Die Kreiszahl

Steffen Polster
Chemnitz, 14.März 2017

"Kein anderes mathematisches Symbol hat wohl soviel Rätselraten, romantische Spekulation, Missverständnis und menschliches Interesse hervorgerufen wie die Zahl π."
William L.Schaaf, Nature and History of π

Geschichte der Kreiszahl π

Als eine der ersten mathematischen Naturkonstanten war die Kreiszahl π, das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser, schon den Ägyptern und Babyloniern bekannt. Im ersten Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23 der Bibel findet sich z.B. die Verwendung von π = 3.
Im Laufe der Jahrhunderte wurden immer wieder Anstregungenen unternommen, um diese unendliche, nicht periodische Zahl möglichst genau zu berechnen.
Neben dem rein mathematischem Interesse an neuen und schnellen Algorithmen zur π-Berechnung, dienen diese auch zum Test von Supercomputern. Die gefundenen Dezimalziffern bilden ein wertvolles absolut (?) zufällig verteiltes Zahlenmaterial. Die Liste enthält historische Meilensteine der Beschäftigung mit π = 3,14159 …

Zeitabschnitt Historisches Ereignis

1650 v.Z.	im Papyrus Rhind pi = (16 / 9)²
Babylonien	Näherungswert 256/81 = 3,16049
Ägypten	25/8 = 3.125 ...
220 v.Z.	Archimedes nutzt 22/7 = 3,142857
	= 3 (Altes Testament; 1. Koen. 7,23)
125 v.Z.	Hipparch nutzt 377/120 = 3.141(666...)
150	Ptolemäus nutzt 377/120 = 3.141(666...)
150	Rabbi Nehemiah verwendet 22/7 = 3,142857
263	Liu Hui gibt 3.14158... als Näherung an
480	Zu Ch'ong-Zhi verwendet in China 355/113 = 3.141592(920...)
499	Aryabhata (Indien) 62832/2000 = 3.141(6)
7.Jahrhundert	Brahmagupta: pi = Wurzel(10)
1220	Fibonacci von Pisa: pi = 3.141818
1427	al-Kashi kennt 16 Dezimalstellen 3.141592653589873...
1464	Cusanus pi = 3/4 (Wurzel(3) + Wurzel(6)) = 3.1(161...)
1580	Tycho Brahe pi = 88/Wurzel(785) = 3.14(085...)
1596	Ludolf van Ceulen kennt 35 Kommastellen
1625	Adrian Metius 355/113
1682	Leibniz veröffentlicht seine PI-Formel
1690	Abraham Sharp kennt 72 Kommastellen
1706	John Machin berechnet 100 Kommastellen
	William Jones benutzt als Erster den griechischen Buchstabe PI
1719	De Lagny ermittelt 112 korrekte Kommastellen
1736	Bezeichnung pi nach 'perì métros' durch Euler
1739	Euler entwickelt pi in einen Kettenbruch
1766	Arima (Japan) 428224593349304/136308121570117, d.h. 29 korrekte Stellen
1767	Nachweis der Irrationalität von pi (Lambert)
1777	Buffon beschreibt ein Zufallsexperiment zur Bestimmung von pi
1800	Vega: 140 Kommastellen
1836	Specht pi = 13/50 Wurzel(146) = 3.14159(195...)
1844	Zacharias Dase: 200 Kommastellen
1853	William Rutherford: 400 Dezimalen
1868	Grosvenos pi = 10 Wurzel(2) - 11 = 3.14(213...)

1873	William Shanks: 707 Dezimalen ; (527 korrekt)
1882	Beweis der Transzendenz durch Lindemann
1897	US-Staat Indiana setzt per Gesetz(!) pi = 3,2
1947	Ferguson: 808 Stellen
	Berechnung mit Computerhilfe
1949	G.W.Reitweiser (ENIAC): 2037 Stellen
1954	S.C.Nicholson (NORC): 3092 Stellen
1957	G.E.Felton (Pegasus): 7480 Stellen
1958	F.Genuys (IBM 704): 10000 Stellen
1958	G.E.Felton (Pegasus): 10020 Stellen
1959	J.Guilloud (IBM 704): 16167 Stellen
1961	Gerard (IBM 7090): 20000 Stellen
1961	W.Shanks (IBM 7090): 100265 Stellen
1966	J.Guilloud,J.Filliatre (IBM 7030): 250000 Stellen
1967	J.Guilloud,M.Dichampt (CDC 6600): 500000 Stellen
1973	J.Guilloud,M.Bouyer (CD 7600): 1001250 Stellen
1977	Gosper ermittelt 17 Millionen Terme der Kettenbruchentwicklung
1981	K.Miyoshi,Y.Kanada (FACOM M-200): 2000036 Stellen
1981	J.Guilloud: 2000050 Stellen
1982	Y.Tamura (MELCOM 900II): 2097144 Stellen
1982	Y.Tamura,Y.Kanada (HITAC M-280H): 4194288 Stellen
1982	Y.Tamura,Y.Kanada (HITAC M-280H): 8388576 Stellen
1983	Y.Kanada,S.Yoshino (HITAC M-290H): 16777206 Stellen
1985	William Gosper (Symbolics 3670): 17526200 Stellen
1986	bei der Berechnung von PI wird ein CPU-Fehler des Cray 2-Prototypen entdeckt
1986 Jan	David Bailey (Cray 2): 29360111 Stellen
1986 Sep	Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-810): 33554414 Stellen
1986 Okt	Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-810): 67108839 Stellen
1987 Jan	Y.Kanada,Y.Tamura (NEC SX-2): 134214700 Stellen
1988 Jan	Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 204326551 Stellen
1989 Mai	Chudnowsky (Cray 2): 480000000 Stellen
1989 Jun	Chudnowsky (IBM 3090): 535339270 Stellen
1989 Jul	Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 536870898 Stellen
1989 Aug	Chudnowsky (IBN 3090): 1011196691 Stellen
1989 Nov	Y.Kanada,Y.Tamura (HITAC S-820): 1073740799 Stellen
1991 Aug	Chudnowsky: 2.26 Milliarden Stellen
1994 Mai	Chudnowsky: 4.044 Milliarden Stellen
1995 Jun	D.Takahashi,Y.Kanada: 3.2 Md. Stellen
1995 Aug	D.Takahashi,Y.Kanada: 4.294 Md. Stellen
1995	Kaneda: 6442459000 Stellen
1996	Bellard ermittelt die 100 Milliardste Stelle mit einem völlig neuen
	"Tröpfchenalgorithmus" (hexadezimal = 9C381872D27596F81D0E48B95A6C46)
1997	Bellard berechnet die 1 Billionste binäre Stelle
1998 Aug	im Pihex-Project wird die 5 Billionste binäre Stelle gefunden
1999 Feb	die 40 Billionste binäre Stelle beginnt hexadezimal mit A0F9FF371D17593E0
1999 Apr	Kanada und Takahashi: 68.719 Milliarden Stellen

1999 Juni	Havermann berechnet 20 Millionen Terme der Kettenbruchentwicklung
1999 Sep	Kanada und Takahashi: 206.15843 Milliarden Stellen
	Rechenzeit: 37 und 46 Stunden auf HITACHI SR 8000
2002 Dez	Kanada ermittelt über 1,2 Billionen Ziffern

1.Buch der Könige 7 / 23 : "Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum".
$\pi \approx 3$ Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23

Der älteste offiziell überlieferte Wert für π stammt von den Ägyptern. Etwa um 1850 v.u.Z. entstand der Moskauer Papyrus. In diesem findet man $\pi \approx 19/6 = 3{,}16666\ldots$
Im Papyrus Rhind , das auf 1800-1650 v.u.Z. datiert wird, des Schreibers Ahmes, verwendet man $\pi \approx (4/3)^4 = 3{,}16049\ldots$ Ägyptischer Wert aus dem Papyrus Rhind

Etwa zur selben Zeit wie in Ägypten (1900-1600 v.u.Z.) nutzte man in Babylon die Näherung 3 für π.

In einem Keilschrifttexte aus Susa findet man
$\pi \approx 3\ 1/8 = 3{,}125$ Babylonischer Näherungswert aus dem 2.Jahrtausend v.u.Z.
$\pi \approx 256/81$ Babylonischer Näherungswert

Euklid von Alexandria (325-265 v.u.Z.) gelang der Nachweis, dass $3 < \pi < 4$ gilt. Erst Archimedes verfeinerte diese Ungleichung durch Betrachtung eines 96-Ecks zu $223/71 < \pi < 22/7$
$\pi \approx 22 / 7$ Archimedes-Wert

Nach Angaben von Heron von Alexandria soll Archimedes sogar eine noch bessere Abschätzung für π gefunden haben
$195882/62351 = 3{,}14160 < \pi < 3{,}14173 = 211882/67441$
Apollonius von Perge verwendete $\pi \approx 211875 / 67441 = 3{,}1416$.

Der griechische Astronom Claudius Ptolemäus (85-165 u.Z.) verwendete die Vorarbeit des Archimedes und setzte dessen Methode bis zum 720-Eck fort.
$\pi \approx 3°8'30'' / 1°$ Ptolemäus-Wert im 60iger System ($\approx 3{,}141666\ldots$)
$\pi \approx 377 / 120$ Ptolemäus-Wert (um 150)

$\pi \approx (26 / 15)^2$ Indischer Wert aus den Sulbasutras (500 v.u.Z.)
$\pi \approx \sqrt{10}$ Brahmagupta-Wert, auch Zhang Heng um 100 u.Z.
$\pi \approx 142 / 45$ Wang Fan um 250 u.Z.

$\pi \approx 3{,}1416$ Indischer Wert aus dem 5.Jahrhundert
$\pi \approx 3\ 1/5$ Näherung der französischen Artillerie
$\pi^2 \approx g$ praktischer Näherungswert in der Physik (g … Fallbeschleunigung)
$\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$ Platon-Wert
$\pi \approx 4 / \sqrt{\tau} = 2 \sqrt{(2 \sqrt{3})}$ Cheops-Wert, ermittelt aus Maßzahlen der Pyramide
$\pi \approx 20/9 \sqrt{2}$ Warusfel-Wert (1961)
$\pi \approx \sqrt{(40/3 - 2 \sqrt{3})}$ Kochansky-Wert (1685)
$\pi \approx 1{,}8 + \sqrt{1{,}8}$ Vieta-Wert
$\pi \approx 13/50 \sqrt{146}$ Ehrenwirth (1997)
$\pi \approx 3{,}141818$ Leonardo Fibonacci (um 1200)
$\pi \approx 3{,}141592653589873$ al-Kashi-Wert (1427)

Chinesischer Näherungswert

$\pi \approx 355 / 113$ Tsu Ch'ung Chi (um 500 u.Z.)
1573 Valentinus Otho, 1625 Adrian Metius

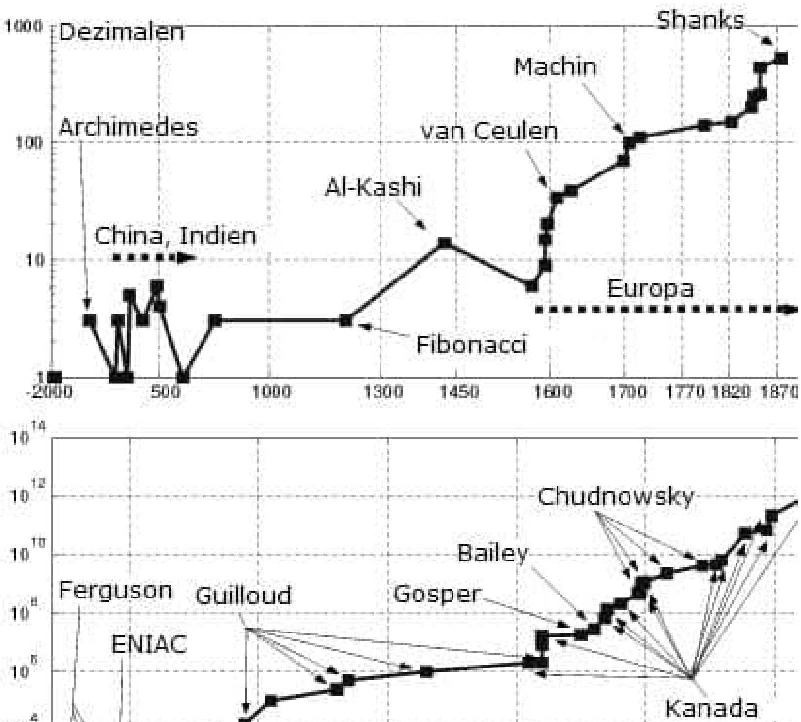
Interessant ist es, wie Tsu Ch'ung Chi seinen Näherungswert fand. Es wird angenommen, dass er erkannte, dass die Differenz der Zähler und Nenner der Näherungswerte von Archimedes und Ptolemäus π besser annähern: $\pi \approx [377 - 22] / [120 - 7] = 355/113$

1986 wurde in der Volksrepublik China 1986 die abgebildete Münze ausgegeben, welche die Entwicklungen während der Han-Dynastie zum Thema hat. Der Nennwert beträgt 5 Yuan.
Die Zeichnung deutet auf die näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl π zu 355/113 durch Zu Chong-zhi hin. Dieser Wert ist auf 6 Dezimalstellen korrekt. In der geometrischen Zeichnung ist die Bezeichnung "Ludolfsche Zahl" (Zu Lü) π eingetragen, während daneben der Name "Zu Chong-zhi" nebst "Zeitalter" (Gong Yuan) 439-500 "Jahr" angegeben sind.

In Mathesis enucleate wird 1689 von J.Christoph Sturm erstmals die Bezeichnung "e" für die Kreiszahl π benutzt: "… si diameter alicuius circuli ponatur a, circumferentiam appellari posse ea (quaecumque enim inter eas fuerit ratio, illius nomen potest designari littera e)…"

William Jones benutzte als Erster den griechischen Buchstabe π zur Kennzeichnung der Kreiszahl. Es wird vermutet, dass er diese Abkürzung in Bezug auf das griechische Word für Kreisumfang = περιφερια (peripheria) wählte.

Um 1700 gab Jacob Marcelis an, dass ihm die Kreisquadratur gelungen sein und nannte als "exakten" Wert
π = 3 1008449087377541679894282184894/6997183637540819440035239271702



Historische Entwicklung der bekannten Dezimalziffern der Kreiszahl

Im Dezember 2002 berechnete der Japaner Kanada π auf 1,2411 Billionen Dezimalstellen.
Dazu nutzte er parallel auf zwei Rechnern HITACHI SR8000/MP, 1 TerraByte Speicher, die Formeln:

π = 48 arctan(1/49) + 128 arctan(1/57) - 20 arctan(1/239) + 48 arctan(1/110443)
π = 176 arctan(1/57) + 28 arctan(1/239) - 48 arctan(1/682) + 96 arctan(1/12943)

Kreiszahl PI - Ziffern
Die Liste enthält die ersten 4000 Dezimalziffern von π.

π = 3,...
14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286
20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475
64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820
46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430 86021
39494 63952 24737 19070 21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132
00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872 14684 40901 22495 34301 46549
58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611 21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960
51870 72113 49999 99837 29780 49951 05973 17328 16096 31859 50244 59455 34690 83026 42522
30825 33446 85035 26193 11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303
59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 80532 17122 68066 13001
92787 66111 95909 21642 01989 38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303 01952
03530 18529 68995 77362 25994 13891 24972 17752 83479 13151 55748 57242 45415 06959 50829
53311 68617 27855 88907 50983 81754 63746 49393 19255 06040 09277 01671 13900 98488 24012
85836 16035 63707 66010 47101 81942 95559 61989 46767 83744 94482 55379 77472 68471 04047
53464 62080 46684 25906 94912 93313 67702 89891 52104 75216 20569 66024 05803 81501 93511
25338 24300 35587 64024 74964 73263 91419 92726 04269 92279 67823 54781 63600 93417 21641
21992 45863 15030 28618 29745 55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927 21079 75093 02955
32116 53449 87202 75596 02364 80665 49911 98818 34797 75356 63698 07426 54252 78625 51818
41757 46728 90977 77279 38000 81647 06001 61452 49192 17321 72147 72350 14144 19735 68548
16136 11573 52552 13347 57418 49468 43852 33239 07394 14333 45477 62416 86251 89835 69485
56209 92192 22184 27255 02542 56887 67179 04946 01653 46680 49886 27232 79178 60857 84383
82796 79766 81454 10095 38837 86360 95068 00642 25125 20511 73929 84896 08412 84886 26945
60424 19652 85022 21066 11863 06744 27862 20391 94945 04712 37137 86960 95636 43719 17287
46776 46575 73962 41389 08658 32645 99581 33904 78027 59009 94657 64078 95126 94683 98352
59570 98258 22620 52248 94077 26719 47826 84826 01476 99090 26401 36394 43745 53050 68203
49625 24517 49399 65143 14298 09190 65925 09372 21696 46151 57098 58387 41059 78859 59772
97549 89301 61753 92846 81382 68683 86894 27741 55991 85592 52459 53959 43104 99725 24680
84598 72736 44695 84865 38367 36222 62609 91246 08051 24388 43904 51244 13654 97627 80797
71569 14359 97700 12961 60894 41694 86855 58484 06353 42207 22258 28488 64815 84560 28506
01684 27394 52267 46767 88952 52138 52254 99546 66727 82398 64565 96116 35488 62305 77456
49803 55936 34568 17432 41125 15076 06947 94510 96596 09402 52288 79710 89314 56691 36867
22874 89405 60101 50330 86179 28680 92087 47609 17824 93858 90097 14909 67598 52613 65549
78189 31297 84821 68299 89487 22658 80485 75640 14270 47755 51323 79641 45152 37462 34364
54285 84447 95265 86782 10511 41354 73573 95231 13427 16610 21359 69536 23144 29524 84937
18711 01457 65403 59027 99344 03742 00731 05785 39062 19838 74478 08478 48968 33214 45713
86875 19435 06430 21845 31910 48481 00537 06146 80674 91927 81911 97939 95206 14196 63428
75444 06437 45123 71819 21799 98391 01591 95618 14675 14269 12397 48940 90718 64942 31961
56794 52080 95146 55022 52316 03881 93014 20937 62137 85595 66389 37787 08303 90697 92077
34672 21825 62599 66150 14215 03068 03844 77345 49202 60541 46659 25201 49744 28507 32518
66600 21324 34088 19071 04863 31734 64965 14539 05796 26856 10055 08106 65879 69981 63574
73638 40525 71459 10289 70641 40110 97120 62804 39039 75951 56771 57700 42033 78699 36007
23055 87631 76359 42187 31251 47120 53292 81918 26186 12586 73215 79198 41484 88291 64470
60957 52706 95722 09175 67116 72291 09816 90915 28017 35067 12748 58322 28718 35209 35396
57251 21083 57915 13698 82091 44421 00675 10334 67110 31412 67111 36990 86585 16398 31501
97016 51511 68517 14376 57618 35155 65088 49099 89859 98238 73455 28331 63550 76479 18535
89322 61854 89632 13293 30898 57064 20467 52590 70915 48141 65498 59461 63718 02709 81994
30992 44889 57571 28289 05923 23326 09729 97120 84433 57326 54893 82391 19325 97463 66730
58360 41428 13883 03203 82490 37589 85243 74417 02913 27656 18093 77344 40307 07469 21120
19130 20330 38019 76211 01100 44929 32151 60842 44485 96376 69838 95228 68478 31235 52658
21314 49576 85726 24334 41893 03968 64262 43410 77322 69780 28073 18915 44110 10446 82325
27162 01052 65227 21116 60396

Konstante Größen bezüglich π

π^2 = 9,8696044010893586188344909998761511353136994072407906264133493762200448224192
0524300177340371855223182402591377402314407777234812203004672761061767798519766
60990399856206575630571506041232840328780869352769342164939666571519044538735
261779413820258260581693412515592048309818873270033076266671104358950871504100
3257885365952763577528379226833187450864045463541250269737295669583342278581500
063652270954724908597560726692647527790052853364522066698082641589687710573278
8929174690154551006925443245703644965617253792860760600814597258922923241424004
429598136181441370677778194739658303170856632789570753407991714523158926372114
46382826443285280379285034809523389950396857460948534600901774293220579903591

π^3 = 31,006276680299820175476315067101395202225288565885107694144538103806394917465
706037566701032602886193030121961572336622375201617652339672733561394154425388
254033667727557662639675028532033246863042678698663839618375292562924730094296
918620267053985960770069824572953187326935581852186310769334223813656161847300
841751718172199304257459366024683696918103146637450336080943110222975685340118
290228676472782943776835949262234767424747593811032378117123376614379168440003
743443500411717594370468838576063090008953125576685039180072879698043329856903
186102586329883188593652390724818865317571721162253423367778852715933185662389
473223657972722390743940974337639703891576417905598881602783196211112441654528

$1/\pi$ = 0,31830988618379067153776752674502872406891929148091289749533468811779359526845
30701802276055325061719121456854535159160737858236922291573057559348214633996
784584799338748181551461554927938506153774347857924347953233867247804834472580
236647602284453995114318809237801738053479122409788218738756881710574461998928
868004973446954789192217966461935661498123339729256093988973043757631495731339
284820779917482786972199677361983999248857511703423577168622350375343210930950
739760194789207295186675361186049889932706106543135510064406495556327943320458
934962391963316812120336060719962678239749976655733088705595101400324813551287

$\pi/2$ = 1,57079632679489661923132169163975144209858469968755…
$\pi/3$ = 1,04719755119659774615421446109316762806572313312503…
$\pi/4$ = 0,78539816339744830961566084581987572104929234984377…
$\pi/5$ = 0,62831853071795864769252867665590057683943387987502…
$\pi/6$ = 0,52359877559829887307710723054658381403286156656251…
2π = 6,28318530717958647692528676655900576839433879875021…
3π = 9,42477796076937971538793014983850865259150819812531…
4π = 12,5663706143591729538505735331180115367886775975004 2…
$2/\pi$ = 0,63661977236758134307553505349005744813783858296182…
$\sqrt{\pi}$ = 1,77245385090551602729816748334114518279754945612238…
$1/\sqrt{\pi}$ = 0,56418958354775628694807945156077258584405062932899…
$\sqrt{2\pi}$ = 2,50662827463100050241576528481104525300698674060993…
$1/\sqrt{2\pi}$ = 0,39894228040143267793994605993438186847585863116493…
$\sqrt[3]{\pi}$ = 1,46459188756152326302014252726379039173859685562793…

π in Intel-Prozessoren
In den Intel-Prozessoren ist π als Konstante vordefiniert mit

$$\pi = 0.f \cdot 2^2 \text{ mit } f = \text{C90FDAA2 2168C234 C}$$

d.h. als Näherungswert = 3,14159265358979323845 85…
Der genauere Wert von π weicht in der 20.Stelle ab = 3,14159265358979323846 26…

"Das wunderbar geheimnisvolle Pi ist zu einem Gurgelmittel verkommen, das Rechenmaschinen zum Rachenputzen dient."
Philip J.Davis (The lore of large numbers)

Kreiszahl PI - Statistik

Die Ziffernfolge von π soll statistisch absolut zufällig verteilt sein. Die Auswertung der ersten 500000 Dezimalstellen von π ergibt:

Ziffer	Anzahl	Anteil in %	Ziffer	Anzahl	Anteil in %
0	50158	10,0316	1	49943	9,9886
2	49746	9,9492	3	50049	10,0098
4	49717	9,9434	5	50332	10,0664
6	49999	9,9998	7	49937	9,9874
8	50272	10,0544	9	49847	9,9694

Diese Werte ergeben bei einem χ^2-Verteilungstest, dass die Abweichung vom arithmetischen Mittel zufällig ist. Die Ziffern sind mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % gleichverteilt. Testet man nicht nur Einzelziffern sondern Paare von Ziffern, ergibt sich für deren Anzahl unter den ersten 500000 Dezimalziffern:

2.Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.Ziffer										
0	4964	4978	5004	5041	5009	4998	5022	5117	4981	5045
1	5079	4988	4811	4982	4949	5055	4939	5021	5159	4960
2	5062	4963	4895	5045	4899	4927	4983	5013	4959	5000
3	5164	4905	4967	4975	4873	5105	5038	4993	5006	5023
4	4921	4950	4914	4986	4930	5034	5043	5071	4946	4922
5	4966	5029	5095	5017	5103	5088	4980	5033	5072	4948
6	5093	4967	5010	5031	5013	5010	4905	4962	5031	4977
7	4981	5079	4957	5016	5038	4970	5052	4825	5037	4982
8	5023	5053	5044	4967	4973	5121	4991	5091	5018	4991
9	4905	5031	5049	4989	4930	5024	5046	4811	5063	4999

Vom 6.Juni 1997 bis 6.Juli 1997 berechneten Daisuke Takahashi und Yasumasa Kanada von der Universität von Tokyo über den 4.Borwein-Algorithmus und mittels Gauß-Legendre-Algorithmus insgesamt

51 539 600 000 Dezimalziffern

der Kreiszahl PI.
Insgesamt ermittelte der HITAC SR-2201 Supercomputer in 66 Stunden reiner Rechenzeit 51 539 607 552 Ziffern, von denen 51539600000 Ziffern als gültig angesehen werden.

Dabei wurden als 50 Milliardste Ziffer (erste angezeigte Ziffer) von π und $1/\pi$ ermittelt:

π 85133 98712 75109 30042
$1/\pi$ 1191 08624 25640 78042

Die Auswertung der ersten 50 Milliarden Dezimalstellen von π ergab für die absolute und relative Häufigkeit der 10 Dezimalziffern:

Ziffer	Anzahl	Anteil in %	Ziffer	Anzahl	Anteil in %
0	5000012647	10,0000253	1	4999986263	9,9999725
2	5000020237	10,0000405	3	4999914405	9,9998288
4	5000023598	10,0000472	5	4999991499	9,9999830
6	4999928368	9,9998567	7	5000014860	10,0000297
8	5000117637	10,0002353	9	4999990486	9,9999810

Testgröße beim χ^2-Test = 5,60
Ist die Ziffernfolge von π zufällig verteilt, so muss praktisch jede endliche Ziffernfolge irgendwann einmal in der Dezimalstellenfolge von PI auftreten. Bekannt sind heute (Juli 1997) folgende "interessante" Ergebnisse:

Die Ziffernfolge (a) tritt in π ab der Stelle n auf:

Folge (a)	n
0123456789	17387594880, 26852899245, 30243957439, 34549153953, 41952536161, 43289964000
9876543210	21981157633, 29832636867, 39232573648, 42140457481, 43065796214

09876543210	42321758803
27182818284	45111908393

Die Ziffernfolge (a) tritt in $1/\pi$ ab der Stelle n auf:

Folge (a)	n
0123456789	6214876462
01234567890	50494465695
9876543210	15603388145, 51507034812
999999999999	12479021132

Praktisch tritt jede Ziffernkombination in der Ziffernfolge von π auf. Durch Jeremy Gilbert wird im Internet die Möglichkeit geboten, nach Ziffernfolgen zu suchen. Zum Beispiel findet man unter den ersten 10 Millionen Dezimalziffern von π die willkürlich ausgewählte Folge 140359 genau 14 mal ab der n.ten Dezimalstelle mit n =

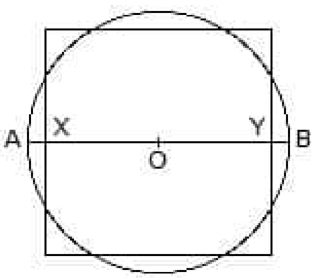
9861	957585	1781275	3024730	3326072
3470972	3894928	4015722	5510912	6481227
7223374	7658692	8671056	9066228	

Die Ziffernfolge 314159 findet sich unter den ersten 10 Millionen Ziffern sechs mal. An der 1142905318634. Nachkommastelle von π findet man laut Yasumasa Kanada wieder die Folge 314159265358.

In der Dezimalzifferfolge von π finden sich (aus statistischen Gründen) auch Stellen, an welchen die gleiche Ziffer wiederholt auftritt.

Ziffer	Stelle an welcher 1, 2, 3, 4, … gleiche Ziffern aufeinander folgen
0	32, 307, 601, 13390, 17534, 1699927, 3794572, …
1	1, 94, 153, 12700, 32788, 255945, 4657555, …
2	6, 135, 1735, 4902, 65260, 963024, 82599811, …
3	9, 24, 1698, 28467, 28467, 710100, 710100, 36488176, …
4	2, 59, 2707, 54525, 808650, 828499, 17893953, 22931745, …
5	4, 130, 177, 24466, 24466, 244453, 3517236, …
6	7, 117, 2440, 21880, 48439, 252499, 8209165, 45681781, 45681781, …
7	13, 559, 1589, 1589, 162248, 399579, 3346228, 24658601, 24658601, …
8	11, 34, 4751, 4751, 213245, 222299, 4722613, 46663520, 46663520, …
9	5, 44, 762, 762, 762, 762, 1722776, 36356642, …

Die Beast-Number 666 tritt erstmals an der 2441.Dezimalstelle auf. Die Ziffernfolge 314159 findet sich unter den ersten 10 Millionen Ziffern sechs mal.
In den 15 auf die 710150.Stelle folgenden Ziffern
… 353733333338638…
tritt die Ziffer 3 zehnmal auf, und dabei gleich sieben Mal hintereinander.



Kreiszahl PI in den Sulbasutras

In den Sulbasutras wird eine Näherungsmethode zur Quadratur des Kreises angegeben. Diese beruht auf der Konstruktion eines Quadrates mit einer Seitenlänge von 13/15 des Kreisdurchmessers und wird deshalb auch 13/15-Methode genannt.
Dies entspricht einem Näherungswert von
$\pi = 4 \cdot (13/15)^2 = 676/225 = 3{,}00444$,
also einem ungenaueren Wert, als er schon babylonischen Mathematikern bekannt war.

