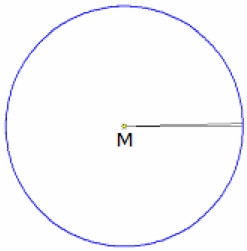


Regelmäßiges 257-Eck

257 ist Fermatsche Primzahl, wodurch das regelmäßige 257-Eck allein mit Zirkel und Lineal eindeutig konstruierbar ist. Mit bloßem Auge ist ein 257-Eck nicht mehr von einem Kreis zu unterscheiden. (siehe Abbildung)
Durch Richelot und Schwendenstein wurde 1832 erstmals eine vollständige Konstruktionsbeschreibung angegeben. Durch de Temple wurde 1991 die Konstruktion vereinfacht und nutzt u.a. 150 verschiedene Kreise und 566 Geraden.
Zentriwinkel ≈ 1°, Innenwinkelsumme 45900°, Diagonalenzahl 32639
Seite s = 0,0244, Umfang u = 6,283, Flächeninhalt A = 3,1313,
Ist die Seite a gegeben, so lassen sich daraus der Radius r des Inkreises, der Radius R des Umkreises, die Diagonalen d_2 bis d_9, die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u errechnen.

$a = R\,(2 \sin(180°/257)) \approx 0{,}0244475829850\,R = r\,(2 \tan(180°/257)) \approx 0{,}0244494096819\,r$
$r = a / (2 \tan(180°/257)) \approx 40{,}9007830050\,a$
$r = R/2 \sin(360°/257) / \sin(180°/257) \approx 0{,}999925286669\,R$
$R = a / (2 \sin(180°/257)) \approx 40{,}9038390670\,a$
$R = 2r \sin(180°/257) / \sin(360°/257) \approx 1{,}00007471891\,r$
$A = 257\,a^2 / (4 \tan(180°/257)) \approx 5255{,}75061614\,a^2$
$A = 257\,R^2 \sin(180°/257) \cos(180°/257) \approx 3{,}14127970057\,R^2 \approx 3{,}14174914412\,r^2$
$u = 257\,a$
$d_i = a \sin(180°\,i/257) / \sin(180°/257)$

Durch Dr.Bernd Winter werden unter
http://mathematik-olympiaden.de/public/17_257_65537/
Erklärungen zur Konstruktion eines regelmäßigen 257-Ecks gegeben.
U.a. findet man auch ein mp4-Video, in dem die Konstruktion demonstriert wird.

Konstruktion eines 257-Ecks – Werte für Winkel (n*pi)/257

Zur Konstruktion eines 257-Ecks ist es notwendig die Werte für Winkel $(n\cdot\pi)/257$ zu konstruieren. Die theoretische Herleitung ist sehr anspruchsvoll wird auf den nächsten Seiten gegeben.
Festlegung: $w=(2*\pi)/257$.
A sei die Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis 128, A={1,2,3,4...128}. M(x) sei eine den natürlichen Zahlen definierte Funktion mit

M(x)=x für 129>x   M(x)=257-x für 257>x>128
M(x)=M(y) für x>=257, mit y= x mod 257

Es folgt, dass M(x+257)=M(x)=M(257-x). Für ein natürliches x werden Untermengen von A konstruiert mit

{ M(x), M(2*x), M(4*x), M(8*x), M(16*x), M(32*x), M(64*x), M(128*x) }

16 Mengen A1, A2,.. A16:

A1= {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 }
A2= { 3, 6, 12, 24, 48, 96, 65, 127 }
A3= { 5, 10, 20 ,40, 80, 97, 63, 126 }
A4= { 7, 14, 28, 56, 112, 33, 66, 125 }
A5= { 9, 18, 36, 72, 113, 31,62,124 }
A6= { 11, 22, 44, 88, 81, 95, 67, 123 }
A7= { 13, 26, 52, 104, 49, 98, 61, 122 }
A8= { 15, 30, 60, 120, 17, 34, 68, 121 }
A9= { 19, 38, 76, 105, 47, 94, 69, 119 }
A10= { 21, 42, 84, 89, 79, 99, 59, 118 }
A11= { 23, 46, 92, 73, 111, 35, 70, 117 }
A12= { 25, 50, 100, 57, 114, 29, 58, 116 }
A13= { 27, 54, 108, 41, 82, 93, 71, 115 }
A14= { 37, 74, 109, 39, 78, 101, 55, 110 }
A15= { 43, 86, 85, 87, 83, 91, 75, 107 }
A16= { 45, 90, 77, 103, 51, 102, 53, 106 }

