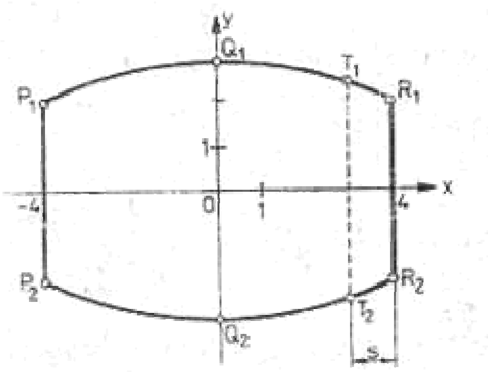
DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1979/80)

Pflichtaufgaben

1. In einem Koordinatensystem sind die Punkte A(1;1;1), B(2; 5; 2), C(1; 4; -2) und D(0; 0; -3) gegeben.
a) Geben Sie die Vektoren *AB* und *CD* in Komponenten- oder Koordinatendarstellung an! Weisen Sie nach, dass diese Vektoren parallel zueinander sind!
b) Berechnen Sie den $\angle$ BAD !
c) Durch die Punkte A und C geht die Gerade g_1, durch B und D die Gerade g_2. Stellen Sie für die Geraden g_1 und g_2 je eine Gleichung auf! Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 und g_2!
d) Die Gerade g_1 durchstößt die xy-Ebene im Punkt P_0. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_0!

2. Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = {}^1/_6\, x\,(x-3)^2 \quad (x \in R)$
a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f!
b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Bildes der Funktion f! Untersuchen Sie die Art der Extrema!
c) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $-1 \le x \le 6$!
d) Im Koordinatenursprung ist die Tangente t an das Bild der Funktion f gelegt. Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!
e) Die Tangente t und das Bild der Funktion f haben außer dem Berührungspunkt nur den Punkt $P_1(6; y_1)$ gemeinsam. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f und der Tangente vollständig begrenzt wird.

3. Die Skizze zeigt den Achsenschnitt eines Fasses. Die Bögen $P_1Q_1R_1$ bzw. $P_2Q_2R_2$ werden durch die Parabeln $y = -{}^1/_{16}\, x^2 + 3$ bzw. $y = {}^1/_{16}\, x^2 - 3$ im Intervall $-4 \le x \le 4$ beschrieben. (Koordinateneinheit: 1 dm)



a) Berechnen Sie den Durchmesser des Fassbodens!
b) In welchem Abstand s vom Fassboden beträgt der Durchmesser T_1T_2 des Fasses 5,0 dm?
c) Die Bögen des Achsenschnittes lassen sich durch Bögen der Ellipse annähern, die durch die Punkte P_1, Q_1 und R_1 geht und deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung O liegt. Stellen Sie die Gleichung dieser Ellipse auf!

4. Vor einer Werkhalle soll ein rechteckiger Lagerplatz mit einem Flächeninhalt von 450 m² angelegt werden. Dazu ist der Platz an drei Seiten mit einem Zaun zu umgeben, an der vierten Seite wird er durch einen Teil der Werkhalle vollständig begrenzt. Die Abmessungen des Platzes sollen so gewählt werden, dass die Gesamtlänge des Zaunes minimal wird. Berechnen Sie für diesen Fall die Gesamtlänge des Zaunes!

5. Kurzaufgaben:
a) Berechnen Sie $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}$ und $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{i}$!
b) Weisen Sie nach, dass die Folge (a_n) mit $a_n = n/(n-1)$, $n>1$, eine monoton fallende Folge ist!
c) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion $y = f(x) = \ln(x+2)$ an!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Gegeben sind Funktionen durch $y = f(x) = x\, e^{ax}$ (x, a $\in$ R und a > 0)

a) Das Bild jeder dieser Funktionen hat genau eine lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie seine Koordinaten! Ermitteln Sie die Art des Extremums.

b) Bilden Sie die dritte Ableitung der Funktion f(x) !

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung dieser Funktion gilt: $f^{(n)}(x) = a^{n-1} e^{ax} (n + ax)$!

7. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = \sin 2x + 2 \cos x$ ($x \in R$; $0 \leq x \leq \pi$)

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f!

b) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Bildes der Funktion f !
Untersuchen Sie die Art der Extrema!

c) Berechnen Sie f(0) und f(π)
Skizzieren Sie das Bild der Funktion f !

d) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral: $\int(\sin 2x + 2 \cos x)dx$!

8. Die Gleichung einer monoton fallenden Funktion sei $y = f(x) = 6 / \sqrt{(3x + 4)}$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an!

b) Ergänzen Sie für diese Funktion die folgende Wertetabelle:

X	1	0		7
Y			1,5	

Skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $-1 \leq x \leq 7$!

c) Das Bild der Funktion f , die Koordinatenachsen und die Gerade x = 7 begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt A_1 dieser Fläche!

d) Das Bild der Funktion f, die Koordinatenachsen und eine Gerade x = b (b > 0) begrenzen eine Fläche vollständig.
Ermitteln Sie b für den Fall, dass der Inhalt A_2 dieser Fläche 8 FE beträgt!

e) Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$!

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1980/81)

Pflichtaufgaben

1. Gegeben ist die Ellipse mit den Scheitelpunkten A_1 (5; 0), A_2 (-5; 0), B_1 (0; $^5/_2$) und B_2 (0; -$^5/_2$)
a) Geben Sie die Gleichung diese Ellipse an!
Konstruieren Sie mindestens 12 Punkte dieser Ellipse, und zeichnen Sie die Ellipse!
b) Im Punkt P_0 (3; 2) dieser Ellipse sei die Tangente t an die Ellipse gelegt.
Stellen Sie die Gleichung dieser Tangente auf!
c) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g, die durch P_0 geht und senkrecht auf der Tangente t steht!
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes Q der Geraden g mit der x-Achse!

2. Bei einer Übung der NVA soll vom Stab einer Einheit im Punkt S (0; 0; 1) eine Verbindung zum Raketenstützpunkt P (10; 50; 0) durch Richtfunk hergestellt werden.
(Koordinateneinheit: 1 km)
a) Berechnen Sie die Entfernung SP vom Stab der Einheit zum Raketenstützpunkt!
b) Im Punkt R_1 (0; 10; 1) wird eine Richtfunkstation eingerichtet.
Berechnen Sie den Winkel α zwischen den Vektoren R_1S und R_1P!
c) Zur Verbesserung der Empfangsqualität wird im Punkt R_2 (5; 30; 0,5) eine Richtfunkstation zwischengeschaltet.
Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte R_1 und R_2 geht!
Weisen Sie nach, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt!

3. Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch: $a_n = {}^1 / (2_n - 1)$ (n > 0).
a) Geben Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Folge an!
Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!
b) Für das n-te Glied der Partialsummenfolge (s_n) gilt: $s_n = 2 - ({}^1/ (2^{n-1}))$
Beweisen Sie diese Behauptung durch vollständige Induktion!
c) Geben Sie den Grenzwert g der Partialsummenfolge (s_n) an!

4. Gegeben ist eine Funktion f durch: $y = f(x) = {}^x/_2 + {}^2/_x$; ($x \in R$; $x \neq 0$).
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Bildes der Funktion f, und untersuchen Sie die Art der Extrema!
b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f keine Nullstellen hat!
c) Berechnen Sie f(1) und f(4), und skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $1 \leq x \leq 4$!
d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild der Funktion f, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = 4 vollständig begrenzt wird!

5. Kurzaufgaben:
a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) * (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ für $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$!
b) Ermitteln Sie $\int\sqrt{(3x - 6)}\, dx$ ($x \in R$; $x \geq 2$)!
c) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $y = f(x) = e^x \sin 2x$ ($x \in R$)!
Berechnen Sie f'(0)!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Ein Kondensator wird über einen Widerstand entladen. Die Maßzahl U der Kondensatorspannung lässt sich als Funktion der Maßzahl t der Zeit beschreiben durch $U = f(t) = U_0 * e^{-0,5t}$ ($t \in R$; $t \geq 0$).
Dabei sind die Spannung in Volt und die Zeit in Sekunden gemessen.)
U_0 ist die Maßzahl der Spannung für t = 0. Es sei $U_0 = 800$.
a) Berechnen Sie $U_2 = f(2)$ und $U_4 = f(4)$!
b) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f im Intervall $0 \leq t \leq 4$!
c) Nach welcher Zeit beträgt die Spannung des Kondensators 20 Volt?

