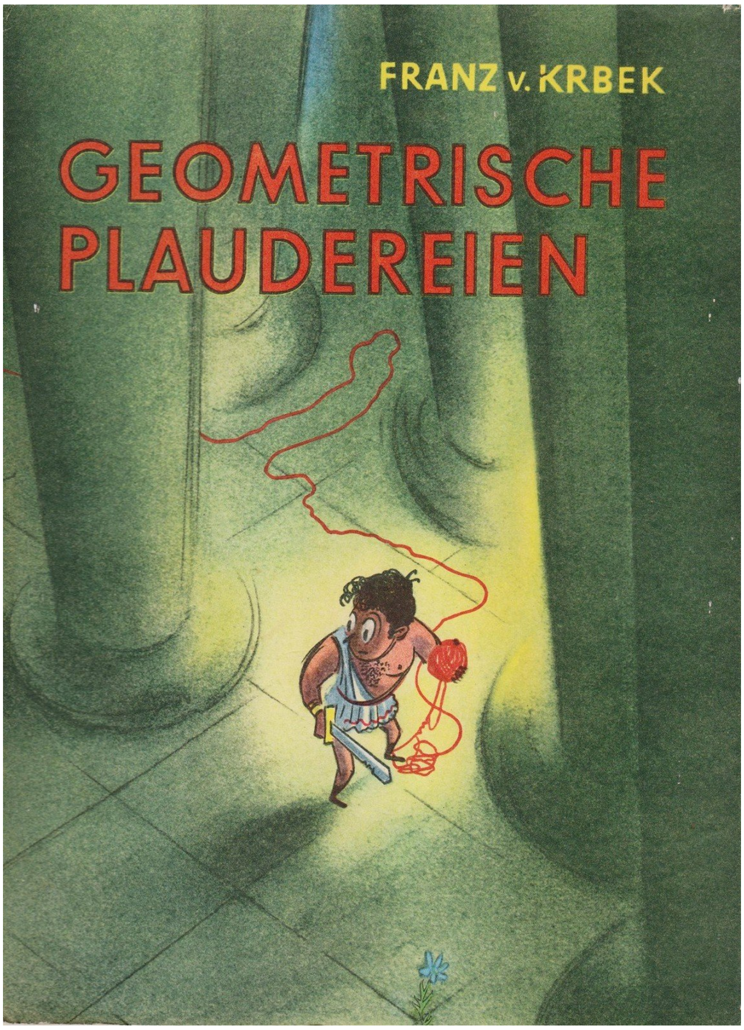
Geometrische Plaudereien
von Prof. Dr. Franz von Krbek



mit 168 Textabbildungen
illustriert von Horst Röcke
2. Erweiterte Auflage

Abschrift und LaTex-Satz: Steffen Polster 2020
https://mathematikalpha.de

Vorwort

Zur ersten Auflage

Das Atomzeitalter verlangt mehr als nur Kindergartenmathematik. Der Zugang zur Mathematik, insbesondere zur Geometrie, wird durch die Anschauung erleichtert.
Kein geringerer als ein Gauß befürwortete Ihre eifrige Pflege. Sie Ist jedoch trügerisch, wie unsere Darstellung zur Genüge erkennen lässt. Daher soll die Anschauung wohl Vermutungen suggerieren, man darf sich aber nicht auf sie verlassen.

Unsere Darstellung ist so gehalten, dass man ihr mit nur recht geringen mathematischen Kenntnissen gut folgen kann. Sie leitet an, sich selber Gedanken zu machen. Damit wächst dann das Interesse, das durch gelehrte Hinweise kaum erhöht würde, weil diese Dogmen gleichen, denen man nicht nachgeht.
Was wir hier anstrebten, war, den Sinn für die schöpferische Kraft der Mathematik zu wecken!

Der Verlagsgesellschaft B. G. Teubner in Leipzig möchte ich für die ansprechende Ausstattung meinen aufrichtigen Dank aussprechen. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Viktor Ziegler, von dem die Anregung zu diesem Buch an den Verfasser erging.
Das persönliche Interesse, das er am Manuskript nahm, kam diesem sehr zugute, und man kann nur wünschen, dass diese begrüßenswerte Zusammenarbeit nicht auf Einzelfälle beschränkt bleibt!

Im Sommer 1962 Franz von Krbek

Zur zweiten Auflage

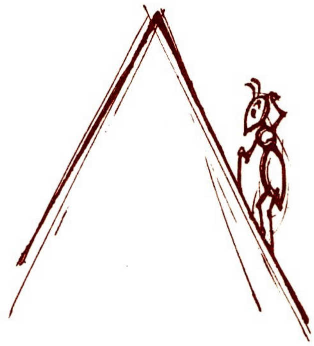
Von kleinen Änderungen abgesehen, kam eine neue Plauderei dazu. Sie bestimmt die Inhalte von Kegel und Kugel elementar, aber einwandfrei. Die elfte und die vorletzte Plauderei wurden etwas ausführlicher dargestellt als in der ersten Auflage.

Der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig möchte ich für die Bereitwilligkeit danken, mit der sie auf meine Wünsche bei der Neuauflage einging.
Mein besonderer Dank gilt diesmal meinem Kollegen Wolfgang Arnold, der die Neuauflage mit derselben Umsicht betreute wie die Vorträge im Rahmen der von ihm geschaffenen Sendereihe "Mathematik für die Praxis" des Deutschen Fernsehfunks, die ich seinerzeit übernahm.

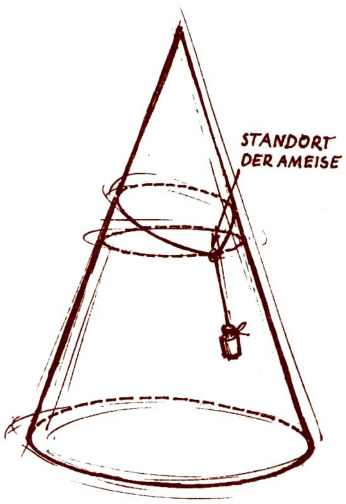
Greifswald, Frühjahr 1966 Franz von Krbek

Inhaltsverzeichnis

1 Nöte einer Ameise



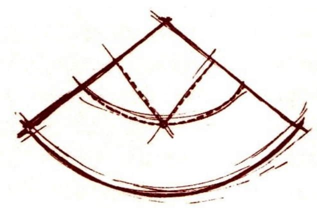
Es war einmal eine Ameise. Sie saß auf einem Zuckerhut. Nicht gerade auf der Spitze, so mehr in der Mitte. Unsere Ameise war unternehmungslustig und beschloss, den Zuckerhut einmal zu umwandern.
Wie konnte das auf dem kürzesten Wege geschehen?
Eine Schnur, eine Öse und ein Gewicht genügen, um den kürzesten Weg zu bestimmen. Man befestigt die Öse an einem Ende der Schnur, zieht das andere Ende durch die Öse und hängt das Gewicht daran. Die so entstandene Schleife zieht man über die Spitze des Kegels so weit herunter, bis die Öse zum Standort der Ameise gelangt.

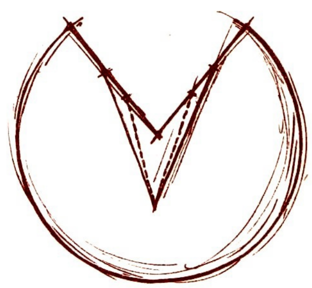


Dann überlässt man das Ganze sich selbst. Das Gewicht sinkt so tief, wie es nur kann. Am tiefsten sinkt es offenkundig, wenn der Weg, von der Schnur auf dem Kegel markiert, am kürzesten ist.

Das wäre ein Experiment, um den kürzesten Weg zu finden. Geht es nun auch ohne Experiment, durch reine Überlegung?

Aber gewiss, wenn man beachtet, dass man den Kegelmantel aufgeschnitten auf einer Ebene ausbreiten kann. Den Schnitt führe man geradlinig von der Spitze aus durch den Punkt, der dem Standort der Ameise gerade gegenüberliegt.
Der so aufgeschnittene Kegelmantel bildet ausgebreitet einen Kreissektor. Symmetrisch zu beiden Schenkeln liegt der Standort der Ameise. Werden von diesem Punkt zwei Lote auf die beiden Schenkel gefällt, so sind diese Lote die beiden Hälften des kürzesten Weges, weil sie selbst die kürzesten Wege sind, um zu den Schenkeln zu gelangen.





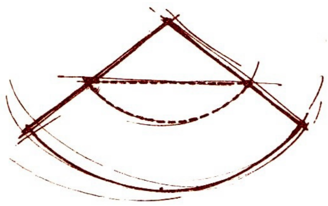
Unsere Überlegung versagt allerdings, sobald der Kreissektor so groß wie ein Halbkreis oder gar noch größer ausfällt.
Der Weg der Ameise verläuft dann zwar noch immer so, dass die beiden Enden auf den Schenkeln gleich weit vom Kreismittelpunkt liegen. Zunächst sind das zwei Strecken, die ja in der Ebene kürzeste Verbindungen herstellen. Je näher nun die Endpunkte zum Kreismittelpunkt rücken, um so kürzer fallen die beiden Strecken aus; die beiden gestrichelten Strecken sind kürzer als die beiden ausgezogenen.
Daher gibt es im Fall, dass der Kegelmantel ausgebreitet mindestens ein Halbkreis ist, keine kürzeste Wanderung um den Kegel; zu jeder Schleife, die um die Kegelspitze führt, gibt es eine andere, die noch kürzer ausfällt.

Wann, so kann man noch fragen, tritt der eine und wann der andere Fall ein?

Man schneide den Kegel mit einer senkrechten Ebene, die durch die Kegelspitze geht. Es entsteht so ein gleichschenkliges Dreieck. Die Hälfte seiner Grundlinie habe die Länge r, die beiden gleichen Schenkel mögen jeweils die Länge R haben.
Der ausgebreitete Kegelmantel hat dann die Saumlänge $2r\pi$. Er ist außerdem Kreissektor im Kreis vom Radius R. Sein Zentriwinkel fällt genau dann kleiner als 180° aus, wenn der Kegelsaum kürzer ist als die Hälfte des Kreisumfangs mit dem Radius R, wenn also

$$2r\pi < R\pi$$

oder nach Kürzen durch π: $2r < R$ ausfällt.
Das besagt, dass der Zentriwinkel $\geq$ 180° ist, wenn die Schenkel des Schnittdreiecks höchstens so lang sind wie seine Grundlinie. Der Fall von 180° trifft augenscheinlich für ein gleichseitiges Dreieck zu.



Manchem Leser mag die nachstehende Überlegung vielleicht noch anschaulicher erscheinen:
Man markiere zunächst den Standpunkt der Ameise durch einen kleinen Kreis. Nun führe man den Schnitt geradlinig von der Spitze durch den Standort der Ameise. Der so aufgeschnittene Kegelmantel bildet ausgebreitet einen Kreissektor, an dessen Rand, durch je einen kleinen Halbkreis markiert, der ehemalige Standort der Ameise noch zu erkennen ist.

Verbindet man noch die beiden Halbkreise durch eine Strecke, so erhält man den gesuchten kürzesten Weg.
Der Weg auf dem waagerecht gelegenen Kreise um den Kegel herum ergibt aber bei der Abwicklung den in der Abbildung dargestellten Kreisbogen, ist also länger.
Allerdings verläuft die Strecke außerhalb des Kreissektors, sobald dieser einen Halbkreis übertrifft. Dann gibt es eben keine Lösung, wie wir schon vorhin erkannten.

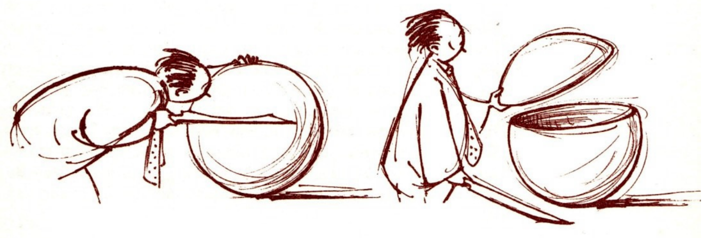
Ohne unser Experiment oder die soeben angestellte Überlegung hätte man eher darauf getippt, dass der kürzeste Weg auf gleichbleibender Höhe, also im Kreise, verläuft. Das ist durchaus verständlich, weil die räumliche Anschauung nur mangelhaft geschult ist, daher leicht versagt. Aber selbst die vielmehr gepflegte ebene Anschauung ist eine unzuverlässige Pfadfinderin, die gelegentlich irreführt, wie wir es noch sehen werden.

Bei unserer Überlegung beriefen wir uns vorhin darauf, dass ein Kegelmantel auf der Ebene ausgebreitet werden kann, in der Fachsprache heißt es, dass er eine abwickelbare Fläche ist.
Wieviel leichter hätten es die Damenschneider - so schließt man daher scherenscharf -, wenn die Rundungen ihrer Kundinnen kegelförmig wären!
Woher weiß man nun, muss man sich fragen, dass der Kegelmantel abwickelbar ist?
Man könnte sich dabei freilich wieder auf das Experiment berufen. Gegen eine solche Berufung möchten wir jedoch Einspruch erheben. Schließlich geht es um eine rein mathematische Aussage, diese aber sollte ausschließlich mathematisch behandelt werden!

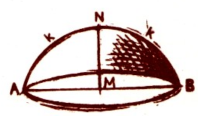
Eine einleuchtende Forderung, wenn man sie einmal gestellt hat. Es vergingen aber ungezählte Jahrtausende, ehe man sie gestellt hat. Eine erwachende Wissenschaft, wie man sie bei den Ägyptern oder Babyloniern vorfindet, war noch keineswegs so weit. Erst die Griechen erstiegen diese Abstraktionsstufe im Denken.

Es gehört ein eingehendes Studium dazu, ihre Leistungen zu würdigen, ein Studium, bei dem bestimmt manche Frage offen bleibt. Nicht allein, weil in so viel Jahrhunderten naturgemäß Quellenmaterial verlorenging, sondern eher noch, weil wir außerstande sind, uns in verklungene Epochen restlos hineinzufinden.

Geht man der Berechtigung unseres Ansatzes nach, dass Kegelmäntel abwickelbar sind, dann wird der Weg beschwerlich. Er führt in höhere Regionen, in die Höhere Mathematik. Wir aber wollen lieber auf ebener Erde bleiben und zusehen, was wir mit unseren bescheideneren Mitteln klären können. Dann drängen sich bei einiger Überlegung zwei Fragen geradezu auf. Die erste lautet:
Gibt es auch nicht abwickelbare Flächen?



Die zweite Frage lautet: Gibt es Flächen, die sich schon mit Hilfe der Elementarmathematik als abwickelbar erweisen? Die erste Frage kann mit einem Ja beantwortet werden. Die Kugeloberfläche ist nämlich nicht abwickelbar.
Man lege durch sie einen Schnitt: dadurch wird die Kugeloberfläche in zwei Teile zerlegt, die man Kugelkalotten nennt.
Hat man einmal eingesehen, dass die Kugelkalotte nicht abwickelbar ist, dann gilt das erst recht für die ganze Kugeloberfläche selbst.



Eine Kugelkalotte wird von einem Kreis begrenzt. Wird im Mittelpunkt M dieses Kreises eine Senkrechte errichtet, so trifft diese die Kugelkalotte in einem Punkt N, sagen wir im Nordpol. Irgendeine Ebene, die durch diese Senkrechte hindurchgeht, schneidet die Kugelkalotte in einem Kreisbogen kk, der von den beiden Punkten A und B begrenzt wird und in dessen Mitte sich der Nordpol befindet. Wäre nun die Kugelkalotte abwickelbar, dann müsste, nachdem sie auf der Ebene ausgebreitet wurde, der Nordpol den Mittelpunkt eines Kreises vom Durchmesser kk bilden. Da jedoch bei dem Ausbreiten auf einer Ebene keine Länge verzerrt werden darf, müsste der Umfang des Kreises, der den Kalottenrand bildet, erhalten bleiben.
Das steht aber im Widerspruch dazu, dass sein ursprünglicher Durchmesser kürzer ist als kk. Da dieser Widerspruch durch die Annahme zustande kam, die Kugelkalotte sei abwickelbar, müssen wir diese Annahme fallenlassen.

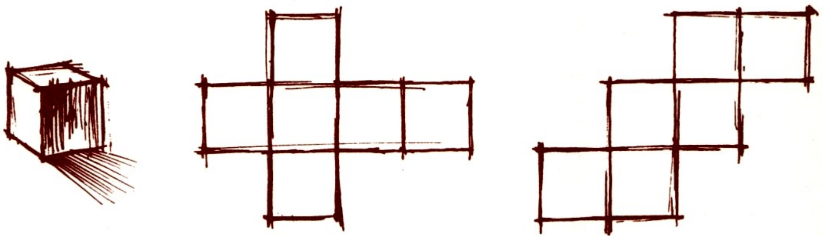
Bei dieser Gelegenheit begegnet uns zum ersten Male die indirekte Schlussweise, die in der Mathematik häufig angewandt wird.
Um eine Wahrheit zu beweisen, geht man davon aus, dass sie falsch ist, und verwickelt sich daraufhin in einen Widerspruch.

Dieser Widerspruch zwingt dann dazu, die Ausgangsstellung zu revidieren mit dem Ergebnis, dass man die bezogene Ausgangsstellung aufgibt, und das besagt, dass die fragliche Wahrheit doch richtig ist!

In der Überlegung, die zur Einsicht führte, dass die Kugelkalotte nicht abwickelbar ist, machten wir stillschweigend an einer Stelle eine Anleihe bei der Höheren Mathematik, wenn auch in einer Form, die jedermann geläufig ist.
Die Tatsache, dass ein Kreisbogen länger ist als die Sehne, kann nämlich strenggenommen erst unter Anwendung von Höherer Mathematik nachgewiesen werden.
Denn um dieser Aussage einen genauen Sinn geben zu können, muss erst erklärt sein, was man unter der Länge eines Kreisbogens verstehen soll. Eine solche Erklärung verlässt aber notwendigerweise die Elementarmathematik und erfordert den Begriff des Grenzwertes, der erst im vorigen Jahrhundert streng definiert wurde.

Die zweite Frage bejahen wir durch die Bemerkung, dass die Oberfläche eines Würfels abwickelbar ist.
Man braucht nur diese Oberfläche entlang gewisser Kanten aufzuschneiden, um dann die einzelnen Quadrate um die restlichen Kanten als Scharniere ein- oder auch zweimal um einen rechten Winkel zu drehen. Dadurch kommt die Würfeloberfläche in einer Ebene zu liegen. Das kann noch auf verschiedene Weise geschehen, wie unsere beiden Figuren zeigen.

Würde man unsere Ameise auf die Würfeloberfläche setzen und verlangen, dass sie zu einer anderen markierten Stelle auf dem kürzesten Wege krabbelt, dann könnte man ihren Weg auf der in geeigneter Weise abgewickelten Würfeloberfläche als Strecke in der Ebene einzeichnen.

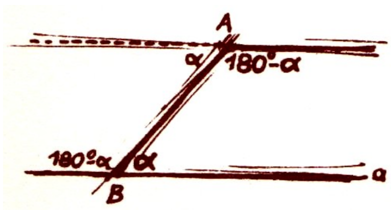


2 Sie konnten zueinander nicht kommen

In dem alten deutschen Volkslied, dem das hier als Überschrift gebrauchte Zitat entnommen ist, sind zwei Liebende durch tiefes Wasser voneinander getrennt. Als sich der Jüngling endlich entschließt, zu seiner Braut zu schwimmen, ertrinkt er, weil er die Orientierung verliert.

Ein ganz ähnlicher Fall, mathematisch gesehen, liegt vor, wenn man sich der Theorie der Parallelen zuwendet. Erschwerend kommt noch hinzu, dass die Anschauung dabei hoffnungslos versagt.
Zwei Geraden in einer Ebene, die sich nicht treffen, heißen Parallelen.
Von alters her weiß man, dass man durch einen Punkt zu einer vorgegebenen Geraden eine Parallele ziehen kann. Der Punkt selber soll selbstverständlich nicht auf der vorgegebenen Geraden liegen.

Wenn man aber fragt, ob durch den Punkt auch noch andere Parallelen gehen. versagt die Anschauung und muss auch versagen! Das liegt daran, dass sowohl die Annahme, es gibt keine weiteren Parallelen als auch die Annahme, es gibt deren sogar unendlich viele, zu je einer folgerichtigen Geometrie führt.
Obschon sich diese beiden Geometrien gegenseitig widersprechen, sind sie in sich widerspruchsfrei.
Es dauerte Jahrtausende, ehe man sich zu dieser Einsicht durchgerungen hatte. Dabei war der erste Schritt noch leicht.



Um durch den Punkt A zur Geraden a eine Parallele zu ziehen, verbinde man A mit irgendeinem Punkt B von a. Sei α einer der beiden Winkel, welche die Strecke BA mit a bildet. Errichtet man in A auf der Strecke AB den Winkel $180° - \alpha$ auf derselben Seite wo er liegt, dann bildet die so erhaltene Halbgerade nach Ergänzung zu einer vollen Geraden eine Parallele durch A zu a.

Die beiden von A und B nach rechts liegenden Halbgeraden bilden nämlich mit AB zusammen eine Figur, die sich nach links wiederholt.
Nur die Winkel liegen vertauscht, indem der Winkel in A nach links α und in B nach links $180° - \alpha$ beträgt. Denkt man sich also die beiden Figuren aus Draht nachgebildet, dann kann man sie zur Deckung bringen, denn sie stimmen ja in der Strecke AB und ihren beiden Winkeln überein. Sie sind kongruent.
Ein Schnittpunkt der einen Halbgeraden mit a würde folglich einen Schnittpunkt der anderen Halbgeraden mit a nach sich ziehen. Unsere Gerade durch A hätte dann zwei Schnittpunkte mit a gemein, müsste also mit a zusammenfallen, da ja zwei Punkte eine Gerade eindeutig bestimmen. Daher würde A auf a liegen, entgegen unserer Annahme.

Danach gibt es mindestens eine Parallele. Gibt es auch noch andere?

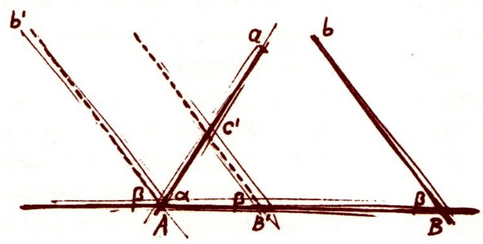
Die so gestellte Frage ist zwar naheliegend, verbaut aber die freie Aussicht, weil sie suggeriert, sich für die eine der beiden Alternativen zu entscheiden. Richtig gestellt, muss die Frage lauten:
Wie geht es weiter, wenn wir annehmen, dass es durch A nur eine einzige Parallele zu a gibt, und wie geht es weiter, wenn wir annehmen, dass es auch noch andere Parallelen gibt?

Wie wir schon bemerkten, führt das zu zwei ganz und gar verschiedenen Geometrien. Die Situation erinnert an die Ringparabel aus "Nathan der Weise", wenn man die verschiedenen Geometrien, deren wir bis jetzt erst zwei genannt haben, mit den verschiedenen Religionen vergleicht. Bloß führen deren Geltungsansprüche dazu, sich vor den übrigen Religionen zu verschließen.
Ein Geometer dagegen weiß, dass die verschiedenen Geometrien richtig, das heißt in sich widerspruchsfrei sind. Ein grundlegender Unterschied besteht allerdings insofern, dass eine Geometrie aus ihrer Widerspruchsfreiheit nicht a priori den Anspruch ableitet, physikalische Realitäten richtig zu beschreiben.

Die Schulgeometrie lässt durch A nur e i n e Parallele zu a zu. So lehrte es schon Euklid. Es handelt sich dabei wohlgemerkt um eine Annahme.
Um deren Willkür abzuschwächen, könnte man es mit anderen, damit gleichwertigen Aussagen versuchen, die näher liegen. Man verdankt Wallis einen interessanten Beitrag dazu. In einem öffentlichen Vortrag, den er am Abend des 11. Juli 1663 in Oxford hielt, ging Wallis davon aus, dass es zu jeder Figur eine ähnliche gibt, die beliebig groß ausfallen darf.

Gibt man das zu, dann lässt sich wie folgt schließen, dass es durch A zu a eine einzige Parallele gibt:

Durch die Punkte A und B seien zwei Geraden a und b gelegt: diese mögen mit der Strecke AB die Winkel α und β einschließen, deren Summe weniger als zwei Rechte beträgt.



Legt man durch A die Gerade b' unter dem Winkel β, dann wird diese im Nebenwinkel von α verlaufen. Verschiebt man b von B nach A so, dass die Neigung dabei erhalten bleibt, dann muss augenscheinlich b die Gerade a zwischendurch geschnitten haben, ehe b die Lage b' einnimmt.
Bei B' sei eine solche Lage, in welcher der gemeinsame Schnittpunkt von a und b durch C' bezeichnet wurde.

Das Dreieck $AB'C'$ kann nach der Annahme von Wallis beliebig vergrößert werden.
AB' geht dabei in AB über. Über AB befindet sich dann ein Dreieck mit den Winkeln α und β. Das besagt aber, die Geraden a und b treffen sich.

So geistvoll diese Überlegung auch ist, wirkt sie wie ein Gedankenblitz aus heiterem Himmel Und damit unbefriedigend. Zufrieden gibt man sich erst, wenn eine Übersicht gewonnen wurde, in der sich dann die Überlegung von Wallis zwanglos einordnet.
Das verlangt aber, sich systematisch mit den von uns schon angeschnittenen Ansätzen zu beschäftigen.

Einen ersten, im großen und ganzen gelungenen Versuch, die Geometrie systematisch aufzubauen, unternahm Euklid um 300 v.u.Z. Vermutlich starb er; noch bevor er seine Ausarbeitung beendet hatte.
Er übernahm vieles, ja das Wertvollste, von seinen Vorgängern, insbesondere machte er ausdrücklich die Annahme, dass es durch einen Punkt außerhalb einer vorgegebenen Geraden zu dieser eine einzige Parallele gibt. Bereits seinen Zeitgenossen erschien jedoch diese Annahme bedenklich. Man versuchte seither immer wieder, sie irgendwie zu begründen.

Zunächst wird man sich fragen, ob sich diese Annahme aus den übrigen Annahmen folgen lässt. Soviel man das auch versuchte, gelang es nicht. Das liegt daran, dass mit der gegenteiligen Annahme eine andere, von unserer Schulgeometrie wesentlich abweichende Geometrie entwickelt werden kann.
Sie ist genauso widerspruchsfrei und in sich geschlossen wie die Schulgeometrie und heißt nichteuklidische Geometrie, obschon sie richtig die erste nichteuklidische Geometrie heißen sollte, weil inzwischen mehrere andere Geometrien erdacht wurden, die von unserer Schulgeometrie ebenfalls abweichen.

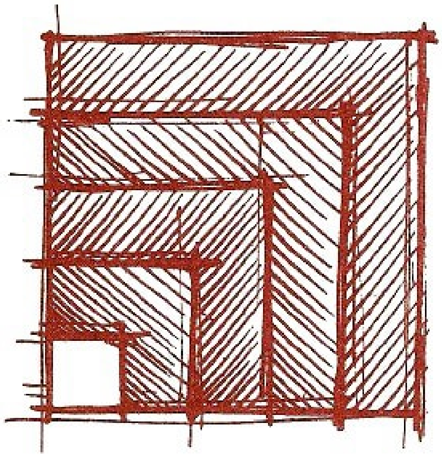
Wie ist das zu verstehen? Ehe man folgern kann, muss schon einiges vorliegen. Was zu Anfang vorliegt, sind die Grundannahmen. Man nennt sie Axiome. Sie müssen so gewählt werden, dass man mit ihnen ein für allemal auskommt, insbesondere später keine Anleihe mehr bei der Anschauung machen muss. Das wusste und erstrebte bereits Euklid, ohne allerdings überall durchzukommen.

Mit dem Verlassen der Schulgeometrie tat sich ein Tor in eine neue Welt auf. Anschließende Geschlechter entdeckten dann immer neue Geometrien, die zum Verständnis unserer Welt verhalfen. So lässt sich die Relativitätstheorie, durch die viele physikalische Erscheinungen erklärt werden konnten, mathematisch gesehen als eine besondere Geometrie deuten.
Um weiterhin das Verhalten der Atome zu verfolgen, bedarf man eines Raumes gleich von unendlich viel Dimensionen. Selbstredend ist das nicht so gemeint, dass sich die Atome wirklich in diesem Raum befinden. Daraus würde sonst folgen, dass unsere Welt, die ja aus Atomen besteht, ebenfalls unendlich viele Dimensionen hätte, während die Erfahrung uns doch gelehrt hat, dass sie drei Dimensionen hat. Das sind Einsichten der letzten Jahrzehnte, die zum Umbruch im Formelapparat der Physik geführt haben.

Zum Schluss sei noch der Forscher gedacht, die das Tor zu diesen Einsichten öffneten. Zunächst ist Lobatschewski zu nennen mit seiner ersten Veröffentlichung aus dem Jahre 1829, der später zahlreiche weitere folgten.
Gauß gewann zwar bereits über ein Jahrzehnt vorher diese Ergebnisse, wie aus seinem Nachlass her- vorging, scheute aber nach eigenem Geständnis "das Geschrei der Böotier", seiner konservativen Fachgenossen. Damit brachte er sich selber um den Ruhm der Priorität.

1831 erschien eine Arbeit des jüngeren v. Bolyai über diesen Gegenstand als Anhang in einem Buch seines Vaters. Zwei Juristen, Schweikart und sein Neffe Taurinus wären noch zu nennen, um die Liste zu vervollständigen.
Vier von den genannten entwickelten dabei ihre Gedanken völlig unabhängig voneinander und nahmen erst später Fühlung untereinander auf. Wir möchten dazu sagen, dass die Zeit endlich reif war, um den entscheidenden ersten Schritt zu tun.

3 Ergiebiger Inhalt



Man zeichne Quadrate von der Seitenlänge 1, 2, 3, 4, 5 und denke sie sich so aufeinandergelegt, dass ihre linken unteren Ecken zusammenfallen. Es entsteht unsere Figur, in der die einzelnen schraffierten Felder die Inhalte 3, 5, 7, 9 haben. Zusammen mit dem Quadrat von der Seitenlänge 1 füllen sie gerade das große Quadrat von der Seitenlänge 5 aus.

Unser Ergebnis kann wie folgt formuliert werden:
Die Summe der ersten 5 ungeraden Zahlen beträgt 25, eine sogenannte Quadratzahl, weil das Quadrat von 5 gerade 25 ist.

Offensichtlich ist unsere Überlegung nicht nur auf die ersten 5 ungeraden Zahlen beschränkt, sondern lässt sich beliebig fortsetzen mit dem Ergebnis:
Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen beträgt n^2.

Es handelt sich um den Spezialfall einer viel allgemeineren Aufgabe.
Man gehe von einer Zahl a aus und addiere zu ihr wiederholt eine zweite Zahl d. Wie bestimmt man die Summe der so erhaltenen Folge, also $a + (a + d) + (a + 2d) + ...$?
Anstatt die Aufgabe in dieser Allgemeinheit in Angriff zu nehmen, führen wir die Lösung an einem Spezialfall durch, weil man daraus erkennt, wie man im allgemeinsten Fall vorgehen soll.

Man staunt zu hören, dass ein kaum Neunjähriger auf diese Lösung kam. Sie war schon vor ihm bekannt, aber das wusste er nicht.
Sein Lehrer wollte eine Stunde lang ungestört bleiben und stellte den Schülern die Aufgabe, die ersten 100 Zahlen zu addieren. Die Schüler begannen auch brav und rechneten: 1 + 2 ist 3 und 3 sind 6 und 4 sind 10 und so weiter. Dabei hat man die beste Gelegenheit, sich zu verrechnen, zudem dauert dieses Rechnen lange.
Der geplagte Lehrer rechnete zu Recht mit einem Stündchen Muße für sich. Er hatte sich aber verrechnet.

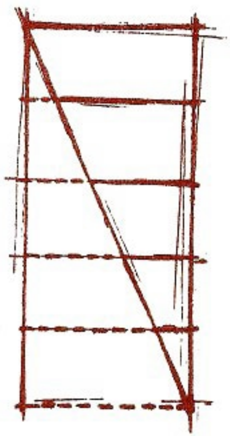
Kaum hatte er die Aufgabe gestellt, erhob sich ein Knirps und brachte ihm sein angebliches Ergebnis zum Katheder. Der Lehrer wollte schon ob dieser Dreistigkeit zur Rute greifen, denn das passierte Ende des 18. Jahrhunderts, wo die Rute Requisit des guten Pädagogen war, als er sich besann, dass er nicht ungeprüft strafen sollte. So sah er sich das Ergebnis an, und dieses stimmte!
Wie war das möglich?