B sei die Vereinigung von A2, A3, A4, A9, A13, A14, A15, A16. C sei die Vereinigung aller anderen Elemente von A, d.h. C=A\B. A ist damit die Vereinigung der disjunkten Mengen B und C, die jeweils 64 Elemente beinhalten. Damit gilt:

$$\left[\sum_{i\in B}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C}\cos(iw)\right]=32*\left[\sum_{i\in A}\cos(iw)\right]$$

Die linke Gleichungsseite ist die Summe von Ausdrücken der Form cos(aw)*cos(bw), wobei a und b natürliche Zahlen sind.

Die Substitution (cos((a+b)*w)+cos((a-b)*w))/2 ist möglich und die Anwendung von cos(n*w)=cos(M(n)*w). Nach dem Reduzieren ist die Gleichung lösbar. Die Schwierigkeit ist, dass dazu tausende von Subsitutionen notwendig wären. Aus diesem Grund wird folgender Weg begangen:
Für jedes natürliche n und reelle v gilt 1 + cos(v) + cos(2v) +...+ cos((n-1)v) = sin(nv/2) cos((n-1)v/2) / sin(v/2). Für v = w wird

$$\sum_{i\in A}\cos(iw)=\cos(w)+\cos(2w)+\ldots+\cos(128w)=\frac{1}{2}(1+\cos(w)+\ldots+\cos(256w))-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*\frac{\sin\frac{257*2\pi}{2*357}\cos\frac{256*2\pi}{2}}{\sin\frac{2\pi}{2*257}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Schreibweise: $t=\sum_{i\in B}\cos(iw)=Summe(B); s=\sum_{i\in C}\cos(iw)=Summe(C)$

Da A die Vereinigung von B und C ist, gilt t + s = -1/2; t * s = -16. t und s sind dann die Wurzeln der Gleichung x² + x/2 – 16 = 0 mit dem Wert ¼ (-1 ± √257). Da t negativ ist, wird Summe(B) = ¼ (-1 - √257); Summe(C) = ¼ (-1 + √257).
B1 sei nun die Vereinigung von A3, A5, A7, A10, A12, A13, A14, A15; C1 die von allen Elementen aus A, d.h. C1 = A\B1.

Außerdem sei t1 = Summe(B1), s1 = Summe(C1). Dann wird t1 + s1 = t + s = -1/2 und weiter

$$t_1*s_1=\left[\sum_{i\in B1}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C1}\cos(iw)\right]=34*\left[\sum_{i\in B}\cos(iw)\right]+30*\left[\sum_{i\in C}\cos(iw)\right]=34t+30s$$

Mit den schon gefundenen Werten wird t1 * s1 = 34 (-1-√257)/4 + 30 (-1+√257) = -16 - √257. Damit sind t1 und s1 die Wurzeln der Gleichung x² + ½ x – 16 - √257 = 0. Lösung und Probe liefern:

t_1 = (-1 -√(257 +16√257)/4 ; s_1 = ¼(-1 +√(257 +16√257).

Analog sei B2 die Vereinigung der Mengen A2, A4, A5, A7, A9, A10, A12, A16 und C2 die Differenz von A und B2 und t2 = Summe(B2), s2 = Summe(C2). Auf gleiche Weise wird t2 + s2 = -1/2 und

$$t_2*s_2=\left[\sum_{i\in B2}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C2}\cos(iw)\right]=30*\left[\sum_{i\in B}\cos(iw)\right]+34*\left[\sum_{i\in C}\cos(iw)\right]=30t+34s$$

und t2 = (-1 +√(257 -16√257)/4 ; s2 = ¼(-1 -√(257 -16√257).