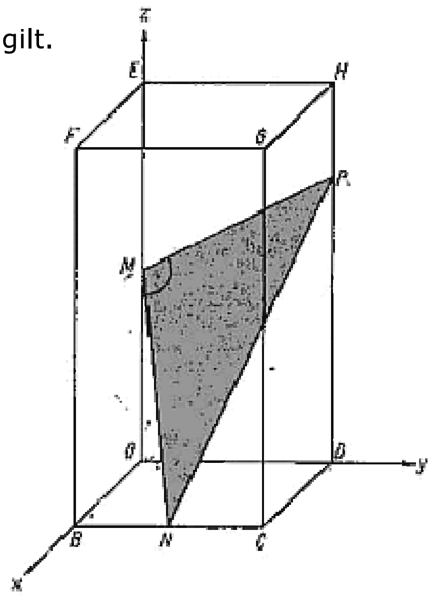
d) Für den Mittelwert U_M der Maßzahl der Spannung im Intervall $t_1 \le t \le t_2$ gilt:

$$U_M = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

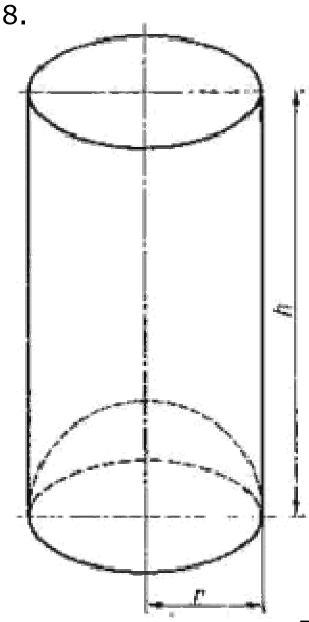
Berechnen Sie U_M für das Intervall $0 \le t \le 4$!

7. Die Skizze zeigt ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche OBCD in einem Koordinatensystem {O; ***i***, ***j***, ***k***}.
Es gilt: OB = a Längeneinheiten, OE = 2a Längeneinheiten. M sei der Mittelpunkt der Kante OE, N der Mittelpunkt der Kante BC. Skizze (nicht maßstäblich).

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte M und N an!
b) Auf der Kante DH liegt ein Punkt P derart, dass MP ⊥ MN gilt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P
c) Berechnen Sie a für den Fall, dass das rechtwinklige Dreieck MNP den Flächeninhalt A = 6√5 Flächeneinheiten hat!



8.



Ein oben offener zylindrischer Behälter hat als Boden eine nach innen gewölbte Halbkugel (siehe Skizze!).
Der Behälter hat den Oberflächeninhalt A (A konstant).
(Die Oberfläche besteht aus Zylindermantel und Oberfläche der Halbkugel.)

Berechnen Sie den Radius r der Halbkugel in Abhängigkeit von A für den Fall, dass das Fassungsvermögen des Behälters maximal wird! (Die Wandstärke bleibt unberücksichtigt.)
Skizze nicht maßstäblich.

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1981/82)

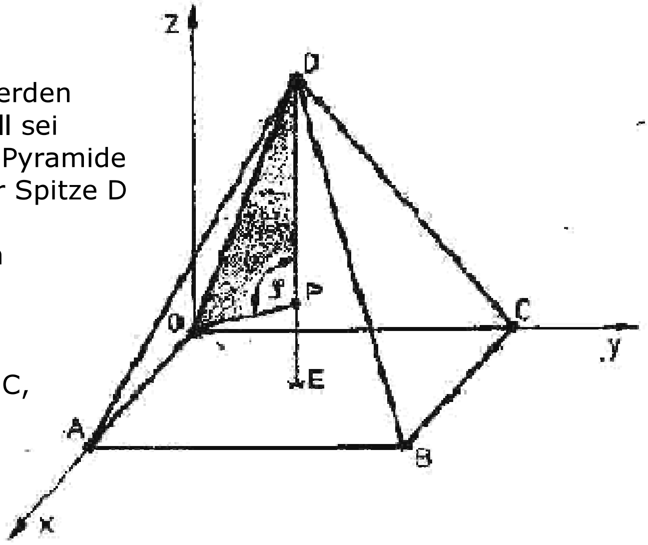
Pflichtaufgaben

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist der Kreis k gegeben. Sein Mittelpunkt liegt im Koordinatenursprung, sein Radius beträgt $2\sqrt{5}$ Längeneinheiten.
a) Zeichnen Sie den Kreis k! Geben Sie eine Gleichung des Kreises k an!
b) A (x_1; 4) und B (x_1; -4), $x_1 > 0$, sind Punkte des Kreises k.
Ermitteln Sie eine Gleichung der im Punkt A an den Kreis k gelegten Tangente t!
Zeichnen Sie die Tangente t ein!
c) Zeichnen Sie durch den Punkt B die Parallele g zur Tangente t!
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an!
d) Die Gerade g schneidet den Kreis k in den Punkten B und C. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C!

2. Die Gleichung einer Funktion f sei $y = f(x) = {}^{(2x2 - 8)} / x^2$
a) Ermitteln Sie Nullstellen und Polstelle der Funktion f!
b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen!
c) Weisen Sie nach, dass die Funktion f keine lokalen Extrema hat!
d) Skizzieren Sie das Bild (den Graph) der Funktion f im Intervall $-5 \leq x \leq +5$!
e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Bild (Graph) der Funktion f, von der x-Achse und den Geraden x = 4 und x = 5 vollständig begrenzt wird!

3. Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch
$a_n = {}^1 / {}_{(2n(n+1))}$ $(n > 0)$.
a) Berechnen Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Zahlenfolge!
b) Weisen Sie nach, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist!
c) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!
d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt:
$s_n = n / (2(n+1))$.

4.
Bei einer Untersuchung von Molekülstrukturen werden Punktmodelle betrachtet. Ein solches Punktmodell sei durch die Eckpunkte O, A, B, C, D einer geraden Pyramide mit der quadratischen Grundfläche OABC und der Spitze D gegeben (siehe Skizze!).
Pyramidenhöhe und jede Seite der quadratischen Grundfläche haben die gleiche Länge von je 4 Längeneinheiten.
Skizze nicht maßstäblich!



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D an!
b) Berechnen Sie die Entfernung OD!
c) Auf der Pyramidenhöhe ED existiert ein Punkt P (2; 2; z_p), für den gilt: PO = PD.
Berechnen Sie z_p!
d) Berechnen Sie den Winkel $\varphi = \angle$ OPD!

5. Kurzaufgaben
a) Berechnen Sie den Binomialkoeffizienten $\binom{10}{3}$!
b) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \ln(\sin x)$ $(x \in R; 0 < x < \pi)$.
Berechnen Sie $f'(\pi/2)$!
c) Berechnen Sie $\int(\cos 3x)dx$!

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = \cos 2x - 8\sin x - 1 \quad (x \in R;\ 0 \le x \le \pi)$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f!

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Bildes (Graphen) der Funktion f!
Untersuchen Sie die Art des Extremums!

c) Berechnen Sie f ($\pi/4$) und f ($0{,}75\pi$!
Skizzieren Sie das Bild den Graph) der Funktion f!

d) Gegeben seien Funktionen g durch
$y = g(x) = a*(\cos 2x - 8 \sin x - 1)$ $(x \in R;\ 0 \le x \le \pi;\ a \in R;\ a \neq 0)$.
Berechnen Sie den Wert des Parameters a für den Fall, dass die im Punkt P_0 ($\pi/6$; y_0) an das Bild (den Graph) der Funktion g gelegte Tangente den Anstieg $m = \sqrt{3}$ hat!

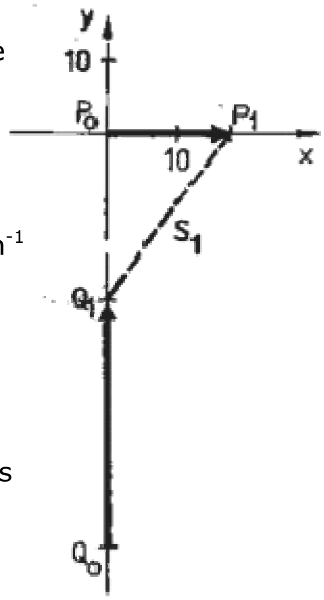
7. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = 4 / (2x - 3) \quad (x \in R;\ x > 1{,}5)$.

a) Zeichnen Sie das Bild (den Graph) der Funktion f im Intervall $2 \le x \le 6$!

b) Ermitteln Sie alle x, für die $f(x)<1$ ist!

c) Die Tangente im Punkt P_0 (x_0; y_0) an das Bild (den Graph) von f hat den Anstieg $m = -2$.
Berechnen Sie die Koordinaten von P_0!
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an!

d) Das Bild (der Graph) der Funktion f, die x-Achse sowie die Geraden $x = 2$ und $x = 6$ begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!
Durch eine Gerade $x = a$ (a R; $2 < a < 6$) wird diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Berechnen Sie a!



8. In der nebenstehenden Skizze sind die Bewegungen zweier Schiffe P und Q bezogen auf ein Koordinatensystem (Koordinateneinheit: 1 km) dargestellt.
Die Schiffe P und Q befinden sich anfangs ($t_0 = 0$) in den Punkten P_0 (0; 0) bzw. Q_0 (0; -50) (siehe Skizze). Das Schiff P fährt mit der konstanten Geschwindigkeit 15 km * h^{-1} in Richtung Osten, das Schiff Q mit der konstanten Geschwindigkeit 30 km * h^{-1} in Richtung Norden.
Nach t Stunden befinden sich folglich das Schiff P im Punkt P(15 t; 0) und das Schiff Q im Punkt Q(0; 30 t - 50).

