Bittner, Ilse, Kubicek, Tietz

Kompendium der Mathematik

Eine systematische Darstellung des Bildungsinhalts
der zehnklassigen polytechnischen Oberschulen

1972 Verlag Volk und Wissen
MSB: Nr. 46
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Kompendium der Mathematik soll als ein weiterer Beitrag zur umfassenden Verwirklichung des Mathematikbeschlusses verstanden werden, indem auch der Aufbau einer "Mathematischen Schülerbibliothek" vorgesehen wurde.

Als Bestandteil der inzwischen beträchtlich angewachsenen "Mathematischen Schülerbibliothek" wendet sich das Kompendium in erster Linie an alle jene Schüler in den Klassen 7 bis 10 unserer polytechnischen Oberschulen, die die im Unterricht gewonnenen Kenntnisse und Erkenntnisse, zum Teil ergänzt, in fachwissenschaftlicher Systematik zusammenhängend dargestellt besitzen möchten.
Durch die fachsystematische Darstellung der Anfangsgründe der Mathematik wird das Kompendium nicht nur gute Dienste bei der Wiederholung, Festigung, Auffrischung des im Unterricht gewonnenen Wissens und Könnens leisten.
Es wird darüber hinaus viele Schüler anregen, sich in außerunterrichtlicher Beschäftigung noch umfassenderes und tieferes Wissen und Können in der Mathematik anzueignen.

Mit dem Kompendium der Mathematik wird zugleich der ständig größer werdenden Zahl der Werktätigen unserer Republik, die sich in den vielfältigen Formen der Erwachsenenqualifizierung eine umfangreichere mathematische Bildung erwerben wollen, ein moderner Leitfaden in die Hand gegeben.
Das gilt in besonderem Maße für jene Bürger unserer Republik, die noch nicht das Glück hatten, die im Prozess der sozialistischen Schulreform geschaffene zehnklassige polytechnische Oberschule zu absolvieren und an dem im Ergebnis des Mathematikbeschlusses im Jahre 1962 modernisierten Mathematikunterricht teilzuhaben.

Das Kompendium soll gerade jenen Werktätigen helfen, das heute für viele Berufe notwendige mathematische Wissen zu erlangen, über das ein Absolvent unserer zehnklassigen Oberschulen verfügt.

Um dem Leser das Erkennen des logischen Gefüges von Definitionen und Sätzen zu erleichtern, wurden an vielen Stellen Beweise explizit vorgeführt. Allerdings konnte dies nicht systematisch und mit aller Ausführlichkeit geschehen. Der Leser findet Stellen, die sehr genau ausgeführt sind, daneben aber andere, an denen stärker auf die Anschauung Bezug genommen wird. Die Anschauung wurde überall dort mehr in den Vordergrund gerückt, wo die Notwendigkeit einer Definition nicht ohne tieferes Eindringen in den Stoff erkannt werden kann.

Bei der Darstellung des mathematischen Inhalts wurde größtmögliche Übersichtlichkeit angestrebt. Verweise machen auf bestehende Zusammenhänge aufmerksam. Durch die Art der Aufbereitung des Inhalts und die graphische Gestaltung wird mit dem Kompendium der Mathematik ein weiterer Wissensspeicher für Zwecke der mathematischen Allgemeinbildung vorgelegt.

Möge dieser Wissensspeicher sich als eine wirkungsvolle Hilfe bei der Verbreitung einer modernen mathematischen Allgemeinbildung erweisen.

Die Autoren

1 Grundbegriffe der Mengenlehre

1.1 Mengenbildung

Aussagen, Aussageformen

Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

	Aussagen	wahr oder falsch
a)	Die Stadt Dresden liegt an der Elbe	wahr
b)	Das chemische Element Schwefel ist ein Metall	falsch
c)	Die natürliche Zahl 7 ist eine Primzahl	wahr
d)	$5 = 6$	falsch

Von Aussageformen kann man nicht sagen, ob sie wahr oder falsch sind.

a)	Die Stadt S liegt an der Elbe
b)	Das chemische Element E ist ein Metall
c)	Die natürliche Zahl n ist eine Primzahl
d)	$x = 6$

Aussageformen werden durch bestimmte Einsetzungen für die Variablen zu wahren oder falschen Aussagen.

	Aussageformen	Aussage	wahr oder falsch
a)	Die Stadt S liegt an der Elbe	Die Stadt Wittenberg liegt an der Elbe Die Stadt Berlin liegt an der Elbe	wahr falsch
b)	Die natürliche Zahl n ist eine Primzahl	Die natürliche Zahl 20 ist eine Primzahl Die natürliche Zahl 31 ist eine Primzahl	falsch wahr
c)	$x = 6$	$6 = 6$ $4 = 6$	wahr falsch

Bilden von Mengen

Mengen werden gebildet, indem man aus einem zugrunde gelegten Bereich von Dingen, dem Grundbereich, nach bestimmten Gesichtspunkten Dinge auswählt und zu einer Gesamtheit zusammenfasst.

Grundbereich	ausgewählte Dinge
a) alle Schüler einer bestimmten Schule	Mitglieder des Chors dieser Schule
b) alle Geraden einer Ebene	alle Geraden dieser Ebene, die eine vorgegebene Richtung haben
c) alle natürlichen Zahlen	alle natürlichen Zahlen die durch 3 teilbar sind und zwischen 10 und 30 liegen

Der Begriff "Menge"

Eine Gesamtheit von aus dem Grundbereich ausgewählten Dingen nennt man Menge. Als Variable für Mengen benutzen wir große lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes, z.B.:
$M; N; A; B; M_0; M_1; M_2$.

Elemente
Die Dinge, die dieser Gesamtheit angehören, nennt man Elemente der betreffenden Menge. Als Variable für Elemente benutzen wir kleine lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes, z.B.: $x; y; a; b; x_0; x_1; x_2$.

Angabe von Mengen - durch Angabe aller Elemente

$M = \{12; 15; 18; 21; 24; 27\}$
Um mitzuteilen, dass z. B. a Element der Menge M ist oder z. B. y nicht Element der Menge N ist, schreibt man:
$a \in M$ gelesen: "a ist Element von M" oder "a Element M"
$y \notin N$ gelesen: "y ist nicht Element von N" oder "y nicht Element N"

Durch Angabe des Grundbereichs und einer Aussageform
Enthält eine Menge sehr viele oder unendlich viele Elemente, die nicht einzeln aufgeführt werden können, so gibt man den Grundbereich und eine Aussageform an, mit deren Hilfe man die betreffende Menge bilden kann.

Grundbereich	Aussageform	Angabe der Menge
a) Menge der natürlichen Zahlen	$x < 70000$	$x \in M$ genau dann, wenn $x < 70000$
b) Menge der natürlichen Zahlen	$10 < x < 300$ und $x \mid 3$	$x \in M$ genau dann, wenn $10 < x < 300$ und $x \mid 3$
c) Menge der ganzen Zahlen	$x < 70000$	$x \in M$ genau dann, wenn $x < 70000$

Bemerkung: Zur Festlegung beispielsweise der Menge unter a) in der Tabelle genügt es nicht zu sagen:

(1) Wenn eine natürliche Zahl kleiner als 7 ist, so ist sie Element der zu bildenden Menge.

Dadurch wird nämlich nicht ausgeschlossen, dass eventuell noch andere natürliche Zahlen zur Menge gehören können.
Betrachten wir beispielsweise die Menge

$$M^* = \{0; 1; 2; 38; 19; 4; 3; 100; 5; 6\}$$

so ist die Forderung, dass jede natürliche Zahl, die kleiner als 7 ist, Element der Menge sein soll, auch für M^* erfüllt. Um wirklich nur die Zahlen, die kleiner als 7 sind, als Elemente der Menge zu erhalten, müssen wir noch zusätzlich sagen:

(2) Wenn eine natürliche Zahl Element der zu bildenden Menge ist, so ist sie kleiner als 7.

Mit (1) und (2) ist die im Beispiel angeführte Menge M genau festgelegt. Es ist üblich, (1) und (2) zu folgender Sprechweise zusammenzufassen:

(3) Eine natürliche Zahl ist Element der Menge M genau dann, wenn sie kleiner als 7 ist.
Kürzer: $x \in M$ genau dann, wenn $x < 7$.

Durch die Sprechweise "genau dann, wenn" wird zum Ausdruck gebracht, dass alle die Dinge aus dem Grundbereich Elemente der jeweils zu bildenden Menge sind, die die Aussageform zu einer wahren Aussage machen, aber auch nur diese.
Man sagt auch: "Zur Menge M gehören genau die Dinge, die die Aussageform zu einer wahren Aussage machen."

Beispiele für die Mengenbildung

Einermengen enthalten nur ein einziges Element.
■ Grundbereich: Menge der natürlichen Zahlen
$x \in A$ genau dann, wenn $x + x = x$
Die Menge A besitzt als einziges Element die Null, $A = \{0\}$; denn $0+0 = 0$. Für jede andere natürliche Zahl x gilt: $x + x = 2x \neq x$.

■ Grundbereich: Menge der natürlichen Zahlen
$x \in B$ genau dann, wenn $x \cdot x = x$
$B = \{0; 1\}$. B ist eine Zweiermenge.

■ Grundbereich: Menge der natürlichen Zahlen
$x \in C$ genau dann, wenn $x \neq 7$
C ist die Menge der natürlichen Zahlen außer der Zahl 7.

Spezielle Mengen - die leere Menge

Die leere Menge (in Zeichen: $\varnothing$) enthält kein Element.
■ Grundbereich: Menge der ganzen Zahlen
$x \in D$ genau dann, wenn $x + 1 = x$
Die Aussageform $x + 1 = x$ wird durch keine Einsetzung zu einer wahren Aussage; D enthält also kein Element. Es gilt also: $D = \varnothing$.
Über einem beliebigen Grundbereich kann die leere Menge durch die Aussageform "$x \neq x$"gebildet werden: $x \in \varnothing$ genau dann, wenn $x \neq x$.

Allmengen

Allmengen enthalten alle Dinge des jeweiligen Grundbereichs.
Über jedem Grundbereich kann die zugehörige Allmenge gebildet werden, indem alle Dinge des jeweiligen Grundbereichs in ihr zusammengefasst werden.
Die Allmenge E kann z.B. mit Hilfe der Aussageform "$x = x$" gebildet werden: $x \in E$ genau dann, wenn $x = x$.

Teilmengen

▶ Definition 1: Eine Menge M ist Teilmenge von einer Menge N genau dann, wenn jedes Element von M auch Element von N ist.
Schreibweise: $M \subseteq N$, Gelesen:
"M ist Teil(Unter-)menge von N" oder "N ist Obermenge von M" oder "N umfasst M".
Die Menge M_4 der durch 4 teilbaren Zahlen ist Teilmenge der Menge M_2 der geraden Zahlen:

$$M_4 = \{0,4,8,12,16,...\} \qquad , \qquad M_2 = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,...\}$$

Wir schreiben: $M_4 \subseteq M_2$.

Bemerkung: Die Definition der Teilmenge besagt lediglich, dass in der Obermenge N kein Element der Untermenge M fehlen darf. Das ist aber auch dann der Fall, wenn Ober- und Untermenge gleich sind. Deshalb gilt für jede Menge M auch die Beziehung $M \subseteq M$.

Echte Teilmenge

▶ Definition 2: Eine Menge M ist echte Teilmenge von N genau dann, wenn jedes Element von M auch Element von N ist und darüber hinaus wenigstens ein Element in N liegt, das nicht auch in M liegt.

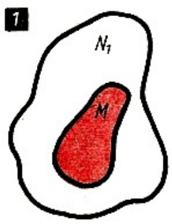
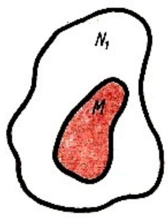
Schreibweise: $M \subset N$; Gelesen: "M ist echte Teilmenge (Untermenge) von N" oder "N ist echte Obermenge von M" oder "N umfasst echt M".

Es sei N die Menge aller Bücher einer Schülerbibliothek und M die Menge aller Mathematikbücher dieser Bibliothek.
Es gilt dann: Die Menge M aller Mathematikbücher dieser Schülerbibliothek ist eine echte Teilmenge der Menge N aller Bücher dieser Bibliothek: $M \subset N$.

Bemerkung: Nach der Definition 1 können wir in unserem Beispiel auch $M \subseteq N$ schreiben, denn jedes Element der Menge M (die Mathematikbücher) gehört ja auch zur Menge N (aller Bücher dieser Bibliothek).
Will man betonen, dass M eine echte Teilmenge von N ist, so schreibt man: $M \subset N$.

Veranschaulichung von Mengen

Zur Veranschaulichung von Mengen werden häufig Punktmengen einer Ebene verwendet, die durch geschlossene Kurven begrenzt sind.

Teilmenge $M \subseteq N$	Echt Teilmenge $M \subset N$
	

1.2 Mengenoperationen

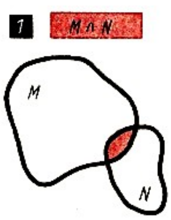
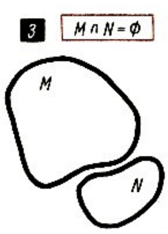
Durchschnitt von Mengen

Gegeben seien Mengen M und N. Aus M und N werde wie folgt eine Menge D gebildet:

$x \in D$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \in N$

Zur Menge D gehören also genau die Elemente, die sowohl in M als auch in N liegen.
Die Menge D heißt der Durchschnitt der Mengen M und N.
Schreibweise: $M \cap N$. Gelesen: "M geschnitten mit N".

► Definition 3: $x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \in N$.

Durchschnitt von Mengen $M \cap N$		
		

Durch die Bildung des Durchschnitts wird den Mengen M und N eine Menge $M \cap N$ zugeordnet, ähnlich wie durch die Addition den Zahlen a und b deren Summe $a + b$ zugeordnet wird. Die Addition nennt man eine Rechenoperation; entsprechend heißt die Durchschnittsbildung eine Operation mit Mengen.

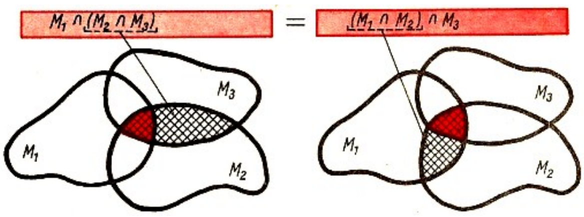
Gegebene Mengen	Durchschnitt
a) M ist die Menge aller Rhomben N ist die Menge aller Rechtecke	$M \cap N$ ist die Menge aller Quadrate Diagramm: Fall 1
b) M ist die Menge aller natürlichen Zahlen n für die gilt $n < 15$. N ist die Menge aller natürlichen Zahlen n für die gilt $n > 8$.	$M \cap N = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ Diagramm: Fall 1
c) M ist die Menge aller Vierecke N ist die Menge aller Rhomben	$M \cap N = N$ Diagramm: Fall 2

Disjunkte Mengen

Wenn Mengen M und N kein gemeinsames Element besitzen, nennt man sie elementfremde oder disjunkte Mengen.
Bei disjunkten Mengen ist also der Durchschnitt stets leer: $M \cap N = \varnothing$.

Eigenschaften der Durchschnittsbildung

Es gilt stets:
(1) $M \cap N = N \cap M$ (Kommutativität)
(2) $M \cap M = M$
(3) $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$ (Assoziativität)

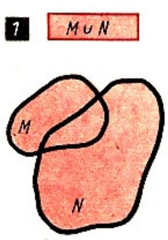
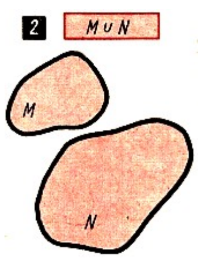
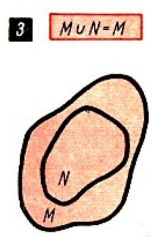


Vereinigung von Mengen

Gegeben seien Mengen M und N. Aus M und N werde wie folgt eine Menge V gebildet:
$x \in V$ genau dann, wenn $x \in M$ oder $x \in N$.

Zur Menge V gehören also genau die Elemente, die in wenigstens einer der gegebenen Mengen M und N liegen. Die Menge V heißt die Vereinigung der Mengen M und N.
Schreibweise: $M \cup N$; Gelesen: "M vereinigt mit N"

► Definition 4:
$x \in M \cup N$ genau dann, wenn $x \in M$ oder $x \in N$

Vereinigung von Mengen $M \cup N$		
		

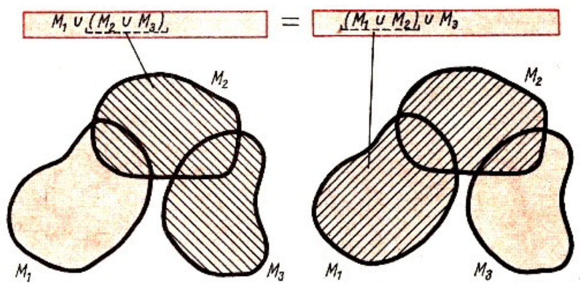
Bemerkung: Das "oder" in Definition 4 bedeutet also, dass wenigstens einer der Fälle $x \in M$ bzw. $x \in N$ zutreffen muss, damit das Element x zur Vereinigung $M \cup N$ gehört. Das schließt aber nicht aus, dass beide Fälle zutreffen können.

"Entweder - oder" bedeutet dagegen, dass genau einer der beiden Fälle zutrifft.

Gegebene Mengen	Vereinigung
a) S sei die Menge aller Schienenfahrzeuge in der DDR. D sei die Menge aller Fahrzeuge mit Dieselmotor in der DDR.	Zu $S \cup D$ gehören z.B. alle Straßenbahnen, alle Traktoren und auch alle Diesellokomotiven der Deutschen Reichsbahn. (Diagramm: Fall 1)
b) M_6 sei die Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 30 sind. M_9 sei die Menge aller durch 9 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 30 sind.	$M_6 \cup M_9 = \{0,6,9,12,18,24,27\}$ (Diagramm: Fall 1)
c) M ist die Menge aller Vierecke N ist die Menge aller Dreiecke.	$M \cup N$ ist die Menge aller Vierecke und aller Dreiecke. (Diagramm: Fall 2)
d) M ist die Menge aller Vierecke N ist die Menge aller Rhomben.	$M \cup N = M$ ist die Menge aller Vierecke. (Diagramm: Fall 3)

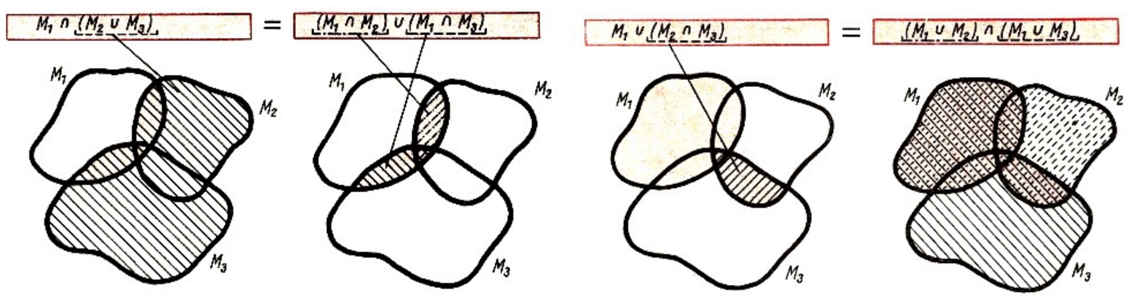
Eigenschaften der Mengenvereinigung

Es gilt stets:
(1) $M \cup N = N \cup M$ (Kommutativität)
(2) $M \cup M = M$
(3) $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$ (Assoziativität)



Verknüpfung von Durchschnitts- und Vereinigungsoperation

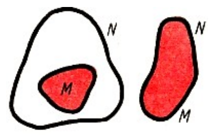
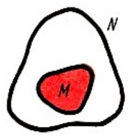
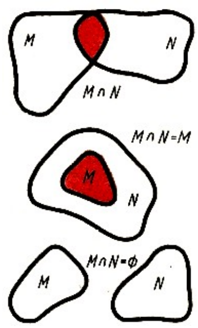
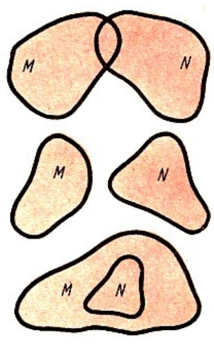
Es gilt stets: (Distributivität)
(1) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$
(2) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$



Es ist also sowohl die Durchschnittsoperation bezüglich der Vereinigungsoperation distributiv (Fall 1) als auch die Vereinigungsoperation bezüglich der Durchschnittsoperation (Fall 2).

Übersicht

Mengenbildung
Mengen werden stets über einem bestimmten Grundbereich gebildet. Zur Mengenbildung können Aussageformen mit Variablen benutzt werden.
Dabei werden genau die Dinge aus dem Grundbereich zu einer Menge zusammengefasst, die die jeweilige Aussageform beim Einsetzen zu einer wahren Aussage machen.

Mengenbeziehungen		
Teilmenge $M \subseteq N$	Jedes Element von M ist auch Element von N.	
Echte Teilmenge $M \subset N$	Jedes Element von M ist auch Element von N, und darüber hinaus besitzt N wenigstens ein Element, das nicht Element von M ist.	
Durchschnitt $M \cap N$	$x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \in N$ $M \cap N = N \cap M$, $M \cap M = M$ $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$	
Vereinigung $M \cup N$	$x \in M \cup N$ genau dann, wenn $x \in M$ oder $x \in N$ $M \cup N = N \cup M$, $M \cup M = M$ $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$	

Die Durchschnittsoperation ist distributiv bezüglich der Vereinigungsoperation.
$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$
Die Vereinigungsoperation ist distributiv bezüglich der Durchschnittsoperation.
$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

2 Zahlenbereiche

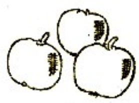
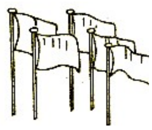
2.1 Natürliche Zahlen

Die Zahlen $0,1,2,3,4,...$ bezeichnet man als natürliche Zahlen.

Bemerkung: Es ist auch üblich, die Folge der natürlichen Zahlen mit der Zahl 1 zu beginnen. Ob die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gerechnet werden soll oder nicht, kann beliebig festgelegt werden.

Veranschaulichung

Jede natürliche Zahl kann durch eine Menge veranschaulicht werden.

Zahl	Veranschaulichung		
1			
3			
5			

Für jede natürliche Zahl außer Null gibt es unendlich viele Mengen, die zu deren Veranschaulichung benutzt werden können.
Die betreffende natürliche Zahl gibt das einzige Gemeinsame aller der Mengen an, durch die sie veranschaulicht werden kann. Das ist die Anzahl der Elemente.
Die natürliche Zahl 0 wird nur durch eine einzige Menge "veranschaulicht", durch die leere Menge.

Kardinalzahl

Mit natürlichen Zahlen kann man die Anzahl der Elemente in einer Menge angeben. Benutzt man eine natürliche Zahl, um die Anzahl der Elemente einer Menge anzugeben, so nennt man sie Kardinalzahl.

Ordinalzahl

Benutzt man eine natürliche Zahl, um den Platz eines Elements in einer durchnummerierten Menge anzugeben, so nennt man sie Ordinalzahl.

Die natürliche Zahl
... als Kardinalzahl: Peter las in einem Buch 150 Seiten.
... als Ordinalzahl: Peter fand auf der 150. Seite eines Buches einen Druckfehler.

Addition

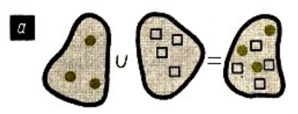
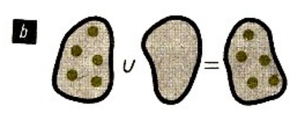
Operationszeichen: "$+$" ; Gelesen: "plus"
Durch die Addition wird jedem Paar $[a;b]$ natürlicher Zahlen die natürliche Zahl $a+b$, die

Summe von a und b zugeordnet.
$[a; b] \rightarrow a + b$

Bezeichnet man die Summe mit c, so kann man auch schreiben: $a + b = c$.
Die Zahlen a und b heißen Summanden.

Veranschaulichung

Die Addition natürlicher Zahlen lässt sich durch die Vereinigung zweier beliebiger disjunkter Mengen veranschaulichen.

	
3 + 4 = 7	5 + 0 = 5

Neutrales Element

Die Zahl 0 heißt neutrales Element bezüglich der Addition. Es gilt allgemein:

$$a + 0 = a$$

Eigenschaften der Addition

Die Addition ist im Bereich der natürlichen Zahlen stets ausführbar.
Das bedeutet: Wie immer man auch natürliche Zahlen a und b wählt, stets gibt es eine natürliche Zahl c als Summe von a und b. Es gibt aber auch nur eine solche Zahl c.
▶ Zu beliebig gegebenen natürlichen Zahlen a und b gibt es genau eine natürliche Zahl c mit $a + b = c$.

Kommutativität

Es gilt stets: $a + b = b + a$

Assoziativität

Es gilt stets: $a + (b + c) = (a + b) + c$
Das bedeutet: Sind drei Zahlen zu addieren, so sind zwei Additionen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Additionen ist dabei beliebig.
Wegen der Kommutativität und Assoziativität kann man bei mehreren Additionen die Summanden beliebig vertauschen und zusammenfassen.

Ordnung

▶ Definition 1:
Die natürliche Zahl a heißt kleiner als die natürliche Zahl b genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $x \neq 0$ gibt, so dass gilt: $a + x = b$

Schreibweise: $a < b$ oder $b > a$
Gelesen: "a ist kleiner als b" bzw. "b ist größer als a" oder "a kleiner b" bzw. "b größer a"
$a \leq b$ (gelesen: "a kleiner gleich b") bedeutet, dass entweder $a < b$ oder $a = b$ gilt, die Zahl a also nicht größer als b ist.
$a \geq b$ (gelesen: "a größer gleich b") bedeutet, dass entweder $a > b$ oder $a = b$ gilt, die Zahl a also nicht kleiner als b ist.

■ a) $x \in M$ genau dann, wenn $x \leq 5$. $M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

b) $x \in M$ genau dann, wenn $x < 5$. $M = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Der Bereich der natürlichen Zahlen ist durch die Kleiner-Beziehung geordnet.
Die Zahl 0 ist die kleinste natürliche Zahl.

■ a) Es gilt: $3 < 5$; denn $3 + 2 = 5$.
b) Es gilt: $99 < 100$; denn $99 + 1 = 100$.
c) Es gilt nicht: $17 < 15$; denn es gibt keine natürliche Zahl $x \neq 0$, für die gilt: $17 + x = 15$.
d) Es gilt nicht: $415 < 415$; denn es gibt keine natürliche Zahl $x \neq 0$, für die gilt: $445+x = 415$.

▶ Satz: Für beliebige natürliche Zahlen a und b gilt genau einer der folgenden drei Fälle:
$a < b$; $a = b$; $b < a$

Satz: Für beliebige natürliche Zahlen a, b und c gilt: Wenn $a < b$ und$b < c$, so $a < c$.

Unmittelbarer Nachfolger

▶ Definition 3: Die natürliche Zahl $a + 1$ heißt der unmittelbare Nachfolger der natürlichen Zahl a.

Bemerkung: Statt "unmittelbarer Nachfolger" sagt man auch kürzer nur "Nachfolger".
Für jede natürliche Zahl und ihren Nachfolger gilt $a < a + 1$, d. h., jede natürliche Zahl ist kleiner als ihr Nachfolger.
Die Zahl 0 ist als kleinste natürliche Zahl nicht Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl.
Durch die Nachfolgerbeziehung sind die natürlichen Zahlen zu einer Folge angeordnet.

Subtraktion

Operationszeichen: "$-$"; Gelesen: "minus"
Bei der Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen ist zu einer gegebenen Summe b und einem gegebenen Summanden a eine natürliche Zahl x zu finden, so dass gilt: $a + x = b$.
Anders geschrieben: $x = b - a$

Daher heißt die Subtraktion Umkehrung der Addition. Die Zahl b heißt Minuend, die Zahl a heißt Subtrahend. Die Zahl $b - a$ heißt Differenz.
Durch die Subtraktion wird (im Falle ihrer Ausführbarkeit) jedem Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen die natürliche Zahl $a - b$, die Differenz von a und b, zugeordnet.
$[a; b] \to a - b$

Die Subtraktion ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar.
Wenn die Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar ist, so gibt es nur eine natürliche Zahl x, für die $a + x = b$ gilt. In diesem Fall ist also die Differenz $b - a$ eindeutig bestimmt.

▶ Satz 4: Die Subtraktion ist im Bereich der natürlichen Zahlen nur ausführbar, wenn der Subtrahend kleiner ist als der Minuend oder wenn der Subtrahend gleich dem Minuenden ist.

Bei der Subtraktion gilt stets:

$$a - a = 0 \qquad , \qquad a - 0 = a$$

Monotonie der Addition

Wenn man zu zwei Zahlen, die in der Kleiner-Beziehung stehen, dieselbe Zahl addiert, so stehen auch die erhaltenen Summen in der Kleiner-Beziehung.

$$\text{Wenn } a < b, \text{ so } a + x < b + x$$

■ a) Da $5 < 8$, auch $5 + 2 < 8 + 2$
b) Da $15 < 157$, auch $156 + 1 < 157 + 1$

Monotonie der Subtraktion

Wenn man von zwei Zahlen, die in der Kleiner-Beziehung stehen, dieselbe Zahl subtrahiert, so stehen auch die erhaltenen Differenzen in der Kleiner-Beziehung. (Ausführbarkeit der Subtraktion vorausgesetzt)

$$\text{Wenn } a < b, \text{ so } a - x < b - x$$

■a) Da $5 < 8$, auch $5 - 3 < 8 - 3$
b) Da $19 < 20$, auch $19 - 1 < 20 - 1$

Multiplikation

Operationszeichen: "·"; Gelesen: "multipliziert mit", "mal"
Durch die Multiplikation wird jedem Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen die natürliche Zahl $a \cdot b$, das Produkt von a und b, zugeordnet.
$[a; b] \to a \cdot b$

Bezeichnet man das Produkt mit c, so kann man auch schreiben: $a \cdot b = c$.
Die Zahlen a und b heißen Faktoren.

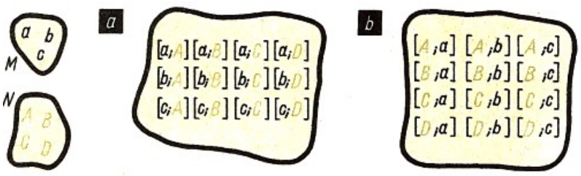
Neutrales Element

Die Zahl 1 heißt neutrales Element bezüglich der Multiplikation. Es gilt allgemein:

$$a \cdot 1 = a$$

Veranschaulichung

Wie die Addition, kann auch die Multiplikation durch Mengenbildungen veranschaulicht werden.
■ $3 \cdot 4 = 12$; $M = \{a; b; c\}$; $N = \{A; B; C; D\}$
Wir bilden aus in Elementen beider Mengen Paare:



Wir erhalten im Fall (a) und im Fall (b) jeweils eine Menge mit 12 Elementen (Paaren), die das Produkt 12 veranschaulicht.

Eigenschaften der Multiplikation

Die Multiplikation ist im Bereich der natürlichen Zahlen stets ausführbar.
Das bedeutet: Wie immer man auch natürliche Zahlen a und b wählt, stets gibt es eine natürliche Zahl c als Produkt von a und b. Es gibt aber auch nur eine solche Zahl c.

► Zu beliebig gegebenen natürlichen Zahlen a und b gibt es genau eine natürliche Zahl c mit

$a \cdot b = c$.

Kommutativität

Es gilt stets: $a \cdot b = b \cdot a$.

Assoziativität

■ $32 \cdot 25 = (8 \cdot 4) \cdot 25 = 8 \cdot (4 \cdot 25)$
Es gilt stets: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Das bedeutet: Sind drei Zahlen zu multiplizieren, so sind zwei Multiplikationen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Multiplikationen ist dabei beliebig!
Wegen der Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation dürfen auch in einem Produkt mit mehr als zwei Faktoren diese beliebig vertauscht und zusammengefasst werden.

Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition

■ $3 \cdot 17 = 3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$
Es gilt stets: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Soll eine Summe mit einem Faktor multipliziert werden, so ist jeder Summand mit dem Faktor zu multiplizieren. Dann sind die erhaltenen Teilprodukte zu addieren.

► Satz 5: Wenn die Subtraktion $b - c$ ausführbar ist, so gilt:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Beweis: Wir setzen $b - c = x$, also $b = c + x$.
Dann gilt:

$a \cdot b = a \cdot (c + x)$	Einsetzen von $c + x$ für b
$a \cdot b = a \cdot c + a \cdot x$	Distributivität
$a \cdot x = a \cdot b - a \cdot c$	Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.
	Daher ist $a \cdot x$ die Differenz von $a \cdot b$ und $a \cdot c$.
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	Einsetzen von $b - c$ für x

w.z.b.w. (lies: "was zu beweisen war")

► Satz 6: Für jede natürliche Zahl a gilt:

$$a \cdot 0 = 0$$

Beweis: Wir setzen $0 = b - b$, wobei b eine beliebige natürliche Zahl ist. Dadurch können wir beim Beweis den Satz B5 verwenden.

$a \cdot 0 = a(b - b)$	Einsetzen von $b - b$ für 0
$a \cdot 0 = a \cdot b - a \cdot b$	nach Satz B5
$a \cdot 0 = 0$	w.z. b. w.

Wenn also in einem Produkt wenigstens ein Faktor 0 ist, so ist das Produkt gleich 0.
Umgekehrt ist aber ein Produkt auch nur dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist.
Zusammenfassend gilt:

► Satz 7: Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist.

Dieser Satz gilt auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren.

Teilbarkeitsbeziehungen - Teiler

▶ Definition 8: Die natürliche Zahl a heißt Teiler der natürlichen Zahl b genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x Teiler gibt, so dass gilt: $a : x = b$

Schreibweise: $a \mid b$, Gelesen: "a ist Teiler von b" oder "a teilt b" oder "a ist in b enthalten"

Es gilt:	denn es ist	
a) $4 \mid 12$	$4 \cdot 3 = 12$	$x = 3$
b) $5 \mid 30$	$5 \cdot 6 = 30$	$x = 6$

Vielfaches

Wenn a Teiler von b ist, so nennt man b Vielfaches von a.

▶ Satz 9: Für jede natürliche Zahl a gilt:

$$(1) a \mid a; \qquad (2) a \mid 0; \qquad 1 \mid a$$

$a \mid a$	$a \mid 0$	$1 \mid a$
$4 \mid 4$ denn $4 \cdot 1 = 4$, $x = 1$	$2 \mid 0$ denn $2 \cdot 0 = 0$, $x = 0$	$1 \mid 4$ denn $1 \cdot 4 = 4$, $x = 4$

Bemerkung: Nach dem letzten Satz heißt auch das 1-fache ($x = 1$) und das 0-fache ($x = 0$) jeder natürlichen Zahl a Vielfaches von a.

Gerade Zahlen, Ungerade Zahlen

▶ Definition 10: Alle natürlichen Zahlen, die den Teiler 2 besitzen, heißen gerade Zahlen.
Alle anderen natürlichen Zahlen heißen ungerade Zahlen.

Bemerkung: Ist die Zahl b gerade, so lässt sie sich also in der Form $2 \cdot n$ darstellen. Ist die Zahl b dagegen ungerade, so lässt sie sich in der Form $2 \cdot n + 1$ darstellen. Für die Zahl 0 gilt: $2 \cdot 0 = 0$. Also ist die 0 eine gerade Zahl.

Für jede natürliche Zahl n gilt:
$2n$ ist gerade; $\qquad 2n + 1$ ist ungerade

Primzahl

▶ Definition 11: Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist und die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt Primzahl.

Bemerkung: 2 ist die einzige gerade Primzahl. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Eigenschaften der Teilbarkeitsbeziehung, Teilbarkeit einer Summe

▶ Satz 12: Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so $a \mid b + c$.

Beweis: Aus der Voraussetzung $a \mid b$ und $a \mid c$ folgt, dass es natürliche Zahlen x und y gibt mit:
$a \cdot x = b$ (I) und $a \cdot y = c$ (II)
$a \cdot x + a \cdot y = b + c$ Addition von (I) und (II)
$a(x + y) = b + c$ Distributivität
$z = x + y$ ist wieder eine natürliche Zahl, also: $a \cdot z = b + c$. Das bedeutet aber gerade $a \mid b + c$, w.z. b. w.

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes B 12 gilt nicht. Die Umkehrung von Satz B 12 lautet:

Wenn $a \mid b + c$, so $a \mid b$ und $a \mid c$. Um zu zeigen, dass diese Umkehrung nicht gilt, geben wir ein Gegenbeispiel an:
für $a = 7$, $b = 39$, $c = 3$ gilt zwar $a \mid b + c$, es gilt aber weder $a \mid b$ noch $a \mid c$.

Teilbarkeit einer Differenz

► Satz 13: Falls die Subtraktion $b - c$ ausführbar ist, gilt: Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so $a \mid b - c$.

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes B13 gilt nicht.
Also folgt aus $a \mid b - c$ nicht, dass $a \mid b$ und $a \mid c$.

Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so $a \mid b + c$	Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so $a \mid b - c$
$13 \mid 117$ und $13 \mid 91$ also auch $13 \mid 117 + 91$, d.h. $13 \mid 208$	$7 \mid 42$ und $7 \mid 28$ also auch $7 \mid 42 - 28$, d.h. $7 \mid 14$

Teilbarkeit eines Produktes

► Satz 4: Wenn $a \mid b$ oder $a \mid c$, so $a \mid b \cdot c$

Das bedeutet: Wenn eine natürliche Zahl a Teiler von mindestens einem Faktor eines Produktes ist, so teilt a das ganze Produkt.

■ $7 \mid 8400$, denn $8400 = 84 \cdot 100$ und $7 \mid 84$

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes B 14 gilt nicht. Also folgt aus $a \mid b \cdot c$ nicht, dass $a \mid b$ oder $a \mid c$. Für $a = 14$, $b = 16$ und $c = 21$ gilt zwar $a \mid b \cdot c$, es gilt aber weder $a \mid b$ noch $a \mid c$.

Transitivität

► Satz 15: Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$,so $a \mid c$.

Beweis: Aus der Voraussetzung $a \mid b$ und $b \mid c$ folgt, dass es natürliche Zahlen x und y gibt mit $a \cdot x = b$ (I) und $b \cdot y = c$ (II)
$a \cdot x \cdot y = c$, $a \cdot x$ aus (I) für b in (II) eingesetzt
$z = x \cdot y$ ist wieder eine natürliche Zahl, also $a \cdot z = c$. Das bedeutet aber gerade $a \mid c$. w.z.b. w.

■ a) $9 \mid 27$ und $27 \mid 135$, also auch $9 \mid 135$
b) $4 \mid 16$ und $16 \mid 32$, also auch $4 \mid 32$

Division

Operationszeichen: ":"; Gelesen: "dividiert durch" oder nur "durch"

Bei der Division im Bereich der natürlichen Zahlen ist zu einem gegebenen Produkt b und einem gegebenen Faktor a eine natürliche Zahl x zu finden, so dass gilt: $a \cdot x = b$, anders geschrieben $x = b : a$.
Daher heißt die Division Umkehrung der Multiplikation.

Die Zahl b heißt Dividend. Die Zahl a heißt Divisor. Die Zahl $b : a$ heißt Quotient.
Durch die Division wird (im Fall ihrer Ausführbarkeit) jedem Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen die natürliche Zahl $a : b$, der Quotient von a und b, zugeordnet: $[a; b] \to a : b$.

Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar.
Bei der Division gilt stets:

$$(1) a : a = 1; (a \neq 0); \qquad (2) a : 1 = a; \qquad (4) 0 : a = 0; (a \neq 0)$$

Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen genau dann ausführbar, wenn es eine einzige natürliche Zahl x gibt, für die $a \cdot x = b$ gilt. Das heißt, dass der Quotient $b : a$ eindeutig bestimmt ist.

■ a) $0 \cdot x = 15$, $x = 15 : 0$ Eine solche natürliche Zahl gibt es nicht.
b) $0 \cdot x = 0$, $x = 0 : 0$ Für alte natürlichen Zahlen x gilt $0 \cdot x = 0$.
Die Division durch 0 ist also nicht ausführbar. Das gilt für alle Zahlbereiche.

▶ Satz 16: Die Division ist im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar, wenn der Dividend Vielfaches des Divisors ist.
Anderenfalls ist sie nicht ausführbar.
Die Division durch Null ist grundsätzlich nicht ausführbar.

Monotonie der Multiplikation

Wenn man zwei Zahlen, die in der Kleiner-Beziehung stehen, mit derselben Zahl multipliziert, so stehen auch die erhaltenen Produkte in der Kleiner-Beziehung.

Wenn $a < b$, so $a \cdot x < b \cdot x$; $(x \neq 0)$

■ Aus $35 < 63$ folgt $35 \cdot 3 < 63 \cdot 3$, aber aus $35 < 63$ folgt nicht $35 : 0 < 63.0$, denn $0 = 0$.

Monotonie der Division

Wenn man zwei Zahlen, die in der Kleiner-Beziehung stehen, durch dieselbe Zahl dividiert, so stehen auch die erhaltenen Quotienten in der Kleiner-Beziehung.

Wenn $a < b$, so $a : x < b : x$ (falls Division ausführbar)

Da $35 < 63$, auch $35 : 7 < 63 : 7$.

Beziehungen zwischen natürlichen Zahlen		
Beziehung	Definition	Eigenschaften
Kleiner-Beziehung $a < b$	$a < b$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $x \neq 0$ gibt mit $a + x = b$.	Es gilt genau einer der Fälle: 1) $a < b$; 2) $a = b$; 3) $b < a$ Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$.
Teilbarkeits-beziehung $a \mid b$	$a \mid b$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl x gibt mit $a \cdot x = b$. a heißt Teiler von b b heißt Vielfaches von a	Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$, so $a \mid c$. Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so $a \mid b \pm c$ (falls $b - c$ ausführbar). Wenn $a \mid b$ oder $a \mid c$, so $a \vert b \cdot c$. $a \mid a$; $a \mid= 0$; $1 \mid a$

Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen		
Operation	Definition	Eigenschaften
Addition $a + b = c$ Summanden a,b Summe c	Uneingeschränkt ausführbar	$a + b = b + a$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a + 0 = a$ $a + 1$ heißt der Nachfolger von a. Wenn $a < b$, so $a + x < b + x$.
Multiplikation $a \cdot b = c$ Faktoren a,b Produkt c	Uneingeschränkt ausführbar	$a \cdot b = b \cdot a$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $a \cdot 1 = a$ $a \cdot 0 = 0$ Wenn $a < b$, so $a \cdot x < b \cdot x$. $(x \neq 0)$
		$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen		
Operation	Definition	Eigenschaften
Subtraktion $c = a - b$ Minuend b Subtrahend a Differenz c	Nicht uneingeschränkt ausführbar Ausführbar genau dann, wenn $b \geq a$	$a - a = 0$ $a - 0 = a$ Wenn $a < b$, so $a - x < b - x$ (falls $a - x$ und daher auch $b - x$ ausführbar).
Division $c = b : a$ Dividend b Divisor a Quotient c	Nicht uneingeschränkt ausführbar Ausführbar genau dann, wenn b Vielfaches von a und $a \neq 0$.	$a : a = 1$ $(a \neq 0)$ $a : 1 = a$, $0 : a = 0$ $(a \neq 0)$ Wenn $a < b$, so $a : x < b : x$ (falls $a : x$ und $b : x$ ausführbar).

Dekadisches Positionssystem - Grundziffern

Die Zeichen "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9" heißen Grundziffern.
Mit Hilfe der zehn Grundziffern werden die natürlichen Zahlen im dekadischen Positionssystem dargestellt.

Ziffern

Die Darstellung jeder natürlichen Zahl mit Hilfe der zehn Grundziffern heißt Ziffer dieser natürlichen Zahl. Dazu gehören auch die Grundziffern selbst, Sie sind die Darstellung der natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 sind.

Zehnerpotenz

Als Zehnerpotenz wird jede Zahl bezeichnet, die sich als Produkt schreiben lässt, in dem jeder Faktor gleich 10 ist.
Man legt fest: (1) $10^1 = 10$, (2) $10^0 = 1$

Dekadisches Positionssystem - Grundziffern

Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen darstellen. Dabei treten als Faktoren der Zehnerpotenzen nur die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9 auf.
Jeder Grundziffer in der Ziffer einer natürlichen Zahl ist eine Zehnerpotenz als Stellenwert zugeordnet.
Der Stellenwert einer jeden Grundziffer ist stets das Zehnfache des Stellenwerts der rechts von ihr stehenden Grundziffer. Daraus erklärt sich der Name "dekadisches Positionssystem", das auch "dekadisches Stellenwertsystem" genannt wird.

HT	ZT	T	H	Z	E	kürzer
10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	
			$5 \cdot 10^2 +$	$3 \cdot 10^1 +$	$9 \cdot 10^0$	539
$4 \cdot 10^5 +$	$1 \cdot 10^4 +$	$0 \cdot 10^3 +$	$7 \cdot 10^2 +$	$0 \cdot 10^1 +$	$8 \cdot 10^0$	410708

Dualsystem

Im Dualsystem werden zur Darstellung der natürlichen Zahlen Zweierpotenzen verwendet.

Zweierpotenz

Als Zweierpotenz wird jede Zahl bezeichnet, die sich als Produkt schreiben lässt, in dem jeder Faktor gleich 2 ist.
Man legt fest: (1) $2^1 = 2$; (2) $2^0 = 1$

Darstellung natürlicher Zahlen

Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von Vielfachen von Zweierpotenzen darstellen. Dabei treten als Faktoren der Zweierpotenzen nur die Zahlen 0 und 1 auf, da das Zweifache jeder Zweierpotenz bereits gleich der nächsthöheren Zweierpotenz ist.
Um Verwechslungen mit dem dekadischen Positionssystem zu vermeiden, benutzt man im Dualsystem als Ziffern die Zeichen "0" und "L" statt "O" und "1".
Jeder Ziffer ist bei der Darstellung einer natürlichen Zahl im Dualsystem eine Zweierpotenz als Stellenwert zugeordnet.
Der Stellenwert einer jeden Ziffer ist stets das Zweifache des Stellenwerts der rechts von ihr stehenden Ziffer. Daraus erklärt sich der Name "Dualsystem", das auch "duales Positionssystem" oder "binäres Stellenwertsystem" genannt wird.

Darstellung natürlicher Zahlen im	
dekadischen	dualen System
75	L$\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+L\cdot 2^3+0\cdot 2^2+L\cdot 2^1+L\cdot 2^0$ Kurzschreibweise: LOOLOLL
312	L$\cdot 2^8+0\cdot 2^7+0\cdot 2^6+L\cdot 2^5+L\cdot 2^4+L\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0$ Kurzschreibweise: LOOLLLOOO
2	L$\cdot 2^1+0\cdot 2^0$ Kurzschreibweise: LO

Statt der Zahlen 10 oder 2 kann man jede beliebige andere natürliche Zahl, die größer als 1 ist, als Grundzahl für ein Positionssystem verwenden.

Teilbarkeitsregeln

Ist eine Zahl b durch 10 teilbar, so gibt es eine Zahl x mit $10 \cdot x = b$ (↗ Def. 8).

Teilbarkeitsregeln durch 10

▶ Satz 17: Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre Ziffer mit "0" endet.

Teilbarkeitsregeln durch 2

Nach der Definition B10 sind nur die geraden Zahlen durch 2 teilbar. Die geraden Zahlen sind die Zahlen 0; 2; 4; 6; 8 und alle Zahlen, deren Ziffern mit "0", "2", "4", "6", "8" enden.

Teilbarkeitsregeln durch 5

Ist eine Zahl b durch 5 teilbar, so gibt es eine Zahl x mit $5 \cdot x = b$.
Je nachdem, ob x gerade ($x = 2n$) oder ungerade ($x = 2n + 1$) ist, gilt $5 \cdot 2n = b$, also $10n = b$ oder $5 \cdot (2b + 1) = b$, also $10n + 5 = b$.
Im ersten Fall endet die Ziffer der Zahl b mit "0", im zweiten Fall mit "5". Andere Möglichkeiten gibt es nicht.

▶ Satz 18: Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Ziffer mit "0" oder "5" endet.

Teilbarkeitsregeln durch 4

Jedes Vielfache von 100 ist durch 4 teilbar; denn 4 | 100, und damit teilt 4 auch jedes Vielfache von 100 (↗ Satz 14).
Daraus folgt, dass alle Zahlen, deren letzte beiden Grundziffern eine durch 4 teilbare Zahl darstellen, ebenfalls durch 4 teilbar sind.

75336 ist durch 4 teilbar
75300 ist durch 4 teilbar (Vielfaches von 100)

---

36 ist durch 4 teilbar
75300 + 36 = 75336 ist dann auch durch 4 teilbar (↗ Satz 12)

Alle Zahlen, deren letzte beiden Grundziffern eine nicht durch 4 teilbare Zahl darstellen, sind nicht durch 4 teilbar.

75343 ist nicht durch 4 teilbar.
Um das nachzuweisen, nehmen wir das Gegenteil der Behauptung an: $4 \mid 75343$.
Außerdem 4 | 75300 (Vielfaches von 100). Daraus folgt 4 | (75343 - 75300) (↗ Satz 13), d.h. 4 | 43.
Das ist falsch, also war die Annahme 4 | 75343 falsch.

▶ Satz 19: Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Grundziffern eine durch 4 teilbare Zahl darstellen.

Teilbarkeitsregeln durch 8

Jedes Vielfache von 1000 ist durch 8 teilbar. Entsprechend wie bei der Teilbarkeit durch 4 ergibt sich:

▶ Satz 20: Eine Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn ihre letzten drei Grundziffern eine durch 8 teilbare Zahl darstellen.

Teilbarkeitsregeln durch 9

Alle Zehnerpotenzen lassen bei Division durch 9 den

$$\begin{aligned} 1 &= 9 \cdot 0 + 1 \\ 10 &= 9 \cdot 1 + 1 \\ 10^2 &= 9 \cdot 11 + 1 \\ 10^3 &= 9 \cdot 111 + 1 \end{aligned}$$

Das k-fache einer beliebigen Zehnerpotenz lässt daher bei Division durch 9 den Rest k:

$$\begin{aligned} 30 &= 9 \cdot 3 + 3 \\ 800 &= 9 \cdot 88 + 8 \\ 4000 &= 9 \cdot 444 + 4 \end{aligned}$$

■ 9765 ist durch 9 teilbar

$$\begin{array}{r} 9765 = 9000 + 700 + 60 + 5 \\ \hline 9000 = 9 \cdot 999 + 9 \\ 70 = 9 \cdot 77 + 7 \\ 60 = 9 \cdot 6 + 6 \\ 5 = 9 \cdot 0 + 5 \\ \hline \text{Summe: } 9765 = 9 \cdot 1082 + 27 \end{array}$$

Da $9 \mid 9 \cdot 1082$ und $9 \mid 27$, gilt $9 \mid$ 9765 (↗ Satz 12)

Eine derartige Zerlegung ist für jede Zahl möglich, so dass die Teilbarkeit durch 9 nur von der Teilbarkeit der Restsumme abhängt. Die einzelnen Reste werden immer von den Grundziffern der gegebenen Zahl dargestellt. Die Summe dieser Reste erhält man dadurch, dass man die durch die Grundziffern der gegebenen Zahl bezeichneten Zahlen ohne Rücksicht auf ihren

Stellenwert addiert.
Die so entstandene Summe heißt Quersumme der gegebenen Zahl. Also ist eine Zahl durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Bei allen anderen Zahlen ist die Quersumme nicht durch 9 teilbar.

▶ Satz 21: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Teilbarkeitsregeln durch 3

Ebenso wie bei der Division durch 9 lassen alle Zehnerpotenzen auch bei der Division durch 3 den Rest 1. Wie bei der Teilbarkeit durch 9 ergibt sich

▶ Satz 21: Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Zerlegbarkeit in Primfaktoren

Wird eine Zahl in Faktoren zerlegt, die sämtlich Primzahlen (↗ Def.11) sind, so nennt man eine solche Zerlegung kurz Primfaktorenzerlegung.

$$\begin{aligned}
17640 &= 2 \cdot 8820 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 4410 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2205 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 735 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 245 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 49 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \\
\text{kürzer } 17640 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2
\end{aligned}$$

Wenn man die Reihenfolge der Faktoren außer Acht lässt, gibt es für natürliche Zahlen außer 0 und 1 nur eine einzige Möglichkeit der Primfaktorenzerlegung. Um keine Ausnahme machen zu müssen, wird bei einer Primzahl diese Zahl selbst als Primfaktorenzerlegung aufgefasst.

▶ Satz 23: Die Primfaktorenzerlegung einer jeden natürlichen Zahl ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Der Satz B23 würde nicht mehr gelten, wenn man die Zahl 1 zu den Primzahlen hinzunehmen würde. So wären z.B. $1 \cdot 2^2 \cdot 5$ und $1^2 \cdot 2^2 \cdot 5$ dann zwei verschiedene Primfaktorenzerlegungen der Zahl 20.

Das k.g.V.

▶ Definition 24: Eine Zahl, die Vielfaches mehrerer Zahlen ist, heißt gemeinsames Vielfaches dieser Zahlen.

Zu gegebenen Zahlen gibt es unendlich viele gemeinsame Vielfache. Das kleinste unter ihnen heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches (k. g. V.) der gegebenen Zahlen.[1]

Vielfache von 12	12		24		36	48	60		72		84	96	...
Vielfache von 16		16		32		48		64		80		96	...
Vielfache von 24			24			48			72			96	...
Gemeinsame Vielfache						48						96	...
k.g.V.						48							

[1] Da die Zahl Null Vielfaches (das 0-fache) einer jeden Zahl ist, wird sie bei der Bildung des k. g. V. ausgeschlossen.

Zur Bestimmung des k.g.V. gegebener Zahlen wird die Primfaktorenzerlegung verwendet.

Das k. g. V. von 24 und 49 ist zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcccccccc} 24 & = & 2^3 & \cdot & 3 & & & & \\ 28 & = & 2^2 & & & \cdot & 7 & & \\ 49 & = & & & & & 7^2 & & \\ \hline \text{k.g.V.:} & = & 2^3 & \cdot & 3 & \cdot & 7^2 & = 1176 \end{array}$$

Zur Berechnung des k.g.V. wählt man aus den Primfaktorenzerlegungen der gegebenen Zahlen die jeweils höchste Potenz der auftretenden Primfaktoren aus. Das k.g.V. ist das Produkt der so ausgewählten Potenzen.
Jede der gegebenen Zahlen ist in diesem Produkt als Teiler enthalten, daher ist es Vielfaches jeder der gegebenen Zahlen. Es ist aber auch kleinstes gemeinsames Vielfaches. Würde man nämlich auch nur einen Primfaktor aus dem Produkt fortlassen, so wäre es nicht mehr gemeinsames Vielfaches.

Der g. g. T.

▶ Definition 25: Eine Zahl, die Teiler mehrerer Zahlen ist, heißt gemeinsamer Teiler dieser Zahlen.

Der größte gemeinsame Teiler (g.g.T.) gegebener Zahlen ist die größte Zahl, die alle gegebenen Zahlen teilt.
Zahlen, die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, heißen zueinander teilerfremd.[2]

Teiler von 28	1	2		4		7	14		28	
Teiler von 42	1	2	3		6	7	14	21		42
Gemeinsame Teiler		2				7	14			
g.g.T.							14			

Zur Bestimmung des g.g.T . gegebener Zahlen wird die Primfaktorenzerlegung verwendet.

Der g. g. T. von 540, 144 und 198 ist zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcccccccc} 540 & = & 2^2 & \cdot & 3^3 & \cdot & 5 & & \\ 144 & = & 2^4 & \cdot & 3^2 & & & & \\ 198 & = & 2 & \cdot & 3^2 & & & \cdot & 11 & \\ \hline \text{g.g.T.} & = & 2 & \cdot & 3^2 & & & & & = 18 \end{array}$$

Zur Berechnung des g.g.T. wählt man aus den Primfaktorenzerlegungen der gegebenen Zahlen die jeweils niedrigste Potenz der in allen Zerlegungen auftretenden Primfaktoren aus. Der g.g.T. ist das Produkt der so ausgewählten Potenzen.
Dieses Produkt teilt alle gegebenen Zahlen und ist daher gemeinsamer Teiler. Es ist aber auch größter gemeinsamer Teiler. Würde man nämlich auch nur einen weiteren Primfaktor zum Produkt hinzunehmen, so wäre es nicht mehr gemeinsamer Teiler.

2.2 Gebrochene Zahlen

Brüche

Zum Aufbau des Bereichs der gebrochenen Zahlen stehen die natürlichen Zahlen zur Verfügung. Aus ihnen werden die Brüche gebildet.

[2] Da die Zahl 1 Teiler einer jeden Zahl ist, ist sie auch stets gemeinsamer Teiler beliebig gegebener Zahlen. Bei der Aufzählung gemeinsamer Teiler wird sie deshalb nicht aufgeführt.

Brüche haben die Form "$\frac{a}{b}$" a und b natürliche Zahlen, $b \neq 0$. Der waagerechte Strich heißt Bruchstrich, die Zahl über dem Bruchstrich heißt Zähler, die unter dem Bruchstrich heißt Nenner.

■ $\frac{1}{3}$ (gelesen: ein Drittel); $\frac{11}{4}$ (gelesen: elf Viertel), $\frac{1}{2}$ (gelesen: ein Halb)

Bemerkung: Die Begründung dafür, dass der Nenner eines Bruches stets ungleich Null sein muss, ergibt sich aus dem Rechnen mit gebrochenen Zahlen.
Der Nenner eines Bruches gibt an, in wieviel gleiche Teile ein Ganzes geteilt wurde.
Der Zähler eines Bruches gibt an, wieviel solcher Teile gemeint sind.

Echter Bruch, unechter Bruch

► Definition 26: $\frac{a}{b}$ heißt echter Bruch, falls $a < b$. $\frac{a}{b}$ heißt unechter Bruch, falls $a > b$.

Kürzen

Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Teiler dividiert. Sind Zähler und Nenner eines Bruches teilerfremd, so lässt sich dieser Bruch nur durch 1 kürzen.

Erweitern

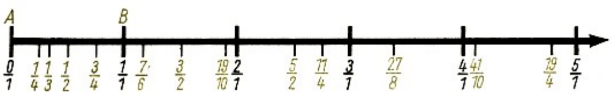
Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben von 0 verschiedenen natürlichen Zahl multipliziert. Einen Bruch kann man stets erweitern.

► Satz 27: Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gehen genau dann durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervor, wenn gilt:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Gebrochene Zahlen als Klassen von Brüchen

Man kann den Brüchen Punkte eines Strahls zuordnen. Dazu wählt man auf einem Strahl eine beliebige Strecke AB, die vom Anfangspunkt des Strahls ausgehend abgetragen wird. Diese Strecke betrachtet man als Ganzes (Einheit).
Dann entspricht jedem Bruch eine Strecke, deren Anfangspunkt mit dem Anfangspunkt A des Strahls zusammenfällt. Jedem Bruch wird der Endpunkt der ihm entsprechenden Strecke zugeordnet.

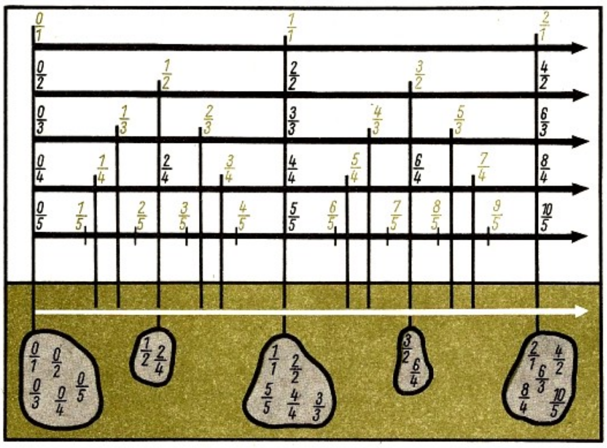


Das folgende Bild (nächste Seite) zeigt, dass Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, derselbe Punkt zugeordnet wird.
Solche Brüche werden jeweils zu einer Klasse zusammengefasst.

► Satz 28: Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegen genau dann in einer Klasse, wenn gilt: $a : d = b : c$.

► Definition 29: Jede Klasse von Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen, heißt gebrochene Zahl.

Bemerkung: In jeder Klasse liegen unendlich viele Brüche. Für zwei beliebige Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die in ein und derselben Klasse liegen, gilt $a \cdot d = b \cdot c$ (↗ 37).

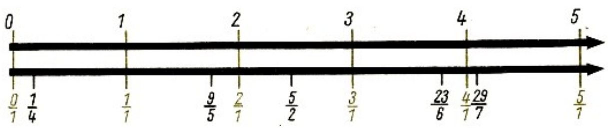


Eine gebrochene Zahl, d. h. eine Klasse von Brüchen, kann durch jeden in dieser Klasse liegenden Bruch bezeichnet werden. Das Kürzen und Erweitern eines Bruches bedeutet, dass man zu einer anderen Bezeichnung derselben gebrochenen Zahl übergeht.
$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ ... bezeichnen dieselbe gebrochene Zahl.
Man schreibt daher $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$...

▶ Satz 30: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gilt genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt.

Zuordnung von Punkten und Zahlen

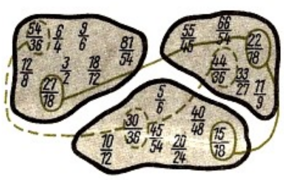
Durch die Zusammenfassung der Brüche zu Klassen, den gebrochenen Zahlen, besteht jetzt eine Zuordnung von Punkten eines Strahls zu Zahlen.
Einen solchen Strahl nennt man wieder Zahlenstrahl. Am Zahlenstrahl im ersten Bild auf Seite 24 sind zur Bezeichnung gebrochener Zahlen jeweils die am weitesten gekürzten Brüche geschrieben.
Ein Vergleich eines Zahlenstrahls mit natürlichen Zahlen und eines Zahlenstrahls mit gebrochenen Zahlen zeigt, dass jeder gebrochenen Zahl $\frac{a}{1}$ die natürliche Zahl a entspricht und umgekehrt.



Der Hauptnenner

▶ Definition 31: Brüche mit gleichem Nenner heißen Gleichnamige Brüche gleichnamig.

Gegebene gebrochene Zahlen lassen sich stets durch gleichnamige Brüche darstellen, indem man zweckmäßig erweitert.

Gegeben	Gleichnamige Darstellung	Veranschaulichung
$\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{11}{9}$	a) $\frac{27}{18}, \frac{15}{18}, \frac{22}{18}$, b) $\frac{54}{36}, \frac{30}{36}, \frac{44}{36}$, c) $\frac{81}{54}, \frac{45}{54}, \frac{66}{54}$	

Die gemeinsamen Nenner 18, 36, 54 sind gemeinsame Vielfache der Nenner der ursprünglichen Brüche. Da es zu vorgegebenen Zahlen unendlich viele gemeinsame Vielfache gibt, gibt es auch unendlich viele gemeinsame Nenner. Unter ihnen gibt es einen kleinsten, das k.g. V. der Nenner der gegebenen Brüche. Das ist in diesem Beispiel die Zahl 18.

Mitunter lässt sich ein gemeinsamer Nenner gegebener Brüche auch durch Kürzen finden.

■ $\frac{5}{4}; \frac{85}{20}; \frac{100}{50}$ Durch Kürzen ergibt sich: $\frac{5}{4}; \frac{17}{4}; \frac{8}{4}$

► Definition 32: Das k. g. V. der Nenner gegebener Brüche heißt der Hauptnenner (HN) dieser Brüche

Um Brüche gleichnamig zu machen, bringt man sie zweckmäßig auf den Hauptnenner, damit die Zähler möglichst klein bleiben.

Gegebene Brüche:		Erweiterungsfaktoren:
$\frac{7}{168}$	$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$	15
$\frac{9}{20}$	$20 = 2^2 \cdot 5$	126
$\frac{23}{126}$	$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$	20
	HN: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$	

$\frac{7}{168} = \frac{15\cdot 7}{15\cdot 168} = \frac{105}{2520}; \frac{9}{20} = \frac{126\cdot 9}{126\cdot 20} = \frac{1134}{2520}; \frac{23}{126} = \frac{20\cdot 23}{20\cdot 126} = \frac{460}{2520}$

Ordnung

► Definition 33: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d < b \cdot c$.

Statt $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ schreibt man auch $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ und liest: "$\frac{c}{d}$ größer $\frac{a}{b}$".

► Satz 34: Beim Vergleichen verhalten sich die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbaren gebrochenen Zahlen wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.

Beweis: Nach der Definition der Ordnung gebrochener Zahlen gilt:
$\frac{a}{1} < \frac{c}{1}$ genau dann, wenn $a \cdot 1 < 1 \cdot c$, d.h. $\frac{a}{1} < \frac{c}{1}$ genau dann, wenn $a < c$, w. z.b.w

Daher kann man beim Vergleichen gebrochene Zahlen, die sich in der Form darstellen lassen, durch die natürliche Zahl a ersetzen und umgekehrt.

■ a) Statt $\frac{7}{1} < \frac{9}{1}$ kürzer: $7 < 9$
b) Statt $\frac{0}{1} < \frac{4}{1}$ kürzer: $0 < 4$
c) Statt $\frac{8}{2} < \frac{15}{3}$ kürzer $4 < 5$ $\left(\frac{8}{2} = \frac{4}{1}\right.$ und $\left.\frac{15}{3} = \frac{5}{1}\right)$

Von zwei Punkten eines Zahlenstrahls, die verschiedenen gebrochenen Zahlen zugeordnet sind, liegt derjenige weiter links, der der kleineren der beiden Zahlen zugeordnet ist. Man sagt kürzer: Von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegt die kleinere auf dem Zahlenstrahl links von der größeren.

Gebrochene Zahlen, die durch Brüche mit gleichem Nenner oder gleichem Zähler dargestellt sind, lassen sich besonders leicht vergleichen.

(1) gleiche Nenner:
Es gilt: $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ genau dann, wenn $a \cdot b < b \cdot c$ und $a \cdot b < b \cdot c$ genau dann, wenn $a < c$, also

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{b} \quad \text{genau dann, wenn} \quad a < c$$

(2) gleiche Zähler:

Es gilt für $a \neq 0$: $\frac{a}{b} < \frac{a}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d < b \cdot a$ und $a \cdot d < b \cdot a$ genau dann, wenn $d < b$, also

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{d} \quad \text{genau dann, wenn} \quad b > d \quad \text{und} \quad a \neq 0$$

Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen hat keine gebrochene Zahl einen unmittelbaren Nachfolger.

Erläuterung: Zum Beispiel hat $\frac{3}{10}$ keinen unmittelbaren Nachfolger. So kann etwa $\frac{4}{10}$ nicht unmittelbarer Nachfolger sein, denn die Zahl $\frac{7}{20}$ liegt zwischen beiden: $\frac{3}{10} < \frac{7}{20} < \frac{4}{10}$.
Aber auch $\frac{7}{20}$ ist nicht unmittelbarer Nachfolger von $\frac{3}{10}$, denn die Zahl $\frac{13}{40}$ liegt zwischen beiden: $\frac{3}{10} < \frac{14}{40} < \frac{7}{20}$.
Auf diese Weise kann man für jede beliebige gebrochene Zahl, die größer als ist, nachweisen, dass sie nicht unmittelbarer Nachfolger von $\frac{3}{10}$ ist.

Echt bzw. unecht gebrochene Zahlen

▶ Definition 35: Eine gebrochene Zahl heißt echt gebrochen, wenn sie sich durch echte Brüche darstellen lässt. Eine gebrochene Zahl heißt unecht gebrochen, wenn sie sich durch unechte Brüche darstellen lässt.

Echt gebrochene Zahlen sind kleiner als 1, unecht gebrochene Zahlen sind größer als 1 oder gleich 1.
Die gebrochene Zahl 0 ist die kleinste gebrochene Zahl.

Rechenoperationen: Addition

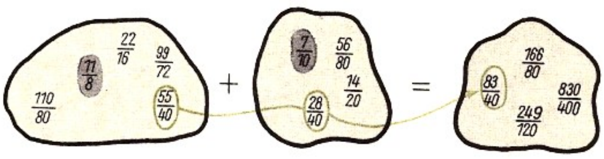
Durch die folgende Definition wird die Addition gebrochener Zahlen auf die Addition natürlicher Zahlen (Zähler der Brüche) zurückgeführt.

▶ Definition 36: Gebrochene Zahlen werden addiert, indem man sie durch gleichnamige Brüche darstellt und deren Zähler addiert.
Den gemeinsamen Nenner behält man bei.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ab + dc}{bc}$$

Die Addition gebrochener Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar, da man stets gegebene Brüche gleichnamig machen und die natürlichen Zahlen in ihren Zählern addieren kann.

■ $\frac{11}{8} + \frac{7}{10} = \frac{55}{40} + \frac{28}{40} = \frac{83}{40}$



Eigenschaften der Addition - Kommutativität

▶ Satz 37: Die Addition gebrochener Zahlen ist kommutativ.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Beweis:
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ (Def. 36)

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{bc + ad}{bd}$ (Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen)
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd}$ (Def. 36)
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ (Kürzen) w. z. b. w.

Assoziativität

▶ Satz 8: Die Addition gebrochener Zahlen ist assoziativ.

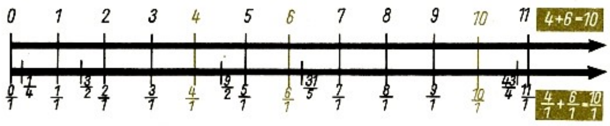
$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$$

Das bedeutet: Sind drei Zahlen zu addieren, so sind zwei Additionen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Additionen ist dabei beliebig.

■ $\frac{7}{36} + \frac{57}{40} + \frac{13}{90} + \frac{21}{45} = \frac{70 + 513 + 52 + 168}{360} = \frac{803}{360} = 2\frac{83}{360}$

Wegen der Kommutativität und Assoziativität der Addition dürfen in einer Summe mit mehr als zwei Summanden diese beliebig vertauscht werden.

▶ Satz 39: Bei der Addition verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.



Daher kann man bei der Addition die gebrochenen Zahlen, die sich in der Form $\frac{a}{1}$ darstellen lassen, durch die jeweils entsprechende natürliche Zahl a ersetzen und umgekehrt.

■ a) $\frac{4}{1} + \frac{2}{7} = 4 + \frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{8} + \frac{0}{1} = \frac{5}{8} + 0$
c) $\frac{6}{2} + \frac{8}{4} = 3 + 2$, $\left(\frac{6}{2} = \frac{3}{1}\right.$ und $\left.\frac{8}{4} = \frac{2}{1}\right)$

"Gemischte Zahl"

Bemerkung: Statt $4 + \frac{2}{7}$ kann man kürzer schreiben $4\frac{2}{7}$.
Diese Schreibweise wird auch als "gemischte Zahl" bezeichnet. Jede unecht gebrochene Zahl lässt sich entweder als gemischte Zahl schreiben oder sie entspricht einer natürlichen Zahl.

■ a) $\frac{15}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = 2\frac{1}{7}$, b) $\frac{24}{8} = \frac{3}{1} = 3$

Bemerkung: Gebrochene Zahlen, die als gemischte Zahlen geschrieben sind, lassen sich leichter vergleichen. So erkennt man sofort, dass z. B. $25\frac{11}{37}$ zwischen 25 und 26 liegt.
In der Darstellung $\frac{936}{37}$ ist dies nicht ohne weiteres zu erkennen. Außerdem vermeidet man unnötig große Zähler.

Neutrales Element

▶ Satz 40: Für jede gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ gilt:

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

Die Zahl 0 ist also das neutrale Element bezüglich der Addition gebrochener Zahlen.

Beweis:
$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}+\frac{0}{b}=\frac{a+0}{b}=\frac{a}{b}$ w.z.b.w.

Bei der Addition gebrochener Zahlen zeigt sich, dass Brüche mit dem Nenner 0 ausgeschlossen werden müssen. Würde man solche Brüche zulassen, so müsste man ebenfalls die Erweiterung von Brüchen mit 0 zulassen, um stets gleichnamig machen zu können.
Damit könnte man jedoch alle Brüche auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, alle Brüche würden also mit $\frac{0}{0}$ in einer Klasse liegen. Es gäbe demnach überhaupt nur eine einzige gebrochene Zahl.

Subtraktion

▶ Definition 41: Gebrochene Zahlen werden subtrahiert, indem man sie durch gleichnamige Brüche darstellt und die Zähler subtrahiert.
Den gemeinsamen Nenner behält man bei.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bc}=\frac{ad-bc}{bd}$$

■ $\frac{5}{6}-\frac{7}{15}=\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}-\frac{2\cdot 7}{2\cdot 15}=\frac{25}{30}-\frac{14}{30}=\frac{11}{30}$

Auf Grund dieser Definition ist die Subtraktion (wie im Bereich der natürlichen Zahlen) die Umkehrung der Addition.
Die Subtraktion gebrochener Zahlen ist wie im Bereich der natürlichen Zahlen nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist.

▶ Satz 42: Bei der Subtraktion verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen a.

Bei der Subtraktion kann man daher die gebrochenen Zahlen, die sich in der Form $\frac{a}{1}$ darstellen lassen, durch die jeweils entsprechende natürliche Zahl a ersetzen und umgekehrt.

