Stochastik

Alles was relativ wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch
Pascal

Statistik

Ein Mensch, der von Statistik hört, denkt dabei nur an Mittelwert.
Er glaubt nicht dran und ist dagegen, ein Beispiel soll es gleich belegen:
Ein Jäger auf der Entenjagd hat einen ersten Schuss gewagt.
Der Schuss, zu hastig aus dem Rohr, lag eine gute Handbreit vor.
Der zweite Schuss mit lautem Krach lag eine gute Handbreit nach.
Der Jäger spricht ganz unbeschwert voll Glauben an den Mittelwert:
Statistisch ist die Ente tot. Doch wär er klug und nähme Schrot
- dies sei gesagt, ihn zu bekehren - er würde seine Chancen mehren:
Der Schuss geht ab, die Ente stürzt, weil Streuung ihr das Leben kürzt

Statistik

Die Statistik ist die Wissenschaft, die aus dem massenhaften Auftreten bestimmter Erscheinungen auf empirische Gesetze schließt.
Die deskriptive Statistik ordnet, gruppiert und konzentriert Daten. Die induktive Statistik schließt aus beobachteten Daten auf verborgene Strukturen.
"Es gibt drei Arten von Lügen: Lügen, infame Lügen und Statistik" (Benjamin Disraeli)

Für eine Stichprobe vom Umfang n aus einer Grundgesamtheit gilt:
Mittelwert (arithmetisches Mittel) $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) / n$

Varianz s², Standardabweichung s $s^2 = [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2] / (n-1)$
wird für Stichproben genutzt, deren Mittelwert (Erwartungswert) μ nicht bekannt ist, sondern durch $\bar{x}$ genähert wird. In diesem Fall ist s² eine erwartungstreue Schätzgröße für σ².
Ist $\bar{x}$ ein guter Schätzwert für den Mittelwert μ wird als Ersatz die

empirische Stichprobenvarianz $\bar{s}^2$ $\bar{s}^2 = [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2] / n$
genutzt. Nur für kleine n unterscheiden sich beide Werte wesentlich. Der Unterschied entsteht dadurch, dass durch die Wahl einer Stichprobe aus der Grundgesamtheit ein verzerrter, mit einem Fehler behafteter, Mittelwert (engl. biased estimator) in die Berechnung eingeht. Dies wird durch eine größere Varianz ausgeglichen.
Hinweis: Bei einigen Autoren werden die hier genutzten Begriffe ‚Standardabweichung' und ‚empirische Stichprobenvarianz' gerade entgegengesetzt genutzt.

Streu- oder Variationsbreite $R = x_{max} - x_{min}$

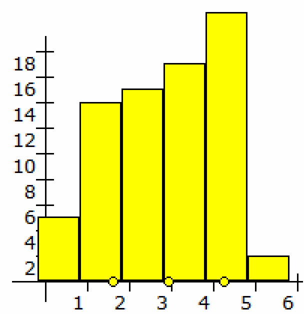
Bei einer (vollständigen) Grundgesamtheiten vom Umfang N gilt:
Mittelwert μ und Varianz σ² $\mu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N) / N$
$\sigma^2 = [(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \ldots + (x_n - \mu)^2] / N$

Häufigkeiten

Kommt ein statistisches Merkmal in k verschiedenen Merkmalsausprägungen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vor, für die bei insgesamt n Beobachtungen
absolute Häufigkeiten $h_1, h_2, \ldots, h_k$ mit $\Sigma_{i=1}^{k} h_i = n$
beobachtet werden, so ergeben sich daraus entsprechende
relative Häufigkeiten $f_i = h_i / n$ mit $\Sigma_{i=1}^{k} f_i = 1$

Summenhäufigkeiten

Bei metrischskalierbaren Mermalen ergeben sich durch Summierung über alle Merkmalsausprägungen x_j mit $x_j \le x_i$
absolute Summenhäufigkeiten $H_i = \Sigma_{xj \le xi} h_j$; i = 1, …, k
relative Summenhäufigkeiten $F_i = \Sigma_{xj \le xi} f_j$; i = 1, …, k
$F_i = H_i / n$; i = 1, …, k



2000

Bei einer Häufigkeitsverteilung mit k verschiedenen Werten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ergibt sich das gewogene arithmetische Mittel zu $\mu = 1/n\ \Sigma_{i=1}^{k} x_i h_i = \Sigma_{i=1}^{k} x_i f_i$
Bei einer Häufigkeitsverteilung klassifizierter Daten ergibt sich mit Hilfe der Klassenmitten $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ näherungsweise $\mu = 1/n\ \Sigma_{i=1}^{k} x'_i h_i$

Histogramm

Ein Histogramm ist eine grafische Darstellung von Messwerten in Form nebeneinandergereihter Säulen, wobei die Höhe der einzelnen Säulen dem jeweiligen Messwert entspricht.

Um eine Überblick über eine Messwertverteilung zu erhalten, nutzt man das Histogramm.

1) Man teilt die Messwerte in Klassen $K_1, K_2, \ldots, K_s$ ein, d.h. in aneinandergrenzende Intervalle.
2) Mit m_r bezeichnet man die Anzahl der Messwerte, die zu der Klasse K_r gehören.
3) Liegen n Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ vor, dann heißt m_r/n die relative Häufigkeit der Messwerte bezüglich der Klasse K_r.
4) Über jeder Klasse K_r zeichnet man entweder eine Säule der Höhe m_r/n oder der Höhe m_r.

Beispiel für eine statistische Auswertung

Am 24.Juni 2008 veröffentlichte die "Freie Presse" Chemnitz eine bundesweite Statistik zur Verschuldung der Länder und Kommunen mit dem Stand vom 31.12.2007. Zu sehen war die linke Tabelle mit den absoluten Schulden in Milliarden(!) Euro:

Bundesland	Schulden in Md.€	Bundesland	Schulden je Einwohner in €	
Nordrhein-Westfalen	151,758	Bremen	21891	+ 1546
Niedersachsen	61,090	Berlin	16834	- 539
Berlin	57,152	Hamburg	12415	± 0
Baden-Württemberg	48,370	Saarland	10798	+ 465
Hessen	41,861	Sachsen-Anhalt	9754	+ 265
Bayern	37,653	Schleswig-Holstein	8784	+ 35
Rheinland-Pfalz	35,348	Rheinland-Pfalz	8709	+ 262
Schleswig-Holstein	24,885	Nordrhein-Westfalen	8404	+ 100
Sachsen-Anhalt	24,092	Thüringen	7918	- 153
Hamburg	21,652	Brandenburg	7692	- 109
Brandenburg	19,685	Niedersachsen	7642	+ 22
Thüringen	18,488	Mecklenburg	7296	- 344
Sachsen	15,446	Hessen	6871	+ 27
Bremen	14,514	Baden-Württemberg	4505	+ 5
Mecklenburg	12,455	Sachsen	3614	- 186
Saarland	11,338	Bayern	3020	- 71
alle Bundesländer	595,787	alle Bundesländer	7227	+ 10

Berücksichtigt man aber, dass zum Beispiel Bayern viel mehr Einwohner hat als das Saarland und berechnet die Schulden je Einwohner, so erhält man ein völlig anderes, nicht veröffentlichtes Ergebnis, das in der rechten Tabelle zu sehen ist.
Neben dem Wert der Schulden je Einwohner steht zusätzlich die Veränderung im Jahr 2007. Ein Wert mit einem Pluszeichen sagt, dass die Schulden größer wurden, bei negativem Vorzeichen kleiner.
Übrigens weichen die Zahlen der genannten Statistik deutlich von Werten ab, die anderswo veröffentlicht wurden (z.B. Wikipedia).

Beispiel 2 für eine statistische Auswertung

Obwohl eine alte journalistische Weisheit lautet: Nicht mit Zahlen übertreiben!, hantiert der deutsche Journalismus i.A. möglichst mit dramatischen Zahlen; denn schlechte Nachrichten sind "gute Nachrichten".

Unübertroffen sind die sogenannten Todeszahlen. Allerdings beeindrucken Todeszahlen nur noch, wenn sie mindestens fünfstellig sind. Kleinere Zahlen werden für den Leser in der Form "Alle drei Sekunden stirbt in Deutschland" aufbereitet, da der Leser dann die Toten vor sich praktisch reihenweise umfallen sieht. :-(Und am Besten wird es für den Jourmalisten, wenn er Daten einfach fälscht!
Nach Meldungen in der Boulevardpresse 2013, starben 2011 in Deutschland
281000 Menschen an Krebs, 13900 an einem Unfall, 60000 an Sepsis, 25000 an Medikamenten, 1000 im OP, 40000 an Krankenhauskeimen, 15000 an Feinstaub, 73000 an Alkohol, 8000 an Grippe, 250000 an einem Schlaganfall, 280000 an einem Herzinfarkt, 10000 an Suizid, 20000 an Demenz, 1000 wegen einer fehlenden Organspende und 800 werden ermordet.

Insgesamt starben danach allein in Deutschland 1,0787 Millionen Menschen; ohne diejenigen, deren Todesursache nicht spektakulär ist.
Da 2011 nur 663000 Babys mit deutscher Staatsbürgerschaft zur Welt kamen, ergibt sich ein jährliches Minus von 415700. Bleibt es so, stirbt Deutschland in rund 200 Jahren aus.
Merkwürdig ist nur, dass nach dem Zahlenbundesamt "nur" rund 850000 Sterbefälle zu verzeichnen waren. Woher kommt die Differenz?
Ganz einfach: Die in den Medien genannten Todeszahlen sind vorsätzlich durch die Journalisten gefälscht; je nach Interessengruppen, die sie vertreten und von denen sie bezahlt werden!

Standardisierung von Daten

Aus den Einzelwerten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werden die standardisierten Einzelwerte z_i nach der Beziehung

$$z_i = (a_i - \mu) / \sigma \; ; \; i = 1, \ldots, n$$

wobei $\mu = 1/n \sum_{i=1}^{n} a_i$ und $\sigma^2 = 1/n \sum_{i=1}^{n} (a_i - \mu)^2$

ist. Die standardisierten Einzelwerte z_i besitzen das arithmetische Mittel 0 und die Varianz 1.

Varianzkoeffizient $VC = \sigma / \mu$ bzw. $VC = \sigma / \mu \; 100\ \%$

Mittlere absolute Abweichung
Bei Einzelwerten ergibt sich $MAD = 1/n \; \Sigma_{i=1}^{n} \; |a_i - \mu|$
und bei einer Häufigkeitsverteilung $MAD = 1/n \; \Sigma_{i=1}^{n} \; |a_i - \mu| \; f_i$

Spannweite
Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert einer Datenreihe.
Die Einzelwerte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werden der Größe nach geordnet. Dann ist

$R = a_n - a_1$

Quartilsabstand $QA = Q_3 - Q_1$
Mittlerer Quartilsabstand $MQA = (Q_3 - Q_1) / 2$
Quartilsdispersionskoeffizient $QDC = (Q_3 - Q_1) / (Q_3 + Q_1) \; 100\ \%$

Deskriptive Statistik
Bei Datensammlungen werden Merkmale einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit erhoben, die Merkmale haben Ausprägungen. Ausprägungen können nominal (z.B. Farben), ordinal (z.B. Schulnoten) oder kardinal (z.B. Temperatur) skaliert sein.
Ein Merkmal X ist eine Ausbildung der Elemente einer Grundgesamtheit in einem Merkmalsraum, $x=X(e)$ ist die Ausprägung von X beim Element e. Je nach Messvorschrift sind Merkmale stetig oder diskret, nominal, ordinal oder kardinal.
Wenn X ein diskretes Merkmal ist, dann sind

a_j die möglichen Realisationen
$x_i = X(e_i)$ die individuellen Realisationen
$h(a_j) = h_j$ die absolute Häufigkeit der Ausprägung a_j
$\Sigma \; h(a_j) = n$ die Summe aller Ausprägungen entspricht der Größe der Stichprobe
$f(a_j) = h(a_j)/n$ die relative Häufigkeit

Sind die Ausprägungen chronologisch geordnet, so nennt man das eine Zeitreihe.

Häufigkeiten lassen sich in Balken- oder Kreisdiagrammen veranschaulichen. Eine flächentreue Häufigkeitsarstellung gruppierter Daten heißt Histogramm, die Breite ist gleich der Gruppenbreite, die Höhe ergibt sich aus h_j/b_j.
Die Summenkurve H(x) ist die Anzahl der Beobachtungen, deren Ausprägungen die Zahl x nicht übertreffen. Dabei bedeutet:

höchstens x $H(x)$
alle größer x $n - H(x)$
größer x_1, kleiner gleich x_2 $H(x_2) - H(x_1)$
genau gleich x $h(x)$
kleiner x $H(x) - h(x)$
mindestens x $n - (H(x) - h(x))$

Die empirische Verteilungsfunktion ist die normierte, durch n geteilte, Summenkurve. Sie enthält dieselbe Information wie das Histogramm und umgekehrt $F(x) = \Sigma \; (a_i \leq x) \; h(a_i)/n$

Quantile
Aus der Verteilungsfunktion lassen sich die Quantile bestimmen, für eine Zahl α ist das untere α-Quantil $= t_\alpha$ die Zahl, für die $F(t_\alpha) = \alpha$ gilt. Das obere ist dann $t_{1-\alpha}$.
Spezielle Quantile sind unteres und oberes Quartil (0.25/0.75) und Median (0.5).
Aus den 5 Werten Minimum x(1), unteres Quartil $t_{0.25}$, Median $t_{0.5}$, oberes Quartil $t_{0.75}$ und Maximum x(n), kann man einen Box-and Whiskers-Plot zeichnen, die Box reicht dabei vom unteren zum oberen Quantil, der Median wird als Strich in die Box gezeichnet und die Whiskers gehen z.B. von der Box zum Min- bzw. Maximum. Box-Plots sind praktisch, wenn viele Histogramme miteinander verglichen werden sollen.

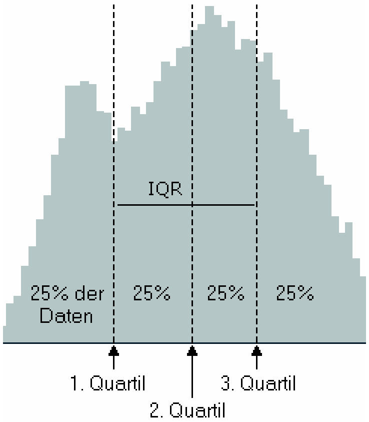
Lageparameter
Median Vorteil: leicht zu berechnen und unempfindlich gegenüber Ausreißern
Nachteil: mathematisch schwer zu schätzen, schöpft die vorhandene Informaton nicht voll aus
Arithmetisches Mittel ... es gibt 4 Berechnungsmöglichkeiten

Urliste $x = 1/n \; \Sigma \; a_j$
sortierte Daten $x = \Sigma \; a_j \; f(a_j)$; gewogenes Mittel
gruppierte Daten $x = \Sigma \; m_j \; f(a_j)$ mit m_j = Mitte der j.ten Gruppe
gemischte Daten $x = 1/n \; \Sigma \; x_j \; h_j$

Das arithmetische Mittel stellt den Schwerpunkt der Daten dar.

Quartil
Quartile, auch Viertelwerte, teilen die Verteilung in vier Viertel. Ein bestimmtes Quartil ist die Grenze zwischen zwei bestimmten Vierteln der Verteilung.

Die Berechnung von Quartilen wird mitunter unterschiedlich erklärt. Für eine Stichprobe von n Beobachtungen gilt:
1. Quartil (unterer Viertelwert): jener Wert der sortierten Reihenfolge der an x-ter Stelle steht, wobei für x gilt: x = {0,25 (n+1)}
2. Quartil (Median, Zentralwert): falls n gerade, ist Q_2 der Mittelwert der beiden Werte an den Stellen n/2 und n/2+1; falls n ungerade ist Q_2 der Wert an der Stelle (n+1)/2
3. Quartil (oberer Viertelwert): jener Wert der sortierten Reihenfolge der an x-ter Stelle steht, wobei für x gilt: x = {0,75 (n+1)}
Unter {x} ist dabei der gerundete Wert zu verstehen.

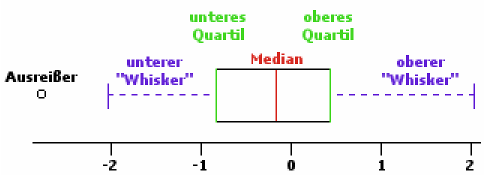


Beispiel:
Gegeben seien folgende 20 Beobachtungen
2, 4, 7, -20, 22, -1, 0, -1, 7, 15, 8, 4, -4, 11, 11, 12, 3, 12, 18, 1
Zur Berechnung der Quartile ist die Liste der Beobachtungen zu sortieren
-20, -4, -1, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 8, 11, 11, 12, 12, 15, 18, 22
Für das 1.Quartil gilt nun: x = {0,25 (20+1)} = {5,25} = 5. Das heißt, Q_1 ist der Wert der 5.Stelle in der sortierten Reihenfolge, also $Q_1 = 0$.
Für Q_2 ergibt sich analog $Q_2 = 5{,}5$ sowie für das 3.Quartil $Q_3 = 12$.
Quartile gibt man üblicherweise erst ab 12 Beobachtungen an, besser ab mehr als 20.

Interquartilsabstand

Verteilungen können außer mit dem Mittelwert und der Standardabweichung auch mittels Median und einer Reihe von Quantilen um den Median beschrieben werden.
Insbesondere der Interquartilsabstand (engl. inter-quartile range, IQR) wird zur Beschreibung der Streuung von Daten verwendet. Der Interquartilsabstand wird auch Vierteldifferenz oder Halbweite genannt.
Der Interquartilsabstand ist als der Abstand zwischen dem ersten und dem dritten Quartil definiert. Da Quartile je 25 % der Daten abtrennen, folgt, dass der IQR genau 50 % der Daten innerhalb der Verteilung enthält.

Beispiel: Gegeben sind die Daten: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Dann wird mit n=10
$10 \cdot 0{,}5 = 5 \rightarrow$ Median = 5,5
$10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5 \rightarrow Q1 = 3$
$10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5 \rightarrow Q3 = 8$
und somit für den Interquartilsabstand 5. Weitere Maßzahlen sind: Mittelwert = 5,5, Varianz = 9,17 und Standardabweichung = 3,03.



Box-Plot

Ein Box-Plot, auch Box-Whisker-Plot oder Kastengrafik, ist ein Diagramm, das zur grafischen Darstellung der Verteilung statistischer Daten verwendet wird. Ein Boxplot soll veranschaulichen, in welchem Bereich Daten liegen und wie sie sich über diesen Bereich verteilen.
Dazu werden fünf wesentliche Punkte, der Median, die zwei Quartile und die beiden Extremwerte, dargestellt.
Ein Boxplot besteht aus einem Rechteck und zwei Linien, die dieses Rechteck verlängern. Diese Linien werden als Whisker bezeichnet und werden durch einen Strich abgeschlossen.
Die Box entspricht dem Bereich, in dem die mittleren 50 % der Daten liegen. Sie wird durch das obere und das untere Quartil begrenzt. Deren Differenz, der Interquartilsabstand IQR, ist ein Maß für die Streuung der Daten.

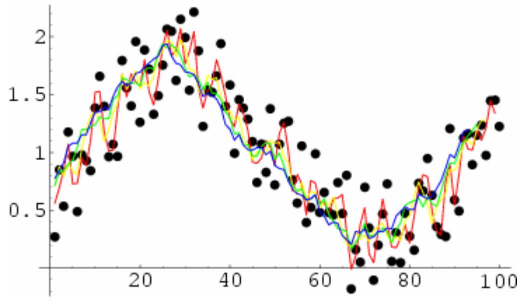
Außerdem wird der Median als durchgehender Strich in der Box eingezeichnet. Dieser Strich teilt das gesamte Diagramm in zwei Hälften, in denen jeweils 50 % der Daten liegen.
Ist der Median im linken Teil der Box, so ist die Verteilung rechtsschief und umgekehrt.
In einigen deutschen Lehrbüchern werden Box-Plots auch Stängel-Blatt-Diagramme genannt.

Quadratisches Mittel $q = \sqrt{1/n * (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}$
Harmonisches Mittel $h = n / (1/x_1 + 1/x_2 + \ldots 1/x_n)$
Median (Zentralwert Z) Anzahl n der Werte ungerade $\Rightarrow Z = x_{(n-1)/2+1}$
Anzahl n gerade $\Rightarrow Z = (x_{n/2} + x_{n/2+1}) / 2$

Schrittweise Mittelwerte

Gegeben sei eine Folge von N Zahlen a_i. Unter dem schrittweisen Mittelwert der Ordnung n versteht man dann die Zahlenfolge $\{s_i\}_n$, die aus den Gliedern $s_i = 1/n\ (a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1})$

besteht. Für n=2 ergibt sich damit die Folge der arithmetischen Mittel benachbarter Glieder der Ausgangsfolge.



In der Darstellung sind für 100 Punkte die schrittweisen Mittelwerte der Ordnung 2 (rot), 4 (geld), 6 (grün) und 8 (blau) gezeichnet.

Notenparadoxon

In den bundesdeutschen Schulen ist es üblich geworden, die Endnote eines Schülers auf folgende Weise zu ermitteln.
1. der Schüler schreibt im Laufe des Schuljahres Klausuren/Klassenarbeiten. Diese ergeben sogenannte "Große Noten".
2. kleinere schriftliche und weitere mündliche Leistungskontrollen usw. ergeben die "Kleinen Noten".
Zur Festlegung der Endjahresnote werden das arithmetische Mittel der großen Noten und das Mittel der kleinen Noten gebildet. Das arithmetische Mittel dieser Mittelwerte wird dann nach den allgemeinen Regeln gerundet und die entsprechende Note erteilt.

Beispiel:

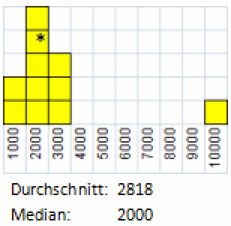
Ein Schüler erzielte folgende Noten

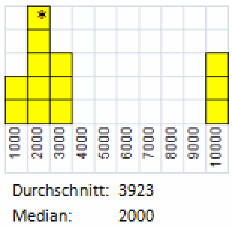
		Arithm.Mittel	
Große Noten	4, 3, 6	4,33	
Kleine Noten	2, 3, 3, 4, 1, 3	2,67	Gesamtmittel (4,33 + 2,67) : 2 = 3,50

Um eine eindeutige Entscheidung zu finden, darf der Schüler sich eine weitere "kleine Note" verdienen. Er erreicht eine "3"! D.h., diese Note ist besser als der Gesamtdurchschnitt und der gesunde Menschenverstand würde nun dem Schüler eine "3" erteilen. Aber!

		Arithm.Mittel	
Große Noten	4, 3, 6	4,33	
Kleine Noten	2, 3, 3, 4, 1, 3, 3	2,71	Gesamtmittel 3,52

und der Schüler erhält eine "4"!
Übrigens würde noch eine "4" als große Note hinzukommen, sinkt(!) der Gesamtdurchschnitt unter 3,5 und der Schüler müsste eine "3" erhalten.
Dies ist kein wirkliches mathematisches Paradoxon des arithmetischen Mittels, sondern viel mehr eine Warnung vor den formalistischen Bewertungsmaßstäben an deutschen Schulen.
Übrigens ist auch die oft gehörte Meinung: "Der kriegt eine 4, denn die großen Noten sind wichtiger" problematisch. Offensichtlich war die eine "6" ein einmaliger Ausrutscher, für den es eine Vielzahl Gründe geben kann.
(nach einem Artikel der mathematischen Schülerzeitschrift "Wurzel")





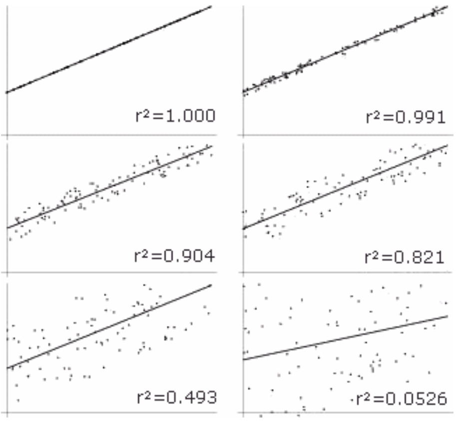
Median-Anwendung

Am 19.Mai 2009 meldete die sogenannte Bild-"Zeitung":
"Die beunruhigenden Zahlen über Armut in Deutschland, die der Paritätische Wohlfahrtsverband gestern veröffentlichte, beruhen auf einem "Taschenspieler-Trick".
Der 'Beweis': Kommen morgen tausend neue Millionäre nach Deutschland, steigt das Durchschnittseinkommen - und wir haben rechnerisch noch "mehr Arme", die darunter liegen. Verlassen tausend Millionäre das Land, sinkt plötzlich auch die Zahl der Armen."

Bild hätte völlig überraschend Recht, wenn sich die Definition von Armut auf das "Durchschnittseinkommen" beziehen würde. Das tut sie aber nicht. Sie bezieht sich auf das "mittlere Einkommen".
Nach der Definition der EU gilt als arm, wer weniger als 60 Prozent davon zur Verfügung hat.
Das mittlere Einkommen ist der Median! Man erhält diesen Wert, indem man alle Bürger sortiert nach Einkommen in einer Reihe aufstellt und denjenigen, der dann genau in der Mitte steht, fragt, was er verdient. Der Unterschied zum durchschnittlichen Einkommen kann erheblich sein - und zwar genau dann, wenn zum Beispiel einzelne Millionäre ins Spiel kommen.

Beispiel: In einem Land leben elf Bürger (Abbildung oben). Zwei verdienen 1000 Euro, fünf 2000 Euro, drei 3000 Euro, einer 10000 Euro im Monat. Ihr durchschnittliches Einkommen beträgt 2818 Euro; das mittlere Einkommen ist das, das bei einer Aufreihung der elf Bürger der sechste hat: 2000 Euro. Als "arm" gelten die beiden 1000-Euro-Bürger.
Ziehen zwei weitere Reiche mit 10000 Euro Einkommen hinzu, steigt das durchschnittliche Einkommen deutlich auf 3923, das mittlere aber bleibt konstant: 2000 Euro.
Der Median ist eine praktische statistische Größe, weil er genau die Verzerrungen vermeidet, die Bild behauptet. Eine kleine Zahl von großen Ausreißern beeinflusst den mittleren Wert nur minimal. Der

Zuzug von tausend Millionären würde daher das mittlere Einkommen nur unwesentlich erhöhen, wenn überhaupt. zitiert nach http://www.bildblog.de
Anmerkung: Auch der Median ist als Maßstab problematisch. Bei diesem Maß können mathematisch niemals mehr als 50% arm sein. In der Realität geht das aber leider doch!



Korrelationskoeffizient
Grad des Zusammenhangs der Zufallsgrößen X und Y, für die n Paare von Einzelwerten x_i, y_i

Summen

$$a = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Korrelationskoeffizient $r_{xy} = a / \sqrt{b c}$

Regression … im mathematischen Sinn: Aufsteigen und Fallen eines Wertes in Abhängigkeit von einem anderen

Lineare Regression

Regressionsgerade $\quad y_i - \bar{y} = r_{xy}\, s_y/s_x\, (x_i - \bar{x})$

s_x, s_y … Standardabweichungen von x_i, y_i

bzw. $y = a x + b$ mit $\quad b = 1/n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

$a = \bar{y} - b \bar{x}$

Regression, Beispiel

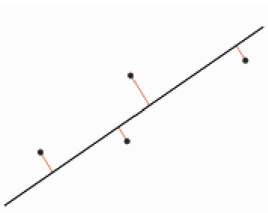
Durch Leonardo da Vinci wurden für verschiedene Vögel Körpermassen m und Spannweiten s in Relation gesetzt. Da Vinci erhielt:

Vogel	m in kg	s in m	Vogel	m in kg	s in m
Amsel	0,17	0,32	Eichelhäher	0,42	0,48
Blesshuhn	0,92	0,95	Stockente	1,95	1,10
Graugans	4,80	1,85	Storch	6,60	1,95

Analyse ergibt, dass sich der beste Zusammenhang für eine nichtlineare, geometrische Korrelation ergibt:

$s = 0{,}2469\ m^{0.4969}$

Der Korrelationskoeffizient wird 0,958337, d.h. eine sicherer Zusammenhang zwischen Körpermasse und Flügelspannweite. Ein "fliegender Mensch" würde bei gleicher Beziehung eine Spannweite von 6,81 Meter benötigen.



Orthogonale Regression

Die orthogonalen Regression wird zur Berechnung einer Ausgleichsgeraden für eine Menge von Datenpaaren (x_i, y_i) genutzt.
Wie bei der linearen Regression wird die Summe der quadrierten Abstände der Punkte von der Geraden minimiert.
Im Unterschied zur linearen Regression werden jedoch nicht die Abstände in x- bzw. y-Richtung betrachtet, sondern die senkrechten, orthogonalen Abstände.

Gesucht ist die Gerade $y = ax + b$ der orthogonalen Regression. Dazu werden die arithmetischen Mittel $\bar{x}$ und $\bar{y}$ sowie die Standardabweichungen s_x, s_y, s_{xy} von den Werten x_i, y_i berechnet:

$s_x = 1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

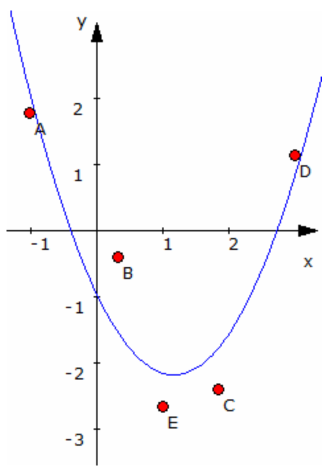
$s_y = 1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$

$s_{xy} = 1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

Die Parameter werden a und b werden dann

$a = (s_y - s_x + \sqrt{(s_y - s_x)^2 + 4 s_{xy}^2}) / (2 s_{xy}) \qquad b = \bar{y} - a \bar{x}$

Die Orthogonale Regression ist ein Spezialfall der Deming-Regression. Sie wurde 1878 von R.J.Adcock eingeführt.



Quadratische Regression

Sind eine Reihe von n Punkten (x_i, y_i) gegeben, so wird mitunter nach der besten quadratischen Parabel $y = ax^2 + bx + c$ gesucht, die diese Punkte annähert. Diese Parabel hat eine vertikale Achse. Dann wird mit

$P = \sum x_i \qquad Q = \sum x_i^2 \qquad R = \sum x_i^3 \qquad S = \sum x_i^4$

$T = \sum y_i \qquad U = \sum x_i y_i \qquad V = \sum x_i^2 y_i$

$\Delta = n Q S + 2 P Q R - Q^3 - P^2 S - N R^2$

für die Koeffizienten a, b und c

$a = (n\,Q\,V + P\,R\,T + P\,Q\,U - Q^2\,T - P^2\,V - n\,R\,U) / \Delta$
$b = (n\,S\,U + P\,Q\,V + Q\,R\,T - Q^2\,U - P\,S\,T - n\,R\,V) / \Delta$
$c = (Q\,S\,T + Q\,R\,U + P\,R\,V - Q^2\,V - P\,S\,U - R^2\,T) / \Delta$
Quelle: "Astronomische Algorithmen" von Jean Meeus

Nichtlineare Regression

Gegeben ist eine Menge von Wertepaaren (x_i, y_i) und eine nicht notwendig lineare Funktion f(x, a, b, c, …). Ziel ist es, die Parameter der Funktion so zu bestimmen, dass diese möglichst gut die Menge von Wertepaaren approximiert, d.h. mit möglichst minimaler Fehlerquadratsumme $\Sigma\ (f(x_i)-y_i)^2$.

Bei geeigneten Bedingungen findet folgendes Verfahren eine Lösung:
Zuerst werden aus der Funktion f folgende Funktionen abgeleitet:

$g_a(x) = \partial f(x,a,b,c,\ldots)/\partial a \cdot \Delta a$
$g_b(x) = \partial f(x,a,b,c,\ldots)/\partial b \cdot \Delta b$
$g_c(x) = \partial f(x,a,b,c,\ldots)/\partial c \cdot \Delta c$

usw.
wobei a, b, c … die konkreten Näherungswerte darstellen, $\partial f/\partial a$ die partielle Ableitung von f nach a ist, und Δa, Δb usw. noch zu bestimmenden Koeffizienten der Linearkombination

$g(x) = f(x,a,b,c,\ldots) + g_a(x) + g_b(x) + \ldots$

sind.
Diese Koeffizienten (Δa, Δb, …) werden mit dem Gaußschen Algorithmus der kleinsten Quadrate nun so bestimmt, dass die Fehlerquadratsumme $\sigma^2 = \Sigma((y_i-g(x_i))^2)$ minimal wird.
Unter Umständen ergeben sich bessere Näherungen für die Parameter durch $a \to a + l\cdot\Delta a$, $b \to b + l\cdot\Delta b$ usw., wobei l ein positiver Schrittweitenparameter ist.
Quelle: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/regrnl.htm

Trigonometrische Regression

Ein Spezielfall der nichtlinearen Regression ist die trigonometrische Regression.
Gegeben ist ein Menge von Wertepaaren (x_i, y_i) und die trigonometrische Funktion

$f(x) = a \sin(bx + c) + d$

Ziel ist es, die Parameter der Funktion so zu bestimmen, dass diese möglichst gut die Menge von Wertepaaren approximiert, d.h. mit möglichst minimaler Fehlerquadratsumme $\Sigma\ (f(x_i)-y_i)^2$.
Hier erhält man die partiellen Ableitungen

$g_a(x) = \sin(bx + c) \cdot \Delta a$ $\qquad g_b(x) = a\,x \cos(bx + c) \cdot \Delta b$
$g_c(x) = a \cos(bx + c) \cdot \Delta c$ $\qquad g_d(x) = \Delta d$

wobei a, b, c, d die konkreten Näherungswerte darstellen. Die Δa, Δb, Δc und Δd sind noch zu bestimmenden Koeffizienten der Linearkombination

$g(x) = a \sin(bx + c) + d + \sin(bx + c) \cdot \Delta a + a\,x \cos(bx + c) \cdot \Delta b + a \cos(bx + c) \cdot \Delta c + \Delta d$

sind.
Diese Koeffizienten (Δa, Δb, Δc, Δd) werden mit dem Gaußschen Algorithmus der kleinsten Quadrate nun so bestimmt, dass die Fehlerquadratsumme $\sigma^2 = \Sigma((y_i-g(x_i))^2)$ minimal wird.
Bessere Näherungen für die Parameter a bis d ergeben sich durch $a \to a + \Delta a$, $b \to b + \Delta b$ usw. Mehrere Wiederholungen des Verfahrens ergeben eine günstige Lösung.

Zu beachten ist, dass für höhere Koeffizienten b meist Lösungen mit kleiner Fehlerquadratsumme gefunden werden. Ist dies nicht gewünscht, so sollte b konstant gehalten und das Verfahren modifiziert werden.
Quelle: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/regrnl.htm

Logarithmische Regression

Zwischen den zu untersuchenden Daten besteht oft kein linearer Zusammeng, d.h. im Graph keine Gerade, sondern ein nichtlinearer Zusammenhang y = f(x).
In einigen Fällen kann eine geeignete monotone Transformation der Koordinatenachsen einen linearen Zusammenhang herstellen, so dass das einfache Verfahren der linearen Regression anwendbar ist.

1. Exponentialfunktionen: einfach-logarithmische Transformation

Vermutung $\quad y = a\cdot b^x$, d.h. Exponentialfunktion mit Basis b
Folge $\quad \log y = \log a + x\cdot\log b$
d.h. Transformation $y^* = \log y$ erzeugt im Koordinatensystem (x, y^*) eine Gerade mit dem Anstieg $b^* = \log b$ und dem Achsenabschnitt $a^* = \log a$.
Die Rücktransformation $a = 10^{a^*}$, $b = 10^{b^*}$ liefert die Originalparameter a und b.

2. Potenzfunktionen: doppelt-logarithmische Transformation

Vermutung $\quad y = a\cdot x^b$, d.h. Potenzfunktion mit Exponent b
Folge $\quad \log y = \log a + b\cdot\log x$
d.h. Transformation $y^* = \log y$, $x^* = \log x$ erzeugt im Koordinatensystem (x^*,y^*) eine Gerade mit dem Anstieg b und dem Achsenabschnitt $a^* = \log a$.

Die Rücktransformation $a = 10^{a^*}$ liefert den Originalparameter a.

Ausreißer-Test nach Grubbs

Ausreißer-Tests werden benutzt, um

- routinemäßig die Zuverlässigkeit von Daten zu kontrollieren,
- rechtzeitig gewarnt zu werden, die Datengewinnung besser zu kontrollieren und um
- Beobachtungen, die extrem sind und bedeutungsvoll sein können, zu erfassen.

Ein Ausreißer stellt sich als extrem hoher oder niedriger Wert innerhalb einer Reihe unterschiedlicher Messwerte dar. Er darf unter gewissen Umständen vernachlässigt werden.
Eine statistische Entscheidung ob ein Wert ein Ausreißer ist, ist nur selten möglich. U.a. wird der Test nach Grubbs benutzt. Ermittelte Ausreißer sind in jedem Falle zu dokumentieren und die Berechnung der statistischen Daten sind ohne ihn zu wiederholen. Das einfache Streichen von berechneten Ausreißern ist unzulässig, da auch der Test nach Grubbs einen Fehler 2.Art aufweisen kann.

Testverfahren
1. Berechnung der Differenz zwischen Prüfmerkmalergebnis und Mittelwert $d_i = x_i$ - Mittelwert
i … Index, d_i … Abweichung, x_i … Prüfmerkmalergebnis
2. Berechnung der Prüfgröße $PG = |d_{max} / s|$
PG … Prüfgröße als Absolutwert, d_{max} … größte Differenz zum Mittelwert, s … Standardabweichung
3. PG-Vergleich mit dem Wert aus der Tabelle $r_m(P)$-Werte nach Grubbs
Es liegt ein Ausreißer vor, wenn $PG \geq r_m(P,n)$ und kein Ausreißer, wenn $PG < r_m(P,n)$.

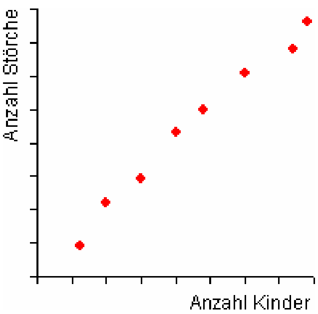
Cum hoc ergo propter hoc, fehlerhafter logischer Schluss

Cum hoc ergo propter hoc (lat. "mit diesem, also deswegen") bezeichnet einen logischen Fehler, bei dem zwei gemeinsam auftretende Ereignisse als Ursache und Wirkung erklärt werden. Dabei wird der Fehler begangen, ohne genauere Prüfung einen Zusammenhang zwischen beiden Ereignissen zu unterstellen.
Zwischen zwei miteinander nicht verbundenen Ereignissen wird eine Korrelation gefunden, die nicht existiert, da beide Ereignisse völlig unabhängig voneinander sind.

Ein berühmtes Beispiel für cum hoc ergo propter hoc ist die ironische Aussage des Physikers Bobby Henderson, dass als einzige Ursache für die globale Erwärmung und alle anderen Naturkatastrophen die sinkende Zahl von Piraten seit Beginn des 19.Jahrhunderts verantwortlich sei. Dies ist einer der "Glaubensinhalte" der von Henderson gegründeten Religionsparodie mit der Gottheit des "Fliegenden Spaghettimonsters" (Abbildung).

Im Gegensatz zur versehentlichen, fehlerhaften Aussage über eine Relation von Ursache und Wirkung wird hier bewusst ein offensichtlich falscher Schluss gezogen. Henderson will den Argumenten der US-amerikanischen Kreationisten begegnen, um auf deren gefährlichen Unfug hinzuweisen.

Dass in Europa die Zahl der Störche ebenso wie die Zahl der Geburten bei Menschen seit Jahrzehnten abnimmt, ist Gegenstand eines weiteren bekannten Beispiels. Dies ist jedoch kein Beleg dafür, dass der Storch die Babys bringt.



Cum hoc ergo propter hoc (2)

Auszug aus http://www.zeit.de/2006/25/Stimmt-s_P-25_xml:

"New Evidence for the Theory of the Stork" (Neue Beweise für die Theorie vom Storch) war ein Artikel überschrieben, den Thomas Höfer vom Bundesinstitut für Risikobewertung in Berlin 2004 zusammen mit zwei Koautorinnen, darunter eine Hebamme, in der Zeitschrift Paediatric and Perinatal Epidemiology veröffentlichte, einem Fachblatt für Geburtsstatistiken.
Die Ergebnisse der Studie:
In Niedersachsen sank sowohl die Anzahl der Störche als auch der Neugeborenen von 1970 bis 1985, danach blieben beide Werte etwa konstant.
In Berlin, wo es praktisch keine Störche gibt, verzeichneten sie einen Anstieg außerklinischer Geburten zwischen 1990 und 2000. Wie war nun das mit null Storch zu vereinbaren?
Die Forscher bezogen das Umland mit ein - und siehe da, dort wuchs die Storchenpopulation just in dem Maße, wie die Berliner Hausgeburten zunahmen.
Der logische Schluss: Brandenburger Störche bringen die Babys in die Stadt."

Beispielwerte:

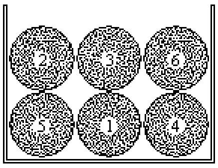
Störche je Hektar	Geburten je Tausend Einwohner
20	13

30	24
40	43
50	51
60	57
70	77

Als Mittelwerte ergeben sich 45 und 44,1667. Über die Summen erhält man als Korrelationskoeffizienten
k = 0,9879
Es gibt also einen sehr starken "Zusammenhang" zwischen Störchen und Geburten. :-)

Urnenmodell
Gegeben sei ein Urne mit n unterscheidbaren Kugeln, aus der Kugeln nacheinander gezogen werden.
Anzahl der Möglichkeiten:

geordnete Stichprobe (Ziehen von k Kugeln)	ohne Zurücklegen	= n! /(n-k)!
	mit Zurücklegen	= n^k
geordnete Stichprobe (Ziehen von n Kugeln)	ohne Zurücklegen	= n!
ungeordnete Stichprobe (Ziehen von k Kugeln)	ohne Zurücklegen	= n! / [k! (n-k)!]
	mit Zurücklegen	= (n+k-1)! / [k! (n-1)!]



Beispiel: Es gibt viele Möglichkeiten zufällige Zahlen zu ermitteln. Nach dem Vorbild der Lottoziehung könnte man 6 gleiche Kugeln mit Zahlen versehen, in einen Behälter, die Urne, legen, gut mischen und dann eine Kugel verdeckt ziehen. Die gezogene Kugel trägt die "gewürfelte" Zahl. Neues Würfeln bedeutet, die gezogene Kugel vor jedem "Würfeln" wieder zurückzulegen und dann erst wieder zu ziehen. Dieses ist das übliche Modell in der Mathematik den Würfel zu simulieren und in eine Theorie einzubinden.

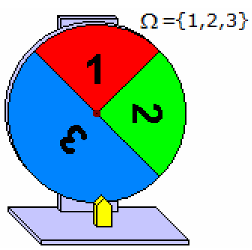
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Facile videbis hunc calculum esse saepe non minus nodosum quam iucundum
Unschwer wirst du sehen, dass dieser Zweig der Mathematik oft nicht weniger verzwickt als ergötzlich ist.
Daniel Bernoulli

Zufallsversuch oder Zufallsexperiment ... Versuch mit mehreren möglichen Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$
Ergebnismenge (Stichprobenraum) S... Menge aller möglichen Ereignisse ($\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$)
Ereignis E ... Teilmenge der Ereignismenge S
Diskrete Ereignismenge ... Ereignismenge, deren Elemente auf dem Raum der natürlichen Zahlen abgebildet werden können
Stetige Ereignismenge ... Ereignismenge, deren Elemente überabzählbar sind und nur auf den Raum der reellen Zahlen abgebildet werden können

Sicheres Ereignis sicheres Ereignis Ω ... tritt bei jedem Versuch ein (auch mit S bezeichnet)
Unmögliches Ereignis unmögliches Ereignis ∅ ... tritt bei keiner Versuchsdurchführung ein
Elementarereignis {a} ... Ereignis mit nur einem Element
Gegenereignis oder komplementäres Ereignis $\overline{E}$ ... Komplementärmenge von E
Ereignisfeld ... Menge aller Ereignisse

$A \cap B = \emptyset$ ... Ereignisse A und B schließen einander aus, sind unvereinbar bzw. disjunkt
$B \subset A$ ... Ereignis B zieht Ereignis A nach sich
$A \cup B$ ... A oder B tritt ein (Summe der Ereignisse)
$A \cap B$ ... A und B treten ein (Produkt der Ereignisse)



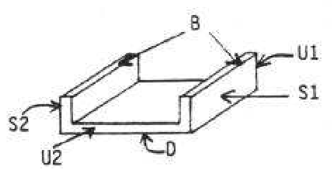
Ergebnismenge, Beispiele
In einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsexperiment gibt die Ergebnismenge Ω sämtliche vorkommende Möglichkeiten; Ergebnisse; der Experimente an.
Beispiele:
a) Experiment: Wir ziehen eine Karte aus einem Skatspiel.
Ω = {Karo 7, Karo 8, Karo 9, Karo 10, Karo Bube, Karo Dame, Karo König, Karo Ass, Herz 7, Herz 8, Herz 9, Herz 10, Herz Bube, Herz Dame, Herz König, Herz Ass, Pik 7, Pik 8, Pik 9, Pik 10, Pik Bube, Pik Dame, Pik König, Pik Ass, Kreuz 7, Kreuz 8, Kreuz 9, Kreuz 10, Kreuz Bube, Kreuz Dame, Kreuz König, Kreuz Ass}
b) Experiment: Wir werfen einen Würfel und notieren die Augenzahl.
Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
c) Experiment: Wir werfen einen Würfel und notieren, ob eine gerade oder eine ungerade Zahl fällt.
Ω = {gerade, ungerade}
d) Wir werfen einen Würfel zweimal hintereinander und notieren die Augensumme.
Ω = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Achtung: Die Ergebnisse sind hier nicht gleichwahrscheinlich!
e) Glücksrad mit drei Sektoren $\Omega = \{1, 2, 3\}$

Bei einer abzählbaren Ergebnismenge kann jedem Elementarereignis eine positive Wahrscheinlichkeit zugewiesen werden.
Ein Beispiel einer überabzählbaren Ergebnismenge ist die Menge der reellen Zahlen. In vielen Modellen ist es nicht möglich, allen Teilmengen der reellen Zahlen sinnvoll eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen.

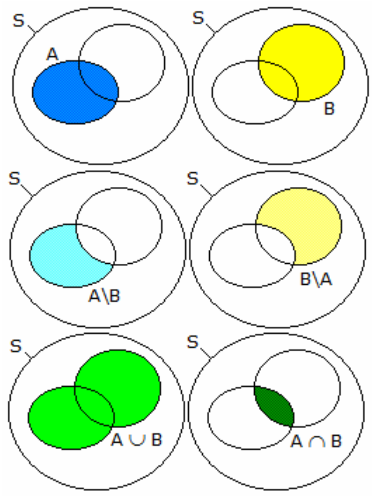
Zufallsexperimente

Experimente der Physik: unter gleichen Bedingungen beliebig wiederholbar, starker Determinismus
Zufallsexperimente: kein kausaler Zusammenhang, Ausgang unvorhersehbar, nur von Zufall abhängig
Beschreibung durch Festlegung der zu beobachtenden Merkmalsausprägungen. Diese werden in der Menge Ω aller möglichen Ergebnisse, dem Ergebnisraum zusammengefasst.
Wichtig: Die Wahl von Ω bei einem Zufallsexperiment hängt auch vom Interesse des Experimentators ab.
Durch Festlegung von Ω werden stochastische Realsituationen mathematisch modelliert.



Beispiele für Zufallsexperimente Riemer-U-Würfel werfen
$\Omega = \{S_1, S_2, U_1, U_2, B, D\}$ oder $\Omega = \{S, U, B, D\}$
Würfeln mit Farbwürfel
Ω = {gelb, violett, grün, schwarz, blau, rot}
2 Münzen werfen
$\Omega = \{WW, ZZ, WZ\}$
$\Omega = \{W_1W_2, Z_1W_2, W_1Z_2, Z_1Z_2\}$
$\Omega = \{0, 1, 2\}$ „Anzahl Wappen"
Ω = {Ja, Nein} „Ausgang gleich?"

Operationen mit zufälligen Ereignissen



Tritt mit dem Ereignis A stets auch das Ereignis B ein, dann zieht das Ereignis A das Ereignis B nach sich: $A \subseteq B$
Zieht das Ereignis B das Ereignis A nach sich und zieht das Ereignis A das Ereignis B nach sich, so sind die Ereignisse gleich: $A = B$
Tritt ein Ereignis C genau dann ein, wenn mindestens eines der Ereignisse A oder B eintritt, dann ist das Ereignis C die Summe der Ereignisse A und B: $A \cup B$ oder $C = A + B$
Tritt das Ereignis C genau dann ein, wenn sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B eintritt, dann bezeichnet man das Ereignis C als das Produkt der Ereignisse A und B: $A \cap B$ oder $C = A*B$
Tritt das Ereignis C genau dann ein, wenn das Ereignis A, aber nicht gleichzeitig das Ereignis B eintritt, dann bezeichnet man das Ereignis C als die Differenz von A zu B: $C = A \setminus B$
Das Ereignis $S \setminus A$ wird als das zu A komplementäre oder entgegengesetzte Ereignis bezeichnet.
Zwei Ereignisse A und B werden als unvereinbar (als einander ausschließend) bezeichnet, wenn ihr gleichzeitiges Eintreten unmöglich ist, d.h., wenn gilt $A \cap B = \emptyset$

Regeln und Relationen

$A \cup S = S$	$A \cap S = A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \setminus A = \emptyset$	$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \setminus B = A \setminus (A \cup B) = (A \cap B) \setminus B$	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$	

Bernoulli-Experiment

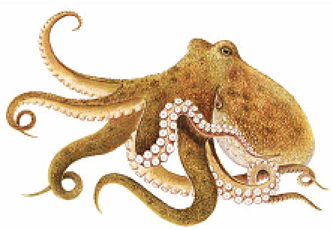
Ein Zufallsexperiment heißt Bernoulli-Experiment, wenn es genau zwei Ergebnisse hat (z.B. 0 = Fehlschlag, Niete und 1 = Erfolg, Treffer).

Bernoullikette

n -unabhängige Wiederholungen eines Bernoulliexperiments nennt man eine Bernoullikette. Ist X die Anzahl der Erfolge in einer Bernoullikette der Länge n mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p, so ist X binomial verteilt.

Münzwurfexperiment

Ein klassisches Beispiel für eine Bernoulli-Kette ist die Simulation eines Münzwurfs. Jeder Wurf kann zwei Ergebnisse "Wappen" oder "Zahl" zeigen.



Bernoulli-Kette Anwendung

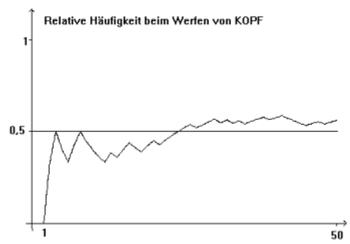
Während des nationalistischen Freudentaumels zur Fußball-WM 2010 beglückte das Sealife-Center in Oberhausen Fans und Medien mit einem Oktopus-Orakel.
Ein gemeiner Krake sollte durch alternative Wahl zwischen zwei Futterkästen Spielergebnisse von 8 Spielen "vorhersagen".

Mathematisch gesehen liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 8 vor. Die Wahrscheinlichkeit für die Wahl einer der Kisten liegt (scheinbar) bei 1/2; d.h. ein Laplace-Experiment. Interessant ist, dass der Krake alle acht Spiele richtig "vorhersagte".
Nimmt man an, dass der Krake rein zufällig entschied, ist die Wahrscheinlichkeit für 8 Richtige $1/2^8 = 1/256$
Entgegen aller medialen Spekulationen ist eine solche Erfolgsquote mathematisch gesehen nicht unwahrscheinlich. Eine Vierer im Lotto ist wesentlich unwahrscheinlicher und kaum jemand betrachtet diesen als etwas Besonderes.

Allerdings gibt es noch ein Problem.
Kraken sind für Tiere hoch intelligent und besitzen eine ausgezeichnete optische Wahrnehmung.
Insbesondere die Helligkeit und Form von Objekten werden sehr gut erkannt. Kraken bevorzugen waagerechte Linien und helle Farben. Zwar diskutieren Biologen sehr kontrovers, ob Kraken Farben wahrnehmen können, dennoch sprechen Kraken besonders auf Rot an, da diese Farbe bei der Fortpflanzung eine besondere Rolle spielt.
Damit liegt kein Laplace-Experiment mehr vor, d.h. die Wahrscheinlichkeit für die Wahl einer Kiste mit einer Flagge (in der Abbildung links) ist nicht mehr 1/2, sondern ein unbekannter Wert. Beträgt dieser nur 0,6, so ist die Trefferquote des Kraken gerade so gut, wie ein Dreier im Lotto. Vielleicht ist alles aber auch nur Blödsinn.

Häufigkeit

Absolute Häufigkeit $H_n(\omega)$ bzw. $H_n(E)$ des Eintretens von ω bzw. E ... Anzahl des Eintretens von ω bzw. E bei n Versuchen
Relative Häufigkeit $h(\omega)$ bzw. $h(E)$... $h(\omega) = H_n(\omega) / n$

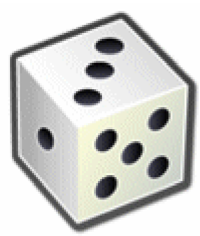


für Stichprobenumfang n gilt:

$H_n(\Omega) = n$ $\qquad$ $H_n(\emptyset) = 0$
$H_n(E_1 \cup E_2) = H_n(E_1) + H_n(E_2) - H_n(E_1 \cap E_2)$ $\qquad$ $h(\Omega) = 1$
$h(\emptyset) = 0$
$h(E_1 \cup E_2) = h(E_1) + h(E_2) - h(E_1 \cap E_2)$
$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow h(E_{11}) \leq h(E_2)$

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Mit wachsender Versuchszahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines gegebenen Ereignisses im Allgemeinen bei einer bestimmten Zahl *p*, die relativen Häufigkeiten unterscheiden sich immer weniger von dieser Zahl.
Beispiel: Münze werfen, *E* = „Kopf oben"



Würfelkette

Während der Ausstellung des Gießener Mathematicums im April 2008 im Pegasus Center der TU Chemnitz wurde ein scheinbar verblüffendes Experiment gezeigt.

Eine Anzahl von Würfeln wurden geworfen und in einer Reihe angeordnet.
Beginnend beim ersten wird nun mit der Augenzahl abgezählt, anschließend mit der Augenzahl des erreichten zweiten Würfels, dann mit dem dritten, vierten usw. …
Bleiben am Ende der Würfelkette Würfel übrig, so werden diese entfernt.

Würfelt man nun erneut mit dem ersten Würfel und zählt neu ab, gelangt man wieder genau bis an das Ende der Würfelkette, was äußerst verblüffend ist. Würfelt man noch einmal den ersten Würfel und zählt, erreicht man wieder das Ende …
Für den ersten Moment vermutet man eine innere Gesetzmäßigkeit. Allerdings stellt sich heraus, dass man nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wieder zur letzten Zahl in der Reihe gelangt. Diese ist aber sehr hoch, wenn man hinreichend viele Würfel nutzt.
Mit einer Computersimulation wurde getestet, ob auch bei 100 Würfeln irgendwann eine Abweichung auftritt. Nach über 250000 Würfelketten war eine solche gefunden. Während der Ausstellung konnte dies kaum eintreten, da die Wahrscheinlichkeit extrem niedrig ist.

Wahrscheinlichkeit
Bei einer hinreichend großen Anzahl von Versuchen ...
relative Häufigkeit ... Zahlenwert für Wahrscheinlichkeit
P(E) ... Zahlenwert der Wahrscheinlichkeit
Es gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$
$\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ aus S $\Rightarrow P(\{a_1, a_2, ..., a_k\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + ... + P(\{a_k\})$
$P(\Omega) = 1$ $\qquad$ $P(\varnothing) = 0$
$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ $\qquad$ $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow P(E_1) \leq P(E_2)$
Beispiel: Beim Riemer-U-Würfel kann man aufgrund der Daten in der Tabelle und unter Beachtung der Teilsymmetrien zum Beispiel ansetzen P(D) = 26,3 %, $P(S_1) = P(S_2)$ = 9,3 %, $P(U_1) = P(U_2)$ = 4,0 %, P(B) = 47,1 %.
Das Funktionssymbol P kommt vom lateinischen „probabilitas" = Wahrscheinlichkeit. Im französischen heißt Wahrscheinlichkeit probabilité, im englischen probability. Das deutsche Wahrscheinlichkeit entstammt dem lateinischen verisimilitudo (es scheint wahr zu sein).

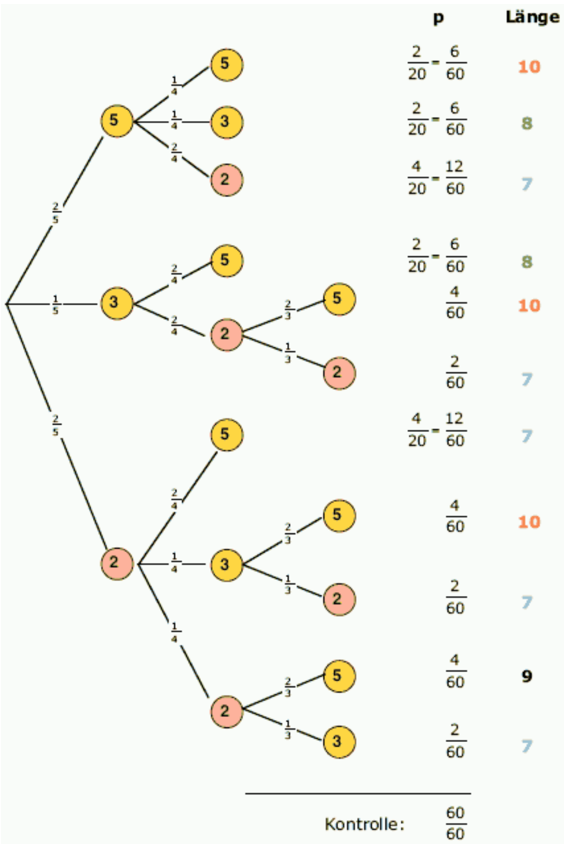
Entgegengesetzte Ereignisse
Gilt für zwei Ereignisse E_1 und E_2 $\qquad$ $P(E_1) = 1 - P(E_2)$
so schließen sich beide gegeneinander aus und sind entgegengesetzt.

Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Additionssatz, Aufgaben
Aufgabe 1
Gib nach dreimaligem Werfen mit einer idealen Münze die Teilmengen nachstehender Ereignisse an und berechne deren Wahrscheinlichkeiten.
a) P(A) für A: Es fällt mindestens zweimal Zahl.
b) P(B) für B: Im letzten Wurf fällt Zahl.
c) $P(A \cup B)$ für $A \cup B$: Es fällt mindestens zweimal Zahl oder im letzten Wurf fällt Zahl.
Lösung
S = {ZZZ, ZZW, ZWZ, ZWW, WZZ, WZW, WWZ, WWW}
a) A = {ZZZ, ZZW, ZWZ, WZZ}; P(A) = 4/8 = 1/2
b) B = {ZZZ, ZWZ, WZZ, WWZ}; P(B) = 4/8 = 1/2
c) $A \cup B$ = {ZZZ, ZZW, ZWZ, WZZ, WWZ}; $P(A \cup B)$ = 5/8

Aufgabe 2
Ein idealer Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Bestimme die Ergebnismenge S und die Teilmengen nachstehender Ereignisse. Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse?
a) P(A) für A: Augensumme < 4
b) P(B) für B: Augensumme > 10
c) $P(A \cup B)$ für $A \cup B$: Augensumme < 4 oder Augensumme > 10.
d) P(C) für C: 9 < Augensumme < 12.
e) $P(B \cup C)$ für $B \cup C$; Augensumme > 10 oder 9 < Augensumme < 12
Lösung
S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}
a) A = {(1,1), (1,2), (2,1)}; P(A) = 1/12
b) B = {(5,6), (6,5), (6,6)}; P(B) = 1/12
c) $P(A \cup B)$ = 1/6 ; d) P(C) = 5/36 ; e) $P(B \cup C)$ = 1/6

Klassische Wahrscheinlichkeit, Beispiel
Schweizer Diplomprüfung 1998:
Mischa hat in einem Sack fünf Bauklötze, je zwei mit den Längen 5 und 2, einen mit Länge 3. Sie entnimmt dem Sack rein zufällig ein Klötzchen nach dem anderen und baut daraus eine Mauer, die mindesten die Länge 7 erreichen sollte. Sie hört auf, wenn dieses Ziel erreicht ist.
a) Zeichnen Sie dazu einen schönen Baum (eine Seite!)
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mauer gerade die Länge 7 hat?
c) Wie viel größer als 7 ist die Mauer im schlimmsten Fall?



d) Wie viele Klötze muss Mischa im Mittel ziehen?
e) Um wie viel übersteigt die Länge der Mauer das Idealmaß von 7 im Mittel?

Lösung
b) p(Länge 7) = (12 + 2 +12 + 2 + 2) / 60 = 30/60 = 1/2
c) Größte Länge: 10; maximale Überlänge: 3
d) 2 Klötze zieht sie mit der Wahrscheinlichkeit (6 + 6 +12 + 6 +12)/60 = 7/10
3 Klötze zieht sie mit der Wahrscheinlichkeit (4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2)/60 = 3/10
Mittlere Anzahl Züge 7/10·2 + 3/10·3 = 23/10 = 2,3

e) Überlänge	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	30/60	12/60	4/60	14/60
Produkt0	12/60	8/60	42/60	

Die mittlere Überlänge ist gleich der Summe der Produkte (12 + 8 + 42) / 60 = 62/60 = 1,03..

Aufgaben
(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln mit einem Wurf
a) die Zahl 3 zu würfeln? b) eine gerade Zahl zu würfeln
(2) In einer Schraubenpackung mit 5000 Schrauben sind 5 Ausschussschrauben. Gesucht ist p dafür, beim Herausnehmen einer Schraube eine Ausschussschraube zu erwischen.
(3) Gesucht ist p dafür, mit zwei Würfeln
a) die Summe 7 oder b) die Summe 4 zu würfeln.
(4) Auf dem Hof einer Lackiererei haben 8% der Kfz Läufer (Fall A) und unabhängig davon 10% der Kfz Farbfehler (B). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt ein Dieb im Dunkeln ein Kfz
a) mit beiden Fehlern b) mit mindestens einem Fehler
(5) Gesucht ist P dafür, aus einem Beutel mit zwei roten und drei weißen Kugeln in zwei Zügen zwei rote Kugeln zu ziehen.
a) ohne Zurücklegen b) mit Zurücklegen
(6) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man im Skat (2 von 22 unbekannten Karten)
a) den Kreuzbuben? b) den Kreuz- oder den Pikbuben?
c) den Kreuz- und den Pikbuben?
(7) Ein Ehepaar möchte Kinder. Wie groß ist P, dass sie
a) 3 Buben und 1 Mädchen bekommen?
b) erst 3 Buben und dann 1 Mädchen bekommen?
c) 4 Mädchen bekommen?7
(8) Wenn man beim Mensch-ärgere-dich-nicht aus dem Loch muss, darf man 3 mal würfeln und muss dabei eine 6 bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

Lösungen
(1) a) P = 1/6 ; b) P = 3/6 (2) P = 5/5000
(3) a) P = 6/36 ; b) P = 3/36 (4) a) P = 0,008 ; b) P = 0,172
(5) a) P = 0,100 ; b) P = 0,160 (6) a) P= 1/11 = 0,091 ; b) P = 82/462 ; c) P = 2/462
(7) a) P = 0,25 ; b) P = 1/16 ; c) P=1/16 (8) P = 0,42

Aufgabe
7 LKW bilden am Gotthard eine Autoschlange. Von den 7 LKW führen 2 LKW - verbotenerweise - hochexplosives Gefahrengut mit.
a) Auf wie viele Arten kann diese Warteschlange zusammengesetzt sein?
b) Bei wie vielen der möglichen Warteschlangen unter a) befinden sich die beiden "explosiven" LKW direkt hintereinander?
Von den 7 LKW werden 3 LKW zufällig von der Polizei kontrolliert.
c) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl dieser 3 LKW?
d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einen "explosiven" LKW zu erwischen?
e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beide erwischt?
Die beiden "explosiven" LKW gehören den Firmen SECURETRANS bzw. TRANSCARE.
f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird SECURETRANS erwischt?
g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird nur SECURETRANS erwischt? [Matur TSME 02, Aufgabe 8]

Lösungen
a) 7! = 5040
b) der vordere Lastwagen kann an 6 Stellen stehen: 6
c) $\binom{7}{3} = 35$
d) Die Wahrscheinlichkeit keinen zu erwischen ist: $\binom{5}{3}\binom{2}{0} / \binom{7}{3} = 2/7$, also p = 1-2/7 = 5/7
e) $\binom{2}{2}\binom{5}{1} / \binom{7}{3} = 1/7$ f) $\binom{1}{1}\binom{6}{2} / \binom{7}{3} = 3/7$
g) $\binom{1}{1}\binom{5}{2} / \binom{7}{3} = 2/7$

Aufgabe

In einer Urne liegen x rote, 7 blaue und 8 grüne Kugeln. A sei das Ereignis, in zwei Zügen ohne Zurücklegen zwei rote Kugeln zu ziehen. B sei das Ereignis, in zwei Zügen ohne Zurücklegen zwei blaue Kugeln zu ziehen.

a) Die Wahrscheinlichkeit von B sei um 11/190 größer als die Wahrscheinlichkeit von A. Berechnen Sie daraus die Zahl der roten Kugeln!

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von mindestens einer grünen Kugel bei fünf Zügen mit Zurücklegen!

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen zweier verschiedenfarbiger Kugeln bei zwei Zügen ohne Zurücklegen!

d) Berechnen Sie die unter c) verlangte Wahrscheinlichkeit unter der Voraussetzung, dass die erste gezogenen Kugel blau oder grün ist!

Lösungen

Es seien x rote, 7 blaue und 8 grüne, total x+7+8 = x+15 Kugeln.

Die Wahrscheinlichkeit für A ist:

$$x / (15+x) \cdot (x-1) / (15+x-1) = x / (15+x) \cdot (x-1) / (14+x) = x (x-1) / ((15+x)(14+x))$$

Die Wahrscheinlichkeit für B ist:

$$7 / (15+x) \cdot 6 / (15+x-1) = 7 / (15+x) \cdot 6 / (14+x) = 42 / ((15+x)(14+x))$$

a) Aus den Wahrscheinlichkeiten wird

$$x (x-1) / ((15+x)(14+x)) + 11/990 = 42 / ((15+x)(14+x))$$

Diese Gleichung hat eine brauchbare x = 5 und eine unbrauchbare Lösung x = -5,6

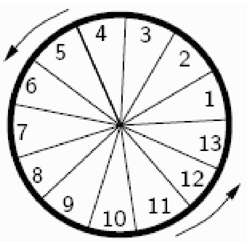
b) Keine grüne Kugel ziehen ist das Gegenereignis mit der Wahrscheinlichkeit $(12/20)^5$, d.h. P = 92,2%

c) Das Gegenereignis ist: rot-rot oder blau-blau oder grün-grün mit der Wahrscheinlichkeit

$$5/20 \cdot 4/19 + 7/20 \cdot 6/19 + 8/20 \cdot 7/19 = 118/380$$

gesuchte Wahrscheinlichkeit: 131/190 = 68,9%

d) Bedingte Wahrscheinlichkeit! Möglich sind alle Ereignisse, bei denen der 1. Zug blau oder grün ist. Günstig sind die Ereignisse: blau-rot oder blau-grün oder grün-rot oder grün-blau, d.h. P = 65,6%



Aufgabe:

Auf einem Jahrmarkt wird ein Wurfspiel durchgeführt, bei dem eine Scheibe mit 13 gleich großen Sektoren in schnelle Drehung versetzt wird.

Der Spieler muss sechs Wurfpfeile auf die Scheibe werden. Jeder Wurf, der die Scheibe verfehlt, muss wiederholt werden. Der Einsatz beträgt 5 €.

Der Spieler verliert, wenn mindestens zwei Pfeile den gleichen Sektor einschließlich Rand treffen. Andernfalls gewinnt er 5 €, erhält also mit dem zurückgezahlten Einsatz zusammen 10 €. Ist das Spiel fair?

Lösung: Trifft der erste Pfeil einen Sektor, so muss für einen Gewinn der zweite Pfeil einen anderen Sektor treffen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist 12/13.

Für den dritten Pfeil existieren dann noch 11 Sektoren, für den vierten Pfeil 10 Sektoren usw…

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns

$$P = 12/13 \cdot 11/13 \cdot 10/13 \cdot 9/13 \cdot 8/13 \approx 0{,}256$$

Da der reine Gewinn gerade dem Einsatz entspricht, ist das Spiel bei einer Gewinnwahrscheinlichkeit von 25,6 % auf keinen Fall fair.

Vierfeldertafel

Eine Vierfeldertafel ist ein Hilfsmittel, um die gleichzeitige Beobachtung zweier Ereignisse zu erfassen. Auf ihrer Grundlage ist es möglich zu entscheiden, ob die betrachteten Ereignisse voneinander abhängig oder unabhängig sind.

Für einen Vorgang, der n-mal wiederholt wird, bzw. für n Beobachtungsergebnisse sollen die Ereignisse (Merkmale) E und F betrachtet werden. Für diesen Fall hat eine Vierfeldertafel die abgebildete Gestalt.

	F	$\bar{F}$	Σ
E	$H_n(E \cap F)$	$H_n(E \cap \bar{F})$	$H_n(E)$
$\bar{E}$	$H_n(\bar{E} \cap F)$	$H_n(\bar{E} \cap \bar{F})$	$H_n(\bar{E})$
Σ	$H_n(F)$	$H_n(\bar{F})$	n

Hierbei sind H_n jeweils die absoluten Häufigkeiten. Die Schreibweise $E \cap F$ bedeutet, dass beide Merkmale zutreffen. Die Summe der absoluten Häufigkeiten im Inneren der Vierfeldertafel muss stets n ergeben, während an den Rändern jeweils die absoluten Häufigkeiten von E, F und deren Gegenereignisse stehen.

Beispiel zur Vierfeldertafel

Aufgabe:

52,4% der 244600 Jugendlichen, die am Ende des Schuljahres 2003/2004 ihre Schule mit dem Abitur verließen, waren Frauen. In den östlichen Bundesländern und Berlin liegt der Frauenanteil mit 59,1% deutlich höher als im früheren Bundesgebiet (50,4%).

Wie groß ist die relative Häufigkeit, dass ein Abiturient aus dem Osten kommt, wenn bekannt ist, dass es eine Frau ist?

Lösung:

Gesamtanzahl	244600	Gesamt Weiblich	128170
Gesamt männlich	116430	Gesamt Ost	x
Gesamt West	244600 – x	Ost Weiblich	x*0,591
Ost männlich	x*(1-0,591)	West Weiblich	((244600-x)*0,504
West männlich	(244600-x)*(1-0,504)		

und so gilt für die Frauen 128170 = x·0.591 - (244600 - x)·0.504, d.h. x = 56225

Vierfeldertafel:

	weiblich	männlich	Summe
Osten	33229	22996	56225
Westen	94941	93434	188375
Summe	128170	116430	244600

Antwort: Die relative Häufigkeit, dass Abiturientin aus dem Osten kommt, ist ... 33229 / 128170 = 0,259

Aufgabe:

Bei A+ = 0,1 % der untersuchten Patienten liegt eine Aidsinfektion vor, bei A- = 99,9% liegt keine Aidsinfektion vor. Ein Aidstest zeigt bei Vorliegen einer Aidsinfektion dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,8% an. Bei Nichtvorliegen einer Aidsinfektion ist der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1% ebenfalls positiv (T+).

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass positiv getestete Personen tatsächlich krank oder aber dennoch gesund sind?

Vierfeldertafel:

	T+	T-	
A+	0,001*0,998	0,001*0,002	0,001000
A-	0,999*0,001	0,999*0,999	0,999000
	0,001997	0,998003	1,000000

Dies ergibt: positiv getesteter Patient hat tatsächlich eine Aidsinfektion
P = (0,001*0,998)/0,001997 = 0,49975

positiv getesteter Patient ist in Wirklichkeit gesund P = (0,001*0,999)/0,001997 = 0,50025

Das Ergebnis verdeutlicht, warum es keine flächendeckenden Aids-Tests geben darf! Würden in Deutschland alle 60 Millionen Erwachsenen getestet, würde der Test 60000 mal positiv anzeigen. Davon wären aber mindestens 30000 gesund, wahrscheinlich sogar noch mehr, da der überwiegende Bevölkerungsteil nicht zu Risikogruppen gehört. 30000 Personen würden in eine psychische Katastrophe gestürzt, obwohl sie gesund sind!

	Erfolg	Misserfolg	
Probe A	E_A	M_A	E_A+M_A
Probe B	E_B	M_B	E_B+M_B
	E_A+E_B	M_A+M_B	N

	Alkohol	Nüchtern	
Test 1	9	591	600
Test 2	2	398	400
	11	989	1000

Vierfeldertest

Die Vierfeldertafel kann zur Überprüfung eines signifikanten Unterschieds zwischen zwei Stichproben genutzt werden.
Gegeben sind zwei Proben A und B. Dieser werden nach einem Kriterium auf Erfolg und Misserfolg getestet. Die entsprechenden absoluten Häufigkeiten für Erfolg seine E_A, E_B, für Misserfolg M_A und M_B. Sind die Summe E_A+M_A und E_B+M_B jeweils größer als 5, so kann die Testgröße

$TG = (N-1)(E_A \cdot M_B - E_B \cdot M_A)^2 / ((E_A+E_B)(M_A+M_B)(E_A+M_A)(E_B+M_B))$

berechnet werden.

Ist TG < 2,71 so gibt es keinen signifikanten Unterschied zwischen Probe A und B; für 2,71 < TG < 3,84 eine Signifikanz mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 %, für 3,84 < TG < 6,64 mit 5 %, für 6,64 < TG < 10,83 mit 1 % und für TG > 10,83 mit 0,1 %.

Im unteren Beispiel wurden zwei Alkoholtests bei Autofahrern durchgeführt. Im 2.Test wurden "nur" 2 Alkoholsünder erwischt, also deutlich weniger als im 1.Test.
Für die Prüfgröße TG ergibt sich 2,2. D.h., es gibt keinen signifikanten Unterschied.
Dass im 2.Test weniger alkoholisierte Fahrer auftraten, war Zufall!
Quelle des Beispiels: "Der Hund, der Eier legt" von Dubben und Beck-Bornholdt

Gleichverteilung (klassische Wahrscheinlichkeit)

Ein Zufallsversuch heißt Laplace-Experiment, wenn alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

P(E) = Anzahl der für E günstigen Ergebnisse / Anzahl der möglichen Ergebnisse

Zum Beispiel wird eine Münze, für die P(Wappen) = P(Zahl) = 1/2 gilt, auch Laplace-Münze genannt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

n-stufiger Versuch ... Zusammenfassung von n Versuchen

unabhängige Ereignisse: Das Eintreten eines Ereignisses A hat keinen Einfluss auf das Eintreten eines anderen B, d.h. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

durch B bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ von A

Wahrscheinlichkeit von A unter der Voraussetzung, dass B mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eingetreten ist

Definition $P_B(A) = P(A \cap B) / P(B)$, falls $P(B) > 0$
andere Schreibweise $P_B(A) = P(A/B)$

		Merkmal II (Farbe)		
		B: rot	$\bar{B}$: grün	Summe
Merkmal I Material	A: Holz	25	45	70
	$\bar{A}$: Kunststoff	10	20	30
	Summe	35	65	100

	B	$\bar{B}$	Summe
A	$P(A \cap B) = 0{,}25$	$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}45$	$P(A) = 0{,}7$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = 0{,}1$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}2$	$P(\bar{A}) = 0{,}3$
Summe	$P(B) = 0{,}35$	$P(\bar{B}) = 0{,}65$	1

Bedingte Wahrscheinlichkeit - Beispiel

Aufgabe: Eine Urne enthält 100 Kugeln. 70 Kugeln bestehen aus dem Material Holz und 30 Kugeln sind aus Kunststoff. 25 der Holzkugeln sind mit der Farbe rot gestrichen und 45 sind grün. 10 der Kunststoffkugeln sind rot und 20 sind grün.
Folgende Ereignisse werden definiert:

A: Die Kugel ist aus Holz
$\bar{A}$: Die Kugel ist aus Kunststoff
B: Die Kugel ist rot
$\bar{B}$: Die Kugel ist grün

Dann ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten

$P(A) = 70/100 = 0{,}7$
$P(\bar{A}) = 30/100 = 0{,}3$

$P(B) = 35/100 = 0{,}35$ $P(\bar{B}) = 65/100 = 0{,}65$
$P(A \cap B) = 25/100 = 0{,}25$ $P(A \cap \bar{B}) = 45/100 = 0{,}45$
$P(\bar{A} \cap B) = 10/100 = 0{,}1$ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 20/100 = 0{,}2$
$P_A(B) = P(A \cap B) / P(A) = 5/14$ $P_A(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) / P(A) = 9/14$
$P_{\bar{A}}(B) = P(\bar{A} \cap B) / P(\bar{A}) = 1/3$ $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) / P(\bar{A}) = 2/3$

Wenn man zum Beispiel weiß, dass die gezogene Kugel aus Kunststoff besteht, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie die Farbe grün hat: 2/3.

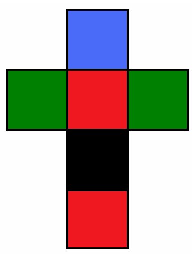
Abhängige Ereignisse - Beispiel

Zufallsexperiment: Werfen von zwei idealen Würfeln
Ereignisse: X = "Summe der Augenzahlen ist gerade"
Y = "die absolute Differenz der Augenzahlen ist gerade"
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in der unteren Tabelle zu sehen. Dabei sieht man, dass zum Beispiel
$P(X = 2 \text{ und } Y = 0) = 1/36$ ist aber $P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = 1/36 \cdot 6/36$,
d.h. die Ereignisse sind abhängig.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

	x=2	3	4	5	6	7
y=0	1/36	0	1/36	0	1/36	0
1	0	2/36	0	2/36	0	2/36
2	0	0	2/36	0	2/36	0
3	0	0	0	2/36	0	2/36
4	0	0	0	0	2/36	0
5	0	0	0	0	0	2/36
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36

	x=8	9	10	11	12	P(Y=y)
y=0	1/36	0	1/36	0	1/36	6/36
1	0	2/36	0	2/36	0	10/36
2	2/36	0	2/36	0	0	8/36
3	0	2/36	0	0	0	6/36
4	2/36	0	0	0	0	4/36
5	0	0	0	0	0	2/36
P(X=x)	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1



Abhängige Ereignisse - Beispiel 2

Die Seitenflächen eines idealen Würfels werden wie folgt eingefärbt. Zwei Seitenflächen mit der Farbe rot und zwei mit der Farbe grün. Eine Seitenfläche mit der Farbe schwarz und eine mit der Farbe blau.
Der Würfel wird zweimal geworfen. Folgende Ereignisse werden definiert:

A: Beim ersten Wurf erscheint die Farbe rot oder schwarz.
B: Beim zweiten Wurf erscheint die Farbe grün oder blau.

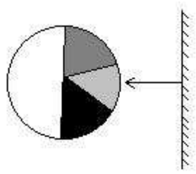
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und B voneinander unabhängig sind.

Lösung: Vorüberlegung $P(r) = P(g) = 1/3$ und $P(s) = P(b) = 1/6$
Berechnung von $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$

$A = \{(rx), (sx)\}$ mit x = beliebig $\Rightarrow P(A) = P(r) + P(s) = 1/2$
$B = \{(xg), (xb)\}$ mit x = beliebig $\Rightarrow P(B) = P(g) + P(b) = 1/2$
$A \cap B = \{(rg), (rb), (sg), (sb)\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(rg) + P(rb) + P(sg) + P(sb) = 1/4$

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig voneinander, wenn gilt:
$P_A(B) = P(B)$ $\qquad$ $P(B) = 1/2$
$P_A(B) = P(A \cap B) / P(A) = 1/2$

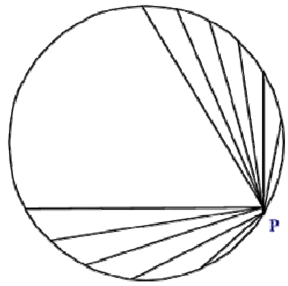
d.h., die Ereignisse A und B sind unabhängig voneinander.



Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Verallgemeinerung der Laplace-Wahrscheinlichkeit.
Beispiel: Drehen eines Glücksrades. Man kann z.B. sinnvoll festlegen:
P(„Pfeil zeigt auf schwarz") = Flächeninhalt schwarzer Sektor / Flächeninhalt Kreis
P(„Pfeil zeigt auf schwarz") = Winkel im schwarzen Sektor / 360°
P(„Pfeil zeigt auf schwarz") = Bongenlänge zu schwarzem Sektor / Kreisumfang

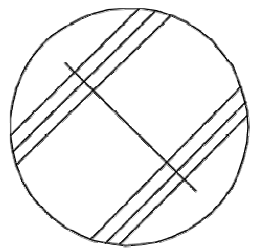
Bertrand-Problem



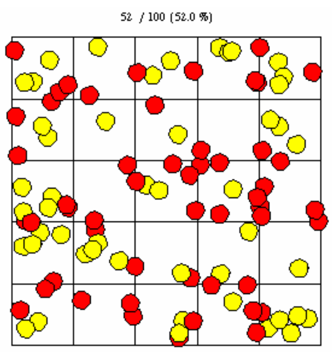
Kreisradius sei r. Man überlegt elementargeometrisch sofort: Die Seite des gleichseitigen Dreiecks halbiert Radius, Seitenlänge ist $a = \sqrt{3}\, r$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit sei p.
Modellierung 1:
Wähle P auf Kreis beliebig. Alle Sehnen kürzer als *a*, die von P ausgehen, enden auf Kreisbogen, der 2/3 des Umfangs ausmacht; entsprechende Argumentation für Winkel. $\qquad P = 2/3$

Aber! Alle Sehnen sind kürzer als a, die von P ausgehen, liegen in 2 Kreisabschnitten über den Dreiecksseiten, d.h.
P = Fläche Kreisabschnitte / Kreisfläche $= 2/3\ (\pi r^2 - ½\ a\ 3/2\ r)/(\pi r^2) = 2/3 - ½ \sqrt{3}\ \pi \approx 0.391$

Modellierung 2:
Wähle beliebigen Durchmesser. Alle Sehnen kürzer als a und senkrecht zum Durchmesser liegen in dessen 1. und 4. Viertel, d.h. $p = 1/2$
Aber! Entsprechend über Flächen wie oben: $p = 2/3 - ½ \sqrt{3}\ \pi$.



Modellierung 3:
Klar: Alle Sehnen kürzer als *a* liegen im Kreisring mit innerem Radius r/2, Inkreis, d.h.
P = Kreisringfläche / Kreisfläche $= (\pi r^2 - ¼\ \pi r^2)/(\pi r^2) = 3/4$
Die Nicht-Eindeutigkeit der Lösung resultiert aus der Nicht-Eindeutigkeit der Fragestellung: Was heißt „ganz zufällig"?



Ein-Quadrat-Problem

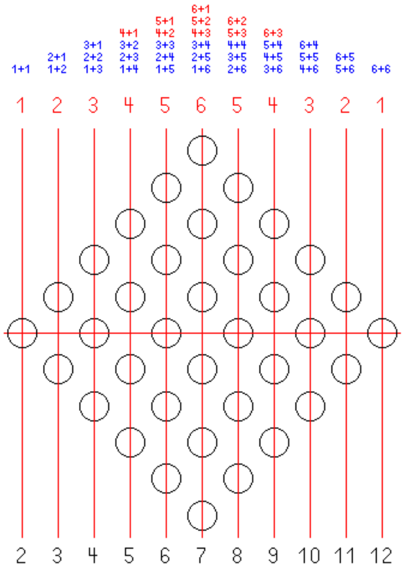
Das Ein-Quadrat-Problem (engl. Clean Tile Problem) wurde erstmals 1777 von Buffon beschrieben. Es ist unmittelbar mit dem Buffonschen Nadelproblem zur experimentellen Bestimmung der Kreiszahl π verbunden. Gegeben ist eine Menge von Quadraten gleicher Größe der Kantenlänge a, welche die Ebene vollständig überdecken. Auf diese Quadrate werden zufällig Kreisscheiben mit dem Durchmesser d geworfen. Diese Kreise können dann 1, 2, 3 oder 4 der Quadrate teilweise bedecken. Die Aufgabe besteht darin, die Wahrscheinlichkeit für das Überdecken zu bestimmen. Es gilt:
Wahrscheinlichkeit genau ein Quadrat zu treffen
$P_1 = (1 - d/a)^2$
Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Quadrate zu treffen
$P_{>1} = 1 - (1 - d/a)^2$
Wahrscheinlichkeit genau zwei Quadrate zu treffen $\qquad P_2 = 2\ (1 - d/a)\ d/a$
Wahrscheinlichkeit genau drei Quadrate zu treffen $\qquad P_3 = (1 - \pi/4)\ d^2/a^2$
Wahrscheinlichkeit genau vier Quadrate zu treffen $\qquad P_4 = \pi/4\ d^2/a^2$

Für ein Spiel, bei dem man auf das Ereignis "genau ein Quadrat treffen" setzt, sollte $d = 1/2\ (2 - \sqrt{2})\ a = 0.29289...\ a$ sein. Andernfalls ist das Spiel nicht fair.

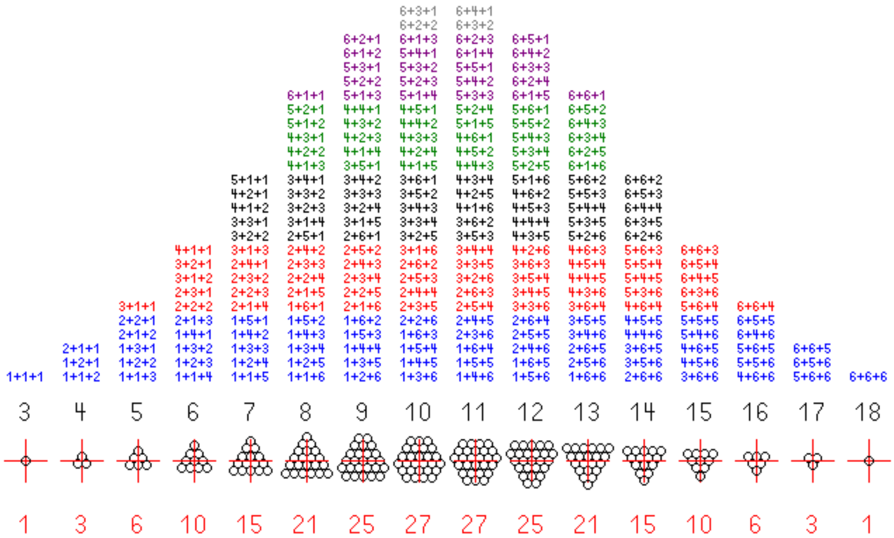
Würfelsumme

Wie oft bekommt man mit 2 Würfeln eine 7? Wie oft eine 2?
Grafisch kann man das so lösen: Ordnet man die 36 gleich wahrscheinlichen Fälle zu einem Quadrat, bei dem jede Seite das anzeigt, was einer der beiden Würfel macht, so findet man die 7 auf der Diagonalen mit 6 von 36 Fällen, also der Wahrscheinlichkeit 1/6. Die 2 oder die 12 haben dagegen jeweils 1/36. Die Auftragung der Wahrscheinlichkeit gegen die Augensumme sieht aus wie die ganzzahlig-stufige Annäherung an das Bild einer Dreiecksfunktion.

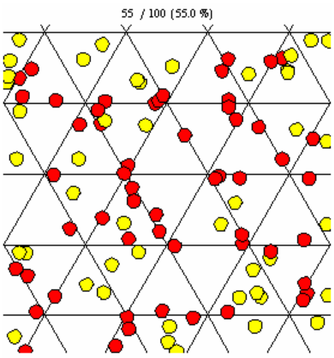
3 Würfel



Wir denken uns 216 Kugeln zu einem symbolischen Würfel aus 6 mal 6 mal 6 zusammengesetzt. Auf jeder Würfelkante wird aufgetragen, wie viel jeweils einer der drei als Zufallsgeneratoren benutzen gewöhnlichen Würfel anzeigen.
Nun suchen wir die Kugeln, die zu jeweils einer gemeinsamen Augensumme gehören.
Zur 3 und zur 18 gehört jeweils nur einer in einer Ecke. Zur 4 und zur 17 sind es jeweils 3 in einem Dreieck, und so gehen wir schichtweise in dengroßen Würfel hinein und finden zunächst immer größere Dreiecke als Schichten von zwei Pyramiden. Nach der 6. Schicht würden wir aber den Würfel überschreiten, wir bekommen nun Sechsecke mit 3-er-Symmetrie. Genau in der Mitte wird ein Würfel zwar (rechtwinklig zur Raumdiagonale) durch ein reguläres Sechseck begrenzt, aber unsere Schichten (für eine gerade Zahl von möglichen Augenzahlen eines Würfels wie 6) liegen zu beiden Seiten der Halbierungsebene, keine in ihr.
Wir finden für 10 eben so wie für 11 Augen bei 3 Würfeln jeweils die Wahrscheinlichkeit 27/216, für 3 oder für 18 natürlich je 1/216. Alle Zahlen sind in diesem Bild zu sehen:



Die Kurve ähnelt nun nicht mehr einer Dreiecksfunktion, sondern einer Glockenkurve. Im Grenzfall für 3 Zufallsgeneratoren mit viel mehr als 6 Werten nähert sie sich einer Kurve aus drei Stücken von Parabeln 2. Grades an. Das entspricht den Flächen, die den Würfel rechtwinklig zur Raumdiagonale in beliebig feinen Höhen-Schritten schneiden. Für die pyramidenartigen Endstücke ist das besonders leicht zu sehen: In einem pyramidenförmigen Haus steigt die Etagenfläche quadratisch mit dem Abstand von der Spitze.



Ein-Dreieck-Problem

Das Ein-Dreieck-Problem wurde erstmals 1777 von Buffon beschrieben. Es ist unmittelbar mit dem Buffonschen Nadelproblem zur experimentellen Bestimmung der Kreiszahl π verbunden.
Gegeben ist eine Menge von gleichseitigen Dreiecken gleicher Größe der Kantenlänge a, welche die Ebene vollständig überdecken. Auf diese Dreiecke werden zufällig Kreisscheiben mit dem Durchmesser d geworfen. Diese Kreise können dann 1 bis 6 Dreiecke teilweise bedecken. Die Aufgabe besteht darin, die Wahrscheinlichkeit für das Überdecken zu bestimmen. Es gilt:
Wahrscheinlichkeit genau ein Dreieck zu treffen

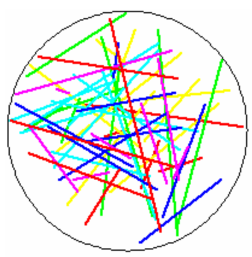
$$P_1 = (1 - \sqrt{3}\, d/a)^2$$

Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Quadrate zu treffen

$$P_{>1} = 1 - (1 - \sqrt{3}\, d/a)^2$$

Für ein Spiel, bei dem man auf das Ereignis "genau ein Dreieck treffen" setzt, sollte $d = 1/2\,(2\sqrt{3} - \sqrt{6})\,a = 0.16910...\,a$ sein. Andernfalls ist das Spiel nicht fair.

Kreis-Gerade-Problem, Disk Line Picking



Gegeben sei eine Kreisscheibe mit

$$x = \sqrt{r} \cos \theta \;;\; y = \sqrt{r} \sin \theta$$

mit $r \in [0; 1]$ und $\theta \in [0; 2\pi]$. Zufällig werden nun zwei Punkte in dieser Scheibe gewählt und deren Entfernung s bestimmt.
OBdA sei $(r, \theta) = (r_1, 0)$ und der zweite Punkt (r_2, θ). Dann wird: $s = 128/(45\,\pi) = 0.905414787\ ...$

Nichts in der Natur ist zufällig... Etwas erscheint nur zufällig aufgrund der Unvollständigkeit unseres Wissens.
Spinoza

Laplacesches Ereignisfeld

Ein Laplacesches Ereignisfeld ist ein Ereignisfeld mit folgenden Eigenschaften:
1. Es gibt endlich viele atomare Ereignisse (Elementarereignisse) $A_1, A_2, ..., A_n$, die ein vollständiges System von Ereignissen bilden.
2. Die zufälligen Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ sind gleich möglich, d.h. sie sind hinsichtlich des Grades der Unbestimmtheit ihres Eintretens nicht mehr unterscheidbar.

Wetten und subjektive Wahrscheinlichkeiten

Es sei $P(E) = a/c$. Ich wette auf E. Es gilt: $P(\neg E) = 1 - P(E) = 1-a/c = b/c$
Chancenverhältnis P(E): $P(\neg E) = a/c : b/c = a : b$, wobei $a + b = c$.
Eine faire Wettquote ist b : a, d.h. pro eingesetzte € erhält man im Gewinnfall b/a € ausbezahlt und zudem den Einsatz zurück.
Umgekehrt: Beträgt die Wettquote b : a, so ist das Chancenverhältnis $P(E) : P(\neg E) = a : b$ mit $P(E) = a/(a+b)$ und $P(\neg E) = b/(a+b)$.

Simpson-Paradoxon ... nach E.H.Simpson (1951)

Für drei Ereignisse A, B und C folgt aus der Gültigkeit von

$$P_{B \cap C}(A) > P_{\bar{B} \cap C}(A) \qquad P_{B \cap \bar{C}}(A) > P_{\bar{B} \cap \bar{C}}(A)$$

nicht notwendig $P_B(A) > P_{\bar{B}}(A)$

Beispiel: Für die Stichprobe

	C		$\bar{C}$	
	B	$\bar{B}$	B	$\bar{B}$
A	90	5	9	500
$\bar{A}$	800	95	2	400

ergibt sich $0{,}1011 = P_{B \cap C}(A) > P_{\bar{B} \cap C}(A) = 0{,}05$ $0{,}8182 = P_{B \cap \bar{C}}(A) > P_{\bar{B} \cap \bar{C}}(A) = 0{,}5556$
aber (!) $0{,}1099 = P_B(A) < P_{\bar{B}}(A) = 0{,}505$

Simpson-Paradoxon (2)

An einer Universität bewerben sich junge Frauen und Männer für ein Sprachstudium in Englisch, Russisch, Spanisch und Italienisch. Nicht alle Bewerber werden zugelassen. Es ergeben sich folgende Werte:

	männl.Bewerber	zugelassen	%	weibl.Bewerber	zugelassen	%
Englisch	825	512	62	108	89	82
Russisch	560	353	63	25	17	68
Spanisch	417	138	33	375	131	35
Italienisch	373	22	6	341	24	7
Summe	2175	1024	47	849	261	31

Obwohl in jeder Studienrichtung prozentual mehr Frauen zugelassen wurden, ergibt sich in der Summe, dass prozentual mehr Männer ein Studium beginnen können. Die Hauptursache liegt darin, dass sich die jungen Frauen vor allem für die (wahrscheinlich) anspruchsvolleren Studien beworben haben.
Ein typisches Beispiel für das Simpson-Paradoxon.

Analog kann man auch "beweisen", dass die Sterblichkeit von Nichtrauchern höher ist als von Rauchern. Untersucht wird dabei, wie viele Raucher bzw. Nichtraucher aus einer Stichprobe nach 20 Jahren gestorben waren.

	Sterbealter 55-64	%	Sterbealter 65-74	%	kombiniert 55-74	%
Raucher	51	44	29	80	80	53
Nichtraucher	40	33	101	78	141	56

Diese Zahlen sind echt und wurden zwischen 1972 und 1994 in Großbritannien ermittelt.

Simpson-Paradoxon (3)

In der Tabelle der Sterblichkeit auf Grund von Tuberkulose in New York und Richmond aus dem Jahre 1910 tritt ebenfalls das Simpsonsche Paradoxon auf (Székely, 1990):

	Bevölkerung		Todesfälle		Sterberate	
	New York	Richmond	New York	Richmond	New York	Richmond
Weiß	4675174	80895	8365	131	0,00179	0,00162
Farbig	91709	46733	513	155	0,00560	0,00332
Gesamt	4766883	127628	8878	286	0,00186	0,00224

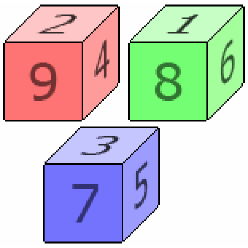
Widerspruch: Bist du weiß, gehe nach Richmond. Bist du farbig, gehe ebenfalls nach Richmond. Bist du weiß oder farbig, dann bleibe in New York.
Fazit: Statistiken muss man nicht fälschen, wenn man damit irreführen will. Es reicht manchmal schon das Addieren von Zähldaten, so wie hier.
Quelle: http://www2.hs-fulda.de/~grams/dnkfln.htm

Stein, Papier, Schere

Im klassischen Spiel "Stein, Papier, Schere" ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel unentschieden ausgeht, immerhin 1/3. Von den 9 Paaren haben 3 identisch gewählte Objekte.
Zur Erhöhung der Wahrscheinlichkeit eines klaren Ausgangs auf 4/5 erdachte der in der "Big Bang Theorie" erfundene Internetpionier Sam Kass "Stein, Papier, Schere, Echse, Spock".
Da, laut Sheldon, die Wahrscheinlichkeit durch Stein, Schere, Papier bei Leuten, die sich gut kennen auf eine gleiche Wahl zu kommen sehr hoch ist, wurden Echse und Spock zum Spiel hinzugefügt.

Regeln:
- Schere schneidet Papier
- Papier bedeckt Stein
- Stein zerquetscht Echse
- Echse vergiftet Spock
- Spock zertrümmert Schere
- Schere köpft Echse
- Echse frisst Papier
- Papier widerlegt Spock
- Spock verdampft Stein
- Und wie gewöhnlich: Stein schleift Schere

Da von den 25 möglichen Paaren genau 5 unentschieden enden, ergibt sich in 80 % der Fälle ein Sieger.

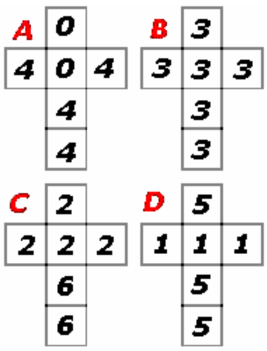


Intransitive Würfel

Intransitive Würfel sind ein Satz besonderer Spielwürfel, in dem es zu jedem der Würfel einen anderen Würfel gibt, gegen den er auf Dauer verliert, d.h. mit dem er häufiger eine kleinere als eine größere Zahl zeigt.
Ein Beispiel sind die abgebildeten drei intransitiven Würfel A, B und C. Die einander gegenüberliegenden Seiten jedes Würfels sind mit der gleichen Zahl beschriftet.
Jeweils mit Wahrscheinlichkeit 5/9 gewinnt A gegen B, B gegen C und C gegen A.
Das Beispiel der intransitiven Würfel zeigt, dass die Relation "ist mit größerer Wahrscheinlichkeit größer" für Zufallsvariablen nicht transitiv sein muss. Ein ähnliches Beispiel für eine nichttransitive Relation ist das Spiel Schere, Stein, Papier, in dem jedes Symbol gegen eines gewinnt und gegen ein anderes verliert.

Das Ergebnis des Spiels widerspricht der Intuition, dass ein Vorteil transitiv sein müsse. Diese Vorstellung wäre zutreffend, wenn das Ergebnis die Summe der in einer großen Zahl von Spielrunden gewürfelten Zahlen und nicht die Anzahl der gewonnenen Runden wäre.
Einen ähnlichen Irrtum zeigt auch das Condorcet-Paradoxon.
Bekannte Beispiele für intransitive Würfel sind die Würfel von Bradley Efron und die Miwinschen Würfel.

Würfel von Bradley Efron

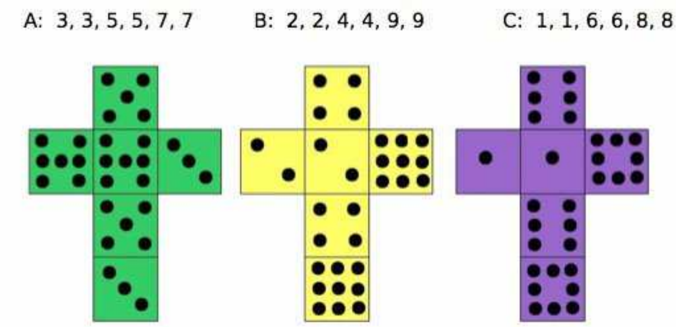


Gegeben sind vier Würfel A, B, C und D (siehe Abbildung). Kain darf sich zuerst einen dieser Würfel auswählen, anschließend wählt Abel einen der übrigen drei Würfel. Wer die höhere Punktzahl wirft, gewinnt. Das unerwartete Ergebnis ist, dass Abel stets so wählen kann, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit 2/3 das Spiel gewinnt!
Es gilt: D schlägt A, A schlägt B, B schlägt C und C schlägt D jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3.

Der US-amerikanische Statistiker Efron gab weiterhin drei verschiedene Sätze von jeweils vier Würfeln an, für die ebenso

$$P(A>B) = P(B>C) = P(C>D) = P(D>A) = 2/3$$ gilt.

Augenzahlen der Würfel im 2.Satz
A: 2, 3, 3, 9, 10, 11 B: 0, 1, 7, 8, 8, 8
C: 5, 5, 6, 6, 6, 6 D: 4, 4, 4, 4, 12, 12



Augenzahlen der Würfel im 3.Satz
A: 1, 2, 3, 9, 10, 11
B: 0, 1, 7, 8, 8, 9
C: 5, 5, 6, 6, 7, 7
D: 3, 4, 4, 5, 11, 12
Abbildung: Efron-Würfel im 4.Satz

Miwinsche Würfel

Die Miwinschen Würfel wurden 1975 von dem österreichischen Physiker Michael Winkelmann erfunden. Sie bestehen aus einem Satz von drei unterschiedlichen Würfeln.
Die Summe der Augenzahlen jedes Würfels beträgt 30, der Mittelwert 5. Gegenüberliegende Augenzahlen der Würfel ergeben in Summe jeweils neun, zehn oder elf. Sie überstreichen den Zahlenbereich von Eins bis Neun. Sie sind wie folgt beschriftet:

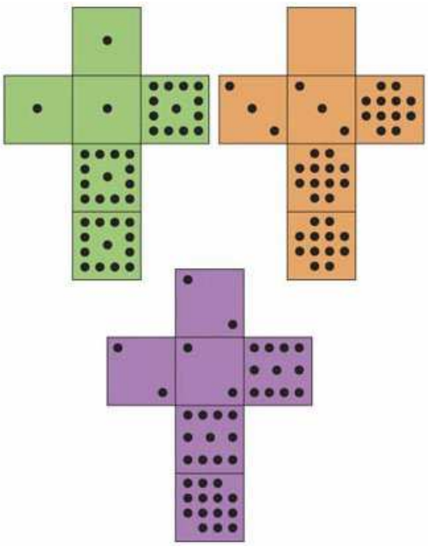
Satz 1

Würfel III	1, 2, 5, 6, 7, 9	Würfel IV	1, 3, 4, 5, 8, 9
Würfel V	2, 3, 4, 6, 7, 8		

Satz 2

Würfel IX	1, 3, 5, 6, 7, 8	Würfel X	1, 2, 4, 6, 8, 9
Würfel XI	2, 3, 4, 5, 7, 9		

Gegen jeden der Würfel hat einer der beiden anderen folgende Chancen: Gewinn 17/36, Verlust 16/36 und Unentschieden 3/36. Kennzeichen der drei Spielwürfel ist es, dass jeder einzelne von ihnen gleiche besondere Eigenschaften aufweist. Auf keinem Würfel sind doppelte Zahlen. Gleiche Augensummen und Zahlen kommen auf keinen Würfeln doppelt vor.
Damit sind die Miwinschen Würfel eine besondere Form von intransitiven Würfeln und ermöglichen viele unterschiedliche Spielvarianten.



Würfel von Schwenk

Der Satz von 3 Würfeln nach Schwenk bildet ebenfalls intransitive Würfel. Die Augenzahlen auf den Würfeln sind

A: 1, 1, 1, 13, 13, 13
B: 0, 3, 3, 12, 12, 12
C: 2, 2, 2, 11, 11, 14

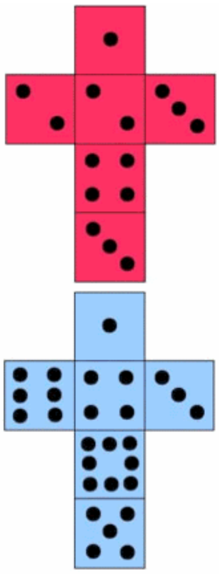
Werden diese geworfen, so gewinnt A gegen B, B gegen C und C gegen A. Es ist P(A>B) = P(B>C) = P(C>A) = 7/12

Sicherman-Würfel

Wirft man zwei ideale Würfel und bestimmt die Augensumme, ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung

Augenzahl n	2	3	4	5	6	7
P(X=n)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36
Augenzahl n	8	9	10	11	12	
P(X=n)	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	

Durch Colonel George Sicherman wurde nach 1970 das Problem gestellt und gelöst, ob auch zwei verschiedene Würfel die angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugen können.



Fordert man, dass mindestens ein Auge je Würfelseite auftritt, so existiert nur eine solches Paar mit den Augenzahlen

1, 2, 2, 3, 3, 4 und 1, 3, 4, 5, 6, 8

Diese abgebildeten Würfel werden Sicherman-Würfel genannt.
Lässt man auch eine leere Seite zu, so gibt es zwei weitere verschiedene Würfel, welche diese Wahrscheinlichkeitsverteilung aufweisen:

2, 3, 3, 4, 4, 5 und 0, 2, 3, 4, 5, 7

Spiel-"Würfel" müssen nicht notwendig wirklich Würfel sein. Andere platonische Körper, aber auch unregelmäßige Polyeder, können genutzt werden.
Überträgt man die Fragestellung Sichermans auf andere Körper, so zeigt sich zuerst, dass mit zunehmender Flächenzahl auch die Anzahl der Sicherman-Polyeder wächst. Zum Beispiel gibt es für das Oktaeder 3 solche verschiedenen Oktaederpaare, beim Dodekaeder schon 13 Varianten.
Aber! Auch hier gilt, dass man nicht vorschnell verallgemeinern darf. Für eine 35seitigen Polyeder gibt es wieder genau ein Paar von verschiedenen Polyedern, die die gleiche Verteilung der Wahrscheinlichkeiten aufweist wie zwei normierte derartige Körper.

Münzwurfparadoxon

Wirft man eine ideale Münze, so ist die Wahrscheinlichkeit dreimal hintereinander Wappen zu werfen genau so groß, wie die Folge Wappen-Zahl-Wappen. Betrachtet man solche Dreierfolgen, so gibt es von denen acht: ZZZ, ZZW, ZWZ, ZWW, WZZ, WZW, WWZ und WWW, die alle mit einer Wahrscheinlichkeit von genau 1/8 auftreten können.

Führt man nun ganze Serien von Würfen durch, d.h. man wirft n Mal jeweils 200 Mal die Münze, so werden sich für hinreichend große n die gesuchten Wahrscheinlichkeiten einstellen. Fragt man jetzt, an welcher Position einer Wurffolge zum Beispiel die Kombinationen WWW oder ZZW auftreten, so ist zu erwarten, dass im Durchschnitt der gleiche Wert entsteht.
Dies ist aber ein Irrtum! Völlig paradoxer Weise zeigt sich, dass die Kombinationen ZZW, ZWW, WZZ und WWZ in langen Wurfserien im Schnitt das erste Mal an Position 6 auftreten, die Kombinationen ZWZ und WZW an Position 8 und die beiden verbleibenden WWW und ZZZ erst an Position 12. D.h., fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass ZZW vor ZWZ in den Serien auftritt, so ergibt sich eine dreimal höhere Wahrscheinlichkeit. Fragt man nach ZZW vor ZZZ, so ist dies noch wesentlich wahrscheinlicher.
Dieses (scheinbare) Paradoxon, wurde erst in den 70ziger Jahren des 20.Jahrhunderts intensiv untersucht. Die Ursache für das unerwartete Ergebnis liegt in der bedingten Wahrscheinlichkeit.
Betrachtet man nur Zweierfolgen ZZ, ZW, WZ und WW, so ist die durchschnittliche Position an der diese Folgen auftreten für ZW und WZ gleich 3, für ZZ und WW jedoch 5.
Bei einem Testlauf mit 10 Millionen Wurfserien ergab sich für die durchschnittlichen Positionen:

ZZZ	12,001	ZZW	6,000	ZWZ	8,000	ZWW	5,998
WZZ	6,001	WZW	8,000	WWZ	6,001	WWW	11,996

Simulationsergebnis

Würfe	ZZZ	ZZW	ZWZ	ZWW	WZZ	WZW	WWZ	WWW
10000	11.951	5.999	8.117	6.084	5.977	8.159	5.959	11.975
20000	11.979	6.004	8.029	6.036	5.964	8.069	5.972	11.995
30000	12.025	5.985	7.987	6.069	5.955	8.008	6.012	11.971
40000	11.986	5.98	8.009	6.066	5.955	8.019	6.029	11.977
50000	12.011	6.002	8.023	6.064	5.976	8	6.026	11.987
100000	11.991	5.983	8.007	6.039	5.961	8.028	6.009	11.989
200000	11.983	5.99	8.021	6.016	5.981	8.036	6.005	11.973
300000	11.981	5.987	8.021	6.008	5.978	8.024	6	11.978
400000	11.992	5.994	8.005	6.009	5.986	8.01	6.003	11.981
500000	11.989	5.994	8.005	6.006	5.99	8.015	6.006	11.995
1000000	11.988	5.999	8.002	6.009	5.992	8.014	6.002	11.998

Sankt-Petersburg-Paradoxon
Das Sankt-Petersburg-Paradoxon beschreibt ein Paradoxon in einem Glücksspiel.
Das Paradox erhielt seinen Namen von Daniel Bernoullis Präsentation des Problems und seiner Lösung, die er 1738 veröffentlichte. Nikolaus I. Bernoulli erwähnte das Problem schon 1713.

In einem Glücksspiel, für das eine Teilnahmegebühr verlangt wird, wird eine faire Münze geworfen, solange bis zum ersten Mal "Kopf" fällt. Dies beendet das Spiel. Der Gewinn richtet sich nach der Anzahl der Münzwürfe insgesamt. War es nur einer, dann erhält der Spieler 1 Euro. Bei zwei Würfen erhält er 2 Euro, bei drei Würfen 4 Euro, … und bei jedem weiteren Wurf verdoppelt sich der Betrag. Man gewinnt 2^{k-1} Euro, wenn die Münze k mal geworfen wurde. Wie groß ist der Erwartungswert?

Sei $P(Z_i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass beim i-ten Münzwurf Zahl fällt und $P(K_i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass beim i-ten Münzwurf Kopf fällt. Man kommt genau dann zum k-ten Wurf, wenn man vorher k-1-mal Zahl geworfen hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Mal beim k-ten Münzwurf "Kopf" ist

$$p_k = 1/2^k$$

Mit Wahrscheinlichkeit 1/2 ist der Gewinn 1 Euro, mit Wahrscheinlichkeit 1/4 ist er 2 Euro, mit Wahrscheinlichkeit 1/8 ist er 4 Euro … Der Erwartungswert ist daher

$$E = 1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + \ldots = \Sigma_{k=1}{}^{\infty} = \infty$$

Im Durchschnitt erwartet man daher einen unendlichen Gewinn. Dies ist paradox, da man in der Regel nur einige Euro gewinnt.

In der beschriebenen Variante hat das Kasino unbegrenzte Geldvorräte; das Spiel könnte beliebig lange gehen. Geht man hingegen von einem realen Kasino mit einem Kapital von K aus, dann kann das Kasino nicht mehr als einen maximalen Gewinn auszahlen. Erreicht der Spieler die daraus resultierende Grenze von N Münzwürfen, dann wird ihm der Gewinn an dieser Stelle ausgezahlt und das Spiel abgebrochen.
Dann ergibt sich
Erwartungswert $E = (N + 1) / 2$ mit Spiellänge $N = 1 + [\log_2 K]$
Für verschiedene Kapitalwerten ergibt sich

Kasinokapital K	maximale Spiellänge N	Erwartungswert E
100 €	7	4 €
100 Millionen €	27	14 € (normales Kasino)

Wason-Test
Problem: Es gibt Karten, von denen wir wissen, dass jede auf einer Seite mit einem Buchstaben und auf der anderen mit einer Ziffer beschrieben ist. Vier solcher Karten liegen vor uns und wir lesen: A B 1 2.
Nun behauptet jemand: Für diese vier Karten gilt, dass jede Karte, die auf der einen Seite ein A hat, auf

der anderen eine 1 hat. Welche Karten muss man umdrehen, um die Richtigkeit dieser Behauptung zu prüfen? Die Aufgabe ist nach P.C. Wason benannt.
Lösung: Es ist offensichtlich, dass wir A umdrehen müssen. Aber außerdem müssen wir auch die 2 umdrehen, nicht aber die 1.
Um das einzusehen wird die Wahrheitstafel betrachet. Da jede Karte eine Buchstabenseite und eine Ziffernseite hat, geht das sehr übersichtlich:

"Wenn A dann 1"		
Ziffern	Buchstaben	
.	A	B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
1	möglich	möglich
2 3 4 5 6 7 8 9 0	**nicht möglich**	möglich

Die Aussage "Wenn A dann 1" bedeutet also, dass es nicht möglich sein soll, dass auf einer Karte auf der einen Seite ein A und auf der anderen eine andere Ziffer als 1 steht. Was eine Karte mit B macht, ist nicht wichtig. Wohl aber müssen wir nachsehen, was die von 1 verschiedenen Ziffern auf ihrer Gegenseite tragen. Von der Tabelle her gesehen, müssen wir also genau die Spalten und die Zeilen testen, in denen "nicht möglich" steht.
Dass diese Aufgabe überwiegend falsch beantwortet wird, liegt an der Verwechslung mit der Ausage "Genau wenn auf der einen Seite A steht, steht auf der anderen 1", das heißt: *immer* wenn aber auch *nur* dann wenn. Das ist aber eine ganz andere Aussage, bei der wir alle Karten umdrehen müssten:

"Genau (immer) wenn A dann (und nur dann) 1"		
Ziffern	Buchstaben	
.	A	B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
1	möglich	**nicht möglich**
2 3 4 5 6 7 8 9 0	**nicht möglich**	möglich

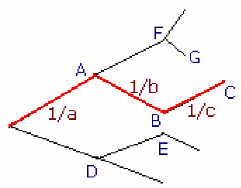
Wie gefährlich die Verwechslung der beiden Aussagen ist, sieht man am Beispiel "Terroristen reden von der Ungerechtigkeit in der Welt"/"Wer von der Ungerechtigkeit in der Welt redet, ist (also) ein Terrorist". Wer so argumentiert, kann entweder nicht logisch denken oder nutzt es aus, dass seine Zuhörer es nicht können. Beides keine Gründe ihn zu wählen.