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und Q_1 an, in denen sich die Schiffe nach einer Stunden ($t_1 = 1$) befinden! Ihre Entfernung voneinander beträgt dann s_1 Kilometer. Berechnen Sie $s_1 = P_1Q_1$!

b) Wie groß ist die Entfernung der Schiffe voneinander, wenn sich das Schiff Q im Punkt P_0 (0; 0) befindet?

c) Nach t Stunden sind die Schiffe s Kilometer voneinander entfernt.
Geben Sie $s=P_tQ_t$ als Funktion von t an!

d) Für welches t haben die Schiffe P und Q die kürzeste Entfernung voneinander?
Berechnen Sie diese minimale Entfernung i km!
(Hinweis auf den Nachweis des Minimums wird in dieser Aufgabe verzichtet.)

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1982/83)

Pflichtaufgaben

1. Bei einer Übung der NVA wird von einer im Koordinatenursprung 0 (0; 0; 0) befindlichen Radarstation ein Flugzeug nacheinander in den Punkten P_1 (-5; 50; 4) und P_2 (15; 30; 3) geortet. Die Bahn des Flugzeuges verläuft geradlinig. Zur Bekämpfung eines Erdziels wird vom Flugzeug aus im Punkt P_2 eine Luft-Boden-Rakete abgeschossen, die sich auf einer geradlinigen Bahn mit dem Richtungsvektor a (4; -4; -2) bewegt.
(Koordinateneinheit: 1 km)

a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Bahn des Flugzeuges und die Bahn der Rakete auf!
b) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen diesen beiden Bahnen!
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_3 (x_3; y_3; 0), in dem die Rakete das Erdziel erreicht!
d) Die Rakete fliegt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 1,5 $km*s^{-1}$.
Berechnen Sie die Flugdauer für die Strecke P_2P_3!

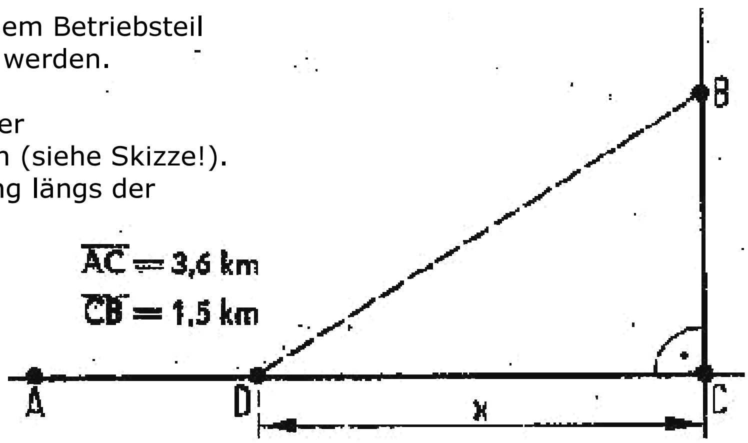
2. Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch
$a_n = 12 / ((n+3)(n+4))$; (n>0).

a) Geben Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Folge an!
b) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!
c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle n größer/gleich 1 gilt:
$s_n = 3n/(n+4)$!
d) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Partialsummenfolge (s_n)!

3. Gegeben sind die Funktionen f und g durch
$y = f(x) = 2\sqrt{x}$ $(x \in R; x \geq 0)$ und
$y = g(x) = 2x - 4$ $(x \in R)$.

a) Die Graphen der Funktionen f und g schneiden einander in genau einem Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S!
b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $0 \leq x \leq 5$!
c) Die Graphen der Funktionen f und g und die y-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie denn Inhalt dieser Fläche!
d) Es gibt eine Tangente t an den Graph der Funktion f, die parallel zum Graph der Funktion g verläuft.
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes P_0 dieser Tangente t!

4. Von einem Betrieb A soll nach einem Betriebsteil B eine Versorgungsleitung gelegt werden. A und B liegen an zwei geradlinig verlaufenden Straßen, die einander im Punkt C rechtwinklig schneiden (siehe Skizze!). Die Kosten für den Bau der Leitung längs der Straßen AC und CB mit 40 TM je Kilometer und im Gelände mit 50 TM je Kilometer zu veranschlagen.
(1 TM = 1000 Mark)
Skizze nicht maßstäblich.



a) Berechnen Sie die Kosten K_1 für den Fall, dass die Leitung längs der Straßen von A über C nach B verlegt wird!
b) Berechnen Sie die Kosten K2 für den Fall, dass die Leitung im Gelände geradlinig von A nach B verlegt wird!
c) Die Kosten können dadurch gesenkt werden, dass die Versorgungsleitung von A längs der Straße bis zu einem Punkt D und von D im Gelände geradlinig von B verlegt wird (siehe Skizze!).

Berechnen Sie die Länge x der Strecke DC für den Fall, dass die Kosten minimal werden!
Wie hoch sind diese Kosten?
(Hinweis: Auf dem Nachweis des Minimums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

5. Kurzaufgaben

a) Ein Kreis ist gegeben durch die Gleichung $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r des Kreises!

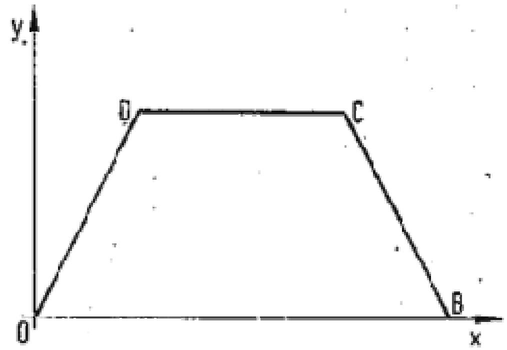
b) Berechnen Sie die Anzahl aller Permutationen der Elemente a, b, c, d, e!
Wie viele dieser Permutationen beginnen mit dem Element b?

c) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2}$!

Wahlaufgaben

(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Gegeben sind Trapeze mit den Eckpunkten
0 (0; 0), B (4a; 0), C (3a; a√3),
D (a; a√3) (a ∈ R, a > 0) (siehe Skizze!).
Skizze (nicht maßstäblich)



a) Berechnen Sie die Länge der Seiten OD und BC!
b) Weisen Sie nach, dass die Diagonale OC senkrecht auf der Seite BC steht!
c) Weisen Sie nach, dass die Diagonale OC den Winkel $\alpha = \angle BOD$ halbiert!
d) Berechnen Sie den Parameter a für den Fall, dass das Trapez den Flächeninhalt $A = 9\sqrt{3}$ hat!

7. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = 10e^{-x}$ (x R; $0 \le x \le 4$).
a) Ermitteln Sie die Funktionswerte f (0), f (2) und f (4), und skizzieren Sie den Graph der Funktion f!
b) P (x; f (x)) sei ein Punkt des Graphen von f im Intervall $0 \le x \le 4$. Fällt man von P die Lote auf die Koordinatenachsen, so entsteht ein Rechteck mit den Seiten x und f (x). Der Flächeninhalt dieses Rechtecks sei A.
Geben Sie A als Funktion von x an!
Berechnen Sie x für den Fall, dass A maximal wird!
c) Gegeben sind Funktionen durch
$y = g(x) = e^{-ax}$ (x ∈ R; a ∈ R; a > 0).
Die Graphen dieser Funktionen gehen durch den Punkt P_1 (0; 1).
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangenten, die in P_1 an die Graphen der Funktionen gelegt werden können!
d) Genau eine dieser Tangenten schneidet die x-Achse im Punkt P_2 (3; 0).
Berechnen Sie für diese Tangente den Wert des Parameters a!

8. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = x(2 - \ln x)$ (x ∈ R; $1 \le x \le 8$).
a) Berechnen Sie f (1) und f (8)!
b) Die Funktion f hat genau eine Nullstelle. Berechnen Sie diese Nullstelle!
c) Der Graph von f hat genau einen lokalen Extrempunkt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Extrempunktes!
Weisen Sie die Art des Extremums nach! Skizzieren Sie den Graph der Funktion f!
d) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit
$y = F(x) = (^{5}/_{4}\, x^{2)} - 0{,}5x^2 \ln x$ (x ∈ R; $1 \le x \le 8$) eine Stammfunktion von f ist!
e) Gegeben sind Funktionen durch
$y = g(x) = x(a - \ln x)$ (x ∈ R; a ∈ R; a ungleich 0).
P_1 (1; a) ist ein Punkt der Graphen dieser Funktionen. Ermitteln Sie den Parameter a für den Fall, dass die Tangente in P_1 an den Graph der entsprechenden Funktion den Anstieg m = 1 hat!