▶ Satz 43: Für jede gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ gilt: $\frac{a}{b}-0=\frac{a}{b}$.

Beweis:
$\frac{a}{b}-0=\frac{a}{b}-\frac{0}{b}=\frac{a-0}{b}=\frac{a}{b}$ w. z. b. w.

Monotonie der Addition und Subtraktion

Wie für natürliche Zahlen (22) gilt auch im Bereich der gebrochenen Zahlen:

▶ Satz 44:
Wenn $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b}+\frac{x}{y}<\frac{c}{d}+\frac{x}{y}$,
Wenn $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b}-\frac{x}{y}<\frac{c}{d}-\frac{x}{y}$, falls die Subtraktionen ausführbar sind.

Multiplikation

▶ Definition 45: Gebrochene Zahlen werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner der darstellenden Brüche multipliziert.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

■ $\frac{27}{8}\cdot\frac{13}{3}=\frac{27\cdot 13}{8\cdot 3}=\frac{9\cdot 13}{8}=\frac{117}{8}$

Die Multiplikation gebrochener Zahlen wird durch diese Definition auf die Multiplikation natürlicher Zahlen (Zähler und Nenner der Brüche) zurückgeführt.
Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar, da man die natürlichen Zahlen in den Zählern und Nennern stets multiplizieren kann. Es ist zweckmäßig, vor dem Ausrechnen der Produkte so weit wie möglich zu kürzen.
Gemischte Zahlen wandelt man vor dem Multiplizieren in unechte Brüche um.

Eigenschaften der Multiplikation - Kommutativität

▶ Satz 46: Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist kommutativ.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

Assoziativität

▶ Satz 47: Die Multiplikation gebrochener Zahlen ist assoziativ.

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{e}{f}$$

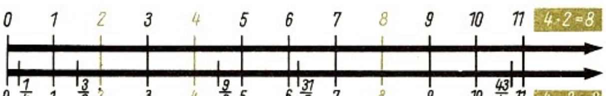
Das bedeutet: Sind drei Zahlen zu multiplizieren, so sind zwei Multiplikationen hintereinander auszuführen. Die Reihenfolge dieser beiden Multiplikationen ist dabei beliebig.
Der Beweis dieser Sätze erfolgt ähnlich wie bei der Addition. Wegen der Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation dürfen auch in einem Produkt mit mehr als zwei Faktoren diese beliebig vertauscht werden.

Distributivität

▶ Satz 48: Die Multiplikation ist bezüglich der Addition distributiv.

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

▶ Satz 49: Bei der Multiplikation verhalten sich gebrochene Zählen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.



Bei der Multiplikation kann man daher die gebrochenen Zahlen, die sich in der Form $\frac{a}{1}$ darstellen lassen, durch die jeweils entsprechende natürliche Zahl a ersetzen und umgekehrt.

▶ Satz 50: Für jede gebrochene Zahl z gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} \cdot 0 = 0$$

Die Zahl 1 ist also das neutrale Element bezüglich der Multiplikation gebrochener Zahlen. Ein Produkt gebrochener Zahlen ist genau dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich Null ist.

Monotonie

▶ Satz 51: Die Multiplikation ist bezüglich der Kleiner-Beziehung monoton. Für beliebige gebrochene Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ und $\frac{x}{y}$ ($\frac{x}{y} \neq 0$) gilt:

$$\text{Wenn } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ so } \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} < \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y}$$

Division - Reziprokes

▶ Definition 52: Ist $\frac{a}{b}$ eine von Null verschiedene gebrochene Zahl, also $a \neq 0$, so heißt die gebrochene Zahl $\frac{b}{a}$ das Reziproke der gebrochenen Zahl $\frac{a}{b}$.

Da $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$ gilt, ist das Produkt einer gebrochenen Zahl mit ihrem Reziproken stets gleich 1, z. B.: $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$.

▶ Definition 53: Gebrochene Zahlen werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

In Definition B 53 ist die Division so festgelegt, dass sie die Umkehrung der Multiplikation ist. Durch die angegebene Divisionsvorschrift findet man nämlich zu gegebenem Produkt und einem seiner Faktoren den zweiten Faktor:

In der Gleichung $\frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ ist der Faktor $\frac{x}{y}$ zu bestimmen.
Anders geschrieben: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$
Nach Definition B53: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
Einsetzen für $\frac{x}{y}$ in die erste Gleichung:
$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}$$
Also ist das Produkt $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ tatsächlich gleich dem gesuchten Quotienten $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

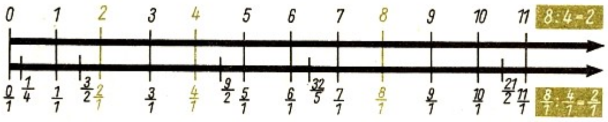
Da durch die Definition B53 die Division auf die Multiplikation zurückgeführt wird und die Multiplikation gebrochener Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist, kann man jetzt jede Divisionsaufgabe lösen. Ausgenommen ist wieder die Division durch Null, denn sie liefert kein eindeutig bestimmtes Ergebnis.

□ $\frac{3}{7} : \frac{0}{5} = \frac{x}{y}$. Für $\frac{x}{y}$ müsste gelten $\frac{3}{7} = \frac{x}{y} \cdot \frac{0}{5} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 5}$. Wegen $x \cdot 0 = 0$ gibt es keine solche Zahl.

$\frac{0}{7} : \frac{0}{5} = \frac{x}{y}$. Für $\frac{x}{y}$ müsste gelten $\frac{0}{7} = \frac{x}{y} \cdot \frac{0}{5} = \frac{x \cdot 0}{y \cdot 5}$. Diese Gleichung gilt für jede Zahl $\frac{x}{y}$.

Die gebrochenen Zahlen bilden also einen Zahlbereich, in dem die Addition, die Multiplikation und die Division (mit Ausnahme der Division durch Null) uneingeschränkt ausführbar sind.
Dagegen ist die Subtraktion wie im Bereich der natürlichen Zahlen nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, abermals einen neuen Zahlbereich aufzubauen, nämlich den Bereich der rationalen Zahlen.

▶ Satz 54: Bei der Division verhalten sich gebrochene Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen.



Bei der Division kann man daher die gebrochenen Zahlen, die sich in der Form $\frac{a}{1}$ darstellen lassen, durch die jeweils entsprechende natürliche Zahl a ersetzen und umgekehrt.

■ a) $\frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{3} : \frac{5}{1} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$
b) $2 : \frac{8}{3} = \frac{2}{1} : \frac{8}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

► Satz 55: Für jede gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ gilt:

$$a) \quad \frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b} \qquad , \qquad b) \quad 0 : \frac{a}{b} = 0; \quad \frac{a}{b} \neq 0$$

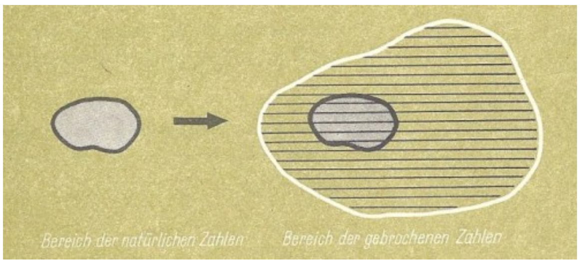
Beweis:
a) $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b} : \frac{1}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$
b) $0 : \frac{a}{b} = \frac{0}{1} : \frac{a}{b} = \frac{0}{1} \cdot \frac{b}{a} = 0$ w.z.b.w.

Monotonie

Die Division gebrochener Zahlen ist bezüglich der Kleinerbeziehung monoton, da jede Division durch eine Multiplikation ersetzt werden kann.

Die natürlichen Zahlen als Teilbereich der gebrochenen Zahlen

Beim Vergleichen gebrochener Zahlen und bei allen Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen kann man die gebrochenen Zahlen, die in der Form $\frac{a}{1}$ darstellbar sind, durch die jeweilige natürliche Zahl a ersetzen.
Nach dieser Ersetzung bilden die natürlichen Zahlen einen Teilbereich der gebrochenen Zahlen, d.h., jede natürliche Zahl ist eine gebrochene Zahl.



Natürliche Zahlen - Teilmenge der gebrochenen Zahlen

Jetzt kann man jede Division natürlicher Zahlen auch als Division gebrochener Zahlen schreiben.

■ $5 : 7 = \frac{5}{1} : \frac{7}{1} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$

Damit ist jede Division natürlicher Zahlen (außer der Division durch 0) innerhalb des Bereichs der gebrochenen Zahlen ausführbar.
Umgekehrt kann jede gebrochene Zahl als Quotient natürlicher Zahlen geschrieben werden.

■ $\frac{2658}{23} = 2658 : 23$ Führt man die Division $2658 : 23$ aus, so ergibt sich:

$$\begin{array}{l} 2658:23 = 115\frac{13}{23} \\ \underline{23} \\ \;\;35 \\ \;\;\underline{23} \\ \;\;128 \\ \;\;\underline{115} \\ \;\;\;\;13 \end{array}$$

Es gilt also

$$\frac{a}{b} = a : b; \qquad (b \neq 0)$$

Doppelbrüche

Allgemein werden der Bruchstrich und das Zeichen ":" gleichberechtigt als Divisionszeichen verwendet.

■ a) $\frac{\frac{39}{50}}{\frac{12}{25}} = \frac{39}{50} : \frac{12}{25} = \frac{39 \cdot 25}{50 \cdot 12} = \frac{13}{2 \cdot 4} = \frac{13}{8}$

b) $\frac{12}{\frac{6}{25}} = 12 : \frac{6}{25} = 12 \cdot \frac{25}{6} = 50$

Die gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung - Zehnerbrüche

► Definition 56: Ein Bruch, dessen Nenner eine Zehnerpotenz ist, heißt Zehnerbruch.

Brüche, die selbst nicht schon Zehnerbruch sind, deren Nenner aber nur die Primfaktoren 2; 5 (oder Potenzen dieser Zahlen) enthalten, lassen sich zu Zehnerbrüchen erweitern. Man sagt, sie lassen sich in Zehnerbrüche umwandeln.

■ a) $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{500}{100} = \frac{5000}{1000}$, b) $\frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = \frac{6250}{1000}$, c) $\frac{21}{50} = \frac{42}{100} = \frac{420}{1000}$

Enthält der Nenner eines Bruches noch andere Primfaktoren als 2 und 5, so kann man diesen Bruch nur dann in einen Zehnerbruch umwandeln, wenn der gegebene Bruch durch diese Primfaktoren kürzbar ist.

Erweiterung des dekadischen Positionssystems

Das Positionssystem wird nach rechts fortgesetzt. Die rechts von den Einern stehenden Grundziffern haben also der Reihe nach die Stellenwerte:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \quad ...$$

Potenzschreibweise:

$$\frac{1}{10^1}, \quad \frac{1}{10^2}, \quad \frac{1}{10^3}, \quad \frac{1}{10^4}, \quad ...$$

Zur Orientierung wird zwischen die Einer- und Zehntelstelle ein Komma gesetzt.

Erweitertes dekadisches Positionssystem								
... ...	Tausender 10^3	Hunderter 10^2	Zehner 10^1	Einer 10^0	Zehntel $\frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$	Hundertstel $\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$	Tausendstel $\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$	... ...
	$4 \cdot 10^3$ 4	$+5 \cdot 10^2$ 5	$+6 \cdot 10^1$ 6	$+3 \cdot 10^0$ 3,	$+7 \cdot \frac{1}{10^1}$ 7	$+8 \cdot \frac{1}{10^2}$ 8	$+9 \cdot \frac{1}{10^3}$ 9	
4563,789 gelesen: 4563 Komma 7-8-9								

Dezimalbrüche: Dezimalen, Gemeine Brüche

► Definition 57: Die Darstellung einer gebrochenen Zahl im dekadischen Positionssystem heißt Dezimalbruch. Die Stellen rechts vom Komma heißen Dezimalstellen (kürzer: Dezimalen). Im Unterschied zu den Dezimalbrüchen nennt man Brüche der Form "$\frac{a}{b}$" (a und b natürliche Zahlen, $b \neq 0$) gemeine Brüche.

1) Umwandlung von Zehnerbrüchen
Erste Möglichkeit:

a) $\frac{27}{10} = 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot \frac{1}{10^1} = 2{,}7$
b) $\frac{5}{6} = \frac{625}{100} = 0{,}625$

Zweite Möglichkeit:

$$\frac{27}{10} = 27 : 10; \; 27 : 10 = 2{,}7$$
$$\begin{array}{l} \underline{70} \\ \;0 \end{array}$$

$$\frac{5}{8} = 5 : 8; \; 5 : 8 = 0{,}625$$
$$\begin{array}{l} \underline{50} \\ \;\underline{20} \\ \;\;\underline{40} \\ \;\;\;0 \end{array}$$

2) Für gebrochene Zahlen, für die es keine Darstellung durch Zehnerbrüche gibt, verfährt man ähnlich wie bei der zweiten Möglichkeit. In diesem Falle bricht die Division nicht ab, sondern bestimmte Grundziffern bzw. Gruppen von Grundziffern wiederholen sich ständig.
Diese sich wiederholenden Ziffern heißen Perioden. Nach der Anzahl der Grundziffern in einer Periode spricht man von $1; 2; 3; ...; n$-stelligen Perioden. Auch in diesem Fall kann man das schriftliche Verfahren der Division anwenden.

■ $\frac{4}{3} = 4 : 3$
(Ergebnis gelesen: Eins - Komma - Drei; Periode Drei). Die Periode ist 1-stellig.

$4 : 3 = 1{,}333...$; kürzer: $\frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$
$$\begin{array}{l} \underline{10} \\ \;\underline{10} \\ \;\;\underline{10} \\ \;\;\;\underline{1} \\ \;\;\;\vdots \end{array}$$

■ $\frac{178}{55} = 178 : 55$
(Ergebnis gelesen: Drei - Komma - Zwei - Drei - Sechs; Periode Drei - Sechs). Die Periode ist 2-stellig.

$178 : 55 = 3{,}23636...$; kürzer: $\frac{178}{55} = 3{,}2\overline{36}$
$$\begin{array}{l} \underline{130} \\ \;\underline{200} \\ \;\;\underline{350} \\ \;\;\;\underline{200} \\ \;\;\;\;\underline{350} \\ \;\;\;\;\;\underline{20} \\ \;\;\;\;\;\vdots \end{array}$$

■ $\frac{5}{12} = 5 : 12$

$5 : 12 = 0{,}4166...$; kürzer: $\frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6}$
$$\begin{array}{l} \underline{50} \\ \;\underline{20} \\ \;\;\underline{80} \\ \;\;\;\underline{80} \\ \;\;\;\;\underline{8} \\ \;\;\;\;\vdots \end{array}$$

Endliche und unendliche Dezimalbrüche

▶ Definition 58: Ein Dezimalbruch, der vor oder hinter dem Komma eine letzte Stelle mit von 0 verschiedener Ziffer besitzt, heißt endlicher Dezimalbruch.
Ein Dezimalbruch, in dessen Dezimalstellen Perioden auftreten, heißt periodischer Dezimalbruch. Periodische Dezimalbrüche sind unendlich.

Dezimalbrüche, bei denen die Periode unmittelbar hinter dem Komma beginnt, heißen reinperiodisch. Treten zwischen dem Komma und der Periode noch andere Ziffern, sogenannte Vorperioden, auf, so nennt man solche Dezimalbrüche gemischtperiodisch.

Umwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche

Man kann auch umgekehrt jeden endlichen oder periodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch umwandeln.
1) Endliche Dezimalbrüche:

■ a) $0{,}64 = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$, b) $35{,}22 = \frac{3522}{100} = \frac{1761}{50}$

2) Periodische Dezimalbrüche:
Hier wird ohne Beweis benutzt, dass man einige Rechenoperationen mit periodischen Dezimalbrüchen genauso ausführen darf wie mit endlichen Dezimalbrüchen.

a) $0{,}\overline{3}$ ist in einen gemeinen Bruch umzuwandeln.

$$\begin{aligned} x &= 0{,}\overline{3} \\ \hline 10x &= 3{,}\overline{3} \\ x &= 0{,}\overline{3} \quad (-) \\ \hline 9x &= 3 \\ x &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Also gilt: $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$

b) $6{,}4\overline{27}$ ist in einen gemeinen Bruch umzuwandeln.

$$\begin{aligned} x &= 6{,}4\overline{27} \\ \hline 1000x &= 6427{,}\overline{27} \\ 10x &= 64{,}\overline{27} \quad (-) \\ \hline 990x &= 6363 \\ x &= \frac{6363}{990} = \frac{707}{110} \end{aligned}$$

Also gilt: $6{,}4\overline{27} = \frac{707}{110}$

c) $0{,}\overline{9}$ ist in einen gemeinen Bruch umzuwandeln.

$$\begin{aligned} x &= 0{,}\overline{9} \\ \hline 10x &= 9{,}\overline{9} \\ x &= 0{,}\overline{3} \quad (-) \\ \hline 9x &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Also gilt: $0{,}\overline{9} = 1$

▶ Satz 59: Für jede gebrochene Zahl gibt es eine Darstellung als Dezimalbruch. Dieser ist entweder endlich oder periodisch.
Umgekehrt stellt jeder endliche oder periodische Dezimalbruch eine gebrochene Zahl dar.

Bemerkung: Es gibt auch unendliche Dezimalbrüche, die nicht periodisch sind, z.B.
0,515115111511115.... Solche Dezimalbrüche stellen keine gebrochenen Zahlen dar.
Es sind Darstellungen irrationaler Zahlen.

Das Rechnen mit gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung

Das Rechnen mit gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung nennt man auch kürzer "Rechnen mit Dezimalbrüchen".
Für das Rechnen mit endlichen Dezimalbrüchen gelten die folgenden Regeln: Treten in einer Aufgabe auch periodische Dezimalbrüche auf, so muss man diese entweder runden oder in gemeine Brüche umwandeln.

Vergleichen von Dezimalbrüchen

a) Von zwei Dezimalbrüchen mit verschiedener Stellenzahl vor dem Komma ist derjenige größer,

der mehr Stellen vor dem Komma hat.
b) Zwei Dezimalbrüche mit gleicher Anzahl von Stellen vor dem Komma werden ohne Berücksichtigung des Kommas wie natürliche Zahlen verglichen. Dazu müssen sie jedoch durch Anfügen von Nullen gleichnamig gemacht werden.

■ Es sind 13,9 und 13,11 zu vergleichen.
Gleiche Anzahl von Dezimalen: 13,90 und 13,11.
Vergleich: 13,90 $>$ 13,11; denn 1390 $>$ 1311

Addieren und Subtrahieren

Dezimalbrüche werden schriftlich addiert bzw. subtrahiert, indem sie zunächst so untereinander geschrieben werden, dass Stellen mit dem gleichen Stellenwert in derselben Spalte stehen (kurz: Komma unter Komma). Dann verfährt man genau so wie bei der Addition bzw. Subtraktion natürlicher Zahlen.
Das Komma wird im Ergebnis zwischen Einer- und Zehntelstelle gesetzt.

■ a)
$$\begin{array}{r} 25{,}38 \\ 103{,}009 \\ 0{,}5 \\ +13{,}71 \\ \hline 142{,}599 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 841{,}36 \\ -27{,}053 \\ -0{,}123 \\ -122{,}4 \\ \hline 691{,}784 \end{array}$$

Multiplizieren

Dezimalbrüche werden schriftlich multipliziert, indem man sie zunächst ohne Rücksicht auf das Komma wie natürliche Zahlen multipliziert.
Das Komma setzt man dann so, dass das Ergebnis so viel Dezimalstellen hat, wie die beiden Faktoren zusammen besitzen. Wenn nötig, müssen Nullen ergänzt werden.

■ a)
$$\begin{array}{r} 735{,}06 \cdot 5,204 \\ \hline 3675\ 30 \\ 147\ 0120 \\ 2\ 94024 \\ \hline 3825{,}25224 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 0{,}047 \cdot 0,0092 \\ \hline 423 \\ 24 \\ \hline 0{,}0004324 \end{array}$$

Ein Dezimalbruch wird mit 10, 100, 1000, ... multipliziert, indem man das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts versetzt.

Dividieren

Ein Dezimalbruch wird durch eine natürliche Zahl schriftlich dividiert, indem man wie bei der Division natürlicher Zahlen verfährt. Nach der Division der Einer des Dividenden wird im Ergebnis ein Komma gesetzt.
Ist der Divisor ein Dezimalbruch, so multipliziert man zunächst Dividenden und Divisor mit 10, 100, 1000,..., je nachdem, ob der Divisor 1, 2, 3,... Dezimalstellen hat.
Damit ist der Divisor wieder eine natürliche Zahl.

■ a) 1337,19 : 87

1337,19:87 =15,37
467
32 1
6 09
0

b) 1,58445 : 35,21

158,445:3521 =0,045
15 84
15 844
14 084
1 7605
1 7605
0

c) 273 : 1,2

2730 :12 =227,5
33
90
60
0

d) 26,47 : 5,6

264,7 :56 =$4{,}7267\overline{857142}$
4 07
150
380
440
480
320
400
80
240
160
48
⋮

Ein Dezimalbruch wird durch 10, 100, 1000, ... dividiert, indem man das Komma um 1, 2, 3,... Stellen nach links versetzt.

Zusammenfassung

Eine gebrochene Zahl ist eine Klasse von Brüchen, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen. Es werden nur Brüche gebildet, deren Nenner ungleich Null ist.

Beziehung	Definition	Eigenschaften
Kleiner-Beziehung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d < b \cdot c$	Es gilt genau einer der Fälle 1) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ 2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 3) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, so $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$. Gebrochene Zahlen haben keinen Nachfolger.

Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen

Operation	Ausführbarkeit	Eigenschaften
Addition $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	Uneingeschränkt ausführbar	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$
Multiplikation $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	Uneingeschränkt ausführbar	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$ $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1; a \neq 0$ Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} < \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y}$ $\frac{x}{y} \neq 0$
$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$		
Subtraktion $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ Umkehrung der Addition	Ausführbar, genau wenn $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$, $\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b}$ Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b} - \frac{x}{y} < \frac{c}{d} - \frac{x}{y}$ (Falls die Subtraktion ausführbar ist)
Division $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ $\frac{c}{d} \neq 0$ Umkehrung der Multiplikation	Uneingeschränkt ausführbar zurückführbar auf Multiplikation	$\frac{a}{b} : \frac{b}{a} = 1$, $\frac{a}{b} \neq 0$ $\frac{a}{b} : 1 = \frac{b}{b}$, $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, $\frac{a}{b} \neq 0$ Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so $\frac{a}{b} - \frac{x}{y} < \frac{c}{d} - \frac{x}{y}$
Wegen der Definition $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, kann jede Division durch eine Multiplikation ersetzt werden.		

2.3 Rationale Zahlen

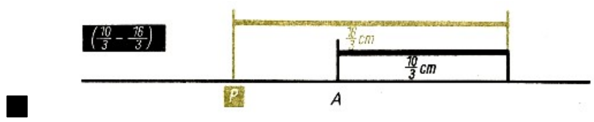
Verwendung der Variablen

In den Abschnitten 1 und 2 wurden Buchstaben wie a, b, ..., x, y als Variable nur für natürliche Zahlen verwendet. Daher konnten Variablen für gebrochene Zahlen nur mit Hilfe von zwei Buchstaben geschrieben werden, z.B. $\frac{a}{b}$ oder $x : y$.
In diesem Kapitel werden nun Buchstaben als Variablen für gebrochene Zahlen verwendet.

Rationale Zahlen als Klassen von Differenzen

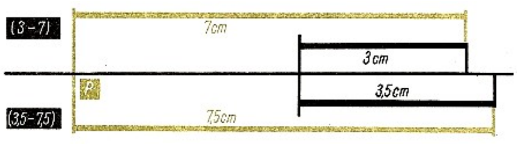
Zum Aufbau des Bereichs der rationalen Zahlen werden alle Differenzen gebrochener Zahlen gebildet. Diese Differenzen sollen nicht ausgerechnet werden, sondern sie werden zur Darstellung der Zahlen des neuen Bereichs, also der rationalen Zahlen, benutzt. Daher werden sie in Klammern gesetzt: $(a - b)$.

Fasst man in diesen Differenzen Minuend und Subtrahend als Maßzahlen für Streckenlängen auf, so lassen sich alle Differenzen durch Streckenabtragung auf einer Geraden veranschaulichen, auf der ein Punkt A festgelegt ist.



Zuordnung von Punkten und Zahlen

Dabei wird jeder Differenz eindeutig ein Punkt P der Geraden zugeordnet. Umgekehrt sind jedem dieser Punkte unendlich viele Differenzen zugeordnet.



Die Differenzen $(3 - 7)$ und $(3{,}5 - 7{,}5)$ sind demselben Punkt P zugeordnet, und es gilt $3 + 7{,}5 = 7 + 3{,}5$.
So wie in diesem Beispiel sind beliebige Differenzen $(a - b)$ und $(c - d)$ genau dann demselben Punkt der Geraden zugeordnet, wenn gilt

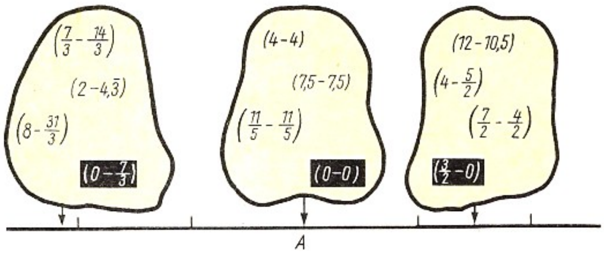
$$a + d = b + c$$

Alle Differenzen, die ein und demselben Punkt zugeordnet sind, werden jeweils zu einer Klasse zusammengefasst. Differenzen $(a - b)$ und $(c - d)$ liegen also genau dann in einer Klasse, wenn gilt: $a + d = b + c$.

► Definition 60: Jede Klasse von Differenzen, die demselben Punkt zugeordnet sind, heißt rationale Zahl.

Zahlengerade

Damit ist jede rationale Zahl einem Punkt der Geraden zugeordnet. Dadurch wird diese Gerade zu einer Zahlengeraden.

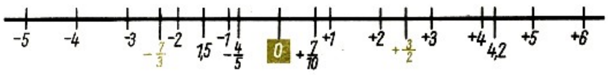


■

▶ Definition 61: Die rationale, Zahl, in der die Differenz $(a-0)$ vorkommt, wird mit „$+a$“ (gelesen: plus a) bezeichnet.
Die rationale Zahl, in der die Differenz $(0-b)$ vorkommt, wird mit „$-b$“ (gelesen: minus b) bezeichnet.
Die rationale Zahl, in der die Differenz $(0-0)$ vorkommt, wird nur mit „0“ (Null) bezeichnet.

Vorzeichen

In den Bezeichnungen „$+a$“ bzw. „$-b$“ für rationale Zahlen heißen die Zeichen „$+$“ bzw. „$-$“ die Vorzeichen der rationalen Zahlen.



■

Positive rationale Zahl, negative rationale Zahl

▶ Definition 62: Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden rechts von 0 liegen, heißen positiv. Das sind die rationalen Zahlen mit dem Vorzeichen „$+$“.
Die rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden links von 0 liegen, heißen negativ. Das sind die rationalen Zahlen mit dem Vorzeichen „$-$“.

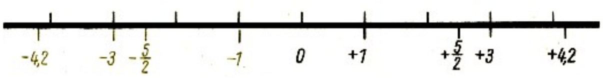
Beliebige Differenz	Differenz in derselben Klasse der Form $(a-0)$ bzw. $(0-b)$	Bezeichnung der rationalen Zahlen
$(16-3)$ $\left(\frac{39}{7}-\frac{60}{7}\right)$ $\left(\frac{23}{9}-\frac{31}{9}\right)$	$(13-0)$ $\left(0-\frac{21}{7}\right)$ $\left(0-\frac{8}{8}\right)$	$+13$ $-\frac{21}{7}=-3$ $-\frac{8}{9}$

In der Definition B 61 sind die Buchstaben a und b noch Variable für gebrochene Zahlen, d. h., $+a$ bedeutet eine positive und $-b$ bedeutet eine negative rationale Zahl.
In den folgenden Abschnitten werden Buchstaben als Variable für rationale Zahlen benutzt. Für diese Buchstaben können also die Bezeichnungen beliebiger rationaler Zahlen eingesetzt werden, d.h. also, dass z.B. a eine positive oder eine negative rationale Zahl oder auch die Zahl 0 bedeuten kann.

Entgegengesetzte rationale Zahlen

▶ Definition 63: Rationale Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, heißen zueinander entgegengesetzt. Die Zahl 0 ist zu sich selbst entgegengesetzt.

Zueinander entgegengesetzte Zahlen liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null.



■

Der Übergang von einer rationalen Zahl zur entgegengesetzten Zahl wird durch das Vorsetzen eines Minuszeichens angegeben.

Rationale Zahl a	Entgegengesetzte Zahl $-a$	Entgegengesetzte der entgegengesetzten Zahl $-(-a)$
$+2$	$-(+2) = -2$	$-(-2) = +2$
$+\frac{4}{9}$	$-\left(+\frac{4}{9}\right) = -\frac{4}{9}$	$-\left(-\frac{4}{9}\right) = +\frac{4}{9}$
$-3{,}75$	$-(-3{,}75) = +3{,}75$	$-(+3{,}75) = -3{,}75$
$-9{,}7$	$-(-9{,}7) = +9{,}7$	$-(+9{,}7) = -9{,}7$

Es gilt stets $-a(-a) = a$.

Absoluter Betrag

▶ Definition 64:

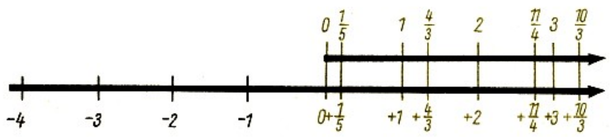
$$|a| = \begin{cases} a & \text{, falls } a \text{ positiv oder } a = 0 \\ -a & \text{, falls } a \text{ negativ} \end{cases}$$

$|a|$ heißt der absolute Betrag der Zahl a, kürzer: Betrag von a.

■

a	+3	-0,9	0	$-\frac{7}{9}$	$+\frac{7}{9}$	+8,1	-8,1
$\lvert a\rvert$	+3	+0,9	0	$+\frac{7}{9}$	$+\frac{7}{9}$	+8,1	+8,1

Der Betrag einer Zahl ist stets positiv oder Null. Zueinander entgegengesetzte Zahlen haben denselben Betrag. Jeder positiven rationalen Zahl und der Null (kürzer: jeder nichtnegativen Zahl) entspricht genau eine gebrochene Zahl und umgekehrt.



Ordnung

Die nichtnegativen rationalen Zahlen werden entsprechend den gebrochenen Zahlen geordnet.

▶ Definition 65: Von zwei beliebigen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.

Aus der Definition B 65 folgt:
Jede positive rationale Zahl ist größer als Null und auch größer als jede negative. Jede negative rationale Zahl ist kleiner als Null. Es gilt also
$0 < a$, falls a positiv, und $a < 0$, falls a negativ.

■ a) $+19{,}3 < +19{,}35$, b) $0 < +0{,}001$, c) $-18 < -17$, d) $-30{,}4 < 0$, e) $-4 < +4$

Falls a und b negativ: $a < b$ genau dann, wenn $|a| > |b|$.
Falls a und b positiv: $a < b$ genau dann, wenn $|a| < |b|$.
Da die positiven rationalen Zahlen und die Null entsprechend den gebrochenen Zahlen geordnet sind, gilt folgender Satz:

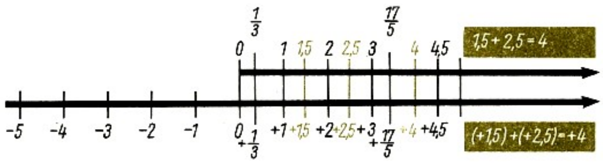
▶ Satz 66: Beim Vergleichen verhalten sich die nicht negativen rationalen Zahlen wie die gebrochenen Zahlen.

Daher kann man beim Vergleichen die nicht negativen rationalen Zahlen durch die entsprechenden gebrochenen Zahlen ersetzen und umgekehrt.

■ a) $19{,}3 < 19{,}35$, b) $0 < 0{,}001$, c) $-18 < -17$, d) $-30{,}4 < 0$, e) $-4 < 4$
Für keine rationale Zahl gibt es einen unmittelbaren Nachfolger.

Rechenoperationen mit rationalen Zahlen

▶ Satz 67: Positive rationale Zahlen werden wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen addiert. Daher kann man positive rationale Zahlen bei der Addition durch die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen ersetzen und umgekehrt.



Insbesondere kann man also die Beträge rationaler Zahlen durch gebrochene Zahlen ersetzen. Das gilt auch für die Subtraktion von Beträgen, sofern die Subtraktion der entsprechenden gebrochenen Zahlen ausführbar ist.
Zur Unterscheidung von Vor- und Operationszeichen werden die rationalen Zahlen in Klammern gesetzt.

▶ Satz 68: Die Summe negativer rationaler Zahlen ist gleich der zur Summe ihrer Beträge entgegengesetzten Zahl.

▶ Satz 69: Die Summe zweier entgegengesetzter Zahlen ist 0.

▶ Satz 70: Der Betrag der Summe zweier rationaler Zahlen mit verschieden Vorzeichen und verschieden Beträgen ist gleich der Differenz der Beträge der Summanden.
Das Vorzeichen der Summe ist gleich dem Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Beitrag.

■ a) $(-2) + (+6)$
Betrag der Summe: $+4$
Vorzeichen der Summe: plus $(-2) + (+6) = +4$
b) $(+4{,}2) + (-5)$
Betrag der Summe: $+0{,}8$
Vorzeichen der Summe: minus $(+4{,}2) + (-5) = -0{,}8$

Bemerkung: Die in Satz B70 ausgesprochene Regel lässt sich auch ohne den Begriff der Differenz, jedoch dann wesentlich umständlicher, formulieren.

Eigenschaften der Addition - Kommutativität

▶ Satz 71: Die Addition rationaler Zahlen ist kommutativ.

$$a + b = b + a$$

Assoziativität

▶ Satz 72: Die Addition rationaler Zahlen ist assoziativ.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Auf Grund der Kommutativität und der Assoziativität der Addition rationaler Zahlen ist in Summen mit mehr als zwei Summanden die Reihenfolge der Summanden beliebig.

Monotonie

▶ Satz 73: Die Addition ist bezüglich der Kleiner-Beziehung monoton. Für rationale Zahlen a, b und x gilt stets:
Wenn $a < b$, so $a + x < b + x$.

Subtraktion

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Man schreibt $x = b - a$ statt $a + x = b$.

■ $(+5) - (+2) = +3$; denn $(-3) + (+2) = +5$; $(+5) - (+2) = +3$
$(+3) - (+9) = -6$; denn $(-6) + (+9) = +3$; $(+3) + (-9) = -6$
$(+7) - (-4) = +11$; denn $(+11) + (-4) = +7$; $(+11) + (-4) = +7$
$(-2) - (+12) = -14$; denn $(-14) + (+12) = -2$; $(-2) + (-12) = -14$
$(-13) - (-4) = -9$; denn $(-9) + (-4) = -13$; $(-13) + (+4) = -9$
$(-6) - (-9) = +3$; denn $(+3) + (-9) = -6$; $(-6) + (+9) = +3$

▶ Satz 74: Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem man die zu ihr entgegengesetzte Zahl addiert.

Da es zu jeder rationalen Zahl eine entgegengesetzte Zahl gibt und da die Addition rationaler Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist, gilt der folgende Satz:

Ausführbarkeit

▶ Satz 75: Im Bereich der rationalen Zahlen ist die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar.

Da jede Subtraktion durch eine Addition ersetzt werden kann, ist auch die Subtraktion bezüglich der Kleiner-Beziehung monoton.
Wenn $a < b$, so $a - x < b - x$

Multiplikation

▶ Satz 76: Ein Produkt rationaler Zahlen, in dem beide Faktoren gleiches Vorzeichen haben, ist gleich dem Produkt der Beträge.
Ein Produkt rationaler Zahlen, in dem die beiden Faktoren verschiedene Vorzeichen haben, ist gleich der zum Produkt der Beträge entgegengesetzten Zahl.
Für jede rationale Zahl a gilt: $a \cdot 0 = 0$.

Bemerkung: Beträge sind nicht negativ und werden daher wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen multipliziert.

■ a) $(+4{,}5) \cdot (+1{,}5) = +6{,}75$; denn $4{,}5 \cdot 1{,}5 = 6{,}75$
b) $(-2) \cdot (-3) = +6$
c) $\left(+\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{6}{9}\right) = -\frac{14}{9} = -1{,}\overline{5}$

Eigenschaften der Multiplikation - Kommutativität

▶ Satz 77: Die Multiplikation rationaler Zahlen ist kommutativ.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativität

▶ Satz 78: Die Multiplikation rationaler Zahlen ist assoziativ.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Auf Grund der Kommutativität und der Assoziativität der Multiplikation ist in Produkten mit mehr als zwei Faktoren die Reihenfolge der Faktoren beliebig.

Vorzeichen eines Produktes

Das Vorzeichen eines Produkts wird durch die Anzahl der negativen Faktoren bestimmt. Ist diese gerade, so ist das Produkt positiv, anderenfalls negativ.
Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor gleich 0 ist.

Distributivität

▶ Satz 79: Die Multiplikation ist bezüglich der Addition distributiv.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Monotonie

▶ Satz 80: Für rationale Zahlen a, b und positive rationale Zahlen x gilt stets:
Wenn $a < b$, so $a \cdot x < b \cdot x$.

▶ Für rationale Zahlen a, b und negative rationale Zahlen x gilt:
Wenn $a < b$, so $a \cdot x > b \cdot x$.

Die Multiplikation ist also bezüglich der Kleiner-Beziehung nur mit der Einschränkung $x > 0$ monoton. Für negative Faktoren x und für $x = 0$ bleibt die Kleiner-Beziehung nicht erhalten.

■ a) $a = -3$; $b = +5$; $x = -2$
Es gilt $-3 < +5$, aber $(-3) \cdot (-2) > (+5) \cdot (-2)$, $6 > -10$
b) $a = -4$; $b = -1$; $x = -2$
Es gilt $-4 < -1$, aber $(-4) \cdot (-2) > (-1) \cdot (-2)$, $8 > 2$
c) $a = +3$; $b = +8$; $x = -2$
Es gilt $+3 < +8$, aber $(+3) \cdot (-2) > (+8) \cdot (-2)$, $-6 > -16$
d) $a = -2$; $b = +3{,}4$; $x = 0$
Es gilt $-2 < +3{,}4$, aber $(-2) \cdot 0 = (+3{,}4) \cdot 0$, $0 = 0$

Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Man schreibt $a : b = x$ statt $x \cdot b = a$
Daraus ergibt sich nach den Regeln über das Vorzeichen eines Produkts (Satz 76) das Vorzeichen des Quotienten x. Der Betrag von x ist gleich dem Quotienten der Beträge von a und b.

Dies sind nichtnegative rationale Zahlen, sie werden also wie die ihnen zugeordneten gebrochenen Zahlen dividiert. Damit ist die Division rationaler Zahlen auf die Multiplikation zurückgeführt.

Ausführbarkeit

▶ Satz 81: Die Division rationaler Zahlen ist uneingeschränkt ausführbar.

▶ Satz 82: Ein Quotient rationaler Zahlen, in dem Dividend und Divisor gleiches Vorzeichen haben, ist gleich dem Quotienten der Beträge.
Ein Quotient rationaler Zahlen, in dem Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen haben, ist gleich der zum Quotienten der Beträge entgegengesetzten Zahl.

Die Division durch 0 liefert kein eindeutig bestimmtes Ergebnis und ist daher auch im Bereich der rationalen Zahlen ausgeschlossen.

Wie im Bereich der gebrochenen Zahlen kann man auch im Bereich der rationalen Zahlen den Bruchstrich als Divisionszeichen auffassen.

$$a : b = \frac{a}{b} \qquad (b \neq 0)$$

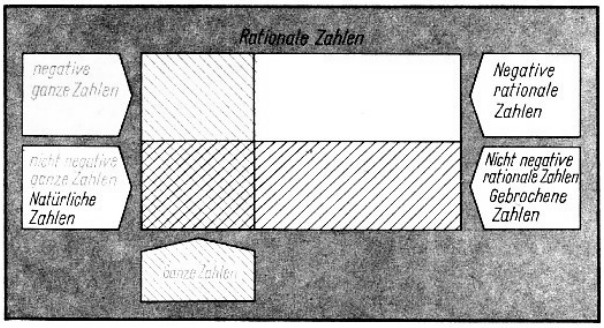
Aus Satz B 82 folgt:

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \qquad (b \neq 0)$$

Ist $a \neq 0$, so heißt $\frac{1}{a} = 1 : a$ das Reziproke von a. (↗ Def. 52)

Die gebrochenen Zahlen als Teilbereich der rationalen Zahlen

Beim Vergleichen und bei allen Rechenoperationen kann man die nichtnegativen rationalen Zahlen durch die gebrochenen Zahlen ersetzen. Nach dieser Ersetzung bilden die gebrochenen Zahlen einen Teilbereich des Bereichs der rationalen Zahlen.



Ganze Zahlen

Die rationalen Zahlen

$$..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...$$

heißen ganze rationale Zahlen (kurz: ganze Zahlen).

Zusammenfassung

Jede rationale Zahl lässt sich in der Form $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ darstellen, wobei p und q ganze Zahlen sind. Durch Kürzen kann man stets erreichen, dass p und q teilerfremd sind.
Durch Ausführung der Division $p : q$ erhält man Dezimalbruchdarstellungen für rationale Zahlen. Dies sind entweder endliche oder periodische Dezimalbrüche mit dem entsprechenden Vorzeichen.

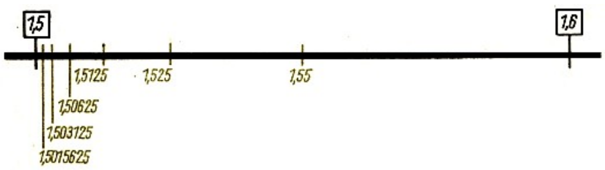
Definition	Eigenschaften
Rationale Zahlen a und b heißen entgegengesetzt, falls sie sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.	Zu jeder rationalen Zahl a gibt es genau eine entgegengesetzte Zahl $-a$. Null ist zu sich selbst entgegengesetzt. $-(-a) = a$ Entgegengesetzte Zahlen liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zur Null.
Absoluter Betrag $\lvert a\rvert = \begin{cases} a & \text{, falls } a \text{ positiv oder } a = 0 \\ -a & \text{, falls } a \text{ negativ} \end{cases}$	Für jede Zahl a gilt $\lvert a\rvert > 0$.
Kleiner-Beziehung $a < b$ genau dann, wenn 1) $a < 0$ und $b > 0$ oder 2) $a < 0$ und $b = 0$ oder 3) $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$, falls $a > 0$ und $b > 0$ oder 4) $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$, falls $a < 0$ und $b < 0$.	Es gilt genau einer der Fälle $a < b$, $a = b$, $a > b$. Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$. Es gibt keine kleinste rationale Zahl. Rationale Zahlen haben keinen unmittelbaren Nachfolger.

Definition	Ausführbarkeit	Eigenschaften
Addition Sätze 67 bis 73	uneingeschränkt ausführbar	$a + b = b + a$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a + 0 = a$, $a + (-a) = 0$ Wenn $a < b$, so $a + x < b + x$
Multiplikation Sätze 76 bis 80	uneingeschränkt ausführbar	$a \cdot b = b \cdot a$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot 1 = a$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ Wenn $a < b$, so $a \cdot x < b \cdot x$ $(x > 0)$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$		
Subtraktion $a - b = a + (-b)$ Sätze 74 und 75	uneingeschränkt ausführbar	$a - a = a + (-a) = 0$ $a - 0 = a$
Division Sätze 81 und 82	uneingeschränkt ausführbar	$a : a = 1$, $a : 1 = a$, $0 : a = 0$ $(a \neq 0)$ $a : b = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

2.4 Reelle Zahlen

Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen a und b liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.

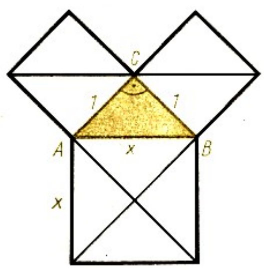
■ $a = 1{,}5$; $b = 1{,}6$
Zwischen 1,5 und 1,6 liegt $\frac{1{,}5+1{,}6}{2} = 1{,}55$
Zwischen 1,50 und 1,55 liegt $\frac{1{,}50+1{,}55}{2} = 1{,}525$
Zwischen 1,500 und 1,525 liegt $\frac{1{,}500+1{,}525}{2} = 1{,}5125$
Zwischen 1,5000 und 1,5125 liegt $\frac{1{,}5000+1{,}5125}{2} = 1{,}50625$
usw.
Zwischen 1,5 und 1,6 liegen also die Zahlen 1,55; 1,525; 1,5125; 1,50625; ....



Dieses Verfahren lässt sich beliebig weit fortsetzen. Damit erhält man also unendlich viele rationale Zahlen, die zwischen 1,5 und 1,6 liegen.

Punkte auf der Zahlengeraden

Es gibt aber auf der Zahlengeraden unendlich viele Punkte, denen keine rationale Zahl zugeordnet ist.



■

In diesem Bild ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC (Kathetenlänge 1) mit den Quadraten über seiner Hypotenuse und seinen Katheten dargestellt. Alle eingezeichneten Teildreiecke sind kongruent. Daher ist das Hypotenusenquadrat doppelt so groß wie ein Kathetenquadrat, die Maßzahl seines Flächeninhalts also gleich 2.

Die Quadratseite AB hat bei der gewählten Längeneinheit keine rationale Zahl als Maßzahl ihrer Länge. Das wird indirekt bewiesen.

Beweis: Angenommen, die Länge der Quadratseite AB hätte die rationale Maßzahl x. Dann ließe sich x folgendermaßen darstellen:

(1) $x = \frac{p}{q}$ $(p, q$ ganze teilerfremde Zahlen, $q \neq 0)$
Quadratfläche: $x^2 = 2$
Einsetzen aus (1): $\frac{p^2}{q^2} = 2 \mid \cdot q^2$ (2) $p^2 = 2q^2$

Da $2q^2$ durch 2 teilbar ist, ist auch p^2 und damit p durch 2 teilbar. (Wäre nämlich p nicht durch 2 teilbar, enthielte also p nicht den Faktor 2, so auch p^2 nicht). Wenn aber p durch 2 teilbar ist, so ist p^2 sogar durch 4 teilbar.
Daraus folgt nun nach (2), dass auch $2q^2$ durch 4, also q^2 durch 2 teilbar ist. Damit ist q durch 2 teilbar. Insgesamt haben also p und q den gemeinsamen Teiler 2.
Das ist aber ein Widerspruch zur Gleichung (1), in der p und q als teilerfremd vorausgesetzt wurden.

Die Annahme, dass die Länge der Quadratseite AB eine rationale Maßzahl hat, hat also zu einem Widerspruch geführt und ist daher falsch, w. z. b. w.

Lücken auf der Zahlengerade

Trägt man die Strecke AB aus dem Bild von Seite 45 von O aus auf der Zahlengeraden ab, so ist dem Punkt B also keine rationale Zahl zugeordnet. Solche Punkte der Zahlengeraden heißen Lücken.

Rationale Punkte

Punkte, denen rationale Zahlen zugeordnet sind, heißen rationale Punkte.

Reelle Zahlen als Klassen von Intervallschachtelungen, Intervall

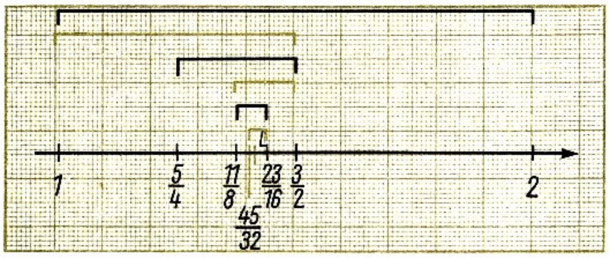
► Definition 83: Sind a und b zwei rationale Zahlen mit $a < b$, so heißt die Menge aller rationalen Zahlen, die aus a und b selbst und allen dazwischen liegenden rationalen Zahlen besteht, ein Intervall.
Die den Zahlen a und b auf der Zahlengeraden zugeordneten Punkte heißen Endpunkte des Intervalls. Sie bestimmen eine Strecke, deren Länge auch als Intervalllänge bezeichnet wird.

Intervallschachtelung

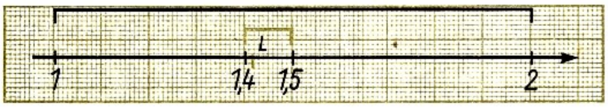
Obgleich den Lücken auf der Zahlengeraden keine rationalen Zahlen zugeordnet sind, kann man jedoch rationale Zahlen angeben, die einer solchen Lücke sowohl von links als auch von rechts immer näher kommen. Eine Lücke auf der Zahlengeraden lässt sich mit solchen rationalen Zahlen in immer kürzer werdende Intervalle einschließen.

■ Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.
Durch eine Folge von Intervallen, die man durch fortgesetztes Halbieren erhält, lässt sich diese Lücke L folgendermaßen einschließen:

a	b	$a^2(<2)$	$b^2(>2)$
1	2	1	4
$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{9}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{121}{64}$	$\frac{144}{64}$
$\frac{22}{16}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{484}{256}$	$\frac{529}{256}$
$\frac{45}{32}$	$\frac{46}{32}$	$\frac{2025}{1024}$	$\frac{2116}{1024}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Die Lücke L kann man auch durch andere Folgen immer kürzer werdender Intervalle einschließen, beispielsweise durch fortgesetzte Zehnteilung.



a	b	$a^2(<2)$	$b^2(>2)$
1	2	1	4
$1{,}4$	$1{,}5$	$1{,}96$	$2{,}25$
$1{,}41$	$1{,}42$	$1{,}9881$	$2{,}0164$
$1{,}414$	$1{,}415$	$1{,}999396$	$2{,}002225$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dieses Verfahren zur Einschließung einer Lücke heißt Intervallschachtelung. Statt durch eine fortgesetzte Teilung der Intervalle in 2 oder 10 Teile, kann man eine Lücke auch durch fortgesetzte Teilung in 3, 4, 5, 6, ... Teile einschließen.

Jede Lücke lässt sich durch unendlich viele Intervallschachtelungen einschließen.
Auch rationale Punkte lassen sich durch Intervallschachtelungen einschließen.

■ Der der Zahl $\frac{4}{9}$ zugeordnete Punkt lässt sich folgendermaßen einschließen.

a	b	$a < \frac{4}{9} < b$
0	1	$0 < \frac{4}{9} < 1$
$0{,}4$	$0{,}5$	$\frac{4}{10} < \frac{4}{9} < \frac{5}{10}$
$0{,}44$	$0{,}45$	$\frac{44}{100} < \frac{4}{9} < \frac{45}{100}$
$0{,}444$	$0{,}445$	$\frac{444}{1000} < \frac{4}{9} < \frac{455}{1000}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die Zahl $\frac{4}{9}$ kann durch keinen endlichen Dezimalbruch dargestellt werden, denn jeder Dezimalbruch a ist kleiner und jeder Dezimalbruch b ist größer als $\frac{4}{9}$. Deshalb ist die Dezimaldarstellung für der periodische Dezimalbruch $0{,}\overline{4}$: $0{,}\overline{4} = \frac{4}{9}$.

Diesen periodischen Dezimalbruch erhält man auch durch das einfachere schriftliche Divisionsverfahren. Damit ist die Anwendung dieses Verfahrens, auch wenn es nicht abbricht, gerechtfertigt.

Ebenso lassen sich solche Punkte durch Intervallschachtelungen einschließen, denen durch endliche Dezimalbrüche darstellbare Zahlen zugeordnet sind. Jede Intervallschachtelung schließt genau einen Punkt ein. Umgekehrt lässt sich jeder Punkt der Zahlengeraden durch Intervallschachtelungen einschließen. Diese Intervallschachtelungen werden dem jeweiligen Punkt zugeordnet.

Reelle Zahlen

► Definition 84: Jede Klasse von Intervallschachtelungen, die ein und demselben Punkt zugeordnet sind, heißt reelle Zahl.

Im Bereich der reellen Zahlen ist jeder Zahl eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden, aber auch umgekehrt jedem Punkt eindeutig eine Zahl zugeordnet.
Jetzt gibt es also auf der Zahlengeraden keine Lücken mehr, und jede Streckenlänge hat eine reelle Maßzahl.

Auch dem Endpunkt, der auf der Zahlengeraden abgetragenen Diagonale des Einheitsquadrates ist jetzt eine Zahl zugeordnet. Diese Zahl wird z.B. durch die Intervallschachtelungen im Beispiel dargestellt und mit "$\sqrt{2}$" bezeichnet. Das Quadrat dieser Zahl ist gleich 2.

Der Beweis dieser Behauptung erfordert gründlichere Kenntnisse über Intervallschachtelungen und wird deshalb hier übergangen. Damit ist die Gleichung $x^2 = 2$ lösbar. Eine Lösung ist $\sqrt{2}$, die andere $-\sqrt{2}$.

Bemerkung: Allgemein ist jede Gleichung $x^n = a$; ($a > 0$; $n = 1,2,...$) (Def. 21 und 134; Def. 24) im Bereich der reellen Zahlen lösbar. Es gibt genau eine nichtnegative Zahl x, die diese Gleichung erfüllt.
Das ist $\sqrt[n]{a}$ (Def. 32).
Ist n ungerade, so gibt es auch für $a < 0$ genau eine negative reelle Zahl x, die die Gleichung erfüllt. Das ist die Zahl $x = -\sqrt[n]{-a}$.

■ $x^4 = 81$ ... $x = \sqrt[4]{81} = 3$
$x^7 = -128$ ... $x = -\sqrt[7]{-(-128)} = -\sqrt[7]{128} = -2$

Irrationale Zahlen

► Definition 85: Reelle Zahlen, die rationalen Punkten zugeordnet sind, heißen rationale reelle Zahlen.
Alle anderen reellen Zahlen heißen irrational.
Die rationalen reellen Zahlen und die irrationalen reellen Zahlen bilden zusammen den Bereich der reellen Zahlen.

Man kann zeigen, dass sich die rationalen reellen Zahlen beim Rechnen und Vergleichen wie die ihnen entsprechenden rationalen Zahlen verhalten. Deshalb spricht man kurz von rationalen und irrationalen Zahlen. Diese bilden zusammen also den Bereich der reellen Zahlen.

Unendliche Dezimalbrüche als Bezeichnungen für reelle Zahlen

Gebrochene Zahlen sind Klassen von Brüchen. Jeder Bruch einer Klasse dient zur Bezeichnung der jeweiligen gebrochenen Zahl.

Rationale Zahlen sind Klassen von Differenzen. Die Bezeichnung einer rationalen Zahl wird aus einer bestimmten Differenz der jeweiligen Klasse gewonnen. Das ist die Differenz in der Minuend oder Subtrahend gleich Null ist.

Reelle Zahlen sind Klassen von Intervallschachtelungen.
Die Bezeichnungen für die reellen Zahlen werden aus denjenigen Intervallschachtelungen gewonnen, die durch fortgesetzte Zehnteilung entstehen. Dabei erhält man für die reellen Zahlen folgende Bezeichnungen:

a) Für die rationalen Zahlen erhält man endliche oder periodische Dezimalbrüche. Wegen $0{,}\overline{9} = 1$ können dabei periodische Dezimalbrüche mit der Periode 9 durch endliche ersetzt werden.

b) Für die irrationalen Zahlen erhält man unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche.

Jede reelle Zahl hat also einen bestimmten Dezimalbruch als Bezeichnung. Umgekehrt ist auch jeder Dezimalbruch die Bezeichnung einer bestimmten reellen Zahl. Daher sagt man statt "Dezimalbruch" auch "Dezimalzahl". Da ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch nicht vollständig angegeben werden kann, müssen für irrationale Zahlen rationale Zahlen als Näherungswerte angegeben werden.
Das kann mit beliebiger Genauigkeit geschehen. Es müssen dabei nur genügend viele Dezimalstellen berücksichtigt werden.

■ $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $\sqrt{2} \approx 1{,}414$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$; $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$; $\sqrt{2} \approx 1{,}414213$

Ordnung

Von zwei verschiedenen reellen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt.

► Satz 86: Für reelle Zahlen a und b gilt genau einer der folgenden drei Fälle: $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

Rechenoperationen mit reellen Zahlen

Mit Hilfe der Rechenoperationen im Bereich der rationalen Zahlen lassen sich die entsprechenden Rechenoperationen im Bereich der reellen Zahlen definieren. Es gelten auch hier wieder die bekannten Rechengesetze (Kommutativität, Assoziativität, Monotonie usw.).

Rechnen mit Näherungswerten

► Satz 87: Beim Rechnen mit Näherungswerten, die mit verschiedener Genauigkeit vorgegeben sind, hat das Ergebnis der Rechnung höchstens die Genauigkeit, mit der jeweils der Näherungswert mit geringster Genauigkeit in die Rechnung eingegangen ist.
Ist ein Näherungswert mit n zuverlässigen wesentlichen Ziffern als Näherungswert von geringster Genauigkeit eingegangen, so kann das Ergebnis sinnvoll nur durch einen Näherungswert mit ebenfalls n wesentlichen Ziffern angegeben werden.

Näherungswerte werden durch das Zeichen „$\approx$“ gekennzeichnet. Gelesen: "angenähert gleich" oder "rund" oder "nahezu gleich" oder "etwa gleich".

Bemerkung: Falls auf Grund des gegebenen Sachzusammenhanges keine Missverständnisse möglich sind, setzt man auch das Gleichheitszeichen, z. B. bei logarithmischen Berechnungen. Derartige Näherungswerte werden unter Beachtung der Rundungsregeln durch Dezimalbrüche mit ausschließlich zuverlässigen Ziffern angegeben, so dass aus deren Darstellung bereits auf ihre Genauigkeit geschlossen und auf eine besondere Kennzeichnung durch das Zeichen „≈“ verzichtet werden kann.

Rundungsregeln

Abrunden
Steht am Ende einer Ziffer eine der Grundziffern 1, 2, 3, 4, so bleibt die unmittelbar davor stehende Grundziffer beim Runden unverändert. Die gerundete Zahl ist kleiner als die vorgegebene Zahl.

Aufrunden
Steht am Ende einer Ziffer eine der Grundziffern 6, 7,8, 9, so wird die unmittelbar davor stehende Grundziffer beim Runden um 1 erhöht. Die gerundete Zahl ist größer als die vorgegebene Zahl.

Beispiele: Beispiel: $\left.\begin{matrix} 4281 \\ 4282 \\ 4283 \\ 4284 \end{matrix}\right\} \approx 4280 \qquad \left.\begin{matrix} 4286 \\ 4287 \\ 4288 \\ 4289 \end{matrix}\right\} \approx 4290;$ Beachte! $5497 \approx 5500$

Regel für 5 (TGL 1333) - In Wissenschaft und Technik

1. Fall:
Folgen nach 5 weitere wesentliche Ziffern, so wird aufgerundet.
2. Fall:
Ist 5 letzte wesentliche Ziffer und ist nicht bekannt, ob sie durch Rechnung entstanden ist, so wird auf eine gerade Zahl gerundet (Gerade-Zahl-Regel)
3. Fall:
Ist 5 letzte wesentliche Ziffer und ist bekannt, dass sie durch Aufrunden (Abrunden) entstanden ist, so wird abgerundet (aufgerundet).
Bemerkung: Nach TGL 1333 ist eine durch Aufrunden entstandene 5 durch einen Punkt über der 5 zu kennzeichnen: $\dot{5}$.
Eine durch Abrunden entstandene 5 ist durch einen Strich unter der 5 zu kennzeichnen: $\underline{5}$. Von dieser Festlegung darf nur aus technischen Gründen abgewichen werden.

Beispiele:
$17503 \approx 18000$, $0{,}1951 \approx 0{,}2$
$8975 \approx 8980$ (aufrunden, weil 7 ungerade); $89{,}65 \approx 89{,}6$ (abrunden, weil 6 gerade)
$397{,}482 \approx 397{,}\dot{5} \approx 397$ (entstanden durch Aufrunden, also Abrunden)
$397{,}528 \approx 397{,}\underline{5} \approx 398$ (entstanden durch Abrunden, also Aufrunden)

Regel für 5 (TGL 1333) - Im Bank und Geschäftswesen

Steht am Ende einer Ziffer die Grundziffer 5, so wird stets aufgerundet.
Beispiele: $34528{,}00$ M $\approx 35000{,}00$ M,
$34482{,}00$ M $\approx 34500{,}00$ M $\approx 35000{,}00$ M

Beispiele für das Rechnen mit Näherungswerten

■ Das Volumen eines Quaders ist zu berechnen.
Gegeben: $a = 123{,}5$ cm; $b = 2{,}5$ m; $c = 2563{,}0$ mm
Vereinheitlichen der Größenangaben: $a = 1{,}235$ m; $b = 2{,}5$ m; $c = 2{,}5630$ m
Eingabewert mit geringster Genauigkeit: $b = 2{,}5$ m.

Die Kante b ist mit einer Maßzahl mit $n = 2$ wesentlichen Ziffern gegeben. Das Ergebnis kann sinnvoll auch nur mit zwei wesentlichen Ziffern angegeben werden.

Lösung:
Runden der anderen Eingabewerte auf $n + 1 = 3$ wesentliche Ziffern, Ergebnis runden auf $n = 2$ wesentliche Ziffern: $a \approx 1{,}24$ m; $b \approx 2{,}5$ m; $c \approx 2{,}6$ m
Als Ergebnis erhält man rechnerisch $V = 8{,}0600$ m^3. Auf zwei geltende Ziffern gerundet: $V \approx 8{,}1$ m^3.

■ Der Flächeninhalt eines Kreises ist zu berechnen.
Gegeben: $r = 1250$ mm; $\pi = 3{,}14$
$A = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 1250^2$ mm^2 $= 3{,}14 \cdot 1562500$ mm^2
$A = 4906250$ mm^2, $A \approx 4910000$ mm^2 $= 4{,}91$ m^2
Da π nur mit drei zuverlässigen Ziffern als Eingabewert verwendet wurde, würden mehr als drei Ziffern im Ergebnis eine ungerechtfertigte Genauigkeit vortäuschen.

Wesentliche Ziffern

Unter den wesentlichen Ziffern (auch geltende Ziffern genannt) versteht man alle Ziffern der Ziffernfolge dieser Zahl mit Ausnahme der Nullen, die links von der ersten und rechts von der letzten von Null verschiedenen Grundziffer in der Ziffernfolge stehen.
Alle wesentlichen Ziffern einer Ziffernfolge sind zuverlässige Ziffern, d.h. die (von rechts) erste ist nach den Rundungsregeln gerundet.

■ a) $354608519 \approx \underbrace{354609}_{\text{6 wesentliche Ziffern}}000 \approx \underbrace{355}_{\text{3 wesentliche Ziffern}}000000$

b) $0{,}000\underbrace{370050}_{\text{5 wesentliche Ziffern}} \approx 0{,}000\underbrace{37}_{\text{2 wesentliche Ziffern}}$

c) $40000{,}00$ km $= 40000000$ m $= 4000000000$ cm; 1 wesentliche Ziffer

Zuverlässige Ziffern

Unter den zuverlässigen Ziffern einer reellen Zahl versteht man diejenige, die bis zu einer bestimmten Stelle zu deren Ziffernfolge gehören, wobei die letzte nach den Rundungsregeln gerundet ist.

Rechnen mit reellen Zahlen

■ a) Zu 12 soll die Summe $8 + 5$ addiert und die Differenz $10 - 3$ subtrahiert werden.
$12 + (8 + 5) - (10 - 3) = 12 + 13 - 7 = 18$

b) Die Summe aus der Summe $3 + 4$ und der Differenz $5 - 2$ ist mit dem Faktor 3 zu multiplizieren.
$\{(8 + 4) + (5 - 2)\}3 = \{7 + 3\}3 = 10 \cdot 3 = 30$

Auflösen von Klammern

(1) Steht vor der Klammer ein Pluszeichen, so kann die Klammer weggelassen werden.
(2) Steht vor der Klammer ein Minuszeichen, so kann die Klammer weggelassen werden, wenn man die Plus- und Minuszeichen in der Klammer in die jeweils entgegengesetzten Zeichen verändert.

Setzen von Klammern

(1) Soll vor der Klammer ein Pluszeichen stehen, so kann man die Klammer ohne weiteres setzen.
(2) Soll vor der Klammer ein Minuszeichen stehen, so sind alle Plus- und Minuszeichen, die in der Klammer stehen sollen, in die entgegengesetzten Zeichen zu verändern.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Auflösen} \longrightarrow & a+(b+c) &=& a+b+c \\
& a+(b-c) &=& a+b-c \\
& a-(b+c) &=& a-b-c \\
& a-(b-c) &=& a-b+c \\
& a-(-b+c) &=& a+b-c \\
& a-(-b-c) &=& a+b+c \qquad \longleftarrow \text{Setzen}
\end{array}$$

Multiplikation von Summen

▶ Für alle reellen Zahlen a, b, c, d gilt:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Ausmultiplizieren} \longrightarrow & (a+b)(c+d) &=& ac+ad+bc+bd \\
& (a+b)(c-d) &=& ac-ad+bc-bd \\
& (a-b)(c+d) &=& ac+ad-bc-bd \\
& (a-b)(c-d) &=& ac-ad-bc+bd \qquad \longleftarrow \text{Ausklammern}
\end{array}$$

Binomische Formeln

Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad , \qquad (a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Pascalsches Dreieck

Berechnet man $(a+b)^n$ für $n > 0$, n ganz, so erkennt man nach folgender Anordnung ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten. (Blaise Pascal, 1623-1662, franz. Mathematiker)

$$\begin{array}{l}
(a \pm b)^0 = 1 \\
(a \pm b)^1 = a \pm 1 \\
(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2a^ab + b^2 \\
(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^ab + 3ab^2 \pm b^3 \\
(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 \text{ ...}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
&&&&1&&&& \\
&&&1&&1&&& \\
&&1&&2&&1&& \\
&1&&3&&3&&1& \\
1&&4&&6&&4&&1
\end{array}$$

Division von Summen durch eine Zahl

Für alle reellen Zahlen a, b, c, x; $(x \neq 0)$ gilt:

$$(a+b+c) : x = a : x + b : x + c : x = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x}$$

Summen werden durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert.

Division von Summen durch Summen

a)
$$\begin{array}{l}
\big(\;\; 6x^2+7x+2\big) \div \big(3x+2\big) = 2x+1 \\
\underline{-\,6x^2-4x} \\
\qquad\quad 3x+2 \\
\qquad \underline{-\,3x-2} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \left(\quad 3x^2+8x+6\right) \div \left(3x+2\right) = x+2+\dfrac{2}{3x+2} \\ \underline{-3x^2-2x} \\ \qquad\qquad 6x+6 \\ \qquad\quad \underline{-6x-4} \\ \qquad\qquad\quad 2 \end{array}$$

Algorithmus (Rechenvorschrift):
(1) Man sucht ein Glied des Dividenden $[6x^2]$, das durch ein Glied des Divisors dividiert werden kann $[3x]$.
(2) Man bildet das Produkt aus dem erhaltenen Quotienten $[2x]$ und dem Divisor $[3x+2]$.
(3) Man subtrahiert dieses Produkt $[6x^2+4x]$ vom Dividenden.

Nun sind zwei Fälle möglich:
1. Fall: Differenz ist Null; die Division ist ohne Rest durchgeführt.
2. Fall: Differenz ist nicht Null; die Schritte (1), (2) und (3) werden wiederholt.

Fall 2.1.: Nach endlich vielen Schritten wird die Differenz Null (↗ Beispiel a)
Fall 2.2.: Differenz wird nie Null (↗ Beispiel b); das Verfahren wird an geforderter Stelle abgebrochen (Division mit Rest)

Weitere Beispiele

■ a)
$$\begin{aligned} 135m^2n^2 - 45m^2n + 45mn^2 - 15mn &= 15mn(9mn - 3m + 3n - 1) \\ &= 15mn[3m(3n-1) + (3n-1)] = 15mn[(3n-1)(3n+1)] \\ &= 15mn(3n-1)(3n+1) \end{aligned}$$

■ b)
$$\frac{4x^2+12xy+9y^2}{20x+30y} = \frac{2x+3y)^2}{10(2x+3)} = \frac{1}{10}(2x+3)$$

■ c)
$$\frac{\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}}{\frac{a^2-b^2}{a+b}} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} : \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{(a+b)^2}$$

Arithmetisches Mittel

▶ Definition 88: Das arithmetische Mittel $\overline{a}$ von n Zahlen oder Größenangaben $a_1, a_2, ..., a_n$ ist der Quotient aus der Summe dieser Zahlen und deren Anzahl.

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

■ Während eines Tages wurden folgende Temperaturen gemessen:

Uhrzeit	0^{00}	3^{00}	6^{00}	9^{00}	12^{00}	15^{00}	18^{00}	21^{00}
Temp. t in $°C$	10	8	6	11	16	20	17	12

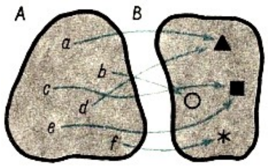
Die Durchschnittstemperatur $\overline{t}$ dieses Tages (das arithmetische Mittel) ist:

$$\overline{t} = \frac{10+8+6+11+16+20+17+12}{8} = \frac{100}{8} = 12{,}5$$

3 Funktionen

3.1 Der Funktionsbegriff

Darstellung von Zuordnungen

<table>
<tr><th colspan="3">Darstellung von Zuordnungen</th></tr>
<tr><td>durch Pfeile</td><td>durch eine Tabelle</td><td>durch geordnete Paare</td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>a</td><td>▲</td></tr><tr><td>b</td><td>◯</td></tr><tr><td>c</td><td>■</td></tr><tr><td>d</td><td>▲</td></tr><tr><td>e</td><td>■</td></tr><tr><td>f</td><td>$*$</td></tr></table></td><td>$\{a, ▲\}$, $\{b, ◯\}$, $\{c, ■\}$, $\{d, ▲\}$, $\{e, ■\}$, $\{f, *\}$</td></tr>
</table>

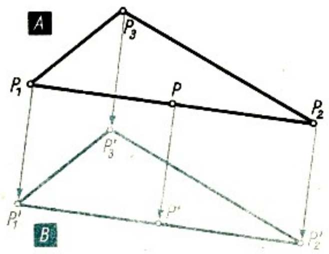
In der Darstellung durch geordnete Paare stehen jeweils an erster Stelle die Elemente von A und an zweiter Stelle die Elemente von B.

■ Die Menge A sei die Menge der reellen Zahlen. Jeder Zahl x aus dieser Menge werde die reelle Zahl y zugeordnet, für die z. B. folgende Gleichung gelte: $y = x^2$.
Sowohl die Menge A als auch die Menge B enthält unendlich viele Elemente.
Auswahl zusammengehöriger Elemente:

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$
y	9	4	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{25}{16}$	2

Man kann auch hier zusammengehörige Elemente als geordnete Paare schreiben, z. B. $[-3; 9]$, $[0; 0]$ usw.

■ Die Menge A sei die Menge der Punkte eines Dreiecks. Durch eine Verschiebung der Ebene, in der das Dreieck liegt, wird jedem Dreieckspunkt P ein Bildpunkt P' eindeutig zugeordnet. Die Menge B der Bildpunkte ist wiederum ein Dreieck.



Funktion

► Definition 1: Werden den Elementen einer Menge A eindeutig die Elemente einer Menge B zugeordnet, so heißt die dabei entstehende Menge von geordneten Paaren eine Funktion.

Zur Bezeichnung von Funktionen benutzt man u. a. die Buchstaben f, g, h, φ.

Definitionsbereich, Wertevorrat

Die Menge A heißt Definitionsbereich, die Menge B Wertevorrat der Funktion.

Bemerkung: Im folgenden werden Funktionen behandelt, bei denen Definitionsbereich und Wertevorrat Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind.
Zur Angabe von Definitionsbereich und Wertevorrat benutzt man auch folgende Intervallschreibweise (Def. 83):

Schreibweise	Bedeutung
abgeschlossenes Intervall	
$-3 \leq x \leq 5$ oder $\langle -3; 5 \rangle$ 	Menge aller reellen Zahlen von -3 bis 5 (einschließlich -3 und 5)
offenes Intervall	
$-3 < xy5$ oder $(-3; 5)$ 	Menge aller reellen Zahlen von -3 bis 5 (ausschließlich -3 und 5)
rechts halboffenes Intervall	
$-3 \leq x < 5$ oder $\langle -3; 5)$ 	Menge aller reellen Zahlen von -3 bis 5 (einschließlich -3)
unendliche Intervalle	
$-\infty < x < \infty$ oder $(-\infty; \infty)$ 	Menge aller reellen Zahlen
$-\infty < x \leq 5$ oder $(-\infty; 5\rangle$ 	Menge aller reellen Zahlen, die kleiner oder gleich 5 sind
$-3 < x < \infty$ oder $(-3; \infty)$ 	Menge aller reellen Zahlen, die größer als -3 sind

Argumente, Funktionswerte

▶ Definition 2: Die Elemente des Definitionsbereichs einer Funktion nennt man auch Argumente.
Die Elemente des Wertevorrats nennt man die zu den betreffenden Argumenten gehörigen Funktionswerte.