Der Knirps, der später unter dem Namen Gauß als eine der größten Leuchten in der Mathematik bekannt wurde, machte eine Wahrnehmung, die den Schlüssel zu diesem

Gedankenkreis bildete.

Er bemerkte, dass man in der Folge 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100 die erste und die letzte Zahl addieren, in der übrig gebliebenen Folge 2, 3, ..., 98, 99 wiederum die erste und die letzte Zahl addieren, in der erneut übriggebliebenen Folge 3, ..., 98 wiederum die erste und die letzte Zahl addieren und das Ganze so lange fortsetzen soll, bis kein Paar übrig blieb.
Jedes der Paare liefert die gleiche Summe 101, und es gibt 50 Paare. Daher lautet das Ergebnis $50 \cdot 101 = 5050$.

Die Überlegung lässt sich auch in geometrischer Einkleidung führen und wirkt so beinahe noch reizvoller.
Auf dem einen Schenkel eines spitzen Winkels errichte man, sagen wir, fünf Lote in gleichen Abständen und verlängere sie, bis sie den anderen Schenkel treffen.
Dann haben sie die Längen 1, 2, 3, 4, 5, wie aus der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke hervorgeht. Die auf den Kopf gestellte Figur dazugezeichnet, entsteht ein Rechteck.

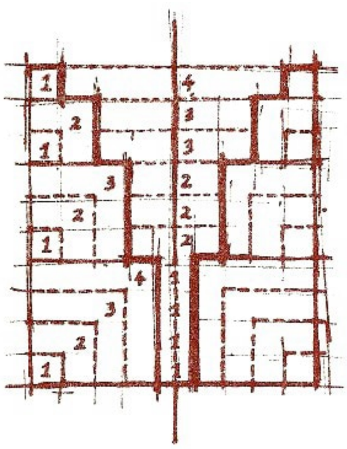


Die Verlängerungen unserer Lote bis zur Gegenseite des Rechtecks ergänzen ihre Längen jedesmal zu 5. Da ihre Anzahl 6 ist, beträgt die Gesamtlänge der verlängerten Lote demnach $6 \cdot 5 = 30$.
Weil nun jedes stark ausgezogene Lot genau ein Gegenstück unter den Verlängerungen besitzt, ist 30 noch durch 2 zu teilen, um die Gesamtlänge der ursprünglichen Lote, $1+2+3+4+5$, zu erhalten.
Offensichtlich kann diese Überlegung auf die Summe der ersten n natürlichen Zahlen erweitert werden.

In der letzten Überlegung beriefen wir uns auf Längen. Legt man Wert darauf, die Überlegung unter Verwendung von Inhalten zu führen, dann schließt man so:
Man bildet eine Säule von fünf aufeinandergetürmten Einheitsquadraten.

Links davon baut man eine Säule von 4, daneben von 3, schließlich von 2 Einheitsquadraten hin, um dann von links noch ein Einheitsquadrat hinzuzufügen.
Dieselbe Figur auf den Kopf gestellt, ergänzt die vorhergehende zu einem Rechteck, das aus $5 \cdot 6$ Einheitsquadraten besteht. Die Fläche der ursprünglichen Figur, $1+2+3+4+5$, macht die Hälfte davon aus.

Mit Hilfe von Inhalten lässt sich weiter die Summe von Quadratzahlen n^2 bestimmen. Wie das zu geschehen hat, erkennt man bereits, wenn $n = 4$ gesetzt wird.



Wir türmen dann Quadrate von den Seitenlängen 4, 3, 2 und 1 so aufeinander, dass ihre linken Seiten eine einzige Senkrechte bilden. Daraufhin spiegeln wir diesen Turm an einer Senkrechten, die von der rechten Seite des untersten Quadrats die Entfernung $\frac{1}{2}$ besitzt.
Dann behaupten wir, dass der zwischen beiden Türmen entstandene Zwischenraum den gleichen Inhalt hat wie jeder der beiden Türme. Um das einzusehen, denke man sich die einzelnen Quadrate in der uns schon bekannten Weise in Felder zerlegt, die der Größe nach nummeriert werden.

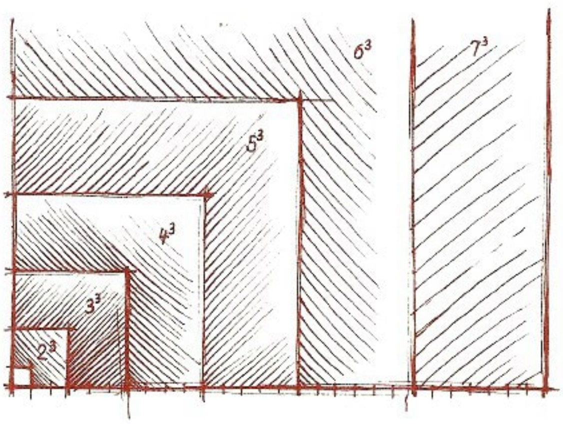
Das größte Feld mit der Nummer 4 ist links vom Spiegel nur einmal vorhanden.
Der Streifen ganz oben zwischen den beiden Türmen hat den gleichen Inhalt. Links gibt es weiterhin zwei Felder mit der Nummer 3, eine Stufe tiefer zwischen den beiden Türmen zwei Streifen vom selben Inhalt, usw.
So erkennt man, dass die Fläche des großen Rechtecks, das von den beiden Türmen nebst dem Zwischenraum gebildet wird und die Fläche $(2 \cdot 4 + 1)(1 + 2 + 3 + 4)$ besitzt, aus drei flächengleichen Teilen besteht.
Da der Inhalt eines Turmes $1^3 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ beträgt, ergibt sich, dass diese Summe ein Drittel der vorhergehenden ausmacht. In voller Allgemeinheit kann daher die Formel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{1}{3}(2n + 1)(1 + 2 + 3 + ... + n)$$

geschrieben werden.
Setzt man für $1 + 2 + ... + n$ den Wert $\frac{1}{2}(n + 1)$ ein und multipliziert aus, dann folgt schließlich für die Summe der ersten n Quadratzahlen

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Fragen wir noch nach der Summe, sagen wir, der ersten 7 Kuben.
Gemeint sind die dritten Potenzen der Zahlen 1, 2 bis 7. Rechnerisch wäre die Frage erheblich mühseliger zu beantworten als geometrisch.



Von einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 ausgehend, zeichne man Quadrate so, das die Seite eines jeden die Seite seines Vorgängers der Reihe nach um 2, 3, 4, 5, 6, 7 übertrifft. Legt man diese Quadrate so übereinander, dass ihre linke untere Ecke übereinstimmt, dann entsteht unsere Figur.
Die aufeinanderfolgenden schraffierten Felder kann man durch je eine Strecke in zwei Rechtecke zerlegen. Bei dem ersten schraffierten Feld betragen die Inhalte der beiden Rechtecke $1 \cdot 2$ und $2 \cdot 3$, mit der Summe $8 = 2^3$.

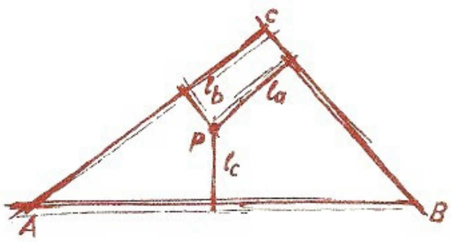
Ähnlich folgen für die übrigen schraffierten Felder der Reihe nach die Inhalte $313, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3$.
Zusammen mit dem ersten Quadrat füllen diese schraffierten Felder gerade das große Quadrat von der Seitenlänge $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ also 28, aus.
Sein Inhalt beträgt folglich 28^2, so dass wir das Ergebnis

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 28^2$$

erhalten. Offensichtlich ist dieses Ergebnis verallgemeinerungsfähig. Für die ersten 100 Kuben gewinnt man so

$$1^3 + 2^3 + ... + 100^3 = 5050^2$$

Zum Schluss noch ein Satz aus der Dreiecksgeometrie, der neu zu sein scheint. Als ich ihn aufstellte, fand ich einen Beweis, der ohne den Inhaltsbegriff auskommt.



Wie es aber zu sein pflegt, fällt der Beweis unter Anwendung des Inhaltsbegriffes kürzer aus, obwohl er dann im Prinzip als weniger einfach gilt. Aus irgendeinem inneren Punkt eines beliebigen Dreiecks fälle man die Lote auf die Seiten. Dann liegt die Gesamtlänge dieser Lote zwischen den Längen der kürzesten und der längsten Höhe des Dreiecks.

Daraus folgt insbesondere, dass im Fall eines gleichseitigen Dreiecks, da in diesem die drei Höhen gleich lang sind, die Gesamtlänge der Lote konstant ausfällt.
Diesen Spezialfall soll schon Viviani gekannt haben, der sich mit Vorliebe als letzten Schüler von Galilei bezeichnete.
Um den anfangs für ein beliebiges Dreieck ausgesprochenen Satz zu beweisen, bezeichne P einen inneren Punkt im Dreieck ABC. Wie üblich, seien die auf den Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ errichteten Höhen mit h_c, h_b und h_a bezeichnet, die Lote aus P auf diese Seiten aber mit I_c, I_b und I_a.
Der Inhalt von ABC setzt sich aus den Inhalten der Dreiecke PAB, PAC und PBC zusammen. so dass

$$aI_a + bI_b + cI_c = ah_a = ch_c$$

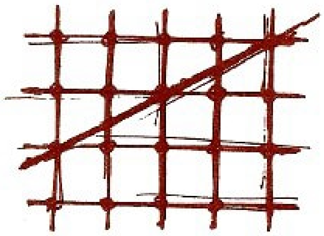
gilt. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \leq b \leq c$ annehmen. Dann ist

$$a(I_a + I_b + I_c) \leq aI_a + bI_b + cI_c = ah_a \quad \text{und} \quad c(I_a + I_b + I_c) \geq aI_a + bI_b + cI_c = ch_c$$

folglich nach Division durch a bzw. c

$$h_c \leq I_a + I_b + I_c \leq h_a$$

4 Kein Silvesterscherz!



Der englische Mathematiker Sylvester stellte 1893 eine Behauptung auf, für die weder er noch seine Zeitgenossen einen Beweis fanden. Die Behauptung lautet:
Es ist unmöglich, endlich viele Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen, in der Ebene so anzugeben, dass auf jeder Geraden, die zwei dieser Punkte verbindet, auch noch ein dritter dieser Punkte liegt.

Diese Formulierung fällt etwas umständlich aus und kann durch eine positive Wendung vereinfacht werden:
Liegen endlich viel Punkte der Ebene nicht alle auf einer Geraden, dann gibt es wenigsten eine Gerade, auf der genau zwei dieser Punkte liegen.
Wird die Voraussetzung fallengelassen, dass die Anzahl der Punkte endlich ist, dann gilt der Satz nicht mehr. Das erkennt man am einfachsten, wenn die Eckpunkte in einem aus gleichgroßen Quadraten bestehenden Netz betrachtet werden.
Jede Gerade. die zwei dieser Eckpunkte verbindet, trifft dann infolge Wiederholung deren gleich unendlich viele.

Bevor wir den Beweis von Kelly aus dem Jahre 1948 für die neue Fassung der Behauptung von Sylvester führen, machen wir einige Bemerkungen dazu, um die Entwicklung mathematischen Ideengutes zu illustrieren.

Vermutlich wurde Sylvester durch eine Arbeit des russischen Kristallographen Fedorow angeregt, die zwei Jahre vorher erschien. Diese Arbeit bietet zum erstenmal eine Übersicht aller 17 Kristallstrukturen, die in der Ebene möglich sind. Vorher, 1869, übersah der große Franzose Jordan eine unter ihnen. 1874 hat zwar Sohncke die fehlende entdeckt, übersah dagegen drei andere, die schon bei Jordan standen.
Die Arbeit von Fedorow geriet dann in Vergessenheit, so dass der Ungar Pólya und der Schweizer Niggli sein Ergebnis 1924 wiederentdecken mussten, eine betrübliche Erscheinung, die leider nicht selten ist.

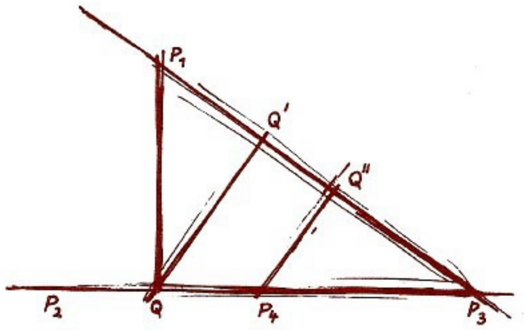
Nun zur Sache!
P_l, P_2, ..., P_n seien die gegebenen Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Man verbinde je zwei unter ihnen durch eine Gerade. Die Anzahl dieser Geraden ist endlich.
Nun sei F' ein Punkt. der nicht auf der Geraden P_jP_k liegt. Die Entfernung des Punktes Pi von der Geraden P_jP_k wird durch die Länge des Lotes gemessen, das von P_i auf P_jP_k gefällt wird.

Man betrachte alle diese Entfernungen der Punkte P_i. Auch ihre Anzahl ist endlich. Daher gibt es eine kleinste unter ihnen. Wir können die Bezeichnungen notfalls so abändern, dass gerade P_1 von P_2P_3 diese kleinste Entfernung besitzt.

Wir behaupten, dass auf der Geraden P_2P_3 keiner von den restlichen Punkten P_1, P_4, P_5, ..., P_n liegt.
Es sei Q der Fußpunkt des Lotes von P_1 auf P_2P_3. Würde etwa der Punkt P_4 auf P_2P_3 liegen, dann müssten mindestens zwei von den drei Punkten P_2, P_3, P_4 auf der einen Seite des Lotes P_1Q liegen. Dabei nahmen wir an, dass keiner dieser drei Punkte mit dem Fußpunkt Q des Lotes zusammenfällt. Sollte aber das der Fall sein, dann überträgt sich unsere nachfolgende Überlegung darauf unmittelbar.

Zwei von den drei Punkten liegen also auf derselben Seite des Lotes. Sagen wir P_3 und P_4, und zwar P_4 näher dem Lot als P_3. Wir fällen noch aus Q und aus P_4 Lote auf die Gerade P_1P_3. Die Fußpunkte dieser Lote seien mit Q' bzw. Q" bezeichnet. Dann gilt $QP_1 > Q'_Q > P_4Q$".

Das aus dem Punkt P_4 auf die Gerade P_1P_3 gefüllte Lot wäre demnach kürzer als das Lot aus P_1 auf P_2P_3. Das steht im Widerspruch zu unserer Annahme, dass P_1Q das kürzeste Lot ist. Damit wurde unsere Behauptung indirekt bewiesen.



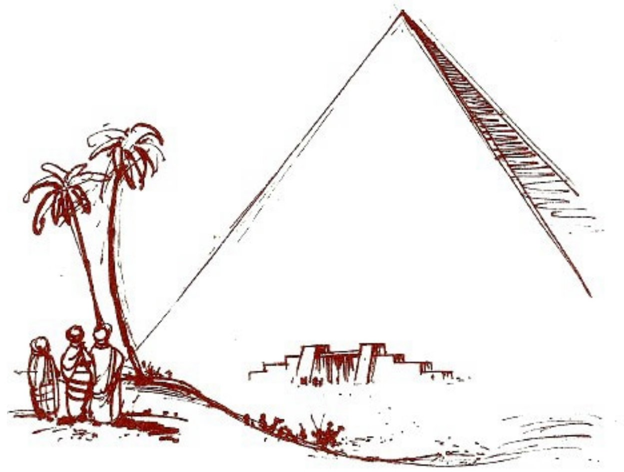
Es sei noch vermerkt, dass 1958 ein Beweis sogar dafür erbracht wurde, dass man mindestens so viele der gewünschten Geraden ziehen kann, auf denen jeweils nur zwei der n angenommenen Punkte liegen, wie die größte in $3n : 7$ enthaltene ganze Zahl beträgt.

5 Weisheit der Pharaonen

Was hat man nicht alles in ihre Grabdenkmäler, die Pyramiden, hineingedeutelt. Gewiss offenbart sich in den Pyramiden ausgeprägter Formsinn, der mit Recht unsere Bewunderung erregt. Doch sind Wunder an Schönheit noch lange nicht Wunder an Verstand. Viel eher möchte man von Wundern an Unverstand reden, wenn man vernimmt, welche tiefe Weisheiten die Pyramiden bergen sollen. Sie wären danach die reinste steingewordene Geometrie voll erhabener Offenbarungen.

Auch Newton glaubte, wie viele seiner Zeitgenossen, die Ägypter hätten Reste einer uralten Wissenschaft besessen, die später ganz verlorenging. Doch konnte man sich damals kein richtiges Bild von den Kenntnissen der Ägypter machen, weil ihre Schrift erst im 19. Jahrhundert entziffert wurde.

Nach Entzifferung der verschiedenen ägyptischen Schriftarten hörten aber die Spekulationen über die Urweisheit der Pyramidenerbauer noch immer nicht auf. So erklärte Herschel 1860: "die Seitenfläche dieser Bauwerke bildet das Quadrat ihrer Höhe".
Das führt zu einem Böschungswinkel von $51°50'$. Der "königliche Astronom von Schottland" Piazzi Smyth stellte Messungen mit einer Genauigkeit von einer Bogenminute an und fand das bestätigt. Bloß - die Pyramiden sind ihrer Verkleidung längst beraubt, so dass es Unfug ist. von dieser Genauigkeit zu reden!

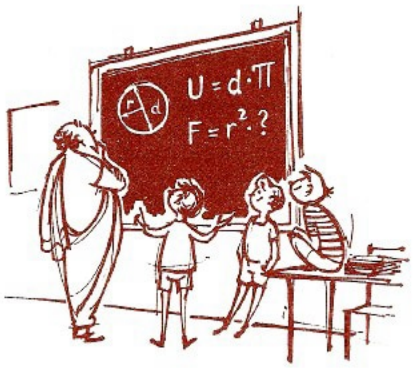


Nicht genug damit, erschien 1921 ein Buch, dessen Verfasser allen Ernstes behauptet, die Ägypter hätten alles von Astronomie wie Atomphysik gewusst, was wir wissen.
Warum hatten sie dann kein Auto und kein Flugzeug? Was sie wirklich wussten, war wenig, das wissen wir heute genau.

Aufschlussreich sind die einleitenden Worte einer $5\frac{1}{2}$ Meter langen und 32 Zentimeter hohen Papyrusrolle: "Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge ... aller Geheimnisse, die enthalten sind in den Gegenständen."

Ein Kulturdenkmal, das auf Ahmes zurückgeht. Nun, der weise Ahmes könnte sich mit einem Schüler der achten Klasse von heute nicht messen. Schon damals mag es Weise gegeben haben, aber abstrakte Begriffe kannte man noch nicht.
Die Vorschriften, die der weise Ahmes gab, er lebte um 1650 v.u.Z., waren lauter einfache Zahlenbeispiele.

Infolge der jährlichen Nilüberschwemmungen waren Feldmesser nötig, um die Eigentumsverhältnisse wiederherzustellen. Auf der Tempelwand in Edfu fand man Schenkungen von viereckigen Feldern.
Die Zahlenangaben der Seiten durch Buchstaben ersetzt. wird der Inhalt mit $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$ angegeben. Im Falle von Dreiecken setzten die Feldmesser $d = 0$ und benutzten so eine rohe Näherungsformel.



Bedeutend besser war ihr Näherungswert für den Kreisinhalt: das Produkt des Durchmesserquadrats mit dem Quadrat von $\frac{8}{9}$. Daraus folgt für die Kreiszahl selber der Näherungswert 3,1605..., während der richtige Wert 3,1415... ausfällt.

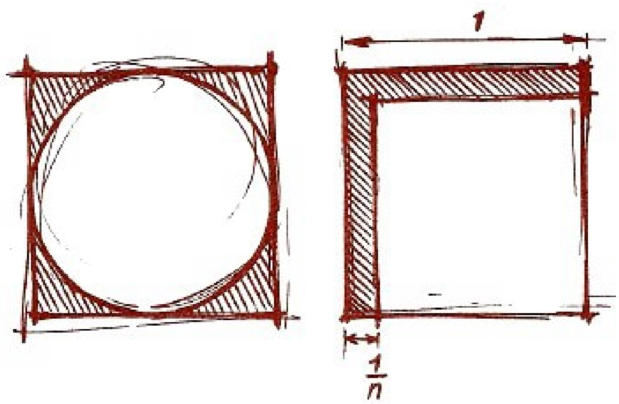
Wie kamen die Ägypter zu ihrem Ansatz?
Ein Spezialist meinte unlängst, dass "ohne neues Textmaterial es wenig Sinn hat, über die Entstehungsgeschichte dieser Formel Vermutungen zu äußern, da der naheliegende Weg offenbar nicht direkt zum Ziel führt".

Trotz des Machtwortes "offenbar" scheint mir, dass ich eine Erklärung gefunden habe, die ganz im Rahmen ägyptischer Überlegungen verläuft und daher befriedigt.
Das 48. Zahlenbeispiel im Papyrus von Ahmes verrät, dass der Ägypter den Kreis mit einem umschriebenen Quadrat verglich. Er wusste auch, dass es dabei auf den Maßstab nicht ankommt.
Denn in einer unvollendet gebliebenen Kammer im Grabe von Seti I. aus der 19. Dynastie ist die Wand in Quadrate aufgeteilt, in die der viel kleinere Entwurf übertragen werden sollte.

Die Ähnlichkeit geometrischer Figuren war also schon damals in der Form von Maßstabsänderungen geläufig. Da nun der Kreis das umschriebene Quadrat nicht ausfüllt, muss sein Inhalt einem kleineren Quadrat gleich sein. Stellt man dieses in das größere hinein, erhebt sich die Frage, wie breit der Rand ist, der wegfällt.
Nimmt man die Seite des ursprünglichen Quadrates als Einheit, so liegt es nahe, die fragliche Breite durch einen Stammbruch anzugeben.
Der Ägypter mit seiner Rechentechnik konnte gar nicht anders. Für die Breite des Randes also $\frac{1}{n}$ gewählt, ergibt sich

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

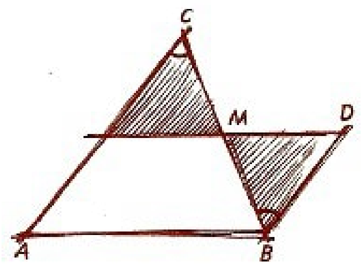
als Inhalt des kleineren Quadrates. Nach dem ägyptischen Ansatz für den Kreisinhalt soll das Vierfache dieses Wertes den Näherungswert der Kreiszahl liefern. Die Werte n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ergeben 1,77 ..., 2,24 ..., 2.56, 2,77 ..., 2,88 ..., 3,06 ..., 3,16 ..., 3,24, unter denen sich die Erfahrung für $n = 9$ entschied.
Wie man sieht, kann man bei Ahmes und seinen Pharaonen, gemessen an dem heutigen Stand der Entwicklung, eher von elementaren Kenntniskeimen als Kenntnissen in der Geometrie reden.



Es geht um die Gleichheit der Inhalte der schraffierten Teile in den beiden Abbildungen.

6 Inhaltsgleiche Figuren

Zunächst kann ein Dreieck ABC in ein inhaltsgleiches Parallelogramm verwandelt werden.
Aus der Mitte M von BC ziehe man eine Parallele zu AB, weiter aus B eine Parallele zu AC. Die beiden Parallelen mögen sich in D schneiden. Dann sind die beiden schraffierten Dreiecke kongruent, weil $CM = BM$ ist, ihre Winkel in M Scheitelwinkel, ihre Winkel in C und B Wechselwinkel sind.

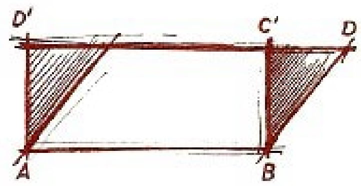


Daher fallen das ursprüngliche Dreieck und das Parallelogramm inhaltsgleich aus.

Weiter kann das Parallelogramm in ein inhaltsgleiches Rechteck verwandelt werden.
Man errichte in den Endpunkten der Grundlinie Lote. Wie aus der Figur ersichtlich, sind die beiden schraffierten Dreiecke kongruent, das Parallelogramm und das Rechteck also inhaltsgleich.
Damit wurde das Dreieck in ein inhaltsgleiches Rechteck von gleicher Grundlinie und halber Höhe verwandelt, was zum Verständnis für die Inhaltsformel des Dreiecks verhilft.

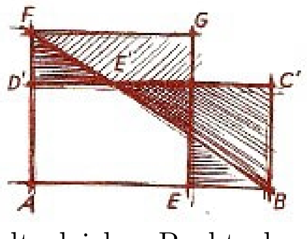
Errichtet man die entsprechenden Rechtecke auch noch über den beiden anderen Dreiecksseiten, dann folgt aus deren Inhaltsgleichheit mit dem Dreiecksinhalt, dass man diesen erhält, welche der drei Seiten man auch mit der halben dazugehörigen Höhe multipliziert.

Schließlich kann das Rechteck $ABC'D'$ in ein inhaltsgleiches Rechteck mit vorgeschriebener Grundlinie AE verwandelt werden. Zunächst nehmen wir an, dass AE kürzer als AB ausfällt, und tragen AE von C' aus in Richtung D' ab, so dass $AE = E'C'$ wird. Die Verlängerung von BE' möge die Verlängerung von AD' in F treffen.



Dann sind die horizontal schraffierten rechtwinkligen Dreiecke kongruent, weil $D'E' = EB$ ist und die Winkel in E' und B gleich ausfallen. Kongruent sind auch die beiden schräg schraffierten rechtwinkligen Dreiecke, weil $FG = E'C'$ ist, und die Winkel in F und E' gleich sind. So erkennt man, dass die Rechtecke $ABC'D'$ und $AEGF$ inhaltsgleich ausfallen.

Sollte unsere Annahme $AE < AB$ nicht von vornherein zutreffen, dann verwandelt man erst $ABC'D'$ in ein inhaltsgleiches Rechteck von der Grundlinie $n \cdot AB$ und der Höhe $\frac{1}{n} \cdot AD'$, wo n eine so große natürliche Zahl darstellt, dass $n \cdot AB > AE$ ausfällt, und geht dann so vor wie im vorhergehenden Absatz.



Auf diese Weise haben wir ein vorgegebenes Dreieck in ein inhaltsgleiches Rechteck von vorgegebener Grundlinie verwandeln können.

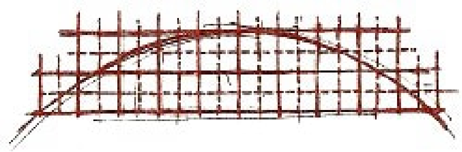
Liegt jetzt ein Vieleck vor, dann kann man es immer durch geeignete Strecken in lauter Dreiecke zerlegen. Jedes dieser Dreiecke ist einem Rechteck mit ein- und derselben Grundlinie, die wir als Einheit wählen dürfen, inhaltsgleich. Werden diese Rechtecke aufeinandergetürmt, so entsteht ein Rechteck auf der Grundlinie 1 von einer Höhe, die als Maßzahl des Flächeninhaltes vom Vieleck gelten kann.
Soviel zum Problem der Inhaltsbestimmung für Vielecke. Die erforderlichen Konstruktio-

nen gelingen unter alleiniger Verwendung des Lineals.

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei nicht geradlinig begrenzten ebenen Figuren!
Hier greift die Höhere Mathematik ein, insbesondere die Integralrechnung. Nur in Spezialfällen kann man auf elementare Verwandlung hoffen. Über eine solche sei hier noch berichtet, weil wir zu ihrer Durchführung eine Überlegung anstellen möchten, die überzeugend ist, ohne den Anforderungen an Strenge vollauf zu genügen, eine Überlegung also, die als Vorbote des mehr und mehr systematischen Vorgehens späterer Zeiten gelten dürfte.

Hippokrates, einem Vorgänger Euklids, gelang es nachzuweisen, dass eine durch zwei Kreisbogen begrenzte Figur, ein Möndchen, einem Dreieck inhaltsgleich ist. Seine entscheidende Einsicht dabei lautet:
Die Inhalte von zwei ähnlichen Kreissegmenten verhalten sich wie die Quadrate der Grundlinien.

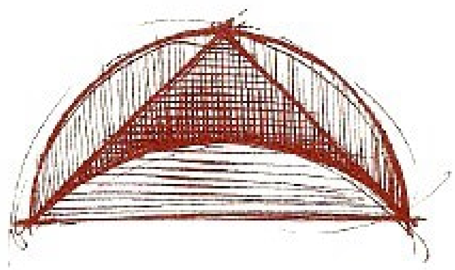
Ähnlich nennt man zwei Kreissegmente, wenn die Tangente in einem Endpunkt mit der Grundlinie den gleichen Winkel bildet. Viel wurde darüber herumgerätselt, wie Hippokrates das wohl begründet haben mochte. Eine Begründung mit seinem Ideengut denke ich mir so:



Zunächst wusste er, dass die Inhalte von Quadraten sich so verhalten wie die Quadrate ihrer Seiten.
Um nun den nächsten Schritt dem Hippokrates zuzutrauen, erinnern wir daran, dass Griechen wie Thales Ägypten oft bereisten.

Wie wir wissen, entdeckte man in den Grabkammern von Seti I., dass Maßstabsänderungen schon damals geläufig waren.
Denkt man sich nun die Ebene mit einem Netz von Quadraten überzogen und das eine Kreissegment daraufgelegt, dann behalte man nur die Quadrate, die ganz im Kreissegment enthalten sind. Vierteilt man die Quadrate des Netzes, dann bleiben die vorhergehenden, wenn auch geviertteilt, erhalten, es kommen aber vielleicht neue von den geviertteilten Quadraten hinzu, die ebenfalls ganz im Kreissegment liegen. Setzt man das fort, dann füllt man das Kreissegment immer vollständiger mit Quadraten aus.
Durch Maßstabsänderung gehe man zum anderen Kreissegment über. Zwei entsprechende Füllungen bestehen aus derselben Anzahl von Quadraten, daher verhalten sich ihre Inhalte ebenfalls wie das Quadrat der Maßstabsänderung.
Da aber die Füllungen den Kreissegmenten beliebig nahe kommen, übernimmt man ihr gleichbleibendes Verhältnis auch für die Inhalte der Kreissegmente. Die Maßstabsänderung wird nun durch das Verhältnis der beiden Grundlinien bestimmt, so dass wir damit schließlich zur Einsicht des Hippokrates gelangt sind.

Mit dieser Einsicht versehen, können wir so vorgehen:



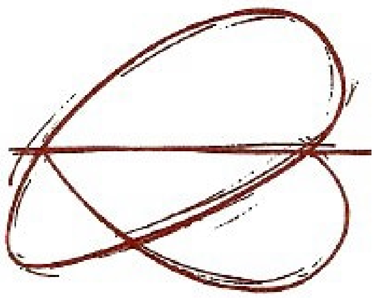
Man errichte über der Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks einen Halbkreis. Dieser bestimmt zwei Kreissegmente mit den beiden Katheten als Grundlinien. Die Hypotenuse ist Grundlinie eines den beiden Kreissegmenten ähnlichen Kreissegments.
Dieses besitzt nach dem Pythagoras und im Sinne der eben gewonnenen Einsicht den Inhalt der beiden Kreissegmente zusammen. Daher ist das Möndchen dem Dreieck inhaltsgleich.

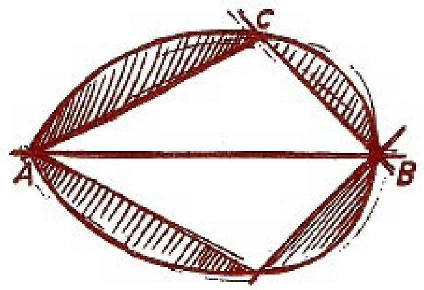
7 Inhaltswettbewerb

Zugelassen zum Wettbewerb sind Flächen in der Ebene, deren Grenzlinie eine feste Länge besitzt. Es ist gleichgültig, ob man für die feste Länge einen Zentimeter oder fünf Kilometer wählt, denn eine Maßstabsänderung berührt unsere Überlegung nicht.
Gibt es nun unter diesen Flächen eine, deren Inhalt am größten ausfällt?

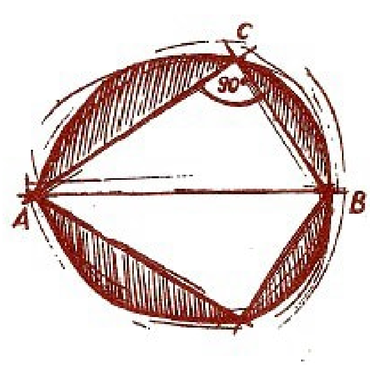
Ja, den Kreis! Wir werden den strengen Nachweis führen, dass allein der Kreis unserer Forderung genügen könnte. Dass er aber der Forderung auch wirklich genügt, können wir mit unseren Mitteln nicht beweisen.