Bemerkenswert ist, dass die antiken indischen Mathematiker für π in den Sulbasutras unterschiedlichste Werte nutzen und dass sogar im gleichen Text. Dies überrascht nicht, wenn man bedenkt, dass nicht die Kreiszahl π betrachtet wurde, sondern praktische und effektive Anwendungen bei der Konstruktion von Flächen.
Im Baudhayana Sulbasutra findet man für π die Werte 676/225, 900/289 und 1156/361. In anderen Sulbasutras treten 2,99, 3,00, 3,004, 3,029, 3,047, 3,088, 3,1141, 3,16049 und 3,2022 auf. Das Manava Sulbasutra nutzt dagegen π = 25/ 8 = 3,125.

Zahlen in PI

Sucht man nach dem Auftreten der Ziffernfolge der natürlicher Zahlen in der Dezimaldarstellung von p so findet man als letzte einstellige Zahl die 7 ab Position 13. Die letzte auftretende zweistellige Zahl ist die 68 ab Stelle 605, die letzte dreistellige Zahl ist die 483 ab Position 8553; die letzte vierstellige Zahl ab der 99846.Position ist die 6716.
Erstaunlich ist, dass man alle vierstelligen Zahlen unter den ersten 100000 Ziffern findet, die Zahl 10000 aber erst an 387791.Stelle auftritt.
Von den fünfstelligen Zahlen tritt als Letzte die 22801 ab der 1146939.Dezimalstelle auf. Die erste 1000000 findet man ab Platz 10359803, die erste 10000000 ab 13310436 (Juni 2006). Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 200 Millionen Ziffern nicht zu finden ist, ist die 10000005.
Die Tabelle enthält die wachsenden Zahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	1	4	2	5	4	6	7
7	13	10	49	11	94	12	148
18	424	68	605	100	854	103	3486
154	3644	180	3664	276	3796	304	4460
373	5229	483	8553	1001	15761	1030	20818
1037	24065	1046	25357	1056	25547	1061	43971
1203	60872	3825	61286	4057	65905	6716	99846
10000	387791	10040	637284	11492	784625	14523	1076561
17125	1113327	22801	1146939	100000	2393355	100002	2543077
100020	5225742	100216	6318406	100839	8036701	103250	8094374
106945	10763008	124374	12803162	480296	13594332	569540	14118307
1000003	15753840	1000005	19631531	1000011	34502682	1000049	47708171
1000054	61910790	1000225	66285420	1000876	68566413	1075656	166100501
10000001	169658538						

PI-Pascalprogramm

Durch Hans-Jürgen Caspar wurde 2003 auf Matroid ein einfaches Pascalprogramm zur Berechnung von einigen Tausend Dezimalziffern der Kreiszahl π veröffentlicht.
Grundlage ist die Berechnungsvorschrift

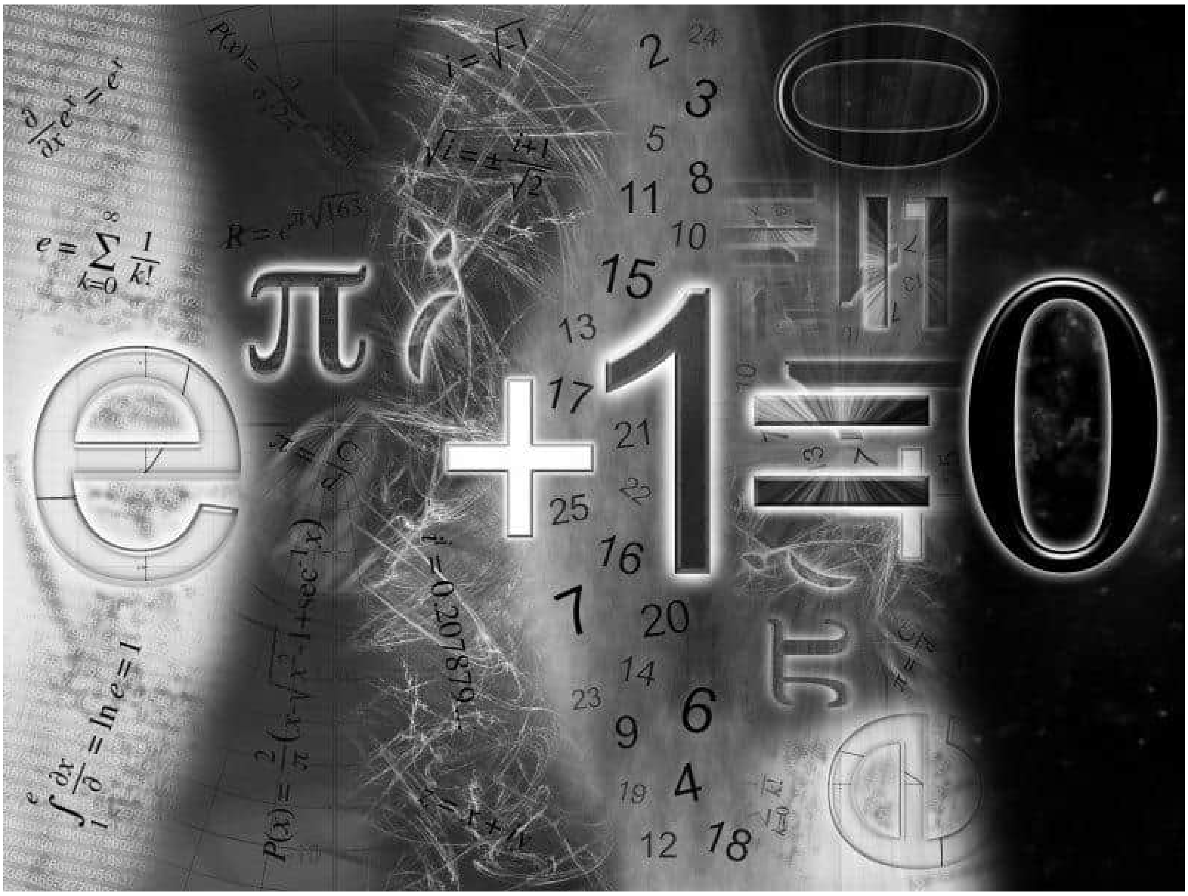
$$\pi = 3 + 1\cdot 1/(8\cdot 1\cdot 3)\ (3 + 3\cdot 3/(8\cdot 2\cdot 5)\ (3 + 5\cdot 5/(8\cdot 3\cdot 7) + (3 + ...)))$$

```
Program pi1k;
uses crt,dos; const n=1000; {Stellenzahl}
Var i,j,k : integer; c,d,q,u,x : word; a : array[1..n+1] of word;
procedure divi(y:word);
begin c:=0; for j:=1 to n+1 do begin x:=a[j]+c;q:=x div y;a[j]:=q; d:=x-y*q;c:=10*d; end; end;
procedure mult(y:word);
begin     for j:=1 to n+1 do a[j]:=y*a[j]; for j:=n+1 downto 2 do
              begin u:=a[j] div 10;a[j-1]:=a[j-1]+u; a[j]:=a[j] mod 10; end; end;
Begin
  clrscr; write(' '); k:=trunc(n*ln(10)/ln(4));
  for i:=k downto 1 do begin divi(8);divi(i);mult(2*i-1);divi(2*i+1);
```

```
    mult(2*i-1);a[1]:=a[1]+3;
  end;
  for i:=1 to n+1 do begin write(a[i]); if i=1 then write('.');
    if (i mod 6=0) then write(' ');
    if wherex=80 then write('   ');
  end;
End.
```

Top Ten der schönsten mathematischen Sätze

π ist eine unendliche, nicht-periodische, irrationale Dezimalzahl, deren Transzendenz durch Lindemann nachgewiesen wurde.
Nach einer Leserumfrage des "The Mathematical Intelligencer" von 1990 wurden die zehn schönsten mathematischen Sätze gewählt. Darunter finden sich auch einige, in denen die Kreiszahl auftritt:



Platz 1	**$e^{i\pi} = -1$, Euler 1748**
Platz 5	Die Summe aller $1/n^2$ ist gleich $\pi^2/6$, James Gregory 1675
Platz 8	π ist transzendent, Lindemann 1882

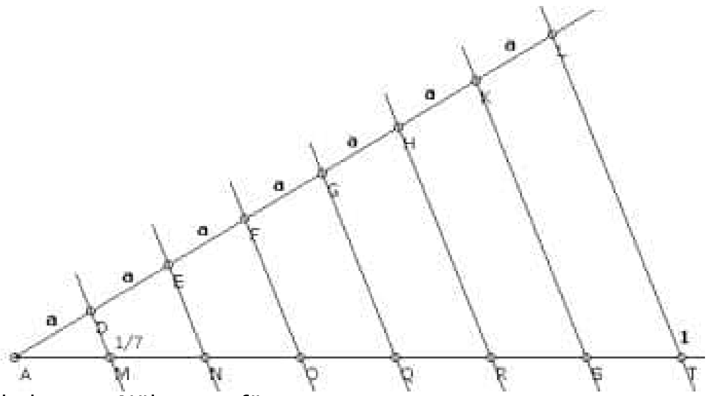
Im Jahre 2001 führte Clifford Pickover eine Internet-Umfrage nach den bedeutendsten Gleichungen aller Zeiten durch. Dort wurde folgendes mit π gewählt:

Platz 6	$1 + e^{i\pi} = 0$, Eulersche Beziehung
Platz 7	$u = 2\pi r$, $A = \pi r^2$, Umfang und Flächeninhalt des Kreises
Platz 9	$f(x) = \Sigma\, c_n\, e^{in\pi\, x/L}$, eine Fourier-Reihe
Platz 17	$\int K\, dA = 2\pi \times \chi$ (Gauß-Bonnet-Beziehung),
Platz 19	$1/(2\pi i) \int f(z)/(z-a)\, dz = f(a)$ (Cauchysche Integralformel),

Nach Aussage Pickovers gehört jeder, der 5 der ersten 10 Gleichungen identifizieren kann, zu dem 1% von Menschen auf diesem Planeten, die etwas Ahnung von Mathematik haben.

Außerdem wurde durch Clifford Pickover wurden in dem Buch "Wonders of numbers" die Kreiszahl zur wichtigsten transzendenten Zahlen der Mathematik gekürt.

Kreiszahl - Näherungskonstruktion

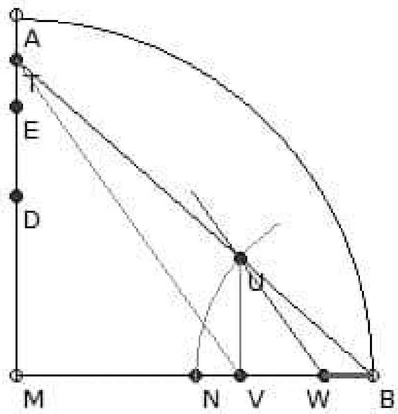


Eine einfache Näherungskonstruktion für π ergibt sich unmittelbar aus dem Strahlensatz.

Trägt man auf einem Strahl sieben Mal eine beliebige Strecke a an und verbindet den letzten Teilpunkt mit einem Punkt T auf einem zweiten Strahl, der gerade vom Scheitel dem Abstand 1 hat, so kann durch Parallelverschiebung eine Strecke der Länge 1/7 konstruiert.

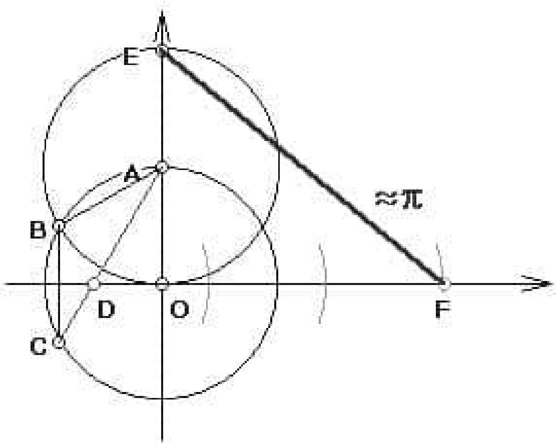
Setzt man an diese eine Strecke der Länge 3 an, so erhält man 3 1/7 = 22/7 und damit die bekannte Näherung für π.
Diese Näherung ist nur um 0,04 % größer als der korrekte Wert.

Näherungskonstruktion (2)



Eine gute Näherung für π ist der Bruch 355/113 = 3,141592920…
Durch H.Pieper wurde 1984 eine Konstruktion dieses Bruches beschrieben und damit eine Näherungskonstruktion für die Kreiszahl.
Es ist 355/113 = 3 + 16/113
Damit genügt es den Bruch 16/113 zu konstruieren.

Konstruktionsbeschreibung:
1) Gegeben sei ein Viertelkreis MBA mit einem Radius von 1. MA und MB sind senkrecht aufeinanderstehende Radien
2) Durch fortgesetztes Halbieren teile man den Radius AM in 8 gleiche Abschnitte und wähle auf AM den Punkt T so, dass TM = 7/8
3) Man verbinde T mit B. Der Punkt N halbiere den Radius MB
4) Zeichnet man um B einen Kreis mit dem Radius BN = 1/2, so erhält man auf TB den Schnittpunkt U
5) Man fälle das Lot von U auf MB und erhalte den Lotfußpunkt V. V und T sind miteinander zu verbinden
6) Die Parallele von TV durch U schneide den Radius MB in W
7) Dann ist WB = 16/113



Konstruktion von Kochansky

Durch den polnischen Mathematiker Adam Kochansky (1631-1700) wurde 1685 ein Näherungswert für π angegeben. Ausgangspunkt ist die Gleichung 4.Grades $9x^4 - 240x^2 + 1492 = 0$.

Deren Lösungen sind
$\frac{1}{3}\sqrt{120 + 18\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{3}\sqrt{120 + 18\sqrt{3}}$,
$\frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$ und $-\frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$,
von denen $\frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$ die Kreiszahl π sehr gut annähert:

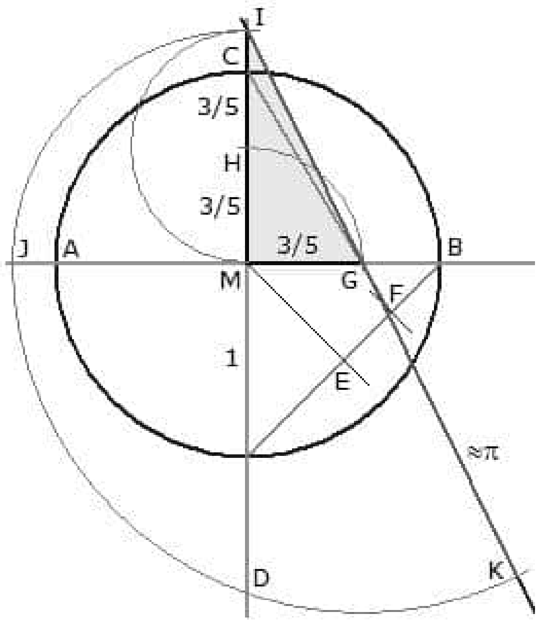
$\frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} = 3{,}14153333870509\ldots$

Die Abweichung von korrekten Wert beträgt nur

0,000059316.

Die Strecke 1/3 $\sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$ ist mit folgender Abfolge konstruierbar.
1. Um O wird eine Einheitskreis gezeichnet und um den Schnittpunkt A ein weiterer Einheitskreis. Dieser schneidet die y-Achse in E.
2. Beide Kreise schneiden sich im Punkt B.
3. Ein Einheitskreis um B schneidet den Kreis um O in einem weiteren Punkt C. Dieser ergibt sich auch durch eine Gerade parallel zur y-Achse.
4. Die Strecke CA schneidet die Abszissenachse in D.
5. Von D aus wird dreimal eine Länge = 1 längs der x-Achse angetragen. Der gefundene Punkt sei F.
6. Die Strecke EF hat dann den gesuchten Wert 1/3 $\sqrt{(120 - 18\sqrt{3})}$

π-Konstruktion von Vieta, π-Rektifikation



Die Näherung von π durch Vieta

$\pi \sim 1{,}8 + \sqrt{1{,}8} = 3{,}14164\ldots$

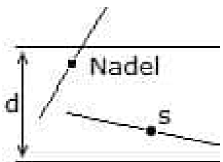
gestattet eine Näherungskonstruktion für π. Dazu wird genutzt, dass

$3/5 + 6/5 = 1{,}8$ und $(3/5)^2 + (6/5)^2 = 1{,}8$

gelten.

Näherungskonstruktion

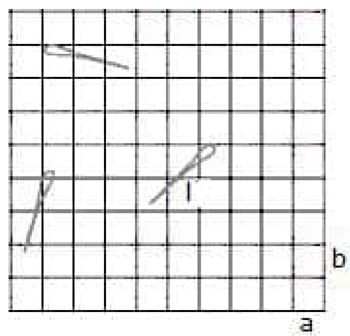
1) um einem Kreis mit Radius 1 konstruiert man durch den Mittelpunkt M je eine waagrechte Gerade mit den Schnittpunkten A und B und eine dazu senkrechte mit Schnittpunkten C und D
2) zuerst wird die Strecke DB im Punkt E halbiert, danach die neue Strecke EB im Punkt F
3) die Strecke CF schneidet die Strecke MB im Punkt G so, dass die Strecke MG genau 3/5 misst, AC:FB = AG:GB = 4:1
4) die Strecke MG wird nun mit dem Zirkel auf die Senkrechte CM in den Punkt H übertragen und bis zum Punkt I verdoppelt, sodass die Strecke IG nun genau $\sqrt{1{,}8}$ misst
5) die Strecke IM wird nun mit dem Zirkel auf die Waagrechte AM in den Punkt J übertragen wonach die Strecke JG mit der Länge 1,8 über das Zentrum G auf die Gerade IG in den Punkt K übertragen wird
6) die Strecke IK stellt nun Vietas π-Rektifikation dar



Buffonsches Nadelexperiment

1777 beschrieb Graf George de Buffon erstmals ein Zufallsexperiment, mit welchem die **Kreiszahl** π experimentell bestimmt werden kann.

Dazu sind auf einer Ebene parallele Geraden im Abstand d gegeben. Auf diese Ebene lässt man zufällig Nadeln mit einer Länge s < d fallen. Die Anzahl der Schnitte der Nadeln mit irgendeiner der Geraden wird gezählt.



Wahrscheinlichkeit des Schnittes

für $s \le d$ $\quad p = 2s/(d\,\pi)$
für $s \ge d$ $\quad p = 1/(\pi d)\,[d\,(\pi - 2\arcsin(d/s)) + 2s\,(1 - \sqrt{(1 - d^2/s^2)})]$
für 2s = d und k Treffern bei n Würfen wird … $\pi = n / k$

Laplace-Nadelexperiment

In Analogie zum Buffonschen Nadelexperiment, ist die Wahrscheinlichkeit p zu bestimmen, mit welcher eine Nadel der Länge s eine Linie eines rechteckigen Gitters trifft. Dabei haben die Gitterlinien vertikal den Abstand a und horizontal b. Ist die Nadellänge s sowohl größer als a als auch b, so gilt:

$$p = [\, 2s\,(a+b) - s^2 \,] / (\pi\, ab)$$

Merkregeln für PI
Wortlängen geben Dezimalziffern von π an:

"Wie, o dies π macht ernstlich so vielen viele Müh' ! "
B: 3 1 4 1 5 9 2 6 5 3

"Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesengenie! Wie viele Tausende bewundern Geister Himmlisch wie du und göttlich!

Noch reiner in Aeonen Wird das uns strahlen Wie im lichten Morgenrot!"

"Nie, o Gott, o guter, verliehst Du meinem Hirne die Kraft, mächtige Zahlreih'n dauernd verkettet bis in die späteste Zeit getreu zu merken; drum hab' ich Ludolfen mir zu Lettern umgeprägt." (Franz Brentano)

"How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics ! All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard…"

"Now I, even I, would celebrate / In rhymes unapt, the great / Immortal Syracusan, rivaled nevermore, / Who in his wondrous lore, / Passed on before / Left men his guidance / How to circles mensurate."

Beutel 1913: "Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime (artiste) ingénieur Qui de ton jugement peut sonder (priser) la valeur? Pour moi, ton problème eut de pareils avantages."

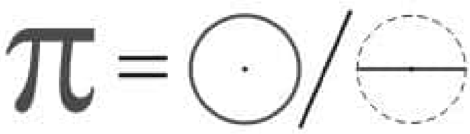
Spanisch: Con 1 palo y 5 ladrillos se pueden hacer mil cosas

Portugiesisch: Nós e todo o mundo guardamos pi usando letra por número

Griechisch: Αει ο θεος ο Μεγας γεωμετρει, το κυκλου μηκος ινα οριση διαμετρω, παρηγαγεν αριθμον απεραντος, και ον, φευ, ουδεποτε ολον θνητοι θα ευρωσι

Esperanto: Kun π, c^iam l'afero konverg^as, al nombro utila kaj magia. Infinite decimaloj anseras, g^iseterne tra la pag^' fantazia. Kiel nebulo el tabulo mara, Tra nia universo kaj c^e lekcioj, Cifervica poemo

Slowenisch: Kdo o tebi z glavo razmišlja da spomni števk teh?



Merkwürdiges für π

Hans-Henrik Stolum, Geologe an der Universität von Cambridge, ermittelte das Verhältnis zwischen der Gesamtlänge von Flüssen und der direkten Entfernung von Quelle und Mündung. Im Durchschnitt ergab sich rund 3,14, d.h. π ?!

C-Programm

Das nachfolgende, mehr als kryptische C-Programm von Dik Winter und Achim Flammenkamp berechnet 52514 Dezimalstellen von π.

```
a[52514],b,c=52514,d,e,f=1e4,g,h;
main(){for(;b=c-=14;h=printf("%04d", e+d/f))
  for(e=d%=f;g=--b*2;d/=g)d=d*b+f*(h?a[b]:f/5),a[b]=d%--g;}
```

Geht man von einem magischen Quadrat Q5 von fünf Reihen aus und ersetzt jede darin befindliche k durch jede Zahl, die in der Dezimaldarstellung von auftritt, so ergibt sich eine merkwürdige Symmetrie. Warum dies so ist, ob Zufall oder Gesetzmäßigkeit, ist nicht bekannt.

Q5	Q'5	Summe
17 24 1 8 15	2 4 3 6 9	24
23 5 7 14 16	6 5 2 7 3	23
4 6 13 20 22	1 9 9 4 2	25

10 12 19 21 3	3 8 8 6 4	29
11 18 25 2 9	5 3 3 1 5	17
	Summe 17 9 25 24 23	

PI-Gedicht

M.Keith schrieb in Anregung von Edgar Allen Poe's "The Raven" ein Gedicht, das in seiner Originalfassung die ersten 740 Ziffern von π beschreibt. Dabei gilt, dass jede Länge eines Wortes eine Ziffer beschreibt. Hat das Wort die Länge 10, so ist die Ziffer 0 gemeint. Ist das Wort 11 oder mehr Buchstaben lang, so sind jeweils 2 Ziffern beschrieben.

Poe, E.: Near a Raven.
Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".

Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.
Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon this floor.
Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:
That inimitable lesson in elegance - Lenore -
Is delighting, exciting...nevermore.

Ominously, curtains parted (my serenity outsmarted),
And fear overcame my being - the fear of "forevermore".
Fearful foreboding abided, selfish sentiment confided,
As I said, "Methinks mysterious traveler knocks afore.
A man is visiting, of age threescore."

Taking little time, briskly addressing something: "Sir," (robustly)
"Tell what source originates clamorous noise afore?
Disturbing sleep unkindly, is it you a-tapping, so slyly?
Why, devil incarnate!--" Here completely unveiled I my antedoor--
Just darkness, I ascertained - nothing more.

While surrounded by darkness then, I persevered to clearly comprehend.
I perceived the weirdest dream...of everlasting "nevermores".
Quite, quite, quick nocturnal doubts fled - such relief! - as my intellect said,
(Desiring, imagining still) that perchance the apparition was uttering a whispered "Lenore".
This only, as evermore.

Silently, I reinforced, remaining anxious, quite scared, afraid,
While intrusive tap did then come thrice - O, so stronger than sounded afore.
"Surely" (said silently) "it was the banging, clanging window lattice."
Glancing out, I quaked, upset by horrors hereinbefore,
Perceiving: a "nevermore".

Completely disturbed, I said, "Utter, please, what prevails ahead.
Repose, relief, cessation, or but more dreary 'nevermores'?"
The bird intruded thence - O, irritation ever since! -
Then sat on Pallas' pallid bust, watching me (I sat not, therefore),
And stated "nevermores".

Bemused by raven's dissonance, my soul exclaimed, "I seek intelligence;
Explain thy purpose, or soon cease intoning forlorn 'nevermores'!"
"Nevermores", winged corvus proclaimed - thusly was a raven named?
Actually maintain a surname, upon Pluvious seashore?
I heard an oppressive "nevermore".

My sentiments extremely pained, to perceive an utterance so plain,
Most interested, mystified, a meaning I hoped for.
"Surely," said the raven's watcher, "separate discourse is wiser.
Therefore, liberation I'll obtain, retreating heretofore -
Eliminating all the 'nevermores' ".

Still, the detestable raven just remained, unmoving, on sculptured bust.
Always saying "never" (by a red chamber's door).
A poor, tender heartache maven - a sorrowful bird - a raven!
O, I wished thoroughly, forthwith, that he'd fly heretofore.
Still sitting, he recited "nevermores".

The raven's dirge induced alarm - "nevermore" quite wearisome.
I meditated: "Might its utterances summarize of a calamity before?"
O, a sadness was manifest - a sorrowful cry of unrest;
"O," I thought sincerely, "it's a melancholy great - furthermore,
Removing doubt, this explains 'nevermores' ".

Seizing just that moment to sit - closely, carefully, advancing beside it,
Sinking down, intrigued, where velvet cushion lay afore.
A creature, midnight-black, watched there - it studied my soul, unawares.
Wherefore, explanations my insight entreated for.
Silently, I pondered the "nevermores".

"Disentangle, nefarious bird! Disengage - I am disturbed!"
Intently its eye burned, raising the cry within my core.
"That delectable Lenore - whose velvet pillow this was, heretofore,
Departed thence, unsettling my consciousness therefore.
She's returning - that maiden - aye, nevermore."

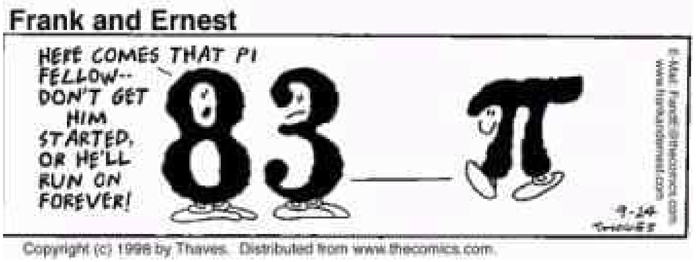
Since, to me, that thought was madness, I renounced continuing sadness.
Continuing on, I soundly, adamantly forswore:
"Wretch," (addressing blackbird only) "fly swiftly - emancipate me!"
"Respite, respite, detestable raven - and discharge me, I implore!"
A ghostly answer of: "nevermore".

" 'Tis a prophet? Wraith? Strange devil? Or the ultimate evil?"
"Answer, tempter-sent creature!", I inquired, like before.
"Forlorn, though firmly undaunted, with 'nevermores' quite indoctrinated,
Is everything depressing, generating great sorrow evermore?
I am subdued!", I then swore.

In answer, the raven turned - relentless distress it spurned.
"Comfort, surcease, quiet, silence!" - pleaded I for.
"Will my (abusive raven!) sorrows persist unabated?
Nevermore Lenore respondeth?", adamantly I encored.
The appeal was ignored.

"O, satanic inferno's denizen -- go!", I said boldly, standing then.
"Take henceforth loathsome "nevermores" - O, to an ugly Plutonian shore!
Let nary one expression, O bird, remain still here, replacing mirth.
Promptly leave and retreat!", I resolutely swore.
Blackbird's riposte: "nevermore".

So he sitteth, observing always, perching ominously on these doorways.
Squatting on the stony bust so untroubled, O therefore.
Suffering stark raven's conversings, so I am condemned, subserving,
To a nightmare cursed, containing miseries galore.
Thus henceforth, I'll rise (from a darkness, a grave) -- nevermore!



Der Türöffner

3,14 Pi öffnet Dir die Tür.
15926 Den Kreis betritt die Hex'.
5 und 3Zehn Ziffern sind dabei.

Maß der Ewigkeit

Was wir gestern froh gesungen / Ist doch heute schon verklungen.
Und beim letzten Klange schreit / Alle Welt nach Neuigkeit.
Wie im Turm der Uhr Gewichte / Ziehet fort die Weltgeschichte,
Und der Zeiger schweigend kreist; / Keiner rät, wohin er weist.
Doch die ZAHL hat nichts vergessen, / Was geschehen, wird sie messen
Nach dem Maß der Ewigkeit - / Seht, wie klein ist doch die Zeit!
nach J. v. Eichendorff

Trost

O Trost der Welt, Du stille Nacht! / Das Pi hat mich so müd' gemacht,
das weite Meer schon dunkelt.
Laß ausruhn mich von Müh und Not, / bis daß das goldene Morgenrot
den stillen Kreis durchfunkelt.
nach J. v. Eichendorff

Kate Bush: Pi

Sweet and gentle sensitive man / With an obsessive nature and deep fascination
For numbers / And a complete infatuation with the calculation
Of PI
Oh he love, he love, he love / He does love his numbers
And they run, they run, they run him / In a great big circle
In a circle of infinity
3,1415926535 897932 3846 264 338 3279
Oh he love, he love, he love / He does love his numbers
And they run, they run, they run him / In a great big circle
In a circle of infinity / But he must, he must, he must
Put a number to it
50288419 716939937510 582319749 44 59230781 6406286208 821 4808651 32
Oh he love, he love, he love / He does love his numbers
And they run, they run, they run him / In a great big circle
In a circle of infinity
82306647 0938446095 505 8223…

Näherungsformeln für PI, Machin-Formeln

Ausgehend von der Tatsache, dass $\arctan(1) = \pi/4$
ist und mit Hilfe von Additionstheoremen für die schrittweise Berechnung des Arkustangens können Näherungsformeln der Form

$$\pi/4 = A\cdot\arctan(1/B) + C\cdot\arctan(1/D) + E\cdot\arctan(1/F)$$

zur Berechnung von π bestimmt werden. Formeln dieser Art werden nach John Machin (1680-1751) benannt, da er 1706 eine der ersten dieser Näherungsformeln angab.