■ Beispiele für Variablen für

Argumente	x	t	a
Funktionswerte	$y = f(x)$	$s = \varphi(t)$	$V = g(a)$

Die Schreibweise $y = f(x)$ (gelesen y gleich f von x) bedeutet, dass die Zahl y bei der Funktion f dem Argument x zugeordnet ist.
Die Argumentvariable, für die man aus dem Definitionsbereich beliebig einsetzen kann, heißt unabhängige Variable. Die Variable für Funktionswerte heißt abhängige Variable.

Darstellung von Funktionen

1. Wertetabelle (Zahlenpaare)
Falls eine Funktion aus endlich vielen Zahlenpaaren besteht, kann man diese Paare in Form einer Tabelle angeben. Diese Tabelle nennt man Wertetabelle.

■ Temperaturmessungen während eines Tages

Uhrzeit	0.00	3.00	6.00	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00
Temperatur in $°C$	12	10	9	14	18	23	19	15

Besteht eine Funktion aus unendlich vielen Zahlenpaaren, so gibt man oft eine Auswahl der Zahlenpaare in einer Wertetabelle an.

2. Funktionsgleichungen
Kann man bei einer Funktion zu jedem Argument den Funktionswert mit Hilfe einer Gleichung errechnen, so nennt man die betreffende Gleichung eine Funktionsgleichung.

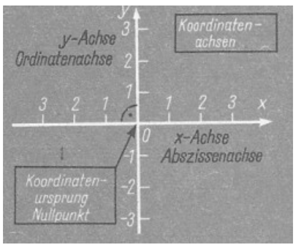
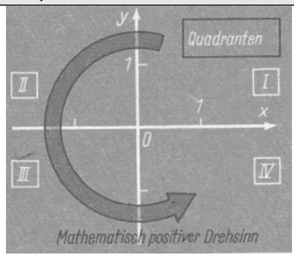
■ Jeder reellen Zahl x soll ihr Dreifaches, vermindert um 5, zugeordnet werden. Diese Vorschrift lässt sich durch $y = 3x - 5$ angeben. Aus dieser Gleichung lässt sich zu jedem Argument x der zugehörige Funktionswert y berechnen.
Beispiele:

x	-3	0,5	0	$\sqrt{3}$	2
y	-14	-3,5	-5	$\approx$ 0,2	1

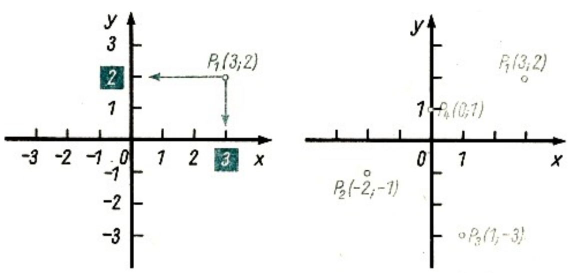
Bemerkungen:
(1) Statt "die Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$" sagt man auch kürzer "die Funktion $y = f(x)$".
(2) Nicht jede Gleichung, in der zwei Variable auftreten, (ist eine Funktionsgleichung.

■ $x^2 + y^2 = 25$
Setzt man für x die Zahl 3 ein, so erhält man $9 + y^2 = 25$. Diese Gleichung wird sowohl von $+4$ als auch von -4 erfüllt. Der Zahl 3 werden also zwei verschiedene Zahlen zugeordnet, d. h. die Zuordnung ist nicht eindeutig.

3. Graphische Darstellung (Bild einer Funktion)
Zur graphischen Darstellung einer Funktion kann man ein Koordinatensystem verwenden, das aus zwei einander rechtwinklig schneidenden Zahlengeraden besteht.

<table>
<tr><th colspan="2">Rechtwinkliges (Cartesisches) Koordinatensystem</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

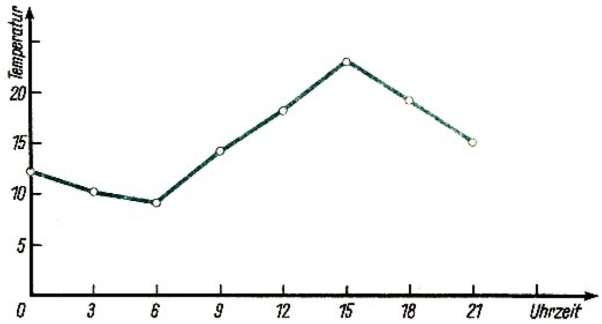
Durch ein solches Koordinatensystem wird jedem Punkt der Ebene eindeutig ein geordnetes Zahlenpaar und umgekehrt jedem geordneten Zahlenpaar eindeutig ein Punkt der Ebene zugeordnet.



■

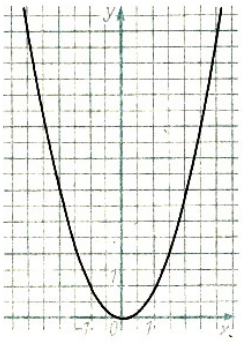
Damit ist auch jedem Zahlenpaar einer gegebenen Funktion ein Punkt im Koordinatensystem eineindeutig zugeordnet. Die Gesamtheit dieser Punkte nennt man graphische Darstellung oder Bild der Funktion.

Die graphische Darstellung einer Funktion ermöglicht einen anschaulichen Überblick über die Änderung der Funktionswerte.

■ 

Das Bild dieser Funktion besteht aus acht einzelnen Punkten.
Damit der Temperaturunterschied zwischen den einzelnen Messungen deutlicher sichtbar wird, verbindet man diese Punkte durch Strecken. Die Zwischenpunkte auf diesen Strecken gehören i.a. aber nicht zum Bild der Funktion und geben daher nicht den tatsächlichen Temperaturverlauf an.

■ Graphische Darstellung der Funktion $y = x^2$.



Wertetabelle:

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Die Wertetabelle enthält eine für das Zeichnen notwendige Auswahl aus der Menge der zur Funktion gehörenden Paare.

Mit Hilfe der Funktionsgleichung kann man außer den eingezeichneten Punkten beliebig viele weitere Punkte ermitteln.
Das Bild dieser Funktion besteht nicht aus getrennt liegenden Punkten wie das Bild im Beispiel über den Temperaturverlauf. Es besteht aus einer zusammenhängenden Kurve, von der hier ein Ausschnitt gezeigt wird. Man kann diese Kurve nicht vollständig zeichnen, da der Definitionsbereich der Funktion aus der Menge aller reellen Zahlen besteht.

Man kann den Definitionsbereich der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ z. B. auf die Menge aller reellen Zahlen x einschränken, für die $-2 \leq x \leq 2$ gilt.
Auf diese Weise erhält man eine andere Funktion; denn wegen der Einschränkung des Definitionsbereichs besteht sie nur aus einem Teil der Paare, die die ursprüngliche Funktion bildeten, obwohl sie dieselbe Funktionsgleichung besitzt. Das Bild der eingeschränkten Funktion lässt sich nun vollständig zeichnen.

Wird der Definitionsbereich nicht angegeben, so sollen alle die reellen Zahlen x zum Definitionsbereich gehören, für die sich aus der Funktionsgleichung ein Funktionswert $y = f(x)$ berechnen lässt.

■ $y = \sqrt{25 - x^2}$
Da Wurzeln nur für nichtnegative Radikanden erklärt sind (Def. 32), lassen sich Funktionswerte nur für die reellen Zahlen x berechnen, für die gilt: $x^2 \leq 25$.
Daraus ergibt sich als Definitionsbereich die Menge der reellen Zahlen x mit $-5 \leq x \leq 5$.

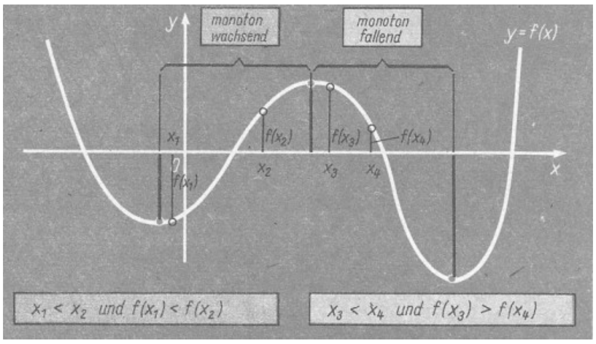
Monotonie bei Funktionen

► Definition 3: Eine Funktion f heißt in einem Intervall ihres Definitionsbereichs monoton wachsend bzw. monoton fallend, wenn für je zwei Argumente x_1 und x_2 aus diesem Intervall mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_1) > f(x_2)$$

Ist eine Funktion in einem Intervall monoton wachsend bzw. fallend, so steigt bzw. fällt ihr Bild ständig in diesem Intervall (im Sinne wachsender Argumente).

Monoton wachsende (fallende) Funktion



Nullstellen von Funktionen

Es gibt Funktionen, bei denen für gewisse Werte der unabhängigen Variablen x der zugehörige Funktionswert $y = f(x)$ gleich Null ist.
Das bedeutet, dass unter den Zahlenpaaren der Funktion solche vorkommen, die die Form $[x; 0]$ haben. Diesen Paaren entsprechen bei der graphischen Darstellung der Funktion Punkte auf der x-Achse. Das Bild der Funktion schneidet also in diesen Punkten die x-Achse bzw. berührt diese.

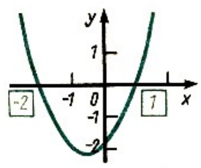
► Definition 4: Wenn die Werte $y = f(x)$ einer Funktion für bestimmte Werte von x gleich Null sind, so heißen diese x-Werte Nullstellen der Funktion.

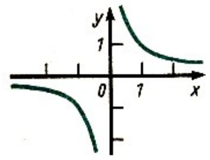
Die Nullstellen einer Funktion sind die Abszissen derjenigen Punkte, in denen das Funktionsbild die x-Achse schneidet bzw. berührt.

<table>
<tr><th colspan="3">Nullstellen einer Funktion</th></tr>
<tr><th>Funktionsgleichung</th><th>Wertetabelle</th><th>Bild der Funktion</th></tr>
<tr><td>a) $y = x^2 + x - 2$

Die Funktion hat 2 Nullstellen.</td><td>

x	y
-3	4
-2	0
-1	-2
0	-2
1	0
2	4

</td><td>
</td></tr>
</table>

Nullstellen einer Funktion			
Funktionsgleichung	Wertetabelle		Bild der Funktion
b) $y = \frac{1}{x}$	x	y	
	-3	-0,33	
	-2	-0,5	
Die Funktion hat keine Nullstellen.	-1	-1	
	1	1	
	2	0,5	
	3	0,33	

Um die Nullstellen einer Funktion $y = f(x)$ zu bestimmen, setzt man y gleich Null. Dadurch erhält man die Gleichung $f(x) = 0$, also eine Gleichung mit einer Variablen. Die Lösungen dieser Gleichung (Def. 7) sind die gesuchten Nullstellen.

3.2 Lineare Funktionen

Die Funktion $y = mx$ - Schar von Funktionen

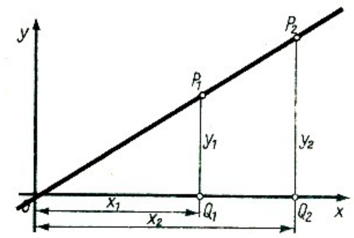
Für jede reelle Zahl m erhält man eine bestimmte Funktionsgleichung. Durchläuft m alle reellen Zahlen, so ist durch die Gleichung y= mx eine Schar von Funktionen gegeben.
Definitionsbereich und Wertevorrat jeder dieser Funktionen mit $m \neq 0$ ist die Menge der reellen Zahlen:
Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$; Wertevorrat: $-\infty < y < \infty$
Für m = 0 enthält der Wertevorrat nur die Zahl 0.

► Satz 5: Die Bilder der Funktionen $y = mx$ sind Geraden, die durch den Ursprung verlaufen.

Beweis: Alle Punkte des Bildes einer Funktion $y = mx$ liegen auf ein und derselben Geraden, die durch den Ursprung verläuft. Das erkennt man folgendermaßen: Die Koordinaten des Ursprungs $(0; 0)$ erfüllen die Funktionsgleichung, denn es gilt: $0 = m \cdot 0$. Der Ursprung gehört also zum Bild der Funktion.

Die vom Ursprung verschiedenen Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ sollen ebenfalls zum Bild der Funktion gehören. Ihre Koordinaten erfüllen also die Funktionsgleichung:

$$y_1 = mx_1 \quad , \quad y_2 = mx_2$$



Die rechtwinkligen Dreiecke OQ_1P_1 und OQ_2P_2 sind ähnlich, denn es gilt $\frac{y_1}{x_1} = m$ und $\frac{y_2}{x_2} = m$ (Ähnlichkeitssatz).
Deshalb ist $\angle P_1OQ_1 = \angle P_2OQ_2$ und die Strecken OP_1 und OP_2 bilden mit der x-Achse denselben Winkel, d. h., sie liegen beide auf einer gemeinsamen Geraden. Damit liegen auch ihre Endpunkte P_1 und P_2 auf dieser Geraden durch den Ursprung.

Wählt man statt P_2 einen beliebigen anderen Punkt, dessen Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen, so ergibt sich durch die gleichen Überlegungen, dass er ebenfalls auf der durch O und P_1 bestimmten Geraden liegt. Das bedeutet also, dass alle Punkte, die zum Bild der Funktion gehören, auf dieser Geraden liegen.

Damit steht aber noch keineswegs fest, dass auch alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen, zum Bild der Funktion gehören. Es ist also noch zu beweisen: Alle Punkte der Geraden gehören zum Bild der Funktion.

Ist $P_1(x_1; y_1)$ ein vom Ursprung verschiedener Punkt des Funktionsbildes, so gilt für seine Koordinaten $y_1 = mx_1$, d.h. $\frac{y_1}{x_1} = m$.
Ist $P_2(x_2; y_2)$ ein beliebiger anderer und auf der durch O Geraden und P_1 gehenden Geraden, so gilt für seine Koordinaten wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OQ_1P_1 und OQ_2P_2:

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} \qquad \text{also} \qquad \frac{y_2}{x_2} = m$$

Daraus folgt $y_2 = mx_2$. Also gehört P_2 zum Bild der Funktion. Da P_2 beliebig gewählt war, gilt dies für jeden Punkt der Geraden. w.z.b.w.

Die Schar $y = mx$

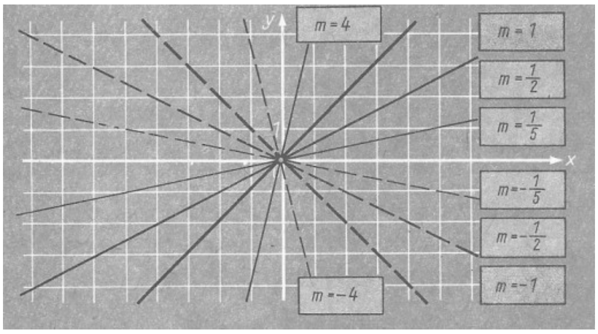


Bild einer Schar von Funktionen

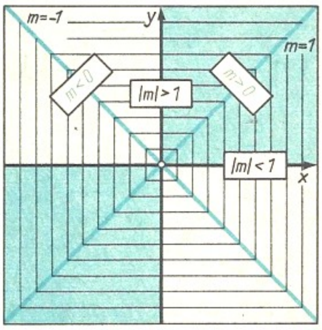
Die Bilder der Funktionen $y = mx$ und $y = -mx$ sind von Funktionen symmetrisch in Bezug auf die x-Achse und auf die y-Achse, Die Richtung der jeweiligen Geraden hängt vom Koeffizienten m ab.

Für $m > 0$ steigt die Gerade,
Für $m < 0$ fällt die Gerade.
Für $m = 0$ erhält man die Gleichung $y = 0$.

Das bedeutet: Die Funktionswerte sind unabhängig von x stets gleich 0. Das Bild dieser Funktion ist die x-Achse.

Anstieg

► Definition 6: Der Koeffizient m heißt der Anstieg der Geraden mit der Gleichung $y = mx$.

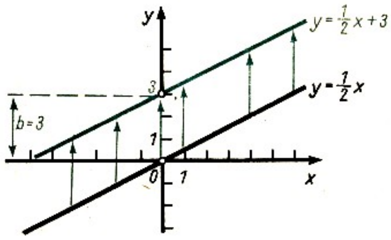


Die Bilder der durch $y = mx$ gegebenen Schar von Funktionen sind also alle Geraden durch den Ursprung mit Ausnahme der y-Achse. Die y-Achse kann nämlich nicht Bild einer Funktion mit der Gleichung $y = mx$ sein, denn auf ihr liegen alle Punkte $P(0; y)$, wobei für y alle reellen Zahlen eingesetzt werden können. Die Zuordnung ist also nicht eindeutig.

Die Funktionen $y = mx + b$

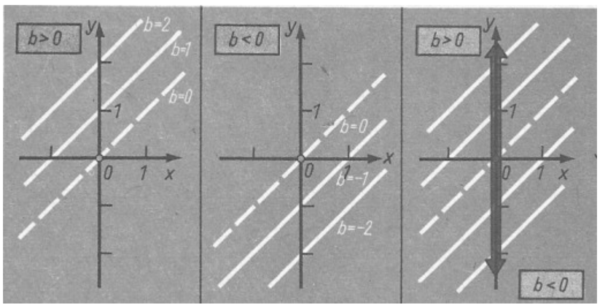
Der Summand mx heißt das lineare Glied, der Summand b das absolute Glied der Funktionsgleichung.
Das Bild einer bestimmten Funktion $y = mx + b$ erhält man dadurch, dass man das Bild der Funktion $y = mx$ um b parallel zur y-Achse verschiebt.
Für $b > 0$ erfolgt die Verschiebung in Richtung wachsender y-Werte, für $b < 0$ erfolgt die Verschiebung in Richtung fallender y-Werte.

■ $y = \frac{1}{2}x + 3$, $(m = \frac{1}{2};\ b = 3)$



Da die Größe der Verschiebung auch auf der y-Achse abgelesen werden kann, gibt b an, wo die Gerade $y = mx + b$ die y-Achse schneidet.

Absolutes Glied b der Funktionen $y = mx + b$ $(m = 1)$



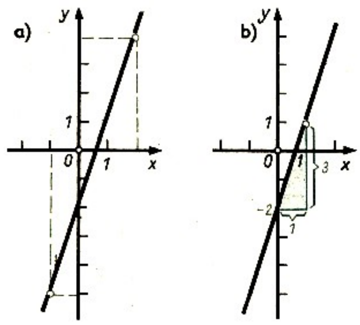
Die Funktionen $y = mx + b$ heißen lineare Funktionen.
Ihre Bilder sind Geraden mit dem Anstieg m, die die y-Achse im Abstand b vom Ursprung schneiden. Die Funktionen $y = mx + b$ sind für $m > 0$ monoton wachsend, für $m < 0$ monoton fallend.

Bild linearer Funktionen

■ $y = 3x - 2$

a) Graphische Darstellung mit Hilfe einer Wertetabelle.
Da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, braucht die Wertetabelle nur zwei Paare zu enthalten

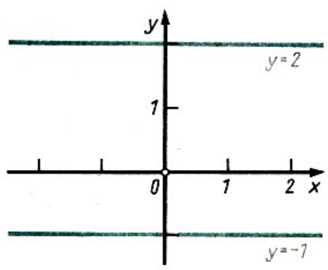
x	-1	2
y	-5	4



b) Graphische Darstellung unter Verwendung von m und b

Die Funktionen $y = b$

Für $m = 0$ erhält: man die speziellen linearen Funktionen $y = b$.
Bei ihnen sind die Funktionswerte unabhängig von x stets gleich b, oder mit anderen Worten, jeder reellen Zahl x wird dieselbe Zahl b zugeordnet. Das bedeutet, die Bilder der Funktionen $y = b$ sind Parallelen zur x-Achse im Abstand b.



■

Explizite und implizite Form einer Funktionsgleichung

Ist eine Funktionsgleichung nach der abhängigen Variablen Form einer aufgelöst, so sagt man, die Gleichung sei in expliziter Form Funktionsgleichung gegeben. In allen anderen Fällen hat die Gleichung implizite Form.

Implizite Form	Explizite Form
$Ax + By = C \ (B \neq 0)$	$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B} = mx + b$
$4x + 3y = -9$	$y = -\frac{4}{3}x + 3$

3.3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen

Ausdrücke, in denen das Gleichheitszeichen "=" vorkommt, heißen Gleichungen.
Die durch das Gleichheitszeichen getrennten Teile einer Gleichung heißen linke bzw. rechte Seite dieser Gleichung.

Ungleichungen

Ausdrücke, in denen die Zeichen "<", ">", "≤", "≥" vorkommen, heißen Ungleichungen.
Wie bei den Gleichungen, unterscheidet man auch hier linke bzw. rechte Seiten der Ungleichungen. Gleichungen und Ungleichungen ohne Variable sind wahre oder falsche Aussagen.

■ a) $4+3=7$ (wahr); b) $5\cdot 7>30$ (wahr); c) $3:0=3$ (falsch); d) $(5+4)^2<10$ (falsch)

Von Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen kann man zunächst nicht sagen, ob sie wahr oder falsch sind.
Setzt man aber für die Variablen bestimmte reelle Zahlen ein, so entstehen entweder wahre oder falsche Aussagen.

■

x	$3x+7=0$	
-2	$3\cdot(-2)+7=0$	f
0	$3\cdot(0)+7=0$	f
$-\frac{7}{3}$	$3\cdot(-\frac{7}{3})+7=0$	w

a	$3a<9$	
$-2{,}5$	$3\cdot(-2{,}5)<9$	w
1	$3\cdot 1<9$	w
3	$3\cdot 3<9$	f

u	v	$(u+v)^2\geq u^2+v^2$	
-2	3	$(-2+3)^2\geq(-2)^2+3^2$	f
-2	-3	$(-2-3)^2\geq(-2)^2+(-3)^2$	w
0	0	$(0+0)^2\geq 0^2+0^2$	w

Gleichungen bzw. Ungleichungen mit einer Variablen werden durch Einsetzen einer Zahl für diese Variable zu wahren oder falschen Aussagen.
Gleichungen bzw. Ungleichungen mit zwei Variablen werden durch Einsetzen von Zahlenpaaren zu wahren oder falschen Aussagen.

Bemerkung:
Enthalten Gleichungen bzw. Ungleichungen mehr als zwei Variablen, so muss man entsprechend der Anzahl der Variablen mehr als zwei Zahlen einsetzen, um wahre oder falsche Aussagen zu erhalten.

Wird eine Gleichung oder Ungleichung mit Variablen beim Einsetzen zu einer wahren Aussage, so sagt man, dass sie durch die betreffende Zahl oder durch das betreffende Zahlenpaar erfüllt wird.

Lösung einer Gleichung bzw. Ungleichung

► Definition 7: Jede Zahl (jedes Zahlenpaar), das eine Gleichung Gleichung oder Ungleichung erfüllt, heißt Lösung.

Allen Untersuchungen über Lösbarkeit von Gleichungen und Ungleichungen liegt .der Bereich der reellen Zahlen zugrunde, wenn nichts anderes gesagt ist. Gibt es keine Lösung, so heißt die betreffende Gleichung oder Ungleichung unlösbar.
Eine Gleichung oder Ungleichung lösen, bedeutet, sämtliche Lösungen zu finden.

Äquivalenz von Gleichungen (Ungleichungen)

▶ Definition 8: Zwei Gleichungen (zwei Ungleichungen) von Gleichungen heißen gleichwertig oder äquivalent, wenn sie dieselben (Ungleichungen) Lösungen besitzen.

Beim Lösen einer Gleichung oder Ungleichung wird diese durch schrittweises Umformen vereinfacht. Eine Umformung, die eine Gleichung oder Ungleichung in eine dazu äquivalente Gleichung oder Ungleichung überführt, heißt äquivalente Umformung.

Um eine Gleichung mit einer Variablen (z. B. x) zu lösen, formt man sie so lange um, bis man Gleichungen der Form $x = a$ erhält, aus denen man die Lösungen unmittelbar ablesen kann. Deshalb sagt man kurz: $x = a$ ist eine Lösung der gegebenen Gleichung.

Isolieren

Man bezeichnet diese Umformungen als Auflösen nach der Variablen x oder als Isolieren der Variablen x.
Werden beim Lösen nur äquivalente Umformungen ausgeführt, so erhält man die, gesuchten Lösungen. Anderenfalls können Lösungen fortfallen oder auch im Endergebnis Zahlen auftreten, die nicht zu den gesuchten Lösungen gehören.

■ a) Die Gleichung $3x(x-4) = 6(x-4)$ ist zu lösen.

$$\begin{aligned} 3x(x-4) &= 6(x-4) && \mid : (x-4) \\ 3x &= 6 && \mid : 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich die Zahl 2. Dagegen hat die gegebene Gleichung die Zahlen 2 und 4 als Lösung. Die Division durch $x - 4$ ist also keine äquivalente Umformung.

$$■ b) \quad \sqrt{x+42} = x \qquad |\text{Quadrieren} x + 42 = x^2 \qquad |\text{Ordnen} x^2 - x - 42 = 0$$

Die letzte Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = -6$. Die gegebene Gleichung hat aber nur die Lösung $x_1 = 7$.

Probe

Umformungen, bei denen wie in Beispiel a) Lösungen fortfallen, dürfen nicht vorgenommen werden. Dagegen lassen sich Umformungen wie in Beispiel b) oft nicht vermeiden.
Um die dadurch auftretenden Zahlen, die nicht Lösungen sind, wieder auszusondern, macht man eine Probe. Dazu setzt man die erhaltenen Zahlen in die Ausgangsgleichung ein und prüft nach, ob dabei eine wahre Aussage entsteht.

■ $\sqrt{x+2} = x$, Lösungen $x_1 = 7$, $x_2 = -6$
Probe:
$x_1 = 7$: $\sqrt{7+42} = 7 = 7$ (wahr)
$x_2 = -6$: $\sqrt{-6+42} = \sqrt{36} = 6 = -6$ (falsch)

Außerdem ist die Probe eine Rechenkontrolle. Bei der Probe müssen nach dem Einsetzen beide Seiten der Gleichung getrennt ausgerechnet werden. Wiederholt man nämlich bei der Probe nichtäquivalente Umformungen aus dem Lösungsgang, so können aus falschen Aussagen wahre Aussagen entstehen.
Dasselbe kann auch durch Wiederholung von Rechenfehlern aus dem Lösungsgang bewirkt werden.

■ Die Gleichung $\sqrt{x+3} = -5$ ist nicht lösbar, da die Wurzel nicht negativ sein kann. Jemand "löst" die Gleichung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= -5 && |\text{Quadrieren} \\ x+3 &= 25 && |-3 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \sqrt{22+3} &= -5 && |\text{Quadrieren, bei der Probe nicht zugelassen} \\ 22+3 &= 25 \\ 22 &= 22 \end{aligned}$$

Richtig ausgeführte Probe:
$\sqrt{22+3} = \sqrt{25} = 5 = -5$ (falsch)

Da bei der Probe im ersten Fall eine nichtäquivalente Umformung des Lösungsganges (Quadrieren) wiederholt wurde, ist aus der falschen Aussage $\sqrt{22+3} = -5$ die wahre Aussage $22+3 = 25$ entstanden, obwohl $x = 22$ nicht Lösung der Gleichung ist.

Außer Variablen wie x, y, z, für die Lösungen gesucht werden, kommen in Gleichungen und Ungleichungen oft noch andere Variablen vor, die als beliebige, aber feste Zahlen betrachtet werden.

■ $ax^2 = b + c; \qquad x^2 = \dfrac{b+c}{a}; \qquad x_1 = \sqrt{\dfrac{b+c}{a}}, x_2 = -\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}$

$a = 4, b = 11, c = 5$: $4x^2 = 11 + 5$, $x^2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$
$a = -5, b = 17, c = -17$: $-5x^2 = 17 - 17$, $x^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$
$a = 3, b = 5, c = -8$: $3x^2 = 5 - 8$, $x^2 = -1$, keine Lösungen

Setzt man für die Variablen a, b und c bestimmte Zahlen ein, so erhält man jeweils eine spezielle Gleichung. Erfüllen die für a, b und c eingesetzten Zahlen die Ungleichung $\frac{b+c}{a} \geq 0$, so ist die betreffende Gleichung lösbar, und man erhält ihre Lösungen durch Einsetzen aus $x_1 = \sqrt{\frac{b+c}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{b+c}{a}}$.

Lineare Gleichungen mit einer Variablen

Jede lineare Funktion $y = mx + b$; $(m \neq 0)$ hat genau eine Nullstelle; denn ihr Bild ist eine Gerade, die zur x-Achse nicht parallel ist, die mit dieser also genau einen Schnittpunkt hat. Zur Bestimmung dieser Nullstelle setzt man y gleich 0 und erhält $mx + b = 0$.

Gleichungen der Form $mx + b = 0$ und alle Gleichungen, die sich durch äquivalente Umformungen auf diese Form bringen lassen, heißen lineare Gleichungen mit einer Variablen.

Rechnerische Lösung von Gleichungen

Das Lösen von Gleichungen erfolgt mit Hilfe äquivalenter Umformungen.

Äquivalente Umformungen

1. Zusammenfassung entsprechender Glieder, die auf der Umformungen selben Seite der Gleichung stehen. Entsprechende Glieder sind jeweils: Die absoluten Glieder, die linearen Glieder und Glieder, die die Variable in derselben Potenz enthalten.

2. Addition oder Subtraktion derselben Zahl oder desselben Vielfachen der Variablen bzw. gleicher Potenzen von ihr auf beiden Seiten.
3. Multiplikation beider Seiten mit derselben von Null verschiedenen Zahl. Division beider Seiten durch dieselbe von Null verschiedene Zahl.
4. Vertauschung der Seiten.

Diese Umformungen werden in der Reihenfolge angewendet, die einen möglichst bequemen Lösungsweg für die gegebene Gleichung ergibt.

■ a) $mx + b = 0$, $m \neq 0$, $| - b$
$mx = -b \mid : m$
$x = -\frac{b}{m}$

Probe: $m\left(-\frac{b}{m}\right) + b = 0$, $-b + b = 0$, $0 = 0$

■ b) $3x - \dfrac{2x+5}{7} = 16 - \dfrac{7x+19}{2} - \dfrac{2x+1}{3}$
Mit Hauptnenner (42) multiplizieren:

$$42\left(3x - \frac{2x+5}{7}\right) = 42\left(16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}\right)$$

Auflösen der Klammern;

$$126x - 6(2x+5) = 672 - 21(7x+19) - 14(2x+1)$$

Auflösen der Klammern;

$$126x - 12x - 30 = 672 - 147x - 399 - 28x - 14$$

Zusammenfassen:

$$114x - 30 = -175x + 259 \quad | + 175x + 30$$
$$289x = 289 \quad | : 289 \text{ und somit } x = 1$$

Probe:

$$3 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1 + 5}{7} = 16 - \frac{7 \cdot 1 + 19}{2} - \frac{2 \cdot 1 + 1}{3}$$
$$3 - 1 = 16 - 13 - 1$$
$$2 = 2$$

■ c)

$$5x + a = 2b - 3a \qquad | - a$$
$$5x = 2b - 4a \qquad | : 5$$
$$x = \frac{2b - 4a}{5}$$

Probe: $5 \cdot \dfrac{2b-4a}{5} + a = 2b - 3a$, $a - b = a - b$

Auflösung derselben Gleichung nach a;

$$5x + a = 2b - 3a \quad | - 5x + 3a$$
$$4a = 2b - 5x \quad | : 4$$
$$a = \frac{2b - 5x}{4}$$

Die Probe verläuft wie oben.

Nicht-äquivalente Umformungen

1) Division beider Seiten einer Gleichung durch die Variable. Dabei fällt die Zahl Null als Lösung fort.

2) Division beider Seiten einer Gleichung durch eine Summe oder ein Produkt, in denen die Variable vorkommt. Dabei fallen die Zahlen als Lösungen fort, für die die betreffende Summe bzw. das betreffende Produkt Null wird.

■ a) $x(x-7) = x(x-3)$
Klammern auflösen

$$x^2 - 7x = x^2 - 3x| - x^2 + 3x; \qquad -4x = 0| : (-4); \qquad x = 0$$

Probe: $0(0-7) = 0(0-3)$, $0 = 0$

Division der gegebenen Gleichung durch die Variable x:

$$x(x-7) = x(x-3)| : x; \qquad x - 7 = x - 3$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar. Die Lösung $x = 0$ ist also fortgefallen.

■ b) $(x-3)(x+4) = (x-7)(x-3)$
Klammern auflösen

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 3x - 12 &= x^2 - 3x - 7x + 21 \\ x^2 + x - 12 &= x^2 - 10x + 21 && | - x^2 + 10x + 12 \\ 11x &= 33 && | : 11 \\ x3 \end{aligned}$$

Probe: $(3-3)(3+4) = (3-7)(3-3)$, $0 = 0$

Division der gegebenen Gleichung durch $x - 3$:

$$\begin{aligned} (x-3)(x+4) &= (x-7)(x-3) \\ x + 4 &= x - 7 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar. Die Lösung $x = 3$ ist also fortgefallen.

Umformungen, bei denen durch Division beider Seiten der Gleichung Lösungen wegfallen, dürfen nur dann vorgenommen werden, wenn man zuvor untersucht hat, für welche Werte der Variablen der Divisor gleich Null wird.
Diese Werte sind Lösungen der gegebenen Gleichung.

3) Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit der Variablen. Dabei kommt die Zahl Null als Lösung hinzu.
"Die Zahl kommt als Lösung hinzu" bedeutet, dass die betreffende Zahl Lösung der durch Multiplikation entstandenen Gleichung ist. Diese Zahl ist im allgemeinen jedoch nicht Lösung der ursprünglich gegebenen Gleichung.

4) Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einer Summe oder einem Produkt, in denen die Variable vorkommt. Dabei kommen die Zahlen als Lösungen hinzu, für die die betreffende

Summe bzw. das betreffende Produkt Null wird.

■ $x-1=x$ Diese Gleichung hat keine Lösung.
Multiplikation der gegebenen Gleichung mit $x-1$

$$\begin{aligned} x-1&=x && |\cdot(x-1)\\ (x-1)^2&=x(x-1) && |\text{Auflösen der Klammern}\\ x^2-2x+1&=x^2-2 && |-x^2+2x \quad \text{Seiten vertauschen}\\ x&=1 \end{aligned}$$

Probe: $1-1=1$, $0=1$
Die Zahl 1 ist zwar Lösung der Gleichung $(x-1)^2=x(x-1)$, aber nicht Lösung der gegebenen Gleichung.

Lineare Gleichungen mit Brüchen

Lineare Gleichungen, in denen Brüche auftreten, werden zunächst mit dem Hauptnenner dieser Brüche multipliziert.

■ a) $\frac{9}{x}+\frac{1}{2}=\frac{10}{x}+\frac{4}{9}$, $(x\neq 0)$
Hauptnenner: $18x$

$$\frac{9}{x}+\frac{1}{2}=\frac{10}{x}+\frac{4}{9} \quad |\cdot 18x$$

Diese Multiplikation ist eine äquivalente Umformung, da $x=0$ nicht als Lösung hinzukommen kann. Diese Zahl musste nämlich von vornherein ausgeschlossen werden, da für $x=0$ die gegebene Gleichung keinen Sinn hat.

$$\begin{aligned} 18\cdot\frac{9}{x}+18\cdot\frac{1}{2}&=18\cdot\frac{10}{x}+18\cdot\frac{4}{9} && |\text{Kürzen}\\ 162+9x&=180+8x && |-8x-162\\ x&=18 \end{aligned}$$

Probe: $\frac{9}{18}+\frac{1}{2}=\frac{10}{18}+\frac{4}{9}$; $1=1$

b) $\frac{x+3}{x-2}=\frac{x-7}{x-4}$; $(x\neq 2; x\neq 4)$
Hauptnenner: $(x-2)(x-4)$

$$\frac{x+3}{x-2}=\frac{x-7}{x-4} \quad |\cdot(x-2)(x-4)$$

Auch hier ist diese Multiplikation eine äquivalente Umformung, da $x\neq 2$ und $x\neq 4$ sind.

$$(x-2)(x-4)\cdot\frac{x+3}{x-2}=(x-2)(x-4)\cdot\frac{x-7}{x-4}$$

Kürzen und Klammern auflösen;

$$x^2-4x+3x-12)x^2-2x-7x+14$$

Zusammenfassen:

$$x^2-x-12=x^2-9x+14; \qquad 8x=26; \qquad x=\frac{13}{4}$$

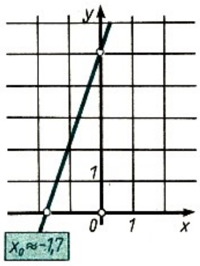
Probe: $\dfrac{\frac{13}{4}+3}{\frac{13}{4}-2} = \dfrac{\frac{13}{4}-7}{\frac{13}{4}-4}$; $\dfrac{\frac{25}{4}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{\frac{-15}{4}}{\frac{-3}{4}}$; $5 = 5$

Graphische Lösung von Gleichungen

Jede lineare Gleichung mit einer Variablen (z.B. x) lässt sich durch äquivalente Umformungen auf die Form $mx + b = 0$; $(m \neq 0)$ bringen.
Die Lösung dieser Gleichung ist die Nullstelle der Funktion $y = mx + b$.

Zur graphischen Lösung der Gleichung $mx + b = 0$ zeichnet man das Bild der Funktion $y = mx + b$ und liest die Nullstelle aus der Zeichnung ab.
Wegen der Zeichenungenauigkeit bekommt man nach diesem Verfahren im allgemeinen nicht die genaue Lösung.

■ $3x + 5 = 0$; zugehörige Funktionsgleichung: $y = 3x + 5$



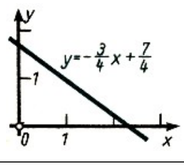
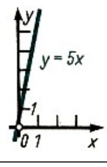
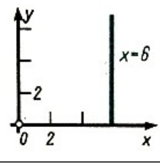
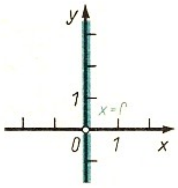
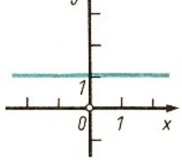
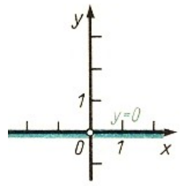
Nullstelle: $x \approx -1{,}7$

Probe: $3 \cdot (-1{,}7) - 5 = 0$; $-0{,}1 = 0$
Die Probe führt zu einer falschen Aussage. Im Rahmen der Zeichenungenauigkeit kann man sie jedoch durch die wahre Aussage $-0{,}1 \approx 0$ ersetzen. Daher ist -1,7 Näherungslösung der gegebenen Gleichung.

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Jede Gleichung, die durch äquivalente Umformungen auf die Form $Ax + Bx = C$ gebracht werden kann, heißt lineare Gleichung mit zwei Variablen (x und y).
In dieser Gleichung sind B, A und C feste reelle Zahlen. Die Variablen x und y treten nur in der ersten Potenz auf.

Jedes Zahlenpaar $[x; y]$, das die Gleichung $Ax + By = C$ erfüllt, heißt Lösung dieser Gleichung (↗ Def. 7).
Jede lineare Gleichung mit zwei Variablen hat unendlich viele Lösungen, ausgenommen der Fall $A = B = 0$ und $C \neq 0$.

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen		
$A \neq 0; B \neq 0; C \neq 0$ Lösungen sind z.B. die Paare $[1; 1], [-1; 1{,}25], [0; \frac{7}{4}], [\frac{7}{3}; 0]$ 	$A \neq 0; B \neq 0; C = 0$ Lösungen sind Paare $[x; 5x]$ (x beliebig reell) 	$A \neq 0; B = 0; C \neq 0$ Lösungen sind Paare $[6; y]$ (y beliebig reell) 
$A \neq 0; B = 0; C = 0$ $\frac{2}{3}x + 0 \cdot y = 0$; $x = 0$ Lösungen sind Paare $[0; y]$ (y beliebig reell) 	$A = 0; B \neq 0; C \neq 0$ $0 \cdot x + \frac{7}{5}y = \frac{3}{2}$; $y = \frac{15}{14}$ Lösungen sind Paare $[x; \frac{15}{4}]$ (x beliebig reell) 	$A = 0; B \neq 0; C = 0$ $0 \cdot x - \frac{1}{10}y = 0$; $y = 0$ Lösungen sind Paare $[x; 0]$ (x beliebig reell) 

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen	
$A=0; B=0; C\neq 0$ $0\cdot x+0\cdot y=5$; $0=5$ keine Lösung	$A=B=C=0$ $0\cdot x+0\cdot y=0$; $0=0$ Lösungen sind alle Zahlenpaare $[x,y]$, (x,y beliebig reell) Die graphische Darstellung ist die ganze Ebene.

Die graphische Darstellung der Gleichung $Ax+By=C$ ist also stets eine Gerade, falls wenigstens einer der Koeffizienten A und B ungleich Null ist.

Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Betrachtet man zwei Gleichungen und sucht die Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen, so nennt man diese Gleichungen ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen.

(1) $A_1x+B_1y=C$, Variable: x,y
(2) $A_2x+B_2y=C$, feste Zahlen: $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$.

Jedes Zahlenpaar, das beide Gleichungen des Systems erfüllt, heißt Lösung dieses Gleichungssystems. Die Probe muss an beiden Gleichungen vorgenommen werden. Ein Gleichungssystem kann a) keine Lösung, b) genau eine Lösung, c) unendlich viele Lösungen haben.

■ a) $\left.\begin{array}{ll}(1) & 3x+4y=3\\(2) & 3x+4y=9\end{array}\right\}$ keine Lösung

b) $\left.\begin{array}{ll}(1) & 2x-4y=-8\\(2) & -0{,}5x+3y=8\end{array}\right\}$ Lösung $x=2$, $y=3$

c) $\left.\begin{array}{ll}(1) & x+y=2\\(2) & 4x+4y=8\end{array}\right\}$ Unendlich viele Lösungen (Jedes Paar, das die erste Gleichung erfüllt, erfüllt auch die zweite Gleichung)

Im Fall a) sagt man: Die Gleichungen des Systems widersprechen einander. So kann in Beispiel a) die Summe $3x+4y$ nicht gleich 3 und gleich 8 sein.
Im Fall c) sagt man: Die Gleichungen des Systems sind abhängig. Im Beispiel c) ist Gleichung (2) durch Multiplikation mit 4 aus Gleichung (1) entstanden, also besteht das System eigentlich aus nur einer Gleichung.

Rechnerische Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Zur Lösung von Gleichungssystemen gibt es drei Verfahren:
a) das Gleichsetzungsverfahren,
b) das Einsetzungsverfahren,
c) das Verfahren der gleichen Koeffizienten.

Das Ziel jedes dieser Verfahren ist es, das Lösen von einem System mit zwei Variablen auf das Lösen von Gleichungen mit einer Variablen zurückzuführen. Man sagt: Eine der Variablen wird eliminiert.
Jedes Gleichungssystem kann mit jedem der drei Lösungsverfahren gelöst werden, falls es überhaupt lösbar ist.
In den folgenden Beispielen treten zunächst nur solche Systeme auf, die genau eine Lösung haben.

Gleichsetzungsverfahren

■ $\left.\begin{array}{ll}(1) & y=1+x\\(2) & y=13-2x\end{array}\right\}$

Wenn man die Existenz einer Lösung voraussetzt, so erfüllen die Zahlen des Lösungspaares beide Gleichungen. Auf den linken Seiten der beiden Gleichungen steht dann dieselbe Zahl, also auch auf den rechten Seiten, d.h. es gilt

$$1 + x = 13 - 2x$$

Die beiden rechten Seiten wurden gleichgesetzt. Dadurch ist die Variable y eliminiert worden und eine Gleichung mit einer Variablen entstanden, die wie üblich gelöst wird:

$$1 + x = 13 - 2x \quad | + 2x - 1; \qquad 3x = 12; \qquad x = 4$$

Damit ist eine Zahl des Lösungspaares gefunden. Zur Bestimmung der anderen setzt man sie in eine der gegebenen Gleichungen ein:

$$(1) \quad y = 1 + 4; \qquad y = 5$$

Probe: (1) $5 = 1 + 4; 5 = 5$; (2) $5 = 13 - 2 \cdot 4$; $5 = 5$

Einsetzungverfahren

■ $\left.\begin{array}{ll} (1) & 9x - 5y = 3 \\ (2) & y = 8x - 13 \end{array}\right\}$

Unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung werden beide Gleichungen von den Zahlen des Lösungspaares erfüllt. Gleichung (2) besagt dann, dass man in Gleichung (1) $8x - 13$ für y einsetzen und so die Variable y eliminieren kann:

(1) $9x - 5(8x - 13) = 3$ Klammer auflösen
$9x - 40x + 65 = 3$ Zusammenfassen
$-31x + 65 = 3$ |-65
$x = 2$ Einsetzen in (2)
(2) $y = 8 \cdot 2 - 13$, $y = 3$

Probe: $(1) 9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 3; \quad 3 = 3$; (2) $3 = 8 \cdot 2 - 13; \quad 3 = 3$

Verfahren der gleichen Koeffizienten

■ $\left.\begin{array}{ll} (1) & 6x - 4y = -28 \\ (2) & 7x + 2y = -6 \end{array}\right\}$

Nimmt man wieder an, dass eine Lösung existiert, so werden von den Zahlen des Lösungspaares die gegebenen Gleichungen und auch alle bei den folgenden Umformungen auftretenden Gleichungen erfüllt.
Durch geeignetes Multiplizieren oder Dividieren beider Gleichungen erhält man für eine der Variablen gleiche Koeffizienten. Durch Addition oder Subtraktion der Gleichungen wird dann diese Variable eliminiert.

Eliminieren von x:

$$\begin{array}{lr l} (1) & 6x - 4y = -28 & (| \cdot 7) \\ (2) & 7x + 2y = -6 & (| \cdot 6) \\ \hline (1) & 42x - 28y = -196 & \\ (2) & 42x + 12y = -36 & \\ \hline (1) - (2) & -40y = -160 & \\ & y = 4 & \end{array}$$

Eliminieren von y:

$$\begin{array}{lr l} (1) & 6x - 4y = -28 & (| : 2) \\ (2) & 7x + 2y = -6 & \\ \hline (1) & 3x - 2y = -14 & \\ (2) & 7x + 2y = -6 & \\ \hline (1) - (2) & 10x = -20 & \\ & x = -2 & \end{array}$$

Einsetzen in (2):

$$7x - 2 \cdot 4 = -6 \qquad \text{(-8)}$$
$$7x = -14x \qquad = -2 \qquad \text{(:7)}$$

Einsetzen in (2):

$$7 \cdot (-2) + 2y = -6 \qquad \text{(+14)}$$
$$7y = 8y \qquad = 4 \qquad \text{(:4)}$$

Probe: (1) $6 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 = -28$; $-28 = -28$
(2) $7 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 6$; $-6 = -6$

Man kann mit Hilfe der drei genannten Verfahren entscheiden, ob ein gegebenes.Gleichungssystem genau eine oder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.

■
$$\frac{11}{4}x + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4} \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{x}{2} = 1 - y \qquad \text{(|· 2; II)}$$

$$x = x - 2y \qquad \text{(Einsetzen in (1))}$$
$$\frac{11}{4}(2 - 2y) + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4}$$
$$\frac{11}{2} - \frac{11}{2}y + \frac{11}{2}y = \frac{17}{4}$$
$$\frac{11}{2} = \frac{17}{4}$$

Es hat sich ein Widerspruch ergeben. Das bedeutet, dass es kein Zahlenpaar gibt, das beide Gleichungen des gegebenen Systems erfüllt. Die beiden Gleichungen widersprechen einander. Das erkennt man deutlich auch daran, dass man das gegebene Gleichungssystem auf folgende Form bringen kann:

$$x + 2y = \frac{17}{11} \qquad ; \qquad x + 2y = 2$$

■
$$x - 3y = 15 \qquad \text{(I)}$$
$$y = \frac{1}{3}x - 5 \qquad \text{(Einsetzen in (1); II)}$$

$$x - 3\left(\frac{1}{3}x - 5\right) = 15$$
$$x - x + 15 = 15$$
$$15 = 15$$

Es ist die wahre Aussage $15 = 15$ entstanden. Das System hat unendlich viele Lösungen. Jedes Zahlenpaar, das die eine Gleichung erfüllt, erfüllt auch die andere. Die Gleichungen sind voneinander abhängig. Das zeigt auch folgende Umformung:

■
$$x - 3y = 15 \qquad \text{(I)}$$
$$y = \frac{1}{3}x - 5 \qquad \text{(· (-3); II)}$$

$$x - 3y = 15$$
$$-3y = -x + 15 \qquad (+x)$$

$$x - 3y = 15$$
$$x - 3y = 15$$

Die Anwendung jeweils eines der drei Lösungsverfahren auf ein Gleichungssystem ergibt
a) einen Widerspruch, falls das System nicht lösbar ist,
b) die Lösung, falls das System genau eine Lösung hat,
c) eine wahre Aussage, falls das System unendlich viele Lösungen hat.

Graphische Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit zwei Variablen

Zur graphischen Lösung eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen stellt man die Lösungen beider Gleichungen in ein und demselben Koordinatensystem dar.
Dadurch erhält man zwei Geraden, falls nicht in einer Gleichung $A = 0$ und $B = 0$ ist. Die Lösungen des Gleichungssystems sind diejenigen Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen. Die graphischen Darstellungen dieser Lösungen sind also diejenigen Punkte, die auf beiden Geraden liegen.

Hat das gegebene Gleichungssystem genau eine Lösung, so findet man diese als Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden in der graphischen Darstellung

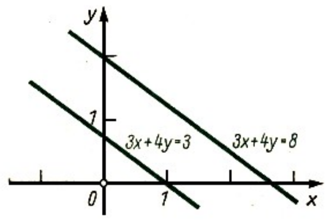
Graphische Lösung von Gleichungssystemen		
1. Fall: 2 parallele nicht zusammenfallende Geraden	Gleichungen widersprechen einander	keine Lösungen
2. Fall: 2 einander schneidende Geraden		genau eine Lösung
3. Fall: 2 zusammenfallende Geraden Geraden	Gleichungen sind voneinander abhängig	unendlich viele Lösungen

Wegen der Zeichenungenauigkeit erhält man im allgemeinen Näherungslösungen. Das ist auch bei der Probe zu berücksichtigen.

■ a)

$$3x + 4y = 3 \quad (1)$$
$$3x + 4y = 8 \quad (2)$$

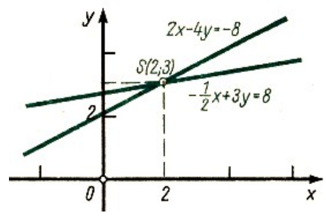
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$
$$y = -\frac{3}{4}x + 2$$



b)

$$2x - 4y = -8 \quad (1)$$
$$-\frac{1}{2}x + 3y = 8 \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$
$$y = \frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$$

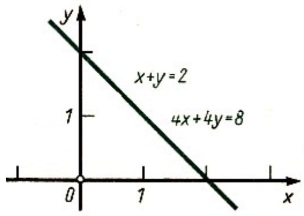


Man liest ab: $x \approx 2$, $y \approx 3$

c)

$$x + y = 2 \quad (1)$$
$$4x + 4y = 8 \quad (2)$$

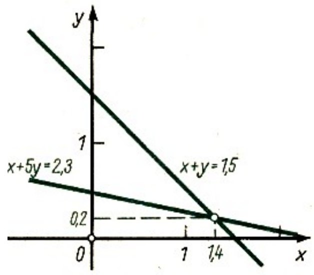
$$y = -x + 2$$
$$y = -x + 2$$



■

$$x + 5y = 2{,}3 \quad (1)$$
$$x + y = 1{,}5 \quad (2)$$

$$y = -\frac{1}{5}x + 0{,}46$$
$$y = -x + 1{,}5$$



Man liest an: $x \approx 1{,}4$; $y \approx 0{,}2$
Probe:
(1) $1{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 \approx 2{,}4 \approx 2{,}3$
(2) $1{,}4 + 0{,}2 \approx 1{,}6 \approx 1{,}5$

Systeme von drei linearen Gleichungen mit drei Variablen

Mit Hilfe derselben Lösungsverfahren wie bei Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen werden die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Variablen schrittweise verringert.

$3x + 4y + 3z = 1$	$\cdot 2$	(1)
$2x - y - z = 6$	$\cdot(-3)$	(2)
$x + 3y + 2z = -1$		(3)
$6x + 8y + 6z = 2$		(1)
$-6x + 3y + 3 = -18$	Addition von (1) und (2)	(2)
$11y + 9z = -16$		(1')
$3x + 4y + 3z = 1$		(1)
$2x - y - z = 6$		(2)
$x + 3y + 2z = -1 \cdot (-2)$		(3)
$2x - y - z = 6$		(2)
$-2x - 6y - 4z = 2$	Addition von (2) und (3)	(3)
$-7y - 5z = 8$		(2')
$11y + 9z = -16$	$\cdot 5$	(1')
$-7y - 5z = 8$	$\cdot 9$	(2')
$55y + 45z = -80$		(1')
$-63y - 45z = 72$	Addition von (1') und (2')	(2')
$-8y = 8$	$: (-8)$	
$y = 1$	Einsetzen in (2')	
$-7 \cdot 1 - 5z = 8$	$+7$	(2')
$-5z = 15$	$: (-5)$	
$z = -3$		

$y = 1$ und $z = 3$ in (3) einsetzen: $x + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = -1$, $x = 2$.
Lösung: $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$
Probe: (1) $3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3(-3) = 1$, (2) $2 \cdot 2 - 1 + 3 = 6$, (3) $2 + 3 \cdot 1 + 2(-3) = -1$

3.4 Proportionalität

Zahlenvergleich durch Differenzen

Zum Vergleich von Zahlen a und b kann man die Differenzen $a - b$ oder $b - a$ bilden.
Der Betrag $|a - b| = |b - a|$ dieser Differenzen gibt den "Unterschied" der Zahlen a und b an.

■ $a = -10{,}5$, $b = 3{,}9$: $|a - b| = |b - a| = 14{,}4$. Die beiden Zahlen unterscheiden sich um 14,4.

Zahlenvergleich durch Quotienten

Zum Vergleich von Zahlen a und b $(a, b \neq 0)$ kann man auch die Quotienten $\frac{a}{b}$ oder $\frac{b}{a}$ bilden.

Das Verhältnis zweier Zahlen

► Definition 9: Sind die Zahlen a und b von 0 verschieden, so heißt der Quotient $\frac{a}{b}$ (auch $a : b$ geschrieben) das Verhältnis von a zu b.

Sind a und b rationale Zahlen, so sind auch ihre Verhältnisse $\frac{a}{b}$ bzw. $\frac{b}{a}$ rationale Zahlen. Sie lassen sich daher als Quotienten ganzer Zahlen schreiben.
Das Verhältnis $\frac{\sqrt{2}}{7}$ ist dagegen irrational und daher nicht als Quotient ganzer Zahlen darstellbar.

■ $a = -2{,}4$, $b = 6$

$$\frac{a}{b} = \frac{-2{,}4}{6} = \frac{-2}{5} = -0{,}4$$

Das Verhältnis von $-2{,}4$ zu 6 ist also gleich $-0{,}4$.

Vergleich von Größenangaben

In der Praxis werden nicht nur Zahlen, sondern auch Größenangaben miteinander verglichen. Größen sind z. B. Länge, Geschwindigkeit, Temperatur, Arbeit. Ihre charakteristische Eigenschaft besteht darin, dass sie gemessen werden können.
Größenangaben bestehen aus einer Zahl, der Maßzahl, und einer Einheit.

Zwei gleichartige Größenangaben können verglichen werden, indem man das Verhältnis ihrer Maßzahlen bildet. Dabei muss für Zahlenangaben ein und derselben Größe die gleiche Einheit verwendet werden. Sollen verschiedenartige Größenangaben verglichen werden, so wird dem Verhältnis der Maßzahlen eine Benennung hinzugefügt, die sich aus den Einheiten der zu vergleichenden Größenangaben ergibt.
Werden Größenangaben verglichen, so sagt man auch: es wird das Verhältnis der Größen gebildet.

■ a) Verhältnis der Spurweiten bei Modellbahn Spur TT und Reichsbahn:
$$\frac{12\text{ mm}}{1435\text{ mm}} \approx \frac{1}{120}$$
b) Von einem 2 Hektar großen Acker wurden 60 dt Weizen geerntet.
$$\frac{60\text{ dt}}{2\text{ ha}} = 30\frac{\text{dt}}{\text{ha}}$$

Der absolute Fehler

Bei Angaben von Mess- und Näherungswerten treten stets Abweichungen vom wahren Wert auf.

► Definition 10: Die Differenz zwischen einem Mess- oder Näherungswert und dem wahren

Wert einer Größe heißt absoluter Fehler.

Je nach Vorzeichen dieser Differenz ist der absolute Fehler positiv oder negativ. Er hat dieselbe Maßeinheit wie die betrachtete Größe.

Der relative Fehler

▶ Definition 11: Das Verhältnis des absoluten Fehlers zum wahren Wert heißt relativer Fehler.

Der relative Fehler ist eine unbenannte Zahl, die dasselbe Vorzeichen hat wie der zugehörige absolute Fehler. Er wird oft in Prozenten angegeben.

■ Mit Zirkel und Lineal wurde ein rechter Winkel konstruiert. Nachträgliche Messung ergab $89{,}5°$.
absoluter Fehler: $89{,}5° - 90° = -0{,}05°$
relativer Fehler: $-\frac{0{,}5}{90} = -0{,}00\overline{5} \approx -0{,}6\%$

Direkte Proportionalität

▶ Definition 12: Eine Größe y heißt zu einer anderen Größe x direkt proportional (geschrieben: $y \sim x$), wenn bei festgewählten Maßeinheiten folgendes gilt:

1. Jeder Maßzahl der ersten Größe ist genau eine Maßzahl der zweiten Größe zugeordnet und umgekehrt.
2. Jede Maßzahl der einen Größe ergibt sich aus der zugeordneten Maßzahl der anderen Größe durch Multiplikation mit einem einheitlichen Faktor k. Dieser Faktor heißt Proportionalitätsfaktor.

$$y = k \cdot x$$

Bemerkung: Aus dem jeweiligen Zusammenhang geht hervor, ob die Variablen zur Bezeichnung von Größen oder zur Bezeichnung von Maßzahlen verwendet werden.
Der Proportionalitätsfaktor hat eine Benennung, die sich aus den Einheiten der proportionalen Größen ergibt. Je nach Wahl dieser Einheiten kann der Proportionalitätsfaktor bei ein und demselben Sachverhalt verschieden sein.

■ Ein Pkw fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit v von $90\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die beiden Größen Fahrzeit t und Weg s sind proportional: $s \sim t$.
Misst man den Weg in Kilometern und die Fahrzeit in Stunden, so ist 90 Proportionalitätsfaktor mit der Benennung $\frac{\text{km}}{\text{h}}$:
$s = 90\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$

Misst man dagegen den Weg in Kilometern und die Fahrzeit in Minuten, so ist wegen $90\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1{,}5\frac{\text{km}}{\text{min}}$ die Zahl 1,5 Proportionalitätsfaktor:
$s = 1{,}5\frac{\text{km}}{\text{min}} t$

Graphische Darstellung der direkten Proportionalität

Jede Gleichung $y = k \cdot x$, die den Zusammenhang zweier direkt proportionaler Größen angibt, ist die Gleichung einer linearen Funktion, deren Bild eine Gerade durch den Ursprung ist.
Stellt man einander zugeordnete Maßzahlen zweier direkt proportionaler Größen als Punkte in einem Koordinatensystem dar, so liegen diese Punkte auf einer solchen Geraden.

Indirekte (umgekehrte) Proportionalität

▶ Definition 13: Eine Größe y heißt zu einer anderen Größe x indirekt proportional, wenn bei festgewählten Maßeinheiten folgendes gilt:

1. Jeder Maßzahl der ersten Größe ist genau eine Maßzahl der zweiten Größe zugeordnet und umgekehrt.
2. Das Produkt der Maßzahlen ist konstant.

$$x \cdot y = c$$

Aus $x \cdot y = c$ folgt $y = c \cdot \frac{1}{x}$, d.h. y ist zum Reziproken von x direkt proportional: $y \sim \frac{1}{x}$. Daher bezeichnet man die Konstante c auch bei der indirekten Proportionalität als Proportionalitätsfaktor. Er hat i.a. eine Benennung, die sich aus den Einheiten der indirekt proportionalen Größen ergibt, und hängt von der Wahl dieser Einheiten ab.

Die Gleichungen $y = c \cdot \frac{1}{x}$, die den Zusammenhang zweier indirekt proportionaler Größen angeben, sind nicht Gleichungen von linearen Funktionen, sondern von Potenzfunktionen ($y = c \cdot x^{-1}$) (↗ Def. 26).

■ Für einen bestimmten Weg braucht
a) ein Omnibus 1 Stunde bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km $\cdot$ h^{-1},
b) ein Mopedfahrer 2 Stunden bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km $\cdot$ h^{-1},
c) ein Radfahrer 6 Stunden bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 10 km $\cdot$ h^{-1}.

In allen drei Fällen ist das Produkt der Maßzahlen von Geschwindigkeit und Zeit gleich 60, also konstant. Das bedeutet: Bei einer bestimmten Weglänge sind Durchschnittsgeschwindigkeit und Zeit indirekt proportional.
Bezeichnet man die Zeit mit t und die Durchschnittsgeschwindigkeit mit v, so gilt $v \cdot t = s$. Dabei ist der konstante Proportionalitätsfaktor $s = 60$ km der in allen drei Fällen zurückgelegte Weg.

Gegenüberstellung

Direkte Proportionalität

x	1	2	3	3,5	7	10
y	6	12	18	21	42	60

Je größer die Werte von x sind, desto größer sind die Werte von y.
Werden die Werte von x verdoppelt, verdreifacht usw., so werden auch die entsprechenden Werte von y verdoppelt, verdreifacht usw.
Werden die Werte von x halbiert, gedrittelt usw., so werden auch die entsprechenden Werte von y halbiert, gedrittelt usw.
Die Werte von y ergeben sich aus den entsprechenden Werten von x durch Multiplikation mit k.

$$y \sim x \qquad y = k \cdot x$$

Die Verhältnisse einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor k.

Indirekte Proportionalität

x	0,5	1	2	5	7,5	10
y	18	9	4,5	1,8	1,2	0,9

Je größer die Werte von x sind, desto kleiner sind die Werte von y. Werden die Werte von x verdoppelt, verdreifacht usw., so werden die entsprechenden Werte von y halbiert, gedrittelt usw.
Werden die Werte von x halbiert, gedrittelt usw., so werden die entsprechenden Werte von y verdoppelt, verdreifacht usw.
Die Werte von y ergeben sich aus den Reziproken der entsprechenden Werte von x durch Multiplikation mit c.

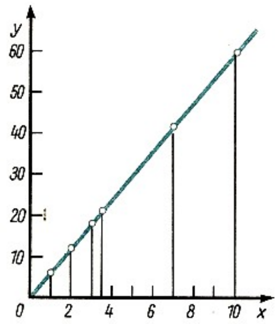
$$y \sim \frac{1}{x} \qquad y = c \cdot \frac{1}{x}$$

Die Produkte einander zugeordneter Zahlen sind alle gleich dem Proportionalitätsfaktor c.

Direkte Proportionalität

$$\frac{y}{x} = k$$

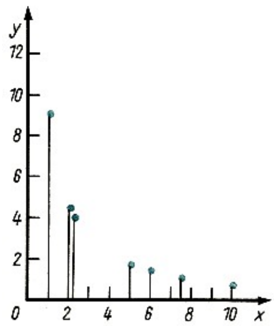
Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von x ist gleich dem Verhältnis der zugeordneten Werte von y.



Indirekte Proportionalität

$$x \cdot y = c$$

Das Verhältnis zweier beliebiger Werte von x ist gleich dem reziproken Verhältnis der zugeordneten Werte von y.



3.5 Proportionen

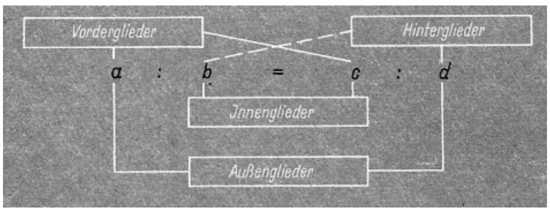
Proportion (Verhältnisgleichung)

▶ Definition 14: Eine Gleichung der Form

$$a : b = c : d \qquad (a,b,c,d \neq 0)$$

heißt Verhältnisgleichung oder Proportion.
Die Zahlen a, b, c und d heißen die Glieder der Proportion.

Die Gleichung $a : b = c : d$ wird auch folgendermaßen gelesen: a verhält sich zu b wie c zu d, kürzer: a zu b wie c zu d.
Statt $a : b = c : d$ schreibt man auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (↗ Def. 9). Die Glieder werden nach ihrer Anordnung in der Proportion benannt.

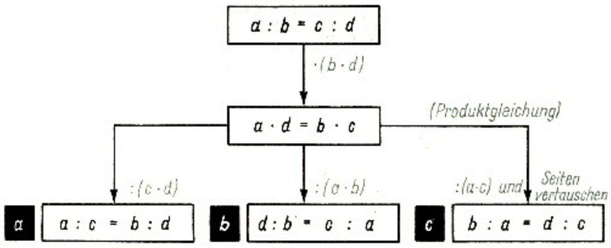


Produktgleichung

Wird die Proportion $a : b = c : d$ mit $b \cdot d$ multipliziert, so ergibt sich die Gleichung $a \cdot d = b \cdot c$. Sie heißt die zur gegebenen Proportion gehörige Produktgleichung.

▶ Satz 15:
In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.

Aus der Produktgleichung lassen sich durch Anwendung der Umformungsregeln für Gleichungen weitere Regeln für das Rechnen mit Proportionen ableiten.



► Satz 16: In jeder Proportion kann man vertauschen
a) die Innenglieder untereinander,
b) die Außenglieder untereinander,
c) die Innenglieder gegen die Außenglieder.

Gegebene Proportion	$2 : 4 = 5 : 10$	Produktgleichung $4 \cdot 5 = 2 \cdot 10$
Innenglieder vertauschen:	$2 : 5 = 4 : 10$	$5 \cdot 4 = 2 \cdot 10$
Außenglieder vertauschen:	$10 : 4 = 5 : 2$	$4 \cdot 5 = 10 \cdot 2$
Innen- gegen Außenglieder vertauschen:	$4 : 2 = 10 : 5$	$2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$

Fortlaufende Proportionen

Treten in einer fortlaufenden Gleichung mehr als zwei Verhältnisse auf, so ist es üblich, diese fortlaufende Gleichung auch als fortlaufende Proportion zu schreiben.
Statt $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ schreibt man $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$. Aus dieser fortlaufenden Proportion lassen sich beispielsweise folgende Proportionen ablesen:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \quad , \quad a_3 : a_2 = b_3 : b_2 \quad , \quad a_1 : a_3 = b_1 : b_3$$

■ Statt $3 : 5 = 6 : 10 = 15 : 25 = 9 : 15$ schreibt man auch $3 : 6 : 15 : 9 = 5 : 10 : 25 : 15$

Anwendungen der Proportionen

In Aufgaben aus zahlreichen Gebieten der Praxis tritt Proportionalität zweier Größen auf. Solche Aufgaben werden mit Hilfe von Proportionen gelöst.

Vierte Proportionale

Sind dabei drei der vier Glieder einer Proportion gegeben und ist das vierte zu berechnen, so heißt dieses die vierte Proportionale der Proportion.

■ Bei der Verbrennung von Kohlenstoff entsteht das Gas Kohlendioxid. Dabei ist das Verhältnis der Kohlenstoffmenge zur Menge des entstehenden Kohlendioxids gleich 3:11.
Wieviel Gramm Kohlendioxid entstehen bei der Verbrennung von 10 g Kohlenstoff?

Lösung: Es mögen x g Kohlendioxid entstehen. Dann gilt folgende Proportion:

$$10 : x = 3 : 11; \qquad 3x = 110 \text{ (Produktgleichung)}; \qquad x \approx 36{,}7$$

Bei der Verbrennung von 10 g Kohlenstoff entstehen etwa 36,7 g Kohlendioxid.

■ Welche Zeit benötigt ein Pkw für einen Autobahnabschnitt von 128,0 km, wenn er mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 85,0 km·h^{-1} fährt?

Lösung: $85 \cdot x = 128$, $x = 1{,}5 = 1$ h 30 min
Der Pkw benötigt bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 85,0 km·h^{-1} für die 128,0 km 1 Stunde und 30 Minuten.

Prozentrechnung

Um zwei Verhältnisse, d. h. zwei Quotienten, bequem vergleichen zu können, kann man sie auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Zweckmäßigerweise wählt man oft als gemeinsamen Nenner die Zahl 100.

■ In drei fünften Klassen werden die Anzahl der Schwimmer Stufe II verglichen.

Klasse	Anzahl der Schüler	Anzahl der Schwimmer	Verhältnis der Zahl der Schwimmer zur Zahl der Schüler
5a	25	20	$\frac{20}{35} \approx 0{,}57 = \frac{57}{100}$
5b	31	19	$\frac{19}{31} \approx 0{,}61 = \frac{61}{100}$
5c	33	16	$\frac{16}{33} \approx 0{,}48 = \frac{48}{100}$

Prozentbegriff

▶ Definition 17: Ein Hundertstel einer Zahl (Größenangabe) G heißt ein Prozent[3], dieser Zahl (Größenangabe). Für 1 Prozent schreibt man 1%.

1% von G sind $\frac{G}{100}$. p% von G sind $p \cdot \frac{G}{100} = \frac{p \cdot G}{100}$
Bezeichnungen: G heißt Grundwert; p heißt Prozentsatz; $\frac{p \cdot G}{100}$ heißt Prozentwert und wird mit W bezeichnet.
Mit den Bezeichnungen gilt die Gleichung

$$W = \frac{p \cdot G}{100} \qquad \text{oder als Proportion} \qquad \frac{W}{P} = \frac{G}{100}$$

Da bei einem bestimmten Sachverhalt der Grundwert (die Zahl G) fest gegeben ist, ist $\frac{G}{100}$ eine feste Zahl. Das bedeutet, dass Prozentwerte und Prozentsatz direkt proportional sind (↗ Def. 12).

■ a) 1% von 17 sind $\frac{17}{100} = 0{,}17$; $G = 17$; $W = 0{,}17$; $p = 1$
b) 5% von 17 sind $5 \cdot \frac{17}{100} = 0{,}85$; $G = 17$; $W = 0{,}85$; $p = 5$
c) 23% von 53 m sind $23 \cdot \frac{53}{100}$ m $= 12{,}19$ m; $G = 53$ m; $W = 12{,}19$ m; $p = 23$

Die Ergebnisse des Beispiels der letzten Tabelle lassen sich mit Hilfe des Prozentbegriffs folgendermaßen ausdrücken:

Die Klasse 5a hat 57% Schwimmer: $G = 35$; $W = 20$; $p = 57$.
Die Klasse 5b hat 61% Schwimmer: $G = 31$; $W = 19$; $p = 61$.
Die Klasse 5c hat 48% Schwimmer: $G = 33$; $W = 16$; $p = 48$

Grundaufgaben der Prozentrechnung

Allgemein gilt: $W : p = G : 100$.
Zu bestimmen ist p: $p = \frac{W}{G} \cdot 100$.
Zu bestimmen ist W: $W = \frac{p \cdot G}{100}$.
Zu bestimmen ist G: $G = \frac{W}{p} \cdot 100$.

Vermehrter (verminderter) Grundwert

Bei der Lösung von Aufgaben ist besonders auf Formulierungen wie "Erhöhung um" oder "Steigerung auf" bzw. "Verringerung um" oder "Senkung auf" zu achten. Derartige Formulierungen deuten auf vermehrten bzw. verminderten Grundwert hin.

[3] procentum (lat.), von Hundert

Der vermehrte Grundwert ist die Summe aus Grund- und Prozentwert. Der verminderte Grundwert ist die Differenz aus Grund- und Prozentwert.

■ Der Abgabepreis von 56,70 M je Stück an den Großhandel liege um 7,5% höher als der Selbstkostenpreis für einen Betrieb. Wieviel beträgt der Selbstkostenpreis ?

Gegeben: Vermehrter Grundwert (Abgabepreis) $G_2 = G + W = 56{,}70$
Prozentsatz: $p = 100 + 7{,}5 = 107{,}5$
Gesucht: Grundwert G (Selbstkostenpreis)

Lösung: $G_2 : p = G : 100$

$$G = \frac{G_2 \cdot 100}{p} = \frac{56{,}70 \cdot 100}{107{,}5} \approx 52{,}74$$

Der Selbstkostenpreis beträgt 52,74 M je Stück.

■ Nach Einführung einer verbesserten Technologie verringern sich die Selbstkosten für ein Erzeugnis um 18% auf 32,80 M. Wieviel betragen die Selbstkosten mit der alten Technologie?

Gegeben: Verminderter Grundwert (neue Selbstkosten) $G_1 = G - W = 22{,}80$
Prozentsatz: $p = 100 - 18 = 82$
Gesucht: Grundwert G (alte Selbstkosten)

Lösung: $G_1 : p = G : 100$

$$G = \frac{G_1 \cdot 100}{p} = \frac{32{,}80 \cdot 100}{82} = 40$$

Vor der Einführung einer neuen Technologie betrugen die Selbstkosten je Stück 40,00 M.