Ohne die Länge der Grenzlinie abzuändern, verwandeln wir jede vorgegebene Fläche so, dass ihr Inhalt nicht abnimmt, sie jedoch symmetrisch in Bezug auf eine Gerade wird.
Man hat dazu irgendeinen Bogen auf der Grenzlinie abzustecken, der halb so lang wie die Grenzlinie ist und zieht eine Gerade durch seine beiden Endpunkte. Sollten die beiden Teile der Fläche, die auf der einen und auf der anderen Seite der Geraden liegen, verschiedene Inhalte haben, spiegeln wir den Flächenteil mit dem größeren Inhalt an der Geraden.
So entsteht eine Fläche, deren Grenzlinie die vorgeschriebene feste Länge besitzt, deren Inhalt zugenommen hat und die symmetrisch zu einer Geraden liegt.





Die beiden Endpunkte des Bogens mit A und B bezeichnet, sei C ein weiterer Punkt auf dem Bogen so, dass der $\angle ACB$ verschieden von 90° ausfällt. Wenn der Bogen nicht gerade ein Halbkreis ist, geht das immer.
Die Fläche besteht jetzt aus den vier schraffierten Möndchen und aus zwei spiegelbildlichen Dreiecken, deren eines das Dreieck ABC ist. Man denke sich jetzt in A, B, C und dem Spiegelbild von C Gelenke angebracht. Dann ist es möglich, das Viereck so zu deformieren, dass der Winkel in C ein rechter Winkel wird. Dadurch vergrößert sich sein Inhalt.



Denn in der neuen Lage sind AC und BC Katheten, so dass AC als Höhe und BC als Grundlinie gelten können. In der ursprünglichen Lage aber, wenn man BC weiterhin als Grundlinie betrachtet, nimmt AC eine solche Lage ein, dass das von C auf BC oder ihre Verlängerung gefüllte Lot kürzer als AC ausfällt.
Die in den letzten beiden Absätzen beschriebenen Operationen vergrößern den Inhalt jeder Fläche, der kein Kreis ist.

Mit Hinblick auf die Gelenke bei der zweiten Operation redet man dabei von einem Viergelenkverfahren. Nur der Kreis bleibt dabei unverändert. Allein der Kreis kann daher unserer Forderung genügen, einen möglichst großen Inhalt zu besitzen.

Kann! Damit ist aber noch nicht erwiesen, dass er wirklich den größten Inhalt hat.
Um das zu zeigen, bedarf man der Höheren Mathematik. Steiner, von dem unser Beweisgedanke stammt, scheint das verkannt zu haben. Den noch fehlenden Nachweis, mit Hilfe der Höheren Mathematik, findet man im Buch von Blaschke "Kreis und Kugel" (2. Aufl. 1956) durchgeführt, einem Buch, das seit seiner ersten Auflage 1916 Generationen von jungen Mathematikern anspornte.

Die Höhere Mathematik lebt vom Grenzübergang. Je nachdem, auf welche Ausdrücke man diesen anwendet, redet man von Differential- oder Integralrechnung. Anfänge davon finden sich schon im Altertum, so bei Archimedes.
Die Methoden gerieten in Vergessenheit und mussten von Kepler und Fermat, um nur zwei Namen zu nennen, wiederentdeckt und gleich weiterentwickelt werden.
Zur Höheren Mathematik wurden sie dann von Leibniz und Newton voneinander unabhängig ausgebaut. Die heutigen Bezeichnungen sind ein Verdienst von Leibniz, der die berechtigten Worte fand:

"Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, dass sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie das innere Wesen der Suche mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert. Von solcher Beschaffenheit sind aber die Bezeichnungen, die ich angewandt habe und durch die ich oft die schwierigsten Probleme auf wenigen Zeilen löse."

Näheres darüber findet man in meinem Buch "Eingefangenes Unendlich" (3. Aufl. 1962).

Noch im ganzen 18. Jahrhundert waren die Mathematiker dabei auf ihr Fingerspitzengefühl angewiesen. Es gab noch nicht den strengen Begriff des Grenzüberganges, den erst Cauchy 1823 prägte. Zu welchen Fehlschlüssen aber das Fehlen der präzisen Begriffsbildung führte, zeigt ein Beispiel von Zenon, das er vor $2\frac{1}{2}$ Jahrtausenden ersonnen hatte.

Er setzte voraus, dass Achilles in der Sekunde 10 Meter (dieser Anachronismus macht es uns leichter) zurücklegt, eine Schildkröte dagegen nur einen Meter.

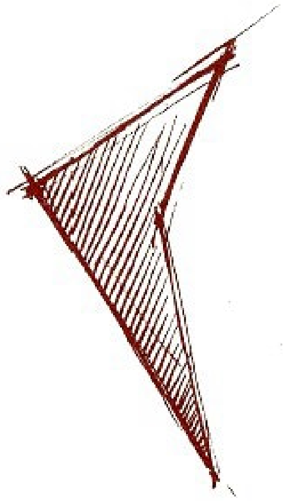
Gibt Achilles der Schildkröte einen Vorsprung von 10 Metern, dann holt er sie nimmer ein. Denn, argumentiert Zenon, während Achilles die ersten 10 Meter schafft, ist die

Schildkröte schon einen Meter weiter. Und während Achilles auch noch diesen Meter zurücklegt, ist die Schildkröte schon wieder weiter, wenn auch nur um 10 Zentimeter.
Der Vorsprung der Schildkröte nimmt zwar ab, bleibt aber immer noch Vorsprung. Damit, so meinte Zenon, ist nachgewiesen, dass Achilles die Schildkröte nicht einholt.

Gewiss, das können wir bestätigen, in den Zeiten, die Zenon in seiner Überlegung allein berücksichtigte. Die Gesamtdauer dieser Zeiten muss aber weniger als 2 Sekunden ausmachen. Denn in 2 Sekunden hat Achilles bereits 20 Meter zurückgelegt, die Schildkröte aber nur 2, so dass Achilles in 2 Sekunden die Schildkröte um 8 Meter überholt hat.
Den Trugschluss des Zenon kann heute jeder Oberschüler aufdecken. Die Zeiten, die Zenon heranzog, ergeben nämlich eine Gesamtdauer von nur $\frac{10}{9}$ Sekunden. Während dieser Zeit überholt Achilles die Schildkröte tatsächlich nicht, wohl aber im nächsten Augenblick.

8 Dreimal konvex

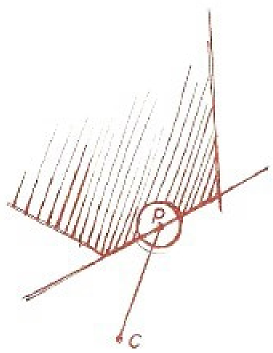
Liegt ein Flächenstück mit Einbuchtungen in der Ebene vor und füllt man diese aus, dann vergrößert man die Fläche und verringert die Länge der Grenzlinie.
Aus dieser Bemerkung folgt schon, dass Flächenstücke mit Einbuchtungen keine Aussichten haben, im "Inhaltswettbewerb" zu siegen. Flächenstücke ohne Einbuchtungen (wobei wir weiter daran festhalten, dass sie eine einzige Grenzlinie besitzen, also ohne Löcher sind) können aber durch folgende Forderung gekennzeichnet werden:

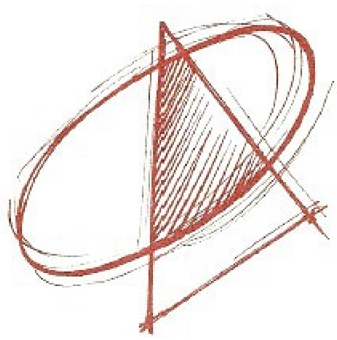


Gehören die beiden Punkte A und B dem Flächenstück an, dann gehört ihm auch die ganze Strecke AB an. Solche Flächenstücke nennt man konvex. Man redet auch von konvexen Figuren, obschon diese Redewendung allgemeiner ist, denn sie umfasst auch räumliche Gebilde, um die wir uns jedoch nicht weiter kümmern. Beispiele von konvexen Figuren sind die Flächen von Dreiecken, Rechtecken und Ellipsen. Im Gegensatz dazu ist nebenstehendes Viereck nicht konvex.

Unter dem Durchschnitt von Figuren versteht man die Gesamtheit von Punkten, die jeder der Figuren angehören. Mit dieser Ausdrucksweise gilt, dass der Durchschnitt von konvexen Figuren selber konvex ausfällt.
Denn gehören A und B dem Durchschnitt an, besagt das, dass A und B jeder der konvexen Figuren angehören, daher auch die Strecke AB, die folglich auch dem Durchschnitt angehört. Genau das wurde aber behauptet.

Wir sahen schon, dass es Vierecke gibt, die konvex sind, und solche, die nicht konvex sind. Das gilt für Vielecke allgemein, so dass die Voraussetzung der Konvexität eine wirkliche Einschränkung bedeutet.
Die konvexen Vielecke entstehen als Durchschnitt von endlich viel Halbebenen. Verlängert man irgendeine Seite von einem konvexen Vieleck rechts und links zu einer Geraden, dann liegt das Vieleck auf der einen Seite dieser Geraden.

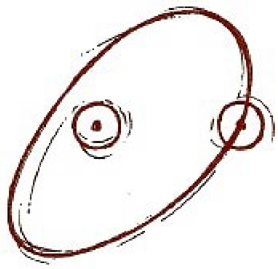




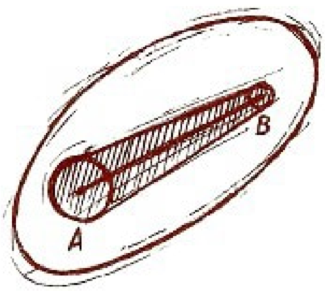
P sei ein Punkt, der zwischen den Endpunkten der Seite liegt. In einem kleinen Kreis um P liegen auf der einen Seite der Geraden lauter Punkte des Vielecks, auf der anderen Seite gar keine. Sollte es nun in der Halbebene der letzteren Seite einen Punkt C des konvexen

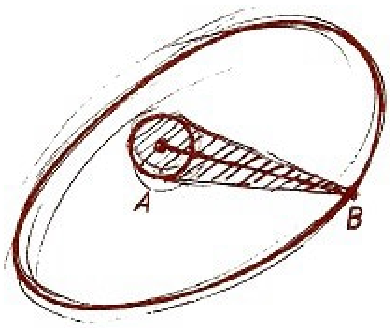
Vielecks geben, dann müsste die ganze Strecke CP dem Vieleck angehören, obschon der Halbkreis frei von Punkten des Vielecks ist.
Das konvexe Vieleck liegt daher immer in Halbebenen, begrenzt durch Geraden, die je eine Vieleckseite enthalten. daher auch im Durchschnitt dieser Halbebenen.

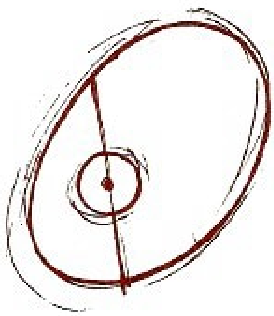
Um weitere Feststellungen zu machen, führen wir den Begriff eines inneren Punktes ein. So heißt ein Punkt, der in einem Kreis liegt, dessen Punkte alle der Figur angehören.
Ein Punkt auf der Grenzlinie ist daher kein innerer Punkt. Er heißt Randpunkt. Sind nun A und B innere Punkte einer konvexen Figur, dann besteht die ganze Strecke AB aus lauter inneren Punkten. Denn zwei Kreise um A und um B gehören ganz der Figur an, daher ihre beiden gemeinsamen Tangenten, folglich alle Strecken, die Punktepaare auf diesen Tangenten verbinden, damit aber die ganze schraffierte Fläche, in der AB verläuft. Ist dagegen etwa B Randpunkt, dann sind alle Punkte von AB bis auf B selbst innere Punkte, wie man es an Hand der schraffierten Fläche erkennt.

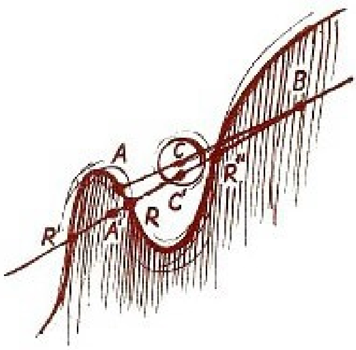


Wir betrachten jetzt beschränkte konvexe Figuren, mit anderen Worten Figuren, die man in einem Kreis mit endlichem Radius unterbringen kann.
Eine Gerade, die durch einen inneren Punkt der Figur geht, ragt auf beiden Seiten hinaus. Da sie selber eine konvexe Figur darstellt, ist ihr Durchschnitt mit der konvexen Figur konvex, also eine Strecke, deren Endpunkte Randpunkte sind.
Die Umkehrung davon gilt ebenfalls, so dass beschränkte konvexe Figuren auch dadurch charakterisiert werden können, dass auf jeder Geraden, die durch einen inneren Punkt geht, zwei Randpunkte liegen.
Wir müssen dazu noch nachweisen, dass bei einer beschränkten nicht konvexen Figur es stets eine Gerade durch einen inneren Punkt gibt, auf der mindestens drei Randpunkte liegen.

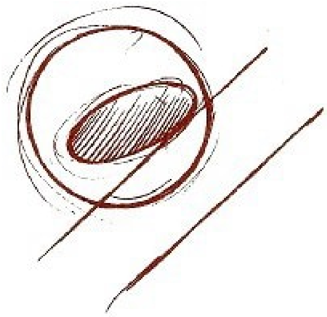




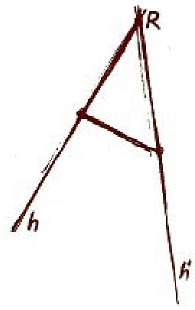




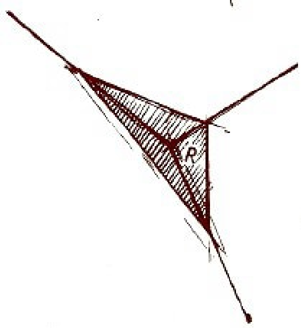
Zunächst gibt es dann bestimmt eine Strecke AB, deren Endpunkte A und B der Figur angehören, während ein Punkt C zwischen A und B ihr nicht angehört. Ungünstigenfalls ist A Randpunkt. Dann aber gibt es in beliebiger Nähe von A einen inneren Punkt A'. Die Strecke $A'B$ verläuft so, dass ein Teil von ihr in einem beliebig kleinen Kreis um C liegt. Da jedoch C nicht der Figur angehört, gilt das für alle Punkte dieses Kreises um C. Daher enthält auch die Strecke $A'B$ einen Punkt C', der nicht der Figur angehört, während A' ein innerer Punkt und B ein weiterer Punkt der Figur ist.



Zwischen A' und C' muss es folglich einen Randpunkt R geben, weiter auf der Verlängerung der Strecke über A' hinaus einen Randpunkt R' wegen der Beschränktheit der Figur und, falls B innerer Punkt sein sollte, auch noch zwischen C' und B den Randpunkt R''.
Auf der Geraden durch den inneren Punkt A' liegen somit mindestens drei Randpunkte. Sollte B, abweichend von der Zeichnung, kein innerer Punkt sein, dann übernimmt B die Rolle von R''.



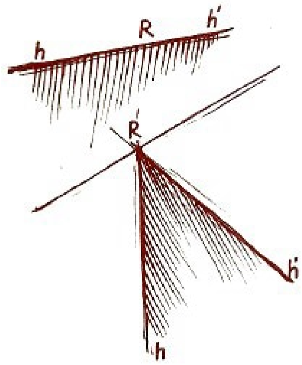
Es fehlt uns noch der Begriff der Stützgeraden. So heißt eine Gerade, die mindestens einen Randpunkt, aber keinen inneren Punkt der konvexen Figur enthält.
Daraus folgt, dass die Figur in nur einer der beiden Halbebenen liegen kann. Im Falle einer beschränkten konvexen Figur gibt es immer Stützgeraden. Man zieht zunächst eine Gerade, die ganz außerhalb eines Kreises verläuft, der die Figur enthält. Verschiebt man eine solche Gerade parallel zu sich bis zur ersten Berührung mit der Figur, dann erhält man eine Stützgerade.



Durch jeden Randpunkt R einer beschränkten konvexen Figur geht mindestens eine Stützgerade. Man verbinde R mit allen Punkten der Figur durch Strahlen h, h', ... Jeder Strahl zwischen h und h' gehört zu unseren Strahlen, weil die eingezeichnete Strecke infolge der Konvexität zur Figur gehört.

Dreht man h möglichst weit nach links, h' nach rechts, dann bestimmen sie einen Winkel, in dem die konvexe Figur liegt. Dieser schraffierte Winkel kann 180° nicht übersteigen. Sonst würde die eingezeichnete Strecke infolge der Konvexität zur Figur gehören, damit aber jeder Strahl durch R, so dass R innerer Punkt wäre.
Denn auf jedem von drei Strahlen, die von R ausgehen, liegt ein Punkt der Figur. Das schraffierte Innere des von den drei Punkten aufgespannten Dreiecks gehört aber infolge der Konvexität selber der Figur an.

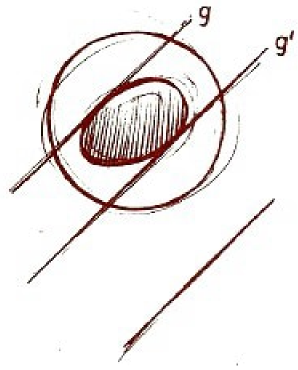
Der schraffierte Winkel kann also höchstens 180° betragen oder aber kleiner ausfallen. Im ersten Fall bilden die Strahlen h und h' eine Stützgerade, im zweiten ist jede Gerade durch R. die außerhalb des schraffierten Winkels verläuft, eine Stützgerade.



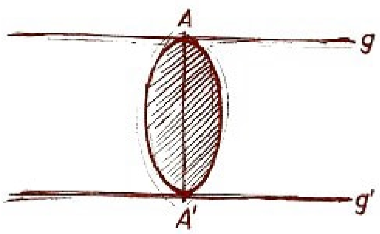
Die Umkehrung gilt auch: Ist eine beschränkte Figur nicht konvex, dann geht durch einen ihrer Randpunkte keine Stützgerade. Um das einzusehen, greifen wir auf die Figur zurück, an der wir vorhin die Existenz von mindestens 3 Randpunkten nachgewiesen haben.
Wir behaupten, durch R'' geht keine Stützgerade. Zunächst ist die Gerade durch R'', auf der A' liegt, keine Stützgerade, weil A' ein innerer Punkt ist. Irgendeine andere Gerade durch R'' ist aber ebenfalls keine Stützgerade, weil die Punkte A' und B nie auf derselben Seite von ihr liegen.

Beschränkte konvexe Figuren sind also solche, die durch jeden Randpunkt mindestens eine Stützgerade besitzen. Das ist eine dritte Charakterisierung von beschränkten konvexen Figuren.

Abschließend noch einige Bemerkungen über Stützgeraden.
Zieht man im Falle einer beschränkten konvexen Figur eine Parallele zu der Stützgeraden g auf der Seite, wo die Figur liegt, aber außerhalb des Kreises, der die Figur enthält, und verschiebt sie parallel zu sich bis zur ersten Berührung mit der Figur, dann erhält man eine zu g parallele Stützgerade g'.
Die Figur liegt im Streifen zwischen den beiden Stützgeraden g und g'. Wiederholung in allen möglichen Richtungen führt zur Gesamtheit aller Abstände von Stützgeradenpaaren.



Diese Gesamtheit hat eine endliche obere Grenze, die zugleich obere Grenze aller Entfernungen von Punktepaaren der Figur ist und Durchmesser heißt.
Im Falle eines Kreises ist es der übliche Durchmesser.

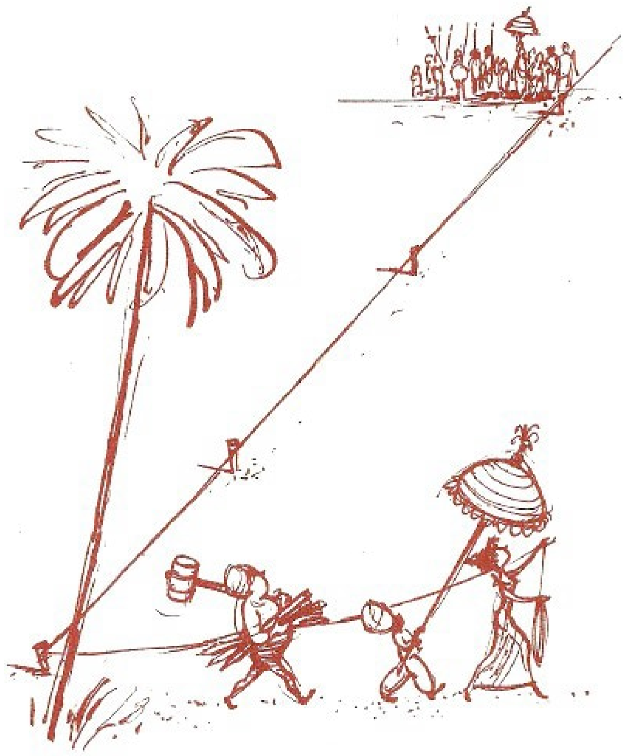


Besitzt der Abstand des Stützgeradenpaares g und g' den Wert der oberen Grenze, dann liegt auf g genau ein Punkt A, auf g' genau ein Punkt A' der Figur, und die Strecke AA' steht senkrecht auf g wie auf g'.
Sonst würde das auf der Richtung von AA' senkrecht stehende Stützgeradenpaar einen größeren Abstand besitzen, als der Abstand von g und g' voneinander beträgt, obschon dieser Abstand maximal sein sollte.

Würde es auf g außer A einen weiteren Punkt B geben, dann wäre BA' größer als AA', was ebenfalls nicht angeht.

9 Verhinderte Grenzgänger

Prinzessin Dido war mit Sichäus glücklich verheiratet. Ihrem Bruder dagegen fehlten zu seinem Glück die Schätze ihres Mannes. Er hatte die prinzliche Idee, den Schwager zu ermorden, um die Schätze dann zu kassieren.
Da sich Dido sagen musste, ihr Brüderchen würde keine halbe Arbeit leisten, floh sie mit den Schätzen.
Der Lyderkönig Jarbas nahm sie liebend gern auf. Vielleicht wegen ihrer Schönheit, vielleicht auch wegen der Schätze. Wie viele Herrscher schätzte auch er Schätze und Schätzchen.
Zunächst stellte er Dido soviel Land zur Verfügung, wie sie mit einer Ochsenhaut umspannen konnte. Dido zerschnitt diese in feine Streifen und gründete so Byrsa, die spätere Burg von Karthago.



Von da ab kennt die Sage zwei verschiedene Lesarten. Will man den Griechen Glauben schenken, so stellte Jarbas der Dido unentwegt nach, doch sie ging lieber ins Feuer. Die Römer dagegen lassen sie aus Liebeskummer um den treulosen Helden Äneas ins Feuer gehen.
Gehupft wie gesprungen, könnte man zu soviel Liebe lieblos sagen, weil ja Dido in beiden Fällen auf dem Scheiterhaufen endete. Immerhin waren die Motive verschieden und gestatteten möglicherweise Rückschlüsse auf die beiden Völker. Soweit die Sage mit meinen nicht sagenhaften Kommentaren.

Von der Sage angeregt, fragen wir, ob es möglich ist. eine Postkarte so aufzuschneiden, dass ein geschlossenes Band entsteht, durch das ein dressierter Löwe den wohlbekannten Zirkussprung wagt. So unerwartet es auch klingen mag, ist die Frage mit einem entschiedenen Ja zu beantworten. Zur richtigen Antwort soll folgende Überlegung verhelfen.

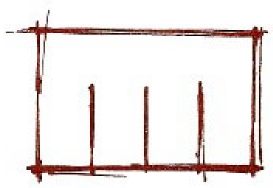
Ein ganz gewöhnliches geschlossenes Band, so wie wir es im Sinn haben, besitzt zwei voneinander getrennte Ränder. Diese stellen zwei geschlossene Linien dar, die weder sich selbst noch einander kreuzen. Wir nennen sie die beiden Grenzlinien und behaupten, dass der Postkartenrand nur einer der beiden Grenzlinien angehört, sich also nicht auf beide verteilen kann.
Den Nachweis für diese Behauptung führen wir indirekt. Wir nehmen mit anderen Worten an, dass dem nicht so ist, ein Teil des Postkartenrandes also der einen, der übrige Teil der anderen Grenzlinie angehört.
Jede der beiden Grenzlinien besteht dann aus endlich vielen streckenförmigen Teilen des zerschnittenen Postkartenrandes und dazwischen gefügten Kurvenbogen.

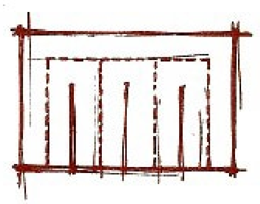
Auf der noch nicht zerschnittenen Postkarte muss es infolgedessen zwei benachbarte Stre-

cken geben, von denen die erste der einen, die zweite der anderen Grenzlinie angehört. Man braucht ja nur irgendeine der Strecken zu betrachten. Sie gehört der einen der beiden Grenzlinien an. Vielleicht gehört schon eine der beiden Nachbarstrecken der anderen Grenzlinie an.
Wenn nicht, betrachtet man die anschließenden Nachbarn links und rechts und wiederholt das so lange, bis man schließlich die erste Strecke findet, die der anderen Grenzlinie angehört. Da es auch Strecken der letzteren Art geben soll, muss dieser Fall endlich einmal eintreten. So kommt man zu zwei benachbarten Strecken, von denen die eine der ersten, die andere der zweiten Grenzlinie angehört.

Die beiden benachbarten Strecken besitzen nun einen gemeinsamen Punkt, in dem sie aneinanderstoßen. Dieser Punkt müsste deshalb gemeinsamer Punkt der beiden Grenzlinien bleiben, obschon diese getrennt liegen.
Der Widerspruch ergab sich aus der Annahme, der Postkartenrand gehöre nicht nur der einen der beiden Grenzlinien an, daher müssen wir diese Annahme fallenlassen.

Daraufhin wollen wir uns mit derjenigen Grenzlinie näher befassen, der unser Postkartenrand angehört. Wie wir schon bemerkt haben, zerfällt der Postkartenrand in Strecken, zwischen denen die eingefügten Kurvenbogen liegen. Jeder dieser Bogen kann durch einen Streckenzug ersetzt werden, wenn dieser sich nur eng genug an den Bogen schmiegt. Das trifft zu, sobald die einzelnen Strecken des Zuges klein genug ausfallen. Man kann übrigens statt Bogen gleich Strecken beim Schneiden verlangen.
Da nun beide Grenzlinien reichlich lang ausfallen müssen, um ein Band zu haben, durch das der Löwe hindurch kann, geht es jetzt um das Anbringen von Strecken so, dass diese mit dem Postkartenrand zusammen eine lange Grenzlinie ergeben.



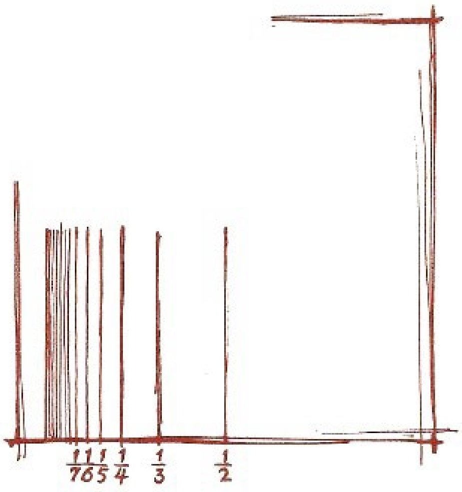


Das kann durch parallele Einschnitte in die eine Längsseite der Postkarte geschehen. Man erhält so zunächst nebenstehendes Bild. Vermehrt man die Anzahl der Einschnitte gehörig, dann verlängert man die Grenzlinie nach Belieben.
Wie findet man aber die zweite Grenzlinie?
Denkt man an das Band, das entstehen soll, dann wird man sich sagen, dass sich die einzelnen Abschnitte der beiden Grenzlinien paarweise gegenüberliegen müssen. Das gibt einen Fingerzeig, wie man das zweite Streckensystem anlegen soll, das die zweite Grenzlinie liefert. Im Bild wurde es gestrichelt eingezeichnet und erinnert an einen Kamm. Damit liegt die richtige Antwort vor, wie man sich durch Aufschneiden entlang sämtlicher eingezeichneter Strecken selber überzeugen kann.

Das Herstellen einer Grenzlinie durch Einschnitte in den Rand kann zu einer paradoxen Einsicht führen, die jegliche Anschauung übersteigt. Man würde, ohne sich zu besinnen, wetten, dass jeder Randpunkt aus dem Inneren so erreichbar ist, dass er erst ganz am Ende eines Weges liegt, der sonst aus lauter inneren Punkten besteht. Das braucht aber keineswegs zu stimmen!

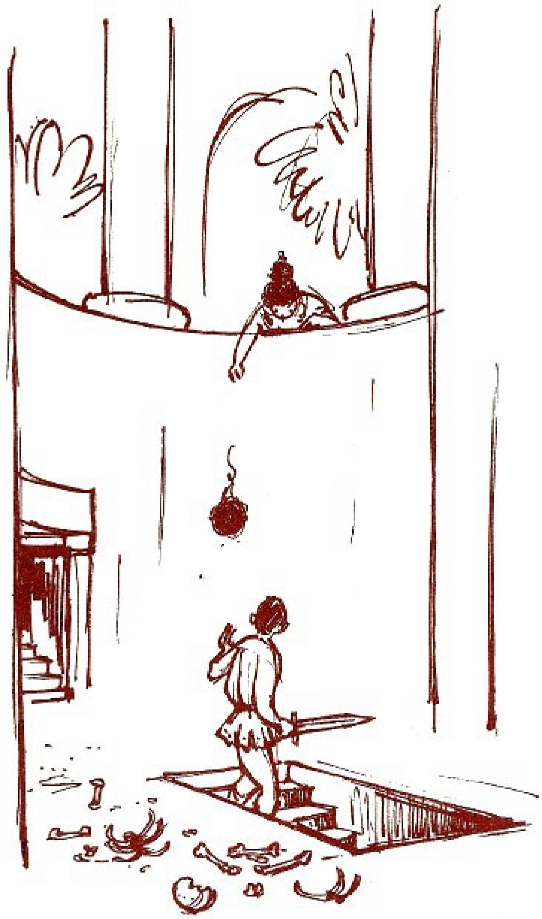
Man denke sich am unteren Rand des Einheitsquadrates senkrechte Einschnitte von der

Höhe $\frac{1}{2}$ angebracht. Sie sollen vom linken Rand die Entfernungen 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... haben.
Wie kann man dann aus einem inneren Punkt zu einem Randpunkt an der linken Quadratseite unterhalb der Höhe $\frac{1}{2}$ gelangen, ohne vorher andere Randpunkte passiert zu haben?



Überhaupt nicht! Das liegt offenkundig daran, dass sich die Einschnitte nach links häufen. Es ist einfach unmöglich. zum gewünschten Randpunkt zu gelangen. ohne vorher unendlich viel Einschnitte passiert zu haben. So verwickelte Verhältnisse gibt es. Verhältnisse, die ganz außerhalb der Gedankenwelt der Schulgeometrie liegen.

10 Überlistete Irrgärten



Die Insel Kreta war im grauen Altertum ein Land von blühender Kultur, das Abenteurer wohl anzulocken vermochte. Doch herrschte dort der Sage zufolge die grausame Sitte, den Fremden in einen unterirdischen Irrgarten zu sperren, in dem ein schrecklicher Unhold, halb Mensch, halb Stier, und darum Minotaurus genannt, hauste.
Genauer besehen, war das wohl Selbstschutz der Inselbewohner gegen Heimsuchungen durch Seeräuber oder Helden. Man gab dieser Maßnahme einen religiösen Anstrich, die sie unantastbar machte; zudem verschaffte sie den Priestern erhöhte Geltung.

Unangefochten von dieser Gefahr, wagte es der Grieche Theseus, auf Kreta zu landen. Es ging schief, und er wurde gefangengesetzt. Er sollte Opfer des Minotaurus werden.
Die schöne Königstochter Ariadne - Königstöchter sind in Sagen immer sagenhaft schön - verliebte sich in den Helden und wünschte ihn daher zu retten.