$\pi/4 =$	$\arctan 1/2 + \arctan 1/3$	Euler 1738
	$2\cdot\arctan 1/3 + \arctan 1/7$	
	$4\cdot\arctan 1/5 - \arctan 1/239$	Machin
	$\arctan 1/2 + \arctan 1/4 + \arctan 1/13$	
	$\arctan 1/2 + \arctan 1/5 + \arctan 1/8$	Dase
	$\arctan 1/2 + 2\cdot\arctan 1/6 - \arctan 1/117$	
	$\arctan 1/3 + 2\cdot\arctan 1/4 - \arctan 1/38$	
	$2\cdot\arctan 1/3 + \arctan 1/5 - \arctan 1/18$	

$2 \cdot \arctan 1/3 + \arctan 1/8 + \arctan 1/57$
$2 \cdot \arctan 1/3 + \arctan 1/9 + \arctan 1/32$
$2 \cdot \arctan 1/3 + \arctan 1/12 + \arctan 1/17$
$2 \cdot \arctan 1/3 + 2 \arctan 1/14 - \arctan 1/1393$
$2 \cdot \arctan 1/3 + 2 \cdot \arctan 1/17 + \arctan 1/41$
$3 \cdot \arctan 1/3 - \arctan 1/5 + \arctan 1/57$
$2 \cdot \arctan 1/4 + \arctan 1/7 + 2 \cdot \arctan 1/13$
$3 \cdot \arctan 1/4 + \arctan 1/13 - \arctan 1/38$
$3 \cdot \arctan 1/4 + \arctan 1/20 + \arctan 1/1985$ Ferguson
$2 \cdot \arctan 1/5 + \arctan 1/7 + 2 \cdot \arctan 1/8$
$2 \cdot \arctan 1/5 + 3 \cdot \arctan 1/8 + \arctan 1/57$
$3 \cdot \arctan 1/5 + 2 \cdot \arctan 1/8 - \arctan 1/18$
$4 \cdot \arctan 1/5 - \arctan 1/41 + 2 \cdot \arctan 1/99$
$4 \cdot \arctan 1/5 - \arctan 1/70 + \arctan 1/99$
$2 \cdot \arctan 1/6 + 3 \cdot \arctan 1/7 + 2 \cdot \arctan 1/68$
$4 \cdot \arctan 1/6 + 4 \cdot \arctan 1/31 - \arctan 1/239$
$5 \cdot \arctan 1/7 + 4 \cdot \arctan 1/68 + 2 \cdot \arctan 1/117$
$5 \cdot \arctan 1/7 + 2 \cdot \arctan 1/28 + 2 \cdot \arctan 1/443$
$5 \cdot \arctan 1/8 + 2 \cdot \arctan 1/18 + 3 \cdot \arctan 1/57$
$6 \cdot \arctan 1/8 + 2 \cdot \arctan 1/57 + \arctan 1/239$ Störmer
$6 \cdot \arctan 1/10 - \arctan 1/239 - 4 \cdot \arctan 1/515$
$12 \cdot \arctan 1/18 + 8 \arctan 1/57 - 5 \cdot \arctan 1/239$ Gauß

Näherungsformeln
Wetherfield-Notation, Schreibweise: $\{t\} = \arctan(1/t)$
nach Michael Wetherfield "Mathematical Gazette, Volume 80, No 488 of July 1996, pages 333-344"

Hutton-Formel	$\pi/4 = \{2\} + \{3\}$
	$\pi/4 = 2\,\{3\} + \{7\}$
Machin-Formel	$\pi/4 = 4\,\{5\} - \{239\}$
Euler-Formel	$\pi/4 = 5\,\{5\} + 2 \arctan(3/79)$
Störmer-Formel	$\pi/4 = 11\,\{57\} + 7\,\{239\} - 12\,\{682\} + 24\,\{12943\}$
Sebah-Formel	$\pi/4 = 8\,\{21\} + 3\,\{239\} + 4 \arctan(3/1024)$
	$\pi/4 = 5 \arctan(29/278) + 28 \arctan(3/79)$
Lyster-Formel	$\pi/4 = 22\,\{28\} + \arctan(1744507482180328366854565127 / 98646395734210062276153190241239)$

Schnell konvergente Reihen mit 4 Summanden

$\pi/4 = 6\,\{9\} + 3\,\{32\} + 2\,\{73\} + \{2943\}$
$\pi/4 = 4\,\{12\} + 4\,\{17\} + 4\,\{18\} + \{239\}$
$\pi/4 = 6\,\{13\} + 6\,\{21\} + 2\,\{57\} + \{239\}$
$\pi/4 = 8\,\{13\} + 4\,\{38\} + 4\,\{57\} - \{239\}$
$\pi/4 = \{46\} + 4\,\{76\} + 2\,\{379\} + \{623477877\}$

Näherungsformeln

A.Sharp (1653-1742) $\pi/2 = \sqrt{3} \cdot [1 - 1/(3 \cdot 3) + 1/(5 \cdot 3^2) - 1/(7 \cdot 3^3) +- \dots (-1)^n/(3^n \cdot (2n+1)) \dots]$
F.Vieta (1582 in Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII)
$2 / \pi = \sqrt{(2)}/2 \cdot \sqrt{(2+\sqrt{2})}/2 \cdot \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}/2 \cdot \dots$
J.Wallis (1655 in Arithmetica infinitorum; π wird als Produkt rationaler(!) Zahlen dargestellt)
$\pi / 2 = 4/(1 \cdot 3) \cdot 16/(3 \cdot 5) \cdot 36/(5 \cdot 7) \cdot 64/(7 \cdot 9) \dots$
J.Gregory (1638-1675) und I.Newton
$\pi / 6 = 1/\sqrt{3}\,(1 - 1/(3 \cdot 3) + 1/(5 \cdot 3 \cdot 3) - 1/(7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) + \dots$
Leonhard Euler
$\pi = 3\sqrt{3}/1 - 3\sqrt{3}/2 + 3\sqrt{3}/4 - 3\sqrt{3}/5 + 3\sqrt{3}/7 - 3\sqrt{3}/8 +- \dots$
$\pi^2/9 = 1 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/11^2 + 1/13^2 + \dots$
Nenner: Quadrate aller nicht durch 3 teilbaren ungeraden Zahlen

Machin-Formel
Die Machin-Formel zur näherungsweisen Berechnung von π erweist sich im Vergleich zur Leibniz-Formel als relativ schnell konvergent:

$$\pi/4 = 4 \arctan 1/5 - \arctan 1/239$$

Machin selbst berechnete damit 100 Dezimalstellen. Mit einer 15stelligen Arithmetik ergibt sich:

arctan(1/5)		arctan(1/239)	
1/5	= 0,200000000000000	1/239	= 0,004184100418410
1/375	= -0,002666666666666	1/40955757	= -0,000000024416591
1/15625	= 0,000064000000000	1/3899056325995	= 0,000000000000256
1/546875	= -0,000001828571428		
1/17578125	= 0,000000056888889		
1/537109375	= -0,000000001861818		
1/15869140625	= 0,000000000063015		
1/457763671875	= -0,000000000002184		
1/12969970703125	= 0,000000000000077		
1/362396240234375	= -0,000000000000002		

Summe arctan(1/5) = 0,1973955598498807 arctan(1/239) = 0,004184076002074

Mit der Machinschen Formel wird dann

$\pi/4 = 4 \arctan 1/5 - \arctan 1/239$

$\pi = 16 \cdot 0{,}1973955598498807 - 4 \cdot 0{,}004184076002074$

$\pi = 3{,}1415926535897922$

Vega-Reihen

Durch den slowenischen Mathematiker Jurij Vega (1754-1802, Abbildung) wurden eine Vielzahl von Reihen zur näherungsweisen Berechnung der Kreiszahl π angegeben:

entwickelt aus arc 45° = arctan 1/7 + 2 arctan 1/3:

$\pi = 8\,(26 / (3\cdot3^3) + 58 / (5\cdot7\cdot3^7) + 90 / (9\cdot11\cdot3^{11}) + 122 / (13\cdot15\cdot3^{15}) + 154 / (17\cdot19\cdot3^{19}) + \ldots + 73 / (3\cdot7^3) + 169 / (5\cdot7\cdot7^7) + 265 / (9\cdot11\cdot7^{11}) + 361 / (13\cdot15\cdot7^{15}) + 457 / (17\cdot19\cdot3^{19}) + \ldots)$

$\pi = 4\,(2\,(1/3 - 1/(3\cdot3^3) + 1/(5\cdot3^5) - 1/(7\cdot3^7) + 1/(9\cdot3^9) - \ldots) + 1/7 - 1/(3\cdot7^3) + 1/(5\cdot7^5) - 1/(7\cdot7^7) + 1/(9\cdot7^9) - \ldots)$

entwickelt aus arc 45° = 5 arctan 1/7 + 2 arctan 3/79:

$\pi = 4\,(5\,(1/7 - 1/(3\cdot7^3) + 1/(5\cdot7^5) - 1/(7\cdot7^7) + 1/(11\cdot7^{11}) + \ldots) + 2\,(3/79 - 3^3/(3\cdot79^3) + 3^5/(5\cdot79^5) - 3^7/(7\cdot79^7) - 3^9/(9\cdot79^9) - \ldots))$

weitere Reihen:

$\pi = 12\,(1/(1\cdot4) - 1/(3\cdot4^3) + 1/(5\cdot4^5) - 1/(7\cdot4^7) \ldots) + 4\,(5/(1\cdot99) - 5^3/(3\cdot99^3) + 5^5/(5\cdot99^5) - 5^7/(7\cdot99^7) + \ldots)$

$\pi = 8\,(4/(1\cdot10) - 4^3/(3\cdot10^3) + 4^5/(5\cdot10^5) - 4^7/(7\cdot10^7) + \ldots) + 4\,(1/(1\cdot41) - 1/(3\cdot41^3) + 1/(5\cdot41^5) - 1/(7\cdot41^7) + \ldots)$

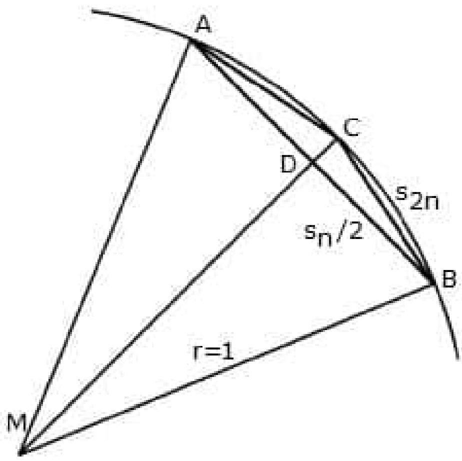
$\pi = 2\,(1 + 1\cdot1/(2\cdot3) + 1\cdot1\cdot3\cdot3/(2\cdot3\cdot4\cdot5) + 1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5/(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7) + \ldots)$

$\pi = \sqrt{2}\,(1 + 1\cdot1/(2\cdot3)\ 1/2 + 1\cdot1\cdot3\cdot3/(2\cdot3\cdot4\cdot5)\ 1/2^2 + 1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5/(2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)\ 1/2^3 + \ldots)$

$\pi = 3\sqrt{3}\,(1 - 1/3 \cdot 3 + 1/5 \cdot 3^2 - 1/7 \cdot 3^3 + \ldots)$

$\pi = 4 \cdot 8/9 \cdot 24/25 \cdot 48/49 \cdot 80/81 \cdot 120/121 \cdot \ldots$

$\pi = 2 \cdot 4/3 \cdot 16/15 \cdot 36/35 \cdot 64/63 \cdot 100/99 \cdot \ldots$



Archimedischer Algorithmus

Der Archimedischer Algorithmus ist ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Kreiszahl π.

geg.: in Einheitskreis ein- und umbeschriebene regelmäßige N-Ecke mit $n = 6\cdot2^k$

Seitenlänge des umschriebenen N-Ecks

$a(n) = 2 n \tan(\pi/n)$

Seitenlänge des eingeschriebenen N-Ecks

$b(n) = 2 n \sin(\pi/n)$

Dann gilt $b(n) < 2 \pi < a(n)$

k	n	a_k	b_k	Abschätzung für π
0	6	$4 \sqrt{3}$	6	$3 < \pi < 2 \sqrt{3} = 3{,}46410$
1	12	$24(2-\sqrt{3})$	$6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$3{,}10583 < \pi < 3{,}21539$
2	24	$48(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2)$	$3{,}13263 < \pi < 3{,}15966$	
3	48	$3{,}13935 < \pi < 3{,}14609$		
4	96	$3{,}14103 < \pi < 3{,}14271$		


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

Näherung für 96-Eck $223/71 = 3{,}14084\ldots < \pi < 22/7 = 3{,}14285\ldots$

Um eine Näherung für π zu bestimmen, betrachtete Archimedes einen Einheitskreis, also einen Kreis mit r = 1, und darin eine Folge einbeschriebener regelmäßiger n-Ecke. Er begann mit einem Sechseck. Aus diesem Sechseck wird dann ein 12-Eck, ein 24-Eck, ein 48-Eck usw. konstruiert. Mit größer werdender Eckenzahl n erhält er aus den Umfängen dieser n-Ecke immer bessere Näherungen für den Kreisumfang.

Näherung nach Archimedes, Archimedische Formel

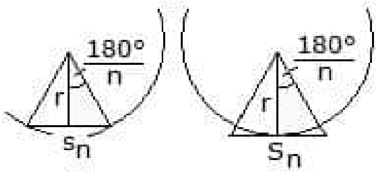
Annäherung eines Kreises mit einem Radus r = 1/2 durch regelmäßige N-Ecke

Seitenlänge s_{2n} des 2N-Ecks aus s_n

$$s_{2n} = \sqrt{ 1/2 - 1/2 \cdot \sqrt{ (1 - (s_n)^2) } } = s_n / \sqrt{ 2 + 2 \cdot \sqrt{ (1 - (s_n)^2) } }$$

Rechtecke	Näherungswert	prozentualer Fehler
4	1,834271240336	-41,61333303 %
8	2,597757685219	-17,31080469 %
16	2,911256719659	-7,33182049 %
32	3,041597524701	-3,18294381 %
64	3,097041612321	-1,41810369 %
128	3,121257179256	-0,64729825 %
256	3,132113364384	-0,30173515 %
512	3,137096859946	-0,14310556 %
1024	3,139431050200	-0,06880597 %
2048	3,140542375206	-0,0334314 %
4096	3,141078308488	-0,01637211 %
8192	3,141339297763	-0,00806457 %
16384	3,141467325169	-0,00398933 %
32768	3,141530466511	-0,00197948 %
65536	3,141561728744	-0,00098437 %
131072	3,141577250810	-0,00049029 %
262144	3,141584973287	-0,00024447 %
524288	3,141588820894	-0,000122 %
1048576	3,141590739878	-0,00006092 %
2097152	3,141591697666	-0,00003043 %
4194304	3,141592175957	-0,0000152 %
8388608	3,141592414890	-0,0000076 %

Kreis in Vielecken
In der Archimedischen Methode zur Bestimmung der Kreiszahl π wählt man zu einem Kreis mit dem Radius r ein Sehnenvieleck und ein Tangentenvieleck. Man bestimmt für beliebiges n die Umfänge u_n und U_n der Vielecke und lässt n über alle Grenzen gehen.



Intervallschachtelung
Sehnenvieleck
Es gilt $\sin(180°/n) = s_n/(2r)$ oder $s_n = 2r \sin(180°/n)$
Tangentenvieleck
Es gilt $\tan(180°/n) = S_n/(2r)$ oder $S_n = 2r \tan(180°/n)$
Umfänge
$u_n = n \cdot s_n = 2r \cdot n \sin(180°/n)$ und
$U_n = n \cdot S_n = 2r \cdot n \tan(180°/n)$.

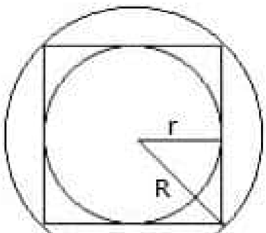
Dann gilt die Intervallschachtelung
$u_n < U' < U_n$
$2rn \sin(180°/n) < U' < 2rn \tan(180°/n)$
$n \sin(180°/n) < U'/2r < n \tan(180°/n)$
Mit Hilfe dieser Ungleichungskette kann π beliebig genau bestimmt werden.
Zahlenbeispiel n=100: $100 \sin 1{,}8° < \pi < 100 \tan 1{,}8°$ oder $3{,}1410 < \pi < 3{,}1426$.
Für die Flächeninhalte erhält man die Intervallschachtelung
$(1/2)n \sin(360°/n) < A'/r^2 < n \tan(180°/n)$
Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems findet man:
$u_4 = 4 \sqrt{2}\, r \approx 5{,}65685\, r$
$u_8 = 8 \sqrt{2 - \sqrt{2}}\, r \approx 6{,}12293\, r$
$u_{16} = 16 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}\, r \approx 6{,}24288\, r$
$u_{32} = 32 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}\, r \approx 6{,}27310\, r$
$U_8 = (16 \sqrt{2} - 16)\, r \approx 6{,}62741\, r$
$U_{16} = (\sqrt{2048 \sqrt{2} + 4096} - 32\sqrt{2} - 32)\, r \approx 6{,}36521 \cdot r$
$U_{32} = (\sqrt{\sqrt{56 \sqrt{2} + 80} + 4\sqrt{2} + 8} - \sqrt{2\sqrt{2} + 4} - \sqrt{2} - 1) \cdot 64\, r \approx 6{,}3034498 \cdot r$

"Kreismessung" von Archimedes
Das im Original verlorengegangene Werk "Kreismessung" von Archimedes enthält die ersten mathematischen Sätze und Näherungen zu Kreisfläche und -umfang.

Satz 1
Die Oberfläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines Rechtecks mit Katheten gleich dem Kreisradius bzw. dem Kreisumfang.
In Formeln: $A = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2\pi R = \pi R^2$

Satz 2
Die Oberfläche eines Kreises verhält sich zum Quadrat des Durchmessers wie 11 zu 14.
Für R = 1 wird: $3\, ^1/_7 : 4 = 22 : 28 = 11 : 14$

Satz 3
Das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser eines Kreises in kleiner als $3\, ^1/_7$ und größer als $3\, ^{10}/_{71}$.



Cusanus-Algorithmus zur Berechnung der Zahl π

Nicolaus Cusanus (franz. Nicolas de Cues, eigentlich Nikolaus Krebs), um 1450:
Während Archimedes einem fest vorgegebenem Kreis zwei Polygone näherte, versuchte Cusanus einem Polygon zwei Kreise zu nähern. Damit verwendete er eine Reihe von regelmäßigen Polygonen mit festem Umfang. Diesen schrieb er dann einen Kreis ein und um.
Den Umfang des Polygons mit 2^n (n=2,3,4,5…) Seiten setzte er mit 2 fest. Da er dadurch den Umfang des Vielecks kannte, konnte er durch Erhöhung der Seitenanzahl die beiden Kreise an das Polygon annähern, und sich so dem Grenzwert π nähern.
Cusanus berechnete dann einfach den Umfang der ein- und umbeschriebenen Kreise (r = Radius eingeschrieben, R = Radius umschrieben, n = Iterationsschritt):
$2 \cdot \pi \cdot r_n < 2 < 2 \cdot \pi \cdot R_n$ und somit $1/r_n > \pi > 1/R_n$

Für n=2 wird $R_2 = 1/4 \sqrt{2}$ und $r_2 = 1/4$. Cusanus fand die Iteration:

$r_{n+1} = (R_n + r_n) / 2$ $\qquad$ $R_{n+1} = \sqrt{(R_n \cdot r_n)}$

Damit ist das Cusanus-Verfahren dem archimedischen rechentechnisch überlegen.
geg.: Seitenzahl des Polygons = 2^n, Interationsschritt = n, Intervallschachtelung und Abweichung

N	Intervall	π	Fehler
2	2,82842712474619009760 … 4,00000000000000000000	3,31370849898476039041	0,1721158453949…
4	3,12144515225805228557 … 3,18259787807452811059	3,15172490742925609847	0,0101322538394…
6	3,14033115695475291232 … 3,14411838524590426274	3,14222362994245684539	0,0006309763526…
8	3,14151380114430107633 … 3,14175036916896645911	3,14163208070318180572	0,0000394271133…
10	3,14158772527715970063 … 3,14160251025680894676	3,14159511774958905035	0,0000024641597…
12	3,14159234557011774234 … 3,14159326962930731079	3,14159280759964457653	0,0000001540098…
14	3,14159263433856298910 … 3,14159269209225437423	3,14159266321540841623	0,0000000096256…
16	3,14159265238659134580 … 3,14159265599619702627	3,14159265419139418500	0,0000000006016…
18	3,14159265351459312016 … 3,14159265374019347507	3,14159265362739329761	0,0000000000376…
20	3,14159265358509323107 … 3,14159265359919325325	3,14159265359214324216	0,0000000000023…
22	3,14159265358949948800 … 3,14159265359038073939	3,14159265358994011369	0,0000000000001…
24	3,14159265358977487906 … 3,14159265358982995727	3,14159265358980241816	
26	3,14159265358979209100 … 3,14159265358979553339	3,14159265358979381219	
28	3,14159265358979316675 … 3,14159265358979338190	3,14159265358979327432	
30	3,14159265358979323398 … 3,14159265358979324743	3,14159265358979324070	

Nach 50 Iterationsschritten erreicht man eine Genauigkeit von 28 Dezimalstellen. Von Aitken wurde das Verfahren durch Einführung eines $(\Delta^2)^2$-Schrittes optimiert. Dann erhält man nach 50 Iterationen schon 87 exakte Nachkommastellen von π.

Al-Kashi-Verfahren

Durch den arabischen Mathematiker Al-Kashi (gest.1429) wurde 1424 in seiem Werk "Risala a-muhitiyya" (Lehre vom Kreis) der bis dahin beste Näherungswert für die Kreiszahl ermittelt.
Ausgehend von einem Sechseck und der ihm schon bekannten Beziehung $(2 \sin(x/2))^2 = 2 - \sqrt{(4 - 4 \sin^2 x)}$ gelangte er zu folgendem Näherungsverfahren:

$C_0 = 1$

$C_{n+1} = \sqrt{(2 - \sqrt{(4 - C_n^2)})}$

$3 \cdot 2^n \cdot C_n \to \pi$ für wachsende n

Es gelang ihm einen auf 16 Dezimalen genauen Wert zu berechnen. Da er im Sechzigersystem rechnete, gab er in diesem System 10 Dezimale an: 6016I59II28III1IV34V51VI46VII14VIII50IX.
Der für diese Genauigkeit zugrundeliegende Kreis wäre 600000 mal größer als der Erdäquator, das N-Eck $3 \cdot 10^{28}$ Ecken!

Die Tabelle enthält einige der durch dieses Verfahren erzeugten Näherungswerte. Die gültigen Ziffern sind durch ein Leerzeichen von den ungültigen getrennt. Eine höhere Genauigkeit war bei dieser Berechnung mit der 192Bit-Arithmetik nicht zu erzielen:

n	C_n
1	3,1 058285412302491481867860514885799 40
2	3,1 326286132812381971617494694917362 44
3	3,1 393502030468672071351468212084211 89
4	3,141 031950890509638111352926459660107
5	3,141 452472285462075450609308961225645
10	3,141592 516692157447592874084768831905
20	3,141592653589 662682701706171090774719
25	3,141592653589793 110966783093031636870
30	3,141592653589793238 338135707214807701
35	3,141592653589793238462 521793752095955
40	3,1415926535897932384626 43 264539730518
45	3,14159265358979323846264338 3 163801597
47	3,14159265358979323846264338327 3407718

Madhava-Reihe, Leibniz-Reihe für die Berechnung von π

Gottfried W.Leibnitz, 1682: $\pi/4 = 1 -1/3 +1/5 -1/7 +-\ldots +-1/(2n-1) -+ f(2n)$

Fehlerabschätzungen (Madhava um 1400, Indien)

$f_1(n) = 0{,}5 / n$

$f_2(n) = 0{,}5n / (n^2+1)$

$f_3(n) = (0{,}5n^2+2) / (n^3+5n)$

Hinweis: Die Reihe wurde 1671 schon von J.Gregory (1638-1675) gefunden; deshalb auch Gregory-Reihe genannt. Darüber hinaus existieren Aufzeichnungen des indischen Mathematikers Madhava, der schon Jahrhunderte vor Gregory und Leibniz diese unendliche Reihe kannte.

Sie eignet sich nicht für die praktische Berechnung von einer großen Zahl von Dezimalstellen, da sie sehr langsam konvergiert. Über 500 Millionen Summanden müssen betrachtet werden, um wenigstens 6 Dezimalziffern von π exakt zu erhalten.

Herleitung: Polynomdivision liefert die geometrische Reihe für f'(x):

$f'(x) = 1 : (1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots$

Die zugehörige Stammfunktion ist unter Berücksichtigung von arctan 0 = 0

$f(x) = \arctan x = x - 1/3\, x^3 + 1/5\, x^5 - 1/7\, x^7 + 1/9\, x^9 - \ldots$ Satz von Gregory

Da tan 45° = tan π/4 = 1, ist arctan 1 = π/4 und somit

$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 +-\ldots +- 1/(2n-1) -+ \ldots$

Als Leibniz diese Formel entdeckte, schwärmte er "numero deus impari gaudet" ("Gott freut sich der ungeraden Zahlen").

Gauß-Legendre-Verfahren

Iteratives Verfahren zur Bestimmung von π

Ansatz: $a = x = 1,\ b = 1/\sqrt{2},\ c = 1/4$

Wiederhole $y = a$; $a=(a+b)/2$; $b=\sqrt{b\cdot y}$; $c=c-x\cdot(a-y)^2$

$x = 2\cdot x$

bis gewünschte Genauigkeit erreicht

Ergebnis $\pi = (a+b)^2/(4c)$

Das Verfahren konvergiert sehr schnell gegen π. Mit einer 192bit-Genauigkeit wurden folgende Näherungswerte berechnet:

1	3,140579250522168248311331268975823311773440237512948 34

2	3,14159264621354228214934443198269577431443722334560279
3	3,14159265358979323827951277480186397438122550483544694
4	3,14159265358979323846264338327950288419711467828364892
5	3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582

Der 6.Wert unterscheidet sich vom fünften nicht mehr.

Kettenbruch nach Euler (1739)

$$\pi/2 = 1 + 1/ (1 + 1\cdot 2/ (1 + 2\cdot 3/ (1 + 3\cdot 4/ (\ldots))))$$
$$\pi = 2 + 2\cdot 1/3 + 2\cdot(1\cdot 2)/(3\cdot 5) + 2\cdot(1\cdot 2\cdot 3)/(3\cdot 5\cdot 7) + \ldots$$

Näherung	Näherungswert
1	2.6666666666666666666666666666666666666666666666667
2	2.9333333333333333333333333333333333333333333333333
3	3.04761904761904761904761904761904761904761904761904762
4	3.09841269841269841269841269841269841269841269841269841
5	3.12150072150072150072150072150072150072150072150072150
6	3.13215673215673215673215673215673215673215673215673216
7	3.13712953712953712953712953712953712953712953712953713
8	3.13946968064615123438652850417556299909241085711673947
9	3.14057816968033686299940169909210156888175464026857216
10	3.14110602160137763852934131571902469735287072748373058
20	3.14159229874033963270192249602425888009447095729600649
30	3.14159265330115972300801469950578227615699373441497988
40	3.14159265358954659348632938424226052866050943862862882
50	3.14159265358979302165554705362722996311909537056825827
60	3.14159265358979323826853410805869399864503621058196081
70	3.14159265358979323846246734098129814676796509404266821
80	3.14159265358979323846264322209009228490005612398240051
90	3.14159265358979323846264338313082222561439922259765568
100	3.14159265358979323846264338327936493666045842702650046
125	3.14159265358979323846264338327950288419348247532436993
150	3.14159265358979323846264338327950288419716939927462147
175	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582

Vieta-Verfahren

Das von Vieta zur Berechnung der Kreiszahl π auf der Basis von $2\cdot 2^n$-Ecken entwickelte unendliche Produkt

$$\pi = 2 \cdot 2/\sqrt{2} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{2})} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})} \cdot \ldots$$

kann in einen Näherungsalgorithmus umgewandelt werden:

Mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $y_0 = \sqrt{2}$ wird mit

$$x_{k+1} = x_k\, y_k$$
$$y_{k+1} = \sqrt{(2y_k / (y_{k+1}))} \rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \pi/2$$

Die ersten Näherungswerte für π sind

Iteration	Näherungswert
1	2,82842712474619009760337744841939615713934375075389615
2	3,06146745892071817382767987224319093409075649988501633
3	3,1 2144515225805228557255789563235585484306588403127692

4	3,1 3654849054593926381425804443653906755637354136001815
5	3,14 033115695475291231711852433169013214370323364818689 …
10	3,14159 142151119997399797176374083395574756265008618080
20	3,14159265358861823 661420859077240788498096290246722886
50	3,14159265358979323846264338327 848373255177129666664031
100	3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582

Der 100.Näherungswert gibt 52 korrekte Dezimalstellen.

