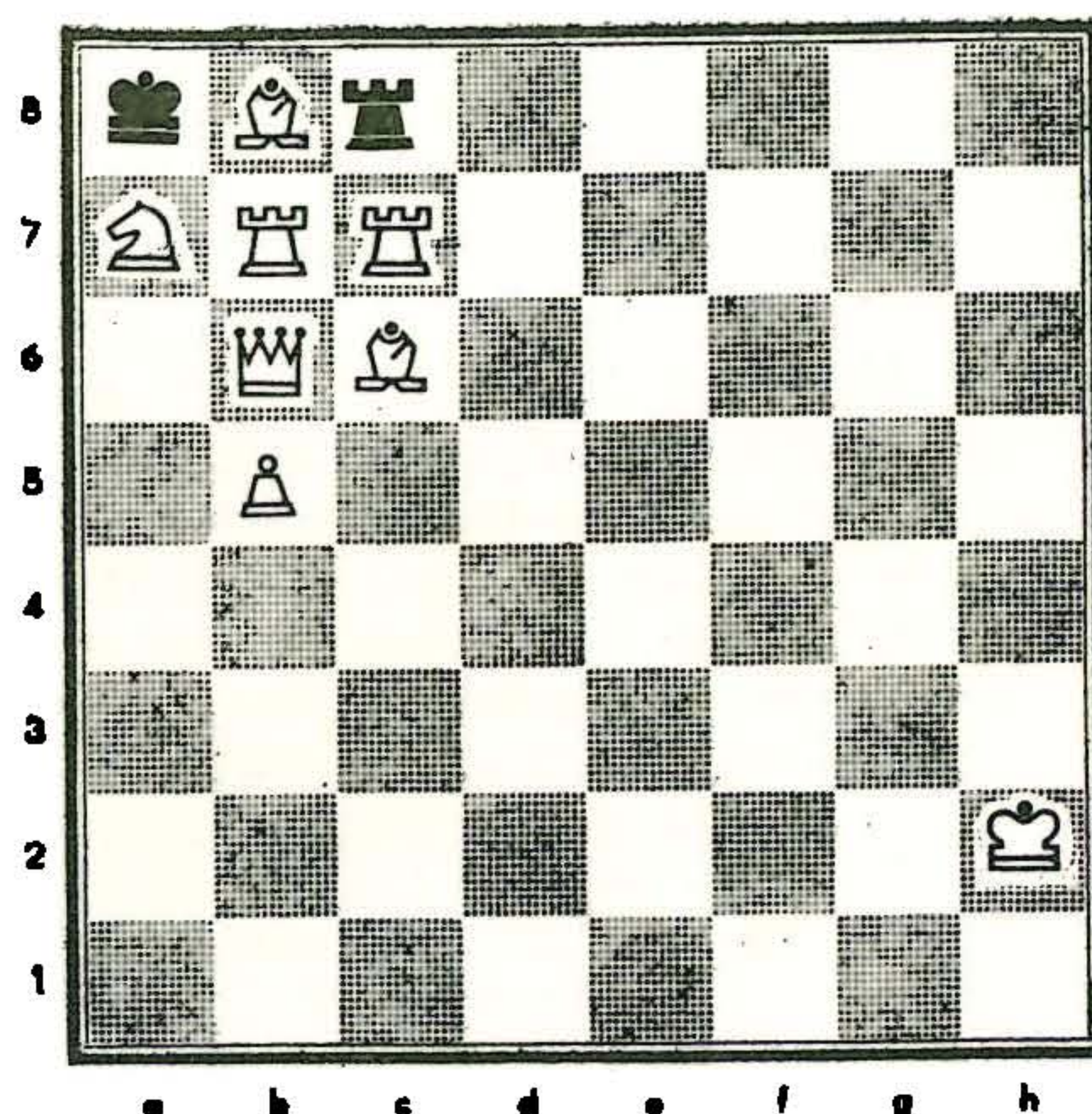
Nr. 4 Matt in zwei Zügen



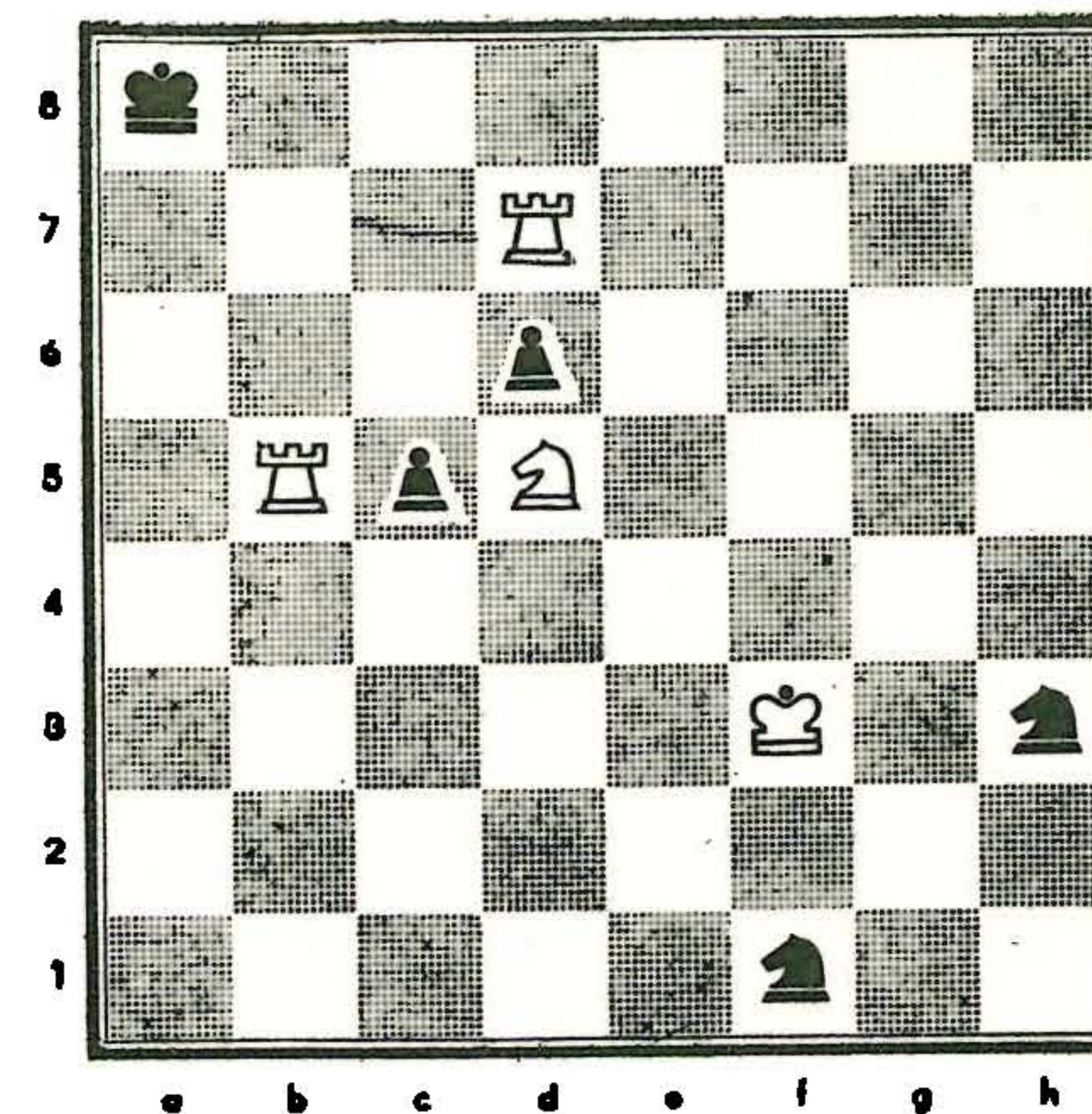
Nr. 5 Matt in zwei Zügen



Nr. 6 Matt in drei Zügen



Nr. 7 Matt in drei Zügen



Nr. 8 Matt in vier Zügen

alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung 1989/90

Fr.-Weineck-OS, Alsleben; OS E. Schneller, Fr.-Engels-OS, E.-Mäder-OS, alle Altenburg; Stadtclub Jg. Math., Altentreptow; W.-Seelenbinder-OS, Alt Ruppín; E.-Weinert-OS, Arnstadt; OS Dr. R. Sorge, Asbach; Fr.-Engels-OS, Bad Dürrenberg; OS S. Rädcl, Bad Gottleuba; STN¹⁾, OS VI, EOS E. Thälmann, O.-Grotewohl-OS, Th.-Neubauer-OS, Magnus-Poser-OS, R.-Teichmüller-OS, OS A. Saefkow, alle Bad Salzungen; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; H.-Beimler-OS, Bärenklau; H.-Heine-OS, Barchfeld; Fr.-A.-Norbert-OS, Barth; A.-Seghers-OS, Bebertal; H.-Belz-OS, Behrenhoff; OS O. Brosowsky, Belleben; 26. OS L. Renn, 44. OS F. Espenbeck, 33. OS L. Grundig, 12. OS W. Guddorf, alle Berlin; A.-Becker-OS, Berlingerode; G.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Bernterode; W.-Seelenbinder-OS, Bismark; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; OS Fr. Schiller, Bleicherode; OS Blumenhagen; G.-Ewald-OS, Blumenthal; STN Bleicherode; P.-Mosig-OS, Bockau; OS E. Thälmann, Boizenburg; K.-Bürger-OS, Bredenfeld; OS B. Brecht, Brehme; OS W. Pieck, Breitenworbis; OS H. Beimler, Breitungcn; OS Freundschaft u. Frieden, Brieselang; P.-Neruda-OS, Britz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; 2. OS O. Grotewohl, Calau; STN Calbe; OS A. Einstein, Caputh; E.-Thälmann-OS, H.-Menzel-OS, A.-v.-Humboldt-OS, M.-Saupc-OS, A.-S.-Makarenko-OS, Fr.-Heckert-OS, E.-Schneller-OS, G.-Agricola-OS, Wl.-Komarow-OS, FEZ, Fr.-Matschke-OS, K.-Wieland-OS, P.-Tschaikowski-OS, N.-Niederkirchner-OS, alle Chemnitz; STN Cottbus; OS R. Luxemburg, Dallgow; Fr.-Weineck-OS, Delitzsch; Kreisklub Math. Demmin; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; R.-Breitscheid-OS, Dessau; E.-Weinert-OS, Deuna; OS Makarenko, Dingelstädt; 2. OS, Döbeln; OS Dömitz; M.-Curie-OS, Dohna; OS K. Niederkirchner, Dommersleben; A.-Matrossow-OS, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; 103. OS K. Hahnwald, FEZ²⁾, beide Dresden; M.-Seydewitz-OS, Dür-röhrsdorf; OS A. Diesterweg, Ebeleben; W.-Pieck-OS, Eberswalde; OS F. Heckert, J.-Schehr-OS, beide Eisleben; OS H. Grundig, Ellrich; OS Neues Leben, Elstal; OS R. Arndt, Elsterwerda; O.-Grotewohl-OS, Elxleben; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; OS 23 R. Gothe, Erfurt; STN Ernstthal; FEZ Falkensee; Th.-Müntzer-OS, Fambach; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; 5. OS G. Dimitroff, 1. OS J. Korcak, beide Finsterwalde; K.-Marx-OS, Flöha; B.-Brecht-OS, Floh; STN Forst; STN Frankfurt/O.; E.-Thälmann-OS, Freital; E.-Thälmann-OS, Friedeburg; OS II, Friedland; OS W. Seelenbinder, Fünfeichen; OS V H. Günther, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; 5. OS, 7. OS, beide Görlitz; W.-Husemann-OS, OS J. Brinckmann, beide Goldberg; OS R. Luxemburg, Gotha; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; E.-Thälmann-OS, Marx-OS, beide Greifswald; STN Gransee; OS J. Gagarin, K.-Marx-Schule, H.-Beimler-OS, alle Greußen; STN Grevesmühlen; A.-Frank-OS, Grimma; A.-Walther-OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; A.-Kuntz-OS, Großbodungen; OS N. Ostrowski, Großeubcn; Pestalozzi-OS, Großenhain; OS Gr. Nemerow; OS Großbrückerswalde; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; OS H. Günther, Hachelbich; STN Halberstadt; OS G. Dimitroff, Haldensleben; W.-Bredel-OS, Hagenow; M.-Gorki-OS, Hainichen; OS f. körperbeh. N. Ostrowski, Halle; STN Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; K.-Öppermann-OS, Harzgerode; OS J. Marchlewski, Havelberg; W.-Koenen-OS, Halle-Neustadt; Schule d. DSF, Heiligengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; P.-

Schreier-OS, Hennigsdorf; E.-Weinert-OS, Henningen; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; FEZ Hermansdorf; 2. OS Fr. Engels, Herzberg; OS K. Liebknecht, Hohendodeleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; OS 20, Hoyerswerda; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; OS G. Ewald, Ivenack; E.-Weinert-OS, Johannegeorgenstadt; Fr.-Engels-Schule, Kaltcnnoordheim; OS M. Gorki, Kemenz; OS A. Becker, Karnsdorf; H.-Beimler-OS, Karbow; OS E. Boberg, Karlsburg; J.-Warnke-OS, Katzow; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; G.-Dimitroff-OS, Keula; Th.-Neubauer-Schule, Kieselbach; H.-Matern-OS, Klijetz; OS E. Thälmann, Klosterfelde; OS H. Matern, Klochow; Goethe-OS, Königsee; AG Math. Königs Wusterhausen; OS O. Grotewohl, Köthen; OS Küllstedt; OS M. Zimmering, Krakow; OS Cl. Zetkin, Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule, Lauscha; K.-Marx-OS, Lauterbach; OS J. Gagarin, Langenweddungen; OS E. Weinert, Leegefclde; OS V R. Luxemburg, E.-Thälmann-OS, K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, STN, alle Leinefelde; Weinert-OS, FEZ, 6. OS Cl. Zetkin, alle Leipzig; OS J. Schehr, Lengefeld; G.-E.-Lessing-OS, Lessing-OS, beide Lengenfeld; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; EOS Lichtenstein; C.-B.-Geißler-OS, Liebstadt; Prof. Dr. M. Schneider-OS, Lichtenstein; OS Makarenko, Leubnitz; G.-Eisler-OS, Löcknitz; OS W. Wallstab, Löderburg; A.-Diesterweg-OS, Lobenstein; OS G. Schubert, Lohmen; H.-Günther-OS, Lohsa; 1. OS, Lommatzsch; OS 6 Math.-Club, Lübben; W.-Bredel-OS, STN, beide Lütz; FEZ Ludwigslust; Kaßner-OS, STN, M.-Kühne-OS, alle Magdeburg; Goetheschule, Malchow; OS L. S. Titow, Manschnow; FEZ Markkleeberg; B.-v.-Suttner-OS, Mechterstädt; Cl.-Zetkin-OS, Meerane; 7. OS M. I. Kalinin, Meiningen; A.-Dürrer-OS II, Merseburg; OS H. Rau, Mieste; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; OS H. Danz, Möser; OS Margenröthe-R.; Kinderheim Munzig; W.-Pieck-OS, Nauen; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS J. Fucik, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; OS M. Burwitz, Neuenkirchen; OS Neuhaus; OS Neundorf; W.-Seelenbinder-OS, Niederlichtenau; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; OS Fr. Lesch, Niegripp; OS Dr. I. Lenin, OS J. Gagarin, OS L. Einicke, EOS W. v. Humboldt, alle Nordhausen; G.-Schwarz-OS, Olbersdorf; FEZ, Oranienburg; O.-Eichler-OS, Oschatz; OS E. Thälmann, Oschersleben; OS P. Kmiec, Osternienburg; OS W. Pieck, Osterwieck; E.-Weinert-OS, Osterweddingen; Th.-Müntzer-OS Osthausen; OS O. Grotewohl, Pappenheim; FEZ Parchim; FEZ Paserwalk; OS 8. Mai, Peitz; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; Kreis-AG, Plauen-Land; OS Plessa; OS E. Schneller, Polleben; K.-Foerster-OS, Potsdam; W.-Pieck-OS, Premnitz; OS Pritzerbe; Goetheschule II, Pritzwalk; OS K. Kollwitz, Quellendorf; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS G. Titow, OS Pestalozzi, beide Radebeul; W.-I.-Lenin-OS, Radewege; G.-Scholl-OS, Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; H.-Burmeister-OS, J.-Gagarin-OS, beide Ribnitz; STN, H.-Matern-OS, Spezialschule Fr. Engels, alle Riesa; J.-Gagarin-OS, Riethnordhausen; J.-Curie-OS, Röbel; R.-Wöhl-OS, Rodleben; Ziolkowski-OS, Rossdorf; FEZ, 37. OS, 1. OS W. Schröder, alle Rostock; OS K. Niederkirchner, Saal; OS G. Scholl, OS W. Komarow, beide Saalfeld; STN Salzwedel; OS Th. Müntzer, STN, beide Sangerhausen; T.-Bunke-OS, Sanitz; OS H. Matern, Schernberg; MG OS, Schköleib; H.-Beimler-OS, Schlagsdorf; G.-Hauptmann-OS, Schleusingen; OS H. Danz, OS K. Marx, beide Schmalkalden; P.-Göring-OS, Schönbrunn; OS P. Neruda, Schönebeck; OS H. Beimler, Schönhäusen; POS Kuba, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; Fr.-Fröbel-Schule, Schweina; FEZ Sebnitz; 1. OS, Seifhennersdorf; OS H. Warnke, Sielow; Fr.-Engels-OS, Sömmerda;

OS Glückauf, Sondershausen; W.-Pieck-OS, Sonneberg; A.-Becker-OS, Spreenhagen; OS K. Marx, OS A. Becker, beide Spremberg; H.-A.-Eckelmann-OS, Sponholz; III. OS E. Wölk, Pestalozzi-OS, beide Stadtroda; L.-Umland-OS, OS W. I. Lenin, beide Staßfurt; J.-Fucik-OS, Steinbach; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; F.-Dettmann-OS, K.-Marx-OS, beide Stralsund; FEZ Strausberg; Schule der DSF Dr. E. Lasker, Ströbeck; Kreisförderzirkel 1. OS F. Sattler, 12. OS Dr. R. Sorge, beide Suhla; OS E. Thälmann, Tannenbergstal; E.-Weinert-OS, Teichwolframsdorf; OS Teistungen; A.-Frank-OS, Thcmar; Fr.-Weineck-OS, Thonhausen; OS Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; A.-Einstein-OS, Torgelow; OS Treben; Lenin-OS, Treuenbitzen; OS W. Pieck, Trusetal; E.-Welk-OS, MM OS, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; OS Unterweißbach; E.-Schneller-OS, Urnhäusen; OS j. G. Seume, Vacha; W.-Seelenbinder-OS, Viernau; OS Vitte; OS Völkcrshäusen; OS E. Schneller, Waldkirchen; Goetheschule Waren; G.-Scholl-OS, Weißenborn-K.; Kreisklub Jg. Math. Weißwasser; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS A. Günther, Wernshäusen; OS Wesenberg; OS o.-Grotewohl, Westerengel; B.-Brecht-OS, Wiederitzsch; Cl.-Zetkin-OS, Wildberg; Päd.-Kreiskab. Zwickau-Land, K.-Marx-OS, beide Wilkau-Haßlau; OS Wipperdorf; OS H. Heine, Wörmilitz; OS Wohlmirstedt; OS I H. Werner, OS W. I. Lenin, Math.-Winterlager, alle Worbis; OSTh. Müntzer, Wulfen; OS Fr. Reuter, Zarrentin; STN Zernbschen; W.-Pieck-OS, Fr.-Schiller-OS, beide Zeulenroda; OS W. Seelenbinder, Zielitz; OS O. Benario-Pestes, Zobendorf; OS J. H. Pestalozzi, Zschornewitz; OS M. Gorki, Züssow

- 1) Schülertreff Technik und Natur
- 2) Freizeitzentrum

Ein Dankeschön

Die Redaktion alpha konnte in diesem Jahr den Preisträgern des alpha-Wettbewerbs 1989/90 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellten uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:

Wilhelm Heyne Verlag, München;
Kinderbuchverlag, Berlin;
Ernst Klett, Schulbuchverlag, Stuttgart;
MANZ Verlag, München;
Verlag Neues Leben, Berlin;
Philipp Reclam Verlag jun., Ditzingen;
Verlag P. Reclam jun., Leipzig;
Sportverlag, Berlin; Technik Verlag, Berlin;
Urania Verlag, Leipzig;
Verlag Volk und Welt, Berlin;
Verlag der Wissenschaften, Berlin;
Verlag Volk und Wissen GmbH, Berlin

Logisch kombinieren

Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben also immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind die Ziffern zu finden, die für die Buchstaben eingesetzt, die waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben richtig lösen.

a) $BEE - CBB = GGG$ b) $AGI - HF = AEC$

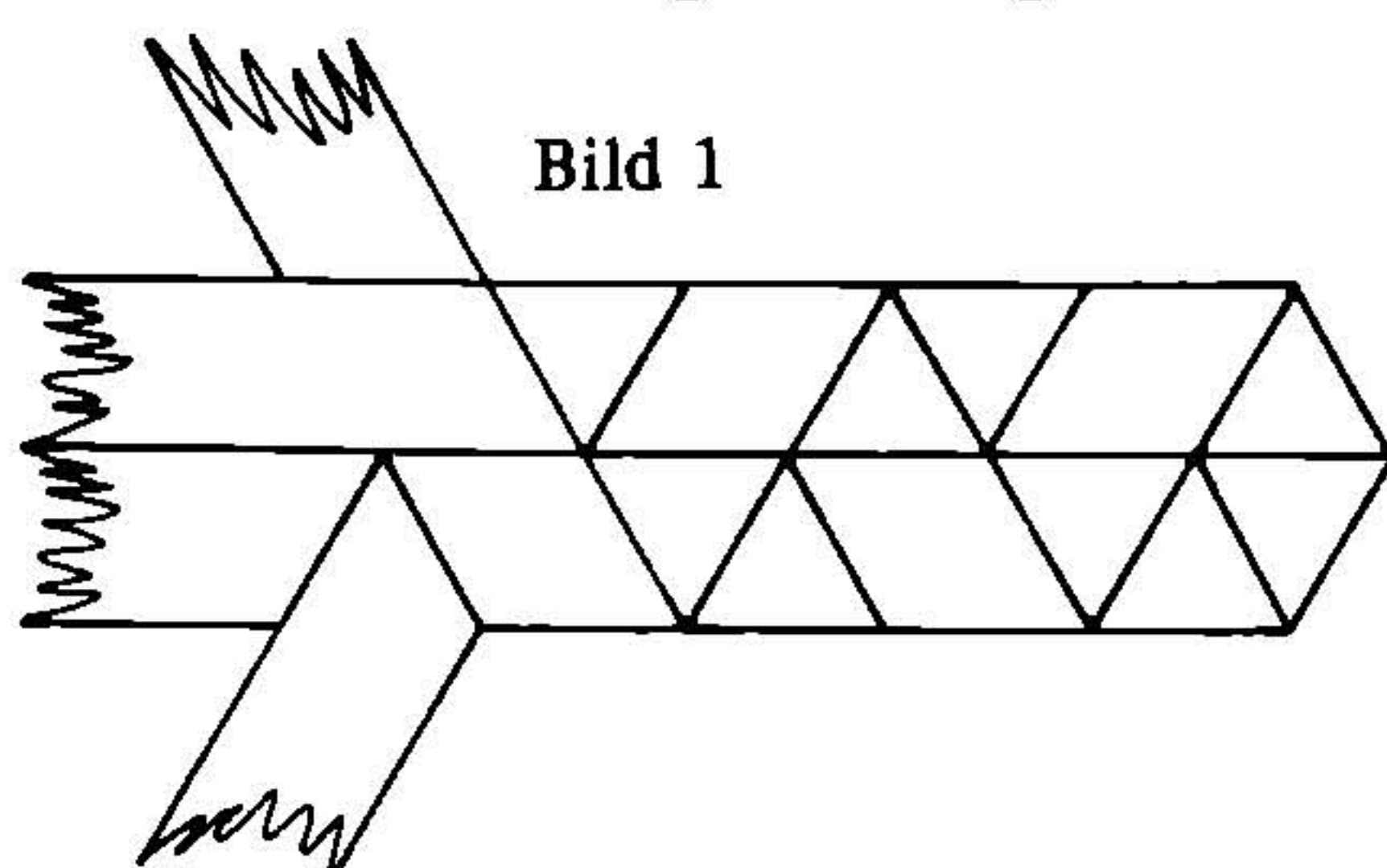
:	+	-	:	+	-
E	·	B	=	CE	
$\frac{E}{DC + CBA} = GHD$			$\frac{I}{FA + CB} = EIA$		

H. Raduschewski, Berlin

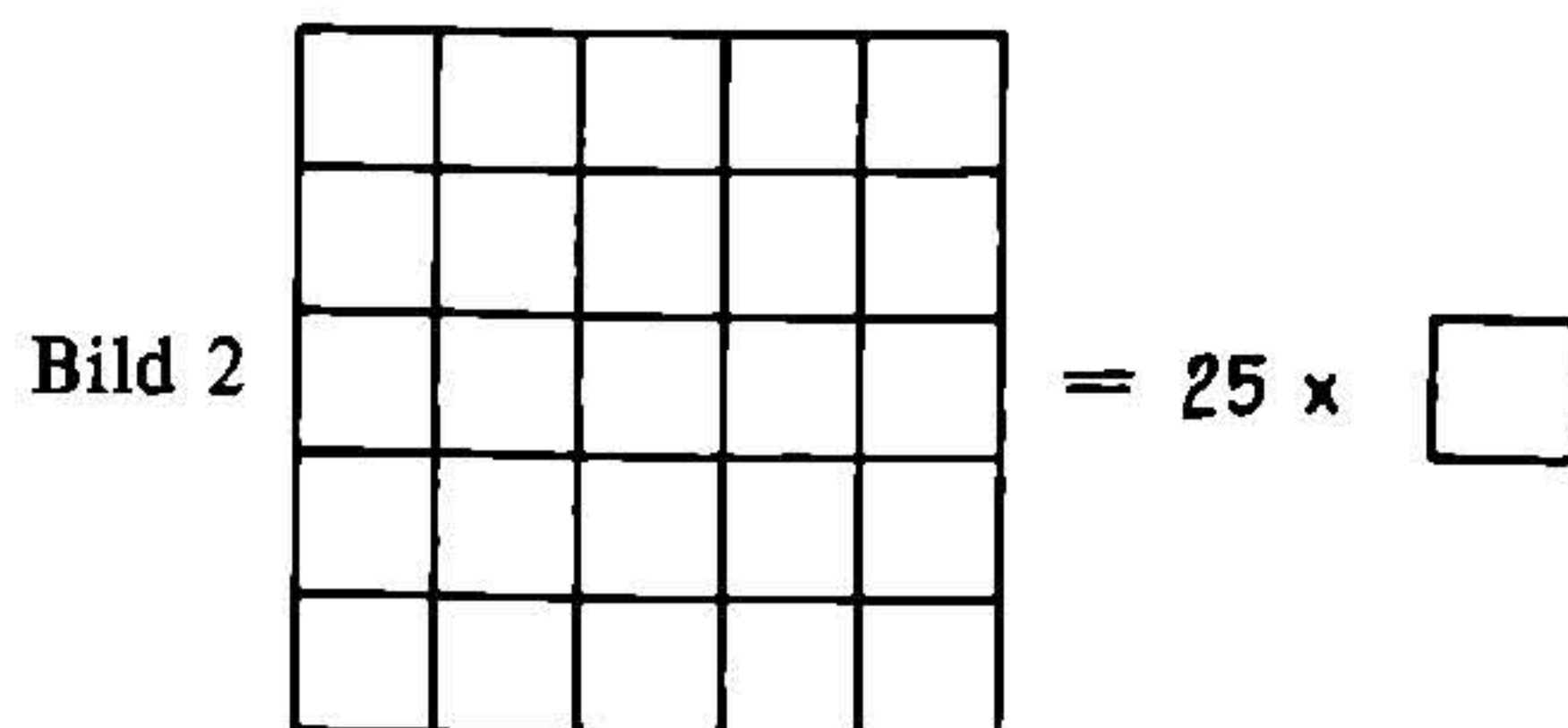
Pythagoras – einmal anders!



In einigen afrikanischen Ländern, z. B. in der VR Moçambique hat man erkannt, daß die Beschäftigung mit einheimischen Handarbeitstechniken wie Flechten und Weben, Herstellen von Matten, Netzen und Körben, den Schülern hilft, mit der Mathematik bekannt zu werden. Bild 1 zeigt ein Muster, das beim Flechten von Körben entsteht. Von ihm geht ein ästhetischer Reiz aus, der zum Nachdenken über die entstandenen Figuren anregt.

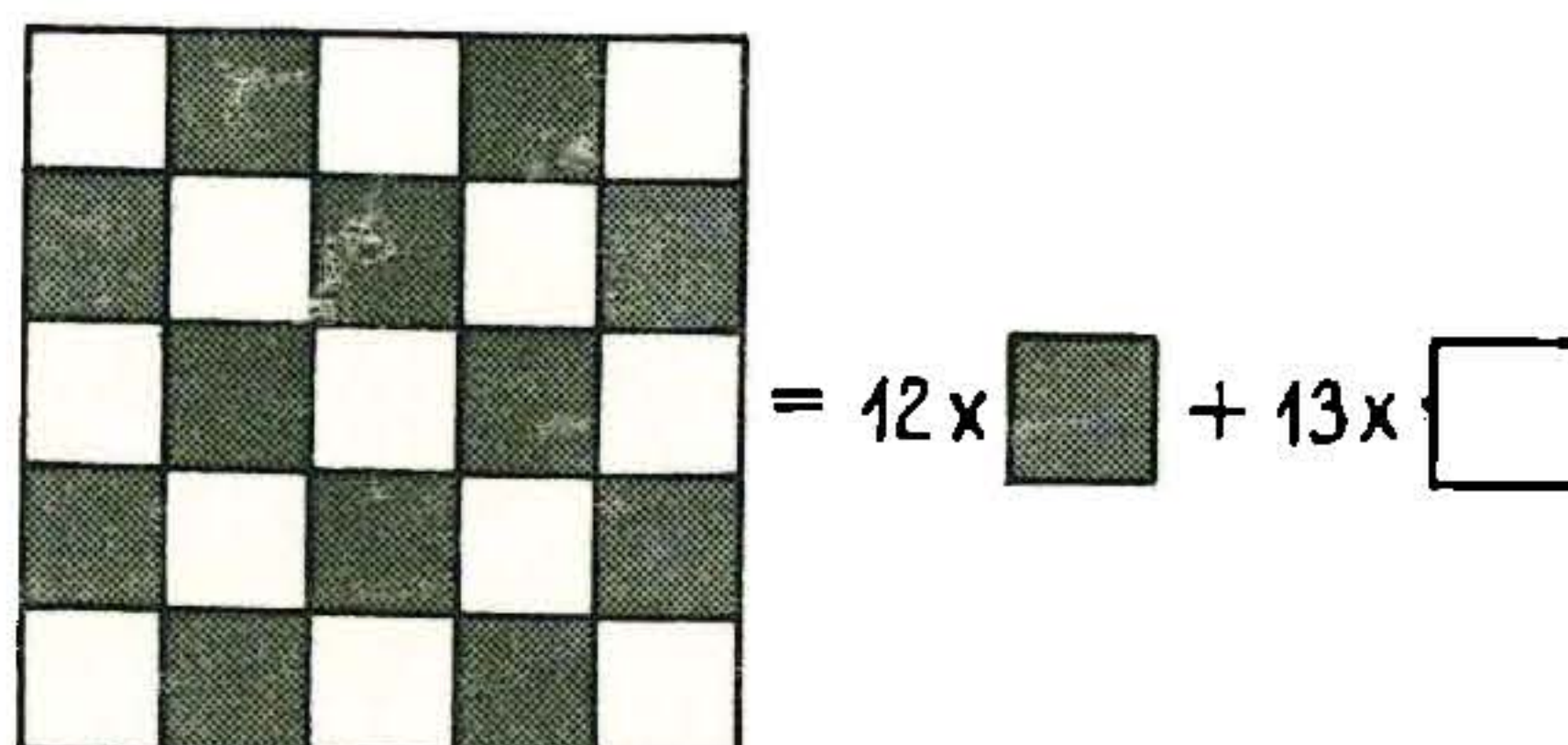


Wir kennen den Satz des Pythagoras – sowohl in geometrischer als auch in arithmetischer Formulierung. Wir wissen auch, was pythagoreische Zahlentripel sind. Wo treten nun bei handwerklichen Arbeiten Muster auf, in denen zugleich Quadrate, Summen von Quadraten, rechte Winkel und natürliche Zahlen eine Rolle spielen? Wo finden wir Quadrate, deren Flächeninhalte sich durch Auszählen kleinerer Quadrate ermitteln lassen? Beim Flechten und Weben, beim Sticken und Fliesenlegen! Wir wollen einigen Überlegungen unserer afrikanischen Freunde folgen. Wenden wir uns beispielsweise der Parallelflechttechnik mit gleichbreiten Pflanzenstreifen zu. Hier entstehen Quadrate, die aus gleichgroßen kleineren Quadraten zusammengesetzt sind. Fassen wir die kleinen Quadrate als Einheitsquadrate auf, so können wir die Flächeninhalte größerer Quadrate durch Auszählen leicht ermitteln (Bild 2).

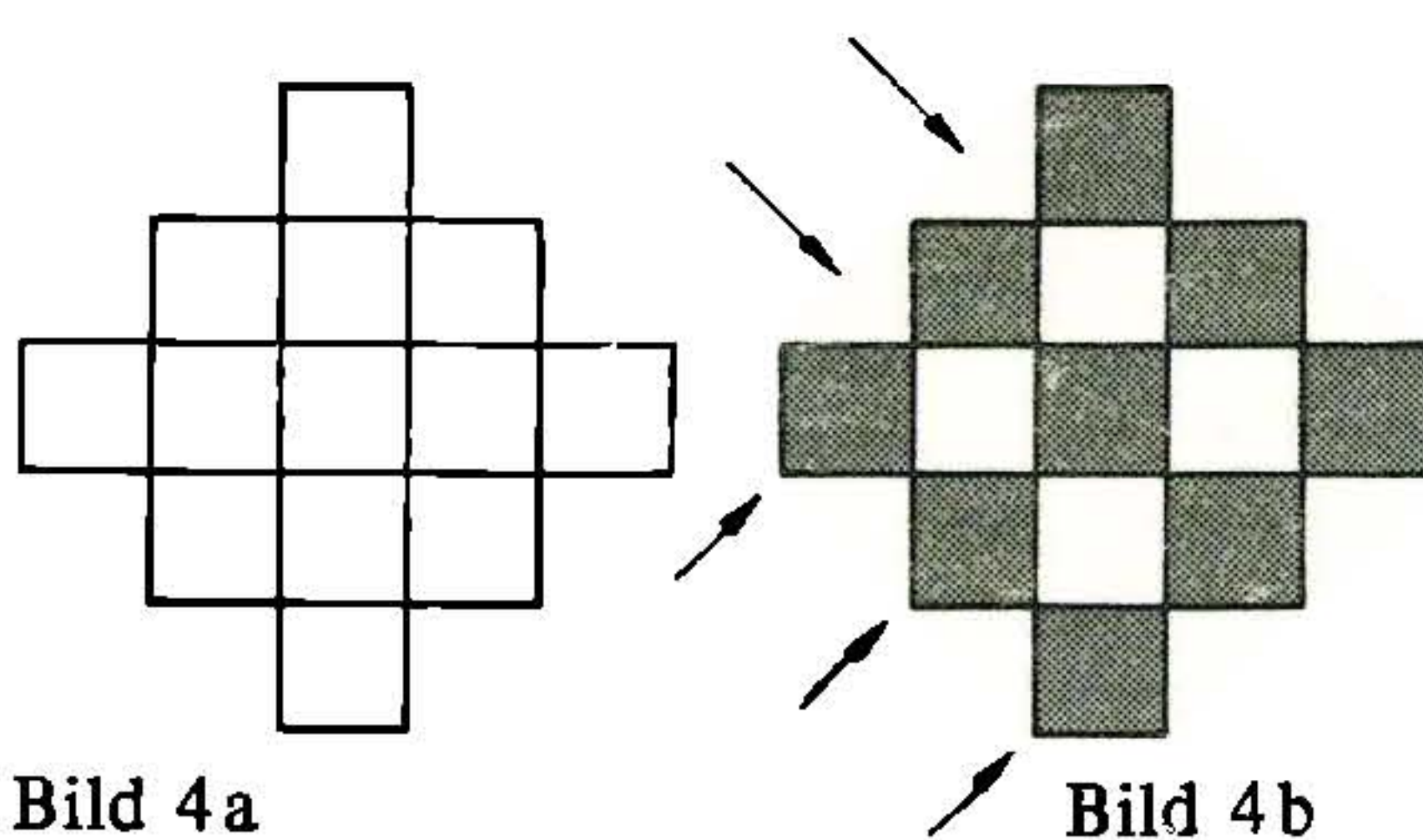


Bei sehr vielen handgemachten Produkten (z. B. Matten) wird mit farbigem Material gearbeitet. Nehmen wir Streifen mit zwei unterschiedlichen Farben, so erhalten wir schachbrettartige Muster. Zählt man die

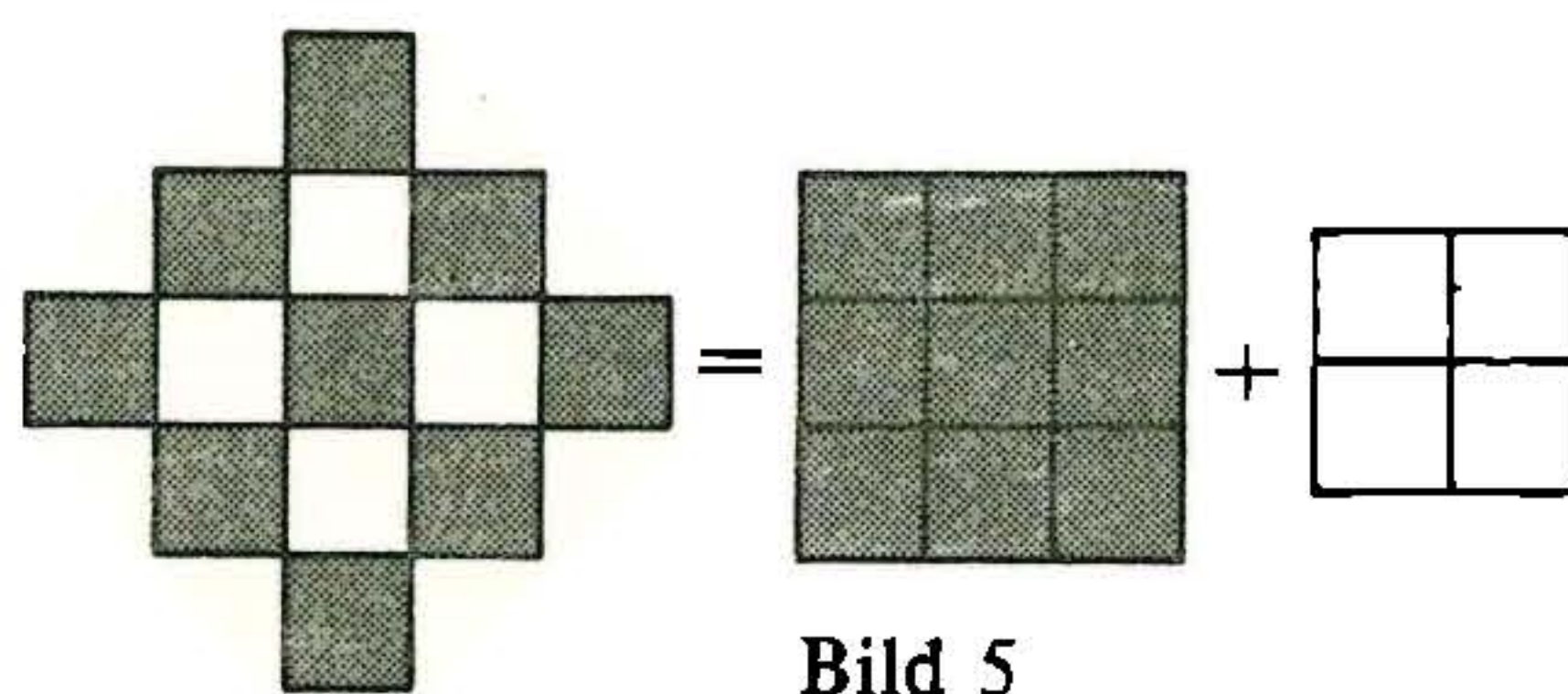
entstehenden Einheitsquadrate getrennt nach ihrer Farbe, so wird der Flächeninhalt eines Quadrats in zwei Summanden zerlegt (Bild 3). Allerdings lassen sich diese Summanden noch nicht als Flächeninhalte von Quadraten mit ganzzahliger Seitenlänge auffassen.