Unabhängige Ereignisse

Das Eintreten eines Ereignisses A hat keinen Einfluss auf das Eintreten eines anderen B, d.h. $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$.

	$x =$												
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P(Y = y)$
$y =$	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	0	1/36	6/36
	1	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	10/36
	2	0	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	0	8/36
	3	0	0	0	2/36	0	2/36	0	2/36	0	0	0	6/36
	4	0	0	0	0	2/36	0	2/36	0	0	0	0	4/36
	5	0	0	0	0	0	2/36	0	0	0	0	0	2/36
	$P(X = x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

Beispiel für abhängige Ereignisse:
Zufallsexperiment: Werfen von zwei idealen Würfeln
Ereignisse: X = "Summe der Augenzahlen ist gerade"; Y = "die absolute Differenz der Augenzahlen ist gerade"
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in der Tabelle zu sehen.
Dabei sieht man, dass zum Beispiel
$P(X = 2 \text{ und } Y = 0) = 1/36$ ist aber $P(X = 2) \cdot P(Y = 0) = 1/36 \cdot 6/36$,
d.h. die Ereignisse sich abhängig.



Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm

$$\mathbf{P(ABC) = 1/a * 1/b * 1/c}$$

Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(B) * P_B(A) = P(A) * P_A(B), \text{ falls } P(A) \text{ und } P(B) > 0$$

Für unabhängige Ereignisse A, B gilt $P_B(A) = P(A)$ und $P_A(B) = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Totale Wahrscheinlichkeit

A_i, i=1,2,...,n vollständiges System von Ereignissen, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, dann ist $P(B) = P(B/A_1) * P(A_1) + P(B/A_2) * P(A_2) + P(B/A_n) * P(A_n)$

Bayessche Formel

$$P(A_i/B) = [\, P(B/A_i) * P(A_i) \,] / \sum_{i=1}^{n} [P(B/A_i * P(A_i)]$$

Bayessche Formel-Anwendung

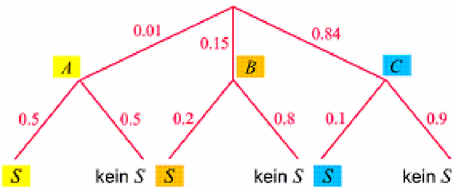
Aufgabe:
Gegeben ist eine Fußballmannschaft, deren Siegeschance je Spiel bei 75% liegt, falls ihr Kapitän in guter Form ist. Falls ihr Kapitän jedoch nicht in guter Form ist, dann betrage ihre Siegeschance nur 40%.
Bei 70% aller Spiele seiner Mannschaft sei der Kapitän in guter Form. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) die Mannschaft ein Spiel gewinnt,
b) der Kapitän bei einem Spiel in guter Form ist, obwohl die Mannschaft das Spiel nicht gewinnt.
Lösung:
Zur Lösung werden zwei Ereignisse betrachtet

A = Kapitän ist in guter Form ; A^c = Kapitän ist in schlechter Form
B = Mannschaft gewinnt Spiel

Dann gilt $P_A(B) = 0{,}75$; $P_{A^c}(B) = 0{,}40$ und $P(A) = 0{,}70$.
Nach den Formeln für die totale Wahrscheinlichkeit und den Satz von Bayes wird dann

$P(B) = P_A(B)\, P(A) + P_{A^c}(B)\, P(A^c) = 0{,}645$

und $P_{B^c}(A) = P_A(B^c)\, P(A) / (P_A(B^c)\, P(A) + P_{A^c}(B^c)\, P(A^c)) = 0{,}493$



Bayessche Formel-Anwendung (2)

Aufgabe:
Ein medizinisches Symptom S kann von zwei bekannten Krankheiten A und B hervorgerufen werden (A ist selten und gefährlich, B ist häufig und harmlos), aber auch bei gesunden Menschen (C) auftreten. Wenn das Symptom bei jemandem auftritt, möchte man wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er welche Krankheit hat bzw. gesund ist.

Kategorie	Auftreten von S mit Wahrscheinlichkeit
A	0,5
B	0,2
C	0,1

und die Erkrankungswahrscheinlichkeiten

Kategorie	Erkrankung erfolgt mit Wahrscheinlichkeit
A	0,01
B	0,15

Lösung:
Die erste Tabelle definiert drei Zufallsexperimente A B, und C. Die zweite legt fest, mit welchen Wahrscheinlichkeiten sie auftreten. Das zugehörige Baumdiagramm ist links zu sehen.
Bei Auftreten des Symptoms S sind die Wahrscheinlichkeiten, an A bzw. B erkrankt bzw. gesund zu sein, nach dem Satz von Bayes

$P_S(A) = 0{,}01 \times 0{,}5 / (0{,}01 \times 0{,}5 + 0{,}15 \times 0{,}2 + 0{,}84 \times 0{,}1) \approx 0{,}042$
$P_S(B) = 0{,}15 \times 0{,}2 / (0{,}01 \times 0{,}5 + 0{,}15 \times 0{,}2 + 0{,}84 \times 0{,}1) \approx 0{,}252$
$P_S(C) = 0{,}84 \times 0{,}1 / (0{,}01 \times 0{,}5 + 0{,}15 \times 0{,}2 + 0{,}84 \times 0{,}1) \approx 0{,}706$

Der Patient braucht sich also keine übermäßigen Sorgen zu machen, obwohl eine Abklärung sinnvoll ist, denn von 1000 Patienten, bei denen das Symptom auftritt, werden ungefähr 40 tatsächlich an A erkrankt sein.

Bayessche Formel-Anwendung (3)

Anfang 2013 wurde offiziell bekannt, dass der US-amerikanische Geheimdienst NSA in Zusammenarbeit mit dem BND systematisch u.a. die deutschen Bürger ausspioniert.
Der Kanadier Corey Chivers untersuchte, wie gut das eingesetzte Spionageprogramm PRISM (Abbildung: © Yintan, CC-by-SA 3.0) arbeiten kann. Die Frage ist, wie viel Nutzen die Überwachung elektronischer Medien und elektronisch gespeicherter Daten tatsächlich hat, da ja vorwiegend Unschuldigen terroristische Absichten zur Last gelegt werden.

Unter der Grundannahme, dass die Wahrscheinlichkeit, dass PRISM einen Terroristen als solchen erkennt, bei 99% liege und dass unter einer Million Menschen ein Terrorist ist, ergibt sich nach dem Satz von Bayes:
geg.: $P(A)$ … Terrorist, nach Einschätzung der USA!!!!
$P(B)$ … ein solcher Terrorist wird erkannt
$P_A(B) = 0{,}99$; $P_{A^c}(B) = 0{,}01$; $P(A) = 1/1000000$
$P(B) = P_A(B)\, P(A) + P_A{}^c(B)\, P(A^c) = 0{,}0100098$
$P_B(A) = P_A(B)\, P(A) / (P_A(B)\, P(A) + P_A{}^c(B)\, P(A^c)) = 0{,}00009899\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, dass PRISM eine Person als Terrorist identifiziert und diese Person auch tatsächlich ein Terrorist ist, liegt bei nur 0,0001.
Ergebnis: Wenn PRISM 10000 Menschen als verdächtig einstuft, ist von diesen Personen nur eine wirklich ein Terrorist, die anderen sind alle zu Unrecht beschuldigt.

Würde es fiktiv sogar unter 100000 Personen einen sogenannten Terroristen geben, wären von 1000 beschuldigten Personen 999 unschuldige Opfer des US-amerikanischen, aber auch des deutschen Überwachungsstaates.

Zufallsgrößen und Verteilung

Eine Zufallsgröße X ist eine Größe, die bei verschiedenen, unter gleichen Bedingungen durchgeführten Versuchen, verschiedene Werte x_1, x_2, … annehmen kann.
Eine diskrete Zufallsgröße X kann nur endlich viele Werte annehmen.
Eine stetige Zufallsgröße X kann beliebig viele Werte annehmen.

Verteilungsfunktion F(x)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt an, wie sich die Wahrscheinlichkeiten auf die möglichen Zufallsergebnisse verteilen. $F_X(x) = F(x) = P(X < x)$
Diskrete Zufallsgröße $F(x) = \Sigma\, p_i$ mit $p_i = P(X=x_i)$; $x_i < x$
Bei diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen spricht man von einer Wahrscheinlichkeitsfunktion oder Zähldichte. Die Zufallsvariable besitzt abzählbar viele Werte.

Stetige Zufallsgröße $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\, dz$, wobei
f(x) … Verteilungsdichte mit $f(x) \geq 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
Bei einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung spricht man von einer Dichtefunktion oder Wahrscheinlichkeitsdichte.

Vertrauensintervall

Das Vertrauensintervall ist ein wichtiger Begriff der mathematischen Statistik. Das α-Vertrauensintervall $[x_{-\alpha}, x_{+\alpha}]$ der Zufallsvariablen X ist das Intervall, in dem mit der Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ alle Messwerte x der Zufallsvariablen X liegen, d.h. sie erfüllen die Ungleichung $x-\alpha \leq x \leq x+\alpha$

Erwartungswert

Mittelwert (Erwartungswert) einer diskreten Zufallsgröße

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i;$$ x_i...Werte, p_i Wahrscheinlichkeit

Mittelwert einer stetigen Zufallsgröße

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\, dx$$, f(x) Dichtefunktion

Varianz einer diskreten Zufallsgröße

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\, p_i$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Interessante Erwartungswerte

Vervollständigen einer Sammlung von n Bildern $E = n\, \zeta(1)_n = n\, (\ln n + \gamma)$
Gleicher Geburtstag von n Personen $E = \sqrt{n\, \pi/2} - 1/3$

Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i;$$ x_i...Werte, p_i Wahrscheinlichkeit

Der Erwartungswert ist nicht das arithmetische Mittel, sondern ein gewichtetes Mittel der einzelnen möglichen Werte der Zufallsgröße.

Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$P(X=x_1) = 1 \rightarrow E(X) = x_1$; Einpunktverteilung $E(a*X) = a * E(X)$
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ $E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$
$E(aX + b) = aE(X) + b$ $E(X-E(X)) = 0$
$E(X*Y) = E(X) * E(Y)$
$V(aX + b) = a^2\, V(X)$ $\sigma(aX + b) = |\, a \,|\, \sigma(X)$

Sätze

Ist c eine Konstante, und $\mu = E[X]$, dann ist $Var[X] = E[\,(X-c)^2\,] - (\mu - c)^2$
Sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen, dann ist $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$ und $\sigma[X + Y] = (\, \sigma[X]^2 + \sigma[Y]^2\,)^{1/2}$
Sind X_1, X_2, ..., X_n verschiedenen unabhängige Zufallsgrößen, dann ist $Var[X_1 + X_2 + ... + X_n] = Var[X_1] + Var[X_2] + ... + Var[X_n]$

Erwartungswert, Beispiele

Aufgabe 1

Eines der folgenden fünf Wörter wird zufällig gezogen: DER ZUFALL REGIERT DIE WELT

Berechnen Sie folgende Erwartungswerte:
a) Anzahl der Buchstaben des gezogenen Wortes.
b) Anzahl der Vokale des gezogenen Wortes.
c) Anzahl der Buchstaben E des gezogenen Wortes.
Lösung:
a) 23/5, die mittlere Wortlänge ist 4,6 Buchstaben; b) ein Wort enthält im Mittel 1,8 Vokale; c) der Buchstabe E kommt im Mittel einmal pro Wort vor

Aufgabe 2
Jedes Mal, wenn Professor X eine Gruppe von fünf Personen trifft, wettet er hundert Franken, dass mindestens zwei von diesen fünf Personen im gleichen Monat Geburtstag haben.
Welches ist der mittlere Gewinn oder Verlust bei diesem Spiel? Wie groß ist die Varianz?
Lösung: Wahrscheinlichkeit 0,61806, wenn Prof. X dieses Spiel oft spielt, wird er im Mittel 23,61 Fr. pro Spiel gewinnen

Aufgabe 3
Marie hat im Küchenschrank vier angefangene Packungen Reis; sie enthalten noch 200 g, 200 g, 300 g und 400 g Reis.
Für einen Rissotto benötigt sie 300 g Reis. Sie nimmt jeweils eine Packung aus dem Kasten und schüttet den Inhalt auf die Waage, holt sich eventuell eine weitere Packung, bis sie genug hat
a) Zeichnen Sie zu dieser Situation einen schönen Baum und versehen Sie ihn mit den nötigen Zahlen.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie nur eine Schachtel herausnehmen muss?
c) Wie viel Gramm Reis holt sie im Mittel aus dem Kasten?
d) Wie viele leere Schachteln kann sie im Mittel entsorgen?
Lösung
b) 1/2 ; c) 425 g ; d) 3/4 der Schachteln können entsorgt werden

Geburtstagsproblem
Problem: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_a(n,d)$, dass unter n willkürlich ausgewählten Personen a Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, wenn d verschiedene Tage zu Grund gelegt werden ?

$$P_2(n,d) = 1 - d! / [(d-n)!\, d^n] \approx 1 - e^{-n(n-1)/(2d)} \approx 1 - (1 - n/(2d))^{n-1}$$

$P_2(n,365)$ wird für n=23 größer als 1/2, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen am gleichen Tag des Jahres Geburtstag haben: $P_2(23,365)$ =
38093904702297390785243708291056390518886454060947061 /
/ 75091883268515350125426207425223147563269805908203125 ≈ 0.507297
Für eine Wahrscheinlichkeit p größer 0.5, dass a Personen am gleichen Tag eines Jahres Geburtstag haben, benötigt man eine Grundmenge von n Personen:

a	n	a	n	a	n	a	n
1	1	2	23	3	88	4	187
5	313	6	460	7	623	8	798
9	985	10	1181	11	1385	12	1596
13	1813						

Personen	Wahrscheinlichkeit, dass zwei am gleichen Tag Geburtstag haben		
2	0,00273972602739726	3	0,00820416588478138
4	0,0163559124665503	5	0,0271355736997936
6	0,0404624836491115	7	0,0562357030959754
8	0,074335292351669	9	0,0946238338891667
10	0,116948177711078	11	0,141141378321733
12	0,167024788838064	13	0,194410275232429
14	0,223102512004973	15	0,252901319763686
16	0,28360400525285	17	0,315007665296561
18	0,346911417871789	19	0,379118526031537
20	0,41143838358058	21	0,443688335165206
22	0,47569530766255	23	0,507297234323985
24	0,538344257914529	25	0,568699703969464
26	0,598240820135939	27	0,626859282263242
28	0,654461472342399	29	0,680968537477777
30	0,706316242719269	31	0,730454633728644
32	0,753347527850321	33	0,774971854175772
34	0,795316864620154	35	0,814383238874715
36	0,83218210637988	37	0,848734008216385
38	0,864067821082121	39	0,878219664366722
40	0,891231809817949	41	0,903151611481735
42	0,914030471561869	43	0,92392285565612
44	0,932885368551426	45	0,940975899465775

46	0,948252843367255	47	0,954774402833299
48	0,960597972879422	49	0,965779609322676
50	0,970373579577988	51	0,974431993334428
52	0,978004509334275	53	0,981138113483913
54	0,983876962758852	55	0,986262288816446
56	0,988332354885201	57	0,99012245934117
58	0,991664979389261	59	0,992989448417817

Geburtstag 29.Februar

Aufgabe

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person an einem Schalttag, dem 29.Februar, geboren wurde?

Lösung

Nach der Schaltregel des Gregorianischen Kalenders ist jedes restlos durch 4 teilbare Jahr Schaltjahr. Ausnahme sind die vollen Jahrhunderte, die nicht gleichzeitig restlos durch 400 teilbar sind. 2000 war Schaltjahr, 1900 nicht, 1800 nicht ...
Damit gibt es in 400 Jahren 400 * 365 + 100 - 3 = 146097 Tage und genau 97 Schalttage.
Die Wahrscheinlichkeit am 29.Februar geboren zu sein: P = 97 / 146097 = 0.0663942... %
Nach einer Abschätzung leben gegenwärtig (2002) etwa 40 Millionen Menschen, die am 29.Februar geboren wurden, auf der Erde.

Lucas Partyproblem

Problem: N verheiratete Paare nehmen an einem runden Tisch Platz. Dabei soll jeder Mann genau zwischen zwei Frauen sitzen, jedoch nicht neben seiner Ehefrau. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?
Lösung von M.Laisant:
Die Anzahl der möglichen verschiedenen Sitzanordnungen ist A_n n!. Dabei ergeben sich die Zahlen A_i durch die Rekursionsformel von Laisant $(n - 1) A_{n+1} = (n^2 - 1) A_n + (n + 1) A_{n-1} + 4 (-1)^n$

$A_3 = 1$; $A_4 = 2$

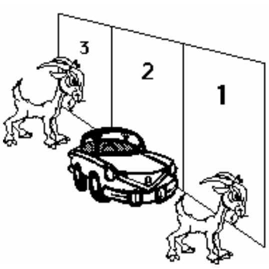
Für die Anzahl n = 3,4,5, ... der Paare ergeben sich

A_i = 1, 2, 13, 80, 579, 4738, 43387, 439792, 4890741, 59216642, ...

und für die verschiedenen Sitzanordnungen

= 6, 48, 1560, 57600, 2918160, 191036160, 15744274560, 1595917209600, ...

Zum Ausprobieren aller Möglichkeiten würden die Paare, wenn Sie je Minute 5 Anordnungen einnehmen könnten, an Zeit benötigen = 1 Minute, 10 Minuten, 5 Stunden, 8 Tage, 1.1 Jahre, 72 Jahre, 6000 Jahre, 600000 Jahre, ...



Ziegenproblem

Das Ziegenproblem, auch als "Drei-Türen-Problem" oder "Monty-Hall-Problem" bekannt, ist eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Es wurde nach dem Moderator der US-amerikanischen Spielshow "Let's make a deal" Monty Hall benannt.
Dieser Problem wird oft als Beispiel dafür herangezogen, dass der menschliche Verstand zu Trugschlüssen neigt, wenn es um das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten geht.

Problem: Ein Kandidat steht vor 3 verschlossenen Türen. Genau hinter einer steht ein Hauptpreis, hinter den anderen eine Ziege. Er zeigt auf eine der Türen, der Spielleiter (kennt die Ziegentüren) öffnet daraufhin eine andere Tür, hinter der eine Ziege steht.
Er gibt jetzt dem Kandidaten die Möglichkeit, seine Wahl noch zu ändern. Wird dadurch die Gewinnwahrscheinlichkeit für den Kandidaten größer ?

Antwort:
Wenn der Kandidat zuerst auf die Hauptpreis-Tür zeigt (W=1/3), dann wird er durch die nachträgliche Änderung seiner Auswahl verlieren. Zeigt er aber im 1.Versuch auf eine Ziegen-Tür (W=2/3), dann gewinnt er zwangsläufig, wenn er - nach Öffnung der anderen Ziegen-Tür - seine Wahl ändert.
Die Gewinn-Wahrscheinlichkeit mit der Änderungsstrategie beträgt somit 2/3 und ohne diese Strategie nur 1/3.
Anmerkung: In Deutschland war im Mittelalter der Trostpreis ein Schwein. Daher kommt der Ausdruck "Schwein gehabt". Die Idee mit den Ziegen stammt aus den USA.

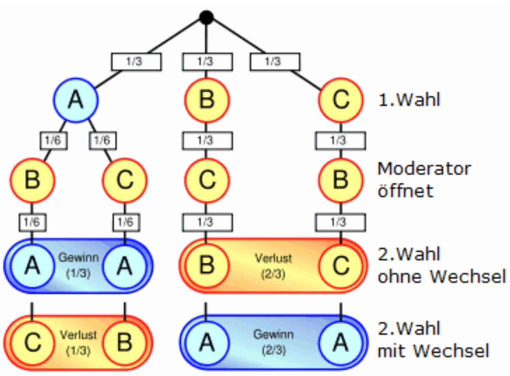
Ziegenproblem-Geschichte

Erstmals wurde ein äquivalentes Problem 1889 von dem französischen Mathematiker Joseph Bertrand veröffentlicht. Er beschrieb es als das "Drei-Kasten-Problem".

1959 beschrieb Martin Gardner in "Scientific American" die Fragestellung und nochmals 1961 in einem seiner Bücher.

Auf Grund der Popularität der TV-Show "Let's Make a Deal" mit dem Moderator Monty Hall (obere Abbildung) nahm das Interesse an dem Problem deutlich zu.
1975 schrieb Steve Selvin schrieb einen Artikel "A Problem in Probability", der in der Zeitschrift "The American Statistician" abgedruckt wurde.

Berühmtheit erlangte das Ziegenproblem jedoch erst 1990 durch eine Lösungsbeschreibung der US-amerikanischen Kolumnistin Marilyn vos Savant (untere Abbildung) im Magazin "Parade".
Gegen die richtige Antwort erfolgte eine Flut von Einwänden. Der Höhepunkt wurde erreicht, als die Sunday New York Times am 21.Juli 1991 dem Problem sogar die Titelseite widmete. Dennoch wollten viele Menschen einfach nicht glauben, dass die Lösungsidee von Marilyn vos Savant korrekt ist.
Kompliziert wurde das Problem auch noch dadurch, dass in der TV-Show "Let's Make a Deal" die Regeln abgeändert wurden.



Ziegenproblem (2)

Der abgebildete Entscheidungsbaum für das Problem geht davon aus, dass das Auto sich hinter dem Tor A befindet.

Es sind die Ereignisse definiert: M_B … der Moderator hat das Tor B geöffnet, G_C … der Gewinn ist im Tor C
Der Kandidat hat Tor A gewählt, und der Moderator hat daraufhin das Tor B geöffnet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tor C ist? Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(G_C|M_B)$, dass das Auto hinter Tor C ist, wenn bekannt ist, dass es nicht hinter Tor B ist.
Nach dem Satz von Bayes wird

$$P(G_C|M_B) = P(M_B \cap G_C) / P(M_B) = (P(M_B|G_C)\, P(G_C)) / (P(M_B|G_A)\, P(G_A) + P(M_B|G_B)\, P(G_B) + P(M_B|G_C)\, P(G_C)) = (1 \cdot 1/3) / (1/6 + 0 + 1/3) = 2/3$$

Der Kandidat sollte wechseln.

Allgemeines Ziegenproblem

Situation: Spielshow mit $n > 2$ Boxen, gefüllt mit $n - 1$ Ziegen bzw. 1 Auto
Ablauf: 1.K wählt eine der n Boxen.
2.M öffnet eine Niete unter den $n - 1$ nicht gewählten Boxen.
3.K wählt eine der $n - 1$ geschlossenen Boxen
(d.h. bleibt bei vorheriger Wahl oder wechselt zu einer der $n - 2$ nicht geöffneten Boxen).
4.M öffnet weitere Niete unter den $n - 2$ nicht gewählten Boxen.
5.K wählt wieder (aus $n - 2$ Boxen) … usw. …
Ist S die Strategie mit genau k-maligem Wechseln ($k \geq 0$) zu folgenden Zeitpunkten:
wenn man zu a_k Boxen überwechseln kann,
wenn man zu a_{k-1} Boxen überwechseln kann, …
wenn man zu a_1 Boxen überwechseln kann,
so sei $S = (n, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)$. Dabei ist $n > a_k > a_{k-1} > \ldots > a_1 \geq 1$, wegen $a_k \neq n-1$ sogar $n-1 > a_k > a_{k-1} > \ldots > a_1 \geq 1$. Dann gilt: $P(\, n\,) = 1/n$, d.h. kein Wechsel $P(\, n,1\,) = 1 - 1/n$, d.h. Wechsel bei der letzten Gelegenheit
Allgemein gilt für $S=(n, a_k, \ldots, a_1)$

$$P(S) = 1/a_1 - 1/(a_1a_2) + 1/(a_1a_2a_3) -+ \ldots + (-1)^{k-1}/(a_1a_2\ldots a_k) + (-1)^k/(a_1a_2\ldots a_kn)$$

Insgesamt gilt für beliebige Boxen $n > 2$, dass stets die Strategie, bei der letzten Möglichkeit zu wechseln, den größten Erfolg verspricht.

Gefangenenparadoxon

Das Gefangenenparadoxon ist ein Paradoxon über bedingte Wahrscheinlichkeiten und die Bayesformel, nicht zu verwechseln mit dem Gefangenendilemma.

"In einem Gefängnis sitzen drei zum Tode verurteilte Gefangene: A, B und C. Genau einer von ihnen soll begnadigt werden. Dazu wird ein Los gezogen, das allen die gleiche Chance gibt, begnadigt zu werden. Der Gefangene A, der also eine Überlebenswahrscheinlichkeit von 1/3 hat, bittet den Wärter, der das Ergebnis des Losentscheids kennt, ihm einen seiner Leidensgenossen B oder C zu nennen, der sterben muss. Der Wärter antwortet B. Wie hoch ist nun A's Überlebenswahrscheinlichkeit?"

Die Lösung ist, dass die Wahrscheinlichkeit 1/3 bleibt.
Das Paradoxe an dem Ergebnis ist, dass die Überlebenschance von A noch immer 1/3 ist, obwohl jetzt nur noch er und C zur Debatte stehen. Die Überlebenswahrscheinlichkeit von C ist jedoch auf 2/3 gestiegen.

Dem Gefangenenproblem liegt derselbe Sachverhalt wie dem Ziegenproblem zugrunde. Dabei sind die Ereignisse der Begnadigung mit denen der Existenz des Gewinnes hinter einem Tor zu identifizieren und das Öffnen eines Tores mit der Nennung eines Opfers.
Ist {A, B, C} die Ergebnismenge und L die Zufallsvariable, die den Losentscheid darstellt, so wird

$P(L=A) = P(L=B) = P(L=C) = 1/3$

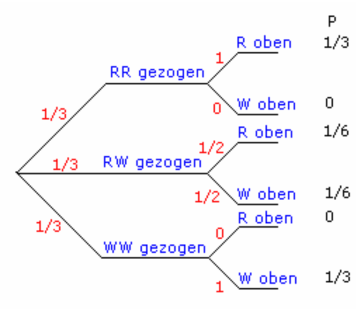
Ist G die Zufallsvariable die angibt, wen der Wärter nennt, wird

$P(G=B \mid L=A) = P(G=C \mid L=A) = 1/2$; $P(G=B \mid L=B) = 0$; $P(G=B \mid L=C) = 1$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit für A ist dann nach der Formel von Bayes

$P(L=A \mid G=B) = P(L=A)\, P(G=B \mid L=A) /$
$/ (P(L=A)\, P(G=B \mid L=A) + P(L=B)\, P(G=B \mid L=B) + P(L=C)\, P(G=B \mid L=C)) = 1/3$

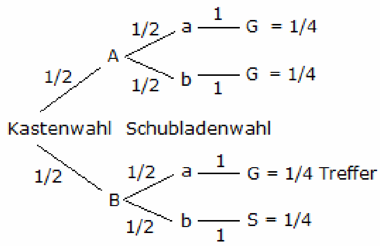
Nachdem A die Antwort des Wärters bekommen hat, besucht der Wärter C. C fragt den Wärter, was dieser bei A gemacht habe. Der Wärter erzählt ihm die Geschichte. Worauf nun C antwortet: "Gott sei Dank habe ich nicht zuerst gefragt!"
Tatsächlich wäre bei der gleichen Antwort B die Gewinnchancen von A auf 2/3 gestiegen, während sie beim fragenden C bei 1/3 geblieben wäre.
Das Paradoxon liegt darin, dass scheinbar die Gewinnchancen dessen steigen, der nicht gefragt hat.



Bertrand-Problem

... nach Bertrand 1889
Drei Karten sind im Spiel: eine ist beidseitig weiß, die andere beidseitig rot, und die dritte Karte hat eine rote und eine weiße Seite. Die Karten liegen verhüllt unter einem Tuch.
Jetzt dürfen Sie, allerdings ohne unter das Tuch zu linsen, eine der Karten hervorholen und sie auf den Tisch legen. Sie sehen eine weiße Kartenseite.
Wollen Sie darauf wetten, dass die andere Seite der Karte ebenfalls weiß ist?
Aus dem Baumdiagramm ersieht man, dass die Wahrscheinlichkeit auf der Rückseite auch weiß zu finden, gleich 1/3 ist. Eine Wette lohnt sich also nicht.

Kästchenproblem



Eine zum Bertrand-Problem analoge Aufgabe ist als Kästchenproblem bekannt. Hier sind drei äußerlich gleiche Kästchen mit je zwei Schubfächern gegeben. Ein Kästchen enthält in jedem Fach genau eine Goldmünze, ein Kästchen Silbermünzen und ein Kästchen in einem Fach eine Goldmünze, im anderen eine Silbermünze.
Zufällig wird ein Kästchen ausgewählt und zufällig eines seiner Fächer geöffnet. Man finde eine Goldmünze. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Fach die Silbermünze enthält?
Dieses Problem löste erhebliche Diskussionen aus. Bertrand gab die Lösung 1/3. 1899 "bewies" der Wiener Mathematiker Emanuel Czuber, dass die Lösung 1/2 sei. Seine Begründung: Das Öffnen des Faches erhöht die Information. Nun liegen zwei gleichberechtigte Fälle vor. Später korrigierte Czuber seinen eigenen Fehlschluss.

Lösung über Baum (siehe Abbildung):

a	G	G
b	G	S
	A	B

Es hat keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit, in welcher Schublade S ist.

Ruin-Spiel

Zwei Spieler A und B haben eine endliche Menge von Geld m_A und m_B. Abwechseln werfen sie eine ideale Münze. Fällt Wappen erhält A 1 DM von B, im anderen Fall B von A.
Wiederholt man das Zufallsexperiment hinreichend oft, wird einer der beiden Spieler alles Geld verlieren, d.h. ruiniert. Die Wahrscheinlichkeit, dass A in den "Ruin getrieben" wird, ist dann

$P(A) = m_A / (m_A + m_B)$ und für B $P(B) = m_B / (m_A + m_B)$

Problem des Chevalier de Mere

Der begeisterte Spieler, Chevalier de Mére, machte folgende Beobachtung:
Wenn man einen Würfel nacheinander viermal wirft, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal eine 6 fällt, größer als 50 %.
Wenn man dagegen mit zwei Würfeln 24 mal würfelt, so ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Doppel-6 kleiner als 50 %.
Offenbar glaubte de Mere (auf Grund des sogenannten "gesunden" Menschenverstandes), dass die Wahrscheinlichkeit für eine 6 genau sechsmal so groß ist wie die für eine Doppel-6.
Wahrscheinlichkeit für eine 6 $P = 1 - (5/6)^4 = 0{,}5177...$

Wahrscheinlichkeit für eine Doppel-6 $P = 1 - (35/36)^{24} = 0,4914...$
Diese und ähnliche Probleme führten letztendlich zu den ersten ernsthaften Überlegungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Newton-Pepys-Problem

Samuel Pepys schrieb in einem langen Brief an Isaac Newton über Probleme bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Würfelspiel. Konkret wollte er wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass

1. wenigstens eine Sechs bei sechs Würfen
2. wenigstens zwei Sechsen bei 12 Würfen
3. wenigstens drei Sechsen bei 18 Würfen

auftreten.
Die allgemeine Lösung, dass wenigstens n Sechsen bei 6n Würfen auftreten ist:

$P_n = \Sigma \binom{6n}{x} (1/6)^x (5/6)^{6n-x}$; Summenbildung von x = n bis 6n
$= 1 - \Sigma \binom{6n}{x} (1/6)^x (5/6)^{6n-x}$; Summenbildung von x = 0 bis n-1
$P_1 = 31031 / 46656 = 0.6651...$
$P_2 = 1346704211 / 2176782336 = 0.6187...$
$P_3 = 15166600495229 / 25389989167104 = 0.5973...$

Für steigendes n konvergiert die Wahrscheinlichkeit P_n gegen 0.5.

Kniffel-Spiel, Yahtzee

Eine mathematische Analyse mit einem Simulationsprogramm ergibt, dass beim Kniffel-Spiel bei optimaler Strategie unter Berücksichtigung des Bonus (35 Punkte) im Mittel 245.870775 von maximal 375 Punkten erzielt werden. Das Programm muss dabei für die optimale Strategie insgesamt $2^{19} = 524288$ Spielzustände im Auge behalten. Diese Zahl ergibt sich daraus, dass jede der 13 Kategorien (Kniffel, Chance, Full House, große Straße, usw.) noch offen oder schon belegt sein kann ($2^{13} = 8192$ Möglichkeiten) und unabhängig für den Bonus schon 0, 1, 2, ... , 62 oder mehr als 62 Punkte ($2^6 = 64$ Möglichkeiten) erreicht worden sein können. Für die optimale Strategie ist es egal, ob man für den Bonus 63 oder mehr Punkte erzielt hat, wichtig ist dann nur, dass der Bonus und damit die 35 Punkte sicher sind. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist dann das Produkt aus 8192 und 64.
Nachfolgend sind die Wahrscheinlichkeiten, Punktzahlen und optimalen Strategien angegeben, wenn nur noch eine einzige der dreizehn Kategorien offen ist. Die angegebenen Strategien sind auch korrekt und anwendbar, wenn man glaubt, dass nach dem ersten oder auch nach dem zweiten Würfeln die Optimierung auf nur eine einzige von mehreren noch offenen Kategorien Sinn macht.
Für einen Kniffel, eine Chance und für die Einer bis Sechser lassen sich die unten angegebenen Wahrscheinlichkeiten und Punktzahlen noch gut mit Stochastik-Überlegungen und Taschenrechner bestimmen. Für Sechser, Kniffel und Chance ist beispielhaft skizziert, wie sich die dort angegebene Wahrscheinlichkeit oder mittlere Punktzahl zusammensetzt und errechnet. Die entsprechenden Berechnungen für ein Full House und eine große Straße kann man bei entsprechender Sorgfalt auch noch richtig hinbekommen. Bei einem Viererpasch oder gar einem Dreierpasch oder einer kleinen Straße sollte man lieber einem gut getesteten Simulationsprogramm vertrauen.

Einer bis Sechser (maximal 5, 10, 15, 20, 25 und 30 Punkte)
Die mittlere Punktzahl für Einer beträgt bei optimaler Strategie 455/216 oder 2.106481.
Sowohl nach dem ersten als auch nach dem zweiten Wurf mit den fünf Würfeln werden dabei natürlich nur die Einsen behalten. Entsprechendes gilt für die folgenden fünf Kategorien.
Die mittlere Punktzahl für Zweier beträgt bei optimaler Strategie 455/108 oder 4.212963.
Die mittlere Punktzahl für Dreier beträgt bei optimaler Strategie 455/72 oder 6.319444.
Die mittlere Punktzahl für Vierer beträgt bei optimaler Strategie 455/54 oder 8.425926.
Die mittlere Punktzahl für Fünfer beträgt bei optimaler Strategie 2275/216 oder 10.532407.
Die mittlere Punktzahl für Sechser beträgt bei optimaler Strategie 455/36 oder 12.638889.
Zur Berechnung der mittleren Punktzahl beispielsweise für Sechser braucht zunächst nur ein Würfel betrachtet zu werden, da die Strategie für die einzelnen Würfel voneinander unabhängig ist. Die Wahrscheinlichkeit, bei maximal drei Würfen eine Sechs zu erzielen, ist gleich 1 minus der Wahrscheinlichkeit, bei genau drei Würfen keine Sechs zu erzielen, und die beträgt $1 - (5/6)^3 = 216/216 – 125/216 = 91/216$. Die mittlere Punktzahl für einen Würfel ist dann 6 * 91/216 = 91/36 und die für alle 5 Würfel 5 * 91/36 = 455/36.

Dreierpasch (mindestens ein Drilling; maximal 30 Punkte)
Die mittlere Punktzahl für einen Dreierpasch beträgt bei optimaler Strategie 15.1946.
Für die optimale Strategie gelten die folgenden Regeln nach dem ersten Wurf mit 5 Würfeln:
- Erzielt man einen Kniffel, wird davon zunächst ein Drilling behalten. Vom Rest werden die Fünfen und Sechsen behalten.
- Bei einem Vierling gilt dasselbe wie für den Kniffel.
- Bei einem Full House behält man den Drilling und vom Zwilling die Fünfen und Sechsen. Ausnahmen sind 11133, 11144, 11155 und 11166. Hier wird nur der Zwilling behalten.
- Bei einem Drilling und zwei Einlingen wird der Drilling behalten und von den Einlingen die Fünfen und

Sechsen.
- Bei zwei Zwillingen und einem Einling wird nur der Zwilling mit der höchsten Augenzahl behalten. Ausgenommen sind die Fälle 11225, 11226, 11336 und 22336. In den ersten beiden Fällen wird die 5 bzw. 6 und in den beiden letzten Fällen 336 behalten.
- Bei einem Zwilling und drei Einlingen wird nur der Zwilling behalten, wenn es sich dabei um Vieren, Fünfen oder Sechsen handelt. Besteht der Zwilling aus Dreien und ist ein Einling eine Sechs, so wird diese zusätzlich behalten. Besteht der Zwilling aus Zweien, werden nur diese Zweien behalten, wenn kein Einling eine 5 oder 6 ist. Ist unter den Einlingen eine Fünf und/oder eine Sechs, werden die beiden Zweien verworfen und der Einling mit der höchsten Augenzahl wird behalten. Besteht der Zwilling aus Einsen, wird nur der Einling mit der höchsten Augenzahl behalten.
- Bei fünf Einlingen wird nur der Einling mit der höchsten Augenzahl behalten.

Nach dem zweiten Wurf mit 5 Würfeln gelten die folgenden Regeln:
- Erzielt man einen Kniffel, wird davon zunächst ein Drilling behalten. Vom Rest werden die Vieren, Fünfen und Sechsen behalten
- Bei einem Vierling gilt dasselbe wie für den Kniffel.
- Bei einem Full House behält man den Drilling und vom Zwilling die Vieren, Fünfen und Sechsen.
- Bei einem Drilling und zwei Einlingen wird der Drilling behalten und von den Einlingen die Vieren, Fünfen und Sechsen.
- Bei zwei Zwillingen und einem Einling wird nur der Zwilling mit der höchsten Augenzahl behalten.
- Bei einem Zwilling und drei Einlingen wird nur der Zwilling behalten. Ausgenommen ist der Fall, dass neben dem Zwilling 11 noch eine 6 vorhanden ist. Dann kann statt des Zwillings auch die 6 behalten werden.
- Bei fünf Einlingen wird nur der Einling mit der höchsten Augenzahl behalten.

Viererpasch (mindestens ein Vierling; maximal 30 Punkte)

Die mittlere Punktzahl für einen Viererpasch beträgt bei optimaler Strategie 5.6113.

Für die optimale Strategie gelten die folgenden Regeln nach dem ersten Wurf mit 5 Würfeln:
- Erzielt man einen Kniffel aus Fünfen oder Sechsen, wird alles behalten und man ist am Ziel.
- Bei einen Kniffel aus Einsen, Zweien, Dreien oder Vieren behält man nur einen Vierling.
- Bei einem Vierling wird dieser behalten, der übrige Einling nur dann, wenn er eine Fünf oder Sechs ist.
- Bei einem Full House behält man nur den Drilling, es sei den, man hat 11144, 11155 oder 11166. Dann behält man nur den Zwilling.
- Bei einem Drilling und zwei Einlingen wird nur der Drilling behalten.
- Bei zwei Zwillingen und einem Einling wird nur der Zwilling mit der höchsten Augenzahl behalten. Ausgenommen ist der Fall 11226. Hier wird nur die 6 behalten.
- Bei einem Zwilling und drei Einlingen wird nur der Zwilling behalten, wenn es sich dabei um Zweien, Dreien, Vieren, Fünfen oder Sechsen handelt. Ausgenommen ist der Fall, dass der Zwilling aus Zweien besteht und ein Einling eine 6 ist. Dann wird nur die 6 behalten. Besteht der Zwilling aus Einsen, wird nur der Einling mit der höchsten Augenzahl behalten, der Zwilling wird verworfen.
- Bei fünf Einlingen wird nur der Einling mit der höchsten Augenzahl behalten.

Nach dem zweiten Wurf mit 5 Würfeln gelten die folgenden Regeln:
- Erzielt man einen Kniffel aus Vieren, Fünfen oder Sechsen, wird alles behalten und man ist am Ziel.
- Bei einen Kniffel aus Einsen, Zweien oder Dreien behält man nur einen Vierling.
- Bei einem Vierling wird dieser behalten, der übrige Einling nur dann, wenn er eine Vier, Fünf oder Sechs ist.
- Bei einem Full House behält man nur den Drilling.
- Bei einem Drilling und zwei Einlingen wird nur der Drilling behalten.
- Bei zwei Zwillingen und einem Einling wird nur der Zwilling mit der höchsten Augenzahl behalten.
- Bei einem Zwilling und drei Einlingen wird nur der Zwilling behalten, jedoch kein Einling.
- Bei fünf Einlingen wird nur der Einling mit der höchsten Augenzahl behalten.

Full House (ein Drilling und ein anderer Zwilling; 25 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfen von jeweils 5 Würfeln bei optimaler Strategie ein Full House zu erzielen, beträgt 5485535/15116544 oder 36.288288%. Daraus ergibt sich eine mittlere Punktzahl von 9.072072.

Für die optimale Strategie gelten die folgenden Regeln sowohl nach dem ersten als auch nach dem zweiten Wurf mit jeweils 5 Würfeln:
- Erzielt man einen Kniffel, wird davon nur ein Drilling behalten.
- Bei einem Vierling wird davon ein Drilling und außerdem der übrige Einling behalten.
- Bei einem Full House behält man alles und ist am Ziel.
- Bei einem Drilling und zwei Einlingen wird der Drilling und ein Einling behalten, egal welcher.
- Bei zwei Zwillingen und einem Einling werden nur die beiden Zwillinge behalten.
- Bei einem Zwilling und drei Einlingen wird nur der Zwilling behalten, jedoch kein Einling.
- Bei fünf Einlingen wird entweder ein Einling behalten oder mit allen 5 Würfeln weitergewürfelt.

Kleine Straße (mindestens 4 in Serie; 30 Punkte)
Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfen von jeweils 5 Würfeln bei optimaler Strategie eine kleine Straße zu erzielen, beträgt 61.5443%. Daraus ergibt sich eine mittlere Punktzahl von 18.4633.
Bei optimaler Strategie werden sowohl nach dem ersten als auch nach dem zweiten Wurf mit jeweils 5 Würfeln zunächst alle eventuell vorhandenen Mehrlinge auf Einlinge reduziert. Davon wird auf jeden Fall, falls vorhanden, die 3 und 4 behalten.
Nach dem ersten Wurf mit 5 Würfeln gelten dann die weiteren Regeln:
- Bei einer großen Straße ist man am Ziel.
- Bei fünf Einlingen, die keine Straße sind, gibt es nur 2 Fälle. Im Fall 12356 behält man neben der 3 entweder 12, 25 oder 56. Im Fall 12456 gilt dasselbe, nur dass hier die 4 immer dabei ist.
- Bei einer kleinen Straße ist man am Ziel.
- Bei vier Einlingen werden die Einzelfälle aufgeführt: 1235 nach 123 oder 235; 1236 nach 123; 1245 nach 124 oder 245; 1246 nach 124; 1256 wird komplett verworfen; 1345 nach 345; 1346 nach 34; 1356 nach 356; 1456 nach 456; 2346 nach 234; 2356 nach 235 oder 356; 2456 nach 245 oder 456.
- Bei drei Einlingen werden die Einzelfälle aufgeführt: 123 nach 123; 124 nach 124; 125 wird komplett verworfen; 126 wird komplett verworfen; 134 nach 34; 135 nach 35; 136 nach 3; 145 nach 45; 146 nach 4; 156 wird komplett verworfen; 234 nach 234; 235 nach 235; 236 nach 23; 245 nach 245; 246 nach 24; 256 wird komplett verworfen; 345 nach 345; 346 nach 34; 356 nach 356; 456 nach 456.
- Bei zwei Einlingen werden die eventuell vorhandenen Einsen und Sechsen verworfen. Die 2 wird nur behalten, wenn sie zusammen mit einer 3 oder 4 auftritt. Dasselbe gilt für die 5.
- Ein Einling, der eine 1, 2, 5 oder 6 ist, wird verworfen. Es wird dann komplett neu gewürfelt.

Nach dem zweiten Wurf mit 5 Würfeln gelten dann die weiteren Regeln:
- Bei einer großen Straße ist man am Ziel.
- Bei fünf Einlingen, die keine Straße sind, gibt es nur 2 Fälle. Im Fall 12356 behält man neben der 3 entweder 12, 25 oder 56. Im Fall 12456 gilt dasselbe, nur dass hier die 4 immer dabei ist.
- Bei einer kleinen Straße ist man am Ziel.
- Bei vier Einlingen werden die Einzelfälle aufgeführt: 1235 nach 123 oder 235; 1236 nach 123; 1245 nach 124 oder 245; 1246 nach 124; 1256 wird komplett verworfen; 1345 nach 345; 1346 nach 34 oder 134 oder 346; 1356 nach 356; 1456 nach 456; 2346 nach 234; 2356 nach 235 oder 356; 2456 nach 245 oder 456.
- Bei drei Einlingen werden die Einzelfälle aufgeführt: 123 nach 123; 124 nach 124; 125 wird komplett verworfen; 126 wird komplett verworfen; 134 nach 34 oder 134; 135 nach 35; 136 nach 3; 145 nach 45; 146 nach 4; 156 wird komplett verworfen; 234 nach 234; 235 nach 235; 236 nach 23; 245 nach 245; 246 nach 24; 256 wird komplett verworfen; 345 nach 345; 346 nach 34 oder 346; 356 nach 356; 456 nach 456.
- Bei zwei Einlingen werden die eventuell vorhandenen Einsen und Sechsen verworfen.
- Ein Einling, der eine 1, 2, 5 oder 6 ist, wird verworfen. Es wird dann komplett neu gewürfelt.

Große Straße (40 Punkte)
Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfen von jeweils 5 Würfeln bei optimaler Strategie eine große Straße zu erzielen, beträgt 319695199/1224440064 oder 26.109502%. Daraus ergibt sich eine mittlere Punktzahl von 10.443801. Bei optimaler Strategie werden sowohl nach dem ersten als auch nach dem zweiten Wurf mit jeweils 5 Würfeln zunächst alle eventuell vorhandenen Mehrlinge auf Einlinge reduziert. Davon wird auf jeden Fall, falls vorhanden, die 2, 3, 4 und 5 behalten.
Nach dem ersten Wurf mit 5 Würfeln gelten dann die weiteren Regeln:
- Bei einer großen Straße ist man am Ziel.
- Bei fünf Einlingen, die keine große Straße sind, behält man von der 1 und 6 entweder nur die 1 oder nur die 6.
- Bei einer kleinen Straße wird diese komplett behalten.
- Bei vier Einlingen werden die Einsen und Sechsen verworfen, wenn sie zusammen vorkommen. Kommt nur eine dieser beiden Augenzahlen vor, wird sie behalten.
- Bei drei Einlingen werden die eventuell vorhandenen Einsen und Sechsen verworfen.
- Bei zwei Einlingen werden die eventuell vorhandenen Einsen und Sechsen verworfen.
- Ein Einling, der eine Eins oder Sechs ist, wird verworfen. Es wird dann komplett neu gewürfelt.
Nach dem zweiten Wurf mit 5 Würfeln gelten dann die weiteren Regeln:
- Bei einer großen Straße ist man am Ziel.
- Bei fünf Einlingen, die keine große Straße sind, behält man von der 1 und 6 entweder nur die 1 oder nur die 6.
- Bei einer kleinen Straße wird diese komplett behalten.
- Bei vier Einlingen, bei denen entweder nur eine Eins oder nur eine Sechs vorkommt, wird diese behalten. Kommt sowohl eine Eins als auch eine Sechs vor, kann man entweder die Eins oder die Sechs behalten oder beide verwerfen.
- Bei drei Einlingen, bei denen entweder nur eine Eins oder nur eine Sechs vorkommt, kann man sie entweder behalten oder verwerfen. Kommt sowohl eine Eins als auch eine Sechs vor, werden beide verworfen.
- Bei zwei Einlingen werden die eventuell vorhandenen Einsen und Sechsen verworfen.

- Ein Einling, der eine Eins oder Sechs ist, wird verworfen. Es wird dann komplett neu gewürfelt.

Kniffel (50 Punkte)
Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfen von jeweils 5 Würfeln bei optimaler Strategie einen Kniffel (Fünferpasch) zu erzielen, beträgt 347897/7558272 oder 4.602864%. Daraus ergibt sich eine mittlere Punktzahl von 2.301432.
Die optimale Strategie wird erreicht, wenn sowohl nach dem ersten als auch nach dem zweiten Wurf nur ein Mehrling behalten wird.
- Bei einem Fünfling ist man schon am Ziel.
- Hat man nur einen Vierling, Drilling oder Zwilling erzielt, wird nur der behalten.
- Hat man ein Full House, wird nur der Drilling behalten.
- Hat man zwei Zwillinge, ist es egal, für welchen man sich entscheidet. Zwei Einsen sind genau so gut wie zwei Sechsen.
- Das gleiche gilt entsprechend, wenn man fünf Einlinge hat. Nur ein Einling darf behalten werden. Genau so optimal ist es allerdings in diesem Falle, nichts zu behalten und mit allen fünf Würfeln weiter zu würfeln.

Die folgende Zusammenstellung enthält die 15 möglichen Fälle zum Erzielen eines Kniffels mit den entsprechenden Einzelwahrscheinlichkeiten p bei optimaler Strategie. Die in Klammern gesetzten und durch Schrägstriche abgetrennten Kategorien geben an, was nach dem 1., 2. und 3. Wurf erreicht sein soll, sofern man nicht schon vorher einen Kniffel erzielt hat. Entsprechend sind die in den Klammern stehenden Brüche die Wahrscheinlichkeiten zum Erreichen der jeweils angegebenen Kategorien:

p_1 = 6/7776 = 1/1296 = 0.077160% (Kniffel/-/-)
p_2 = (150/7776)*(1/6) = 25/7776 = 0.321502% (Vierling/Kniffel/-)
p_3 = (150/7776)*(5/6)*(1/6) = 125/46656 = 0.267918% (Vierling/Vierling/Kniffel)
p_4 = (1500/7776)*(1/36) = 125/23328 = 0.535837% (Drilling/Kniffel/-)
p_5 = (1500/7776)*(10/36)*(1/6) = 625/69984 = 0.893061% (Drilling/Vierling/Kniffel)
p_6 = (1500/7776)*(25/36)*(1/36) = 3125/839808 = 0.372109% (Drilling/Drilling/Kniffel)
p_7 = (5400/7776)*(1/216) = 25/7776 = 0.321502% (Zwilling/Kniffel/-)
p_8 = (5400/7776)*(15/216)*(1/6) = 125/15552 = 0.803755% (Zwilling/Vierling/Kniffel)
p_9 = (5400/7776)*(80/216)*(1/36) = 125/17496 = 0.714449% (Zwilling/Drilling/kniffel)
p_{10} = (5400/7776)*(120/216)*(1/216) = 125/69984 = 0.178612% (Zwilling/Zwilling/Kniffel)
p_{11} = (720/7776)*(1/1296) = 5/69984 = 0.007144% (Einlinge/Kniffel/-)
p_{12} = (720/7776)*(25/1296)*(1/6) = 125/419904 = 0.029769% (Einlinge/Vierling/Kniffel)
p_{13} = (720/7776)*(250/1296)*(1/36) = 625/1259712 = 0.049615% (Einlinge/Drilling/Kniffel)
p_{14} = (720/7776)*(900/1296)*(1/216) = 125/419904 = 0.029769%(Einlinge/Zwilling/Kniffel)
p_{15} = (720/7776)*(120/1296)*(1/1296) = 25/3779136 = 0.000662% (Einlinge/Einlinge/Kniffel)

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich durch Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten und führt auf den schon oben angegebenen Wert: p_{gesamt} = 347897/7558272 = 4.602864%

Chance (maximal 30 Punkte)
Die mittlere Punktzahl für eine Chance beträgt bei optimaler Strategie 70/3 oder 23.333333.
Dazu müssen nach dem ersten Wurf die Fünfen und Sechsen behalten werden. Die anderen Augenzahlen dürfen nicht behalten werden. Nach dem zweiten Wurf gilt das Entsprechende für die Vieren, Fünfen und Sechsen.
Zur Berechnung der mittleren Punktzahl für eine Chance braucht zunächst nur ein Würfel betrachtet zu werden, weil die Strategie für die einzelnen Würfel voneinander unabhängig ist. Da die Wahrscheinlichkeit für alle Augenzahlen gleich ist, beträgt die mittlere Punktzahl für einen Wurf eines Würfels (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6 = 7/2. Für den letzten Wurf behält man also nur die Augenzahlen, die größer als 7/2 sind (also 4, 5 und 6), was mit 50% Wahrscheinlichkeit der Fall ist. Da eine Vier, Fünf oder Sechs eine mittlere Punktzahl von 5 ergibt, betrüge die mittlere Punktzahl bei insgesamt zwei Würfen 1/2 * 5 + 1/2 * 7/2 = 17/4. Bei insgesamt 3 Würfen kann man also mit den Würfeln, mit denen man nach dem ersten Wurf weiterwürfelt, im Mittel mehr als vier Punkte erreichen, weil man ja noch 2 Würfe vor sich hat. Man behält deshalb nur die 5 und die 6. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 1/3 und die mittlere Punktzahl 11/2. Insgesamt erhält man deshalb im Mittel eine Punktzahl von 1/3 * 11/2 + 2/3 * 17/4 = 14/3. Alle 5 Würfel kommen dann auf 5 * 14/3 = 70/3.

Craps, Seven Eleven
Craps oder Seven Eleven; eine Vereinfachung des altenglischen Spiels Hazard; ist ein Würfelspiel, das sich in den USA großer Beliebtheit erfreut. Der Name Craps bedeutet Krabbe und ist eine gebräuchliche Bezeichnung für den Wurf einer Einser-Dublette.

Ein Spieler (Shooter) setzt einen bestimmten Betrag, die anderen Spieler (Faders) setzen dagegen. Zuerst wirft der Shooter zwei Würfel. Wirft der Shooter im ersten Wurf die Augensumme 7 oder 11, so hat er ein Natural und gewinnt sofort

die Augensumme 2, 3 oder 12, so ist dies ein Crap und er verliert sofort
die Augensumme 4, 5, 6, 8, 9 oder 10, so ist die geworfenene Augensumme sein Point, und der Shooter würfelt ein weiteres Mal
Ab dem zweiten Wurf gilt:
wirft der Shooter dieselbe Augensumme wie im ersten Wurf, also seinen Point, so gewinnt er
wirft der Shooter die Augensumme 7, so verliert er
wirft er irgendeine andere Augensumme, so würfelt er ein weiteres Mal
Das Spiel ist nicht fair. Der Shooter ist gegenüber den Faders im Nachteil, der Vorteil der Faders beträgt etwa 1,4 %.
Gewinnanalyse:
Chance einer 7: 6/36 = 0,1667 Chance einer 11: 2/36 = 0,0556
P(Natural) 0,2222
Gewinnwahrscheinlichkeit bei Points

Point 4:	(3/36)·(3/(3+6)) = 0,0278	Point 5:	(4/36)·(4/(4+6)) = 0,0444
Point 6:	(5/36)·(5/(5+6)) = 0,0631	Point 8:	(5/36)·(5/(5+6)) = 0,0631
Point 9:	(4/36)·(4/(4+6)) = 0,0444	Point 10:	(3/36)·(3/(3+6)) = 0,0278

Gesamtsumme P = 0,4929

Triell

Drei Personen A, B und C triellieren sich mit Pistolen. (2 Personen = Duell, 3 Personen = Triell).
A trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3, B mit 2/3 und C trifft sicher. A darf als erster schießen, B als zweiter und C als letzter. Sollte noch einer leben, beginnt das "Spiel" von vorn.
Das Problem ist nun:
Wohin soll A schießen, um eine möglichst große Überlebenschance zu haben ?
Intuitiv glaubt man, dass A nur auf C schießen kann, denn tötet er B im ersten Schuss, ist der nachfolgende Schuss von C für A auf jeden Fall tödlich. Insgesamt zeigt sich, dass die Überlebenschance von A etwa 27,7 % bei einem Schuss auf B beträgt. Schießt er auf C wird der Wert rund 27,3 %.
Aber !
Schießt A zuerst in die Luft, so ändern sich seine Chancen beträchtlich. Da davon auszugehen ist, dass B auf C und C auf B schießt (jeweils den gefährlichsten Gegner), verändert A durch den vergebenen Schuss das Triell in ein Duell bei dem er den ersten Schuss hat. Mit 39,2 % kann er nun überleben.

Zahlenlotto 6 aus 49

Im deutschen Zahlenlotto "6 aus 49" können insgesamt $\binom{49}{6}$ = 13983816 verschiedene Tipps abgegeben werden.
Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige = 0.01765040 Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige = 0.00096862
Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige = 0.00001845 Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige = 0.00000007
Unter den rund 14 Millionen Tipps gibt es genau Tipps ...

Anzahl	%	Eigenschaft
6924764	49.52	mit mindestens 1 Paar aufeinander folgender Zahlen
5430040	38.83	mit genau 1 Paar aufeinander folgender Zahlen
12489092	89.31	mit höchstens 1 Paar aufeinander folgender Zahlen
7059052	50.48	mit keinem Paar aufeinander folgender Zahlen
1357510	9.71	mit genau 2 Paar aufeinander folgender Zahlen
666974	4.77	mit mindestens 1 Tripel aufeinander folgender Zahlen
622468	4.45	mit genau 1 Tripel aufeinander folgender Zahlen
43560	0.31	mit mindestens 1 Quadrupel aufeinander folgender Zahlen
134596	0.96	mit nur geraden Zahlen
177100	1.27	mit nur ungeraden Zahlen
6990896	49.99	mit einer geraden Summe der Tippzahlen
1344904	9.62	ohne Primzahl
4173840	29.84	mit genau 1 Primzahl
4869480	34.82	mit genau 2 Primzahlen
2722720	19.47	mit genau 3 Primzahlen
765765	5.48	mit genau 4 Primzahlen
102102	0.73	mit genau 5 Primzahlen
5005	0.0358	mit nur, d.h. genau 6, Primzahlen

Am 4.Mai 2013 wurden Änderungen im deutschen Lotto "6 aus 49" durchgeführt.
Die bisherige Superzahl ersetzt nun die Zusatzzahl. Damit stiegen die Gewinnchancen leicht, da die Superzahl nur aus den Ziffern 0 bis 9 gezogen wird.
Außerdem wurde die Gewinnklasse "2 Richtige plus Superzahl" eingeführt und der Preis je Tipp um über 30% erhöht.
Zusätzlicher, gewollter Effekt ist, dass in der Spitzen-Gewinnklasse höhere Jackpot-Gewinne zu erwarten sind, wodurch die Spieler zu noch höheren Einsätzen verführt werden sollen.