Auf der Basis von Dreiecken, Sechsecken, Zwölfecken, … erhält man als Näherungsformel

$$\pi = 3/2 \sqrt{3} \cdot 2/\sqrt{3} \cdot 2/\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot 2/\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \ldots$$

Für Fünfecke, Zehnecke, Zwanzigecke, … wird

$$\pi = 5/2 \sqrt{3-\tau} \cdot 2/\sqrt{2+\tau} \cdot 2/\sqrt{2+\sqrt{2+\tau}} \cdot 2/\sqrt{2+\sqrt{2+(2+\tau)}} \cdot \ldots$$

mit $\tau = (1+\sqrt{5})/2 = 1,618\ldots$ (goldenes Verhältnis)

Wurzelnäherungen für PI

Durch etwas Suchen erhält man eine einfache Näherung für π mittels ineinandergeschachtelter Wurzeln:

$$\sqrt{7 + \sqrt{6 + \sqrt{5}}} \approx 3,14163$$

nähert die Kreiszahl bis auf 3 Dezimalstellen.
Allgemein sucht man nach Näherungstermen für π in der Form

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n}\ldots}}}$$

Unter anderem findet man (Wert in Klammern gibt die erhaltene Stellenzahl von π an):

$\pi(1) = \sqrt{10}$
$\pi(2) = \sqrt{1 + \sqrt{79}}$
$\pi(5) = \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{5726}}}$
$\pi(6) = \sqrt{1 + \sqrt{44 + \sqrt{1202}}}$
$\pi(5) = \sqrt{2 + \sqrt{4 + \sqrt{3356}}}$
$\pi(5) = \sqrt{2 + \sqrt{33 + \sqrt{837}}}$
$\pi(5) = \sqrt{3 + \sqrt{21 + \sqrt{686}}}$
$\pi(10) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{5993 + \sqrt{1569}}}}$
$\pi(10) = \sqrt{1 + \sqrt{37 + \sqrt{1570 + \sqrt{27682}}}}$
$\pi(12) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{122 + \sqrt{33134654}}}}$
$\pi(2) = \sqrt{2 + \sqrt{62}}$
$\pi(5) = \sqrt{1 + \sqrt{41 + \sqrt{1419}}}$
$\pi(5) = \sqrt{1 + \sqrt{47 + \sqrt{1003}}}$
$\pi(5) = \sqrt{2 + \sqrt{26 + \sqrt{1291}}}$
$\pi(5) = \sqrt{3 + \sqrt{8 + \sqrt{1536}}}$
$\pi(5) = \sqrt{4 + \sqrt{11 + \sqrt{550}}}$
$\pi(9) = \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{5286 + \sqrt{19952}}}}$
$\pi(12) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{5663 + \sqrt{136612}}}}$
$\pi(12) = \sqrt{1 + \sqrt{9 + \sqrt{2989 + \sqrt{3477824}}}}$

Die Tabelle enthält die besten Parameter $a \neq 0$, b, c und d, für die $\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d}}}}$ die Kreiszahl auf mindestens 12 Dezimalziffern nähert:

a	b	c	d	Abweichung in 10^-12
1	2	122	33134654	0,163399
1	9	2989	3477824	0,170329
1	1	5663	136612	0,17722
1	5	3994	2054210	0,213563
1	11	2135	5974177	0,472522
1	16	2345	2504351	0,48102
2	2	1009	6670265	0,543951
1	23	2057	1086047	0,609919
1	25	500	5666572	0,798271
1	40	1088	165942	0,8298
1	14	2584	2554223	0,980329

Der bisher genauesten Terme mit 5 Wurzelausdrücken

$\sqrt{1 + \sqrt{13+ \sqrt{167 + \sqrt{12984060 + \sqrt{17651656409746}}}}}$; Abweichung $1,87959 \cdot 10^{-29}$
$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2041 + \sqrt{8986514 + \sqrt{48253045750399}}}}}$; Abweichung $2,38068 \cdot 10^{-28}$
$\sqrt{1 + \sqrt{0 + \sqrt{138 + \sqrt{29638370 + \sqrt{48659419263516}}}}}$; Abweichung $8,64432 \cdot 10^{-28}$
$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{50 + \sqrt{7959452 + \sqrt{774630113403085}}}}}$; Abweichung $1,16508 \cdot 10^{-27}$

nähern π auf 28, 27 und 26 Dezimalstellen an (gefunden 6.September 2011).

Die Tabelle enthält einige Parameter $a \neq 0$, b, c, d und e, für die $\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{(d + \sqrt{e})})})})}$ von der Kreiszahl um maximal 10^{-26} abweicht (November 2011):

Abw. in 10^-29	a	b	c	d	e
2	1	13	167	12984060	17651656409746
24	1	1	2041	8986514	48253045750399
83	1	3	129	19065064	150321662069340
86	1	0	138	29638370	48659419263516
117	1	1	50	7959452	774630113403085
213	1	19	334	4668778	32964718770147
232	1	14	7	627412	282402316850568
269	1	11	115	8077677	140458534927905
294	1	0	1047	11352178	227631920322720
312	1	0	524	9109684	528171344909524
317	1	6	297	8456298	268405266595304
333	1	1	914	6295614	396191530086977
340	1	6	684	5365590	248567006555927
355	1	12	698	11250436	7776416858201
366	1	2	426	28040246	2846007222270
411	1	5	620	3023962	403435563272978
467	1	17	374	817334	119725238868160
473	1	6	268	4116873	441521439147695
519	1	0	905	12264048	245112951076338
551	1	12	445	4487421	132516119321737
567	1	0	75	7469576	894656742177666
572	1	5	945	387920	388194769306103
597	1	0	2253	6730950	76750833742005
610	1	1	106	12416082	515681934339852
611	1	5	1037	14409395	23667384872184
613	1	14	59	9669159	53751875010231
615	1	1	759	14512531	176848448524685
615	1	8	407	8665610	153192350882330
616	1	1	558	8747767	450440954429106
641	1	1	1322	3486377	349819987567082
654	1	7	357	12583468	105284851583229
660	1	9	158	11857915	103907264464854
701	1	3	1437	10657364	59869924247309
702	1	8	689	854490	312601309631657
703	1	6	863	15063708	19840223043432
708	1	1	1908	2136087	221305064855173
708	1	3	618	14059648	144752465726078
733	1	21	945	443689	27296367542473
769	1	0	120	5816326	961981871747295
790	1	10	87	18489343	8609279265866
829	1	4	1066	8808523	132892266432882
860	1	1	320	1450396	972412164986162

891	1	0	2030	8498219	77416227448895
934	1	0	1510	5716037	261680432407245
939	1	3	407	3493395	614922592565126

Bei der Suche nach Näherungstermen für π in der Form

$$\sqrt{}(a_1 + \sqrt{}(a_2 + \sqrt{}(a_3 + \ldots + \sqrt{}a_n)\ldots)))$$

können auch einige der Parameter a_1, a_2, a_3, ... gleich Null werden.
Insbesondere wenn $a_1 = 0$ ist, verändert sich der Term auf einen Ausdruck mit einer Wurzel höheren Grades.
Besonders genaue Terme mit höheren Wurzeln sind

$^4\sqrt{}(1 + \sqrt{}(1 + \sqrt{}(21383431 + \sqrt{}4223656848083439))$; Abweichung $7{,}55277 \cdot 10^{-29}$
$^4\sqrt{}(2 + \sqrt{}(14 + \sqrt{}(40266612 + \sqrt{}1792793645352152))$; Abweichung $4{,}02839 \cdot 10^{-27}$
$^4\sqrt{}(1 + \sqrt{}(42 + \sqrt{}(29010563 + \sqrt{}3203801323004517))$; Abweichung $5{,}27719 \cdot 10^{-27}$
$^4\sqrt{}(1 + {}^4\sqrt{}(31677959 + \sqrt{}2993591995171814))$; Abweichung $4{,}79382 \cdot 10^{-26}$
$^8\sqrt{}(481 + \sqrt{}(1455617 + \sqrt{}1574502241714372))$; Abweichung $7{,}56223 \cdot 10^{-29}$
$^8\sqrt{}(34 + \sqrt{}(18643415 + \sqrt{}5004818482987791))$; Abweichung $2{,}34820 \cdot 10^{-28}$
$^8\sqrt{}(32 + \sqrt{}(21128169 + \sqrt{}4664590831386513))))$; Abweichung $2{,}45382 \cdot 10^{-27}$
$^8\sqrt{}(26 + \sqrt{}(5524872 + \sqrt{}7058456580436768))$; Abweichung $2{,}50794 \cdot 10^{-27}$
$^{16}\sqrt{}(50754728 + \sqrt{}1542721444026675)$; Abweichung $4{,}92548 \cdot 10^{-26}$

nähern π auf 28, 27 bis 24 Dezimalstellen an (gefunden 7.August 2011).

Die Tabelle enthält einige Parameter b, c, d und e, mit a = 0, für die $\sqrt{}(a + \sqrt{}(b + \sqrt{}(c + \sqrt{}(d + \sqrt{}e)))) = {}^4\sqrt{}(b + \sqrt{}(c + \sqrt{}(d + \sqrt{}e)))$ von der Kreiszahl um maximal 10^{-26} abweicht (November 2011):

Abw. in 10^-29	a	b	c	d	e
8	0	1	1	21383431	4223656848083439
8	0	0	481	41455617	1574502241714372
23	0	0	34	18643415	5004818482987791
48	0	0	379	61771714	449942212725837
61	0	1	61	36660271	2362074862716486
72	0	0	84	2620530	7365874604079383
73	0	0	92	50584538	1422063493261451
125	0	0	182	34408968	2725106388652350
127	0	0	244	13728203	5145644910366207
152	0	1	67	3406883	6682049025930152
159	0	0	266	71205790	191802787590486
165	0	1	106	39508591	2018152527553504
202	0	0	76	71738668	284160880745133
203	0	2	49	21553155	3650558681050414
210	0	0	615	48557165	910976526860607
225	0	0	617	49376333	860115721678391
230	0	0	469	5478264	5756814671794754
245	0	0	32	21128169	4664590831386513
247	0	0	445	52901828	834263806925651
251	0	0	26	5524872	7058456580436768
281	0	0	336	72039612	137574414144084
330	0	14	4	5629701	1824620036405975
334	0	0	299	48499204	1292278568604887
340	0	0	159	1778311	7269581015697560
359	0	0	237	601121	7223249980007806

365	0	0	560	52433920	744457370010724
390	0	9	6	13511582	2255027749645643
403	0	2	14	40266612	1792793645352152
437	0	0	389	44978983	1430540122887130
478	0	0	372	54589243	813498481098497
497	0	2	47	51749060	915677764176836
516	0	0	119	2491487	7275514144459370
528	0	1	42	29010563	3203801323004517
558	0	0	605	15477477	4024588724380437
575	0	0	138	21390263	4361567859369423
586	0	0	621	57048191	465908569413602
601	0	0	53	7615625	6628177611910936
607	0	2	11	13544770	4777267285681460
615	0	0	89	63396904	622716056484026
653	0	0	212	16193816	4880449177667730
661	0	0	648	14329977	4073632111625543
664	0	2	21	32520261	2496056503228173
676	0	0	80	52338586	1309127708039446
688	0	0	251	54462356	952933641008661
689	0	0	369	17848176	4266398008098601
696	0	0	12	14353984	5692801505701296
722	0	0	508	44001735	1343090734065004
768	0	3	33	51935059	724724040607645
798	0	1	14	71803171	205304757581427
812	0	0	470	24274843	3255736178340879
837	0	0	373	10507443	5268649396090908
860	0	0	568	3099557	5848627002030622
871	0	0	453	3885487	6045891925387862
879	0	0	56	10997427	6080134055912304
900	0	0	637	3116148	5660072499725474
915	0	0	348	58890944	608034878452431
973	0	2	1	17483807	4272018392663879

Bei der Suche von Näherungstermen für π in der Form

$$\sqrt{(a + \sqrt{(b + \sqrt{(c + \sqrt{(d + \sqrt{e})})})})}$$

ergeben sich gute Näherungen nicht gleichmäßig verteilt. Mit a > 2 findet man keine Terme, die höchstens um 10^{-24} von π abweichen.
Für die bisher untersuchten Belegungen a = 1 oder 2 und verschiedene Werte b ergeben sich für die Parameter a, b, c, d und e als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung Δ von π (vollständig getestet für alle a ≥ 1, b ≥ 17; November 2011):

Δ in 10^{-29}	a	b	c	d	e	gesucht für
2	1	13	167	12984060	17651656409746	0 ≤ c ≤ 932
24	1	1	2041	8986514	48253045750399	alle c
83	1	3	129	19065064	150321662069340	0 ≤ c ≤ 1753
86	1	0	138	29638370	48659419263516	alle c
213	1	19	334	4668778	32964718770147	alle c
232	1	14	7	627412	282402316850568	0 ≤ c ≤ 1553

269	1	11	115	8077677	140458534927905	0 ≤ c ≤ 857
317	1	6	297	8456298	268405266595304	0 ≤ c ≤ 1082
355	1	12	698	11250436	7776416858201	0 ≤ c ≤ 1420
366	1	2	426	28040246	2846007222270	alle c
411	1	5	620	3023962	403435563272978	0 ≤ c ≤ 1600
467	1	17	374	817334	119725238868160	alle c
615	1	8	407	8665610	153192350882330	0 ≤ c ≤ 989
654	1	7	357	12583468	105284851583229	0 ≤ c ≤ 915
660	1	9	158	11857915	103907264464854	0 ≤ c ≤ 676
733	1	21	945	443689	27296367542473	alle c
790	1	10	87	18489343	8609279265866	0 ≤ c ≤ 713
829	1	4	1066	8808523	132892266432882	0 ≤ c ≤ 1487
1144	2	0	604	1897003	73016968180954	
3144	1	16	104	4803216	96354727088642	alle c
3200	2	5	292	1648480	49684455222468	
3415	1	15	319	8779763	26722393225683	
5314	1	18	1616	2666865	2549377336151	alle c
6144	2	3	212	2203050	71063634249641	
6803	2	2	398	5940112	18143475062576	
6853	2	4	100	10438118	26626590563	
8320	1	24	898	1662577	7337873798725	
9623	2	1	37	5622103	62213326514315	
13012	2	6	369	1520261	37126423893477	
13894	1	28	120	392853	31327469075643	
16235	1	30	67	349514	24488377668824	
16679	2	10	89	946104	34275052485998	
17683	1	22	325	1479965	46946835906350	
17835	2	8	91	688372	52562979500256	
22653	1	33	519	635770	3308391422067	
24508	1	20	579	2011349	38270406898597	alle c
28510	1	32	113	2100169	4684531106068	
33951	2	11	1067	273054	4237306568022	
39341	2	9	430	144762	30030302261177	
44701	1	29	14	4441974	2482867919878	
45171	1	27	511	1645133	9091334368990	
49024	1	23	35	1463292	62815707993756	

Mit a = 0 findet man eine Vielzahl Terme, die höchstens um 10^{-24} von π abweichen. Für die bisher untersuchten Belegungen a = 0 und verschiedene Werte b ergeben sich für die Parameter b, c, d und e als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung Δ von π (vollständig getestet für alle b ≥ 42; November 2011):

Δ in 10^{-29}	a	b	c	d	e	gesucht für
8	0	1	1	21383431	4223656848083439	0 ≤ c ≤ 144
8	0	0	481	1455617	1574502241714372	0 ≤ c ≤ 657
203	0	2	49	21553155	3650558681050414	0 ≤ c ≤ 49
330	0	14	4	5629701	1824620036405975	0 ≤ c ≤ 6
390	0	9	6	13511582	2255027749645643	0 ≤ c ≤ 6

768	0	3	33	51935059	724724040607645	0 ≤ c ≤ 40
1102	0	7	2	16859496	2491894619504794	0 ≤ c ≤ 8
2317	0	4	2	47754666	803187860065963	0 ≤ c ≤ 16
2489	0	5	7	8191841	4174541670341612	0 ≤ c ≤ 8
3390	0	10	6	23766703	1191394615014227	0 ≤ c ≤ 6
3766	0	45	413	1041639	19400294499211	alle c
4244	0	6	6	25744462	1933512535110361	0 ≤ c ≤ 8
4420	0	8	0	17512802	2152125171029005	0 ≤ c ≤ 5
5950	0	15	5	26510	2118465536835408	0 ≤ c ≤ 8
6005	0	11	5	8887209	2189045458393721	0 ≤ c ≤ 8
6303	0	13	7	33768090	285486110645646	0 ≤ c ≤ 9
8461	0	48	728	481657	6020137860778	alle c
8597	0	12	1	11328509	1753074948867633	0 ≤ c ≤ 6

Im Allgemeinen wird die Suche von Näherungstermen für π in der Form
$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{d + \sqrt{e}}}}}$
nur für natürliche Zahlen a, b, c, d und e durchgeführt.
Es ist aber durchaus möglich, dass auch negative Werte betrachtet werden. Für die wenigen bisher (Oktober 2011) untersuchten Belegungen mit negativen a bzw. b ergeben sich für die Parameter a, b, c, d und e als beste Näherungen mit der aufsteigenden Abweichung Δ von π:

Δ in 10^{-29}	a	b	c	d	e	gesucht für
8	-1	-3	0	68279995	21647739612745620	0 ≤ c ≤ 2
33	-2	0	0	182402673	44771023848637997	0 ≤ c ≤ 1
329	-1	0	2	94609919	10037737402291649	0 ≤ c ≤ 2
861	1	-3	2	674165	1917358681078630	0 ≤ c ≤ 3
1024	-1	-2	1	181803819	705128776581399	0 ≤ c ≤ 1
1204	-1	-1	0	7541794	37633529416128409	0 ≤ c ≤ 1
1527	0	-3	1	17774727	7031081247849027	0 ≤ c ≤ 3
2558	0	-2	1	20411656	5963826161950114	0 ≤ c ≤ 2
3558	0	-1	0	62645760	969753123640385	0 ≤ c ≤ 2
5939	1	-1	4	18114804	489406144880931	0 ≤ c ≤ 11
6578	2	-3	1	163495	309853833678242	0 ≤ c ≤ 14
10945	1	-2	11	4915665	1390584004198243	0 ≤ c ≤ 24
14270	2	-2	5	7128752	90917017233472	0 ≤ c ≤ 8

Weitere Näherungsformeln für PI

Kochansky: … die Wurzel des Polynoms
$9x^4 - 240x^2 + 1492$ wird zu $\pi \approx \sqrt{40/3 - \sqrt{12}} = 3{,}141533\ldots$
Näherung über das Goldene Verhältnis ϕ
$\pi \approx 6/5\, \phi^2 = 6/5\, (1/2 \cdot (\sqrt{5} + 1))^2 = 3/5\, (3 + \sqrt{5}) = 3{,}14164\ldots$
Ramanujan: $\pi \approx 19\, \sqrt{7} / 16$
$\pi \approx 7/3\, (1 + 1/5\, \sqrt{3})$
$\pi \approx 9/5 + \sqrt{9/5}$
$\pi \approx \sqrt[4]{102 - 2222/22^2}$
Weitere Näherungen mit
$\pi \approx 24/\sqrt{142}\, \ln(1/2\, (\sqrt{10+11\sqrt{2}} + \sqrt{10+7\sqrt{2}}))$ ... 15 Ziffern
$\pi \approx 12/\sqrt{190}\, \ln((3+\sqrt{10}) (\sqrt{8}+\sqrt{10}))$ ... 18 Ziffern
$\pi \approx 24/\sqrt{310}\, \ln(1/4\, (3+\sqrt{5})\, (2+\sqrt{2})\, (5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{61+20\sqrt{10}}))$ ... 23 Ziffern
$\pi \approx 4/\sqrt{522}\, \ln(((5+\sqrt{29})/\sqrt{2})^3\, (5\sqrt{20}+11\sqrt{6})\, (1/2\, \sqrt{9+3\sqrt{6}} + 1/2\, \sqrt{5+3\sqrt{6}})^6)$
... 31 Ziffern Genauigkeit

1984 Morris Newman, Daniel Shanks

a = 1071/2 + 92 √(34) + 3/2 √(255349 + 43792 √(34))
b = 1553/2 + 133 √(34) + 1/2 √(4817509 + 826196 √(34))
c = 429 + 304 √2 + 2 √(92218 + 65208 √2)
d = 627/2 + 221 √2 + 1/2 √(783853 + 554268 √2)
$| \pi - 6/\sqrt{3502} \ln(2abcd) | < 7{,}4 \cdot 10^{-82}$

Kettenbrüche nach Brounker

Auf Lord Brounker (1620-1684) gehen weitere Kettenbrüche zur Berechnung von π zurück:

$$\pi = 4\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}} \qquad \pi = 2+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{4}+\ldots}}}}$$

$$\pi = 2+\cfrac{4}{3+\cfrac{1\times 3}{4+\cfrac{3\times 5}{4+\cfrac{5\times 7}{4+\ldots}}}} \qquad \pi = 3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\ldots}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ldots}}}} \qquad \frac{12}{\pi^2} = 1+\cfrac{1^4}{3+\cfrac{2^4}{5+\cfrac{3^4}{7+\cfrac{4^4}{9+\ldots}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1-\cfrac{1}{3-\cfrac{2\times 3}{1-\cfrac{1\times 2}{3-\cfrac{4\times 5}{1-\cfrac{3\times 4}{3-\cfrac{6\times 7}{1-\ldots}}}}}}$$

$$\frac{6}{\pi^2-6} = 1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1\times 2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2\times 3}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3\times 4}{1+\ldots}}}}}}$$

Stirling-Formel
Leibniz-Formel
Gosper-Formel (von oben nach unten)

$$\frac{(n!)^2 e^{2n}}{2n^{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\ldots\right) = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

$$\pi = 3+\frac{1}{60}\left(8+\frac{2.3}{7.8.3}\left(13+\frac{3.5}{10.11.3}\left(18+\frac{4.7}{13.14.3}(\ldots)\right)\right)\right)$$

Newton-Formeln

$$\pi = 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2(2n+1)}$$

$$\pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+2}(n!)^2(2n-1)(2n+3)}\right)$$

Katahiro-Formel (1664 - 1739)

$$\forall r > 1 \quad U_0 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)$$

$$U_n = \frac{U_0 U_{n-1}(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{U_0^{n+1}2(n!)^2}{(2n+2)!}$$

$$\pi = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} U_n}$$

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4+8r}{8i+1} - \frac{8r}{8i+2} - \frac{4r}{8i+3} - \frac{2+8r}{8i+4} - \frac{1+2r}{8i+5} - \frac{1+2r}{8i+6} + \frac{r}{8i+7}\right)$$

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{4^i}\left(\frac{2}{4i+1} + \frac{2}{4i+2} + \frac{1}{4i+3}\right)$$

$$\pi^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{16}{(8i+1)^2} - \frac{16}{(8i+2)^2} - \frac{8}{(8i+3)^2} - \frac{16}{(8i+4)^2} - \frac{4}{(8i+5)^2} - \frac{4}{(8i+6)^2} - \frac{2}{(8i+7)^2}\right)$$

$$\frac{\pi^3}{360} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \sinh(n\pi)}$$

$$\pi\sqrt{2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{8^i}\left(\frac{4}{6i+1} + \frac{1}{6i+2} + \frac{1}{6i+3}\right)$$

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{64^i}\left(\frac{16}{(6i+1)^2} - \frac{24}{(6i+2)^2} - \frac{8}{(6i+3)^2} - \frac{6}{(6i+4)^2} - \frac{1}{(6i+5)^2}\right)$$

$$\pi^2 = \frac{2}{27}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{729^n}\left(\frac{243}{(12n+1)^2} - \frac{405}{(12n+2)^2} - \frac{81}{(12n+4)^2} - \frac{27}{(12n+5)^2} - \frac{72}{(12n+6)^2} - \frac{9}{(12n+7)^2} - \frac{9}{(12n+8)^2} - \frac{5}{(12n+10)^2} + \frac{1}{(12n+11)^2}\right)$$

Plouffe Näherungsformeln (2)

Die rechte Abbildung zeigt weitere von Plouffe gefundene Näherungsformeln zur Bestimmung von π.

Irrationalität von PI

Satz: π^2 ist eine irrationale Zahl.

Beweis:
Es sei $\pi^2 = p/q$, wobei p und q positive ganzen Zahlen sind. Es wird folgende Funktion betrachtet

$$J(x) = q^n(\pi^{2n}P_n(x)-\pi^{2n-2}P_n''(x)+ \pi^{2n-4}P_n^{(4)}(x)-\ldots(-1)^nP_n^{(2n)}(x))$$

mit P_n, J(0) und J(1) als natürliche Zahlen.

Es ist aber

$$(J'(x)\sin\pi x - J(x)\, \pi\cos\pi x)' = (J''(x)+ \pi^2J(x))\sin\pi x = q^n\pi^{2n+2}P_n(x)\sin\pi x = p^2\pi^nP_n(x)\sin\pi x$$

und damit

$$1/\pi\, [J'(x)\sin\pi x-J(x)\, \pi\cos\pi x]_0^1 = J(0)+J(1) = \pi p^n \int_0^1 P_n(x)\sin\pi x\, dx$$

d.h. das Integral ist eine von Null verschiedene ganze Zahl. Als Grenzen für das Integral ergibt sich aber

$$0 < \pi p^n \int_0^1 P_n(x)\sin\pi x\, dx < \pi p^n/n! < 1$$

für großes n. Der Widerspruch ergibt, dass π^2 irrational ist. Als Folgerung ergibt sich: π ist eine irrationalen Zahl.

Castellanos Näherungsformeln	Zahlenwert	Ziffern
$(2e^3+e^8)^{1/7}$	3,14171	3
$(533/312)^2$	3,141529	4
$(3/14)^4\ (193/5)^2$	3,141575	4
$(296/167)^2$	3,14159704	5
$((66^3+86^2)/55^3)^2$	3,141592452	6
$(47^3+20^3)/30^3 - 1$	3,14159259259	6
$2 + \sqrt{(1+(413/750)^2)}$	3,141592649	7
$\sqrt[5]{(77729/254)}$	3,141592654111	8
$\sqrt[3]{(31+(62^2+14)/28^4)}$	3,14159265363	9
$(1700^3+82^3-10^3-9^3-6^3-3^3)/69^5$	3,14159265358817	11
$\sqrt[4]{(95+(93^4+34^4+17^4+88)/75^4)}$	3,14159265359037	10
$\sqrt[4]{(100-(2125^3+214^3+30^3+37^2)/82^5)}$	3,141592653589780419	13

Plouffe Näherungsformeln

$43^{7/23}$	3,1415398	4
$\ln(2198) / \sqrt{6}$	3,1415943	5
$(13/4)^\wedge(1181/1216)$	3,14159267809	7
$689/(396 \ln(689/396))$	3,14159259508	6
$^4\sqrt{}(2143/22)$	3,14159265258	8
$\sqrt{}(9/67) \ln 5280$	3,14159265297	8
$^3\sqrt{}(63023/30510) + 1/4 + 1/2 (\sqrt{5} + 1)$	3,141592653492	9
$48/23 \ln(60318/13387)$	3,1415926535949	10
$^{41}\sqrt{}(228 + 16/1329) + 2$	3,141592653586778	11
$125/123 \ln(28102/1277)$	3,1415926535912	10
$^{158}\sqrt{}(276694819753963/226588) + 2$	3,141592653589793238462649201 23	
$\ln(262537412640768744 / \sqrt{163}$	3,1415926535897932384626433832797 30	

Näherungsformeln

$\pi^2 / 16 = \Sigma_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(k+1) (1+1/3+...+1/(2k+1))$ … Knopp

$\pi / 4 = 3/4 + 1/(2\cdot3\cdot4) - 1/(4\cdot5\cdot6) + 1/(6\cdot7\cdot8) - + ...$ Nilakantha

$\pi / 2 = 1 + 1/3 + (1\cdot2)/(3\cdot5) + (1\cdot2\cdot3)/(3\cdot5\cdot7) + ...$ Euler

$\pi / 2 = (1\cdot2)/(1\cdot3) + (1\cdot2\cdot3)/(1\cdot3\cdot5) + (1\cdot2\cdot3\cdot4)/(1\cdot3\cdot5\cdot7) + ...$

$\pi = \Sigma_{k=1}^{\infty} (3^k-1)/4^k \zeta(k+1)$ … Flajolet-Vardi

$\pi / 4 = \Sigma_{k=1}^{\infty} \arctan(1/(k^2+k+1))$ … Knopp

$1 / \pi = \Sigma_{k=1}^{\infty} 1/2^{k+1} \tan(\pi/2^{k+1})$ … Euler

$\pi \sqrt{2} / 4 = 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 --++ ...$

$\pi \sqrt{3} / 6 = 1 - 1/5 + 1/7 - 1/11 + 1/13 - 1/17 + ...$

$\pi \sqrt{3} / 9 = 1 - 1/2 + 1/4 - 1/5 + 1/7 - 1/8 + ...$

$\pi \sqrt{3} / 6 = \Sigma_{k=0}^{\infty} -1/^k / (3^k (2k+1))$ … Sharp

Borwein-Algorithmus
Durch die Brüder Jonathan und Peter Borwein wurde 1984 ein weiterentwickelter Algorithmus veröffentlicht.
Mit den Startwerten $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = 0$, $a_0 = 2+\sqrt{2}$ wird berechnet

$x_{k+1} = 1/2 (\sqrt{x_k} + 1/\sqrt{x_k})$ $\qquad y_{k+1} = \sqrt{x_k} (y_k + 1) / (y_k + x_k)$

$a_{k+1} = a_k y_{k+1} (x_{k+1} + 1) / (y_{k+1} + 1)$

Für diese Berechnung wird dann $| a_k - \pi | < 10^{-2^\wedge k}$. Damit liegt eine quadratische Konvergenz vor. Die ersten Iterationen sind

$a_1 = 3,14(260...)$
$a_2 = 3,1415926(609...)$
$a_3 = 3,141592653589793238(645...)$

2.Algorithmus

$y_{k+1} = (1 - \sqrt{}(1 - y_k^2)) / (1 + \sqrt{}(1 - y_k^2))$ $\qquad a_{k+1} = (1 + y_{k+1})^2 a_{k-2}^{k+1} y_{k+1}$

mit $y_0 = 1/\sqrt{2}$; $a_0 = 1/2$
ergibt mit quadratischer Konvergenz

$1/a_1 = 2{,}914213562373095048801688 7\ldots$
$1/a_2 = 3{,}14(057\ldots)$
$1/a_3 = 3{,}1415926(462\ldots)$
$1/a_4 = 3{,}141592653589793238(279\ldots)$
$1/a_5$ hat 40 korrekte Ziffern, $1/a_6$ 84 korrekte Ziffern …


Die Ecke

Pi mal Daumen

TOKIO, 4. August (ap). Zwei japanische Mathematiker haben am Freitag einen neuen Weltrekord für die Berechnung der Zahl Pi bekanntgegeben. Wie Yasumasa Kaneda und Daisuke Takahashi von der Universität Tokio erklärten, berechneten sie die Zahl, die das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser angibt, auf 3,22 Milliarden Dezimalstellen genau.
Wissenschaftler der US-amerikanischen Columbia-Universität hielten den alten Rekord mit 2,26 Milliarden Stellen.
Professor Kaneda sagte, seine Gruppe habe einen Großcomputer benutzt, um zwei verschiedene Formeln durchrechnen zu lassen. Für die erste habe der Rechner 36 Stunden und 52 Minuten gebraucht, für die andere 53 Stunden und 43 Minuten. Mathematiker sind der Meinung, daß Pi unzählig viele Dezimalstellten hat.
Die präzise Berechnung der Kreiszahl hat keinerlei praktischen Wert.