Prozentaufgaben mit indirekter Proportionalität

■ Ein D-Zug durchfährt eine Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km·h^{-1}. Wieviel Prozent der ursprünglichen Fahrzeit beträgt die Zeitersparnis, wenn: der Zug seine Geschwindigkeit um durchschnittlich 5 km·h^{-1} erhöht?

Lösung:
Der Geschwindigkeit 60 km·h^{-1} sind 100% der Fahrzeit zugeordnet.
Der Geschwindigkeit 65 km·h^{-1} sind x% der Fahrzeit zugeordnet.
Da Geschwindigkeit und Zeit indirekt proportional sind, sind die Produkte der einander zugeordneten Zahlen gleich (↗ Def. 13):

$$60 \cdot 100 = 65 \cdot x; \qquad x = \frac{60 \cdot 100}{65} \approx 92{,}3$$

Der Zug benötigt nur noch etwa 92,3% der ursprünglichen Zeit. Die Zeitersparnis beträgt also rund 7,7%.

Promille

In der Prozentrechnung wird die Zahl 100 als Vergleichszahl zugrunde gelegt. In vielen Fällen ist es nützlich, die Zahl 1000 als Vergleichszahl zu benutzen.

► Definition 18: Ein Tausendstel einer Zahl (Größenangabe) heißt ein Promille dieser Zahl (Größenangabe). Für 1 Promille schreibt man 1‰.

Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung auf das Geldwesen, wobei der Prozentwert den Zinsen eines Geldbetrages für ein volles Jahr entspricht.

Prozentrechnung		Zinsrechnung	
Grundwert	G	Grundbetrag	G
Prozentsatz	p	Zinssatz	p
Prozentwert	W	Zinsen	Z

Die Zinsen für ein Jahr erhält man aus der Proportion

$$Z : p = G : 100 \qquad , \qquad Z = \frac{G \cdot p}{100}$$

Für beliebige andere Zeiträume werden die Zinsen proportional zur Zeit berechnet.

Zinsen für		
t Jahre:	t Monate:	t Tage:
$Z = \frac{G \cdot p}{100}$	$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{12}$	$Z = \frac{G \cdot p}{100} \cdot \frac{t}{360}$

Bemerkungen:
(1) Bei Zinsberechnungen wird zugrunde gelegt: 1 Jahr = 12 Monate, 1 Monat = 30 Tage
(2) Bei der Berechnung der Zinsen nach den angegebenen Gleichungen wird vereinfachend angenommen, dass der Grundbetrag während des gesamten Zeitraums unverändert bleibt.
In der Praxis werden jedoch die fälligen Zinsen jeweils dem Grundbetrag zugeschlagen und dann mit verzinst. Dadurch ergeben sich höhere Zinsbeträge, die nach der sogenannten Zinseszinsrechnung berechnet werden.

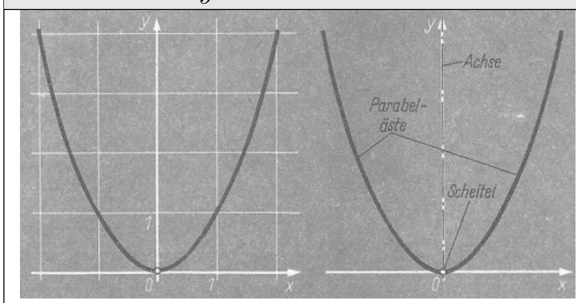
3.6 Quadratische Funktionen

Jede Funktion mit der Gleichung $y = Ax^2 + Bx + C$ heißt quadratische Funktion, wobei die Koeffizienten A, B, C beliebige reelle Zahlen mit $A \neq 0$ sind.

Man nennt
Ax^2 das quadratische, Bx das lineare und C das absolute Glied der Funktionsgleichung

Die Funktion $y = x^2$

Die Funktion $y = x^2$



Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$, Wertebereich: $0 \leq y < \infty$

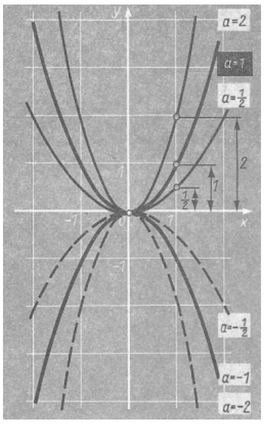
Einerseits ist das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ. Im Wertevorrat treten also nur nichtnegative Zahlen auf. Andererseits ist jede nichtnegative reelle Zahl Quadrat einer reellen Zahl. Im Wertevorrat treten also auch alle nichtnegativen reellen Zahlen auf.

Normalparabel

Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist eine quadratische Parabel. Man nennt sie auch Normalparabel. Für $x = 0$ ergibt sich der kleinste Funktionswert, nämlich $y = 0$.

Wegen $x^2 = (-x)^2$ haben Parabelpunkte mit gleicher Ordinate den gleichen Abstand von der y-Achse. Das bedeutet, dass die y-Achse Symmetrieachse der Parabel ist. Man nennt diese Symmetrieachse auch Parabelachse. Die beiden zueinander symmetrischen Teile der Parabel heißen Parabeläste.

Der Punkt, in dem eine Parabel ihre Symmetrieachse schneidet, heißt Scheitel dieser Parabel. Der Scheitel der Normalparabel liegt im Ursprung. Sie öffnet sich nach oben. Die Richtungsangaben "nach oben" bzw. "nach unten" beziehen sich immer auf die übliche Lage der Koordinatenachsen.
Im Intervall $-\infty < x \leq 0$ ist die Funktion $y = x^2$ monoton fallend, im Intervall $0 \leq x < \infty$ monoton wachsend (↗ Def. 3).



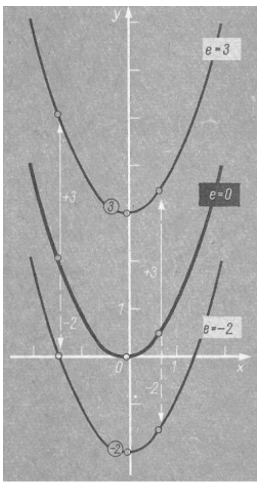
Die Funktion $y = ax^2$**,** $a \neq 0$

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$
Wertevorrat: $0 \leq y < \infty$ falls $a > 0$
$-\infty < y \leq 0$ falls $a < 0$

Der Übergang von $y = x^2$ zu $y = ax^2$ bedeutet, dass für jedes Argument x der zugehörige Funktionswert der Funktion $y = x^2$ mit a multipliziert wird.
Dadurch wird die Normalparabel folgendermaßen verändert:

$\|a\| > 1$	$a > 0$ $a < 0$	Streckung der Normalparabel in Richtung der y-Achse; Öffnung nach oben Streckung der Normalparabel in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse; Öffnung nach unten
$\|a\| = 1$	$a = 1$ $a = -1$	keine Änderung; Öffnung nach oben Spiegelung der Normalparabel an der x-Achse; Öffnung nach unten
$\|a\| < 1$	$a > 0$ $a < 0$	Stauchung der Normalparabel in Richtung der y-Achse; Öffnung nach oben Stauchung der Normalparabel in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse; Öffnung nach unten

In allen Fällen liegt der Scheitel der Normalparabel im Ursprung.



Die Funktionen $y = x^2 + px + q$

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$
Wertevorrat: $-\frac{p^2}{4} + q \leq y < \infty$

Die Funktionen $y = x^2 + e$

Scheitel $S(0; e)$
Der Übergang von $y = x^2$ zu $y = x^2 + e$ bedeutet, dass für jedes Argument x zum zugehörigen Funktionswert der Funktion $y = x^2$ die Zahl e addiert wird. Dadurch wird die Normalparabel um e in Richtung der y-Achse verschoben.

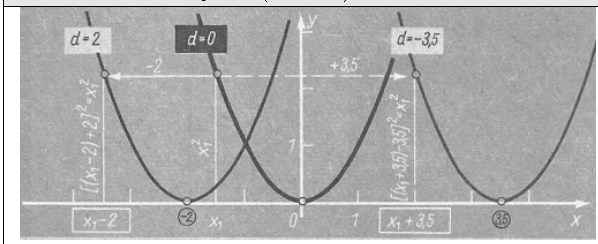
Die Funktionen $y = (x+d)^2$

Die Funktionen
I) $y = x^2$ und II) $y = (x+d)^2$
unterscheiden sich dadurch, dass für jedes Argument x der zugehörige Funktionswert x^2 der Funktion I) von der Funktion II) für $x - d$ angenommen wird. Es ist nämlich

$$[(x-d)+d]^2 = x^2$$

Das Bild der Funktion $y = (x+d)^2$ ist also die um $-d$ in Richtung der x-Achse verschobene Normalparabel.

Die Funktion $y = (x+d)^2$

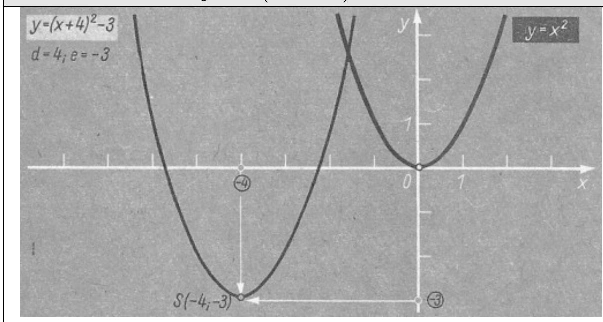


Scheitel $S(-d;0)$

Die Funktionen $y = (x+d)^2 + e$

Der Übergang von $y = x^2$ zu $y = (x+d)^2 + e$ bedeutet, dass die Normalparabel um e in Richtung der y-Achse und um $-d$ in Richtung der x-Achse verschoben wird. Der Scheitelpunkt hat dann die Koordinaten $-d$ und e: $S(-d;e)$

Die Funktion $y = (x+d)^2 + e$



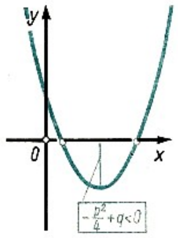
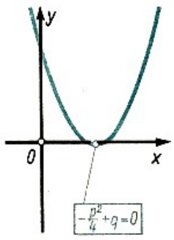
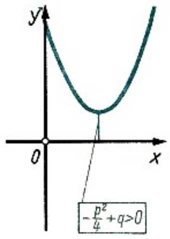
Scheitel $S(-d;e)$

Aus $y = (x+d)^2 + e$ erhält man durch Ausrechnen

$$y = x^2 + 2dx + d^2 + e$$

Zur Abkürzung setzt man $2d = p$ und $d^2 + q = q$: $y = x^2 + px + q$.

Umgekehrt hat jede Funktion $y = x^2 + px + q$ als Bild eine Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4} + q\right)$, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse liegt und die sich nach oben öffnet.
Die Koordinaten des Scheitelpunktes ergeben sich aus den Gleichungen $2d = p$ und $d^2 + e = q$.
Die Anzahlen der Nullstellen der Funktionen $y = x^2 + px + q$ lassen sich jeweils an der Ordinate des Scheitelpunktes ablesen:

$-\frac{p^2}{4}+q<0$	$-\frac{p^2}{4}+q=0$	$-\frac{p^2}{4}+q>0$
zwei Nullstellen	eine Nullstelle	keine Nullstelle
Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse	Scheitelpunkt auf der x-Achse	Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse
		

Die Funktionen $y = Ax^2 + Bx + C$; $(A \neq 0)$

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$
Wertevorrat: $-\frac{B^2}{4A} + C \leq y < \infty$; falls $A > 0$
$-\infty < y \leq -\frac{B^2}{4A} + C$; falls $A < 0$

Die Funktionen mit einer solchen Gleichung heißen quadratische Funktionen. Die Gleichungen der zuvor behandelten quadratischen Funktionen sind Spezialfälle dieser Gleichung:

a) $y = x^2$ erhält man für $A = 1$; $B = C = 0$
b) $y = ax^2$? erhält man für $A = a$; $B = C = 0$
c) $y = x^2 + px + q$ erhält man für $A = 1$; $B = p$; $C = q$

Durch Ausklammern von A erhält man aus $y = Ax^2 + Bx + C$ die Gleichung

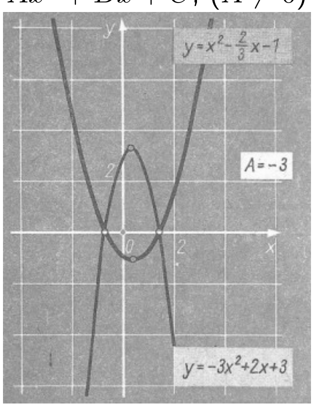
$$y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) = A(x^2 + px + q); \qquad \left(\frac{B}{A} = p; \frac{C}{A} = q\right)$$

Das Bild dieser Funktion ergibt sich dadurch, dass die Ordinaten aller Punkte der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ auf das $|A|$-fache gestreckt oder gestaucht und eventuell (falls $A < 0$) an der x-Achse gespiegelt werden.

Der Scheitel S der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ hat die Koordinaten $-\frac{p}{2}$ und $-\frac{p^2}{4} + q$ oder: $S\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A}\right)$.
Der Scheitel S' der Parabel mit der Gleichung $y = Ax^2 + Bx + C$ hat dann die Koordinaten

$$S\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{B^2}{4A} + C\right)$$

Die Funktionen
$Ax^2 + Bx + C$; $(A \neq 0)$



Die Anzahl der Nullstellen einer allgemeinen quadratischen Funktion

$$y = Ax^2 + Bx + C = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right)$$

ist gleich der Anzahl der Nullstellen der Funktion

$$y = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}$$

denn $A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) = 0$ gilt genau für die Werte von x, für die auch $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$ gilt. (Beachte $A \neq 0$)

3.7 Quadratische Gleichungen

Rechnerische Lösung

Zur Bestimmung eventuell vorhandener Nullstellen einer allgemeinen quadratischen Funktion $y = Ax^2 + Bx + C$; $(A \neq 0)$ ist die Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ zu lösen.
Je nach der Anzahl der Nullstellen hat diese Gleichung zwei Lösungen oder eine Lösung oder sie hat keine Lösung.
Wegen $A \neq 0$ lässt sich die Gleichung durch A dividieren:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \left(p = \frac{B}{A}, q = \frac{C}{A}\right)$$

Normalform der quadratischen Gleichung

Da sich jede quadratische Gleichung auf diese Normalform bringen lässt, genügt es, die Lösungen für die Normalform anzugeben.
Äquivalente Umformungen der Normalform zur Bestimmung der Lösungen:

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 \qquad |(-q) \\
x^2 + px &= -q \qquad | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 && \text{(Quadratische Ergänzung)} \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q && \text{(binomische Formel)} \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}$$

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ gibt es keine Lösung x, da $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ für keine Zahl x negativ wird.
Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ kann man wie folgt weiter äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 &= 0 \\
\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Da ein Produkt genau dann gleich 0 ist, wenn mindestens ein Faktor gleich 0 ist (↗ Satz 7), sind folgende Zahlen Lösungen:

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; für x_1 wird der erste Faktor gleich 0.
$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; für x_2 wird der zweite Faktor gleich 0.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diskriminante

Der Radikand $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist für die Anzahl der Lösungen entscheidend. Er heißt daher Diskriminante.
Die Scheitelpunktskoordinate des Bildes der zur gegebenen Gleichung gehörenden Funktion ist gleich $-D$ (↗ Tabelle).

Diskriminante D	Anzahl der Lösungen von $x^2+px+q=0$	Anzahl der Nullstellen von $y=x^2+px+q=0$
$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$	zwei Lösungen $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$	zwei Nullstellen
$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$	eine Lösung $x_{1,2}=-\frac{p}{2}$	eine Nullstelle
$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$	keine Lösung	keine Nullstellen

■ a)

$$x^2+\frac{1}{8}x-\frac{21}{32}=0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{1}{16}\pm\sqrt{\frac{1+168}{256}} \\ &= -\frac{1}{16}\pm\frac{13}{16} \\ x_1 &= \frac{3}{4} \\ x_2 &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

Die Probe bestätigt das Ergebnis.

■ b)

$$x^2-4{,}2x+4{,}41=0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 2{,}1\pm\sqrt{4{,}41-4{,}41} \\ x_{1,2} &= 2{,}1 \end{aligned}$$

■ c)

$$x^2-1{,}3x+9{,}5=0$$

$$x_{1,2}=0{,}65\pm\sqrt{0{,}65^2-9{,}5}$$

Wegen $0{,}65^2-9{,}5<0$ hat die Gleichung keine Lösung.

► Satz 19: Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$, so lässt sich die linke Seite dieser Gleichung folgendermaßen in ein Produkt aus zwei in x linearen Faktoren zerlegen:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$$

Beweis:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2 \qquad (*)$$

Da x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2+px+q=0$ sind, gilt: $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{D} \qquad , \qquad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{D}$$

$$x_1+x_2=-p$$

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{D}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{D}\right)=\left(\frac{p}{2}\right)^2-D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=q$$

Setzt man dies in Gleichung (*) ein, so erhält man: .

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2+px+q \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Vietascher Wurzelsatz

► Satz 20: Für die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$ gilt:

$$x_1+x_2=-p \qquad \text{und} \qquad x_1x_2=q$$

Die Lösungen einer Gleichung werden häufig auch Wurzeln dieser Gleichung genannt. Der Vietasche[4] Wurzelsatz kann zur Probe benutzt werden.

[4] Francois Viète (1540-1603), Französischer Mathematiker

■ $x^2 + \frac{2}{5}x - 0{,}32 = 0$
$x_{1,2} = -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1+8}{25}} = -\frac{1}{5} \pm \frac{3}{5}$
$x_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = -\frac{4}{5}$
Probe: $x_1 + x_2 = -\frac{2}{5} = -p$ und $x_1x_2 = -\frac{8}{25} = -0{,}32 = q$

Spezialfälle der Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Die folgenden Spezialfälle sind wie jede quadratische Gleichung mit der Lösungsformel lösbar. Sie lassen sich jedoch kürzer folgendermaßen lösen.

1) $p = 0$, also $x^2 + q = 0$

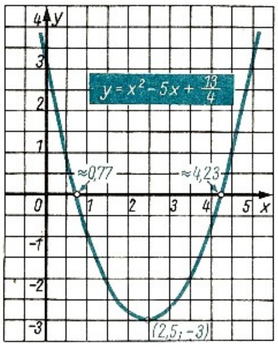
$$x^2 = -q \begin{cases} \text{Für } q > 0: & \text{keine Lösung} \\ \text{Für } q = 0: & \text{eine Lösung } x_{1,2} = 0 \\ \text{Für } q < 0: & \text{zwei Lösungen } x_{1,2} = \pm\sqrt{-q} \end{cases}$$

2) $q0 =$, also $x^2 + px = 0$

$$x(x+p) = 0 \begin{cases} \text{Für } p = 0: & \text{eine Lösung } x_{1,2} = 0 \\ \text{Für } q \neq 0: & \text{zwei Lösungen } x_1 = 0; x_2 = -p \end{cases}$$

Graphische Lösung - Schnittpunkte auf der x-Achse

Jede quadratische Gleichung mit einer Variablen lässt sich durch äquivalente Umformungen auf die Normalform $x^2 + px + q = 0$ bringen.
Die Lösungen dieser Gleichungen sind die Nullstellen der Funktion $y = x^2 + px + q$.
Zur graphischen Lösung der Gleichung $x^2+px+q = 0$ zeichnet man daher das Bild der Funktion $y = x^2+px+q$ (verschobene Normalparabel, Öffnung nach oben) und liest die Nullstellen aus der Zeichnung ab. Wegen der Zeichenungenauigkeit bekommt man nach diesem Verfahren im allgemeinen nicht die genauen Lösungen.



$x^2 - 5x + \frac{13}{4} = 0$
Wir bestimmen die Scheitelpunktkoordinaten: $S(2{,}5; -3)$.
Wir tragen $S(2{,}5; -3)$ in ein Koordinatensystem ein. Wir zeichnen das Funktionsbild (Schablone an S anlegen).

Ablesen der Nullstellen: $x_1 \approx 0{,}8$; $x_2 \approx 4{,}2$.
Probe: (Vietascher Wurzelsatz)
$x_1 + x_2 = 0{,}8 + 42{,} = 5 = -p$
$x_1x_2 = 0{,}8 \cdot 4{,}2 = 3{,}36 \approx q$

Schnittpunkte auf der Normalparabel

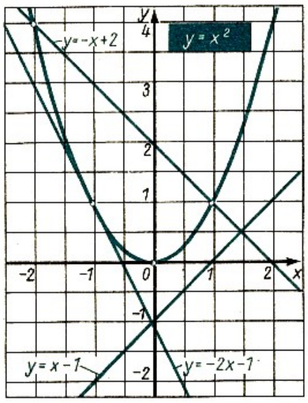
Eine Umformung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ergibt $x^2 = -px - q$.
Die Lösungen dieser Gleichung sind diejenigen Zahlen x, für die die Funktionen

$$y = x^2 \text{ und } y = -px - q$$

gleiche Funktionswerte haben. In der graphischen Darstellung sind das die Abszissen der Schnittpunkte beider Funktionsbilder. Ein Vorteil dieses Verfahrens gegenüber dem ersten besteht darin, dass man die Normalparabel $y = x^2$ nur einmal zu zeichnen braucht.
Es genügt dann, bei jeder Gleichung die jeweilige Gerade $y = -px - q$ durch die Kante eines Lineals darzustellen, um die gesuchten Abszissen abzulesen.

Je nach Anzahl der Lösungen der gegebenen Gleichung hat die betreffende Gerade mit der

Parabel zwei Punkte (Sekante), einen Punkt (Tangente) oder keinen Punkt (Passante) gemeinsam.



■ a) $x^2 + x - 2 = 0$
Parabel: $y = x^2$; Gerade: $y = -x + 2$
$x_1 \approx -2$, $x_2 \approx 1$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$
Parabel: $y = x^2$; Gerade: $y = -2x + 1$
$x_1 = x_2 \approx -1$

c) $x^2 - x - 1 = 0$
Parabel: $y = x^2$; Gerade: $y = x - 1$
keine Lösung

Bemerkung: Wegen der Zeichenungenauigkeit ist es nicht sicher, ob tatsächlich nur eine Lösung vorliegt. Es kann vorkommen, das die Schnittpunkte sehr dicht beieinander liegen.

3.8 Die Potenzfunktionen $y = x^k$, (k ganze Zahl)

Der Potenzbegriff

▶ Definition 21: Ein Produkt $a \cdot a \cdot ... \cdot a$ aus n Faktoren a $(n \geq 2)$ heißt Potenz.

Man schreibt: $\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$
a heißt die Basis, n der Exponent der Potenz a^n.

■ a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$; b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$
c) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3 = 125$; d) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0^6 = 0$

Vorzeichen von Potenzen

Es gilt für alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$:
Wenn $a \geq 0$, so $a^{2m} \geq 0$
Wenn $a < 0$, so $a^{2m} > 0$
Wenn $a \geq 0$, so $a^{2m+1} \geq 0$
Wenn $a < 0$, so $a^{2m+1} < 0$

	n gerade	n ungerade
$a \geq 0$	$a^n \geq 0$	$a^n \geq 0$
$a < 0$	$a^n > 0$	$a^n < 0$

▶ Satz 22: Für beliebige reelle Zahlen $a \neq 0$ gilt:

$$(-a)^{2m} = a^{2m} \qquad \text{und} \qquad (-a)^{2m+1} = -a^{2m+1} \qquad (m \geq 1)$$

■ a) $6^4 = 1296$, $(-6)^4 = 1296$, $(-6)^4 = 6^4$
b) $0{,}2^5 = 0{,}00032$, $(-0{,}2)^5 = -0{,}00032$, $(-0{,}2)^5 = -0{,}2^5$

Für 0 und 1 gilt: $0^n = 0$ und $1^n = 1$; $(n \geq 2)$
Daher folgt aus Satz C 22 für $a = -1$:

$$(-1)^{2k} = 1^{2k} = 1 \qquad , \qquad (-1)^{2k+1} = -1^{2k+1} = -1$$

Rechnen mit Potenzen (Potenzgesetze)

Für das Rechnen mit Potenzen gelten die folgenden Regeln (Potenzgesetze), wobei $a \neq 0$; $b \neq 0$ ist. Für die natürlichen Zahlen m und n wird zunächst wie in Definition C 21 $m \geq 2$ und $n \geq 2$ festgesetzt. Diese Einschränkung für die Exponenten wird später fallen gelassen (↗ Def. 24).

▶ Satz 23:

gleiche Basis und gleicher Exponent		
Addition, Subtraktion	$x \cdot a^n \pm y \cdot a^n = (x \pm y)a^n$, ($x$,$y$ beliebig reell	
	gleiche Basis	gleicher Exponent
Multiplikation	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(m-n \geq 2)$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzierung	$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$	

■ Addition/Subtraktion:
a) $3a^5 + 0{,}8a^5 = 3{,}8a^5$;
b) $\frac{1}{3}x^7 - \frac{4}{9}x^7 + \frac{1}{18}x^7 = -\frac{1}{18}x^7$

Multiplikation:
c) $a^4 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$
d) $a^3 \cdot b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (ab)^3$

Division:
e) $\frac{a^8}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^3$
f) $\frac{x^4}{y^4} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y \cdot y} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$

Potenzierung:
g) $(a^3)^4 = (a^3) \cdot (a^3) \cdot (a^3) \cdot (a^3) = a^{3+3+3+3} = a^{4 \cdot 3} = a^{4+4+4} = (a^4) \cdot (a^4) \cdot (a^4) = (a^4)^3$

Bemerkung: Beachte den Unterschied zwischen $(a^m)^n$ und $a^(m^n)$.
■ $(2^3)^2 = 8^2 = 64$, dagegen $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$.
Statt $a^{(m^n)}$ schreibt man kürzer a^{m^n}.

Erste Erweiterung des Potenzbegriffes

Der Potenzbegriff wird durch folgende Festlegung auf alle natürlichen Zahlen als Exponenten ausgedehnt.

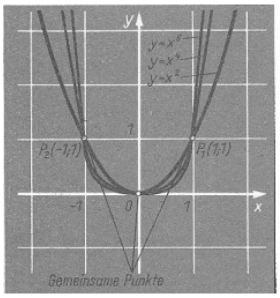
▶ Definition 24: (1) $a^0 = 1$, $(a \neq 0)$; (2) $a^1 = a$.

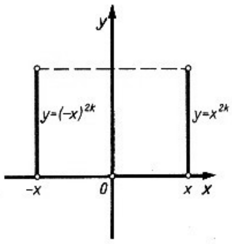
Diese Definitionen sind sinnvoll. Für den so erweiterten Potenzbegriff gelten nämlich die Rechenregeln aus Satz C 23 weiter.

■ a) Beispiel für die Regel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:
$a^0 \cdot a^4 = 1 \cdot a^4 = a^4 = a^{0+4}$
b) Beispiel für die Regel $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:
$(a^1)^7 = a^7 = a^{1 \cdot 7}$
Bemerkung: Bei der Definition $a^0 = 1$ muss $a = 0$ ausgeschlossen werden, da sich sonst Widersprüche ergeben würden.

Die Potenzfunktionen $y = x^n$ $(n = 0{,}1{,}2{,}...)$ - Die Funktionen $y = x^{2m}$ $(m = 1{,}2{,}...)$

Die Bilder der Funktionen $y = x^2$, $y = x^4$, ... heißen Parabeln 2., 4., 6., ... Grades. Sie liegen symmetrisch zur y-Achse; denn nach Satz C 22 gilt $(-x)^{2m} = x^{2m}$. Also gehört zu einer beliebigen Zahl x und der zu ihr entgegengesetzten Zahl $-x$ derselbe Funktionswert.

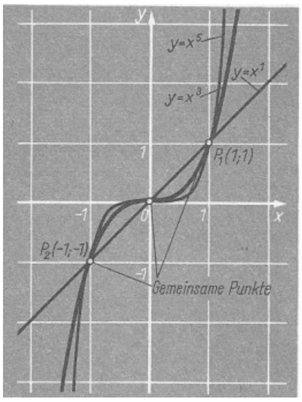


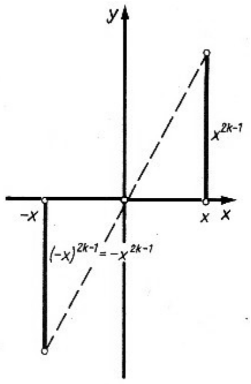


Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$, Wertevorrat: $0 \leq y < \infty$

Die Funktionen $y = x^{2m-1}$ ($m = 1,2,...$)

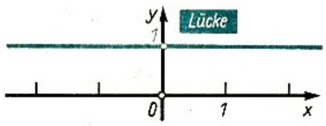
Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$, Wertevorrat: $-\infty < y < \infty$
Die Bilder der Funktionen $y = x^3$, $y = x^5$, ... heißen Parabeln 3., 5., ... Grades. Sie liegen punktsymmetrisch zum Ursprung; denn nach Satz C 22 gilt $(-x)^{2m-1} = -x^{2m-1}$. Also unterscheiden sich der zu einer beliebigen Zahl $x \neq 0$ gehörende Funktionswert und der zur entgegengesetzten Zahl $-x$ gehörende Funktionswert nur durch das Vorzeichen.





Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$, Wertevorrat: $-\infty < y < \infty$

Die Funktion $y = x^0$



Definitionsbereich: alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$, Wertevorrat: Die Zahl 1
Das Bild dieser Funktion besteht aus allen Punkten auf der Parallelen zur x-Achse im Abstand $+1$, ausgenommen der Punkt $(0; 1)$. Nach Definition C 24 ist nämlich die Potenz x für alle $x \neq 0$ gleich 1, für $x = 0$ jedoch nicht definiert. Man sagt, das Bild der Funktion $y = x^0$ hat bei $x = 0$ eine Lücke.

Gerade, ungerade Funktionen

► Definition 25: Eine Funktion $y = f(x)$ heißt gerade, wenn für jedes x aus ihrem Definitionsbereich $f(-x) = f(x)$ gilt.
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt ungerade, wenn für jedes x aus ihrem Definitionsbereich $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Die Bilder gerader Funktionen besitzen die y-Achse als Symmetrieachse. Die Bilder ungerader Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
Die Potenzfunktionen $y = x^{2m}$; $(m = 0{,}1{,}2{,}...)$ sind gerade Funktionen.
Die Potenzfunktionen $y = x^{2m-1}$; $(m = 1{,}2{,}3{,}...\ )$ sind ungerade Funktionen.

Bemerkung:
Im allgemeinen ist eine Funktion weder gerade noch ungerade, wie es das Beispiel der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 1$ zeigt:
$f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$; $f(-2) = -4 + 8 + 1 = 13$.

Zweite Erweiterung des Potenzbegriffes - Die Funktionen $y = x^{-n}$, $(n = 1{,}2{,}3...)$

Die Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten werden so definiert, dass die Rechenregeln aus Satz C 23 auch für Potenzen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten gelten. (Dies lässt sich auf Grund der folgenden Definition beweisen. Hier werden nur einige Beispiele gerechnet.)

▶ Definition 26:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad (a \neq 0, n \text{ natürlich})$$

■ a) Beispiel für die Regel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:
$a^{-3} \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^{3+5}} = a^{-(3+5)} = a^{(-3)+(-5)}$
$x^2 \cdot x^{-4} = x^2 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^2} = x^{-2} = x^{2+(-4)}$

b) Beispiel für die Regel $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:
$(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{a^6}} = a^6 = a^{(-2)\cdot(-3)}$
$(b^5)^{-4} = \frac{1}{(b^5)^4} = \frac{1}{b^{5\cdot 4}} = b^{-5\cdot 4} = b^{5\cdot(-4)}$

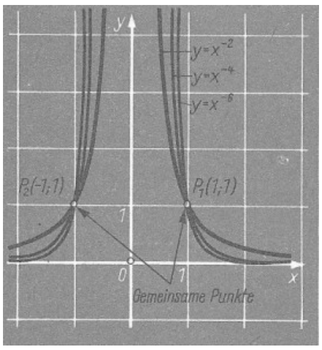
▶ Satz 27: Für alle ganzen Zahlen k und beliebige reelle Zahlen a; $(a \neq 0)$ gilt

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

Beweis:
a) $k > 0$; In diesem Fall gilt die Gleichung auf Grund von Definition C 26
b) $k = 0$; In diesem Fall gilt die Gleichung nach Definition C 24
c) $k < 0$; In diesem Fall gibt es eine positive ganze Zahl m mit $k = -m$. Dann gilt (nach Definition C 26):

$$\frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{\frac{1}{a^m}} = a^m = a^{-k} \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Die Funktionen $y = x^{-2m}$; $(m = 1{,}2{,}3{,}...)$



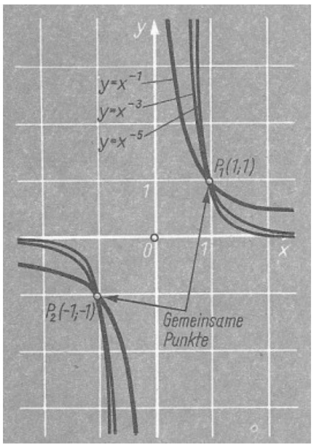
Definitionsbereich: alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$
Wertevorrat: $0 < y < \infty$
Wegen

$$(-x)^{-2m} = \frac{1}{(-x)^{2m}} = \frac{1}{x^{2m}} = x^{-2m}$$

sind diese Potenzfunktionen gerade, ihre Bilder liegen also symmetrisch zur y-Achse. Die Bilder dieser Funktionen bestehen jeweils aus zwei getrennten Teilen (zwei Ästen).

Sie nähern sich beliebig dicht der x-Achse und zwar um so mehr, je mehr der Betrag von x zunimmt. Dabei wird die x-Achse selbst jedoch nicht erreicht, da die Funktionswerte stets größer als 0 sind.
Man sagt, die Bilder nähern sich asymptotisch der x-Achse. Entsprechend nähern sich die Bilder asymptotisch der y-Achse, wenn der Betrag von x immer kleiner wird.

Die Funktionen $y = x^{-(2m-1)}$; $(m = 1,2,3,...)$



Definitionsbereich: alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$
Wertevorrat: alle reellen Zahlen y mit $y \neq 0$
Wegen

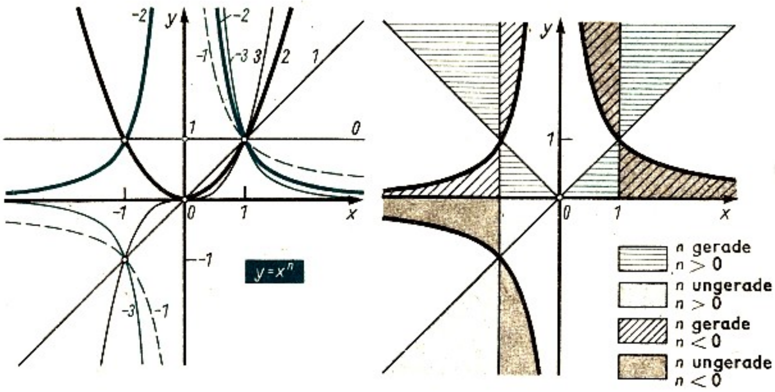
$$(-x)^{-(2m-1)} = \frac{1}{(-x)^{2m-1}} = \frac{1}{-x^{2m-1}} = x^{-(2m-1)}$$

sind diese Potenzfunktionen ungerade, ihre Bilder liegen also punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Bilder bestehen aus zwei Ästen, die sich asymptotisch den Koordinatenachsen annähern.

Zusamenfassender Überblick über die Potenzfunktionen $y = x^k$

(k beliebige ganze Zahl)

$y = x^k$	k positiv		k negativ		$k = 0$
	gerade	ungerade	gerade	ungerade	
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$	$-\infty < x < \infty$ außer $x = 0$
Wertevorrat	$0 \leq y < \infty$	$-\infty < y < \infty$	$0 < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$ außer $y = 0$	$y = 1$



Die Definitionsbereiche der Potenzfunktionen ergeben sich einfach aus der Tatsache, dass man außer der Null jede reelle Zahl mit einem beliebigen ganzzahligen Exponenten potenzieren kann. Die Zahl Null kann nicht mit negativen Exponenten potenziert werden, da das eine Division durch Null bedeuten würde. Ebenso ist 0^0 nicht definiert.

Die Wertevorräte der Potenzfunktionen bestehen aus allen den Zahlen y, für die es eine Zahl x gibt, so dass $y = x^k$ gilt. Dass das auch alle in der Tabelle jeweils angegebenen reellen Zahlen sind, folgt aus der Lösbarkeit der Gleichung $x^k = y$ bei vorgegebenem y und k.

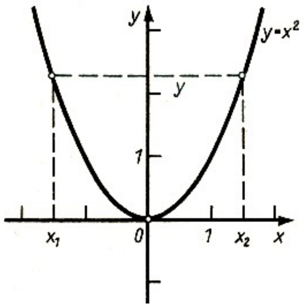
	k positiv		k negativ	
$y = x^k$	gerade	ungerade	gerade	ungerade
Gemeinsame Punkte	$(-1;1),(1{,}1)$ $(0{,}0)$	$(-1;-1),(1{,}1)$ $(0{,}0)$	$(-1;1),(1{,}1)$ $(-1;1),(1{,}1)$	$(-1;-1),(1{,}1)$ $(-1;-1),(1{,}1)$
steigend	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < 0$	
fallend	$-\infty < x \leq 0$		$0 < x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$ und $0 < x < \infty$

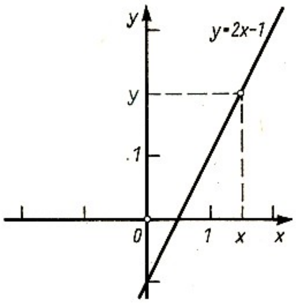
3.9 Der Begriff der Umkehrfunktion

Umkehrbar eindeutige Funktionen eineindeutige Funktionen

▶ Definition 28:
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt umkehrbar eindeutig oder eineindeutig, wenn nicht nur jedem Element des Definitionsbereichs (Argument) genau ein Funktionswert zugeordnet ist, sondern auch umgekehrt zu jedem Funktionswert genau ein Argument gehört.

■ a) Die Funktion $y = x^2$ ist nicht eineindeutig; denn zu jedem Funktionswert $y > 0$ gehören zwei Argumente x_1 und x_2 mit $x_1 = -x_2$.
b) Die Funktion $y = 2x - 1$ ist eineindeutig, denn zu jedem Funktionswert y gehört genau ein Argument x.





Vertauscht man die Reihenfolge der Elemente in allen Paaren einer Funktion, so ist die dabei entstehende Paarmenge genau dann wieder eine Funktion, wenn die gegebene Funktion eineindeutig ist. Denn nur dann ist die durch die Vertauschung entstandene Zuordnung auch wieder eindeutig.

▶ Definition 29: Durch Vertauschung der Elemente in allen Paaren $[x;y]$ einer eineindeutigen Funktion f entsteht, eine Funktion, die aus den Paaren $[y;x]$ besteht. Diese Funktion heißt Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu der gegebenen Funktion.

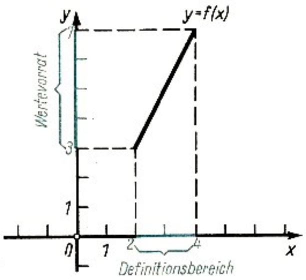
Nach der in dieser Definition angegebenen Vertauschung ist der Definitionsbereich der gegebenen Funktion der Wertevorrat ihrer Umkehrfunktion und der Wertevorrat der gegebenen Funktion der Definitionsbereich ihrer Umkehrfunktion.
Zur Unterscheidung von der ursprünglichen Funktion f bezeichnet man ihre Umkehrfunktion mit f oder mit einem anderen Buchstaben wie etwa g, h, y. Sehr gebräuchlich ist auch die Bezeichnung f^{-1}.

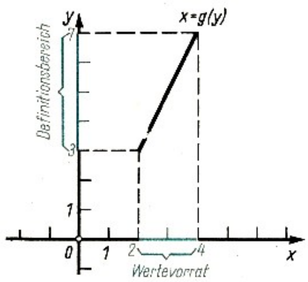
■ $y = f(x) = 2x - 1$
Definitionsbereich: $2 \leq x \leq 4$; Wertevorrat: $3 \leq y \leq 7$
Die zugehörige Umkehrfunktion besteht aus allen Paaren $[y;x]$, in denen einem beliebigen Argument y mit $3 \leq y \leq 7$ ein Funktionswert x mit $2 \leq x \leq 4$ zugeordnet ist. Zu vorgegebenem Argument y erhält man den zugehörigen Funktionswert x am einfachsten, indem man

die Gleichung der gegebenen Funktion nach x auflöst:

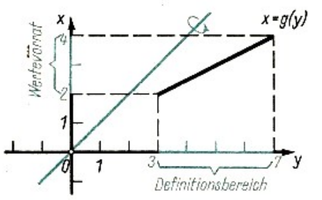
$$x = g(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \qquad \text{(Gleichung der Umkehrfunktion)}$$

Definitionsbereich: $3 \leq y \leq 7$; Wertevorrat: $2 \leq x \leq 4$





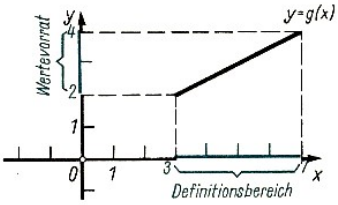
Im Unterschied zur Funktion $y = f(x)$ sind jetzt mit der Funktion $x = g(y)$ die Argumente auf der y-Achse und die Funktionswerte auf der x-Achse aufgetragen. Daher haben beide Funktionen dasselbe Bild.



Das Achsenkreuz wird durch Klappung um die Gerade $y = x$ in die gewohnte Lage gebracht, d. h., die Achse für die Argumente zeigt nach rechts und die Achse für die Funktionswerte zeigt nach oben.

$$x = g(x) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

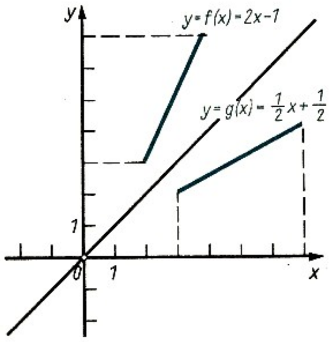
(Gleichung der Umkehrfunktion), Definitionsbereich: $3 \leq y \leq 7$; Wertevorrat: $2 \leq x \leq 4$



Übergang zur gewohnten Bezeichnung der Variablen und Achsen:

$$y = g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(Gleichung der Umkehrfunktion) Definitionsbereich: $3 \leq x \leq 7$; Wertevorrat: $2 \leq y \leq 4$



Zeichnet man das Bild der Funktion $y = f(x)$ und das Bild ihrer Umkehrfunktion $y = g(x)$ in ein und dasselbe Achsenkreuz, so liegen diese Bilder wegen der Klappung des Achsenkreuzes achsensymmetrisch zur Geraden $y = x$.
Bildet man die Umkehrfunktion von $y = g(x)$, so erhält man wieder die ursprünglich gegebene Funktion $y = f(x)$:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \qquad \text{(Auflösen nach x:)}$$
$$x = 2y - 1 \qquad \text{(Vertauschung der Variablenbezeichnung:)}$$
$$y = 2x - 1 \qquad \text{(Das ist die gegebene Funktion.)}$$

► Satz 30: Bildet man zu einer gegebenen Funktion deren Umkehrfunktion und von dieser wiederum die Umkehrfunktion, so erhält man die gegebene Funktion.

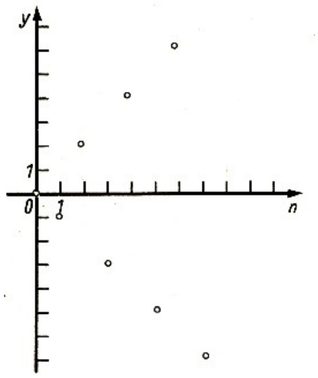
Dieser Satz ergibt sich aus der Tatsache, dass man nach zweimaliger Vertauschung der Elemente in allen Paaren einer Funktion wieder die ursprüngliche Paarmenge erhält.

Die Funktion $y = x^2$ ist in dem Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$ nicht eineindeutig, hat also keine Umkehrfunktion.
Funktionen, die eine Umkehrfunktion besitzen, nennt man auch kurz umkehrbar.

► Satz 31: Wenn eine Funktion monoton ist, so ist sie eineindeutig und damit umkehrbar.

Beweis:
Angenommen, die betrachtete Funktion sei monoton wachsend. Das bedeutet, dass diese Funktion für irgend zwei verschiedene Argumente nicht denselben Wert annehmen kann; denn zum größeren Argument gehört auch immer ein größerer Funktionswert. Zu jedem Funktionswert gehört also nur ein Argument.
Nach Definition C 28 ist die Funktion damit eineindeutig. Falls die betrachtete Funktion monoton fallend ist, verläuft die Überlegung ganz entsprechend. w.z.b.w.

Bemerkung: Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, d. h., es gibt eineindeutige Funktionen, die nicht monoton sind.



$$y = f(n) = (-1)^n n$$

Definitionsbereich: Menge der natürlichen Zahlen
Wertevorrat: Menge der positiven geraden und der negativen ungeraden Zahlen
Wertetabelle

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
y	0	-1	2	-3	4	-5	6	-7	...

Diese Funktion ist eineindeutig und damit umkehrbar:
a) Zu jedem Argument n gehört genau ein Funktionswert y.
b) Umgekehrt gehört auch zu jedem Funktionswert y genau ein Argument n.
Die Funktion ist aber nicht monoton.

a) Sie ist nicht monoton wachsend.
Beispielsweise gilt für $n_1 = 2$ und $n_2 = 5$: $n_1 < n_2$ aber $f(n_1) > f(n_2)$, denn $f(n_1) = 2$ und $f(n_2) = -5$.
b) Sie ist auch nicht monoton fallend.
Beispielsweise gilt für $n_1 = 3$ und $n_2 = 4$: $n_1 < n_2$ aber $f(n_1) < f(n_2)$, denn $f(n_1) = -3$ und $f(n_2) = 4$.

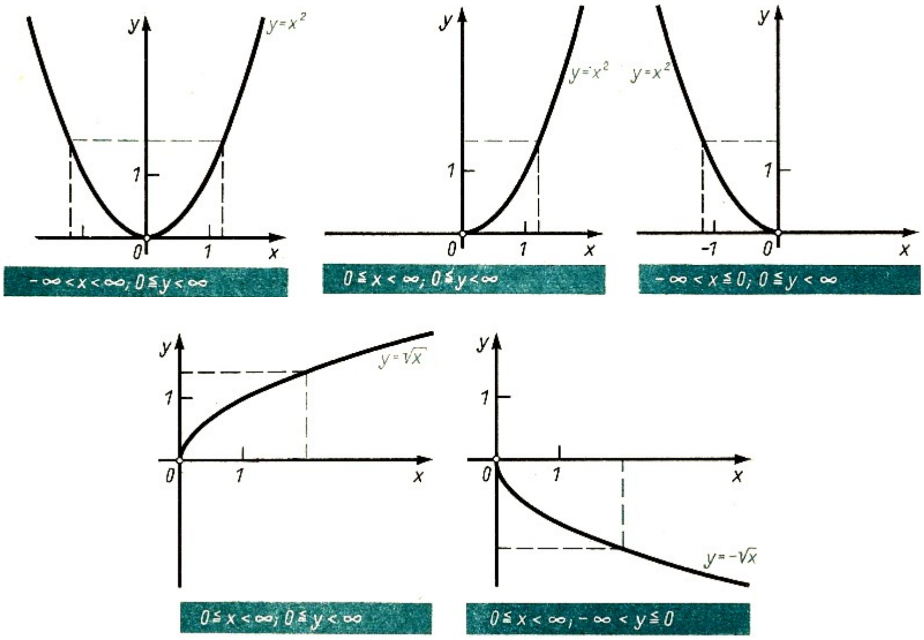
Aus nicht eineindeutigen Funktionen kann man oft durch Einschränkung des Definitionsbereichs eineindeutige und damit umkehrbare Funktionen gewinnen.

■ $y = x^2$
Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$
Einschränkung des Definitionsbereichs: $y = x^2$
Definitionsbereich: $0 \leq< x < \infty$
Diese Funktion ist monoton wachsend, also auch eineindeutig. (Abbildungen nächste Seite)

Beweis:
Für beliebige Argumente x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ aus dem Definitionsbereich $0 < x < \infty$ gilt:

$f(x_1) < f(x_2)$, d.h. $x_1^2 < x_2^2$. Das kann man folgendermaßen zeigen:

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$



Nun ist aber $x_1 + x_2 > 0$, da beide Argumente nicht negativ sind und x_2 nicht gleich 0 ist. Außerdem ist wegen $x_1 < x_2$ die Differenz $x_1 - x_2$ negativ.
Das Produkt $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ ist also negativ. Daher gilt
$x_1^2 - x_2^2 < 0$ also $x_1^2 < x_2^2$ w.z.b.w.
Entsprechend ist die Funktion $y = x^2$ (Definitionsbereich: $-\infty < x \leq 0$ monoton fallend.

Bildung der Gleichung der Umkehrfunktion: $y = x^2$

Auflösen nach x	
für $0 \leq x < \infty$	für $-\infty < x \leq 0$
$x = \sqrt{y}$	$x = -\sqrt{y}$
Umbenennung der Variablen	
$y = \sqrt{x}$	$y = -\sqrt{x}$

3.10 Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$ ($n \neq 0$; n Natürl. Zahl)

Der Wurzelbegriff

Zu jeder nichtnegativen Zahl a und zu jeder positiven ganzen Zahl n gibt es genau eine nichtnegative reelle Zahl, die Lösung der Gleichung $x^n = a$ ist.

▶ Definition 32: ist a eine beliebige nichtnegative reelle Zahl und n eine positive ganze Zahl, so bezeichnet man die nichtnegative reelle Zahl b, für die $b^n = a$ gilt, mit $b = \sqrt[n]{a}$ (gelesen: n-te Wurzel aus a).
Die Zahl a heißt Radikand, die Zahl n heißt Wurzelexponent.

Die Operation, die den Zahlen n und a die Zahl $b = \sqrt[n]{a}$ zuordnet, heißt Radizieren oder Wurzelziehen. Nach Definition C 32 ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist. Es gilt also

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Statt $\sqrt[2]{a}$ (auch gelesen: Quadratwurzel aus a) schreibt man kürzer $\sqrt{a}$ (gelesen: Wurzel aus a). Für $\sqrt[3]{a}$ liest man auch: Kubikwurzel aus a.
Nach Definition C 32 ist $\sqrt[1]{a} = a$. Daher wird das Zeichen $\sqrt[1]{}$ üblicherweise nicht benutzt.

Dritte Erweiterung des Potenzbegriffes auf beliebige rationale Exponenten

▶ Definition 33: Ist a eine beliebige positive Zahl, m eine beliebige ganze Zahl und n eine beliebige positive ganze Zahl, so wird die Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ durch folgende Gleichung definiert:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Falls $\frac{m}{n} > 0$, so ist die Definitionsgleichung auch für $a = 0$ sinnvoll, denn es gilt $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = \sqrt[n]{0} = 0$.

▶ Definition 34: $0^{\frac{m}{n}} = 0$, falls $\frac{m}{n} > 0$.

Für $m = 1$ ergibt sich aus der Definition C 33 der Spezialfall

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (a \geq 0)$$

Die Definition C 33 erweitert den Potenzbegriff auf rationale Exponenten so, dass die Potenzgesetze (↗ 134) weiter gelten.
Die Potenzgesetze für Potenzen mit gebrochen rationalen Exponenten in Wurzelschreibweise werden auch Wurzelgesetze genannt.

■ a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^4}}{\sqrt[3]{4z^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^4y^5}{2z^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^2y^4}{4z^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^4y^5}{2z^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^2y^4 \cdot x^4y^5}{4z^2 \cdot 2z^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^6y^9}{8z^6}} = \dfrac{x^2y^3}{2z^2}$
b) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3} = x$
c) $(\sqrt[3]{5})^6 = \sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{5}{3}} = 5^2 = 25$

Für $a \geq 0$ gilt $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.
Falls der Wurzelexponent gerade ist, existiert $\sqrt[n]{a^n}$ auch für $a < 0$. In diesem Fall gilt jedoch $\sqrt[n]{a^n} = |a|$; (n gerade).

■ a) $\sqrt[6]{2^6} = (\sqrt[6]{2})^6 = 2$
b) $\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[6]{64} = 2 = |-2|$, und nicht etwa
$\sqrt[6]{(-2)^6} = (\sqrt[6]{-2})^6 = -2$, denn $\sqrt[6]{-2}$ existiert nicht.

Rationalmachen des Nenners

Steht im Nenner eines Bruches eine Wurzel, so gelingt es mitunter, durch Erweitern oder Kürzen die Wurzel zu beseitigen. Das nennt man Rationalmachen des Nenners.

■ a) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$
b) $\dfrac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} + \sqrt{12}} = \dfrac{(\sqrt{18} - \sqrt{12})(\sqrt{18} + \sqrt{12})}{(\sqrt{18} + \sqrt{12})(\sqrt{18} + \sqrt{12})} = \dfrac{18 - 2\sqrt{12 \cdot 18} + 12}{18 - 12} = \dfrac{30 - 12\sqrt{6}}{6} = 5 - 2\sqrt{6}$

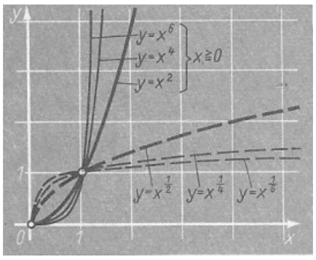
Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}}$, Die Funktionen $y = x^{\frac{1}{2m}}$ $(m = 1,2,3,...)$

Jede Potenzfunktion $y = x^{2m}$; $(m = 1,2,...)$ ist für $x \geq 0$ monoton steigend und daher eineindeutig (↗ Bild). In diesem Bereich ist sie also umkehrbar.

$y = x^{2m}$, Definitionsbereich: $0 \leq x < \infty$

Umkehrfunktion $\left\{ \begin{array}{ll} x = \sqrt[2m]{y} = y^{\frac{1}{2m}} & \text{Definitionsbereich: } 0 \leq y < \infty \\ y = \sqrt[2m]{x} = x^{\frac{1}{2m}} & \text{Definitionsbereich: } 0 \leq x < \infty \end{array} \right\}$

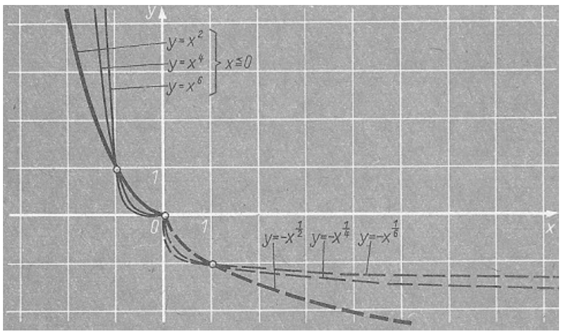
Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{2m}} = \sqrt[2m]{x}$ heißen auch Wurzelfunktionen. Sie sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen $y = x^{2m}$ mit dem Definitionsbereich $0 \leq x < \infty$.
Die Bilder dieser Wurzelfunktionen liegen daher achsensymmetrisch zu den Bildern der entsprechenden Potenzfunktionen bezüglich der Geraden $y = x$.



Auch die Funktionen $y = x^{2m}$ mit dem Definitionsbereich $-\infty < x \leq 0$ sind monoton (fallend) und daher umkehrbar. Als Umkehrungen erhält man die Funktionen

$$y = -x^{\frac{1}{2m}} = -\sqrt[2m]{x}$$

Definitionsbereich. $0 \leq x < \infty$.

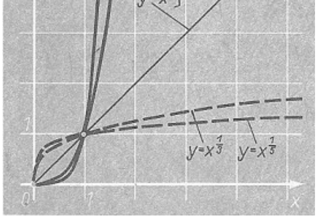


Die Funktionen $y = x^{\frac{1}{2m-1}}$ $(m = 1{,}2{,}3{,}...)$

Jede Potenzfunktion $y = x^{2m-1}$ $(m = 1{,}2{,}...)$ ist für $x \geq 0$ monoton steigend und daher eineindeutig. Sie ist also in diesem Bereich umkehrbar.

$y = x^{2m-1}$, Definitionsbereich: $0 \leq x < \infty$.

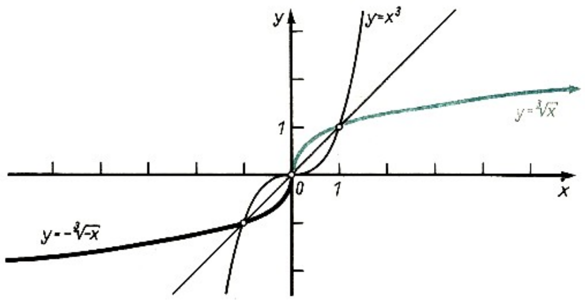
Umkehrfunktion $\left\{ \begin{array}{ll} x = \sqrt[2m-1]{y} = y^{\frac{1}{2m-1}} & \text{Definitionsbereich: } 0 \leq y < \infty \\ y = \sqrt[2m-1]{x} = x^{\frac{1}{2m-1}} & \text{Definitionsbereich: } 0 \leq x < \infty \end{array} \right\}$



Diese Wurzelfunktionen sind also die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen $y = x^{2m-1}$ mit dem Definitionsbereich $0 \leq x < \infty$. Die Bilder der Funktionen $y = \sqrt[2m-1]{x}$ liegen also achsensymmetrisch zu den Bildern der Funktionen $y = x^{2m-1}$ bezüglich der Geraden $y = x$.

Die Potenzfunktionen $y = x^{2m-1}$ sind im Gegensatz zu den Potenzfunktionen $y = x^{2m}$ für $-\infty < x < \infty$, also auf der ganzen x-Achse, monoton (steigend) und damit umkehrbar.
Die Umkehrfunktionen sind aber nicht durch eine einzige Gleichung darstellbar, da Wurzeln nur für nicht negative Radikanden definiert sind (Def. C 33).

Potenzfunktion	Umkehrfunktion
$y = x^{2m-1}$ Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$	$y = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{x} & \text{für } 0 \leq x < \infty \\ -\sqrt[2m-1]{-x} & \text{für } -\infty < x \leq 0 \end{cases}$



■

3.11 Die Exponentialfunktionen $y = a^x$ $(a > 0)$

Vierte Erweiterung des Potenzbegriffs

Auf Grund folgender Überlegungen lässt sich der Potenzbegriff für $a > 0$ sogar auf beliebige reelle Zahlen als Exponenten erweitern.
Die Potenz $3^{\sqrt{2}}$ wird folgendermaßen durch eine Intervallschachtelung (7 72). definiert.

Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$	
r_n	s_n
1	2
1,4	1,5
1,41,	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143
1,41421	1,41422

Näherungswerte für	
3^{r_n}	3^{s_n}
3	9
4,6	5,2
4,74	4,76
4,728	4,733
4,7287	4,7293
4,12879	4,72884

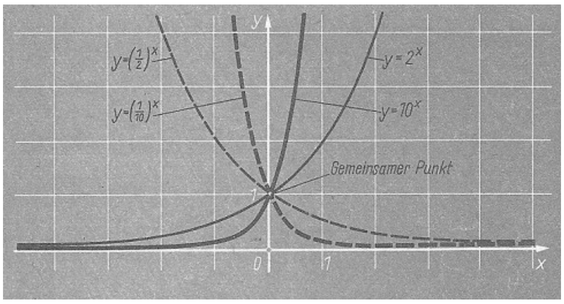
Die Näherungswerte für die reellen Zahlen 3^{r_n} und 3^{s_n} bilden ihrerseits eine Intervallschachtelung, die dieselbe reelle Zahl erfasst, wie die durch die reellen Zahlen 3^{r_n} und 3^{s_n} selbst gebildete Schachtelung.
Diese Zahl wird als $3^{\sqrt{2}}$ definiert. Sie ist unabhängig von der für $\sqrt{2}$ gewählten Schachtelung eindeutig bestimmt.
Es gilt $3^{\sqrt{2}} = 4{,}728...$

Auf die Beweise dieser Behauptungen muss wegen ihrer Schwierigkeiten verzichtet werden. Für den so erweiterten Potenzbegriff gelten die Potenzgesetze (Satz 23).

Exponentialfunktionen

Für jedes feste $a > 0$ bilden die durch die Gleichung $y = a^x$ gegebenen Paare $[x; y]$ eine Funktion, deren Definitionsbereich das Intervall $-\infty < x < \infty$, also die Menge aller reellen Zahlen ist.
Diese Funktionen heißen Exponentialfunktionen.

■ $a = 2$: $y = 2^x$; $\quad a = 10$: $y = 10^x$; $\quad a = 1$: $y = 1^x$;
$a = \frac{1}{2}$: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$; $\quad a = \frac{1}{10}$: $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^{-x}$



Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$; Wertebereich: $0 < y < \infty$

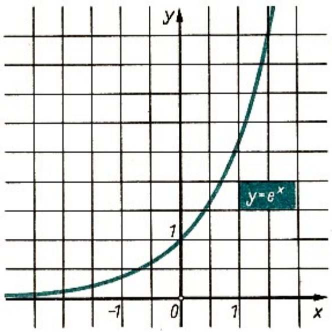
Die Bilder der Funktionen $y = a^x$ liegen achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse zu den Bildern der entsprechenden Funktionen $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, denn für entgegengesetzte Argumente werden die gleichen Funktionswerte angenommen.

Für $a > 1$ sind die Exponentialfunktionen monoton wachsend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Bilder asymptotisch der x-Achse.
Für $0 < a < 1$ sind die Exponentialfunktionen monoton fallend. Für größer werdende Argumente nähern sich ihre Bilder asymptotisch der x-Achse.

Für $a = 1$ ergibt sich $y = 1^x$, also die konstante Funktion $y = 1$.
Keine Exponentialfunktion hat eine Nullstelle. Die Bilder aller Exponentialfunktionen verlaufen durch den Punkt $(0; 1)$, denn für beliebiges $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$, insbesondere also für $a > 0$.

Der Wertevorrat jeder Exponentialfunktion $y = a^x$; $(a > 0)$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen. Das erkennt man folgendermaßen

1) Jede solche Funktion hat wegen der positiven Basis nur positive Funktionswerte.
2) Es treten auch alle positiven reellen Zahlen als Funktionswerte auf, denn zu jedem positiven y gibt es genau eine reelle Zahl x, für die $y = a^x$ bei fest vorgegebenem $a > 0$ und $a \neq 1$ gilt.
Beide Behauptungen werden mit Hilfe von Intervallschachtelungen bewiesen.



Die Zahl e

In den Naturwissenschaften und in der Technik tritt häufig eine Exponentialfunktion auf, deren Basis irrational ist und mit e bezeichnet wird. Ein Näherungswert dieser Zahl ist
$e = 2{,}718281828459$.

■ Der Zerfall eines radioaktiven Elements wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(t) = ne^{-kt}$$

Dabei gibt der jeweilige Funktionswert $f(t)$ die Anzahl der zur Zeit t vorhandenen radioaktiven Atome an, wenn n die Anzahl der zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandenen radioaktiven Atome ist. Die Zahl k ist eine für das betreffende Element charakteristische Konstante.

Bemerkung: Prinzipiell kann man Exponentialfunktionen auch für Basen $a <= 0$ definieren. Dies erweist sich jedoch als wenig sinnvoll, da diese Funktionen im Fall $a < 0$ nur für ganzzahlige Argumente definiert sind.
Im Fall $a = 0$ erhält man die Funktion $y = 0^x$; $(x \neq 0)$. Ihr Bild ist die x-Achse ohne den Ursprung.

Additionstheorem für Exponentialfunktionen

Wegen $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ $(a > 0)$ gilt für alle Exponentialfunktionen $y = f(x) = a^x$ folgendes Additionstheorem:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

3.12 Die Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

Zu jeder positiven Zahl b und zu jeder positiven Zahl $a \neq 1$ gibt es genau eine Zahl x, die Lösung der Gleichung $b = a^x$ ist.

Der Logarithmus

► Definition 35: Ist $a > 0$, $a \neq 1$ und $b > 0$, so bezeichnet man die eindeutig bestimmte Zahl x, für die $b = a^x$ gilt, mit $x = \log_a b$ (gelesen: Logarithmus von b zur Basis a).
Dabei heißt die Zahl b der zum Logarithmus gehörige Numerus.
Die Operation, die den Zahlen a und b die Zahl $x = \log_a b$ zuordnet, heißt Logarithmieren.

■ $b = 2^x$; $x = \log_2 b$

2^x	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		b
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1		$\log_2 b$
2^x	1	2	4	8	16	32	64	b
x	0	1	2	3	4	5	6	$\log_2 b$

Logarithmengesetze

► Satz 36:
1) $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$
2) $\log_a \left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$
3) $\log_a b^c = c \log_a b$
für $c = \frac{1}{n}$ ergibt sich hieraus: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

Beweis zu 1)
Setzt man $\log_a b_1 = x_1$ und $\log_a b_2 = x_2$, so folgt $b_1 = a^{x_1}$ und $b_2 = a^{x_2}$.
Dann ist $b_1 \cdot b_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, also $\log_a(b_1 \cdot b_2) = x_1 + x_2$.
Setzt man in dieser Gleichung für x_1 und x_2 aus den ersten Gleichungen $\log_a b_1$ bzw. $log_a b_2$ ein, so folgt:
$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ w.z.b.w.

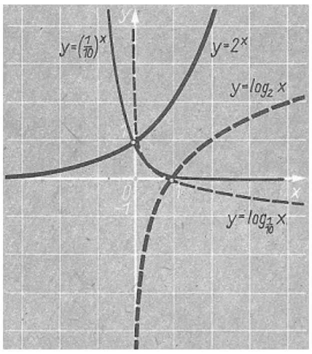
Die Logarithmusfunktion

Jede Exponentialfunktion $y = a^x$; $(a \neq 1)$ ist monoton, also eineindeutig und damit umkehrbar.

$y = a^x$ $(a \neq 1)$, Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$, Wertebereich $0 < y < \infty$

Umkehrfunktion $\left\{ \begin{array}{ll} x = \log_a y & \text{Definitionsbereich } 0 < y < \infty, \text{Wertebereich } -\infty < x < \infty \\ y = \log_a x & \text{Definitionsbereich } 0 < x < \infty, \text{Wertebereich } -\infty < y < \infty \end{array} \right\}$

Die Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$; $(a \neq 1)$ sind also die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen $y = a^x$; $(a \neq 1)$ und umgekehrt. Ihre Bilder liegen zueinander achsensymmetrisch bezüglich der Geraden $y = x$.



Für $a > 1$ sind die Logarithmusfunktionen monoton wachsend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Bilder asymptotisch der negativen y-Achse.
Für $0 < a < 1$ sind die Logarithmusfunktionen monoton fallend. Für kleiner werdende Argumente nähern sich ihre Bilder asymptotisch der positiven y-Achse.

Alle Logarithmusfunktionen haben als einzige Nullstelle $x = 1$, d. h., ihre Bilder verlaufen durch den Punkt $(1; 0)$. Für jede Basis a gilt also $\log_a 1 = 0$ (wegen $a^0 = 1$). Ebenso gilt $\log_a a = 1$ (wegen $a^1 = a$).

Dekadischer und natürlicher Logarithmus

Für das Rechnen mit Logarithmen werden üblicherweise die Basen 10 (dekadischer Logarithmus) und e (natürlicher Logarithmus) verwendet. Zur Abkürzung wird dabei folgende Schreibweise verabredet:

statt $\log_{10} x$ schreibt man $\lg x$ (gelesen: Logarithmus x oder l - g - x),
statt $\log_e x$ schreibt man $\ln x$ (gelesen: Logarithmus naturalis x oder l - n - x).

Die Logarithmen mit diesen Basen lassen sich auf Grund folgender Zusammenhänge ineinander umrechnen. Man setzt
(1) $x = 10^y$; daraus folgt
(2) $y = \lg x$
Aus Gleichung (1) folgt durch Logarithmieren
$\ln x = \ln 10^y$ oder $\ln x = y \cdot \ln 10$
Daraus erhält man durch Einsetzen für y aus Gleichung (2):

$$\ln x = \lg x \cdot \ln 10 \qquad , \qquad \lg x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln 10}$$

Aus den Umrechnungsgleichungen erhält man für $x = e$:

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10}$$

Damit kann man die Umrechnungsgleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$\ln x = \lg x \cdot \frac{1}{\lg e} \qquad , \qquad \lg x = \ln x \cdot \lg e$$

Es gilt $\lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4343$ (auf vier Dezimalen genau) und $\ln 10 = \frac{1}{\lg e} = 2{,}3026$ (auf vier Dezimalen genau).
Allgemein gilt für beliebige Basen folgende Umrechnungsgleichung:

$$\log_a x = \log_b x \cdot \frac{1}{\log_b a}$$

■ Gegeben: $\lg x = 1{,}5832$, Gesucht: $\ln x$
$\ln x = 1{,}5832 \cdot 2{,}3026 = 3{,}6455$

3.13 Gebrauch der Logarithmentafeln

Jede positive Zahl x lässt sich in der Form $r \cdot 10^k$ darstellen, wobei k eine ganze Zahl und r eine reelle Zahl ist mit $1 \leq r < 10$.

▶ Satz 37: Der dekadische Logarithmus jeder positiven reellen Zahl x lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\lg x = \lg r + k$$

mit $1 \leq r < 10$, (also $0 \leq \lg r < 1$) und k ganzzahlig.

Beweis:
Die Zahl x wird dargestellt als $x = r \cdot 10^k$; $(1 \leq r < 10)$ Dann gilt:

$$\lg x = \lg(r \cdot 10^k) = \lg r + \lg 10^k = \lg r + k \cdot \lg 10 = \lg r + k$$

w.z.b.w.

Mantisse, Kennzahl

▶ Definition 38: In der Darstellung des dekadischen Logarithmus für $\lg x$ heißt $\lg r$ die Mantisse und k die Kennzahl des betreffenden Logarithmus.

Wenn man also die dekadischen Logarithmen für Numeri zwischen 1 und 10, d. h. die Mantissen kennt, so kann man durch Addition der entsprechenden Kennzahl zur Mantisse die Logarithmen für beliebige Numeri finden.
Da die Dezimaldarstellungen der Mantissen mit "0,..." beginnen, genügt es, in einer Logarithmentafel nur die Ziffern anzugeben, die auf das Komma folgen.
Die Logarithmen sind im allgemeinen irrationale Zahlen. Daher müssen diese Angaben gerundet werden. Je nach Genauigkeit spricht man von vier-, fünf- oder siebenstelligen Logarithmentafeln.

■
$$\begin{aligned}
\lg 4863 &= \lg(4{,}863 \cdot 10^3) = \lg 4{,}863 + \lg 10^3 = \lg 4{,}863 + 3 = 3{,}6869 \\
\lg 486{,}3 &= \lg(4{,}863 \cdot 10^2) = \lg 4{,}863 + \lg 10^2 = \lg 4{,}863 + 2 = 2{,}6869 \\
\lg 48{,}63 &= \lg(4{,}863 \cdot 10^1) = \lg 4{,}863 + \lg 10^1 = \lg 4{,}863 + 1 = 1{,}6869 \\
\lg 4{,}863 &= \lg(4{,}863 \cdot 10^0) = \lg 4{,}863 + \lg 10^0 = \lg 4{,}863 + 0 = 0{,}6869 \\
\lg 0{,}4863 &= \lg(4{,}863 \cdot 10^{-1}) = \lg 4{,}863 + \lg 10^{-1} = \lg 4{,}863 - 1 = 0{,}6869 - 1 \\
\lg 0{,}04863 &= \lg(4{,}863 \cdot 10^{-2}) = \lg 4{,}863 + \lg 10^{-2} = \lg 4{,}863 - 2 = 0{,}6869 - 2
\end{aligned}$$

Für das Rechnen mit Logarithmen ist es zweckmäßig, positive Kennzahlen vor das Komma zu schreiben, die negativen dagegen hinter die Mantisse zu schreiben.

Regeln für das Aufsuchen von dekadischen Logarithmen in der Tafel

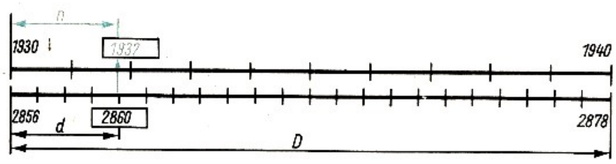
a) Die Mantisse ergibt sich aus der geltenden Ziffernfolge des Numerus ohne Rücksicht auf die Stellung des Kommas. Dabei beginnt die "geltende Ziffernfolge" mit der ersten von 0 verschiedenen Ziffer von links.
b) Die Kennzahl ergibt sich aus der Stellung des Kommas.

Numerus: $N > 1$; Kennzahl: $k > 0$
Die Kennzahl k ist um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen des Numerus vor dem Komma.

Numerus: $0 < N < 1$; Kennzahl: $k < 0$
Der Betrag der Kennzahl k ist gleich der Anzahl der Nullen vor der geltenden Ziffernfolge des Numerus, einschließlich der Null vor dem Komma.

■ a) $x = 635{,}8$
Gesucht: $\lg x$; Kennzahl: $k = 2$; $\lg x = 2{,}...$
Geltende Ziffernfolge des Numerus: 6358, Mantisse: 8034,
$\frac{d}{n} = \frac{D}{10}$; $d = \frac{D\cdot n}{10} = \frac{7\cdot 8}{6} \approx 6$
$\lg x = 2{,}8034$

b) $\lg x = 0{,}2860 - 3$
Gesucht: x; Mantisse: 2860; Geltende Ziffernfolge des Numerus: 1932
$\frac{d}{n} = \frac{D}{10}$; $n = \frac{D\cdot 10}{d} = \frac{10\cdot 4}{22} \approx 2$
$x = 0{,}001932$



Mit Hilfe der Logarithmen lassen sich numerische Rechnungen leichter ausführen.