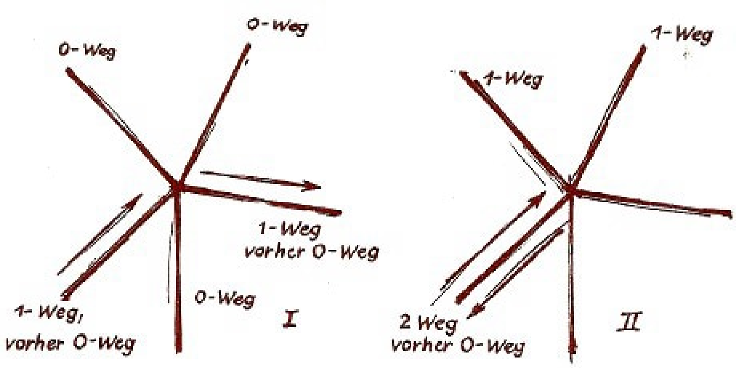
Vielleicht war sie selber so schlau, vielleicht hatte sie auch eine in Märchen und Sagen häufig vorgesehene Amme, die sie beriet; jedenfalls fand sie eine Rettung.
Sie gab ihrem Theseus einen Garnknäuel mit, dessen Ende er am Eingang des Irrgartens befestigen und den er im Wandern allmählich abwickeln sollte. Wenn er dann den Faden wieder aufwickelte, führte es zum Happy-End, das diesmal buchstäblich an einem Faden hing.

Dabei hätte es aber passieren können, dass Theseus dem Minotaurus gar nicht begegnet und folglich kein Held geworden wäre.
Wir wollen ihm dagegen dazu verhelfen! Zunächst versehen wir unseren Heldenanwärter an Stelle eines Garnknäuels mit Leuchtmasse. Diese könnte man notfalls von alten Baumstümpfen abkratzen, die schon damals leuchteten.

Mit dieser Leuchtmasse zeichne der Held unterwegs Anfang und Ende jedes Weges, der von Kreuzung zu Kreuzung führt. Ebenso Sackgassen. Ein noch nicht begangener Weg möge O-Weg heißen, ein ein- bzw. zweimal begangener Weg 1-Weg bzw. 2-Weg.
Beim zweiten Begehen eines Weges möge der Held noch eine zweite Leuchtmarke am Anfang und Ende des 2-Weges anbringen. Wenn er sich dann an den Leuchtmarken orientiert und jeden Weg höchstens zweimal zurücklegt, findet er bestimmt den Ausgang. Nur die Gewähr hat er noch nicht, alle Kreuzungen aufgesucht zu haben!

Wie unser Held auch gewandert ist, gibt es an allen Kreuzungen X, von der allerersten Kreuzung K seiner Wanderung abgesehen, immer eine gerade Anzahl seiner Leuchtmarken, weil er unterwegs eine bei der Ankunft und die andere beim Abmarsch anbrachte. Die Maximalzahl in X beträgt die doppelte Anzahl in X mündender Wege.

Nun müssen wir unseren Helden noch mit weiteren Vorschriften versehen, damit er den Minotaurus auch wirklich trifft.
Diese Vorschriften gewährleisten allerdings, wenn auch unerwünscht, noch mehr, nämlich, dass der Held am Ende jeden Weg doppelt zurückgelegt hat oder, anders ausgedrückt, alle Wege in 2-Wege verwandelte. Dazu müssen wir aber noch voraussetzen, dass jede Kreuzung von K aus erreichbar ist, sozusagen "wild", ohne die Vorschriften dabei zu befolgen.



Die angekündigten Vorschriften lauten aber wie folgt:

I : Eine noch nicht begangene Kreuzung verlasse man auf einem O-Weg.

II : Gelangt man auf einem O-Weg an eine schon begangene Kreuzung, dann kehre man auf demselben Weg um.

III : Gelangt man an eine schon begangene Kreuzung auf einem 1-Weg, dann setze man die Wanderung, wenn möglich, auf einem O-Weg fort.

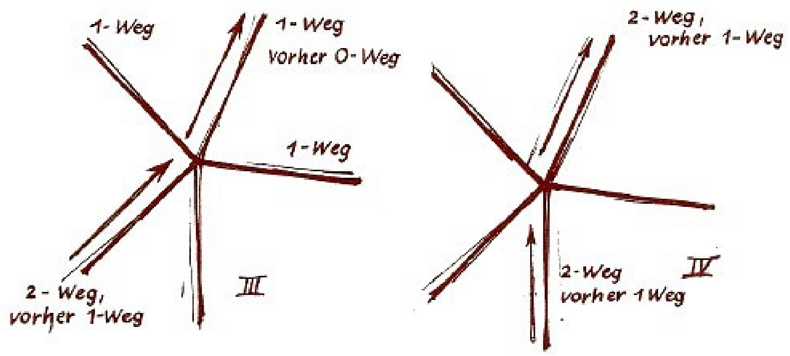
IV : Ist ein O-Weg nicht mehr vorhanden, so nehme man einen 1-Weg.

Zunächst muss in $X \neq K$ genau eine von diesen sich gegenseitig ausschließenden vier Vorschriften unbedingt anwendbar sein. Die Ankunft in X bedeutet nämlich die Erhöhung der geraden Leuchtmarkenzahl um eins, so dass die gerade Maximalzahl damit noch nicht erreicht wurde. Daher ist ein "vorschriftsmäßiges" Weiterwandern im Sinne der vier Vorschriften möglich.

Man denke sich die Wanderung so lange wie möglich fortgesetzt. Sie fällt endlich aus, weil I bis IV jeden Weg höchstens doppelt begehen lassen, und muss nach dem vorhergehenden Absatz in K enden. Dabei wurden sämtliche Wege doppelt zurückgelegt.
K wurde nämlich schon zu Anfang passiert, so dass K eine begangene Kreuzung ist. Daher kann der letzte Weg XK kein O-Weg auf dem Rückmarsch gewesen sein, weil der Held sonst nach II von K nach X weiterwandern müsste.

Nach beendeter Wanderung ist also XK ein 2-Weg. Nach Rückkehr des Helden mündet in X kein O-Weg mehr ein. Denn XK war vorher ja ein 1-Weg, daher X bereits begangen, so dass im Falle eines O-Weges der Held nach III diesen hätte gehen müssen an Stelle von XK.

Gelangte der Held auf dem Rückmarsch aus Y nach K, dann war YX vorher ein 1-Weg, weil die Wanderung sich sonst nach II mit XY statt mit XK fortgesetzt hätte. Daher stellt Y eine begangene Kreuzung dar, für die man ähnlich wie vorhin für X schließt, dass auch in sie kein O-Weg einmünden kann.



Schritt für Schritt, richtiger Kreuzung für Kreuzung, zurückverfolgend, erkennt man so, dass in keine der passierten Kreuzungen ein O-Weg einmünden kann und die Wege XK, YX, usw. lauter 2-Wege sind.

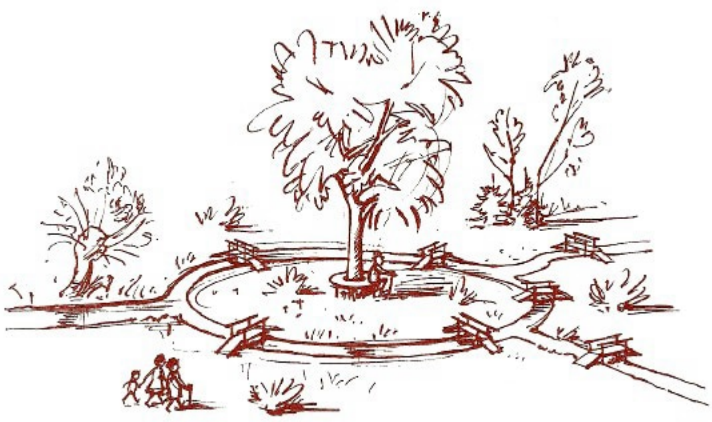
Es bleibt noch nachzuweisen, dass der Held dabei durch jede Kreuzung des Labyrinths wanderte. Das folgt aus der Erreichbarkeit:
Sind A und B zwei beliebige Kreuzungen, dann kann man von K nach A wie B ”wild” wandern. Wandert man also erst von A nach K in entgegengesetzter Richtung wie vorhin, von dort weiter nach B, dann bedeutet das eine Möglichkeit, von A nach B zu gelangen. Ist jetzt B eine vom Helden passierte Kreuzung, A aber eine solche, die er nicht passiert haben soll, dann gibt es auf der Wanderung von A nach B eine erste Kreuzung C, die der Held passierte. In diesem C müsste aber sinngemäß ein O-Weg münden, ein Widerspruch, der aus der Existenz von Kreuzungen folgte, die der Held angeblich nicht passierte.

Bemerkenswert ist, dass jede ”wilde” durch eine ”vorschriftsmäßige” Wanderung ersetzt werden kann, weil ja der Held unterwegs sämtliche Kreuzungen passiert.

11 Wanderers Erleuchtung

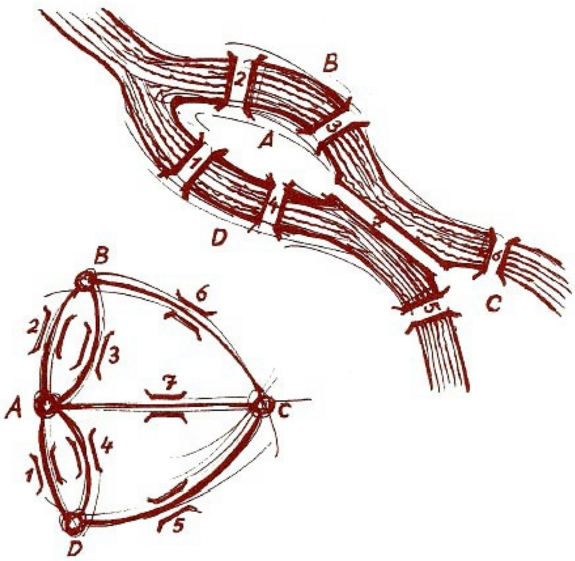
Wiederholt sind uns schon Überlegungen begegnet, die der Schulgeometrie wesensfremd sind. In abstrakter Fassung kennen sie weder Maß noch Gerade.
Sie beschäftigen sich mit Lageverhältnissen, die bei stetiger Verzerrung erhalten bleiben. Denkt man sich eine Gummihaut als Zeichenebene, dann muss die Aussage nach wie vor stimmen, wie die Gummihaut auch verzerrt wurde. Ein Kreis geht dabei in eine abenteuerliche geschlossene Linie über, man kann aber bei dieser immer noch vom Inneren reden, hervorgegangen aus dem Kreisinnern.

Überlegungen dieser Art bilden heute einen selbständigen Teil der Geometrie, Topologie genannt, die bereits selber verschiedene Zweige kennt.
Dido und Theseus hätte die Topologie von Nutzen sein können, bloß gab es sie damals noch nicht. Erst Leonhard Euler verdankt man ihre Anfänge, obwohl bereits bei Descartes und Leibniz Ansätze hierzu vorhanden waren. Euler stieß durch die Beschäftigung mit einer Frage darauf, die wir zunächst ebenfalls in Angriff nehmen, ohne gleich die Allgemeinheit bei Euler anzustreben.



Könnte ein Spaziergang über sämtliche Brücken unserer Zeichnung führen, ohne dass eine Brücke zweimal überschritten wird?
Man könnte versuchen, die Aufgabe durch Probieren zu lösen. Bei sieben Brücken gibt es aber recht viel verschiedene Ansätze, abgesehen davon wäre ein solches Vorgehen unbefriedigend.

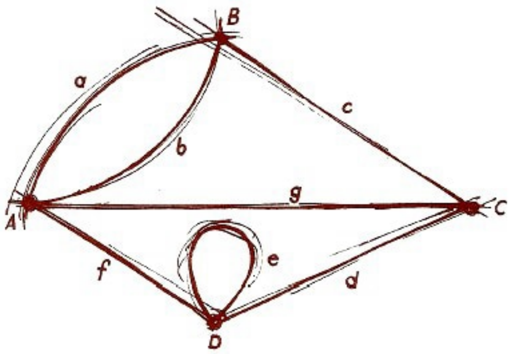
Daher überlegen wir lieber so: Von den insgesamt vier Gebieten gibt es drei, in die je drei Brücken führen. Um jede der drei Brücken eines solchen Gebietes nur einmal zu passieren, gibt es nur zwei Möglichkeiten. Entweder betritt man zweimal das Gebiet und verlässt es nur einmal, oder aber man betritt es nur einmal und verlässt es zweimal. Im ersten Fall betritt man das Gebiet von außerhalb kommend und endet mit dem Spaziergang ebendort, im zweiten Fall dagegen beginnt der Spaziergang im Gebiet selbst.



Jedes der drei Gebiete müsste also für Anfang oder Ende des Spazierganges herhalten. Da jedoch jeder Spaziergang nur einen Anfang und nur ein Ende hat, ist das unmöglich, und damit ist unsere Frage mit einem Nein beantwortet.

Sieht man von der Einkleidung ab, dann geht es bei der Frage wie bei der Antwort um Wege, die durch die Brücken vorgeschrieben sind, und Gebiete, in die diese Wege münden. Diese Gebiete können durch Punkte, genauer durch Knotenpunkte dargestellt werden. So entsteht ein Schema, Graph genannt.
Zum besseren Vergleich haben wir neben den Graphen noch einmal eine vereinfachte Skizze unserer Anlage gestellt.

Euler führte, um dieses Brückenproblem zu meistern, eine weit umfassendere Überlegung durch, die seitdem zu einem selbständigen Zweig der Topologie entwickelt wurde, zur Theorie der Graphen.
Ein Blick auf den Graphen des Brückenproblems lehrt, dass wir die durch ihn gewonnenen Einsichten verallgemeinern können. Wir definieren:
Unter einem endlichen Graphen versteht man ein endliches System von Knotenpunkten und Wegen, Kanten genannt, welche die Knotenpunkte miteinander verbinden. Der Fall, dass ein Weg eine Schleife bildet, mit anderen Worten ein- und derselbe Knotenpunkt Anfang und Ende des Weges ist, wird zugelassen. Da nur endliche Graphen betrachtet werden sollen, sprechen wir fortan nur von Graphen schlechthin. Sie mögen ohne Schleifen sein.

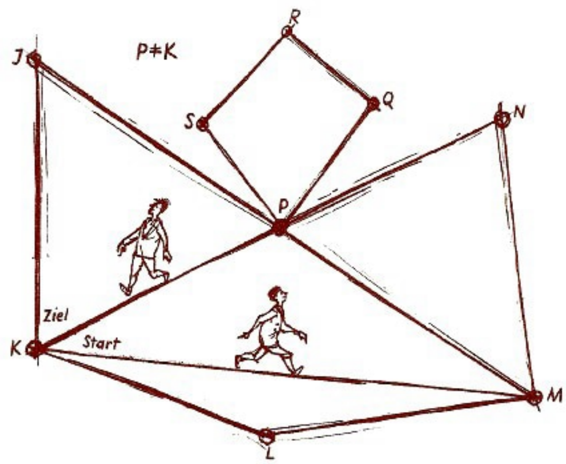


Die Kante e bildet eine Schleife.
$AaBbAgCdDeDfA$ ist ein geschlossener Kantenzug, aber kein Weg, weil sich A wie D wiederholen.
$AbBcCgA$ ist ein Kreis. Der Graph ist zusammenhängend.

Unter dem Grad eines Knotenpunktes versteht man dann die Anzahl der Kanten, die darin münden. Kommt in einer wechselnden Folge von Knotenpunkten, die mit großen, und von Kanten, die mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden, jede Kante höchstens einmal vor, dann spricht man von einem Kantenzug.
Kommt darin jeder Knotenpunkt auch höchstens einmal vor, dann nennt man diesen Kantenzug einen Weg. Ein geschlossener Weg heißt Kreis. Weiter nennt man einen Graphen zusammenhängend, wenn zwei beliebige Knotenpunkte des Graphen durch einen Weg verbunden werden können, der dem Graphen angehört.

Nach diesen Erklärungen nehmen wir an, dass ein Graph lauter Knotenpunkte geraden Grades hat. Von einem Knotenpunkt K ausgehend, spaziere man los. Hat man dabei P bereits n-mal passiert, ohne eine der Kanten zweimal begangen zu haben, und ist wieder in P angelangt, dann hat man für $P \neq K$ eine ungerade Anzahl von Kanten, $2n + 1$, begangen. Da aber P von geradem Grade ist, kann man weiter spazieren.
Nur für $P = K$ gilt das Argument nicht, weil der Spaziergang in K anfing, und daher die Anzahl der begangenen Kanten, in K wieder angelangt, jedesmal gerade ausfällt. Da die Gesamtheit der Kanten endlich ist, werden sie schließlich alle begangen, und man landet am Ende wieder in K.

Dieser Spaziergang ist zunächst ein geschlossener Kantenzug. Tritt darin ein Knotenpunkt erneut auf, dann kann man den Teilspaziergang, der vom ersten bis zum letzten Auftreten des Knotenpunktes führt, unterdrücken. Führt man das überall durch, dann verwandelt sich der Spaziergang in einen Kreis.



Unser Graph zerfällt nun in lauter Kreise so, dass jede Kante genau einem dieser Kreise angehört. Denn sollte ein erster Kreis noch nicht den vollen Graphen ausmachen, dann ist nach Streichen seiner Kanten der Rest ein Graph, der ebenfalls nur Knotenpunkte geraden Grades besitzt und daher einen weiteren Kreis enthält. Dessen Kanten wiederum gestrichen und das Verfahren fortgesetzt, schöpfen die nacheinander gewonnenen Kreise den Graphen aus.

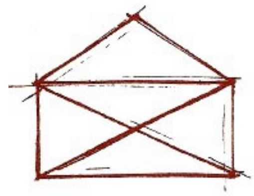
Davon gilt auch die Umkehrung.

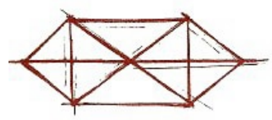
Wenn ein Graph in Kreise so zerfällt, dass jede Kante genau einem Kreis angehört, dann besitzt der Graph nur Knotenpunkte geraden Grades. Denn wenn ein Knotenpunkt n dieser Kreise angehört, dann münden in ihm $2n$ Kanten.

Damit wurde schon mehr gewonnen, als wir brauchen, um die Überlegung von Euler durchzuführen. Dabei gehen wir über Euler hinaus, denn es ergab sich, dass die von ihm gefundene notwendige Bedingung zugleich hinreichend ist.

Vorher aber sei noch eine Bezeichnung eingeführt: Ein geschlossener Kantenzug, der sämtliche Kanten des Graphen enthält, heißt Eulersche Linie.
Gibt es in einem Graphen eine Eulersche Linie, dann ist der Graph zusammenhängend.

Weiter besitzt ein Knotenpunkt, der bei Begehen der Eulerschen Linie insgesamt n-mal passiert wurde, den Grad $2n$. Die von Euler selbst bewiesene Umkehrung dieser beiden Aussagen trifft ebenfalls zu.
Wir setzen dementsprechend einen zusammenhängenden Graphen mit lauter Knotenpunkten geraden Grades voraus. Die Existenz mindestens eines Kreises ist, wie wir wissen, gesichert. Wir betrachten aber alle möglichen geschlossenen Kantenzüge in diesem Graphen.
$\mathfrak{K}$ sei einer mit möglichst großer Kantenzahl unter ihnen. Dann stellt $\mathfrak{K}$ eine Eulersche Linie dar.
Den Beweis führen wir indirekt.





Aus dem Graphen entferne man alle Kanten von $\mathfrak{K}$ und weiter alle Knotenpunkte von $\mathfrak{K}$, in die nur Konten von $\mathfrak{K}$ münden.
Es bleibt ein Graph übrig, dessen Knotenpunkte alle geraden Grades sind. Einen dieser restlichen Knotenpunkte verbindet stets ein Weg mit irgendeinem Knotenpunkt von $\mathfrak{K}$, weil der ursprüngliche Graph zusammenhängend angenommen wurde. Auf diesem Weg muss es dann einen Knotenpunkt K geben, der sowohl $\mathfrak{K}$ als auch dem Restgraphen

angehört. K gehört aber, wie wir wissen, einem Kreis an, der nur Kanten des Restgraphen enthält, die folglich in $\mathfrak{K}$ nicht vorkommen.
Dann aber könnte man $\mathfrak{K}$ erweitern, indem dieser Kreis bei K in $\mathfrak{K}$ eingefügt wird, obschon $\mathfrak{K}$ die größtmögliche Kantenzahl enthalten soll. Dieser Widerspruch schwindet nur durch das Zugeständnis, dass $\mathfrak{K}$ eine Eulersche Linie ist.

Mit dem eben bewiesenen Satz lässt sich eine Verschärfung der anfangs gestellten Frage wie folgt beantworten:
Die Knotenpunkte dieses Graphen, der zu unserem Brückenproblem gehört, sind alle ungerader Ordnung. Daher gibt es nach dem Satz von Euler keine Eulersche Linie. Ein Spaziergang, der wieder am Ausgangsort endet und bei dem sämtliche Brücken passiert werden, aber jede nur einmal, ist unmöglich.

Diesmal wurde der Spatz mit einer Kanone erlegt, die Eulersche Kanone kann aber noch mehr!

Wie weit können wir mit unseren neuen Mitteln das Irrgartenproblem in Angriff nehmen? Zunächst zeichne man einen Graphen nach dem Plan des Irrgartens. Dann denke man sich jede Kante doppelt gezogen, so dass in jedem Knotenpunkt eine gerade Anzahl von Kanten münden.
Daher gibt es jetzt bestimmt eine Eulersche Linie. Die Kenntnis des Irrgartenplanes versetzt also in die Lage, diese Linie auch wirklich zu bestimmen. Theseus aber konnte den Plan nicht. Ein Vorgehen nach den Vorschriften I bis IV hätte ihm trotzdem den Erfolg gesichert!

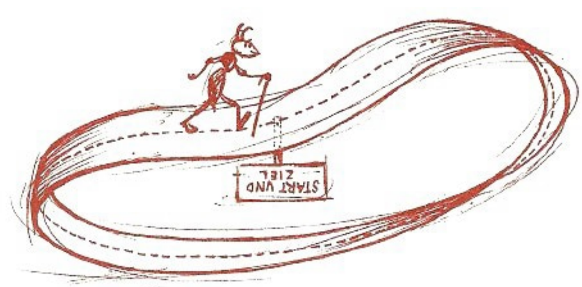
Übrigens gehören hierher auch die beliebten Aufgaben, eine vorgegebene Figur ohne abzusetzen nachzuziehen, wobei jede Kante nur einmal durchlaufen werden darf. Nunmehr können wir bei einem solchen Problem im voraus feststellen, ob diese Forderung überhaupt erfüllbar ist oder nicht.

12 Flächen ohne zweite Seite

Vom bekannten Leipziger Mathematiker Möbius wurde vor etwa einem Jahrhundert folgende Anekdote erzählt:
Frau Professor hatte eine "unzuverlässige" Magd, die lauter Unfug trieb. Das "unnütze" Ding sollte diesmal runde Strumpfbänder nähen. Und was tat sie? Das eine Band hat sie halb umgedreht, ehe sie die Enden zusammennähte!
Frau Professor wurde recht ärgerlich und nahm sich vor, mit ihrem Mann zu sprechen, ob sie diese unverbesserliche "Person" doch nicht lieber entlassen sollte. Um daran erinnert zu werden, legte sie das missratene Strumpfband auf den Tisch.
Als dann ihr hochgelehrter Mann endlich nach Hause kam und das corpus delicti in die Hand bekam, erwachte in ihm beim ungewohnten Anblick plötzlich der Forscher. Er wendete das Band hin und her und entdeckte auf diese Weise die erste Fläche, die nur eine Seite besitzt.

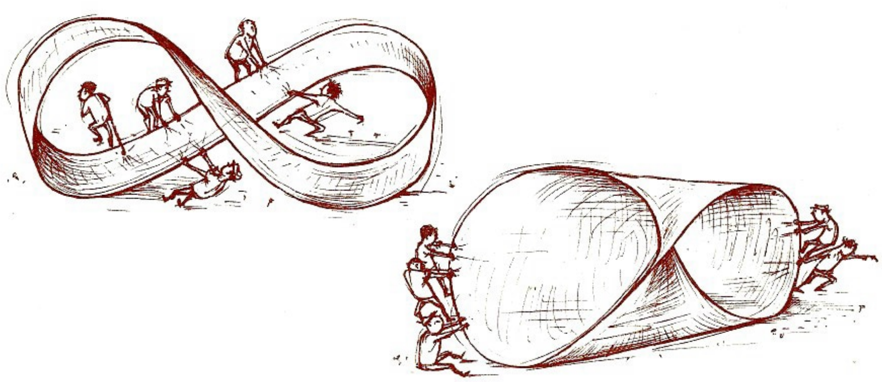
Nach einer anderen Version soll das Missgeschick der Frau Professor selber zugestoßen sein. So hätte es sich zwar zutragen können, aber in Wirklichkeit verlief die Sache ganz anders.
Möbius, ein Schüler von Gauß, verdankt seine paradoxe Entdeckung keineswegs dem Zufall, sondern systematischer Beschäftigung mit Flächen. Und das 68jährig.

Man denkt sich Flächen aus Dreiecken zusammengefügt. Es kommt darauf an, wie sich die Dreiecke zusammenfügen. Man entdeckte erstaunliche Möglichkeiten, an die früher niemand gedacht hätte.
Der vorhin erdichtete Fall gehört dazu. Wir möchten ihn jedoch nicht von der hohen Warte des Möbius aus betrachten, sondern mehr anschaulich, und knüpfen daher an die Fehlleistung der gescholtenen Magd an.



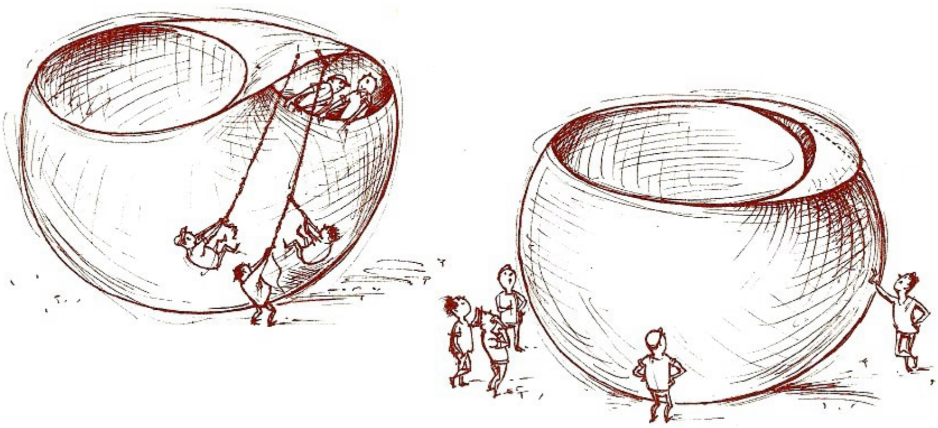
Einem langen Papierstreifen erteile man eine halbe Drehung, ehe die Enden zusammengeklebt werden. Setzt man unsere schon einmal beanspruchte Freundin Ameise irgendwo darauf, nur nicht auf den Rand, und verpflichtet sie, loszuwandern, aber so, dass sie ihre Entfernung von der Berandung immer wehrt, dann wird sie und wir mit ihr, eine Überraschung erleben.

Wenn die Ameise auf diese Weise einen Weg von der ursprünglichen Länge des Papierstreifens zurückgelegt hat, befindet sie sich ihrem Ausgangsort gegenüber als Antipode!

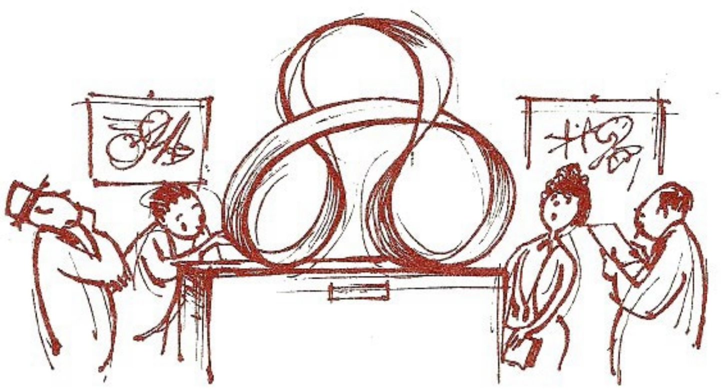


Erst wenn sie noch einmal soweit wandert, gelangt sie an ihren Ausgangsort zurück, eine Folge davon, dass der Papierstreifen eine Halbdrehung erhielt, ehe die Enden zusammengeklebt wurden. Die Fläche besitzt zwar örtlich zwei Seiten, aber man kann von der einen zur anderen Seite gelangen, ohne die Berandung zu passieren. Das ist damit gemeint, dass diese Fläche nur eine Seite hat.

Aber auch die beiden Ränder des Bandes bereiten eine Überraschung. Sie bilden zusammen eine einzige geschlossene Linie!
Stellt man das Band an Stelle von Papier aus sehr dehnbarem Gummi her. dann lässt es sich so verzerren, dass aus der Berandung ein Kreis wird. Das Band selbst bildet dann eine Tasche, die nur eine Seite besitzt, weil sich so etwas durch Verzerren nicht ändert. Eine solche Tasche sei der Beachtung von Zauberkünstlern empfohlen.



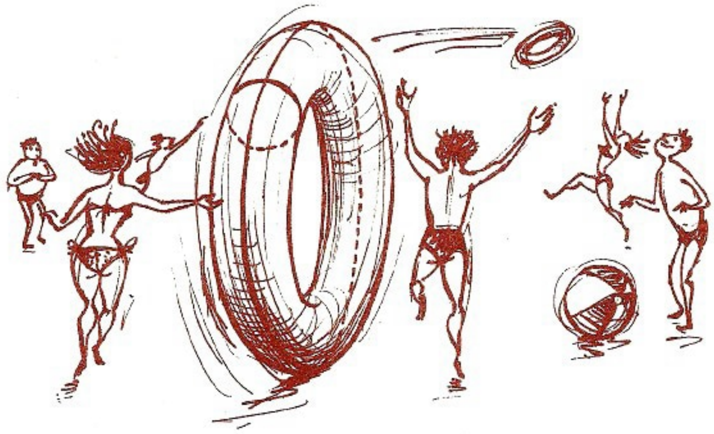
Schneidet man das Band von Möbius der Länge nach auf, dann zerfällt es nicht etwa in zwei Ringe, wie man es erwarten würde, sondern bleibt ein einziger Streifen, der allerdings zwei Seiten besitzt. Den Rand bilden diesmal zwei geschlossene Linien, die miteinander verschlungen sind.
Erneutes Zerschneiden ergibt zwei ineinander verschlungene Ringe. Führt man das alles an einem Modell zum erstenmal durch, dann wird man immer wieder überrascht; ein Zeichen, dass unsere Anschauung versagt, weil sie an derlei Gebilden nicht geschult wurde.



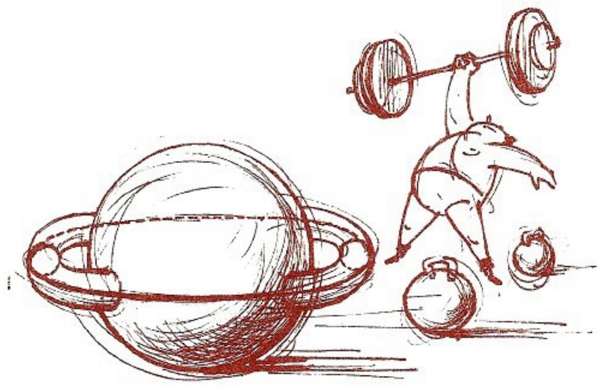
Vor die Frage gestellt, ob es möglich sei, auf einer Fläche einen Kreis so zu zeichnen, dass zwei Punkte der Fläche, die nicht auf dem Kreis liegen, stets Enden einer Linie bilden können, die den Kreis nicht trifft, würde man, sich auf eine voreilige Anschauung verlassend, die Frage zunächst wohl verneinen.
Man würde unwillkürlich daran denken, dass man aus dem Kreisinnern nicht hinaus kann, ohne den Kreis zu passieren. Es gibt jedoch Flächen mit Kreisen, bei denen man nicht

von einem Kreisinneren auf der Fläche reden kann. Solch eine Fläche, den Torus, kennt jeder, der mit einem Gummiring jemals Fangen gespielt hat. Denkt man sich den Kreis durch einen senkrechten Schnitt erzeugt, so leuchtet es ein, dass unsere vorhin gestellte Frage zu bejahen ist.