B3 ist nun die Vereinigung von A4, A6, A9, A10, A11, A12, A13, A14; C3 = A\B3 und t3 = Summe(B3), s3 = Summe(C3).

$$t_3*s_3=\left[\sum_{i\in B3}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C3}\cos(iw)\right]=31*\left[\sum_{i\in B}\cos(iw)\right]+30*\left[\sum_{i\in C}\cos(iw)\right]+2*\left[\sum_{i\in B1}\cos(iw)\right]+\left[\sum_{i\in B2}\cos(iw)\right]=31t+30s+2t_1+t_2$$

Damit wird t3 * s3 = -16 – 1/4(√257 + 2√(257 +16√257) - √(257 -16√257); t3 +s3 = t +s = -1/2 → Lösung der quadratischen Gleichung

$$4t_3=-1-\sqrt{257+4\sqrt{257}+8\sqrt{257+16\sqrt{257}}-4\sqrt{257-16\sqrt{257}}}\quad 4s_3=-1+\sqrt{257+4\sqrt{257}+8\sqrt{257+16\sqrt{257}}-4\sqrt{257-16\sqrt{257}}}$$

Nach dem gleichen Verfahren werden jetzt weitere Mengen gebildet. B4 ist die Vereinigung von A4, A5, A6, A7, A9, A11, A13, A14; C4=A\B4 und t4 = Summe(B4), s4 = Summe(C4) →

$$t_4*s_4=\left[\sum_{i\in B4}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in C4}\cos(iw)\right]=31t+32s-t_1+2t_2=-16+(\sqrt{257}+\sqrt{257+16\sqrt{257}}+2\sqrt{257-16\sqrt{257}})/4$$

$$4t_4=-1-\sqrt{257-4\sqrt{257}-4\sqrt{257+16\sqrt{257}}-8\sqrt{257-16\sqrt{257}}}\quad 4s_4=-1+\sqrt{257-4\sqrt{257}-4\sqrt{257+16\sqrt{257}}-8\sqrt{257-16\sqrt{257}}}$$

B5 ist die Vereinigung von A3, A4, A6, A9, A10, A11, A12, A15; C5=A\B5); t5 = Summe(B5), s5 = Summe(C5)

$$t_5*s_5=32t+33s-t_1-2t_2=-16+(\sqrt{257}-\sqrt{257+16\sqrt{257}}-2\sqrt{257-16\sqrt{257}})/4$$

$$4t_5=-1-\sqrt{257-4\sqrt{257}+4\sqrt{257+16\sqrt{257}}+8\sqrt{257-16\sqrt{257}}}\quad 4s_5=-1+\sqrt{257-4\sqrt{257}+4\sqrt{257+16\sqrt{257}}+8\sqrt{257-16\sqrt{257}}}$$

B6 besteht aus A2, A5, A6, A7, A11, A13, A14, A16; C6=A\B6; t6 = Summe(B6), s6 = Summe(C6).

$$t_6*s_6=34t+33s-2t_1-t_2=-16+(\sqrt{257}-2\sqrt{257+16\sqrt{257}}+\sqrt{257-16\sqrt{257}})/4$$

$$4t_6 = -1 - \sqrt{257 + 4\sqrt{257} - 8\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} + 4\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}} \quad 4s_6 = -1 + \sqrt{257 + 4\sqrt{257} - 8\sqrt{257 + 16\sqrt{257}} + 4\sqrt{257 - 16\sqrt{257}}}$$

Für die nachfolgenden Ausführungen seien a = √257; b = √(257 - 16√257); c = √(257 +16√257).

B7 besteht aus A4, A7, A8, A11, A12, A14, A15, A16. C7 = A\B7; t7 = Summe(B7), s7 = Summe(C7)

$$t_7 * s_7 = 31t + 30s + t_2 + 2t_3 + t_4 - t_5 = -16 + (a - b + 2\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + \sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - \sqrt{257 - 4a + 4c + 8b})/4$$

$$4t_7 = -1 - \sqrt{257 + 4a - 4b + 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$

$$4s_7 = -1 + \sqrt{257 + 4a - 4b + 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$

B8 besteht aus A4, A5, A6, A8, A10, A13, A15, A16. C8 = A\B8; t8 = Summe(B8), s8 = Summe(C8).

$$t_8 * s_8 = 33t + 32s - t_2 + t_4 + t_5 - 2t_6 = -16 - (a + b + \sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} + \sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 2\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b})/4$$

$$4t_8 = -1 - \sqrt{257 + 4a + 4b + 4\sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 8\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_8 = -1 + \sqrt{257 + 4a + 4b + 4\sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 8\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