■ a) $x = \frac{84{,}52^3 \cdot \sqrt[3]{164{,}2} \cdot 0{,}3}{\sqrt{111{,}2} \cdot 0{,}0092^3} = \frac{z}{n}$

N	$\lg N$	
84,52	1,9270	$\|\cdot$ 3
164,2	2,2153	|:3
111,2	2,0461	|:2
0,0092	0,9638 - 3	|·3
$84{,}52^3$	5,7810	
$\sqrt[3]{164{,}2}$	0,7384	|+
0,3	0,4774 -1	
z	6,9965 -1	
$\sqrt{112}$	1,0230	|+
$0{,}0092^3$	2,8914 - 9	|-
n	3,9144 - 9	
x	11,0821	

$x = 120800000000$

b) $x = \frac{6{,}438 \cdot 0{,}1749 + \sqrt[4]{83510}}{14{,}98^2 \cdot 4{,}502} = \frac{z}{n}$

N	$\lg N$	
83510	4,9218	|:4
14,98	1,1755	|$\cdot$ 2
6,438	0,8088	|+
0,1749	0,2427 - 1	
1,126	0,0515	
$\sqrt[4]{83510}$	1,2304	
17,00	1,2304	|+
18,126	1,2584	|=
$z \approx$ 18,13	3,2584 - 2	
$14{,}98^2$	2,3510	
4,502	0,6534	|+
n	3,0044	|-
x	0,2540 - 2	

$x = 0{,}01795$

3.14 Die Winkelfunktionen

Winkelmaße

Die Maßeinheiten für die Winkelmessung werden als Bruchteile eines Vollwinkels definiert.

Altgrad

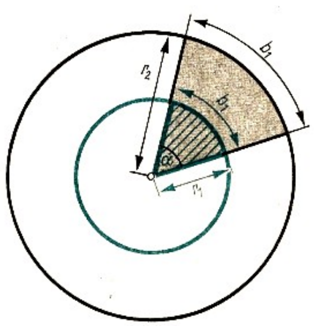
Maßeinheit 1° (ein Grad): der 360. Teil eines Vollwinkels
$1^\circ = 60'$ (Minuten); $1' = 60''$ (Sekunden)

Neugrad

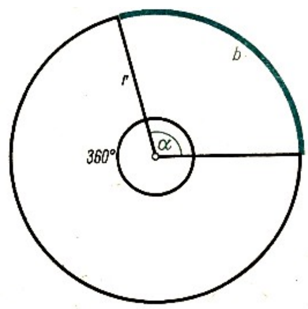
Maßeinheit 1^g (ein Neugrad oder Gon): der 400. Teil eines Vollwinkels
$1^g = 100^c$ (Neuminuten); $1^c = 100^{cc}$ (Neusekunden)

Bogenmaß

Maßeinheit 1 rad (ein Radiant): der 2π-te Teil eines Vollwinkels
1 rad $\approx$ 57,30°
Durch diese Maßeinheit wird jedem Winkel α eine Maßzahl $\operatorname{arc}\alpha$, das Bogenmaß des betreffenden Winkels, zugeordnet. Zeichnet man diesen Winkel als Zentriwinkel in einen beliebigen Kreis ein, so ergibt sich sein Bogenmaß auch als Verhältnis der Länge des zugehörigen Bogens zur Länge des Radius. Dieses Verhältnis ist für alle Kreise gleich, da alle Kreissektoren mit demselben Zentriwinkel ähnlich sind.



Es gilt also $\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2}$.



Für einen beliebigen Kreis gilt: $\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{b}{2\pi r}$, daraus folgt

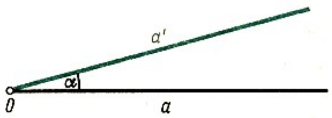
$$\frac{b}{r} = \frac{2\pi}{360°} \cdot \alpha° \qquad (*)$$

Das Verhältnis $\frac{b}{r}$ ist also genau dann gleich 1, wenn α der 2π-te Teil eines Vollwinkels ist, d.h. $\frac{b}{r} = 1$ genau dann, wenn $\alpha = 1$ rad.
Allgemein gilt: $\frac{b}{r} = \operatorname{arc}\alpha$. Aus Gleichung (*) folgt dann

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha°$$

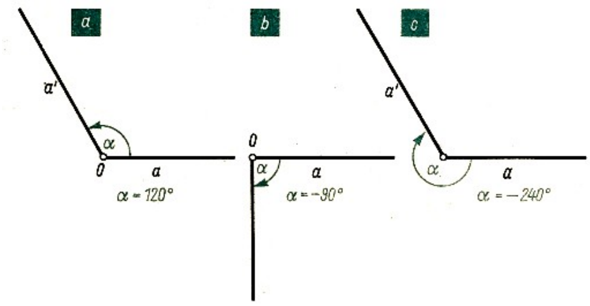
Erweiterung des Winkelbegriffs

Die Schenkel eines Winkels können auch als Original und Bild bei der Drehung eines Strahls um seinen Anfangspunkt angesehen werden. So ist im folgenden Bild der Strahl a' das Bild des Strahls a bei einer Drehung um den Winkel α mit dem Anfangspunkt O des Strahls a als Drehzentrum.



Positive, negative Drehrichtung

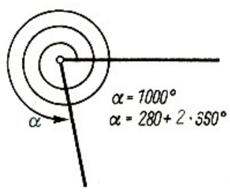
Als positive Drehrichtung wird die der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzte Richtung festgesetzt. Die negative Drehrichtung ist die Richtung, in der sich der Uhrzeiger bewegt.

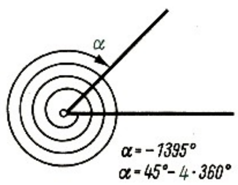


Bei einer bestimmten Drehung wird die Drehrichtung durch das entsprechende Vorzeichen des Winkelmaßes angegeben. Das Zeichen "+" wird wie üblich weggelassen.

Winkel über 360°

Bei der Betrachtung trigonometrischer Funktionen erweist es sich als notwendig, auch Winkel zu definieren, deren Maß dem Betrag nach größer als 360° (bzw. 2π oder 400^g) ist. Dazu zählt man bei einer Drehung über den Vollwinkel hinaus im Sinne der ursprünglichen Messung über 360° bzw. -360° je nach Drehrichtung weiter.





$\alpha = 1000° = 280° + 2 \cdot 360°$ $\qquad$ $\alpha = -1395° = 45° + 4 \cdot 360°$

Hauptwert des Winkels

Das Maß x eines beliebigen Winkels lässt sich folgendermaßen angeben:

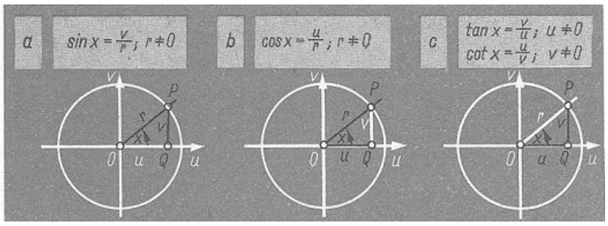
$$\left.\begin{array}{ll} x = \overline{x} + k \cdot 360^\circ & \text{(Gradmaß)} \\ x = \overline{x} + k \cdot 2\pi & \text{(Bogenmaß)} \\ 23 & \text{sonst} \end{array}\right\} \quad k \text{ ganze Zahl}$$

Dabei ist $\overline{x}$ ein Winkelmaß zwischen 0° und 360° bzw. zwischen 0 und 2π. Man nennt $\overline{x}$ den Hauptwert von x.

Winkelfunktionen

Zur Definition der Winkelfunktionen zeichnet man den jeweiligen Winkel in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Dabei fällt der eine Schenkel mit der positiven Richtung der Abszissenachse (u-Achse) zusammen. Der andere Schenkel wird beweglicher Schenkel genannt.

Der Punkt P ist der Schnittpunkt des beweglichen Schenkels eines beliebigen Winkels mit einem um den Ursprung O des Koordinatensystems gezeichneten Kreis mit dem Radius r. Der Punkt P hat die Koordinaten u und v.
Durch die im folgenden angegebenen Zuordnungen entstehen Funktionen, deren Definitionsbereiche Mengen von reellen Zahlen sind. Da aber in diesem Fall die reellen Zahlen als Maßzahlen von Winkeln aufgefasst werden, sprechen wir von "Winkel"funktionen.



Sinus, Kosinus

▶ Definition 39: Der Sinus eines Winkels mit dem Maß x ist das Verhältnis der Ordinate v des Punktes P zum Radius r des Kreises.

$$\sin x = \frac{v}{r}, \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad \text{(gelesen: Sinus } x$$

▶ Definition 40: Der Kosinus eines Winkels mit dem Maß x ist das Verhältnis der Abszisse u des Punktes P zum Radius r des Kreises.

$$\cos x = \frac{u}{r}, \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad \text{(gelesen: Kosinus } x$$

Tangens, Kotangens

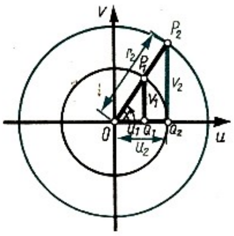
▶ Definition 41: Der Tangens eines Winkels mit dem Maß x ist das Verhältnis der Ordinate v zur Abszisse u des Punktes P, $(u \neq 0)$.

$$\tan x = \frac{v}{u}, \qquad (-\infty < x < \infty \text{ und } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \text{ ganz}) \qquad \text{(gelesen: Tangens } x$$

▶ Definition 42: Der Kotangens eines Winkels mit dem Maß x ist das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v des Punktes P, $v \neq 0$.

$$\cot x = \frac{u}{v}, \qquad (-\infty < x < \infty \text{ und } x \neq k \cdot \pi; k \text{ ganz}) \qquad \text{(gelesen: Kotangens } x$$

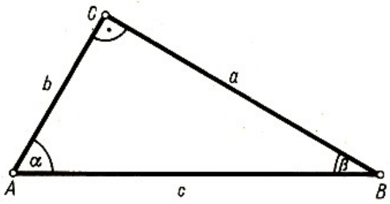
Bemerkung: Diese Definitionen der Winkelfunktionen sind unabhängig von der Wahl des Kreises und damit von der Größe des Radius r. Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke OQ_1P_1 und OQ_2P_2 gilt nämlich



$$\sin x = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} \quad , \quad \cos x = \frac{u_1}{r_1} = \frac{u_2}{r_2}$$
$$\tan x = \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \quad , \quad \cot x = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

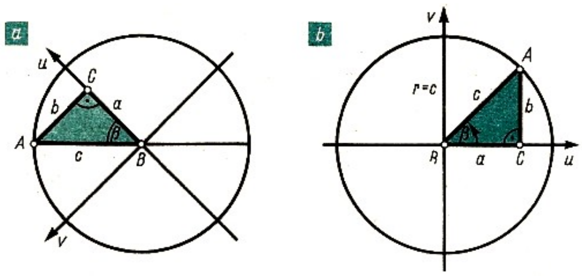
Für Winkel zwischen 0° und 90° lassen sich die Funktionswerte der Winkelfunktionen als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck auffassen.



▶ Satz 43: Im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ gilt

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$	Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse.
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\cos\beta = \frac{a}{c}$	Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von Ankathete zu Hypotenuse.
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\tan\beta = \frac{b}{a}$	Der Tangens eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von Gegenkathete zu Ankathete.
$\cos\alpha = \frac{b}{a}$ $\cot\beta = \frac{a}{b}$	Der Kotangens eines Winkels ist gleich dem Längenverhältnis von Ankathete zu Gegenkathete.

Beweis:

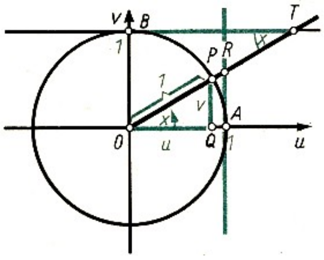


Jedes rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse c lässt sich wie im linken Bild in einen Kreis mit dem Radius $r = c$ und in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzeichnen.
Nach der Drehung dieses Koordinatensystems in die gewohnte Lage liest man auf Grund der Definitionen C 39 bis 42. die Behauptungen unmittelbar ab.
Beim Beweis für den Winkel β muss das Dreieck zunächst um eine seiner Seiten geklappt werden.

Darstellung der Winkelfunktionswerte am Einheitskreis

Im folgenden Bild ist ein Winkel x in einen Kreis mit dem Radius $r = 1$,einen sogenannten

Einheitskreis, eingezeichnet. Die in den Punkten A bzw. B an diesen Kreis gelegten Tangenten heißen Haupt- bzw. Nebentangente.



Wegen der Unabhängigkeit von der Wahl des Kreises gilt:

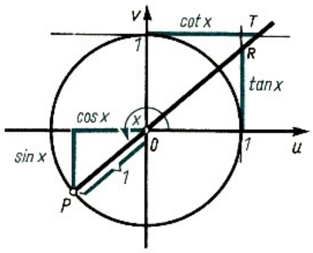
$\sin x = \frac{v}{1} = v$
Der Sinus eines Winkels ist gleich der Ordinate des Schnittpunktes seines beweglichen Schenkels mit dem Einheitskreis.

$\cos x = \frac{u}{1} = u$
Der Kosinus eines Winkels ist gleich der Abszisse des Schnittpunktes seines beweglichen Schenkels mit dem Einheitskreis.

$\tan x = \frac{v}{u} = \frac{\overline{AR}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AR}}{1} = \overline{AR}$, $(\triangle OQP \sim \triangle OAR)$
Der Tangens eines Winkels ist gleich der Ordinate des Schnittpunktes seines beweglichen Schenkels mit der Haupttangente.

$\cot x = \frac{u}{v} = \frac{\overline{BT}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BT}}{1} = \overline{BT}$, $(\triangle OQP \sim \triangle OTB)$
Der Kotangens eines Winkels ist gleich der Abszisse des Schnittpunktes seines beweglichen Schenkels mit der Nebentangente.

Falls der bewegliche Schenkel die Haupt- bzw. Nebentangente nicht schneidet, wird der Schnittpunkt der Verlängerung des beweglichen Schenkels über O hinaus mit der jeweiligen Tangente betrachtet (nachfolgendes Bild).



Die Darstellung der Winkelfunktionswerte am Einheitskreis zeigt, dass die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion dem Betrage nach nicht größer als 1 werden können.
Dagegen wachsen die Funktionswerte der Tangens- und der Kotangensfunktion dem Betrage nach über alle Grenzen, da die Abschnitte auf den Tangenten beliebig lang werden können.

Funktion	Definitionsbereich	Wertevorrat
$y = \sin x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \cos x$	$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \tan x$	$-\infty < x < \infty$; $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k ganz	$-\infty \leq y \leq \infty$
$y = \cot x$	$-\infty < x < \infty$; $x \neq k \cdot \pi$ (k ganz	$-\infty \leq y \leq \infty$

Obwohl man anschaulich zu erkennen glaubt, dass jede reelle Zahl aus den angegebenen Intervallen als Maßzahl der entsprechenden Streckenlänge im Wertevorrat auch wirklich auftritt, muss dies bewiesen werden. Darauf soll aber hier verzichtet werden.

An der Darstellung am Einheitskreis kann man unmittelbar ablesen, welche Vorzeichen die Funktionswerte für Winkel aus den einzelnen Quadranten haben.

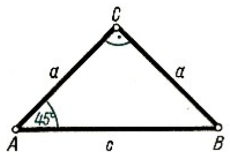
	I	II	III	IV
$y = \sin x$	+	+	-	-
$y = \cos x$	+	-	-	+
$y = \tan x$	+	-	+	-
$y = \cot x$	+	-	+	-

Weiterhin liest man ab:

	$0°$ 0	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$180°$ π	$270°$ $\frac{3\pi}{2}$	$360°$ 2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1
$y = \tan x$	0	-	0	-	0
$y = \cot x$	-	0	-	0	-

Funktionswerte einiger spezieller Winkel

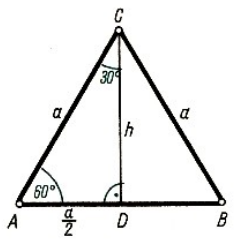
In einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck gilt: $c^2 = 2a^2$, $c = a\sqrt{2}$ (Satz des Pythagoras)



$$\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \tan 45° = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \cot 45° = \frac{a}{a} = 1$$

In einem gleichseitigen Dreieck gilt:
$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



Im Dreieck ADC gilt:

$$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Im Dreieck ADC gilt:

$$\cos 30° = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

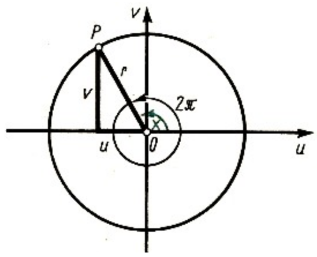
$$\tan 30° = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad , \quad \tan 60° = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 30° = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \quad , \quad \cot 60° = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$y = \cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}0$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$y = \tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$y = \cot x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Periodizität der Winkelfunktionen

Dreht man den beweglichen Schenkel eines beliebigen Winkels x um 2π (360°), so befindet er sich in der gleichen Lage wie vor der Drehung. Damit sind alle in den Definitionen C 39 bis C 42 auftretenden Verhältnisse für den Winkel $x + 2\pi$ dieselben wie für den Winkel x.



Das gilt nicht nur für eine Drehung um 2π, sondern auch für jede Drehung um ein ganzzahliges Vielfaches $k \cdot 2\pi$ von 2π. Also gilt für jeden Winkel x aus dem jeweiligen Definitionsbereich:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin x & = \sin(x + k \cdot 2\pi) \\ \cos x & = \cos(x + k \cdot 2\pi) \\ \tan x & = \tan(x + k \cdot 2\pi) \\ \cot x & = \cot(x + k \cdot 2\pi) \end{array}\right\} (k \text{ ganzzahlig})$$

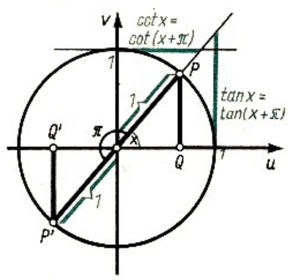
▶ Definition 44: Eine Funktion f heißt periodisch, wenn es eine Zahl $a > 0$ gibt, so dass für jedes x gilt:

$$f(x) = f(x + a)$$

Jede solche Zahl a heißt Periode.

▶ Satz 45: Die Winkelfunktionen sind periodische Funktionen.

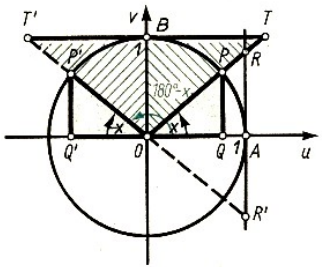
■ Perioden der Winkelfunktionen sind beispielsweise 2π $(k = 1)$; 4π $(k = 2)$; 100π, $(k = 50)$.



Für die Sinus- und Kosinusfunktion ist 2π die kleinste Periode. Für die Tangens- und Kotangensfunktion ist π die kleinste Periode. Für sie gilt also:

$$\left.\begin{array}{ll} \tan x & = \tan(x + k \cdot \pi) \\ \cot x & = \cot(x + k \cdot \pi) \end{array}\right\} (k \text{ ganzzahlig})$$

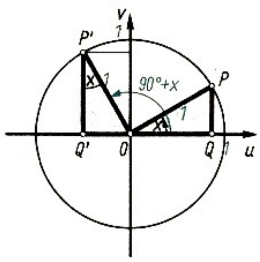
Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln aus verschiedenen Quadranten (Quadrantenbeziehungen)



Wegen der Kongruenz der Dreiecke	gilt
$OP'Q'$ und OQP	$P'Q' = PQ$, also
$OP'Q'$ und OQP	$OQ' = OQ$, also
OAR' und OAR	$AR' = AR$, also
OBT' und OBT	$BT' = BT$, also

Entsprechend ergeben sich die Beziehungen für Winkel im III. und IV. Quadranten.

$$\begin{aligned} \sin(180° + x) &= -\sin x \quad , \quad & \sin(360° - x) &= -\sin x \\ \cos(180° + x) &= -\cos x \quad , \quad & \cos(360° - x) &= \cos x \\ \tan(180° + x) &= \tan x \quad , \quad & \tan(360° - x) &= -\tan x \\ \cot(180° + x) &= \cot x \quad , \quad & \cot(360° - x) &= -\cot x \end{aligned}$$

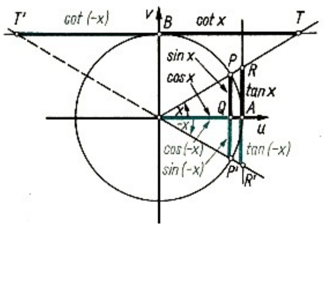


Wegen der Kongruenz der Dreiecke $OQ'P'$ und OQP gilt:

$$\sin(90° + x) = \cos x \quad , \quad \cos(90° + x) = -\sin x$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} \sin(90° \pm x) = \cos x & \cos(90° \pm x) = \mp \sin x & \tan(90° \pm x) = \mp \cot x \\ \cot(90° \pm x) = \mp \tan x & \sin(270° \pm x) = -\cos x & \cos(270° \pm x) = \pm \sin x \\ \tan(270° \pm x) = \mp \cot x & \cot(270° \pm x) = \mp \tan x & \end{array}$$



Funktionswerte negativer Winkel

Wegen der Kongruenz entsprechender Dreiecke gilt:

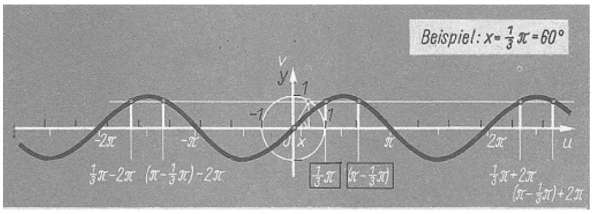
$$\sin(-x) = -\sin x \quad , \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x \quad , \quad \cot(-x) = -\cot x$$

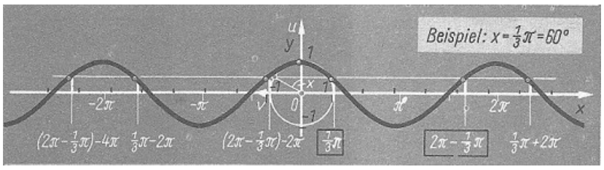
► Satz 46: Die Funktion $y = \cos x$ ist eine gerade Funktion. Die Funktionen $y = \sin x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$ sind ungerade Funktionen. (Def. 25)

Graphische Darstellung der Winkelfunktionen

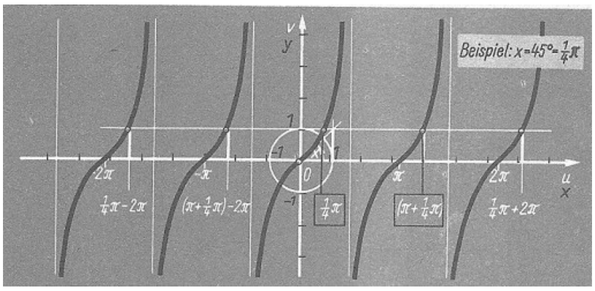
Zur graphischen Darstellung der Winkelfunktionen kann man die Funktionswerte dem Einheitskreis entnehmen.

$y = \sin x$ 

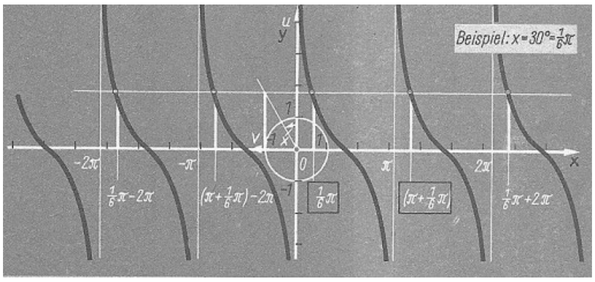
Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$, Wertebereich: $-1 \leq y \leq 1$

$y = \cos x$ 

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$, Wertebereich: $-1 \leq y \leq 1$

$y = \tan x$ 

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ganzzahlig), Wertebereich: $-\infty \leq y \leq \infty$

$y = \cot x$ 

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$, $x \neq k\pi$ (k ganzzahlig), Wertebereich: $-\infty \leq y \leq \infty$

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Auf Grund der Definitionen der Winkelfunktionen gilt:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{v}{r} : \frac{u}{r} = \frac{v}{u} = \tan x, \text{ falls } \cos x \neq 0$$

d.h. $x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ und

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u}{r} : \frac{v}{r} = \frac{u}{v} = \cot x, \text{ falls } \sin x \neq 0$$

d.h. $\neq k \cdot \pi$.

Aus diesen Gleichungen folgt: $\tan x \cdot \cot x = 1$. Weiterhin gilt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r^2} = \frac{v^2+u^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

"$\sin^2 x$" ist eine abkürzende Schreibweise für "$(\sin x)^2$".

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \\ \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \end{array}\right\} \tan x \cdot \cot x = 1, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$
$\sin^2 x$	-	$1-\cos^2 x$	$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\frac{1}{1+\cot^2 x}$
$\cos^2 x$	$1-\sin^2 x$	-	$\frac{1}{1+\tan^2 x}$	$\frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$
$\tan^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$	-	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot^2 x$	$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	$\frac{1}{\tan x}$	-

Will man aus dem in der Tabelle angegebenen Quadrat eines Funktionswertes diesen selbst bestimmen, so muss man beachten, in welchem Quadranten der betreffende Winkel liegt bzw. für welche Winkel die in der Formel auftretenden Funktionen definiert sind.

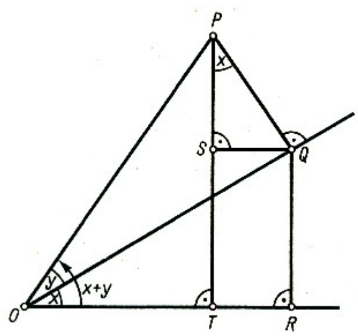
■ $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ gilt für jeden Winkel x aus dem Definitionsbereich der Tangensfunktion.

$\cos x = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}$ gilt nur für solche Winkel, für die $\cos x > 0$ gilt. Das sind alle Winkel x aus dem I. und IV. Quadranten mit $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}$ gilt nur für solche Winkel, für die $\cos x < 0$ gilt. Das sind alle Winkel x aus dem II. und III. Quadranten mit $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Additionstheoreme der Winkelfunktionen

$$\sin(x+y) = \sin x \cos x + \sin y \cos x \tag{1a}$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos x - \sin y \cos x \tag{1b}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{2a}$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{2b}$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \tag{3a}$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \tag{3b}$$
$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x} \tag{4a}$$
$$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x} \tag{4b}$$



Beweis zu (1) für spitze Winkel x und y:
$\angle ROQ = \angle SPQ$ (Schenkel stehen paarweise aufeinander senkrecht, Satz 33).

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \frac{\overline{PT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{ST}+\overline{SP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{SP}}{\overline{OP}} \\
&= \frac{\overline{QR}}{\overline{QO}} \cdot \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PQ}} \qquad \text{(Erweiterung mit } \overline{OQ} \text{ bzw. } \overline{PQ} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung lässt sich auch für beliebige Winkel x und y nachweisen. Dieser Beweis soll hier nicht geführt werden.
Ersetzt man in der ersten Gleichung y durch $-y$, so erhält man wegen $\cos(-y) = \cos y$ und $\sin(-y) = -\sin y$
$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$.

Folgerungen aus den Additionstheoremen

Setzt man in (1a) bis (4a) $y = x$, so erhält man die sogenannten Doppelwinkelformeln:

Doppelwinkelformeln

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \\
\cot(2x) &= \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}
\end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraktion von (1a) und (1b), bzw. (2a) und (2b) und anschließende Umbenennung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

Beweis der ersten Gleichung
Addition von (1a) und (1b):

$$\begin{array}{ll}
\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x & \text{(1a)} \\
\sin(x-y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x & \text{(1b)} \\
\hline
\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y &
\end{array}$$

Wir setzen $x + y = \alpha$ and $x - y = \beta$.

$$x+y=\alpha \quad , \quad x-y=\beta \quad , \quad 2x=\alpha+\beta \quad , \quad 2y=2\beta$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad , \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

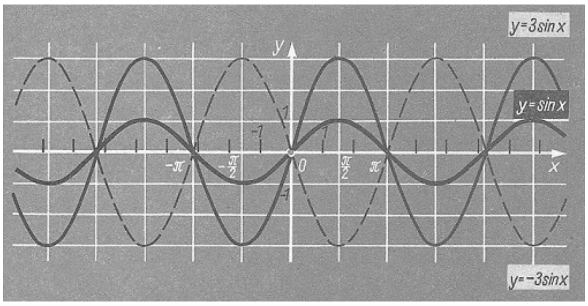
Daraus ergibt sich:
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ w.z.b.w.

Die Funktionen $y = a\sin x$

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$; Wertevorrat: $-|a| \leq y \leq |a|$
Die Werte der Funktion $y = a\sin x$ erhält man, indem man die Werte der Funktion $y = \sin x$ mit a multipliziert. Gilt $|a| \neq 1$, so ergibt sich dadurch ein anderer Wertevorrat.

$\lvert a\rvert > 1$	$a > 0$	Dehnung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse
	$a < 0$	Dehnung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse
$\lvert a\rvert = 1$	$a = 1$	keine Änderung
	$a = -1$	Spiegelung der Sinuskurve an der x-Achse
$\lvert a\rvert < 1$	$a > 0$	Stauchung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse
	$a < 0$	Stauchung der Sinuskurve in Richtung der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse

■ $y = \sin x$, Wertevorrat: $-1 \leq y \leq 1$
$y = 3\sin x$, Wertevorrat: $-3 \leq y \leq 3$
$y = -3\sin x$, Wertevorrat: $-3 \leq y \leq 3$

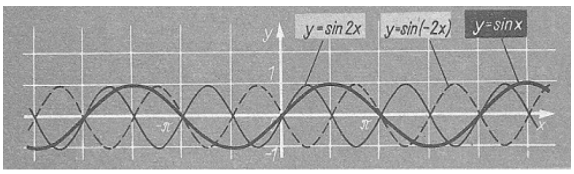


$y = a\sin x$
Definitionsbereich: $\infty < x < \infty$; Wertevorrat: $-a \leq y \leq a$

Die Funktionen $y\sin bx$ ($b \neq 0$)

Den Wert $\sin x_1$, den die Funktion $y = \sin x$ an der Stelle x_1 annimmt, nimmt die Funktion $y = \sin bx$ an der Stelle $\frac{x_1}{b}$ an; denn es gilt:
$\sin\left(b \cdot \frac{x_1}{b}\right) = \sin x_1$

$\lvert b\rvert > 1$	$b > 0$	Stauchung in Richtung der x-Achse
	$b < 0$	Stauchung in Richtung der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse
$\lvert b\rvert = -1$	$b = 1$	keine Änderung
	$b = -1$	Spiegelung an der y-Achse
$\lvert b\rvert < 1$	$b > 0$	Dehnung in Richtung der x-Achse
	$b < 0$	Dehnung in Richtung der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse

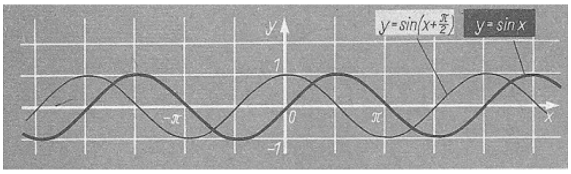


$y = \sin bx$
Definitionsbereich: $\infty < x < \infty$; Wertevorrat: $-1 \leq y \leq 1$

Bemerkung: Da $y = \sin x$ eine ungerade Funktion ist, gilt $\sin(-bx) = -\sin bx$.
Daher kann die Spiegelung an der y-Achse durch die Spiegelung an der x-Achse ersetzt werden.

y= sin(x+c)

Das Bild der Funktion $y = \sin(x + c)$ ist gegenüber dem Bild der Funktion $y = \sin x$ um $-c$ parallel zur x-Achse verschoben.



$y = \sin(x + c)$
Definitionsbereich: $\infty < x < \infty$; Wertevorrat: $-1 \leq y \leq 1$

Bemerkung: Aus dem Bild kann man die Beziehung $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ ablesen.

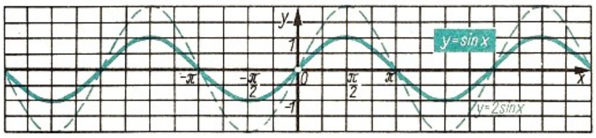
y=a sin(bx+c)

Das Bild der Funktion $y = a\sin(bx + c) = a\sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$ erhält man aus dem Bild der Funktion $y = \sin x$ durch folgende Transformationen:

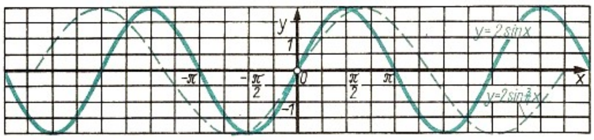
1. Dehnung oder Stauchung in Richtung der y-Achse: $y = a\sin x$.
2. Dehnung oder Stauchung in Richtung der x-Achse: $y = a\sin bx$
3. Verschiebung um $-\frac{c}{b}$ parallel zur hinzu x-Achse: $y = a\sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$

Für $a < 0$ oder $b < 0$ kommen die entsprechenden Spiegelungen hinzu.

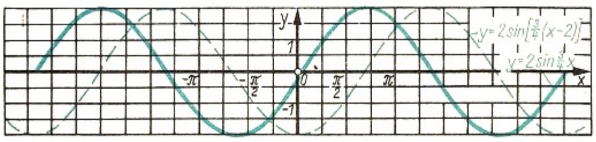
■ $y = 2\sin\left[\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right] = 2\sin\left[\frac{3}{4}(x - 2)\right]$
1. $y = 2\sin x$



2. $y = 2\sin\frac{3}{4}x$



3. $y == 2\sin\left[\frac{3}{4}(x - 2)\right]$



3.15 Ebene Trigonometrie

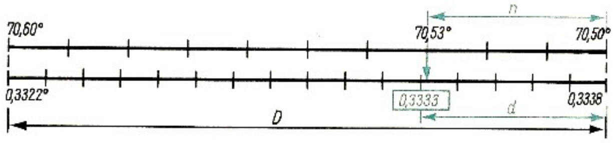
Die Frage, ob ein Dreieck durch gegebene Stücke eindeutig bestimmt ist, kann mit Hilfe der Kongruenzsätze entschieden werden.

Ist das Dreieck eindeutig bestimmt, so kann es aus den gegebenen Stücken sowohl konstruiert als auch mit Hilfe der Winkelfunktionen berechnet werden. Mit solchen Berechnungen beschäftigt sich die ebene Trigonometrie. Daher nennt man die Winkelfunktionen auch trigonometrische Funktionen.

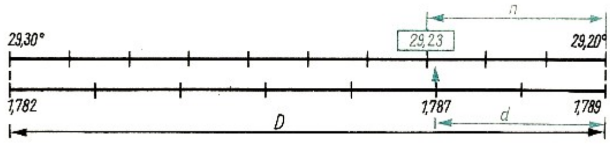
Die Tafeln der Winkelfunktionswerte und ihrer Logarithmen

Zur numerischen Durchführung trigonometrischer Berechnungen sind die Funktionswerte der Winkelfunktionen tabelliert worden. Auf Grund der Quadrantenbeziehungen genügt es, nur die Werte für Winkel von $0°$ bis $90°$ anzugeben.
Dabei können wegen der Beziehungen $\cos x = \sin(90° - x)$ und $\cot x = \tan(90° - x)$ die Werte der Sinus- und Kosinusfunktionen bzw. der Tangens- und Kotangensfunktionen jeweils in ein und derselben Tafel aufgeführt werden.
Die Kosinus- und Kotangensfunktionen sind im Intervall von $0°$ bis $90°$ monoton fallend. Daher ist d beim Interpolieren die Differenz zum größeren Funktionswert.

a) Es soll $\cos 289{,}47°$ ermittelt werden.
$\cos 289{,}47° = \cos(360° - 70{,}53°) = \cos 70{,}53°$
$\frac{d}{n} = \frac{D}{10}$; $d = \frac{D \cdot n}{10} = \frac{16 \cdot 3}{5} \approx 5$; $\cos 289{,}47° = 0{,}3333$



b) Es sollen alle Winkel x mit $\cot x = -1{,}787$ ermittelt werden.
$\frac{d}{n} = \frac{D}{10}$; $n = \frac{10 \cdot d}{D} = \frac{10 \cdot 2}{7} \approx 3$; $x' = 29{,}23°$



Da der Kotangenswert negativ ist, gilt für die gesuchten Winkel aus dem II. und IV. Quadranten

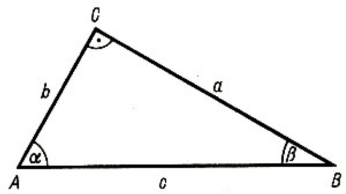
$$x_1 = 180° - x' \quad , \quad x_1 = 150{,}77°$$

$$x_2 = 360° - x' \quad , \quad x_2 = 330{,}77°$$

Da $180°$ die kleinste Periode der Kotangensfunktion ist, erhält man sämtliche gesuchten Winkel durch $x = 150{,}77° + k \cdot 180°$, ($k$ ganzzahlig).

Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Je nach Art der gegebenen Dreiecksstücke sind folgende Fälle möglich (Bild C 92):

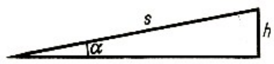


1.Fall: gegeben Hypotenuse und eine Kathete: a,c
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\beta = 90° - \alpha$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ oder $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $b = c\cos\alpha$

2.Fall: gegeben beide Katheten: a, b
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $\beta = 90° - \alpha$; $c = \sqrt{a^2+b^2}$ oder $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$
3.Fall: gegeben ein Winkel und eine Gegenkathete: α, a
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$; $\beta = a\cot\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$; $c = \sqrt{a^2+b^2}$ oder $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$
4.Fall: gegeben ein Winkel und eine Ankathete: α, b
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$; $a = b\cdot\tan\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$; $c = \sqrt{a^2+b^2}$ oder $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $c = \frac{b}{\cos\alpha}$
5.Fall: gegeben ein Winkel und die Hypotenuse: α, c
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $a = c\cdot\sin\alpha$; $\beta = 90° - \alpha$; $b = \sqrt{c^2-a^2}$ oder $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $c = \frac{b}{\cos\alpha}$

■ Eine Eisenbahnlinie soll über eine Brücke von 13,70 m Höhe geführt werden. Wie lang muss die zur Brücke ansteigende Strecke mindestens sein, wenn der Steigungswinkel nicht mehr als $1°$ betragen soll?

Lösung:

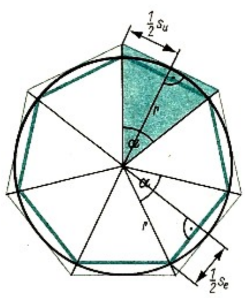


$\alpha = 1°$; $h = 13{,}70$ m; $\sin\alpha = \frac{h}{s}$; $s = \frac{h}{\sin\alpha}$
Die ansteigende Strecke muss mindestens 785 m lang sein.

N	$\lg N$
13,70	1,1367
$\sin 1°$	0,2419 - 2
s	0,8948 + 2
s	2,8948
$s = 785$ m	

Berechnung gleichschenkliger Dreiecke

Jedes gleichschenklige Dreieck wird durch seine Symmetrieachse in zwei kongruente rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Dadurch treten bei der Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks dieselben Fälle auf wie beim rechtwinkligen Dreieck.



■ Einem Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm ist je ein regelmäßiges 7-Eck ein- bzw. umbeschrieben. Die Seitenlängen sind zu berechnen.

Lösung:
$r = 3{,}00$ cm; $\alpha = \frac{360°}{7} = 51{,}43°$; $\frac{\alpha}{2} = 25{,}71°$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}s_e}{r} = \frac{s_e}{2r}, \qquad s_e = 2r\sin\frac{\alpha}{2} \qquad , \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}s_u}{r} = \frac{s_u}{2r}, \qquad s_u = 2r\tan\frac{\alpha}{2}$$

N	$\lg N$	N	$\lg N$
$2r$	0,7782	$2r$	0,7782
$\sin\frac{\alpha}{2}$	0,6373 - 1	$\tan\frac{\alpha}{2}$	0,6826 - 1
s_e	1,4155 - 1	s_u	1,4608 - 1
s_e	0,4155	s_u	0,4608
$s_e = 2{,}60$ cm		$s_u = 2{,}89$ cm	

Berechnung von schiefwinkligen Dreiecken - Sinussatz

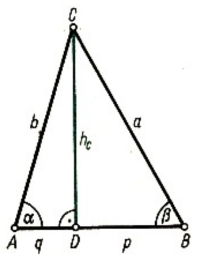
Mit Hilfe der folgenden Sätze lassen sich Stücke eines beliebigen Dreiecks berechnen.

► Satz (Sinussatz): In jedem Dreieck sind die Verhältnisse der Seiten zu den Sinus ihrer Gegenwinkel untereinander gleich.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

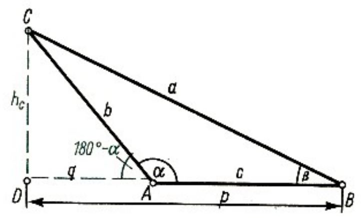
In anderer Fassung:
In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten zueinander wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$



Beweis: Es gilt
$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$; $\quad h_c = b\sin\alpha \quad (\triangle ADC)$
$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$; $\quad h_c = a\sin\beta \quad (\triangle BCD)$
$a\sin\beta = b\sin\alpha \; |: \sin\alpha\sin\beta \quad \to \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$
Führt man dieselbe Überlegung mit der Höhe h_a durch, so erhält man: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Insgesamt also $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.
Damit ist der Sinussatz jedoch nur für alle spitzwinkligen Dreiecke bewiesen.



Für stumpfwinklige Dreiecke gilt:
$\sin(180° - \alpha) = \frac{h_c}{b}$; $h_c = b\sin(180° - \alpha)$, $\quad (\triangle ADC)$
$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$; $h_c = a\sin\beta$, $\quad (\triangle BCD)$
$a\sin\beta = b\sin(180° - \alpha)$
Wegen $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ folgt $a\sin\beta = b\sin\alpha$, also wieder $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.
Wie beim spitzwinkligen Dreieck ergibt sich dann weiter $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Der Sinussatz gilt auch für rechtwinklige Dreiecke. Setzt man beispielsweise $\gamma = 90°$, so ergibt sich aus $\frac{a}{\sin\alpha} = c$ und $\frac{b}{\sin\beta} = c$
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c$.

Da $c = \frac{c}{1} = \frac{c}{\sin\gamma}$ ($\gamma = 90°$, also $\sin\gamma = 1$), gilt auch hier wieder die behauptete Gleichung. Damit ist der Sinussatz für jedes beliebige Dreieck in der einen Fassung bewiesen.

Die andere Fassung ergibt sich folgendermaßen:

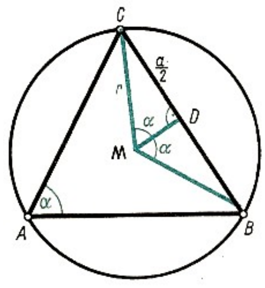
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad , \quad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Vertauschung der Innenglieder: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.
Als fortlaufende Proportion: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

► Satz 48: In jedem Dreieck ist das Verhältnis einer jeden Seite zum Sinus ihres Gegenwinkels gleich dem Durchmesser des Dreiecksumkreises.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

Beweis:



$\angle BMC = 2\alpha$, denn $\angle BMC$ ist der zum Peripheriewinkel $\angle BAC = \alpha$ gehöriger Zentriwinkel über dem Bogen BC.
$\angle BMD = \angle CMD = \alpha$, denn MD ist Symmetrieachse im gleichschenkligen Dreieck $\triangle BCM$.
$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{r}$ ($\triangle MBD$), daraus folgt $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$.
Daraus folgt zusammen mit dem Sinussatz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$, w.z.b.w.
Der Beweis dieses Satzes für stumpfwinklige und rechtwinklige Dreiecke wird hier nicht mehr ausgeführt.

► Satz 49 (Kosinussatz):
In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Beweis:
a) spitzwinklige Dreiecke (Bild Seite 121 oben):
$h_c^2 = b^2 - q^2$ (Satz des Pythagoras, $\triangle ADC$)
$h_c^2 = a^2 - p^2$ (Satz des Pythagoras, $\triangle BCD$)

$$\begin{aligned} a^2 - p^2 &= b^2 - q^2 \\ a^2 &= b^2 + p^2 - q^2 \\ a^2 &= b^2 + (c-q)^2 - q^2; \qquad (p = c - q) \\ a^2 &= b^2 + x^2 - 2cqq^2 - q^2 = b^2 + c^2 - 2cq \end{aligned} \qquad (*)$$

$\cos\alpha = \frac{q}{b}$ ($\triangle ADC$), $q = b \cdot \cos\alpha$, in Gleichung (*) eingesetzt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Die anderen beiden Gleichungen erhält man unter Verwendung der Höhen h_a bzw. h_b.

b) stumpfwinklige Dreiecke (Bild Seite 121):
$h_c^2 = b^2 - q^2$ (Satz des Pythagoras, $\triangle ADC$)
$h_c^2 = a^2 - p^2$ (Satz des Pythagoras, $\triangle BCD$)

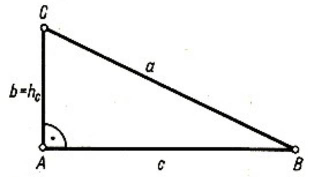
$$\begin{aligned} a^2 - p^2 &= b^2 - q^2 \\ a^2 &= b^2 + p^2 - q^2 \\ a^2 &= b^2 + (c+q)^2 - q^2; \qquad (p = c + q) \\ a^2 &= b^2 + x^2 + 2cqq^2 - q^2 = b^2 + c^2 + 2cq \end{aligned} \qquad (**)$$

$\cos(180° - \alpha = \frac{q}{b}$ $(\triangle ADC)$; $-\cos\alpha = \frac{q}{b}$; $q = -b\cos\alpha$ in Gleichung (**) eingesetzt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Entsprechend findet man auch in diesem Fall die anderen Gleichungen.

c) rechtwinklige Dreiecke:



Da $\alpha = 90°$ und damit $\cos\alpha = 0$, folgt aus $a^2 = b^2 + c^2$ (Satz des Pythagoras) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.
Für die Seiten b und c verläuft der Beweis mit den spitzen Winkeln β und γ wie im Fall a). Damit ist der Kosinussatz für alle möglichen Fälle bewiesen.

Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks

▶ Satz 50: Der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \quad A = \frac{1}{2}ac\sin\beta, \quad A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Beweis (Bild Seite 121):
$A = \frac{1}{2}c \cdot h_c$ (*)
$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$; $h_c = b\sin\alpha$ $(\triangle ADC)$
$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$; $h_c = a\sin\beta$ $(\triangle BCD)$
Für h_c in (*) eingesetzt

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \qquad \text{und} \qquad A = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Die dritte Gleichung erhält man bei Verwendung von h_a oder h_b. Der Beweis für stumpfwinklige und rechtwinklige Dreiecke verläuft wie bei den entsprechenden Fällen im Beweis des Sinussatzes, w.z.b.w.

Nach dem Sinussatz gilt für jedes Dreieck

$$b = \frac{c}{\sin\gamma} \cdot \sin\beta$$

Setzt man dies für b in die erste Gleichung von Satz 50 ein, so ergibt sich

$$A = \frac{1}{2}\frac{c}{\sin\gamma} \cdot \sin\beta \cdot c \cdot \sin\alpha \qquad \text{oder} \qquad A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

Entsprechend gilt

$$A = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} \qquad , \qquad A = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Nach Satz C 48 gilt für jedes Dreieck

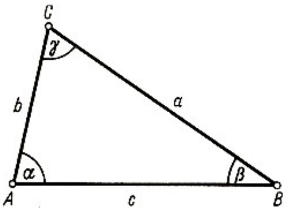
$$\frac{b}{\sin\beta} = 2r \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \quad \text{d.h.}$$

$$b = 2r\sin\beta \quad \text{bzw.} \quad c = 2r\sin\gamma$$

Setzt man dies für b und c in die erste Gleichung von Satz c 50 ein, so erhält man

$$A = \frac{1}{2}\cdot 2r\sin\beta\cdot 2r\sin\gamma\cdot\sin\alpha \quad \text{oder} \quad A = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Je nach Art der gegebenen Dreiecksstücke sind folgende Fälle der Dreiecksberechnung möglich (vier Grundaufgaben, siehe Kongruenzsätze).



Gegeben	Anfangsschritt	Berechnung der übrigen Stücke
c, β, γ (sww)	Sinussatz: $b = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\beta$	$\alpha = 180° - (\beta+\gamma)$; $a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha$
α, c, a (wss)	Sinussatz: $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}c$	$\beta = 180° - (\alpha+\beta)$; $b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$
a, γ, b (sws)	Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\gamma$	$\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c}a$; $\beta = 180° - (\alpha+\beta)$
a,b,c (sss)	Kosinussatz: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$	$\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}$, $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$ oder $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a}\cdot b$

Im Fall wsw wird zunächst der dritte Winkel berechnet und dann wie im Fall c, β, γ (sww) weitergerechnet.

■ a) Gegeben: $\alpha = 63{,}7°$; $c = 7{,}3$ cm; $a = 11{,}4$ cm
Gesucht: γ, β, b

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad , \quad \sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}\cdot c$$

$\gamma_1 = 35{,}0°$; $[\gamma_2 = 145{,}0°]$

N	$\lg N$
$\sin\alpha$	1,9525 - 2
a	1,0569
$\frac{\sin\alpha}{a}$	0,8956 - 2
c	0,8633
$\sin\gamma$	0,7589 - 1

γ_2 kommt nicht in Betracht, da $\alpha + \gamma_2 > 180°$. Außerdem würde für γ_2 der größere Winkel der kleineren Seite gegenüberliegen, was im Widerspruch zu dem Satz, dass in jedem Dreieck der größere Winkel der größeren Seite gegenüberliegt, stünde.
$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; $\beta = 81{,}3°$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad , \quad b = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta$$

$b = 12{,}6$ cm

N	$\lg N$
a	1,0569
$\sin\alpha$	0,9525 - 1
$\frac{a}{\sin\alpha}$	1,1044
$\sin\beta$	0,9950 - 1
b	1,0994

■ b) Gegeben: $\alpha = 36{,}4°$; $c = 9{,}2$ cm; $a = 3{,}5$ cm
Gesucht: γ, β, b

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot c$$

N	$\lg N$
$\sin\alpha$	0,7734 - 1
a	0,5541
$\frac{\sin\alpha}{a}$	0,2293 - 1
c	0,9638
$\sin\gamma$	0,1931

Es gibt keinen Winkel γ mit $\lg\sin\gamma = 0{,}1931$; denn das würde $\sin\gamma > 1$ bedeuten. Das ist aber unmöglich). Es gibt also kein Dreieck mit den gegebenen Stücken.

c) Gegeben: $\alpha = 43{,}9°$; $c = 14{,}8$ cm; $a = 12{,}3$ cm
Gesucht: γ, β, b

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a} \cdot c; \qquad \gamma_1 = 56{,}6°; \quad \gamma_2 = 123{,}4°$$

N	$\lg N$
$\sin\alpha$	1,8410 - 2
a	1,0899
$\frac{\sin\alpha}{a}$	0,7511 - 2
c	1,1703
$\sin\gamma$	0,9214 - 1

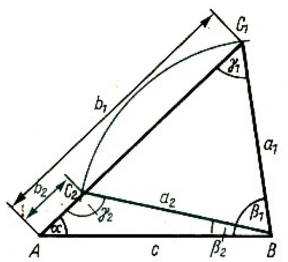
$\alpha + \gamma_1$ und $\alpha + \gamma_2$ sind beide kleiner als $180°$. Ebenso ist für beide Winkel der Satz erfüllt, dass der größere Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. Daher muss mit beiden Winkeln weitergerechnet werden.
$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; $\beta_1 = 79{,}5°$; $\beta_2 = 12{,}7°$
$b = \frac{a}{\sin\alpha} \sin\beta$

I

N	$\lg N$
a	1,0899
$\sin\alpha$	0,8410 - 1
$\frac{a}{\sin\alpha}$	1,2489
$\sin\beta_1$	0,9927 - 1
b_1	1,2416
$b_1 = 17{,}4$ cm	

II

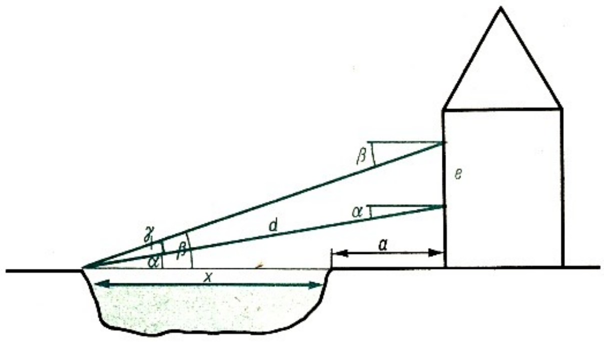
N	$\lg N$
a	1,0899
$\sin\alpha$	0,8410 - 1
$\frac{a}{\sin\alpha}$	1,2489
$\sin\beta_2$	0,3421 - 1
b_1	0,5910
$b_1 = 3{,}9$ cm	



Maßstab 1:4

Bemerkung: Wie das letzte Beispiel zeigt, ist ein Dreieck nur dann eindeutig durch zwei Seiten und einen Winkel bestimmt, wenn dieser Winkel Gegenwinkel der größeren von beiden gegebenen Seiten ist. Anderenfalls gibt es entweder kein Dreieck oder zwei nicht kongruente Dreiecke mit den gegebenen Stücken (Kongruenzsatz ssw).

■ In einer Entfernung von $a = 10$ m vom Ufer eines Flusses steht ein Haus. Visiert man von zwei senkrecht übereinanderliegenden Fenstersimsen, deren Höhenunterschied $e = 8$ m ist, das andere Ufer an, so erhält man Neigungswinkel von $\alpha = 18{,}4°$ und $\beta = 24{,}6°$. Wie breit ist der Fluss?



Lösung:

$\gamma = \beta - \alpha = 6{,}2°$
$\frac{d}{\sin(90°-\beta)} = \frac{e}{\sin\gamma}$; $d = \frac{e}{\sin\gamma}\sin(90° - \beta)$
$\cos\alpha = \frac{a+x}{d}$; $x = d\cos\alpha - a$
$x = \frac{e}{\sin\gamma}\sin(90° - \beta)\cos\alpha - a$
$x = \frac{e}{\sin\gamma}\cos\beta\cos\alpha - a$
$\frac{e}{\sin\gamma}\cos\beta\cos\alpha = y$; $x = y - a$

N	$\lg N$
e	0,9031
$\cos\alpha$	0,9772 -1
$\cos\beta$	0,9587 -1
$e\cos\alpha\cos\beta$	2,8390 -2
$\sin\gamma$	0,0,334 - 1
y	1,80,56

$x \approx 63{,}9$ m -10 m; $x \approx 54$ m. Ergebnis: Der Fluss ist etwa 54 m breit.

3.16 Rechenstab

Der Rechenstab ist ein auf den Logarithmengesetzen beruhendes mechanisches Rechenhilfsmittel vornehmlich für das Multiplizieren und Dividieren sowie Potenzieren und Radizieren.

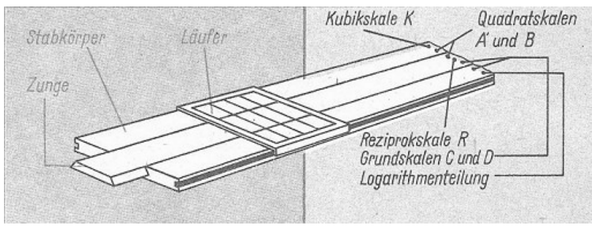
Genauigkeit

Die logarithmisch geteilten Skalen des Rechenstabs ermöglichen eine Rechengenauigkeit bis auf drei geltende Ziffer, wobei die dritte Ziffer häufig geschätzt werden muss.

Grundregeln

Zuerst wird die Größenordnung des Ergebnisses mit Hilfe eines Überschlags ermittelt.
Eingestellt werden nur Ziffernfolgen, z. B. 5738 · 0,023.
Überschlag: $6 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 15 \cdot 10 = 150$
Einstellen: 5-7-4 bzw. 2-3, ablesen 1-3-2, also 132

Teile und Skalen - Bemerkungen zu den Skalen



links: Teile des Rechenstabs rechts: Skalen des Rechenstabs

Die Grundskalen C und D stimmen überein und stellen das Grundintervall 1 bis 10 einer logarithmischen Skale einmal auf der gesamten Stablänge dar. Sie bieten deshalb die größtmögliche Rechengenauigkeit und werden bevorzugt benutzt.

Die Reziprokskale R stellt das Grundintervall 1 bis 10 einmal auf der gesamten Stablänge dar, aber in entgegengesetzter Richtung wie auf den Grundskalen C und D. Sie bietet Vereinfachungen bei mehrfachem Multiplizieren und Dividieren.

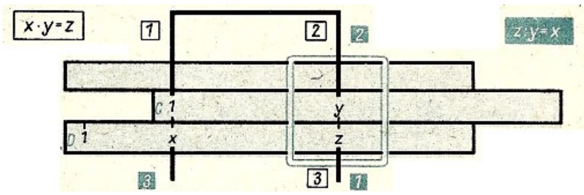
Die Quadratskalen A und B stimmen überein und stellen das Grundintervall 1 bis 10 zweimal auf jeweils einer Hälfte der Stablänge dar (Beschriftung 1 bis 10 bzw. 10 bis 100). Der Teilungsmaßstab auf A und B ist also halb so groß wie der auf C und D; einer Einstellung von $\log n$ auf C bzw. D entspricht also $2 \log n = \log n^2$ auf A bzw. B.

Die Kubikskale K stellt das Grundintervall 1 bis 10 dreimal auf jeweils einem Drittel der Stablänge dar (Beschriftung 1 bis 10 bzw. 10 bis 100 bzw. 100 bis 1000). Einer Einstellung von $\log n$ auf C bzw. D entspricht also $3 \log n = \log n^3$ auf K.

Multiplikation und Division Multiplikation mit Rückschlag

Einstellung beim Multiplizieren
1) C 1 (oder C 10) über Dx
2) Läuferstrich über Cy
3) Unter Cy ablesen Dz

Einstellung beim Dividieren
1) Läuferstrich über Dz
2) Cy über Dz
3) Unter C 1 (oder C 10) ablesen Dx

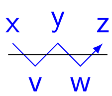


Von einer Multiplikation mit Rückschlag spricht man, wenn nicht C 1, sondern C 10 über die einem Faktor entsprechende Ziffer auf D gestellt werden muss, um ablesen zu können. Durch Benutzung der Reziprokskale können "Rückschläge" umgangen werden.

Hintereinanderausführung von Multiplikation und Division

$\frac{3 \cdot 5 \cdot 4{,}5}{8 \cdot 11}$; Überschlag: rund 1; Ergebnis 0,767

1) Läuferstrich über D3
2) C8 über D3
3) Zunge festhalten, Läuferstrich über C5
4) Läufer festhalten, C11 unter Läuferstrich
5) Zunge festhalten, Läuferstrich über C45
6) Unter C45 ablesen; D767

Schema 

Division (2), Multiplikation (3), Division (4), Multiplikation (5)

Bemerkung: Beim Hintereinanderausführen von Multiplikationen und Divisionen wird auf das Ablesen der Zwischenergebnisse verzichtet. Zu beachten ist dabei, dass beim Verschieben der Zunge der die Zwischenergebnisse markierende Läufer nicht berührt und somit nicht verschoben wird!

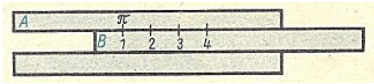
Verhältnisgleichungen

Für die Erfassung von untereinander proportionalen Größen (Proportionen) können alle geforderten Werte nach einer einzigen Einstellung der Zunge mit Hilfe des Läufers ermittelt werden.

Bestimmen von Kreisumfängen:

d	2	3	4
u	6,28	9,42	12,56

Es gilt: $u = \frac{\pi}{1} \cdot d$
Einmalige Einstellung
(1) B1 unter Aπ
(2) Über Bd ablesen Au



Potenzieren und Radizieren

Das Potenzieren und Radizieren erfolgt jeweils mit einer einzigen Einstellung des Läufers mit sofortigem Ablesen.

Bemerkung zur Wahl der Skalenabschnitte beim Radizieren:
1) Beim Ziehen einer Quadratwurzel sind die Radikanden durch Abspalten von Zehnerpotenzen mit geradzahligen Exponenten jeweils in ein Produkt aus einem Faktor F mit $1 < F < 100$ und einer Zehnerpotenz 10^{2n} zu zerlegen.
Die Ziffernfolge von F ist dann im entsprechend beschrifteten Grundintervall auf A einzustellen.

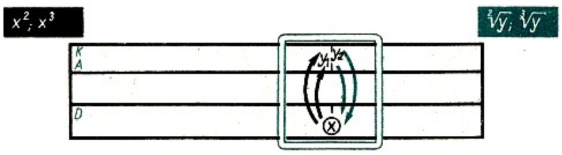
2) Beim Ziehen einer Kubikwurzel sind die Radikanden durch Abspalten von Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Vielfachen von 3 als Exponenten jeweils in ein Produkt aus einem Faktor F mit $1 < F < 1000$ und einer Zehnerpotenz 10^{3n} zu zerlegen. Die Ziffernfolge von F ist dann im entsprechend beschrifteten Grundintervall auf K einzustellen.

Einstellung beim Potenzieren

(1) Läuferstrich auf Dx
(2) Unter Läufer ablesen
auf A für x^2
auf K für x^3

Einstellung beim Radizieren

(1) Läuferstrich auf Ay$_1$ bzw. Ky$_2$ (Bemerkung beachten)
(2) Unter Läuferstrich ablesen auf D



4 Geometrie

4.1 Punkte und Geraden

Bezeichnungen

Geometrische Grundfiguren	Bezeichnungen
Punkt	große lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes: A,B,...,A_1,B_1,...
Geraden	kleine lateinische Buchstaben, evtl. mit Indizes: a, b,...,a_1,b_2,...
Ebenen	kleine griechische Buchstaben, evtl. mit Indizes: $\alpha, \beta, ..., \alpha_1, \beta_1$,...

Wir betrachten nur Punkte und Geraden, die in ein und derselben Ebene liegen. Punkte und Geraden sind die Elemente der ebenen Geometrie.

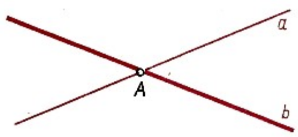
Gegenseitige Lage von Punkten und Geraden

A liegt auf a bzw. a geht durch A

A liegt nicht auf a bzw. a geht nicht durch A

▶ Durch zwei Punkte A und B geht genau eine Gerade.

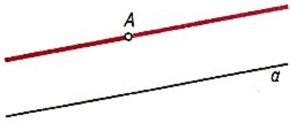
Die Gerade, die durch A und B geht, bezeichnen wir als Gerade AB.
Zu verschiedenen Geraden a und b gibt es höchstens einen Punkt A, der sowohl auf a als auch auf b liegt. Haben zwei Geraden genau einen gemeinsamen Punkt, so nennen wir ihn den Schnittpunkt von a und b.



Parallelität von Geraden

▶ Definition 1: Geraden a und b einer Ebene heißen parallel zueinander genau dann, wenn sie entweder zusammenfallen oder keinen Punkt gemeinsam haben.

▶ Durch jeden Punkt A gibt es zu jeder Geraden d genau eine Parallele.

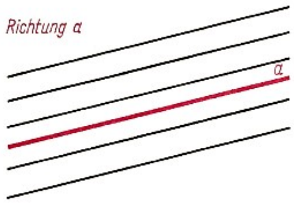


Gegenseitige Lage zweier Geraden einer Ebene

a und b schneiden einander in A	a und b sind voneinander verschieden und haben den gemeinsamen Punkt A	
a und b sind parallel zueinander	a und b haben keinen gemeinsamen Punkt	
	a und b fallen zusammen	

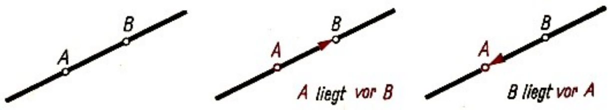
Richtung

▶ Definition 2: Die Menge aller Geraden, die zu einer Geraden a parallel sind, nennen wir eine Richtung.



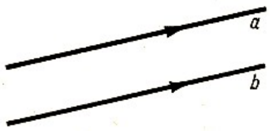
4.2 Anordnungsbeziehungen, Ebene Figuren

Wird festgelegt, welcher von zwei Punkten A und B einer Geraden a vor dem anderen liegen soll, so wird die Gerade a dadurch orientiert.

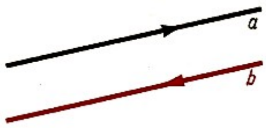


Orientierte Geraden, Richtungssinn

Auf jeder Geraden gibt es genau zwei verschiedene Orientierungen, die einander entgegengesetzt heißen. Die Orientierung einer Geraden kann durch eine Pfeilspitze veranschaulicht werden. Wir sagen auch, dass durch eine orientierte Gerade ein Richtungssinn festgelegt wird. Nur parallele Geraden können entweder gleich oder entgegengesetzt orientiert sein.



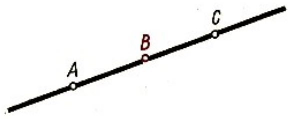
a und b sind gleich orientiert



a und b sind entgegengesetzt orientiert

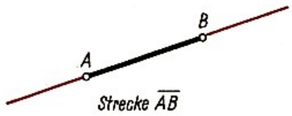
Zwischenbeziehung

Man sagt nur dann, dass ein Punkt zwischen zwei anderen liegt, wenn sie alle drei auf einer Geraden liegen.



Strecken

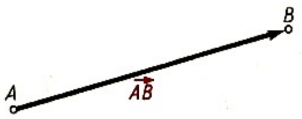
▶ Definition 3: Eine Figur, der zwei Punkte A und B und alle die Punkte angehören, die zwischen A und B liegen, heißt Strecke $\overline{AB}$.



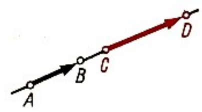
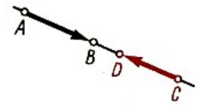
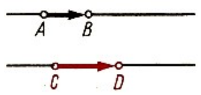
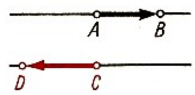
Die Punkte A und B nennen wir Endpunkte.

Orientierte Strecken

Ist festgelegt, welcher Endpunkt einer Strecke vor dem anderen liegen soll, so heißt die Strecke orientiert oder gerichtet.



Schreibweise: $\overrightarrow{AB}$ (A liegt vor B).
Die gerichteten Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ heißen zueinander entgegengesetzt orientierte Strecken.

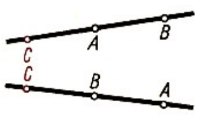
$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ liegen...	Gleich orientierte Strecken	Entgegengesetzt orientierte Strecken
auf derselben Geraden		
auf verschiedenen Geraden		

Von gleich oder entgegengesetzt orientierten Strecken kann man nur dann sprechen, wenn die Geraden, auf denen sie liegen, parallel sind.

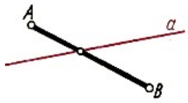
Weitere Lagebeziehungen

A und B liegen auf der Geraden AC auf verschiedenen Seiten des Punktes C. Der Punkt C liegt zwischen den Punkten A und B.

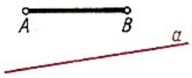
A und B liegen auf der Geraden AC auf derselben Seite des Punktes C. Entweder A liegt zwischen C und B oder B liegt zwischen C und A.



A und B liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden a. Die Gerade a schneidet die Strecke $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt.

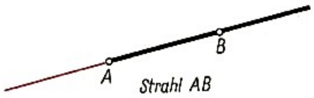


A und B liegen auf derselben Seite einer Geraden a. Die Gerade a und die Strecke $\overline{AB}$ haben keinen gemeinsamen Punkt.

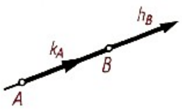
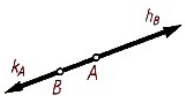
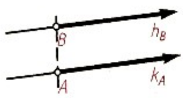
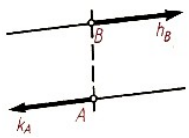


Strahlen

▶ Definition 4: Ein Strahl AB ist die Menge aller Punkte der Geraden AB, die mit B auf derselben Seite des Punktes A dieser Geraden liegen einschließlich des Punktes A selbst.

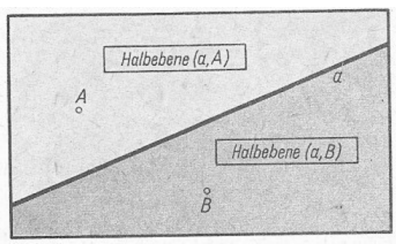


Der Punkt A heißt Anfangspunkt des Strahls AB. Strahlen werden mit h,k,..., h_1,k_1,... bezeichnet. h_A soll bedeuten, dass A der Anfangspunkt des Strahls h ist.
Jeder Punkt A einer Geraden a teilt diese Gerade a in zwei Strahlen mit entgegengesetzter Orientierung (entgegengesetzte Strahlen). A ist gemeinsamer Anfangspunkt beider Strahlen.

h und k liegen...	gleich orientierte Strahlen	Entgegengesetzt orientierte Strahlen
auf derselben Geraden		
auf verschiedenen Geraden		

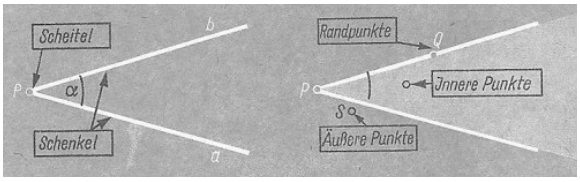
Halbebenen

Jede Gerade einer Ebene teilt diese Ebene in zwei Halbebenen.



Winkel

▶ Definition 5: Ein Paar von Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt, die nicht auf einer Geraden liegen, heißt Winkel.



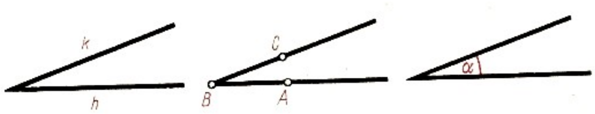
Winkel

Scheitel, Schenkel

Die beiden Strahlen, die einen Winkel bilden, heißen Schenkel, der gemeinsame Anfangspunkt heißt Scheitel des Winkels.
Durch einen Winkel wird die Ebene in zwei Teile zerlegt. Für die Messung eines Winkels, also die eindeutige Zuordnung einer Zahl, ist es erforderlich, einen der beiden Teile auszuzeichnen. Diesen Teil der Ebene nennt man das Innere des Winkels.

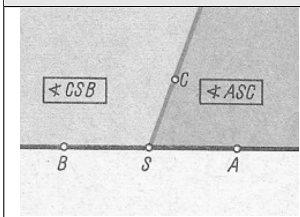
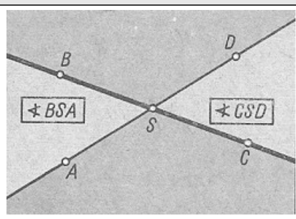
Bezeichnung

a) Winkel (h, k) bzw. $\angle(h, k)$ (h und k sind die Schenkel)
b) Winkel ABC bzw. $\angle ABC$ (B ist der Scheitel, und die Strahlen BA und BC sind die Schenkel)
c) Winkel α



Nebenwinkel

► Definition 6: Zwei Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, heißen Nebenwinkel genau dann, wenn die nicht gemeinsamen Schenkel entgegengesetzte Strahlen sind.

Nebenwinkel	Scheitelwinkel
	

Scheitelwinkel

► Definition 7: Zwei Winkel, die den Scheitel. gemeinsam haben, heißen Scheitelwinkel genau dann, wenn ihre Schenkel paarweise entgegengesetzte Strahlen sind.

Dreiecke

► Definition 8: Eine Figur, die aus drei nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegenden Punkten A, B, C und deren Verbindungsstrecken besteht, heißt Dreieck ABC.

Die Punkte A, B und C heißen die Eckpunkte, die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ die Seiten des Dreiecks ABC.

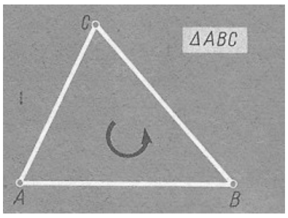
Fläche

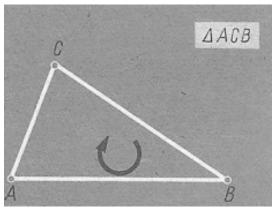
Als die Fläche eines Dreiecks bezeichnen wir den von den Dreieckseiten eingeschlossenen Teil der Ebene.

Umlaufsinn

Durch die Reihenfolge, in der die Eckpunkte eines Dreiecks aufgezählt werden, wird ein Umlaufsinn für das Dreieck festgelegt.

