

Regelmäßiges 257-Eck

257 ist Fermatsche Primzahl, wodurch das regelmäßige 257-Eck allein mit Zirkel und Lineal eindeutig konstruierbar ist. Mit bloßem Auge ist ein 257-Eck nicht mehr von einem Kreis zu unterscheiden. (siehe Abbildung)
Durch Richelot und Schwendenstein wurde 1832 erstmals eine vollständige Konstruktionsbeschreibung angegeben. Durch de Temple wurde 1991 die Konstruktion vereinfacht und nutzt u.a. 150 verschiedene Kreise und 566

Geraden.

Zentriwinkel $\approx 1^\circ$, Innenwinkelsumme 45900° , Diagonalenzahl 32639

Seite $s = 0,0244$, Umfang $u = 6,283$, Flächeninhalt $A = 3,1313$,

Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_9 , die Höhe h , der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

$$a = R (2 \sin(180^\circ/257)) \approx 0,0244475829850 R = r (2 \tan(180^\circ/257)) \approx 0,0244494096819 r$$

$$r = a / (2 \tan(180^\circ/257)) \approx 40,9007830050 a$$

$$r = R/2 \sin(360^\circ/257) / \sin(180^\circ/257) \approx 0,999925286669 R$$

$$R = a / (2 \sin(180^\circ/257)) \approx 40,9038390670 a$$

$$R = 2r \sin(180^\circ/257) / \sin(360^\circ/257) \approx 1,00007471891 r$$

$$A = 257 a^2 / (4 \tan(180^\circ/257)) \approx 5255,75061614 a^2$$

$$A = 257 R^2 \sin(180^\circ/257) \cos(180^\circ/257) \approx 3,14127970057 R^2 \approx 3,14174914412 r^2$$

$$u = 257 a$$

$$d_i = a \sin(180^\circ i/257) / \sin(180^\circ/257)$$

Durch Dr.Bernd Winter werden unter

http://mathematik-olympiaden.de/public/17_257_65537/

Erklärungen zur Konstruktion eines regelmäßigen 257-Ecks gegeben.

U.a. findet man auch ein mp4-Video, in dem die Konstruktion demonstriert wird.

Konstruktion eines 257-Ecks – Werte für Winkel $(n \cdot \pi)/257$

Zur Konstruktion eines 257-Ecks ist es notwendig die Werte für Winkel $(n \cdot \pi)/257$ zu konstruieren. Die theoretische Herleitung ist sehr anspruchsvoll wird auf den nächsten Seiten gegeben.

Festlegung: $w = (2 \cdot \pi)/257$.

A sei die Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis 128, $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 128\}$. $M(x)$ sei eine den natürlichen Zahlen definierte Funktion mit

$$M(x) = x \text{ für } 129 > x$$

$$M(x) = 257 - x \text{ für } 257 > x > 128$$

$$M(x) = M(y) \text{ für } x \geq 257, \text{ mit } y = x \bmod 257$$

Es folgt, dass $M(x+257) = M(x) = M(257-x)$. Für ein natürliches x werden Untermengen von A konstruiert mit

$$\{ M(x), M(2 \cdot x), M(4 \cdot x), M(8 \cdot x), M(16 \cdot x), M(32 \cdot x), M(64 \cdot x), M(128 \cdot x) \}$$