Auch noch einen zweiten Kreis senkrecht zum ersten könnte man auf dem Torus anbringen, ohne den Zusammenhang, um den es geht, zu zerstören, aber keinen weiteren Kreis. Daher müssen wir fragen, ob es überhaupt Flächen gibt, auf denen man drei oder gar gleich n Kreise ziehen kann, ohne den Zusammenhang zu zerstören.

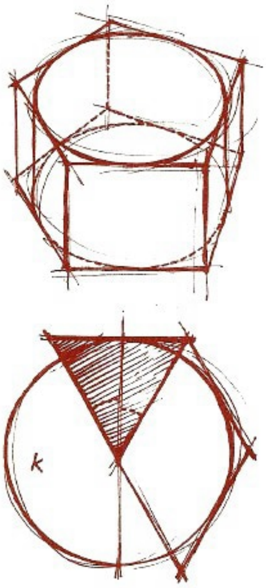


Die Frage lässt sich sofort bejahen. Man hat nur Henkel an einer Kugel anzubringen. Wird an jedem Henkel ein Kreis ähnlich wie vorhin auf dem Torus und zwischen diesen senkrecht dazu ein weiterer Kreis markiert, der die beiden ersten Kreise verbindet, so bleibt der Zusammenhang gewahrt:
Noch immer kann man zwei Punkte durch eine Linie verbinden, die auf der Fläche verläuft und die Kreise nicht trifft.

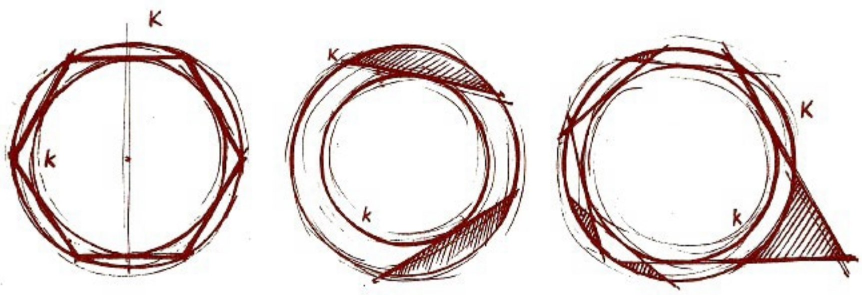


13 Schwindender Inhalt

Dido wollte mit einer Ochsenhaut, die sie vorher in feine Streifen schnitt, möglichst viel Land umspannen. Eine Aufgabe, bei der es sich im Gegensatz dazu um eine möglichst kleine Fläche handelt, wäre folgende.
Man soll einen Zylinder mit n unbiegsamen Brettern prismenförmig so umkleiden, dass möglichst wenig Material verbraucht wird. Dazu muss der Querschnitt der Verkleidung eine Fläche besitzen, welche die Grundfläche des Zylinders, einen Kreis k, möglichst wenig übertrifft.
Der Querschnitt der Verkleidung ist immer ein n-Eck, das k umschrieben ist. Wir behaupten, dass ein reguläres n-Eck, das dem Kreis k umschrieben ist, allein der Aufgabe genügt.



Den Beweis führen wir direkt. Zunächst konstruieren wir ein k umschriebenes reguläres n-Eck:
Rechts und links von irgendeinem Radius tragen wir den Winkel $\frac{360°}{2n}$ ab und verlängern die Schenkel, bis sie die Tangente im Endpunkt des Radius treffen. Es entsteht das schraffierte gleichschenklige Dreieck, n dieser Dreiecke bilden dann das reguläre n-Eck.



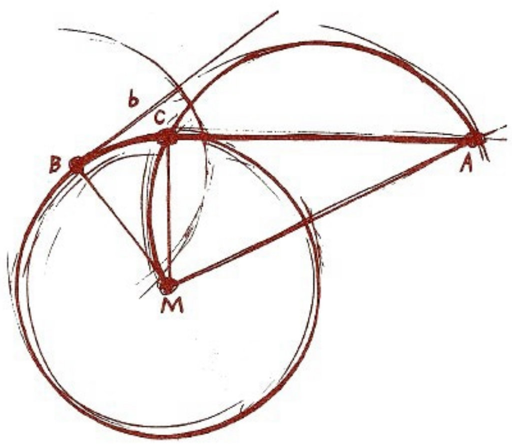
Da die n gleichschenkligen Dreiecke kongruent sind, liegen die Eckpunkte des regulären n-Ecks auf einem Kreis K, der konzentrisch mit k ist und einen etwas größeren Radius besitzt. Tangenten an k schneiden aus K Kreissegmente aus, die kongruent sind.
Nun wollen wir den Inhalt des k umschriebenen regulären n-Ecks mit dem Inhalt eines k umschriebenen, sonst beliebigen n-Ecks vergleichen. Der Inhalt des regulären n-Ecks ist

der Inhalt des Kreises K, verringert um die n Kreissegmente. die durch die Seiten des regulären n-Ecks von K abgetrennt werden.

Bei einem anderen, k umschriebenen n-Eck kann es sehr wohl vorkommen, dass die Seiten aus K herausragen. Dann setzt sich die Fläche eines solchen n-Ecks aus dem schraffierten Flächenteil zusammen, der aus K herausragt und dem Flächenteil innerhalb K.
Selbst letzterer erweist sich mindestens ebenso groß wie die Fläche des k umschriebenen regulären n-Ecks. Um das einzusehen, beachte man, dass auch diesmal n Kreissegmente wegfallen, die sich aber überlappen können, so dass der wirkliche Wegfall geringer ist. Die Überlappung zweier Kreissegmente ist durch Schraffierung kenntlich gemacht.
Wir erkennen so, dass man weniger Fläche als vorhin aus K entfernt hat, mit anderen Worten, dass der Inhalt eines regulären n-Ecks, das einem Kreis umschrieben ist, nie größer ausfällt als der Inhalt eines demselben Kreis umschriebenen beliebigen n-Ecks.

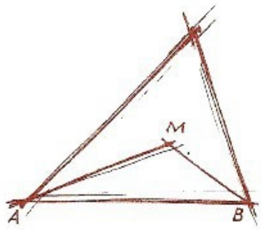
Der direkte Beweis ergab die Existenz eines Minimums unter den konkurrierenden Flächeninhalten.
In anders gelegenen Fällen braucht aber keineswegs ein Minimum vorhanden zu sein, auch wenn man weiß, dass es sich um Größen handelt, die nicht unter eine bestimmte Schranke sinken können. Ein einfaches Beispiel überzeugt davon.
Man betrachte sämtliche Stammbrüche 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... Sie alle sind größer als die Null. Einen kleinsten Stammbruch gibt es trotzdem nicht.

Um auch noch ein geometrisches Beispiel anzugeben, betrachten wir Kurven mit stetiger Tangente, die zwei Punkte A und B miteinander verbinden und in B eine feste Richtung b haben, deren Tangente mit anderen Worten in B diese feste Richtung besitzt.
Unter diesen Kurven gibt es keine kürzeste. Man errichte in B die Senkrechte auf b und wähle auf dieser M dem Punkt B so nahe, dass A außerhalb des Kreises um M mit dem Radius MB zu liegen kommt. Errichtet man noch auf AM einen Halbkreis, der den Kreis von vorhin in C schneidet, dann bilden MC und AC nach Thales einen rechten Winkel.
Daher besitzt die Linie ACB, die aus der Strecke AC und dem Kreisbogen CB besteht, eine sich stetig drehende Tangente; in C gibt es keinen Knick. Mit der Entfernung BM wird auch der Kreisbogen BC beliebig klein, folglich ist dann die Linie ACB nur beliebig wenig länger als die Strecke AB, so dass die anfangs gestellte Forderung kein Minimum zulässt.
Noch im vorigen Jahrhundert fehlten darin die berühmtesten Mathematiker.



14 Von Mund zu Mund

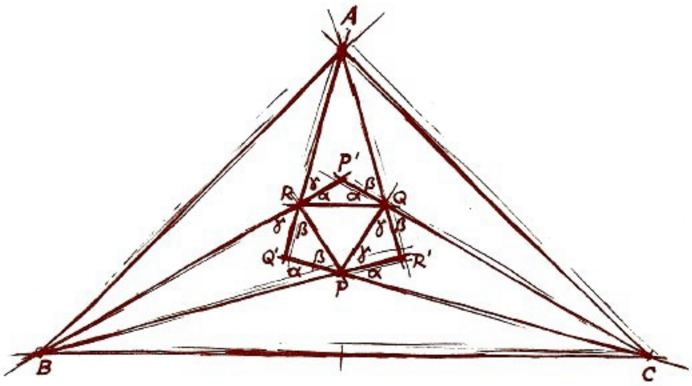
Morley entdeckte 1899 einen verblüffenden Satz der Elementargeometrie, den er seinen Freunden erzählte, ohne ihn zu veröffentlichen. Jahre hindurch ging dann der Satz nur von Mund zu Mund, ehe er 1914 veröffentlicht wurde. Seitdem hatte man den Satz verschiedentlich bewiesen. Der einfachste Beweis läuft wie folgt.



Wir schicken erst eine Bemerkung über den Inkreis im Dreieck voraus. Sein Mittelpunkt M liegt im gemeinsamen Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Daher ist

$$\angle AMB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle C) = 90° + \frac{1}{2}\angle C$$

Davon werden wir bald Gebrauch machen.



Wir nehmen drei Winkel α, β und γ an, deren jeder kleiner als 60° ausfällt und deren Summe genau 120° beträgt. Mit diesen Winkeln errichtet man über die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks PQR gleichschenklige Dreiecke, so dass $\angle P'RQ = \alpha$, $\angle Q'RP = \beta$ und $\angle R'QP = \gamma$ ist. Die Verlängerungen der Schenkel der gleichschenkligen Dreiecke unterhalb der Grundlinien mögen sich in A, B und C treffen. Dann geht es darum, die einzelnen Winkel in A, B und C zu bestimmen.
Es ist

$$\angle P'QA = 180° - (\gamma + 60° + \alpha) = 120° - (\alpha + \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha + \gamma) = \beta \quad \text{und}$$

$$\angle P'RA = 180° - (\beta + 60° + \alpha) = 120° - (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha + \beta) = \gamma$$

daher

$$\angle RAQ = 180° - [(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)] = 180° - [(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha] = 180° - (120° + \alpha) = 60° - \alpha$$

PP' steht senkrecht auf RG, halbiert daher den Winkel $180° - 2\alpha$ in P'. P liegt daher auf der Winkelhalbierenden im Dreieck $BP'C$, und es gilt

$$\angle BPC = 360° - (\alpha+\beta+60°+\gamma+\alpha) = 360° - (120°+60°+\alpha) = 180° - \alpha = 90° + \frac{1}{2}(180° - 2\alpha)$$

daher ist nach der vorausgeschickten Bemerkung über den Inkreis der Punkt P sein Mittelpunkt im Dreieck $BP'C$, folglich liegt P auf der Winkelhalbierenden von $\angle PBC$.

Ähnlich zeigt man, dass R Mittelpunkt des Inkreises im Dreieck $AR'B$ ist, daher auf der Winkelhalbierenden von $\angle R'BA$ liegt.

So erkennt man, dass im Dreieck ABC der Winkel in B durch $P'B$ und $R'B$ in drei gleiche Teile geteilt wird. Entsprechendes gilt für die Winkel in A und in C.
Danach ist der Winkel im Dreieck ABC in A das Dreifache des Winkels $\angle RAQ = 60° - \alpha$, so dass

$$\angle A = 180° - 3\alpha \qquad \text{daher} \qquad \alpha = 60° - \frac{1}{3}\angle A$$

und entsprechend $\beta = 60° - \frac{1}{3}\angle B$ und $\gamma = 60° - \frac{1}{3}\angle C$ ist.

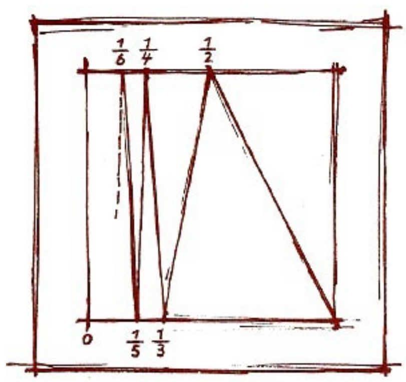
Liegt nun ein beliebiges Dreieck ABC vor, dann gewinnt man als Ergebnis unserer Konstruktion ein ihm ähnliches Dreieck, wenn die Werte für α, β und γ den drei letzten Gleichungen gemäß gewählt wurden. Das alles ergibt den Satz:

Teilt man die Winkel in einem beliebigen Dreieck in drei gleiche Teile, dann schneiden sich dabei die Paare der seitennahen Schenkel in drei Punkten, die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

15 Eine P(K)reisfrage

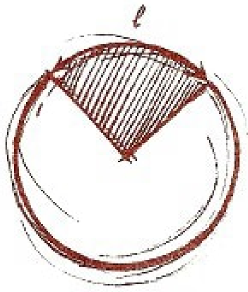
Der jüngst verstorbene Friedrich Riesz erzählte, wie anlässlich einer Mathematiker-Tagung in Innsbruck 1924 ein bekannter Fachmann abends am weißen Tisch eine verzwickte Frage stellte und sie auch gleich selbst beantwortete.
Dazu fuhr er schweres Geschütz aus der Differentialgeometrie auf, obschon die Antwort durch eine einfache Überlegung zu finden ist. Diese fand Riesz freilich erst später, nach anfänglich komplizierten Betrachtungen. Er schildert den Weg, wie er schließlich seine endgültige Beweisführung fand.
Es sind aufschlussreiche Bemerkungen, die seine Ansätze herausschälen und Einblicke in den Durchbruch seiner Gedanken gewähren. Mit diesem Hinweis müssen wir uns begnügen und zur Sache kommen.

G möge einen begrenzten Teil der Ebene darstellen. Weiter sei K eine Kurve von beliebiger Länge und Gestalt, die ganz innerhalb G verläuft. Es ist zu beachten, dass K beliebig lang ausfallen kann.
Als Beispiel dafür wählen wir für G ein Quadrat, welches das Einheitsquadrat im Inneren enthält, und für K eine Art Kamm mit Zocken, die immer enger werden.
Genauer gewinnt man ein solches K als Streckenzug wie folgt.



Man markiert an der unteren Kante des Einheitsquadrats die Punkte im Abstand von der linken Ecke 1, 1/3, 1/5, ... an der oberen Kante die Punkte 1/2, 1/4, 1/6, ... und zieht der Reihe nach die Strecken von 1 nach 1/2, von 1/2 nach 1/3 usw.
Jede dieser Strecken ist länger als 1, so dass die Länge von hinreichend viel Zacken beliebig groß ausfällt.

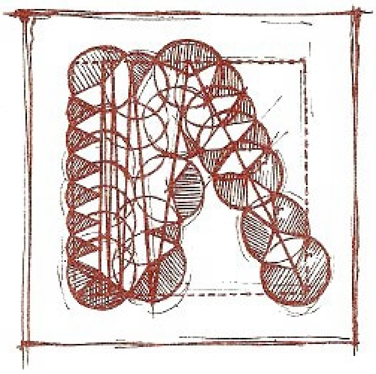
Diese Feststellung war nötig, um den Umfang des auszusprechenden Satzes richtig zu würdigen. Der Satz macht die unerwartete Aussage, dass der Teil T von G, den ein Kreis überstreicht, dessen Mittelpunkt K entlang gleitet, eine Begrenzung von einer Gesamtlänge besitzt, deren Wert unterhalb einer festen Größe liegt, ganz einerlei, wie K gewählt wurde.
Dabei soll jedoch der Kreis nie aus G heraustreten, eine Bedingung, die durch hinreichend klein gewählten Radius r immer erfüllt werden kann.

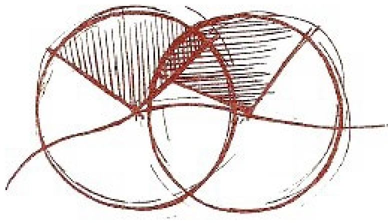


Betrachten wir zunächst einen Sektor des Kreises vom Radius r. Der Inhalt J des Kreissektors verhält sich zum Inhalt des Vollkreises wie die Länge l seines Bogens zum Kreisumfang. Für l folgt daraus der Wert

$$l = \frac{J \cdot 2r\pi}{r^2\pi} = \frac{2J}{r}$$

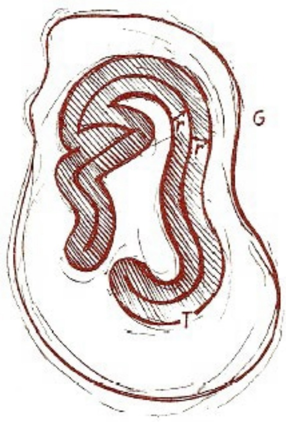
Nun mögen die Mittelpunkte von endlich viel Kreisen so auf K liegen, dass K im Inneren des von diesen Kreisen überdeckten Teiles von G verläuft. Die Begrenzung besteht aus Kreisbogen. Die dazugehörigen Kreissektoren überlappen sich nirgends.





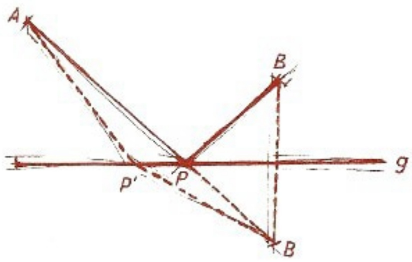
Ein Überlappen von zwei Kreissektoren hätte nämlich zur Folge, dass, den einen Bogen zum Vollkreis ergänzt, dieser den anderen Bogen zum Teil enthalten müsste. Das würde aber der Erklärung widersprechen, dass die Bogen die Begrenzung des von den Vollkreisen überdeckten Teiles von G bilden.
Wenn sich aber die Kreissektoren nicht überlappen, dann fällt der Inhalt der von ihnen überdeckten Fläche kleiner aus als der Inhalt von G. Die Gesamtlänge der Kreisbogen ist folglich unter Verwendung der letzten Gleichung kleiner als der doppelte Flächeninhalt von G, dividiert durch r.

Durch Vermehren der Kreise von vorhin kommt man aber der Begrenzung von T beliebig nahe. Anschaulich ist das plausibel.
Um das einwandfrei beweisen zu können, müsste man jedoch präzisieren, was man unter einer Kurve versteht und dergleichen mehr. Damit würden wir aber den Rahmen unserer Überlegungen verlassen. Wir nehmen einfach die Behauptung als richtig hin.
Dann aber folgt, dass die Abschätzung, kleiner als der doppelte Inhalt von G, dividiert durch r, selbst für die Begrenzung von T gilt. Damit hat der Satz einen ansprechenden Beweis erhalten.



16 So kurz wie möglich

Wir beginnen mit der Binsenwahrheit, dass zwischen zwei Punkten die Strecke, deren Endpunkte sie sind, den kürzesten Weg darstellt.
Etwas schwieriger wird es schon, wenn nach dem kürzesten Weg gefragt wird, um von dem Punkt A nach dem Punkt B so zu gelangen, dass man unterwegs eine vorgegebene Gerade g trifft. Um diesen Weg zu bestimmen, spiegelt man B an g.

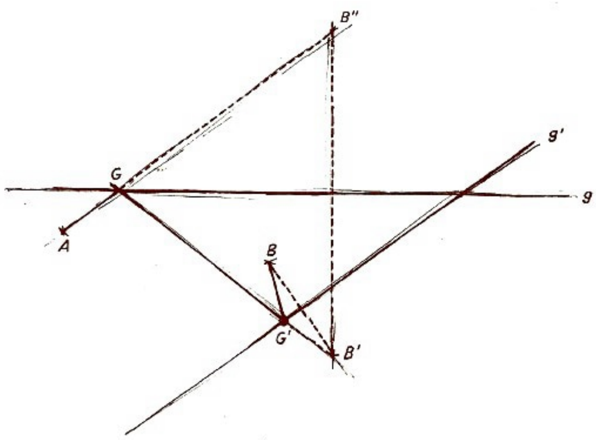


Das Spiegelbild B' mit A verbunden, schneidet diese Strecke die Gerade g im Punkt P. Dann ist APB der gewünschte kürzeste Weg, denn es ist

$$AP + PB = AP + PB' = AB'$$

und weiter, wenn P' ein von P verschiedener Punkt von g ist, $AP' + P'B = AP' + P'B' > AB'$.
Würde man aber einen Weg wählen, der von A nach P oder P' nicht geradlinig führt, dann wäre bereits dieser Wegabschnitt länger als der geradlinige; entsprechend gilt das für den Wegabschnitt PB oder $P'B$.

Die Winkel, die g mit AP bzw. PB bildet, sind gleich. Für einen Punkt $P' \neq P$ trifft das nicht mehr zu, so dass der kürzeste Weg, der von A nach B so führt, dass man unterwegs g trifft, durch diese Winkelgleichheit gekennzeichnet wird.
Die Physik kennt sie als Reflexionsgesetz, und man sieht, dass sie gleichbedeutend mit dem kürzesten Lichtweg ist.



Weiter können wir nach dem kürzesten Weg fragen, der von A nach B so führt, dass er unterwegs nicht nur eine, sondern gleich zwei sich in S schneidende Geraden g und g' in dieser Reihen- folge trifft. Die Antwort gelingt unter Berufung auf das Reflexionsgesetz wie folgt. Soll der eingezeichnete Weg der kürzeste sein, dann muss der Teilweg $GG'B$ ebenfalls der kürzeste Weg sein, der von G nach B so führt, dass g' unterwegs getroffen wird, weil man sonst $GG'B$ durch einen kürzeren Weg ersetzen und $AGG'B$ so kürzer machen könnte.

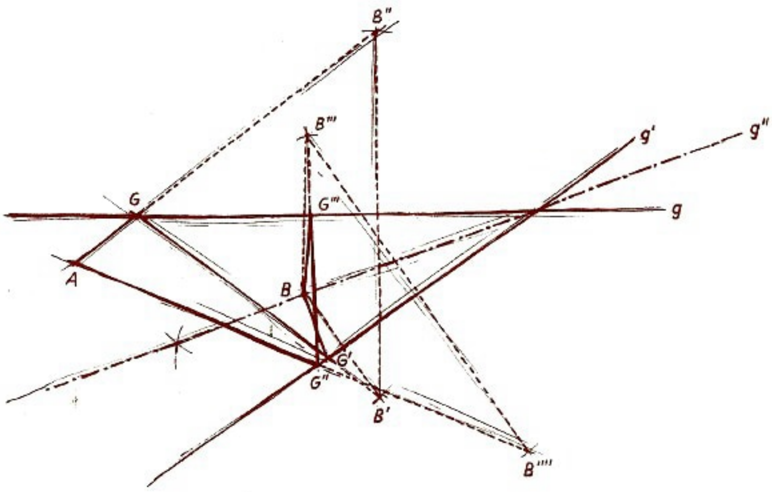
Nach dem Reflexionsgesetz müssen also die beiden Winkel, die g' mit GG' und GB bildet, gleich groß ausfallen. Ähnlich erkennt man die Gleichheit der beiden Winkel, die g mit AG und mit GG' bildet.

Um daher den kürzesten Weg $AGG'B$ zu bestimmen, werden wir im Sinne der Einsicht, die wir beim Reflexionsgesetz gewonnen haben, B erst an g' das Spiegelbild B'' an g spiegeln, schließlich das so gewonnene Spiegelbild B'' mit A verbinden.
Der Schnittpunkt von g mit AB'' bestimmt G. Den Winkel, den g mit der Strecke AB" einschließt, nach rechts abgetragen, schneidet sein Schenkel g' in G'.

Die Dreiecke $BG'B'$ und $B''GB'$ sind gleichschenklig, daher gilt

$$AB'' = AG + GB'' = AG + GB' = AG + GG' + G'B' = AG + GG' + G'B$$

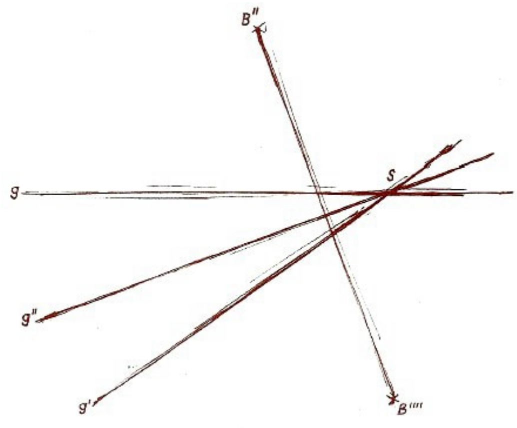
der kürzeste Weg ist also genauso lang wie die Strecke AB''.
Unsere Überlegung setzt in den Stand, den kürzesten Weg zu bestimmen, der aus A nach B so führt, dass die Geraden unterwegs in umgekehrter Reihenfolge getroffen werden, also erst g', hinterher g. Man, spiegelt dazu B erst an g, das Spiegelbild B''' nachher an g'. Das Spiegelbild B'''' von B''' übernimmt dann die frühere Rolle von B'', während g und g' ihre Rollen vertauschen.



B liegt auf dem Trennstrich g''.
Um das einzusehen, wähle man $A = B$ und beachte, dass der kürzeste Weg diesmal geschlossen ausfällt und daher in beiden Richtungen durchlaufen werden darf.

Wenn nun weiterhin eine abgeänderte Frage nach dem kürzesten Weg gestellt wird, der von A nach B so führt, dass beide Geraden g und g' unterwegs getroffen werden, ohne die Reihenfolge vorzuschreiben, dann geht es darum, festzustellen, welche der Strecken AB'' und AB'''' kürzer ausfällt.

Insbesondere liegen die Punkte A, für die $AB'' = AB''''$ gilt, auf einer Geraden g'', die senkrecht durch die Mitte der Strecke $B''B''''$ geht. S muss auf dieser Geraden liegen. Denn gleich der Anfang des Weges liegt sowohl auf g als auch auf g', so dass der Weg in eine Strecke SB ausartet, für die $SB'' = SB = SB''''$ gelten muss.



Die Antwort auf die Frage im vorigen Absatz lautet nach allem:
Für Punkte A, die im Winkelraum der beiden Geraden g und g'' liegen. bestimmt B'' den kürzesten Weg, für Punkte A aber, die im Winkelraum von g' und g'' liegen, der Punkt B''''.

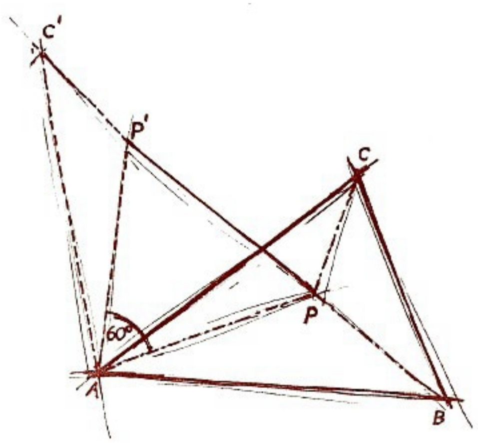
Wir schließen mit einer Frage, die Fermat gestellt hat. Wo liegt der Punkt P, aus dem die Wege nach drei festen Punkten A, B und C die kleinste Gesamtlänge haben?
Dabei mögen die drei Punkte ein spitzwinkliges Dreieck bilden.

Um A drehen wir das Dreieck APC nach links um 60°. Dann ist $AP = AP'$, und das gleichschenklige Dreieck PAP' sogar gleichseitig, $PP' = AP$. Weiter gilt $PC = P'C'$, so

dass die im allgemeinen gebrochene Linie $BPP'C'$ die Länge $PB + AP + PC$ besitzt.
Sie stellt offenbar dann den kürzesten Weg dar, wenn P und P' auf der Strecke BC' liegen.
Dann muss $\angle APB = 180° - \angle APP' = 120°$ und $\angle APC = \angle AP'C' = 180° - \angle AP'P = 120°$ sein, daher weiter $\angle BFC = 360° - (\angle APB + \angle APC) = 120°$.

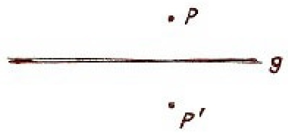
Der Forderung von Fermat genügt folglich der Punkt P, aus dem die drei Seiten des Dreiecks ABC unter gleichen Winkeln erscheinen.

Fragt man dagegen nach einem Punkt, aus dem die Gesamtlänge der Lote auf die Seiten eines ungleichseitigen Dreiecks möglichst klein ausfällt, dann stellt sich heraus, dass diese Minimumforderung nicht zu erfüllen ist.
Wie wir nämlich schon wissen, liegt die fragliche Gesamtlänge diesmal wirklich zwischen der kürzesten und längsten Höhe. Folglich gibt das immer einen Überschuss, bezogen auf die kürzeste Höhe. Der Überschuss wird beliebig klein, wenn man die Lote aus einem Punkt der kürzesten Höhe fällt, der nahe genug zum Eckpunkt des Dreiecks liegt.
Ein Minimum wird daher nie erreicht. Die Gesamtlänge der drei Lote nimmt auch kein Maximum an, wie die entsprechende abgeänderte Überlegung von vorhin lehrt.

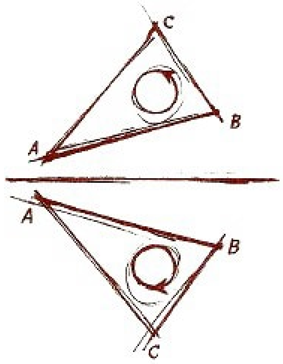


17 Spiegelungen gruppenweise

Spiegelungen sind uns schon wiederholt begegnet. Man spiegelt den Punkt P an der Geraden g, indem man von P aus das Lot auf g fällt und über g hinaus auf das Doppelte verlängert.



Der Endpunkt als Ergebnis der Spiegelung sei durch einen aufgesetzten Strich bezeichnet, also durch P'. Es gilt dann für $(P')'$, das kürzer durch P'' bezeichnet werde, $P'' = P$, das gespiegelte Spiegelbild fällt mit dem Ausgangspunkt zusammen.

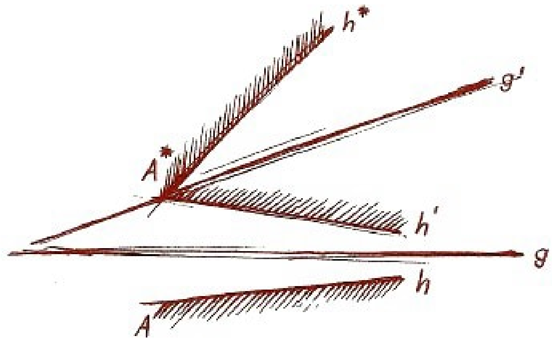


Die Spiegelung an g kann auch so aufgefasst werden, dass die ganze Ebene um g als Achse um 180° gedreht, sozusagen umgeklappt wurde. Dabei ändert sich die Entfernung irgendeines Punktepaares A und B nicht, $AB = A'B'$.
Denkt man an die kongruenten Abbildungen, dann gilt die Gleichheit auch für diese, weil sie ja zur Deckung gebracht werden können. Man bewegt dabei die starr gedachte Ebene als Ganzes; man verschiebt oder dreht sie.

Zu den Bewegungen gehört auch noch das vorhin angegebene Umklappen.
Im Gegensatz zu den beiden erstgenannten "direkten" Bewegungen ändert sich beim Umklappen der Umlaufsinn, kehrt sich um, so wie bei einem richtigen Spiegel, der ja ebenfalls rechts und links vertauscht.

Wenn die Spiegelungen auch nur ganz spezielle Bewegungen sind, lässt sich trotzdem jede Bewegung mit Hilfe von höchstens drei hintereinander ausgeführten Spiegelungen bewerkstelligen. Bei der Bewegung β mögen der Punkt A, eine in A beginnende Halbgerade h und deren schraffierte Seite in A^*, h^* und deren schraffierte Seite übergehen. Durch diese Angaben ist die Bewegung eindeutig bestimmt.

Am Mittellot g von AA^* spiegelt man zuerst und gewinnt $A' = A^*$ und h'. Daraufhin spiegelt man an der Winkelhalbierenden g' des Winkels, den h' und h'' miteinander bilden. A^* bleibt dabei unverändert, h' geht in h^* über und die schraffierte Seite von h' in die nichtschraffierte Seite von h^*.
Schließlich spiegelt man an der zur vollen Geraden ergänzten h^*.



A^* und h^* bleiben dabei erhalten, die beiden Seiten werden vertauscht. β erscheint damit als Ergebnis der drei hintereinander ausgeführten Spiegelungen, die der Reihe nach durch σ_1, σ_2, σ_3 bezeichnet werden mögen.