Auf Grund des deutlich höheren Preises je Tipp wäre auch eine wesentlich höhere theoretische Quote zu erwarten. Dies ist nicht der Fall.
Neue Gewinnwahrscheinlichkeiten ab 4. Mai 2013:

	Gewinnchance 1 zu … (in %)	Theoretische Quote
6 Richtige und Superzahl	139838160,00 (0,00000072 %)	8949642,20 €
6 Richtige	15537573,33 (0,0000064 %)	574596,50 €
5 Richtige und Superzahl	542008,37 (0,00018 %)	10022,00 €
5 Richtige	60223,15 (0,0017 %)	3340,60 €
4 Richtige und Superzahl	10323,97 (0,0097 %)	190,80 €
4 Richtige	1147,11 (0,087 %)	42,40 €
3 Richtige und Superzahl	566,56 (0,18 %)	20,90 €
3 Richtige	62,95 (1,59 %)	10,40 €
2 Richtige und Superzahl	75,54 (1,32 %)	5,00 € (fester Wert)

Woche für Woche versuchen Tausende von Spielern ihr Glück beim Zahlenlotto "6 aus 49". Die Wahrscheinlichkeit eines Sechsers beträgt $1 / \binom{49}{6} = 1/13983816 = 0{,}00000007\ldots$
Diese Wahrscheinlichkeit ist sehr gering, was die Lottospieler aber wohl nicht stört. Folgende Modelle demonstrieren die Chance für einen "Sechser":

1. Angenommen Sie wohnen in Berlin, fahren gerade Bus und ein Fahrgast steigt aus ohne seinen Schirm mitzunehmen.
Sie nehmen den Schirm an sich und tippen am Abend völlig zufällig sieben Ziffern in Ihr Telefon. Die Wahrscheinlichkeit dann den Schirmeigentümer zu finden, ist 1:10 Millionen, d.h. noch wahrscheinlicher als ein Lotto-Sechser.
2. Ein Skatspiel ist etwa 1 cm dick und enthält 32 Karten. Man benötigt rund 437000 Skatspiele um einen Vorrat von 13983816 Karten zu besitzen.
Eine von diesen Karten bekommt ein Kreuzchen. Wenn man nun beim ersten Ziehen genau diese Karte findet, ist die Wahrscheinlichkeit etwa wie beim Lotto-Sechser.
Nur, diese 437000 Skatspiele bilden einen Stapel von 43,7 Kilometer(!) Länge.

Im Zeitraum von 1955 bis Juni 2014 wurden Sonnabend und Mittwoch insgesamt 3766 Lottoziehungen durchgeführt. Für Zahlenmystiker ist es klar, dass die 13 am wenigsten gezogen wurde. Und tatsächlich wurde sie nur 403 mal gezogen und somit deutlich weniger als alle anderen Zahlen.
Frage: Ist diese Abweichung zufällig?

Zur Beantwortung wird ein zweiseitiger Binomialsignifikanztest durchgeführt.
Nullhypothese H_0: Die Abweichung der Häufigkeit der Zahl 13 ist zufällig.

Bei 3766 Ziehungen wurden insgesamt 22596 Kugeln gezogen. Da alle gleichwahrscheinlich sein sollen, ist die Wahrscheinlichkeit für die 13 gleich $p = 1/49$. Im Mittelwert wäre jede Zahl $\mu = 461{,}1429...$ zu erwarten. In der Stichprobe tritt 403 mal die Zahl 13 auf.

Mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1$ % erhält man einen Annahmebereich der Nullhypothese von A = [406 , 516]. Damit muss aus stochastischen Gründen die Nullhypothese zum Signifikanzniveau von 1 % verworfen werden. Haben die Zahlenmystiker doch recht? :-)
Es ist schon merkwürdig: Erst zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}6$ % würde die Nullhypothese angenommen. Und die absolute Häufigkeit jeder der anderen 48 möglichen Zahlen liegt selbst bei einem Signifkanzniveau von 2 % im Annahmebereich.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Lotto-Knaller (... nach "Matheakademie Freiberg")

Am 10. 4. 1999 wurde die Zahlenreihe **2 3 4 5 6 26** im Lotto "6 aus 49" gezogen.
Große Hoffnungen auf ihre Quote für 5 Richtige machten sich viele Mitspieler, die die ersten sechs Zahlen getippt hatten.
Doch diese Hoffnung wurde enttäuscht: Insgesamt hatten 38008 Teilnehmer die Zahlen 2 bis 6 auf ihrem Spielschein und so musste sich jeder mit einem dramatisch niedrigem Gewinn von 379,90 DM zufriedengeben.
Diese Ausschüttung lag nur knapp über der insgesamt niedrigsten für 5 Richtige von 332,40 DM vom 11. September 1965. Logischerweise waren die Gewinne für 3 und 4 Richtige ebenfalls sehr gering.
Ähnliche Fälle gab es in der Lotto-Geschichte schon früher:
- Am 4. Oktober 1997 bildeten die Gewinnzahlen auf Lottoscheinen mit Quadraten ein "U". Für 124 Gewinner mit 6 Richtigen gab es nur je 53982 DM.
- Am 23. Januar brachte der Sechser nur 84803,90 DM. 222 Spieler hatten auf ihrem Spielschein je drei Kästchen übereinander angekreuzt: 24, 25, 26, 30, 31, 32.
- Der Minusrekord am 18. Juni 1977: Spielteilnehmer im Grenzgebiet übernahmen vom Holland-Lotto die Gewinnzahlen und hatten 6 Richtige. Die Lotto-Könige erhielten je nur 30737,80 DM.

Die Lehre aus diesen Geschichten liegt auf der Hand: Es kann nur davon abgeraten werden, sogenannte Strickmuster oder Zahlenreihen anzukreuzen. Mit solchen "Experimenten" steht man nie alleine da und muss einen eventuellen Gewinn stets mit vielen anderen Spielern teilen.

Österreich-Lotto 6 aus 45

Beim österreichischen Lotto 6 aus 45 geht es um die Voraussage von sechs Zahlen, die in einer bestimmten Lotto-Runde aus der Zahlenreihe 1 bis 45 gezogen werden. Jeden Mittwoch und jeden Sonntag findet eine Lottoziehung statt. Gewinne werden von 6 Richtigen bis 3 Richtige ausgezahlt. Insgesamt gibt es 8145060 verschiedene Tippmöglichkeiten. Damit ergeben sich als Gewinnwahrscheinlichkeiten

$P(6 \text{ Richtige}) = 1 / 8145060 \approx 0{,}00000012$
$P(5 \text{ Richtige}) = 234 / 8145060 \approx 0{,}000029$
$P(4 \text{ Richtige}) = 11115 / 8145060 \approx 0{,}00136$
$P(3 \text{ Richtige}) = 182789 / 8145060 \approx 0{,}02244$
$P(2 \text{ Richtige}) = 1233765 / 8145060 \approx 0{,}15147$
$P(1 \text{ Richtige}) = 3454542 / 8145060 \approx 0{,}424127$
$P(0 \text{ Richtige}) = 3262623 / 8145060 \approx 0{,}400565$

5 Richtige können auch mit oder ohne Zusatzzahl getippt werden:

$P(5 \text{ Richtige mit Zusatzzahl}) = 6 / 8145060 \approx 0{,}0000007366$
$P(5 \text{ Richtige ohne Zusatzzahl}) = 228 / 8145060 \approx 0{,}0000279924$

Aufgabe 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man innerhalb eines Jahres, d.h. 104 Spielrunden, mindestens einmal sechs Richtige bzw. mindestens einmal einen Gewinn, d.h. mindestens drei Richtige, hat, wenn man je Spielrunde genau einen Tipp abgibt?

Lösung: Je Lottorunde ist die Wahrscheinlichkeit p = 1/8145060 für einen Sechser und 1-p für keinen Sechser. Da die einzelnen Spielrunden voneinander unabhängig sind, ist die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Sechser unter 104 Spielrunden angibt, 104-p-binomialverteilt.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1-(1-1/8145060)^{104} \approx 0{,}00001277$

Für mindestens drei Richtige wird

$p = P(6 \text{ Richtige}) + P(5 \text{ Richtige}) + P(4 \text{ Richtige}) + P(3 \text{ Richtige}) = 194130/8145060$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0{,}9186$

Aufgabe 2: In welchem Fall hat man die größte Aussicht mit 1000 Lottotipps mindestens einmal sechs Richtige zu treffen:
a) wenn man bei 1000 Spielrunden je einen Tipp abgibt,
b) wenn man bei 100 Spielrunden je 10 verschiedene Tipps abgibt,
c) wenn man bei 10 Spielrunden je 100 verschiedene Tipps abgibt,
d) wenn man bei einer Spielrunde 1000 verschiedene Tipps abgibt?

Lösung: a) P = 0,00012276629 b) P = 0,00012276634
c) P = 0,00012276702 d) P = 0,0001227738

Die Wahrscheinlichkeit, mit 1000 Lottotipps mindestens einmal "6 Richtige" zu erzielen, ist dann am größten, wenn bei einer einzigen Lottorunde 1000 verschiedene Tipps abgegeben werden.

Aufgabe 3: Angenommen, jemand gibt bei jeder Lottorunde einen Tipp ab. Wie viele Spielrunden wären erforderlich, damit er mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal mit sechs Richtigen bzw. mindestens einmal mit einem Gewinn rechnen kann?

Lösung: Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Sechser unter n Spielrunden angibt, ist n-p-binomialverteilt mit p = 1/8145060 und unbekanntem n.
Gesucht ist ein möglichst kleines n, für das $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n \geq 0{,}95$ ist.
Es ist $1 - (1-p)^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow (1-p)^n \leq 0{,}05 \Leftrightarrow n \cdot \lg(1-p) \leq \lg(0{,}05) \Leftrightarrow n \geq 24400417{,}6$.
Um mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal mit 6 Richtigen rechnen zu können, wären also 24400418 Spielrunden erforderlich. Bei 104 Spielrunden pro Jahr sind das ca. 234619 Jahre.
Analog dazu erhält man für p = 194130/8145060: $n \geq 124{,}2$.
Gibt man bei jeder Lottorunde einen Tipp ab, so kann man mit 95%iger Wahrscheinlichkeit damit rechnen, innerhalb von 125 Spielrunden mindestens einmal zu gewinnen.

Aufgabe 4: Angenommen, ein Lottospieler hat nach der Ziehung der ersten drei Gewinnzahlen bereits 3 Richtige. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit diesem Tipp 6 Richtige, 5 Richtige mit Zusatzzahl, 5 Richtige ohne Zusatzzahl, 4 Richtige bzw. 3 Richtige haben wird?

Lösung: Die Ziehung der letzten drei Gewinnzahlen kann man als ein Lotto "3 aus 42" auffassen. Damit wird

Spieler hat insgesamt	Anzahl der Richtigen bei "3 aus 42"	Wahrscheinlichkeit
6 Richtige	3	≈0,0000871

5 Richtige mit Zusatzzahl	2 und Zusatzzahl	≈ 0,00026132
5 Richtige ohne Zusatzzahl	2 ohne Zusatzzahl	≈ 0,0099303
4 Richtige	1	≈ 0,1936411
3 Richtige	0	≈ 0,7960801

Aufgabe 5: Wie viele Lottorunden vergehen im Mittel, bis eine vorgegebene Zahl als Gewinnzahl gezogen wird?

Lösung: Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Spielrunden bis zur Ziehung der vorgegebenen Zahl angibt, ist geometrisch verteilt mit dem Parameter $p = 6/45$.
Der Erwartungswert von X ist $1/p = 45/6 = 7{,}5$. Der Abstand zwischen zwei Ziehungen dieser Zahl beträgt also über lange Zeit gesehen im Mittel 7,5 Wochen.

Aufgabe 6: Bei den ersten 540 Spielrunden des österreichischen Lottos 6 aus 45 ist es 317-mal vorgekommen, dass mindestens eine der sechs Gewinnzahlen der letzten Spielrunde auch bei der darauffolgenden Spielrunde gezogen worden ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Spielrunde mindestens eine der sechs Gewinnzahlen der letzten Runde unter den Gewinnzahlen ist, beträgt:

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 39/45 \cdot 38/44 \cdot 37/43 \cdot \ldots \cdot 34/40 = 0{,}6.$$

Da die einzelnen Spielrunden voneinander unabhängig sind, ist die Zufallsvariable X, die angibt, wie oft in 540 Spielrunden mindestens eine der Gewinnzahlen der letzten Runde noch einmal gezogen wird, 540-0,6-binomialverteilt.
Ihr Erwartungswert ist $\mu = np = 540 \cdot 0{,}6 = 324$.
Tatsächlich aufgetreten ist $X = 317$. Eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert bedeutet $(X\leq 317) \vee (X\geq 331)$.
Gesucht ist damit $P(X\leq 317) + P(X\geq 331)$. Da $\sigma^2 = 540 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 129{,}6 > 9$ ist, darf die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung mit $\mu = 324$ und $s = \sqrt{129{,}6} \approx 11{,}384$ angenähert werden.
Wendet man die Stetigkeitskorrektur an, so ist $P(X\leq 317{,}5) + P(X\geq 330{,}3) = 2 \cdot P(X\cdot\leq 317{,}5)$ zu berechnen. Setzt man $317{,}5 = \mu + z\cdot s$, so erhält man $z \cdot\approx -0{,}57$. Daher ist

$$2\cdot P(X\leq 317{,}5) \approx 2\cdot\Phi(-0{,}57) \approx 2\cdot(1- \Phi(0{,}57)) \approx 2\cdot(1-0{,}71566) \approx 0{,}56868.$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert beträgt also ca. 56,9%.

Aufgabe 7: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl k als kleinste (als größte) der sechs Gewinnzahlen beim Lotto 6 aus 45 gezogen wird?

Lösung: Es sei k die kleinste gezogene Zahl. Da insgesamt sechs Zahlen gezogen werden, ist dann $1 \leq k \leq 40$. Die übrigen fünf Gewinnzahlen müssen aus den 45-k Zahlen k+1, k+2, k+3, …, 45 gewählt werden. Dafür gibt es $\binom{45-k}{5}$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass k als kleinste Gewinnzahl gezogen wird, ist daher $P(k \text{ ist kleinste Gewinnzahl}) = \binom{45-k}{5} / \binom{45}{6}$, wobei $1 \leq k \leq 40$
Genauso überlegt man die Wahrscheinlichkeit, dass k ($6 \leq k \leq 45$) als größte der sechs Gewinnzahlen gezogen wird: $P(k \text{ ist größte Gewinnzahl}) = \binom{k-1}{5} / \binom{45}{6}$, wobei $6 \leq k \leq 45$

Ist 1 die kleinste der sechs Gewinnzahlen, so können die übrigen fünf Gewinnzahlen aus 44 Zahlen gewählt werden. Dasselbe gilt für den Fall, dass 45 als größte der sechs Gewinnzahlen gezogen wird. Es gibt also gleich viele Tippreihen mit kleinster Zahl 1 wie Tippreihen mit größter Zahl 45. Analog dazu gibt es gleich viele Tippreihen mit kleinster Zahl 2, 3, 4, …. wie Tippreihen mit größter Zahl 44, 43, 42,….

Aufgabe 7: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich als Spannweite der sechs Gewinnzahlen beim Lotto 6 aus 45 die Zahl k ergibt?

Lösung: Die Spannweite, d.h. die Differenz von größter und kleinster Gewinnzahl, kann nur die Werte 5 bis 44 annehmen. Hat die Spannweite den Wert k, so liegen genau k-1 Zahlen zwischen der kleinsten und der größten Gewinnzahl. Für die Auswahl der vier restlichen Gewinnzahlen gibt es daher genau $\binom{k-1}{4}$ Möglichkeiten. Als kleinste bzw. größte Gewinnzahl können die 45-k Zahlenpaare (1 | k+1), (2 | k+2), (3 | k+3), …, (45-k | 45) auftreten. Daraus folgt:

$$P(\text{Spannweite} = k) = (45-k) \binom{k-1}{4} / \binom{45}{6} \text{ ; wobei } 5 \leq k \leq 44$$

Aufgabe 8: Wie groß ist beim Lotto 6 aus 45 die Wahrscheinlichkeit, dass keine, genau eine, genau zwei, …, genau sechs gerade Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen sind?

Lösung: Als Gewinnzahlen kommen 22 gerade und 23 ungerade Zahlen in Frage. Die Anzahl der geraden Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen ist hypergeometrisch verteilt. Es ist

$$P(k \text{ Gewinnzahlen sind gerade}) = \binom{22}{k} \binom{23}{6-k} / \binom{45}{6}$$

k	Anzahl Möglichkeiten	P(X = k)
0	100947	0,01239
1	740278	0,09089
2	2045505	0,25113
3	2727340	0,33485
4	1850695	0,22722
5	605682	0,07436
6	74613	0,00916

Aufgabe 9: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde genau vier Zahlen, genau fünf Zahlen, genau sechs Zahlen direkt aufeinanderfolgen?
Wie viele Spielrunden vergehen im Mittel, bis vier (bzw. fünf oder sechs) aufeinanderfolgende Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen sind?

Lösung: Insgesamt gibt es 42 Vierlinge, nämlich 1,2,3,4, 2,3,4,5, …, 42,43,44,45. Für den ersten und den letzten dieser Vierlinge gilt:
Damit kein Fünfling oder Sechsling entsteht, müssen die beiden restlichen Gewinnzahlen aus den 40 Zahlen {6,7,8,…,45} bzw. {1,2,3,…,40} ausgewählt werden. Dafür gibt es jeweils $\binom{40}{2} = 780$ Möglichkeiten.

Bei den übrigen 40 Vierlingen müssen die beiden restlichen Gewinnzahlen aus jeweils 39 Zahlen ausgewählt werden. Hier gibt es jeweils $\binom{39}{2} = 741$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $2 \cdot 780 + 40 \cdot 741 = 31200$ verschiedene Tipps mit genau vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen.
Darunter sind alle Tipps, die einen echten Vierling und sonst keine benachbarten Zahlen enthalten, und auch alle Tipps, die aus einem echten Vierling und einem Zwilling bestehen. Daraus folgt, dass

P(genau vier aufeinanderfolgende Gewinnzahlen) = 31200/8145060 ≈ 0,00383

Analog gilt, dass es $2 \cdot 39 + 39 \cdot 38 = 1560$ mögliche Tipps mit einem Fünfling und 40 Tipps mit einem Sechsling gibt.

P(Fünfling) = 1560/8145060 ≈ 0,00019153
P(Sechsling) = 40/8145060 ≈ 0,0000049

Die Zufallsvariable, die die Wartezeit in Spielrunden bis zur Ziehung von vier aufeinanderfolgenden Gewinnzahlen angibt, ist geometrisch verteilt mit dem Parameter $p = 0,00383$. Der Abstand zwischen dem Auftreten von vier direkt benachbarten Gewinnzahlen wird über lange Zeit gesehen im Mittel also etwa $1/p \approx 261$ Spielrunden (≈ 2,5 Jahre) betragen. Analog dazu ist der Erwartungswert für die Wartezeit auf Fünflinge 5221 Spielrunden (≈ 50 Jahre), auf Sechslinge sogar 203626,5 Spielrunden (≈ 1958 Jahre).

Aufgabe 9: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde mindestens zwei benachbarte Zahlen sind?

Lösung:
Seien $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ die sechs Gewinnzahlen einer Runde in aufsteigender Reihenfolge, d.h.

$1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 \leq 45$.

Gibt es keine benachbarten Zahlen unter diesen Gewinnzahlen, so ist $x_i < x_{i+1} - 1$ für $1 \leq i \leq 6$. In diesem Fall ist also $1 \leq x_1 < x_2 - 1 < x_3 - 2 < x_4 - 3 < x_5 - 4 < x_6 - 5 \leq 40$
und die Menge $\{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4, x_6 - 5\}$ ist eine sechselementige Teilmenge aus den Zahlen 1 bis 40.
Umgekehrt ist für jede Menge $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ mit $1 \leq y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 \leq 40$
die Menge $\{y_1, y_2 + 1, y_3 + 2, y_4 + 3, y_5 + 4, y_6 + 5\}$ eine sechselementige Teilmenge der Zahlen 1 bis 45, in der keine zwei Zahlen benachbart sind.

Daraus folgt, dass es genau gleich viele Lottotipps ohne benachbarte Zahlen gibt wie sechselementige Teilmengen aus den Zahlen 1 bis 40, nämlich $\binom{40}{6}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde keine benachbarten Zahlen sind, beträgt somit

P(keine benachbarten Zahlen) = $\binom{40}{6} / \binom{45}{6}$ = 3838380/8145060 ≈ 0,47125.

Mindestens zwei benachbarte Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen treten auf mit der Wahrscheinlichkeit

P(mind. zwei benachbarte Zahlen) = $1 - \binom{40}{6} / \binom{45}{6}$ = 4306680/8145060 ≈ 0,52875.

Aufgabe 10: Für benachbarte Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen gibt es die Möglichkeiten: ein Zwilling, zwei Zwillinge, drei Zwillinge, ein Drilling, zwei Drillinge, ein Zwilling und ein Drilling, ein Vierling, ein Vierling und ein Zwilling, ein Fünfling, ein Sechsling.
Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzelnen Fälle?

Lösung: Jedem Lottoergebnis mit einem Zwilling an der ersten und zweiten Stelle und keinen weiteren benachbarten Zahlen, entspricht eine fünfelementige Teilmenge aus den Zahlen 1 bis 40 und umgekehrt.

Es gibt daher genau $\binom{40}{5}$ verschiedene derartige Tipps. Analoges gilt für den Fall, dass der Zwilling an der 2. und 3.Stelle, an der 3. und 4.Stelle, an der 4. und 5.Stelle bzw. an der 5. und 6.Stelle der aufsteigend geordneten Gewinnzahlen auftritt. Insgesamt gibt es daher 5 $\binom{40}{5}$ verschiedene Tipps, die genau einen Zwilling und sonst keine benachbarten Zahlen aufweisen.

$P(1 \text{ echter Zwilling}) = 5\,(\binom{40}{5}5)/\binom{45}{6} = 3290040/8145060 \approx 0{,}40393$

Durch analoge Überlegungen findet man

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
zwei Zwillinge	$\binom{4}{2}\binom{40}{4} / \binom{45}{6} = 548340/8145060 \approx 0{,}067322$
drei Zwillinge	$\binom{40}{3} / \binom{45}{6} = 9880/8145060 \approx 0{,}0012130$
ein Drilling	$4\binom{40}{4} / \binom{45}{6} = 365560/8145060 \approx 0{,}0448812$
zwei Drillinge	$\binom{40}{2} / \binom{45}{6} = 780/8145060 \approx 0{,}0000958$
ein Drilling und ein Zwilling	$6\binom{40}{3} / \binom{45}{6} = 59280/8145060 \approx 0{,}0072780$
ein Vierling	$3\binom{40}{3} / \binom{45}{6} = 29640/8145060 \approx 0{,}0036390$
ein Vierling und ein Zwilling	$2\binom{40}{2} / \binom{45}{6} = 1560/8145060 \approx 0{,}0001915$
ein Fünfling	$2\binom{40}{2} / \binom{45}{6} = 1560/8145060 \approx 0{,}0001915$
ein Sechsling	$40/8145060 \approx 0{,}0000049$
mindestens zwei benachbarte Zahlen	$1 - \binom{40}{6} / \binom{45}{6} = 4306680/8145060 \approx 0{,}52875$

Zweimal gleiche Lottozahlen in Israel gezogen

dpa Tel Aviv-Nachricht vom 17.Oktober 2010

"In Israel sind am Samstagabend exakt die gleichen sechs Lotto-Zahlen gezogen worden wie vier Wochen früher im Vormonat. Israelische Medien berichteten am Sonntag, insgesamt 95 Teilnehmer hätten richtig auf die gleichen Zahlen wie bei der Ziehung am 21. September getippt:

13, 14, 26, 32, 33 und 36.

Nur drei von ihnen wählten jedoch die richtige Zusatzzahl zwei - sie bekommen jeweils einen Gewinn von vier Millionen Schekel; umgerechnet etwa 800 000 Euro.
Der israelische Statistikprofessor Zvi Galula sagte der Nachrichtenseite "ynet", die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ergebnisses binnen weniger Wochen betrage 1 zu 4 Billionen.
Der israelische Lottoverband beteuerte jedoch, es sei alles mit rechten Dingen zugegangen. In der "Welt des Glücks" sei eben alles möglich, hieß es in einer Mitteilung des Verbands."

Systemlotto

Manche Firmen werben damit, durch ein besonderes System besonders hohe Gewinnchancen zu erzielen und nennen dies dann Systemlotto. Dieses Versprechen wird untermauert mit Listen, aus denen hervorgeht, wie oft in der Vergangenheit Gewinne erzielt wurden. Auf den ersten Blick sieht es sehr erfreulich aus, aber trotzdem ist es für einen Lottospieler ein Verlustgeschäft. Das Versprechen, mit höherer Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, ist ganz einfach eine Lüge!

Für einen Dreier gibt es $(46 \cdot 45 \cdot 44) / (3 \cdot 2 \cdot 1) = 15180$ Kombinationsmöglichkeiten, für einen Vierer $(47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44) / (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 178365$ und für einen Fünfer $(48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44) / (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 1712304$.
Wenn eine solche Firma lediglich 10000 Kunden hat, von denen jeder 10 Tips finanziert, kann sie für jede Ziehung 100000 Tips abgeben. Statistisch gesehen ist ihr damit im Mittel in zwei von drei Ziehungen ein Vierer sicher und jede siebzehnte Ziehung ein Fünfer.
Bei mehr Kunden ist die Gewinnwahrscheinlichkeit natürlich höher, so dass diese Firma dann mit hohen Gewinnwahrscheinlichkeiten werben kann.

Das arg strapazierte Wort Systemlotto bezieht sich also nur darauf, dass man gleichzeitig viele Tips abgibt und so durch massiven finanziellen Einsatz die Gewinnchance erhöht.
Dies ist jedoch für die Kunden absolut kein Vorteil: Das schöne Bild von vielen Gewinnen relativiert sich in Wahrheit nämlich dadurch, dass man sich den Gewinn mit den vielen anderen Kunden dieser Firma teilen muss.
Ein Sechser bringt für den einzelnen Kunden daher lediglich lächerliche Beträge. Selbst das extrem seltene Ereignis eines geknackten Jackpot mit angenommenen 10 Millionen Euro würde lediglich 1000 Euro pro Kunde bringen, wenn man von der für die Gewinnsumme eher optimistischen Annahme ausgeht, dass die Firma lediglich 10000 Kunden hat.
Hinzu kommt, dass die Firma für ihre Tätigkeit vom Lottoeinsatz einen Teil in die eigene Kasse abzweigt. Sie verdient daher immer sehr gut und insbesondere unabhängig davon, ob ihre Kunden gewinnen oder verlieren. Quelle: http://www.elektronikinfo.de/grundlagen/lotto.htm

Mögliche Lottosysteme

Ein Lottosystem, bei dem eine bestimmte Anzahl Kugeln aus einer Menge von verschiedenen Kugeln gezogen werden, könnte man nach den folgenden vernünftigen Kriterien auswählen:
1. Die Anzahl der Kugeln sollte weniger als 100 betragen.

Damit bleibt die Größe des Feldes, auf dem die Zahlen angekreuzt werden müssen, übersichtlich.
2. Es sollten weniger als 10 Kugeln gezogen werden.
Damit bleibt es möglich, sich die Gewinnzahlen zu merken und die Ziehung dauert nicht unnötig lange.
3. In der höchsten Gewinnklasse soll der Gewinn im Mittel mindestens das Millionenfache des Einsatzes, aber auch nicht wesentlich mehr betragen.
4. Es sollte fünf Gewinnklassen geben, auf die jeweils gleiche Geldbeträge entfallen.
5. Die Hälfte des Geldes soll als Gewinn ausgezahlt werden.

Punkt 3 ist natürlich Ansichtssache. Man könnte auch auf das 100000fache des Einsatzes gehen. Auch dies wäre genug Geld!
Die letzten beiden Punkte bedeuten, dass für jede Gewinnklasse 10% des eingesetzten Geldes zur Verfügung stehen. Damit in der höchsten Gewinnklasse im Mittel das Einmillionenfache des Einsatzes gezahlt werden kann, muss dort die Gewinnchance bei 1:10 Millionen liegen. Unter Berücksichtigung des ersten und zweiten Kriteriums bleiben folgende Lottosysteme für Gewinnchancen bis 1:15 Millionen:

9 aus 29; Chance 1:10015005 = 1 : $\binom{29}{9}$	9 aus 30; Chance 1:14307150 = 1 : $\binom{30}{9}$
8 aus 32; Chance 1:10518300 = 1 : $\binom{32}{8}$	8 aus 33; Chance 1:13884156 = 1 : $\binom{33}{8}$
7 aus 37; Chance 1:10295472 = 1 : $\binom{37}{7}$	7 aus 38; Chance 1:12620256 = 1 : $\binom{38}{7}$
6 aus 47; Chance 1:10737573 = 1 : $\binom{47}{6}$	6 aus 48; Chance 1:12271512 = 1 : $\binom{48}{6}$
6 aus 49; Chance 1:13983816 = 1 : $\binom{49}{6}$	5 aus 68; Chance 1:10424128 = 1 : $\binom{68}{5}$
5 aus 69; Chance 1:11238513 = 1 : $\binom{69}{5}$	5 aus 70; Chance 1:12103014 = 1 : $\binom{70}{5}$
5 aus 71; Chance 1:13019909 = 1 : $\binom{71}{5}$	5 aus 72; Chance 1:13991544 = 1 : $\binom{72}{5}$

6. Der Unterschied der Gewinnchancen von jeweils einer Gewinnklasse zur nächsten sollte nicht zu groß werden.
Rechnet man die Gewinnchancen für die verschiedenen Gewinnklassen aus, bemerkt man, dass der Unterschied zwischen der höchsten und der zweithöchsten Gewinnklasse deutlich größer ist als zwischen der zweittiefsten und tiefsten. Das kann man dadurch ausgleichen, dass man zwischen der höchsten und der zweithöchsten Gewinnklasse eine Gewinnklasse mit Zusatzzahl einschiebt. Beispielsweise gäbe es dann beim Lotto 7 aus 37 die Gewinnklassen 4 Richtige, 5 Richtige, 6 Richtige, 6 Richtige mit Zusatzzahl und 7 Richtige.
7. Die Anzahl der richtigen Kugeln, bei der es noch keinen Gewinn gibt, sollte möglichst klein sein, also höchstens eins oder zwei betragen. Andererseits sollte der erzielte Gewinn in der tiefsten Gewinnklasse möglichst hoch sein, also zumindest ein Mehrfaches des Einsatzes betragen.
Damit wird die Enttäuschung vermieden, trotz mehrerer Richtiger keinen Gewinn zu bekommen oder bei einem Gewinn kaum mehr als den Einsatz zurück zu erhalten. Das Lottosystem 6 aus 49 erfüllt diese Kriterien am besten.

In der DDR wurde beabsichtigt mit dem Lottospiel nicht Millionäre zu erzeugen, sondern einen angemessenen Betrag auf mehrere Gewinner zu erzielen. Deshalb wurde der höchste Gewinn auf das etwa 100000fache des Einsatzes reduziert. Damit musste in der obersten Gewinnklasse auf Grund der prozentual wesentlich größeren Gewinnausschüttung; im Vergleich zur BRD; die Chance bei etwa 1 : 300000 liegen. Berücksichtigt man die anderen Kriterien, so wäre möglich:
4 aus 55; Chance 1:341055 5 aus 35; Chance 1:324632
6 aus 28; Chance 1:376740 7 aus 24; Chance 1:346104
Von diesen Möglichkeiten wurde "5 aus 35" gewählt und in dem sehr beliebten "Tele-Lotto" umgesetzt. Daneben gab es auch "Lotto-Toto 6 aus 49", "5 aus 45" und das Zahlenlotto "5 aus 90".

Lotto mit Zusatzzahl

Werden bei einem Lotto-System von n Zahlen genau m Zahlen getippt, so ergibt sich für die Anzahl von r Richtigen die Gleichung $A(r) = \binom{m}{r} \binom{n-m}{m-r} / \binom{n}{m}$
In Deutschland wird das System durch die sogenannte Zusatzzahl erweitert, d.h. aus den nicht direkt gezogenen Zahlen n-m wird eine weitere ermittelt, die dann als Zusatzzahl zu einer Erhöhung des Gewinns führt. Damit wird

$$A(r)_{\text{ohne Zusatzzahl}} = \binom{m}{r} \binom{1}{0} \binom{n-m-1}{m-r} / \binom{n}{m}$$
$$A(r)_{\text{mit Zusatzzahl}} = \binom{m}{r} \binom{1}{1} \binom{n-m-1}{m-r-1} / \binom{n}{m}$$

Durch das Einführen der Zusatzzahl teilen sich die r Richtigen ($r<m$) in die Bereiche mit und ohne Zusatzzahl auf.

6 aus 49 in Deutschland

Die Gewinnzahlen werden am Mittwoch- und am Samstagabend gezogen. Zu den 6 Zahlen werden zudem noch eine Zusatzzahl und eine Superzahl gezogen. Die Zusatzzahl wird aus den restlichen 43 Kugeln als siebte, nach den ersten 6 Zahlen, gezogen.
Es gibt 8 Gewinnklassen. Es werden theoretisch 50% des Gesamteinsatzes als Gewinn ausgeschüttet. Deren prozentuale Anteil beträgt:

Klasse 1 … 6 richtige + Superzahl = 10 %	Klasse 2 … 6 richtige = 8 %
Klasse 3 … 5 richtige + Zusatzzahl = 5 %	Klasse 4 … 5 richtige = 13 %

Klasse 5 … 4 richtige + Zusatzzahl = 2 % Klasse 6 … 4 richtige = 10 %
Klasse 7 … 3 richtige + Zusatzzahl = 8 % Klasse 8 … 3 richtige = 44 %

Der Spieleinsatz beträgt je Tipp und Ziehung 75 Cent. Zusätzlich wird für jeden Spielschein eine Bearbeitungsgebühr erhoben. Die Bearbeitungsgebühr beträgt beim Normalschein je nach Zahl der gewünschten Ziehungsbeteiligungen zwischen 25 und 100 Cent; pro Tipp und Ziehung höchstens 35 Cent. Dadurch verschlechtert sich der Gewinnerwartungswert nochmals deutlich! Effektiv werden nur knapp 35 % wieder zurückgegeben.
Die Einführung der Superzahl verringerte nochmals die Höhe der Gewinne auf die normalen Gewinnklassen.

6 aus 45 in Österreich

In Österreich wird jeden Mittwoch und Sonntag gezogen. Die Gewinnausschüttung verteilt sich wie folgt
Rang 1 … 6 richtige = 44 % Rang 2 … 5 richtige + Zusatzzahl = 8 %
Rang 3 … 5 richtige = 9 % Rang 4 … 4 richtige = 15 %
Rang 5 … 3 richtige = 24 %

Wird in einem Rang kein Gewinn ermittelt, so wird die Gewinnsumme dem gleichen Rang in der nächsten Runde zugeschlagen.

Zahlenlotto 1-90 in Österreich

Das Zahlenlotto 1-90 wurde 1752 unter Maria Theresia eingeführt und ist das älteste konzessionierte Glücksspiel in Österreich. Ziehungen werden wöchentlich am Dienstag, Donnerstag und Samstag durchgeführt. Beim Zahlenlotto kann zwischen einer und fünf Zahlen ausgewählt werden, wodurch unterschiedliche Spielarten und somit auch unterschiedliche Gewinnhöhen erzielt werden. Wenn man die richtigen Zahlen errät, so gewinnt man eine fixe Summe; unabhängig von anderen Spielteilnehmern.

Keno

Bei der Lotterie Keno kann man jeden Tag 2 bis 10 Zahlen von insgesamt 70 Zahlen ankreuzen. Abends werden aus 70 Zahlen 20 Gewinnzahlen gezogen. Falls alle vom Spieler angekreuzten Zahlen dabei sind, hat er einen Volltreffer.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste angekreuzte Zahl unter den 20 Gewinnzahlen ist, beträgt 20/70. Die zweite Zahl hat nun die Trefferwahrscheinlichkeit 19/69, usw. ... Damit ergibt sich für Volltreffer-Wahrscheinlichkeit $2/7 \cdot 19/69 \cdot \ldots \cdot 11/61 = 19/40796434$
Die allgemeine Volltreffer-Wahrscheinlichkeit beträgt $20! / (20-n)! \cdot (70-n)! / 70!$
wobei n = 2, 3, ..., 10 die Anzahl der angekreuzten Zahlen ist.

Chance mit n Kreuzen k Treffer zu erzielen: Die ersten k der n angekreuzten Zahlen sind mit einer Wahrscheinlichkeit von $20! / (20-k)! \cdot (70-k)! / 70!$ Gewinnzahlen. Die verbleibenden n-k Zahlen sind mit der Wahrscheinlichkeit $50! / (50-n+k)! \cdot (70-n)! / (70-k)!$ keine Gewinnzahlen. Zudem gibt es $n!/(n-k)!$ Möglichkeiten, unter den n angekreuzten Zahlen k Treffer anzuordnen.

Da es bei der Auslosung nicht auf die Reihenfolge der Gewinnzahlen ankommt, muss man durch k! dividieren. Damit beträgt die Chance für $0 \le k \le n$ Treffer bei n angekreuzten Zahlen

$$n! / (n-k)! \cdot 1 / k! \cdot 50! / (50-n+k)! \cdot 20! / (20-k)! \cdot (70-n)! / 70! = \binom{20}{k} \binom{50}{n-k} / \binom{70}{n}$$

Vergleicht man mit der Gewinnauszahlungstabelle, so zeigt sich, dass die Keno-Spieler im Durchschnitt nur knapp die Hälfte des Einsatzes wieder ausgezahlt bekommen, wenn sie auf 2, 4, 5, 6, 7, 8 oder 10 Zahlen tippen.
Bei 3 oder 9 angekreuzten Zahlen ist der Erwartungswert geringfügig höher.

Kartenmischen, Bogenmischen, Riffeln

Als Mischen bezeichnet man die Erzeugung einer zufälligen Reihenfolge der Spielkarten eines Kartenspiels.
Es gibt verschiedene Methoden, Karten zu mischen. Einige Verfahren ergeben eine bessere Durchmischung, während andere Methoden leichter zu handhaben sind.

Eine beliebte Methode wird im Englischen riffle shuffle (Abbildung) genannt, deutsch Bogenmischen. Dabei wird jeweils eine Hälfte der Karten in jeder Hand nach Innen gewölbt. Anschließend werden die Karten gleichzeitig losgelassen, so dass sie ungleichmäßig(!) ineinander verzahnen.
Werden die Hälften so gemischt, dass abwechselnd von jedem Stapel genau eine Karte gewählt wird; geübte Spieler können das; so ist die Reihenfolge des gemischten Stapels nach mathematischen Gesetzen klar vorhersagbar. Nach einer endlichen Anzahl von Mischvorgängen wird die Ausgangssituation wieder erreicht.

Bei dem "in shuffle" wird zuerst von der zweiten Hälfte und dann von der ersten Hälfte genau eine Karte eingemischt. Dort gilt:

Werden 2n Karten 2n mal mit "in shuffle" gemischt und ist 2n+1 Primzahl, so ist die Ausgangssituation wieder hergestellt. Im Allgemeinen erreichen 2n Karten nach s Schritten den Anfangszustand, wenn

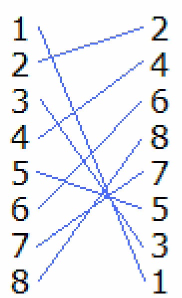
$2^s \equiv 1 \mod 2n+1$

gilt.

Bei dem "out shuffle" wird zuerst von der ersten Hälfte und dann von der zweiten Hälfte genau eine Karte eingemischt. Hier erreichen 2n Karten nach s Schritten den Anfangszustand für

$2^s \equiv 1 \mod 2n-1$

Die 52 Karten eines Standardspiels sind hier nach nur 8 Vorgängen wieder im Originalzustand.



Monge-Mischen

Durch den französischen Mathematiker Gaspard Monge wurde eine spezielle Art des Mischens von Karten vorgeschlagen.
Dabei werden die Karten abwechselnd hinten und vorn im neuen Stapel einsortiert.
Auch bei diesem Verfahren wird die Ausgangssituation relativ schnell wieder erreicht. Es gilt:
Besteht ein Kartenspiel aus 2n Karten, so wird beim Monge-Mischen nach dem kleinsten s Sortierungen mit $2^s \equiv \pm 1 \mod 4n+1$
die Ausgangsreihenfolge erreicht.
Ist 4n+1 eine Primzahl, dann werden die 2n Karten nach 2n Mischungen wieder in die Startreihenfolge zurückgeführt.
Für n = 1, 2, 3, 4, … werden damit 2n Karten nach folgender Anzahl von Mischungen in Ausgangszustand gebracht:
2, 3, 6, 4, 6, 10, 14, 5, 18, 10, 12, 21, 26, 9, 30, 6, 22, 9, 30, 27, 8, 11, 10, 24, 50, 12, 18, 14, 12, 55, 50, 7, 18, 34, 46, 14, 74, 24, 26, 33, 20, 78, 86, 29, 90, 18, 18, 48, 98, 33, 10, 45, 70, 15, 24, 60, 38, 29, 78, 12, 84, 41, 110, 8, 84, 26, 134, 12, 46, 35, 36, 68, 146, …

Werden 2p Karten genau m Mal gemischt, so erreicht eine Karte mit der Startposition x_0 die Position x_m mit: $2^{m+1} x_m = (4p + 1) (2^{m-1} + (-1)^{m-1} (2^{m-2} + … + 2 + 1)) + (-1)^{m-1} 2 x_0 + 2^m + (-1)^{m-1}$

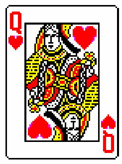
Fisher-Yates-Algorithmus

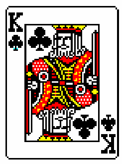
1938 beschrieben Ronald A.Fisher und Frank Yates in ihrem Werk "Statistical tables for biological, agricultural and medical research" einen sehr effizienten Mischalgorithmus.
Ursprünglich wurde das Verfahren mit Papier und Bleistift und einer vorausberechneten Tabelle von Zufallszahlen durchgeführt.
1964 gab Richard Durstenfeld in "Algorithm 235: Random permutation" eine moderne für Computer geeignete Version an, kurze Zeit später ebenso Donald E.Knuth; beide in Unkenntnis der Arbeit von Fisher und Yates.
Der Durstenfeld-Algorithmus unterscheidet sich in einem wichtigen Punkt, so dass die Komplexität des Algorithmus von ursprünglich O(n²) auf O(n) sinkt.

Algorithmus zum Mischen eines Feldes a mit n Elementen der Indizees 0, …, n-1:

```
for i from n-1 downto 1 do
j ← random integer mit 0 ≤ j ≤ i
exchange a[j] und a[i]
```

Poker





Kartenspiel mit je 13 Werten (As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König) in den Farben (Karo, Rot, Pik, Kreuz). Ziel ist es in fünf Karten eine bestimmte Kombination von Werten und Farben zu erreichen, welche einen höheren Wert als der der Gegenspieler darstellt.
Insgesamt existieren 2598960 Möglichkeiten die fünf Karten eines Spielers aus den 52 Karten auszuwählen

Kombination mit aufsteigendem Wert	**Wahrscheinlichkeit**
Kein Wert (keine der nachfolgenden Möglichkeiten)	0.501177
1 Paar (ein Wert ist doppelt vorhanden, die anderen einfach)	0.422569
2 Paare (zwei Werte sind doppelt vorhanden)	0.047539
1 Dreier (ein Wert ist dreifach vorhanden, die anderen einfach)	0.021129
Straight (die Karten bilden eine aufsteigende Reihe, aber verschiedenfarbig)	0.003925
Flush (alle Karten von einer Farbe aber nicht in einer durchgehenden Folge)	0.001965
Full House (ein Wert dreifach, ein Wert doppelt)	0.001441
Four of a Kind (ein Wert ist vierfach vorhanden)	0.000240
Straight Flush (alle Karten von einer Farbe und bilden eine aufsteigende Reihe)	0.000015

Dies entspricht in aufsteigender Folge 1302540, 1098240, 123552, 54912, 10200, 5108, 3744, 624, 40 Möglichkeiten die angegebenen Kombinationen in einem Kartenblatt zu erhalten.

Siebzehn und vier
Siebzehn und vier, französisch Vingt et un, ist ursprünglich ein französisches Karten-Glücksspiel aus dem 18.Jahrhundert, wo es am Hof von Ludwig XV. sehr beliebt war. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts entwickelte sich in den USA daraus das bekannte Casino-Spiel Black Jack. Das französische Vingt et un ist ein Abkömmling des älteren Trente un, bei dem es galt, 31 Punkte zu erreichen.
17 und 4 ist ein Glücksspiel. Auch wenn viele Spieler es glauben und hoffen, so gibt es keine(!) erfolgreiche Gewinnstrategie. Die Bank ist immer im Vorteil.
Siebzehn und vier wird entweder mit einem Paket zu 52 Blatt französischer Karten oder mit einem Paket zu 32 Blatt (Skatblatt) Karten gespielt. Jeder Spieler spielt für sich gegen den Bankhalter. Ziel des Spiels ist es, mit zwei oder mehr Karten näher an 21 Punkte heranzukommen als der Bankier, ohne dabei den Wert von 21 Punkten zu überschreiten.

Bei Verwendung von 52 Blatt zählen Ass elf Augen, König, Dame und Bube jeweils zehn Augen und die Zahlenkarten gemäß ihrem aufgedruckten Wert. Das beste Ergebnis sind 21 Punkte mit zwei Karten, also Ass und Bild bzw. Ass und Zehn, und gewinnt vielfach im Verhältnis 2:1. Hat jedoch die Bank 21 Punkte mit zwei Karten, so müssen die Spieler doppelt zahlen.
Bei Verwendung von 32 Blatt zählen Ass elf Augen, König vier Augen, Dame drei Augen, Bube zwei Augen und die Zahlenkarten (10, 9, 8, 7) gemäß ihrem aufgedruckten Wert. Beim Spiel mit 32 Karten gilt als bestes Ergebnis eine Hand bestehend aus zwei Assen. Die Farben haben keinerlei Bedeutung.

Haben alle Spieler gesetzt, so erhält jeder Spieler zwei Karten verdeckt, der Bankhalter jedoch nur eine, ebenfalls verdeckt. Der Spieler links vom Bankhalter erklärt nun als erster, ob er weitere Karten ziehen möchte oder nicht. Glaubt er nahe genug an 21 Punkte herangekommen zu sein, so lehnt er weitere Karten ab. Wer durch einen Kauf 22 oder mehr Punkte erreicht, muss sein Blatt aufdecken und verliert sofort.
In derselben Art werden nun nacheinander alle Spieler bedient, als letzter deckt der Bankhalter seine Karte auf, zieht seine zweite und nach Belieben eventuell weitere Karten.
Überschreitet der Bankhalter den Wert von 21 Punkten, so gewinnen alle noch im Spiel verbleibenden Teilnehmer im Verhältnis 1:1, bleibt der Bankhalter jedoch bei weniger als 22 Punkten stehen, so gewinnen nur diejenigen Spieler, die zumindest einen Punkt mehr auf der Hand haben als der Bankhalter.

Bridge
Bridge ist ein aus dem Whist entstandenes Kartenspiel für vier Personen und einem aus 52 Karten bestehenden Blatt (2, ..., 10, Bube, Dame, König, As für die Farben Karo, Herz, Pik, Eichel).
Es gibt 635 Milliarden 013 Millionen 559600 Möglichkeiten 13 Karten auszuwählen.
Die 10, Bube, Dame, König und As werden englisch "honor" genannt. Ein Spiel mit Dame, König, As aller 4 Farben und einer 10 heißt "13 top honors". Alle Karten einer Farbe in einer Hand wird "13-card suit" genannt.
12 Karten einer Farbe (inkl. As) und einer Karte anderer Farbe (kein As) heißt "12-card suit ace high". Ein Blatt ohne "honors" nennt man "Yarborough".

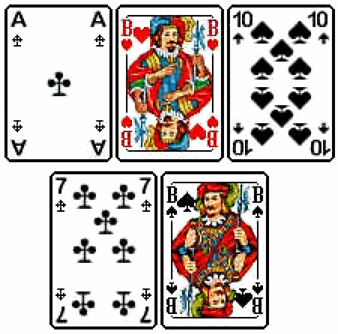
Wahrscheinlichkeiten für Karten in einer Hand

13 top honors	1 / 158753389900	$6.30 * 10^{-12}$
13 Karten einer Farbe	1 / 158753389900	$6.30 * 10^{-12}$
einer der 4 Spieler hat nur eine Farbe	1 / 39688347497	$2.52 * 10^{-11}$
12-card suit ace high	4 / 1469938795	$2.72 * 10^{-9}$
Yarborough	5394 / 9860459	$5.47 * 10^{-4}$
4 Asse	11 / 4165	$2.64 * 10^{-3}$
9 honors	888212 / 93384347	$9.51 * 10^{-3}$

Baccara
Baccara ist ein Glücksspiel mit Spielkarten und einfacher Grundidee:
Es werden Karten an zwei Parteien zufällig und offen ausgeteilt. Vor dem Austeilen wetten die Spieler, welche Partei das bessere Blatt erhalten wird oder ob beide ein gleich gutes Blatt bekommen (Unentschieden).
Nachdem festgestellt ist, welche Partei das bessere Blatt hat oder ob ein Unentschieden vorliegt, ist das Spiel beendet. Es wird nicht mit den ausgeteilten Karten gespielt. Damit haben die Spieler keinerlei Einflussmöglichkeiten.

Dennoch ist Baccara weltweit beliebt. Zum einen wird die Spannung durch die Art des Austeilens künstlich gesteigert, zum anderen glauben viele Spieler, durch Beobachtung von Serien zurückliegender Spiele auf den Ausgang künftiger Spiele schließen zu können. Dies ist allerdings falsch.
Die beiden Spieler heißen irreführend Banker und Player. Bei einer europäischen Version von Baccara, Chemin de Fer, sind sowohl Banker als auch Player reale Mitspieler.
Der Spielkartensatz besteht aus sechs bis zwölf kompletten Sets à 52 Karten (2 bis 10, Bube, Dame, König, As; in je vier Farben). Zunächst erhalten Banker und Player je zwei Karten. Banker und/oder

Player erhalten unter bestimmten Umständen, die in den Regeln genau festgelegt sind, eine weitere Karte. Eine komplette Hand besteht immer aus zwei oder drei Karten. Für beide Hände wird nun jeweils eine Punktzahl ermittelt. Die Einzelkarten haben folgende Werte:
As = 1, Bube = Dame = König = 0, 2 bis 10 mit ihrem normalen Zahlenwert
Diese Punkte werden für jede Hand addiert. Das Endergebnis einer Hand ist dann die Punktsumme modulo 10. Deshalb zählt die 10 auch gleich 0. Die Farben der Spielkarten sind unerheblich. Beide Parteien haben also ein Ergebnis zwischen 0 und 9. Die Partei mit dem höheren Ergebnis gewinnt.
Quelle: http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/philatelie.htm



Im Beispiel gewinnt der Player (unten) mit 7 Punkten gegen den Banker (oben) mit 1 Punkt.
Die Ziehungsregeln für die dritte Karte sind verschieden für Banker und Player und sorgen für unterschiedliche Gewinnwahrscheinlichkeiten.

"Natural" : Hat (mindestens) eine der beiden Parteien 8 oder 9 Punkte, erhalten beide Parteien keine dritte Karte.

Der Player wird immer vor dem Banker bedient. Der Player erhält genau dann eine dritte Karte, wenn kein Natural vorliegt und wenn er aus den beiden ersten Karten weniger als 6 Punkte hat.
Ob der Banker eine dritte Karte erhält, hängt davon ab, ob der Player eine dritte Karte erhalten hat und welchen Punktwert diese hat. In der abgebildeten Tabelle ist am linken Rand der Wert der beiden ersten Karten des Bankers und am oberen Rand der Wert der dritten Karte des Players eingetragen; N bedeutet, dass der Player keine dritte Karte erhalten hat. Ein X bedeutet, dass der Banker eine dritte Karte erhält.

3.Karte Player

Banker	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	-	X
4	X	-	-	X	X	X	X	X	X	-	-
5	X	-	-	-	-	X	X	X	X	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	X	X	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Die Baccara-Spieler setzen jeweils für einzelne Spiele Geld auf Banker, Player oder Unentschieden. Außerdem können sie auf "Banker-Paar" oder "Player-Paar" wetten. Ein Paar liegt vor, wenn sich die beiden ersten Karten einer Partei höchstens in der Farbe unterscheiden, also z.B. zwei Neunen bei Banker oder zwei Asse bei Player. Gewettet wird aber nicht auf ein bestimmtes Paar, sondern nur darauf, dass überhaupt ein Paar bei einer bestimmten Partei auftritt. Die Auszahlungen und Rückzahlung des Einsatzes, für gewonnene Wetten sind in Macao:
1,95 für Wetten auf Banker ; 2 für Wetten auf Player ; 9 für Wetten auf Unentschieden ; 12 für Wetten auf Banker-Paar ; 12 für Wetten auf Player-Paar

Bei verlorenen Wetten fällt der Einsatz an die Bank, mit einer Ausnahme:
Das Casino kann festlegen, dass bei Unentschieden die Einsätze auf Banker und Player zurückgezahlt werden.
Den nachfolgenden Wahrscheinlichkeiten liegt eine Simulation einer großen Anzahl von Spielen (> 12000000) zu Grunde. Da die Karten immer aus einem endlichen gemischten Spielkartensatz ohne Zurücklegen gezogen werden, kann man vermuten, dass ein Spieler seine Gewinnchancen durch Mitzählen aller bereits ausgegebenen Karten erhöhen kann. Dies ist aber bei den Wetten auf Banker, Player oder Unentschieden nur unwesentlich möglich. In den Spielbanken werden nach dem Mischen immer sechs bis zwölf Karten vom Anfang und zwölf Karten vom Ende des Stapels weggenommen, ohne dass die Spieler diese Karten sehen können.

Für die Wetten auf Banker-Paar und Player-Paar können exakte Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf den Fall, dass ein Spieler zu einem beliebigen Zeitpunkt an den Spieltisch tritt und ohne Kenntnis der vorher ausgegebenen Karten eine Wette auf Banker-Paar oder Player-Paar platziert. Für 6, 9 bzw. 12 Kartensets ergeben sich die folgenden Gewinnwahrscheinlichkeiten p:
$6 \times 52 = 312$ Karten : $p = 23/311 \approx 0{,}07395$ $9 \times 52 = 468$ Karten : $p = 35/467 \approx 0{,}07495$
$12 \times 52 = 624$ Karten : $p = 47/623 \approx 0{,}07544$

Für die anderen Wetten ergibt die Simulation:
$p \approx 0{,}4586$ Banker gewinnt $p \approx 0{,}4463$ Player gewinnt $p \approx 0{,}0952$ Unentschieden
Ist p die Gewinnwahrscheinlichkeit für eine bestimmte Wette und a die zugehörige Auszahlung, so errechnet sich der durchschnittliche Bankgewinn zu $(1 - a \cdot p) \cdot 100$ %, falls Einsätze im Verlustfall an die Bank gehen. Bankgewinne:
≈ 10,57 % Wette auf Banker ≈ 10,74 % Wette auf Player ≈ 14,32 % Wette auf Unentschieden
≈ 11,25 % .. 10,06 % .. 9,47 % Wette auf Paar (6 .. 9 .. 12 Sets)

Macao erlaubt auch die Variante, dass bei Unentschieden die Einsätze auf Banker und auf Player zurückgezahlt werden. Ist q die Gewinnwahrscheinlichkeit für eine Wette auf Unentschieden, p die Gewinnwahrscheinlichkeit für eine Wette auf Banker (bzw. Player), und a die Auszahlung für gewonnene

Wetten auf Banker bzw. Player, so errechnet sich der durchschnittliche Bankgewinn zu $(1 - a \cdot p/(1-q)) \cdot 100$ % . Man erhält dann die folgenden Bankgewinne:
≈ 1,17 % Wette auf Banker ≈ 1,36 % Wette auf Player

On fait trop d'honneur à la roulette: elle n'a ni conscience ni mémoire.
Man tut dem Roulette zu viel Ehre an: Es hat weder Gewissen noch Gedächtnis.
Joseph Bertrand

Roulette

Das US-amerikanische Roulette enthält 38 Zahlfelder ... 1 bis 36 und 0 sowie 00
Grüne Felder: 0, 00
Rote Felder: 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 32, 34, 36
Schwarze Felder: 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35

Gewinn W bei Einsatz einer Einheit

Einsatz auf einem Zahlfeld 1...36
P(W=-1) = 37/38 P(W=35) = 1/38 E(W) = -0.0526
2-Zahlenfeld
P(W=-1) = 36/38 P(W=17) = 2/38 E(W) = -0.0526
3-Zahlenfeld
P(W=-1) = 35/38 P(W=11) = 3/38 E(W) = -0.0526

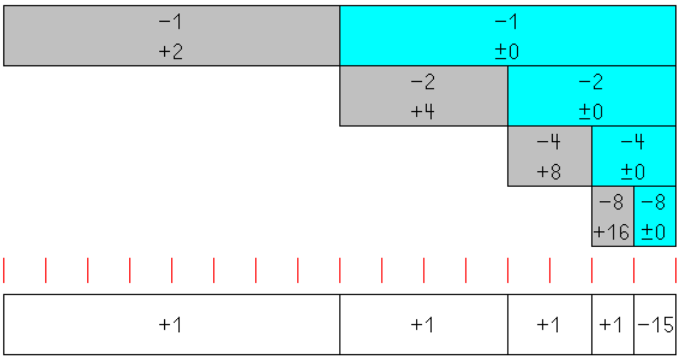
4-Zahlenfeld	P(W=-1) = 34/38	P(W=8) = 4/38	E(W) = -0.0526
6-Zahlenfeld	P(W=-1) = 32/38	P(W=5) = 6/38	E(W) = -0.0526
12-Zahlenfeld	P(W=-1) = 26/38	P(W=2) = 12/38	E(W) = -0.0526
Rot oder Schwarz	P(W=-1) =20/38	P(W=1) = 18/38	E(W) = -0.0526

Anekdote: Im Januar 1963 setzte der britische Schauspieler Sean Connery dreimal nacheinander die Zahl 17 an einem Rouletttisch St.-Vincent-Casino und gewann. Die Wahrscheinlichkeit betrugt 1 : 50652. (nach Wykes "Gambling", London 1964)

Außerhalb der USA sind die Regeln des Roulettes einheitlich. Außer den Zahlen 1 bis 36 gibt es nur ein 0, die 00 gibt es nicht.
Der Spieler kann auf eine der Zahlen 0 - 36 wetten und erhält im Gewinnfall das 36-fache seines Einsatzes, verliert also im Durchschnitt $^1/_{37}$ oder rund 2,7 % an die Bank. Das gleiche gilt, wenn er auf Gruppen von Zahlen wettet, z.B. auf alle geraden Zahlen ohne die Null (2-fache Auszahlung) oder auf eine Vierergruppe von Zahlen (9-fache Auszahlung). Der Bankgewinn von 2,7 % ist moderat, Roulette kann man deshalb, außerhalb der USA, als relativ faires und in seinen Regeln transparentes Spiel bezeichnen.
Das Roulette ist wahrscheinlich chinesischen Ursprungs. 1734 veröffentlichte M.Giradier sechs neue Spiele, die auf diesem Prinzip basieren. Anfang des 19.Jahrhunderts wurde das Roulette in seiner heutigen Form in Paris erfunden.