Etwas ganz Überraschendes können wir feststellen, wenn beim Flechten ein sogenanntes „gekerbtes Quadrat“ entsteht. Bild 4a zeigt ein gekerbtes Quadrat, das aus 13 Einheitsquadraten besteht und dessen Diagonallänge fünf Einheiten beträgt.



Zählen wir die schwarzen und die weißen Einheitsquadrate im Bild 4b, so erhalten wir 4 weiße und 9 schwarze, 4 und 9 sind Quadratzahlen. Wir können also das gekerbte Quadrat aus Bild 4b als Summe von zwei gewöhnlichen Quadraten auffassen, deren Seitenlängen bezüglich der vom gekerbten Quadrat vorgegebenen Einheiten natürliche Zahlen als Zahlenwerte haben. (Solche Quadrate wollen wir im folgenden „glatte Quadrate“ nennen.) Dazu brauchen wir die Einheitsquadrate nur anders anzuordnen (Bild 5).



▲ 1 ▲ Zeichnet weitere gekerbte Quadrate und untersucht, ob sie sich in zwei glatte Quadrate zerlegen lassen!

Wir vermuten: *Zu jedem gekerbten Quadrat gibt es zwei glatte Quadrate, so daß der Flächeninhalt des gekerbten Quadrats gleich der Summe der Flächeninhalte dieser beiden glatten Quadrate ist.*

Diese Vermutung können wir beweisen: Der Zahlenwert d der Diagonallänge eines gekerbten Quadrats ist aus Symmetriegründen stets ungerade:

$$d = 2k + 1; k = 1, 2, 3, \dots$$

Die Anzahl z der Einheitsquadrate in einem gekerbten Quadrat mit der Diagonallänge $2k + 1$ Einheiten ist

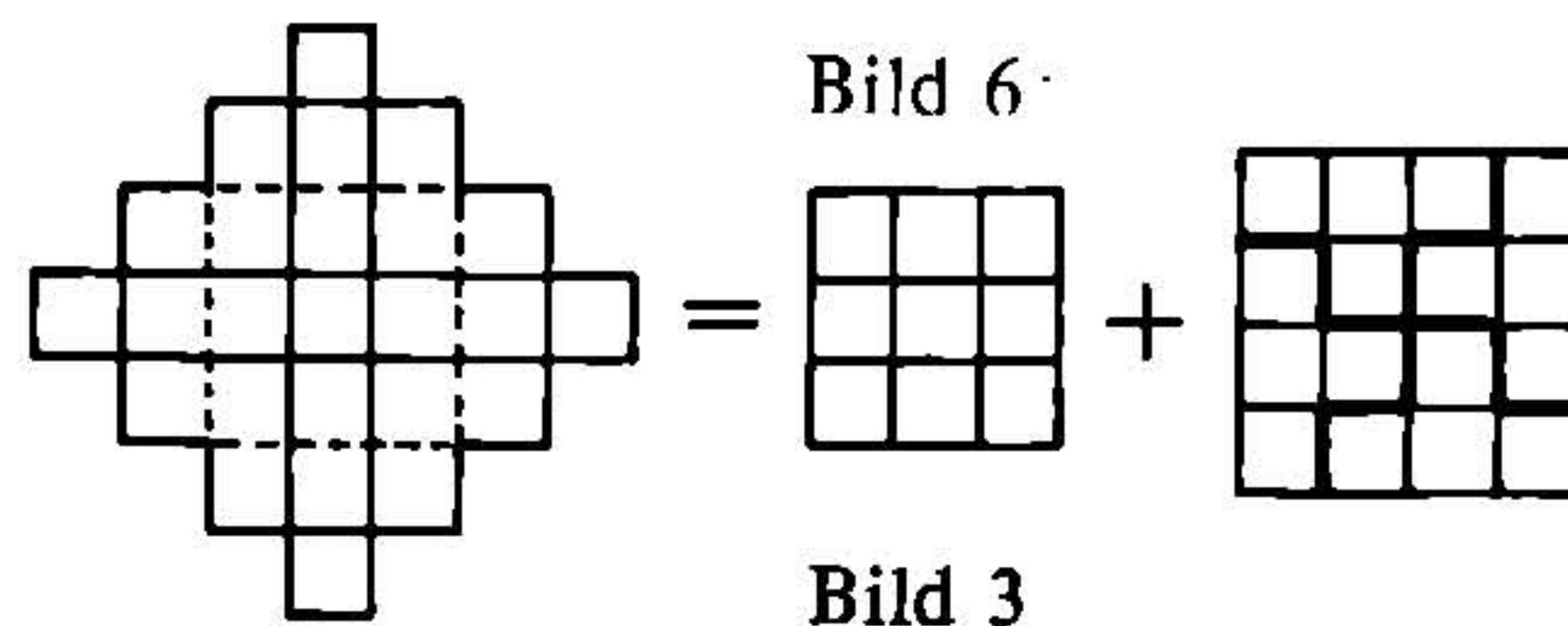
$$2 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2k + 1) \cdot 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)$$

ist die Summe der ersten k Glieder der arithmetischen Zahlenfolge mit dem An-

fangsglied 1 und der Differenz 2, sie ist gleich $\frac{k}{2}(1 + (2k - 1)) = k^2$. Damit ist $z = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k^2 + 2k + 1) = k^2 + (k + 1)^2$. Dies ist die Summe zweier Quadratzahlen, w. z. b. w.

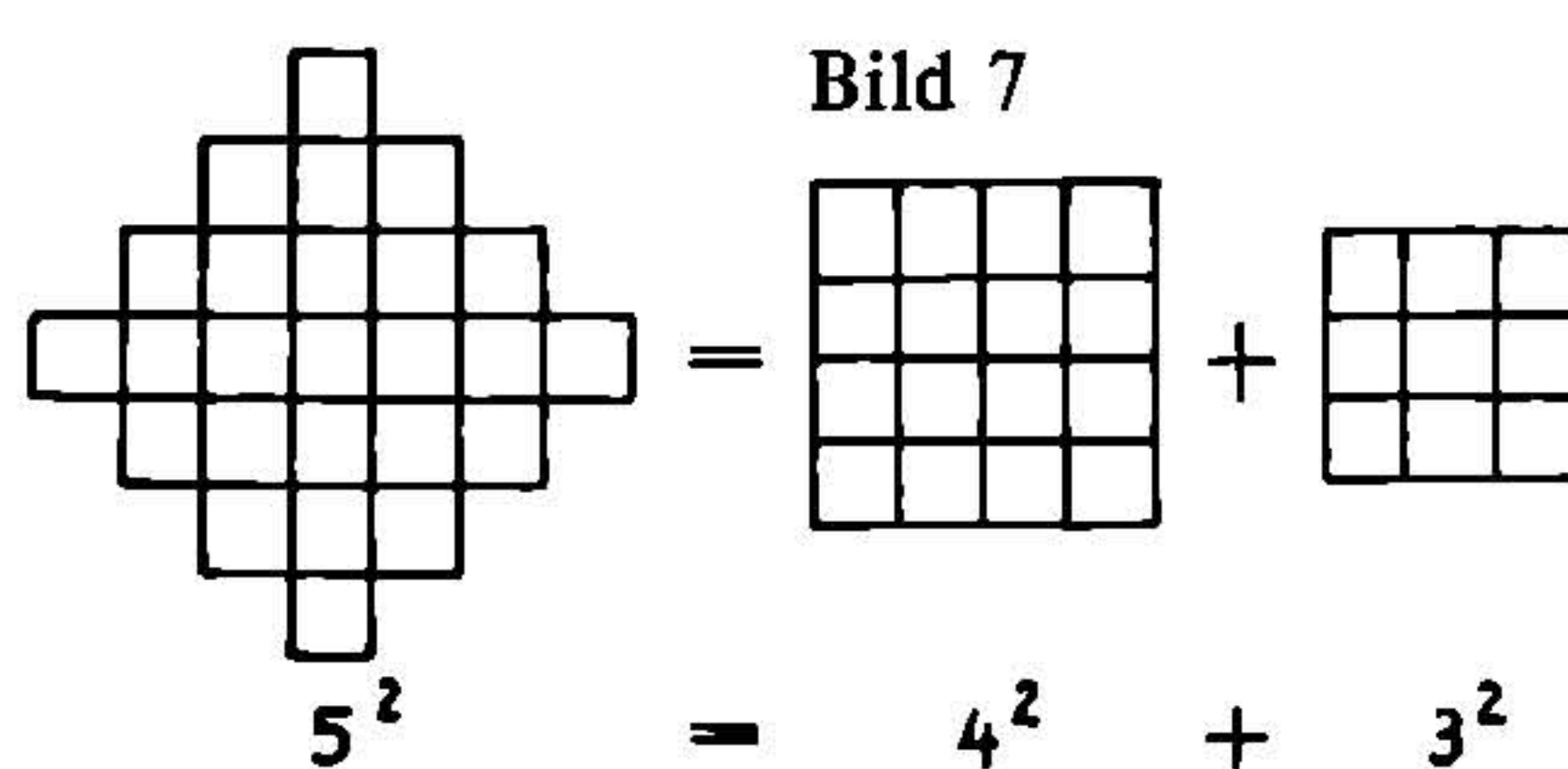
Übrigens: Bei einer schachbrettartigen Färbung ist k die Anzahl der Einheiten der einen Farbe und $k + 1$ die der anderen Farbe in der Diagonale mit $d = 2k + 1$ Einheiten.

Eine andere Möglichkeit, die Vermutung zu beweisen, deutet Bild 6 an.

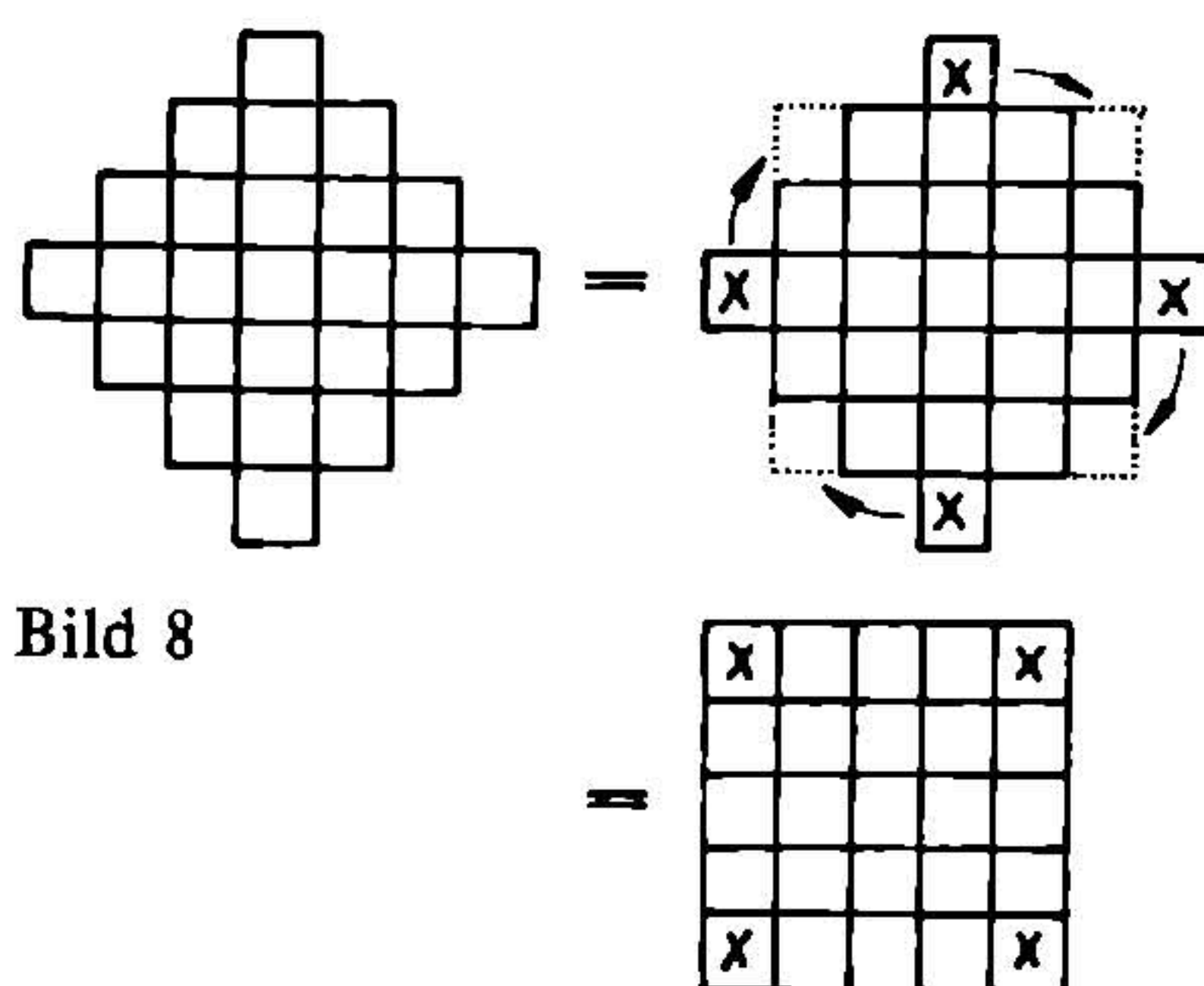


▲ 2 ▲ Erläutert diese Beweisidee!

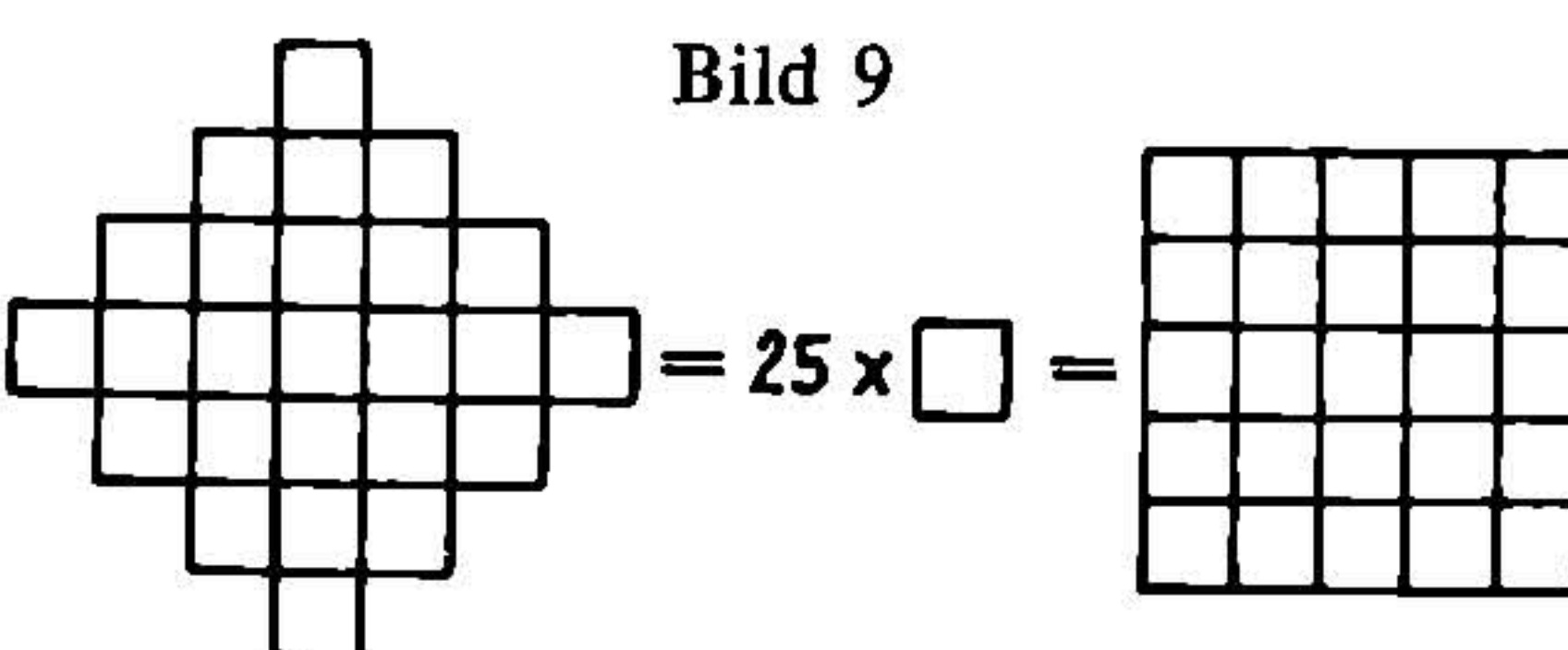
Beim weiteren Experimentieren stoßen wir auf eine weitere interessante Eigenschaft der gekerbten Quadrate: Es gilt die im Bild 7 dargestellte Beziehung.



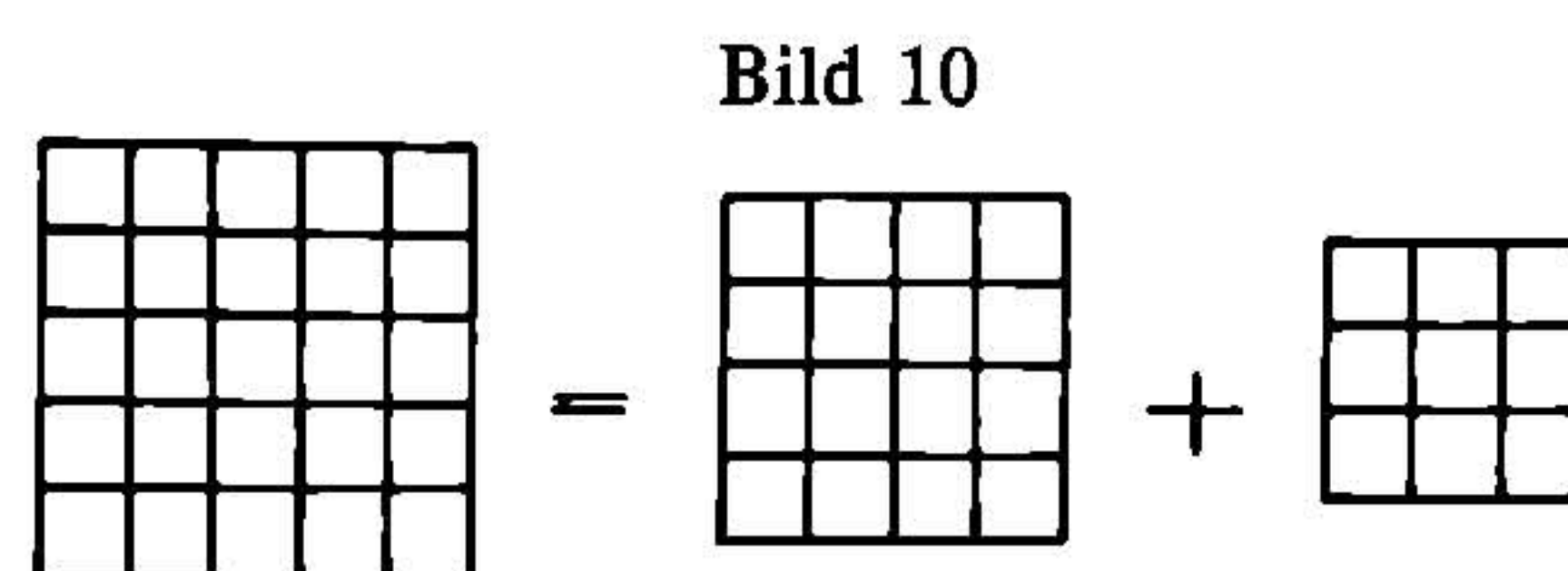
In diesem Fall können wir auch das gekerbte Quadrat selbst in ein glattes überführen. Bild 8 zeigt, wie dies durch Umlagen einzelner Einheitsquadrate geschehen kann.



Man kann aber auch wie im Bild 9 vorgehen: Die Einheitsquadrate im gekerbten Quadrat werden ausgezählt und anschließend neu angeordnet.



Zusammenfassend erhält man Bild 10.

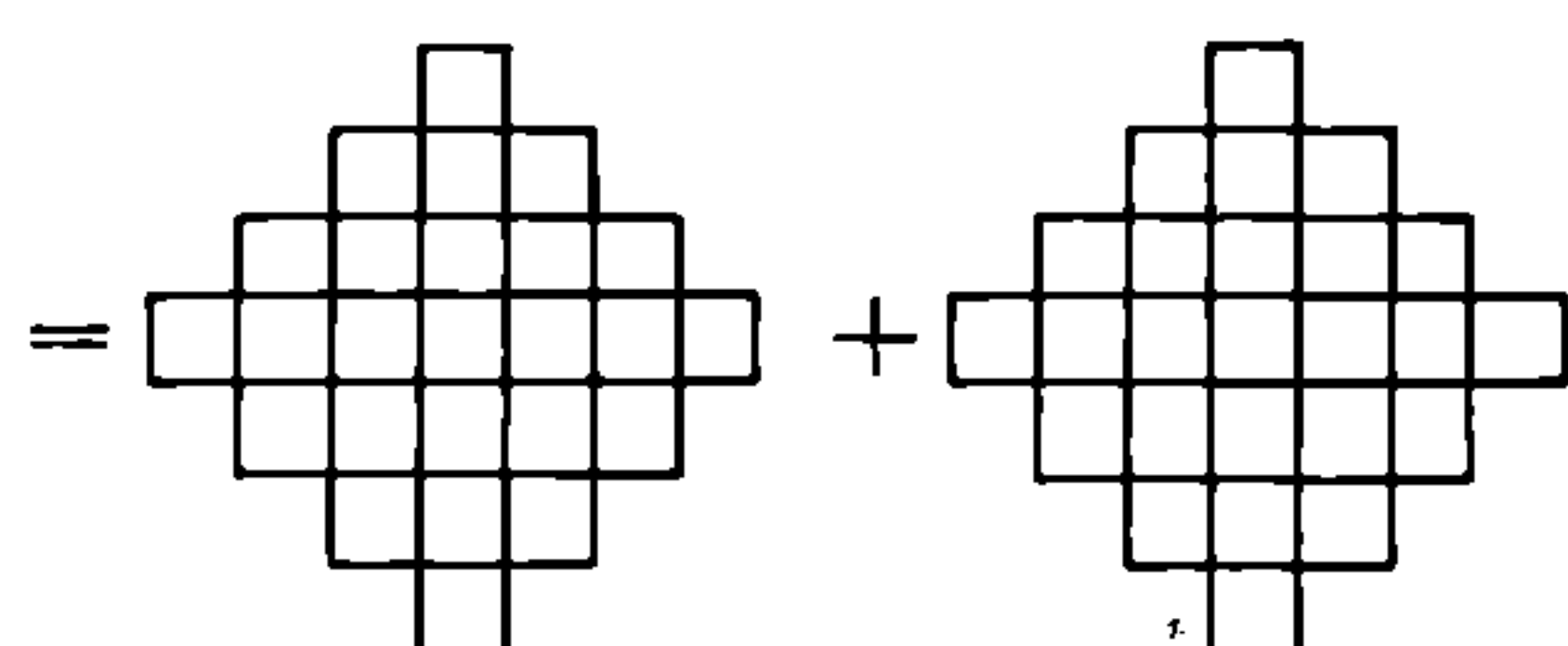
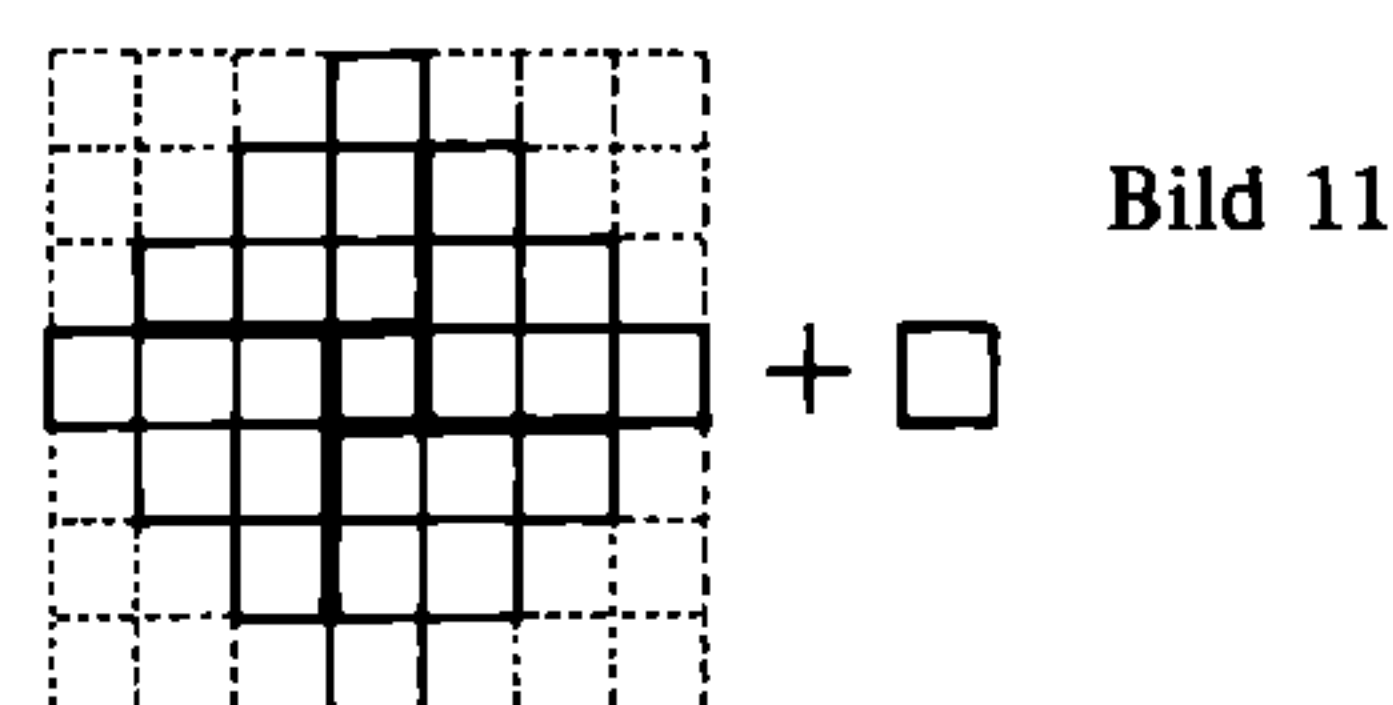


Durch Probieren stellt man allerdings fest, daß die Überführung eines gekerbten Quadrats in ein glattes nur selten gelingt. Erst bei einer Diagonallänge des gekerbten Quadrats von 41 Einheiten würden wir wieder Glück haben.

Gibt es einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Diagonallänge des gekerbten Quadrats und der Möglichkeit, dieses durch Umordnungen der Einheitsquadrate in ein glattes zu überführen?

Die Kenntnis solch eines Zusammenhangs würde es uns ermöglichen, sofort zu entscheiden, ob die (immer mögliche) Zerlegung eines gekerbten Quadrats in zwei glatte einem pythagoreischen Zahlentripel entspricht.

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst Bild 11.



Die Anzahl der Einheitsquadrate des großen glatten Quadrats ist d^2 . Bezeichnen wir die Anzahl der Einheitsquadrate des gekerbten Quadrats wieder mit z , so gilt offensichtlich $d^2 + 1 = 2z$. Zu dieser Beziehung kommen wir auch unabhängig von der speziellen Zeichnung: Aus dem für $d = 2k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) bereits hergeleiteten Zusammenhang $z = 2k^2 + 2k + 1$ erhalten wir

$$2z = 4k^2 + 4k + 2 = (4k^2 + 4k + 1) + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = d^2 + 1.$$

Ein pythagoreisches Zahlentripel liegt genau dann vor, wenn z eine Quadratzahl ist. Es interessieren also diejenigen natürlichen Zahlen d , für die $z = \frac{1}{2}(d^2 + 1)$ das

Quadrat einer natürlichen Zahl ist. Um solche zu finden, legen wir eine Tabelle an. Wie wir bereits bemerkt haben, kommen für d nur ungerade Zahlen in Betracht.

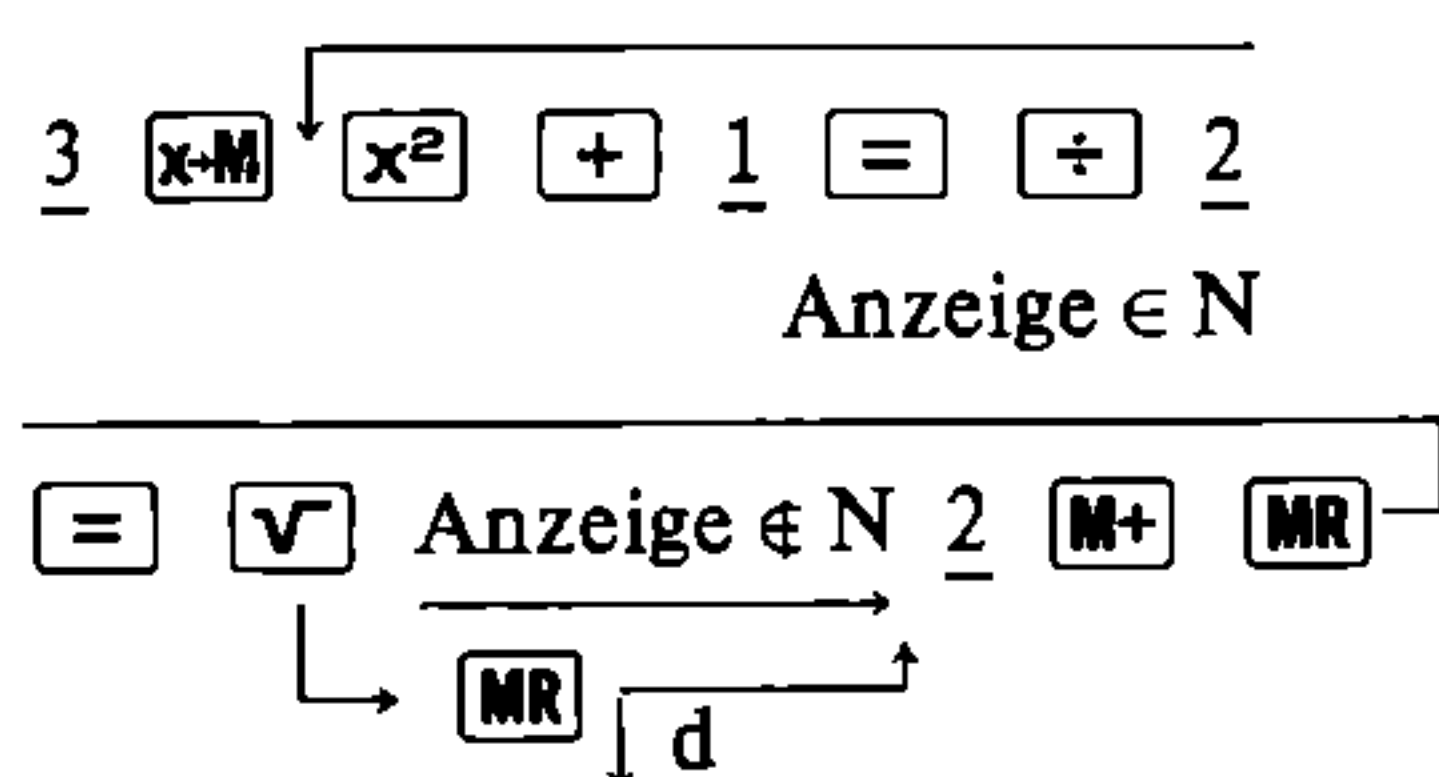
d	d^2	$d^2 + 1$	$\frac{1}{2}(d^2 + 1)$
3	9	10	5
5	25	26	13
7	49	50	$25 = 5^2$
...	...	...	...
41	1681	1682	$841 = 29^2$
...	...	...	...
239	57121	57122	$28561 = 169^2$

Wir erhalten auf diese Weise die pythagoreischen Gleichungen

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 20^2 + 21^2 &= 29^2 \\ 119^2 + 120^2 &= 169^2, \end{aligned}$$

die jeweils einer Zerlegung eines gekerbten Quadrats in zwei glatte entsprechen.

Das Auffinden weiterer Möglichkeiten ist sehr aufwendig, auch wenn wir den Schulrechner – etwa nach folgendem Ablaufplan – benutzen:



▲ 3 ▲ Arbeitet den angegebenen Ablaufplan so oft ab, bis ihr für d die Zahlen 7 und 41 erhalten habt!

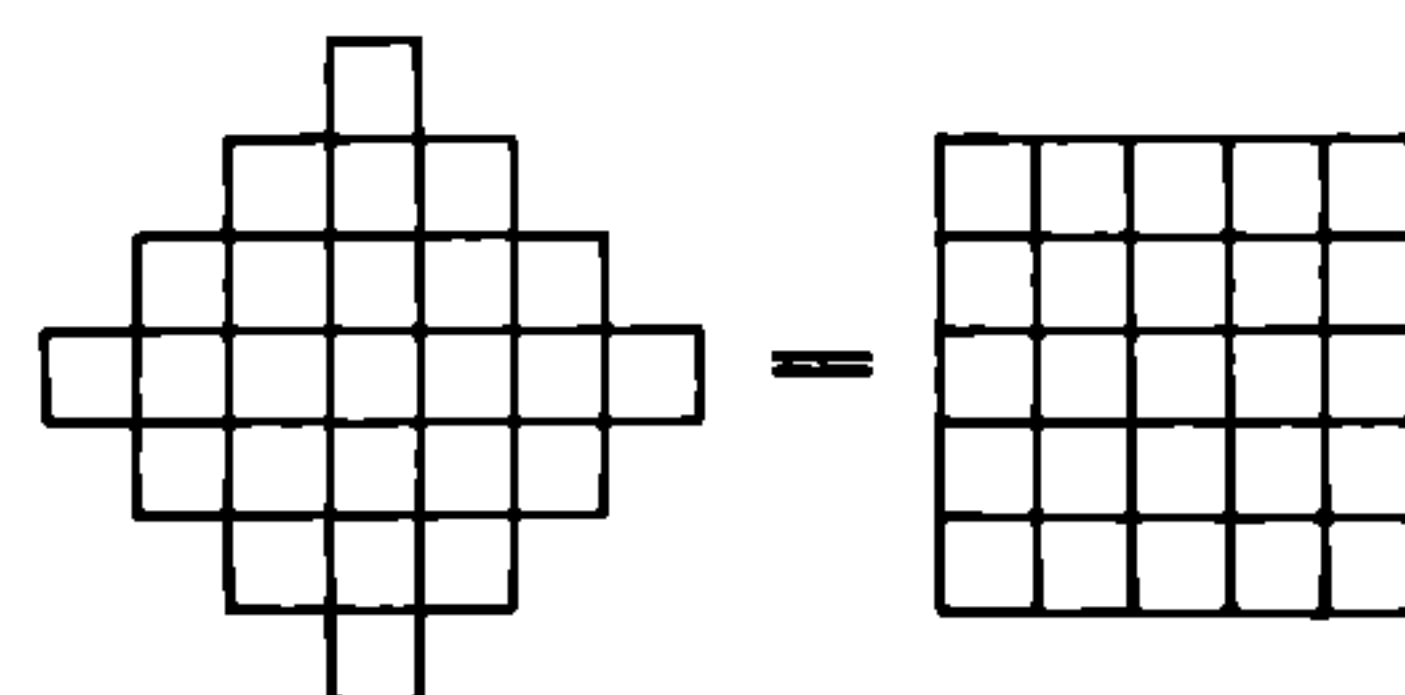
Mit einem entsprechend programmierten Kleincomputer erhielten wir 1393, 8119 und 14845 als nächste Zahlenwerte für Diagonallängen von gekerbten Quadraten, die sich in glatte überführen lassen.

▲ 4 ▲ Stellt die pythagoreischen Gleichungen auf, die diesen Diagonallängen entsprechen!