B9 besteht aus A3, A7, A8, A9, A10, A11, A13; C9 = A\B9 ; t9 = Summe(B9), s9 = Summe(C9).

$$t_9 * s_9 = 33t + 32s - t_2 - t_4 - t_5 + 2t_6 = -16 - (a + b - \sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} - \sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 2\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b})/4$$

$$4t_9 = -1 - \sqrt{257 + 4a + 4b - 4\sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} - 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 8\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_9 = -1 + \sqrt{257 + 4a + 4b - 4\sqrt{257 - 4a + 4c - 8b} - 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 8\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

Weitere Mengen seien B10 mit A3, A6, A7, A8, A9, A12, A14, A16 ; B11 mit A3, A4, A5, A8, A10, A11, A14, A16 ; B12 mit A2, A5, A8, A9, A11, A12, A14, A15 ; B13 mit A2, A3, A4, A6, A7, A8, A10, A14 und B14 mit A2, A3, A4, A5, A6, A8, A12, A13.
C10, C11, C12, C13, C14 seien wieder die zugehörigen Mengendifferenzen zu A und tk = Summe(Bk), sk = Summe(Ck) für k=10, 11, 12, 13, 14. Damit ergibt sich weiter:

t10 * s10 = 31t + 32s − t1 − t3 + 2t4 +6
t11 * s11 = 33t + 34s + t1 −t3 + 2t5 −t6
t12 * s12 = 33t + 34s − t1 + t3 − 2t4 − t6
t13 * s13 = 33t + 32s + t2 − 2t4 − t4 +t5
t14 * s14 = 29t + 30s + t1 + t3 + 2t5 + t6

$$4t_{10} = -1 - \sqrt{257 - 4c - 4b - 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_{10} = -1 + \sqrt{257 - 4c - 4b - 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4t_{11} = -1 - \sqrt{257 - 4a + 4c - 4\sqrt{257 - 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_{11} = -1 + \sqrt{257 - 4a + 4c - 4\sqrt{257 - 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4t_{12} = -1 - \sqrt{257 - 4a - 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_{12} = -1 + \sqrt{257 - 4a - 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 8\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} - 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4t_{13} = -1 + \sqrt{257 + 4a - 4b - 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$

$$4s_{13} = -1 - \sqrt{257 + 4a - 4b - 8\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} - 4\sqrt{257 - 4a - 4c - 8b} + 4\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b}}$$

$$4t_{14} = -1 + \sqrt{257 - 4a + 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

$$4s_{14} = -1 - \sqrt{257 - 4a + 4c + 4\sqrt{257 + 4a + 8c - 4b} + 8\sqrt{257 - 4a + 4c + 8b} + 4\sqrt{257 + 4a - 8c + 4b}}$$

Mit u1, u2, u3, ..., u15, u16 seien 16 Summen von Termen cos(i*w) definiert, wobei i Element der Menge Ai sei, zum Beispiel u13 = Summe(A13). Die Zahlen t, t1, t2, t3, …, t13, t14 sollen weiter Linearkombinationen der u1, u2, u3, …, u15, u16 sein. Zum Beispiel t7 = u4 + u7 + u8 + u11 + u12 + u14 + u15 + u16. Damit haben wir 16 unbekannte ui mit 15 linearen Gleichungen. Daher wird die Gleichung u1 + u2 + u3 +...+ u15 + u16 = -1/2 als erste zusätzlich aufgenommen. Die Matrix dieses 16reihigen Gleichungssystems besitzt eine Determinante von 34816, ein Produkt einer Potenz von 2 mit 17. Mit Hilfe der inversen Matrix können Gleichungen für die ui aufgestellt werden, zum Beispiel für i=10:

$$
\begin{aligned}
u_{10} = &-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}a-\frac{1}{32}c-\frac{1}{32}b-\frac{1}{16}\sqrt{257+4a+8c-4b}+\frac{1}{16}\sqrt{257-4a-8c-8b}+\\
&+(6\sqrt{257+4a-4b+8\sqrt{257+4a+8c-4b}+4\sqrt{257-4a-4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}}-\\
&-5\sqrt{257+4a+4b+4\sqrt{257-4a+4c-8b}+4\sqrt{257-4a+4c+8b}-8\sqrt{257+4a-8c+4b}}-\\
&-3\sqrt{257+4a+4b-4\sqrt{257-4a+4c-8b}-4\sqrt{257-4a+4c+8b}+8\sqrt{257+4a-8c+4b}}+\\
&+4\sqrt{257-4c-4b-4\sqrt{257+4a+8c-4b}+8\sqrt{257-4a-4c-8b}+4\sqrt{257+4a-8c+4b}}-\\
&-2\sqrt{257-4a+4c-4\sqrt{257-4a+8c-4b}-8\sqrt{257-4a+4c+8b}-4\sqrt{257+4a-8c+4b}}-\\
&-\sqrt{257-4a-4c+4\sqrt{257+4a+8c-4b}-8\sqrt{257-4a-4c-8b}-4\sqrt{257+4a-8c+4b}}-\\
&-7\sqrt{257+4a-4b-8\sqrt{257+4a+8c-4b}-4\sqrt{257-4a-4c-8b}+4\sqrt{257-4a+4c+8b}}+\\
&+8\sqrt{257-4a+4c+4\sqrt{257+4a+8c-4b}+8\sqrt{257-4a+4c+8b}+4\sqrt{257+4a-8c+4b}})/34
\end{aligned}
$$

Nun werden weitere Mengen E1, E2, E3,...E13, E14, E15, E16 wie folgt definiert: Die Ei seien Teilmengen der Ai für i=1,2,3...16. Zum Beispiel ist E10 eine Teilmenge von A10. Jede Ei ist von der Form {x, M(4*x), M(16*x), M(64*x)}, wobei M zu Beginn definiert wurde, genau gesagt:

E1={1, 4, 16, 64} E2={3, 12, 48, 65} E3={5, 20, 80, 63}
E4={7, 28, 112, 66} E5={9, 36, 113, 62} E6={11, 44, 81, 67}
E7={13, 52, 49, 61} E8={15, 60, 17, 68} E9={19, 76, 47, 69}
E10={21, 84, 79, 59} E11={23, 92, 111, 70} E12={25, 100, 114, 58}
E13={27, 108, 82, 71} E14={37, 109, 78,55} E15={43, 85, 83, 75}
E16={45, 77, 51, 53}

Fi (i=1,2..16) sind die Mengendifferenzen Ai\Ei, zum Beispiel F11=A11\E11. Und weiter xi = Summe(Ei), yi = Summe(Fi), so dass xi + yi = u_i. Es ist relativ leicht nachweisbar, dass

$$x_1 * y_1 = \left[\sum_{i\in Ei}\cos(iw)\right]*\left[\sum_{i\in Fi}\cos(iw)\right] = \frac{1}{2}*\left[\sum_{i\in A1}\cos(iw)+\sum_{i\in A2}\cos(iw)+\sum_{i\in A4}\cos(iw)+\sum_{i\in A5}\cos(iw)\right] = \frac{1}{2}\left(u_1+u_2+u_4+u_5\right)$$

x1 und y1 sind damit die Wurzeln von x² + u1 x + ½ (u1 + u2 + u3 + u4) = 0 und mit der angegebenen Matrix

$$u_1 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{8}t-\frac{1}{8}t_1-\frac{1}{8}t_2-\frac{1}{4}t_5-\frac{1}{4}t_6-\frac{3}{34}t_7-\frac{3}{17}t_8-\frac{7}{39}t_9-\frac{1}{17}t_{10}+\frac{1}{34}t_{11}-\frac{4}{17}t_{12}-\frac{5}{34}t_{13}-\frac{2}{17}t_{14}$$

$$u_1+u_2+u_3+u_4 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t_1-\frac{1}{4}t_3+\frac{1}{4}t_4-\frac{1}{4}t_5-\frac{1}{4}t_6-\frac{2}{17}t_7-\frac{4}{17}t_8-\frac{15}{39}t_9-\frac{11}{34}t_{10}+\frac{7}{34}t_{11}+\frac{3}{34}t_{12}-\frac{1}{34}t_{13}+\frac{3}{17}t_{14}$$