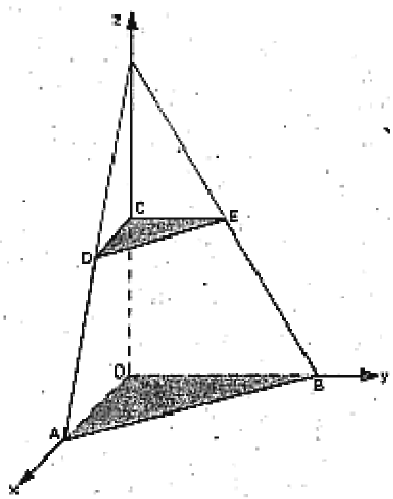
DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1983/84)

Pflichtaufgaben

1. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = x^2 - {}^1/_3 * x^3 \qquad (x \in R)$
a) Berechnen Sie die Nullstellen von f!
b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f! Untersuchen Sie die Art dieser Extrema!
c) Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $-2 \leq x \leq 4$!
d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph der Funktion f und der x-Achse vollständig begrenzt wird!

2: Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = \ln(2x - 1) \qquad (x \in R ; x > 0{,}5)$.
a) Berechnen Sie die Nullstelle x_0 von f!
b) Berechnen Sie die Funktionswerte f(0,6), f(2) und f(4)! Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $0{,}6 \leq x \leq 4$!
c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graph der Funktion f im Punkt $P_0\ (x_0;\ 0)$!
d) Der Punkt M (0; 3) ist Mittelpunkt des Kreises k mit dem Radius $r = \sqrt{5}$. Zeichnen Sie den Kreis in die Skizze ein! Stellen Sie die Gleichung des Kreises k auf!
e) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Tangente t auch den Kreis k berührt!

3. Die Punkte O, A, B, C, D, E sind Eckpunkte eines Pyramidenstumpfes mit OA || CD und OB || CE (siehe Skizze!).
Es gilt:
OA = OB = 6,0 cm
CD = CE = 3,0 cm
OC = 3,0 cm
Skizze (nicht maßstäblich)



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E an!
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Diagonalen AE und BD!
c) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Diagonalen AE und BD!
d) Weisen Sie nach, dass die Strecke OS orthogonal zur Diagonalen AE ist!

4. Eine Zentrifuge läuft mit einer Drehzahl von a_0 Umdrehungen pro Minute. Nach Abschalten des Stromes verringert sich die Drehzahl und nimmt nach 1 Sekunde den Wert a_1 Umdrehungen pro Minute an, nach k Sekunden den Wert a_k Umdrehungen pro Minute.
a) Die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sind Glieder einer geometrischen Folge. Berechnen Sie die Glieder a_2 und a_3 dieser Folge für den Fall, dass $a_0 = 1\,250$ und $a_1 = 1\,000$ gilt!
b) Die Drehzahl y Umdrehungen pro Minute nach t Sekunden kann auch beschrieben werden durch eine Exponentialfunktion der Form
$y = f(t) = 1\,250 * e^{-ct} \qquad (t \in R,\ t \geq 0;\ c \in R,\ c > 0)$.
Berechnen Sie c für den Fall, dass f(1) = 1 000 gilt!
Berechnen Sie für diesen Fall f(3)!

5. Kurzaufgaben
a) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = (1 - x^2) / e^{3x} \qquad (x \in R)$.
Berechnen Sie f'(0)!
b) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 5}{1 + 2x - 3x^2}$!

c) Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, in denen die auftretenden Ziffern ungerade und voneinander verschieden sind?

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = 10 / (1 + x)$ $(x \in R; x \geq 1)$.

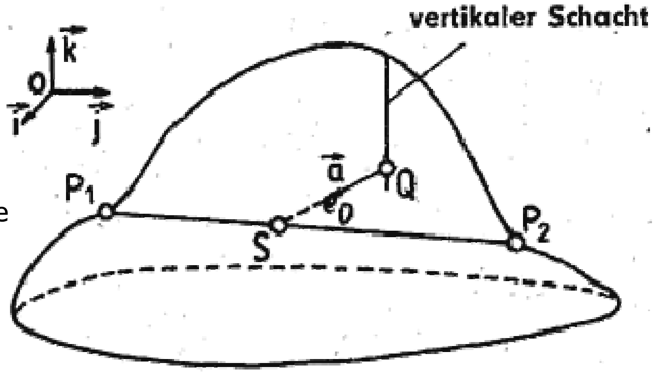
a) Berechnen Sie die Funktionswerte f(1), f(2), f(4) und f(7)!
Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $1 \leq x \leq 7$!

b) Der Graph von f, die x-Achse sowie die Geraden x = k und x = k + 1 begrenzen die Fläche mit dem Inhalt A_K vollständig (k = 1, 2, 3, ..., n, ...).
Berechnen sie A_1, A_2, A_3 und A_n!

c) A_1, A_2, A_3, ... bilden die Glieder einer Zahlenfolge (A_n).
Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!

d) Weisen Sie nach, dass für das n-te Glied s_n der Partialsummenfolge gilt:
$s_n = 10 * \ln (^{(n+2)}/_2)$!

7. Durch einen Berg führt die geradlinige Tunnelstrecke P_1P_2 mit $P_1(100; 20; 100)$ und $P_2(400; 200; 90)$ (Skizze!).
(Koordinateneinheit: 1 m)
Skizze (nicht maßstäblich)



a) Berechnen Sie die Länge der Tunnelstrecke P_1P_2!
Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht!

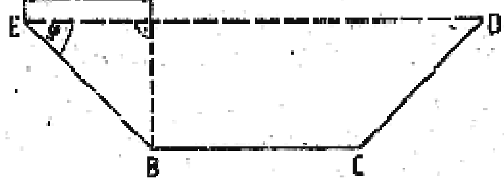
b) Von einem Punkt Q (210; 122; z_Q) eines vertikal verlaufenden Schachtes aus soll in Richtung des Vektors a = (2, -6, -3) ein geradlinig verlaufender Entlüftungsstollen gebaut werden, der den Tunnel im Punkt S trifft.
Berechnen Sie die Koordinaten von S!

c) Berechnen Sie die Höhe von z_Q, von der aus der Bau des Entlüftungsstollens begonnen werden muss!

d) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem vertikal verlaufenden Schacht und dem Entlüftungsstollens!

8. Der Querschnitt einer oben offenen Rinne ist ein gleichschenkliges Trapez mit BC = 6,8 dm und CD = BE = 4,0 dm (siehe Skizze!)
Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts für den Fall, dass DE = 12,8 dm beträgt!



b) Berechnen Sie x oder φ für den Fall, dass der Flächeninhalt des Querschnitts maximal wird! (Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.)

c) Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt!

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1984/85)

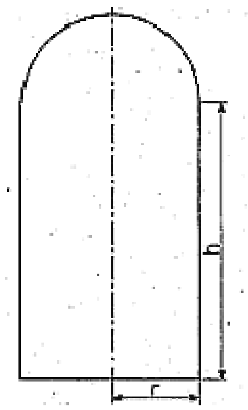
Pflichtaufgaben

1. Gegeben sind die Funktion f durch
   $y = f(x) = (2x^2 - 8) / (x^2 + 2)$ $(x \in R)$
a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und Polstellen!
b) Der Graph der Funktion f hat genau einen lokalen Extrempunkt.
   Berechnen Sie die Koordinaten dieses Extrempunktes!
   Weisen Sie die Art des Extremums nach!
c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen!
d) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-6 \leq x \leq 6$!

2. In einem räumlichen Koordinatensystem {***0; i; j; k***} sind die Punkte
   A (5; 1; -6), B(1; 3; -2) und C (1; -2; -4) gegeben.
a) Berechnen Sie den Winkel $\alpha = \angle BCA$!
b) Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte A und B geht!
c) In der yz-Ebene existiert genau ein Punkt P, für den gilt: CP || AB .
   Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P!

3. Eine Zahlenfolge (a_n) ist gegeben durch
   $a_n = n(3n + 1)$ $(n \geq 1)$.
a) Geben Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 dieser Folge an!
b) Begründen Sie, dass die Folge (a_n) keine arithmetische Zahlenfolge ist!
c) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zugehörigen Partialsummenfolge (s_n)!
d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt:
   $s_n = n(n + 1)^2$.

4. Ein Silo soll die Form eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel erhalten (siehe Skizze!).
Das Fassungsvermögen des zylinderförmigen Teils ist mit $V_z = 55\ m^3$ festgelegt.
Zur Verbesserung der Nutzungseigenschaften soll die gesamte Innenfläche des Silos (Grundfläche des Zylinders und Mantelfläche des Zylinders und Fläche der Halbkugel) mit Aluminiumblech ausgekleidet werden.
Skizze (nicht maßstäblich)
Berechnen Sie den Grundkreisradius r des Zylinders für den Fall, dass möglichst wenig Blech verbraucht wird!



5. Kurzaufgaben
a) Gegeben sind die Vektoren
   a = (1, c, 2) und ***b*** = (c+4, -1, -2)
   Berechnen Sie das Skalarprodukt a * b !
   Ermitteln Sie den Parameter c für den Fall, dass die Vektoren a und b den gleichen Betrag haben!
b) Berechnen Sie $\int_0^{\pi} 2\sin\left(\frac{1}{3}x\right)dx$!
c) Eine Handballmannschaft besteht aus zehn Feldspielern und zwei Torwarten. Gleichzeitig spielen davon jeweils sechs Feldspieler und ein Torwart - sie bilden eine Formation. Der Regel entsprechend dürfen die Torwarte nicht als Feldspieler und die Feldspieler nicht als Torwart eingesetzt werden.
   Wie viele verschiedene Formationen sind damit möglich? (Die Spielpositionen der Feldspieler werden dabei nicht unterschieden.)