16 Mengen $A_1, A_2, \dots, A_{16}$:

$$A_1 = \{ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \}$$

$$A_2 = \{ 3, 6, 12, 24, 48, 96, 65, 127 \}$$

$$A_3 = \{ 5, 10, 20, 40, 80, 97, 63, 126 \}$$

$$A_4 = \{ 7, 14, 28, 56, 112, 33, 66, 125 \}$$

$$A_5 = \{ 9, 18, 36, 72, 113, 31, 62, 124 \}$$

$$A_6 = \{ 11, 22, 44, 88, 81, 95, 67, 123 \}$$

$$A_7 = \{ 13, 26, 52, 104, 49, 98, 61, 122 \}$$

$$A_8 = \{ 15, 30, 60, 120, 17, 34, 68, 121 \}$$

$$A_9 = \{ 19, 38, 76, 105, 47, 94, 69, 119 \}$$

$$A_{10} = \{ 21, 42, 84, 89, 79, 99, 59, 118 \}$$

$$A_{11} = \{ 23, 46, 92, 73, 111, 35, 70, 117 \}$$

$$A_{12} = \{ 25, 50, 100, 57, 114, 29, 58, 116 \}$$

$$A_{13} = \{ 27, 54, 108, 41, 82, 93, 71, 115 \}$$

$$A_{14} = \{ 37, 74, 109, 39, 78, 101, 55, 110 \}$$

$$A_{15} = \{ 43, 86, 85, 87, 83, 91, 75, 107 \}$$

$$A_{16} = \{ 45, 90, 77, 103, 51, 102, 53, 106 \}$$

B sei die Vereinigung von $A_2, A_3, A_4, A_9, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}$. C sei die Vereinigung aller anderen Elemente von A , d.h. $C = A \setminus B$. A ist damit die Vereinigung der disjunkten Mengen B und C , die jeweils 64 Elemente beinhalten. Damit gilt:

$$\left[\sum_{i \in B} \cos(iw) \right] \cdot \left[\sum_{i \in C} \cos(iw) \right] = 32 \cdot \left[\sum_{i \in A} \cos(iw) \right]$$

Die linke Gleichungsseite ist die Summe von Ausdrücken der Form $\cos(aw) \cdot \cos(bw)$, wobei a und b natürliche Zahlen sind.

Die Substitution $(\cos((a+b)w) + \cos((a-b)w))/2$ ist möglich und die Anwendung von $\cos(nw) = \cos(M(n)w)$. Nach dem Reduzieren ist die Gleichung lösbar. Die Schwierigkeit ist, dass dazu tausende von Substitutionen notwendig wären. Aus diesem Grund wird folgender Weg begangen:

Für jedes natürliche n und reelle v gilt $1 + \cos(v) + \cos(2v) + \dots + \cos((n-1)v) = \sin(nv/2) \cos((n-1)v/2) / \sin(v/2)$. Für $v = w$ wird

$$\sum_{i \in A} \cos(iw) = \cos(w) + \cos(2w) + \dots + \cos(128w) = \frac{1}{2} (1 + \cos(w) + \dots + \cos(256w)) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} * \frac{\sin \frac{257 * 2\pi}{2 * 357} \cos \frac{256 * 2\pi}{2}}{\sin \frac{2\pi}{2 * 257}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Schreibweise: $t = \sum_{i \in B} \cos(iw) = \text{Summe}(B)$; $s = \sum_{i \in C} \cos(iw) = \text{Summe}(C)$

Da A die Vereinigung von B und C ist, gilt $t + s = -1/2$; $t * s = -16$. t und s sind dann die Wurzeln der Gleichung $x^2 + x/2 - 16 = 0$ mit dem Wert $1/4 (-1 \pm \sqrt{257})$. Da t negativ ist, wird $\text{Summe}(B) = 1/4 (-1 - \sqrt{257})$; $\text{Summe}(C) = 1/4 (-1 + \sqrt{257})$.

B_1 sei nun die Vereinigung von $A_3, A_5, A_7, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}$; C_1 die von allen Elementen aus A , d.h. $C_1 = A \setminus B_1$.