Erinnern wir uns jetzt daran, daß das gekerbte Quadrat mit der Diagonallänge 7 Einheiten und das glatte Quadrat mit 5 Einheiten als Seitenlänge denselben Flächeninhalt haben. Wie wir gesehen haben, ist bei weitem nicht für jedes gekerbte Quadrat ein Umwandeln in ein glattes Quadrat, d. h. in ein gewöhnliches Quadrat mit natürlichem Zahlenwert der Seitenlänge möglich. Verzichteten wir auf die letztgenannte Bedingung und lassen beliebige positive reelle Zahlenwerte der Seitenlängen zu (immer bezüglich der vom gekerbten Quadrat vorgegebenen Einheiten), so läßt sich jedes gekerbte Quadrat in ein zu ihm flächengleiches gewöhnliches Quadrat überführen. Wie ist dies auf rein geometrischem Wege möglich?

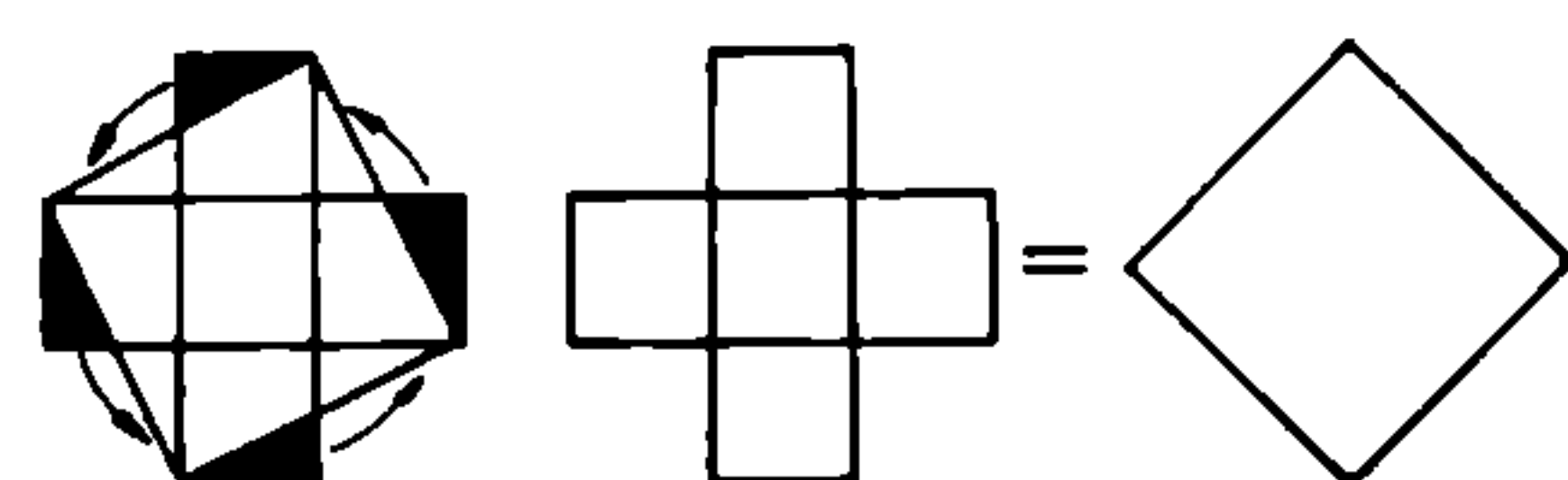
Nehmen wir zunächst das kleinstmögliche gekerbte Quadrat (Bild 13).

Bild 12



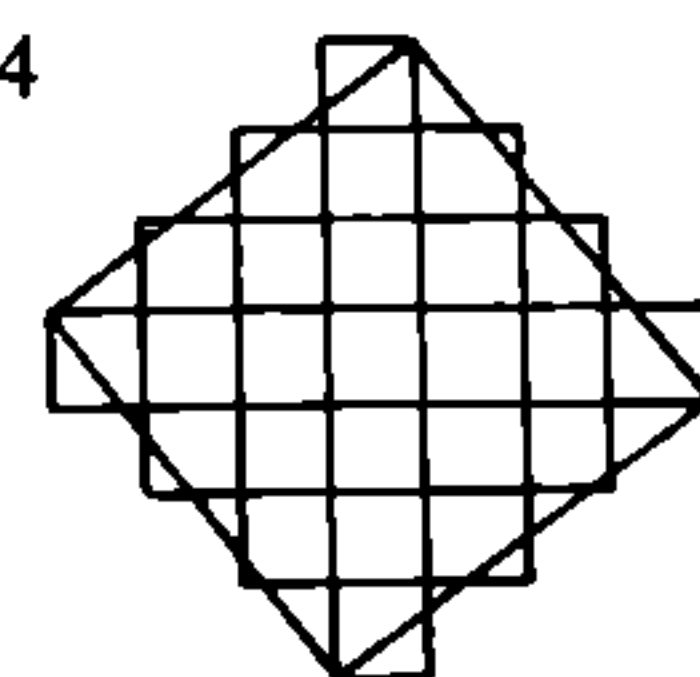
▲ 5 ▲ Begründe, warum das gekerbte Quadrat und das gewöhnliche Quadrat im Bild 13 flächengleich sind!

Bild 13



Wenden wir diese Methode beispielsweise auf das gekerbte Quadrat mit der Diagonallänge 7 Einheiten an, so erhalten wir Bild 14.

Bild 14



Versuchen wir nun, die beiden kleineren (glatten) Quadrate, deren Flächeninhalte zusammen den Flächeninhalt des größeren Quadrats ergeben, auf eine sinnvolle Art in das Bild 14 einzufügen, dann finden wir nach einigen Versuchen ganz sicher die geometrische Veranschaulichung des altbekannten Satzes des Pythagoras (Bild 15).

Bild 15a

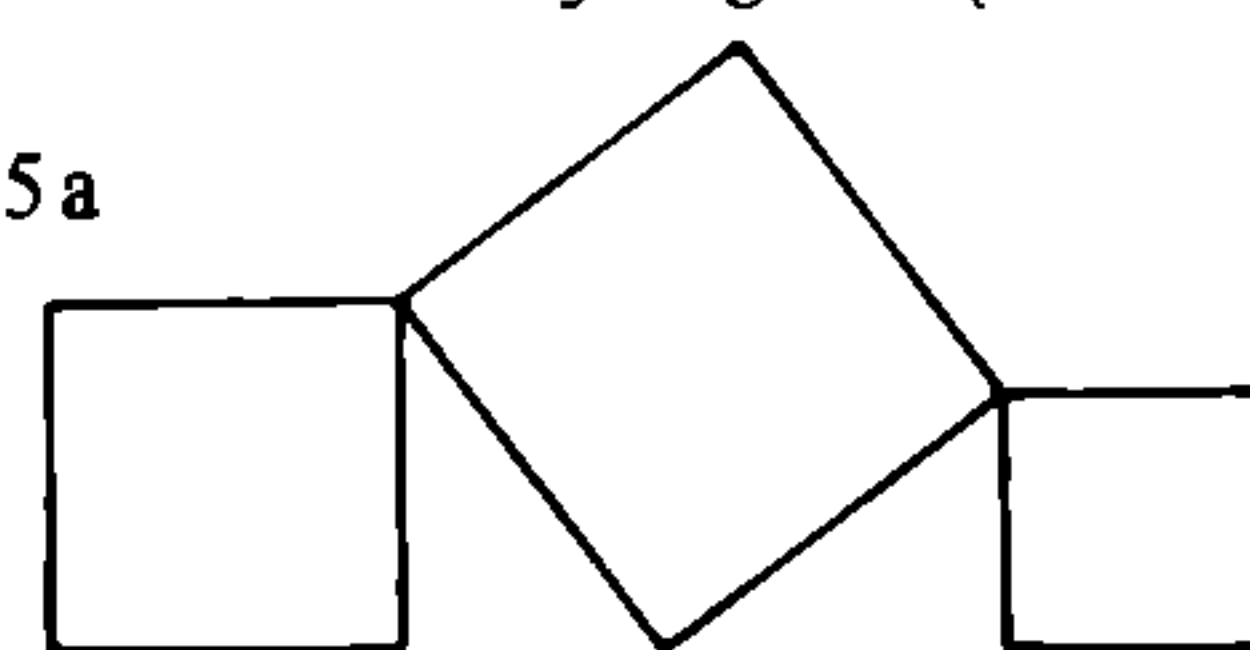
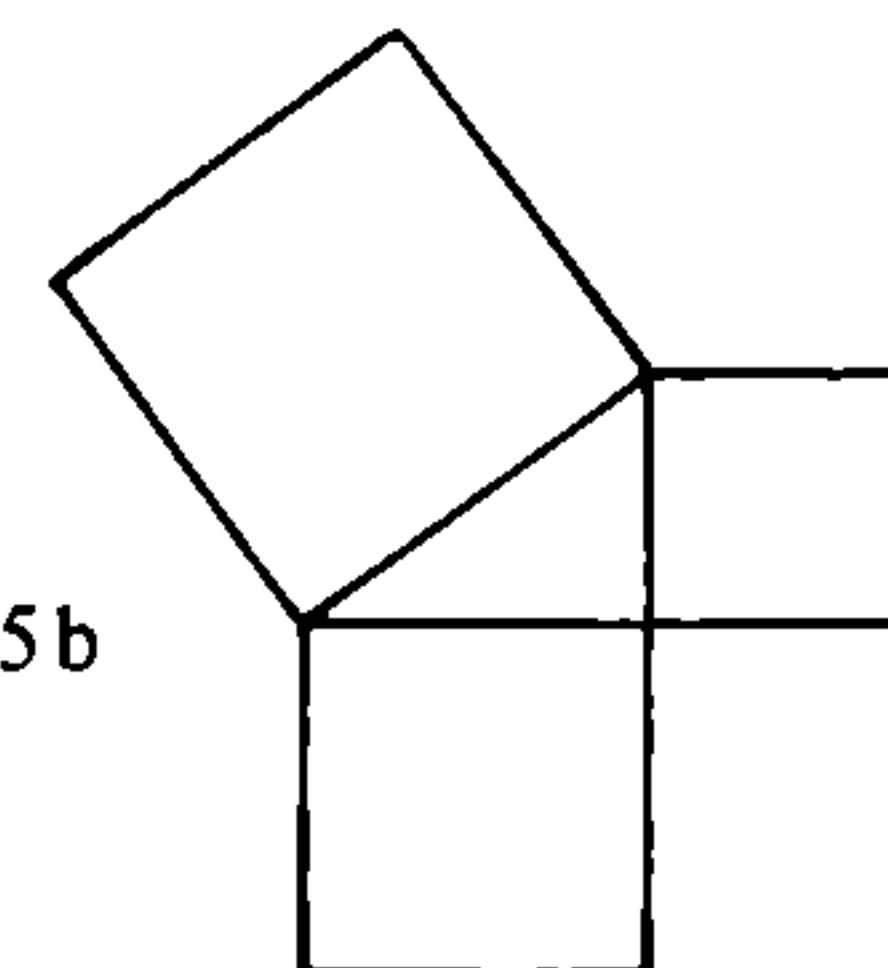


Bild 15b



C. P. Helmholtz/P. Gerdes/H. Meyer

Zittert, ihr Ochsen!

Als der griechische Philosoph Pythagoras, der auch als Mathematiker Bedeutendes vollbrachte, wieder einmal einen genialen Einfall gehabt hatte, war man überall im Lande des Lobes voll über seine Leistung. Aber wie das so ist, fanden sich auch Neider, die sein Verdienst zu schmälern suchten. Pythagoras verdanke seine neue Idee nur seinem guten Verhältnis zu den Göttern. Die Olympier hätten ihn erleuchtet, behaupteten sie. Pythagoras konnte es nicht wagen, dem zu widersprechen. Sollte er öffentlich die Götter herabsetzen? Das Volk hätte ihm das nie verziehen, ja ihn womöglich als Gottlosen gesteinigt. Seine Kollegen, wahrlich Schlitzohren, nötigten ihn schließlich, den Göttern zwanzig Ochsen zu opfern. Das war schon damals eine teure Angelegenheit. Zu dem ausgiebigen Mahl gehörte ja auch ein kräftiger Umtrunk. „Fortan müssen Ochsen vor jeder neuen Erkenntnis zittern“, sagte Pythagoras.

aus: E. Oetzel/W. Polte:

Der gescholtene Thales,

Urania Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Besteht der Wert des Satzes des Pythagoras etwa nur darin, daß er uns die Möglichkeit gibt, aus bekannten Kathetenlängen die Länge der Hypotenuse zu berechnen? Bedeutet die durch den Satz erhaltene Gewißheit in die Ewigkeit und Unerschütterlichkeit der Mathematik etwa wenig? Ein Felsen wird doch durch Wald und Regen letztendlich vernichtet, der Satz des Pythagoras aber bleibt ewig wahr.

J. A. Schreider, sowjet. Mathematiker

Pythagoreische Zwillinge sowie Potenzen von Drillingen und Vierlingen

Habt ihr schon einmal beobachtet, wie Maurer einen rechten Winkel abstecken? Sie benutzen eine Schnur, auf der nacheinander 3, 4 und 5 Längeneinheiten angetragen sind, und spannen damit ein Dreieck auf. Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist ein Dreieck mit diesen Seitenlängen rechtwinklig. Das Beispiel zeigt euch, daß die Summe zweier Quadrate wieder eine Quadratzahl sein kann. Man nennt positive natürliche Zahlen x, y, z ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn $x^2 + y^2 = z^2$ ist. Die Zahlen 3, 4, 5 stellen ein Beispiel für ein pythagoreisches Zahlentripel dar, sie weisen aber noch eine Besonderheit auf: $y = 4$ ist der Nachfolger von $x = 3$ (und auch der Vorgänger von $z = 5$). Wir wollen definieren: Zahlen x und y heißen *pythagoreische Zwillinge*, falls $y = x + 1$ ist und wenn es eine natürliche Zahl z gibt, so daß x, y, z ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.

1. Frage: 3 und 4 sind pythagoreische Zwillinge. Gibt es noch andere pythagoreische Zwillinge?

Wir stellen uns nun weitere, ähnliche Probleme, doch vorher führen wir noch zwei Begriffe ein.

Definition: Drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen x, y, z werden *Zahlendrillinge* genannt (d. h. $x = y - 1, z = y + 1$).

Vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen w, x, y, z heißen *Zahlenvierlinge* (d. h. $w = y - 2, x = y - 1, z = y + 1$).

3, 4, 5 sind z. B. Zahlendrillinge und 1, 2, 3, 4 sind Zahlenvierlinge.

2. Frage: Existieren Zahlendrillinge x, y, z mit der Eigenschaft, daß $x^2 + y^2 + z^2$ eine Quadratzahl ist?

3. Frage: Gibt es Zahlenvierlinge w, x, y, z für die $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ eine Quadratzahl ist?

4. Frage: Existieren natürliche Zahlen x, y, z mit $x + 1 = y$, so daß $x^3 + y^3 = z^3$ gilt?

5. Frage: Könnt ihr Zahlendrillinge x, y, z angeben, für welche $x^3 + y^3 + z^3$ wieder eine Kubikzahl ist?

6. Frage: Sind Zahlenvierlinge bekannt, so daß $w^3 + x^3 + y^3 + z^3$ eine Kubikzahl ist?

7. Frage: Gibt es Zahlendrillinge x, y, z , bei denen die Summe ihrer vierten Potenz wieder die vierte Potenz einer natürlichen Zahl m ist (d. h. $x^4 + y^4 + z^4 = m^4$)?

8. Frage: Oder könnt ihr Zahlenvierlinge w, x, y, z finden, bei denen die Summe ihrer vierten Potenzen sich wieder als vierte Potenz einer (anderen) natürlichen Zahl erweist?

Sehen wir uns die erste Frage näher an. Es gibt bekanntlich unendlich viele pythagoreische Zahlen (z. B. $x = 2pq, y = p^2 - q^2, z = p^2 + q^2$ mit beliebigen natürlichen Zahlen p und q , sowie alle Vielfachen ax, ay, az dieser Zahlen mit $a \in \mathbb{N}$). Um die Frage 1 zu beantworten, könnten nun aus der Menge der pythagoreischen Zahlen x, y, z einfach alle pythagoreischen Zwillinge x, y ausgesucht werden. Dazu ist zu überprüfen, ob $y = x + 1$ gilt oder nicht. Man kann auch anders vorgehen: Man bestimmt diejenigen natürlichen Zahlen x , für welche sich $x^2 + (x + 1)^2$ als Quadratzahl erweist. Das Überprüfen dieser Bedingung (Probiervorgehen) ist aber selbst für relativ kleine Zahlen (etwa für $x \leq 1000$) eine umfangreiche und langweilige Rechnerei! Für einen Computer ist die Arbeit (mit der angegebenen Beschränkung für x , also z. B. $x \leq 1000$) in wenigen Sekunden erledigt, falls ihr vorher ein richtiges Programm habt. Dabei könnte man so vorgehen: Zu jeder natürlichen Zahl x mit $0 < x \leq 1000$ bilde man $z = x^2 + (x + 1)^2$, also $z = 2x(x + 1) + 1$. Dann überprüfe man, ob z eine Quadratzahl ist. Dazu wird $\sqrt{z}$ berechnet. Fall $\sqrt{z}$ eine ganze Zahl ist, stellt das zugehörige x eine Lösung dar. Wir notieren uns dieses Vorgehen als BASIC-Programm:

```
10 FOR X = 1 TO 1000
20 Z = 2*X*(X+1)+1
30 IF Z = INT(SQR(Z)) THEN PRINT
   "LOESUNG: X = "; X, "Y = "; X + 1
40 NEXT X
```

Ihr wißt bereits vom Schulrechner SR 1, daß die Werte der Wurfelfunktion (in der BASIC-Notation SQR(Z)) in elektronischen Rechnern mit Hilfe eines Näherungsverfahrens ermittelt werden. Diese Werte sind recht genau, aber dennoch nur Näherungswerte. Das liegt u. a. an der Endlichkeit (Beschränktheit) der Menge der in einem Taschenrechner oder in einem Computer darstellbaren Zahlen. Es könnte deshalb passieren, daß bei dem Test (Befehl 30) Lösungen nicht erkannt werden. Wir empfehlen daher, diese Befehle so abzuändern:

```
30 M = INT(SQR(Z+.1)): IF M*M = Z
```

THEN PRINT
"LOESUNG: X = "; X, "Y = "; X + 1.

Es wird euch nun leichtfallen, für vorgegebene kleine Zahlenbereiche auch die Fragen 2 bis 8 mit Hilfe eines Computers zu untersuchen. Für den KC 85/3 bzw. KC 87 mit einer sechsstelligen Zahldarstellung beschränken wir uns auf $0 < x \leq 1000$ (bei den Fragen 2 und 3) bzw. $0 < x \leq 1000$ (bei den Fragen 4 bis 6) oder $0 < x \leq 30$ (bei den Fragen 7 und 8).

Noch ein Hinweis: Zum Überprüfen von Identitäten ist möglichst nicht die Potenzfunktion (Symbol $\wedge$ bzw. $\uparrow$) zu benutzen, besser ist es, mehrere Multiplikationen auszuführen.

Bestätigt folgende Ergebnisse zu den Fragen:

1. $3^2 + 4^2 = 5^2, 20^2 + 21^2 = 29^2, 119^2 + 120^2 = 169^2, 696^2 + 697^2 = 985^2$

5. $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

6. $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$

Für die übrigen Probleme existieren keine Lösungen in den angegebenen Zahlbereichen.

Wir wissen allerdings nicht, welche Verhältnisse außerhalb der untersuchten Zahlbereiche gelten. Insbesondere fanden wir bei den Fragen 2 bis 4 sowie 7 und 8 keine Lösungen unter den vorn angegebenen Einschränkungen für die Zahlen x . Was passiert, wenn auf diese Einschränkungen verzichtet wird? Kann es überhaupt Lösungen geben? Als Matheexperten solltet ihr die Probleme eingehender untersuchen! Es ist nützlich, sich die Endziffern von n^2, n^3 und n^4 in Abhängigkeit von der Endziffer der Zahlen n zu notieren.

Ihr findet:

Tabelle 1

Endziffer von n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	9	6
n^3	0	1	8	7	4
n^4	0	1	6	1	6
Endziffer von n	5	6	7	8	9
n^2	5	6	9	4	1
n^3	5	6	3	2	9
n^4	5	6	1	6	1

In Frage 2 sei $x = y - 1$ und $z = y + 1$. Gesucht sind natürliche Zahlen y , für welche $3y^2 + 2$ eine Quadratzahl ist, für die es also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $3y^2 + 2 = m^2$ gibt. Angenommen, eine ungerade Zahl y habe diese Eigenschaft. Dann gibt es eine Darstellung $y = 2p + 1, p \in \mathbb{N}$, folglich gilt $y^2 = 4p(p + 1) + 1$. Also läßt y^2 bei Division durch 8 den Rest 1 und daher $3y^2 + 2$ bei Division durch 8 den Rest 5. (Wir sagen: $3y^2 + 2 \equiv 5 \pmod{8}$, wenn wir mit Kongruenzen rechnen.) Wegen $m^2 = 3y^2 + 2$ wäre m^2 und folglich m eine ungerade Zahl. Nach unseren obigen Überlegungen muß m^2 bei Division durch 8 aber den Rest 1 liefern. Das ist ein Widerspruch, daher kann y nicht ungerade sein. Ist aber eine gerade Zahl y eine Lösung, d. h. $y = 2p, p \in \mathbb{N}$, so ist auch m eine gerade Zahl, und es kann $m = 2s$ geschrieben wer-

den. Folglich gilt $4s^2 = 12p^2 + 2$ und demnach $2s^2 = 6p^2 + 1$. Hier steht aber links eine gerade und auf der rechten Seite der Gleichung eine ungerade Zahl. Dieser Widerspruch bedeutet: Es gibt keine Zahlen-drillinge x, y, z , für die $x^2 + y^2 + z^2$ eine Quadratzahl ist.

Bei der Frage 3 ist die Summe der Quadrate von Zahlenvierlingen zu untersuchen. Wir setzen

$z = (y - 2)^2 + (y - 1)^2 + y^2 + (y + 1)^2$, d. h. $z = (2y - 1)^2 + 5$. Angenommen z ist eine Quadratzahl, also $z = m^2$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wegen $m^2 > (2y - 1)^2$ muß $m \geq 2y$ sein. Für $y \geq 2$ folgt

$m^2 \geq 4y^2 > 4y^2 - 4y + 6 = z$, was wegen $m^2 = z$ aber unmöglich ist. Die gesuchten Zahlenvierlinge existieren daher nicht.

Bei Frage 4 handelt es sich um einen Spezialfall der Fermatschen Vermutung (für $n = 3$ und mit $y = x + 1$). Die Fermatsche Vermutung ist noch nicht für beliebige natürliche Zahlen n bewiesen.

Faltings hat 1983 einen sehr wichtigen Beitrag zu ihrer Lösung geleistet (siehe „alpha“ Heft 3/1984). Für $n = 3$ hat aber bereits Euler gezeigt, daß keine natürlichen Zahlen x, y, z mit $x^3 + y^3 = z^3$ existieren. Die Suche mit dem Computer wäre also von vornherein sinnlos!

Bei Frage 7 ist $z = (y - 1)^4 + y^4 + (y + 1)^4$, also $z = 3y^4 + 12y^2 + 2$ zu bilden. Analog zu Tabelle 1 notieren wir die möglichen Endziffern der Zahlen z :

Tabelle 2						
Endziffer von y		0	1	2	3	4
$3y^4 + 2$		2	5	0	5	0
$12y^2$		0	2	8	8	2
z		2	7	8	3	2
Endziffer von y		5	6	7	8	9
$3y^4 + 2$		7	0	5	0	5
$12y^2$		0	2	8	8	2
z		7	2	3	8	7

Ein Vergleich der in Frage kommenden Endziffern von z mit den möglichen Endziffern der 4. Potenzen natürlicher Zahlen (Tab. 1) zeigt, daß z keine 4. Potenz einer natürlichen Zahl sein kann.

Es gibt folglich keine Zahlendrillinge mit den verlangten Eigenschaften.

Bei Frage 8 kann $(y - 1)^4 + y^4 + (y + 1)^4 \bullet (y + 2)^4$ zu $4y^4 + 8y^3 + 36y^2 + 32y + 18$ umgeformt werden. Wenn ihr die möglichen Endziffern dieser Zahlen mit denen von 4. Potenzen (siehe Tab. 1) vergleicht, so erkennt ihr, daß die Summe der vierten Potenzen von Zahlenvierlingen niemals die vierte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sein kann. Bestätigt das!

Zum Schluß wenden wir uns noch einmal den Fragen 5 und 6 zu.

Da wurde gefragt, ob es natürliche Zahlen y und m gibt mit der Eigenschaft $3y^3 + 6y = m^3$ (Frage 5 mit $x = y - 1$ und $z = y + 1$).

Wenn es solche Zahlen gibt, so ist m durch 3 teilbar, mithin m^3 durch 27, und dem-

nach gilt $9 \mid y(y^2 + 2)$. Hieraus folgt, daß y die Gestalt $y = 9k$, $y = 9k + 4$ oder $y = 9k + 5$, $k \in \mathbb{N}$, haben muß. Dadurch kann die Anzahl der zu testenden Zahlen deutlich verringert werden. Will man größere Zahlen y einbeziehen, so sollte man nach natürlichen Zahlen y, m fragen, für die

$\frac{y^2 + 2}{m} = \frac{m^2}{3y}$ ist. Wegen $m^3 = 3y^3 + 6y$ kann man sich auf Zahlen m aus dem Bereich $\sqrt[3]{3}y < m < \sqrt[3]{3}(y + 1)$ beschränken.

Bei Frage 6 ist zu untersuchen, ob $w^3 + x^3 + y^3 + z^3$ eine Kubikzahl, also gleich m^3 für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. Weil $w = y - 2$, $x = y - 1$ und $z = y + 1$ ist, muß also geprüft werden, ob es natürliche Zahlen y und m gibt, so daß

$2[2y^3 - 3y(y - 3) - 4] = m^3$ gilt. Wegen $2 \mid m^3$ folgt $2 \mid m$, daher $8 \mid m^3$ und $4 \mid [2y^3 - 3y(y - 3) - 4]$.

Man zeige, daß dies nur möglich ist, falls 4 ein Teiler von y ist oder y bei der Division durch 4 den Rest 1 läßt ($y = 4k$, $y = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$). Die Anzahl der zu durchmusternden Zahlen kann somit halbiert werden! Um auch größere Zahlen (als 100) zu erfassen, sollte man überprüfen, ob $\frac{m^2}{2} = \frac{y}{m}[2y^2 - 3(y - 3)] - \frac{4}{m}$ in natürlichen Zahlen (etwa ≤ 1000) erfüllbar ist. Überlegt euch, daß

$4(y - 1)^3 < m^3 < 4(y + 1)^3$ sein muß. Daher sind zu vorgegebenen y die Zahlen m durch $\sqrt[3]{4}(y - 1) < m < \sqrt[3]{4}(y + 1)$ eingeschränkt.

Stellt Computerprogramme auf, die diese Überlegungen berücksichtigen!

Ganz ohne Probieren können wir die vorgestellten Fragen nicht klären, deshalb bietet sich hier der Computer als wertvoller Helfer an. Durch mathematische Überlegungen ließen sich einige Probleme ohne Computer lösen, bei anderen kann die Zahl der zu untersuchenden Fälle verringert werden. Es empfiehlt sich immer, den Computer erst einzusetzen, nachdem über den konkreten Sachverhalt nachgedacht wurde.

W. Schmidt

Buchtips aus dem E. Klett Schulbuchverlag

B. Bolt
Die zweite mathematische Fundgrube

100 neue Aufgaben, Bastelideen, ungewöhnliche Fragestellungen, Puzzles und andere Rätsel

Klettbuch 72272 Preis: 32,80 DM

E. Flachsel
Hundertfünfzig Matherätsel
Die nächsten hundertfünfzig Matherätsel

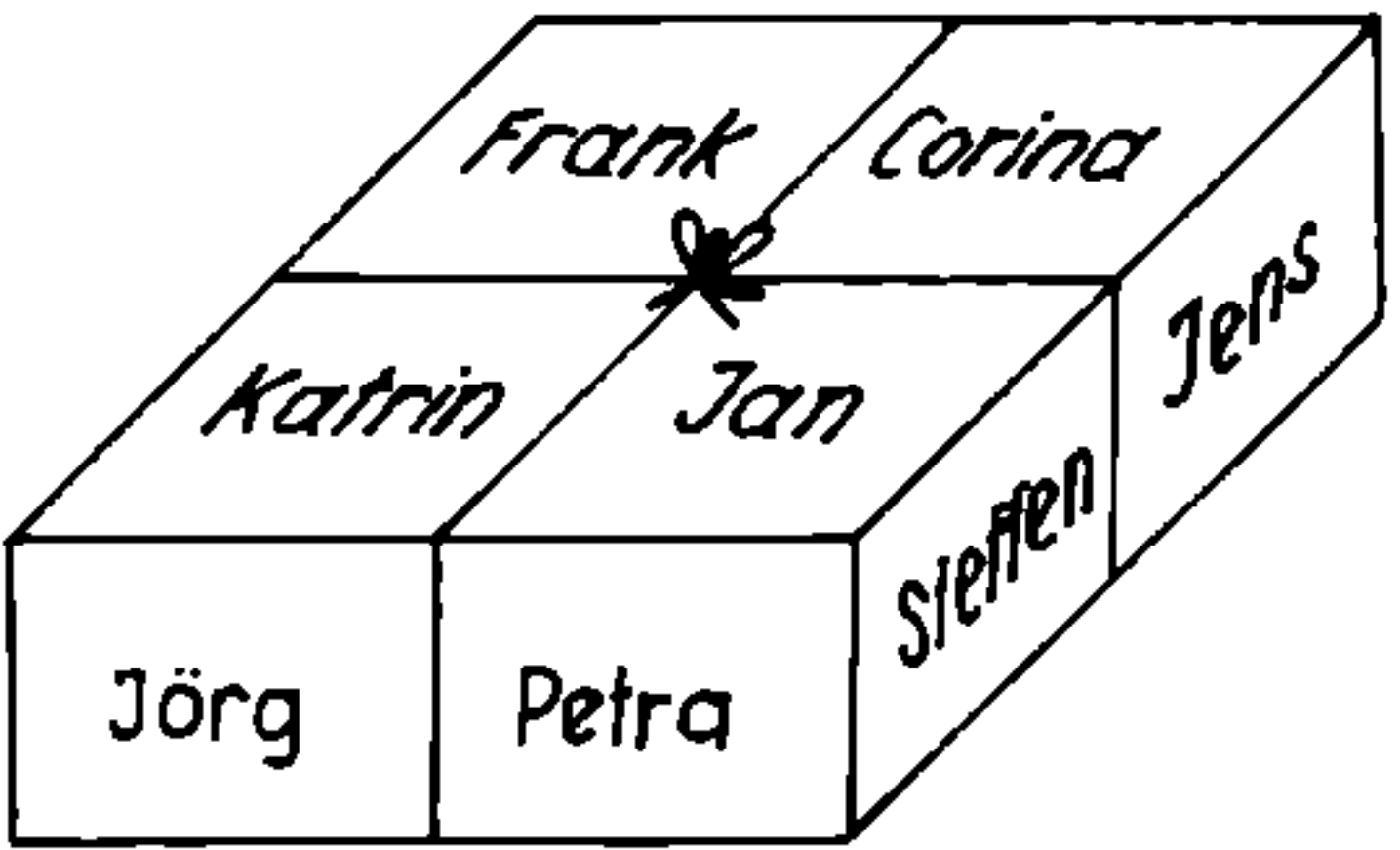
Klettbuch 72232/72234 Preis: je 32,80 DM
 Eine Sammlung von Knobel- und Denkaufgaben, gleichzeitig Lesebuch über Geschichte, Geschichtchen und Anekdoten

Wir wünschen allen Lesern ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch in ein erfolgreiches und gesundes Jahr 1991.
Natürlich verknüpfen wir diese Wünsche mit einigen passenden Kno-beleien, erdacht von Walter Träger aus Döbeln.

Alphons

Die Weihnachtspäckchen

Zu Beginn der Ferien zum Jahreswechsel wird an einer Schule jedem der 8 Teilnehmer am Kreisausscheid der Mathematik-olympiade ein Päckchen in verschlüsselter Form überreicht. Die Päckchen sind mit den Ziffern 1 bis 8 beschriftet und die Vornamen der Olympioniken in die 8 Felder des mit überreichten Bildes eines Paketes eingetragen. Der Dechiffriercode lautet: Bei richtigem Eintragen der Päckchennummern 1 bis 8 zu den Vornamen in die Felder gilt: In jedem der 4 im Innern des Päckchenbildes gelegenen gemeinsamen Eckpunkt von Feldern stoßen Felder aneinander, deren Zahlen stets die gleiche Summe haben. Die auf Jens' Päckchen stehende Zahl ist um 4 größer als die auf dem Päckchen für Jan. Wer darf welches Päckchen nehmen?



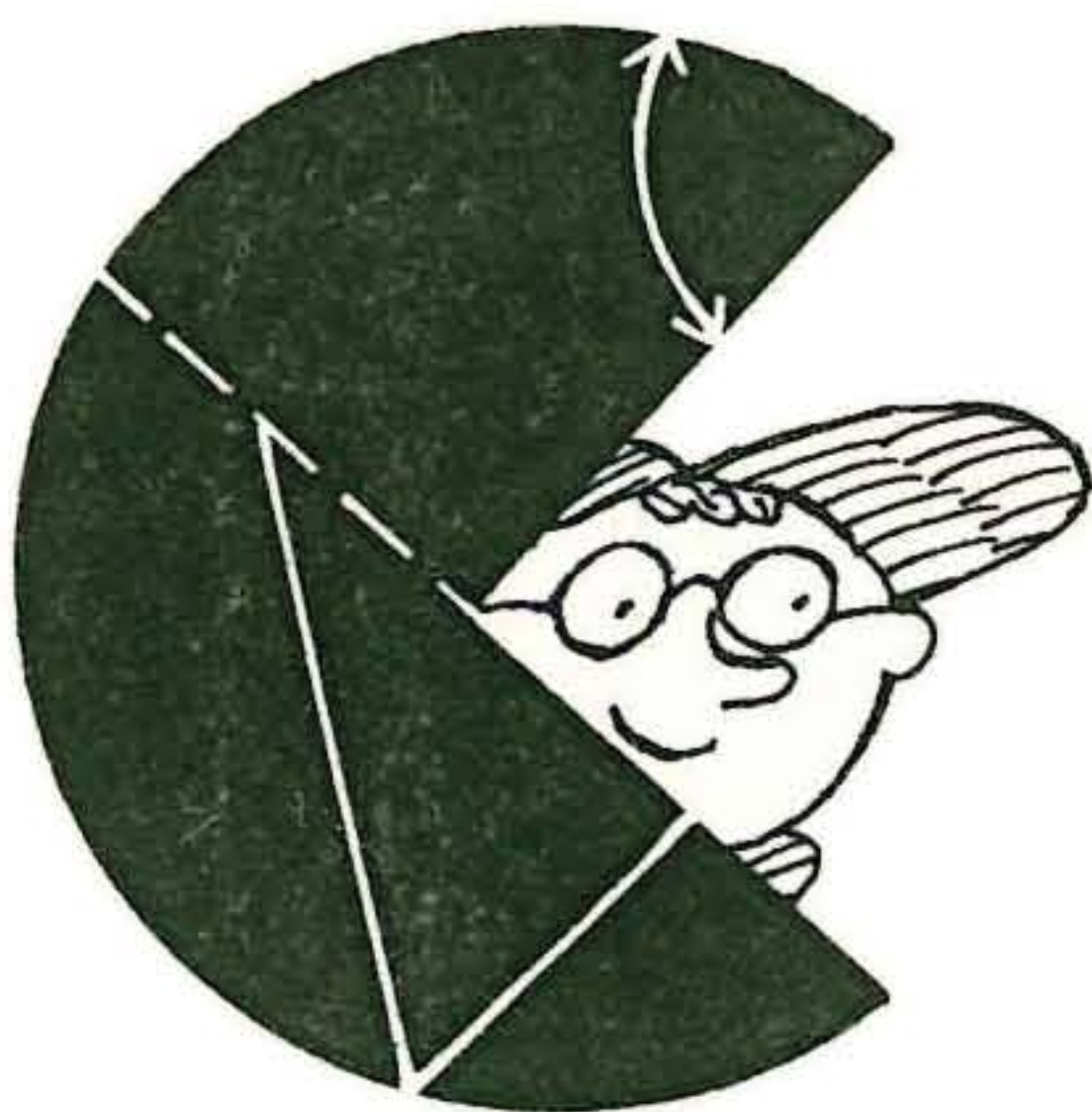
Silvesterschmerz?

An einem Silvesterabend wollen die Zwillinge Ramona und Daniel von ihren Eltern Auskünfte über ihre Geburt erhalten. Die Mutter antwortet: „Ramona wurde eine halbe Stunde vor Daniel geboren.“ Der Vater ergänzt: „Daniel erblickte am 31. Dezember 10.35 Uhr und Ramona am 1. Januar 9.05 Uhr das Licht der Welt.“ Daniel erwidert: „Wenn ich jünger als Ramona bin, wäre ich demnach fast ein ganzes Jahr jünger als Ramona und wir beide wären keine Zwillinge.“ Können die Auskünfte der Eltern trotzdem stimmen?

Wie alt?

Grits Uroma ist 3 Jahr jünger als ihr Uropa. Am Neujahrstag des Jahres 1991 wünscht Grit ihren Urgroßeltern alles Gute für das neue Jahr. Sie berichtet dabei freudestrahlend, daß die neue Jahreszahl in besonderer Beziehung zu ihren Lebensaltern steht: Addiert man die Zahl der Lebensjahre meiner Uroma zu der meines Uopas und multipliziert diese Summe mit der Zahl meiner Lebensjahre, so erhält man gerade die neue Jahreszahl. Wie alt sind Grit, Uroma und Uropa?