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = 5x * e^{-0,5x}$ ($x \in R$; $x \geq 0$).
a) Berechnen Sie die lokale Extremstelle x_E von f und $f(x_E)$!
b) Berechnen Sie f(0) und f(1) !
Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $0 \leq x \leq x_E$!
c) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = -10(x + 2) * e^{-0,5x}$ ($x \in R$; $x \geq 0$) eine Stammfunktion der Funktion f ist!
d) Berechnen Sie $\int_0^{x_E} f(x)dx$!

7. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = {}^5/_2 - \sqrt{(x + {}^1/_4)}$ ($x \in R$; $-1/4 \leq x \leq 7$)
und die Gerade g durch
$y = - {}^1/_3\, x + 2$.
a) Die Gerade g schneidet den Graph von f in den Punkten S_1 und S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2 !
b) Berechnen Sie $f(-{}^1/_4)$ und f(2) !
Skizzieren Sie den Graph von f !
Zeichnen Sie die Gerade g ein !
c) Gegeben ist eine zweite Gerade h durch y = x .
Berechnen Sie den Winkel zwischen den Geraden g und h !
d) Auf der Geraden y = x liegt ein Punkt $Q(x_Q; y_Q)$ mit $x_Q > 0$, für den der $\angle S_1QS_2 = 90°$ ist.
Berechnen Sie die Koordinaten von Q !
e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks S_1S_2Q !

8. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = 1 + \cos(2x - \pi/2)$ ($x \in R$; $0 \leq x \leq \pi$) .
a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f !
b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f !
Untersuchen Sie die Art der Extrema !
c) Skizzieren Sie Graph der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq \pi$!
d) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche !
e) Es gibt genau zwei Tangenten an den Graph von f mit dem Anstieg m = -1 .
Berechnen Sie die Abszissen der Berührungspunkte dieser Tangenten !

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1985/86)

Pflichtaufgaben

1. Die Gerade g_1 verläuft durch die Punkte A (5;2;0) und B (6;2;-5), die Gerade g_2 geht durch den Punkt (2;-6;11) und hat die Richtung des Vektors $\boldsymbol{a} = i + 4j - 3k$.
a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Geraden g_1 und g_2 auf !
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Schnittwinkel φ der Geraden g_1 und g_2 !
c) Überprüfen Sie, ob der Punkt C (5; 6; 2) auf der Geraden g_2 liegt !

2: Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = \sqrt{(2x + 3)} - x \qquad (x \in R;\ x \geq -1{,}5)$.
a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f!
b) Ermitteln Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f ! Weisen Sie die Art des Extremums nach !
c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-1{,}5 \leq x \leq 4$!
d) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachse begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche !

3. Gegeben sind die Funktionen f und g durch
$y = f(x) = 2 + \cos x \quad (x \in R;\ 0 \leq x \leq \pi)$ und
$y = g(x) = \sin^2 x \qquad (x \in R;\ 0 \leq x \leq \pi)$
a) Ergänzen Sie für die Funktion g die folgende Werttabelle !

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$^2/_3\pi$	$^5/_6\pi$	π
g(x)							

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g in ein und demselben Koordinatensystem !
c) Für jede Parallele zur y-Achse, die die Graphen der Funktionen f und g in einem Punkt schneidet, stellt h (x) = f (x) - g (x) den Abstand der beiden Punkte dar. Berechnen Sie die Abszisse x_E für den Fall, dass dieser Abstand minimal wird ! Berechnen Sie den minimalen Abstand !
d) Zeigen Sie, dass die Tangente im Punkt P (2/3 π; f (2/3 π)) an den Graph der Funktion f und die Tangente im Punkt Q ($^2/_3\pi$; g ($^2/_3\pi$)) an den Graph der Funktion g zueinander parallel sind !

4. Fünf Bauelemente haben die elektrischen Widerstände R_1, R_2, R_3, R_4 und R_5. Ihre Zahlenwerte bilden eine geometrische Folge.
Es sei R_1 = 10 Ohm und R_5 = 160 Ohm.
a) Berechnen Sie den Quotienten q dieser geometrischen Folge !
b) Berechnen Sie den elektrischen Widerstand R für den Fall, dass die 5 Widerstände in Reihe geschaltet sind !
c) Schaltet man zwei verschiedene dieser 5 Widerstände in Reihe, so erhält man jeweils einen anderen elektrischen Widerstand.
Wie viele verschiedene elektrische Widerstände lassen sich auf diese Weise herstellen ?
d) Auch bei Reihenschaltung von je 3 oder je 4 verschiedenen dieser 5 Widerstände erhält man jeweils einen anderen elektrischen Widerstand.
Wie viele verschiedene elektrische Widerstände lassen sich dann insgesamt erzeugen, wenn man alle möglichen Schaltungen von 2 und von 3 und von 4 verschiedenen Widerständen herstellt ?

5. Kurzaufgaben
a) Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = x * \ln x \qquad (x \in R;\ x > 0)$.
Berechnen Sie f'(e)!
b) Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD durch A(2;1), AB = 5$\boldsymbol{i}$ + 2$\boldsymbol{j}$ und BC = $\boldsymbol{i}$ + 4$\boldsymbol{j}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D und die Läge der Diagonalen BD !

c) Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen x an, für die der Term $1/\sqrt{3x - 6}$ nicht definiert ist !

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = {}^{1}/_{(1 - ax)}$ $(x \in R;\ x \neq {}^{3}/_{a}\ ;\ a \in R;\ a > 0\ )$.

a) Weisen Sie nach, dass diese Funktionen keine lokalen Extrema haben !

b) Für a = 0,5 erhält man die Funktion f_1 mit
$y = f_1(x) = {}^{1}/_{(3 - 0{,}5x)}$ $(x \in R;\ x \neq 6)$.
Skizzieren Sie den Graph von f_1 im Intervall $0 \leq x \leq 5$!
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph dieser Funktion, den Koordinatenachsen und der Geraden x = 4 vollständig begrenzt wird !

c) Bilden Sie f''(x) und f'''(x) für
$y = f(x) = {}^{1}/_{(3 - ax)}$!
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung der Funktion f
$f^{(n)}(x) = (n!\ a^{n}) / ((3 - ax)^{n+1})$ gilt !

d) Die Graphen aller Funktionen $y = f(x) = {}^{1}/_{(3 - ax)}$ schneiden die y-Achse in Po $(0;\ {}^{1}/_{3})$. Die Tangente in P_0 an genau einen dieser Graphen steht senkrecht auf der Geraden
$y = -6x + 1$.
Berechnen Sie für diesen Fall den Wert des Parameters a !

7. Für einen geladenen Kondensator lässt sich der Zahlenwert I der Entladestromstärke als Funktion des Zahlenwertes t der Zeit beschreiben durch
$I = f(t) = I_0 * e^{-0{,}4t}$ $(t \in R;\ t \geq 0)$.
(Dabei sind die Stromstärke in Milliampere und die Zeit in Sekunden gemessen) I_0 ist der Zahlenwert der Entladestromstärke für t = 0. Es sei $I_0 = 2{,}4$.

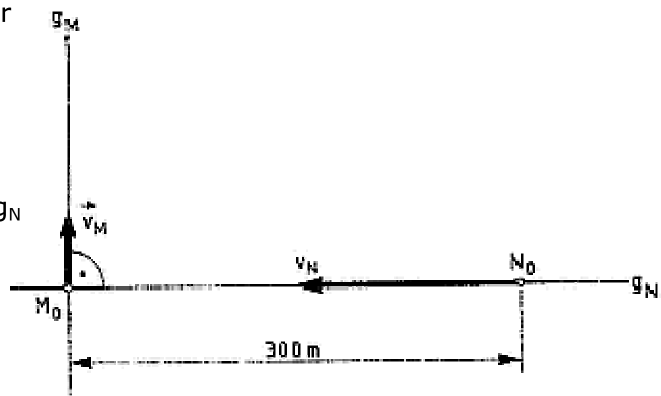
a) Berechnen Sie f(0), f(2) und f(4) !
Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $0 \leq t \leq 4$!

b) Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Stromstärke 1,8 mA beträgt !

c) Der Zahlenwert Q der vom Kondensator im Intervall $[t_1;\ t_2]$ abgegebenen Ladung (gemessen in Milliamperesekunden) wird durch $Q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ ermittelt.
Berechnen Sie die Ladung, die der Kondensator in den ersten 3,5 Sekunden des Entladungsvorganges abgibt !

d) Für $t_1 = 0$ habe der Kondensator eine Ladung, deren Zahlenwert Q = 6,0 beträgt.
Berechnen Sie t_2 für den Fall, dass der Kondensator 60 % dieser Ladung abgegeben hat !