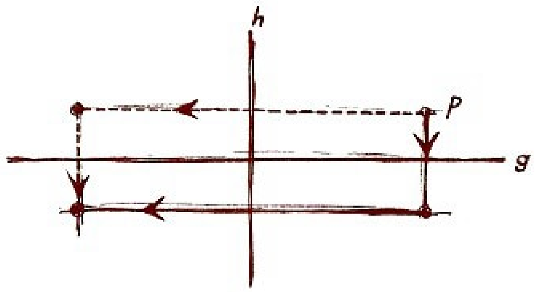
Wenn A mit A^* zusammenfällt, bedarf man der ersten Spiegelung nicht; wenn die andere Seite von h ursprünglich schraffiert wäre. fällt σ_3 weg. In beiden Fällen kommt man mit nur zwei Spiegelungen σ_2, σ_3 bzw. σ_1, σ_2 aus.

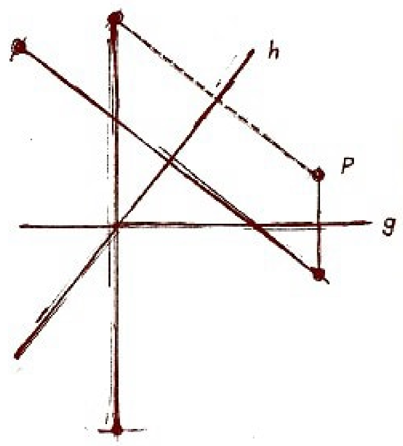
Wenn nun einerseits die Gesamtheit der Bewegungen durch Spiegelungen allein ersetzt werden kann, die Schulgeometrie andererseits sich letzten Endes mit Aussagen beschäftigt, die mit Hilfe von Längen und Winkeln gemacht werden, bei Bewegungen daher unverändert bleiben, ist das ein Fingerzeig zu untersuchen, wie man Geometrie mit Hilfe von Spiegelungen allein treiben kann. Eine ungewöhnliche Perspektive, gerechtfertigt vom Erfolg, einem Erfolg, der weit über die Schulgeometrie hinausreicht!

In einem Buch über den „Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff“ (1959) führt das Bachmann in allen Einzelheiten aus. Wir begnügen uns hier mit einigen Bemerkungen, die an einen für die Gesamtmathematik zentralen Begriff heranführen sollen, an den Begriff der Gruppe.

Zunächst bemerken wir ausdrücklich, dass die Ruhe, die aus gleich ersichtlichen Gründen durch eine 1 bezeichnet werde, zu den Bewegungen zählen soll, nach dem Motto: Keine Bewegung ist auch eine Bewegung.
Bei 1 bleibt jeder Punkt unverrückt. jeder Urbildpunkt fällt mit seinem Bildpunkt zusammen.
Wenn daraufhin eine Spiegelung σ zweimal hintereinander ausgeführt und das durch Nacheinanderschreiben von σ, also als $\sigma\sigma$ kürzer σ”, geschrieben wird, gilt $\sigma^2 = 1$.
Die zweite Spiegelung überführt jeden Bildpunkt P', wie wir schon wissen, in seinen Urbildpunkt P. Dabei bewirkt sie genau dasselbe wie die erste Spiegelung. da $(P')' = P$ ja besagt, dass P' Urbild von P ist, daher die zweite Spiegelung das Bild, diesmal P, in das Urbild, diesmal P', überführt.
Diese zweite Spiegelung kann als inverse Operation zur ersten Spiegelung σ aufgefasst werden und wird durch σ^{-1} bezeichnet, weil in der Algebra $x \cdot x^{-1} = 1$ gilt. So ist $\sigma' = \sigma^{-1}$ zu verstehen.

Sind σ und ρ Spiegelungen an zwei zueinander senkrechten Geraden g und h, dann kommt es auf die Reihenfolge nicht an, $\sigma\rho = \rho\sigma$, denn der ausgezogene und der gestrichelte Weg, den die linke bzw. rechte Seite der Gleichung vorschreiben, enden in ein und demselben Punkt. Man erhält diesen auch durch eine Drehung von 180° um den Schnittpunkt von g und h.





Schneiden sich dagegen die beiden Geraden g und h unter einem spitzen Winkel, dann sind die beiden Bildpunkte, die durch $\sigma\rho$ bzw. $\rho\sigma$ gewonnen werden, voneinander verschieden, wie man es an den eingezeichneten Wegen unmittelbar erkennt: $\sigma\rho \neq \rho\sigma$.

Schon so wenig verhilft dazu, den abstrakten Begriff der Gruppe zu formulieren. Es sei eine Gesamtheit von Elementen $(a, b, c, ...)$ gegeben. Man kann dabei an Bewegungen denken. Führt man zwei Bewegungen aus, dann ist das Ergebnis wieder eine Bewegung.

Das heißt, man kann zu demselben Ergebnis zweier Bewegungen kommen, wenn man nur eine einzige geeignete Bewegung ausführt. Dementsprechend verlangen wir für die Gruppenelemente $a, b, c, ...$ eine Verknüpfung, die wie vorhin im Falle von Spiegelungen durch Nacheinanderschreiben angedeutet wird und deren Ergebnis wieder ein Gruppenelement ist. Dabei kommt es sehr wohl auf die Reihenfolge an.

Im allgemeinen ist $ab \neq ba$, es kann jedoch Gleichheit bestehen, Die Forderung, dass ab zur Gesamtheit der Gruppenelemente gehört, gilt als erstes Postulat des abstrakten Gruppenbegriffs.
Man verlangt zweitens, dass es am Ergebnis nichts ändert, wenn einmal erst $a \cdot b$ und damit hinterher c gebildet wird $(ab)c$, das andere Mal $a(bc)$. Es soll also $(ab)c = a(bc)$ gelten, was wir als Assoziativgesetz bezeichnen.
Drittens verlangt man, dass es unter den Gruppenelementen genau ein Element, durch 1 bezeichnet, geben soll, so dass für jedes Gruppenelement a die Beziehung $a1 = 1a = a$ erfüllt ist.
Viertens verlangt man, dass es zu jedem Gruppenelement a genau ein Element, das inverse Element a^{-1} geben soll, so dass $aa^{-1} = 1$ gilt.

Diese vier Postulate sind erfüllbar und widersprechen sich somit nicht, wie wir vorhin schon erkannt haben: Eine einzige Spiegelung und die Bewegung 1 bilden eine Gruppe.

Welche Rolle Gruppen in der Geometrie zukommt, kann man im schon genannten Buch von Bachmann in allen Einzelheiten verfolgen. Dazu möchte ich noch zum Schluss Ausführungen von Gerhard Thomsen anführen, der diese Rolle 1933 in seinen "Grundlagen der Elementargeometrie" erkannte:

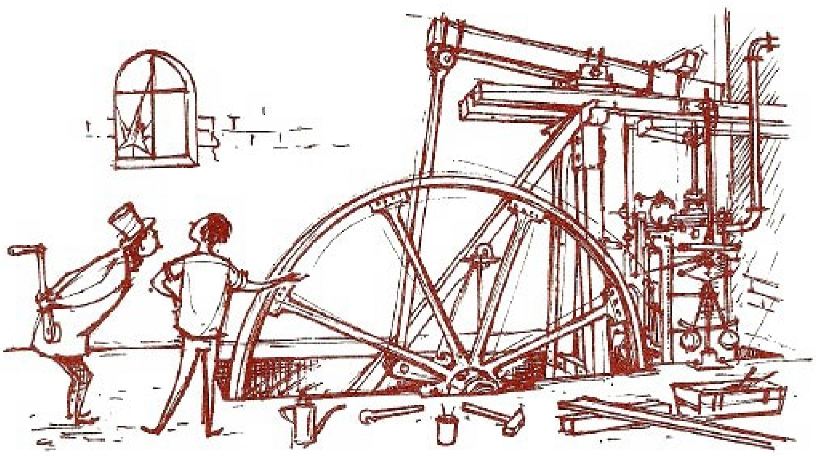
"Diese Schrift hat andere Ziele ... Es soll nämlich eine Art von geometrischem Rechenverfahren entwickelt werden, ähnlich Descartes in seiner Koordinatengeometrie. Zum Unterschied von der Descartesschen Methode werden wir aber nicht den Zahlbegriff verwenden, sondern wir werden von dem Begriff der Gruppe und von den algebraischen Methoden des Rechnens mit Gruppenelementen ausgehen ...
J. Hjelmslev hat wohl als erster in weiterem Ausmaß mit Spiegelungsrelationen gerechnet, um dadurch den Beweis elementargeometrischer Sätze zu führen. Seinen Arbeiten verdankt der Verfasser die wesentlichste Anregung zu dieser Schrift. Die hier gegebene gruppenalgebraische Behandlung der Elementargeometrie dürfte eine besonders bequeme und vom didaktischen Standpunkte aus einfache Einführung in die axiomatische Denkweise darstellen."

18 Vom Kolben zur Achse

Die Technik gab den Mathematikern schon manche Nuss zu knacken. Dazu gehörte das Problem, die Auf- und Abbewegung des Kolbens der Dampfmaschine in eine Kreisbewegung zu verwandeln.
Die Kurbel an der Drehbank stellte zwar eine brauchbare Lösung dar, durfte aber nicht oder nur gegen überforderte Gebühren eingebaut werden, weil ein geschäftstüchtiger Zeitgenosse von Watt für ihre Verwendung bei der Dampfmaschine ein Patent genommen hatte. So sah sich Watt, der gelernter Mechaniker war, gezwungen, zusätzlich eine neue Lösung zu finden.

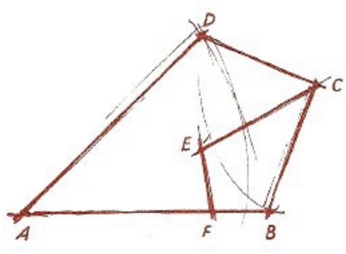
Sie gelang ihm in Form des nach ihm benannten Parallelogramms. Dieses ist ein Gelenkmechanismus, aus Stangen bestehend, die miteinander durch Gelenke verbunden sind. Das Wattsche Parallelogramm reichte für die Bedürfnisse der Niederdruckdampfmaschine von damals aus, bildete aber nur eine angenäherte Lösung, mit der wir uns deshalb nicht weiter beschäftigen.

Später haben sich berühmte Mathematiker mit diesem Problem ohne Erfolg beschäftigt. Man glaubte schon, das Problem gehöre zu den unlösbaren, bis im Jahre 1864 der französische General Peaucellier unerwartet eine Lösung fand.
Er war einer von mehreren Generalen in Frankreich, die sich in der Mathematik hervorgetan haben. Das lobe ich mir! Auf die erste Lösung folgten dann im Laufe der Zeit weitere. Hier sei allein die von Kempe erfundene elegante Lösung behandelt.



Der Gelenkmechanismus von Kempe baut sich aus zwei Rhomboiden und einer weiteren Stange auf. Unter einem Rhomboid oder Drachenviereck versteht man ein Viereck, in dem je zwei gleiche Seiten aneinander stoßen.

Die beiden Winkel, die von ungleichen Seiten eingeschlossen werden, sind einander gleich. Das folgt aus der Kongruenz der beiden Dreiecke, die in ihren Seiten übereinstimmen.
In den beiden Rhomboiden $ABCD$ und $BCEF$ möge $CD = CB = CE$ und $AD : CD = CE : EF$ sein. Die Winkel bei B, D und E sind gleich.

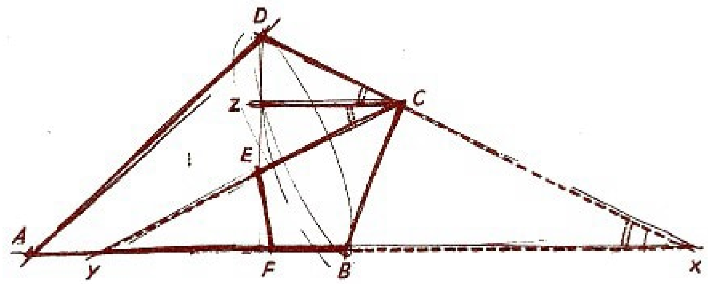


Zwei Vierecke aber mit einem übereinstimmenden Winkel und gleichen Seitenverhältnissen sind ähnlich, weil sie sich aus ähnlichen Dreiecken zusammensetzen. Denkt man sich nun die Seiten aus Stangen so angefertigt, dass diese sich um die Eckpunkte drehen können, dann bleiben die nunmehr beweglichen Rhomboide in jeder Lage einanderähnlich.

Man verlängere die beiden Seiten AB und CD in dem einen, ferner die Seiten BF und CE in dem anderen Rhomboid bis zu ihren Schnittpunkten X bzw. Y. Da es sich um ähnliche Rhomboide handelt, müssen die Winkel $\angle CXB$ und $\angle CYB$ gleich ausfallen. Zieht man CZ parallel zu BA, dann sind $\angle DCZ$ und $\angle CXB$ Gegenwinkel an Parallelen, folglich gleich, weiter $\angle ZCE$ und $\angle CYB$ Wechselwinkel, folglich ebenfalls gleich. Aus den drei Gleichungen

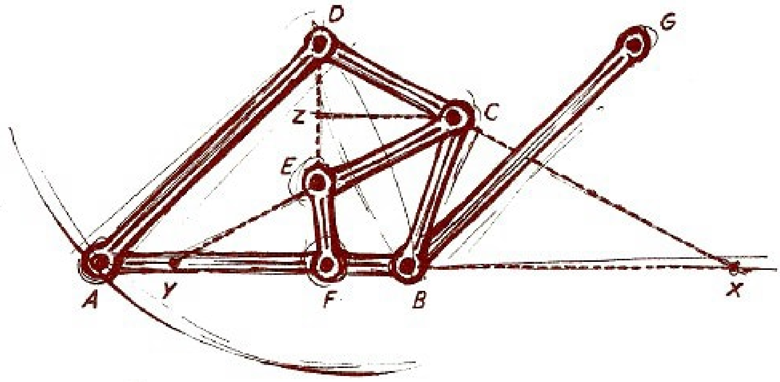
$$\angle CXB = \angle CYB \quad , \quad \angle DCZ = \angle CXB \quad , \quad \angle ZCE = \angle CYB$$

folgt aber $\angle DCZ = \angle ZCE$.



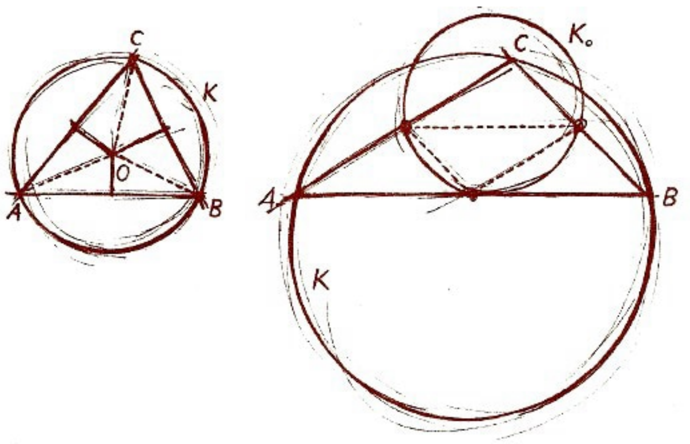
Auf Grund unserer Voraussetzungen ist das Dreieck DCE gleichschenklig. In diesem gleichschenkligen Dreieck ist aber nach dem Vorhergehenden CZ Winkelhalbierende und deshalb eine Höhe, die auf der Basis DE senkrecht steht. Infolge der Parallelität von CZ und BA stehen also die Geraden DE und AB senkrecht aufeinander.
Zusätzlich bringe man jetzt in B nach eine Stange BG parallel zu AD und von gleicher Länge wie AD in B drehbar an. Die Drehpunkte D und G mögen festgehalten bleiben, was durch ausgefüllte Kreise angezeigt ist, im Gegensatz zu den übrigen Drehpunkten, die nicht festgehalten zu denken und dementsprechend durch leere Kreise angedeutet sind.

Das Festhalten der beiden Drehpunkte D und G an ihrem Ort hat zur Folge, dass die Stange AB, die eine Gegenseite von DG im Parallelogramm $ABGB$ bildet, bei jeglicher Verschiebung parallel zu sich selbst bleibt. Daher bleibt das aus D auf irgendeine dieser Lagen von AB gefüllte Lot stets senkrecht zu AB.
Da jedoch der Punkt E auf diesem Lot liegen muss, bleibt die Beweglichkeit von E auf dieses feste Lot beschränkt. Der Punkt A dagegen bewegt sich offenkundig auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt D und vom Radius DA. Damit ist unser Problem gelöst.



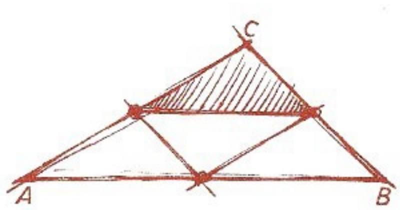
19 Vom Umkreis zum Inkreis

Durch drei Punkte A, B und C kann man genau einen Kreis legen.
Man errichte in der Mitte der Strecke AB eine Senkrechte, ebenso in der Mitte der Strecke BC. Der Schnittpunkt der beiden Senkrechten ist der Mittelpunkt O des Kreises. Die Dreiecke AOB und BOC sind nämlich gleichschenklig, woraus zunächst $OA = OB = OC$ folgt, daraus aber, dass auch $\triangle AOC$ ein gleichschenkliges Dreieck ist. Daher liegt O ebenfalls auf einer Senkrechten, die man in der Mitte der Strecke AC errichtet. So findet man, dass die drei Mittelsenkrechten auf den Seiten eines Dreiecks sich in einem Punkt treffen.

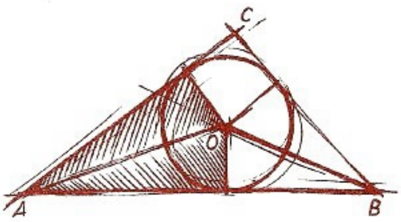


Nun sei ABC ein beliebiges Dreieck und K sein Umkreis, mit anderen Worten ein Kreis, der durch die Ecken A, B und C des Dreiecks geht. Durch die drei Mittelpunkte der Dreieckseiten legen wir einen zweiten Kreis K_o. Wir behaupten, dass dessen Radius die Hälfte vom Radius R des Kreises K ausmacht.

Verbindet man nämlich die Mittelpunkte der Dreieckseiten miteinander, so folgt aus der Ähnlichkeit des schraffierten Dreiecks zum $\triangle ABC$, dass die zu AB parallele Seite die Hälfte von AB ist, und ähnlich bei den beiden anderen Seiten. Das Dreieck, das die Mittelpunkte der Seiten von $\triangle ABC$ bilden, entsteht also aus dem $\triangle ABC$ durch eine Maßstabsänderung 1 zu 1/2.

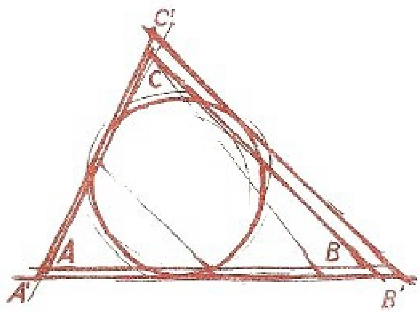


Daher besitzt sein Umkreis einen Radius $\frac{R}{2}$, der durch dieselbe Maßstabsänderung gewonnen wurde.
Es kann sein, dass K_o nicht aus dem Dreieck heraustritt. Dieser Fall liegt vor, wenn das Dreieck gleichseitig ist, aber auch nur dann. In diesem Fall ist K_o zugleich Inkreis vom Dreieck, sonst nicht. Um das einzusehen, betrachten wir zunächst wieder ein beliebiges Dreieck ABC.
Die Winkelhalbierenden in A und B schneiden sich im Mittelpunkt O des Inkreises k. Fällt man nämlich aus O die Lote auf die Dreieckseiten, dann sind die beiden schraffierten Dreiecke bei A kongruent, ebenso die beiden Dreiecke bei B. Daraus folgt weiter, dass O auf der Winkelhalbierenden aus C liegt.
Ist das Dreieck ABC insbesondere gleichseitig, dann sind die sechs Dreiecke, in die das ursprüngliche Dreieck ABC durch die drei Winkelhalbierenden und die drei Lote aus O aufgeteilt wird, kongruent, so dass die Berührunspunkte des Inkreises gerade die Mittelpunkte der Seiten vom Dreieck ABC sind und umgekehrt.



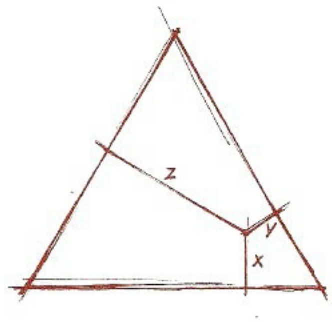
Wie dem auch sei, ob K_o aus dem Dreieck ABC herausragt oder nicht, kann man zunächst eine Parallele zur Dreieckseite AB ziehen, die K_o berührt.
Ähnlich gibt es je eine Parallele zu BC und zu AC, die K_o ebenfalls berühren. Diese drei Parallelen bestimmen ein Dreieck $A'B'C'$, aus dem das ursprüngliche Dreieck ABC nirgends herausragt. Sein Umkreis ist folglich größer als K. Sein Inkreis ist laut Konstruktion K_o.

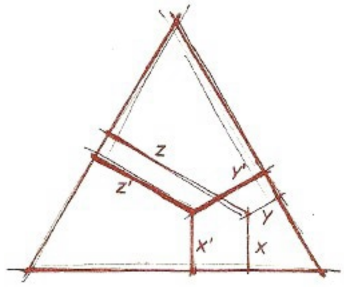
Nun ist $\triangle A'B'C'$ dem Dreieck ABC ähnlich und umfasst es. Daher entsteht $\triangle A'B'C'$ durch Maßstabsvergrößerung. Den Radius des Umkreises von $\triangle A'B'C'$ mit R' bezeichnet, gilt daher $R' \geq R$. Der Radius r' des Inkreises K_o besitzt aber den Wert $R/2$, so dass $R' \geq 2r'$ gilt.
Da man von der gestrichelten Figur zur anderen ohne Striche durch Maßstabsänderung gelangen kann, fällt der Radius des Umkreises in einem Dreieck mindestens doppelt so groß aus wie der Radius des Inkreises, und das Gleichheitszeichen gilt allein für gleichseitige Dreiecke.



20 Zur Mitte!

Fällt man aus einem inneren Punkt auf die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks Lote, welche die Längen x, y und z besitzen mögen, dann wollen wir (x, y, z) Dreieckskoordinaten des Punktes nennen.
In welchem Punkt fällt nun das Produkt xyz der Dreieckskoordinaten am größten aus?
Halt, muss es hier heißen, denn es gibt unendlich viel innere Punkte,und wir wissen bereits, dass in einem solchen Fall Vorsicht geboten ist. Es muss erst nachgewiesen werden, dass es einen größten Wert des Produktes gibt, ehe wir die Fragestellung gutheißen dürfen! Das soll jetzt geschehen, und zwar in Form eines direkten Beweises.
Um Fragen dieser Art zu behandeln, entwickelten die Mathematiker schon längst allgemeine Methoden. Diese machen aber von der Höheren Mathematik Gebrauch, was wir konsequent vermeiden möchten. Unser direkter Beweis verläuft dagegen wieder ganz elementar und ist trotzdem kurz.





Zunächst sei an den Satz von Viviani aus der Plauderei über den ergiebigen Inhalt erinnert. Danach ist die Gesamtlänge der drei Lote x, y und z für alle inneren Punkte des gleichseitigen Dreiecks dieselbe, sie ist eine Konstante. Es erweist sich als vorteilhaft, den dritten Teil dieser Konstante mit c zu bezeichnen. Dann können wir die Gleichung $x + y + z = 3c$ auch in der Form

$$(x - c) + (y - c) + (z - c) = 0$$

schreiben. Sind die drei Lote nicht alle gleich c, dann muss eine der drei Klammern positiv, eine andere negativ ausfallen, damit die Gesamtsumme verschwinden kann. Wir dürfen die Bezeichnungen so gewählt denken, dass $y - c$ negativ und $z - c$ positiv ausfällt, also $y < c < z$ gilt.
Vom Punkt (x, y, z) gehen wir zum Punkt (x', y', z') über, wobei wir für die gestrichenen Größen der Reihe nach die Werte

$$x' = x \quad , \quad y' = c \quad , \quad z' = y + (z - c)$$

wählen. Die Wahl ist so getroffen, dass

$$x + y + z = x' + y' + z'$$

augenscheinlich gilt, wozu uns ja der Satz von Viviani verpflichtet. Wir wollen die beiden Produkte xyz und $x'y'z'$ miteinander vergleichen, zunächst yz und $y'z'$. Es ist

$$y'z' - yz = c(y + z - c) - yz = (c - y)(z - c)$$

Im letzten Produkt sind beide Faktoren positiv, das Produkt folglich selber positiv, so dass $y'z'$ größer als yz ausfällt, $yz < y'z'$ und wegen $x = x'$ auch $xyz < x'y'z'$.
Vom Punkt (x', y', z') gehen wir zum Punkt (x'', y'', z'') über, indem wir

$$x'' = \frac{1}{2}(x' + z') \quad , \quad y'' = y' \quad , \quad z'' = \frac{1}{2}(x' + z')$$

setzen. Dann gilt

$$x' + z' = x + (y + z - c) = (x + y + z) - c = 3c - c = 2c$$

daher $x'' = y'' = z'' = c$ und noch immer $x'' + y'' + z'' = 3c$. Um die beiden Produkte $x'z'$ und $x''z''$ miteinander zu vergleichen, formen wir letzteres Produkt um,

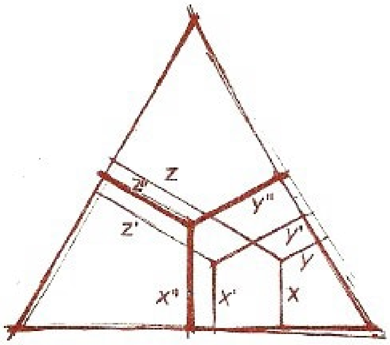
$$x''z'' = \frac{1}{4}(x' + z')^2 = x'z' + \frac{1}{4}(x' - z')^2$$

Sind also x' und z' voneinander verschieden, dann gilt $x'z' < x''z''$, weil der zweite Summand rechts in diesem Fall positiv ausfällt.

Aus der letzten Ungleichung folgt wegen $y' = y''$ weiter $x'y'z' < x''y''z''$. Damit haben wir das gewünschte Ergebnis, dass immer

$$xyz < c^3$$

ausfällt, es sei denn, dass $x = y = z = c$ ist. Den größten Wert nimmt also das Produkt xyz wirklich an, und zwar im Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks.

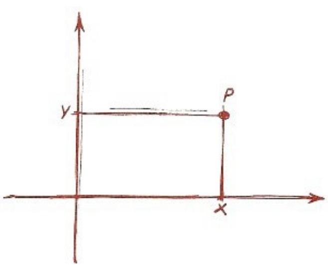


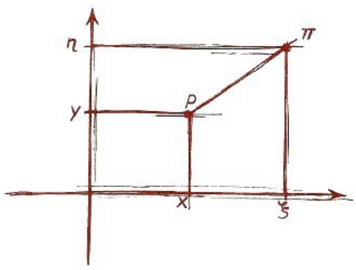
21 Störtebeker im U-Boot

Freund des Volkes, war er ein Schreck für Pfeffersäcke. Die Zeiten sind heute um. Schiffe werden nur noch in Romanen geentert, dann freilich dem Fortschritt der Technik angepasst. So etwa im Besitz eines U-Bootes, mit dem ahnungslose Schiffe ausgemacht und gekapert werden. Letzteres allerdings nur, wenn es gelingt, das Schiff einzuholen.
Wann und wo das geschieht, ist dann die Frage. Dabei kann der Mathematiker helfen, denn die, Antwort liefert ein Kreis, wenn beide Schiffe mit gleichbleibender Geschwindigkeit geradlinig fahren, eine vernünftige Annahme, weil man keinen Verfolger sichten kann, wenn man von einem U-Boot verfolgt wird. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Geraden, die durch den Standort der beiden Schiffe geht; seine Lage und den Radius berechnet man wie folgt.

Wir machen dabei von einem kartesischen Koordinatensystem Gebrauch, so benannt nach dem französischen Mathematiker Descartes. Es wird von zwei Geraden gebildet, die sich senkrecht schneiden und Koordinatenachsen heißen.

Wählt man je einen Punkt auf den Koordinatenachsen und errichtet in ihnen Lote, dann schneiden sich diese in einem Punkt der Ebene, weil sie ja den Koordinatenachsen parallel sind.
Jeder Punkt P der Ebene kann so eingefangen werden. Die Fußpunkte X und Y der beiden Lote heißen Koordinaten von P. Wählt man eine feste Strecke zur Einheit auf den Koordinatenachsen, dann können X und Y durch reelle Zahlen x und y ausgedrückt werden, wenn man noch übereinkommt, nach rechts bzw. nach oben vom Schnittpunkt der Koordinatenachsen aus die positiven, nach links bzw. nach unten die negativen Werte für x bzw. y einzutragen.





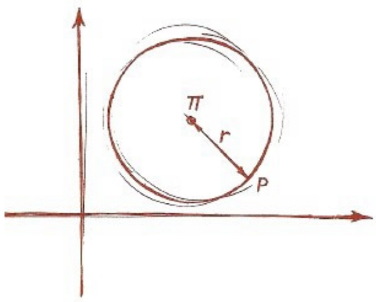
Auf diese Weise bestimmt jeder Punkt P der Ebene ein einziges Koordinatenpaar (X, Y), fixiert durch das reelle Zahlenpaar (x, y) und umgekehrt, jedes reelle Zahlenpaar bestimmt einen einzigen Punkt der Koordinatenebene.
Wie lässt sich die Entfernung der beiden Punkte Π und P durch ihre Koordinaten (ξ, η) und (x, y) ausdrücken? Der Lehrsatz des Pythagoras im eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck führt uns auf die Lösung

$$\Pi P^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

Hält man also den einen Punkt Pi fest, während der andere, P, sich auf einem Kreis vom Radius r um Pi als Mittelpunkt bewegt, dann gilt für die Punkte des Kreises

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = r^2$$

Jetzt legen wir das kartesische Koordinatensystem so, dass sich das verfolgte Schiff im Schnittpunkt der Koordinatenachsen, das U-Boot aber sich auf der Achse für die x-Werte befindet, und wählen die Entfernung der beiden Schiffe zur Einheitsstrecke.



Dann besitzt das verfolgte Schiff die Koordinatenwerte $(0, 0)$, das U-Boot aber $(1, 0)$. Soll das U-Boot mit der Geschwindigkeit u das Schiff, das mit der Geschwindigkeit v fährt, nach t Sekunden einholen, dann haben bis dahin die beiden Schiffe die Strecken tu und tv zurückgelegt.
Das Verhältnis der beiden Strecken beträgt $tu : tv$, woraus durch kürzen durch t der Wert $u = v$ folgt.
Wir behaupten, dass sämtliche Punkte (x, y), deren Entfernungen von den beiden Schiffen $(0, 0)$ und $(1, 0)$ dasselbe Verhältnis haben oder, anders ausgedrückt, von beiden Schiffen zugleich erreicht werden können, auf einem Kreis liegen. Es erweist sich als vorteilhaft, für $(u : v)^2$ kürzer c zu schreiben. Dann lautet unsere Behauptung in Formeln

$$\frac{\sqrt{(1-x)^2 + (0-y)^2}}{\sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2}} = \frac{u}{v}$$

woraus ins Quadrat erhoben

$$\frac{(1-x)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = c$$

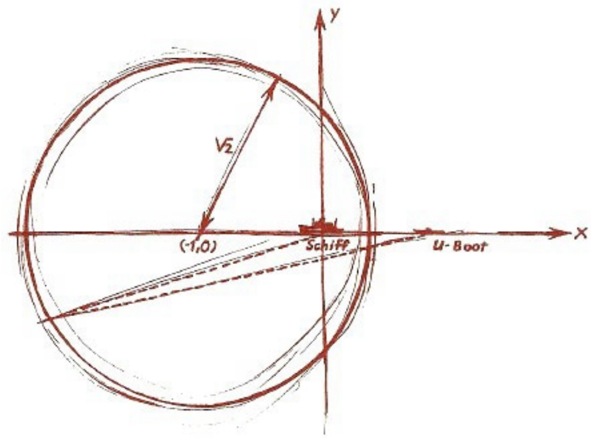
folgt. Nach einer leichten Rechnung folgt daraus

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{1-c}x = \frac{1}{c-1}$$

Lässt sich diese Gleichung als Gleichung eines Kreises auffassen?
Ja, denn wir behaupten, dass sie die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{1}{1-c},0\right)$ darstellt, dessen Radius den Wert $\frac{\sqrt{c}}{c-1}$ besitzt. Die Gleichung dieses Kreises lautet nämlich

$$\left(\frac{1}{1-c} - c\right)^2 + (0-y)^2 = \left(\frac{\sqrt{c}}{c-1}\right)^2$$

eine Gleichung, die sich nach kurzer Rechnung genau wie vorhergehend schreiben lässt. c wurde dabei stillschweigend verschieden von 1 vorausgesetzt, weil der Nenner sonst verschwinden, daher der Bruch keinen Sinn haben würde.
Der Kreis wird nach dem griechischen Mathematiker Apollonios benannt.