In freien Stunden · alpha-magisch

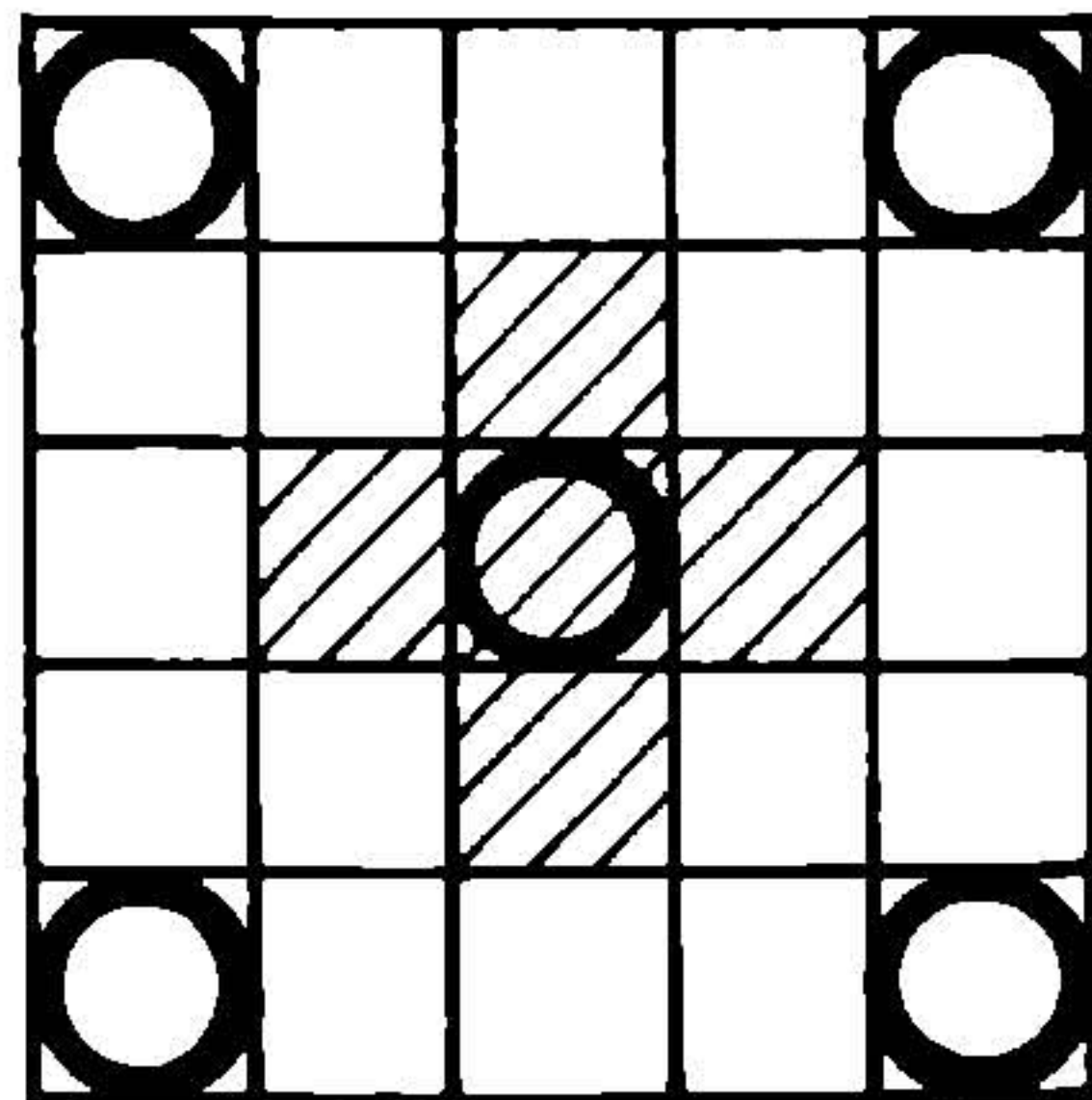


Magische Quadrate

Weil Zauberspiele, Knobeleyen nicht nur ein Kinderherz erfreuen, scheint es verständlich und erklärlich, warum Objekte, die gefährlich als magische Quadrate man bezeichnet, schon mit viel Elan vor Tausenden an Menschheitsjahren beliebt in Untersuchung waren.

Wer kennt sie nicht, die Lust der Qualen sich ein Quadratschema an Zahlen, auf daß konstanten Wert erhalten die Summen jeweils von den Spalten und Zeilen und Diagonalen, in Mußestunden aufzumalen?¹⁾

Vom Urgroßvater, der gar viele der Aufgaben und Knobelspiele gesichtet und gesammelt hat, stammt nun das folgende Quadrat, das mir durch seine Harmonie erscheint im Stil von Poesie:



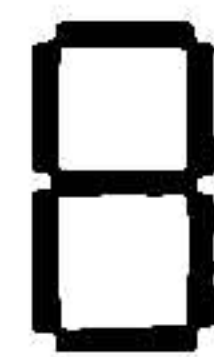
Es gilt, ins Schema rasch und fleißig, die Zahlen acht bis zweiunddreißig so einzusetzen – ist es schwer? –, daß waagerecht, daß weiter quer, diagonal – Geduld wird reißen! – und außerdem zu den fünf Kreisen und zu den Feldern, die schraffiert, ein Aufsummieren auf hundert führt! Ich wünsche Spaß bei aller Müh'! Im Spiele wird Verstand geschärft – drum bitte sieh', total entnervt, zur Lösung nicht schon allzufrüh.

¹⁾ Die Magiksummen oftmals stehen zu irgendwelchen Jubiläen und Anlässen ganz ohne Trug zwecks Unterhaltung in Bezug.

K. Näther, Leipzig

Auf den Kopf gestellt

Elektronisch gesteuerte Ziffernanzeigen (z. B. beim Taschenrechner) verwenden häufig zur Darstellung der Ziffern folgendes Grundraster:



Die Ziffern 1, 2, 5, 6, 8, 9 und 0 sind, um 180° gedreht, ebenfalls eindeutig als Ziffern lesbar. Bilde ein magisches Quadrat aus 4×4 Feldern mit 16 voneinander verschiedenen zweistelligen Zahlen so, daß sich auf den Kopf gestellt wieder ein richtiges magisches Quadrat ergibt und

- die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen der beiden Quadrate nicht gleich sind bzw.
- diese Summen gleich sind.

Dabei müssen nicht alle in Frage kommenden Ziffern verwendet werden.

A. Körner, Leipzig

Magisches, optisch attraktiv

Unser Leser Siegfried Linßner schickte uns folgendes, durch seine Symmetrie bestechendes magisches Quadrat zu. Seht es euch genau an!

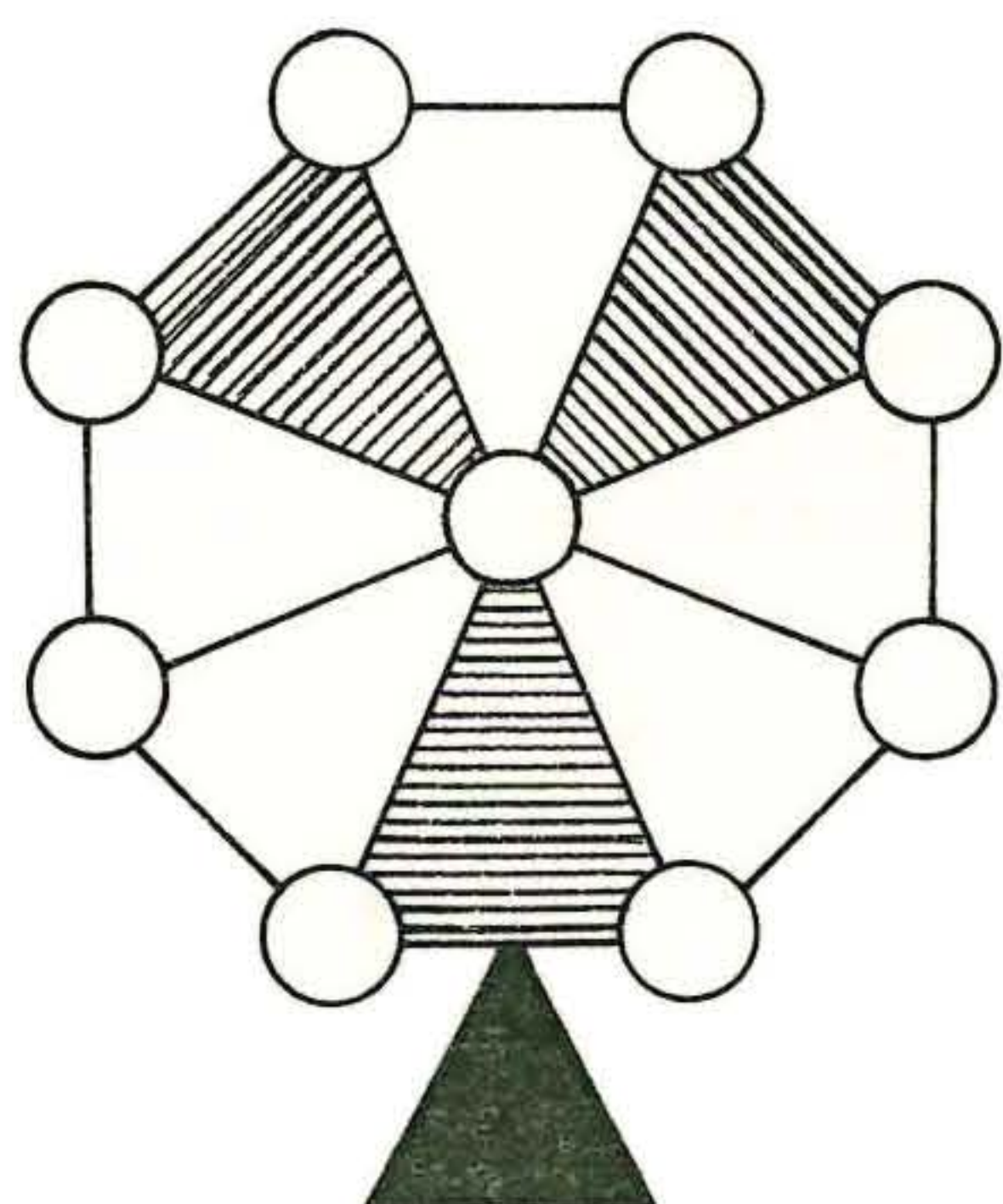
72	7	52	60	61	62	63	24	22	82
71	87	51	33	32	31	30	14	75	81
73	29	53	23	48	49	74	34	39	83
76	5	56	20	92	93	9	64	4	86
16	50	57	99	2	1	94	90	84	12
45	47	89	98	3	6	95	69	40	13
28	44	11	42	97	96	25	55	80	27
18	78	91	41	70	77	15	88	10	17
38	100	26	43	79	54	35	8	85	37
68	58	19	46	21	36	65	59	66	67

Vertauscht nun die Zahlen 7 und 22 in der 1. Zeile. Wie sind dann in der 2. und 9. Spalte die Zahlen zu setzen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Magisches Karussell

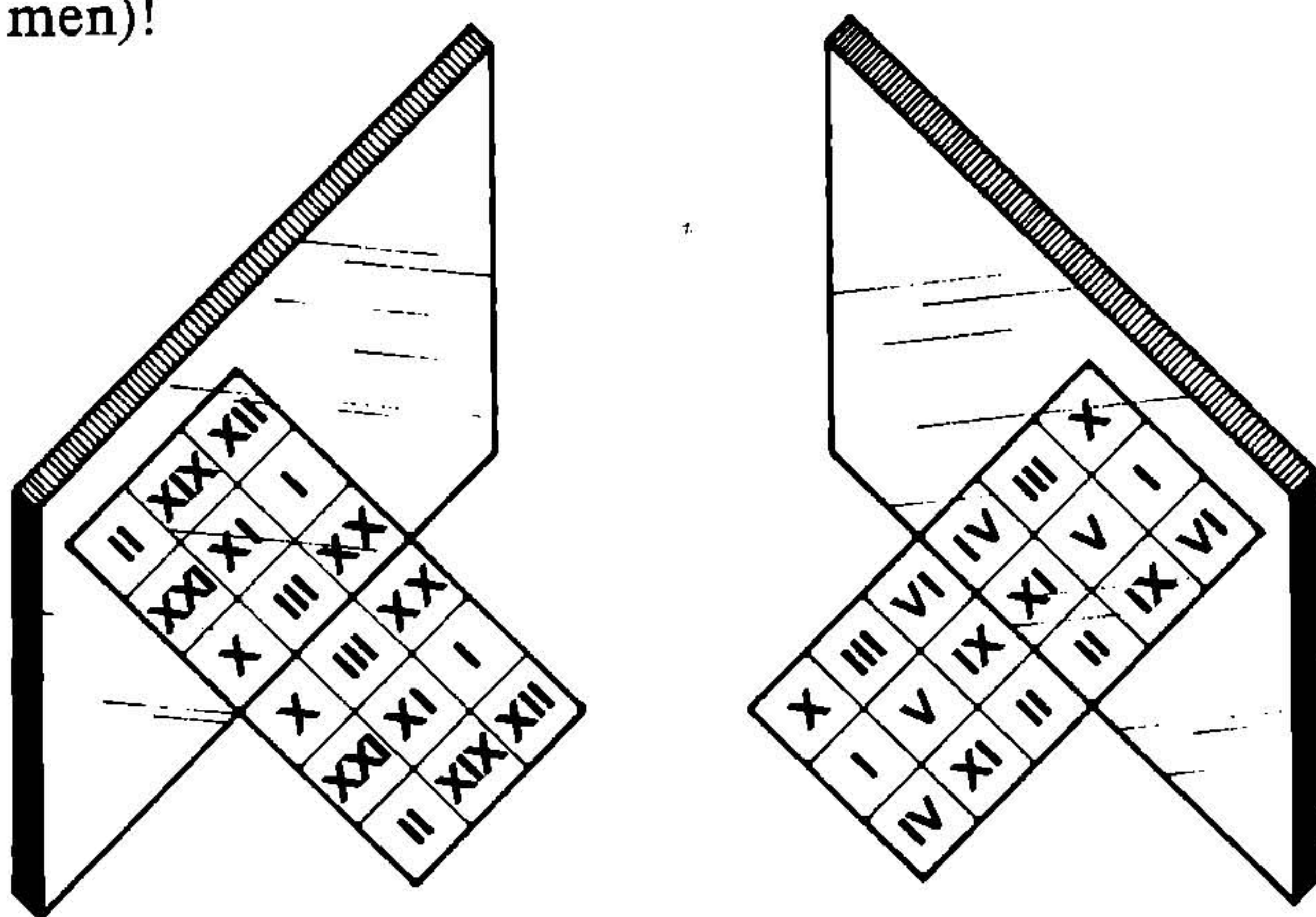
Tragt die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so in die Kreisfelder der Figur ein, daß die Zahlensumme auf jeder Diagonalen 12 und in jedem schraffierten Dreieck 10 beträgt!



Schüler Jens Mildner,
Leipzig

Mit Spiegel und Schere

a) Das Bild zeigt zwei neunfeldrige Zahlenquadrate und ihre Spiegelbilder. Untersuche jeweils Urbild und Spiegelbild auf magische Eigenschaften (Gleichheit der Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen)!



Lassen sich aus römischen Ziffern noch andere Zahlenquadrate mit ähnlichen Eigenschaften bilden?

b) Jedes der folgenden Zahlenquadrate ist entlang der Linien so in vier Teile zu zerschneiden, daß diese Teile jeweils zu zwei magischen Quadraten zusammengefügt werden können. (Denke an den Lehrsatz des Pythagoras!)

22	12	19	9	5
17	25	14	4	3
20	11	2	7	6
23	16	18	13	1
10	21	15	24	8

1.

11	17	20	4	18
19	5	10	15	9
6	22	24	7	21
16	8	3	14	1
2	25	12	23	13

2.

16	10	5	4	24
15	3	25	9	6
20	13	18	7	12
21	14	22	2	1
17	19	8	11	23

3.

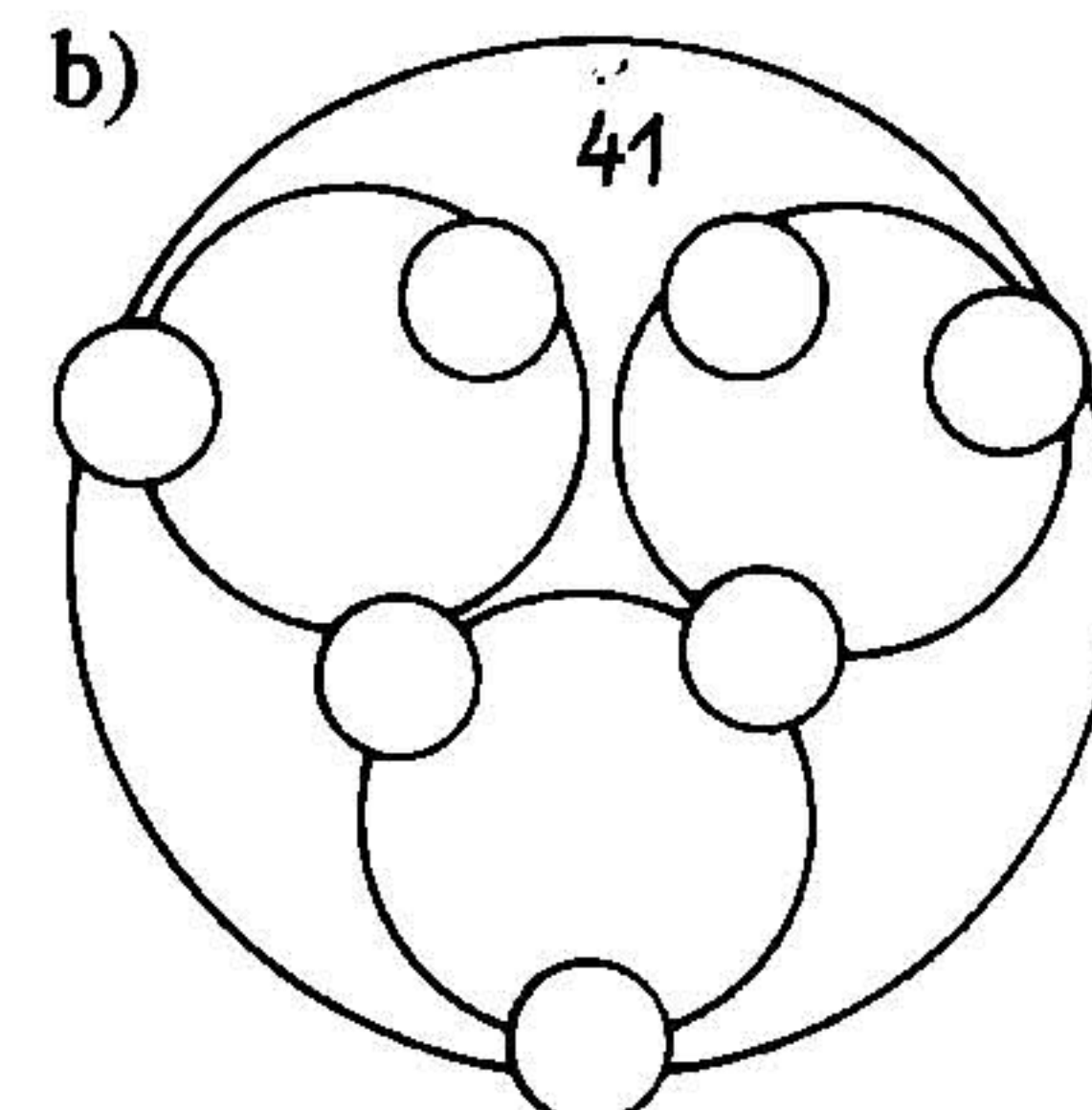
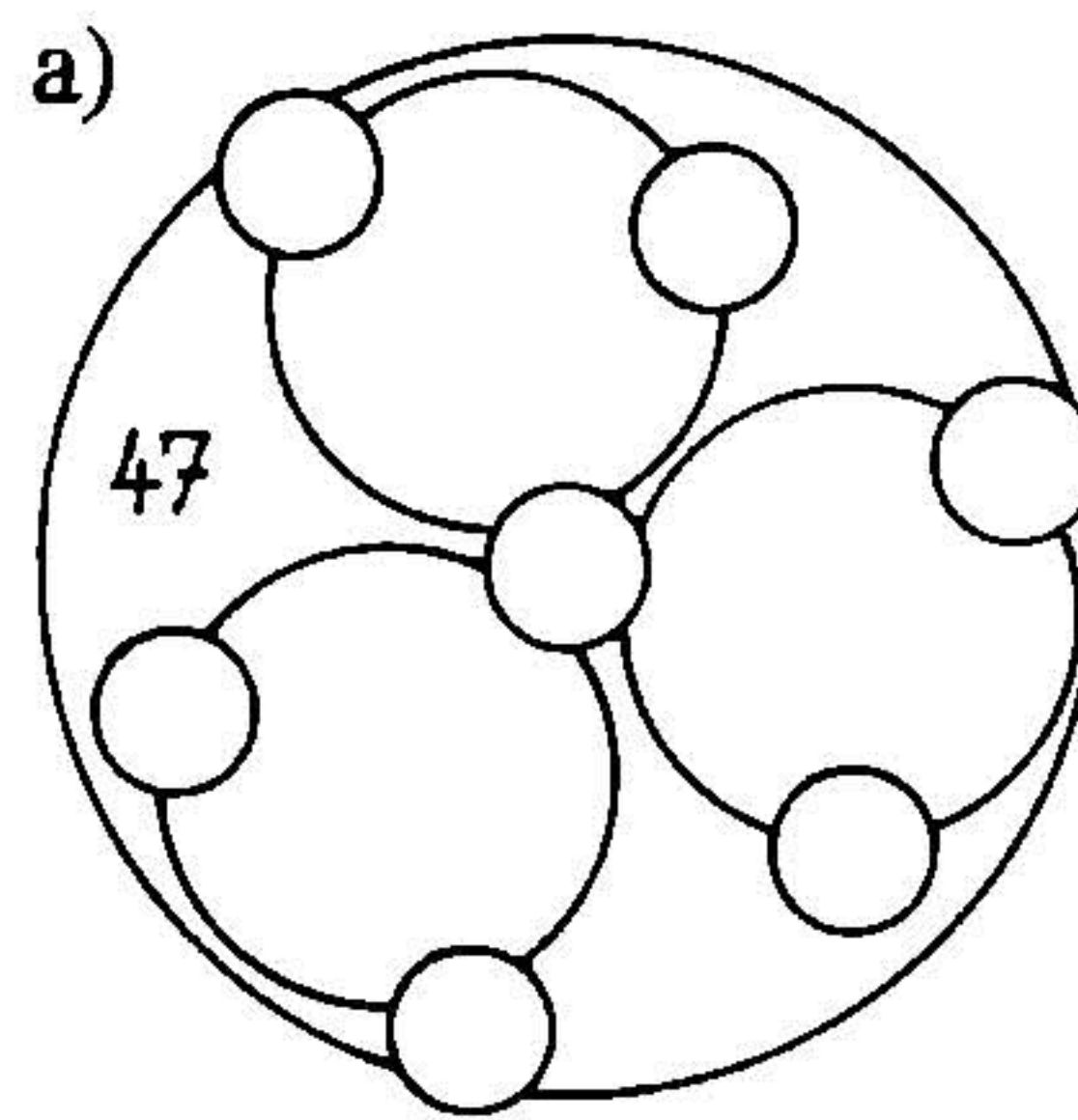
Werner Miller, Wien

Wie ist es möglich, daß die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?

Albert Einstein

Magische Primzahlen

Verteile die Primzahlen von 5 bis 23 jeweils so in die Figuren, daß sich in jedem Kreis die angegebene Summe ergibt.



Dr. Christian Werge, Leipzig

Typisch Mathe

Es wird erzählt, wie einst ein Astronom, ein Physiker und ein Mathematiker durch Schottland reisten. Aus dem Fenster des Wagens sahen sie auf einer Weide ein schwarzes Schaf.

„Interessant“, bemerkte der Astronom, „in Schottland sind die Schafe also schwarz.“

„Nein“, rief der Physiker, „in Schottland gibt es schwarze Schafe.“

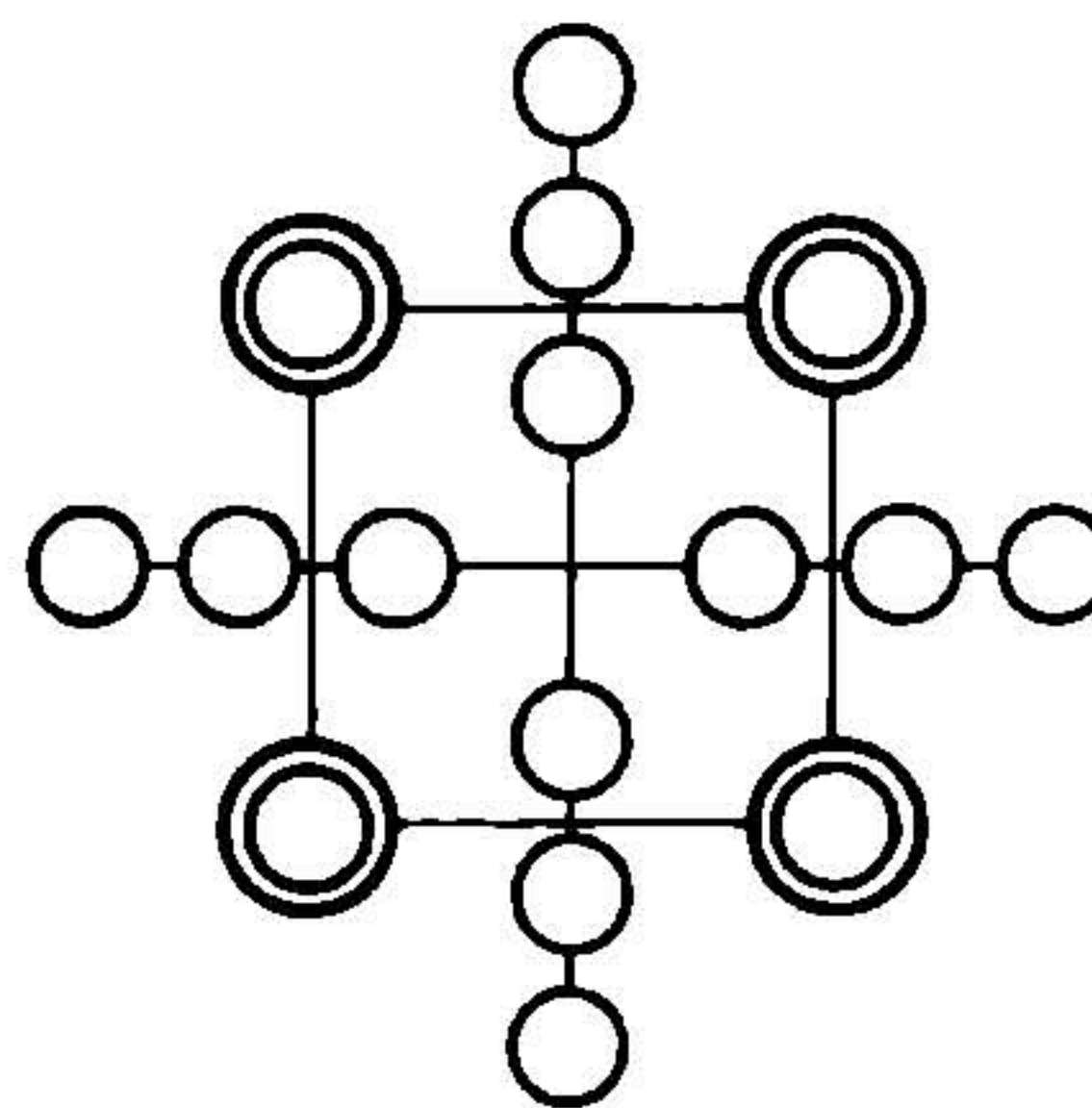
Der Mathematiker stimmte beiden nicht zu: „In Schottland gibt es wenigstens eine Weide, auf der wenigstens ein Schaf weidet, welches wenigstens auf einer Seite ein schwarzes Fell hat.“

aus: A. G. Konforowitsch „Logischen Katastrophen auf der Spur“, Fachbuchverlag Leipzig

Magische Doppelkreise

Die Zahlen 0 bis 15 sind so in die Kreisfiguren einzutragen, daß die Summe der Zahlen in den vier Doppelkreisen und die Summe der Zahlen in den Kreisen auf jeder der beiden Symmetrieachsen gleich 40 ist.

aus: J. Lehmann „Mathe mit Pfiff“, Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin



Magische Begrüßung eines neuen Jahres

1991 ist das Produkt der Primzahlen $11 \cdot 181$. Die Zahlen von 61...301 sind im Zweierabstand (61, 63, 65, ...) so in einem Magischen Quadrat 11ter Ordnung unterzubringen, daß die Summe in allen Reihen und Spalten sowie in den beiden Diagonalen jeweils 1991 beträgt und die Zahl 181 sich im Mittelfeld befindet.

Klaus-Horst Milde, Dresden

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1991



5/1 Zwei Schulklassen wollen einen Ausflug machen. Die Wegstrecke beträgt 14 km. Die erste Gruppe wandert um 8.30 Uhr los. Sie legt in jeder Stunde vier Kilometer zurück und will nach zwei Stunden eine Pause von 20 Minuten einlegen. Die zweite Gruppe fährt mit dem Fahrrad. Der Leiter dieser Gruppe möchte, daß die erste Gruppe unterwegs nicht überholt wird. Wann darf deshalb die zweite Gruppe frühestens abfahren, wenn sie dreimal so schnell wie die erste Gruppe ist und nach 7 Kilometern 10 Minuten Pause machen will?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/2 In Neubrandenburg fährt ein Bus der Linie 9 die Strecke Busbahnhof – Datzeberg hin und zurück. Für die Hinfahrt braucht der Bus 18 Minuten, für die Rückfahrt 4 Minuten weniger, da Hin- und Rückfahrt eine unterschiedliche Streckenführung haben.

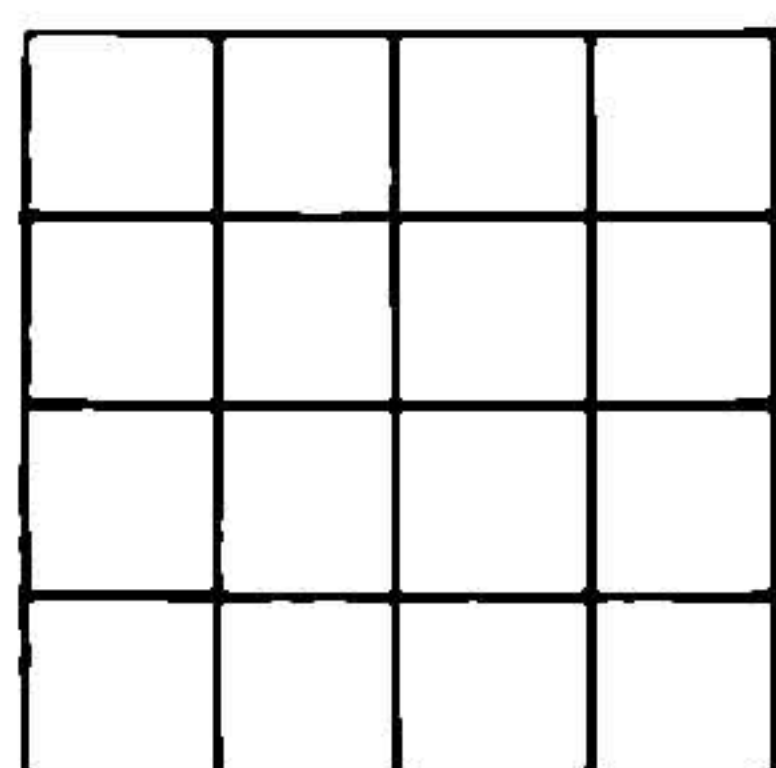
Am Wendepunkt Datzeberg hat der Bus 8 Minuten und am Busbahnhof eine Minute Aufenthalt. Welche Zeit (in Stunden und Minuten) benötigt der Bus, wenn er die Strecke Busbahnhof – Datzeberg – Busbahnhof zwölfmal fährt?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/3 In die 16 Felder des abgebildeten Quadrates sind jeweils acht Kreuze so einzutragen, daß

- in jeder Zeile und in jeder Spalte genau zwei Kreuze,
- in keiner Zeile und in keiner Spalte genau zwei Kreuze sind.

Sch.



5/4 „Ich vergesse immer den Tag und den Monat deines Geburtstages“ meint Susis Freundin. Darauf antwortet Susi lustig: „Du brauchst dir nur die Zahl 112 zu mer-

ken, denn sie ist gleich dem Produkt aus der Tages- und der Monatszahl meines Geburtstages. Die Differenz aus Monats- und Tageszahl ist aber nicht einstellig.“ Wann hat Susi Geburtstag?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/5 In dem abgebildeten Schema sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

$$\begin{array}{r} *** \cdot *** \\ *** \\ \hline 4895 \\ *** \\ \hline ***** \end{array}$$

Sch.

5/6 Für welche natürlichen Zahlen n gilt: $(n-3) \cdot (21-n) = 32$?

OStR J. Kreusch, Löbau

5/7 Hans sagt: „Meine Sperrholzplatte hat die Form eines Rechtecks und besitzt einen Flächeninhalt von 3000 cm^2 . Es läßt sich mit einem einzigen geraden Sägeschnitt eine quadratische Platte von 30 cm Seitenlänge absägen.“ Wie lang sind die Seiten der übrig bleibenden rechteckigen Platte?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/1 Es sind alle durch 15 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, an deren Zehnerstelle jeweils die Ziffer 7 steht!

Sch.

6/2 „Denke dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl, addiere 11, multipliziere danach die Summe mit 9, addiere zu diesem Produkt den Nachfolger deiner gedachten Zahl, subtrahiere nun von dieser Summe eine beliebige natürliche Zahl, die größer als 90 aber kleiner als 100 ist. Nenne mir das Ergebnis, und ich sage dir deine gedachte Zahl!“ Wie findet man die gedachte Zahl?

Gib eine Begründung dafür!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/3 Oma ist 24 Jahre älter als Utes Mutter. Die Mutter ist viermal und die Oma siebenmal so alt wie Ute. Wie alt war die

Wettbewerbsbedingungen

NEU!

1. Der Wettbewerb 1990/91 läuft über nur zwei Teilwettbewerbe in den Heften 6/90 und 1/91.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an:

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

Die Lösungen sind in einem Kuvert und möglichst der Reihenfolge nach fortlaufend, auf Vorder- und Rückseite beantwortet, einzusenden. (Die Lösungen werden zur Korrektur nicht mehr aufgabenweise sortiert!)

Beizulegen ist ein frankierter* und adressierter Rückumschlag für die Zusendung der Antwortkarte, auf der alle Ergebnisse des Teilwettbewerbes registriert werden.

Da Schulen die Antwortkarten geschlossen zurückerhalten, ist das Porto in entsprechender Höhe zu entrichten.

3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer). Schüler ab Klassenstufe 11 und Erwachsene lösen die mit 10 gekennzeichneten Aufgaben.

4. Zu empfehlen ist allen Teilnehmern die Einsendung der Lösungen vor dem Einsendeschluß, da in diesem Fall die Korrektur umgehend erfolgt und die Antwortkarte bereits mit Einsendeschluß zurückgesandt werden kann.

5. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

6. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt mindestens acht Aufgaben richtig gelöst haben, senden bis zum 10. September 91 beide Antwortkarten, einen entsprechend frankierten* und adressierten Rückumschlag und

a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde, bzw.

b) bei mit diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die bereits vorhandenen zwei Urkunden ein.

Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten und der entsprechende Rückumschlag.

7. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Anerkennungsurkunde und einen alpha-Button.

Pro Klassenstufe 5 bis 10/12 und unter den Frühstärtern werden die 10 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen je fünf Teilnehmer ausgelost.

Sie erhalten attraktive Buchpreise.

* Entsprechend der Portogebühren im März bzw. September 91.

30	Ellen Stelzner Otto-Grotewohl-Straße 28 Jena - Lobeda 6902	Dr. Theodor Neubauer-OS Klasse 7	150	Ma 7 ■ 2991
Prädikat:				10
Lösung:				

Mutter, als Ute geboren wurde? Begründe deine Behauptung!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/4 Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise, die als Grundziffer nicht die Ziffer 0 enthält. Es sind durch Umstellung der Grundziffern alle möglichen dreistelligen natürlichen Zahlen zu bilden. Beweise, daß die Summe aus all diesen dreistelligen natürlichen Zahlen stets durch 222 teilbar ist! *Sch.*

6/5 Rita führt ihrer Mutter ihre „Rechenkünste“ vor, die sie in der Arbeitsgemeinschaft Mathematik erworben hat. Sie fordert die Mutter auf: „Schreibe fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen untereinander, addiere sie und verdopple dann noch das Ergebnis.“ Nachdem Rita nur die erste der fünf von der Mutter notierten Zahlen gesehen hatte, schreibt Rita bereits die Lösung auf einen Zettel und legt diesen beiseite. Die Mutter ist erstaunt, daß Rita das Ergebnis bereits ermittelt hatte.

Begründe Ritas „Geheimnis“!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/6 „Denke dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl, addiere 10, multipliziere danach die Summe mit 10, subtrahiere von diesem Produkt eine beliebige natürliche Zahl, die größer als 90 aber kleiner als 100 ist. Nenne mir das Ergebnis, und ich sage dir deine gedachte Zahl.“ Wie findet man die gesuchte Zahl? Gib eine Begründung dafür!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/7 Der Zug 7330 fährt in Leipzig 7.44 Uhr ab und erreicht das 38 km Bahnkilometer entfernte Halle 8.16 Uhr. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt dieser Zug? *R.*

7/1 Robert spielt mit seinem Kettschlepper, der von einer Batterie angetrieben wird und immer gleichmäßig schnell fährt. Er macht stets nach sechs Sekunden eine rechtwinklige Drehung nach rechts oder nach links, also nach 6 Sekunden, 12 Sekunden, 18 Sekunden usw. eine solche Drehung. Begründe, daß der Kettschlepper nicht nach genau einer Minute wieder am Ausgangspunkt sein kann!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/2 Beweise, daß in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe und die Seitenhalbierende, die vom Scheitel des rechten Winkels ausgehen, einen Winkel einschließen, dessen Betrag mit der Differenz aus den Größen der beiden spitzen Innenwinkel des Dreiecks ABC übereinstimmt. *Sch.*

7/3 Otto, Paul und Rolf gingen kegeln. Für jeden gefallenen Kegel wurde ein Punkt vergeben. Nach drei Würfen je Spieler wurde folgendes festgestellt:

(1) Mit dem ersten Wurf schaffte Rolf drei Punkte weniger als Paul; Otto schaffte sechs Punkte weniger als Paul und Rolf zusammen. Beim ersten Wurf wurden insgesamt 20 Punkte erzielt.

(2) Beim zweiten Wurf kegelte Paul besser als beim ersten Wurf; Otto erreichte fünf Punkte weniger als Paul, Rolf einen Punkt mehr als Otto.

(3) Mit allen drei Würfeln schaffte Paul insgesamt 18 Punkte, Otto insgesamt zwei Punkte mehr als Paul. Nach Abschluß der dritten Runde waren insgesamt 48 Punkte vergeben worden.