Frankfurter Rundschau vom 5.8.1995

Borchardt-Pfaff-Algorithmus
Ausgehend von in einen Kreis eingeschriebenen bzw. umschriebenen regelmäßigen N-Ecken konvergieren die Werte
$b_{n+1} = 2a_nb_n / (a_n + b_n)$
$a_{n+1} = \sqrt{(a_n\, b_{n+1})}$
gegen die Kreiszahl π. Als Startwerte werden
$a_0 = 3$ halber Umfang des eingeschriebenen 6-Ecks
$b_0 = 2\sqrt{3}$ halber Umfang des umschriebenen 6-Ecks
Dieser Algorithmus stellt eine Vereinfachung des Verfahrens von Archimedes (siehe PI-Näherung nach Archimedes) dar. Für die ersten Näherungen ergibt sich:

n	a_n	b_n
1	3,105828542	3,215390310
2	3,132628614	3,159659942
3	3,139350204	3,146086216
4	3,141031952	3,142714600

Eine schnellere Konvergenz erreicht man mit
$a_{n+1} = 3a_nb_n / (2b_n+a_n)$
$b_{n+1} = 3\sqrt{(a_n 2b_n)}$

n	a_n	b_n
1	3,140237344	3,147345190
2	3,141509994	3,141927919

Brent-Salamin-Verfahren / Gauß -Salamin-Verfahren

Sind a,b positive reelle Zahlen und wird sukzessive
$a_{n+1} = (a_n + b_n) / 2 \qquad b_{n+1} = \sqrt{(a_n \cdot b_n)}$
gebildet, so streben beide Folgen gegen einen gemeinsamen Grenzwert, das

arithmetisch-geometrische Mittel AGM(a,b)
Es gilt: $AGM(a,b) = \pi/2\, I(a,b)$, I … elliptisches Integral
$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} 1/\sqrt{[a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin^2 \Theta]} \cdot d\Theta$
Mit $a=1$, $b=1/\sqrt{2}$ und $M=AGM(1, 1/\sqrt{2})$ wird
$\pi = 4M^2/[1 -2^0(a_0 - b_0)^2 -2^1(a_1 - b_1)^2 -2^2(a_2 - b_2)^2 -2^3(a_3 - b_3)^2 -\ldots]$
d.h. die Folge der Zahlen
$$4 M^2 / [1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k (a_k - b_k)^2]$$
konvergiert quadratisch gegen π.
Der Algorithmus wurde 1976 zuerst von Eugene Salamin angegeben und im gleichen Jahr, unabhängig von Salamin, durch Richard Brent entdeckt. Die ersten Iterationen sind
$p_1 = 3{,}1(876\ldots)$
$p_2 = 3{,}141(680\ldots)$
$p_3 = 3{,}141592653(895\ldots)$
$p_4 = 3{,}14159265358979323846(636\ldots)$
p_{30} gibt die Kreiszahl π schon auf über 1 Milliarde Ziffern genau an.

Borwein-Verfahren höherer Ordnung

Durch J.M. Borwein and P.B. Borwein wurden in "Ramanujan and Pi", Scientific American 1988, und "Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to Compute One Billion Digits of Pi", The American Mathematical Monthly 1989, Algorithmen zur Berechnung von π mit kubischer Konvergenzgeschwindigkeit und noch höherer Ordnung angegeben:

Kubischer Algorithmus

$x_{k+1} = 3 / 1+2(1-y_k^3)^{1/3}$ $\quad y_{k+1} = (x_{k+1}-1)/2$ $\quad a_{k+1} = x_{k+1}^2\, a_k - 3^k\, (x_{k+1}^2-1)$

mit $y_0 = (\sqrt{3}-1)/2$; $a_0 = 1/3$ ergibt $\lim_{k\to\infty} 1/a_k = \pi$

Werte $1/a_1 = 3{,}14159(058\ldots)$ $1/a_2 = 3{,}14159265358979323846 2(359\ldots)$

$1/a_3$ hat 70 korrekte Stellen …

Algorithmus 4.Ordnung

$y_{k+1} = (1-(1-y_k^4)^{1/4}) / (1+(1-y_k^4)^{1/4})$ $\quad a_{k+1} = (1+y_{k+1})^4\, a_k - 2^{2k+3}\, y_{k+1}(1+y_{k+1}+y_{k+1}^2)$

mit $y_0 = \sqrt{2} -1$; $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$

Werte $1/a_1 = 3{,}1415926(462\ldots)$

$1/a_2 = 3{,}14159265358979323846264338327950288419 71(146\ldots)$

Algorithmus 5.Ordnung

$y_{k+1} = 25/ (y_k\, (c+a/c+1)^2)$ $\quad a = 5/y_k -1$ $\quad b = (a-1)^2 + 7$ $\quad c = (1/2\, a\, (b+ \sqrt{(b^2-4a^3)}))^{1/5}$

$\alpha_{k+1} = y_k^2\, \alpha_k - 5^k\, (1/2\, (y_k^2-5) + \sqrt{(y_k\, (y_k^2 -2y_k+5))}))$

mit $y_0 = 5(\sqrt{5} - 2)$; $\alpha_0 = 1/2$

Werte $1/\alpha_1 = 3{,}1415(369\ldots)$

$1/\alpha_2 = 3{,}14159265358979323846264338327 9(351\ldots)$

Borwein-Verfahren höherer Ordnung

Durch J.M. Borwein and P.B. Borwein wurden Algorithmen zur Berechnung von π mit kubischer Konvergenzgeschwindigkeit und noch höherer Ordnung angegeben:

Algorithmus 9.Ordnung

$\alpha_0 = 1/3$; $s^*_1 = (\sqrt{3} - 1)/2$; $s_1 = \sqrt[3]{(1 - (s^*_1)^3)}$

$s_{n+1} = (1 - s^*_n)^3 / ((t + 2u)(t^2 + tu + u^2))$

mit $t = 1 + 2s^*_n$; $u = \sqrt[3]{(9\, s^*_n\, (1 + s^*_n + (s^*_n)^2)}$; $s_{n+1} = \sqrt[3]{(1 - (s^*_n)^3)}$

$m = 27\, (1 + s_n + s_n^2) / (t^2 + tu + u^2)$

$\alpha_n = m\, \alpha_{n-1} + 3{,}9^{n-2}\, (1 - m)$ strebt für $n \to \infty$ gegen $1/\pi$

hexadezimaler Algorithmus; 16.Ordnung

$\alpha_0 = 1/3$; $s_1 = \sqrt{2} - 1$; $s^*_1 = \sqrt[4]{(1 - (s_1)^4)}$

$s_{n+1} = (1 - s^*_n)^4 / ((t + u)^2(t^2 + u^2))$

mit $m_1 = ((1 + a_n)/t)^4$; $m_2 = 1/t^4$; $t = 1 + s^*_n$

$u = \sqrt[4]{(8\, s^*_n\, (1 + (s^*_n)^2))}$; $s^*_n = \sqrt{(1 - (s_n)^4)}$

$\alpha_n = 16m_1\, \alpha_{n-1} + 4^{2n-1}/3\, (1 - 12m_2 - 4m_1)$ strebt für $n \to \infty$ gegen $1/\pi$

Algorithmus

$\pi = 1/\sqrt{(-C^3)}\, (\Sigma_{n=0}^{\infty}\, ((6n)!\, (A+nB))/((3n)!\, (n!)^3\, C^{3n}))^{-1}$

mit $A = 63365028312971999585426220 + 28337702140800842046825600 \cdot \sqrt{5}$

$+ 384 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{(10891728551171178200467436212395209160385656017}$

$+ 4870929086578810225077338534541688721351255040 \cdot \sqrt{5})$

$B = 7849910453496627210289749000 + 3510586678260932028965606400 \cdot \sqrt{5}$

$+ 2515968 \cdot \sqrt{(3110)} \cdot \sqrt{(6260208323789001636993322654444020882161}$

$+ 2799650273060444296577206890718825190235 \cdot \sqrt{5})$

$C = -214772995063512240 - 96049403338648032 \cdot \sqrt{5}$

$- 1296 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{(10985234579463550323713318473}$

$+ 4912746253692362754607395912 \cdot \sqrt{5})$

Anmerkung: Dieser Algorithmus wird von den Borweins als "nicht ganz ernst gemein" eingestuft. Aber, er ist korrekt!

Beeler-Verfahren

Durch Beeler wurde 1972 ein Verfahren zur Berechnung von π mit kubischer Konvergenzgeschwindigkeit angegeben. Dabei wird mit einem schon bekannten Näherungswert a_0 für π begonnen.

$$a_{k+1} = a_k + \sin a_k$$

Zum Beispiel ergibt der Archimedische Näherungswert

$a_0 = 22/7$

$a_1 = 3{,}141592653(926…)$

$a_2 = 3{,}14159265358979323846264338327(858…)$

a_3 hat 83 korrekte Ziffern.

Analog können auch Verfahren mit Konvergenzordnungen höher als 3 aufgebaut werden:

5.Ordnung $a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k$

7.Ordnung $a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k + 3/40 \sin^5 a^k$

9.Ordnung $a_{k+1} = a_k + \sin a_k + 1/6 \sin^3 a_k + 3/40 \sin^5 a^k + 5/112 \sin^7 a_k$

Für eine effektive numerische Berechnung ist die Tangensfunktion besser geeignet als die Sinusfunktion:

3.Ordnung $a_{k+1} = a_k - \tan a_k$

5.Ordnung $a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k$

7.Ordnung $a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k - 1/5 \tan^5 a_k$

9.Ordnung $a_{k+1} = a_k - \tan a_k + 1/3 \tan^3 a_k - 1/5 \tan^5 a_k + 1/7 \tan^7 a_k$

Nutzt man die letzte Formel mit dem Anfangswert $a_0 = 355/113$, so ergibt eine Iteration 60 korrekte Stellen von π.

In der Praxis erweist sich die Berechnung der Sinus- bzw. Tangenswerte als schwierig, so dass die Formeln vor allem theoretische Bedeutung besitzen.

Ramanujan-Verfahren

Aus der Entwicklung von Modulargleichungen gewinnt man:

$$9801 / (\sqrt{8}\, \pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n)!\, (26390n + 1103) / [(n!)^4 (396)^{4n}]$$

Anmerkung: ein vollständiger Beweis, dass diese Reihe tatsächlich gegen $1/\pi$ konvergiert existiert noch nicht !!

Verfahren 2

Ansatz: $r=2$; $a_0= \sqrt{2} - 1$; $y_0= \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

Iterationsvorschrift:

$y_{n+1} = (1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}) / (1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4})$

$a_{n+1} = (1+y_{n+1})^4 \cdot a_n - 4^{n+1} \cdot \sqrt{r} \cdot y_{n+1} \cdot (1+ y_{n+1} + y_{n+1}^2)$

$\pi = 1 / a_n$

Pascal-Text

```
var s,f,h:extended; i,k:integer;
function fak(x:integer):extended; // Hilfsprozedur zur Berechnung von x!
var y:integer; z:extended;
begin  if x = 0 then fak:=1 else begin z:=1; for y:=1 to x do z:=z*y; fak:=z; end;
end;
begin   s:=0;  {maximal 5 Durchläufe, da dann maximale Genauigkeit erreicht}
for i:=0 to 5 do begin
        f:=1; for k:=1 to 4*i do f:=k*f;
        for k:=1 to i do f:=f/i/i/i/i;  f:=f*(1103+26390*i);
        if i<>0 then begin
        for k:=1 to 4*i do begin f:=f/2;  f:=f/2; f:=f/3;  f:=f/3;  f:=f/11;
        end; end; s:=s+f;
        writeln('Pi ~ ',9801/sqrt(8)/s:24:25,' % Fehler ',100*(9801/sqrt(8)/s-pi)/pi);
        end;
end.
```

Chudnovsky-Verfahren

Weiterentwicklung des Ramanujan-Verfahrens ergibt

$$426880 \sqrt{10005} / \pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (6n)!\, (545140134\, n + 13591409) / [(n!)^3 (3n)!\, (640320)^{3n}]$$

Pascal-Text

```
var  s,f,h:extended; i,k:integer;
function fak(x:integer):extended; {Berechnung von x Fakultät}
var y:integer; z:extended;
begin   if x = 0 then fak:=1
        else begin z:=1; for y:=1 to x do z:=z*y; fak:=z; end;
end;
begin   s:=0;
        for i:=0 to 5 do begin  f:=1;
                for k:=3*i+1 to 6*i do f:=k*f;
                for k:=1 to i do f:=f/i/i/i;
                f:=f*(13591409+545140134*i);
        if i<>0 then begin
                for k:=1 to 3*i do begin
                        f:=f/2;  f:=f/2; f:=f/2; f:=f/2;  f:=f/2; f:=f/2;
                f:=f/3;  f:=f/5; f:=f/667; end; end;
        if odd(i) then s:=s-f else s:=s+f;
        writeln('Pi',426880*sqrt(10005)/s:24:25,' % Fehler ',100*(426880*sqrt(10005)/s-pi)/pi);
        end;
end.
```

Bellard-Borwein-Algorithmus

1997: am schnellsten konvergierende Näherungsformel für π

$$740025 \cdot \pi = \left(\Sigma_{n=1}^{\infty} 3\, P(n) / \left(\binom{7n}{2n} 2^{n-1} \right) - 20379280 \right)$$

mit

$P(n) = -885673181\, n^5\; 3125347237\, n^4 - 2942969225\, n^3 + 1031962795\, n^2 - 196882274\, n + 10996648$

Mit dieser Formel ermittelte am 22.Oktober 1997 Fabrice Bellard (Abbildung, geb. 1973) auf mehr als 20 Hi-Tech Workstations die Kreiszahl π auf 1 Billion Binärstellen genau.
Der ganze Rechenprozess dauerte etwas weniger als einen Monat und wurde danach noch einmal mit einem etwas variierten und optimierten Code durchgeführt, um die Berechnungen zu überprüfen. Damit fand man, dass die 1 Billionste binäre Stelle von π eine 1 ist.
Die Bellardsche Formel wurde ausgehend von einer hypergeometrischen Reihe komplexer Zahlen entwickelt. Eine einfachere Variante ist

$$\pi = \Sigma_{k=0}^{\infty} (-1)^k/4^k \, (2/(4k+1) + 2/(4k+2) + 1/(4k+3))$$

Schon für wenige summierte k = 0,…,n strebt der Wert sehr schnell gegen π.

n	Näherungswert
1	109 / 35 ≈ 3,1142857142857142857
2	87217 / 27720 ≈ 3,1463564213564213564
10	69263381437243280369341 / 22047218913402696499200
	≈ 3,1415926747630499203 (Fehler < 10^{-7})
100	≈ 3,1415926535897932384 (Fehler kleiner 10^{-29})

Für die ersten 1000 Summanden liegt die Abweichung des Näherungswertes von π schon unter 10^{-600}. Eng verbunden mit dem Verfahren sind die von Reynolds gefundenen Summen

$$S_k = 4\, \Sigma_{n=0}^{\infty} ((-1)^n/(2n+1))^k$$

Für diese erhält man:
$S_1 = \pi/4$; $S_2 = \pi^2/8$; $S_3 = \pi^3/32 = \pi^3/(2^4\, 2!)$; $S_4 = 2\pi^4/(2^5\, 3!)$; $S_5 = 5\pi^5/(2^6\, 4!)$; $S_6 = 16\pi^6/(2^7\, 5!)$; $S_7 = 61\pi^7/(2^8\, 6!)$; $S_8 = 272\pi^8/(2^9\, 6!)$; $S_9 = 1385\pi^9/(2^{10}\, 7!)$; $S_{10} = 7936\pi^{10}/(2^{11}\, 8!)$

Tröpfchenalgorithmus zur Berechnung von Ziffern von π

Bailey-Plouffe-Algorithmus, Bailey-Borwein-Plouffe-Formel

1996 entdeckten David H. Bailey, Peter Borwein und Simon Plouffe eine neue Formel zur Berechnung von π:

$$\pi = \Sigma\, 1/16^k \, (4/(8k + 1) - 2/(8k + 4) - 1/(8k + 5) - 1/(8k + 6))$$

Summenbildung von k = 0 bis ∞

Für Summierung bis 0,1,2,… ergeben sich die Näherungswerte 47 / 15, 102913 / 32760, 615863723 / 196035840, 357201535487 / 113700787200, 16071212445820879 / 5115625817702400, 40413742330349316707 / 12864093722915635200, 4318127540987083098959311 / 1374502686106089789849600 = 3,1415926535728808…

Diese Formel erlaubt es auf einfache Weise, die n-te Stelle einer binären oder hexadezimalen Darstellung von π zu berechnen, ohne dass man zuvor die n-1 vorherigen Ziffernstellen berechnen muss.
Dieses neue Verfahren ist eine Sensation, da damit offenbar jede noch so "weit entfernte" Dezimalstelle "tröpfchenweise" von π ermittelt werden kann. Im Jahr 2000 wurde dieser Algorithmus von "Computing in Science and Engineering" zu einem der 10 besten Algorithmen des 20.Jahrhunderts gewählt.

Als g-adische Zahl zur Basis 16 beginnt π mit **3 , 243F6A8885A308 …**

David H. Bailey 2000-03-28 : Quelltext des Tröpfchenalgorithmus für ic<2^{24}

```
main() {
 double pid, s1, s2, s3, s4; double series (int m, int n);
 void ihex (double x, int m, char c[]);
 int ic = 1000000;
 #define NHX 16 char chx[NHX];
 s1 = series (1, ic - 1); s2 = series (4, ic - 1); s3 = series (5, ic - 1); s4 = series (6, ic - 1);
 pid = 4.*s1 - 2.*s2 - s3 - s4; pid = pid - (int) pid + 1.;
 ihex (pid, NHX, chx); printf (" start position = %i\n hex digits = %10.10s\n", ic, chx); }
```

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\ldots(x+n-1)$$

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^3 (42n+5)}{2^{12n+4}(n!)^6}$$

$$\pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(1123+21460n)}{2^{10n+1}(n!)^4 (441)^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}}\right)^{-1}$$

$$\pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n (n!)^3}\right)^{-1}$$

$$\pi = 32\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42\sqrt{5}n + 5\sqrt{5} + 30n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{27}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(15n+2)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{15\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(33n+4)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1}$$

```
void ihex (double x, int nhx, char chx[])
{ int i; double y; char hx[] = "0123456789ABCDEF";
  y = fabs (x); for (i = 0; i < nhx; i++){ y = 16.*(y -
floor (y)); chx[i] = hx[(int) y]; } }

double series (int m, int ic)
{ int k; double ak, eps, p, s, t; double expm (double
x, double y);
  #define eps 1e-17 s = 0.;
  for (k = 0; k < ic; k++){ ak = 8*k+m; p = ic-k; t
= expm(p,ak); s = s + t / ak; s = s - (int) s; }
  for (k = ic; k <= ic + 100; k++){ ak = 8*k + m; t
= pow (16., (double) (ic - k)) / ak;
  if (t < eps) break; s = s + t; s = s - (int) s; }
return s; }

double expm (double p, double ak)
  { int i, j; double p1, pt, r; #define ntp 25 static
double tp[ntp]; static int tp1 = 0;
  if (tp1 == 0) { tp1 = 1; tp[0] = 1.; for (i = 1; i <
ntp; i++) tp[i] = 2.*tp[i-1]; }
  if (ak == 1.) return 0.;
  for (i = 0; i < ntp; i++) if (tp[i] p) break; pt = tp[i-
1]; p1 = p; r = 1.;
  for (j = 1; j <= i; j++){ if (p1 = pt){ r = 16.*r; r
= r - (int) (r / ak)*ak; p1 = p1 - pt; }
  pt = 0.5*pt; if (pt = 1.){ r = r*r; r = r - (int) (r /
ak)*ak; } }
  return r; }
```

Ramanujan-Formeln

Ramanujan ist einer der faszinierendsten Mathematiker aller Zeiten.

Die nachfolgenden Formeln für π wurden von ihm "gesehen". Der exakte Nachweis ist teilweise bis heute noch nicht gelungen.
Hinweis zur Schreibweise: Der Ausdruck (x)n bedeutet das oben dargestellte Produkt.

$$\pi = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(11n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3} \left(\frac{4}{125}\right)^n \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(133n+8)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3} \left(\frac{4}{85}\right)^n \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (28n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 3^n 4^{n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (20n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 2^{2n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (644n+41)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 5^n 72^{2n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (260n+23)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 18^{2n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^{2n+1}} \right)^{-1}$$

π und Fibonacci-Zahlen

Ausgehend von Eulers Formel für π
π/4 = arctan(1) = arctan(1/2) + arctan (1/3)
kann man versuchen, die Argumente 1/2 und 1/3 durch weitere Summanden zuersetzen. Es zeigt sich, dass
arctan(1) = arctan(1/2) + arctan(1/3)
arctan(1/3) = arctan(1/5) + arctan(1/8)
arctan(1/8) = arctan(1/13) + arctan(1/21)
arctan(1/21) = arctan(1/34) + arctan(1/55) usw.
gilt. Ersetzt man die entsprechenden Terme, wird
π/4 = arctan(1) = arctan(1/2) + arctan(1/3) = arctan(1/2) + arctan(1/5) + arctan(1/8) =
= arctan(1/2) + arctan(1/5) + arctan(1/13) + arctan(1/21) =
= arctan(1/2) + arctan(1/5) + arctan(1/13) + arctan(1/34) + arctan(55) = …
Die Nenner der Brüche sind gerade die Fibonacci-Zahlen.
Allgemein ist
π/4 = arctan(1/F1) = arctan(1/F3) + arctan(1/(F4)
= arctan(1/F3) + arctan(1/F5) + arctan(1/F6)
= arctan(1/F3) + arctan(1/F5) + arctan(1/F7) + arctan(1/F8)
= arctan(1/F3) + arctan(1/F5) + arctan(1/F7) + arctan(1/F9) + arctan(1/F10) = …
und
$\arctan(1/F_{2n}) = \arctan(1/F_{2n+1}) + \arctan(1/F_{2n+2})$
mit geradem n.
Für die Kreiszahl π gilt damit die unendliche Summe $\pi/4 = \Sigma_{k=1}^{\infty} \arctan(1/F_{2k+1})$
sowie für die Fibonacci-Zahlen $\arctan(1/F_{2k}) = \Sigma_{n=k}^{\infty} \arctan(1/F_{2n+1})$

Kettenbruch PI

Die Kreiszahl π ist mit Hilfe relativ aufwendiger Operationen in einen Näherungskettenbruch entwickelbar. Nachfolgender Kettenbruch nähert π auf 500 Dezimalstellen genau.

π = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 10, 2, 5, 4, 1, 2, 2, 8, 1, 5, 2, 2, 26, 1, 4, 1, 1, 8, 2, 42, 2, 1, 7, 3, 3, 1, 1, 7, 2, 4, 9, 7, 2, 3, 1, 57, 1, 18, 1, 9, 19, 1, 2, 18, 1, 3, 7, 30, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 2, 8, 1, 1, 2, 1, 15, 1, 2, 13, 1, 2, 1, 4, 1, 12, 1, 1, 3, 3, 28, 1, 10, 3, 2, 20, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 6, 1, 4, 1, 120, 2, 1, 1, 3, 1, 23, 1, 15, 1, 3, 7, 1, 16, 1, 2, 1, 21, 2, 1, 1, 2, 9, 1, 6, 4, 127, 14, 5, 1, 3, 13, 7, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 29, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 10, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 12, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 1, 11, 3, 1, 7, 1, 4, 1, 48, 16, 1, 4, 5, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 2, 5, 20, 1, 1, 5, 4, 1, 436, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 6, 11, 4, 3, 1, 1, 1, 2, 5, 4, 6, 9, 1, 5, 1, 5, 15,1,11,…]

Unter den Kettenbruchgliedern treten mit steigender Gliednummer auch größere Zahlen auf:
3.Glied = 15 ; 5.Glied = 292 ; 308.Glied = 436 ; 432.Glied = 20776 ; 28422.Glied = 78629 ; 156382.Glied = 179136 ; 267314.Glied = 528210
Im März 2002 ermittelte H.Havermann 180 Millionen Glieder dieser Kettenbruchentwicklung.

Ägyptische Brüche

Die Darstellung gebrochener Zahlen als Summe von Stammbrüchen kann auch auf irrationale Zahlen erweitert werden.
Für die gebrochenen Anteile nachfolgender irrationaler Zahlen erhält man als Nenner der Stammbrüche

π	8, 61, 5020, 128541455, 162924332716605980, 28783052231699298507846309644849796, 871295615653899563300996782209332544845605756266650946342214549769447, …
1/π	4, 15, 609, 845029, 1010073215739, 1300459886313272270974271, 1939680952094609786557359582286462958434022504402, …

Lambertsche Näherungsbrüche für π

Transformiert man die Kettenbruchentwicklung von π (siehe vorhergehende Seite) Schritt für Schritt in einen gemeinen Bruch, so erhält man immer bessere Näherungsbrüche für die Kreiszahl.
Lambert entwickelte so eine Folge π immer genauer darstellender gemeiner Brüche. Zusätzlich gab er noch zwei nicht auf der Kettenbruchentwicklung beruhende Brüche an.

Die Liste enthält für die Näherungsbrüche Zähler, Nenner sowie den absoluten Fehler bzgl. π. Die Lambertsche Liste wurde um neun auf dem Kettenbruch beruhende Brüche erweitert. Der letzte Bruch gibt π auf mindestens 38 Dezimalziffern genau an.
Der Näherungsbruch
428224593349304/136308121570117 = 3,14159265358979323846264338327(569…) liefert 29 korrekte Dezimalstellen und war schon 1766 dem japanischen Mathematiker Arima bekannt.

Zähler	Nenner	Genauigkeit
3	1	-0.1416
22	7	1.26422·10^-3
333	106	-8.3486·10^-5
355	113	2.6676·10^-7
103993	33102	-5.7789·10^-10
104348	33215	3.3163·10^-10
208341	66317	-1.2236·10^-10
312689	99532	2.9143·10^-11
833719	265381	-8.7155·10^-12
1146408	364913	1.6107·10^-12
4272943	1360120	-4.0407·10^-13
5419351	1725033	2.2145·10^-14
80143857	25510582	-5.7909·10^-16
165707065	2746197	1.6408·10^-16
245850922	8256779	-7.8179·10^-17
411557987	31002976	1.9364·10^-17
1068966896	40262731	-3.0701·10^-18
2549491779	11528438	5.5137·10^-19
6167950454	963319607	-7.6266·10^-20
14885392687	738167652	3.1232·10^-20
21053343141	701487259	-2.6164·10^-22
1783366216531	567663097408	1.2277·10^-24
3587785776203	1142027682075	-3.1478·10^-25
5371151992734	1709690779483	1.9738·10^-25
8958937768937	2851718461558	-7.7216·10^-27

336851849443403	107223273857129	-4.4517·10^-27, kein Kettenbruch
1019514486099146	324521540032945	-4.4799·10^-27, kein Kettenbruch
139755218526789	44485467702853	1.6111·10^-28
428224593349304	136308121570117	-3.8054·10^-30
5706674932067741	1816491048114374	2.3328·10^-31
6134899525417045	1952799169684491	-4.8627·10^-32
30246273033735921	9627687726852338	4.5617·10^-33
66627445592888887	21208174623389167	-3.3582·10^-34
430010946591069243	136876735467187340	8.6578·10^-36
2646693125139304345	842468587426513207	-1.4107·10^-38
26245263033538219939 8	8354126689069199483 3	1.0118·10^-40

Näherungsbrüche für π

Für die Kreiszahl π können im besser annähernde Näherungsbrüche p/q auch durch schrittweitses Erhöhen von p und q ermittelt werden.
Die Tabelle enthält für wachsende Zähler p diejenigen Nenner, welche π genauer annähern.