Martingale

Es gibt angeblich Rezepte, systematisch beim Roulette zugewinnen, ohne selbst eine Spielbank zu betreiben und ohne unerlaubte Manipulation des Zufallsgenerators. Eins davon ist nach Martingale (oder auch nach St. Petersburg) benannt.



Man setzt prinzipiell z.B. immer auf Rot, so dass man im Gewinnfalle den doppelten Einsatz bekommt, also den einfachen gewinnt. Man beginnt mit der kleinsten Einheit. Gewinnt man, bleibt man bei ihr oder kehrt zu ihr zurück. Verliert man aber, so verdoppelt man den jeweils letzten Einsatz, und zwar so oft, bis man wieder gewinnt. Auf diese Weise gewinnt man in jeder Folge von einem Gewinn zum nächsten per saldo genau den kleinsten Einsatz, das aber beliebig oft. Leider ist die Höhe des Einsatzes beschränkt, wenn nicht durch die Spielregel der Bank, so doch durch die Größe der Hosentasche, in der man die Chips bei sich führt, oder die Menge des Bargeldes beim Kaufen der Chips oder die Kreditlinie beim Borgen von solchen oder so ähnlich.
Das Bild zeigt waagerecht die Wahrscheinlichkeiten oder die Zahl der Fälle, die negativen Zahlen in den farbigen Feldern sind die Einsätze, die positiven die Auszahlungen.
In der unteren Zeile sieht man dann, dass man in dem Beispiel, dass man schon bei 15 Einheiten (=1+2+4+8) aufgeben muss, in 15/16 der (unendlich vielen) gleich wahrscheinlichen Fälle je eine Einheit gewinnt, aber in dem verbleibenden 1/16 der Fälle bedauerlicher Weise genau auch wieder 15 verliert.

Natürlich ist die Einsatzgrenze in Wirklichkeit viel höher, aber das Entsprechende lässt sich nur ungenauer zeichnen, aber genau so scharf denken. Überlisten des Zufalls ist nicht möglich.

Fan Tan

Fan Tan ist ein in ganz China beliebtes, sehr einfaches Glücksspiel, das ebenso wie Roulette fair und in der Gewinnausschüttung transparent ist.
Der Croupier (Spielleiter) arbeitet mit einem größeren Haufen von Spielsteinen (z.B. Knöpfen, Bohnen). In jeder Spielrunde trennt er willkürlich einen gewissen - nicht zu kleinen und nicht zu großen - Teil davon ab, meist ca. die Hälfte. Der abgetrennte Teil nimmt dann am Spiel teil und kommt zunächst unter einen Hut; auf der Briefmarke ist dieser Hut oben; der nicht verwendete Teil kommt unter einen anderen Hut; auf der Briefmarke unten. Die Spieler wetten nun auf die Zahl N der Spielsteine unter dem ersten Hut, wobei nur N modulo 4 von Interesse ist, denn am Ende des Spiels verkündet der Croupier eines der folgenden Ergebnisse:

"1" falls N mod 4 = 1
"2" falls N mod 4 = 2
"3" falls N mod 4 = 3
"4" falls N mod 4 = 0

Seine Spannung bezieht das Spiel daraus, dass der Croupier nicht einfach nachzählt. Wenn alle Spieler ihre Einsätze abgegeben haben, hebt er den ersten Hut und sondert dann mit einem Stab immer vier Steine auf einmal ab. Das macht er so lange, bis noch 1, 2, 3, oder 4 Steine übrig sind, so dass jeder Spieler sofort das Endergebnis sehen kann. Auf der Briefmarke wurde das untere Häufchen beiseite geschoben, mit dem oberen gespielt. Der Croupier hat bereits dreimal vier Spielsteine mit seinem Stab von den übrigen getrennt. Man sieht, dass in diesem Spiel die "1" gewinnen wird. Die Spieler können auf einzelne Wettzahlen (1 bis 4) oder auf Kombinationen daraus setzen. Fünf verschiedene Wetten sind möglich (3. Spalte: Anzahl günstiger Ergebnisse, 4. Spalte: faire Gewinn-Auszahlung, incl. Rückzahlung Einsatz):

Fan	1 Wettzahl	1 von 4	4
Kuoc	2 Wettzahlen	2 von 4	2
Sé-Sam-Hong	3 Wettzahlen	3 von 4	$1\ {}^{1}/_{3}$
Nim	1 Wettzahl: weitere Zahl, die zum Unentschieden führt, d.h. Einsatz wird zurückgezahlt	1 von 3	3
Nga	2 Wettzahlen: 1 weitere Zahl, die zum Unentschieden führt, d.h. Einsatz wird zurückgezahlt	2 von 3	1,5

Im Gewinnfall erhält ein Spieler die faire Auszahlung **aus der Tabelle** abzüglich 5 % **für die Bank.**

Cussec

Cussec ist eine Art Roulette mit drei Würfeln, die gleichzeitig geworfen werden. Diese sind nicht unterscheidbar, so dass die Spieler nur auf die drei "Augenbilder" ohne Berücksichtigung einer Reihenfolge wetten können. Eine Vielzahl verschiedener Wetten wird angeboten; diese sind in der

nächsten Tabelle aufgelistet. Die Wetten unterscheiden sich durch die Gewinnwahrscheinlichkeit, aber auch durch die Höhe des Bankgewinns (anders als bei Fan Tan). Zwei Beispiele:

Tripla especificado: Man wettet auf einen bestimmten Dreierpasch und erhält im Gewinnfall seinen Einsatz zurück plus dem 150-fachen davon. Dies ist ein Beispiel für eine leicht kalkulierbare Wette, bei der allerdings die Bank gehörig absahnt, so dass man von dieser Wette abraten sollte. Die einfache Kalkulation: Man stellt sich die Würfel als unterscheidbar vor, so dass es 216 mögliche Ergebnisse gibt (d.h. 1,2,6 und 6,1,2 sind unterschiedliche Ergebnisse); nur ein Ergebnis führt zum Gewinn, also wäre die faire Gewinnauszahlung der 216-fache Einsatz, incl. Rückzahlung des Einsatzes. Allgemein berechnet man also die faire Gewinnauszahlung als 216 / (Anzahl günstiger Ergebnisse)**.** Vergleicht man die tatsächliche Auszahlung (151-fach) mit der fairen Auszahlung (216-fach), so ergibt sich ein durchschnittlicher Bankgewinn von über 30 %.

Simples especificado: Man wettet auf eine bestimmte Zahl und gewinnt, wenn diese Zahl mindestens einmal fällt. Dann erhält man seinen Einsatz zurück plus dem 1-, 2- bzw. 3-fachen davon, je nachdem, ob die gewählte Zahl einmal, zweimal oder dreimal fällt. Dies ist ein Beispiel für eine schwer kalkulierbare Wette, bei der allerdings der Bankgewinn deutlich moderater ausfällt als beim Dreierpasch. Es gibt 75 Möglichkeiten, dass die gewählte Zahl genau einmal auf einem der drei Würfel erscheint, 15 Möglichkeiten für genau zweimal und 1 Möglichkeit für dreimal. In 91 von 216 Fällen gewinnt also der Spieler. Somit ist die durchschnittliche Auszahlung im Gewinnfall, incl. Einsatz,
$(2 \cdot 75 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 1) / 91 \approx 2{,}187$. Damit vergleichen wir die faire Auszahlung von $216 / 91 \approx 2{,}374$ und berechnen den Bankgewinn zu knapp 8 %.

Die besonders günstigen Wetten sind in der Tabelle grün unterlegt. 3.Spalte: Anzahl Möglichkeiten (von 216), 4.Spalte: Gewinn-Auszahlung (incl. Rückzahlung Einsatz), 5.Spalte: faire Auszahlung (incl. Rückzahlung Einsatz), letzte Spalte: durchschnittlicher Bankgewinn

Wetten auf genaues Ergebnis

Três dados especificado	3 bestimmte, verschiedene Zahlen	6	31	36	≈ 13,89 %
Dupla e simples	1 bestimmtes Paar und 1 bestimmte andere Zahl	3	51	72	≈ 29,17 %
Tripla especificado	bestimmter 3-er Pasch	1	151	216	≈ 30,09 %

Wetten auf Teilergebnis

Simples especificado	1 bestimmte Zahl	91	2/3/4 ≈ 2,187	≈ 2,374	≈ 7,87 %
Dois dados	2 bestimmte verschiedene Zahlen	30	6	7,2	≈ 16,67 %
Dupla especificado	1 bestimmtes Paar, 3.Zahl darf auch gleich sein	16	9	13,5	≈ 33,33 %

Wetten auf Augensumme

Total de pontos	exakte Augensumme 4 oder 17	3	51	72	≈ 29,17 %
Total de pontos	5 oder 16	6	19 … 31	36	≈ 47,22 … 13,89 %
Total de pontos	6 oder 15	10	15 … 19	21,6	≈ 30,56 … 12,04 %
Total de pontos	7 oder 14	15	13	14,4	≈ 9,72 %
Total de pontos	8 oder 13	21	9	≈ 10,286	12,5 %
Total de pontos	9 oder 12	25	7	8,64	≈ 18,98 %
Total de pontos	10 oder 11	27	7	8	12,5 %
Pequeno	kleine Augensumme ≤ 10 , 3-er Pasch ist Verlust	105	2	2,057	≈ 2,78 %
Grande	große Augensumme ≥ 11 , 3-er Pasch ist Verlust	105	2	2,057	≈ 2,78 %
Ímpar	ungerade Augensumme	108	2	2	0 %
Par	gerade Augensumme	108	2	2	0 %

Sonstige Wetten

Qualquer tripla	irgendein 3-er Pasch	6	25	36	≈ 30,56 %
Quatro números	4 verschiedene Zahlen, 3 davon müssen stimmen	24	8	9	≈ 11,11 %

Vergleich der 4 Glücksspiele Baccara, Roulette, Fan Tan und Cussec ergibt:

	Ergebnisse	Anzahl	Wahrscheinlichkeit	Bankgewinn	Transparenz
Baccara	"Banker siegt" "Player siegt" Unentschieden Paar für Banker (Player) kein Paar für Banker (Player)	3, 2	verschieden, verschieden	1,17 % … 10,57 % 1,36 % … 10,74 % 14,32 % 9,47 % … 11,25 %	mittel, mittel
Roulette	0 … 36	37	1 / 37	2,7 %	sehr hoch
Fan Tan	1 … 4	4	1 / 4	5 %	sehr hoch
Cussec	ungeordnete 3-er-Stichprobe mit Zurücklegen aus {1, 2, 3, 4, 5, 6}	56	verschieden	0 % … 47,22%	gering

Spielautomat

Ein Spielautomat ist ein mechanisches oder elektronisches Gerät, das einen bestimmten Spielverlauf simuliert und entweder völlig mittels des Zufallsprinzips oder aber mit Steuerung durch Mitspieler betätigt wird.
Allein kommerzielle Interessen stehen im Vordergrund, der Unterhaltungswert wird dem Spieler vorgetäuscht.
Sichere Gewinner sind nur der Betreiber des Spielautomaten und der Staat, der einen beträchtlichen Teil des Gewinnes für das Glücksspiel erhält.

In Deutschland gelten seit 2006 folgende Regeln: Die Dauer für ein einzelnes Spiel wurde zu ungunsten der Spielsüchtigen auf fünf Sekunden abgesenkt. Dadurch wird die Geldsumme, die in der gleichen Zeit wie bisher verspielt werden kann, verdoppelt. Auf der anderen Seite ist der maximal Verlust in der Stunde auf 80 Euro begrenzt. Dieser Wert ist so hoch, dass sich Spielsüchtige in den vollständigen Ruin bringen können. Der Spieleinsatz darf pro Spiel 0,20 Euro nicht übersteigen und der Gewinn höchstens 2 Euro betragen. Die Auszahlungsquote beträgt etwa 80% der um die gesetzliche Umsatzsteuer verminderten Einsätze, d.h. der Spieler verliert auf die Dauer garantiert!

Der erste Geldspielautomat war 1889 die Black Cat der Brüder Caille. Der Apparat wurde treffender Weise unter der Bezeichnung "Einarmiger Bandit" bekannt.
Die Spielsüchtigen werden in Deutschland auf 200000 geschätzt. Deren Zahl steigt vor allem durch Online-Spielmöglichkeiten rasant an.

Verteilungsparameter

Erwartungswert	EX
Streuung	$D^2X = E(X-EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$
Standardabweichung	$\sqrt{(D^2X)}$
Modalwert	Stelle größter Wahrscheinlichkeit (diskret), Stelle maximaler Dichte (stetig)
Median ... Stelle x_0 mit	$P(X \le x_0) \ge 0.5$ und $P(X \ge x_0) \ge 0.5$ (diskret)
	$p(X < x_0) = F(x_0) = 0.5$ (stetig)
Quantil p-ter Ordnung	Stelle mit $P(X<x_p) \ge p$ und $P(X \ge x_p) \ge 1-p$
Moment k-ter Ordnung	$\alpha_k = E(X^k)$, d.h. $\alpha_1 = EX$
k-tes zentrales Moment	$\mu_k = E(X - EX)^k$
Schiefe	$\gamma = \mu_3 / \sqrt{[(D^2X)^3]}$
Exzeß	$\varepsilon = \mu_4/(D^2X)^2 - 3$

Tschebyschowsche Ungleichung

Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der um mindestens ε vom Erwartungswert EX = μ abweicht, gilt $P(|X - EX| \ge \varepsilon) \le D^2X/\varepsilon^2$ $\qquad$ $P(|X - \mu| \ge \varepsilon) \le \sigma^2/\varepsilon^2$

Folgerung: $P(|X - \mu| \ge \sigma) \le 1$ $\qquad$ $P(|X - \mu| \ge 2\sigma) \le 0.25$

$P(|X - \mu| \ge 3\sigma) \le 1/9$ $\qquad$ $P(|X - \mu| \ge 4\sigma) \le 1/16$ usw.

Die Abschätzung ist sehr grob, gilt aber für jede Verteilung. Sie wird insbesondere dann verwendet, wenn von einer Verteilung nur μ und σ bekannt sind.

Die Tschebyschow-Ungleichung gibt eine untere Grenze für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert einer Zufallsvariable mit endlicher Varianz innerhalb eines bestimmten Bereiches um den Erwartungswert der Variable liegt. Damit ist auch eine obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass die Werte außerhalb dieses Bereiches liegen. Der Satz lässt sich auch auf Verteilungen anwenden, die weder "glockenförmig" noch symmetrisch sind und setzt Grenzen dafür, wie viele der Daten "in der Mitte" liegen und wie viele nicht. Die Tschebyschow-Ungleichung ist eng verwandt mit der Markow-Ungleichung.

Null-Eins-Verteilung

Verteilung einer diskreten Zufallsgröße *X* mit den Werten $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$; wird verwendet, wenn bei einem Zufallsexperiment lediglich interessiert, ob ein bestimmtes Ereignis A eintritt oder nicht eintritt. Der Parameter der Verteilung ist p.

Einzelwahrscheinlichkeiten	$P(1) = p$	und $P(0) = 1-p$	
Verteilungsfunktion	$F(x) = 0$ für $x \le 0$	$= 1-p$ für $0 < x \le 1$	$= 1$ für $1 < x$
Erwartungswert	$m = p$	Varianz $\sigma^2 = p\,(1-p)$	

Diskrete Gleichverteilung

n verschiedene Stellen $x_1, \ldots, x_n$ mit $P(X = x_i) = 1/n$; $i=1, 2, \ldots, n$

Verteilung einer diskreten Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, \ldots, x_n$ und gleichmäßig verteilten Wahrscheinlichkeiten; wird verwendet, wenn der Bedingungskomplex des betreffenden Zufallsexperiments die Anwendung der klassischen Methode zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ermöglicht. Parameter der Verteilung ist n.

Einzelwahrscheinlichkeiten	$P(x_i) = 1/n$		
Verteilungsfunktion	$F(x) = 0$ für $x \le x_i$	$= 1/n$ für $x_i < x \le x_{i+1}$	$= 1$ für $x_n < x$
Erwartungswert	$m = 1/n \, \Sigma x_i$	Varianz	$\sigma^2 = 1/n \, \Sigma x_i^2 - (1/n \, \Sigma x_i)^2$

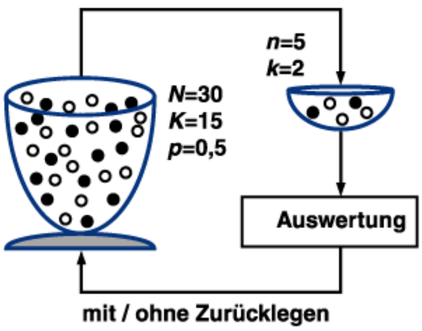
Hypergeometrische Verteilung

$P(X = k) = \binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} / \binom{N}{n}$

Kugelziehen ohne Zurücklegen

N ... Anzahl der Kugeln	M ... Anzahl der weißen Kugeln
n ... Anzahl der gezogenen Kugeln	k ... Anzahl der gezogenen weißen Kugeln

In einer Urne seien N Kugeln, davon M weiße und N-M schwarze. Nacheinander werden ohne(!) Zurücklegen, oder eben gleichzeitig, n Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable, welche das Ereignis beschreibt, dass unter den n Kugeln genau k weiße sind, ist dann hypergeometrisch verteilt.



Modell:

Sei eine Gesamtmenge von $N = N_1 + N_2$ Einheiten gegeben, von denen N_1 besonders markiert sind, z.B. unterschiedliche Farbe, Funktionstüchtigkeit, so dass p = N1/N den Anteil der besonders gekennzeichneten Teile an der Gesamtmenge angibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter $n \le N$ zufällig ausgewählten Einheiten (Stichprobe) genau k besonders markierte befinden, ist nun gerade durch die hypergeometrische Verteilung gegeben. Nach jeder Entnahme einer Einheit kann sich der Anteil der markierten Elemente an der Grundgesamtheit ändern. Für jede der n Entnahmen gelten daher andere Wahrscheinlichkeiten, ein markiertes Element zu erhalten. Die hypergeometrische Verteilung simuliert somit das Ziehen von Losen **ohne** Zurücklegen des jeweils gezogenen Loses im Gegensatz zu der Binomialverteilung.

Rekursionsformel

$P(X = k+1) = P(X = k) \cdot (M - k)(n - k) / [(k + 1)(N-M-n+k+1)]$
$EX = nM/N$
$D^2X = nM/N \cdot (1 - M/N) \cdot (N-n)/(N-1)$

Beispiel 1: Ziehung von n=6 Kugeln ohne Zurücklegen bei k=49 unterscheidbaren Kugeln, davon r=6 „Richtige". Reihenfolge soll keine Rolle spielen. Lotto 6 aus 49
Wahrscheinlichkeit für die Ziehung von m=4 „richtigen" und 2 „falschen" Kugeln:
P = (Zahl der Möglichkeiten, 4 von 6 „richtigen" Kugeln zu ziehen) * (Zahl der Möglichkeiten, 2 von 43 „falschen" Kugeln zu ziehen) / (Zahl der Möglichkeiten, irgendwelche 6 Kugeln zu ziehen) … $P = ({}^{r}{}_{m}) * ({}^{k-r}{}_{n-m}) / ({}^{k}{}_{n})$ hypergeometrische Verteilung
$= ({}^{6}{}_{4}) * ({}^{43}{}_{2}) / ({}^{49}{}_{6}) = (6!/4!/2!) * (43!/2!/41!) / (49!/6!/43!) = 0.00096862$

Beispiel 2: Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kinder gleichen Namens in eine bestimmte Schule gehen, wenn die Gruppe aus 511 Kindern besteht, davon nur 2 Kinder den gleichen Namen besitzen und nur jeweils 7 Kinder in die gleiche Schule gehen. Die Kinder sind also auf 73 Schulen verteilt.
P = (Zahl der Möglichkeiten, beide Kinder gleichen Namens zu „ziehen")*(Zahl der Möglichkeiten, 5 von 509 Kinder mit verschiedenen Namen zu „ziehen")/(Zahl der Möglichkeiten, irgendwelche 7 Kinder von 511 Kindern zu ziehen)
$= ({}^{2}{}_{2}) * ({}^{509}{}_{5}) / ({}^{511}{}_{7}) = (2!/(2!*0!)) * (509!/(5!*504!)) / (511!/(7!*504!)) = 0.000161160$
Wahrscheinlichkeit, dass eins der beiden Kinder in eine bestimmte Schule geht 7/511
Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder in eine bestimmte Schule gehen (7/511) * (6/510)
Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder in eine gemeinsame Schule gehen 6/510 = 0.011765
Gäbe es 54 mal je zwei Kinder gleichen Namens, wäre die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder gleichen Namens in eine gemeinsame Schule gingen, grob 54 mal so groß, also etwa 0.6 bis 0.65.

Beispiel 3: Von n=10 Paar Socken, die alle verschieden sind, gehen k=6 einzelne Socken verloren.
Gesucht: Wahrscheinlichkeit W, dass alle k=6 einzelnen Socken verschieden sind, also von verschiedenen Paaren stammen:
$W = ({}^{2}{}_{1})^{k} * ({}^{2*(n-k)}{}_{0}) * ({}^{n}{}_{k}) / ({}^{2n}{}_{k}) = ({}^{2}{}_{1})^{6} * ({}^{8}{}_{0}) * ({}^{10}{}_{6}) / ({}^{20}{}_{6}) = 2^{6} * 1 * 210 / 38760 = 0.34675$
oder: W = 20/20 * 18/19 * 16/18 * 14/17 * 12/16 * 10/15 = 112/323 = 0.34675
Wahrscheinlichkeit W, dass alle k=6 einzelnen Socken zu k/2=3 Paaren gehören, dass also noch n-k/2=7 vollständige Socken-Paare übrig sind:
$W = ({}^{2}{}_{2})^{k/2} * ({}^{2*n-k}{}_{0}) * ({}^{n}{}_{k/2}) / ({}^{2n}{}_{k}) = ({}^{2}{}_{2})^{3} * ({}^{14}{}_{0}) * ({}^{10}{}_{3}) / ({}^{20}{}_{6}) = 1^{3} * 1 * 120 / 38760 = 0.00310$
oder: W = 15 * (20/20 * 1/19 * 18/18 * 1/17 * 16/16 * 1/15) = 15 * 323 / 15 = 0.00310
Die Wahrscheinlichkeit, dass alle verlorenen 6 einzelnen Socken von verschiedenen Paaren stammen, so dass nur noch 4 vollständige Paare übrig sind, ist also mehr als 100 mal so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Verlieren der 6 einzelnen Socken noch 7 vollständige Paare übrig bleiben.

Grenzfälle der hypergeometrischen Verteilung

für $N \geq 200$ und $n/N \leq 0.1$ → Binomialverteilung
für $n\, p(1-p) > 9$ und $n/N \leq 0.1$ Normalverteilung
für $N \geq 200$, $n/N \leq 0.1$, $n \geq 100$ und $p \leq 0.05$ → Poissonverteilung

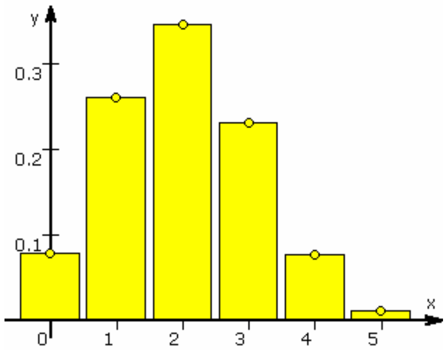
Beispiel 4 (nach Ronald Aylmer Fisher)

Eine Lady behauptet, sie würde am Geschmack erkennen, ob bei dem ihr servierten Tee zuerst die Milch und dann der Tee eingegossen wurde oder umgekehrt. Tee, bei dem die Milch zuerst in der Tasse war, schmecke ihr nicht, und sie ließe diesen Tee sofort stehen.
Lord Peter, der die Lady als wichtige Zeugin in einem Mordfall benötigt, muss sich entscheiden, ob er die Lady als glaubwürdig einstuft oder nicht.
Um die Lady auf die Probe zu stellen, fordert er das Küchenmädchen auf, an acht aufeinanderfolgenden Tagen in zufälliger Reihenfolge vier Mal zuerst die Milch und vier Mal zuerst den Tee einzufüllen, den entsprechenden Tee zu servieren und ihm dann später mitzuteilen, wie oft an den acht Tagen die Lady die Füllreihenfolge richtig erkannt hat.

Lösung: Ist die Lady nicht "übersinnlich", so trifft sie je Tasse mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 die richtige Entscheidung, d.h.
$P_{gesamt} = (1/2)^{8} = 1/256 = 0{,}00390625$

Variation: Soll das Experiment fairer stattfinden, so wird die Lady über den Test informiert.
In diesem Fall wählt die Lady die 4 Tassen mit "Tee zuerst" aus den 8 Tassen zufällig korrekt aus. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich aus der hypergeometrischen Verteilung mit
$P_{gesamt} = ({}^{4}{}_{4})\, ({}^{4}{}_{0}) / ({}^{8}{}_{4}) = 1/70$

Binomialverteilung



Die Binomialverteilung wird auch Bernoullische oder Newtonsche Verteilung genannt.
Einzelwahrscheinlichkeit

$b(n;p;k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

Verteilungsfunktion

$B(n;p;k) = \Sigma \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$,
Summenbildung für $i = 0, \ldots, k$

Mittelwert und Varianz

$\mu = EX = np$ $\qquad \sigma = D^2X = \sqrt{[\, np\,(1-p)\,]}$
$\gamma = (1 - 2p) / \sqrt{[\, np\,(1 - p)\,]}$
$\varepsilon = [\, 1 - 6p\,(1 - p)\,] / [\, np\,(1 - p)\,]$

Die Binomialverteilung ergibt sich aus der hypergeometrischen Verteilung, wenn die Zahl N der Elemente der Grundmenge sehr groß wird und der Umfang der Stichprobe n klein bleibt.
Sie ist anzuwenden bei Experimenten, die nur zwei sich ausschließende Ergebnisse haben können.
Wird eine große Zahl von Experimenten betrachtet und ist p sehr klein, so kann die Binomialverteilung durch die diskrete Form der Poissonverteilung angenähert werden.
Beispiel: Kugelziehen mit Zurücklegen
N ... Anzahl der Kugeln; p ... Anteil der weißen Kugeln; n ... Anzahl der gezogenen Kugeln; k ... Anzahl der gezogenen weißen Kugeln

Wahrscheinlichkeitsintervall

$P(a \le X \le b) \approx P((a-0{,}5-np)/\sqrt{(np(1-p))} \le z \le (b+0{,}5-np)/\sqrt{(np(1-p))})$ $\qquad$ mit $z = (x-\mu)/\sigma$

Erwartungswert E(X) einer binomialverteilten Zufallsgröße

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = 0 + \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} = np \cdot \left[\binom{n-1}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{n-1} + \binom{n-1}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-2} + \binom{n-1}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-3} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^0\right]$$

$$= np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} = np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P([X=k]) = np \cdot 1 = np$$

Während der Herleitung findet eine Indexverschiebung statt: Da k statt von 1 bis n nun von 0 bis n-1 läuft, muss innerhalb der Summe jedes Auftreten von k durch k+1 ersetzt werden, um diese Verschiebung zu kompensieren:

$$\binom{n-1}{k-1} \to \binom{n-1}{k+1-1} = \binom{n-1}{k} \qquad p^{k-1} \to p^{k+1-1} = p^k \qquad (1-p)^{n-k} \to (1-p)^{n-(k+1)} = (1-p)^{n-k-1} = (1-p)^{n-1-k}$$

Varianz V(X) einer binomialverteilten Zufallsgröße

$$V(X) = \sum_{k=0}^{n} (k - E(X))^2 \cdot P([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} (k-np)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2knp + n^2p^2) \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - 2np \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + n^2p^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - 2np \cdot$$

$$np + n^2p^2 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - n^2p^2 = 0 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - n^2p^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} -$$

$$n^2p^2 = \sum_{k=1}^{n} kn \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - n^2p^2 = np \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} - n^2p^2 = np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} -$$

$$n^2p^2 = np \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k}\right] - n^2p^2 = np \cdot \left[0 + \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} + 1\right] - n^2p^2 =$$

$$np \cdot \left[\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{n-1}{k}\binom{n-2}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} + 1\right] - n^2p^2 = np \cdot \left[\sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} + 1\right] - n^2p^2 = np$$

$$\cdot \left[(n-1)p \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-k} + 1\right] - n^2p^2 = np \cdot \left[(n-1)p \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-2-k} + 1\right] - n^2p^2\ 1 = np \cdot [(n-1)p \cdot 1$$

$$+ 1] - n^2p^2 = np \cdot [np - p + 1] - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np \cdot (1 - p)$$

Erwartungswert und Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße (Variante 2)

Ist X Bernoulli-verteilt mit Parameter p, also: $P(X=1) = p$ und $P(X=0) = q = 1-p$, dann gilt

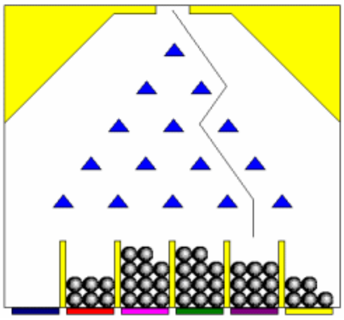
$E(X) = 1\,p + 0\,q = p$ $\quad$ und $\quad$ $E(X^2) = 1^2\,p + 0^2\,q = p$

also nach dem Verschiebungssatz $\qquad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p\,(1-p) = pq$

Ist X binomialverteilt mit den Parametern n und p, dann lässt sich X als Bernoulli-Kette auffassen, d.h. als Summe

$\Sigma_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ unabhängiger Bernoulli-verteilter Zufallsvariabeln X_i ($i=1, 2, \ldots, n$). Für den Erwartungswert von X gilt dann $\qquad E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} E(X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} p = np$

und für die Varianz folgt $\qquad V(X) = V(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} V(X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} pq = npq$



Galton-Brett

Das Galton-Brett besteht aus mehreren Reihen Nägeln, die versetzt übereinander angeordnet sind. In jeder Reihe kommt ein Nagel dazu. Unter den Zwischenräumen der letzten Nagelreihe befinden sich Behälter. Lässt man nun viele Kugeln nacheinander von oben durch die Nagelreihen rollen, so landen sie in verschiedenen Behältern. Im statistischen Mittel ergibt sich für die Anzahl der Kugeln in jedem Behälter eine Binomialverteilung mit $p = 0{,}5$.
Für andere Wahrscheinlichkeiten kann man jede beliebige Binomialverteilung simulieren.

Das Galton-Brett geht auf den englischen Naturforscher Francis Galton (1822-1911) zurück.

Rekursionsformel Binomialverteilung $P(X=k+1) = P(X=k) \cdot (n-k) \cdot p / [(k+1)(1-p)]$

Beispiele zur Binomialverteilung

1. Eine Urne enthält 4 schwarze, 3 rote und 3 weiße Kugeln. Es wird 10-mal mit Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, genau 5 schwarze Kugeln zu ziehen?
Lösung: 4 schwarze und 6 farbige Kugeln; p(schwarz) = 0,4 $p = \binom{10}{5}\, 0{,}4^5\, 0{,}6^5 = 20{,}1\ \%$

2. Ein fairer Würfel wird 36 mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl 6 in der erwarteten Anzahl, also 6-mal, eintritt. $p = \binom{36}{6}\, (1/6)^6\, (5/6)^{30} = 17{,}6\ \%$

3. Der Anteil der Nichtschwimmer an einer Schule beträgt 10%. In einer Klasse werden vier Schüler zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der Schüler Nichtschwimmer ist? $p = \binom{4}{1}\, 0{,}1^1\, 0{,}9^3 = 29{,}2\ \%$

4. In einem Keller sind alte Weine gelagert; man weiß, dass im Durchschnitt 20% davon nicht mehr genießbar sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) von zehn Flaschen acht noch genießbar sind, b) von 20 Flaschen 16 noch genießbar sind.
a) $p = \binom{10}{8}\, 0{,}8^8\, 0{,}2^2 = 30{,}2\ \%$ b) $p = \binom{20}{16}\, 0{,}8^{16}\, 0{,}2^4 = 21{,}8\ \%$

5. Der Computer eines Heiratsvermittlungsbüros kombiniert aus den Interessenten "Traumpaare". Längere Beobachtungen haben ergeben, dass 30% der "Produktion" unbrauchbar ist. Man lässt nun den Computer 10 Paare zusammenstellen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 7 gute Paare entstanden sind? $p = \binom{10}{7}\, 0{,}7^7\, 0{,}3^3 = 26{,}7\ \%$

1. Bei einer Qualitätskontrolle hat man mit einem Ausschuss von 5% zu rechnen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) unter 10 Artikeln kein Ausschuss b) unter 20 Artikeln höchstens ein Artikel defekt ist.
a) $p = 0{,}95^{10} = 59{,}9\ \%$; b) 73,6 %

2. Eine Firma liefert Ventile in Packungen zu 20 Stück. Jede Packung darf nach den Lieferbedingungen höchstens 2 defekte Ventile enthalten. Ein Händler prüft eine Packung, indem er ihr 5 Ventile ohne zurücklegen entnimmt. Ist von diesen höchstens ein Ventil unbrauchbar, nimmt er die Packung an, andernfalls lehnt er sie ab.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens wird eine Packung abgelehnt, wenn sie den Lieferbedingungen entspricht?
p(defekt) = 0,1 ; Ablehnung, obwohl den Lieferbedingungen entsprechend $p = 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}073$

3. Die Ausschusswahrscheinlichkeit eines mit einer bestimmten Maschine hergestellten Massenartikels sei erfahrungsgemäss 1%. Die Gegenstände werden in Packungen zu je 200 Stück versandt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Packung höchstens ein Ausschussstück befindet?
p = 0,405

4. Durch Versuche sei festgestellt worden, dass 5% der Zwiebeln einer großen Menge einer bestimmten Blumenzwiebelsorte nicht keimen. Diese Zwiebelsorte wird in Zehnerpackungen auf den Markt gebracht, und es wird eine Keimgarantie von 90% gegeben.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Packung dieses Garantieversprechen nicht erfüllt ? Wie ändert sich die Lage, wenn eine Keimgarantie von nur 80 % gegeben wird ?
$p_1 = 8{,}6\ \%$; $p_2 = 1{,}15\ \%$

5. Eine Firma produziert einen bestimmten Massenartikel, mit einem Ausschussanteil von p=4%. Berechnen Sie unter der Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig ausgewählten Artikeln mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel befinden.
$p = \Sigma_{k=2}^{6} \binom{100}{k} \cdot 0{,}04^k \cdot 0{,}69^{100-k} = 0{,}806$

Beispiel: Wahrscheinlichkeit, mit n = 18 Münzwürfen (k=2) genau m=9 mal „Kopf" (r=1) zu erzielen.

$P_{m,n} = ({}^{n}{}_{m}) * p^{m} * (1-p)^{n-m}$ Binomialverteilung mit p = r/k

$P_{18,9} = ({}^{18}{}_{9}) * (1/2)^{9} * (1-1/2)^{18-9} = ({}^{18}{}_{9}) * (1/2)^{18} = 48620/262144 = 0.185471$

weitere Beispiele: $P_{18,0} = 0.000004$; $P_{18,4} = 0.011673$; $P_{18,8} = 0.166924$;
$P_{18,1} = 0.000069$; $P_{18,5} = 0.032684$; $P_{18,9} = 0.185471$
$P_{18,2} = 0.000584$; $P_{18,6} = 0.070816$; $P_{18,10} = 0.166924$;
$P_{18,3} = 0.003113$; $P_{18,7} = 0.121399$; usw. (symmetrisch)

Beispiel 2: Wahrscheinlichkeit, mit n=4 Würfen eines Würfels (k=6) mindestens einmal eine „Sechs" zu erzielen.

P = 1 – (Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfen keine „Sechs" zu erzielen)

$P = 1 - ((k-1)/k)^{n} = 1 - (5/6)^{4} = 671/1296 = 0.517747$

Beispiel 3: Wahrscheinlichkeit, mit n=23 Würfen eines „Würfels" mit 365 gleichen Flächen (k=365) einen Zwilling (g=1,z=2), einen Drilling (g=1,z=3), einen Vierling (g=1,z=4), einen Fünfling (g=1,z=5), zwei Zwillinge (g=2,z=2), drei Zwillinge (g=3,z=2), vier Zwillinge (g=4,z=2), fünf Zwillinge (g=5,z=2), einen Zwilling und einen Drilling (g=2,z=5/2), zwei Zwillinge und einen Drilling (g=3,z=7/3) oder nur Einlinge (g=0,z=beliebig) zu erzielen. Die ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 23 Kindern genau 2, 3, 4, 5, 2x2, 3x2, 4x2, 5x2, 2 und 3, 2x2 und 3 oder keine am selben Tag Geburtstag haben.

$P = ({}^{k-g}{}_{n-g*z}) * n! / z!^{g} * ({}^{k}{}_{g}) / k^{n}$

Nur Einlinge: $P = ({}^{365-0}{}_{23-0}) * 23! / z!^{0} * ({}^{365}{}_{0}) / 365^{23} = 0.492703$
Genau ein Zwilling: $P = ({}^{365-1}{}_{23-2}) * 23! / 2!^{1} * ({}^{365}{}_{1}) / 365^{23} = 0.363422$
Genau ein Drilling: $P = ({}^{365-1}{}_{23-3}) * 23! / 3!^{1} * ({}^{365}{}_{1}) / 365^{23} = 0.007395$
Genau ein Vierling: $P = ({}^{365-1}{}_{23-4}) * 23! / 4!^{1} * ({}^{365}{}_{1}) / 365^{23} = 0.000107$
Genau zwei Zwillinge: $P = ({}^{365-2}{}_{23-4}) * 23! / 2!^{2} * ({}^{365}{}_{2}) / 365^{23} = 0.110928$
Genau drei Zwillinge: $P = ({}^{365-3}{}_{23-6}) * 23! / 2!^{3} * ({}^{365}{}_{3}) / 365^{23} = 0.018327$
Genau vier Zwillinge: $P = ({}^{365-4}{}_{23-8}) * 23! / 2!^{4} * ({}^{365}{}_{4}) / 365^{23} = 0.001801$
Genau fünf Zwillinge: $P = ({}^{365-5}{}_{23-10}) * 23! / 2!^{5} * ({}^{365}{}_{5}) / 365^{23} = 0.000109$
Genau ein Zwilling und ein Drilling: $P = 2 * ({}^{365-2}{}_{23-5}) * 23! / (2!3!) * ({}^{365}{}_{2}) / 365^{23} = 0.004073$
Genau zwei Zwillinge und ein Drilling: $P = 3 * ({}^{365-3}{}_{23-7}) * 23! / (2!^{2} * 3!) * ({}^{365}{}_{3}) / 365^{23} = 0.000900$

Beispiel 4: Wahrscheinlichkeit, mit n=5 Würfen eines Würfels (k=6) einen Zwilling (g=1,z=2), einen Drilling (g=1,z=3), einen Vierling (g=1,z=4), einen Fünfling (g=1,z=5), zwei Zwillinge (g=2,z=2), einen Zwilling und einen Drilling (g=2,z=5/2) oder nur Einlinge (g=0,z=beliebig) zu erzielen.

$P = ({}^{k-g}{}_{n-g*z}) * n! / z!^{g} * ({}^{k}{}_{g}) / k^{n}$

Nur Einlinge (Chance): $P = ({}^{6-0}{}_{5-0}) * 5! / z!^{0} * ({}^{6}{}_{0}) / 6^{5} = 720/7776 = 0.092593$
Genau ein Zwilling: $P = ({}^{6-1}{}_{5-2}) * 5! / 2!^{1} * ({}^{6}{}_{1}) / 6^{5} = 3600/7776 = 0.462963$
Genau ein Drilling (Dreier-Pasch): $P = ({}^{6-1}{}_{5-3}) * 5! / 3!^{1} * ({}^{6}{}_{1}) / 6^{5} = 1200/7776 = 0.154321$
Ein Vierling (Vierer-Pasch): $P = ({}^{6-1}{}_{5-4}) * 5! / 4!^{1} * ({}^{6}{}_{1}) / 6^{5} = 150/7776 = 0.019290$
Ein Fünfling (Kniffel): $P = ({}^{6-1}{}_{5-5}) * 5! / 5!^{1} * ({}^{6}{}_{1}) / 6^{5} = 6/7776 = 0.000772$
Zwei Zwillinge: $P = ({}^{6-2}{}_{5-4}) * 5! / 2!^{2} * ({}^{6}{}_{2}) / 6^{5} = 1800/7776 = 0.231481$
Ein Zwilling und ein Drilling (Full House): $P = 2 * ({}^{6-2}{}_{5-5}) * 5! / (2!*3!)^{1} * ({}^{6}{}_{2}) / 6^{5} = 300/7776 = 0.038580$

Beispiel 5: Ziehen von Kugeln

In einem Behälter befinden sich 80 Kugeln, davon sind 16 gelb. Es wird 5 mal eine Kugel entnommen und anschließend wieder zurückgelegt. Auf Grund des Zurücklegens ist die Wahrscheinlichkeit, eine gelbe Kugel zu ziehen, bei allen Entnahmen gleich groß: 16/80 = 1/5 = 0,2. Die Verteilung B(k|0,2; 5) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass genau k der entnommenen Kugeln gelb sind.

k	Wahrscheinlichkeit in %	k	Wahrscheinlichkeit in %	k	Wahrsch. in %
0	32,768	1	40,96	2	20,48
3	5,12	4	0,64	5	0,032

Erwartungswert 1, Varianz 0.8

Beispiel 6: Anzahl Personen mit Geburtstag am Wochenende

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in diesem Jahr an einem Wochenende Geburtstag hat, beträgt 2/7. In einem Raum halten sich 10 Personen auf; darunter sind keine Zwillinge. Die Verteilung B(k|2/7; 10) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass genau k der Anwesenden in diesem Jahr an einem Wochenende Geburtstag haben.

k	Wahrscheinlichkeit in %	k	Wahrscheinlichkeit in %	k	Wahrscheinlichkeit in %
0	3,457161303360777	1	13,828645213443108	2	24,89156138419759
3	26,55099880981076	4	18,585699166867535	5	8,921135600096417
6	2,973711866698805	7	0,6797055695311554	8	0,1019558354296733
9	0,009062740927082069	10	0,0003625096370832828		

Erwartungswert 2,8571, Varianz 2,040816

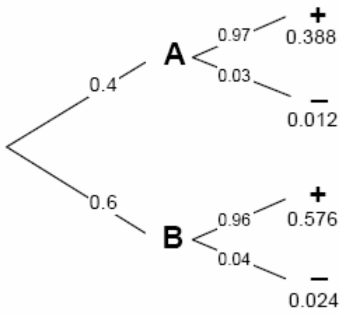
Beispiel 7: Gemeinsamer Geburtstag im Jahr

253 Personen sind zusammen gekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass niemand der Anwesenden an einem zufällig ausgewählten Tag Geburtstag hat?
Die Wahrscheinlichkeit eines Einzelereignisses beträgt 1/365 ≈ 0.003, die Zahl der Versuche 253. Die direkte Berechnung der Binominalverteilung ist aufgrund der großen Fakultäten schwierig. Eine Näherung über die Poisson-Verteilung ist zulässig (n>50, p<0,05). k(0): 0,49 k(1): 0,35 k(2): 0,12 k(3): 0,03 k(4): 0,01
Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem ausgewählten Tag niemand Geburtstag hat, beträgt fast 50%. Die andere Hälfte der Personen hat Geburtstag (35%) oder teilt ihn mit einer (12%) oder zwei (3%) weiteren Personen.

Abbildung: Geburtstagsproblem (London Underground: Jahr der Mathematik 2000 - Juli)

Binomialverteilung-Beispiele
Grundkursaufgabe Mathematik-Abitur Sachsen 2006
Teil C: Stochastik
In den vergangenen Jahren nahmen immer mehr sächsische Schüler an dem jeweils im März stattfindenden "Känguru-Wettbewerb" teil. In diesem mathematischen Wettbewerb werden 30 Aufgaben mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist, gestellt.
Die Teilnehmer einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik trainieren anhand von Aufgabenserien früherer Jahre für den neuen Wettbewerb. Dabei legt der AG-Leiter fest, dass bei jeder Aufgabe genau eine Antwortmöglichkeit angekreuzt werden muss.
a) Geben Sie an, wie viele verschiedene Möglichkeiten der Anordnung der Kreuze auf dem Antwortzettel es gibt.
b) Einige AG-Teilnehmer diskutieren ihre Erfolgsaussichten, wenn sie alle Kreuze zufällig setzen würden. Ermitteln Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Genau zehn Antworten sind richtig.
B: Mehr als 3, aber höchstens 8 Antworten sind richtig.
C: Mehr Antworten sind richtig, als man erwarten kann.
c) Die Aufgaben sind in drei Gruppen zu je 10 Aufgaben eingeteilt. AG-Teilnehmerin Simone weiß aus Erfahrung, dass sie eine Aufgabe der Aufgabengruppe 1 (Aufgabennummern 1 bis 10) mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, eine Aufgabe der Gruppe 2 (Aufgabennummern 11 bis 20) mit 70 % und eine Aufgabe der Gruppe 3 (Aufgabennummern 21 bis 30) immerhin noch mit 65 % richtig löst.
Das Ankreuzen der Antworten erfolgt in der Reihenfolge der gestellten Aufgaben. Ermitteln Sie für Simone die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
D: Simone kreuzt bei allen Aufgaben die richtige Lösung an.
E: Simone begeht ihren ersten Fehler in der Aufgabe mit der Nummer 12.
F: Simone kreuzt bei allen Aufgaben der Gruppe 2 die richtige Lösung an.
G: Simone löst alle Aufgaben der Gruppen 1 und 2 richtig und genau zwei Aufgaben der Gruppe 3 falsch.

Lösungen: a) Anzahl aller Möglichkeiten: 5^{30} ; b) Wahrscheinlichkeiten Ereignis A: $P(A) \approx 0{,}0355$; Ereignis B: $P(B) \approx 0{,}7486$; Ereignis C: $P(C) \approx 0{,}3930$
c) Ereignis D: $P(D) \approx 0{,}0001$; Ereignis E: $P(E) \approx 0{,}0732$; Ereignis F: $P(F) \approx 0{,}0282$; Ereignis G: $P(G) \approx 0{,}0017$



Aufgabe: Eine Fabrik stellt mit zwei Maschinen A und B Kugeln für Kugellager her. Die Maschine B stellt 60% der Gesamtproduktion her. Bei der neueren Maschine A sind 3% der produzierten Kugeln mangelhaft, bei der Maschine B sind es 4%.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Kugel mangelhaft ist?
b) Eine zufällig herausgegriffene Kugel ist mangelhaft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mit der Maschine B produziert worden ist?
c) Es werden 100 Stück der von der Maschine A produzierten Kugeln untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 davon mangelhaft sind?
d) Wieviele der von A produzierten Kugeln muss man herausgreifen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens eine mangelhafte dabei ist?

Lösung: a) $p = 0{,}012 + 0{,}024 = 0{,}036$ b) $p = 0{,}024 / 0{,}036 = 2/3$
c) $p = \binom{100}{3}\, 0{,}03^3\, 0{,}97^{97} = 22{,}75$ %
d) "keine mangelhafte" ist das Gegenereignis, dessen Wahrscheinlichkeit dann kleiner als 2% sein muss
$0{,}97^x \le 0{,}02$
$x \ln 0{,}97 \le \ln 0{,}02$; log 0,97 ist negativ, deshalb wird < zu >
$x \ge \ln 0{,}02 / \ln 0{,}97 \approx 128{,}4$, d.h. 129 Kugeln sind nötig!

Aufgabe:
Ein Unternehmen beauftragt eine Werbeagentur, für eines seiner Produkte eine große Fernsehwerbung durchzuführen. Sollte nach Beendigung der Werbeaktion der Bekanntheitsgrad des Produkts mehr als 40% betragen, so ist das Unternehmen bereit, über den vereinbarten Preis für die Werbeaktion hinaus einen zusätzlichen Betrag an die Werbeagentur zu zahlen.
Zur Entscheidung darüber soll eine Umfrage unter 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt werden.
a) Angenommen, der Bekanntheitsgrad sei 40%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Personen das Produkt kennen?
b) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit das Risiko für das Unternehmen, zu Unrecht mehr zu zahlen, höchstens 1% beträgt?
c) Angenommen, das Unternehmen zahlt die Prämie, wenn mindestens 55 Personen das Produkt kennen: wie groß ist dann das Risiko der Werbeagentur, den zusätzlich vereinbarten Betrag nicht zu erhalten, obwohl der Bekanntheitsgrad des Produkts nach der Werbeaktion bei 50% liegt?

Lösung: a) $p = \Sigma_{k=51}^{100} \binom{100}{k}\, 0{,}4^k\, 0{,}6^{100-k} = 1{,}7$ %
Die Firma geht ein Risiko von 1,7% ein, eine zusätzliche Prämie zu zahlen, obwohl der Bekanntheitsgrad des Produkts nicht über 40% liegt.
b) $p = \Sigma_{k=x}^{100} \binom{100}{k}\, 0{,}4^k\, 0{,}6^{100-k} \le 0{,}01$
Für x = 51 erhält man p = 1,0005 %. Wenn die Prämie dann bezahlt wird, wenn 52 oder mehr Personen das Produkt kennen, dürfte die Bedingung erfüllt sein.
c) Die Werbeagentur erhält den vereinbarten Betrag dann nicht, wenn weniger als 55 Personen das Produkt kennen $p = \Sigma_{k=0}^{54} \binom{100}{k}\, 0{,}5^k\, 0{,}5^{100-k} \le 81{,}6$ %

Binomialverteilung-Beispiele

Aufgabe 1:
Englische Zeitungsnotiz: The Mitcham Public Health Department found an unexpected boom in boy births during May. There were 60 boys and 35 girls born during the month. Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist p = 0,514. Ist diese Beobachtung eine echte Sensation?
Lösung: Man berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 60 Knaben geboren werden
$P = \Sigma_{k=60}^{95} \binom{95}{k}\, 0{,}514^k\, 0{,}486^{95-k} = 1{,}4$ % … also wirklich selten!

Aufgabe 2:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 20 Geburten in einem Spital mehr als 12 und weniger als 15 Mädchen darunter sind? (Annahme: p(k) = p(m) = 50%)
Lösung: $P = \Sigma_{k=13}^{14} \binom{20}{k}\, 0{,}5^k\, 0{,}5^{20-k} = 11{,}1$ %

Aufgabe 3:
Die Wahrscheinlichkeit einer Zwillingsgeburt beträgt etwa 1/80. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den nächsten 100 Geburten, die in einem Spital erwartet werden, mindestens drei Zwillingsgeburten stattfinden?

Lösung: $P = \Sigma_{k=3}^{100} \binom{100}{k} (1/80)^k (79/80)^{100-k} = 13{,}0\ \%$

Aufgabe 4:
Die Schülervertretung einer Schule besteht aus 12 Schülern. Jeder Schüler kommt mit der Wahrscheinlichkeit von 40 % zu einer einberufenen Versammlung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens zwei Drittel der Schülervertreter anwesend?
Lösung: $P = \Sigma_{k=8}^{12} \binom{12}{k} 0{,}4^k\ 0{,}6^{12-k} = 5{,}7\ \%$

1. Die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt beträgt 0,486.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit drei Kindern nur Jungen?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit vier Kindern mehr Mädchen als Jungen?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit fünf Kindern mindestens ein Mädchen und mindestens einen Jungen?
Lösung: a) $P(X = 0) = 0{,}1358$; b) 0,2918 ; c) 0,9370

2. Ein Großhändler garantiert, dass seine Taschenrechner zu höchstens vier Prozent einen Defekt aufweisen. Ein Einzelhändler bezieht regelmäßig Geräte von ihm. Zur Überprüfung der Qualität entnimmt er eine Stichprobe von zwölf Taschenrechnern. Ist mehr als ein Gerät defekt, schickt er die Lieferung zurück.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sendet der Einzelhändler die Lieferung zurück, wenn die Angabe des Großhändlers richtig ist?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sendet der Einzelhändler die Lieferung zurück, wenn sich der Anteil defekter Geräte verdoppelt hat?
Lösung: a) 0,0809 ; b) 0,2487

3. Die Erfolgsrate für eine Ölbohrung beträgt 16 %.
a) An einem Ort werden drei Bohrungen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stößt man auf Öl?
b) An fünf Orten werden je drei Bohrungen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man an mehr als drei Orten Öl?
c) Wie oft muss eine Probebohrung durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eine Bohrung auf Öl stößt?
Lösung: a) 0,4073 ; b) 22,48 % ; $n > 13$

4. Silke lernt mit einem Computerprogramm Vokabeln und hat dabei eine Erfolgsquote von 93 %.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kennt sie von 35 Vokabeln vier nicht?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die 35. Vokabel die vierte, die sie nicht kennt?
Lösung: a) $P(X = 31) = 0{,}1325$; b) 0,0151

Binomialverteilung-Beispiele

Aufgaben zur Lösung mit Hilfe einer Tabelle

1. Eine Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 1/3$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
a) $P(X \le 4)$ b) $P(X \ge 7)$ c) $P(3 \le X \le 11)$
d) $P(X > 10)$ e) $P(5 \le X < 8)$ f) $P(4 < X < 16)$
Lösungen: a) 0,1515 ; b) 0,5207 ; c) 0,9694 ; d) 0,0376 ; e) 0,5100 ; f) 0,8485

2. Jemand kauft eine Packung mit 50 DVD-Rohlingen, bei denen der Brennvorgang erfahrungsgemäß in 90 % der Fälle gelingt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
a) Höchstens 40 Brennvorgänge sind erfolgreich.
b) Mehr als 45 Brennvorgänge sind erfolgreich.
c) Mindestens 2, aber höchstens 8 Brennvorgänge schlagen fehl.
Lösungen: a) 0,0245 ; b) 0,4312 ; c) 0,9083

3. Ein Betrieb mit 50 Mitarbeitern richtet einen überdachten Fahrradparkplatz ein. Zur Zeit kommen durchschnittlich 40% der Beschäftigten mit dem Fahrrad zur Arbeit.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 20 Parkplätze?
Wie viele Parkplätze müssen zur Verfügung gestellt werden, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % ausreichen?
Durch die Einrichtung der überdachten Fahrradparkplätze erhöht sich der Anteil der Radfahrer auf 60 %. Wie viele Parkplätze müssen jetzt zur Verfügung gestellt werden, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % ausreichen?
Lösungen: X = Anzahl der Mitarbeiter, die mit dem Fahrrad kommen; $n = 50$
$p = 0{,}4$; $P(X \le 20) = 0{,}5610$
$p = 0{,}4$; $P(X \le k) \ge 0{,}99 \Rightarrow k \ge 28$. Mindestens 28 Parkplätze müssen zur Verfügung gestellt werden.
$p= 0{,}6$; $k \ge 38$

Aufgabe:
Die Musikgesellschaft "Harmonie" führt ihr Jubiläumskonzert durch. In den Pausen werden Tombola-Lose angeboten. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist 13 %.
a) Fritz ist ein eifriger Loskäufer. 90 Lose hat er schon gekauft und erst 10 Gewinne erzielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 90 Losen höchstens 10 mal gewinnt?
b) Hans hat schon 100 Lose gekauft und dabei 16 Gewinne eingestrichen. Er behauptet, er habe eben eine besonders begabte Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt man ohne besondere Begabung auf mindestens 16 Treffer?
c) Wie viele Treffer müsste Hans auf 100 Lose mindestens erzielen, damit die Zweifel an seiner Begabung unter 1% sinken?
d) Die Besucher können auch Säckchen kaufen, die je 10 zufällig ausgewählte Lose enthalten. Der Veranstalter verspricht mindestens einen Gewinn, ansonsten er das Geld zurückerstattet. Wie groß ist das Risiko, dass der Veranstalter zahlen muss?