Wie fielen die einzelnen Würfe von Otto, Paul und Rolf aus?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/4 Gegeben seien drei natürliche Zahlen a , b und c , von denen keine durch 3 teilbar ist. Es ist nachzuweisen, daß mindestens eine der Summen $a + b$, $a + c$, $b + c$ oder $a + b + c$ durch 3 teilbar ist. *Sch.*

7/5 Elke ist (in ganzen Jahren gerechnet) halb so alt wie ihre Mutter, die drei Jahre jünger als Elkes Vater, der aber dreimal so alt wie Elkes Schwester Beate ist. Wie alt ist jedes dieser vier Familienmitglieder, wenn sie zusammen 123 Jahre alt sind?

Schülerin Jana Träger, Werchau

7/6 Das Wellrad besteht aus 2 fest miteinander verbundenen Rollen mit unterschiedlichen Radien auf gemeinsamer Achse. Die größere Rolle kann auch durch eine Kurbel ersetzt werden. Das Wellrad ist eine kraftumformende Einrichtung wie z. B. der Hebel. Für die Berechnung der Kräfte am Umfang der Rollen kann man das Hebelgesetz anwenden, wenn man anstelle der Länge der Hebelarme die Radien der Rollen setzt. Das Wellrad ist also ein Kraftwandler: an der kleineren Rolle wirkt die größere Kraft. (Wellräder werden u. a. zur Kraftübersetzung beim Fahrrad verwendet.)

Bei einem Fahrrad beträgt die Länge der Trekkurbel 10 cm, der Radius des Kettenrades 5 cm. Welche Kraft überträgt die Kette auf das kleine Kettenrad am Hinterrad, wenn auf die Trekkurbel eine Kraft von 100 N wirkt? Welche Kraft wirkt am Umfang des Hinterrades, wenn das Verhältnis der Radien Hinterrad: Kettenrad 10:1 beträgt? *R.*

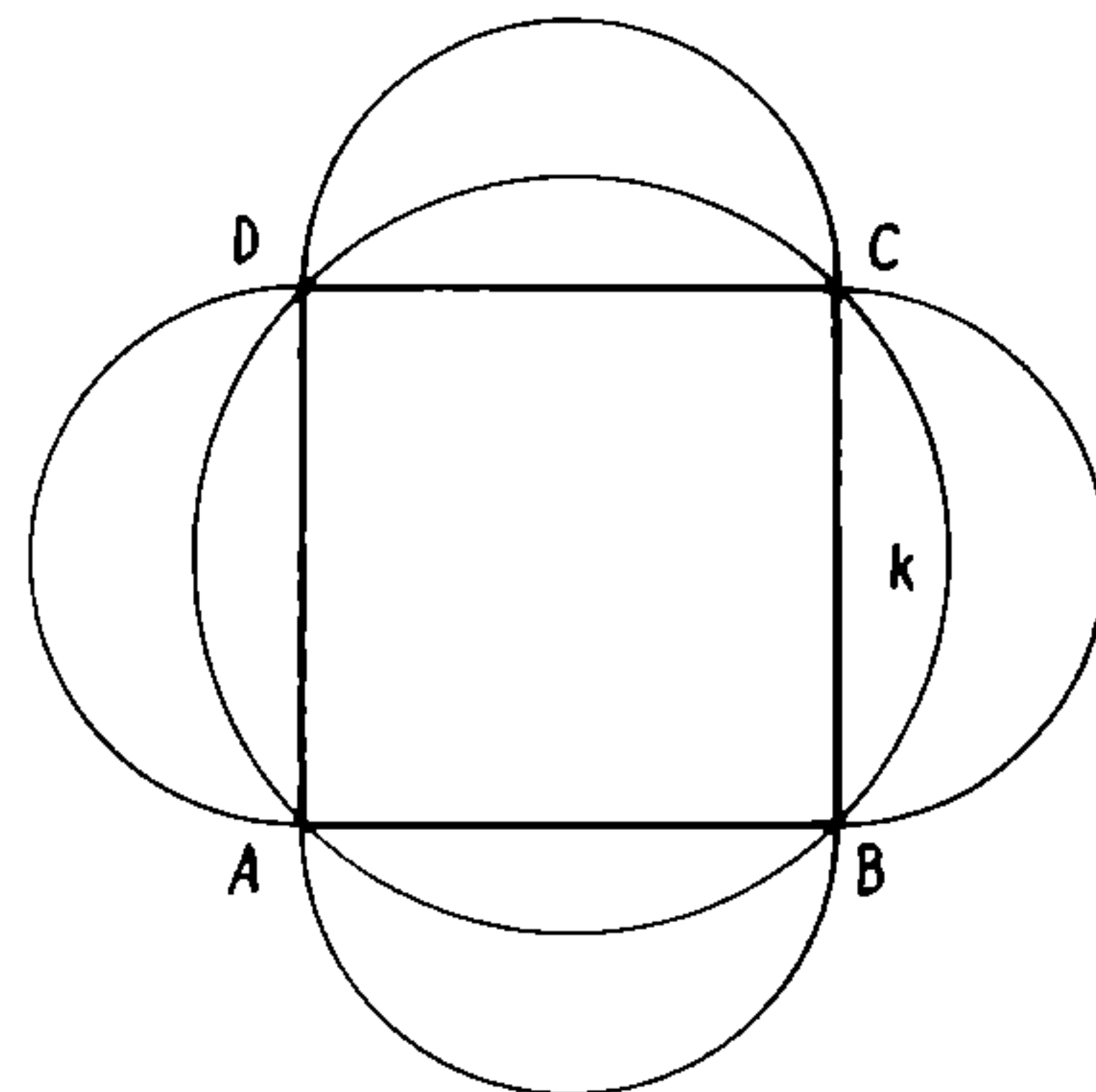
7/7 Ein zweiseitiger Hebel mit einer Masse von 0,1 kg hängt an einem Federkraftmesser. Am Hebel hängen zwei Körper mit der Gewichtskraft $F_1 = 4 \text{ N}$ und der Gewichtskraft F_2 , so daß der Hebel im Gleichgewicht ist. Die Länge der Hebelarme betragen $l_1 = 20 \text{ cm}$ und $l_2 = 40 \text{ cm}$. Was zeigt der Federkraftmesser an? *R.*

8/1 Es ist der folgende Satz zu beweisen: Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 4 teilbar, wenn die kleinste der drei Zahlen gerade ist und nicht stets durch 4 teilbar, wenn die kleinste der drei Zahlen ungerade ist.

Schüler Roland Holke, Leipzig

8/2 Das Bild stellt ein Quadrat $ABCD$ mit seinem Umkreis k dar. Über jede Quadratseite als Durchmesser wurde nach außen ein Halbkreis konstruiert. Der Umkreis des Quadrates und die vier Halbkreise be-

stimmen vier Kreisbogenzweiecke. Es sei A_1 die Summe der Flächeninhalte dieser vier Kreisbogenzweiecke und A_2 der Flächeninhalt des Quadrates. Es ist zu untersuchen, welche der drei Beziehungen $A_1 < A_2$, $A_1 = A_2$, $A_1 > A_2$ gilt! Die Antwort ist zu begründen! *Sch.*



8/3 Es ist folgende Behauptung zu beweisen: Wenn sich in einem rechtwinkligen Dreieck die Größen der spitzen Innenwinkel wie 2:1 verhalten, so zerlegt die Mittelsenkrechte zur Hypotenuse das Dreieck in zwei Teile, deren Flächeninhalte sich wie 2:1 verhalten. *Bruno Hermann, Töplitz*

8/4 In den beiden Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ mit den Seitenlängen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 stimmen a_1 und a_2 überein; b_1 ist um 7 cm größer und c_1 um 2 cm kleiner als a_1 ; c_2 ist fünfmal so groß wie a_2 und b_2 beträgt 10 cm. In welchem Verhältnis stehen die Umfänge beider Dreiecke?

Schüler Roland Holke, Leipzig

8/5 Es ist die folgende Behauptung zu beweisen: Der Vorgänger des Quadrates einer jeden nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl ist durch 3 teilbar. Für durch 3 teilbare natürliche Zahlen trifft dies nicht zu. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

8/6 Ein quaderförmiger Körper aus Eichenholz (Grundfläche $A = 20 \text{ cm}^2$, Höhe $h = 25 \text{ cm}$) schwimmt im Wasser (4°C). Wie tief taucht der Körper ein? *R.*

8/7 Klaus erhitzt einen Topf mit 2 l Wasser. Er benötigt für das Erhitzen von 20°C auf 100°C 20 min. Wieviel Liter Propangas benötigt er, wenn der Wirkungsgrad mit 100 % angenommen wird?

Enrico Lüdecke, Mario Wolters, Zechlin-Dorf

9/1 In einem Rhombus $ABCD$ sei a die Länge der Seite $\overline{AB}$, e die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$ und β die Größe des Innenwinkels $\angle ABC$. Ein solcher Rhombus ist aus $a + e = 8 \text{ cm}$ und $\beta = 40^\circ$ zu konstruieren.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/2 Weisen Sie nach, daß für $a \cdot b \cdot c = 1$ die Beziehung $a + b + c + ab + ac + bc \geq 6$ gilt! *Sch.*

9/3 Zeichnen Sie durch die drei Eckpunkte eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ABC die Parallelen zu den drei gegenüberliegenden Seiten und bezeichnen Sie die entstehenden Schnittpunkte mit D_1, D_2 und D_3 !

a) Beweisen Sie, daß die so entstandenen Dreiecke paarweise zueinander kongruent sind!

b) Das entstandene Bild kann als Körpernetz einer Pyramide (eines nichtregulären Tetraeders) aufgefaßt werden.

Zeichnen Sie daraus den Grundriß dieses Körpers, indem Sie den Fußpunkt der Tetraederhöhe konstruieren!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/4 Welche Primzahlen a , b , c erfüllen die Gleichung

$$\frac{4a + bc}{(a + b)c} = \frac{17}{10}$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/5 Es sei z eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Es ist zu zeigen, daß es für die Gleichung

$$\sqrt{0, z - 0, 0z} = 0, z$$

nur eine solche Zahl z gibt!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/6 Ein Heißluftballon hat ein Volumen $V = 3500 \text{ m}^3$. Die Luft im Inneren wird bei einer Außentemperatur von $t_a = 0^\circ\text{C}$ und einem Druck von 1013 hPa auf eine Temperatur $t_i = 40^\circ\text{C}$ aufgeheizt. Wieviel Luft entweicht? Wie groß darf die Gewichtskraft der Ballonhülle, Gondel und Ladung insgesamt sein, damit der Ballon gerade steigt? Die Dichte der Luft ρ beträgt bei $p = 1013 \text{ hPa}$:

$t \text{ in } ^\circ\text{C}$	0	10	20
$\rho \text{ in } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	1,293	1,247	1,204
$t \text{ in } ^\circ\text{C}$	30	40	50
$\rho \text{ in } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	1,164	1,127	1,092

R.

9/7 Welche Leistung muß die Heizspirale einer Waschmaschine haben, die 10 l Wasser in 30 min von 15°C auf 95°C erwärmt?

Der Wirkungsgrad soll 95 % betragen. R.

10/1 Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eine Sehne, die senkrecht zu diesem Durchmesser ist. Es ist zu beweisen, daß die Winkel $\angle DAC$ und $\angle DMB$ kongruent sind.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/2 Welche Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen erfüllen die folgenden Bedingungen? (4 Aufgaben!)

- $x(x - y) = 64$ und $y(x - y) = 0$
- $x(x + y) = 10$ und $y(x + y) = 40$
- $x(x + y) = 11$
- $x(x - y) = 12$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/3 Die Maßzahl des Umfanges eines rechtwinkligen Dreiecks (gemessen in cm) sei gleich der Maßzahl seines Flächeninhaltes (gemessen in cm^2); die Maßzahlen der Seitenlängen seien natürliche Zahlen. Es ist zu untersuchen, ob es solche rechtwinklige Dreiecke gibt und welche Seitenlängen sie im Falle ihrer Existenz haben müßten.

Sch.

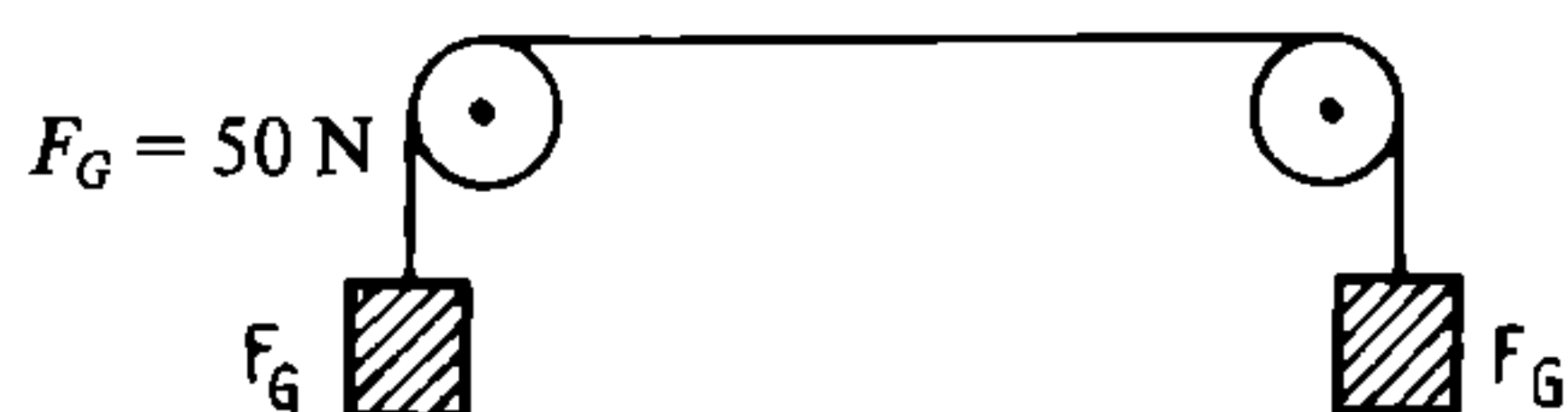
10/4 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\angle ACB = 90^\circ$ teile die Höhe h_c die Hypotenuse $\overline{AB}$ nach dem goldenen Schnitt, d.h. der kleinere Abschnitt der Hypotenuse verhält sich zum größeren wie der größere Abschnitt zur gesamten Hypotenuse. Es ist die Größe der Innenwinkel $\angle CAB$ und $\angle CBA$ zu berechnen!

Dipl.-Landwirt Hartmut Boettcher, Weimar

10/5 In ein rechtwinkliges Koordinatensystem seien der Graph der linearen Funktion $y = f(x) = 2x + 3$ und der Punkt $P(6; 15)$ mit seiner Abszisse und Ordinate (jeweils als Strecke) eingezeichnet. In das entstandene Rechteck lassen sich zwei Quadrate so einbeschreiben, daß jeweils genau einer der Eckpunkte des Quadrats auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 3$ und zwei Seiten auf den Rechteckseiten liegen. Der jeweilige Eckpunkt dieser beiden Quadrate ist zu berechnen!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/6 Gegeben ist folgende Anordnung:

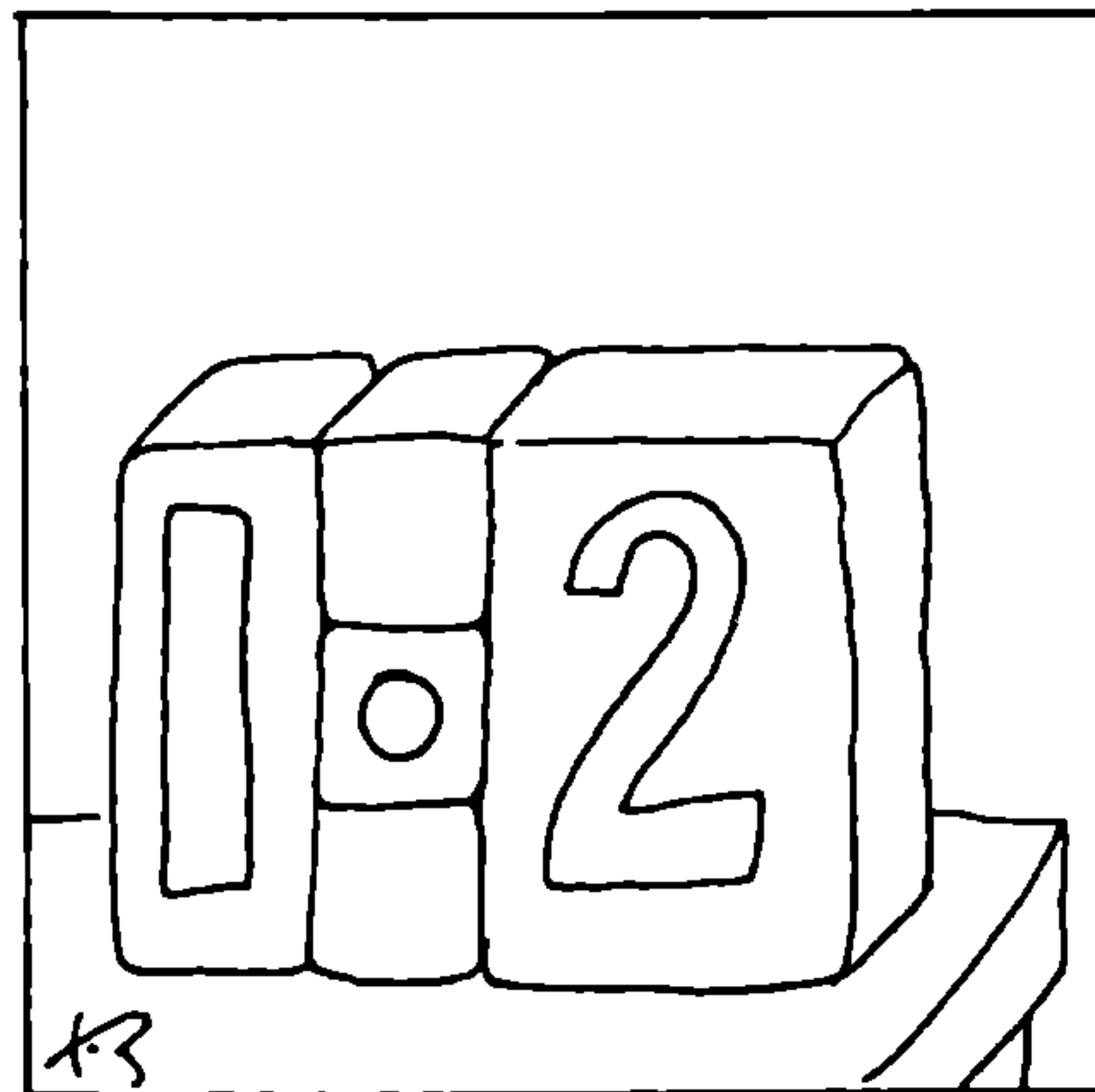
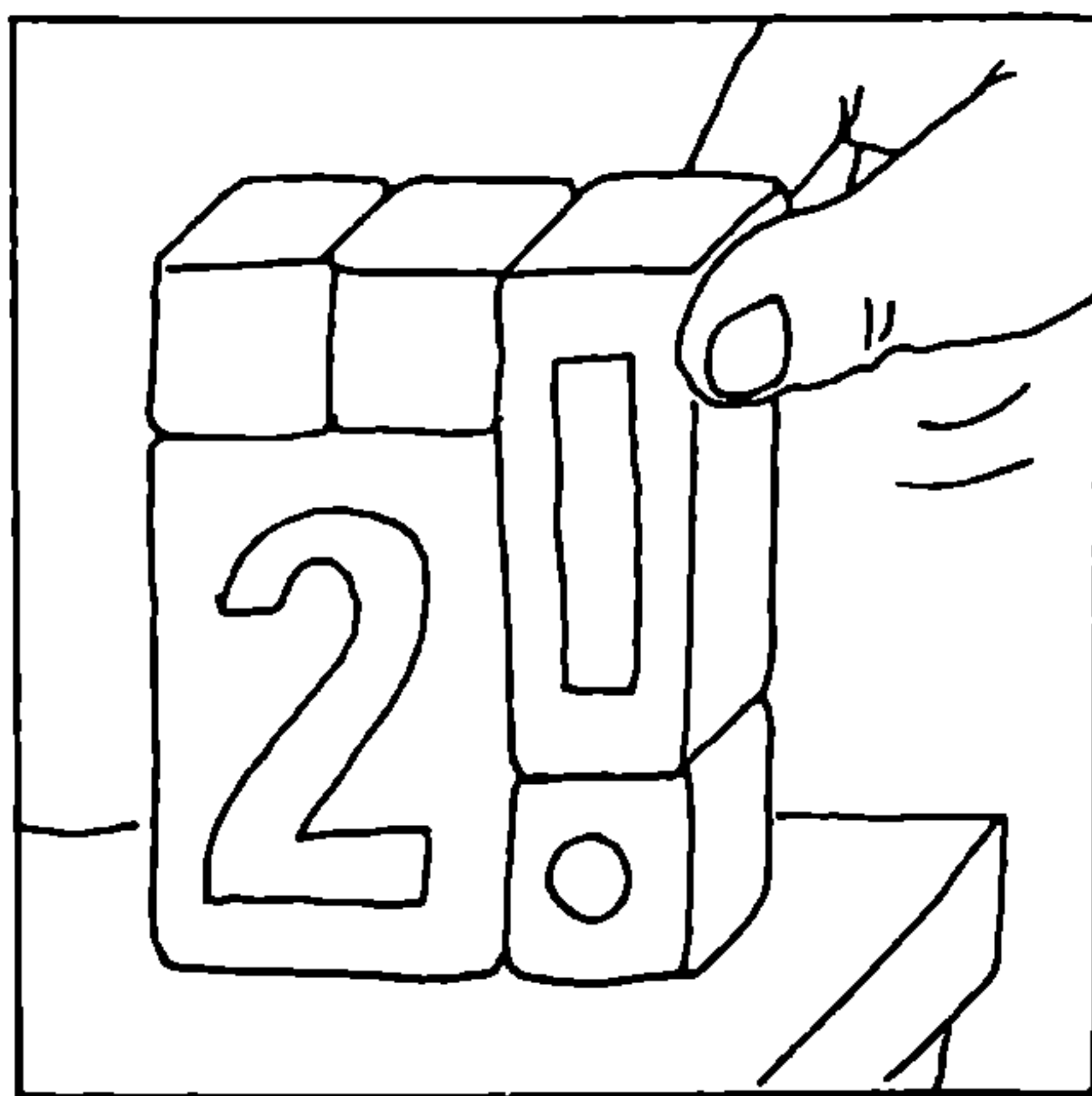


Welche Kraft wirkt im Seil?

R.

10/7 Ein 80 m hoher Turm steht in einem ebenen Gelände. Von der Spitze des Turmes wird ein Körper waagrecht mit einer Geschwindigkeit $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ abgeschossen.

Wann erreicht er den Erdboden? R.



In eigener Sache

Im Jahre 1991 wird die „alpha“ 25 Jahre jung.

Wir hatten bereits im Heft 5/90 darüber informiert, daß der Friedrich-Verlag in Velber beabsichtigt, „alpha“ mit diesem Jubiläumsjahrgang zu übernehmen.

In der Hoffnung, daß sich dieser für unsere Zeitschrift beste Weg nicht doch noch zerschlägt, wollen wir euch den Friedrich-Verlag und seine Pläne etwas näher vorstellen. Dieser in der Nähe von Hannover angesiedelte Verlag hat sich auf Zeitschriften für den Unterricht, für die Hand des Lehrers spezialisiert. Seine das gesamte Spektrum der Unterrichtsfächer erfassenden Zeitschriften sind für die Praxis bestimmt und leben von Beiträgen aus der Praxis. Es geht also um fachlich exakte, anwendungsbezogene und psychologisch-pädagogisch aufbereitete Handreichungen für den Lehrer.

Dieser schwierigen Aufgabe stellt sich der Friedrich-Verlag sicher auch deshalb mit soviel Erfolg, weil er sie mit Herz anpackt.

Und dieses zeigte er auch angesichts unserer finanziellen Sorgen um den alpha-Wettbewerb und war spontan bereit zu helfen. Und das lange bevor an ein Überwechseln der „alpha“ zu ihm überhaupt gedacht wurde. Also ein zweiter Grund, unser Titelblatt für diesen Verlag zu reservieren.

Warum nun aber, so werden viele Leser fragen, steht seine Zeitschrift „mathematik lehren“ ebenfalls darauf.

Ganz einfach – beide Zeitschriften beabsichtigen eine enge Zusammenarbeit, um sowohl Schülern als auch Lehrern zu helfen, die älteste Wissenschaft der Welt immer wieder neu zu entdecken. „Mathematik lehren“ für einen kreativen, differenzierten und anwendungsbezogenen Unterricht – „alpha“ für die sinnvolle Freizeitbeschäftigung der Schüler.

Ihr solltet also mal euren Mathelehrer fragen, ob er die „mathematik lehren“ kennt. Wenn nicht, kann er unverbindlich und kostenfrei ein Kennenlernangebot unter folgender Adresse bekommen:

Friedrich Verlag, Vertrieb
Postfach 100150
W-3016 Seelze.

Und Ihr könnt ihm ruhig noch verraten, daß er im Falle eines Abonnements ab 1/91 den Jubiläumsjahrgang der „alpha“ kostenlos mitgeliefert bekommt, sozusagen als Lehrprüfungsexemplar für seine Schüler. Und da soll Mathematik keinen Spaß machen!?

Wichtig! Lest Euch bitte genau die neuen Wettbewerbsbedingungen durch. Und vergesst keinesfalls, die Portokosten in entsprechender Höhe zu entrichten. Denn müßten wir dies tun, würde unser Etat für den Wettbewerb weit überschritten und das hieße unweigerlich das „Aus“.

31. Ausstellung „Herzberger Spiele“

Vom 24. bis 30. März 1990 fand im Kinder- und Jugendfreizeitzentrum Markkleeberg die 31. Ausstellung „Herzberger Spiele“ statt. Die von Oberstudienrat G. Schulze gezeigte Ausstellung umfaßt eine unerschöpfliche Fülle von Spielideen mit mathematischen Hintergrund. Es werden Spielregeln, Strategien bzw. Lösungen und Varianten der Spiele bis hin zu neuen, bisher noch nicht gelösten oder nicht lös- baren Teilproblemen anschaulich und übersichtlich dargestellt. Einen wichtigen Teil der Ausstellung bilden die Spiele mit dem von G. Schulze kreierten Herzberger Quader (siehe auch alpha Heft 3/86), dem Somawürfel und anderen ähnlich gestalte- ten zusammengesetzten Körpern.

Möglichkeiten und Varianten des Zusam- mensetzens der Quader werden ebenso ge- zeigt wie Beweise der Unmöglichkeit der Kombination bestimmter Einzelteile. Wie mit geringem materiellen Aufwand vielfäl- tige Problemstellungen mit stark differen- ziertem Schwierigkeitsgrad gefunden wer- den können, zeigen die Legespiele „Bunte Dreiecke“. Die Dreiecke sind auf der vor- deren Umschlagseite des Mathematikar- beitsheftes Klasse 3 (Volk und Wissen Ver- lag) aufgedruckt und können ausgeschnit- ten und sofort verwendet werden. Die daraus entwickelten Aufgaben regen Jung und Alt an. Ebenso anregend empfanden die Besucher die mathematische Aufberei- tung solcher Spiele wie z. B. „Nur kein Rechteck“, „Über Ecken und Kanten“ und das unter Knobelfreunden gut bekannte „Solohalma“.

In der Ausstellung waren Spielmaterialien in ausreichender Menge ausgelegt, so daß die Besucher unmittelbare Betätigungsmöglichkeiten fanden.

In insgesamt 22 geschlossenen Veranstaltungen stellte OStR G. Schulze bzw. B. Junghanns als Mitarbeiterin des Frei- zeitzentrums Spielideen und Strategien vor und gaben Anregungen für die weitere selbständige Beschäftigung mit mathemati- schen Spielen.

Zahlreiche Markkleeberger Schulklassen nutzten eine Stunde ihres Mathematikun- terrichts, um einmal auf ganz spezielle Weise ihr Wissen und Können anzuwen- den und zu erweitern, ebenso kamen aber auch Lehrer, Studenten und Lehrkräfte der Universität Leipzig und des Instituts für Lehrerbildung und interessierte Bürger. Die Ausstellung regte die Kreativität der Besucher an und half mit, die Popularität

der Mathematik weiter zu erhöhen.

Eingebunden war sie in die Arbeit des Kin- der- und Jugendfreizeitzentrums Mark- kleeberg, das mit seinem vielfältigen Ange- bot auf dem Gebiet der Freizeitpädagogik vielen Kindern und Jugendlichen Möglich- keiten zu einer sinnvollen und freudbeton- ten Freizeitgestaltung und das Lehrern durch die Möglichkeit zur Information Hil- festellung bei der Unterrichts- und Hortar- beit geben will.

*B. Junghanns, pädag. Mitarbeiterin
am Kinder- und Jugendfreizeitzentrum
Markkleeberg*

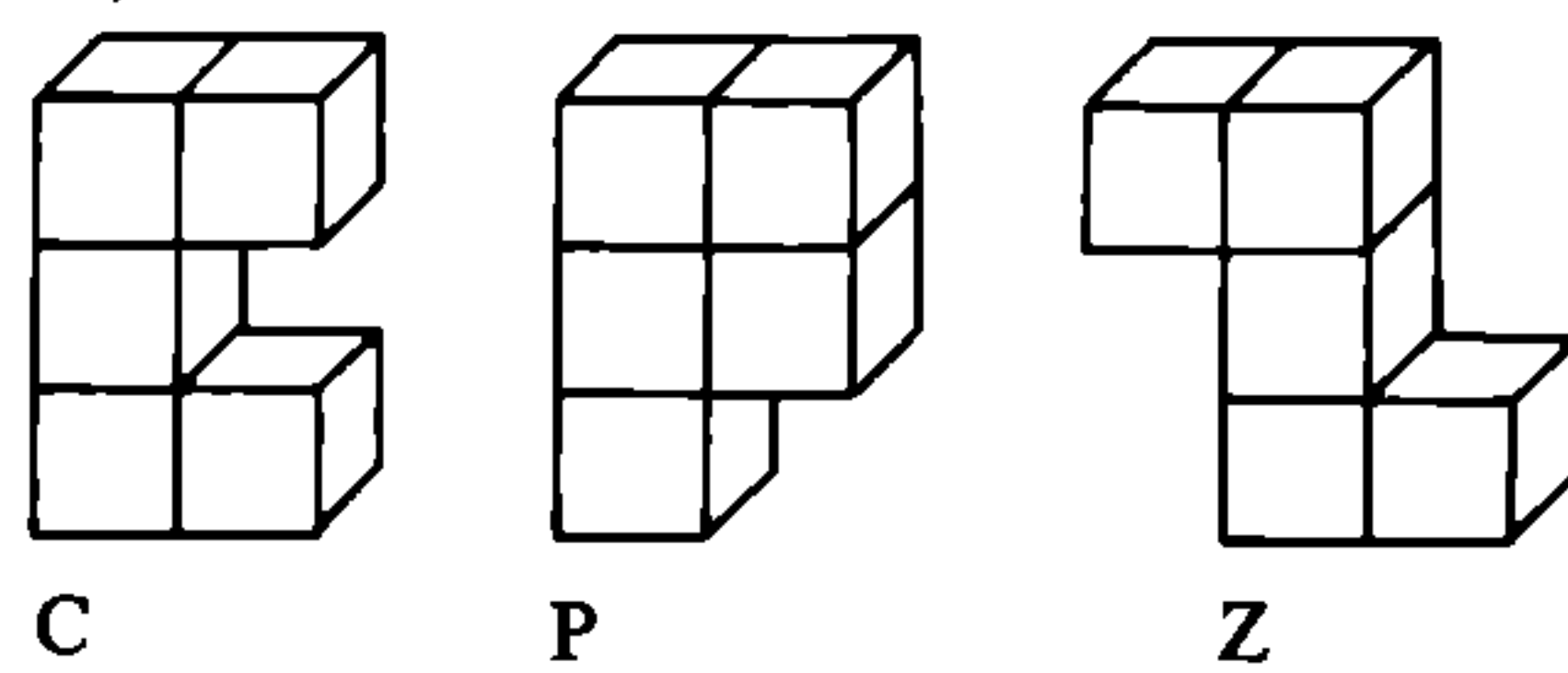
*Einige Kostproben für unsere Leser aus dieser
Ausstellung.*

Wir setzen Fünflinge und Vierlinge aus Würfeln zusammen

Aus gleich großen Würfeln aus Holz oder Plaste wollen wir einige Fünflinge und Vierlinge zusammensetzen. Die Flächen aller Würfel sind dabei zueinander parallel oder senkrecht und aneinanderstoßende Würfel haben eine gemeinsame Quadrat- fläche.

Von den möglichen 29 Würfel-Fünflingen wählen wir die drei aus, die uns Bild 1 zeigt. Da diese Spielsteine die Form von Großbuchstaben haben, wollen wir sie auch mit diesen Buchstaben C, P und Z bezeichnen.

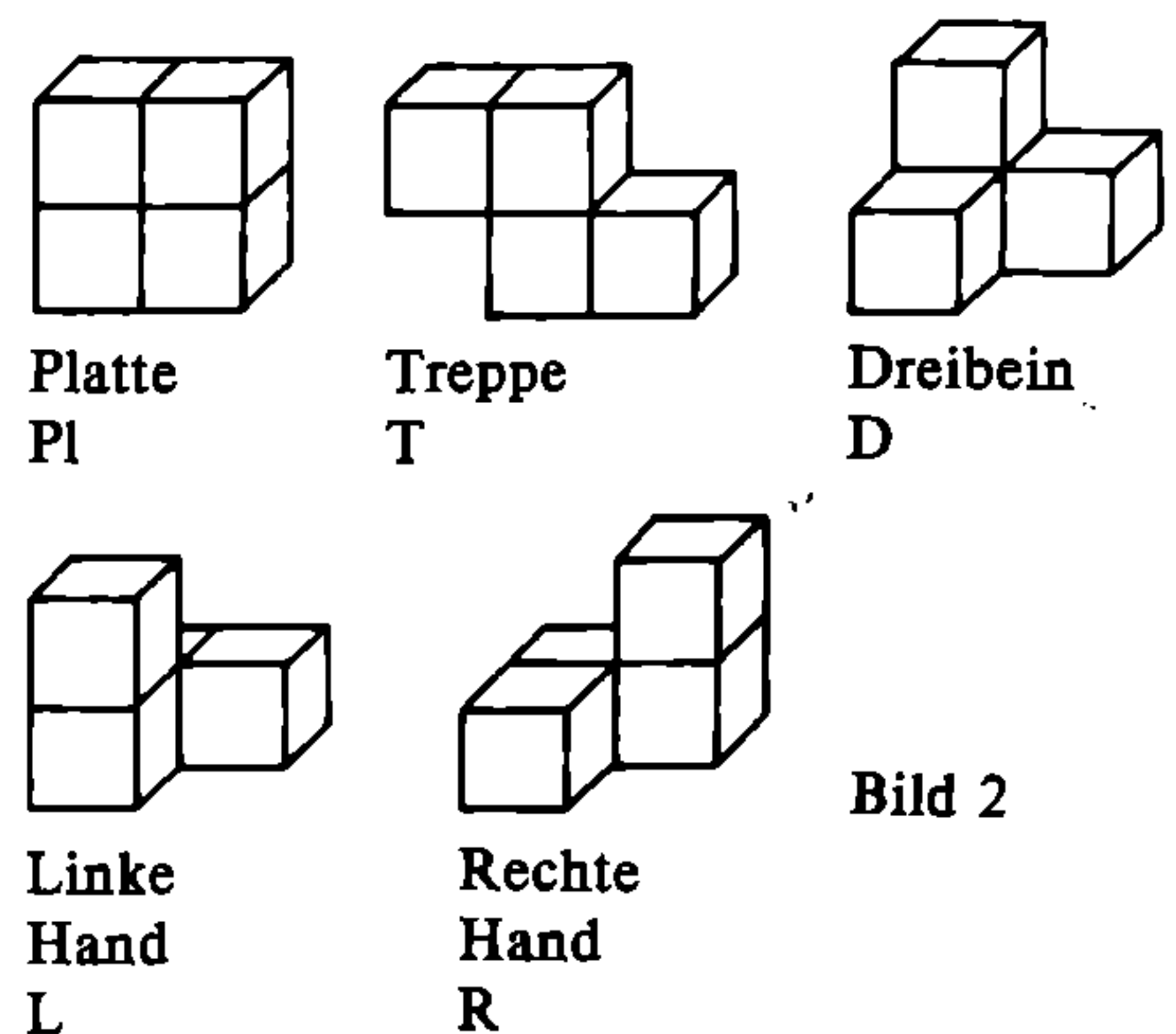
Bild 1



Aufgabe 1: Verwendet man beim Zusam- menkleben dieser drei Spielsteine übliche Spielwürfel, bei denen die Augensumme zweier gegenüberliegender Seiten 7 ist, wie groß ist dann jeweils die

- kleinste,
- größte Augensumme auf der gesamten Oberfläche der drei Fünflinge?

Von den möglichen acht Würfel-Vierlin- gen nehmen wir die fünf, die in Bild 2 dar- gestellt sind. Wir geben Ihnen Namen, die an der Anschauung orientiert sind und ver- wenden als Abkürzung die Anfangsbuch- staben, bei der Platte Pl zur Unterschei- dung vom Fünfling P.



Aufgabe 2: Ermittle entsprechend der Auf- gabe 1 die jeweils

- kleinste,
- größte Augensumme der fünf Vierlinge!