Bruch	Näherung	Fehler
3/1	3,00000000000000000000000000000000000000000000000000000	0,141592653589793238
13/4	3,25000000000000000000000000000000000000000000000000000	0,108407346410206762
16/5	3,20000000000000000000000000000000000000000000000000000	0,058407346410206762
19/6	3,16666666666666666666666666666666666666666666666666667	0,025074013076873428
22/7	3,14285714285714285714285714285714285714285714285714286	0,001264489267349619
179/57	3,14035087719298245614035087719298245614035087719298246	0,001241776396810782
201/64	3,14062500000000000000000000000000000000000000000000000	0,000967653589793238
223/71	3,14084507042253521126760563380281690140845070422535211	0,000747583167258027
245/78	3,14102564102564102564102564102564102564102564102564103	0,000567012564152213
267/85	3,14117647058823529411764705882352941176470588235294118	0,000416183001557944
289/92	3,14130434782608695652173913043478260869565217391304348	0,000288305763706282
311/99	3,14141414141414141414141414141414141414141414141414141	0,000178512175651824
333/106	3,14150943396226415094339622641509433962264150943396226	0,000083219627529088
355/113	3,14159292035398230088495575221238938053097345132743363	0,000000266764189062
52163/16604	3,14159238737653577451216574319441098530474584437484943	0,000000266213257464

Auffällig ist der große Sprung von 355/113 bis 52163/16604.

Mathematische Konstanten

Durch den US-amerikanischen Mathematiker Eric Friedman werden im WWW jeden Monat mathematische Probleme zur Lösung gestellt.
http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/
Im August 2004 sollten aus den ersten natürlichen Zahlen 1 bis n mit den Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzbildung die mathematischen Konstanten π, e und die Feigenbaum-Konstante möglichst gut angenähert werden.

Durch Richard Sabey, Joseph DeVincentis, Jeremy Galvagni, Bill Clagett, Bertrand Winter, Berend Jan van der Zwaag und Gerrit de Blaauw wurden sehr interessante Lösungen angegeben.
Die besten Lösungen für die Kreiszahl sind

Näherung von pi mit Ziffern 1 bis n

n	Ausdruck	Wert	Fehler
1	1	1.	-2.1

2	1+2	3.0	-.14
3	(1/.3)-.2	3.13	-.0082
4	.4^(-(2.1).3)	3.14156	-3.26E-5
5	3+.2/(.4^.1+.5)	3.141598	5.92E-6
6	(4+6/(3^((.2)(.1))))^.5	3.14159263	-1.38E-8
7	3+1/(7+4^(6-5-2))	3.14159269	4.33E-8
8	2^(5^.4)-.6-.1^(38/7)	3.141592654	5.15E-10
9	2^5^.4-.6-(.3^9/7)^(.8^.1)	3.14159265359	6.60E-13

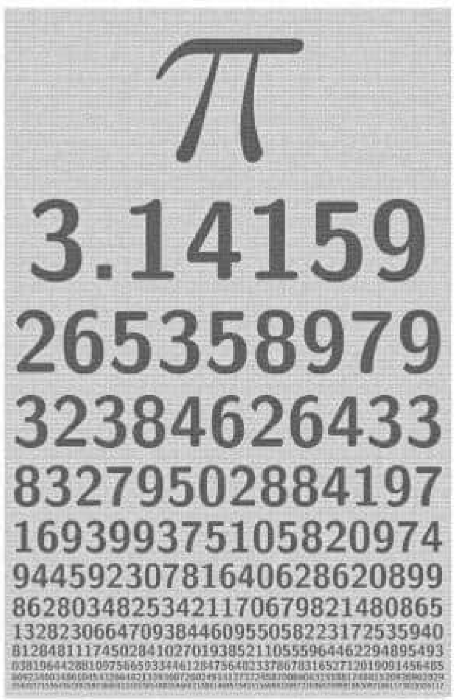
Näherung von pi mit Ziffern 1 bis n, geordnet

n	Ausdruck	Wert	Fehler
1	1	1.	-2.1
2	1+2	3.0	-.14
3	.1^(-.2-.3)	3.16	.020
4	(.1+2^.3)^4	3.13	-.0018
5	(.1/.2^.3^4)^-.5	3.1417	1.39E-4
6	.1^(-2/3)+4.5-6	3.14158	-3.81E-6
7	(1+2^-.3)^.4^(-.5/.6^.7)	3.1415924	-1.88E-7
8	.1^-(2^-((3*(.4-.5^6))^(.7^8)))	3.1415926456	-8.03E-9
9	(1+2/3)*(4-5^(.6/7*8)+.9)	3.141592606	-4.77E-8

π-Folge-Primzahl

Betrachtet man die Ziffernfolge von π, so kann man diese in eine Folge von Primzahlen zerlegen, die PI-Folge-Primzahlen. Die ersten sind

3
14159
2
653
5
89
7
9323
846264338327…303906979207 (3057 Ziffern)
73
467
2218256259…5939500279 (14650 Ziffern)
3389
59
20576682789677644531840404185540104351348389 53
1201
3263783692…?????????? (mindestens 32000 Ziffern)



Dabei ist zu beachten, dass die aus 14650 Ziffern bestehende Zahl nur "wahrscheinlich" eine Primzahl ist, da deren vollständiger Nachweis als prim noch nicht gelungen ist. Die 3057 Ziffern lange Primzahl wurde schon von Euler vermutet.

Weitere Primzahlen sind in der Folge von π versteckt, z.B.: 141592653589 oder 314159 oder 3141592653589793238462643383279502884 1.

π-Primzahl
Unter einer π-Primzahl versteht man die von den Ziffern der Kreiszahl π gebildeten natürlichen Zahlen, die Primzahl sind. Dabei wird stets mit der ersten Ziffer "3" begonnen.

Bekannt sind bis heute (Juli 2006):
3, 31, 314159, 31415926535897932384626433832795028841, …

Die Anzahl der bekannten π-Primzahlziffern sind 1, 2, 6, 38, 16208, 47577, 78073. Die größte dieser Primzahlen wurde am 1.April 2006 und 13.Juli 2006 (Kontrolle) durch E.W. Weisstein gefunden. Bis n < 79718 gibt es keine weitere.

Weitere Primzahlen bezüglich π findet man, wenn man den Term $[\pi^n]$ untersucht, wobei darunter die größte ganze Zahl kleiner gleich π^n verstanden wird.

Für n = 1, 3, 4, 12, 73, 317, 2728, 6826, 7683, 7950, 14417, … ergeben sich die Primzahlen 3, 31, 97, 924269, …

Untersucht man die größte ganze Zahl größer gleich π^n, so erhält man für n = 5, 29, 88, 948, 1071, 1100, 1578, … die primen Zahlen 307, 261424513284461, 56129192858827520816193436882886842322337671, …

Primzahlen in PI

Durch Patrick De Geest wurde das Problem aufgestellt, welche k-stellige Primzahl zuerst in der Ziffernfolge von π auftritt und welche zuletzt.
Zum Beispiel tritt die zweistellige Primzahl 41 schon an Position 2 auf, dagegen die 73, als letzte, erst an Position 299. Durch Felice Russo und vor allem J.C.Colin wurden die "Gewinnerprimzahlen" und "Verliererprimzahlen" mit intensivem Computereinsatz ermittelt.

Länge	Gewinnerprimzahl (Position)	Verliererprimzahl (Position)
1	5 (4)	7 (13)
2	41 (2)	73 (299)
3	653 (7)	373 (5229)
4	4159 (2)	9337 (75961)
5	14159 (1)	35569 (715492)
6	358979 (9)	805289 (11137824)
7	1592653 (3)	9271903 (135224164)
8	28841971 (33)	

Nachfolgende Tabelle enthält die Gewinnerprimzahlen und deren Position bis zu 70-stelligen Primzahlen:

Länge	Position	Gewinnerprimzahl
9	29	795028841
10	4	5926535897
11	14	93238462643
12	1	141592653589
13	5	9265358979323
14	16	23846264338327
15	35	841971693993751
16	81	8628034825342117
17	11	89793238462643383
18	86	348253421170679821
19	25	3832795028841971693
20	11	89793238462643383279
21	24	338327950288419716939
22	214	9334461284756482337867
23	34	88419716939937510582097
24	17	384626433832795028841971
25	16	2384626433832795028841971
26	2	41592653589793238462643383
27	40	169399375105820974944592307
28	16	2384626433832795028841971693

29	233	86783165271201909145648566923
30	16	238462643383279502884197169399
31	166	7019385211055596446229489549303
32	91	34211706798214808651328230664709
33	250	145648566923460348610454326648213
34	14	9323846264338327950288419716939937
35	8	53589793238462643383279502884197169
36	11	897932384626433832795028841971693993
37	30	9502884197169399375105820974944592307
38	2	41592653589793238462643383279502884197
39	56	749445923078164062862089986280348253421
40	289	2602491412737245870066063155881748815209
41	3	15926535897932384626433832795028841971693
42	98	679821480865132823066470938446095505822317
43	217	4461284756482337867831652712019091456485669
44	501	98336733624406566430860213949463952247371907
45	47	751058209749445923078164062862089986280348253
46	163	1027019385211055596446229489549303819644288109
47	197	81964428810975665933446128475648233786783165271
48	200	644288109756659334461284756482337867831652712019
49	127	6095505822317253594081284811174502841027019385211
50	6	26535897932384626433832795028841971693993751058209
51	362	113305305488204665213841469519415116094330572703657
52	142	3594081284811174502841027019385211055596446229489549
53	10	58979323846264338327950288419716939937510582097494459
54	137	317253594081284811174502841027019385211055596446229489
55	486	7938183011949129833673362440656643086021394946395224737
56	31	50288419716939937510582097494459230781640628620899862803
57	229	233786783165271201909145648566923460348610454326648213393
58	81	8628034825342117067982148086513282306647093844609550582231
59	354	25903600113305305488204665213841469519415116094330572703657
60	514	656643086021394946395224737190702179860943702770539217176293
61	333	2829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941
62	185	22948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201
63	175	105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783
64	222	8475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393
65	56	74944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647
66	134	822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819
67	34	8841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679
68	56	74944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093
69	233	867831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737
70	319	1748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469

Fastganze Zahlen

Fastganze Zahlen sind Zahlen, welche relativ nah an einer ganzen Zahl sind.

$e^{\pi} - \pi = 19{,}999099979 \ldots$
$(\pi + 20)^{i} = -0{,}9999999992 - 0{,}0000388927\ i \approx -1$
$\cos\ (\ \ln\ (\ \pi + 20)) \approx -0{,}9999999992$
$\cos\ (\pi \cos(\pi \cos(\ \ln(\pi + 20)))) \approx -1 + 3{,}9321609261 \cdot 10^{-35}$
$e^{6} - \pi^{4} - \pi^{5} = 0{,}000017673 \ldots$
$163\ (\pi - e) = 68{,}999664496311924 \ldots$
$(e^{\pi})^{\sqrt{163}} = 262537412640768743{,}99999999999250 \ldots$

Ramanujan-Zahlen

Ramanujan-Zahlen sind fastganze Zahlen der Form $e^{\pi\sqrt{n}}$
Die fastganze Zahl $e^{\pi\sqrt{163}}$ wurde 1914 von Ramanujan entdeckt, allerdings findet man den Wert schon 1869 bei Charles Hermite. Die drei Werte für n mit 43, 67 und 163 sind die größten Heegner-Zahlen.

n	Zahlenwert
6	2197 , 99 0869543 …
17	422150 , 99 7675680 …
18	614551 , 99 2885619 …
22	2508951 , 99 8257424 …

25	6635623 , 999 341134 …
37	199148647 , 9999 78046551 …
43	884736743 , 999 777466 …
58	24591257751 , 999999 822213 …
67	147197952743 , 99999 8662454 …
74	545518122089 , 999 174678853 …
149	45116546012289599 , 99 1830287 …
163	262537412640768743 , 999999999999 250072 …
177	1418556986635586485 , 99 6179355 …
232	604729957825300084759 , 99999 2171526 …
267	19683091854079461001445 , 99 2737040 …
268	21667237292024856735768 , 0002920388424…
522	14871070263238043663567627879007 ,9998…
652	68925893036109279891085639286943768 , 0000000001637 …
719	3842614373539548891490294377805829192 , 99998724 …

PI im Dualsystem

Die Dezimalzifferfolge von PI kann als p-adischer Bruch in jedem anderen Positionssystem dargestellt werden.
Nachfolgend sind 1750 duale Nachkommastellen der Kreiszahl angegeben. Die linke Abbildung zeigt die ersten dualen Dezimalstellen von π.

00100 10000 11111 10110 10101 00010 00100 00101 10100 01100 00100 01101 00110 00100 11000
11001 10001 01000 10111 00000 00110 11100 00011 10011 01000 10010 10010 00000 10010 01110
00001 00010 00101 00110 01111 10011 00011 10100 00000 01000 00101 11011 11101 01001 10001
11011 00010 01110 01101 10010 00100 10100 01010 01010 00001 00001 11100 11000 11100 01101
00000 00100 11011 10111 10111 11001 01010 00110 01101 10011 11001 10100 11101 00100 00110
00110 11001 10000 00101 01100 00101 00110 11011 11100 10010 11111 00010 10000 11011 10100
11111 11000 01001 10101 01101 10101 10110 10101 00011 10000 10010 00101 11100 10010 00010
11011 01010 11101 10011 00010 01011 11001 11111 01100 01101 11101 00010 01100 01000 01011
10100 11010 01100 01101 11111 01101 01101 01100 00101 11111 11110 10111 00101 10110 11110
10000 00011 01011 01111 11011 01111 01110 00111 00001 10101 11111 10110 10110 10100 01001
10011 11110 10010 11010 11101 00111 11001 00100 00010 00101 11110 00100 10110 00111 11111
00110 01001 00100 10100 00110 01100 10100 01111 01100 11100 10001 01101 10011 11011 10000
10000 00000
01111 10010 11100 01010 00010 11000 11101 11111 00000 10110 01100 01101 10100 10010 00001
10110 00011 10001 01010 11101 00111 00110 10011 01001 00010 11000 11111 11010 10001 11111
01001 00100 11001 11101 01111 11000 00110 11001 01010 11101 00100 01111 01110 01010 00111
01011 01100 10110 00011 10001 10001 01111 00110 10101 10001 00000 10000 10101 01001 01011
10111 00111 10110 10101 00101 00100 00011 10111 00001 00101 10100 10110 01101 10101 10011
10000 11000 01101 01010 01110 01001 01010 11110 01001 10000 00001 00111 10001 01110 10001
10110 00000 10001 10010 10000 11000 00100 00101 11110 00011 00101 00100 00010 11110 01000
11000 10111 00011 01101 10011 10001 11011 11100 01110 01111 00111 01110 01011 00000 11000
00001 11010 00011 00000 00111 00110 11001 00111 10000 01110 10001 01110 11000 00001 11101
00010 10001 11110 11010 11100 01010 10111 01111 10000 01101 11101 00110 00101 00101 10010
01110 11110 00101 01111 00101 11111 01101 00101 01010 11000 00010 11100 01100 00011 10011
00101 01010 01001 …

In der Dualdarstellung von π findet man natürlich die verschiedensten Dualzahlen, zum Beispiel ab Position 3 die Ziffern 1001, d.h. die Zahl 9.
Die letzte auftretende einstellige Zahl ist die 5 ab Position 17, die letzte zweistellige Zahl die 87 ab Stelle 533, die letzte dreistellige Zahl ist die 886 ab Position 8024; die letzte vierstellige Zahl ab der 115500.Position ist die 8778.

Von den ersten 72660 Zahlen findet man als Letzte die 72583 ab der 1523116.Dezimalstelle. Bis 218 sind alle Dualzahlen in den ersten 3,2 Millionen Kommastellen vertreten. Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 8,3 Millionen Dualziffern nicht zu finden ist, ist die 527640.

Zählt man das Auftreten der "0" und "1" in der Dualziffernfolge, so stellt man fest, dass ab Position 27 die Nullen deutlich über 50 % liegen. Die Vermutung, dass dies immer so ist, erweist sich schnell als falsch. Ab der 6374.Stelle schwanken die Anteile bis 9102 ständig um 50 %. Danach überwiegt wieder eine Ziffer bis zur 15162. Stelle und so weiter.
Die Tabelle enthält die wachsenden Dualzahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	3	2	3	3	11	5	16
10	19	12	47	19	60	23	91
28	93	32	95	37	126	39	144
43	393	75	421	87	532	143	814
206	867	259	2453	366	3044	477	3269
565	5779	690	6006	886	8023	1081	17047
1130	17213	2087	23391	2130	26292	2261	27397

2348	35838	4155	42155	4326	53097	4347	54481
4610	57276	6064	71895	8297	86538	8350	100612
8735	109074	8778	115499	10540	160104	16945	184334
17178	195794	17329	235365	18884	237524	19137	258465
21347	301568	24802	315359	27392	345065	32772	466395
33220	570298	37298	692908	46117	755173	65659	756820
65793	830958	67214	873806	68368	1021819	70526	1064855
72583	1523115	131846	1761465	132977	2270153	134155	2346154
136132	2388109	140839	2812645	190368	2977872	201620	3116951
262169	3148986	263400	3685301	264414	3795930	264707	4352711
273819	5756924	295518	5878485	313221	7600330	524822	7815025

Die Dezimalzifferfolge von PI kann als p-adischer Bruch in jedem anderen Positionssystem dargestellt werden. Nachfolgend sind die ersten Nachkommastellen der Kreiszahl im Vierersystem angegeben.

3.
0210033312222020201122030020310301030121202202320003130013031010221000210320020202212 13
303013100002002323322212032301032123020211011022002013212032031000103131323321110121230
330310322100301230300022300221231330211330110031310333201031112311231110130021011321020
112311131212021132133230123310103010023221221203133231122300233333113023123310001223133
231323203201223332311222021213322112232213302100101133010230133321210210220121211013230
321011230331300200001330232022011203233300112120312210200312013011113103212212210112033
322203331021030331133200312111131020331302203223121120130120233031112020020111102232321
323111022100131300211221121231121300300311103210222330212000103301131012300020302201200
201133003022100113210120232031230320323320321321313023001200032201200032123021320032202
323000132202203323113011113133001233103011023021313202233023331221111120011301200321211
110211330322221111222321101113102021201202120332200110100011113022032112220222222301002
312231030301130031001011001322030322201111020122233133013023221210323033232011001011203
123323300222022322213011113113100120030133123032113003320112212320132103013222333112232
203031230021030331130132203021103200102202111201213130323203310202120122310232321223330
102333322001231212022002012103120131200021303033230201222121011020133022301200113132302
000030232332010113111313221201113112301313002120203000232231211012320200203202103322001
310321122230301100331231123333032003331010020321023200231010200022210201002000010122130 2
033001022213201332123113202013012122010023312322112302122121300302130120122233103202033
001222110122003102312011100233122021120033221302202223110103032203123232330023123001031
322032332102322032333001100133233230222120220133011211013103212233000113121212302211 21
033220021003003220202030323220120121101112332133231013312010221130030323202311322332320
012331311312020113001020013031000012210102133111230011222221210323103222212020312033313
130012012333323133130210022123000203310313310031130210310000220102102031230033322231031
021330130002123001311031302302120002121012313230211311013213120331232203132331332033332
110001222312132110300323211312303200233100103000001223223001222110332312100021331200301
011321130213230020121122202101203122033231233223303321230110323110103032123023223032311
023230123312313330110101332123030021110230303020011011101022331132233100212332320331000
010313203031022333112120033022000130121023210232303300030232220111310113020131000333102
0023113303212321310333233123111113213000233101221200030200223112220100003012100002 3 …

PI im Hexadezimalsystem

Nachfolgend sind die ersten hexadezimalen Nachkommastellen der Kreiszahl dargestellt.

243F6A8885A308D313198A2E03707344A4093822299F31D0082EFA98EC4E6C89452821E638D01377BE5466
CF34E90C6CC0AC29B7C97C50DD3F84D5B5B54709179216D5D98979FB1BD1310BA698DFB5AC2FFD72DBD
01ADFB7B8E1AFED6A267E96BA7C9045F12C7F9924A19947B3916CF70801F2E2858EFC16636920D871574E6
9A458FEA3F4933D7E0D95748F728EB658718BCD5882154AEE7B54A41DC25A59B59C30D5392AF26013C5D1
B023286085F0CA417918B8DB38EF8E79DCB0603A180E6C9E0E8BB01E8A3ED71577C1BD314B2778AF2FDA5
5605C60E65525F3AA55AB945748986263E8144055CA396A2AAB10B6B4CC5C341141E8CEA15486AF7C72E9
93B3EE1411636FBC2A2BA9C55D741831F6CE5C3E169B87931EAFD6BA336C24CF5C7A325381289586773B8
F48986B4BB9AFC4BFE81B6628219361D809CCFB21A991487CAC605DEC8032EF845D5DE98575B1DC262302

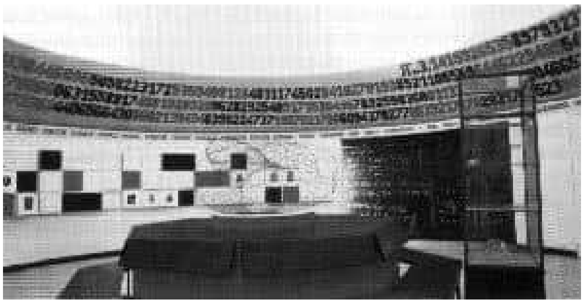
EB651B8823893E81D396ACC50F6D6FF383F442392E0B4482A484200469C8F04A9E1F9B5E21C66842F6E96C
9A670C9C61ABD388F06A51A0D2D8542F68960FA728AB5133A36EEF0B6C137A3BE4BA3BF0507EFB2A98A1F
1651D39AF017666CA593E82430E888CEE8619456F9FB47D84A5C33B8B5EBEE06F75D88…

Auch in der Hexadezimaldarstellung von π findet man die verschiedensten Hexadezimalzahlen. Die erste natürliche Zahl, die unter den ersten 1 Millionen Hexadezimalziffern nicht zu finden ist, ist die 65536 = $[F0000]_{16}$. (Juni 2006) Die Tabelle enthält die wachsenden Hexadezimalzahlen, die in in den Kommastellen der Kreiszahl an einer späteren Stelle auftreten.

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	17	7	27	11	81	16	148
17	489	28	754	53	1446	257	3272
258	10067	268	16595	302	18944	313	27175
717	27520	771	29268	3686	31814	4096	40780
4097	44881	4098	54370	4099	78911	4100	80931
4102	102954	4106	134883	4110	207731	4141	287213
4251	293824	4553	331234	4692	336110	4735	337543
4883	373557	5035	395890	5168	421107	5371	558461
9058	672793	10032	874018				

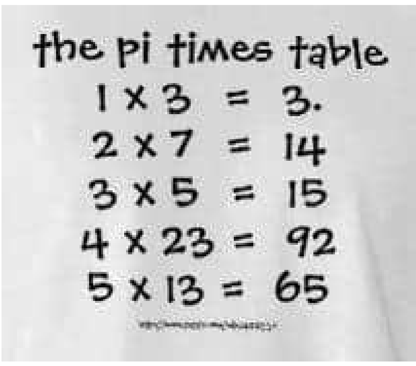
Normalität von PI

Eine sehr wichtige mathematische Frage bezüglich π ist, ob sie eine normale Zahl ist, d.h. ob sie zum Beispiel in einer binären oder jeder anderen n-ären Zahlendarstellung jede mögliche Binär- bzw. sonstige Zifferngruppe gleichermaßen enthält; so wie dies die Statistik erwarten ließe, wenn man eine Zahl vollkommen nach dem Zufall erzeugen würde.
Dies würde bedeuten, dass die Kreiszahl alle bisher und zukünftig geschriebenen Bücher irgendwo in codierter Binär-Form enthalten muss.
Bailey und Crandal zeigten im Jahr 2000, dass die Existenz der Bailey-Borwein-Plouffe-Formel und ähnlicher Gleichungen belegt, dass die Normalität von π zur Basis 2 auf eine bestehende Vermutung der Chaostheorie reduziert werden kann.



Physiker der Purdue Universität haben im Jahre 2005 die ersten 100 Millionen Dezimalstellen von π auf ihre Zufälligkeit hin untersucht und mit kommerziellen Zufallszahlengeneratoren verglichen. Der Forscher Ephraim Fischbach und sein Mitarbeiter Shu-Ju Tu konnten dabei keinerlei verborgene Muster in der Zahl π entdecken. Demnach sei nach Ansicht Fischbachs die Zahl π tatsächlich eine gute Quelle für Zufälligkeit. Mittlerweile wurde die Suche auf mehrere Milliarden Dezimalstellen erweitert.

Abbildung: Der PI-Saal im "Palais der Entdeckungen" in Paris

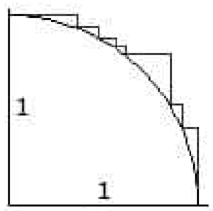


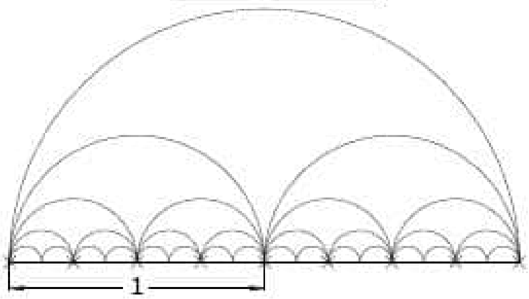
Notwendigkeit der Genauigkeit von PI

Durch verschiedene Mathematiker und Computerfachleute wird π auf immer mehr Dezimalstellen berechnet.
Neben der Notwendigkeit des Testens neuer Computersysteme, der Entwicklung leistungsfähigerer Algorithmen, des Studiums der Eigenschaften von π ("Normalität") reizt natürlich auch ein neuer Weltrekord in den berechneten Stellen.
Für die Elementarmathematik ist dies ohne Bedeutung. Die Tabelle enthält für einige Genauigkeiten von π den Fehler, der bei der Berechnung eines Kreisumfangs auftreten würde:

Genauigkeit	Objekt	Radius	Umfang	Berechnungsfehler
5 Dezimalstellen	Stadion	100 m	$6 \cdot 10^{5}$ mm	6 mm
10 Dezimalstellen	Erde	6378 km	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ mm	3,7 mm
20 Dezimalstellen	Milchstraße	10^{16} m	$3{,}1 \cdot 10^{19}$ mm	31 mm
30 Dezimalstellen	Sichtbares Universum	$15 \cdot 10^{9}$ Lichtjahre	$0{,}44 \cdot 10^{30}$ mm	0,44 mm

Mit 39 Dezimalstellen Rechengenauigkeit würde sich der Berechnungsfehler durch die "Ungenauigkeit" von π für den (theoretischen) Umfang des sichtbaren Weltalls auf den Radius eines Wasserstoffatoms reduzieren.





PI-"Paradoxon"

Betrachtet wird ein Viertelkreis mit dem Radius 1. Dessen Umfang wird mit einer "Außentreppe" angenähert. Da sowohl horizontal als auch vertikal genau die Länge 1 zurückgelegt wird, hat diese Außentreppe die Länge 2.
Verfeinert man nun die einzelnen Teilstrecken, so bleibt die Gesamtlänge gleich 2. Mit zunehmender Verfeinerung nähert sich die Außentreppe immer mehr dem Viertelkreis an.
Das bedeutet, dass im "Grenzwert" die Außentreppe die gleiche Länge wie der Viertelkreis hat. Daraus ergibt sich aber

$2\pi r / 4 = \pi/2 = 2$ und somit $\pi = 4$!

Dieses scheinbare Paradoxon ergibt sich daraus, dass im Grenzfall unendlich viele Teilstrecken der Länge "0" zu multiplizieren sind, d.h. "$\infty \cdot 0$". Dieser Ausdruck ist unbestimmt und somit keine Näherung des Viertelkreises.

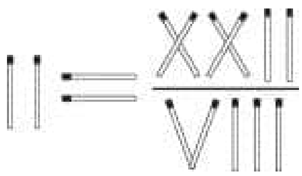
In der unteren Darstellung wird auf ähnliche Weise "nachgewiesen", dass $\pi = 2$ ist.
Für die immer kleiner werdenden Halbkreise gilt:

$U_1 = \pi$
$2\ U_2 = \pi$
$4\ U_4 = \pi$
$8\ U_8 = \pi$

usw. Bei immer feinerer Unterteilung wird durch die Summe der Halbkreise der Durchmesser approximiert.
Also "gilt"

$\pi = 2$

d.h., Umfang des Halbkreises und der Durchmesser des Kreises sind gleich groß!



PI-Rätsel

Eine immer wieder erwähnte Aufgabe ist es, durch das Umlegen eines einzelnen Hölzchens aus der nebenstehenden Aufgabe eine näherungsweise richtige Aussage zu machen. (siehe Abbildung)
Die Lösung besteht darin, von der römischen VIII im Nenner ein Streichholz wegzunehmen und dies über die II links zu legen, so dass ein π entsteht. Damit gilt dann $\pi \approx 22/7$.