Außerdem sei $t_1 = \text{Summe}(B_1)$, $s_1 = \text{Summe}(C_1)$. Dann wird $t_1 + s_1 = t + s = -1/2$ und weiter

$$t_1 * s_1 = \left[\sum_{i \in B_1} \cos(iw) \right] * \left[\sum_{i \in C_1} \cos(iw) \right] = 34 * \left[\sum_{i \in B} \cos(iw) \right] + 30 * \left[\sum_{i \in C} \cos(iw) \right] = 34t + 30s$$

Mit den schon gefundenen Werten wird $t_1 * s_1 = 34 (-1 - \sqrt{257})/4 + 30 (-1 + \sqrt{257}) = -16 - \sqrt{257}$. Damit sind t_1 und s_1 die Wurzeln der Gleichung $x^2 + 1/2 x - 16 - \sqrt{257} = 0$. Lösung und Probe liefern:

$$t_1 = (-1 - \sqrt{(257 + 16\sqrt{257})})/4 ; s_1 = 1/4 (-1 + \sqrt{(257 + 16\sqrt{257})}).$$

Analog sei B_2 die Vereinigung der Mengen $A_2, A_4, A_5, A_7, A_9, A_{10}, A_{12}, A_{16}$ und C_2 die Differenz von A und B_2 und $t_2 = \text{Summe}(B_2)$, $s_2 = \text{Summe}(C_2)$. Auf gleiche Weise wird $t_2 + s_2 = -1/2$ und

$$t_2 * s_2 = \left[\sum_{i \in B_2} \cos(iw) \right] * \left[\sum_{i \in C_2} \cos(iw) \right] = 30 * \left[\sum_{i \in B} \cos(iw) \right] + 34 * \left[\sum_{i \in C} \cos(iw) \right] = 30t + 34s$$

und $t_2 = (-1 + \sqrt{(257 - 16\sqrt{257})})/4 ; s_2 = 1/4 (-1 - \sqrt{(257 - 16\sqrt{257})})$.

B_3 ist nun die Vereinigung von $A_4, A_6, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$; $C_3 = A \setminus B_3$ und $t_3 = \text{Summe}(B_3)$, $s_3 = \text{Summe}(C_3)$.

$$t_3 * s_3 = \left[\sum_{i \in B_3} \cos(iw) \right] * \left[\sum_{i \in C_3} \cos(iw) \right] = 31 * \left[\sum_{i \in B} \cos(iw) \right] + 30 * \left[\sum_{i \in C} \cos(iw) \right] + 2 * \left[\sum_{i \in B_1} \cos(iw) \right] + \left[\sum_{i \in B_2} \cos(iw) \right] = 31t + 30s + 2t_1 + t_2$$

Damit wird $t_3 * s_3 = -16 - 1/4(\sqrt{257} + 2\sqrt{(257 + 16\sqrt{257})} - \sqrt{(257 - 16\sqrt{257})})$; $t_3 + s_3 = t + s = -1/2 \rightarrow$ Lösung der quadratischen Gleichung

$$4t_3 = -1 - \sqrt{257 + 4\sqrt{257} + 8\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} - 4\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}} \quad 4s_3 = -1 + \sqrt{257 + 4\sqrt{257} + 8\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} - 4\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}}$$

Nach dem gleichen Verfahren werden jetzt weitere Mengen gebildet. B_4 ist die Vereinigung von $A_4, A_5, A_6, A_7, A_9, A_{11}, A_{13}, A_{14}$; $C_4 = A \setminus B_4$ und $t_4 = \text{Summe}(B_4)$, $s_4 = \text{Summe}(C_4) \rightarrow$

$$t_4 * s_4 = \left[\sum_{i \in B_4} \cos(iw) \right] * \left[\sum_{i \in C_4} \cos(iw) \right] = 31t + 32s - t_1 + 2t_2 = -16 + (\sqrt{257} + \sqrt{257 + 16\sqrt{257}} + 2\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}) / 4$$

$$4t_4 = -1 - \sqrt{257 - 4\sqrt{257} - 4\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} - 8\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}} \quad 4s_4 = -1 + \sqrt{257 - 4\sqrt{257} - 4\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} - 8\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}}$$

B_5 ist die Vereinigung von $A_3, A_4, A_6, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{15}$; $C_5 = A \setminus B_5$; $t_5 = \text{Summe}(B_5)$, $s_5 = \text{Summe}(C_5)$

$$t_5 * s_5 = 32t + 33s - t_1 - 2t_2 = -16 + (\sqrt{257} - \sqrt{257 + 16\sqrt{257}} - 2\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}) / 4$$

$$4t_5 = -1 - \sqrt{257 - 4\sqrt{257} + 4\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} + 8\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}} \quad 4s_5 = -1 + \sqrt{257 - 4\sqrt{257} + 4\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} + 8\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}}$$