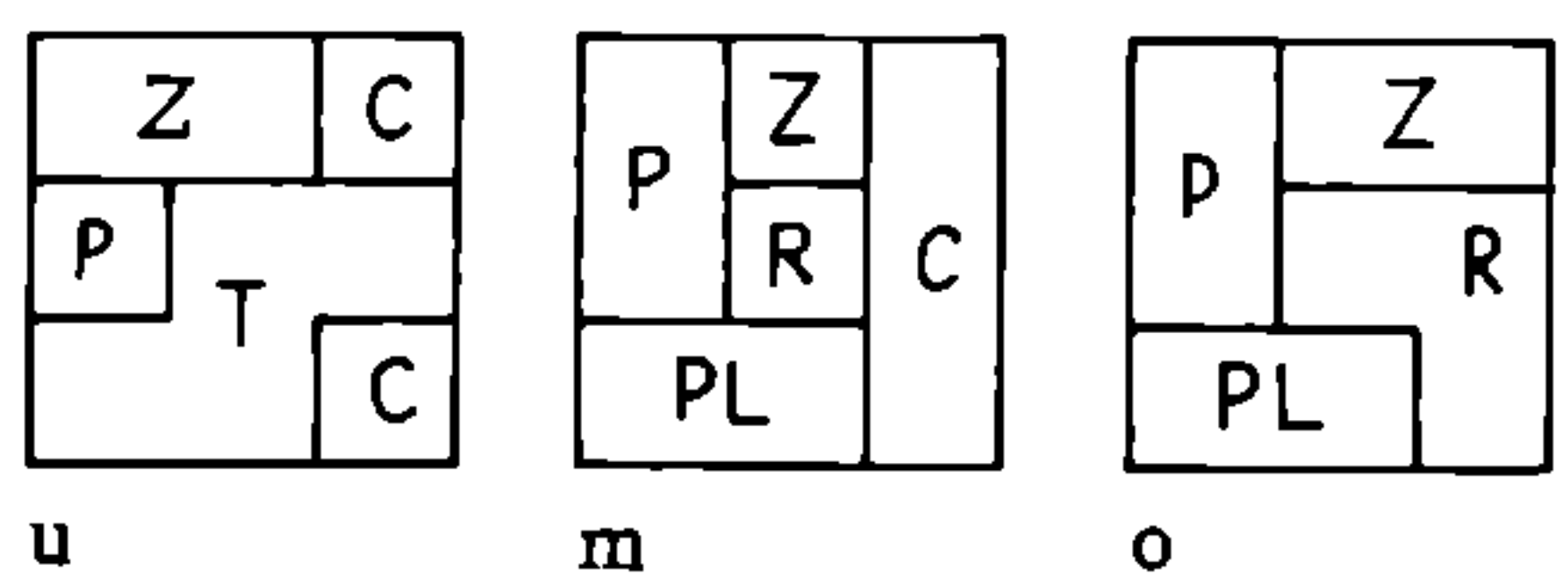
Wir setzen aus den Fünflingen und Vierlingen Würfel zusammen

Aus den drei Fünflingen und jeweils drei Vierlingen kann man einen (3, 3, 3)-Würfel zusammensetzen.

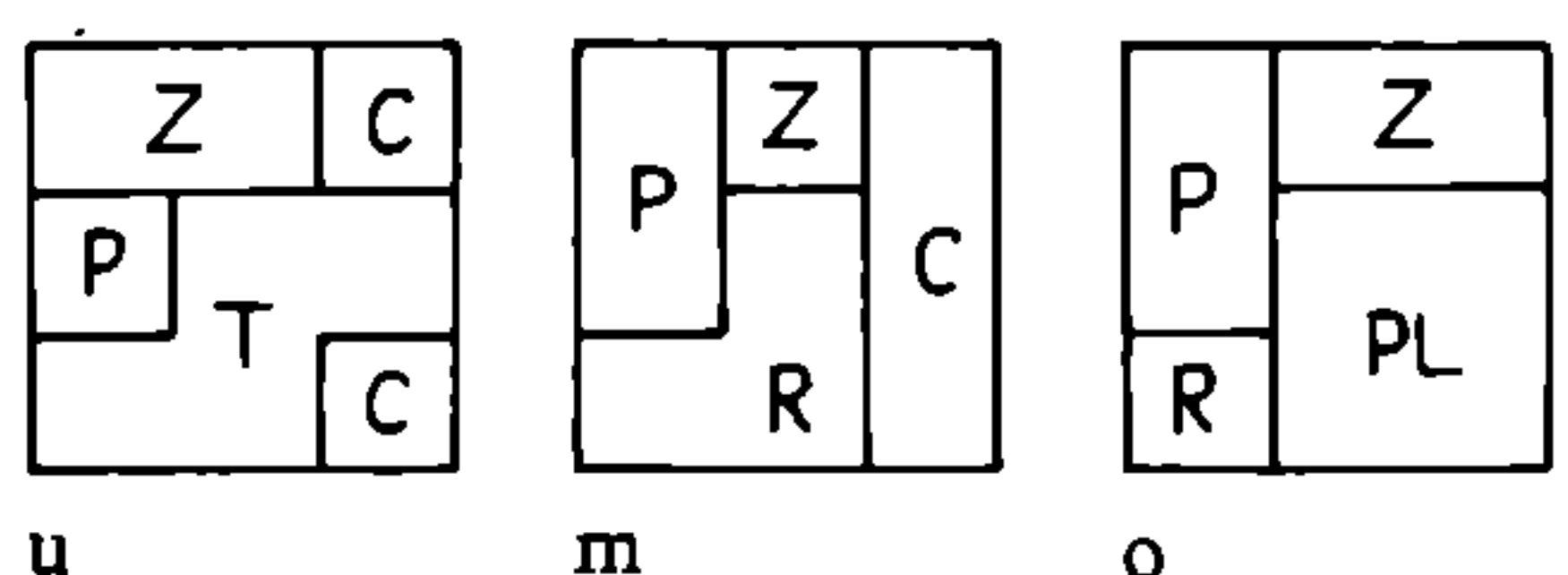
Aufgabe 3: Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus den drei Fünflingen und verschiedenen Vierlingen einen solchen Würfel zusam- menzusetzen?

Wählen wir z. B. die Vierlinge Pl, T und R, so gibt es zwei Lösungen, die im Bild 3 dargestellt sind.

Bild 3



1. Lösung



2. Lösung

- u – untere Schicht
m – mittlere Schicht
o – obere Schicht

Aufgabe 4: Ermittle für jeden anderen Fall eine Lösung und zeichne sie entsprechend Bild 3 jeweils in drei Schichten!

Aufgabe 5: Für den Fall Pl, T und D wurde bisher noch keine Lösung gefunden. Versu- che eine Lösung zu ermitteln oder führe einen Unmöglichkeitbeweis für eine Lö- sung!

OStR G. Schulze, Herzberg

Mathematische Traditionen in Leipzig

Die Stadt Leipzig – deren Name sich vom slawischen Wort lipa für Linde herleitet – erlebte Ende des 14./Anfang des 15. Jahrhunderts einen raschen Aufschwung. Sie dürfte zur Mitte des Jahrhunderts bereits 6000 bis 7000 Einwohner besessen haben und sie war Ende des Jahrhunderts Hauptzentrum der Schwarzen Kunst, des Buchdruckes.

Seit 1409 besaß Leipzig eine Universität, als Folge dramatischer Vorgänge in Prag. An der dortigen, seit 1348 bestehenden Universität hatten sich die Glaubensgegensätze zwischen Katholiken und der hussitischen Partei und der Streit um die Rechte der böhmischen bzw. deutschen Nation zugespitzt. Anfang 1409 kam es zum Bruch. Mitte Mai begann der Auszug der deutschen Nation. Es mögen etwa 2000 Studenten und 46 Lehrer gewesen sein; ein großer Teil wandte sich nach Leipzig. Der damalige Markgraf von Meißen, Friedrich der Streitbare, unterstützte die Gründung einer mit Prag konkurrierenden Universität als Teil seines Kampfes gegen den böhmischen König Wenzel IV. Mit päpstlicher Genehmigung wurde die Universität am 2. Dezember 1409 im Augustinerkloster St. Thomas feierlich eröffnet.

Die Leipziger Universität trug anfangs reichlich konservative und altmodische Züge, trotz päpstlicher Empfehlungen, eine moderne Universitätsstruktur anzustreben. Insbesondere hielt man in Leipzig am Prinzip der sog. walzenden Lektionen fest, wonach jeder Lehrer im Wechsel über sämtliche Fächer vorzutragen hatte. Im Gegensatz zu den Universitäten von Wien, Krakow, Padua und Paris etwa kam es in Leipzig folgerichtig nicht zur Herausbildung von Spezialisten und herausragenden Fachgelehrten, auch nicht im Felde von Mathematik und Astronomie.

Lediglich zwei Namen bedeutender Mathematiker sind im 15. Jahrhundert mit der Leipziger Universität in Verbindung zu bringen. Der aus Königsberg in Franken stammende Johannes Müller (1436 bis 1476), der sich der Sitte der Zeit folgend einen lateinischen Namen zulegte und Regiomontanus (d. i. Königsberger) nannte, wurde bereits 1447 an der Leipziger Universität immatrikuliert. Als Zwölfjähriger(!) berechnete er einen Kalender für das Jahr 1484, genauer gesagt, ein Jahrbuch der Planetenörter sowie der Voll- und Neumonde für Leipzig. Doch schon 1450 verließ Regiomontanus Leipzig und wandte sich

nach Wien, wo mit Georg Peurbach ein berühmter Lehrer der Astronomie wirkte. Regiomontanus seinerseits wuchs zu einem der bedeutendsten Mathematiker des 15. Jahrhunderts heran; u. a. verfaßte er eine zusammenfassende Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie.



Johannes Regiomontanus (1436 bis 1476)
Mathematiker und Astronom in Leipzig

Für eine, wenn auch sehr kurze Zeit, schien es, als könne Leipzig zu einem Zentrum der Mathematik werden. Der vermutlich 1460 oder 1462 in Eger (dem heutigen Cheb in der ČSFR) geborene Johannes Widmann studierte seit 1480 in Leipzig und wurde 1485 Magister. Widmann hat 1486 Vorlesungen über Algebra gehalten, vermutlich die ersten Vorlesungen zu diesem Thema, die je stattgefunden haben. Es haben sich sogar die Widmannschen Entwürfe zu seiner Vorlesung und eine Art Studentennachschrift erhalten. Darüberhinaus hat der akademische Lehrer Widmann auch ein Lehrbuch des praktischen Rechnens verfaßt. Es trug den Titel „Behende und hübsche Rechenung auf allen Kaufmannschafft“ und wurde 1489 in Leipzig gedruckt.¹⁾ Vom Leben des Widmann nach 1489 fehlen sichere Nachrichten.

Widmanns Buch, in dem die Zeichen + und – erstmals im Druck vorkommen, hat die nachfolgende Entwicklung nachhaltig beeinflusst, insbesondere die große Zahl der im 16. Jahrhundert entstehenden Rechenbücher. Übrigens hat die Leipziger Universität ein positives Gutachten zum großen Rechenbuch „Rechenung nach der lence auff den Linihen und Feder“ des Adam Ries abgegeben, das dann mit Kaiserlichem Privileg 1550 in Leipzig gedruckt

wurde. Auch eine sog. „Brotordnung“ des Adam Ries wurde 1536 in Leipzig gedruckt. Diese Schrift sollte betrügerischen Manipulationen bei der Berechnung des Brotpreises vorbeugen und hat beispielgebend für die Bergstädte des Erzgebirges gewirkt. Und schließlich wurde Isaac Ries, ein Sohn des Adam, Rechenmeister und Visierer in Leipzig.

Die Reformation löste auch in Leipzig Unruhe und Machtkämpfe aus. Luther war schlecht auf die Stadt und ihre Theologen zu sprechen. Schließlich konnte sich neues Denken durchsetzen, auch an der Universität. Die walzenden Lektionen wurden abgeschafft und mit Georg Joachim Rhaeticus gelang es, einen namhaften Mathematiker nach Leipzig zu berufen. Er gehörte zum Wittenberger Gelehrtenkreis um Philipp Melanchthon, der sich große Verdienste um die Neuorganisation des Lehrbetriebes an reformierten Universitäten erwarb. Rhaeticus hatte sich frühzeitig um die Bekanntmachung und Veröffentlichung der heliozentrischen Astronomie des Nicolaus Copernicus bemüht und berechnete in Leipzig sehr genaue trigonometrische Tafeln. Er verstarb 1576 während einer Reise im damaligen Ungarn.

Die enge Bindung zwischen Mathematik und Astronomie war auch für Leipzig Ausgang des 16. Jahrhunderts bis Mitte des 17. Jahrhunderts typisch, doch es fehlte an herausragenden Lehrern. Und doch war es Leipzig, wo der 17jährige dänische Edelmann Tycho Brahe, zum Rechtsstudium an eine reformierte Universität entsandt, durch den Magister Johann Hommel zur Astronomie hingeführt wurde. Brahe wurde der bedeutendste Astronom vor Johannes Kepler.

Der Dreißigjährige Krieg warf Deutschland ökonomisch und in wissenschaftlicher Leistungsfähigkeit weit zurück; die Zentren der Wissenschaft lagen im 17. Jahrhundert in Westeuropa. Und so studierte der Leipziger Professorensohn Gottfried Wilhelm Leibniz zwar an der Universität seiner Vaterstadt und in Jena, zum überragenden europäischen Universalgelehrten dagegen wuchs er in Paris heran. Jedoch entstanden enge wissenschaftliche Beziehungen zwischen Leibniz und Leipzig. Der Leipziger Frühaufklärer Otto Mencke gab seit 1682, unterstützt vom Mathematiker und ehemaligen Rektor der Universität Christoph Pfautz, die „Acta Eruditorum“ (Berichte der Forscher) heraus, eine wissenschaftliche Zeitschrift, die bald internationalen Ruf erreichte. Hier fand Leibniz Publikationsmöglichkeiten für seine grundlegenden Arbeiten zur Differential- und Integralrechnung.

Während des 18. Jahrhunderts war Leipzig ein Zentrum der europäischen Aufklärung. Hier wirkte u. a. der Rechtsgelehrte Christian Thomasius und Caroline Neuber engagierte sich für ein modernes Theaterwesen. An der Leipziger Universität lehrte eine Reihe von Mathematikern, aus der Christian August Hausen und Abraham Gotthelf Kästner herausragen. Kästner trat mit einer Fülle damals vielgelesener Lehr-

bücher hervor. 1756 wurde er Professor in Göttingen und dort noch in hohem Alter einer der akademischen Lehrer von Carl Friedrich Gauß.

Am Ausgang des 18. Jahrhunderts wies Leipzig gegenüber anderen deutschen Universitäten eine Besonderheit auf. Es war Karl Friedrich Hindenburg gelungen, eine mathematische Schule aufzubauen, die sich kombinatorischen Problemen widmete. Hindenburg lehrte mehr als 20 Jahre, bis 1807, in Leipzig. Er war zugleich Hauptinitiator der Gründung und Herausgabe zweier mathematischer Fachzeitschriften in Leipzig, doch konnten sich diese, die ersten ihrer Art, noch nicht behaupten.

Die in West- und Mitteleuropa Ende des 18., Anfang des 19. Jahrhunderts stürmisch einsetzende Industrialisierung schuf für Mathematik und Naturwissenschaften eine neue, eine günstige Position. Einerseits wurden Anwendungen betont; die Mathematik fand über die Astronomie hinaus breite Verwendung in den Naturwissenschaften, in Mechanik, im Maschinenbauwesen, beim Eisenbahnbau. Andererseits konnte sich die Mathematik als reine Fachdisziplin nach Breite und Tiefe entfalten, getragen von jener allgemeinen gesellschaftlichen Anerkennung ihrer Wirksamkeit für die Praxis.

Die positiven Auswirkungen für die Mathematik zeigten sich auch an der Leipziger Universität, insbesondere nach der Universitätsreform von 1830. Wir finden im 19. Jahrhundert eine Reihe namhafter Mathematiker in Leipzig. So trat Karl Brandan Mollweide mit Arbeiten zur Trigonometrie und theoretischen Astronomie hervor, denen sich Heinrich Wilhelm Drobisch anschloß. Drobisch, selbst Sohn der Stadt, vertrat in der Lehre fast das gesamte Spektrum damaliger Mathematik, war engagiert beteiligt an der Modernisierung des Unterrichts an den Gymnasien im Königreich Sachsen und erwarb sich herausragende Verdienste um die Gründung – am 1. Juli 1846, anlässlich des 200. Geburtstages von Leibniz – der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.

Die herausragende Leipziger mathematische Persönlichkeit jener Zeit begegnet uns in August Ferdinand Möbius. Er studierte in Leipzig, u. a. bei Mollweide und einige Zeit bei Gauß in Göttingen. Von ihm empfohlen begann er 1815 seine Lehr- und Forschungstätigkeit zur Astronomie, Mechanik und Mathematik und da besonders auf dem Gebiete der Geometrie. Das 1827 erschienene Werk „Der barycentrische Calcul“ ist damals nicht in seiner vollen Bedeutung gewürdigt worden. Erst später wurde erkannt, daß dort dem Kerngedanken nach jene gruppentheoretische Klassifizierung der Geometrie vorgezeichnet war, die unter dem Namen Felix Kleins als „Erlanger Programm“ von 1872 zu einem herausragenden Ereignis in der Geschichte der Mathematik geworden ist.

Möbius hat mehr als ein halbes Jahrhundert außerordentlich gewissenhaft seine Vorlesungstätigkeit wahrgenommen. Ihm

verdankt man letzten Endes die Heranbildung ganzer Generationen von Gymnasiallehrern der Mathematik im sächsischen und thüringer Raum.

Neben Möbius waren während der Mitte des 19. Jahrhunderts u. a. noch Wilhelm Scheibner und der frühverstorbene Hermann Hankel tätig. Scheibner stand vorwiegend der mathematischen Astronomie nahe. Hankel dagegen gehört mit seinen Arbeiten über hyperkomplexe Systeme zu jenen weitschauenden Mathematikern, die sich dem Studium abstrakter algebraischer Strukturen zuwandten. Überdies war Hankel ein herausragender Kenner der Geschichte der Mathematik; auch in der Historiographie der Mathematik hat Hankel der späteren Entwicklung den Weg geebnet.

Mit dem Jahre 1868 ging eine ganze Periode der Mathematik in Leipzig zu Ende. Drobisch gab seine Professur für Mathematik auf und wandte sich voll der Philosophie zu. Möbius starb nach langen Jahrzehnten erfolgreichen Wirkens im Alter von 77 Jahren. Wohl bemühte sich Scheibner mit einigem Erfolg um die Stärkung der Mathematik an der Leipziger Universität. Carl Neumann, Adolf Mayer und K. von der Mühl vertraten höhere Analysis und mathematische Physik. Doch fand sich kein Geometer für Leipzig.



Felix Klein (1849 bis 1925)
Mathematiker in Leipzig

Mit der Berufung von Felix Klein im Jahre 1880 nach Leipzig, der schon damals einen internationalen Ruf besaß, konnte diese Lücke geschlossen werden. Mit ihm begann eine neue Entwicklungsetappe, die die Mathematik an der Leipziger Universität in eine europäische Spitzenstellung führen sollte.

H. Wußing

1) siehe auch alpha Heft 4/89

Literatur:

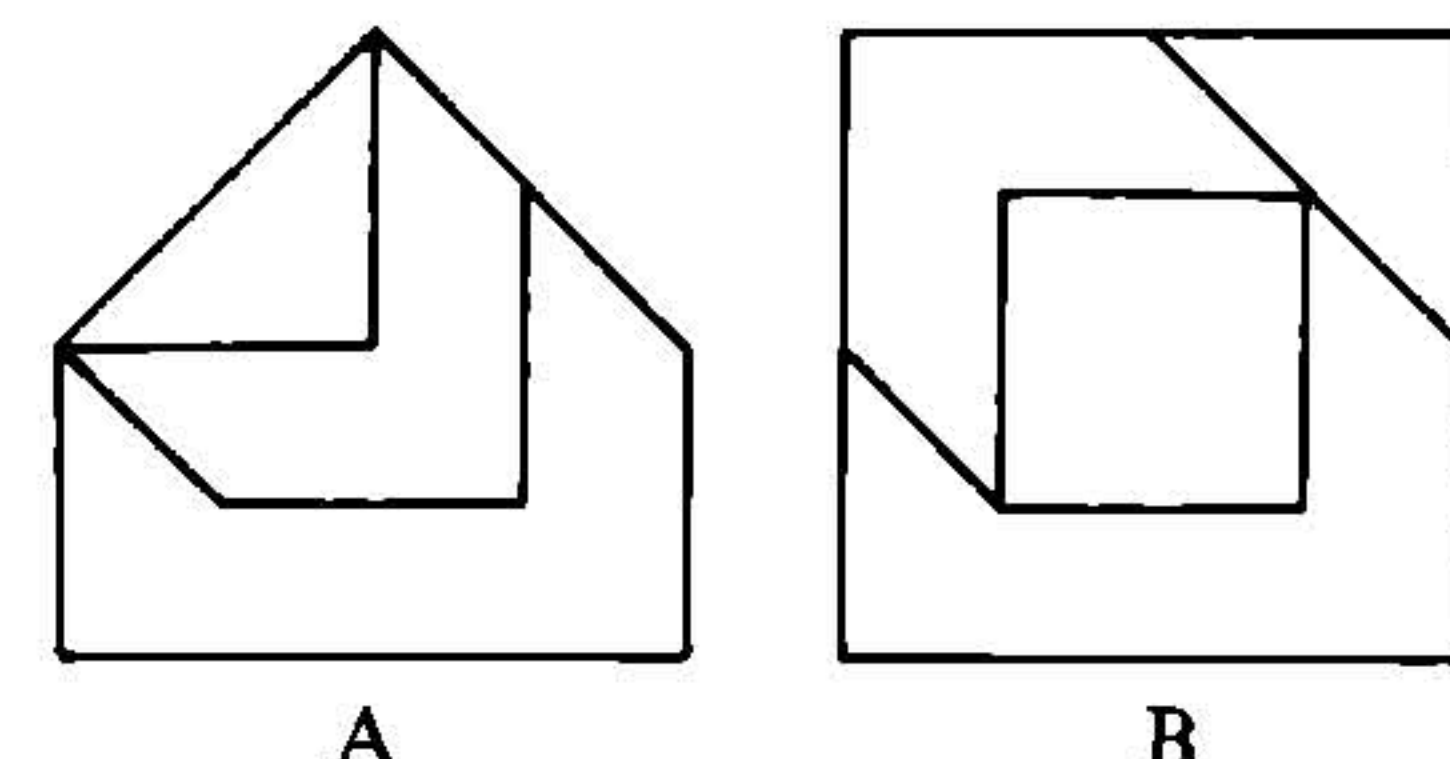
Geschichte Sachsens. Herausgegeben von Karl Czok. Weimar 1989.

100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig. Herausgegeben von H. Beckert und H. Schumann. Berlin 1981.

Biographien bedeutender Mathematiker. Herausgegeben von H. Wußing und W. Arnold. 4. Auflage. Berlin 1989.

Leserpost

1. In der alpha 1/90 erschien auf Seite 9 die Aufgabe „Geschickt geteilt“, bei der es sich offensichtlich um eine Variante des Problems zu Heft 6/88, S. 135 handelt. Ich möchte noch eine weitere Variante mit einer (meiner Meinung nach) geschickteren Teilung hinzufügen: Es genügt nämlich, die Figur A in drei Teile zu zerlegen, um daraus Figur B zusammenzusetzen.



Vielleicht interessiert euch auch die folgende kleine Aufgabe:

Wie heißt a) die kleinste, b) die größte Zahl, die sich aus den Ziffern 1, 9, 9, 0 (ohne Verwendung weiterer Zeichen) darstellen läßt?

A. Hempler, Rüdnitz

2. Die Dichte von Kork beträgt $0,2 \dots 0,35 \text{ g cm}^{-3}$.

Stellt euch vor, man hätte aus Kork mit einer Dichte von $\rho = 0,25 \text{ g cm}^{-3}$ eine Kugel mit einem Durchmesser von $d = 1 \text{ m}$ geformt. Wie viele solcher Kugeln könnte man wohl auf ein Mal wegtragen?

K.-H. Milde, Dresden

3. Ein Polyeder M mit einem Volumen V liegt in einem Kubus, dessen Kantenlänge a ist. Man muß beweisen, daß es zwei Punkte in M gibt, die sich in einer Entfernung

$$p \geq \frac{V}{\lambda a^2}$$

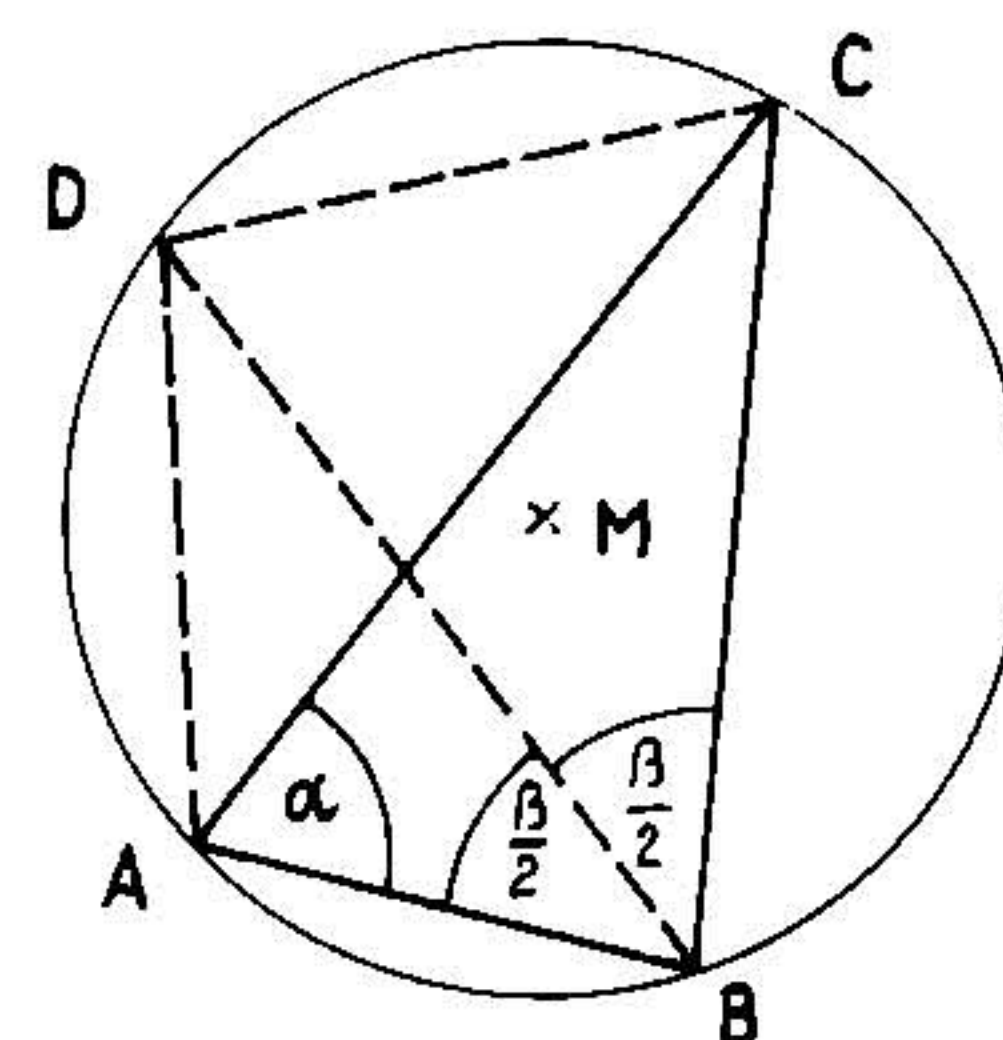
voneinander befinden, wobei

$$\lambda > \frac{2}{3} \sqrt[3]{18} \text{ ist.}$$

Lubomir Lubenov, Stara Zagora, Bulgarien

4. Wie groß sind die Innenwinkel des Sehnenvierecks $ABCD$, wenn $\alpha = 78^\circ$ und $\beta = 80^\circ$ ist?

J. Kreusch, Löbau



5. Ermittle alle positiven Wurzeln x und z welche der Gleichung

$$x^2 + 7056 = z^2$$

genügen!

A. Körner, Leipzig

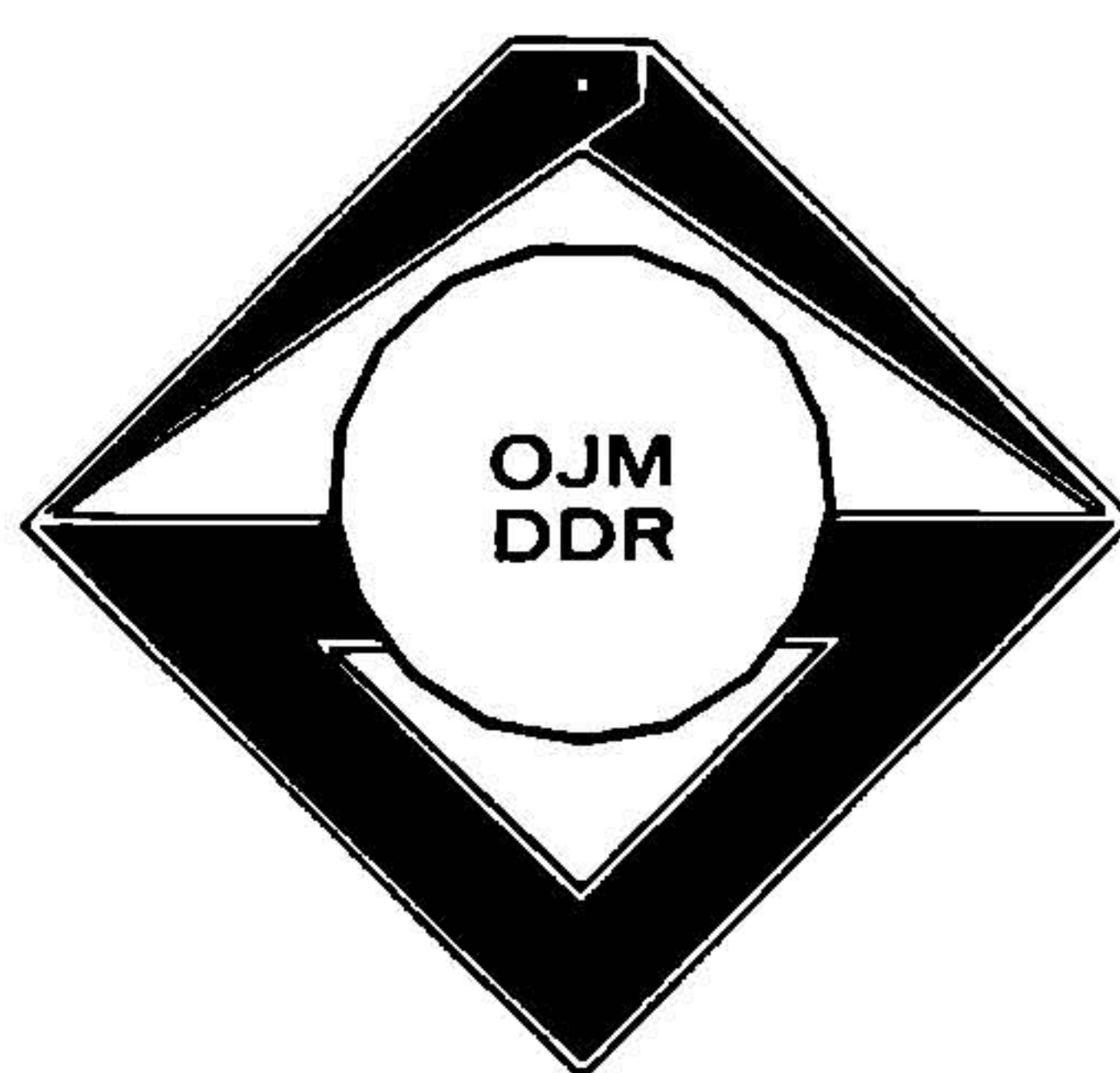
Leichter wird, wer Kenntnis hat, zur Erkenntnis reifen; wer noch nichts gelernt zuvor, der wird auch nichts begreifen.

Pindar

(522 bis um 446 v. u. Z., griech. Dichter)

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der DDR-Olympiade



Die Aufgaben wurden im Heft 5/90 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 10

291041 (Musterlösung der Aufgabenkommission):

I. Wenn ein Kreis c die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt: Ist M der Mittelpunkt und r der Radius von c , so hat M von jeder der Geraden g, h, j den Abstand

$$s = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}. \quad (3)$$

Dies ergibt sich aus dem Satz, daß jeweils das Lot von M auf eine Sehne diese halbiert, und aus dem Satz des Pythagoras.

Nach Voraussetzung bilden g, h, j die Seiten (und deren Verlängerungen) eines Dreiecks D . Also ist M einer der vier Punkte, die von den (einschließlich ihrer Verlängerungen verstandenen) Seiten von D jeweils drei gleichgroße Abstände haben; d. h., M ist der Inkreismittelpunkt oder einer der drei Ankreismittelpunkte von D , und die in (3) genannte Länge s ist der Inkreisradius bzw. der Radius des betreffenden Ankreises. Aus (3) folgt ferner, daß c den Radius

$$r = \sqrt{s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad (4)$$

hat.

II. Umgekehrt folgt: Wenn M der Mittelpunkt und s der Radius des Inkreises oder eines Ankreises von D ist und wenn hiermit r die nach (4) gebildete Länge ist, dann schneidet der um M mit r konstruierte Kreis c jede der drei Geraden g, h, j in einer Sehne, deren halbe Länge

$$\sqrt{r^2 - s^2} = \frac{a}{2} \text{ beträgt; d. h., dann erfüllt } c$$

die Bedingungen (1), (2).

Damit ist bewiesen: Für jede der in der Aufgabe genannten Vorgaben von g, h, j, a gibt es genau vier Kreise c , die (1) und (2) erfüllen.

Doz. Dr. W. Harnau,
Inst. f. Math. u. ihre Didaktik
Pädag. Hochschule Dresden

291042 (I) Für die Summe $s := x + y$ zweier reeller Zahlen x, y mit

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1 \quad (1)$$

folgt zunächst $\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} + \frac{1}{x(s-x)} = 1$

und daraus

$$x^2 - sx + s + 1 = 0 \quad (2).$$

Da in (1) notwendig $x \neq 0$ und

$y = s - x \neq 0$ gilt, folgt aus (2) weiter

$$0 \neq x(s-x) = sx - x^2 = s + 1, \text{ d. h. } s \neq -1 \quad (3).$$

Andererseits wird (2) durch quadratische Ergänzungen zu

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} - s - 1. \text{ Folglich ist}$$

$$s^2 - 4s - 4 \geq 0, (s-2)^2 \geq 8$$

und schließlich

$$|s-2| \geq 2\sqrt{2} \quad (4).$$

Insgesamt liegt s also notwendigerweise in einem der Intervalle

$$s < -1; -1 < s \leq 2 - 2\sqrt{2};$$

$$s \geq 2 + 2\sqrt{2} \quad (5).$$

(II) Ist umgekehrt s aus einem dieser Intervalle, so sind die Zahlen

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - s - 1} \text{ und}$$

$$y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - s - 1} \text{ reell (wegen (4)),}$$

$\neq 0$ (wegen (3)), und es gilt $x + y = s$ sowie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$. Also sind die gesuchten

Werte für s genau diejenigen, die in einem der Intervalle aus (5) liegen.

Dr. R. Labahn, Sektion Math.
der W.-Pieck-Universität Rostock

291043A Die Aufgabe läßt sich in zwei Teilaufgaben zerlegen, die den Schülern z. T. bekannt waren.

1. Für jede natürliche Zahl n gilt: Ist n zusammengesetzt, so ist $2^n - 1$ nicht Primzahl.

Beweis: Es sei $n = pq$ mit natürlichen Zahlen $p, q > 1$. Dann ist mit $x = 2^p$ die Zahl

$$2^n - 1 = x^q - 1 = (x-1)(x^{q-1} + \dots + x + 1) \text{ wegen } x-1 > 2-1=1 \text{ und}$$

$$x^{q-1} + \dots + x + 1 \geq x + 1 > 1$$

zusammengesetzt.

2. Für jede natürliche Zahl $N > 1$ gilt: Keine der $N-1$ Zahlen

$$n = N! + 2, N! + 3, \dots, N! + N \quad (1)$$

ist Primzahl, denn diese Zahlen sind jeweils durch $2, 3, \dots, N$ teilbar und größer als die genannten Teiler.

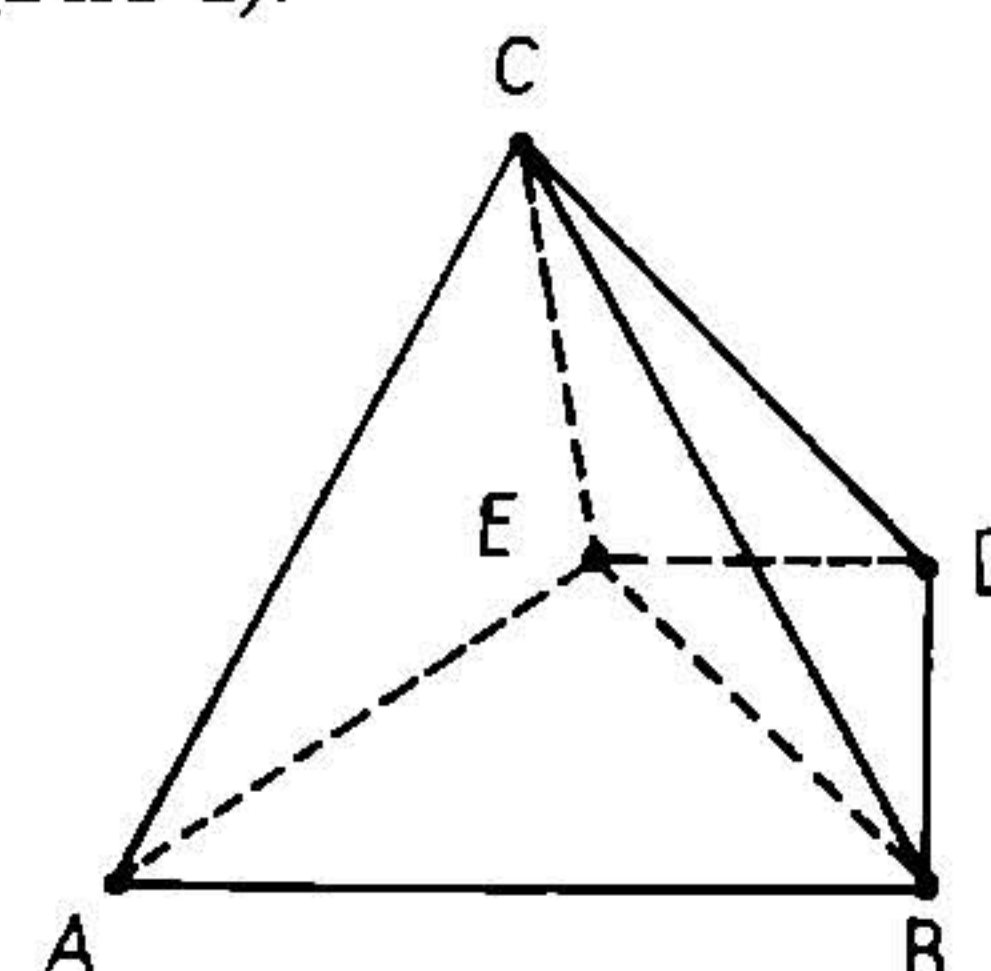
Wählt man ein $N > 1$ mit $N > z + 1$, so hat der mit den Zahlen n aus (1) gebildete Abschnitt der Folgeglieder $2^n - 1$ die Länge $N-1 > z$, und in diesem Abschnitt gibt es aufgrund 1. keine Primzahl.