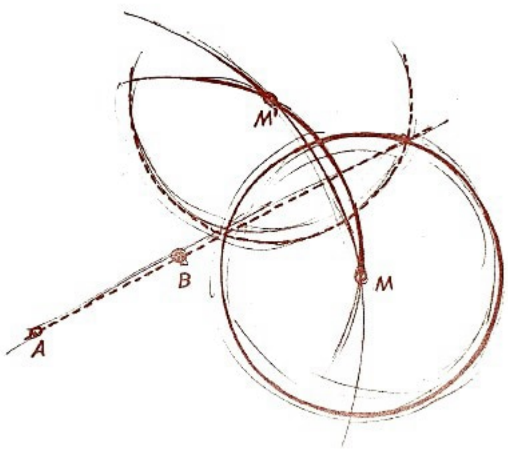


22 Zirkel ersetzt Lineal

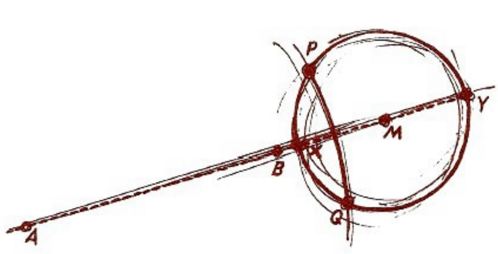
Nach einer bekannten Bildfolge von Effel hat ein kleiner Junge seinen Federhalter zu Hause vergessen. Die Lehrerin will ihn deshalb gerade tadeln, doch es kommt, wie so manchmal, anders. Der unzertrennliche Freund des kleinen Jungen, ein kleiner Engel, zupft sich geschwind eine Feder aus einem seiner Flügel und steckt diese seinem Freund nach im letzten Augenblick zu.
Da ich an Engel, jedenfalls solche mit Flügeln, nicht so recht glaube, möchte ich die Geschichte lieber etwas abändern. Der Junge soll nicht gar so klein sein, und er soll sein Lineal zu Hause vergessen haben.
Wenn er dann noch ein verkapptes Genie wäre, könnte er die Frage: "Wie willst du denn die geometrischen Konstruktionen ohne Lineal ausführen?" zu Recht so beantworten: "Mit dem Zirkel allein!" Aber wie?

Zirkel und Lineal dienen dazu, die Schnittpunkte von zwei Kreisen, von einem Kreis und einer Geraden, schließlich von zwei Geraden zu bestimmen. Fällt das Lineal weg, dann erhebt sich die Frage, wie man mit dem Zirkel allein die Schnittpunkte im zweiten und im dritten Fall bestimmen kann.
Wegen Wegfall des Lineals sind dabei Geraden jeweils durch zwei ihrer Punkte anzugeben.

Zunächst wollen wir die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis mit Hilfe des Zirkels allein bestimmen. Zuerst setzen wir voraus, dass der Mittelpunkt des Kreises nicht auf der Geraden liegt, um anschließend auch noch diesen Fall zu erledigen.
Wie schon gesagt, ist die Gerade durch zwei ihrer Punkte A und B gegeben, der Kreis durch seinen Mittelpunkt M und Radius r. Um A bzw. B schlage man je einen Kreis mit dem Radius AM bzw. BM.

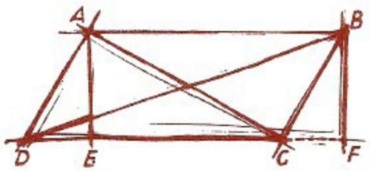


Die beiden Kreise treffen sich in zwei Punkten. Der eine davon ist M, der andere soll M' sein. M und M' liegen spiegelbildlich zur Geraden AB. Daher schneiden sich zwei Kreise mit den Mittelpunkten M bzw. M' und gleichen Radien auf der Geraden AB.
Da ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und vom Radius r bereits vorliegt, schlage man um M' mit demselben Radius r einen Kreis. Die Schnittpunkte dieser beiden Kreise stellen dann die Schnittpunkte der Geraden AB mit dem gegebenen Kreis um M dar.



Wenn dagegen die Gerade AB durch M geht, schlägt man um A einen so großen Kreis, dass dieser den Kreis um M in den Punkten P und Q trifft. Diese Punkte liegen spiegelbildlich zur Geraden AB, daher sind die gesuchten Schnittpunkte X und Y Mittelpunkte der beiden Bogen auf dem Kreis um M, die durch P und Q begrenzt sind.

Um aber den Mittelpunkt eines Kreisbogens mit dem Zirkel allein zu bestimmen, brauchen wir einen Hilfssatz, den de Lagny 1706 fand, zu einer Zeit, da man anfing, neben der Dreieckslehre auch noch eine Viereckslehre systematisch zu entwickeln.



Im Parallelogramm $ABCD$ fälle man aus A bzw. B die Lote, welche die Seite DC bzw. ihre Verlängerung in E bzw. F treffen mögen. Im Dreieck BDF ist nach dem Pythagoras

$$BD^2 = DF^2 + BF^2 = (DC + CF)^2 + BF^2 = CD^2 + 2 \cdot CD \cdot CF + CF^2 + BF^2$$

weiter im Dreieck BCF, ebenfalls nach dem Pythagoras,

$$BC^2 = BF^2 + CF^2 \qquad \text{daher} \qquad CF^2 = BC^2 - BF^2$$

Wird dieser Wert in die vorletzte Formel eingesetzt, so hebt sich BF^2 weg, so dass

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot CD \cdot CF$$

übrigbleibt. Weiter ist im Dreieck ACE nach dem Pythagoras

$$AC^2 = CE^2 + AE^2 = (CD - DE)^2 + AE^2 = CD^2 - 2 \cdot CD \cdot DE + DE^2 + AE^2$$

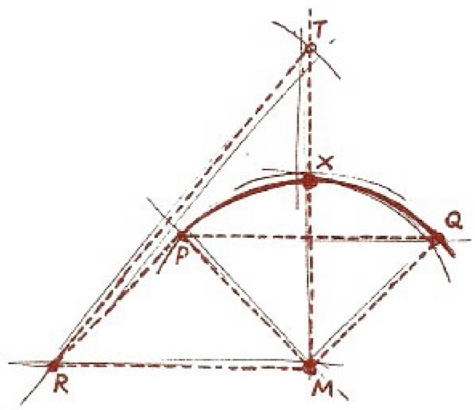
sodann im Dreieck ADE, ebenfalls nach dem Pythagoras $DE^2 + AE^2 == AD^2$.
Durch Einsetzen in die letzte Formelreihe folgt

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot CD \cdot DE$$

Addiert man die für BD^2 und AC^2 gewonnenen Ausdrücke und beachtet, dass $CF = DE$, weiter aber $AB = CD$ und $AD = BC$ ist, dann ergibt sich schließlich

$$AC^2 + BD^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2$$

in Worten: Die Quadrate der beiden Diagonalen eines Parallelogramms haben dieselbe Summe wie die Quadrate der vier Seiten.



Um den Bogen PQ zu halbieren, gehen wir nicht wie üblich vor, sondern ziehen aus P die Parallele zu QM und aus M die Parallele zur Sehne PQ. Die soeben gezogenen Geraden schneiden sich im Punkt R. Nach dem Hilfssatz gilt im Parallelogramm $RMQP$

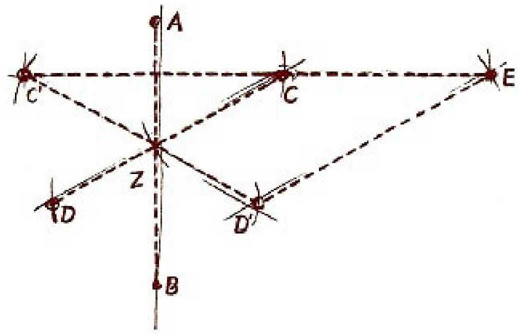
$$2 \cdot MQ^2 + 2 \cdot PQ^2 = PM^2 + RQ^2$$

Die Sehne PQ mit s bezeichnet, ist weiter $QM = PM = r$, daher geht die vorhergehende Gleichung in $2s^2 + r^2 = RQ^2$ über.

Im Dreieck MRX gilt nach dem Pythagoras, wenn noch $MX = r$ berücksichtigt wird, $RX^2 = s^2 + r^2$.
Der Kreis um R mit dem Radius RQ möge die Verlängerung von MX in T schneiden. Dann ist im Dreieck RMT nach dem Pythagoras

$$s^2 + MT^2 = RT^2 = RQ^2$$

Die linken Seiten dieser und der vorletzten Gleichung gleichgesetzt, folgt $MT^2 = s^2 + r^2$, und weil die rechte Seite vorhin gleich RX^2 ergab, schließlich $MT = RX$.
Mit dem Zirkel allein bestimmt man daher X, indem um P und Q Kreise mit dem Radius r, um M mit dem Radius s geschlagen werden. Die Schnittpunkte sind R und ein zur Geraden MT spiegelbildlich gelegener Punkt R'. Um R und R' schlägt man Kreise mit dem Radius RQ. Dann erscheint T als Schnittpunkt. Um R schlägt man mit dem Radius MT einen Kreis, der den Bogen PQ nach unserer eben angestellten Überlegung im gewünschten Mittelpunkt X schneidet.



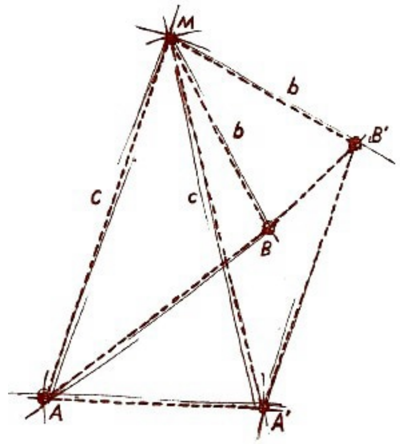
Es bleibt noch übrig, den Schnittpunkt Z von zwei Geraden mit dem Zirkel allein zu bestimmen. Die beiden Geraden seien durch die Punktepaare A, B und C, D gegeben. C' und D' seien die Spiegelbilder von C und D in Bezug auf die Gerade AB. E sei Schnittpunkt des Kreises um C mit dem Radius DD' und des Kreises um D' mit dem Radius CD.

Die Dreiecke $C'ZC$ und $C'D'E$ sind ähnlich, daher gilt

$$C'Z : C'D' = C'C : C'E$$

und unsere Aufgabe besteht darin, zu den drei Strecken $C'D' = a$, $C'C = b$ und $C'E = c$ die vierte Proportionale $C'Z$ mit dem Zirkel allein zu bestimmen.

Dazu errichte man über $AA' = a$ ein gleichschenkliges Dreieck AMA' mit Schenkeln von der Länge c, weiter über AM irgendein Dreieck AMB so, dass dabei $MB = b$ ist, schließlich über AM das dazu kongruente Dreieck $A'MB'$. Die Winkel $\angle AMA' = \angle AMB - \angle A'MB$ und $\angle BMB' = \angle A'MB' - \angle A'MB$ sind dann gleich, die gleichschenkligen Dreiecke AMA' und BMB' daher ähnlich, woraus $AA' : BB' = AM : BM$ oder, anders geschrieben, $a : BB' = c : b$ folgt. So wird die vierte Proportionale zu a, b und c mit dem Zirkel allein bestimmt.



Wir bemerken noch zum Schluss, dass wir die Einsicht, mit dem Zirkel allein könne man dieselben Konstruktionen bewältigen, die sonst mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden, Mascheroni (1797) verdanken. Dieselbe Einsicht gewann zwar der Däne Mohr schon ein gutes Jahrhundert früher, er blieb aber damit bis 1928 unbeachtet.
Wenn jedoch unser nicht gerade Musterschüler seinen Zirkel und nicht das Lineal, dessen Kanten ein Parallelenpaar mit festem Abstand darstellen, zu Hause vergessen hätte, wäre er ebenfalls in der Lage, alle Konstruktionen zu schaffen, die sonst mit Hilfe von Zirkel und Lineal durchgeführt werden. Darauf wollen wir aber nicht mehr eingehen.

23 Die Kunst zu packen

Wir meinen nun nicht etwa das Kofferpacken des Reisenden, obschon man es darin bis zur wahren Kunst bringen kann. Ja, man kann sich damit sein Geld verdienen, wie eine Studentin in den zwanziger Jahren in New York. Mittellose Studenten ergriffen dort und auch anderswo die verschiedensten Berufe in den Ferien, um ihr Studium zu finanzieren. Besagte Studentin kam auf den Einfall, sich an ein großes Hotel zu wenden, um dort gegen geringes Entgelt die Koffer der abreisenden Gäste kunstgerecht zu packen.

Während die Studentin im Hotelzimmer Kleidungsstück um Kleidungsstück gekonnt in den Koffer schichtet, kann die zur Abreise rüstende Dame noch in aller Gemütsruhe ein erfrischendes Bad nehmen. Dabei mag ihr die Frage aufkommen, ob denn ihre Reiserequisiten genau so schön in den Koffer gepackt werden, wie etwa die Kacheln des Badezimmers aneinandergereiht sind.
Die Kacheln im Badezimmer bilden lauter gleich große Quadrate. Welche regulären Vielecke würden die Ebene ebenfalls lückenlos bedecken?

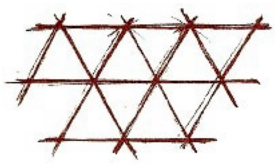
Es seien reguläre p-Ecke. Dann stoßen in jeder Ecke dieselbe Anzahl q davon zusammen. Daher muss das q-fache des Winkels, den zwei aufeinanderfolgende Seiten des einzelnen p-Ecks miteinander bilden, gerade den vollen Winkel 360° ausfüllen. Der Winkel selber ist das Doppelte des Winkels an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel die beiden Eckpunkte einer Polygonseite mit dem Mittelpunkt des Inkreises verbinden.

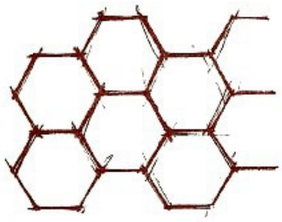
Da letzterer Winkel $\frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{p}\right)$ ist, folgt $q\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{p}\right) = 360^\circ$, nach Kürzen durch 180° daher $q\left(1 - \frac{2}{p}\right) = 2$, weiter also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, was noch als

$$(p-2)(q-2) = 4$$

geschrieben werden kann.

Da 4 sich als Produkt von zwei natürlichen Zahlen nur als $1 \cdot 4$, $2 \cdot 2$, $4 \cdot 1$ darstellen lässt, folglich $p - 2 = 1, 2, 4$ ausfallen muss, gibt es nur drei Möglichkeiten, die Ebene mit gleichgroßen regulären Polygonen lückenlos zu überdecken.





Die eine, $p - 2 = 2$, also $p = 4$, das bedeutet Quadrate, kennen wir schon. Hinzu kommen $p - 2 = 1$, also $p = 3$, gleichseitige Dreiecke, und $p - 2 = 4$, also $p = 6$, reguläre Sechsecke.

Die in die drei verschiedenen Überdeckungen eingezeichneten Inkreise berühren sich jedesmal, ohne die Ebene lückenlos zu überdecken. Man kann das Verhältnis der Inhalte

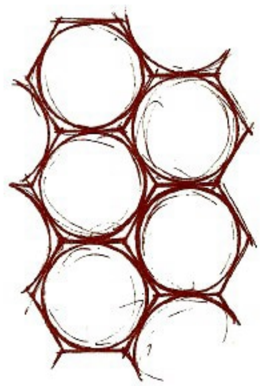
von Inkreis und Polygon als Maß für die Güte der Überdeckung einführen. Dieser Wert fällt augenscheinlich stets kleiner als Eins aus.
Mit den elementarsten Mitteln der Trigonometrie bestimmt man ihn zu

$$\frac{\pi}{p}\cot\frac{\pi}{p}$$

Da für p, wie wir vorhin gesehen haben, allein die Werte 3, 4 und 6 in Frage kommen, ergibt sich aus der letzten Formel, dass die Inkreise von regulären Sechsecken die Ebene am besten überdecken, am dichtesten gepackt sind, mit dem Wert

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069...$$

für unser Maß, auch Dichte der Packung genannt.
Unvergleichlich schwieriger ist die Antwort, wenn bei der Forderung, die Ebene durch Kreise bestmöglich zu überdecken, die Einschränkung, es möge sich um Inkreise handeln, fallengelassen wird. Die erforderlichen Überlegungen verlangen dann ganz neue Gesichtspunkte und übersteigen unsere Mittel. Man kann darüber im schönen Buch ”Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum” von Fejes Tóth nachlesen.



Es lässt sich schon erwarten, dass ein Ausfüllen des Raumes durch Polyeder oder Kugeln noch schwieriger zu behandeln ist. Wenn man von der trivialen Lösung durch Würfel absieht, trifft das wirklich zu. Daher müssen wir uns mit einigen anregenden Bemerkungen begnügen.
Fragt man nach der dichtesten Packung von gleich großen Kugeln, dann weiß man nur soviel, dass sie kleiner als 0,7797... mit rund 74 % Raumerfüllung ausfallen muss, wie groß sie aber wirklich ist, weiß man nicht, weil man die dichteste Packung nicht kennt.

Leicht dagegen fällt es, eine Kugelpackung von der Dichte 0,74048... anzugeben. In jedem zweiten Würfel der vorhin erwähnten Lösung denke man sich eine so große Kugel, wie das die Würfelkanten eben noch zulassen. Die Kugel ragt dabei aus dem Würfel heraus.
Eine Ebene, durch den Würfelmittelpunkt parallel zu einer Seitenfläche gelegt, schneidet aus dem Würfel ein Quadrat und aus der Kugel dessen Umkreis heraus. Der Radius des Umkreises ist zugleich der Kugelradius und der halben Quadratdiagonalen gleich.

Wählt man die Würfelkante zur Einheit, dann berechnet sich diese Diagonale nach dem Pythagoras zu $\sqrt{2}$. Die Hälfte davon, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, beträgt der Kugelradius. Um nun die Dichte dieser Kugelpackung zu bestimmen, hat man das Volumen der Kugel durch den doppelten Würfelinhalt zu dividieren, weil nur eine Kugel auf je zwei Würfel kommt. So gewinnt man den angekündigten Wert

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{18}}$$

Die Packungsdichte spielt in die verschiedensten Gebiete hinein. So erklärte Reynolds 1885 damit die Beobachtung, dass rund um den Fuß der nasse Sand heller wirkt.

Er ist dort nämlich vorübergehend weniger feucht, weil der Fuß den Sand auseinanderdrückt und damit die Räume zwischen den Sandkörnern vergrößert. Anschließend kann aus der Nachbarschaft Wasser hineinströmen, wodurch der Sand wieder dunkler wird.

Auf diesen Effekt der Vergrößerung von Zwischenräumen führt Gardner einen Trick indischer Fakire zurück.
In einen Hohlzylinder mit enger Öffnung wird unter leichtem Schütteln ungekochter Reis gefüllt. Sticht man mit einem Tafelmesser hintereinander etwa ein Dutzendmal, jeweils etwas tiefer, hinein, dann steckt das Messer plötzlich so fest, dass man das ganze Gefäß daran hochheben kann.

24 Überraschungen auf der Kugel

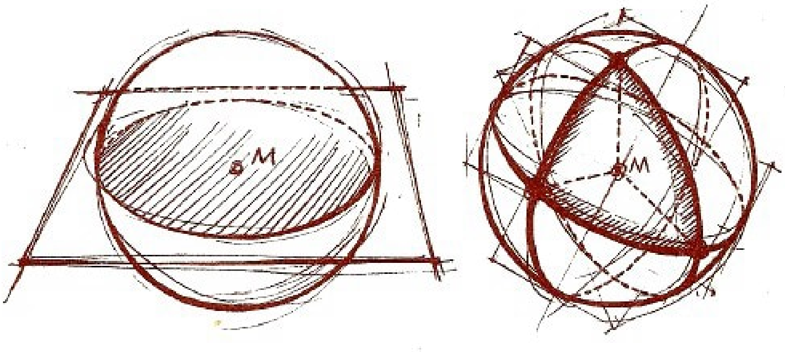
Zunächst eine Aufgabe, die vor übereilten Schlüssen warnen sollte. Um so mehr, als man sich auf der Kugel weniger gut auskennt als in der Ebene, obschon wir auf einer Kugel leben, auf Mutter Erde.
Ein Wanderer soll von einem Ort erst 10 km südwärts gehen, dann 10 km ostwärts, schließlich 10 km nordwärts. Begann er diesen Weg am Nordpol, dann landet er zum Schluss ebendort.
Die Frage lautet: Ist der Nordpol der einzige Ort, für den das zutrifft, oder gibt es noch andere Orte auf der Erde, bei denen der Wanderer zu guter Letzt genau dort landet, von wo er auszog?

Ein bekannter Mathematiker soll dazu folgende Überlegung angestellt haben. Südwärts bewegt sich der Wanderer entlang eines Meridians, nordwärts ebenfalls. Die beiden Meridiane haben zwei Schnittpunkte, den Nordpol und den Südpol. Letzterer scheidet aus, denn vom Südpol aus kann man nicht südwärts wandern. Es bleibt also nur der Nordpol als Lösung übrig. Elegant, aber falsch, diese Überlegung!

Wo liegt der Fehler? Es wird stillschweigend angenommen, dass die beiden Meridiane, entlang denen man wandert, voneinander verschieden sind. Das braucht aber nicht zu sein, und damit gewinnt man gleich unendlich viel weitere Orte, für die es ebenso wie für den Nordpol zutrifft, dass die vorgeschriebene Wanderung am Ausgangsort endet.

Um das einzusehen, gehe man vom Breitenkreis auf der südlichen Halbkugel aus, der den Umfang von genau 10 km hat. Davon 10 km nördlich entfernt, befindet sich dann der Breitenkreis, dessen sämtliche Punkte einzeln unserer Aufgabe genügen.
Zieht man nämlich von irgendeinem Punkt des letztgenannten Breitenkreises los, dann endet das Wandern 10 km südwärts in einem Punkt des erstgenannten Breitenkreises. Da dieser den Umfang von 10 km hat, endet das Wandern ostwärts, also entlang dieses Breitenkreises, im selben Punkt, in dem man vorher beim Wandern südwärts ankam. Beim Wandern nordwärts geht man folglich in der eigenen, Spur zurück, so dass man im Ausgangspunkt landet.

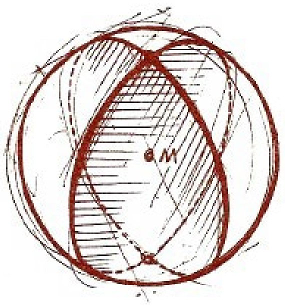
Die Kugel hat uns aber wesentlich mehr zu bieten als nur Aufgaben dieser Art. Man kann über sie Betrachtungen anstellen, die eine ganz neue Raumform erschließen. Diese verlangt dann eine grundsätzliche Abkehr von altgewohnten Ansichten. Damit verhilft sie bei systematischem Studium zum besseren Verständnis der logischen Struktur geometrischer Grundannahmen. Im einzelnen sieht das dann so aus.

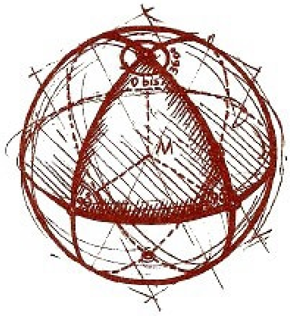


Ebenen, die durch den Kugelmittelpunkt gehen, schneiden deren Oberfläche in Kreisen. Sie heißen Großkreise, weil sie die größtmöglichen Kreise auf der Kugeloberfläche sind,

und spielen dort eine ähnliche Rolle wie die Geraden in der Ebene. Aber wie verschieden von diesen verhalten sie sich!
Zunächst schneiden sich zwei Großkreise stets in zwei Punkten. Es gibt also keine Parallelen. Dann haben sie eine endliche Länge, die übrigens bei allen dieselbe ist, während die Geraden unendlich lang sind.
Sie stimmen aber mit den Geraden in einer ausschlaggebenden Eigenschaft überein: Sie stellen die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche her, ähnlich wie die Geraden in der Ebene.

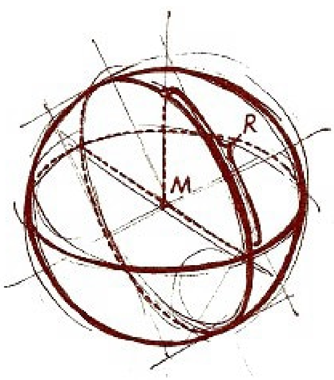
Betrachten wir einmal Dreiecke, die von Großkreisbogen begrenzt sind. Sie entsprechen ebenen Dreiecken. Während aber bei letzteren die Winkelsumme nach der Schulgeometrie immer 180° beträgt, trifft das für unsere Dreiecke auf der Kugel keineswegs zu.





Dazu muss erst geklärt werden, was unter dem Winkel zu verstehen ist, den zwei Großkreise miteinander bilden. In den Schnittpunkten zieht man zunächst die Tangenten. Diese bilden vier ebene Winkel, von denen je zwei, die Scheitelwinkel, einander gleich sind. So gelangt man zum Winkel, unter dem sich die beiden Großkreise schneiden.

Nach dieser Erklärung betrachte man ein Kugeldreieck, das von zwei Meridianbogen und einem Äquatorbogen gebildet wird. Die beiden Winkel am Äquator betragen je 90°, der Winkel zwischen den beiden Meridianen liegt zwischen 0° und 360°, so dass die Winkelsumme zwischen 180° und 540° fällt.

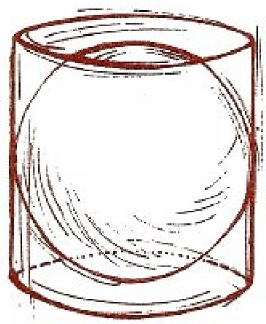


Nicht genug damit! Bestimmen wir das Verhältnis des Äquatorumfanges zu seinem Durchmesser, ein Verhältnis, das in der Ebene den Wert 3,141... besitzt, so ergibt sich der Wert 2, da es sich beim Durchmesser des Äquators um einen halben Großkreis durch einen der beiden Pole handelt.
Man kann folglich durch Ausmessen auf der Erdoberfläche feststellen, dass diese keine Ebene ist, wie es zunächst den Anschein hat und wie es im Altertum auch wirklich geglaubt wurde.

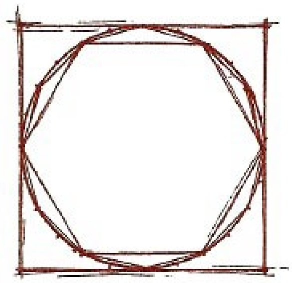
Genug damit! Was wir erstrebten, haben wir erreicht. Wir erkennen, dass entscheidende Aussagen in der Ebene für die Kugeloberfläche starker Abänderungen bedürfen.
Auf letzterer gibt es keine Parallelen, die Winkelsumme im Dreieck übersteigt 180°, und das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser beträgt 2, lauter ketzerische Abwandlungen, die aber ihre Richtigkeit haben.
Es geht eben um eine neue Raumform, mit eigenen, ganz anderen Gesetzen. Bei dieser prinzipiellen Einsicht wollen wir es hier bewenden lassen.

25 Das Grabmal des Archimedes

Archimedes war der bedeutendste Mathematiker des Altertums, ja noch mehr, er war auch der größte Techniker. Mit seinen Kriegsmaschinen trotzte er jahrelang dem Heer der Römer. Deren Feldherr würdigte diese einmalige Leistung, als er nach endlich erfochtenem Sieg den Befehl gab, das Leben des Archimedes zu schonen. Leider erkannte ihn der plündernde Soldat nicht, der ihn, geometrische Figuren in den Sand zeichnend, vorfand und mit einem Schwertstreich tötete.



Der Historiker Plutarch rühmte das Genie des Archimedes mit den Worten:
"Nirgends in der Mathematik lassen sich schwierige und wichtige Sätze in einfacheren, reineren Formen und Figuren darstellen, als es durch ihn geschah. Dies schreiben manche der Begabung des berühmten Mannes zu, während andere glauben, dass man durch unentwegten Fleiß schließlich allem den Anschein geben könne, als wäre es ganz leicht und ohne alle Mühe zustande gekommen. Durch bloßes Suchen fände wohl keiner den Beweis von selbst; zeigt man ihm dagegen die Sache, dann kommt er alsbald auf den Gedanken, dass er das wohl auch allein gefunden hätte; so glatt und rasch ist der Weg, den Archimedes uns führt."
Man darf in den von Archimedes angewandten Verfahren die Vorläufer unserer Integralrechnung erblicken. Allein das Bestreben, in althergebrachter Weise zu schließen, brachte ihn um die Entdeckung des bestimmten Integrals.

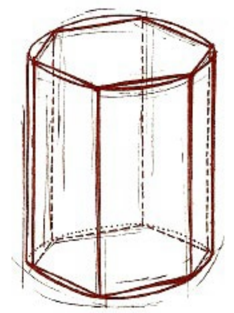


Trotzdem war er berechtigt, stolz zu sein, denn es gelang ihm als erstem, Oberfläche und Inhalt der Kugel zu bestimmen. Dabei stellte er fest, dass ein der Kugel umschriebener Zylinder den anderthalbfachen Inhalt der Kugel besitzt, und er wünschte sich diese Figur als Grabsteinzierde. Rund 150 Jahre später erkannte Cicero daran das Grab des Archimedes.

Wir wollen nun den Inhalt von Zylinder, Kegel und Kugel bestimmen. Dazu müssen wir zunächst die Frage beantworten, was unter dem Inhalt krummlinig begrenzter Figuren zu verstehen ist.
Um den Kreisinhalt zu erklären, geht man etwa vom eingeschriebenen regulären Sechseck aus, über dessen Seiten jeweils ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze auf dem Kreis errichtet wird.

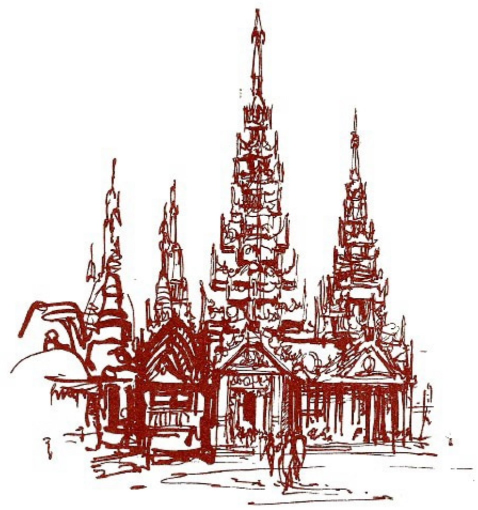
Über jeder Seite des so erhaltenen Zwölfecks errichtet man abermals ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze auf dem Kreis. Setzt man das fort, dann gewinnt man eine Folge von regelmäßigen Vielecken, deren Inhalte gegen einen bestimmten Wert konvergieren, der als Kreisinhalt erklärt wird. Das gilt, weil die Inhalte der sukzessiven Vielecke eine monoton aufsteigende Folge bilden. deren Glieder alle kleiner als der Inhalt eines umschriebenen Quadrats ausfallen.

Den Zylinderinhalt erklärt und bestimmt man ähnlich. Man errichtet über den Vielecken der Folge von vorhin, die der kreisförmigen Grundfläche des Zylinders eingeschrieben sind, Prismen. Deren Inhalte konvergieren wiederum gegen eine ganz bestimmte Zahl, weil sie ja aus der konvergenten Folge ihrer Grundflächen durch Multiplikation mit ein und derselben Zahl h, der Höhe des Zylinders, hervorgehen.
Der Grenzwert gilt dann als Inhalt des Zylinders mit der Formel $hr^2\pi$.

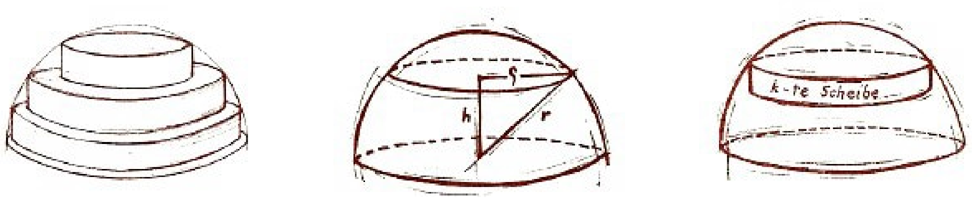


Nimmt man den Grenzübergang an Figuren vor, die aus Zylindern aufgebaut sind, dann gelingt es, den Kugelinhalt zu bestimmen.