B_6 besteht aus $A_2, A_5, A_6, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{14}, A_{16}$; $C_6 = A \setminus B_6$; $t_6 = \text{Summe}(B_6)$, $s_6 = \text{Summe}(C_6)$.

$$t_6 * s_6 = 34t + 33s - 2t_1 - t_2 = -16 + (\sqrt{257} - 2\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} + \sqrt{257 - 16\sqrt{257}}) / 4$$

$$4t_6 = -1 - \sqrt{257 + 4\sqrt{257} - 8\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} + 4\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}} \quad 4s_6 = -1 + \sqrt{257 + 4\sqrt{257} - 8\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} + 4\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}}$$

Für die nachfolgenden Ausführungen seien $a = \sqrt{257}$; $b = \sqrt{(257 - 16\sqrt{257})}$; $c = \sqrt{(257 + 16\sqrt{257})}$.

B7 besteht aus A4, A7, A8, A11, A12, A14, A15, A16. $C7 = A \setminus B7$; $t7 = \text{Summe}(B7)$, $s7 = \text{Summe}(C7)$

$$t_7 * s_7 = 31t + 30s + t_2 + 2t_3 + t_4 - t_5 = -16 + (a - b + 2\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + \sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - \sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}) / 4$$

$$4t_7 = -1 - \sqrt{257 + 4a - 4b + 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$

$$4s_7 = -1 + \sqrt{257 + 4a - 4b + 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$

B8 besteht aus A4, A5, A6, A8, A10, A13, A15, A16. $C8 = A \setminus B8$; $t8 = \text{Summe}(B8)$, $s8 = \text{Summe}(C8)$.

$$t_8 * s_8 = 33t + 32s - t_2 + t_4 + t_5 - 2t_6 = -16 - (a + b + \sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} + \sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 2\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}) / 4$$

$$4t_8 = -1 - \sqrt{257 + 4a + 4b + 4\sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 8\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_8 = -1 + \sqrt{257 + 4a + 4b + 4\sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 8\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

B9 besteht aus A3, A7, A8, A9, A10, A11, A13; $C9 = A \setminus B9$; $t9 = \text{Summe}(B9)$, $s9 = \text{Summe}(C9)$.

$$t_9 * s_9 = 33t + 32s - t_2 - t_4 - t_5 + 2t_6 = -16 - (a + b - \sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} - \sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 2\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}) / 4$$

$$4t_9 = -1 - \sqrt{257 + 4a + 4b - 4\sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} - 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 8\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_9 = -1 + \sqrt{257 + 4a + 4b - 4\sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} - 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 8\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

Weitere Mengen seien B10 mit A3, A6, A7, A8, A9, A12, A14, A16; B11 mit A3, A4, A5, A8, A10, A11, A14, A16; B12 mit A2, A5, A8, A9, A11, A12, A14, A15; B13 mit A2, A3, A4, A6, A7, A8, A10, A14 und B14 mit A2, A3, A4, A5, A6, A8, A12, A13.

C10, C11, C12, C13, C14 seien wieder die zugehörigen Mengendifferenzen zu A und $t_k = \text{Summe}(B_k)$, $s_k = \text{Summe}(C_k)$ für $k=10, 11, 12, 13, 14$. Damit ergibt sich weiter:

$$t_{10} * s_{10} = 31t + 32s - t_1 - t_3 + 2t_4 + 6$$

$$t_{11} * s_{11} = 33t + 34s + t_1 - t_3 + 2t_5 - t_6$$

$$t_{12} * s_{12} = 33t + 34s - t_1 + t_3 - 2t_4 - t_6$$

$$t_{13} * s_{13} = 33t + 32s + t_2 - 2t_4 - t_4 + t_5$$

$$t_{14} * s_{14} = 29t + 30s + t_1 + t_3 + 2t_5 + t_6$$

$$4t_{10} = -1 - \sqrt{257 - 4c - 4b - 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_{10} = -1 + \sqrt{257 - 4c - 4b - 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4t_{11} = -1 - \sqrt{257 - 4a + 4c - 4\sqrt{257 - 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_{11} = -1 + \sqrt{257 - 4a + 4c - 4\sqrt{257 - 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4t_{12} = -1 - \sqrt{257 - 4a - 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_{12} = -1 + \sqrt{257 - 4a - 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4t_{13} = -1 + \sqrt{257 + 4a - 4b - 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$

$$4s_{13} = -1 - \sqrt{257 + 4a - 4b - 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$

$$4t_{14} = -1 + \sqrt{257 - 4a + 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_{14} = -1 - \sqrt{257 - 4a + 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

Mit $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{15}, u_{16}$ seien 16 Summen von Termen $\cos(i \cdot w)$ definiert, wobei i Element der Menge A_i sei, zum Beispiel $u_{13} = \text{Summe}(A_{13})$. Die Zahlen $t, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{13}, t_{14}$ sollen weiter Linearkombinationen der $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{15}, u_{16}$ sein. Zum Beispiel $t_7 = u_4 + u_7 + u_8 + u_{11} + u_{12} + u_{14} + u_{15} + u_{16}$. Damit haben wir 16 unbekannte u_i mit 15 linearen Gleichungen. Daher wird die Gleichung $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{15} + u_{16} = -1/2$ als erste zusätzlich aufgenommen. Die Matrix dieses 16reihigen Gleichungssystems besitzt eine Determinante von 34816, ein Produkt einer Potenz von 2 mit 17. Mit Hilfe der inversen Matrix können Gleichungen für die u_i aufgestellt werden, zum Beispiel für $i=10$:

$$u_{10} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{32}a - \frac{1}{32}c - \frac{1}{32}b - \frac{1}{16}\sqrt{257+4a+8c-4b} + \frac{1}{16}\sqrt{257-4a-8c-8b} +$$

$$+ (6\sqrt{257+4a-4b+8\sqrt{257+4a+8c-4b}+4\sqrt{257-4a-4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}} -$$

$$-5\sqrt{257+4a+4b+4\sqrt{257-4a+4c-8b}+4\sqrt{257-4a+4c+8b}-8\sqrt{257+4a-8c+4b}} -$$

$$-3\sqrt{257+4a+4b-4\sqrt{257-4a+4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}+8\sqrt{257+4a-8c+4b}} +$$

$$+4\sqrt{257-4c-4b-4\sqrt{257+4a+8c-4b}+8\sqrt{257-4a-4c-8b}+4\sqrt{257+4a-8c+4b}} -$$

$$-2\sqrt{257-4a+4c-4\sqrt{257-4a+8c-4b}-8\sqrt{257-4a+4c+8b}-4\sqrt{257+4a-8c+4b}} -$$

$$-\sqrt{257-4a-4c+4\sqrt{257+4a+8c-4b}-8\sqrt{257-4a-4c-8b}-4\sqrt{257+4a-8c+4b}} -$$

$$-7\sqrt{257+4a-4b-8\sqrt{257+4a+8c-4b}-4\sqrt{257-4a-4c-8b}+4\sqrt{257-4a+4c+8b}} +$$

$$+8\sqrt{257-4a+4c+4\sqrt{257+4a+8c-4b}+8\sqrt{257-4a+4c+8b}+4\sqrt{257+4a-8c+4b}})/34$$

Nun werden weitere Mengen E1, E2, E3,...E13, E14, E15, E16 wie folgt definiert: Die Ei seien Teilmengen der Ai für i=1,2,3...16. Zum Beispiel ist E10 eine Teilmenge von A10. Jede Ei ist von der Form {x, M(4*x), M(16*x), M(64*x)}, wobei M zu Beginn definiert wurde, genau gesagt:

E1={1, 4, 16, 64}	E2={3, 12, 48, 65}	E3={5, 20, 80, 63}
E4={7, 28, 112, 66}	E5={9, 36, 113, 62}	E6={11, 44, 81, 67}
E7={13, 52, 49, 61}	E8={15, 60, 17, 68}	E9={19, 76, 47, 69}
E10={21, 84, 79, 59}	E11={23, 92, 111, 70}	E12={25, 100, 114, 58}
E13={27, 108, 82, 71}	E14={37, 109, 78, 55}	E15={43, 85, 83, 75}
E16={45, 77, 51, 53}		

Fi (i=1,2..16) sind die Mengendifferenzen Ai\Ei, zum Beispiel F11=A11\E11. Und weiter xi = Summe(Ei), yi = Summe(Fi), so dass xi + yi = ui. Es ist relativ leicht nachweisbar, dass

$$x_1 * y_1 = \left[\sum_{i \in E1} \cos(iw) \right] * \left[\sum_{i \in F1} \cos(iw) \right] = \frac{1}{2} * \left[\sum_{i \in A1} \cos(iw) + \sum_{i \in A2} \cos(iw) + \sum_{i \in A4} \cos(iw) + \sum_{i \in A5} \cos(iw) \right] = \frac{1}{2} (u_1 + u_2 + u_4 + u_5)$$

x1 und y1 sind damit die Wurzeln von $x^2 + u_1 x + \frac{1}{2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = 0$ und mit der angegebenen Matrix

$$u_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{8}t_1 - \frac{1}{8}t_2 - \frac{1}{4}t_3 - \frac{1}{4}t_6 - \frac{3}{34}t_7 - \frac{3}{17}t_8 - \frac{7}{39}t_9 - \frac{1}{17}t_{10} + \frac{1}{34}t_{11} - \frac{4}{17}t_{12} - \frac{5}{34}t_{13} - \frac{2}{17}t_{14}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_3 + \frac{1}{4}t_4 - \frac{1}{4}t_5 - \frac{1}{4}t_6 - \frac{2}{17}t_7 - \frac{4}{17}t_8 - \frac{15}{39}t_9 - \frac{11}{34}t_{10} + \frac{7}{34}t_{11} + \frac{3}{34}t_{12} - \frac{1}{34}t_{13} + \frac{3}{17}t_{14}$$

Auf den rechten Seiten der Gleichungen sind nur bekannte Größen. Damit sind die Wurzeln berechenbar, auch x1 und y1. Ähnlich ergeben sich die anderen 15 Gleichungen:

$x^2 - u_2x + (u_2 + u_5 + u_{10} + u_{13})/2 = 0$	$x^2 - u_3x + (u_3 + u_8 + u_{11} + u_{16})/2 = 0$	$x^2 - u_4x + (u_3 + u_4 + u_7 + u_{10})/2 = 0$
$x^2 - u_5x + (u_3 + u_5 + u_6 + u_{13})/2 = 0$	$x^2 - u_6x + (u_4 + u_6 + u_{10} + u_{16})/2 = 0$	$x^2 - u_7x + (u_7 + u_{11} + u_{14} + u_{15})/2 = 0$
$x^2 - u_8x + (u_7 + u_8 + u_9 + u_{16})/2 = 0$	$x^2 - u_9x + (u_5 + u_9 + u_{12} + u_{15})/2 = 0$	$x^2 - u_{10}x + (u_3 + u_8 + u_{10} + u_{14})/2 = 0$
$x^2 - u_{11}x + (u_2 + u_9 + u_{11} + u_{12})/2 = 0$	$x^2 - u_{12}x + (u_1 + u_{13} + u_{14} + u_{15})/2 = 0$	$x^2 - u_{13}x + (u_4 + u_6 + u_8 + u_{13})/2 = 0$
$x^2 - u_{14}x + (u_1 + u_9 + u_{11} + u_{14})/2 = 0$	$x^2 - u_{15}x + (u_1 + u_2 + u_{16} + u_{15})/2 = 0$	$x^2 - u_{16}x + (u_7 + u_{12} + u_{14} + u_{16})/2 = 0$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind x2 und y2, der zweiten x3 und y3 ... usw.