Dr. W. Moldenhauer, Inst. f. Math.
der Pädag. Hochschule Erfurt

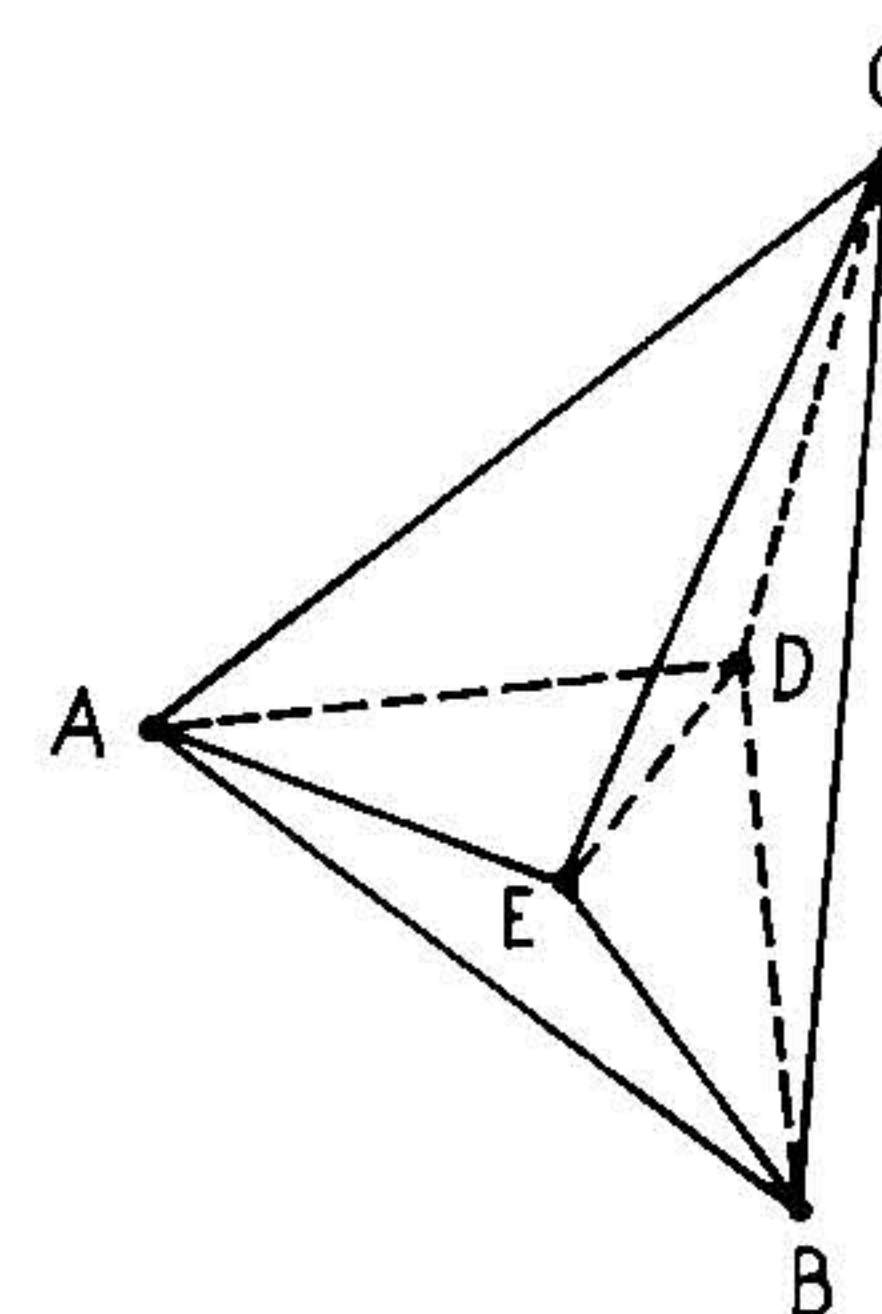
291043B Wesentlich ist die Fallunterscheidung:

a) Es existieren vier Punkte – o. B. d. A. die Punkte A, B, C, D – so, daß der fünfte

Punkt E im Inneren des Tetraeders $ABCD$ liegt (Bild a).



b) Negation von Fall a (Bild b)



Im Fall a lassen sich entweder ein oder zwei der Tetraeder mit dem Eckpunkt E aus dem Tetraeder $ABCD$ „herausschneiden“. Damit entstehen in diesem Fall 10 Polyeder.

Im Fall b muß eine der Verbindungsstrecken (im Bild b ist es DE) im Inneren des Körpers verlaufen, wenn $ABCDE$ konvex ist (konvexe Hülle). Schneidet man nun aus diesem konvexen Körper die drei Tetraeder heraus, die eine zu DE windschief verlaufende Kante haben, so erhält man drei weitere Körper. Damit existieren in diesem Fall 4 Polyeder.

In jedem Fall sind alle diese Polyeder voneinander verschieden, da sie nicht in allen Verbindungsstrecken übereinstimmen können und laut Voraussetzung alle Verbindungsstrecken voneinander verschieden sind.

Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Math.
der Pädag. Hochschule Potsdam

291044 I. Wenn eine Eintragung die Forderung erfüllt, so folgt für die in Bild a mit x, y, z, w bezeichneten Zahlen: Da in der 1. und 2. Zeile sowie in der 1. und 3. Spalte je eine arithmetische Folge steht, gilt

$$y - x = 65 - y, \quad (1)$$

$$41 - z = w - 41, \quad (2)$$

X		Y		65
Z	41	W		
		81		
1				

$$3 \cdot (z - x) = 1 - z, \quad (3)$$

$$w - y = 81 - w. \quad (4)$$

Aus (1) bzw. (2) folgt

$$x = 2y - 65 \quad (5)$$

$$\text{bzw. } z = 82 - w. \quad (6)$$

Setzt man dies in (3),

d. h. $4z - 3x = 1$ ein, so folgt

$$328 - 4w - 6y + 195 = 1, 2w = 261 - 3y.$$

Hieraus und aus (4), d. h.

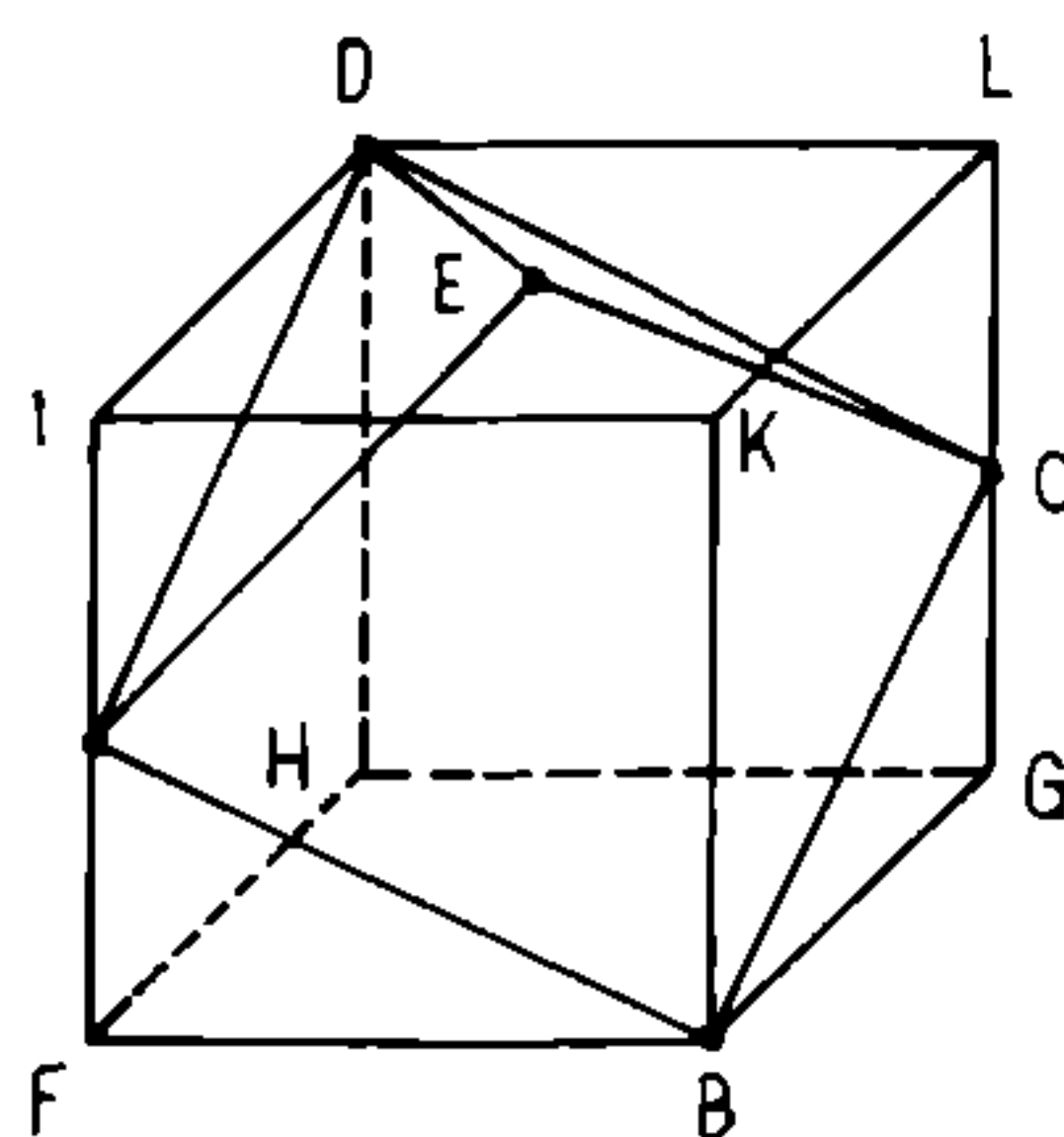
$$2w = 81 + y, \quad (7)$$

erhält man $261 - 3y = 81 + y$,
 $y = 45$. (8)
 Damit ergibt sich aus (7), (6), (5):
 $w = 63, z = 19, x = 25$. (9)
 Aus diesen in (8), (9) genannten Werten ergeben sich durch Vervollständigung der arithmetischen Folgen die in Bild b genannten Zahlen, z. B. erst die in der 1. und 2. Zeile und dann die in den Spalten fehlenden Werte.

25	35	45	55	65
19	41	63	85	107
13	47	81	115	149
7	53	99	145	191
1	59	117	175	233

291045 (I) Die Verbindungsstrecken der 3 Seitenmitten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a zerlegen es in vier kongruente gleichseitige Teildreiecke der Seitenlänge $\frac{a}{2}$. Daher findet man bei jeder Verteilung von 5 Punkten nach dem Dirichletschen Schubfachschluß ein Teildreieck, in dem – einschl. des Randes – mindestens zwei der 5 Punkte liegen. Diese beiden haben einen Abstand, der nicht größer als die Seitenlänge, also nicht größer als $\frac{a}{2}$ ist. Folglich kann bei keiner Verteilung von 5 Punkten der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen größer als $\frac{a}{2}$ sein.
 (II) Wir legen 2 der 5 Punkte in Eckpunkte und die restlichen 3 in die Seitenmitten des gegebenen Dreiecks. Dann ist der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen gleich $\frac{a}{2}$. Wegen (I) ist dies eine gesuchte Verteilung. Dr. R. Labahn, Sektion Math. der W.-Pieck-Universität Rostock

291046 Zunächst beweist man die Einzigkeit des Polyeders. Wegen der laut Aufgabenstellung gleichen Höhe von A und C über der Ebene durch F, B, G, H schneidet die Strecke $\overline{AC}$ die Strecke $\overline{BD}$ (= Raumdiagonale im Würfel). Damit liegen A, B, C und D in einer Ebene und E kann nur die Spitze einer „zugehörigen“ vierseitigen Pyramide sein.



Für die Volumenberechnung bieten sich verschiedene Wege an:
 1. Subtraktion der Volumina von Teilkörpern, die die Pyramide zu einem Würfel ergänzen, vom Würfelvolumen.

2. Direkte Berechnung des Volumens
 2.1. mit $ABCD$ als Grundfläche
 2.2. bei Zusammensetzung der vierseitigen Pyramide aus den beiden Tetraedern $ACED$ und $ACEB$.
 Der Weg 2.2 ist der eleganteste.
 In jedem Fall ergibt sich $V = \frac{1}{6} a^3$.
 Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Math. der Pädag. Hochschule Potsdam

Olympiadeklasse 11/12

291241 a) Zurückführen von (1) auf eine einfachere Gleichung:

I. Wenn (1) für ein reelles a ein reelles x als Lösung hat, so ist es auch Lösung der Gleichung

$$a + \sqrt{x} = x. \quad (2)$$

Beweis: Wäre $a + \sqrt{x} > x$, so folgte

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} > a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}} > \dots > a + \sqrt{x} > x \text{ im Widerspruch gegen die Voraussetzung (1). (Im wesentlichen analog für } a + \sqrt{x} < x.)$$

II. Wenn (2) für ein reelles a ein reelles x als Lösung hat, so ist es auch Lösung von (1). (Der Beweis erfolgt analog zu dem in I.)

b) Lösen der Gleichung (2) (einschl. Probe bzw. Rückschluß):

Für $a < -0,25$ hat (2) und damit (1) keine reelle Lösung x .

Für $a = -0,25$ ist $x = 0,25$ einzige Lösung von (2) und damit (1). Für $-0,25 < a \leq 0$ sind genau die zwei Zahlen

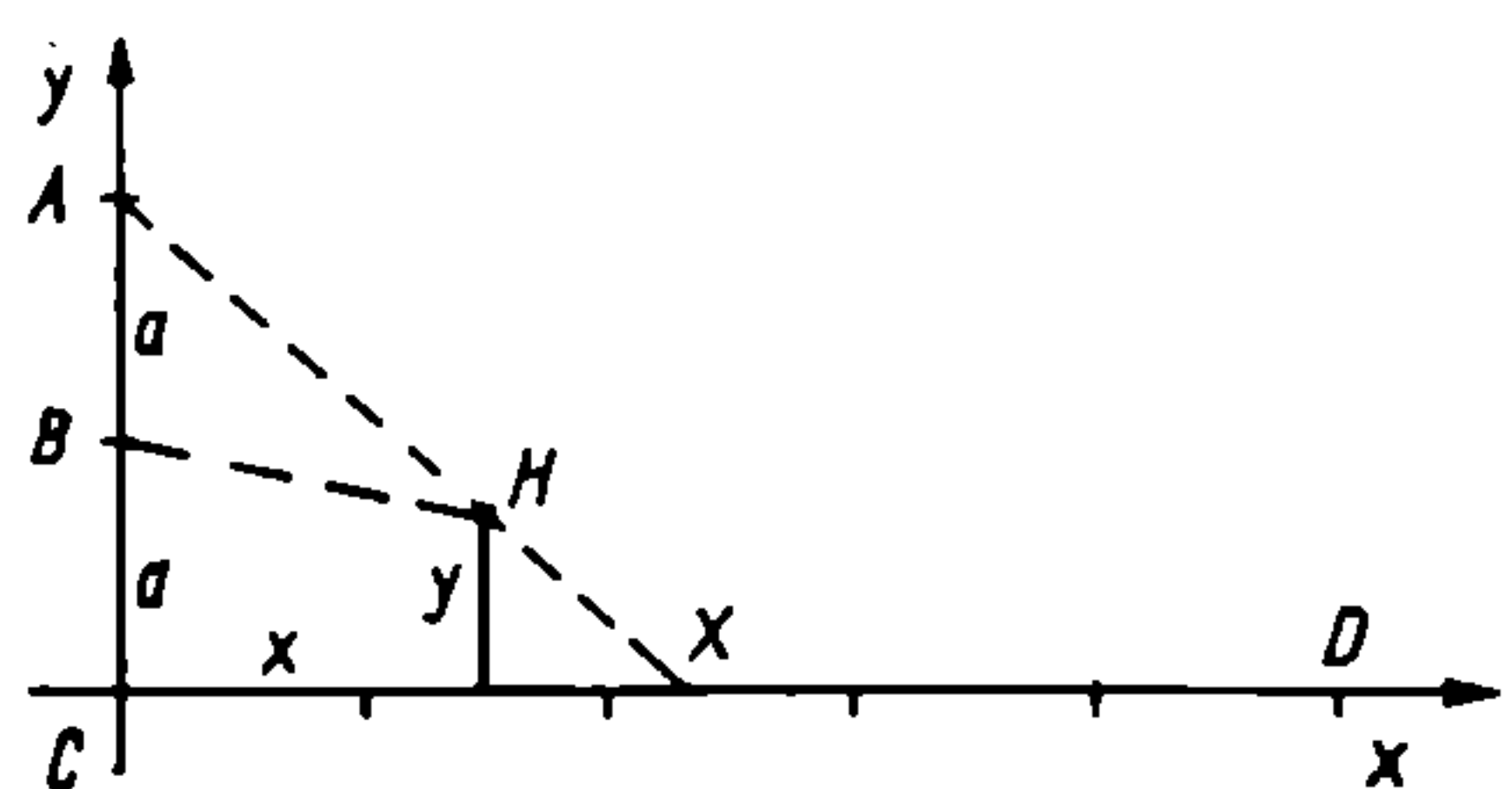
$$x_{1,2} = 0,5 \cdot (2a + 1 \pm \sqrt{4a + 1}),$$

für $a > 0$ genau die Zahl

$$x = 0,5 \cdot (2a + 1 + \sqrt{4a + 1}) \text{ Lösung von (2), also von (1).}$$

Dr. M. Rehm, Sektion Math. der Humboldt-Universität Berlin

291242 Man lege ein Koordinatensystem so, daß C, B, A, D die Koordinaten $(0; 0), (0; a), (0; 2a)$ bzw. $(5a; 0)$ haben (Bild a).

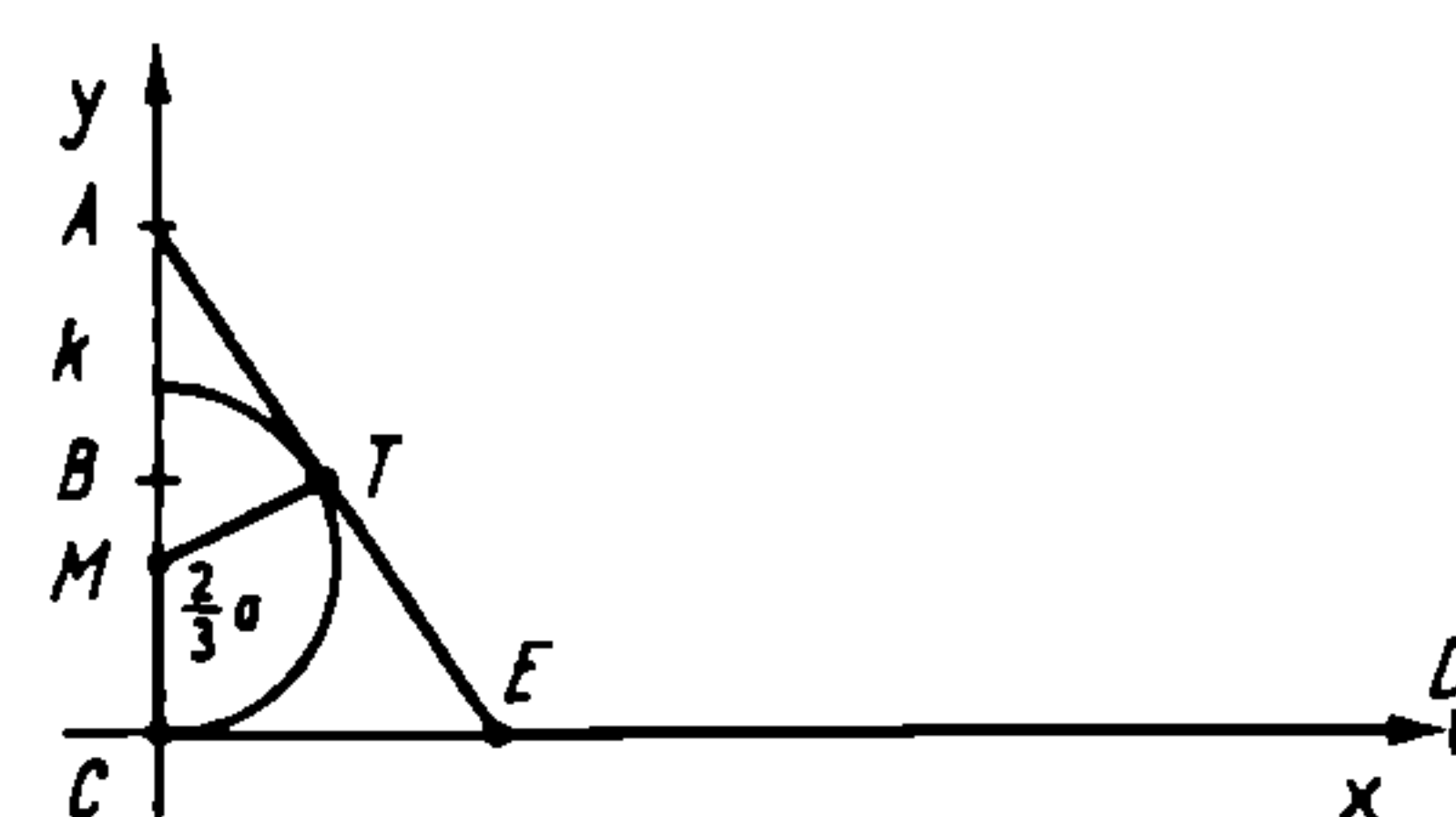


Hat ein beliebiger Punkt H der Ebene die Koordinaten $(x; y)$ und bezeichnet v die größtmögliche Geschwindigkeit des Wolfs, also $2v$ die des Hasen, so erreicht der Hase den Punkt H geradlinig in der Zeit $t_1 = \frac{AH}{2v}$ und der Wolf frühestens in der Zeit $t_2 = \frac{BH}{v}$. Der Wolf kann somit genau dann den Punkt H weder gleichzeitig mit dem Hasen noch sogar eher als dieser erreichen, wenn für diese Zeiten $t_1 < t_2$ gilt. Das ist der Reihe nach äquivalent mit $\overline{AH} < 2 \cdot \overline{BH}$,

$$\sqrt{x^2 + (y - 2a)^2} < 2 \cdot \sqrt{x^2 + (y - a)^2},$$

$$3x^2 + 3y^2 - 4ay > 0, \quad x^2 + \left(y - \frac{2}{3}a\right)^2 > \left(\frac{2}{3}a\right)^2. \quad (1)$$

Damit ist gezeigt, daß der Hase durch Wahl seines Zielpunktes x genau dann erreicht, nicht unterwegs vom Wolf gefaßt zu werden, wenn die Koordinaten aller Punkte der Strecke AX die Ungleichung (1) erfüllen. Das trifft genau dann zu, wenn die Strecke AX vollständig außerhalb desjenigen Kreises k liegt, dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $\left(0; \frac{2}{3}a\right)$ hat und dessen Radius $\frac{2}{3}a$ beträgt (Bild b).



Es sei nun E der Schnittpunkt der positiven x -Achse mit derjenigen von A an k gelegten Tangente, die die positive x -Achse schneidet. Für diesen Punkt E und für den Berührungspunkt T der Tangente gilt

$$\overline{TM} = \frac{2}{3}a, \overline{MA} = \frac{4}{3}a \text{ und } \angle MTA = 90^\circ,$$

also $\triangle CEA \sim \triangle TMA$,

$$\overline{CE} : \overline{EA} = \overline{TM} : \overline{MA} = 1 : 2,$$

$$\overline{EA} = 2 \cdot \overline{CE}, \overline{CA} = \overline{CE} \sqrt{3},$$

$$\overline{CE} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}.$$

Insbesondere liegt daher wegen $\frac{2}{3}\sqrt{3} < 5$ der Punkt E auf der Strecke CD , und es ist bewiesen: Die gesuchten Zielpunkte X sind genau die auf der Verlängerung von CE über E hinaus gelegenen Punkte der Strecke CD , d. h. genau die Punkte X auf CD mit $\overline{CX} > \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

291243 Als ein möglicher Versuch, aus dem in den beiden Gleichungen zwischen den Zahlen a, b, c und d gespeicherten Wissen, Hinweise über das gesuchte pythagoreische Zahlentripel zu erhalten, kann das Quadrieren der Gleichung $a + b = c - d$ dienen. Man erhält: $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$, woraus unter Nutzung der Identitäten $c = a + b + d$ und $a \cdot b = c \cdot d$ die Gleichung

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + d^2 + 2ab + 2ad + 2bd - 2ab + d^2 \text{ bzw.}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ad + d^2 + b^2 + 2bd + d^2 \text{ also}$$

$$(a + b)^2 = (a + d)^2 + (b + d)^2 \text{ folgt,}$$

d. h. mit den Maßzahlen $u = a + d$, $v = b + d$ und $w = a + b$ sind

(positiv-ganzzahlige) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks gefunden.

Für den Flächeninhalt A dieses rechtwinkligen Dreiecks gilt:

$$A = \frac{1}{2} u \cdot v = \frac{1}{2} (a + d) (b + d)$$

$$= \frac{1}{2} (ab + d(a + b + d)) = \frac{1}{2} (ab + cd)$$

d. h. $A = a \cdot b$, also ist mit dem Zahlentripel $a + d$, $b + d$ und $a + b$ die Aufgabe gelöst.

Dr. M. Noack, Ministerium für Bildung

291244 I. Wenn für ein Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen das System (1), (2) gilt, so folgt

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y &= 61, \\ 16(3x + 1)^2 + 3(8y - 9)^2 &= 3187, \\ 0 < (3x + 1)^2 &\leq 199, \quad 0 < x \leq 4. \end{aligned} \quad (3)$$

Bei $x = 1; 2; 4$ ergibt sich für y keine natürliche Zahl. Für $x = 3$ folgt (aus (3)) $y = 4$ und (aus (2)) $z = 6$. Somit kann nur das Tripel $(3, 4, 6)$ aus natürlichen Zahlen bestehen und (1), (2) erfüllen.

II. Die Probe zeigt, daß dieses Tripel (1), (2) erfüllt.

Dr. M. Rehm, Sektion Math. der Humboldt-Universität Berlin

291245 Ein Koordinatensystem sei so gewählt, daß folgende Punkte folgende Koordinaten haben: $B(0, 0, 0)$, $C(a, 0, 0)$, $A(0, a, 0)$, $F(0, 0, a)$. Dann haben M, H die

Koordinaten $\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right)$ bzw. (a, a, a) und

g ist die Menge aller Punkte

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{at}{2}, at, \frac{a}{2} + \frac{at}{2}\right), t \in \mathbb{R}.$$

Mit $s = \frac{1+t}{2}$ besteht g aus der Menge aller

Punkte $(as, a(2s-1), as)$, $s \in \mathbb{R}$. Jeder Punkt aus ε_1 kann durch $(x, y, 0)$ und jeder Punkt aus ε_2 durch $(v, 0, w)$ beschrieben werden. Der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier solcher Punkte hat die Koordinaten

$$\left(\frac{x+v}{2}, \frac{y}{2}, \frac{w}{2}\right) \text{ und liegt genau dann auf}$$

g , wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x+v}{2} = as, \frac{y}{2} = a(2s-1), \frac{w}{2} = as \text{ gibt.}$$

Dies gilt genau dann, wenn $x+v=w$, $y=2w-2a$ ist. Das Quadrat q der zu betrachtenden Streckenlänge ist

$$\begin{aligned} q &= (x-v)^2 + y^2 + w^2 \\ &= (w-2v)^2 + (2w-2a)^2 + w^2 \\ &= (w-2v)^2 + \frac{(5w-4a)^2 \cdot 4a^2}{5}. \end{aligned}$$

Es nimmt seinen kleinsten Wert genau dann an, wenn $w-2v=0$ und

$$5w-4a=0 \text{ ist, also wenn } w = \frac{4a}{5},$$

$$v = x = \frac{2a}{5}, y = \frac{-2a}{5}, s = \frac{2}{5} \text{ gilt.}$$

Der kleinste Wert von q ist damit gleich $\frac{4a^2}{5}$, die gesuchte kleinste Länge beträgt

$$\text{mithin } 2a \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Dr. W. Moldenhauer, Inst. f. Math. der Pädag. Hochschule Erfurt

291246A 1. Für jeden Zug, bei dem eine Kugel aus Urne A in Urne B gelegt wird, gibt es genau m gleichwahrscheinliche Möglichkeiten; bei einem Zug, wo eine Kugel von B nach A gelegt wird, sind es genau $n+1$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten. Insgesamt gibt es daher für die Folge der ersten vier Züge genau $m^2(n+1)^2$ verschiedene gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.

2. Wir bestimmen nun die Anzahl der Möglichkeiten im ersten bis vierten Zug,

eine rote bzw. blaue Kugel herauszugreifen: Für den Fall, daß im 1. Zug eine rote Kugel gegriffen wird, gibt es genau m Möglichkeiten (daß eine blaue gegriffen wird, 0 Möglichkeiten).

Im 2. Zug gibt es für jeden der m (durch den 1. Zug möglichen) Fälle genau n Möglichkeiten, eine blaue Kugel und genau eine Möglichkeit, eine rote Kugel zu greifen.

Im 3. Zug gibt es für jeden der $n \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine blaue Kugel gegriffen wurde) $(m-1)$ Möglichkeiten, eine rote und 1 Möglichkeit, eine blaue Kugel herauszugreifen. Für jeden der $1 \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine rote Kugel gegriffen wurde) gibt es m Möglichkeiten, eine rote und 0 Möglichkeiten, eine blaue Kugel herauszugreifen. Schließlich gibt es beim 4. Zug für jeden der $(m-1) \cdot n \cdot m$ Fälle (2. Zug blau, 3. Zug rot) 2 Möglichkeiten, eine rote (und $n-1$ Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jeden der $1 \cdot n \cdot m$ Fälle (2. und 3. Zug blau) genau 1 Möglichkeit, eine rote (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jeden der $m \cdot 1 \cdot m$ Fälle (2. und 3. Zug rot) genau 1 Möglichkeit, eine rote (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel herauszugreifen. So ergibt sich als Anzahl S der günstigen Fälle (d. h. im 4. Zug wird eine rote Kugel gegriffen):

$$S = 2 \cdot (m-1) \cdot n \cdot m + 1 \cdot 1 \cdot n \cdot m + 1 \cdot m \cdot 1 \cdot m.$$

Also ist die Menge aller ganzzahligen Paare $(m; n)$ zu finden, für die

$$\frac{m \cdot n + 2(m-1)n \cdot m + m^2}{m^2(n+1)^2} = \frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Wegen $m \neq 0$ gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$(*) \quad m - 2n + 2mn - mn^2 = 0$$

ist, woraus folgt, daß einerseits m ein Teiler von $2n$ ist, andererseits aber m von n geteilt wird.

Somit gilt $m = t \cdot n$ mit $t = 1$ oder

$t = 2$. Für $t = 1$ wird (*) zu

$$-n + 2n^2 - n^3 = 0 \text{ bzw. } n \cdot (n-1)^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat wegen $n = m$ und $n + m > 2$ keine Lösung. Der Fall $t = 2$ hingegen führt zu $4n^2 - 2n^3 = 0$, woraus unmittelbar $n = 2$, $m = 4$ folgt. Diese Zahlen erfüllen in der Tat die Ausgangsgleichung. Also hat genau die Vorgabe von 4 roten und 2 blauen Kugeln die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Dr. M. Noack, Ministerium für Bildung

291246B I. Angenommen, f und g seien zwei Funktionen, die beide den (für g entsprechend umzuformulierenden) Bedingungen (1), (2), (3) genügen. Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl und hierzu

$$c = f(x_0) - g(x_0). \text{ Dann folgt aus (3),}$$

mit $x = \frac{x_0}{n}$ auf f und g angewandt,

$$c = f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{x_0}{n}\right) - g\left(\frac{x_0}{n}\right) \right).$$

Durch vollständige Induktion beweist man hieraus für jedes natürliche

$$k \geq 1 \quad n^k \cdot c = f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) - g\left(\frac{x_0}{n^k}\right).$$

Wegen (2) existieren mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ auch die Grenzwerte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_0}{n^k}\right) = [f(0)] \text{ und}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = [g(0)], \text{ also existiert auch der Grenzwert } \lim_{k \rightarrow \infty} (n^k \cdot c).$$

Das ist aber nur für $c = 0$ möglich.

Da diese Schlüsse mit jeder beliebigen reellen Zahl x_0 ausgeführt werden können, gilt folglich $f(x) = g(x)$ für alle reellen Zahlen x . Es kann also höchstens eine Funktion f geben, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.

II. Die oben in (6) definierte Funktion genügt diesen Bedingungen (Nachweis wie im 1. Lösungsweg). Eine weitere Beweisvariante besteht darin, aus (3) mit dem Ansatz $f(x) = a + b$ sogleich $b = 0$,

$$a = \frac{n}{n^2 - 1} \text{ zu erhalten, dann für die Funktion } c(x) = f(x) - \frac{nx}{n^2 - 1} \text{ die Bedingungen (1), (2) und } c(x) = \frac{1}{n} \cdot c\left(\frac{x}{n}\right) \text{ herzuleiten und daraus ähnlich wie oben } c(x) = 0 \text{ für alle } x \text{ zu beweisen.}$$

Was wird aus den Olympiaden?

Zu einer Diskussion über dieses Thema trafen sich Teilnehmer des Mathematiker-Kongresses der (noch) DDR, der vom 10.-14. September 1990 in Dresden stattfand.

Das Interesse war so groß, daß zunächst ein Umzug in einen größeren Raum notwendig war.

In einem waren sich die zahlreichen Olympiadeenthusiasten einig:

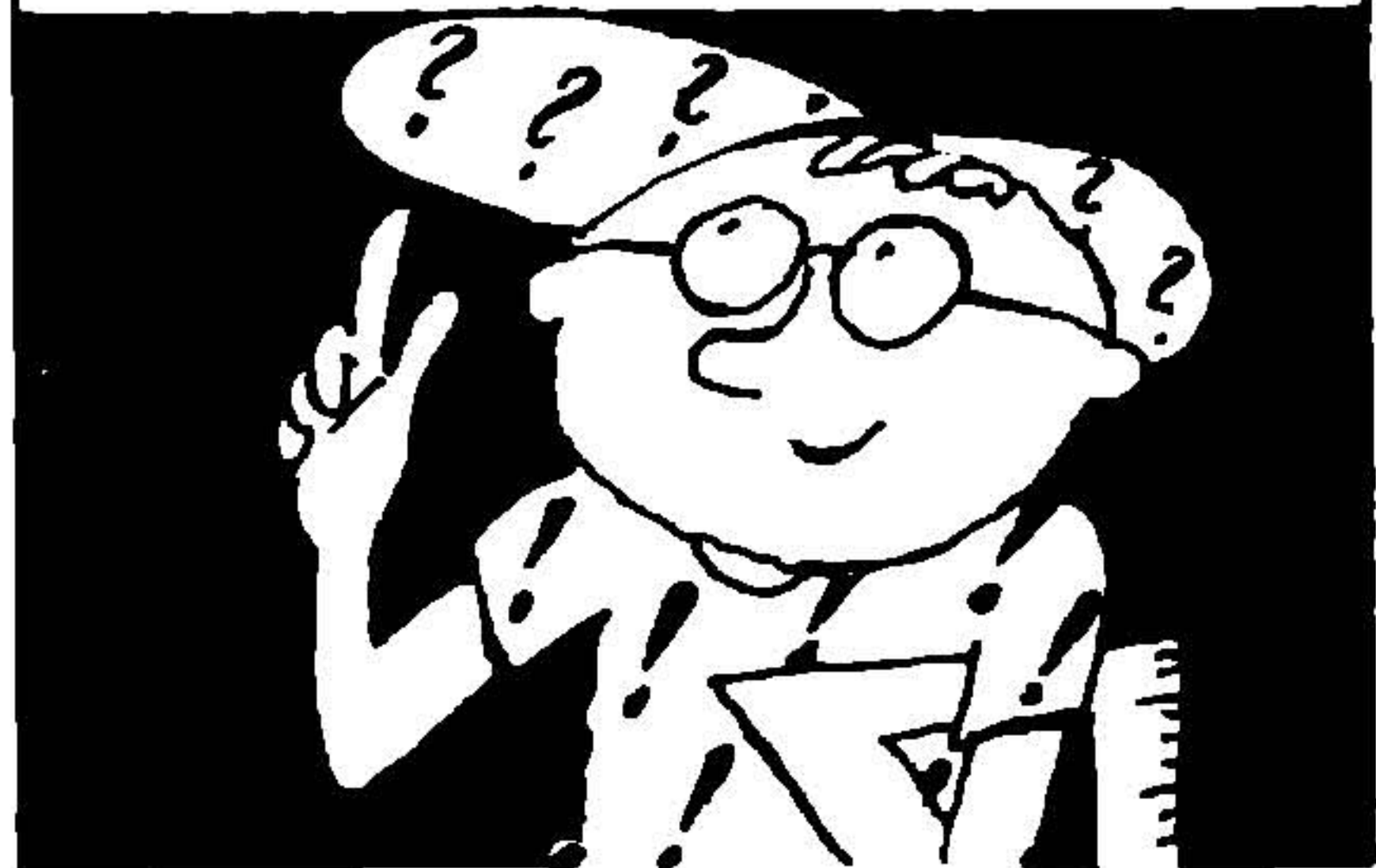
Diese Olympiadebewegung hat sich bestens bewährt, sollte beibehalten, sogar auf ganz Deutschland ausgedehnt werden. Organisieren will man sie künftig auf Länderebene, Länderkomitees wurden bereits in Thüringen, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern und Sachsen gebildet. Für die Finanzierung müssen neue Wege gegangen werden. Sehr wesentlich dürfte dabei die Unterstützung der (in Ostdeutschland noch zu bildenden) Kulturministerien sein. Und noch ein Fakt muß Berücksichtigung bei der zukünftigen Konzipierung der Olympiaden finden – die Abstimmung mit dem Bundeswettbewerb. Dieser jährlich stattfindende Mathematikwettbewerb spricht die Sekundarstufe II, also die 11.-13. Klasse an, sein Ziel besteht ebenfalls in der Findung mathematisch interessierter und begabter Schüler.

(In einem der nächsten Hefte informieren wir Euch näher über ihn.)