Auf den rechten Seiten der Gleichungen sind nur bekannte Größen. Damit sind die Wurzeln berechenbar, auch x1 und y1. Ähnlich ergeben sich die anderen 15 Gleichungen:

$x^2-u_2x+\left(u_2+u_5+u_{10}+u_{13}\right)/2=0$ $x^2-u_3x+\left(u_3+u_8+u_{11}+u_{16}\right)/2=0$ $x^2-u_4x+\left(u_3+u_4+u_7+u_{10}\right)/2=0$

$x^2-u_5x+\left(u_3+u_5+u_6+u_{13}\right)/2=0$ $x^2-u_6x+\left(u_4+u_6+u_{10}+u_{16}\right)/2=0$ $x^2-u_7x+\left(u_7+u_{11}+u_{14}+u_{15}\right)/2=0$

$x^2-u_8x+\left(u_7+u_8+u_9+u_{16}\right)/2=0$ $x^2-u_9x+\left(u_5+u_9+u_{12}+u_{15}\right)/2=0$ $x^2-u_{10}x+\left(u_3+u_8+u_{10}+u_{14}\right)/2=0$

$x^2-u_{11}x+\left(u_2+u_9+u_{11}+u_{12}\right)/2=0$ $x^2-u_{12}x+\left(u_1+u_{13}+u_{14}+u_{15}\right)/2=0$ $x^2-u_{13}x+\left(u_4+u_6+u_8+u_{13}\right)/2=0$

$x^2-u_{14}x+\left(u_1+u_9+u_{11}+u_{14}\right)/2=0$ $x^2-u_{15}x+\left(u_1+u_2+u_{16}+u_{15}\right)/2=0$ $x^2-u_{16}x+\left(u_7+u_{12}+u_{14}+u_{16}\right)/2=0$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind x2 und y2, der zweiten x3 und y3 ... usw.
Nun werden die 32 neuen Mengen G1, G2, G3,...G16,... G31, G32 festgelegt. Die Mengen Gi sind Untermengen der Ei für i=1,2,3...16 und Untermengen der Fi für i=17, 18...32. Die Gi sind 2-elementige Mengen der Form {n, M(16*n)},

G1={1, 16}, G17={2, 32}, G2={3, 48}, G18={6, 96}, G3=(5, 80}, G19={10, 97}, G4={7, 112}, G20={14, 33}, G5={9, 113}, G21={18, 31}, G6={11, 81}, G22={22, 95}, G7={13, 49}, G23={26, 98}, G8={15, 17}, G24={30, 34}, G9={19, 47}, G25={38, 94}, G10={21, 79}, G26={42, 99}, G11={23, 111}, G27={46, 35}, G12={25, 114}, G28={50, 29}, G13={27, 82}, G29={54, 93}, G14={37, 79}, G30={74, 101}, G15={43, 83}, G31={86, 91}, G16={45, 51}, G32={90, 102}.

Die Mengen H1, H2,H3,...H16 sind die Deifferenzen Ei\Gi für i=1,2...16. Und Fi\Gi für i=17,18...32. Erneut ist pi = Summe(Gi), qi = Summe(Hi) für i=1, 2...32.

Damit wird $p_1 * q_1 = \left[\sum_{i \in G1} \cos(iw)\right] * \left[\sum_{i \in H1} \cos(iw)\right] = [\cos(w) + \cos(16w)] * [\cos(4w) + \cos(64w)] =$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \sum_{i \in A1} \cos(3w) + \sum_{i \in A2} \cos(5w) + \sum_{i \in A4} \cos(12w) + \sum_{i \in A5} \cos(20w) + \sum_{i \in A1} \cos(48w) + \sum_{i \in A2} \cos(63w) + \\ + \sum_{i \in A4} \cos(65w) + \sum_{i \in A5} \cos(80w) \end{array}\right] = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$$