Nun werden die 32 neuen Mengen G1, G2, G3,...G16,... G31, G32 festgelegt. Die Mengen Gi sind Untermengen der Ei für i=1,2,3...16 und Untermengen der Fi für i=17, 18...32. Die Gi sind 2-elementige Mengen der Form {n, M(16*n)},

$$G1=\{1, 16\}, G17=\{2, 32\}, G2=\{3, 48\}, G18=\{6, 96\}, G3=\{5, 80\}, G19=\{10, 97\}, G4=\{7, 112\},$$

$$G20=\{14, 33\}, G5=\{9, 113\}, G21=\{18, 31\}, G6=\{11, 81\}, G22=\{22, 95\}, G7=\{13, 49\},$$

$$G23=\{26, 98\}, G8=\{15, 17\}, G24=\{30, 34\}, G9=\{19, 47\}, G25=\{38, 94\}, G10=\{21, 79\},$$

$$G26=\{42, 99\}, G11=\{23, 111\}, G27=\{46, 35\}, G12=\{25, 114\}, G28=\{50, 29\},$$

$$G13=\{27, 82\}, G29=\{54, 93\}, G14=\{37, 79\}, G30=\{74, 101\}, G15=\{43, 83\}, G31=\{86, 91\},$$

$$G16=\{45, 51\}, G32=\{90, 102\}.$$

Die Mengen H1, H2,H3,...H16 sind die Deifferenzen Ei\Gi für i=1,2...16. Und Fi\Gi für

$i=17,18\ldots32$. Erneut ist $p_i = \text{Summe}(G_i)$, $q_i = \text{Summe}(H_i)$ für $i=1, 2\ldots32$.

Damit wird
$$p_1 * q_1 = \left[\sum_{i \in G_1} \cos(iw) \right] * \left[\sum_{i \in H_1} \cos(iw) \right] = [\cos(w) + \cos(16w)] * [\cos(4w) + \cos(64w)] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{i \in A_1} \cos(3w) + \sum_{i \in A_2} \cos(5w) + \sum_{i \in A_4} \cos(12w) + \sum_{i \in A_5} \cos(20w) + \sum_{i \in A_1} \cos(48w) + \sum_{i \in A_2} \cos(63w) + \right. \\ \left. + \sum_{i \in A_4} \cos(65w) + \sum_{i \in A_5} \cos(80w) \right] = \frac{1}{2} (x_2 + x_3)$$

Auf demselben Weg zeigt man

$$\begin{aligned} p_2 * q_2 &= (x_5 + x_8)/2 & p_3 * q_3 &= (x_8 + x_{12})/2 \\ p_4 * q_4 &= (y_{11} + x_{10})/2 & p_5 * q_5 &= (x_{13} + x_{16})/2 \\ p_6 * q_6 &= (y_5 + x_{14})/2 & p_7 * q_7 &= (y_{14} + x_2)/2 \\ p_8 * q_8 &= (x_{15} + x_{16})/2 & p_9 * q_9 &= (y_6 + y_{12})/2 \\ p_{10} * q_{10} &= (y_9 + x_3)/2 & p_{11} * q_{11} &= (y_{13} + x_9)/2 \\ p_{12} * q_{12} &= (y_4 + x_{15})/2 & p_{13} * q_{13} &= (y_7 + x_6)/2 \\ p_{14} * q_{14} &= (y_5 + x_{11})/2 & p_{15} * q_{15} &= (y_1 + y_{10})/2 \\ p_{16} * q_{16} &= (y_1 + y_7)/2 & p_{17} * q_{17} &= (y_2 + y_3)/2 \\ p_{18} * q_{18} &= (y_5 + y_8)/2 & p_{19} * q_{19} &= (y_8 + y_{12})/2 \\ p_{20} * q_{20} &= (x_9 + x_{11})/2 & p_{21} * q_{21} &= (y_{13} + y_{16})/2 \\ p_{22} * q_{22} &= (x_4 + y_{14})/2 & p_{23} * q_{23} &= (x_{14} + y_2)/2 \\ p_{24} * q_{24} &= (y_{15} + x_{12})/2 \end{aligned}$$