π in zahlentheoretischen Sätzen

Außer der Tatsache, dass π im Zusammenhang mit der Kreisberechnung immer wieder auftaucht, findet man π auch in einer Vielzahl interessanter mathematischer Sätze und Zusammenhänge. Eine kleine Auswahl:

Gaußsche Funktion r(n)
Beschreibt r(n) die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl n in zwei Quadrate, so gilt

$\lim_{n\to\infty} (r(1)+r(2)+\ldots+r(n)/n = \pi$

Ist $\sigma(n)$ die Anzahl der Teiler einer ganzen Zahl n, so gilt

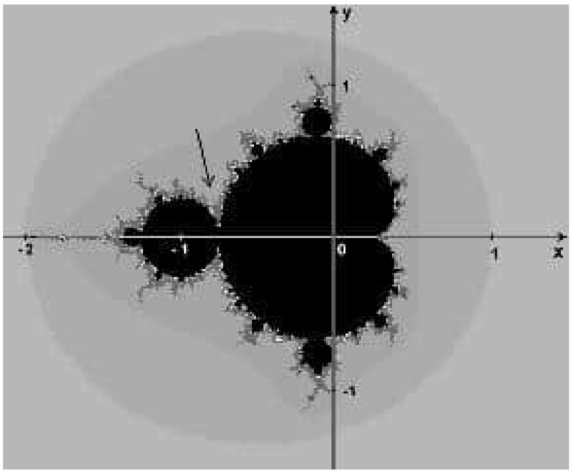
$\lim_{n\to\infty} (\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)/n^2 = \pi^2/12$

Möbiussche µ-Funktion µ(n)
für die Summenbildungen von n = 1 bis ∞ wird dann

$\Sigma\, \mu(n)/n^s = 1/\zeta(s) \rightarrow \Sigma\, \mu(n)/n^2 = 6/\pi^2$ und $\Sigma\, \mu(n)/n^4 = 90/\pi^4$

Eulersche ϕ-Funktion

$\lim_{n\to\infty} (\phi(1)+\phi(2)+\ldots+\phi(n)/n^2 = 3/\pi^2$



PI und die Mandelbrotmenge

1991 wurde durch David Bolle nachgewiesen, dass man selbst an der Mandelbrotmenge π findet. Dies ist äußerst überraschend!
Für die Mandelbrotmenge wird für jeden Punkt C der komplexen Zahlenebene die Iteration $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$, $Z_0 = 0$ berechnet. Überschreitet der Betrag $|Z_n|$ den Wert 2, so divergiert die Iteration. Alle Punkte C, für die keine Divergenz vorliegt, bilden die eigentliche Mandelbrotmenge.

Bolle betrachtet nun Punkte der Form C = (-0,75, X) und konnte zeigen, dass diese stets zur Divergenz führen. Das verblüffende ist nun, dass die Anzahl n der Iterationsschritte bis $|Z_n| \geq 2$ von X abhängt und für $X \rightarrow 0$: $X \cdot n \rightarrow \pi$ gilt.

Konkret ergibt sich:

X	Anzahl Iterationen	X	Anzahl Iterationen
1,0	3	0,1	33
0,01	315	0,001	3143
0,0001	31417	0,00001	314160
0,000001	3141593	0,0000001	31415928

Ein ähnliches Ergebnis erhielt Gerald Edgar 1992. Für die komplexen Punkte C = (0,25 + X, 0) konvergiert mit $X \rightarrow 0$ in diesem Fall $n \sqrt{X} \rightarrow \pi$. Für X = 0,0000000001 sind hier zum Beispiel 314157 Schritte bis zum Überschreiten der 2 nötig.
Übrigens gehört zu dem Punkt C = (-0,75, X) die Julia-Menge, die auch San Marco-Menge genannt wird.

Die Begründung für diese merkwürdige Eigenschaft an der Mandelbrot-Menge ist nicht trivial.
Betrachtet man das Ergebnis von Edgar, wird $Z_{n+1} = Z_n^2 + ¼ + X$. Mit der Substitution $Z_n = Y_n + ½$ wird $Y_{n+1} + ½ = (Y_n + ½)^2 + ¼ + X$. Damit kann die Interation auf

$Y_{n+1} = Y_n^2 + Y_n + X$, $Y_0 = -1/2$

umgeschrieben werden. Die Iteration divergiert nur wenn Y_n die Null überschreitet. Ersetzt man nun $Y_{n+1} - Y_n$ durch die erste Ableitung Y_n' wird

$Y_n' = Y_n^2 + X$.

Diese Differenzialgleichung hat die allgemeine Lösung

$Y_n = a \tan(a\, n + b)$ mit $a = \sqrt{X}$

Y_n überschreitet nun genau dann zum ersten Mal die Null; die Iteration divergiert; wenn der Tangens vom Negativen zum Positiven wechselt.
Entweder ist b = 0 oder a n nähert sich π: $\sqrt{X} \cdot n \approx p$.
Für Punkt C = (-0,75, X) ergibt sich mit erheblich mehr Aufwand die Differenzialgleichung

$dY_n/dX = Y_n^4 - 2\, Y_n^3 + 2i\, X\, Y_n^2 - 2i\, X\, Y_{n - X^2.}$

Das nur mit großer Anstrengung zu lösende Integral liefert dann die Konvergenz von n X gegen die Kreiszahl.

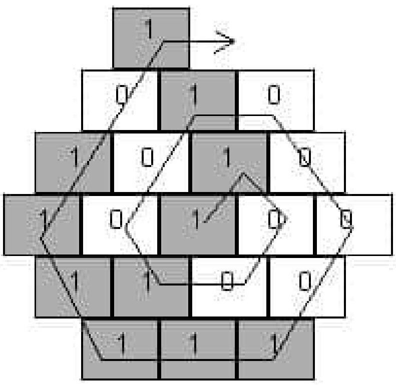
PI-Gedächtnisrekorde

Etwas merkwürdig ist ein weltweiter Wettkampf, bei dem aus dem Gedächtnis heraus, ohne jegliche Hilfsmittel, die Dezimalzifferfolge von π aufgesagt werden soll.
Am 2.Juli 2005 stellte der Japaner Akira Haraguchi den aktuellen Rekord auf. Aus dem Gedächtnis gab er 83431 (!) Dezimalstellen von π in der richtigen Reihenfolge exakt an.

Aktuelle Rangliste

Platz	Name	Land	Stellen von π	Datum
1	Haraguchi, Akira	Japan	83431	2.Juli 2005
2	Lu, Chao	VR China	67890	20.November 2005
3	Goto, Hiroyuki	Japan	42195	18.Februar 1995
4	Tomoyori, Hideaki	Japan	40000	10.März 1987
5	Mahadevan, Rajan	Indien	31811	5.Juli 1981
6	Thomas, David	Großbritannien	22500	1.Mai 1998
7	Carvello, Creigthon	Großbritannien	20013	27.Juni 1980
8	Fiore, David	USA	10625	1.April 1979
9	Bergsten, Mats	Schweden	8050	27.September 1991
10	McLincha, Riley	USA	7500	10.Oktober 1978
11	Duch, Mike	Deutschland	5555	28.September 2004
12	Poultney, Michael John	Großbritannien	5050	22.März 1977
13	Plouffe, Simon	Kanada	4096	4.Dezember 1975
14	Gould, Dean	Großbritannien	3000	1.Februar 1999
15	Koningsveld, Jan van	Deutschland	2770	6.März 1999

Der aktuelle Rekord im π-Vorlesen liegt bei 108000 Nachkommastellen in 30 Stunden. Der Weltrekordversuch begann am 3.Juni 2005 um 18:00 Uhr und wurde am 05.Juni 2005 pünktlich um 0:00 Uhr erfolgreich beendet.



Über 360 freiwillige Leser lasen jeweils 300 Nachkommastellen. Aufgestellt und organisiert wurde der Weltrekord von Lisa Grieb und Svenja Häuser vom Mathematikum in Gießen.

Jan van Koningsveld hält den gegenwärtigen (2006) Weltrekord des Multiplizierens zweier achtstelliger Zahlen im Kopf in nur 38,1 Sekunden. Andere Rekorde hat er an Gert Mittring verloren: Merken von 22 Dezimalziffern in 4 Sekunden sowie von 30 Binärziffern in 3 Sekunden, Ziehen der Quadratwurzel aus einer sechstelligen Zahl in 44,7 Sekunden, Ziehen der 13.Wurzel aus einer 100-steligen Zahl in 39,0 Sekunden.

Lady Pi

1998 ordneten Richard Lawrence und Schuyler Falls die Ziffernfolge von im Dualsystem spiralförmig an, in dem sie für jede 1 einen Punkt setzten, für jede 0 ein leeres Feld. Nach 50 vollen Spiralwindungen wurden nun bestimmte Bereiche farbig markiert. Mit etwas Fantasie erkennt man nun in der Figur eine Person.
Diese wurde "Lady Pi" getauft.
Die Fragen sind nun: Wie kommt man auf so eine Idee? Wieviel Vorstellungskraft braucht man, um in dem Muster wirklich etwas zu "sehen"?

π **PI-Code**

Die Kreiszahl π übt seit Jahrhunderten einen besonderen Reiz auf Mathematiker und Hobbyforscher aus. Auch Schriftsteller griffen die Zahl auf und suchten nach Besonderheiten. Zwei Science-Fiction-Autoren vermuteten in der Dezimalziffernfolge von PI sogar eine Botschaft eines höheren Wesens.

Diese Werke sind von Martin Gardner ("Doctor Matrix") und dem berühmten Wissenschaftler Carl Sagan ("Contact"). Letzterer entfernte diesen Abschnitt aber selbst aus dem Drehbuch des Films "Contact". Wahrscheinlich war es ihm doch zu fiktiv. In "Doctor Matrix" beinhaltet die Dezimalfolge von π die ganze(!) Geschichte der Menschheit.

Idee des PI-Codes

Dazu werden die Dezimalziffern von PI aus dem Dezimalsystem in das 26ziger-System transformiert. Die 26 Ziffern werden nach dem Schema 0 = A, 1 = B, 2 = C … kodiert. Im Ergebnis entsteht eine Folge von Buchstaben von A bis Z, die Ziffernfolge der Kreiszahl π im 26ziger-System.
In dieser Zeichenfolge kann nun nach sinnvollen deutschen Wörtern gesucht werden. So tritt zum Beispiel an der Stelle 84871 das Wort KUGEL auf. Das erste deutsche sechsbuchstabige Wort ist an der 97453.Stelle ZIRKEL. Für Zahlenmystiker dürfte dies nicht verblüffend sein, denn irgendwie hat ein Zirkel doch etwas mit einem Kreis und somit mit PI zu tun.

Wörter mit mehr als 5 Buchstaben treten sehr selten auf. Dies ist auch nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass 26 verschiedene Zeichen in der Ziffernfolge auftreten und somit für sechsbuchstabige Wörter $26^6 =$ 308 Millionen 915 Tausend 776 Möglichkeiten existieren. Um ein bestimmtes Wort mit sechs Buchstaben mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % zu finden, würden Sie 300 Millionen Ziffern benötigen. Durch Mike Keith wurde intensiv nach englischen Wörtern gesucht. Bis heute konnte er noch kein Wort mit mehr als 8 Buchstaben finden.

PI im 26er-System

Die ersten Ziffern des Kreiszahl π im Positionssystem zur Basis 26 sind:

DRSQLOLYRTRODNLHNQTGKUDQGTUIRXNEQBCKBSZIVQQVGDMELMUEXROIQIYALVUZVEBMIJPQQXLKPLRNC
FWJPBYMGGOHJMMQISMSSCIEKHVDUTCXTJPSBWHUFOMQJAOSYGPOWUPYMLIFSFIIZRODPLYXPEDOSXMFQT
QHMFXFPVZEZRKFCWKXHTHUHCPLEMLNUDTMSPWBBJFGSJHNCOXZNDGHKVOZRNKWBDMFUAYJFOZXYDKAY
MNQUWLYKAPLYBIZUYBROUJZNDDJMOJYOZSCKSWPKPADYLPCTLJDILKUUWKQKWJKTZMELGCOHRBRJENRQV
HJTHDLEEJVIFAFQICQSMTJFPPZXZOHYQLWEDFDQJRNUHRLMCNKWQJPAMVNOTGVYJQNZMUCUMYVNDBPGM
ZVAMLUFBRZAPMUKTSKBUPFAVLSWTWMAETMVEDCIUJTXMKNVXKDTFGFHQBANKORNPFBGNCDUKWZPKLTO
BEMOCOJGGXYBVOAETMHCTTMAJDXAUWWPYVMUFSUDJVOCMAHMIIHNCLYWNPIOJEGQWZMWRUYQEWJYVB
UHOOWAMCTUXRIIIRVSLLTAVUTWBGXMEGGFJWQMSVNXIPEAZLBDLNHSXZEDQQDOLAPEZHKWMOAERLSUJ
XVVHKRFKFEZPCHLMPDWRVEROCKWHPQFDOWOYVJWPXUOGYHTIDUARQZHEQQVONLMVZSNOPAXNLEKFNE
WFCEUJLEXVEDMNMHUYOXFANUJCFMVSYNWTUHPWLQQGNVRBOCJHXEIVLOYXXYWVASZHPSEPNLWEZGSOW
PEWWVSVYTTTXLSWCWCEHEHCWDFMXNMMHQSUVYIYWJLGHIJCLHYZTSBKPLHKQNCDVRWRSIBKSAOITVTA
XNDYKNHMMRPVIJYJLXNHQTUZQQCTCKDLDWBRBQZMVGVHUBZEFKHSLDIMFLRPADNTJBCCDUILOIKJMQFBV
FDEQOEOSNXRFDMLOPCSREJFTGRQEBPPYLUIYSLBBOFNYZQYNRMZZTEHDYUQYRNZXISKCDDTBTLWGXYHMS
AFBLBTXNIROQMKUKUTVEPNQXNVZZWTYMZFCPVSRYGCYGSVQUFSBDARUUWJIQWOIYIJDGWUAQLWJSQWH
IIZOAHUSDLCMFUULIKUQPHWRUULEMPCVODPCWYZRDJIZIMZUZDFJZAALJSJRVDOWHMCJDRMKVSNHGGMS
DBFCLNCQHHTDANRGGQLCGTIHKFQHXZDGMDSLPOXSIWMDGSPFCYYLRELELLGNZQKQISJHHUZIEVWUZVLY
MXHDOPCILFRLEBVJYRORHHHKGWZASSWDBDRMLRXPDFQQCKKOIQTSZOSNYXRSINQJHUXNARTIDKCFARCK
CPAAQACFSPJXOPAGKURRSZBKQJODMATYJNACETVWYLZCWGMJWMEUGSTLBDKPXMWNXILHEHTFFNNVYMFO
FJTQR…

PI-Code-Tabelle

Stellt man die Dezimalzifferfolge von PI im 26er-System dar, so kann man nach dem Auftreten bestimmter Buchstabenfolgen suchen, die ein deutsches Wort darstellen.
Zählt man z.B. das an Stelle 11582 auftretende sechsbuchstabige (nicht echt deutsche) OXYGEN nicht, so ist das erste deutsche Wort mit 6 Buchstaben ZIRKEL. Was werden dazu wohl Zahlenmystiker sagen?

Ein siebenbuchstabiges Wort konnte noch nicht gefunden werden. Aber ab der 458064.Stelle folgt NROHPLA; und umgekehrt heißt dies ALPHORN.
Nachfolgend sind solche drei- bis sechsbuchstabigen Worte mit ihrem erstmaligen Auftreten aufgelistet.

6-buchstabige Wörter

OXYGEN (11582), ZIRKEL (97453), KANTOR (181844), DAMALS (301352), ZEIGEN (590032), GLASUR (867593), FALLIT (883268), SOFERN (964188)

5-buchstabige Wörter

SCHAH (18370), IMMER (44910), OSTEN (50050), HAFEN (62465), KUGEL (84871), EMPOR (205819), SERIE (220708), GRAMM (223505), WARZE (249934), STUTE (257233), RUDER (271474), LACHE (280668), HAGEL (283042), RUSSE (283738), MASKE (287072), TITAN (293164), PUNKT (295319), GEIGE (296017), MINZE (317557), ARITE (327091), ZIEGE (328208), SEIFE (330645), DEGEN (342871), KAMEL (345632), SITTE (348668), APFEL (392806), SORGE (405210), UNTEN (431880), ALTER (443293), WOLKE (444702), ENKEL (477099), REELL (499015), FLUCH (509788), WUCHS (519390), TAUEN (558020), EKZEM (563456), ROVER (572287), KOREA (582932), PETER (584046), EIGEN (590033), STEIL (590579), ORGAN (623209), BRETT (625278), IRREN (625752), STEIN (630776), DEMUT (648857), AKTIV (662574), WUNDE (666845), SONNE (669134), BRAUN (671292), MOTTE (674885), ORGIE (677548), ZENIT (705942), JENES (710074), RINDE (711098), HEBEL (752764), BLIND (761015), HAGER (768145), WOLLE (773062), IDEAL (812399), MESSE (840137), BUCHE (857041), HANKE (858003), WESEN (885925), FRONT (900138), LAMPE (931550), STATT (975134), HONIG (985049)

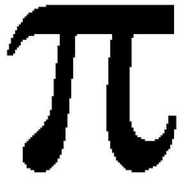
4-buchstabige Wörter

BANK (459), KORN (462), ROCK (661), RUHR (1852), FROH (2057), VISA (2079), ZOFE (3042), SOHN (3417), HOLD (4106), JOCH (4289), ESSE (4537), HELL (5458), GECK (6433), ECKE (6434), MUND (8478), HERD (9885), ZOLL (10622), PULS (11639), RANG (13158), MAUS (13459), NEUN (16229), HARM (16428), KORK (18348), FORT (20020), PUFF (20995), KAMM (21813), FRAU (22658), REIM (22842), BAHN (23104), BAND (24280), KAUM (24475), KOPF (25905), WACH (26437), VERB (27049), TAJO (27347), FACH (27442), GALA (28660), ZAUN (29679), LENA (29973), WOGE (31229), FORM (34303), LIGA (36042), WAHL (36138), KULM (43199), HALS (43475), ZEIT (44864), ADAM (45797), WABE (49389), TUBE (49757), ENTE (49915), PLAN (49935), PFUI (50106), EURO (50853), GERN (51084), BACH (53428), AVIS (53885), MEHR (54847), LAIE (55050), TANZ (55894), POET (57494), SAME (57974), EPOS (59888), KODE (60812), ESTE (61359), EMIR (61591), AUGE (62047), GRAD (62166), LIEB (63159), VIEL (63370), ANNE (63876), SINN (65381), FIRM (66095), NAHE (66522), HEER (67367), WURM (70456), EBER (70536), STAB (71034), LENZ (71222), VASE (71792), KIEL (71842), THOR (72304), HERZ (72723), ZAHN (72877), HIRN (73159), PEST (74676), REIF (77159), JAHR (77851), QUER (80074), EGGE (80322), DUMM (80404), GIRO (80976), ZINN (81464), ROHR (82493), RAND (83077), WORT (83440), ZAHL (84311), KINO (85217), MATT (86721), DREI (87299), ZELT (87638), KALB (88202), PEIN (89038), EINE (89039), SALZ (89476), IDEE (89891), HUPE (90722), FLUT (91130), BERG (91350), ECHO (92295), WARE (92437), ZAHM (92573), SPUK (95881), PISA (96058), WEIT (97394), DANK (97840), NEON (99996), DAME (100049), VENE (101754), PELZ (104714), GURT (104789), GOTT (105227), USUS (106350), LAND (107149), TIER (107246), LAMA (110919), BROM (112202), KLUG (116552), ETWA (116930), HUND (116948), BROT (117375), PULT (118258), PILZ (120262), WAHN (120408), ALPE (121555), WILD (121765),
GAST (124425), KURS (126646), HELM (127251), HART (128341), REDE (129467), RUHE (129486), HEFT (132127), BUDE (136291), MOHN (136373), TREU (136740), HOLZ (138670), HAFT (139449), PLUS (140690), FAUL (140876), ESSO (141260), NERV (141718), REIN (142688), KINN (143201), HASE (143348), RING (143436), ABER (144153), GENF (145366), HEIL (145777), BAST (148596), ENDE (151205), TARA (151384), TEIG (154537), GUTE (154858), HABE (158014), CHOR (158478), TRIO (159199), FAHL (160192), REAL (160840), HEMD (161654), SAND (162941), BALG (163244), VERS (163560), LUFT (163615), HIER (165766), FAST (167230), GANG (167324), ALGE (167571), EPIK (170606), ACHT (172000), HEHR (173388), TOPF (173682), EXIL (174286), INES (175373), SAUM (176633), WALD (177585), SATT (178125), REST (179481), GABE (181028), LEIB (182890), DOCH (183953), FARN (186400), WERK (188010), NABE (188196), BANN (192213), HAND (193716), POST (194858), BEIL (195105), OPER (195316),
KALK (197126), OBOE (199033), ZIEL (199282), ...

3-buchstabige Wörter

HUF (119), OHR (312), UHR (365), NOT (380), IHN (531), VON (697), EHE (814), AAL (1169), ART (1344), JOD (1381), NEU (1526), NIE (1700), TAU (1775), AUE (1776), ROH (2058), MAN (2121), WEH (2165), WEG (2170), DAS (2348), ARG (2433), KGV (2458), BUG (2704), KUH (2836), SEE (2930), RAD (3056), ORT (3154), GON (3167), NUR (3622), AUS (3785), BAI (3993), FEE (4010), SEX (4078), POL (4165), UND (4254), HUT (4292), ZUG (4736), TOD (4757), BIS (4783), GUT (5386), EIN (5674), LOS (5764), TUN (5853), MAI (6455), TEE (6571), ELF (6573), WAS (6661), GIN (7878), OHM (7958), DIE (8041), VOR (8343), AKT (8545), BOA (8960), REH (9004), MAL (9116), ROT (9481), BAU (9575), WUT (9648), LKW (9771), BON (10029), MIT (10065), UNS (10832), RUF (10914), ICH (11349), BUS (11808), IHM (11891), TON (12704), KAI (13104), IHR (13156), GGT (13787), RAT (13821), IRE (15108), TAG (15413), MUS (15594), TAT (15779), ARM (16429), BAR (16582), TOR (16886), PRO (17205), PIA (17649), OFT (18735), IST (20015), ENG (20142), USW (20759), ALT (21219), ROM (21266), EKG (21630), HIT (21835), IDA (22273), KOT (22763), AST (22813), AHN (23105), NUN (23663), ABT (24296), WIR (24435), ERZ (25138), RUM (25211), ZAR (25619), ACH (26438), SIE (26449), MUT (27075), GAU (27843), DER (29863), LOB (30569), BAD (31765), HAI (32322), BEI (33156), ODE (33694), ALS (34434), FIX (34528), BIT (36948), HOF (38006), UHU (38824), PIK (39886), TOT (41338), REN (43942), HEU (44259),
EIS (47659), ABC (52331), WAL (52344), BOR (55688), AUF (56098), GAR (56788), ALM (58874), TAL (59383), AMT (60363), DOM (67501), JUX (76575), EID (76786), UTE (79811), AXT (106566)

PI-Code



Berücksichtigt man die Anzahl der vorhandenen 3-, 4-, 5-, … buchstabigen, sinnvollen, Wörter; zum Beispiel etwa 5500 vierbuchstabige; so ist ein n-buchstabiges Wort aller z Ziffern zu erwarten:

n	z	n	z	n	z
2	4	3	13	4	81
5	1000	6	14800	7	272000
8	5,7 Millionen	9	140 Millionen	10	3,900 Milliarden

Nach dieser Rechnung wären unter den ersten 3 Millionen 26er-Ziffern etwa 4 siebenbuchstabige Wörter zu finden. Bisher konnten aber keine deutschen ermittelt werden.
Durch Mike Keith und Hans Haverman wurde intensiv nach englischen Wörtern gesucht. Ein 8buchstabiges englisches Wort ARMAGNAC wurde ab Stelle 3095146 nachgewiesen. Bis heute konnte noch kein Wort mit mehr als 8 Buchstaben gefunden werden.

Die ersten natürlichen Zahlen können auch als Wort in der Dezimalfolge gefunden werden:
NULL (Position 557009), EINS (271247), ZWEI (352991), DREI (87299), VIER (1312280), ACHT (172000), NEUN (16229), ZEHN (467076), ELF (6573). Die FUENF, SECHS, SIEBEN und ZWOELF sind unter den ersten 3 Millionen Ziffern nicht zu finden.

Anmerkung: Wenn die Kreiszahl eine normale, irrationale Zahl ist, so müssen alle möglichen Buchstabenkombinationen irgendwann einmal in der Ziffernfolge auftauchen. Auch wenn es kaum vorstellbar ist, so muss man ab einer noch so fernen Stelle auch den hier abgedruckten Text finden, ebenso jedes irgendwann einmal von einem Menschen geschriebene Buch und alle die in Zukunft noch geschrieben werden! D.h., π enthält das ganze schon erworbene und jemals erwerbbare Wissen! Unvorstellbar!

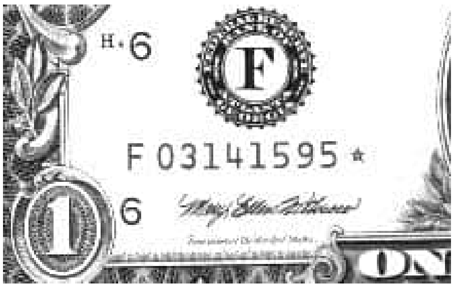
Außer der Suche nach Wörtern ist auch die Suche nach dem Auftreten der natürlichen Zahlen in der 26ziger Darstellung von π interessant. Allerdings wird dazu die Zahl in einen richtigen p-adischen Bruch transformiert, d.h. mit den Ziffern 0 bis 9 und A …. So findet man als letzte einstellige Zahl die 5 ab Position 83. Die letzte auftretende zweistellige Zahl ist die 52 ab Stelle 5485, die letzte dreistellige Zahl ist die 944 ab Position 135904. Unter den ersten 3 Million Ziffern im 26ziger System findet man als letzte Zahl die 19271 ab der 2924401.Dezimalstelle; die 19592 ist nicht vertreten. (Juni 2006)

PI-Code-27

Durch Lee Sallows wurde 1993 daraufhin gewiesen, dass die Umwandlung von π in das 26ziger System eigentlich nicht ganz korrekt ist, da in normalen Texten einzelne Wörter durch Leerzeichen getrennt sind. Aus diesem Grund wird auch ein PI-Code im 27ziger System betrachtet, bei dem die Ziffer 0 in ein Leerzeichen, die Ziffern 1, 2, … in die Buchstaben A bis Z transformiert werden.

Auf Grund des zusätzlichen Zeichens nimmt die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Wort zu finden, ab. Unter den ersten 1 Million Ziffern im 27ziger System findet man zum Beispiel folgende deutsche Wörter. Erstaunlich ist, dass hier ein siebenbuchstabiges Wort gefunden wurde.

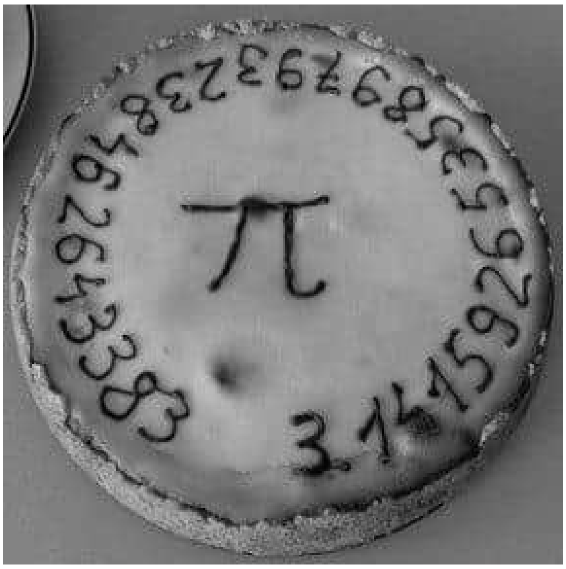
3buchstabige Wörter:
EMU (28), ZUG (193), RTL (232), MIT (439), TOT (554), ULI (621), AHN (646), MAN (783), DDR (954), LEE (967), WIR (1101), FIT (1162), AAR (1286), DAS (1290), UNO (1301), SAG (1400), WEM (1403), AAS (1433), WEN (1460), URS (1479), PIA (1537), …
4buchstabige Wörter:
LUKE (1386), FRED (3532), NULL (4894), JANA (4954), CITY (5218), BOTE (5783), SONG (6371), FOEN (6821), NASE (7709), WENN (7727), ROSE (8666), ESEL (9614), ARIE (10672), EMIR (11088), LOES (11336), SAAL (11864), KULM (12120), …
5buchstabige Wörter:
EHERN (19641), VIDEO (22103), ARENA (23767), MUCKE (45804), IDEEN (66866), ABBAU (76292), BANGE (83449), ANGER (83450), SANFT (84672), BERUF (88837), REBEN (98077), BIRKE (103137), ROTTE (116823), WOHER (118178), …
6buchstabige Wörter:
BANDIT (175017), HOTELS (321326), INTERN (382987), STEHEN (470053), KELVIN (868727), ISLAND (870081), DETLEF (935063), GALANT (936851), BIETEN (941767), BITTER (961541)
7buchstabiges Wort:
BIETEND (941768)



PI-Geldscheine

Durch Mike Keith wurde im März 1999 über das Internet die Suche nach dem besten PI-Geldschein gestartet.
Darunter versteht er Geldscheine, deren Nummer am besten der Ziffernfolge von π entsprechen.

Als Preisgeld gibt er
U.S. 400 Dollar für 3141592x
600 Dollar für 31415926
aus. Dieser Preis gilt für Dollarscheine, allerdings ist er auch auf der Suche nach internationalen Scheinen.
Quelle: http://users.aol.com/s6sj7gt/pinote.htm



PI-Day, PI-Tag

Im englischsprachigen Raum werden Datumsangaben in der Reihenfolge Monat/Tag/Jahr gegeben. Daraus resultierend wird der 14.März als
3/14
geschrieben.
Aus diesem Grund wurde der 14.März zum sogenannten PI-Day erklärt.

Besonders interessant ist am PI-Day die Uhrzeit 1:59:26, denn dann stimmen auch die nachfolgenden Ziffern mit π überein.

Als Begründer dieser Tradition gilt Larry Shaw, auf dessen Initiative hin der erste Pi-Tag 1988 am Exploratorium in San Francisco begangen wurde. Der Pi-Tag wird traditionell mit dem gemeinsamen Verzehren von runden Kuchen begangen. Im Englischen wird der griechische Buchstabe π lautgleich wie das englische Wort pie = Kuchen als "Pai" ausgesprochen.