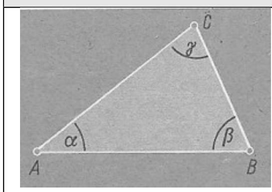
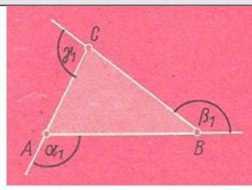
Umlaufsinn





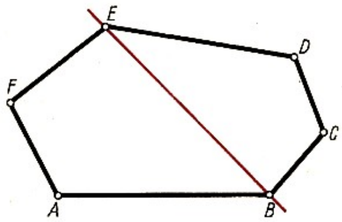
Winkel eines Dreiecks - Innenwinkel, Außenwinkel

In einem Dreieck ABC heißen $\angle ABC$, $\angle BCA$ und $\angle CAB$ die Innenwinkel, kurz die Winkel des Dreiecks. Zu jedem Innenwinkel gibt es zwei Nebenwinkel, die als Scheitelwinkel kongruent sind. Sie heißen Außenwinkel des Dreiecks.

Innenwinkel	Außenwinkel
	

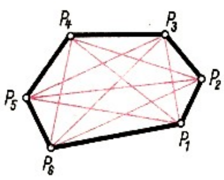
n-Ecke

▶ Definition 9: Werden n Punkte $P_1, P_2, ..., P_n$, von denen keine drei aufeinanderfolgenden auf einer gemeinsamen Geraden liegen, in der gegebenen Reihenfolge durch die Strecken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_nP_1}$ verbunden, so heißt die dadurch entstehende Figur ein n-Eck.

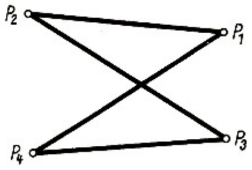


n-Ecke werden auch als Vielecke oder Polygone bezeichnet.
In einem n-Eck $P_1P_2...P_n$ heißen die Punkte P_1, P_2, ..., P_n die Eckpunkte und die Strecken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_nP_1}$ die Seiten des n-Ecks. Eine Strecke, die zwei beliebige, nicht aufeinanderfolgende Eckpunkte verbindet, heißt Diagonale des n-Ecks ($n > 3$).
Mitunter wird auch die Gerade, auf der die betreffende Verbindungsstrecke liegt, Diagonale genannt.

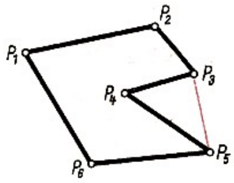
Einteilung der Polygone



Konvexe Polygone:
Jedes Polygon, bei dem alle Diagonalen innerhalb des Polygons liegen.



Überschlagene Polygone:
Jedes Polygon, bei dem sich zwei nicht aufeinander folgende Seiten schneiden.



Konkave Polygone:
Jedes nicht überschlagene Polygon, bei dem es eine Diagonale gibt, die nicht innerhalb des Polygons liegt.

Fläche eines nicht überschlagenen Polygons

Der Teil der Ebene, der von den Seiten eines nicht überschlagenen eingeschlossen wird, heißt Fläche Polygons dieses Polygons.

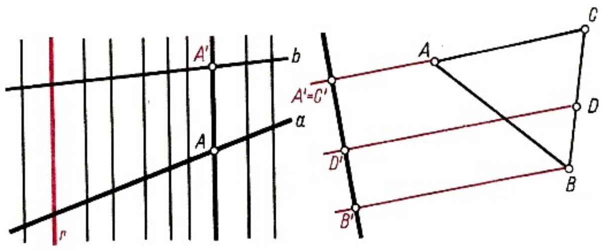
4.3 Bewegungen und Kongruenz

Parallelprojektionen

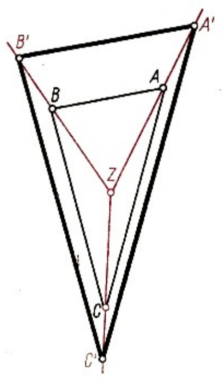
Gegeben sind zwei verschiedene Geraden a und b sowie eine Gerade r, die weder zu a noch zu b parallel ist.
Wird durch Parallelen zur Geraden r jedem Punkt A der Geraden a der entsprechende Schnittpunkt A' der Geraden b zugeordnet, so heißt diese Zuordnung Parallelprojektion der Geraden a auf die Gerade b in Richtung von r.

Wir nennen A Originalpunkt, kurz Original und A' Bildpunkt. kurz Bild von A. Wir sagen:
Die Gerade a wird auf die Gerade b abgebildet. Dabei wird jedem Punkt von a genau ein Punkt von b zugeordnet. Umgekehrt gehört zu jedem Punkt von b genau ein Punkt von a.

■



Bei einer Parallelprojektion eines Dreiecks ABC auf eine Gerade wird jedem Punkt D des Dreiecks genau ein Punkt D der Geraden zugeordnet. Umgekehrt kann bei dieser Abbildung ein Bildpunkt mehrere Originalpunkte besitzen.



Die Abbildung im ersten Beispiel ist umkehrbar eindeutig oder eineindeutig, die im zweiten Beispiel nur eindeutig.

Eineindeutige Abbildungen der Ebene auf sich

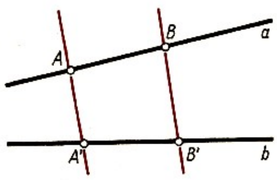
Bei einer eineindeutigen Abbildungen der Abbildung der Ebene auf sich wird jedem Punkt A der Ebene genau ein Punkt A' der Ebene als Bildpunkt zugeordnet und jeder Punkt der Ebene besitzt genau einen Originalpunkt.
A und A' heißen einander entsprechende Punkte bei der betreffenden Abbildung.

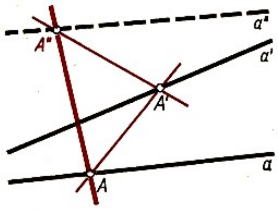
Wird bei dieser Abbildung der Ebene auf sich eine Figur F auf eine Figur F' abgebildet, so nennt man F und F' einander entsprechende Figuren bei dieser Abbildung.

Umkehrung einer Abbildung

Abbildungen lassen sich umkehren.

■ Bei einer Parallelprojektion einer Geraden a auf eine Gerade b wird jedem Punkt A von a genau ein Punkt A' von b zugeordnet. Umgekehrt besitzt jeder Punkt A' von b; genau ein Original A auf a.
Die Abbildung, die jedem Punkt A' von b sein Original A von a zuordnet, ist ebenfalls eine Parallelprojektion (der Geraden b auf die Gerade a). Sie heißt Umkehrung der ursprünglich gegebenen Parallelprojektion.





Nacheinanderausführung zweier Abbildungen

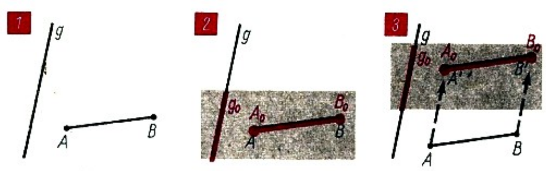
Abbildungen lassen sich nacheinander ausführen

■ Eine Gerade a' sei das Bild einer Geraden a bei einer Parallelprojektion f_1. Dabei sei der Punkt A' das Bild von A. Die Gerade a'' sei das Bild der Geraden a' bei einer Parallelprojektion f_2. Dabei sei A'' das Bild des Punktes A'.
Die Abbildung, bei der der Punkt A'' das Bild des Punktes A ist, nennen wir die Nacheinanderausführung der Abbildungen f_1 und f_2.

Werden eine Abbildung der Ebene auf sich und die zu ihr gehörige Umkehrabbildung nacheinander ausgeführt, so wird im Endergebnis jeder Punkt auf sich selbst abgebildet.
Wir sagen: Die Ebene wird identisch auf sich selbst abgebildet. Diese Abbildung heißt identische Abbildung oder Identität.

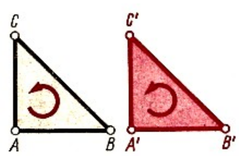
Bewegungen

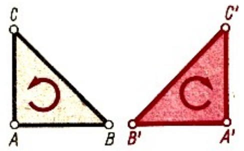
Unter allen möglichen Abbildungen der Ebene auf sich, die von der Identität verschieden sind, gibt es solche, bei denen nur die Lage von Original- und Bildfiguren verschieden ist.



Solche Abbildungen nennen wir Bewegungen. Sie lassen sich mit Hilfe von Transparentpapier veranschaulichen. Eine Vergrößerung ist zum Beispiel keine Bewegung.

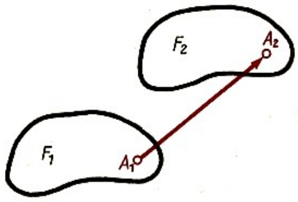
Wir unterscheiden

gleichsinnige Bewegungen	Original und Bild eines beliebigen Dreiecks haben gleichen Umlaufsinn	

ungleichsinnige Bewegungen	Original und Bild eines beliebigen Dreiecks haben entgegengesetzten Umlaufsinn	

Kongruenz

► Definition 10: Zwei geometrische Figuren heißen kongruent genau dann, wenn die eine das Bild der anderen bei einer Bewegung ist.

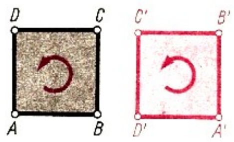
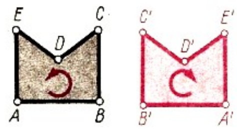


Schreibweise: $F_1 \cong F_2$
(lies: die Figuren F_1 und F_2 sind einander kongruent)

Eigenschaften der Kongruenz

Jede Figur ist zu sich selbst kongruent.
Aus $F_1 \cong F_2$ folgt $F_2 \cong F_1$.
Aus $F_1 \cong F_2$ und $F_2 \cong F_3$ folgt $F_1 \cong F_3$.

Wir unterscheiden

F_1 und F_2 sind gleichsinnig kongruent	F_2 ist das Bild von F_1 bei einer gleichsinnigen Bewegung	
F_1 und F_2 sind ungleichsinnig kongruent	F_2 ist das Bild von F_1 bei einer ungleichsinnigen Bewegung	

Strecken, Streckenabtragung

Zu jeder Strecke $\overline{AB}$ gibt es auf jedem Strahl CD genau einen Punkt B', so dass $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$ gilt. Wird dieser Punkt bestimmt, so sagen wir, dass die Strecke $\overline{AB}$ auf dem Strahl CD von C aus abgetragen wird. Die Streckenabtragung ist eindeutig.

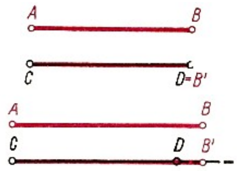
Streckenvergleich

Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ lassen sich vergleichen, indem die eine von beiden, z. B. $\overline{AB}$ von C aus auf dem Strahl CD abgetragen wird.

Vergleich zweier Strecken

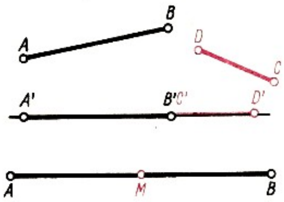
$\overline{AB}$ ist kleiner als $\overline{CD}$, $\overline{AB} < \overline{CD}$	Bei der Streckenabtragung liegt B' zwischen C und D	

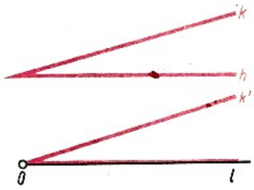
$\overline{AB}$ ist kongruent $\overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Bei der Streckenabtragung fallen B' und D zusammen
$\overline{AB}$ ist größer als $\overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$	Bei der Streckenabtragung liegt D zwischen C und B'



Summe und Differenz zweier Strecken

Die Summe zweier Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ findet man durch Abtragen dieser Strecken auf einer gemeinsamen Geraden. Wie man diese Gerade auch wählt und in welcher Reihenfolge man die Abtragung auch vornimmt, stets erhält man kongruente Strecken als Summe.





Mittelpunkt einer Strecke

Ein Punkt M einer Strecke $\overline{AB}$ heißt ihr Mittelpunkt genau dann, wenn die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$ kongruent sind. Jede Strecke besitzt genau einen Mittelpunkt. Wir sagen, dass der Mittelpunkt die betreffende Strecke halbiert.

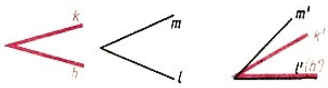
Winkel, Antragen eines Winkels

Zu jedem Winkel (h, k) gibt es auf jeder Seite eines Strahls l mit dem Anfangspunkt O genau einen Strahl k', der von O ausgeht, so dass $\angle(h,k) \cong \angle(l, k)$ gilt.
Wird einer dieser Strahlen bestimmt, so sagen wir, dass der Winkel (h, k) in der betreffenden Halbebene an den Strahl l angetragen wird.

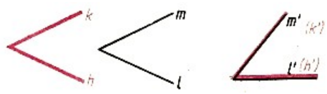
Vergleichen zweier Winkel

Zwei Winkel werden verglichen, indem beide an einen Strahl l in derselben Halbebene angetragen werden.

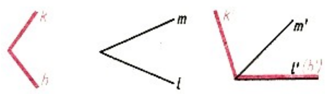
Vergleich zweier Winkel (h,k) und $l,m)$



$\angle(h, k)$ ist kleiner als $\angle(l, m)$, $\angle(h,k) < \angle(l,m)$

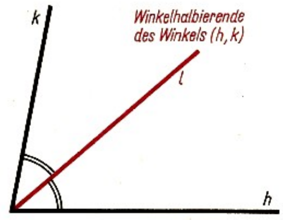


$\angle(h, k)$ ist kongruent $\angle(l, m)$, $\angle(h,k) \cong \angle(l,m)$



$\angle(h, k)$ ist größer als $\angle(l, m)$, $\angle(h,k) > \angle(l,m)$

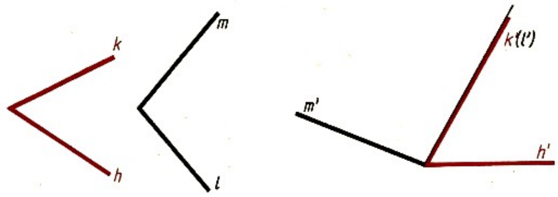
Winkelhalbierende eines Winkels



Ein Strahl l heißt Winkelhalbierende eines Winkels (h, k) genau dann, wenn er vom Scheitel des Winkels ausgeht, innerhalb des Winkels verläuft und wenn die Winkel (h, l) und (l,k) kongruent sind.
Jeder Winkel besitzt genau eine Winkelhalbierende.

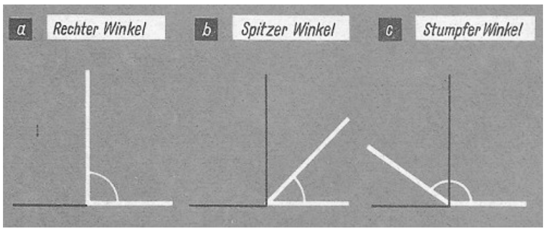
Summe zweier Winkel

Die Summe zweier Winkel (h,k) und (l,m) erhält man dadurch, dass man sie an einen beliebigen Strahl, wie folgendes Bild zeigt, anträgt. Wie man diesen Strahl auch wählt und in welcher Reihenfolge die Winkel auch angetragen werden, stets erhält man kongruente Winkel als Summe.



Einteilung der Winkel

Ein Winkel, der einem seiner Nebenwinkel kongruent ist, heißt ein rechter Winkel.
Durch Vergleich mit einem rechten Winkel können die Winkel eingeteilt werden.
Ein Winkel, der kleiner als ein rechter Winkel ist, heißt ein spitzer Winkel.
Ein Winkel, der größer als ein rechter Winkel ist, heißt ein stumpfer Winkel.



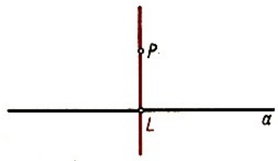
Senkrechte Geraden

▶ Definition 11: Zwei Geraden heißen zueinander senkrecht genau dann, wenn sie sich unter einem rechten Winkel schneiden.

In jedem Punkte A einer Geraden a gibt es in jeder Ebene durch a genau eine Gerade b, die auf a senkrecht steht.

Lot

▶ Definition 12: Eine Gerade, die durch einen nicht auf einer Geraden a liegenden Punkt P geht, heißt Lot von P auf die Gerade a genau dann, wenn sie auf der Geraden a senkrecht steht.



Fußpunkt eines Lotes

Den Schnittpunkt L eines Lotes auf a mit dieser Geraden a nennen wir den Fußpunkt des Lotes.
Von jedem Punkte P gibt es auf jede Gerade, die nicht durch P geht, genau ein Lot.

4.4 Strecken- und Winkelmessung

Streckenlänge, Einheitsstrecke

Eine Strecke wird gemessen, indem sie mit einer gegebenen Strecke, der Einheitsstrecke oder Längeneinheit, verglichen wird.
Die Zahl, die angibt, wie oft die Längeneinheit bzw. Bruchteile von ihr auf der gegebenen Strecke nacheinander abgetragen werden können, heißt die Maßzahl der Länge dieser Strecke bei der gegebenen Längeneinheit.
Kongruente Strecken haben die gleiche Maßzahl. Man sagt daher: kongruente Strecken sind gleich lang, kürzer: sie sind gleich.

Beim Abtragen kann der Fall eintreten, dass auch bei Benutzung beliebiger Bruchteile der Längeneinheit der jeweils durch die Abtragung erhaltene Punkt nie mit dem betreffenden Endpunkt der Strecke zusammenfällt. In diesem Fall ist die Maßzahl der Länge eine irrationale Zahl, und man nennt die Strecke zur gegebenen Längeneinheit inkommensurabel.

Längeneinheiten

Die Längenangabe für eine Strecke ist eindeutig, wenn die Maßzahl der Länge und die Längeneinheit angegeben werden.

Übersicht über Längeneinheiten

Bezeichnung	Zeichen	Beziehung
Kilometer	km	1 km $= 10^3$ m
Meter	m	
Dezimeter	dm	1dm $= 10^{-1}$ m
Zentimeter	cm	1 cm $= 10^{-2}$ m
Millimeter	mm	1 mm $= 10^{-3}$ m

Zur Bezeichnung einer Strecke benutzt man auch kleine lateinische Buchstaben. Den gewählten Buchstaben verwendet man dann auch zur Bezeichnung der Streckenlänge (mitunter auch für deren Maßzahl).

■ $\overline{AB} = a$; $a = 3{,}0$ cm

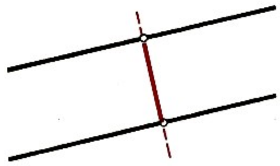
Die Summe zweier Strecken

Die Länge der Summe zweier Strecken ergibt sich durch Addition der Längen der beiden Strecken.

Entfernung und Abstand

Die Entfernung zweier Punkte A und B voneinander ist die Länge der Strecke $\overline{AB}$.
Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden a ist die Länge der Strecke $\overline{PL}$, wobei L der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade a ist.

Der Abstand zweier paralleler Geraden a und b ist die Länge einer Strecke $\overline{AB}$, wobei A auf a und B auf b liegt und die Gerade AB senkrecht auf den Geraden a und b steht.



Messen eines Winkels

Ein Winkel wird gemessen, indem er mit einem gegebenen Winkel, dem Einheitswinkel, verglichen wird.

Gradmaß

Man kann den Einheitswinkel so wählen, dass ein rechter Winkel das 90-fache dieses Einheitswinkels ist. Man nennt diesen Einheitswinkel 1 Grad und bezeichnet ihn mit 1°.
In diesem Fall sagt man, dass die Winkel im Gradmaß gemessen werden.

Unterteilung des Gradmaßes

Bezeichnung	Zeichen	Beziehung
Grad	$1°$	
Minute	1'	$1° = 60'$
Sekunde	1"	$1° = 3600''$

Die Maßzahl für die Größe eines Winkels ergibt sich ähnlich wie bei der Streckenmessung durch Antragen des Einheitswinkels bzw. geeigneter Bruchteile innerhalb des ausgezeichneten Teiles der Ebene.

Kongruente Winkel haben die gleiche Maßzahl. Man sagt daher: kongruente Winkel sind gleich groß, kürzer: sie sind gleich.
Zur Bezeichnung eines Winkels benutzt man auch kleine griechische Buchstaben. Den gewählten Buchstaben verwendet man dann auch zur Bezeichnung der Winkelgröße.

■ $\angle(h,k) = \alpha$; $\alpha = 32°5'16''$

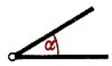
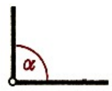
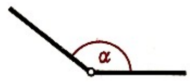
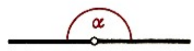
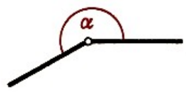
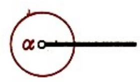
Summer zweier Winkel

Die Maßzahl der Summe zweier Winkel ergibt sich durch Addition der Maßzahlen der beiden Winkel.
Die Summe der Maßzahlen zweier Winkel nennt man kurz "Summe der beiden Winkel". Man sagt: Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt 180°.

Erweiterung des Winkelbegriffes, Nullwinkel, gestreckter Winkel

1. Haben die Strahlen h und k denselben Anfangspunkt und fallen sie zusammen, so heißt diese Figur Nullwinkel. Ein Nullwinkel hat das Maß 0°.

2. Ein Paar entgegengesetzter Strahlen mit demselben Anfangspunkt heißt gestreckter Winkel. Ein gestreckter Winkel hat das Maß 180○.

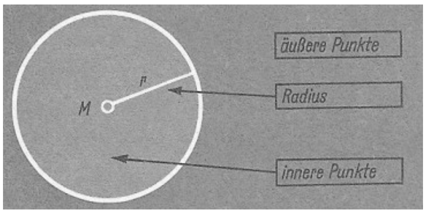
Einteilung der Winkel nach ihrer Größe		
Winkelart	Größe	
Nullwinkel	$0°$	
spitzer Winkel	$0° < \alpha < 90°$	
rechter Winkel	$\alpha = 90°$	
stumpfer Winkel	$90° < \alpha < 180°$	
gestreckter Winkel	$\alpha = 180°$	
überstumpfer Winkel	$180° < \alpha < 360°$	
Vollwinkel	$\alpha = 360°$	

4.5 Kreis und Ellipsen

Kreis

▶ Definition 13: Die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt M dieser Ebene gleich weit entfernt sind, heißt ein Kreis mit dem Mittelpunkt M.

Die Verbindungsstrecke $\overline{MA}$ eines Kreispunktes A mit dem Mittelpunkt M des Kreises heißt Radius. Ist r die Länge der Radien eines Kreises, so sprechen wir auch von dem Radius r des Kreises.

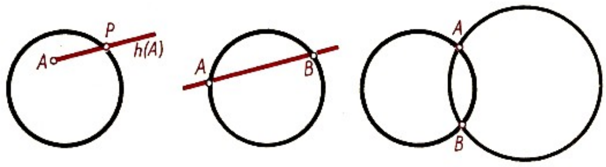


Kreisfläche

Der Teil der Ebene, der von einem Kreis eingeschlossen wird, heißt die Fläche dieses Kreises. Die Punkte der Kreisfläche haben einen Abstand von M, der kleiner als r ist.

Eigenschaften der Kreise

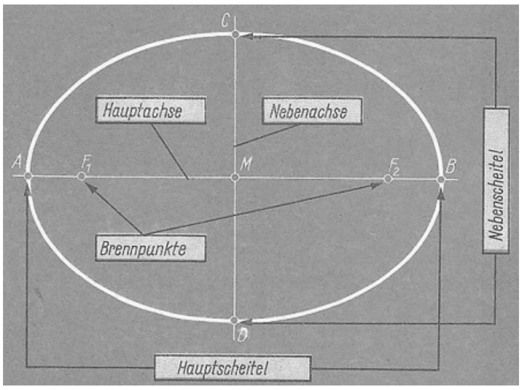
1. Jeder Strahl, der von einem Punkt der Kreisfläche ausgeht, hat mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam.
2. Eine Gerade hat höchstens zwei Punkte mit einem Kreis gemeinsam.
3. Zwei verschiedene Kreise haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.

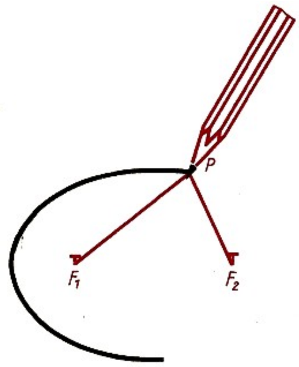


Haben eine Gerade und ein Kreis zwei gemeinsame Punkte, so sagt man, dass die Gerade den Kreis schneidet. Haben eine Gerade und ein Kreis genau einen Punkt gemeinsam, so sagt man, dass die Gerade den Kreis berührt.
Haben zwei Kreise zwei gemeinsame Punkte, so sagt man, dass sie einander schneiden.

Ellipsen

▶ Definition 14: Die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist, heißt Ellipse.
Die beiden festen Punkte F_1 und F_2 werden Brennpunkte der Ellipse genannt.





Gärtnerkonstruktion

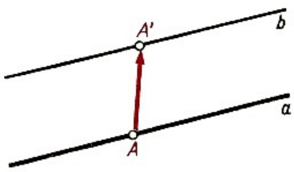
Man wählt zwei feste Punkte F_1 und F_2 als Brennpunkte und befestigt in ihnen eine Schnur, die länger als $\overline{F_1F_2}$ sein muss. Führt man nun einen Bleistift so über das Papier, dass die Schnur stets gestrafft ist, so beschreibt er eine Ellipse.

4.6 Eigenschaften elementarer Bewegungen

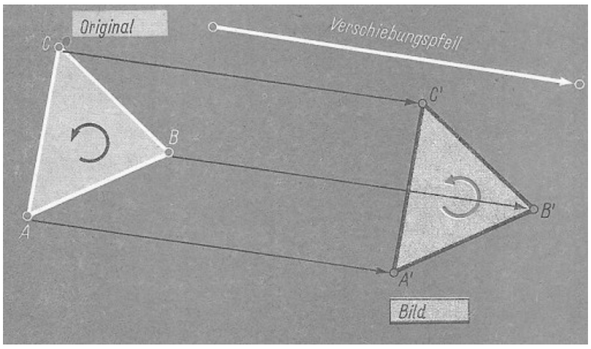
Verschiebung

▶ Definition 15: Eine Bewegung heißt eine Verschiebung genau dann, wenn jede Gerade zu ihrer Bildgeraden parallel ist und wenn entweder kein Punkt auf sich selbst abgebildet wird oder wenn alle Punkte mit ihren Bildpunkten zusammenfallen.

Eigenschaften von Verschiebungen



(1) Zu je zwei parallelen Geraden gibt es (mindestens) eine Verschiebung, bei der die eine das Bild der anderen ist.
Ist A' das Bild eines Punktes A bei einer Verschiebung, so heißt die Richtung der Geraden AA' die Verschiebungsrichtung und die Länge der Strecke $\overline{AA'}$ die Verschiebungsweite.

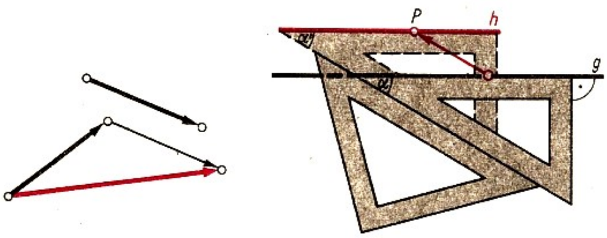


Verschiebung

Eine Verschiebung ist durch einen Punkt A und seinen Bildpunkt A' eindeutig bestimmt; wir bezeichnen sie mit $\overrightarrow{AA'}$. Die orientierte Strecke $\overrightarrow{AA'}$ wird auch als Verschiebungspfeil bezeichnet.

(2) Die, orientierten Strecken, die Originalpunkte mit ihren Bildpunkten bei einer Verschiebung verbinden, sind parallel, gleichorientiert und kongruent.

(3) Die Nacheinanderausführung zweier Verschiebungen ergibt eine Verschiebung.



Die Konstruktion des Bildes erfolgt durch Zusammensetzung der Verschiebungspfeile,

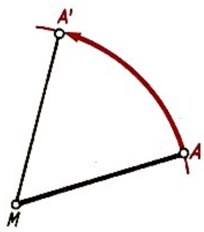
Bemerkung: Die Anwendung von zwei Zeichendreiecken zum Zeichnen von Parallelen bei praktischen Zeichenaufgaben beruht auf den Eigenschaften der Verschiebungen. Das obenstehende Bild zeigt, wie zu einer Geraden g die Parallele h durch einen Punkt P mit Hilfe zweier Zeichendreiecke gezeichnet werden kann.

Drehung um einen Punkt

► Definition 16: Eine Bewegung heißt eine Drehung um einen Punkt genau dann, wenn entweder genau ein Punkt auf sich selbst abgebildet wird oder wenn alle Punkte mit ihren Bildpunkten zusammenfallen.

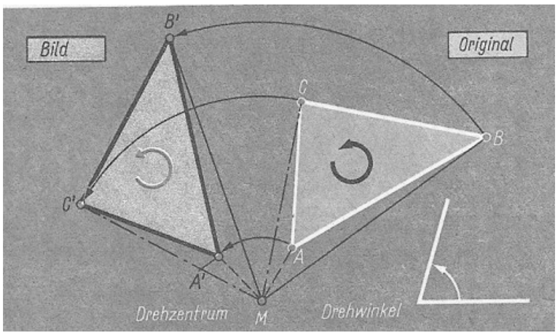
Eigenschaften von Drehungen

(1) Zu je zwei Punkten eines Kreises mit dem Mittelpunkt M gibt es eine Drehung um M, bei der der eine Punkt das Bild des anderen ist.



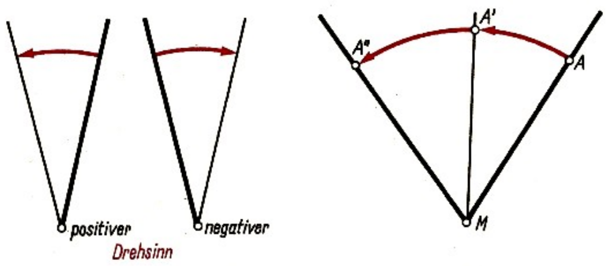
Der Punkt M heißt das Drehzentrum der Drehung. Ist A' das Bild eines Punktes A bei einer Drehung um M, so heißt der Winkel AMA' ein Drehwinkel.

(2) Bei ein und derselben Drehung sind alle Drehwinkel untereinander kongruent. Daher sprechen wir auch von dem Drehwinkel bei einer Drehung.
Ist A' das Bild eines Punktes A bei einer Drehung um M, so liegt A' auf dem Kreis um M mit dem Radius $\overrightarrow{AM}$.



Drehung um einen Punkt

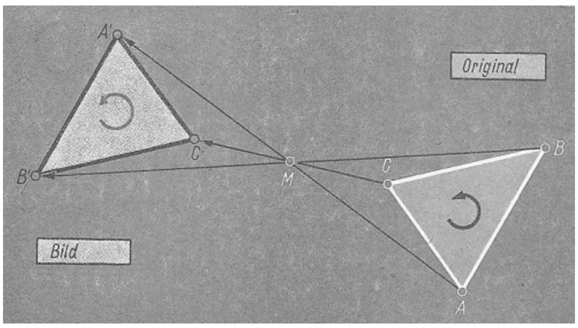
Wird der Kreis von A nach A' entgegen dem Umlaufsinn eines Uhrzeigers durchlaufen, so sagen wir, dass die Drehung einen positiven Drehsinn besitzt. Im anderen Falle heißt der Drehsinn negativ.
Eine Drehung ist durch Angabe des Drehzentrums, der Größe des Drehwinkels und des Drehsinns eindeutig bestimmt.



(3) Die Nacheinanderausführung zweier Drehungen mit demselben Drehzentrum M ergibt eine Drehung um M.
Haben beide Drehungen um M denselben (entgegengesetzten) Drehsinn, so ist die Größe des Drehwinkels bei der Nacheinanderausführung gleich der Summe (der Differenz) aus den Größen der beiden Drehwinkel.

Punktspiegelung

► Definition 17: Eine Drehung um einen Punkt M heißt eine Punktspiegelung an M genau dann, wenn der Drehwinkel ein gestreckter Winkel ist.



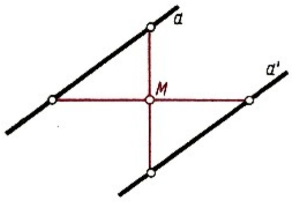
Punktspiegelung

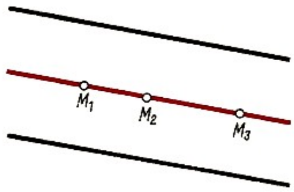
Eigenschaften von Punktspiegelungen

Den Punkt M nennen wir das Zentrum der Punktspiegelung. Eine Punktspiegelung ist durch Angabe des Zentrums eindeutig bestimmt.

(1) Ist A' das Bild von A bei einer Punktspiegelung an M, so liegen A und A' auf einander entgegengesetzten Strahlen mit dem Anfangspunkt M, wobei sie von M gleich weit entfernt sind.

(2) Jede Gerade, die durch das Zentrum einer Punktspiegelung geht, wird auf sich selbst abgebildet.
Jede Gerade a, die nicht durch das Zentrum geht, wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet, die von a verschieden ist (Bild unten links).





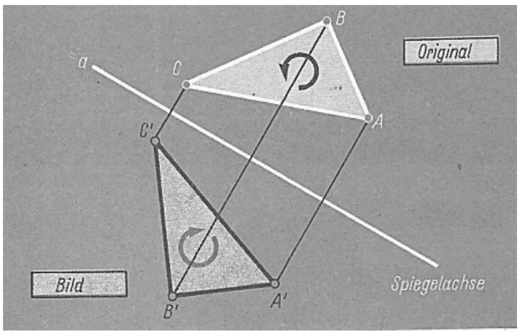
Punktspiegelung

(3) Zu je zwei parallelen Geraden gibt es (mindestens) eine Punktspiegelung, bei der die eine das Bild der anderen ist.

Bemerkungen: Die Zentren aller Punktspiegelungen, bei denen zwei parallele Geraden aufeinander abgebildet werden, liegen auf ihrer Mittelparallelen, das heißt auf derjenigen Geraden, die von beiden Geraden gleichen Abstand hat (Bild rechts).

Spiegelung an einer Geraden

► Definition 18: Eine Bewegung heißt eine Spiegelung an einer Geraden a genau dann, wenn die Gerade a punktweise auf sich selbst abgebildet wird und die Seiten der Geraden vertauscht werden.



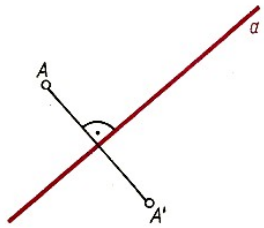
Spiegelung an einer Geraden

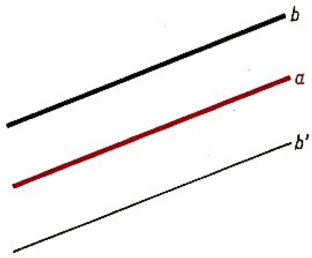
Eigenschaften von Geradenspiegelungen

(1) An jeder Geraden a gibt es genau eine Spiegelung. Die Gerade a heißt die Spiegelachse oder die Spiegelgerade der Spiegelung.
Wird ein Punkt A an einer Geraden a gespiegelt, heißt sein Bild A' das Spiegelbild von A und man sagt, dass A und A' spiegelbildlich zur Geraden a liegen.

(2) Bei der Spiegelung an einer Geraden a gilt für jeden Punkt A, der nicht auf a liegt, folgendes:

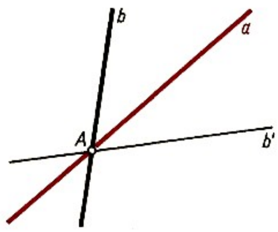
a) Der Punkt A und sein Spiegelbild A' liegen auf verschiedenen Seiten von a.
b) Die Gerade AA' steht senkrecht auf a.
c) A und A' haben denselben Abstand von a.

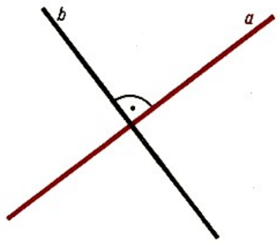




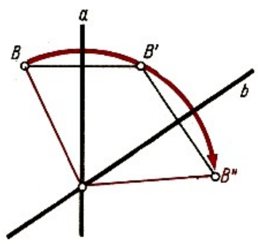
(3) Jede zur Spiegelachse a parallele Gerade ist auch parallel zu ihrem Spiegelbild (Bild rechts). Jede zur Spiegelachse a nicht parallele Gerade schneidet ihr Spiegelbild auf der Spiegelachse (Bild links).

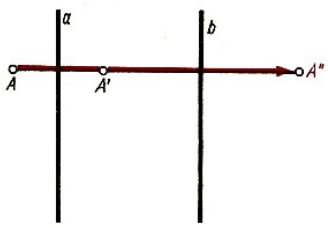
(4) Eine Gerade b wird bei der Spiegelung an a genau dann auf sich selbst abgebildet, wenn b auf a senkrecht steht (Bild rechts).





Bemerkungen: Die Nacheinanderausführung zweier Spiegelungen an den Geraden a und b ergibt
1) eine Drehung, falls a und b einander schneiden, mit ihrem Schnittpunkt als Drehzentrum (Bild links);
2) eine Verschiebung, falls a und b parallel sind (Bild rechts). Verschiebungen und Drehungen sind gleichsinnige, Geradenspiegelungen ungleichsinnige Bewegungen.





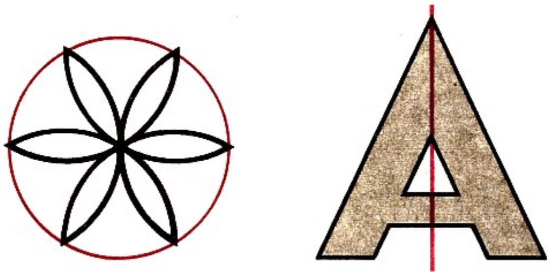
► Jede Bewegung ist entweder eine elementare Bewegung oder sie ergibt sich aus der Nacheinanderausführung elementarer Bewegungen.

Die Eigenschaften der elementaren Bewegungen werden ebenso wie die anderen bisher genannten Eigenschaften für die Beweise der folgenden geometrischen Sätze verwendet. Die Eigenschaften der elementaren Bewegungen sind ihrerseits selbst geometrische Sätze, die bewiesen werden könnten.

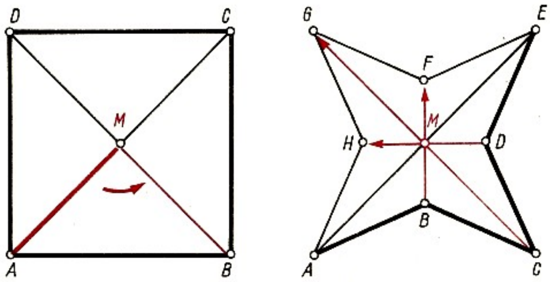
4.7 Symmetrie

Symmetrie

▶ Definition 19: Eine geometrische Figur heißt symmetrisch genau dann, wenn es eine von der Identität verschiedene Bewegung gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird.



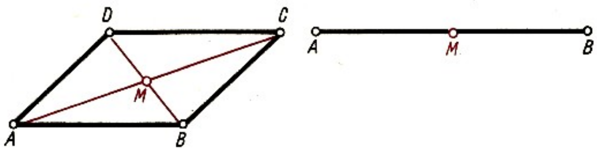
Wird ein Quadrat $ABCD$ um seinen Mittelpunkt (Schnittpunkt der Diagonalen) mit einem positiven Drehwinkel von 90° gedreht, so wird A auf B, B auf C, C auf D und D auf A abgebildet. Das Bild des Quadrats ist das Quadrat selbst.



Punktsymmetrie

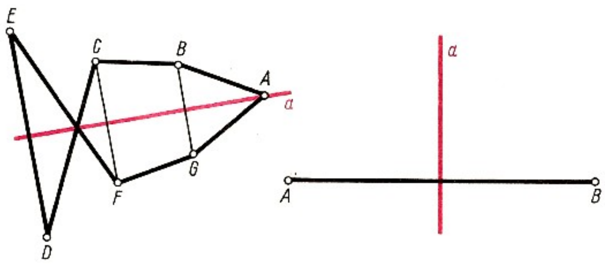
▶ Definition 20: Eine geometrische Figur heißt punktsymmetrisch genau dann, wenn es eine Punktspiegelung gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird.

Das Zentrum der Punktspiegelung heißt dann Symmetriezentrum der Figur.
Beispiele für punktsymmetrische Figuren sind Parallelogramme, Strecken, Kreise, das Bild der Sinusfunktion und anderer ungerader Funktionen.

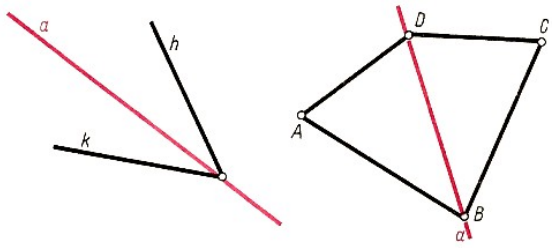


Axialsymmetrie

▶ Definition 21: Eine geometrische Figur heißt axialsymmetrisch genau dann, wenn es eine Geradenspiegelung gibt, bei der die Figur auf sich selbst abgebildet wird.



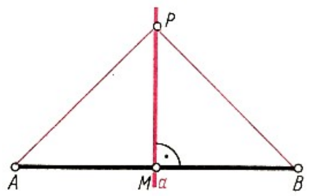
Die Spiegelgerade heißt dann Symmetrieachse der Figur. Beispiele für axialsymmetrische Figuren mit einer Symmetrieachse sind Strecken, Winkel und Drachenvierecke.



Beispiele für axialsymmetrische Figuren mit beliebig vielen Symmetrieachsen sind Kreise und die Bilder gerader Funktionen (z. B. der Kosinusfunktion).

Die Mittelsenkrechte einer Strecke

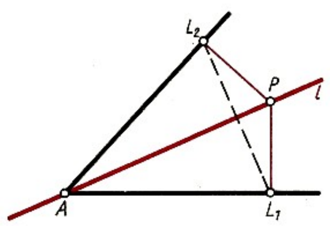
▶ Definition 22: Diejenige Senkrechte auf einer Strecke $\overline{AB}$, die diese halbiert, heißt ihre Mittelsenkrechte.



Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist ihre Symmetrieachse. Ein Punkt P liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, wenn er von A und von B gleich weit entfernt ist

Sätze über die Winkelhalbierende

(1) Die Winkelhalbierende eines Winkels ist seine Symmetrieachse.
(2) Ein Punkt P liegt genau dann auf der Winkelhalbierenden eines Winkels, wenn er von beiden Schenkeln dieses Winkels denselben Abstand hat.

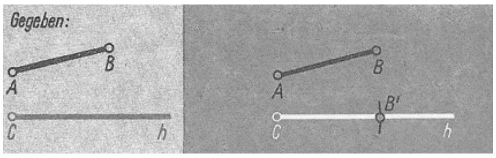


4.8 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Unter einer geometrischen Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist folgende Aufgabe zu verstehen:
Aus gegebenen Punkten (einer Ebene) sind weitere Punkte (dieser Ebene) zu bestimmen. Dabei dürfen die folgenden Grundaufgaben endlich oft ausgeführt werden:
(1) Durch zwei gegebene Punkte ist die Gerade zu zeichnen.

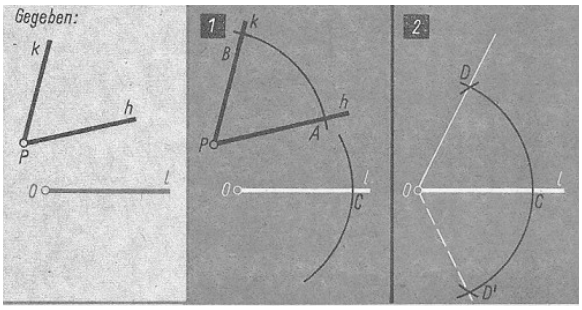
(2) Um einen gegebenen Punkt ist der Kreis mit einem gegebenen Radius zu zeichnen.

Abtragen von Strecken auf einem Strahl



Beschreibung:
Wir zeichnen einen Kreis um C mit dem Radius $\overline{AB}$. Dieser schneidet den Strahl h im gesuchten Punkt B'.

Antragen von Winkeln an einen Strahl

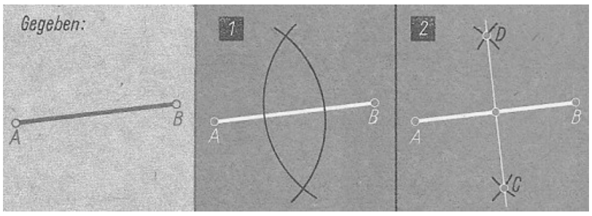


Beschreibung:
1) Wir zeichnen um P einen Kreis, der die Schenkel des gegebenen Winkels in A bzw. B schneidet.
Mit dem Radius $\overline{PA}$ zeichnen wir einen Kreis um O, der l in C schneidet. Diesen Kreis bezeichnen wir mit K.

2) Wir zeichnen um C einen Kreis mit dem Radius $\overline{AB}$, der den Kreis k in den Punkten D und D' schneidet. Die Strahlen OD und OD' bilden mit dem gegebenen Strahl I jeweils einen Winkel, der zum gegebenen Winkel kongruent ist.

Bemerkung: Ist nicht der Winkel selbst, sondern nur seine Größe gegeben, so wird zum Antragen der Winkelmesser benutzt.

Mittelsenkrechte einer Strecke

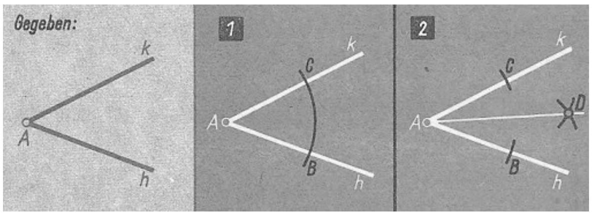


Beschreibung:
1) Wir zeichnen um A und B jeweils einen Kreis mit einem Radius $r > \frac{\overline{AB}}{2}$.
2) Die Schnittpunkte beider Kreise seien C und D. Die Gerade CD ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

Mittelpunkt einer Strecke

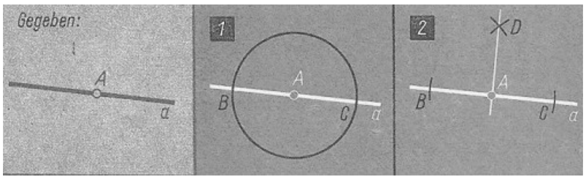
Der Mittelpunkt einer Strecke ist der Schnittpunkt der Strecke mit ihrer Mittelsenkrechten.

Winkelhalbierende



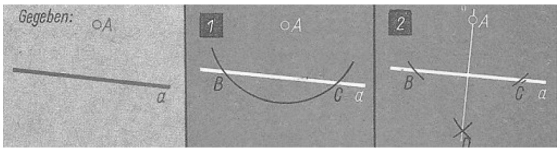
Beschreibung:
1) Wir zeichnen einen Kreis um den Scheitel A, der die Schenkel h und k in B und C schneidet.
2) Um B und C zeichnen wir Kreise mit gleichem Radius r (z.B. $r = \overline{AB}$). D sei Schnittpunkt beider Kreise. Der Strahl AD ist dann Winkelhalbierende des Winkels (h, k).

Senkrechte in einem Punkt einer Geraden



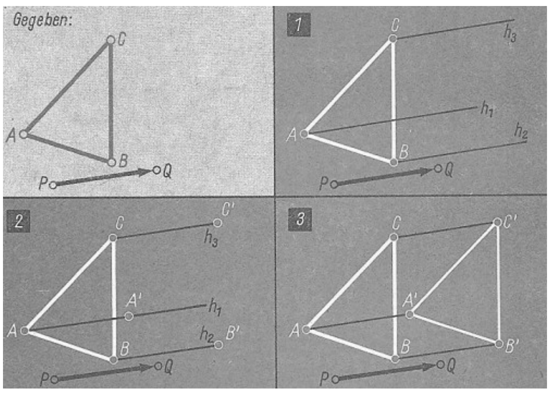
Beschreibung:
1) Wir zeichnen um den gegebenen Punkt A einen Kreis, der die Gerade a in den Punkten B und C schneidet.
2) Nun konstruieren wir die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BC}$. Sie ist die gesuchte Senkrechte in A auf a.

Lot von einem Punkt auf eine Gerade



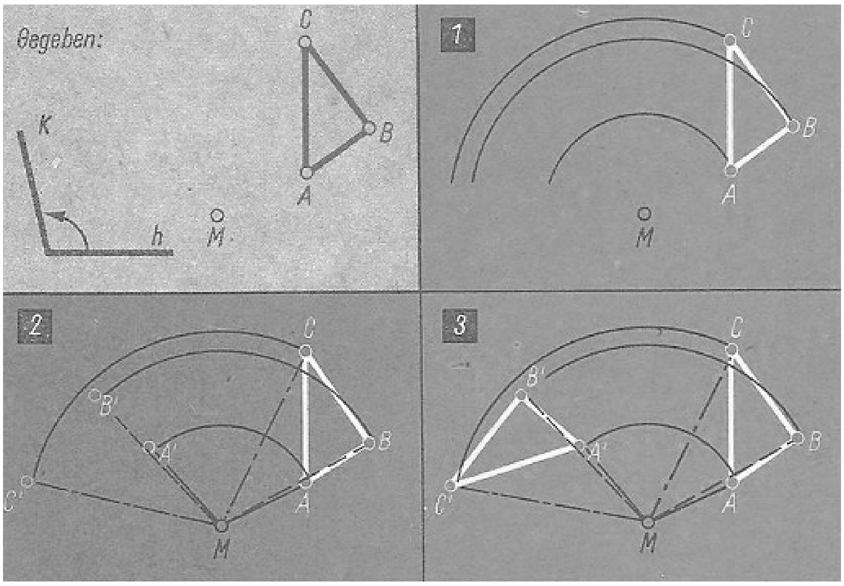
Beschreibung:
1) Wir zeichnen um den gegebenen Punkt A einen Kreis mit einem Radius r, der größer als der Abstand des Punktes A von a sein muss. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden a seien B und C.
2) Die Konstruktion der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{BC}$ ergibt das Lot von A auf a.

Bild eines Dreiecks bei einer Verschiebung



Beschreibung:
1) Wir zeichnen von A, B und C aus Strahlen h_1, h_2 und h_3, die mit dem Strahl PQ gleich orientiert sind.
2) Wir tragen auf den Strahlen $\overline{PQ}$ ab. Das ergibt die Punkte A', B', C'. Das Dreieck $A'B'C'$ ist das Bild des Dreiecks ABC bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$.

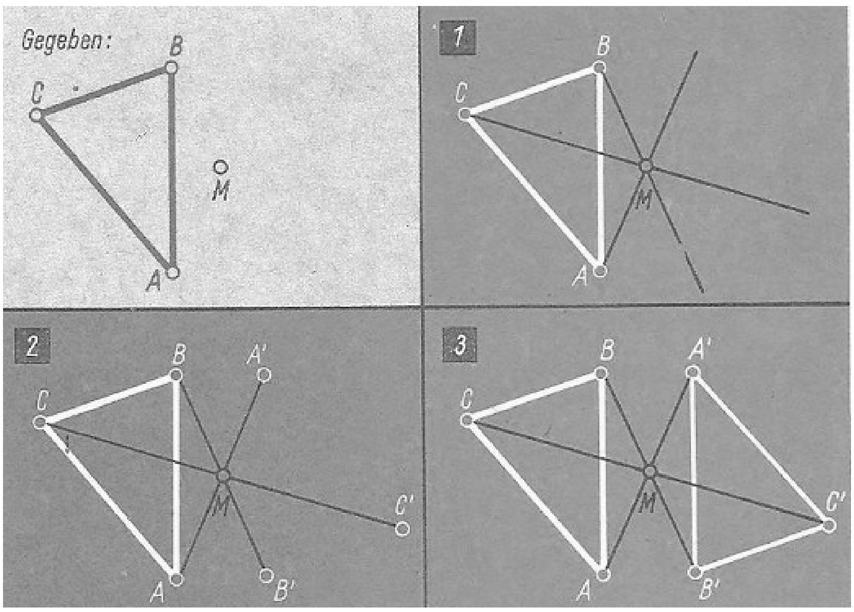
Bild eines Dreiecks bei einer Drehung um einen Punkt



Beschreibung:
1) Wir zeichnen Kreise um M mit den Radien $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$.
2) Wir tragen den Winkel $\angle(h,k)$ in M an die Strahlen MA, MB und MC an. Die freien Schenkel der angetragenen Winkel schneiden die entsprechenden Kreise in den Punkten A', B' und C'. Das Dreieck $A'B'C'$ ist das Bild des Dreiecks bei der Drehung.

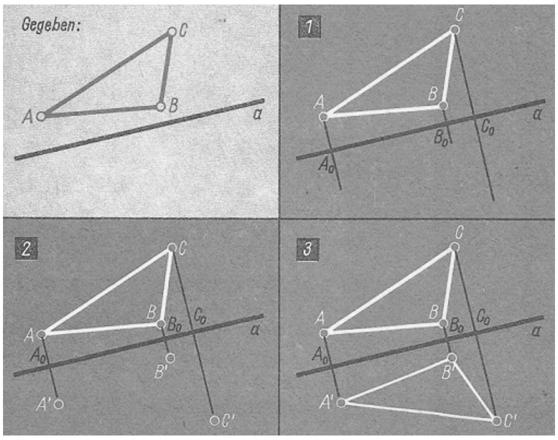
Bemerkung: Ein Schenkel eines Winkels heißt frei, wenn auf ihm noch kein Punkt gewählt wurde.

Bild eines Dreiecks bei einer Punktspiegelung an M



Beschreibung :
1) Wir zeichnen von A, B und C aus die Strahlen h_1, h_2 und h_3, die durch M verlaufen.
2) Wir tragen die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ bzw. $\overline{CM}$ auf den Strahlen h_1, h_2 bzw. h_3 von M aus ab und erhalten die Punkte A', B' bzw. C'. Das Dreieck $A'B'C'$ ist das Bild des Dreiecks ABC bei der Punktspiegelung an M.

Bild eines Dreiecks bei einer Geradenspiegelung



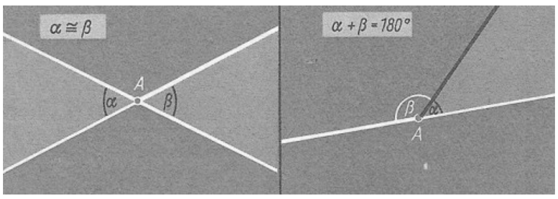
Beschreibung:
1) Wir fällen die Lote l_1, l_2 bzw. l_3 von A, B und C aus auf die Gerade a und erhalten die Fußpunkte A_0, B_0 bzw. C_0.
2) Wir tragen auf den Loten l_1, l_2 und l_3 von A_0, B_0 bzw. C_0 aus die Strecken $\overline{AA_0}$, $\overline{BB_0}$ bzw. $\overline{CC_0}$ ab. Wir erhalten die Bildpunkte A', B' bzw. C'.
Das Dreieck $A'B'C'$ ist das Bild des Dreiecks ABC bei der Geradenspiegelung an a.

4.9 Winkelpaare

Scheitelwinkel

▶ Satz 23: Scheitelwinkel sind kongruent.

Beweis: Da zwei Scheitelwinkel mit dem Scheitel A bei einer Punktspiegelung an A einander entsprechen, sind sie kongruent.



Scheitelwinkel Nebenwinkel

Nebenwinkel

▶ Satz 24: Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt $180°$.
Jeder Winkel besitzt zwei kongruente Nebenwinkel.

Supplementwinkel

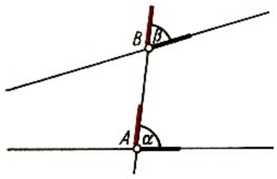
▶ Definition 25: Zwei beliebige Winkel, deren Summe $180°$ beträgt, heißen Supplementwinkel,

Komplementwinkel

▶ Definition 26: Zwei beliebige Winkel, deren Summe $90°$ beträgt, heißen Komplementwinkel.

Stufenwinkel

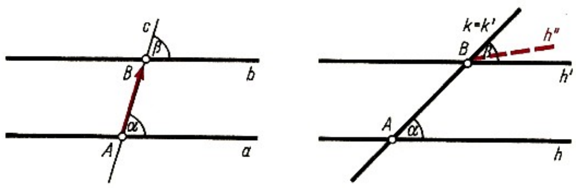
▶ Definition 27: Zwei Winkel heißen Stufenwinkel genau dann, wenn folgendes gilt:



(1) Die Scheitel A und B der Winkel sind verschieden.
(2) Ein Paar Schenkel liegt auf der Geraden AB. Die beiden Schenkel sind gleich orientiert.
(3) Die beiden anderen Schenkel liegen auf derselben Seite der Geraden AB.

▶ Satz 28: Stufenwinkel sind kongruent genau dann, wenn die Schenkel, die auf verschiedenen Geraden liegen, parallel sind.

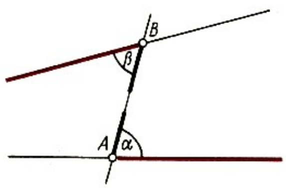
Beweis:
a) Zwei parallele Geraden a und b werden von einer Geraden c in den Punkten A und B geschnitten (Bild links).
Die Winkel α und β seien Stufenwinkel mit den Scheiteln A und B. Da die Winkel bei der Verschiebung $\overrightarrow{AB}$ oder bei der Verschiebung $\overrightarrow{BA}$ einander entsprechen, sind sie kongruent.



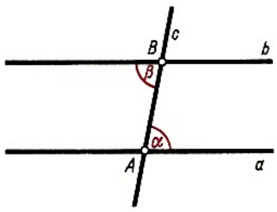
b) Zwei Stufenwinkel $\alpha = \angle(h, k)$, $\beta = \angle(h', k')$ mit den Scheiteln A und B seien kongruent (Bild rechts). Die Schenkel, die auf verschiedenen Geraden liegen, seien h und h'.
Wären h und h' nicht parallel, so gäbe es zu h durch B einen parallelen Strahl h'', der mit h' auf derselben Seite von AB liegt. Nach a) wären dann die Winkel $\angle(h, k)$ und $\angle(h'', k')$ kongruent. Dann müssten auch die Winkel $\angle(h',k')$ und $\angle(h'',k')$ kongruent sein. Das ist nicht möglich. Folglich sind die Schenkel h und h' parallel.

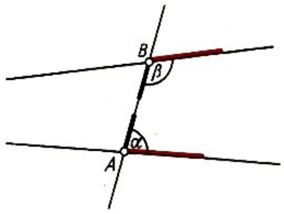
Wechselwinkel

▶ Definition 29: Zwei Winkel heißen Wechselwinkel genau dann, wenn folgendes gilt:
(1) Die Scheitel A und B der Winkel sind verschieden.
(2) Ein Paar Schenkel liegt auf der Geraden AB. Die beiden Schenkel sind entgegengesetzt orientiert.
(3) Die beiden anderen Schenkel liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden AB.



▶ Satz 30: Wechselwinkel sind kongruent genau dann, wenn die Schenkel, die auf verschiedenen Geraden liegen, parallel sind (Bild links).

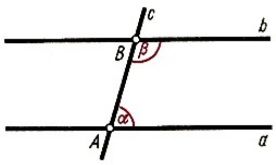


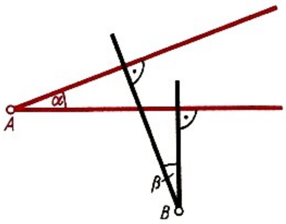


Entgegengesetzt liegende Winkel

▶ Definition 31: Zwei Winkel heißen entgegengesetzt liegende Winkel genau dann, wenn folgendes gilt (Bild rechts):
(1) Die Scheitel der Winkel A und B sind verschieden.
(2) Ein Paar Schenkel liegt auf der Geraden AB. Die Schenkel sind entgegengesetzt orientiert.
(3) Die beiden anderen Schenkel liegen auf derselben Seite der Geraden AB.

▶ Satz 32: Entgegengesetzt liegende Winkel sind Supplementwinkel genau dann, wenn die Schenkel, die auf verschiedenen Geraden liegen, parallel sind (Bild links).



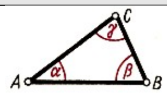
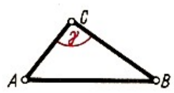
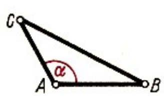


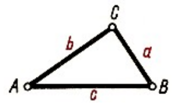
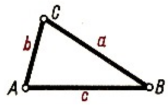
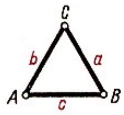
Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen

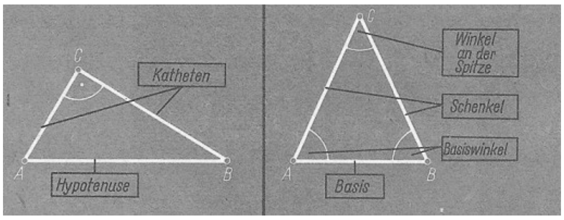
▶ Satz 33: Wenn die Schenkel zweier Winkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, so sind sie kongruent, falls der Scheitel des einen nicht im Innern oder auf einem Schenkel des anderen Winkels liegt (Bild rechts).

4.10 Dreiecke

Einteilung der Dreiecke

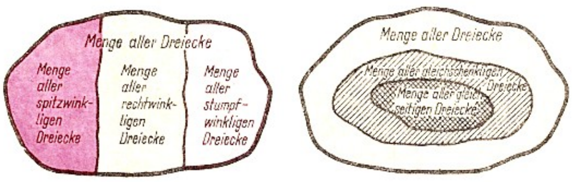
Einteilung der Dreiecke nach Innenwinkeln		
Art der Dreiecke	Erklärung	
spitzwinklige Dreiecke	die drei Innenwinkel sind spitze Winkel	
rechtwinklige Dreiecke	ein Innenwinkel ist ein rechter Winkel	
stumpfwinklige Dreiecke	ein Innenwinkel ist ein stumpfer Winkel	

Einteilung der Dreiecke nach den Seiten		
Art der Dreiecke	Erklärung	
unregelmäßige Dreiecke	Die Seiten a, b, c sind paarweise verschieden	
gleichschenklige Dreiecke	es gibt zwei Seiten, die gleich lang sind	
gleichseitige Dreiecke	die Seiten a, b, c sind gleich lang	



Rechtwinkliges Dreieck Gleichschenkliges Dreieck

Bemerkung: Die Menge aller Dreiecke ist die Vereinigung der Menge aller spitzwinkligen, der Menge aller rechtwinkligen und der Menge aller stumpfwinkligen Dreiecke.

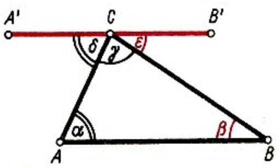


Die Menge aller gleichseitigen Dreiecke ist (echte) Teilmenge der Menge aller gleichschenkligen Dreiecke, die ihrerseits (echte) Teilmenge aller Dreiecke ist.

Innenwinkel

▶ Satz 34: Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt $180°$.

Beweis: Man zeichnet durch C die Parallele $A'B'$ zu AB.



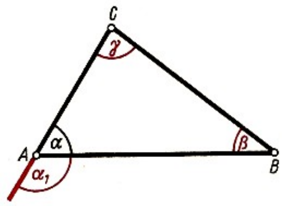
Dann gilt (↗ Bild): $\alpha = \delta$ und $\beta = \epsilon$ (Wechselwinkel an Parallelen).
Aus $\delta + \gamma + \epsilon = 180°$ folgt daher $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Bemerkung:
Aus diesem Satz folgt:
1) Ein Dreieck hat höchstens einen rechten oder einen stumpfen Winkel.
2) Aus zwei gegebenen Innenwinkeln eines Dreiecks lässt sich der dritte berechnen. ($\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$)

3) Die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind Komplementwinkel.

Außenwinkel

▶ Satz 35: Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

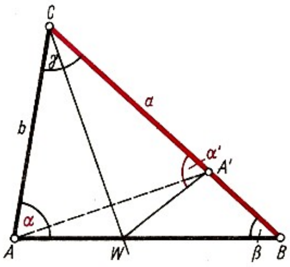


Beweis (↗ Bild):
Es gilt $\alpha + \alpha_1 = 180°$. Weiter gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Daraus folgt: $\alpha_1 = \beta + \gamma$.

Aus diesem Satz folgt:
▶ Satz 36: Ein Außenwinkel ist stets größer als jeder der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.
▶ Satz 37: Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt $360°$.

Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln

▶ Satz 38: Der größeren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber.



Beweis: In einem Dreieck ABC sei $a > b$. Die Gerade CW sei Winkelhalbierende des Winkels γ. Bei der Spiegelung an der Geraden CW liegt das Bild A' des Punktes A zwischen C und B.
Das Bild α' des Winkels α bei dieser Spiegelung ist der Winkel $CA'W$. Dieser Winkel ist gleichzeitig Außenwinkel des Dreiecks WBA'. Dann gilt $\alpha' > \beta$ (↗ Satz D36). Wegen $\alpha' = \alpha$ ist $\alpha > \beta$.

Aus diesem Satz folgt:

▶ Satz 39: Der größten Seite eines Dreiecks liegt der größte Winkel gegenüber.

▶ Satz 40: Dem größeren von zwei Winkeln eines Dreiecks liegt die größere Seite gegenüber.

Beweis: In einem Dreieck ABC sei $\alpha > \beta$.
1) Angenommen, es wäre $b > a$. Dann müsste nach Satz 38 $\beta > \alpha$ gelten. Das widerspricht der Voraussetzung.
2) Angenommen, es wäre $a = b$. Dann wäre das Dreieck ABC gleichschenklig und $\alpha = \beta$ als Basiswinkel in diesem Dreieck. Auch dies widerspricht der Voraussetzung.
3) Also kann nur $a > b$ gelten.

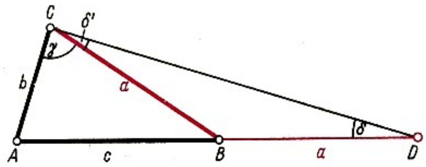
Aus diesem Satz folgt:

▶ Satz 41: Dem größten Winkel eines Dreiecks liegt die größte Seite gegenüber.

Speziell für rechtwinklige Dreiecke folgt aus diesem Satz, dass die Hypotenuse größer als jede der beiden Katheten ist.

Dreiecksungleichung

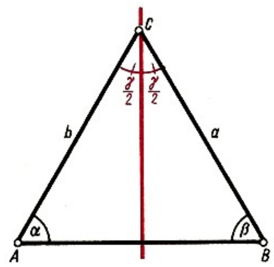
▶ Satz 42: Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist stets größer als die dritte Seite.



Beweis: Die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC wird über B hinaus um a bis zum Punkt D verlängert. Es gilt also $\overline{AD} = a + c$.
Das Dreieck BDC ist gleichschenklig, also gilt $\delta = \delta'$ (Basiswinkel). Im Dreieck ADC gilt daher $\delta < \delta' + \gamma$. Für die gegenüberliegenden Seiten folgt daraus $\overline{AC} < \overline{AD}$, d.h. $b < a + c$.
Entsprechend wird bewiesen: $a < b + c$, $c < a + b$.

Gleichschenkliges Dreieck, Symmetrieachse

▶ Satz 43: Jedes gleichschenklige Dreieck besitzt eine Symmetrieachse.



Beweis: In einem Dreieck ABC seien die Seiten a und b gleich lang. Bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden w des Winkels ACB wird der Punkt C auf sich selbst, der Punkt A auf den Punkt B und der Punkt B auf den Punkt A abgebildet.
Folglich ist die Winkelhalbierende w Symmetrieachse des Dreiecks.

Aus dem Beweis ergibt sich, dass die Winkelhalbierende w gleichzeitig Mittelsenkrechte der Basis ist.

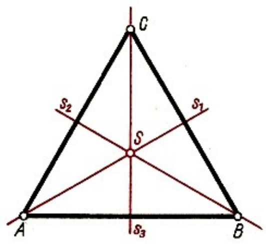
Basiswinkel

▶ Satz 44: Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind kongruent.

Beweis: Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks entsprechen bei der Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Basis einander. Folglich sind sie kongruent.

Gleichseitiges Dreieck

▶ Satz 45: Jedes gleichseitige Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen.



(Dieser Satz folgt aus Satz C 43.)

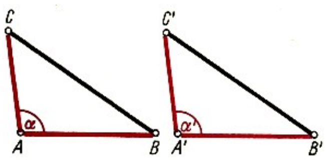
Innenwinkel

▶ Satz 46: Jeder Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks hat eine Größe von $60°$.

Abbildungen eines gleichseitigen Dreiecks ABC auf sich selbst

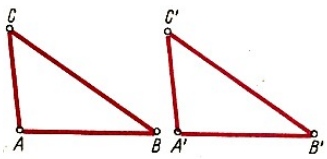
Drehungen um den Schnittpunkt S der Symmetrieachsen: Drehwinkel von $120°$, $240°$ und $360°$.
Spiegelungen an Geraden: Spiegelachse AS, BS oder CS.

Kongruenzsätze für Dreiecke



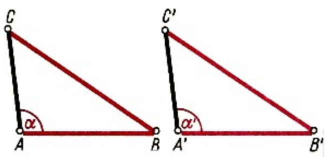
$\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\angle\alpha = \angle\alpha'$

(sws) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen



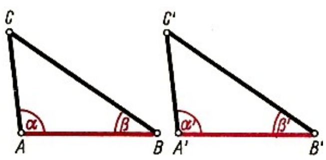
$\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$

(sss) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen



$\overline{BC} > \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\angle\alpha = \angle\alpha'$

(ssw) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren übereinstimmen



$\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\angle\alpha = \angle\alpha'$, $\angle\beta = \angle\beta'$

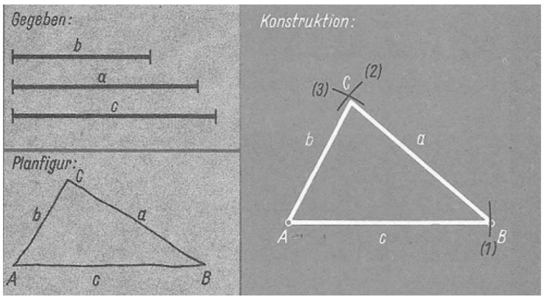
(wsw) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen

Die Kongruenzsätze können mit Hilfe von Bewegungen bewiesen werden.

Konstruktion von Dreiecken

Auf Grund der Kongruenzsätze lassen sich aus geeigneten Stücken Dreiecke konstruieren. Sind zum Beispiel drei Strecken gegeben, so sagen wir, dass ein Dreieck aus drei Seiten zu konstruieren ist.

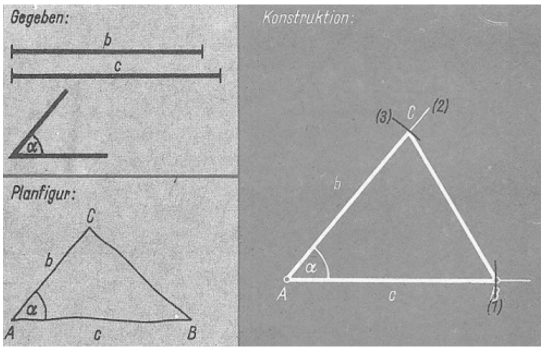
Gegeben: sss



Beschreibung:
(1) Wir zeichnen einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A und den Kreis um A mit dem Radius c. Der Kreis schneidet den Strahl in B.
(2) Wir zeichnen den Kreis um B mit dem Radius a und
(3) den Kreis um A mit dem Radius b. Beide Kreise schneiden einander in C.

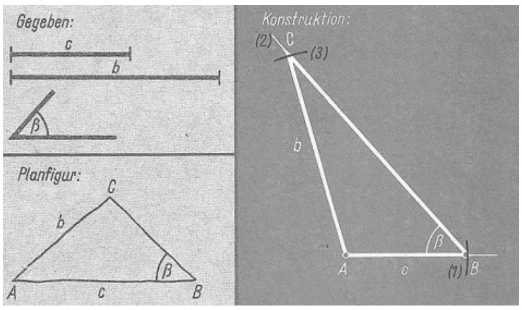
Bemerkung: Die gegebenen Strecken müssen der Dreiecksungleichung genügen.

Gegeben: sws



Beschreibung:
(1) Wir zeichnen einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A und den Kreis um A mit dem Radius c. Der Kreis schneidet den Strahl in B.
(2) Wir tragen in A an den Strahl AB den Winkel α an.
(3) Der Kreis um A mit dem Radius b schneidet den freien Schenkel des angetragenen Winkels in C.

Gegeben: wsw

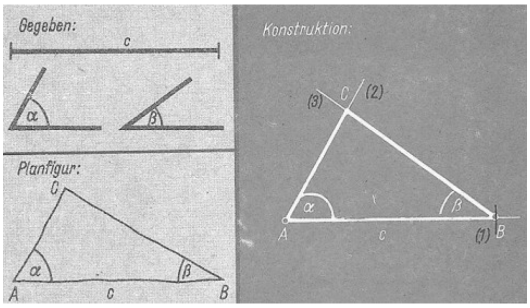


Beschreibung:
(1) Wir zeichnen einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A und den Kreis um A mit dem Radius c. Der Kreis schneidet den Strahl in B.

(2) Wir tragen in B an den Strahl BA den Winkel β an.
(3) Der Kreis um A mit dem Radius b schneidet den freien Schenkel des angetragenen Winkels in C.