Lösung:
a) $P = \Sigma_{k=0}^{10} \binom{90}{k} 0{,}13^k\, 0{,}87^{90-k} = 36{,}6$ %
b) $P = \Sigma_{k=16}^{100} \binom{100}{k} 0{,}13^k\, 0{,}87^{100-k} = 22{,}4$ %
c) $P = \Sigma_{k=x}^{100} \binom{100}{k} 0{,}13^k\, 0{,}87^{100-k} < 0{,}01$
Schritweises Ausprobieren führt zu: z = 22 mit p = 0,9 %, d.h. Hans müsste mindestens 22 Treffer erzielen
d) Rückerstattung erfolgt bei 0 Gewinnen, d.h. bei nur Nieten: $0{,}87^{10} = 24{,}8$ %

Binomialverteilungstabelle b(n;p;k)

n = 5

k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.9510	0.9039	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
1	0.0480	0.0922	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
2	0.0010	0.0038	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
3		0.0000	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
4				0.0004	0.0022	0.0064	0.0146	0.0283	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
5					0.0000	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313

n = 10

k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.9044	0.8171	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
1	0.0914	0.1667	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
2	0.0042	0.0153	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
3	0.0001	0.0008	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
4			0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
5			0.0000	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
6				0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
7					0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
8						0.0000	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
9								0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
10										0.0001	0.0003	0.0010

n = 20

k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.8179	0.6676	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002			
1	0.1652	0.2725	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	
2	0.0159	0.0528	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
3	0.0010	0.0065	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
4		0.0006	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
5			0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
6			0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
7				0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
8				0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
9				0.0000	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
10					0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
11						0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
12						0.0000	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
13							0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
14								0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
15									0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
16										0.0003	0.0013	0.0046
17											0.0002	0.0011
18												0.0002

2055

n = 50

k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.6050	0.3642	0.0769	0.0052	0.0003							
1	0.3056	0.3716	0.2025	0.0286	0.0026	0.0002						
2	0.0756	0.1858	0.2611	0.0779	0.0113	0.0011	0.0000					
3	0.0122	0.0607	0.2199	0.1386	0.0319	0.0044	0.0004					
4	0.0015	0.0145	0.1360	0.1809	0.0661	0.0128	0.0016	0.0001				
5	0.0001	0.0027	0.0658	0.1849	0.1072	0.0295	0.0049	0.0006				
6		0.0004	0.0260	0.1541	0.1419	0.0554	0.0123	0.0018	0.0002			
7		0.0000	0.0086	0.1076	0.1575	0.0870	0.0259	0.0048	0.0006			
8			0.0024	0.0643	0.1493	0.1169	0.0463	0.0110	0.0017	0.0002		
9			0.0006	0.0333	0.1230	0.1364	0.0721	0.0220	0.0042	0.0005		
10			0.0001	0.0152	0.0890	0.1398	0.0985	0.0386	0.0093	0.0014	0.0001	
11				0.0061	0.0571	0.1271	0.1194	0.0602	0.0182	0.0035	0.0004	
12				0.0022	0.0328	0.1033	0.1294	0.0838	0.0319	0.0076	0.0011	0.0001
13				0.0007	0.0169	0.0755	0.1261	0.1050	0.0502	0.0147	0.0027	0.0003
14				0.0002	0.0079	0.0499	0.1110	0.1189	0.0714	0.0260	0.0059	0.0008
15				0.0000	0.0033	0.0299	0.0888	0.1223	0.0923	0.0415	0.0116	0.0020
16					0.0013	0.0164	0.0648	0.1147	0.1088	0.0606	0.0207	0.0044
17					0.0005	0.0082	0.0432	0.0983	0.1171	0.0808	0.0339	0.0087
18					0.0001	0.0037	0.0264	0.0772	0.1156	0.0987	0.0508	0.0160
19						0.0016	0.0148	0.0558	0.1048	0.1109	0.0700	0.0270
20						0.0006	0.0077	0.0370	0.0875	0.1146	0.0888	0.0419
21						0.0002	0.0036	0.0227	0.0673	0.1091	0.1038	0.0598
22						0.0000	0.0016	0.0128	0.0478	0.0959	0.1119	0.0788
23							0.0006	0.0067	0.0313	0.0778	0.1115	0.0960
24							0.0002	0.0032	0.0190	0.0584	0.1026	0.1080
25							0.0000	0.0014	0.0106	0.0405	0.0873	0.1123
26								0.0006	0.0055	0.0259	0.0687	0.1080
27								0.0002	0.0026	0.0154	0.0500	0.0960
28								0.0000	0.0012	0.0084	0.0336	0.0788
29									0.0005	0.0043	0.0208	0.0598
30									0.0002	0.0020	0.0119	0.0419
31									0.0000	0.0009	0.0063	0.0270
32										0.0003	0.0031	0.0160
33										0.0001	0.0014	0.0087
34											0.0006	0.0044
35											0.0002	0.0020
36											0.0000	0.0008
37												0.0003

Summierte Binomialverteilungstabelle B(n;p;k)

n = 5

k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.9510	0.9039	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
1	0.9990	0.9962	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
2		0.9999	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
3				0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
4					0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688

n = 10

k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.9044	0.8171	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
1	0.9957	0.9838	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
2	0.9999	0.9991	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
3			0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
4			0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
5				0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
6					0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
7						0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
8								0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
9										0.9999	0.9997	0.9990

n = 20

k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.8179	0.6676	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002			
1	0.9831	0.9401	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	
2	0.9990	0.9929	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
3		0.9994	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
4			0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059
5			0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
6				0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
7				0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316
8				0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
9					0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
10						0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
11						0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
12							0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
13								0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
14									0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
15										0.9997	0.9985	0.9941
16											0.9997	0.9987
17												0.9998

n = 50

k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.6050	0.3642	0.0769	0.0052	0.0003							
1	0.9106	0.7358	0.2794	0.0338	0.0029	0.0002						
2	0.9862	0.9216	0.5405	0.1117	0.0142	0.0013	0.0000					
3	0.9984	0.9822	0.7604	0.2503	0.0460	0.0057	0.0005					
4	0.9999	0.9968	0.8964	0.4312	0.1121	0.0185	0.0021	0.0002				
5		0.9995	0.9622	0.6161	0.2194	0.0480	0.0070	0.0007	0.0000			
6		0.9999	0.9882	0.7702	0.3613	0.1034	0.0194	0.0025	0.0002			
7			0.9968	0.8779	0.5188	0.1904	0.0453	0.0073	0.0008	0.0000		
8			0.9992	0.9421	0.6681	0.3073	0.0916	0.0183	0.0025	0.0002		
9			0.9998	0.9755	0.7911	0.4437	0.1637	0.0402	0.0067	0.0008	0.0000	
10				0.9906	0.8801	0.5836	0.2622	0.0789	0.0160	0.0022	0.0002	
11				0.9968	0.9372	0.7107	0.3816	0.1390	0.0342	0.0057	0.0006	
12				0.9990	0.9699	0.8139	0.5110	0.2229	0.0661	0.0133	0.0018	0.0002
13				0.9997	0.9868	0.8894	0.6370	0.3279	0.1163	0.0280	0.0045	0.0005
14				0.9999	0.9947	0.9393	0.7481	0.4468	0.1878	0.0540	0.0104	0.0013
15					0.9981	0.9692	0.8369	0.5692	0.2801	0.0955	0.0220	0.0033
16					0.9993	0.9856	0.9017	0.6839	0.3889	0.1561	0.0427	0.0077
17					0.9998	0.9937	0.9449	0.7822	0.5060	0.2369	0.0765	0.0164
18					0.9999	0.9975	0.9713	0.8594	0.6216	0.3356	0.1273	0.0325
19						0.9991	0.9861	0.9152	0.7264	0.4465	0.1974	0.0595
20						0.9997	0.9937	0.9522	0.8139	0.5610	0.2862	0.1013
21						0.9999	0.9974	0.9749	0.8813	0.6701	0.3900	0.1611
22							0.9990	0.9877	0.9290	0.7660	0.5019	0.2399
23							0.9996	0.9944	0.9604	0.8438	0.6134	0.3359
24							0.9999	0.9976	0.9793	0.9022	0.7160	0.4439
25								0.9991	0.9900	0.9427	0.8034	0.5561
26								0.9997	0.9955	0.9686	0.8721	0.6641
27								0.9999	0.9981	0.9840	0.9220	0.7601
28									0.9993	0.9924	0.9556	0.8389
29									0.9997	0.9966	0.9765	0.8987
30									0.9999	0.9986	0.9884	0.9405
31										0.9995	0.9947	0.9675
32										0.9998	0.9978	0.9836
33										0.9999	0.9991	0.9923
34											0.9997	0.9967
35											0.9999	0.9987
36												0.9995
37												0.9998

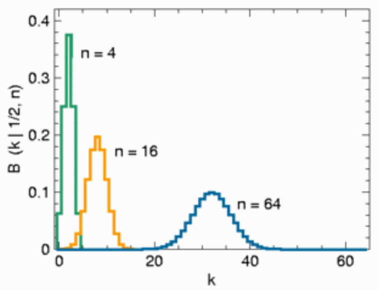
Summierte Binomialverteilungstabelle B(n;p;k)

n = 100

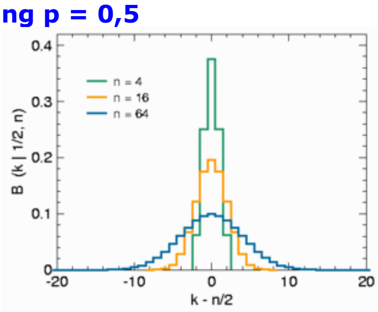
k	0.01	0.02	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.3660	0.1326	0.0059									
1	0.7358	0.4033	0.0371	0.0003								
2	0.9206	0.6767	0.1183	0.0019								
3	0.9816	0.8590	0.2578	0.0078	0.0000							
4	0.9966	0.9492	0.4360	0.0237	0.0004							
5	0.9995	0.9845	0.6160	0.0576	0.0016							
6	0.9999	0.9959	0.7660	0.1172	0.0047	0.0000						
7		0.9991	0.8720	0.2061	0.0122	0.0003						
8		0.9998	0.9369	0.3209	0.0275	0.0009						
9			0.9718	0.4513	0.0551	0.0023						
10			0.9885	0.5832	0.0994	0.0057	0.0001					
11			0.9957	0.7030	0.1635	0.0126	0.0004					
12			0.9985	0.8018	0.2473	0.0253	0.0010					
13			0.9995	0.8761	0.3474	0.0469	0.0025	0.0000				
14			0.9999	0.9274	0.4572	0.0804	0.0054	0.0002				
15				0.9601	0.5683	0.1285	0.0111	0.0004				
16				0.9794	0.6725	0.1923	0.0211	0.0010				
17				0.9900	0.7633	0.2712	0.0376	0.0022	0.0000			
18				0.9954	0.8372	0.3621	0.0630	0.0045	0.0001			
19				0.9980	0.8935	0.4602	0.0995	0.0089	0.0003			
20				0.9992	0.9337	0.5595	0.1488	0.0165	0.0008			
21				0.9997	0.9607	0.6540	0.2114	0.0288	0.0017			
22				0.9999	0.9779	0.7389	0.2864	0.0479	0.0034	0.0001		
23					0.9881	0.8109	0.3711	0.0755	0.0066	0.0003		
24					0.9939	0.8686	0.4617	0.1136	0.0121	0.0006		
25					0.9970	0.9125	0.5535	0.1631	0.0211	0.0012		
26					0.9986	0.9442	0.6417	0.2244	0.0351	0.0024	0.0000	
27					0.9994	0.9658	0.7224	0.2964	0.0558	0.0046	0.0002	
28					0.9997	0.9800	0.7925	0.3768	0.0848	0.0084	0.0004	
29					0.9999	0.9888	0.8505	0.4623	0.1236	0.0148	0.0008	
30						0.9939	0.8962	0.5491	0.1730	0.0248	0.0015	
31						0.9969	0.9307	0.6331	0.2331	0.0398	0.0030	0.0000
32						0.9984	0.9554	0.7107	0.3029	0.0615	0.0055	0.0002
33						0.9993	0.9724	0.7793	0.3803	0.0913	0.0098	0.0004
34						0.9997	0.9836	0.8371	0.4624	0.1303	0.0166	0.0009
35						0.9999	0.9906	0.8839	0.5458	0.1795	0.0272	0.0018
36						0.9999	0.9948	0.9201	0.6269	0.2386	0.0429	0.0033
37							0.9973	0.9470	0.7024	0.3068	0.0651	0.0060
38							0.9986	0.9660	0.7699	0.3822	0.0951	0.0105
39							0.9993	0.9790	0.8276	0.4621	0.1343	0.0176
40							0.9997	0.9875	0.8750	0.5433	0.1831	0.0284
41							0.9999	0.9928	0.9123	0.6225	0.2415	0.0443
42							0.9999	0.9960	0.9406	0.6967	0.3087	0.0666
43								0.9979	0.9611	0.7635	0.3828	0.0967
44								0.9989	0.9754	0.8211	0.4613	0.1356
45								0.9995	0.9850	0.8689	0.5413	0.1841
46								0.9997	0.9912	0.9070	0.6196	0.2421
47								0.9999	0.9950	0.9362	0.6931	0.3086
48								0.9999	0.9973	0.9577	0.7596	0.3822
49									0.9985	0.9729	0.8173	0.4602
50									0.9993	0.9832	0.8654	0.5398
51									0.9996	0.9900	0.9040	0.6178
52									0.9998	0.9942	0.9338	0.6914
53									0.9999	0.9968	0.9559	0.7579
54										0.9983	0.9716	0.8159
55										0.9991	0.9824	0.8644
56										0.9996	0.9894	0.9033
57										0.9998	0.9939	0.9334
58										0.9999	0.9966	0.9557
59											0.9982	0.9716
60											0.9991	0.9824
61											0.9995	0.9895
62											0.9998	0.9940
63											0.9999	0.9967

64												0.9982
65												0.9991
66												0.9996
67												0.9998
68												0.9999

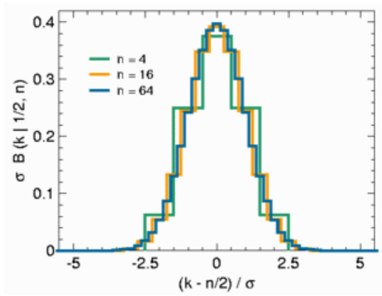
Symmetrische Binomialverteilung p = 0,5



Dieses Bild zeigt die Binomialverteilung für p=0,5 und verschiedene Werte von n als Funktion von k



Diese Funktion ist spiegelsymmetrisch um den Wert k=n/2: B(k|0,5, n) = B(n-k|0,5, n)



Die Breite der Verteilung wächst proportional zur Standardabweichung $\sigma = ½ \sqrt{n}$. Der Funktionswert bei k=n/2, also das Maximum der Kurve, sinkt proportional zu σ. Dementsprechend kann man Binomialverteilungen mit unterschiedlichem n aufeinander skalieren, indem man die Abszisse k-n/2 durch σ teilt und die Ordinate mit σ multipliziert

Approximationsformeln Binomial-Verteilung
Approximation mittels Normalverteilung!

Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{(npq)}$; q=1-p;
Ist $npq \geq 9$, so gilt:

$P(X = k) = f_B(k;n;p) = \phi(z)/\sigma$ mit $z = (k-\mu)/\sigma$
$P(X = k) = f_B(k;n;p) = \phi(z)/\sigma \cdot [1 + z/(6\sigma)\,(p-q)(3-z^2)]$ mit $z = (k-\mu)/\sigma$
$P(X \leq k) = F_B(k;n;p) = \Phi(z)$ mit $z = (k+0{,}5-\mu)/\sigma$
$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$ mit $z_1 = (k-0{,}5-\mu)/\sigma$ und $z_2 = (k+0{,}5-\mu)/\sigma$
$P(|X-\mu| \leq c) = 2\,\Phi(z) - 1$ mit $z = (c+0{,}5)/\sigma$
$P(|X-\mu| > c) = 2\,[1 - \Phi(z)]$ mit $z = (c+0{,}5)/\sigma$

Approximation durch Poisson-Verteilung

Ist $p \leq 0{,}05$ und $n \geq 50$, so gilt $\lambda = np$ $\qquad P(X = k) = f_B(k;n;p) = f_p(k;\lambda) = \lambda^k/k!\ e^{-\lambda}$

Multiple-Choice-Test

Eine spezielle Anwendung der Binomialverteilung sind sogenannte Multiple-Choice-Tests.
Die bekannteste Form sind Quizshows. Intelligente und weniger intelligente Kandidaten versuchen, eine gewisse Anzahl von Fragen korrekt zu beantworten. Dabei ist die Grundidee stets die gleiche:
Für eine Frage sind eine gewisse Anzahl von Lösungen vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Der Kandidat muss diese finden, um in die nächste Spielrunde zu gelangen.

Die Idee ist nicht neu. Schon seit langer Zeit werden Klausuren derart geschrieben, in den USA ist dies Standard. Da mehrere Auswahlmöglichkeiten bestehen, werden solche Prüfungsmethoden Multiple-Choice-Tests genannt.
Diese Tests oder Quizshows könnte man durch reinen Zufall zu bestehen, d.h., jede Antwort wird erraten. Auf der rechten Seite wird für die Anzahl der Fragen und die Anzahl der jeweils vorgegebenen Antworten berechnet, wie hoch die Wahrscheinlichkeiten für "Höchstens richtig", "Mindestens richtig" und "Genau richtig" sind.

Eine der bekanntesten Fernseh-Quizshows fordert bei jeweils vier vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten die Beantwortung von zehn Fragen. 1 Million € Gewinn sind dann zu erwarten.
Dabei besteht eine Wahrscheinlichkeit von 0,00009537%, dass alle Fragen durch Raten richtig beantwortet werden. Berücksichtigt man, dass die ersten Fragen vielleicht gewusst werden, kann man trotzdem feststellen, dass durch reines Glück niemand die 1 Million € gewinnen kann.

Gesetz der großen Zahl für Bernoulli-Experiment

$P(|h-p| < \varepsilon) \geq 1 - 1/(4n\varepsilon^2)$

n … Durchführungszahl, h … relative Häufigkeiten, ε … Abweichung von der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines "Treffers" beim Bernoulli-Experiment

Abschätzung von $P(|h-p|<\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0,1$

n	100	200	500	1000	2000
P	0,75	0,87	0,95	0,97	0,98

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n unabhängigen Durchführungen eines Zufallsexperimentes die relative Häufigkeit von der Wahrscheinlichkeit um mehr als eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ abweicht, strebt für $n \to \infty$ gegen 0.

Gesetz der großen Zahlen von Poisson: In einer Serie von n unabhängigen Versuchen konvergiert die relative Häufigkeit eines Ereignisses *A* stochastisch gegen das arithmetische Mittel der Wahrscheinlichkeiten des Eintretens von A.

Gesetz der großen Zahlen von Tschebyschew: Das arithmetische Mittel einer Folge paarweise unabhängiger Zufallsgrößen mit beschränkter Varianz konvergiert stochastisch gegen das arithmetische Mittel ihrer mathematischen Erwartungen.
Das Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli ist ein Spezialfall des Gesetzes der großen Zahlen von Poisson, dieses ist ein Spezialfall des Gesetzes von Tschebyschew. Weitere Verallgemeinerungen sind die Gesetze von Borel, Chintchin und Kolmogorow.

Schwaches Gesetz der großen Zahl
Ist der Erwartungswert μ einer Zufallsgröße unbekannt, so erhält man bei großen N (Wiederholungen des Zufallsexperimentes) mit dem Mittelwert $\bar{x}$ einen Näherungswert.

Prinzip der Impotenz
Es kann kein Spielsystem mit positivem Erwartungswert gegen eine unverfälschte Münze konstruiert werden.

Gesetz der großen Zahl, Anwendung
Aufgabe:
Ein Fernsehsender möchte die Einschaltquote mit einer Sicherheit von 90 % auf 2 Prozentpunkte genau erfahren. Wie groß ist die Mindestzahl an Personen, die man befragen muss?

Lösung: Es soll $P(| X/n - p | < \varepsilon) \geq 0,9$
sein. Nach dem Gesetz der großen Zahl $P(|h-p| < \varepsilon) \geq 1 - 1/(4n\varepsilon^2)$
wird $1 - 1/(4n\ 0,02^2) \geq 0,9$ oder $0,1 \geq 1/(4n\ 0,02^2)$ oder $0,1 \cdot 4n \cdot 0,02^2 \geq 1$
und somit $n \geq 1/(0,1 \cdot 4 \cdot 0,02^2) = 6250$
Es müssen mindestens 6250 Zuschauer befragt werden. Soll die Sicherheit sogar 1 Prozentpunkt betragen, müssten schon 25000 Zuschauer untersucht werden.
Allgemein wird $n \geq 1/((1-p_s) \cdot 4 \cdot p^2)$
mit p_s Sicherheit und p Prozentpunkte.
Umgekehrt erhält man für die Sicherheit einer Umfrage
$p_s \leq 1 - 1/(4n\ p^2)$ $\quad p \geq 1 / (2 \sqrt{n} \sqrt{(1 - p_s)})$
Wird eine Umfrage bei 1000 Personen; die übliche Größe in Deutschland; durchgeführt und soll das Ergebnis um höchstens 2 Prozentpunkte vom wahren Wert abweichen, so ist die Sicherheit nur noch 37,5 %! D.h., das Umfrageergebnis ist mit großer Wahrscheinlichkeit falsch!
Bei 100 gefragten Personen und 5 Prozentpunkten Abweichung ist die Sicherheit 0 %, d.h. die Umfrage vollkommen sinnlos.

„Die Kugel hat weder Gedächtnis noch Gewissen"
aus „Der Spieler" Fjodor Dostojewski

Ausgleichsgesetz
Das häufigste und gefährlichste Beispiel einer Folgerung, die aus dem Gesetz der großen Zahlen **nicht** geschlossen werden kann und der dennoch unzählige Spieler Tag für Tag auf den Leim gehen, ist der Glaube an den Ausgleich; an das Gesetz des Ausgleichs. Auch für eine immer größer werdende Zahl von Wiederholungen eines zufälligen Prozesses gibt es keine Garantie, dass sich die absoluten Häufigkeiten ausgleichen. Im Gegenteil! Eine genaue Analyse zeigt sogar ein (für mathematische Laien) unerwartetes Ergebnis: Je größer die Anzahl der Zufallsexperimente, desto kleiner (!) wird die Wahrscheinlichkeit des Ausgleichs zwischen gleichwahrscheinlichen Ereignissen! Im Lotto stets die Zahlen zu tippen, welche über die Jahre hinweg am wenigstens oder am häufigsten gezogen wurden, ist also, mathematisch gesehen, unsinnig; auf lange Sicht sogar kontraproduktiv. Das immer wieder zitierte Gesetz der Großen Zahlen gilt für relative Häufigkeiten und nicht für absolute.

Anmerkung: Am 15.Februar 2006 war der Jackpot des Mittwochslottos auf stolze 24 Millionen Euro angewachsen. Im Sat 1-Frühstücksfernsehen wurden die Zuschauer zum Tippen aufgerufen. Was glauben Sie, welche Zahl nach der Meinung von Sat 1 getippt werden soll? Natürlich die 13! Begründung: „Da sie bisher am wenigstens gezogen wurde".

Und dieser Fernsehsender kann es noch „besser". Am 20.Juni 2006 wurde während einer Teleshopping-Sendung allen Ernstes behauptet, das man ein Lotto-Tipsystem verkaufen würde, bei dem nur Zahlen getippt werden, deren Chance gezogen zu werden, optimal ist.
Wann endlich hört dieser Schwachsinn auf? Warum dürfen in verbrecherischer Absicht des Betruges objektiv unmögliche Dinge beworben und verkauft werden?

Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung ist eine diskrete Verteilung in k (ganzzahlige, nichtnegative Werte) und eine stetige Verteilung in μ (positive reelle Werte).
Je nach Fragestellung ist zu entscheiden, ob k oder μ die Zufallsvariable ist; die andere Größe stellt dann einen festen Parameter dar.
Ein klassischer Prozess für poissonverteilte Ereignisse ist der radioaktive Zerfall; die Zahl der Zerfälle in einem festen Zeitintervall genügen der Poissonverteilung. Die Poissonverteilung lässt sich durch die Normalverteilung annähern, wenn folgende Bedingungen vorliegen:

Diskreter Fall $\mu = 10$ mit $\bar{x} = \mu$, $\sigma = \sqrt{\mu}$
Stetiger Fall $k = 10$ mit $\bar{x} = k+1$, $\sigma = \sqrt{(k+1)}$
Binomialverteilung für n sehr groß und p sehr klein mit $\mu > 0$, k = 0,1,...

$b(n;p;k) = P(X=k) = \mu^k e^{-\mu} / k!$ mit $\mu = np$

Rekursion $P(X=k+1) = P(X=k) \cdot \mu/(k+1)$
$EX = \mu$ $D^2X = \mu$
$\gamma = 1/\sqrt{\mu}$ $\varepsilon = 1/\mu$

Eine Zufallsvariable ist poisson-verteilt, wenn sie die abzählbar unendlich vielen möglichen Werte 0,1,2,... mit von einem Parameter abhängigen Wahrscheinlichkeiten annimmt. Zum Beispiel ist die Anzahl X der Reifenpannen eines Autos nach 100000 km Fahrt eine Poisson-verteilte Zufallsgröße. Für große n und kleine Wahrscheinlichkeiten p stellt die Poisson-Verteilung eine gute Näherung der Binomialverteilung dar, wobei die Poisson-Verteilung einfacher als die Binomialverteilung zu berechnen ist.
Einzelwahrscheinlichkeiten $P(k) = ((np)^k / k!) \cdot e^{-np}$
Verteilungsfunktion $F(k) = \Sigma\, ((np)^i / i!) \cdot e^{-np}$, Summierung über i = 0, ..., k
Erwartungwert, Varianz $E(X) = np$; $\sigma^2 = n\, p$
Die Größe c = p n ist dadurch näherungsweise konstant, und der Parameter n wird eliminiert. Daher eignet sich die Poisson-Verteilung für Probleme, bei denen der Umfang der Messung n groß, aber dessen genauer Wert unbekannt und unerheblich ist.

Tabelle der Poisson-Verteilung

k/λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287	0.347610	0.359463	0.365913	0.367879
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.075816	0.098786	0.121663	0.143785	0.164661	0.183940
3	0.000151	0.001092	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757	0.028388	0.038343	0.049398	0.061313
4		0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964	0.004968	0.007669	0.011115	0.015328
5				0.000057	0.000158	0.000356	0.000696	0.001227	0.002001	0.003066
6							0.000081	0.000164	0.000300	0.000511
7										0.000073

k/λ	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.223130	0.135335	0.082085	0.049787	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000335
1	0.334695	0.270671	0.205212	0.149361	0.073263	0.033690	0.014873	0.006383	0.002684	0.002684
2	0.251021	0.270671	0.256516	0.224042	0.146525	0.084224	0.044618	0.022341	0.010735	0.010735
3	0.125511	0.180447	0.213763	0.224042	0.195367	0.140374	0.089235	0.052129	0.028626	0.028626
4	0.047067	0.090224	0.133602	0.168031	0.195367	0.175467	0.133853	0.091226	0.057252	0.057252
5	0.014120	0.036089	0.066801	0.100819	0.156293	0.175467	0.160623	0.127717	0.091604	0.091604
6	0.003530	0.012030	0.027834	0.050409	0.104196	0.146223	0.160623	0.149003	0.122138	0.122138
7	0.000756	0.003437	0.009941	0.021604	0.059540	0.104445	0.137677	0.149003	0.139587	0.139587
8	0.000142	0.000859	0.003106	0.008102	0.029770	0.065278	0.103258	0.130377	0.139587	0.139587
9		0.000191	0.000863	0.002701	0.013231	0.036266	0.068838	0.101405	0.124077	0.124077
10			0.000216	0.000810	0.005292	0.018133	0.041303	0.070983	0.099262	0.099262
11				0.000221	0.001925	0.008242	0.022529	0.045171	0.072190	0.072190
12				0.000055	0.000642	0.003434	0.011264	0.026350	0.048127	0.048127
13					0.000197	0.001321	0.005199	0.014188	0.029616	0.029616
14					0.000056	0.000472	0.002228	0.007094	0.016924	0.016924
15						0.000157	0.000891	0.003311	0.009026	0.009026
16							0.000334	0.001448	0.004513	0.004513
17							0.000118	0.000596	0.002124	0.002124
18								0.000232	0.000944	0.000944
19								0.000085	0.000397	0.000397
20									0.000159	0.000159
21									0.000061	0.000061

Beispiel: Radioaktiver Zerfall, gehorcht Poisson-Verteilung; Vorraussetzung: p ist sehr klein
Wahrscheinlichkeit, dass während der Messzeit bei zu Beginn n unzerfallenen Atomen genau m Treffer (zerfallene Atome) erzielt werden, wobei ein bestimmtes Atom während der Messzeit mit der Wahrscheinlichkeit p zerfällt (entspricht der Wahrscheinlichkeit, mit n Würfen m Treffer zu erzielen, wobei die Wahrscheinlichkeit pro Wurf für einen Treffer p beträgt): $P_{m,n} = ((np)^m / m!) \cdot e^{-np}$

Negative Binomialverteilung

Die negative Binomialverteilung, auch Pascal-Verteilung, beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Versuche, die erforderlich sind, um in einem Bernoulli-Prozess eine vorgegebene Anzahl von Erfolgen zu erzielen.
Man kann diese Verteilung mit Hilfe des Urnenmodells mit Zurücklegen beschreiben:
In einer Urne befinden sich zwei Sorten Kugeln. Der Anteil der Kugeln erster Sorte beträgt p. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel erster Sorte gezogen wird, ist damit p.
Es wird nun so lange eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt, bis erstmals genau r Kugeln erster Sorte resultieren. Man kann eine Zufallsvariable X:

"Zahl der Versuche, bis erstmals r Erfolge resultieren"

definieren. Da r vorgegeben ist, variiert man die Zahl n der Versuche und erhält als Ausprägungen von X die Menge r, r+1, …, n, …, d.h. X hat abzählbar unendlich viele Ausprägungen.

$P(X=k) = ({}^{-n}{}_k) (-p)^k(1-p)^n$ mit $k = 0,1,…; 0 < p < 1; n > 0$

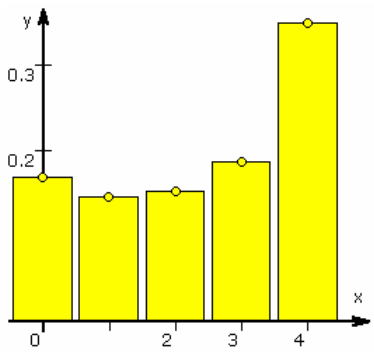
Rekursion $P(X=k+1) = P(X=k) \cdot p(n+k)/(k+1)$
Erwartungswert $EX = np/(1-p)$
Varianz $D^2X = np/(1-p)^2$
Standardabweichung $DX = \sqrt{(np)} / (1-p)$
Alternativ kann auch nach der Anzahl von Misserfolgen bis zum Erreichen der r Erfolge gefragt werden. Diese Variante ist in diesem Programm umgesetzt.

Geometrische Verteilung

Die geometrische Verteilung ist ein Spezialfall der negativen Binomialverteilung für n=1.

$P(X=k) = (1 - p)\, p^k$

Rekursion $P(X=k+1) = P(X=k) \cdot p$
Erwartungswert $EX = p/(1-p)$
Varianz $D^2X = p/(1-p)^2$
Standardabweichung $DX = \sqrt{p} / (1-p)$



Pólya-Verteilung

Modell: Aus einer Urne, die b schwarze und c weiße Kugeln enthält, wird eine Kugel zufällig gezogen; ist sie weiß, so legt man sie zusammen mit s weiteren weißen in die Urne zurück, ist sie schwarz, so wird sie mit s weiteren schwarzen zurückgelegt.
Wird dieser Vorgang n mal wiederholt, so ist die Zufallsgröße, dass bei n Ziehungen k mal eine weiße Kugel gezogen wird Pólya-verteilt.

$P(X=k) = ({}^{n}{}_k)\, B_{ks}\, C_{ks} /[N (N+s) \dots (N +(n-1)*s)]$

wobei N die Anfangsanzahl aller Kugeln sowie

$B_{ks} = b(b+s) \dots[b +(k-1)s]$ und

$C_{ks} = c(c+s) \dots[c+ (n-k-1)s]$

s … Erhöhungsmaß (Ansteckungserhöhung)

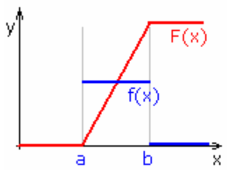
Collection Problem

Aufgabe: Eine nicht näher genannte Firma kommt auf die Idee, Sammelbilder in ihren Produkten unterzubringen. Ziel ist es nun eine komplette Serie zu sammeln, besser zu erkaufen. Die Frage ist, wieviel der Produkte muss man durchschnittlich kaufen um die vollständige Serie zu erhalten ?
Mathematisch gesehen bedeutet dies die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass bei r gleichwahrscheinlichen Ereignissen das r. verschiedene Ereignis beim n.Zug auftritt bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass Sie für r Treffer genau n Züge benötigen. Daraus resultierend wird nur die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach der obigen Gleichung berechnet.
n_1 entspricht $P(X<n_1)=10\%$; n_2 mit $P(X<n_2)=25\%$; n_3 mit $P(X<n_3)=50\%$

Anzahl r	n_1	n_2	n_3	Anzahl r	n_1	n_2	n_3
1	1	1	2	2	2	2	3
3	3	4	6	4	5	6	8
5	6	8	11	6	8	10	14
7	10	13	18	8	13	16	21
9	15	18	24	10	17	21	28
11	20	24	32	12	23	27	36
13	25	31	39	14	28	34	43
15	31	37	47	16	34	41	52
17	37	44	56	18	40	48	60

19	43	51	64	20	46	55	68
21	50	59	73	22	53	63	77
23	56	66	82	24	60	70	86
25	63	74	91	26	66	78	95
27	70	82	100	28	73	86	105
29	77	90	109	30	80	94	114
31	84	98	119	32	88	102	124
33	91	106	129	34	95	111	134
35	99	115	138	36	103	119	143
37	106	123	148	38	110	128	153
39	114	132	158	40	118	136	163

Beispiel: Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen (mit Zurücklegen) von N verschiedenen Kugeln (n >= N) jede Kugel mindestens einmal gezogen zuhaben, entspricht Wahrscheinlichkeit, beim Kauf von n Überraschungseiern von N verschiedenen gleich häufigen "Überraschungen" mindestens von jeder eine bekommen zu haben: $P_{N,n}$ = $\text{Summe}_{i=0}^{N}$ $(-1)^i$ * $(^N{}_i)$ * $(1- i/N)^n$
Für 38 Eier und 8 verschiedenen "Überraschungen" ist: $P_{38,8}$ = 0.95045
Mittlere Zahl von Ziehungen, bei der von N verschiedenen Kugeln jede Kugel mindestens einmal gezogen wurde (= mittlere Zahl von Überraschungseiern, bei der von N verschiedenen "Überraschungen" jede "Überraschung" mindestens einmal vorgekommen ist): Z_N = $\text{Summe}_{n=N}^{oo}$ n * $P_{N,n}$
einige Beispiele:
Z_2 = 3; Z_3 = 5 + 1/2; Z_4 = 8 + 1/3; Z_5 = 11 + 5/12; Z_6 = 14 + 7/10; Z_7 = 18 + 3/20; Z_8 = 21 + 26/35
Z_9 = 25 + 129/280; Z_{10} = 29 + 73/252; Z_{11} = 33 + 551/2520



Stetige Verteilungen
Gleichverteilung
Gleichmäßige stetige Verteilung oder Rechteckverteilung: Verteilung einer Zufallsgröße, die jeden Wert eines Intervalls [a, b] annehmen kann, und für die die Wahrscheinlichkeit, einen Wert aus einem Teilintervall von [a, b] anzunehmen, für alle Teilintervalle derselben Länge gleich ist.

$f(x) = 1/(b-a)$ für $a \le x \le b$, sonst 0

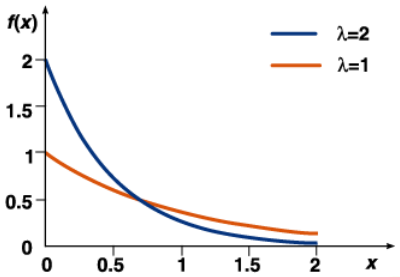
$F(x) = 0$ für $x < a$ $\quad = 1$ für $x>b$ $\quad = (x-a)/(b-a)$ für $a \le x \le b$

$EX = 1/2\ (b+a)$ $\qquad D^2X = (b-a)^2 / 12$

Eine gleichmäßig verteilte stetige Zufallsgröße läßt sich angeben für Fälle, in denen die geometrische Methode zur Wahrscheinlichkeitsberechnung anwendbar ist.

Gamma-Verteilung
$f(x) = \lambda^p/\Gamma(p) * x^{p-1} e^{-\lambda x}$ für x>0 sonst f(x) = 0

$F(x) = \Gamma_{\lambda x}(p) / \Gamma(p)$ $\qquad EX = p/\lambda$ $\qquad D^2X = p/\lambda^2$



Exponentialverteilung
Sonderfall der Gamma-Verteilung für p=1
Verteilung des Abstandes zweier poisson-verteilter Meßwerte mit dem Parameter λ = c
Dichtefunktion $f(x) = \lambda\ e^{-\lambda x}$ für $x \ge 0$
... Parameter der Verteilung, $\lambda > 0$

$F(x) = 1\ .\ e^{-\lambda x}$ für x>0 sonst 0

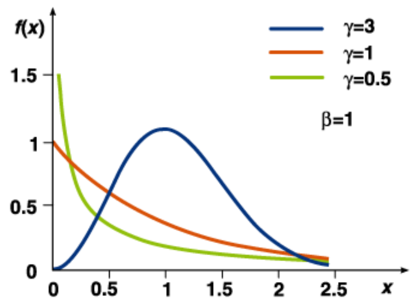
$EX = 1/\lambda$ $\qquad D^2X = 1/\lambda^2$

Das Einsatzgebiet der Exponentialverteilung erstreckt sich auf die Beschreibung von Zerfallsprozessen (z.B. radioaktiver Zerfall) und Lebensdauerbetrachtungen. Bei der Betrachtung von Lebensdauerprozessen beschreibt die Exponentialverteilung eine konstante Ausfallrate von Komponenten pro Zeiteinheit. Besonders günstig lässt sich dies für die Beschreibung von elektronischen Bauelementen verwenden (Verschleißfreiheit vorausgesetzt).
Beispiel: Gegeben sei eine Urne mit $N \to \infty$ Kugeln, von denen nur ein geringer Bruchteil $p = N_1/N$, N_1 << N schwarz ist und sonst alle eine andere Farbe besitzen. Greift man aus dieser Urne nun eine sehr große Zahl von Kugeln $n \ge 10/p$ heraus, ist die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln näherungsweise poisson-verteilt. Führt man dieses Zufallsexperiment mehrmals durch, so wird die Differenz der Anzahl an schwarzen Kugeln zwischen zwei Durchführungen näherungsweise einer Exponentialverteilung gehorchen.

Maxwell-Verteilung
Dichtefunktion $\qquad f(x) = 2x^2 / (\sigma\ ^3\sqrt{(2\pi)})\ e^{-x^2/(2\sigma^2)}$

σ ... Parameter der Verteilung

Eine Zufallsgröße X, welche maxwellverteilt ist, kann in der Form X = $\sigma \sqrt{(Y)}$ dargestellt werden, wobei nun Y eine χ^2-verteilte Zufallsgröße



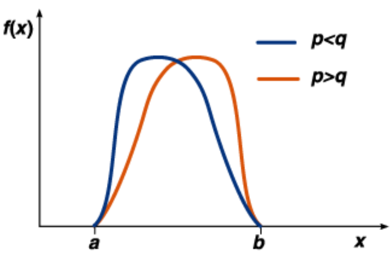
mit 3 Freiheitsgraden ist.
Diese Verteilung spielt innerhalb der Physik eine sehr wichtige Rolle, zum Beispiel bei der Beschreibung der Ortsverteilung von Gasmolekülen in einem abgeschlossenen Volumen.

Weibull-Verteilung

Erweiterung der Exponentialverteilung auf Ereignisse, die nicht rein zufällig sind und nicht exakt der Poisson-Verteilung genügen
Dichtefunktion

$f(x) = ab\, x^{b-1}\, e^{-a\, x^b}$, für $x>0$; a,b ... Parameter, $a>0$, $b>0$
$F(x) = 1 - e^{-a\, x^b}$ für $x>0$ sonst 0
$EX = (1/a)^{(1/b)} * \Gamma(1+1/b)$
$D^2X = (1/a)^{(2/b)} * [\, \Gamma(1+2/b) - \Gamma(1+1/b)\,]$
ergibt für b=1 ... Exponentialverteilung

Insbesondere für komplexere Systeme beschreibt die Weibull-Verteilung Lebensdauer elektronischer Systeme und deren Ausfallwahrscheinlichkeiten.



Beta-Verteilung

... zur Beschreibung von stetigen Zufallsgrößen, deren Werte eine untere Schranke a und eine obere Schranke b besitzen. Die Verteilung findet Anwendung in der mathematischen Statistik
Wahrscheinlichkeitsdichte:
$f(x) = [(x-a)^{p-1}\, (b-x)^{q-1}] \,/\, [(b-a)^{p+q-1}\, B(p,q)]$ für $a \le x \le b$, sonst = 0
Dabei ist B(p,q) die Beta-Funktion. Eine Verteilungsfunktion kann nicht allgemein bestimmt werden, da das entstehende Integral nicht geschlossen lösbar ist. Für die Beta-Verteilung und bei der Bestimmung von Werten der Beta-Funktion werden spezielle Tabellen benutzt.
Die Parameter der Verteilung sind p, q, a und b.

Erwartungswert	$m = (aq+bp)/(p+q)$
Varianz	$\sigma^2 = (b-a)^2\, pq/[(p+q)^2\, (p+q+1)]$

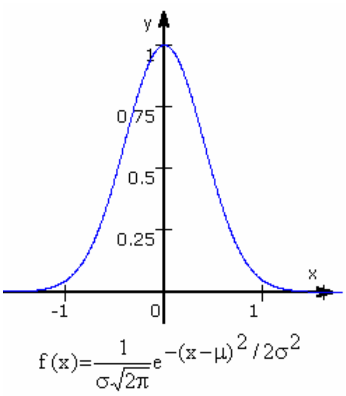
Für p = q = 1 geht die Betaverteilung in die gleichmäßig stetige Verteilung über.

Gaußsche Normalverteilung

Die Gaußsche Normalverteilung ist die am häufigsten verwendete stetige Verteilung, mit der auch von Natur aus diskrete Prozesse sehr gut beschrieben werden können (z. B. Zahl der radioaktiven Zerfälle in einem großen Zeitintervall). Allerdings sprechen neueste Untersuchungen stärker für eine logarithmische Normalverteilung.
Eine Zufallsvariable ist immer dann normalverteilt, wenn mehrere voneinander unabhängige Einflussfaktoren etwa gleichgewichtig auf diese Zufallsvariable einwirken.
Unterstrichen wird die Bedeutung der Normalverteilung durch den zentralen Grenzwertsatz, wonach die Summe beliebig verteilter, unabhängiger Zufallsvariablen (unter sehr allgemeinen Bedingungen) gegen die Normalverteilung konvergiert.
Diese Konvergenz ist recht gut, etwa fünf Summanden genügen für praktische Betrachtungen.
Wird bei der Binomialverteilung n unendlich groß und p = 0,5, so liegt eine Gaußverteilung vor .
für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1 \Leftrightarrow$ Gaußsche Normalverteilung

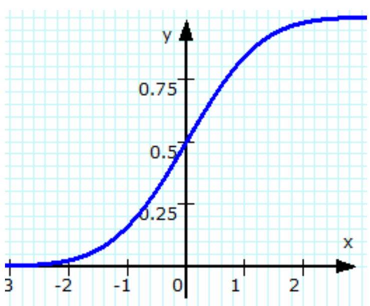
Normalverteilung

$f(x) = 1/[\, \sigma \sqrt{(2\pi)}]\, e^{[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)]}$ $\qquad F(x) = 1/[\, \sigma \sqrt{(2\pi)}]\, {}_{-\infty}\!\int^{x} e^{[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)]}$
$EX = \mu$ $\qquad D^2X = \sigma^2$



Gaußsche Normalverteilung

Auf Grund der Form der Verteilungsfunktion wird die Kurve als "Glockenkurve" bezeichnet. Die Fläche unter der Kurve (von negativ bis positiv unendlich) ist gleich 1 Flächeneinheit.
Für $\mu=0$, $\sigma^2=1$ erhält man die Normierte Normalverteilung. Mit der Substitution $z = (x - \mu)^2/\sigma^2$ erhält man die Chi²-Verteilung.
Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen und X+Y normalverteilt, so müssen es auch X und Y selbst sein (Cramer 1936). Umgekehrt ist die Summer von n normalverteilten Größen selbst wieder normalverteilt.
Die Standardglockenkurve $y = e^{-(ax)^2}$ ist symmetrische zur y-Achse und nähert sich der x-Achse asymptotisch. Das Maximum liegt bei (0;1), die Wendepunkte bei ($\pm 1/(a\sqrt{2})$; $1/\sqrt{e}$).



Normierte Normalverteilung $\mu=0$, $\sigma^2=1$

$\phi(x) = 1/\sqrt{(2\pi)}\, e^{[-x^2/2]}$
$\Phi(x) = 1/\sqrt{(2\pi)}\, {}_{-\infty}\!\int^{x} e^{[-x^2/2]}$
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$P(\mu - k\sigma) \le x \le \mu + k\sigma$ wird	Bereich	σ	2σ	3σ
	%	68,27	95,45	99.73

Lokale und globale Näherung nach Laplace

$b(n;p;k) = 1/\sigma * \phi[(k-\mu)/\sigma]$ mit $\phi(z) = 1/\sqrt{(2\pi)}\ e^{-z^2/2}$ und $z = (k-\mu)/\sigma$

$P(a \le X \le b) = \phi[(b+0.5-\mu)/\sigma] - \phi[(a+0.5-\mu)/\sigma]$ mit $\Phi(X) = {}_{-\infty}\int^{x} \phi(z)\ dz$

Näherung für Verteilungsfunktion $x = (1 + 0.2316419\ t\ )^{-1}$

für $0 < t < 2.5$ $\Phi(t) = 1 - \phi(t)\ [\ 0.31938153\ x - 0.356563782\ x^2 + 1.781477937\ x^3 - 1.821255978\ x^4 + \ldots + 1.330274429\ x^5\ ] + \varepsilon$ mit $|\ \varepsilon\ | < 7.5 * 10^{-8}$

für $t \ge 2.5$ $\Phi(t) = 1 - \phi(t)\ [\ t/ (t^2+2) * (1 +6\ t^{-2} -14\ t^{-4} -28\ t^{-6}) / (1 + 5\ t^{-2} - 20\ t^{-4} - 4\ t^{-6})\ ] + \varepsilon$

Gaußsche Normalverteilung Verteilungsfunktion

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.3989423	0.3989223	0.3988625	0.3987628	0.3986233	0.3984439	0.3982248	0.3979661	0.3976677	0.3973298
0.1	0.3969525	0.396536	0.3960802	0.3955854	0.3950517	0.3944793	0.3938684	0.393219	0.3925315	0.391806
0.2	0.3910427	0.3902419	0.3894038	0.3885286	0.3876166	0.3866681	0.3856834	0.3846627	0.3836063	0.3825146
0.3	0.3813878	0.3802264	0.3790305	0.3778007	0.3765372	0.3752403	0.3739106	0.3725483	0.3711539	0.3697277
0.4	0.3682701	0.3667817	0.3652627	0.3637136	0.3621349	0.360527	0.3588903	0.3572253	0.3555325	0.3538124
0.5	0.3520653	0.3502919	0.3484925	0.3466677	0.344818	0.3429439	0.3410458	0.3391243	0.3371799	0.3352132
0.6	0.3332246	0.3312147	0.329184	0.327133	0.3250623	0.3229724	0.3208638	0.3187371	0.3165929	0.3144317
0.7	0.3122539	0.3100603	0.3078513	0.3056274	0.3033893	0.3011374	0.2988724	0.2965948	0.294305	0.2920038
0.8	0.2896916	0.2873689	0.2850364	0.2826945	0.2803438	0.2779849	0.2756182	0.2732444	0.270864	0.2684774
0.9	0.2660852	0.263688	0.2612863	0.2588805	0.2564713	0.2540591	0.2516443	0.2492277	0.2468095	0.2443904
1	0.2419707	0.2395511	0.237132	0.2347138	0.232297	0.2298821	0.2274696	0.2250599	0.2226535	0.2202508
1.1	0.2178522	0.2154582	0.2130691	0.2106856	0.2083078	0.2059363	0.2035714	0.2012135	0.1988631	0.1965205
1.2	0.1941861	0.1918602	0.1895432	0.1872354	0.1849373	0.1826491	0.1803712	0.1781038	0.1758474	0.1736022
1.3	0.1713686	0.1691468	0.166937	0.1647397	0.1625551	0.1603833	0.1582248	0.1560797	0.1539483	0.1518308
1.4	0.1497275	0.1476385	0.1455641	0.1435046	0.14146	0.1394306	0.1374165	0.1354181	0.1334353	0.1314684
1.5	0.1295176	0.127583	0.1256646	0.1237628	0.1218775	0.120009	0.1181573	0.1163225	0.1145048	0.1127042
1.6	0.1109208	0.1091548	0.1074061	0.1056748	0.1039611	0.1022649	0.1005864	0.0989255	0.0972823	0.0956568
1.7	0.0940491	0.0924591	0.090887	0.0893326	0.0877961	0.0862773	0.0847764	0.0832932	0.0818278	0.0803801
1.8	0.0789502	0.0775379	0.0761433	0.0747663	0.0734068	0.0720649	0.0707404	0.0694333	0.0681436	0.0668711
1.9	0.0656158	0.0643777	0.0631566	0.0619524	0.0607652	0.0595947	0.0584409	0.0573038	0.0561831	0.0550789
2	0.053991	0.0529192	0.0518636	0.0508239	0.0498001	0.048792	0.0477996	0.0468226	0.0458611	0.0449148
2.1	0.0439836	0.0430674	0.0421661	0.0412795	0.0404076	0.03955	0.0387069	0.0378779	0.0370629	0.0362619
2.2	0.0354746	0.0347009	0.0339408	0.0331939	0.0324603	0.0317397	0.0310319	0.030337	0.0296546	0.0289847
2.3	0.028327	0.0276816	0.0270481	0.0264265	0.0258166	0.0252182	0.0246313	0.0240556	0.023491	0.0229374
2.4	0.0223945	0.0218624	0.0213407	0.0208294	0.0203284	0.0198374	0.0193563	0.018885	0.0184233	0.0179711
2.5	0.0175283	0.0170947	0.0166701	0.0162545	0.0158476	0.0154493	0.0150596	0.0146782	0.0143051	0.0139401
2.6	0.013583	0.0132337	0.0128921	0.0125581	0.0122315	0.0119122	0.0116001	0.0112951	0.0109969	0.0107056
2.7	0.0104209	0.0101428	0.0098712	0.0096058	0.0093466	0.0090936	0.0088465	0.0086052	0.0083697	0.0081398
2.8	0.0079155	0.0076965	0.0074829	0.0072744	0.0070711	0.0068728	0.0066793	0.0064907	0.0063067	0.0061274
2.9	0.0059525	0.0057821	0.005616	0.0054541	0.0052963	0.0051426	0.0049929	0.004847	0.004705	0.0045666
3	0.0044318	0.0043007	0.0041729	0.0040486	0.0039276	0.0038098	0.0036951	0.0035836	0.0034751	0.0033695
3.1	0.0032668	0.0031669	0.0030698	0.0029754	0.0028835	0.0027943	0.0027075	0.0026231	0.0025412	0.0024615
3.2	0.0023841	0.0023089	0.0022358	0.0021649	0.002096	0.002029	0.0019641	0.001901	0.0018397	0.0017803
3.3	0.0017226	0.0016666	0.0016122	0.0015595	0.0015084	0.0014587	0.0014106	0.0013639	0.0013187	0.0012748
3.4	0.0012322	0.001191	0.001151	0.0011122	0.0010747	0.0010383	0.001003	0.0009689	0.0009358	0.0009037
3.5	0.0008727	0.0008426	0.0008135	0.0007853	0.0007581	0.0007317	0.0007061	0.0006814	0.0006575	0.0006343
3.6	0.0006119	0.0005902	0.0005693	0.000549	0.0005294	0.0005105	0.0004921	0.0004744	0.0004573	0.0004408
3.7	0.0004248	0.0004093	0.0003944	0.00038	0.0003661	0.0003526	0.0003396	0.0003271	0.0003149	0.0003032
3.8	0.0002919	0.000281	0.0002705	0.0002604	0.0002506	0.0002411	0.0002327	0.0002232	0.0002147	0.0002065
3.9	0.0001987	0.000191	0.0001837	0.0001766	0.0001698	0.0001633	0.0001569	0.0001508	0.0001449	0.0001393
4	0.0001338	0.0001286	0.0001235	0.0001186	0.000114	0.0001094	0.0001051	0.0001009	0.0000969	0.000093
4.1	0.0000893	0.0000857	0.0000822	0.0000789	0.0000757	0.0000726	0.0000697	0.0000668	0.0000641	0.0000615
4.2	0.0000589	0.0000565	0.0000542	0.0000519	0.0000498	0.0000477	0.0000457	0.0000438	0.000042	0.0000402
4.3	0.0000385	0.0000369	0.0000354	0.0000339	0.0000324	0.000031	0.0000297	0.0000284	0.0000272	0.0000261
4.4	0.0000249	0.0000239	0.0000228	0.0000218	0.0000209	0.00002	0.0000191	0.0000183	0.0000175	0.0000167

Gaußsche Normalverteilung Summenfunktion

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.5279	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.5438	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.6293	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.6591	0.66276	0.6664	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.7054	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.7224
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.7549
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.7673	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.7823	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.8485	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.8665	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.879	0.881	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.9032	0.9049	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.9222	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408

1.6	0.9452	0.9463	0.94738	0.94845	0.9495	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95819	0.95907	0.95994	0.9608	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.9732	0.97381	0.97441	0.975	0.97558	0.97615	0.9767
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97933	0.97982	0.9803	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.983	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.985	0.98537	0.98574
2.2	0.9861	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.9884	0.9887	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.9901	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.9918	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.9943	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.9952
2.6	0.99534	0.99547	0.9956	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.9972	0.99728	0.99736
2.8	0.99745	0.99752	0.9976	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.999
3.1	0.99903	0.99906	0.9991	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.9994	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.9995
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.9996	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.9997	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.9998	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.9999	0.9999	0.9999	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998
4.1	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998	0.99999	0.99999
4.2	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.3	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.4	0.99999	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Normalverteilung-Aufgaben

Aufgabe 1
Für die Körpergröße von 18-20jährigen Männern ergibt sich ein Mittelwert von 1,80 m bei einer Standardabweichung von 7,4 cm. Die Körpergröße kann als normalverteilt angesehen werden.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Mann dieser Altersgruppe größer als 1,85 m bzw. zwischen 1,70 m und 1,80 m groß?
b) In welchem symmetrischen Bereich um den Mittelwert liegen die Größen von 50 % aller Männer dieser Altersgruppe?
c) Wie groß muss ein Mann sein, damit er zu den 5 % größten Männern gehört?