8. Ein Massepunkt M bewegt sich auf einer Geraden g_M mit der konstanten Geschwindigkeit $2{,}0\ m * s^{-1}$ und durchläuft zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ den Punkt Mo (siehe Skizze!).
Ein zweiter Massepunkt N bewegt sich auf einer zu g_M orthogonalen Geraden g_N mit der konstanten Geschwindigkeit $6{,}0\ ms^{-1}$ auf den Punkt M_0 zu.
Zum Zeitpunkt to = 0 durchläuft er den Punkt N_0. Die Entfernung N_0M_0 beträgt 300 m.



Skizze (nicht maßstäblich)

a) Berechnen Sie die Entfernung, die die beiden Massepunkte nach 30 Sekunden voneinander haben !

b) Nach t Sekunden sind die beiden Massepunkte s Meter voneinander entfernt. Geben Sie für diesen Fall s als Funktion von t an !

c) Nach welcher Zeit ist die Entfernung der beiden Massepunkte voneinander minimal ? Berechnen Sie diese minimale Entfernung !

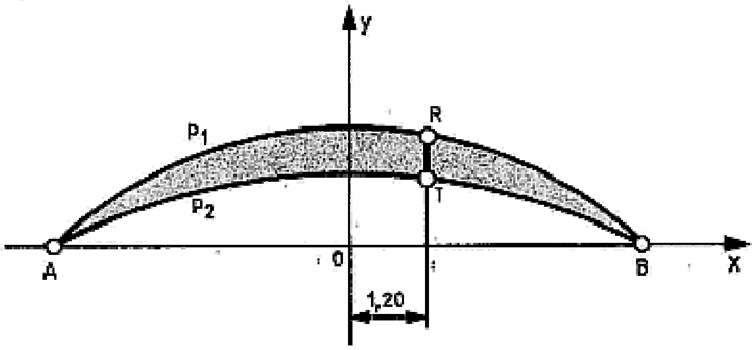
d) Mit welcher konstanten Geschwindigkeit müsste sich der Massepunkt M unter sonst gleichen Bedingungen bewegen, wenn die Entfernung der beiden Massepunkte voneinander bereits nach 40 Sekunden minimal sein soll ?
Hinweis: Auf den Nachweis des Minimums bei c) wird bei dieser Aufgabe verzichtet.

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1986/87)

Pflichtaufgaben

1. In einem Koordinatensystem {***O***; ***i, j, k***} ist das Dreieck ABC mit A (6; -1; 3), B (2; 3; 3) und C (2; -1; 7) gegeben.

a) Berechnen Sie die Längen der Dreieckseiten AB und AC!
b) Ermitteln Sie den Winkel $\alpha = \angle$ BAC!
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks!
d) Die Punkte A, B, P, C sind die Eckpunkte des Parallelogramms ABPC.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P!



2. Die Skizze zeigt einen Parabelsichelträger in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Ursprung 0 (Koordinateneinheiten: 1 m). Die beiden den Träger begrenzenden Parabelbögen p_1 und p_2 schneiden die x-Achse in den Punkten A und B.
Skizze (nicht maßstäblich)

a) Der obere Parabelbogen p_1 ist Graph der Funktion f mit
$y = f(x) = 2{,}50 - ((^5/_{72}) * x^2)$ $\qquad (x \in R;\ x_A \le x \le x_B)$.
Berechnen Sie die Spannweite AB!
b) Der untere Parabelbogen p_2 ist Graph der Funktion g mit
$y = g(x) = 1{,}50 - ax^2$ $\qquad (x \in R;\ x_A \le x \le x_B)$.
Berechnen Sie die Konstante a!
c) Die Strecke RT liegt parallel zur y-Achse.
Berechnen sie die Länge dieser Strecke!
d) In r sei an Parabel p_1 die Tangente t gelegt.
Berechnen Sie den Anstieg von t!
Zu t gibt es eine Parallele, die die Parabel p_2 berührt. Der Berührungspunkt sei Q.
Berechnen sie die Abszisse des Punktes Q!

3. Gegeben ist die Partialsummenfolge (s_n) der Zahlenfolge (a_n) durch
$s_n = {}^n/_{(2\,(n+1))}$; $(n \ge 1)$.

a) Geben Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der Partialsummenfolge (s_n) an!
b) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Folge (s_n)!
c) Für welche natürliche Zahlen n gilt, dass die Glieder der folge (s_n) in der ε-Umgebung von g liegen, wenn $\varepsilon = 10^{-3}$ ist?
d) Geben sie die Glieder a_1, a_2 und a_3 der Zahlenfolge (a_n) an!
Ermitteln Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift für die Zahlenfolge (a_n)!

4. Gegeben sind die Funktion f durch
$y = f(x) = x + 2\cos x$ $\qquad (x \in R;\ ;\ \pi/4 \le x \le 2\pi)$
und die Gerade g durch
$y = g(x) = x + 2$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f!
Weisen Sie die Art der Extrema nach!
b) Die Gerade g und der Graph von f haben die Punkte S_1 und S_2 gemeinsam.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2!
c) Skizzieren Sie den Graph von f! Zeichnen Sie die Gerade g ein!

d) Der Graph von f und die Gerade g begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen sie den Inhalt dieser Fläche!

5. Kurzaufgaben

a) Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = (\ln x) / e^x \qquad (x \in R;\ x > 0)$.
Berechnen Sie f' (1)!

b) Welche Stammfunktion F der Funktion $f(x) = e^{2x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ den Funktionswert $F(x_0) = 2$?

c) Für welche Zahl n ist die Anzahl der Variationen von n verschiedenen Elementen zur 2. Klasse gleich der Anzahl der Kombinationen dieser n Elemente zur 3. Klasse?

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Trapez ABCD mit A (0; 0), B (20; 0), C (5; 10) und D (0; 10) gegeben.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Diagonalen!
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Diagonalen!

b) Berechnen Sie die Abszisse des Punktes P, der auf der Strecke AB liegt und für den PB = PS gilt!

c) Die Parallele zur Seite AB durch den Punkt schneidet die Seite AD im Punkt T.
Weisen Sie nach, dass diese Parallele den Winkel $\angle$ BTC halbiert!

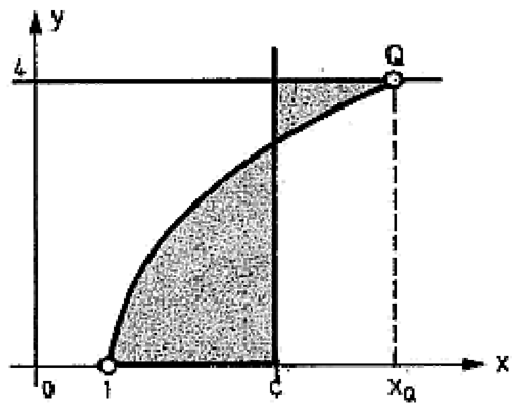
7. Gegeben sind Funktionen f durch
$y = f(x) = (x + 1) * d^{ax} \qquad (x \in R;\ a \in R,\ a > 0)$.

a) Der Graph jeder dieser Funktionen schneidet die y-Achse im Punkt R und die x-Achse im Punkt Q.
Ermitteln Sie die Koordinaten von R und Q!

b) Die Graphen der Funktionen haben je eine lokalen Extrempunkt E $(x_E;\ f(x_E))$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E (in Abhängigkeit vom Parameter a)!
Weisen Sie die Art des Extremums nach!

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die n-te Ableitung der Funktion f $\qquad f^{(n)}(x) = a^{n-1} * e^{ax} * (ax + a + n)$
gilt!

8. Die Skizze zeigt den Graph der Funktion f mit
$y = f(x) = 2\sqrt{(x - 1)} \qquad (x \in R;\ 1 \le x \le x_Q)$
und die Geraden y = 4 und x = c
$(c \in R;\ 1 < c < x_Q)$.
Skizze nicht maßstäblich)



a) Berechnen Sie die Abszisse x_Q des Punktes Q!

b) Berechnen Sie für den Fall c = 3 die Inhalte der beiden gekennzeichneten Flächen!

c) Unter den Geraden x = c gibt es genau eine, für die die Summe der Inhalte der gekennzeichneten Flächen minimal wird.
Berechnen Sie c für diesen Fall!
Geben Sie die minimale Summe an!
(Auf den Nachweis des Minimums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1987/88)

Pflichtaufgaben

1. Gegeben sei die Funktion f durch
   $y = f(x) = 1/9\ x^3 - 2\ x^2 + 9\ x \qquad (x \in R)$
a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f !
   Untersuchen Sie die Art der Extrema !
b) Auf dem Graph von f gibt es genau einen Punkt A $(x_A; f(x_A))$
   mit $f''(x_A) = 0$. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A !
c) Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $0 \leq x \leq 10$!
d) Der Graph von f und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
   Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche !

2: Bei einer Übung der Raketentruppe der NVA wird ein auf geradliniger Bahn g_1 mit konstanter Geschwindigkeit fliegendes Objekt im Punkt P(-6; 9; 7) und 20 Sekunden später im Punkt Q (2; 1; 11) geortet.
   Im Punkt A (3,5; -8; 0,5) wird eine Abwehrrakete in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ gestartet. Die Bahn g_2 dieser Rakete sei geradlinig.
   (Koordinateneinheit : 1 km)
a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 und g_2 !
b) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2 !
c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des georteten Objektes !
d) Die Abwehrrakete trifft das Objekt im Punkt S:
   Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit der Rakete, wenn ihr Start in A zwei Sekunden nach der Ortung des Objektes in Q erfolgte !