Bemerkung: Ist der Gegenwinkel der kleineren Seite gegeben, so ergibt die Konstruktion entweder kein Dreieck oder zwei nicht kongruente Dreiecke oder ein Dreieck, wie etwa in dem Fall, in dem die kleinere Seite halb so lang wie die größere ist und ihr Gegenwinkel $30°$ beträgt.

Gegeben: ssw

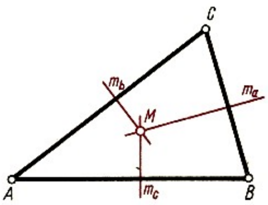


Beschreibung:
(1) Wir zeichnen einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A und den Kreis um A mit dem Radius c. Der Kreis schneidet den Strahl in B.
(2) Wir tragen in A an den Strahl AB den Winkel α an. Der freie Schenkel sei h.
(3) Wir tragen in B an den Strahl BA auf der Seite von AB, die den Strahl h enthält, den Winkel β an und erhalten den Strahl k. Die Strahlen h und k schneiden einander in C.

Bemerkung:
Die Summe der gegebenen Winkel muss kleiner als $180°$ sein.

Mittelsenkrechten eines Dreiecks

► Definition 47: Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite heißt eine Mittelsenkrechte des Dreiecks.



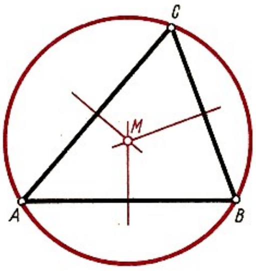
Wir bezeichnen die Mittelsenkrechten mit m_a, m_b und m_c (m_a ist die Mittelsenkrechte der Seite a usw.)

► Satz 48: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

Beweis: Die Geraden m_a, m_b und m_c seien die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC. Der Schnittpunkt von m_c und m_a sei M.
Aus Symmetriegründen gilt $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ und $\overline{BM} \cong \overline{CM}$. Dann gilt auch $\overline{AM} = \overline{CM}$. Der Punkt M liegt also ebenfalls auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{AC}$.

Umkreis eines Dreiecks

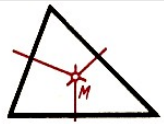
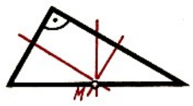
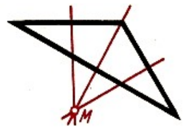
Aus dem Beweis des Satzes über die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ergibt sich, dass die Eckpunkte eines Dreiecks ABC von dem Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten des betreffenden Dreiecks gleich weit entfernt sind.



Der Kreis um M mit dem Radius $\overline{AM}$, der also durch alle Eckpunkte des Dreiecks ABC geht, heißt der Umkreis des Dreiecks ABC.

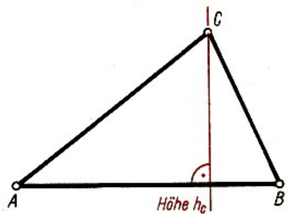
▶ Satz 49: Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

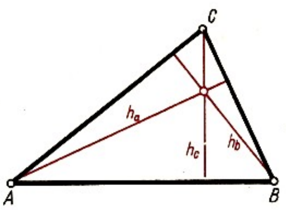
Lage des Umkreismittelpunktes

Art des Dreiecks	Lage des Mittelpunktes	
spitzwinkliges Dreieck	innerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche	
rechtwinkliges Dreieck	auf der Hypotenuse	
stumpfwinkliges Dreieck	außerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche	
gleichschenkliges Dreieck	auf der Symmetrieachse des Dreiecks	

Höhen eines Dreiecks

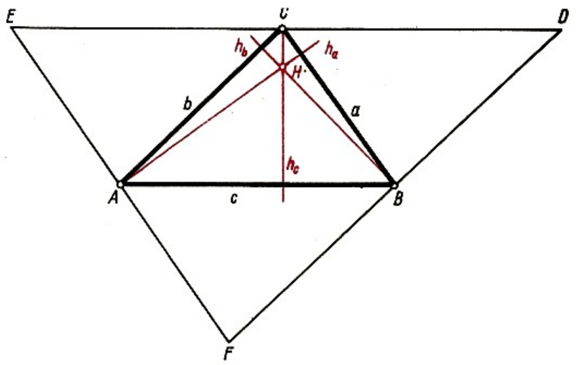
▶ Definition 50: Das Lot von einem Eckpunkt eines Dreiecks auf die gegenüberliege Seite oder auf deren Verlängerung heißt eine Höhe des Dreiecks (Bild links).





Wir bezeichnen die Höhen eines Dreiecks ABC mit h_a, h_b und h_c. (Bild rechts).
Der Schnittpunkt einer Höhe mit der zugehörigen Dreiecksseite oder deren Verlängerung heißt der Fußpunkt dieser Höhe. Als Länge einer Höhe bezeichnen wir den Abstand des betreffenden Eckpunktes von der Gegenseite.

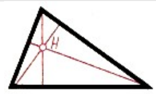
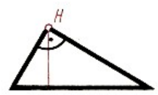
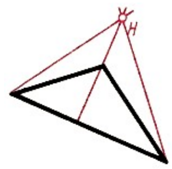
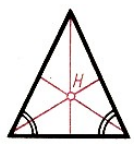
▶ Satz 51: Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.



Beweis: Die Geraden h_a, h_b und h_c seien die Höhen eines Dreiecks ABC. Die Schnittpunkte der Parallelen durch die Eckpunkte des Dreiecks ABC zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten seien die Punkte D, E und F. Die Dreiecke ABC, BDC, CEA und AFB sind paarweise kongruent.

A ist Mittelpunkt der Seite EF, B ist Mittelpunkt der Seite FD und C ist Mittelpunkt von DE. Die Höhen h_a, h_b, h_c sind daher gleichzeitig Mittelsenkrechten des Dreiecks DEF und schneiden einander in einem Punkt, w.z.b.w.

Lage des Höhenschnittpunktes

Art des Dreiecks	Lage des Höhenschnittpunktes	
spitzwinkliges Dreieck	innerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche	
rechtwinkliges Dreieck	Scheitel des rechten Winkels	
stumpfwinkliges Dreieck	außerhalb der zugehörigen Dreiecksfläche	
gleichschenkliges Dreieck	auf der Symmetrieachse des Dreiecks	

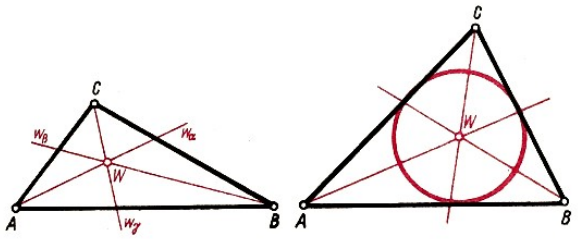
Winkelhalbierende eines Dreiecks

Wir bezeichnend die Winkelhalbierenden im Dreieck ABC mit w_α, w_β, w_γ.

► Satz 52: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

Beweis: Die Geraden w_α, w_β, w_γ seien die Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC. Der Schnittpunkt von w_α und w_β sei W.
Aus Symmetriegründen hat W einerseits von c und b und andererseits von c und a gleichen Abstand. Dann hat W auch von a und b gleichen Abstand. Der Punkt W liegt demnach auch auf w_γ, w.z.b.w.

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks liegt stets innerhalb des Dreiecks.



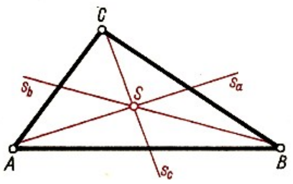
Inkreis eines Dreiecks

Der Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC hat von den Seiten des Dreiecks gleichen Abstand. Der Kreis um W mit diesem Abstand als Radius berührt die Seiten a, b und c (von innen). Wir nennen diesen Kreis den Inkreis des Dreiecks ABC.

▶ Satz 53: Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks.

Seitenhalbierende eines Dreiecks

▶ Definition 54: Die Gerade, die durch einen Eckpunkt eines Dreiecks und durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite geht, heißt eine Seitenhalbierende des Dreiecks.

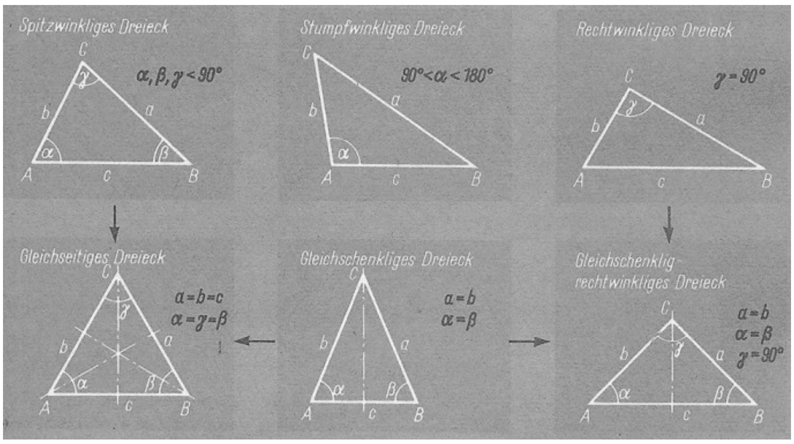


Wir bezeichnen die Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC mit s_a, s_b und s_c.

▶ Satz 55: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

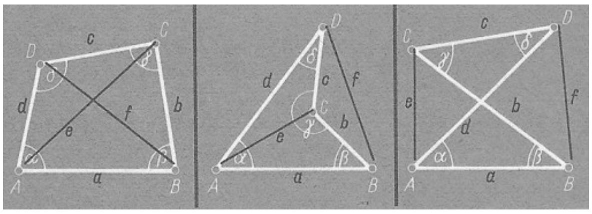
Der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden eines Dreiecks liegt stets innerhalb des Dreiecks. Er heißt der Schwerpunkt des Dreiecks.

Übersicht über die Arten der Dreiecke



4.11 Vierecke

Arten der Vierecke



von links nach rechts: konvexes Viereck, konkaves Viereck, überschlagenes Viereck

Winkel eines Vierecks

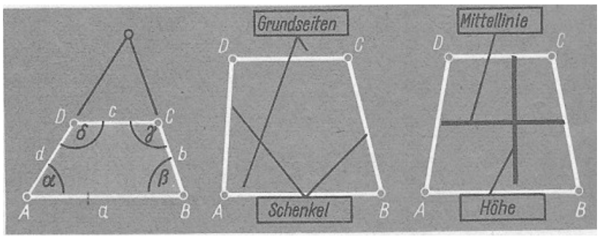
▶ Satz 56: Die Winkelsumme in einem Viereck beträgt $360°$.

Beweis: In jedem konvexen oder konkaven Viereck gibt es eine Diagonale, die das Viereck in zwei Teildreiecke teilt.
Da die Winkelsumme in jedem der beiden Dreiecke $180°$ beträgt, ist die Winkelsumme im Viereck doppelt so groß, also $360°$. Auch jedes überschlagene Viereck setzt sich aus zwei Teildreiecken zusammen. Die Winkelsumme in beiden Dreiecken und damit im Viereck ist also auch in diesem Falle $360°$,w. z. b. w.

Alle jetzt folgenden Sätze dieses Abschnitts beziehen sich auf konvexe Vierecke. Welche Sätze auch für andere Vierecke gelten, wird hier nicht erörtert.
Die Konstruktion eines Vierecks lässt sich auf die Konstruktion von Teildreiecken zurückführen.

Trapeze

▶ Definition 57: Ein Viereck mit (mindestens) einem Paar paralleler Seiten heißt ein Trapez.



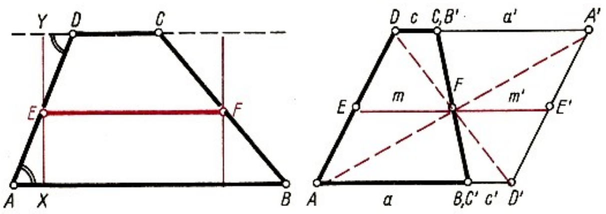
Parallele Seiten eines Trapezes heißen Grundseiten, die beiden anderen Seiten werden Schenkel genannt.

Mittellinie

Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Schenkel eines Trapezes nennen wir Mittellinie des Trapezes. Der Abstand zweier Grundseiten heißt Höhe des Trapezes.

▶ Satz 48: Die Mittellinie eines Trapezes verläuft parallel zu den Grundseiten.

Beweis: Die Mittelpunkte der Schenkel eines Trapezes $ABCD$ mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ seien E und F (Bild links). Es genügt zu zeigen, dass E und F von beiden Grundseiten denselben Abstand haben.
Die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes von E auf die beiden Grundseiten seien X und Y. Aus der Kongruenz der Dreiecke AXE und DYE nach (wsw) folgt die Kongruenz der Strecken $\overline{XE}$ und $\overline{YE}$.
Der Punkt E hat also von beiden Grundseiten denselben Abstand. Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, dass auch F denselben Abstand von beiden Grundseiten hat.

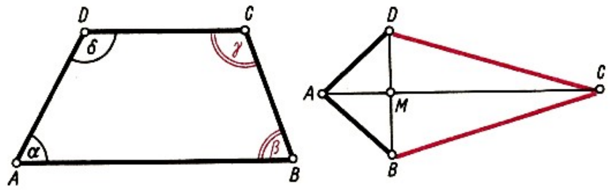


▶ Satz 59: Die Mittellinie eines Trapezes ist halb so lang wie die Summe aus den beiden Grundseiten.

Beweis: a und c seien die Grundseiten, m sei die Mittellinie und E bzw. F seien die Mittelpunkte der Schenkel eines Trapezes $ABCD$ (Bild rechts). Wir spiegeln das Trapez an dem Punkt F und erhalten das Bild $A'B'C'D'$.
Die Strecke $\overline{AD'}$ ist die Summe aus den Grundseiten. Die Strecke $\overline{EE'}$ ist doppelt so lang wie die Strecke $\overline{EF}$. Da die Strecken $\overline{AD'}$ und $\overline{EE'}$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{AE}$ einander entsprechen, sind sie gleich lang. Daraus folgt $m = \frac{1}{2}(a + c)$, w.z.b.w.

▶ Satz 60: Die Winkel, die demselben Schenkel eines Trapezes anliegen, sind Supplementwinkel.

Beweis: Die beiden Winkel, die demselben Schenkel anliegen, sind entgegengesetzt liegende Winkel an parallelen Geraden (Bild links).



Gleichschenklige Trapeze

Sind in einem Trapez die nicht parallelen Seiten gleich lang, so nennt man es gleichschenklig.

▶ Satz 61: Ein Trapez ist gleichschenklig genau dann, wenn die Winkel, die einer Grundseite anliegen, kongruent sind.

Drachenvierecke

▶ Definition 62: Ein Viereck mit zwei Paaren benachbarter gleich langer Seiten heißt ein Drachenviereck (Bild rechts).

Symmetrie

▶ Satz 63: Jedes Drachenviereck besitzt (mindestens) eine Symmetrieachse.

Beweis: In einem Drachenviereck $ABCD$ sei $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{DC}$.
Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BD}$ geht dann sowohl durch A als auch durch C. Demnach ist die Diagonale $\overline{AC}$ des Drachenvierecks gemeinsame Symmetrieachse der beiden gleichschenkligen Teildreiecke und damit Symmetrieachse des Drachenvierecks.

Diagonale

▶ Satz 64: Die Diagonalen eines Drachenvierecks stehen senkrecht aufeinander.

Beweis: Ein Drachenviereck $ABCD$ habe die Symmetrieachse AC. Bei der Spiegelung an dieser Geraden entsprechen die Punkte B und D einander. Die Gerade BD steht demnach senkrecht auf der Geraden AC.

▶ Satz 65: In jedem Drachenviereck gibt es ein Paar gegenüberliegender Winkel, die kongruent sind.

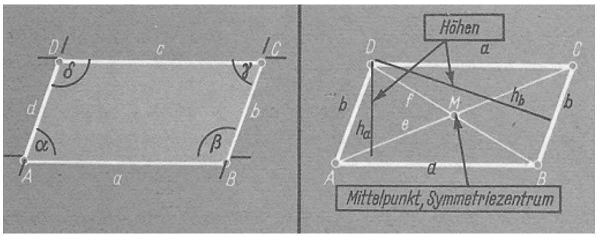
Beweis: Ein Drachenviereck $ABCD$ habe die Symmetrieachse AC. Bei der Spiegelung an AC entsprechen die gegenüberliegenden Winkel ABC und ADC einander. Folglich sind sie kongruent.

Rhombus

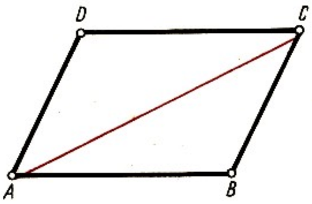
Ein Rhombus ist ein Drachenviereck mit vier kongruenten Seiten.

Parallelogramme

▶ Definition 66: Ein Trapez mit zwei Paaren paralleler Seiten heißt ein Parallelogramm.



▶ Satz 67: In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.



Beweis: Ist $ABCD$ ein Parallelogramm, so gilt $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (wsw). Daraus folgt $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$.

▶ Satz 68: Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis: In einem Viereck $ABCD$ gelte $\overline{AB} = \overline{DC}$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$. Daraus folgt $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ und daher $\angle BCA = \angle DAC$, d.h., dass die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ des Vierecks parallel sind. Entsprechend ergibt sich die Parallelität der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$. Das Viereck $ABCD$ ist also ein Parallelogramm.

Diagonalen

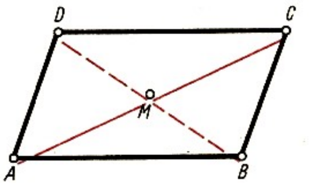
▶ Satz 69: Die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren einander.
Der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms wird Mittelpunkt des Parallelogramms genannt.

Symmetrie

▶ Satz 70: Jedes Parallelogramm ist punktsymmetrisch.

Beweis: Bei der Spiegelung am Mittelpunkt M eines Parallelogramms $ABCD$ ist C das Bild von A, D das Bild von B, A das Bild von C und B das Bild von D. Das Parallelogramm wird also auf sich selbst abgebildet und ist demnach punktsymmetrisch.

▶ Satz 71: Wenn ein Viereck punktsymmetrisch ist, so ist es ein Parallelogramm.

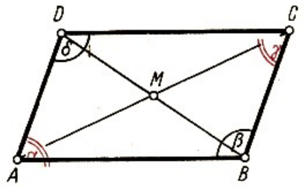


Beweis: Ein Viereck $ABCD$ sei punktsymmetrisch bezüglich eines Punktes M. Es seien einerseits A und C und andererseits B und D einander entsprechende Punkte bei der Punktspiegelung an M. Da dann die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AD}$ und $\overline{CB}$ einander entsprechen, sind sie jeweils gleich lang. Nach Satz D 68 folgt, dass das Viereck ein Parallelogramm ist.

▶ Satz 72: Wenn in einem Viereck die Diagonalen einander halbieren, so ist dieses Viereck ein Parallelogramm.

Beweis: Der Diagonalschnittpunkt M eines solchen Vierecks $ABCD$ ist Zentrum einer Punktspiegelung, bei der sich A und C bzw. B und D entsprechen. Daher ist $ABCD$ punktsymmetrisch, also nach Satz D 71 ein Parallelogramm.

▶ Satz 73: In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich groß und benachbarte Winkel Supplementwinkel.



Beweis: Bei der Spiegelung am Mittelpunkt M eines Parallelogramms entsprechen gegenüberliegende Winkel einander. Sie sind folglich kongruent. Dass benachbarte Winkel Supplementwinkel sind, folgt daraus, dass sie entgegengesetzt liegende Winkel mit parallelen Schenkeln sind.

▶ Satz 74: Wenn in einem Viereck gegenüberliegende Winkel jeweils gleich groß sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis: In einem Viereck $ABCD$ gelte $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$. Da die Summe der Winkel $360°$ beträgt, gilt $\alpha + \beta = 180°$ und $\alpha + \delta = 180°$.
Da weiter α und β entgegengesetzt liegende Winkel bezüglich der Geraden AD und BC sind, müssen die Geraden AD und BC parallel sein. Entsprechend sind die Geraden AB und DC parallel. Das Viereck ist also ein Parallelogramm.

Rechtecke

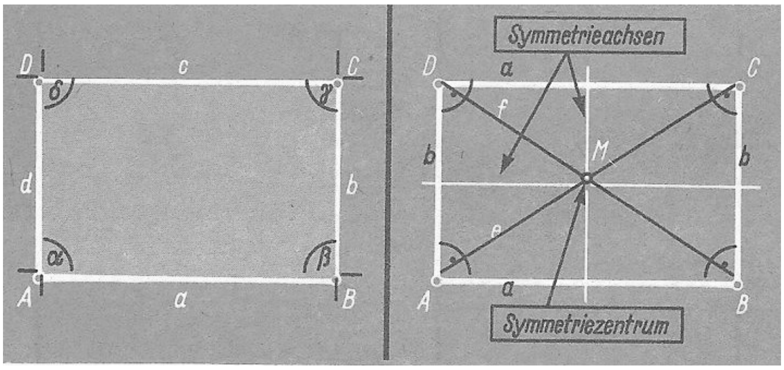
▶ Definition 75: Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel heißt ein Rechteck.
Aus dem Satz D 73 folgt:

Winkel, Diagonalen

Alle Winkel eines Rechtecks sind rechte Winkel.

▶ Satz 76: In jedem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.

Beweis: Im Rechteck $ABCD$ sind die Dreiecke ABC und DAB kongruent. Daraus folgt $\overline{AC} = \overline{DB}$.



▶ Satz 77: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, so ist das Parallelogramm ein Rechteck.

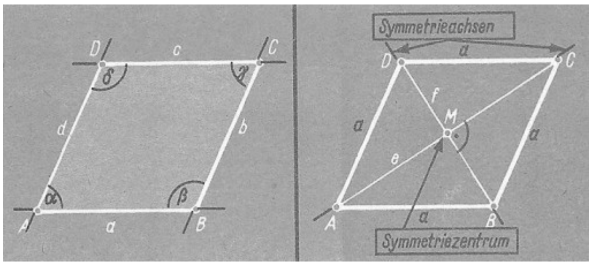
Beweis: In einem Parallelogramm $ABCD$ seien die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich lang. Dann sind die Dreiecke ABC und DAB kongruent. Daraus folgt $\angle ABC = \angle DAB$. Da diese Winkel Supplementwinkel sind, ist jeder ein Rechter. Also ist das Parallelogramm ein Rechteck.

Symmetrieverhältnisse

Jedes Rechteck ist als Parallelogramm punktsymmetrisch. Außerdem besitzt es zwei Symmetrieachsen, die jeweils durch die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten gehen.

Rhomben

▶ Definition 78: Ein Parallelogramm, dessen Seiten alle gleich lang sind, heißt Rhombus.



Diagonalen

▶ Satz 79: In jedem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Der Beweis ergibt sich daraus, dass jeder Rhombus ein Drachenviereck ist.

▶ Satz 80: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, so ist das Parallelogramm ein Rhombus.

Symmetrieverhältnisse

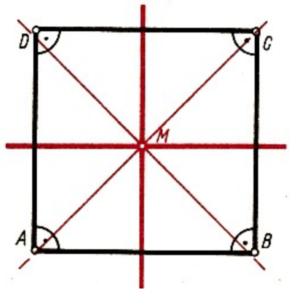
Jeder Rhombus ist als Parallelogramm punktsymmetrisch. Außerdem sind seine Diagonalen Symmetrieachsen.

Quadrate

▶ Definition 81: Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel und vier gleich langen Seiten heißt ein Quadrat.

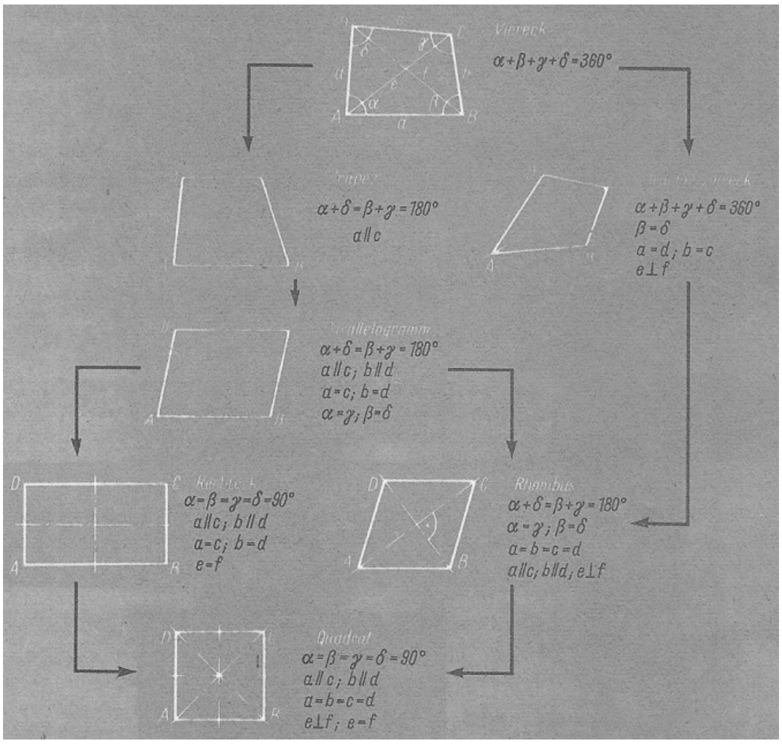
Ein Quadrat ist also sowohl ein Rechteck als auch ein Rhombus.

Symmetrieverhältnisse



Ein Quadrat ist punktsymmetrisch, und es besitzt vier Symmetrieachsen, und zwar die Diagonalen und die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.

Übersicht über die Arten der Vierecke

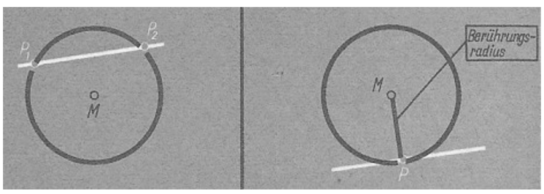


4.12 Kreise

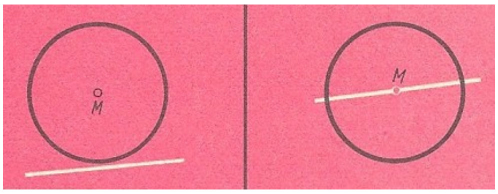
Kreis und Gerade

▶ Definition 82: Eine Gerade heißt Sekante, Tangente bzw. Passante eines Kreises je nachdem, ob sie mit dem Kreis zwei Punkte, genau einen Punkt bzw. keinen Punkt gemeinsam hat. Eine Sekante, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, nennen wir eine Zentrale.

Sekante



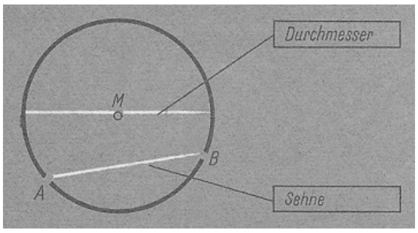
Tangente

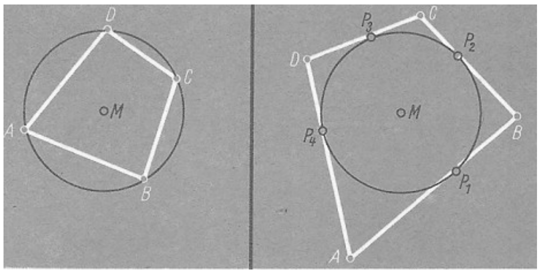
Passante  Zentrale

Ein Radius, der den Berührungspunkt einer Tangente mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, heißt Berührungsradius der Tangente.

Kreis und Strecke

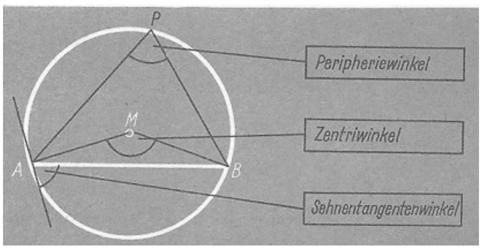
▶ Definition 83: Eine Strecke, die zwei Punkte eines Kreises verbindet, heißt Sehne dieses Kreises (Bild unten). Eine Sehne, die durch den Mittelpunkt eines Kreises geht, heißt Durchmesser des Kreises. Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen (Tangenten) eines Kreises sind, heißt ein Sehnenviereck (Tangentenviereck) des Kreises.





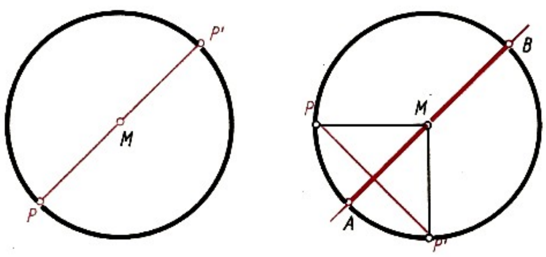
Sehnenviereck Tangentenviereck

Kreis und Winkel



▶ Definition 84:
1. Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkt eines Kreises liegt, heißt Zentriwinkel dieses Kreises.
2. Ein Winkel, dessen Scheitel Punkt eines Kreises ist und dessen Schenkel den Kreis schneiden, heißt Peripheriewinkel.
3. Ein Winkel, dessen Scheitel Punkt eines Kreises ist, dessen einer Schenkel den Kreis schneidet und dessen anderer Schenkel auf einer Tangente des Kreises liegt, heißt Sehnentangentenwinkel.

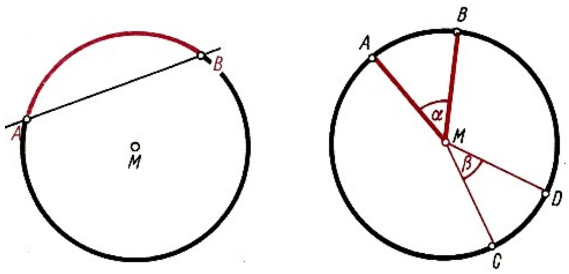
Symmetrie eines Kreises



► Satz 85: Jeder Kreis ist punktsymmetrisch. Außerdem ist jede Zentrale eines Kreises Symmetrieachse des Kreises. Ein Kreis wird bei jeder beliebigen Drehung um seinen Mittelpunkt auf sich selbst abgebildet.

Kreisbögen

Wird ein Kreis von einer Geraden in den Punkten A und B geschnitten, so wird der Kreis in zwei Teile zerlegt, die wir Kreisbögen nennen (Bild unten links). Jeden der beiden Kreisbögen bezeichnet man mit $\widehat{AB}$. Aus dem jeweiligen Zusammenhang ist ersichtlich, welcher von beiden gemeint ist. Geht die Gerade durch den Mittelpunkt, so ist jeder Kreisbogen ein Halbkreis.



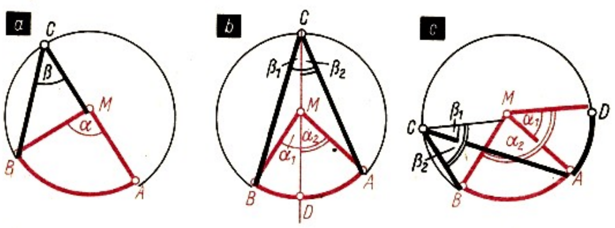
► Satz 86: Zwei Kreisbögen $\widehat{AB}$ und $\widehat{CD}$ eines Kreises um M sind kongruent genau dann, wenn die zugehörigen Zentriwinkel AMB und CMD kongruent sind (Bild rechts).

Beweis:
a) $\widehat{AB}$ und $\widehat{CD}$ seien kongruente Bögen eines Kreises um M. Dann gibt es eine Bewegung, bei der sie einander entsprechen. Da bei dieser Bewegung nur der Punkt M auf, sich selbst abgebildet wird, ist dies eine Drehung. Daraus ergibt sich, dass die Zentriwinkel AMB und CMD kongruent sind.

b) A, B, C, D seien Punkte eines Kreises um M. Die Zentriwinkel AMB und CMD seien kongruent. Dann gibt es eine Drehung um M, bei der die Bögen $\widehat{AB}$ und $\widehat{CD}$ einander entsprechen, da ein Kreis bei einer Drehung um seinen Mittelpunkt auf sich selbst abgebildet wird. Daraus folgt, dass sie kongruent sind.

Peripherie- und Zentriwinkel

► Satz 87: Jeder Zentriwinkel ist doppelt so groß wie ein Peripheriewinkel über demselben Bogen.



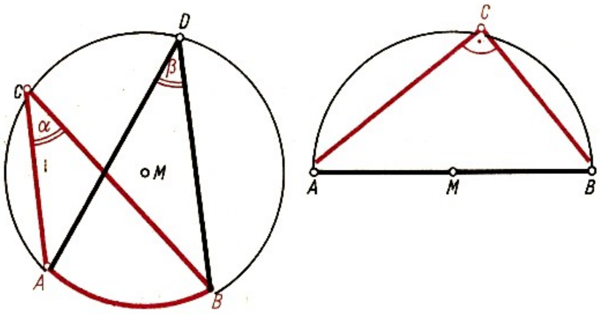
Beweis: Zu einem Bogen $\widehat{AB}$ eines Kreises um M gehöre der Zentriwinkel α und ein Peripheriewinkel β mit dem Scheitel C.
a) Der Mittelpunkt M des Kreises liege auf $\overline{AC}$. Da α Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck BMC ist, gilt $\alpha = 2\beta$ (β ist Basiswinkel).

b) Der Mittelpunkt M liege im Innern von β. Die Gerade CM schneide $\widehat{AB}$ in D.

Es gilt nach Fall a): $\alpha_1 = 2\beta_1$ und $\alpha_2 = 2\beta_2$.
Wegen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ und $\beta = \beta_1 + \beta_2$ folgt $\alpha = 2\beta$.

c) Der Mittelpunkt M liege außerhalb von β. Die Gerade CM schneide den Kreis in D.
Es gilt nach Fall a): $\alpha_1 = 2\beta_1$ und $\alpha_2 = 2\beta_2$.
Wegen $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ und $\beta = \beta_1 - \beta_2$ folgt $\alpha = 2\beta$.
Dieser Satz wurde hier nur für Zentriwinkel bewiesen, die kleiner als $180°$ sind. Er gilt jedoch für beliebige Zentriwinkel.

► Satz 88: Zwei Peripheriewinkel über demselben Bogen sind kongruent (Bild links).



Ein Beweis ergibt sich daraus, dass jeder der beiden Peripheriewinkel über demselben Bogen halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel ist.

Satz des Thales

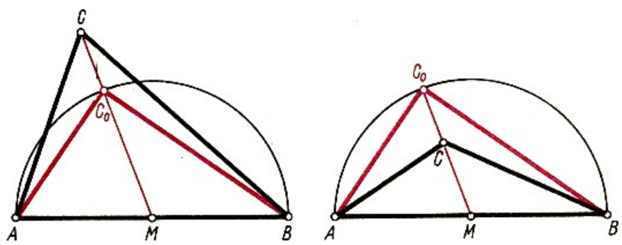
► Satz des Thales (89): Jeder Peripheriewinkel über einem Durchmesser ist ein rechter Winkel.

Beweis: Da der Zentriwinkel- ein gestreckter Winkel ist, muss jeder zugehörige Peripheriewinkel halb so groß sein. Er ist also ein rechter Winkel.

► Umkehrung des Satzes von Thales (90): Der Scheitel C des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ABC liegt auf dem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser.

Beweis: C sei der Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ABC und M sei Mittelpunkt von $\overline{AB}$.
Wir nehmen an, dass C nicht auf dem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$ liegt. Dann liegt C entweder außerhalb oder innerhalb dieses Kreises.

a) C liege außerhalb des Kreises (Bild links). Dann schneidet die Gerade CM den Kreis in einem Punkt C_0. Der Winkel AC_0B ist dann ein rechter Winkel. Da der Winkel ACM kleiner als der Außenwinkel AC_0M des Dreiecks AC_0C und entsprechend der Winkel BCM kleiner als der Winkel BC_0M ist, ergibt sich, dass der Winkel ACB kleiner als ein rechter Winkel ist. Das ergibt einen Widerspruch zur Voraussetzung. Dieser Fall ist demnach nicht möglich.



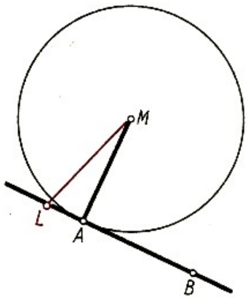
b) C liege innerhalb des Kreises (Bild rechts). Die Gerade MC schneidet dann den Kreis in einem Punkt C_0.

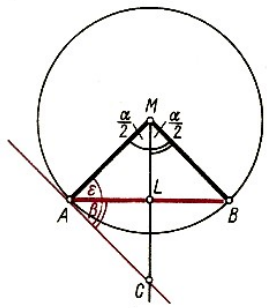
Entsprechend wie bei a) ergibt sich, dass der Winkel ACB größer als der Winkel AC_0B und damit größer als ein rechter Winkel ist. Auch dieser Fall ist nicht möglich.
Aus a) und b) folgt, dass C auf dem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}$ liegt.

Tangenten

▶ Satz 91: Tangente und Berührungsradius eines Kreises stehen senkrecht aufeinander.

Beweis: $\overline{MA}$ sei Radius eines Kreises um M, und die Gerade AB sei Tangente in A an den Kreis. Angenommen, die Gerade MA stünde nicht senkrecht auf AB (Bild links).
Dann gäbe es von M ein Lot auf AB, dessen Fußpunkt L von A verschieden wäre. Bei der Spiegelung an ML müsste das Bild A' des Punktes A sowohl auf dem Kreis als auch auf der Geraden AB liegen. Das ist nicht möglich, da die Tangente mit dem Kreis nur den Punkt A gemeinsam hat.
Folglich steht die Gerade MA senkrecht auf der Tangente AB.





Zentri- und Sehnentangentenwinkel

Der Zentriwinkel AMB und der Sehnentangentenwinkel BAC (Bild rechts) heißen einander zugehörig, wenn der Kreisbogen AB im Innern des Sehnentangentenwinkels liegt.

▶ Satz 92: Ein Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der zugehörige Sehnentangentenwinkel.

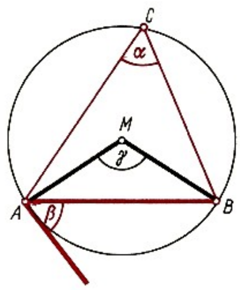
Beweis: Nach Satz D 91 gilt $\varepsilon + \beta = 90°$. Im Dreieck ALM gilt andererseits $\varepsilon + \frac{\alpha}{2} = 90^1\circ$.
Folglich ist $\frac{\alpha}{2} = \beta$.

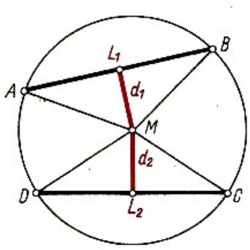
Peripheriewinkel und Sehnentangentenwinkel

Wenn der Winkel ACB ein Peripheriewinkel mit dem zugehörigen Bogen $\overset{\frown}{AB}$ ist, so nennen wir den Sehnentangentenwinkel, in dessen Innerem der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ liegt, dem Peripheriewinkel zugehörig und umgekehrt.

▶ Satz 93: Jeder Peripheriewinkel und der zugehörige Sehnentangentenwinkel sind gleich groß.

Beweis: Es gilt (Bild links): $\gamma = 2\alpha$ (Satz D 87) und $\gamma = 2\beta$ (Satz D 92). Daraus folgt: $\alpha = \beta$.





Sehnen

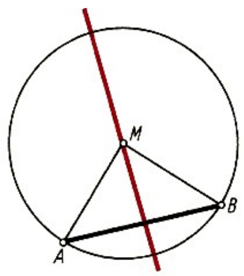
▶ Satz 94: Zwei Sehnen eines Kreises haben vom Mittelpunkt des Kreises gleichen Abstand genau dann, wenn sie gleich lang sind.

Beweis:
a) Zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eines Kreises um M seien gleich lang (Bild rechts). Sind d_1 und d_2 die Abstände des Mittelpunktes M von AB bzw. CD, so folgt aus der Kongruenz der gleichschenkligen Dreiecke ABM und CDM die Beziehung: $d_1 = d_2$.

b) Die Abstände d_1 und d_2 des Mittelpunktes M eines Kreises von zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ seien gleich.
L_1 und L_2 seien die Fußpunkte der Lote von M auf AB bzw. CD. Dann gilt sowohl $\triangle ALM \cong \triangle DLM$ als auch $\triangle BLM \cong \triangle CLM$. Daraus ergibt sich die Kongruenz der Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

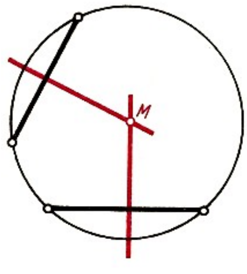
▶ Satz 95: Die Mittelsenkrechte einer Sehne ist Zentrale des Kreises.

Beweis: $\overline{AB}$ sei eine Sehne eines Kreises um M. Die Mittelsenkrechte auf $\overline{AB}$ ist Symmetrieachse des Dreiecks ABM und geht daher durch die Spitze M.



Folglich ist die Mittelsenkrechte Zentrale des Kreises.

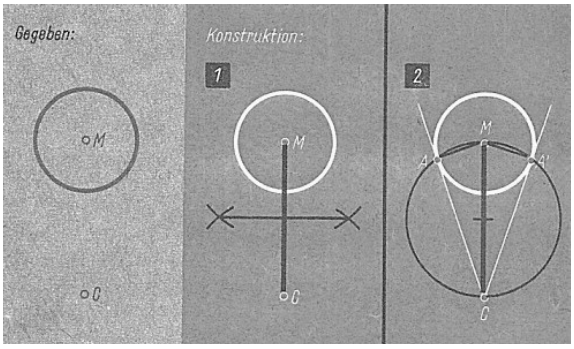
Bemerkung: Aus diesem Satz ergibt sich die Konstruktion des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises. Zur Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises werden zwei beliebige Sehnen eingezeichnet. Auf ihnen werden die Mittelsenkrechten konstruiert. Deren Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises.



Tangenten

▶ Satz 96: Von einem beliebigen Punkt C außerhalb eines an einen Kreis Kreises gibt es genau zwei Tangenten an den Kreis.

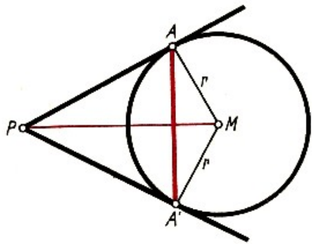
Beweis: Gegeben sei ein Kreis um M und ein Punkt C außerhalb des Kreises. Der Kreis um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{MC}$ schneidet den gegebenen Kreis in genau zwei Punkten A und A', die die Berührungspunkte der Tangenten sind, denn die Winkel CAM und $CA'M$ sind nach dem Satz des Thales rechte Winkel.



Tangentenabschnitt

Ist A der Berührungspunkt einer Tangente von einem Punkt P an einen Kreis, so heißt die Strecke PA der Tangentenabschnitt dieser Tangente.

▶ Satz 97: Die beiden Tangenten von einem Punkt P an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen zur Geraden MP axialsymmetrisch.

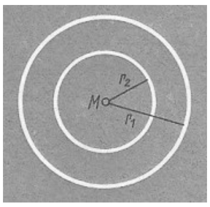


Beweis: Die Berührungspunkte der beiden Tangenten von einem Punkt P außerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt M seien A und A'.
Da die Dreiecke MAP und $MA'P$ kongruent sind, sind auch die Winkel MPA und MPA' kongruent. Die Gerade MP ist demnach Winkelhalbierende des Winkels APA' und damit seine Symmetrieachse.
Folglich liegen die Geraden PA und PA' bezüglich der Geraden MP spiegelbildlich.

▶ Satz 98: Wenn A und A' die Berührungspunkte der beiden Tangenten von einem Punkt P an einen Kreis um M sind, so ist die Gerade MP Symmetrieachse der Strecke $\overline{AA'}$. Die Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{AP'}$ sind kongruent.

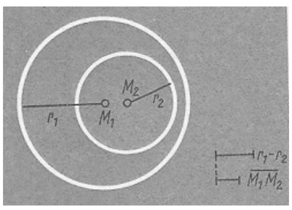
Ein Beweis kann unter Verwendung des Satzes D 97 erfolgen.

Zwei Kreise - Gegenseitige Lage



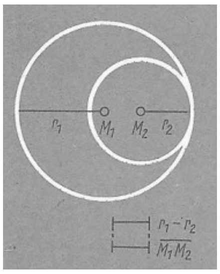
Konzentrische Kreise

Beide Kreise haben einen gemeinsamen Mittelpunkt. Es gilt: $r_2 < r_1$ und $M_1 = M_2$.

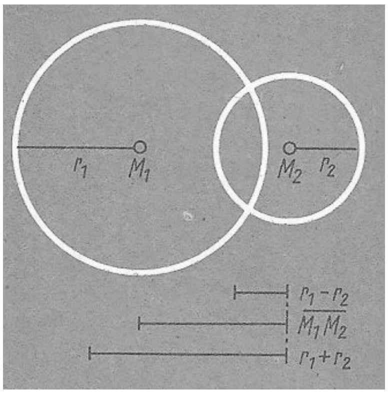


Exzentrische Kreise

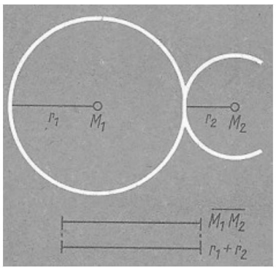
Ein Kreis liegt ganz im Innern des anderen. Die Mittelpunkte sind verschieden. Es gilt $\overline{M_1M_2} < r_1 - r_2$.



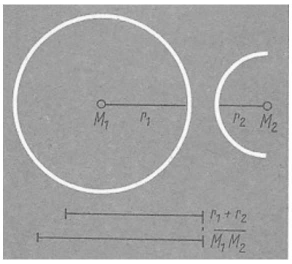
Ein Kreis berührt den anderen Kreis von innen.
Es gilt: $\overline{M_1M_2} = r_1 - r_2$.



Zwei Kreise schneiden einander.
Es gilt: $r_1 - r_2 < \overline{M_1M_2} < r_1 + r_2$.



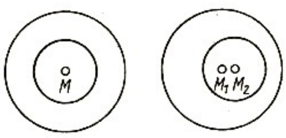
Ein Kreis berührt den anderen von außen.
Es gilt: $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$.



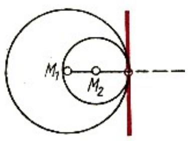
Zwei Kreise haben keinen gemeinsamen Punkt.
Es gilt: $\overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$.

Gemeinsame Tangenten

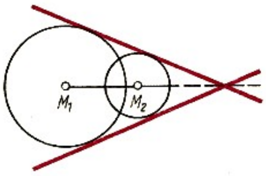
▶ Definition 99: Eine Gerade t heißt gemeinsame innere Tangente zweier Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 genau dann, wenn sie Tangente beider Kreise ist und die Strecke $\overline{M_1M_2}$ zwischen M_1 und M_2 schneidet.
Eine Gerade t heißt gemeinsame äußere Tangente zweier Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 genau dann, wenn sie Tangente beider Kreise ist und die Gerade $\overline{M_1M_2}$ nicht zwischen den Punkten M_1 und M_2 schneidet.



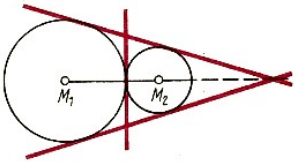
Konzentrische und exzentrische Kreise haben keine gemeinsamen Tangenten.



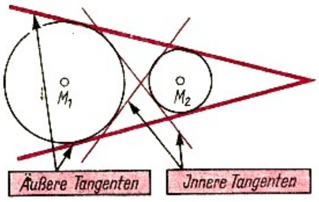
Zwei Kreise, die sich von innen berühren, haben genau eine gemeinsame äußere Tangente in ihrem Berührungspunkt.



Zwei Kreise, die sich schneiden, haben genau zwei gemeinsame äußere Tangenten, die axialsymmetrisch bezüglich der gemeinsamen Zentralen liegen.



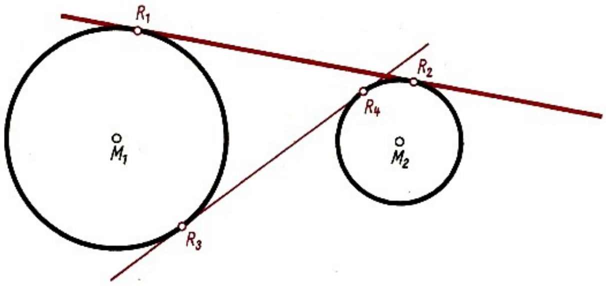
Zwei Kreise, die sich von außen berühren, haben eine und nur eine gemeinsame innere Tangente (im Berührungspunkt) und zwei gemeinsame äußere Tangenten.



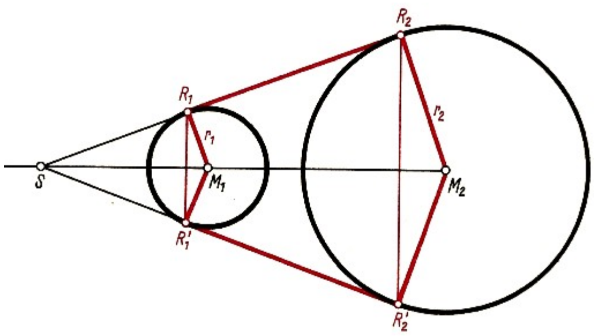
Zwei Kreise ohne gemeinsame Punkte haben genau zwei gemeinsame innere und zwei gemeinsame äußere Tangenten, wenn die Kreisflächen keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Tangentenabschnitte

Die durch die Berührungspunkte R_1 und R_2 einer gemeinsamen Tangente an zwei Kreise gebildete Strecke $\overline{R_1R_2}$ heißt Tangentenabschnitt dieser Tangente.

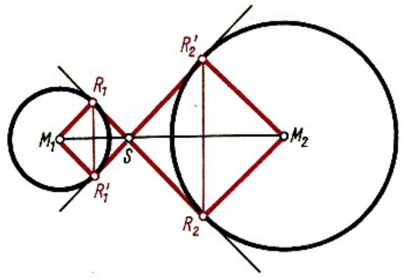


► Satz 100: Wenn zwei Kreise zwei gemeinsame äußere (innere) Tangenten besitzen, so sind die Tangentenabschnitte kongruent.

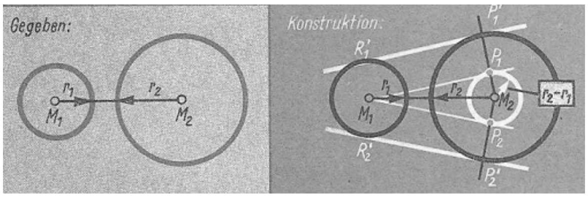


Beweis:
a) $r_1 \neq r_2$. Nach Satz D 98 gilt $\overline{SR_2} = \overline{SR_2'}$ und $\overline{SR_1} = \overline{SR_1'}$. Durch Subtraktion erhält man: $\overline{SR_2} - \overline{SR_1} = \overline{SR_2'} - \overline{SR_1'}$, also $\overline{R_1R_2} = \overline{R_1'R_2'}$.

b) $r_1 = r_2$. In diesem Fall existiert kein Schnittpunkt S Tangenten. Die Behauptung $\overline{R_1R_2} = \overline{R_1'R_2'}$ folgt jetzt daraus, dass $R_1R_1'R_2R_2'$ ein Rechteck ist, da die Berührungsradien auf den parallelen Tangenten jeweils senkrecht stehen. Der Beweis für Tangentenabschnitte auf inneren Tangenten ergibt sich entsprechend durch Addition der Teilabschnitte (Bild nachfolgend).



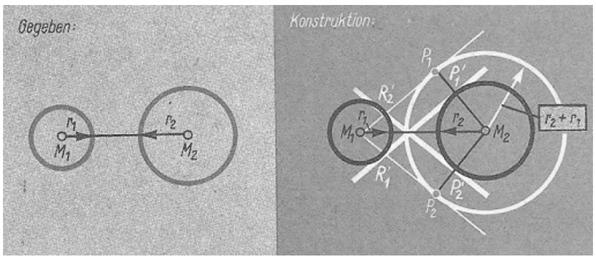
Konstruktion der gemeinsamen äußeren Tangenten



Beschreibung:
(1) Wir zeichnen um den Mittelpunkt M_2 des Kreises mit dem größeren Radius einen Kreis mit dem Radius $r_2 - r_1$.
(2) Wir konstruieren nun die beiden Tangenten von M_1 an den Kreis mit dem Radius $r_2 - r_1$.
(3) a) Der Strahl M_2P_1 schneide den Kreis mit dem Radius r_2 in P_1'. Eine gemeinsame äußere Tangente ist das Bild $R_1'P_1'$ der Geraden M_1P_2 bei der Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_1'}$.
(b) Entsprechend erhält man die zweite Tangente.

Bemerkung: Sind die Radien beider Kreise gleich lang, so sind die beiden Parallelen zur Zentralen M_1M_2 im Abstand r die beiden gemeinsamen äußeren Tangenten.

Konstruktion der gemeinsamen inneren Tangenten



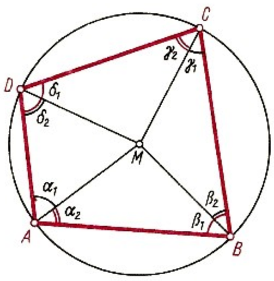
Beschreibung:
(1) Wir zeichnen um den Mittelpunkt M, des größeren Kreises einen Kreis mit dem Radius $r_1 + r_2$.
(2) Die Berührungspunkte der beiden Tangenten von M, an den Kreis mit dem Radius $r_1 + r_2$ seien P_1 und P_2.
(3) a) Der Strahl M_2P_1 schneidet den Kreis mit dem Radius r in P_1'. Eine gemeinsame innere Tangente ist das Bild $R_1'P_1'$ der Geraden M_1P_1 bei der Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_1'}$.
b) Entsprechend erhält man die zweite Tangente.

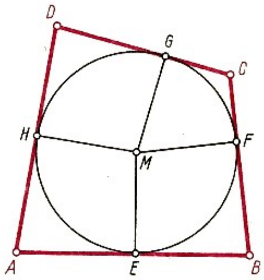
Sehnenvierecke

► Satz 101: In jedem konvexen Sehnenviereck sind die gegenüberliegenden Winkel Supplementwinkel.

Beweis:

$ABCD$ sei ein Sehnenviereck, mit dem Umkreismittelpunkt M (Bild links). Werden die Eckpunkte mit M verbunden, so ergeben sich vier gleichschenklige Dreiecke. Aus der Kongruenz der jeweiligen Basiswinkel und aus dem Satz über die Winkel eines Vierecks folgt, dass gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel sind.





Tangentenvierecke

▶ Satz 102: In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Seiten jeweils gleich groß.

Beweis: Es gilt (Bild rechts):

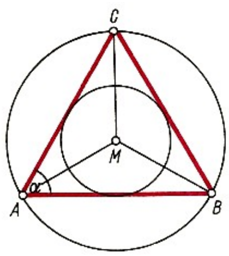
$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AE}+\overline{BE}+\overline{CG}+\overline{DG}=\overline{AH}+\overline{BF}+\overline{CF}+\overline{DH}$$
$$=\overline{AH}+\overline{DH}+\overline{BF}+\overline{CF}=\overline{AD}+\overline{BC}$$

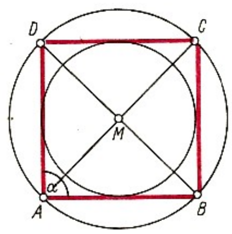
Regelmäßige Vielecke

Ein konvexes Vieleck mit n kongruenten Seiten und paarweise kongruenten Innenwinkeln heißt ein regelmäßiges n-Eck.

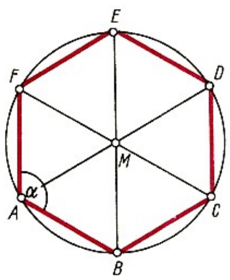
▶ Satz 103: Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks hat eine Größe von

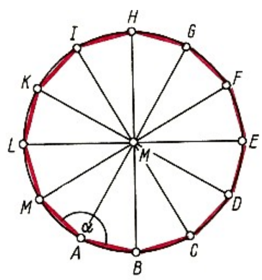
$$\alpha=\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}=180°-\frac{360°}{n}$$





Dreieck: $n=3$, $\alpha=180°-\frac{360°}{3}=60°$, Viereck: $n=4$, $\alpha=180°-\frac{360°}{4}=90°$





Fünfeck: $n=5$, $\alpha=180°-\frac{360°}{5}=108°$, Sechseck: $n=3$, $\alpha=180°-\frac{360°}{6}=120°$

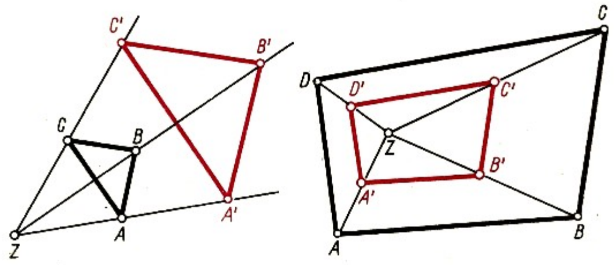
▶ Satz 104: Jedem regelmäßigen n-Eck lässt sich ein Kreis umbeschreiben.

▶ Satz 105: Jedem regelmäßigen n-Eck lässt sich ein Kreis einbeschreiben.

4.13 Ähnlichkeit

Vergrößerungen

Ein Punkt Z werde mit den Eckpunkten eines Dreiecks ABC verbunden (Bild links). Wir verdoppeln die Strecken $\overline{ZA}$, $\overline{ZB}$, $\overline{ZC}$ und erhalten die Punkte A', B' und C'. Das Dreieck $A'B'C'$ wird als eine Vergrößerung des Dreiecks ABC bezeichnet.

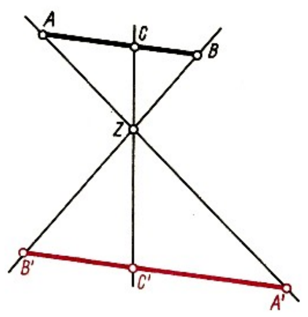


Verkleinerungen

Ein Punkt Z werde mit den Eckpunkten eines Vierecks $ABCD$ verbunden (Bild rechts). Wir halbieren die Strecken $\overline{ZA}$, $\overline{ZB}$, $\overline{ZC}$, $\overline{ZD}$ und erhalten die Punkte A', B', C' und D'. Das Viereck $A'B'C'D'$ wird als eine Verkleinerung des Vierecks $ABCD$ bezeichnet.

Zentrale Streckung

Vergrößerungen und Verkleinerungen, bei denen sich die Verbindungsgeraden von Original- und Bildpunkten in einem Punkt schneiden, sind Beispiele für zentrale Streckungen.



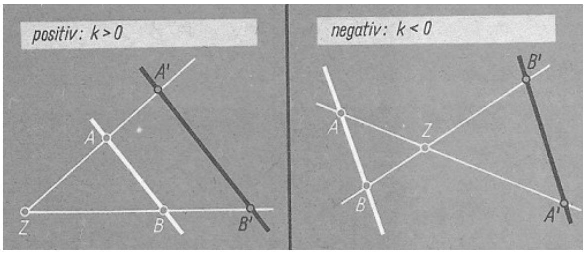
Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden heißt Zentrum der zentralen Streckung. Das Längenverhältnis k der Verbindungsstrecken von Bild- und Originalpunkt mit dem Zentrum heißt Streckungsfaktor oder Maßstab einer zentralen Streckung.
Mit der folgenden Definition werden die zentralen Streckungen erfasst.

▶ Definition 106: Eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich heißt eine zentrale Streckung genau dann, wenn folgendes gilt:
(1) Jede Gerade wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.
(2) Es gibt entweder genau einen Punkt, das Zentrum, der auf sich selbst abgebildet wird, oder aber alle Punkte der Ebene fallen mit ihren Bildpunkten zusammen (Identität).

Positive und negative Streckungsfaktoren

Das Zentrum einer zentralen Streckung liegt entweder zwischen einander entsprechenden Punkten, oder einander entsprechende Punkte liegen auf einer Geraden durch das Zentrum Z auf derselben Seite von Z.

Positiv ist ein Streckungsfaktor dann, wenn Original- und Bildpunkt auf derselben Seite des Zentrums liegen.
Negativ ist ein Streckungsfaktor dann, wenn das Zentrum einer zentralen Streckung zwischen einander entsprechenden Punkten liegt.



Streckungsfaktoren

Die Strecke $\overline{A'B'}$ sei Bild der Strecke $\overline{AB}$ bei einer zentralen Streckung; dann gilt:

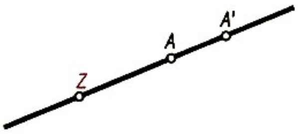
$$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Die Bildstrecke $\overline{A'B'}$ wird das k-fache der Originalstrecke $\overline{AB}$ genannt.

► Satz 107: Jede Gerade, die durch das Zentrum einer zentralen Streckung geht, wird auf sich selbst abgebildet.

Beweis: Würde der Bildpunkt A' eines Punktes A bei einer zentralen Streckung mit dem Zentrum Z nicht auf der Geraden AZ liegen, wären die einander entsprechenden Geraden AZ und $A'Z$ nicht parallel. Das ist bei einer zentralen Streckung nicht möglich, folglich muss die Gerade AZ auf sich selbst abgebildet werden.

► Satz 108: Zwei Winkel, die bei einer zentralen Streckung einander entsprechen, sind kongruent.



Beweis: Die Schenkel zweier Winkel, die bei einer zentralen Streckung einander entsprechen, sind entweder paarweise gleich oder entgegengesetzt orientiert. Ihre Kongruenz folgt dann aus Satz D 23, 28 oder 30.

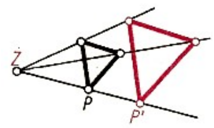
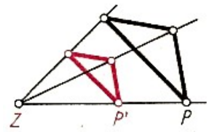
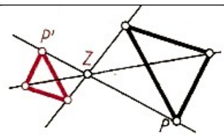
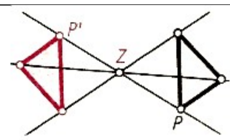
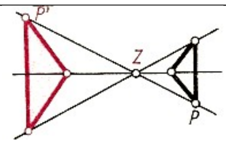
► Satz 109: Bei jeder zentralen Streckung ist das Längenverhältnis von Bild- und Originalstrecke für alle einander entsprechenden Strecken gleich dem Streckungsfaktor k.

Bemerkungen:
1) Eine zentrale Streckung ist entweder durch Angabe eines Punktes als Zentrum und einer Zahl als Streckungsmaßstab oder durch Angabe eines Punktes als Zentrum und zweier Punkte auf einer Geraden durch das Zentrum als Original- und Bildpunkt eindeutig bestimmt.

2) Die Nacheinanderausführung zweier Streckungen mit dem Zentrum Z und den Maßstäben k_1 und k_2 ist eine zentrale Streckung mit dem Zentrum Z und dem Maßstab $k = k_1 \cdot k_2$.

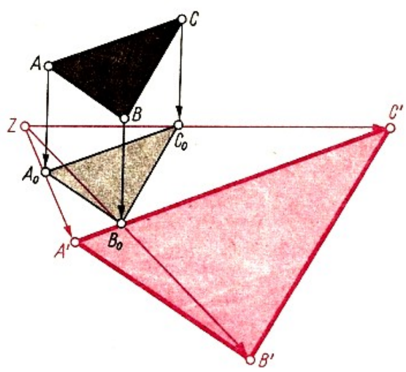
3) Die Umkehrung einer zentralen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Maßstab k ist eine zentrale Streckung mit dem Zentrum Z und dem Maßstab $\frac{1}{k}$.

Übersicht über zentrale Streckungen

Streckungs-faktor	Bezeichnung	Gegenseitige Lage einer entsprechenden Punkte bezüglich des Zentrums
$k > 1$	Vergrößerung	 Original P liegt zwischen Bild P' und Zentrum Z
$k = 1$	Identität	Original P und Bild P' fallen zusammen
$0 < k < 1$	Verkleinerung	 Bild P' liegt zwischen Original P und Zentrum Z
$-1 < k < 0$	Verkleinerung	 Zentrum liegt zwischen P und P', $\overline{PZ} > \overline{P'Z}$
$k = -1$	Punktspiegelung	 Zentrum liegt zwischen P und P', $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$
$k < -1$	Vergrößerung	 Zentrum liegt zwischen P und P', $\overline{PZ} < \overline{P'Z}$

Ähnlichkeitsabbildungen

► Definition 110: Eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich heißt eine Ähnlichkeitsabbildung genau dann, wenn sie entweder
a) eine Bewegung oder
b) eine zentrale Streckung oder
c) die Nacheinanderausführung einer Bewegung und einer zentralen Streckung ist.



Ähnlichkeitsfaktor

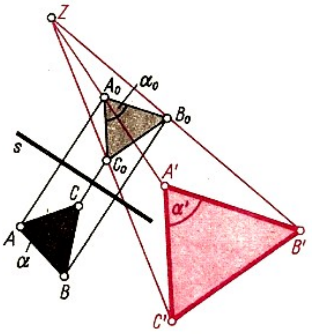
Ähnlichkeitsfaktor oder Maßstab einer Ähnlichkeitssabbildung heißt der Quotient k aus den Längen von Bild- und Originalstrecke.

► Satz 111: Jede Bewegung ist eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k = 1$.

► Satz 112: Bei jeder Ähnlichkeitsabbildung ist der Quotient aus den Längen der Original- und zugehörigen Bildstrecke für alle einander entsprechenden Strecken konstant.

► Satz 113: Bei jeder Ähnlichkeitsabbildung sind einander entsprechende Winkel kongruent.

Bemerkungen:
1) Die Nacheinanderausführung einer Drehung und einer zentralen Streckung heißt Drehstreckung.
2) Die Nacheinanderausführung einer Geradenspiegelung und einer zentralen Streckung wird Streckspiegelung genannt.



$\overline{A_0B_0} = \overline{AB}$; $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_0B_0}}$
Aus $\alpha = \alpha_0$ und $\alpha_0 = \alpha'$ folgt $\alpha = \alpha'$.

Übersicht über Ähnlichkeitsabbildungen		
Ähnlichkeitsfaktor	gleichsinnige Abbildung	ungleichsinnige Abbildung
$k = 1$	gleichsinnige Bewegungen	ungleichsinnige Bewegungen
$k \neq 1$	Zentrale Streckungen, Drehstreckungen	Streckspiegelungen

Ähnlichkeit

► Definition 114: Zwei geometrische Figuren heißen ähnlich genau dann, wenn sie Original und Bild bei einer Ähnlichkeitsabbildung sind.

Schreibweise: $F_1 \sim F_2$ (lies: Die Figuren F_1 und F_2 sind einander ähnlich).

► Satz 115:
a) Jede Figur ist sich selbst ähnlich.
b) Aus $F_1 \sim F_2$ folgt $F_2 \sim F_1$.
c) Aus $F_1 \sim F_2$ und $F_2 \sim F_3$ folgt $F_1 \sim F_3$.

► Satz 116: Ähnliche Figuren stimmen in einander entsprechenden Winkeln und in den Quotienten aus den Längen einander entsprechender Seiten überein.

Der Beweis des Satzes 116 folgt aus den Eigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen.

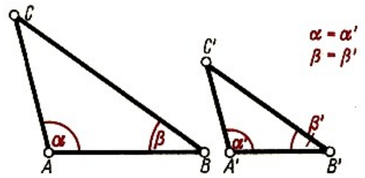
Bemerkung: Entsprechen zwei ähnliche Figuren bei einer zentralen Streckung einander, so sagen wir, dass sich die Figuren in Ähnlichkeitslage befinden.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

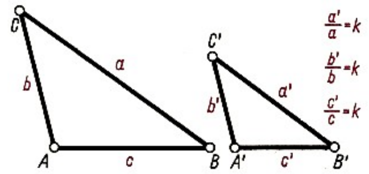
Die folgenden Ähnlichkeitssätze für Dreiecke werden häufig für Beweise anderer geometrischer

Sätze verwendet.

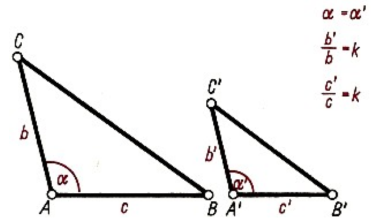
1. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.



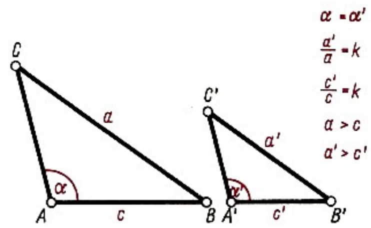
2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Verhältnisse einander entsprechender Seiten gleich sind.



3. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen und wenn die Verhältnisse einander entsprechend anliegender Seiten gleich sind.



4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen je zweier entsprechender Seiten und dem Gegenwinkel der jeweils größeren übereinstimmen.



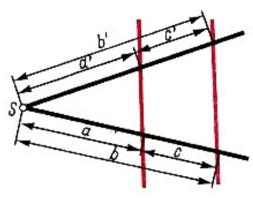
Die Beweise dieser Sätze können alle nach ein und demselben Gedankengang geführt werden. Als Beispiel beweisen wir den ersten Ähnlichkeitssatz:

In zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ seien die Winkel α und α' und die Winkel β und β' kongruent. Wir nehmen $\overline{A'B'} > \overline{AB}$ an.
Bei der zentralen Streckung f_1 mit dem Zentrum A und dem Maßstab $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ sei B_0 das Bild von B und C_0 das Bild von C.
Da $\overline{AB_0} \cong \overline{A'B'}$ gilt, sind die Dreiecke AB_0C_0 und $A'B'C'$ nach dem Kongruenzsatz (wsw) kongruent. Dann gibt es eine Bewegung f_2, bei der das Dreieck $A'B'C'$ das Bild des Dreiecks AB_0C_0 ist.
Folglich ist das Dreieck $A'B'C'$ das Bild des Dreiecks ABC bei der Nacheinanderausführung der zentralen Streckung f_1 und der Bewegung f_2. Die beiden Dreiecke sind also einander ähnlich.

Strahlensätze

Die folgenden Strahlensätze werden häufig zur Lösung praktischer Aufgaben, beispielsweise zur Bestimmung der Höhe eines Baumes oder zur Teilung einer Strecke verwendet.

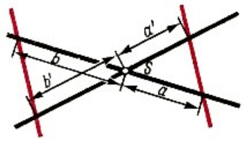
1. Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.



$a : b = a' : b'$; $c : a = c' : a'$; Daraus folgt z. B.: $a : a' = b : b'$; $c : c' = a : a'$

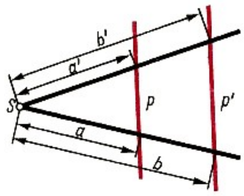
Ein entsprechender Satz gilt auch für zwei Geraden.

$a : b = a' : b'$



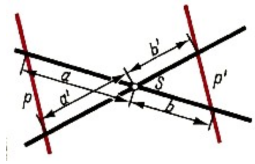
2. Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt S von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die zwischen den Strahlen liegenden Abschnitte auf den Parallelen wie die von S ausgehenden Abschnitte auf jedem der beiden Strahlen.

$p : p' = a : b$; $p' : p = b' : a'$; Daraus folgt z.B.: $p : b' = p : a'$



Ein entsprechender Satz gilt auch für zwei Geraden.

$p : p' = a : b$



Bemerkung: Die beiden Sätze lassen sich auf die Fälle von mehr als zwei Strahlen und mehr als zwei Parallelen verallgemeinern. Die Beweise der Strahlensätze ergeben sich entweder unmittelbar aus dem Satz 109 oder aber aus den Ähnlichkeitssätzen.
Beide Strahlensätze sind in der angegebenen Formulierung umkehrbar.

Streckenteilung

Innere Teilung	Äußere Teilung
Der Teilpunkt T einer Strecke liegt zwischen ihren Endpunkten. 	Der Teilpunkt T einer Strecke liegt außerhalb der Strecke. 

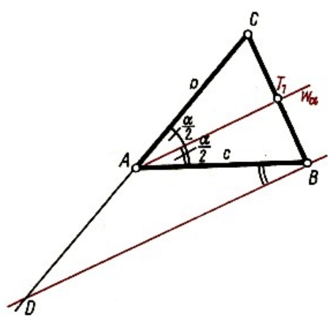
Teilverhältnis k

▶ Definition 117:
$k = \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}}$ und $k < 0$, falls T innerer Teilpunkt und $k > 0$, falls T äußerer Teilpunkt.

Gilt $\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{BT}$, so heißt die Strecke $\overline{AB}$ durch T stetig oder nach dem "Goldenen Schnitt" geteilt.

Sätze über Winkelhalbierende im Dreieck

▶ Satz 118: Die Winkelhalbierende eines Innenwinkels eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite innen im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.



Beweis: w_α sei Winkelhalbierende des Winkels α des Dreiecks ABC. Der Schnittpunkt von w_α mit BC sei T_1. Der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Parallelen zur Winkelhalbierenden durch B sei D.
Es gilt:
$\angle ADB = \angle CAT$, (Stufenwinkel an den Parallelen AT_1 und BD);
$\angle CAT_1 = \angle T_1AB$ (nach Konstruktion der Winkelhalbierenden)
$\angle T_1AB = \angle DBA$ (Wechselwinkel an den Parallelen AT_1 und BD), also $\angle ADB = \angle DBA$.