Zum anderen wird ein π-Annäherungstag am 22. Juli gefeiert, mit dem die Annäherung von Archimedes an 22/7 geehrt werden soll.

PI-Anekdote

Im Jahre 1897 wollte man "neue mathematische Wahrheiten" per Gesetz festlegen. Der Arzt Edwin J. Goodwin reichte beim Repräsentantenhaus des US-Bundesstaats Indiana eine Gesetzesvorlage ein, in der diese "Wahrheiten" formuliert und dem Staat "kostenlos" zur Verfügung gestellt wurde. Zuvor hatte Goodwin sich die "Patente" für seine "Entdeckungen" gesichert.

Unter anderem wurde der Wert von π zu 3,2 "festgelegt"!
Als Näherungswert ist das schlechter als der Wert $4 \cdot (8/9)^2 = 3{,}16\ldots$, den die Babylonier bereits vor 4000 Jahren kannten.
Der Vorschlag passierte unwidersprochen mehrere Instanzen, bis Prof. C.A. Waldo von der Purdue Universität zufällig davon hörte und einen Aufschub der Entscheidung über das Inkrafttreten des Gesetzes auf unbestimmte Zeit erwirkte. Waldo forderte nämlich, wenn $\pi = 3{,}2$ ist, auch per Gesetz festzulegen, dass die Erde eine flache Scheibe sei, zumindest in Indiana.
Anmerkung: Das Guinness-Buch der Rekorde kennt die obige Geschichte etwas anders: "Der ungenaueste Wert von π. Im Jahre 1897 verabschiedete die Generalversammlung von Indiana ein Gesetz (Bill Nr. 246), nach dem der Wert von π de jure vier ist".

Nach Aussagen der schwedischen Internetseite
http://sv.wikipedia.org/wiki/Pi_%28tal%29
wollte Goodwin vier "tolle Erkenntnisse" per Gesetz festlegen lassen:
1. Die Transzendenz von π ist falsch.
2. Das Verhältnis von Kreisdurchmesser zu Umfang ist 5/4 zu 4 (entspricht $\pi = 3{,}2$)
3. Das Verhältnis eines 90°-Kreisbogens zur Entfernung der Bogeneckpunkte ist 8 zu 7 ($\pi = 3{,}23\ldots$)
4. Die Fläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines Quadrates, dessen Seitenlänge eines 1/4 des Kreisumfangs ist ($\pi = 4$)

ENGROSSED HOUSE BILL No. 246

A Bill for an act introducing a new mathematical truth and offered as a contribution to education to be used only by the State of Indiana free of cost by paying any royalties whatever on the same, provided it is accepted and adopted by the official action of the Legislature of 1897.

Section 1
Be it enacted by the General Assembly of the State of Indiana: It has been found that a circular area is to the square on a line equal to the quadrant of the circumference, as the area of an equilateral rectangle is to the square on one side. The diameter employed as the linear unit according to the present rule in computing the circle's area is entirely wrong, as it represents the circle's area one and one-fifth times the area of a square whose perimeter is equal to the circumference of the circle. This is because one fifth of the diameter fails to be represented four times in the circle's circumference. For example: if we multiply the perimeter of a square by one-fourth of any line one-fifth greater than one side, we can in like manner make the square's area to appear one-fifth greater than the fact, as is done by taking the diameter for the linear unit instead of the quadrant of the circle's circumference.

Section 2
It is impossible to compute the area of a circle on the diameter as the linear unit without trespassing upon the area outside of the circle to the extent of including one-fifth more area than is contained within the circle's circumference, because the square on the diameter produces the side of a square which equals nine when the arc of ninety degrees equals eight. By taking the quadrant of the circle's circumference for the linear unit, we fulfill the requirements of both quadrature and rectification of the circle's circumference.
Furthermore, it has revealed the ratio of the chord and arc of ninety degrees, which is as seven to eight, and also the ratio of the diagonal and one side of a square which is as ten to seven, disclosing the fourth important fact, that the ratio of the diameter and circumference is as five-fourths to four; and because of these facts and the further fact that the rule in present use fails to work both ways mathematically, it should be discarded as wholly wanting and misleading in its practical applications.

Section 3
In further proof of the value of the author's proposed contribution to education and offered as a gift to the State of Indiana, is the fact of his solutions of the trisection of the angle, duplication of the cube and quadrature of the circle having been already accepted as contributions to science by the American Mathematical Monthly, the leading exponent of mathematical thought in this country. And be it remembered that these noted problems had been long since given up by scientific bodies as insolvable mysteries and above man's ability to comprehend.

LEGISLATIVE HISTORY
Introduced
IN THE HOUSE

Read first time January 18th, 1897	Referred to Committee on Canals
Reported and referred to Committee on Education January 19th, 1897	
Reported back February 2nd, 1897	Read second time February 5th, 1897
Ordered engrossed February 5th, 1897	Read third time February 5th, 1897
Passed February 5th, 1897	Ayes - 67 - Noes -0-
Introduced by Record	

IN THE SENATE

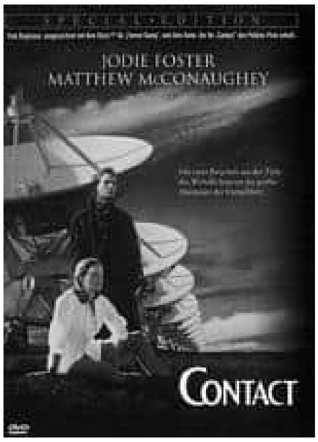
Read first time and referred to	committee on Temperance, February 11th, 1897
Reported favorable February 12th, 1897	Read second time and indefinitely postponed February 12, 1897

PI-Anekdote 2

Im genialen Buch "Contact" von Carl Sagan (Pulitzer-Preis) wird über eine im Zahlensystem zur Basis 2 in π verschlüsselte Botschaft des "Schöpfers" diskutiert.
Dieses findet man in dem später gedrehten, hervorragenden Film "Contact" von Robert Zemeckis mit Jodie Foster und Matthew McConaughey glücklicherweise nicht mehr.

Im Buch enthält die Binärdarstellung von π bei einer unvorstellbar hohen Stellenzahl dieses Muster:

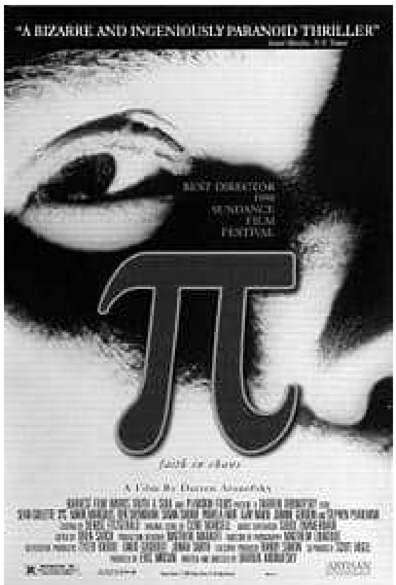
```
0000000000000000000000000000000000000
0000000000000000001000000000000000000
0000000000000010000000100000000000000
0000000000010000000000000100000000000
0000000001000000000000000001000000000
0000000100000000000000000000010000000
0000010000000000000000000000000100000
0000100000000000_00000000000000010000
0001000000000000000000000000000001000
0010000000000000000000000000000000100
0100000000000000000000000000000000010
1000000000000000000000000000000000001
1000000000000000000000000000000000001
0100000000000000000000000000000000010
0010000000000000000000000000000000100
0001000000000000000000000000000001000
0000010000000000000000000000000100000
0000000100000000000000000000010000000
0000000001000000000000000001000000000
0000000000010000000000000100000000000
0000000000000010000000100000000000000
0000000000000000001000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000
```



und symbolisiert damit einen "Gottesbeweis". Carl Sagan war Atheist!

PI-Anekdote 3, PI-the movie USA 1997

Regisseur: Darren Aronofsky
Max Cohen, hochintelligentes, ständig unruhiges Mathematikgenie, ist auf der Suche nach einer alles erklärenden Weltformel, die sich hinter einem numerischen System verbergen soll.
Kurz vor der Lösung versinkt die Welt um ihn herum im Chaos.
Plötzlich wird er von aggressiven Börsenmaklern und Anhängern einer jüdischen Sekte verfolgt. Im Kampf gegen den Wahnsinn, der sich vor ihm ausbreitet, entdeckt er ein Geheimnis, für das viele bereit sind, ihn umzubringen …
Aronofskys Regiedebüt ist ein skuriler Science-fiction Thriller über die verrückte Gedankenwelt eines Genies.



PI-Anekdote 4

In diesem 1997 gedrehten US-amerikanischen Film "Pi" kann jemand die "möglichen" 216 Dezimalstellen von π aufsagen. Offensichtlich ist 1997 noch nicht jedem klar, dass π eine unendliche, irrationale Zahl ist.
1967 wusste man es schon besser. In der Star-Trek-Folge "Wolf in the Fold" ("Der Wolf im Schafspelz") beauftragt Spock den Computer, die Zahl π bis zur letzten Stelle zu berechnen ("compute to the last digit the value of pi"); mit dem beabsichtigten Ergebnis, dass der Computer auf Grund der Unlösbarkeit der Aufgabe von der fremden Macht verlassen wird.
Für Professor Frink in "The Simpsons" ist π "exakt 3!"

PI-Anekdote 5
Johann Dase soll 1844 im Alter von 20 Jahren π auf 205 Dezimalziffern exakt berechnet haben. Das Besondere ist, so geht die Legende, dass er die Berechnung innerhalb von zwei Monaten ausschließlich im Kopf vorgenommen haben soll und erst nach Beedingung die Dezimalziffern aufschrieb.

PI-Anekdote 6
Für die Kreiszahl π wurden erst 3000 Jahre nach der ersten Erwähnung im Papyrus Rhind eine Name und ein Symbol eingeführt. Bis dahin nutzten Mathematiker merkwürdige Umschreibungen, wie:
"quantitas, in quam cum multiplicetur diameter, proveniet circumferentia"
d.h. "die Größe, die, wenn man den Durchmesser mit ihr multipliziert, den Umfang ergibt".

PI-Anekdote 7
Kurios! Ab der 9128219.Dezimalstelle von π findet man die Ziffernfolge 9136319. Beide Zahlen sind Palindrome. Das Besondere: Beide Zahlen sind auch Primzahlen und zwar zwei aufeinanderfolgende Primzahl-Palindrome.

Im amüsanten Spielfilm "Night at the Museum II" von 2009 suchen die Hauptpersonen nach dem "Herzen des Pharaonengrabs". Dies ist die Kreiszahl π = 3,1415926 …, was sie von Einstein-Puppen erfahren.

PI-Anekdote 8
Als Indiz für eine langsame Verbesserung (2003) der Einschätzung der Bedeutung der Mathematik kann das neue Logo der Wissenschaftsseite der Berliner Morgenpost angesehen werden.
Das "π" in dem Logo soll wohl die Rolle der Mathematik als Grundlage der Naturwissenschaft symbolisieren. (zitiert nach "Mathematik in der Presse")

PI-Anekdote 9
1998 wurde im Internet verbreitet, dass im US-amerikanischen Staat Alabama π auf den biblischen Wert von 3 festgesetzt wurde.
Die Meldung erwies sich als Aprilscherz und bissige Parodie auf die ständige Zunahme der "Kreationisten", die tatsächlich versuchen, in New Mexico die Evolutionstheorie aus den Lehrplänen zu streichen und dafür ihr "kreatives Design" (fanatische, faschistoide, strenggläubige Auslegung der biblischen Schöpfungsmythologie) einzuführen.
Die Internet-Meldung stammte von dem Physiker Mark Boslough.

PI-Anekdote 10
Der jüdische Rabbi Nehemiah versuchte im Jahre 150 die Differenz zwischen dem biblischen π-Wert von 3 und seinem Wert von 3 1/7 damit zu erklären, dass er davon ausging, dass in der Bibel der "Rand" des Kreises nicht mitgezählt wird.
Erschreckend ist, dass im 21.Jahrhundert(!) US-amerikanische Fanatiker tatsächlich fordern, den biblischen Wert von 3 verbindlich für π festzulegen.

Pi ist zudem ...
...das erste Wort der bekannten Präzisionsarbeiterweisheit: "Pi mal Daumen"
...die erste und/oder zweite Silbe eine umgangssprachlichen Begriffes für das Wort Urin.
...die erste Silbe einer Studie namens Pisa, welche durch die Zahl Pi psychisch krank gemachte Schüler untersucht.
...der Vorname von Pi Casso - Ständig unter Drogen stehender Ex-Maler

...die heilige Zahl und Quelle der Macht des Bösen und Guten, weshalb Pi auch wiederholt in den Götzenbildern des "Kapital is Mus" erscheint.

Zitate
"*Pi ist genau 3!*" (Doktor Frink (Simpsons), als er bei einer Versammlung von Wissenschaftlern für Aufmerksamkeit sorgen wollte)
"*Pi ist die Hälfte von PiPi*" - Rainier Wolfcastle (ebenfalls Simpsons)

PI-Kurios

Man schreibt das Alphabet nach folgender Regel auf: Alle zur Senkrechten spiegelsymmetrischen Buchstaben werden nach oben gestellt. Die Lösung sieht dann wie oben zu sehen aus.
Zählt man nach, wie stark die unteren Buchstabengruppen sind, so kommt man auf: 6, 3, 1, 4, 1. Nun könnten diese Ziffern einem beliebigen Zahlensystem ab 7 entnommen sein. Doch es fällt auf, dass eine solche Gruppe gerade mit dem zehnten Buchstaben J beginnt. Nimmt man also einmal an, dass dies ein Wink sei, die Ziffern ab dort zyklisch im Zehnersystem aufzureihen, so erhält man: 3-1-4-1-6. Man erkennt hierin unschwer eine brauchbare Näherung für π, mit einem kleinen Fehler von etwa $7{,}35 \cdot 10^{-6}$. Der hier aufgezeigte Sachverhalt wurde von James Davis entdeckt.

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Abbildung links: Pi-Café in Avignon (Frankreich), Place Pie

In Frankreich hat man offensichtlich eine andere Position zur Mathematik als in Deutschland. Dies zeigt sich auch darin, dass die Kreiszahl es sogar zum Titelblatt der Dezemberausgabe von "La Recherche" gebracht hat.


La Recherche
L'ACTUALITÉ DES SCIENCES
π le maître nombre
Pourquoi la plus célèbre des constantes continue d'inspirer les mathématiciens
Cerveaux sous hypnose
PORTFOLIO
La physique des bulles de savon

Pi zum „Riechen“

PI als Kunstobjekt

Die Kreiszahl hat es auch direkt in die Kunst geschafft. Sie ist immer wieder Gegenstand der Darstellung.
Eine kleine Auswahl ist links zu sehen.

In mehreren dieser Abbildungen wird dabei nicht unbedingt auf die speziellen Eigenschaften der Kreiszahl π Bezug genommen, sondern vor allem die Form des griechischen Buchstabens zur künstlerischen Gestaltung genutzt.

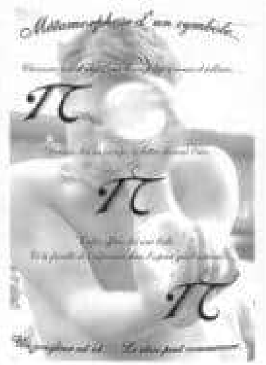
Dies findet man zum Beispiel bei J.P.Cassou und P.Borwein.
Bei Robert Crumb wird die Aussprache des griechischen Buchstabens Grundlage der Karrikatur.

Yves Chiricota de Montréal

Olivier Noël

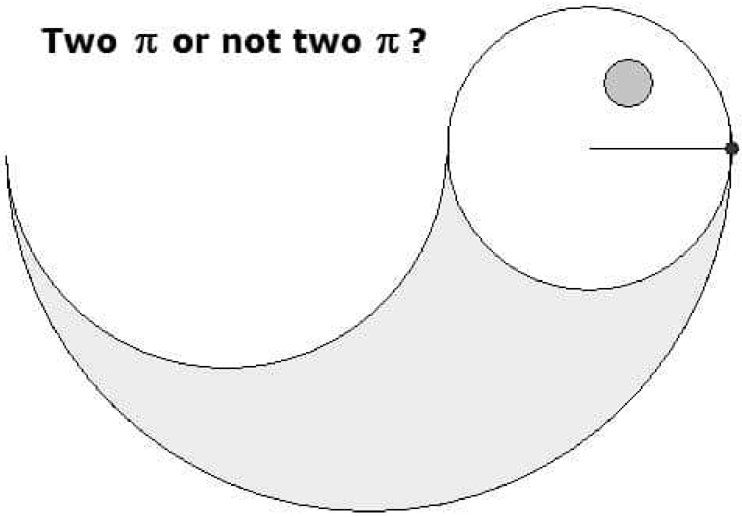
Robert Crumb

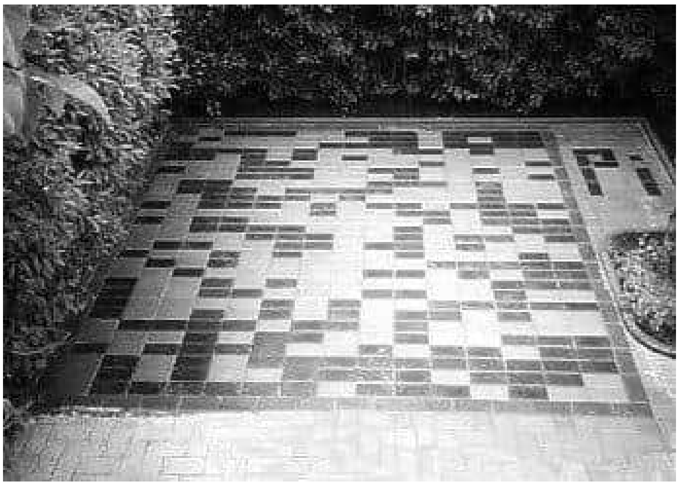
J.P. Cassou



MJ Juggler

Two π or not two π?





PI-Mosaik

Am 17. Mai 2000 wurde das weltweit erste Mosaik auf π-Basis fertiggestellt.

Es befindet sich im sächsischen Großdubrau und zeigt von links oben beginnend die ersten 450 Nachkommastellen der Zahl π als Hell-Dunkel-Raster, angeordnet in 15 Spalten und 30 Zeilen. Der stolze Besitzer dieser Bodenarbeit ist der π-Enthausiast Werner Lehmann.

Die hellen Steine entsprechen den geraden Nachkommastellen und die dunklen Steine den ungeraden. Das Mosaik hat eine Größe von etwa 300 x 300 cm.
Eine ortsansässige Firma realisierte diese Arbeit mit Feingefühl und fachmännischer Akkuratesse.
Quelle: http://www.hlxx.de/hp/pimosa.htm

Poulnabrone Dolmen

Ein besonderes Bauwerk für π-Anhänger ist der Poulnabrone Dolmen.
Der Poulnabrone Dolmen ("hole of the sorrows) ist ein Steingrab im Burren (Irland), das wahrscheinlich in der Jungsteinzeit ungefähr zwischen 3800 v.u.Z. und 3200 v.u.Z. erbaut wurde. Der Ort befindet sich 8 km südlich vom Ballyvaughan und 10 km nordwestlich von Kilnaboy.

Der Dolmen ist aus zwei Orthostaten aufgebaut, die einen ungefähr 3,65 Meter langen Deckstein stützen. Ursprünglich wurde er durch einen Steinhügel bedeckt.
Damit bildet das Bauwerk ein überdimensional großes π, wenn gleich natürlich klar ist, dass das Grab nichts mit der Kreiszahl zu tun hat.

Restaurierungsarbeiten wurden im Jahr 1986 durchgeführt, nachdem 1985 im östlichen der beiden Portalsteine ein Riss entdeckt worden war.
Es wurde jedoch nicht nur der beschädigte Tragstein erneuert, es wurde auch ein zusätzlicher Orthostat an der Westseite gesetzt, um den Deckstein zu stabilisieren. Damit wird der Deckstein nun durch 3 Steine gestützt, was das steinzeitliche PI leider etwas verändert.

Trugschluss
Behauptung: $2\pi = 0$
"Beweis": $x = 2\pi$
$\sin x = \sin(2\pi) = 0$
$x = \arcsin(0)$
$x = 0$, d.h. $2\pi = 0$
Der Trugschluss entsteht, da arcsin 0 nicht nur gleich 0 ist, sondern allgemein $0 + 2k\pi$ mit beliebigen ganzzahligen k ergibt.

PI-Limerick

The number pi's a ratio pal.
Whose fame is international.
C to diameter,
endless parameter,
to me it's all irrational! (Paul Doherty)

'Tis a favorite project of mine
A new value of pi to assign.

I would fix it at 3
For it's simpler, you see,
Than 3 point 1 4 1 5 9 (http://www.markcarter.me.uk/math.html)

If inside a circle a line
Hits the center and goes spine to spine
And the line's length is "d"
the circumference will be
d times 3.14159 (http://www.markcarter.me.uk/math.html)

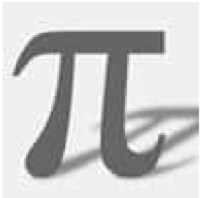
Three point one four one five nine two
It's been around forever - it's not new
It appears everywhere
In here and in there
It's irrational I know but it's true! (http://www.geocities.com/SiliconValley/Pines/5945/facts.html)

Now there is an ancient Greek letter,
And I think no other is better.
It isn't too tall,
It might look very small,
But its digits, they go on forever. (http://www.kathimitchell.com/piceleb.html)

Mathematische Beziehungen in denen die Kreiszahl auftritt

Fakultätsbegriff n!
engl. Factorial, Übersetzung: Faktorielle
Anzahl der Permutationen von n Elementen (Anzahl unterschiedlicher Reihenfolgen dieser Elemente)
$\text{Anzahl} = n!$

Es gilt: $n! = \Gamma(n+1)$, wobei $\Gamma(x)$ die Gaußsche Gammafunktion ist
Erweiterung des Fakultätsbegriffs n! auf reelle Zahlen x (x!) und Einführung der Doppelfakultät x!! ergibt:
$(-0{,}5)! = \sqrt{\pi}$
$(0{,}5)! = 1/2\ \sqrt{\pi}$
$(n - 0{,}5)! = \sqrt{\pi}/2^n\ (2n - 1)!!$
$(n + 0{,}5)! = \sqrt{\pi}/2^{n+1}\ (2n + 1)!!$
Reihenentwicklung
$z! = \sqrt{(2\pi)}\ z^{(z+1)/2}\ e^{-z}\ (1 + 1/12\ z^{-1} + 1/288\ z^{-2} - 139/51840\ z^{-3} + \ldots)$
$\ln (z!) = 1/2 \ln(2\pi) + (z + 1/2) \ln z - z + 1/12\ z^{-1} - 1/360\ z^{-3} + 1/1260\ z^{-5} - \ldots$
Stirlingsche Näherungsformel
$n! \approx \sqrt{(2\pi n)} \cdot n^n \cdot e^{-n}$
bzw. $\ln(n!) \approx (n + 1/2) \ln n - n + 1/2 \ln (2\pi)$



Binomialkoeffizienten-Beziehungen
Nach "Table of integrals, series, and products" von Gradshteyn und Ryzhik
$\Sigma_k \binom{n}{3k} = 1/3\ (2^n + 2 \cos(n/3\ \pi))$
$\Sigma_k \binom{n}{3k+1} = 1/3\ (2^n + 2 \cos((n-2)/3\ \pi))$
$\Sigma_k \binom{n}{3k+2} = 1/3\ (2^n + 2 \cos((n-4)/3\ \pi))$
$\Sigma_k \binom{n}{4k} = 1/2\ (2^{n-1} + 2^{n/2} \cos(n/4\ \pi))$
$\Sigma_k \binom{n}{4k+1} = 1/2\ (2^{n-1} + 2^{n/2} \cos(n/4\ \pi))$
$\Sigma_k \binom{n}{4k+2} = 1/2\ (2^{n-1} - 2^{n/2} \cos(n/4\ \pi))$
$\Sigma_k \binom{n}{4k+3} = 1/2\ (2^{n-1} + 2^{n/2} \sin(n/4\ \pi))$

$\Sigma\ 1/\binom{2n}{n} = 1/27\ (2\pi\sqrt{3} + 9) = 0{,}7363998587 \ldots$
$\Sigma\ 1/(n \cdot \binom{2n}{n}) = \pi/9\ \sqrt{3} = 0{,}6045997881 \ldots$
$\Sigma\ 1/(n^2 \cdot \binom{2n}{n}) = 1/3\ \zeta(2) = \pi^2 / 8$
$\Sigma\ 1/(n^4 \cdot \binom{2n}{n}) = 17/36\ \zeta(4) = 17/3240\ \pi^4$

Eulersche Formel

Die Eulersche Formel beschreibt Zusammenhang zwischen trigonometrischer und exponentieller Darstellungsform komplexer Zahlen

$e^{i\phi} = \cos \phi + i \cdot \sin \phi = e^{i(\phi+2k\pi)}$, $k \in Z$
Aus der Taylor-Entwicklung von e^x
$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$
unter Einsetzen des Arguments ix ergibt sich
$e^{ix} = 1 + ix/1! - x^2/2! - ix^3/3! + x^4/4! + - -\ldots =$
$= 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + - \ldots + i(x/1! - x^3/3! + x^5/5! - \ldots)$ (*)

Die Potenzreihen der trigonometrischen Funktionen sin x und cos x sind

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + - \ldots = x (1 - x^2/(2\cdot3)) (1 - x^2/(4\cdot5)) (1 - x^2/(6\cdot7))\ldots$

$\cos x = 1 - x^2/2! + x4/4! - x6/6! + - \ldots = 1 - x^2/(1\cdot2) (1 - x^2/(3\cdot4)) (1 - x^2/(5\cdot6)) \ldots$

Vergleich mit der Gleichung (*) ergibt somit
$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$

Die Potenz $i^i = e^{-\pi/2} = 0{,}207879 \ldots$ ist reell!

0,20787957635076190854695561983497877003387784163176960807513588305541987728548
2139788600277865426035340521773307235021808190619730374663986999911263178641 20
573171777952006743376649542246381929737430538703760051890663033049700519005556
200475866205294351834431843455027479745344769934714172383230815271481800760921
074192047151878353489584821890186029582331295662952070823409567696363742039451
439394183861901080820897771751705004348176454751714529894341134142017562215488
09541992091473585152856795345269763049937295772948259970284775240324808207770 2..

Moivresche Formel
Die Moivresche Formel beschreibt die Potenz einer komplexen Zahl
$z^n = r^n \cdot [\cos (n\phi) + i \cdot \sin (n\phi)] = r^n e^{in\phi}$
da n nichtganzzahlig sein muss, existiert damit eine Möglichkeit des Radizierens einer komplexen Zahl
$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot [\cos (\phi/2) + i \cdot \sin (\phi/2)] = \sqrt{r}\, e^{i\phi/2}$
$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot [\cos (\phi/2+\pi) + i \cdot \sin (\phi/2+\pi)] = \sqrt{r}\, e^{i(\phi/2+\pi)}$
und allgemein
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/n + k\pi/n) + i \cdot \sin (\phi/2 + k\pi/n)] = \sqrt{r}\, e^{i(\phi/2}+k\pi/n)$
mit k = 0, 1, …, n-1

Natürlicher komplexer Logarithmus

$z = {}_1\int^z dt/t = r e^{i\phi}$, $z \neq 0 \Rightarrow$
$\ln z = \ln [r (\cos \phi + i \sin \phi)]$
$= \ln r + i (\phi + 2k\pi)$, $k \in Z$
Der Logarithmus ist periodisch. ln r wird der Hauptzweig genannt.

Brownsche Zahlen

Gegeben ist eine beliebige natürliche Zahl n. Eine zweite Zahl a_0 wird zu Beginn gleich n gesetzt.
Nun wird nach der Zahl a_1 gesucht, die ein Vielfaches von n-1 ist und mindestens so groß wie a_0 ist. Die Zahl a_2 ist dann die Zahl, welche ein Vielfaches von n-2 ist und mindestens so groß wie a_1. Dieser Vorgang wird bis a_k mit k = n-1 fortgesetzt.
Die entstehende Zahl heißt Brownsche Zahl f(n). Benannt wurden diese Zahlen nach Kevin Brown, der zuerst diese beschrieb.
Zum Beispiel ergibt sich für n = 10:
$a_0 = 10$, $a_1 = 2\cdot(10-1) = 18$, $a_2 = 3\cdot(10-2) = 24 > 18$, …, $a_k = f(10) = 34$.
Für n = 1,2,3,4,… erhält man die Folge der Brownschen Zahlen
f(n) = 1, 2, 4, 6, 10, 12, 18, 22, 30, 34, …
Weiterhin ist zum Beispiel f(100) = 3234, f(1000) = 318570 und f(10000) = 31833630.

Mit folgender kleinen Programmsequenz kann die Brownsche Zahl ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass schon ab n = 1000 die Rechenzeit sehr stark ansteigt. Rechts ist die Berechnung bis n = 10000 möglich.

```
brown := proc(n) local x,f,i,y;
  x := n; f := n; for i from x by -1 to 2 do y := i-1; while y < f do  y := y+i-1 od; f := y od end
```

Das Interessante an diesen Zahlen ist nun, dass, wieder völlig unerwartet, $n^2/f(n)$ mit wachsendem n gegen π konvergiert und zwar alternierend von oben und unten. Zum Beispiel erhält man einen "schönen" Wert für n = 200. Es ergibt sich:

n	$n^2/f(n)$	n	$n^2/f(n)$	n	$n^2/f(n)$
10	2,94117	50	3,1172	100	3,0921459
200	3,14169	500	3,13999	1000	3,1390275
10000	3,14133198				