Dazu betrachte man eine Halbkugel vom Radius r. In diese stellen wir einen flachen Zylinder hinein, dessen Deckel von einem Kreis auf der Halbkugel begrenzt wird. Darauf stellen wir ähnlich einen zweiten Zylinder, darauf einen dritten und so fort. So baut man einen sich nach oben verjüngenden Turm, eine Pagode in die Halbkugel hinein.
Die Anschauung lehrt, dass die Pagode die Halbkugel um so besser ausfällt, je mehr die Dicke der einzelnen zylindrischen Scheiben abnimmt. In Formeln erhärtet man diese Einsicht wie folgt:
Ein Kreis auf der Halbkugeloberfläche im Abstand h von der Grundfläche hat den Radius $\rho = \sqrt{r^2 - h^2}$.



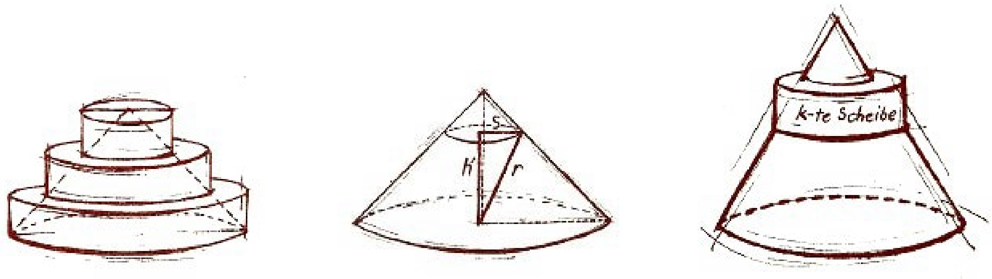
daher die Fläche $\rho^2\pi = r^2\pi - h^2\pi$.
Zum Turmbau wählen wir nun Scheiben gleicher Dicke $\frac{r}{n}$. Der Inhalt der k-ten Scheibe ist dann $\frac{r}{n}\left(r^2\pi - \frac{k^2r^2}{n^2}\pi\right)$ und der Inhalt des Turmes $r^3\pi - \frac{r^3\pi}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right)$.



Von früher her wissen wir aber, dass die Summe in der Klammer den Wert $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ besitzt. Durch Einsetzen dieses Wertes wird der Pagodeninhalt

$$r^3\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$$

Mit immer größer werdendem n werden das zweite und dritte Glied in der Klammer beliebig klein, so dass der Pagodeninhalt gegen $\frac{2}{3}r^3\pi$ konvergiert.



Dieser Wert stellt definitionsgemäß den Inhalt der Halbkugel dar. Es besteht ein interessanter Zusammenhang zwischen den Inhalten von Zylinder, Kugel und Kegel. Dazu müssen wir erst den Kegelinhalt bestimmen. Diesmal bauen wir die Pagode so eng wie möglich um den Kegel mit der Höhe h herum.

Das bietet eine weitere Möglichkeit, den Inhalt von außen her zu approximieren. Zunächst bemerken wir, dass der Radius ρ des Kreises im Abstand h' von der Grundfläche mit

$$\rho = r\left(1 - \frac{h'}{h}\right)$$

zu berechnen ist, was aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke hervorgeht. Verwendet man zum Pagodenbau lauter Scheiben von gleicher Dicke $\frac{h}{n}$, dann folgt für die (von unten gerechnet) k-te Scheibe, da sie den Radius

$$r\left(1 - \frac{(k-1)\frac{h}{n}}{h}\right) = r\frac{n-k+1}{n}$$

besitzt, der Wert

$$\frac{h}{n} \cdot \frac{r^2(n-k+1)^2}{n^2}\pi$$

Wenn k von 1 bis n läuft, nimmt $(n-k+1)^2$ die Werte n^2, $(n-1)^2$, ... 2^2, 1^2 an. Der Pagodeninhalt ergibt sich damit zunächst zu

$$hr^2\pi\frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3}$$

und unter Anwendung der Summenformel von vorhin erhalten wir

$$hr^2\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

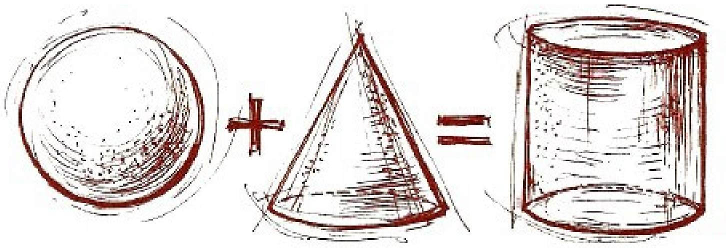
Wie vorhin schließen wir daraus, dass der Inhalt des Kegels $\frac{1}{3}\pi r^2$ wird.

Mit Hilfe unserer Formeln folgt noch, dass die Summe der Inhalte einer Kugel und eines Kegels, dessen Grundkreisdurchmesser und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, den Inhalt eines Zylinders ausmachen, der gerade die Kugel umschließen würde:

$$\frac{4}{3}r^3\pi + \frac{1}{3} \cdot 2r \cdot r^2\pi = 2r \cdot r^2\pi$$

Pagode und Summenformel für die erste n Ouadratzahlen bildeten den Ansatz, mit dem wir die Inhalte von Kugel und Kegel bestimmten.

Für den Kegel führte ich das bereits in der ersten Auflage meines Buches ”Erlebte Physik” 1942 durch. Elf Jahre später berechnete dann Natanson nach dieser Methode den Inhalt der Kugel. Außerdem ist zu bemerken, dass man sonst heute noch das Prinzip von Cavalieri heranzieht, um den Kugelinhalt zu bestimmen. Dieses Prinzip kann aber erst in der Integralrechnung begründet und muss daher geglaubt werden, was ich für ein recht fragwürdiges Vorgehen finde.
Deshalb nahm ich Inhaltsbestimmungen in einer Vorlesung mit elementaren Mitteln vor. Dabei erfuhr ich zufällig von der Arbeit von Natanson, ein Zeichen dafür, dass auch der Eifrigste heute kaum noch in der Lage ist, die umfangreiche Literatur auch nur zu übersehen, geschweige denn gar zu verarbeiten.



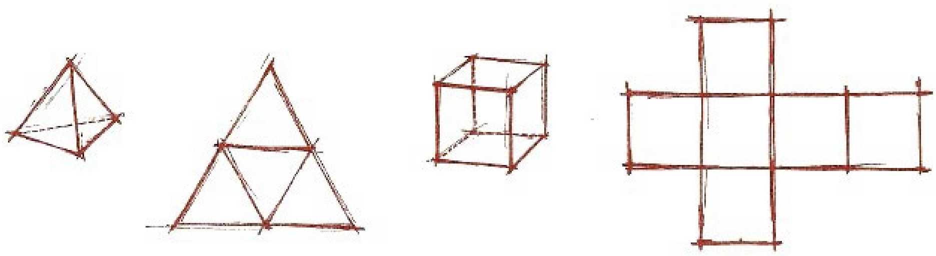
26 Körper des Plato

Gemeint ist die Mehrzahl und nicht die Einzahl; es geht nicht um den eigenen Körper von Plato, sondern um die regulären Körper, die gelegentlich nach ihm benannt werden. Man ehrt ihn, weil er mit Entschiedenheit für die Mathematik eintrat. Über der Eingangspforte seiner Akademie stand anmaßend: "Kein der Geometrie Unkundiger trete unter mein Dach".
Die wahre Bedeutung der Mathematik erkannte aber Plato keineswegs, weil er darin lediglich eine Schulung des Denkers erblickte.
Zunächst beweisen wir einen Satz, der nach Euler benannt wird, den aber schon Descartes, wie aus einem erst 1860 veröffentlichten Fragment hervorgeht, mit Bestimmtheit und Archimedes aller Wahrscheinlichkeit nach kannte.

Man baue ein konvexes Polyeder schrittweise ab, indem die Seitenflächen nacheinander entfernt werden:
Als Ecken bzw. Kanten einer Polyederruine sind diejenigen Ecken bzw. Kanten des vollständigen Polyeders anzusprechen, an denen keine der ursprünglichen Seitenflächen fehlt. Die Polyederruine möge im augenblicklichen Zustand noch f Seitenflächen, k Kanten und e Ecken besitzen. Entfernt man eine weitere Seitenfläche vom Rande, dann gibt es nur noch $f' = f - 1$ Seitenflächen. Besaß die eben entfernte Seitenfläche noch n Eckpunkte, dann wurde deren Anzahl in der Ruine um n auf $e' = e - n$ vermindert, während die Anzahl von Kanten um $n + 1$ vermindert wurde, also nur noch $k' = k - n - 1$ beträgt. Daher ist

$$f' - 1 + e' - k' = (f - 1) - 1 + (e - n) - (k - n - 1) = f - 1 + e - k$$

Denkt man sich den Abbau bis zur letzten Seitenfläche vorgetrieben, dann ist die Anzahl der Ecken und Kanten gleich, und der konstante Wert von vorhin ergibt sich wegen $f = 1$ als Null.



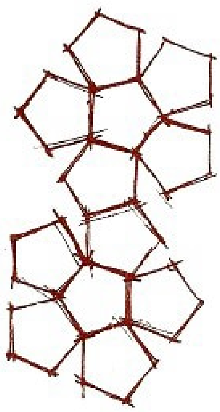
Es bleibt jedoch zu beachten, dass die Überlegung, aus der die Konstanz des Ausdrucks $f-1+e-k$ folgte, versagt, wenn noch keine einzige Seitenfläche aus dem Polyeder entfernt wurde. Denn das erste Entfernen einer Seitenfläche vermindert die Zahl von Ecken und Kanten um dieselbe Anzahl, so dass der Ausdruck $e - k$ unverändert bleibt.

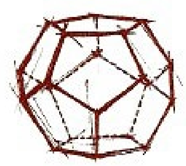
Wird f, e und k auf das vollständige Polyeder bezogen, f', e' und k' dagegen auf eine Polyederruine, die durch Entfernen einer einzigen Seitenfläche entsteht, dann gilt $e' - k' = e - k$ und $f' = f - 1$. Aus $f' - 1 + e' - k' = 0$ folgt $f + e - k = 2$, die Eulersche Polyederformel.

Für nicht konvexe Polyeder gilt diese Formel nicht mehr. Spart man etwa vom Inneren eines konvexen Polyeders ein konvexes Polyeder aus, dann gilt für die beiden konvexen Polyeder die Eulersche Polyederformel einzeln, woraus durch Addition $f - 4 + e - k = 0$ folgt, mit f, e und k sämtliche Seitenflächen, Ecken und Kanten des ausgehöhlten Polyeders bezeichnet.

Die Eulersche Formel erlaubt eine wichtige Anwendung auf reguläre Polyeder. Wir wollen ein Polyeder regulär nennen, wenn die Seitenflächen alle gleich viel Ecken p haben und wenn in jeder Ecke gleich viel Seitenflächen und damit auch ebensoviel Kanten q zusammenstoßen. Bildet man das Produkt fp. dann wurde damit jede Kante des Polygons doppelt gezählt: $fp = 2k$, und ebenso mit dem Produkt eq jede Kante: $eq = 2k$. Es folgt

$$\frac{f}{\frac{1}{p}} = \frac{k}{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\frac{1}{q}}$$





Von der Regel, aus $A : B = C : D$ folgt $(A+C) : (B+D)$, doppelten Gebrauch machend, erkennt man, dass der gemeinsame Wert der drei Quotienten in der letzten Formelzeile für

$$\frac{f + e - k}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}}$$

erhalten bleibt.

Der Zähler besitzt noch der Eulerschen Formel den Wert 2, so dass weiter die Gleichung

$$\frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}} = \frac{pq}{2p + 2q - pq}$$

gilt und damit

$$e = \frac{4p}{2p + 2q - pq} \quad ; \quad k = \frac{2pq}{2p + 2q - pq} \quad ; \quad f = \frac{4q}{2p + 2q - pq}$$

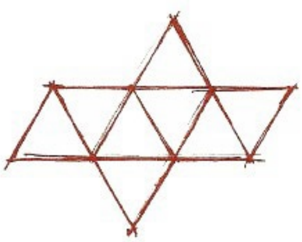
Da es sich bei e, k und f um natürliche Zahlen handelt, muss der Nenner positiv ausfallen, was auch in der Form

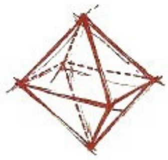
$$(p - 2)(q - 2) < 4$$

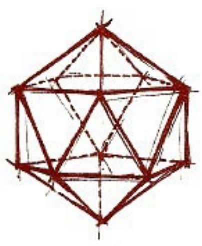
geschrieben werden kann. Aus der Erklärung für p und q folgt, dass beide größer als 2 sein müssen, folglich bestehen allein die Möglichkeiten:

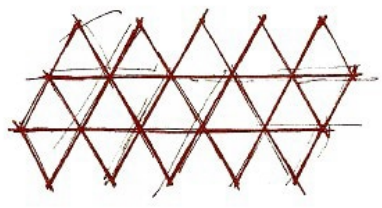
$p =$	3	4	3	5	3
$q =$	3	3	4	3	5

damit das Produkt der um 2 verringerten natürlichen Zahlen p und q kleiner als 4 ausfällt. Daher gibt es genau fünf reguläre Polyeder, auch reguläre Körper genannt.
Die drei ersten Körper ordnete Plato der Reihe nach den Elementen von damals, Erde, Feuer und Luft, zu, den fünften dem Element Wasser, schließlich den vierten der Gestalt der Welt.





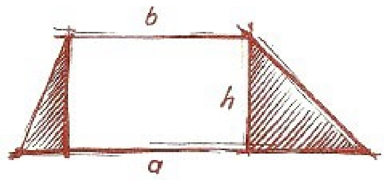




27 Eine verdrehte Nadel

Die Frage, die uns beschäftigen soll, stellte der Japaner Kakeya 1917. Sie wurde ein Jahrzehnt später, angeregt vom Ungarn Pál, von dem naturalisierten Engländer russischer Herkunft Besicovitch beantwortet. Daher darf es nicht wundernehmen, dass die Behandlung einer so internationalen Angelegenheit knifflig ist, wenn sie die Grenzen der Elementarmathematik auch nirgends überschreitet.

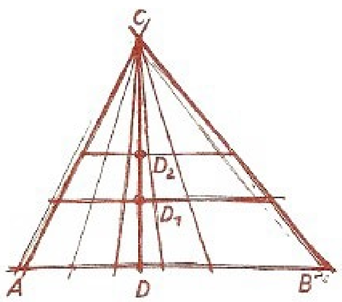
Die Frage lautet: Wie ist eine Strecke von der Länge 1 in der Ebene zu bewegen, damit sie eine volle Umdrehung ausführt, da- bei aber eine Fläche von möglichst kleinem Inhalt überstreicht?
Um auf die überraschende Antwort vorzubereiten, verraten wir, dass man es so einrichten kann, dass die überstrichene Fläche beliebig klein ausfällt. Um das Paradoxe daran auch noch durch Zahlen zu belegen: Eine Nadel von 1 Meter Länge kann auf einer Fläche von nur einem Quadratmillimeter eine volle Umdrehung ausführen.



Da wir davon später Gebrauch machen müssen, sei an die Erklärung des Trapezes erinnert. So heißt ein Viereck mit zwei ungleichen parallelen Seiten. Diese wollen wir durch a und b, die Höhe durch h bezeichnen und das Trapez in ein Rechteck und in die beiden schraffierten Dreiecke zerlegen. Die Gesamtlänge der Grundlinien der beiden Dreiecke beträgt $a-b$, daher ihr Beitrag zum Trapezinhalt $(a-b)\frac{h}{2}$, während das Rechteck den Beitrag $bh = 2b \cdot \frac{h}{2}$ liefert, so dass die Summe, eben der Trapezinhalt,

$$(a-b)\frac{h}{2} + 2b \cdot \frac{h}{2} = (a+b)\frac{h}{2}$$

ausfällt.



Die Grundlinie AB des Dreiecks ABC teile man nun in n gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit C. Es entstehen n "Elementardreiecke", die wir so hin- und herschieben werden, dass ihre Grundlinien an AB entlanggleiten.
Zunächst wollen wir nachweisen, dass man n so wählen kann, dass nach vollzogenen Verschiebungen die Elementardreiecke in ihren neuen Lagen alle zusammen eine Fläche bedecken, die kleiner ist als der k-te Teil des Inhalts vom Dreieck ABC, wie groß auch die natürliche Zahl k vorgegeben wurde.
Auf der Höhe CD im Dreieck ABC wähle man die Punkte D_i so, dass

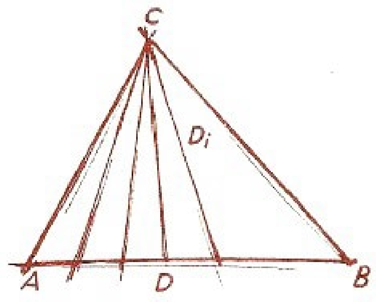
$$CD_i = \left(\frac{k-1}{k}\right)^i CD$$

ist. Die Faktoren auf der rechten Seite sind Potenzen des Bruches $\frac{k-1}{k}$. Die Potenzen werden durch wiederholtes Multiplizieren dieses echten Bruches mit sich selbst gebildet. Daher werden sie schließlich beliebig klein. Unter den sukzessiven Potenzen muss es folglich eine erste geben - es sei die l-te -, für die

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^l < \frac{1}{k}$$

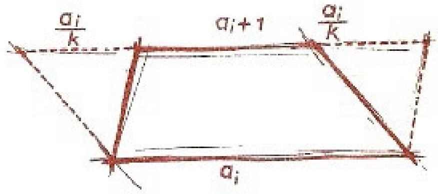
ausfällt.

Es seien durch die Punkte $D_1, D_2, ...D_l$ Parallelen zu AB gezogen. Dadurch wird jedes Elementardreieck in Trapeze, "Elementartrapeze", aufgeteilt, bis auf die Spitze, wo ein Dreieck entsteht, das ja als entartetes Trapez aufgefasst werden kann. Die Figur enthält also l Streifen, die aus lauter Trapezen bestehen, während der oberste, $(l+1)$-te Streifen von lauter Dreiecken ausgefüllt wird. Die Trapeze im i-ten Streifen seien durch $t_{i,1}$, $t_{i,2}$, ..., $t_{i,n}$ bezeichnet. Ihre Grundlinien a_i sind alle gleich lang,



$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot AB$$

wie aus der Ähnlichkeit der ausgezogenen Dreiecke folgt.
Wir errichten über einer Strecke, die mindestens so lang wie a_i ausfallen soll, also von der Länge ra_i mit $1 \leq r$, ein Trapez wie folgt:



Vom linken Endpunkt aus ziehen wir die Parallele zur rechten Seite von $t_{i,s+m}$, vom rechten Endpunkt aus die Parallele zur linken Seite von $t_{i,s+1}$. Die Höhe des Trapezes sei die Höhe h_i des i-ten Streifens. Wir reden von einer Standardkonstruktion, mit der Elementartrapeze gebündelt werden.
Mit Hinblick auf

$$a_i - a_{i+1} = a_i - \frac{k-1}{k}a_i = \frac{1}{k}a_i$$

ergibt die Standardkonstruktion im Falle $m = 1$ über ra_i ausgeführt sofort, dass die obere Seite um $\frac{1}{k}a_i$ länger ist als die untere. Im allgemeinen Fall summiert sich das zum m-fachen Betrag, so dass dann die obere Trapezseite die Länge $ra_i + \frac{m}{k}a_i$ besitzt. Damit berechnet sich der Inhalt des über der Strecke ra_i errichteten Trapezes zu

$$\left(2r + \frac{m}{k}\right) a_i \cdot \frac{h_i}{2}$$

Die Trapeze $t_{i,s-1}$, ..., $t_{i,s-m}$ besitzen alle denselben Inhalt, weil sowohl ihre Höhen als auch ihre Parallelseiten gleich sind, so dass der Gesamtinhalt

$$m\left(a_i + \frac{k-1}{k}a_i\right)\frac{h_i}{2} = m\left(1 + \frac{k-1}{k}\right)a_i\frac{h_i}{2}$$

beträgt. Für m stellen wir dann die Forderung

$$\left(2r + \frac{m}{k}\right)a_i\frac{h_i}{2} < \frac{m}{k}\left(1 + \frac{k-1}{k}\right)a_i\frac{h_i}{2}$$

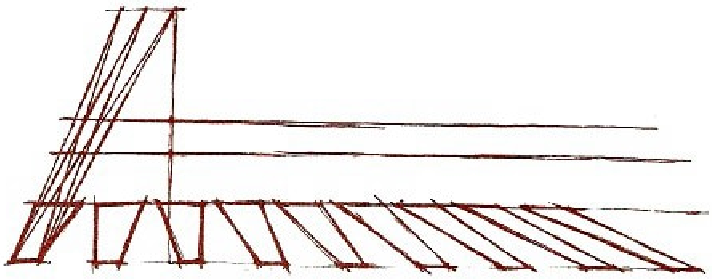
auf, die verlangt, dass das Standardtrapez einen kleineren Inhalt besitzt als der k-te Teil des Gesamtinhaltes der Trapeze $t_{i,s+1}$ bis $t_{i,s+m}$, aus der nach Kürzen

$$m > \frac{2k^2}{k-1}r$$

folgt.
Man setze bzw. wähle, je nachdem es sich um r_i oder um die natürliche Zahl m_i handelt der Reihe nach

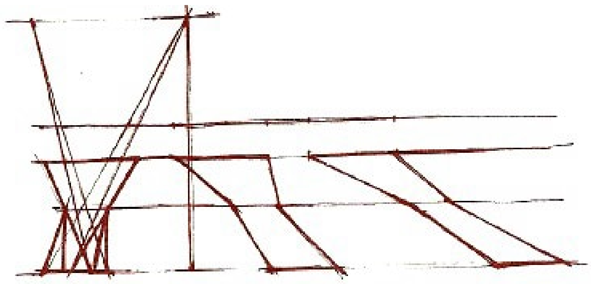
$$\begin{aligned}
r_1 &= 1, \qquad m_1 > \frac{2k^2}{k-1} r_1 \\
r_2 &= \left(r_1 + \frac{m_1}{k}\right)\frac{k}{k-1}, \qquad m_1 m_2 > \frac{2k^2}{k-1} r_2 \\
r_3 &= \left(r_2 + \frac{m_1 m_2}{k}\right)\frac{k}{k-1}, \qquad m_1 m_2 m_3 > \frac{2k^2}{k-1} r_3 \\
&\ldots \\
r_l &= \left(r_{l-1} + \frac{m_1 m_2 \ldots m_l}{k}\right)\frac{k}{k-1}, \qquad m_1 m_2 \ldots m_l > \frac{2k^2}{k-1} r_l
\end{aligned}$$

und bezeichne das Produkt $m_1 m_2 \ldots m_l$ durch n. Die Gründe für gerade diese Wahl werden anschließend noch ersichtlich.



Mit den kunstvoll gewählten m_i beginnt das Bündeln der Elementardreiecke. Zunächst teilt man sie, von links beginnend, der Reihe nach zu m Stück ab. Die Elementardreiecke jeder Abteilung verschiebt man AB entlang so weit, bis ihre Grundlinien mit der Grundlinie des festgehaltenen ersten Elementardreiecks zusammenfallen. Damit liegt eine erste Bündelung vor.

Die Trapeze jeder einzelnen der gebündelten Abteilungen, die im ersten Streifen liegen, verhelfen zur Konstruktion jeweils eines Standardtrapezes, dessen Grundlinie die gemeinsame Grundlinie der Elementardreiecke der gebündelten Abteilung ist.
Laut Konstruktion ragt keines der Elementartrapeze des ersten Streifens aus den heimatlichen Standardtrapezen heraus, so dass sie eine Gesamtfläche überdecken, die nicht größer als die Gesamtfläche der Standardtrapeze ist. Deren Konstruktion aber erfolgte so, dass ihr Inhalt jeweils kleiner als der k-te Teil der gebündelten Trapeze ist.
Daher beträgt der Gesamtinhalt der Standardtrapeze weniger als den k-ten Teil sämtlicher im ersten Streifen gelegenen Elementartrapeze, ist mit anderen Worten kleiner als der k-te Teil des ersten Streifens.



Auf die erste folgt die zweite Bündelung. Die Elementartrapeze im zweiten Streifen liegen von vorhin zu je m_1 gebündelt vor. Jetzt bildet man mit diesen Bündeln Abteilungen zu je m_2. Wiederum verschiebt man in jeder Abteilung alles nach links, wie vorhin, und errichtet Standardtrapeze nunmehr im zweiten Streifen. Bei diesen Verschiebungen kann sich die von gebündelten Elementartrapezen überdeckte Gesamtfläche nur verringern.
Die Basis der Standardtrapeze im zweiten Streifen, die ja die obere Seite der Standardtrapeze im ersten Streifen darstellt, errechnet sich zu

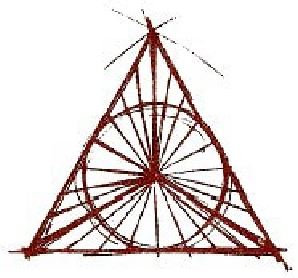
$$\left(r_1 + \frac{m_1}{k}\right) a_1 = \left(r_1 + \frac{m_1}{k}\right) \frac{k}{k-1} a_2 = r_2 a_2$$

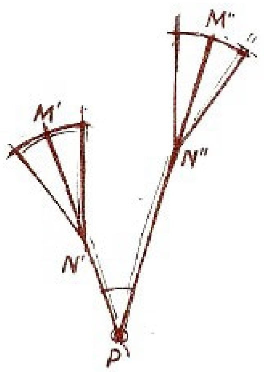
Die Voraussetzung $m > \dfrac{2k^2}{k-1} r$, in diesem Fall mit $r = r_2$ und $m = m_1 m_2$ ist durch die für m_2 getroffene Wahl

$$m_1 m_2 > \frac{2k^2}{k-1} r^2$$

erfüllt dafür, dass die Fläche der neuen Standardtrapeze kleiner ausfallt als der k—te Teil der Gesamtfläche der beteiligten $m_1 m_2$ Elementartrapeze. Zugleich fanden damit die Gründe für die kunstvolle Wahl der sukzessiven r und m ihre Aufklärung.

In ihrer doppelten Bündelung bedecken die Elementartrapeze eine geringere Fläche als die Gesamtfläche der neuen Standardtrapeze, da sie aus diesen nirgends herausragen. Letztere Fläche ist aber kleiner als der k—te Teil sämtlicher Elementartrapeze des zweiten Streifens, das heißt kleiner als der k-te Teil des zweiten Streifens. Wir erkennen so, dass die Elementartrapeze der beiden untersten Streifen in ihrer doppelten Bündelung weniger Fläche bedecken als den k-ten Teil der beiden ersten Streifen.





So fortfahrend, ergibt sich schließlich, dass die Fläche, die nach $(l+1)$facher Bündelung von allen Elementartrapezen überdeckt wird und die Fläche darstellt, die die Elementardreiecke in dieser Endbündelung einnehmen, kleiner ausfällt als der k-te Teil aller Streifen, mit anderen Worten kleiner als der k-te Teil des Dreiecks ABC, so wie es anfangs behauptet wurde.
Dieses Ergebnis versetzt uns in die Lage, die von Kakeya aufgeworfene Frage zu beantworten.
Um einen Kreis vom Radius 1 werde ein gleichseitiges Dreieck geschrieben. Verbindet man die Ecken mit dem Mittelpunkt, so entstehen drei Dreiecke. In jedem bündele man die Elementardreiecke so, dass die von ihnen bedeckte Fläche insgesamt von beliebig kleinem Inhalt wird.
Die Elementardreiecke in ihrer ursprünglichen Lage schneiden aus dem Kreis Sektoren heraus, die in ihrer Gesamtheit alle Richtungen des Radius enthalten. Die Bündelung hinterher ändert daran nichts.

Die gebündelten Kreissektoren überdecken eine Fläche, deren Inhalt erst recht beliebig klein ausfällt.

Alles, was wir bisher erreicht haben, kann man in einem Satz zusammenfassen:
Es gelang, den Kreis so in Sektoren aufzuteilen und diese ohne Richtungsänderung zu verschieben, dass hinterher die von allen Sektoren zusammen überdeckte Fläche beliebig

klein ausfiel. Diese Einsicht verhilft dann die versprochene Drehung mit der Nadel wie folgt vorzunehmen.

Man betrachte zwei Kreissektoren, die ursprünglich benachbart waren. Nach erfolgter Endbündelung wird die rechte Seite des einen noch immer mit der linken Seite des anderen in der Richtung übereinstimmen. Man ziehe die eingezeichneten Halbgeraden, die sich in P schneiden mögen. Sie schneiden aus einem Kreis um P mit dem Radius 1 den eingezeichneten Sektor heraus.

Die Nadel wird aus der Lage $N'M'$ zunächst um N' gedreht, bis sie auf die Halbgerade zu liegen kommt, dann lässt man sie daran heruntergleiten bis P, dreht sie dort so weit, bis sie auf der anderen Halbgeraden liegt, lässt sie daraufhin nach oben gleiten, bis die Nadelspitze in N'' angelangt ist und dreht die Nadel schließlich um N'' in die Lage $N''M''$. Durch Anschmiegen der Halbgeraden kann der Sektor bei P beliebig klein gemacht werden, etwa kleiner als $\frac{1}{n^2}$, wenn n diesmal die Anzahl der Elementardreiecke in den einzelnen stark ausgezogenen Dreiecken bezeichnet. Diese Anzahl hängt von k ab, so dass sie festgelegt werden kann, sobald man sich für ein k entschlossen hat. Da es $3n$ Sektoren ähnlich dem bei P gibt, beträgt der Inhalt der von ihnen überdeckten Fläche weniger als

$$3n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{3}{n}$$

fällt also beliebig klein aus. Abschließend können wir also feststellen, dass die Vereinigung aller Sektoren eine beliebig kleine Fläche überdeckt.

Die Gesamtheit aller Sektoren ermöglicht aber eine volle Umdrehung der Nadel, wenn diese die Sektoren in richtiger Reihenfolge durchwandert. Die Spitze der Nadel beschreibt dabei eine endlich lange Linie, während die von der Nadel überstrichene Fläche von beliebig kleinem Inhalt ausfällt.

Nachwort

Der hier gebotene Stoff war Elementargeometrie, und der Leser wird gemerkt haben, dass auch diese uns manche harte Nuss zu knacken gibt. Der Verfasser war bestrebt, alles möglichst einfach und unterhaltsam, dabei aber mathematisch einwandfrei zu bieten.

Die Vielfalt der angestellten Überlegungen mit ihrer Fülle der Ergebnisse soll belegen, wieviel Reizvolles auch die Elementarmathematik zu bieten vermag.
Wer das verkennt, hat selbst den Schaden. Vermeint er, Gipfelstürmer zu werden, ohne seine Kräfte an der Elementarmathematik erprobt und geschult zu haben, trifft ihn allein die Schuld, wenn ihm die tiefere Einsicht in die höheren Gebiete verschlossen bleibt.
Zudem erwuchsen Probleme der höheren Mathematik sehr häufig aus elementaren Anregungen.

Mancher wichtige Begriff der höheren Mathematik ist durch folgerichtige Weiterbildung elementarmathematischer Begriffe entstanden, so etwa die Maßtheorie aus dem elementaren Inhaltsbegriff, dessen "Ergiebigkeit" festzustellen wir Gelegenheit hatten.
Das mag von der Fruchtbarkeit von Fragestellungen überzeugen, die ihren Ursprung in der Elementarmathematik haben.

Der Mathematikunterricht in der Schule ließe sich nach Ansicht des Verfassers durch Erschließen vieler ergiebiger Quellen intensivieren und könnte so zum Anschluss an das Niveau der Hochschulvorlesungen führen.
Erfahrungsgemäß ringen sich Studenten am Anfang nur mühsam zum Verständnis des vorgetragenen Stoffes durch. Dem dürften Anregungen in der Art, wie hier insbesondere Fragen aus der Geometrie behandelt wurden, weitgehend abhelfen, indem sie zu selbständigen Überlegungen schon während der Schulzeit geradezu herausfordern.
Diese schlagen eine Brücke von der Schule zur Hochschule und ersparen damit den ohnehin ausgelasteten Studenten zusätzlich eingeplante Vorlesungen.