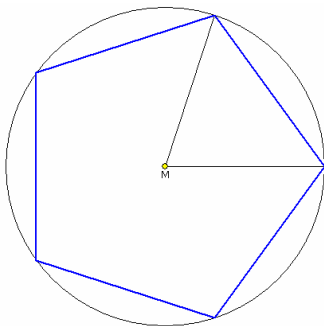
$$\begin{aligned} p_{26} * q_{26} &= (y_3 + x_9)/2; p_{27} * q_{27} = (y_9 + x_{13})/2; p_{28} * q_{28} = (x_4 + y_{15})/2 \\ p_{29} * q_{29} &= (y_6 + x_7)/2; p_{30} * q_{30} = (y_{11} + x_5)/2; p_{31} * q_{31} = (x_1 + x_{10})/2 \\ p_{32} * q_{32} &= (x_1 + x_7)/2 \end{aligned}$$

Damit sind p_i und q_i mit $p_i + q_i = x_i$ für $i=1,2,3\ldots16$ und $p_i + q_i = y_i$ für $i=17,18\ldots32$, leicht zu finden. Zum Beispiel sind p_9 und q_9 die Wurzeln von $x^2 - x_9 x + \frac{1}{2}(y_6 + y_{12}) = 0$. Damit ergeben sich die Werte $\cos(n*w)$, zum Beispiel $\cos(2w) + \cos(32w) = p_2$ mit

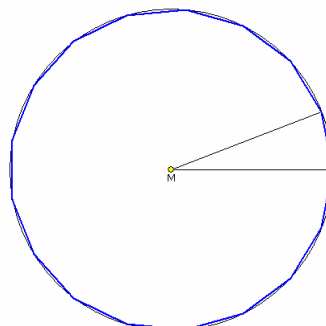
$$\cos(2w) + \cos(32w) = \frac{1}{2} (\cos(30w) + \cos(34w)) = \frac{1}{2} q_8$$

so dass $\cos(2*w)$ und $\cos(32*w)$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 - p_2 x + \frac{1}{2} q_8 = 0$ sind. Mit der Bestimmung aller $\cos(n*w)$ sind damit auch alle zur Konstruktion des 257-Ecks notwendigen Werte gefunden.

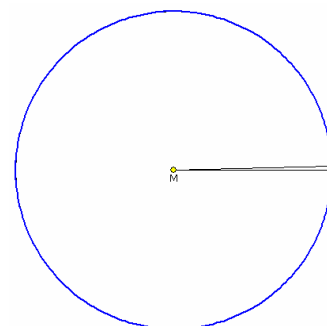
Während ein regelmäßiges Siebzehneck noch als solches zu erkennen ist, kann man ein 257-Eck nicht mehr mit bloßem Auge von einem Kreis unterscheiden:



Regelmäßiges Fünfeck
für $r = 1$ ergibt sich
Zentriwinkel 72°
Innenwinkelsumme 540°
Seite $s = 1.1756$
Umfang $u = 5.8779$
Flächeninhalt $A = 2.3776$
Diagonalenzahl 5



Regelmäßiges Siebzehneck
für $r = 1$ ergibt sich
Zentriwinkel 21°
Innenwinkelsumme 2700°
Seite $s = 0.3675$
Umfang $u = 6.2475$
Flächeninhalt $A = 3.0706$
Diagonalenzahl 119



Regelmäßiges 257-Eck
für $r = 1$ ergibt sich
Zentriwinkel $\approx 1^\circ$
Innenwinkelsumme 45900°
Seite $s = 0.0244$
Umfang $u = 6.283$
Flächeninhalt $A = 3.1313$
Diagonalenzahl 32639