3. Es soll ein quaderförmiger Behälter mit einem Volumen von 6 m^3 gebaut werden, bei dem die Länge dreimal so groß ist wie die Breite. Alle 12 Kanten des Behälters sollen durch Winkeleisen verstärkt werden. Der geringste Materialverbrauch an Winkeleisen ergibt sich, wenn die Summe der Längen aller Kanten minimal wird.
   Berechnen Sie für diesen Fall Länge, Breite und Höhe des Behälters !

4. Bei Laboruntersuchungen werden häufig wässrige Lösungen fester Substanzen benötigt. Die in der Zeit t gelöste Masse wird durch die Gleichung
   $m = m_0\ (1 - e^{-at})$
   beschrieben. Hierbei sind m_0 die unter bestimmten Normbedingungen in Lösung gehende maximale Masse, Sättigungsmasse genannt, und a eine vom Stoff abhängige Konstante.
a) Für einen Versuch, für den $a_1 = 0{,}20\ min^{-1}$ gilt, wird festgestellt, dass 20 g der Substanz in der ersten Minute in Lösung gegangen sind.
   Berechnen Sie für diesen Fall die Sättigungsmasse m_0 !
b) Für die andere Substanz gilt
   $m_0 = 200$ g und $a_2 = 0{,}17\ min^{-1}$.
   Nach welcher Zeit sind 120 g dieser Substanz in Lösung gegangen ?
c) Bei einer weiteren Substanz ist nach 5,0 Minuten die Hälfte der entsprechenden Sättigungsmasse m_0 in Lösung gegangen. Berechnen Sie für diesen Fall die Konstante a_3 !

5.
a) Gegeben sind die Vektoren
   $\boldsymbol{a} = (1\ \ -2\ \ c)$ und $\boldsymbol{b} = (-c\ \ 1\ \ c)$
   Berechnen Sie die Werte c für den Fall, dass ***a*** und ***b*** zueinander orthogonal sind !
b) Weisen Sie nach, dass für die Funktion f mit
   $f(x) = \sqrt{(x + 1)} * \cos 2x \qquad (x \in R; x > -1)$
   gilt: $f(0) = 2 * f'(0)$!
c) Wie viele Funktionen $y = f(x) = m\ x + n \ \ (x \in R)$
   gibt es, bei denen m und n jeweils voneinander verschiedene Primzahlen sind, von denen jede kleiner als 20 ist ?

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Gegeben ist eine Funktion f durch
$y = f(x) = x (\ln x - a)$ $(x \in R; x > 0; a \in R)$.
a) Berechnen Sie die Nullstelle x_N der Funktion f in Abhängigkeit von a !
b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f in Abhängigkeit von a !
Untersuchen Sie die Art des Extremums !
c) Zeigen Sie, dass $f'(x_N)$ von a unabhängig ist !
d) Beweisen Sie, dass für die n-te Abteilung der Funktion f mit $n \geq 2$
$f^{(n)}(x) = (-1)^n * (n - 2)! / (x^{n-1})$ gilt !

7. Gegeben sind die Funktion f und g durch
$y = f(x) = 1 - 2 \cos x$ $(x \in R; 0 \leq x \leq 2\pi)$
$y = f(x) = 1 + \sin 2x$ $(x \in R; 0 \leq x \leq 2\pi)$
a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und die Nullstellen der Funktion g !
b) Die Graphen der Funktionen f und g schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.
Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2 !
c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g in dasselbe Koordinatensystem !
d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g vollständig begrenzt wird !
e) Ermitteln Sie die Menge aller positiven reellen Zahlen a, für die die Graphen der Funktion
$y = h(x) = 1 - a * \cos x$ $(x \in R; 0 \leq x \leq 2\pi)$
mit dem Graph der Funktion g mehr als zwei gemeinsame Punkte haben !

8. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = (4 x + 6) / (x + 2)^2$
a) Geben Sie Nullstelle und Polstelle der Funktion f an !
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen !
b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f !
Untersuchen Sie die Art des Extremums !
c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im Intervall $-5 \leq x \leq 5$!
d) Für genau einen Wert von a ist
$F(x) = a / (x + 2) + 4 \ln (x + 2)$ $(a \in R; x > -2)$
eine Stammfunktion von f.
Ermitteln Sie a !
e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graph der Funktion f und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird !

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1988/89)

Pflichtaufgaben

1. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (1; 5), B (3; -3), C (5; 1).
a) Zeichnen Sie das Dreieck ABC !
b) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g_1 auf, die durch A geht und die Seite BC halbiert !
c) Stellen Sie eine Gleichung für die Mittelsenkrechte g_2 der Seite AB auf !
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g_1 und g_2 !
e) Berechnen Sie den Schnittwinkel φ der Geraden g_1 und g_2 !

2: Gegeben sind die ersten Glieder $a_1 = 4{,}9$; $a_2 = 14{,}7$; $a_3 = 24{,}5$ der arithmetischen Zahlenfolge (a_n).
a) Berechnen Sie a_4 !
Geben Sie eine explizite Zuordnungsvorschrift dieser Folge an !
b) Berechnen Sie die Glieder s_1, s_2 und s_3 der zu (a_n) gehörenden Partialsummenfolge (s_n) !
c) Weisen Sie durch vollständige Induktion nach, dass für alle n ($n \geq 1$) gilt: $s_n = 4{,}9\, n^2$!

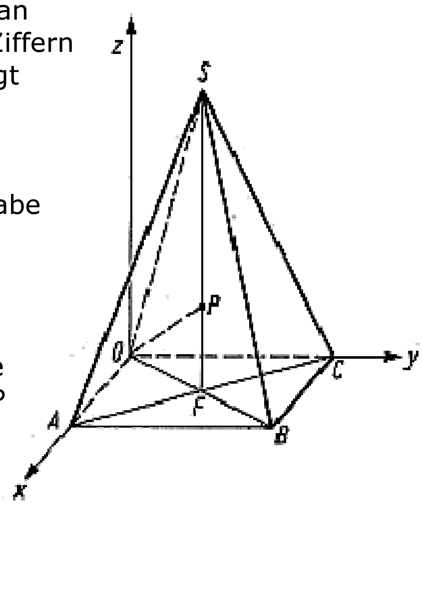
3. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = e^{0,5x}$ $(0 \leq x \leq 4)$.
a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f !
b) Der Graph der Funktion f, die Koordinatenachsen und die Gerade $x = 4$ begrenzen eine Fläche vollständig. Es gibt genau eine Gerade $x = c$ (mit $0 < c < 4$), die diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Berechnen Sie c !
Tragen Sie diese Gerade $x = c$ in Ihre Zeichnung ein !

4. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = -1 + 2 \sin {}^{x}/_{2}$.
a) Geben Sie die kleinste Periode p und den Wertebereich der Funktion f an !
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq 4\pi$!
Skizzieren Sie den Graph der Funktion f mindestens im Intervall $0 \leq x \leq 4\pi$!
b) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt P_o $(2\pi; f(2\pi))$!

5.
a) Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen x an, für die der Term $\sqrt{(\ln x)}$ definiert ist !
b) Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 durch
g_1: $x + ay = 1$ $(a \neq 0)$
g_2: $2x + 3y = 4$.
Berechnen Sie a für den Fall, dass g_1 und g_2 zueinander parallel sind !
Berechnen Sie a für den Fall, dass g_1 und g_2 zueinander orthogonal sind !
c) Fünfstellige Kennzeichen sollen folgendermaßen gebildet werden: Die ersten beiden Stellen werden durch 2 voneinander verschiedene Buchstaben und die letzten drei Stellen durch 3 voneinander verschiedene Ziffern belegt.
Wie viele voneinander verschiedene Kennzeichen kann man bilden, wenn die 26 Buchstaben des Alphabetes und die Ziffern 0; 1; 2; ...; 9 für die Belegung der Stellen zugrunde gelegt werden ?

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)

6. Die Skizze stellt eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche OABC und der Spitze S dar.
Die Kante AB hat die Länge 12 Längeneinheiten, die Höhe FS die Länge 18 Längeneinheiten. Auf FS liegt ein Punkt P



mit FP = z Längeneinheiten.
(Skizze nicht maßstäblich)

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und S an !
Ermitteln Sie die Längen der Strecken OP und SP in Abhängigkeit von z !

b) Auf FS existiert ein Punkt P_1, der von allen fünf Eckpunkten der Pyramide gleich weit entfernt ist.
Berechnen Sie die Koordinate z_1 des Punktes P_1 !

c) Auf FS existiert ein Punkt P_2, für den gilt:
Die Summe der Abstände des Punktes P_2 von den fünf Eckpunkten der Pyramide ist minimal.
Berechnen Sie die Koordinate z_2 des Punktes P_2 !