Auf demselben Weg zeigt man

p2 * q2 = (x5 + x8)/2 p3 * q3 = (x8 + x12)/2
p4 * q4 = (y11 + x10)/2 p5 * q5 = (x13 + x16)/2
p6 * q6 = (y5 + x14)/2 p7 * q7 = (y14 + x2)/2
p8 * q8 = (x15 + x16)/2 p9 * q9 = (y6 + y12)/2
p10 * q10 = (y9 + x3)/2 p11 * q11 = (y13 + x9)/2
p12 * q12 = (y4 + x15)/2 p13 * q13 = (y7 + x6)/2
p14 * q14 = (y5 + x11)/2 p15 * q15 = (y1 + y10)/2
p16 * q16 = (y1 + y7)/2 p17 * q17 = (y2 + y3)/2
p18 * q18 = (y5 + y8)/2 p19 * q19 = (y8 + y12)/2
p20 * q20 = (x9 + x11)/2 p21 * q21 = (y13 + y16)/2
p22 * q22 = (x4 + y14)/2 p23 * q23 = (x14 + y2)/2
p24 * q24 = (y15 + x12)/2

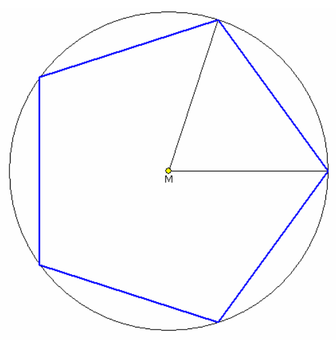
$p_{26} * q_{26} = (y_3 + x_9)/2; p_{27} * q_{27} = (y_9 + x_{13})/2; p_{28} * q_{28} = (x_4 + y_{15})/2$
$p_{29} * q_{29} = (y_6 + x_7)/2; p_{30} * q_{30} = (y_{11} + x_5)/2; p_{31} * q_{31} = (x_1 + x_{10})/2$
$p_{32} * q_{32} = (x_1 + x_7)/2$

Damit sind pi und qi mit pi + qi = xi für i=1,2,3...16 und pi + qi = yi für i=17,18...32, leicht zu finden. Zum Beispiel sind p9 und q9 die Wurzeln von x² - x9 x + ½(y6 + y12) = 0. Damit ergeben sich die Werte cos(n*w), zum Beispiel cos(2w)+cos(32w) = p2 mit

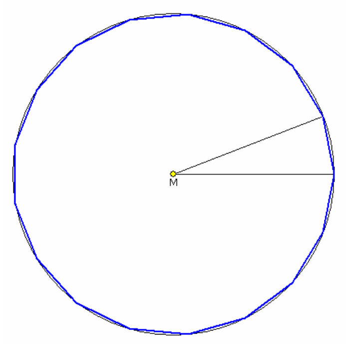
cos(2w) + cos(32w) = ½ (cos(30w) + cos(34w)) = ½ q8

so dass cos(2*w) und cos(32*w) die Wurzeln der Gleichung x² - p2 x + ½ q8 = 0 sind. Mit der Bestimmung aller cos(n*w) sind damit auch alle zur Konstruktion des 257-Ecks notwendigen Werte gefunden.

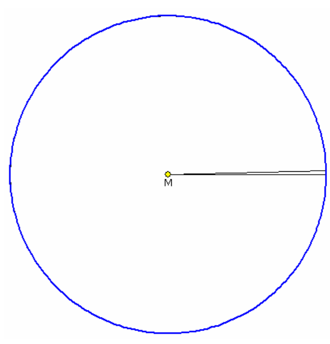
Während ein regelmäßiges Siebzehneck noch als solches zu erkennen ist, kann man ein 257-Eck nicht mehr mit bloßem Auge von einem Kreis unterscheiden:



Regelmäßiges Fünfeck
für r = 1 ergibt sich
Zentriwinkel 72°
Innenwinkelsumme 540°
Seite s = 1.1756
Umfang u = 5.8779
Flächeninhalt A = 2.3776
Diagonalenzahl 5



Regelmäßiges Siebzehneck
für r = 1 ergibt sich
Zentriwinkel 21°
Innenwinkelsumme 2700°
Seite s = 0.3675
Umfang u = 6.2475
Flächeninhalt A = 3.0706
Diagonalenzahl 119



Regelmäßiges 257-Eck
für r = 1 ergibt sich
Zentriwinkel ≈ 1°
Innenwinkelsumme 45900°
Seite s = 0.0244
Umfang u = 6.283
Flächeninhalt A = 3.1313
Diagonalenzahl 32639