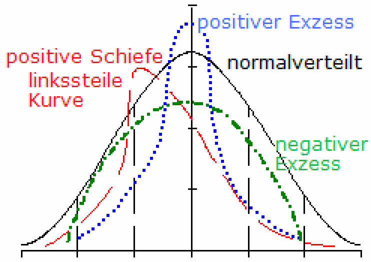
Lösung: a) 25,0 % und 41,2 % ; b) $\Phi((a-180)/\sigma) = 0{,}25$ … $(a-180)/\sigma$ = Umkehrung($\Phi(0{,}25)$) … [175, 185] ; c) $\Phi((a-180)/\sigma) = 0{,}95$ … mindestens 192, cm

Aufgabe 2
In einem Ort gibt es einige Karpfenteiche. Die Masse der Karpfen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 4 kg und der Standardabweichung 1,25 kg.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Karpfen zu fangen, der höchstens 2,5 kg bzw. mindestens 5 kg wiegt?
b) Wie viel Prozent aller Karpfen wiegen zwischen 3 kg und 4,5 kg?
c) Der Fischereiverband will einen Prise für die schwersten Karpfen aussetzen. Welches Mindestgewicht muss man verlangen, damit die Wahrscheinlichkeit, den Preis zu bekommen, 2 % beträgt?
d) In einem kleinen Teich befinden sich 10 Karpfen und 15 Barsche. Ein Angler beschließt, 3 Fische zu fangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 2 Karpfen fängt? Die gefangenen Fische werden nicht zurückgeworfen.
Lösung: a) 0,114 und 0,212 ; b) 44,4 % ; c) 2,4 kg … 5,6 kg ; d) 6,57 kg ; e) 0,346

Aufgabe 3
Ein Medikament hat eine Heilungswahrscheinlichkeit von 80 %.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 400 mit diesem Medikament behandelte Patienten höchstens 310 Patienten bzw. zwischen (einschließlich) 308 und 332 Patienten geheilt werden?
b) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Bereich liegt mit 80 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Geheilten?
Lösung: a) μ = 320 , σ = 8 … 11,8 % und 88,2 % ; b) [310, 330]

Aufgabe 4
Die Körpergröße von erfolgreichen Models ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 178 cm und der Standardabweichung 2,4 cm. In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegen die Körpergrößen von 80 % (95 %) aller Models?
Lösung: [174,9 … 181,1] ; [173,3 … 182,7]

Aufgabe 5
Die Standardabweichung bei der Reißfestigkeit von Kettengliedern wird mit 1300 N geschätzt. Wie groß muss der Erwartungswert μ mindestens sein, damit höchstens 2 % (5 %) der Kettenglieder eine Festigkeit von weniger als 1000 N besitzen?
Lösung: μ = 12669,9 N ; 12138,3 N

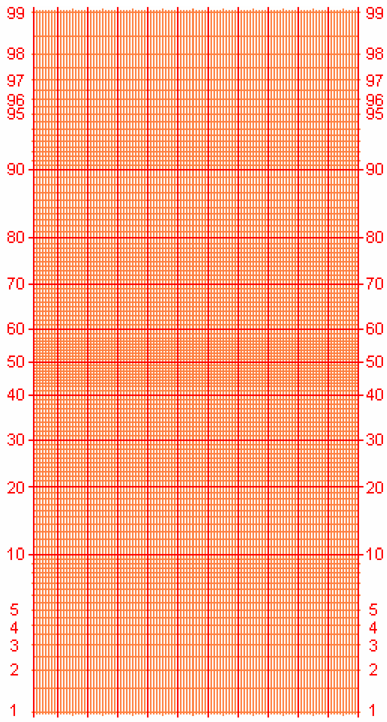


Normalverteilungsabweichung

Es werden zwei Arten möglicher Abweichungen von der Normalverteilung unterschieden.
Typ I:
Die Verteilung ist unsymmetrisch oder schief (rote Verteilung in der Grafik). Eine positive Schiefe, auch linkssteil genannt, liegt dann vor, wenn der Hauptanteil der Verteilung auf der linken Seite liegt. Es gilt:
Linkssteile Verteilung   Dichtemittel D < Median < Mittelwert
Rechtssteile Verteilung Dichtemittel D > Median > Mittelwert
Typ II:
Liegt das Maximum (Dichtemittel) bei gleicher Varianz höher als das einer Normalverteilung, liegt ein positiver Exzess und wenn das Maximum tiefer liegt, die Verteilung im Vergleich zur Normalverteilung abgeflacht ist, liegt ein negativer Exzess vor (siehe grüne Verteilung in der Grafik).
Die Schiefe (skewness) und Wölbung (kurtosis) wird über die Potenzmomente berechnet.

Potenzmomente

Abweichungen bezüglich der Schiefe von der Normalverteilung werden über den Momentkoeffizienten α_3 geschätzt: $\alpha_3 = \Sigma\, h_i\, (x_i - \mu)^3 / (n\, \sigma^3)$
Für eine symmetrische Verteilung gilt $\alpha_3 = 0$. Ist α_3 positiv, liegt eine linkssteile und ist α_3 negativ eine rechtssteile Verteilung vor.
Abweichungen bezüglich der Wölbung von der Normalverteilung werden über den Momentenkoeffizient α_4 geschätzt: $\alpha_4 = \Sigma\, h_i\, (x_i - \mu)^4 / (n\, \sigma^4) - 3$
Für die Normalverteilung gilt $\alpha_4 = 0$. Ist α_4 positiv, liegt ein positiver Exzess, Hochgipfligkeit, vor. Ist α_4 negativ, liegt ein negativer Exzess, Flachgipfligkeit, vor.



Wahrscheinlichkeitsnetz

Das Wahrscheinlichkeitsnetz oder Wahrscheinlichkeitspapier ist ein mathematisches Hilfsmittel.
Mit einem Wahrscheinlichkeitspapier kann man die Daten eines statistischen Merkmals daraufhin untersuchen, ob ihnen eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung zu Grunde liegt.
Es ist mit einem Koordinatennetz versehen, in dem auf der Abszisse die Quantile der Verteilung äquidistant, dagegen auf der Ordinate die dazugehörigen Funktionswerte der Verteilung in linearisierter Form abgetragen sind.
Allgemein bekannt ist vor allem das Wahrscheinlichkeitsnetz der Normalverteilung.

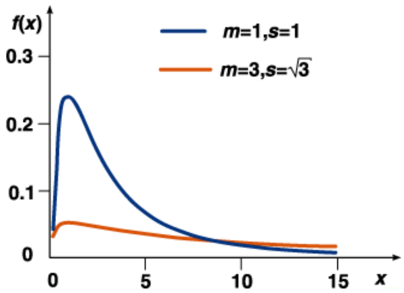
Durch diese Linearisierung ergibt sich für die Wertepaare (x ; Φ(x)) eine Gerade. Wahrscheinlichkeitspapier ermöglicht damit ein einfaches Zeichnen einer solchen Funktion, beziehungsweise die einfache Prüfung, ob gegebene Wertepaare zu einer Normalverteilung passen. Diese müssen dann auf einer Geraden liegen.

Logarithmische Normalverteilung

... sie wird verwendet, wenn (positive) Merkmalswerte um mehrere Größenordnungen variieren. Oftmals ist dann der Logarithmus des Merkmalswertes normalverteilt.

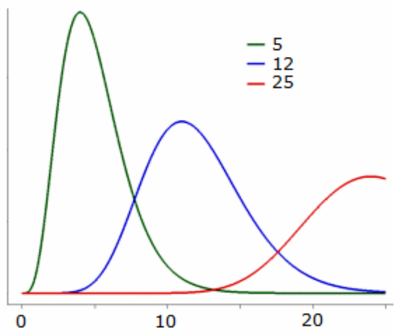
Achtung

die Parameter der Logarithmischen Normalverteilung sind nicht durch einfaches Logarithmieren der entsprechenden Normalverteilung zu erhalten!
Insbesondere nehmen die bei der Normalverteilung zusammenfallenden Größen Modalwert, Medianwert, Mittelwert voneinander verschiedene, aber immer in dieser Reihenfolge aufsteigende Werte an.
für x > 0 $f(x) = 1/[\,\sigma\, x\, \sqrt{(2\pi)}]\; e^{[-(\ln x-\mu)^2/(2\sigma^2)]}$
$F(x) = 1/[\,\sigma\, \sqrt{(2\pi)}]\; {}_{-\infty}\!\int^{\log x} e^{[-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)]}\, dt$
$EX = e^{\mu+\sigma^2/2}$ $D^2X = e^{2\mu+\sigma^2} * (e^{\sigma^2 -})$



Neueste Untersuchungen haben ergeben, dass sich statistische Verteilungen verschiedener natürlicher Größen nicht der bekannten Gaußschen Normalverteilung, sondern viel mehr der logarithmischen

Normalverteilung folgen.
Beispiele sind u.a.: Durchmesser von Bäumen oder Bakterien, Körpergröße des Menschen, Verteilung der Galaxien, Dramaturgie in Filmen, Größe von Ölfeldern, Verteilung chemischer Elemente in Sedimenten, Größe von Städten und Gemeinden, Partikelgrößen in Eis- oder Wasserwolken, Wachstumsgröße von Kristallen, Täglicher Wasserdurchfluss in Flüssen, Windgeschwindigkeiten, Lebenszyklus einer Art, Anzahl der Angestellten in Firmen, Bilanzgröße US-amerikanischer Banken, Korrosion von Metallen, für eine Heilung notwendige Penizilindosis usw. usw.
Die logarithmische Normalverteilung spielt auch bei der modernen Global-Scaling-Theorie eine fundamentale Rolle.
Die logarithmische Normalverteilung ergibt sich aus der Normalverteilung durch die Ersetzung $f_n(x) \rightarrow f_{log}(x) = 1/x\ f_n(\ln x)$.

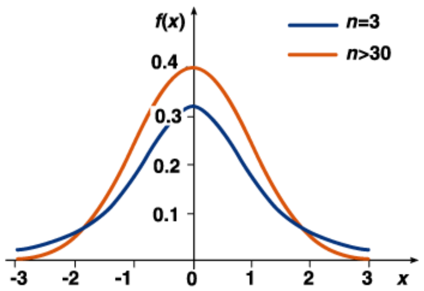


Erlang-Verteilung

Die Erlang-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie wurde von Agner Krarup Erlang für die statistische Modellierung der Intervall-Längen zwischen Telefonanrufen entwickelt.
Die Verteilung wird vor allem in der Warteschlangentheorie verwendet, um die Verteilung der Zeitspanne zwischen zwei Ereignissen zu erfassen, sowie in der Qualitätssicherung zur Beschreibung von Lebensdauern.
Die Erlang-Verteilung Erl(λ, n) mit dem reellen Parameter λ und dem natürlichen n ist eine spezielle Gammaverteilung, die durch die Dichtefunktion

$$f(x) = (\lambda x)^{n-1} / (n-1)!\ \lambda\ e^{-\lambda x}\ ;\ x \geq 0$$

festgelegt wird. Für $x < 0$ ist $f(x) = 0$.
Erwartungswert $E(X) = n/\lambda$ Varianz $V(X) = n/\lambda^2$



Statistische Verteilungen / Prüfverteilungen

Student-t-Verteilung

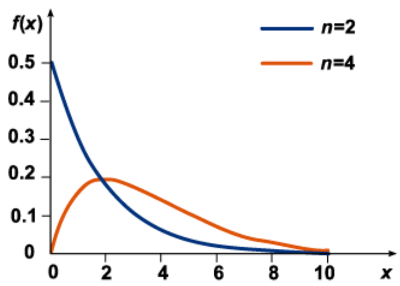
Verteilung $f_T(T_n;\ n)$, die sich für die Messgröße $T_n = Z / \sqrt{(Y_n / n)}$ ergibt, wenn Z standardnormalverteilt und Y_n $f_X(Y_n;\ n)$-verteilt sind.
Eine Zufallsgröße X ist t-verteilt mit n Freiheitsgraden, mit Dichtefunktion

$$f(x) = \Gamma[\ (n+1)/2\ ] / \Gamma[\ n/2\ ] / \sqrt{(n\pi)} * (1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$$

$\Gamma(x)$ … Eulersche Gamma-Funktion
Erwartungswert $m = 0$
Varianz $\sigma^2 = n/(n-2)$
Für $n \rightarrow \infty$ kann die t-Verteilung durch die Standardnormalverteilung ersetzt werden.

Perzentile $t_{T;Ft;n}$ der t-Verteilung f_T

$n \backslash F_T$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	$n \backslash F_T$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	500	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586



Chi²-Verteilung, χ^2-Verteilung … statistische Prüfverteilung nach Helmert-Pearson

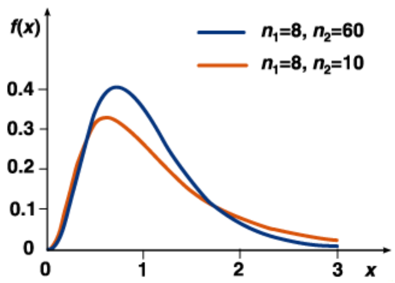
$$f(x) = [\ x^{(n/2)-1}\ e^{-x/2}\ ] / [2^{n/2}\ \Gamma(n/2)\ ]$$

für $x > 0$ sonst $f(x) = 0$; n Freiheitsgrad
Die Chi-Quadrat-Verteilung ist eine Stichprobenverteilung, die bei der Schätzung von Verteilungsparametern, beispielsweise der Varianz, Anwendung findet. Insbesondere beim χ^2-Anpassungstest wird die Verteilung genutzt.
Erwartungswert $\mu = \sqrt{2}\ \Gamma((n+1)/2) / \Gamma(n/2)$
Varianz $\sigma^2 = 2\ [\ \Gamma(n/2)*\Gamma(1+n/2) - \Gamma^2(n/2+1/2)\ ] / \Gamma^2(n/2)$
Für n=2 entspricht die χ^2-Verteilung der Rayleigh-Verteilung mit σ=1.

Die Abbildung zeigt die χ^2-Verteilung.

Perzentile $t_{x;Fx;n}$ der χ^2-Verteilung f_x

$n \backslash F_x$	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.000	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.35
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.08
6	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	2.83	12.01	14.06	16.01	18.47
8	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	5.58	17.27	19.67	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57
25	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31
30	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89
35	18.51	20.57	22.46	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34
40	22.17	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69
50	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.51	71.42	76.15
60	37.49	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4
80	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3
90	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.2	118.1	124.1
100	70.07	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8



F-Verteilung

Die F-Verteilung ist eine statistische Verteilung, welche oft zum Test von Stichproben gleicher Varianz genutzt wird.
m,n … Freiheitsgrade
F-Verteilung oder Fisher-Verteilung: Verteilung $f_F(F;\ n_1;\ n_2)$, die sich für die Messgröße $F_{n1;n2} = Y_{n1}(1)/n_1 / (Y_{n2}(2)/n_2)$ ergibt, wenn Y_{n1} und Y_{n2} aus zwei voneinander unabhängigen Stichprobenentnahmen erhalten wurden und jeweils $f_X(Y_{ni};\ n_i)$-verteilt sind, i=1,2.
für x>0 und a=m/2, b = n/2 wird

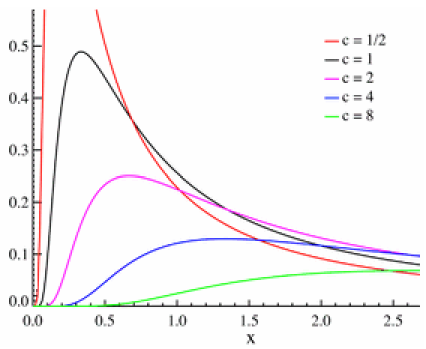
$$f(x) = a^a\, b^b\, \Gamma(a+b)/[\Gamma(a) * \Gamma(b)] * x^{a-1}/(ax+b)^{a+b}$$

Sind χ_n^2 und χ_m^2 zwei Chi²-verteilte Zufallsgrößen mit n und m Freiheitsgraden, so ergibt sich

$$F_{n,m} = (\chi_n^2 / n) / (\chi_m^2 / m)$$

Erwartungswert $\quad \mu = m / (m-2)$

Varianz $\quad \sigma^2 = 2\, m^2\, (m+n-2) / [\, n\, (m-2)^2\, (m-4)\,]$



Lévy-Verteilung

Die Lévy-Verteilung, benannt nach dem französischen Mathematiker Paul Lévy (1886-1971), mit den reellen Parametern $\gamma > 0$ und δ ist definiert durch die Dichtefunktion

$$f(x) = \sqrt{(\gamma/(2\pi))}\ 1/(x-\delta)^{3/2}\ e^{-\gamma/(2x-2\delta)}$$

Die Verteilung mit den Parametern $\gamma = 1$ und $\delta = 0$ wird Standard-Lévy-Verteilung genannt.
Die Standard-Lévy-Verteilung gehört wie die Normalverteilung und die Cauchy-Verteilung zur Gruppe der alpha-stabilen Verteilungen, d.h. sie erfüllt die Bedingung

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim n^{1/\alpha}\ X$$

wobei die X_i unabhängige Standard-Lévy-Variablen sind und α = 1/2.
Die Lévy-Verteilung besitzt weder einen endlichen Erwartungswert noch eine endliche Varianz. Die Verteilung wird verwendet, um extreme Ereignisse zu beschreiben, z.B. einen Börsencrash in der Finanzmathematik.

Grenzwertsätze

Sätze, die die stochastische Konvergenz einer Folge von Verteilungsfunktionen (globale Grenzwertsätze) und Einzelwahrscheinlichkeiten oder Dichtefunktionen (lokale Grenzwertsätze) zum Inhalt haben.
Grenzverteilungsfunktion: Grenzwert einer Folge von Verteilungsfunktionen.
Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsgröße ist Grenzverteilungsfunktion einer Folge binomialverteilter Zufallsgrößen.

Grenzwertsatz von Poisson: Zusammenhang von Binomial- und Poissonverteilung; Aussage über das Grenzverhalten der Einzelwahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen für große n und kleine p als Poissonverteilung:

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lambda^k/k!\ e^{-\lambda}$$

Näherung praktisch bedeutungsvoll durch Verringerung des Rechenaufwandes bei der Berechnung binomialverteilter Zufallsgrößen und nutzbar für $np < 10$ und $n > 1500p$.

Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy: Eine Zufallsgröße ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert *nm* und der Varianz $n\sigma^2$, wenn sie als Summe einer großen Anzahl von stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen aufgefaßt werden kann, die alle der gleichen Verteilungsfunktion mit dem Erwartungswert *m* und der Varianz σ^2 genügen.

Grenzwertsatz von Ljapunow: Eine Zufallsgröße Y ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $m = \Sigma_{k=1}^{n} m_k$ und $\sigma^2 = \Sigma_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, wenn sie als Summe einer großen Anzahl n unabhängiger Summanden (Zufallsgrößen X_k mit den Erwartungswerten m_k und den Varianzen σ_k^2) dargestellt werden kann, von denen jeder zur Summe einen unbedeutenden Beitrag liefert.

Grenzwertsatz von Moivre-Laplace: Bei einer großen Anzahl unabhängiger Versuche (durchgeführt nach dem Bernoullischen Versuchsschema) konvergiert die Verteilungsfunktion der standardisierten binomialverteilten Zufallsgröße stochastisch gegen die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung (globale Aussage):

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le (X-np)/\sqrt{(np(1-b))} < b) = 1/\sqrt{(2\pi)}\ {}_a\!\int^b e^{-x^2/2}\, dx$$

Zentraler Grenzwertsatz

$$P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n \bullet \mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \Phi(x)$$

Der Zentrale Grenzwertsatz ist eines der wichtigsten Theoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Er besagt, dass die Summe unabhängiger Zufallsvariablen für große Anzahlen annähernd normalverteilt ist, wenn die einzelnen Summanden im Vergleich zur Summe genügend klein sind:
Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger; identisch verteilter; Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt ... (siehe Abbildung), d.h. dass die Wahrschienlichkeitsverteilung für große n gegen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung strebt. Der Satz macht plausibel, dass in der Praxis oft annähernd normalverteilte Zufallsvariablen auftreten (z.B. Meßfehler).

Unendlich-viele-Affen-Theorem

Das Unendlich-viele-Affen-Theorem (engl. infinite monkey theorem) besagt, dass ein einzelner Affe, der unendlich lange zufällig auf einer Tastatur herumtippt, irgendwann alle Bücher in der französischen "Bibliothèque nationale de France" schreiben wird oder in englischsprachigen Ländern die Werke William Shakespeares entstehen werden.
Das Theorem veranschaulicht das wahrscheinlichkeitstheoretische Lemma von Borel und Cantelli.
Eine Schreibmaschine habe 50 Tasten. Das Ereignis sei, dass der Affe beim zehnmaligen Tippen das Wort "mathematik" eintippen wird.
Bei einer diskreten Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten ergibt sich dafür die Wahrscheinlichkeit

$$P = 1/50^{10}$$

und als Gegenereignis $P = 1 - 1/50^{10}$

Tippt der Affe zweimal, ergibt sich für das Gegenereignis $(1 - 1/50^{10})^2$ und für n-mal

$$P = (1 - 1/50^{10})^n$$

Strebt n gegen Unendlich, d.h. der Affe tippt unendlich oft, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort "mathematik" nicht entsteht, Null, d.h. das Wort taucht irgendwann einmal auf.

Anmerkung: Auf der Internet-Seite "The Monkey Shakespeare Simulator" erzeugt seit dem 1. Juli 2003 ein Java-Applet zufällige Zeichenfolgen.
Am 3.Januar 2005 waren bereits 24 aufeinanderfolgende Zeichen aus einem Shakespeare-Text getippt:
RUMOUR. Open your ears; 9r"5j5&?OWTY Z0d "B-nEoF.vjSqj… aus Heinrich VI., Teil 2
Später erreichte man 30 Zeichen aus "Julius Cäsar":
Flauius. Hence: home you idle CrmS3RSs jbnKR IIYUS2([;3ei'Qqrm'

Stichprobe

Begriffe:

n … Umfang der konkreten Stichprobe mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Variationsreihe … geordnete Stichprobe $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$

Klasseneinteilung der Stichprobe

Hat eine Stichprobe einen großen Umfang, wird der Bereich der Merkmalswerte in gleich große Klassen eingeteilt, indem mehrere von ihnen zu einer Gruppe oder Klasse zusammengefasst werden. Die Größe der Klassen hängt vom Umfang der Stichprobe und der Streubreite ab. Um den Charakter der Verteilung nicht zu verwischen, sollte die Anzahl der Klassen nicht zu klein gewählt werden.

m … Anzahl der Klassen
x_k … Klassenmitte der k-ten Klasse
h_k … absolute Häufigkeit der Elemente der k-ten Klasse
r_k … relative Häufigkeit der Elemente der k-ten Klasse

Klassenbreite

Die Klassenbreite ist die Differenz der oberen und der unteren Klassengrenze.

Klassenmitte

Die Klassenmitte ist das arithmetische Mittel zwischen der oberen und der unteren Klassengrenze.

Stichprobenmittel

Schreibweise! Σ_i … Summe über alle i

$$\overline{x} = 1/n\ \Sigma_i x_i = x_0 + 1/n\ \Sigma_i (x_i - x_0) = 1/n\ \Sigma_k \overline{x}_k \cdot h_k = \Sigma_k \overline{x}_k \cdot r_k =$$
$$= x_0 + 1/n\ \Sigma_k (\overline{x}_k - x_0) \cdot h_k$$

Stichprobenstreuung

$$s^2 = 1/(n-1)\ \Sigma_i (x_i - \overline{x})^2 = 1/(n-1)\ [\ \Sigma_i x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2\ ] = 1/(n-1)\ [\ \Sigma_i x_i^2 - \overline{x} \cdot \Sigma_i x_i\ ]$$

modifizierte Streuung

$$s_n^2 = 1/n\ \Sigma_k (\overline{x}_k - EX)^2\ h_k$$

Stichprobenvarianz

Ziel: Erwartungstreue Schätzgröße für die Varianz σ^2 einer Zufallsgröße X herleiten
Hinweis: Alle Summen werden für $i = 1, \ldots, n$ gebildet!

Gegeben: Strichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ aus X. Für die Erwartungswerte und die Varianzen gilt

$$E(X_i) = E(X) = \mu \qquad V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = E((X_i - \mu)^2)$$

Weiterhin ist $X^* = 1/n\ \Sigma X_i$ das Stichprobenmittel.

Ansatz: $S^2 = 1/n\ \Sigma (X_i - X^*)^2$ als Schätzfunktion für σ^2
Prüfung der Erwartungstreue von S^2

$$S^2 = 1/n\ \Sigma ((X_i - \mu) - (X^* - \mu))^2 = 1/n\ \Sigma ((X_i - \mu)^2 + (X^* - \mu)^2 - 2\,(X_i - \mu)(X^* - \mu)) =$$
$$= 1/n\ [\Sigma (X_i - \mu)^2 + \Sigma (X^* - \mu)^2 - 2\,(X^* - \mu)\ \Sigma (X_i - \mu)] =$$
$$= 1/n\ \Sigma (X_i - \mu)^2 + 1/n \cdot n \cdot (X^* - \mu)^2 - 2/n\ (X^* - \mu)\ (n X^* - n\,\mu) =$$
$$= 1/n\ \Sigma (X_i - \mu)^2 + (X^* - \mu)^2 - 2\,(X^* - \mu)^2 = 1/n\ \Sigma (X_i - \mu)^2 - (X^* - \mu)^2$$
$$E(S^2) = E(1/n\ \Sigma (X_i - \mu)^2 - (X^* - \mu)^2) = 1/n\ E(\Sigma (X_i - \mu)^2) - E((X^* - \mu)^2) =$$
$$= 1/n\ \Sigma E((X_i - \mu)^2) - E((X^* - \mu)^2) =$$
$$= 1/n\ \Sigma V(X_i) - E((X^* - \mu)^2) = 1/n\ \Sigma \sigma^2 - E((X^* - \mu)^2) = \sigma^2 - E((X^* - \mu)^2)$$

Da $\mu = E(X)$, ist $E((X^* - \mu)^2) = V(X^*)$. Für diese Varianz gilt aber $V(X^*) = V(1/n\ \Sigma X_i) = 1/n^2\ \Sigma V(X_i) = 1/n^2\ \Sigma \sigma^2 = 1/n\ \sigma^2$ und somit

$$E(S^2) = \sigma^2 - E((X^* - \mu)^2) = \sigma^2 - 1/n\ \sigma^2 = (n-1)/n\ \sigma^2$$

Damit ist S^2 keine erwartungstreue Schätzgröße für σ^2. Durch Berücksichtigung des Korrekturfaktors $(n-1)/n$ erhält man aber als erwartungstreue neue Schätzung

$$S^2 = n/(n-1) \cdot 1/n\ \Sigma (X_i - X^*)^2 = 1/(n-1)\ \Sigma (X_i - X^*)^2$$

Wichtig: $\sqrt{S^2} = \sqrt{[1/(n-1)\ \Sigma (X_i - X^*)^2]}$ ist bei dieser Aufgabenstellung keine erwartungstreue Schätzung für die Standardabweichung. Mit einer längeren Herleitung wird korrekt

$$S = \sqrt{[1/(n-1)\ \Sigma ((X_i - a) - n\,(X^* - a)^2)]}$$

wobei a als "glatte" Zahl in der Nähe des Mittelwertes X^* gewählt wird.

Standardabweichung, mittlere quadratische Abweichung

$$s = \sqrt{(s^2)}$$

Variationskoeffizient

$$v = s/\overline{x} \cdot 100\ \%$$

Variationsbreite

$$\Delta V = x_{max} - x_{min}$$

Median (Zentralwert)

$$\tilde{x} = x_{p+1}^*, \text{ wenn } n=2p+1 \qquad = (x_p^* + x_{p+1}^*)/2, \text{ wenn } n=2p$$

Durch den Zentralwert $x^{\sim}$ wird eine Datenmenge in eine untere und obere Hälfte geteilt. Von diesen so entstandenen Datenmengen wird jeweils wieder der Zentralwert ermittelt. Der Zentralwert der unteren Hälfte wird als unterer Viertelwert $x_{1/4}$, der der oberen Hälfte als oberer Viertelwert $x_{3/4}$ bezeichnet.
Mindestens die Hälfte aller Werte x liegt dann im Intervall $x_{1/4} \leq x \leq x_{3/4}$
Die Länge dieses Intervalls ist ein Maß für die Streuung der Häufigkeitsverteilung um den Zentralwert und wird als Halbweite bzw. Vierteldifferenz (Viertelabstand) H bezeichnet.

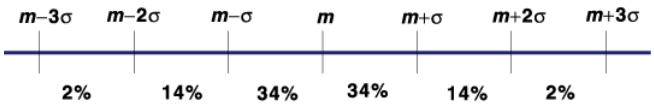
$$H = x_{1/4} - x_{1/4}$$

Modalwert … der am häufigsten vorkommende Merkmalswert

empirisches zentrales Moment p-ter Ordnung $M_p = 1/n\ \Sigma_k\ (x^{\sim}_k - x^{--})^p\ h_k$
empirische Verteilungsfunktion $W_n(x) = N_x/n$, mit N_x … Anzahl der $x_i<x$

Alpha-Quantil
α-Quantil $T\alpha$:Wert der Zufallsvariablen $x\alpha$, für den gilt $P(y \leq x\alpha) = \alpha$
Die Wahrscheinlichkeit, einen Wert $y \leq x\alpha$ zu erhalten, beträgt gerade α. Beziehung der Parameter der Normalverteilung zu speziellen Quantilen: 0,16-Quantil: $T_{0.16} = m - \sigma$, 0,84-Quantil: $T_{0.84} = m + \sigma$
0,5-Quantil: $T_{0.5} = m$

Im Bereich einer Standardabweichung um den Erwartungswert $m \pm \sigma$ liegen ca. 68% aller Ereignisse der Normalverteilung.



Statistische Tests
Hypothese H = H_0 **Alternativhypothese H_1**
Signifikanzniveau α ... Schranke für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art

Fehlerarten
Fehler 1.Art ... Ablehnung einer richtigen Hypothese ; Fehler 2.Art ... Nichtablehnung einer falschen Hypothese
Testgröße T mit bekannter Verteilung auf der Grundlage der Stichprobe von X und der Hypothese H
kritischer Bereich K (zweiseitig oder einseitig)
τ_1, τ_2, τ ... P%-Grenzen, kritische Werte P% = $(1 - \alpha) * 100$ %

Aufgaben zu statistischen Tests
Aufgabe 1: In einer Spielhölle wird mit fairen Würfeln und mit Würfeln, bei denen die Sechs nur in p = 10% aller Fälle auftritt, gespielt. Bei einer Polizeirazzia werden die äußerlich nicht unterscheidbaren Würfel getestet. Ein Würfel wird als falsch bezeichnet, wenn bei 600 Würfen höchstens 70 Sechser fallen.
Es sei H_0: p = 1/6.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art und 2. Art.
b) Wie muss der kritische Wert gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens 0,5, also 50% beträgt? Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art?

Lösung: a) Fehler 1.Art: der Würfel ist echt und zeigt trotzdem höchsten 70 Sechser:
H_0: p = 1/6 ; $\Sigma_{k=0}^{70}\ ({}^{600}{}_k)\ (1/6)^k\ (5/6)^{600-k} = 0{,}04$ %
Fehler 2. Art: der Würfel, der gezinkt ist, wird als echt bezeichnet, obwohl er mehr als 70 Sechser zeigt:
H_1: p = 0,1 ; $\Sigma_{k=71}^{600}\ ({}^{600}{}_k)\ 0{,}1^k\ 0{,}9^{600-k} = 7{,}9$ %
b) $\Sigma_{k=0}^{x}\ ({}^{600}{}_k)\ (1/6)^k\ (5/6)^{600-k} < 0{,}5$
Ausprobieren ergibt, der Würfel wird als falsch bezeichnet, wenn er maximal 99 Sechser zeigt.
Der Fehler 2.Art berechnet sich dann als: $\Sigma_{k=100}^{600}\ ({}^{600}{}_k)\ (1/6)^k\ (5/6)^{600-k} = 0$ %, trifft praktisch nie ein!

Aufgabe 2: Es besteht der Verdacht, dass eine Münze häufiger Kopf als Zahl zeigt. Um das zu Testen, wird die Münze 10 mal geworfen, wobei 7 mal Kopf fällt. Kann auf dem Signifikanzniveau α = 0,05 die Nullhypothese p = 0,5 über die Wahrscheinlichkeit p von Kopf verworfen werden?
Lösung: Wahrscheinlichkeit, dass eine gute Münze mindestens 7 mal Kopf zeigt
$\Sigma_{k=7}^{10}\ ({}^{10}{}_k)\ 0{,}5^k\ 0{,}5^{10-k} = 17{,}2$ %
Das Signifikanzniveau α = 0,05 = 5% wird bei weitem nicht erreicht!

Aufgabe 3: Ein Medikament besitzt eine Heilungschance von 80%. Ein neues Medikament soll dann auf den Markt kommen, wenn seine Heilungswahrscheinlichkeit p grösser als 0,8 ist. Um das zu überprüfen, wird es zuerst an 80 Personen ausprobiert.
Testen Sie zuerst die Nullhypothese H_0: p = 0,8 gegen die Alternativhypothese H_1: p > 0,8 auf dem Signifikanzniveau α = 0,01. Welches Entscheidungsverfahren ergibt sich? Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art, wenn in Wirklichkeit p = 0,9 ist?

Lösung: Nullhypothese H_0: p = 0,8 ; $\Sigma_{k=x}^{80}\ ({}^{80}{}_k)\ 0{,}8^k\ 0{,}2^{80-k} < 1$ %
Ausprobieren ergibt: falls 73 oder mehr der 80 Patienten geheilt werden, darf auf dem Signifikanzniveau 0,01 angenommen werden, dass das neue Medikament besser ist.

H_1: p = 0,9 ; man entscheidet sich zu Unrecht gegen das neue Heilmittel, wenn weniger als 73 Personen geheilt werden: $\Sigma_{k=0}^{72} \binom{80}{k} 0{,}9^k\, 0{,}1^{80-k} = 55{,}4\ \%$

Aufgabe 4: Der Hersteller des Haarwuchsmittels "Löwenmähne" versichert, dass sein Produkt in mehr als 60% aller Fälle wirksam ist. Zur Überprüfung dieser Behauptung wird das Haarwuchsmittel von einem Forschungsinstitut durch eine Zufallsstichprobe an 100 glatzköpfigen Patienten getestet.
a) Entwickeln Sie für das Forschungsinstitut ein Entscheidungsverfahren, so dass lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% dem Haarwuchsmittelhersteller zu Unrecht irreführende Werbung vorgeworfen werden kann.
b) Wie wird entschieden, wenn das Mittel bei 50 (70) von den 100 Personen wirksam ist?

Lösung: Nullhypothese H_0: p = 0,6 ; $\Sigma_{k=0}^{x} \binom{100}{k} 0{,}6^k\, 0{,}4^{100-k} < 5\ \%$
Ausprobieren ergibt: 51 ist der kleinste Wert, der noch eine Irrtumswahrscheinlichkeit von weniger als 5% besitzt.
Entscheidungskriterium: Das Mittel muss bei mehr mindestens 52 Personen wirken, dann ist die Werbung nicht irreführend.
Sie wäre das mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,2% auch, wenn in der Testgruppe nur 0 bis 51 Personen Erfolg hätten. In dem Fall ist die Werbung nicht irreführend.
Bei 50 Personen entscheide ich: die Werbung stimmt nicht. Bei 70 Personen entscheide ich: die Werbung stimmt.

Aufgabe: Eine Fernsehserie hatte im letzten Jahr eine mittlere Einschaltquote von 10%. Das Management des Senders vermutet, dass die Beliebtheit der Serie im letzten Quartal des Vorjahres sogar etwas zugenommen hat. Weitere Serien sollen dazugekauft werden, wenn die Beliebtheit der Sendung tatsächlich zugenommen hat. Dazu werden 200 Personen befragt. Man gibt sich mit einer Sicherheit von mindestens 95% des Befragungsergebnisses zufrieden. Bestimmen Sie den Annahme- und Ablehnungsbereich, sowie den tatsächlichen Fehler 1.Art.

Lösung: Man möchte überprüfen, ob die Beliebtheit der Sendung zugenommen hat, ob also die Vermutung p > 0,1 zutrifft.

Nullhypothese H0: $p \leq 0{,}1$; Alternativhypothese H1: $p > 0{,}1$.

H0 soll durch die Umfrage getestet werden. Signifikanzniveau 5%. Da große Werte gegen H0 sprechen, liegt ein rechtsseitiger Test vor.

$n = 200$; $p = 0{,}1$; $\mu = 20$; $\sigma = 4{,}243$

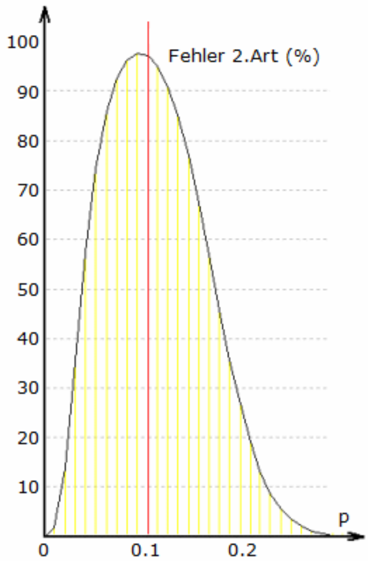
Da nur der rechtsseitige Bereich zu ermitteln ist, wird

$\mu + 1{,}64\ \sigma = 26{,}95... = 27$, die obere Grenze des Annahmebereichs für H0.

Annahmebereich A = {0, ..., 27}
Ablehnungsbereich A* = {28, ..., 200}
Für den Fehler 1.Art ist zu berechnen

$P(28 \leq X \leq 200) = 0{,}0434285$

Würde bei der Umfrage herauskommen, dass mehr als 27 Personen die Sendung sehen möchten, dann fiele das in den Ablehnungsbereich von H0. Die Nullhypothese wäre abzulehnen. Die Alternativhypothese H1: p > 0,1 würde angenommen werden. Es würden neue Serien gekauft.
Der Fehler, der bei dieser Entscheidung gemacht würde beträgt 4,34%. Das bedeutet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,34% würde die Hypothese H0 zu unrecht abgelehnt werden.



Fehler zweiter Art

Eine Fehlentscheidung besteht darin, dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl sie falsch ist. Dies nennt man einen Fehler zweiter Art.

Operationscharakteristik

Eine Abbildung O (siehe Abbildung), welche bei einem Test bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α (Signifikanzniveau) jedem Wert von $p \in [0 ; 1]$ die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Null-Hypothese zuordnet, wenn sie in Wahrheit nicht zutrifft, heißt Operationscharakteristik des Tests, d.h. O ordnet jedem Wert von p das mögliche Risiko 2. Art zu.

Gütefunktion

Eine Abbildung G, welche bei einem Test bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α (Signifikanzniveau) jedem Wert von $p \in [0 ; 1]$ die Wahrscheinlichkeit für das Ablehnen der Null-Hypothese zuordnet, heißt Gütefunktion des Tests, d.h. es gilt: $G(p) = 1 - O(p)$

Fehler 2.Art, Aufgabe

Aufgabe (Grundkurs-Mathematikabitur Sachsen 2014):

Der Betreiber eines Klettergartens behauptet, dass nicht nur 70 % sondern sogar 80 % aller Besucher des Klettergartens Kinder sind.
Die Nullhypothese "Der Anteil der Kinder an den Besuchern des Klettergartens beträgt 70%." soll abgelehnt werden, wenn mehr als 77 von 100 zufällig ausgewählten Besuchern des Klettergartens Kinder sind. In diesem Fall wird die Alternativhypothese "Der Anteil der Kinder an den Besuchern des Klettergartens beträgt 80 %." angenommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1.Art.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Nullhypotheses irrtümlicherweise angenommen wird.

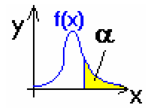
Lösung:
1) Berechnung des Fehlers 1.Art für p = 0,7. Es wird davon ausgegangen, dass mehr als 77 von 100 Besuchern Kinder sind und dennoch p = 0,7 korrekt ist

$$P(78 \le X \le 100) = \Sigma_{k=78}^{100} ({}^{100}{}_{k}) (0,7)^{k} (0,3)^{100-k} = 0,047866$$

2) Berechnung des Fehlers 2.Art. Es wird davon ausgegangen, dass mehr als 77 von 100 Kinder sind, deshalb p = 0,8 gilt, obwohl dies falsch ist. Der Fehler 2.Art ist damit die Wahrscheinlichkeit für 0 bis 77 Kinder bei der Wahrscheinlichkeit 0,8

$$P(0 \le X \le 77) = \Sigma_{k=0}^{77} ({}^{100}{}_{k}) (0,8)^{k} (0,2)^{100-k} = 0,261067$$

Testverfahren



H_0 und H_1 aufstellen ; α festlegen ; T wählen, K festlegen
H_0 wird angenommen für

$\tau_1 < T < \tau_2$ (zweiseitig) $T < \tau$ (einseitig)

Student-t-Test

Freiheitsgrade n-1 Testgröße $t = | x - \mu | / s * \sqrt{n}$

Signifikanztest

Grenzen für normalverteilt N(0;1) $z_{\alpha/2}$ t-verteilt $t_n(x)$ $t_{n;\alpha/2}$
F-verteilt $F_{n;m}(x)$ $F_{n;m;\alpha/2}$ χ^2-verteilt $\chi^2_n(x)$ $\chi^2_{n;\alpha/2}$
bei zweiseitigem Test $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ n_1, n_2, n ... Stichprobenumfang

Test zum Signifikanzniveau α

Voraussetzung	Hypothese	Testgröße	Annahme
V: normalverteilt, σ bekannt	H: $\mu = \mu_0$	T: $\| \bar{x} - \mu_0 \| / \sigma * \sqrt{n}$	A: $T < z_{\alpha/2}$
V: normalverteilt, σ unbekannt	H: $\mu = \mu_0$	T: $\| \bar{x} - \mu_0 \| / S * \sqrt{n}$	A: $T < t_{n-1;\alpha/2}$
V: normalverteilt, μ bekannt	H: $\sigma = \sigma^2_0$	T: $n * \bar{s}^2 / \sigma_0^2$	A: $\chi^2_{n;1-\alpha1} < T < \chi^2_{n;\alpha2}$
V: normalverteilt, μ unbekannt	H: $\sigma = \sigma^2_0$	T: $(n-1) * s^2 / \sigma_0^2$	A: $\chi^2_{n-1;1-\alpha1} < T < \chi^2_{n-1;\alpha2}$
V: unabhängige Stichproben $N(\mu_1;\sigma^2)$, $N(\mu_2;\sigma^2)$			
	H: $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$	T: s_1^2/s_2^2 $(s_1^2 > s_2^2)$	A: $T < F_{n1-1;n2-1;\alpha/2}$

Test eines normalverteilten Stichprobenmittelwertes

Von einer Stichprobe mit dem Umfang n und der Varianz s² aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit dem ermittelten Mittelwert m soll überprüft werden, ob dieser Mittelwert m von einem zu erwartenden Mittelwert m zufällig abweicht. Für einen statistischen Test wird dazu die Nullhypothese H(0) aufgestellt:

H(0) = Die Abweichung des Mittelwertes m vom Erwartungswert m ist zufälliger Natur, d.h. m = μ.

Nach der Ermittlung einer Testgröße t wird ein Vergleich mit einem Tabellenwert t(b) der t-Verteilung durchgeführt. Dieser Wert ist von einer gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit α abhängig. Gilt t < t(b), so kann die Nullhypothese mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α angenommen werden. Andernfalls muss die Hypothese verworfen werden. Es ist dann davon auszugehen, dass die Abweichung nicht zufällig, sondern signifikant ist.
Dabei muss aber beachtet werden, dass auf Grund der zufälligen Stichprobe Fehlentscheidungen möglich sind. Ein Fehler 1.Art liegt vor, wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist. Wird H(0) angenommen, obwohl die Hypothese falsch ist, tritt ein Fehler 2.Art auf. Je größer die Stichprobe ist, desto geringer wird die Häufigkeit einer Fehlentscheidung. In der Technik werden Irrtumswahrscheinlichkeiten α von 0.05 bevorzugt, in der Medizin 0.01. Entscheidet der statistische Test über sehr brisante Fakten sollte α sehr klein und der Stichprobenumfang so groß wie möglich gewählt werden. Damit sinkt sowohl die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art als auch des, mitunter "schlimmeren", Fehlers 2.Art.
Für den Stichprobenmittelwert ist die Testgröße $t = \sqrt{n}\ |m - \mu|/s$ zu berechnen. Aus der Student-t-Verteilungstafel ist die Testgröße t(b) mit f = n-1 Freiheitsgraden zu entnehmen.
Beispiel: Aus einer 65 Teile umfassenden Stichprobe wird ein Mittelwert von m = 14.3 berechnet bei einer Varianz s² von 1.6. Der erwartete Mittelwert m beträgt jedoch 14. Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 ergibt sich:

Testgröße = 1.912 Tabellenwert = 1.99

Damit kann die Hypothese, dass die Abweichung zufällig ist, angenommen werden.

Beispiel2 (einseitiger Test): Für n=5000 Batterien gibt der Hersteller eine mittlere Betriebszeit von 180 Stunden an. Zur Überprüfung werden 50 Stück getestet und ein Mittelwert m von 175 Stunden bei einer Standardabweichung von 18 Stunden ermittelt. Einseitiger Test mit 0.05 Irrtumswahrscheinlichkeit führt zur Ablehnung der Nullhypothese, d.h. mit 95 % Sicherheit wäre eine Reklamation berechtigt. (bei 99 % Sicherheit wird die Nullhypothese angenommen).

Test zweier normalverteilter Stichprobenmittelwerte

Liegen zwei Stichproben mit den Umfängen n_1 und n_2 aus normalverteilten Grundmengen vor und haben Sie die Mittelwerte m_1 und m_2 sowie die Varianzen s^2_1 und s^2_2 berechnet, so ergibt sich für diesen Test die Testgröße zu $t = |m_1 - m_2|/s\ \sqrt{(n_1 n_2)/(n_1+n_2)}$, wobei der Parameter s aus den Varianzen zu ermitteln ist. Für die Freiheitsgrade gilt $f = n_1 + n_2 - 2$.

Beispiel: Bei zwei Werkstoffen wurden aus 20 bzw. 32 Teststücken mittlere Zerreißfestigkeiten von m_1 = 18 bzw. m_2 = 24 … bei Varianzen von 4 und 6 ermittelt. Die Nullhypothese besagt, dass dieser Unterschied zufällig ist. Nach Eingabe der Werte erhalten Sie t = 9.2 und bei 50 Freiheitsgraden (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.05) einen Tabellenwert von 2.01, womit die Hypothese abgelehnt werden muss. Der Unterschied der Zerreißfestigkeiten ist signifikant, also nicht zufällig.

Test einer Stichprobenhäufigkeit

Tritt in einer Stichprobe vom Umfang n ein Ereignis a mal ein, ist dagegen die zu erwartende Wahrscheinlichkeit des Eintritts p und nicht gleich dem empirisch ermittelndem Wert a/n , so erhält man mit $t = |a - np|/\sqrt{(np\ (1-p))}$ eine Testgröße für die Nullhypothese eines zufälligen Abweichens.

Beispiel: Auf Grund langfristiger Untersuchungen besteht bei einer Tiererkrankung einer Sterbeziffer von p = 0.4. 71 erkrankte Tiere werden mit einem neuen Medikament behandelt, mit dem Ergebnis das nur 20 Tiere sterben. Für die Freiheitsgrade f = n - 1 = 70 und einer Irrtumswahrscheinlichkeit α von 0.01 ergibt sich ein Tabellenwert von 2.65. Die Testgröße beträgt 2.035, womit die Nullhypothese bestätigt wird, d.h. eine besondere Wirkung des neuen Medikamentes kann nicht festgestellt werden.

χ^2-Test … Test von Verteilungen (Chi²-Verteilungstest)

Testgröße $$\chi_s^2 = \sum_{i=1}^{k} (h_i - k_i)^2 / k_i$$

absolute Häufigkeiten … h_i, theoretische Häufigkeiten … k_i, Klassenzahl … k, Freiheitsgrad f = k - m – 1, Anzahl der geschätzten Parameter … m

Wahrscheinlichkeit $P(\chi^2 \geq \chi_s^2) = 1 - \Gamma(\chi_s^2/2\ ,\ (k-1)/2) / \Gamma((k-1)/2)$

Normalverteilungstest

Testgröße $= \lambda_\alpha\ \sigma / \sqrt{n}$ λ_α … Tabellenwert für Irrtumswahrscheinlichkeit α

Alternativtest

Aufgabenstellung des Alternativtests
Zwischen zwei Annahmen, Vermutungen, Hypothesen muss eine Entscheidung getroffen werden.

1) Formulieren der Hypothese H_0, Nullhypothese H1 alternative Hypothese
2) Entscheidungsregel, Prüfverfahren, Test

Beispiel:
Eine Fabrik liefert Schachteln mit Schrauben hoher Qualität (10% der Schrauben sind fehlerhaft) und minderer Qualität (40% fehlerhaft) an eine Baumarktkette.
Während des Ausladens geht bei einigen Verpackungen das Etikett ab. Da man nicht weiß, ob es sich um Schrauben 1. oder 2. Wahl handelt, muss ein Verfahren gefunden werden, die Schrauben in kürzester Zeit der richtigen Qualität zuordnen zu können. Weiter sei gegeben, dass sich in jeder Schachtel 300 Schrauben befinden.
H_0: "Die Schachtel ist hoher Qualität", Nullhypothese
H_1: "Die Schachtel ist minderer Qualität", Alternative Hypothese

Es werden 10 Schrauben zufällig aus der Schachtel entnommen und getestet. Sind mehr als 3 Schrauben unbrauchbar, soll die gesamte Schachtel der 2.Wahl angehören.

X := "Anzahl der schlechten Schrauben"
$0 \leq X \leq 3$ … die Schachtel ist guter Qualität, Entscheidung für H0
$3 < X \leq 10$ … die Schachtel ist minderer Qualität, Entscheidung für H1

Berechnung ergibt

H_0 ist wahr mit $p_0 = 0{,}1$ H_1 ist wahr mit $p_1 = 0{,}4$

Kontrolle:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kiste gute Qualität enthält, H_0 richtig ist, man sie aber dennoch ablehnt ist 1,28%. (Fehler 1.Art)

Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 falsch ist, man sie aber dennoch als richtig annimmt beträgt 5,1%. (Fehler 2.Art)

Alternativtest-Beispiel
Aufgabe:
Jemand behauptet hellsichtig zu sein. Er wird einem Test unterzogen, bei welchem wiederholt aus einem vollständigen Stapel Karten eine einzelne Karte verdeckt gezogen wird.
Der Kandidat soll dann die Kartenfarbe (Herz, Kreuz, Pik oder Karo) angeben. Man ist gewillt, einem Kandidaten gewisse Fähigkeiten zu attestieren, wenn er in einer Zehnerserie mindestens 6 richtige Farben angeben kann.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Banause diesen Test?
b) Jemand mit einer Trefferquote von 0,6 gilt als "begabt". Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein derart Begabter durch den Test?
c) Legen Sie die Bedingungen für das Bestehen des Tests so fest, dass beide Fehlerarten kleiner sind als 6%.

Lösung: a) Der Kandidat verlegt sich aufs Raten, d.h. p = 0,25 = 1/4. Er besteht den Test, wenn er mindestens 6 richtig hat: $\Sigma_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \cdot (1/4)^k \cdot (3/4)^{10-k} = 1{,}97$ %
b) Der Kandidat ist begabt, d.h. p = 0,6. Er besteht den Test nicht, wenn er weniger als 6 richtig hat:
$$\Sigma_{k=0}^{5} \binom{10}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k} = 36{,}7\ \%$$
c) Die Bedingung für a) muss bestehen bleiben; falls nur 5 Richtige verlangt werden steigt die Wahrscheinlichkeit schon auf 7%. Die Bedingung für b) könnte gemildert werden:
$$\Sigma_{k=0}^{4} \binom{10}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k} = 16\ \%$$
$$\Sigma_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k} = 5{,}4\ \%$$
Eine Bedingung, die gleichzeitig für a) und b) passt, existiert nicht.

Testverfahren: Gruppenprüfung
Aufgabe: Durch eine Blutuntersuchung soll bei einer großen Anzahl von Personen geprüft werden, ob jemand an einer bestimmten Krankheit leidet oder nicht.
Zum Nachweis des Krankheitserregers steht ein Test zur Verfügung. Mit der Wahrscheinlichkeit p sei eine Person gesund, mit der Wahrscheinlichkeit 1 - p krank.

Testverfahren
Einzelprüfung: Man benötigt für n Personen n Tests, d.h. für jede Person einen Test
Gruppenprüfung: Das Blut von n Personen wird vermischt. Wird der Erreger nicht nachgewiesen, so hat man für diese n Personen nur 1 Test benötigt, wird der Erreger jedoch im Mischblut nachgewiesen, so muss man zur Einzelprüfung übergehen und hat insgesamt für n Personen (n+1) Test benötigt

Für den Erwartungswert μ = E(X) der notwendigen Blutanalysen im Fall der Gruppenprüfung für eine Gruppenanzahl der Größe n gilt:
$$\mu = p^n + (n+1)(1-p^n) = n + 1 - n p^n$$
Da man bei Einzelprüfung genau n Analysen benötigt, gilt für die absolute Ersparnis S(n)
$$S(n) = n - \mu = n p^n - 1$$
und für die relative Ersparnis s(n), d.h. die Ersparnis pro Person:
$$s(n) = p^n - 1/n$$
Eine maximale Ersparnis je Person ergibt sich mit
$$s'(n) = p^n \ln p + 1/n^2 = 0$$
Diese Gleichung ist nicht streng analytisch lösbar.

Wilcoxon-Test
Der Wilcoxon-Test dient zum Prüfen der Hypothese, ob zwei Stichproben ein und derselben Grundgesamtheit entstammen, d.h. es wird die Hypothese H_0: $F_X(x) = F_Y(x)$ mittels je einer Stichprobe $x_1, \ldots, x_{n1}$ aus X und $y_1, \ldots, y_{n2}$ aus Y getestet.
Das Verfahren ist parameterfrei, wenn X und Y normalverteilt sind.

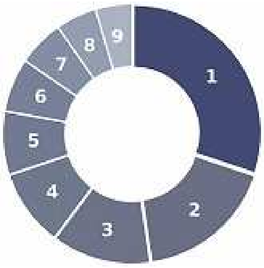
Die Werte der beiden Stichproben $x_1, \ldots, x_{n1}$ und $y_1, \ldots, y_{n2}$ werden der Größe nach geordnet. Als Beispiel ergebe sich für $n_1 = 4$ und $n_2 = 5$ die Reihenfolge $y_5\ x_3\ x_4\ y_1\ y_2\ x_2\ y_4\ x_1\ y_3$.
Betrachtet man ein Wertpaar (x_i, y_j), so bilden beide eine Inversion, wenn $y_j < x_i$. Im Beispiel ergeben sich insgesamt 9 Inversionen.

Als Testgröße wird die Gesamtzahl U der Inversionen herangezogen. Ist die Hypothese wahr, so darf U von seinem Erwartungswert EU = $1/2\ n_1 n_2$ nur gering abweichen. Die Hypothese wird abgelehnt, wenn
$$|u - 1/2\ n_1 n_2|$$
größer als ein kritischer Wert u_α ist.
u_α entnimmt man zu einem Signifikanzniveau α aus Tabellen. Für größere n_1 und n_2 ($n_1 + n_2 > 30$) gilt näherungsweise
$$u_\alpha = z_\alpha \sqrt{(1/12\ n_1\ n_2\ (n_1 + n_2 + 1))}$$

z_α wird über das Wahrscheinlichkeitsintegral der Normalverteilung gewonnen $2\Phi_0(z_\alpha) = 1 - \alpha$. Für α = 0,05 ist z_α = 1,96, für α = 0,01 gilt z_α = 2,58.

$u_{0,05} = 1{,}96 \sqrt{(1/12\ n_1\ n_2\ (n_1 + n_2 + 1))}$ $\qquad u_{0,01} = 2{,}58 \sqrt{(1/12\ n_1\ n_2\ (n_1 + n_2 + 1))}$

Für das Beispiel wird $|u - 1/2\ n_1n_2| = |9 - 10| = 1$. $u_{0,05}$ ist nach Tabelle 9, d.h. die Hypothese wird nicht abgelehnt.



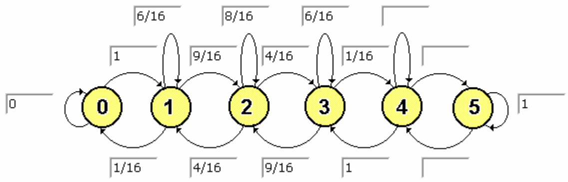
Benfords Gesetz, Gesetz der ersten Ziffer

In Tabellen, Listen und Statistiken treten Zahlen, deren erste Ziffer gleich 1 ist, mit einer relativen Häufigkeit von rund 30 % auf.
Der scheinbare Widerspruch zur Gleichverteilung, nach der man etwa 11 % führende Einsen (1/9 der möglichen Ziffern) erwarten sollte, erklärt sich durch die Tatsache, dass statistische Werte nicht gleichverteilen sondern logarithmisch(!) gleichverteilen.
Das Gesetz wurde 1938 von Benford (wieder) entdeckt und mittlerweile durch verschiedendste Statistiken bestätigt. Zum Beispiel beginnen die 54 Millionen Einträge reeller Zahlen in Plouffes "Inverse Symbolic Calculator" zu 30 % mit der Ziffer 1. Aus heuristischen Untersuchungen ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Ziffer eine n=1,2,...,9 ist, zu

$$P(n) = \lg(n + 1) - \lg(n)$$

d.h. für n = 1,2,... wird P(n) = 0.3010 ; 0.1761 ; 0.1249 ; 0.0969 ; 0.0792 ; 0.0669 ; 0.0580 ; 0.0512 ; 0.0458
Das Benfordsche Gesetz gilt nicht nur im Dezimalsystem, sondern auch in jedem anderen Positionssystem.
Eine merkwürdige Anwendung fand das Benfordsche Gesetz. So wurden in verschiedenen Bundesstaaten der USA Steuererklärungen auf dieses Gesetz getestet. Bei extrem abweichenden Verteilungen soll angeblich durch das Finanzamt genauer "hingesehen" worden sein.
Der eigentliche Erstentdecker dieses Gesetzes ist der Mathematiker Simon Newcomb. Diesem fiel 1881 auf, dass die ersten Seiten eines Buches mit Logarithmentafeln aus der Universitätsbibliothek viel mehr Gebrauchsspuren zeigten als die hinteren Seiten. Offensichtlich wurden von Zahlen, deren erste Ziffer eine Eins oder Zwei war, viel mehr Logarithmen gebraucht. Übrigens fand auch Benford seine Entdeckung bei der Untersuchung von Logarithmentafeln.