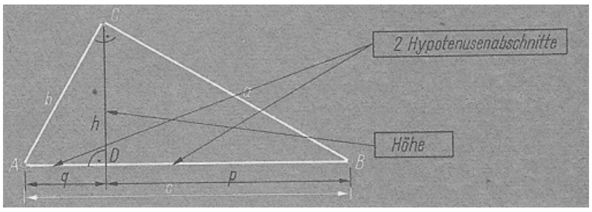
Daher ist das Dreieck ADB gleichschenklig, und es folgt $\overline{AB} = \overline{AD} = c$. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{\overline{T_1B}}{\overline{T_1C}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

und wegen $\overline{AD} = c$ und $\overline{AC} = b$: $\frac{T_1B}{T_1C} = \frac{c}{b}$ w.z.b.w.

Sätze für rechtwinklige Dreiecke

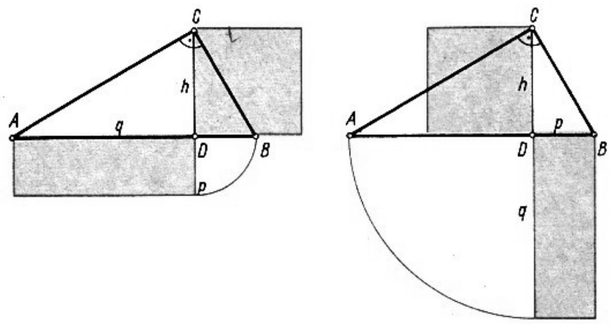
Den Fußpunkt der Höhe h vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse bezeichnen wir mit D. Die Strecken $\overline{AD} = q$ bzw. $\overline{BD} = p$ heißen die zu den Katheten b bzw. a gehörigen Hypotenusenabschnitte.



Höhensatz

► Satz 119: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe h auf die Hypotenuse gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.

$$h^2 = p \cdot q$$

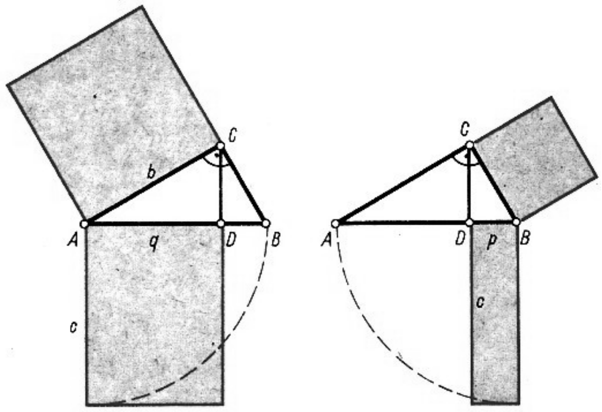


Beweis: In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der Höhe h von C auf die Hypotenuse $\overline{AB}$. Die Dreiecke ADC und BDC sind einander ähnlich. Dann gilt die Proportion $h : q = p : h$.
Daraus ergibt sich $h^2 = p \cdot q$, w.z.b.w.

Kathetensatz

► Satz 120: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt aus der Hypotenuse und dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt.

$$(1) \quad a^2 = b \cdot p \qquad (2) \quad b^2 = c \cdot q$$

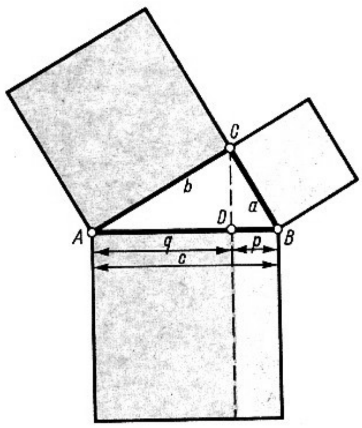


Beweis: Das Dreieck ABC sei rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C. Die Höhe von C auf $\overline{AB}$ habe den Fußpunkt D.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BDC bzw. ABC und ADC folgen die Proportionen $a : c = p : a$ bzw. $b : c = gq : b$.
Damit ergeben sich die Beziehungen $a^2 = c \cdot p$ bzw. $b^2 = c \cdot q$, w.z.b.w.

Satz des Pythagoras

► Satz 121: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



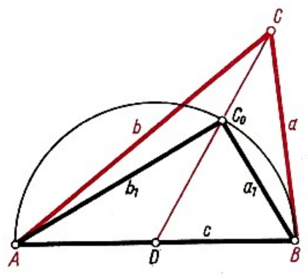
Beweis: Ein Dreieck ABC sei rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C. Aus $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ folgt $a^2 + b^2 = c(p + q)$.
Da $p + q = c$ gilt, ergibt sich $a^2 + b^2 = c^2$, w.z.b.w.

Umkehrung des Satzes des Pythagoras

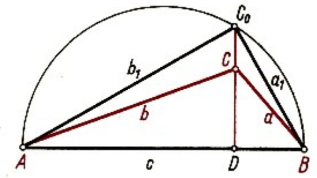
► Satz 122: Wenn in einem Dreieck ABC für die Seitenlängen c, a und b die Beziehung $c^2 = a^2 + b^2$ gilt, so ist das Dreieck bei C rechtwinklig.

Beweis: In einem Dreieck ABC gelte $c^2 = a^2 + b^2$. Angenommen, der Winkel γ bei C sei kein Rechter. Dann liegt der Punkt C nicht auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$.

a) C liege außerhalb des Thaleskreises. Da $\angle BC_0C$ größter Winkel im Dreieck BCC_0 ist, ($\angle BC_0C$ ist stumpf, da sein Nebenwinkel $\angle BC_0D$ als Teil eines rechten Winkels spitz ist), ist a größte Seite in diesem Dreieck, also gilt $a > a_1$.



Entsprechend gilt $b > b_1$.
Daraus folgt $a^2 + b^2 > a_1^2 + b_1^2$.
Da aber $a_1^2 + b_1^2 = c^2$ gilt ($\triangle ABC$, ist rechtwinklig), ergibt sich $a^2 + b^2 > c^2$ im Widerspruch zur Voraussetzung.



b) C liege innerhalb des Thaleskreises, C_0 sei der Schnittpunkt des Lotes durch C auf AB mit dem Thaleskreis. Dann gilt $a_1^2 + b_1^2 = c^2$.
Da $\angle BCC_0$ größter Winkel im Dreieck BCC_0 ist ($\angle BCC_0$ ist stumpf, da sein Nebenwinkel $\angle BCD$ als Winkel im rechtwinkligen Dreieck BCD spitz ist), ist a_1 größte Seite im Dreieck BCC_0, also gilt $a_1 > a$.
Entsprechend gilt $b > b_1$.
Daraus folgt $a^2 + b^2 < a_1^2 + b_1^2$, also $a^2 + b^2 < c^2$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Das Dreieck ABC ist also bei C rechtwinklig, w.z.b.w.

4.14 Flächen- und Rauminhaltsberechnung

Vorbemerkung: Bei der Herleitung der Formeln für Rechtecke und Quader wird vorausgesetzt, dass Einheitsquadrate bzw. Einheitswürfel existieren, deren Seiten- bzw. Kantenlänge kommensurabel ist mit den Seiten- bzw. Kantenlängen der zu berechnenden Flächen bzw. Körper. Die Formeln für Rechtecke (jedes Quadrat ist ein spezielles Rechteck) und Quader gelten wie auch die Formeln für alle anderen geometrischen Gebilde jedoch auch für beliebige reelle Zahlen als Maßzahlen für die jeweiligen Seitenlängen.

Flächenmaße

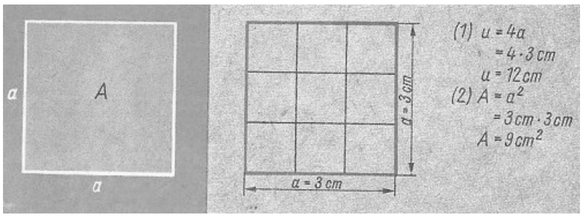
Flächenmaße	Zeichen	Beziehung
Quadratkilometer	km^2	1 km^2 = 10^6 m^2
Hektar	ha	1 ha = 100 a = 10^4 m^2
Ar	a	1 a = 10^2 m ^{2}
Quadratmeter	m^2	
Quadratdezimeter	dm^2	1 dm^2 = $\frac{1}{100}$ m^2 = 10^{-2} m^2
Quadratzentimeter	cm^2	1 cm^2 = $\frac{1}{100}$ dm^2 = 10^{-4} m^2
Quadratmillimeter	mm^2	1 mm^2 = $\frac{1}{100}$ cm^2 = 10^{-6} m^2

Übersicht über die verwendeten Variablen			
Seiten, Kanten	a, b, c	Flächeninhalt	A
Radius	r	Umfang	u
Durchmesser	d	Grundflächeninhalt	A_G
Höhe	h	Mantelinhalt	A_M
Mantellinie	s	Oberflächeninhalt	A_O
		Volumen	V

Quadrat

Ein Quadrat von der Seitenlänge a kann durch Einheitsquadrate geeigneter Seitenlänge vollständig ausgelegt werden; d.h. durch a Streifen mit jeweils a Einheitsquadraten.

$$A = a^2 \qquad\qquad u = 4a$$

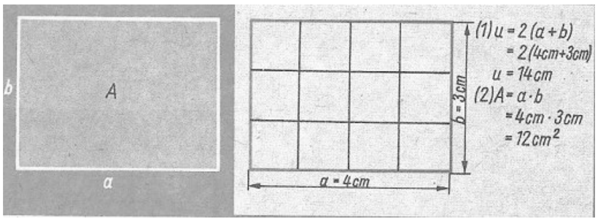


Quadrat: $a = 3$ cm

Rechteck

Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b kann durch Einheitsquadrate geeigneter Seitenlänge vollständig ausgelegt werden, d. h. durch a Streifen mit jeweils b Einheitsquadraten.

$$A = a \cdot \qquad\qquad u = 2(a + b)$$



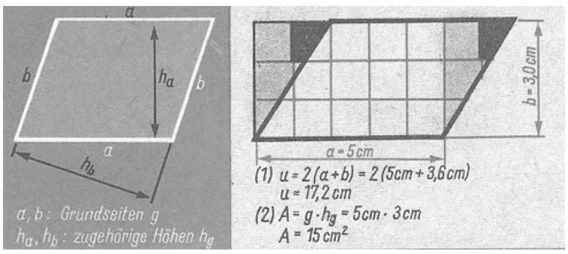
Rechteck: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm

Parallelogramm

Die Berechnung des Flächeninhalts eines jeden Parallelogramms kann zurückgeführt werden auf die Berechnung der Fläche eines jeweils flächengleichen Rechtecks.

$$A = g \cdot h_g \qquad\qquad u = 2(a + b)$$

Bemerkungen:
1) Es ist gleichgültig, welche Seite des Parallelogramms als Grundseite gewählt wir. $A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.
2) Aus $A = g \cdot h_g$, ergibt sich:
Parallelogramme mit gleich langen Grundseiten und gleich langen zugehörigen Höhen haben gleiche Flächeninhalte.



Parallelogramm: $a = 5{,}0$ cm, $b = 3{,}6$ cm, $h_a = 3{,}0$ cm

Dreieck

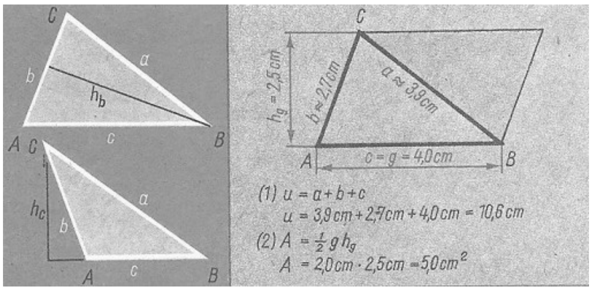
Die Berechnung des Flächeninhaltes eines jeden Dreiecks kann zurückgeführt werden auf die Berechnung eines Parallelogramms, das den doppelten Inhalt des Dreiecks hat.

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g \qquad\qquad u = a + b + c$$

Bemerkungen:
1) Es ist gleichgültig, welche Seite des Dreiecks als Grundseite gewählt wird.

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

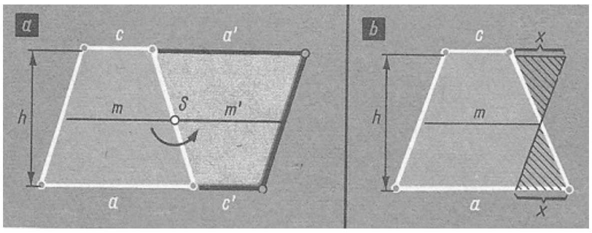
2) Aus $A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$ ergibt sich: Dreiecke mit gleich langen Grundseiten und gleich langen zugehörigen, Höhen haben gleiche Flächeninhalte.



Dreieck: $a = 3{,}9$ cm; $b = 2{,}7$ cm; $c = 4{,}0$ cm, $h_g = 2{,}5$ cm

Trapez

Die Berechnung jedes Trapezes kann auf die Berechnung eines Parallelogramms zurückgeführt werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:



1) Drehung des Trapezes um $180°$ um den Mittelpunkt eines Schenkels; man erhält ein Parallelogramm mit doppeltem Flächeninhalt des zu berechnenden Trapezes (Bild a).

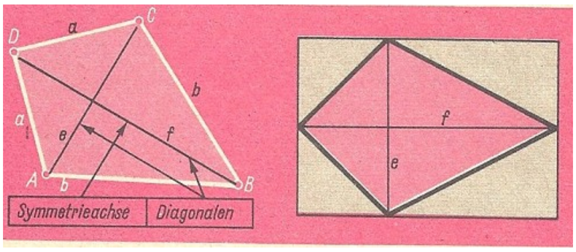
2) Erzeugung eines Parallelogramms, das den gleichen Flächeninhalt hat wie das zu berechnende Trapez (Bild b).

$$A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h = m \cdot h \qquad\qquad u = a + b + c + d$$

Bemerkungen:
Aus $A = m \cdot h$ hergibt sich: Zwei Trapeze mit gleich langen Mittellinien m und gleich langen Höhen haben gleiche Flächeninhalte.

Drachenviereck

Die Berechnung jedes Drachenvierecks kann auf die Berechnung eines Rechtecks zurückgeführt werden, das den doppelten Flächeninhalt des jeweils zu berechnenden Drachenvierecks hat.

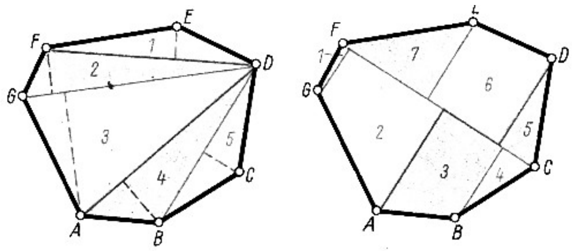


$$A = \frac{1}{2} e \cdot f \qquad u = 2(a+b)$$

Bemerkung: Die Formel für den Flächeninhalt eines Drachenvierecks gilt auch für Rhomben und Quadrate. Bei diesen Figuren stehen die Diagonalen ebenfalls aufeinander senkrecht. Beim Quadrat (Diagonale d) erhält man speziell: $A = \frac{1}{2}d^2$.

Beliebiges Viereck

Die Berechnung beliebiger Vielecke wird im allgemeinen zurückgeführt auf die Berechnung von Dreiecken und Trapezen, indem man das jeweils gegebene Vieleck in geeigneter Weise in Dreiecke (Dreiecksmethode) bzw. Trapeze (Trapezmethode) zerlegt.

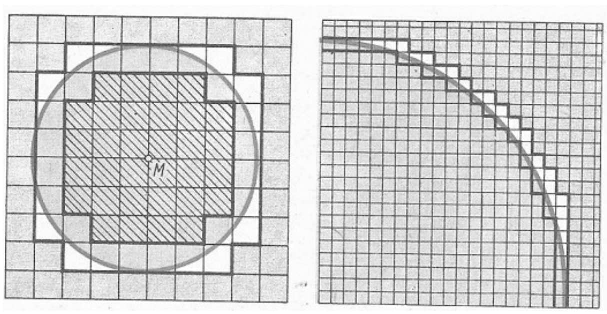


Dreiecksmethode Trapezmethode

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n \qquad u = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Kreis

Der Flächeninhalt und der Umfang eines Kreises lässt sich mit elementaren Mitteln nur näherungsweise bestimmen. In beiden Fällen spielt die Zahl $\pi \approx 3{,}1416$ als Proportionalitätsfaktor eine entscheidende Rolle.



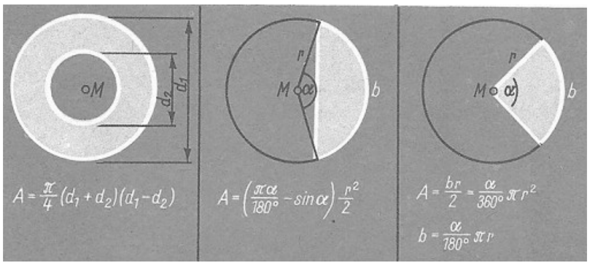
$$A_i < A < A_a; \qquad A \sim r^2; \qquad u \sim r$$

Je kleiner man Quadrate wählt, mit denen eine Kreisfläche von innen und von außen ausgelegt wird, desto kleiner wird die Differenz der Summe aller Quadrate "von innen" und "von außen" und desto genauer wird der Flächeninhalt des Kreises durch diese Summen begrenzt.

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2 \qquad u = 2\pi r = \pi d$$

Kreisteile

Die Formeln für die Berechnung der Flächeninhalte von Kreisteilen gewinnt man für Kreisring und Kreisabschnitt (Kreissegment) durch Differenzbildung und für den Kreisausschnitt (Kreissektor) mit Hilfe einer Proportion.



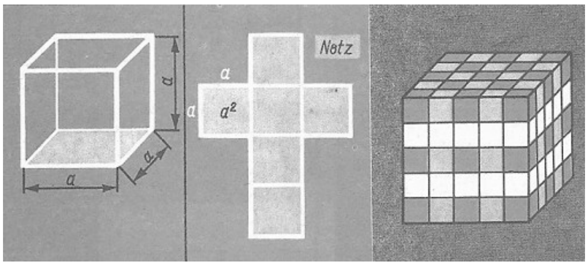
Kreisring Kreisabschnitt Kreisausschnitt

Raummaße

Raummaße	Zeichen	Beziehung
Kubikkilometer	km^3	1 km^3 = 10^9 m^3
Kubikmeter	m^3	
Kubikdezimeter	dm^3	1 dm^3 = $\frac{1}{1000}$ m^3 = 10^{-3} m^3
Kubikzentimeter	cm^3	1 cm^3 = $\frac{1}{1000}$ dm^3 = 10^{-6} m^3
Kubikmillimeter	mm^3	1 mm^3 = $\frac{1}{1000}$ cm^3 = 10^{-9} m^3

Würfel

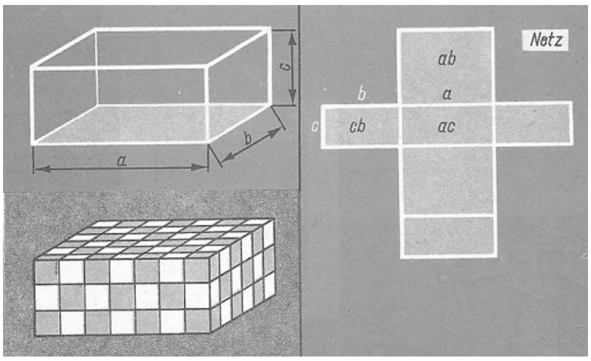
Ein Würfel von der Kantenlänge a kann durch Einheitswürfel geeigneter Kantenlänge vollständig ausgelegt werden, d.h. durch a Schichten mit jeweils a Stangen zu je a Einheitswürfel. Die Oberfläche eines Würfels lässt sich in die Ebene abwickeln.

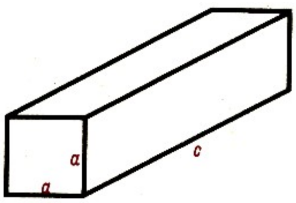


$$V = a^3 \qquad A_O = 6a^2$$

Quader

Ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c kann durch Einheitswürfel geeigneter Kantenlänge vollständig ausgelegt werden, d. h. durch c Schichten mit jeweils b Stangen zu je a Einheitswürfel. Die Oberfläche eines Quaders lässt sich in die Ebene abwickeln.

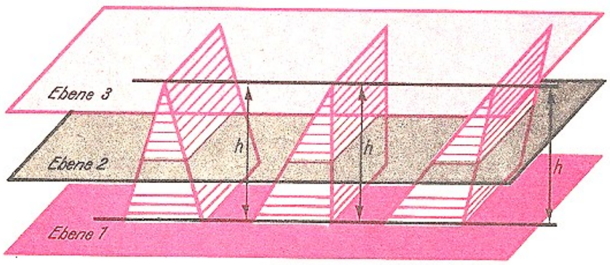




Sind von den drei Kanten eines Quaders zwei gleich groß, d. h., sind zwei der einander kongruenten Begrenzungsflächen Quadrate, so nennt man einen solchen Quader auch quadratische Säule.

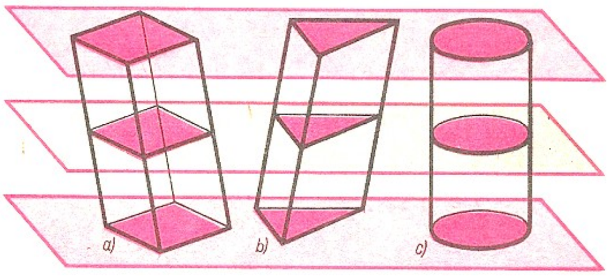
Cavalierisches Prinzip

Liegen Körper zwischen zwei parallelen Ebenen und erzeugen Prinzip alle zur gemeinsamen Grundebene dieser Körper parallel verlaufende Schnitte in gleichen Höhen flächengleiche Schnittfiguren, so sind diese Körper volumengleich.



	Körper 1	Körper 2	Körper 3
Ebene 1	$A_{G_1} =$	$A_{G_2} =$	A_{G_3}
Ebene 2	$A_{S_1} =$	$A_{S_2} =$	A_{S_3}
	$h_1 =$	$h_2 =$	h_3

Bemerkungen: 1) Dieser Satz wurde erstmals von dem italienischen Mathematiker Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ausgesprochen.

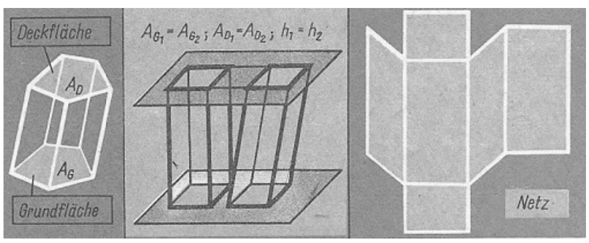


2) Das Cavalierische Prinzip kann zur Bestimmung des Volumens beliebiger Körper verwendet werden.

Prismen

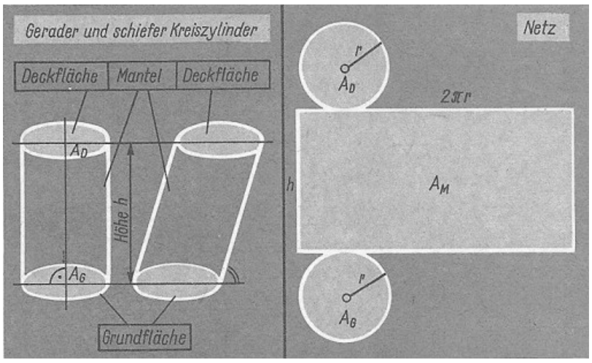
Für, die Volumenberechnung gerader Prismen gilt die Formel für den Quader, der zu den Prismen gehört. Die Berechnung schiefer Prismen wird unter Benutzung des Cavalierischen Prinzips auf die Berechnung des jeweils entsprechenden geraden Prismas zurückgeführt.
Die Oberfläche jedes Prismas lässt sich in die Ebene abwickeln.

$$V = A_G \cdot h \qquad A_O = 2A_G + A_M$$



Kreiszylinder

Die Berechnung des Volumens jedes Kreiszylinders lässt sich auf Grund des Cavalierischen Prinzips nach der Formel für das Volumen eines Prismas durchführen. Die Oberfläche jedes Kreiszylinders lässt sich in die Ebene abwickeln.

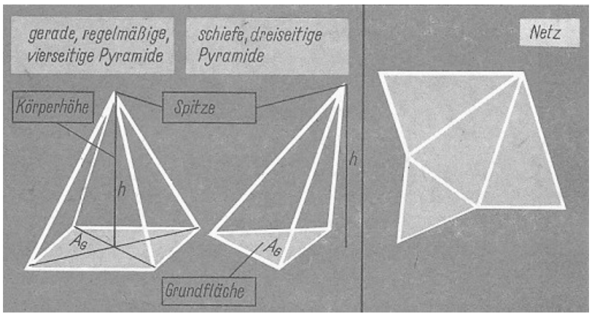


Bemerkungen:
1) Bei Anwendung des Cavalierischen Prinzips kommt es nur auf den Nachweis der Gleichheit der Höhen und der Gleichheit der Flächeninhalte der durch parallele Schnitte entstehenden Figuren an, also nicht auf die Gestalt der Flächen. Der Kreiszylinder kann als spezielles Prisma angesehen werden, das als Grundfläche einen Kreis hat, also $A_G = \pi r^2$.

$$V = A_G \cdot h = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h \qquad , \qquad A = 2A_G + A_M = 2\pi r(r+h) = \frac{\pi}{2} d(2+2h)$$

2) Die Formel für die Berechnung der Oberfläche gilt nur für gerade Kreiszylinder, da der Mantel eines schiefen Kreiszylinders eine Fläche ergibt, die sich nicht mit elementaren Mitteln berechnen lässt.

Pyramiden

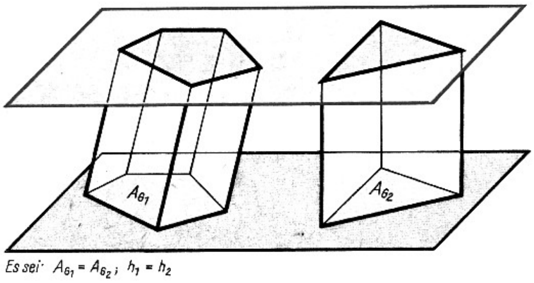


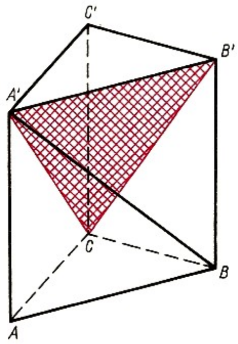
Die Berechnung jeder Pyramide wird auf folgende Weise auf die Berechnung des jeweils entsprechenden Prismas zurückgeführt:

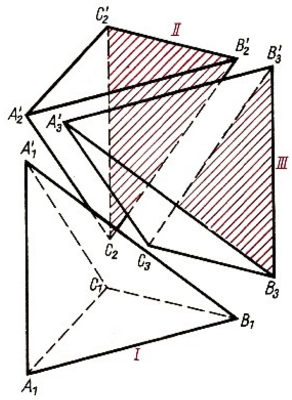
I) Auf Grund des Cavalierischen Prinzips existiert für jedes beliebige Prisma ein volumengleiches gerades, regelmäßiges, dreiseitiges Prisma, das eine flächengleiche Grundfläche und gleiche Höhe besitzt.

II) Jedes dreiseitige Prisma lässt sich durch geeignete Schnitte in drei volumengleiche Pyramiden zerlegen. Die Oberfläche jeder Pyramide lässt sich in die Ebene abwickeln (siehe Bild).

$$V = \frac{1}{3} A_G \cdot h \qquad\qquad A_O = A_G + A_M$$



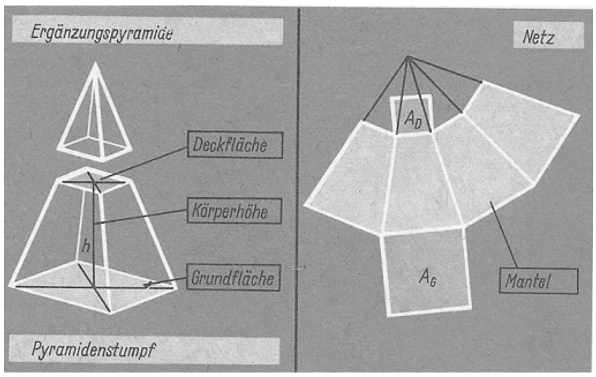




Pyramidenstumpf

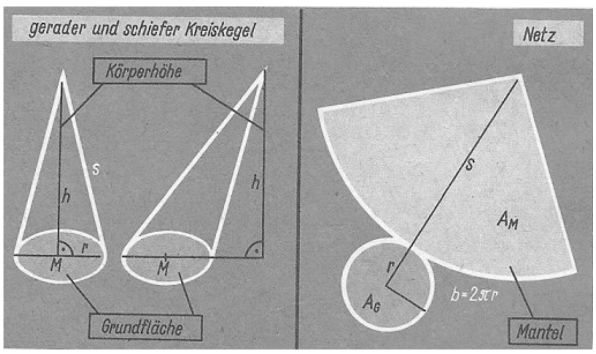
Die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes wird auf die Berechnung einer Pyramide zurückgeführt. Jeder Pyramidenstumpf lässt sich durch eine entsprechende Ergänzungspyramide zu einer Pyramide ergänzen.
Die Oberfläche jedes Pyramidenstumpfes lässt sich in die Ebene abwickeln (siehe Bild).

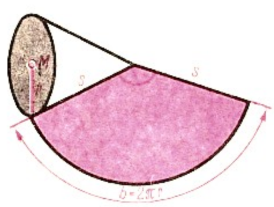
$$V = \frac{h}{3}(A_G + \sqrt{A_G \cdot A_D} + A_D) \qquad A_0 = A_G + A_D + A_M$$



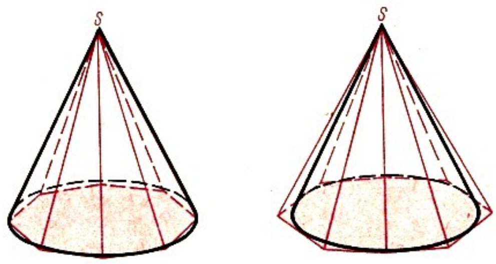
Kreiskegel

Die Berechnung des Volumens jedes Kreiskegels lässt sich auf Grund des Cavalierischen Prinzips nach der Formel für das Volumen einer Pyramide durchführen.
Die Oberfläche jedes Kreiskegels lässt sich in die Ebene abwickeln.





$$V = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h \qquad A = A_G + A_M = \pi r(r+s) = \frac{\pi}{4}d(2s+d)$$



Es gilt: $A_i < A_G < A_a \qquad V_i < \frac{h}{3}A_G < V_a$

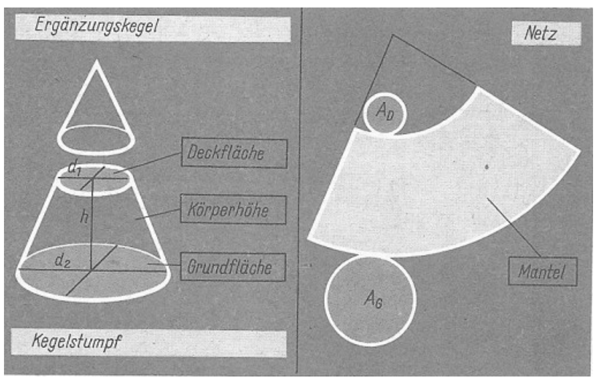
Bemerkung: Die Formel für die Berechnung der Oberfläche gilt nur für gerade Kreiskegel, da der Mantel eines schiefen Kreiskegels eine Fläche ergibt, die sich nicht mit elementaren Mitteln berechnen lässt.

Kreiskegelstumpf

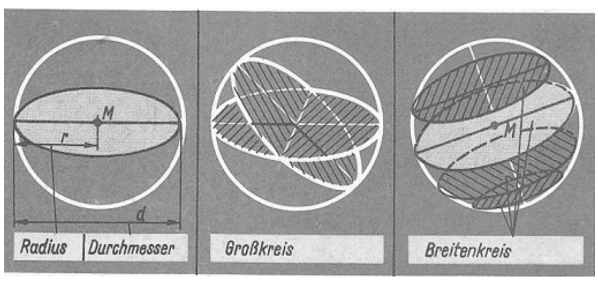
Die Berechnung des Volumens eines Kreiskegelstumpfes wird auf die Berechnung eines Kreiskegels zurückgeführt. Jeder Kreiskegelstumpf lässt sich durch einen entsprechenden Ergänzungskegel zu einem Kreiskegel ergänzen.
Die Oberfläche jedes Kreiskegelstumpfes lässt sich in die Ebene abwickeln.

$$V = \frac{\pi}{3}h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi}{12}h(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$
$$A_O = A_G + A_D + A_M = \pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)] = \frac{\pi}{4}[d_1^2 + d_2^2 + 2s(d_1 + d_2)]$$

Bemerkung:
Die Formel für die Berechnung der Oberfläche gilt nur für gerade Kreiskegelstümpfe, da der Mantel eines schiefen Kreiskegelstumpfes eine Fläche ergibt, die sich nicht mit elementaren Mitteln berechnen lässt.

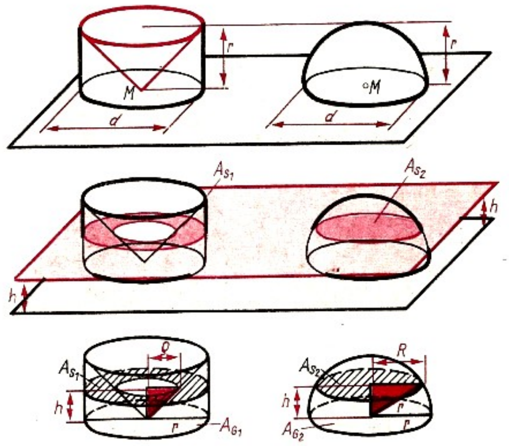


Kugel



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6}d^3 \qquad\qquad A_O = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

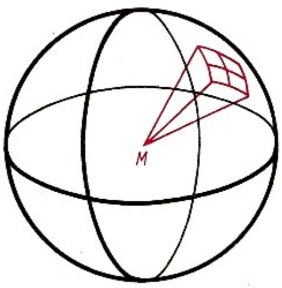
Die Berechnung des Volumens einer Kugel wird auf die Berechnung der Volumina eines entsprechenden Kreiszylinders und Kreiskegels zurückgeführt; denn mit dem Cavalierischen Prinzip kann bewiesen werden, dass das Volumen einer Halbkugel gleich ist dem Volumen eines Kreiszylinders verringert um das Volumen eines Kreiskegels.
Die Oberfläche einer Kugel lässt sich nicht in die Ebene abwickeln.



$$V_{\text{Halbk.}} = V_{\text{Zyl}} - V_{\text{Kegel}} = \pi r^3 - \frac{\pi}{3} r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$\rho = h$, $R^2 = r^2 - h^2$, $A_{G_1} = A_{G_2} = \pi r^2$
$A_{S_1} = \pi r^2 - \pi\rho^2 = \pi(r^2 - h^2)$; $A_{S_2} = \pi R^2 = \pi(r^2 - h^2)$; $A_{S_1} = A_{S_2}$

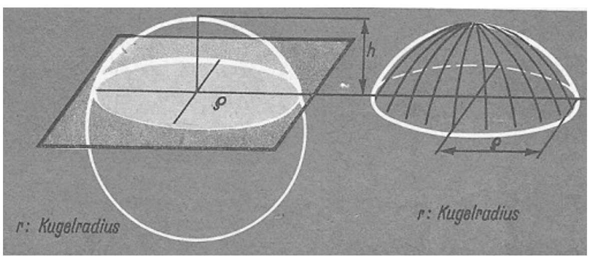
Bemerkung: Im Gegensatz zu der Formel für das Volumen einer Kugel, die mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips hergeleitet wird, kann die Formel für die Kugeloberfläche mit elementaren Mitteln nicht bewiesen werden.



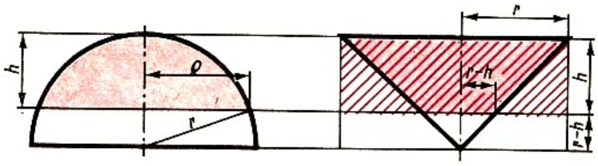
$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} A_G \cdot h;\ h \to r;$$
$$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{3} r \underbrace{(A_{G_1} + A_{G_2} + \ldots + A_{G_n})}_{A_{0,\text{Kugel}}}$$
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} r A_0;\ A_0 = 4\pi r^2$$

Kugelteile, Kugelabschnitt(-segmente), Kugelkappe

Die Berechnung des Volumens jedes Kugelabschnitts (Kugelsegments) wird auf die Berechnung des Volumens eines entsprechenden Kreiszylinders und Kreiskegelstumpfes zurückgeführt; mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips kann bewiesen werden, dass das Volumen eines Kugelabschnitts gleich ist dem Volumen eines Kreiszylinders verringert um das Volumen eines Kreiskegelstumpfes.

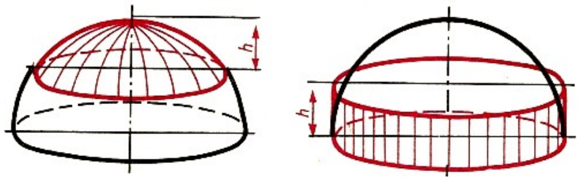


$V_{\text{Abschnitt}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegelstumpf}}$
$V = \pi r^2 h - \frac{\pi}{3} h[r^2 - r(r-h) + (r-h)^2]$



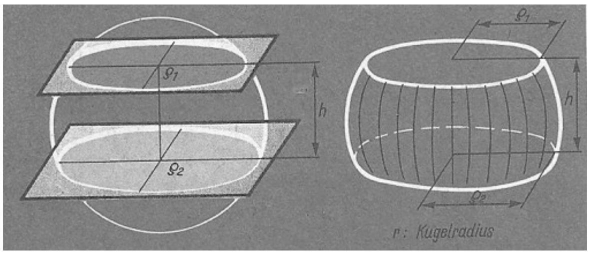
$$V = \frac{\pi}{3} h^2(3r - h) = \frac{\pi}{6} h^2(3d - 2h) \qquad A_M = 2\pi r h = \pi d h \qquad \text{(Kugelkappe)}$$

Bemerkung: Die Formel für die Berechnung des Inhalts der Oberfläche einer Kugelkappe ist gleich der für den Mantel eines Kreiszylinders. Das bedeutet: Die Kugelkappe ist flächengleich dem Mantel des Kreiszylinders, der die gleiche Höhe hat wie die Kugelkappe und der zugehörigen Kugel umbeschrieben ist.



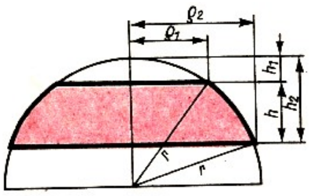
Kugelschicht

Das Volumen einer Kugelschicht ergibt sich als Differenz aus dem Volumen zweier Kugelabschnitte.
$h_2 - h_1 = h \qquad V_{\text{Abschnitt II}} - V_{\text{Abschnitt I}} = V$



Kugelschicht Kugelzone

Kugelzone



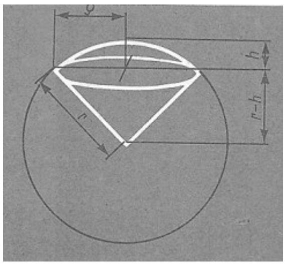
Entsprechend ergibt sich der Flächeninhalt einer Kugelzone als Differenz aus zwei Kugelkappen.

$$V = \frac{\pi}{6} h(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2) \qquad A_M = 2\pi r h = \pi d h \qquad \text{(Kugelzone)}$$

Kugelausschnitt (-sektor)

Die Berechnung des Volumens eines Kugelausschnitts erfolgt durch Addition der Volumina eines Kugelabschnitts und des entsprechenden Kreiskegels.

Entsprechend ist der Oberflächeninhalt eines Kugelausschnitts die Summe der Oberflächen der zugehörigen Kugelkappe und eines Kegelmantels.
$V_{\text{Ausschnitt}} = V_{\text{Abschnitt}} + V_{\text{Kegel}}$
$V = \frac{\pi}{3}h^2(3r-h) + \frac{\pi}{3}\rho^2(r-h); \quad \rho^2 = h(2-h)$



$$V = \frac{2\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{6}d^2h \qquad\qquad A_O = \pi r(2h+\rho)$$

4.15 Darstellende Geometrie

Aufgaben

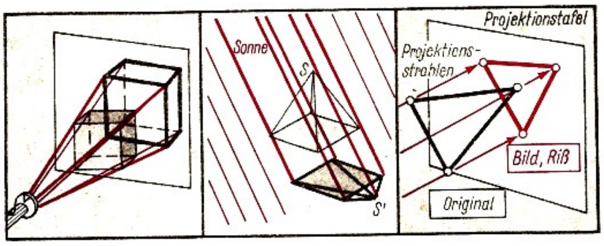
Die darstellende Geometrie hat die Aufgabe, räumliche Gebilde (die Originale) hinsichtlich ihrer zeichnerischen Darstellung zu untersuchen und Verfahren für die Konstruktion ihrer Bilder (auch Risse) auf der Zeichenfläche zu entwickeln.

Grundprinzip

Grundprinzip der darstellenden Geometrie ist die Abbildung (Zuordnung) von Punkten des Raumes (dreidimensional) auf Punkte der Zeichenebene (zweidimensional) durch Projizieren.

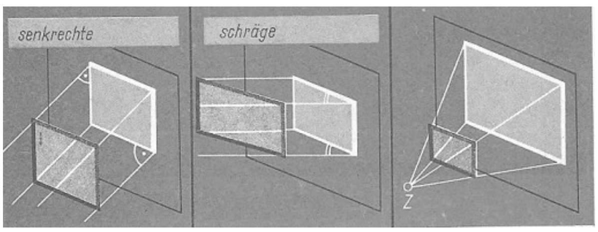
Projizieren, Projektionsstrahlen

"Projizieren" heißt das Abbildungsverfahren, bei dem man sich das Bild des Originals als Schattenwurf durch Lichtstrahlen entstanden denkt. Die in der darstellenden Geometrie angenommenen Lichtstrahlen nennt man Projektionsstrahlen.



Projektionsarten

Je nach der Lage der Projektionsstrahlen zueinander und zur Projektionstafel unterscheidet man:

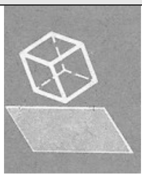
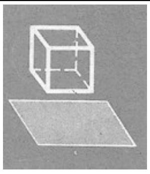


Parallelprojektion Zentralprojektion

1. Parallelprojektion
a) senkrechte (orthogonale) Parallelprojektion
b) Schräge Parallelprojektion (Schrägbild)
2. Zentralprojektion

Allgemeine einfache Lage

Je nach der Lage des Originals zur Projektions(Riss-)tafel unterscheidet man zwischen allgemeiner Lage und einfacher Lage.

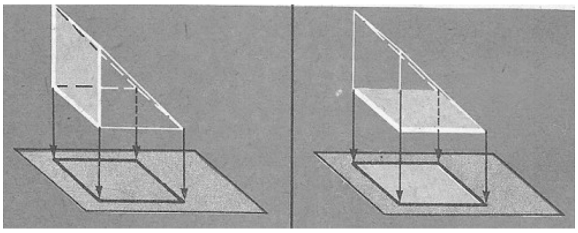
Allgemeine Lage	Einfache Lage
 Kanten und ebene Flächen in beliebiger Lage zur Risstafel	 Möglichst viele Kanten und ebene Flächen parallel oder senkrecht zur Risstafel

Tiefenstrecken (-geraden, -flächen)

Strecken (Geraden, Flächen), die senkrecht zu einer Projektionstafel verlaufen, nennt man Tiefenstrecken(-geraden, -flächen).

Frontstrecken (-geraden, -flächen)

Strecken (Geraden, Flächen), die parallel zu einer Projektionstafel verlaufen, nennt man Frontstrecken (-geraden, -flächen).
Bemerkung: In bezug auf Frontstrecken spricht man auch von Strecken in Frontlage.



Tiefenstrecken Frontstrecken, (-flächen)

Parallelprojektion

Für die Parallelprojektion (senkrecht und schräg) gelten allgemein folgende Sätze:

Sätze

► Jedem Punkt als Original wird eindeutig ein Punkt als Bild zugeordnet.

Bemerkung: Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht; denn jedem Bildpunkt können alle Punkte des jeweiligen Projektionsstrahls als Original zugeordnet werden.

► Jeder Geraden als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsstrahlen entweder ein Punkt oder eine Gerade als Bild zugeordnet.

Liegt die Originalgerade parallel zu den Projektionsstrahlen, so hat sie als Bild einen Punkt, sonst eine Gerade.

► Jeder Strecke als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsstrahlen entweder ein

Punkt oder eine Strecke als Bild zugeordnet.

Liegt die Originalstrecke parallel zu den Projektionsstrahlen, so hat sie als Bild einen Punkt; sonst eine Strecke.

▶ Parallelen Geraden als Originale werden je nach ihrer Lage zu den Projektionsstrahlen zwei Punkte, eine einzige Gerade oder parallele Geraden als Bild zugeordnet.

Liegen die Originale parallel zu den Projektionsstrahlen, so haben sie zwei Punkte als Bilder; sonst eine einzige Gerade oder parallele Geraden, je nachdem, ob die durch die Originale aufgespannte Ebene parallel zu den Projektionsstrahlen liegt oder nicht.

▶ Jeder ebenen Figur als Original wird je nach ihrer Lage zu den Projektionsstrahlen eine Strecke oder eine ebene Figur als Bild zugeordnet.

Liegt die Ebene des Originals parallel zu den Projektionsstrahlen, so hat die ebene Figur als Bild eine Strecke, sonst eine ebene Figur.

▶ Jedem Körper als Original wird eine ebene Figur als Bild zugeordnet.

Senkrechte Parallelprojektion, Konstruktionsverfahren

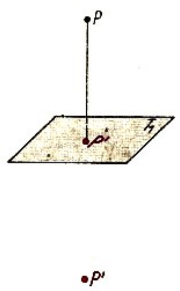
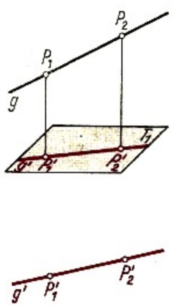
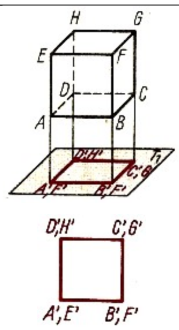
Die Projektionsstrahlen verlaufen senkrecht zur Projektionstafel. Bei der senkrechten Parallelprojektion wird jedem Raumpunkt P (Original) ein Bildpunkt P' in der Projektionstafel T zugeordnet, indem man von P aus das Lot auf die Ebene T fällt. Der Fußpunkt des Lotes ist der Bildpunkt P'.

Bemerkung: Die Projektionstafel wird stets als unbegrenzte Ebene angenommen. Lediglich in Abbildungen wird zur Verdeutlichung jeweils ein Teil der Ebene hervorgehoben.
Nach der Anzahl der verwendeten Projektionstafeln unterscheidet man:
Eintafelprojektion - Grundriss
Zweitafelprojektion - Grund- und Aufriss
Dreitafelprojektion - Grund-, Auf- und Kreuzriss

Eintafelprojektion

Dabei erfolgt die zeichnerische Darstellung durch senkrechte Parallelprojektion auf eine Projektionstafel.

Grundriss

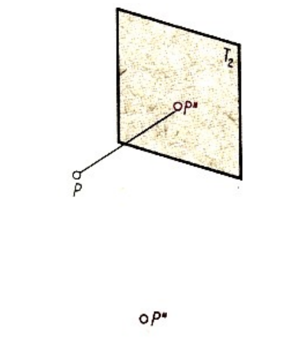
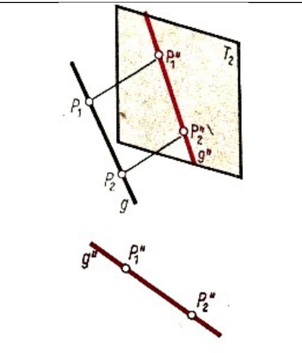
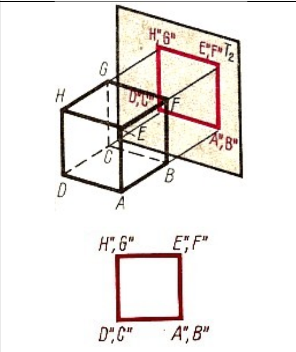
Grundriss eines Punktes	Grundriss einer Geraden	Grundriss eines Würfels
		

Wird die Projektionstafel waagerecht (horizontal) angenommen, so nennt man das durch senkrechte Parallelprojektion erhaltene Bild den Grundriss des Originals. Die waagerecht angenommene Projektionstafel nennt man Grundrisstafel, meist mit T_1 bezeichnet.

Den Grundriss eines Originals bezeichnet man mit einem Strich am Symbol des Originals (P', g'; Grundriss des Punktes P bzw. der Geraden g).

Aufriss

Wird die Projektionstafel senkrecht (vertikal) angenommen, so nennt man das durch senkrechte Parallelprojektion erhaltene Bild den Aufriss des Originals.
Die senkrecht angenommene Projektionstafel nennt man Aufrisstafel, meist mit T_2 bezeichnet.
Den Aufriss eines Originals bezeichnet man mit zwei Strichen am Symbol des Originals (P'', g'': Aufriss des Punktes P bzw. der Geraden g).

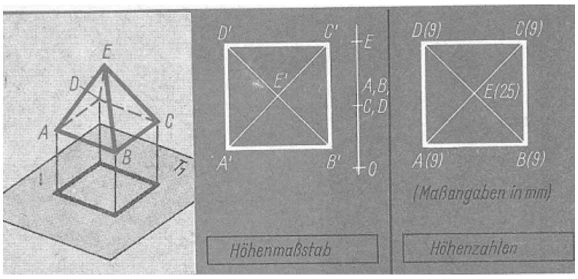
Aufriss eines Punktes	Aufriss einer Geraden	Aufriss eines Würfels
		

Da der Grundriss eines Originals die räumliche Lage der Punkte des Originals nicht eindeutig bestimmt, fügt man dem Grundriss einen Höhenmaßstab oder Höhenzahlen (Koten) hinzu.

Grundriss und Höhenmaßstab

Der Höhenmaßstab ist eine senkrecht neben dem zugehörigen Grundriss gezeichnete Maßlinie, auf der durch entsprechende Strecken die Höhen der Originale über der Grundrisstafel angegeben werden. Den Punkten der Grundrisstafel wird die Höhe 0 zugeordnet.

Grundriss mit Höhenzahlen (Koten)



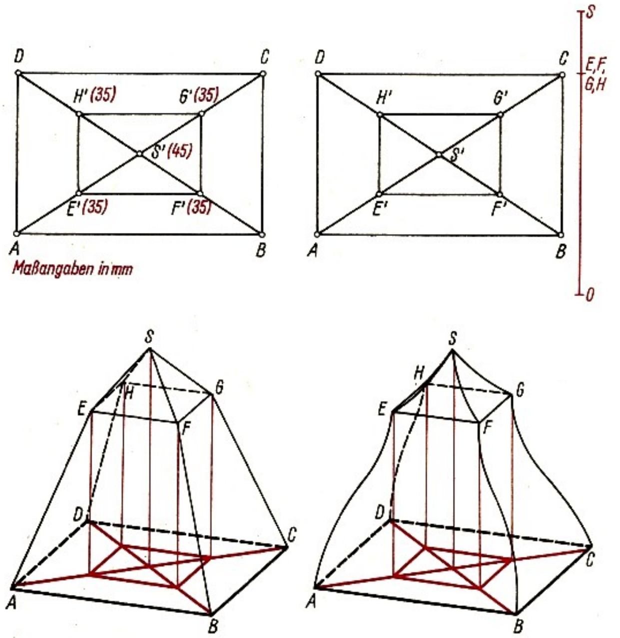
Höhenzahlen (Koten) sind Zahlen, die den jeweiligen Grundrissen der Originalpunkte in einer festzulegenden Einheit in Klammern beigefügt werden. Sie geben den Abstand der Originalpunkte von der Grundrisstafel an.

Bemerkung: Es ist üblich, Originalpunkte, die mit ihrem Grundriss zusammenfallen, also in der Grundrisstafel liegen, nicht mit einem Strich zu versehen.

Zwei- und Dreitafelprojektion

Weder der Grundriss allein noch der Grundriss mit Höhenmaßstab bzw. mit Höhenzahlen bestimmt in jedem Fall die Gestalt eines räumlichen Gebildes (eines Körpers als Original) eindeutig.

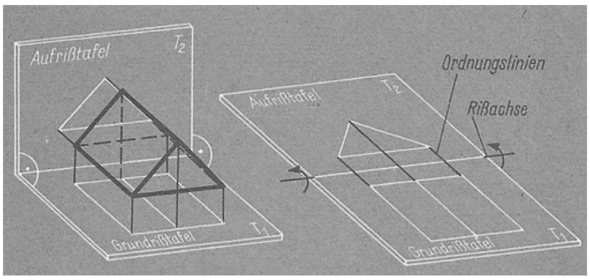
Das folgende Bild zeigt die Darstellung eines Körpers als Grundriss mit Höhenzahlen bzw. mit Höhenmaßstab. Dieser Darstellung würden zum Beispiel beide Körper im unteren Bild genügen. Um Eindeutigkeit herbeizuführen, werden weitere Risse hinzugefügt.



Zweitafelprojektion

Bei der Zweitafelprojektion erfolgt die zeichnerische Darstellung durch senkrechte Parallelprojektion auf zwei Projektionstafeln, die Grund- und Aufrisstafel, die senkrecht zueinander angenommen werden.
Die Schnittgerade von Grund- und Aufrisstafel nennt man Rissachse, auch Projektionsachse.

Die Verbindungsgerade von Grund- und Aufriss eines jeden Punktes, die senkrecht zur Rissachse verläuft heißt Ordnungslinie.



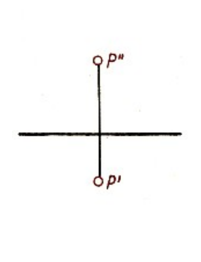
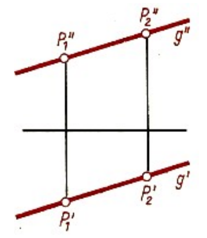
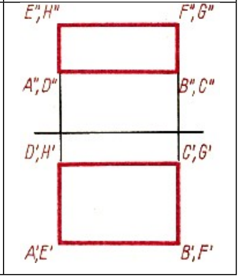
Grundriss- und Aufrissebene

▶ Haupteigenschaft der Zweitafelprojektion: Grund- und Aufriss eines Punktes liegen auf einer Senkrechten zur Rissachse (auf einer Ordnungslinie).

▶ Liegen ein Grundrisspunkt und ein Aufrisspunkt nicht auf derselben Senkrechten zur Rissachse, so gehören sie als Bilder nicht dem gleichen Originalpunkt an.

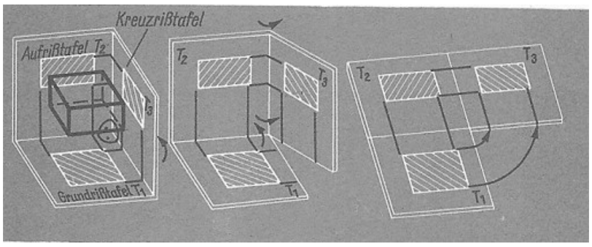
▶ Der Abstand des Grundrisses P' von der Rissachse gibt den Abstand des Punktes P von der Aufrisstafel T_2 an.

▶ Der Abstand des Aufrisses P'' von der Rissachse gibt den Abstand des Punktes P von der Grundrisstafel T_1 an.

Zweitafelprojektion		
eines Punktes	einer Geraden	eines Quaders
		

Dreitafelprojektion

Da die Zweitafelprojektion nicht in allen Fällen die notwendige Klarheit über die Gestalt eines räumlichen Gebildes vermittelt, bedient man sich oft der Dreitafelprojektion. Dabei wird die Zweitafelprojektion durch eine dritte senkrechte Parallelprojektion, auf die Kreuzrisstafel, ergänzt.

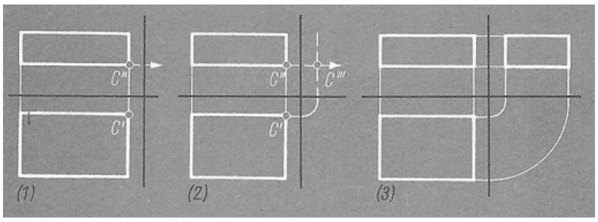


Die Kreuzrisstafel ist eine Projektionstafel, die senkrecht zur Grund- und Aufrisstafel steht; Grund-, Aufriss- und Kreuzrisstafel bilden zusammen eine rechtwinklige räumliche Ecke.

Kreuzriss

Das durch senkrechte Parallelprojektion auf die Kreuzrisstafel erhaltene Bild nennt man den Kreuzriss des Originals.
Den Kreuzriss eines Originals bezeichnet man mit drei Strichen am Symbol des Originals (P''', g''': Kreuzriss des Punktes P bzw. der Geraden g).

Der Kreuzriss P''' ist mit den dazugehörigen Grund- und Aufrissen P' bzw. P'' auch durch Ordnungslinien verbunden.



Bemerkung: Die Ordnungslinie, die den Grundriss P' mit dem Kreuzriss P''' verbindet, ist durch einen Viertelkreisbogen um den Schnittpunkt der zwei Rissachsen unterbrochen.

► Der Kreuzriss eines jeden Originalpunktes ist dem Grund- und Aufriss desselben Originalpunktes eindeutig zugeordnet.

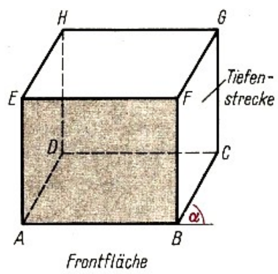
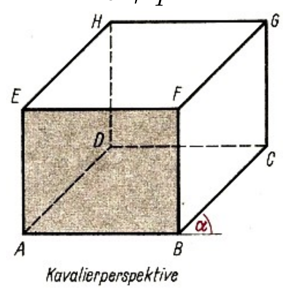
Wenn zwei Risse eines Originalpunktes gegeben sind, so lässt sich der dritte Riss stets aus den beiden gegebenen Rissen konstruieren.

Schräge Parallelprojektion

Bei der schrägen Parallelprojektion verlaufen die Projektionsstrahlen nicht senkrecht zur Projektionstafel. Das abzubildende Original wird dabei als vor der Projektionstafel befindlich angenommen.

Schrägriss (Schrägbild)

Das durch schräge Parallelprojektion erhaltene Bild nennt man den Schrägriss (auch Schrägbild) des Originals. Den Schrägriss eines Originals bezeichnet man im allgemeinen mit denselben Symbolen, mit denen auch sein Original bezeichnet ist, sonst fügt man diesen Symbolen einen Strich hinzu.
Ein Schrägriss eines Originals ist durch seinen Verzerrungswinkel α und durch das Verkürzungsverhältnis q, in dem die Tiefenstrecken gegenüber den Frontstrecken im Bild erscheinen, bestimmt.

Quader: $a = 25$ mm, $b = 40$ mm, $c = 20$ mm	
$\alpha = 60°$, $q = 1 : 3$	$\alpha = 45°$, $q = 1 : 2$
	
Frontfläche	Kavalierperspektive

Kavalierperspektive

Die Kavalierperspektive ist eine spezielle schräge Parallelprojektion mit dem Verzerrungswinkel $\alpha = 45°$ und dem Verkürzungsverhältnis $q = 1 : 2$.

Konstruktionsverfahren

Bei der schrägen Parallelprojektion wird jedem Raumpunkt P (Original) ein Bildpunkt P' zugeordnet, indem man je nach dem vorgegebenen Verzerrungswinkel α und dem Verkürzungsverhältnis q

a) die Bilder aller Tiefengeraden um den Verzerrungswinkel α gegen die Horizontale der Zeichenebene (gleich Projektionstafel) neigt und

b) die Länge aller Tiefenstrecken nach dem Verkürzungsverhältnis q verändert.

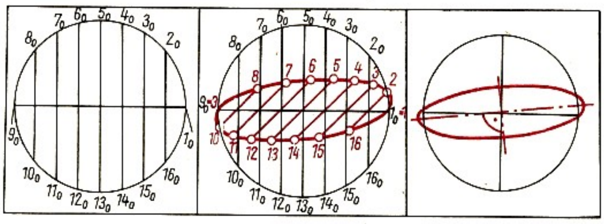
Die Konstruktion von Schrägrissen erfolgt also mit Hilfe von Front- und Tiefenstrecken. Falls das abzubildende geometrische Gebilde keine Front- bzw. Tiefenstrecken hat, müssen Hilfslinien in Front- bzw. Tiefenlage eingezeichnet werden,

Bemerkungen:
1) Es ist bei schräger Parallelprojektion allgemein üblich, die Projektionstafel vertikal anzunehmen; Frontstrecken (-geraden, -flächen) werden deshalb wie beim Aufriss kongruent abgebildet.

2) q und α werden meist so gewählt, dass sich die Schrägrisse leicht konstruieren lassen, aus ihnen leicht Maße entnommen werden können und die Schrägrisse möglichst anschaulich sind. Ein Kreis enthält weder Front- noch Tiefenstrecken.

Der Kreis in Kavalierperspektive (Die Ellipse als Bild eines Kreises)

Zur Abbildung eines Kreises in Kavalierperspektive benutzt man deshalb als Hilfslinien einen Durchmesser als eine Frontstrecke und zu diesem Durchmesser senkrechte Sehnen als Tiefenstrecken.



Bemerkungen:
1) Der als Frontstrecke dienende Durchmesser ist gleichmäßig zu unterteilen, so dass die als Tiefenstrecken dienenden Sehnen gleiche Abstände haben.
2) Die große Achse der Ellipse, die der Kreis in Kavalierperspektive als Bild besitzt, ist um einen Winkel von etwa 7° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gegen den waagerechten Durchmesser des Kreises gedreht.

Zentralprojektion

Bei der Zentralprojektion (Zentralperspektive) verlaufen die Projektionsstrahlen nicht parallel zueinander und treffen im allgemeinen nicht senkrecht auf die Projektionstafel.
Das Projektionszentrum P (der gemeinsame Ausgangspunkt aller Projektionsstrahlen) befindet sich in endlicher Entfernung von der Projektionstafel (im Gegensatz zur Parallelprojektion, wo man den Ausgangspunkt in unendlich großem Abstand von der Projektionstafel angenommen hat.)

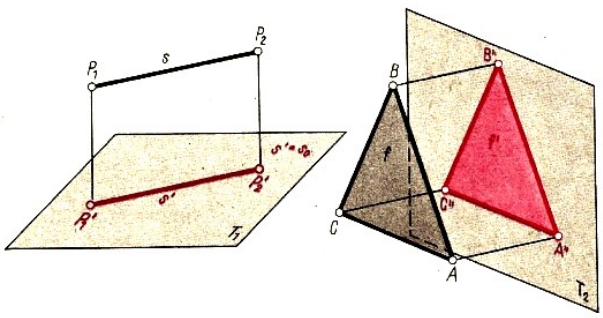
Bei der Zentralprojektion ist auf die vom Projektionszentrum P durch die Punkte eines in Frontlage befindlichen Originals verlaufenden Projektionsstrahlen der Strahlensatz anwendbar.

Es gilt: $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{BC} = \overline{C'D'} = \overline{CD} = ...$

► Bei der Zentralprojektion ist das Bild einer in Frontlage befindlichen ebenen Figur (Original) eine zum Original ähnliche Figur.

Wahre Größe einer Strecke (ebenen Fläche)

Befindet sich ein Original (Strecke, ebene Figur) in einfacher Lage, Frontlage zur Projektionstafel, so wird es auf diese Tafel in wahrer Größe abgebildet. Befindet sich ein Original in allgemeiner Lage zur Projektionstafel, so wird es auf diese Tafel nicht in wahrer Größe abgebildet.

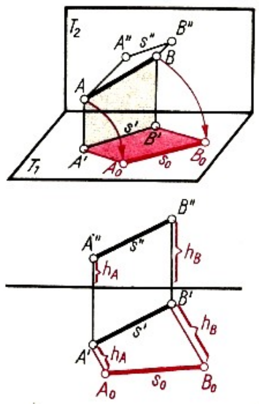
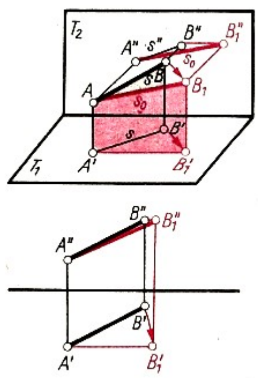


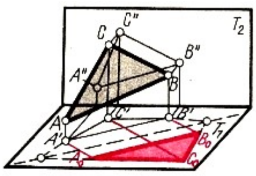
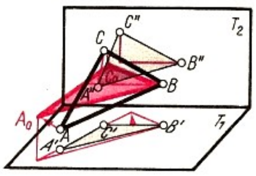
Verfahren zur Bestimmung der wahren Größe

Die wahre Größe eines Originals in allgemeiner Lage kann durch folgende Verfahren bestimmt werden:

1) Umklappung 2) Drehung.

Ziel beider Verfahren ist es, das Original in einfache Lage, Frontlage zu einer Projektionstafel zu bringen, in der es dann in wahrer Größe abgebildet werden kann.
Die durch Umklappen oder Drehen erhaltenen Bilder bezeichnet man mit dem Index "0" am Symbol des jeweiligen Originals (P_0; s_0: Umklappung bzw. Drehung des Punktes P bzw. der Strecke s in die Projektionstafel).

Wahre Größe einer Strecke $\overline{AB} = s$	
durch Umklappen	durch Drehen
	

Wahre Größe eines Dreiecks ABC	
durch Umklappen	durch Drehen
	

Spurpunkt

Jede Gerade in allgemeiner Lage zur Projektionstafel durchstößt die Projektionstafel in einem Punkt. Einen solchen "Durchstoßpunkt" nennt man Spurpunkt (bezeichnet mit "S").
Liegt der Spurpunkt in der Grundrisstafel, so nennt man ihn Grundrissspurpunkt (entsprechend Aufriss- bzw. Kreuzrissspurpunkt).

Spurgerade (Spur)

Jede Ebene (Fläche) in allgemeiner Lage zur Projektionstafel durchstößt die Projektionstafel in einer Geraden (einer Strecke). Eine solche "Durchstoßgerade" (-strecke) nennt man Spurgerade oder kurz Spur (bezeichnet mit s).
Liegt die Spurgerade (Spur) in der Grundrisstafel, so nennt man sie Grundrissspur (entsprechend Aufriss- bzw. Kreuzrissspur).

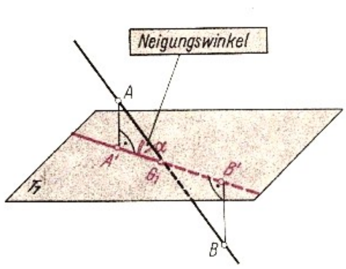
Falllinie

Eine Gerade einer Ebene (in allgemeiner Lage zur Projektionstafel), die senkrecht auf der Spurgeraden dieser Ebene steht, nennt man Falllinie (bezeichnet mit l). Die Falllinie l einer Ebene konstruiert man, indem man von einem Punkt P der Falllinie das Lot auf die Spurgerade dieser Ebene fällt.

Neigungswinkel einer Geraden (Strecke)

Jede Gerade in allgemeiner Lage zu einer Projektionstafel durchstößt diese Projektionstafel unter einem bestimmten Winkel. Diesen Winkel nennt man Neigungswinkel (meist mit α bezeichnet) dieser Geraden.
Man spricht auch vom Neigungswinkel einer Strecke in allgemeiner Lage. Der Neigungswinkel einer Geraden g kann konstruiert werden, wenn man

1) den Spurpunkt S der Geraden g und den Grund- und Aufriss eines Punktes P dieser Geraden kennt;
2) den Grundriss g' der Geraden g und den Höhenmaßstab zweier Punkte P dieser Geraden kennt.



Neigungswinkel einer Ebene (Fläche)

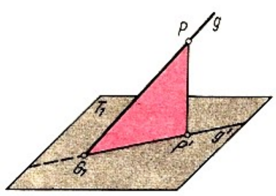
Als Neigungswinkel α einer Ebene bezeichnet man den Winkel, den eine Falllinie dieser Ebene mit ihrem Bild in der jeweiligen Projektionstafel einschließt.
Der Neigungswinkel α einer Ebene kann konstruiert werden, wenn man

1) den Spurpunkt S der Falllinie l und den Grund- und Aufriss eines Punktes P der Falllinie kennt,
2) den Grundriss l' der Falllinie und den Höhenmaßstab eines Punktes P der Falllinie kennt.

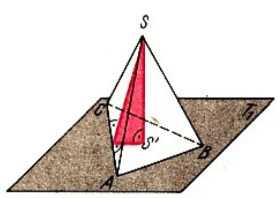
Stützdreieck

Als Stützdreieck einer Ebene (Geraden, Strecke) bezeichnet man das rechtwinklige Dreieck, das aus folgenden Stücken gebildet wird:

1) Hypotenuse: Abstand eines Punktes P einer Falllinie von deren Spurpunkt S; $\overline{PS}$.
2) Katheten:
a) Abstand der Projektion P' des Punktes P der Falllinie von S; $\overline{P'S}$.
b) Abstand des Punktes P der Falllinie von P' in der Projektionstafel.
Das Stützdreieck einer Ebene (Geraden) liegt stets senkrecht zur jeweiligen Projektionstafel.



Stützdreieck einer Geraden



Stützdreieck einer ebenen Figur

Bemerkung: Das Stützdreieck dient zur Bestimmung des Neigungswinkels und der wahren Größe von ebenen Figuren in allgemeiner Lage.

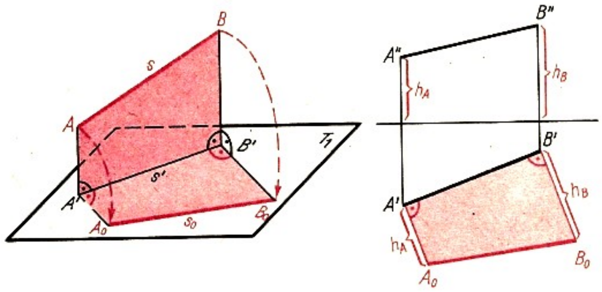
Umklappung einer Strecke

Befindet sich die Strecke $\overline{AB} = s$ in allgemeiner Lage zur Projektionstafel T, so erhält man ihre wahre Größe durch Umklappen auf folgende Weise:

1) Von den Punkten A und B fällt man die Lote auf die Tafel; man erhält das Trapez $AA'B'B$, das senkrecht zur Projektionstafel steht; dabei ist $\overline{A'B'} = s'$.

2) In der Projektionstafel T errichtet man in A' und B' Senkrechten zu s', auf denen die Abstände von A bzw. B von T abgetragen werden; man erhält die Punkte A_0 und B_0.

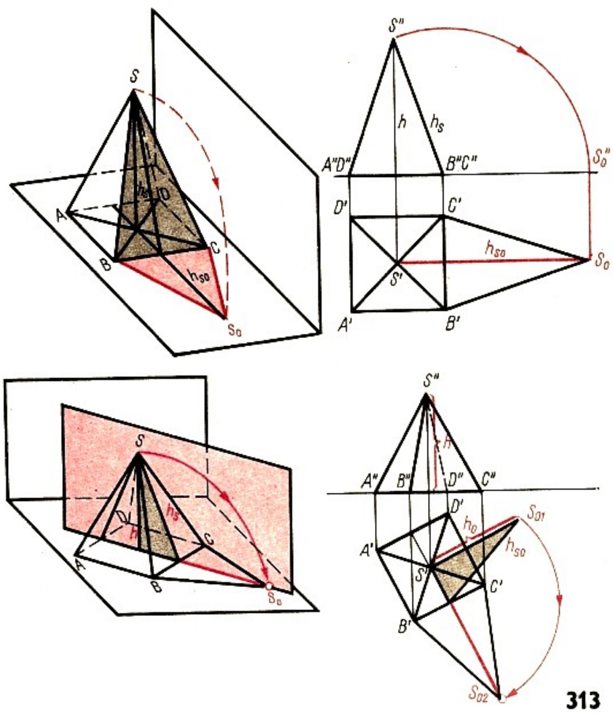
3) Verbindet man nun die Punkte A_0 und B_0, so erhält man die Strecke $\overline{A_0B_0} = s_0$, das Bild der Strecke s in wahrer Größe: $s_0 = s$.



Umklappung einer Geraden

Befindet sich eine Gerade g in allgemeiner Lage zur Projektionstafel T, so wird g in die Tafel T umgeklappt, indem man einen Punkt P von g in die Tafel klappt und den erhaltenen Punkt P_0 mit dem Spurpunkt s von g verbindet.

Umklappung einer ebenen Figur



313

Befindet sich eine ebene Figur in allgemeiner Lage zur Projektionstafel, so erhält man ihre wahre Größe, indem man
1) die Figur selbst oder
2) das Stützdreieck der Figur
in die Projektionstafel klappt.

Drehung einer Strecke

Befindet sich eine Strecke $\overline{AB} = s$ in allgemeiner Lage, so erhält man ihre wahre Größe, indem man z. B. ihren Grundriss s' um A' in Frontlage zur Aufrisstafel dreht. Der Aufriss s'' stellt dann die wahre Größe der Strecke $\overline{AB} = s$ dar, $s_0 = s''$.