7. Ein Motorschiff und ein Hubschrauber bewegen sich geradlinig gleichförmig. Um 0:00 Uhr befinden sich das Motorschiff im Punkt S_0 (1; 1; 0) und der Hubschrauber im Punkt H_0 (19; 5; 0,5), und um 0:10 Uhr befinden sich das Motorschiff im Punkt S_{10} (3; 2; 0), der Hubschrauber im Punkt H_{10} (14; 5; 0,5). (Koordinateneinheit: 1 km)

a) Stellen Sie je eine Parametergleichung für die Bahn des Motorschiffes und die Bahn des Hubschraubers auf !

b) Berechnen Sie die Entfernung, die Motorschiff und Hubschrauber um 0:10 Uhr voneinander haben !

c) Um 0:30 Uhr haben das Motorschiff den Punkt S_{30} und der Hubschrauber den Punkt H_{30} erreicht.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte S_{30} und H_{30} !
Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Punkte !

d) Ermitteln Sie die Uhrzeit für den Fall, dass die Entfernung zwischen Motorschiff und Hubschrauber minimal ist !
(Auf den Nachweis des Extremums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)

8. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = \sqrt{(6\,x)} + \sqrt{(16 - 2x)}$ $\quad (0 \le x \le 8)$

a) Weisen Sie nach, dass die Funktion f keine Nullstelle hat !

b) Berechnen Sie die Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen von f ! (Auf Nachweis des Extremums von f wird verzichtet.)
Skizzieren Sie den Graph der Funktion f !

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von dem Graph der Funktion f, den Koordinatenachsen und der Geraden x = 8 vollständig begrenzt wird !

d) Es sind A (0; f(0)) und B (8; f(8)) zwei Punkte des Graphen von f. P sei ein Punkt auf der x-Achse.
Berechnen Sie die Abszisse des Punktes P für den Fall, dass das Skalarprodukt der Vektoren ***PA*** und ***PB*** minimal ist !

DDR-Mathematik-Abitur (Schuljahr 1989/90)

Pflichtaufgaben

1. Gegeben sind die Funktionen f und g durch
$y = f(x) = {}^{1}/_{4}\, x^2$ und $y = g(x) = -{}^{1}/_{10}\, x^3 + {}^{3}/_{4}\, x^2$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von g! Untersuchen Sie die Art der Extrema!

b) Berechnen sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g! Skizzieren Sie die Graphen im Intervall $-1 \leq x \leq 6$!

c) Die Graphen von f und g begrenzen eine Punktmenge vollständig. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge!

2. In einem Koordinatensystem $\{\boldsymbol{0}; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ sind zwei Geraden g_1 und g_2 gegeben. g_1 geht durch den Punkt P_0 (4; 16; -2) und hat den Richtungsvektor (-3, 3, 1). g_2 geht durch die Punkte P_1 (1; 3; 5) und P_2 (4; 6; 2).

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2!

b) Eine zur Gerade g_2 parallele Gerade g_3 habe den Richtungsvektor (a_x, a_y, 1). Ermitteln Sie a_x und a_y!

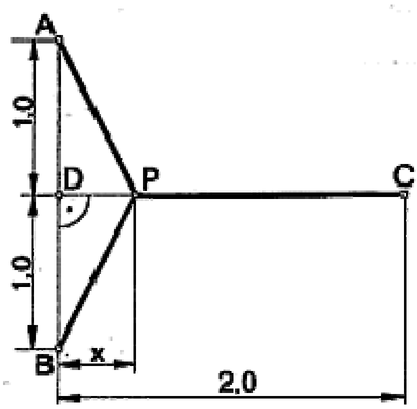
c) Es seien (b_x, b_y, 1) Richtungsvektoren von Geraden, die zur Geraden g_2 orthogonal sind. Weisen Sie nach, dass für jeden dieser Richtungsvektoren gilt:
$b_x + b_y = 1$!

3.a) Durch die Tabelle ist eine monoton wachsende geometrische Folge (a_n) gegeben.

n	1	2	3	4
a_n	6,4		8,1	

Berechnen Sie die Glieder a_2 und a_4 der Folge (a_n)!

b) Es gibt eine Funktion f mit
$y = f(x) = c * e^{kx}$ ($x > 0$; $c \in R$; $k \in R$; R: Menge der reellen Zahlen),
für die f (1) = 6,4 und f (3) = 8,1 gilt.
Ermitteln sie f (2) und f (4)!



4. Für drei Betriebe, deren Lage durch die Punkte A, B und C gegeben ist, soll im Punkt P eine gemeinsame Abwasseraufbereitungsanlage gebaut werden (siehe Skizze!).
Skizze nicht maßstäblich, Maßangeben in km

a) Geben Sie die Gesamtlänge s = AP + BP + CP der Anschlussleitungen an, wenn die Anlage im Punkt D bzw. wenn die Anlage im Punkt C errichtet würde!

b) Berechnen Sie x für den Fall, das die Gesamtlänge s minimal wird! (Auf den Nachweis des Extremums wird bei dieser Aufgabe verzichtet.)
Berechnen Sie für diesen Fall die Gesamtlänge der Rohrleitung!

5.

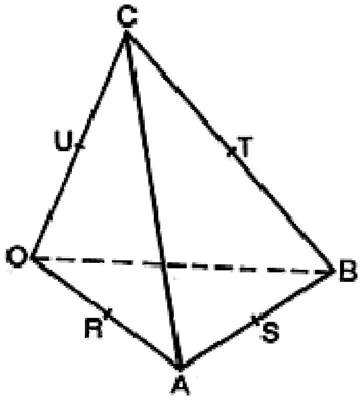
a) Zu einem Schulsportfest soll eine Klasse für eine 4 x 100 m-Staffel entweder eine Jungen- oder eine Mädchenstaffel stellen. Es kommen 7 Jungen bzw. 6 Mädchen in Frage.

Ermitteln Sie die theoretisch mögliche Gesamtzahl von Staffelaufstellungen, aus denen die zu meldende Staffel ausgewählt werden kann für folgende Fälle!

- Es sind die Namen der Staffelteilnehmer und deren Reihenfolge zu melden.
- Es sind nur die Namen der Staffelteilnehmer zu melden.

b) Es sei $(a_n) = (^c/_{n!})$ eine Folge mit $c \in R$; $n \in N$, $n > 0$.
Man ermittle c für den Fall, dass gilt:
$a_{n+1} = a_n + {}^{2n}/_{(n+1)!}$

Wahlaufgaben
(Von den folgenden Aufgaben brauchen Sie nur eine Aufgabe zu lösen.)



6 Die Punkte O, A, B, C seien Eckpunkte einer Pyramide; R, S, T, U seien die Mittelpunkte der Kanten OA, AB, BC, OC (siehe Skizze!).

a) In einem kartesischen Koordinatensystem $\{\boldsymbol{0}; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ sind O, A, B, C gegeben durch O (0; 0; 0), A (6; 0; 0), b (8; 12; 0) und C (4; 4; 10).
Weisen Sie nach, dass für diese Spezielle Pyramide das Viereck RSTU ein Parallelogramm ist!

b) Die Pyramide OABC sei ein Tetraeder, d. h. alle Kanten haben die gleiche Länge.
Geben Sie die Vektoren ***RS***, ***UT***, ***RU***; ***ST*** in Abhängigkeit von ***a***=***OA***, ***b***=***OB*** und ***c***=***OC*** an!
Beweisen Sie, dass für jedes Tetraeder das Viereck RSTU ein Quadrat ist!

6.2. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) = \sin {}^x/_3 \qquad (x \in R)$.

a) Geben Sie die kleinste Periode der Funktion f an!
Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $-2\pi \le x \le 3\pi$!

b) Weisen Sie nach, dass es keine Tangente an den Graph von f gibt, die orthogonal zur Tangente im Punkt O (0; 0) an den Graph von f ist!

c) Gegeben sind die Funktionen g durch
$y = g(x) = \sin ax \qquad (x \in R;\ a \in R;\ a \neq 0)$.
Bilden Sie die erste, die dritte und die fünfte Abteilung der Funktion g!
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n ($n \ge 0$) gilt: $g^{[2n+1]}(x) = (-1)^n * a^{2n+1} * \cos ax$!

6.3. Gegeben ist die Funktion f durch
$y = f(x) \ - {}^6/_x * (1 - \ln 3x) \qquad (0{,}5 \le x \le 10)$.

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion!
Der Graph von ff hat genau einen lokalen Maximumpunkt. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!
Skizzieren Sie den Graph von f!

b) Zeigen Sie, dass $F(x) = -3(2 - \ln 3x) * \ln 3x$ eine Stammfunktion von f ist!
Der Graph von f, die x-Achse und eine Gerade x=c (c > 1) begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A vollständig.
Berechnen Sie c für den Fall, dass A = 3 gilt!

c) Gegeben sind Funktionen g durch
$y = g(x) = - {}^6/_x * (1 - \ln ax) \qquad (x \in R,\ x > 0;\ a \in R,\ a > 0)$.
Der Graph einer dieser Funktionen hat an der Stelle x = 2 den Anstieg 1.
Berechnen Sie a für diesen Fall!