Markow-Kette



Zur Beschreibung mehrstufiger Zufallsexperimente, welche mehrere Zustände annehmen können, die mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten auseinander hervorgehen, wurde durch Markow die graphische Veranschaulichung der Markow-Kette geschaffen.
Gegeben sind eine Anzahl von Objekten ("Teilchen") welche sich in n verschiedenen Zustände 0 bis n-1 befinden können. Aus jedem Zustand gelangt eines dieser Teilchen mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit in einen anderen Zustand.
Im Beispiel tritt ein "Teilchen" mit einer Wahrscheinlichkeit von 4/16 aus Zustand 2 in Zustand 3 über, mit ebenso 4/16 aus 2 nach 1. Mit 8/16 verbleibt es im Zustand 2. Dagegen treten aus Zuständen 1 und 3 "Teilchen" nach 2 über. Im Beispiel endet die Markow-Kette bei Zustand 4, da im Zustand 5 keine Teilchen ein- oder austreten. Schon nach 12 Iterationen stabilisiert sich hier das System

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	Zustand
1	100	100	100	100	100	100	
2	6.25	162.5	162.5	162.5	6.25	100	
3	10.156	107.813	264.063	107.813	10.156	100	
4	6.738	116.602	253.32	116.602	6.738	100	
5	7.288	113.794	257.837	113.794	7.288	100	
6	7.112	114.42	256.937	114.42	7.112	100	
7	7.151	114.254	257.19	114.254	7.151	100	
8	7.141	114.294	257.13	114.294	7.141	100	
9	7.143	114.284	257.146	114.284	7.143	100	
10	7.143	114.286	257.142	114.286	7.143	100	
11	7.143	114.286	257.143	114.286	7.143	100	
12	7.143	114.286	257.143	114.286	7.143	100	

Markow-Kette, Beispiel

Markow-Ketten können zur Analyse von Spielverläufen mit Übergängen unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit verwendet werden. Simuliert man das weltweit bekannte Spiel "Monopoly", so zeigt sich, dass die einzelnen Felder nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit erreicht werden.
Bei einer Simulation mit 10 Millionen Zügen ergab sich

Feld	Besuche	Abweichung in %	Feld	Besuche	Abweichung in %
Opernplatz	3167223	26,69	Berliner Straße	3057711	22,31

Südbahnhof	2933446	17,34	Wiener Straße	2888911	15,56
Seestraße	2807548	12,30	Theatherstraße	2782184	11,29
Nordbahnhof	2780909	11,24	Museumstraße	5733029	9,32
Schlossallee	2716019	8,64	Badstraße	2694908	7,80
Rathausplatz	2665795	6,63	Münchener Str.	2663756	6,55
Schillerstraße	2663623	6,54	Wasserwerk	2662105	6,48
Goethestraße	2658119	6,32	Hauptstraße	2632441	5,30
Lessingstraße	2631318	5,25	Hauptbahnhof	2609758	4,39
Westbahnhof	2565070	2,60	Bahnhofstraße	2512702	0,51
Neue Straße	2502396	0,10			
Hafenstraße	2451196	-1,95	Elektritzitätswerk	2377701	-4,89
Parkstraße	2326699	-6,93	Elisenstraße	2319771	-7,21
Poststraße	2318216	-7,27	Chausseestraße	2291677	-8,33
Turmstraße	2247840	-10,09			

Methode der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate oder Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist das mathematische Standardverfahren zur Ausgleichungsrechnung.

Gegeben ist eine Menge von Datenpunkten, die physikalische Messwerte, wirtschaftliche Größen usw. darstellen können. In diese Menge von Punkten soll eine möglichst genau passende, parameterabhängige Kurve gelegt werden.
Dazu bestimmt man die Parameter dieser Kurve numerisch, indem die Summe der quadratischen Abweichungen der Kurve von den beobachteten Punkten minimiert wird.

In der Stochastik wird die Methode der kleinsten Quadrate als Schätzmethode in der Regressionsanalyse benutzt. In der mathematischen Statistik nennt man das Verfahren Kleinste-Quadrate-Schätzung, während in der Physik die Bezeichnung Fitting verwendet wird.

Am Neujahrstag 1801 entdeckte der italienische Astronom Giuseppe Piazzi den Asteroiden Ceres. 40 Tage lang konnte er die Bahn verfolgen, dann verschwand Ceres hinter der Sonne. Im Laufe des Jahres versuchten viele Wissenschaftler die Bahn zu schätzen. Die meisten Rechnungen waren unbrauchbar. Als einziger konnte der 24jährige Carl Friedrich Gauß eine genaue Berechnung angeben. Gauß erlangte dadurch Weltruhm.
Sein Verfahren, die Methode der kleinsten Quadrate, publizierte er erst 1809 im zweiten Band seines himmelsmechanischen Werkes "Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium". Unabhängig davon entwickelte der Franzose Adrien-Marie Legendre 1806 dieselbe Methode.

1829 konnte Gauß eine Begründung liefern, wieso sein Verfahren im Vergleich zu den anderen so erfolgreich war: Die Methode der kleinsten Quadrate ist in einer breiten Hinsicht optimal. Die genaue Aussage ist als der Satz von Gauß-Markow bekannt.

Schätztheorie

Die induktive Statistik ist durch folgende Aufgaben gekennzeichnet:
Übersetzen der Realität in eine Modell, Auswertung der Daten innerhalb des Modells, Prognosen über die zukünftigen Realisationen zufälliger Variablen, Schätzungen unbekannter Parameter oder Verteilungen, Tests von Hypothesen, Rückübersetzung der Modellergebnisse in die Realität

Die Schätztheorie beschäftigt sich mit der Aufgabe, anhand einer Stichprobe Aussagen über die Grundgesamtheit zu machen, indem z.B. ein Parameter für ein angenommenes Modell gesucht wird. Werden bei der Parameterschätzung genaue Zahlen geschätzt, spricht man von Punktschätzer, bei Intervallen von Bereichs- oder Intervallschätzer.

Likelihoodfunktion

Die Likelihoodfunktion geht von der Frage aus, wie wahrscheinlich die Beobachtung gegebener Daten unter einem gesuchten Parameter ist, sie ist somit eine Funktion des Parameter ϑ (theta).
Um die Likelihood eines Parameters ϑ zu bestimmen, muss man zunächst ein Modell ansetzen

$$L(\vartheta \mid y) = c\, f(y \,||\, \vartheta),$$

wobei c der Anteil der Verteilungsfunktion ohne ϑ und $f(y \,||\, \vartheta)$ der mit ϑ ist. c ist multiplikative Konstante.

Zwei Likelihoodfunktionen sind gleich, wenn sie bis auf eine multiplikative Konstante c gleich sind. Für mehrere Ereignisse berechnet sich die Gesamtlikelihood aus dem Produkt der Likelihoods für die Einzelereignisse (Multiplikationssatz).

Eine Stichprobenfunktion T(x), z.B. die empirische Varianz oder Erwartungswert, ist suffizient für den Parameter ϑ, falls die Likelihoodfunktion eindeutig durch T(x) bestimmt ist. T(x) enthält dann die gleiche Information über J wie die Stichprobe selbst.

Der Maximum-Likelihood-Schätzer ist das Maximum der Likelihood-Funktion, ist die Likelihood-Funktion differenzierbar, kann man ihn numerisch durch Nullsetzen der ersten Ableitung bestimmen.
Sucht man einen Parameter, der eine umkehrbare Funktion vom schon gefundenen Parameter ist, kann man ihn direkt aus diesem berechnen bzw. die Transformation in die Likelihood-Funktion ziehen. Die log-Likelihood ist die logarithmierte Likelihood, da ihre Maxima an derselben Stelle liegen, liefern sie das selbe Ergebnis
Für mehrere Einzelereignisse werden die log-Likelihoods dann miteinander addiert.
Da ein Schätzer von einem beobachteten Wert abhängt, hat auch er eine Verteilungsfunktion, die Güte eines Schätzers wird anhand dieser beurteilt. Wenn der Erwartungswert der Schätzfunktion gleich dem gesuchten Parameter §J ist, heißt der Schätzer erwartungstreu, sonst verfälscht. Die Differenz des Erwartungswerts vom ML-Schätzer und ϑ heißt Bias. Ein Schätzer ist wirksamer als ein anderer, wenn er die kleinere Varianz hat, der wirksamste heißt effizient.

Der mittlere quadratische Fehler eines Schätzers ist die Summe seiner Varianz und dem Quadrat des Bias, der Differenz zwischen gesuchten Parameter und Erwartungswert der Schätzfunktion. Es kommt vor, das nicht erwartungstreue Schätzer mit geringem mittleren quadratischen Fehler erwartungstreuen mit großer Varianz vorzuziehen sind. Ein Schätzer ist asymptotisch erwartungstreu, wenn sein Erwartungswert gegen den gesuchten Parameter konvergiert.

Wenn ϑ^ ein ML-Schätzer ist, dann gilt unter Regularitätsbedingungen:
ϑ^ ist asymptotisch erwartungstreu: $E(\vartheta\hat{}) \to \vartheta$
ϑ^ ist konsistent: $\vartheta\hat{} \to \vartheta$
ϑ^ ist asymptotisch normalverteilt: $\vartheta\hat{} \sim N(\vartheta, c/n)$
ϑ^ ist asymptotisch effizient
Das Standardisieren einer zufälligen Variable mit einer unabhängigen, aus einer χ^2-Verteilung gewonnenen Varianzschätzung heißt studentisieren.

Konstruktion eines Konfidenzintervalls

Man bestimmt für eine Variable Y, deren Verteilung von einem Parameter ϑ abhängt, ein (1-alpha)-Prognoseintervall. $a(\vartheta) < Y < b(\vartheta)$
Nun wird y beobachtet, obwohl ϑ und damit die Grenzen des Prognoseintervalls nicht bekannt sind, wird behauptet, die Prognose sei eingetreten.
Die Gleichung wird nach ϑ aufgelöst: $a(y) < \vartheta < b(y)$.
Das Intervall [A(Y); B(Y)] heißt Konfidenzintervall zum Nivea 1-alpha. Ein Prognoseintervall gibt eine Prognose über die zukünftige Realisation einer Variable ab, die mit 1- alpha richtig ist.
Ein Konfidenzintervall ist eine Aussage über einen Parameter ϑ. Je höher das Konfidenzniveau, je sicherer die Aussage, desto größer wird das Intervall, desto unpräziser die Aussage.

Zufallszahlen

Als Zufallszahl wird das Ergebnis von speziellen Zufallsexperimenten bezeichnet.
Zufallszahlen werden bei verschiedenen Methoden der Statistik benötigt, z.B. bei der Auswahl einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit, bei der Verteilung von Elementen auf verschiedene Versuchsgruppen, bei einer Monte-Carlo-Simulation usw.

Verfahren zur Erzeugung von Zufallszahlen werden Zufallszahlengeneratoren genannt. Ein wichtiges Kriterium für Zufallszahlen ist, ob das Ergebnis als unabhängig von früheren Ergebnissen angesehen werden kann oder nicht.
Echte Zufallszahlen werden mit Hilfe physikalischer Phänomene erzeugt: Münzwurf, Würfel, Roulette, Rauschen elektronischer Bauelemente, radioaktive Zerfallsprozesse oder quantenphysikalische Effekte.

In der Anwendung genügen häufig Pseudozufallszahlen. Diese werden mit einem Algorithmus erzeugt. Obwohl sie nicht wirklich zufällig sind, haben sie ähnliche statistische Eigenschaften wie echte Zufallszahlenfolgen.
Zur Überprüfung der Güte der Pseudozufallszahlen werden verschiedene Kriterien betrachtet. Zum Beispiel sollte für die relative Häufigkeiten der Ziffern 0 bis 9 gelten:

$$h(0) = h(1) = \ldots = h(9) \approx 1/10$$

Zufallsgeneratoren

Fibonacci-Generator

... Zufallsgenerator Ordnung $Z_i = (Z_{i-1} + Z_{i-2}) \bmod m$
bestimmt Zufallszahl im Bereich 0 bis m-1, z.B. $m=2^{28}$.
Güte: gleichverteilt nach Chi²-Verteilungstests ; nicht gleichverteilt bei Chaos-Spiel

Generator 2 $Z_i = (2^R * Z_{i-1} + C) \bmod m$ und R>2 und geradem c (m z.B. 2^{25})

Generator 3 $Z_i = (S * Z_{i-1}) \bmod m$ mit S=23 und $m=10^7+1$
Cliff Zufallsgenerator $Z_{i+1} = | 100 * \ln Z_i \pmod 1 |$ mit $Z_0 = 0.1$

400 ganzzahlige Zufallszahlen

212476	28821	289664	883270	517247	361843	933237	656527	475922	194325
176903	709869	61238	431689	506523	16297	606696	833978	934953	453323
316027	250654	613556	48032	425970	122004	776724	887174	694248	606519
816276	676673	134617	943625	532620	184927	170852	911145	859546	54271
631568	486856	609524	714974	257716	73528	36388	386162	644672	896808
262277	398013	790753	435340	865712	319636	674059	992478	177669	626971
529519	768980	82555	895114	747993	46051	370918	749426	569328	338117
940813	59812	991235	624695	394658	112529	565856	20741	828479	743920
5903	494856	860420	670425	772250	494706	195371	499269	64831	589058
272620	154177	888744	485779	793372	700508	117424	35198	175041	804184
724759	78186	229162	308770	608026	248344	609819	665106	673522	87661
829453	197847	106771	85031	888926	443288	999167	496990	818722	42863
752947	60058	678153	926676	936350	954059	809447	771444	510855	625786
393598	967241	602356	332401	604842	577389	238165	513931	910649	25905
721707	354243	314089	496845	566782	139868	585466	279957	163276	276054
780074	546976	596197	69421	588970	292979	289892	636588	319622	427136
399353	548162	553322	247265	120452	67436	776227	782541	341004	93210
530910	738747	304526	166069	885294	30441	208567	147526	265837	134410
909475	431386	951866	748791	155493	796710	777898	492222	20049	261761
840863	627423	457115	548297	259070	43549	150508	15592	279815	981720
79017	173557	282494	238082	469222	134343	474096	828785	57885	611789
323960	351254	835785	328097	34658	526114	694873	937116	595891	654166
650625	823596	218265	972768	561459	387789	193828	146009	517109	674793
480232	373046	317805	457977	555414	848982	716159	135899	339652	562654
343616	52065	231879	665716	493355	96925	557136	897379	181501	701456
972024	799197	158547	581735	625045	704261	792830	843860	118702	735187
997965	308589	570225	295265	626095	165096	317810	787146	998830	313190
69241	543449	497768	3391	539767	203652	386456	634233	876113	21644
285665	816168	413499	838325	973870	61449	562546	703616	434796	709354
872927	382251	323912	946155	570669	227746	275736	29169	115948	158897
723850	74299	578270	723197	155473	16423	875919	481540	972487	602007
176524	198590	380777	523320	5645	573186	979772	53630	860235	493170
974053	792746	373861	48991	178908	382291	330564	790484	241704	300072
74215	961183	750960	92932	110268	694549	154987	657448	946756	406487
661969	427860	471432	868526	543376	580600	411913	696041	512557	614797
675705	235889	100419	918130	616987	87826	200038	177421	527032	744101
202099	743309	895128	81578	393028	308419	236890	690782	537692	508373
536823	276220	818551	305030	602023	612384	553125	261326	873881	789776
361655	67093	494674	735360	706840	925230	675914	241797	977514	657595
665323	989840	538148	640007	859326	298280	416043	925716	857917	585796

Kongruentieller Generator, Lehmer-Generator

Kongruentielle Zufallsgeneratoren wurden zuerst von Lehmer (1948) vorgeschlagen. Man erhält eine Folge positiver ganzer Zufallszahlen x_i durch die Rekursionsvorschrift

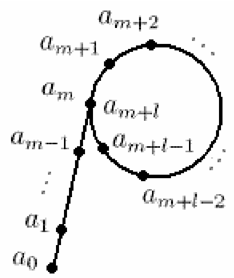
$$x_i = (c \cdot x_{i-1}) \bmod p$$

zum Beispiel mit c = 23 und $p= 10^7+1$.
Der Anfangswert x_0, Keim oder Seed genannt, charakterisiert die Sequenz vollständig. Die maximal mögliche Periode eines solchen Generators ist p-1, genau dann wenn jeder der p-1 Reste von 1 bis p-1 in der Folge auftaucht. Sobald sich ein Rest wiederholt, wiederholt sich ab dort die gesamte Sequenz.
Durch Carmichael wurde 1910 gefunden:
Die Periode ist dann maximal, wenn p eine Primzahl ist und gleichzeitig c so gewählt ist, dass p die kleinste Zahl ist, für die gilt $c^{p-1} \bmod p = 1$.

Für Computer sind Mersennesche Primzahlen besonders interessant, die sich in der Form $2^n - 1$ darstellen lassen. Der größte ganzzahlige Wert, der im Allgemeinen in 32-Bit-Computern in einer integer-Variablen speicherbar ist, ist die Binärzahl, bei der das erste Bit = 0 und alle anderen 31 gesetzt sind, d.h. $2^{31} - 1$. Zufälligerweise ist diese Zahl gerade auch Primzahl.
1988 schlugen Park und Miller einen kongruentiellen Generator mit $p = 2^{31} - 1$ und $c = 7^5 = 16807$ vor.

Die programmtechnische Schwierigkeit, einen numerischen Überlauf von $c \cdot x_{i-1}$ zu umgehen, löste Schrage 1979 durch folgenden Algorithmus

```
const int p = 2147483647; int c = 16807; int q = 127773; int r = 2836;
int rnd = 42;    // seed
int quot = rnd/q;         // integer Division x_i/q:
rnd = c * (rnd - q * quot) - r * quot;
if ( rnd < 0 ) rnd += p;          // für negative Resultate muss p addiert werden
```



Floyds Zyklenalgorithmus

Zur Ermittlung der Testzahlen im Pollardschen Faktorisierungsverfahren werden Pseudozufallszahlen benötigt. Diese können mittels Floyds Zyklenalgorithmus ermittelt werden.
Die Pseudozufallsfolge entsteht mit der deterministischen Berechnungsvorschrift

$$a_{k+1} = f(a_k).$$

Dadurch werden die a_k mod p periodisch, falls sich ein Element wiederholt. Als Funktion f(x) bewährt sich

$$a_{k+1} = f(a_k) = a_k^2 + c \pmod{n}$$

wobei c verschieden -2 und 0 sein soll.
Nach einer Vorperiode der Länge m tritt die Folge a_k mod p in eine Periode der Länge $l \approx \sqrt{p}$.
Anschaulich ergibt sich eine Schleife, die an den griechischen Buchstaben ρ erinnert. Daher nannte Pollard sein Faktorisierungsverfahren auch ρ-Verfahren.

Satz von Floyd: Für eine periodische Folge a_k mod p mit Vorperiode m und Periode l gilt

$$a_i \equiv a_j \pmod{p} \rightarrow i \equiv j \pmod{l}$$

Normierte Zahlen

... reelle Zahlen, deren Ziffernfolge in jedem Positionssystem absolut zufällig verteilt sind. b-normiert heißt eine reelle Zahl, deren Ziffernfolge in einem Positionssystem zur Basis b gleichverteilt ist.
Es ist unbekannt, ob die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π für irgendeine Basis b-normiert sind.
2001 fanden Bailey und Crandall, dass $\alpha[b,p] = \Sigma\ 1 / (p^n * b^{(pn)})$; Summenbildung bis ∞
für jede Basis b > 1 und jede ungerade Primzahl p b-normiert, folglich auch transzendent, sind.
Nebenbei ergab sich, dass die Googol.te Stelle (10^{100}. Stelle) der Zahl $\alpha[2,3]$ die Ziffer 0 ist.

Geschichte der Stochastik

Ab 2600 v.Chr. sind Volkszählungen aus Ägypten bekannt, erfasst wurde Personenzahl, Vorräte und Anzahl der Felder. Seit 550 v.Chr. führten die Römer immer wieder Bevölkerungserhebungen durch. Bei Karl d. Großen stößt man wieder auf statistische Erhebungen. Ende des 18. Jahrhunderts unterhielten die meisten Länder der Erde staatliche statistische Ämter.
Parallel dazu bildete sich an den Hochschulen die "Staatenkunde" aus, die die Länder anhand des statistischen Materials verglich. Sie wurde abgelöst von der "Politischen Arithmetik", welche nicht nur aufgrund der erhobenen Daten zu vergleichen suchte, sondern darüber hinaus Zusammenhänge und Vorhersagen arithmetisch zu gewinnen suchte.
Mathematische Betrachtungen über die Gewinnchancen beim Glücksspiel führten zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung:
1654 legte Demtra seinem Freund Pascal zwei Probleme vor, über deren Lösung Pascal mit Fermat einen regen Briefwechsel führte, in dem sie sich gegenseitig unterschiedliche Lösungen mitteilten.
Im Jahre 1655 erfuhr Huygens in Paris von den beiden Wahrscheinlichkeitsproblemen, und da Pascal und Fermat ihre Lösungen geheim hielten, entwickelte er eigene Methoden zur Lösung.
Huygens schrieb das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung mit dem Titel "Von Reeckening in speelen von geluck". Es enthielt eine Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, wobei Huygens die Methode des arithmetischen Mittels zur Berechnung des zu erwartenden Gewinns entwickelte.
Eine lehrbuchartige Darstellung fand die Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem 1713 erschienenen Buch "De arte conjectandi" (Über die Kunst des Vermutens) von J.Bernoulli.
In diesem Buch entwickelt er zunächst die Kombinatorik und wendet diese dann auf Glücksspiele, aber auch auf wirtschaftliche Probleme an. Es enthält weiter das "Gesetz der großen Zahlen", mit dem eine Verbindung zur Statistik hergestellt werden kann.
Der Name "Statistik" wurde von dem Wissenschaftler Achenwall 1748 geprägt. Einen gewissen Abschluss erreichte die Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem 1812 erschienenen Werk von Laplace: "Théorie analytique des probabilités";
die Wahrscheinlichkeit wird dabei definiert als der Quotient aus der Anzahl der im Sinne der Fragestellung günstigen zur Anzahl der möglichen Ausgänge.
Der Versuch, Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten bei immer größer werdender Anzahl der Durchführungen festzulegen, scheiterte. 1933 veröffentlichte Kolmogorow die "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung", in der die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses axiomatisch festgelegt wird. Am Beginn der Beurteilenden Statistik steht die Entdeckung und das Studium der Verteilungen.
Quetelet stieß auf die Normalverteilung bei seinen Messungen der Brustumfänge schottischer Soldaten; Moivre stieß auf die Normalverteilung bei seinen Grenzwertsätzen und Gauß widmete sich ihr anlässlich der Untersuchung von Messfehlern.
Die Verwendung von Stichproben zum Schätzen und Testen wurde von Biologen angefangen: Galton beschäftigte sich mit Vererbungsgesetzen, die er in seiner 1889 erschienenen "Natural Inheritance" beschrieb.

Messfehler, Messungenauigkeit, Fehler

... hat nichts mit Irrtum oder Versehen zu tun; es sind unvermeidbare Ungenauigkeiten.
Messfehler werden direkt aus der Messmethode abgeleitet. Messungenauigkeit ist nicht die Abweichung vom "wahren" Wert, da dieser praktisch nicht bekannt ist. Sogenannte Rechenfehler sind keine Fehler im mathematischen Sinn, sondern Unzulänglichkeiten der rechnenden Person.

Systematische Fehler ... sind schwer zu erfassen. Änderung der Messmethode zeigt diese mitunter auf.
Zufällige Fehler ... sind unvermeidbar. Durch Wiederholung der Messung können sie reduziert werden.
Absoluter Fehler ... wird in denselben Einheiten wie die gemessene physikalische Größe angegeben
... er entspricht der Abweichung des Näherungswertes vom wahren Wert
Relativer Fehler ... wird als Bruchteil des gemessenen Wertes angegeben
Regelmäßiger Fehler ... Instrumentenfehler treten oft als regelmäßige Fehler auf, die entweder konstante oder systematische Fehler sind

Fehlerrechnung

Voraussetzung: mehrfaches Messen ein und derselben physikalischen Größe
Zur Abschätzung des Einflusses der zufälligen Fehler werden Mittelwert und Standardabweichung ermittelt.

Eingangsfehler

Führt man eine Rechnung mit Näherungswerten durch, so wird das Resultat im Allgemeinen ebenfalls nur angenähert richtig sein. Dabei hängt die Ungenauigkeit des Resultats in erster Linie von den Fehlern der in der Rechnung eingehenden Näherungswerte ab. Den hierdurch bedingten Fehler des Resultats nennt man Eingangsfehler.

Fehlerarten

Jeder Messwert ist im allgemeinen ein Näherungswert für die Maßzahl einer Größe.
Bezeichnet a einen Näherungswert für z, so heißt

$a-z$ der wahre Fehler von a und $(a-z)/z$ der wahre relative Fehler von a.

Da man aber meistens z nicht kennt, sind sowohl der wahre als auch der wahre relative Fehler unbekannt. Dagegen ist man aber häufig in der Lage, eine Betragsschranke für den wahren Fehler anzugeben, d.h. eine positive Zahl Δa, für die gilt

$|a - z| \leq \Delta a$ oder $a - \Delta a \leq z \leq a + \Delta a$

Δa heißt Fehlerschranke oder maximaler absoluter Fehler oder auch absoluter Fehler von a und $\Delta a/|a|$ maximaler relativer Fehler oder relativer Fehler von a. Der relative Fehler von a wird oft in Prozent angegeben.

Fehlerschranke einer Funktion

Ist $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ eine Funktion der Variablen $x_1, \dots, x_k$, so benötigt man Kenntnisse über die Fehlerschranke Δf: $|f(a_1, \dots, a_k) - f(x_1, \dots, x_k)| \leq \Delta f$
wenn für die Werte der Variablen Fehlerschranken Δa_i bekannt sind.

Besitzt $f(x_1, \dots, x_k)$ stetige partielle Ableitungen nach den Variablen x_i, so lässt sich für Δf leicht eine Näherung mittels des totalen Differenzials von f angeben. Es gilt:

$\Delta f \approx \Sigma_{i=1}^{k} \Delta a_i \, |f_{xi}(a_1, \dots, a_k)|$

Beispiele:

$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$:	$\Delta(a_1 + a_2) \approx \Delta a_1 + \Delta a_2$
$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$:	$\Delta(a_1 - a_2) \approx \Delta a_1 + \Delta a_2$
$f(x) = c \cdot x$:	$\Delta(c \cdot a) \approx |c| \cdot \Delta a$
$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$:	$\Delta(a_1 \cdot a_2) \approx \Delta a_1 \cdot |a_2| + \Delta a_2 \cdot |a_1|$
	$\Delta(a_1 \cdot a_2)/|a_1 \cdot a_2| \approx \Delta a_1/|a_1| + \Delta a_2/|a_2|$
$f(x_1, x_2) = x_1 / x_2$:	$\Delta(a_1 / a_2) \approx \Delta a_1 / |a_2| + \Delta a_2 \cdot |a_1|/a_2^2$
	$\Delta(a_1 / a_2)/|a_1/a_2| \approx \Delta a_1 / |a_1| + \Delta a_2 / |a_2|$
$f(x) = x^n$:	$\Delta(a^n) \approx \Delta a \cdot |n\, a^{n-1}|$
	$\Delta(a^n)/|a^n| \approx |n| \, \Delta a/|a|$
$f(x) = \sin x$:	$\Delta(\sin a) \approx \Delta a \cdot |\cos a|$

Beispiel: 3,14 ist ein Näherungswert von π. Da auch 3,14159 ein Näherungswert von π mit fünf geltenden Ziffern nach dem Komma ist, kann 0,0016 als absoluter Fehler gewählt werden. Der relative Fehler von 3,14 ist dann 0,0016/3,14 = 0,00051 oder 0,051 %.

Fehlerfortpflanzung

... tritt auf, wenn entweder die physikalische Größe aus mehreren verschiedenen Zahlenwerten zusammengesetzt ist, oder wenn eine Größe wiederholt gemessen wird.

Summe, Differenz

Gesamtfehler = Summe der Absolutfehler $\quad y = x_1 + x_2 \quad \Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$

Produkt, Quotient

Gesamtfehler = Summe der relativen Fehler $y = x_1 * x_2 / x_3$ $\Delta y / y = \Delta x_1/x_1 + \Delta x_2/x_2 + \Delta x_3/x_3$

Potenz

Gesamtfehler = Multiplikation des relativen Fehlers mit dem Exponenten $y = x_1^n$ $\Delta y / y = n * \Delta x_1/x_1$

Bei Rechenoperationen erster Stufe mit Näherungszahlen dürfen im Ergebnis nur soviel Dezimalen als zuverlässige Dezimalstellen angegeben werden, wie die Ausgangszahl mit der geringsten Anzahl Dezimalstellen hat. Bei Multiplikation und Division hat das Ergebnis nur soviel gültige Ziffern (nicht Dezimalstellen) wie die Ausgangszahl mit der kleinsten Anzahl gültiger Ziffern.

Rechnungsfehler

Rechnungsfehler sind Fehler, die sich durch Aufoder Abrunden im Verlauf einer Rechnung ergeben. Der Rechnungsfehler muss stets kleiner sein als der Eingangsfehler, sonst wird die Genauigkeit der Eingangsdaten nicht genau ausgenutzt. Der Rechnungsfehler soll etwa 1/10 des Eingangsfehlers betragen.

Runden

Das Runden von Zahlen ist eine Methode, Dezimalstellen abzukürzen.
Abrunden: Die letzte beibehaltene Ziffer bleibt unverändert, wenn auf sie eine 0, 1, 2, 3 oder 4 folgt.
Aufrunden: Die letzte beibehaltene Ziffer wird um 1 erhöht, wenn auf sie eine 5, 6, 7, 8 oder 9 folgt.

Unwesentliche Ziffer

Beim Runden von großen Zahlen ergibt sich eine Schwierigkeit. Rundet man z.B. die Zahl 1778 auf Hunderter, so erhält man 1800. Diese Zahl ist zwar richtig gerundet, enthält aber nicht nur zuverlässige Ziffern, da der absolute Fehler größer als 0,5 ist. An die Stellen der vernachlässigten Ziffern sind Nullen getreten. Sie dienen lediglich zur Festlegung der Größenordnung der gerundeten Zahl. Man bezeichnet sie deshalb als unwesentliche Ziffern.

Wesentliche Ziffer

Das Mitführen von unwesentlichen Ziffern (Nullen) kann bei Genauigkeitsbetrachtungen Missverständnisse hervorrufen. Mit Hilfe von Zehnerpotenzen verwendet man deshalb eine andere Schreibweise. Für die gerundete Zahl schreibt man im vorliegenden Fall $18 * 10^2$. Wenn die Zahl 1799,7 zu runden ist, so sind die Nullen im Ergebnis wesentliche Ziffern. Diese Ziffern sind mitzuführen, z.B. in der Form $1{,}800 * 10^3$.

Zuverlässige Ziffer

Eine richtig gerundete Zahl besteht nur aus zuverlässigen Ziffern. Dabei heißen alle Ziffern eines Näherungswertes zuverlässig, wenn der absolute Fehler dieses Näherungswertes höchstens eine halbe Einheit der Ordnung der letzten mitgeteilten Ziffer beträgt.

Rechnungsfehler (2)

Bei einer Berechnung von Werten im Computer können Rechenungenauigkeiten auftreten, da Computer je nach verwendeter Programmiersprache und der Art der Variablendefinition nur mir rationalen(!) Näherungswerten einer bestimmten Genauigkeit arbeiten können.
Insbesondere ist bei der Berechnung längerer Summen Vorsicht geboten, da für die gerundeten rationalen Zahlen das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz nicht(!) mehr gelten.

Zur Verdeutlichung werden auf der rechten Seite von der Leibnizschen Reihe

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 -+\ldots$$

Näherungswerte bis zum Glied 1/(2n+1) berechnet.
Im 1.Verfahren wird von links nach rechts addiert, im 2.Verfahren von rechts nach links.
Das dritte und vierte Verfahren arbeiten ebenfalls von links nach rechts und von rechts nach links, allerdings getrennt für positive und negative Glieder. Am Ende wird die Differenz gebildet.

Da die Ergebnisse voneinander abweichen, erkennt man, dass es auf die Summationsreihenfolge ankommt. Verwendet wird hier der Datentyp "real" mit 15 signifikanten Ziffern.
Bei einem Test mit dem Typ "extended" (19 Ziffern Genauigkeit) tritt bei einer Angabe von 15 Nachkommastellen kein Unterschied auf.
Außerdem werden in verschiedenen Programmen mitunter mehr Stellen angegeben, als die Rechengenauigkeit eigentlich zulässt. Ebenso kann das Ergebnis vom Prozessor-Typ des Computers beeinflusst werden.

Rechengenauigkeit

Unter Rechengenauigkeit versteht man die Anzahl der gültigen Ziffern eines Ergebnisses. Diese Genauigkeit hängt sowohl von der Genaugkeit der Eingangsgrößen als auch von den Rechenoperationen ab. Allgemein sollte man berücksichtigen:

Bei einer Multiplikation oder Division ist beim Ergebnis die Anzahl der gültigen Stellen gleich der kleinsten auftretenden Zahl gültiger Stellen in allen Faktoren.
Bei einer Addition oder Subtraktion hat das Ergebnis keine gültige Stelle mehr als an der letzten gültigen Dezimalstelle der Operanden.

Dennoch wird bei Rechnungen oft eine größere Genauigkeit vorgetäuscht.
Beispiel: Ein Auto fährt 83 km in 1 h 9 min. Wie groß ist die Duchschnittsgeschwindigkeit?
Lösung: Mit $v = s / t = 83 \text{ km} / (1 + 9/60) \text{ h}$
wird $v = 72{,}17 \text{ km/h}$.
Die Angabe mit zwei Dezimalstellen täuscht aber eine nicht vorhandene Genauigkeit vor.
Die Entfernungsangabe von 83 km kann ein Wert von 82,5 km bis 83,499 km sein, während die Zeitangabe zwischen 1 h 8 min 30 s und 1 h 9 min 29 s schwankt. Damit kann das Ergebnis im Intervall

$$v = 82{,}5 \text{ km} / (1 + 9/60 + 29/3600) \text{ h} = 71{,}24 \text{ km/h}$$
$$v = 83{,}499 \text{ km} / (1 + 8/60 + 30/3600) \text{ h} = 73{,}14 \text{ km/h}$$

liegen.
Die Kommastellen des ursprünglichen Ergebnisses sind damit wertlos, da sie eine Exaktheit vortäuschen, die nicht existiert. Das Ergebnis lautet einfach 72 km/h.

Doppelrechnung

Im Sachrechnen werden oft Werte in einer Berechnung verwendet, die von beschränkter Genauigkeit sind.
Mit einem Messband wird nur auf Zentimeter genau gemessen, die Personenwaage zeigt das Gewicht auf ein halbes Kilogramm, die Küchenwaage auf ± 5 Gramm an.
Wird mit einem solchen Messwert weitergerechnet, so kann das Endergebnis nie so genau sein, wie es z.B. die Anzeige auf dem Taschenrechner vorgibt. Um die sinnvolle Genauigkeit herauszufinden, hilft eine Doppelrechnung.

Beispiel: Ein Fußballfeld ist 67,2 (± 0,05) m breit und 103,7 (± 0,05) m lang. Multipliziert man die beiden Zahlen zur Berechnung der Fläche, liefert der Taschenrechner ein Resultat mit 6 Ziffern: 6968,64 m²
Aufgrund der Messung kann man

$67{,}15 \cdot 103{,}65 = 6960{,}0975$ als untere und
$67{,}25 \cdot 103{,}75 = 6977{,}1875$ als obere Grenze

berechnen. Das nennt man Doppelrechnung.
Es macht keinen Sinn, das Resultat genauer als auf drei Ziffern anzugeben. Man notiert das Resultat mit seinem absoluten Fehler wie folgt:

$6970 \pm 10 \text{ m}^2$ oder $69{,}7 \text{ a} \pm 0{,}1 \text{ a}$

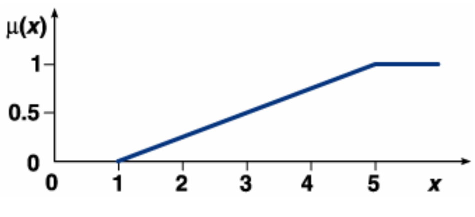
Mit dem Ändern der Masseinheit wird klar, dass das Resultat höchstens drei sichere Ziffern aufweist.
Steht der absolute Fehler nicht bei einem Ergebnis, täuscht man eine zu große Genauigkeit vor.

Fuzzy-Logik

Im Gegensatz zur Aussagenlogik (binären Logik) gibt es auch eine "Fuzzy-Logik". In der Fuzzy-Logik wird einer Aussage kein Wahrheitsgehalt zugeordnet, sondern eine Wahrscheinlichkeit. Eine "Fuzzy-Aussage" ist z.B. der Satz: "Das Kabel führt mit 90% Wahrscheinlichkeit Strom". Die Fuzzy-Logik kommt vorwiegend in technischen Anwendungen vor. Fuzzy-Logik wird auch "unscharfe Logik" genannt

Schaltalgebra (fuzzywertig)

Für unscharfe Aussagen im Sinne der Fuzzy-Mengen-Theorie wird eine rechnergestützte Verarbeitung im Sinne des fuzzy-logischen Schließens elektronischer Bauelemente benötigt, die Wahrheitswerte zwischen 0 und 1 feststellen und verarbeiten können.



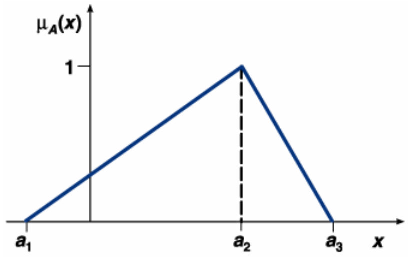
Unscharfe Menge

Zugehörigkeitsfunktion μ(x) in der klassischen Mengenlehre, nimmt nur die Werte 0 und 1 an:
$\mu(x) = 1$ Element $x \in G$ (Grundmenge) $= 0$ Element $x \notin G$
Modellierung unscharfer Mengen (Fuzzy-Sets, Fuzzy-Mengen): Auch Zugehörigkeitsgrade zwischen 0 und 1 zulässig.
Zugehörigkeitsgrad von x = 1,2,3,4,5 zur Menge in der Abbildung ist μ(x) = 0, 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1.

Unscharfe Teilmenge

Unscharfe Teilmenge (fuzzy subset) A einer Menge X ist gekennzeichnet durch ihre Zugehörigkeitsfunktion (auch als Mitgliedschaftsfunktion oder membership function bezeichnet): $\mu_A: X \text{ --> } [0,1]$,
die jedem Element x aus X eine Zahl μ(x) im Intervall [0,1] zuordnet, die den Grad der Zugehörigkeit von x in A repräsentiert. X repräsentiert den Grundbereich, der geeignet zu wählen ist. Die scharfen Mengen werden als spezielle unscharfe Mengen interpretiert, bei denen nur die Werte 0 und 1 als Zugehörigkeitswerte vorkommen.

Gleichheit zweier unscharfer Mengen A und B



Die Werte ihrer Zugehörigkeitsfunktion sind gleich: A = B, falls $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ für alle $x \in X$. Eine andere Beschreibungsform ist gegeben durch $A := \{\mu_A(x)/x \mid x \in X\}$.
Singletons: Wertepaare $\mu_A(x_i)/x_i$ mit einem Ordinatenwert $\mu_A(x_i)$ und einen Abszissenwert x_i. x_i, $\mu_A(x_i)$ sind damit Punkte im R^2.
Für diskrete und endliche Stützmengen $S_A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ von A gilt die Summendarstellung:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n$$

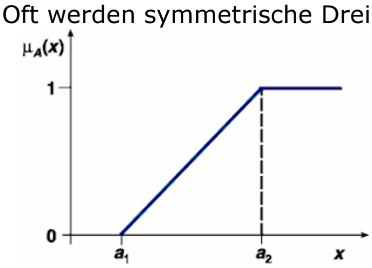
Der Zugehörigkeitsgrad $\mu_A(x)$ in einer Fuzzy-Menge A selbst darf dort auch wieder eine Fuzzy-Menge sein.
Ultrafuzzy-Sets: Fuzzy-Sets, deren Zugehörigkeitsfunktion selbst wieder ein Fuzzy-Set ist.

Fuzzy-Konzept

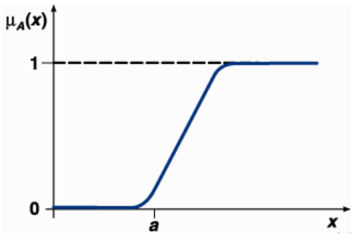
Fuzzy-Methodik: Problemstellungen, die sich in sprachlicher Form beschreiben lassen, können in algorithmische Berechnungsverfahren überführt werden. Sprachelemente lassen sich in Fuzzy-Mengen durch Kennlinien bzw. Graphen darstellen. Sprachliche Aussagen wie WENN-DANN-Regeln von Algorithmen werden dann zu Berechnungsverfahren.
Fuzzy-Linguistik: linguistische Variable und linguistischer Term, Interpretation am Beispiel „niedrige Temperatur": Die Temperatur wird als Kenngröße bezeichnet, sie kennzeichnet die linguistische Variable und repräsentiert die Grundmenge in der Fuzzy-Modellierung. Niedrig ist der umgangssprachliche, linguistische, Wert der Kenngröße und wird durch eine Fuzzy-Menge beschrieben. Fuzzy-Mengen von z.B. „niedrig", „mittel", „hoch", usw. sind linguistische Terme, ihre Anzahl ist abhängig vom vorliegenden Problem.

Funktionsgraphen für die Modellierung unscharfer Mengen

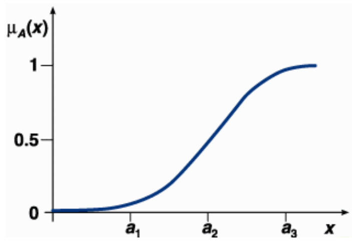
Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$ zu unscharfen Mengen werden durch Graphen mit Werten zwischen 0 und 1 modelliert, sie repräsentieren eine graduelle Zugehörigkeit: $\mu_A(x) = 0$ für $x < a_1$ $= (x-a_1)/(a_2-a_1)$ für $a_1 \le x \le a_2$ $= (a_3-x)/(a_3-a_2)$ für $a_2 \le x \le a_3$ $= 0$ für $x > a_3$
Oft werden symmetrische Dreiecksfunktionen benutzt.



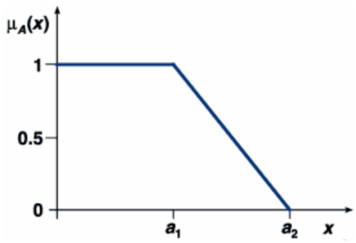
Gamma-Funktion
$\mu_A(x) = 0$ für $x < a_1$; $= (x-a_1)/(a_2-a_1)$ für $a_1 \le x \le a_2$; $= 1$ für $x > a_2$



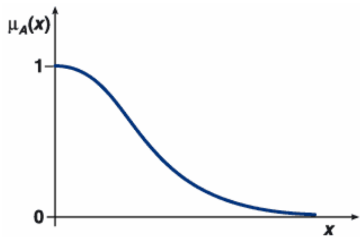
Geglättete Gamma-Funktion
$\mu_A(x) = 0$ für $0 \le x \le a$; $= k(x-a)^2/(1 + k(x-a)^2)$ für $a \le x \le \infty$, $k>0$



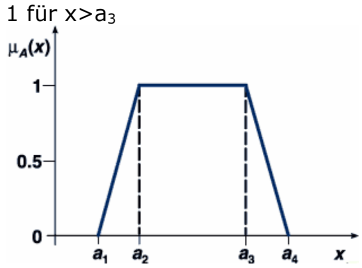
Zadehs S-Funktion
$\mu_A(x) = 0$ für $x<a_1$; $= 2((x-a_1)/(a_3-a_1))^2$ für $a_1 \le x \le a_2$; $= 1 - 2((x-a_3)/(a_3-a_1))^2$ für $a_2 \le x \le a_3$; $= 1$ für $x>a_3$



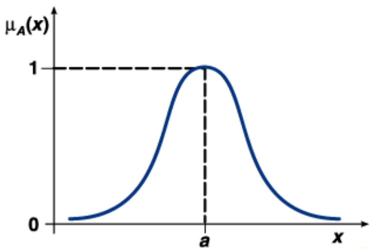
L-Funktion
$\mu_A(x) = 1$ für $x < a_1$;
$= (a_2-x)/(a_2-a_1)$ für $a_1 \le x \le a_2$;
$= 0$ für $x > a_2$



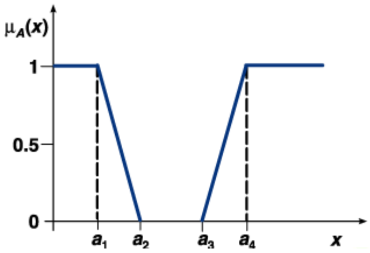
Geglättete L-Funktion
$\mu_A(x) = e^{-kx^2}$, $k > 0$



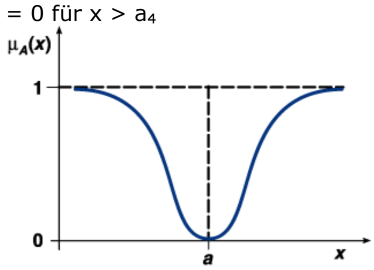
Trapezfunktion
$\mu_A(x) = 0$ für $x < a_1$
$= (x-a_1)/(a_2-a_1)$ für $a_1 \le x \le a_2$
$= 1$ für $a_2 \le x \le a_3$
$= (a_4-x)/(a_4-a_3)$ für $a_3 \le x \le a_4$
$= 0$ für $x > a_4$



Geglättete Mitgliedschaftsfunktion
$\mu_A(x) = e^{-k(x-a)^2}$, $k > 0$



Funktion mit Senke
$\mu_A(x) = 1$ für $x \le a_1$, $= (a_2-x)/(a_2-a_1)$ für



Geglättete Senkenfunktion
$\mu_A(x) = 1 - e^{-k(x-a)^2}$, $k > 0$

alternativ: $\mu_A(x) = 1/(1+k(x-a)^2)$ | $a_1 \le x \le a_2$, $= 0$ für $a_2 \le x \le a_3$, $= (x-a_3)/(a_4-a_3)$ für $a_3 \le x \le a_4$, $= 1$ für $a_4 \le x$ | alternativ: $\mu_A(x) = k(x-a)^2/(1+k(x-a)^2)$

Für $a_2 = a_3 = a$ und $a-a_1 = a_4-a$ geht der Graph der Trapezfunktion in den einer symmetrischen Dreiecksfunktion über.
Unscharfe und unpräzise Informationen können durch Fuzzy-Mengen beschrieben und durch Kennlinien $\mu(x)$ visualisiert werden.
Support oder Träger (Einflußbreite) der Fuzzy-Menge μ in *A*, definiert durch

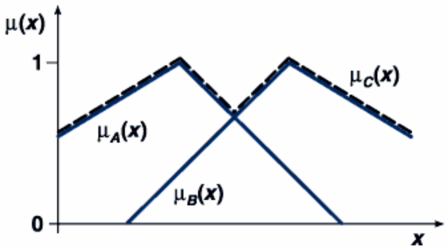
$$\mathrm{supp}(\mu) = T(\mu) = \{x | x \in A,\ \mu(x) > 0\}$$

Leere Fuzzy-Menge μ in *A*, falls $\mu(x) = 0\ \forall\ x \in A$
Universelle Fuzzy-Menge μ in *A*, falls $\mu(x) = 1$ für alle $x \in A$
Fuzzy-Teilmenge μ_1 von μ_2, falls $\mu_1(x) \le \mu_2(x)$ für alle $x \in A$;
Schreibweise $\mu_1 \subseteq \mu_2$
Toleranz der Fuzzy-Menge μ in *A*, definiert durch $[a,b] = \{x | \mu(x) = 1\}$
Höhe $H(\mu)$ der Fuzzy-Menge μ in *A*, definiert durch $H(\mu) = \max\{\mu(x) | x \in A\}$
Die Fuzzy-Menge μ heißt normal, wenn $H(\mu) = 1$, sonst subnormal.
Schnitt einer Fuzzy-Menge μ in der Höhe α (α-Schnitt), gilt $\mu: A \to [0,1]$ und $\alpha \in (0,1]$, dann heißt $\mu_\alpha : A \to [0,1]$ mit $\mu_\alpha(x) = 1$ für $\mu(x) \ge \alpha$ und 0 sonst Schnitt der Fuzzy-Menge μ in *A*.

Ähnlichkeit von Fuzzy-Mengen μ_1 und μ_2

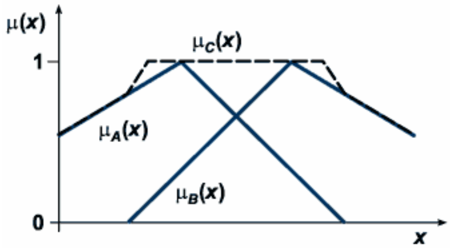
1. $\mu_1, \mu_2 : A \to [0,1]$ heißen fuzzy-ähnlich, falls es für jedes $\alpha \in (0,1]$ Zahlen α_i mit $\alpha < \alpha_i \le 1$, $i=1,2$; gibt, so dass gilt: $\mathrm{supp}(\alpha_1\mu_1)_\alpha \subseteq \mathrm{supp}(\mu_2)_\alpha$, $\mathrm{supp}(\alpha_2\mu_2)_\alpha \subseteq \mathrm{supp}(\mu_1)_\alpha$.
2. $\mu_1, \mu_2 : A \to [0,1]$ heißen streng fuzzy-ähnlich, falls gilt: $\mu_1 \approx \mu_2$ und $1-\mu_1 \approx 1-\mu_2$.

μ_1 und μ_2 sind fuzzy-ähnlich, wenn sie dieselbe Toleranz besitzen:
$\mathrm{supp}(\mu_1)_1 = \mathrm{supp}(\mu_2)_2$, da die Toleranz gerade gleich der Einflußbreite des α-Schnitts einer Fuzzy-Menge in der Höhe 1 ist, $\mathrm{supp}(\mu)_1 = \{x \in A \mid \mu=1\}$. Folge: Sind Toleranz und Einflußbreite von zwei Fuzzy-Mengen gleich, so sind sie streng fuzzy-ähnlich.



Elementare Operationen von Fuzzy-Mengen
Vereinigung $A \cup B$ (engl. union) zweier Fuzzy-Mengen *A* und *B*, definiert durch die Maximumoperation MAX(.,.) bezüglich ihrer Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$ und $\mu_B(x)$: $C = A \cup B$ und $\mu_C = \mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$, für alle $x \in X$
hierbei ist $\mathrm{MAX}(a,b) = a$ für $a \ge b$ und b für $a < b$. Die Vereinigung als logische ODER-Verknüpfung kann in verschiedener Form dargestellt werden.

ODER-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen
Operation MAX.
In dieser Darstellung definiert $\mu_C(x)$ den maximalen Wert der jeweiligen Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ oder $\mu_B(x)$. Mit Hilfe der beschränkten, algebraischen und drastischen Summe lassen sich weitere Verknüpfungen als Ergänzung zur Vereinigungsbildung definieren.

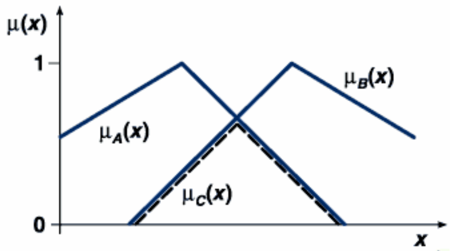


Beschränkte Summe (bounded sum)

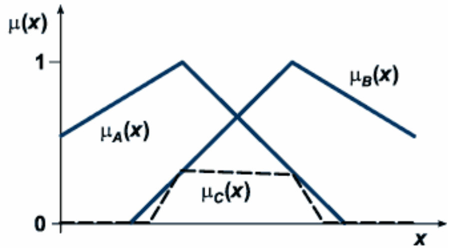
$$C = A \oplus B \text{ und } \mu_C = \mathrm{MIN}(1, \mu_A(x)+\mu_B(x))$$

Algebraische Summe, ist definiert durch
$C = A+B$ und $\mu_C = \mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\,\mu_B(x)$.
Die Zugehörigkeitsfunktion μ_C beschreibt zu jedem *x* die algebraische Summe.
Drastische Summe: Die Zugehörigkeitsfunktion der drastischen Summe ist definiert durch: $C = A \lozenge B$ und $\mu_C = \mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$, wenn $\mu_A(x)$ oder $\mu_B(x) = 0$ sind, andernfalls $\mu_C = 1$.

Schnittmenge
Die Schnittmenge $A \cap B$ (engl. intersection) zweier Fuzzy-Mengen *A* und *B*, definiert durch die Minimumoperation MIN(.,.) bezüglich ihrer Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A(x)$ und $\mu_B(x)$: $C = A \cap B$ und $\mu_C = \mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$, für alle $x \in X$, hierbei ist $\mathrm{MIN}(a,b) = a$ für $a \le b$ und b für $a > b$. Die Schnittmengenbildung entspricht der logischen UND-Verknüpfung und kann durch verschiedene Darstellungsformen interpretiert werden.



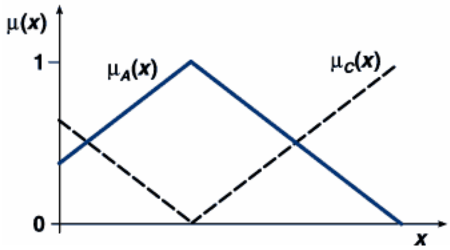
UND-Operation zweier Zugehörigkeitsfunktionen
Operation MIN. Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_C(x)$ definiert den minimalen Wert von $\mu_A(x)$ oder $\mu_B(x)$. Für alle $x \in X$ existieren analog dem erweiterten Summenbegriff für die Vereinigungsbildung auch für die Durchschnittsbildung entsprechende Erweiterungen.



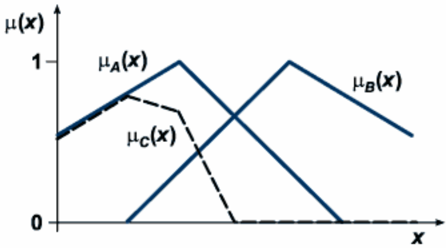
Beschränktes Produkt (bounded product)
definiert durch:

$C = A \cdot B$ und $\mu_C(x) = MAX(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$.

$\mu_C(x)$: Zugehörigkeitsfunktion des beschränkten Produkts
Algebraisches Produkt, definiert durch $C = A \bullet B$ und $\mu_C(x) = \mu_A(x)$ $\mu_B(x)$
Drastisches Produkt $C = A * B$ und $\mu_C(x) = MIN(\mu_A(x),\mu_B(x))$ wenn $\mu_A(x)$ oder $\mu_B(x) = 1$ sind,
sonst 1.



Komplement A^C einer Fuzzy-Menge *A*, definiert durch die Negation seiner Zugehörigkeitsfunktion: $\mu_A{}^C = 1 - \mu_A(x)$.
Die Negation von Zugehörigkeitsfunktionen wird beschrieben durch die entsprechenden Komplemente. $\mu_A{}^C$ (x) ist das Komplement der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$.



Differenzbildung und Schnittbildung
Die Differenz von zwei Zugehörigkeitsfunktionen ist gegeben durch $\mu_C(x) = \mu_A(x) - \mu_B(x) = MAX(0, \mu_A(x) - \mu_B(x))$. Der Wertebereich ist definiert durch $\mu_C(x) \in [0,1]$, falls $\mu_A(x)$ und $\mu_B(x) \in [0,1]$.
Durch Differenzbildung ergibt sich eine neue Zugehörigkeitsfunktion $\mu_C(x)$, mit Werten zwischen [0,1].
Schnittbildung: Für unscharfe α-Schnitte folgt

$(A\ B)^{>\alpha} = A^{>\alpha}\ B^{>\alpha}$ für die Vereinigungsmenge
$(A\ B)^{>\alpha} = A^{>\alpha}\ B^{>\alpha}$ für die Durchschnittsbildung

$(A^C)^{>\alpha} = A^{\leq 1-\alpha} = \{x \in X |\ \mu_A(x) \leq 1 - \alpha\}$ für die Komplementbildung. Vergleich zwischen Boolescher Logik und Fuzzy-Logik:

Operator	Boolesche Logik	Fuzzy-Logik
AND	$C = A \wedge B$	$\mu_C(x) = MIN(\mu_A,\mu_B)$ mit $C = A \cap B$
OR	$C = A \vee B$	$\mu_C(x) = MAX(\mu_A,\mu_B)$ mit $C = A \cup B$
NOT	$C = \neg A$	$\mu_C{}^C(x) = 1-\mu_c$

Rechengesetze für unscharfe Mengen

Aus vorstehenden Definitionen für die Vereinigungs-, Durchschnitts- und Komplementbildung lassen sich einfache Rechengesetze herleiten. Aus der Vereinigungsbildung ergibt sich für beliebige unscharfe Mengen A, B, C:

Kommutativität	$A \cup B = B \cup A$	Assoziativität	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotenz	$A \cup A = A$	Monotonie	$A \subseteq B \rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
Speziell	$A \cup \varnothing = A$	$A \cup X = X$	

Entsprechend gilt für die Durchschnittsbildung:

Kommutativität	$A \cap B = B \cap A$	Assoziativität	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotenz	$A \cap A = A$	Monotonie	$A \subseteq B \rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
Speziell	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cap X = A$	

Für unscharfe Mengen sind wie bei scharfen Mengen die folgenden Distributivgesetze gültig:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Rechengesetze für die Komplementbildung:

Idempotenz	$A = A^{CC}$	Inklusion	$A \subseteq B \rightarrow B^C \subseteq A^C$
Vereinigung	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	Durchschnitt	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Nicht alle Rechenregeln, die für scharfe Mengen Gültigkeit besitzen, lassen sich für unscharfe Mengen automatisch übertragen. Aufgrund der Eigenschaften unscharfer Mengen ist möglich $A \cup A^C \neq X$ und $A \cap A^C \neq \varnothing$.

Regeln für Familien unscharfer Mengen

Für Familien $(A_j \mid j \in J)$ unscharfer Mengen (*J* als Indexmenge) sei für alle $x \in X$ definiert:

Vereinigung	$C = \cup_{j \in J} A_j$ mit $\mu_C(x) = \sup_{j \in J} \mu_{Aj}(x)$
Durchschnitt	$C = \cap_{j \in J} A_j$ mit $\mu_C(x) = \inf_{j \in J} \mu_{Aj}(x)$
Distributivgesetz	$B \cap \cup_{j \in J} A_j = \cup_{j \in J} (B \cap A_j)$
	$B \cup \cap_{j \in J} A_j = \cap_{j \in J} (B \cup A_j)$