Sinnvoll wäre nun sicher, beide Formen der Mathematikförderung und Begabungsförderung zu vereinen.

Die erste Runde des nächsten Bundeswettbewerbes findet im Dezember statt. Da zum Redaktionsschluß unseres Heftes 6 die Aufgaben noch nicht vorlagen, können wir sie nicht veröffentlichen, sind aber gern bereit, Euch die Aufgaben zuzusenden. Bitte legt Eurem Schreiben einen frankierten und adressierten Rückumschlag bei.

Lösungen



Lösung zur Preisaufgabe Heft 4/90

Kleinsten Gang:

Übersetzungsverhältnis 2,8

Entfaltung 6,2

$196\,800\text{ m} : 6,2\text{ m} = 31\,741,9 \approx 31\,800$

Größten Gang:

Übersetzungsverhältnis 4,6

Entfaltung 10,1

$196\,800\text{ m} : 10,1\text{ m} = 19\,486,1 \approx 19\,500$

Fahrzeit 16 342 s

$16\,342\text{ s} : 19\,500\text{ Umdrehungen} = 0,8\text{ s/}$

Umdrehung. Also

1. 31 800 Umdrehungen

2. 19 500 Umdrehungen, durchschnittlich

0,8 s/Umdrehung

Ein Autogrammfoto von Olaf Ludwig haben gewonnen:

Kai Uwe Zimmermann, Neustrelitz;

Ulrike Krause, Görlitz;

Mechthild Krause, Görlitz;

Stan Ileana, Tirgu Mures (Rumänien)

Lösung zu: Arithmetik mit 6

Heft 5/90

$$\begin{aligned} (0! + 0! + 0!)! &= 6 & (5 - 5)! + 5 &= 6 \\ 0 + (1 + 2)! &= 6 & 7 - 6 + 5 &= 6 \\ (1 + 1 + 1)! &= 6 & 6 \cdot 6 : 6 &= 6 \\ 1 + 2 + 3 &= 6 & (8 - 7) \cdot 6 &= 6 \\ 2 + 2 + 2 &= 6 & 7 - (7 - 7)! &= 6 \\ 4 \cdot 3 : 2 &= 6 & 7 + 8 - 9 &= 6 \\ 3 \cdot 3 - 3 &= 6 & (\sqrt{8 + (8 - 8)!})! &= 6 \\ 5 + 4 - 3 &= 6 & (\sqrt{10 - 9 + 8})! &= 6 \\ 4 + 4 - \sqrt{4} &= 6 & \sqrt{9 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{9}} &= 6 \\ ((6!) : 5) : (4!) &= 6 & (\sqrt{10 - (10 - 10)!})! &= 6 \end{aligned}$$

Lösungen zu: Logisch kombinieren

$$\begin{aligned} \text{a) } 355 - 133 &= 222 & \text{b) } 365 - 47 &= 318 \\ \begin{array}{r} : + - \\ 5 \cdot 3 = 15 \\ 71 + 136 = 207 \end{array} & & \begin{array}{r} : + - \\ 5 \cdot 33 = 165 \\ 73 + 80 = 153 \end{array} \end{aligned}$$

Lösungen zur Sprachecke

▲ 1 ▲ Die Krüge

Herr Crucheu, der in der Wüste lebt, fährt mit seinem Lieferwagen und seinen Krügen zum Markt der benachbarten Oase. Er besitzt 9 Gefäße mit den folgenden Inhalten: 3 l, 6 l, 10 l, 11 l, 15 l, 17 l, 23 l, 25 l und 30 l.

Er kommt zurück mit zweimal mehr Kamelmilch als Olivenöl und mit dreimal mehr Wasser als Kamelmilch. Alle seine Gefäße sind randvoll gefüllt, bis auf eines, das leer blieb.

Könnt ihr für jeden der Krüge angeben, welche Flüssigkeit er enthält?

Lösung: Mit Olivenöl sind die Krüge mit 3 l und 10 l Fassungsvermögen gefüllt. Wasser befindet sich in den Krügen mit 6 l, 17 l, 25 l und 30 l Fassungsvermögen. In den Gefäßen mit 11 l und 15 l Fassungsvermögen ist Kamelmilch. Der 23 l-Behälter bleibt leer.

▲ 2 ▲ Setzt in die Kreise der auf der Zeichnung dargestellten Figur die Zahlen 1, 2, ..., 11 derart ein, daß die Summe der Zahlen an den Ecken eines jeden Quadrates dieselbe ist.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Lösung:} & 1 & 10 & 3 & \\ & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ & & 9 & 2 & 11 \end{array}$$

▲ 3 ▲ Was siehst du?

Sieh dir die Zeichnung sorgfältig an, konzentriere dich auf die Mitte. Nach einer Weile wirst du bemerken, daß sich das Bild verändert. Der Teil der Zeichnung, den du in der Tiefe wahrnimmst, hat sich plötzlich bewegt. Wenn du dich weiter konzentrierst, wird er wieder seinen Platz wechseln und sich weiter vorwärts und rückwärts bewegen. Das zeigt, daß unsere Wahrnehmung eines Bildes von Veränderungen in unserem Nervensystem beeinflusst wird. Dieses Bild dachte sich ein 14-jähriger Junge aus. Versuche ähnliche Bilder zu finden.

Lösung zur Quadratkomposition

Da die Veröffentlichung der gesamten Lösung unser Platzangebot überfordert, hier nur ein Hinweis:

1. Die Zeilen-Spalten- und Diagonalensumme im $n \times n$ -Quadrat ist jeweils das n -fache der mittleren Zahl.

Lösungen zu: alpha-magisch

Magische Quadrate

$$\begin{array}{ccccc} 18 & 31 & 14 & 27 & 10 \\ 11 & 19 & 32 & 15 & 23 \\ 24 & 12 & 20 & 28 & 16 \\ 17 & 25 & 8 & 21 & 29 \\ 30 & 13 & 26 & 9 & 22 \end{array}$$

Auf den Kopf gestellt

a) Eine mögliche Lösung unter Verwendung aller in Frage kommenden Ziffern

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma = 194 & & \Sigma = 198 \\ \begin{array}{ccccc} 21 & 19 & 58 & 96 & \\ 98 & 56 & 11 & 29 & \\ 16 & 28 & 99 & 51 & \\ 59 & 91 & 26 & 18 & \end{array} & & \begin{array}{ccccc} 61 & 26 & 19 & 92 & \\ 99 & 12 & 21 & 66 & \\ 22 & 69 & 96 & 11 & \\ 16 & 91 & 62 & 29 & \end{array} \end{array}$$

b) Eine mögliche Lösung (rechts)

Magisches optisch attraktiv

2. Spalte: 22, 87, 39, 4, 50, 47, 80, 10, 100, 66.

9. Spalte: 7, 75, 29, 5, 84, 40, 44, 78, 85, 58.

Magisches Karussell

$$\begin{array}{cc} \text{Eine mögliche Lösung} & \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ & 1 \\ 9 & 8 \\ 4 & 5 \end{array} \end{array}$$

Mit Spiegel und Schere

a) Zum Beispiel bleibt folgendes Quadrat bei Spiegelung am oberen oder unteren Rand magisch.

IX	C	XCII	XXIII
XCIII	XXII	X	XCIX
XXI	XC	CII	XI
CI	XII	XX	XCI

b)

2	7	6	17	22	12	19
9	5	1	20	11	25	14
4	3	8	23	16	18	13
			10	21	15	24

2.

14	1	24	11	17	20	4
23	13	3	19	5	10	18
2	25	12	6	22	15	9
			16	8	7	21

3.

16	21	14	10	5	4	24
15	17	19	3	25	9	6
20	13	18	22	2	7	12
			8	11	23	1

Magische Primzahlen

a) Oben links beginnend im Uhrzeigersinn: 19 5 11 13 17 7; Mitte: 23

b) Von links nach rechts: oben 11 7 19 17; Mitte: 23 5; unten: 13

Magische Doppelkreise

Doppelkreise $3 + 14 + 15 + 8 = 40$

Symmetrieachse

$7 + 5 + 13 + 12 + 1 + 2 = 40$

Symmetrieachse

$4 + 10 + 11 + 9 + 0 + 6 = 40$

Magische Begrüßung

eines neuen Jahres

Eine Lösung:

71	213	91	233	111	253	131	273	151	293	171
193	93	235	113	255	133	275	153	295	173	73
95	215	115	257	135	277	155	297	175	75	195
217	117	237	137	279	157	299	177	77	197	97
119	239	139	259	159	301	179	79	199	99	219
241	141	261	161	281	181	81	201	101	221	121
143	263	163	283	183	61	203	103	223	123	243
265	165	285	185	63	205	83	225	125	245	145
167	287	187	65	207	85	227	105	247	147	267
289	189	67	209	87	229	107	249	127	269	169
191	69	211	89	231	109	251	129	271	149	291

In einem solchen magischen Quadrat ergibt sich noch folgendes: Die Summe der Zahlen ist in den mittleren 9 Feldern $3^2 \cdot 181$, in den mittleren 25 Feldern $5^2 \cdot 181$, ..., für alle Felder $11^2 \cdot 181$.

Lösungen zu:

Die Weihnachtspäckchen

Frank 7, Corina 3, Jens 5, Katrin 4,
Jan 1, Steffen 6, Jörg 2, Petra 8.

Silvesterschmerz

Ja! Die beiden Zwillinge wurden in einem Flugzeug geboren, das nach Ramonas, aber vor Daniels Geburt die durch den Pazifik verlaufende Datumsgrenze und auch eine Zeitzonengrenze von West nach Ost überquerte. Beim Überqueren der Datumsgrenze von West nach Ost ist die Datumsangabe um einen Tag zurückzuverlegen und beim Überqueren der Zeitzonengrenze von West nach Ost stellte der Vater seine Zonenzeit anzeigende Uhr notwendigerweise um eine Stunde vor.

Wie alt?

Die einzigen Produktdarstellungen von 1991 sind $1 \cdot 1991$ und $11 \cdot 181$. Grit ist 11 Jahre, die Uroma 89 und der Uropa 92 Jahre alt.

Lösungen zur Leserpost

1. a) z. B. 199^0 b) $9^{9^{10}}$

2. Keine! Diese Kugel hätte eine Masse

$$\text{von } m = V \cdot \rho = \frac{\pi}{6} d^3 \cdot \rho = \frac{\pi}{6} \cdot 1^3 \text{ m}^3 \\ \times 0,25 \text{ tm}^{-3} = 0,13 \text{ t} \approx 130 \text{ kg!}$$

3. Nehmen wir an, daß solche zwei Punkte

mit einer Entfernung voneinander $p \geq \frac{V}{\lambda a^2}$ nicht bestehen. Dann besteht eine Kugel mit einem Radius $\frac{V}{\lambda a^2}$, in der M gänzlich

enthalten ist und wir können notieren, daß $\frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{V}{\lambda a^2}\right)^3 > V$. Da $\pi < 4$ ist,

bekommen wir von der letzten Ungleichung, daß $\frac{16}{3} \cdot \frac{V^3}{\lambda^3 a^6} > V$, oder

$$V^2 > \frac{3}{16} \cdot a^6 \cdot \lambda^3. \text{ Dann}$$

$$V > a^3 \cdot \sqrt{\frac{3\lambda^3}{16}} > a^3, \text{ für } \lambda > \frac{2}{3} \sqrt[3]{18}.$$

Es stellt sich heraus, daß das Volumen von M größer als das Volumen des Kubus ist (Kantenlänge a). Das Letzte ist unmöglich, weil der Polyeder M gänzlich im Kubus mit der Kantenlänge a liegt.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

$$4. \widehat{\angle DAC} = \frac{\beta}{2} \text{ (über } \widehat{DC} \hookrightarrow \widehat{\angle DAB} = 118^\circ$$

$$\widehat{\angle DCB} = 62^\circ \text{ (Gegenwinkel)} \quad \widehat{\angle ADC} = 100^\circ \text{ (Gegenwinkel)}$$

5. Wegen $7056 = 84^2$ gilt $x^2 + 84^2 = z^2$.

Es handelt sich also um pythagoreische Zahlentripel.

Für $x^2 + y^2 = z^2$ gilt

$$\left. \begin{array}{l} x = p^2 - q^2 \\ y = 2pq \\ z = p^2 + q^2 \end{array} \right\} p, q = \text{ganze Zahlen} \neq 0,$$

also ist $2pq = 84$ oder $pq = 42$.

Die Wurzeln heißen:

x	y	z
13	84	85
187	84	205
437	84	445
1763	84	1765

XXXI. Internationale Mathematikolympiade

Peking, 8. bis 19. Juli 1990

Aufgaben

1. Die Sehnen AB und CD eines Kreises schneiden sich im Punkt E im Innern des Kreises. Sei M ein innerer Punkt der Strecke EB . Die Tangente in E an den Kreis durch D , E und M schneidet die Geraden BC und AC in F und G . Ist $t = \overline{AM}/\overline{AB}$, so bestimme man $\overline{EG}/\overline{EF}$ als Funktion von t .

2. Seien $n \geq 3$ eine natürliche Zahl und E eine Menge von $2n - 1$ verschiedenen Punkten eines Kreises. Genau k dieser Punkte werde schwarz gefärbt. Eine solche Färbung heißt gut, wenn es mindestens ein Paar schwarzer Punkte gibt, so daß mindestens einer der Bögen zwischen ihnen im Innern genau n Punkte von E enthält. Man bestimme die kleinste Zahl k , so daß jede Färbung von k Punkten von E gut ist.

3. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n > 1$ für die

$$\frac{2^n + 1}{n^2}$$

eine ganze Zahl ist.

4. Sei Q^+ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

Man konstruiere eine Funktion f :

$Q^+ \rightarrow Q^+$, so daß

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y} \text{ für alle } x, y \in Q^+.$$

5. Gegeben sei eine natürliche Zahl $n_0 > 1$. Zwei Spieler A und B wählen abwechselnd natürliche Zahlen $n_1, n_2, n_3, \dots$ gemäß den folgenden Regeln:

Ist n_{2k} bekannt, so wählt A eine beliebige Zahl n_{2k+1} mit

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2.$$

Ist n_{2k+1} bekannt, so wählt B eine beliebige Zahl n_{2k+2} mit

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} \text{ ist eine Primzahlpotenz.}$$

A gewinnt, wenn er 1990 wählt, B gewinnt, wenn er 1 wählt.

Für welche n_0 hat

- A eine Gewinnstrategie,
- B eine Gewinnstrategie,
- keiner von beiden eine Gewinnstrategie?

6. Man beweise, daß es ein 1990-Eck mit folgenden Eigenschaften gibt:

- alle Innenwinkel sind gleich,
- die Längen der Seiten sind die Zahlen $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 1989^2, 1990^2$ in gewisser Anordnung.

Jede Aufgabe 7 Punkte.

An der 31. IMO in China nahmen 308 Schüler aus 54 Ländern teil.

Unter ihnen befanden sich sechs Schüler aus unserer Republik.

Einen zweiten Preis (Silbermedaille) errangen:

Thomas Mautsch, EOS „J. W. v. Goethe“, Lübben

Jan Fricke, „Willi Sänger“ OS, Pasewalk
Torsten Ehrhardt, SPS „Hans Beimler“, Chemnitz

Ingrid Voigt, Spezialschule Leipzig

Einen dritten Preis (Bronzemedaille) errangen:

Astrid Mirle, SPS „F. Engels“, Riesa
Rüdiger Belch, SPS „Hans Beimler“, Chemnitz.

An zwei Klausurtagen mußten alle Teilnehmer sechs anspruchsvolle Aufgaben aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik lösen.

Delegationsleiter:

Prof. Dr. Gustav Burosch

Universität Rostock

Stellv. Delegationsleiter:

Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau,

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

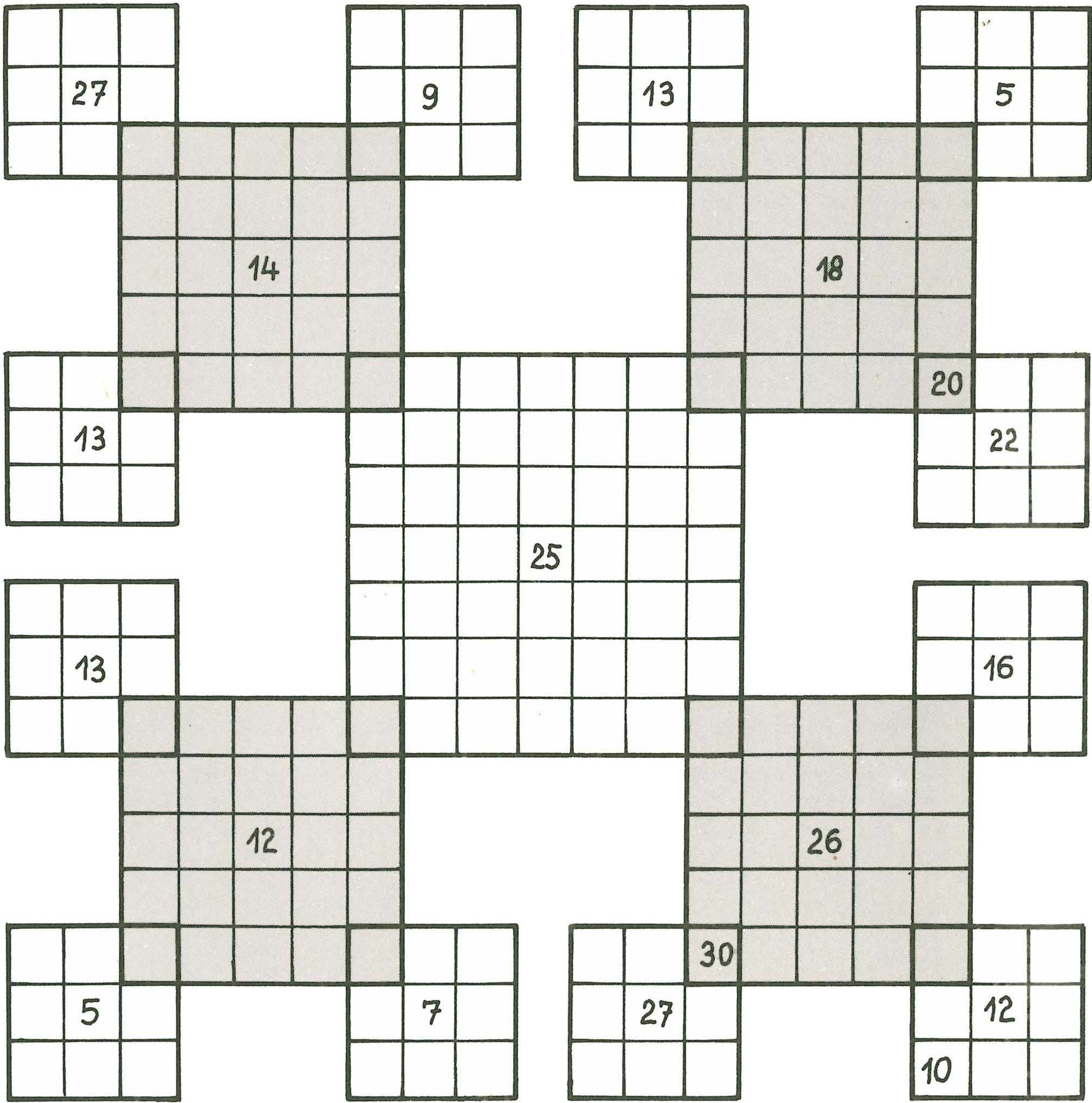
Platz	Land	1.	2.	3.
1.	China	5	1	–
2.	UdSSR	3	2	1
3.	USA	2	3	–
4.	Rumänien	2	2	2
5.	Frankreich	3	1	–
6.	Ungarn	1	3	2
7.	DDR	–	4	2
8.	ČSFR	–	5	1
9.	Bulgarien	1	4	1
10.	Großbritannien	2	–	2
11.	Kanada	–	3	1
12.	BRD	–	2	4
13.	Italien	1	1	4
14.	Australien	–	2	4
	Iran	–	4	–
	Österreich	–	1	4
17.	Indien	1	1	2
18.	Norwegen	–	3	1
19.	KVDR	–	1	3
20.	Japan	–	2	1
	:			

Die 32. IMO findet in Schweden statt.

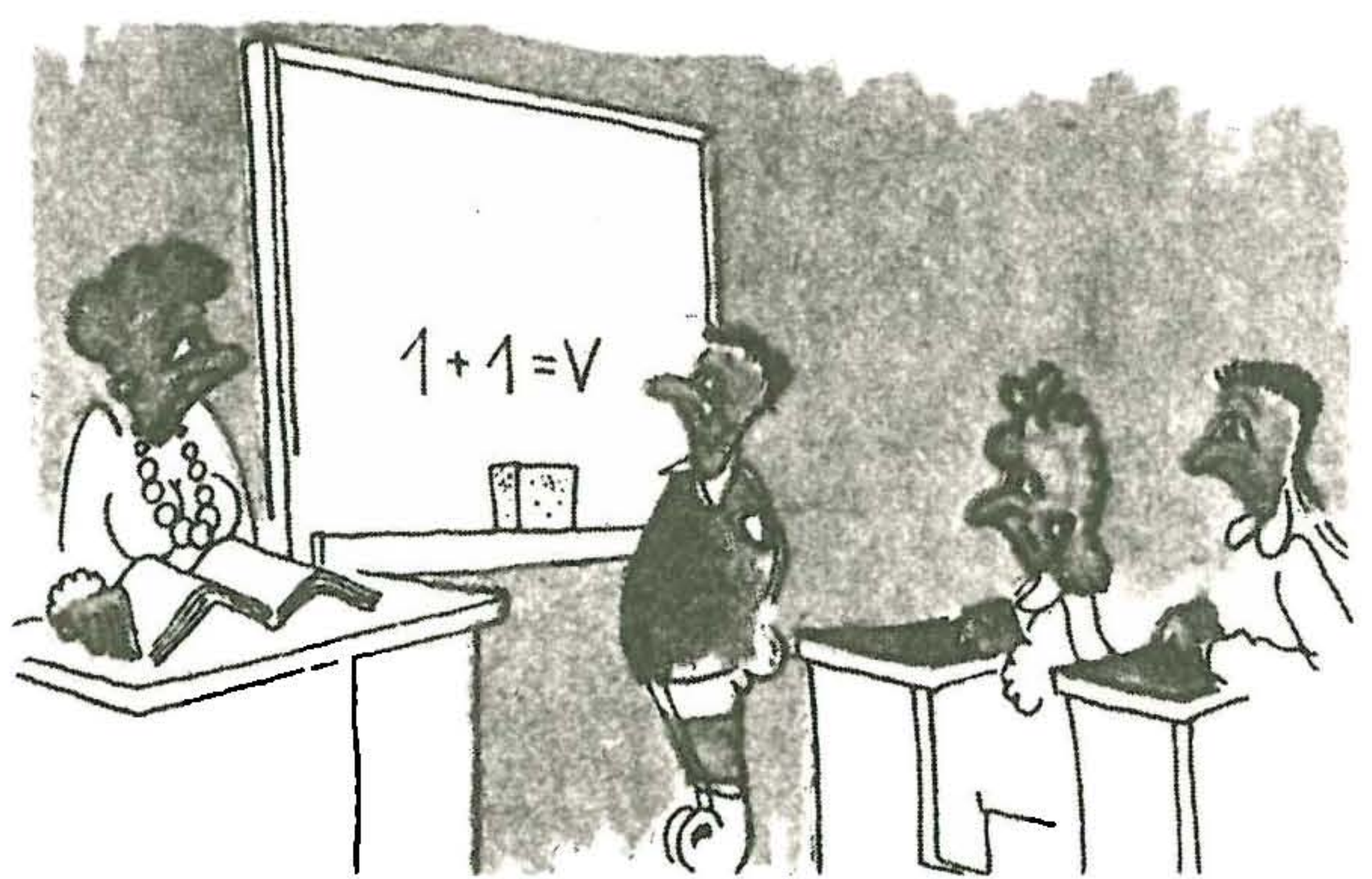
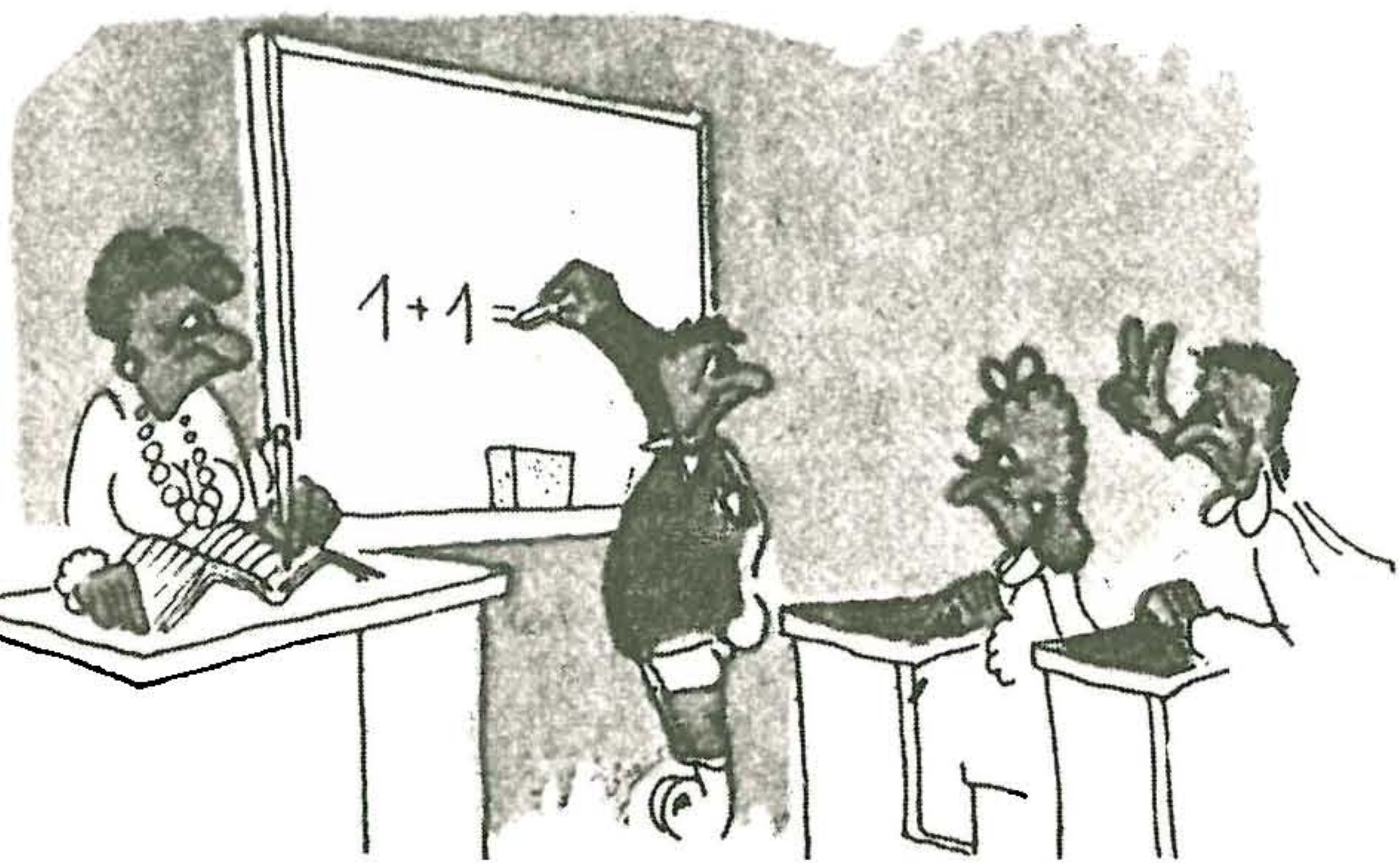
Quadratkomposition

Setzt die Zahlen von 0 bis 50 so in die Quadratkomposition ein, daß sich jeweils magische Quadrate ergeben.

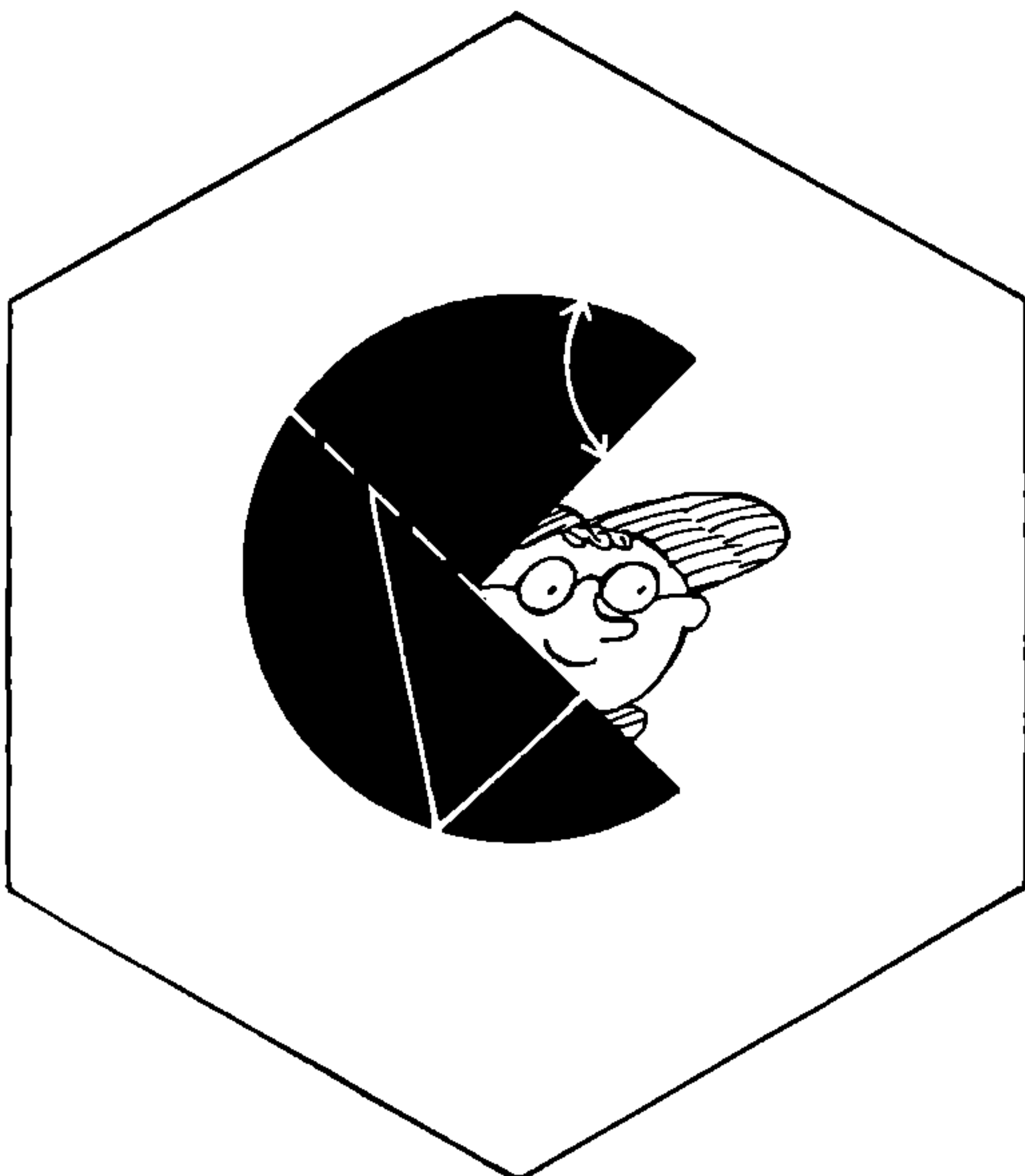
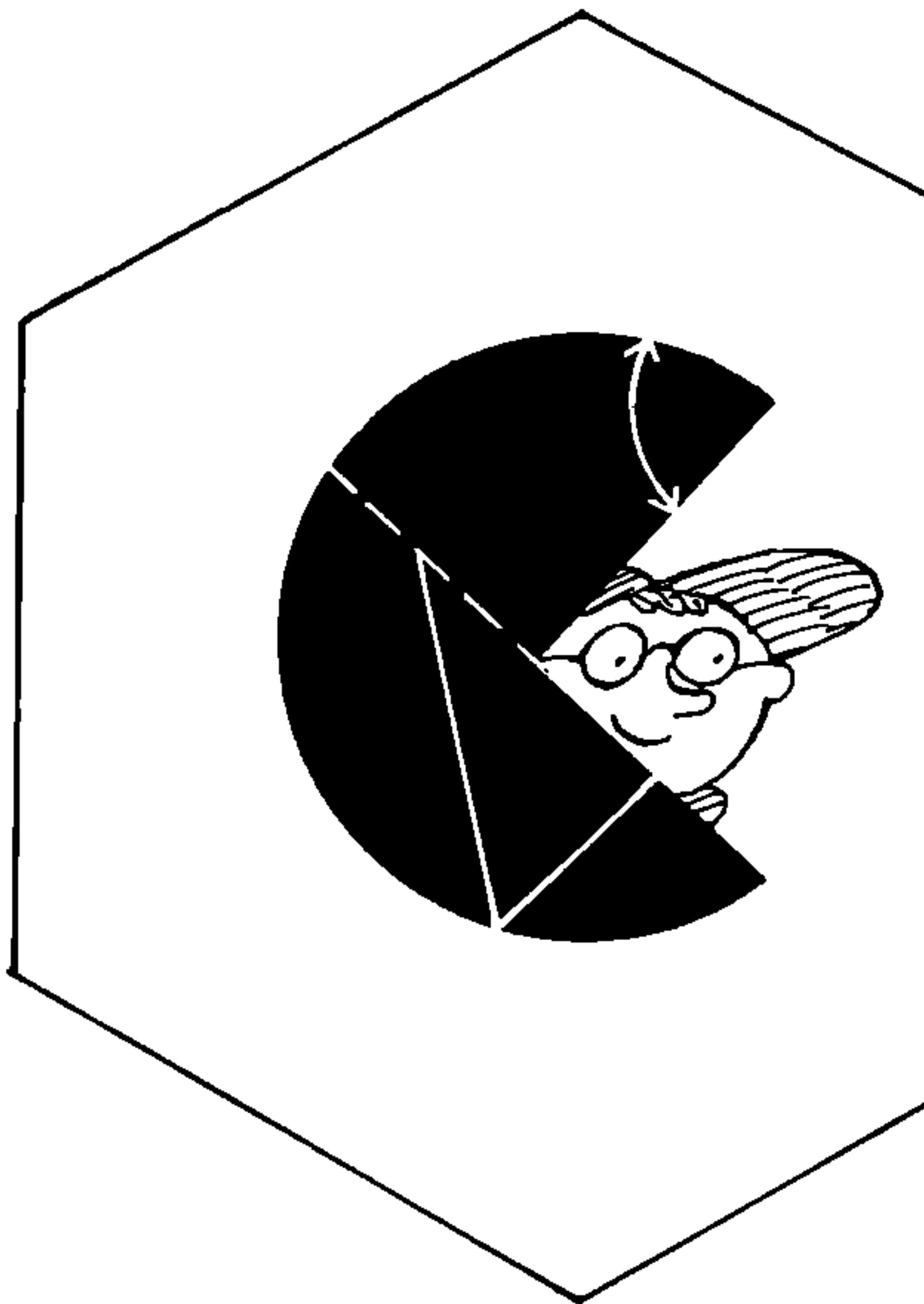
K. Ernst, Erfurt



Czesław Przekaz, aus: Eulenspiegel, Berlin



Jahreskalender 1991



2	JANUAR 1991					FEBRUAR					ω	
	Mo	7	14	21	28	Mo	4	11	18	25		
	Di	1	8	15	22	29	Di	5	12	19		26
	Mi	2	9	16	23	30	Mi	6	13	20		27
	Do	3	10	17	24	31	Do	7	14	21		28
	Fr	4	11	18	25	Fr	1	8	15	22		
	Sa	5	12	19	26	Sa	2	9	16	23		
So	6	13	20	27	So	3	10	17	24			
	MÄRZ 1991					APRIL					ω	
	Mo	4	11	18	25	Mo	1	8	15	22		29
	Di	5	12	19	26	Di	2	9	16	23		30
	Mi	6	13	20	27	Mi	3	10	17	24		
	Do	7	14	21	28	Do	4	11	18	25		
	Fr	1	8	15	22	29	Fr	5	12	19		26
	Sa	2	9	16	23	30	Sa	6	13	20		27
So	3	10	17	24	31	So	7	14	21	28		
2	MAI 1991					JUNI					ω	
	Mo	6	13	20	27	Mo	3	10	17	24		
	Di	7	14	21	28	Di	4	11	18	25		
	Mi	1	8	15	22	29	Mi	5	12	19		26
	Do	2	9	16	23	30	Do	6	13	20		27
	Fr	3	10	17	24	31	Fr	7	14	21		28
	Sa	4	11	18	25	Sa	1	8	15	22		29
So	5	12	19	26	So	2	9	16	23	30		
2	JULI 1991					AUGUST					ω	
	Mo	1	8	15	22	29	Mo	5	12	19		26
	Di	2	9	16	23	30	Di	6	13	20		27
	Mi	3	10	17	24	31	Mi	7	14	21		28
	Do	4	11	18	25	Do	1	8	15	22		29
	Fr	5	12	19	26	Fr	2	9	16	23		30
	Sa	6	13	20	27	Sa	3	10	17	24		31
So	7	14	21	28	So	4	11	18	25			
2	SEPTEMBER 1991					OKTOBER					ω	
	Mo	2	9	16	23	30	Mo	7	14	21		28
	Di	3	10	17	24	Di	1	8	15	22		29
	Mi	4	11	18	25	Mi	2	9	16	23		30
	Do	5	12	19	26	Do	3	10	17	24		31
	Fr	6	13	20	27	Fr	4	11	18	25		
	Sa	7	14	21	28	Sa	5	12	19	26		
So	1	8	15	22	29	So	6	13	20	27		
2	NOVEMBER 1991					DEZEMBER					ω	
	Mo	4	11	18	25	Mo	2	9	16	23		30
	Di	5	12	19	26	Di	3	10	17	24		31
	Mi	6	13	20	27	Mi	4	11	18	25		
	Do	7	14	21	28	Do	5	12	19	26		
	Fr	1	8	15	22	29	Fr	6	13	20		27
	Sa	2	9	16	23	30	Sa	7	14	21		28
So	3	10	17	24	So	1	8	15	22	29		

Die Idee zu diesem Kalender in Form eines sechsseitigen Prismas entnahmen wir der Zeitschrift „Mathematics in School“, herausgegeben von der englischen mathematischen Gesellschaft „The Mathematical Association“.